Tạp chí online của cộng đồng những người yêu Toán
Epsilon

EPSILON

"Người viết cho rằng hầu hết khái niệm tưởng như trừu tượng đều có cội nguồn ở những thao tác toán học cụ thể và thông dụng. Người viết cũng cho rằng chỉ khi được nâng lên tầm khái niệm, các thao tác toán học mới trở thành những công cụ tư duy thật sự mạnh mẽ"

Phương trình đại số một ẩn số
Ngô Bảo Châu

"Đại số tuyến tính VẠN TUẾ!"

Nghịch đảo Möbius
Ngô Quang Hưng

MATHEMATICS MAGAZINE

No. 2

Phương trình **đại số 1 ẩn số**
Ngô Bảo Châu

Bài toán **Frobenius** về những đồng xu
Trần Nam Dũng

Bài toán **đội nón**
Đặng Nguyễn Đức Tiến

Khám phá toán học thông qua các **định lý hình học.**
Đào Thanh Oai

Laurent Schwartz
Hà Huy Khoái

Giới thiệu đề **Vietnam TST 2015**, bình luận sơ bộ và tóm tắt cách giải.
Trần Nam Dũng

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

13 apr 2015

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu Toán

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu Toán

EPSILON

Chủ biên: TRẦN NAM DŨNG

Biên tập viên: ĐẶNG NGUYỄN ĐỨC TIẾN

VÕ QUỐC BÁ CẨN

TRẦN QUANG HÙNG

LÊ PHÚC LỮ

Số 2, ngày 13 tháng 04 năm 2015

LỜI NGỎ CHO EPSILON SỐ 2

Ban biên tập Epsilon

Epsilon số 1 ra mắt đã được đón nhận một cách nồng nhiệt của bạn đọc. Đó là một niềm động viên lớn lao dành cho Ban biên tập, giúp chúng tôi có thêm năng lượng, nhiệt huyết để bước tiếp trên con đường mà không hẳn chỉ có hoa hồng.

Epsilon đã nhận được một vận tốc ban đầu và một gia tốc. Bé nhưng dương. Với sự đóng góp của cộng đồng, hy vọng Epsilon sẽ giữ được nhịp và đều đặt ra mắt vào ngày 13 các tháng chẵn để phục vụ cộng đồng, đem đến một món ăn tinh thần ý vị trong một cuộc sống đang vẫn rất nhiều những món ăn.

Epsilon mong muốn sẽ là một nhịp cầu để kết nối những đối tượng vốn còn xa cách nhau: lý thuyết và thực tiễn, toán học và các môn khoa học khác, giáo viên và học sinh, các nhà toán học chuyên nghiệp và những người làm toán nghiệp dư, toán hàn lâm và toán giải trí, toán cao cấp và toán sơ cấp. Vì thế, Epsilon sẽ có sự hòa quyện của những bài viết với nội dung và phong cách rất khác nhau. Ban biên tập sẽ tôn trọng cách hành văn của các tác giả mà không áp đặt ý kiến của mình, chỉ chỉnh sửa để cho bài tốt hơn, chính xác hơn.

Epsilon số 2 mà các bạn cầm trên tay sẽ có 12 bài viết của các tác giả đến từ nhiều quốc gia, nhiều thành phần và cấp độ chuyên nghiệp. Kể từ số này, Epsilon sẽ dành những trang viết của mình để giới thiệu về tiểu sử các nhà toán học nổi tiếng thế giới, lần này sẽ là bài viết của GS Hà Huy Khoái về *Loran Schwarz*, nhân kỷ niệm 100 năm ngày sinh của ông và bài viết về thiên tài đoản mệnh *Evariste Galois* song hành với bài viết về *Phương trình đại số* của GS Ngô Bảo Châu. Cầu nối giữa toán học và khoa học máy tính trong số này sẽ được thể hiện bằng bài viết của GS Ngô Quang Hưng, ĐH Buffalo, Mỹ về *nghịch đảo Mobius*. Hình học sơ cấp, môn học vốn được coi là cổ xưa và già cỗi nhất sẽ như lại tươi mới dưới góc nhìn của một người yêu toán nghiệp dư, kỹ sư Đào Thanh Oai trong bài *Phương pháp mở rộng và sáng tạo các định lý hình học cổ điển.*

Các bạn học sinh yêu toán chắc chắn sẽ tìm được nhiều điều bổ ích qua các bài viết về các bài toán thi chọn HSG quốc gia (VMO 2015) và chọn đội tuyển dự IMO 2015 (Vietnam TST 2015) của các tác giả Trần Nam Dũng, Nguyễn Tất Thu, Trần Quang Hùng. Bài bình luận của Nguyễn Văn Lợi (Budapest) và Nguyễn Hùng Sơn (Warsaw) về đề TST cũng sẽ giúp các bạn hiểu rõ hơn về các bài toán trong đề thi. Đặc biệt trong số này sẽ có bài viết *Inequalities, A Journey into Fibonacci and Lucas numbers* của hai tác giả nước ngoài là Vandanjav Adiyasuren và Bold Sanchir đến từ ĐH QG Mông Cổ. Những ai yêu toán học giải trí sẽ được tiếp tục cuộc phiêu lưu kỳ thú vào vương quốc của những chiếc nón đủ màu sắc với người hướng dẫn viên Đặng Nguyễn Đức Tiến (Trento, Italy). Một nhà ảo thuật độc đáo khác là Nguyễn Quốc Khánh sẽ ra mắt bạn đọc một chuyên mục lý thú và bổ ích: Giới thiệu sách.

Hy vọng với những bài viết như thế, mỗi độc giả đều có thể tìm được ít nhất là 10% điều mình yêu thích ở trong số này. Như thế, Ban biên tập đã cảm thấy thật mãn nguyện và cho rằng nhiệm vụ đã hoàn thành.

Và lại đủ năng lượng, nhiệt huyết để tiếp tục bước đi.

Đi nhiều người, bạn sẽ đi rất xa ...

MỤC LỤC

NHÂN 100 NĂM NGÀY SINH LAURENT SCHWARTZ

Hà Huy Khoái

Hà Nội

"*Tôi là nhà toán học. Toán học đầy ắp cuộc đời tôi*".

Laurent Schwartz [1] viết như vậy trong lời mở đầu cuốn hồi ký của ông. Ông cũng nói rằng, ngoài toán học, ông giành rất nhiều thời gian của đời mình cho cuộc đấu tranh vì quyền con người, vì quyền của các dân tộc, ban đầu thì như một người Troskit, sau đó thì đứng ngoài tất cả các đảng phái! Việt Nam chiếm một vị trí quan trọng trong các hoạt động đó của ông. Trong nhiều năm, ông luôn đứng hàng đầu trong đội ngũ những trí thức lớn của Phương Tây đấu tranh ủng hộ cuộc kháng chiến của nhân dân Việt Nam. Trong cuốn hồi ký dày 500 trang của ông, có thể tìm thấy khoảng 100 trang có nhắc đến Việt Nam.

Laurent Schwartz sinh ngày 5 tháng 3 năm 1915 tại Paris. Cha ông là một bác sĩ phẫu thuật, mẹ ông là người yêu thiên nhiên, như ông nói, suốt ngày chỉ quanh quẩn với mảnh vườn và ba đứa con. Tuổi thơ của ông đã trôi qua êm đềm ở làng quê Autouillet, mà ông gọi một cách trìu mến trong hồi ký của mình là "Khu vườn Eden". Mãi sau này, ông vẫn thường xuyên trở về khu vườn đó, và như ông kể lại, những định lý hay nhất của ông được tìm thấy tại khu vườn Eden.

Ngay từ khi còn nhỏ, Laurent Schwartz đã bộc lộ thiên hướng nghiên cứu. Nếu như hầu hết trẻ em hài lòng với những lời giải thích sơ lược của bố mẹ khi chúng hỏi "tại sao?", thì cậu bé Laurent không như vậy. Cậu luôn đòi hỏi những lời giải thích cặn kẽ, mà ít khi được thoả mãn. Mẹ cậu rất lúng túng trước những câu hỏi: Tại sao khi cắm cái gậy vào nước thì thấy nó cong, tại sao trong cùng một nhiệt độ mà không khí lúc thì

[1] Nhà toán học người Pháp (05/03/1915 - 04/07/2002)

lạnh hơn, lúc thì nóng hơn nước, tại sao khi lật úp cái thìa cà phê thì không bao giờ hết cà phê, mà còn một ít dính lại ở thìa, và còn rất nhiều những câu hỏi khác.

Ở các lớp tiểu học, Laurent Schwartz không phải là học sinh giỏi môn toán. Ông rất nhớ lời thầy Thoridenet, người dạy ông môn văn năm lớp 5 từng nói với mẹ ông: "*Tôi chưa có học sinh nào giỏi như vậy về môn tiếng Latinh, nhưng về tiếng Pháp, ngôn ngữ và toán thì cậu ta kém hơn một chút. Tuy vậy, cho dù người ta nói với bà thế nào đi nữa, cậu ta sẽ trở thành nhà toán học!*". Laurent Schwartz nói rằng, nếu không có lời khuyên của ông thầy dạy văn đó thì có lẽ ông đã trở thành nhà ngôn ngữ học, chứ không phải nhà toán học! May mắn nữa cho Laurent là cậu gặp một thầy giáo dạy toán đầy nhiệt tâm, thầy Julien. Ông đã giải thích cho học sinh một cách rất vui vẻ và đơn giản những điều kì diệu của môn hình học, mở ra cho họ một thế giới toán học mà trước đó họ chưa được biết đến. Laurent Schwartz kể, sau khi suy nghĩ vài ba tuần, ông quyết định trở thành nhà toán học. Theo ông, thiên hướng đó có sẵn trong con người ông, nhưng đã trở thành hiện thực nhờ thầy giáo. Vì thế ông cho rằng, vai trò của người thầy đối với tương lai học sinh là có ý nghĩa quyết định.

