

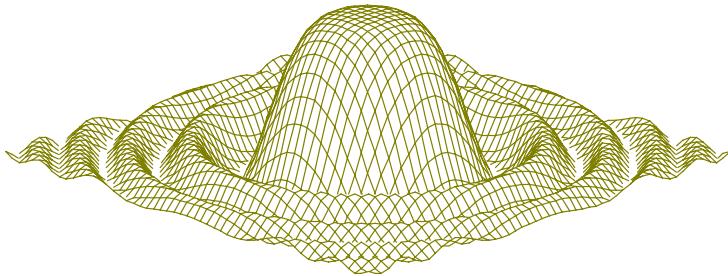


BỘ SÁCH TOÁN HỌC CAO CẤP - VIỆN TOÁN HỌC

*Đinh Thế Lực  
Phạm Huy Điện  
Tạ Duy Phượng*

# GIẢI TÍCH CÁC HÀM NHIỀU BIẾN

Những nguyên lý cơ bản và tính toán thực hành



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI



## HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Hà Huy Khoái (*Chủ tịch*)

Ngô Việt Trung

Phạm Huy Điển (*Thư ký*)

# *Giải tích các hàm nhiều biến*

*Những nguyên lý cơ bản  
và tính toán thực hành*

ĐINH THẾ LỰC  
PHẠM HUY ĐIỀN  
TẠ DUY PHƯỢNG



BỘ SÁCH TOÁN HỌC CAO CẤP - VIỆN TOÁN HỌC

# Lời nói đầu

C uốn sách này có thể xem là tập tiếp theo của giáo trình giải tích các hàm số một biến, đã được Nhà xuất bản Giáo dục ấn hành năm 1998, với tựa đề "Giải tích Toán học: Những nguyên lý cơ bản và tính toán thực hành".

Trong giáo trình đó chúng ta đã khảo sát dãy số, chuỗi số, hàm số và các phép tính vi tích phân trong không gian một chiều (trục số thực). Trong tập tiếp theo này các đối tượng trên sẽ được khảo sát trong không gian nhiều chiều, và đó chính là sự khác biệt cơ bản giữa hai giáo trình. Để xây dựng các phép tính vi tích phân trong không gian nhiều chiều, trước hết phải hiểu rõ cấu trúc của những không gian này. Chương 1 đề cập tới hai cấu trúc quan trọng nhất của không gian nhiều chiều, cấu trúc tuyến tính và cấu trúc khoảng cách, thông qua một ví dụ điển hình là không gian  $\mathbb{R}^n$ . Để giáo trình mang tính độc lập nhất định, không gian này được xây dựng trực tiếp, mà không dựa vào khái niệm không gian tuyến tính tổng quát trong giáo trình Đại số tuyến tính. Để tránh công kèn, các khái niệm và kết quả của chương này được chọn lọc tối thiểu từ 3 môn Đại số tuyến tính, Tôpô và Giải tích hàm, vừa đủ sử dụng cho những chương sau, đồng thời dẫn dắt người học làm quen với những bộ môn quan trọng đó. Các chương từ 2 đến 7 không chỉ thiết lập trong không gian nhiều chiều những gì đã biết trong Giải tích một biến mà còn đưa ra những khái niệm mới chỉ xuất hiện trong không gian nhiều chiều. Chương 8 trình bày các kiến thức cơ bản về chuỗi Fourier và phép biến đổi tích phân Fourier. Chương cuối cùng giới thiệu sơ lược về hệ phương trình vi phân và phương trình đạo hàm riêng. Hai chương sau này nhằm mục đích cung cấp những kiến thức về vi tích phân đã học trong những chương trước, rèn luyện kỹ năng tính toán thực hành và trang bị kiến thức để học viên tìm hiểu các môn học khác như Vật lý, Cơ học, Sinh học,...

Nếu như các khái niệm, kết quả chứng minh trong Giải tích một biến có tính trực quan cao, dễ hiểu thì sang không gian nhiều chiều tính trừu tượng đã tăng lên rõ rệt. Tuy nhiên, cái đẹp của Toán học nằm trong sự trừu tượng và cái ích của Toán học nằm trong sự cụ thể. Để hiểu rõ hai mặt ấy của Toán học đồng thời nhằm rèn luyện phương pháp suy luận toán học cho sinh viên, trong giáo trình này hai cách tiếp cận thường được sử dụng đan xen nhau: đó là cách đi từ cụ thể tới trừu tượng và ngược lại, từ trừu tượng tới cụ thể tùy theo từng khái niệm, từng định lý. Mỗi khi các kết quả được phát biểu và chứng minh trong không gian tổng quát  $n$  chiều, thì người đọc có thể hạn chế trong trường hợp  $n=2$  hoặc  $n=3$  để hiểu dễ dàng và thấu đáo hơn. Trong tài liệu này, chúng tôi cố gắng đưa vào các chứng minh đầy đủ của những định lý lớn và "hóc búa" thường bị né tránh trong các giáo trình hiện hành. Những chứng minh này là khó nhưng chừa dụng các phương pháp suy luận điển hình rất cần cho việc rèn luyện tư duy (nhất là đối với học sinh cao học và những ai muốn đi sâu hơn vào lĩnh vực Giải tích Toán học). Người đọc

*không cần nhớ chi tiết, mà chỉ cần hiểu được các chứng minh này đã được xem là đạt yêu cầu.*

Việc minh họa và tính toán trong không gian nhiều chiều vốn là một vấn đề khó vì không mấy khi có thể thực hiện được bằng thủ công, nhất là về các chủ đề: Vẽ đồ thị trong không gian, tính tích phân bội, tính vi phân hàm ẩn vectơ nhiều biến, tính toán các biến đổi tích phân Fourier, giải phương trình đạo hàm riêng,... Cái khó ở đây bắt đầu ngay từ việc tìm sao cho ra một ví dụ có thể xử lý được. Chính vì vậy, lĩnh vực này luôn luôn là mơ hồ đối với hầu hết mọi học viên (từ đại học đến cao học). Nhằm xoá bỏ tình trạng này, chúng tôi mạnh dạn đưa vào giáo trình phần hướng dẫn tính toán thực hành trên máy, ngay sau mỗi chương lý thuyết. Qua đây người đọc sẽ thấy rằng ngày nay, với máy tính và phần mềm toán học thông dụng (có sẵn trên thị trường và trên Internet), chỉ bằng những dòng lệnh đơn giản tương tự như ngôn ngữ toán học thông thường, người ta có thể "sờ thấy được" những gì mà trước đây không thể nào hình dung ra nổi. Nếu chưa có sẵn các chương trình tính toán trên máy cá nhân, người đọc có thể truy cập tới một số trung tâm cung cấp dịch vụ tính toán qua mạng (thường là miễn phí) để có thể thực hành tính toán được ngay (Bạn đọc có nhu cầu xin liên hệ với các tác giả để biết thêm thông tin chi tiết). Đối với người học chưa có điều kiện tiếp xúc với máy tính, việc đọc phần này vẫn rất có tác dụng, vì sẽ biết được cơ chế giao tiếp giữa người với máy và biết được những gì máy tính có thể thay thế con người trong quá trình tính toán. Quan trọng hơn, qua các ví dụ minh họa về tính toán trên máy trình bày trong sách, người học sẽ nắm được kiến thức toán học một cách sâu sắc hơn, do tiếp cận được tới những điều mà trước đây tưởng như là không thể. Khi không còn bị mặc cảm bởi những bài toán hóc búa, người ta sẽ thấy toán học không còn là huyền bí và tự tin trong việc đón nhận những bài toán khó nảy sinh từ thực tiễn sản xuất.

Chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách này sẽ là một cảm nang tốt cho những ai muốn hiểu sâu sắc về Giải tích toán học nói chung, và về giải tích các hàm số nhiều biến nói riêng. Do đó, nó sẽ là hữu ích đối với các học sinh cao học, cũng như thầy và trò các trường Tông hợp, Sư phạm, Kỹ thuật,...

Tập thể tác giả xin chân thành cảm ơn giáo sư Nguyễn Duy Tiến (ĐHQG Hà Nội) và giáo sư Đoàn Quỳnh (ĐHSP Hà Nội) đã đọc rất kỹ bản thảo và đã cho những nhận xét quý báu. Việc trình bày một chủ đề phức tạp sẽ không thể tránh khỏi những sai sót, cho nên chúng tôi mong tiếp tục nhận được sự phê bình, góp ý của các đồng nghiệp và học viên gửi về theo địa chỉ: Viện Toán học, Trung tâm Khoa học Tự nhiên và Công nghệ Quốc gia, 18-Đường Hoàng Quốc Việt, Quận Cầu Giấy, Hà Nội.

## CÁC TÁC GIẢ

# Không gian $\mathbb{R}^n$ &

## Không gian metric

<b>1.1. Không gian <math>\mathbb{R}^n</math></b> .....	<b>1</b>
1.1.1. Điểm trong không gian $n$ -chiều.....	2
1.1.2. Vectơ trong không gian $n$ -chiều.....	3
1.1.3. Tích vô hướng.....	4
1.1.4. Chuẩn của vectơ.....	5
1.1.5. Ánh xạ tuyến tính.....	7
<b>1.2. Không gian metric</b> .....	<b>10</b>
1.2.1. Định nghĩa và các ví dụ.....	10
1.2.2. Tập đóng và tập mở trong không gian metric .....	12
1.2.3. Hồi tụ trong không gian metric .....	15
1.2.4. Tính đầy đủ trong không gian metric .....	17
1.2.5. Tính compact trong không gian metric .....	19
1.2.6. Ánh xạ trong không gian metric.....	24
1.2.7. Không gian siêu metric .....	27

### I.I. Không gian $\mathbb{R}^n$

Trong giáo trình này chúng ta sẽ làm việc trên không gian  $\mathbb{R}^n$  - một ví dụ rất đặc biệt của không gian  $n$ -chiều. Để giáo trình có được tính độc lập nhất định, chúng tôi sẽ trình bày lại một cách ngắn gọn việc xây dựng không gian  $\mathbb{R}^n$ . Độc giả nào quan tâm đến lý thuyết không gian  $n$ -chiều nói chung xin xem trong các giáo trình Đại số tuyến tính. Độc giả nào đã học qua giáo trình Đại số tuyến tính có thể bỏ qua phần này.

### I.I.I. Điểm trong không gian $n$ -chiều

Ta đã quen thuộc với cách dùng *một số* để biểu diễn *một điểm trên đường thẳng* (khi trên đường thẳng đó cho sẵn đơn vị dài). Ta cũng đã biết việc dùng một cặp 2 số  $(x,y)$  để biểu diễn *một điểm trong mặt phẳng* có hệ tọa độ Descartes. Tương tự như vậy, người ta sử dụng một bộ 3 số  $(x,y,z)$  để biểu diễn một điểm trong không gian.

Đường thẳng còn được gọi là không gian *1-chiều*, mặt phẳng còn được gọi là không gian *2-chiều*, và không gian vật lý xung quanh ta còn được gọi là không gian *3-chiều*. Như vậy, một số biểu diễn một điểm trong không gian 1-chiều, một cặp 2 số biểu diễn điểm trong không gian 2-chiều, và một bộ 3 số biểu diễn một điểm trong không gian 3-chiều. Tuy rằng, ta không thể cho được minh họa hình học của cách biểu diễn điểm trong không gian có số chiều lớn hơn 3, nhưng bằng cách khái quát hóa, người ta có thể dùng một bộ  $n$  số để biểu diễn một điểm trong không gian  *$n$ -chiều*. Không gian  *$n$ -chiều* với  $n \geq 4$  không phải chỉ là sự tưởng tượng và khái quát hóa của các nhà toán học, mà chúng thật sự tồn tại trong vật lý, kinh tế, xã hội... Thí dụ để biểu diễn nhiệt độ tại một điểm trong không gian xung quanh ta thì ngoài 3-chiều thông thường ta phải thêm một chiều thời gian. Hoặc để biểu diễn tình trạng sức khỏe của một người nào đó ta phải dùng bộ nhiều số: chiều cao, trọng lượng, vòng ngực, huyết áp, độ thính, tầm nhìn... Chính xác hơn, với số *tự nhiên*  $n$  cho trước, ta có:

**ĐỊNH NGHĨA.** Một điểm trong không gian  $n$ -chiều là một bộ  $n$  số có thứ tự

$$(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Người ta thường ký hiệu một điểm trong không gian  $n$ -chiều bằng một chữ đậm, thí dụ như  $x$ , và viết  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Số  $x_i$  trong bộ số này được gọi là *tọa độ* thứ  $i$  của điểm  $x$ .

Giả sử có 2 điểm trong cùng một không gian  $n$ -chiều là

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{và} \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

ta định nghĩa tổng của chúng ( $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ) là một điểm trong không gian  $n$ -chiều với các *tọa độ* là

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

và ta định nghĩa tích của điểm  $\mathbf{a}$  với một số  $\lambda$  là một điểm với các *tọa độ* là

$$(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

**Thí dụ.** Trong không gian 3-chiều, với  $\mathbf{a} = (1, 3, 5)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 0, 1)$ ,  $\lambda = 7$ , ta có

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, 3, 6) \quad \text{và} \quad \lambda \mathbf{a} = (7, 21, 35).$$

Người ta ký hiệu  $\mathbf{0}$  là điểm (trong không gian  $n$ -chiều) có tất cả các tọa độ bằng 0 (tức là  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ ) và gọi nó là *điểm gốc*, còn  $-\mathbf{a}$  là điểm  $(-1)\mathbf{a}$  (tức là điểm có các tọa độ ngược dấu với các tọa độ điểm  $\mathbf{a}$ ). Khi ấy dễ dàng kiểm tra rằng các phép tính trên thỏa mãn các luật sau:

- (1)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  ;
- (2)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  ;
- (3)  $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$  ;
- (4)  $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$  và  $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$ , với mọi số  $\lambda, \mu$ ;
- (5)  $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$  với mọi  $\mathbf{a}$  ;
- (6)  $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$  và  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ .

Từ đây người ta cũng quy ước viết  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  thay cho  $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ .

Chứng minh các đẳng thức trên là dễ dàng, người đọc có thể tự làm như các bài tập. Để làm thí dụ, chúng ta chứng minh đẳng thức (3).

Theo định nghĩa  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$ , nên

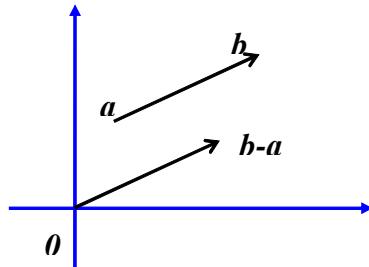
$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\lambda(a_1 + b_1), \dots, \lambda(a_n + b_n)) = (\lambda a_1 + \lambda b_1, \dots, \lambda a_n + \lambda b_n) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$$

### 1.1.2. Vectơ trong không gian $n$ -chiều

Người ta gọi mỗi cặp điểm  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  trong không gian  $n$ -chiều là một vectơ buộc (hay vectơ định vị) trong không gian  $n$ -chiều.

Vectơ xác định bởi cặp điểm  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  được ký hiệu là  $\overrightarrow{ab}$ . Người ta gọi  $\mathbf{a}$  là điểm đầu,  $\mathbf{b}$  là điểm cuối, và còn gọi  $\overrightarrow{ab}$  là vectơ định vị tại  $\mathbf{a}$ .

Hai vectơ  $\overrightarrow{ab}$  và  $\overrightarrow{cd}$  được gọi là *tương đồng* nếu chúng thỏa mãn điều kiện  $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$ .



Hình 1.1

Theo định nghĩa đó, vectơ  $\overrightarrow{ab}$  là tương đồng với vectơ định vị tại gốc  $\mathbf{0}$  và có điểm cuối là  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ . Rõ ràng, chỉ có duy nhất một vectơ định vị tại gốc tương đồng với một vectơ cho trước (vì dễ thấy rằng nếu 2 vectơ tương đồng mà cùng định vị tại gốc thì điểm cuối của chúng cũng trùng nhau). Điều này được minh họa trong trường hợp 2-chiều như hình vẽ bên.

Vectơ *định vị tại gốc* được xác định hoàn toàn bởi điểm cuối của nó, cho nên trong không gian  $n$ -chiều ta có mối tương quan 1-1 giữa *điểm* và *vectơ định vị tại gốc*. Như vậy một bộ  $n$  số có thể được xem là tọa độ của một điểm  $\mathbf{a}$  hay của một vectơ định vị tại gốc  $\overrightarrow{0a}$ , và để cho thuận tiện người ta viết vectơ này một cách đơn giản là  $\bar{a}$  hay thậm chí là  $a$ , trong trường hợp không sờ xảy ra nhầm lẫn.

Hai vectơ  $\overrightarrow{ab}$  và  $\overrightarrow{cd}$  được gọi là *song song* nếu tồn tại số  $\lambda \neq 0$  sao cho  $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \lambda(\mathbf{d} - \mathbf{c})$ . Khi số  $\lambda$  là dương thì ta nói rằng chúng *cùng hướng* (hay *cùng chiều*), và trong trường hợp ngược lại ta nói rằng chúng *ngược hướng* (hay *ngược chiều*) nhau.

Như vậy, hai vecto là *song song* với nhau khi và chỉ khi các vecto định vị tại gốc tương đồng với chúng *sai khác nhau một hệ số* (khác 0). Nghĩa là, khái niệm song song ở đây hoàn toàn phù hợp với những gì biết trong trường hợp không gian 2-chieu hoặc 3-chieu (trong giáo trình Hình học giải tích).

### 1.1.3. Tích vô hướng

**ĐỊNH NGHĨA.** *Tích vô hướng của 2 vecto  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  và  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  là một số (ký hiệu là  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ) xác định như sau:*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

(Trong một số giáo trình, để phân biệt *tích vô hướng* của 2 vecto với *tích thông thường* của 2 số, người ta còn ký hiệu tích vô hướng của 2 vecto  $\mathbf{a}$  và  $\mathbf{b}$  là  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  hay  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ . Tuy nhiên, trong giáo trình này, khi cần phân định rõ sự khác biệt giữa các vecto với các số thông thường, chúng ta sẽ dùng phông chữ đậm để biểu diễn vecto, cho nên sẽ không xảy ra sự lẫn lộn giữa 2 khái niệm đã nói. Vì vậy, chúng ta sẽ sử dụng cách ký hiệu đơn giản như đã trình bày trên, như rất nhiều tài liệu nước ngoài hiện nay, và sẽ chỉ sử dụng ký hiệu  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  khi nào cần thiết).

**TÍNH CHẤT.** Từ định nghĩa trên ta thấy tích vô hướng của 2 vecto có những tính chất sau:

- 1)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  ;
- 2)  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$  ;
- 3)  $(\alpha \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ , với mọi số  $\alpha$  ;
- 4)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ , và  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$  khi và chỉ khi  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

**Chứng minh.** Việc kiểm tra các Tính chất 1 và 3 là dễ dàng và dành lại cho người đọc. Ta kiểm tra các tính chất còn lại. Đẳng thức đầu trong Tính chất 2 suy ra từ nhận xét sau

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + \dots + a_n(b_n + c_n) = \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

và đẳng thức sau suy ra từ Tính chất 1.

Phản xuôi của Tính chất 4 có ngay từ định nghĩa, còn phản ngược lại thì rút ra từ nhận xét rằng nếu trong bộ số  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  có một phần tử nào đó khác 0, thí dụ là  $a_i$ , thì

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq a_i^2 > 0.$$

Các tính chất đã được kiểm tra xong.

Để cho thuận tiện người ta hay viết  $\mathbf{a}^2$  thay cho  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ . Lưu ý rằng đây chỉ là quy ước mang tính hình thức và không có liên quan gì đến phép lũy thừa (hoàn toàn vô nghĩa khi viết  $\mathbf{a}^3$ ). Tuy nhiên người đọc có thể dễ dàng kiểm tra các “hằng đẳng thức” tương tự sau đây:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 &= \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2, \\(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 &= \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2.\end{aligned}$$

*Hai vectơ  $\mathbf{a}$  và  $\mathbf{b}$  được gọi là vuông góc với nhau nếu  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ .*

Trong trường hợp không gian 2-chiều và 3-chiều khái niệm vuông góc ở đây hoàn toàn trùng hợp với khái niệm vuông góc thông thường.

#### 1.1.4. Chuẩn của vectơ

Bố đề sau đây có tên là *bất đẳng thức Schwarz* và sẽ đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết vectơ.

**BỐ ĐỀ** (Schwarz). *Với 2 vectơ  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  ta luôn có*

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}).$$

**Chứng minh.** Với  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  thì bất đẳng thức trên là hiển nhiên. Khi  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  từ Tính chất 4 ta có  $(t\mathbf{a} + \mathbf{b}, t\mathbf{a} + \mathbf{b}) \geq 0$ , với mọi số  $t$ . Suy ra

$$\mathbf{a}^2 t^2 + 2abt + \mathbf{b}^2 \geq 0, \quad \text{với mọi } t.$$

Theo định lý về dấu của tam thức bậc 2 (biến  $t$ ) ta có:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 \leq 0.$$

Đây chính là điều cần chứng minh.

**ĐỊNH NGHĨA.** *Chuẩn (hay độ dài) của vectơ  $\mathbf{a}$ , ký hiệu là  $\|\mathbf{a}\|$ , là một số xác định như sau:*

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

Dưới dạng tọa độ thì công thức trên có nghĩa là

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2},$$

và trong trường hợp không gian 2-chiều hoặc 3-chiều thì nó hoàn toàn trùng hợp với công thức tính độ dài theo định lý Pythagoras.

Rõ ràng vectơ có chuẩn bằng 0 khi và chỉ khi tất cả các tọa độ của nó bằng 0.

Từ bố đề Schwarz, sau khi lấy căn 2 vế, ta thu được công thức rất hay được sử dụng sau này là

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|.$$

Ngoài ra độ dài còn có những tính chất quan trọng sau:

**ĐỊNH LÝ** *Với số  $\alpha$  và các vectơ  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  ta có*

$$\begin{aligned}\|\alpha \cdot \mathbf{a}\| &= |\alpha| \cdot \|\mathbf{a}\| ; \\ \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| &\leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| .\end{aligned}$$

**Chứng minh.** Theo định nghĩa ta có

$$\|\alpha \mathbf{a}\|^2 = (\alpha \mathbf{a}) \cdot (\alpha \mathbf{a}) = \alpha^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \alpha^2 \|\mathbf{a}\|^2 .$$

Lấy căn 2 vế ta được đẳng thức cần chứng minh.

Tiếp theo, từ bô đề Schwarz ta có

$$2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq 2 \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| .$$

Theo định nghĩa của chuẩn dễ dàng suy ra bất đẳng thức trên tương đương với

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \leq \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|^2 .$$

Điều này có nghĩa là

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leq (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2 .$$

Sau khi khai căn 2 vế ta thu được điều cần chứng minh.

Bất đẳng thức trong định lý trên thường được gọi là *bát đẳng thức tam giác*, vì về mặt hình học nó khẳng định một điều rất quen thuộc là: độ dài của một cạnh trong tam giác không thể vượt quá tổng độ dài của 2 cạnh còn lại.

**HỆ QUÃ** (Định lý Pythagoras) *Nếu 2 vectơ  $a$  và  $b$  vuông góc với nhau thì*

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 .$$

**Chứng minh.** Ta có

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 ,$$

do  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ .

*Ta định nghĩa khoảng cách giữa 2 vectơ  $\mathbf{a}$  và  $\mathbf{b}$  là chuẩn của hiệu 2 vectơ đó, nghĩa là bằng*

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})} .$$

Các vectơ nói đến ở đây đều là vectơ *định vị tại gốc* nên hoàn toàn được xác định bởi *diểm cuối*. Khoảng cách giữa 2 vectơ cũng có thể được xem như khoảng cách giữa 2 điểm cuối của chúng, và do đó ta cũng có khái niệm *khoảng cách giữa 2 điểm* trong không gian  $n$ -chiều.

Với  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  ta có thể viết lại công thức định nghĩa khoảng cách dưới dạng:

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}.$$

Rõ ràng, khoảng cách giữa  $\mathbf{a}$  và  $\mathbf{b}$  là bằng khoảng cách giữa  $\mathbf{b}$  và  $\mathbf{a}$ , và hoàn toàn trùng hợp với khái niệm khoảng cách mà ta đã biết khi không gian là 2-chieu hoặc 3-chieu. Từ các tính chất của chuẩn, ta dễ dàng suy ra khoảng cách giữa 2 vectơ (2 điểm) có những tính chất đặc trưng sau đây:

- (1)  $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \geq 0$ ;
- (2)  $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = 0$  khi và chỉ khi  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ;
- (3)  $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ ;
- (4)  $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\| + \|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|$ .

**Chứng minh.** Các Tính chất (1),(2),(3) là hiển nhiên. Tính chất cuối cùng có ngay từ bất đẳng thức tam giác, bởi vì  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (\mathbf{a} - \mathbf{c}) + (\mathbf{c} - \mathbf{b})$ .

**Nhận xét.** Như vậy ta đã xây dựng được không gian các vectơ (các điểm) trên cơ sở các bộ  $n$  số và trang bị trên đó các phép tính *cộng*, *nhân với số*, *tích vô hướng* và khái niệm *khoảng cách*. Không gian này có tên gọi là không gian Euclid  $n$ -chieu và được ký hiệu là  $\mathbb{R}^n$ . Đây là một không gian có nhiều tính chất thú vị và sẽ đóng vai trò nền tảng trong suốt giáo trình Giải tích các hàm nhiều biến. Sau này, khi đã làm việc quen với không gian  $\mathbb{R}^n$  và không còn sự nhầm lẫn giữa *số* và *bộ n số*, chúng ta có thể dùng *chữ thường* để biểu thị *bộ số* hay *điểm trong không gian nhiều chiều* (mà không nhất thiết phải dùng *chữ đậm* như trong mục này).

### 1.1.5. Ánh xạ tuyến tính

Phép ứng  $\mathcal{A}$  từ không gian  $\mathbb{R}^n$  vào không gian  $\mathbb{R}^m$  được gọi là một *ánh xạ tuyến tính* nếu nó có các tính chất sau đây:

- (i)  $\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y})$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ;
- (ii)  $\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x})$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Ta gọi các vectơ  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$ , ...,  $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$  trong  $\mathbb{R}^n$  là các *vector trực đơn vị*. Để dễ dàng thấy rằng một vectơ bất kỳ  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  được biểu diễn qua các vectơ trực đơn vị bằng công thức sau

$$\mathbf{x} = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$$

và do các tính chất (i)-(ii) ta suy ra ảnh của  $\mathbf{x}$  qua phép ánh xạ tuyến tính  $\mathcal{A}$  sẽ được biểu diễn qua ảnh của các vectơ trực đơn vị theo công thức sau

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = x_1 \mathcal{A}(\mathbf{e}_1) + x_2 \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) + \dots + x_n \mathcal{A}(\mathbf{e}_n). \quad (*)$$

Mỗi  $\mathcal{A}(\mathbf{e}_i)$  là một phần tử trong  $\mathbb{R}^m$ , cho nên nó sẽ là một bộ  $m$  số, ký hiệu là  $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$ . Ta thiết lập một ma trận chữ nhật  $\mathbf{A}$  gồm  $m$  hàng và  $n$  cột, với các cột là các bộ số  $\mathcal{A}(\mathbf{e}_i)$ , tức là  $\mathbf{A} := [\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) \ \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) \ \dots \ \mathcal{A}(\mathbf{e}_n)]$ , hay

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Ma trận này được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính  $\mathcal{A}$ .

Nếu ta coi mỗi vectơ như là một ma trận cột thì ta có thể viết

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ và, do công thức (*), } \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n \\ a_{12}x_1 + \dots + a_{n2}x_n \\ \dots \\ a_{1m}x_1 + \dots + a_{nm}x_n \end{bmatrix}.$$

Theo phép nhân các ma trận thì công thức (\*) có thể được viết lại dưới dạng đơn giản là

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}. \quad (**)$$

Ngược lại, nếu có một ma trận  $\mathbf{A}$  ( $cỡ m \times n$ ) thì ta thiết lập được một phép ứng từ không gian  $\mathbb{R}^n$  vào không gian  $\mathbb{R}^m$  theo công thức (\*\*). Với các tính chất của phép nhân và cộng các ma trận (đã biết trong giáo trình Đại số tuyến tính), ta dễ thấy rằng phép ứng này thỏa mãn các điều kiện (i)-(ii), cho nên nó là một *ánh xạ tuyến tính*. Như vậy, ta có một phép tương ứng giữa tập các ánh xạ tuyến tính (từ không gian  $\mathbb{R}^n$  vào không gian  $\mathbb{R}^m$ ) và tập các ma trận chữ nhật ( $cỡ m \times n$ ).

Trong trường hợp riêng, khi  $n = m$  thì  $\mathbf{A}$  là một ma trận vuông (cấp  $n$ ) và ánh xạ tương ứng với nó là một ánh xạ từ không gian  $\mathbb{R}^n$  vào chính nó (hay còn gọi là một *phép biến đổi* trong  $\mathbb{R}^n$ ). Ta nói ánh xạ tuyến tính là *không suy biến* nếu như ma trận tương ứng với nó là *không suy biến*, tức là có định thức khác 0. Từ giáo trình Đại số tuyến tính ta biết rằng một ma trận vuông không suy biến có ma trận nghịch đảo, và dễ dàng kiểm tra rằng ánh xạ tuyến tính tương ứng với ma trận nghịch đảo này là *ánh xạ ngược* của ánh xạ ban đầu. Cho nên, mỗi *phép biến đổi không suy biến* là một *sóng ánh*.

Người ta định nghĩa *chuẩn của ánh xạ tuyến tính*  $\mathcal{A}$ , kí hiệu  $\|\mathcal{A}\|$ , là số xác định như sau:

$$\|\mathcal{A}\| := \sup \left\{ \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\| : \mathbf{x} \in B(0,1) \right\},$$

trong đó ta kí hiệu  $B(0,1)$  là quả cầu đơn vị trong  $\mathbb{R}^n$ , tức là tập hợp các vecto có độ dài (chuẩn) không vượt quá 1.

Để ý rằng với  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in B(0,1)$  thì  $|x_i| \leq \|\mathbf{x}\| \leq 1$  với mọi  $i = 1, \dots, n$ , cho nên từ công thức (\*) ta suy ra được  $\|\mathcal{A}\|$  là một số *hữu hạn* (không vượt quá tổng của chuẩn các ảnh của  $n$  vecto trục đơn vị).

Với mọi vecto  $\mathbf{x} \neq 0$ , ta có  $(\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|)$  là vecto nằm trong quả cầu đơn vị, và do tính tuyến tính của  $\mathcal{A}$  ta có:

$$\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\| = \left\| \frac{\mathcal{A}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} \right\| = \left\| \mathcal{A} \left( \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) \right\| \leq \|\mathcal{A}\| ,$$

hay là

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\| .$$

Rõ ràng với  $\mathbf{x} = 0$  bất đẳng thức này vẫn đúng, cho nên nó đúng với mọi  $\mathbf{x}$ . Đây là một công thức quan trọng, vì nó phản ánh tính *liên tục* của ánh xạ tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều (như sẽ thấy sau này).

Các ánh xạ tuyến tính là đối tượng được nghiên cứu kỹ trong giáo trình Đại số tuyến tính, cho nên trong giáo trình này ta sẽ không đi sâu. Tuy nhiên, do vai trò quan trọng trong rất nhiều lĩnh vực, chúng sẽ được đề cập đến nhiều hơn về khía cạnh thực hành tính toán.

**Nhận xét.** Không gian  $\mathbb{R}^n$  là sự mở rộng của các không gian *2-chiều*, *3-chiều* và được thừa hưởng nhiều thuộc tính mà ta đã quen biết từ những năm phổ thông. Tuy nhiên, đối tượng nghiên cứu của Toán học là vô cùng rộng rãi và rất nhiều không gian mà nó đề cập (với các phần tử không nhất thiết là các bộ số) thường không có được tất cả các tính chất giống như của  $\mathbb{R}^n$ . Những không gian chỉ được trang bị các phép tính *cộng*, *nhân với số* (với các tính chất giống như trong  $\mathbb{R}^n$ ) được gọi là các *không gian có cấu trúc tuyến tính* và được nghiên cứu kỹ trong giáo trình Đại số tuyến tính. Những không gian không có được cấu trúc tuyến tính, nhưng lại được trang bị khái niệm *khoảng cách* (với các tính chất giống như trong  $\mathbb{R}^n$ ) được gọi là *không gian metric*. Không gian này và các dạng tổng quát của nó được nghiên cứu kỹ trong lý thuyết Tôpô và là một phần rất quan trọng của giáo trình Giải tích hàm. Tuy nhiên, không gian metric cũng là một công cụ tiện lợi trong

nghiên cứu hàm nhiều biến, cho nên chúng ta cần biết một số khái niệm cơ bản về nó.

## 1.2. Không gian metric

### 1.2.1. Định nghĩa và các ví dụ

**ĐỊNH NGHĨA.** Không gian metric là một tập hợp  $E \neq \emptyset$  được trang bị một phép ứng mỗi cặp điểm  $p, q \in E$  với một số thực  $d(p, q)$  sao cho

- (1)  $d(p, q) \geq 0, \quad \forall p, q \in E;$
- (2)  $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q;$
- (3)  $d(p, q) = d(q, p), \quad \forall p, q \in E;$
- (4)  $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q), \quad \forall p, q, r \in E$  (bất đẳng thức tam giác).

Như vậy không gian metric là một cặp  $(E, d)$ , trong đó  $E$  là một tập hợp và  $d$  là một hàm số  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn các Tính chất (1)-(4). Thông thường, khi nói về một không gian metric nào đó với hàm  $d$  mà mọi người đều hiểu là gì rồi thì người ta chỉ dùng tập  $E$  để biểu thị thay cho cả cặp  $(E, d)$ . Điều này tuy không đúng về mặt logic, nhưng lại thuận tiện cho nên được mọi người chấp nhận.

Số  $d(p, q)$  được gọi là *khoảng cách* giữa 2 điểm  $p, q$ , và hàm  $d$  được gọi là *hàm khoảng cách* hay là *metric*.

**Thí dụ 1.** Với  $E = \mathbb{R}^n$  và hàm  $d$  được định nghĩa như sau

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$

thì từ các tính chất của *khoảng cách* trong  $\mathbb{R}^n$  ta suy ra cặp  $(\mathbb{R}^n, d)$  là một không gian metric. Nó sẽ là một không gian metric *điển hình* trong giáo trình này, và metric xác định như trên sẽ được coi là metric *thông thường* trên  $\mathbb{R}^n$ .

Trong trường hợp đặc biệt, khi  $n = 1$ , ta có trục số thực  $\mathbb{R}$  cũng là một không gian metric với định nghĩa khoảng cách giữa hai số là giá trị tuyệt đối của hiệu của chúng.

**Thí dụ 2.** Với  $E = \mathbb{R}^n$  và hàm  $d$  được định nghĩa như sau

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |b_1 - a_1| + \dots + |b_n - a_n|$$

thì cặp  $(\mathbb{R}^n, d)$  cũng là một không gian metric (người đọc tự kiểm tra như một bài tập).

**Thí dụ 3.** Với  $E = \mathbb{R}^n$  ta định nghĩa hàm  $d$  như sau

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max \{ |b_i - a_i|, i = 1, 2, \dots, n \}$$

thì cũng dễ dàng thấy rằng cặp  $(\mathbb{R}^n, d)$  là một không gian metric (người đọc tự kiểm tra như một bài tập).

**Thí dụ 4.** Khi  $(E, d)$  là một không gian metric thì mỗi tập con  $E_1 \subset E$  cùng với thu hẹp của  $d$  trên  $E_1 \times E_1$  cũng tạo thành một không gian metric, được gọi là *không gian metric con* của  $E$  và thường được ký hiệu là  $(E_1, d)$ .

**Thí dụ 5.** Với  $E$  là một tập bất kỳ, ta định nghĩa

$$d(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{khi } p = q, \\ 1 & \text{khi } p \neq q. \end{cases}$$

Rõ ràng  $d$  thỏa mãn mọi điều kiện của một *hàm khoảng cách* và cặp  $(E, d)$  là một không gian metric. Tuy nhiên không gian này có cấu trúc đơn giản tới mức chẳng cung cấp cho ta một thông tin đáng kể nào. Cho nên phương pháp xác định hàm khoảng cách sẽ là yếu tố thực sự đem lại cấu trúc cho một không gian metric.

**MỆNH ĐỀ.** Với các điểm  $p_1, p_2, \dots, p_n$  trong không gian metric  $E$  ta luôn có

$$d(p_1, p_n) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3) + \dots + d(p_{n-1}, p_n).$$

**Chứng minh.** Suy từ việc áp dụng bất đẳng thức tam giác lặp lại  $n-1$  lần

$$d(p_1, p_n) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_n) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3) + d(p_3, p_n) \leq \dots$$

**MỆNH ĐỀ.** Với các điểm  $p_1, p_2, p_3$  trong không gian metric  $E$  ta luôn có

$$|d(p_1, p_3) - d(p_2, p_3)| \leq d(p_1, p_2).$$

(Nghĩa là: Hiệu của 2 cạnh trong tam giác luôn nhỏ hơn cạnh còn lại).

**Chứng minh.** Từ bất đẳng thức tam giác ta có

$$d(p_1, p_3) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3) \quad \text{và} \quad d(p_2, p_3) \leq d(p_2, p_1) + d(p_1, p_3).$$

Các bất đẳng thức này có thể viết lại thành

$$d(p_1, p_3) - d(p_2, p_3) \leq d(p_1, p_2) \quad \text{và} \quad d(p_2, p_3) - d(p_1, p_3) \leq d(p_1, p_2),$$

chính là điều cần chứng minh.

### 1.2.2. Tập đóng và tập mở trong không gian metric

Ta đã biết khái niệm về *tập đóng* và *tập mở* trong  $\mathbb{R}$ . Một cách tương tự, ta có thể định nghĩa khái niệm này trong không gian metric (nói chung) và trong  $\mathbb{R}^n$  (nói riêng). Trước hết ta đưa ra định nghĩa quả cầu trong không gian metric.

*Quả cầu mở* trong không gian metric  $(E, d)$  với tâm tại  $p \in E$  và bán kính  $r > 0$  là tập hợp

$$B(p, r) := \{q \in E : d(p, q) < r\}.$$

*Quả cầu đóng* trong không gian metric  $(E, d)$  với tâm tại  $p \in E$  và bán kính  $r > 0$  là tập hợp

$$\bar{B}(p, r) := \{q \in E : d(p, q) \leq r\}.$$

Khi ta không chỉ rõ tâm và bán kính thì ta chỉ cần nói *quả cầu* thay cho việc nói *quả cầu với tâm là một điểm nào đó* và *với bán kính là một số dương nào đó*.

**Thí dụ.** Với  $E = \mathbb{R}^3$  và với metric *thông thường* thì khái niệm quả cầu như trên hoàn toàn trùng hợp với quả cầu theo ngôn ngữ đời thường, còn với metric như trong Thí dụ 3 thì *quả cầu* sẽ là một hình lập phương (theo ngôn ngữ đời thường).

Quả cầu thông thường không kề phần mặt cầu thì là *quả cầu mở*, và nếu kề cả mặt cầu thì là *quả cầu đóng*.

Với  $E = \mathbb{R}^2$  và với metric *thông thường* thì quả cầu là một hình tròn, còn với metric như trong Thí dụ 3 thì quả cầu là một hình vuông (theo ngôn ngữ thông thường). Hình tròn không kề vòng tròn bao quanh thì là *hình tròn mở*, và nếu kề cả vòng tròn bao quanh thì là *hình tròn đóng*.

Với  $E = \mathbb{R}$  thì *quả cầu mở* chính là một *khoảng* và *quả cầu đóng* chính là một *đoạn*. Ngược lại, *một khoảng*  $(a, b)$  bất kỳ luôn có thể được xem là một *quả cầu mở* với tâm tại điểm  $p = \frac{a+b}{2}$  và bán kính  $r = \frac{b-a}{2}$ , vì

$$a < x < b \Leftrightarrow \frac{a-b}{2} < x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2} \Leftrightarrow |x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}.$$

Tương tự như vậy đối với đoạn.

**ĐỊNH NGHĨA.** Tập con  $S$  trong không gian metric  $E$  được gọi là *mở* nếu, với mỗi  $p \in S$ , tập này chứa cả một quả cầu tâm  $p$  (với bán kính nào đó).

Rõ ràng, khi  $E = \mathbb{R}$ , khái niệm *tập mở* ở đây hoàn toàn trùng hợp với khái niệm tập mở mà ta đã đưa ra trước đây (trong giáo trình *Giải tích một biến*). Khái

niệm tập mở (hay không mở) chỉ có nghĩa khi nó là một tập con trong không gian metric.

**MỆNH ĐỀ.** Trong không gian metric  $E$  bất kỳ ta luôn có

- (1) Tập rỗng  $\emptyset$  là mở;
- (2) Cả không gian  $E$  là mở;
- (3) Hợp của một họ (bất kỳ) tập mở là một tập mở;
- (4) Giao của một họ hữu hạn tập mở là một tập mở.

**Chứng minh.** Phần (1) là hiển nhiên, vì tập rỗng không chứa điểm nào nên nó chẳng phải chứa quả cầu nào. Phần (2) cũng là rõ ràng vì mọi quả cầu đều nằm trong  $E$ , nghĩa là  $E$  chứa mọi quả cầu với tâm ở bất kỳ điểm nào. Phần (3) dễ dàng suy ra từ định nghĩa, vì một tập nào đó trong họ mà đã chứa một quả cầu thì hợp của cả họ át phải chứa quả cầu đó. Ta chỉ còn phải chứng minh phần còn lại.

Trường hợp giao của họ các tập mở  $S_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) là một tập rỗng thì Phần (1) cho ta điều cần chứng minh.

Trường hợp giao của họ các tập mở  $S_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) là một tập  $S$  khác rỗng thì với mỗi điểm  $p \in S := \bigcap_{i=1}^N S_i$  ta sẽ chỉ ra rằng tìm được quả cầu tâm  $p$  nằm gọn trong  $S$ . Thật vậy, do mỗi tập  $S_i$  là mở và  $p \in S_i$ , ta tìm được quả cầu tâm  $p$  bán kính  $r_i$  nằm gọn trong  $S_i$ . Lấy  $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_N\}$ , ta dễ dàng thấy rằng quả cầu tâm  $p$  với bán kính  $r$  nằm trong quả cầu tâm  $p$  bán kính  $r_i$  (và do đó nằm gọn trong  $S_i$ ), với mọi  $i = 1, 2, \dots, N$ . Điều này chứng tỏ quả cầu tâm  $p$  bán kính  $r$  nằm trong giao của tất cả các tập  $S_i$ , nghĩa là nó nằm trong  $S$  và mệnh đề đã được chứng minh xong.

**Nhận xét.** Trong giáo trình *Giải tích một biến* chúng ta đã biết *tôpô* trên trực số thực là một họ các tập con thỏa mãn các điều kiện tương tự như họ tập mở nêu trong mệnh đề trên. Dễ dàng thấy rằng khái niệm *tôpô* này có thể mở rộng ra cho tập bất kỳ, và một tập hợp có *tôpô* được gọi là một *không gian tôpô*. Như vậy, mệnh đề trên nói rằng *không gian metric* là một *không gian tôpô* (với *tôpô* là họ các tập mở).

Để giải tỏa mối băn khoăn về sự “xung khắc có thể xảy ra” giữa 2 khái niệm *mở* (quả cầu mở và tập mở), ta có mệnh đề sau

**MỆNH ĐỀ.** Quả cầu mở trong không gian metric là một tập mở.

**Chứng minh.** Cho quả cầu mở bất kỳ  $B(p,r)$ . Lấy điểm  $q$  bất kỳ trong  $B(p,r)$ , ta chỉ ra rằng tồn tại quả cầu có tâm tại  $q$  (với bán kính nào đó) nằm gọn trong  $B(p,r)$ . Thật vậy, do  $q$  nằm trong  $B(p,r)$  nên  $d(p,q) < r$ . Lấy số dương  $s < r - d(p,q)$  ta có  $B(q,s) \subset B(p,r)$ , vì rằng

$$d(q, x) < s \Rightarrow d(p, x) \leq d(p, q) + d(q, x) < d(p, q) + s < r.$$

Mệnh đề đã được chứng minh xong.

Như vậy đối với quả cầu thì 2 khái niệm mở thực chất chỉ là một.

**Nhận xét.** Từ 2 mệnh đề trên ta thấy rằng tập mở chính là hợp của các quả cầu mở. Thật vậy, hợp của các quả cầu mở cho ta một tập mở. Ngược lại, một tập mở có thể xem là hợp của tất cả các quả cầu nằm trong nó (mỗi điểm của tập mở đều nằm trong một quả cầu như vậy, nên hợp của tất cả các quả cầu này đương nhiên chứa tất cả các điểm của tập).

**Lưu ý.** Giao của một họ vô hạn các tập mở không nhất thiết là một tập mở. Thí dụ, trong không gian  $\mathbb{R}^n$ , giao của họ các quả cầu mở  $B(p, \frac{1}{n})$  với  $n=1, 2, 3, \dots$ , chỉ là một điểm  $p$  đơn độc và không phải là tập mở.

**ĐỊNH NGHĨA.** Một tập con  $S$  trong không gian metric  $E$  được gọi là đóng nếu như phần bù của nó là một tập mở.

Nhắc lại rằng phần bù của một tập con  $S$  trong không gian  $E$  là  $C(S)=E \setminus S$ .

Để tránh nỗi băn khoăn về sự “xung khắc có thể xảy” ra giữa 2 khái niệm đóng đối với quả cầu (*quả cầu đóng và tập đóng*) ta có mệnh đề sau đây khẳng định rằng về thực chất chúng chỉ là một.

**MỆNH ĐỀ.** Quả cầu đóng trong không gian metric là một tập đóng.

**CHỨNG MINH.** Lấy quả cầu đóng bất kỳ  $\bar{B}(p, r)$ , ta chứng minh rằng phần bù của nó là một tập mở. Rõ ràng phần bù của nó là

$$C[\bar{B}(p, r)] = \{x \in E : d(p, x) > r\}.$$

Nếu nó *rỗng* thì đương nhiên nó là *mở*. Khi nó khác *rỗng*, ta lấy một điểm  $q$  bất kỳ trong  $C[\bar{B}(p, r)]$  và chỉ ra rằng có quả cầu tâm tại  $q$  nằm hoàn toàn trong  $C[\bar{B}(p, r)]$ . Thực vậy, do  $q \in C[\bar{B}(p, r)]$  nên  $d(p, q) > r$  và ta tìm được số dương  $s < d(p, q) - r$ . Dễ dàng kiểm tra rằng  $B(q, s) \subset C[\bar{B}(p, r)]$ , bởi vì

$$x \in B(q, s) \Rightarrow d(q, x) < d(p, q) - r \Rightarrow d(p, x) \geq d(p, q) - d(q, x) > r.$$

Mệnh đề được chứng minh xong.

Tương tự như đối với các tập mở, ta có

**MỆNH ĐỀ.** Trong không gian metric  $E$  bất kỳ ta luôn có

- (1) *Cả không gian  $E$  là một tập đóng;*
- (2) *Tập rỗng  $\emptyset$  là một tập đóng;*
- (3) *Giao của một họ (bất kỳ) tập đóng là một tập đóng;*
- (4) *Hợp của một họ hữu hạn tập đóng là một tập đóng.*

**Chứng minh.** Các phần (1)-(2) suy ngay từ mệnh đề tương tự đối với tập mở. Các phần (3)-(4) cũng suy từ mệnh đề ấy kết hợp với một kết quả đã biết trong lý thuyết tập hợp là: *Phần bù của hợp các tập là giao của các phần bù* của các tập này; và *phần bù của giao các tập là hợp của các phần bù* của các tập này.

**Nhận xét.** Dễ dàng thấy rằng phần bù của một điểm là một tập mở, cho nên mỗi điểm là một tập đóng; và từ mệnh đề trên suy ra tập hợp gồm hữu hạn điểm là một tập đóng. Mặt cầu  $S(p,r) := \{x \in E : d(p,x) = r\}$  có thể xem là giao của *quá cầu đóng* với *phần bù của quá cầu mở* (là một tập đóng) cho nên nó cũng là một tập đóng.

*Một tập con trong không gian metric được gọi là **giới nội** nếu nó nằm trong một quá cầu nào đó.*

**Thí dụ.** Trong  $\mathbb{R}$  với metric thông thường, một tập là giới nội nếu tồn tại số  $r > 0$  để đoạn  $[-r, r]$  chứa trọn tập ấy. Dĩ nhiên toàn bộ không gian  $\mathbb{R}$  không phải là giới nội. Thế nhưng nếu xét  $E = \mathbb{R}$  với metric như trong Thí dụ 5 ở mục trước thì  $\mathbb{R}$  lại là tập giới nội.

### 1.2.3. Hội tụ trong không gian metric

Sự hội tụ trong không gian metric nói chung cũng tương tự như sự hội tụ trên trục số thực mà ta đã quen biết, nếu ta coi mỗi khoảng là một quá cầu và khoảng cách giữa 2 số là trị tuyệt đối của hiệu của chúng. Chính xác hơn ta có định nghĩa sau:

**ĐỊNH NGHĨA.** *Dãy các điểm  $p_1, p_2, p_3, \dots$  trong không gian metric  $E$  được gọi là **hội tụ** đến điểm  $p \in E$  nếu, với mỗi số  $\varepsilon > 0$ , tìm được số tự nhiên  $N$  sao cho  $d(p, p_n) < \varepsilon$  khi  $n > N$ .*

Khi ấy ta cũng nói rằng  $p$  là *giới hạn* của dãy  $\{p_n\}$ , hay dãy  $\{p_n\}$  có giới hạn là  $p$ . Và viết

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p.$$

Một dãy được gọi là *hội tụ* nếu nó hội tụ đến một điểm nào đó.

Nếu ta gọi *quá cầu* tâm  $p$  bán kính  $\varepsilon$  là một  $\varepsilon$ -lân cận của điểm  $p$  thì định nghĩa trên có thể phát biểu như sau:

*Dãy các điểm  $p_1, p_2, p_3, \dots$  trong không gian metric  $E$  được gọi là **hội tụ** đến điểm  $p \in E$  nếu, với mỗi số  $\varepsilon > 0$ , tìm được số tự nhiên  $N$  để mọi  $p_n$  với  $n > N$  đều nằm trong  $\varepsilon$ -lân cận của  $p$ .*

**Lưu ý.** Trong định nghĩa trên số tự nhiên  $N$  được tìm sau khi đã cho  $\varepsilon$ , nên nói chung nó phụ thuộc vào  $\varepsilon$  và sẽ chính xác hơn nếu viết  $N(\varepsilon)$  thay vì  $N$ . Tuy nhiên, để cho thuận tiện, và cũng để tránh gây sự hiểu lầm là có sự tương ứng nào đó giữa  $\varepsilon$  và  $N$ , chúng ta sẽ không viết như vậy khi thấy không cần nhấn mạnh điều này. Trong thực tế, khi đã tìm được một số  $N$  như trong định nghĩa thì cũng có nghĩa là tồn tại vô số các số như vậy (thí dụ: tất cả các số tự nhiên lớn hơn nó).

**Nhận xét.** Sự hội tụ của một dãy phải luôn được hiểu trong quan hệ với một không gian metric xác định nào đó. Cùng một dãy có thể là *hội tụ* trong không gian metric này, và *không là hội tụ* trong không gian metric khác. Thí dụ: dãy số  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  là *hội tụ* tới 0 trên trục số thực với metric *thông thường* (khoảng cách 2 điểm bằng trị tuyệt đối của hiệu của chúng) và *không hội tụ* trên trục số thực với metric *tâm thường* (khoảng cách giữa hai điểm khác nhau là bằng 1, và chỉ bằng 0 khi trùng nhau).

Sự hội tụ của một dãy tới một điểm giới hạn nào đó có nghĩa là các điểm của dãy càng về sau thì càng gần đến điểm giới hạn, nhưng không có nghĩa là tất cả các điểm “phía sau” phải gần hơn tất cả các điểm “phía trước”. Thí dụ dãy số  $a_n = (n-1)/n^2$  có điểm đầu tiên  $a_1 = 0$  là gần giới hạn của dãy hơn bất cứ phần tử nào đứng sau nó (vì chính nó là điểm giới hạn của dãy).

**Mệnh đề.** Một dãy trong không gian metric chỉ có nhiều nhất là một điểm giới hạn.

**Chứng minh.** Bằng phản chứng, giả sử ngược lại rằng có 2 điểm phân biệt  $p$  và  $q$  cùng là giới hạn của một dãy  $\{p_n\}$ . Do  $d(p, q) > 0$  ta tìm được số dương  $\varepsilon < d(p, q)/2$ . Do dãy  $\{p_n\}$  hội tụ đến  $p$  nên với số  $\varepsilon$  này ta tìm được số tự nhiên  $N_1$  sao cho

$$d(p, p_n) < \varepsilon, \quad \forall n > N_1.$$

Mặt khác do  $\{p_n\}$  hội tụ đến  $q$  ta tìm được số tự nhiên  $N_2$  sao cho

$$d(q, p_n) < \varepsilon, \quad \forall n > N_2.$$

Như vậy khi  $n > N := \max\{N_1, N_2\}$  ta sẽ có  $d(p, p_n) < \varepsilon$  và  $d(q, p_n) < \varepsilon$ . Tông hợp lại và kết hợp với bất đẳng thức tam giác ta suy ra

$$d(p, q) \leq d(p, p_n) + d(p_n, q) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < d(p, q).$$

Đây là điều mâu thuẫn, cho nên mệnh đề được chứng minh xong.

Với  $p_1, p_2, p_3, \dots$  là một dãy điểm và  $n_1, n_2, n_3, \dots$  là một dãy số tự nhiên tăng chẵn (tức là  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ) thì dãy  $p_{n_1}, p_{n_2}, p_{n_3}, \dots$  được gọi là *dãy con* của dãy  $p_1, p_2, p_3, \dots$  (Đôi khi, để tránh phải viết các chỉ số quá nhỏ, ta sẽ viết các dãy con là  $p_{n(1)}, p_{n(2)}, p_{n(3)}, \dots$ ). Trong trường hợp riêng, một dãy cũng là dãy con của chính nó.

**MỆNH ĐỀ.** Mọi dãy con của một dãy hội tụ cũng là một dãy hội tụ và cùng có chung giới hạn với dãy ban đầu.

**Chứng minh.** Mệnh đề này đã quen thuộc với chúng ta trong trường hợp dãy số. Trong trường hợp không gian metric nói chung việc chứng minh không có gì khác và xin dành lại cho người đọc như một bài tập.

Một dãy  $p_1, p_2, p_3, \dots$  trong không gian metric được gọi là *giới nội* nếu tập điểm  $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$  là giới nội.

**Nhận xét.** Mọi dãy hội tụ là *giới nội*. Thực vậy, gọi  $p$  là điểm giới hạn của nó thì với một số dương  $\varepsilon$  nào đó ta tìm được số tự nhiên  $N$  để mọi điểm của dãy, kể từ phần tử thứ  $N$  trở đi nằm cách điểm  $p$  một khoảng không quá  $\varepsilon$ , và như vậy toàn bộ dãy sẽ nằm hoàn toàn trong quả cầu tâm  $p$  với bán kính là

$$R := \max \{\varepsilon, d(p, p_1), d(p, p_2), \dots, d(p, p_N)\}.$$

**ĐỊNH LÝ** Một tập  $S$  (trong không gian metric  $E$ ) là đóng khi và chỉ khi mọi dãy hội tụ của  $S$  có giới hạn nằm trong  $S$ .

**Chứng minh.** ( $\Rightarrow$ ) Ta chỉ ra rằng nếu  $S$  là một tập đóng và dãy  $\{p_n\} \subset S$  là hội tụ đến một điểm  $p$  (trong  $E$ ) thì phải có  $p \in S$ . Thực vậy, nếu không như thế thì  $p$  nằm trong *phần bù* của  $S$  và đây là một *tập mở* nên tồn tại một quả cầu tâm  $p$  bán kính  $\varepsilon$  nào đó nằm hoàn toàn trong phần bù của  $S$ . Do tính chất của dãy hội tụ nên tồn tại số tự nhiên  $N$  sao cho mọi  $p_n$  với  $n > N$  đều nằm trong  $\varepsilon$ -lân cận của  $p$ , tức là nằm trong phần bù của  $S$ . Đây là điều mâu thuẫn vì không thể có các điểm vừa nằm trong  $S$  vừa nằm trong *phần bù* của  $S$ .

( $\Leftarrow$ ) Ta chỉ ra rằng nếu mọi dãy hội tụ  $\{p_n\} \subset S$  có giới hạn nằm trong  $S$  thì  $S$  là một tập đóng. Bằng phản chứng, giả sử ngược lại  $S$  không đóng. Khi ấy phần bù của nó  $C(S)$  không phải là tập mở, tức là tồn tại điểm  $p \in C(S)$  mà không có quả cầu tâm  $p$  nào nằm gọn trong  $C(S)$ . Suy ra, với mỗi số tự nhiên  $n$ , trong quả cầu  $B(p, \frac{1}{n})$  có một điểm  $q_n$  nào đó không nằm trong  $C(S)$ , cũng tức là  $q_n \in S$ . Dễ dàng kiểm tra rằng  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = p$  và theo giả thiết ta suy ra  $p \in S$ . Như vậy  $p$  vừa nằm trong  $S$  vừa nằm trong  $C(S)$ . Mâu thuẫn này cho thấy định lý được chứng minh.

#### I.2.4. Tính đầy đủ trong không gian metric

**ĐỊNH NGHĨA.** Dãy các điểm  $p_1, p_2, p_3, \dots$  trong không gian metric được gọi là *dãy Cauchy* nếu, với mỗi số  $\varepsilon > 0$ , tìm được số tự nhiên  $N$  sao cho khi  $m, n > N$  thì  $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ .

Lưu ý rằng số tự nhiên  $N$  được tìm sau khi đã cho số  $\varepsilon$  cho nên nói chung nó phụ thuộc vào  $\varepsilon$ . Vì số  $\varepsilon$  có thể cho bé bao nhiêu tuỳ ý, cho nên dãy Cauchy có một đặc trưng hình học rất cơ bản là các điểm càng về cuối thì càng gần nhau.

**MỆNH ĐỀ.** *Dãy hội tụ là dãy Cauchy.*

**Chứng minh.** Nếu dãy  $p_1, p_2, p_3, \dots$  hội tụ đến điểm  $p$  thì, với mỗi số  $\varepsilon > 0$ , tìm được số tự nhiên  $N$  sao cho khi  $n > N$  ta có  $d(p, p_n) < \varepsilon/2$ . Suy ra, với mọi  $k, m > N$ ,

$$d(p_k, p_m) < d(p_k, p) + d(p, p_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

có nghĩa  $p_1, p_2, p_3, \dots$  là dãy Cauchy.

**Nhận xét.** Điều ngược lại nói chung là không đúng. Thí dụ: Trục số thực mà bỏ đi điểm gốc 0 thì vẫn là không gian metric (với hàm khoảng cách thông thường), nhưng dãy số  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$  không phải là dãy hội tụ trong không gian này, mặc dù nó là dãy Cauchy (để dàng kiểm tra điều này theo định nghĩa). Lý do khiến dãy này không hội tụ là không gian “bị thủng một lỗ” ở gốc tọa độ. Các không gian như vậy được coi là *không đầy đủ*. Trước khi bàn đến việc “làm đầy” nó, ta lưu ý thêm một số tính chất của dãy Cauchy.

**MỆNH ĐỀ.** *Dãy con của một dãy Cauchy cũng là dãy Cauchy.*

**Chứng minh.** Suy ngay từ định nghĩa.

**MỆNH ĐỀ.** *Dãy Cauchy là giới hạn.*

**Chứng minh.** Với dãy Cauchy ta tìm được số tự nhiên  $N$  để mọi điểm kể từ  $N$  trở đi cách nhau không quá 1. Lấy một điểm  $p_m$  với  $m > N$ . Khoảng cách giữa  $p_m$  và mỗi điểm bất kỳ trong số (hữu hạn)  $N$  điểm đầu của dãy là bị chặn bởi một số dương  $R$  nào đó. Để dàng thấy rằng toàn bộ dãy phải nằm trong quả cầu tâm  $p_m$  với bán kính là số lớn hơn trong 2 số  $R$  và 1.

**MỆNH ĐỀ.** *Nếu dãy Cauchy có một dãy con hội tụ thì nó cũng hội tụ (tới giới hạn của dãy con đó).*

**Chứng minh.** Cho  $p_1, p_2, p_3, \dots$  là dãy Cauchy và  $p_{n(1)}, p_{n(2)}, p_{n(3)}, \dots$  là dãy con hội tụ của nó. Gọi  $p$  là điểm giới hạn của dãy con. Với số dương  $\varepsilon$  cho trước, do tính chất của dãy Cauchy ta tìm được số tự nhiên  $N$  sao cho khi  $m, n > N$  thì  $d(p_n, p_m) < \varepsilon/2$ . Do tính chất của dãy hội tụ ta tìm được phần tử trong dãy con là  $p_{n(k)}$  với  $n(k) > N$  sao cho  $d(p, p_{n(k)}) < \varepsilon/2$ . Khi ấy ta có

$$d(p, p_n) \leq d(p, p_{n(k)}) + d(p_{n(k)}, p_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Theo định nghĩa của giới hạn ta có điều cần chứng minh.

**ĐỊNH NGHĨA.** *Không gian metric  $E$  được gọi là đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy trong  $E$  có giới hạn (trong  $E$ ).*

**Thí dụ.** Trục số thực  $\mathbb{R}$  với metric thông thường là một không gian metric đầy đủ.

Trục số thực  $\mathbb{R}$  với metric như trong Thí dụ 5 ở Mục 1.2.1 cũng là một không gian metric đầy đủ vì các phần tử của dãy Cauchy trùng nhau khi các chỉ số đủ lớn và đó chính là giới hạn của dãy. Tuy nhiên khi  $E$  là khoảng mở  $(0,1)$  trong  $\mathbb{R}$  thì với metric thông thường nó không phải là không gian metric đầy đủ vì dãy Cauchy  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  không có giới hạn trong  $E$ .

**Mệnh đề.** *Mỗi tập đóng trong một không gian metric đầy đủ là một không gian metric đầy đủ.*

**Chứng minh.** Suy ra ngay từ định nghĩa.

**Định lý.** *Không gian  $\mathbb{R}^n$  là đầy đủ.*

**Chứng minh.** Trong giáo trình *Giải tích một biến* ta đã biết rằng rằng mọi dãy số giới nội đều có một dãy con hội tụ. Ta lại biết rằng mọi dãy Cauchy đều giới nội, cho nên nó có dãy con hội tụ, và theo mệnh đề trên thì bản thân nó cũng phải hội tụ (đến giới hạn của dãy con này). Tổng hợp lại ta suy ra rằng trục số thực (với metric thông thường) là một không gian đầy đủ. Tính đầy đủ không gian  $\mathbb{R}^n$  là hoàn toàn dựa trên sự kiện này với nhận xét rằng, với  $\mathbf{p} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  và  $\mathbf{q} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , ta luôn có

$$|a_i - b_i| \leq d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|, \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n.$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên cho thấy rằng một dãy trong  $\mathbb{R}^n$  là dãy Cauchy khi và chỉ khi các dãy tọa độ của nó là dãy Cauchy, và một dãy trong  $\mathbb{R}^n$  là hội tụ tới một điểm  $\mathbf{p}$  trong  $\mathbb{R}^n$  khi và chỉ khi các dãy tọa độ của nó hội tụ (tương ứng) đến các tọa độ của điểm  $\mathbf{p}$ . Cho nên với dãy Cauchy bất kỳ trong  $\mathbb{R}^n$  ta có các dãy tọa độ của chúng cũng là các dãy Cauchy, và do tính đầy đủ của trục số thực ta suy ra chúng đều có giới hạn. Các giới hạn này là tọa độ của một điểm trong  $\mathbb{R}^n$ . Dễ dàng chứng minh rằng điểm này chính là giới hạn của dãy điểm ban đầu.

Định lý đã được chứng minh xong.

### 1.2.5. Tính compact trong không gian metric

Chúng ta đã làm quen với khái niệm *compact* trên trục số thực. Khái niệm này hoàn toàn có thể mở rộng cho không gian metric, tương tự như ta đã làm với *tập mở, tập đóng,...* Để tiện tra cứu, chúng ta nhắc lại:

Một họ các tập mở (trong một không gian metric) được gọi là **phủ mở** của một tập  $S$  nếu như hợp của chúng chứa toàn bộ  $S$ . Nếu có một họ con (trong họ các tập mở này) là phủ mở của  $S$  thì ta gọi nó là **phủ con**.

Trong giáo trình này ta chỉ xét phủ lập thành từ họ các tập mở, nên đôi khi ta nói gọn phủ thay cho phủ mở. Nếu họ gồm một số hữu hạn tập mở thì phủ được gọi là **phủ hữu hạn**.

Một tập  $S$  (trong không gian metric  $E$ ) được gọi là **compact** nếu trong mỗi phủ của nó ta tìm được một phủ con hữu hạn.

Bản thân không gian  $E$  cũng được xem như một tập, nên khái niệm **compact** cũng có thể được áp dụng cho nó. Khi ấy, không gian metric  $E$  là compact nếu như từ mọi họ tập mở hợp thành nó ta tìm được một số hữu hạn các tập mở hợp thành nó.

**Nhận xét.** Trong thực tế việc kiểm tra tính compact bằng phủ mở như nêu trong định nghĩa là một công việc hết sức khó khăn. Thay vào đó người ta thường khai thác những đặc điểm cơ bản của tính compact và xem đó như các tiêu chuẩn để nhận biết nó.

### 1. Nguyên lý giao hữu hạn

Trong giáo trình *Giải tích một biến* chúng ta đã có nguyên lý giao của tập compact trong  $\mathbb{R}$ . Bây giờ chúng ta sẽ mở rộng nguyên lý này trong không gian metric. Cho  $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$  là họ bất kỳ những tập khác rỗng trong không gian metric  $E$ . Ta nói họ này có tính chất *giao hữu hạn* nếu với mọi bộ hữu hạn chỉ số  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in I$  ta có

$$\bigcap_{i=1}^k A_{\alpha_i} \neq \emptyset.$$

**BỒ ĐỀ.** Mọi tập đóng trong một không gian metric compact là một tập compact.

**Chứng minh.** Lấy tập đóng  $S$  trong không gian compact  $E$ . Giả sử có một phủ của  $S$  là họ các tập mở  $\{V_\alpha, \alpha \in K\}$ , nghĩa là  $S \subseteq \bigcup_{\alpha \in K} V_\alpha$ . Do  $C(S)$  (phần bù của  $S$ ) là

một tập mở và rõ ràng họ  $\{V_\alpha, \alpha \in K\}$  kết hợp với tập  $C(S)$  sẽ lập thành một phủ của cả không gian  $E$ . Do tính compact của  $E$  nên ta tìm được một phủ con hữu hạn từ phủ này, nghĩa là tìm được một tập hữu hạn  $I \subset K$  sao cho  $E = \bigcup_{i \in I} V_i \bigcup C(S)$ .

Từ đây ta suy ra  $S \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ , có nghĩa  $\{V_i, i \in I\}$  là một phủ (hữu hạn) của  $S$ . Mệnh đề đã được chứng minh xong.

**ĐỊNH LÝ.** Giả sử  $E$  là không gian metric compact và  $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$  là họ những tập con đóng khác rỗng trong  $E$  có tính chất giao hữu hạn. Khi ấy họ này có điểm chung, tức là  $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$ .

**Chứng minh.** Đặt  $U_\alpha = E \setminus A_\alpha$ . Vì  $A_\alpha$  đóng nên  $U_\alpha$  mở. Giả thiết phản chứng là  $\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha = \emptyset$ . Khi ấy  $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$  tạo thành phủ của  $E$ . Vì  $E$  là compact nên tồn tại phủ con hữu hạn  $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}$ , tức là

$$E = \bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i}, \text{ hay } \bigcap_{i=1}^k A_{\alpha_i} = \emptyset.$$

Đây là điều vô lý vì họ  $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$  có tính chất giao hữu hạn. Định lý được chứng minh đầy đủ.

**HỆ QUẢ.** Cho trước họ các tập compact khác rỗng lồng nhau  $S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$ . Khi ấy

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i \neq \emptyset.$$

**Chứng minh.** Hiển nhiên họ  $\{S_i : i = 1, 2, \dots\}$  là một họ những tập đóng khác rỗng có tính chất giao hữu hạn trong không gian compact  $S_1$ . Vì thế, theo định lý trên, giao của chúng khác rỗng. Đây chính là điều cần chứng minh.

## 2. Các tính chất cơ bản

Để khảo sát các tập compact ta cần một số khái niệm sau đây:

Điểm  $p$  trong không gian metric  $E$  được gọi là *điểm tụ* của tập  $S \subset E$  nếu mọi quả cầu có tâm tại  $p$  đều chứa vô hạn các phần tử của  $S$ .

Với  $\varepsilon > 0$  và  $A$  là một tập con trong  $E$ , ta nói  $A$  là  $\varepsilon$ -lưới của  $E$  nếu với mọi  $x$  trong  $E$  tồn tại  $a \in A$  để  $d(a, x) < \varepsilon$ .

Tương tự như vậy ta định nghĩa được  $\varepsilon$ -lưới của một tập bất kỳ  $B \subseteq E$ .

Tập  $B \subseteq E$  được gọi là *hoàn toàn giới nội* nếu  $B$  có  $\varepsilon$ -lưới hữu hạn với mỗi số dương  $\varepsilon$ .

**Thí dụ.** Trong  $\mathbb{R}^2$  quả cầu tâm 0, bán kính 1 là tập hoàn toàn giới nội. Thật vậy, với  $\varepsilon > 0$  bất kỳ, chọn số nguyên  $N > \frac{2}{\varepsilon}$ . Dễ thấy tập hữu hạn

$$\left\{ (x_i, y_j) : |x_i| = \frac{i}{N}, |y_j| = \frac{j}{N}, x_i^2 + y_j^2 \leq 1, i, j = 0, \dots, N \right\}$$

tạo thành  $\varepsilon$ -lưới của quả cầu nói trên.

**Chú ý.** Nếu như tập  $B \subseteq E$  là hoàn toàn giới nội thì nó cũng là giới nội. Thật vậy, giả sử  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq B$  là một  $\varepsilon$ -lưới (với  $\varepsilon > 0$ ) của  $B$ . Lấy  $x_0 \in B$  và đặt

$$r_0 = \max \{d(x_0, x_i) : i = 1, \dots, n\}.$$

Vì  $B$  là hoàn toàn giới nội, với mọi  $x \in B$  tìm được chỉ số  $i$  để  $d(x_i, x) < \varepsilon$ . Do đó

$$d(x_0, x) \leq d(x_0, x_i) + d(x_i, x) \leq r_0 + \varepsilon.$$

Như vậy  $B$  nằm trong quả cầu tâm  $x_0$  bán kính  $r_0 + \varepsilon$ , tức là  $B$  giới nội.

Thí dụ sau cho ta biết điều ngược lại của điều trong chú ý trên là không đúng.

**Thí dụ.** Xét không gian  $E$  các dãy số  $\{x_n\}$  với tính chất  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$ . Khoảng cách giữa hai dãy là

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}.$$

Dễ kiểm tra rằng không gian  $E$  với khoảng cách trên là một không gian metric. Chúng ta khẳng định rằng quả cầu đơn vị  $B$  trong không gian này không phải là hoàn toàn giới nội. Thật vậy, nhận xét rằng  $B$  chứa các điểm  $a_k$  có các thành phần bằng 0 trừ thành phần thứ  $k$  bằng 1,  $k=1, 2, \dots$  và  $d(a_k, a_l) = \sqrt{2}$  nếu  $k \neq l$ . Vì thế, nếu lấy  $\varepsilon = \sqrt{2}/4$  thì mọi  $\varepsilon$ -lưới của  $B$  phải là vô hạn (một điểm bất kỳ đã cách  $a_k$  một khoảng nhỏ hơn  $\varepsilon$  thì không thể cách  $a_l$ , với  $l \neq k$  một khoảng nhỏ hơn  $\varepsilon$  được). Chúng ta  $B$  không có  $\varepsilon$ -lưới hữu hạn và do đó nó không phải là tập hoàn toàn giới nội.

**ĐỊNH LÝ.** Cho  $E$  là một không gian metric. Những khẳng định sau là tương đương:

- (i)  $E$  là compact;
- (ii) Mọi tập con vô hạn trong  $E$  có điểm tụ trong  $E$ ;
- (iii) Mọi dãy con trong  $E$  có dãy con hội tụ trong  $E$ ;
- (iv)  $E$  là dày đủ và hoàn toàn giới nội.

**Chứng minh.**

(i) $\Rightarrow$ (ii) Cho  $S$  là tập con vô hạn của  $E$ . Nếu  $S$  không có điểm tụ thì với mọi  $p \in E$  tồn tại quả cầu tâm  $p$  chỉ chứa hữu hạn điểm của  $S$ . Những quả cầu này phủ  $E$  và theo tính compact, ta có thể trích một phủ con hữu hạn. Phủ con này chỉ chứa hữu hạn phần tử của  $S$  và do đó  $S$  chỉ có hữu hạn phần tử, điều này vô lý.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Giả sử  $\{p_n\}$  là dãy trong  $E$ . Nếu tập  $\{p_n : n = 1, 2, \dots\}$  chỉ có hữu hạn phần tử thì có ít nhất một điểm được lặp lại vô số lần. Chính những “phần tử lặp”

này tạo thành dãy con hội tụ (tới chính điểm ấy). Nếu tập trên vô hạn, theo ii), có điểm tụ  $p \in E$  thì, theo định nghĩa điểm tụ, với mỗi  $k$  bất kỳ tìm được  $n(k)$  để  $p_{n(k)} \in B(p, \frac{1}{k})$ . Cho  $k=1, 2, \dots$  ta thu được dãy con  $\{p_{n(k)}\}$  với tính chất  $d(p, p_{n(k)}) \leq \frac{1}{k}$ . Vậy  $\{p_{n(k)}\}$  hội tụ tới  $p$  và (iii) đúng.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Trước hết ta chỉ ra rằng  $E$  là đầy đủ. Thật vậy cho trước dãy Cauchy bất kỳ. Theo (iii) tồn tại dãy con hội tụ. Theo tính chất dãy Cauchy bao toàn dãy ban đầu hội tụ. Chứng tỏ  $E$  là đầy đủ. Hơn nữa,  $E$  là hoàn toàn giới nội, vì nếu ngược lại thì tồn tại  $\varepsilon > 0$  để không tìm được một  $\varepsilon$ -lưới hữu hạn trong  $E$ , tức là tồn tại vô hạn điểm  $x_1, x_2, \dots \in E$  sao cho  $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$  với mọi  $i \neq j$ . Dãy  $\{x_n\}$  không thể có dãy con hội tụ, trái với tính chất iii).

(iv) $\Rightarrow$  (i) Bằng phản chứng, giả sử tồn tại phủ  $V = \{V_\alpha : \alpha \in I\}$  mà không có phủ con hữu hạn. Khi ấy với mỗi số  $k \geq 1$  ta tìm được  $(1/k)$ -lưới hữu hạn trong  $E : x_1^k, \dots, x_{n(k)}^k$ . Với  $k = 1$ , tồn tại số  $n_1$  để quả cầu đóng  $B_1$  tâm  $x_{n_1}^1$  bán kính 1 không thể phủ bởi hữu hạn phần tử của phủ  $V$ . Vì  $B_1$  là compact ta tìm được quả cầu đóng  $B_2 \subseteq B_1$  tâm  $x_{n_2}^2$  bán kính  $1/2$  mà không thể phủ bởi hữu hạn phần tử của  $V$ . Tiếp tục quá trình này ta có họ quả cầu compact  $B_k$  lồng nhau, bán kính dần tới 0. Theo nguyên lý giao hữu hạn, chúng có giao khác rỗng. Do bán kính dần tới 0 nên giao này chỉ gồm một điểm, thí dụ  $p \in E$ . Khi ấy tìm được chỉ số  $\alpha_0 \in I$  để  $p \in V_{\alpha_0}$ . Với  $k$  đủ lớn, rõ ràng  $B_k \subseteq V_{\alpha_0}$ . Điều này mâu thuẫn với tính chất của  $B_k$  là không thể phủ bởi hữu hạn phần tử của  $V$ . Định lý được chứng minh xong.

Áp dụng định lý trên ta có một tiêu chuẩn quan trọng để kiểm tra tính compact trong không gian  $\mathbb{R}^n$ .

**HỆ QUẢ.** Một tập trong  $\mathbb{R}^n$  là compact khi và chỉ khi tập đó là đóng và giới nội.

**Chứng minh.** Nếu  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  là compact thì theo định lý trên nó hoàn toàn giới nội, do đó  $E$  là giới nội. Ngoài ra, giả sử  $\{p_k\} \subseteq E$  hội tụ tới  $p \in \mathbb{R}^n$  thì theo phần iii) của định lý,  $\{p_k\}$  có giới hạn  $p \in E$ . Sử dụng định lý về tính đóng ta kết luận  $E$  là tập đóng.

Ngược lại, giả thiết  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  là tập đóng, giới nội và  $\{p_k\}$  là một dãy bất kỳ trong  $E$ . Gọi  $x_1^k, \dots, x_n^k$  là các tọa độ của  $p_k$ . Khi ấy  $|x_i^k| \leq \|p_k\|$  với mọi  $k$ , mọi  $i=1, \dots, n$ . Chứng tỏ  $\{x_1^k\}, \dots, \{x_n^k\}$  là những dãy số giới nội, vì  $\{\|p_k\|\}$  giới nội do  $E$  giới nội. Theo kết quả đã biết trong trường hợp không gian 1 chiều, ta trích dãy con

hội tụ  $\{x_1^{k(1)}\}$  của dãy  $\{x_1^k\}$ , hội tụ tới  $x_1^0$  chẵng hạn. Tiếp theo, ta trích dãy con  $\{x_1^{k(2)}\}$  của dãy con  $\{x_2^{k(1)}\} \subseteq \{x_2^k\}$ , hội tụ tới  $x_2^0$  chẵng hạn. Tiếp tục quá trình này cho tới  $n$  chúng ta thu được dãy con  $\{x_i^{k(i)}\} \subseteq \{x_i^k\}$  hội tụ tới  $x_i^0$ ,  $i=1,2,\dots,n$ . Khi ấy  $p_{k(n)} = (x_1^{k(n)}, \dots, x_n^{k(n)})$  tạo thành dãy con của  $\{p_k\}$  hội tụ tới  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Vì  $E$  đóng nên giới hạn này nằm trong  $E$ . Chứng tỏ  $\{p_k\}$  có dãy con hội tụ trong  $E$ . Theo định lý,  $E$  là tập compact.

**Thí dụ.** Từ hệ quả trên ta nhận thấy ngay rằng quả cầu đóng và mặt cầu trong  $\mathbb{R}^n$  là những tập compact.

Nếu  $\mathbb{R}^n$  được trang bị metric tầm thường (khoảng cách giữa hai điểm khác nhau bất kỳ đều bằng 1) thì một tập là compact khi và chỉ khi nó hoặc là rỗng, hoặc gồm hữu hạn điểm.

### 1.2.6. Ánh xạ trong không gian metric

Trong giáo trình *Giải tích một biến* chúng ta đã định nghĩa hàm số như một phép ứng từ trực số thực vào trực số thực. Định nghĩa này có thể mở rộng trực tiếp cho các không gian metric bất kỳ và các khái niệm về *giới hạn*, *liên tục* vẫn giữ nguyên ý nghĩa nếu ta coi *khoảng cách* giữa 2 số như là trị tuyệt đối của hiệu của chúng và coi các *khoảng* như là các *quả cầu* mở (với tâm tại điểm giữa của khoảng).

Một ánh xạ (hay phép ứng) từ không gian metric  $(E, d)$  vào không gian metric  $(E', d')$  thường được viết dưới dạng  $f: E \rightarrow E'$  và giá trị của mỗi điểm  $p \in E$  cũng thường được viết là  $f(p) \in E'$ .

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Ánh xạ  $f: E \rightarrow E'$  được gọi là *liên tục tại điểm*  $p_0 \in E$  nếu, với mỗi  $\varepsilon > 0$  cho trước, tồn tại số  $\delta > 0$  sao cho nếu  $p \in E$  và  $d(p_0, p) < \delta$  thì  $d'(f(p_0), f(p)) < \varepsilon$ .

Việc cho trước một số  $\varepsilon > 0$  cũng có nghĩa là cho trước một *quả cầu* mở (với bán kính  $\varepsilon$  và tâm tại  $f(p_0)$ ) và việc tồn tại số  $\delta > 0$  cũng có thể được xem như sự tồn tại của một *quả cầu* mở (bán kính  $\delta$  và tâm tại  $p_0$ ). Cho nên, định nghĩa trên có thể viết lại dưới dạng sau đây:

**ĐỊNH NGHĨA 2.** Ánh xạ  $f: E \rightarrow E'$  được gọi là *liên tục tại điểm*  $p_0 \in E$  nếu, với mỗi *quả cầu* mở tâm tại  $f(p_0)$ , ta tìm được *quả cầu* mở tâm tại  $p_0$ , sao cho ảnh của nó qua  $f$  nằm hoàn toàn trong *quả cầu* trước.

Có một quả cầu mở với tâm tại một điểm nào đó cũng tức là ta có một tập mở chứa điểm đó. Ngược lại, có một tập mở chứa một điểm nào đó thì ta cũng có một

quả cầu mở nhận nó làm tâm. Từ nhận xét này ta dễ dàng suy ra định nghĩa trên là tương đương với định nghĩa sau đây:

**ĐỊNH NGHĨA 3.** Ánh xạ  $f : E \rightarrow E'$  được gọi là **liên tục tại điểm**  $p_0 \in E$  nếu, với mỗi tập mở chứa điểm  $f(p_0)$  ta tìm được tập mở chứa  $p_0$  sao cho ảnh của nó qua  $f$  nằm hoàn toàn trong tập mở trước.

Khi  $f : E \rightarrow E'$  liên tục tại mọi điểm trong  $E$  thì ta nói nó **liên tục trên  $E$** .

**ĐỊNH NGHĨA 4.** Nếu  $f$  liên tục trên  $E$  và có ánh xạ ngược từ tập ảnh  $Y := f(E)$  vào  $E$  cũng liên tục, thì ta nói  $f$  là một phép đồng phôi lên ảnh. Khi ấy ta cũng nói hai tập  $E$  và  $Y$  là đồng phôi với nhau.

**MỆNH ĐỀ.** Ánh xạ  $f : E \rightarrow E'$  là **liên tục trên  $E$**  khi và chỉ khi, với mỗi tập mở  $U \subset E'$ , tập nghịch ảnh của nó  $f^{-1}(U) := \{p \in E : f(p) \in U\}$  là một tập mở trong  $E$ .

**Chứng minh.** ( $\Rightarrow$ ) Với  $f$  liên tục, ta chỉ ra rằng với tập mở  $U \subset E'$  ta có  $f^{-1}(U)$  là mở trong  $E$ . Lấy điểm  $p$  bất kỳ trong  $f^{-1}(U)$ , ta có  $f(p) \in U$  và, do  $U$  là mở, từ Định nghĩa 3 ta tìm được tập mở  $V$  chứa  $p$  sao cho  $f(V) \subset U$ . Điều này có nghĩa là  $V \subset f^{-1}(U)$  và như vậy nghĩa là có cả một lân cận của  $p$  nằm trong  $f^{-1}(U)$ .

( $\Leftarrow$ ) Ngược lại ta có, với mỗi tập mở  $U \subset E'$ , tập  $f^{-1}(U)$  là mở trong  $E$ . Ta chỉ ra rằng  $f$  là liên tục tại mỗi điểm  $p \in E$  bất kỳ. Thật vậy, giả thiết cho thấy rằng nghịch ảnh của mỗi quả cầu mở tâm tại  $f(p)$  (với bán kính  $\varepsilon > 0$  cho trước) sẽ là một tập mở  $V$  (trong đó có điểm  $p$ ), cho nên tồn tại một quả cầu tâm tại  $p$  (với bán kính  $\delta$  nào đó) nằm hoàn toàn trong  $V$ . Như vậy, với mỗi  $\varepsilon > 0$  cho trước tồn tại  $\delta > 0$  sao cho  $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \varepsilon)$ , và điều này có nghĩa là  $f$  liên tục tại  $p$ .

Mệnh đề đã được chứng minh xong.

**Nhận xét.** 1) Vì  $f^{-1}(E' \setminus U) = E \setminus f(U)$  cho nên mệnh đề trên đúng nếu thay “mở” bằng “đóng”, tức là  $f$  liên tục trên  $E$  khi và chỉ khi ảnh ngược của tập đóng là tập đóng.

2) Nếu  $f$  liên tục trên  $E$  thì ảnh của tập đóng (mở) không nhất thiết là đóng (mở).

Thí dụ cho  $U = \left\{ \left( x, \frac{1}{x} \right) : x > 0 \right\}$  là tập đóng trong  $\mathbb{R}^2$ . Phép chiếu  $\left( x, \frac{1}{x} \right) \mapsto x$  là ánh xạ liên tục từ  $\mathbb{R}^2$  vào  $\mathbb{R}$  và ảnh của  $U$  là tập không đóng.

Ta có thể đưa vào khái niệm *giới hạn* của ánh xạ trong không gian metric tương tự như đã làm trong trường hợp hàm số. Cụ thể là

Điểm  $q \in E'$  được gọi là **giới hạn** của ánh xạ  $f$  tại điểm tự  $p_0 \in E$  nếu, với mỗi  $\varepsilon > 0$  cho trước, tồn tại số  $\delta > 0$  sao cho nếu  $p \in E \setminus p_0$  và  $d(p_0, p) < \delta$  thì  $d'(q, f(p)) < \varepsilon$ .

Tính duy nhất của giới hạn (nếu tồn tại) được chứng minh hoàn toàn tương tự như trường hợp hàm số trước đây, và người ta cũng ký hiệu giới hạn của  $f$  tại  $p_0$  là  $\lim_{p \rightarrow p_0} f(p)$ . (Lưu ý rằng khi lấy giới hạn của  $f$  tại  $p_0$  ta không đòi hỏi hàm  $f$  phải xác định tại điểm này, mà chỉ cần  $p_0$  là một điểm tự của miền xác định). Khi  $f$  là liên tục tại điểm tự  $p_0$  thì nó phải xác định tại  $p_0$  và

$$\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = f(p_0).$$

Hầu hết các tính chất cơ bản về **giới hạn** và **hàm liên tục** (mỗi quan hệ giữa giới hạn của hàm và giới hạn của dãy, tính liên tục của hàm hợp, tính bị chặn và tính liên tục đều của hàm liên tục trên tập compact, v.v...) được chứng minh trước đây cho trường hợp hàm số (xác định trên trực số) vẫn còn đúng cho các ánh xạ trên không gian metric. Với ánh xạ (xác định trên không gian metric) nhận giá trị trên trực số thì tính chất của **các phép toán** trên **giới hạn** và trên **các hàm liên tục** vẫn giữ nguyên hiệu lực, cũng như tính đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm liên tục trên tập compact. (Phương pháp chứng minh trước đây đã được lựa chọn để hoàn toàn có thể áp dụng được cho trường hợp tổng quát, cho nên người đọc có thể tự mình chứng minh lại các định lý này như các bài tập).

Để đơn cử chúng ta chứng minh kết quả quan trọng sau đây:

**ĐỊNH LÝ.** Giả thiết  $f$  là ánh xạ liên tục từ không gian metric  $(E, d)$  vào không gian metric  $(E', d')$  và  $A$  là tập compact trong  $E$ . Khi ấy  $f(A)$  là tập compact. Hơn nữa, nếu  $E' = \mathbb{R}$  thì  $f$  đạt các giá trị cực đại và cực tiểu trên tập  $A$ .

**Chứng minh.** Lấy  $y_n \in f(A)$  bất kỳ. Ta phải chỉ ra rằng  $\{y_n\}$  có dãy con hội tụ trong  $f(A)$ . Thực vậy, chọn  $x_n \in A$  sao cho  $f(x_n) = y_n$ . Vì  $A$  là compact nên dãy  $\{x_n\}$  có dãy con  $\{x_{n(k)}\}$  hội tụ tới  $x_0$  thuộc  $A$ . Do  $f$  là liên tục nên  $\{f(x_{n(k)})\}$  hội tụ tới  $f(x_0)$ . Vậy  $\{y_{n(k)}\}$  hội tụ tới  $f(x_0) \in f(A)$ . Chứng tỏ  $f(A)$  là compact.

Trong trường hợp  $E'$  là không gian  $1$ -chiều thì tập compact  $f(A)$  có phần tử lớn nhất và nhỏ nhất, và ánh ngược của chúng chính là các điểm cực đại và cực tiểu của ánh xạ  $f$  trên  $A$ .

Một ví dụ điển hình về ánh xạ liên tục trong không gian nhiều chiều được cho bởi mệnh đề sau:

**MỆNH ĐỀ.** Mọi ánh xạ tuyến tính  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  là liên tục.

**Chứng minh.** Đối với ánh xạ tuyến tính  $A$  ta có

$$\|A(x) - A(x_0)\| = \|A(x - x_0)\| \leq \|A\| \cdot \|x - x_0\|.$$

Cho nên khi  $x \rightarrow x_0$  thì từ định lý kép ta suy ra ngay  $\lim_{x \rightarrow x_0} \|A(x) - A(x_0)\| = 0$  và điều này có nghĩa là  $\lim_{x \rightarrow x_0} A(x) = A(x_0)$ . Mệnh đề đã được chứng minh.

### 1.2.7. Không gian siêu metric

Trong nhận dạng ta thường có một số hình mẫu nhất định. Muốn xem một hình cho trước thuộc mẫu nào ta chỉ cần đặt nó lên các mẫu và xem sự sai lệch nào ít nhất thì có thể cho kết luận được. Tuy nhiên cần chính xác hóa sự sai lệch giữa các hình. Thí dụ trong không gian metric  $(E, d)$  hai điểm trùng nhau khi và chỉ khi khoảng cách giữa chúng bằng 0. Nếu như cho hai tập  $A, B \subseteq E$  thì liệu khi sử dụng khoảng cách có thể kết luận chúng trùng nhau hay không? Rõ ràng cách hiểu khoảng cách thông thường không cho được kết luận đúng. Thí dụ ta biết khoảng cách giữa Việt Nam và Trung Quốc bằng 0 vì hai nước có chung biên giới, nhưng hai nước này không trùng nhau. Trong mục này chúng ta sẽ đưa ra một khái niệm khoảng cách giữa hai tập trong không gian metric nhằm đánh giá sự khác nhau giữa chúng và nhận biết khi nào chúng bằng nhau. Khoảng cách mới này được gọi là *khoảng cách Hausdorff*, hay *siêu metric*.

Cho  $A$  là một tập con khác rỗng trong không gian metric  $(E, d)$ . Khoảng cách từ điểm  $p \in E$  tới  $A$  là đại lượng

$$d(p, A) = \inf_{x \in A} d(p, x).$$

Nhận xét rằng  $d(p, \cdot)$  là một hàm số xác định (không âm) trên  $A$  nên  $d(p, A)$  là một số hữu hạn (do  $A$  là tập khác rỗng).

**Thí dụ.** 1)  $E = \mathbb{R}^2$  với metric thông thường,  $A$  là hình tròn đơn vị tâm 0. Khi ấy

$$d(p, A) = \begin{cases} 0 & \text{khi } \|p\| \leq 1 \\ \|p\| - 1 & \text{khi } \|p\| > 1 \end{cases}$$

2)  $E = C[0,1]$  (tập các hàm số liên tục trên đoạn  $[0,1]$ ), với metric

$$d(x, y) := \max \{ |x(t) - y(t)| : 0 \leq t \leq 1 \}.$$

Cho họ *hàm tuyến tính*  $A = \{\alpha \cdot t : -1 \leq \alpha \leq 1\}$  và hàm  $p(t) = 2t$ . Khi ấy

$$d(p, A) = \inf_{-1 \leq \alpha \leq 1} (\max \{ |2t - \alpha t| : 0 \leq t \leq 1 \}) = 1.$$

**BỒ ĐỀ 1.** Điểm  $p \in E$  là một điểm thuộc  $A$  hay điểm tụ của  $A$  khi và chỉ khi  $d(p, A) = 0$ . Nếu  $A$  đóng thì  $p \in A$  khi và chỉ khi  $d(p, A) = 0$ .

**Chứng minh.** Nếu  $p \in A$  thì hiển nhiên  $d(p, A) \leq d(p, p) = 0$ . Nếu  $p$  là điểm tụ của  $A$  thì tồn tại dãy  $\{p_n\} \subseteq A$  hội tụ tới  $p$ . Khi ấy  $d(p, p_n)$  dần tới 0 và do đó  $d(p, A) = 0$ .

Trái lại, giả sử  $d(p, A) = 0$ . Theo định nghĩa, tồn tại dãy  $\{p_n\} \subseteq A$  để  $d(p, p_n)$  dần tới 0. Khi ấy, mỗi quả cầu tâm  $p$  bán kính  $\varepsilon > 0$  chứa mọi điểm  $p_n$  với  $n$  đủ lớn. Nếu  $p = p_n$ , với  $n$  nào đó, thì  $p$  là điểm thuộc  $A$ ; nếu  $p \neq p_n$  với mọi  $n$  thì  $p$  là điểm tụ của  $A$ .

Phần hai của bỗ đề suy trực tiếp từ phần đầu.

Bây giờ cho  $A$  và  $B$  là hai tập compact khác rỗng trong  $E$ . Độ lệch của  $A$  đối với  $B$  là đại lượng

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B).$$

Tương tự, độ lệch của  $B$  đối với  $A$  là đại lượng

$$e(B, A) = \sup_{y \in B} d(y, A).$$

Lưu ý rằng độ lệch của  $A$  đối với  $B$  khác độ lệch của  $B$  đối với  $A$ . Thí dụ  $A \subseteq B$  và  $A \neq B$  thì  $e(A, B) = 0$  trong khi đó  $e(B, A) \neq 0$  (vì tồn tại  $y \in B$  để  $y \notin A$ . Do  $A$  đóng nên theo bỗ đề  $d(y, A) > 0$ , suy ra  $e(B, A) \neq 0$ ).

**Bỗ đề 2.** Độ lệch  $e(A, B)$  là hữu hạn và tồn tại điểm  $a \in A$  sao cho

$$e(A, B) = d(a, B).$$

**Chứng minh.** Vì  $A$  là compact nên giới nội. Do đó với  $y_0 \in B$  cố định, tìm được  $\alpha > 0$  để  $d(x, y_0) \leq \alpha$  với mọi  $x \in A$ . Khi ấy  $d(x, B) \leq \alpha$  với mọi  $x \in A$ , cho nên  $e(A, B)$  là hữu hạn. Theo định nghĩa của  $e(A, B)$  tồn tại  $x_n \in A$  để  $e(A, B) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, B)$ . Do  $A$  compact nên  $\{x_n\}$  có dãy con hội tụ tới  $a \in A$  (và không làm mất tổng quát ta có thể xem dãy con này chính là  $\{x_n\}$ ). Khi ấy

$$d(a, B) \leq e(A, B) \leq \lim(d(x_n, a) + d(a, B)) = d(a, B)$$

cho nên  $e(A, B) = d(a, B)$ , điều cần chứng minh.

Khoảng cách Hausdorff (hay còn gọi siêu metric) giữa  $A$  và  $B$  là đại lượng

$$h(A, B) = \max \{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Ký hiệu  $\mathbf{E}$  là tập hợp mà các phân tử của nó là các tập con compact, khác rỗng trong  $E$ . Hiển nhiên  $\mathbf{E}$  chứa mọi điểm của  $E$  vì điểm trong  $E$  cũng là tập compact.

Dưới đây ta sẽ chỉ ra rằng  $h$  là một metric trên  $\mathbf{E}$  và do đó không gian  $(\mathbf{E}, h)$  được gọi là không gian siêu metric.

**ĐỊNH LÝ.** Siêu metric  $h$  có những tính chất sau đây

- (v)  $h(A,B)$  là số không âm với mọi  $A,B \in E$ ;
- (vi)  $h(A,B) = 0$  khi và chỉ khi  $A=B$ ;
- (vii)  $h(A,B) = h(B,A)$  với mọi  $A,B \in E$  ;
- (viii)  $h(A,B) \leq h(A,C) + h(C,B)$  với mọi  $A,B,C \in E$  ;
- (ix)  $h(\{x\}, \{y\}) = d(x,y)$  nếu  $x,y \in E$  .

**Chứng minh.** Các tính chất (i), (ii), (iii) và (v) suy ngay từ định nghĩa. Ta chỉ còn chứng minh (iv). Từ Bước đê 2 suy ra với mọi  $x \in A$ , tồn tại  $c \in C$  đê

$$d(x,B) \leq d(x,c) + d(c,B) \leq d(x,C) + d(c,B) \quad \text{với } d(x,C) = d(x,c).$$

Suy ra  $e(A,B) \leq e(A,C) + e(C,B)$ . Tương tự  $e(B,A) \leq e(B,C) + e(C,A)$ .

Tiếp theo, do (iii), ta có

$$\begin{aligned} h(A,B) &= \max \{e(A,B), e(B,A)\} \leq \max \{e(A,C) + e(C,B), e(B,C) + e(C,A)\} \\ &\leq \max \{h(A,C) + h(C,B), h(B,C) + h(C,A)\} \leq h(A,C) + h(C,B). \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh xong.

Từ định lý trên chúng ta có thể khảo sát ( $E, h$ ) như một không gian metric bình thường. Không gian siêu metric được dùng để nghiên cứu tính hội tụ của các tập, của các ánh xạ và tính ổn định trong nhiều lĩnh vực quan trọng của Toán học ứng dụng.

<b><i>Chương 1.....</i></b>	<b>1</b>
<b>Không gian <math>\mathbb{R}^n</math> &amp;.....</b>	<b>1</b>
<b>Không gian metric .....</b>	<b>1</b>
<b>    1.1. Không gian <math>\mathbb{R}^n</math>.....</b>	<b>1</b>
1.1.1. Điểm trong không gian $n$ -chiều.....	2
1.1.2. Vectơ trong không gian $n$ -chiều.....	3
1.1.3. Tích vô hướng .....	4
1.1.4. Chuẩn của vectơ .....	5
1.1.5. Ánh xạ tuyến tính.....	7
<b>    1.2. Không gian metric.....</b>	<b>10</b>
1.2.1. Định nghĩa và các ví dụ.....	10
1.2.2. Tập đóng và tập mở trong không gian metric .....	12
1.2.3. Hồi tụ trong không gian metric .....	15
1.2.4. Tính dày dì trong không gian metric .....	17
1.2.5. Tính compact trong không gian metric .....	19
1.2.6. Ánh xạ trong không gian metric.....	24
1.2.7. Không gian siêu metric .....	27

Trang cuối cùng là 29

# **Bài tập và tính toán thực hành Chương 1**

<b>1. Không gian <math>\mathbb{R}^n</math></b> .....	<b>30</b>
1.1. Điểm và vectơ trong không gian $n$ -chiều .....	30
1.2. Ánh xạ tuyến tính .....	31
<b>2. Không gian metric</b> .....	<b>32</b>
2.1. Các thí dụ về không gian metric.....	32
2.2. Tập đóng và tập mở trong không gian metric .....	33
2.3. Hội tụ trong không gian metric .....	34
2.4. Tính dày đặc trong không gian metric .....	34
2.5. Tính compact trong không gian metric .....	35
2.6. Ánh xạ liên tục trong không gian metric .....	35
<b>3. Thực hành tính toán</b> .....	<b>36</b>
3.1. Khai báo vectơ và ma trận.....	37
3.2. Tính chuẩn của vectơ và khoảng cách giữa 2 điểm.....	38
3.3. Các phép toán trên vectơ .....	39
3.4. Các phép toán trên ma trận.....	40

## **1. Không gian $\mathbb{R}^n$**

### **1.1. Điểm và vectơ trong không gian $n$ -chiều**

**Bài 1.** Cho ba điểm  $a = (2, 4, 2, 4, 2)$ ;  $b = (6, 4, 4, 4, 6)$ ,  $c = (5, 7, 5, 7, 2)$  trong  $\mathbb{R}^5$ .

Hãy tìm các vectơ  $b - a$ ,  $c - b$ ,  $a - c$ , và kiểm tra các tính chất *tổng của hai điểm* và *tích của một điểm với một số* theo định nghĩa.

**Bài 2.** Góc giữa hai vectơ khác không  $x$  và  $y$  là góc  $\alpha$  (trong đoạn từ 0 đến  $\pi$  mà  $\cos \alpha$  xác định bởi:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}.$$

Hãy tìm độ dài các cạnh và góc trong của tam giác có đỉnh là các điểm được xác định bởi các tọa độ:

$$a = (2, 4, 2, 4, 2); \quad b = (6, 4, 4, 4, 6), \quad c = (5, 7, 5, 7, 2).$$

**Bài 3.** Cho bốn điểm  $a, b, c, d$  trong không gian  $\mathbb{R}^n$ . Ta nói  $abcd$  là một *hình bình hành* nếu các cặp vectơ  $ab, cd$  và  $bc, da$  song song (xem định nghĩa trong 1.1.2.) cùng đôi một. Dùng định nghĩa góc giữa hai vectơ, hãy chứng minh định lý: Tông bình phương đường chéo của hình bình hành bằng tổng bình phương các cạnh của nó.

**Bài 4.** Chứng minh định lý hàm số cos trong không gian  $\mathbb{R}^n$ : Bình phương độ dài một cạnh của tam giác bằng tổng bình phương độ dài hai cạnh còn lại trừ đi tích của hai cạnh ấy nhân với cosin của góc xen giữa.

**Bài 5.** Hai vectơ gọi là *vuông góc* với nhau khi tích vô hướng của chúng bằng 0. Tập hợp các vectơ vuông góc với tất cả các vectơ trong tập  $A$  gọi là *phản bù trực giao* của nó và thường được ký hiệu là  $A^\perp$ . Hãy chứng minh rằng  $A^\perp$  lập thành một *không gian con*, tức là có những tính chất sau:

- (i)  $a \in A^\perp, b \in A^\perp \Rightarrow a + b \in A^\perp;$
- (ii)  $\alpha \in \mathbb{R}, a \in A^\perp \Rightarrow \alpha a \in A^\perp.$

## 1.2. Ánh xạ tuyến tính

**Bài 1.** Cho ánh xạ  $A$  từ không gian  $\mathbb{R}^3$  vào chính nó sao cho

$$A(x, y, z) = ((a+1)x + y + z, x + (a+1)y + z, x + y + (a+1)z),$$

trong đó  $a$  là một số thực nào đó.

1. Chứng tỏ  $A$  là một ánh xạ tuyến tính.
2. Với giá trị nào của  $a$  thì  $A$  là không suy biến và với giá trị nào của  $a$  thì  $A$  suy biến?

**Bài 2.** Cho ánh xạ  $A$  từ không gian  $\mathbb{R}^4$  vào  $\mathbb{R}^3$ :

$$A(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_4, 2x_2 + x_3 - x_4),$$

với mọi  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Chứng tỏ  $A$  là một ánh xạ tuyến tính. Tìm  $\|A\|$ .

**Bài 3.** Chứng tỏ rằng *phép chiếu vuông góc*  $A$  từ không gian  $\mathbb{R}^3$  xuống  $\mathbb{R}^2$ :

$$A(\mathbf{x}) = (x_1, x_2), \text{ với mọi } \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

là một ánh xạ tuyến tính. Tìm  $\|A\|$ .

**Bài 4.** Ta đưa vào khái niệm *tích vô hướng* tổng quát hơn trong lý thuyết như sau:

Ánh xạ  $\varphi$  từ  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  vào  $\mathbb{R}$  được gọi là *dạng song tuyếng đối xứng xác định dương* trên  $\mathbb{R}^n$  nếu nó thỏa mãn các tính chất:

1.  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  với mọi  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ;
2.  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  với mọi  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ;
3.  $\varphi(\alpha \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha \cdot \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  với mọi  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  và  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
4.  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$  với mọi  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ;  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$  khi và chỉ khi  $\mathbf{x} = 0$ .

Số thực  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  được gọi là *tích vô hướng* của  $\mathbf{x}$  và  $\mathbf{y}$  và được ký hiệu là  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ . Hãy chứng minh rằng: nếu  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  là hai vectơ trong  $\mathbb{R}^n$  thì  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  là dạng song tuyếng đối xứng xác định dương, tức là *tích vô hướng theo định nghĩa trên*.

