https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Châu

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

5 2011 Số 407

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 48
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Giáo sư John Milnor

Cuộc thi VUI HÈ 2011

Giải thưởng Abel năm 2011

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Ứng dụng CỦA MỘT HỆ THỨC

NGUYỄN THANH HÀI
(GV THCS Nam Cường, Nam Trực, Nam Định)

Chúng ta bắt đầu từ hai bài toán sau

Bài toán 1. *Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm) và các cát tuyến ACD, AEF với đường tròn. Chứng minh rằng*

$$AB^2 = AC.AD = AE.AF = AO^2 - R^2 \quad (*)$$

Bài toán 2. *Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A nằm trong đường tròn $(A \not\equiv O)$. Qua A kẻ hai dây cung CD và EF. Chứng minh rằng*

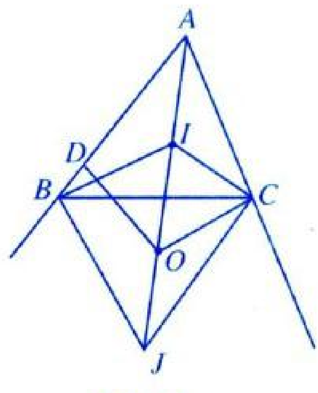
$$AC.AD = AE.AF = R^2 - OA^2 \quad (**)$$

Các hệ thức (*) và (**) được gọi là hệ thức lượng trong đường tròn. Bạn đọc có thể chứng minh chúng bằng kiến thức của tam giác đồng dạng. Vận dụng hệ thức lượng đó ta sẽ giải quyết được nhiều bài toán về chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức trong đường tròn. Sau đây là một số thí dụ minh hoạ.

★ **Thí dụ 1.** *Cho tam giác ABC với I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn bàng tiếp góc A. Chứng minh rằng AI. AJ = AB. AC.*

Lời giải. (h. 1).

Ta có $\widehat{IBJ} = \widehat{ICJ} = 90^\circ$. Suy ra tứ giác $IBJC$ nội tiếp đường tròn đường kính IJ, tâm O (trung điểm của IJ). Trên tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$.



Hình 1

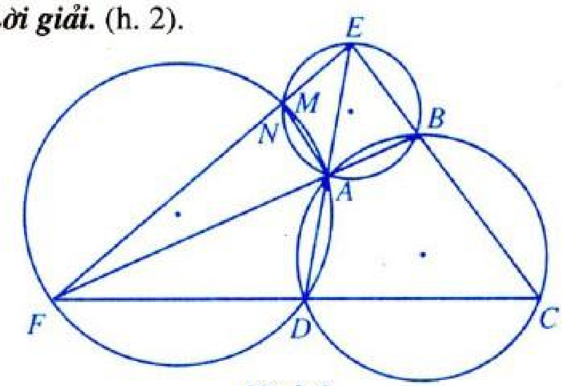
Tam giác ACD cân tại A nên AJ là trung trực của đoạn CD, suy ra $OD = OC$. Vậy D thuộc đường tròn (O).

Áp dụng hệ thức (*), ta có $AI.AJ = AD.AB$, mà $AD = AC$ nên $AI.AJ = AB.AC$ (đpcm). ❐

★ **Thí dụ 2.** *Cho tứ giác ABCD. Các đường thẳng AD, BC và AB, CD lần lượt cắt nhau tại E và F. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn là*

$$EA.ED + FA.FB = EF^2.$$

Lời giải. (h. 2).



Hình 2

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt EF tại M, đường tròn ngoại tiếp tam giác ADF cắt EF tại N. Áp dụng hệ thức (*) với hai cát tuyến EAD; ENF và hai cát tuyến FAB; FMN ta có

$$EA.ED = EN.EF \quad (1)$$

$$FA.FB = FM.EF \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có

$$EA.ED + FA.FB = EF(EN + FM) \quad (3)$$

Giả sử tứ giác $ABCD$ nội tiếp, ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ADF}$ (cùng bù với góc $\widehat{ADC}$), mà $\widehat{ABC} = \widehat{AME}$ (cùng bù với góc $\widehat{ABE}$) nên $\widehat{AME} = \widehat{ADF}$. Suy ra, tứ giác $AMFD$ nội tiếp, chứng tỏ $M \equiv N$.

Từ (3) suy ra $\quad EA.ED + FA.FB = EF^2 \quad (4)$

Ngược lại, giả sử có (4), kết hợp với (3), suy ra $EF = EN + FM$. Chứng tỏ $M \equiv N$.

Từ đó $\widehat{AME} = \widehat{ABC}$ và $\widehat{AME} = \widehat{ADF}$, suy ra $\widehat{ADF} = \widehat{ABC}$ nên $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ hay tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. ❐

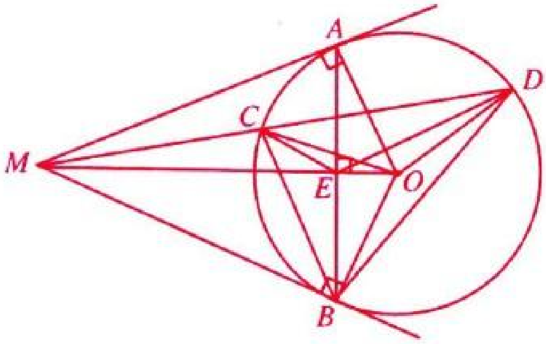
★ **Thí dụ 3.** *Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O ; R) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là*

NGODUCTHODUONGMINHCHAU
DD: 0986885389

các tiếp điểm) và một cát tuyến qua M cắt đường tròn tại C, D (C nằm giữa M và D). Gọi E là giao điểm của AB với OM. Khi cung CAD nhỏ hơn cung CBD. Chứng minh rằng

$$\widehat{DEC} = 2\widehat{DBC}.$$

Lời giải. (h. 3).



Hình 3

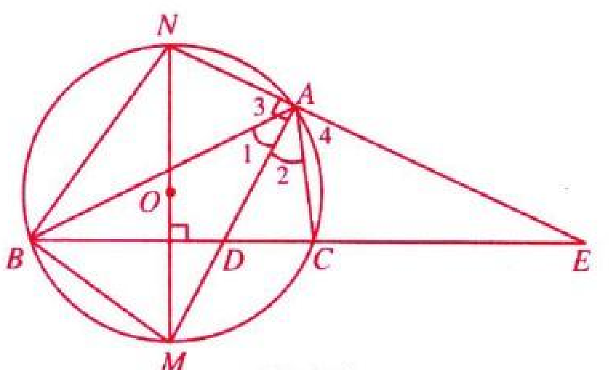
Áp dụng hệ thức (*) ta có $MB^2 = MC.MD$. Trong tam giác vuông OBM có BE là đường cao nên $MB^2 = ME.MO \Rightarrow MC.MD = ME.MO$. Suy ra $\Delta MEC \backsim \Delta MDO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{MDO}$ $\Rightarrow$ tứ giác $CDOE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DOC} = \widehat{DEC}$.

Mà $\widehat{DOC} = 2\widehat{DBC}$ (cùng chắn cung DC của đường tròn (O)) nên $\widehat{DEC} = 2\widehat{DBC}$. ❐

★Thí dụ 4. *Cho tam giác ABC với hai đường phân giác trong và ngoài của góc BAC lần lượt là AD và AE. Chứng minh rằng*

$$AB.AC = DB.DC + AD^2 = EB.EC - AE^2.$$

Lời giải. (h. 4).



Hình 4

Giả sử O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tia AD cắt đường tròn ở M (điểm chính giữa cung BC). Tia đối của tia AE cắt đường tròn tại N. Dễ thấy $\widehat{MAN} = 90^\circ$ nên MN là đường kính của đường tròn (O). Suy ra $MN \perp BC$. Xét hai tam giác AMB và ADC có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (gt), $\widehat{AMB} = \widehat{ACD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB), suy ra

$$\Delta AMB \backsim \Delta ACD \text{ (g.g)}$$

nên $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AM}{AC} \Rightarrow AB.AC = AM.AD$

hay $AB.AC = (AD + DM).AD = AD^2 + DM.AD.$

Áp dụng hệ thức (**) với hai dây cung AM và BC ta có $DM.AD = DB.DC$. Do đó

$$AB.AC = DB.DC + AD^2 \qquad (1)$$

Hai tam giác ANB và ACE có $\widehat{A_3} = \widehat{A_4}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$);

$\widehat{ABN} = \widehat{AEC}$ $(= \widehat{AMN})$, suy ra

$\Delta ANB \backsim \Delta ACE$ (g.g) nên $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AN}{AC}$

$\Rightarrow AB.AC = AN.AE = (EN - EA).AE$

$\Rightarrow AB.AC = EN.AE - AE^2.$

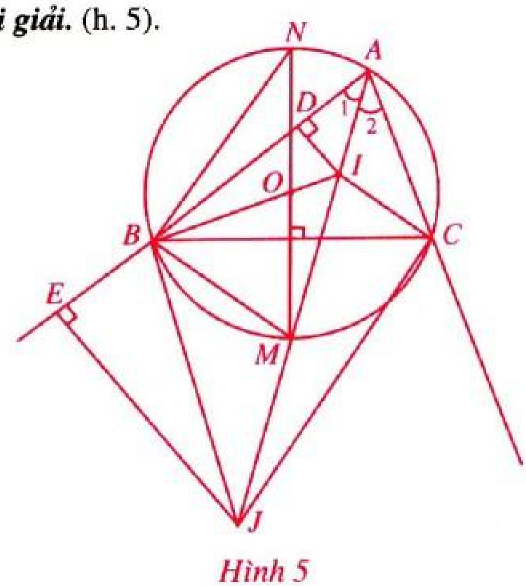
Áp dụng hệ thức (*) với hai cát tuyến EAN và ECB ta có $EN.AE = EB.EC$, do đó

$$AB.AC = EB.EC - AE^2 \qquad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta có đpcm. ❐

★Thí dụ 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi I là tâm và r là bán kính đường tròn nội tiếp, J là tâm và r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Chứng minh rằng $OI^2 = R^2 - 2Rr$ và $OJ^2 = R^2 + 2Rr_a$.*

Lời giải. (h. 5).



Hình 5

(Xem tiếp trang 10)

NGODUCTHODUONGMINHCHAU
DD: 0986885389

Lời giải đề thi vào lớp 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, BÌNH ĐỊNH
NĂM HỌC 2010 - 2011

(Đề thi đã đăng trên THTT số 406, tháng 4 năm 2011)

Câu 1. ĐK $x \geq 1$. Biến đổi PT đã cho về dạng

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\frac{x+8}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\frac{x+8}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=\dfrac{x+8}{5}\\ \sqrt{x-1}-1\geq 0\end{cases}$$

hoặc $\begin{cases}\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}=\dfrac{x+8}{5}\\ \sqrt{x-1}-1<0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x^2-84x+164=0\\ x\geq 2\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=2\\ x<2\end{cases} \text{ (loại).}$$

PT đã cho có hai nghiệm $x=2$; $x=82$.

Câu 2. Giả sử PT đã cho có các nghiệm nguyên x_1, x_2. Theo hệ thức Viète, ta có

$$S=x_1+x_2=\frac{8a+11}{4}\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 8a+11=4m\ (m\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{4m-11}{8}\quad (m\in\mathbb{Z}). \text{ Khi đó}$$

$$P=x_1.x_2=\frac{4a^2+7}{2}=\frac{16m^2-88m+233}{32}\in\mathbb{Z}(m\in\mathbb{Z}).$$

Điều này không thể xảy ra, vì $16m^2-88m+233$ là số lẻ, còn 32 là số chẵn.

Vậy không có giá trị nào của a để phương trình có nghiệm nguyên.

Câu 3. Ta có $a+k-a=k$ là số tự nhiên chẵn, do đó k chia hết cho 2. Giả sử k không chia hết cho 3. Khi đó $k=3n+1$ hoặc $k=3n+2$ $(n\in\mathbb{N})$.

Vì a là số nguyên tố lớn hơn 3 nên hoặc $a=3t+1$ hoặc $a=3t+2$ $(t\in\mathbb{N}^*)$.

• Với $a=3t+1$ $(t\in\mathbb{N}^*)$.

Nếu $k=3n+1$ thì $a+2k=3t+6n+3\ \vdots\ 3$, và $a+2k>3$ nên $a+2k$ không là số nguyên tố (trái gt).

Nếu $k=3n+2$ thì $a+k=3t+3n+3\ \vdots\ 3$, và $a+k>3$ nên $a+k$ không là số nguyên tố (trái gt).

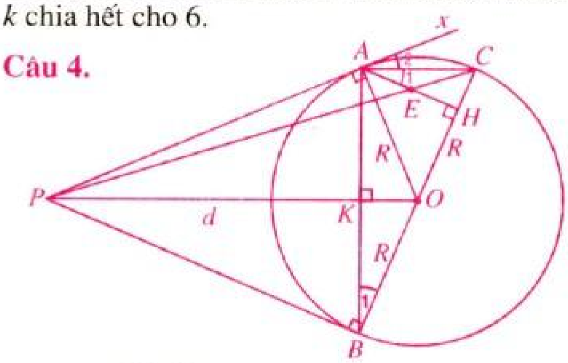
• Với $a=3t+2$ $(t\in\mathbb{N}^*)$.

Nếu $k=3n+1$ thì $a+k=3t+3n+3\ \vdots\ 3$, và $a+k>3$ suy ra $a+k$ không là số nguyên tố (trái gt).

Nếu $k=3n+2$ thì $a+2k=3t+6n+6\ \vdots\ 3$, và $a+2k>3$, suy ra $a+2k$ không là số nguyên tố (trái gt).

Chứng tỏ k chia hết cho 3 và chia hết cho 2 nên k chia hết cho 6.

Câu 4.



a) Ta có $\widehat{B_1}=\widehat{A_1}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc). Gọi Ax là tia đối của tia AP, thì có $\widehat{A_2}=\widehat{B_1}$ (cùng chắn cung AC).

Suy ra $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$, do đó AC là đường phân giác ngoài của tam giác APE. Vì thế

$$\frac{CE}{CP}=\frac{AE}{AP} \qquad (1)$$

Mặt khác $EH//PB$ (cùng vuông góc với BC) nên

$$\frac{CE}{CP}=\frac{EH}{PB} \qquad (2)$$

Lại có $\quad AP=PB \qquad (3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $AE=EH$.

b) Vì $EH//PB$ nên $\dfrac{EH}{PB}=\dfrac{CH}{CB} \Rightarrow EH=\dfrac{CH.PB}{CB}$ (4)

Lại có $PB^2=OP^2-OB^2=d^2-R^2$ $(d>R)$.

Gọi K là giao điểm của OP với AB, ta có $OP\perp AB$ tại K là trung điểm của AB. Lại có

$$BK.OP=OB.PB \Rightarrow BK=\frac{OB.PB}{OP}=\frac{R.\sqrt{d^2-R^2}}{d}.$$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUANG TRUNG, BÌNH PHƯỚC

NĂM HỌC 2010 - 2011

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (*1 điểm*) Cho hàm số

$$y=\frac{\sqrt{m}+\sqrt{2010}}{\sqrt{m}-\sqrt{2010}}.x+2011.$$

Tìm các giá trị của m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 2. (*1 điểm*) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+y=y^2+x\\ 2y=x^3-1.\end{cases}$$

Câu 3. (*1 điểm*) Cho phương trình $x^2-6x+m=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1-x_2=4$. Tìm giá trị của m.

Câu 4. (*1 điểm*) Giải phương trình

$$(x^2-2x)^2+3(x-1)=x(2x-1).$$

Câu 5. (*1 điểm*) Cho ba số a, b, c với $a>b>c$. Chứng minh rằng $a^2-b^2+c^2>(a-b+c)^2$.

Câu 6. (*3 điểm*) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Kẻ EF vuông góc với AD. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng

a) Các tứ giác $ABEF$, $DCEF$ nội tiếp.

b) Tia CA là tia phân giác của góc BCF.

c) Bốn điểm B, C, M, F cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 7. (*1 điểm*) Xác định các số nguyên a, b sao cho đường thẳng $y=ax+b$ đi qua điểm $A(4;3)$, cắt trục tung tại điểm có tung độ là một số nguyên dương, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là một số nguyên dương.

Câu 8. (*1 điểm*) Năm học 2009 – 2010 trường trung học phổ thông chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước có số học sinh giỏi Quốc gia là một số tự nhiên có hai chữ số. Hãy tìm số học sinh giỏi trong năm học trên của nhà trường. Biết số tự nhiên này có chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục; nếu viết số tự nhiên đó theo thứ tự ngược lại ta được một số nguyên tố có hai chữ số và nếu đem số này cộng với số ban đầu thì được kết quả là một số chính phương.

TRẦN MINH HIỀN
(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)
sưu tầm và giới thiệu

Do đó $AB=2BK=\dfrac{2R\sqrt{d^2-R^2}}{d}$. Mặt khác

$$AC^2=BC^2-AB^2=4R^2-\frac{4R^2\left(d^2-R^2\right)}{d^2}=\frac{4R^4}{d^2}.$$

Hơn nữa $AC^2=CH.CB$

suy ra $CH=\dfrac{AC^2}{CB}=\dfrac{\dfrac{4R^4}{d^2}}{2R}=\dfrac{2R^3}{d^2}$ (5)

Thay (5) vào (4) ta có $EH=\dfrac{R^2}{d^2}.\sqrt{d^2-R^2}$, suy ra $AH=2EH=\dfrac{2R^2\sqrt{d^2-R^2}}{d^2}$.