Laurent Schwartz thi đỗ vào trường Ecole Normale Supérieure (Paris) năm 1934. Ở Ecole Normale, ông được học với những giáo sư nổi tiếng nhất thời bấy giờ: Fréchet, Montel, Borel, Denjoy, Julia, Elie Cartan, Lebesgue và Hadamard. Trong khoá đó, ông cùng với Choquet, Marot là ba người xuất sắc nhất.

Năm 1937, ông tốt nghiệp đại học Ecole Normale, làm nghiên cứu sinh tại trường đại học Strasbourg và bảo vệ luận án Tiến sĩ năm 1943. Giáo sư hướng dẫn luận án của ông là Valiron, một trong những nhà toán học nổi tiếng nhất thời đó về lý thuyết hàm. Vài năm sau, Valiron cũng là người hướng dẫn của giáo sư Lê Văn Thiêm.

Trong các năm 1944 – 1945 ông giảng dạy tại khoa Khoa học ở Grenoble, sau đó chuyển về Nancy, nhận một chức giáo sư ở khoa Khoa học. Chính trong thời gian này, ông sáng tạo ra công trình nổi tiếng về lý thuyết các hàm suy rộng.

Năm 1953 Laurent Schwartz trở về Paris, làm giáo sư cho đến 1959. Ông giảng dạy tại trường Ecole Polytechnique từ 1959 đến

1980, rồi làm việc ở trường Đại học Paris 7 ba năm, cho đến ngày nghỉ hưu năm 1983.

Cống hiến lớn nhất cho toán học của Laurent Schwartz là các công trình của ông về lý thuyết phân bố, được viết vào những năm 40. Những tư tưởng của ông theo hướng này được trình bày lần đầu tiên năm 1948 trong bài "Mở rộng khái niệm hàm, đạo hàm, biến đổi Fourier và các ứng dụng toán học, vật lý".

Lý thuyết phân bố là sự mở rộng đáng kể phép tính tích phân và vi phân. Do nhu cầu của Vật lý học, Heaviside và Dirac đã mở rộng phép tính với các ứng dụng đặc biệt. Tuy nhiên, phương pháp của họ, cũng như những phương pháp tương tự về các phép tính hình thức không được xây dựng trên một nền tảng toán học chặt chẽ. Để những nghiên cứu của họ có thể trở thành một lý thuyết mới thực sự của vật lý học, cần trang bị cho nó một cơ sở toán học vững chắc. Chính Dirac đã có lần nói: *Khi bạn định xây dựng một lý thuyết mới nào trong vật lý, cái duy nhất mà bạn có thể tin tưởng là toán học. Laurent Schwartz đã phát triển một lý thuyết làm cơ sở cho các phương pháp tính toán nêu trên trong vật lý, làm cho những phương pháp đó tìm được ứng dụng hết sức rộng rãi trong những lĩnh vực khác nhau.*

Francois Treves đã nói về công trình của Laurent Schwartz như sau: "*Tư tưởng của Laurent Schwartz đã cho một cách lý giải thống nhất tất cả các hàm suy rộng thâm nhập trong giải tích như là những phiếm hàm tuyến tính liên tục trên không gian các hàm khả vi vô hạn triệt tiêu ngoài một tập compắc. Ông đã cho một cách mô tả có hệ thống và chặt chẽ, hoàn toàn dựa trên giải tích hàm trừu tượng và lý thuyết đối ngẫu. Cũng cần nhắc lại rằng, một cách lý giải như vậy đã có trước đây trong công trình của André Weil về tích phân các nhóm compắc địa phương ... Do sự đòi hỏi của tính khả vi trong lý thuyết phân bố, không gian các hàm thử và đối ngẫu của chúng đôi khi rất phức tạp. Điều này dẫn đến những nghiên cứu sôi nổi về các không gian vector topo không thuộc các phạm trù quen thuộc như không gian Hilbert và không gian Banach. Những nghiên cứu này, đến lượt mình, chiếu rọi những ánh sáng mới lên nhiều lĩnh vực của Giải tích thuần tuý, như Phương trình đạo hàm riêng, hoặc Hàm số biến số phức.*"

Những tư tưởng của Laurent Schwartz có thể áp dụng cho nhiều không gian hàm thử khác nhau, như chính ông và nhiều người khác đã chỉ rõ ... Herald Bohr, người giới thiệu công trình của Laurent Schwartz trong buổi trao Giải thưởng Fields ngày 30 tháng 8 năm 1950 tại Harvard đã mô tả các công trình của Laurent Schwartz viết năm 1948 như sau: "*Chúng chắc chắn sẽ trở thành những công trình kinh điển của toán học thời đại chúng ta ... Tôi nghĩ rằng, những người trích dẫn công trình của ông, cũng giống như tôi, sẽ phải kìm nén một niềm phấn khích dễ chịu, để nhìn thấy sự hài hoà tuyệt vời của một cấu trúc tính toán mà lý thuyết này dẫn chúng ta đến, và để hiểu tầm quan trọng và ưu việt của chúng đối với nhiều phần của giải tích cao cấp, như Lý thuyết phổ, Lý thuyết thế vị, và toàn bộ lý thuyết phương trình đạo hàm riêng.*"

Ngoài giải thưởng Fields, Laurent Schwartz còn nhận được giải thưởng của Viện hàn lâm khoa học Paris các năm 1955, 1964, 1972. Năm 1972 ông được bầu làm Viện sĩ Viện hàn lâm Pháp. Ông được phong tiến sĩ danh dự của nhiều trường đại học, trong đó có Humboldt (1960), Brussels (1962), Lund (1981), Tel-Aviv (1981), Montreal (1985) và Athens (1993).

Không chỉ là nhà toán học nổi tiếng, Laurent Schwartz còn được biết đến như là một trong những trí thức lớn suốt đời đấu tranh vì tự do của các dân tộc. Laurent Schwartz nói rằng, những năm ở Ecole Normale đã xác định hoàn toàn khuynh hướng chính trị của ông: Chống chiến tranh và bảo vệ những giá trị của con người. Cuốn sách "Đông Dương cấp cứu" (Indochine SOS) của Andrée Viollis đã cho ông thấy rõ tội ác của chủ nghĩa thực dân Pháp ở Đông Dương. Quan điểm chính trị của ông thể hiện rõ nhất trong phong trào chống chiến tranh xâm lược của đế quốc Mỹ ở Việt Nam. Ông đề xướng khẩu hiệu "Mặt trận dân tộc giải phóng sẽ chiến thắng" thay cho khẩu hiệu mà ông cho là mơ hồ của phong trào chống chiến tranh Việt Nam ở Pháp thời đó "Hoà bình ở Việt Nam". Hoạt động của Uỷ ban quốc gia Việt Nam do ông sáng lập đã gây được tiếng vang lớn. Ông hết sức tự hào khi vào khoảng lễ Noel năm 1966, nhận được bức điện cám ơn và chúc mừng của Chủ tịch Hồ Chí Minh. Ông đến Việt Nam nhiều lần trong thời kì còn chiến tranh, với tư cách là thành viên trong Toà án quốc tế xét xử tội ác chiến tranh của Mỹ ở Việt Nam (một tổ chức quốc tế do nhà toán học, nhà triết học nổi tiếng người Anh, giải thưởng Nobel về văn học năm 1950, huân tước Bertrand Russell sáng lập). Những chuyến đi về các làng quê Việt Nam đã làm cho ông thấy yêu mến đặc biệt đất nước và con người Việt Nam. Không gì có thể nói đầy đủ hơn tình cảm của ông với Việt Nam bằng chính những lời ông viết trong hồi ký của mình: "*Việt Nam đã ghi dấu ấn trong cuộc đời tôi. Tôi từng biết đến Đông Dương thuộc địa, qua cuốn sách của André Viollis viết năm* 1931, *mà tôi đọc năm* 1935. *Lúc đó tôi vừa tròn* 20 *tuổi. Cuộc đấu tranh của tôi cho tự do của đất nước này là cuộc đấu tranh dài nhất của cuộc đời tôi. Tôi đã yêu, và mãi mãi yêu Việt Nam, những phong cảnh, những con người tuyệt vời, những chiếc xe đạp. Trong tôi, có một chút nào đó là người Việt Nam. Gặp người Việt Nam, nghe tiếng họ nói chuyện với nhau trong xe buýt (mà tất nhiên là tôi không hiểu), tôi cảm thấy một niềm hạnh phúc không cắt nghĩa được. Sợi giây tình cảm đã nối liền tôi với đất nước này.*"

Năm 1998, khi Viện Toán học tổ chức Hội nghị quốc tế nhân 80 năm ngày sinh của Giáo sư Lê Văn Thiêm, Laurent Schwartz đã rất xúc động thông báo cho Ban tổ chức rằng ông rất muốn sang Việt Nam thêm một lần nữa, nhưng tiếc là sức khoẻ không cho phép. Khi ông qua đời năm 2002, tờ Thông tin toán học của Hội toán học Việt Nam có đăng một bài viết để tưởng nhớ ông. Dường như ông biết trước điều đó, nên đã viết trong hồi kí của mình: "*Les Vietnamiens ne m'oublient pas*" (Người Việt Nam không quên tôi).