## 2. Không gian metric

### 2.1. Các thí dụ về không gian metric

- Bài 1.** Tập hợp các điểm trên mặt phẳng với khoảng cách giữa hai điểm  $M_1(x_1, y_1)$  và  $M_2(x_2, y_2)$  được tính theo công thức  $r(M_1, M_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$  có phải là không gian metric không?
- Bài 2.** Tập hợp các số thực, với khoảng cách giữa hai số  $x$  và  $y$  được tính theo công thức  $r(x, y) = \sqrt{|x - y|}$  có phải là không gian metric không?
- Bài 3.** Tập hợp các số thực, với khoảng cách giữa hai số  $x$  và  $y$  được tính theo công thức  $r(x, y) = |\arctan(x - y)|$  có phải là không gian metric không?
- Bài 4.** Tập hợp các số thực, với khoảng cách giữa hai số  $x$  và  $y$  được tính theo công thức  $r(x, y) = \sin^2(x - y)$  có phải là không gian metric không?
- Bài 5.** Chứng minh rằng tập tất cả các dãy số thực vô hạn bị chặn lập thành một không gian metric, nếu khoảng cách giữa hai dãy  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  và  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$  được tính theo công thức:  $r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{i=1, \dots, \infty} |x_i - y_i|$ .
- Bài 6.** Chứng minh rằng tập tất cả các dãy số thực vô hạn  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  có chuỗi  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$  hội tụ lập thành một không gian metric, nếu khoảng cách giữa

hai dãy  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  và  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$  được tính theo công thức

$$r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|.$$

**Bài 7.** Tập tất cả các hàm số liên tục trên đoạn  $[a, b]$  với khoảng cách giữa hai hàm số bất kì  $x(t)$  và  $y(t)$  được tính theo công thức

$$r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt}$$

có phải là không gian metric không?

**Bài 8.** Chứng minh rằng tập tất cả các hàm số liên tục trên đoạn  $[a, b]$  lập thành một không gian metric, nếu khoảng cách giữa hai hàm số bất kì  $x(t)$  và

$$y(t) \text{ được tính theo công thức } r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt.$$

**Bài 9.** Chứng minh rằng tập  $C[a, b]$  tất cả các hàm số liên tục trên đoạn  $[a, b]$  lập thành một không gian metric, nếu khoảng cách giữa hai hàm số bất kì  $x(t)$  và  $y(t)$  được tính theo công thức  $r(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$ .

**Bài 10.** Chứng minh rằng tập tất cả các hàm số bị chặn trên đoạn  $[a, b]$  lập thành một không gian metric, nếu khoảng cách giữa hai hàm số bất kì  $\mathbf{x} = x(t)$  và  $\mathbf{y} = y(t)$  được tính theo công thức  $r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$ .

## 2.2. Tập đóng và tập mở trong không gian metric

**Bài 1.** Chứng minh trực tiếp (không dùng luật đối ngẫu  $E \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} E \setminus A_i$ ) rằng, hợp của một số hữu hạn các tập đóng trong không gian metric là tập đóng.

**Bài 2.** Chứng minh trực tiếp (không dùng luật đối ngẫu  $E \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} E \setminus A_i$ ) rằng, giao của một tập tùy ý các tập đóng trong không gian metric là tập đóng.

**Bài 3.** Cho một dãy các đường tròn đồng tâm trong mặt phẳng có các bán kính  $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$ . Họp của chúng có phải là một tập đóng không?

**Bài 4.** Cho một dãy các hình tròn đồng tâm trên mặt phẳng có các bán kính  $r_1 > r_2 > \dots > r_n > \dots$ . Họp của chúng có phải là một tập đóng không?

- Bài 5.** Cho một dãy các hình tròn đồng tâm trên mặt phẳng có các bán kính  $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$ . Hợp của chúng có phải là một tập đóng không? Có phải là một tập mở không?

### 2.3. Hội tụ trong không gian metric

- Bài 1.** Cho  $M$  là một tập nào đó trên mặt phẳng. Biết rằng cận dưới đúng của mọi khoảng cách giữa các điểm khác nhau thuộc tập hợp này là một số dương. Chứng minh rằng tập hợp  $M$  không có điểm tụ.

- Bài 2.** Cho  $M$  là một tập nào đó trong không gian metric  $E$ . Tập tất cả những điểm tụ của  $M$  được gọi là *tập dẫn xuất* của  $M$  và ký hiệu là  $M'$ . Tập tất cả những điểm giới hạn của  $M'$  được gọi là *tập dẫn xuất thứ hai* của  $M$  và ký hiệu là  $M''$ .

Hãy xây dựng một tập  $M$  mà tập dẫn xuất  $M'$  của nó khác trống nhưng tập dẫn xuất thứ hai  $M''$  là tập trống.

- Bài 3.** Cho  $M$  là một tập nào đó trong không gian metric  $E$ . Điểm  $x_0 \in E$  được gọi là *điểm biên* của  $M$  nếu trong lân cận bất kỳ của điểm này có chứa những điểm thuộc  $M$  và những điểm không thuộc  $M$ .

1. Hãy tìm các ví dụ về tập hợp trên mặt phẳng không có điểm biên.
2. Hãy tìm một ví dụ về tập hợp trên mặt phẳng có điểm biên nhưng mọi điểm biên không thuộc tập hợp này.
3. Tìm một ví dụ về tập hợp trên mặt phẳng chứa một phần các điểm biên của nó.
4. Hãy tìm một ví dụ về tập hợp không đếm được trên mặt phẳng gồm toàn điểm biên.

### 2.4. Tính đầy đủ trong không gian metric

- Bài 1.** Cho  $E$  là không gian metric (đủ hoặc không đủ) và  $X$  là một tập con không đóng của nó. Chứng minh rằng  $X$  không phải là không gian metric đủ.

- Bài 2.** Chứng minh rằng không gian  $C_1[a,b]$  các hàm số liên tục trên đoạn  $[a,b]$  với khoảng cách  $r(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$  là một không gian metric không đầy đủ.

- Bài 3.** Chứng minh rằng  $C[a,b]$  là một không gian metric đầy đủ.

## 2.5. Tính compact trong không gian metric

- Bài 1.** Cho một tập đếm được  $M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right\}$ . Phủ lên  $M$  một hệ thống các khoảng:  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon), (\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2}), \dots, (\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n})$ , với  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Từ phủ này có thể trích ra một phủ con hữu hạn hay không?
- Bài 2.** Cho một tập đếm được  $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ . Phủ lên  $N$  một hệ thống các khoảng:  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon), (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon), \dots, (n - \varepsilon, n + \varepsilon), \dots$  với  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Từ phủ này có thể trích ra một phủ con hữu hạn hay không?
- Bài 3.** Cho một tập đóng đếm được  $M = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right\}$ . Phủ lên tập này một hệ thống các khoảng:  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon), (\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2}), \dots, (\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n})$  và  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , ở đây  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Hãy trích từ phủ này một phủ con hữu hạn.
- Bài 4.** Chứng minh rằng mọi tập compact là đóng và bị chặn. Hãy xây dựng một tập đóng bị chặn trong không gian  $C[a, b]$  không phải là tập compact.
- Bài 5.** Xét một hình tròn mở  $C$  bán kính đơn vị và tâm ở điểm 0. Vẽ một đường tròn đồng tâm bán kính  $\frac{1}{3}$ . Lấy mỗi điểm của  $C$  làm tâm, dựng một họ tất cả các hình tròn mở bán kính  $\frac{2}{3}$ . Các hình tròn mở bán kính  $\frac{1}{3}$  và  $\frac{2}{3}$  này lập thành một phủ của  $C$ . Chứng minh rằng từ phủ này không thể lấy ra được một phủ con hữu hạn. Hãy lấy ra một phủ đếm được.

## 2.6. Ánh xạ liên tục trong không gian metric

- Bài 1.** Chứng minh rằng phép chiếu hình học từ mặt phẳng (không gian  $\mathbb{R}^2$ ) lên một đường thẳng (nằm trong mặt phẳng ấy) theo một phương (đường thẳng)  $\Delta$  (trong mặt phẳng ấy, không song song với đường thẳng đã cho) là một ánh xạ liên tục.
- Bài 2.** Hình chiếu của một tập phẳng mở lên một đường thẳng (nằm trong mặt phẳng ấy) có là tập mở trên đường thẳng ấy không?
- Bài 3.** Hình chiếu liên tục của tập phẳng đóng lên một đường thẳng (nằm trong mặt phẳng ấy) có phải bao giờ cũng là tập đóng không?
- Bài 4.** Tạo ảnh của một tập đóng bị chặn trong ánh xạ liên tục có thể là một tập không bị chặn hay không?

**Bài 5.** Hãy chỉ ra ví dụ ánh xạ ngược của một ánh xạ liên tục 1-1 từ một tập  $E$  đóng không bị chặn lên tập  $E_1$  không phải là liên tục.

**Bài 6.** Cho  $f$  là ánh xạ liên tục 1-1 từ một tập  $E$  đóng bị chặn trong  $\mathbb{R}^n$  lên tập  $E_1 \subset \mathbb{R}^n$ . Chứng minh rằng ánh xạ ngược từ tập  $E_1$  lên tập  $E$  là liên tục.

**Bài 7.** Chứng minh rằng nếu các tạo ảnh của mọi hình tròn mở trong ánh xạ  $f$  từ không gian  $\mathbb{R}^n$  lên mặt phẳng  $\mathbb{R}^2$  là các tập mở, thì ánh xạ là liên tục.

**Bài 8.** Cho hàm  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$  được xác định theo công thức:

$$y_1 = \begin{cases} \arctan \frac{x_2}{x_1}, & \text{khi } x_1 \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{khi } x_1 = 0; x_2 > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{khi } x_1 = 0; x_2 < 0 \end{cases}$$

$$y_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Tìm tạo ảnh của hình chữ nhật  $-\frac{\pi}{2} \leq y_1 \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $a \leq y_2 \leq b$ .

**Bài 9.** Hàm  $f(x)$  xác định trên tập  $A$  của không gian metric  $(E, d)$  vào tập số thực  $\mathbb{R}$  được gọi là *liên tục đều* trên  $A$  nếu với mỗi  $\varepsilon > 0$  bất kì, tồn tại một số  $\delta > 0$  sao cho với bất kì  $x_1, x_2$  thuộc  $A$  ta có bất đẳng thức:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Chứng minh định lý: Nếu hàm số liên tục trên tập compact  $A$  thì nó liên tục đều trên tập ấy.

**Bài 10.** Chứng minh rằng không tồn tại song ánh liên tục từ đoạn  $[0,1]$  lên hình vuông đóng  $[0,1] \times [0,1]$ .

### 3. Thực hành tính toán

Phần *thực hành tính toán trên máy* trong giáo trình này nhằm mục đích trước hết là để người đọc thấy rằng mọi thứ ta đã học được thì ta đều có thể làm được. Bạn đọc không cần có kiến thức về máy tính hoặc lập trình cũng có thể dễ dàng nắm được phần này, bởi vì các lệnh tính toán trên máy rất gần với ngôn ngữ toán học thông thường. Chương trình tính toán giới thiệu ở đây là *Maple*, hiện đang được sử dụng phổ biến ở các trường đại học trên thế giới. Muốn tìm hiểu rộng hơn về lĩnh vực này, người đọc có thể tham khảo tài liệu *Tính toán, Lập trình và Giảng dạy Toán học trên Maple*, do chúng tôi biên soạn và đã được Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật ấn hành tháng 4 năm 2002. Ngay cả với bạn đọc chưa có điều kiện tiếp xúc với máy tính, phần này vẫn rất hữu ích vì sẽ biết được máy tính làm việc

nhu thế nào và đặc biệt các *kết quả tính toán trên máy* trình bày ở đây sẽ giúp chúng ta hiểu sâu hơn các chủ đề lý thuyết đã học.

Chủ đề thực hành tính toán trong Chương 1 là tính toán trên các vectơ, cho nên ta sẽ phải sử dụng thư viện (gói) công cụ đại số tuyến tính (**linalg**). Sau khi khởi động chương trình Maple, ta gọi thư viện này ra bằng lệnh:

[> **with(linalg)** :

(nếu không có lệnh này, một số lệnh tiếp theo có thể không được thực hiện). Các lệnh đưa vào máy sẽ được in chữ đậm (như dòng lệnh trên), còn kết quả của nó sẽ được hiển thị ngay dòng dưới.

### 3.1. Khai báo vectơ và ma trận

Muốn khai báo vectơ, thí dụ,  $\mathbf{u} = (1, x, 3, a^3)$  ta có thể dùng một trong các lệnh sau:

1. *Định nghĩa vectơ*:

[> **u:=[1,x,3,a^3]** ;

$$u := [1, x, 3, a^3]$$

[> **u:= vector[1,x,3,a^3]** ;

$$u := [1, x, 3, a^3]$$

2. *Tạo mảng* (4 phần tử):

[> **array(1..4,[1,x,3,a^3])** ;

$$[1, x, 3, a^3]$$

3. Coi vectơ như một **ma trận** và tạo nó như một *ma trận* cấp  $1 \times n$  (vectơ hàng), trong đó hai chỉ số đầu là số dòng và số cột của ma trận:

[> **matrix(1,4,[1,x,3,a^3])** ;

$$[1, x, 3, a^3]$$

Muốn tạo một vectơ cột ta khai báo nó như là *ma trận*  $n \times 1$  chiều:

[> **matrix(4,1,[1,x,3,a^3])** ;

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 3 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

Muốn chuyển vectơ hàng thành vectơ cột ta dùng lệnh chuyển vị (**transpose**):

[> **u:=[1,x,3,a^3]: transpose(u)** ;

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 3 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

### 3.2. Tính chuẩn của vectơ và khoảng cách giữa 2 điểm

1. *Tính chuẩn (độ dài) của vectơ.* Muốn tính chuẩn (độ dài) của một vectơ ta dùng lệnh **norm(u,c)**, trong đó **u** là vectơ, **c** là loại chuẩn. Có mấy loại chuẩn quy ước sau đây:

(i) *Chuẩn vô cùng (infinity)* của vectơ **u** là số lớn nhất trong các trị tuyệt đối của các tọa độ của **u**, tức là nếu  $u = (u_1, \dots, u_n)$  thì

$$\|u\| = \max \{|u_i|, i=1, \dots, n\}.$$

(ii) *Chuẩn bậc k* của vectơ **u** được định nghĩa bằng công thức  $\|u\| = \sqrt[k]{\sum_{i=1}^n |u_i|^k}$ .

**Thí dụ:**

[> **norm([1,-2,2],infinity);**

2

[> **norm([1,-1,2],3);**

$\sqrt[3]{10}$

Khi  $k = 2$  thì chuẩn thường gọi là *chuẩn Euclid* (hay là *chuẩn Frobenius*). Thí dụ:

[> **norm([1,-1,2],2);**

$\sqrt{6}$

[> **norm([1,-1,2],frobenius);**

$\sqrt{6}$

#### 2. Tính khoảng cách giữa hai điểm

Để tính khoảng cách giữa hai điểm *A* và *B* ta cần gọi gói công cụ **student**:

[> **with(student):**

Sau khi khai báo tọa độ của *A* và *B* theo cú pháp

[> **A:=[1,a,5,0,x]; B:=[2,b,6,y,x];**

ta tính khoảng cách của chúng bằng lệnh **distance**.

[> **distance(A,B);**

$$\sqrt{(b-a)^2 + y^2 + 2}$$

Có thể khai báo vectơ và tính khoảng cách của chúng trong cùng một lệnh, như:

```
[> distance([a,b,c,d] , [2,3,4,5] );
          
$$\sqrt{(a-2)^2 + (b-3)^2 + (c-4)^2 + (d-5)^2}$$

```

### 3.3. Các phép toán trên vectơ

#### 1. Nhân một số với một vectơ

Muốn nhân một số với một vectơ, ta khai báo vectơ ấy và thực hiện phép nhân bằng lệnh **\***. Thí dụ, muốn nhân số 3 với vectơ  $v = [m, 2, 3, d]$  ta làm như sau:

Khai báo  $v$ :

```
[> v:=[m,2,3,d] ;
          
$$v := [m, 2, 3, d]$$

```

Thực hiện phép nhân số 3 với  $v$ :

```
[> 3*v ;
          
$$[3m, 6, 9, 3d]$$

```

Cũng có thể chỉ cần thực hiện một lệnh trực tiếp:

```
[> 3*[m,2,3,d] ;
          
$$[3m, 6, 9, 3d]$$

```

#### 2. Cộng trừ hai vectơ

Muốn cộng trừ hai hay nhiều vectơ, trước tiên ta khai báo chúng, sau đó dùng lệnh **+** hoặc **-** thông thường.

**Thí dụ:**

```
[> u:=[3,-2,1,x] :    v:=[2,-4,-3,a] :    w:=[-1,2,2,5] :
[> u+v+w ;
          
$$[4, -4, 0, 5 + a + x]$$

[> 2*u-3*v-5*w ;
          
$$[5, -2, 1, -25 - 3a + 2x]$$

```

Tính *độ dài* của "vectơ trên", với lưu ý rằng Maple ký hiệu "biểu thức trên" là (%):

```
[> norm((%)) , 2) ;
          
$$\sqrt{30 + |25 - 3a + 2x|^2}$$

```

### 3. Tích tích vô hướng của hai vecto

Tích tích vô hướng của hai vecto bằng lệnh **innerprod** hoặc lệnh **dotprod**. Thí dụ, muốn tính tích vô hướng của  $u = [2, 2, -1]$  và  $v = [6, -3, 2]$ , trước tiên ta khai báo 2 vecto này:

```
[> u:=[2,2,-1]; v:=[6,-3,2];
```

Sau đó tính tích vô hướng của hai vecto  $u$  và  $v$  bằng lệnh **innerprod**:

```
[> innerprod(u,v);
```

4

hoặc lệnh **dotprod**:

```
[> dotprod(u,v);
```

4

### 4. Tích tích vecto của hai vecto

Tích vecto của hai vecto  $u = (u_1, u_2, u_3)$  và  $v = (v_1, v_2, v_3)$  trong không gian  $\mathbb{R}^3$  là một vecto có tọa độ được tính theo công thức:

$$(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Muốn tính tích vecto của hai vecto ta dùng lệnh **crossprod(u, v)**. Thí dụ:

```
[> u:=vector([2,2,-1]); v:=vector([6,-3,2]);
```

```
[> crossprod(u,v);
```

[1, -10, -18]

## 3.4. Các phép toán trên ma trận

### 1. Tìm hạng của ma trận (bằng lệnh **rank**)

Thí dụ:

```
[>A:=matrix(3,3,[x,1,0,0,0,1,x*y,y,1]):
```

```
[>rank(A);
```

2

### 2. Tính định thức và ma trận ngược của ma trận

Thí dụ:

Sau khi *định nghĩa* ma trận bằng lệnh

```
[>A:=matrix(3,3,[1/2,-1/3,2,-5,14/3,9,0,11,5/6]):
```

Ta tính *định thức* của ma trận bằng lệnh

[>**det (A)** ;  
-2881/18

và tính ma trận ngược bằng lệnh **inverse**:

[>**inverse (A)** ;

$$\begin{bmatrix} \frac{1852}{2881} & -\frac{391}{2881} & \frac{222}{2881} \\ \frac{75}{2881} & \frac{15}{5762} & \frac{261}{2881} \\ \frac{990}{2881} & \frac{99}{2881} & -\frac{12}{2881} \end{bmatrix}$$

## Chương 2

# Hàm nhiều biến

<b>2.1. Hàm số và phép tính vi phân</b> .....	<b>41</b>
2.1.1. Hàm trong không gian $\mathbb{R}^n$ .....	41
2.1.2. Đạo hàm riêng .....	44
2.1.3. Tính khả vi và gradient .....	46
2.1.4. Quy tắc dây xích.....	49
2.1.5. Đạo hàm theo hướng .....	50
<b>2.2. Công thức Taylor.....</b>	<b>51</b>
2.2.1. Đạo hàm riêng lắp .....	51
2.2.2. Công thức Taylor .....	53
2.2.3. Toán tử vi phân .....	54
<b>2.3. Ứng dụng của đạo hàm.....</b>	<b>57</b>
2.3.1. Điều kiện của cực trị .....	57
2.3.2. Hàm lồi và cực trị của nó .....	58
2.3.3. Bài toán cực trị có điều kiện và nguyên lý Lagrange .....	59
2.3.4. Vi phân toàn phần .....	61

## 2.1. Hàm số và phép tính vi phân

### 2.1.1. Hàm trong không gian $\mathbb{R}^n$

#### *I. Khái niệm*

Việc nghiên cứu các không gian metric tổng quát và các hàm trên đó cho ta một cách nhìn bao quát, cho nên dễ nắm bắt các phương pháp cơ bản của Giải tích toán học. Tuy nhiên cấu trúc đơn giản của không gian (không có các phép toán) làm cho lớp các hàm trên đó cũng trở nên nghèo nàn và việc nghiên cứu chúng không thể đi được xa (vì thiếu công cụ). Đó chính là lý do khiến người ta quan tâm nghiên cứu các không gian có cấu trúc đặc biệt như  $\mathbb{R}^n$  và thiết lập các công cụ sắc bén cho việc nghiên cứu các hàm số trên đó. Một điều đáng lưu ý rằng chính việc

nghiên cứu trên các không gian cụ thể (và các lớp hàm cụ thể) đã làm nảy sinh những ý tưởng mới, cho phép người ta mở rộng tầm nghiên cứu trên các không gian trùu tượng (tổng quát). Chính vì vậy, trong giáo trình này, chúng ta đặt trọng tâm là nghiên cứu các hàm trên  $\mathbb{R}^n$ . Nếu nắm được các phương pháp làm việc cơ bản trên không gian  $\mathbb{R}^n$  thì người đọc sẽ không gặp khó khăn trong việc mở rộng nó cho những trường hợp tổng quát hơn.

Như vậy, với  $S$  là một tập trong  $\mathbb{R}^n$ , *hàm số* (xác định trên  $S$ ) là một *phép ứng* từ  $S$  vào trực số thực  $\mathbb{R}$ .

Lưu ý rằng *biến số* ở đây là các phần tử của  $\mathbb{R}^n$  nên nó có  $n$  thành phần (tọa độ) và mỗi thành phần có thể được xem như một *biến độc lập* (cho nên người ta hay gọi hàm xác định trên  $\mathbb{R}^n$  là *hàm nhiều biến*).

**Thí dụ.** Trong  $\mathbb{R}^2$  ta có thể xác định một hàm số 2 biến bằng *phép ứng* mỗi điểm  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  với một số bằng  $x^2 + y^2$ . Một cách ngắn gọn hơn, ta nói hàm được cho bằng công thức  $f(x,y) = x^2 + y^2$ .

Thông thường, khi không chỉ định rõ tập  $S$  và hàm được cho bằng một công thức nào đó thì người ta luôn hiểu ngầm rằng  $S$  là tập tất cả những điểm tại đó biểu thức có nghĩa.

**Thí dụ.** Khi cho hàm bằng công thức  $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  chúng ta hiểu rằng hàm không xác định tại điểm  $\mathbf{0} = (0,0)$ .

Việc tìm miền xác định của một hàm số thường được quy về việc giải hệ bất phương trình (nhiều ẩn) và sẽ được đề cập nhiều hơn trong phần tính toán thực hành.

## 2. Đồ thị của hàm nhiều biến

Người ta định nghĩa *đồ thị* của hàm số  $n$  biến là một tập điểm trong không gian  $(n+1)$ -chiều xác định như sau

$$G_f := \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S\},$$

trong đó  $S$  là miền xác định của hàm số.

Khi  $n = 1$  đồ thị của  $f$  có thể được biểu diễn một cách tương minh trên mặt phẳng (không gian 2- chiều) và ta đã làm điều này một cách kỹ lưỡng trong Giải tích một biến.

Khi  $n = 2$  thì vấn đề khó khăn hơn vì trên mặt phẳng (tờ giấy, màn hình,...) không dễ gì biểu diễn vật thể 3 chiều. Nếu không có năng khiếu nhất định về đồ họa thì người ta chỉ còn cách dựa vào sự trợ giúp của các công cụ kỹ thuật, trước hết là máy tính. Bằng một lệnh đơn giản (sẽ được giới thiệu và thực hành kỹ trong phần thực hành tính toán ở cuối chương), máy sẽ vẽ cho ta đồ thị của hàm 2 biến trong không gian 3 chiều một cách không mấy khó khăn.

**Thí dụ.** Đồ thị của hàm

$$f(x, y) = -\sqrt{(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2}.$$

được máy mô tả như trong Hình 2.1. Tuy nhiên, ngoài phương pháp biểu diễn trực tiếp như trên, người ta còn có một phương pháp khác để hình dung về đồ thị của hàm, mặc dù không đầy đủ, nhưng cũng khá trực quan.

Với mỗi số  $c$ , phương trình  $f(x, y) = c$  cho tập hợp nghiệm là một đường cong trong mặt phẳng. Đường cong này được gọi là *đường mức*  $c$  và dễ biểu diễn hơn hẳn các điểm trong không gian 3 chiều (có thể vẽ trên máy tính bằng lệnh vẽ đồ thị hàm ẩn mà ta đã biết trong giáo trình *Giải tích một biến*). Nếu vẽ được nhiều đường mức khác nhau, ta sẽ có được một hình dung tổng thể về đồ thị của hàm. Thí dụ, bức tranh các đường mức của hàm  $f(x, y)$  nói trên là như hình vẽ bên (phản ứng toán thực hành trên máy sẽ giúp người đọc tìm hiểu sâu hơn về vấn đề này).

Khi  $n \geq 3$  ta không có phương tiện biểu diễn đồ thị một cách trực tiếp, mà chỉ có thể hình dung về nó qua các thông tin về *mặt mức* (trong không gian 3 chiều).

### 3. Tính liên tục của hàm nhiều biến

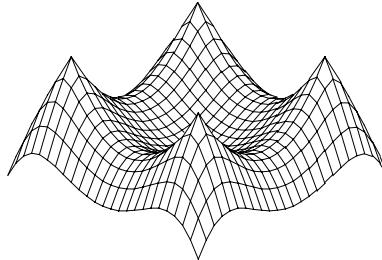
Vì  $\mathbb{R}^n$  là không gian metric (với metric thông thường) cho nên khái niệm liên tục của hàm nhiều biến đã được định nghĩa trong chương trước (Mục 1.2.5.).

Để tiện lợi chúng ta nhắc lại rằng hàm  $f$  là *liên tục* tại điểm  $a$  nếu với mọi  $\varepsilon > 0$ , tìm được  $\delta > 0$  sao cho  $\|x - a\| < \delta$  kéo theo

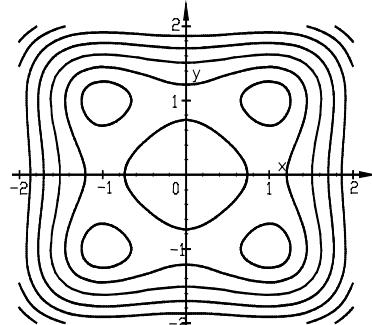
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (*)$$

Nhiều tính chất của hàm liên tục một biến đã khảo sát ở Chương 5 vẫn còn đúng cho hàm liên tục nhiều biến. Dưới đây là một số tính chất đặc trưng mà bạn đọc có thể kiểm tra dễ dàng:

- 1) Cho  $f$  và  $g$  là hai hàm liên tục tại  $a$ . Khi ấy các hàm  $f + g, f \cdot g, f/g$  (nếu  $g(a) \neq 0$ ) là những hàm liên tục tại  $a$ .



Hình 2.1



Hình 2.2

- 2) Cho  $f$  là hàm liên tục tại  $a$  và  $\varphi$  là hàm một biến liên tục tại  $f(a)$ . Khi ấy hàm hợp  $\varphi \circ f$  liên tục tại  $a$ .
- 3) Cho  $f$  là hàm liên tục tại  $a$  và  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  là những hàm một biến liên tục tại  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Khi ấy hàm một biến  $f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$  liên tục tại  $\alpha$ .

Lưu ý rằng trong định nghĩa tính liên tục, công thức (\*), đại lượng  $\delta$  phụ thuộc vào  $\varepsilon$  và  $a$ . Nếu như  $\delta$  không phụ thuộc vào điểm  $a \in S$ , thì ta có khái niệm hàm *liên tục đều* trên  $S$ . Chính xác hơn,  $f$  được gọi là *liên tục đều* trên  $S$  nếu như với mọi  $\varepsilon > 0$ , tìm được  $\delta > 0$  sao cho  $x, y \in S$  và  $\|x - a\| < \delta$  kéo theo  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Hiển nhiên là một hàm liên tục đều trên  $S$  thì liên tục trên đó. Điều ngược lại không đúng, như ta đã từng biết ngay cả khi  $f$  là hàm một biến. Tuy vậy định lý Cantor vẫn còn đúng đối với hàm nhiều biến. Cụ thể là một hàm liên tục trên tập compact thì liên tục đều trên tập đó (cách chứng minh hoàn toàn tương tự như trường hợp hàm một biến). Một kết quả quan trọng nữa đã trình bày ở chương trước là một hàm liên tục trên tập compact bao giờ cũng có cực đại và cực tiểu trên tập đó.

Ngoài ra, do đặc thù của không gian  $\mathbb{R}^n$  người ta đưa thêm vào khái niệm *liên tục theo từng biến*. Cụ thể là: ta nói hàm  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là liên tục theo biến  $x_i$  tại điểm  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)$  nếu hàm 1 biến  $h(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$  là liên tục tại điểm  $a_i$ .

Dễ thấy rằng hàm *liên tục* thì *liên tục theo từng biến*. Điều ngược lại nói chung là không đúng.

**Thí dụ.** Hàm 2 biến

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & \text{khi } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

là hàm *liên tục theo từng biến* nhưng không *liên tục* tại điểm  $(x, y) = (0, 0)$ . Thật vậy, dễ kiểm tra rằng với  $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$  ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$ .

### 2.1.2. Đạo hàm riêng

#### 1. Khái niệm

Cho  $f$  là một hàm số nhiều biến xác định trên tập mở  $U \subset \mathbb{R}^n$  và  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  là một điểm trong  $U$ . Khi ấy với mọi số  $h$  dù nhỏ, điểm  $(x_1 + h, x_2, \dots, x_n)$  cũng nằm trong  $U$  và ta có thể thiết lập đại lượng

$$\frac{f(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h}$$

Nếu đại lượng trên có giới hạn khi  $h$  tiến đến 0 thì ta gọi giới hạn này là đạo hàm riêng của  $f$  theo biến thứ nhất (tại điểm  $\mathbf{x}$ ), và ký hiệu là

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \text{hay} \quad D_1 f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{hay} \quad D_1 f(\mathbf{x}) .$$

Tương tự như trên ta định nghĩa đạo hàm riêng theo biến thứ  $i$ .

Như vậy đạo hàm riêng của hàm nhiều biến thu được bằng cách lấy đạo hàm của hàm một biến khi coi các biến còn lại là cố định.

**Thí dụ.** Với  $f(x, y) = x^2 \cdot y^3$  thì ta có

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2xy^3 \quad \text{và} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3x^2y^2 .$$

Khi đạo hàm riêng theo một biến  $i$  nào đó là tồn tại ở mọi điểm thì nó cũng là một hàm số, và hàm số này thường được ký hiệu là  $D_i f$ . Như vậy  $D_1 f(\mathbf{x})$  chính là  $(D_1 f)(\mathbf{x})$  và không nên viết nhầm là  $D_1(f(\mathbf{x}))$ , vốn không có ý nghĩa gì.

Khi đạo hàm riêng theo mọi biến đều tồn tại thì ta thiết lập vectơ

$$\left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right), \quad \text{hay } (D_1 f(\mathbf{x}), D_2 f(\mathbf{x}), \dots, D_n f(\mathbf{x})) ,$$

và gọi nó là *gradient* của  $f$  tại  $\mathbf{x}$ . Để cho gọn hơn người ta hay ký hiệu nó là  $\text{grad } f(\mathbf{x})$ . Muốn chính xác hơn thì phải viết là  $(\text{grad } f)(\mathbf{x})$ , nhưng người ta thường bỏ qua dấu ngoặc bao quanh  $\text{grad } f$ .

Trong thí dụ trên ta có

$$\text{grad } f(x, y) = (2xy^3, 3x^2y^2) .$$

Như vậy gradient là một phép ứng mỗi điểm với một vectơ.

**MỆNH ĐỀ.** Cho  $c$  là một số và  $f, g$  là hai hàm số xác định và có đạo hàm riêng tại mọi điểm trên tập mở  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Khi ấy:

- (i)  $\text{grad}(f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g ;$
- (ii)  $\text{grad}(c \cdot f) = c \cdot \text{grad } f ;$
- (iii)  $\text{grad}(f \cdot g) = g \cdot \text{grad } f + f \cdot \text{grad } g .$

**Chứng minh.** Suy ra ngay từ các công thức tính đạo hàm của tổng 2 hàm số và của tích một hàm với một số (đã biết trong giáo trình Giải tích một biến).

## 2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng

Giả sử  $f(x, y)$  với đạo hàm riêng là  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$  và  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ . Đồ thị của  $f$  là một mặt trong không gian  $\mathbb{R}^3$ . Nếu có định  $y = b$  thì đồ thị của  $f$  cắt mặt phẳng  $y = b$  theo một giao tuyến mà nếu chiếu thẳng góc vào mặt phẳng  $Oxz$  thì sẽ là đồ thị của hàm (1 biến)  $z = g(x) = f(x, b)$  trên mặt phẳng này, và như vậy  $\frac{\partial f(x, b)}{\partial x} = g'(x)$  chính là hệ số của góc tạo bởi tiếp tuyến với đồ thị hàm  $g$  và trục  $Ox$ . Rõ ràng, đây cũng là hệ số của góc tạo bởi giao tuyến của mặt phẳng  $Oxy$  với mặt phẳng  $y = b$  và tiếp tuyến với đường giao giữa đồ thị hàm số  $f$  và mặt phẳng này.

Tương tự ta cũng có  $\frac{\partial f(a, y)}{\partial y}$  chính là hệ số góc của góc tạo bởi giao tuyến của mặt phẳng  $Oyz$  với mặt phẳng  $x = a$  và tiếp tuyến của đường giao giữa đồ thị hàm  $f$  với mặt phẳng này.

Trong phần cuối của Mục 2.1.4, sau khi thiết lập *quy tắc dây xích*, chúng ta sẽ chỉ ra ý nghĩa hình học của *gradient* là vectơ vuông góc với đường mức.

### 2.1.3. Tính khả vi và gradient

Ta nhớ rằng một hàm  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  là *khả vi* tại điểm  $x$  trong  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi nó có *đạo hàm* tại  $x$  và величин  $g(h) := f(x+h) - f(x) - f'(x)h$  là một *vô cùng bé bắc cao hơn* khi  $h \rightarrow 0$ , tức là  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0$ . Mở rộng ra trong không gian  $n$ -chiều ta có định nghĩa sau:

*Hàm  $f$  xác định trên tập mở  $U \subset \mathbb{R}^n$  được gọi là khả vi tại điểm  $x \in U$  nếu như nó có đạo hàm riêng tại điểm này và величин*

$$f(x + \mathbf{h}) - f(x) - \text{grad } f(x) \cdot \mathbf{h}$$

*là một vô cùng bé bắc cao hơn  $\mathbf{h}$  khi  $\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$ , nghĩa là*

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{f(x + \mathbf{h}) - f(x) - \text{grad } f(x) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0, \quad (*)$$

*trong đó ta sử dụng ký hiệu  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$  và*

$$\text{grad } f(x) \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} h_n.$$

**Lưu ý.** Trong trường hợp hàm số một biến ta biết rằng nếu hàm số có *đạo hàm* thì nó là *khả vi* (nghĩa là khi ấy đúng thức  $(*)$  tự động thỏa mãn). Điều này không còn

đúng với hàm nhiều biến, nghĩa là việc hàm số có *đạo hàm riêng* (theo mọi biến) không đảm bảo cho đẳng thức (\*) nghiệm đúng, cho nên đẳng thức này tham gia vào định nghĩa khái niệm *khả vi* như một điều kiện độc lập.

Sau đây ta sẽ thấy một hàm *có đạo hàm riêng* khắp nơi mà *không phải là khả vi* (tại điểm gốc tọa độ).

**Thí dụ.** Xét hàm số 2 biến  $f(x,y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & \text{khi } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Dễ dàng kiểm tra được rằng, nếu *có định một biến* thì hàm là khả vi theo biến *còn lại* (tại mọi điểm, kể cả tại gốc). Như vậy hàm *có đạo hàm riêng* tại mọi điểm. Tuy nhiên, nó không phải là khả vi tại gốc, bởi vì giới hạn

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - \text{grad } f(0,0).(h,k)}{\|(h,k)\|}$$

không tồn tại. Thậm chí, ta có thể chỉ ra rằng với 2 số  $a, b$  bất kỳ, giới hạn sau không tồn tại

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - (a.h + b.k)}{\|(h,k)\|}.$$

Thật vậy,

$$\frac{f(h,k) - (a.h + b.k)}{\|(h,k)\|} = \frac{\frac{h.k}{h^2 + k^2} - a.h - b.k}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

cho nên nó *không thể có giới hạn*, vì có dãy con  $h_n = k_n = \frac{1}{n}$  làm cho nó *tiến ra vô cùng* (người đọc dễ dàng kiểm tra trực tiếp).

**Nhận xét.** Người ta có thể định nghĩa tính khả vi mà không sử dụng tới gradient. Cụ thể là: hàm  $f$  là khả vi tại điểm  $x$  nếu như tồn tại vectơ  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  sao cho

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \quad (**)$$

Khi ấy, có thể chỉ ra rằng hàm  $f$  có đạo hàm riêng (theo mọi biến) tại  $x$  và  $\text{grad } f(x) = \mathbf{a}$ . Thật vậy, với vectơ  $\mathbf{h}$  có dạng đặc biệt là  $\mathbf{h} = (h_1, 0, \dots, 0)$  thì từ đẳng thức trên ta suy ra đạo hàm riêng của  $f$  theo biến  $x_1$  là tồn tại và bằng  $a_1$ . Tương tự đối với các biến còn lại. Cho nên, đôi khi người ta định nghĩa tính khả vi một cách trực tiếp không cần qua khái niệm đạo hàm riêng: Người ta nói hàm  $f$  khả vi tại điểm  $x$  nếu như tồn tại vectơ  $\mathbf{a}$  sao cho đẳng thức (\*\*) nghiệm đúng, và khi ấy người ta cũng gọi vectơ  $\mathbf{a}$  là *gradient* của  $f$  tại  $x$  còn đại lượng  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{h}$  là *phân* của hàm  $f$  tại điểm  $x$ .

Hàm số được gọi là khả vi trên tập  $U$  nếu nó khả vi tại mọi điểm trên tập đó.

**ĐỊNH LÝ.** Hàm  $f$  xác định trên tập mở  $U \subset \mathbb{R}^n$  là khả vi nếu như nó có các đạo hàm riêng tại mọi điểm và các đạo hàm này là liên tục trên  $U$ .

**Chứng minh.** Để cho dễ hình dung ta chứng minh cho trường hợp hàm 2 biến (hàm nhiều biến hơn được chứng minh tương tự). Như vậy, ta có hàm 2 biến  $f(x,y)$  với các đạo hàm riêng  $D_1 f(x,y), D_2 f(x,y)$  là các hàm liên tục trên  $U$ . Ta xét hiệu

$$f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

và có thể viết lại nó dưới dạng

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k) + f(x, y+k) - f(x, y).$$

Theo định lý giá trị trung bình (đối với biến thứ nhất) ta tìm được điểm  $s$  (giữa  $x$  và  $x+h$ ) sao cho

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k) = D_1 f(s, y+k).h,$$

và tương tự đối với biến thứ hai ta tìm được điểm  $t$  (giữa  $y$  và  $y+k$ ) sao cho

$$f(x, y+k) - f(x, y) = D_2 f(x, t).k.$$

Cho nên đại lượng

$$g(x, y; h, k) := f(x+h, y+k) - f(x, y) - [D_1 f(x, y).h + D_2 f(x, y).k]$$

có thể viết lại dưới dạng

$$g(x, y; h, k) := [D_1 f(s, y+k) - D_1 f(x, y)]h + [D_2 f(x, t) - D_2 f(x, y)].k = A.h + B.k;$$

trong đó  $A = D_1 f(s, y+k) - D_1 f(x, y)$  và  $B = D_2 f(x, t) - D_2 f(x, y)$  là các đại lượng *tiến tới* 0 khi  $h, k$  cùng tiến tới 0 (do tính liên tục của các hàm  $D_1 f(.,.)$  và  $D_2 f(.,.)$  và do  $s \rightarrow x, t \rightarrow y$  khi  $h, k$  cùng tiến đến 0). Nhớ rằng  $\|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}$  cho nên  $h/\|(h, k)\|$  và  $k/\|(h, k)\|$  là các đại lượng bị chặn (bởi 1), và vì vậy từ đẳng thức trên ta suy ra

$$\lim_{\|(h, k)\| \rightarrow 0} \frac{g(x, y; h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{\|(h, k)\| \rightarrow 0} \left( A \cdot \frac{h}{\|(h, k)\|} + B \cdot \frac{k}{\|(h, k)\|} \right) = 0.$$

Đây chính là điều cần chứng minh.

**Nhận xét.** Thí dụ ở phần trên cho thấy các điều kiện của định lý là cốt yếu.

**MỆNH ĐỀ.** *Giả thiết rằng  $f$  khả vi tại điểm  $x$ . Khi ấy*

- (i)  $f$  liên tục tại  $x$ ;
- (ii) gradient của  $f$  tại  $x$  là duy nhất.

**Chứng minh.** Suy trực tiếp từ định nghĩa.

**Chú ý.** Hàm có *đạo hàm riêng* không nhất thiết là liên tục (xem thí dụ trên và nhận xét về tính liên tục của hàm nhiều biến ở cuối mục trước).

#### 2.1.4. Quy tắc dây xích

Cho hàm số  $f$  xác định trên tập mở  $U \subset \mathbb{R}^n$  và  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  là các hàm số một biến xác định trên khoảng  $I \subseteq \mathbb{R}$  sao cho vectơ  $\mathbf{x}(t) := (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in U$  với mọi  $t \in I$ . Phép ứng  $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$  còn gọi là hàm vectơ mà sau này chúng ta sẽ khảo sát kỹ hơn. Công thức sau cho ta cách tính đạo hàm của hàm một biến  $f(\mathbf{x}(t))$  thông qua gradient của  $f$  và đạo hàm của các hàm  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ .

**ĐỊNH LÝ.** (Quy tắc dây xích) *Giả thiết hàm số  $f$  xác định và khả vi trên tập mở  $U \subset \mathbb{R}^n$ , các hàm một biến  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  xác định và khả vi trên khoảng  $I \subseteq \mathbb{R}$  sao cho vectơ  $\mathbf{x}(t) := (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in U$  với mọi  $t \in I$ . Khi ấy hàm một biến  $f(\mathbf{x}(t))$  là khả vi trên  $I$  và đạo hàm của nó được tính theo công thức:*

$$\frac{df(\mathbf{x}(t))}{dt} = [\text{grad } f(\mathbf{x}(t))] \cdot \mathbf{x}'(t),$$

trong đó  $\mathbf{x}'(t) := (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t))$ .

**Chứng minh.** Đặt  $\mathbf{k} := \mathbf{k}(t, h) := \mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)$ . Ta có

$$\frac{f(\mathbf{x}(t+h)) - f(\mathbf{x}(t))}{h} = \frac{f(\mathbf{x}(t) + \mathbf{k}) - f(\mathbf{x}(t))}{h}$$

Do tính khả vi của hàm  $f$  ta biết rằng

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{k}) - f(\mathbf{x}) = \text{grad } f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{k} + \|\mathbf{k}\| g(\mathbf{x}, \mathbf{k}),$$

trong đó  $\lim_{\|\mathbf{k}\| \rightarrow 0} g(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = 0$ . Thay  $\mathbf{k}$  vào biểu thức này và chia 2 vế cho  $h$  ta có

$$\frac{f(\mathbf{x}(t+k)) - f(\mathbf{x}(t))}{h} = \text{grad } f(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} \pm \left\| \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} \right\| g(\mathbf{x}, \mathbf{k}).$$

Khi  $h$  tiến dần đến 0 thì

$$\frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} = \left( \frac{\varphi_1(t+h) - \varphi_1(t)}{h}, \dots, \frac{\varphi_n(t+h) - \varphi_n(t)}{h} \right) \rightarrow (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t))$$

và  $\mathbf{k}$  tiến tới 0, cho nên số hạng thứ 2 của vế phải sẽ tiến đến 0. Khi ấy ta có

$$\frac{df(\mathbf{x}(t))}{dt} = [\text{grad } f(\mathbf{x}(t))] \cdot \mathbf{x}'(t).$$

Đây chính là điều cần chứng minh.

**Thí dụ.** Lấy  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in U$  và  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}$  sao cho  $\mathbf{a} + t\mathbf{h} \in U$  với mọi  $t \in (-1, 1)$  và định nghĩa các hàm  $\varphi$  theo công thức:

$$\varphi_i(t) = a_i + th_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Khi ấy  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{h}$  và  $F(t) := f(\mathbf{x}(t)) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$  có  $F'(t) = \text{grad } f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}$ , bởi vì  $\varphi'_i(t) = h_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Lưu ý.** Công thức nhận được còn có tên gọi là *quy tắc đổi biến* (trong phép lấy đạo hàm). Công thức này có thể viết lại dưới dạng cụ thể hơn là

$$\frac{df(\mathbf{x}(t))}{dt} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \cdot \frac{d\varphi_n}{dt}.$$

Trong chương tới chúng ta sẽ có quy tắc dây xích tổng quát hơn khi  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  cũng là những hàm nhiều biến.

**Nhận xét.** Khi  $f$  là một hàm khả vi, còn  $c$  là một số thực, thì tập tất cả những điểm (vectơ)  $\mathbf{x}$  thỏa mãn  $f(\mathbf{x}) = c$  được gọi là *mặt mức* ứng với giá trị  $c$  (trong trường hợp  $\mathbf{x}$  nằm trong không gian 2 chiều thì người ta quen gọi là *đường mức*).

Nếu  $\mathbf{x}(t)$  là một đường cong khả vi nằm trên mặt mức (nghĩa là mọi điểm của nó nằm trên mặt này), thì ta có  $f(\mathbf{x}(t)) = c$ , với mọi  $t$ , và bằng cách lấy đạo hàm cả 2 vế và áp dụng quy tắc dây xích ta có

$$\text{grad } f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) = 0.$$

Với  $P$  là một điểm nằm trên mặt mức mà đường cong đi qua đó thì có số  $t_0$  sao cho  $\mathbf{x}(t_0) = P$ . Và như vậy

$$\text{grad } f(P) \cdot \mathbf{x}'(t_0) = 0.$$

Lưu ý rằng  $\mathbf{x}'(t)$  là vectơ tiếp xúc của đường cong  $\mathbf{x}(t)$ , cho nên công thức trên có nghĩa là vectơ vuông góc với tất cả các vectơ  $\text{grad } f(P)$  tiếp xúc của các đường cong (nằm trên mặt mức) đi qua điểm  $P$ . Trong trường hợp 2 chiều thì mặt mức cũng chính là đường mức và khi ấy ta có thêm một hình ảnh hình học về gradient: nó là vectơ vuông góc với đường mức.

### 2.1.5. Đạo hàm theo hướng

Cho hàm  $f$  xác định và khả vi trên tập mở  $U$  và  $\mathbf{a}$  là một điểm nằm trong tập này. Với vectơ đơn vị  $\mathbf{e}$  (tức là  $\|\mathbf{e}\| = 1$ ), ta có đường thẳng đi qua  $\mathbf{a}$  theo phuong  $\mathbf{e}$ , với phuong trình là  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{e}$ . Như trong thí dụ ở mục trước chúng ta đã tính đạo hàm là:

$$\frac{df(\mathbf{a} + t\mathbf{e})}{dt} = \text{grad } f(\mathbf{a} + t\mathbf{e})\mathbf{e} .$$

Khi  $t = 0$  thì đạo hàm này trở thành

$$\text{grad } f(\mathbf{a})\mathbf{e}$$

và được gọi là *đạo hàm theo hướng*  $\mathbf{e}$  tại điểm  $\mathbf{a}$  của hàm  $f$ .

**Nhận xét.** Rõ ràng đạo hàm theo hướng (tại một điểm đã cho) là lớn nhất khi hướng trùng với gradient của hàm, và là nhỏ nhất khi hướng ngược với gradient của hàm. Vì đạo hàm theo hướng phản ánh tốc độ biến thiên của hàm theo hướng đó, nên hàm tăng nhanh nhất theo hướng gradient và giảm nhanh nhất theo hướng ngược với gradient.

Khi  $f$  là hàm phân bố nhiệt trong không gian thì một chất điểm lạnh muốn trở thành ấm hơn (một cách nhanh nhất) sẽ phải chuyển động theo hướng  $\text{grad } f$ , còn chất điểm nóng muốn trở nên mát hơn sẽ phải chuyển động theo hướng  $-\text{grad } f$ .

## 2.2. Công thức Taylor

### 2.2.1. Đạo hàm riêng lặp

Để dễ nắm được bản chất vấn đề, trước hết ta xét trường hợp hàm 2 biến.

Cho hàm  $f$  xác định và khả vi trong miền mở  $U$  trong không gian 2 chiều. Khi ấy,  $D_1f$  (hay còn được viết là  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ) cũng là hàm xác định trên  $U$ . Như vậy ta có thể xét đến đạo hàm riêng của nó  $D_1D_1f$ ,  $D_2D_1f$  (nếu tồn tại). Tương tự như vậy đối với  $D_2f$ , ta cũng có thể thiết lập các đạo hàm riêng  $D_1D_2f$  và  $D_2D_2f$  (nếu tồn tại). Các đạo hàm riêng như vậy được gọi là các *đạo hàm riêng lặp* của hàm  $f$ .

**Thí dụ.** Nếu  $f(x,y) = \sin(xy)$  thì ta có các đạo hàm riêng

$$D_1f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y \cos(xy) \quad \text{và} \quad D_2f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x \cos(xy).$$

Chúng là các hàm khả vi nên ta thiết lập được các “đạo hàm riêng lặp”, và dễ thấy rằng

$$D_2D_1f(x,y) = -xy \sin(xy) + \cos(xy), \quad D_1D_2f(x,y) = -xy \sin(xy) + \cos(xy).$$

Như vậy chúng bằng nhau!

Điều này không phải lúc nào cũng xảy ra, nhưng định lý sau đây cho ta thấy rằng trong *thực tế* các đạo hàm lặp của một hàm số *thường hay bằng nhau*.

**ĐỊNH LÝ.** Cho hàm 2 biến  $f$  xác định trên tập mở  $U$  (trong không gian 2 chiều), và giả sử rằng nó có các đạo hàm riêng  $D_1f, D_2f, D_1D_2f, D_2D_1f$  liên tục. Khi ấy

$$D_1D_2f = D_2D_1f.$$

**Chứng minh.** Cho  $(x, y) \in U$ . Với  $h, k$  khác 0 và đủ bé ta xét hàm

$$g(x) = f(x, y+k) - f(x, y)$$

và áp dụng định lý giá trị trung bình ta tìm được điểm  $s_1$  nằm giữa  $x$  và  $x+h$  sao cho

$$g(x+h) - g(x) = g'(s_1)h,$$

nghĩa là

$$f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y) = [D_1f(s_1, y+k) - D_1f(s_1, y)]h.$$

Sử dụng định lý giá trị trung bình cho thành phần trong ngoặc vuông ở vế phải (theo biến thứ 2) ta tìm được điểm  $s_2$  nằm giữa  $y$  và  $y+k$  sao cho

$$f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y) = D_2D_1f(s_1, s_2).k.h.$$

Tương tự như vậy ta xét hàm  $q(y) = f(x+h, y) - f(x, y)$  và tìm được các số  $t_1$  giữa  $x$  và  $x+h$ ,  $t_2$  giữa  $y$  và  $y+k$  sao cho

$$q(y+k) - q(y) = D_1D_2f(t_1, t_2).h.k.$$

Chú ý rằng

$$q(y+k) - q(y) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y),$$

cho nên ta có  $D_2D_1f(s_1, s_2).k.h = D_1D_2f(t_1, t_2).h.k$ , và do  $h, k$  khác 0 ta suy ra

$$D_2D_1f(s_1, s_2) = D_1D_2f(t_1, t_2).$$

Cho  $h, k$  cùng tiến tới 0 ta có  $(s_1, s_2) \rightarrow (x, y)$  và  $(t_1, t_2) \rightarrow (x, y)$ , từ tính liên tục của các hàm  $D_1D_2f$  và  $D_2D_1f$  ta suy ra điều cần chứng minh.

**Nhận xét.** Định lý trên cho thấy rằng khi các đạo hàm riêng lặp là *liên tục* thì chúng không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm. Điều này dễ dàng mở rộng cho các đạo hàm riêng *cấp cao hơn 2* (nếu chúng tồn tại và liên tục), vì đạo hàm cấp cao thu được từ việc lấy liên tiếp các đạo hàm của các đạo hàm cấp thấp hơn liền kề. Một điều cũng dễ nhận thấy là điều này cũng đúng với các hàm có *số biến nhiều hơn 2* (vì khi ta xét đạo hàm riêng lặp theo cặp 2 biến nào đó thì các biến còn lại coi như cố định và không gây ảnh hưởng đến việc lấy đạo hàm, và khi đã đổi

được vị trí cho 2 phép lấy đạo hàm kề nhau thì sẽ đổi được vị trí cho 2 phép lấy đạo hàm bất kỳ, không kề nhau).

Do việc lấy đạo hàm riêng lặp không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm (khi nó liên tục), cho nên người ta có thể dồn các đạo hàm riêng theo mỗi biến vào một nhóm (đi liền nhau). Thí dụ  $D_1 D_2 D_3 D_2 D_1 D_2 f$  có thể được viết thành  $D_1 D_1 D_2 D_2 D_2 D_3 f$ , và để cho gọn hơn người ta viết  $D_1^2 D_2^3 D_3 f$ .

### 2.2.2. Công thức Taylor

Cho hàm  $f$  xác định trên tập mở  $U$ ,  $\mathbf{a}$  là một điểm trong  $U$  và  $\mathbf{h}$  là một vectơ trong  $\mathbb{R}^n$  sao cho  $\mathbf{a} + t\mathbf{h} \in U$  với mọi  $t \in [0,1]$ . Ký hiệu  $F(t) := f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ . Đây là hàm một biến, xác định trên đoạn  $[0,1]$ . Công thức sau cho phép tính giá trị  $f(\mathbf{a} + \mathbf{h})$  dựa vào  $f(\mathbf{a})$  và các đạo hàm của  $F$ .

**ĐỊNH LÝ** (Công thức Taylor). *Cho  $f$  là hàm số xác định trên miền mở  $U$  và có các đạo hàm riêng liên tục tới cấp  $m$ . Nếu  $\mathbf{a}$  là điểm trong  $U$  và  $\mathbf{h}$  là một vectơ sao cho với mọi  $t \in [0,1]$  ta có  $\mathbf{a} + t\mathbf{h} \in U$ , thì tồn tại số  $\tau \in (0,1)$  thỏa mãn*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \frac{F^{(m)}(\tau)}{m!}.$$

**Chứng minh.** Nhận xét rằng  $F(t)$  là hàm một biến khả vi liên tục tới cấp  $m$  trên đoạn  $[0,1]$  cho nên ta có thể áp dụng công thức Taylor trên khoảng  $(0,1)$  và thu được

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \frac{F^{(m)}(\tau)}{m!},$$

trong đó  $\tau$  là một số trên khoảng  $(0,1)$ . Thay  $F(1) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h})$  và  $F(0) = f(\mathbf{a})$  vào đẳng thức trên ta thu được điều cần chứng minh.

**HỆ QUẢ.** (Định lý giá trị trung bình) *Cho  $f$  là hàm số xác định và có các đạo hàm riêng liên tục trên miền mở  $U$ ,  $\mathbf{a}$  và  $\mathbf{b}$  là các điểm trong  $U$  sao cho đoạn thẳng nối 2 điểm này cũng nằm hoàn toàn trong  $U$ . Khi ấy tồn tại điểm  $c$  nằm trong đoạn ấy (không trùng với 2 đầu mút) sao cho*

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \text{grad } f(c) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

**Chứng minh.** Dùng quy tắc dây xích ta tính được

$$F'(t) = \text{grad } f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Đặt  $c = \mathbf{a} + \tau(\mathbf{b} - \mathbf{a})$  và thay đạo hàm  $F'(t)$  vào công thức Taylor sẽ có ngay điều cần chứng minh.

**Nhận xét.** Trong công thức Taylor các đạo hàm của hàm  $F$  có thể viết tường minh thông qua các đạo hàm riêng lặp của  $f$  nhờ vào quy tắc dây xích như trong hệ quả vừa nêu. Thí dụ với  $n = 2$  và  $\mathbf{h} = (u, v)$  thì ta có:

$$\begin{aligned} F'(0) &= \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1} u + \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_2} v , \\ F''(0) &= \frac{\partial^2 f(a_1, a_2)}{\partial x_1^2} u^2 + 2 \frac{\partial^2 f(a_1, a_2)}{\partial x_1 \partial x_2} uv + \frac{\partial^2 f(a_1, a_2)}{\partial x_2^2} v^2 . \end{aligned}$$

Bằng phương pháp quy nạp dễ dàng kiểm tra công thức sau:

$$F^{(k)}(0) = \sum_{0 \leq q \leq k} C_k^q \frac{\partial^k f(a_1, a_2)}{(\partial x_1)^q (\partial x_2)^{k-q}} u^q v^{k-q} .$$

**Thí dụ.** Khai triển Taylor đến bậc 4 của hàm 2 biến  $\sin(x+y)$  tại điểm  $(0,0)$  là

$$x + y - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}yx^2 - \frac{1}{2}y^2x - \frac{1}{6}y^3 .$$

### 2.2.3. Toán tử vi phân

Như đã thấy trong mục trên, công thức Taylor sẽ trở nên rất cồng kềnh khi chúng ta biểu diễn tường minh đạo hàm cấp  $m$  của  $F$  thông qua các đạo hàm riêng lặp của  $f$ . Để đơn giản hóa các công thức liên quan đến đạo hàm riêng lặp, người ta thường dùng đến khái niệm *toán tử vi phân*.

Khi hàm số  $n$  biến  $f$  có các *đạo hàm riêng lặp* đến cấp  $k$  nào đó và chúng đều liên tục trong một miền mở  $U$  thì khi nói tới đạo hàm riêng lặp người ta chỉ quan tâm đến 2 khía cạnh: đạo hàm *theo biến nào* và *cấp mấy* (mà không cần cần quan tâm đến thứ tự thực hiện phép lấy đạo hàm riêng).

Ta đã biết rằng phép lấy đạo hàm của  $f$  theo biến  $i$  cấp  $m_i$  được ký hiệu là  $D_i^{m_i} f$ . Với  $m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq k$ , phép lấy đạo hàm lặp

$$D_1^{m_1} D_2^{m_2} \dots D_n^{m_n}, \text{ hay } \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{m_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{m_2} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{m_n} ,$$

được gọi là *toán tử vi phân đơn* cấp  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ , và được ký hiệu là

$$D := \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}} .$$

Đây là toán tử cho ứng mỗi hàm  $f$  (thỏa mãn điều kiện trên) với hàm  $g = Df$ .

**Lưu ý.** Cần phân biệt sự khác nhau giữa 2 biểu thức sau đây

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{và} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2.$$

Chúng, nói chung, là khác nhau. Thí dụ, khi  $f(x, y) = x^2 y$  thì  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$  còn  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = (2xy)^2 = 4x^2 y^2$ .

Các toán tử vi phân đơn có thể cộng với nhau và nhân với số theo các định nghĩa thông thường. Cụ thể, nếu  $D$  và  $D'$  là các toán tử vi phân đơn thì ta định nghĩa tổng của chúng là toán tử (ký hiệu là  $D+D'$ ) cho ứng mỗi hàm  $f$  (có các tính chất đã nêu) với một hàm xác định như sau:

Tương tự như vậy ta định nghĩa tích của một toán tử vi phân đơn  $D$  với một số thực  $c$  là một toán tử (ký hiệu là  $cD$ ) cho ứng mỗi hàm  $f$  với một hàm xác định như sau

$$(cD)f := c.(Df).$$

Rõ ràng tổng của các toán tử vi phân đơn và tích của toán tử vi phân đơn với một số không còn là một toán tử vi phân đơn, và người ta gọi chúng là toán tử vi phân.

Vì toán tử vi phân đơn là tuyến tính, cho nên toán tử vi phân cũng là tuyến tính. Nghĩa là, nếu  $D$  là một toán tử vi phân,  $c$  là một số, còn  $f$  và  $g$  là những hàm số (có các tính chất đã nêu), thì

$$D(f + g) = Df + Dg,$$

$$D(c.f) = c.Df.$$

Nếu  $D$  và  $D'$  là các toán tử vi phân, thì người ta định nghĩa tích của 2 toán tử này như phép lấy hợp của 2 toán tử. Nghĩa là tích của chúng, ký hiệu là  $D.D'$ , là một toán tử xác định như sau:

$$(D.D')f := D(D'f).$$

Rõ ràng nó cũng là một toán tử vi phân (tức là bằng tổng của các thành phần là toán tử vi phân đơn hoặc tích của toán tử vi phân đơn với một số).

Từ định lý ở mục trên ta suy ra phép nhân 2 toán tử vi phân có tính *giao hoán*, nghĩa là

$$D.D' = D'.D.$$

Dễ dàng thấy rằng phép nhân các toán tử vi phân cũng có tính *kết hợp*. Nghĩa là, với các toán tử vi phân  $D, D', D''$  ta luôn có

$$D(D' + D'') = D.D' + D.D''.$$

Từ đây, ta thấy rằng phép nhân các toán tử vi phân cũng hoàn toàn tương tự như nhân các *đa thức*. Và như vậy, các toán tử vi phân cũng đa dạng như các đa thức. Người ta nói toán tử vi phân được viết dưới dạng *chuẩn tắc* nếu nó là tổng của các số hạng có dạng toán tử vi phân đơn nhân với một hệ số.

**Thí dụ.** Toán tử vi phân

$$3\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + 14\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + 8\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$$

là có dạng chuẩn tắc. Còn toán tử vi phân

$$\left(3\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

là chưa ở trong dạng chuẩn tắc.

Người ta coi *cấp* của thành phần  $c.D_1^{m_1}D_2^{m_2}\dots D_n^{m_n}$  là  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ .

Khi toán tử vi phân là tổng của các thành phần có cùng cấp  $m$  thì được gọi là *thuần nhất cấp  $m$* .

Cho  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$  là một vectơ cố định trong  $\mathbb{R}^n$ .

Xét toán tử vi phân sau đây

$$D := h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Chúng ta đã biết đạo hàm của hàm  $F$  trong công thức Taylor có thể viết dưới dạng

$$F'(t) = Df(\mathbf{a} + t\mathbf{h}).$$

Lấy đạo hàm lần nữa ta sẽ có

$$F''(t) = D(Df)(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = D^2F(\mathbf{a} + t\mathbf{h}).$$

Bằng phương pháp quy nạp ta dễ dàng chứng minh công thức tổng quát là

$$F^{(k)}(t) = D^k f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}).$$

Lưu ý rằng biểu thức chi tiết của vé phải là

$$D^k f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}).$$

Với ký hiệu toán tử  $D$  ở trên, công thức Taylor có thể viết dưới dạng

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \frac{Df(\mathbf{a})}{1!} + \frac{D^2f(\mathbf{a})}{2!} + \dots + \frac{D^{m-1}f(\mathbf{a})}{(m-1)!} + \frac{D^mf(\mathbf{a} + \tau\mathbf{h})}{m!}.$$

Dĩ nhiên đây cũng chỉ là công thức mang tính hình thức, và khi muốn tính toán cụ thể thì lại phải dùng đến biểu thức chi tiết của  $D^k f$ .

## 2.3. Ứng dụng của đạo hàm

### 2.3.1. Điều kiện của cực trị

Giả sử  $f$  là hàm số xác định trên tập mở  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ta nói rằng  $f$  đạt *cực trị* (*cực đại* hoặc *cực tiểu*) địa phương tại  $x_0 \in U$  nếu tồn tại  $\varepsilon > 0$  sao cho

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (\text{hoặc } f(x_0) \leq f(x)) \text{ với mọi } x \in U \text{ mà } \|x - x_0\| < \varepsilon.$$

**ĐỊNH LÝ.** (Điều kiện cần) *Giả thiết  $f$  là hàm xác định trên tập mở  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  và khả vi tại  $x_0 \in U$ . Nếu  $x_0$  là điểm cực trị địa phương của  $f$  thì  $\text{grad } f(x_0) = \mathbf{0}$ .*

**Chứng minh.** Giả thiết  $x_0$  là điểm cực tiểu địa phương của  $f$  (trường hợp cực đại địa phương được chứng minh tương tự). Giả sử  $\text{grad } f(x_0)$  khác  $\mathbf{0}$  và bằng vectơ  $(a_1, \dots, a_n)$  với tọa độ nào đó khác 0, thí dụ là  $a_i < 0$  chẳng hạn. Lấy  $e_i$  là vectơ có các tọa độ bằng 0 ngoại trừ tọa độ thứ  $i$  bằng 1. Theo định nghĩa tính khả vi:

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0) - \text{grad } f(x_0) \cdot (te_i)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} - a_i \right].$$

Nếu  $a_i < 0$ , thì khi  $t$  đủ nhỏ ta thu được

$$\frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} < 0,$$

và suy ra  $f(x_0 + te_i) < f(x_0)$  với  $t > 0$  đủ nhỏ. Nếu  $a_i > 0$  thì ta cũng có bất đẳng thức này với  $t < 0$  và đủ gần 0. Điều này trái với tính cực tiểu địa phương của  $x_0$ . Vậy  $\text{grad } f(x_0) = \mathbf{0}$  và định lý được chứng minh.

Những điểm  $x_0 \in U$  thỏa mãn  $\text{grad } f(x_0) = \mathbf{0}$  được gọi là *điểm tới hạn* (hay *điểm dừng*) của  $f$ .

**Chú ý.** Theo định lý trên, mọi điểm *cực trị* là *tới hạn* nhưng cũng như trong trường hợp hàm 1 biến, điều ngược lại không đúng.

**Thí dụ.** Cho  $f(x, y) = x \sin y$  là hàm 2 biến khả vi tại mọi điểm của  $\mathbb{R}^2$ . Để tìm điểm tới hạn của  $f$  ta viết phương trình

$$\text{grad } f(x, y) = (\sin y, x \cos y) = (0, 0).$$

Suy ra các điểm  $(0, k)$ , với  $k = 1, 2, \dots$ , là những điểm tới hạn. Trong số điểm tới hạn này không có điểm nào là cực trị địa phương. Thật vậy, với  $k = 1, 2, \dots$  bất kỳ,

ta có  $f(0, k) = 0$  và, với  $y$  đủ gần  $k\pi$  sao cho  $\sin y > 0$ , ta luôn chọn được  $x$  đủ gần 0 sao cho

$$f(x, y) < 0 \quad \text{hoặc} \quad f(x, y) > 0.$$

Đối với một số hàm có cấu trúc đặc biệt thì mọi điểm tới hạn cũng là điểm cực trị. Lớp hàm đặc trưng nhất có tính chất này là lớp hàm được xét dưới đây.

### 2.3.2. Hàm lồi và cực trị của nó

Hàm  $f$  xác định trên  $\mathbb{R}^n$  được gọi là *lồi* nếu với mọi  $x, y \in \mathbb{R}^n$  và  $0 \leq t \leq 1$  ta có

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

**Thí dụ.** Hàm  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  là hàm lồi trên  $\mathbb{R}^2$ .

Thật vậy, với mọi  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$  và  $0 \leq t \leq 1$ , ta có

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= (tx_1 + (1-t)y_1)^2 + (tx_2 + (1-t)y_2)^2 \\ &\leq tx_1^2 + (1-t)y_1^2 + tx_2^2 + (1-t)y_2^2 \\ &\leq tf(x) + (1-t)f(y). \end{aligned}$$

Do đó  $f$  là hàm lồi.

**Mệnh đề.** Giả thiết  $f$  là hàm lồi trên  $\mathbb{R}^n$ , khả vi tại  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Khi ấy  $x_0$  là điểm cực tiểu của  $f$  khi và chỉ khi  $\text{grad } f(x_0) = 0$ .

**Chứng minh.** Theo định lý, chúng ta chỉ cần chứng minh về “khi”.

Giả sử  $\text{grad } f(x_0) = 0$  và  $x_0$  không phải là cực tiểu của  $f$ , tức là tồn tại  $x \in \mathbb{R}^n$  để  $f(x) < f(x_0)$ . Do  $f$  lồi, với  $0 < t < 1$  ta có

$$f(x_0 + t(x - x_0)) < tf(x) + (1-t)f(x_0).$$

Suy ra

$$\frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} < f(x) - f(x_0),$$

và như vậy

$$\text{grad } f(x_0)(x - x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} < 0.$$

Điều này mâu thuẫn với  $\text{grad } f(x_0) = 0$ . Vậy  $x_0$  phải là cực tiểu của  $f$ .

**Thí dụ.** Điểm  $(0, 0)$  là cực tiểu của hàm  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ . Thực vậy, ta có  $\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$  và như ta đã biết  $f$  là hàm lồi. Áp dụng mệnh đề ta có ngay điều cần chứng minh.

**Nhận xét.** Mệnh đề trên cho thấy một tính chất rất quan trọng của hàm lồi, đó là các điểm *cực tiểu địa phương* (của hàm lồi) thi cũng là những điểm *cực tiểu toàn cục*. Thật vậy, những điểm cực tiểu địa phương phải thoả mãn điều kiện  $\text{grad } f(x_0) = 0$  (theo định lý về điều kiện cần cực trị), và do mệnh đề trên chúng phải là cực tiểu toàn cục.

Cũng như trong trường hợp 1 chiều, *đạo hàm* của *hàm lồi* có những nét đặc trưng rất thú vị. Tuy nhiên, như ta thấy, đạo hàm của hàm lồi nhiều biến là một *hàm vectơ* và vì vậy việc nghiên cứu nó sẽ được dành lại cho chương sau.

### 2.3.3. Bài toán cực trị có điều kiện và nguyên lý Lagrange

Bài toán cực trị hay gặp trong thực tiễn thường là những bài toán *cực trị có điều kiện*, ở đó người ta tìm *cực trị* của một hàm trên *một tập điểm* thoả mãn một số điều kiện nào đó. Đây là một trong những chủ đề cơ bản trong *lý thuyết tối ưu*. Một trường hợp đặc biệt, khi tập điểm là một *mặt cong*, thì ta có bài toán tìm *cực trị* của hàm số  $f$  trên tập tất cả các điểm  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  thoả mãn phương trình biểu diễn mặt cong đó. Bài toán tìm *cực tiểu* của hàm  $f$  trên mặt cong với phương trình biểu diễn  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  thường được mô tả như sau

$$(P) \quad \begin{cases} \min f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Cho  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  là một *lời giải* của bài toán và giả sử rằng

$$\text{grad } g(\bar{x}) \neq 0. \quad (\text{CQ})$$

Khi ấy, với mọi đường cong khả vi  $p(t)$  nằm trọn trên mặt cong  $g$  (nghĩa là thoả mãn  $g(p(t)) = 0$  với mọi  $t$ ) và đi qua điểm  $\bar{x}$  (tức là có  $p(0) = \bar{x}$ ), hàm số  $f(p(t))$  sẽ đạt *cực tiểu* tại điểm  $t = 0$ . Điều này có nghĩa nó có đạo hàm bằng 0 tại điểm  $t=0$ , và theo quy tắc dây xích, ta có

$$\text{grad } f(p(0)).p'(0) = \text{grad } f(\bar{x}).p'(0) = 0.$$

Như vậy,  $\text{grad } f(\bar{x})$  vuông góc với vectơ tiếp tuyến của đường cong  $p(t)$  tại điểm  $\bar{x}$  và, do điều này xảy ra với mọi đường cong khả vi nằm trên mặt cong và đi qua điểm  $\bar{x}$ , cho nên  $\text{grad } f(\bar{x})$  vuông góc với *mặt phẳng tiếp xúc* của mặt cong  $g$  tại điểm  $\bar{x}$ . Suy ra, theo nhận xét ở cuối Mục 2.1.4,  $\text{grad } f(\bar{x})$  phải song song với vectơ  $\text{grad } g(\bar{x})$ , nghĩa là tồn tại một số thực  $\lambda$  sao cho

$$\text{grad } f(\bar{x}) = \lambda \text{grad } g(\bar{x}). \quad (*)$$

Ký hiệu  $L(x, \lambda) := f(x) - \lambda g(x)$  và gọi nó là *hàm Lagrange* của bài toán (P), từ đẳng thức trên, ta suy ra kết quả sau đây.

**ĐỊNH LÝ.** (Nguyên lý nhân tử Lagrange) *Nếu  $\bar{x}$  là một lời giải của bài toán (P) và thoả mãn điều kiện (CQ) thì tồn tại số thực  $\lambda$  sao cho*

$$\text{grad}_x L(\bar{x}, \lambda) = 0, \quad (**)$$

(trong đó  $\text{grad}_x$  có nghĩa là *gradient* theo biến  $x$ ).

Số  $\lambda$  có tên gọi là *nhân tử Lagrange* đối với điểm cực trị  $\bar{x}$ .

**Chứng minh.** Định lý được suy ra ngay từ đẳng thức (\*), vì rằng

$$\text{grad}_x L(x, \lambda) = \text{grad } f(x) - \lambda \text{ grad } g(x).$$

**Nhận xét.** Định lý trên cho thấy rằng sự tồn tại của *nhân tử Lagrange* chính là điều kiện cần cho tính cực trị của điểm  $\bar{x}$ . Như vậy, muốn tìm được điểm cực trị của bài toán (P), trước hết ta cần tìm ra những điểm của mặt cong  $g$  thỏa mãn điều kiện (\*\*) với một nhân tử  $\lambda$  nào đó. Điều này cũng tương tự như việc muốn tìm cực trị (không điều kiện) của một hàm số thì trước hết phải tìm ra những điểm thỏa mãn điều kiện cần (có gradient bằng 0), như đã xét trong Mục 2.3.1.

**Thí dụ.** Tìm cực trị của hàm số  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  trên mặt cong xác định bởi phương trình  $x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0$ . Từ định lý về nhân tử Lagrange kết hợp với điều kiện ràng buộc (điểm cực trị nằm trên mặt cong) ta suy ra điểm cực trị phải thỏa mãn các điều kiện sau:

- (a)  $2x = \lambda \cdot 2x,$
- (b)  $2y = \lambda \cdot 4y,$
- (c)  $2z = \lambda \cdot (-2z),$
- (d)  $x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0.$

Giả sử rằng  $(x_0, y_0, z_0)$  là một nghiệm. Nếu  $z_0 \neq 0$  thì từ (c) ta có  $\lambda = -1$  và từ (a)-(b) rút ra và điều này mâu thuẫn với (d). Cho nên,  $z_0 = 0$ . Từ đây ta dễ dàng tìm ra 4 điểm “khả nghi” là

$(1, 0, 0)$  và  $(-1, 0, 0)$ , ứng với nhân tử  $\lambda = 1$ ;

$(0, 1/\sqrt{2}, 0)$  và  $(0, -1/\sqrt{2}, 0)$ , ứng với nhân tử  $\lambda = 1/2$ .

Nếu cần tìm điểm cực tiểu thì ta thấy rằng chỉ có 2 điểm sau là đáng quan tâm (vì tại đó giá trị của hàm mục tiêu nhỏ hơn). Tính toán trực tiếp cho thấy rằng chúng thực sự là những điểm cực tiểu.

**Nhận xét.** Trường hợp tổng quát hơn, khi tập ràng buộc không chỉ là một mặt cong mà là giao của một số (hữu hạn) mặt cong, bài toán được mô tả như sau

$$\begin{cases} \min f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, k \end{cases}.$$

Khi đó phương pháp nghiên cứu và kết quả thu được cũng hoàn toàn tương tự như trên, nhưng để làm được điều này ta cần tính được không gian tiếp đối với

tập giao của các mặt cong, mô tả bởi hệ phương trình  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Đây là chủ đề sẽ được xét trong các chương sau. Với một điều kiện nhất định (không quá chặt, tương tự như điều kiện (CQ)) người ta chỉ ra được rằng *không gian tiếp tuyến* của tập giao các mặt cong cũng chính là giao của của các không gian tiếp tuyến đối với các mặt, và từ tính vuông góc của vectơ  $\text{grad } f(\bar{x})$  đối với không gian tiếp tuyến này người ta rút ra *nguyên lý nhân tử Lagrange* cho bài toán tổng quát dưới dạng tương tự như đã phát biểu ở trên, trong đó *hàm Lagrange* được định nghĩa bằng công thức  $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) - \langle \boldsymbol{\mu}, g(\mathbf{x}) \rangle$ , trong đó  $g(\mathbf{x})$  là hàm vectơ xác định bởi  $g(\mathbf{x}) := (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_k(\mathbf{x}))$ ,  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k)$  là một vectơ  $k$  chiều, còn  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  là ký hiệu *tích vô hướng*. Dĩ nhiên, khi *nhân tử Lagrange* cũng không còn là một số, mà là một bộ số (vectơ  $k$  chiều). Bạn đọc có nhu cầu tìm hiểu sâu hơn về lĩnh vực này xin tham khảo các giáo trình về *quy hoạch toán học*, hay rộng hơn nữa là *lý thuyết các bài toán cực trị*.

### 2.3.4. Vi phân toàn phần

Cũng như trong trường hợp hàm một biến, nếu ký hiệu  $\Delta x := (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$  là số gia của biến  $x$ , và nếu  $f$  khả vi tại  $x$ , thì số gia của hàm số

$$\Delta f(x) := f(x + \Delta x) - f(x)$$

là

$$\Delta f(x) = \text{grad } f(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \|\Delta x\|,$$

trong đó  $\varepsilon$  là một *đại lượng vô cùng bé* của  $\|\Delta x\|$ .

Biểu thức  $\text{grad } f(x) \cdot \Delta x$  được gọi *vi phân* (tổn phần) của  $f$  tại  $x$  ứng với số gia  $\Delta x$ , và được ký hiệu là  $df(x)$ . Người ta cũng ký hiệu  $\Delta x_i = dx_i$ . Khi ấy

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n.$$

Như vậy, nếu  $dx_1, \dots, dx_n$  đủ nhỏ, thì  $df(x)$  là xấp xỉ của số gia  $\Delta f(x)$ . Nhận thấy rằng các tính chất của vi phân hoàn toàn được xác định bởi đạo hàm, cho nên trong những phần tới, chúng ta chỉ cần tập trung vào khảo sát tính chất của đạo hàm.

# **Bài tập và tính toán thực hành Chương 2**

<b>1. Các bài tập về hàm nhiều biến.....</b>	<b>62</b>
1.1. Tập xác định của hàm nhiều biến.....	62
1.2. Đường mức của hàm nhiều biến .....	63
1.3. Vẽ đồ thị hàm hai biến .....	63
1.4. Giới hạn của hàm nhiều biến.....	64
1.5. Ví phân của hàm nhiều biến.....	65
1.6. Cực trị của hàm nhiều biến .....	66
<b>2. Thực hành tính toán.....</b>	<b>67</b>
2.1. Vẽ đồ thị hàm số .....	67
2.2. Giới hạn của hàm nhiều biến.....	72
2.3. Ví phân của hàm nhiều biến.....	77
2.4. Tính gradient của hàm nhiều biến .....	81
2.5. Cực trị của hàm nhiều biến .....	81
2.6. Công thức Taylor cho hàm nhiều biến .....	82

## **1. Các bài tập về hàm nhiều biến**

### **1.1. Tập xác định của hàm nhiều biến**

Hãy tìm tập xác định của các hàm nhiều biến sau:

**Bài 1.**     a)  $z = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$  ;                                  b)  $z = \sqrt{(x^2+y^2-4)(25-x^2-y^2)}$  .

**Bài 2.**     a)  $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$  ;                                  b)  $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$  .

**Bài 3.**     a)  $z = \ln xy$  ;                                  b)  $z = \ln(y+x)$  .

**Bài 4.**      $z = \arctan \frac{y-1}{x}$  .

## 1.2. Đường mức của hàm nhiều biến

Vẽ đường mức hoặc mặt mức của các hàm nhiều biến sau:

**Bài 1.** a)  $z = x + y$ ; b)  $z = x^2 - y^2$ .

**Bài 2.** a)  $z = \frac{y}{x^2}$ ; b)  $z = \frac{2x}{x^2 + y^2}$ .

**Bài 3.** a)  $z = x^2 + y^2$ ; b)  $z = x + y$ .

**Bài 4.** a)  $z = xe^{-y}$ ; b)  $u = x + y + z$ .

**Bài 5.** a)  $u = x^2 + y^2 - z^2$ ; b)  $u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ .

**Bài 6.** Hãy vẽ trên mặt phẳng tập tất cả những điểm  $(x, y)$  mà  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$ .

## 1.3. Vẽ đồ thị hàm hai biến

Chọn các giá trị cụ thể của tham số  $a, b, c$  rồi vẽ đồ thị các hàm hai biến sau đây:

**Bài 1.** Vẽ mặt ellipsoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

**Bài 2.** Vẽ mặt paraboloid elliptic  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ .

**Bài 3.** Vẽ mặt paraboloid hyperbolic (mặt yên ngựa)  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ .

**Bài 4.** Vẽ mặt hyperboloid một tầng  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

**Bài 5.** Vẽ mặt hyperboloid hai tầng  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ .

**Bài 6.** Vẽ mặt trụ elliptic  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**Bài 7.** Vẽ mặt trụ hyperbolic  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**Bài 8.** Vẽ mặt trụ parabolic  $y^2 = 2ax$ .

**Bài 9.** Vẽ mặt nón bậc hai  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ .

### 1.4. Giới hạn của hàm nhiều biến

Cho hàm số  $z = f(x, y)$ . Cố định một biến, thí dụ biến  $y$ , khi ấy ta được một hàm một biến của  $x$ . Giả sử, với  $y$  cố định, giới hạn của hàm số  $f(x, y)$  khi  $x \rightarrow x_0$  tồn tại. Như vậy, ta được một hàm của một biến  $y$ . Cho  $y \rightarrow y_0$ , ta được *giới hạn lặp*:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y).$$

Tương tự, ta có giới hạn lặp:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$$

Ta nói  $z = f(x, y)$  có *giới hạn bằng  $L$*  khi  $(x, y)$  tiến tới  $(x_0, y_0)$  và viết

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L$$

nếu với mỗi số  $\varepsilon > 0$  tồn tại số  $\delta > 0$  sao cho  $|f(x, y) - L| < \varepsilon$  với mọi  $(x, y)$  mà  $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ .

Khi  $x_0$  hoặc  $y_0$  (hay cả hai) bằng vô cùng thì định nghĩa cũng tương tự.

**Bài 1.** Tìm giới hạn của hàm số  $z = x + \frac{1}{y}$  khi  $x$  tiến tới 0 và  $y$  tiến tới vô cùng.

**Bài 2.** Chứng minh rằng hàm số  $z = \frac{x-y}{x+y}$  có tính chất:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} = -1 \quad \text{và} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} = 1,$$

do đó không tồn tại  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x-y}{x+y}$ .

**Bài 3.** Cho hàm số:  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + (x-y)^2}$ . Hãy chỉ ra rằng

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0;$$

tuy nhiên không tồn tại  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ .

**Bài 4.** Tính các giới hạn lặp và giới hạn của các hàm số sau đây:

a)  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới 0.

b)  $\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới 0.

- c)  $x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới 0.
- d)  $\frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới vô cùng.
- e)  $(x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới vô cùng.
- f)  $\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{x^2}}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới vô cùng.
- g)  $\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới 0.
- h)  $\frac{\tan(xy)}{x}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới 0.
- i)  $(x^2 + y^2)^{x^2+y^2}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới 0.
- j)  $(1 + \frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$  khi  $x$  tiến tới vô cùng và  $y$  tiến tới 0.
- k)  $\frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  khi  $x$  tiến tới 1 và  $y$  tiến tới 0.
- l)  $\frac{\sin(xy)}{x}$  khi  $x$  tiến tới 2 và  $y$  tiến tới 0.

### 1.5. Vi phân của hàm nhiều biến

#### 1. Tính đạo hàm riêng

**Bài 1.** (Thi vào giai đoạn 2, hệ tại chức, ĐHBK Hà Nội)

Cho  $u = x^y$ . Tính  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

**Bài 2.** (Thi vào giai đoạn 2, hệ tại chức, ĐHBK Hà Nội)

Cho  $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ . Tính  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

**Bài 3.** (Thi vào giai đoạn 2, hệ tại chức, ĐHBK Hà Nội)

Cho  $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$ . Tính  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

**Bài 4.** Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = y = 0 \end{cases}$$

Đẳng thức sau đây có đúng không

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

**Bài 5.** Tìm một hàm hai biến  $x$  và  $y$  hai lần khả vi liên tục theo từng biến trong miền

$$U = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

và không có đạo hàm hỗn hợp  $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$  và  $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$  tại điểm  $(0,0)$ .

### 2. Tính gradient của hàm nhiều biến

**Bài 1.** Tìm gradient của hàm số  $3x^2 + 2yz$ .

**Bài 2.** Tìm gradient của hàm số  $xy - z^2$  tại điểm  $M(-9,12,10)$ .

**Bài 3.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội) Cho

$$P(x,y) = \frac{y^2}{2\sqrt{x}} - xy^2 + x^2, \quad Q(x,y) = 2y\sqrt{x} - x^2y + y^3 + 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại hàm  $u(x,y)$  có  $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ . Tìm hàm  $u(x,y)$  thỏa mãn:  $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ .

### 3. Đạo hàm theo hướng

**Bài 1.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Tính đạo hàm của hàm số  $u = xy^2z^3$ , tại điểm  $M(1,2,-1)$  theo hướng xác định bởi  $\overrightarrow{MN}$  với  $N(0,4,-3)$ .

**Bài 2.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Cho hàm số  $u = x^4 + y^4 - \frac{6}{5}z^5$ .

Tính  $\frac{\partial u}{\partial e}$  tại  $M_0(1,2,1)$  theo hướng  $\vec{e} = \overrightarrow{M_0M_1}$  với  $M_1(2,0,3)$ .

### 1.6. Cực trị của hàm nhiều biến

**Bài 1.** Tìm cực trị địa phương của các hàm sau đây:

- a)  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2};$   
 b)  $x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2;$   
 c)  $2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2;$   
 d)  $x^2y^3(6 - x - y).$

**Bài 2.** Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm  $z = |x - y| + \sqrt{1 - x - y}$  với

$$0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1.$$

**Bài 3.** (Thi vào giao đoạn 2, hệ chính qui, ĐHBK Hà Nội, 1992)

Tìm cực trị của hàm

$$z = xy^2 - x^2y.$$

**Bài 4.** (Thi vào giao đoạn 2, hệ chính qui, ĐHBK Hà Nội, 1993)

Tìm cực trị của hàm

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - xy.$$

## 2. Thực hành tính toán

Bằng thủ công, chúng ta hầu như không thực hiện được các tính toán và vẽ đồ thị của các hàm nhiều biến (ngay cả trong trường hợp hai hoặc ba biến). Vì vậy, cũng dễ hiểu tại sao trong các giáo trình từ trước tới nay, vẫn đề tính toán và biểu diễn đối với hàm nhiều biến thường ít được quan tâm và luôn tồn tại như một "lĩnh vực mơ hồ" đối với hầu hết mọi học sinh. Nhờ máy, chúng ta có thể dễ dàng đi sâu vào vấn đề này và sẽ thấy được đây là một lĩnh vực có nhiều điều thú vị. Ta có thể thực hiện các tính toán cực kỳ phức tạp hoặc vẽ được đồ thị của những hàm rất "hiếm hoi" nhờ một vài lệnh đơn giản.

### 2.1. Vẽ đồ thị hàm số

Trước hết chúng ta cần nạp các gói chuyên dụng cho vẽ đồ thị, bằng lệnh:

```
[> with(plots);
[> with(plottools);
```

1. Vẽ đồ thị hàm một biến

a. Vẽ đồ thị hàm thông thường

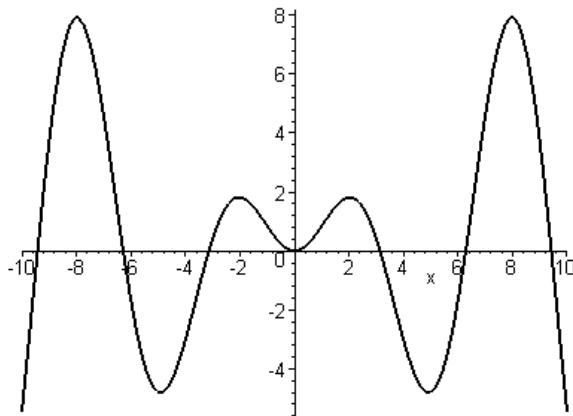
Muốn vẽ đồ thị hàm thông thường  $y = f(x)$  ta dùng lệnh:

```
[> plot(f(x), x=a..b);
```

trong đó,  $f(x)$  là hàm cần vẽ đồ thị,  $[a, b]$  là khoảng thay đổi của biến số.

Thí dụ. Vẽ đồ thị hàm số  $x \sin x$  trong khoảng  $-3\pi$  đến  $3\pi$ .

```
[> plot(x*sin(x), x=-3*pi..3*pi);
```



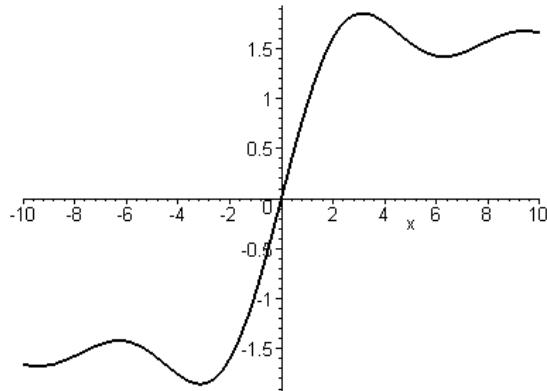
Hình 2.3

b. Vẽ đồ thị một số dạng hàm không thông thường

Nhiều hàm số không biểu diễn được thông qua các hàm cơ bản, thí dụ như nguyên hàm của một số hàm thường gặp nhu  $\frac{\sin x}{x}$ . Việc vẽ đồ thị của chúng thường rất khó khăn. Với lệnh **plot** của Maple, ta có thể vẽ đồ thị của những hàm này một cách dễ dàng.

**Thí dụ.** Định lý Newton-Leibnitz cho biết nguyên hàm của  $\frac{\sin x}{x}$  có thể biểu diễn dưới dạng tích phân xác định với cận biển  $S_i x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ . Ta cho máy vẽ đồ thị hàm này trong khoảng  $[-10, 10]$ .

```
[> plot(Si(x), x=-10..10);
```



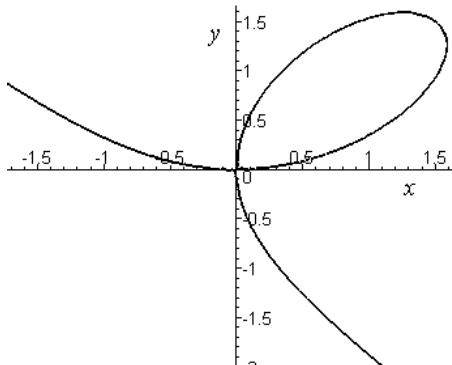
Hình 2.4

c. Vẽ đồ thị hàm cho dưới dạng ẩn.

Muốn vẽ đồ thị hàm ẩn  $f(x, y) = 0$  ta dùng lệnh **implicitplot**:

Thí dụ. Vẽ lá Descartes  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ .

[> **implicitplot**( $x^3+y^3-3*x*y=0$ ,  $x=-3..3$ ,  $y=-3..3$ );



Hình 2.5

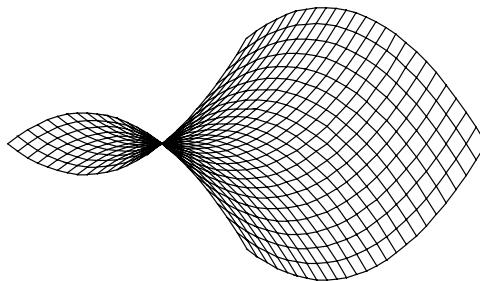
## 2. Vẽ đồ thị hàm hai biến

(i) Muốn vẽ đồ thị hàm hai biến  $z = f(x, y)$  khi  $x$  và  $y$  thay đổi trong khoảng  $x \in [a, b]$ ,  $y \in [c, d]$  ta dùng lệnh

[> **plot3d**( $f(x, y)$ ,  $x=a..b$ ,  $y=c..d$ );

Thí dụ. Vẽ mặt paraboloid hyperbolic (mặt yên ngựa)  $z = x^2 - y^2$  khi  $x$  và  $y$  thay đổi trong khoảng  $x \in [-1, 1]$ ,  $y \in [-1, 1]$ :

[> **plot3d**( $x^2-y^2$ ,  $x=-1..1$ ,  $y=-1..1$ );



Hình 2.6

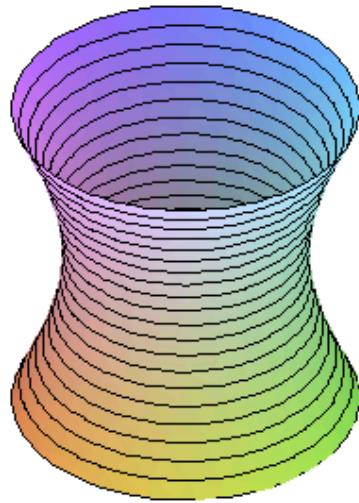
(ii) Vẽ đồ thị hàm ẩn (ba biến) ta dùng lệnh

[> **implicitplot3d**( $f(x, y, z)=0$ ,  $x=a..b$ ,  $y=c..d$ ,  $z=m..n$ );

Chú ý: Khi dùng lệnh **implicitplot3d** cần khai báo miền thay đổi của cả ba biến  $x=a..b$ ,  $y=c..d$ ,  $z=m..n$ , nếu thiếu miền thay đổi  $z=m..n$  của biến  $z$  thì máy sẽ báo lỗi.

Thí dụ. Vẽ mặt hyperboloid một tầng  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

```
[> implicitplot3d(x^2+y^2-z^2/4=1, x=-2..2, y=-2..2, z=-2..2);
```



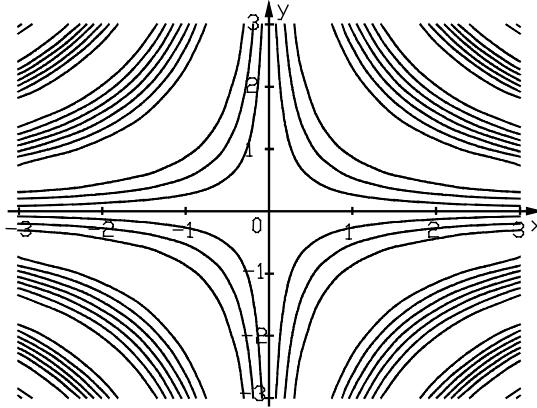
Hình 2.7

### 3. Vẽ đường mức

Một trong những phương pháp khảo sát các hàm số nhiều biến là xét các đường mức của đồ thị, tức là những đường cong  $f(x, y) = c$ . Với mỗi  $c$  ta được một đường mức, khi cho  $c$  thay đổi ta được một họ các đường mức (trong mặt phẳng 2 chiều). Muốn vẽ các đường mức, ta dùng lệnh **contourplot**.

*Thí dụ 1.* Vẽ đường mức của  $\sin(xy)$  khi  $x$  và  $y$  thay đổi trong miền  $[-3, 3] \times [-3, 3]$ .

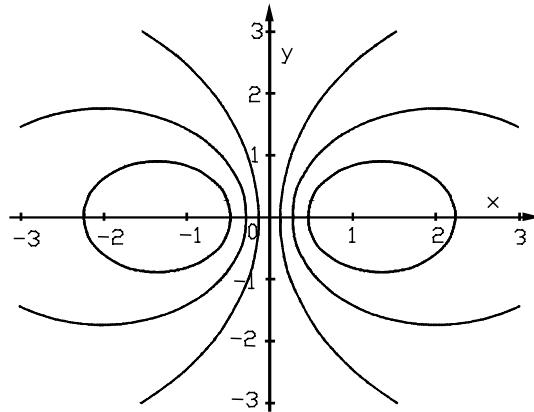
```
[> contourplot(sin(x*y), x=-3..3, y=-3..3);
```



Hình 2.8

Thí dụ 2. Vẽ đường mức của  $\frac{-5x}{x^2 + y^2 + 1}$  khi  $x$  và  $y$  thay đổi trong miền  $[-3,3] \times [-3,3]$ .

```
[> contourplot(-5*x/(x^2 + y^2 + 1), x=-3..3, y=-3..3);
```



Hình 2.9

Có thể vẽ đồng thời đường mức của nhiều đồ thị trên cùng một hệ trục.

Thí dụ 3. Vẽ đường mức của

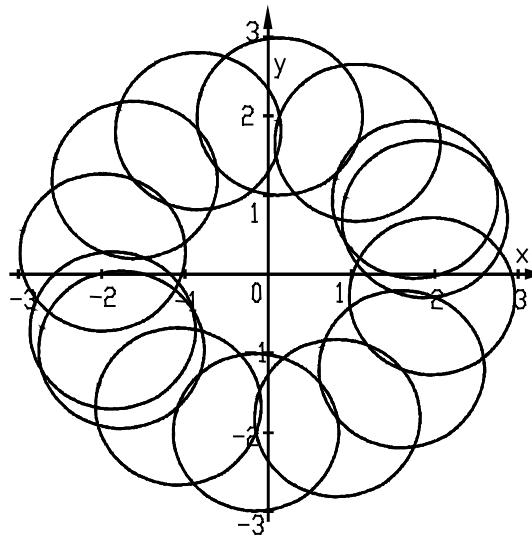
$$c1 := [\cos(x) - 2 \cos(0.4y), \sin(x) - 2 \sin(0.4y), y]$$

$$c2 := [\cos(x) + 2 \cos(0.4y), \sin(x) + 2 \sin(0.4y), y]$$

```
[> c1:=[cos(x)-2*cos(0.4*y),sin(x)-2*sin(0.4*y),y]:
```

```
[> c2:=[cos(x)+2*cos(0.4*y),sin(x)+2*sin(0.4*y),y]:
```

```
[> contourplot({c1,c2}, x=0..2*Pi, y=0..10);
```



Hình 2.10

## 2.2. Giới hạn của hàm nhiều biến

### 1. Giới hạn của hàm một biến

Muốn tính giới hạn của hàm một biến  $f(x)$  khi  $x$  tiến tới  $a$ , ta dùng lệnh:

[> limit(f(x), x=a);

*Thí dụ 1.* (Thi vô địch sinh viên Liên xô, 1977)

Tính giới hạn của hàm số  $\frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x}$  khi  $x$  tiến tới 0.

[> limit((tan(tan(x)) - sin(sin(x))) / (tan(x) - sin(x)), x=0);

2

Muốn tính giới hạn của hàm một biến  $f(x)$  tại điểm  $x = \infty$ , ta thay  $x=a$  trong lệnh `limit(f(x), x=a)` bằng `x=infinity`.

*Muốn tính giới hạn một phía* của hàm một biến  $f(x)$  khi  $x$  tiến tới  $a$  từ bên phải, ta thay  $x=a$  trong lệnh `limit(f(x), x=a)` bằng `x=+a`:

*Thí dụ 2.* Tính giới hạn của hàm số  $\frac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$  khi  $x$  tiến tới  $+0$ .

[> limit((sqrt(1-exp(-x)) - sqrt(1-cos(x))) / sqrt(sin(x)),  
x=+0);

1

## 2. Giới hạn của hàm nhiều biến

Muốn tìm giới hạn của hàm hai biến  $f(x,y)$  khi đồng thời  $x$  tiến tới  $a$ ,  $y$  tiến tới  $b$  ta dùng lệnh:

[> **limit(f(x,y), {x=a, y=b})** ;

Thí dụ 1. Tìm giới hạn của hàm số  $x + \frac{1}{y}$  khi  $x$  tiến tới 0 và  $y$  tiến tới vô cùng.

[> **limit(x+1/y, {x=0, y=infinity})** ;

0

Thí dụ 2. Tìm giới hạn của hàm số  $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$  khi  $x$  tiến tới 1 và  $y$  tiến tới 2.

[> **limit((x^2\*y)/(x^4+y^2), {x=1, y=2})** ;

$\frac{2}{5}$

Muốn tìm giới hạn lặp của hàm hai biến  $f(x,y)$  khi  $x$  tiến tới  $a$ , sau đó  $y$  tiến tới  $b$  ta dùng lệnh:

[> **limit(limit(f(x,y), x=a), y=b)** ;

Thí dụ 3. Tìm giới hạn của hàm số  $\frac{x-y}{x+y}$  khi  $x$  tiến tới 0 và sau đó  $y$  tiến tới 0.

[> **limit(limit((x-y)/(x+y), x=0), y=0)** ;

-1

Tìm giới hạn của hàm số trên khi  $y$  tiến tới 0 và sau đó  $x$  tiến tới 0.

[> **limit(limit((x-y)/(x+y), y=0), x=0)** ;

1

Hai giới hạn trên không bằng nhau, suy ra giới hạn của hàm số trên khi cả  $x$  và  $y$  đồng thời tiến tới 0 không tồn tại, máy trả lời “undefined” (không xác định):

[> **limit((x-y)/(x+y), {y=0, x=0})** ;

*undefined*

Thí dụ 4. Cho hàm số:  $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ . Chứng minh rằng

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = 0.$$

Tuy nhiên,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y)$  không tồn tại.

Trước tiên ta tính giới hạn lặp khi  $x$  tiến tới 0, sau đó  $y$  tiến tới 0:

$$[> \text{limit}(\text{limit}(x^2*y^2/(x^2*y^2+(x-y)^2), x=0), y=0); \\ 0]$$

và giới hạn lặp khi  $y$  tiến tới 0, sau đó  $x$  tiến tới 0:

$$[> \text{limit}(\text{limit}(x^2*y^2/(x^2*y^2+(x-y)^2), y=0), x=0); \\ 0]$$

Tính giới hạn khi  $x$  và  $y$  đồng thời tiến tới 0:

$$[> \text{limit}(x^2*y^2/(x^2*y^2+(x-y)^2), \{x=0, y=0\});$$

Máy không trả lời.

*Thí dụ 5.* Tính giới hạn lặp của  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  khi  $x$  tiến tới 0, sau đó  $y$  tiến tới 0:

$$[> \text{limit}(\text{limit}((x^2-y^2)/(x^2+y^2), x=0), y=0); \\ -1]$$

Tính giới hạn lặp của hàm số trên khi  $y$  tiến tới 0, sau đó  $x$  tiến tới 0:

$$[> \text{limit}(\text{limit}((x^2-y^2)/(x^2+y^2), y=0), x=0); \\ 1]$$

Tính giới hạn của hàm số trên khi  $x$  và  $y$  đồng thời tiến tới 0:

$$[> \text{limit}((x^2-y^2)/(x^2+y^2), \{x=0, y=0\}); \\ \text{undefined}]$$

Chú ý là máy dễ dàng tính các giới hạn lặp (như là giới hạn của hàm một biến) hoặc các giới hạn bình thường (xem các bài tập 4,5), tuy nhiên, đối với những bài tập khó, nếu không có tác động gì thêm, máy thường không tính được giới hạn theo cả hai biến. Dưới đây là các ví dụ. (Bạn đọc có thể thử tìm cách tác động để máy tính được).

*Thí dụ 6.* Tìm giới hạn của hàm số  $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới vô cùng.

$$[> \text{f(x,y)} := (x+y) / (x^2-x*y+y^2); \\ f(x,y) := \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \\ [> \text{limit}(\text{limit}(\text{f(x,y)}, \text{x=infinity}), \text{y=infinity}); \\ 0] \\ [> \text{limit}(\text{limit}(\text{f(x,y)}, \text{y=infinity}), \text{x=infinity}); \\ 0]]$$

0

```
[> limit(f(x,y),{y=infinity,x=infinity});
```

Máy không tính được. Ta có thể tự tính được giới hạn trên bằng 0.

*Thí dụ 7.* Tìm giới hạn của hàm số  $\frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới vô cùng.

```
[> f(x,y):=(x^2+y^2)/(x^4+y^4);
```

$$f(x,y) := \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$$

```
[> limit(limit(f(x,y),x=infinity),y=infinity);
```

0

```
[> limit(limit(f(x,y),y=infinity),x=infinity);
```

0

```
[> limit(f(x,y),{y=infinity,x=infinity});
```

Máy không tính được. Ta có thể tự tính được giới hạn trên cũng bằng 0.