Câu 5. Với các số dương x, y, z, từ BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+1+1+1$$

$$\geq 2+2+2+3=9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Từ đó, với $0<a+b+c\leq 1$ ta có

$$\left((a^2+2bc)+(b^2+2ca)+(c^2+2ab)\right)$$
$$\times\left(\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\right)\geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\geq\frac{9}{(a+b+c)^2}\geq 9$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

BÙI VĂN CHI
(GV THCS Lê Lợi, Quy Nhơn, Bình Định)

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Một số dạng toán thường gặp VỀ SỐ PHỨC

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

- Một số phức là một biểu thức dạng $z = a + bi$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$; $i^2 = -1$.
- Môđun của số phức z là $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$; Số phức liên hợp với z là $\overline{z} = a - bi$.
- Các kết quả thường dùng: với $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|; |z_1z_2| = |z_1||z_2|; \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|};$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2};\ \overline{z_1z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2};\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

- Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, số phức $z = a + bi$ có điểm biểu diễn $M(a;b)$ và vectơ tương ứng $\overrightarrow{OM} = (a;b)$.

Trong bài báo này, chúng tôi chỉ đề cập đến một số loại toán thường gặp đối với số phức dạng đại số và bỏ qua các phép biến đổi đơn giản.

1. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN CỦA SỐ PHỨC

Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thoả mãn một điều kiện cho trước.

Cách giải. Giả sử $z = x + yi$; thay vào giả thiết, tìm được một hệ thức nào đó đối với x và y. Từ đó suy ra tập hợp các điểm biểu diễn cần tìm.

★**Thí dụ 1**. *Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z sao cho* $u = \dfrac{z+2+3i}{z-i}$ *là một số thuần ảo.*

Lời giải. Giả sử $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, khi đó

$$u = \frac{x+2+yi+3i}{x+(y-1)i} = \frac{\big(x+2+(y+3)i\big)\big(x-(y-1)i\big)}{x^2+(y-1)^2}.$$

Tử số bằng $x^2+y^2+2x+2y-3+2(2x-y+1)i$; u là số thuần ảo khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y-3=0 \\ 2x-y+1 \ne 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=5 \\ (x;y) \ne (0;1), (x;y) \ne (-2;-3). \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường tròn tâm $I(-1;-1)$, bán kính $\sqrt{5}$ khuyết hai điểm $(0;1)$ và $(-2;-3)$. ❐

Lưu ý. Số phức $z = a + bi$ là một số thực khi $b = 0$ và là số thuần ảo khi $a = 0$ và $b \ne 0$.

★**Thí dụ 2.** *Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thoả mãn* $\left|\dfrac{z+2-3i}{\overline{z}-4+i}\right| = 1$.

Lời giải. Giả sử $z = x + yi$, giả thiết tương đương với

$$|x+2+(y-3)i| = |x-4-(y-1)i|$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-3)^2 = (x-4)^2+(y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x-y-1=0.$$ ❐

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường thẳng có PT $3x-y-1=0$. ❐

2. TÌM SỐ PHỨC CÓ MÔĐUN LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

Tìm số phức z có môđun lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) thoả mãn một điều kiện cho trước.

Cách giải. *Bước 1.* Tìm tập hợp (G) các điểm biểu diễn của z thỏa mãn điều kiện.

Bước 2. Tìm số phức z tương ứng với điểm biểu diễn $M \in (G)$ sao cho khoảng cách OM có giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất).

★Thí dụ 3. *Biết rằng số phức z thoả mãn $u = (z+3-\mathrm{i})(\overline{z}+1+3\mathrm{i})$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.*

Lời giải. Giả sử $z = x + y\mathrm{i}$, ta có

$u = (x+3+(y-1)\mathrm{i})(x+1-(y-3)\mathrm{i})$

$= x^2 + y^2 + 4x - 4y + 6 + 2(x-y-4)\mathrm{i}$.

Ta có $u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x - y - 4 = 0$.

Tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường thẳng $(d): x - y - 4 = 0$. Giả sử $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z thì $|z|_{\min} \Leftrightarrow OM_{\min} \Leftrightarrow OM \perp (d)$.

Tìm được $M(-2; 2) \Leftrightarrow z = -2 + 2\mathrm{i}$. ❐

★Thí dụ 4. *Biết rằng số phức z thoả mãn $\left|\frac{z+2-\mathrm{i}}{\overline{z}+1-\mathrm{i}}\right| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|z|$.*

Lời giải. Giả sử $z = x + y\mathrm{i}$, ta có $\left|\frac{z+2-\mathrm{i}}{\overline{z}+1-\mathrm{i}}\right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |x+2+(y-1)\mathrm{i}| = \sqrt{2}\,|x+1-(y+1)\mathrm{i}|$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 2\left((x+1)^2 + (y+1)^2\right)$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 = 10$.

Tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm $I(0; -3)$, bán kính $R = \sqrt{10}$. Giả sử M là điểm biểu diễn của z thì $|z|_{\min} \Leftrightarrow OM_{\min}$; $|z|_{\max} \Leftrightarrow OM_{\max}$. Tìm được

$\min|z| = -3 + \sqrt{10}$, khi $z = (-3+\sqrt{10}).\mathrm{i}$ và

$\max|z| = 3 + \sqrt{10}$, khi $z = -(3+\sqrt{10})\mathrm{i}$. ❐

3. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ CHỨNG MINH

Lời giải các bài toán về chứng minh thường được dựa trên các tính chất về môđun và liên hợp của số phức, chú ý rằng nếu các số phức z_1, z_2 có điểm biểu diễn tương ứng là A, B thì $OA = |z_1|$; $OB = |z_2|$; $AB = |z_1 - z_2|$.

★Thí dụ 5. *Giả sử z_1, z_2 là các số phức khác không thoả mãn $z_1^2 - z_1z_2 + z_2^2 = 0$. Gọi A, B là các điểm biểu diễn tương ứng của z_1, z_2. Chứng minh rằng tam giác OAB là tam giác đều.*

Lời giải. Ta có

$z_1^3 + z_2^3 = (z_1+z_2)(z_1^2 - z_1z_2 + z_2^2) = 0$, suy ra

$z_1^3 = -z_2^3 \Rightarrow |z_1|^3 = |z_2|^3 \Rightarrow |z_1| = |z_2| \Rightarrow OA = OB$.

Lại có

$(z_1 - z_2)^2 = (z_1^2 - z_1z_2 + z_2^2) - z_1z_2 = -z_1z_2$ nên

$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|.|z_2| \Rightarrow AB^2 = OA.OB = OA^2$, suy ra $AB = OA = OB$. Vậy tam giác OAB đều. ❐

★Thí dụ 6. *Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 đều có môđun bằng 1. Chứng minh rằng*

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|.$$

Lời giải. Vì $|z_1z_2z_3| = 1$ nên

$$|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = \left|\frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1z_2z_3}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = |\overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3| = \left|\overline{z_1 + z_2 + z_3}\right|.$$

Suy ra $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$. ❐

★Thí dụ 7. *Chứng minh rằng nếu số phức z thoả mãn $\left|z^3 + \frac{8}{z^3}\right| \le 9$ thì $\left|z + \frac{2}{z}\right| \le 3$.*

Lời giải. Đặt $a = \left|z + \frac{2}{z}\right|$ $(a \ge 0)$. Ta có

$\left(z + \frac{2}{z}\right)^3 = z^3 + \frac{8}{z^3} + 6\left(z + \frac{2}{z}\right)$. Suy ra

$a^3 = \left|z + \frac{2}{z}\right|^3 \le \left|z^3 + \frac{8}{z^3}\right| + 6\left|z + \frac{2}{z}\right| \le 9 + 6a$.

Ta được $a^3 - 6a - 9 \le 0 \Leftrightarrow (a-3)(a^2 + 3a + 3) \le 0$.

Vì $a^2 + 3a + 3 > 0$, nên $a = \left|z + \frac{2}{z}\right| \le 3$. ❐

4. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TRONG TẬP HỢP SỐ PHỨC

• *Tìm số phức z thoả mãn một hệ thức cho trước (không phải là một phương trình bậc nhất hoặc bậc hai thông thường).*

Cách giải. Giả sử $z = x + yi$; biến đổi hệ thức trong đầu bài về dạng $A + Bi = 0$; ta được hệ PT $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$; từ đó tìm được x, y và suy ra z.

★ Thí dụ 8. *Tìm số phức z thoả mãn*

$$z^2 = (1+i)\overline{z} + 11i.$$

Lời giải. Giả sử $z = x + yi$, thay vào phương trình, ta được

$(x+yi)^2 = (1+i)(x-yi) + 11i$, hay

$x^2 - y^2 + 2xyi = x + y + (x - y + 11)i$ suy ra

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x + y \\ 2xy = x - y + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y-1) = 0 \\ 2xy = x - y + 11. \end{cases}$$

Giải hệ được $(x;y) = (3;2)$, $(x;y) = (-2;-3)$. Vậy $z = 3 + 2i$ hoặc $z = -2 - 3i$. ❐

• *Giải phương trình bậc ba $f(z) = 0$ biết rằng phương trình có một nghiệm thực.*

Cách giải. Giả sử PT có nghiệm thực là $z = a$; ta được $f(a) = 0$; biến đổi hệ thức trên về dạng $A + Bi = 0$; ta được hệ PT $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0; \end{cases}$ từ đó tìm được a. Phương trình $f(z) = 0$ có thể phân tích thành $(z-a)(Mz^2 + Nz + K) = 0$.

Nếu PT có nghiệm thuần ảo $z = bi, b \in \mathbb{R}; b \neq 0$ thì cách giải hoàn toàn tương tự. ❐

★ Thí dụ 9. *Giải phương trình*

$$z^3 - (3-i)z^2 - (2-i)z + 16 - 2i = 0,$$

biết rằng phương trình có một nghiệm thực.

Lời giải. Với $z \in \mathbb{R}$, PT tương đương với

$$z^3 - 3z^2 - 2z + 16 + (z^2 + z - 2).i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^3 - 3z^2 - 2z + 16 = 0 \\ z^2 + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -2.$$

PT trong đầu bài có thể phân tích thành

$$(z+2)(z^2 - (5-i)z + 8 - i) = 0.$$

Tìm được các nghiệm của PT là $z = -2$; $z = 2 + i$; $z = 3 - 2i$. ❐

★ Thí dụ 10. *Giải phương trình*

$$z^3 - (2-3i)z^2 + 3(1-2i)z + 9i = 0,$$

biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo.

Lời giải. Giả sử PT có nghiệm thuần ảo là $z = bi, b \in \mathbb{R}; b \neq 0$.

Thay vào PT ta được

$$(bi)^3 - (2-3i)(bi)^2 + 3(1-2i)(bi) + 9i = 0$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 + 6b + (-b^3 - 3b^2 + 3b + 9)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 6b = 0 \\ -b^3 - 3b^2 + 3b + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = -3 \text{ nên } z = -3i.$$

PT trong đầu bài có thể phân tích thành

$$(z+3i)(z^2 - 2z + 3) = 0.$$

Các nghiệm của phương trình là $z = -3i$; $z = 1 \pm \sqrt{2}i$. ❐

BÀI TẬP

1. a) Tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn

$$\left| \frac{\overline{z} + 3 - 5i}{z - 1 + 3i} \right| = \sqrt{2}.$$

b) Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, lớn nhất thoả mãn điều kiện trên.

2. Cho hai số phức z_1, z_2 đều có môđun bằng 1. Chứng minh rằng $z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ là một số thực.

3. Giải phương trình

$$z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = 0,$$

biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo.

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 8

(Thời gian làm bài : 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I. (2 *điểm*)

Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}(m+3)x^2 - 2(m+1)x + 1$ (1)

(m là tham số thực).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

2) Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị với hoành độ lớn hơn 1.

Câu II. (2 *điểm*)

1) Giải phương trình

$$2011\tan x + \cot x = 2\left(1005\sqrt{3} + \frac{1}{\sin 2x}\right).$$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+10} + \sqrt{y-1} = 11 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y+10} = 11.\end{cases}$

Câu III. (1 *điểm*)

Tính tích phân

$$I = \int_0^4 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x\sqrt{x}}}$$

Câu IV. (1 *điểm*)

Cho tứ diện $ABCD$ với $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$.

Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Câu V. (1 *điểm*)

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \left|\log_{x^2+1}(4 - x^2) + \log_{4-x^2}(x^2+1)\right|.$$

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VIa. (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(2;5)$ và $B(5;1)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua A sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng đó bằng 3.

2) Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng Δ và Δ' có phương trình

$$\Delta: \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}; \quad \Delta': \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}.$$

Tìm toạ độ giao điểm A của Δ và Δ'. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ và Δ'.

Câu VIIa. (1 *điểm*)

Trong một buổi liên hoan có 10 cặp nam nữ, trong đó có 4 cặp vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên 3 người để biểu diễn một tiết mục văn nghệ. Tìm xác suất để trong 3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VIb. (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm $A(2;5)$ và đường thẳng $d: 2x + 3y + 4 = 0$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua A và tạo với đường thẳng d một góc 45°.

2) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;-3)$ và đường thẳng Δ:

$$\frac{x+12}{7} = \frac{y-20}{-8} = \frac{z}{1}.$$

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm là điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ. Tìm toạ độ tiếp điểm của (S) và Δ.

Câu VIIb. (1 *điểm*)

Tìm hệ số của x^4 trong khai triển đa thức

$$P(x) = (1 + 2x + 3x^2)^{10}.$$

NGUYỄN ĐỨC TRUNG
(GV THPT Nam Giang, Quảng Nam)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 7

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Gọi $A(0;a)$ là điểm nằm trên trục tung cần tìm và $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

PT tiếp tuyến của (C) tại M là

$$y-\frac{x_0+1}{x_0-1}=-\frac{2}{(x_0-1)^2}(x-x_0).$$

Vì tiếp tuyến đi qua $A(0;a)$ nên

$$a-\frac{x_0+1}{x_0-1}=-\frac{2}{(x_0-1)^2}(0-x_0)\quad (\text{với } x_0\neq 1).$$

$\Leftrightarrow (a-1)x_0^2-2(a+1)x_0+a+1=0$ (*)

Yêu cầu bài toán tương đương với PT (*) có hai nghiệm dương phân biệt khác 1.

Đáp số. $a>1$.

Câu II. 1) ĐK $\sin x\neq 0$; $\sin x+\cos x\neq 0$.

Vì $2(1+\cos x)(\cot^2 x+1)=\dfrac{2}{1-\cos x}$ nên PT trở thành

$$\frac{2}{1-\cos x}=\frac{\sin x-1}{\sin x+\cos x}\Leftrightarrow(\sin x+1)(\cos x+1)=0$$

Đáp số. $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$, với $k\in\mathbb{Z}$.

2) Đặt $\begin{cases}\sqrt{\log_5 x-1}=u\\ \sqrt{5-\log_3 y}=v\end{cases}$ $(u,v\geq 0)$. Khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases}u^2+3v=4\\ v^2+3u=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u-v)(u+v-3)=0\\ u^2+3v=4.\end{cases}$$

Đáp số. $(x;y)=(25;81)$.

Câu III. Ta có

$$I=\int_0^1\frac{dx}{e^{2x}+e^x}=\int_0^1\frac{dx}{e^x(e^x+1)}=\int_0^1\frac{dx}{e^x}-\int\frac{dx}{e^x+1}$$
$$=\ln\frac{e+1}{2}-\frac{1}{e}.$$

Câu IV. • Ta thấy SA là đường cao của hình chóp. Từ C kẻ $CI\perp AD$ tại I. Ta có

$ID=\sqrt{CD^2-CI^2}=4a$, suy ra $AD=5a$.

$S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}.2a(a+5a)=6a^2$; $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.6a^2.a=2a^3$.

• Do $AC=a\sqrt{5}$, $CD=2a\sqrt{5}$, $AD=5a$ nên tam giác ACD vuông ở C. Mặt khác từ định lí ba đường vuông góc suy ra $SC\perp CD$.

Như vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SACD$ là trung điểm O của đoạn SD.

Bán kính của mặt cầu là $R=\dfrac{1}{2}SD=\dfrac{a\sqrt{26}}{2}$.

Câu V. Đặt $t=\sqrt{1-x}+\sqrt{4+x}$ (1)

Suy ra $\sqrt{5}\leq t\leq\sqrt{10}$. Từ (1) có

$\sqrt{4-3x-x^2}=\dfrac{t^2-5}{2}\Rightarrow 4(x^2+3x)+9=10t^2-t^4.$

PT trở thành $t+\dfrac{1}{2}\sqrt{10t^2-t^4}=m$.

Xét hàm số $y=t+\dfrac{1}{2}\sqrt{10t^2-t^4}$ trên $\left[\sqrt{5};\sqrt{10}\right]$.

Lập bảng biến thiên của hàm số y trên $\left[\sqrt{5};\sqrt{10}\right]$ ta suy ra với $\sqrt{10}\leq m\leq\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{21}}{2}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{39+\sqrt{21}}{2}}$ thì PT đã cho có nghiệm.

Câu VIa. 1) Vì C không nằm trên hai đường thẳng đã cho, nên ta có thể giả sử PT phân giác trong AD là $x+2y-5=0$, PT trung tuyến AM là $4x+13y-10=0$. Ta có $A(9;-2)$. Từ đó PT cạnh AC là $x+y-7=0$.

Gọi C' là điểm đối xứng của C qua phân giác trong AD của tam giác ABC thì C' thuộc AB.

Đường thẳng CC' qua $C(4;3)$ vuông góc với AD có PT : $2x-y-5=0$.

Gọi H là giao điểm của CC' và AD thì $H(3;1)$, nên $C'(2;-1)$.

Từ đó PT cạnh AB là $x+7y+5=0$.

Đường thẳng MH qua $H(3;1)$ song song với AB có PT: $x+7y-10=0$.

Vì M là giao điểm của MH và AM nên $M(-4;2)$.

Từ đó PT cạnh BC có dạng $x-8y+20=0$.

2) *Đáp số.* $A\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{-4}{3};\dfrac{-1}{3}\right)$.

Câu VIIa. Các số chia hết cho 4 lập bởi các chữ số 0, 1, 3, 4, 5 có hai chữ số tận cùng là 00; 04; 40; 44.

Gọi số thỏa mãn điều kiện bài toán là $\overline{abcde}$, số cách chọn b, c đều bằng 5, số cách chọn a là 4, số cách chọn $\overline{de}$ là 4. Vậy số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $4.4.5.5=400$ (số).