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ MỘT ẨN SỐ

Ngô Bảo Châu

Đại học Chicago, Mỹ

Tóm tắt

Từ thế kỷ 20 trước Công nguyên, người dân thành Babylon đã biết giải phương trình bậc hai. Nhưng phải đến thế kỷ 16 sau Công nguyên, các nhà toán học của thời Phục hưng: Tartaglia, Cardano, Ferrari, mới tìm ra lời giải cho phương trình bậc ba và bậc bốn. Đầu thế kỷ 19, Abel và Galois, hai thiên tài toán học bạc mệnh, chứng minh nghiệm của phương trình đại số tổng quát bậc từ năm trở đi, không thể biểu diễn được như một biểu thức đại số với căn thức như trong trường hợp đa thức bậc không quá bốn. Công trình của Galois, viết ra như lời trăng trối trước giờ đấu súng, sau đó được xem như mốc khai sinh của Đại số hiện đại.

Lý thuyết Galois hiện đại được phát biểu trên cơ sở các khái niệm mở rộng trường và nhóm Galois. Những khái niệm này không dễ nắm bắt. Mục đích của bài viết này là giúp những người mới học nắm bắt những khái niệm đó, thông qua việc tìm hiểu mô thức mà chúng xuất hiện trong quá trình tìm nghiệm của những phương trình đại số cụ thể.

Người viết cho rằng hầu hết khái niệm tưởng như trừu tượng đều có cội nguồn ở những thao tác toán học cụ thể và thông dụng. Người viết cũng cho rằng chỉ khi được nâng lên tầm khái niệm, các thao tác toán học mới trở thành những công cụ tư duy thật sự mạnh mẽ. Câu chuyện sắp kể về ý thuyết Galois có thể xem như một minh chứng.

Để hiểu bài viết này, người đọc cần một số kiến thức cơ bản về đại số tuyến tính, trong đó đặc biệt quan trọng là khái niệm chiều của không gian vector.

1. Lịch sử của bài toán

Vào thế kỷ thứ bảy trước công nguyên, lời giải cho phương trình bậc hai tổng quát
$$x^2 + ax + b = 0, \tag{3.1}$$
đã được nhà toán học Brahmagupta, người Ấn độ, trình bày một cách tường minh ở dạng
$$x = \frac{-a \pm \sqrt{d}}{2}, \tag{3.2}$$
với $d = a^2 - 4b$ là biệt thức của phương trình bậc hai.

Trước đó, từ khoảng thế kỷ 20 trước công nguyên, người Babylon đã tìm lời giải hình học cho bài toán tương đương tìm hai cạnh của hình chữ nhật biết trước chu vi và diện tích của nó. Dấu vết của những phương pháp hình học khác nhau để giải phương trình bậc hai đã được phát hiện trong hầu hết các nền văn minh cổ đại từ Babylon, Ai cập, Hy lạp, Ấn độ, Trung Hoa ...

Phương trình bậc ba tổng quát cũng được người Babylon nghiên cứu. Người Hy lạp cổ đại đã thử xây dựng nghiệm phương trình bậc ba bằng thước kẻ và compa nhưng không thành công.

Nhà toán học Trung Hoa Wang Xiaotong đưa ra lời giải cho 27 phương trình bậc ba khác nhau, nhưng không đưa ra phương pháp để giải phương trình bậc ba tổng quát.

Đáng kể nhất là phát hiện của nhà thơ người Ba tư Omar Khayyam sống vào thế mười một. Ông chứng minh rằng nghiệm có thể xây dựng nghiệm phương trình bậc ba bằng cách lấy giao hai đường conic. Ngoài ra, ông phát biểu rằng không thể xây dựng nghiệm phương trình bậc ba chỉ bằng thước kẻ và compa. Omar Khayyam không đưa ra một công thức cho nghiệm của phương trình bậc ba giống như công thức (3.2) cho phương trình bậc hai.

Phải chờ đến thời kỳ phục hưng, nhà toán học Tartaglia, sống ở Ý vào thế kỷ thứ mười sáu, mới đưa ra công thức tổng quát đầu tiên cho nghiệm của phương tình bậc ba
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{3.3}$$
ở dạng
$$x = -\frac{1}{3a}\left(b + C + \frac{\Delta_0}{C}\right), \tag{3.4}$$

trong đó

$$C = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}}, \tag{3.5}$$

với Δ_0, Δ_1 là các đa thức tường minh với biến số a, b, c, d.

Lời giải cho phương trình bậc ba quả là rắc rối, nhưng lời giải cho phương trình bậc bốn của Ferrari còn rắc rối hơn nhiều.

Nhà toán học Joseph Lagrange, người Ý, là người đưa ra một phương pháp chung để giải cả phương trình bậc ba và bậc bốn. Phương pháp của Lagrange dựa trên khái niệm giải thức mà chúng ta sẽ xem xét kỹ lưỡng.

Ruffini đã nghiên cứu phương pháp của Lagrange và nhận thấy rằng nó không thể mở rộng ra cho phương trình có bậc năm và bậc cao hơn nữa.

Abel là người đầu tiên đưa ra chứng minh chặt chẽ và khẳng định phương trình bậc năm tổng quát không thể giải được bằng căn thức. Định lý Abel-Ruffini cũng được Galois, một nhà toán học người Pháp, chứng minh một cách độc lập. Nhưng ông đi xa hơn Abel và đưa ra một khái niệm có tính chất cách mạng, đó là nhóm Galois.

2. Về phát biểu của bài toán

Bài toán ta quan tâm chính là việc biểu diễn nghiệm của phương trình đa thức

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots = 0, \tag{3.6}$$

dưới dạng một biểu thức với biến số a_0, a_1, $\ldots$, mà trong đó ta được quyền dùng bốn phép toán thông thường và căn thức.

Để hiểu rõ thế nào là biểu diễn được dưới dạng một biểu thức như thế, ta sẽ cần khái niệm trường và mở rộng trường. Ví dụ như các biểu thức với biến số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mà chỉ dùng bốn phép toán thông thường và với hệ số hữu tỉ, là trường sinh ra bởi $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Câu hỏi biểu diễn nghiệm bằng căn thức thực ra vẫn không chuẩn. Thật vậy phương trình bậc n có thể có tới n nghiệm cho nên để hết mập mờ cần làm rõ ta muốn biểu diễn nghiệm nào trong số n nghiệm đó. Dĩ nhiên trong công thức (3.2), dấu $\pm$ cho phép ta biểu diễn cả nghiệm của (3.1). Trong khi đó, công thức của Tartaglia (3.5) dường như cho ta sáu nghiệm khác nhau của phương trình bậc ba, cái rõ ràng là không thể.

Thực ra ta không có cách nào để chọn một trong n nghiệm của phương trình (3.6). Khái niệm nhóm Galois sinh ta chính là để lượng hoá sự mập mờ này. Ngược lại, như ta sẽ phân tích, cấu trúc của nhóm Galois sẽ quyết định việc phương trình (3.6) có thể giải được bằng căn thức hay không.

3. Mở rộng bậc hai

Để giải phương trình bậc hai (3.1), ta thực hiện phép đổi biến $y = x + \frac{a}{2}$. Sau khi đổi biến, phương trình (3.1) để quy về dạng đơn giản hơn

$$y^2 - d = 0. \tag{3.7}$$

Ta có thể coi đây là một cái mẹo để quy phương trình bậc hai tổng quát (3.1) về phương trình bậc hai rút gọn (3.7).

Ta cũng có thể thay đổi quan điểm: Không quan tâm đến việc tìm ra dạng chính xác (3.2) của nghiệm nữa, mà chỉ quan tâm đến việc nghiệm có thể biểu diễn dưới dạng biểu thức đại số của $\sqrt{d}$. Lập luận có thể sẽ phức tạp hơn, nhưng sẽ mở ra cho ta một tầm nhìn mới.

Để làm đơn giản vấn đề, giả sử các hệ số a, b là số hữu tỉ. Ta biết rằng trong $\mathbb{C}$, phương trình (3.1) có hai nghiệm. Ta sẽ ký hiệu $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ là một trong hai nghiệm của nó. Giả sử $\alpha_1 \notin \mathbb{Q}$, khi đó tập các số phức có dạng

$$L = \{m + n\alpha_1 \mid m, n \in \mathbb{Q}\},$$

là một không gian vector hai chiều trên $\mathbb{Q}$. Từ đẳng thức

$$\alpha_1^2 = -(a\alpha_1 + b),$$

ta suy ra rằng nếu $u, v \in L$ thì $uv \in L$. Ta cũng có thể chứng minh rằng nếu $u \in L - \{0\}$, thì $u^{-1} \in L$. Như vậy L là một trường con của $\mathbb{C}$. Nếu xem như không gian vector trên $\mathbb{Q}$, nó có chiều bằng 2. Vì thế ta nói rằng L là một mở rộng bậc hai của $\mathbb{Q}$.

Ta để ý thấy nghiệm còn lại, ký hiệu là α_2, của đa thức

$$P = x^2 + ax + b,$$

cũng nằm trong L. Thật vậy, đa thức bậc hai P đã có một nghiệm $\alpha_1 \in L$, nghiệm còn lại α_2 cũng phải nằm trong L và cũng không là số hữu tỉ. Nói cách khác, mở rộng bậc hai sinh bởi α_1, trùng với mở rộng bậc hai sinh bởi α_2

$$\{m + n\alpha_2 \mid m, n \in \mathbb{Q}\}.$$

Suy từ (3.2) ra thì cả mở rộng bậc hai sinh bởi α_1 hay α_2 đều trùng với mở rộng bậc hai sinh bởi căn bậc hai của biệt thức

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{m + n\sqrt{d} \mid m, n \in \mathbb{Q}\}. \tag{3.8}$$

Đây cũng là một cách để diễn đạt việc cả α_1 và α_2 đều có thể viết được dưới dạng có dạng $m + \sqrt{d}$ với $m, n \in \mathbb{Q}$.