*Thí dụ 8.* Tìm giới hạn của hàm số  $(x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới dương vô cùng.

```
[> f(x,y):=(x^2+y^2)*exp(-(x+y));
```

$$f(x,y) := (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$$

```
[> limit(limit(f(x,y),x=+infinity),y=+infinity);
```

0

```
[> limit(limit(f(x,y),y=+infinity),x=+infinity);
```

0

```
[> limit(f(x,y),{y=+infinity,x=+infinity});
```

Máy không tính được. Nhưng ta dễ thấy rằng đáp số là 0.

*Thí dụ 9.* Tìm giới hạn của hàm số  $(x^2 + y^2)^{(x^2+y^2)}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới 0.

```
[> f(x,y):=(x^2+y^2)^(x^2*y^2);
```

```
[> limit(limit(f(x,y),x=0),y=0);
```

1

```
[> limit(limit(f(x,y),y=0),x=0);
```

1

[> **limit(f(x,y), {y=0, x=0})** ;

Thí dụ 10. Tìm giới hạn của hàm số  $(1 + \frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$  khi  $x$  tiến tới vô cùng và  $y$  tiến tới 0.

[> **f(x,y) := (1+1/x)^(x^2/(x+y))** ;

[> **limit(limit(f(x,y), x=infinity), y=0)** ;

$\exp(1)$

[> **limit(limit(f(x,y), y=0), x=infinity)** ;

$\exp(1)$

[> **limit(f(x,y), {y=0, x=infinity})** ;

Chú ý: Ta biết rằng  $\exp(1) = e^1 = e$ . Tuy nhiên, máy không dùng kí hiệu số  $e$  như chúng ta vẫn quen dùng.

Bạn đọc tự cho máy thực hiện các lệnh tìm giới hạn sau đây:

1) Tìm giới hạn của hàm số  $\frac{\sin(xy)}{x}$  khi  $x$  tiến tới 2 và  $y$  tiến tới 0.

[> **limit(sin(x\*y)/y, {x=2, y=0})** ;

2) Tìm giới hạn của hàm số  $\frac{y}{x+y}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới 0.

[> **limit(y/(x+y), {x=0, y=0})** ;

3) Tìm giới hạn của hàm số  $x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới 0.

[> **limit(x\*sin(1/y)+y\*sin(1/x), {x=0, y=0})** ;

4) Tìm giới hạn của hàm số  $(\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới vô cùng.

[> **f(x,y) := ((x\*y)/(x^2+y^2))^(x^2)** ;

[> **limit(limit(f(x,y), x=+infinity), y=+infinity)** ;

[> **limit(limit(f(x,y), y=+infinity), x=+infinity)** ;

[> **limit(f(x,y), {y=+infinity, x=+infinity})** ;

5) Tìm giới hạn của hàm số  $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$  khi  $x$  và  $y$  tiến tới 0.

```
[> limit((x^3+y^3)/(x^2+y^2), {x=0,y=0});
```

### 2.3. Vi phân của hàm nhiều biến

#### 1. Vi phân của hàm một biến

a) Muốn tính đạo hàm (cấp 1) của hàm một biến  $f(x)$  theo  $x$ , ta dùng lệnh:

```
[> diff(f(x),x);
```

*Thí dụ:* Cho  $f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x$ . Tính  $f'(\frac{\pi}{9})$ .

```
[> diff(sin(x)+sin(3*x)/3+sin(5*x)/5+sin(7*x)/7,x);
```

$$\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x)$$

```
[> subs(x=Pi/9,%);
```

$$\cos(\pi/9) + \cos(\pi/3) + \cos(5\pi/9) + \cos(7\pi/9)$$

Muốn rút gọn biểu thức trên ta dùng lệnh

```
[> simplify(%);
```

$$\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - \cos\left(4\frac{\pi}{9}\right) - \cos\left(2\frac{\pi}{9}\right)$$

Nếu không tác động gì thêm, máy không biến đổi được biểu thức trên để được kết quả chính xác bằng  $\frac{1}{2}$ . Tuy nhiên, ta có thể bắt nó kiểm tra xem “phần đuôi” có bằng 0 hay không bằng lệnh:

```
[> is(cos(1/9*Pi)=cos(4/9*Pi)+cos(2/9*Pi));
```

*true*

Cho nên, khi làm việc với máy ta chớ vội thỏa mãn với những gì mà máy đem lại, mà cần phải “đào sâu suy nghĩ” xem ta có thể làm gì *tốt hơn* được hay không?

b) Muốn tính đạo hàm cấp  $k$  của hàm một biến  $f(x)$  theo  $x$ , ta dùng lệnh:

```
[> diff(f(x),x$k);
```

*Thí dụ:* Tính đạo hàm cấp 10 của hàm số  $x^2 \cos 2x$  tại  $x=0$  bằng các lệnh:

```
[> diff(x^2*cos(2*x),x$10);
```

```
[> subs(x=0,%);
```

```
[> simplify(%);
```

23040

Như vậy, nếu làm thủ công ta phải mất 10 lần tính đạo hàm (với lần sau phức tạp hơn lần trước), nhưng với máy ta chỉ cần 1 lệnh (đơn giản như tính đạo hàm cấp 1).

## 2. Vi phân của hàm nhiều biến

Muốn tính đạo hàm riêng của hàm hai biến  $u(x, y)$  theo  $x$ , ta dùng lệnh:

[> **diff(u(x,y),x);**

Muốn tính đạo hàm riêng cấp hai của hàm hai biến  $u(x, y)$  theo  $x$ , sau đó theo  $y$  ta dùng lệnh:

[> **diff(u(x,y),x,y);**

*Thí dụ 1.* (Thi vào giai đoạn 2, hệ tại chức, ĐHBK Hà Nội)

Cho  $u = x^y$ . Tính  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

[> **u:=x^y;**

[> **diff(u,x);**

$$\frac{x^y y}{x}$$

[> **simplify(%);**

$$x^{y-1} y$$

[> **diff(u,y);**

$$x^y \ln x$$

[> **diff(u,x,y);**

$$\frac{x^y \ln x}{x} + \frac{x^y}{x}$$

[> **diff(u,y,x);**

$$\frac{x^y \ln x}{x} + \frac{x^y}{x}$$

*Thí dụ 2.* (Thi vào giai đoạn 2, hệ tại chức, ĐHBK Hà Nội )

Cho  $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ . Tính  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  tại điểm (4,1).

[> **z:=y\*sqrt(x)-y^2-x+6\*y;**

[> **diff(z,x);**

$$\frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{x}} - 1$$

```
[> diff(z,y) ;
 $\sqrt{x} - 2y + 6$ 
[> diff(z,x,y) ;
 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 
[> diff(z,y,x) ;
 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 
```

Tính giá trị của  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  tại điểm (4,1) bằng lệnh

```
[> subs(x=4,y=1,%);
 $\frac{1}{8}\sqrt{4}$ 
[> simplify(%);
 $\frac{1}{4}$ 
```

*Thí dụ 3.* (Thi vào giai đoạn 2, hệ tại chức, ĐHBK Hà Nội )

Cho  $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$ . Tính  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  tại điểm (1,1).

```
[> z:=3*x^2-2*x*sqrt(y)+y-8*x+8;
[> diff(z,x) ;
 $6x - 2\sqrt{y} - 8$ 
[> diff(z,y) ;
 $-\frac{x}{\sqrt{y}} + 1$ 
[> diff(z,x,y) ;
 $-\frac{1}{\sqrt{y}}$ 
[> diff(z,y,z) ;
 $-\frac{1}{\sqrt{y}}$ 
[> subs(x=1,y=1,%);
 $-1$ 
```

*Thí dụ 4.* Tính các đạo hàm riêng của hàm số  $\sqrt[3]{xy}$ .

```
[> f(x,y):=(x*y)^(1/3) :
```

[> **diff(f(x,y),x);**

$$\frac{y}{3\sqrt[3]{x^2y^2}}$$

[> **diff(f(x,y),y);**

$$\frac{x}{3\sqrt[3]{x^2y^2}}.$$

Nhiều bài tập tính đạo hàm khá phức tạp, tuy nhiên sẽ không khó khăn nếu dùng máy. Dưới đây là một số ví dụ.

*Thí dụ 5.* Tính đạo hàm riêng theo biến  $x$  của hàm

$$f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$$

tại điểm  $y=1$ .

[> **f(x,y):=x+(y-1)\*arcsin(sqrt(x/y));**

[> **diff(f(x,y),x);**

$$1 + \frac{y-1}{y\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt{1-\frac{x}{y}}}$$

[> **subs(y=1,%);**

$$1$$

Thông thường, để tính được đạo hàm cấp cao, ta phải lần lượt tính các đạo hàm cấp thấp hơn. Một trong những ưu điểm của việc dùng máy là nó tính trực tiếp ngay cho ta đạo hàm cấp cao.

*Thí dụ 6.* Tính đạo hàm riêng cấp hai của hàm  $xe^y + \sin\frac{y}{x}$ .

[> **z:=x\*exp(x/y)+sin(y/x);**

[> **diff(z,x\$2);**

$$2\frac{e^y}{y} + \frac{xe^y}{y^2} - \frac{y^2 \sin\frac{y}{x}}{x^4} + 2\frac{y \cos\frac{y}{x}}{x^3}$$

[> **diff(z,x,y);**

$$-2\frac{xe^y}{y^2} - \frac{x^2 e^y}{y^3} - \frac{y \sin\frac{y}{x}}{x^3} - \frac{\cos\frac{y}{x}}{x^2}$$

[> **diff(z,y,x);**

$$2\frac{x^2 e^y}{y^3} + \frac{x^3 e^y}{y^4} - \frac{\sin\frac{y}{x}}{x^2}.$$

## 2.4. Tính gradient của hàm nhiều biến

Muốn tính gradient của hàm hai hay nhiều biến  $f(x, y)$ , ta sử dụng gói công cụ "Đại số tuyến tính" và gọi nó ra bằng lệnh:

[> **with(linalg)** :

Sau đó ta dùng lệnh:

[> **grad(f, [x, y])** ;

*Thí dụ 1.* Tìm gradient của hàm số  $3x^2 + 2yz$ .

[> **grad(3\*x^2 + 2\*y\*z, vector([x, y, z]))** ;

$$[6x, 2z, 2y].$$

*Thí dụ 2.* Tìm gradient của hàm số  $xy - z^2$  tại điểm  $M(-9, 12, 10)$ .

[> **f:=x\*y-z^2;**

$$f(x, y) = xy - z^2.$$

[> **grad(f, [x, y, z])** ;

$$[y, x, -2z].$$

[> **subs(x=-9, y=12, z=10, %)** ;

$$[12, -9, -20].$$

## 2.5. Cực trị của hàm nhiều biến

Muốn tìm *cực tiểu* của hàm nhiều biến ta dùng lệnh **minimize**.

*Thí dụ 1.* Tìm giá trị cực tiểu của  $x^2 + y^2 + 3$ .

[> **minimize(x^2+y^2+3)** ;

3

Khi dùng lệnh **minimize(f(x, y), {x})** thì máy sẽ hiểu là tìm cực tiểu của hàm số đã cho theo biến  $x$ , các biến còn lại là hằng số.

*Thí dụ 2.* Tìm cực tiểu theo  $x$  của  $x^2 + y^2 + 3$

[> **minimize(x^2+y^2, {x})** ;

$$y^2 + 3$$

Muốn tìm cực tiểu của một hàm  $f(x, y)$  trên đoạn  $[a, b] \times [c, d]$  thì dùng lệnh

```
[> minimize(f(x, y), {x, y}, {x=a..b, y=c..d})].
```

*Thí dụ 3.* Tìm cực tiểu theo  $x$  của  $x^2 + y^2$  khi  $x$  thay đổi trên đoạn  $[-10, 10]$  và  $y$  thay đổi trên đoạn  $[10, 20]$ .

```
[> minimize(x^2+y^2, {x, y}, {x=-10..10, y=10..20});
```

100

Nhiều khi máy cũng chịu, không tính nổi cực trị.

*Thí dụ 4.* Tìm cực tiểu và cực đại của hàm số  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ .

```
[> minimize((x^2-y^2)/(x^2+y^2));
```

```
[> maximize((x^2-y^2)/(x^2+y^2));
```

Máy không cho kết quả. Bạn hãy tìm hiểu vì sao?

## 2.6. Công thức Taylor cho hàm nhiều biến

Muốn tính chuỗi Taylor cho hàm nhiều biến trước tiên ta phải vào thư viện bằng lệnh **readlib(mtaylor)** (gọi công cụ về chuỗi Taylor cho hàm nhiều biến trong thư viện, chỉ cần một lần gọi trong suốt ca làm việc). Sau đó vào lệnh **mtaylor(f(x, y), [x, y], n)**, trong đó  $n$  là chỉ số lớn hơn bậc cao nhất của các thừa số đầu tiên trong chuỗi Taylor.

*Thí dụ 1.* Tính các thừa số đầu tiên trong khai triển Taylor của hàm hai biến  $\sin(x^2 + y^2)$ .

```
[> readlib(mtaylor);
```

```
[> mtaylor(sin(x^2+y^2), [x, y]);
```

$$x^2 + y^2$$

*Thí dụ 2.* Tính các thừa số đầu tiên nhỏ hơn 8 trong khai triển Taylor của  $\sin(x^2 + y^2)$ .

```
[> mtaylor(sin(x^2+y^2), [x, y], 8);
```

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}y^2x^4 - \frac{1}{2}y^4x^2 - \frac{1}{6}y^6$$

Muốn có khai triển Taylor theo một biến tại một điểm  $a$  nào đó của biến ấy ta dùng lệnh **mtaylor(f(x, y), [x=a, y], n)**.

Thí dụ 3. Tính các thừa số đầu tiên nhỏ hơn 3 trong khai triển Taylor theo biến  $x$  tại điểm  $\sqrt{\pi}$  của hàm hai biến  $\sin(x^2 + y^2)$  và đơn giản kết quả:

```
[> mtaylor(sin(x^2+y^2) , [x=sqrt(Pi] , y] , 3) ;
```

$$-2\sqrt{\pi}(x - \sqrt{\pi}) - (x - \sqrt{\pi})^2 - y^2$$

```
[> simplify(%) ;
```

$$\pi - x^2 - y^2 .$$

## Chương 3

# Hàm vectơ

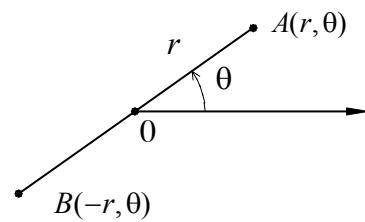
<b>3.1. Một số hệ tọa độ trong <math>\mathbb{R}^2</math> và <math>\mathbb{R}^3</math> .....</b>	<b>83</b>
3.1.1. Hệ tọa độ cực .....	84
3.1.2. Tọa độ trục và tọa độ cầu .....	86
<b>3.2. Hàm vectơ một biến .....</b>	<b>88</b>
3.2.1. Khái niệm .....	88
3.2.2. Giới hạn và tính liên tục .....	89
3.2.3. Đạo hàm .....	91
3.2.4. Ý nghĩa hình học và cơ học của đạo hàm .....	92
3.2.5. Hàm khả vi và công thức Taylor .....	93
3.2.6. Tích phân .....	94
<b>3.3. Hàm vectơ nhiều biến.....</b>	<b>96</b>
3.3.1. Khái niệm .....	96
3.3.2. Ma trận Jacobi .....	98
3.3.3. Ánh xạ khả vi .....	99
3.3.4. Định lý ánh xạ ngược .....	103
3.3.5. Hàm ẩn .....	106
3.3.6. Hessian .....	108
3.3.7. Cực đại và cực tiểu .....	110
3.3.8. Ánh xạ đơn điệu và hàm lồi .....	112
<b>3.4. Hàm phức sơ cấp.....</b>	<b>115</b>
3.4.1. Điểm lại số phức .....	115
3.4.2. Dãy và chuỗi phức .....	118
3.4.3. Hàm phức .....	119
3.4.4. Hàm chỉnh hình .....	120
3.4.5. Một số hàm sơ cấp .....	122

## 3.1. Một số hệ tọa độ trong $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$

### 3.1.1. Hệ tọa độ cực

Trong không gian  $\mathbb{R}^2$  chúng ta đã biết tới hệ tọa độ trực chuẩn Descartes mà trong đó mỗi điểm được biểu diễn bởi cặp số  $(a,b)$  với  $a$  là tọa độ trên trục  $x$  còn  $b$  là tọa độ trên trục  $y$ . Ngoài hệ tọa độ trực chuẩn nói trên thường người ta còn dùng hệ tọa độ cực để biểu diễn các điểm trong  $\mathbb{R}^2$ . Hệ

tọa độ cực được xây dựng như sau: cố định điểm  $O$  gọi là *góc* và cố định một tia qua  $O$  gọi là *trục cực*. Điểm  $A$  trong  $\mathbb{R}^2$  sẽ được biểu diễn bởi cặp  $(r,\theta)$ , trong đó  $r$  là *khoảng cách* từ  $A$  tới  $O$ , còn  $\theta$  là góc tạo thành bởi tia  $OA$  với *trục cực*. Góc  $\theta$  dương nếu phép quay từ *trục cực* tới  $OA$  theo góc này đi ngược chiều kim đồng hồ và âm nếu trái lại.



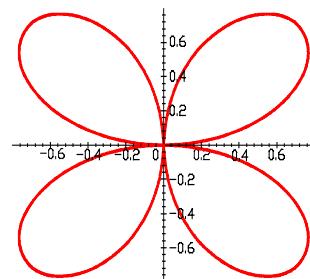
Hình 3.1

Cặp số  $(r,\theta)$  được gọi là *tọa độ* của điểm  $A$  trong hệ tọa độ cực. Theo định nghĩa, cặp số  $(-r,\theta)$  được gọi là tọa độ của điểm  $B$  đối xứng với  $A$  qua tâm  $O$ . (Có sách gọi hệ tọa cực với  $r$  có thể nhận giá trị âm là *hệ tọa độ cực mở rộng*).

Như vậy, tọa độ của điểm trong hệ tọa độ cực là xác định *không duy nhất*. Ví dụ:  $(r,\theta)$ ,  $(-r,\theta + \pi)$  và  $(r,\theta + 2k\pi)$ , với số  $k$  nguyên bất kỳ, đều biểu diễn cùng một điểm.

Với một hàm số  $f$  cho trước, tập các điểm có tọa độ cực  $(r,\theta)$  thỏa mãn điều kiện  $r = f(\theta)$  được gọi là đồ thị của hàm số  $f$  trong hệ tọa độ cực. Nhiều chương trình tính toán thông dụng có công cụ vẽ đường cong trong hệ tọa độ cực. Thí dụ trong Maple việc này được thực hiện bằng lệnh **polarplot** với cú pháp đơn giản tương tự như trong hệ tọa độ trực chuẩn (sẽ được giới thiệu chi tiết trong phần tính toán thực hành).

**Thí dụ.** Tập các điểm  $A(r,\theta)$  sao cho  $r = 1$  là đường tròn tâm  $O$ , bán kính 1, có thể biểu diễn dễ dàng (không cần máy). Nhưng đồ thị của hàm  $r = \sin 2\theta$  thì không đơn giản chút nào. Ta có thể dùng máy tính để vẽ và sẽ được *bông hồng bốn cánh* trong Hình 3.2.

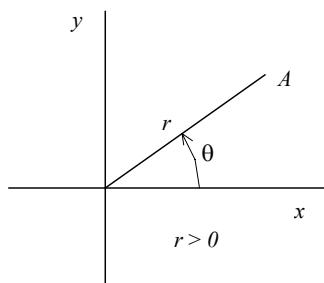


Hình 3.2

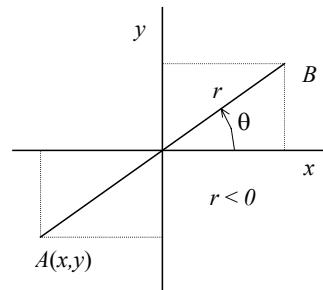
Với một hàm hai biến  $F$  cho trước, tập các điểm có tọa độ cực  $(r, \theta)$  thỏa mãn điều kiện  $F(r, \theta) = 0$  được xem là một *đường cong* trong hệ tọa độ cực, và  $F(r, \theta) = 0$  là *phương trình* của đường cong này.

### Liên hệ với hệ tọa độ trực chuẩn

Giả thiết trong  $\mathbb{R}^2$  có hai hệ tọa độ: hệ tọa độ trực chuẩn  $xy$  và hệ tọa độ cực  $r\theta$  với điểm gốc  $O$  và *trục cực* trùng với  $Ox$ . Mỗi điểm  $A \in \mathbb{R}^2$  sẽ có tọa độ là  $(x, y)$  trong *hệ tọa độ trực chuẩn* và tọa độ là  $(r, \theta)$  trong *hệ tọa độ cực*.



Hình 3.3



Hình 3.4

Ta có

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

Nếu  $r = 0$  thì  $x = 0$  và  $y = 0$ . Như vậy, (1) chính là công thức biến đổi từ tọa độ cực sang tọa độ trực chuẩn.

Từ công thức (1) có thể tìm được cách biến đổi ngược từ hệ tọa độ trực chuẩn sang hệ tọa độ cực. Trước hết ta thấy ngay rằng  $r^2 = x^2 + y^2$ . Tiếp theo ta có  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ , khi  $x \neq 0$ . Với  $x = 0$  thì  $\theta = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(y) + 2k\pi$  nếu chọn  $r = |y|$ , và  $\theta = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(-y) + 2k\pi$  nếu chọn  $r = -|y|$ , trong đó  $k$  là số nguyên.

### Thí dụ

1) Phương trình đường thẳng  $x + y = 1$  trong hệ tọa độ cực được suy ra dễ dàng nhờ công thức (1). Thật vậy, bằng phép thay tiếp ta có  $r(\cos \theta + \sin \theta) = 1$ .

2) Phương trình của đường cong  $r = \sin \theta + \cos \theta$  trong hệ tọa độ cực cũng có thể dễ dàng chuyển sang hệ tọa độ trực chuẩn nhờ công thức (1). Thật vậy, ta có  $\sin \theta = \frac{y}{r}$ ,  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ . Thay vào phương trình đường cong ta có  $r = \frac{x}{r} + \frac{y}{r}$ , và để ý  $r^2 = x^2 + y^2$  ta suy ra phương trình cần tìm là  $x^2 + y^2 - (x + y) = 0$ . Trong hệ

tọa độ trực chuẩn, đây là phương trình của đường tròn tâm tại điểm  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , bán kính  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### 3.1.2. Tọa độ trụ và tọa độ cầu

Trong không gian  $\mathbb{R}^3$  ngoài hệ tọa độ trực chuẩn quen biết còn có hai loại tọa độ thông dụng nữa: *hệ tọa độ trụ* và *hệ tọa độ cầu*.

#### 1. Hệ tọa độ trụ

Giả sử trong  $\mathbb{R}^3$  ta có hệ tọa độ trực chuẩn  $xyz$  với gốc tọa độ  $O$ . Khi ấy một điểm  $A$  bất kỳ được biểu diễn bởi bộ ba  $(r, \theta, z)$ , trong đó  $z$  là cao độ Descartes của  $A$  theo trục  $Oz$  còn  $(r, \theta)$  là tọa độ cực của hình chiếu của  $A$  lên mặt phẳng tọa độ  $xy$ . Bộ ba  $(r, \theta, z)$  được gọi là tọa độ của điểm  $A$  trong *hệ tọa độ trụ*.

Ta sẽ luôn giả thiết rằng *trục cực* của hệ tọa độ cực trong mặt phẳng  $xy$  trùng với  $Ox$ . Khi ấy, các công thức biến đổi từ *tọa độ trụ* sang *tọa độ trực chuẩn* sẽ là

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \\ z = z \end{cases}.$$

Từ đây ta có  $r^2 = x^2 + y^2$ , và công thức biến đổi ngược được dễ dàng suy ra từ công thức này tương tự như đổi với hệ tọa độ cực.

#### Thí dụ

1) Tìm phương trình của mặt phẳng  $x + y + 2z = 2$  trong hệ tọa độ trụ.

*Giải.* Áp dụng công thức biến đổi trên ta có ngay  $r(\sin \theta + \cos \theta) + 2z = 2$ .

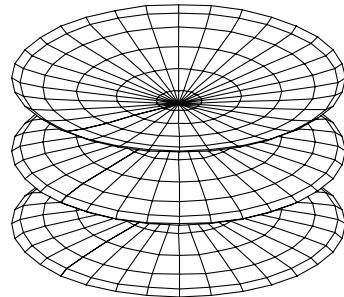
2) Tìm phương trình của đồ thị của  $r = 4 \sin \theta$  trong hệ tọa độ trực chuẩn.

*Giải.* Từ công thức biến đổi suy ra  $\sin \theta = \frac{y}{r}$ . Thay vào phương trình ta có

$$r = 4 \frac{y}{r}, \text{ hay } y = \frac{1}{4} r^2.$$

Do  $r^2 = x^2 + y^2$  nên  $\frac{1}{4}(x^2 + y^2) - y = 0$ , hay  $x^2 + y^2 - 4y = 0$ . Đây là phương trình mặt trụ có trục song song trục  $Oz$ . Đường chuẩn là đường tròn tâm  $(0, 2, 0)$  bán kính 2.

Đồ thị của hàm số trong hệ tọa độ trụ được định nghĩa tương tự như đối với hệ tọa độ cực. Việc vẽ đồ thị trong không gian 3 chiều nói chung, và trong hệ tọa độ trụ nói riêng, là việc không đơn giản. Hiện nay công việc khó khăn này đã được hỗ trợ trong nhiều chương trình tính toán thông dụng. Trong Maple, việc vẽ đồ thị trong hệ tọa độ trụ được thực hiện bằng lệnh **cylinderplot** với cú pháp đơn giản tương tự như trong hệ tọa độ trực chuẩn và (sẽ được trình bày chi tiết trong phần tính toán thực hành). Nó cho phép thể hiện được những đồ thị phức tạp, rất khó thực hiện được bằng các biện pháp thủ công.



Hình 3.5

**Thí dụ.** Đồ thị của hàm  $r = \frac{5\cos^2 z - 1}{3}$ , với  $z$  biến thiên trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  và  $\theta$  biến thiên trên đoạn  $[0, 2\pi]$ , được máy thể hiện trong Hình 3.5.

## 2. Hệ tọa độ cầu

Như trên, giả sử trong  $\mathbb{R}^3$  ta có hệ tọa độ trực chuẩn  $xyz$  với gốc  $O$ . Khi ấy mỗi điểm  $A$  trong  $\mathbb{R}^3$  được biểu diễn bằng bộ ba  $(\rho, \theta, \varphi)$ , trong đó  $\rho$  là khoảng cách từ  $A$  đến gốc,  $\theta$  là góc cực của hình chiếu  $A$  lên mặt phẳng  $xy$  với *trục cực* là  $Ox$ , còn  $\varphi$  là góc giữa trục  $Oz$  và  $\overrightarrow{OA}$ . Công thức biến đổi từ *tọa độ cầu* ra *tọa độ trực chuẩn* là

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} .$$

Từ đây dễ dàng suy ra  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Khái niệm đồ thị của hàm số trong hệ tọa độ cầu được định nghĩa tương tự như đối với hệ tọa độ cực.

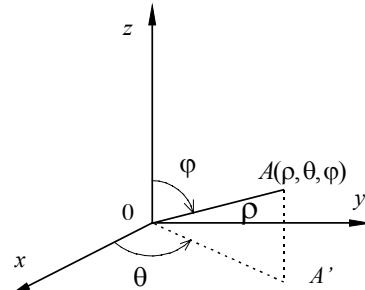
### Thí dụ

1) Tìm phương trình đồ thị của hàm số  $z = 1 - x^2 - y^2$  trong hệ tọa độ cầu.

*Giải.* Áp dụng công thức biến đổi tọa độ ta có ngay

$$\rho \cos \varphi = 1 - (\rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta).$$

Sau khi rút gọn ta được  $\rho^2 \sin^2 \varphi + \rho \cos \varphi = 1$ .



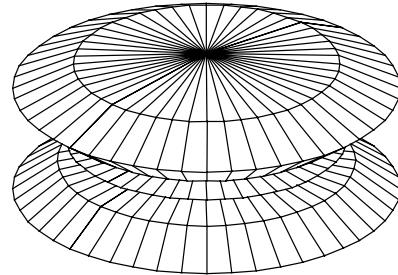
Hình 3.6

2) Tìm phương trình biểu diễn đồ thị của  $\rho = 4 \cos \varphi$  trong hệ tọa độ trực chuẩn.

Giải. Từ phương trình ta suy ra  $\rho^2 = 4\rho \cos \varphi = 4z$ , hay  $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ .

Đồ thị của hàm số trong hệ tọa độ cầu cũng được định nghĩa tương tự như đối với hệ tọa độ cực. Việc vẽ đồ thị trong hệ tọa độ cầu cũng đã được hỗ trợ trong nhiều chương trình tính toán thông dụng.

Trong Maple, việc vẽ đồ thị trong hệ tọa độ cầu được thực hiện bằng lệnh **spherplot** với cú pháp đơn giản tương tự như trong hệ tọa độ trực chuẩn và (sẽ được trình bày chi tiết trong phần tính toán thực hành). Nó cho phép thể hiện được những đồ thị phức tạp, rất khó thực hiện được bằng các biện pháp thủ công.



Hình 3.7

**Thí dụ.** Đồ thị của hàm  $\rho = \frac{5 \cos^2 \varphi - 1}{2}$ ,

với  $\varphi$  và  $\theta$  biến thiên trên các miền  $\varphi \in [-\pi, \pi], \theta \in [0, \pi]$  được máy thể hiện trong Hình 3.7.

## 3.2. Hàm vectơ một biến

### 3.2.1. Khái niệm

Cho  $X \subseteq \mathbb{R}$  và  $f$  là một phép ứng dụng đơn trị từ  $X$  vào  $\mathbb{R}^n$ . Khi ấy ta nói  $f$  là hàm vectơ từ  $X$  vào  $\mathbb{R}^n$ . Như vậy với mỗi số  $t \in X$  giá trị  $f(t)$  là một vectơ  $n$ -chiều với  $n$  tọa độ  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ . Ký hiệu  $e_i$  là vectơ *trục đơn vị* trong  $\mathbb{R}^n$  (tức là có tọa độ thứ  $i$  bằng 1 và các tọa độ khác bằng 0) thì

$$f(t) = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + \dots + f_n(t)e_n \quad (1)$$

Các hệ số  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$  phụ thuộc vào  $t$  và là đơn ứng từ  $X$  vào  $\mathbb{R}$ . Như thế  $f_1, \dots, f_n$  là những hàm số thực trên  $X$ . Chứng tỏ mỗi hàm vectơ  $f$  cho ta  $n$  hàm số tọa độ (thành phần)  $f_1, \dots, f_n$ . Ngược lại, nếu  $f_1, \dots, f_n$  là những hàm số trên  $X$  thì phép ứng  $f$  xác định bởi công thức (1) sẽ là một hàm vectơ từ  $X$  vào  $\mathbb{R}^n$ .

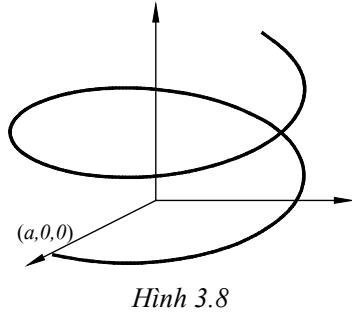
Khi hệ vecto tọa độ  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$  đã được xác định, ta viết  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$  có nghĩa là hàm vecto  $f$  của biến  $t$  được cho bởi công thức (1), trong đó  $f_1, \dots, f_n$  là những hàm số trên  $X \subseteq \mathbb{R}$ .

### Thí dụ

1) Trong không gian  $\mathbb{R}^3$ , ký hiệu  $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{j} = \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$  trong hệ tọa độ trực chuẩn. Hàm vecto một biến  $f(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  với  $a$  và  $b$  là những hằng số cho ta phép ứng

$$t \mapsto (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + (bt)\mathbf{k},$$

với mỗi  $t \in \mathbb{R}$ . Điểm cuối của vecto  $f(t)$  tạo thành đường hình lò xo (như Hình 3.8).



Hình 3.8

2) Trong thí dụ trên nếu bỏ tọa độ thứ 3 thì ta sẽ có hàm vecto biến  $t$  với giá trị trong mặt phẳng (không gian  $\mathbb{R}^2$ ):

$$f(t) = (a \cos t, a \sin t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}.$$

Điểm cuối của vecto  $f(t)$  tạo thành đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $|a|$ .

### 3.2.2. Giới hạn và tính liên tục

Cho  $f(t)$  là một hàm vecto biến  $t \in \mathbb{R}$  với giá trị trong  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ). Ta nói rằng vecto  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  là *giới hạn* của  $f(t)$  khi  $t \rightarrow t_0$  và viết

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = v \quad (2)$$

nếu như, với mọi  $\epsilon > 0$ , tồn tại  $\delta > 0$  để  $\|f(t) - v\| < \epsilon$  mỗi khi  $0 < |t - t_0| < \delta$ .

**MÊNH ĐỀ.** Cho  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$  là hàm vecto biến  $t \in \mathbb{R}$ . Khi ấy  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = (v_1, \dots, v_n)$  khi và chỉ khi  $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = v_i$ , với mọi  $i = 1, \dots, n$ .

**Chứng minh.** Theo định nghĩa,  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = v$  thì với mọi  $\epsilon > 0$  đều tồn tại  $\delta > 0$  để  $\sqrt{(f_1(t) - v_1)^2 + \dots + (f_n(t) - v_n)^2} < \epsilon$  với mọi  $t$  thoả mãn  $0 < |t - t_0| < \delta$ . Chứng tỏ  $|f_i(t) - v_i| < \epsilon$  xảy ra mỗi khi  $0 < |t - t_0| < \delta$ . Vậy  $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = v_i$ , với mọi  $i = 1, \dots, n$ .

Trái lại, nếu (2) đúng thì với  $\varepsilon > 0$  cho trước, lấy  $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ , ta sẽ tìm được  $\delta_i$  để  $|f_i(t) - v_i| < \varepsilon_i$  mỗi khi  $0 < |t - t_0| < \delta_i$ . Chọn  $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ , ta có

$$\|f(t) - v\| = \sqrt{(f_1(t) - v_1)^2 + \dots + (f_n(t) - v_n)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon$$

mỗi khi  $0 < |t - t_0| < \delta$ . Chứng tỏ  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = v$ . Mệnh đề được chứng minh xong.

**Nhận xét.** Từ mệnh đề trên việc khảo sát giới hạn của hàm vectơ một biến hoàn toàn có thể đưa về việc xét giới hạn của hàm số mà chúng ta đã học trong giáo trình *Giải tích một biến*. Nhiều tính chất về giới hạn của hàm vectơ có thể chứng minh tương tự như trường hợp hàm số. Thí dụ như:

- a)  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = v$  khi và chỉ khi  $\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) - v) = \mathbf{0}$  (ở đây  $\mathbf{0}$  là vectơ có các tọa độ bằng 0).
- b)  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = v$  khi và chỉ khi  $f(t) = v + \alpha(t)$ , trong đó  $\alpha(t)$  là vectơ vô cùng bé khi  $t \rightarrow t_0$  theo nghĩa  $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \mathbf{0}$ .
- c) Nếu  $f(t)$  và  $g(t)$  là hai hàm vectơ và  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = v$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = u$  thì  $\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) + g(t)) = v + u$ .
- d) Nếu  $c$  là hằng số và  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = v$  thì  $\lim_{t \rightarrow t_0} cf(t) = cv$ .
- e) Nếu  $c(t)$  là một hàm số và  $\lim_{t \rightarrow t_0} c(t) = c$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = v$  thì  $\lim_{t \rightarrow t_0} c(t)f(t) = cv$ .
- f) Nếu  $f(t)$  và  $g(t)$  là hai hàm vectơ và  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = v$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = u$  thì  $\lim_{t \rightarrow t_0} \langle f(t), g(t) \rangle = \langle v, u \rangle$  (tích vô hướng).  
 $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \times g(t) = v \times u$  (tích vectơ trong trường hợp 3 chiều).

Nhắc lại rằng người ta định nghĩa *tích vectơ* của 2 vectơ  $x = (x_1, x_2, x_3)$  và  $y = (y_1, y_2, y_3)$  là vectơ  $(x_2y_3 - x_3y_2, x_1y_3 - x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$ .

**ĐỊNH NGHĨA.** *Hàm vectơ gọi là liên tục tại  $t_0$  nếu  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$ , tức là với mọi  $\varepsilon > 0$  sẽ tồn tại  $\delta > 0$  sao cho*

$$\|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon \text{ mỗi khi } 0 < |t - t_0| < \delta.$$

**HỆ QUẢ.** *Hàm vectơ  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$  liên tục tại  $t_0$  khi và chỉ khi các hàm tọa độ  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$  liên tục tại  $t_0$ .*

**Chứng minh.** Suy ra ngay từ mệnh đề trên.

Từ kết quả này ta thấy rằng những tính chất về tính liên tục của hàm vector hoàn toàn tương tự như trường hợp hàm số.

### 3.2.3. Đạo hàm

**ĐỊNH NGHĨA.** Cho  $f(t)$  là hàm vector. Khi ấy nếu  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$  tồn tại thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của  $f$  tại  $t$  và được ký hiệu là  $f'(t)$  hay  $\frac{df(t)}{dt}$  hay  $\dot{f}(t)$ .

Mệnh đề sau cho phép tính đạo hàm của  $f$  qua các hàm số thành phần.

**MỆNH ĐỀ.** Hàm vector  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$  có đạo hàm tại  $t_0$  khi và chỉ khi  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$  khả vi tại  $t_0$  và khi ấy ta có công thức

$$f'(t_0) = (f'_1(t_0), f'_2(t_0), \dots, f'_n(t_0)).$$

**Chứng minh.** Áp dụng công thức tính giới hạn hàm vectơ ta có

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = v, \text{ với } v = (v_1, \dots, v_n),$$

khi và chỉ khi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_i(t_0 + \Delta t) - f_i(t_0)}{\Delta t} = v_i, \text{ với mọi } i = 1, \dots, n$$

và suy ra ngay kết quả.

Sau đây là một số công thức tính đạo hàm.

**MỆNH ĐỀ.** Cho  $f(t)$  và  $g(t)$  là hai hàm vectơ có đạo hàm và  $c$  là một hằng số. Khi ấy

- (i)  $(f(t) + g(t))' = f'(t) + g'(t);$
- (ii)  $(cf'(t)) = cf'(t);$
- (iii)  $(\langle f(t), g(t) \rangle)' = \langle f(t), g'(t) \rangle + \langle f'(t), g(t) \rangle;$
- (iv)  $(f(t) \times g(t))' = f(t) \times g'(t) + f'(t) \times g(t) \quad (\text{trong trường hợp 3 chiều}).$

**Chứng minh.** Ta sẽ chứng minh công thức (iii) còn các công thức khác chứng minh tương tự. Vì  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$  và  $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$ , cho nên

$$\langle f(t), g(t) \rangle = f_1(t)g_1(t) + \dots + f_n(t)g_n(t).$$

Dùng công thức tính đạo hàm của tổng và tích của các hàm số ta thu được

$$\begin{aligned}
(\langle f(t), g(t) \rangle)' &= (f_1(t)g_1(t))' + \dots + (f_n(t)g_n(t))' = \\
&= f_1(t)g_1'(t) + f_1'(t)g_1(t) + \dots + f_n(t)g_n'(t) + f_n'(t)g_n(t) = \\
&= f_1(t)g_1'(t) + \dots + f_n(t)g_n'(t) + f_1'(t)g_1(t) + \dots + f_n'(t)g_n(t) = \\
&= \langle f(t), g'(t) \rangle + \langle f'(t), g(t) \rangle.
\end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh xong.

### Thí dụ

1) Cho hàm vectơ  $f(t)$  sao cho độ dài vectơ  $\|f(t)\|$  là hằng số. Chứng minh rằng  $f'(t)$  vuông góc với  $f(t)$  tại mọi  $t$ .

Giải. Ta có  $\langle f(t), f(t) \rangle = \|f(t)\|^2 = \text{constant}$ . Áp dụng công thức tính đạo hàm

$$0 = (\langle f(t), f(t) \rangle)' = \langle f(t), f'(t) \rangle + \langle f'(t), f(t) \rangle.$$

Suy ra  $\langle f'(t), f(t) \rangle = 0$ , chứng tỏ  $f'(t)$  vuông góc với  $f(t)$ .

2) Cho hàm vectơ  $f(t)$  có hướng hằng, tức là tồn tại hướng cố định  $v$  và hàm  $\alpha(t)$  sao cho  $f(t) = \alpha(t)v$ . Khi ấy  $f'(t) = \alpha'(t)v$  cũng là hàm vectơ có hướng hằng trùng với hướng của  $f(t)$ .

**Chú ý.** Nếu hàm vectơ  $f(t)$  có đạo hàm thì đạo hàm  $f'(t)$  cũng là hàm vectơ. Nếu hàm vectơ  $f'(t)$  có đạo hàm thì đạo hàm của nó được ký hiệu là  $f''(t)$  và được gọi là đạo hàm cấp 2 của hàm  $f(t)$ . Tương tự ta có thể định nghĩa đạo hàm cấp  $m$  của  $f(t)$  và ký hiệu là  $f^{(m)}(t)$ .

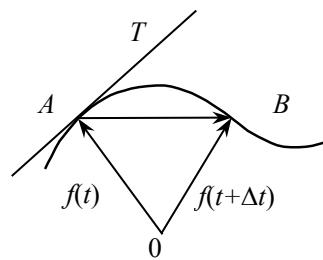
### 3.2.4. Ý nghĩa hình học và cơ học của đạo hàm

#### 1. Ý nghĩa hình học

Cho  $f(t)$  là một hàm vectơ từ  $\mathbb{R}$  vào không gian  $\mathbb{R}^3$ . Các điểm cuối của vectơ  $f(t)$  tạo thành một đường cong trong  $\mathbb{R}^3$ . Đặt  $A$  là điểm cuối của vectơ  $f(t)$ ,  $B$  là điểm cuối của vectơ  $f(t + \Delta t)$ . Khi ấy

$\Delta f(t) = f(t + \Delta t) - f(t)$  là vectơ dây cung  $\overrightarrow{AB}$ .

Khi  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $B \rightarrow A$  và  $\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$  tiến dần tới vectơ tiếp tuyến với đường cong tại  $A$ , theo nghĩa tương tự như đối với đường cong trong mặt phẳng. Để chính xác hóa khái niệm này đối với đường cong 3D trong không gian 3 chiều, người ta thường định



Hình 3.9

nghĩa vecto tiếp tuyến với đường cong tại  $A$  là vecto cùng phương với  $f'(t)$ .

**Thí dụ.** Cho  $f(t) = (\cos t, \sin t, 0)$  là hàm vecto từ  $\mathbb{R}$  vào  $\mathbb{R}^3$ . Tập ảnh là đường tròn đơn vị trên mặt phẳng  $xy$ . Ta có  $f'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ . Đây là hướng tiếp tuyến với đường tròn tại mọi điểm  $(\cos t, \sin t, 0), t \in \mathbb{R}$ .

## 2. Ý nghĩa cơ học

Giả sử điểm vật chất chuyển động trong không gian phụ thuộc vào thời gian  $t$  theo công thức  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ . Tại thời điểm  $t$ , vị trí điểm vật chất sẽ là điểm cuối của vecto  $f(t)$ . Khi ấy  $\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$  biểu thị tốc độ của chuyển động trung bình trong thời gian từ  $t$  đến  $t + \Delta t$  (điểm vật chất di chuyển từ  $A$  tới  $B$ ). Như vậy  $f'(t)$  sẽ là vecto vận tốc chuyển động tại thời điểm  $t$ . Tương tự  $f''(t)$  là vecto gia tốc của chuyển động tại thời điểm  $t$ .

### 3.2.5. Hàm khả vi và công thức Taylor

Hàm vecto  $f(t)$  được gọi là *khả vi* tại  $t$  nếu số gia của hàm tại điểm này có thể biểu diễn dạng

$$\Delta f(t) = v\Delta t + \alpha \quad (1)$$

trong đó  $v$  là vecto hằng,  $\alpha$  là một hàm vecto nhỏ vô cùng khi  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Trong trường hợp này đại lượng vecto  $v\Delta t$  được gọi là *vi phân* của  $f$  tại  $t$  và ký hiệu  $df(t)$ . Nhận xét rằng nếu  $f(t)$  khả vi tại  $t$  thì có đạo hàm tại điểm đó và  $v = f'(t)$ . Như vậy  $df(t) = f'(t)\Delta t$ . Để tiện người ta viết  $dt$  thay cho  $\Delta t$ :  $df(t) = f'(t)dt$ . Công thức tính vi phân của hàm vecto theo các thành phần là

$$df(t) = (df_1(t), \dots, df_n(t)).$$

Giả thiết  $f'(t)$  khả vi tại  $t$ . Khi ấy, tương tự như đối với hàm số, người ta định nghĩa vi phân cấp 2 của  $f(t)$  tại  $t$  là  $d^2 f(t) = f''(t)dt^2$ . Vi phân cấp cao hơn được định nghĩa tương tự.

**Nhận xét.** Từ công thức (1) ta thấy ngay vi phân của  $f$  tại  $t$  là xấp xỉ tuyến tính của hàm tại lân cận điểm này. Ngoài ra, vì  $df(t)$  chỉ sai khác  $f'(t)$  một thừa số  $dt$  nên  $df(t)$  có hướng trùng với hướng tiếp tuyến của  $f(t)$  tại  $t$ .

Định lý Taylor sau đây cho phép tính xấp xỉ giá trị của  $f$  trong lân cận của  $t_0$  thông qua các đạo hàm của  $f$  tại  $t_0$ .

**ĐỊNH LÝ.** *Giả thiết  $f(t)$  có đạo hàm cấp  $m$  tại  $t_0$ . Khi ấy ta có công thức Taylor*

$$f(t_0 + \Delta t) = f(t_0) + f'(t_0)\Delta t + \dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(t_0)\Delta t^m + \alpha\Delta t^m,$$

trong đó  $\alpha$  là đại lượng vectơ vô cùng bé khi  $\Delta t$  dần tới 0.

**Chứng minh.** Áp dụng công thức Taylor cho từng hàm thành phần  $f_i(t)$  ta có

$$f_i(t_0 + \Delta t) = f_i(t_0) + f'_i(t_0)\Delta t + \dots + \frac{1}{m!}f_i^{(m)}(t_0)\Delta t^m + \alpha_i\Delta t^m, \text{ với } i=1,2,\dots,n,$$

trong đó  $\alpha_i$  là các đại lượng vô cùng bé khi  $\Delta t \rightarrow 0$ . Vì  $f(t_0) = (f_1(t_0), \dots, f_n(t_0))$ ,  $f^{(k)}(t_0) = (f_1^{(k)}(t_0), \dots, f_n^{(k)}(t_0))$  và vectơ  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  cũng là đại lượng vectơ vô cùng bé khi  $\Delta t \rightarrow 0$  nên ta suy ra ngay công thức Taylor cho hàm vectơ.

**Chú ý.** Trong công thức Taylor, thành phần dư  $R_m = \alpha\Delta t^m$  nói chung không thể biểu diễn dưới dạng Lagrange như đối với hàm số trong trường hợp  $f(t)$  có đạo hàm cấp  $m+1$  mà chỉ có thể đánh giá như sau: tồn tại  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (-1,1)$  sao cho

$$R_m = \frac{1}{(m+1)!}\Delta t^m \left( f_1^{(m+1)}(t_0 + \lambda_1\Delta t), \dots, f_n^{(m+1)}(t_0 + \lambda_n\Delta t) \right).$$

Thông thường  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  là những hằng số khác nhau nên các đạo hàm cấp  $(m+1)$  của các hàm thành phần được đánh giá tại những điểm khác nhau quanh  $t_0$ .

**Hệ quả.** Giả thiết  $f$  khả vi tại mọi điểm của  $[a,b]$  và  $\|f'(t)\| \leq \alpha$  với mọi  $t \in [a,b]$ . Khi ấy

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \alpha \|b - a\|.$$

**Chứng minh.** Đặt  $u = f(b) - f(a)$  và xét hàm số  $\varphi(t) := \langle f(t), u \rangle$ . Hàm này khả vi trên đoạn  $[a,b]$  cho nên áp dụng công thức Taylor ta tìm được số  $t \in (a,b)$  để  $\varphi(b) - \varphi(a) = \langle f'(t), u \rangle (b-a)$ . Từ đây ta có đánh giá

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\|^2 &= \varphi(b) - \varphi(a) = \langle f'(t), u \rangle \cdot (b-a) \leq \|f'(t)\| \cdot \|u\| \cdot (b-a) \leq \\ &\leq \alpha \|f(b) - f(a)\| \cdot (b-a) \end{aligned}$$

và suy ra bất đẳng thức cần tìm.

### 3.2.6. Tích phân

#### 1. Khái niệm

Đối với hàm vectơ  $f(t)$ , việc định nghĩa *tích phân* xác định hoàn toàn tương tự như trường hợp hàm số. Từ định nghĩa chúng ta có ngay công thức tích phân của hàm vectơ thông qua tích phân của các hàm thành phần:  $f(t)$  khả tích trên  $[a,b]$  khi và chỉ khi  $f_1(t), \dots, f_n(t)$  khả tích trên  $[a,b]$  và

$$\int_a^b f(t)dt = \left( \int_a^b f_1(t)dt, \dots, \int_a^b f_n(t)dt \right) \quad (1)$$

Hàm vecto  $F(t)$  gọi là *nguyên hàm* (hay *phản đạo hàm*) của hàm  $f(t)$  nếu  $F'(t) = f(t)$ .

Tương tự như hàm số, công thức Leibniz tính tích phân qua nguyên hàm cho hàm vecto là

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Nếu một nguyên hàm của  $f(t)$  là  $F(t)$  thì với mọi vecto hằng  $v$ , hàm  $F(t) + v$  cũng là nguyên hàm của  $f(t)$ . Ta viết

$$\int f(t)dt = F(t) + v$$

và gọi là tích phân bất định của  $f(t)$ . Cũng như công thức (1), công thức tính tích phân bất định là

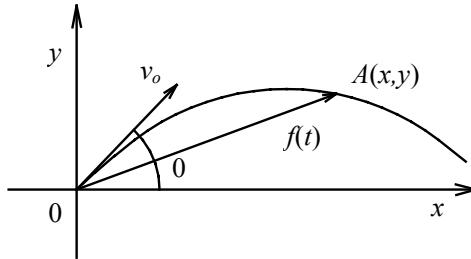
$$\int f(t)dt = \left( \int f_1(t)dt, \dots, \int f_n(t)dt \right).$$

## 2. Ứng dụng

Chúng ta sẽ áp dụng tích phân và đạo hàm của hàm vecto để tính quỹ đạo chuyển động của đầu đạn bắn ra từ bệ phỏng dưới góc  $\alpha$  so với mặt nằm ngang và với vận tốc ban đầu là  $v_0$ .

Đặt gốc tọa độ 0 tại bệ phỏng,  $Ox$  là hướng nằm ngang,  $Oy$  là hướng thẳng đứng, vecto tốc độ  $v_0$  tạo thành góc  $\alpha$  với  $Ox$ . Ký hiệu  $A(x, y)$  là vị trí của đầu đạn sau thời gian  $t$  và  $f(t)$  là vecto  $\overrightarrow{OA}$ . Bài toán đặt ra là xác định  $f(t)$  biết rằng lực cản của không khí là không đáng kể và lực duy nhất tác động lên đầu đạn là trọng lực  $g$  với vecto lực  $\bar{g} = (0, -g)$ . Theo định luật Newton ta có  $F = ma$ , trong đó  $F$  là lực tác động lên vật khối lượng  $m$  và  $a$  là gia tốc chuyển động. Trong trường hợp này  $ma = mg$ . Vậy  $f''(t) = \bar{g}$ . Tích phân hai lần ta được

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2\bar{g} + tc + d,$$



Hình 3.10

trong đó vectơ hằng  $\mathbf{c}$  và  $\mathbf{d}$  được xác định bởi các điều kiện khởi đầu  $f(0) = 0$  và  $f'(0) = \mathbf{v}_0$ . Kết quả thu được là

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{g} + t\mathbf{v}_0.$$

Vì  $\mathbf{v}_0 = (\|\mathbf{v}_0\|\cos\alpha, \|\mathbf{v}_0\|\sin\alpha)$ , các thành phần của  $f(t)$  sẽ là

$$\left( t\|\mathbf{v}_0\|\cos\alpha, -\frac{1}{2}gt^2 + t\|\mathbf{v}_0\|\sin\alpha \right).$$

Để xác định khi nào đầu đạn rơi chạm đất, ta chỉ cần giải phương trình

$$f_2(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + t\|\mathbf{v}_0\|\sin\alpha = 0, \quad t > 0,$$

để tìm ra  $t$  rồi thay vào

$$f_1(t) = (\|\mathbf{v}_0\|\cos\alpha)t$$

và tìm khoảng cách xa nhất mà đầu đạn đi được (kết quả là  $\frac{\|\mathbf{v}_0\|^2 \sin 2\alpha}{g}$ ).

### 3.3. Hàm vectơ nhiều biến

#### 3.3.1. Khái niệm

Cho  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  và  $f$  là một phép ứng dụng đơn trị từ  $X$  vào  $\mathbb{R}^n$ . Nếu  $m = 1$  thì  $f$  là *hàm vectơ một biến* đã xét ở phần trước. Nếu  $m > 1$  và  $n = 1$  thì  $f$  là *hàm số nhiều biến* đã trình bày ở Chương 2. Khi  $m > 1$  và  $n > 1$  ta nói  $f$  là *hàm vectơ nhiều biến*. Để cho gọn và dễ phân biệt ta sẽ dùng từ “ánh xạ” để chỉ hàm vectơ nhiều biến (đơn trị).

Nếu cố định một hệ tọa độ của  $\mathbb{R}^n$  (hệ tọa độ Descartes được xem là hệ tọa độ mặc định) thì với mỗi  $\mathbf{x} \in X$ , giá trị  $f(\mathbf{x})$  là một vectơ trong  $\mathbb{R}^n$  có  $n$  tọa độ:  $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ . Những tọa độ này là hàm số biến  $\mathbf{x}$ , xác định trên  $X$  và được gọi là những hàm tọa độ (hay hàm thành phần) của  $f$ . Như vậy mỗi ánh xạ  $f$  từ  $X$  vào  $\mathbb{R}^n$  có  $n$  hàm tọa độ  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Ngược lại, cho  $n$  hàm số  $f_1, f_2, \dots, f_n$  xác định trên tập  $X$  ta sẽ có một ánh xạ duy nhất  $f$  từ  $X$  vào  $\mathbb{R}^n$  nhận  $f_1, f_2, \dots, f_n$  là những hàm tọa độ (với đúng thứ tự trên) và ánh xạ này được cho bởi công thức

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) \quad \text{với mọi } \mathbf{x} \in X.$$

Từ mối liên quan trên giữa ánh xạ và các hàm tọa độ chúng ta có thể khảo sát ánh xạ thông qua tính chất của các hàm nhiều biến như khi khảo sát hàm vectơ một biến ở phần trước vậy. Ví dụ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  là giới hạn của  $f(\mathbf{x})$  khi  $\mathbf{x}$  dần tới  $\mathbf{x}_0$  khi và chỉ khi với mọi  $i=1, \dots, n$ ,  $y_i$  là giới hạn của  $f_i(\mathbf{x})$  khi  $\mathbf{x}$  dần tới  $\mathbf{x}_0$ ;  $f$  liên tục tại  $\mathbf{x}_0$  khi và chỉ khi  $f_1, f_2, \dots, f_n$  liên tục tại điểm này. Sau đây là một vài thí dụ hàm vectơ nhiều biến.

### Thí dụ

1) Lấy  $X = \mathbb{R}^m$ ,  $A$  là ma trận cỡ  $(n \times m)$  và  $\mathbf{b}$  là một vectơ trong  $\mathbb{R}^n$ . Khi ấy

- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  với mọi  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  là một ánh xạ hằng;
- $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  với mọi  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  là một ánh xạ tuyến tính;
- $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  với mọi  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  là một ánh xạ affine.

2) Cho  $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$  là hình tròn đơn vị trong  $\mathbb{R}^2$ . Khi ấy

$$f(x_1, x_2) = (-x_1, x_2, \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)})$$

với mọi  $(x_1, x_2) \in X$  là một ánh xạ từ  $X$  vào  $\mathbb{R}^3$ . Các hàm thành phần của  $f$  là

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= -x_1, \\ f_2(x_1, x_2) &= x_2, \\ f_3(x_1, x_2) &= \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}. \end{aligned}$$

3) Lấy  $X = \mathbb{R}^2$  và  $\mathbb{R}^3$  được trang bị hệ tọa độ trụ  $(r, \theta, z)$ . Xét các hàm

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ f_2(x_1, x_2) &= \begin{cases} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) & \text{khi } x_1 \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x_2) & \text{khi } x_1 = 0 \end{cases}, \\ f_3(x_1, x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Khi ấy  $f = (f_1, f_2, f_3)$  là ánh xạ đồng nhất từ  $\mathbb{R}^2$  vào mặt phẳng  $z = 0$  trong  $\mathbb{R}^3$ .

### 3.3.2. Ma trận Jacobi

Cho  $f$  là ánh xạ từ  $\mathbb{R}^m$  vào  $\mathbb{R}^n$  với các hàm tọa độ  $f_1, \dots, f_n$ . Giả thiết rằng các hàm tọa độ  $f_i$  có đạo hàm riêng  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ . Khi ấy ma trận

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận Jacobi* của  $f$  tại  $\mathbf{x}$  và ký hiệu là  $J_f(\mathbf{x})$ .

Nhận xét rằng hàng của ma trận Jacobi chính là *gradient* của các hàm  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Do vậy ta có thể viết ma trận Jacobi như sau

$$J_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \text{grad } f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

#### Thí dụ

1) Xét ánh xạ affine  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ , ta có ngay  $J_f(\mathbf{x}) = A$  với mọi  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

2) Ma trận Jacobi của ánh xạ  $f$  trong Thí dụ 2 sẽ là

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x_1}{\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}} & -\frac{x_2}{\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}} \end{pmatrix}$$

với mọi  $(x_1, x_2)$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 < 1$ .

3) Xét ánh xạ  $f$  từ  $\mathbb{R}^3$  vào  $\mathbb{R}^3$  cho bởi công thức sau trong hệ tọa độ cực

$$f(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi).$$

Khi ấy ma trận Jacobi của  $f$  tại  $(r, \theta, \varphi)$  sẽ là

$$J_f(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

### 3.3.3. Ánh xạ khả vi

Giả sử  $f$  là một ánh xạ từ tập mở  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  vào  $\mathbb{R}^n$ . Ta nói  $f$  là *khả vi* tại điểm  $x \in X$  nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính  $A$  từ  $\mathbb{R}^m$  vào  $\mathbb{R}^n$  sao cho với mọi  $h \in \mathbb{R}^m$ ,  $x + h \in X$ , ta có

$$f(x + h) = f(x) + Ah + \alpha(h), \quad (1)$$

trong đó  $\alpha(h)$  thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|} = 0. \quad (2)$$

Ánh xạ tuyến tính  $A$  trong biểu thức (1) được gọi là *đạo hàm* của  $f$  tại  $x$  và thường được ký hiệu là  $f'(x)$ .

Khi  $h = \Delta x$  là đủ nhỏ thì вели lượng  $A\Delta x$  có tên gọi là *vi phân* của ánh xạ  $f$  tại  $x$  ứng với số gia  $\Delta x$  và được ký hiệu là  $df(x)$ . Với ánh xạ đồng nhất  $f(x) = x$  ta có  $A$  là ma trận đơn vị, nên  $dx = \Delta x$ . Suy ra, trong trường hợp chung, ta có  $df(x) = A\Delta x = f'(x)dx$ .

Nhận xét rằng nếu  $f$  khả vi tại  $x$  thì từ (1) ta thấy có thể được xấp xỉ bởi ánh xạ affine  $x' \mapsto f(x) + A(x' - x)$  với độ sai khác là  $\alpha(x' - x)$ , một вели lượng vô cùng bé so với  $\|x' - x\|$  khi  $x'$  đủ gần  $x$ .

**Thí dụ.**

1) Xét ánh xạ affine  $f(x) = Ax + b$ . Với ánh xạ tuyến tính  $A$  này và ánh xạ  $\alpha$  đồng nhất bằng 0, ta thấy (1) và (2) thỏa mãn. Vậy  $f$  khả vi tại mọi điểm  $x$  và đạo hàm  $f'(x) = A$ .

2) Ánh xạ  $f$  từ  $\mathbb{R}^2$  vào  $\mathbb{R}^2$  cho bởi công thức

$$f(x_1, x_2) = (x_1, |x_2|).$$

Chúng ta khảo sát tính khả vi của  $f$  tại điểm  $x = (0,0)$ . Nếu như  $f$  khả vi tại điểm này thì ta phải tìm được ánh xạ tuyến tính cho bởi ma trận cấp hai  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  và ánh xạ  $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha_1(x_1, x_2), \alpha_2(x_1, x_2))$  sao cho

$$(h_1, |h_2|) = (ah_1 + bh_2 + \alpha_1(h), ch_1 + dh_2 + \alpha_2(h))$$

với mọi  $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ , trong đó  $\frac{\alpha_1(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}$  và  $\frac{\alpha_2(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}$  dần tới 0 khi  $\|\mathbf{h}\|$  dần tới 0. Từ đẳng thức trên lấy  $h_2 = 0$  ta có  $a = 1, c = 0$ . Nếu lấy  $h_1 = 0$  thì  $b = 0$  và  $d = 1$  khi  $h_2 > 0$ ;  $d = -1$  khi  $h_2 < 0$ . Điều này không thể được vì ánh xạ tuyến tính  $A$  trong (1) không phụ thuộc vào  $\mathbf{h}$ . Chứng tỏ  $f$  không khả vi tại điểm  $(0,0)$ .

Định lý sau đây cho phép chúng ta xem xét tính khả vi và cách tính đạo hàm của ánh xạ thông qua các hàm tọa độ.

**ĐỊNH LÝ.** Giả thiết  $f = (f_1, \dots, f_n)$  là một ánh xạ từ tập mở  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  vào  $\mathbb{R}^n$ . Khi ấy  $f$  khả vi tại  $\mathbf{x} \in X$  nếu và chỉ nếu các hàm tọa độ  $f_1, \dots, f_n$  khả vi tại  $\mathbf{x}$  và ta có

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f'_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f'_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

**Chứng minh.** Nếu  $f$  khả vi tại  $\mathbf{x}$  thì ta có (1). Ký hiệu  $A_1, \dots, A_n$  và  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  là những hàm tọa độ của  $A$  và  $\alpha$ . Khi ấy với mọi  $i$  ta có

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f_i(\mathbf{x}) + A_i(\mathbf{h}) + \alpha_i(\mathbf{h}) \quad (4)$$

với mọi  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ . Ngoài ra (2) cũng kéo theo

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|\alpha_i(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0, \quad (5)$$

nó chứng tỏ  $f_i$  khả vi tại  $\mathbf{x}_0$  với đạo hàm  $f'_i(\mathbf{x}) = A_i$ . Công thức (3) là hiển nhiên vì  $f'(\mathbf{x}) = A$ .

Ngược lại, giả thiết  $f_1, \dots, f_n$  khả vi tại  $\mathbf{x}$ . Khi ấy (4) và (5) đúng, trong đó  $A_i$  là đạo hàm của  $f_i$  tại  $\mathbf{x}$ . Xét ánh xạ tuyến tính  $A$  với các hàm tọa độ  $A_1, \dots, A_n$  và ánh xạ  $\alpha$  với các hàm tọa độ  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Từ (4) có ngay (1) và từ (5) có ngay (2). Chứng tỏ  $f$  là khả vi tại  $\mathbf{x}$  và đạo hàm của nó được cho bởi công thức (3). Định lý được chứng minh xong.

Áp dụng định lý cho ánh xạ trong Thí dụ 8 ta sẽ thấy ngay là ánh xạ này không khả vi tại  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  vì hàm tọa độ thứ hai không khả vi tại đó.

Hệ quả sau đây cho ta một số tính chất quan trọng của đạo hàm tương tự như trường hợp hàm số.

**HỆ QUẢ.** Giả thiết  $f = (f_1, \dots, f_n)$  khả vi tại  $\mathbf{x}$ . Khi ấy

- i)  $f$  liên tục tại  $\mathbf{x}$ ;
- ii) Đạo hàm  $f'(\mathbf{x})$  là duy nhất;

- iii) Các hàm tọa độ  $f_1, \dots, f_n$  có đạo hàm riêng tại  $\mathbf{x}$  và ma trận Jacobi của  $f$  trùng với ma trận của đạo hàm  $f'(\mathbf{x})$ ;
- iv) Với mỗi  $\lambda \in \mathbb{R}$  và mọi ánh xạ  $g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  khả vi tại  $\mathbf{x}$ , các ánh xạ  $\lambda f, f \cdot g$  và  $f + g$  khả vi tại  $\mathbf{x}$  và ta có
- $$(\lambda f)'(\mathbf{x}) = \lambda f'(\mathbf{x}) ;$$
- $$(f \cdot g)'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) \cdot [g(\mathbf{x})]^T + f(\mathbf{x}) \cdot [g'(\mathbf{x})]^T ,$$
- trong đó  $A^T$  là ký hiệu ma trận chuyển vị của ma trận  $A$ .

**Chứng minh.** Suy trực tiếp từ định lý và từ các tính chất tương ứng của hàm nhiều biến khả vi (Chương 2).

Lưu ý rằng, cũng như đối với hàm nhiều biến, một ánh xạ liên tục không nhất thiết phải khả vi (xem thí dụ trên) và sự tồn tại của ma trận Jacobi cũng không kéo theo tính khả vi của ánh xạ. Thí dụ đơn giản sau đây sẽ minh họa điều đó.

Nếu ánh xạ  $f$  là khả vi tại mọi điểm trên tập mở  $X$  thì ta nói nó là *khả vi trên  $X$* . Khi ấy, nếu đạo hàm của các hàm thành phần  $f_i'(\cdot)$  là những ánh xạ liên tục trên  $X$  thì ta nói  $f$  là ánh xạ *khả vi liên tục trên  $X$* .

**Thí dụ.** Xét ánh xạ  $f$  từ  $\mathbb{R}^2$  vào  $\mathbb{R}^2$  cho bởi công thức

$$f_1(x_1, x_2) = 0 ,$$

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x_1 \neq x_2 , \\ |x_1| & \text{nếu } x_1 = x_2 . \end{cases}$$

Rõ ràng  $f_1$  và  $f_2$  có đạo hàm riêng tại  $0$  và ma trận Jacobi của  $f$  tại điểm này là ma trận đồng nhất bằng  $0$ . Thế nhưng  $f$  không khả vi tại  $0$ .

Ngoài hai công thức tính đạo hàm của ánh xạ nêu trong hệ quả iv), quy tắc dây xích dưới đây rất hữu ích trong việc tính đạo hàm của ánh xạ hợp. Quy tắc này là mở rộng của kết quả trong Mục 2.1.4 (Chương 2).

**ĐỊNH LÝ.** Giả thiết  $f$  là ánh xạ từ tập mở  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  vào tập mở  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ , khả vi tại  $\mathbf{x} \in X$  và  $g$  là ánh xạ từ  $Y$  vào  $\mathbb{R}^l$ , khả vi tại  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ . Khi ấy ánh xạ hợp  $g \circ f$  từ  $X$  vào  $\mathbb{R}^l$  khả vi tại  $\mathbf{x}$  và đạo hàm của nó được tính theo công thức

$$(g \circ f)'(\mathbf{x}) = g'(f(\mathbf{x})) \circ f'(\mathbf{x}).$$

**Chứng minh.** Vì  $f$  và  $g$  khả vi nên tồn tại các ánh xạ  $\alpha$  (từ  $\mathbb{R}^m$  vào  $\mathbb{R}^n$ ) và  $\beta$  (từ  $\mathbb{R}^n$  vào  $\mathbb{R}^l$ ) sao cho:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{h}) + \alpha(\mathbf{h}), \quad \text{với } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^m, \\ g(\mathbf{y} + \mathbf{u}) &= g(\mathbf{y}) + g'(\mathbf{y})(\mathbf{u}) + \beta(\mathbf{u}), \quad \text{với } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1)$$

và

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0, \quad \lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow 0} \frac{\|\beta(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} = 0.$$

Đặt  $\mathbf{u}_h = f'(\mathbf{x})(\mathbf{h}) + \alpha(\mathbf{h})$ ,  $\gamma(\mathbf{h}) = g'(\mathbf{y})(\alpha(\mathbf{h})) + \beta(\mathbf{u}_h)$ ,  $A = g'(\mathbf{y}) \circ f'(\mathbf{x})$ .

Khi ấy ta có những nhận xét sau

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_h\| = 0,$$

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{u}_h\|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \|f'(\mathbf{x})\|.$$

Từ những nhận xét này và (1) suy ra, với mọi  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ ,

$$(g \circ f)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = g(\mathbf{y}) + A(\mathbf{h}) + \gamma(\mathbf{h}),$$

trong đó  $\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|\gamma(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \left( \|g'(\mathbf{y})\| \frac{\|\alpha(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} + \frac{\|\beta(\mathbf{u}_h)\|}{\|\mathbf{u}_h\|} \cdot \frac{\|\mathbf{u}_h\|}{\|\mathbf{h}\|} \right) = 0$ . Điều này chứng tỏ ánh xạ hợp  $g \circ f$  khả vi tại  $\mathbf{x}$  với đạo hàm bằng  $A$ . Định lý được chứng minh xong.

**Chú ý.** Định lý cho ta một điều kiện đủ để nhận biết tính khả vi của ánh xạ hợp. Tuy nhiên đây không phải là điều kiện cần. Thí dụ, xét ánh xạ hằng  $g(y) = 0$  thì với mọi  $f$ , ánh xạ hợp  $g \circ f$  đều khả vi.

**Thí dụ.** Cho  $f$  từ  $\mathbb{R}^2$  vào  $\mathbb{R}^3$  và  $g$  từ  $\mathbb{R}^3$  vào  $\mathbb{R}^2$  xác định theo công thức

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_1^2 + 1, x_2^2, x_1 + x_2), \\ g(y_1, y_2, y_3) &= (\sqrt{y_1}, y_2 + y_3). \end{aligned}$$

Tính đạo hàm của hàm hợp  $g \circ f$  tại  $(0,0)$ .

Giải. Nhận xét rằng  $f(0,0) = (1,0,0)$ ; ánh xạ  $f$  khả vi tại mọi điểm còn  $g$  khả vi tại mọi điểm với  $y_1 > 0$ , nói riêng tại  $y = f(0,0)$ . Như vậy  $g \circ f$  khả vi tại  $(0,0)$  và đạo hàm  $(g \circ f)'(0,0)$  là

$$(g \circ f)'(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3.3.4. Định lý ánh xạ ngược

Trong giáo trình Giải tích một biến chúng ta đã biết nếu hàm số  $f$  liên tục và tăng (hoặc giảm) trong khoảng  $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$  thì sẽ tồn tại hàm ngược  $f^{-1}$  liên tục, tăng từ khoảng  $(f(a), f(b))$  vào  $(a,b)$ . Ngoài ra nếu  $f$  khả vi với đạo hàm khác 0 trên khoảng  $(a,b)$  thì  $f^{-1}$  cũng khả vi trên khoảng  $(f(a), f(b))$  với  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$ . Đối với ánh xạ, khái niệm tăng hay giảm không còn thích hợp cho nên việc xác định ánh xạ ngược đòi hỏi những điều kiện ngặt nghèo hơn. Trước hết ta nhắc lại khái niệm *ánh xạ ngược*. Cho  $U$  và  $V$  là hai tập mở trong  $\mathbb{R}^n$  và  $f$  là ánh xạ từ  $U$  vào  $V$ . Ta nói rằng  $f$  có ánh xạ ngược  $f^{-1}$  từ  $V$  vào  $U$  nếu  $f \circ f^{-1}$  và  $f^{-1} \circ f$  là những ánh xạ đồng nhất trên  $V$  và trên  $U$ .

#### Thí dụ

- 1) Xét phép tịnh tiến  $f$  từ  $\mathbb{R}^n$  vào  $\mathbb{R}^n$  cho bởi công thức  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$ , trong đó  $\mathbf{a}$  là một vectơ hằng. Khi ấy  $f^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{a}$  cũng là một phép tịnh tiến (bởi vectơ  $-\mathbf{a}$ ).
- 2) Giả sử  $f$  từ  $\mathbb{R}^n$  vào  $\mathbb{R}^n$  là ánh xạ tuyến tính cho bởi ma trận vuông không suy biến  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Khi ấy  $f^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ , trong đó  $\mathbf{A}^{-1}$  là ma trận nghịch đảo của ma trận  $\mathbf{A}$ .
- 3) Xét ánh xạ  $f$  từ  $\mathbb{R}^n$  vào  $\mathbb{R}^n$  cho bởi công thức

$$f(x_1, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n)$$

với mọi  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Khi ấy  $f$  không có ánh xạ ngược. Thật vậy, nếu tồn tại  $f^{-1}$  thì lấy  $\mathbf{y} = (1, 0, \dots, 0)$  và giả sử  $f^{-1}(\mathbf{y}) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , ta có

$$f \circ f^{-1}(\mathbf{y}) = (0, a_2, \dots, a_n)$$

là một vectơ khác  $\mathbf{y}$ . Điều này mâu thuẫn với định nghĩa.

Nói chung, việc xác định tường minh ánh xạ ngược của một ánh xạ cho trước là công việc rất khó khăn. Tuy nhiên trong nhiều bài toán người ta chỉ cần xem ánh xạ cho trước có ánh xạ ngược hay không. Định lý quan trọng sau đây cho ta một điều kiện bảo đảm sự tồn tại của ánh xạ ngược.

**ĐỊNH LÝ.** (Ánh xạ ngược) *Giả thiết  $f$  là ánh xạ khả vi liên tục từ tập mở  $U_0$  trong  $\mathbb{R}^n$  vào  $\mathbb{R}^n$  sao cho ma trận Jacobi  $J_f(\mathbf{x}_0)$  không suy biến với mọi  $\mathbf{x}_0 \in U_0$ . Khi ấy tồn tại lân cận  $U \subseteq U_0$  của điểm  $\mathbf{x}_0$  và lân cận  $V$  của điểm  $f(\mathbf{x}_0)$  sao cho  $f$  có ánh xạ ngược  $f^{-1}$  từ  $V$  vào  $U$  khả vi tại mọi điểm  $\mathbf{y} \in V$  với*

$$(f^{-1})'(\mathbf{y}) = (f'(f^{-1}(\mathbf{y})))^{-1}.$$

**Chứng minh.** Ký hiệu  $A$  là ma trận Jacobi của ánh xạ  $f$  tại  $\mathbf{x}_0$ . Theo giả thiết  $\det A \neq 0$ , nên  $A$  là song ánh. Ký hiệu ánh xạ ngược của  $A$  là  $A^{-1}$ ,  $S$  là mặt cầu đơn vị và  $B$  là hình cầu đơn vị trong  $\mathbb{R}^n$ . Trước hết chúng ta có những nhận xét sau:

1) Tồn tại  $\varepsilon > 0$  để  $\|A\mathbf{v}\| > 2\varepsilon \|\mathbf{v}\|$  với mọi  $\mathbf{v} \neq 0$ .

Thật vậy, nếu điều này sai thì, do  $A$  là tuyến tính, với  $\varepsilon = \frac{1}{k}$  tìm được  $\mathbf{v}_k$ ,  $\|\mathbf{v}_k\| = 1$  để  $\|A\mathbf{v}_k\| \leq \frac{2}{k}$ . Do  $S$  compact nên ta có thể xem như  $\mathbf{v}_k$  hội tụ tới  $\mathbf{v} \in S$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Ta có ngay  $\|A\mathbf{v}\| = 0$  trái với tính song ánh của  $A$ .

2) Với  $\varepsilon > 0$  đã biết, tìm được  $\delta > 0$  sao cho với mọi  $\mathbf{x} \in \mathbf{x}_0 + \delta B$  và mọi  $\mathbf{v} \neq 0$ , ta có

$$\|f'(\mathbf{x})(\mathbf{v}) - A\mathbf{v}\| < \frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{v}\|, \quad \|f'(\mathbf{x})(\mathbf{v})\| > \varepsilon \|\mathbf{v}\|;$$

tức là  $f'(\mathbf{x})$  đủ gần  $A$ .

Thật vậy bất đẳng thức đầu suy từ tính liên tục của ánh xạ đạo hàm  $\mathbf{x} \mapsto f'(\mathbf{x})$  còn bất đẳng thức sau suy từ tính liên tục nêu trên và nhận xét thứ nhất.

3) Trong khuôn khổ của nhận xét trên, với mọi  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbf{x}_0 + \delta B$  ta có

$$\|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})\| > \frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|,$$

nghĩa là hàm  $f$  có tính chất dãn. Thực vậy, xét hàm  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - A\mathbf{x}$ . Từ nhận xét trên ta có  $\|\tilde{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{v})\| < \frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{v}\|$ , với mọi  $\mathbf{x} \in \mathbf{x}_0 + \delta B$  và mọi  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . Theo hệ quả của công thức Taylor:

$$\|\tilde{f}(\mathbf{x}') - \tilde{f}(\mathbf{x})\| = \|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|.$$

Mặt khác cũng theo nhận xét trên ta có

$$\|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\| \geq \|A(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\| - \|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})\| >$$

$$> \varepsilon \|x' - x\| - \|f(x') - f(x)\|$$

Kết hợp những bất đẳng thức này ta có điều mong muôn.

4) Tồn tại  $r > 0$  để  $(f(x_0) + 2rB) \cap f(x_0 + \delta S) = \emptyset$ . Thật vậy, do  $f$  liên tục nên tập ảnh  $f(x_0 + \delta S)$  là compact. Từ nhận xét 3) ta thấy  $f(x_0) \notin f(x_0 + \delta S)$  cho nên tìm được  $r > 0$  đủ nhỏ để  $(f(x_0) + 2rB) \cap f(x_0 + \delta S) = \emptyset$  như yêu cầu.

Bây giờ ta xây dựng các tập  $U, V$  và ánh xạ  $f^{-1}$  như sau. Lấy

$$V = f(x_0) + \text{int}(rB),$$

$$U = \{x \in x_0 + \text{int}(\delta B) : f(x) \in V\},$$

trong đó  $\text{int}(\dots)$  ký hiệu phần trong của tập trong ngoặc.

Vì  $f$  liên tục nên  $U = \{x_0 + \text{int}(\delta B)\} \cap f^{-1}(V)$  là tập mở. Để xây dựng  $f^{-1}$  ta phải chỉ ra rằng với mọi  $y \in V$  tồn tại duy nhất một  $x \in U$  để  $f(x) = y$ , và khi ấy phép ứng  $y \rightarrow x$  chính là ánh xạ ngược  $f^{-1}$  cần tìm.

Trước hết ta chứng minh sự tồn tại của  $x$  (với  $y \in V$  cố định bất kỳ). Muốn thế xét hàm số

$$\varphi(z) = \|y - f(z)\|^2.$$

Đây là hàm khả vi liên tục trên tập compact  $x_0 + \delta B$  nên sẽ đạt cực tiểu tại một điểm  $x$  nào đó. Điểm  $x$  không thể nằm trên biên của tập  $x_0 + \delta B$  vì với  $z$  trên biên tập này ta có

$$\varphi(z) = \|y - f(z)\|^2 = (\|f(x_0) - f(z)\| - \|f(x_0) - y\|)^2 \geq (2r - r)^2 = r^2 > \varphi(f(x_0)).$$

Như vậy  $x \in U$  và áp dụng định lý về điều kiện cần của cực tiểu đối với hàm nhiều biến ta có

$$0 = \varphi'(x) = -2f'(x)(y - f(x)).$$

Do  $f'(x)$  là song ánh nên điều này chỉ xảy ra khi  $y = f(x)$ . Như vậy, với mỗi  $y \in V$  cho trước, ta đã tìm được  $x \in U$  như yêu cầu. Tính duy nhất của  $x$  suy ngay từ Nhận xét 3). Cũng từ nhận xét này ta thu được tính liên tục của  $f^{-1}$ .

Công việc còn lại là chứng minh  $f^{-1}$  khả vi tại  $y_0 = f(x_0)$ . Tính khả vi tại các điểm khác của  $V$  được chứng minh tương tự. Cho  $h \in \mathbb{R}^n$  bất kỳ thỏa mãn  $y_0 + h \in V$ . Đặt  $u = f^{-1}(y_0 + h) - x_0$ . Vì  $f$  khả vi tại  $x_0$ , tồn tại ánh xạ  $\alpha$  từ  $\mathbb{R}^n$  vào  $\mathbb{R}^n$  sao cho

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + A(v) + \alpha(v),$$

với mọi  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{v} \in U$  và  $\alpha(\mathbf{v})$  là đại lượng vô cùng nhỏ của  $\mathbf{v}$ .

Đặt  $\beta(\mathbf{h}) = -\mathbf{A}^{-1}(\alpha(\mathbf{u}))$ , trong đó  $\mathbf{u} = f^{-1}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{x}_0$ . Khi ấy

$$f^{-1}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{h}) = f^{-1}(\mathbf{y}_0) + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{h}) + \beta(\mathbf{h}).$$

Từ tính liên tục của  $f^{-1}$ , tính liên tục của ánh xạ  $\mathbf{A}^{-1}$  và từ nhận xét 3) ta thấy  $\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$  kéo theo các đại lượng sau tiến dần tới 0:

$$\left\| f^{-1}(\mathbf{y} + \mathbf{h}) - f^{-1}(\mathbf{y}) \right\|; \frac{\|\alpha(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|}; \frac{\|\mathbf{A}^{-1}(\alpha(\mathbf{u}))\|}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Chứng tỏ  $\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|\beta(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$  và do đó  $f^{-1}$  khả vi tại  $\mathbf{x}_0$  với đạo hàm đúng bằng  $\mathbf{A}^{-1}$ . Định lý được chứng minh xong.

**Thí dụ.** Xét hàm vectơ  $f$  từ  $\mathbb{R}^3$  vào  $\mathbb{R}^3$  cho bởi công thức

$$f(x, y, z) = (\sin x + y, y + z, 2z + x^2).$$

Tại điểm  $(0, 0, 0)$ , giá trị của hàm là  $(0, 0, 0)$  và ma trận Jacobi là

$$J_f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ma trận này không suy biến, nên theo định lý hàm ngược, tại lân cận đủ nhỏ của gốc tọa độ, tồn tại hàm ngược  $f^{-1}$  (mặc dù không có biểu thức tường minh), và ma trận Jacobi của hàm ngược tại  $(0, 0, 0)$  là

$$J_{f^{-1}}(0, 0, 0) = [J_f(0, 0, 0)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

### 3.3.5. Hàm ẩn

Giả sử  $f$  là ánh xạ từ tập mở  $Z \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  vào  $\mathbb{R}^m$  và  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in Z$  là điểm sao cho

$$f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \boldsymbol{\theta}.$$

Nếu như tồn tại ánh xạ  $\varphi$  trong lân cận nào đó của  $\mathbf{x}_0$  vào  $\mathbb{R}^m$  sao cho  $\varphi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$  và với mọi  $\mathbf{x}$  trong lân cận đó

$$f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \boldsymbol{\theta},$$

thì ta nói  $\varphi$  là *hàm ẩn xác định bởi  $f$* .

**Thí dụ**

1) Xét  $f$  từ  $\mathbb{R}^2$  vào  $\mathbb{R}$  cho bởi công thức  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2$ . Lấy  $x_0 = 1, y_0 = 1$  thì  $f(1, 1) = 0$ . Phương trình  $f(x, y) = 0$  có thể giải để tìm  $y$  theo  $x$

$$y = \pm\sqrt{2 - x^2}.$$

Hàm  $y = \sqrt{2 - x^2}$  là hàm ẩn thỏa mãn  $y(x_0) = y_0$  và  $f(x, y) = 0$  với mọi  $x$  gần 1 ( $|x| \leq \sqrt{2}$ ).

2) Xét  $f$  từ  $\mathbb{R}^3$  vào  $\mathbb{R}^2$  cho bởi công thức

$$f(x, y, z) = (x^2 + z, x + y + z) - (2, 3).$$

Lấy  $x_0 = 1, (y_0, z_0) = (1, 1)$ , ta thấy  $f(1, 1, 1) = 0$ . Giải phương trình  $f(x, y, z) = 0$  ta tìm được ánh xạ  $\varphi$  từ  $\mathbb{R}$  vào  $\mathbb{R}^2$  cho bởi công thức

$$\varphi(x) = (1 - x + x^2, 2 - x^2)$$

là hàm ẩn được xác định bởi  $f(x, \varphi(x)) = 0$ .

Trong thí dụ trên bằng cách giải phương trình theo ẩn  $x$  ta có thể tìm được hàm ẩn. Tuy nhiên việc giải phương trình không phải lúc nào cũng thực hiện được. Trong nhiều trường hợp chúng ta chỉ cần xác định xem có tồn tại hàm ẩn hay không. Định lý sau cho chúng ta một điều kiện đủ để tồn tại hàm ẩn và cách tính đạo hàm của nó.

**ĐỊNH LÝ.** (Hàm ẩn) *Giả thiết  $f$  là ánh xạ khả vi liên tục từ tập mở  $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  vào  $\mathbb{R}^m$  và  $(x_0, y_0) \in U_0$  là điểm thỏa mãn những điều kiện sau*

(i)  $f(x_0, y_0) = \theta$ ;

(ii) *Ma trận Jacobi của ánh xạ  $f$  đổi với biến thứ hai  $y$  tại điểm  $(x_0, y_0)$  không suy biến.*

Khi ấy tồn tại lân cận  $X$  của  $x_0$  trong  $\mathbb{R}^n$  và ánh xạ khả vi  $\varphi$  từ  $X$  vào  $\mathbb{R}^m$  sao cho

a)  $\varphi(x_0) = y_0$ ;

b)  $f(x, \varphi(x)) = \theta$ , với mọi  $x \in X$ .

**Chứng minh.** Xét ánh xạ  $F$  từ  $U_0$  vào  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  cho bởi công thức

$$F(x, y) = (x, f(x, y)), \text{ với mọi } (x, y) \in U_0.$$

Ma trận Jacobi của  $F$  sẽ có dạng

$$J_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ J_f^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & J_f^y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix},$$

trong đó  $\mathbf{I}$  là ma trận đơn vị cấp  $n$ ,  $\mathbf{0}$  là ma trận cỡ  $n \times m$  với các thành phần bằng 0;  $J_f^x(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  là ma trận Jacobi của ánh xạ  $f(., \mathbf{y})$  đối với biến  $\mathbf{x}$  khi  $\mathbf{y}$  cố định và  $J_f^y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  là ma trận Jacobi của ánh xạ  $f(\mathbf{x}, .)$  đối với biến  $\mathbf{y}$  khi  $\mathbf{x}$  cố định. Vì  $J_f^y(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  không suy biến (Điều kiện (ii)),  $J_F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  không suy biến. Áp dụng định lý ánh xạ ngược ta tìm được ánh xạ khả vi  $F^{-1}$  từ lân cận mở  $V$  của  $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  vào lân cận mở  $U \subseteq U_0$  của  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ . Ánh xạ ngược  $F^{-1}$  có hai thành phần (ứng với  $\mathbb{R}^n$  và  $\mathbb{R}^m$ ) và ta có thể viết

$$F^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (\mathbf{x}, g(\mathbf{x}, \mathbf{v})),$$

trong đó  $g$  là hàm tọa độ thứ hai ứng với  $\mathbb{R}^m$ . Đặt  $\varphi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ . Khi ấy một mặt

$$F(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = F(F^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = (\mathbf{x}, \mathbf{0}).$$

Mặt khác theo định nghĩa

$$F(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))).$$

Cho nên  $f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ . Khi  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ , do  $F^{-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ , ta có  $\varphi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ . Vì  $F^{-1}$  khả vi nên  $g$  và  $\varphi$  đều là những ánh xạ khả vi. Định lý được chứng minh xong.

**Chú ý.** Từ định lý trên ta có công thức tính đạo hàm của  $\varphi$  như sau: từ b) suy ra

$$f'_x(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) + f'_y \cdot \varphi'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Vậy  $\varphi'(\mathbf{x}) = [f'_y(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))]^{-1} (-f'_x(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})))$ . Viết dưới dạng ma trận Jacobi công thức trên sẽ là

$$J_\varphi(\mathbf{x}) = [J_f^y(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))]^{-1} (-J_f^x(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))).$$

### 3.3.6. Hessian

Giả thiết  $f$  là một hàm số xác định trên tập mở  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Nếu  $f$  khả vi thì:

$$\text{grad } f : \mathbf{x} \mapsto \text{grad } f(\mathbf{x})$$

là ánh xạ từ  $U$  vào  $\mathbb{R}^n$ .

Nếu ánh xạ  $\text{grad } f$  khả vi thì ta nói  $f$  khả vi hai lần và đạo hàm  $(\text{grad } f)'(\mathbf{x})$  được gọi là Hessian của  $f$  và ký hiệu là  $H_f(\mathbf{x})$ . Thực ra  $(\text{grad } f)'(\mathbf{x})$  chính là ma trận Jacobi của  $\text{grad } f$  tại  $\mathbf{x}$ . Vậy:

$$H_f(\mathbf{x}) = J_{\text{grad } f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \end{pmatrix} (\mathbf{x}).$$

Nếu các hàm  $\mathbf{x} \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$  liên tục thì ta nói  $f$  khả vi liên tục hai lần. Từ định nghĩa của Hessian ta có thể xem phép ứng

$$\mathbf{x} \mapsto H_f(\mathbf{x})$$

là ánh xạ từ  $\mathbb{R}^n$  vào  $\mathbb{R}^{n \times n}$  với các hàm tọa độ là

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}), i, j = 1, \dots, n$$

và có thể định nghĩa chuẩn của Hessian là

$$\|H_f(\mathbf{x})\| = \left( \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Lưu ý rằng với mỗi  $\mathbf{x}$  cố định, Hessian  $H_f(\mathbf{x})$  cho ta dạng toàn phương trên  $\mathbb{R}$  theo công thức:

$$H_f(\mathbf{x})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^n u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}).$$

Người ta nói dạng toàn phương này là *nửa xác định dương* nếu:

$$H_f(\mathbf{x})(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0, \text{ với mọi } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n,$$

và là *xác định dương* nếu bất đẳng thức trên là ngắt khi  $\mathbf{u} \neq 0$ . Nếu dấu đẳng thức trên đổi chiều thì ta có dạng toàn phương *nửa xác định âm* hoặc *xác định âm*.

**Thí dụ.** Cho hàm hai biến

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^3.$$

Khi ấy gradient của  $f$  tại  $(x, y)$  là

$$\text{grad } f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = (2x + y, x + 3y^2).$$

$$\text{Hessian của } f \text{ tại } (x,y) \text{ là: } H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}.$$

Từ giáo trình *Đại số tuyến tính* ta biết ma trận trên là xác định dương khi  $y > \frac{1}{12}$  và nửa xác định dương khi  $y \geq \frac{1}{12}$ .

### 3.3.7. Cực đại và cực tiểu

Bây giờ chúng ta sẽ sử dụng Hessian để tìm điều kiện cần và đủ cho cực trị địa phương. Nhắc lại rằng  $x_0 \in U$  được gọi là cực đại (cực tiểu) địa phương của hàm  $f$  nếu tìm được quả cầu  $B$  tâm  $x_0$  bán kính  $\varepsilon > 0$  trong  $U$  sao cho:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \quad \text{với mọi } x \in B.$$

**ĐỊNH LÝ.** Giả thiết  $f$  khả vi liên tục hai lần trên tập  $U$ . Khi ấy, nếu  $x_0 \in U$  là cực tiểu địa phương của hàm  $f$  thì:

- (i)  $\text{grad } f(x_0) = 0$ .
- (ii)  $H_f(x_0)$  là nửa xác định dương.

Ngược lại,  $x_0$  là cực tiểu địa phương của  $f$  nếu điều kiện (i) thỏa mãn và

- (iii) Tồn tại  $\varepsilon > 0$  để tại mọi điểm  $x \in U$  với  $\|x - x_0\| < \varepsilon$ , Hessian  $H_f(x_0)$  là nửa xác định dương.

**Chứng minh.** Giả thiết  $x_0$  là cực tiểu địa phương của  $f$ . Khi ấy (i) là điều kiện cần đã được chứng minh ở Chương 2. Giả sử điều kiện (ii) không thỏa mãn, tức là tìm được vectơ  $u \in \mathbb{R}^n$  để  $H_f(x_0)(u, u) < 0$ . Xét hàm số  $\varphi(t) = f(x_0 + tu)$  với  $t$  đủ nhỏ để  $x_0 + tu \in U$ . Đây là hàm số từ một lân cận của 0 trong  $\mathbb{R}$  vào  $\mathbb{R}$ , thuộc lớp  $C^2$  vì nó là hợp của hàm tuyến tính  $t \mapsto x_0 + tu$  và hàm  $f$ . Áp dụng khai triển Taylor (cho hàm 1 biến) ta có

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + \frac{1}{2}\alpha(t), \quad (*)$$

trong đó  $\alpha(t)$  là một đại lượng vô cùng nhỏ so với  $t^2$ , tức là

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{t^2} = 0.$$

Áp dụng quy tắc dây xích ta có

$$\varphi'(t) = \langle \text{grad } f(x_0 + tu), u \rangle,$$

$$\varphi''(t) = \langle H_f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = H_f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Lấy giá trị của các đạo hàm trên tại  $t = 0$  với điều kiện (i), ta thu được từ (\*) biểu thức sau

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{u})t^2 + \frac{1}{2}\alpha(t).$$

Từ đây suy ra  $f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) < f(\mathbf{x}_0)$  khi  $t$  đủ nhỏ, và điều này mâu thuẫn với tính cực tiểu của  $\mathbf{x}_0$ .

Để chứng minh phần đảo chúng ta hãy xét công thức Taylor bậc 2 (Chương 2) cho hàm  $f$  tại  $\mathbf{x}_0$ :

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \text{grad } f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}D^2 f(\mathbf{x}_0 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), \quad (**)$$

trong đó  $0 \leq \tau \leq 1$  và  $D^2$  là một toán tử vi phân. Ta biết rằng

$$D^2 f(\mathbf{x}_0 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) = \tau^2 H_f(\mathbf{x}_0 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Do đó, theo (iii), với mọi  $\mathbf{x}$  sao cho  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$  ta có:

$$\|\mathbf{x}_0 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$$

và

$$H_f(\mathbf{x}_0 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \geq 0.$$

Kết hợp bất đẳng thức này với điều kiện (i), công thức (\*\*) cho ta:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq 0, \text{ với mọi } \mathbf{x} \in U \text{ thỏa mãn } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon.$$

Như vậy  $\mathbf{x}_0$  là cực tiểu địa phương của  $f$ . Đinh lý chứng minh xong.

### Chú ý

1) Điều kiện (iii) trong định lý có thể thay bằng điều kiện mạnh hơn sau đây:

(iii')  $H_f(\mathbf{x}_0)$  xác định dương.

Thật vậy, nếu  $H_f(\mathbf{x}_0)$  là xác định dương thì do tính liên tục của các hàm tọa độ

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$ , ta sẽ tìm được  $\varepsilon > 0$  để  $H_f(\mathbf{x}_0)$  cũng là xác định dương mỗi khi

$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$ . Do đó điều kiện (iii) thỏa mãn.

2) Điều kiện (i) và điều kiện  $H_f(\mathbf{x}_0)$  là nửa xác định dương chưa đủ để kết luận  $\mathbf{x}_0$  là cực tiểu địa phương như ta đã biết ngay cả khi  $f$  là hàm một biến.

3) Đối với cực đại địa phương, các điều kiện được phát biểu tương tự nhưng (nửa) xác định dương được thay bởi (nửa) xác định âm.

**Thí dụ.** Chứng minh rằng điểm  $(0,0)$  là cực tiểu địa phương của hàm  $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ , nhưng không phải là cực tiểu địa phương của hàm  $g(x,y) = x^2 + xy - y^2$ .

Giải. Đối với hàm  $f$ , ta có  $\text{grad } f(0,0) = (0,0)$  và

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hiển nhiên là  $H_f(0,0)$  là xác định dương và  $f$  khả vi liên tục hai lần nên điều kiện của định lý trên (xem nhận xét) thỏa mãn. Do đó  $(0,0)$  là cực tiểu địa phương của  $f$ .

Đối với hàm  $g$  ta có  $\text{grad } g(0,0) = (0,0)$  và

$$H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hiển nhiên  $H_g(0,0)$  không phải là nửa xác định dương. Theo định lý, điểm  $(0,0)$  không phải là cực tiểu địa phương của  $g$ .

### 3.3.8. Ánh xạ đơn điệu và hàm lồi

Trong giáo trình *Giải tích một biến*, chúng ta đã biết dùng đạo hàm để khảo sát tính đơn điệu và tính lồi của hàm một biến. Nay giờ, chúng ta sẽ mở rộng cho hàm nhiều biến.

Cho  $F$  là ánh xạ từ  $\mathbb{R}^n$  vào  $\mathbb{R}^n$ . Ta nói  $F$  là *đơn điệu* nếu

$$F(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + F(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq 0, \text{ với mọi } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Nếu  $n = 1$  thì từ định nghĩa trên suy ra  $F(x) \geq F(y)$  với mọi  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq y$ , có nghĩa  $F$  là hàm không giảm.

**Thí dụ**

- 1) Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  và  $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , với mọi  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Khi ấy  $F$  là *ánh xạ đơn điệu*. Thật vậy, với mọi  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  ta có:

$$(A\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + (A\mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} + (A\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \geq 0$$

(vì  $A$  là ma trận đối xứng và xác định dương).

2) Ánh xạ  $F(\mathbf{x}) = (2x_1 - 3x_2^2, 3x_1)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  không đơn điệu. Thật vậy, lấy  $\mathbf{x} = (1, -1)$ ,  $\mathbf{y} = (0, 0)$ , ta có:

$$F(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + F(\mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = (2 - 3, 3).(1, -1) = -4.$$

Chứng tỏ  $F$  không phải là đơn điệu.

**MỆNH ĐỀ.** Ánh xạ khả vi liên tục  $F$  từ  $\mathbb{R}^n$  vào  $\mathbb{R}^n$  là đơn điệu khi và chỉ khi ma trận Jacobi của  $F$  tại mọi điểm là nửa xác định dương.

**Chứng minh.** *Điều kiện cần.* Giả thiết trái lại, tồn tại  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  để  $J_F(\mathbf{x}_0)$  không phải là nửa xác định dương, tức là tìm được vecto  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  sao cho

$$J_F(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{u}) < 0.$$

Do các thành phần của ma trận Jacobi liên tục, tồn tại  $\varepsilon > 0$  để

$$J_F(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})(\mathbf{u}, \mathbf{u}) < 0 \quad \text{với mọi } t \in [0, \varepsilon]. \quad (*)$$

Xét hàm số một biến

$$\varphi(t) = F(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}).\mathbf{u}, t \in [0, \varepsilon].$$

Đây là hàm khả vi, do đó theo định lý giá trị trung bình tồn tại  $\tau \in (0, \varepsilon)$  để

$$\varphi(\varepsilon) - \varphi(0) = \varphi'(\tau).\varepsilon$$

tức là

$$\langle F(\mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{u}) - F(\mathbf{x}_0), \mathbf{u} \rangle = \langle J_F(\mathbf{x}_0 + \tau\mathbf{u}).\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = J_F(\mathbf{x}_0 + \tau\mathbf{u})(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Từ (\*) ta suy ra  $\langle F(\mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{u}) - F(\mathbf{x}_0), \mathbf{u} \rangle < 0$ , và bất đẳng thức này có thể viết thành

$$F(\mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{u})((\mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{u}) - \mathbf{x}_0) + F(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_0 - (\mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{u})) < 0.$$

Điều này có nghĩa  $F$  không phải là đơn điệu.

*Điều kiện đủ.* Ngược lại, giả thiết  $J_F(\mathbf{x})$  là nửa xác định dương tại mọi điểm.

Khi ấy, với mọi  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , ta đặt

$$\varphi(t) = \langle F(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle.$$

Đây là hàm số một biến, khả vi. Áp dụng định lý giá trị trung bình ta tìm được  $\tau \in [0, 1]$  sao cho

$$[F(\mathbf{y}) - F(\mathbf{x})](\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) = \langle J_F(\mathbf{x} - \tau(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle \geq 0.$$

Nó chứng tỏ  $F$  là đơn điệu, điều cần chứng minh.

**Thí dụ.** Trong phần thứ 2 của thí dụ trên, ma trận Jacobi của  $F$  là

$$J_F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & -6x_2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rõ ràng tại  $(1,-1)$  mà trận này không phải là nửa xác định dương, do đó  $F$  không phải là đơn điệu.

Cho  $f$  là một hàm số trên  $\mathbb{R}^n$ . Ta nói  $f$  là *lồi* nếu với mọi  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , bất đẳng thức sau luôn luôn thỏa mãn

$$f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \leq tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y}).$$

**Thí dụ.** Hàm  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  là lồi trên  $\mathbb{R}^2$ .

Thật vậy, với  $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  và  $0 \leq t \leq 1$  ta có

$$\begin{aligned} f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) &= (tx_1 + (1-t)y_1)^2 + (tx_2 + (1-t)y_2)^2 \\ &\leq tx_1^2 + (1-t)y_1^2 + tx_2^2 + (1-t)y_2^2 \leq tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Vậy  $f$  là hàm lồi.

**Mệnh đề.** *Hàm khả vi liên tục  $f$  là lồi khi và chỉ khi  $\text{grad } f$  là ánh xạ đơn điệu.*

**Chứng minh.** *Điều kiện cần.* Từ tính lồi của  $f$  suy ra

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - f(\mathbf{x})}{t} &\leq f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}), \\ \frac{f(\mathbf{y} + t(\mathbf{x} - \mathbf{y})) - f(\mathbf{y})}{t} &\leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

với mọi  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < t < 1$ . Qua giới hạn về trái khi  $t$  dần tới 0 và cộng hai bất đẳng thức ta có

$$\text{grad } f(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \text{grad } f(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq 0.$$

Chứng tỏ  $\text{grad } f$  là ánh xạ đơn điệu.

*Điều kiện đủ.* Nếu  $f$  không lồi thì sẽ tìm được  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  và  $t_0 \in (0,1)$  sao cho

$$f(t_0\mathbf{x} + (1-t_0)\mathbf{y}) > t_0f(\mathbf{x}) + (1-t_0)f(\mathbf{y}).$$

Đặt  $\mathbf{z} = t_0\mathbf{x} + (1-t_0)\mathbf{y}$  và giả sử rằng  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y})$  (trường hợp  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$  chứng minh tương tự). Xét hàm một biến

$$\varphi(t) = f[t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}] - [tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y})].$$

Đây là hàm khả vi liên tục và  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = 0$ ,  $\varphi(t_0) < 0$ . Áp dụng định lý giá trị trung bình trên từng đoạn  $[0, t_0]$  và  $[t_0, 1]$  ta tìm được số  $\alpha \in (0, t_0)$ ,  $\beta \in (t_0, 1)$  sao cho

$$\varphi'(\alpha)t_0 = \varphi(t_0) - \varphi(0) < 0,$$

$$\varphi'(\beta)(1-t_0) = \varphi(1) - \varphi(t_0) > 0.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \text{grad } f(\alpha \mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) - [f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})] &< 0 \\ -\text{grad } f(\beta \mathbf{x} + (1-\beta)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + [f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})] &< 0 . \end{aligned}$$

Cộng hai bất đẳng thức trên ta thu được

$$\text{grad } f(\alpha \mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \text{grad } f(\beta \mathbf{x} + (1-\beta)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) > 0 . \quad (*)$$

Đặt  $\bar{\mathbf{x}} = \alpha \mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}$ ,  $\bar{\mathbf{y}} = \beta \mathbf{x} + (1-\beta)\mathbf{y}$  và lưu ý rằng tồn tại số  $\bar{t} = \alpha - \beta < 0$  sao cho

$$\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}} = \bar{t}(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

nên bất đẳng thức (\*) kéo theo

$$\text{grad } f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}) + \text{grad } f(\bar{\mathbf{y}}) \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}) < 0 ,$$

trái với tính đơn điệu của  $\text{grad } f$ . Mệnh đề chứng minh xong.

**Hệ quả.** *Hàm  $f$  khả vi liên tục hai lần là lồi khi và chỉ khi Hessian  $H_f(x)$  tại mọi điểm là nửa xác định dương.*

**Chứng minh.** Suy ra trực tiếp từ hai mệnh đề trên.

**Thí dụ.** Chứng minh  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$  là hàm lồi.

Giai. Bằng tính toán trực tiếp ta có

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Đây là ma trận xác định dương. Vậy theo hệ quả,  $f$  là hàm lồi.