Câu VIb. 1) Đường tròn (C_1): $x^2+y^2=1$ có tâm $O(0;0)$, bán kính $R_1=1$.

(C_2) : $(x-3)^2+(y+3)^2=1$ có tâm $I(3;-3)$, bán kính $R_2=1$.

Ta thấy $OI = 3\sqrt{2} > R_1 = R_2$ nên $(C_1),(C_2)$ có cùng bán kính và ở ngoài nhau.

• Vì hai tiếp tuyến chung ngoài của (C_1) và (C_2) song song với OI, nên chúng có VTCP $\overrightarrow{OI}(3;-3)$ và có PT dạng $x+y+m=0\,(\Delta)$. Từ $d(O,\Delta)=R$ tìm được $m=\pm\sqrt{2}$.

Do đó hai tiếp tuyến chung ngoài của $(C_1),(C_2)$ có PT là $x+y+\sqrt{2}=0$ và $x+y-\sqrt{2}=0$.

• Ta thấy hai tiếp tuyến chung trong đi qua trung điểm $M\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ của đoạn OI. Vì $x=\frac{3}{2}$ không là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn nên đường thẳng qua M có hệ số góc k có PT $y+\frac{3}{2}=k\left(x-\frac{3}{2}\right)$, hay $2kx-2y-(3+3k)=0$ (D).

Từ $d(O,D)=R_1 \Leftrightarrow \frac{|3+3k|}{\sqrt{4k^2+4}}=1$ tìm được

$$k=\frac{-9+2\sqrt{14}}{5}\;;\quad k=\frac{-9-2\sqrt{14}}{5}.$$

Vậy PT hai tiếp tuyến chung trong của (C_1) và (C_2) là $(-9\pm2\sqrt{14})x-5y+(6\pm3\sqrt{14})=0$.

2) Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, IJ thì $I(1;0;1)$, $J(3;0;1)$, $K(2;0;1)$ khi đó

$$d=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\right|$$
$$=2\left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ}\right|=4\left|\overrightarrow{MK}\right|.$$

Do đó d đạt GTNN khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của K trên mp(P).

Đáp số. $M(3;1;2)$.

Câu VIIb. Gọi T_k là số hạng thứ $k+1$ của khai triển $(a+b)^{50}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Ta có $\left|\frac{T_k}{T_{k-1}}\right|=\left|\frac{C_{50}^k a^{50-k}b^k}{C_{50}^{k-1}a^{50-k+1}b^{k-1}}\right|=\frac{51-k}{\sqrt{3}k}$.

$$\left|\frac{T_k}{T_{k-1}}\right|>1 \Leftrightarrow \frac{51-k}{k}>\sqrt{3} \Leftrightarrow k<\frac{51}{1+\sqrt{3}}.$$

Suy ra $k\le 18$ (1)

Tương tự $\left|\frac{T_k}{T_{k+1}}\right|>1 \Leftrightarrow k\ge 18$ (2). Từ (1) và (2) có $k=18$. Vậy số hạng thứ 19 có giá trị tuyệt đối lớn nhất.

NGUYỄN LƯU
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

ỨNG DỤNG... *(Tiếp trang 2)*

Theo thí dụ 1, ta có tứ giác $IBJC$ nội tiếp đường tròn đường kính IJ, tâm M là trung điểm của IJ đồng thời là điểm chính giữa của cung nhỏ BC của đường tròn (O) nên $MB = MI = MJ$.

Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của I và J xuống đường thẳng AB, còn MN là đường kính của đường tròn (O).

Xét hai tam giác vuông IAD và MNB có $\widehat{A_1}=\widehat{N}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MB) nên đồng dạng, suy ra $\frac{IA}{MN}=\frac{ID}{MB}$

$\Leftrightarrow IA.MB=IA.MI=ID.MN=2Rr.$

Áp dụng hệ thức (**) đối với dây cung AIM ta có $IA.IM=R^2-OI^2$, suy ra $R^2-OI^2=2Rr$ hay $OI^2=R^2-2Rr$.

Tương tự, hai tam giác vuông JAE và MNB đồng dạng nên ta có $\frac{JA}{MN}=\frac{JE}{MB}$ hay $\frac{JA}{MN}=\frac{JE}{MJ}$

$\Leftrightarrow JA..MJ=JE.MN=2R.r_a.$

Áp dụng hệ thức (*) đối với cát tuyến JMA, ta có $JA.JM=OJ^2-R^2$. Từ đó, suy ra

$OJ^2-R^2=2R.r_a \Leftrightarrow OJ^2=R^2+2R.r_a$. ❒

Cuối cùng, mời bạn đọc tự luyện thông qua các bài toán sau.

1. Cho tam giác ABC (các góc B, C đều nhọn), các đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Chứng minh rằng $BH.BD+CH.CE=BC^2$.

2. Cho M là một điểm tùy ý thuộc đường thẳng cố định d nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MP và MQ với đường tròn (O) trong đó P, Q là các tiếp điểm. Hạ OH vuông góc với đường thẳng d. Dây cung PQ cắt OH ở I, cắt OM ở K. Chứng minh rằng

a) $OI.OH=OK.OM=R^2$.

b) Khi M thay đổi trên đường thẳng d thì vị trí của điểm I luôn luôn cố định.

3. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ đường tròn tâm A cắt đường tròn (O) ở C và D. Kẻ dây BN của đường tròn (O), cắt đường tròn (A) tại điểm E ở bên trong đường tròn (O). Chứng minh rằng $NE^2=NC.ND$.

HƯỚNG DẪN ÔN TẬP MÔN VẬT LÍ
THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2011

Chủ đề : LƯỢNG TỬ ÁNH SÁNG

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV trường ĐHSP Hà Nội)

Trong số báo này, chúng tôi đề cập tới chủ đề ***Lượng tử ánh sáng*** trong chương trình Vật lí lớp 12. Theo cấu trúc đề thi tuyển sinh đại học, cao đẳng năm 2011, môn Vật lí, phần chung của chủ đề này gồm 6 câu. Để làm tốt các câu trắc nghiệm trong chủ đề này, thí sinh cần nắm vững những nội dung kiến thức sau đây: *Hiện tượng quang điện ngoài, định luật về giới hạn quang điện; Thuyết lượng tử ánh sáng, lưỡng tính sóng – hạt của ánh sáng; Hiện tượng quang điện trong, pin quang điện; Hiện tượng quang – phát quang; Sơ lược về laze; Mẫu nguyên tử Bo và quang phổ vạch của nguyên tử hiđrô.*

Dưới đây, chúng tôi đưa ra một số câu trắc nghiệm về chủ đề này, đồng thời hướng dẫn cách lựa chọn phương án đúng.

CÂU 1. *Khi có hiện tượng quang điện xảy ra trong tế bào quang điện, phát biểu nào sau đây là* **sai**?

A. *Giữ nguyên cường độ chùm ánh sáng kích thích và kim loại dùng làm catôt, giảm tần số của ánh sáng kích thích thì động năng ban đầu cực đại của êlectron quang điện giảm.*

B. *Giữ nguyên tần số của chùm ánh sáng kích thích, thay đổi kim loại làm catôt thì động năng ban đầu cực đại của êlectron quang điện thay đổi.*

C. *Giữ nguyên cường độ chùm ánh sáng kích thích và kim loại dùng làm catôt, giảm bước sóng của ánh sáng kích thích thì động năng ban đầu cực đại của êlectron quang điện tăng.*

D. *Giữ nguyên tần số của ánh sáng kích thích và kim loại làm catôt, tăng cường độ chùm ánh sáng kích thích thì động năng ban đầu cực đại của êlectron quang điện tăng.*

Hướng dẫn. Từ công thức Anh-xtanh về quang điện $hf = \frac{hc}{\lambda} = A + W_{\max}$, trong đó f, λ là tần số và bước sóng của ánh sáng kích thích, A là công thoát, $W_{\max}$ là động năng ban đầu cực đại của êlectron quang điện, ta thấy: Với mỗi kim loại thì công thoát A không đổi, do đó khi f giảm thì $W_{\max}$ giảm, vậy **A** đúng; Nếu giữ nguyên f, thay đổi kim loại làm catôt, nghĩa là A thay đổi thì $W_{\max}$ sẽ thay đổi, vậy **B** đúng; Khi công thoát A không đổi, bước sóng λ giảm thì $W_{\max}$ tăng, vậy **C** đúng; Nếu giữ nguyên tần số f và công thoát A, tăng cường độ chùm ánh sáng kích thích thì $W_{\max}$ không thay đổi (cường độ chùm ánh sáng kích thích không ảnh hưởng tới $W_{\max}$), vậy **D** sai.

Chọn **D.** ❐

CÂU 2. *Hiệu điện thế giữa anôt và catôt của một ống Rơn-ghen là 18,75kV. Biết độ lớn điện tích của êlectron, vận tốc ánh sáng trong chân không và hằng số Plăng lần lượt là* $1{,}6.10^{-19}$C; 3.10^{8}m/s. *và* $6{,}625.10^{-34}$Js. *Bỏ qua động năng ban đầu của êlectron. Bước sóng nhỏ nhất của tia Rơn-ghen do ống phát ra là*

A. $6{,}625.10^{-11}$m. **B.** $6{,}625.10^{-10}$m.
C. $6{,}625.10^{-12}$m. **D.** $6{,}625.10^{-9}$m.

Hướng dẫn. Êlectron phát ra từ catôt được tăng tốc nhờ hiệu điện thế giữa anôt và catôt tới va chạm với các nguyên tử ở anôt làm phát ra một phôtôn có năng lượng lớn nhất cũng chỉ bằng năng lượng của êlectron. Ta có

$$eU = \varepsilon = hf_{\max} = h.\frac{c}{\lambda_{\min}}.$$

Bước sóng nhỏ nhất của tia Rơn-ghen là

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU} = \frac{6{,}625.10^{-34}.3.10^{8}}{1{,}6.10^{-19}.18{,}75.10^{3}} = 6{,}625.10^{-11}\text{m}.$$

Chọn **A.** ❐

CÂU 3. *Chiếu lên bề mặt catôt của một tế bào quang điện chùm sáng đơn sắc có bước sóng* 0,485μm *thì thấy có hiện tượng quang điện xảy ra. Biết hằng số plăng* $h = 6{,}625.10^{-34}$Js, *vận tốc ánh sáng trong chân không* $c = 3.10^{8}$m/s, *khối lượng nghỉ của êlectron là $9,1.10^{-31}$kg và vận tốc ban đầu cực đại của êlectron quang điện là 4.10^5m/s. Công thoát êlectron của kim loại làm catôt bằng*

A. $2,37.10^{-19}$ J. **B.** $3,37.10^{-19}$ J.
C. $1,37.10^{-19}$ J. **D.** $4,37.10^{-19}$ J.

Hướng dẫn. Từ công thức Anh-xtanh về quang điện $\frac{hc}{\lambda} = A + \frac{1}{2}mv_{0\max}^2$, suy ra

$$A = \frac{hc}{\lambda} - \frac{1}{2}mv_{0\max}^2 =$$

$$= \frac{6,625.10^{-34}.3.10^8}{0,485.10^{-6}} - \frac{1}{2}.9,1.10^{-31}.(4.10^5)^2$$

$$= 3,37.10^{-19}\,\text{J}.$$ ❒

Chọn **B.** ❒

CÂU 4. *Trong quang phổ vạch của nguyên tử hiđrô, vạch màu đỏ có bước sóng $\lambda_\alpha = 0,6563\mu m$, bước sóng ngắn nhất của vạch thuộc dãy Pa-sen là $\lambda_P = 0,8274\mu m$. Bước sóng ngắn nhất của vạch màu lam thuộc dãy Ban-me là*

A. 0,354μm. **B.** 0,347μm.
C. 0,366μm. **D.** 0,385μm.

Hướng dẫn. Ta có

$$\frac{hc}{\lambda_\alpha} = E_M - E_L;\ \frac{hc}{\lambda_P} = E_N - E_M;\ \frac{hc}{\lambda_\beta} = E_N - E_L.$$

Ta có thể viết

$$\frac{hc}{\lambda_\beta} = E_N - E_M + E_M - E_L = \frac{hc}{\lambda_P} + \frac{hc}{\lambda_\alpha},\ \text{suy ra}$$

$$\frac{1}{\lambda_\beta} = \frac{1}{\lambda_P} + \frac{1}{\lambda_\alpha}.$$

Do đó

$$\lambda_\beta = \frac{\lambda_P\lambda_\alpha}{\lambda_P + \lambda_\alpha} = \frac{0,6563.0,8274}{0,6563 + 0,8274} = 0,366\mu m.$$

Chọn **C.** ❒

CÂU 5. *Kim loại dùng làm catôt của một tế bào quang điện có giới hạn quang điện là 600nm. Chiếu vào catôt ánh sáng có bước sóng $\lambda = 400$nm. Cho $h = 6,625.10^{-34}$ Js, $c = 3.10^8$ m/s và $e = 1,6.10^{-19}$C. Hỏi hiệu điện thế giữa catôt và anôt phải bằng bao nhiêu để không có êlectron nào chuyển động được từ catôt về anôt?*

A. 1,250V. **B.** 0,895V.
C. 1,035V. **D.** 0,972V.

Hướng dẫn. Để không có êlectron nào chuyển động được từ catôt đến anôt thì hiệu điện thế giữa catôt và anôt phải là hiệu điện thế hãm, nghĩa là điện thế ở catôt phải lớn hơn điện thế ở anôt. Ta có

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} + |eU_{KA}| \Rightarrow U_{KA} = \frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)$$

$$U_{KA} = \frac{6,625.10^{-34}.3.10^8}{1,6.10^{-19}.10^{-9}}\left(\frac{1}{400} - \frac{1}{600}\right) = 1,035\text{V}.$$

Chọn **C.** ❒

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Hiệu điện thế giữa anôt và catôt của một ống Rơn-ghen là $U = 25$kV. Coi vận tốc ban đầu của chùm êlectron phát ra từ catôt bằng không. Biết hằng số Plăng $h = 6,625.10^{-34}$Js, điện tích nguyên tố $e = 1,6.10^{-19}$C. Tần số lớn nhất của tia Rơn-ghen do ống này có thể phát ra là

A. $6,038.10^{17}$ Hz. **B.** $6,038.10^{18}$ Hz.
C. $6,038.10^{16}$ Hz. **D.** $6,038.10^{19}$ Hz.

Câu 2. Theo mẫu nguyên tử Bo, bán kính quỹ đạo K của êlectron trong nguyên tử hiđrô là r_0. Khi êlectron chuyển từ quỹ đạo N về quỹ đạo L thì bán kính quỹ đạo giảm bớt

A. $9r_0$. **B.** $16r_0$. **C.** $4r_0$. **D.** $12r_0$.

Câu 3. Khi chiếu lần lượt hai bức xạ có bước sóng $\lambda_1 = 320$nm và $\lambda_2 = 520$nm vào catôt của một tế bào quang điện thì tỉ số các vận tốc ban đầu cực đại của các êlectron quang điện bằng 2 (hiện tượng quang điện xảy ra đối với cả hai bước sóng). Cho $h = 6,625.10^{-34}$Js, $c = 3.10^8$m/s và $e = 1,6.10^{-19}$C. Công thoát êlectron của kim loại dùng làm catôt bằng

A. 1,98eV. **B.** 2,05eV. **C.** 1,89eV. **D.** 1,74eV.

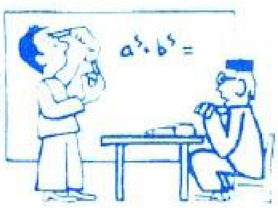
Câu 4. Khi chiếu chùm tia tử ngoại vào một ống nghiệm đựng dung dịch fluorexêin thì thấy dung dịch này phát ra ánh sáng màu lục. Đó là hiện tượng

A. hóa phát quang. **B.** quang – phát quang.
C. phản xạ ánh sáng. **D.** tán sắc ánh sáng.

Đáp án số báo kì trước:

Câu 1: D; Câu 2: C; Câu 3: A.
Câu 4: B Câu 5: C

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN



Trong các kì thi Tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học, Cao đẳng thường gặp bài toán Tính tích phân. Việc nắm vững một số tích phân cơ bản và một số bài toán tích phân gốc sẽ giúp học sinh nhận dạng và giải quyết bài toán nhanh chóng, chính xác. Ngoài ra, nhờ việc nắm vững các bài toán tích phân gốc, học sinh có thể sáng tạo được một số bài toán tích phân mới. Bài viết này sẽ giới thiệu một số bài toán tính tích phân gốc và ứng dụng của nó.

TỪ MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍCH PHÂN GỐC

LÊ NGỌC TRƯỜNG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

BÀI TOÁN 1. *Cho f là hàm số chẵn và liên tục trên trên $[-b; b]$ với $b>0$. Chứng minh rằng*

$$\int_{-b}^{b}\frac{f(x)}{a^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^b f(x)\mathrm{d}x \text{ (với } a>0 \text{ và } a\neq 1) \quad (1)$$

Chứng minh. Đặt $x=-t$ thì $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$; $f(-t)=f(t)$ nên

$$\int_{-b}^{0}\frac{f(x)}{a^x+1}\mathrm{d}x=\int_b^0\frac{-f(-t)}{a^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int_0^b\frac{a^t f(t)}{a^t+1}\mathrm{d}t=\int_0^b\frac{a^x f(x)}{a^x+1}\mathrm{d}x.$$

Do đó

$$\int_{-b}^{b}\frac{f(x)}{a^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^b\frac{a^x f(x)}{a^x+1}\mathrm{d}x+\int_0^b\frac{f(x)}{a^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^b f(x)\mathrm{d}x. \square$$

ÁP DỤNG. *Tính các tích phân*

1) $I_1=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^4+x^2}{3^x+1}\mathrm{d}x$; 2) $I_2=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{2^x+1}\mathrm{d}x.$

Lời giải. 1) Nhận thấy $f(x)=x^4+x^2$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-1; 1]$. Áp dụng (1) ta có

$$I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^4+x^2}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1(x^4+x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{8}{15}.$$

2) Tương tự

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{16}. \square$$

Nhận xét. Bằng cách chọn $f(x)$ là hàm chẵn dễ tìm nguyên hàm, chọn hai cận là hai số đối nhau ta có nhiều bài tính tích phân của $\dfrac{f(x)}{a^x+1}$.