Định lý 3.1. *Cho* $P \in \mathbb{Q}[x]$ *là một đa thức bậc hai bất khả quy,* L *là mở rộng bậc hai của* $\mathbb{Q}$ *sinh bởi một trong các nghiệm của* P*. Khi đó* $L = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ *với* $d = a^2 - 4b$.

Dễ thấy rằng, nếu L là mở rộng bậc hai của $\mathbb{Q}$, khi đó mỗi phần tử $\alpha \in L - \mathbb{Q}$ là nghiệm của một phương trình bất khả quy bậc hai nào đó. Vì thế ta có thể phát biểu lại định lý trên ở dạng cô đọng hơn:

Định lý 3.2. *Mọi mở rộng bậc hai của* $\mathbb{Q}$ *đều có dạng* $L = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ *với* d *là một số hữu tỉ nào đó.*

Mở rộng ra phương trình bậc cao hơn, ta có thể định nghĩa rành rọt khái niệm phương trình giải được bằng căn thức.

4. Phương trình giải được bằng căn thức

Từ nay trở đi, ta sẽ thay trường các số hữu tỉ bởi một trường K bất kỳ. Thay cho trường các số phức, ta cho trước một trường đóng đại số chứa K. Xin nhắc lại rằng trường $\overline{K}$ được gọi là đóng đại số nếu mọi đa thức $P \in \overline{K[x]}$ bậc n đều có đúng n nghiệm trong $\overline{K}$, nếu ta đếm cả bội. Ta sẽ chỉ xét tới các mở rộng của K chứa trong $\overline{K}$.

Đa thức bậc n

$$P = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in K[x],$$

được gọi là **bất khả quy** nếu nó không thể phân tích được thành tích của hai đa thức có bậc nhỏ hơn. Giả sử P là một đa thức bậc n bất khả quy. Với mỗi nghiệm $\alpha \in \overline{K}$ của P, ta đặt

$$K[\alpha] = \{m_0 + m_1\alpha + \cdots + m_{n-1}\alpha^{n-1} \mid m_0, \ldots, m_{n-1} \in K\}. \tag{3.9}$$

Sử dụng đẳng thức $\alpha^n = -(a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n)$, ta chứng minh được rằng nếu $u, v \in K[\alpha]$ thì $uv \in K[\alpha]$. Ngoài ra, nếu $u \in K[\alpha] - \{0\}$ thì $u^{-1} \in K[\alpha]$. Nói cách khác, $K[\alpha]$ là một trường con của $\overline{K}$. Sử dụng giả thiết P là đa thức bất khả quy, ta chứng minh được rằng $K[\alpha]$, xem như không gian vector trên trường K, có chiều bằng n. Nói cách khác, $K[\alpha]$ là một mở rộng bậc n của K.

Ta nói nghiệm α có thể **biểu diễn được bằng biểu thức đại số với căn thức** nếu tồn tại một chuỗi mở rộng trường liên tiếp

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_r, \tag{3.10}$$

sao cho với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, K_i là một mở rộng bậc n_i của K_{i-1} có dạng

$$K_i \simeq K_{i-1}[x]/(x^{n_i} - \beta_i),$$

và sao cho $K[\alpha] \subset K_r$.

Khái niệm mở rộng trường đã cho phép ta phát biểu rành rọt câu hỏi liệu nghiệm α của P có thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp đại số và căn thức hay không. Nó còn cho phép ta đặt ra những câu hỏi khác, sâu sắc hơn, về nghiệm của đa thức.

5. Phụ thuộc đại số giữa các nghiệm

Như ở trên, ta vẫn ký hiệu $P \in K[x]$ là một đa thức bất khả quy bậc n, và α là một nghiệm của P trong $\overline{K}$, $K[\alpha]$ là mở rộng bậc n của K bao gồm các tổ hợp đại số của α như (3.9).

Khác với trường hợp bậc 2, khi $n \geqslant 3$, nếu α_1 và α_2 là hai nghiệm khác nhau của P, các trường con $K[\alpha_1]$ và $K[\alpha_2]$ của $\overline{K}$, có thể là khác nhau, như ta thấy trong ví dụ sau đây.

Xét trường hợp $K = \mathbb{Q}$ và đa thức $P = x^3 - 2$. Nếu $\alpha \in \overline{K}$ là một nghiệm của P thì hai nghiệm còn lại sẽ là $j\alpha$ và $j^2\alpha$. Ở đây ta sử dụng ký hiệu

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, \tag{3.11}$$

là căn bậc ba nguyên sơ của đơn vị. Dễ thấy $\mathbb{Q}[\alpha] \neq \mathbb{Q}[j\alpha]$ vì nếu dấu bằng xảy ra thì ta sẽ có $j \in \mathbb{Q}[\alpha]$. Mặt khác, mở rộng $\mathbb{Q}[j]$ là mở rộng bậc 2 của $\mathbb{Q}$ vì j là nghiệm của đa thức bậc hai x^2+x+1, cho nên nó không thể nằm trong một mở rộng bậc ba. Thật vậy, nếu $\mathbb{Q}[j] \subset \mathbb{Q}[\alpha]$ thì $\mathbb{Q}[\alpha]$ sẽ là một không gian vector trên trường $\mathbb{Q}[j]$, cho nên chiều của nó như không gian vector trên $\mathbb{Q}$ phải là một số chẵn. Trong trường hợp này, các mở rộng bậc ba ứng với 3 nghiệm của $P = x^3 - 2$ là đôi một khác nhau:

$$\mathbb{Q}[\alpha] \neq \mathbb{Q}[j\alpha] \neq \mathbb{Q}[j^2\alpha]. \tag{3.12}$$

Khi $K = \mathbb{Q}[j]$, $P = x^3 - 2$ vẫn là đa thức bậc ba bất khả quy trong $K[x]$. Nhưng khi đó các mở rộng bậc ba của K ứng với 3 nghiệm của $P = x^3 - 2$ là trùng nhau:

$$K[\alpha] = K[j\alpha] = K[j^2\alpha]. \tag{3.13}$$

Ta nhận thấy ở trường hợp đầu, α và $j\alpha$ không phụ thuộc đại số với nhau so với trường cơ sở $K = \mathbb{Q}$. Nói cách khác $j\alpha$ không thể biểu diễn được như tổ hợp đại số của α với hệ số hữu tỉ. Tuy vậy, nếu ta mở rộng trường cơ sở thành $K = \mathbb{Q}[j]$, thì α và $j\alpha$ trở nên phụ thuộc đại số.

Ví dụ này đưa ta đến với khái niệm trường phân rã của một đa thức bất khả quy. Trường phân rã của một đa thức là công cụ để đo sự phụ thuộc đại số giữa các nghiệm của nó. Trường phân rã sẽ lớn nếu các nghiệm có ít quan hệ đại số, trường phân rã sẽ nhỏ nếu các nghiệm có nhiều quan hệ đại số.

Đa thức bất khả quy $P \in K[x]$ bậc n được gọi là **tách được** nếu nó có n nghiệm đôi một khác nhau trong $\overline{K}$. Trong trường hợp đặc số không, mọi đa thức bất khả quy đều tách được. Trong trường hợp đặc số $p > 0$, có những đa thức bất khả quy nhưng không tách được. Trong bài này, ta sẽ chỉ xét đến những đa thức bất khả quy tách được.

Cho $P \in K[x]$ là một đa thức bất khả quy bậc n tách được có hệ số đầu bằng một. Ta ký hiệu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \overline{K}$ là các nghiệm của P, và gọi **trường phân rã** của K là trường con của $\overline{K}$ sinh bởi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Trong vành đa thức $L[x]$, đa thức P phân rã hoàn toàn

$$P = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n),$$

thành tích các thừa số bậc một.

Để làm rõ ý này, ta thực hiện một khảo sát. Ký hiệu L là trường phân rã của P, khi đó L là trường con cực tiểu chứa tất cả các trường con $K[\alpha_1]$, $K[\alpha_2]$ $\ldots$, $K[\alpha_n]$, còn gọi là compositum của $K[\alpha_1]$, $K[\alpha_2]$ $\ldots$, $K[\alpha_n]$. Ký hiệu L_i là compositum của $K[\alpha_1]$, $K[\alpha_2]$ $\ldots$, $K[\alpha_n]$, khi đó ta có chuỗi mở rộng trường liên tiếp

$$K = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = L.$$

Ký hiệu l_i là bậc của mở rộng L_i/L_{i-1}. Trường phân rã L là mở rộng bậc $l_1 l_2 \ldots l_n$ của K. Các số nguyên l_1, l_2, $\ldots$, l_n phản ánh mức độ phụ thuộc đại số giữa các nghiệm α_1, α_2, $\ldots$, α_n. Ta có thể khảo sát chúng tuần tự như sau

- Vì P là một đa thức bất khả quy bậc n cho nên L_1 là mở rộng bậc $l_1 = n$ của L_0.
- Xét mở rộng tiếp theo L_2/L_1. Đa thức P xem như phần tử của $L_1[x]$ không còn bất khả quy nữa, mà có thể phân tích được thành
$$P = (x - \alpha_1)Q.$$
Thành phần Q có thể là đa thức bất khả quy, có thể không.
- Nếu Q là một đa thức bất khả quy, bậc $n - 1$, thì L_2 sẽ là một mở rộng bậc $l_2 = n - 1$ của L_1. Trong trường hợp này, α_1 và α_2 không có quan hệ đại số gì với nhau.
- Nếu $Q \in L_1[x]$ không phải đa thức bất khả quy, ta có thể phân tích nó thành $Q = Q_2 Q_3$ với Q_2 là đa thức bất khả quy có nghiệm là α_2. Khi đó L_2 là mở rộng của L_1 có bậc l_2 bằng với bậc của đa thức Q_2. Trong trường hợp này α_1 và α_2 có phụ thuộc đại số.
- Tiếp tục với mở rộng $L_3/L_2 \ldots$

Qua khảo sát này ta thấy $l_1 > l_2 > \cdots$ là một dãy số nguyên giảm thật sự và từ đó suy ra $l_1 \cdots l_n \leqslant n!$. Dãy số này đo **mức độ phụ thuộc đại số** giữa các nghiệm α_1, α_2, $\ldots$, α_n của P.