## 3.4. Hàm phức sơ cấp

### 3.4.1. Điểm lại số phức

Chúng ta đã được biết *đơn vị ảo*  $i$  là số thỏa mãn  $i^2 = -1$ , và *số phức* là số có dạng  $a + bi$ , trong đó  $a$  và  $b$  là những số thực.

Tập tất cả các số phức được ký hiệu là  $\mathbb{C}$ . Với số phức  $z = a + bi$  bất kỳ, ta ký hiệu

$$\text{Re}(z) = a \quad \text{phần thực của } z;$$

$$\text{Im}(z) = b \quad \text{phần ảo của } z;$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{module hay giá trị tuyệt đối của } z;$$

$$\bar{z} = a - bi \quad \text{liên hợp của } z.$$

Những phép tính cơ bản trong  $\mathbb{C}$  là phép cộng (+), phép trừ (-), phép nhân (\*) và phép chia (:). Cụ thể là, với

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i,$$

ta định nghĩa

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i, \\ z_1 - z_2 &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i, \\ z_1 * z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \end{aligned}$$

Phép cộng và phép nhân thỏa mãn những quy luật thông thường của số học như:

- *luật kết hợp:*

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ và } z_1 * (z_2 * z_3) = (z_1 * z_2) * z_3;$$

- *luật phân phối:*

$$z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3$$

$$(z_1 + z_2) * z_3 = z_1 * z_3 + z_2 * z_3;$$

- *luật giao hoán:*

$$z_1 * z_2 = z_2 * z_1 \quad \text{và} \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

- Số 1:  $1 * z = z$ .
- Số 0:  $0 * z = 0$  và  $z + (-1) * z = 0$ .
- Nghịch đảo: Nếu  $z \neq 0$ , nghịch đảo của  $z$  ký hiệu là  $z^{-1}$  và là số sao cho  $z * z^{-1} = 1$ .

$$\text{Ta có ngay } z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

**Nhận xét.** Như vậy các phép toán trên số phức có mọi tính chất tương tự như các phép toán trên số thực, và chính xác hơn, trong trường hợp số phức có phần ảo bằng 0 thì chúng chính là các phép toán số học thông thường. Vì vậy, không cần thiết phải phân biệt các phép toán trên trường số phức với các phép toán trên trường số thực, và từ đây ta viết tích của hai số phức  $z_1$  và  $z_2$  một cách đơn giản là  $z_1 \cdot z_2$  (thay vì  $z_1 * z_2$ ).

### Thí dụ

$$1) (1+i)(2-3i) = 5-i.$$

$$2) z \cdot \bar{z} = |z|^2 \text{ vì nếu } z = a + bi \text{ thì } \bar{z} = a - bi \text{ và } z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

3) Tính  $(2+i):(2-i)$ . Đặt thương này là  $z = a + bi$ . Khi ấy:

$$(2+i) = (2-i)(a+bi) = (2a+b) + (2b-a)i.$$

Suy ra  $2 = 2a + b$  và  $1 = 2b - a$ . Chứng tỏ  $a = \frac{3}{5}, b = \frac{4}{5}$  và  $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ .

Chúng ta đã biết tập số thực  $\mathbb{R}$  có thể biểu diễn bằng trục số  $Ox$ . Nếu như trên mặt phẳng  $\mathbb{R}^2$  với hệ tọa độ trực chuẩn  $(Ox, Oy)$  ta đồng nhất số 1 với điểm  $(1,0)$  và đơn vị ảo  $i$  với điểm  $(0,1)$ , thì mọi số phức  $z = a + bi$  có thể đồng nhất với điểm  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ . Mặt phẳng  $\mathbb{R}^2$  với  $Ox$  biểu diễn trực thực và  $Oy$  biểu diễn trực ảo còn được gọi là mặt phẳng phức  $\mathbb{C}$ .

Nếu dùng hệ tọa độ cực trong  $\mathbb{R}^2$ , thì điểm  $(a,b) \neq 0$  sẽ có dạng:

$$(r \cos \theta, r \sin \theta) \text{ với } r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos \theta = \frac{a}{r}.$$

Như vậy số phức  $z = a + bi$  được viết dưới dạng cực là:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Số  $\theta$  được gọi là *argument* của  $z$ , ký hiệu  $\theta = \operatorname{Arg} z$  sai lệch  $2k\pi$  ( $k$  là số nguyên). Giá trị chính của argument là  $\theta$  thỏa mãn  $-\pi < \theta \leq \pi$  và được ký hiệu là  $\arg z$ .

Trường hợp đặc biệt: Khi  $|z| = 1$ , ta định nghĩa

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Đồng thời, với số phức  $z = a + bi$  bất kỳ, ta định nghĩa số mũ phức:

$$e^z = e^a \cdot e^{ib}.$$

Mệnh đề sau sẽ cho thấy số mũ phức có tính chất giống như số mũ thực.

**MỆNH ĐỀ.** *Với hai số phức  $z_1$  và  $z_2$  bất kỳ, ta luôn có:*

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

**Chứng minh.** Giả sử  $z_1 = a_1 + ib_1$ ,  $z_2 = a_2 + ib_2$ . Theo định nghĩa:

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)} = e^{a_1+a_2} e^{i(b_1+b_2)} = e^{a_1} e^{a_2} (\cos(b_1 + b_2) + i(\sin(b_1 + b_2))) = \\ &= e^{a_1} e^{a_2} (\cos b_1 \cos b_2 - \sin b_1 \sin b_2 + i(\sin b_1 \cos b_2 + \sin b_2 \cos b_1)) = \\ &= e^{a_1} (\cos b_1 + i \sin b_1) \cdot e^{a_2} (\cos b_2 + i \sin b_2) = e^{a_1} e^{ib_1} e^{a_2} e^{ib_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}. \end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh xong.

Biểu diễn cực của số phức cũng như kết quả trên về số mũ phức cho phép thực hiện nhiều phép tính của số phức một cách đơn giản.

**Thí dụ**

1) Tính tích  $z_1 \cdot z_2$  dưới dạng cực.

Giải. Ta có  $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ ,  $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ . Vậy  $z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$  và có quy tắc sau: Tích hai số phức  $z_1$  và  $z_2$  có giá trị tuyệt đối bằng tích các giá trị tuyệt đối của từng thừa số và có argument bằng tổng các argument.

2) Tìm một số phức  $z$  sao cho  $z^4 = 4e^{i\pi/2}$ .

Giải. Áp dụng mệnh đề ta có ngay  $z = \sqrt{2}e^{i\pi/8}$ .

3) Cho  $z_0 = 1$ , tìm những số phức  $z$  để  $z^n = z_0$ .

Giải. Biểu diễn  $z_0$  dưới dạng cực ta có  $z_0 = e^{i2\pi}$ . Khi ấy  $z_k = e^{i(2\pi k)/n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  đều là những số phức khác nhau thỏa mãn  $z^n = z_0$ .

### 3.4.2. Dãy và chuỗi phức

Cho dãy số phức  $\{c_n\}$  với  $c_n = a_n + ib_n$ . Số phức  $c_0 = a_0 + ib_0$  gọi là giới hạn của dãy nếu với mọi  $\varepsilon > 0$  tìm được  $N$  để  $|c_n - c_0| < \varepsilon$  với mọi  $n \geq N$ . Khi ấy ta viết:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c_0 \quad \text{hay} \quad c_n \rightarrow c_0.$$

Mệnh đề sau cho phép khảo sát dãy phức bằng các dãy thực và thiết lập các tính chất của dãy phức hội tụ.

**MỆNH ĐỀ.** *Dãy phức  $\{a_n + ib_n\}$  hội tụ tới  $a_0 + ib_0$  khi và chỉ khi các dãy thực  $\{a_n\}$  và  $\{b_n\}$  hội tụ tương ứng tới  $a_0$  và  $b_0$ .*

**Chứng minh.** Theo định nghĩa  $|c_n - c_0| = \sqrt{(a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2}$ , cho nên

$$\max \{|a_n - a_0|, |b_n - b_0|\} \leq |c_n - c_0| \leq |a_n - a_0| + |b_n - b_0|.$$

Do đó sự hội tụ của  $\{c_n\}$  tới  $c_0$  hoàn toàn tương đương với sự hội tụ của  $\{a_n\}$  tới  $a_0$  và  $\{b_n\}$  tới  $b_0$ . Mệnh đề được chứng minh xong.

Bây giờ chúng ta xét *chuỗi phức*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots$$

Các tổng riêng  $u_n = \sum_{k=1}^n c_k$  tạo thành *dãy phức*  $\{u_n\}$ . Nếu dãy tổng riêng hội tụ tới  $u_0$  thì ta nói *chuỗi hội tụ* và *tổng* của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  bằng  $u_0$ . Nếu dãy tổng riêng không hội tụ, ta nói *chuỗi phân kỳ*.

**MỆNH ĐỀ.** Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)$  hội tụ khi và chỉ khi các chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  và

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  hội tụ và ta có:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right).$$

**Chứng minh.** Suy ra trực tiếp từ mệnh đề về hội tụ của dãy.

Với kết quả này, mọi tính chất của chuỗi số thực hội tụ đều đúng với chuỗi phức hội tụ.

### 3.4.3. Hàm phức

Giả sử  $Z$  là tập con trong  $\mathbb{C}$  và  $f$  là đơn ứng từ  $Z$  vào  $\mathbb{C}$ . Khi ấy ta nói  $f$  là hàm phức với biến phức trên tập  $Z$ .

**Thí dụ**

1)  $f(z) = \bar{z}$ ,  $f(z) = \arg(z)$ ,  $f(z) = |z|$ ,  $f(z) = \operatorname{Re}(z), \dots$  là những hàm phức chúng ta đã biết trong phần trước.

2)  $f(z) = c_n z^n + \dots + c_0$ , trong đó  $c_0, \dots, c_n$  là những hằng số phức, là hàm đa thức.

Với mỗi  $z = x + iy$ , ta có  $f(z) = u + iv$ , và như vậy các giá trị thành phần  $u$  và  $v$  là những hàm số của  $z$  hay của  $x$  và  $y$ .

Ta nói  $f(z)$  hội tụ tới số phức  $c$  khi  $z$  dần tới  $z_0 \in Z$  nếu với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $\delta > 0$  để  $|f(z) - c| < \varepsilon$  mỗi khi  $|z - z_0| < \delta$ ,  $z \neq z_0$ . Khi ấy ta viết

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) .$$

**MỆNH ĐỀ.** Khi  $z_0 = x_0 + iy_0$  và  $c = a_0 + ib_0$  thì:

i)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$  khi và chỉ khi  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = a_0$  và  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = b_0$ ;

ii)  $f$  liên tục tại  $z_0$  khi và chỉ khi  $u$  và  $v$  liên tục tại  $(x_0, y_0)$ .

**Chứng minh.** Hoàn toàn tương tự như trong chứng minh sự hội tụ của dãy phức.

Bằng cách chứng minh trực tiếp ta thấy ngay những hàm phức trong các Thí dụ 1) và 2) là những hàm liên tục.

Các tính chất của hàm phức liên tục tương tự như hàm thực.

### 3.4.4. Hàm chỉnh hình

Giả sử  $f$  là hàm phức xác định trên tập  $Z \subseteq \mathbb{C}$ .

Ta nói  $f$  khả vi phức tại  $z_0 \in Z$  nếu tồn tại số  $c_0 \in \mathbb{C}$  và hàm phức  $\alpha$  sao cho:

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + c_0 h + \alpha(h), \quad (1)$$

với mọi  $h$  có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ để  $z_0 + h \in Z$  và  $\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|\alpha(h)|}{|h|} = 0$ .

Số  $c_0$  được gọi là *đạo hàm* của  $f$  tại  $z_0$  và ký hiệu là  $f'(z_0)$  hoặc  $\frac{df}{dz}(z_0)$ .

Nếu  $f$  khả vi tại mọi điểm  $z_0 \in Z$ , ta nói  $f$  khả vi trên  $Z$ . Hàm phức *khả vi* còn được gọi là *hàm chỉnh hình*. Nhận xét rằng (1) tương đương với:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = c_0. \quad (2)$$

#### Thí dụ

1) Cho  $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$ .

Tại  $z = 0$ , hàm khả vi vì  $\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{h \operatorname{Re}(h)}{h} = 0$ .

Tại  $z = 1$ , hàm không khả vi vì  $\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{(1+h)\operatorname{Re}(1+h) - 1}{h}$

không tồn tại.

2) Hàm  $f(z) = \bar{z}$  không khả vi tại mọi điểm vì:

- Với  $h = x$  (thực),  $\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = 1$ ;
- Với  $h = iy$  (ảo),  $\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = -1$ , nên giới hạn (2) không tồn tại.

Dưới đây là một tiêu chuẩn đơn giản để kiểm tra tính khả vi của hàm phức thông qua các hàm thành phần.

**ĐỊNH LÝ.** (Cauchy-Riemann) Giả sử  $f$  là hàm phức xác định trên miền mở  $Z \subseteq \mathbb{C}$  và  $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x+iy))$ ,  $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x+iy))$ . Khi ấy  $f$  khả vi tại  $z_0 = x_0 + iy_0$  khi và chỉ khi  $u$  và  $v$  khả vi tại  $(x_0, y_0)$  và:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (3)$$

**Chứng minh.** Trước hết ta nhận xét rằng hàm phức  $\alpha(z) = \alpha_1(x, y) + i\alpha_2(x, y)$  thỏa mãn

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{|\alpha(z)|}{|z|} = 0$$

khi và chỉ khi

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow 0} \frac{|\alpha_1(x, y)|}{\|(x, y)\|} = 0 \text{ và } \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow 0} \frac{|\alpha_2(x, y)|}{\|(x, y)\|} = 0. \quad (4)$$

Vì vậy, nếu  $c_0 = a_0 + ib_0$  và  $\alpha(h) = \alpha_1(x, y) + i\alpha_2(x, y)$  với  $h = h_1 + ih_2$ , thì biểu thức (1) tương đương với:

$$\begin{aligned} u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) &= u(x_0, y_0) + \langle (a_0, -b_0), (h_1, h_2) \rangle + \alpha_1(x, y) \\ v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) &= v(x_0, y_0) + \langle (b_0, a_0), (h_1, h_2) \rangle + \alpha_2(x, y). \end{aligned}$$

Từ (4) và hai đẳng thức này ta có ngay kết quả:  $f$  khả vi tại  $z_0$  khi và chỉ khi  $u$  và  $v$  khả vi tại  $(x_0, y_0)$  và (3) thỏa mãn vì:

$$u'(x_0, y_0) = (a_0, -b_0) \text{ và } v'(x_0, y_0) = (b_0, a_0).$$

Định lý được chứng minh xong.

**HỆ QUÃ.** Nếu  $f$  khả vi tại  $z_0$  thì đạo hàm  $f'(z_0)$  được tính theo các công thức:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

**Chứng minh.** Suy ra ngay từ các công thức trong chứng minh của định lý.

Từ định lý ta cũng có các quy tắc tính đạo hàm đối với các hàm khả vi  $f$  và  $g$  tại  $z_0$ :

$$\begin{aligned} (f+g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0); \\ (\lambda f)'(z_0) &= \lambda f'(z_0); \\ (fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0); \\ (f/g)'(z_0) &= \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}, \text{ nếu } g(z_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Ngoài ra, nếu  $f$  xác định trên tập mở  $Z \subseteq \mathbb{C}$ , khả vi tại  $z_0$  và  $g$  xác định trên tập mở  $Z \subseteq \mathbb{C}$ , khả vi tại  $f(z_0) \in Z$ , thì hàm hợp  $g \circ f$  khả vi tại  $z_0$  và

$$(g \circ f)' z_0 = g'(f(z_0)) \circ f'(z_0).$$

### 3.4.5. Một số hàm sơ cấp

a) **Hàm mũ:** Hàm mũ trên  $\mathbb{C}$  được định nghĩa theo công thức:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Đôi khi người ta viết  $\exp(z)$  thay cho  $e^z$ . Như vậy

$$\exp(z) = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (1)$$

Các hàm thành phần khả vi và thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann, nên hàm mũ khả vi tại mọi điểm và  $(e^z)' = e^z$ .

Một số tính chất của hàm mũ:

- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ , với  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .
- Hàm mũ là hàm tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi i$  (vì  $e^{z+2\pi i} = e^z$ ).

**Chú ý.** Có thể định nghĩa hàm mũ bằng tổng của chuỗi hội tụ  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  và cũng đến công thức (1) và những tính chất khác như đã nêu ở trên.

b) **Hàm logarit:** Hàm logarit (ký hiệu là  $\ln$ ) là hàm ngược của hàm mũ, tức là nếu  $e^z = \omega$  thì  $z = \ln(\omega)$ . Để chứng minh sự tồn tại của hàm này khi  $\omega \neq 0$ , ta biểu diễn

$$\begin{aligned} e^z &= e^x [\cos(y) + i \sin(y)], \\ \omega &= |\omega| [\cos(\theta) + i \sin(\theta)], \end{aligned}$$

và thu được

$$\begin{aligned} x &= \ln|\omega| \quad (\log số thực), \\ y &= \theta + 2k\pi \quad (k là số nguyên). \end{aligned}$$

Như vậy, với mọi  $\omega \neq 0$ ,  $\ln(\omega)$  tồn tại và được cho bởi công thức

$$\ln(\omega) = \ln|\omega| + i \operatorname{Arg} \omega = \ln|\omega| + i \arg \omega + 2k\pi i.$$

Nhánh chính của hàm này là nhánh ứng với  $k=0$  và được ký hiệu là  $\ln \omega$ . Từ định lý hàm ngược ta suy ra hàm logarit liên tục và khả vi tại mọi điểm  $\omega \neq 0$  với đạo hàm tính theo công thức

$$(\ln \omega)' = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{\omega}.$$

c) **Hàm lũy thừa:** Với số  $\alpha \in \mathbb{C}$  cố định, hàm lũy thừa phức  $z^\alpha$  được cho bởi công thức

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}.$$

Nhánh chính của hàm này là  $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ . Nó là hàm hợp của những hàm khả vi cho nên cũng khả vi và có đạo hàm là

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}.$$

Hàm lũy thừa phức có những tính chất tương tự như hàm lũy thừa thực, đặc biệt là:

$$z^\alpha \cdot z^\beta = z^{\alpha+\beta}.$$

d) **Các hàm lượng giác:**

Các hàm lượng giác được định nghĩa như sau

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Theo định lý hàm hợp, các hàm lượng giác trên là khả vi và

$$[\cos(z)]' = -\sin(z), \quad [\sin(z)]' = \cos(z).$$

Từ hai hàm lượng giác cơ bản này, ta có thể định nghĩa các hàm lượng giác khác như  $\tan(z)$ ,  $\cot(z)$ ,  $\text{sh}(z)$ ,  $\text{ch}(z)$ , ... và cả những hàm lượng giác ngược như  $\arcsin(z)$ ,  $\arccos(z)$ , ... như trong trường hợp hàm ngược thực.

**Chú ý.** Hàm sin và cos trên tập số thực luôn bị chặn bởi  $-1$  và  $1$ , nhưng trên tập số phức chúng *không bị chặn*.

**Thí dụ**

$$1) \cos(ix) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \text{ch}(x);$$

$$\sin(ix) = \frac{1}{2i}(e^x - e^{-x}) = i\text{sh}(x).$$

2) Tìm số phức  $z$  sao cho  $\cos(z) = 3$ .

Giải. Giả sử  $z = x + iy$ . Điều kiện  $\cos(z) = 3$  kéo theo

$$3 = \cos(x + iy) = \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy) = \cos(x)\operatorname{ch}(y) - i\sin(x)\operatorname{sh}(y).$$

Nghĩa là

$$\sin(x).\operatorname{sh}(y) = 0.$$

Suy ra  $x = k\pi$  hoặc  $y = 0$ , và  $\cos(x)\operatorname{ch}(y) = 3$ .

Nếu  $y = 0$  thì  $\cos(x) = 3$ , điều này không thể xảy ra.

Như vậy  $y \neq 0$  và  $x = k\pi$ . Khi ấy  $\operatorname{ch}(y) = 3$ .

Vậy  $y = \operatorname{Argch}(3)$  và  $z = k\pi + i\operatorname{Argch}(3)$  với  $k$  là số nguyên bất kỳ.

# *Bài tập và tính toán thực hành Chương 3*

<b>1. Hàm vectơ.....</b>	<b>124</b>
1.1. Tính ma trận Jacobi .....	124
1.2. Tính hessian .....	124
1.3. Hàm ẩn .....	124
<b>2. Thực hành tính toán trên máy.....</b>	<b>125</b>
2.1. Các hệ tọa độ và đồ thị .....	125
2.2. Tính vi phân hàm vectơ.....	127
2.3. Vi phân hàm ẩn .....	128
2.4. Tính toán với số phức.....	131

## **1. Hàm vectơ**

### **1.1. Tính ma trận Jacobi**

**Bài 1.** Tính ma trận Jacobi của hàm vectơ 3 chiều ba biến  $f(x, y, z) = [x^2, xy, xz]$ .

**Bài 2.** Tính ma trận Jacobi của hàm vectơ 2 chiều ba biến  $f(x, y, z) = [x^2, xyz]$ .

**Bài 3.** Tính ma trận Jacobi của hàm vectơ 3 chiều hai biến  $f(x, y) = [x^2, xy, y^2]$ .

### **1.2. Tính Hessian**

**Bài 1.** Tính Hessian của  $xy - z^2$ .

**Bài 2.** Tính Hessian của  $x^2y + 3xy^2$ .

### **1.3. Hàm ẩn**

**Bài 1.** Giả sử các hàm  $f(x)$  và  $g(x)$  xác định và liên tục trong khoảng  $(a, b)$ . Khi nào thì phương trình  $f(x)y = g(x)$  có nghiệm liên tục duy nhất trong khoảng  $(a, b)$ ?

**Bài 2.** Cho phương trình

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

và

$$y = y(x), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

là hàm đơn trị thỏa mãn phương trình (1).

1. Có bao nhiêu nhánh (hàm) đơn trị (2) thỏa mãn phương trình (1)?
2. Có bao nhiêu hàm liên tục, đơn trị (2) thỏa mãn phương trình (1) nếu
  - a)  $y(0) = 1$ ;
  - b)  $y(1) = 0$ .

**Bài 3.** Chứng minh rằng phương trình  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ,  $a \neq 0$ , trong lân cận điểm  $x = 0, y = 0$  xác định hai hàm khả vi  $y = y_1(x)$  và  $y = y_2(x)$ . Tính  $y'_1(0), y'_2(0)$ .

**Bài 4.** Tính  $y'$  khi  $x = 0$  và  $y = 0$  nếu

$$(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3.$$

## 2. Thực hành tính toán trên máy

### 2.1. Các hệ tọa độ và đồ thị

Trước khi vẽ đồ thị, ta cần nạp gói công cụ vẽ bằng các lệnh:

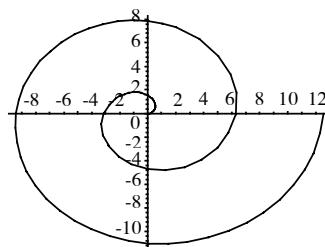
[>with(plots) :

[>with(plottools) :

#### 1. Vẽ đồ thị trong hệ tọa độ cực (2 chiều) bằng lệnh polarplot

Thí dụ 1. Vẽ đường xoắn ốc Archimedes. Một điểm  $M$  vừa chuyển động đều theo đường thẳng, vừa quay quanh điểm  $O$  với vận tốc không đổi. Khi ấy,  $M$  sẽ chuyển động theo đường xoắn ốc có tên là đường xoắn ốc Archimedes. Trong hệ tọa độ vuông góc, đường xoắn ốc có dạng  $\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \arctan \frac{y}{x}$ . Trong hệ tọa độ cực, đường xoắn ốc có dạng  $r = a \cdot t$ . Để vẽ đường xoắn ốc với  $a = 1$ , ta dùng lệnh:

[>polarplot([t, t, t=0..4\*Pi]);



Hình 3.11

Thí dụ 2. Vẽ hoa hồng bốn cánh: Một đoạn thẳng  $AB$  có độ dài  $2a$  không đổi với hai đầu  $A$  và  $B$  trượt trên hai trục tọa độ  $0x$  và  $0y$ . Chân đường vuông góc hạ từ 0

xuống  $AB$  vẽ thành một hoa hồng bốn cánh. Trong hệ tọa độ cực, hoa hồng bốn cánh có phương trình là  $r = a \cdot \sin 2t$ . Với  $a = 1$  ta vẽ đồ thị này bằng lệnh

```
[>polarplot([sin(2*t), t, t=0..4*Pi]);
```

Sau khi thực hiện ta được kết quả như đã thấy trong Hình 3.2.

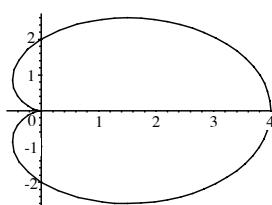
Thí dụ 3. Vẽ đường óc sên Pascan. Trong hệ tọa độ vuông góc, óc sên Pascan có phương trình dạng  $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0$ . Trong hệ tọa độ cực, phương trình này có dạng  $r = b + 2a \cos t$ . Tùy theo quan hệ giữa  $a$  và  $b$  ( $a < 2b$ ,  $a = 2b$ ,  $a > 2b$ ), ta có các dạng óc sên khác nhau. Dưới đây là các lệnh (và kết quả) vẽ óc sên Pascan với  $a = 1, b = 2$ ;  $a = 1, b = 1$ ;  $a = 1, b = 3$ .

```
[>polarplot([2*(1+cos(t)), t, t=0..2*Pi]);
```

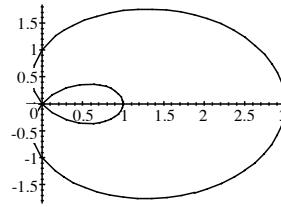
```
[>polarplot([2*cos(t)+1, t, t=0..2*Pi]);
```

```
[>polarplot([2*cos(t)+3, t, t=0..2*Pi]);
```

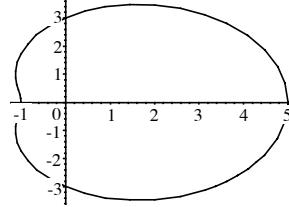
Sau khi thực hiện ta sẽ thấy kết quả tương ứng trong các hình vẽ 3.12, 3.13, 3.14:



Hình 3.12



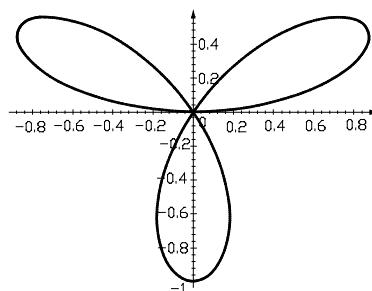
Hình 3.13



Hình 3.14

Thí dụ 4. Vẽ hoa hồng ba cánh: Trong hệ tọa độ cực, hoa hồng ba cánh có dạng phương trình là  $r = a \cdot \sin 3t$ . Ta vẽ đồ thị này bằng lệnh

```
[>polarplot([sin(3*t), t, t=0..2*Pi]);
```



Hình 3.15

## 2. Vẽ đồ thị trong hệ tọa độ trụ và hệ tọa độ cầu

Muốn vẽ mặt cong bằng hệ tọa độ trụ ta dùng lệnh **cylinderplot**.

*Thí dụ:* Vẽ mặt cong  $r = \frac{5\cos^2 z - 1}{3}$  khi  $\theta$  thay đổi trong đoạn  $[0, 2\pi]$  và  $z$  thay đổi trong đoạn  $[-\pi, \pi]$  bằng lệnh:

```
[> cylinderplot((5*cos(z)^2-1)/3, theta=0..2*Pi, z=-Pi..Pi);
```

Sau khi thực hiện ta sẽ được kết quả như trong *Hình 3.5*.

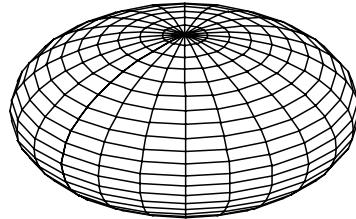
Muốn vẽ mặt cong trong hệ tọa độ cầu ta dùng lệnh **sphereplot**.

*Thí dụ:* Vẽ mặt cong  $\rho = \frac{5\cos^2 \varphi - 1}{2}$  trong hệ tọa độ cầu khi  $\theta$  thay đổi trong đoạn  $[0, \pi]$  và  $\varphi$  thay đổi trong đoạn  $[-\pi, \pi]$  bằng lệnh:

```
[> sphereplot((5*cos(phi)^2 - 1)/2, theta=0..Pi, phi=-Pi..Pi);
```

và sau khi thực hiện ta được kết quả như trong *Hình 3.7*. Vẽ mặt cầu trong hệ tọa độ cầu là một việc rất đơn giản. Lệnh vẽ mặt cầu đơn vị là:

```
[> sphereplot(1, theta=0..2*Pi, phi=0..Pi);
```



*Hình 3.15*

Ta có thể dùng lệnh **plot3d** (vẽ đồ thị trong không gian 3 chiều) kết hợp với *tùy chọn* hệ tọa độ **coords=spherical** để vẽ hình cầu trên. Lệnh này có cú pháp:

```
[> plot3d(1, t=0..2*Pi, p=0..Pi, coords=spherical);
```

(Sau khi thực hiện ta sẽ thấy kết quả giống như hình trên).

## 2.2. Tính vi phân hàm vecto

Lưu ý rằng tính toán vi phân hàm vecto, cũng như tính toán vi phân hàm nhiều biến nói chung, là làm việc trên ma trận, cho nên luôn cần sự hỗ trợ của gói chương trình *đại số tuyến tính*. Ta cần phải gọi nó ra, bằng lệnh

```
[> with(linalg):
```

### 1. Tính đạo hàm (ma trận Jacobi) của hàm vecto

Tính ma trận Jacobi của hàm vecto  $f$  bằng lệnh **jacobian(f, [x, y, ...])**.

*Thí dụ:* Tính ma trận Jacobi của hàm vectơ 3 chiều ba biến  $f(x, y, z) = [x^2, xy, xz]$ .

[>jacobian([x^2, x\*y, x\*z], [x, y, z]);

$$\begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

## 2. Tính Hessian

Muốn tính Hessian của hàm hai hay nhiều biến, ta dùng lệnh có cú pháp như sau:

[>hessian(f, [x, y, z]);

*Thí dụ:* Tính hessian của hàm  $xy - z^2$ .

[>hessian(x\*y-z^2, [x, y, z]);

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

## 2.3. Vi phân hàm ẩn

### 1. Tính đạo hàm của hàm ẩn vô hướng một biến

Hàm ẩn vô hướng một biến xác định bởi phương trình  $f(x, y) = 0$ . Giải phương trình này ta thu được một hàm  $y$  theo  $x$ . Muốn tính đạo hàm của nó ta dùng lệnh:

[>implicitdiff(f, y, x);

Kết quả nhận được cũng thường là một hàm ẩn.

*Thí dụ:* Tính đạo hàm của hàm  $y$  xác định từ phương trình

[>implicitdiff(x^2+x\*y+y^2=3, y, x);

$$-\frac{2x + y}{x + 2y}$$

Muốn tính đạo hàm bậc  $k$  của hàm ẩn  $y$  xác định bởi phương trình  $f(x, y) = 0$  theo  $x$ , ta dùng lệnh:

[>implicitdiff(f, y, x\$k);

*Thí dụ:* Tính đạo hàm bậc ba của hàm ẩn  $y$  xác định từ phương trình

$$x^2 + xy + y^2 = 3.$$

[>implicitdiff(x^2+x\*y+y^2=3, y, x\$3);

$$-54 \frac{x(x^2 + xy + y^2)}{x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5}$$

Thay  $x^2 + xy + y^2 = 3$  vào biểu thức trên để đơn giản:

[>**subs**( $x^2+x*y+y^2=3$ , ");

$$\frac{-162x}{x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5}$$

Muốn có đáp số gọn hơn ta phân tích biểu thức trên ra thừa số, bằng lệnh:

[>**factor**(");

$$\frac{-162x}{(x+2y)^5}$$

Với những bài như thế này, nếu không có máy, ta sẽ mất khá nhiều thời gian làm các công việc tính toán phức tạp.

## 2. Tính đạo hàm của hàm ẩn vô hướng nhiều biến

Muốn tính đạo hàm riêng bậc  $k$  theo các biến  $x_1, x_2, \dots, x_k$  của hàm ẩn  $y$  xác định bởi phương trình  $f(y, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  theo  $x$ , ta dùng lệnh:

[>**implicitdiff**( $f$ ,  $y$ ,  $x[1], \dots, x[k]$ );

*Thí dụ:* Tính đạo hàm riêng theo  $x$  của hàm ẩn  $z$  xác định từ phương trình

$$z^3 - 3xyz = a^3.$$

[>**implicitdiff**( $z^3 - 3*x*y*z = a^3$ ,  $z$ ,  $x$ );

$$-\frac{yz}{-z^2 + xy}$$

Tính đạo hàm riêng theo  $y$  của hàm  $z$  xác định từ phương trình trên:

[>**implicitdiff**( $z^3 - 3*x*y*z = a^3$ ,  $z$ ,  $y$ );

$$\frac{xz}{-z^2 + xy}$$

Tính đạo hàm riêng cấp 2 theo  $x$  của hàm  $z$  xác định từ phương trình trên:

[>**implicitdiff**( $z^3 - 3*x*y*z = a^3$ ,  $z$ ,  $x\$2$ );

$$2 \frac{zy^3x}{-z^6 + 3z^4xy - 3z^2x^2y^2 + x^3y^3}$$

và rút gọn bằng cách phân tích thành nhân tử:

[>**factor**(");

$$2 \frac{zy^3x}{(-z^2 + xy)^3}$$

Dĩ nhiên ta cũng tính được các đạo hàm riêng “hỗn hợp” theo cả  $x$  và  $y$  với bậc cao hơn bằng thủ tục tương tự như trên. Người đọc có thể tự mình thực hiện các tính toán này.

### **3. Tính đạo hàm của hàm ẩn vector**

Hàm ẩn vecto được xác định bởi hệ phương trình  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ , trong đó mỗi  $f_i$  là một phương trình theo các biến phụ thuộc  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  (các hàm ẩn) và các biến độc lập  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ . Các điều kiện về sự tồn tại của hàm ẩn vecto được quy định bởi định lý hàm ẩn. Lệnh lấy đạo hàm của hàm ẩn vecto có cú pháp như sau:

- Lấy đạo hàm của một nhóm hàm thành phần  $\{u_1, \dots, u_r\}$  trong vectơ hàm  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  (theo biến  $x$ ) bằng lệnh  
 $[>\text{implicitdiff}(\{\mathbf{f1}, \dots, \mathbf{fm}\}, \{\mathbf{y1}, \dots, \mathbf{yn}\}, \{\mathbf{u1}, \dots, \mathbf{ur}\}, \mathbf{x});$
  - Lấy đạo hàm riêng theo cụm biến  $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  của các thành phần  $\{u_1, \dots, u_r\}$  (trong vectơ hàm  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ) bằng lệnh

Trong đó:  $f_1, f_2, \dots, f_m$  là các biểu thức đại số hoặc các phương trình,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  là các biến phụ thuộc (tên các hàm),  $u_1, \dots, u_r$  là nhóm các hàm mà ta sẽ lấy đạo hàm,  $x_1, x_2, \dots, x_s$  là tên các biến mà ta cần lấy đạo hàm riêng (có thể trùng nhau, nếu ta lấy đạo hàm theo một biến nào đó nhiều lần).

Thí du:

```

[>f := a*sin(u*v)+b*cos(w*x)=c:
[>g := u+v+w+x=z:
[>h := u*v+w*x=z:
[>implicitdiff({f,g,h},{u(x,z),v(x,z),w(x,z)},u,z);

$$\frac{-a \cos(uv)u + b \sin(wx)xu - b \sin(wx)x + a \cos(uv)ux}{x(-b \sin(wx)v + b \sin(wx)u - a \cos(uv)v + a \cos(uv)u)}$$

[>implicitdiff({f,g,h},{u(x,z),v(x,z),w(x,z)},{u,v,w},x);

$$\left\{ D_1(v) = -\frac{v(-w+x)}{(v-u)x}, D_1(w) = -\frac{w}{x}, D_1(u) = -\frac{u(-w+x)}{x(-v+u)} \right\}$$

[>implicitdiff({f,g,h},{u(x,z),v(x,z),w(x,z)},{u,v,w},x,
  notation=Diff):

$$\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} v \right)_z = -\frac{v(-w+x)}{(v-u)x}, \left( \frac{\partial}{\partial x} w \right)_z = -\frac{w}{x}, \left( \frac{\partial}{\partial x} u \right)_z = -\frac{u(-w+x)}{x(-v+u)} \right\}
[> implicitdiff({g,h},{u(x,z),v(x,z),w(x,z)},{u,v,w},z);$$

```

$$\{D_2(u)=D_2(u), D_2(v)=-\frac{D_2(u)x-D_2(u)v+1-x}{x-u}, D_2(w)=\frac{-D_2(u)v+uD_2(u)-u+1}{x-u}\}.$$

## 2.4. Tính toán với số phức

MAPLE cho phép thực hiện tính toán và làm việc với số phức như với số thực. Tuy nhiên, cần chú ý: *đơn vị ảo* được kí hiệu là chữ *I* hoa (mà không phải là chữ *i* thường như ta vẫn quen dùng).

Thí dụ 1. Tính *module* (trị tuyệt đối) và *argument* của số phức

[>**abs**(3-4\*I);

5

[>**argument**(3+4\*I);

$$\arctan \frac{4}{3}$$

Thí dụ 2. Tính *liên hợp* của số phức

[>**conjugate**(3+5\*I);

$$3 - 5I$$

[>**conjugate**(**exp**(3\*I));

$$\exp(-3I)$$

Thí dụ 3. Tìm *phần thực* hoặc *phần ảo* của một số: Tìm phần thực của  $\pi + Ie$

[>**Re**(Pi+I\***exp**(1));

$\pi$

Tìm phần ảo của  $e^I$

[>**Im**(**exp**(I));

$$\sin(1)$$

Thí dụ 4. Giải phương trình  $x^3 = -3$  bằng lệnh

[>**solve**(x^3=-3);

$$-3^{1/3}, \frac{1}{2}3^{1/3} - \frac{1}{2}I3^{5/6}, \frac{1}{2}3^{1/3} + \frac{1}{2}I3^{5/6}$$

Tính giá trị gần đúng của các nghiệm:

[>**evalf**(["]);

$$[-1.442249570, .7211247850 - 1.249024767 I, .7211247850 + 1.249024767 I]$$

Bằng lệnh **convert(f,polar)** ta dễ dàng biến đổi một số phức **f** về dạng biểu diễn trong hệ tọa độ cực  $(r, q)$ , trong đó  $r$  là *modul* và  $q$  là *argument* của số phức **f**.

Thí dụ 5. Biến đổi  $\frac{3+5I}{7+4I}$  về dạng biểu diễn trong hệ tọa độ cực

[>**convert**((3+5\*I)/(7+4\*I), polar);

$$\text{polar}\left(\frac{1}{65}\sqrt{2210}, \arctan\left(\frac{23}{41}\right)\right)$$

Cũng bằng lệnh **convert** ta có thể biến đổi một số phức **f** về dạng mũ:

Thí dụ 6. Biến đổi  $\sin x$  về dạng biểu diễn mũ:

```
[>convert(sin(x), exp);  
-1/2(I(exp(Ix))-1/exp(Ix))
```

MAPLE có thể tính được giá trị lôgic (giá trị Boole) của biểu thức nhờ sử dụng lệnh **is** (là). Tính năng này rất hữu ích cho các công việc kiểm định.

Thí dụ 7. Xét xem số phức  $\sqrt{-1-I}\sqrt{-1+I}$  có bằng 0 hay không?

```
[>expr:=sqrt(-1-I)*sqrt(-1+I);  
[>is(expr=0);  
false
```

Muốn biết nó là số thực hay số phức ta dùng lệnh kiểm tra phần ảo của nó có bằng 0 hay không:

```
[>is(Im(expr)=0);  
true  
Vậy nó là số thực. Có thể biết phần thực này là âm hay dương bằng lệnh:  
[>is(Re(expr)>0);  
true
```

Như vậy, biểu thức trên thực chất là một số thực dương.

**Lưu ý.** Máy tính không thể (tự mình) khẳng định được điều ta vừa kiểm định, vì với câu lệnh

```
[>is(expr>0);  
FAIL
```

ta thấy máy trả lời là “xin chịu” (chứ không khẳng định hay phủ định). Điều này có thể hiểu được, vì máy đã được dạy rằng đối với các số phức thì không có chuyên so sánh lớn hơn hay bé hơn (mà biểu thức có tham gia số ảo  $I$  thì đương nhiên cần được hiểu là một số phức!). Như vậy, máy chỉ giỏi tính toán một cách “máy móc”, còn về tư duy xét đoán thì không thể nào so sánh được với bộ não con người. Thí dụ trên lại cho ta thêm một minh họa về sự cần thiết phải kết hợp khả năng tính toán của máy với khả năng tư duy xét đoán của người sử dụng. Cũng qua thí dụ này ta thấy được rằng hiệu quả làm việc với máy phụ thuộc rất nhiều vào việc ta có biết cách hướng dẫn nó làm việc một cách thông minh hay không.

Một điều cần lưu ý nữa là Maple luôn tự hiểu mọi số là phức, cho nên muốn gán cho tham số nào đó một giá trị “không phức” thì ta phải dùng lệnh “giả thiết”. Thí dụ, muốn giả thiết rằng  $n$  là số nguyên, ta dùng lệnh

```
[>assume(n,integer);  
còn muốn giả thiết rằng  $x$  là số thực thì ta dùng lệnh  
[>assume(x,real);  
và tương tự như vậy với các tính chất khác.
```

## Chương 4

# Tích phân bội

<b>4.1. Tích phân Riemann trên hộp đóng trong <math>\mathbb{R}^n</math> .....</b>	<b>133</b>
4.1.1. Khái niệm .....	133
4.1.2. Các thí dụ .....	137
4.1.3. Các tính chất ban đầu .....	139
<b>4.2. Sự tồn tại tích phân. Tích phân trên tập bất kỳ .....</b>	<b>140</b>
4.2.1. Hàm bắc thang và sự tồn tại của tích phân .....	140
4.2.2. Tích phân trên tập bất kỳ .....	142
4.2.3. Tính khả tích của hàm liên tục .....	148
4.2.4. ý nghĩa của tích phân bội .....	150
<b>4.3. Tích phân lặp .....</b>	<b>152</b>
4.3.1. Định lý Fubini .....	152
4.3.2. Các hệ quả quan trọng .....	156
<b>4.4. Phép đổi biến trong tích phân bội .....</b>	<b>159</b>
4.4.1. Phân hoạch đơn vị và bô đè cơ bản .....	159
4.4.2. Phép đổi biến trong tích phân bội .....	162
4.4.3. Một vài thí dụ .....	168

## 4.1. Tích phân Riemann trên hộp đóng trong $\mathbb{R}^n$

### 4.1.1. Khái niệm

*Hộp đóng* trong không gian  $\mathbb{R}^n$  là tập hợp có dạng sau đây

$$B := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\},$$

trong đó  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  là những số cố định với  $a_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n$ . Khi ấy ta có thể nói *hộp đóng*  $B$  được xác định bởi các số  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ , và cũng có thể nói các số này xác định *hộp đóng*  $B$ . Nếu có chỉ số  $i$  sao cho  $a_i = b_i$  thì ta nói *hộp đóng*  $B$  là suy biến; trong trường hợp trái lại, *hộp đóng*  $B$  không suy biến.

Các đoạn  $[a_i, b_i], i = 1, 2, \dots, n$  được gọi là các *cạnh sinh* hộp đóng  $B$ , và đôi khi ta viết

$$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Số  $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$  được gọi là *thể tích* của hộp đóng và thường được ký hiệu là  $V(B)$  hay  $\text{vol}(B)$ . Như vậy, nếu hộp đóng suy biến thì thể tích bằng 0, và hộp đóng không suy biến thì thể tích khác 0.

Khái niệm *hộp mở* được định nghĩa tương tự như hộp đóng bằng các thay các dấu  $\leq$  bởi các dấu  $<$ .

Trong phần này, để thuận tiện trong việc sử dụng các ký hiệu hình thức, ta quy ước *khoảng* với 2 đầu mút trùng nhau là *một điểm* hay là *khoảng có độ dài 0* (chứ không phải là *tập rỗng*). Hộp mở được coi là *không suy biến* khi tất cả các cạnh của nó là *những khoảng thực sự* trong  $\mathbb{R}$  (tức là có 2 đầu mút phân biệt), và khi ấy người ta thường gọi nó là *phản trong* (hay *miền trong*) của hộp đóng tương ứng. Trong trường hợp ngược lại, tức là có chỉ số  $i$  sao cho  $a_i = b_i$ , thì ta nói hộp mở là *suy biến*. Nếu hộp có đúng  $s$  cạnh *không suy biến* (tức là chỉ có  $n-s$  cạnh *suy biến thành điểm*) thì ta gọi nó là *hộp mở tương đối s chiều*. Như vậy, hộp mở *không suy biến* là *hộp mở tương đối n chiều* (hay đơn giản là *hộp mở n chiều*), còn *điểm* là một *hộp mở tương đối 0 chiều*.

Trong không gian 1 chiều thì *hộp đóng* chính là *đoạn*, còn *hộp mở* là *khoảng*. *Thể tích* của hộp  $B = [a, b] \subset \mathbb{R}$  là *độ dài* của đoạn và bằng  $(b - a)$ .

*Hộp* trong không gian 2 chiều chính là *hình chữ nhật*. *Thể tích* của hộp  $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  là *diện tích* hình chữ nhật và bằng  $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ . *Phản trong* của hình chữ nhật là *tập*  $B' = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$  và là *hộp mở 2 chiều*. Các cạnh hình chữ nhật không kề nhau ( $\{a_1\} \times (a_2, b_2), \{b_1\} \times (a_2, b_2), (a_1, b_1) \times \{a_2\}, (a_1, b_1) \times \{b_2\}$ ) là các *hộp mở tương đối 1 chiều*, còn các đỉnh của hình chữ nhật là các *hộp mở tương đối 0 chiều*. Rõ ràng, các *hộp mở tương đối* nói trên là không giao nhau, và hợp của chúng đúng bằng hình chữ nhật (đóng) ban đầu. Như vậy, người ta có được một cách “*phân rã*” hình chữ nhật đóng thành các *hộp mở tương đối* (với các số chiều từ 0 đến 2). Cách phân rã này được gọi là *phân rã chuẩn tắc*.

*Hộp* trong không gian 3 chiều thì đúng là *hộp* theo ngôn ngữ thông thường và *thể tích* của nó cũng chính là khái niệm đã được biết trong chương trình phổ thông. *Miền trong* của hộp là một *hộp mở 3 chiều*, các *mặt bao quanh* hộp (không kề cạnh) là các *hộp mở tương đối 2 chiều*, các *cạnh* của hộp (không kề đỉnh) là các *hộp mở tương đối 1 chiều*, và các *đỉnh* của hộp là các *hộp mở tương đối 0 chiều*. Rõ ràng, các *hộp mở tương đối* nói trên cũng là không giao nhau, và hợp của chúng đúng bằng hộp đóng ban đầu. Như vậy, ta cũng có cách “*phân rã chuẩn tắc*” một hình hộp đóng 3 chiều thành các *hộp mở tương đối* (với các số chiều từ 0 đến 3).

Tương tự như trên, với hộp  $n$  chiều  $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ , người ta có thể “phân rã chuẩn tắc” nó thành các *hộp mở tương đối* (với các số chiều khác nhau, từ  $0$  đến  $n$ ). Cụ thể, mỗi *thành phần* của phân rã này là một tập trong  $\mathbb{R}^n$  có dạng như sau:

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\},$$

trong đó mỗi  $Q_i$  chỉ có thể nhận 1 trong 3 khả năng: khoảng  $(a_i, b_i)$ , điểm  $\{a_i\}$ , hoặc điểm  $\{b_i\}$ . Số lượng các chỉ số  $i$  mà  $Q_i$  không phải là điểm (mà là khoảng thực sự) cũng chính là số chiều của thành phần này.

**ĐỊNH NGHĨA.** *Phân hoạch*  $P$  của một hộp đóng  $B$  xác định bởi  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  là một bộ gồm  $n$  phân hoạch của các đoạn  $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$  trong  $\mathbb{R}$  (theo nghĩa thông thường). Nghĩa là, nó gồm một họ  $n$  dãy số hữu hạn

*Bè rộng* (hay *đường kính*) của phân hoạch này là một số, ký hiệu là  $d(P)$ , xác định như sau:

$$d(P) := \max \{x_j^i - x_{j-1}^i : j = 1, 2, \dots, k(i), i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Như vậy một *phân hoạch*  $P$  của một hộp đóng  $B$  sẽ xác định một họ các hộp đóng con  $P(B)$  gồm có  $K = k(1).k(2) \dots k(n)$  phần tử. Mỗi phần tử được xác định bởi  $n$  *cạnh sinh* có dạng  $[x_j^i, x_{j-1}^i]$ , với chỉ số  $i$  nằm giữa 1 và  $n$ , còn chỉ số  $j$  nằm giữa 1 và  $k(i)$ . Rõ ràng *hợp* của các hộp thuộc họ  $P(B)$  sẽ đúng bằng  $B$ . Hai hộp bất kỳ trong họ  $P(B)$  không giao nhau ở miền trong của chúng.

Nếu ta tiến hành phân rã từng hộp con trong họ thành các *hộp mở tương đối* (theo phương pháp *phân rã chuẩn tắc*) thì ta có được một họ *các hộp mở tương đối* (với các số chiều khác nhau, từ 0 đến  $n$ ), ký hiệu là  $P_N(B)$ , và được gọi là *họ các hộp mở tương đối sinh bởi phân hoạch P*. Có thể chỉ ra rằng mỗi tập trong họ  $P_N(B)$  có dạng

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in Q_i, i = 1, 2, \dots, n\},$$

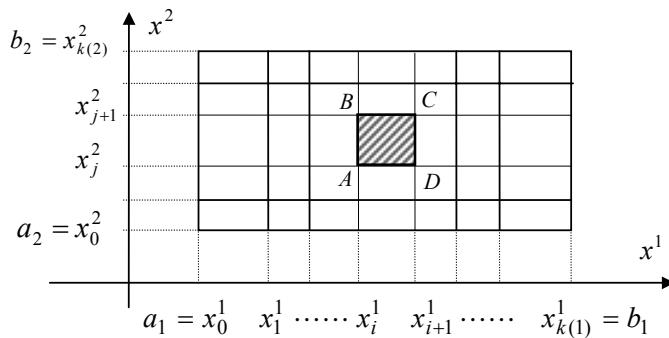
trong đó  $Q_i$  có thể là một trong các khoảng  $(x_{j-1}^i, x_j^i)$ ,  $j = 1, \dots, k(i)$ , hoặc là một trong các điểm  $\{x_j^i\}$ ,  $j = 0, 1, \dots, k(i)$ .

**Thí dụ.** Trong trường hợp  $n=1$  thì hộp chính là một *đoạn* và *phân hoạch* của nó là khái niệm mà ta đã quen biết trong trường hợp hàm 1 biến. *Hộp các hộp mở tương đối sinh bởi phân hoạch* là tập hợp bao gồm tất cả các *khoảng* và tất cả các *điểm* (đâu mút các khoảng) có trong phân hoạch.

Trong trường hợp  $n=2$  thì một hộp 2 chiều chính là một hình chữ nhật, và *phân hoạch*  $P$  của một hình chữ nhật  $J$  xác định bởi  $a_1, a_2, b_1, b_2$  là một bộ gồm 2 phân hoạch của 2 cạnh sinh hộp  $[a_1, b_1]$  và  $[a_2, b_2]$  (theo nghĩa thông thường trong  $\mathbb{R}$ ). Nghĩa là, nó gồm 2 dãy số hữu hạn

$$\begin{aligned} a_1 = x_0^1 &< x_1^1 < x_2^1 \dots < x_{k(1)}^1 = b_1, \\ a_2 = x_0^2 &< x_1^2 < x_2^2 \dots < x_{k(2)}^2 = b_2, \end{aligned}$$

chia hình chữ nhật  $J$  thành các *hình chữ nhật con*, kiểu  $ABCD$  như trong hình vẽ sau:



Hình 4.1

*Hộp các tập mở tương đối sinh bởi phân hoạch*  $P_N(B)$  là tập hợp bao gồm tất cả các *hình chữ nhật con mở* (kiểu *phần trong* của  $ABCD$ ), các “*cạnh con hở*” (kiểu các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  không kề đinh), và *các đỉnh* (kiểu  $A, B, C, D, \dots$ ).

Phân hoạch của một *hộp* trong không gian 3 chiều là một bộ gồm 3 *phân hoạch* (của 3 *cạnh sinh hộp*), và chúng chia hộp này thành các *hình hộp con* (theo phương thức tương tự như trên).

Nếu như trong mỗi hộp con  $B_k \in P(B)$  ta chọn ra một điểm nào đó

$$\mathbf{c}_k = (c_1^k, c_2^k, \dots, c_n^k) \in B_k$$

thì ta nói rằng ta có một *phép chọn*  $C$  đối với phân hoạch  $P$ .

Nếu  $f$  là một hàm xác định trên hộp  $B$  thì với một phép chọn  $C$  ta định nghĩa tổng Riemann của  $f$  trên phân hoạch  $P$  là

$$S(f, P, C) := \sum_{k=1}^K f(c_k)V(B_k) ,$$

trong đó  $V(B_k)$  là thể tích của hộp  $B_k$  và  $K$  là số lượng các hộp  $B_k$  trong phân hoạch. Khi ta không quan tâm tới một phép chọn nào cụ thể (nghĩa là phép chọn nào cũng được) thì ta ký hiệu tổng Riemann là  $S(f, P)$ .

**ĐỊNH NGHĨA** *Hàm  $f$  là khả tích trên hộp  $B$  nếu như tồn tại một số  $A$  sao cho, với mỗi số  $\varepsilon > 0$  cho trước, ta luôn tìm được số  $\delta > 0$  sao cho tổng Riemann của  $f$  trên mọi phân hoạch có bề rộng nhỏ hơn  $\delta$  chỉ sai khác với  $A$  một đại lượng không vượt quá  $\varepsilon$ .*

Khi ấy ta gọi số  $A$  là tích phân Riemann của hàm  $f$  trên hộp  $B$  và ký hiệu là  $\int_B f$ . Đôi khi người ta cũng ký hiệu nó là  $\int_B f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$  hay gọn hơn là  $\int_B f(x) dx$ ; đặc biệt, trong trường hợp 2, hay 3 chiều người ta thường thay ký hiệu  $\int_B$  một cách “tường minh” hơn là  $\iint_B$  hay  $\iiint_B$ , hoặc  $\iint_B$  hay  $\iiint_B$ .

Như vậy, định nghĩa tích phân (Riemann) của hàm nhiều biến cũng tương tự như tích phân của hàm một biến, và khi  $n=1$  thì chúng hoàn toàn trùng nhau. Cũng như trong trường hợp hàm 1 biến, ta sẽ luôn nói gọn tích phân Riemann là tích phân nếu như không có sự nhầm lẫn nào có thể nảy sinh.

Dễ dàng thấy rằng, tương tự như trong trường hợp hàm 1 biến, tích phân của hàm nhiều biến trên một hộp là duy nhất, nếu nó tồn tại.

### 4.1.2. Các thí dụ

**Thí dụ 1.** Nếu hàm  $f$  là một hằng số  $c$  trên hộp  $B$  thì nó khả tích và tích phân của nó trên hộp đó đúng bằng tích của  $c$  với thể tích của hộp (chứng minh suy trực tiếp từ định nghĩa, như đối với trường hợp hàm 1 biến).

**Thí dụ 2.** Nếu  $f$  là hàm nhận giá trị 1 tại những điểm có các tọa độ là số hữu tỷ và nhận giá trị 0 tại các điểm còn lại thì  $f$  là hàm không khả tích trên bất kỳ hộp nào (chứng minh hoàn toàn tương tự như trường hợp hàm 1 biến).

**Thí dụ 3.** Cho hộp đóng  $B$  xác định bởi các số  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ . Nếu  $\alpha \in [a_1, b_1]$  và  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  nhận giá trị 0 tại mọi điểm nằm ngoài mặt phẳng  $x_1 = \alpha$  (tức là có tọa độ thứ nhất khác  $\alpha$ ), và  $f(\alpha, x_2, \dots, x_n)$  là một hàm bị chặn (theo tất cả các biến còn lại) bởi số dương  $M$  nào đó, thì  $f$  là một hàm khả tích trên hộp  $B$  và tích phân của nó là 0. Thật vậy, lấy một phân hoạch bất kỳ  $P$  có bề

rộng là  $\delta$  thì với mọi phép chọn  $C$  ta thấy rằng  $f(c_k)$  chỉ có thể khác 0 khi tọa độ thứ nhất của nó là  $\alpha$  và khi giá trị tuyệt đối của nó không vượt quá  $M$ . Tổng thể tích của tất cả các hộp con có thể giao với mặt phẳng  $x_1 = \alpha$  không vượt quá số  $2\delta(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$ . Cho nên

$$|S(f, P, C)| = \left| \sum_{k=1}^K f(c_k) V(B_k) \right| \leq 2M\delta(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Vì số  $\delta$  có thể lấy nhỏ bao nhiêu tùy ý cho nên ta suy ra  $\int_B f = 0$ .

Rõ ràng khẳng định trên là đúng cho mọi hàm  $f$  chỉ khác không trên mặt phẳng  $x_i = \alpha$  nào đó (với  $i$  là tọa độ bất kỳ, mà không nhất thiết là tọa độ thứ nhất).

**Thí dụ 4.** Cho hộp đóng  $B$  xác định bởi các số  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ , và một hộp con  $I$  (nằm trong hộp  $B$ ) xác định bởi các số  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  với  $a_i \leq \alpha_i < \beta_i \leq b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Nếu  $f$  là hàm số nhận giá trị 1 trên hộp con  $I$  và nhận giá trị 0 tại những điểm thuộc  $B \setminus I$  thì nó là hàm khả tích trên hộp  $B$  và tích phân của nó đúng bằng thể tích của hộp  $I$ .

Thật vậy, lấy một phân hoạch  $P$  của hộp  $B$  với bề rộng là  $\delta$  và một phép chọn  $C$  bất kỳ. Lưu ý rằng  $f(c_k)$  chỉ có thể khác 0 khi hộp con  $B_k$  có giao khác rỗng với hộp  $I$ , và tổng thể tích các hộp này không vượt quá thể tích của hộp sinh bởi các cạnh  $[\alpha_i - \delta, \beta_i + \delta]$ , tức là số  $(\beta_1 - \alpha_1 + 2\delta) \dots (\beta_n - \alpha_n + 2\delta)$ . Mặt khác,  $f(c_k)$  không thể khác 1 khi hộp con  $B_k$  nằm gọn trong hộp  $I$ , và tổng thể tích các hộp con này không nhỏ hơn thể tích của hộp sinh bởi các cạnh  $[\alpha_i + \delta, \beta_i - \delta]$ , tức là số  $(\beta_1 - \alpha_1 - 2\delta) \dots (\beta_n - \alpha_n - 2\delta)$ . Tóm lại ta suy ra

$$(\beta_1 - \alpha_1 - 2\delta) \dots (\beta_n - \alpha_n - 2\delta) \leq S(f, P, C) \leq (\beta_1 - \alpha_1 + 2\delta) \dots (\beta_n - \alpha_n + 2\delta).$$

Vì hàm số  $g(t) = (\beta_1 - \alpha_1 + 2t) \dots (\beta_n - \alpha_n + 2t)$  là liên tục cho nên với mỗi số  $\varepsilon > 0$  ta tìm được số  $\delta > 0$  sao cho với  $|t| \leq \delta$  thì

$$|g(t) - (\beta_1 - \alpha_1) \dots (\beta_n - \alpha_n)| < \varepsilon.$$

Do  $g(-\delta) \leq S(f, P, C) \leq g(\delta)$  cho nên ta cũng có

$$|S(f, P, C) - (\beta_1 - \alpha_1) \dots (\beta_n - \alpha_n)| < \varepsilon.$$

Từ định nghĩa ta suy ra  $f$  là hàm khả tích trên hộp  $B$  và có

$$\int_B f = (\beta_1 - \alpha_1) \dots (\beta_n - \alpha_n).$$

### 4.1.3. Các tính chất ban đầu

Do định nghĩa tích phân Riemann trong trường hợp hàm nhiều biến cũng tương tự như trong trường hợp hàm 1 biến, cho nên hàng loạt tính chất của tích phân hàm một biến cũng đúng cho tích phân hàm nhiều biến. Dưới đây ta liệt kê một số tính chất đặc trưng.

**MỆNH ĐỀ.** *Giả thiết rằng  $f$  và  $g$  là những hàm khả tích trên hộp  $B$  và  $\alpha$  là một số thực. Khi ấy:*

(i) *Tổng  $f + g$  là hàm khả tích trên hộp  $B$  và*

$$\int_B(f+g) = \int_B f + \int_B g ;$$

(ii)  *$\alpha f$  là hàm khả tích trên hộp  $B$  và*

$$\int_B(\alpha f) = \alpha \int_B f ;$$

(iii) *Hiệu  $f - g$  là hàm khả tích trên hộp  $B$  và*

$$\int_B(f-g) = \int_B f - \int_B g ;$$

**Chứng minh.** Hoàn toàn tương tự như đối với tích phân hàm một biến.

**MỆNH ĐỀ.** *Nếu  $f$  là hàm khả tích trên hộp  $B$  và nhận giá trị không âm trên hộp này thì*

$$\int_B f \geq 0 .$$

**Chứng minh.** Suy ra ngay từ định nghĩa.

#### HỆ QUẢ

(i) *Nếu  $f$  và  $g$  là những hàm khả tích trên hộp  $B$  và  $f(x) \leq g(x)$  với mọi  $x \in B$  thì  $\int_B f \leq \int_B g$ .*

(ii) *Nếu  $f$  là hàm khả tích trên hộp  $B$  và  $m \leq f(x) \leq M$  với mọi  $x \in B$  thì*

$$m.V(B) \leq \int_B f \leq M.V(B) .$$

**Chứng minh.** Suy ra ngay từ mệnh đề trên.

## 4.2. Sự tồn tại tích phân. Tích phân trên tập bất kỳ

### 4.2.1. Hàm bậc thang và sự tồn tại của tích phân

**BỒ ĐỀ.** *Hàm số  $f$  là khả tích trên hộp  $B$  khi và chỉ khi, với mỗi số  $\varepsilon > 0$ , tồn tại số  $\delta > 0$  sao cho với mọi phân hoạch  $P_1, P_2$  có bề rộng không vượt quá  $\delta$  thì*

$$|S(f, P_1) - S(f, P_2)| \leq \varepsilon.$$

**Chứng minh.** Hoàn toàn tương tự như trong trường hợp hàm 1 biến.

**ĐỊNH NGHĨA.** *Hàm số  $f$  xác định trên hộp  $B$  được gọi là **hàm bậc thang** nếu như tồn tại một phân hoạch  $P$*

$$a_1 = x_0^1 < x_1^1 < x_2^1 \dots < x_{k(1)}^1 = b_1;$$

$$a_2 = x_0^2 < x_1^2 < x_2^2 \dots < x_{k(2)}^2 = b_2 ;$$

.....

$$a_n = x_0^n < x_1^n < x_2^n \dots < x_{k(n)}^n = b_n ;$$

*sao cho  $f$  nhận giá trị không đổi trên mỗi tập trong họ  $P_N(B)$  các hộp mở tương đối sinh bởi phân hoạch.*

Như vậy, nó là hằng trên mỗi tập có dạng

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in Q_i, i = 1, 2, \dots, n\},$$

trong đó  $Q_i$  có thể là một trong các khoảng  $(x_{j-1}^i, x_j^i)$ ,  $j = 1, \dots, k(i)$ , hoặc là một trong các điểm đơn độc  $\{x_j^i\}$ ,  $j = 0, 1, \dots, k(i)$ .

**Nhận xét.** Trong trường hợp  $n = 1$ , các hộp mở tương đối chỉ có một trong 2 dạng: **khoảng** (mở) và **điểm** (biên của các khoảng), nên hàm bậc thang có cấu trúc rất đơn giản như ta đã biết trong giáo trình giải tích các hàm số 1 biến. Cụ thể là hàm  $f$  là **hàm bậc thang** trên đoạn  $[a, b]$  nếu có thể chia đoạn này thành những đoạn con mà  $f$  có giá trị không đổi trong **phần trong** của mỗi đoạn con; tại các điểm đầu mút của các đoạn con giá trị của hàm số không nhất thiết phải bằng các giá trị tại các điểm trong, vì các điểm đầu mút cũng là các **hộp mở tương đối** (0 chiều) trong họ sinh bởi phân hoạch.

Trong không gian 2 chiều, hàm bậc thang có cấu trúc phức tạp hơn, vì các hộp mở tương đối có thể là một trong các **hình chữ nhật mở**  $B_k$ , các **khoảng mở** hoặc các **điểm** **đỉnh** (nằm trên biên của  $B_k$ ). Cụ thể là, hàm  $f$  là **hàm bậc thang** trên hình chữ nhật  $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ , nếu có thể chia hình này thành các hình chữ nhật con (như Hình 4.1) sao cho trên mỗi hình kiểu  $ABCD$  hàm  $f$  là hằng tại **miền trong**

của  $ABCD$  và trên từng khoảng mở  $AB, BC, CD, DA$ . Cũng như trên, giá trị của  $f$  tại các điểm đỉnh kiểu  $A, B, C, D$  không nhất thiết phải bằng giá trị bên trong hoặc trên các cạnh của hình chữ nhật con này.

**Lưu ý.** Để dễ dàng thấy rằng số các hộp mở tương đối (nói tới trong định nghĩa hàm bậc thang) là *hữu hạn* nên hàm bậc thang chỉ có thể nhận hữu hạn giá trị. Các hộp mở  $n$ -chiều chính là các hộp con  $B_k$  của phân hoạch, các hộp mở tương đối với số chiều nhỏ hơn  $n$  thì nằm trên biên của các hộp  $n$ -chiều. Trên mỗi hộp mở  $B_k$  nó chỉ nhận một giá trị. Thí dụ 3 đã cho thấy rằng việc thay đổi giá trị của hàm trên một (hay một số hữu hạn) các mặt phẳng (dạng  $x_i = \alpha$ ) không làm thay đổi *tính khả tích và giá trị* của tích phân, cho nên giá trị của hàm bậc thang trên những *hộp mở tương đối* với số chiều nhỏ hơn  $n$  không có ảnh hưởng gì tới giá trị của tích phân (do chúng nằm trên biên các hộp  $n$  chiều, và do đó nằm trong một số hữu hạn các mặt phẳng). Chính vì vậy, khi xét tích phân của hàm bậc thang, ta chỉ cần quan tâm đến các giá trị của nó trên các hộp mở có số chiều đúng bằng  $n$ , tức là các hộp con  $B_k$ .

**Bổ đề.** *Hàm bậc thang trên một hộp là khả tích trên hộp đó và tích phân của nó trên hộp bằng tổng tích của các giá trị hàm với thể tích của hộp con (trong phân hoạch) mà hàm nhận giá trị đó. Nghĩa là,*

$$\int_B f = \sum_{k=1}^K \alpha_k V(B_k),$$

trong đó  $B_k$  là các hộp con của phân hoạch và  $\alpha_k$  là giá trị của hàm trên hộp con  $B_k$ .

**Chứng minh.** Nếu ta định nghĩa  $h_k$  là hàm nhận giá trị 1 trên hộp con  $B_k$  và nhận giá trị 0 ở ngoài hộp này thì ta thấy rằng  $f - \sum_{k=1}^K \alpha_k h_k$  là hàm bằng 0 ở miền trong tất cả các hộp con, và chỉ có thể khác 0 ở tập biên của các hộp con. Từ Thí dụ 3 ta suy ra nó là hàm khả tích và có tích phân bằng 0. Theo Thí dụ 4 và các tính chất ban đầu của tích phân thì hàm  $\sum_{k=1}^K \alpha_k h_k$  là khả tích và có tích phân bằng  $\sum_{k=1}^K \alpha_k V(B_k)$ . Từ đây ta suy ra điều cần chứng minh.

**Mệnh đề.** *Hàm số  $f$  xác định trên hộp  $B$  là khả tích trên  $B$  khi và chỉ khi, với mỗi số  $\varepsilon > 0$ , tồn tại các hàm bậc thang  $h_1, h_2$  xác định trên hộp  $B$  sao cho*

$$h_1(x) \leq f(x) \leq h_2(x), \quad \forall x \in B$$

và

$$\int_B (h_2 - h_1) < \varepsilon.$$

**Chứng minh.** Hoàn toàn tương tự như đối trường hợp tích phân hàm 1 biến.

**HỆ QUẢ.** *Hàm khả tích trên hộp thì bị chặn trên hộp đó.*

**Chứng minh.** Suy ngay từ mệnh đề trên, vì mọi hàm bậc thang là bị chặn.

**HỆ QUẢ.** *Nếu  $B_1$  là một hộp nằm trong hộp  $B_2$  (tức là  $B_1 \subset B_2$ ) và  $f$  là hàm nhận giá trị 0 trên tập  $B_2 \setminus B_1$  thì  $\int_{B_2} f$  là tồn tại khi và chỉ khi  $\int_{B_1} f$  tồn tại, và trong trường hợp đó chúng bằng nhau.*

**Chứng minh.** Để dàng kiểm tra rằng hệ quả là đúng trong trường hợp  $f$  là hàm bậc thang. Trong trường hợp tổng quát, ta giả sử rằng tích phân trên hộp  $B_1$  là tồn tại. Khi ấy, với số  $\varepsilon > 0$  cho trước, từ mệnh đề trên ta tìm được 2 hàm bậc thang  $f_1, f_2$  trên  $B_1$  sao cho  $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ , với mọi  $\forall x \in B_1$ , và  $\int_{B_1} (f_2 - f_1) < \varepsilon$ . Thác triển 2 hàm bậc thang này ra toàn hộp  $B_2$ , bằng cách cho nó nhận giá trị 0 ở ngoài tập  $B_1$ , ta sẽ được 2 hàm bậc thang trên  $B_2$  và thỏa mãn điều kiện  $\int_{B_2} (f_2 - f_1) < \varepsilon$  và từ mệnh đề trên ta suy ra hàm  $f$  là khả tích trên hộp  $B_2$ . Do tích phân của  $f$  trên một hộp sai khác với tích phân của *hàm bậc thang* (trên cùng hộp đó) một đại lượng không quá  $\varepsilon$ , mà tích phân của mỗi hàm bậc thang trên 2 hộp là bằng nhau, cho nên dễ dàng suy ra các tích phân của  $f$  trên hộp to và trên hộp nhỏ lệch nhau không quá  $\varepsilon$ . Do  $\varepsilon$  có thể làm nhỏ bao nhiêu tùy ý nên chúng phải bằng nhau.

Bây giờ giả sử tích phân của  $f$  trên hộp to  $B_2$  là tồn tại. Khi ấy, với mỗi  $\varepsilon > 0$ , ta tìm được các hàm bậc thang  $g_1, g_2$  trên hộp  $B_2$  sao cho  $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$ , với mọi  $\forall x \in B_2$ , và  $\int_{B_2} (g_2 - g_1) < \varepsilon$ . Vì  $(g_2 - g_1)$  là không âm nên tích phân của nó trên hộp nhỏ không vượt quá tích phân trên hộp to, nghĩa là  $\int_{B_1} (g_2 - g_1) < \varepsilon$ . Như vậy hạn chế của các hàm bậc thang  $g_1, g_2$  trên hộp nhỏ thỏa mãn mọi tính chất của mệnh đề, và từ mệnh đề ta suy ra hàm  $f$  khả tích trên hộp nhỏ. Hệ quả đã được chứng minh đầy đủ.

### 4.2.2. Tích phân trên tập bất kỳ

Nếu như trong không gian 1 chiều *đoạn* là một dạng tập hợp khá phổ biến (mỗi tập đóng, liên thông giới nội đều là đoạn và hầu hết các tập thường gấp đều có thể biểu diễn được dưới dạng hợp của các đoạn), thì trong không gian nhiều chiều *hộp* không có được vai trò như vậy. Các tập hợp trong không gian nhiều chiều rất phong phú và đa dạng (thường không thể biểu diễn được bằng hợp của các hộp)

cho nên sẽ là không đầy đủ nếu ta chỉ định nghĩa *tích phân trên hộp*, mà không phát triển nó cho *các tập bất kỳ*.

Cho hàm  $f$  xác định trên toàn không gian và nhận giá trị 0 ở ngoài một tập giới nội  $A \subset \mathbb{R}^n$  nào đó. Lấy một hộp  $B \supset A$ , ta biết rằng  $f$  nhận giá trị 0 ở ngoài hộp  $B$ . Ta nói hàm  $f$  là *khả tích trên toàn không gian* nếu như nó khả tích trên hộp  $B$  và khi ấy ta coi  $\int_B f$  là tích phân của  $f$  trên toàn không gian.

Định nghĩa trên không mâu thuẫn vì nó không phụ thuộc vào việc chọn hộp  $B$  (chứa tập  $A$ ). Thật vậy, với một hộp khác  $B' \supset A$  thì ta lấy một hộp  $I \supset (B \cup B')$ . Rõ ràng hàm  $f$  nhận giá trị 0 trên các phần bù của các tập  $B, B'$  đối với  $I$ . Cho nên, theo hệ quả trong phần trên, hàm  $f$  là khả tích trên  $B$  khi và chỉ khi  $f$  là khả tích trên  $I$  (và khi ấy tích phân trên 2 hộp là bằng nhau). Cũng từ hệ quả này suy ra  $f$  là khả tích trên  $I$  khi và chỉ khi  $f$  là khả tích trên  $B'$  (và khi ấy tích phân trên 2 hộp là bằng nhau). Như vậy, hàm  $f$  là khả tích trên  $B$  khi và chỉ khi nó khả tích trên  $B'$  (và khi ấy tích phân trên 2 hộp là bằng nhau).

Bây giờ ta xét hàm  $f$  xác định trên một tập bất kỳ  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Gọi  $\bar{f}$  là thác triển của  $f$  trên toàn không gian bằng cách cho nó nhận giá trị 0 ở ngoài tập  $A$ . Ta nói  $f$  là *khả tích trên tập A* nếu hàm  $\bar{f}$  là khả tích trên toàn không gian và coi tích phân của  $\bar{f}$  trên toàn không gian là *tích phân của f trên A*, ký hiệu là  $\int_A f$ .

Rõ ràng khi  $A$  là một hộp thì định nghĩa trên hoàn toàn phù hợp với định nghĩa tích phân trên hộp như đã biết.

Từ định nghĩa tích phân, dễ dàng nhận thấy rằng  $\int_A f$  chỉ có thể tồn tại khi tập  $\{x \in A : f(x) \neq 0\}$  là giới nội và  $f$  là giới nội trên tập  $A$ .

Ta nói tập giới nội  $A \subset \mathbb{R}^n$  là *có thể tích* nếu tồn tại tích phân  $\int_A 1$ , và ta gọi tích phân này là *thể tích* của tập  $A$ , nghĩa là

$$V(A) = \int_A 1.$$

Rõ ràng, khi  $A$  là một hộp thì định nghĩa này hoàn toàn phù hợp với khái niệm *thể tích của hộp* đã nêu ở phần đầu của chương. Đôi khi, để cho rõ hơn, người ta còn gọi *thể tích* (của tập trong không gian  $n$  chiều) là *thể tích n-chiều*. Thể tích 1 chiều thường được gọi là *độ dài* và thể tích 2 chiều thường được gọi là *diện tích*.

Một tập *có thể tích* thì *giới nội*, vì đó là điều kiện cần để cho tích phân tồn tại.

**Thí dụ.** Tập hợp các điểm trong hộp mà có *tất cả các tọa độ là số hữu tỷ* là một tập không có thể tích, vì hàm thác triển  $\bar{1}$  (của hàm nhận giá trị 1 trên tập này) trên toàn hộp chính là hàm đã xét trong Thí dụ 2 và *không phải là hàm khả tích*.

**Lưu ý.** Việc định nghĩa *thể tích* của một tập thông qua khái niệm *tích phân* rất thuận tiện cho công việc tính toán. Ngoài cách định nghĩa này, người ta còn có thể định nghĩa *thể tích* theo phương pháp *xấp xỉ* bằng các hộp (một tập có thể tích nếu nó bị “kẹp giữa” 2 họ hình hộp có thể tích sai lệch nhau nhỏ bao nhiêu tùy ý). Hai định nghĩa này tuy rất gần nhau, nhưng không hoàn toàn trùng nhau. Để thấy rằng tập hợp trong thí dụ trên là không có thể tích theo nghĩa của ta (vì tích phân không tồn tại), nhưng lại có thể tích 0 theo định nghĩa kiểu *xấp xỉ* vừa nói (vì từ định nghĩa suy ra mọi tập *đếm được* là có thể tích 0).

Từ định nghĩa ta có ngay các kết quả sau đây về tích phân trên tập bất kỳ.

#### MỆNH ĐỀ

- (i) Nếu các hàm  $f, g$  là khả tích trên tập  $A \subset \mathbb{R}^n$  thì hàm  $(f + g)$  cũng khả tích trên tập  $A$  và khi ấy

$$\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g.$$

- (ii) Nếu hàm  $f$  là khả tích trên tập  $A \subset \mathbb{R}^n$  và  $c$  là một số thực thì  $cf$  cũng khả tích trên  $A$  và

$$\int_A c.f = c \int_A f.$$

**Chứng minh.** Suy ra ngay từ các tính chất tương tự của tích phân trên hộp.

**MỆNH ĐỀ.** Nếu hàm  $f$  là khả tích trên tập  $A \subset \mathbb{R}^n$  và không âm trên  $A$  thì

$$\int_A f \geq 0.$$

**Chứng minh.** Suy ra ngay từ tính chất tương tự của tích phân trên hộp.

#### HỆ QUẢ

- (i) Nếu các hàm  $f, g$  là khả tích trên tập  $A \subset \mathbb{R}^n$  và  $f(x) \leq g(x), \forall x \in A$ , thì

$$\int_A f \leq \int_A g.$$

- (ii) Nếu hàm  $f$  là khả tích trên một tập  $A \subset \mathbb{R}^n$  có thể tích và  $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in A$ , thì

$$m.V(A) \leq \int_A f \leq M.V(A).$$

**Chứng minh.** Suy ngay từ mệnh đề trên.

Các tập có thể tích 0 sẽ được dùng nhiều trong các nghiên cứu sau này. Ta liệt kê một số tính chất của chúng.

#### MỆNH ĐỀ

- (i) Một tập  $A \subset \mathbb{R}^n$  là có thể tích 0 khi và chỉ khi, với mỗi số  $\varepsilon > 0$  cho trước, tồn tại một số hữu hạn các hộp (đóng hoặc mở) có hợp chung tập  $A$  và có tổng thể tích bé hơn  $\varepsilon$ .
- (ii) Tập con của một tập có thể tích 0 thì cũng là một tập có thể tích 0.
- (iii) Hợp của hữu hạn các tập có thể tích 0 thì cũng là tập có thể tích 0.
- (iv) Nếu tập  $A \subset \mathbb{R}^n$  là có thể tích 0 và tập  $D \subset \mathbb{R}^n$  là có thể tích thì hợp và hiệu của chúng cũng có thể tích và  $V(D \cup A) = V(D \setminus A) = V(D)$ .
- (v) Nếu tập  $A \subset \mathbb{R}^n$  là có thể tích 0 thì mọi hàm  $f$  bị chặn trên  $A$  sẽ khả tích trên  $A$  và có tích phân trên  $A$  bằng 0.
- (vi) Đồ thị của một hàm số liên tục từ một tập compact  $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$  vào  $\mathbb{R}$  là một tập có thể tích  $n$ -chiều bằng 0.

**Chứng minh.** (i) Vì tập có thể tích thì giới nội nên ta có thể giả sử  $A$  nằm trong một hộp  $B$  nào đó. Gọi  $f$  là hàm nhận giá trị 1 trên  $A$  và nhận giá trị 0 trên tập  $B \setminus A$ . Theo định nghĩa ta có  $V(A) = \int_A f = \int_B f$ . Nếu tập có thể tích 0 thì tích phân về phải bằng 0, và theo định nghĩa, với mỗi số  $\varepsilon > 0$ , tồn tại phân hoạch của hộp  $B$  (với đường kính đủ bé) sao cho mọi tổng Riemann tương ứng có trị tuyệt đối nhỏ hơn  $\varepsilon$ . Dễ thấy rằng với phép chọn  $C$  thích hợp ( $c_k$  là điểm của  $A$  nếu hộp con  $B_k$  có giao với  $A$ ), tổng Riemann này chính là tổng thể tích của các hộp con (trong phân hoạch) chứa các điểm của tập  $A$ . Nghĩa là,  $A$  nằm trong hợp của các hộp con có tổng thể tích nhỏ hơn  $\varepsilon$ . Ngược lại, giả sử, với mỗi  $\varepsilon > 0$  cho trước, tập  $A$  nằm trong hợp của các hộp con  $B_1, B_2, \dots, B_N$  với  $\sum_{i=1}^N V(B_i) < \varepsilon$ . Ta định nghĩa các hàm  $f_i$  bằng cách cho nó nhận giá trị 1 trên tập  $B_i \cap B$  và nhận giá trị 0 trên tập  $B \setminus B_i$ , thì ta có  $g = \sum_{i=1}^N f_i$  là hàm bậc thang trên  $B$  và  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in B$ . Rõ ràng

$$\int_B (g - 0) = \sum_{i=1}^N \int_B f_i = \sum_{i=1}^N V(B_i \cap B) \leq \sum_{i=1}^N V(B_i) \leq \varepsilon,$$

nghĩa là  $f$  bị kẹp giữa 2 hàm bậc thang (là 0 và  $g$ ) với hiệu tích phân không vượt quá  $\varepsilon$ . Từ định nghĩa suy ra hàm  $f$  là khả tích trên hộp  $B$ . Ta có

$$0 = \int_B 0 \leq \int_B f \leq \int_B g \leq \varepsilon, \text{ với mọi } \varepsilon > 0,$$

cho nên  $\int_B f = 0$  và nghĩa là  $V(A) = 0$ .

Lưu ý rằng một hộp mở luôn nằm trong một hộp đóng có cùng thể tích, và một hộp đóng có thể được chứa trong một hộp mở có thể tích gấp đôi (hộp cùng tâm và có cạnh dãn ra theo hệ số  $\sqrt[3]{2}$ ). Cho nên về thực chất ta đã chứng minh (i) cho cả 2 trường hợp các hộp phủ  $A$  là đóng hoặc mở.

Các Phân (ii) - (iii) suy ra ngay từ phân (i).

Để chứng minh (iv) hãy lưu ý rằng, do (ii), ta có  $V(A \setminus D) = V(A \cap D) = 0$ .

Định nghĩa các hàm

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \in D \\ 0 & \text{khi } x \notin D \end{cases}, f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \in A \setminus D \\ 0 & \text{khi } x \notin A \setminus D \end{cases}, f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \in A \cap D \\ 0 & \text{khi } x \notin A \cap D \end{cases}.$$

Khi đó, hàm  $f_1$  có tích phân trên toàn không gian bằng  $\int_D 1 = V(D)$ , hàm  $f_2$  có tích phân trên toàn không gian bằng  $\int_{A \setminus D} 1 = V(A \setminus D) = 0$ , hàm  $f_3$  có tích phân trên toàn không gian bằng  $\int_{A \cap D} 1 = V(A \cap D) = 0$ .

Vì hàm  $f_1 + f_2$  nhận giá trị 1 trên tập  $A \cup D$  và nhận giá trị 0 ở ngoài tập này nên ta có  $V(A \cup D)$  bằng tích phân của  $(f_1 + f_2)$  trên toàn không gian, và do đó bằng tổng các tích phân của  $f_1, f_2$  (trên toàn không gian), nghĩa là bằng  $V(D) + V(A \setminus D) = V(D)$ .

Đồng thời  $(f_1 - f_2)$  là hàm nhận giá trị 1 trên tập  $D \setminus A$  và nhận giá trị 0 ở ngoài tập này cho nên bằng lập luận tương tự như trên ta suy ra  $V(D \setminus A) = V(D)$ . Như vậy (iv) đã được chứng minh đầy đủ.

Để chứng minh (v) ta giả sử rằng  $A$  nằm trong một hộp  $B$  và  $|f(x)| < M$ ,  $\forall x \in A$ . Gọi  $\bar{f}$  là thác triển của  $f$  trên toàn không gian (bằng cách cho nó nhận giá trị 0 tại mọi điểm nằm ngoài tập  $A$ ). Trong chứng minh phân (i) ta đã chỉ ra rằng, với mỗi số  $\varepsilon > 0$ , tồn tại hàm  $g$  xác định trên hộp  $B$  sao cho  $g(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in B$ ,  $g(x) \geq 1$ ,  $\forall x \in A$ , và  $\int_B g < \varepsilon$ . Suy ra

$$-M \cdot g(x) \leq \bar{f}(x) \leq M \cdot g(x), \quad \forall x \in B, \quad \text{và} \quad \int_B [\bar{f}(x) - (-Mg(x))] = 2M \int_B g \leq 2M\varepsilon.$$

Như vậy, hàm  $\bar{f}$  luôn được kẹp bởi 2 hàm bậc thang có độ lệch tích phân nhỏ bao nhiêu tùy ý, cho nên nó là khả tích. Cũng từ đây suy ra rằng trị tuyệt đối của tích phân hàm  $\bar{f}$  cũng là một số nhỏ bao nhiêu tùy ý, cho nên phải bằng 0. Điều này có nghĩa là hàm  $f$  khả tích trên  $A$  và có tích phân bằng 0. Phân (v) đã được chứng minh xong.

Để chứng minh (vi) ta giả sử rằng tập  $S$  được chứa trong một hộp  $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . Với mỗi  $\varepsilon > 0$  cho trước, do tính liên tục đều của hàm liên tục trên tập compact, ta tìm được số  $\delta > 0$  sao cho  $|f(p) - f(q)| < \varepsilon$ , với mọi  $p, q \in S, d(p, q) < \delta$ . Ta chọn phân hoạch của  $B$  đủ mịn sao cho bề rộng của nó nhỏ hơn  $\delta/\sqrt{n-1}$ , khi ấy các hộp con của phân hoạch  $B_1, \dots, B_K$  đều có các cạnh nhỏ hơn  $\delta/\sqrt{n-1}$  và suy ra 2 điểm trong cùng một hộp sẽ cách nhau một khoảng nhỏ hơn  $\delta$ . Như vậy

$$p, q \in B_i \cap S \Rightarrow d(p, q) < \delta \Rightarrow |f(p) - f(q)| < \varepsilon.$$

Điều này có nghĩa là phần đồ thị của hàm  $f$  trên tập  $B_i \cap S$  sẽ nằm hoàn toàn trong một hộp  $n$ -chiều có đáy là  $B_i$  và chiều cao là  $\varepsilon$ . Thể tích của hộp này là  $\varepsilon V(B_i)$ . Vì  $S \subset \bigcup_{i=1}^K (B_i \cap S)$  cho nên đồ thị của hàm  $f$  không thể nằm ngoài hộp của các hộp với tổng thể tích là  $\sum_{i=1}^K \varepsilon V(B_i) = \varepsilon \sum_{i=1}^K V(B_i) = \varepsilon V(B)$ . Vì số  $\varepsilon$  có thể nhỏ bao nhiêu tùy ý cho nên từ kết quả phần (i) ta suy ra điều cần chứng minh.

**MỆNH ĐỀ.** Nếu  $A$  và  $D$  là các tập có thể tích phân giao nhau là 0, và  $f$  là một hàm khả tích trên  $A$  và trên  $D$ , thì

$$\int_{A \cup D} f = \int_A f + \int_D f.$$

**Chứng minh.** Định nghĩa các hàm số xác định trên toàn không gian  $\mathbb{R}^n$  như sau

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \in A \\ 0 & \text{khi } x \notin A \end{cases},$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \in D \\ 0 & \text{khi } x \notin D \end{cases},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \in A \cap D \\ 0 & \text{khi } x \notin A \cap D \end{cases}.$$

Ta có hàm  $g(x) = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)$  xác định trên toàn không gian, nhận giá trị là  $f(x)$  trên tập  $A \cup D$  và nhận giá trị 0 ở ngoài tập đó. Từ công thức tính tích phân của tổng và chú ý rằng tích phân  $\int_{A \cap D} f = 0$  (do phần (v) của mệnh đề trên), ta suy ra

$$\int_{A \cup D} f = \int_E g = \int_E (f_1 + f_2 - f_3) = \int_E f_1 + \int_E f_2 - \int_E f_3 =$$

$$= \int_A f + \int_D f - \int_{A \cap D} f = \int_A f + \int_D f,$$

trong đó  $\int_E$  là ký hiệu tích phân trên toàn không gian. Mệnh đề đã được chứng minh xong.

**HỆ QUẢ.** Nếu  $A$  và  $B$  là những tập có thể tích và phân giao nhau có thể tích 0 thì  $V(A \cup B) = V(A) + V(B)$ .

**Chứng minh.** Suy ra từ mệnh đề trên trong trường hợp hàm  $f = 1$ .

### 4.2.3. Tính khả tích của hàm liên tục

**ĐỊNH LÝ.** Cho  $A \subset \mathbb{R}^n$  là tập có thể tích và  $f$  là hàm xác định giới hạn trên  $A$ . Nếu  $f$  liên tục tại hầu hết mọi điểm trên  $A$  (ngoại trừ một tập có thể tích 0), thì  $f$  là hàm khả tích trên  $A$ .

**Chứng minh.** Trước hết ta lưu ý rằng nếu  $S$  là một tập nào đó có thể tích 0 thì tính khả tích của một hàm giới hạn  $f$  trên tập  $A \setminus S$  kéo theo tính khả tích của nó trên tập  $A$  và ngược lại (bởi vì ta biết rằng tích phân của  $f$  trên tập có thể tích 0 luôn tồn tại và bằng 0, đồng thời  $\int_A f = \int_{A \setminus S} f + \int_S f = \int_{A \setminus S} f$ ). Như vậy, bằng cách thay  $A$  bởi  $A \setminus S$  (nếu cần) ta luôn có thể giả thiết rằng hàm  $f$  liên tục trên toàn bộ  $A$ .

Nếu  $A$  là một hộp và  $f$  là liên tục trên toàn bộ  $A$  thì cách chứng minh tương tự như trường hợp hàm 1 biến.

Nếu  $A$  không phải là hộp, lấy một hộp  $B \supset A$ . Thác triển hàm  $f$  từ tập  $A$  ra toàn bộ hộp  $B$  (thành hàm  $\bar{f}$ ) bằng cách cho nó nhận giá trị 0 trên tập  $B \setminus A$ . Rõ ràng  $f$  khả tích trên  $A$  khi và chỉ khi  $\bar{f}$  khả tích trên  $B$ . Chúng ta sẽ dùng mệnh đề ở Mục 4.2.1 để chứng minh tính khả tích của  $\bar{f}$ . Cụ thể là, với  $\varepsilon > 0$  bất kỳ, ta sẽ xây dựng 2 hàm bậc thang  $f_1, f_2$  kẹp hàm  $\bar{f}$  sao cho  $\int_B (f_2 - f_1) \leq \varepsilon$ .

Gọi  $M$  là hằng số sao cho  $|f(x)| \leq M, \forall x \in B$ , và  $g$  là hàm số nhận giá trị 1 trên tập  $A$  và nhận giá trị 0 trên tập  $B \setminus A$ . Ta có  $\int_A g = V(A)$ , cho nên, với mỗi số  $\varepsilon > 0$  cho trước, tồn tại phân hoạch của hộp  $B$  sao cho 2 tổng Riemann bất kỳ tương ứng với nó sai khác nhau không quá  $\varepsilon$ . Gọi các hộp con của phân hoạch này là  $B_1, B_2, \dots, B_K$ . Vì chúng không giao nhau ở phần trong cho nên tập các điểm của  $B$  mà có thể nằm trong nhiều hơn một hộp con là một tập có thể tích 0. Tập hợp các hộp con  $B_i$  có thể được phân thành 3 loại: các hộp nằm hoàn toàn trong  $A$ , các hộp có điểm chung với cả  $A$  lẫn  $B \setminus A$ , và các hộp nằm hoàn toàn trong  $B \setminus A$ . Ta

có thể đánh số thứ tự các hộp sao cho  $B_i \subset A$  với  $1 \leq i \leq R$ ,  $B_j \cap A \neq \emptyset$  và  $B_j \cap (B \setminus A) \neq \emptyset$  với  $R < j \leq L$ ,  $B_i \subset (B \setminus A)$  với  $L < i \leq K$ . Khi ấy  $\sum_{i=1}^R V(B_i)$  và  $\sum_{j=1}^L V(B_j)$  là những tổng Riemann khác nhau của hàm  $g$  trên phân hoạch đang xét, cho nên chúng sai khác nhau không quá  $\varepsilon/(4M)$ . Nghĩa là  $\sum_{j=R+1}^L V(B_j) < \varepsilon/(4M)$ . Vì hàm  $f$  liên tục trên mỗi hộp con  $B_1, \dots, B_R$  cho nên nó khả tích trên các hộp này (như đã nói ở phần đầu của chứng minh). Nghĩa là tìm được các hàm bậc thang  $f_1^j, f_2^j$  sao cho  $f_1^j(x) \leq f(x) \leq f_2^j(x), \forall x \in B_j$  và  $\int_{B_j} (f_2^j - f_1^j) < \varepsilon/(2K)$ , với mọi  $j = 1, \dots, R$ .

Ta xây dựng các hàm bậc thang  $f_1, f_2$  như sau:

$$f_1(x) = f_2(x) = 0, \text{ nếu } x \in B_i, i > L;$$

$$f_1(x) = f_1^i(x) \text{ và } f_2(x) = f_2^i(x), \text{ nếu } x \in \text{int } B_i, i \leq R;$$

$$f_1(x) = -M \text{ và } f_2(x) = M, \text{ với các } x \text{ còn lại.}$$

Rõ ràng  $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$  với mọi  $x \in B$ . Hơn nữa, từ mệnh đề trước ta suy ra

$$\begin{aligned} \int_B (f_2 - f_1) &= \sum_{j=1}^R \int_{B_j} (f_2 - f_1) = \\ &= \sum_{j=1}^R \int_{B_j} (f_2 - f_1) + \sum_{j=R+1}^L \int_{B_j} (f_2 - f_1) + \sum_{j=L+1}^K \int_{B_j} (f_2 - f_1) = \\ &= \sum_{j=1}^R \int_{B_j} (f_2 - f_1) + \sum_{j=R+1}^L \int_{B_j} 2M + \sum_{j=L+1}^K \int_{B_j} 0 \leq \\ &\leq \frac{R\varepsilon}{2K} + 2M \cdot \sum_{j=R+1}^L V(B_j) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Theo mệnh đề đã nói,  $\bar{f}$  là khả tích trên  $B$ , và điều này có nghĩa là  $f$  là hàm khả tích trên  $A$ . Định lý đã được chứng minh đầy đủ.

**Nhận xét.** Cho đến nay ta mới chỉ biết các tập *có thể tích* là các hộp, hay các tập có thể tích 0 đã biết ở phần trên. Nay giờ ta có thể chỉ ra những ví dụ đa dạng hơn về các tập có thể tích (trong các không gian nhiều chiều).

**Thí dụ.** Cho các hàm số  $g_1, g_2$  xác định và liên tục trên một hộp  $B$  trong không gian  $(n-1)$  chiều và  $g_1(x) \leq g_2(x)$ , với mọi  $x \in B$ . Khi đó tập hợp (hình trụ)

$$\Omega := \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B, g_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq g_2(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

là tập có thể tích. Thật vậy, do  $g_1, g_2$  là các hàm liên tục trên hộp  $B$  (compact) cho nên chúng bị chặn bởi một hằng số  $M$  nào đó. Suy ra tập  $\Omega$  nằm hoàn toàn trong hộp

$$H := B \times [-M, M] = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B, x_n \in [-M, M]\}.$$

Nếu  $f$  là hàm nhận giá trị 1 trên tập  $\Omega$  và nhận giá trị 0 trên tập  $H \setminus \Omega$  thì nó chỉ không liên tục trên đồ thị của 2 hàm  $g_1, g_2$  mà thôi. Ta biết rằng đồ thị của hàm liên tục (trên một hộp) là có thể tích 0, cho nên từ định lý trên ta suy ra hàm  $f$  khả tích trên  $H$ . Nghĩa là tích phân của  $f$  trên  $\Omega$  là tồn tại, hay tức là tập  $\Omega$  có thể tích.

#### 4.2.4. Ý nghĩa của tích phân bội

##### 1. Thể tích hình trụ

Tương tự như phép tính diện tích hình thang cong (trong mặt phẳng), ta dễ dàng thấy rằng *thể tích* của khối trụ  $V$  trong không gian, có đáy dưới là một hộp  $S$  trong mặt phẳng  $xOy$  và đáy trên là mặt cong xác định bởi một hàm số liên tục  $z = f(x, y)$ , được tính bởi công thức

$$vol(V) = \iint_S f(x, y) dx dy.$$

##### 2. Khối lượng miền vật chất

Giả sử  $S$  là một miền vật chất trong mặt phẳng  $Oxy$ . Tại mỗi điểm  $(x, y)$  cho trước khối lượng riêng là  $\rho(x, y)$ . Để tính khối lượng của  $S$  ta phân  $S$  thành các miền con  $S_1, \dots, S_n$  với những diện tích tương ứng  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ . Lấy  $(x_i, y_i) \in S_i$  và, khi các miền con là đủ nhỏ, ta có thể giả thiết khối lượng riêng (mật độ) là không đổi trên từng miền con  $S_i$ , nghĩa là bằng  $\rho(x_i, y_i)$ . Khi ấy khối lượng của  $S$  được xác định bởi đại lượng

$$\sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i) \Delta_i.$$

Khi cho bề rộng phân hoạch dần tới 0 mà đại lượng trên có giới hạn thì nó phải bằng

$$m(S) = \iint_S \rho(x, y) dx dy$$

và được gọi là *khối lượng* của miền  $S$ .

### 3. Moment và trọng tâm

Nhớ lại rằng nếu  $P$  là điểm vật chất có khối lượng  $m$  thì:

- *Moment tĩnh* của  $P$  đối với điểm  $A$  (hay đường thẳng  $l$ ) là đại lượng  $K_l = m d_l$ , trong đó  $d_l$  là khoảng cách từ  $P$  tới  $A$  (tới  $l$ ).

- *Moment quán tính* là  $J_l = m d_l^2$ .

Đối với miền vật chất  $S$  như trên, nếu xem khối lượng của  $S_i$  tập trung tại  $(x_i, y_i)$  thì moment tĩnh của hệ điểm  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  là

$$\sum \rho(x_i, y_i) x_i \Delta_i \text{ (đối với trục } Ox\text{)},$$

$$\sum \rho(x_i, y_i) y_i \Delta_i \text{ (đối với trục } Oy\text{)}.$$

Khi cho bề rộng của phân hoạch dần tới 0 mà các đại lượng trên có giới hạn thì ta gọi chúng là *moment* của  $S$  đối với các trục, tức là

$$K_x = \iint_S \rho(x, y) y dx dy, \quad K_y = \iint_S \rho(x, y) x dx dy.$$

Tương tự, *moment quán tính* của  $S$  đối với các trục là

$$J_x = \iint_S \rho(x, y) y^2 dx dy, \quad J_y = \iint_S \rho(x, y) x^2 dx dy.$$

*Moment quán tính* của  $S$  đối với góc tọa độ là

$$J_0 = J_x + J_y.$$

*Trọng tâm* của  $S$  là

$$x_0 = \frac{K_y}{m(S)}, \quad y_0 = \frac{K_x}{m(S)}.$$

Nếu như  $V$  là một vùng vật chất trong không gian với khối lượng riêng  $\rho(x, y, z)$  thì cũng tương tự như trên chúng ta có:

*Khối lượng* của  $V$  là

$$m(V) = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

*Moment tĩnh* đối với các trục tọa độ là

$$K_x = \iiint_V \rho x dx dy dz, \quad K_y = \iiint_V \rho y dx dy dz, \quad K_z = \iiint_V \rho z dx dy dz.$$

*Moment quán tính* của  $V$  đối với các mặt tọa độ và gốc tọa độ là

$$J_{y,z} = \iiint_V \rho x^2 dx dy dz, \quad J_{y,x} = \iiint_V \rho z^2 dx dy dz, \quad J_{x,z} = \iiint_V \rho y^2 dx dy dz,$$

$$J_0 = J_{y,z} + J_{y,x} + J_{x,z}.$$

*Trọng tâm* của  $V$  có các tọa độ là

$$x_0 = \frac{K_x}{m(V)}, \quad y_0 = \frac{K_y}{m(V)}, \quad z_0 = \frac{K_z}{m(V)}.$$

### 4.3. Tích phân lặp

Việc lấy tích phân bội trực tiếp đưa vào định nghĩa là một công việc rất phức tạp, cho nên người ta đã tìm cách đưa nó về phép tính tích phân hàm một biến (nhiều lần). Đó chính là mục đích của phần này.

#### 4.3.1. Định lý Fubini

Cho  $f$  là một hàm 2 biến xác định trên hình chữ nhật  $B = [a,b] \times [c,d]$  nằm trong  $\mathbb{R}^2$ . Khi ấy, với mỗi  $x \in [a,b]$ , người ta định nghĩa được hàm số  $f_x : [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$  theo công thức  $f_x(y) = f(x,y)$ . Nếu nó là một hàm khả tích thì

tích phân của nó là một *hàm số* theo biến  $x$ , được ký hiệu là  $\int_c^d f(x,y) dy$  hay  $\int_{[c,d]} f(x,y) dy$ , và đôi khi còn được ký hiệu gọn hơn là  $\int_{[c,d]} f$ , vì ở đây không thể có sự nhầm lẫn với tích phân của chính hàm  $f$  (2 biến) trên tập  $[c,d]$ . Nếu hàm số này là hàm khả tích trên  $[a,b]$  thì tích phân của nó sẽ được ký hiệu là

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx \quad \text{hay} \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy \quad \text{hoặc} \quad \int_{[a,b]} \left( \int_{[c,d]} f(x,y) dy \right) dx,$$

và đơn giản hơn là  $\int_{[a,b]} \left( \int_{[c,d]} f \right)$ . Nó được gọi là *tích phân lặp 2*.

Một cách tương tự, người ta định nghĩa tích phân lặp 3 cho hàm 3 biến  $f$  xác định trên hộp  $[a,b] \times [c,d] \times [p,q]$  trong  $\mathbb{R}^3$ , ký hiệu là  $\int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x,y,z) dz dy dx$  và gọi là *tích phân lặp 3*.

### Thí dụ

$$\begin{aligned} 1) \int_0^\pi \int_0^\pi \sin(x+y) dy dx &= \int_0^\pi \left( \int_0^\pi \sin(x+y) dy \right) dx = \\ &= \int_0^\pi (-\cos(x+\pi) + \cos(x)) dx = 2 \int_0^\pi \cos(x) dx = 0. \\ 2) \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (xyz) dz dy dx &= \int_0^1 \int_0^2 \left( \int_0^3 (xyz) dz \right) dy dx = \int_0^1 \int_0^2 \left( \frac{9xy}{2} \right) dy dx = \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^2 \left( \frac{9xy}{2} \right) dy \right) dx = 9 \int_0^1 x dx = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Trong trường hợp tổng quát, cho các tập hợp  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}^m$  và hàm số  $f$  xác định trên tập tích

$$A \times D = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) : (x_1, \dots, x_n) \in A, (y_1, \dots, y_m) \in D\}.$$

Với mỗi  $x \in A$ , người ta định nghĩa được hàm số  $f_x : D \rightarrow \mathbb{R}$  theo công thức  $f_x(y) = f(x, y)$ . Nếu nó là một hàm khả tích trên tập  $D$  thì tích phân của nó ( $\int_D f_x$ ) là một *hàm số* theo biến  $x$ , được ký hiệu là  $\int_D f(x, y) dy$ , và đôi khi còn được ký hiệu gọn hơn là  $\int_D f$ , vì ở đây không thể có sự nhầm lẫn với tích phân của chính hàm  $f$  (có  $n+m$  biến) trên tập  $D$  (chỉ có  $m$  chiều). Nếu hàm số này lại là hàm khả tích trên tập  $A$  thì tích phân của nó sẽ được ký hiệu là  $\int_A \left( \int_D f(x, y) dy \right) dx$ , hay đơn giản là  $\int_A \left( \int_D f \right)$ , và gọi là *tích phân lặp*. Các kết quả sau được trình bày dưới dạng tổng quát, nhưng để dễ hình dung, bạn đọc có thể xem như  $A$  và  $D$  là những đoạn trong  $\mathbb{R}$ .