BÀI TOÁN 2. *Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Chứng minh rằng*

$$\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (2)$$

Đặc biệt $$\int_0^b f(b-x)\mathrm{d}x=\int_0^b f(x)\mathrm{d}x \quad (3)$$

Chứng minh. Đặt $t=a+b-x$ thì $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\int_b^a -f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Khi $a=0$, ta nhận được công thức (3). $\square$

ÁP DỤNG. *Tính tích phân*

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x.$$

Lời giải. 1) Nhận thấy $f(x)=\ln(1+\tan x)$ liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, áp dụng (3) với $b=\frac{\pi}{4}$ ta có

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\mathrm{d}x-I_3 \text{ suy ra } I_3=\frac{\pi}{8}\ln 2. \square$$

BÀI TOÁN 3. *Cho hàm số f liên tục trên $[0;1]$. Chứng minh rằng*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x \quad (4)$$

Chứng minh. Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x$ thì $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$, khi đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x. \square$$

ÁP DỤNG. *Tính tích phân*

$$I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[2011]{\sin x}}{\sqrt[2011]{\cos x}+\sqrt[2011]{\sin x}}\mathrm{d}x.$$

Lời giải. Sử dụng công thức (4) ta có

$$I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[2011]{\cos^{2011}x}}{\sqrt[2011]{\cos^{2011}x}+\sqrt[2011]{\sin^{2011}x}}\mathrm{d}x$$

nên $2I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x\Rightarrow I_4=\frac{\pi}{4}$. ❐

✪BÀI TOÁN 4. *Cho $a>0$. Chứng minh rằng*

1) Nếu f là hàm số lẻ và liên tục trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$.

2) Nếu f là hàm số chẵn và liên tục trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

Chứng minh. 1) Đặt $x=-t$ và chú ý $f(-t)=-f(t)$ nên

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^a f(t)\mathrm{d}t+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=0.$$

2) Tương tự như 1) với lưu ý $f(-t)=f(t)$. ❐

ÁP DỤNG. *Tính tích phân* $I_5=\int_{\frac{-\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}x^7\sin^8 x\mathrm{d}x.$

Lời giải. Nhận thấy x^7 là hàm lẻ, $\sin^8 x$ là hàm chẵn, nên $x^7\sin^8 x$ là hàm lẻ. Theo BT 4 thì $I_5=0$. ❐

Nhận xét. Khi gặp bài tính tích phân có hai cận đối nhau và hàm số dưới dấu tích phân khá phức tạp ta nên kiểm tra xem hàm số đó có là hàm lẻ không?Nếu là hàm lẻ, ta chỉ cần đổi biến $x=-t$ và giá trị của tích phân bằng 0. Học sinh có thể tự sáng tác bài tính tích phân của hàm số $f(x)$ lẻ phức tạp với hai cận đối nhau để luyện tập cách giải.

✪BÀI TOÁN 5. *Cho f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng: Với mọi số thực a, ta có*

$$\int_0^{2a}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\big(f(x)+f(2a-x)\big)\mathrm{d}x \qquad (5)$$

Lời giải. $\int_0^{2a}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{2a}f(x)\mathrm{d}x \qquad (*)$

Đặt $t=2a-x$ thì $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$, ta có

$$\int_a^{2a}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(2a-t)(-\mathrm{d}t)=\int_0^a f(2a-x)\mathrm{d}x.$$

Thay vào (*) ta được (5). ❐

ÁP DỤNG. *Tính* $I_6=\int_0^{3\pi}\sin x\sin 2x\sin 3x\mathrm{d}x.$

Thông thường bài này học sinh vận dụng công thức biến đổi lượng giác tích thành tổng. Tuy nhiên, nếu áp dụng (5) với $2a=3\pi$, ta có

$$I_6=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}[\sin x\sin 2x\sin 3x+\sin(3\pi-x)\sin 2(3\pi-x)\sin 3(3\pi-x)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(\sin x\sin 2x\sin 3x-\sin x\sin 2x\sin 3x)\mathrm{d}x=0.$$ ❐

Từ đó học sinh có thể đặt ra nhiều đề tương tự, chẳng hạn tính tích phân

$$I=\int_0^{3\pi}\sin x\sin 2x\sin 3x\sin 5x\mathrm{d}x.$$

Niềm vui trong sự sáng tạo giúp các em khắc sâu kiến thức và cảm thấy yêu thích nhiều hơn đối với môn Toán.

✪BÀI TOÁN 6. *Cho f là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn có chu kì T. Chứng minh rằng*

$$1)\ \int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_{a-T}^{a}f(x)\mathrm{d}x \qquad (6)$$

với a là số thực bất kì.

$$2)\ \int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\ (n\in\mathbb{N}^*) \qquad (7)$$

Chứng minh. 1) Chú ý rằng $f(t)=f(t+T)$ ta có

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x.$$

Lại có, nếu đặt $x=t+T$ thì $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$

$$\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(t+T)\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t-\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_{a-T}^{a}f(t+T)\mathrm{d}t=\int_{a-T}^{a}f(t)\mathrm{d}t=\int_{a-T}^{a}f(x)\mathrm{d}x$$

Từ đó suy ra (6).

2) Ta có

$$\int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{2T}f(x)\mathrm{d}x+...+\int_{(n-1)T}^{nT}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\underbrace{\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+...+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x}_{n\text{ lần}}=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$ ❐

ÁP DỤNG. Tính các tích phân

1) $I_7=\int\limits_{\pi}^{3\pi}\sin^5 x\mathrm{d}x$; 2) $I_8=\int\limits_{0}^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x$.

Lời giải. 1) $f(x)=\sin^5 x$ là hàm tuần hoàn có chu kì $T=2\pi$, theo (6) với $a=\pi$ ta có

$$I_7=\int\limits_{\pi}^{3\pi}\sin^5 x\mathrm{d}x=\int\limits_{\pi-2\pi}^{\pi}\sin^5 x\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^5 x\,\mathrm{d}x=0.$$

2) $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}$ là hàm tuần hoàn với chu kì $T=\pi$, theo (7) với $n=100$ ta có

$$I_8=100\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x=100\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2}\sin x\mathrm{d}x=200\sqrt{2}.\ \square$$

✪BÀI TOÁN 7. *Cho f là hàm số liên tục trên [a;b] thoả mãn f(x) = f(a+b–x). Chứng minh rằng*

$$\int\limits_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad (8)$$

Đặc biệt $\int\limits_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$ (9)

Chứng minh. Thực hiện phép đổi biến $x=a+b-t$ thì

$$\int\limits_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_b^a(a+b-t)f(t)(-\mathrm{d}t)=(a+b)\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

Từ đó suy ra (8).Chọn $a=0$, $b=\pi$ ta có (9). $\square$

ÁP DỤNG. Tính $I_9=\int\limits_0^{\pi}x\sin x\cos^4 x\mathrm{d}x.$

Lời giải. Nhận thấy I_9 có dạng (9) với $f(\sin x)=\sin x\cos^4 x=\sin x(1-\sin^2 x)^2$ nên

$$I_9=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin x\cos^4 x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos^5 x}{5}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{5}.\ \square$$

Như vậy, nhờ nắm vững một số bài toán gốc học sinh sẽ tự tin khi làm bài toán tính tích phân. Mời các bạn cùng tham gia giải một vài bài tập sau và cùng sáng tạo thêm các bài toán tính tích phân khác. Chúc các bạn thành công.

BÀI TẬP. Tính các tích phân sau

1) $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{6^x+1}\mathrm{d}x$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2011}x}{\sin^{2011}x+\cos^{2011}x}\mathrm{d}x$.

3) $\int\limits_{-2}^{2}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)^3\mathrm{d}x$; 4) $\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Giải trí toán học

Giải đáp: 45 Bài toán từ bìa báo năm (1964-2009)

Thử thấy năm 2100 không thỏa mãn điều kiện đề bài nên ta chỉ xét các năm trong thế kỉ XXI dạng $\overline{20ab}$ với $0\le a\le 9$, $0\le b\le 9$. Giả sử

$$\overline{20ab}-1964=\overline{cde} \qquad (1)$$

với $37\le\overline{cde}\le 135$.

Vì $2\le 2+0+a+b\le 20$ mà $1+9+6+4=20$ nên từ điều kiện đề bài có đẳng thức

$$(1+9+6+4)-(2+0+a+b)=c+d+e \qquad (2)$$

hay $c+d+e+a+b=18$ (3)

Từ (1) có $\overline{cde}-\overline{ab}=36$. Suy ra $(c+d+e)-(a+b)$ chia hết cho 9.

Từ đó kết hợp với (3) ta thấy $2(a+b)\vdots 9$, nên $(a+b)\vdots 9$.

• Với $a+b=0$ thì $a=b=0$: không thỏa mãn đề bài.

• Với $a+b=18$ thì $a=b=9$: không thỏa mãn đề bài.

• Với $a+b=9$ thì $\overline{ab}\in\{09, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90\}$.

Thử thấy $\overline{ab}=63$ không thỏa mãn đề bài và 9 số còn lại thỏa mãn đề bài. Vậy có **9** năm thỏa mãn các điều kiện (1) và (2) là **2009, 2018, 2027, 2036, 2045, 2054, 2072, 2081, 2090**.

Các bạn sau có lời giải tốt được nhận tặng phẩm: *Vũ Thị Quỳnh Anh*, 9A, THCS Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**, *Trần Quốc Dũng*, 10 Toán 1, THPT chuyên **Hà Tĩnh**.

HOÀNG NGUYỄN

CÁC LỚP THCS

Bài T1/407. (Lớp 6). Kí hiệu $T(a)$ là số các chữ số của số tự nhiên a. Biết rằng $T(5^n) - T(2^n)$ là số chẵn. Hỏi số nguyên dương n là số chẵn hay lẻ?

NGUYỄN VĂN TIẾN
(GV THCS Lâm Thao, Phú Thọ)

Bài T2/407. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} < 90^o$, trực tâm H và $HA = BC$. Tính độ lớn của góc BAC.

NGUYỄN KHÁNH TOÀN
(GV THCS Bắc Hải, Tiền Hải, Thái Bình)

Bài T3/407. Tìm các số nguyên x, y sao cho

$$7^x + 24^x = y^2.$$

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hoà)

Bài T4/407. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2-z^2}{y+z} + \frac{z^2-y^2}{x+y} + \frac{y^2-x^2}{z+x} \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

NGUYỄN HỮU TÂN
(SV K50A Hoá học, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T5/407. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC (B nằm giữa M và C) với đường tròn. Gọi H là hình chiếu của A trên MO, K là giao điểm của đoạn thẳng MO với đường tròn (O). Chứng minh rằng

a) Tứ giác $OHBC$ là tứ giác nội tiếp.

b) BK là tia phân giác của góc HBM.

LÊ XUÂN DƯƠNG
(GV THCS Lý Thường Kiệt, Yên Mỹ, Hưng Yên)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/407. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}} = x+y \\ x\sqrt{2xy+5x+3} = 4xy-5x-3. \end{cases}$$

ĐỖ THANH DIỄN
(GV THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Kon Tum)

Bài T7/407. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $3x_{n+1} = x_n^3 - 2$ ($n = 1, 2, ...$). Xác định x_1 để cho dãy số (x_n) hội tụ. Trong trường hợp dãy số hội tụ, hãy tìm giới hạn của nó.

DƯƠNG VIỆT THÔNG
(GV Khoa Toán Kinh tế, ĐH Kinh tế Quốc dân Hà Nội)

Bài T8/407. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC), D là trung điểm của BC. Gọi α là góc tạo bởi SB với mặt phẳng (ABC) và β là góc tạo bởi SB với mặt phẳng (SAD). Chứng minh rằng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta > 1$.

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/407. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$8(x+y+z)^3 \leq 10(x^3+y^3+z^3) + 11(x+y+z)(1+4xyz) - 12xyz.$$

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T10/407. Cho p là số nguyên tố lẻ, n là số nguyên dương sao cho $(n, p) = 1$. Hãy tính số các bộ số $(a_1, a_2, ..., a_{p-1})$ thoả mãn điều kiện tổng $\sum_{k=1}^{p-1} ka_k$ chia hết cho p, trong đó mỗi số $a_1, a_2, ..., a_{p-1}$ đều là các số tự nhiên không vượt quá $n-1$.

TRẦN VIỆT ANH
(Học viện Quản lí Giáo dục, Hà Nội)

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Bài T11/407. Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thoả mãn phương trình

$$f(x+y+f(y)) = f(f(x)) + 2y, \text{ với mọi số thực } x, y.$$

NGUYỄN DUY THÁI SƠN
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Bài T12/407. Gọi p, r, r_a, r_b, r_c lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC có độ dài các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \geq p+\sqrt{rr_a}+\sqrt{rr_b}+\sqrt{rr_c}\,.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

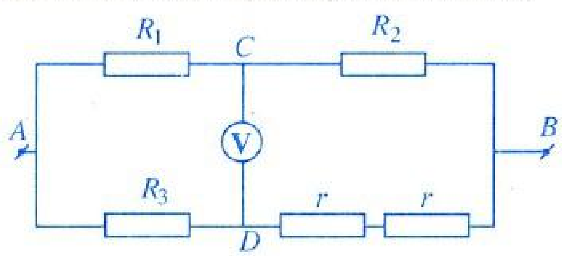
HOÀNG ĐỨC NGUYÊN
(SV Cao học Toán K15, ĐHSP Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/407. Ba vật nhỏ có khối lượng lần lượt là $3m$, $4m$, $5m$ được thả từ ba điểm khác nhau bên trong một vỏ bán cầu nhẵn cố định bán kính R có miệng nằm ngang. Nhiệt lượng lớn nhất toả ra do va chạm của các vật là bao nhiêu, nếu tất cả các va chạm là hoàn toàn không đàn hồi? Các vật được thả ở những thời điểm nào và vị trí ban đầu ở đâu trong trường hợp này?

TRẦN KHÁNH HẢI
(TP Huế)

Bài L2/407. Cho mạch điện như hình vẽ.



Biết $U_{AB} = 12\text{V}$, $R_1 = 5\,\Omega$, $R_2 = 25\,\Omega$, $R_3 = 20\,\Omega$. Điện trở của vôn kế rất lớn. Khi mắc hai điện trở r nối tiếp thì vôn kế chỉ giá trị U_1, khi mắc song song thì vôn kế chỉ $U_2 = 3U_1$.

a) Tính r.

b) Tính số chỉ của vôn kế khi nhánh DB chỉ có một điện trở r.

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV ĐHSP Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/407. (For 6th grade). Denote $T(a)$ the number of digits of the natural number a. If $T(5^n) - T(2^n)$ is even, is n necessarily odd, or even?

T2/407. (For 7th grade). A triangle ABC has $\widehat{BAC} < 90^\circ$ and $HA = BC$ where H is its orthocenter. Find the measure of angle BAC.

T3/407. Find all pair of integers x, y such that

$$7^x + 24^x = y^2.$$

T4/407. Let x, y, z be arbitrary positive real numbers, prove the inequality

$$\frac{x^2-z^2}{y+z}+\frac{z^2-y^2}{x+y}+\frac{y^2-x^2}{z+x} \geq 0.$$

When does equality occur?

T5/407. From point M outside circle (O), draw tangent MA and secant MBC (B is between M and C). Let H be the projection of A onto MO, K is the intersection of segment MO with (O). Prove that

a) The quadrilateral $OHBC$ is cyclic.

b) BK is the internal angle-bisector of angle HBM.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/407. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}} = x+y \\ x\sqrt{2xy+5x+3} = 4xy-5x-3. \end{cases}$$

T7/407. Let (x_n) be a sequence defined by $3x_{n+1} = x_n^3 - 2$ ($n = 1, 2, \ldots$). For what values of x_1 does the sequence (x_n) converge? Determine this limit when it converges.

T8/407. $S.ABC$ is a tetrahedron with isosceles base ABC at vertex A, and edge SA is perpendicular to plane (ABC). D is the midpoint of BC. Let α is the angle between edge SB and plane (ABC) ; β is the angle between edge SB and plane (SAD). Prove that

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta > 1.$$

(Xem tiếp trang 27)

★Bài T1/403. *Xét tổng gồm 2008 số hạng*

$$S=\frac{5}{1.2.3}+\frac{8}{2.3.4}+\frac{11}{3.4.5}+...+\frac{6026}{2008.2009.2010}.$$

Hãy so sánh S với 2.

Lời giải. Số hạng tổng quát của tổng S có dạng $\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$ với $n = 1, 2, 3, ..., 2008$.

Ta biến đổi $\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{2(n+1)}{n(n+1)(n+2)}+\frac{n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{2}{n(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}.$$

Áp dụng công thức trên với $n = 1, 2, 3, ..., 2008$, ta được

$$S=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right)+...$$
$$+\left(\frac{1}{2008}+\frac{1}{2009}-\frac{2}{2010}\right)$$

$$=2-\frac{1}{2009}-\frac{1}{1005}<2.$$ Vậy $S<2$. ❒

➢**Nhận xét.** Các bạn có lời giải tốt là:

Vĩnh Phúc: *Lê Huyền Trâm, Lê Khánh Ly, Đoàn Ngọc Linh, Nguyễn Văn Hiến*, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Thanh Hóa:** *Hoàng Bảo Long, Lê Quang Dũng*, 6D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Trương Mai Ngọc, Trần Thị Thúy An*, 6C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Bình:** *Cao Thị Anh Ngọc*, 6A, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Hạ Vy, Nguyễn Thị Hạnh, Vũ Thị Thi*, 6A, *Phạm Quang Nghĩa*, 6B, THCS Hành Phước; *Nguyễn Thị Kiều Duyên*, 6A, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành, *Trần Thị Mỹ Ninh*, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Bình Định:** *Nguyễn Trọng Khiêm*, 6A1, THCS Võ Xán, Tây Sơn; **Phú Yên:** *Trương Thị Hồng Lam*, 6A, THCS Nguyễn Chí Thanh, Đông Hòa; **Hậu Giang:** *Trần Xuân Yến*, 6A3, THCS Lê Quý Đôn, TP. Vị Thanh.