6. Nhóm Galois của một đa thức

Cho $P \in K[x]$ là một đa thức bất khả quy bậc n tách được. Nghiệm của nó trong $\overline{K}$ là α_1, α_1, $\ldots$, α_n đôi một khác nhau.

Ta ký hiêu L là trường phân rã, trường con của $\overline{K}$ sinh ra bởi $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Nhóm Galois $\Gamma_{L/K}$ là nhóm các tự đẳng cấu mở rộng L/K : Các tự đẳng cấu của mở rộng L/K là các song ánh $\sigma : L \to L$ bảo toàn cấu trúc vành và cấu trúc không gian vector của L trên trường K. Nếu không có nguy cơ nhầm lẫn, ta viết giản lược chỉ số và ngầm hiểu $\Gamma = \Gamma_{L/K}$. Để nhấn mạnh sự phụ thuộc vào P, chúng ta cũng sẽ gọi Γ là nhóm Galois của đa thức P.

Cho $\sigma \in \Gamma$ và $\alpha \in L$ là một nghiệm của P, khi đó $\sigma(\alpha)$ cũng là một nghiệm của P. Vì vậy nhóm Galois Γ tác động lên tập hợp các nghiệm của P. Với ký hiệu đã chọn $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, các nghiệm của P đã được đánh số, tác động của Γ lên chúng được cho bởi đồng cấu nhóm

$$\rho_P : \Gamma \to \Upsilon_n$$

vào trong nhóm các hoán vị cấp n.

Định lý 6.1. *Đồng cấu* $\rho_P : \Gamma \to \Upsilon_n$ *là đơn ánh. Tác động của* Γ *lên tập* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *là tác động bắc cầu. Số phần tử của* Γ *đúng bằng với bậc của mở rộng* L/K.

Chứng minh khẳng định thứ nhất không khó. Nếu σ nằm trong hạch của ρ_P, thì $\sigma(\alpha_i) = \alpha_i$ với mọi nghiệm của P. Trong hoàn cảnh này, σ tác động tầm thường lên toàn bộ L vì L được sinh ra bởi $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Chứng minh khẳng định thứ hai và thứ ba khó hơn một chút. Trước hết ta chứng minh rằng mọi đồng cấu K - đại số $\xi : L \to \overline{K}$ đều có ảnh là L. Thật vậy mọi đồng cấu như vậy đều bảo toàn tập $\{\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, mà tập này sinh ra L, cho nên $\xi(L) = L$. Như vậy ta đã chứng minh rằng

$$\mathrm{Aut}_K(L) = \mathrm{Hom}_K\left(L, \overline{K}\right) \tag{3.14}$$

Để chứng minh khẳng định thứ ba, ta chỉ còn cần chứng minh rằng

$$\left|\mathrm{Hom}_K\left(L, \overline{K}\right)\right| = \deg_K(L). \tag{3.15}$$

Một mở rộng hữu hạn L của K gọi là **mở rộng tách được** nếu nó thoả mãn tính chất này.

Nếu $L = K[x]/P$ với $P \in K[x]$ là một đa thức bất khả quy bậc n tách được thì L là mở rộng tách được. Thật vậy, trong trường hợp này, cho một đồng cấu $\sigma : L \to \overline{K}$ tương đương với cho $\sigma(x)$ là một nghiệm của P trong $\overline{K}$ và có đúng n nghiệm khác nhau như vậy.

Có thể chứng minh được rằng compositum của mở rộng tách được $K_1, K_2, \ldots, K_n$ với $K \subset K_i \subset \overline{K}$ là mở rộng tách được. [1] Vì thế, trường phân rã của một đa thức tách được là một mở rộng tách được.

Ta quay lại chứng minh khẳng định thứ hai: Tác động của Γ lên tập các nghiệm $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ là tác động bắc cầu. Ta sẽ chứng minh tồn tại $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L)$ sao cho $\sigma(\alpha_1) = \alpha_2$. Trước hết ta có đẳng cấu $\overline{\sigma} : K[\alpha_1] \to K[\alpha_2]$ cho bởi $\alpha_1 \mapsto \alpha_2$ vì α_1 và α_2 có cùng đa thức cực tiểu là P. Ta cần chứng minh rằng $\overline{\sigma}$ có thể thác triển thành một tự đẳng cấu $\sigma : L \to L$.

Để kết thúc chứng minh, ta cần sử dụng thêm một tính chất nữa của mở rộng tách được: Nếu L/K là một mở rộng tách được, thì tồn tại $\beta \in L$ là phần tử sinh của L. Nói cách khác tồn tại $\beta \in L$ sao cho $L = K[\beta]$. [2]

Mở rộng $L/K[\alpha_1]$ cũng là mở rộng tách được, cho nên tồn tại $\beta_1 \in L$ sao cho $L = K[\alpha_1][\beta_1]$. Ta có thể phát triển

$$\overline{\sigma} : K[\alpha_1] \to K[\alpha_2],$$

thành một đồng cấu có dạng

$$\sigma : K[\alpha_1][\beta_1] \to K[\alpha_2][\beta_2],$$

với $\beta_2 \in \overline{K}$ được lựa chọn thích hợp. Sử dụng (3.14), ta có

$$K[\alpha_2][\beta_2] = L,$$

và σ là một tự đẳng cấu của L như ta mong muốn.

Ta có thể tóm tắt các thông tin trong mục này như sau. Mỗi đa thức bất khả quy P ứng một nhóm Galois Γ. Nếu các nghiệm của P trong $\overline{K}$ được đánh số thì có thể coi Γ như một nhóm con của nhóm đối xứng cấp n, có tác động bắc cầu lên tập $\{1, 2, \ldots, n\}$. Số phần tử của Γ đúng bằng bậc của trường phân rã.

[1] Xem chứng minh trong sách Algebra của Lang.
[2] Xem chứng minh trong sách Algebra của Lang.

7. Tương ứng Galois

Như ta đã thấy trong mục trước, nếu L là trường phân rã của đa thức bất khả quy tách được $P \in K[x]$, thì mở rộng L/K có tính chất số phần tử của nhóm $\mathrm{Aut}_K(L)$ đúng bằng với bậc của mở rộng. Mở rộng L/K được gọi là mở rộng Galois nếu tính chất này được thoả mãn. Trường phân rã của một đa thức bất khả quy luôn luôn là mở rộng Galois.

Mở rộng L/K gọi là mở rộng tách được nếu tồn tại một đa thức bất khả quy $P \in K[x]$ tách được sao cho $L \simeq K[x]/(P)$, tất nhiên có thể có nhiều đa thức P như thế. Dễ thấy nếu $L = K[x]/(P)$ là mở rộng tách được như trên và là mở rộng Galois, thì L là trường phân rã của P. Nói cách khác mở rộng Galois là trường phân rã của một đa thức nào đó. Mặt khác, nó có thể đồng thời là trường phân rã của nhiều đa thức khác nhau.

Không phải mở rộng nào cũng là mở rộng Galois. Quay lại ví dụ (3.12) mở rộng bậc ba $\mathbb{Q}[\alpha]$ của $\mathbb{Q}$, với α là một nghiệm của $x^3 - 2$. Nếu $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\alpha])$ thì $\sigma(\alpha)$ cũng phải là một nghiệm của $x^3 - 2$. Theo (3.12) thì σ không thể là một tự đẳng cấu của $\mathbb{Q}[\alpha]$ trừ trường hợp $\sigma = 1$.

Nói cách khác $\mathbb{Q}[\alpha]$ không phải biểu diễn Galois.

Ngược lại, theo (3.13) thì $K[\alpha]/K$ là mở rộng Galois với $K = \mathbb{Q}[j]$ với j là căn nguyên sơ bậc ba của đơn vị (3.11). Tổng quát hơn

Định lý 7.1. *Nếu $x^n - a \in K[x]$ là một đa thức bất khả quy tách được, khi đó nếu K chứa căn nguyên sơ bậc n của đơn vị, thì với mọi nghiệm $\alpha \in \overline{K}$ của đa thức $x^n - a$, mở rộng $L = K[\alpha]$ của K là mở rộng Galois.*

Các mở rộng trung gian giữa K và L có thể được phân loại dựa vào Γ. Đây thường được coi là mệnh đề quan trọng nhất trong lý thuyết Galois, và được gọi **tương ứng Galois**. Vấn đề cái gì quan trọng nhất luôn luôn có thể bàn cãi.

Định lý 7.2. *Mỗi mở rộng trung gian $K \subset L' \subset L$ ứng với một nhóm con Γ' của Γ bao gồm các phần tử $\gamma \in \Gamma$ tác động lên L như một ánh xạ L'-tuyến tính. Tương ứng ngược lại được cho bởi $L' = L^{\Gamma'}$. Hơn nữa, L' là mở rộng Galois của K khi và chỉ khi Γ' là nhóm con chuẩn tắc của Γ.* [3]

[3] Nhóm con $\Gamma' \subset \Gamma$ được gọi là nhóm con chuẩn tắc nếu với mọi $\gamma \in \Gamma$, ta có $\gamma\Gamma'\gamma^{-1} = \Gamma'$.