**ĐỊNH LÝ.** (Fubini) *Giả sử rằng  $f$  là hàm khả tích trên  $A \times D$  và, với mỗi  $x \in A$ , hàm số  $f_x : D \rightarrow \mathbb{R}$  là khả tích trên  $D$ . Khi ấy hàm số  $\int_D f(x, y) dy$  là khả tích trên tập  $A$  và*

$$\int_{A \times D} f = \int_A \left( \int_D f(x, y) dy \right) dx,$$

hay viết gọn lại là

$$\int_{A \times D} f = \int_A \left( \int_D f \right).$$

**Chứng minh.** Nếu ta thắc triền hàm  $f$  ra ngoài tập  $A \times D$  thì định lý trên tương đương với mệnh đề cho trường hợp riêng khi  $A = \mathbb{R}^n$  và  $D = \mathbb{R}^m$ . Trong trường hợp riêng này, tính khả tích của  $f$  trên  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  kéo theo tính suy biến (bằng 0) của nó ngoài một hộp đóng nào đó có dạng  $B = I \times J \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , với  $I$  và  $J$  là các hộp đóng trong  $\mathbb{R}^n$  và  $\mathbb{R}^m$ . Như vậy định lý tương đương với mệnh đề trong trường hợp  $f$  được thay bằng hạn chế của nó trên hộp  $I \times J$ . Cho nên, không mất tính tổng quát, ta luôn có thể giả thiết rằng  $A$  và  $D$  là những *hộp đóng*.

Trước hết ta chứng minh cho trường hợp  $f$  là *hàm bậc thang*. Khi ấy, với mỗi  $x \in A$ , hàm  $f_x$  cũng là hàm bậc thang (xác định trên hộp  $D$ ), cho nên nó là khả tích. Ta chú ý rằng, nếu định lý đúng cho các hàm bậc thang  $f_1, \dots, f_r$  thì nó cũng đúng cho hàm tổng của chúng  $\sum_{i=1}^r f_i$ , bởi vì

$$\int_{A \times D} \sum_{i=1}^r f_i = \sum_{i=1}^r \int_{A \times D} f_i = \sum_{i=1}^r \int_A \left( \int_D f_i \right) = \int_A \left( \sum_{i=1}^r \int_D f_i \right) = \int_A \left( \int_D \sum_{i=1}^r f_i \right).$$

Mặt khác, một hàm bậc thang bất kỳ trên  $A \times D$  luôn có thể phân tích thành tổng của các hàm bậc thang đơn giản nhận giá trị là hằng số  $c$  trên tập có dạng

$$\{(x_1, \dots, x_{n+m}) \in A \times D : x_1 \in S_1, \dots, x_{n+m} \in S_{n+m}\}$$

(với  $S_i$  hoặc là *khoảng*, hoặc là *điểm*) và nhận giá trị 0 ở ngoài tập đó. Cho nên, để thấy rằng định lý đúng cho mọi hàm bậc thang bất kỳ ta chỉ cần kiểm tra nó cho lớp hàm bậc thang đơn giản này. Điều sau này là hiển nhiên vì cả 2 về đều quy về tích của các độ dài các khoảng  $S_1, \dots, S_{n+m}$  và hằng số  $c$ . Như vậy định lý là đúng cho lớp *hàm bậc thang*.

Bây giờ giả sử  $f$  là hàm bất kỳ thỏa mãn các điều kiện của định lý. Do tính khả tích, với mỗi  $\varepsilon > 0$ , ta tìm được 2 hàm bậc thang  $g, h$  trên  $A \times D$  sao cho  $g(z) \leq f(z) \leq h(z)$ , với mọi  $z \in A \times D$ , và  $\int_{A \times D} (h - g) < \varepsilon$ . Như vậy

$$g_x(y) \leq f_x(y) \leq h_x(y), \quad \text{với mỗi } y \in D,$$

và do đó  $\int_D g_x \leq \int_D f_x \leq \int_D h_x$ . Đê ý rằng

$$\int_D g = \int_D g(x,y)dy, \int_D h = \int_D h(x,y)dy$$

là các hàm bậc thang và

$$\int_A \left( \int_D h - \int_D g \right) = \int_A \left( \int_D (h-g) \right) = \int_{A \times D} (h-g) < \varepsilon,$$

cho nên từ tiêu chuẩn về tính khả tích ta suy ra hàm  $\int_D f = \int_D f(x,y)dy$  là khả tích. Đồng thời ta cũng có

$$\int_A \left( \int_D g \right) \leq \int_A \left( \int_D f \right) \leq \int_A \left( \int_D h \right)$$

hay là

$$\int_{A \times D} g \leq \int_A \left( \int_D f \right) \leq \int_{A \times D} h.$$

Ngoài ra ta luôn có

$$\int_{A \times D} g \leq \int_{A \times D} f \leq \int_{A \times D} h,$$

cho nên kết hợp lại ta thu được

$$\left| \int_{A \times D} f - \int_A \left( \int_D f \right) \right| \leq \int_{A \times D} (h-g) < \varepsilon.$$

Do  $\varepsilon > 0$  có thể nhỏ bao nhiêu tùy ý cho nên từ đây ta suy ra đẳng thức cần chứng minh.

**Nhận xét.** Để dàng nhận thấy rằng cách chứng minh trên cũng cho thấy rằng trong trường hợp tích phân  $\int_A f(x,y)dx$  tồn tại với mỗi  $y \in D$ , thì ta cũng có  $\int_{A \times D} f = \int_D \left( \int_A f \right)$ . Và nói riêng, nếu  $f$  là hàm liên tục thì ta có công thức đổi thứ tự lấy tích phân Fubini sau đây:

$$\int_A \left( \int_D f \right) = \int_D \left( \int_A f \right).$$

Thực ra với kỹ thuật chứng minh phức tạp hơn người ta có thể chỉ ra rằng công thức Fubini vẫn đúng nếu  $f$  là hàm khả tích trên tập tích  $A \times D$ .

Tuy nhiên cần lưu ý rằng tính khả tích của hàm  $f$  theo từng biến riêng biệt chưa đủ để bảo đảm công thức Fubini (chúng ta còn trở lại công thức này trong chương sau).

### 4.3.2. Các hệ quả quan trọng

**MỆNH ĐỀ.** Cho  $f$  là hàm khả tích trên tập  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $B$  là một hộp đóng trong  $\mathbb{R}^m$ , và  $\pi_A : A \times B \rightarrow A$  là phép chiếu xác định theo công thức  $\pi_A(x, y) = x$ , với mọi  $x \in A, y \in B$ . Khi đó

$$\int_{A \times B} (f \circ \pi_A) = \left( \int_A f \right) V(B),$$

tức là

$$\int_{A \times B} f(x) dx dy = \left( \int_A f(x) dx \right) \left( \int_B dy \right).$$

**Chứng minh.** Mệnh đề sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra rằng  $f \circ \pi_A$  là hàm khả tích trên  $A \times B$ , bởi vì

$$(f \circ \pi_A)_x(y) = (f \circ \pi_A)(x, y) = f(x) \text{ và } \int_B (f \circ \pi_A)_x = f(x) \cdot V(B),$$

cho nên khi ấy

$$\int_{A \times B} (f \circ \pi_A) = \int_A \left( \int_B (f \circ \pi_A)_x \right) = \int_A [f \cdot V(B)] = \left( \int_A f \right) V(B).$$

Để chứng minh tính khả tích của hàm  $f \circ \pi_A$  ta đưa nó về trường hợp  $A = \mathbb{R}^n$  bằng cách thắc triển hàm  $f$  ra ngoài tập  $A$  với giá trị 0. Trong trường hợp  $A = \mathbb{R}^n$  thì, do tính khả tích của  $f$ , ta lấy được một hộp đóng  $I$  sao cho ngoài hộp này hàm  $f$  chỉ nhận giá trị 0, và do đó ta có thể quy về trường hợp  $A$  là một hộp đóng trong  $\mathbb{R}^n$ . Trong trường hợp này, tính khả tích của  $f$  trên  $A$  có nghĩa là, với mỗi số  $\varepsilon > 0$ , ta tìm được các hàm bậc thang  $f_1, f_2$  trên  $A$  sao cho  $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$  và  $\int_A (f_2 - f_1) < \varepsilon$ . Khi ấy  $f_1 \circ \pi_A$  và  $f_2 \circ \pi_A$  là những hàm bậc thang thỏa mãn  $(f_1 \circ \pi_A)(z) \leq (f \circ \pi_A)(z) \leq (f_2 \circ \pi_A)(z)$ , với mọi điểm  $z$  trên  $A \times B$ , đồng thời

$$\int_{A \times B} (f_2 \circ \pi_A - f_1 \circ \pi_A) = \int_{A \times B} (f_2 - f_1) \circ \pi_A = \left( \int_A (f_2 - f_1) \right) V(B) < \varepsilon V(B).$$

Vì số  $\varepsilon > 0$  có thể nhỏ bao nhiêu tùy ý cho nên từ đây suy ra điều cần chứng minh.

**HỆ QUẢ.** Nếu  $A$  là tập có thể tích trong  $\mathbb{R}^n$  và  $B$  là một hộp đóng trong  $\mathbb{R}^m$  thì

$$V(A \times B) = V(A) \cdot V(B),$$

và do đó khi  $A$  có thể tích 0 thì  $A \times B$  cũng vậy.

**Chứng minh.** Đây chính là trường hợp riêng của mệnh đề trên khi  $f = 1$ .

**Nhận xét.** Đến đây ta có thể thấy rằng định lý cơ bản trong mục trên vẫn đúng, nếu như ta thay giả thiết về tính khả tích của hàm  $f_x$  trên tập  $D$ , với mọi  $x \in A$ , bằng một giả thiết nhẹ hơn là:  $f_x$  khả tích trên tập  $D$ , với mọi  $x \in A \setminus S$ , trong đó  $S$  là một tập có thể tích 0. Thật vậy, khi ấy, với mỗi  $x \in S$ , ta có thể gán cho  $\int_D f_x$  một giá trị bất kỳ nào đó trong một tập giới nội trong  $\mathbb{R}$ . Vì  $D$  có thể được giả thiết là giới nội cho nên  $V(S \times D) = 0$ , và do đó  $\int_{S \times D} f = 0$ . Nếu ta định nghĩa một hàm số  $g$  trên  $A \times D$  bằng cách cho nó nhận giá trị của hàm  $f$  trên tập  $S \times D$  và nhận giá trị 0 trên miền còn lại thì ta sẽ có  $\int_{A \times D} g = 0$ , và do đó  $\int_{A \times D} (f - g) = \int_{A \times D} f$ . Nhưng hàm số  $(f - g)$  là trùng với  $f$  trên tập  $(A \setminus S) \times D$  và bằng 0 trên tập  $S \times D$ , cho nên tích phân  $\int_{(A \setminus S) \times D} f$  là tồn tại và bằng  $\int_{A \times D} (f - g) = \int_{A \times D} f$ . Như vậy

$$\int_{A \times D} f = \int_{(A \setminus S) \times D} f = \int_{A \setminus S} \left( \int_D f \right) = \int_{A \setminus S} \left( \int_D f \right) + \int_S \left( \int_D f \right) = \int_A \left( \int_D f \right).$$

**Mệnh đề.** Cho  $A$  là tập compact có thể tích trong  $\mathbb{R}^{n-1}$  và  $g, h$  là những hàm số liên tục thỏa mãn  $g(x) \leq h(x)$ , với mọi  $x \in A$ . Khi ấy, nếu  $f$  là hàm số liên tục trên tập hợp

$$S = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in A, x_n \in [g(x_1, \dots, x_{n-1}), h(x_1, \dots, x_{n-1})]\}$$

thì ta có

$$\int_S f = \int_A \left( \int_{g(x_1, \dots, x_{n-1})}^{h(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n \right).$$

**Chứng minh.** Lấy  $D$  là một đoạn (trên trục số thực) chứa cả tập  $g(A) \cup h(A)$ , và do đó  $S \subset A \times D$ . Thác triển hàm số  $f$  trên toàn bộ tập  $A \times D$  bằng cách cho nó nhận giá trị 0 trên tập  $A \times D \setminus S$ , ta sẽ nhận được một hàm bị chặn và liên tục tại mọi điểm của  $A \times D$  mà không có dạng  $(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1}))$  hoặc  $(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))$ . Tập những điểm như vậy là có thể tích 0 (theo phần (vi) của mệnh đề về các tập có thể tích 0). Theo hệ quả của mệnh đề trên thì tập  $A \times D$  là có thể tích, cho nên tích phân  $\int_S f = \int_{A \times D} f$  là tồn tại. Ngoài ra, ta luôn có

$$\int_B f(x_1, \dots, x_{n-1}) := \int_B f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n = \int_{g(x_1, \dots, x_{n-1})}^{h(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n,$$

cho nên áp dụng định lý ta có điều cần chứng minh.

**HỆ QUẢ.** Cho  $A$  là tập compact có thể tích trong  $\mathbb{R}^{n-1}$  và  $g, h$  là những hàm số liên tục thoả mãn  $g(x) \leq h(x)$ , với mọi  $x \in A$ . Khi ấy tập hình trụ nằm giữa 2 đồ thị của  $g$  và  $h$

$$S = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in A, g(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq h(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

có thể tích là

$$V(S) = \int_A (h - g).$$

**Chứng minh.** Suy ra từ mệnh đề trên trong trường hợp  $f=1$ , vì khi ấy ta có

$$V(S) = \int_S 1 = \int_A \int_{g(x_1, \dots, x_{n-1})}^{h(x_1, \dots, x_{n-1})} 1 dx_n = \int_A (h(x_1, \dots, x_{n-1}) - g(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

**Nhận xét.** Trong điều kiện thích hợp thì mệnh đề trên có thể được áp dụng liên tiếp nhiều lần và việc tính tích phân bội có thể được chuyển thành tích các tích phân thông thường qua nhiều bước lặp.

**Thí dụ.** Hãy tính trọng tâm của mảnh trăng khuyết

$$S := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\},$$

biết rằng hàm phân bố khối lượng (khối lượng riêng) là  $\rho(x, y) = x^2 + y$ .

Giải. Trước hết ta tính khối lượng của mảnh trăng (áp dụng mệnh đề):

$$m(S) = \iint_S \rho(x, y) dx dy = \iint_S (x^2 + y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y) dx dy = \frac{8+\pi}{16},$$

và các moment  $K_x$  và  $K_y$  theo công thức:

$$\begin{aligned} K_x &= \iint_S \rho(x, y) y dx dy = \iint_S (x^2 + y) y dx dy = \int_{-1}^1 \int_{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y) y dx dy = \frac{32+35\pi}{320}; \\ K_y &= \iint_S \rho(x, y) x dx dy = \iint_S (x^2 + y) x dx dy = \int_{-1}^1 \int_{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y) x dx dy = 0. \end{aligned}$$

Vậy trọng tâm của mảnh trăng là:  $\left(0, \frac{32+35\pi}{20(8+\pi)}\right)$ .

## 4.4. Phép đổi biến trong tích phân bội

### 4.4.1. Phân hoạch đơn vị và bổ đề cơ bản

**BỔ ĐỀ.** Nếu  $D$  là một tập compact nằm trong một tập mở  $U \subset \mathbb{R}^n$ , thì tồn tại tập compact  $D'$  và tập mở  $V$  sao cho

$$D \subset V \subset D' \subset U.$$

**Chứng minh.** Tại mỗi điểm trong  $D$  tồn tại quả cầu đóng (với tâm là điểm này và bán kính là một số dương nào đó) nằm hoàn toàn trong  $U$ . Tập các quả cầu mở (là phần trong của các quả cầu đóng nói trên) lập thành một phủ mở của tập compact  $D$ , cho nên tồn tại một số hữu hạn các quả cầu lập nên một phủ của  $D$ . Lấy hợp của các quả cầu mở ta được tập  $V$  phải tìm, và lấy hợp của các quả cầu đóng (tương ứng) ta được tập  $D'$ . Bổ đề đã được chứng minh xong.

**MỆNH ĐỀ.** Cho  $D$  là một tập compact trong  $\mathbb{R}^n$  và  $\{U_s\}_{s \in S}$  là một họ các tập mở phủ  $D$  (tức là có hợp chứa  $D$ ). Khi đó tồn tại một họ hữu hạn các hàm liên tục  $\psi_1, \dots, \psi_N$  trên  $\mathbb{R}^n$ , nhận giá trị trên đoạn  $[0,1]$ , sao cho mỗi hàm chỉ có thể khác 0 trên một tập con compact của một trong các tập  $U_s$  và

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) + \dots + \psi_N(x) = 1, \quad \forall x \in D.$$

**Chứng minh.** Lấy một hàm liên tục  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nhận giá trị 0 trên nửa trục số âm và nhận giá trị dương trên nửa trục số dương thì ta có hàm số  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  xác định theo công thức  $g(x) = h(1 - x^2)$  sẽ nhận giá trị dương trên khoảng  $(-1,1)$  và nhận giá trị 0 ở ngoài khoảng này. Như vậy, nếu  $\lambda$  là một số dương thì hàm số  $g(\lambda x)$  sẽ nhận giá trị dương trong khoảng  $\left(-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right)$  và nhận giá 0 ở ngoài khoảng đó. Với mỗi điểm  $p \in D$  ta chọn số  $\lambda_p > 0$  sao cho quả cầu đóng tâm  $p$  bán kính  $1/\lambda_p$  nằm hoàn toàn trong một tập  $U_s$  nào đó và ký hiệu quả cầu mở tương ứng là  $B_p$ . Do  $D$  là tập compact nên ta chọn được một số hữu hạn các quả cầu  $B_{p(1)}, B_{p(2)}, \dots, B_{p(N)}$  phủ kín  $D$ , tức là

$$D \subset U = B_{p(1)} \cup B_{p(2)} \cup \dots \cup B_{p(N)}.$$

Đặt

$$\mu_i(x) = \frac{g(\lambda_{p(i)} d(x, p(i)))}{\sum_{j=1}^N g(\lambda_{p(j)} d(x, p(j)))}, \quad \forall x \in U, \forall i = 1, \dots, N.$$

Ta nhận thấy mỗi  $\mu_i(x)$  là một hàm liên tục trên tập mở  $U$  chứa  $D$  và nhận giá trị trên đoạn  $[0,1]$ . Ngoài ra,

$$\mu_1(x) + \dots + \mu_N(x) = 1, \quad \forall x \in U,$$

và mỗi  $\mu_i(x)$  chỉ nhận giá trị khác 0 trên một quả cầu đóng (compact) nằm hoàn toàn trong một tập  $U_s$  nào đó. Tuy nhiên, các hàm  $\mu_i(x)$  mới chỉ xác định trên  $U$ . Để có được các hàm xác định trên toàn không gian  $\mathbb{R}^n$ , ta sử dụng bổ đề và tìm được tập compact  $D'$  cùng tập mở  $V$  sao cho  $D \subset V \subset D' \subset U$ . Theo kết quả vừa chứng minh trên cho tập compact  $D'$  và họ gồm 2 tập mở  $\{V, U \setminus D\}$  (có hợp chứa  $D'$ ) ta thu được các hàm có tính chất tương tự như các hàm  $\mu_i(x)$  nói trên. Ta phân các hàm này thành hai cụm, phụ thuộc vào việc tập compact mà nó nhận giá trị khác 0 nằm trong  $V$  hay trong  $U \setminus D$ . Cộng các hàm trong cùng một cụm lại với nhau ta thu được 2 hàm số liên tục  $\theta_1(x), \theta_2(x)$  xác định trên một tập mở  $U' \supset D'$ , nhận giá trị trong đoạn  $[0,1]$ , sao cho  $\theta_1(x) + \theta_2(x) = 1, \forall x \in U'$ , và  $\theta_1$  chỉ có thể khác không trên một tập con compact của  $V$ , còn  $\theta_2$  chỉ có thể khác 0 trên một tập con compact của  $U \setminus D$ . Như vậy  $\theta_1$  nhận giá trị 0 trên tập  $U' \setminus V$  và do đó nó nhận giá trị 0 trên tập  $U \setminus D'$  (do  $V \subset D'$ ). Ta có  $\theta_1$  nhận giá trị 1 trên tập  $D$ , vì  $\theta_2$  nhận giá trị 0 trên  $D$ .

Định nghĩa hàm  $\psi_i(x)$  bằng cách cho nó nhận giá trị  $\theta_1(x)\mu_i(x)$  trên tập  $U \cap U'$  và nhận giá trị 0 ở ngoài tập này ta sẽ được hàm số xác định trên toàn không gian. Nó là hàm liên tục trên tập mở  $U \cap U'$  và trên tập  $\mathbb{R}^n \setminus D'$  (vì nó bằng 0 trên tập này), cho nên nó liên tục trên hợp của chúng (bằng toàn bộ  $\mathbb{R}^n$ ). Các tính chất khác của hàm  $\psi_1(x), \dots, \psi_N(x)$  có ngay từ định nghĩa của chúng. Mệnh đề đã được chứng minh xong.

**HỆ QUẢ.** Nếu  $D$  là một tập con compact của một tập mở  $U \subset \mathbb{R}^n$  thì tồn tại một hàm số liên tục xác định trên toàn không gian, nhận giá trị 1 trên tập  $D$  và nhận giá trị 0 ở ngoài một tập con compact nào đó của tập  $U$ .

**Chứng minh.** Có ngay từ cách chứng minh của mệnh đề trên.

**Nhận xét.** Bằng cách chọn hàm  $h$  ban đầu khả vi liên tục đến cấp  $m$  (thí dụ chọn  $h(x) = x^{m+1}$  khi  $x > 0$ ) ta sẽ thu được các hàm  $\psi_1(x), \dots, \psi_N(x)$  là khả vi liên tục đến bậc  $m$ . Và nếu chọn  $h(x) = e^{-1/x^2}$  khi  $x > 0$  thì ta sẽ thu được các hàm  $\psi_1(x), \dots, \psi_N(x)$  khả vi liên tục đến mọi bậc bất kỳ.

**BỔ ĐỀ.** Nếu  $f$  là một hàm bậc thang trên hộp đóng  $B$  thì, với mỗi số  $\varepsilon > 0$ , tồn tại các hàm liên tục  $f_1, f_2$  xác định trên hộp  $B$  thoả mãn các điều kiện sau :

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x), \quad \forall x \in B$$

và

$$\int_B (f_2 - f_1) < \varepsilon.$$

**Chứng minh.** Một hàm bậc thang bất kỳ là tổng của (hữu hạn) các hàm bậc thang có dạng *đơn giản* nhận giá trị hằng số  $c \in \mathbb{R}$  trên một tập có dạng

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in S_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

(trong đó mỗi  $S_i$  hoặc là một khoảng trong  $\mathbb{R}$ , hoặc là một điểm đơn độc), và nhận giá trị 0 ở ngoài tập đó. Cho nên, bằng các lập luận không phức tạp, ta thấy rằng chỉ cần chứng minh bỏ đề trong trường hợp các hàm bậc thang *đơn giản* này, và có thể giả thiết rằng nó nhận giá trị  $c=1$  trên tập đã nêu.

Giả sử rằng hộp  $B$  được xác định bởi các số  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ . Nếu có một tập  $S_i$  nào đó là một *điểm đơn độc* (thí dụ là  $S_1 = \{\alpha_1\} \subset [a_1, b_1]$ ) thì, do hệ quả đã biết, với mỗi số dương  $\delta$  ta tìm được hàm số liên tục  $\varphi(t)$  nhận giá trị 1 tại điểm  $\alpha_1$  và nhận giá trị 0 ở ngoài khoảng  $(\alpha_1 - \delta, \alpha_1 + \delta)$ . Định nghĩa hàm số  $f_2$  từ  $\mathbb{R}^n$  vào  $[0,1]$  theo công thức  $f_2(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1)$  và lấy  $f_1 = 0$ , ta có  $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ , với mọi  $x \in B$ , và dễ dàng thấy rằng

$$\int_B (f_2 - f_1) \leq 2\delta(b_2 - a_2)\dots(b_n - a_n)$$

là đại lượng nhỏ hơn  $\varepsilon$  nếu ta chọn  $\delta$  đủ bé. Nếu tất cả các tập  $S_i$  đều là những *khoảng*, nghĩa là  $S_i = (\alpha_i, \beta_i) \subset [a_i, b_i]$  với mọi  $i$ , ta lấy số dương  $\delta$  nhỏ hơn nửa độ dài của mọi khoảng này và, từ hệ quả đã biết, ta chọn được hàm liên tục  $f_1$  nhận giá trị 1 trên hộp đóng xác định bởi các số  $\alpha_1 + \delta, \dots, \alpha_n + \delta, \beta_1 - \delta, \dots, \beta_n - \delta$  và nhận giá trị 0 ở ngoài hộp mở xác định bởi các số  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ . Lấy  $f_2$  là hàm liên tục nhận giá trị 1 trên hộp đóng xác định bởi các số  $\alpha_1 - \delta, \dots, \alpha_n - \delta, \beta_1 + \delta, \dots, \beta_n + \delta$ . Ta có

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x), \text{ với mọi } x \in B,$$

và

$$\int_B (f_2 - f_1) \leq (\beta_1 - \alpha_1 + 2\delta)\dots(\beta_n - \alpha_n + 2\delta) - (\beta_1 - \alpha_1 - 2\delta)\dots(\beta_1 - \alpha_1 - 2\delta).$$

Để ý rằng vé phải là một đa thức (liên tục) theo  $\delta$  cho nên nó sẽ nhỏ hơn số dương  $\varepsilon$  cho trước với  $\delta$  đủ nhỏ. Bổ đề đã được chứng minh xong.

#### 4.4.2. Phép đổi biến trong tích phân bội

**BỔ ĐỀ.** *Hàm số  $f$  là khả tích trên hộp đóng  $B \subset \mathbb{R}^n$  khi và chỉ khi với mỗi số  $\varepsilon > 0$  tồn tại các hàm liên tục  $f_1$  và  $f_2$  trên hộp  $B$  thoả mãn*

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x), \quad \forall x \in B$$

và

$$\int_B (f_2 - f_1) < \varepsilon.$$

**Chứng minh.** Suy ra từ mệnh đề về tiêu chuẩn khả tích (Mục 4.2.1), định lý về tính khả tích của hàm liên tục (Mục 4.2.3) và bổ đề ở phần trên.

**ĐỊNH LÝ.** Cho  $A$  là một tập mở trong  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  là một song ánh khả vi liên tục với ma trận Jacobi  $J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \end{pmatrix}$  không suy biến (tức là  $\det J_\varphi \neq 0$  khắp nơi trên  $A$ ). Giả sử rằng hàm  $f: \varphi(A) \rightarrow \mathbb{R}$  nhận giá trị 0 ở ngoài một tập con compact nào đó của  $\varphi(A)$  và tích phân  $\int_{\varphi(A)} f$  là tồn tại. Khi ấy

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi) |\det J_\varphi|.$$

**Chứng minh.** Đây là một trong những định lý quan trọng trong phép tính tích phân hàm nhiều biến. Việc chứng minh nó là khá cồng kềnh và phức tạp. Để người đọc có thể dễ dàng hơn trong việc nắm bắt các ý tưởng chính và không bị ngợp bởi quá nhiều kỹ thuật chứng minh chi tiết, trước hết chúng tôi xin chỉ ra đường lối chứng minh. Sau một vài nhận xét sơ bộ, việc chứng minh được tiến hành qua 2 công đoạn:

Công đoạn 1: chỉ ra rằng việc chứng minh định lý có thể quy về trường hợp hàm  $f$  là liên tục (nhờ các bổ đề đã biết ở trên);

Công đoạn 2: chứng minh định lý cho trường hợp hàm  $f$  là liên tục bằng phương pháp quy nạp toán học (trong đó, ta dùng bổ đề về phân hoạch đơn vị để quy về trường hợp  $A$  là một hộp và dùng công thức tích phân lặp để hạ thấp số chiều).

Trong mỗi công đoạn, chúng tôi sẽ nêu những ý tưởng cơ bản và dành lại những chứng minh chi tiết (không khó khăn lắm) cho người đọc tự kiểm tra như những bài tập.

**Nhận xét sơ bộ:** Trước hết ta chú ý rằng định lý hàm ngược cho phép ta khẳng định rằng  $\varphi(A)$  là một tập mở,  $\varphi^{-1}$  là một hàm khả vi liên tục, và  $\varphi$  sinh ra một phép tương ứng 1-1 giữa họ các tập con mở của  $A$  và họ các tập con mở của  $\varphi(A)$ . Giả thiết  $f$  bằng 0 ở ngoài một tập con compact nào đó của  $\varphi(A)$  cho phép ta bỏ qua điều hỏi về tính bị chặn của các tập  $A$ ,  $\varphi(A)$  và của hàm số  $\det J_\varphi$ .

Định lý là hiển nhiên nếu  $\varphi$  chỉ là một phép “đảo biến” (tức là đổi chỗ vị trí các biến), bởi vì khi ấy tích phân không thay đổi (theo định nghĩa nó không phụ thuộc vào thứ tự của biến), còn  $\det J_\varphi$  là định thức của một ma trận vuông mà trên mỗi hàng và mỗi cột chỉ có một số 1, cho nên nó chỉ có thể là +1 hoặc -1, và trong mọi trường hợp thì  $|\det J_\varphi| = 1$ .

**Công đoạn 1:** Ta chỉ ra rằng định lý sẽ được chứng minh, nếu nó đúng trong trường hợp hàm  $f$  là liên tục. Thật vậy, ký hiệu  $D \subset \varphi(A)$  là tập compact mà ngoài  $D$  hàm  $f$  chỉ nhận giá trị 0. Sử dụng hệ quả về phân hoạch đơn vị cho 2 tập  $D$  và  $\varphi(A)$  ta tìm được hàm liên tục  $\psi$  nhận giá trị 1 trên  $D$  và nhận giá trị 0 ở ngoài một tập compact nào đó  $D' \subset \varphi(A)$ . Lấy hộp đóng  $I$  trong  $\mathbb{R}^n$  sao cho  $I \supset (D' \cup \varphi^{-1}(D'))$ . Ta ký hiệu  $\bar{g}$  là hàm thác triển của hàm  $g$  (xác định trên một tập con nào đó của  $\mathbb{R}^n$ ) ra toàn bộ không gian  $\mathbb{R}^n$  bằng cách cho nó nhận giá trị 0 tại những điểm mà  $g$  không xác định. Rõ ràng  $\int_I \bar{f}$  là tồn tại và  $\int_I \bar{f} = \int_{\varphi(A)} f$ . Theo bổ đề ở đầu mục này, với mỗi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại các hàm liên tục  $g_1, g_2$  sao cho  $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$ ,  $\forall x \in I$ , và  $\int_I (g_2 - g_1) < \varepsilon$ . Gọi  $f_1$  và  $f_2$  là các hạn chế trên  $\varphi(A)$  của các hàm  $\overline{\psi g_1}$  và  $\overline{\psi g_2}$  (tương ứng), ta dễ dàng thấy rằng chúng là các hàm liên tục trên  $\varphi(A)$ , nhận giá trị 0 ở ngoài tập  $D'$ ,  $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$  với mọi  $x \in \varphi(A)$ , và  $\int_{\varphi(A)} (f_2 - f_1) < \varepsilon$ . Ta lại có các hàm  $(f_1 \circ \varphi) |\det J_\varphi|$  và  $(f_2 \circ \varphi) |\det J_\varphi|$  là liên tục trên  $A$ , nhận giá trị 0 ở ngoài tập  $\varphi^{-1}(D')$ , và thỏa mãn

$$((f_1 \circ \varphi) |\det J_\varphi|)(x) \leq ((f \circ \varphi) |\det J_\varphi|)(x) \leq ((f_2 \circ \varphi) |\det J_\varphi|)(x), \quad \forall x \in A.$$

Cho nên  $\overline{(f_1 \circ \varphi) |\det J_\varphi|}$  và  $\overline{(f_2 \circ \varphi) |\det J_\varphi|}$  là các hàm liên tục trên toàn không gian  $\mathbb{R}^n$  và

$$\overline{(f_1 \circ \varphi) |\det J_\varphi|}(x) \leq \overline{(f \circ \varphi) |\det J_\varphi|}(x) \leq \overline{(f_2 \circ \varphi) |\det J_\varphi|}(x), \quad \forall x \in I.$$

Từ giả thiết định lý đúng với hàm liên tục ta suy ra rằng nó đúng với các hàm  $f_1, f_2$  và do đó

$$\begin{aligned} \int_I [(\overline{f_2 \circ \varphi}) |\det J_\varphi| - (\overline{f_1 \circ \varphi}) |\det J_\varphi|] &= \int_A [(f_2 \circ \varphi) |\det J_\varphi| - (f_1 \circ \varphi) |\det J_\varphi|] = \\ &= \int_{\varphi(A)} (f_2 - f_1) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Vì số dương  $\varepsilon$  có thể nhỏ bao nhiêu tuỳ ý cho nên ta suy ra hàm  $(f \circ \varphi) |\det J_\varphi|$  là khả tích trên  $I$ , và do đó  $(f \circ \varphi) |\det J_\varphi|$  là khả tích trên  $A$ . Hơn thế, từ các hệ thức

$$\int_{\varphi(A)} f_1 = \int_A (f_1 \circ \varphi) |\det J_\varphi| \leq \int_A (f \circ \varphi) |\det J_\varphi| \leq \int_A (f_2 \circ \varphi) |\det J_\varphi| = \int_{\varphi(A)} f_2$$

và

$$\int_{\varphi(A)} f_1 \leq \int_{\varphi(A)} f \leq \int_{\varphi(A)} f_2 ,$$

ta suy ra

$$\left| \int_A (f \circ \varphi) |\det J_\varphi| - \int_{\varphi(A)} f \right| \leq \int_{\varphi(A)} (f_2 - f_1) < \varepsilon.$$

Vì điều này đúng với mọi số dương  $\varepsilon$  đủ bé cho nên ta có đẳng thức

$$\int_A (f \circ \varphi) |\det J_\varphi| = \int_{\varphi(A)} f.$$

Như vậy *Công đoạn 1* đã được hoàn tất.

**Công đoạn 2:** *Ta chứng minh rằng định lý là đúng với hàm  $f$  là liên tục.* Điều này cũng không đơn giản chút nào và ta phải tiến hành thông qua một số bước sau đây:

- (1) Trước hết ta nhận xét rằng nếu  $\{A_s, s \in S\}$  là một họ các tập mở sao cho  $A = \bigcup_{s \in S} A_s$  và định lý đúng với mỗi  $A_s$  và hạn chế của hàm  $\varphi$  trên  $A_s$  thì định lý đúng cho tập  $A$  và hàm  $\varphi$ . Điều này chứng minh nhờ việc xét họ tập mở  $\{\varphi(A_s), s \in S\}$  và áp dụng mệnh đề về sự tồn tại phân hoạch đơn vị  $\psi_1, \dots, \psi_N$  để mỗi hàm  $f$  có thể phân tích thành tổng của các hàm  $f \cdot \psi_i$ , chỉ có thể khác 0 (bằng 1) trên một tập con compact nào đó của một trong số các tập  $\psi(A_s)$ . (Chứng minh chi tiết xin dành lại cho người đọc). Từ nhận xét này suy ra rằng ta chỉ cần chứng minh định lý trong trường hợp  $\varphi$  là song ánh khả vi liên tục giữa tập mở  $A$  giới nội và tập mở  $\varphi(A)$ , bởi vì  $A$  có thể được xem là hợp của họ tất cả các lân cận  $A_a$  của mỗi điểm  $a \in A$  mà trên đó  $\varphi$  là một song ánh khả vi liên tục (lân cận này tồn tại và khác rỗng do định lý hàm ngược và tính không suy biến của  $J_\varphi$  tại mỗi điểm  $a \in A$ ).

(2) Ta chứng minh định lý bằng phương pháp *quy nạp toán học*.

**(a)** Trước hết ta thấy rằng định lý là đúng cho trường hợp  $n=1$ . Thật vậy, mọi tập mở trên trục số đều là hợp của các *khoảng*, cho nên, do nhận xét (1), ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp  $A$  là một *khoảng*, và trong trường hợp này hàm  $\varphi$  có đạo hàm liên tục khác 0 (chỉ có thể hoặc là dương, hoặc là âm) thì nó phải là hàm *đơn điệu*. Từ công thức đổi biến trong tích phân hàm 1 biến trên một đoạn (khi hàm đổi biến có thể là *đơn điệu tăng* hoặc *đơn điệu giảm*) ta suy ra ngay điều cần chứng minh.

**(b)** Giả sử định lý đúng với  $n-1$  (với  $n > 1$ ), ta sẽ chứng minh rằng nó đúng cho  $n$ .

(b1) Trước hết ta chứng minh rằng định lý là đúng (với  $n$ ) khi một hàm thành phần nào đó của  $\varphi$ , thí dụ là  $\varphi_i$ , có dạng đặc biệt là  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = x_j$ . Thật vậy, theo nhận xét từ ban đầu ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp  $i = j = 1$ , nghĩa là

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \varphi_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Ta có thể xem  $A$  như là hợp của các *hộp mở* (vì mỗi điểm trong  $A$  có thể xem là tâm của một *quả cầu mở* nằm hoàn toàn trong  $A$ , mà mỗi *quả cầu mở* bán kính  $r$  lại chứa một *hộp mở* có cùng tâm với quả cầu và có độ dài cạnh là  $2r/\sqrt{n}$ ). Từ nhận xét (1) ta thấy chỉ cần chứng minh cho trường hợp  $A$  là một *hộp mở*. Tức là có thể viết  $A = B \times C$ , trong đó  $B$  là một khoảng trong  $\mathbb{R}$  và  $C$  là một hộp mở trong  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Với mỗi  $t \in B$  ta xét hàm  $\varphi_t : C \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  xác định bởi công thức

$$\varphi_t(x_2, \dots, x_n) = (\varphi_2(t, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(t, x_2, \dots, x_n)),$$

và dễ dàng thấy rằng với mỗi  $t$  nó là một song ánh khả vi liên tục với định thức của ma trận Jacobi là  $\det J_{\varphi_t} = \det J_{\varphi}(t, x_2, \dots, x_n)$ . Với  $\bar{f}$  là thác triển của  $f$  trên toàn không gian, từ công thức tích phân lặp ta có

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_{B \times R^{n-1}} \bar{f} = \int_B \left( \int_{R^{n-1}} \bar{f} \right),$$

và với giả thiết định lý đúng cho trường hợp  $n-1$  ta có

$$\int_{R^{n-1}} \bar{f}_t = \int_{\varphi_t(C)} f_t = \int_C (f_t \circ \varphi_t) |\det J_{\varphi_t}| = \int_C ((f \circ \varphi)|\det J_{\varphi}|)_t.$$

Cho nên

$$\int_{R^{n-1}} \bar{f} = \int_C (f \circ \varphi) |\det J_{\varphi}|$$

và từ công thức trước đó ta có

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_B \left( \int_C (f \circ \varphi) |\det J_{\varphi}| \right).$$

Lưu ý rằng  $(f \circ \varphi) |\det J_\varphi|$  là hàm liên tục trên tập  $B \times C$  và nhận giá trị 0 ở ngoài một tập con compact nào đó của tập này, cho nên nó là khả tích. Ngoài ra, với mỗi  $t \in B$ , hàm  $((f \circ \varphi) |\det J_\varphi|)_t$  là hàm liên tục nhận giá trị 0 ở ngoài một tập con compact nào đó của  $C$  cho nên nó cũng là khả tích. Từ định lý về tích phân lặp ta suy ra

$$\int_B \left( \int_C (f \circ \varphi) |\det J_\varphi| \right) = \int_{B \times C} (f \circ \varphi) |\det J_\varphi|,$$

và ta có điều cần chứng minh trong trường hợp riêng này.

(b2) Trường hợp chung sẽ được chứng minh thông qua trường hợp trên nhờ định lý hàm ngược và công thức tính đạo hàm của hàm hợp. Trước hết ta có nhận xét rằng: Do  $\det J_\varphi \neq 0$  nên, tại mỗi điểm  $a \in A$ , có ít nhất một trong các chỉ số

$i = 1, \dots, n$  sao cho  $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}(a) \neq 0$ . Với mỗi  $i$ , tập các điểm  $a$  sao cho  $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}(a) \neq 0$

là *mở*, và hợp của cả  $n$  tập này là toàn bộ  $A$  cho nên, theo nhận xét (1), ta chỉ cần chứng minh định lý cho từng tập này. Kết hợp với nhận xét về khả năng đảo biến khi cần, ta luôn có thể giả thiết  $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}$  là khác 0 tại mọi điểm trên tập  $A$ . Xét hàm

vector  $\sigma: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  xác định bởi

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Ta có  $\det J_\sigma = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \neq 0$  với mọi  $a$  trên  $A$ , cho nên theo định lý hàm ngược, nó là *song ánh* khả vi liên tục giữa một lân cận  $A_a$  nào đó của điểm  $a$  và tập  $\sigma(A_a)$ . Lại theo nhận xét (1), ta chỉ cần chứng minh định lý cho mỗi tập  $A_a$  này, và do đó ta có thể giả thiết rằng hàm  $\sigma$  là song ánh khả vi liên tục giữa  $A$  và  $\sigma(A)$ . Khi ấy hàm hợp  $\tau = \varphi \circ \sigma^{-1}$  là song ánh khả vi liên tục giữa  $\sigma(A)$  và  $\varphi(A)$ . Ta có  $\varphi = \tau \circ \sigma$  và

$$\tau(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi_n(x)) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in A.$$

Lưu ý rằng với  $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi_n(x)) \in \sigma(A)$  thì  $x = \tau^{-1}(y)$ , và do đó công thức trên có thể viết lại thành

$$\tau(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) = (\varphi_1[\tau^{-1}(y)], \dots, \varphi_{n-1}[\tau^{-1}(y)], y_n).$$

Điều này có nghĩa là hàm  $\tau$ , cũng như hàm  $\sigma$ , đều thuộc diện các hàm đã xét ở phần (b1), và do đó có thể áp dụng được định lý. Chính vì vậy, với mỗi hàm  $f$  liên tục xác định trên tập  $\varphi(A)$ , nhận giá trị 0 ở ngoài tập con compact nào đó của  $\varphi(A)$ , ta có

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_{\tau(\sigma(A))} f = \int_{\sigma(A)} (f \circ \tau) |\det J_\tau| =$$

$$= \int_A [(f \circ \tau) |\det J_\tau|] \circ \sigma | \det J_\sigma | = \int_A (f \circ \tau) |(\det J_\tau \circ \sigma) \det J_\sigma |$$

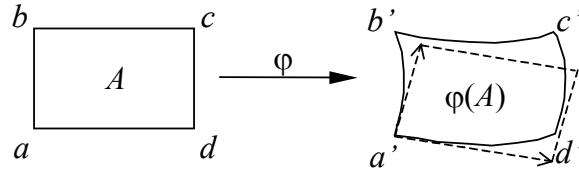
và do đó định lý sẽ được chứng minh đầy đủ nếu như ta chỉ ra rằng

$$(\det J_\tau \circ \sigma) \cdot \det J_\sigma = \det J_\varphi.$$

Điều này suy ngay từ công thức tính đạo hàm của hàm hợp (vectơ) với lưu ý rằng định thức của tích 2 ma trận bằng tích của các định thức từng ma trận.

Định lý đã được chứng minh đầy đủ.

**Nhận xét.** 1) Để có hình ảnh trực quan vì sao xuất hiện định thức của ma trận Jacobi trong công thức đổi biến, chúng ta hãy xét trường hợp hàm hai biến và  $A$  là một hình chữ nhật trên mặt phẳng  $(u, v)$ . Mỗi phân hoạch  $P$  của  $A$  (tạo bởi các đường song song với các trục  $u$  và  $v$ ) cho ta một “phân hoạch”  $P'$  của  $\varphi(A)$  (sinh bởi các đường cong là ảnh qua  $j = (j_1, j_2)$  của các đường thẳng trên). Mỗi hình chữ nhật con  $abcd$  của  $P$  cho ta hình cong con  $a'b'c'd'$  của  $P'$ . Tích phân của hàm  $f(x, y)$  trên  $\varphi(A)$  có thể xấp xỉ bởi tổng của các số hạng dạng  $f(a')D(a'b'c'd')$  trong đó  $D(a'b'c'd')$  là diện tích “hình bình hành cong”  $a'b'c'd'$ .



Hình 4.2

Ký hiệu  $D(u)$  và  $D(v)$  là độ dài của các cạnh  $ab$  và  $ad$ . Khi ấy các cạnh cong  $a'b'$  và  $a'd'$  được xấp xỉ bởi tiếp tuyến  $(j_1 u, j_2 u)D(u)$  và  $(j_1 v, j_2 v)D(v)$  tại  $a'$ . Diện tích “hình bình hành cong”  $D(a'b'c'd')$  cũng được xấp xỉ bởi diện tích hình bình hành (thông thường) đỉnh  $a'$  với các cạnh là các tiếp tuyến nói trên. Như ta biết, diện tích hình bình hành bằng trị tuyệt đối của tích vectơ của hai vectơ cạnh bên, và chính bằng  $|\det J_j(a)|DuDv$ . Thay biểu thức này vào tổng Riemann để tính tích phân của  $f$ , ta sẽ có được công thức nêu trong định lý. Như vậy, nói một cách nôm na,  $|\det J_j(a)|$  là hệ số co giãn của diện tích hình chữ nhật  $abcd$  qua biến đổi  $j$ .

2) Khi  $n = 1$ , định lý cho ta công thức đổi biến đã biết đối với hàm 1 biến là

$$\int_a^b f(j(u)) \cdot j'(u) du = \int_{j(a)}^{j(b)} f(x) dx. \quad (*)$$

Thật vậy, công thức của định lý được viết như sau

$$\int_a^b f(j(u)) \cdot |j'(u)| du = \int_c^d f(x) dx, \quad (**)$$

trong đó  $[c,d]$ , với  $c \leq d$ , là đoạn ảnh của  $[a,b]$  qua  $j$ . Nếu  $j'$  dương, thì  $j(a) \leq j(b)$  và ta có  $c = j(a), d = j(b)$ . Còn nếu  $j'$  âm, thì  $j(a) \geq j(b)$  và ta có  $c = j(b), d = j(a)$ . Trong cả hai trường hợp ta đều có  $(**)$  suy ra  $(*)$ .

3) Định lý đổi biến trong tích phân bội đòi hỏi ánh xạ đổi biến phải là *song ánh* trên toàn bộ tập  $A$ . Tuy nhiên, định lý vẫn có thể áp dụng được cho trường hợp ánh xạ đổi biến không phải là song ánh trên toàn bộ tập  $A$ , nhưng là song ánh trên *từng thành phần cấu thành*  $A$ . Cụ thể, khi  $A$  có thể phân tích dưới dạng  $A = B \cup C$ , trong đó  $B$  và  $C$  là các tập có thể tích với phần giao nhau có thể tích 0, thì ta chỉ cần đòi hỏi ánh xạ đổi biến là *song ánh* trên từng tập con  $B, C$ . Bởi vì một mệnh đề ở cuối Mục 4.2.2 đã khẳng định rằng khi ấy

$$\int_A f = \int_B f + \int_C f.$$

#### 4.4.3. Một vài thí dụ

Các ví dụ sau đây được xem là những áp dụng đơn giản của định lý đổi biến (kết hợp với phần thứ 3 của Nhận xét nêu trên khi cần).

##### 1. Tích phân trên hệ tọa độ cực

Ký hiệu  $S$  là vành khăn trong  $\mathbb{R}^2$  gồm các điểm  $(x,y) = (a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$ , với  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , trong đó  $a, b$ ,  $r_1 < r_2$  là những số dương cho trước. Nếu  $f$  là một hàm số liên tục trên  $S$  thì công thức tính tích phân của  $f$  trên miền này sẽ là

$$\iint_S f(x,y) dx dy = \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_0^{2\pi} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) r dr \right) d\theta.$$

Thật vậy, dùng biến đổi hệ tọa độ  $(x,y)$  sang hệ tọa độ cực  $(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$  và áp dụng định lý, kết hợp với Nhận xét 3) ở mục trên, ta có ngay kết quả.

##### 2. Tích phân trên hệ tọa độ trụ

Ký hiệu  $\varphi$  là biến đổi hệ tọa độ trụ  $(r,\theta,z)$  sang hệ tọa độ trực chuẩn  $(x,y,z)$ :

$$\varphi(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

Khi ấy định thức của ma trận Jacobi của  $\varphi$  sẽ là  $\det J_\varphi = r$ . Theo định lý đổi biến, tích phân của một hàm  $f(x,y,z)$  liên tục trên hình trụ

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq p^2, a \leq z \leq b\},$$

sẽ là:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left[ \int_a^b \left( \int_0^p f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr \right) dz \right] d\theta.$$

Khi  $f = 1$  trên  $V$  thì ta thu được thể tích của hình trụ  $V$  là

$$\text{vol}(V) = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left[ \int_a^b \left( \int_0^p r dr \right) dz \right] d\theta = \pi p^2 (b - a).$$

### 3. Tích phân trên hệ tọa độ cầu

Tương tự như trên, nếu  $\varphi$  là biến đổi hệ tọa độ cầu  $(r, \theta, \varphi)$  sang hệ tọa độ trực chuẩn  $(x, y, z)$ :

$$\varphi(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi),$$

thì định thức của ma trận Jacobi của  $\varphi$  sẽ là  $J_\varphi = r^2 \sin \varphi$ . Theo định lý đổi biến, tích phân của một hàm  $f(x, y, z)$  liên tục trên hình cầu

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\},$$

sẽ là:

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\pi \left( \int_0^R f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr \right) d\varphi \right] d\theta.$$

Khi  $f = 1$  trên  $B$  thì ta thu được

$$\text{vol}(B) = \iiint_B dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\pi \left( \int_0^R r^2 \sin \varphi dr \right) d\varphi \right] d\theta = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

và đây chính là công thức tính thể tích của hình cầu đã quen biết từ lâu.

# **Bài tập và tính toán thực hành Chương 4**

<b>1. Các lệnh tính tích phân trực tiếp trên máy.....</b>	<b>170</b>
1.1. Tính tích phân bội trên hộp .....	170
1.2. Tính tích phân lặp.....	172
<b>2. Tính tích phân kết hợp các phép biến đổi .....</b>	<b>174</b>
2.1. Tính tích phân bội 2 trên miền bất kỳ .....	174
2.2. Tính tích phân bội 3 trên miền bất kỳ .....	176
<b>3. Các bài tập rèn luyện kỹ năng.....</b>	<b>177</b>
3.1. Tích phân lặp.....	177
3.2. Tính tích phân bội .....	178

## **1. Các lệnh tính tích phân trực tiếp trên máy**

### **1.1. Tính tích phân bội trên hộp**

Trên lý thuyết, người ta định nghĩa *tích phân bội trên hộp* trong không gian có số chiều bất kỳ, nhưng trong các tính toán thực tế, người ta thường chỉ đề cập đến các không gian 2 hay 3 chiều. Vì vậy, trên Maple người ta chỉ xây dựng thuật toán tính trực tiếp các tích phân bội 2 và bội 3. Điều này không hạn chế việc sử dụng Maple để tính các tích phân bội với số chiều lớn hơn vì rằng, trên nguyên tắc, người ta có thể hạ thấp số chiều nhờ các công thức tính tích phân bội thông qua tích phân lặp. Chủ đề này cũng sẽ được đề cập một cách chi tiết trong các mục tiếp theo.

Để tính tích phân bội trên hộp, ta sử dụng gói công cụ **student** và gọi nó ra bằng lệnh

[>**with(student)** ;

Sau đó thực hiện việc tính tích phân bội 2 và bội 3 theo các hướng dẫn sau:

#### **1. Tính tích phân bội 2**

Lệnh *tính tích phân bội 2* của hàm  $f(x,y)$  trên hộp

$$B = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

có cú pháp tổng quát là

[>Doubleint(f(x,y),x=a..b,y=c..d);

Đây là lệnh “tro”, cho nên nó không cho ta ngay kết quả tính toán, mà chỉ cho ra công thức biểu diễn là

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy.$$

Muốn biết giá trị của biểu thức trên ta sử dụng lệnh

[>value(%);

và nếu giá trị này không biểu diễn được bởi các ký hiệu toán học đã biết thì ta xem giá trị xấp xỉ (dưới dạng thập phân) của nó bằng lệnh

[>evalf(%);

#### Thí dụ

1) [>Doubleint(sin(x\*y),x=0..1,y=1..2);

$$\int_1^2 \int_0^1 \sin(xy) dx dy$$

[>value(%);

$$-\text{Ci}(2)+\ln(2)+\text{Ci}(1)$$

[>evalf(%);

$$.6075702747$$

2) [>Doubleint(sin(x+y)/(cos(x)+sin(y)+2),x=0..1,y=0..1);

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\sin(x+y)}{\cos(x)+\sin(y)+2} dx dy$$

Đây là một tích phân phân bội không đơn giản. Nếu ta muốn xem giá trị đích thực (value) của nó thì sẽ phải đợi cho máy làm việc khá lâu (và sẽ được thấy kết quả là một biểu thức khá cồng kềnh). Để khỏi tốn thời gian và dễ hình dung kết quả, ta nên xem giá trị xấp xỉ (thập phân) của nó, bằng lệnh

[>evalf(%);

$$.2345690622$$

#### 2. Tích phân bội 3

Vìệc tính tích phân bội 3 (trên hộp) cũng được thực hiện tương tự như tích phân bội 2, chỉ cần thay lệnh **Doubleint(.)** bằng lệnh **Tripleint(.)** có cú pháp tổng quát như sau

[>Tripleint(f(x,y,z),x=a..b,y=c..d,z=p..q);

$$\int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

### Thí dụ

1) [>Tripleint(sin(x\*y\*z), x=0..1, y=0..1, z=0..1);

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sin(xyz) dx dy dz$$

[>value(%);

$$\int_0^1 \frac{-Ci(z) + \ln(z) + \gamma}{z} dz$$

[>evalf(%);

.1224340288

2) [>Tripleint(sin(x\*y+y\*z+z\*x), x=0..1, y=0..1, z=0..1);

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sin(xy + yz + zx) dx dy dz$$

Đây cũng là một tích phân bội khá phức tạp. Muốn biết giá trị đích thực của nó ta dùng lệnh **value()** và phải đợi máy tính toán khá lâu mới ra kết quả là một biểu thức công kèm với những hàm số “lạ hoặc”. Giá trị xấp xỉ (thập phân) của nó dễ dàng có được bằng lệnh

[>evalf(%);

.5821196251

**Lưu ý.** Việc tính tích phân bội trên miền bất kỳ có thể được qui về tích phân trên hộp bằng cách thắc triển hàm số ra một hộp to hơn (bao tập đã cho) và cho hàm nhận giá trị 0 tại những điểm ngoài tập đã cho. Việc tính tích phân của hàm thắc triển mới thiết lập (trên hộp) được qui về việc tính các tích phân lặp mà ta sẽ xem xét trong các phần dưới đây.

## 1.2. Tích tích phân lặp

### 1. Tích phân lặp 2

Tích phân lặp 2 của hàm  $f(x, y)$  khi  $x$  thay đổi trong khoảng  $[a, b]$ ,  $y$  thay đổi từ  $y_1(x)$  đến  $y_2(x)$ , được tính bằng lệnh:

[>int(int(f(x, y), y=y[1](x)..y[2](x)), x=a..b);

**Bài 1.** Tính tích phân  $\int_0^2 \left( \int_0^{\frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x}} y dy \right) dx$ .

```
[>int(int(y,y=0..1/((sin(x))^3+(cos(x))^3)),x=0..2);
```

```
[>evalf(%);
```

1.417868442

**Bài 2.** Tính tích phân  $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin x \left( \int_0^{\sin(x)-\cos(x)} y^2 dy \right) dx$ .

```
[>int(sin(x)*int(y^2,y=0..sin(x)-cos(x)),x=Pi/4..3*Pi/4);
```

$\frac{1}{6} + \frac{\pi}{8}$

## 2. Tích phân lặp 3

Tích phân lặp 3 của hàm  $f(x, y, z)$  khi  $x$  thay đổi trong khoảng  $[a, b]$ ,  $y$  thay đổi từ  $c(x)$  đến  $d(x)$ ,  $z$  thay đổi từ  $p(x, y)$  đến  $q(x, y)$ , được tính bằng lệnh:

```
[>int(int(int(f(x,y,z),z=p(x,y)..q(x,y)),y=c(x)..d(x)),x=a..b);
```

**Bài 1.** Tính tích phân  $\int_0^a \left( \int_0^{a-x} \left( \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} 1 dz \right) dy \right) dx$ .

```
[>int(int(int(1,z=0..sqrt(a^2-x^2)),y=0..a-x),x=0..a);
```

$\frac{1}{4}\pi a^3 - \frac{1}{3}(a^2)^{\frac{3}{2}}$

**Bài 2.** Tính tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^a \left( \int_{y^2/a}^y y dz \right) dy \right) dx$ .

```
[>int(int(int(1,z=(y^2)/a..y),y=0..a),x=0..Pi/2);
```

$\frac{1}{24}\pi a^3$

**Bài 3.** Tính tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^a y \left( \int_y^{a+\sqrt{a^2-y^2}} dz \right) dy \right) dx$ .

[>int(int(y\*int(1,z=y..a+sqrt(a^2-y^2)),y=0..a),x=0..Pi/2);  
 $\frac{1}{12}a^3\pi + \frac{1}{6}\pi(a^2)^{\frac{3}{2}}$

**Bài 4.** Tính tích phân  $\int_0^1 \left( \int_{x^2}^x \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz \right) dy dx$ .

[>int(int(int(1,z=x^2+y^2..2\*(x^2+y^2)),y=x^2..x),x=0..1);

$$\frac{3}{35}$$

**Bài 5.** Tính tích phân  $\int_0^{\pi/2} \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \int_0^{\sqrt{(a \sin x \cos y)/h}} \sin x z^2 dz \right) dy \right) dx$ .

[>int(int(int(sin(x)\*z^2,z=0..(a\*sin(x)\*cos(y)/h)^(1/2)),y=-Pi/2..Pi/2),x=0..Pi);

$$\frac{1}{3} \frac{a\pi}{h}$$

## 2. Tính tích phân kết hợp các phép biến đổi

### 2.1. Tính tích phân bội 2 trên miền bất kỳ

#### 1. Tính tích phân bội thông qua tích phân lặp

Muốn tìm tích phân bội của hàm hai biến  $f(x,y)$  khi  $x$  và  $y$  thay đổi trong miền  $D$  trước tiên ta phải biến đổi  $D$  về dạng  $D := \{a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$  sau

đó dùng công thức  $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b (\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy) dx$  để đưa tích phân bội về tích phân lặp.

**Bài 1.** Tính tích phân  $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$  trên miền  $D$  bị giới hạn bởi các đường

$$y = x, y = x + 1, y = 1, y = 3.$$

Giải. Do cấu trúc miền  $D$  ta có  $I = \int_1^3 dy \int_{y-1}^y (x^2 + y^2) dx$ , cho nên ta tính được:

[>int(int(x^2+y^2,x=y-1..y),y=1..3);

**Bài 2.** Tính  $I = \iint_D xy dxdy$  với miền  $D$  giới hạn bởi các đường cong

$$xy = 1, \quad x + y = \frac{5}{2}.$$

Giải. Vì hai đường cong  $xy = 1, x + y = \frac{5}{2}$  cắt nhau tại hai điểm có hoành độ

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 2 \text{ nên } I = \int_{1/2}^2 x dx \int_{1/x}^{\frac{5}{2}-x} y dy. \text{ Do đó ta tính được}$$

[>int(int(x\*y,y=1/x..5/2-x),x=1/2..2);

$$\frac{165}{128} - \ln 2$$

## 2. Tính tích phân bội 2 bằng phương pháp đổi biến

**Bài 1.** Tính tích phân  $I = \iint_D (x^2 + y^2)(\sin \sqrt{x^2 + y^2} + \cos \sqrt{x^2 + y^2}) dxdy$  trên

miền  $D$  được giới hạn bởi  $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$ .

Giải. Chuyển sang tọa độ cực:  $x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad dxdy = rdrdt$ . Vì hàm dưới dấu tích phân chẵn đối với  $x, y$ ; miền lấy tích phân đối xứng qua trục  $0x$  và  $0y$

$$\text{nên } I = 4 \int_0^{\pi/2} dt \int_{\pi}^{2\pi} r^2 (\sin r + \cos r) rdr. \text{ Chuyển vào máy ta tính được}$$

[>4\*int(int(r^2\*(sin(r)+cos(r))\*r,r=Pi..2\*Pi),t=0..Pi/2);  
 $-18\pi^4 - 24\pi + 30\pi^3 + 36\pi^2$

**Bài 2.** Tính tích phân  $I = \iint_D \left(4 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}\right)^2 e^{4 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}} dxdy$  trên miền  $D$  được

giới hạn bởi hình xuyến  $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4a^2$ .

Giải. Chuyển sang tọa độ cực:  $x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad dxdy = rdrdt$ ; đồng thời lưu ý rằng hàm dưới dấu tích phân chẵn (theo  $x, y$ ), miền  $D$  đối xứng qua trục  $0x$  và  $0y$ . Cho nên

$$I = 4 \int_0^{\pi/2} dt \int_a^{2a} \left(4 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 e^{4 - \frac{r^2}{a^2}} rdr.$$

Dùng máy ta tính được

[>4\*int(int((4-r^2/a^2)^2\*exp(4-r^2/a^2)\*r,  
 $r=a..2*a),t=0..Pi/2);$

**Bài 3.** Tính tích phân  $I = \iint_D \frac{-2\pi a^2 + 5\pi e^3 a^2}{\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}} dx dy$  trên miền  $D$  được giới hạn bởi  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

Giải. Chuyển sang tọa độ cực:  $x = r \cos t, y = r \sin t, dx dy = r dr dt$ . Vì hàm dưới dấu tích phân chẵn đối với  $x, y$ ; miền lấy tích phân đối xứng qua trục  $0x$  và  $0y$

nên  $I = 4 \int_0^{\pi/2} dt \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r dr$  và đưa vào máy ta có kết quả

$$[>4*\text{int}(\text{int}(\text{sqrt}((1-r^2)/(1+r^2))*r,r=0..1),t=0..\text{Pi}/2); \\ \frac{1}{2}\pi^2 - \pi$$

**Bài 4.** Tính tích phân  $I = \iint_D \frac{2ay - x^2 - y^2}{y^2} dx dy$  trên miền  $D$  là mặt tròn bị giới hạn bởi  $x^2 + y^2 = 2ay$ .

Giải. Chuyển sang tọa độ cực:  $x = r \cos t, y = r \sin t, dx dy = r dr dt$ . Vì hàm dưới dấu tích phân chẵn đối với  $x, y$ ; miền lấy tích phân đối xứng qua trục  $0x$  và  $0y$

nên  $I = 4 \int_0^{\pi} dt \int_0^{2a \sin t} \frac{2a \sin t - r^2}{r \sin t} r dr$  và đưa vào máy ta có kết quả

$$[>\text{int}(\text{int}((2*a*r*\sin(t)-r^2)/(r*\sin(t))*r, \\ r=0..2*a*\sin(t)),t=0..\text{Pi}); \\ \frac{2}{3}\pi a^3$$

## 2.2. Tính tích phân bội 3 trên miền bất kỳ

Muốn tìm tích phân bội 3 của hàm ba biến  $f(x, y, z)$  khi  $x, y$  và  $z$  thay đổi trong tập  $D$  trước tiên ta phải đổi  $D$  về dạng

$$D := \{a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

sau đó dùng công thức  $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$  để

đưa tích phân bội 3 về tích phân lặp 3.

**Bài 1.** Tính tích phân  $I = \iiint_V x^2 dx dy dz$  trong đó  $V$  bị giới hạn bởi các mặt

$$z = ay^2, z = by^2, y > 0 \quad (0 < a < b), \quad z = \alpha x, z = \beta x, \quad (0 < \alpha < \beta), \quad z = h, (h > 0).$$

Giải. Tập  $V$  có thể viết dưới dạng:

$$V = \left\{ 0 \leq z \leq h, \quad \sqrt{\frac{z}{b}} \leq y \leq \sqrt{\frac{z}{a}}, \quad \frac{z}{\beta} \leq x \leq \frac{z}{\alpha} \right\}.$$

$$\text{Cho nên } I = \int_0^h dz \int_{\sqrt{\frac{z}{b}}}^{\sqrt{\frac{z}{a}}} dy \int_{\frac{z}{\beta}}^{\frac{z}{\alpha}} x^2 dx = \frac{2}{27} \left( \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) h^4 \sqrt{h}.$$

Ta có thể dùng máy để tính tích phân lặp này, và cũng thu được kết quả trên dưới dạng quy đồng mẫu số:

$$\begin{aligned} &>\text{int}(\text{int}(\text{int}(x^2, x=z/beta..z/alpha), \\ &\quad y=sqrt(z/b)..sqrt(z/a)), z=0..h); \\ &\quad \frac{2}{27} \frac{h^4 (\beta^3 \sqrt{\frac{h}{a}} - \beta^3 \sqrt{\frac{h}{b}} + \alpha^3 \sqrt{\frac{h}{b}} - \alpha^3 \sqrt{\frac{h}{a}})}{\alpha^3 \beta^3} \end{aligned}$$

**Bài 2.** Tính tích phân  $I = \iiint_V \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dxdydz$  với  $V$  là một tập đóng có biên là

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Giải. Chuyển sang hệ tọa độ cầu theo công thức

$$x = ar \sin t \cos \theta, \quad y = br \sin t \sin \theta, \quad z = cr \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$\text{ta được } I = abc \int_0^\pi \sin t dt \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^4 dr.$$

Dùng máy để tính tích phân lặp này, ta nhận được kết quả là

$$>a*b*c*\text{int}(\text{int}(\text{int}(\sin(t)*r^4, r=0..1), \text{theta}=0..2*Pi), \text{phi}=0..Pi);$$

$$\frac{4}{5} abc\pi$$

### 3. Các bài tập rèn luyện kỹ năng

#### 3.1. Tích phân lặp

**Bài 1.** Tính các tích phân lặp sau đây (nếu thấy khó thì có thể dùng máy):

$$1) \quad 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^2 \left( \int_y^{6-y^2} y dz \right) dy \right) dx ;$$

$$2) \quad 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^a \left( \int_y^{a+\sqrt{a^2-y^2}} y dz \right) dy \right) dx ;$$

$$3) \int_0^1 \left( \int_{x^2}^x \left( \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz \right) dy \right) dx ;$$

$$4) 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{a-\sqrt{-\cos 2x}} \sin x z^2 dz \right) dy \right) dx ;$$

$$5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_a^b \sin x z^2 dz \right) dy \right) dx ;$$

$$6) abc \int_0^{\pi} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sin x} \sin x z^2 dz \right) dy \right) dx .$$

**Bài 2.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

1) Thực hiện phép đổi biến  $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$  đổi với tích phân kép  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$ .

2) Thực hiện phép đổi biến  $\begin{cases} u = x + y \\ uv = y \end{cases}$  đổi với tích phân kép

$$I = \int_0^c dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy \quad (0 < \alpha < \beta, c > 0).$$

**Bài 3.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội).

Đổi thứ tự tích phân  $I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$ .

### 3.2. Tính tích phân bội

**Bài 1.** (Thi vào giai đoạn 2, hệ tại chức, ĐHBK Hà Nội). Tính

$$I = \iint_D (4 - x^2 - y^2) e^{4-x^2-y^2} dx dy \quad \text{với } D \text{ được xác định bởi } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

**Bài 2.** (Thi vào giai đoạn 2, hệ chính quy, ĐHBK Hà Nội, 1991). Tính tích phân

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \quad \text{trên miền } D \text{ được xác định bởi } 0 \leq x \leq y, 1 \leq y \leq 3.$$

**Bài 3.** (Thi vào giai đoạn 2, hệ chính quy, ĐHBK Hà Nội, 1993). Tính tích phân

$$I = \iint_D (xy^2 + yx^2) dx dy \quad \text{trên miền } D \text{ được xác định bởi } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, y \geq 0.$$

**Bài 4.** (Thi vào giai đoạn 2, hệ tại chức, ĐHBK Hà Nội). Tính tích phân

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \text{ trên miền } D \text{ được xác định bởi } x^2 + y^2 \leq a^2,$$

trong đó  $a$  là hằng số dương.

**Bài 5.** (Thi vào giai đoạn 2, hệ tại chức, ĐHBK Hà Nội). Tính tích phân

$$I = \iint_D \sqrt{1+2x^2+3y^2} dxdy \text{ trên miền } D \text{ là hình tròn } x^2 + y^2 \leq R^2,$$

trong đó  $R > 0$ .

**Bài 6.** Tính tích phân  $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2} dxdydz$ , trong đó  $V$  bị giới hạn bởi các mặt

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 1.$$

**Bài 7.** Giả sử  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm liên tục, không âm và  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ . Đặt

$$I_n(r) = \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2} \dots \int f(x_1) \dots f(x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(r)$  với  $r$  cố định.

**Bài 8.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Xác định cận của tích phân kép  $\iint_D f(x,y)dxdy$  theo cả hai thứ tự với  $D$  là miền giới hạn bởi  $y = 1 - x^2$  và  $y = -\sqrt{1-x^2}$ .

**Bài 9.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

1) Tính tích phân kép  $\iint_D (|x| + y) dxdy$ , trong đó  $D$  là miền  $x^2 + y^2 \leq R^2$ .

2) Tính tích phân kép  $\iint_D \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2 + 1} dxdy$ , trong đó  $D$  là mặt tròn  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**Bài 10.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

1) Xác định tích phân kép  $\iint_D f(x,y)dxdy$  theo cả hai thứ tự, với  $D$  là miền giới

hạn bởi  $y = -\sqrt{x}, y = 0$  và  $y = -\frac{1}{2}(x+1)$ .

2) Tính tích phân kép  $\iint_D |y| \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$ , trong đó  $D$  là hình tròn

$$x^2 + y^2 \leq 2x.$$

3) Tính tích phân kép  $\iint_D |x| \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , trong đó  $D$  là hình tròn  $x^2 + y^2 \leq 2y$ .

4) Tính tích phân kép  $\iint_D |\sin(x - y)| dx dy$ , trong đó  $D$  là miền  $\left\{ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ .

5) Tính tích phân kép  $\iint_D |\cos(x + y)| dx dy$ , trong đó  $D$  là miền  $\left\{ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ .

**Bài 11.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

a) Thay đổi thứ tự lồng tích phân trong tích phân sau:

$$I = \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{-x^2 - 2x}}^{1+x} f(x, y) dy.$$

b) Tính tích phân  $\iint_D |xy| dx dy$ , trong đó  $D$  là miền  $x^2 + y^2 \leq 2ax, a > 0$ .

**Bài 12.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

a) Thay đổi thứ tự lồng tích phân trong tích phân sau:

$$I = \int_0^1 dx \int_{x-1}^{-1+\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$$

b) Tính tích phân  $\iint_D |xy| dx dy$ , trong đó  $D$  là miền  $x^2 + y^2 \leq -2ax, (a > 0)$ .

**Bài 13.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

a) Đổi thứ tự tích phân  $\int_{-1}^0 dx \int_{x^2}^{\sqrt{-x}} f(x, y) dy$ .

b) Tính  $\iint_D y dx dy$ ,  $D$  là miền giới hạn bởi các đường  $y = x^2$  và  $x = -y^2$ .

**Bài 14.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

- a) Đổi thứ tự tích phân  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y) dy$ .
- b) Tính  $\iint_D y dx dy$ ,  $D$  là miền giới hạn bởi các đường  $y = x^2$  và  $x = y^2$ .

**Bài 15.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

- 1) Tính thể tích vật thể  $V$  giới hạn bởi các mặt:  $2z = x^2 + y^2$ ,  $y+z=4$ .
- 2) Tính thể tích miền  $V$  giới hạn bởi các mặt:  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $x+z=2$ ,  $x-z=2$ .
- 3) Tính thể tích vật thể  $V$  giới hạn bởi mặt kín  $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$ .

**Bài 16.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

- 1) Tính  $\iiint_V x dx dy dz$ , trong đó  $V$  là miền giới hạn bởi các mặt  
 $x+y+z=1$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ .
- 2) Tính  $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} z dx dy dz$ , trong đó  $V$  là miền giới hạn bởi các mặt  
 $z = x^2 + y^2$  và  $z=1$ .
- 3) Tính  $I = \iiint_V [(x+y)^2 - z] dx dy dz$ , trong đó  $V$  là miền giới hạn bởi các mặt  
 $z=0$  và  $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ .
- 4) Tính tích phân  $\iiint_V xy\sqrt{z} dx dy dz$ , trong đó  $V$  là miền giới hạn bởi các mặt  
 $z=0$ ;  $z=y$ ;  $y = x^2$  và  $y=1$ .
- 5) Tính tích phân bội ba  $\iiint_V \sqrt{x^2 + 4y^2 + 9z^2} dx dy dz$ , trong đó  $V$  là miền  
 $\{x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1; x, y, z \geq 0\}$ .

**Bài 17.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)  
Chuyển sang tọa độ trụ và viết các cận của tích phân

$$I = \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz,$$

trong đó  $V$  là miền giới hạn bởi các mặt  $x^2 + y^3 = 2z$  và  $z = 2$ .

**Bài 18.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

- a) Đổi biến sang tọa độ cực của  $\iint_D f(x,y)dxdy$  với  $D$  là miền phẳng giới hạn bởi các đường:  $x^2 - 2x + y^2 = 0, y = \sqrt{3}x, y = 0$ .
- b) Tính tích phân  $I = \iiint_{\Omega} (x-z)y dxdydz$ , trong đó  $\Omega$  là miền giới hạn bởi các mặt  $x+z=1, z=0, y=0$  và  $y=1$ .

## Chương 5

# Tích phân phụ thuộc tham số

<b>5.1. Tích phân phụ thuộc tham số .....</b>	<b>183</b>
5.1.1. Khái niệm .....	183
5.1.2. Tính liên tục .....	184
5.1.3. Tính khả vi .....	186
5.1.4. Tính khả tích .....	187
<b>5.2. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số .....</b>	<b>188</b>
5.2.1. Khái niệm .....	188
5.2.2. Hội tụ đều và các tiêu chuẩn hội tụ đều .....	189
5.2.3. Tính liên tục .....	194
5.2.4. Tính khả vi .....	196
5.2.5. Tính khả tích .....	196
<b>5.3. Một số tích phân đặc biệt .....</b>	<b>197</b>
5.3.1. Tích phân Dirichlet .....	198
5.3.2. Tích phân Euler (loại I) .....	199
5.3.3. Tích phân Euler (loại II) .....	201

## 5.1. Tích phân phụ thuộc tham số

### 5.1.1. Khái niệm

Giả sử hàm  $f$  xác định trên hình chữ nhật  $[a,b] \times [\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}^2$  và với mỗi điểm  $y \in [\alpha,\beta]$  cố định,  $f$  khả tích theo  $x$  trên  $[a,b]$ . Khi ấy, tích phân:

$$\int_a^b f(x,y)dx \quad (*)$$

là một hàm số theo biến  $y$ . Ta nói tích phân  $(*)$  là *tích phân phụ thuộc tham số* với tham số  $y$ . Ký hiệu

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx.$$

Lưu ý rằng thay vì  $y \in [\alpha, \beta]$  có thể xét  $y \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  và khi ấy  $I(y)$  là một hàm nhiều biến. Tuy nhiên phần lớn các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số với  $y \in \mathbb{R}^n$  tương tự như khi  $y \in \mathbb{R}$ , vì vậy trong giáo trình này chúng ta chỉ xét tích phân phụ thuộc một tham số. Ngoài ra, vì trong tích phân (\*) hai cận  $a$  và  $b$  cố định nên người ta còn nói (\*) là tích phân phụ thuộc tham số với miền lấy tích phân không đổi. Nếu như trong (\*),  $b = \psi(y)$  và  $a = \varphi(y)$  là những hàm phụ thuộc  $y$ , thì ta nói

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

là tích phân phụ thuộc tham số với miền lấy tích phân thay đổi.

**Thí dụ.** Tính một số tích phân phụ thuộc tham số sau đây:

1)  $I(y) = \int_0^1 \sin(y^2 x) dx$  là tích phân phụ thuộc tham số  $y$  với mọi  $y \in \mathbb{R}$ . Ta có thể tính ngay được

$$I(y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } y = 0 \\ \frac{1}{y^2} (1 - \cos y^2) & \text{nếu } y \neq 0 \end{cases}.$$

2)  $I(y_1, y_2) = \int_0^1 y_1 e^{-(y_2 x)^2} dx$  là tích phân phụ thuộc tham số  $y_1, y_2$  và xác định với mọi  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ . Hàm này không biểu diễn được dưới dạng các hàm sơ cấp.

### 5.1.2. Tính liên tục

Chúng ta vẫn dùng ký hiệu  $I(y)$  cho tích phân phụ thuộc tham số với miền lấy tích phân thay đổi và giả thiết rằng  $f$  xác định trên hình chữ nhật  $[a, b] \times [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}^2$  và  $a \leq \psi(y) \leq b, a \leq \varphi(y) \leq b$  với mọi  $y \in [\alpha, \beta]$ .

**ĐỊNH LÝ.** *Giả thiết  $f$  liên tục trên miền  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ ,  $\psi$  và  $\varphi$  liên tục trên  $[\alpha, \beta]$ . Khi ấy:*

$$I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

*là một hàm liên tục trên  $[\alpha, \beta]$ .*

**Chứng minh.** Cố định  $y_0 \in [\alpha, \beta]$ . Ta sẽ chứng minh rằng với mọi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại  $\delta$  sao cho  $|I(y) - I(y_0)| < \varepsilon$ , với mọi  $y \in [\alpha, \beta], |y - y_0| < \delta$ . Từ định nghĩa ta có

$$\begin{aligned} I(y) - I(y_0) &= \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx - \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0) dx \\ &= \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y_0)} f(x, y) dx + \int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} f(x, y) dx + \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} [f(x, y) - f(x, y_0)] dx. \end{aligned}$$

Để đánh giá hiệu trên, nhận xét rằng  $f$  liên tục trên tập compact nên giới nội và liên tục đều, tức là tồn tại  $M > 0$ ,  $\delta_1 > 0$  để:

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &< M, \\ |f(x', y') - f(x, y)| &< \varepsilon/(3(b-a)), \end{aligned}$$

với mọi  $(x, y), (x', y') \in [a, b] \times [\alpha, \beta]$ ,  $|x' - x| < \delta_1$ ,  $|y' - y| < \delta_1$ . Ngoài ra do  $\varphi$  và  $\psi$  liên tục nên tồn tại  $\delta_2$  để:

$$\begin{aligned} |\varphi(y) - \varphi(y_0)| &< \varepsilon/3M, \\ |\psi(y) - \psi(y_0)| &< \varepsilon/3M, \end{aligned}$$

với mọi  $y \in [\alpha, \beta]$ ,  $|y - y_0| < \delta_2$ .

Chọn  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  và áp dụng các bất đẳng thức đã thu được để đánh giá từng số hạng trong hiệu  $I(y) - I(y_0)$ , ta có:

$$\begin{aligned} |I(y) - I(y_0)| &= \left| \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y_0)} f(x, y) dx + \int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} f(x, y) dx + \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} [f(x, y) - f(x, y_0)] dx \right| < \\ &< M \frac{\varepsilon}{3M} + M \frac{\varepsilon}{3M} + |\psi(y_0) - \varphi(y_0)| \cdot \frac{\varepsilon}{3(b-a)} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

với mọi  $y \in [\alpha, \beta]$ ,  $|y - y_0| < \delta$ . Chứng tỏ  $I$  liên tục và định lý được chứng minh xong.

**HỆ QUẢ.** Nếu  $f$  liên tục trên miền  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$  thì tích phân

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

liên tục trên  $[\alpha, \beta]$  và với mọi  $y_0 \in [\alpha, \beta]$  ta có

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx.$$

**Chứng minh.** Phần đầu của hệ quả là trường hợp riêng của định lý, phần sau suy ra ngay từ phần đầu.

### 5.1.3. Tính khả vi

**ĐỊNH LÝ.** Giả sử hàm  $f$  liên tục có đạo hàm riêng  $f'_y$  liên tục trên miền  $[a,b] \times [\alpha,\beta]$  và các hàm  $\varphi, \psi$  khả vi trên  $[\alpha,\beta]$ . Khi ấy hàm  $I(y)$  khả vi trên  $[\alpha,\beta]$  và:

$$I'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx + f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y).$$

**Chứng minh.** Trước hết chúng ta xét hàm ba biến

$$F(y, u, v) = \int_u^v f(x, y) dx, \quad (y, u, v) \in [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$$

và chứng minh rằng hàm này khả vi liên tục. Muốn thế ta chỉ cần chỉ ra rằng  $F$  có các đạo hàm riêng liên tục. Cố định  $u, v$  và xét số gia:

$$\Delta_y F(y, u, v) = F(y + \Delta y, u, v) - F(y, u, v) = \int_u^v [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx.$$

Vì  $f'_y$  liên tục nên theo định lý giá trị trung bình

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'(x, y + \lambda \Delta y) \Delta y,$$

trong đó  $\lambda \in [0, 1]$  phụ thuộc  $(x, y)$ . Khi ấy

$$\left| \frac{\Delta_y F(y, u, v)}{\Delta y} - \int_u^v f'_y(x, y) dx \right| = \left| \int_u^v [f'_y(x, y + \lambda \Delta y) - f'_y(x, y)] dx \right|.$$

Để ý rằng  $f'_y$  là hàm liên tục trên  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$  nên nó liên tục đều và do đó, với mọi  $\varepsilon > 0$ , tìm được  $\delta > 0$  để mỗi khi  $|\Delta y| < \delta$  thì:

$$|f'_y(x, y + \lambda \Delta y) - f'_y(x, y)| < \varepsilon / (b - a) \quad \text{với mọi } x, y.$$

Do vậy, với mọi  $|\Delta y| < \delta$ , ta có đánh giá:

$$\left| \frac{\Delta_y F(y, u, v)}{\Delta y} - \int_u^v f'_y(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{(b - a)} |v - u| \leq \varepsilon.$$

Vì  $\varepsilon$  bất kỳ, ta kết luận:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y F(y, u, v)}{\Delta y} = \int_u^v f'_y(x, y) dx.$$

Chứng tỏ  $F'_y(y, u, v)$  tồn tại và liên tục.

Ngoài ra ta còn có

$$F'_u(y, u, v) = -f(u, y)$$

$$F'_v(y, u, v) = f(v, y)$$

đều là những hàm liên tục, cho nên  $F$  là hàm khả vi liên tục. Nếu  $\varphi$  và  $\psi$  là những hàm khả vi thì, theo định lý về hàm hợp,

$$I(y) = F(y, \varphi(y), \psi(y))$$

cũng là hàm khả vi và

$$I'(y) = F'_y + F'_u \frac{du}{dy} + F'_v \frac{dv}{dy} =$$

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx + f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y).$$

Định lý được chứng minh xong.

**Thí dụ.** Với  $I(y) = \int_y^{\cos y} e^{yx} dx$ . Theo định lý, hàm  $I(y)$  khả vi và

$$I'(y) = y \int_y^{\cos y} e^{yx} dx - e^{y \cos y} \sin y - e^{y^2}.$$

#### 5.1.4. Tính khả tích

**Định lý.** Giả thiết  $f$  là hàm liên tục trên miền  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ . Khi ấy các tích phân  $\int_a^b f(x, y) dx$ ,  $\int_\alpha^\beta f(x, y) dy$  khả tích trên các đoạn  $[\alpha, \beta]$ ,  $[a, b]$  (tương ứng) và ta có công thức Fubini:

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y) dy.$$

**Chứng minh.** Ở cuối Mục 4.3.1 chúng ta đã có công thức Fubini từ định lý tổng quát. Sau đây là một cách chứng minh khác. Vì  $f$  liên tục cho nên hàm

$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  liên tục, suy ra khả tích trên  $[\alpha, \beta]$ . Tương tự như vậy, hàm

$\int_\alpha^\beta f(x, y) dy$  là khả tích trên đoạn  $[a, b]$ . Đặt

$$g(t) = \int_\alpha^t dy \int_a^b f(x, y) dx, \quad h(t) = \int_a^b dx \int_\alpha^t f(x, y) dy, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Ta sẽ chứng minh  $g(t) = h(t)$  với mọi  $t \in [\alpha, \beta]$  và sẽ có ngay công thức trong định lý khi chọn  $t = \beta$ . Chú ý rằng với  $t = \alpha$ , ta có  $g(\alpha) = h(\alpha) = 0$ , cho nên ta chỉ còn phải chứng minh rằng  $g'(t) = h'(t)$ . Nhận xét rằng hàm

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

liên tục trên  $[\alpha, \beta]$ , cho nên

$$g'(t) = I(t) = \int_a^b f(x, t) dx \text{ với mọi } t \in [\alpha, \beta].$$

Hơn nữa hàm hai biến

$$J(x, t) = \int_a^t f(x, y) dy, \quad (x, t) \in [a, b] \times [\alpha, \beta],$$

liên tục và có đạo hàm theo biến  $t$  liên tục (vì  $J'_t(x, t) = f(x, t)$ ), cho nên ta có thể áp dụng định lý về đạo hàm của tích phân phụ thuộc tham số

$$h'(t) = \frac{d}{dt} \left( \int_a^t J(x, y) dy \right) = \int_a^t J'_t(x, t) dx = \int_a^b f(x, t) dx.$$

Suy ra  $g'(t) = h'(t)$  và định lý được chứng minh đầy đủ.

**Chú ý.** Trong định lý trên nếu  $f$  không liên tục thì công thức đổi thứ tự tích phân không còn đúng nữa. Ví dụ, hàm

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

không liên tục tại điểm  $(x, y) = (0, 0)$  trong miền  $[0, 1] \times [0, 1]$ , và ta có:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 \frac{-dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

## 5.2. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

### 5.2.1. Khái niệm

Giả sử  $f$  là hàm số xác định trên miền  $[a, \infty) \times U$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}$  sao cho với mỗi  $y \in U$  cố định, hàm  $f(., y)$  khả tích theo  $x$  trên  $[a, b]$  với mọi  $b > a$ . Tích phân:

$$\int_a^\infty f(x, y) dx$$

được gọi là tích phân suy rộng phụ thuộc tham số (với cận  $+\infty$ ). Tích phân này là hội tụ tại  $y_0 \in U$  nếu tích phân  $\int_a^\infty f(x, y_0) dx$  hội tụ. Ta nói tích phân suy rộng phụ thuộc tham số là *hội tụ* trên  $U$  nếu nó hội tụ tại mọi điểm của  $U$  tức là với mọi  $y \in U$ ,  $J(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$  tồn tại (hữu hạn).

Tương tự như trên ta có thể định nghĩa tích phân suy rộng phụ thuộc tham số với cận  $-\infty$ , hoặc cận  $-\infty$  và  $+\infty$ .

Đối với hàm  $f$  không giới nội, việc khảo sát tích phân suy rộng phụ thuộc tham số cũng thực hiện hoàn toàn tương tự kể từ định nghĩa các khái niệm tới các định lý. Vì vậy, trong phần này, chúng ta chỉ xét tích phân suy rộng phụ thuộc tham số với cận  $+\infty$  làm đại diện.

#### Thí dụ

$$1) I(y) = \int_1^\infty \sin(yx) dx \text{ hội tụ khi } y=0 \text{ và phân kỳ khi } y \neq 0.$$

$$2) I(y) = \int_0^\infty e^{-yx^2} dx \text{ hội tụ khi } y > 0 \text{ và phân kỳ khi } y \leq 0.$$

$$3) I(y) = \int_0^1 x^{-y} dx = \int_1^\infty t^{y-2} dt \text{ hội tụ khi } y < 1 \text{ và phân kỳ khi } y \geq 1.$$

#### 5.2.2. Hội tụ đều và các tiêu chuẩn hội tụ đều

Khi nghiên cứu chuỗi hàm chúng ta đã gặp khái niệm hội tụ đều của chuỗi nhằm thiết lập các tính chất liên tục, khả vi ... của hàm tổng. Khái niệm này có thể mở rộng cho tích phân suy rộng phụ thuộc tham số với cận  $+\infty$  như dưới đây.

Giả thiết rằng tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx,$$

hội tụ trên miền  $U \subseteq \mathbb{R}$ . Ta nói rằng tích phân này *hội tụ đều* trên  $U$  nếu với mọi  $\varepsilon > 0$  tìm được số  $b_0$  sao cho

$$\left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon, \quad \text{với mọi } b > b_0 \text{ và mọi } y \in U.$$

Nhận xét rằng định nghĩa trên tương đương với điều kiện:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sup_{y \in U} \left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| = 0.$$

**Thí dụ.** Khảo sát tính hội tụ đều của tích phân

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-(x-y)^2} dx.$$

Nhận xét rằng với mọi  $y \in \mathbb{R}$ , tích phân  $I(y)$  hội tụ. Dùng phép đổi biến ta có với mọi  $b$ :

$$\int_b^\infty e^{-(x-y)^2} dx = \int_{b-y}^\infty e^{-x^2} dx.$$

Từ đây ta thấy với  $y < l_0$  nào đó thì:

$$\limsup_{b \rightarrow \infty} \left| \int_{b-y}^\infty e^{-x^2} dx \right| = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{b-l_0}^\infty e^{-x^2} dx = 0.$$

Chứng tỏ  $I(y)$  hội tụ đều trên  $(-\infty, l_0]$ . Trên tập  $U = (-\infty, +\infty)$  ta có

$$\sup_{y \in U} \left| \int_{b-y}^\infty e^{-x^2} dx \right| \geq \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\pi}{2} > 0,$$

cho nên  $\limsup_{b \rightarrow \infty} \left| \int_b^\infty e^{-(x-y)^2} dx \right| > 0$  và  $I(y)$  không hội tụ đều.

**ĐỊNH LÝ.** (Tiêu chuẩn Cauchy) *Tích phân  $I(y) = \int_0^\infty f(x, y) dx$  hội tụ đều trên tập  $U$  khi và chỉ khi với mọi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại số  $b_0$  để*

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon, \quad \text{với mọi } b_1, b_2 \geq b_0, y \in U.$$

**Chứng minh.** Điều kiện cần suy ra ngay từ định nghĩa vì nếu  $\left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

với mọi  $b \geq b_0$ ,  $y \in U$  thì

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx \right| \leq \left| \int_{b_1}^\infty f(x, y) dx \right| + \left| \int_{b_2}^\infty f(x, y) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

với mọi  $b_1, b_2 \geq b_0$ ,  $y \in U$ .

**Điều kiện đủ.** Với  $y$  cố định, điều kiện của định lý suy ra  $I(y)$  hội tụ. Hơn nữa cho  $b_2 \rightarrow \infty$  trong điều kiện đã nói thì  $\left| \int_{b_1}^{\infty} f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon$  với mọi  $b_1 \geq b_2$ ,  $y \in U$ .

Theo định nghĩa, tích phân hội tụ đều trên  $U$ .

**ĐỊNH LÝ.** (Tiêu chuẩn Weierstrass) *Giả thiết tồn tại hàm  $F(x) \geq 0$  khả tích và một số  $b \geq a$  sao cho  $|f(x, y)| \leq F(x)$  với mọi  $y \in U$ ,  $x \geq b$ , và tích phân  $\int_a^{\infty} F(x) dx$  hội tụ. Khi ấy  $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$  hội tụ đều trên  $M$ .*

**Chứng minh.** Theo tiêu chuẩn Cauchy đối với tích phân hội tụ, với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $b_0$  sao cho

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} F(x) dx \right| < \varepsilon \quad \text{với mọi } b_1, b_2 \geq b_0.$$

Chọn  $\bar{b}_0 \geq \max\{b, b_0\}$ , ta có

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx \right| \leq \left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x, y)| dx \right| \leq \left| \int_{b_1}^{b_2} F(x) dx \right| < \varepsilon,$$

với mọi  $b_1, b_2 \geq \bar{b}_0$ ,  $y \in U$ . Áp dụng định lý Cauchy ta kết luận tích phân  $I(y)$  hội tụ đều trên  $U$ .

**Thí dụ.** Chứng minh rằng  $\int_0^{\infty} e^{-yx^2} dx$  hội tụ đều trên tập  $U = [t_0, \infty)$  với  $t_0 > 0$  bất kỳ.

**Giai.** Nhận xét rằng  $e^{-yx^2} \leq e^{-t_0 x^2}$  với mọi  $y \in U$ ,  $x \geq 0$ . Hơn nữa tích phân  $\int_0^{\infty} e^{-t_0 x^2} dx$  hội tụ. Theo định lý Weierstrass, tích phân  $\int_0^{\infty} e^{-yx^2} dx$  hội tụ đều trên  $U$ .

Để trình bày một số tiêu chuẩn hội tụ đều đối với tích phân của một tích chung ta cần bổ đề sau, còn có tên gọi là định lý Bonnet và là một dạng của định lý giá trị trung bình.

**Bổ đề.** (Định lý Bonnet) *Nếu hàm số  $\alpha(x)$  đơn điệu và hàm số  $g(x)$  khả tích trên  $[a, b]$  thì tồn tại điểm  $c \in [a, b]$  sao cho*

$$\int_a^b g(x)\alpha(x)dx = \alpha(a)\int_a^c g(x)dx + \alpha(b)\int_c^b g(x)dx.$$

**Chứng minh.** Xét trường hợp  $\alpha(x)$  không tăng và  $\alpha(x) \geq 0$ . (Trường hợp  $\alpha(x)$  không giảm là tương tự). Giả sử  $P$  là một phân hoạch bất kỳ của  $[a, b]$  cho bởi dãy điểm  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Khi ấy

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)\alpha(x)dx &= \sum_{i=2}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\alpha(x)dx = \\ &= \sum_{i=2}^n \alpha(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx + \sum_{i=2}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\alpha(x) - \alpha(x_{i-1})]g(x)dx. \end{aligned} \quad (*)$$

Nhận xét rằng  $\alpha(x)$  đơn điệu và  $g(x)$  khả tích nên bị chặn, tức là  $|g(x)| < \delta$  với mọi  $x \in [a, b]$  và với  $\delta > 0$  nào đó. Khi ấy thành phần thứ hai trong vế phải của  $(*)$  có thể đánh giá như sau

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=2}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\alpha(x) - \alpha(x_{i-1}))g(x)dx \right| &\leq \delta \sum_{i=2}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\alpha(x_{i-1}) - \alpha(x)) dx \\ &\leq \delta \left| \int_a^b \alpha(x)dx - \sum_{i=2}^n \alpha(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \right|. \end{aligned}$$

Do  $\alpha(x)$  khả tích nên số trừ trong biểu thức trên tiến tới số bị trừ khi bê rộng của phân hoạch dần tới 0. Đối với thành phần đầu trong vế phải của  $(*)$  chúng ta lưu ý rằng  $G(x) = \int_a^x g(x)dx$  liên tục trên  $[a, b]$  và do đó đạt cực đại là  $M$  và cực tiểu là  $m$  trên đoạn này. Hơn nữa ta có biến đổi sau

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \sum_{i=2}^n \alpha(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx = \sum_{i=2}^n \alpha(x_{i-1})(G(x_i) - G(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} (\alpha(x_{i-1}) - \alpha(x_i))G(x_i) + \alpha(x_{n-1})G(b). \end{aligned}$$

Vì  $\alpha(x_{i-1}) - \alpha(x_i) \geq 0$  và  $\alpha(x_n) \geq 0$  cho nên đại lượng  $\sigma_T$  bị kẹp, cụ thể là  $m\alpha(a) \leq \sigma_T \leq M\alpha(a)$ . Qua giới hạn khi bê rộng của phân hoạch dần tới 0 ta có

$$m\alpha(a) \leq \int_a^b g(x)\alpha(x)dx \leq M\alpha(a).$$

Vì  $G(x)$  là hàm liên tục, tồn tại  $c \in [a, b]$  sao cho

$$\int_a^b g(x)\alpha(x)dx = \alpha(a)\int_a^c g(x)dx. \quad (**)$$

Bây giờ nếu  $\alpha(x)$  không nhất thiết là dương, với  $\alpha(x) - \alpha(b) \geq 0$ , ta xét tích phân

$$\int_a^b g(x)(\alpha(x) - \alpha(b))dx. \text{ Theo chứng minh trên, tìm được } c \in [a, b] \text{ để}$$

$$\int_a^b g(x)(\alpha(x) - \alpha(b))dx = (\alpha(a) - \alpha(b))\int_a^c g(x)dx.$$

Suy ra  $\int_a^b g(x)\alpha(x)dx = \alpha(a)\int_a^c g(x)dx + \alpha(b)\int_c^b g(x)dx$ , chính là công thức cần tìm.

**ĐỊNH LÝ.** (Tiêu chuẩn Dirichlet) *Giả thiết rằng:*

i) *Tích phân  $\int_a^b f(x,y)dx$  bị chặn đều theo  $b$  và  $y$  tức là tồn tại  $c > 0$  để*

$$\left| \int_a^b f(x,y)dx \right| < c \text{ với mọi } b > a, y \in U;$$

ii)  *$\varphi(x,y)$  hội tụ đều theo  $y \in U$  đến 0 khi  $x \rightarrow \infty$  và  $\varphi(x,y)$  đơn điệu theo  $x$  với mỗi  $y \in U$  cố định.*

Khi đó tích phân  $\int_a^\infty f(x,y)\varphi(x,y)dx$  hội tụ đều trên  $U$ .

**Chứng minh.** Lấy  $\varepsilon > 0$  bất kỳ. Từ ii) ta tìm được  $b_0$  để:

$$|\varphi(b,y)| < \varepsilon/(4c), \text{ với mọi } b > b_0, y \in U.$$

Khi ấy với mọi  $b_2 \geq b_1 \geq b_0$ , kết hợp với định lý Bonnet ta có:

$$\begin{aligned} \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\varphi(x,y)dx \right| &= \left| \varphi(b_1,y) \int_{b_1}^{\xi} f(x,y)dx + \varphi(b_2,y) \int_{\xi}^{b_2} f(x,y)dx \right| \leq \\ &\leq |\varphi(b_1,y)| \left| \int_{b_1}^{\xi} f(x,y)dx \right| + |\varphi(b_2,y)| \left| \int_{\xi}^{b_2} f(x,y)dx \right| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4c} \left( \left| \int_a^{\xi} f dx \right| + \left| \int_a^{b_1} f dx \right| \right) + \frac{\varepsilon}{4c} \left( \left| \int_a^{\xi} f dx \right| + \left| \int_a^{b_2} f dx \right| \right) < \frac{\varepsilon}{4c} (2c + 2c) = \varepsilon, \end{aligned}$$

trong đó  $\xi$  là một điểm trong đoạn  $[b_1, b_2]$ . Theo định lý Cauchy, tích phân  $\int_a^\infty f(x, y)\varphi(x, y)dx$  là hội tụ đều.

**ĐỊNH LÝ.** (Tiêu chuẩn Abel) *Giả thiết rằng*

- i) *Tích phân  $\int_a^\infty f(x, y)dx$  hội tụ đều trên  $U$ ;*
- ii)  *$\varphi(x, y)$  bị chặn đều, tức là tồn tại  $c > 0$  để  $|\varphi(x, y)| \leq c$  với mọi  $x \geq a$ ,  $y \in U$ , và với mỗi  $y \in U$  có định hàm  $\varphi(., y)$  đơn điệu theo  $x$ .*

Khi ấy tích phân  $\int_a^\infty f(x, y)\varphi(x, y)dx$  hội tụ đều trên  $U$ .

**Chứng minh.** Tương tự định lý trên, áp dụng định lý Bonnet và định lý Cauchy.

**Thí dụ.** Khảo sát tính hội tụ đều của tích phân  $\int_0^\infty \frac{\sin(yx)}{\sqrt{x}} dx$  trên tập  $U = [t_0, \infty)$ ,

với  $t_0 > 0$ .

Lấy  $\varphi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  và  $f(x, y) = \sin(yx)$  ta thấy ngay rằng các điều kiện của tiêu chuẩn Dirichlet thỏa mãn. Vì vậy tích phân này hội tụ đều trên  $U$ .

### 5.2.3. Tính liên tục

Để khảo sát các tính chất của tích phân hội tụ đều với cận vô hạn chúng ta thiết lập mối liên hệ của những tích phân này với dãy hội tụ đều.

**BỒ ĐỀ.** *Giả thiết rằng tích phân  $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$  hội tụ đều trên tập  $U$  và*

*$\{a_n\}$  là một dãy số dần tới  $+\infty$  với  $a_n > a$ . Khi ấy dãy hàm:*

$$\varphi_n(y) = \int_a^{a_n} f(x, y)dx$$

*hội tụ đều tới hàm số  $I(y)$  trên  $U$ .*

**Chứng minh.** Với mỗi  $y \in U$  cố định, do tích phân  $\int_a^\infty f(x, y)dx$  hội tụ cho nên

dãy hàm  $\{\varphi_n(y)\}$  hội tụ tới  $I(y)$ . Ta sẽ chứng minh rằng dãy hội tụ đều. Cho  $\varepsilon > 0$  bất kỳ. Vì  $I(y)$  hội tụ đều ta tìm được  $b_0$  sao cho:

$$\left| \int_b^\infty f(x, y)dx \right| < \varepsilon, \text{ với mọi } b > b_0, y \in U.$$

Khi ấy tồn tại  $n_0 > 0$  sao cho với mọi  $n \geq n_0$ , ta có  $a_n \geq b$  (vì  $\{a_n\}$  tiến tới  $\infty$ ). Như vậy

$$|\varphi_n(y) - I(y)| = \left| \int_a^{a_n} f(x, y) dx - \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{a_n}^{\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon,$$

với mọi  $n \geq n_0, y \in U$ . Chứng tỏ  $\{\varphi_n(y)\}$  hội tụ đều tới  $I(y)$  trên  $U$ .

**ĐỊNH LÝ.** *Giả thiết rằng hàm  $f$  xác định và liên tục trên miền  $[a, \infty) \times [\alpha, \beta]$  và tích phân  $I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$  hội tụ đều trên  $[\alpha, \beta]$ . Khi ấy hàm  $I(y)$  liên tục trên  $[\alpha, \beta]$ .*

**Chứng minh.** Lấy dãy  $\{a_n\}$  tiến dần ra  $+\infty$ ,  $a_n > a$ , và xét dãy hàm

$$\varphi_n(y) = \int_a^{a_n} f(x, y) dx, \quad y \in [\alpha, \beta].$$

Với mỗi  $n$  cố định, theo định lý về tính liên tục của tích phân phụ thuộc tham số với cận hữu hạn, hàm  $\varphi_n(y)$  liên tục trên  $[\alpha, \beta]$ . Áp dụng bổ đề,  $\{\varphi_n(y)\}$  hội tụ đều tới  $I(y)$ . Theo định lý về tính liên tục của dãy hàm hội tụ đều, ta kết luận hàm giới hạn  $I(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(y)$  liên tục trên  $[\alpha, \beta]$ . Định lý được chứng minh xong.

**Chú ý.** Đối với trường hợp hàm dương ( $f(x, y) \geq 0$ ), phần đảo của định lý trên vẫn đúng (như định lý Dini đối với dãy hàm). Cụ thể là, nếu  $f$  liên tục và dương trên miền  $[a, \infty) \times [\alpha, \beta]$ , tích phân  $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$  hội tụ tới một hàm liên tục  $I(y)$  trên  $[\alpha, \beta]$ , thì khi ấy tích phân trên hội tụ đều. Để chứng minh điều này, xét dãy đơn điệu của các hàm liên tục  $\varphi_n(y) = \int_a^{a+n} f(x, y) dx$  hội tụ tới hàm liên tục  $I(y)$  trên  $[\alpha, \beta]$ . Theo định lý Dini, dãy hàm này hội tụ đều, tức là với mọi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại  $n_0$  để:

$$|\varphi_n(y) - I(y)| = \int_{a+n}^{\infty} f(x, y) dx < \varepsilon, \quad \text{với mọi } n \geq n_0, y \in [\alpha, \beta].$$

Khi ấy với mỗi  $b \geq n_0 + a$ ,

$$\int_b^{\infty} f(x, y) dx \leq \int_{a+n_0}^{\infty} f(x, y) dx < \varepsilon, \quad \text{với mọi } y \in [\alpha, \beta].$$

Chứng tỏ tích phân  $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$  hội tụ đều trên  $[\alpha, \beta]$ .