VIỆT HẢI

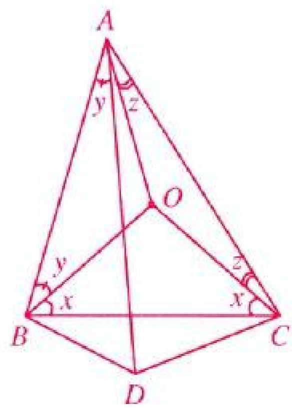
★Bài T2/403. *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=50^\circ$, $\widehat{ABC}=72^\circ$. Vẽ phía ngoài tam giác ABC, vẽ tam giác BDC sao cho $\widehat{CBD}=28^\circ$; $\widehat{BCD}=22^\circ$. Tính số đo góc ADB.*

Lời giải. Gọi O là giao của ba đường trung trực của tam giác ABC, vì tam giác ABC nhọn nên O nằm trong tam giác. Đặt

$\widehat{OBC}=\widehat{OCB}=x$;

$\widehat{OBA}=\widehat{OAB}=y$;

$\widehat{OAC}=\widehat{OCA}=z$.



Ta có $2x+2y+2z=180^\circ$; $x+y=72^\circ$; $x+z=58^\circ$; $y+z=50^\circ$. Từ đó, tìm được $x=40^\circ; y=32^\circ; z=18^\circ$, suy ra $\widehat{BOA}=116^\circ$;

ACER VIET NAM, BCĐ PHONG TRÀO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ
Phối hợp tổ chức và trao giải thưởng xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

$\widehat{OBD} = 40^o + 28^o = 68^o$; $\widehat{OCD} = 40^o + 22^o = 62^o$ (*)

Mặt khác $\widehat{BDC} = 180^o - \widehat{DBC} - \widehat{DCB} = 130^o$ (1)

Ta chứng minh $OD = OB = OC = OA$. Thật vậy,

• Nếu $OD > OB$ thì $OD > OC$, ta có

$\widehat{ODB} < \widehat{OBD}$; $\widehat{ODC} < \widehat{OCD}$.

Suy ra $\widehat{BDC} < \widehat{OBD} + \widehat{OCD} = 130^o$ (theo (*)), điều này mâu thuẫn với (1).

• Nếu $OD < OB$, tương tự suy ra $\widehat{BDC} > 130^o$ mâu thuẫn với (1).

Vậy $OD = OB = OC = OA$. Từ đó ta có

$\widehat{ODB} = \widehat{OBD} = 68^o$; $\widehat{BOD} = 44^o$ mà $\widehat{BOA} = 116^o$,

suy ra $\widehat{AOD} = 160^o$. Mặt khác tam giác AOD cân tại O (do $OD = OA$) suy ra $\widehat{ODA} = 10^o$. Do đó

$\widehat{ADB} = \widehat{ODB} - \widehat{ODA} = 68^o - 10^o = 58^o$. ❒

➢**Nhận xét.** 1) Thực chất của bài toán là chứng minh tứ giác $ABDC$ nội tiếp khi có điều kiện $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^o$.

Ta có thể thay đổi số đo các góc của tam giác ABC và số đo các góc $\widehat{CBD}, \widehat{BCD}$ sao cho $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^o$, vẫn được kết quả $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$.

2) Có ít bạn tham gia gửi bài, tất cả các bạn đều sử dụng kiến thức về tứ giác nội tiếp hoặc tam giác đồng dạng (không thuộc chương trình lớp 7).

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/403. *Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện*

$$x^2 + y^2 = (x - y)(xy + 2) + 9 \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $a = x - y$, $b = xy$. Khi đó (1) trở thành

$a^2 + 2b = a(b + 2) + 9 \Leftrightarrow (a - 2)(a - b) = 9$ (2)

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $a, b, a - 2, a - b$ đều là các số nguyên. Từ (2), ta có các trường hợp sau

1) $\begin{cases} a-2=9 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=11 \\ b=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=11 \\ xy=10 \end{cases}$ (I)

2) $\begin{cases} a-2=3 \\ a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=5 \\ xy=2 \end{cases}$ (II)

3) $\begin{cases} a-2=1 \\ a-b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ xy=-6 \end{cases}$ (III)

4) $\begin{cases} a-2=-1 \\ a-b=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ xy=10 \end{cases}$ (IV)

5) $\begin{cases} a-2=-3 \\ a-b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ xy=2 \end{cases}$ (V)

6) $\begin{cases} a-2=-9 \\ a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-7 \\ b=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-7 \\ xy=-6 \end{cases}$ (VI)

Dễ thấy các hệ (I), (II), (IV) không có nghiệm nguyên, hệ (III) vô nghiệm, hệ (V) có hai nghiệm nguyên (1 ; 2) và (−2 ; −1), hệ (VI) có hai nghiệm nguyên (−1 ; 6) và (−6 ; 1).

Tóm lại PT (1) có các nghiệm nguyên $(x ; y)$ là (1 ; 2), (−2 ; −1), (−1 ; 6), (−6 ; 1). ❒

➢**Nhận xét.** 1) Có thể biến đổi trực tiếp

$$(1) \Leftrightarrow (x - y - 2)(x - y - xy) = 9,$$

và xét các trường hợp (chú ý $x - y - 2, x - y - xy \in \mathbb{Z}$).

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Đại Thị Hoàng Yến*, 8A1, THCS Yên Lạc, *Vũ Thị Quỳnh Anh*, 9A, THCS Vĩnh Yên, *Nguyễn Sơn Hải*, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Phú Thọ:** *Tạ Thị Thúy Hường*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nam:** *Lại Thái Sơn*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Chiến Công*, 9A, THCS Tố Như, Hoằng Hóa, **Nghệ An:** *Lê Hồng Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Đức*, 9C, *Lê Trung Anh*, 7B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** *Tống Thành Nguyện*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/403. *Cho các số $a, b, c, d \in [0 ; 1]$ và $x, y, z, t \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn điều kiện*

$$a + b + c + d = x + y + z + t = 1.$$

Chứng minh rằng

$$ax + by + cz + dt \geq 54abcd.$$

Lời giải. • Từ điều kiện đã cho suy ra

$t = 1 - x - y - z$; $\frac{1}{2} - x \geq 0$; $\frac{1}{2} - y \geq 0$.

Không làm mất tính tổng quát, giả sử $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$, ta có

$ax + by + cz + dt = ax + by + cz + d(1 - x - y - z)$

$= ax + by + d\left(\frac{1}{2} - x\right) + d\left(\frac{1}{2} - y\right) + (c - d)z$

$\geq ax + by + a\left(\frac{1}{2} - x\right) + b\left(\frac{1}{2} - y\right) = \frac{a + b}{2}$

nên $ax+by+cz+dt \ge \dfrac{a+b}{2}$ (1)

• Bây giờ ta chứng minh $\dfrac{a+b}{2} \ge 54abcd$ (2)

Thật vậy, áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có

$$\frac{a+b}{2}-54abcd=\frac{1}{2}\left(a+b-108abc(1-a-b-c)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left((a+b)(1+108abc)+108abc^2-108abc\right)$$
$$\ge \frac{1}{2}\left(4\sqrt{ab}.\sqrt{108abc}+108abc^2-108abc\right)$$
$$=6ab\left(2\sqrt{3c}+9c^2-9c\right).$$

Đặt $\sqrt{3c}=u$ $(u \ge 0)$ thì ta có

$$2\sqrt{3c}+9c^2-9c=u^4-3u^2+2u$$
$$=u(u-1)^2(u+2)\ge 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy BĐT (2) được chứng minh.

Từ (1) và (2) suy ra $ax+by+cz+dt \ge 54abcd$.

Đẳng thức xảy ra, chẳng hạn tại $a=b=\dfrac{1}{6}$, $c=d=\dfrac{1}{3}$, $x=y=\dfrac{1}{2}$, $z=t=0$. ❒

➤**Nhận xét.** 1) Đây là bài toán chứng minh BĐT bằng cách sử dụng tính chất bắc cầu so sánh qua $\dfrac{a+b}{2}$. Một số bạn đã sử dụng BĐT Cauchy cho ba số không âm để chứng minh $\dfrac{a+b}{2} \ge 54abcd$ như sau:

$$54abcd \le 54.\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 cd=\frac{27}{2}(a+b)(1-c-d)cd$$
$$\le \frac{27}{2}(a+b).\left(\frac{1-c-d+c+d}{3}\right)^3=\frac{a+b}{2}.$$

Tuy nhiên, trong chương trình cấp THCS chưa nên sử dụng nó.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt.

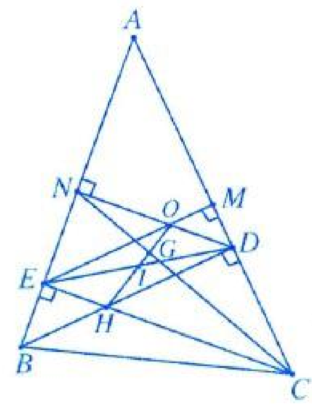
Nam Định: *Trần Đại Tân*, 9A4, THCS Trần Đăng Ninh, *Phạm Trường Giang*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Sơn Hải*, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Chiến Công*, 9A, THCS Tố Như, Hoằng Lộc, Hoằng Hóa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★**Bài T5/403.** *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=45^\circ$. Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng đường thẳng HI đi qua trọng tâm của tam giác ABC.*

Lời giải. (Theo bạn *Minh Hoàng*, 9A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**).

Ta chứng minh trường hợp tam giác ABC nhọn (trường hợp tam giác ABC tù được chứng minh tương tự, còn trường hợp tam giác ABC vuông thì H, I và trọng tâm tam giác ABC cùng nằm trên đường trung tuyến ứng với góc vuông).



Kẻ $EM \perp AC$, $DN \perp AB$. Hai tam giác ADB và AEC là hai tam giác vuông cân, do đó nhận DN và EM làm trung tuyến, suy ra M, N lần lượt là trung điểm của AC và AB.

Gọi O là giao điểm của DN và EM. Ta thấy tứ giác $EHDO$ là hình bình hành (do các cạnh đối song song) nên HO đi qua trung điểm I của ED và $EO = HD$. Lại có hai tam giác NOE và DHC vuông cân (do $\widehat{NEO}=\widehat{HCD}=45^\circ$) nên

$$HC = HD\sqrt{2} = EO\sqrt{2} = 2NO.$$

Gọi G là giao điểm của CN và HO, do $NO//CH$ nên theo hệ quả của định lí Thales ta có $\dfrac{CG}{GN}=\dfrac{CH}{NO}=2$ mà CN là trung tuyến của tam giác ABC, suy ra G là trọng tâm của tam giác ABC. Vậy đường thẳng HI đi qua trọng tâm G của tam giác ABC. ❒

➤**Nhận xét.** 1) Rõ ràng O chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và đường thẳng đi qua H, I, G, O chính là đường thẳng Euler của tam giác ABC. Nhiều bạn đã sử dụng kết quả về đường thẳng Euler và vì thế chỉ cần chứng minh H, I, O thẳng hàng.

2) Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Nguyễn Thị Hương Giang*, $8A_3$, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang; **Vĩnh Phúc**: *Trần Hồng Thái*, *Nguyễn Ngọc Linh*, *Ngô Thị Hòa*, 9A, THCS Lập Thạch, *Vũ Thị Quỳnh Anh*, 9A, THCS Vĩnh Yên, *Bùi Thị Ngọc Mai*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Hậu Giang**: *Trần Ngọc Khánh Quỳnh*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, TP. Vị Thanh; **Nghệ An**: *Nguyễn Tất Khánh*, 9B, THCS Lý Nhật

Quang, Đô Lương; **Bắc Ninh**: *Lê Bích Ngọc*, 9A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP Bắc Ninh; **Thái Bình**: *Phạm Trung Anh*, 9B, THCS Thị trấn Đông Hưng.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★Bài T6/403. *Giải phương trình*

$$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+4\sqrt{17-x}+8\sqrt[4]{17-x}=34.$$

Lời giải. Điều kiện $0 \le x \le 17$.

• *Cách 1.* Sử dụng BĐT Bunyakovsky cho hai bộ số không âm ta có

$$\sqrt{x}+4\sqrt{17-x}\le\sqrt{(1^2+4^2)(x+17-x)}=17 \quad (1)$$

$$\sqrt[4]{x}+8\sqrt[4]{17-x}\le\sqrt{(1^2+4^2)\left(\sqrt{x}+4\sqrt{17-x}\right)}$$

$$=\sqrt{17\left(\sqrt{x}+4\sqrt{17-x}\right)}\le 17 \quad (2)$$

Cộng theo vế các BĐT (1) và (2) ta được

$$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+4\sqrt{17-x}+8\sqrt[4]{17-x}\le 34.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\sqrt{x}}{1}=\frac{\sqrt{17-x}}{4} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy PT đã cho có đúng một nghiệm $x = 1$.

• *Cách 2.* Sử dụng BĐT Cauchy cho hai số không âm ta có

$$\sqrt{x}\le\frac{x+1}{2};\ 4\sqrt{17-x}\le\frac{16+(17-x)}{2}=\frac{33-x}{2};$$

$$\sqrt[4]{x}\le\frac{\sqrt{x}+1}{2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2}+1\right)=\frac{x+3}{4};$$

$$8\sqrt[4]{17-x}\le 4.\frac{4+\sqrt{17-x}}{2}\le 2\left(4+\frac{33-x}{8}\right)=\frac{65-x}{4}.$$

Suy ra $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+4\sqrt{17-x}+8\sqrt[4]{17-x}\le 34$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Vậy PT đã cho có đúng một nghiệm $x = 1$. ❐

Nhận xét. 1) Có rất đông các bạn tham gia giải bài toán trên và hầu hết đều cho lời giải đúng. Bài toán trên có thể giải bằng cách xét hàm số

$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+4\sqrt{17-x}+8\sqrt[4]{17-x}.$$

Tính đạo hàm để xét sự biến thiên của hàm $f(x)$, từ đó cũng cho ta nghiệm của bài toán. Tuy nhiên, lời giải theo cách này dài và phức tạp. Dưới đây là các bạn nhỏ tuổi có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Vũ Trung Hiếu*, 9A, THCS Lập Thạch; *Trần Đình Hùng, Nguyễn Thị Lan Hương, Nguyễn Sơn Hải*, 9C, THCS Vĩnh Tường; *Bùi Thị Ngọc Mai*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Vũ Tuấn Linh*, 9F, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; **Hà Nội:** *Nguyễn Chí Tùng*, 9A10, THCS Giảng Võ, Q. Ba Đình; **Thái Bình:** *Nguyễn Thành Trung*, 9A4, THCS Nguyễn Đức Cảnh, Thái Thụy, *Trần Hồng Quân*, 9A6, THCS Lương Thế Vinh, TP. Thái Bình; **Hà Nam:** *Nguyễn Quang Huy, Lại Thái Sơn*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Bắc Ninh:** *Lê Bích Ngọc*, 9A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Đức*, 9C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Nghệ An:** *Trương Công Phú, Lê Hồng Đức, Nguyễn Tất Khánh*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bình Định:** *Nguyễn Trọng Nhất*, 9A8, THCS Thị Trấn Phù Mỹ.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T7/403. *Một số được gọi là **số thú vị** nếu số này có 10 chữ số đôi một khác nhau và nó là bội của 11111. Hỏi có tất cả bao nhiêu **số thú vị** như thế?*

Lời giải. Giả sử $n=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5b_1b_2b_3b_4b_5}$ là một số thú vị.

Do các chữ số đôi một khác nhau nên n là một hoán vị các chữ số $0,1,2,...,9$. Tổng của 10 chữ số trên bằng 45 nên n là số chia hết cho 9.

Lại có 9 và 11111 không có ước số chung khác 1 nên n chia hết cho $9.11111=99999$.

Đặt $x=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$; $y=\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$, ta có $n=x.10^5+y=99999x+(x+y)$ là số chia hết cho 99999 nên $(x+y)\vdots 99999$.

Lại có $0<x+y<2.99999$ suy ra $x+y=99999$.

Do đó $a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3=a_4+b_4$ $=a_5+b_5=9$.

Từ các chữ số $0, 1, 2,..., 9$ có 5 cặp $(0;9),(1;8),(2;7),(3;6),(4;5)$ phù hợp với các cặp $(a_k;b_k)$ $(k=1,2,3,4,5)$.

Số hoán vị của các cặp số trên tương ứng với 5 giá trị của k là 5! và với mỗi giá trị k có 2 cách chọn chữ số cho $(a_k;b_k)$ $(k=1, 2, 3, 4, 5)$ nên số các số khác nhau tạo thành là $5!.2^5$.

Vì vai trò của 10 chữ số $0, 1, 2,..., 9$ như nhau nên số các số có chữ số đầu bằng 0 là

$$\frac{5!.2^5}{10}=4!.2^4.$$

Ta được số các số thú vị thoả mãn bài toán là $5!.2^5 - 4!.2^4 = 3456$ (số). ❐

➤**Nhận xét.** 1) Hầu hết các bạn gửi bài đều làm đúng. Điều then chốt của bài toán là chứng minh rằng nếu số $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5b_1b_2b_3b_4b_5}$ thỏa mãn điều kiện bài toán thì

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = a_4 + b_4 = a_5 + b_5 = 9\ .$$

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Văn Quang Hưng*, 7A, *Nguyễn Văn Long*, 8A, *Tạ Thanh Xuân*, 8A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ**: *Nguyễn Hồng Quân*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội**: *Nguyễn Chí Tùng*, 8A10, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Nghệ An**: *Hồ Thị Thuý, Trịnh Thị Mỹ Ngọc, Trương Cẩm Tú, Đặng Thu Thuỷ, Trương Như Uyên*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Hồ Hoàng Hiệp*, 8C, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh.