Trong trường hợp đó, ta có $\Gamma_{L'/K} = \Gamma/\Gamma'$.

Trong mục 5, ta đã khảo sát trường phân rã L của một đa thức bất khả quy $P \in K[x]$ thông qua chuỗi mở rộng liên tiếp

$$K = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n = L,$$

với L_i là compositum của $K[\alpha_1]$, $K[\alpha_2]$, ..., $K[\alpha_i]$. Chuỗi mở rộng tương ứng với chuỗi các nhóm con của Γ

$$\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \cdots \supset \Gamma_n = 0. \tag{3.16}$$

Có thể chứng minh được rằng $\Gamma_i = \Gamma \cap \Upsilon_{n-i}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$, trong đó Υ_{n-i} là nhóm con các phần tử của Υ_n cố định các phần tử $1, 2, \ldots, i$ trong tập $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Các nhóm con $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ nói chung không phải là nhóm con chuẩn tắc của Γ, và $L_1, L_2, \ldots$ không phải là mở rộng Galois của K. Trong một mục sau, mục 8, chúng ta sẽ khảo sát kỹ trường hợp chuỗi mở rộng Galois.

8. Tiêu chuẩn để giải được phương trình bằng căn thức

Xét ví dụ cho bởi chuỗi các mở rộng căn thức như ở (3.10)

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_r, \tag{3.17}$$

với $K_i \simeq K_{i-1}[x]/(x^{n_i} - \beta_i)$. Giả thiết rằng K chứa các căn nguyên sơ của đơn vị bậc $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Khi đó với mọi i, K_i là mở rộng Galois của K_{i-1}, và từ đó ta có thể suy ra K_r là mở rộng Galois của K. Ký hiệu $\Gamma_i = \Gamma_{K_r/K_i}$, ta sẽ có chuỗi các nhóm con chuẩn tắc như sau:

$$\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \cdots$$

với

$$\Gamma_{i-1}/\Gamma_i = \Gamma_{K_i/K_{i-1}} \simeq \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}.$$

Nói cách khác, nhóm Γ là nhóm giải được.

Định lý 8.1. *Cho $P \in K[x]$ là một đa thức bất khả qui bậc n tách được với hệ số trong trường K có căn nguyên sơ của đơn vị ở mọi cấp $r \leqslant n$. Điều kiện cần và đủ để nghiệm của P có thể biểu diễn như một biểu thức đại số với căn thức là nhóm Galois của P là nhóm giải được.*

Cho $\alpha \in \overline{K}$ là một nghiệm của P. Như đã phân tích trong mục 4, α biểu diễn được dưới dạng biểu thức đại số có căn thức tương đương với việc tồn tại một chuỗi mở rộng liên tiếp như (3.17), với $K_i \simeq K_{i-1}[x]/(x^{n_i} - \beta_i)$, và $K[\alpha] \subset K_r$. Vì trường phân rã L của P là mở rộng Galois nhỏ nhất chứa $K[\alpha]$ cho nên:

$$K \subset L \subset K_r.$$

Điều này kéo theo $\Gamma_P = \Gamma_{L/K}$ là thương của Γ. Với điều kiện trường cơ sở Γ chứa đủ căn nguyên sơ của đơn vị, ta đã chỉ ra ở trên là Γ là nhóm giải được. Vì vậy nhóm Galois Γ_P của đa thức P cũng là nhóm giải được. Γ_P là nhóm giải được là điều kiện cần để α biểu diễn được như một biểu thức đại số với căn thức.

Để chứng minh điều kiện này cũng là điều kiện đủ, ta cần chứng minh rằng nếu K là một trường có nghiệm nguyên sơ cấp n của đơn vị và nếu L/K là mở rộng Galois có nhóm Galois đẳng cấu với $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, thì tồn tại $\beta \in K$ để sao cho

$$L \simeq K[x]/(x^n - \beta).$$

Giả sử mở rộng L là trường phân rã của một đa thức bất khả qui $P \in K[x]$ có bậc n. Nếu $\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ là các nghiệm của P ở trong $\overline{K}$ thì L là mở rộng của K sinh bởi các nghiệm này.

Chọn một phần tử sinh σ của nhóm Galois $\Gamma_{L/K} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Vì tác động của $\Gamma_{L/K}$ lên tập $\alpha_1, , \alpha_1, \dots, \alpha_n$ là tác động bắc cầu, cho nên σ tương ứng với một hoán vị n - chu trình. Ta có thể giả sử

$$\sigma(\alpha_1) = \alpha_2,\ \sigma(\alpha_2) = \alpha_3,\ \dots, \sigma(\alpha_n) = \alpha_1.$$

Chọn $\zeta \in K$ là một căn nguyên sơ cấp n của đơn vị và thiết lập **giải thức Lagrange**:

$$\xi = \alpha_1 + \zeta\alpha_2 + \cdots + \zeta^{n-1}\alpha_n.$$

Lập luận như trong trường hợp $n = 3$, ta thấy $\xi^n = \beta$ là một phần tử của K và từ đó suy ra rằng

$$L \simeq K[x]/(x^n - \beta).$$

Để biết một phương trình có thể giải được bằng căn thức hay không, ta "chỉ cần" biết xem nhóm Galois của nó có thể giải được hay không. Tính nhóm Galois của một đa thức P tuỳ ý hoàn toàn không dễ. Quy trình khảo sát trình bày trong mục 5, cho ta một số thông tin về nhóm Galois, trong đó có một chuỗi nhóm con (3.16), nhưng đó thường là những nhóm con không chuẩn tắc. Trong trường hợp của đa thức tổng quát

$$P = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in K[x], \tag{3.18}$$

với $K = k(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là trường các phân thức với biến số $a_1, a_2, \ldots, a_n$, lập luận như trong 9, ta thấy $\Gamma_P = \Upsilon_n$. Như vậy đối với phương trình tổng quát, ta cần tìm hiểu với n nào thì nhóm đối xứng Υ_n là nhóm giải được. Ta sẽ chỉ ra rằng các nhóm Υ_3, Υ_4 là giải được và nhờ đó có thể tìm ra công thức biểu diễn nghiệm của phương trình bậc ba và bậc bốn. Trong khi đó Υ_n là nhóm không giải được với mọi $n \geqslant 5$.

9. Phương trình bậc ba

Lời giải phương trình bậc ba của Tartaglia khá phức tạp và nó giống như một cái gì từ trên trời rơi xuống. Lời giải phương trình bậc bốn của Ferrari còn phức tạp hơn nữa. Sau này, Lagrange đưa ra phương pháp rất đẹp để tìm ra phương pháp chung cho lời giải của Tartaglia, Cardano và Ferrari. Ông sáng tạo ra một công cụ mới, gọi là resolvent, mà chúng ta sẽ tạm chuyển ngữ thành "giải thức".

Để minh hoạ cho công dụng của phương pháp Lagrange, ta sẽ trình bày lời giải phương trình bậc ba tổng quát theo phương pháp này với chút ít hỗ trợ của lý thuyết Galois. Mặc dù phương pháp giải thức của Lagrange có thể diễn giải dễ dàng bằng lý thuyết Galois, ta cũng nên lưu ý là nhóm Galois sinh ra sau phương pháp giải thức Lagrange.

Trong đại số hiện đại, ta có thể gán cho chữ **tổng quát** một nghĩa chính xác: Ta chọn trường cơ sở

$$K = k(a, b, c) \supset R = k[a, b, c],$$

là trường các biểu thức hữu tỉ với biến số a, b, c và hệ số nằm trong một trường k nào đó. Đa thức bậc ba tổng quát là đa thức

$$P = x^3 + ax^2 + bx + c \in R[x].$$

Ta sẽ giả sử rằng trường k có căn nguyên sơ bậc ba của đơn vị. Nói cách khác đa thức $x^3 - 1 \in k[x]$ phân rã hoàn toàn thành:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x - j)(x - j^2),$$

với $j \in k$ là căn nguyên sơ bậc ba của đơn vị. Lấy ví dụ, ta có thể chọn $k = \mathbb{Q}[j]$ với j như trong (3.11).

Cho $\overline{K}$ là một trường đóng đại số chứa K, và gọi α_1, α_2, α_3 là các nghiệm của P ở trong $\overline{K}$. Trường phân rã của K :

$$L = k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \supset S = k[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3],$$

là trường các thương của các đa thức có biến số α_1, α_2, α_3 thoả

$$\begin{aligned} -a &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ b &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 \\ -c &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{aligned}$$

Có thể chứng minh được rằng S là module tự do cấp sáu trên vành R và L là không gian vector có chiều bằng sáu trên trường K. Như vậy nhóm Galois Γ của P có sáu phần tử và vì vậy nó chỉ có thể là toàn bộ nhóm đối xứng Υ_3. Để giải phương trình bậc ba tổng quát, ta sẽ khảo sát nhóm đối xứng Υ_3. Ta sẽ thể hiện một hoán vị cấp ba như trong ví dụ sau: $(2, 3, 1)$ là hoán vị $1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 1$. Các phần tử của Υ_3 có thể được phân loại như sau

- Phần tử đơn vị $(1, 2, 3)$.
- Phần tử có 2-chu trình $(2, 1, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(3, 2, 1)$.
- Phần tử 3-chu trình $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$.