### 5.2.4. Tính khả vi

**ĐỊNH LÝ.** *Giả thiết rằng*

i) *Hàm  $f$  liên tục và có đạo hàm riêng  $f'_y$  liên tục trên miền  $[a, \infty) \times [\alpha, \beta]$ ;*

ii) *Tích phân  $I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$  hội tụ trên  $[\alpha, \beta]$ ;*

iii) *Tích phân  $\int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx$  hội tụ đều trên  $[\alpha, \beta]$ .*

Khi ấy hàm  $I(y)$  khả vi trên  $[\alpha, \beta]$  và đạo hàm được tính theo công thức:

$$I'(y) = \int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx.$$

**Chứng minh.** Xét dãy hàm

$$\varphi_n(y) = \int_a^{a+n} f(x, y) dx, \quad y \in [\alpha, \beta].$$

Với mỗi  $n$  cố định, theo định lý về tính khả vi của tích phân phụ thuộc tham số với cận hữu hạn, hàm  $\varphi_n(y)$  khả vi trên  $[\alpha, \beta]$  và

$$\varphi'_n(y) = \int_a^{a+n} f'_y(x, y) dx, \quad y \in [\alpha, \beta].$$

Ta có  $I(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(y)$  và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n(y) = \int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx.$$

Theo bô đề trong mục trước, dãy  $\{\varphi'_n(y)\}$  hội tụ đều trên tập  $[\alpha, \beta]$ . Áp dụng định lý về tính khả vi của dãy hàm ta thu được tính khả vi của hàm  $I(y)$  và

$$I'(y) = [\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(y)]' = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n(y) = \int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx.$$

Định lý được chứng minh xong.

### 5.2.5. Tính khả tích

**ĐỊNH LÝ.** *Giả thiết rằng*

i) *Hàm  $f$  liên tục trên miền  $[a, \infty) \times [\alpha, \beta]$  ;*

$$ii) \text{ Tích phân } I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx \text{ hội tụ đều trên } [\alpha, \beta].$$

Khi ấy  $I(y)$  khả tích trên  $[\alpha, \beta]$  và

$$\int_{\alpha}^{\beta} dy \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy.$$

**Chứng minh.** Từ các điều kiện của định lý suy ra  $I(y)$  là hàm liên tục trên  $[\alpha, \beta]$ , do đó khả tích. Để chứng minh công thức trên chỉ cần xét dãy hàm

$$\varphi_n(y) = \int_a^{a+n} f(x, y) dx$$

rồi áp dụng định lý về tính khả tích của dãy hàm hội tụ đều ta sẽ thu được

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} I(y) dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_n dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_a^{a+n} f(x, y) dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+n} dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy = \int_a^{\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy, \end{aligned}$$

điều phải chứng minh.

**Chú ý.** Kết quả trên có thể mở rộng cho trường hợp miền lấy tích phân của  $I(y)$  vô hạn (thí dụ  $[\alpha, \infty)$ ). Cụ thể là: Giả thiết hàm  $f$  liên tục và dương trên miền  $[\alpha, \infty) \times [\alpha, \infty)$  và các tích phân

$$J(y) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy, \quad I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx,$$

hội tụ tới các hàm liên tục. Khi ấy nếu một trong các tích phân  $\int_a^{\infty} dx \int_{\alpha}^{\infty} f dy$ ,

$\int_{\alpha}^{\infty} dx \int_a^{\infty} f dx$  tồn tại thì tích phân còn lại cũng tồn tại và chúng bằng nhau.

### 5.3. Một số tích phân đặc biệt

Trong mục này chúng ta sẽ sử dụng những kết quả ở mục trước để khảo sát một số tích phân dạng đặc biệt thường gặp trong một số lĩnh vực của toán học ứng dụng.

### 5.3.1. Tích phân Dirichlet

Tích phân Dirichlet là tích phân phụ thuộc tham số có dạng

$$I(y) = \int_0^\infty \frac{\sin(yx)}{x} dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Hàm  $f(x, y) = \frac{\sin(yx)}{x}$  xác định trên toàn bộ  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  nếu ta cho

$$f(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(yx)}{x} = y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Sau đây là một số tính chất đơn giản của tích phân Dirichlet.

- *Tính hội tụ của  $I(y)$ :* Nếu  $y = 0$ , ta có  $I(y) = 0$ . Nếu  $y \neq 0$ , áp dụng tiêu chuẩn Dirichlet cho  $f$  và  $\varphi(x, y) = 1/x$  trên miền  $[a, \infty) \times [\alpha, \beta]$  với  $a > 0$ ,

$\beta \geq \alpha > 0$  (hoặc  $\beta \leq \alpha < 0$ ) ta thấy ngay tích phân  $\int_a^\infty \frac{\sin(yx)}{x} dx$  hội tụ và khi  $a \rightarrow 0$  nó hội tụ tới  $I(y)$ . Hơn nữa, tích phân  $I(y)$  hội tụ đều trên miền  $[\alpha, \beta]$  với  $\beta \geq \alpha > 0$  (hoặc  $\beta \leq \alpha < 0$ ). Ngoài ra, từ bất đẳng thức

$$\left| \frac{\sin(yx)}{x} \right| \geq \frac{\sin^2(yx)}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2yx)}{2x}$$

thấy ngay là  $\int_0^\infty \left| \frac{\sin(yx)}{x} \right| dx$  phân kỳ (vì  $\int_0^\infty \frac{\cos(2yx)}{2x} dx$  hội tụ).

- *Công thức tính:*  $I(y) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y$ .

Thật vậy, bằng cách đổi biến  $yx = z$ , ta thấy  $I(y) = \operatorname{sgn}(y) \cdot \int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz$ . Để chứng

minh  $I(1) = \frac{\pi}{2}$ , xét tích phân phụ trợ

$$J(y) = \int_0^\infty e^{-yx} \frac{\sin x}{x} dx, \quad y \in [0, \infty).$$

Ta sẽ chỉ ra rằng

- (1)  $J(y)$  liên tục trên  $[0, \infty)$ ;
- (2)  $J(y)$  khả vi và  $J'(y) = -\frac{1}{1+y^2}$ ;

$$(3) \quad J(y) = -\arctan(y) + \frac{\pi}{2};$$

$$(4) \quad I(1) = J(0) = \lim_{y \rightarrow 0} J(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Thật vậy, để chứng minh (1) chỉ cần áp dụng định lý Dirichlet cho hàm đơn điệu  $\varphi(x, y) = \frac{1}{x}$  và nhận xét rằng tích phân  $\int_a^b e^{-yx} \sin x dx$  bị chặn đều. Như vậy, các tích phân

$$\int_a^\infty e^{-yx} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_0^\infty e^{-yx} \frac{\sin x}{x} dx$$

là *hội tụ đều* trên  $[0, \beta]$ ,  $\beta > 0$ . Theo kết quả về tính liên tục của tích phân hội tụ đều suy ra  $J(y)$  liên tục trên  $[0, \beta]$  với mọi  $\beta > 0$ .

Muốn chứng minh (2) ta lưu ý rằng trên miền  $[0, \infty) \times [\alpha, \beta]$ , với  $\beta \geq \alpha > 0$  bất kỳ, hàm  $f$  liên tục cùng với đạo hàm riêng  $f'_y = -e^{-yx} \sin x$ . Hơn nữa  $\int_0^\infty f'_y dx$  hội tụ đều (dùng tiêu chuẩn Weierstrass và lưu ý rằng  $|e^{-yx} \sin x| \leq e^{-\alpha x}$  với mọi  $y \in [\alpha, \beta]$ ). Vậy  $J(y)$  là khả vi và

$$J'(y) = -\int_0^\infty e^{-yx} \sin x dx = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Từ tính chất (2) suy ra

$$J(y) = -\int \frac{dy}{1+y^2} + c = -\arctan y + c, \quad y > 0,$$

trong đó hằng số  $c$  được xác định từ  $\lim_{y \rightarrow \infty} J(y) = 0$ , do  $|J(y)| \leq \int_0^\infty e^{-yx} dx = \frac{1}{y}$ . Từ

đây  $c = \frac{\pi}{2}$  và suy ra công thức (3) được chứng minh.

Cuối cùng, do  $J(y)$  liên tục ta có

$$I(1) = J(0) = \lim_{y \rightarrow 0} J(y) = \frac{\pi}{2}$$

và (4) đã được chứng minh.

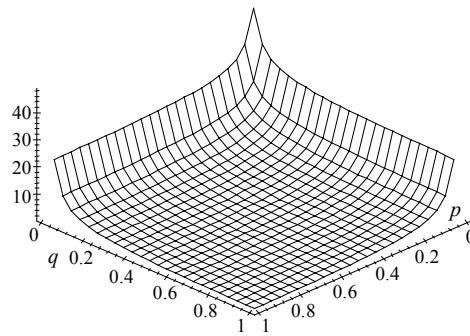
### 5.3.2. Tích phân Euler (loại I)

Tích phân Euler loại 1 hay *hàm Beta* là tích phân phụ thuộc 2 tham số có dạng:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0, q > 0.$$

**Một số tính chất của hàm Beta:**

1) *Tính hội tụ.* Với  $p \geq 1, q \geq 1$  hàm  $f(x, p, q) = x^{p-1} (1-x)^{q-1}$  liên tục trên  $[0, 1]$  nên tích phân xác định bình thường. Với  $p \in (0, 1)$ ,  $f(x, p, q)$  tương đương với  $\frac{1}{x^{1-p}}$  khi  $x \rightarrow 0^+$  cho nên tích phân hội tụ. Với  $q \in (0, 1)$ ,  $f(x, p, q)$  tương đương với  $\frac{1}{x^{1-q}}$  khi  $x \rightarrow 1^-$  nên tích phân cũng hội tụ. Như vậy, hàm Beta xác định với mọi  $p > 0, q > 0$ . Hàm Beta có đồ thị như trong Hình vẽ 5.1.



Hình 5.1

2) *Tính hội tụ đều.* Với mọi  $p_1 > p_0 > 0, q_1 > q_0 > 0$  có định, tích phân hội tụ đều trên miền  $[p_0, p_1] \times [q_0, q_1]$  vì khi  $x \rightarrow 0^+$  và  $x \rightarrow 1^-$  ta có đánh giá:

$$x^{p-1} (1-x)^{q-1} \leq x^{p_0-1} (1-x)^{q_0-1}.$$

3) *Tính liên tục.* Hàm Beta liên tục tại mọi điểm trên miền xác định vì tại mọi  $p > 0, q > 0$  ta chọn  $p_0 = p/2, q_0 = q/2, p_1 = 2p, q_1 = 2q$  thì tích phân hội tụ đều trên miền  $[p_0, p_1] \times [q_0, q_1]$ , do đó liên tục trên miền này.

4) *Tính đối xứng:*  $B(p, q) = B(q, p)$  được suy trực tiếp từ định nghĩa với phép đổi biến  $x \mapsto 1-x$ .

5) *Công thức truy hồi* (bằng cách kiểm tra trực tiếp)

$$B(p+1, q+1) = \frac{q}{(p+q+1)} B(p+1, q) = \frac{q}{(p+q+1)} B(p, q+1).$$

Trường hợp riêng:

$$\begin{aligned} B(1,1) &= 1; \quad B(p+1,1) = \frac{1}{p+1}; \\ B(p+1,n) &= \frac{n!}{(p+n)(p+n-1)...(p+2)} B(p+1,1) = \frac{n!}{(p+n)(p+n-1)...(p+1)}; \\ B(m,n) &= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!} B(1,1) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}. \end{aligned}$$

### 5.3.3. Tích phân Euler (loại II)

Tích phân Euler loại II hay hàm Gamma là tích phân phụ thuộc một tham số có dạng:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0.$$

**Một số tính chất của hàm Gamma:**

- 1) *Tính hội tụ.* Để thấy, tích phân hội tụ với mọi  $p > 0$ , và hội tụ đều trên miền  $[p_0, p_1]$  với  $p_1 > p_0 > 0$  bất kỳ.
- 2) *Tính liên tục* trên miền xác định  $p > 0$ . Suy ra ngay từ tính hội tụ đều.
- 3) *Công thức truy hồi* (lấy tích phân theo từng phần)

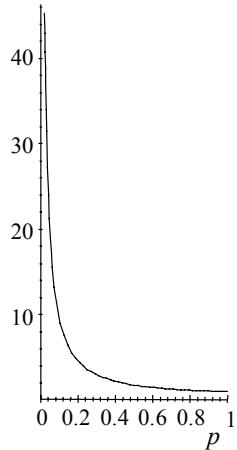
$$\Gamma(n+p) = (n+p-1)(n+p-2)...p\Gamma(p).$$

Trường hợp riêng:

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad ,$$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Hàm Gamma có đồ thị như Hình vẽ 5.2.



*Hình 5.2*

Bằng một số phép biến đổi không phức tạp, ta có công thức liên hệ giữa hàm Beta và hàm Gamma:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

# ***Bài tập và tính toán thực hành Chương 5***

1. Tích phân phụ thuộc tham số.....	202
2. Các tích phân đặc biệt.....	204
2.1. Tích phân Euler.....	204
2.2. Tích phân Dirichlet .....	204
3. Thực hành tính toán .....	205
3.1. Tính toán với tích phân phụ thuộc tham số .....	205
3.2. Các hàm số đặc biệt .....	206

## **1. Tích phân phụ thuộc tham số**

**Bài 1.** Tính các giới hạn sau:

$$\begin{aligned}
 & 1) \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{1+a} \frac{1}{1+x^2+a^2} dx; \quad 2) \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+a^2} dx; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n} dx; \\
 & 4) \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^2 \frac{\ln(x+|t|)}{\ln(x^2+t^2)} dx; \quad 5) \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{xe^{-\frac{x^2}{y^2}}}{y^2} dx; \quad 6) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t} dt .
 \end{aligned}$$

**Bài 2.** Tính các tích phân sau:

$$\begin{array}{ll}
 1) \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx; & 2) \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx; \\
 3) \int_0^{+\infty} \left( \frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx; & 4) \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2} dx; \\
 5) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cos 2ax dx; & 6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx .
 \end{array}$$

**Bài 3.** Cho  $F(t) := \int_0^2 \int_{x-t}^{x+t} \sin(x^2 + y^2 - t^2) dy dx$ . Tính đạo hàm của  $F(t)$ .

**Bài 4.** Chứng minh công thức Frulanhi

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0),$$

trong đó  $f(x)$  là hàm liên tục và tích phân  $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  có nghĩa với mọi  $A > 0$ .

**Bài 5.** Dùng công thức Frulanhi để tính tích phân  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 ax - \sin^4 bx}{x} dx$ .

**Bài 6.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Bằng cách lấy đạo hàm theo tham số, hãy tính:

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{xe^{x^2}} dx \quad (\text{với } a > -1); \quad b) I = \int_0^1 \frac{\arctan \alpha}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$$

**Bài 7.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Biểu diễn qua các hàm Gamma và Beta và tính giá trị tích phân:

$$a) I = \int_0^a x^4 \sqrt{(a^2 - x^2)^3} dx \quad (\text{với } a > 0); \quad b) I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[6]{x}}{(1+x)^3} dx.$$

**Bài 8.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Dùng tích phân Euler tính  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$ .

**Bài 9.** (Thi môn Giải tích, học kỳ II, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội) Tính tích phân

$$a) I_n = \int_0^1 \left( \ln \frac{1}{x} \right)^n dx \quad (n \text{ tự nhiên } > 1); \quad b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} dx; \quad c) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{1-x^6}}.$$

**Bài 10.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Xét sự hội tụ đều của  $\int_{-1}^1 \frac{\arctan(y+x)}{\sqrt{1-x^2}} dy$ .

**Bài 11.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

a) Chứng minh rằng hàm  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{1+(x+y)^2} dy$  liên tục và khả vi trên khoảng  $0 < x < +\infty$ .

b) Chứng minh rằng  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x+y)}{1+y^2} dy$  liên tục và khả vi trên  $\mathbb{R}$ .

## 2. Các tích phân đặc biệt

### 2.1. Tích phân Euler

**Bài 1.** Dùng các hàm Gamma và Beta để tính các tích phân sau:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx; \quad 2) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx; \quad 3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}; \quad 4) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}; \\ 5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx; \quad 6) \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx; \quad 7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^n x dx; \quad 8) \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx. \end{aligned}$$

**Bài 2.** Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} 1) \text{Tích phân } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \ln x}{x} dx \text{ hội tụ.} \\ 2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \ln x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \Gamma'(1), \text{ trong đó } \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \text{ là hàm Gamma.} \end{aligned}$$

### 2.2. Tích phân Dirichlet

**Bài 1.** Chứng minh rằng tích phân Dirichlet có đạo hàm khi  $\alpha \neq 0$ , tuy nhiên không thể tìm nó bằng quy tắc Leibnitz.

**Bài 2.** Xuất phát từ tích phân  $J(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx, \quad \alpha \geq 0$ , hãy tính tích phân Dirichlet  $D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$ .

**Bài 3.** Tính các tích phân:  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 ax}{x} dx$  và  $\int_0^{+\infty} \left( \frac{\sin ax}{x} \right)^3 dx$ .

### 3. Thực hành tính toán

#### 3.1. Tính toán với tích phân phụ thuộc tham số

Muốn tính toán với tích phân phụ thuộc tham số, ta sử dụng các lệnh như với tích phân thông thường. Dưới đây là một số ví dụ.

##### 1. Tính giới hạn

**Bài 1.** Tính  $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{1+a} \frac{1}{1+x^2+a^2} dx$ .

$$[> \text{limit}(\text{int}(1/(1+x^2+a^2), x=a..1+a), a=0); \\ \frac{1}{4}\pi]$$

**Bài 2.** Tính  $\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + a^2} dx$ .

$$[> \text{limit}(\text{int}(\text{sqrt}(x^2+a^2), x=-1..1), a=0); \\ 1]$$

**Bài 3.** Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n} dx$ .

$$[> \text{limit}(\text{int}(1/(1+(1+x/n)^n), x=0..1), n=\text{infinity}); \\ -\ln(1+e)+1+\ln 2]$$

**Bài 4.** Tính  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^2 \frac{\ln(x+|t|)}{\ln(x^2+t^2)} dx$ .

$$[> \text{limit}(\text{int}(\ln(x+abs(t))/\ln(x^2+t^2), x=1..2), t=\text{infinity}); \\ \frac{1}{2}]$$

**Bài 5.** Tính  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{xe^{-\frac{x^2}{y^2}}}{y^2} dx$ .

$$[> \text{limit}(\text{int}((x/y^2)*\text{exp}(-x^2/y^2), x=0..1), y=0); \\ \frac{1}{2}]$$

##### 2. Tính giá trị tích phân theo tham số

**Bài 6.** Tính  $\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx$ .

$$[> \text{int}((\sin(a*x))*\cos(b*x))/x, x=0..+\text{infinity});$$

$$\frac{1}{4} \operatorname{signum}(a+b)\pi + \frac{1}{4} \operatorname{signum}(a-b)\pi$$

**Bài 7.** Tính  $\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx$ .

[> int((sin(a\*x)\*sin(b\*x))/x,x=0..+infinity);

$$\frac{1}{4} \operatorname{signum}(a+b)\pi - \frac{1}{4} \operatorname{signum}(a-b)\pi + \frac{1}{2} \ln(a+b) - \frac{1}{2} \ln(a-b)$$

**Bài 8.** Tính  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 ax}{x} dx$ .

[> int((sin(a\*x)^3)/x,x=0..+infinity);

$$\frac{1}{4} \operatorname{signum} a.\pi$$

**Bài 9.** Tính  $\int_0^{+\infty} \left( \frac{\sin ax}{x} \right)^3 dx$ .

[> int((sin(a\*x)/x)^3,x=0..+infinity);

$$\frac{3}{8} \operatorname{signum} a.\pi a^2$$

**Bài 10.** Tính  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 ax - \sin^4 bx}{x} dx$ .

[> int((sin(a\*x)^4-sin(b\*x)^4)/x,x=0..+infinity);

$$\frac{3}{16} \pi \operatorname{signum} a - \frac{3}{16} \pi \operatorname{signum} b + \frac{3}{8} \ln a - \frac{3}{8} \ln b$$

### 3.2. Các hàm số đặc biệt

Trước đây việc tính giá trị các hàm số đặc biệt (như các hàm Gamma, Bêta,...) tại những điểm thông thường (không quá đặc biệt) là việc không thể tiến hành trong những giờ làm bài tập trên lớp (vì việc tính toán phải mất nhiều ngày, dù vẫn phải dùng tới máy tính). Nay, với các chương trình tính toán thông dụng, tính hình hoàn toàn đổi khác, vì việc tính toán các tích phân này đã trở thành bình thường như khai căn một số.

#### 1. Hàm Gamma

Để tính giá trị của hàm Gamma tại một điểm  $a$  nào đó, ta dùng lệnh **GAMMA(a)**. Thí dụ, tính giá trị của hàm Gamma tại 1:

[> GAMMA(1);

1

Tính giá trị của hàm Gamma tại điểm -1.4:

[> GAMMA(-1.4);

2.659271873

**2. Hàm Beta**

Tính giá trị của hàm Beta tại một điểm nào đó, thí dụ (1,2):

[> **Beta (1, 2)** ;

$$\frac{1}{2}$$

## Chương 6

# Đường cong và mặt cong

<b>6.1. Đường cong .....</b>	<b>207</b>
6.1.1. Khái niệm về đường cong .....	207
6.1.2. Độ dài đường cong .....	209
6.1.3. Tiếp tuyến và mặt pháp tuyến .....	211
6.1.4. Độ cong và pháp tuyến chính.....	212
6.1.5. Độ xoắn và phương trình Frenet-Serret .....	214
<b>6.2. Mặt cong .....</b>	<b>216</b>
6.2.1. Khái niệm mặt cong .....	216
6.2.2. Mặt tiếp tuyến và pháp tuyến .....	218
<b>Phương trình xác định mặt tiếp tuyến .....</b>	<b>219</b>
6.2.3. Diện tích mặt cong và diện tích hình chiếu .....	220
<b>6.3. Các dạng toàn phương.....</b>	<b>222</b>
6.3.1. Dạng toàn phương thứ nhất.....	222
6.3.2. Dạng toàn phương thứ hai.....	223
<b>6.4. Đường trên mặt cong .....</b>	<b>225</b>
6.4.1. Độ cong .....	225
6.4.2. Thiết diện thẳng góc và chỉ đồ Dupin .....	226

### 6.1. Đường cong

#### 6.1.1. Khái niệm về đường cong

Giả sử  $X$  là hàm vectơ một biến liên tục từ đoạn hoặc khoảng  $I \subseteq \mathbb{R}$  vào  $\mathbb{R}^n$ .

Khi ấy tập ảnh

$$C = \{X(t) : t \in I\}$$

được gọi là *đường cong*  $C$  trong  $\mathbb{R}^n$ .

Ta nói đường cong  $C$  là

- *trơn* nếu  $X$  là hàm khả vi liên tục;

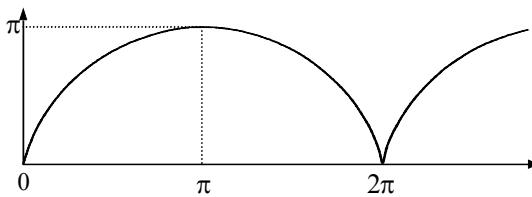
- *tron tùng khúc* nếu  $X$  là khả vi liên tục, trừ một số hữu hạn điểm trên  $I$ ;
- *kín* nếu  $I = [a,b]$  và  $X(a) = X(b)$ ;
- *kín, đơn* nếu  $C$  kín và  $X$  là *phép tiêm* (ánh xạ 1-1) trên nửa khoảng  $[a,b]$ .

Phương trình  $X = X(t)$ ,  $t \in I$  được gọi là *phương trình tham số* của đường cong  $C$  và  $t$  là tham số. Vì những lý do ứng dụng trong Vật lý, Cơ học, ... hai trường hợp được quan tâm nhiều nhất là  $n = 2$  và  $n = 3$ . Người ta nói *đường cong phẳng* hoặc *đường cong không gian* để chỉ các đường cong tương ứng trong hai trường hợp này.

### Thí dụ

1) Cho  $X(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Đường cong phẳng này có tên là *cycloid*, là quỹ tích của điểm  $P$  cố định trên đường tròn bán kính  $a$  khi đường tròn này lăn trên trục  $Ox$ . Đây là đường cong tròn. Nó có thể xem như đồ thị của một hàm  $y = g(x)$ , bằng cách giải  $t$  qua  $x$  và thay vào  $y$  theo phương trình

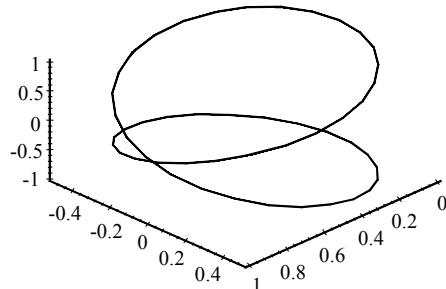
$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}$$



Hình 6.1: Đường cycloid khi  $a = 1$ .

Lưu ý rằng vẽ tròn tru hay gãy khúc của đường cong (về mặt trực quan hình học) không liên quan đến tính khả vi hay không khả vi của hàm  $y = g(x)$ . Như ta thấy, đường cong cycloid không phải là tròn tru (xem hình vẽ), mặc dù hàm biểu diễn nó là khả vi.

2) Cho  $X(t) = (\sin^2 t, \sin t \cos t, \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Đây là đường cong không gian, tròn, kín và đơn. Đồ thị của nó như sau



## Hình 6.2

(Người đọc sẽ được tự kiểm định trong phần thực hành tính toán trên máy).

### 6.1.2. Độ dài đường cong

Giả sử  $C$  là đường cong trong  $\mathbb{R}^n$  cho bởi phương trình tham số  $X = X(t)$ ,  $t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . Như trong Chương 5 chúng ta đã biết đạo hàm  $X'(t)$  biểu diễn vectơ vận tốc tức thời của chuyển động  $t \mapsto X(t)$  tại  $t$ . Nếu gọi  $s(t)$  là độ dài quãng đường đi được sau thời gian  $t$  thì vận tốc của chuyển động sẽ là:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}.$$

Như vậy  $v(t) = \|X'(t)\| = \sqrt{(x'_1(t))^2 + \dots + (x'_n(t))^2}$  trong đó  $x'_1, \dots, x'_n$  là các hàm tọa độ của  $f'$ . Từ đây ta định nghĩa *độ dài* của đường cong  $C$  là đại lượng

$$\int_a^b \|X'(t)\| dt.$$

#### Chú ý

1) Đối với đường cong không kín, người ta còn có thể định nghĩa độ dài đường cong như là giới hạn của độ dài đường gấp khúc xấp xỉ đường cong đó. Cụ thể, ta xét phân hoạch  $P$  của đoạn  $[a, b]$  cho bởi

$$t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b,$$

với *bề rộng* (hay đôi khi còn gọi là *đường kính*) của phân hoạch là

$$\delta = \max \{t_{i+1} - t_i : i = 0, 1, \dots, k-1\}.$$

#### Đường gấp khúc

$$[X(t_0), X(t_1)], [X(t_1), X(t_2)], \dots, [X(t_{k-1}), X(t_k)]$$

có độ dài

$$l(P) = \sum_{i=0}^{k-1} \|X(t_{i+1}) - X(t_i)\|.$$

Nếu  $l(P)$  tiến dần tới giới hạn  $l$  khi  $\delta \rightarrow 0$  thì  $l$  được gọi là *độ dài đường cong*  $C$ . Áp dụng công thức Taylor với  $m=1$ , ta có thể chứng minh được rằng:

$$l = \int_a^b \|X'(t)\| dt$$

đúng như định nghĩa đã nêu ở trên.

2) Nếu đường cong cho bởi phương trình trong hệ tọa độ cực, chẳng hạn như

$$r = \varphi(\theta), \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,$$

thì việc tính độ dài cũng dựa theo công thức đã cho. Cụ thể là:

$$X(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (\varphi(\theta) \cos \theta, \varphi(\theta) \sin \theta)$$

với tham số  $\theta$  thay cho  $t$  và  $\|X'(\theta)\| = \sqrt{[\varphi(\theta)]^2 + [\varphi'(\theta)]^2}$ . Do đó:

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[\varphi(\theta)]^2 + [\varphi'(\theta)]^2} d\theta .$$

3) Tính độ dài đường *astroid*

$$X(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}] .$$

Giải. Đạo hàm của  $X$  là

$$X'(t) = (-3a \cos^2 t \sin t, 3a \sin^2 t \cos t) .$$

Do đó

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \frac{3a}{2} .$$

4) Tính độ dài đường cong không gian

$$X(t) = (e^t, \sin t, t), \quad t \in [1, \pi] .$$

Giải. Ta có  $X'(t) = (e^t, \cos t, 1)$ , do đó

$$l = \int_1^\pi \sqrt{(e^{2t} + \cos^2 t + 1)} dt .$$

Việc tính tích phân này không dễ dàng. Tuy nhiên, nếu dùng chương trình tính toán trên máy, như Maple trong phần thực hành tính toán, ta sẽ có ngay kết quả với độ chính xác tùy chọn, thí dụ:  $l \approx 20,6$ .

Chú ý rằng độ dài khúc đường cong từ điểm  $X(a)$  tới điểm  $X(t)$  được cho bởi công thức

$$s(t) = \int_a^t \|X'(t)\| dt . \quad (*)$$

Do  $s(t)$  là hàm tăng, liên tục nên ta có thể dùng độ dài làm tham số cho đường cong  $C$ . Phương trình  $X = X(s)$  trong đó  $s$  là độ dài đoạn cong từ điểm cố định  $P_0 \in C$  tới điểm  $P$  được gọi là phương trình tham số tự nhiên của  $C$ , còn  $s$  được gọi là tham số tự nhiên. Công thức (\*) cho ta mối liên hệ giữa tham số tự nhiên và tham số  $t$  bất kỳ. Ngoài ra, cũng từ (\*) ta có mối liên hệ

$$\frac{ds}{dt} = \|X'(t)\| \text{ hay } |ds| = \|dX(t)\| .$$

Đôi khi để phân biệt đạo hàm theo *tham số tự nhiên* và đạo hàm theo tham số  $t$ , người ta dùng ký hiệu

$$\frac{dX}{ds} = X' \quad \text{và} \quad \frac{dX}{dt} = \dot{X}.$$

### 6.1.3. Tiếp tuyến và mặt pháp tuyến

Giả sử  $C$  là đường cong không gian xác định bởi phương trình tham số dạng tọa độ

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad a \leq t \leq b \\ z = z(t) \end{cases}$$

hoặc dạng vectơ

$$X = X(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Cố định điểm  $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in C$  và xét cát tuyến đi qua  $P_0$  và  $P_t = (x(t), y(t), z(t))$ . Phương trình cát tuyến này là

$$\frac{x - x(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y(t) - y(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z(t) - z(t_0)}.$$

Dùng ký hiệu số gia  $\Delta x, \Delta y$  và  $\Delta z$  tại  $t_0$  ứng với số gia  $\Delta t = t - t_0$  của biến  $t$  phương trình trên có dạng

$$\frac{x - x(t_0)}{\Delta x} = \frac{y - y(t_0)}{\Delta y} = \frac{z - z(t_0)}{\Delta z}. \quad (*)$$

Tiếp tuyến của đường cong  $C$  tại điểm  $P_0$  là giới hạn (nếu tồn tại) của cát tuyến đi qua  $P_0, P_t$  khi  $\Delta t$  dần tới 0. Nếu  $X(t)$  có đạo hàm tại  $t_0$  là  $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$  thì, bằng cách chia các vế của  $(*)$  cho  $\Delta t$  rồi qua giới hạn khi  $\Delta t \rightarrow 0$ , ta sẽ thu được phương trình của tiếp tuyến là

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}, \quad (**)$$

trong đó ta hiểu *một cách qui ước* rằng phân thức nào có mẫu số là 0 thì tử số cũng phải bằng 0.

Mặt pháp tuyến của đường cong  $C$  tại  $P_0$  là mặt phẳng đi qua  $P_0$  và vuông góc với tiếp tuyến tại đó. Từ phương trình tiếp tuyến ta có ngay phương trình mặt pháp tuyến tại điểm  $P_0$  là:

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0.$$

**Thí dụ.** Tìm tiếp tuyến và mặt pháp tuyến của đường cong

$$X(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in \mathbb{R},$$

tại điểm  $P_0 = X\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

Giải. Tính đạo hàm của  $X$  tại  $t_0 = \frac{\pi}{4}$  ta có

$$\begin{aligned} X'(t) &= (-\sin t, \cos t, 1), \\ X'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right). \end{aligned}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đường cong tại  $P_0 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \pi/4)$  là

$$\frac{x - \sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = \frac{y - \sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = z - \pi/4$$

và phương trình mặt pháp tuyến tại  $P_0$  là

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y - \frac{\sqrt{2}}{2}) + (z - \frac{\pi}{4}) = 0.$$

#### 6.1.4. Độ cong và pháp tuyến chính

Giả sử  $C$  là đường cong không gian cho bởi phương trình tham số tự nhiên  $X = X(s)$ , trong đó  $X(s)$  là hàm vectơ khả vi liên tục hai lần.

*Độ cong* của  $C$  tại điểm  $P = X(s)$ , được ký hiệu  $\kappa$ , là đại lượng

$$\kappa = \|X''\|.$$

Nếu như  $\kappa \neq 0$ , thì đại lượng  $\rho = 1/\kappa$  được gọi là *bán kính độ cong*.

Ký hiệu  $T$  là *vector tiếp tuyến đơn vị* của  $C$  tại  $P$ . Ta có

$$T = X' \quad \text{vì} \quad \|X'\| = \left\| \frac{dX}{ds} \right\| = 1.$$

Khi ấy  $T(s) \cdot T(s) = 1$  cho nên  $T(s) \cdot T'(s) = 0$ , tức là  $T'$  nằm trong mặt pháp tuyến của  $C$  tại  $P$ .

Giả sử rằng  $\kappa \neq 0$ . Khi ấy  $T' \neq 0$ , và vectơ đơn vị  $N$  theo hướng pháp tuyến  $T'$  được gọi là *pháp tuyến chính*. Như vậy

$$T' = \kappa N$$

Vectơ đơn vị  $B = T \times N$  được gọi là *trùng pháp tuyến*. Vectơ này vuông góc với  $T$  và  $N$ .

Mặt phẳng cẳng bởi  $T$  và  $N$  được gọi là *mặt phẳng mặt tiếp* (hay còn gọi là *mặt áp tiếp*) của  $C$  tại  $P$ .

Ba vectơ đơn vị vuông góc với nhau  $T, N, B$  tạo thành hệ tọa độ trực chuẩn có gốc tại  $P$  và được gọi là *bộ tam diện Frenet-Serret* của đường cong.

#### Ý nghĩa hình học của độ cong và mặt phẳng mặt tiếp

Trước hết chúng ta xét trường hợp  $\kappa = 0$  tại mọi điểm, tức là  $X''(s) = 0$ , suy ra  $X'(s)$  là *vector hằng*. Chứng tỏ  $C$  là đường thẳng. Ngược lại, nếu  $C$  là đường thẳng thì tại mọi điểm, độ cong bằng 0 và như vậy  $\kappa = 0$  là đặc trưng của đường thẳng.

Ký hiệu  $\alpha$  là góc tạo bởi tiệp tuyến  $X'(s)$  tại  $P = X(s)$  và tiệp tuyến  $X'(s + \Delta s)$  tại điểm  $Q = X(s + \Delta s)$ . Khi ấy

$$\|X''(s)\| = \lim_{|\Delta s| \rightarrow 0} \frac{\|\Delta X\|}{|\Delta s|} = \lim_{|\Delta s| \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{|\Delta s|} = \lim_{|\Delta s| \rightarrow 0} \frac{\alpha}{|\Delta s|}$$

(vì  $X'(s)$  và  $X'(s + \Delta s)$  là những vecto đơn vị). Như vậy  $\kappa = \|X''(s)\|$  là giới hạn của tỷ số giữa góc quay của tiệp tuyến và độ dài của đoạn cung khi độ dài đoạn này dần tới 0 (đối với một cung tròn thì dễ dàng chỉ ra rằng tỷ số này không đổi tại mọi điểm và bằng nghịch đảo của bán kính; khi ấy  $\rho = 1/\kappa$  đích thực là bán kính).

Nếu cố định điểm  $P = X(s)$  và lấy  $P_1, P_2$  là hai điểm bất kỳ trên  $C$  rồi xét mặt phẳng đi qua  $P, P_1, P_2$ . Khi  $P_1$  và  $P_2$  tiến dần tới  $P$  thì mặt phẳng này tiến tới mặt phẳng chứa  $X''$  và tiệp tuyến  $X'$ . Đó chính là mặt phẳng mặt tiệp.

**Thí dụ.** Đường cong  $C$  được cho bởi phương trình tham số

$$x = 3 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad z = 4t.$$

Hãy tìm các vecto tiệp tuyến, pháp tuyến chính, trùng pháp tuyến và độ cong tại điểm  $P$  bất kỳ.

Giải. Tính đạo hàm của vecto  $X(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t)$  ta có

$$\dot{X}(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t, 4)$$

$$\dot{s} = \|\dot{X}(t)\| = \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2 + 4^2} = 5.$$

Vậy

$$T = \frac{dX}{ds} = \frac{dX/dt}{ds/dt} = \left( -\frac{3}{5} \sin t, \frac{3}{5} \cos t, \frac{4}{5} \right);$$

$$T' = \frac{dT}{ds} = \frac{dT/dt}{ds/dt} = \left( -\frac{3}{25} \cos t, -\frac{3}{25} \sin t, 0 \right);$$

Do đó độ cong  $\kappa$  là

$$\kappa = \|T'\| = \sqrt{\left( -\frac{3}{25} \cos t \right)^2 + \left( -\frac{3}{25} \sin t \right)^2} = \frac{3}{25}$$

và pháp tuyến chính là

$$N = \frac{1}{\kappa} T' = \left( -\cos t, -\sin t, 0 \right).$$

Trùng pháp tuyến được tính theo công thức

$$B = T \times N = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \cos t & \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \sin t & \frac{4}{5} \\ -\sin t & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \sin t & \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \cos t & \frac{3}{5} \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix} = \left( \frac{4}{5} \sin t, -\frac{4}{5} \cos t, \frac{3}{5} \right).$$

### 6.1.5. Độ xoắn và phương trình Frenet-Serret

Giả sử  $C$  là đường cong như ở mục trước, với  $\kappa \neq 0$ . Để tìm hiểu sự biến đổi của bộ tam diện Frenet-Serret  $T, N, B$  chúng ta xét đạo hàm của pháp tuyến chính và trùng pháp tuyến.

Trước hết vì  $B \cdot B = 1$  nên  $B \cdot B' = 0$ , tức là  $B'$  vuông góc với  $B$ . Ngoài ra do  $B$  vuông góc với  $T$  nên  $T \cdot B = 0$ , suy ra

$$T \cdot B' = -T' \cdot B = -(\kappa N) \cdot B = 0,$$

do  $B'$  vuông góc với  $N$ . Điều này chứng tỏ  $B'$  vuông góc với  $T$ .

Như vậy  $B'$  đồng phuong với  $N$ , hay nói cách khác, tồn tại số  $\tau$  sao cho

$$B' = -\tau N.$$

Đại lượng  $\tau$  này được gọi là *độ xoắn* của  $C$  tại điểm đang xét. Nếu  $\tau \neq 0$ , đại lượng  $\rho = 1/\tau$  được gọi là *bán kính độ xoắn*.

Để tính đạo hàm  $N'$ , ta nhớ lại rằng  $N \cdot N = 1$  nên  $N'$  vuông góc với  $N$ , suy ra tồn tại số  $\alpha, \beta$  để

$$N' = \alpha T + \beta B.$$

Muốn xác định các hệ số  $\alpha$  và  $\beta$  chúng ta áp dụng các công thức

$$T \cdot N = 0$$

suy ra

$$0 = T' \cdot N + T \cdot N' = \kappa N \cdot N + T \cdot (\alpha T + \beta B) = \kappa + \alpha;$$

kéo theo

$$\alpha = -\kappa;$$

Đồng thời

$$N \cdot B = 0$$

suy ra

$$0 = N' \cdot B + N \cdot B' = (T + \beta B) \cdot B + N(-\tau N) = \beta - \tau,$$

kéo theo

$$\beta = \tau.$$

Từ các công thức đạo hàm trên ta thu được hệ phương trình sau gọi là *phương trình Frenet-Serret*

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = -\kappa T + \tau B \\ B' = -\tau N \end{cases}$$

Công thức tính độ xoắn

$$\tau = \frac{1}{\kappa^2} (X' \times X'').X''' \quad (*)$$

Thật vậy, do  $X'' = \kappa N$ , theo phương trình Frenet-Serret ta có

$$X''' = \kappa N' + \kappa' N = -\kappa^2 T + \kappa \tau B + \kappa' N.$$

Do đó

$$(X' \times X'') \cdot X''' = (\kappa T \times N) \cdot (-\kappa^2 T + \kappa \tau B + \kappa' N) = \kappa B \cdot (-\kappa^2 T + \kappa \tau B + \kappa' N) = \kappa^2 \tau.$$

và suy ra công thức (\*).

### **Ý nghĩa hình học của độ xoắn**

Ký hiệu  $\beta$  là góc tạo bởi trung pháp tuyến  $B(s)$  của đường cong tại  $P = X(s)$  và trung pháp tuyến  $B(s + \Delta s)$ . Khi ấy theo phương trình Frenet-Serret, ta có

$$|\tau| = \lim_{|\Delta s| \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta B}{\Delta s} \right\| = \lim_{|\Delta s| \rightarrow 0} \frac{\|\Delta B\|}{\beta} \lim_{|\Delta s| \rightarrow 0} \frac{\beta}{|\Delta s|} = \lim_{|\Delta s| \rightarrow 0} \frac{\beta}{|\Delta s|},$$

vì  $B$  là vectơ đơn vị nên  $\lim_{|\Delta s| \rightarrow 0} \frac{\|\Delta B\|}{\beta} = \lim_{|\Delta s| \rightarrow 0} \frac{2 \sin \beta / 2}{|\Delta s|} = 1$ . Như vậy giá trị tuyệt đối của độ xoắn là giới hạn tỷ số giữa góc quay của trung pháp tuyến và độ dài đoạn cung khi độ dài này dần tới 0, hay đó là tốc độ xoay của mặt phẳng mặt tiếp.

Trường hợp đặc biệt, khi  $\tau = 0$  tại mọi điểm của đường cong, trung pháp tuyến  $B$  là vectơ hằng  $b_0$ . Vì  $B$  vuông góc với mặt phẳng mặt tiếp nên

$$0 = b_0 \frac{dX}{ds} = \frac{d}{ds}(b_0 \cdot X).$$

Suy ra  $b_0 \cdot X(s)$  là hằng số. Chúng ta  $X(s)$  luôn nằm trên mặt phẳng  $b_0 \cdot X = \text{const}$  (hằng số) và  $C$  là đường cong phẳng. Ngược lại, nếu  $C$  là đường cong phẳng (tức là  $C$  nằm trên một mặt phẳng) thì trung pháp tuyến vuông góc với mặt phẳng này và là vectơ hằng, suy ra  $\tau = 0$ . Như vậy  $\text{độ xoắn bằng } 0$  là đặc trưng của *đường cong phẳng*.

**Thí dụ.** Hãy tính độ xoắn của đường cong trong thí dụ ở mục trước.

Giai. Ta đã tính được trung pháp tuyến

$$B = \left( \frac{4}{5} \sin t, -\frac{4}{5} \cos t, \frac{3}{5} \right).$$

Đạo hàm của trung pháp tuyế̄n theo tham số tự nhiên đư̄c tính như sau

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dB/dt}{ds/dt} = \frac{1}{5} \left( \frac{4}{5} \cos t, \frac{4}{5} \sin t, 0 \right).$$

Theo phư̄ong trình Frenet-Serret, ta có

$$-\tau N = -\tau (-\cos t, -\sin t, 0) = B' = \left( \frac{4}{25} \cos t, \frac{4}{25} \sin t, 0 \right).$$

Suy ra  $\tau = 4/25$ .

## 6.2. Mă̄t cong

### 6.2.1. Khái nīem mă̄t cong

Giả sử  $U$  là một mīền liên thông trong mặt phẳng  $u, v$  (tức là không tồn tại hai tập mở rời nhau mà hợp của chúng chứa  $U$  đồng thời mỗi tập đều chứa điểm của  $U$ ), và là hợp của hữu hạn hoặc vô hạn đếm đư̄c mīền con *đồng phôi* với *hình tròn đơn vị*;  $X(u, v)$  là một ánh xạ liên tục từ  $U$  vào  $\mathbb{R}^3$  sao cho thu hẹp của nó trên mỗi mīền con là một đồng phôi. Khi ấy tập ảnh

$$S = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : X = X(u, v), (u, v) \in U\}$$

được gọi là *mă̄t cong*.

Ta nói mă̄t cong  $S$  là

- *tron* nếu ánh xạ  $X$  khả vi liên tục và ma trận Jacobi

$$J_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

tại mọi điểm  $(u, v) \in U$  có hạng bằng 2, trong đó  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  là các *hà̄m tọa độ* của  $X$

- *tron* *tùng mảnh* nếu  $U$  có thể phân thành hữu hạn mīền mà trên từng mīền ấy  $X$  khả vi liên tục và ma trận Jacobi tại mọi điểm có hạng bằng 2.

Phư̄ong trình  $X = X(u, v)$  được gọi là *phư̄ong trình tham số* của mă̄t cong  $S$ .

Nếu từ hệ phư̄ong trình

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

ta giải được

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

rồi

$$z = z(u(x, y), v(x, y)) = g(x, y),$$

thì phương trình  $z = g(x, y)$  được gọi là *dạng hiển* xác định mặt  $S$ .

Nếu cũng từ hệ phương trình trên chúng ta có thể loại  $u, v$  để thu được phương trình:

$$F(x, y, z) = 0$$

thì phương trình này được gọi là *dạng ẩn* xác định mặt  $S$ .

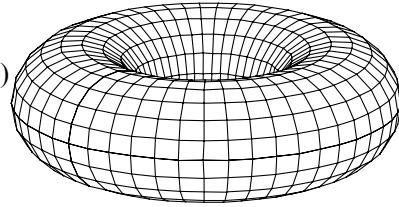
**Nhận xét.** Nếu  $S$  là mặt tròn thì tại lân cận đủ nhỏ của một điểm bất kỳ  $(u, v) \in U$  ta có thể giải được  $u, v$  qua hai trong số ba biến  $x, y, z$  (áp dụng định lý hàm ẩn). Biến còn lại sẽ là hàm của hai biến kia và cho ta dạng hiển xác định mặt cong trong lân cận điểm đã cho.

### Thí dụ

1) Giả sử  $0 < b < a$ . Mặt xuyên (xem hình vẽ) được cho bởi phương trình tham số:

$$\begin{aligned} x &= (a + b \cos \varphi) \cos \theta, \\ y &= (a + b \cos \varphi) \sin \theta, \\ z &= b \sin \varphi, \end{aligned}$$

với  $0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta < 2\pi$ .



Hình 6.3

Tâm của mặt xuyên đặt tại gốc tọa độ và  $a > 0$  là khoảng cách từ gốc tọa độ đến tâm mặt cắt.

2) Mặt cầu bán kính  $a > 0$ , tâm tại gốc, được cho bởi phương trình tham số:

$$\begin{aligned}x &= a \sin \varphi \cos \theta, \\y &= a \sin \varphi \sin \theta, \\z &= a \cos \theta,\end{aligned}$$

với  $0 \leq \varphi < 2\pi$  và  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

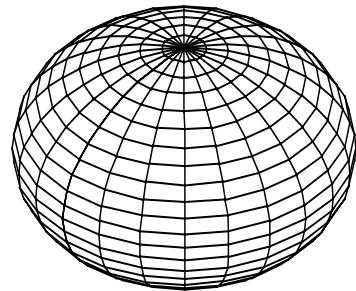
Giả thiết ta có đường cong phẳng trong miền  $M$  cho bởi phương trình tham số:

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad \text{với } a \leq t \leq b. \quad (*)$$

Khi ấy phương trình tham số

$$\begin{aligned}x &= x(u(t), v(t)), \\y &= y(u(t), v(t)), \\z &= z(u(t), v(t)), \quad \text{với } a \leq t \leq b\end{aligned}$$

xác định đường cong không gian nằm trong mặt  $S$ . Người ta gọi  $(*)$  là phương trình nội tại của đường cong trên mặt.



Hình 6.4

### 6.2.2. Mặt tiếp tuyến và pháp tuyến

Giả sử  $S$  là mặt cong trơn cho bởi phương trình tham số

$$X = X(u, v), \quad (u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Tại điểm  $P_0 = X(u_0, v_0) \in S$ , đặt

$$X_u^0 = \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0), \quad X_v^0 = \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Vì ma trận Jacobi của  $X$  tại  $(u_0, v_0)$  có hạng bằng 2 nên hai vectơ  $X_u^0$  và  $X_v^0$  độc lập tuyến tính. Mặt phẳng đi qua  $P_0$  và cẳng bởi hai vectơ  $X_u^0, X_v^0$  (ký hiệu là  $P_0 + \text{span}\{X_u^0, X_v^0\}$ ) được gọi là *mặt tiếp tuyến* (hay *mặt phẳng tiếp xúc*) của  $S$  tại  $P_0$ .

Sau đây là một tính chất quan trọng của mặt tiếp tuyến.

**MỆNH ĐỀ.** Mọi đường cong trơn của mặt  $S$  đi qua  $P_0$  đều có tiếp tuyến tại  $P_0$  nằm trọn trong mặt tiếp tuyến tại  $P_0$ .

**Chứng minh.** Cho  $X = X(u(t), v(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , là đường cong trơn đi qua điểm  $P_0 = X(u_0, v_0)$ , trong đó  $u_0 = u(t_0), v_0 = v(t_0)$  với  $t_0 \in [a, b]$ . Phương trình tiếp tuyến của đường cong dạng tham số là

$$X = X(u(t_0), v(t_0)) + \lambda X'_t(u(t_0), v(t_0)), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác từ công thức tính đạo hàm của hàm hợp ta có

$$\begin{aligned} X'_t(u(t_0), v(t_0)) &= \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot u'(t_0) + \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot v'(t_0) \\ &= X_u^0 \cdot u'(t_0) + X_v^0 \cdot v'(t_0). \end{aligned}$$

Vậy tiếp tuyến của đường cong tại  $P_0$  nằm trong mặt tiếp tuyến của mặt  $S$  tại  $P_0$ .

#### Phương trình xác định mặt tiếp tuyến

Từ định nghĩa ta có ngay phương trình tham số của mặt tiếp tuyến là:

$$X = X(u_0, v_0) + \alpha X_u^0 + \beta X_v^0, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Từ phương trình tham số này bằng cách giải  $\alpha, \beta$  ta thu được dạng ẩn xác định mặt tiếp tuyến là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

trong đó  $x_0, y_0, z_0$  là các tọa độ của  $P_0$  và các hệ số  $A, B, C$  được cho bởi các định thức con của ma trận Jacobi

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

với giá trị tại  $(u_0, v_0)$ .

Đường vuông góc với mặt tiếp tuyến của  $S$  tại  $P_0$  được gọi là *pháp tuyến* của  $S$  tại  $P_0$ . Từ phương trình mặt tiếp tuyến ta có ngay phương trình pháp tuyến là:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Hai vectơ *pháp tuyến* đơn vị của  $S$  tại  $P_0$  theo hai hướng đối lập nhau là:

$$\mathbf{n}_+ = (A, B, C) / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$\mathbf{n}_- = -(A, B, C) / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Đôi lúc ta chỉ viết  $\mathbf{n}$  để chỉ một trong hai vectơ này khi đã có sự lựa chọn.

**Thí dụ.** Tìm mặt tiếp tuyến và vectơ pháp tuyến đơn vị của mặt cầu bán kính  $a$  (xem mục thứ 2 của thí dụ trong phần trên) tại điểm bất kỳ  $(x_0, y_0, z_0)$  trên mặt cầu.

Giải. Ta có

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi}(\varphi_0, \theta_0) = (a \cos \varphi_0 \cos \theta_0, a \cos \varphi_0 \sin \theta_0, -a \sin \varphi_0)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta}(\varphi_0, \theta_0) = (-a \sin \varphi_0 \sin \theta_0, a \sin \varphi_0 \cos \theta_0, 0).$$

Vậy  $A = a^2 \sin^2 \varphi_0 \cos \theta_0, B = a^2 \sin^2 \varphi_0 \sin \theta_0, C = a^2 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0$ , và phương trình mặt tiếp tuyến là

$$\sin \varphi_0 \sin \theta_0 (x - x_0) + \sin \varphi_0 \sin \theta_0 (y - y_0) + \cos \varphi_0 (z - z_0) = 0,$$

hay dạng tương đương là

$$x_0 (x - x_0) + y_0 (y - y_0) + z_0 (z - z_0) = 0.$$

Vectơ pháp tuyến đơn vị được cho bởi công thức

$$\mathbf{n}_+ = (\sin \varphi_0 \cos \theta_0, \sin \varphi_0 \sin \theta_0, \cos \varphi_0) = \frac{1}{a} (x_0, y_0, z_0), \quad \mathbf{n}_- = -\frac{1}{a} (x_0, y_0, z_0).$$

### 6.2.3. Diện tích mặt cong và diện tích hình chiếu

Cho  $S$  là mặt cong tròn như ở mục trước và tại điểm  $(u_0, v_0) \in U$  xét hình chữ nhật đỉnh  $(u_0, v_0), (u_0 + du, v_0), (u_0, v_0 + dv), (u_0 + du, v_0 + dv)$  với  $du$  và  $dv$  đủ nhỏ để hình này nằm trong  $U$ . Khi ấy  $S_0$ , tập ảnh của hình chữ nhật qua ánh xạ  $X(u, v)$ , là một mảnh của mặt cong  $S$ .

Hình bình hành  $\overline{S_0}$  với các đỉnh

$$P_0 = X(u_0, v_0), \quad P_0 + X_u^0 du, \quad P_0 + X_v^0 dv, \quad P_0 + X_u^0 du + X_v^0 dv,$$

nằm trong mặt tiếp tuyến của  $S$  tại  $P_0$  và được xem là một xấp xỉ của mảnh  $S_0$ . Diện tích của hình bình hành  $\overline{S_0}$  được tính theo công thức

$$dt(\overline{S_0}) = \|X_u^0 du\| \cdot \|X_v^0 dv\| \cdot |\sin \alpha| = \|X_u^0 \times X_v^0\| dudv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$$

trong đó  $dt(\cdot)$  là ký hiệu *diện tích*, còn  $\alpha$  là góc giữa  $X_u^0$  và  $X_v^0$ .

Như vậy, nếu xấp xỉ  $U$  bằng hợp của những hình chữ nhật nhỏ  $U_1, \dots, U_k$  có cạnh song song với các trục  $Ou, Ov$  thì mặt cong  $S$  được xấp xỉ bởi hợp của các mảnh  $S_1, \dots, S_k$ . Mỗi mảnh nhỏ  $S_i$  lại được xấp xỉ bởi hình bình hành tiếp tuyến  $\overline{S_i}$  như miêu tả ở trên. Tổng diện tích của chúng khi cạnh lớn nhất trong số cạnh của các hình chữ nhật  $U_1, \dots, U_k$  dần tới 0 sẽ tiến tới đại lượng

$$\iint_U \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv \tag{*}$$

và được gọi là diện tích của mặt cong  $S$ .

Bên cạnh các ký hiệu  $A, B, C$  người ta còn dùng các hệ số Gauss của mặt cong là

$$E = \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \right\|^2, \quad F = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v}, \quad G = \left\| \frac{\partial X}{\partial v} \right\|^2.$$

Khi ấy *diện tích* của mặt cong  $S$  sẽ được biểu diễn dưới dạng

$$dt(S) = \iint_U \sqrt{EG - F^2} dudv = \iint_U \|X_u \times X_v\| dudv.$$

Khi phép chiếu thẳng góc từ  $S$  xuống mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  là một *phép tiêm* thì ta có thể tính được diện tích của hình chiếu này. Thật vậy, ký hiệu  $\gamma$  là góc nhọn tạo bởi pháp tuyến của  $S$  tại điểm  $P = X(u, v) \in S$ , ta nhận thấy rằng

$$\cos \gamma = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Khi ấy diện tích hình chiếu của hình bình hành tiếp tuyến  $\bar{S}(u, v)$ , xấp xỉ của mảnh cong  $S(u, v)$ , sẽ là

$$dt(\bar{S}(u, v)) \cos \gamma.$$

Đại lượng này cũng là xấp xỉ của diện tích hình chiếu của mảnh cong  $S(u, v)$  xuống mặt tọa độ  $Oxy$ . Tựu chung lại, diện tích hình chiếu của  $S$  bằng đại lượng

$$\iint_{(S)} \cos \gamma dS.$$

**Chú ý.** Để bảo đảm tính hợp lý của định nghĩa diện tích thì đại lượng (\*) không được phụ thuộc vào việc chọn tham số. Cụ thể là, với mọi *phép đổi biến* (thỏa mãn các điều kiện như trong định lý đổi biến của tích phân bội)  $u = u(\alpha, \beta), v = v(\alpha, \beta)$  với  $(\alpha, \beta) \in \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ , ta luôn có

$$dt(S) = \iint_{\tilde{U}} \|X_\alpha \times X_\beta\| d\alpha d\beta. \quad (**)$$

Thật vậy, từ công thức tính đạo hàm của hàm hợp ta có

$$X_\alpha \times X_\beta = Xu \times Xv \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} \right).$$

Ngoài ra, theo công thức đổi biến trong tích phân kép ta có

$$\iint_U \|X_u \times X_v\| dudv = \iint_{\tilde{U}} \|X_u \times X_v\| \left| \frac{\partial u}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} \right| d\alpha d\beta$$

do vậy các đại lượng (\*) và (\*\*) bằng nhau.

### Thí dụ

1) Để tính diện tích mặt cầu bán kính  $a$ , ta tính  $A, B$  và  $C$  như trong thí dụ ở mục trên và có

$$\begin{aligned} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} &= a^2 \sin \varphi, \\ dt(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = 4\pi a^2. \end{aligned}$$

2) Tính diện tích mặt paraboloid xác định bởi  $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 2$ .

Giai. Dạng tham số của mặt paraboloid là

$$(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2), \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2, \\ = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r^2), \quad 0 \leq z \leq \sqrt{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Từ đó ta có  $A = -2r^2 \cos \varphi$ ,  $B = -2r^2 \sin \varphi$ ,  $C = r$ . Vậy

$$dt(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2} r dr d\varphi = 13\pi/3.$$

## 6.3. Các dạng toàn phương

### 6.3.1. Dạng toàn phương thứ nhất

Giả sử  $S$  là mặt cong tròn được cho bởi phương trình tham số  $X = X(u, v)$ ,  $(u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ . Giả thiết ma trận Jacobi của  $X$  có hạng bằng 2, khi ấy hai vectơ  $X_u = \partial X / \partial u$  và  $X_v = \partial X / \partial v$  là độc lập tuyến tính, tức là  $X_u \cdot X_v \neq 0$ .

Xét đường cong tròn  $C$  trên mặt  $S$  cho bởi phương trình

$$X(t) = X(u(t), v(t)), \quad t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}.$$

Độ dài đường cong từ điểm  $X(u(a), v(a))$  đến  $X(u(t), v(t))$  được cho bởi công thức

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{X'(\sigma) \cdot X'(\sigma)} d\sigma.$$

Vì  $X'(t) = X_u \frac{du}{dt} + X_v \frac{dv}{dt}$  cho nên ta có công thức sau

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = X' \cdot X' = E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2$$

trong đó  $E, F, G$  là các hệ số Gauss của mặt cong  $S$ .

Biểu thức

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

được gọi là *dạng toàn phương thứ nhất* của mặt cong.

Đôi khi, người ta dùng  $u'$  và  $v'$  thay cho  $du$  và  $dv$  trong biểu thức của dạng toàn phương thứ nhất.

**Thí dụ.** Tìm dạng toàn phương thứ nhất của mặt phẳng

$$X = au + bv + c,$$

trong đó  $a, b, c$  là những vectơ hàng trong  $\mathbb{R}^3$  và  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

Giải. Ta có  $Xu = a, Xv = b$ , do đó  $E = \|a\|^2, G = \|b\|^2, F = a.b$ . Suy ra

$$I = \|a\|^2 du^2 + 2a.bdu dv + \|b\|^2 dv^2.$$

Sau đây là một tính chất quan trọng của dạng toàn phương thứ nhất.

**MỆNH ĐỀ.** *Dạng toàn phương thứ nhất của mặt cong là xác định dương, tức là luôn dương trừ khi  $u' = v' = 0$ .*

**Chứng minh.** Suy ra từ tính xác định dương của tích vô hướng.

#### *Một vài ứng dụng của dạng toàn phương thứ nhất*

a) *Độ dài đường cong.* Cho  $C$  là đường cong trên mặt  $S$  xác định bởi phương trình

$$X(t) = X(u(t), v(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

Từ định nghĩa ta có  $ds = \sqrt{I} dt$ , do vậy

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{I} dt.$$

b) *Góc giữa hai đường cong trên mặt cong.* Cho  $C_1$  và  $C_2$  là hai đường cong trên mặt  $S$  giao nhau tại điểm  $P$ . Góc giữa  $C_1$  và  $C_2$  là góc  $\theta$  tạo bởi hai đường tiếp tuyến của chúng tại  $P$ . Ký hiệu  $dX$  là vi phân của  $C_1$ ,  $\delta X$  là vi phân của  $C_2$  tại  $P$ . Khi ấy  $dX \cdot \delta X = \|dX\| \cdot \|\delta X\| \cos \theta$ , do vậy

$$\cos \theta = \frac{dX \cdot \delta X}{\|dX\| \cdot \|\delta X\|} = \frac{Edu \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + Gdv \delta v}{\sqrt{I_1} \sqrt{I_2}},$$

trong đó

$$I_1 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2,$$

$$I_2 = E\delta u^2 + 2F\delta u \delta v + G\delta v^2.$$

Từ đây, suy ra điều kiện để hai đường cong vuông góc với nhau là

$$Edu \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + Gdv \delta v = 0.$$

#### **6.3.2. Dạng toàn phương thứ hai**

Để khảo sát mặt cong trong lân cận một điểm cho trước người ta còn xét độ lệch giữa mặt cong và mặt tiếp tuyến tại điểm đó. Độ lệch này có thể xấp xỉ bởi một dạng toàn phương và do đó hình dáng của mặt cong được xác định nhờ vào dạng toàn phương này.

Chúng ta sẽ giả thiết mặt cong  $S$  được cho bởi phương trình tham số  $X = X(u, v)$ ,  $(u, v) \in U$  và hàm vectơ  $X$  khả vi liên tục ba lần (thuộc lớp  $C^3$ ). Để thuận tiện, giả thiết điểm quan tâm là  $X(0, 0) \in S$  (như vậy  $U$  chứa gốc tọa độ) và

ký hiệu  $\mathbf{n}$  là vectơ pháp tuyến đơn vị của mặt cong tại  $X(0,0)$ . Khi ấy khoảng cách từ  $X(u,v) \in S$  tới mặt tiếp tuyến là đại lượng

$$\rho(u,v) = [X(u,v) - X(0,0)] \cdot \mathbf{n}.$$

Dùng công thức Taylor ta có khai triển sau

$$X(u,v) = X(0,0) + X_u u + X_v v + \frac{1}{2}(X_{uu}u^2 + 2X_{uv}uv + X_{vv}v^2) + \dots,$$

với các đạo hàm nhận giá trị tại điểm  $(0,0)$ .

Nhớ lại rằng vectơ pháp tuyến vuông góc với mặt tiếp tuyến nên  $X_u \cdot \mathbf{n} = X_v \cdot \mathbf{n} = 0$  và ta có khai triển của  $\rho$  là

$$\rho(u,v) = \frac{1}{2}(X_{uu} \cdot \mathbf{n} u^2 + 2X_{uv} \cdot \mathbf{n} uv + X_{vv} \cdot \mathbf{n} v^2) + \dots$$

Đại lượng

$$II = Lu^2 + 2Muv + Nv^2,$$

trong đó  $L = X_{uu} \cdot \mathbf{n}$ ,  $M = X_{uv} \cdot \mathbf{n}$  và  $N = X_{vv} \cdot \mathbf{n}$ , được gọi là *dạng toàn phương thứ hai* của mặt cong. Như vậy  $II$  là xấp xỉ của  $2\rho(u,v)$  trong lân cận của điểm  $(0,0)$  và ta có thể dùng nó để khảo sát dáng điệu của mặt cong trong lân cận điểm tiếp xúc  $X(0,0)$ .

Mặt cong xác định bởi

$$\sigma(u,v) = \frac{1}{2}(Lu^2 + 2Muv + Nv^2)$$

được gọi là *paraboloid mặt tiếp* của mặt  $S$  và được phân loại như sau:

a) *Dạng elip*:  $LN - M^2 > 0$ . Mặt cong  $\sigma$  là mặt paraboloid elip. Dạng  $II$  là một dạng toàn phương xác định. Vì vậy trong lân cận điểm đang xét mặt cong  $S$  nằm hẳn về một bên của mặt tiếp tuyến đồng thời có điểm chung duy nhất là điểm tiếp xúc  $X(0,0)$ . Nếu  $II$  xác định dương thì mặt cong  $S$  nằm cùng phía của vectơ pháp tuyến  $\mathbf{n}$ , trái lại nó sẽ nằm phía bên kia.

b) *Dạng hyperbol*:  $LN - M^2 < 0$ . Mặt cong  $\sigma$  là mặt paraboloid hyperbol. Dạng  $II$  là một dạng toàn phương không xác định. Hai đường thẳng thực thỏa mãn phương trình

$$L(u/v)^2 + 2M(u/v) + N = 0$$

phân chia mặt tiếp tuyến thành 4 miền mà mặt cong chính  $\sigma$  lần lượt nằm trên, nằm dưới mặt tiếp tuyến. Dáng điệu của mặt cong  $S$  trong lân cận điểm tiếp xúc cũng như thế.

c) *Dạng parabol*:  $LN - M^2 = 0$ , nhưng các hệ số  $L, M, N$  không đồng thời bị triệt tiêu. Mặt cong  $\sigma$  là mặt trụ parabol. Dạng  $II$  là một dạng toàn phương nửa xác định và mặt trụ nằm hẳn về một bên của mặt tiếp tuyến. Dáng điệu của mặt cong  $S$  trong lân cận của điểm tiếp xúc cũng tương tự như thế.

d) *Dạng phẳng:*  $L = M = N = 0$ . Mặt cong  $\sigma$  biến thành mặt phẳng. Trong trường hợp này việc sử dụng dạng toàn phương thứ hai không cho đủ thông tin để kết luận về dáng điệu của mặt cong  $S$ .

## 6.4. Đường trên mặt cong

Trong phần này chúng ta sẽ sử dụng các dạng toàn phương để khảo sát đường cong trên mặt cong.

### 6.4.1. Độ cong

Giả sử  $S$  là mặt cong cho bởi phuong trình tham số

$$X = X(u, v), (u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$$

và  $C$  là đường cong trên  $S$  cho bởi phuong trình tham số tự nhiên

$$X(s) = X(u(s), v(s)).$$

Chúng ta nhớ lại *độ cong* của  $C$  là đại lượng

$$\kappa = \|X''(s)\|.$$

Nếu ký hiệu  $\theta$  là góc giữa vecto pháp tuyến đơn vị  $n$  của mặt  $S$  và pháp tuyến chính  $N$  của đường cong  $C$  thì ta có công thức

$$\kappa \cos \theta = n \cdot X''(s).$$

Đại lượng này được gọi là *độ cong pháp tuyến* của  $C$ . Vì  $n$  vuông góc với  $X'_u$  và  $X'_v$ , đồng thời

$$X''(s) = X_u u'' + X_v v'' + X_{uv} u'^2 + 2X_{uv} u' v' + X_v v'^2$$

nên vé phải của công thức trước đó sẽ là

$$n \cdot X'' = L u'^2 + 2M u' v' + N v'^2.$$

Đây là dạng toàn phuong thứ hai với biến  $u'$ ,  $v'$ . Nếu đường cong  $C$  được cho bởi tham số  $t$  bất kỳ thì do  $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = I$ , ta sẽ thu được công thức

$$\kappa \cos \theta = \frac{L u'^2 + 2M u' v' + N v'^2}{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2} = \frac{II}{I}. \quad (*)$$

Công thức này sẽ cho ta một kết quả về độ cong của các đường cong cùng tiếp tuyến và cùng pháp tuyến.

**MỆNH ĐỀ.** *Nếu hai đường cong trên mặt  $S$  có chung vecto tiếp tuyến và vecto pháp tuyến chính tại điểm giao nhau  $P \in S$  và nếu pháp tuyến chính không nằm trong mặt tiếp tuyến của mặt cong thì chúng có cùng độ cong tại  $P$ .*

**Chứng minh.** Hai đường cong có chung tiếp tuyến thì có cùng tỷ lệ  $u'/v'$  và do đó có cùng tỷ lệ  $\frac{II}{I}$ . Ngoài ra nếu chúng có chung pháp tuyến chính thì đại lượng  $\cos\theta$  bằng nhau. Đại lượng này khác 0 vì pháp tuyến chính không nằm trong mặt tiếp tuyến. Kết hợp với công thức (\*) ta có ngay kết luận của mệnh đề.

### 6.4.2. Thiết diện thẳng góc và chỉ đồ Dupin

Nếu qua điểm  $P \in S$  mặt phẳng  $M$  không trùng với mặt tiếp tuyến thì thiết diện (giao của  $M$  và  $S$ ) là một đường cong trên  $S$ .

Nếu  $M$  chứa pháp tuyến của  $S$  tại  $P$  thì thiết diện được gọi là *thiết diện thẳng góc*.

Trong công thức (\*) ở mục trước, góc  $\theta$  nhận giá trị 0 hoặc  $\pi$ , do đó độ cong của thiết diện thẳng góc có giá trị tuyệt đối bằng  $\frac{II}{I}$  và chỉ còn phụ thuộc vào hướng  $(u', v')$  trong mặt tiếp tuyến.

Để khảo sát độ cong  $\kappa$  chúng ta chọn mặt tiếp tuyến tại  $P \in S$  làm *mặt phẳng tham số* với gốc tọa độ là  $P$  và các trục tọa độ  $u = x, v = y$ . Phương trình tham số của mặt cong  $S$  sẽ là

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

với một hàm  $f$  nào đó. Khi ấy ta có

$$\begin{cases} X_x = (1, 0, 0) \\ X_y = (0, 1, 0) \end{cases}$$

(vì tại điểm tiếp xúc  $P$ , đạo hàm của  $f$  bằng 0). Suy ra  $E = 1, F = 0, G = 1$  tại điểm  $P$ . Giả sử  $C$  là đường cong đi qua  $P$  được cho bởi phương trình tham số tự nhiên  $X(s) = X(u(s), v(s))$ . Gọi  $\varphi$  là góc giữa  $X' := \frac{dX(0)}{ds}$  với  $X_x$  (trục  $Ox$ ).

Khi ấy

$$u' = \cos\varphi, \quad v' = \sin\varphi \quad \text{v} \quad X' = u'X_x + v'X_y.$$

Áp dụng công thức (\*) ở mục trên chúng ta tính được

$$\kappa = \frac{Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} = L\cos^2\varphi + 2M\sin\varphi\cos\varphi + N\sin^2\varphi. \quad (**)$$

Bằng cách thay đổi góc  $\varphi$ , công thức này cho ta giá trị của độ cong của thiết diện thẳng góc với hướng bất kỳ  $(u', v') = (\cos\varphi, \sin\varphi)$  trong mặt phẳng tiếp tuyến.

Chuyển sang hệ tọa độ  $(x, y)$  thì công thức (\*\*) có dạng

$$\pm 1 = Lx^2 + 2Mxy + Ny^2$$

(bằng cách đặt  $x = r \cos\varphi, y = r \sin\varphi, r^2 = \frac{1}{\kappa}$ ). Phương trình này cho ta đường conic là quỹ tích các điểm trên mặt phẳng  $xy$  sao cho độ dài đoạn thẳng từ mỗi

điểm tới tâm thiết diện bằng  $l/\sqrt{\kappa}$ , với  $\kappa$  là độ cong của thiết diện thẳng góc chứa đoạn thẳng trên. Dấu ở phía trái lấy phù hợp với dấu phía phải.

*Quỹ tích* của những điểm thỏa mãn phương trình trên được gọi là *chỉ đồ Dupin*. Nó có những dạng cơ bản sau đây:

- ◊ *Dạng ellip:*  $LN - M^2 > 0$ . Chỉ đồ Dupin là đường ellip.
- ◊ *Dạng hyperbol:*  $LN - M^2 < 0$ . Chỉ đồ Dupin là hai đường hyperbol với tiệm cận chung là hướng đế  $\kappa = 0$ .
- ◊ *Dạng parabol:*  $LN - M^2 = 0$  với  $L, M, N$  không đồng thời bằng 0. Chỉ đồ Dupin là cặp đường thẳng song song theo hướng đế  $\kappa = 0$ .
- ◊ *Dạng phẳng:*  $L = M = N = 0$ . Chỉ đồ Dupin không tồn tại .

# **Bài tập và tính toán thực hành Chương 6**

<b>1. Đường cong và mặt cong .....</b>	<b>227</b>
1.1. Đường cong.....	227
1.2. Mặt cong.....	228
<b>2. Thực hành vẽ đường cong .....</b>	<b>229</b>
2.1. Vẽ đường cong trong không gian 2 chiều .....	229
2.2. Vẽ đường cong trong không gian 3 chiều .....	230
<b>3. Thực hành vẽ mặt cong .....</b>	<b>230</b>
3.1. Vẽ mặt cong trong hệ tọa độ cầu .....	231
3.2. Vẽ hình ống .....	231
3.3. Vẽ mặt cong bằng lệnh plot3d với tùy chọn là hệ tọa độ.....	232

## **1. Đường cong và mặt cong**

### **1.1. Đường cong**

**Bài 1.** Tính độ cong của các đường sau tại các điểm đã cho:

- 1)  $y = x^3$  tại điểm có hoành độ  $x = 1$ .
- 2)  $xy = 1$  tại điểm  $(1,1)$ .
- 3)  $x = e^{-t} \cos t$ ,  $y = e^{-t} \sin t$  khi  $t = 1$ .

**Bài 2.** Tính độ cong của các đường

- 1)  $x = e^t$ ,  $y = e^{-t}$ ,  $z = t\sqrt{2}$  .
- 2)  $x = e^{-t} \sin t$ ,  $y = e^{-t} \cos t$ ,  $z = e^t$  .

**Bài 3.** Viết phương trình tiếp tuyến và mặt pháp tuyến của đường cong:

- 1)  $x = \sin^2 t$ ,  $y = b \sin t \cos t$ ,  $z = \cos^2 t$  tại điểm ứng với  $t = 3\frac{\pi}{4}$  .
- 2)  $x = \frac{e^t \sin t}{\sqrt{2}}$ ,  $y = 1$ ,  $z = \frac{e^t \cos t}{\sqrt{2}}$  tại điểm ứng với  $t = \frac{\pi}{2}$  .
- 3)  $x = t$ ,  $y = t^3$ ,  $z = t^3$  tại điểm ứng với  $t = 1$  .

**Bài 4.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000. ĐHBK Hà Nội)

Cho đường cong C có phương trình  $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ . Hãy viết phương trình tiếp tuyến và mặt pháp tuyến của C tại điểm M(2,4,8).

## 1.2. Mặt cong

**Bài 1.** Viết phương trình mặt tiếp tuyến và pháp tuyến của mặt:

- 1)  $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$  tại điểm (1,1,1).
- 2)  $z = 2x^2 + 4y^2$  tại điểm (2,1,3).

**Bài 2.** Trên ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

tìm một điểm sao cho tại đó pháp tuyến tạo với trực tọa độ những góc bằng nhau.

**Bài 3.** Tìm phương trình các mặt tiếp tuyến của mặt  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  sao cho chúng song song với mặt phẳng  

$$x + 4y + 6z = 0.$$

**Bài 4.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Viết phương trình mặt tiếp tuyến của mặt cong  $x^2 + y^2 + z^2 = 140$  biết chúng song song với mặt phẳng ( $P$ ):  $x + 3y + 5z = 0$ .

**Bài 5.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

Cho  $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ . Tìm  $\frac{\partial u}{\partial e}$  tại A(1,-1,1) theo hướng  $\vec{e} = \overrightarrow{OA}$  với O là gốc tọa độ. Tìm điều kiện để vectơ grad  $u$  vuông góc với 0z. Lập phương trình pháp tuyến với mặt  $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + 1 = 0$  tại điểm A(1,-1,1).

**Bài 6.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

Cho  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Tìm  $\frac{\partial u}{\partial e}$  tại A( $\sqrt{2}$ ,1,1) với  $\vec{e} = \overrightarrow{OA}$  với O là gốc tọa độ. Tìm max  $\frac{\partial u}{\partial e}$  tại A( $\sqrt{2}$ ,1,1). Lập phương trình mặt tiếp tuyến của mặt cong  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2$  tại điểm A( $\sqrt{2}$ ,1,1).

## 2. Thực hành vẽ đường cong

### 2.1. Vẽ đường cong trong không gian 2 chiều

Việc vẽ đồ thị của đường cong trong không gian hai chiều đã được hướng dẫn trong Chương 2 và Chương 3. Dưới đây là một số thí dụ vẽ đường cong mô tả dưới dạng các phương trình tham số. Nhớ lại rằng việc vẽ đồ thị luôn đòi hỏi phải gọi các gói công cụ vẽ:

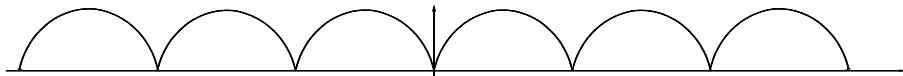
[> **with(plots):**

[> **with(plottools):**

Muốn vẽ đường cong trong không gian 2 chiều cho dưới dạng tham số  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , ta dùng lệnh **plot([x(t), y(t), t=a..b])**.

*Thí dụ.* Vẽ đồ thị của cycloid  $x(t) = t - \sin(t)$ ,  $y(t) = 1 - \cos(t)$  trong khoảng  $[-6\pi, 6\pi]$ .

[> **plot([t-sin(t), 1-cos(t), t=-6\*Pi..6\*Pi]);**

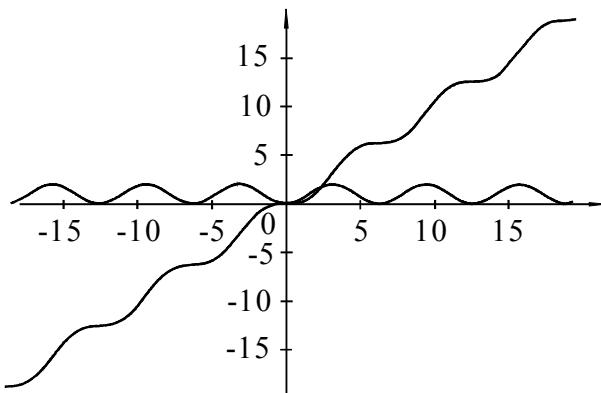


Hình 6.5

**Chú ý.** Ta phải đặt **t=a..b** trong cùng ngoặc vuông với phương trình tham số. Nếu đặt **t=a..b** ngoài ngoặc vuông, máy sẽ hiểu là vẽ hai đồ thị của hai hàm số trên cùng một hệ trục. Thí dụ, nếu dùng lệnh

[> **plot({t-sin(t), 1-cos(t)}, t=-6\*Pi..6\*Pi);**

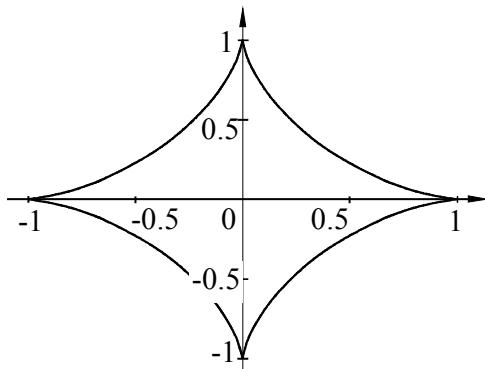
máy sẽ cho 2 đồ thị của 2 hàm  $x(t)=t-\sin(t)$  và  $y(t)=1-\cos(t)$  theo biến  $t$



Hình 6.6

2) Vẽ đồ thị của đường astroid  $x(t) = \cos^3 t$ ,  $y(t) = \sin^3(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

[> plot([cos(t)^3, sin(t)^3, t=0..2\*Pi]);



Hình 6.7

## 2.2. Vẽ đường cong trong không gian 3 chiều

Muốn vẽ đường cong trong không gian 3 chiều cho dưới dạng tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b,$$

ta dùng lệnh **spacecurve** với cú pháp tổng quát là:

[> spacecurve([x(t), y(t), z(t)], t=a..b);

Với lệnh này, có thể vẽ nhiều đường cong một lúc. Thí dụ, vẽ hai đường cong trong không gian ba chiều  $(t \sin t, t, t \cos t)$  và  $(4 \cos t, 4 \sin t, 0)$  trong khoảng  $[-\pi, 2\pi]$ .

[> spacecurve({[t\*sin(t), t, t\*cos(t)], [4\*cos(t), 4\*sin(t), 0]}, t=-Pi..2\*Pi);



Hình 6.8

## 3. Thực hành vẽ mặt cong

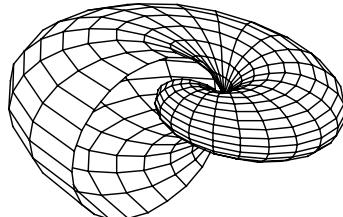
Nhắc lại rằng một mặt cong biểu diễn đồ thị của hàm 2 biến  $z = f(x, y)$  trong không gian 3 chiều được vẽ một cách dễ dàng bằng lệnh vẽ **plot3d**. Tuy nhiên, các mặt cong trong không gian 3 chiều rất đa dạng, có nhiều mặt không thể biểu diễn được như một đồ thị của hàm 2 biến như trên và do đó không thể vẽ được bằng lệnh **plot3d** thông thường. Một trong các phương pháp để vẽ được những mặt dạng này là dựa vào các hệ tọa độ thích hợp với hình dạng của chúng. Dưới đây ta sẽ cho Maple vẽ một số mặt cong như vậy.

### 3.1. Vẽ mặt cong trong hệ tọa độ cầu

Đây là chủ đề đã được trình bày trong Chương 3. Ta luyện kỹ năng với các đồ thị mới. Nhớ rằng ta vẽ mặt cong trong *hệ tọa độ cầu* bằng lệnh **sphereplot**.

*Vẽ mặt cong hình vỏ ốc.* Đồ thị hàm số  $\rho = 1.2^\phi \sin \theta$  trong hệ tọa độ cầu, với  $\phi$  thay đổi trong đoạn  $[-1, 2\pi]$  và  $\theta$  thay đổi trong đoạn  $[0, \pi]$  chính là một mặt cong hình vỏ ốc. Thực vậy,

```
[> sphereplot((1.2)^phi*sin(theta), z=1..2*Pi, theta=0..Pi);
```



Hình 6.9

Bạn đọc có thể tự mình thay đổi các tham số của lệnh và sẽ được thấy những “con ốc” rất đa dạng.

### 3.2. Vẽ hình ống

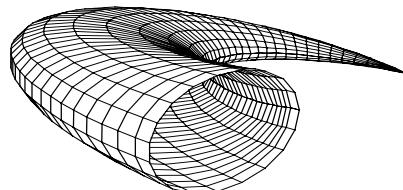
*Hình ống* trong không gian 3 chiều được xác định bởi *đường trực ống* (một đường cong trong không gian 3 chiều, thường được cho bởi một hàm vectơ 3 chiều 1 biến) và *bán kính ống* (cũng là một hàm thay đổi theo trực ống). Trong trường hợp đặc biệt, khi hàm bán kính là hằng thì ta có hình ống theo nghĩa thông thường (với bán kính không đổi). Vẽ hình ống trong không gian 3 chiều bằng lệnh **tubeplot**. Thí dụ, *hình xuyến* (hay cái “bánh xe”) là một dạng hình ống đặc biệt, với trực ống là một vòng tròn (đường cong kín) và bán kính là một hằng số (nhỏ hơn bán kính vòng tròn). Ta vẽ nó bằng lệnh:

```
[>tubeplot([cos(t), sin(t), 0], t=0..2*Pi, radius=0.5);
```

Sau khi ta thực hiện lệnh sẽ thấy kết quả hiện ra như hình 6.3.

Cái “tù và” (hay sừng trâu) là một ví dụ về ống có bán kính thay đổi. Ta vẽ nó bằng lệnh

```
[>tubeplot([cos(t), sin(t), 0], t=Pi..2*Pi, radius=0.25*(t-Pi);
```



Hình 6.12

*Đường cong* trong không gian 3 chiều có thể xem như một dạng đường ống đặc biệt (có bán kính không đổi và bằng 0). Cho nên, lệnh vẽ ống cũng có thể dùng để vẽ đường cong trong không gian 3 chiều. Thí dụ:

```
[>tubeplot([(sin(t))^2,sin(t)*cos(t),cos(t)],t=0..2*Pi,
           radius=0);
```

Sau khi thực hiện lệnh này ta sẽ thấy kết quả hiện ra như Hình 6.2.

Ta có thể vẽ nhiều ống trong một hình. Thí dụ, muốn vẽ cái “tù và” lồng trong vòng của “bánh xe” ta dùng lệnh sau (bạn đọc hãy tự cho máy thực hiện để xem kết quả):

```
[>tubeplot({{[cos(t),sin(t),0,t=Pi..2*Pi,radius=0.25*(t-
Pi)], [0,cos(t)-1,sin(t),t=0..2*Pi,radius=0.25]});
```

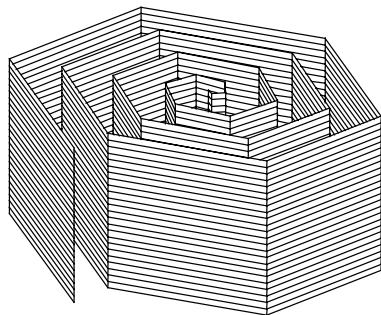
### 3.3. Vẽ mặt cong bằng lệnh plot3d với tùy chọn là hệ tọa độ

Trước khi vẽ bằng lệnh này, ta vào thư viện các loại hệ tọa độ và gọi hệ tọa độ trụ ra bằng lệnh:

```
[>readlib(addcoords)(z_cylindrical,[z,r,theta],
                      [r*cos(theta),r*sin(theta),z]);
```

Thí dụ, ta vẽ *hình lăng trụ* trong hệ tọa độ trụ bằng lệnh sau đây:

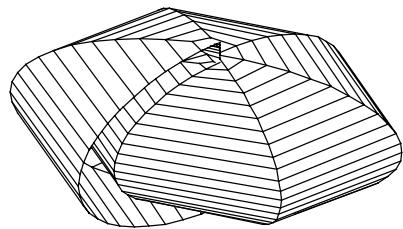
```
[>plot3d(theta,theta=0..8*Pi,z=0..Pi,coords=cylindrical);
```



Hình 6.13

Cũng với câu lệnh tương tự như trên, nhưng trong *hệ tọa độ cầu*, chúng ta có một mặt cong khác hẳn, như sau:

```
[>plot3d(theta,theta=0..8*Pi,phi=0..Pi,coords=spherical);
```



Hình 6.14.

# Tích phân đường và tích phân mặt

<b>7.1. Tích phân đường .....</b>	<b>233</b>
7.1.1. Tích phân đường của hàm số .....	233
7.1.2. Ý nghĩa của tích phân đường loại I .....	236
7.1.3. Tích phân đường của hàm vectơ.....	237
7.1.4. Ý nghĩa vật lý của tích phân đường loại II .....	239
7.1.5. Định lý Green.....	240
7.1.6. Tích phân không phụ thuộc đường.....	242
<b>7.2. Tích phân mặt.....</b>	<b>245</b>
7.2.1. Tích phân mặt của hàm số .....	245
7.2.2. Tích phân mặt của hàm vectơ.....	246
7.2.3. Định lý Ostrogradski.....	249
7.2.4. Định lý Stokes.....	251
<b>7.3. Lý thuyết trường .....</b>	<b>253</b>
7.3.1. Khái niệm về trường .....	253
7.3.2. Gradient và luật bảo toàn.....	255
7.3.3. Phân tán và định lý Ostrogradski.....	256
7.3.4. Xoáy và định lý Stokes .....	257

## 7.1. Tích phân đường

### 7.1.1. Tích phân đường của hàm số

Giả sử  $C$  là đường cong trơn trong  $\mathbb{R}^2$  với điểm đầu  $A$  và điểm cuối  $B$ ,  $f$  là hàm số xác định trên  $C$ .

Phân hoạch  $T$  của đường cong  $C$  là một họ hữu hạn điểm trên đường cong  $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ , nối tiếp nhau (theo nghĩa khúc  $AA_i$  là một phần của khúc  $AA_{i+1}$ , với mọi  $i=1,2,\dots,n-1$ ). Ký hiệu  $\Delta s_k$  là độ dài đoạn cong  $A_{k-1}A_k$  và  $\delta_T$

là đường kính phân hoạch, tức là số lớn nhất trong các số  $\Delta s_k, k = 1, \dots, n$ . Chọn  $c_k(x_k, y_k) \in A_{k-1}A_k$  và xét tổng

$$\sigma_T = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta s_k.$$

Nếu như tổng  $\sigma_T$  có giới hạn khi  $\delta_T \rightarrow 0$  và không phụ thuộc vào việc chọn các điểm  $c_k$  thì giới hạn đó gọi là *tích phân đường* của hàm  $f$  (hay còn gọi là *tích phân đường loại I* của  $f$ ) theo  $C$  và ký hiệu

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T.$$

Một số tính chất suy trực tiếp từ định nghĩa:

- Nếu tồn tại  $\int_C f(x, y) ds$  thì  $\int_C \alpha f(x, y) ds = \alpha \int_C f(x, y) ds$  với mọi  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- Nếu tồn tại  $\int_C f_1(x, y) ds$  và  $\int_C f_2(x, y) ds$  thì tồn tại  $\int_C (f_1 + f_2) ds$  và  $\int_C (f_1(x, y) + f_2(x, y)) ds = \int_C f_1(x, y) ds + \int_C f_2(x, y) ds$ .
- Khi  $C$  là hợp của  $C_1$  và  $C_2$  và  $\int_{C_1} f_1(x, y) ds$ ,  $\int_{C_2} f_1(x, y) ds$  tồn tại, thì  $\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds$ .
- Việc lấy  $C = AB$  hay  $C = BA$  không ảnh hưởng tới tích phân, nghĩa là  $\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{BA} f(x, y) ds$ .
- Nếu  $f(x, y) \geq 0$  trên  $C$  thì  $\int_C f(x, y) ds \geq 0$ .
- $\left| \int_C f(x, y) ds \right| \leq \int_C |f(x, y)| ds$ .
- Tồn tại  $\alpha \in [\inf_{(x,y) \in C} f(x, y), \sup_{(x,y) \in C} f(x, y)]$  sao cho  $\int_C f(x, y) ds = \alpha l(C)$ ,

trong đó  $l(C)$  là độ dài của  $C$ .

Để tính tích phân đường loại I chúng ta xét phương trình tham số của  $C$  theo tham số tự nhiên

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \leq s \leq l(C).$$

Phân hoạch  $T$  của  $C$  bởi  $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$  sinh ra phân hoạch tương ứng của  $[0, l(C)]$  bởi  $0 = s_0 < s_1 \dots < s_n = l(C)$ . Điểm  $c_k \in A_{k-1} A_k$  ứng với  $\tau_k \in [s_{k-1}, s_k]$ . Khi ấy

$$\sigma_T = \sum_{k=1}^n f(x(\tau_k), y(\tau_k)) \Delta s_k.$$

Qua giới hạn tổng trên khi  $\delta_T \rightarrow 0$  ta thu được

$$\int_C f(x, y) ds = \int_C f(x(s), y(s)) ds.$$

Nếu  $C$  được cho bởi phương trình tham số  $t$  bất kỳ

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b,$$

thì như ta đã biết  $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$ , do đó

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

**Nhận xét.** Hoàn toàn tương tự như trên, nếu  $C$  là đường cong không gian cho bởi phương trình tham số  $x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \leq t \leq b$ , thì tích phân đường của hàm  $f$  trên  $C$  được tính theo công thức

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

### Thí dụ

1) Cho  $C$  là đoạn parabol  $y = x^2$  giữa  $A = (0, 0)$  và  $B = (1, 1)$ . Tính  $\int_C xy ds$ .

Giải. Phương trình tham số của  $C$  là  $x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 1$ . Vậy

$$\int_C xy ds = \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

2) Cho  $C$  là đường cong trong không gian  $x = \sin 2t, y = \sin t \cos t, z = \cos t$   $0 \leq t \leq \pi/2$ . Tính  $\int_C z ds$ .

Giải. Áp dụng công thức trong nhận xét ta có

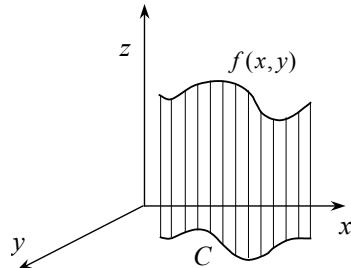
$$\begin{aligned} \int_C z ds &= \int_0^{\pi/2} \cos t \sqrt{4\sin^2 t \cos^2 t + (\cos^2 t - \sin^2 t)^2 + \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

### 7.1.2. Ý nghĩa của tích phân đường loại I

#### Ý nghĩa hình học

Giả sử  $C$  là đường cong phẳng trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ ,  $f$  là hàm số biến  $x$  và  $y$ , nhận giá trị không âm. Khi ấy, ta suy ra ngay từ định nghĩa là tích phân đường của  $f$  theo  $C$  là diện tích miền thẳng đứng giới hạn bởi  $C$  và đường cong không gian xác định như sau

$$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in C\}.$$



Hình 7.1

#### Ý nghĩa cơ học

Giả sử  $C$  là đường cong vật chất với khối lượng riêng tại mỗi điểm là  $m(x, y)$ . Với mỗi phân hoạch  $T$  của  $C = AB$ , trên cung  $A_{k-1}A_k$  ta có thể xem như khối lượng riêng không đổi và bằng  $m(x_k, y_k)$ . Khi ấy tổng

$$\sum_{k=1}^m m(x_k, y_k) \Delta s_k$$

là xấp xỉ của khối lượng của toàn bộ  $C$ . Qua giới hạn tổng trên khi  $\delta_T \rightarrow 0$ , ta sẽ thu được công thức tính khối lượng của đường cong vật chất  $C$  là

$$M = \int_C m(x, y) ds.$$

Tương tự ta có thể tính moment theo  $x$  và  $y$

$$M_x = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n y_k m(x_k, y_k) \Delta s_k = \int_C y m(x, y) ds,$$

$$M_y = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n x_k m(x_k, y_k) \Delta s_k = \int_C x m(x, y) ds,$$

cũng như moment quán tính

$$J_0 = J_x + J_y = \int_C (y^2 + x^2) m(x, y) ds.$$

Trọng tâm của đường cong vật chất là  $(x_0, y_0)$  được tính theo công thức

$$x_0 = \frac{M_y}{M}, \quad y_0 = \frac{M_x}{M}.$$

### 7.1.3. Tích phân đường của hàm vectơ

Nếu như trong tổng  $\sigma_T$  khi định nghĩa tích phân đường loại I ta thay  $\Delta s_k$  bởi  $\Delta x_k$  và  $\Delta y_k$  thì ta sẽ thu được hai dạng tích phân đường nữa gọi là *tích phân đường của f theo C đối với x và y*. Cụ thể là

$$\int_C f(x, y) dx = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(u_k, v_k) \Delta x_k,$$

$$\int_C f(x, y) dy = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(u_k, v_k) \Delta y_k.$$

Những tích phân này còn được gọi là *tích phân đường loại II*. Khác với  $\Delta s_k$  luôn dương, trong tích phân này giá trị  $\Delta x_k$  và  $\Delta y_k$  có thể âm, dương, hay bằng 0, và phụ thuộc vào việc chọn điểm đầu, điểm cuối của đường cong. Cho nên người ta còn viết rõ

$$\int_A^B f(x, y) dx \quad \text{và} \quad \int_A^B f(x, y) dy.$$

Nếu như đường cong  $C$  được cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b,$$

thỏa mãn giả thiết  $x(t), y(t)$  liên tục trên  $[a, b]$  và hàm  $f$  liên tục trên  $C$ , thì do

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= x_k - x_{k-1} = x(t_k) - x(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t) dt, \\ \Delta y_k &= y_k - y_{k-1} = y(t_k) - y(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} y'(t) dt, \end{aligned}$$

nên sau khi qua giới hạn trong các tổng tích phân ta có công thức

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y) dx &= \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt, \\ \int_C f(x, y) dy &= \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt. \end{aligned}$$

Trong các ứng dụng, tích phân đường loại II thường xuất hiện dưới dạng tích phân đường của hàm vectơ  $(f, g)$  như sau

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy.$$

Nếu  $C$  là đường cong không gian thì tích phân đường của hàm ba biến theo  $C$  đối với  $x, y, z$  cũng định nghĩa tương tự, và ta cũng có các công thức tính tương ứng khi  $C$  được cho bởi phương trình tham số.

**Thí dụ**

1) Tính  $\int_C xydx + x^2dy$  với  $C$  được cho bởi phương trình

$$x = 3t - 1, \quad y = 3t^2 - 2t, \quad 1 \leq t \leq 5/3.$$

Giải. Vì  $dx = 3dt$ ,  $dy = (6t - 2)dt$  nên ta có

$$\int_C xydx + x^2dy = \int_1^{5/3} (3t-1)(3t^2-2t)3dt + \int_1^{5/3} (3t-1)^2(6t-2)dt = 58.$$

2) Tính  $\int_C yzdx + xzdy + xydz$  với  $C$  được cho bởi công thức

$$y = x^2, \quad z = x^3, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

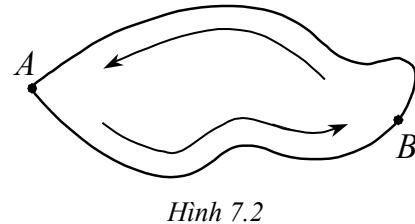
Giải. Bằng cách đặt  $x = t$  ta có phương trình tham số của  $C$  là

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Do đó

$$\int_C yzdx + xzdy + xydz = \int_0^2 (t^2 \cdot t^3 dt + t \cdot t^3 \cdot 2tdt + t \cdot t^2 \cdot 3t^2 dt) = \int_0^2 6t^5 dt = 64.$$

**Chú ý.** Khi  $C$  là đường cong đóng kín, tức là điểm đầu trùng với điểm cuối, thì tích phân đường loại I không phụ thuộc vào việc lựa chọn các điểm này. Tuy nhiên đối với tích phân đường loại II thì ta phải xác định hướng đi (thông thường, trong mặt phẳng, người ta quy định *hướng dương* là hướng đi theo đó phần mặt phẳng giới hạn bởi đường cong luôn nằm *phía bên trái*, hướng ngược lại là *hướng âm*).



Hình 7.2

Khi đã xác định hướng rồi, lấy  $A, B$  là 2 điểm khác trên  $C$ , ta có

$$\int_C f(x, y)dx = \int_A^B f(x, y)dx + \int_B^A f(x, y)dx,$$

và như vậy tích phân không phụ thuộc vào việc chọn  $A$  hay  $B$  là điểm đầu. Tích phân này còn được viết là

$$\oint_C f(x, y)dx,$$

khi đã chọn hướng dương trên  $C$ , và

$$-\oint_C f(x, y)dx,$$

nếu trái lại.

**Thí dụ.** Tính  $\oint_C ydx - xdy$  với  $C$  là cạnh tam giác đỉnh  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ .

**Giải.** Tính trực tiếp ta có

$$\oint_C ydx - xdy = \int_{(0,0)}^{(1,0)} (ydx - xdy) + \int_{(1,0)}^{(0,1)} (ydx - xdy) + \int_{(0,1)}^{(0,0)} (ydx - xdy) = -1.$$

(Vì trên đoạn  $[(0,0), (1,0)]$  ta có  $y = 0$ ,  $dy = 0$ , còn trên đoạn  $[(0,1), (0,0)]$  ta có  $x = 0$ ,  $dx = 0$ ).

**Nhận xét.** Giả thiết  $C$  được cho bởi phương trình tham số tự nhiên

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

với  $x(s), y(s)$  là những hàm trơn. Khi ấy

$$\int_C f(x, y) dx = \int_C f(x(s), y(s)) x'(s) ds .$$

Đây chính là công thức cho mối liên hệ giữa các tích phân đường loại I và loại II.

#### 7.1.4. Ý nghĩa vật lý của tích phân đường loại II

Giả thiết rằng trong mặt phẳng  $\mathbb{R}^2$  ta có một trường lực, tức là tại mỗi điểm  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  có một lực tác động  $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ . Hãy tính công khi di chuyển vật chất khối lượng đơn vị di chuyển theo đường cong  $C = AB$  trong  $\mathbb{R}^2$ .

Trước hết ta nhớ rằng công sinh ra bởi lực  $\bar{P}$  khi di chuyển vật chất di chuyển được đoạn thẳng  $\overline{Q_1 Q_2}$  là

$$W = \bar{P} \cdot \overline{Q_1 Q_2} .$$

Như vậy, nếu dùng phân hoạch  $T$  của  $C$  bởi  $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$  thì công sinh ra khi di chuyển vật chất di chuyển trên mỗi cung nhỏ  $A_{k-1}A_k$  được xác định bởi

$\Delta A_k = F(u_k, v_k) \cdot (\Delta x_k, \Delta y_k) = f(u_k, v_k) \Delta x_k + g(u_k, v_k) \Delta y_k$   
trong đó  $(u_k, v_k) \in A_{k-1}A_k$ .

Theo định nghĩa công sinh ra bởi  $F$  đọc theo  $G$  sẽ là  $W = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta W_k$ .

Vậy công thức tính công  $W$  được cho bởi tích phân đường của hàm vectơ  $F$

$$W = \int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy .$$

Đối với trường hợp lực trong không gian việc tính toán hoàn toàn tương tự.

**Thí dụ.** Cho trường lực  $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$  với  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Tính công sinh ra dọc theo đoạn  $[(1,0,0), (2,0,0)]$ .

Giải. Bằng cách tính trực tiếp ta có

$$W = \int_{(1,0,0)}^{(2,0,0)} \left( \frac{x}{r^3} dx + \frac{y}{r^3} dy + \frac{z}{r^3} dz \right) = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

(Chú ý: Trên đoạn  $[(1,0,0), (2,0,0)]$  ta có  $y = 0, dy = 0, z = 0, dz = 0$ ).

### 7.1.5. Định lý Green

Trong nhận xét ở Mục 7.1.3 chúng ta đã có công thức liên hệ tích phân đường các loại. Định lý Green dưới đây sẽ cho công thức liên hệ giữa tích phân kép và tích phân đường. Để ngắn gọn, đôi lúc ta viết  $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  thay vì viết rõ giá trị tương ứng tại  $(x, y)$ . Nhắc lại rằng đường cong  $C$  gọi là tron tùng khúc nếu ánh xạ xác định nó tron tùng khúc.

**ĐỊNH LÝ.** *Giả thiết  $C$  là đường cong phẳng kín, đơn và tron tùng khúc,  $U$  là miền bao gồm cả  $C$  và phần  $C$  bao bọc. Khi ấy nếu  $f$  và  $g$  là những hàm khả vi liên tục trên miền mở chứa  $U$  thì*

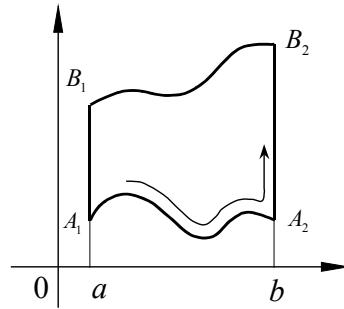
$$\oint_C (f dx + g dy) = \iint_U \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

**CHỨNG MINH.** Chúng ta sẽ chứng minh công thức trên cho trường hợp  $U$  có dạng đơn giản. Đối với trường hợp tổng quát chúng ta chỉ nên ý tưởng chính và không đi vào chi tiết kỹ thuật.

- a) Giả thiết  $U := \{a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ , trong đó  $\varphi_1, \varphi_2$  liên tục trên  $[a, b]$ .