NGUYỄN ANH DŨNG

★**Bài T8/403.** *Cho đa giác lồi $A_1A_2A_3...A_n$ $(n \geq 3)$ nằm trong mặt phẳng (P). S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (P). Mặt phẳng (α) cắt các cạnh $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ lần lượt tại $B_1, B_2, ..., B_n$ sao cho $\frac{SA_1}{SB_1} + \frac{SA_2}{SB_2} + ... + \frac{SA_n}{SB_n} = a$ với a là số thực dương cho trước.*

Chứng minh rằng mặt phẳng (α) luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. Trước hết chúng ta nhắc lại một kết quả quen thuộc sau

Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ cùng nằm trên mặt phẳng (P) $(n \geq 2)$ và các số thực $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Khi đó tồn tại duy nhất điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$.

Trở lại với bài **T8/403.**

Từ kết quả trên, ta thấy tồn tại điểm G thuộc mặt phẳng (P) và điểm I thuộc mặt phẳng (α) sao cho

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} & (1) \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{SA_i}{SB_i}\right) \overrightarrow{IB_i} = \vec{0} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{SA_i} = n.\overrightarrow{SG}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{SA_i}{SB_i}\right) \overrightarrow{SB_i} = n.\overrightarrow{SG}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{SA_i}{SB_i}\right) \left(\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IB_i}\right) = n\overrightarrow{SG}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{SA_i}{SB_i}\right) \overrightarrow{SI} = n.\overrightarrow{SG} \text{ (theo (2))}$$

$$\Leftrightarrow a.\overrightarrow{SI} = n.\overrightarrow{SG} \Leftrightarrow \overrightarrow{SI} = \left(\frac{n}{a}\right).\overrightarrow{SG} \qquad (3)$$

Do các điểm S và G cố định, nên điểm I cố định. Từ đó ta kết luận rằng mặt phẳng (α) luôn đi qua điểm I cố định, (xác định bởi hệ thức (3)) (đpcm). ❐

➤**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng và gọn:

Phú Thọ: *Nguyễn Quốc Hùng*, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Bình, Nguyễn Văn Tuân*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh, *Trương Giang Khang*, 10A1, THPT Thuận Thành số 1; **Hải Dương:** *Nguyễn Thị Thanh Yên*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nghệ An:** *Trần Thị Nga My*, 11A3, THPT chuyên ĐH Vinh, *Phạm Văn Quân*, 11A3, THPT Quỳnh Lưu I, *Hồ Diên Phúc, Hoàng Danh Thắng*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III, *Phạm Hùng Vương*, 11C1, THPT Phan Đăng Lưu, Yên Thành, *Phan Nguyễn Thanh Sơn*, 11A1, THPT Diễn Châu 3, *Lê Hoàng Hiệp*, 10A1, THPT Thái Hòa; **Bình Định:** *Nguyễn Ngọc Nghĩa*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đà Nẵng:** *Lê Trần Nhạc Long*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** *Khưu Thành Quý*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

HỒ QUANG VINH

★**Bài T9/403.** *Hai đường tròn ω_1, ω_2 cắt nhau tại A, B. CD là tiếp tuyến chung của ω_1, ω_2 $(C \in \omega_1, D \in \omega_2)$ và điểm B gần CD hơn điểm A. CB cắt AD tại E, DB cắt CA tại F, EF cắt AB tại N. K là hình chiếu vuông góc của N trên CD.*

a) Chứng minh rằng $\widehat{CAB} = \widehat{DAK}$.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và H là trực tâm tam giác KEF. Chứng minh rằng ba điểm O, B, H thẳng hàng.

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

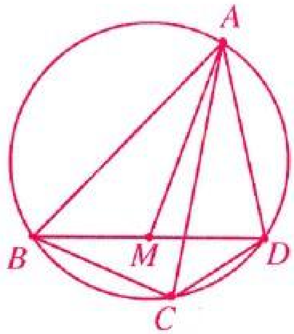
Bổ đề. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp và $AB.CD = AD.CB$. Nếu M là trung điểm của BD thì $\widehat{MAB} = \widehat{CAD}$.

Chứng minh. (h.1).

Theo định lí Ptolemy, chú ý rằng $AB.CD = AD.CB$, ta có

$2AB.CD$
$= AB.CD + AD.CB$
$= AC.BD = 2AC.BM$.

Do đó $\dfrac{AB}{MB} = \dfrac{AC}{DC}$.

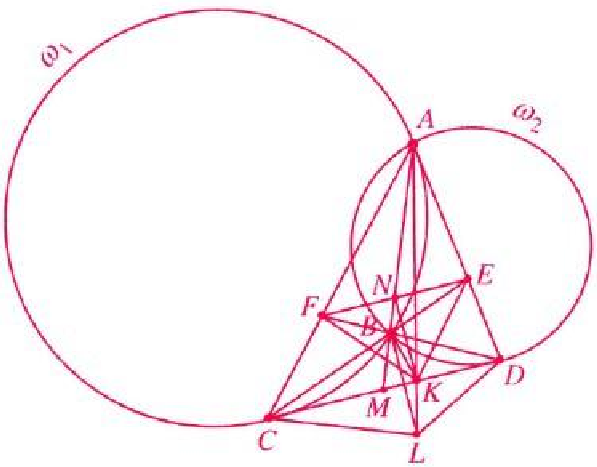


Hình 1

Từ đó, chú ý rằng $\widehat{ABM} = \widehat{ACD}$, suy ra các tam giác ABM, ACD đồng dạng với nhau.

Vậy $\widehat{MAB} = \widehat{CAD}$.

Trở lại bài **T9/403** (h.2).



Hình 2

a) Gọi M là giao điểm của AB và CD.

Vì CD tiếp xúc với các đường tròn ω_1, ω_2 nên
$$MC^2 = MA.MB = MD^2.$$

Do đó $\quad MC = MD \qquad (1)$

$$\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MC}; \frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MD} \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra các cặp tam giác (MCB, MAC) và (MDB, MAD) đồng dạng.

Do đó $\dfrac{CB}{AC} = \dfrac{CM}{AM}; \dfrac{DB}{AD} = \dfrac{DM}{AM} \qquad (3)$

Từ (1) và (3) suy ra $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{BD}{AD} \qquad (4)$

Lấy điểm L trên AK sao cho $LB // NK$.

Từ đó, chú ý rằng (KA, KB, KN, KM) là chùm điều hòa, suy ra KM đi qua trung điểm của LB.

Từ đó, chú ý rằng $LB \perp KM$, suy ra L và B đối xứng với nhau qua KM (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\dfrac{LC}{AC} = \dfrac{LD}{AD} \qquad (6)$

Vì CD tiếp xúc với các đường tròn ω_1, ω_2 nên $\widehat{BAC} = \widehat{BCD}$; $\widehat{BAD} = \widehat{BDC}$.

Từ đó, chú ý tới (5), suy ra
$\widehat{CAD} + \widehat{CLD} = \widehat{BCD} + \widehat{BDC} + \widehat{CBD} = 180°$.

Do đó tứ giác $ACLD$ nội tiếp (7)

Từ (6) và (7), theo bổ đề trên, suy ra $\widehat{CAB} = \widehat{DAK}$.

b) Từ (5) và (7) suy ra
$\widehat{KBD} = \widehat{KLD} = \widehat{KCF}$; $\widehat{FAE} + \widehat{FBE}$
$= \widehat{CAD} + \widehat{CBD} = \widehat{CAD} + \widehat{CLD} = 180°$.

Do đó các tứ giác $FBKC$, $FBEA$ nội tiếp.

Vì tứ giác $FBEA$ nội tiếp và CD tiếp xúc với ω_1 nên $\widehat{BEF} = \widehat{BAF} = \widehat{BCD}$. Suy ra $CD//EF$ (8)

Vì các tứ giác $FBKC$, $FBEA$ nội tiếp và O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD nên $\widehat{FKC} = \widehat{FBC} = \widehat{CAD} = \dfrac{1}{2}\widehat{COD} = 90° - \widehat{OCK}$.

Suy ra $CO \perp KF$.

Từ đó, chú ý rằng $EH \perp KF$, suy ra $CO//EH$ (9)

Tương tự $DO//FH$ (10)

Từ (8), (9) và (10) suy ra OH, CE, DF đồng quy (tại B).

Điều đó có nghĩa là O, H, B thẳng hàng. ❑

➤**Nhận xét.** Khá nhiều bạn tham gia giải và đều cho lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Lê Hữu Hoàng*, 10A6, THPT Long Châu Sa, Lâm Thao; **Hà Nội:** *Nguyễn Phương Minh*, 11T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Nam Định:** *Lê Quang Hoàng*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP Nam Định; **Thái Bình:** *Trần Quang Đại*, 11T, THPT chuyên Thái Bình, TP Thái Bình; **Ninh Bình:** *Vũ Thị Minh Phương*, 12T, THPT chuyên Lương Văn Tụy, TP Ninh Bình; **Nghệ An:** *Nguyễn Hiền Trang*, 10A2, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Hà Tĩnh:** *Lê Chí Hiệp*, 11A1, THPT Nguyễn Thị Minh Khai, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** *Trần Khánh Hoàng*, 10T2, THPT chuyên Lê Khiết; **Bến Tre:** *Lê Thị Minh Thảo*, 10T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài T10/403. *Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1=5$ và $x_{n+1}=\dfrac{x_n^{2010}+3x_n+16}{x_n^{2009}-x_n+11}$, với mọi $n=1,2,\ldots$ Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^{2009}+7}$. Tìm $\lim y_n$.*

Lời giải. Để lời giải bài toán gọn, ta kí hiệu $m=2009$, và $f(x)=\dfrac{x^{m+1}+3x+16}{x^m-x+11}$.

Tính chất của hàm số $f(x)$ sẽ được dùng trong bài toán này:

$$f(x)-4=\frac{x^{m+1}+3x+16}{x^m-x+11}-4$$

$$=\frac{x^m(x-4)+7(x-4)}{x^m-x+11}=\frac{(x-4)(x^m+7)}{(x^m+7)-(x-4)}.$$

Do đó, nếu $x>4$ thì

$$\frac{1}{f(x)-4}=\frac{(x^m+7)-(x-4)}{(x-4)(x^m+7)}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x^m+7}$$

Bởi vậy chứng minh bằng quy nạp theo n ta có $x_n>4$ với mọi $n\ge 1$ và

$$\frac{1}{x_{n+1}-4}=\frac{1}{x_n-4}-\frac{1}{x_n^m+7}.$$

Suy ra $\dfrac{1}{x_n^m+7}=\dfrac{1}{x_n-4}-\dfrac{1}{x_{n+1}-4}$ với mọi $n\ge 1$.

Từ công thức tách trên ta rút ra

$$5=x_1<x_2<x_3<\ldots\to+\infty.$$

Do đó $y_n=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^m+7}=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{x_i-4}-\dfrac{1}{x_{i+1}-4}\right)$

$=\dfrac{1}{x_1-4}-\dfrac{1}{x_{n+1}-4}=1-\dfrac{1}{x_{n+1}-4}\to 1$ khi $n\to+\infty$.

Như vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=4$. □

➤Nhận xét. Đây là bài toán dạng cơ bản, đã quen thuộc với nhiều bạn học sinh. Các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Đinh Anh Hoàng*, 10A1, THCS Lâm Thao, *Đào Văn Lập*, 10A1, THPT Thanh Thủy; **Bắc Ninh:** *Trương Giang Khang*, 10A1, THPT Thuận Thành số 1; **Hà Nội:** *Nguyễn Minh Hạnh*, 10A2, THPT Lê Quý Đôn, Q. Đống Đa, *Phan Đức Việt*, 10T, THPT Chu Văn An; **Hưng Yên:** *Trần Ngọc Tiến*, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Thanh Hóa:** *Lê Văn Tuấn Anh*, 10A1, THPT Nông Cống I; **Nghệ An:** *Lê Hoàng Hiệp*, 10A1, THPT Thái Hòa, *Nguyễn Khắc Ly*, 10B4, THPT Đô Lương II; **Quảng Nam:** *Lê Vũ Trùng Dương*, 10A4, THPT Trần Quý Cáp, TP. Hội An.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T11/403. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đẳng thức*

$$f(f(x-y))=f(x).f(y)+f(x)-f(y)-xy \quad (1)$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

Lời giải. Đặt $f(0)=a$. Từ (1) cho $x=0,y=0$, thu được $f(f(0))=a^2$.

Tiếp theo, cho $x=t, y=t$ vào (1), ta được

$$(f(t))^2=t^2+a^2 \quad (2)$$

Từ đây suy ra đẳng thức $f(x_1)=f(x_2)$ kéo theo $x_1^2=x_2^2$.

Từ (2) ta thu được $(f(-t))^2=(f(t))^2$ hay

$$\big(f(x)-f(-x)\big)\big(f(x)+f(-x)\big)=0,\forall x\in\mathbb{R} \quad (3)$$

Từ (1) thay $y=0$, ta được

$$f(f(x))=af(x)+f(x)-a,\forall x\in\mathbb{R} \quad (4)$$

Tiếp theo, thay $x=0$, ta thu được

$$f(f(-y))=af(-y)+f(-y)-a,$$

hay $f(f(x))=af(-x)+f(-x)-a,\forall x\in\mathbb{R}$. (5)

Từ (4) và (5) cho ta

$$a\big(f(x)-f(-x)\big)+f(x)+f(-x)=2a,\forall x\in\mathbb{R} \quad (6)$$

Giả sử tồn tại $x_0\ne 0$ sao cho $f(-x_0)=f(x_0)$. Thế vào (6), ta được $f(x_0)=a=f(0)$ nên $x_0^2=0$, tức $x_0=0$, vô lí.

Vậy $f(-x)=-f(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Từ (6), suy ra $a\big(1-f(x)\big)=0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $a=0$ vì nếu $f(x)=1$ thì mâu thuẫn với điều kiện $f(-x)=-f(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Thế $a=0$ vào (2), ta được

$$\big(f(x)-x\big)\big(f(x)+x\big)=0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Giả sử tồn tại $x_0\ne 0$ sao cho $f(x_0)=-x_0$, thì $-x_0=f(x_0)=f(f(x_0))=-f(x_0)=x_0$.

Suy ra $x_0 = 0$, trái với giả thiết.

Vậy nên $f(x) \equiv x$. Thử lại, ta thấy hàm $f(x) \equiv x$, với $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài ra. ❒

➢**Nhận xét.** Đề bài này dựa theo đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia năm 2005 (Bài 4, Bảng A) như sau: *Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đẳng thức*

$$f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cách giải hoàn toàn tương tự nên có nhiều bài giải gửi đến tòa soạn.

Tuy nhiên, có một số bạn đã sử dụng đẳng thức

$$(f(-t))^2 = (f(t))^2, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-t) = f(t), \forall x \in \mathbb{R} \\ f(-t) = -f(t), \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

là lập luận sai dẫn đến lời giải không đúng.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T12/403. *Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, kí hiệu a_n là số tất cả các song ánh f: $\{1,2,...,n\} \to \{1,2,..., n\}$ thỏa mãn điều kiện với mọi $k \in \{1,2,...,n\}$ thì*

$$f(f(k)) = k. \qquad (*)$$

1) Chứng minh rằng a_n là số chẵn với mọi $n \geq 2$.

2) Chứng minh rằng với $n \geq 10$ và n chia hết cho 3 thì $a_n - a_{n-9}$ chia hết cho 3.

Lời giải. (Theo bạn *Bùi Quang Tiến*, 10A, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn, **Hải Dương**).

Trước hết ta tìm hệ thức truy hồi của dãy (a_n). Dễ thấy $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Xét $n \geq 3$. Các song ánh như vậy được chia làm hai loại:

• *Loại thứ nhất:* Gồm các song ánh mà $f(n) = n$. Khi đó ta thấy $f: \{1,2,...,n-1\} \to \{1,2,...,n-1\}$ thỏa điều kiện (*). Vậy số song ánh loại này là a_{n-1}.

• *Loại thứ hai:* Gồm các song ánh mà $f(n) \neq n$. Khi đó ta phải có $f(n) = m$, $f(m) = n$ với $m \in \{1,2,...,n-1\}$.

Hơn nữa, dưới mỗi $m \in \{1,2,...,n-1\}$ cố định thì $f: \{1,2,...,n\} \setminus \{m,n\} \to \{1,2,...,n\} \setminus \{m,n\}$ thỏa mãn (*).

Thành thử số song ánh loại này là $(n-1)a_{n-2}$.

Vậy ta có hệ thức truy hồi

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2} \ (n \geq 3).$$

1) Ta có $a_1 = 1, a_2 = 2 \Rightarrow a_3 = a_2 + 2a_1 = 4$. Bằng quy nạp dễ chứng minh $a_n \vdots 2$ với mọi $n \geq 2$.

2) Ta chứng minh một khẳng định mạnh hơn. Với mọi $n \geq 1$ thì $a_{n+3} \equiv a_n \pmod 3$ cụ thể ta chứng minh $a_{3k+1} \equiv 1 \pmod 3$, $a_{3k+2} \equiv 2 \pmod 3$, $a_{3k+3} \equiv 1 \pmod 3$, với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Chứng minh bằng quy nạp, với $k = 0$, khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đúng với k. Ta có

$$a_{3k+4} = a_{3k+3} + (3k+3)a_{3k+2} \equiv a_{3k+3} \equiv 1 \pmod 3,$$
$$a_{3k+5} = a_{3k+4} + (3k+4)a_{3k+3} \equiv 1 + 1.1 \equiv 2 \pmod 3,$$
$$a_{3k+6} = a_{3k+5} + (3k+5)a_{3k+4} \equiv 2 + 2.1 \equiv 1 \pmod 3.$$

Vậy khẳng định đúng với $k+1$. Do đó khẳng định đúng với mọi $k \in \mathbb{N}$, tức là với mọi $n \geq 1$ ta có $a_{n+3} \equiv a_n \pmod 3$. ❒

➢**Nhận xét.** Có ít bạn tham gia giải bài toán này. Ngoài bạn *Tiến*, bạn *Vũ Huy Hoàng*, 11A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy, **Thái Bình** cũng có lời giải tốt.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài L1/403. *Một tàu điện chuyển động đều trên đoạn đường thẳng nằm ngang với vận tốc v, cường độ dòng điện đi qua động cơ của tàu là $I_1 = 100$A và hiệu suất của động cơ là $H_1 = 90\%$. Cho tàu điện leo dốc với vận tốc không đổi v thì cường độ dòng điện qua động cơ của tàu là I_2; nếu tắt máy tàu điện và cho tàu xuống chính dốc đó thì nó chuyển động thẳng đều. Hãy xác định I_2, biết rằng phần năng lượng điện hao phí trong động cơ của tàu điện là do tỏa nhiệt ở cuộn dây của động cơ.*

Lời giải. Khi tàu điện chuyển động đều trên đoạn đường thẳng nằm ngang, ta có

$$F_c.v = H_1.UI_1 \qquad (1)$$

trong đó F_c là lực cản.