Đồng cấu dấu $\mathrm{sgn} : \Upsilon_3 \to \{\pm 1\}$ gán cho ba phần tử có 2-chu trình dấu -1 và gán cho ba phần tử còn lại dấu $+1$. Hạch của đồng cấu dấu $\mathrm{sgn} : \Upsilon_3 \to \{\pm 1\}$ là nhóm luân phiên Θ_3. Nhóm này có 3 phần tử:

$$\Theta_3 = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$$

và đẳng cấu với nhóm xích $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Tóm lại ta có dãy khớp

$$0 \to \Theta_3 \to \Upsilon_3 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0 \tag{3.19}$$

với $\Theta_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Nhóm Υ_3 là nhóm giải được.
Nhóm con Θ_3 tương ứng với mở rộng trung gian $K_+ = L^{\Theta_3}$ bao gồm các phần tử của L cố định dưới tác động của Θ_3. Ta có chuỗi các mở rộng liên tiếp

$$K \subset K_+ \subset L.$$

với K_+/K là mở rộng Galois cấp hai có nhóm Galois $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, và L/K_+ là mở rộng Galois cấp ba có nhóm Galois $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Quá trình biểu diễn nghiệm của phương trình bậc ba phổ quá như biểu thức đại số có căn thức có thể chia thành hai bước:

- Sử dụng dãy khớp (3.19) để xây dựng mở rộng trung gian. $K \subset K_+ \subset L$ với K_+/K là mở rộng Galois cấp hai có nhóm Galois $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, và L/K_+ là mở rộng Galois cấp ba có nhóm Galois $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

- Biểu diễn các mở rộng trung gian K_+/K dưới dạng

  $$K_+ = K[x]/(x^2 - \beta_1),$$

  và L/K_+ dưới dạng $L = K_+[x]/(x^3 - \beta_2)$.

Ta có thể viết tường minh một phần tử của K_+ :

$$\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1).$$

Dễ thấy δ là ổn định dưới tác động của Θ_3. Ta cũng để ý ngay thấy $\delta^2 = -d$ với

$$d = \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j),$$

là biệt thức của P. Biệt thức d là một phần tử của K và ta có

$$K_+ \simeq K[x]/(x^2 + d). \tag{3.20}$$

Thật vậy, ta có đồng cấu trường:

$$K[x]/(x^2 + d) \to K_+,$$

xác định bởi $x \mapsto \delta$. Vì cả hai vế đều là không gian vector hai chiều trên K, vì đồng cấu trường luôn là đơn ánh, cho nên nó bắt buộc phải là song ánh.

Nói cách khác, mọi phần tử của K_+ đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $m + n\delta$ với m, $n \in K$.

Để chứng tỏ phương trình tổng quát bậc ba có thể giải được bằng căn thức, ta chỉ còn cần chứng minh rằng mở rộng L/K_+ có thể biểu diễn được dưới dạng phương trình

$$L = K_+[x]/(x^3 - \beta),$$

với một phần tử $\beta \in L_+$ nào đó. Ký hiệu $\sigma = (2, 3, 1)$ là hoán vị tác động lên các nghiệm của P như sau: $\sigma(\alpha_1) = \alpha_2$, $\sigma(\alpha_2) = \alpha_3$ và $\sigma(\alpha_3) = \alpha_1$. Giải thức Lagrange có dạng:

$$\xi = \alpha_1 + j\alpha_2 + j^2\alpha_3.$$

Ta nhận thấy rằng:

$$\sigma(\xi) = j^{-1}\xi \quad \text{và} \quad \sigma^2(\xi) = j^{-2}\xi,$$

và từ đó suy ra

$$\beta = \xi\sigma(\xi)\sigma^2(\xi) = \xi^3.$$

Phần tử β biểu diễn như tích $\xi\sigma(\xi)\sigma^2(\xi)$ hiển nhiên có tính ổn định dưới tác động của σ. Vì vậy $\beta \in K_+$.

Ta khẳng định rằng

$$L \simeq K_+[x]/(x^3 - \beta). \tag{3.21}$$

Thật vậy ta có đồng cấu vành

$$\phi : K_+[x]/(x^3 - \beta) \to L,$$

xác định bởi $x \mapsto \xi$ vì $\xi^3 = \beta$. Vì $\sigma(\xi) \neq \xi$, cho nên $\xi \notin K$, và ảnh của đồng cấu ϕ là một mở rộng trung gian

$$K \subset \mathbf{im}(\phi) \subset L$$

với $K \neq \mathbf{im}(\phi)$. Ta nhận thấy chiều của $\mathrm{im}(\phi)$ như không gian vector trên K phải bằng ba vì mở rộng bậc ba L không thể chứa trong nó một mở rộng bậc hai.

Nói cách khác, đồng cấu ϕ là toàn ánh. Vì không gian nguồn và đích có cùng số chiều, ϕ là đẳng cấu. Như vậy mọi phần tử của L, trong đó có α_1, α_2, α_3, có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng

$$m_0 + m_1\xi + m_2\xi^2, \quad \text{với} \quad m_0,\ m_1,\ m_2 \in K_+.$$

Bản thân ξ thoả mã phương trình $\xi^3 = \beta$ với $\beta \in K_+$. Mọi phần tử của K_+ đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $m + n\delta$ với $m, n \in K$ và $\delta^2 = d$. Chịu khó tường minh hoá các hệ số m, n, m_0, m_1, m_2, ta sẽ tìm lạo được công thức Tartaglia (3.5) cho nghiệm của phương trình bậc ba tổng quát

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

10. Phương trình bậc bốn

Định lý 10.1. *Nhóm Υ_4 là nhóm giải được.*

Ký hiệu S là tập $\{1,2,3,4\}$ và $\Psi_2(S)$ là tập các tập con của S có đúng hai phần tử. Tập này có 6 phần tử chia thành ba cặp các tập con đối nhau:

$$\begin{gathered}\{1,2\},\{3,4\}\\ \{1,3\},\{2,4\}\\ \{1,4\},\{2,3\}\end{gathered}$$

và gọi $\Phi_2(S)$ là tập các cặp tập con đối nhau như trên. Ta có ánh xạ 2-1

$$\Psi_2(S) \to \Phi_2(S). \tag{3.22}$$

Nhóm Υ_4 các hoán vị của S, tác động một cách tương thích lên $\Phi_2(S)$ và $\Psi_2(S)$. Tác động của Υ_4 lên $\Phi_2(S)$ cho ta một đồng cấu $\Upsilon_4 \to \Upsilon_3$. Khảo sát kỹ hơn tác động Υ_4 lên $\Phi_2(S)$ và $\Psi_2(S)$ ta có dãy khớp

$$0 \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \to \Upsilon_4 \to \Upsilon_3 \to 0 \tag{3.23}$$

và từ đó suy ra rằng nhóm Υ_4 là nhóm giải được.

Bạn đọc có thể dùng giải thức Lagrange để tìm ra biểu thức căn thức cho nghiệm phương trình bậc bốn tổng quát, giống như trường hợp phương trình bậc ba đã trình bày ở mục 9.

11. Phương trình bậc năm trở lên

Định lý 11.1. *Với mọi $n \geqslant 5$, Υ_n không phải là nhóm giải được.*

Nhóm đối xứng Υ_n có đồng cấu dấu với hạch là nhóm luân phiên Θ_n

$$0 \to \Theta_n \to \Upsilon_n \to \{\pm 1\} \to 0 \tag{3.24}$$

Có thể chứng minh rằng với mọi $n \geqslant 5$, nhóm luân phiên Θ_n là nhóm đơn, tức là một nhóm không có nhóm con chuẩn tắc, ngoài nhóm tầm thường và chính nó.

Nhóm con chuẩn tắc là hợp của một số lớp liên hợp và số phần tử của nhóm con bằng với tổng số phần tử của một số lớp liên hợp. Mặt khác, tổng số này phải là ước của số phần tử của Θ_5. Bằng cách liệt tất cả các lớp liên hợp của Θ_5 và lực lượng của chúng, ta nhận ra rằng tổng lực lượng của một số lớp liên hợp của Θ_5 không thể đúng bằng một ước thực sự của 60. Vì thế nhóm Θ_5 không có nhóm con chuẩn tắc nào ngoài chính nó và nhóm tầm thường.

Bạn đọc có thể chứng minh bằng qui nạp rằng Θ_n là nhóm đơn với mọi $n \geqslant 5$ xuất phát từ trường hợp $n = 5$.

Évariste Galois

Người dịch: Lưu Trọng Luân [1]

Đại học FPT

Évariste Galois [2] sinh tại Bourg La Reine (gần Paris) là con ông Nicholas Gabriel Galois và bà Adelaide Marie Demante. Cha mẹ Galois đều là những trí thức được giáo dục kỹ về triết học, văn học cổ điển và tôn giáo. Tuy nhiên, không ai trong gia đình Galois bộc lộ khả năng toán học. Mẹ của Galois là người thầy duy nhất dạy dỗ ông cho đến năm 12 tuổi. Bà dạy ông tiếng Hy Lạp, La tinh và tôn giáo, cũng là lúc bà bắt đầu gieo tư tưởng hoài nghi của mình cho con. Cha của Galois là người có ảnh hưởng trong cộng đồng và năm 1815 được bầu làm thị trưởng Bourg-la-Reine.

Thời điểm bắt đầu những sự kiện lịch sử đóng vai trò quan trọng trong cuộc đời Galois chính là cuộc đánh chiếm nhà tù Bastille ngày 14/07/1789. Từ lúc đó, vương triều Louis 16 bị lung lay dữ đội khi đông đảo người dân Pháp đoàn kết lại nhằm lật đổ sự cai trị đặc quyền của giáo hội và nhà nước.