Khi ấy

$$\iint_U \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_b^a dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int_a^b (f(x, \varphi_2(x)) - f(x, \varphi_1(x))) dx$$



Hình 7.3

và

$$\begin{aligned} \oint_C f dx &= \int_{A_1}^{A_2} f dx + \int_{A_2}^{B_2} f dx + \int_{B_2}^{B_1} f dx + \int_{B_1}^{A_1} f dx \\ &= \int_a^b f(x, \varphi_1(x)) dx + \int_b^a f(x, \varphi_2(x)) dx. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra

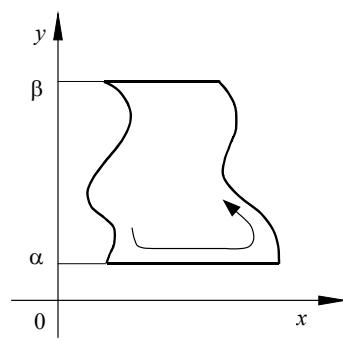
$$\oint_C f dx = - \iint_U \frac{\partial f}{\partial y} dxdy.$$

b) Tương tự,  $U := \{ \alpha \leq y \leq \beta, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y) \}$ ,  
thì

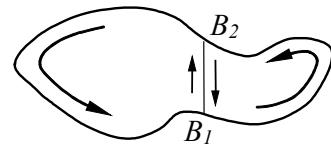
$$\oint_C g dy = \iint_U \frac{\partial f}{\partial x} dxdy.$$

Tóm lại nếu miền  $U$  có dạng đơn giản như đã nêu thì ta có công thức Green như trong định lý.

c) Đối với miền  $U$  mà có thể chia thành những miền con có dạng như đã nêu thì công thức Green vẫn đúng vì tích phân kép ở về phải là hợp của tích phân kép trên từng miền nhỏ, còn tích phân đường về trái chỉ chứa những đường là biên  $U$  (trên mỗi đoạn đường phụ bên trong như  $B_1 B_2$  trên hình vẽ, tích phân được tính hai lần, một lần từ  $A$  đến  $B$  và một lần từ  $B$  đến  $A$ , nên chúng triệt tiêu nhau).



Hình 7.4



Hình 7.5

d) Đối với miền  $U$  tổng quát hơn, người ta cố định điểm  $A$  bất kỳ trên  $C$  và xét phân hoạch  $T$ :  $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = A$  (theo hướng dương). Ký hiệu  $C_T$  là đường gấp khúc với các đỉnh  $A_0, \dots, A_n$  và  $U_T$  là miền bao bởi đường gấp khúc này. Miền  $U_T$  có dạng xét trong phần trên, do đó ta có công thức Green

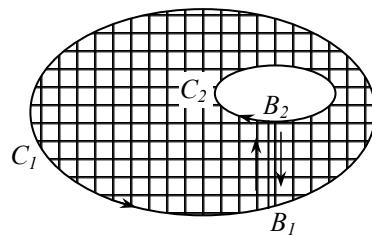
$$\oint_{C_T} (f dx + g dy) = \iint_{U_T} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy.$$

Nhận xét rằng khi độ dài các cung  $A_{k-1} A_k$  dần tới 0 thì  $\oint_{C_T} (f dx + g dy)$  dần tới

$$\oint_C (f dx + g dy), \text{ còn } \iint_{U_T} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy \text{ dần tới}$$

$$\iint_U \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy. \text{ Do vậy, ta có công thức Green}$$

như đã được nêu trong định lý.



Hình 7.6

**Nhận xét.** Định lý Green cũng có thể áp dụng cho miền có “lỗ hổng” với lưu ý là lấy tích phân đường theo biên với hướng dương. Thí dụ như trong hình vẽ bên

$$\iint_U \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{C_1} (fdx + gdy) + \oint_{C_2} (fdx + gdy).$$

Muốn chứng minh công thức trên chỉ cần tách  $U$  thành miền bao bởi  $C_1, C_2$  và đoạn  $B_1B_2$ . Tích phân đường dọc theo  $B_1B_2$  tham gia hai lần, một lần từ  $B_1$  đến  $B_2$  và một lần từ  $B_2$  đến  $B_1$ , nên triệt tiêu nhau. Đối với miền có nhiều lỗ hổng, cách chứng minh hoàn toàn tương tự.

### Thí dụ

- 1) Tính  $\oint_C (e^{x^2} + y)dx + (x^2 + 1/\tan \sqrt{y})dy$  với  $C$  là biên hình chữ nhật đỉnh  $(1,2)$ ,  $(5,2)$ ,  $(5,4)$ ,  $(1,4)$ .

Giải. Việc tính trực tiếp tích phân trên không đơn giản. Nếu ta áp dụng công thức Green thì tích phân trên bằng

$$\iint_M (2x-1)dx dy = \int_2^4 \int_{-1}^5 (2x-1)dx dy = 40.$$

- 2) Chứng minh rằng diện tích miền  $M$  bao bởi đường cong  $C$  được tính bằng công thức  $S(M) = \oint_C xdy = -\oint_C ydx$  và áp dụng cho tính diện tích hình ellip

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Giải. Trong công thức Green, lấy  $f(x,y) = 0$ ,  $g(x,y) = x$ , ta có

$$\oint_C xdy = \iint_M dx dy = S(M)$$

và lấy  $f(x,y) = -y$ ,  $g(x,y) = 0$ , ta có

$$-\oint_C ydx = \iint_M dx dy = S(M).$$

Từ hai công thức này ta thu được

$$S(M) = \frac{1}{2} \oint_C (xdy - ydx).$$

Áp dụng cho hình ellip ta có

$$S(M) = \frac{1}{2} \oint_C (xdy - ydx) = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab.$$

### 7.1.6. Tích phân không phụ thuộc đường

Giả thiết  $A$  và  $B$  là hai điểm trong một miền mở  $U$  liên thông đường theo nghĩa hai điểm bất kỳ trong miền đều nối với nhau được bằng một đường cong trơn từng

khúc. Đường từ  $A$  tới  $B$  là đường cong trơn từng khúc nhận  $A$  là điểm đầu,  $B$  là điểm cuối. Định lý sau sẽ cho ta điều kiện khi nào tích phân đường không phụ thuộc vào đường nối  $A$  với  $B$ .

**ĐỊNH LÝ.** Giả thiết  $f$  và  $g$  liên tục trên  $U$ ,  $A$  và  $B$  là hai điểm bất kỳ trong  $U$ . Khi ấy  $\int_C f dx + g dy$  không phụ thuộc vào đường  $C$  nối  $A$  với  $B$  khi và chỉ khi tồn tại hàm khả vi  $F$  trên  $U$  để  $F'(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ .

**Chứng minh.** Giả sử tích phân không phụ thuộc đường, ta có định  $(x_0, y_0) \in U$  và xây dựng  $F$  theo công thức

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} f dx + g dy.$$

Hiển nhiên  $F$  chỉ phụ thuộc vào  $(x, y)$  và không phụ thuộc vào đường lấy tích phân từ  $(x_0, y_0)$  đến  $(x, y)$ . Để tính đạo hàm riêng của  $F$  xét đường  $C_1 \cup C_2$  từ  $(x_0, y_0)$  đến  $(x + \Delta x, y)$ . Ta có

$$F(x + \Delta x, y) - F(x, y) = \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} f dx + g dy = \int_x^{x + \Delta x} f(x, y) dx.$$

Do đó

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = f(x, y).$$

Tương tự

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)}{\Delta y} = g(x, y).$$

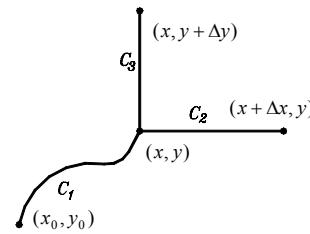
Do  $f$  và  $g$  liên tục, ta kết luận  $F$  khả vi và  $F'(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ .

Ngược lại, cho  $(f, g) = F'$ . Lấy hai điểm bất kỳ  $A$  và  $B$  trong  $U$  và  $C$  là đường cong nối  $A$  với  $B$  cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Giả thiết  $C$  trơn, ta có

$$\begin{aligned} \int_C f dx + g dy &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) dt + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) dt = \\ &= \int_a^b \left[ \frac{d}{dt} F(x(t), y(t)) \right] dt = F(x(b), y(b)) - F(x(a), y(a)). \end{aligned}$$



Hình 7.7

Chứng tỏ tích phân không phụ thuộc vào đường. Nếu  $C$  tron từng khúc, tách tích phân trên thành từng khúc và ta có ngay kết quả.

### Chú ý

1) Nếu  $f$  và  $g$  có các đạo hàm riêng liên tục và tích phân không phụ thuộc đường thì

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \left(= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right).$$

Điều ngược lại cũng đúng nếu  $U$  là miền đơn liên (tức là miền giới hạn bởi một đường cong kín bất kỳ).

2) Điều kiện tích phân không phụ thuộc đường chính là điều kiện tích phân theo mọi đường cong kín bằng 0. Xét về khía cạnh vật lý, nếu trường  $(f, g)$  là bảo toàn có hàm thế năng  $F$  (tức là  $F' = (f, g)$ ) thì công sinh ra khi di chuyển hạt vật chất theo đường cong đóng (khi không có ma sát) bằng 0. Đây chính là hệ quả của định luật bảo toàn năng lượng.

3) Định lý có thể mở rộng cho tích phân đường trong không gian một cách dễ dàng.

### Thí dụ

1) Chứng minh  $\int_A^B x^2 y dx + 2xy^2 dy$  phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

Giải. Từ Chú ý 1) ta có  $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$  và  $\frac{\partial g}{\partial x} = 2y^2$ . Chứng tỏ  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x}$ , nên tích phân không thể không phụ thuộc đường.

2) Kiểm tra xem tích phân  $\int_C y^2 \cos x dx + (2y \sin x + e^{2z}) dy + 2ye^{2z} dz$  có phụ thuộc đường hay không.

Giải. Giả sử tồn tại  $F$  để  $F(x, y, z) = (y^2 \cos x, 2y \sin x + e^{2z}, 2ye^{2z})$ . Khi ấy  $F(x, y, z) = y^2 \sin x + G(y, z)$ , với hàm  $G$  nào đó, vì rằng  $\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 \cos x$ . Tiếp theo, do  $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \sin x + e^{2z}$ , ta tìm được  $G(y, z) = ye^{2z} + H(z)$ . Tương tự, do  $\frac{\partial F}{\partial z} = 2ye^{2z}$ , ta thấy  $H(z) = \alpha$  (hằng số). Vậy,  $F(x, y, z) = y^2 \sin x + ye^{2z} + \alpha$  thỏa mãn yêu cầu. Chứng tỏ tích phân không phụ thuộc đường.

## 7.2. Tích phân mặt

### 7.2.1. Tích phân mặt của hàm số

Cũng như tích phân đường, chúng ta có thể xây dựng tích phân kép trên mặt cong thay vì tích phân trên mặt phẳng.

Giả sử  $S$  là một mặt cong tròn,  $T$  là một phân hoạch của  $S$  bởi các đường cong tròn tùng khúc bao gồm các mảnh  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Gọi  $\delta_T$  là đường kính phân hoạch tức là đường kính lớn nhất của các đường kính của các cầu nhỏ nhất chứa từng  $S_k, k = 1, \dots, n$  và  $\Delta S_k$  là diện tích của  $S_k$ .

Chọn  $B_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) \in S_k, k = 1, 2, \dots, n$ . Giả sử  $f$  là hàm số xác định trên  $S$ . Ta thiết lập tổng

$$\sigma_T = \sum_{k=1}^n f(B_k) \Delta S_k. \quad (*)$$

Nếu nhu tổng  $\sigma_T$  có giới hạn khi  $\delta_T \rightarrow 0$  và không phụ thuộc vào việc chọn  $B_k \in S_k$ , thì giới hạn đó gọi là *tích phân mặt* (loại I) của  $f$  trên  $S$  và ký hiệu

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(B_k) \Delta S_k.$$

Để tính tích phân mặt loại I ta xét phương trình tham số của  $S$

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2,$$

trong đó  $U$  là miền đóng giới nội. Giả thiết  $f$  liên tục. Phân hoạch  $T$  của  $S$  tương ứng với phân hoạch  $T'$  của  $U$  thành các miền con  $M_1, \dots, M_n$ . Theo công thức tính diện tích mặt đã biết

$$\Delta S_k = \iint_{M_k} \sqrt{EG - F} du dv,$$

trong đó

$$E = \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \right\|^2, \quad F = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v}, \quad G = \left\| \frac{\partial X}{\partial v} \right\|^2.$$

Thay công thức này vào tổng  $(*)$  và qua giới hạn khi  $\delta_T \rightarrow 0$  ta có

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_M f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (**)$$

Tích phân mặt loại I có những tính chất tương tự như tích phân đường loại I và được suy trực tiếp từ định nghĩa.

**Thí dụ.** Tính  $\iint_S zdS$  khi  $S$  là nửa mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ .

Giải. Phương trình tham số của  $S$  là

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, \quad u^2 + v^2 \leq 1.$$

Các hệ số Gauss của mặt cong (xem Chương 6) là

$$E = \left\| \left( 1, 0, -\frac{u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \right) \right\|^2 = \frac{1-v^2}{1-(u^2+v^2)},$$

$$G = \left\| \left( 0, 1, -\frac{v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \right) \right\|^2 = \frac{1-u^2}{1-(u^2+v^2)},$$

$$F = \frac{uv}{1-(u^2+v^2)}, \quad \sqrt{EG-F^2} = \frac{1}{z}.$$

Thay vào công thức (\*\*) ta có

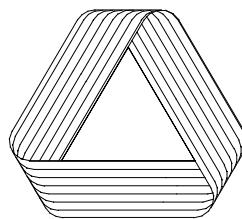
$$\iint_S zdS = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} dS = \pi.$$

### Ý nghĩa cơ học của tích phân mặt

Nếu xem  $S$  là một mặt vật chất với khối lượng riêng tại mỗi điểm  $(x,y,z)$  là  $\rho(x,y,z)$ , thì đại lượng  $\rho(B_k) \Delta S_k$  là khối lượng của mảnh  $S_k$  khi xem như khối lượng riêng là không đổi và bằng  $\rho(B_k)$  trên  $S_k$ . Giới hạn của tổng  $\sum_{k=1}^n \rho(B_k) \Delta S_k$  khi  $\delta_T \rightarrow 0$  gọi là khối lượng của mặt  $S$ . Các khái niệm moment, moment quán tính, trọng tâm ... được định nghĩa tương tự như trường hợp đường cong.

#### 7.2.2. Tích phân mặt của hàm vecto

Giả sử  $S$  là *mặt cong tròn*. Tại mỗi điểm  $P \in S$  ta có hai vecto pháp tuyến đơn vị đối chiều nhau là  $\mathbf{n}_+$  và  $\mathbf{n}_-$ . Khi  $P$  di chuyển theo đường cong kín, đơn trên  $S$  thì  $\mathbf{n}_+$  cũng di chuyển một cách liên tục về chính nó hoặc về  $\mathbf{n}_-$ . Nếu như với điểm  $B$  bất kỳ, sau khi di chuyển theo một đường cong kín, đơn bất kỳ mà  $\mathbf{n}_+$  lại trở về chính nó thì ta nói  $S$  là *mặt cong hai phía*. Trong trường hợp ngược lại,  $S$  được gọi là *mặt cong một phía*. Lá Moebius ở hình vẽ bên là một thí dụ mặt cong một phía.



Hình 7.8

Giả sử  $S$  là mặt cong hai phía và tại mọi điểm vecto pháp tuyến  $\mathbf{n}_+$  (hoặc  $\mathbf{n}_-$ ) đã được chọn. Khi ấy ta nói  $S$  đã *được định hướng*. Dưới đây ta chỉ xét các mặt cong hai phía.

Trên một mặt cong  $S$  đã định hướng, nếu có một đường cong kín  $C$  thì hướng của mặt cong sinh ra hướng của đường cong theo nguyên tắc “văn nút chai”, *hướng dương* trên đường cong  $C$  là hướng mà khi đi theo nó (thân đứng theo hướng của

mặt cong) ta sẽ thấy mặt cong luôn ở phía bên tay trái. Ngược lại, nếu  $C$  đã được định hướng thì hướng của  $S$  cũng có thể được xác định sao cho phù hợp với quy tắc trên.

Đối với mặt *tron tùng mảnh*, việc định hướng có thể được tiến hành trên từng mảnh của mặt cong sao cho hướng trên những đường tiếp giáp có chiều ngược nhau.

Đối với mặt cong đóng kín (như mặt cầu) người ta sử dụng định hướng ra ngoài và định hướng vào trong.

Bây giờ giả sử  $S$  là mặt cong trơn đã định hướng và  $F = (f, g, h)$  là hàm vectơ trên  $S$ . Chúng ta giữ nguyên những ký hiệu về phân hoạch  $T$  của  $S$  như trước:  $S_1, \dots, S_n$  là những mảnh con,  $\delta_T$  là đường kính phân hoạch,  $B_k \in S_k, k = 1, \dots, n$ . Thay vì tổng (\*) ta xét tổng

$$\sigma_T^{xy} = \sum_{k=1}^n h(B_k) \Delta S_k^{xy}, \quad (***)$$

trong đó  $\Delta S_k^{xy}$  có giá trị tuyệt đối là diện tích hình chiếu của  $S_k$  xuống mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  với dấu (+) nếu hướng của đường cong bao quanh  $S_k$  chiếu xuống  $Oxy$  có chiều quay dương ở mặt  $Oxy$  (ngược kim đồng hồ như hình vẽ) và dấu (-) nếu ngược lại.

Nếu như tổng  $\sigma_T^{xy}$  có giới hạn khi  $\delta_T \rightarrow 0$  và không phụ thuộc vào việc chọn  $B_k \in S_k$ , thì giới hạn đó được gọi là *tích phân mặt* (loại II) của  $h$  trên  $S$  theo  $(x, y)$  và ký hiệu là

$$\iint_S h(x, y, z) dx dy = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T^{xy}.$$

Đối với  $f$  và  $g$  ta cũng có những tích phân tương tự (chú ý: Chiều quay dương của mặt  $Ozx$  là đi từ  $Oz$  đến  $Ox$ , còn chiều quay dương của mặt  $Oyz$  là đi từ  $Oy$  đến  $Oz$ ).

Tích phân mặt của hàm vectơ  $F$  trên  $S$  (hay còn gọi tích phân mặt loại II) là đại lượng

$$\iint_S f dy dz + g dz dx + h dx dy.$$

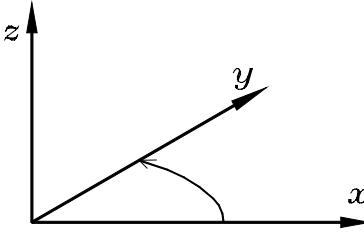
Để tính tích phân mặt của hàm vectơ chúng ta xét trường hợp  $S$  được cho bởi phương trình tham số

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in U,$$

trong đó  $U$  là miền đóng giới nội trong  $\mathbb{R}^2$ . Nhớ lại công thức tính diện tích hình chiếu mảnh cong  $S_k$  xuống mặt phẳng  $Oxy$

$$|\Delta S_k^{xy}| = \iint_{S_k} |\cos \gamma| dS,$$

trong đó



Hình 7.9

$$\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

là thành phần thứ 3 của vectơ pháp tuyến đơn vị trên  $S$  ( $\gamma$  là góc tạo nên bởi pháp tuyến của mặt  $S_k$  với trục  $Oz$ ). Nếu như trên mảnh  $S_k$  đại lượng  $C$  dương thì  $\cos \gamma > 0$ , do đó  $\Delta S_k^{xy}$  lấy dấu (+). Trái lại  $\Delta S_k^{xy}$  lấy dấu trừ. Như vậy

$$\Delta S_k^{xy} = \iint_{S_k} \cos \gamma dS .$$

Theo định lý giá trị trung bình tìm được điểm  $\gamma_k$  (góc giữa pháp tuyến tại điểm  $\overline{B_k} \in S_k$  và trục  $Oz$ ) sao cho

$$\Delta S_k^{xy} = \cos \gamma_k \Delta S_k .$$

Thay công thức này vào tổng (\*\*\*) và lưu ý rằng giới hạn của tổng không phụ thuộc vào việc chọn điểm  $B_k$  nên

$$\iint_S h(x, y, z) dx dy = \iint_S h(x, y, z) \cos \gamma dS .$$

Tương tự đối với hàm  $f$  và  $g$ , ta thu được

$$\iint_S f dy dz + g dz dx + h dx dy = \iint_S (f \cos \gamma_1 + g \cos \gamma_2 + h \cos \gamma_3) dS = \iint_S \langle F, \mathbf{n}_+ \rangle dS .$$

Kết hợp với công thức tính tích phân mặt của hàm số khi mặt được cho bởi phương trình tham số ta có

$$\begin{aligned} \iint_S \langle F, \mathbf{n}_+ \rangle dS &= \iint_M \langle F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \mathbf{n}_+(u, v) \rangle \sqrt{EG - F^2} du dv \\ &= \iint_M (f \cdot A + g \cdot B + h \cdot C) du dv . \end{aligned}$$

### Chú ý

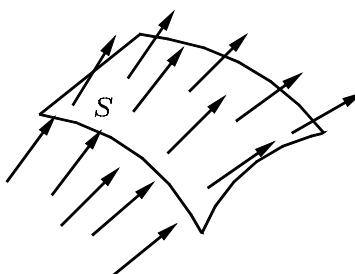
- 1) Nếu  $S$  được định hướng bằng  $\mathbf{n}_-$  thì trong công thức trên vế phải lấy dấu trừ.
- 2) Nếu  $S$  là mặt trơn từng mảnh thì phải xét tích phân trên từng mảnh rồi cộng lại.

### Ý nghĩa vật lý của tích phân mặt loại II

Giả sử dòng chất lỏng với mật độ  $\varphi(x, y, z)$  chịu tác động của trường lực  $G = (g_1, g_2, g_3)$ . Hàm vectơ  $F = \varphi G$  gọi là *trường lực* của dòng. Lượng của dòng chảy qua mặt  $S$  trong một đơn vị thời gian được gọi là *lưu thông* và tính bằng

$$\iint_S \langle F, \mathbf{n} \rangle dS .$$

Đây chính là tích phân mặt loại II của  $F$  trên  $S$ .



Hình 7.10

**Thí dụ.** Tính tích phân hàm vecto  $F(x, y, z) = (y, -x, z^2)$  trên mặt paraboloid  $z = x^2 + y^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

**Giải.** Phương trình tham số của mặt cong

$$x = u, \quad y = v, \quad z = u^2 + v^2, \quad 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1.$$

Ta tính được  $A = -2u$ ,  $B = -2v$ ,  $C = 1$  và suy ra

$$\begin{aligned} \iint_S \langle F, n_+ \rangle dS &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (v(-2u) - u(-2v) + (u^2 + v^2)^2) dudv = \\ &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (u^2 + v^2)^2 dudv = \pi/3 \end{aligned}$$

(chú ý: mặt được định hướng vào trong).

### 7.2.3. Định lý Ostrogradski

Định lý Green cho ta công thức liên hệ tích phân kép và tích phân đường. Định lý Ostrogradski dưới đây cho công thức liên hệ giữa tích phân mặt với tích phân bội ba.

**ĐỊNH LÝ.** Giả thiết  $S$  là mặt trơn tùng mảnh, kín, bao quanh miền  $V$  trong  $\mathbb{R}^3$  và được định hướng ra ngoài. Nếu hàm vecto  $F = (f, g, h)$  khả vi liên tục trên miền mở chứa  $V$  thì

$$\iint_S f dy dz + g dz dx + h dx dy = \iiint_V \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

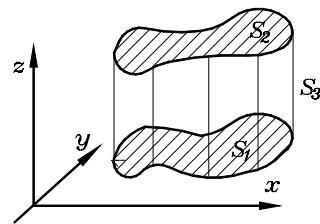
**Chứng minh.** Trước hết chúng ta xét trường hợp  $V$  là hình trụ đáy dưới  $S_1$  cho bởi

$$z = \varphi(x, y)$$

và đáy trên  $S_2$  cho bởi

$$z = \psi(x, y);$$

mặt bên  $S_3$  có hình chiếu xuống  $Oxy$  là đường cong  $C$  kín, trơn tùng khúc bao miền  $U$ . Ta có



Hình 7.11

$$\iiint_V \frac{\partial h}{\partial z} dx dy dz = \iint_U dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial h}{\partial z} dz = \iint_U [h(x, y, \psi(x, y)) - h(x, y, \varphi(x, y))] dx dy$$

và

$$\begin{aligned} \iint_S h dx dy &= \iint_{S_1} h dx dy + \iint_{S_2} h dx dy + \iint_{S_3} h dx dy \\ &= - \iint_U h(x, y, \varphi(x, y)) dx dy + \iint_U h(x, y, \psi(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Từ hai đẳng thức trên ta có

$$\iint_S h dxdy = \iiint_V \frac{\partial h}{\partial z} dxdydz .$$

Thay đổi vai trò các biến và các hàm  $f, g$  ta sẽ có công thức tương tự cho các miền dạng đã xét. Tổng của chúng chính là công thức Ostrogradski.

Đối với miền tổng quát như nêu trong định lý, kỹ thuật chứng minh hoàn toàn tương tự như cách chứng minh định lý Green.

Giả sử  $V$  là miền mở trong  $\mathbb{R}^3$ . Ta nói  $V$  là đơn liên nếu vùng bao bởi mặt cong kín, đơn, tron từng mảnh bất kỳ trong  $V$  nằm trọn trong  $V$ .

**HỆ QUẢ.** *Giả thiết  $V$  là miền đơn liên trong  $\mathbb{R}^3$  và  $F$  là hàm vectơ khả vi liên tục trên  $V$ . Khi áy tích phân của  $F$  theo bất kỳ mặt cong kín, tron từng mảnh trong  $V$  bằng 0 khi và chỉ khi*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad \text{trên } V.$$

**Chứng minh.** *Điều kiện đủ suy ngay từ định lý Ostrogradski. Để chứng minh điều kiện cần, giả sử có điểm  $P_0$  mà tại đó*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} > 0 \quad (\text{trường hợp } < 0 \text{ chứng minh tương tự}).$$

Do tính liên tục, có thể giả thiết bất đẳng thức trên đúng với mọi điểm trong quả cầu  $V_0$  tâm  $P_0$ , bán kính  $\delta > 0$ . Gọi  $S_0$  là mặt của quả cầu này. Theo định lý giá trị trung bình ta có bất đẳng thức

$$\iiint_{V_0} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dxdydz > 0 .$$

Thế nhưng theo định lý Ostrogradski và điều kiện đủ, ta lại có

$$\iiint_{V_0} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_{S_0} \langle F, \mathbf{n}_+ \rangle dS = 0 .$$

Điều này là vô lý. Hệ quả được chứng minh xong.

**Thí dụ.** Tính  $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$  biết rằng mặt cong  $S$  bao miền  $V$  có thể tích  $\text{vol}(V)$ .

**Giai.** Áp dụng công thức Ostrogradski ta có

$$\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_V (1+1+1) dxdydz = 3 \text{vol}(V).$$

### 7.2.4. Định lý Stokes

Định lý Stokes là mở rộng của định lý Green cho đường cong kín trong không gian.

**ĐỊNH LÝ.** Giả thiết  $S$  là mặt cong tròn và đơn, bao bởi đường cong kín, đơn  $C$  đã được định hướng,  $F = (f, g, h)$  là hàm vectơ trên miền mở chứa  $S$ . Khi ấy

$$\int_C f dx + g dy + h dz = \iint_S \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz dx .$$

**Chứng minh.** Trước tiên chúng ta chứng minh đẳng thức sau

$$\int_C f dx = \iint_S \frac{\partial f}{\partial z} dz dx - \frac{\partial f}{\partial y} dx dy .$$

Để ý rằng, trong phương trình tham số của mặt cong  $S$ , hai biến  $(u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$  trong đó  $U$  là miền đóng, giới nội, có biên  $C_U$  tròn từng khúc (lưu ý là chiều của  $C_U$  được xác định bởi chiều của  $C$  phù hợp với hướng của  $S$ ). Bằng cách tham số hóa  $C_U$  và do đó  $C$  cũng được tham số hóa theo, ta suy ra ngay công thức

$$\int_C f dx = \int_{C_U} f \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) .$$

Áp dụng công thức Green cho tích phân theo đường cong phẳng  $C_U$  ở vế phải và công thức đổi biến, ta thu được

$$\begin{aligned} \int_{C_U} f \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) &= \iint_U \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( f \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( f \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] du dv = \\ &= \iint_U \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} B - \frac{\partial f}{\partial y} C \right\} du dv = \iint_S \frac{\partial f}{\partial z} dz dx - \frac{\partial f}{\partial y} dx dy . \end{aligned}$$

Như vậy (1) đúng. Tương tự, ta chứng minh công thức cho  $g, h$ , sau đó lấy tổng và thu được công thức Stokes.

**Chú ý.** Đối với mặt cong tròn tùng mảnh định lý Stokes vẫn đúng. Để chứng minh chỉ cần áp dụng công thức cho từng mảnh rồi lấy tổng của chúng.

**Thí dụ.** Hãy kiểm tra công thức Stokes cho hàm vectơ

$$F(x, y, z) = (z - y, x + z, -x - y)$$

trên mặt paraboloid  $z = 4 - x^2 - y^2$  và mặt  $z = 0$ .

Giải. Biên của mặt cong là đường tròn  $x^2 + y^2 = 4$  có phương trình tham số là

$$x = 2 \cos \alpha, \quad y = 2 \sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi .$$

Do đó  $\int_S F dC = \int_C (z-y)dx + (x+z)dy - (x+y)dz = \int_0^{2\pi} 4d\alpha = 8\pi$ , và

$$\begin{aligned} \iint_S \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz dx = \\ = \iint_S (1+1) dx dy + (-1-1) dy dz + (1+1) dz dx = \\ = 2 \iint_S dx dy + dy dz + dz dx = \iint_U (-4x + 4y + 2) dx dy = 8\pi, \end{aligned}$$

vì  $A = 2x$ ,  $B = 2y$ ,  $C = 1$ . Đúng như công thức Stokes.

Để rút ra hệ quả về sự không phụ thuộc của tích phân đường trong không gian vào đường lấy tích phân ta gọi miền  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  là *miền đơn liên mặt* nếu với mọi đường cong kín, trọn từng khúc  $C \subseteq V$  tìm được mặt cong trọn từng mảnh nhận  $C$  làm biên. Khối hình xuyến là một thí dụ của miền không đơn liên mặt.

**HỆ QUẢ.** *Giả thiết  $V$  là một miền đơn liên mặt và các hàm  $f, g, h$  liên tục cùng với các đạo hàm riêng  $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}$ . Khi ấy các tính chất sau tương đương:*

(i) *Với mọi đường cong kín, trọn từng khúc nằm trọn trong  $V$ , đẳng thức sau nghiệm đúng*

$$\oint_C f dx + g dy + h dz = 0;$$

(ii) *Tích phân  $\oint_C f dx + g dy + h dz$  không phụ thuộc vào đường cong  $C$  nối hai điểm  $A, B$  trong  $V$ ;*

(iii) *Biểu thức  $fdx + gdy + hdz$  là vi phân toàn phần của một hàm nào đó trong  $V$ ;*

(iv)  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}$ .

**Chứng minh.** Sự tương đương của (iv) với (i) hoặc (ii) suy ngay từ định lý Stokes. Sự tương đương của (iv) và (iii) được chứng minh tương tự như hệ quả của định lý Green trong mặt phẳng.

## 7.3. Lý thuyết trường

### 7.3.1. Khái niệm về trường

#### 1. Trường

Giả sử  $U$  là một miền trong không gian  $\mathbb{R}^3$  và mỗi điểm  $p \in U$  được gán một đại lượng vô hướng  $f(p) \in \mathbb{R}$  (hoặc một đại lượng vectơ  $F(p) \in \mathbb{R}^3$ ). Khi ấy ta nói trong  $U$  có *trường vô hướng*  $f$  (tương ứng, *trường vectơ*  $F$ ). Như vậy, trường vô hướng là một hàm số và trường vectơ là một hàm vectơ xác định trên miền đã cho.

Nếu  $U$  là một miền trong mặt phẳng  $\mathbb{R}^2$  thì trường vô hướng và trường vectơ (phẳng) trong  $U$  được định nghĩa tương tự.

#### Thí dụ

1) Trong một vùng không gian  $V$ , ký hiệu  $T(p,t)$  là nhiệt độ và  $W(p,t)$  là vectơ tốc độ gió đo được tại điểm  $p \in V$  và tại thời điểm  $t$ . Khi ấy, với mỗi  $t$  cố định, trường nhiệt độ  $T(p,t)$  là một trường vô hướng, còn trường gió  $W(p,t)$  là một trường vectơ trong  $V$ .

2) Giả sử hạt vật chất khối lượng  $m_0$  đặt ở gốc tọa độ. Khi ấy theo định luật Newton, lực hút tác động lên hạt vật chất khối lượng  $m$  đặt tại  $p(x,y,z)$  được cho bởi công thức

$$F(x,y,z) = -\frac{gm_0m}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r},$$

trong đó  $g$  là hằng số hấp dẫn,  $\mathbf{r}$  là vectơ định vị của  $p$  với các tọa độ  $x,y,z$ . Đây là một trường vectơ và được gọi là *trường lực hấp dẫn*.

3) Giả sử điện tích  $q$  đặt ở gốc tọa độ. Khi ấy xung quanh nó có *trường điện thế*

$$f(x,y,z) = \frac{q}{|\mathbf{r}|}.$$

Đây là một trường vô hướng.

#### 2. Các khái niệm liên quan

Giả sử  $f$  là một trường vô hướng trong miền  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ . Chúng ta giả thiết rằng  $f$  khả vi và đạo hàm khác không trên miền  $U$ . Khi ấy với mỗi hằng số  $c$ , phương trình

$$f(x,y,z) = c$$

xác định mặt cong gọi là **mặt mức** hay **mặt đẳng trị** (vì giá trị của  $f$  trên mặt này không đổi). Hiển nhiên là các mặt mức khác nhau không giao nhau và chúng phủ kín miền  $U$ .

**Thí dụ.** Trong *trường điện thé* (ở phần thứ 3 trong thí dụ trên), với mỗi hằng số  $c$ , mặt đẳng trị  $f(x,y,z)=c$  là mặt cầu  $x^2+y^2+z^2=(q/c)^2$  và được gọi là **mặt đẳng thé**.

Trong những phần tiếp theo, ta sẽ ký hiệu  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  là những vectơ đơn vị của các trục tọa độ  $Ox, Oy, Oz$ . Trường vectơ  $F$  còn được viết dưới dạng

$$F = F^x \mathbf{i} + F^y \mathbf{j} + F^z \mathbf{k},$$

trong đó  $F^x, F^y, F^z$  là các tọa độ của  $F$ .

Cho  $F$  là *trường vectơ* trong  $U$ .

Đường cong  $C$  được gọi là **đường dòng** của  $F$  nếu tiếp tuyến của đường cong tại mọi điểm  $p \in C$  có hướng trùng với hướng của  $F(p)$ .

Mặt cong  $S$  được gọi là **mặt dòng** nếu  $S$  bao gồm các đường dòng và tại mọi điểm  $p \in S$ , vectơ  $F(p)$  nằm trong mặt phẳng tiếp tuyến với  $S$  tại  $p$ .

Nếu như đường cong  $C$  được cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

thì hướng của tiếp tuyến của  $C$  là  $(x'(t), y'(t), z'(t))$ , cho nên phương trình của đường dòng  $C$  là

$$\frac{dx}{F^x} = \frac{dy}{F^y} = \frac{dz}{F^z}.$$

**Nhận xét.** Nếu trường vectơ  $F$  khác 0 thì mỗi điểm  $p \in U$  chỉ có một *đường dòng* duy nhất đi qua. Hơn nữa, các đường dòng không cắt nhau. Ngoài ra, nếu  $C_0$  là một đường cong tròn và qua mỗi điểm của  $C_0$  có một đường dòng đi qua, khi ấy tập tất cả các đường dòng này tạo thành **mặt dòng**. Nếu  $C_0$  là đường kín, mặt dòng trở thành một **óng dòng**.

**Thí dụ.** Trong *trường hấp dẫn* (phần thứ 2 của thí dụ đầu tiên), ta có phương trình các đường dòng là

$$\frac{dx}{\alpha_0 x |\mathbf{r}^3|^{-1}} = \frac{dy}{\alpha_0 y |\mathbf{r}^3|^{-1}} = \frac{dz}{\alpha_0 z |\mathbf{r}^3|^{-1}},$$

trong đó  $\alpha_0$  là hằng số bằng  $-gm_0 m$ . Phương trình này tương đương với

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \quad \text{hay là} \quad x = \alpha_1 t, \quad y = \alpha_2 t, \quad z = \alpha_3 t.$$

Đây chính là đường thẳng đi qua điểm đặt hạt vật chất.

### 7.3.2. Gradient và luật bảo toàn

#### 1. Gradient

Cho trường vô hướng  $f$  trong miền  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ . Khi ấy gradient của  $f$  là

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (\text{hay ký hiệu } \operatorname{grad} f)$$

và là một trường vectơ trong  $U$ .

Một số tính chất của trường vectơ này đã được biết trong Chương 2.

1) Đạo hàm theo hướng  $v$  của  $f$  được tính theo công thức

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \langle \operatorname{grad} f, v_0 \rangle$$

trong đó  $v_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  là vectơ đơn vị chỉ hướng của  $v$  với các góc chỉ hướng  $\alpha, \beta, \gamma$ .

2) Giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng  $\frac{\partial f}{\partial v}$  đạt được khi  $v_0$  trùng với hướng của  $\operatorname{grad} f$ , và bằng

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

3) Gradient của  $f$  tại  $p$  có cùng hướng với vectơ pháp tuyến  $\mathbf{n}_+$  của mặt mức đi qua  $p$  (tại điểm  $p$ ). Thật vậy, phương trình mặt mức qua  $p$  là

$$f(x, y, z) = c, \text{ với } c = f(p).$$

Vectơ pháp tuyến tại  $p$  là (xem thí dụ trong mục đường cong và mặt cong)

$$\mathbf{n}_+ = \left( \frac{\partial f(p)}{\partial x}, \frac{\partial f(p)}{\partial y}, \frac{\partial f(p)}{\partial z} \right)$$

trùng với  $\operatorname{grad} f$ .

**Thí dụ.** Biết rằng trường nhiệt tại thời điểm  $t$  cố định được cho bởi công thức

$$T = \frac{100}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Hãy tìm giá trị trường vectơ tốc độ thay đổi nhiệt tại  $p = (1, 3, -2)$  và  $T$  thay đổi nhanh nhất theo hướng nào?

Giải. Ta tính gradient của  $T$

$$\text{grad } T = \left( \frac{-200x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-200y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-200z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right).$$

Đây là trường vecto tốc độ thay đổi nhiệt. Tại  $p = (1, 3, -2)$  ta có

$$\text{grad } T(p) = -\frac{200}{196}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}).$$

Theo 2),  $T$  thay đổi nhanh nhất theo hướng của gradient tức là hướng  $(-\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ .

## 2. Luật bảo toàn

Cho  $F$  là một *trường vecto* trên miền  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ . Nếu tồn tại hàm  $f$  khả vi trên  $U$  sao cho  $F = \text{grad } f$  thì người ta gọi  $F$  là *trường bảo toàn* và gọi  $f$  là *hàm thế năng*.

Trong Vật lý học, một trường vecto thường được xem như một *trường lực*. Nếu một chất điểm với khối lượng  $m$  chuyển động trong miền  $U$  với quỹ đạo là một đường cong khả vi  $\mathbf{x}(t)$  thì theo định luật Newton ta có  $F(\mathbf{x}(t)) = m\ddot{\mathbf{x}}(t)$ , hay là  $F(\mathbf{x}) = m\ddot{\mathbf{x}}$ . Điều này có nghĩa là  $m\ddot{\mathbf{x}} = \text{grad } f(\mathbf{x})$ , và bằng cách *nhân vô hướng* cả 2 vế với  $\dot{\mathbf{x}}$  ta suy ra

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m(\dot{\mathbf{x}})^2 - f(\mathbf{x}) \right) = 0, \text{ hay } \frac{1}{2} m(\dot{\mathbf{x}})^2 - f(\mathbf{x}) = \text{const}.$$

Nếu ta gọi số hạng đầu ở vế trái là *động năng* thì công thức trên có nghĩa là trong khi vật chuyển động thì tổng của *động năng* và *thể năng* luôn là một hằng số. Chính điều này lý giải tại sao khi một trường là *gradient* của một hàm khả vi thì lại có tên là *trường bảo toàn*. Không phải trường nào cũng là trường bảo toàn.

### 7.3.3. Phân tán và định lý Ostrogradski

*Phân tán* của *trường vecto*  $F$  (hay *divergence* của  $F$ ) trong miền  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ , ký hiệu  $\text{div } F$ , là *trường vô hướng* xác định bởi

$$\text{div } F = \frac{\partial F^x}{\partial x} + \frac{\partial F^y}{\partial y} + \frac{\partial F^z}{\partial z}.$$

Với ký hiệu này, định lý Ostrogradski được viết như sau

$$\iint_S \langle F, \mathbf{n} \rangle ds = \iiint_V \text{div } F dv,$$

trong đó  $S$  là mặt *tron tung mảnh, kín và bao quanh* miền  $V$  trong  $\mathbb{R}^3$ . Theo ngôn ngữ vật lý, công thức trên nói rằng *lưu thông*  $F$  qua mặt  $S$  bằng tích phân bội ba của phân tán của  $F$  trên miền  $V$  giới hạn bởi  $S$ .

### Ý nghĩa vật lý của khái niệm phân tán

Theo định lý giá trị trung bình ta tìm được điểm  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  bên trong  $V$  sao cho

$$\iiint_V \operatorname{div} F dv = \operatorname{div} F(p_0) \operatorname{vol}(V),$$

trong đó  $\operatorname{vol}(V)$  ký hiệu thể tích của  $V$ . Suy ra

$$\operatorname{div} F(p_0) = \frac{1}{\operatorname{vol}(V)} \iint_S \langle F, \mathbf{n} \rangle ds.$$

Như vậy với điểm  $p$  cố định bên trong  $V$ , ký hiệu  $S_\varepsilon$  là mặt cầu tâm  $p$  bán kính  $\varepsilon$  và  $v_\varepsilon$  là thể tích quả cầu này, ta sẽ tìm được điểm  $p_\varepsilon$  bên trong  $S_\varepsilon$  sao cho

$$\operatorname{div} F(p_\varepsilon) = \frac{1}{v_\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon} \langle F, \mathbf{n} \rangle ds.$$

Cho  $\varepsilon \rightarrow 0$  ta thu được

$$\operatorname{div} F(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{v_\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon} \langle F, \mathbf{n} \rangle ds.$$

Công thức này có nghĩa *phân tán* của trường vecto  $F$  tại điểm  $p$  là *giới hạn* của *lưu thông trên đơn vị thể tích* qua mặt cầu tâm  $p$  khi bán kính tiến dần tới 0.

Như vậy, nếu  $F$  là tốc độ di chuyển của chất lỏng thì  $\operatorname{div} F(p)$  là tỷ lệ mật độ hoặc thu về của lượng chất lỏng trên một đơn vị thể tích tại lân cận điểm  $p$ . Nếu  $\operatorname{div} F(p) > 0$ , thì  $p$  là điểm nguồn, lưu thông vào mặt  $S_\varepsilon$  ít hơn lưu thông ra. Nếu  $\operatorname{div} F(p) < 0$ , thì  $p$  là điểm rò, lưu thông vào mặt  $S_\varepsilon$  nhiều hơn lưu thông ra.

Trường vecto  $F$  mà trong đó không có điểm nguồn, không có điểm rò thì  $\operatorname{div} F = 0$  và đây chính là *phương trình liên tục* đối với chất lỏng không nén được.

#### 7.3.4. Xoáy và định lý Stokes

*Xoáy* của *trường vecto*  $F$  trong miền  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ , ký hiệu là  $\operatorname{curl} F$  hoặc  $\operatorname{rot} F$ , là *trường vecto*

$$\operatorname{curl} F = \left( \frac{\partial F^z}{\partial y} - \frac{\partial F^y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial F^x}{\partial z} - \frac{\partial F^z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial F^y}{\partial x} - \frac{\partial F^x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Với ký hiệu này định lý Stokes có thể viết như sau

$$\int_C \langle F, T \rangle ds = \iint_S \langle \operatorname{curl} F, \mathbf{n} \rangle ds,$$

trong đó  $T$  ký hiệu vecto tiếp tuyến đơn vị của  $C$  tức là

$$\frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} + \frac{dz}{ds} \mathbf{k},$$

và do đó  $\langle F, T \rangle ds = F^x dx + F^y dy + F^z dz$ ;  $S$  là mặt cong trơn, đơn được bao bởi đường cong  $C$  kín, đơn và được định hướng. Lưu ý rằng đôi khi người ta gọi  $\langle \operatorname{curl} F, \mathbf{n} \rangle$  là xoáy của  $F$  quanh  $\mathbf{n}$ .

Công thức trên có thể phát biểu như sau: tích phân đường của thành phần tiếp tuyến của  $F$  dọc theo  $C$  theo chiều dương bằng tích phân mặt của thành phần pháp tuyến của xoáy  $\operatorname{curl} F$  trên mặt  $S$ .

### Ý nghĩa vật lý của khái niệm xoáy

Xét điểm  $p$  bất kỳ trong  $M$  và đĩa tròn  $S_\varepsilon$  tâm  $p$ , bán kính  $\varepsilon > 0$  với biên là đường tròn  $C_\varepsilon$ . Từ định lý Stokes và định lý giá trị trung bình, tồn tại  $p_\varepsilon \in S_\varepsilon$  sao cho

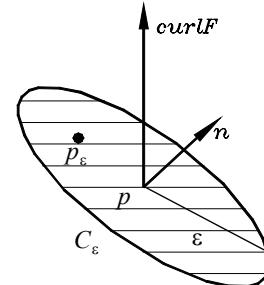
$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon} \langle F, T \rangle ds &= \int_{C_\varepsilon} \langle \operatorname{curl} F, \mathbf{n} \rangle ds = \langle \operatorname{curl} F(p_\varepsilon), \mathbf{n}(p_\varepsilon) \rangle \pi \varepsilon^2. \text{ Do đó} \\ \langle \operatorname{curl} F(p_\varepsilon), \mathbf{n}(p_\varepsilon) \rangle &= \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon} \langle F, T \rangle ds. \end{aligned}$$

Khi  $\varepsilon \rightarrow 0$ , điểm  $p_\varepsilon$  dần tới  $p$  và ta thu được

$$\langle \operatorname{curl} F(p'), \mathbf{n}(p) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon} \langle F, T \rangle ds. \quad (*)$$

Nếu  $F$  biểu diễn trường tốc độ của chất lỏng thì tích phân  $\int_{C_\varepsilon} \langle F, T \rangle ds$  được gọi là *lưu lượng quanh  $C_\varepsilon$* . Nó biểu thị xu thế trung bình của chất lỏng chuyển động quanh đường cong  $C_\varepsilon$ . Công thức (\*) cho biết về chuyển động của chất lỏng quanh biên đĩa tròn vuông góc với vectơ  $\mathbf{n}$  khi bán kính của đĩa dần tới 0.

Nếu trong miền  $U$  mà  $\operatorname{curl} F = 0$ , thì lưu lưu lượng mọi đường cong kín bằng 0. Trong trường hợp này, người ta nói là trường vectơ *vắng xoáy*.



Hình 7.12

# **Bài tập và tính toán thực hành Chương 7**

<b>1. Tích phân đường.....</b>	<b>259</b>
1.1. Tích phân đường loại một.....	259
1.2. Tích phân đường loại hai .....	259
1.3. Bài tập tổng hợp .....	261
<b>2. Tích phân mặt .....</b>	<b>264</b>
2.1. Tích phân mặt loại I .....	264
2.2. Tích phân mặt loại II.....	265
2.3. Bài tập tổng hợp .....	265
<b>3. Lý thuyết trường .....</b>	<b>266</b>
<b>4. Thực hành tính toán trên máy.....</b>	<b>269</b>
4.1. Tính tích phân đường.....	269
4.2. Tính tích phân mặt .....	271
4.3. Tính Phân tán và Xoáy của trường vectơ .....	273

## **1. Tích phân đường**

### **1.1. Tích phân đường loại một**

**Bài 1.** Tính tích phân  $I = \int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})dl$ , trong đó  $C$  là cung astroid

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

**Bài 2.** Tính tích phân của hàm  $\sqrt{x^2 + y^2}$  trên đường tròn  $C$  có công thức

$$x^2 + y^2 = ax.$$

**Bài 3.** Tính tích phân đường loại một  $I = \int_C (x^2 + y^2 + z^2)dl$ , trong đó  $C$  là đường xoắn hìn nón  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$ ,  $z = t$  ( $0 \leq t \leq T$ ).

### **1.2. Tích phân đường loại hai**

*Tính các tích phân đường loại hai sau đây lấy trên các đường cong được chỉ ra theo hướng tăng của tham số:*

**Bài 1.**  $I = \int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$ , trong đó  $C$  là đường parabol

$$y = x^2, -1 \leq x \leq 1.$$

**Bài 2.**  $I = \int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ , trong đó  $C$  là đường

$$y = 1 - |1 - x|, 0 \leq x \leq 2.$$

**Bài 3.**  $I = \oint_C (x+y)dx + (x-y)dy$ , trong đó  $C$  là đường ellip  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  chạy ngược chiều kim đồng hồ.

**Bài 4.**  $I = \int_C (y^2 - z^2)dx + 2yzdy + x^2dz$ , trong đó  $C$  là đường

$$x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1, \text{lấy theo hướng tăng của tham số.}$$

**Bài 5.**  $I = \int_C ydx + zdy + xdz$ , trong đó  $C$  là một đoạn của đường xoắn  $x = a \cos t$ ,

$$y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi, \text{lấy theo hướng tăng của tham số.}$$

**Bài 6.** (Thi vào giai đoạn 2, hệ tại chúc, ĐHBK Hà Nội). Cho tích phân đường loại hai  $I = \oint_L (1-x^2)ydx + (1+y^2)x dy$ , trong đó  $L$  là đường tròn

$$x^2 + y^2 = R^2, \text{lấy theo chiều dương. Tính } I \text{ theo hai cách:}$$

- a) Tính trực tiếp;
- b) Dùng công thức Green.

**Bài 7.** (Thi vào giai đoạn 2, hệ tại chúc, ĐHBK Hà Nội). Tính

$$\int_{(1,0)}^{(2,3)} (y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} dx + (y^2 + 3xy\sqrt{y^2 + 1}) dy.$$

**Bài 8.** (Thi vào giai đoạn 2, hệ tại chúc, ĐHBK Hà Nội). Tính

$$\int_{(0,0)}^{(1,\frac{\pi}{2})} e^x [(x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy].$$

**Bài 9.** (Thi vào giai đoạn 2, hệ chính quy, ĐHBK Hà Nội, 1993). Cho tích phân đường

$$\int_L e^x [(y + m^2 \cos y)dx + (1 + m \sin y)dy] \quad (m \text{ là tham số}).$$

- a) Tìm  $m$  để biểu thức dưới dấu tích phân là vi phân toàn phần của hàm  $u(x, y)$  nào đó.

b) Khi  $m = -1$ , tính tích phân trên với  $L$  là nửa đường tròn  $x^2 + y^2 = 1, x \geq 0$ , chiều dương từ điểm  $A(0, -1)$  đến  $B(0, 1)$ .

**Bài 10.** (Thi vào giai đoạn 2, hệ chính quy, ĐHBK Hà Nội, 1991). Cho phương trình vi phân  $h(x)[ydx + (ye^x - 1)dy] = 0$ .

a) Tìm hàm  $h(x)$  để phương trình trên là phương trình vi phân toàn phần;

b) Giải phương trình này với  $h(x)$  tìm được;

c) Tính  $\oint_L h(x)[ydx + (ye^x - 1)dy]$ , với  $L$  là đường cong kín, trơn và  $h(x)$  như ở trên;

d) Tính  $\int_{(0,0)}^{(1,1)} h(x)[ydx + (ye^x - 1)dy]$  với  $h(x)$  tìm được ở trên.

**Bài 11.** (Thi vào giai đoạn 2, hệ chính quy, ĐHBK Hà Nội, 1992). Cho các hàm

$$P(x, y) = 2ye^{xy} + e^{\alpha x} \cos y,$$

$$Q(x, y) = 2xe^{xy} - e^{\alpha x} \sin y,$$

trong đó  $\alpha$  là hằng số.

a) Tìm  $\alpha$  để biểu thức  $Pdx + Qdy$  là vi phân toàn phần của hàm  $u(x, y)$ .

Tìm hàm  $u(x, y)$  ứng với đó.

b) Khi  $\alpha = 1$  hãy tính tích phân đường sau:

$$\oint_{x^2+y^2=2x} (P(x, y) - \frac{y^3}{3})dx + (Q(x, y) + \frac{x^3}{3} - xy^3)dy.$$

### 1.3. Bài tập tổng hợp

**Bài 1.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Tính  $I = \int\limits_{OAB} (\cos y - 1)e^x dx + (2y - \sin y)e^x dy$ , trong đó OAB là đường gấp khúc O(0,0); A(1,1); B(2,0).

**Bài 2.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

Cho hai hàm  $P(x, y) = \frac{ax - y}{x^2 + y^2}$ ;  $Q(x, y) = \frac{bx + y}{x^2 + y^2}$ . Tìm  $a, b$  để biểu thức  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  là vi phân toàn phần của một hàm  $u(x, y)$  nào đó.

Khi  $a=b=1$ , hãy tính tích phân  $J = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$  với  $AB$  là cung

Parabol  $y = (x-1)^2$  từ điểm  $A(1;0)$  đến  $B(0;1)$ .

**Bài 3.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Cho hai hàm  $P(x,y) = y^2 + 1$  và  $Q(x,y) = 3xy$ . Hãy tìm hàm  $h(y)$  sao cho  $h(y)P(x,y)dx + h(y)Q(x,y)dy$  là biểu thức vi phân toàn phần của một hàm  $u(x,y)$  và tìm hàm  $u(x,y)$  đó.

Với  $h(y)$  tìm được, hãy tính:  $I = \int\limits_{(3,0)}^{(1,\sqrt{3})} h(y)P(x,y)dx + h(y)Q(x,y)dy$ .

**Bài 4.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Cho  $I = \int\limits_{AB} (x+1)e^{x-y}dx - xe^{x-y}dy$ . Chứng minh rằng  $I$  không phụ thuộc

vào đường lấy tích phân. Tính  $I$  khi  $AB$  là cung  $y = -\sqrt{2x-x^2}$  từ  $A(0,0)$  đến  $B(2,0)$ .

**Bài 5.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Cho  $I = \int\limits_{AB} y(x + \frac{y}{z})e^x dx + (x+y-1)e^x dy$ . Chứng minh rằng  $I$  không phụ

thuộc vào đường lấy tích phân. Tính  $I$  khi  $AB$  là cung  $x = \sqrt{2y-y^2}$  từ  $A(0,0)$  đến  $B(0,2)$ .

**Bài 6.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

a) Chứng minh rằng biểu thức  $(x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy$  là vi phân toàn phần của một hàm  $u(x,y)$  nào đó.

b) Tính tích phân đường loại hai:  $\int\limits_{AB} (x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy$ ,

trong đó  $AB$  là đường cong tròn hướng từ  $A(1,0)$  đến  $B(0,1)$ .

**Bài 7.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

Tính tích phân đường loại hai  $\int\limits_{AB} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{b^2x^2 + a^2y^2}$  với  $AB$  là nửa đường

ellip  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $y \leq 0, a > 0, b > 0$ ) hướng từ  $A(a,0)$  đến  $B(-a,0)$ .

**Bài 8.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Cho  $I = \int_L e^{xy}[(1+xy)dx + x^2dy]$ . Hãy chứng tỏ rằng tích phân này không

phụ thuộc vào dạng đường cong lấy tích phân. Tính tích phân khi  $L$  là nửa đường tròn  $x^2 + y^2 = 2y$  nằm phía trên đường  $y=1$ , chiều đi từ điểm A(1,1) đến điểm B(-1,1).

**Bài 9.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

1) Sử dụng công thức Green tính  $\oint_L (xy + x + y)dx - (xy + x - y)dy$ , với  $L$

là đường tròn  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) lấy theo chiều dương.

2) Sử dụng công thức Green tính  $\oint_L x(y + \frac{x}{4})dx - y(x + \frac{y}{4})dy$ , với  $L$  là

đường tròn  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) lấy theo chiều dương.

**Bài 10.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Tính  $I = \oint_C (x^2y^4 + x^2 + ye^{xy})dx + (\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + xe^{xy})dy$ , trong đó  $C$  là

đường cong có phương trình  $x^2 + y^2 = 2x$  theo chiều dương.

**Bài 11.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

a) Chứng minh rằng biểu thức  $(x^2 - 3xy^2 + 2y)dx + (2x - 3x^2y + 2y)dy$  là  
vi phân toàn phần của một hàm  $u(x,y)$  nào đó.

b) Tính tích phân đường loại hai

$$\int_{AB} (2x - 3xy^2 + 2y)dx + (2x - 3x^2y + 2y)dy,$$

trong đó AB là đường cong tròn hướng từ A(1,0) đến B(0,1).

**Bài 12.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

Cho  $I = \int_L e^{x-y}[(1+x+y)dx + (1-x-y)dy]$ . Chứng tỏ rằng tích phân này

không phụ thuộc vào dạng đường cong lấy tích phân. Tính tích phân  $I$  khi  $L$  là nửa đường tròn  $x^2 + y^2 = 4$  nằm bên phải trực tung, chiều đi từ điểm A(0,-2) đến điểm B(0,2).

**Bài 13.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

Bằng cách bổ xung thêm để được một đường khép kín, tính tích phân

$$\int_{OA} (-x^2y - x + y)dx + (xy^2 + x - y)dy,$$

trong đó cung OA là nửa đường tròn  $x^2 + y^2 = -2ay$  ( $x \geq 0, a > 0$ ), hướng đi từ O(0,0) đến A(0,-2a).

**Bài 14.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

Tính tích phân đường loại II:  $\int_{AB} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{b^2x^2 + a^2y^2}$  với đường lấy tích phân là nửa đường ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $y \geq 0, a > 0, b > 0$ ) hướng từ A(a,0) đến B(-a,0).

**Bài 15.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

$$\text{Cho } P(x,y) = \left(\frac{y}{x} - 1\right) \cos xy - \frac{1}{x^2} \sin xy, Q(x,y) = \left(1 - \frac{x}{y}\right) \cos xy + \frac{1}{y^2} \sin xy.$$

Chứng minh rằng tồn tại hàm  $u(x,y)$  có  $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ .

Tính  $I = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ , trong đó C là đường cong có phương trình  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$ .

## 2. Tích phân mặt

Tính các tích phân mặt sau:

### 2.1. Tích phân mặt loại I

**Bài 1.**  $I = \iint_S (x+y+z)dS$ , trong đó S là nửa mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ .

**Bài 2.**  $I = \iint_S (x^2 + y^2)dS$ , trong đó S là biên của hình nón  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ .

**Bài 3.**  $I = \iint_S zdS$ , trong đó S là phần mặt nón  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  bị cắt bởi mặt  $x^2 + y^2 = 2ax$ .

## 2.2. Tích phân mặt loại II

**Bài 1.**  $I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy$ , trong đó  $S$  là phía ngoài của mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

**Bài 2.**  $I = \iint_S (y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy$ , trong đó  $S$  là phía ngoài của mặt nón  $x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq h$ .

**Bài 3.**  $I = \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dx dy$ , trong đó  $S$  là phía ngoài của mặt cầu  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ .

## 2.3. Bài tập tổng hợp

**Bài 1.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

Tính tích phân mặt  $K = \iint_S xdydz + ydzdy + zdxdy$  với  $S$  là mặt ngoài của hình trụ  $x^2 + y^2 = 4, -2 \leq z \leq 2$  không kẽ hai đáy.

**Bài 2.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

Tính tích phân mặt  $K = \iint_S xzdydz + x^2 ydzdy + y^2 zdxdy$  với  $S$  là mặt ngoài (phía ngoài) của vật thể giới hạn bởi các mặt

$$x^2 + y^2 = 1, z = 0; z = 2.$$

**Bài 3.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

Cho khối trụ đứng  $x^2 + y^2 \leq -2ax$  ( $a > 0, 0 \leq z \leq a$ ). Hãy chứng tỏ rằng  $\iint_{S_1 \cup S_2} xdydz + y^2 dxdz + dx dy = 0$  với  $S_1$  là đáy dưới của khối trụ có hướng xuông phia dưới, còn  $S_2$  là đáy trên của khối trụ có hướng lên trên. Tính  $\iint_S xdydz + y^2 dxdz + dx dy$  với  $S$  là mặt xung quanh của khối trụ có hướng ra ngoài.

**Bài 4.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

a) Tính  $\iint_{S_1} xdydz + y^2 dxdz + zdxdy$ ,

trong đó  $S_1$  là mặt tròn  $y^2 + z^2 \leq bz, x = 0$  ( $b > 0$ ) có hướng lên phia trên so với trục  $0x$ .

b) Tính  $\iint_S xdydz + y^2dxdz + zdx dy$ ,

trong đó  $S$  là nửa mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = bz$  ( $x \leq 0, b > 0$ ) có hướng xuông phía dưới so với trục  $0x$ .

**Bài 5.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Tính tích phân mặt:  $\iint_S (x^2 + z^2)dxdz$ ,

với  $S$  là phía ngoài mặt cong  $y = 4 - x^2 - z^2$  bị chặn bởi mặt phẳng  $0xz$ .

**Bài 6.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Tính tích phân mặt loại hai  $I = \iint_S xdydz + ydzdx + z^2dxdy$ , trong đó  $S$  là

phần mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , ( $R > 0$ ) có hướng ra ngoài.

b) Chứng minh rằng hàm  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{1 + (x+y)^2} dy$  liên tục và khả vi trên khoảng  $0 < x < +\infty$ .

**Bài 7.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

1) Tính tích phân mặt loại hai  $I = \iint_S xdydz + ydzdx + yzdx dy$ , trong đó  $S$

là phần mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , ( $R > 0$ ) có hướng ra ngoài.

2) Tính tích phân mặt  $I = \iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$ , trong đó tích phân

lấy theo phia trên  $S$  là phần mặt phẳng  $z=2x$  nằm trong paraboloid  $z = x^2 + y^2$ .

3) Tính  $I = \iint_S 2dxdy + ydzdx - x^2zdydz$ , trong đó  $S$  là phia ngoài mặt  $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$  trong góc phần tam thứ nhất.

4) Tính tích phân mặt:  $I = \iint_S zdxdy$ , trong đó  $S$  là phia mặt trên của mặt  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  bị chặn bởi mặt  $x^2 + y^2 = 2x$ .

### 3. Lý thuyết trường

**Bài 1.** Tính phân tán và xoáy của trường  $f(x, y, z) = [x^2, xz, y^2z]$ .

**Bài 2.** Tính *phân tán* và *xoáy* của trường  $f(x,y,z) = [x^2, xy, xz]$ .

**Bài 3.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội) Cho trường vô hướng  $U(x,y,z) = \frac{x+y+z}{xyz}$ . Tính đạo hàm theo hướng  $\vec{e} = \overrightarrow{OM}$  với  $O(0,0,0)$  và  $M(1,-1,1)$  tại điểm M.

**Bài 4.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội) Cho trường vô hướng  $U(x,y,z) = xy + yz + zx$ . Tính đạo hàm theo hướng  $\vec{e} = \overrightarrow{PQ}$  với  $P(0,2,1)$  và  $Q(12,-1,-3)$  tại điểm P.

**Bài 5.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội) Cho trường vô hướng  $u = \ln(x^2 - y^2 + z^2)$ . Tính tốc độ tăng lớn nhất của trường tại điểm A(2,1,1). Tính div(grad u) tại điểm A(2,1,1).

**Bài 6.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Cho  $u=u(x,y,z)$  là trường vô hướng khả vi. Chứng minh rằng

$$\text{grad}(f(u)) = f'(u) \text{grad } u .$$

**Bài 7.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK)

Cho  $u=u(x,y,z)$ ,  $v=v(x,y,z)$  là các trường vô hướng khả vi. Chứng minh rằng

$$\text{grad}(u,v) = u \text{grad } v + v \text{grad } u .$$

**Bài 8.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

Cho mặt S có phương trình  $z = -x^2 - y^2$  có hướng lên phía trên so với trục Oz, M(1,1,-2) thuộc mặt S và hàm  $u = z + x^2 + y^2$ .

1) Tính  $\text{grad } u(M)$ .

2) Tính đạo hàm của u theo hướng pháp tuyến dương của mặt S tại điểm M.

**Bài 9.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

Cho mặt S có phương trình  $z = x^2 + y^2 - 3$  có hướng lên phía trên so với trục Oz và hàm  $u = z - x^2 - y^2 + 3$ .

1) Tính div(grad u).

2) Tính tất cả các điểm thuộc mặt S sao cho đạo hàm theo hướng pháp tuyến dương tại các điểm ấy đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 10.** (Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1998-1999, ĐHBK Hà Nội)

Cho mặt S có phương trình  $z = -x^2 - y^2 + 3$  có hướng lên phía dưới so với trục Oz và hàm  $u = z + x^2 + y^2 - 3$ .

1) Tính  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ .

2) Tính tất cả các điểm thuộc mặt  $S$  sao cho đạo hàm theo hướng pháp tuyến dương tại các điểm ấy đạt giá trị lớn nhất.

**Bài 11.**(Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Cho  $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (y+z)\vec{k}$ .

Chứng minh rằng  $\vec{F}$  là một trường thê. Tìm hàm thê vị của trường  $\vec{F}$ .

**Bài 12.**(Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội) Cho trường vectơ  $\vec{F} = yz(2x+y+z)\vec{i} + zx(x+2y+z)\vec{j} + xy(x+y+2z)\vec{k}$ .

Tính  $\operatorname{div} \vec{F}$  và chứng tỏ  $\vec{F}$  là trường thê.

**Bài 13.**(Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Cho trường vectơ  $\vec{F} = (x+z)\vec{i} + zx(x+z)\vec{j} + xy(x+y)\vec{k}$ .

Tính  $\operatorname{div} \vec{F}$  và chứng tỏ  $\vec{F}$  là trường thê.

**Bài 14.**(Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Cho hàm số  $u = x^4 + y^4 - \frac{6}{5}z^5$ .

Tính  $\frac{\partial u}{\partial e}$  tại  $M_0(1,2,1)$  theo hướng  $\vec{e} = \overrightarrow{M_0 M_1}$  với  $M_1(2,0,3)$ .

Tính thông lượng của trường vectơ  $\vec{F} = \operatorname{grad} u$  qua phía ngoài của mặt toàn phần của hình trụ  $x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h$  ( $h > 0$ ).

**Bài 15.**(Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Tính thông lượng của trường  $\vec{F}(x,y,z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + z\vec{k}$  qua mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , ( $R > 0$ ) có hướng ra ngoài.

**Bài 16.**(Thi môn Giải tích, học kỳ 2, 1999-2000, ĐHBK Hà Nội)

Tính thông lượng của trường  $\vec{F}(x,y,z) = xy\vec{i} - y\vec{j} - z^2\vec{k}$  qua mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , ( $R > 0$ ) có hướng ra ngoài.

## 4. Thực hành tính toán trên máy

### 4.1. Tính tích phân đường

#### 1. Tích phân đường loại I

Muốn tìm tích phân theo đường cong  $C$  xác định bởi phương trình tham số  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  ta đưa về tích phân theo  $t$  nhờ công thức

$$\int_C f(x, y) dl = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Tích phân ở vé phải được tính dễ dàng bằng máy.

**Thí dụ.** Tính  $I = \int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) dl$ , trong đó  $C$  là cung astroid  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ .

*Giải.* Phương trình tham số của đường astroid có dạng

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Do đó:

$$dl = \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = 3a |\sin t \cos t| dt$$

và trên đường cong  $C$  ta có  $x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{4}{3}} (\cos^4 t + \sin^4 t)$ . Suy ra:

$$I = 3a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{7}{2}\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) |\sin t \cos t| dt.$$

Đến đây, ta có thể tính tích phân một cách trực tiếp hoặc nhờ Maple:

```
[>int((cos(t)^4+sin(t)^4)*abs(sin(t)*cos(t)), t=0..2*Pi);
```

$$\frac{4}{3}$$

Vậy  $I = 4a^{\frac{7}{3}}$ .

**Thí dụ.** Tính tích phân của  $\sqrt{x^2 + y^2}$  trên đường tròn  $C$  có công thức

$$x^2 + y^2 = ax.$$

*Giải.* Chuyển về tọa độ cực, đường tròn  $C$  có phương trình

$$r = a \cos t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ta có  $x = a \cos^2 t$ ,  $y = a \cos t \sin t$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  và  $\sqrt{x^2 + y^2} = a \cos t$ . Vì phân  
độ dài cung  $l$  được tính theo công thức  $dl = \sqrt{r^2 + r'^2} dt = adt$ . Suy ra

$$I = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 2a^2.$$

Muốn tìm tích phân theo đường cong  $C$  xác định bởi phương trình tham số  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , ta đưa về tích phân theo  $t$  nhờ công thức:

$$\int_C f(x, y, z) dl = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

**Thí dụ.** Tính tích phân đường loại một  $I = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) dl$ , trong đó  $C$  là  
đường xoắn hìn hình nón  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$ ,  $z = t$  ( $0 \leq t \leq T$ ).

*Giải.* Ta có  $dx = (\cos t - t \sin t) dt$ ,  $dy = (\sin t + t \cos t) dt$ ,  $dz = dt$ ,  $dl = \sqrt{t^2 + 2} dt$ .  
Do đó

$$I = \int_0^T t \sqrt{t^2 + 2} dt = \left. \frac{(t^2 + 2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right|_0^T = \frac{1}{3} \left( (T^2 + 2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right).$$

## 2. Tích phân đường loại II

Muốn tìm tích phân đường loại hai theo đường cong  $C$  xác định bởi phương trình  
tham số  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  ta đưa về tích phân theo  $t$  nhờ công thức:

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt.$$

Nếu đường cong  $C$  được cho bởi phương trình  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  thì công thức  
trên trở thành:

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x)] dx.$$

Ta nhận thấy rằng các tích phân ở vé phải có thể được tính dễ dàng bằng máy.

**Thí dụ.** Tính  $I = \int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$ , với  $C$  là parabol

$$y = x^2, -1 \leq x \leq 1.$$

*Giải.* Thay  $y = x^2$ ,  $dy = 2x dx$  vào công thức tính tích phân ở trên ta được:

$$I = \int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy = \int_{-1}^1 (x^2 - 2x^3 + (x^4 - 2x^3)2x)dx = -\frac{14}{15}.$$

Ta có thể dùng máy để kiểm tra kết quả:

[>int(x^2-2\*x^3+(x^4-2\*x^3)\*2\*x, x=-1..1);

$$-\frac{14}{15}$$

**Thí dụ.** Tính  $I = \oint_C (x+y)dx + (x-y)dy$ , trong đó  $C$  là đường ellip  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

định hướng ngược chiều kim đồng hồ.

*Giải.* Dùng phương trình tham số của ellip  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) ( $t$  chạy ngược chiều kim đồng hồ) để chuyển tích phân đường về tích phân xác định

$$\begin{aligned} I &= \oint_C (x+y)dx + (x-y)dy = \\ &= \int_0^{2\pi} [(a \cos t + b \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t - b \sin t)(b \cos t)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (ab \cos 2t - \frac{a^2 + b^2}{2} \sin 2t) dt = 0 \end{aligned}$$

Dùng máy để kiểm tra kết quả (mà không cần biến đổi lượng giác):

[>int((a\*cos(t)+b\*sin(t))\*(-a\*sin(t))+(a\*cos(t)-b\*sin(t))\* (b\*cos(t)), t=0..2\*Pi);

$$0$$

## 4.2. Tích tích phân mặt

### 1. Tích tích phân mặt loại I

Muốn tìm tích tích phân mặt loại một theo mặt trơn  $S$  xác định bởi phương trình  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , trong đó  $D$  là một miền đóng, giới nội, ta đưa về tích phân hai lớp nhờ công thức:

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_D f(x, y, z)\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy.$$

Việc tính tích phân hai lớp (sử dụng Maple) đã được giới thiệu trong phần thực hành tính toán Chương 4.

**Thí dụ.**  $I = \iint_S (x + y + z)dS$ , trong đó  $S$  là nửa mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0.$$

*Giải.* Nửa mặt cầu đã cho xác định bởi công thức:  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , cho nên

$$I = \iint_S (x + y + z) dS = a \iint_D \left( \frac{x + y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + 1 \right) dx dy,$$

trong đó  $D$  là hình tròn  $x^2 + y^2 \leq a^2$ . Đưa về tọa độ cực  $x = r \sin t, y = r \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$ , ta được:

$$I = a \int_0^{2\pi} dt \int_0^a \left( \frac{r(\sin t + \cos t)}{\sqrt{a^2 - r^2}} + 1 \right) r dr = \pi a^3.$$

Có thể tính trực tiếp để được đáp số trên, hoặc có thể dùng máy:

```
>int(int((r*(sin(t)+cos(t))/sqrt(a^2-r^2)+1)*r,r=0..a),
t=0..2*Pi);
```

$$\pi a^3$$

## 2. Tính tích phân mặt loại II

Muốn tính tích phân mặt loại hai theo mặt tròn  $S$  xác định bởi phương trình  $z = z(x, y)$  và chọn phía trên của mặt này, ta đưa về tích phân hai lớp nhờ công thức:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

trong đó  $D$  là hình chiếu của mặt  $S$  trên mặt phẳng  $Oxy$ .

**Thí dụ.** Tính  $I = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$ , trong đó  $S$  là phía ngoài của mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

*Giải.* Xét  $S_+$  và  $S_-$  là phía ngoài của nửa trên và nửa dưới của mặt cầu. Khi ấy tích phân  $I_1 = \iint_S z dx dy$  có thể viết dưới dạng:

$$I_1 = \iint_S z dx dy = \iint_{S_1} z dx dy + \iint_{S_2} z dx dy.$$

Trên mặt  $S_+$  ta có  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , còn trên mặt  $S_-$  ta có  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ .

Gọi  $D$  hình chiếu của  $S_+$  trên  $Oxy$ . Do tính chất đối xứng ta có

$$I_1 = \iint_S z dx dy = \iint_{S_1} z dx dy + \iint_{S_2} z dx dy = 2 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

Do  $D$  là hình tròn tâm tại gốc và bán kính là  $a$  nên sau khi đổi biến ta được

$$I_1 = 2 \int_0^{2\pi} dt \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Ta có thể tính tích phân trên nhờ Maple:

$$\begin{aligned} > \text{int}(\text{int}(r * \text{sqrt}(a^2 - r^2), r=0..a), t=0..2*\text{Pi}); \\ & \quad \frac{2}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

Cuối cùng ta được  $I = 3I_1 = 4\pi a^3$ .

### 4.3. Tính Phân tán và Xoáy của trường vectơ

Việc tính toán vi phân của hàm nhiều biến được thực hiện trong không gian nhiều chiều và thường xuyên phải làm việc với các ma trận, vectơ,... cho nên luôn cần tới gói công cụ *Đại số tuyến tính* (**linalg**). Việc tính *phân tán* và *xoáy* của trường vectơ không nằm ngoài thông lệ, cho nên trước hết phải gọi gói công cụ này ra, bằng lệnh

`[>with(linalg) :`

#### 1. Tính phân tán (Divergence)

Muốn tính *Phân tán* (Divergence) của trường vectơ  $f$  (với biến vectơ  $v$ ), ta dùng lệnh:

`[>diverge(f, v) ;`

**Thí dụ.** Ta tính *phân tán* của trường  $f = (x, y^2, z)$  theo biến  $v = (x, y, z)$  bằng các lệnh *khai báo* và *tính toán* sau đây:

```
[>f:=vector([x,y^2,z]):  
[>v:=vector([x,y,z]):  
[>diverge(f,v);
```

Sau khi thực hiện lệnh, máy sẽ cho ta kết quả là

$$2+2y.$$

Nếu như trường được cho trong hệ tọa độ trụ thì ta cũng tính được phân tán của nó (cũng biểu diễn trong hệ tọa độ cực), bằng lệnh

`[> diverge(f, v, coords=cylindrical);`

**Thí dụ.** Ta tính *phân tán* của trường  $f = (r, \sin\theta, z)$  theo biến  $v = (r, \theta, z)$  bằng các lệnh *khai báo* và *tính toán* tương tự như trên, nhưng có thể viết gộp lại trong một lệnh như sau:

```
[>f:=vector([r,sin(theta),z]):  
v:= vector([r,theta,z]):  
diverge(f,v,coords=cylindrical);
```

và sau khi cho thực hiện lệnh ta nhận được kết quả

$$\frac{3r + \cos(\theta)}{r} .$$

Tương tự như trên ta cũng tính được *phân tán* của trường vectơ trong *hệ tọa độ cầu* và các hệ tọa độ khác.

## 2. Tính Xoáy (Rot hay Curl)

Muốn tính *Xoáy* (*rot* hay *curl*) của trường vectơ  $f$  (với biến vectơ  $v$ ), ta dùng lệnh:

```
[>curl(f,v);
```

**Thí dụ.** Tính xoáy của hàm vectơ 3 chiều  $f(x,y,z)=[x^2, xz, y^2z]$  theo biến  $v=(x,y,z)$  bằng các lệnh *khai báo* và *tính toán* sau đây:

```
[>f:=[x^2,x*z,y^2*z]:  
v:=[x,y,z]:  
curl(f,v);
```

$$[2yz - x, 0, z].$$

Việc tính *xoáy* của trường cho trong các hệ tọa độ trụ hay hệ tọa độ cầu cũng được thực hiện tương tự như đối với việc tính *phân tán* ở phần trên.

## Chương 8

# Chuỗi Fourier và tích phân Fourier

<b>8.1. Chuỗi Fourier .....</b>	<b>275</b>
8.1.1. Phương pháp trung bình cộng trong chuỗi Fourier .....	276
8.1.2. Tính đầy đủ của các hệ đa thức .....	279
8.1.3. Tính chất của các hệ số Fourier.....	282
8.1.4. Đạo hàm, tích phân và tính hội tụ của chuỗi Fourier .....	284
8.1.5. Dạng phức của chuỗi Fourier .....	288
8.1.6. Thí dụ .....	289
<b>8.2. Tích phân Fourier .....</b>	<b>290</b>
8.2.1. Biểu diễn hàm số bằng tích phân Fourier.....	290
8.2.2. Dạng khác của công thức Fourier .....	293
<b>8.3. Biến đổi Fourier.....</b>	<b>295</b>
8.3.1. Định nghĩa.....	295
8.3.2. Các tính chất của biến đổi Fourier .....	296
8.3.3. Biến đổi Fourier của đạo hàm và đạo hàm của biến đổi Fourier.....	297
8.3.4. Tích chập và biến đổi Fourier .....	299
<b>8.4. Một số ví dụ về ứng dụng.....</b>	<b>301</b>
8.4.1. Bộ lọc điện .....	301
8.4.2. Sự truyền nhiệt trong thanh kim loại.....	302

## 8.1. Chuỗi Fourier

Trong giáo trình giải tích các hàm số một biến, chúng ta đã được làm quen với khái niệm chuỗi Fourier của hàm khả tích và xem xét sơ bộ tính hội tụ của nó. Đây là một lĩnh vực quan trọng của toán học và có nhiều ứng dụng thiết thực trong: Vật lý, Cơ học, Kỹ thuật, Công nghệ,... cho nên đã được quan tâm nghiên cứu rất nhiều. Các kết quả về lĩnh vực này vô cùng phong phú, đa dạng, và những gì chúng ta đã biết trong giáo trình giải tích nói trên mới chỉ là những kiến thức ban đầu.

Toàn bộ chương này chúng ta dành để tiếp tục công việc tìm hiểu lĩnh vực thú vị đó.

### 8.1.1. Phương pháp trung bình cộng trong chuỗi Fourier

Trước hết ta nhắc lại rằng chuỗi Fourier của một hàm  $f$  khả tích tuần hoàn trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  là chuỗi lượng giác

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] ,$$

trong đó các hệ số được tính bởi các công thức sau đây

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Tổng riêng của chuỗi này là

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kx + b_k \sin kx] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + 2 \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)] f(t) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos k(t-x)] f(t) dt .$$

Để ý rằng  $1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos ku = \frac{\sin[(2n+1)u/2]}{\sin(u/2)}$  khi  $u \neq 2m\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , ta suy ra

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t) dt ,$$

trong đó  $D_n(u) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$ , có tên gọi là *nhân Dirichlet*, còn tích phân ở vế

phải của biểu thức trên có tên gọi là *tích phân Dirichlet*. Để thấy rằng *nhân Dirichlet* là một hàm chẵn, liên tục, tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$  và

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(u) du = 1 .$$

Thiết lập các trung bình cộng của các tổng riêng và của các nhân Dirichlet

$$\sigma_n = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_n(x)}{n+1},$$

$$\Phi_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \dots + D_n(x)}{n+1},$$

và gọi  $\Phi_n(x)$  là *nhân Fejer*, còn  $\sigma_n(x)$  là *tổng Fejer*, và từ các công thức tích phân Dirichlet ta có

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) f(x+u) du.$$

**BỐ ĐỀ.** *Nhân Fejer*  $\Phi_n(x)$  có những tính chất sau đây:

(i) *Nhân Fejer*  $\Phi_n(x)$  là chẵn, liên tục, tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ ;

(ii)  $\Phi_n(x) \geq 0$ ,  $\forall x$ ;

(iii)  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x) dx = 1$ ;

(iv) Với mỗi  $\delta \in (0, \pi)$  ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq |x| \leq \pi} \Phi_n(x) = 0$ .

**Chứng minh.** Từ định nghĩa ta có

$$\begin{aligned} (n+1)\Phi_n(x) &= \sum_{k=0}^n D_k(x) = \frac{1}{\sin(x/2)} \sum_{k=0}^n \sin[(2k+1)x/2] = \\ &= \frac{1}{2\sin^2(x/2)} \sum_{k=0}^n 2\sin[(2k+1)x/2]\sin(x/2) = \frac{1}{2\sin^2(x/2)} \sum_{k=0}^n [\cos kx - \cos(k+1)x] \\ &= \frac{1 - \cos(n+1)x}{2\sin^2(x/2)} = \frac{2\sin^2[(n+1)x/2]}{2\sin^2(x/2)}. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\Phi_n(x) = \frac{\sin^2[(n+1)x/2]}{(n+1)\sin^2(x/2)}.$$

Đảng thức trên đúng với mọi  $x$  khác 0. Nhưng do vế phải là hàm liên tục và vế trái có giới hạn là  $n+1$  khi  $x$  tiến tới 0, cho nên ta suy ra  $\Phi_n(0) = n+1$ . Từ công thức trên ta suy ra các tính chất (i)-(ii). Tính chất (iii) có ngay từ công thức tích phân nhân Dirichlet (bằng 1 với mọi  $n$ ) và tính chẵn của nhân Fejer. Tính chất (iv) suy ra từ nhận xét sau đây:

$$\max_{\delta \leq |x| \leq \pi} \Phi_n(x) = \frac{1}{n+1} \max_{\delta \leq |x| \leq \pi} \frac{\sin^2[(n+1)x/2]}{\sin^2(x/2)} \leq \frac{1}{(n+1)\sin^2(\delta/2)}.$$

Bỏ đè đã được chứng minh xong.

**ĐỊNH LÝ.** (Fejer) Nếu hàm số  $f$  là liên tục trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  và  $f(-\pi) = f(\pi)$  thì tổng Fejer  $\sigma_n(x)$  hội tụ đều tới hàm  $f$  trên đoạn đó khi  $n \rightarrow \infty$ .

**Chứng minh.** Do các điều kiện của định lý, ta có thể thác triển hàm  $f$  thành một hàm liên tục, tuần hoàn trên toàn bộ trục số (với chu kỳ  $2\pi$ ). Từ bỏ đè trên ta suy ra

$$\begin{aligned} |f(x) - \sigma_n(x)| &= \left| f(x) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) du - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) f(x+u) du \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) [f(x) - f(x+u)] du \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) |f(x) - f(x+u)| du. \end{aligned}$$

Do hàm  $f$  là liên tục và tuần hoàn cho nên nó liên tục đều trên toàn trục số. Suy ra, với mỗi số  $\varepsilon > 0$  cho trước, tồn tại số  $\delta > 0$  sao cho

$$\varpi(\delta; f) := \max_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/3.$$

Từ công thức trên, bằng cách tách tích phân về phải thành 3 tích phân trên 3 đoạn, ta có

$$|f(x) - \sigma_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi}.$$

Đối với tích phân ở giữa ta có đánh giá

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(u) |f(x) - f(x+u)| du &\leq \varpi(\delta; f) \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(u) du \leq \\ &\leq \varpi(\delta; f) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) du < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Dễ thấy rằng hàm  $f$  bị chặn bởi một số  $M$  nào đó cho nên, từ tính chất (iv) trong bỏ đè trên, ta suy ra tồn tại số tự nhiên  $n_\varepsilon$  đủ lớn sao cho với  $n \geq n_\varepsilon$  thì 2 tích phân còn lại đều nhỏ hơn  $\varepsilon/3$ , và tổng hợp lại ta có

$$|f(x) - \sigma_n(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Định lý đã được chứng minh xong.

**Nhận xét.** Ta đã biết rằng chuỗi Fourier của một hàm liên tục không nhất thiết hội tụ tại mỗi điểm, và do đó khả năng thiết lập lại hàm số từ chuỗi Fourier của nó là rất mỏng manh. Tuy nhiên, định lý trên đây đã đưa ra một phương pháp mới, thiết

lập lại hàm số không phải trực tiếp từ *tổng riêng* của chuỗi Fourier, mà từ các *trung bình cộng* của chúng (tức là các tổng Fejer). Phương pháp này ưu việt ở chỗ nó không chỉ đem lại tính *hội tụ*, mà còn *hội tụ đều*, tới chính hàm  $f$ . Như vậy, việc nghiên cứu các chuỗi phân kỳ cũng có lúc đem lại hiệu quả bất ngờ.

Phương pháp nghiên cứu các chuỗi bát kỳ (không nhất thiết là chuỗi lượng giác) bằng cách thiết lập các trung bình cộng của các tổng riêng và khảo sát tính hội tụ của chúng được gọi là *phương pháp lấy trung bình cộng*.

### 8.1.2. Tính đầy đủ của các hệ đa thức

Ta đã biết thế nào là *đa thức đại số* bậc  $n$ . Nay giờ ta có thêm khái niệm *đa thức lượng giác* bậc  $n$ , đó là các hàm có dạng

$$A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos kx + B_k \sin kx, \quad A_n^2 + B_n^2 \neq 0.$$

**ĐỊNH LÝ.** (Weierstrass I) *Nếu hàm  $f$  liên tục trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  và  $f(-\pi) = f(\pi)$  thì, với mỗi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại đa thức lượng giác  $T(x)$  sao cho*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

**Chứng minh.** Suy ra từ định lý trên, vì mỗi tổng Fejer cũng là một đa thức lượng giác.

**ĐỊNH LÝ.** (Weierstrass II) *Nếu hàm  $f$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$  thì, với mỗi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại đa thức đại số  $P(x)$  sao cho*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

**Chứng minh.** Dùng phép đổi biến  $x = a + \frac{b-a}{\pi}t$  với  $t \in [0, \pi]$ , ta được hàm số  $f^*(t) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi}t\right)$  xác định trên đoạn  $[0, \pi]$ . Thác triển hàm này về phía trái trực số theo công thức  $f^*(-t) = f(t)$  ta được một hàm liên tục xác định trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  và thỏa mãn  $f^*(-\pi) = f^*(\pi)$ . Từ định lý trên, với mỗi số  $\varepsilon > 0$ , ta tìm được đa thức lượng giác  $T(x)$  thỏa mãn điều kiện

$$|f^*(t) - T(t)| < \varepsilon/2, \quad \forall t \in [-\pi, \pi].$$

Vì đa thức lượng giác là *hàm giải tích*, khai triển được dưới dạng chuỗi lũy thừa (hội tụ đều trên toàn trực số), cho nên tồn tại số tự nhiên  $n_\varepsilon$  sao cho với mọi  $n \geq n_\varepsilon$  đa thức Taylor bậc  $n$  của  $T(x)$ , ký hiệu là  $P_n(t)$ , thỏa mãn điều kiện

$$|T(t) - P_n(t)| < \varepsilon/2, \quad \forall t \in [-\pi, \pi].$$

Lấy đa thức  $P(t) = P_{n_\varepsilon}(t)$  ta có

$$|f^*(t) - P(t)| \leq |f^*(t) - T(t)| + |T(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Quay trở về với biến  $x$ , tức là lấy  $t = \pi \frac{x-a}{b-a}$ , ta có

$$\left| f(x) - P\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b],$$

trong đó  $P\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$  rõ ràng là một đa thức. Định lý đã được chứng minh.

**Nhận xét.** Định lý trên cho thấy rằng, với mọi hàm  $f$  liên tục trên đoạn  $[a,b]$ , ta luôn tìm được *dãy đa thức*  $P_n(x)$  hội tụ đều trên đoạn này tới hàm  $f$ . Và từ đây suy ra rằng mọi *hàm liên tục trên đoạn* luôn có thể biểu diễn dưới dạng *chuỗi hội tụ đều* của các đa thức (trên đoạn đó).

Điều này, theo một nghĩa nào đó, cho thấy rằng các hàm liên tục (vốn được đưa ra một cách trừu tượng và tổng quát) cũng không quá khác biệt với các đa thức, vốn rất quen thuộc với chúng ta. Và ngoài ra, nó cũng làm thỏa mãn những người hay hình dung một hàm liên tục như một “biểu thức” nào đó.

**ĐỊNH NGHĨA.** Một hệ các hàm số  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  xác định trên đoạn  $[a,b]$  được gọi là *dãy đủ đối với họ hàm số R* theo nghĩa *xấp xỉ đều* nếu như mọi hàm trong họ này có thể xấp xỉ được bởi các tổ hợp tuyến tính hữu hạn của các hàm trong hệ nói trên với độ chính xác tùy ý.

Nghĩa là, với mỗi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại *hữu hạn* các hàm  $\varphi_i$  và các số  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) sao cho

$$|f(x) - [\lambda_1 \varphi_1(x) + \dots + \lambda_k \varphi_k(x)]| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b].$$

Từ các định lý trên ta có các mệnh đề sau.

**MỆNH ĐỀ.** Hệ các hàm lượng giác  $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$  là *dãy đủ* theo nghĩa *xấp xỉ đều* đối với tập các hàm liên tục trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  và nhận giá trị như nhau ở 2 đầu mút của đoạn này.

**Chứng minh.** Suy ra từ định lý Weierstrass I.

**MỆNH ĐỀ.** Hệ các hàm lũy thừa  $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$  là *dãy đủ* đối với tập các hàm liên tục trên đoạn bất kỳ (theo nghĩa *xấp xỉ đều*).

**Chứng minh.** Suy ra từ định lý Weierstrass II.

**Chú ý.** Hệ các hàm lượng giác không thể là dãy đủ theo nghĩa xấp xỉ đều đối với họ các hàm liên tục trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  (bởi vì nếu không thì từ tính chất  $T(-\pi) = T(\pi)$  của các đa thức lượng giác sẽ kéo theo  $f(-\pi) = f(\pi)$  với mọi hàm liên tục  $f$ ).

Người ta coi *độ lệch toàn phương trung bình* giữa 2 hàm  $f$  và  $g$  xác định trên đoạn  $[a,b]$  là đại lượng

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx} .$$

Đại lượng này còn có tên gọi là *độ lệch toàn phương trung bình* của  $f$  so với  $g$  (hay là của  $g$  so với  $f$ ).

**ĐỊNH NGHĨA.** Một hệ các hàm số  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  xác định trên đoạn  $[a,b]$  được gọi là *đầy đủ* đối với họ các hàm số  $\mathfrak{R}$  theo nghĩa *xấp xỉ toàn phương trung bình* nếu như, với mỗi hàm  $f \in \mathfrak{R}$  và với mọi số  $\varepsilon > 0$ , tồn tại một tổ hợp tuyến tính hữu hạn của các hàm trong hệ nói trên có độ lệch toàn phương trung bình so với hàm  $f$  nhỏ hơn  $\varepsilon$ .

**MỆNH ĐỀ.** Hệ các hàm lượng giác  $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$  là *đầy đủ* theo nghĩa *xấp xỉ toàn phương trung bình* đối với tập các hàm liên tục trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  và nhận giá trị nhau nhau ở 2 đầu mút của đoạn này.

**Chứng minh.** Từ tính đầy đủ của hệ các hàm lượng giác theo nghĩa xấp xỉ đều ta suy ra, với mỗi số  $\varepsilon > 0$ , tồn tại đa thức lượng giác  $T(x)$  sao cho

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon / \sqrt{2\pi}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi] .$$

Từ đây ta suy ra

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx} = \varepsilon .$$

Mệnh đề đã được chứng minh xong.

**Nhận xét.** Trong chứng minh trên, vì để sử dụng được tính đầy đủ của hệ các hàm lượng giác theo nghĩa xấp xỉ đều mà ta phải giả thiết các hàm liên tục nhận giá trị nhau nhau tại 2 đầu mút của đoạn. Sau này ta sẽ thấy rằng, theo nghĩa *xấp xỉ toàn phương trung bình*, hệ các hàm lượng giác không những là *đầy đủ* trong lớp hàm liên tục nói chung (nhận các giá trị bất kỳ tại 2 đầu mút cuối của đoạn), mà còn là *đầy đủ* trong lớp hàm rộng hơn hẳn: lớp các hàm với *bình phương khả tích*. Và trong lớp hàm này, với cách *xấp xỉ* theo nghĩa *toàn phương trung bình*, các tổng riêng Fourier sẽ thể hiện được đầy đủ các ưu thế của mình, chứ không bị “yếu thế” (so với tổng riêng Fejér) trong phép *xấp xỉ đều* như đã thấy trước đây. Lớp của những hàm này thường được ký hiệu là  $L_2[-\pi, \pi]$ .

**MỆNH ĐỀ.** Hệ các hàm lũy thừa  $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$  là *đầy đủ* đối với tập các hàm liên tục trên đoạn bất kỳ theo nghĩa *xấp xỉ toàn phương trung bình*.

**Chứng minh.** Tương tự như mệnh đề trên.

### 8.1.3. Tính chất của các hệ số Fourier

Trong phần này, ta luôn hiểu *tích phân* theo nghĩa *tích phân suy rộng*. Khi ấy tính khả tích của một hàm số không kéo theo tính khả tích của bình phương của nó (và ngược lại). Thí dụ, hàm  $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$  là khả tích trên đoạn  $[-1, 1]$ , còn bình phương của nó thì không. Tuy nhiên, nếu hàm  $f$  chỉ có một số hữu hạn các điểm đặc biệt (điểm không xác định) và là khả tích Riemann trên mọi đoạn bất kỳ không chứa các điểm này thì từ tính khả tích của  $f^2$  suy ra tính khả tích của  $f$ , vì ta luôn có  $|f| \leq (1 + f^2)/2$ .

Đối tượng chính mà chúng ta nghiên cứu trong phần này sẽ là những hàm khả tích cùng với bình phương của nó trên đoạn  $[-\pi, \pi]$ , và ta gọi chúng một cách ngắn gọn là *hàm với bình phương khả tích*.

Kết quả sau đây cho chúng ta thấy rằng tổng Fourier bậc  $n$  là *xấp xỉ toàn phuong trung bình* tốt nhất trong số các xấp xỉ bởi đa thức lượng giác bậc  $n$  của hàm bình phương khả tích.

**ĐỊNH LÝ.** Cho  $f$  là hàm số với bình phương khả tích trên đoạn  $[-\pi, \pi]$ . Nếu  $S_n(x)$  là tổng Fourier bậc  $n$  của  $f$  thì

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \min_{T_n(x)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx,$$

trong đó minimum ở vé phải lấy theo mọi đa thức lượng giác  $T_n(x)$  có bậc không quá  $n$ .

Nếu  $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$  là các hệ số Fourier của  $f$  thì ta có bất đẳng thức Bessel sau đây:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

**Chứng minh.** Với  $T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$ , sử dụng tính vuông góc của hệ các hàm lượng giác, ta có

$$\int_{-\pi}^{\pi} [T_n(x)]^2 dx = \pi \left( \frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n A_k^2 + B_k^2 \right)$$

cho nên

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi \left( \frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n A_k^2 + B_k^2 \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left[ \frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n A_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx + B_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right] = \\
& = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi \left( \frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n A_k^2 + B_k^2 \right) - 2\pi \left[ \frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k A_k + b_k B_k \right] = \\
& = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi \left[ \frac{(A_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^n ((A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2) \right] - \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right].
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra  $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx$  đạt giá trị cực tiểu khi đa thức  $T_n(x)$  trùng với tổng riêng Fourier  $S_n(x)$  (bậc  $n$ ) của  $f$ , tức là phần thứ nhất của định lý đã được chứng minh.

Phần thứ 2 là hiển nhiên, vì rằng từ công thức trên ta suy ra

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \geq 0,$$

và cho  $n$  tiến ra vô cùng ta có ngay điều phải chứng minh.

**Nhận xét.** Bất đẳng thức Bessel cho thấy rằng đối với hàm có bình phương khả tích thì chuỗi

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

là hội tụ.

**ĐỊNH LÝ.** Nếu  $f$  là hàm liên tục trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  và nhận cùng một giá trị ở 2 đầu mút của đoạn thì các hệ số Fourier  $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$  của  $f$  thỏa mãn bất đẳng thức Parseval sau đây:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

**Chứng minh.** Ta biết rằng hệ các hàm lượng giác là đầy đủ theo nghĩa xấp xỉ toàn phong trung bình đối với tập các hàm liên tục trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  có giá trị tại 2 đầu mút bằng nhau, cho nên, với mỗi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại đa thức lượng giác  $T(x)$  thỏa mãn

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx < \varepsilon.$$

Theo định lý trên ta có  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx < \varepsilon$ , và áp dụng đẳng thức (\*) đối với  $S_n$  suy ra

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right] &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Do  $\varepsilon$  là số dương nhỏ bao nhiêu tùy ý mà trái luôn luôn không âm (theo bất đẳng thức Bessel), nên nó phải bằng 0. Định lý được chứng minh.

**HỆ QUẢ.** *Với các giả thiết của định lý, chúng ta có*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0.$$

**Chứng minh.** Suy ra từ chứng minh của định lý trên.

#### 8.1.4. Đạo hàm, tích phân và tính hội tụ của chuỗi Fourier

Lưu ý rằng không phải khi nào chuỗi Fourier của một hàm cũng hội tụ đến chính hàm đó, cho nên ta sẽ dùng biểu thức

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

để biểu thị rằng hàm  $f$  có khai triển Fourier là chuỗi ở về phái.

**MÊNH ĐỀ.** *Cho hàm  $f$  liên tục trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  với  $f(-\pi) = f(\pi)$  và có khai triển Fourier là*

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

*Nếu hàm  $f$  là khả vi từng khúc trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  thì chuỗi Fourier của  $f'$  bằng chuỗi của đạo hàm các số hạng trong chuỗi Fourier hàm  $f$ , nghĩa là*

$$f'(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx).$$

**Chứng minh.** Giả sử hàm  $f'$  có chuỗi Fourier là

$$f'(x) \approx \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

trong đó, theo định nghĩa, ta có

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0;$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos(nt) dt = f(t) \cos(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = 0 + n.b_n = n.b_n;$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin(nt) dt = f(t) \sin(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = 0 - n.a_n = -n.a_n.$$

Mệnh đề đã được chứng minh.

**BỒ ĐỀ.** Cho hàm  $f$  là khả vi liên tục đến cấp  $(k-1)$  và khả vi từng khúc ở cấp  $k$  ( $k \geq 1$ ), ngoài ra  $f^{(i)}(-\pi) = f^{(i)}(\pi)$ , với  $i=1, \dots, k-1$ . Khi đó các hệ số Fourier của  $f$  thỏa mãn

$$|a_n| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad |b_n| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad n=1, 2, \dots,$$

với các  $\varepsilon_n > 0$  sao cho  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 < \infty$ .

**Chứng minh.** Sử dụng mệnh đề trên  $k$  lần liên tiếp ta thu được

$$f^{(k)}(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

trong đó, phụ thuộc vào  $k$  chẵn hay lẻ, ta có hoặc là  $\alpha_n = \pm n^k a_n$ ,  $\beta_n = \pm n^k b_n$ ,

hoặc là  $\alpha_n = \pm n^k b_n$ ,  $\beta_n = \pm n^k a_n$ . Đặt  $\varepsilon_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$  và áp dụng bất đẳng thức

Bessel cho hàm  $f^{(k)}(x)$  ta suy ra chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$  là hội tụ. Ngoài ra

$$|a_n| = |\alpha_n| / n^k \leq \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} / n^k = \varepsilon_n / n^k$$

và tương tự như vậy đối với  $b_n$ . Bồ đề đã được chứng minh.

**ĐỊNH LÝ.** Cho hàm  $f$  là khả vi liên tục đến cấp  $(k-1)$  và khả vi từng khúc ở cấp  $k$  ( $k \geq 1$ ), ngoài ra  $f^{(i)}(-\pi) = f^{(i)}(\pi)$ , với  $i=1, \dots, k-1$ . Khi đó chuỗi Fourier của  $f$  hội tụ đều đến hàm  $f$  trên đoạn  $[-\pi, \pi]$ , và ngoài ra

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leq \frac{\eta_n}{n^{k-1/2}},$$

trong đó  $\eta_n$  là dãy số hội tụ đến 0 và  $S_n(x; f)$  là tổng riêng Fourier bậc  $n$  của hàm  $f$ .

**Chứng minh.** Giả sử

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \\ S_n(x; f) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx). \end{aligned}$$

Theo bô đè ta có  $|a_m| \leq \frac{\varepsilon_m}{m^k}$ ,  $|b_m| \leq \frac{\varepsilon_m}{m^k}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , và chuỗi  $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2$  là hội tụ. Ta đánh giá phần dư của chuỗi so với tổng Fourier như sau

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \right| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} (|a_m| + |b_m|) \leq 2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{m^k} = A_n.$$

Từ bất đẳng thức Cauchy-Bunyakovski ta dễ dàng suy ra

$$A_n = 2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m \cdot \frac{1}{m^k} \leq 2 \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}}}.$$

Để ý rằng  $\gamma_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2$  tiến tới 0 khi  $n$  tiến ra vô cùng, và

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}} \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \int_{m-1}^m \frac{dx}{x^{2k}} \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2k}} = \frac{1}{(2k-1) \cdot n^{2k-1}},$$

cho nên với  $\eta_n = \frac{2}{\sqrt{2k-1}} \sqrt{\gamma_n}$  ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$  và

$$|r_n(x)| \leq \frac{\eta_n}{n^{k-1/2}} = o\left(\frac{1}{n^{k-1/2}}\right), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Với các điều kiện của định lý, chuỗi Fourier hội tụ (điểm) đến hàm  $f$ , cho nên  $r_n(x)$  cũng chính là độ lệch của hàm  $f$  so với tổng riêng Fourier  $S_n(x; f)$ . Các đánh giá trên cho thấy tính hội tụ đều và mọi khẳng định của định lý đã được chứng minh.

**Nhận xét.** Định lý trên cho thấy rằng hàm càng trơn (có đạo hàm bậc càng cao) thì chuỗi Fourier của nó hội tụ (đến hàm đó) càng nhanh, và do đó việc xấp xỉ nó bởi đa thức Fourier càng tốt ra chính xác. Trong trường hợp riêng, khi hàm liên tục tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$  là trơn từng khúc thì chuỗi Fourier của nó hội tụ đều đến chính nó.

**ĐỊNH LÝ.** Nếu  $f$  là hàm liên tục trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  có khai triển Fourier là

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

thì, với mỗi  $t \in [-\pi, \pi]$ , ta có

$$\begin{aligned} \int_0^t f(x) dx &= \int_0^t \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx = \\ &= \frac{a_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{n} \sin nt + \frac{b_n}{n} (1 - \cos nt) \right] \end{aligned}$$

và chuỗi ở phải là hội tụ đều.

**Chứng minh.** Xét hàm số

$$F(t) = \int_0^t \left[ f(x) - \frac{a_0}{2} \right] dx .$$

Ta nhận thấy rằng nó là hàm khả vi liên tục trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  và thỏa mãn điều kiện  $F(-\pi) = F(\pi)$ , cho nên theo nhận xét từ định lý trên ta suy ra chuỗi Fourier của  $f$  hội tụ đều tới  $F$ , nghĩa là

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) ,$$

trong đó, với  $n = 1, 2, \dots$ , ta có

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} F(t) \frac{\sin(nt)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F'(t) \sin(nt) dt = \\ &= 0 - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] \sin(nt) dt = -\frac{b_n}{n} , \end{aligned}$$

và tương tự  $B_n = \frac{a_n}{n}$ .

Riêng  $A_0$  được tính nhờ công thức khai triển với nhận xét rằng  $F(0) = 0$ , và do đó

$$A_0 = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} .$$

Như vậy

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{n} \sin nt - \frac{b_n}{n} \cos nt \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{n} \sin nt + \frac{b_n}{n} (1 - \cos nt) \right] ,$$

và từ đây ta dễ dàng suy ra điều cần chứng minh.