Khi đoàn tàu lên dốc với vận tốc không đổi v

$$(F_c + mg\sin\alpha).v = H_2.UI_2 \qquad (2)$$

Khi tắt máy và xuống dốc, tàu chuyển động đều nên $F_c = mg\sin\alpha$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $2F_c.v = H_2UI_2$ (4)

Do điện năng hao phí do tỏa nhiệt trên điện trở R của cuộn dây trong động cơ nên

$$0,1UI_1 = I_1^2R \Rightarrow R = \frac{0,1U}{I_1} \quad (5)$$

Phương trình (4) có thể viết lại thành

$$2F_c.v = UI_2 - I_2^2R \quad (6)$$

Từ (1), (5) và (6) ta sẽ thu được phương trình

$$0,1I_2^2 - I_1I_2 + 2H_1I_1^2 = 0.$$

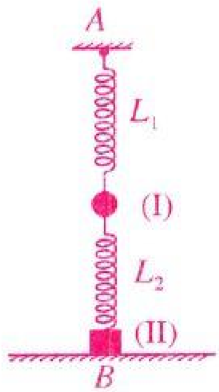
Thay $I_1 = 100A$ và $H_1 = 0,9$ vào phương trình trên rồi giải ta tìm được $I_2 \approx 765(\text{A})$ hoặc $I_2 \approx 235(\text{A})$. ❐

➢**Nhận xét.** Các bạn có lời giải tốt:

Hải Dương: *Vũ Toàn Thắng* 12A1 THPT Phả Lại, TX Chí Linh; **Nam Định:** *Đinh Việt Thắng* 11 Lí THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★**Bài L2/403.** *Hai lò xo nhẹ L_1 và L_2 cùng độ cứng k = 20N/m và độ dài tự nhiên l_0 = 40cm. Hai vật nhỏ I và II có cùng khối lượng m = 100g. Ta bố trí cơ hệ như hình vẽ: Trục các lò xo luôn thẳng đứng, một đầu lò xo L_1 nối cố định vào điểm A, một đầu lò xo L_2 nối với vật II được đặt trên mặt sàn nằm ngang tại điểm B. Đặt khoảng cách AB = L, lấy g = 10m/s². Lúc đầu hệ cân bằng và tại một thời điểm ta truyền cho vật I một vận tốc có độ lớn v_0 = 40cm/s theo phương thẳng đứng. Tìm điều kiện của L để trong quá trình vật I chuyển động thì vật II vẫn đứng yên (không bị nhấc lên khỏi sàn) và hai lò xo luôn giãn.*



Lời giải. Giả sử điều kiện vật II đứng yên được thỏa mãn, khi đó vật I sẽ dao động điều hòa với tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} = 20\text{rad/s}$ và biên độ $A = \frac{v_0}{\omega} = 2\text{cm}$.

Vật I chịu ba lực tác dụng: trọng lực $\vec{P}$, các lực đàn hồi $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$. Ba lực này đều có phương thẳng đứng, lực $\vec{F_1}$ có chiều hướng lên trên, còn hai lực $\vec{P}$ và $\vec{F_2}$ có chiều hướng xuống dưới. Gọi Δl_1 và Δl_2 lần lượt là độ biến dạng của các lò xo L_1 và L_2, khi vật I ở vị trí cân bằng thì

$$k\Delta l_1 = mg + k\Delta l_2 \quad (1)$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = L - 2l_0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\Delta l_2 = \frac{L}{2} - l_0 - \frac{mg}{2k} \quad (3)$$

Để hai lò xo luôn giãn thì chỉ cần lò xo L_2 luôn giãn kể cả khi vật I ở vị trí thấp nhất (vì hai lò xo mắc nối tiếp nhau). Ta có

$$\Delta l_2 - A \geq 0 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$L \geq 2l_0 + \frac{mg}{k} + 2A = 2.0,4 + \frac{0,1.10}{20} + 2.0,02$$
$$= 0,89(\text{m}) \text{ hay } L \geq 89(\text{cm}).$$

Điều kiện để vật II không bị nhấc lên khỏi sàn là nó không bị nhấc lên khi vật I ở vị trí cao nhất. Ta có

$$k(\Delta l_2 + A) \leq mg \quad (5)$$

Từ (3) và (5) suy ra

$$L \leq 2l_0 + \frac{3mg}{k} - 2A = 2.0,4 + \frac{3.0,1.10}{20} - 2.0,02$$
$$= 0,91\text{m hay } L \leq 91\text{cm}.$$

Vậy điều kiện của L là 89cm ≤ L ≤ 91cm. ❐

➢**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Lê Văn Mạnh*, 12 Hóa, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nam Định:** *Bùi Xuân Hiển*, 11 Lí, *Lê Quang Trung*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Dương:** *Vũ Toàn Thắng*, 12A1, THPT Phả Lại, TX. Chí Linh; **Thanh Hóa:** *Bùi Thị Thúy*, 12A3, THPT Lê Hoàn, Thọ Xuân; **Nghệ An:** *Bùi Hữu Vinh*, *Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, THPT Đô Lương I; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phạm Quang Dũng*, 11 Lí, PTNK ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

NGUYỄN VĂN THUẬN

TIN TỨC

❖ Hội thảo khoa học tại tỉnh Phú Thọ

Hưởng ứng chương trình giảng dạy Toán bằng tiếng Anh cho các trường THPT chuyên và nhằm khởi động chương trình hoạt động chuyên môn năm 2011 của Semina Giải tích - Đại số liên Trường - Viện tại ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội về các chuyên đề Olympic Toán khu vực và trong nước, Hội Toán học Hà Nội, Sở GD&ĐT Phú Thọ phối hợp với Vụ Giáo dục Trung học, Bộ GD&ĐT đồng tổ chức Hội thảo khoa học **Các chuyên đề Olympic Toán học Khu vực bậc THPT** tại thành phố Việt Trì vào các ngày 09-10/4/2011. Hội thảo khoa học lần này được nhiều nhà khoa học, nhà giáo lão thành, chuyên gia Toán học báo cáo tại các phiên toàn thể và các chuyên gia giáo dục, các cán bộ chỉ đạo chuyên môn từ các sở GD&ĐT, các giáo viên đang trực tiếp bồi dưỡng học sinh giỏi Toán báo cáo tại các phiên chuyên đề. Nhân dịp này, Hội nghị đã tổ chức cho các đại biểu thăm viếng Đền Hùng, giao lưu văn nghệ với Trường THPT chuyên Hùng Vương.

❖ Lễ tuyên dương khen thưởng học sinh trong Cuộc thi Olympic Toán Hà Nội mở rộng 2011

Ngày 24/4/2011 tại Trường Phổ thông Newton, Hội Toán học Hà Nội đã tổ chức Lễ tuyên dương khen thưởng học sinh trong Cuộc thi Olympic Toán Hà Nội mở rộng 2011. Đến dự buổi Lễ có GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội, các uỷ viên ban chấp hành Hội, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Tạp chí Toán Tuổi thơ, lãnh đạo các Sở Giáo dục, Phòng Giáo dục, các giáo viên và học sinh của 16 tỉnh, thành phố (Hà Nội, Hải Dương, Quảng Ninh, Bắc Giang, Hà Giang, Bắc Ninh, Hoà Bình, Lào Cai, Yên Bái, Vĩnh Phúc, Phú Thọ, Thái Bình, Thái Nguyên, Hưng Yên, Điện Biên, Lạng Sơn) đoạt giải. Ban tổ chức đã trao **147** giải cho học sinh ở độ tuổi Junior và Senior (với 14 giải Nhất, 27 giải Nhì, 55 giải Ba, 51 giải Khuyến khích). Các em đều được tặng Giấy khen, phần thưởng của Ban tổ chức và nhận quà của Trường Phổ thông Newton, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

THANH LOAN

SÁCH MỚI

TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG MÔN TOÁN

Tập 1: Đại số, Lượng giác, Giải tích
260 trang, khổ 17 x 24 cm. Giá bìa : 38.500 đồng
Tập 2: Hình học, Tổ hợp - Xác suất, Số phức
240 trang, khổ 17 x 24 cm. Giá bìa : 36.500 đồng

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

Tác giả: NGND Vũ Hữu Bình, 220 trang, khổ 17x24cm.
Giá bìa: 34.500 đồng

Các đơn vị mua nhiều xin gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về tòa soạn theo địa chỉ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ,
187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI
Để biết thêm chi tiết xin liên hệ với Tòa soạn:
ĐT-FAX: 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

PROBLEMS... (*Tiếp trang 17*)

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/407. Let x, y, z be positive real numbers such that $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$. Prove the inequality

$$8(x+y+z)^3 \le 10(x^3+y^3+z^3)+11(x+y+z)(1+4xyz)-12xyz.$$

T10/407. Let p be an odd prime, n is a positive integer so that $(n, p)=1$. Find the number of tuples $(a_1, a_2, ..., a_{p-1})$ such that the sum $\sum_{k=1}^{p-1} ka_k$ is divisible by p, and $a_1, a_2, ..., a_{p-1}$ are natural numbers which do not exceed $n-1$.

T11/407. Find all the functions f which is defined on $\mathbb{R}$, take value on $\mathbb{R}$ and satisfying the equation $f(x+y+f(y))=f(f(x))+2y$, for all real numbers x, y.

T12/407. Let p, r, r_a, r_b, r_c be semiperimeter, inradius, and exradius opposite angles A, B, C of triangle ABC having side lengths $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Prove the inequality

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \ge p+\sqrt{rr_a}+\sqrt{rr_b}+\sqrt{rr_c}.$$

When does equality hold ?

Translated by LE MINH HA

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

HÌNH SAO MORLEY

NGUYỄN VĂN LINH
(HS lớp 12A2 Toán, trường chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

1. MỞ ĐẦU

Năm 1907, trên Tạp chí *Transactions of the American Mathematical Society,* **Franks Morley** đưa ra bài toán sau:

Cho năm điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 cùng nằm trên một đường tròn theo thứ tự. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 lần lượt là điểm chính giữa các cung $\overset{\frown}{A_3A_4}, \overset{\frown}{A_4A_5}, \overset{\frown}{A_5A_1}, \overset{\frown}{A_1A_2}, \overset{\frown}{A_2A_3}$. Kí hiệu $(O_1), (O_2), (O_3), (O_4), (O_5)$ lần lượt là các đường tròn $(O_1; O_1A_4), (O_2; O_2A_5), (O_3; O_3A_1), (O_4; O_4A_2), (O_5; O_5A_3)$; B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 lần lượt là giao điểm thứ hai của (O_3) và (O_4), (O_4) và (O_5), (O_5) và (O_1), (O_1) và (O_2), (O_2) và (O_3). Các cặp đường thẳng $(B_2B_3, B_4B_5), (B_3B_4, B_1B_5), (B_4B_5, B_1B_2), (B_1B_5, B_2B_3), (B_1B_2, B_3B_4)$ cắt nhau tạo thành hình sao $X_1X_2X_3X_4X_5$. Khi ấy các đỉnh X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 của hình sao đó lần lượt nằm trên $(O_1), (O_2), (O_3), (O_4), (O_5)$.

Hình sao $X_1X_2X_3X_4X_5$ được gọi là *hình sao Morley.*

Trong bài viết này, chúng ta sẽ chứng minh bài toán trên và khai thác một số tính chất trong trường hợp các đỉnh của hình sao Morley $X_1X_2X_3X_4X_5$ cùng nằm trên một đường tròn.

2. CHỨNG MINH BÀI TOÁN

(h. 1). Vì (O_1) và (O_5) cắt nhau tại A_3 và B_3, nên O_1O_5 là tia phân giác của $\widehat{B_3O_1A_3}$. Mặt khác, O_5 là điểm chính giữa $\overset{\frown}{A_2A_3}$ suy ra O_1O_5 là tia phân giác của $\widehat{A_2O_1A_3}$.

Do đó O_1, B_3, A_2 thẳng hàng.

Tương tự, A_3, B_2, O_4 thẳng hàng.

Suy ra $\widehat{B_2B_3A_2} = \widehat{B_2A_3A_2} = \widehat{O_4O_1A_2}$ hay $B_2B_3 // O_1O_4$.

Tương tự $B_1B_5 // O_2O_4$.

Từ đó $\widehat{B_1X_4B_2} = \widehat{O_1O_4O_2}$ (1)

Mà O_1 và O_2 lần lượt là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{A_3A_4}, \overset{\frown}{A_4A_5}$, nên

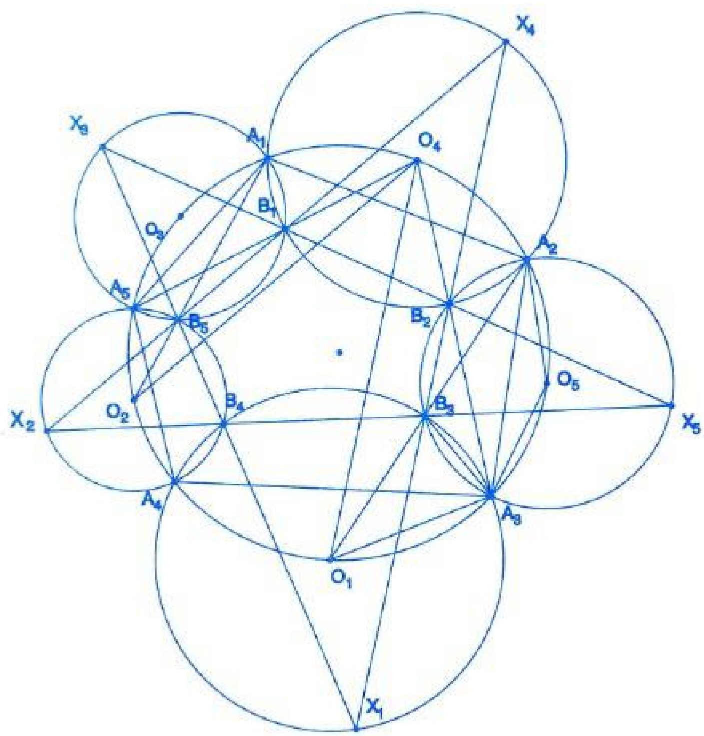
$$\widehat{O_1O_4O_2} = \frac{1}{2}\widehat{A_3O_4A_5} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) có

$$\widehat{B_1X_4B_2} = \frac{1}{2}\widehat{B_1O_4B_2}$$

nên X_4 nằm trên (O_4).

Tương tự ta có đpcm. ❐



Hình 1

3. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÌNH SAO MORLEY TRONG TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

Chúng ta giả sử rằng ngũ giác $X_1X_2X_3X_4X_5$ nội tiếp. Khai thác bài toán trên ta thu được một số tính chất sau đây.

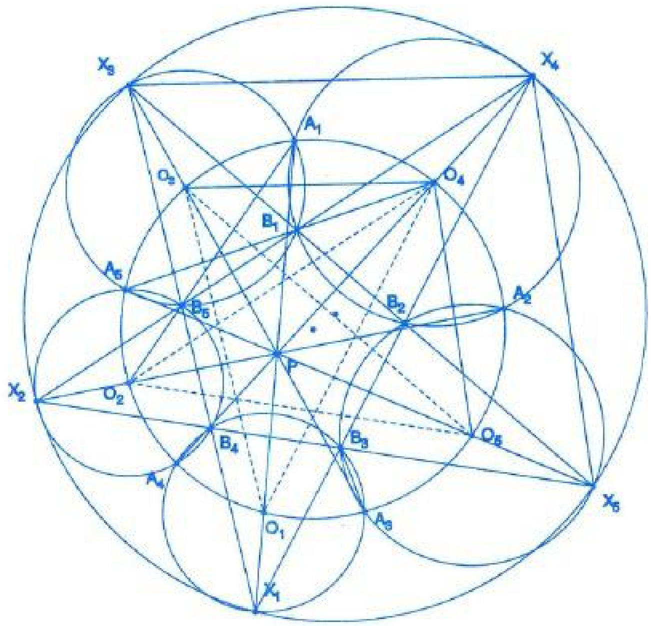
❖**Tính chất 1.** *$X_1A_1, X_2A_2, X_3A_3, X_4A_4, X_5A_5$ đồng quy tại một điểm (kí hiệu là P).*

Chứng minh. (h. 2) Ta có $B_1B_5 // O_2O_4$, nên $\widehat{B_1O_4O_2} = \widehat{X_4B_1O_4} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{B_1O_4X_4}$. Mà $\widehat{B_1O_4O_2} = \frac{1}{2}\widehat{A_5O_4A_4}$, nên $\widehat{A_5O_4A_4} + \widehat{B_1O_4X_4} = 180^\circ$, do đó X_4, O_4, A_4 thẳng hàng.

Tương tự các bộ ba điểm (X_5, O_5, A_5), (X_3, O_3, A_3) thẳng hàng (1)

Mặt khác, $\widehat{X_4X_3X_5} = \widehat{X_4X_2X_5} = \widehat{O_4O_2O_5} = \widehat{O_4O_3O_5}$, mà $X_3X_5 // O_3O_5$ nên $O_3O_4 // X_3X_4$. Tương tự $O_4O_5 // X_4X_5$, nên hai tam giác $O_3O_4O_5$ và $X_3X_4X_5$ có cạnh tương ứng song song. Suy ra O_3X_3, O_4X_4, O_5X_5 đồng quy tại P. Kết hợp với (1) ta có X_3A_3, X_4A_4, X_5A_5 đồng quy. Tương tự ta có đpcm.