**Nhận xét.** Việc xét chuỗi Fourier của hàm *tuần hoàn* với chu kỳ  $2l$  (tùy ý) được quy về việc xét chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$  nhờ phép đổi biến  $t = \pi x/l$ , chuyển đoạn  $[-l, l]$  thành đoạn  $[-\pi, \pi]$ .

### 8.1.5. Dạng phức của chuỗi Fourier

Sử dụng công thức biểu diễn hàm lượng giác thông qua số phức

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{nxi} + e^{-nxi}) \text{ và } \sin nx = \frac{i}{2}(e^{-nxi} - e^{nxi})$$

ta có thể viết lại khai triển Fourier dưới dạng

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2}(a_n - b_n i)e^{nxi} + \frac{1}{2}(a_n + b_n i)e^{-nxi} \right].$$

Đặt  $c_0 = \frac{a_0}{2}$ ,  $c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i)$ ,  $c_{-n} = \bar{c}_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n i)$  ta có

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Lưu ý rằng  $\cos \alpha \pm i \sin \alpha = e^{\pm i\alpha}$ , ta có

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - b_n t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx; \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i \sin nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx. \end{aligned}$$

Do vậy, công thức trên có thể viết lại thành

$$f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds.$$

Công thức này được gọi là *dạng phức* của chuỗi Fourier.

**Lưu ý.** Trong công thức trên, cũng như các công thức sau này, ta hiểu tích phân của một hàm nhận giá trị phức  $w(x) = u(x) + iv(x)$ , với  $u, v$  là các hàm số thực, được

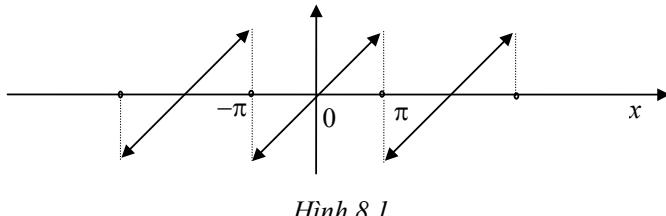
định nghĩa một cách tự nhiên là  $\int_{-\pi}^{\pi} w(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) dx + i \int_{-\pi}^{\pi} v(x) dx$ . Nếu  $u, v$  là

những hàm *khả tích tuyệt đối* (có nghĩa  $|u|, |v|$  là khả tích) thì ta nói  $w$  là khả tích tuyệt đối. Tích phân suy rộng (của hàm phức với biến số thực) được định nghĩa hoàn toàn tương tự.

### 8.1.6. Thí dụ

Trong phần này ta chỉ nghiên cứu một ví dụ đơn giản để nắm vững thêm về lý thuyết chuỗi Fourier. Phần thực hành tính toán trên máy sẽ cho phép chúng ta đề cập đến những hàm phức tạp và đa dạng hơn về chủng loại.

Tìm chuỗi Fourier của hàm  $f(x) = x$  trên khoảng  $(-\pi, \pi)$ . Sau khi cho hàm số nhận giá trị 0 tại 2 đầu mút của khoảng, ta thác triển nó một cách tuần hoàn và thu được hàm xác định trên toàn trực số, có đồ thị như sau:



Hình 8.1

Vì  $f(x) = x$  là hàm lẻ

nên không cần tính ta cũng có thể khẳng định được rằng

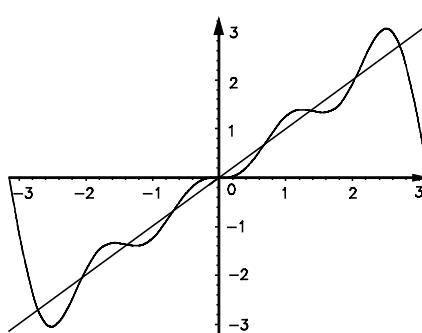
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0.$$

Tìm  $b_n$  theo công thức  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ . Như vậy chuỗi Fourier của  $f(x) = x$  trên khoảng  $(-\pi, \pi)$  là như sau

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} -2 \frac{(-1)^n}{n} \sin nx.$$

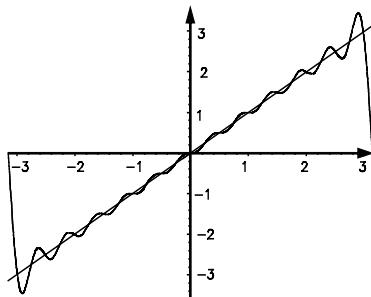
Để thấy được khả năng xấp xỉ của các tổng riêng của chuỗi Fourier đối với hàm số  $f(x) = x$  trên khoảng bằng chu kỳ, ta quan sát đồ thị hàm số cùng với các tổng riêng này (các đồ thị được vẽ bằng máy, như đã trình bày trong các chương trước, và sẽ được đề cập lại trong phần tính toán thực hành của chương này).

Đồ thị hàm  $f(x) = x$  và tổng riêng  $S_4 = \sum_{n=1}^4 -2 \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$  là như sau:



Hình 8.2

Đồ thị hàm  $f(x) = x$  và tổng riêng thứ 12,  $S_{12} = \sum_{n=1}^{12} -2 \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$ , được mô tả trong hình vẽ sau



Hình 8.3.

Một điều dễ nhận thấy rằng các tổng riêng của chuỗi Fourier chỉ xấp xỉ tốt trên *khoảng hở* (vì tại các điểm đầu mút hàm số  $f$  là gián đoạn).

## 8.2. Tích phân Fourier

### 8.2.1. Biểu diễn hàm số bằng tích phân Fourier

Cho hàm số  $f$  khả tích tuyệt đối trên trục số thực. Nếu, một cách hình thức, ta thay việc tính tổng các số hạng theo *chỉ số n* bằng việc lấy tích phân theo một *tham số y*, thì chuỗi Fourier sẽ được thay bằng tích phân sau đây (gọi là *tích phân Fourier của hàm f*)

$$\int_0^\infty [a(y)\cos(yx) + b(y)\sin(yx)] dy ,$$

$$\text{trong đó } a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(yt) dt, \quad b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(yt) dt .$$

Dễ dàng thấy rằng

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty [a(y)\cos(yx) + b(y)\sin(yx)] dy = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(yt) \cos(xy) - \sin(yt) \sin(xy)] dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos[y(x-t)] dt . \end{aligned}$$

Tương tự như đã thấy rằng tổng chuỗi Fourier của một hàm sẽ cho giá trị của chính hàm số (trong một số điều kiện nhất định), chúng ta sẽ chứng minh rằng tích phân Fourier của một hàm số cũng cho một biểu diễn của chính hàm số đó. Trước hết ta cần kết quả hỗ trợ sau

**BỒ ĐỀ.** Nếu hàm  $f$  là khả tích tuyệt đối trên khoảng  $(a, b)$ , hữu hạn hoặc vô hạn, thì

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(vx) dx = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(vx) dx = 0.$$

**Chứng minh.** Tương tự như chứng minh hệ số Fourier của một hàm khả tích thì tiến đến 0 khi  $n$  tiến ra vô cùng (xem giáo trình Giải tích một biến).

**ĐỊNH LÝ.** Cho hàm số  $f$  liên tục từng khúc trên mỗi đoạn hữu hạn và khả tích tuyệt đối trên toàn trực số. Nếu tại điểm  $x$  hàm số có đạo hàm phải  $f'_+(x)$  và đạo hàm trái  $f'_(x)$  thì ta có

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos[y(x-t)] dt,$$

trong đó  $f(x+0), f(x-0)$ , theo thứ tự, là các giới hạn phải, giới hạn trái của  $f$  tại  $x$ .

**Chứng minh.** Với số  $\eta > 0$ , ta xét tích phân

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\eta dy \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos[y(x-t)] dt.$$

Rõ ràng tích phân Fourier của hàm  $f$  đúng bằng  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} S(\eta)$ . Với mỗi số  $\xi > 0$ , theo định lý về tích phân của tích phân phụ thuộc tham số, ta có

$$\int_0^\eta dy \int_{-\xi}^\xi f(t) \cos[y(x-t)] dt = \int_{-\xi}^\xi f(t) dt \int_0^\eta \cos[y(x-t)] dy = \int_{-\xi}^\xi f(t) \frac{\sin[\eta(x-t)]}{x-t} dt. \quad (*)$$

(Bởi vì, do tính liên tục từng khúc của  $f$ , ta có thể phân chia hình hộp  $-\xi \leq t \leq \xi$ ,  $0 \leq y \leq \eta$  thành một số hữu hạn các hộp nhỏ (bởi các đường song song với trục  $Oy$ ) sao cho trên mỗi hộp con hàm là liên tục theo cả 2 biến đến tận biên, nếu tại biên ta lấy các giá trị giới hạn phải hoặc giới hạn trái của hàm).

Lưu ý rằng  $|f(t) \cos[y(x-t)]| \leq |f(t)|$ , cho nên do tính khả tích tuyệt đối của hàm  $f$  ta suy ra tính hội tụ đều theo tham số  $y$  trên đoạn  $[0, \eta]$  của tích phân sau

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos[y(x-t)] dt .$$

Như vậy, hàm số

$$F(y, \xi) = \int_{-\xi}^{\xi} f(t) \cos[y(x-t)] dt$$

hội tụ đều (trên đoạn  $[0, \eta]$ ) đến hàm  $F(y)$  khi  $\xi \rightarrow \infty$ . Để dàng chứng minh rằng hàm  $F(y, \xi)$  là liên tục theo  $y$  cho nên từ công thức (\*), bằng cách cho qua giới hạn dưới dấu tích phân ở vế trái, ta thu được

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin[\eta(x-t)]}{x-t} dt .$$

Đặt  $u = t - x$ , ta có

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u+x) \frac{\sin(\eta u)}{u} du .$$

Bằng cách tách tích phân thành 2 khúc  $\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty}$  và trong khúc thứ nhất ta làm phép đổi biến  $u = -t$  thì ta sẽ thu được

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin(\eta t)}{t} dt .$$

Trong mục nói về tích phân Dirichlet (Chương 5) ta đã biết rằng  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\eta t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ ,

với mọi  $\eta > 0$ , cho nên

$$\begin{aligned} S(\eta) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin(\eta t)}{t} dt - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \eta t}{t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x-0)}{t} \sin(\eta t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \sin(\eta t) dt . \end{aligned}$$

Rõ ràng định lý sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra rằng cả 2 tích phân ở vế phải đều tiến tới 0 khi  $\eta \rightarrow \infty$ . Điều này được suy ra từ các nhận xét sau đây (chứng minh chi tiết xin dành cho người đọc).

Do sự tồn tại của các đạo hàm phải của hàm  $f$  tại điểm  $x$  mà hàm  $\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$  liên tục từng khúc (theo biến  $t$ ) tại điểm 0 và do đó nó là khả tích (tuyệt đối) trên đoạn  $[0, 1]$ . Do bô đê ta có

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin(\eta t) dt = 0.$$

Trên miền  $t \geq 1$  hàm số  $f(x+t)/t$  bị chặn bởi hàm khả tích  $|f(x+t)|$  cho nên nó cũng khả tích, và do đó cũng theo bô đê ta có

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_1^\infty \frac{f(x+t)}{t} \sin(\eta t) dt = 0.$$

$$\text{Vì } \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \text{ hội tụ nên } \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_1^\infty \frac{f(x+0)}{t} \sin(\eta t) dt = f(x+0) \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_\eta^\infty \frac{\sin u}{u} du = 0.$$

Kết hợp lại ta suy ra điều cần chứng minh.

**Nhận xét.** Với các điều kiện của định lý, nếu hàm số  $f$  là liên tục tại  $x$  thì tích phân Fourier tại điểm  $x$  cho giá trị của chính hàm  $f$ .

### 8.2.2. Dạng khác của công thức Fourier

Để việc trình bày được đơn giản hơn, trong phần còn lại ta luôn giả thiết rằng  $f$  là hàm liên tục và thỏa mãn các điều kiện của định lý trên. Khi ấy, theo nhận xét đã nêu, ta có công thức Fourier sau đây:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos[y(x-t)] dt \quad (*)$$

và do biểu thức dưới dấu tích phân theo  $dy$  là hàm chẵn theo  $y$  nên

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dy \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos[y(x-t)] dt.$$

Lưu ý rằng  $|f(t) \sin[y(x-t)]| \leq |f(t)|$  cho nên, theo dấu hiệu Weierstrass, tích phân

$$\int_{-\infty}^\infty f(t) \sin[y(x-t)] dt$$

là hội tụ đều (theo  $y$  trên toàn trực số) và là hàm liên tục theo biến  $y$ . Vì vậy, với  $\eta > 0$ , tích phân

$$\int_{-\eta}^{\eta} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin[y(x-t)] dt$$

tồn tại và, do hàm dưới dấu tích phân là lẻ theo  $y$ , tích phân này bằng 0. Tuy nhiên, điều này không đảm bảo cho sự tồn tại của tích phân suy rộng

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin[y(x-t)] dt,$$

(vì nó không định nghĩa như giới hạn của tích phân với các cận *đổi xứng qua gốc*, mà là với các cận tuỳ ý).

Chính vì lẽ này, người ta đưa ra khái niệm *giá trị chính* của tích phân  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$  (với  $\varphi$  là hàm khả tích trên các đoạn hữu hạn bất kỳ) định nghĩa như sau

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx := v.p. \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \right) := \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi(x) dx.$$

Một cách tương tự, người ta định nghĩa được *giá trị chính* của tích phân suy rộng tại một điểm nào đó (chứ không nhất thiết tại  $\infty$  như trên).

Rõ ràng, nếu tích phân hội tụ thì giá trị chính của tích phân và bản thân tích phân là bằng nhau.

**Thí dụ.** Các tích phân suy rộng  $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$  và  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$  là *không hội tụ*, nhưng *giá trị chính* của chúng vẫn tồn tại và bằng 0.

Trở lại với tích phân Fourier ta có

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin[y(x-t)] dt = 0.$$

Nhân tích phân này với  $\frac{i}{2\pi}$  và cộng với (\*) ta suy ra

$$f(x) = v.p. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iy(x-t)} dt .$$

Đây chính là một dạng khác của công thức tích phân Fourier.

## 8.3. Biến đổi Fourier

### 8.3.1. Định nghĩa

Nếu ta đặt

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ity} dt ,$$

thì dạng nói trên của công thức tích phân Fourier trở thành

$$f(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y)e^{ixy} dy .$$

Người ta gọi *phép ứng* mỗi hàm  $f$  với hàm số

$$\hat{f}(y) := \Phi(y) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ity} dt$$

là phép *biến đổi Fourier* và thường được ký hiệu là  $F$ . Nghĩa là  $\hat{f} = F[f] = \Phi$ .

Như vậy, phép biến đổi Fourier được xác định với mọi hàm khả tích tuyệt đối. Trong định nghĩa này,  $f$  có thể là một hàm (với biến số thực) nhận *giá trị phức*, và ánh của nó  $F[f]$  nói chung là hàm nhận giá trị phức ngay cả khi  $f$  là hàm nhận giá trị thực.

Tương tự như trên người ta định nghĩa phép *biến đổi Fourier ngược* là *phép ứng* mỗi hàm  $f$  với hàm số

$$\Psi(y) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ity} dt ,$$

và thường ký hiệu nó là  $F^{-1}$ . Như vậy  $F^{-1}[f] = \Psi$ .

Tên gọi như trên được bắt nguồn từ mệnh đề sau.

**MỆNH ĐỀ.** Nếu hàm  $f$  là liên tục, khả tích tuyệt đối trên toàn trực số, và có đạo hàm từng phía tại mỗi điểm, thì

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f .$$

**Chứng minh.** Công thức  $F^{-1}[F[f]] = f$  cũng chính là công thức tích phân Fourier dưới dạng khác. Ta chỉ còn phải chứng minh rằng  $F[F^{-1}[f]] = f$ . Vì hàm *cosin* là chẵn cho nên trong công thức tích phân Fourier (dạng thông thường) có thể đổi vị trí giữa  $t$  và  $x$ , nghĩa là

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos[y(t-x)] dt .$$

Mặt khác, do tính lẻ của hàm  $\sin$ ,

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin[y(t-x)] dt = 0.$$

Cho nên, tích phân Fourier có thêm một dạng nữa

$$f(x) = v.p. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iy(t-x)} dt,$$

hay là

$$f(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iyt} dt \right] e^{-ixy} dy,$$

đây chính là công thức cần chứng minh.

### 8.3.2. Các tính chất của biến đổi Fourier

**Mệnh đề.** Phép biến đổi Fourier (và ngược của nó) là **tuyến tính**, nghĩa là,

$$F[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F[f_1] + \lambda_2 F[f_2]$$

và

$$F^{-1}[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F^{-1}[f_1] + \lambda_2 F^{-1}[f_2];$$

(các công thức trên được hiểu theo nghĩa: nếu vé phải tồn tại thì vé trái tồn tại và có đồng thời xảy ra).

**Chứng minh.** Suy ngay từ định nghĩa.

**Mệnh đề.** Phép biến đổi Fourier (cũng như ngược của nó) là **phép ứng 1-1**.

**Chứng minh.** Thật vậy,

$$F[f_1] = F[f_2] \Rightarrow F^{-1}[F[f_1]] = F^{-1}[F[f_2]] \Rightarrow f_1 = f_2$$

(theo mệnh đề trong phần trên).

**Mệnh đề.** Biến đổi Fourier của một hàm khả tích tuyệt đối (trên toàn trực số) là một hàm bị chặn (trên toàn trực số), và ngoài ra

$$|\hat{f}(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

**Chứng minh.** Suy ngay từ định nghĩa với lưu ý rằng  $|e^{-ixy}| = 1$ .

**Hệ quả.** Nếu hàm khả tích tuyệt đối  $f$  và dãy hàm khả tích tuyệt đối  $\{f_n\}$  thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| dx = 0,$$

thì dãy hàm  $\{\hat{f}_n(y)\}$  hội tụ đều đến hàm  $\hat{f}(y)$  trên toàn trực số thực.

**Chứng minh.** Suy ngay từ bất đẳng thức của mệnh đề trên.

**Mệnh đề.** Biến đổi Fourier của một hàm khả tích tuyệt đối trên toàn trực số thực là một hàm liên tục và tiến tới 0 khi biến số tiến ra  $-\infty$  hoặc  $+\infty$ .

**Chứng minh.** Ta biết rằng với một hàm  $\varphi$  khả tích tuyệt đối thì tìm được dãy các hàm bậc thang  $\varphi_n$  thỏa mãn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx = 0,$$

cho nên từ hệ quả trên ta thấy chỉ cần chứng minh mệnh đề cho lớp các hàm bậc thang. Mặt khác, ta lại biết rằng một hàm bậc thang bất kỳ là tổ hợp tuyến tính (hữu hạn) của các hàm bậc thang đơn (nhận giá trị 1 trên một nửa khoảng  $[a, b]$  nào đó và bằng 0 trên miền còn lại). Từ tính tuyến tính của phép biến đổi Fourier ta suy ra chỉ cần chứng minh mệnh đề cho lớp các hàm bậc thang đơn.

Giả sử  $\varpi$  là một hàm bậc thang đơn, nghĩa là

$$\varpi(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } a \leq x < b \\ 0 & \text{khi } x < a \text{ hay } b \geq x \end{cases}$$

Khi ấy ta có

$$\begin{aligned} \hat{\varpi}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b (\cos xy - i \sin xy) dx = \\ &= \begin{cases} [(\sin by - \sin ay) + i(\cos by - \cos ay)]/(y\sqrt{2\pi}) & \text{khi } y \neq 0 \\ (b-a)/\sqrt{2\pi} & \text{khi } y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dễ dàng kiểm tra rằng đây là hàm liên tục và tiến tới 0 khi  $y$  tiến ra vô cùng (về cả hai phía). Mệnh đề đã được chứng minh xong.

### 8.3.3. Biến đổi Fourier của đạo hàm và đạo hàm của biến đổi Fourier

**Mệnh đề.** Nếu hàm khả tích tuyệt đối  $f$  có các đạo hàm đến cấp  $n$  là liên tục và khả tích tuyệt đối trên toàn trực số thì

$$F[f^{(k)}] = (iy)^k F[f], \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

và tồn tại số  $M > 0$  sao cho  $|F[f]| \leq \frac{M}{|y^n|}$ .

**Chứng minh.** Ta có

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt ,$$

nên, do tính khả tích của  $f'$  trên toàn trực số, các giới hạn  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  tồn tại và bằng 0 (do tính khả tích của bản thân hàm  $f$  trên toàn trực số). Sử dụng công thức tích phân từng phần đối với tích phân Fourier ta suy ra

$$F[f'] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ixy} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = iyF[f]$$

Như vậy mệnh đề đã được chứng minh với  $k = 1$ . Trường hợp tổng quát được chứng minh dễ dàng bằng phương pháp quy nạp toán học.

Lưu ý rằng hàm  $F[f^{(n)}]$  là bị chặn trên toàn trực số (theo mệnh đề ở phần trên), cho nên tồn tại số hữu hạn  $M = \sup_{-\infty < y < \infty} F[f^{(n)}]$ , vì vậy công thức thứ 2 của mệnh đề có ngay từ công thức thứ nhất với  $k = n$ . Mệnh đề đã được chứng minh.

**Nhận xét.** Như vậy, hàm càng trơn thì biến đổi Fourier của nó càng nhanh tiến tới 0 khi biến số tiến ra vô cùng. Một điều dễ nhận thấy rằng mệnh đề vẫn đúng khi hàm  $f$  nhận giá trị phức. Với một chứng minh phức tạp hơn một chút, ta có thể chỉ ra rằng mệnh đề còn đúng trong trường hợp đạo hàm bậc  $n$  của  $f$  có hữu hạn điểm gián đoạn loại 1.

**Mệnh đề.** Nếu hàm  $f(x)$  là liên tục và các hàm  $f(x), xf(x), \dots, x^n f(x)$  là khả tích tuyệt đối trên toàn trực số, thì biến đổi Fourier của  $f$  là khả vi đến bậc  $n$  và

$$i^k F^{(k)}[f] = F[x^k f] , \quad k = 0, 1, \dots, n .$$

**Chứng minh.** Lấy đạo hàm theo tham số của tích phân

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx ,$$

với lưu ý rằng  $|xf(x)e^{-ixy}| = |xf(x)|$ , ta thu được tích phân hội tụ tuyệt đối và đều trên toàn trực số và bằng  $-i \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) e^{-ixy} dx$ . Cho nên việc lấy đạo hàm dưới dấu tích phân là hợp lệ. Từ công thức lấy đạo hàm này ta suy ra  $iF'[f] = F[xf]$ , và mệnh đề đã được chứng minh cho trường hợp  $k = 1$ . Trường hợp tổng quát được chứng minh dễ dàng bằng quy nạp.

**Nhận xét.** Dễ dàng suy ra rằng mệnh đề còn đúng khi hàm  $f$  nhận giá trị phức.

**Hệ quả.** Trong giả thiết của mệnh đề, các đạo hàm  $F^{(k)}[f]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  là liên tục và tiến tới 0 khi biến số tiến ra vô cùng (về cả hai phía).

**Chứng minh.** Suy ra từ mệnh đề trên và mệnh đề cuối cùng của mục trên.

### 8.3.4. Tích chập và biến đổi Fourier

Người ta định nghĩa **tích chập** của 2 hàm số  $\varphi, \psi$  (xác định trên toàn trực số thực) là một hàm số, ký hiệu là  $\varphi * \psi$ , xác định như sau

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\psi(x-t) dt.$$

Để cho đơn giản, trong phần này ta chỉ xét các hàm nhận giá trị thực. Tích phân trên tồn tại nếu các hàm  $\varphi, \psi$  là bị chặn và khả tích tuyệt đối. Khi ấy ta cũng có

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)| dt$$

là tích phân hội tụ đều trên toàn trực số (theo dấu hiệu Weierstrass và  $|\varphi(t)\psi(x-t)| \leq M |\varphi(t)|$  với  $M$  là hằng số chặn hàm  $\psi$  trên toàn trực số). Rõ ràng **tích chập** cũng là một hàm bị chặn, bởi hằng số

$$M \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt.$$

Như vậy, tích chập của 2 hàm liên tục, bị chặn và khả tích tuyệt đối trên toàn trực số sẽ là một hàm liên tục và bị chặn (trên toàn trực số). Hơn thế, nó cũng là một hàm khả tích tuyệt đối trên toàn trực số, bởi vì ta có (do tính hội tụ đều, phép đổi chỗ các dấu tích phân trong công thức sau đây là hợp lệ)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |(\varphi * \psi)(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)| dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(s)| ds. \end{aligned}$$

Nghĩa là, phép tích chập biến 2 hàm trong lớp các hàm liên tục, bị chặn và khả tích tuyệt đối (trên toàn trực số) thành một hàm trong chính lớp này, và vì vậy ta có thể áp dụng tích chập nhiều lần liên tiếp, và cũng có thể áp dụng biến đổi Fourier cho tích chập của 2 hàm. Trong phần còn lại ta luôn hiểu ngầm là phép tích chập xác định cho lớp các hàm liên tục, bị chặn và khả tích tuyệt đối (trên toàn trực số).

**Mệnh đề.** *Tích chập có tính giao hoán và kết hợp.*

**Chứng minh.** Bằng cách đổi biến  $x-t = s$ , ta có

$$\varphi^* \psi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \psi(x-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-s) \psi(s) ds = \psi^* \varphi ,$$

nghĩa là tích chập có tính giao hoán.

Bằng cách đổi biến  $t = y - \xi$ , đổi thứ tự lấy tích phân (bạn đọc tự kiểm tra tính hợp lệ của phép đảo thứ tự này), rồi lại làm phép đổi biến  $x - y + \xi = \eta$ , ta có

$$\begin{aligned} (\varphi^* \psi)^* \chi &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(y-x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \psi(x-t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(y-x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y-\xi) \psi(x-y+\xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y-\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-y+\xi) \chi(y-x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y-\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\eta) \chi(\xi-\eta) d\eta = (\psi^* \chi)^* \varphi . \end{aligned}$$

Từ tính giao hoán đã chứng minh trên, ta suy ra tính kết hợp của phép lấy tích chập.

**Mệnh đề.** *Biến đổi Fourier của tích chập 2 hàm là tích của các biến đổi Fourier của chúng. Nghĩa là  $F[\varphi^* \psi] = F[\varphi].F[\psi]$ .*

**Chứng minh.** Bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân, ta có

$$F[\varphi^* \psi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \psi(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-t) e^{-ixy} dx .$$

Bằng phép đổi biến  $x = t + s$  ta thu được

$$F[\varphi^* \psi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-ity} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) e^{-isy} ds = F[\varphi].F[\psi] .$$

Mệnh đề đã được chứng minh.

**Nhận xét.** Tích phân Fourier, biến đổi Fourier, và tích chập là những tích phân suy rộng phụ thuộc tham số cho nên, cũng như các hàm Beta, hàm Gamma,... chúng thường không biểu diễn được qua các hàm số quen biết, và vì vậy việc tính toán chúng chỉ có thể tiến hành với sự hỗ trợ của máy tính. Phần thực hành tính toán trên máy ở cuối chương sẽ cho chúng ta đi sâu về lĩnh vực này.

## 8.4. Một số ví dụ về ứng dụng

### 8.4.1. Bộ lọc điện

Xét mạng điện  $RC$  như trong hình vẽ, trong đó  $R$  là điện trở và  $C$  là điện dung. Giả sử  $v_0(t)$  là điện thế cung cấp,  $I(t)$  là dòng điện trong mạng và  $v(t)$  là điện thế cho ra của bộ lọc. Bài toán đặt ra là hãy tính  $v(t)$  khi biết  $v_0(t)$ .

Công thức liên hệ giữa dòng điện  $I(t)$  và điện thế cung cấp  $v_0(t)$  là

$$v_0(t) = RI(t) + \frac{1}{C} \left\{ \int_0^t I(\tau) d\tau + Q_0 \right\} \quad (1)$$

trong đó  $Q_0$  là điện tích ban đầu của điện dung  $C$ . Công thức liên hệ giữa dòng điện  $I(t)$  và điện thế  $v(t)$  là

$$v(t) = \frac{1}{C} \left\{ \int_0^t I(\tau) d\tau + Q_0 \right\}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có phương trình tính  $v(t)$

$$RC \dot{v} + v = v_0 \quad (3)$$

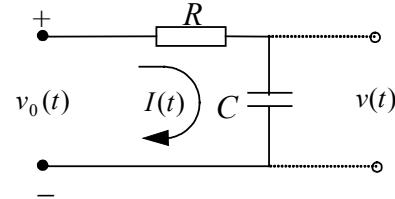
Điều kiện khởi đầu của điện thế ra là  $v(0) = Q_0 / C$ . Giả thiết  $v_0(t)$  là một dãy điện xung tuần hoàn với chu kỳ  $T$  như hình vẽ. Để xác định  $v(t)$  chúng ta viết  $v_0(t)$  dưới dạng chuỗi Fourier

$$v_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\omega_k t}, \text{ trong đó } \omega_k = 2\pi k / T, \quad (4)$$

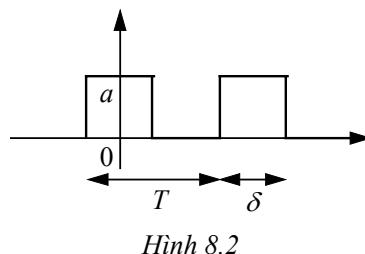
Nghiệm của phương trình vi phân (3) là tổng của nghiệm phương trình thuần nhất  $RC \dot{v} + v = v_0$ , tức là  $\alpha e^{-t/RC}$  với  $\alpha$  là hằng số và nghiệm riêng của (3).

Vì  $v_0$  tuần hoàn, chúng ta có thể tìm nghiệm riêng tuần hoàn dạng  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^* e^{i\omega_k t}$ .

Như vậy nghiệm của (3) có dạng  $v(t) = \alpha e^{-t/RC} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^* e^{i\omega_k t}$ . Từ đây và công



Hình 8.1



Hình 8.2

thức (4) suy ra  $C_k^* = \frac{C_k}{1 + i\omega_k RC}$ , trong đó hệ số Fourier  $C_k$  của hàm  $v_0(t)$  được tính theo công thức  $C_k = \frac{v_0 \tau}{T} \frac{\sin(\omega_k \tau / 2)}{(\omega_k \tau / 2)} = 2 \frac{v_0 \sin(\omega_k \tau / 2)}{T \omega_k}$ .

Nghiệm phương trình thuần nhất được gọi là *hiệu ứng tạm thời* vì nó tắt dần khi  $t \rightarrow \infty$ . Nghiệm riêng tuân hoàn được gọi là *hiệu ứng thường xuyên*. Như vậy điện thế ra của bộ lọc hoàn toàn được xác định và được xấp xỉ bởi hiệu ứng thường xuyên khi  $t$  đủ lớn.

### 8.4.2. Sự truyền nhiệt trong thanh kim loại

Giả sử trên trục tọa độ  $Ox$  ta đặt một thanh sắt, một đầu tại gốc  $O$  và đầu kia rất xa (xem như là  $\infty$ ). Gọi  $u(x, t)$  là nhiệt độ của điểm  $x \geq 0$  trên thanh sắt tại thời điểm  $t \geq 0$ . Giả thiết rằng nhiệt độ khởi đầu tại mọi điểm đã biết trước là  $u(x, 0) = f(x)$ . Hãy xác định  $u(x, t)$  với  $x$  và  $t \geq 0$  bất kỳ, biết rằng nhiệt độ được truyền theo phương trình

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (*)$$

trong đó  $k$  là hệ số truyền nhiệt. Phương trình truyền nhiệt (\*) biểu diễn qua các đạo hàm riêng của hàm  $u$  nên còn gọi là *phương trình đạo hàm riêng*. Trong chương sau chúng ta sẽ khảo sát những phương trình như thế này kỹ hơn, nhưng trong mục này chúng ta có một cách giải đơn giản nhờ áp dụng biến đổi Fourier.

Dùng công thức tính biến đổi Fourier cho đẳng thức (\*) ta thu được

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dt.$$

Ký hiệu  $U(\omega, t)$  là biến đổi Fourier của  $u(x, t)$  (ở đây  $t$  là tham số). Khi ấy

$$\frac{\partial U(\omega, t)}{\partial t} = (i\omega)^2 k U(\omega, t) = -\omega^2 k U(\omega, t).$$

Lấy tích phân hai vế theo  $t$  ta thu được  $U(\omega, t) = c(\omega) e^{-\omega^2 k t}$ , trong đó  $c(\omega)$  là hằng số lấy tích phân. Hằng số này được xác định nhờ điều kiện khởi đầu và công thức tính  $U$ :

$$U(\omega, 0) = c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Nghiệm  $u(x, t)$  sẽ là biến đổi Fourier ngược của  $U(\omega, t)$ . Thí dụ, nếu  $f$  được cho bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} u_0 & \text{khi } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$$

thì  $c(\omega) = u_0 \int_{-1}^1 e^{-i\omega x} dx = 2u_0 \frac{\sin \omega}{\omega}$ ,  $U(\omega, t) = 2u_0 \frac{\sin \omega}{\omega} e^{-\omega^2 kt}$ . Nghiệm  $u(x, t)$  tính theo công thức

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} e^{-\omega^2 kt} e^{i\omega x} dx.$$

Trên đây là những ứng dụng đơn giản (nhưng không tầm thường chút nào) của chuỗi Fourier và tích phân Fourier trong việc giải quyết các bài toán này sinh trong kỹ thuật. Những ứng dụng phức tạp hơn và sâu sắc hơn có thể tìm thấy rất nhiều trong các ngành xử lý tín hiệu, điều khiển tự động,...

# *Bài tập và tính toán thực hành Chương 8*

1. Chuỗi Fourier.....	303
2. Tích phân Fourier .....	304
3. Thực hành tính toán trên máy.....	304
3.1. Tìm chuỗi Fourier của một hàm số .....	304
3.2. Biến đổi Fourier .....	309

## **1. Chuỗi Fourier**

**Bài 1.** Khai triển các hàm sau thành chuỗi Fourier trong các khoảng đã cho:

$$1) f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < l \\ 0, & l < x < 2l \end{cases}, \text{ trong đó } A = \text{const} \text{ trong khoảng } (0, 2l);$$

$$2) f(x) = \sin(ax), \quad -\pi < x < \pi \text{ ( } a \text{ không phải là số nguyên)};$$

$$3) f(x) = (x), \text{ trong đó } (x) \text{ là khoảng cách từ } x \text{ đến số nguyên gần nhất};$$

$$4) f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi; \quad 5) f(x) = x, \quad a < x < a + 2l;$$

$$6) f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x); \quad 7) f(x) = |\cos x|; \quad 8) f(x) = \arcsin(\cos x);$$

$$9) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}; \quad 10) f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases};$$

$$12) f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}; \quad 13) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases};$$

$$14) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}; \quad 15) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

**Bài 2.** Tìm chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn xác định bởi  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} 1) \quad f(x) &= \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}; & 2) \quad f(x) &= \begin{cases} -\pi, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}; \\ 3) \quad f(x) &= e^x, \quad -\pi \leq x < \pi. \end{aligned}$$

## 2. Tích phân Fourier

**Bài 1.** Biểu diễn các hàm sau bằng tích phân Fourier:

$$\begin{aligned} 1) \quad f(x) &= \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b), \quad b > a; \\ 2) \quad f(x) &= \begin{cases} 1, & -1 < x < l \\ 0, & x < -1 \quad \text{hay} \quad x > 1 \end{cases}. \\ 3) \quad f(x) &= \frac{1}{a^2 + x^2}; & 4) \quad f(x) &= \frac{x}{a^2 + x^2}; & 5) \quad f(x) &= e^{-x^2}; \end{aligned}$$

## 3. Thực hành tính toán trên máy

### 3.1. Tìm chuỗi Fourier của một hàm số

Trong phần này ta sẽ thường xuyên sử dụng  $n$  như một biến số tự nhiên đóng vai trò chỉ số của các số hạng (hoặc của hệ số các số hạng) trong chuỗi, cho nên ta cần khai báo nó bằng dòng lệnh:

[>**assume(n, integer)** :]

Sau khi thực hiện lệnh này, máy sẽ hiểu  $n$  là một số tự nhiên. Khi ấy nó tính giá trị của  $\sin(n\pi)$  và  $\cos(n\pi)$  theo  $n$  đúng như chúng ta đã biết:

[>**sin(n\*Pi)** ;

0

[>**cos(n\*Pi)** ;

$(-1)^n$

Muốn tìm chuỗi Fourier của một hàm  $f(x)$ , trước hết ta phải tính các hệ số  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  của chuỗi, rồi sau đó thiết lập chuỗi theo công thức

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Để thấy được khả năng xấp xỉ (đối với hàm  $f(x)$ ) của các tổng riêng chuỗi Fourier trên khoảng bằng chu kỳ, ta có thể cho máy vẽ đồ thị hàm số cùng với các tổng riêng của chuỗi. Sau đây ta xem xét một vài thí dụ cụ thể.

**Thí dụ 1.** Tìm chuỗi Fourier của hàm  $f(x) = |x|$ .

Việc tính các hệ số của chuỗi Fourier cũng chính là tính *tích phân xác định*, đã được hướng dẫn kỹ trong giáo trình Giải tích Toán học: Những nguyên lý cơ bản và tính toán thực hành (NXB Giáo dục, 1998). Thí dụ, ta tìm  $a_0$  bằng lệnh:

```
[>a[0]:=1/Pi*int(abs(x),x=-Pi..Pi);
```

$$a_0 := \pi$$

và tìm  $a_n$  bằng lệnh

```
[>a[n]:=1/Pi*int(abs(x)*cos(n*x),x=-Pi..Pi);
```

$$a_n := \frac{2 \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{2}{n^2}}{\pi}$$

Vì  $f(x) = |x|$  là hàm chẵn nên không cần tính ta cũng có thể khẳng định  $b_n = 0$ . Tuy nhiên, kết quả tính toán trên máy cũng cho đúng như vậy

```
[>b[n]:=1/Pi*int(abs(x)*sin(n*x),x=-Pi..Pi);
```

$$b_n := 0$$

Thiết lập chuỗi Fourier của  $f(x) = |x|$  và ký hiệu nó là  $S(x)$ , bằng lệnh

```
[>S(x):=1/2*a[0]+sum(a[n]*cos(n*x)+b[n]*sin(n*x),n=1..infinity);
```

$$S(x) := \frac{1}{2}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{2}{n^2})}{\pi} \cos nx$$

Để có biểu thức đơn giản hơn ta dùng lệnh

```
[>simplify(%);
```

$$S(x) := \frac{1}{2}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx$$

Tổng này cũng thường được viết dưới dạng:

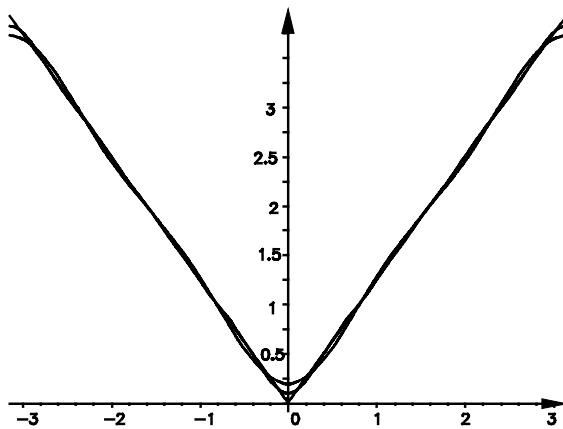
$$|x| = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots).$$

Để thấy được sự xấp xỉ hàm  $f(x) = |x|$  của chuỗi (bên vẽ phải) *trên khoảng*  $(-\pi, \pi)$ , ta có thể cho máy vẽ đồ thị hàm số cùng với các *tổng riêng của chuỗi*, thí dụ như:  $S_5, S_7$ . Trước tiên nạp các gói công cụ vẽ đồ thị

```
[> with(plots): with(plottools):
```

và tiến hành vẽ đồ thị (nhiều hàm một lần) theo lệnh đã hướng dẫn trong các chương trước:

```
[>plot({1/2*a[0]+sum(a[n]*cos(n*x)+b[n]*sin(n*x),n=1..5),1/2*a[0]+sum(a[n]*cos(n*x)+b[n]*sin(n*x),n=1..7),abs(x)},x=-Pi..Pi);
```



Hình 8.4.

**Thí dụ 2.** Tìm chuỗi Fourier của hàm  $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ .

Tìm  $a_0$

```
[>a[0]:=1/Pi*int(Pi,x=0..Pi);
```

$$a_0 := \pi$$

Tìm  $a_n$

```
[>a[n]:=1/Pi*int(Pi*cos(n*x),x=0..Pi);
```

$$a_n := 0$$

Tìm  $b_n$

```
[>b[n]:=1/Pi*int(Pi*sin(n*x),x=0..Pi);
```

$$b_n := \frac{-(-1)^n}{n} \pi + \frac{\pi}{n}$$

Đơn giản biểu thức trên

```
[>simplify(%);
```

$$-\frac{(-1)^n - 1}{n}$$

Thiết lập chuỗi Fourier của  $f(x)$ :

```
[>1/2*a[0]+sum(a[n]*cos(n*x)+b[n]*sin(n*x),n=1..infinity);
```

$$\frac{1}{2}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left( \pi - \frac{1}{n}\pi \right) \sin nx$$

[> **simplify**(%);

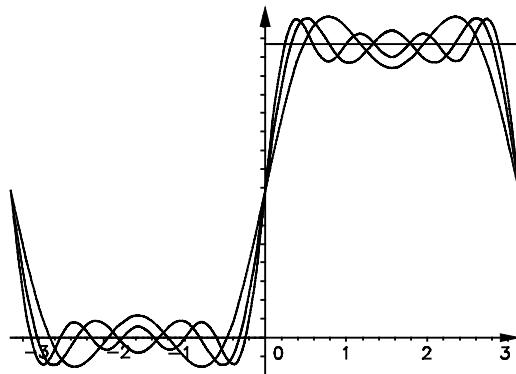
$$\frac{1}{2}\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n} \sin nx$$

Tổng trên cũng thường được viết dưới dạng:

$$f(x) = \frac{1}{2}\pi + 2\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right).$$

Hàm đã cho không chẵn, không lẻ, thậm chí không liên tục. Để thấy được sự xấp xỉ (đối với hàm  $f(x)$ ) của chuỗi Fourier trên khoảng  $(-\pi, \pi)$ , ta có thể cho máy vẽ đồ thị hàm số cùng với các tổng riêng của chuỗi  $S_3, S_5, S_7$ :

[>**plot**({ $\frac{1}{2}a[0] + \sum(a[n]*\cos(n*x) + b[n]*\sin(n*x), n=1..3)$ ,  
 $\frac{1}{2}a[0] + \sum(a[n]*\cos(n*x) + b[n]*\sin(n*x), n=1..5)$ ,  
 $\frac{1}{2}a[0] + \sum(a[n]*\cos(n*x) + b[n]*\sin(n*x), n=1..7)$ },  
 $x=-\text{Pi}..\text{Pi}$ );



Hình 8.5.

*Chú ý:* Chuỗi này hội tụ tại mọi điểm trên khoảng  $(-\pi, \pi)$  trừ điểm  $x = 0$ .

**Thí dụ 3.** Tìm chuỗi Fourier của hàm  $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ .

[> **a[0]:=1/Pi\*int(x,x=0..Pi);**

$$a_0 := \frac{1}{2}\pi$$

[> **a[n]:=1/Pi\*int(x\*cos(n\*x),x=0..Pi);**

$$a_n := \frac{\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\pi}$$

```
[> simplify(%);

          
$$\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$


[> b[n]:=1/Pi*int(x*sin(n*x),x=0..Pi);

          
$$b_n := \frac{(-1)^n}{n}$$


[> f(x):=1/2*a[0]+sum(a[n]*cos(n*x)+b[n]*sin(n*x),
n=1..infinity);

          
$$f(x) := \frac{1}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\pi} \cos nx - \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$$


[> simplify(%);

          
$$\frac{1}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{-(-1)^n \cos nx + \cos nx + (-1)^n \pi n \sin nx}{\pi n^2}$$

```

Nhận xét 1: Tổng trên thường được viết dưới dạng

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}.$$

Nhận xét 2: Đặt  $x = \pi$  (hoặc  $x = 0$ ) trong công thức trên ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Từ đây ta có:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Suy ra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Công thức này đã được Euler tìm ra năm 1736.

### 3.2. Biến đổi Fourier

*Biến đổi Fourier* là một trong những phép biến đổi tích phân thông dụng nhất, được sử dụng nhiều trong lĩnh vực giải phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng, và đặc biệt là trong xử lý tín hiệu số. Để thực hiện các phép biến đổi này, ta sử dụng gói công cụ *các phép biến đổi tích phân* và gọi nó ra bằng lệnh

[> **with(inttrans)** ;

Nhắc lại rằng biến đổi Fourier của hàm số  $f(t)$  là hàm số  $F(v)$  xác định như sau

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ivt} dt$$

Cú pháp của lệnh thực hiện phép biến đổi này là

[>**fourier(f(t), t, v)** ;

Thí dụ, phép biến đổi Fourier của biểu thức  $\frac{3}{1+t^2}$  được thực hiện nhờ dòng lệnh

[>**fourier(3/(1 + t^2), t, v)** ;

và sau khi thực hiện lệnh này ta được kết quả là hàm số

$$3[e^v \pi \text{Heaviside}(-v) + e^{-v} \pi \text{Heaviside}(v)]$$

trong đó *Heaviside()* là một dạng *hàm xung*, cụ thể hơn đây là một *nguyên hàm* của hàm Delta Dirac. Nó không xác định tại gốc tọa độ, nhận giá trị 0 trên nửa trực số âm và nhận giá trị 1 trên nửa trực số dương.

Như đã chỉ ra trong phần lý thuyết, kết quả của biến đổi Fourier (kể cả đối với các hàm thông dụng nhất) luôn là những hàm “khác thường” (không biểu diễn được qua những hàm thông thường), cho nên trước đây rất ít được đề cập tới về phương diện tính toán trực tiếp. Nay, với máy tính, chúng ta có đủ điều kiện để đi sâu vào lĩnh vực này.

Ta nghiên cứu thêm một thí dụ: Tìm biến đổi Fourier của hàm

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4-it}}$$

bằng lệnh

[>**fourier(1/(4-I\*t)^(1/3), t, w)** ;

và ta được kết quả là

$$\frac{\sqrt{3}\Gamma(2/3)e^{-4w} \text{Heaviside}(w)}{w^{2/3}}$$

trong đó hàm Gamma đã được chúng ta biết đến trong khi nghiên cứu về tích phân phụ thuộc tham số.

Kết quả trên một lần nữa cho thấy rằng kết quả biến đổi Fourier của một hàm rất “quen thuộc” là một hàm “không quen thuộc”. Tuy nhiên, điều ngược lại cũng thường xảy ra: biến đổi Fourier của một hàm “không quen thuộc” có thể lại là một hàm rất quen thuộc. Thí dụ, biến đổi Fourier của hàm

$$te^{-3t} \text{Heaviside}(t)$$

thực hiện nhờ lệnh

```
[> fourier(t*exp(-3*t)*Heaviside(t), t, w);
```

cho kết quả như sau

$$\frac{1}{(3 + Iw)^2}$$

trong đó  $I$  là ký hiệu *đơn vị ảo*, theo quy ước của Maple.

Một số kết quả đã biết trong phần lý thuyết cũng có thể được kiểm định lại bằng tính toán trên máy. Thí dụ, biến đổi Fourier của đạo hàm (bậc 4) được tính thông qua biến đổi Fourier của chính hàm số như sau

```
[> fourier(diff(f(x), x$4), x, w);
```

$$w^4 \text{fourier}(f(x), x, w)$$

Muốn xem biến đổi Fourier của *tích chập hai hàm số* được tính thông qua các biến đổi Fourier của từng hàm như thế nào, người đọc hãy tự thực hiện các lệnh

```
[> F := int(g(x)*h(t-x), x=-infinity..infinity):
```

```
[> fourier(F, t, w);
```

**Biến đổi Fourier ngược** cũng là một phép biến đổi tích phân, xác định bởi công thức

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v)e^{ivt} dt$$

và được thực hiện nhờ lệnh có cú pháp như sau:

```
[> invfourier(F(v), v, t);
```

Thí dụ, ta tìm biến đổi Fourier ngược của hàm  $3/(1+v^2)$  bằng lệnh

```
[> invfourier(3/(1 + v^2), v, t);
```

và nhận được kết quả là

$$\frac{3}{2}e^{-t} \text{Heaviside}(t) + \frac{3}{2}e^t \text{Heaviside}(-t)$$

Để thấy rằng các phép biến đổi Fourier và Fourier ngược thực sự là *ngược của nhau* ta dùng lệnh kép

```
[> invfourier(fourier(f(x), x, w), w, x);
```

và sẽ được kết quả là

$$f(x)$$

Điều này cũng đã được chứng minh chặt chẽ trong phần lý thuyết.

# Hệ phương trình vi phân và sơ lược về phương trình đạo hàm riêng

<b>9.1. Hệ phương trình vi phân .....</b>	<b>311</b>
9.1.1. Khái niệm chung .....	311
9.1.2. Hệ tuyến tính thuần nhất.....	313
9.1.3. Hệ tuyến tính không thuần nhất.....	315
9.1.4. Hệ tuyến tính với hệ số không đổi.....	316
<b>9.2. Phương trình vi phân đạo hàm riêng .....</b>	<b>317</b>
9.2.1. Một số bài toán.....	317
9.2.2. Phương trình vi phân đạo hàm riêng .....	319
9.2.3. Phương trình đạo hàm riêng cấp một .....	320
9.2.4. Phương trình vi phân đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai .....	323

Trong giáo trình Giải tích một biến chúng ta đã sơ bộ làm quen với phương trình vi phân và biết cách giải một số phương trình đơn giản. Chương này giới thiệu sơ lược về hai phần kê tiếp của phương trình vi phân là *hệ phương trình vi phân* và *phương trình đạo hàm riêng*. Với mục đích trang bị kiến thức tối giản để học viên tìm hiểu các môn học khác và củng cố những gì đã học trong các chương trước về hàm nhiều biến, chúng ta chỉ trình bày những khái niệm cơ bản và giải một số lớp phương trình đơn giản.

## 9.1. Hệ phương trình vi phân

### 9.1.1. Khái niệm chung

Hệ phương trình vi phân là một hệ các phương trình dạng

$$y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

trong đó  $f_i$  là những hàm số  $(n+1)$  biến,  $y_i$  là những hàm chưa biết của biến  $x$ . Giải (hay *tích phân*) hệ trên có nghĩa là tìm tất cả các bộ  $n$  hàm số  $y_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$  thỏa mãn (1). Nếu cho trước điểm  $x_0$  và các giá trị  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  thì một nghiệm  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  của hệ (1) thỏa mãn điều kiện (khởi đầu)

$$y_i(x_0) = b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

được gọi là *nghiệm riêng* của hệ.

**Nhận xét.** Phương trình vi phân bậc cao luôn có thể đưa được về hệ phương trình vi phân bậc nhất.

**Thí dụ.** Xét phương trình vi phân cấp hai

$$y'' + y = x.$$

Chúng ta đã biết cách giải phương trình này. Nghiệm tổng quát của nó là

$$y(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + x,$$

trong đó  $\alpha$  và  $\beta$  là hai số bất kỳ. Nếu đặt  $y_1 = y$  và  $y_2 = y'$  thì phương trình tương đương với hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2, \\ y'_2 &= x - y_1. \end{aligned}$$

Như vậy nghiệm tổng quát của hệ này có dạng

$$y_1(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + x, \quad y_2(x) = -\alpha \sin x + \beta \cos x + 1,$$

với  $\alpha, \beta$  là những hằng số bất kỳ.

Bằng phương pháp tương tự như cách làm trong thí dụ trên ta có thể chuyển phương trình vi phân cấp  $k$  về hệ gồm  $k$  phương trình vi phân.

Giả thiết rằng tìm được  $n$  hàm số

$$y_i = \varphi_i(x, c_1, \dots, c_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

trong đó  $c_1, \dots, c_n$  là những hằng số bất kỳ, sao cho hệ phương trình (1) nghiệm đúng. Khi ấy các hàm  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  còn được gọi là *tích phân của hệ*.

Trong thí dụ trên, các hàm sau đây là những tích phân của hệ:

$$\varphi_1(x, \alpha, \beta) = \alpha \cos x + \beta \sin x + x,$$

$$\varphi_2(x, \alpha, \beta) = -\alpha \sin x + \beta \cos x + 1.$$

*Tích phân đầu* của hệ (1) là một hàm số  $n+1$  biến  $F(x, y_1, \dots, y_n)$  mà khi thay nghiệm  $y_1, \dots, y_n$  của hệ (1) vào thì giá trị của  $F$  không đổi (với mọi  $x$ ). Tầm quan trọng của tích phân đầu được lý giải bởi nhận xét sau. Giả sử biết được  $n$  tích phân đầu  $F_1, \dots, F_n$  sao cho định thức của ma trận Jacobi của hàm vectơ  $(F_1, \dots, F_n)$

theo  $n$  biến cuối  $(y_1, \dots, y_n)$  khác không. Khi ấy theo định lý hàm ẩn, hệ phương trình

$$F_i(x, y_1, \dots, y_n) = c_i, \quad i = 1, \dots, n$$

sẽ cho ta  $n$  hàm  $y_i = y_i(x, c_1, \dots, c_n), i = 1, \dots, n$  là tích phân của hệ (1).

**Thí dụ.** Hãy giải hệ 2 phương trình vi phân:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}.$$

**Giai.** Chúng ta cần tìm hai tích phân đầu của hệ. Lưu ý rằng hệ trên cũng bằng tỷ số

$$\frac{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz}{\alpha(z-y) + \beta(x-z) + \gamma(y-x)}.$$

Bằng cách chọn  $\alpha = x, \beta = y, \gamma = z$ , tử số của biểu thức trên phải bằng 0 vì mẫu số bằng 0. Tức là  $xdx + ydy + zdz = 0$ , hay  $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$ . Như vậy nếu  $y(x), z(x)$  là nghiệm của hệ thì

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{const} \quad (\text{hằng số}),$$

và ta có ngay một tích phân đầu

$$F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Tương tự, lấy  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  ta thu được tích phân đầu nữa

$$F_2(x, y, z) = x + y + z.$$

Do đó nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân được cho dưới dạng hàm ẩn:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1,$$

$$x + y + z = c_2,$$

trong đó  $c_1$  và  $c_2$  là những hằng số.

### 9.1.2. Hệ tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất  $n$  hàm số là hệ có dạng

$$y'_i = a_1^i(x)y_1 + \dots + a_n^i(x)y_n, \quad i = 1, \dots, n, \quad (*)$$

trong đó  $a_j^i$  là những hàm số (xác định trên khoảng  $I \subseteq \mathbb{R}$ ).

Giả thiết  $a_j^i$  liên tục trên  $I$ . Nếu ký hiệu  $Y$  là vectơ cột và  $A$  là ma trận chứa  $a_j^i$ :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1^1(x) & \dots & a_n^1(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^n(x) & \dots & a_n^n(x) \end{bmatrix}$$

thì hệ (\*) được viết dưới dạng ma trận:

$$Y' = AY.$$

Với giả thiết về tính liên tục của các hàm hệ số  $a_j^i$ , cho trước  $x_0 \in I$  và  $b \in \mathbb{R}^n$ , tồn tại duy nhất một nghiệm  $Y(x)$  của hệ (\*) thỏa mãn điều kiện khởi đầu  $Y(x_0) = b$ . Ngoài ra các nghiệm của hệ (\*) tạo thành một không gian  $n$  chiều.

**Thí dụ.** Xét hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Đây chính là hệ phương trình vi phân thuần nhất tương ứng với phương trình cấp hai  $y'' + y = 0$ . Ta biết nghiệm tổng quát là

$$y_1(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x, \quad y_2(x) = -\alpha \sin x + \beta \cos x.$$

Ký hiệu  $f(x) := (\cos x, -\sin x)$  và  $g(x) := (\sin x, \cos x)$ . Hai hàm vecto này độc lập tuyến tính, tức là nếu có hai số  $a$  và  $b$  để  $af(x) + bg(x)$  đồng nhất bằng 0 trên  $I$  thì lập tức  $a = 0$ ,  $b = 0$ . Không gian cảng bởi hai hàm này là không gian 2 chiều và chứa tất cả các nghiệm của hệ. Nói cách khác, mọi nghiệm của hệ phương trình vi phân đều có dạng  $af(x) + bg(x)$ . Muốn tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện khởi đầu, thí dụ  $Y(0) = (1, 0)^T$  chẳng hạn thì ta chỉ cần giải hệ phương trình

$$af(0) + bg(0) = Y(0)$$

và thu được  $a = 1, b = 0$  tức là  $Y(x) = f(x)$ , hay cụ thể hơn  $y_1(x) = \cos x$ ,  $y_2(x) = -\sin x$ .

**Phương pháp giải.** Để giải hệ (\*) người ta tìm giải thức của hệ, tức là một ma trận cấp  $n \times n$  mà mỗi cột thứ  $i$  của nó là một nghiệm riêng của hệ (\*) thỏa mãn điều kiện khởi đầu

$$Y(x_0) = e_i$$

trong đó  $e_i$  là vecto trực đơn vị thứ  $i$  (có tọa độ  $i$  bằng 1, các tọa độ còn lại bằng 0).

Ký hiệu giải thức của (\*) là  $\Phi(x, x_0)$ . Ta thấy mỗi hệ phương trình vi phân dạng (\*) đều có một giải thức duy nhất và giải thức có những tính chất đặc biệt sau đây:

- (i) Tại điểm  $x = x_0$ , giá trị của giải thức là ma trận đơn vị, tức là  $\Phi(x_0, x_0) = I$ ;
- (ii) Với mọi  $x, x_0, x_1$  ta luôn có  $\Phi(x, x_1) = \Phi(x, x_0) \cdot \Phi(x_0, x_1)$ . Nói riêng  $\Phi(x, x_0)$  khả nghịch và ma trận nghịch đảo của nó là  $\Phi(x_0, x)$ ;
- (iii) Nghiệm riêng của hệ (\*) thỏa mãn điều kiện khởi đầu  $Y(x_0) = b$  được tính theo công thức  $Y(x) = \Phi(x, x_0)b$ .

**Thí dụ.** Đối với hệ phương trình vi phân trong thí dụ trước, dễ thấy hai nghiệm thỏa mãn điều kiện khởi đầu  $\varphi_1(x_0) = \mathbf{e}_1$  và  $\varphi_2(x_0) = \mathbf{e}_2$  là

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos(x - x_0) \\ -\sin(x - x_0) \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} \sin(x - x_0) \\ \cos(x - x_0) \end{pmatrix}.$$

Vậy giải thức của hệ sẽ là ma trận

$$\Phi(x, x_0) = \begin{bmatrix} \cos(x - x_0) & \sin(x - x_0) \\ -\sin(x - x_0) & \cos(x - x_0) \end{bmatrix}$$

và nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện khởi đầu  $Y(x_0) = b$  với  $b$  cho trước bất kỳ được tính theo công thức nêu trong (iii).

### 9.1.3. Hệ tuyến tính không thuần nhất

Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất là hệ phương trình dạng

$$Y' = A(x)Y + B(x) \quad (**)$$

trong đó  $A$  là ma trận cấp  $n \times n$ ,  $B(x)$  là vectơ cột  $n$  tọa độ.

Giả thiết  $Y_0$  là nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất (\*) và  $Y_p$  là một nghiệm nào đó của hệ không thuần nhất. Khi ấy nghiệm tổng quát của hệ không thuần nhất có dạng

$$Y(x) = Y_0(x) + Y_p(x).$$

Ngoài ra, nếu ta biết được giải thức  $\Phi(x, x_0)$  của hệ (\*), thì nghiệm của hệ không thuần nhất thỏa mãn điều kiện khởi đầu  $Y(x_0) = b$  sẽ được tính theo công thức

$$Y(x) = \Phi(x, x_0) \left\{ b + \int_{x_0}^x \Phi(x_0, t)B(t)dt \right\} \quad (***)$$

**Thí dụ.** Giải hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \text{ với } y_1(0) = 1, y_2(0) = 1.$$

**Giải.** Ta đã tính được giải thức của hệ thuần nhất tương ứng trong thí dụ trước với  $x_0 = 0$ . Áp dụng công thức (\*\*\*) ta tìm được ngay

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} \cos(-t) & \sin(-t) \\ -\sin(-t) & \cos(-t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} dt \right\} = \begin{bmatrix} \cos x + \sin x + x \\ \cos x - \sin x + 1 \end{bmatrix}.$$

### 9.1.4. Hệ tuyến tính với hệ số không đổi

Nếu như ma trận  $A(x)$  xác định hệ phương trình vi phân thuần nhất (\*) là một ma trận hằng (không phụ thuộc vào  $x$ ), thì giải thức của hệ (\*) có dạng sau

$$\Phi(x, x_0) = e^{A(x-x_0)},$$

trong đó ma trận mũ  $e^{At}$  được cho bởi công thức

$$e^{At} = I + \frac{t}{1!} A + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \dots.$$

Với công thức trên, nghiệm của hệ (\*) thỏa mãn điều kiện khởi đầu  $Y(x_0) = b$  sẽ là

$$Y(x) = e^{A(x-x_0)} b.$$

**Thí dụ.** Giải hệ tuyến tính thuần nhất

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{với} \quad y_1(0) = 2, y_2(0) = 3.$$

**Giải.** Nhận xét rằng với mọi  $k \geq 2$  ta có  $A^k$  đồng nhất với ma trận 0, cho nên giải thức của hệ là

$$\Phi(x, 0) = e^{Ax} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{x}{1!} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do đó nghiệm cần tìm là

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3x \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Trong trường hợp  $A$  là ma trận đường chéo với các phần tử  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  trên đường chéo, thì từ công thức ma trận mũ, ta thấy ngay  $e^{Ax}$  cũng là một ma trận đường chéo với các hàm  $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$  trên đường chéo (bởi vì chuỗi  $1 + \frac{\lambda x}{1!} + \frac{\lambda^2 x^2}{2!} + \dots$

có tổng là  $e^{\lambda x}$ ). Nhờ vào nhận xét này mà hệ phương trình vi phân thuần nhất với ma trận hệ số  $A$  không đổi có thể giải được một cách dễ dàng nếu như  $A$  có  $n$  giá trị riêng  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  và  $n$  vectơ riêng tương ứng  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n$ . Thật vậy, ký hiệu  $H$  là ma trận vuông cấp  $n \times n$  gồm các vectơ cột  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n$  tạo nên. Từ giáo trình *Đại số tuyến tính* ta biết rằng ma trận  $B := H^{-1}AH$  là ma trận đường chéo, với các phần tử  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  trên đường chéo. Do đó nếu đổi biến  $Y = HZ$  thì hệ phương trình vi phân (\*) trở thành hệ

$$Z' = BZ.$$

Điều kiện khởi đầu  $Y(x_0) = b$  sẽ chuyển thành  $Z(x_0) = H^{-1}b$ . Hệ phương trình vi phân với ma trận đường chéo có nghiệm

$$Z(x) = e^{B(x-x_0)} H^{-1} b,$$

trong đó  $e^{B(x-x_0)}$  là ma trận đường chéo với  $e^{\lambda_1(x-x_0)}, \dots, e^{\lambda_n(x-x_0)}$  trên đường chéo. Từ đây ta có ngay nghiệm của hệ phương trình vi phân ban đầu đối với  $Y$ :

$$Y(x) = H e^{B(x-x_0)} H^{-1} b.$$

**Thí dụ.** Tích phân hệ phương trình vi phân sau với  $y_1(0)=0, y_2(0)=1$ :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

**Giải.** Ma trận của hệ có hai giá trị riêng  $1$  và  $-1$  với hai vectơ riêng tương ứng  $(1,1)$  và  $(1,-1)$ , viết dưới dạng hàng. Do đó ma trận biến đổi  $H$  có dạng

$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ . Để thấy  $H^{-1} = \frac{1}{2}H$ . Theo công thức trên, nghiệm của hệ sẽ là

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch} x \end{pmatrix}.$$

## 9.2. Phương trình vi phân đạo hàm riêng

### 9.2.1. Một số bài toán

#### 1. Dao động của dây đàn

Giả sử sợi dây AB đặt căng song song với trục  $\vec{Ox}$  trong mặt phẳng  $xOu$ . Khi tác động vào sợi dây một lực, nó sẽ dao động. Để nghiên cứu quy luật dao động của sợi dây, chúng ta giả sử rằng sợi dây AB khá mảnh để nó không cưỡng lại sự uốn và có lực căng tương đối lớn so với lực tác động lên dây.

Ký hiệu  $u(x,t)$  là độ lệch của dây so với vị trí cân bằng  $M(x)$  tại thời điểm  $t$ .

Coi độ dài dây không thay đổi khi dây dao động. Khi ấy, theo định luật Hooke, lực căng  $\vec{T}$  tại mọi vị trí có cường độ không đổi, tức là,

$$T(x,t) = T_0 \quad \forall x \in [a,b],$$

trong đó,  $T(x,t)$  là lực căng của dây tại vị trí  $M(x)$ .

Giả sử lực ngoài tác động lên sợi dây song song với trục  $\vec{Ou}$  và phân bố trên một đơn vị dài là  $F(x,t)$ . Gọi  $\rho(x)$  là tỷ trọng dài của sợi dây. Khi ấy khối lượng

của dây trong khoảng  $dx$  là  $m = \rho(x)dx$ . Ký hiệu  $\alpha(x)$  là góc hợp bởi trục  $\vec{Ox}$  và lực căng  $\vec{T}$  có hướng là hướng tiếp tuyến của sợi dây tại vị trí  $M(x)$ .

Theo định luật Newton: tổng các lực tác động lên sợi dây bằng khối lượng của dây nhân với gia tốc chuyển động của sợi dây, tức là  $F = ma$ . Chiều đẳng thức trên lên trục  $\vec{Ou}$ , ta có:

$$T_0 \sin \alpha(x+dx) - T_0 \sin \alpha(x) + F(x,t)dx = \rho(x)dx \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Ta giả thiết rằng đạo hàm  $\frac{\partial u}{\partial x}$  đủ nhỏ. Khi ấy ta có thể viết:

$$\sin \alpha(x) = \frac{\tan \alpha(x)}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Vậy  $T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx) - T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x) + F(x,t)dx = \rho(x)dx \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ , hay

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \left[ \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial u}{\partial x}(x)}{dx} \right] + F(x,t).$$

Cho  $dx \rightarrow 0$  ta có:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t).$$

Phương trình trên gọi là *phương trình dao động* của dây.

Nếu sợi dây là đồng chất, tức là  $\rho(x) = \rho_0$  ta có *phương trình truyền sóng một chiều*:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),$$

trong đó  $a^2 = \frac{T_0}{\rho_0}$ ,  $f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho_0}$ .

Phương trình trên đã được Daniel Bernoulli, D'Alembert và Euler nghiên cứu từ thế kỷ thứ 18.

## 2. Dao động của màng rung

Ta sẽ xét dao động tự do của màng mỏng, căng đều theo mọi chiều. Giả sử trong trạng thái tĩnh, màng chiếm một miền  $G$  giới nội có biên trơn trong mặt phẳng  $Oxy$ . Chúng ta sẽ giả thiết màng rất mỏng, do đó có thể coi lực chống lại sự uốn bằng 0. Tương tự như phần trên, có thể chứng minh được rằng trong trạng thái uốn độ lệch  $u = u(t, x, y)$  tại vị trí  $(x, y)$  của màng tại thời điểm  $t$  thỏa mãn phuong trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t).$$

Phuong trình trên được gọi là *phuong trinh dao động* của màng, còn phuong trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \text{ với } u = u(t, x, y, z),$$

được gọi là *phuong trinh truyền sóng* trong không gian ba chiều.

Tổng  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  hay  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  (trong trường hợp ba chiều)

được gọi là *toán tử Laplace* và được ký hiệu là  $\Delta u$ . Như vậy, phuong trình dao động của màng có thể viết dưới dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x, y, t),$$

và phuong trình truyền sóng được viết dưới dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t).$$

### 9.2.2. Phuong trinh vi phan đạo hàm riêng

Các bài toán trên, cũng như nhiều bài toán khác của thực tế, vật lý, kỹ thuật,... dẫn tới việc tìm một hàm  $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , biến  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , thỏa mãn phuong trình

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^k z}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}) = 0.$$

Phuong trình, trong đó có ít nhất một đạo hàm riêng cấp  $k$  của hàm chưa biết  $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$  và không có các đạo hàm riêng cấp cao hơn được gọi là *phuong trinh vi phan đạo hàm riêng cấp k* của các biến  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Hàm  $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$  thỏa mãn phuong trình trên trong một miền nào đó của biến  $x_1, x_2, \dots, x_n$  được gọi là *nghiệm* hay *tích phân* của phuong trình đạo hàm riêng trên miền đó.

**Thí dụ.** Phương trình  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  là phương trình đạo hàm riêng cấp 3 của hai biến  $(x, y)$ ;  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u$  là phương trình đạo hàm riêng cấp 1 của ba biến  $(x, y, z)$ ; và  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$  cũng là phương trình đạo hàm riêng cấp 1 của hai biến  $(x, t)$ .

Rất nhiều bài toán của vật lý dẫn đến các phương trình đạo hàm riêng cấp 2.

**Thí dụ.** Phương trình mô tả *quá trình truyền nhiệt* là

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t).$$

Phương trình *truyền sóng* có dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t).$$

Chương này chỉ giới thiệu một số khái niệm cơ bản và cách giải một số phương trình vi phân cấp một và cấp hai đơn giản nhất. Bạn đọc muốn tìm hiểu sâu hơn cần học theo các giáo trình chuyên về phương trình đạo hàm riêng.

### 9.2.3. Phương trình đạo hàm riêng cấp một

Phương trình *đạo hàm riêng cấp 1* là phương trình dạng

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0.$$

Phương trình *đạo hàm riêng cấp 1 tuyến tính* là phương trình có dạng

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_n} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$$

Nếu vé phái của phương trình trên đồng nhất bằng 0, còn các hàm  $X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$  không phụ thuộc vào  $z$  thì ta có *phương trình tuyến tính thuận nhất*

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0.$$

### 1. Phương trình đạo hàm riêng cấp 1 tuyến tính thuần nhất

Xét phương trình:

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0. \quad (1)$$

Giả sử rằng  $X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  xác định và liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng theo tất cả các biến ở trong một lân cận nào đó của điểm  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ .

Ta phải tìm nghiệm của phương trình trên, tức là tìm một hàm  $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$  xác định và khả vi liên tục trong lân cận điểm  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  sao cho nó thỏa mãn phương trình trong lân cận ấy.

Phương trình tuyến tính thuần nhất có nghiệm hiển nhiên (nghiệm tâm thường)  $z = C$ , trong đó  $C$  là hằng số. Ngoài ra, ta sẽ chứng tỏ rằng nó có vô số nghiệm không tâm thường.

Cùng với phương trình đạo hàm riêng tuyến tính ta xét hệ phương trình vi phân thường đối xứng sau:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (2)$$

**ĐỊNH LÝ.** Nếu  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là tích phân khả vi liên tục của hệ (2), tức là

$$d\varphi \Big|_{(2)} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} X_n \equiv 0$$

trong một miền nào đó của biến số  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , thì hàm số  $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là nghiệm của phương trình (1).

Đảo lại, nếu  $z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là nghiệm của (1), thì  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là tích phân của hệ (2).

**Chứng minh.** Nếu  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là tích phân khả vi liên tục của hệ (2) thì hiển nhiên theo định nghĩa tích phân ta có:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} X_n = d\varphi \Big|_{(2)} \equiv 0,$$

chứng tỏ  $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là nghiệm của (1).

Đảo lại, nếu  $z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là nghiệm của (1) thì

$$d\psi \Big|_{(2)} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n \Big|_{(2)} =$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} X_n \equiv 0.$$

Chứng tỏ  $z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là tích phân của hệ (2).

Từ định lý trên ta suy ra rằng, việc giải phương trình đạo hàm riêng tuyến tính thuần nhất (2) tương đương với giải hệ phương trình vi phân thường đối xứng (2). Nếu biết  $n-1$  tích phân độc lập,  $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  của hệ (2) thì nghiệm tổng quát của (1) sẽ là

$$z = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}).$$

**Thí dụ** Muốn tìm nghiệm của  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$  ta chú ý rằng hệ phương trình đối xứng tương ứng có dạng  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ . Hệ này có 2 tích phân độc lập là  $\varphi_1 = \frac{y}{x}$ ,  $\varphi_2 = \frac{z}{x}$  chứng tỏ nghiệm tổng quát của phương trình đạo hàm riêng đã cho là  $u = \Phi(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$ .

## 2. Phương trình đạo hàm riêng cấp 1 tuyến tính không thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính không thuần nhất

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_n} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, z), \quad (3)$$

trong đó các hàm số  $X_i$  và  $f$  xác định và liên tục cùng với đạo hàm riêng cấp một của chúng theo tất cả các biến trong một lân cận nào đó của điểm  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, z^0)$ . Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất bằng cách đưa về hệ thuần nhất. Nghiệm của phương trình này sẽ được tìm dưới dạng một hàm ẩn

$$U(x_1, \dots, x_n, z) = 0,$$

trong đó  $U$  là hàm khả vi liên tục theo tất cả các đối số và thỏa mãn

$$\frac{\partial U}{\partial z}(x_1^0, \dots, x_n^0, z^0) \neq 0.$$

Lấy vi phân hệ thức trên theo  $x_i$  với  $z$  là hàm của  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ta được

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \quad \text{hay} \quad \frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Thay vào phương trình (3) ta được

$$X_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial U}{\partial x_n} + f \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Đây là phương trình tuyến tính thuần nhất đối với hàm số  $U$  cần tìm.

Giả sử hệ phương trình đối xứng tương ứng của phương trình trên

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{f}$$

có  $n$  tích phân độc lập

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z).$$

Khi ấy hàm số  $U = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  chính là nghiệm tổng quát của hệ phương trình (4), do đó nghiệm tổng quát của phương trình (3) có dạng

$$U = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0.$$

**Thí dụ.** Muốn giải phương trình  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = xyz$  ta lưu ý rằng hệ

phương trình đối xứng  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{xyz}$  có ba tích phân độc lập là

$$\varphi_1 = \frac{y}{x}, \varphi_2 = \frac{z}{x}, \varphi_3 = xyz - 3u. \text{ Vậy hệ đã cho có nghiệm tổng quát là}$$

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, xyz - 3u\right) = 0.$$

#### 9.2.4. Phương trình vi phân đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai

Phương trình đạo hàm riêng *tuyến tính cấp 2* của hai biến độc lập  $(x,y)$  có dạng

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0,$$

trong đó  $a, b, c$  là những hàm khả vi liên tục tới cấp hai theo hai biến  $(x, y)$  và  $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ .

##### 1. Một số dạng đặc biệt

###### Dạng 1.

$$1) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F(x, y); \quad 2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F(x, y); \quad 3) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F(x, y).$$

**Thí dụ.** Ta giải phương trình  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x - y$  bằng cách tích phân hai vế của nó

theo  $y$  và thu được  $\frac{\partial z}{\partial x} = xy - \frac{1}{2}y^2 + \psi(x)$ . Tích phân hai vế của phương trình này theo  $x$  ta được nghiệm của phương trình đã cho là

$$z = \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}y^2x + \int \psi(x)dx + \varphi(y),$$

trong đó  $\psi(x)$  và  $\varphi(y)$  là những hàm bất kì.

### Dạng 2.

$$\begin{aligned} 1) \quad a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + d \frac{\partial z}{\partial x} &= F(x, y); & 2) \quad b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial z}{\partial y} &= F(x, y); \\ 3) \quad b \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + e \frac{\partial z}{\partial y} &= F(x, y); & 4) \quad c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + e \frac{\partial z}{\partial x} &= F(x, y). \end{aligned}$$

Đây là những phương trình bậc nhất đối với biến phụ thuộc là  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$  (hoặc  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ ).

**Thí dụ.** Để giải phương trình  $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} = (9x + 6)e^{3x+2y}$  ta coi  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$  là biến phụ thuộc,  $x$  là biến độc lập,  $y$  là hằng số, và phương trình trở thành *phương trình vi phân cấp một*:  $x \frac{\partial p}{\partial x} + 2p = (9x + 6)e^{3x+2y}$ . Nhân hai vế của phương trình này với  $x$  ta được  $x^2 \frac{\partial p}{\partial x} + 2xp = (9x^2 + 6x)e^{3x+2y}$ . Tích phân 2 vế theo  $x$  ta được:

$$x^2 p = \int (9x^2 + 6x)e^{3x+2y} dx = 3x^2 e^{3x+2y} + \phi_1(y).$$

Suy ra

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = 3e^{3x+2y} + \frac{1}{x^2} \phi_1(y).$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$z = e^{3x+2y} - \frac{1}{x} \phi_1(y) + \phi_2(y).$$

### Dạng 3.

$$1) \quad a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial z}{\partial x} = F(x, y);$$

$$2) \quad b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + e \frac{\partial z}{\partial y} = F(x, y).$$

Đây cũng là những phương trình đạo hàm riêng tuyến tính bậc nhất đối với  $p$  (hoặc  $q$ ) và  $x, y$  là những biến độc lập.

**Thí dụ.** Ta giải phương trình  $2x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} = 4xy^2$  bằng cách đặt

$p = \frac{\partial z}{\partial x}$ , và phương trình này có thể được coi như là phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 1 không thuần nhất:  $2x \frac{\partial p}{\partial x} - y \frac{\partial p}{\partial y} = 4xy^2 - 2p$ . Để giải nó theo phương pháp của Mục 9.1.3 ta lập hệ phương trình vi phân thường

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dp}{4xy^2 - 2p}.$$

Dễ dàng kiểm tra, hệ này có hai tích phân độc lập là  $\varphi_1 = xy^2$  và  $\varphi_2 = \frac{p}{y^2} - 2x$ .

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình cấp một là  $\frac{p}{y^2} - 2x = \psi(xy^2)$ . Suy ra

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + y^2 \psi(xy^2)$$

và

$$z = x^2y^2 + y^2 \int \psi(xy^2) dx + \phi(y) = x^2y^2 + \phi_1(xy^2) + \phi(y).$$

#### Dạng 4.

$$1) \quad a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + d \frac{\partial z}{\partial x} + mz = F(x, y); \quad 2) \quad c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + e \frac{\partial z}{\partial y} + nz = F(x, y).$$

Đây là những phương trình vi phân thường tuyến tính cấp hai đối với  $p$  (hoặc  $q$ ) và  $x$  (hoặc  $y$ ) là những biến độc lập.

**Thí dụ.** Phương trình  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 z = (x-2)e^{3x+2y}$  là phương trình vi phân thường tuyến tính cấp hai không thuần nhất. Nó có nghiệm là

$$z = e^{xy} \phi_1(x) + xe^{xy} \phi_2(x) + \frac{e^{3x+2y}}{x-2}.$$

## 2. Phân loại phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai

Xét phương trình tuyến tính cấp hai

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \quad (*)$$

trong đó  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ .

Dạng toàn phương

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j.$$

được gọi là *đa thức đặc trưng* của phương trình (\*).

Có định điểm  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  và giả sử các hàm số  $a_{ij}(x), b_i(x), c(x)$  và  $f(x)$  được xác định trong lân cận tại điểm này. Dùng phép biến đổi  $\xi_j = \sum_{s=1}^n \alpha_{sj} \eta_s$ ,  $j=1, \dots, n$ , ta có thể đưa đa thức đặc trưng về dạng

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{s,l=1}^n a_{sl}^* \eta_s \eta_l.$$

Hơn nữa, từ giáo trình đại số tuyến tính ta đã biết rằng, tồn tại một phép biến đổi tuyến tính thực, không suy biến đưa dạng toàn phương  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0) \xi_i \xi_j$  về dạng  $\sum_{l=1}^n a_l^* \eta_l^2$  với  $a_l^* = \pm 1$  hoặc 0. Số các số hạng mang dấu dương, âm, hoặc bằng 0 là bất biến đối với các phép biến đổi không suy biến. Với phép biến đổi này thì phương trình (\*) trở thành

$$\sum_{l=1}^n a_l^* \frac{\partial^2 u}{\partial y_{2l}^2} = F(y_1, \dots, y_n, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_n}) \quad (**)$$

với  $a_l^* = \pm 1$  hoặc 0.

Dạng (\*\*) được gọi là *dạng chính tắc* của phương trình (\*) tại điểm  $x^0$ . Dựa trên dạng chính tắc này người ta phân loại phương trình tuyến tính cấp hai ra các dạng cơ bản sau:

- 1) Phương trình (\*) tại điểm  $x^0$  được gọi là *elliptic* nếu tất cả các hệ số trong (\*\*) khác không và mang cùng một dấu, tức là  $a_l^* = 1$  hoặc  $a_l^* = -1$  với mọi  $l = 1, \dots, n$ .

- 2) Phương trình (\*) tại điểm  $x^0$  được gọi là *hyperbolic* nếu tất cả các hệ số trong (\*\*\*) khác không và có một số hạng trái dấu với  $n - 1$  số hạng còn lại.
- 3) Phương trình (2.1) tại điểm  $x^0$  được gọi là *parabolic* nếu có một hệ số  $a_{l_0}^*$  nào đó trong (2.3) bằng không, tất cả các số hạng còn lại cùng dấu và hệ số của số hạng  $\frac{\partial u}{\partial y_{l_0}}$  khác không.

Như vậy để nghiên cứu phương trình (\*) người ta chỉ cần tập trung nghiên cứu các lớp phương trình *elliptic*, *hyperbolic* và *parabolic*.

# **Bài tập và tính toán thực hành Chương 9**

<b>1. Hệ phương trình vi phân thường.....</b>	<b>327</b>
1.1. Khái niệm .....	327
1.2. Hệ phương trình vi phân tuyến tính .....	328
1.3. Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất.....	328
1.4. Hệ phương trình vi phân với hệ số không đổi.....	328
<b>2. Phương trình đạo hàm riêng .....</b>	<b>328</b>
<b>3. Thực hành tính toán trên máy.....</b>	<b>329</b>
3.1. Giải hệ phương trình vi phân thông thường .....	329
3.2. Tìm nghiệm dưới các dạng khác nhau và bằng các phương pháp tùy chọn.....	330
3.3. Giải phương trình vi phân đạo hàm riêng .....	332
3.4. Vẽ đồ thị nghiệm phương trình vi phân .....	334

## **1. Hệ phương trình vi phân thường**

### **1.1. Khái niệm**

**Bài 1.** Hãy tìm các tích phân độc lập của những hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}; & 2) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x+y}; \\ 3) \frac{dx}{\cos x} = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dz}{\cos x \cos y}; & 4) \frac{dx}{z(x+z)} = \frac{dy}{-y(y+z)} = \frac{dz}{0}. \end{array}$$

**Bài 2.** Giải bài toán Cauchy cho các hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1) & \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x^2 - y^2 \\ \frac{dy}{dt} = 2xy \end{array} \right. \text{ với điều kiện ban đầu } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ khi } t = 1. \\ 2) & \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = e^{-x} \cos y \\ \frac{dy}{dt} = -e^{-x} \sin y \end{array} \right. \text{ với điều kiện ban đầu } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ khi } t = 0. \end{aligned}$$

## 1.2. Hệ phương trình vi phân tuyến tính

Giải các hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất sau:

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 3x \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = 12x - 4y - 12z \\ \frac{dz}{dt} = -4x + y + 5z \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

## 1.3. Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

Giải các hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất sau:

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ \frac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t} \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y + 4z + \cos x \\ \frac{dz}{dx} = -y - 2z + \sin x \end{cases}$$

## 1.4. Hệ phương trình vi phân với hệ số không đổi

Giải các hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất sau bằng phương pháp biến đổi ma trận:

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -3x - y \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y - z \\ \frac{dz}{dt} = x + z \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y - z \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 4y - 3z \\ \frac{dz}{dt} = 2x - 4y \end{cases}$$

## 2. Phương trình đạo hàm riêng

**Bài 1.** Giải các phương trình tuyến tính cấp một thuần nhất sau:

$$\begin{array}{ll} 1) y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0; & 2) x \frac{\partial z}{\partial x} + (y + x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \\ 3) x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2} \frac{\partial u}{\partial z} = 0; & 4) x \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} + yz \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} = 0; \\ 5) x \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial z}{\partial y} = 0; & 6) (x^3 + 3xy^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2y^3 \frac{\partial u}{\partial y} + 2y^2 z \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{array}$$

**Bài 2.** Giải các phương trình tuyến tính cấp một không thuần nhất sau:

$$\begin{array}{ll} 1) xy \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = yz; & 2) x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y + z; \\ 3) \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = \sin(xy); & 4) (z - y)^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy. \end{array}$$

**Bài 3.** Giải các phương trình đạo hàm riêng cấp hai và cấp cao sau:

$$\begin{array}{ll} 1) 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 7 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy; & 2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \\ 3) \frac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial y^3} = 0; & 4) \frac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial y^3} = \sin(xy). \end{array}$$

### 3. Thực hành tính toán trên máy

#### 3.1. Giải hệ phương trình vi phân thông thường

Giải phương trình vi phân thường trên chương trình Maple bằng lệnh **dsolve**, đã được trình bày trong giáo trình giải tích một biến. Dưới đây chúng ta nhắc lại và bổ sung thêm một số bài tập mới. Các bước giải phương trình hệ vi phân tương tự như giải phương trình vi phân bậc nhất. Nghiệm tổng quát của hệ 2 phương trình vi phân bậc nhất phụ thuộc vào 2 tham số tự do.

**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z \\ \frac{dz}{dx} = y \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu:

$$y(0) = 0, z(0) = 2.$$

**Bước 1** Gán tên **sys** (viết tắt của chữ system - hệ) cho hệ phương trình:

$$\begin{aligned} > \text{sys} := \{ \text{diff}(y(x), x) = z(x), \text{diff}(z(x), x) = y(x), y(0) = 0, z(0) = 2 \}; \\ \text{sys} := \left\{ \frac{\partial}{\partial x} y(x) = z(x), \frac{\partial}{\partial x} z(x) = y(x), y(0) = 0, z(0) = 2 \right\} \end{aligned}$$

**Bước 2** Gán tên cho nghiệm:

[> **fcns := {y(x), z(x)}** ;  

$$fcns := \{y(x), z(x)\}$$

**Bước 3** Giải hệ phương trình vi phân:

[> **dsolve(sys, fcns)** ;  

$$\{y(x) = e^x - e^{-x}, z(x) = e^{-x} + e^x\}$$

**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình vi phân thường cấp 2 (không có điều kiện ban đầu) sau:

$$\begin{cases} y'' = z \\ z'' = y \end{cases}$$

Chú ý rằng nếu đưa phương trình này về hệ bậc nhất thì ta có hệ 4 phương trình.

**Bước 1** Gán tên **sys** cho hệ phương trình cần giải:

[> **sys := (D@@2)(y)(x) = z(x), (D@@2)(z)(x) = y(x)** ;  

$$sys := (D^2)(y)(x) = z(x), (D^2)(z)(x) = y(x)$$

**Bước 2** Giải hệ phương trình vi phân bằng lệnh

[> **dsolve({sys}, {y(x), z(x)})** ;  

$$\begin{aligned} y(x) = & \frac{1}{4}C1e^{(-x)} + \frac{1}{4}C1e^x + \frac{1}{2}C1\cos(x) - \frac{1}{4}C2e^{-x} + \frac{1}{4}C2e^x + \frac{1}{2}C2\sin(x) \\ & + \frac{1}{4}C3e^{-x} + \frac{1}{4}C3e^x - \frac{1}{2}C3\cos(x) - \frac{1}{2}C4\sin(x) + \frac{1}{4}C4e^x - \frac{1}{4}C4e^{-x}, \\ z(x) = & \frac{1}{4}C1e^{-x} + \frac{1}{4}C1e^x - \frac{1}{2}C1\cos(x) - \frac{1}{2}C2\sin(x) + \frac{1}{4}C2e^x - \frac{1}{4}C2e^{-x} + \\ & + \frac{1}{4}C3e^{-x} + \frac{1}{4}C3e^x + \frac{1}{2}C3\cos(x) - \frac{1}{4}C4e^{-x} + \frac{1}{4}C4e^x + \frac{1}{2}C4\sin(x) \end{aligned}$$

### 3.2. Tìm nghiệm dưới các dạng khác nhau và bằng các phương pháp tuỳ chọn

Trong trường hợp tổng quát, lệnh *giải phương trình vi phân* có cú pháp là:

[> **dsolve(deqns, vars, keyword)** ;

Trong đó **deqns** là các phương trình vi phân, **vars** là các biến nghiệm, phần **keyword** cho phép ta xác định phương pháp giải và dạng biểu diễn nghiệm. Cách biểu diễn mặc định là "chính xác" (exact). Nếu chọn cách biểu diễn nghiệm như vậy ta sẽ không phải cho giá trị ở phần keyword. Nếu cách biểu diễn áy không thành (như ta thấy trong ví dụ trên đây), hoặc không phải là ý ta muốn, thì ta có thể yêu cầu máy cho ta một trong các cách biểu diễn sau đây:

- ◆ Với **keyword** được cho dưới dạng **type=series** thì máy sẽ cho ta nghiệm dưới dạng chuỗi.
- ◆ Với **keyword** được cho dưới dạng **type=numeric** thì máy sẽ sử dụng các phương pháp số (có một khối lượng lớn các phương pháp này trong MAPLE để giải phương trình vi phân). Kết quả máy cho ta nghiệm dưới dạng một hàm tương trung mà có thể đánh giá được giá trị số của nó tại bất kỳ điểm nào.
- ◆ Với **keyword** được cho dưới dạng **output=basic** thì máy sẽ cho ta tập hàm cơ sở mà tập nghiệm được cung cấp trên đó (như một bao tuyển tính). Nếu phương trình không phải là thuần nhất thì máy sẽ cho ta thêm một nghiệm riêng, để mọi nghiệm bất kỳ đều có thể biểu diễn qua tập nghiệm cơ sở và nghiệm riêng này.

Thông thường, nghiệm có thể được cho dưới dạng một hàm ẩn (tức là một phương trình hay hệ phương trình tạo bởi các *tích phân đầu*), hoặc dưới dạng các biến phụ thuộc tham số. Nếu ta muốn bắt nó phải cho ta nghiệm dưới dạng hiển (tức là một hàm số của  $y$  theo  $x$ ) thì ta cho **keyword** là **explicit=true**. (Vì khả năng này thường khó xảy ra nên giá trị mặc định là **explicit=false**).

Muốn có được nghiệm biểu diễn thông qua các hàm đặc biệt kiểu **Dirac(.)**, **Heaviside(.)**,... thì ta phải cho **keyword** là **method=laplace**.

**Thí dụ 1.** Giải hệ  $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z - y - x \\ \frac{dz}{dx} = y \end{cases}$  với giá trị ban đầu  $y(0) = 0, z(0) = 1$ .

1) Theo phương pháp mặc định sẵn trong máy, ta dùng các lệnh:

```
[> sys:=diff(y(x),x)=z(x)-y(x)-x,diff(z(x),x)=y(x):
fcns:={y(x),z(x)}:
[> dsolve({sys,y(0)=0,z(0)=1},fcns);
{z(x)=1/5*sqrt(5)*exp(-1/2*(sqrt(5)+1)*x)-1/5*sqrt(5)*exp(1/2*(sqrt(5)-1)*x)+x+1,y(x)=
-1/10*sqrt(5)*exp(-1/2*(sqrt(5)+1)*x)+1/10*sqrt(5)*exp(1/2*(sqrt(5)-1)*x)+1-1/2*exp(1/2*(sqrt(5)-1)*x)-1/2*exp(-1/2*(sqrt(5)+1)*x)}
```

2) Muốn tìm nghiệm dưới dạng chuỗi, ta dùng lệnh

```
[> dsolve({sys,y(0)=0,z(0)=1},fcns,type=series);
{y(x)=x-x^2+1/2*x^3-5/24*x^4+1/15*x^5+O(x^6),
z(x)=1+1/2*x^2-1/3*x^3+1/8*x^4-1/24*x^5+O(x^6)}
```

3) Tìm nghiệm dưới dạng *một lưới điểm số* ta dùng các lệnh:

```
[> F:=dsolve({sys,y(0)=0,z(0)=1},fcns,type=numeric);
```

```
F:=proc(rkf45_x) ... end
```

và, tiếp theo, để biết giá trị của nghiệm tại một điểm nào đó ta dùng lệnh

```
[> F(1);
```

```
[x = 1, y(x) = .343731408276753914, z(x) = 1.25897207653682308]
```

```
[> F(1.5);
```

```
[x = 1.5, y(x) = .237649509495644756, z(x) = 1.40935827136441327]
```

```
[> F(1.7);
```

```
[x = 1.7, y(x) = .163416733680997378, z(x) = 1.44974926864546538].
```

**Thí dụ 2.** Tìm nghiệm phương trình vi phân cấp hai  $y'' = 2x^3y$  (với điều kiện ban đầu  $y(0)=1$ ,  $y'(0)=1$ ) dưới dạng *lưới điểm số*, bằng chương trình mang tên **dverk78**, và cho giá trị của nghiệm và đạo hàm của nó tại các điểm  $x = 1$ ,  $x = 1.5$ ,  $x = 1.7$  dưới dạng *bảng số liệu*:

```
[> deq3:={ (D@@2)(y)(x)=2*x^3*y(x),y(0)=1,D(y)(0)=1};
```

```
[> s:=dsolve(deq3,{y(x)},type=numeric,method=dverk78,
```

```
value=array([1.0,1.5,1.7]));
```

```
s:=
```

$$\left[ \begin{matrix} x, y(x), \frac{\partial}{\partial x} y(x) \end{matrix} \right]$$

$$\left[ \begin{matrix} 1. & 2.17013243525314170 & 1.93603788311791480 \\ 1.5000000000000000 & 4.26826796627041372 & 8.36391691654069902 \\ 1.6999999999999996 & 6.71039854665199442 & 17.2757972122874470 \end{matrix} \right]$$

**Thí dụ 3.** Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất

$$2xy'' + y' + 3y = x$$

và cho biết hệ cơ sở (**basis**) của tập nghiệm cùng với một nghiệm riêng:

```
[> solve(2*x*diff(y(x),x$2)+diff(y(x),x)+3*y(x)=x,y(x),output=basis);
```

$$\left[ \begin{matrix} \frac{x^{1/4} \cos(\sqrt{6}\sqrt{x})}{\sqrt{\sqrt{6}\sqrt{x}}}, \frac{x^{1/4} \sin(\sqrt{6}\sqrt{x})}{\sqrt{\sqrt{6}\sqrt{x}}} \end{matrix} \right], -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}x.$$

### 3.3. Giải phương trình vi phân đạo hàm riêng

Muốn giải phương trình vi phân đạo hàm riêng ta dùng lệnh **pdesolve** với cú pháp:

[> **pdesolve(pt,s)** ;

trong đó **pt** là phương trình đạo hàm riêng cần giải, **s** là nghiệm (hàm nhiều biến) cần tìm. Đối với rất nhiều phương trình vi phân đạo hàm riêng, lệnh **pdesolve** cho ta nghiệm dưới dạng hiển. Hàm tùy ý thường được kí hiệu là  $F_1, F_2, \dots$ . Dưới đây là một số ví dụ giải phương trình đạo hàm riêng trên Maple.

### 1. Phương trình đạo hàm riêng cấp một

**Thí dụ 1.** Giải phương trình

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

[>**pdesolve(y\*diff(z(x,y),x)+x\*diff(z(x,y),y)=0,z(x,y))** ;  

$$z(x,y) = F_1(-x^2 + y^2)$$

**Thí dụ 2.** Giải phương trình  $x \frac{\partial z}{\partial x} + (y + x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

[>**pdesolve(x\*diff(z(x,y),x)+(y+x^2)\*diff(z(x,y),y)=0,z(x,y))** ;  

$$z(x,y) = F_1\left(\frac{y - x^2}{x}\right)$$

### 2. Phương trình tuyến tính cấp một không thuần nhất

**Thí dụ 3.** Giải phương trình  $y \frac{\partial z}{\partial x} = z$ .

[>**pdesolve(y\*diff(z(x,y),x)=z(x,y),z(x,y))** ;  

$$z(x,y) = e^y F_1(y)$$

**Thí dụ 4.** Giải phương trình  $\frac{\partial z}{\partial x} = z$ .

[>**pdesolve(diff(z(x,y),x)=z(x,y),z(x,y))** ;  

$$z(x,y) = e^x F_1(y)$$

Chú ý rằng đây là một phương trình đạo hàm riêng (trong lệnh **pdesolve** hàm  $z$  phụ thuộc vào hai biến  $x, y$ ) chứ không phải phương trình vi phân thường  $\frac{dz}{dx} = z$  ( $z$  là hàm của một biến  $x$ ). Vì vậy nghiệm tổng quát phụ thuộc vào một hàm  $F_1(y)$ , chứ không phải là một hằng số như trong trường hợp phương trình vi phân thường.

**Thí dụ 5.** Giải phương trình  $\frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = \sin(xy)$ .

[>pdesolve(diff(u(x,y),x)+3\*diff(u(x,y),y)=sin(x\*y),u(x,y));

Nghiệm được viết thông qua các hàm đặc biệt.

### 3. Phương trình đạo hàm riêng cấp hai

**Thí dụ 6.** Giải phương trình  $3\frac{\partial u}{\partial x} + 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy$ .

[>pdesolve(3\*diff(g(x,y),x)+7\*diff(g(x,y),x,y)=x\*y,g(x,y));

$$g(x,y) = \frac{1}{6}x^2y - \frac{7}{18}x^2 + F_1(y) + e^{-\frac{3}{7}y}F_2(x).$$

**Thí dụ 7.** Giải phương trình  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

[>pdesolve(diff(u(x,y),x,x)-diff(u(x,y),y,y)=0,u(x,y));

$$u(x,y) = F_1(y+x) + F_2(y-x)$$

### 4. Phương trình đạo hàm riêng cấp cao

**Thí dụ 8.** Giải phương trình  $\frac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial y^3} = 0$ .

[>pde:=D[1,1,2,2,2](U)(x,y)=0;

$$pde := D[1,1,2,2,2](U)(x,y) = 0$$

[>pdesolve(pde,U(x,y));

$$U(x,y) = F_1(y) + F_2(y)x + F_3(x) + F_4(x)y + F_5(x)y^2$$

## 3.4. Vẽ đồ thị nghiệm phương trình vi phân

### 1. Vẽ đồ thị nghiệm của hệ phương trình vi phân thường

Để vẽ đồ thị nghiệm của hệ phương trình vi phân, ta cần gọi gói công cụ :

[>with(DEtools):

Và tiến hành vẽ đồ thị nghiệm của hệ phương trình vi phân bằng lệnh:

[>DEplot(deqns,vars,trange,inits,eqns);

hoặc lệnh

[>DEplot(deqns,vars,trange,inits,xrange,yrange,eqns);

Trong đó:

**deqns** - bảng các phương trình vi phân bậc nhất hoặc một phương trình vi phân cấp cao.

**vars** - biến phụ thuộc hoặc bảng các biến phụ thuộc.

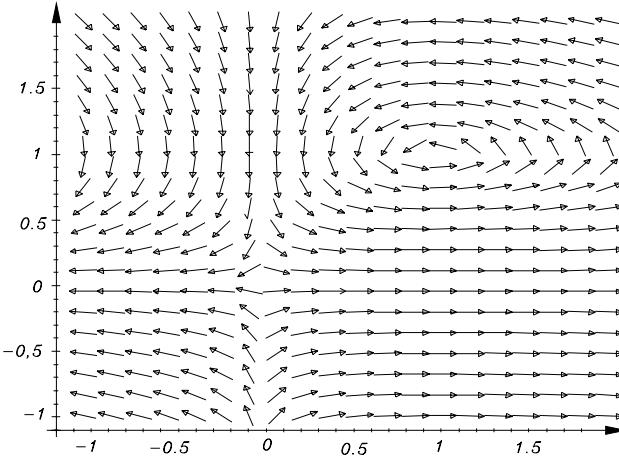
<b>trange</b>	- miền thay đổi của biến độc lập.
<b>inits</b>	- điều kiện ban đầu xác định đường cong nghiệm cần vẽ.
<b>yrange</b>	- miền thay đổi của biến phụ thuộc thứ nhất.
<b>xrange</b>	- miền thay đổi của biến phụ thuộc thứ hai.
<b>eqns</b>	- các tùy chọn (màu, tiêu đề, độ đậm nhạt của đồ thị,...).

**Thí dụ.** Vẽ đồ thị của nghiệm của hệ phương trình vi phân  $\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = 0,3y(x-1) \end{cases}$  với

biến độc lập  $t$  thay đổi trong đoạn  $[-2,2]$ , biến phụ thuộc  $x$  thay đổi trong đoạn  $[-1,2]$ , biến phụ thuộc  $y$  thay đổi trong đoạn  $[-1,2]$ , và thêm tiêu đề (tùy chọn) là: ‘Lotka-Volterra model’ (Mô hình Lotka-Volterra).

```
[> DEplot({diff(x(t),t)=x(t)*(1-y(t)),  
diff(y(t),t)=.3*y(t)*(x(t)-1)},[x(t),y(t)],t=-  
2..2,x=-1..2,y=-1..2, title='Lotka-Volterra model');
```

*Lotka–Volterra model*



Hình 9.1

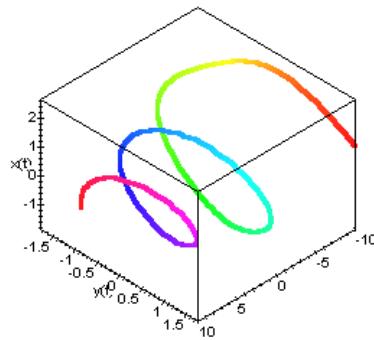
## 2. Vẽ đồ thị nghiệm của phương trình vi phân thường trong không gian ba chiều

Để vẽ đồ thị nghiệm của phương trình vi phân trong không gian ba chiều ta phải dùng lệnh **DEplot3d** thay cho **DEplot** ở trên:

```
[> DEplot3d(deqns,vars,trange,inits,xrange,yrange,eqns);
```

**Thí dụ.** Vẽ đồ thị nghiệm của hệ phương trình vi phân  $\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x - \frac{y}{10} \end{cases}$  với điều kiện ban đầu là  $[x(0)=0, y(0)=1]$ ;  $t$  thay đổi trong đoạn  $[-10,10]$ .

```
[> DEplot3d({diff(x(t),t)=y(t),diff(y(t),t)=-sin(x(t)) -  
y(t)/10},{x(t),y(t)},t=-10..10,stepsize=.1,  
[[x(0)=1,y(0)=1]],linecolor=t);
```



Hình 9.2

Ta có thể vẽ đồ thị hai hoặc nhiều nghiệm của một phương trình vi phân (với các điều kiện ban đầu khác nhau) trên cùng một hình.

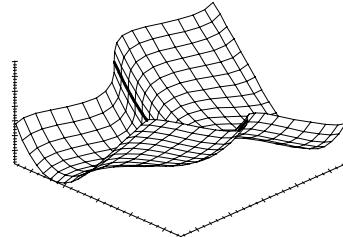
### 3. Vẽ đồ thị nghiệm phương trình vi phân đạo hàm riêng

Vẽ đồ thị nghiệm của phương trình đạo hàm riêng bằng lệnh **PDEplot( )**.

**Thí dụ.** Vẽ đồ thị nghiệm phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \cos 2x \frac{\partial u}{\partial y} = \sin y.$$

```
[>PDEplot(D[1](u)(x,y)+cos(2*x)*D[2]
] (u)(x,y)=-sin(y),u(x,y),
[0,s,1+s^2],s=-2..2);
```

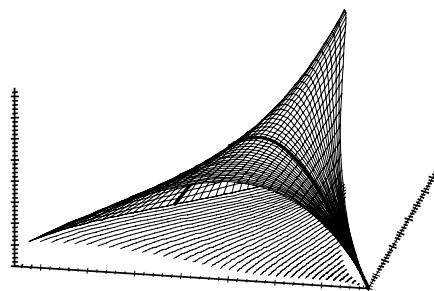


Hình 9.3

**Thí dụ.** Vẽ đồ thị nghiệm phương trình

$$(y^2 + z^2(x,y) + x^2) \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} - 2xy \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} + 2z(x,y)x = 0.$$

```
[>PDEplot((y^2+z(x,y)^2+x^2)*diff(z(x,y),x)-2*x*y*
diff(z(x,y),y)+2*z(x,y)*x=0,z(x,y),[t,t,
sin(Pi*t/0.1)/10],t=0..0.1);
```



Hình 9.4