Điểm P chính là tâm vị tự của hai ngũ giác $X_1X_2X_3X_4X_5$ và $O_1O_2O_3O_4O_5$. ❐



Hình 2

❖**Tính chất 2.** *Các đường vuông góc kẻ từ X_1 tới B_3B_4; X_2 tới B_4B_5; X_3 tới B_1B_5; X_4 tới B_1B_2; X_5 tới B_2B_3 đồng quy tại một điểm (kí hiệu là Q).*

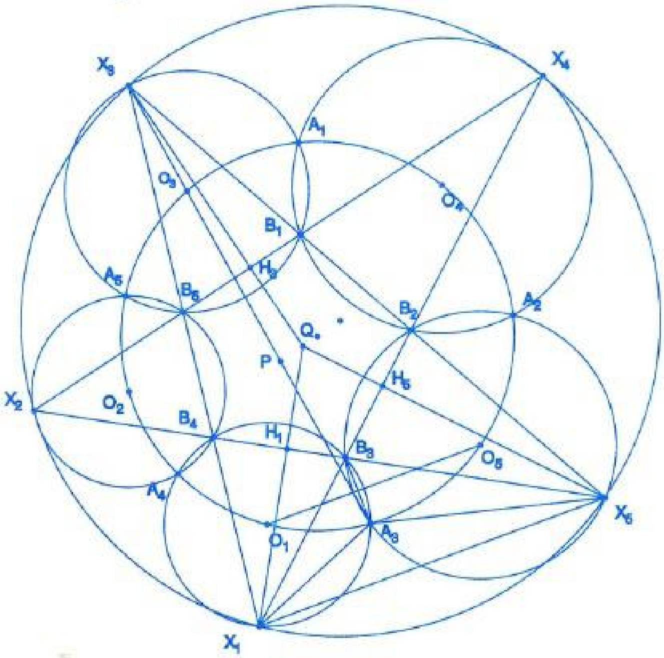
Chứng minh. (h. 3) Gọi H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 lần lượt là hình chiếu của X_1 trên B_3B_4; X_2 trên B_4B_5; X_3 trên B_1B_5; X_4 trên B_1B_2; X_5 trên B_2B_3. Ta có $X_1X_5 // O_1O_5$, $A_3B_3 \perp O_1O_5$ nên $A_3B_3 \perp X_1X_5$.

Suy ra $\widehat{A_3X_1X_5} = \widehat{B_3A_3X_1} - 90^\circ$.

Mặt khác $\widehat{B_4X_1H_1} = 90^\circ - \widehat{X_1B_4H_1} = \widehat{B_3A_3X_1} - 90^\circ$. Suy ra $\widehat{A_3X_1X_5} = \widehat{B_4X_1H_1}$.

Tương tự $\widehat{A_3X_5X_1} = \widehat{H_5X_5X_3}$. Do đó giao điểm Q của X_1H_1 và X_5H_5 là điểm liên hợp đẳng giác của điểm A_3 trong tam giác $X_1X_3X_5$. Lại có X_3, O_3, A_3 thẳng hàng nên X_3Q và X_3O_3 là hai đường đẳng giác trong góc $B_1X_3B_5$. Suy ra X_3, H_3, Q thẳng hàng. Vậy X_1H_1, X_3H_3, X_5H_5 đồng quy. Tương tự ta có đpcm. ❐

(Kì sau đăng tiếp)



Hình 3

GIẢI THƯỞNG ABEL
năm 2011

Giải Abel là một giải thưởng Toán học Quốc tế của Viện Hàn lâm Khoa học và Văn chương Na Uy thành lập vào năm 2002, lấy tên nhà toán học thiên tài người Na Uy *Niels Henrik Abel*. *Giải Abel*, *giải Wolf* hay *giải Fields* đều được xem là "*giải Nobel toán học*". Xét về danh tiếng thì *giải Abel* và *giải Wolf* không hề thua kém *giải Fields*. Mỗi giải đều có một ưu thế nổi trội riêng và tất cả đều là niềm vinh dự lớn của các nhà toán học trên thế giới.

Giải thưởng Abel năm 2011 đã thuộc về *GS John Milnor*, hiện công tác tại Viện Khoa học Toán học, Đại học Stony Brook, New York, Hoa Kỳ cho những khám phá tiên phong trong Tôpô, Hình học và Đại số. Giải thưởng có trị giá gần 1 triệu USD.

GS *John Milnor* sinh ngày 20/2/1931 tại Orange, New Jersey, Hoa Kỳ. *Milnor* từng học ở trường ĐH Princeton và nhận bằng Cử nhân năm 1951. Sau khi tốt nghiệp, ông được giữ lại trường nghiên cứu và giảng dạy tại Khoa Toán ĐH Princeton. Năm 1954, ông nhận học vị Tiến sĩ cũng tại trường đại học danh tiếng này.

GS *Milnor* đã từng nhận rất nhiều giải thưởng trong sự nghiệp khoa học của mình: *Giải thưởng Fields* năm 1962 (lúc ấy ông mới 31 tuổi); *giải thưởng Wolf* năm 1989, *Hai giải Steel* khác nhau của Hội Toán học Hoa Kỳ: Mathematical Exposition (cho những tác phẩm toán học năm 2004) và Seminal Contribution to Research (người mở đầu cho các hướng nghiên cứu, năm 1982). Gần đây là *Giải Leroy P.Steel* 2011, giải được trao cho những thành tựu trọn đời của Hội Toán học Hoa Kỳ.

GS *Milnor* đã từng nhận Huy chương Khoa học Quốc gia Hoa Kỳ và là Viện sĩ của các Viện lớn như Viện Hàn lâm Khoa học Nga (1994), Viện Khoa học Nghệ thuật và Văn chương Châu Âu. Cho đến thời điểm hiện tại thì chỉ có ba nhà toán học được cả ba giải thưởng *Fields, Wolf, Abel* đó là *Jean - Pierre Serre*, *John G. Thompson* và *John Milnor*.

Trong khoảng 60 năm làm khoa học, GS *Milnor* đã làm nên những điểm nhấn quan trọng trong toán học hiện đại. Rất nhiều khái niệm, kết quả, giả thuyết mang tên ông. Trong các tài liệu toán, ta có thể tìm thấy những khái niệm: "*Hình cầu exotic Milnor*", "*Phân thớ Milnor*", "*Số Milnor*" và nhiều định lí mang tên ông. Những công trình của *Milnor* thể hiện các đặc điểm của một nhà toán học vĩ đại với những góc nhìn sâu sắc, những ý tưởng sáng chói, những đột phá ấn tượng với một vẻ đẹp rực rỡ.

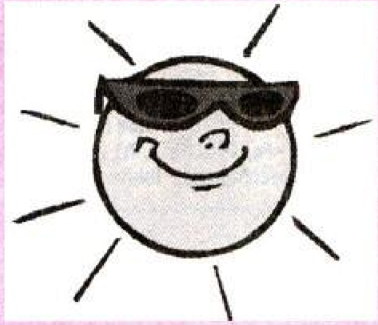
Ngoài việc chứng minh những định lí ấn tượng của mình, ông còn xây dựng những vấn đề rất cơ bản thuộc các chuyên ngành khác nhau như Tôpô vi phân, Tôpô đại số, K - lí thuyết, Lí thuyết nhóm, Lí thuyết trò chơi, Lí thuyết kì dị, Hệ động lực.

GS *Milnor* cũng là một nhà sư phạm tuyệt vời, ông là tác giả của nhiều cuốn sách có ảnh hưởng to lớn và được coi là kinh điển hay mẫu mực trong các sách chuyên ngành của toán học. Giờ đây, ở tuổi cổ lai hi, ông vẫn còn nghiên cứu và viết sách. "*Milnor* là nguồn kích thích trí tuệ cho rất nhiều các nhà toán học"- GS *Gowers* (*giải thưởng Fields* năm 1998) nói.

Vào ngày 24/5/2011 sẽ có một buổi lễ trang trọng dưới sự chứng kiến của nhiều quan khách và hàng trăm sinh viên, *Nhà Vua Na Uy Harald* sẽ chính thức trao giải Abel cho GS *John Milnor*.

LÊ MAI

(*Nguồn: Giáo dục/VietNamnet*)



Cuộc thi VUI HÈ 2011

ĐỢT 1

Mùa hè 2011 đã đến, các bạn hãy cùng đi du lịch với TH&TT qua CUỘC THI VUI HÈ 2011. Cuộc thi này được chia làm hai đợt, để đăng lần lượt trên các số báo 407 (tháng 5.2011) và 408 (tháng 6.2011). Đối tượng dự thi là tất cả các bạn yêu toán trên cả nước. Bạn hãy gửi lời giải ba bài đố vui trong số này về Tòa soạn trước ngày 31.7.2011 và ba bài ở số tiếp theo về Tòa soạn trước ngày 31.8.2011 (theo dấu Bưu điện). Danh sách các bạn đoạt giải sẽ được đăng trong TH&TT số 412 (tháng 10.2011). Dưới đây là các bài của Đợt thứ nhất.

Bài 1. Phân chia tam giác thường ghép thành tam giác cân

Bạn hãy cắt một miếng bìa hình tam giác thành 5 đa giác rồi ghép cả 5 đa giác đó lại (không chờm lên nhau) để tạo thành một tam giác cân, sao cho tam giác cân đó có cạnh đáy bằng chiều cao ngắn nhất của tam giác ban đầu. Biết rằng hai mặt của miếng bìa cùng mầu nên có thể lật mặt dưới lên thành mặt trên.

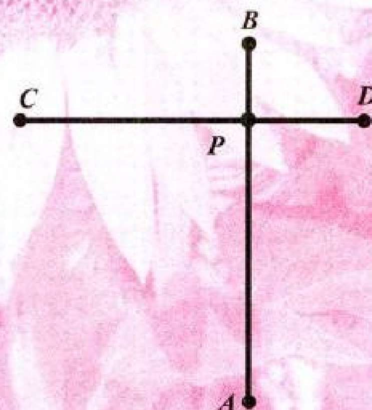
ĐAN QUỲNH

Bài 2. TRANG TRÍ BẰNG ĐÈN BA MÀU

Bạn *Hoa* có 21 bóng đèn gồm ba màu Đỏ, Lam, Tím và mỗi màu có 7 bóng đèn. Bạn *Hoa* muốn xếp các bóng đèn đó theo 7 đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng có đủ ba màu và mỗi màu có 2 bóng đèn, hơn nữa 2 bóng đèn gần nhau nhất trên mỗi đoạn thẳng phải khác màu. Bạn có thể giúp bạn *Hoa* trang trí các đèn màu như thế không ?

AN MINH

Bài 3. KHOẢNG CÁCH NGẮN NHẤT



Bạn *Tuấn* ở địa điểm A và bạn *Tú* ở địa điểm C hẹn gặp nhau ở ngoại ô của Thị xã P để chuẩn bị trại hè cho lớp (hình vẽ).

Bạn *Tuấn* đi xe khách theo tuyến AB với vận tốc 48 km/h, bạn *Tú* đi xe khách theo tuyến CD với vận tốc 36km/h. Biết rằng AB vuông góc với CD, $AP = 46$km, $CP = 38$km và hai xe khách xuất phát cùng một lúc. Hai bạn dự định khi nào hai xe khách gần nhau nhất thì cùng xuống xe rồi đi bộ đến gặp nhau. Bạn hãy xác định khoảng cách gần nhất đó và địa điểm xuống xe của hai bạn *Tuấn* và *Tú*.

GIA LINH

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 407 (5.2011)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN
GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam
NGƯT. NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam
TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Tổng biên tập : TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC**

***Thư kí Tòa soạn : ThS.* HỒ QUANG VINH**

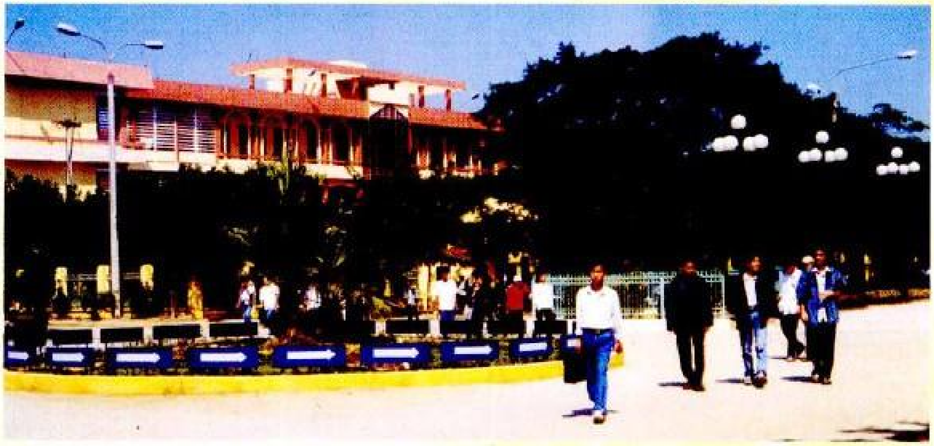
TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* TRẦN HỮU NAM, *PGS. TS.* NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật : MINH THƠ
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG, PHÚ THỌ
niềm tự hào của quê hương Đất Tổ

Hiệu trưởng
HOÀNG VĂN CƯỜNG



Trường THPT chuyên Hùng Vương, với tiền thân là lớp Toán đặc biệt của tỉnh Vĩnh Phú (bao gồm Phú Thọ và Vĩnh Phúc) có từ năm 1965 và đặt tại trường Cấp III Hùng Vương (thị xã Phú Thọ), được chính thức thành lập ngày 22/8/1986 theo Quyết định của UBND tỉnh Vĩnh Phú với 6 lớp chuyên (Toán và Văn) gồm 180 học sinh và 32 cán bộ giáo viên. Ngày 1/9/1994, UBND tỉnh Vĩnh Phú kí quyết định cho phép chuyển trường về phường Tân Dân, Thành phố Việt Trì với diện tích 37000 m^2. Đến nay nhà trường đã có quy mô đào tạo 38 lớp với 1304 học sinh,129 giáo viên (trong đó có 35 thạc sĩ và 1 tiến sĩ) giảng dạy 10 môn chuyên (Toán, Lí, Hoá, Sinh, Tin, Văn, Sử, Địa, Tiếng Anh, Tiếng Pháp).

Được sự quan tâm của các cấp lãnh đạo, sự chỉ đạo sát sao của Sở GD&ĐT Phú Thọ; sự nỗ lực cố gắng vươn lên không ngừng của các thế hệ giáo viên và học sinh nhà trường; sự cổ vũ, động viên và ủng hộ của các tổ chức xã hội trong tỉnh, trong những năm qua nhà trường đã giành được những thành tích rất đáng phấn khởi và tự hào.

HỌC SINH: Tỉ lệ tốt nghiệp THPT luôn đạt 100%, tỉ lệ trúng tuyển vào các trường đại học luôn đạt trên 80% (nếu chỉ tính từ năm học 1993-1994 trở lại đây luôn đạt trên 90%), đoạt 7431 giải học sinh giỏi cấp tỉnh (1827 giải Nhất, 2448 giải Nhì, 1916 giải Ba và 1240 giải KK), 773 giải học sinh giỏi Quốc gia (25 giải Nhất, 175 giải Nhì, 312 giải Ba và 261 giải KK), 8 Huy chương (5 HC Đồng, 2 HC Bạc, đặc biệt em Nguyễn Ngọc Trung đoạt HC Vàng Olympic Toán Quốc tế năm 2010) và 1 giấy khen Olympic Quốc tế và Khu vực; em Nguyễn Phú Sơn đoạt 2 cúp vàng trong cuộc thi "Các nhà sáng tạo trẻ toàn cầu" tại Nhật Bản.

GIÁO VIÊN: 5 giáo viên được Tổng liên đoàn Lao động Việt Nam tặng Bằng Lao động sáng tạo, 4 giáo viên được tặng Huy chương Vì thế hệ trẻ, 4 giáo viên được phong tặng danh hiệu Nhà giáo Ưu tú, hai tổ chuyên môn (Tự nhiên và Văn) được Nhà nước trao tặng Huân chương Lao động hạng Ba.

NHÀ TRƯỜNG được Nhà nước trao tặng các phần thưởng cao quý: Huân chương Lao động Hạng Ba năm 1995, Hạng Nhì năm 1998, Hạng Nhất năm 2002, danh hiệu anh hùng Lao động thời kì đổi mới năm 2004; hai lần được Bộ GD&ĐT tặng Cờ thi đua; hai lần được nhận Cờ thi đua của Chính phủ (năm 1994 và 1999). Công đoàn nhà trường nhiều năm liền được nhận Cờ thi đua của Tổng liên đoàn Lao động Việt Nam. Đoàn TNCS Hồ Chí Minh của trường nhiều lần được tặng Cờ thi đua của Trung ương Đoàn, Cờ thi đua Đơn vị dẫn đầu công tác Đoàn và phong trào thanh niên khối THPT. Nhà trường khởi xướng và là Trưởng ban tổ chức Trại hè Hùng Vương từ năm 2005 đến nay.

Năm học 2010-2011 có nhiều niềm vui đến với nhà trường, đó là có 52 giải học sinh giỏi Quốc gia trên tổng số 57 học sinh dự thi (tỉ lệ 91% - tỉ lệ cao nhất từ trước đến nay), đặc biệt nhà trường lại có em Nguyễn Thành Khang trúng tuyển vào đội tuyển Việt Nam dự thi Olympic Toán Quốc tế tại Hà Lan sắp tới. Với những thành tích giáo dục của nhà trường trong những năm qua, trường THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ thật xứng đáng là niềm tự hào của quê hương Đất Tổ.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT05M1
Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2011
Giá : 8000 đồng
Tám nghìn đồng