Bất chấp những nỗ lực thỏa hiệp, vua Louis 16 đã bị mang ra xét xử sau khi tìm cách trốn khỏi đất nước. Sau khi nhà vua bị hành hình vào ngày 21/01/1973, nước Pháp rơi vào tình trạng kinh hoàng với nhiều phiên xét xử chính trị. Đến cuối năm 1793, có tới 4595 tù nhân chính trị bị giam giữ ở Paris. Tuy nhiên, tình hình đất nước cũng bắt đầu sáng sủa hơn sau khi quân đội nước này, dưới sự chỉ huy của Napoleon đã giành hết chiến thắng này đến chiến thắng khác.

Napoleon trở thành Đệ nhất Tổng tài vào năm 1800 rồi lên ngôi Hoàng đế vào năm 1804. Quân đội Pháp tiếp tục chinh phục châu Âu trong khi quyền lực của Napoleon ngày càng được củng cố. Năm 1811, Napoleon đạt đến đỉnh cao quyền lực. Nhưng đến

[1] **Nguồn:** www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Galois.html
[2] Nhà toán học người Pháp (25/10/1811 - 31/05/1832)

năm 1815 thì quyền lực đó sụp đổ. Cuộc tấn công Nga năm 1812 thất bại kéo theo những cuộc bại trận khác. Quân liên minh tiến vào Paris ngày 31/03/1814. Napoleon thoái vị ngày 6/4 và Louis XVIII được liên minh đưa lên làm vua. Năm 1815 chứng kiến 100 ngày nổi tiếng. Napoleon tiến vào Paris ngày 20/3, bị đánh bại tại Waterloo ngày 18/6 và thoái vị lần thứ hai ngày 22/6. Louis XVIII được khôi phục ngôi vua nhưng mất vào tháng 9/1824. Charles X trở thành vị vua mới.

Galois lúc này đang đi học. Ông vào học lớp 4 nội trú trường Lycée of Louis-le-Grand ngày 06/10/1823. Trong học kỳ đầu tiên, một cuộc nổi loạn nhỏ nổ ra và 40 học sinh bị đuổi học. Galois không liên quan đến sự việc này. Năm học 1824 – 1825, ông đạt học lực giỏi và nhận nhiều giải thưởng. Tuy nhiên, năm 1826, Galois phải học lại vì môn hùng biện không đạt yêu cầu.

Tháng 2/1827 là thời điểm mang tính bước ngoặc trong cuộc đời Galois. Ông vào lớp toán đầu tiên của mình, lớp của M. Vernier. Ngay lập tức, ông đã bị toán học cuốn hút và giáo viên hướng dẫn nhận xét:

Niềm đam mê toán học đã chi phối cậu ấy, tôi nghĩ tốt nhất là ba mẹ cậu ấy nên cho phép cậu không học bất kỳ môn gì khác ngoại trừ môn này. Cậu ấy đang lãng phí thời gian ở đây, làm phiền các giáo viên và chuốc lấy nhiều hình phạt.

Học bạ của Galois bắt đầu xuất hiện các từ cá biệt, kỳ dị, lập dị và hướng nội. Có lẽ đây là nhà toán học lập dị nhất của mọi thời đại. Thầy giáo M. Vernier nhận xét:

Thông minh, tiến bộ đáng kể nhưng chưa đủ phương pháp.

Năm 1828, Galois thi vào trường Bách khoa Paris nhưng trượt. Đây là trường đại học danh tiếng ở Paris và Galois muốn thi vào trường để thuận lợi cho việc học. Đồng thời ông cũng muốn vào trường vì lúc này phong trào chính trị trong giới sinh viên ở đây đang diễn ra rất mạnh mẽ trong khi Galois muốn theo bước cha mẹ ông trở thành người tích cực ủng hộ phe cộng hòa.

Trở về lại Louis-le-Grand, Galois ghi danh vào lớp chuyên toán của Louis Richard. Tuy nhiên ông lại tập trung ngày càng nhiều vào những nghiên cứu của riêng mình và ít để ý đến việc học tại trường hơn. Ông nghiên cứu môn hình học của Legendre và các luận án của Lagrange. Richard nhận xét:

Cậu sinh viên này chỉ thích tập trung vào những vấn đề đỉnh cao của toán học.

Tháng 4/1829 Galois công bố công trình toán học đầu tiên về liên phân số trên Annales de mathématiques. Ngày 25/5 và 1/6 ông gửi các bài viết về phương pháp giải các phương trình đại số cho Viện hàn lâm Khoa học. Cauchy là người được phân công đánh giá công trình này.

Bi kịch ập đến với Galois vào ngày 02/07/1829 khi cha ông tự tử. Linh mục xứ Bourg-la-Reine đã giả mạo tên của thị trưởng Galois trên những bài châm biếm nhằm vào những người thân của gia đình Galois. Cha của Galois là người tốt và vụ scandal đã vượt quá sức chịu đựng của ông. Ông đã treo cổ tự sát trong căn hộ của mình ở Paris, cách Louis-le-Grand, nơi con mình đang học chỉ vài bước chân. Galois đã bị tác động nghiêm trọng bởi cái chết của cha mình và nó đã ảnh hưởng lớn đến hướng đi sau này của ông.

Vài tuần sau cái chết của cha mình, Galois tiếp tục đăng ký thi vào trường Bách khoa Paris lần thứ hai. Lần này ông lại trượt, có lẽ một phần do nó rơi vào thời điểm tồi tệ nhất ngay sau cái chết của cha ông, một phần do ông chưa bao giờ giỏi việc diễn đạt những ý tưởng toán học sâu sắc của mình. Vì thế Galois đành phải vào học tại École Normale, một nhánh của trường Louis-le-Grand. Để vào được đây, ông đã phải dự kỳ thi tú tài mà nếu vào được trường Bách khoa Paris thì Galois đã không cần đến nó. Ông thi đậu và nhận bằng tốt nghiệp ngày 29/12/1829. Người đánh giá môn toán nhận xét:

Sinh viên này đôi khi diễn đạt ý kiến khó hiểu nhưng cậu ta thông minh và bộc lộ tinh thần nghiên cứu đặc biệt.

Giám khảo môn văn thì nhận xét:

Đây là sinh viên duy nhất có kết quả rất tệ, cậu ta tuyệt đối chẳng biết gì. Họ nói với tôi cậu ta có khả năng toán phi thường. Thật ngạc nhiên vì sau buổi thi này, tôi tin là cậu ta chỉ có một chút thông minh.

Galois gửi thêm cho Cauchy bài nghiên cứu về lý thuyết phương trình nhưng sau đó nhận ra nó trùng với một phần trong công trình được đăng sau khi mất của Abel. Sau đó, Galois theo lời khuyên của Cauchy gửi một bài nghiên cứu mới về điều kiện phương trình giải được bằng căn thức vào tháng 2/1830. Bài báo được gửi cho Fourier, thư ký của Viện hàn lâm Paris để xét duyệt Giải thưởng lớn về toán học. Fourier mất tháng 4/1830 và công trình này của Galois không bao giờ được tìm thấy nữa.

Galois, sau khi đọc công trình của Abel và Jacobi đã bắt tay vào việc nghiên cứu lý thuyết hàm eliptic và tích phân Abel. Với sự hỗ trợ của Jacques Sturm, ông đã công bố 3 bài báo trên Bulletin de Férussac vào tháng 4/1830. Tuy nhiên, tháng 6, ông biết được rằng giải thưởng của học viện sẽ được đồng trao cho Abel (sau khi mất) và Jacobi và công trình của ông đã không hề được xem xét.

Tháng 7/1830 nổ ra cuộc cách mạng. Vua Charles X phải trốn khỏi nước Pháp. Bạo động diễn ra trên các đường phố Paris và giám đốc trường École Normale, M. Guigniault, đóng cổng trường để ngăn sinh viên ra ngoài tham gia bạo động. Galois tìm cách trèo tường để tham gia nhưng không thành. Tháng 12/1830 M. Guigniault viết một số bài báo chỉ trích sinh viên và Galois viết thư đáp trả trên Gazette des Écoles, chỉ trích M. Guigniault vì hành động giam sinh viên bên trong trường. Vì lá thư này mà Galois bị đuổi học và gia nhập đội pháo binh của Vệ binh quốc gia, một nhánh dân quân tự vệ theo phe cộng hòa. Ngày 31/12/1830, đội pháo binh của Vệ binh quốc gia bị hoàng gia ra lệnh giải tán vì vua mới Louis-Phillipe lo ngại đây là một mối đe dọa đối với ngai vàng.

Hai bài công bố nhỏ, một bản tóm tắt đăng trên trên Annales de Gergonne (12/1830) và một lá thư về việc giảng dạy khoa học trên Gazette des Écoles (2/1/1831) là những ấn phẩm cuối cùng trong đời ông. Tháng 1/1831 Galois nỗ lực quay trở lại với toán học. Ông tổ chức vài lớp về đại số cao cấp thu hút 40 sinh viên đến dự buổi đầu tiên nhưng sau đó con số này nhanh chóng giảm xuống. Ông được Poisson mời gửi phiên bản thứ ba của công trình của mình về phương trình cho Viện hàn lâm và ông đã thực hiện ngày 17/1.

Ngày 18/4, Sophie Germain viết một lá thư cho bạn cô, nhà toán học Libri kể về tình hình của Galois

... cái chết của M. Fourier, là mất mát quá lớn cho sinh viên Galois người mà cho dù tính tình kỳ quặc, đã bộc lộ thiên hướng thông minh. Những bất hạnh này quá lớn đến nổ đã khiến Galois bị đuổi khỏi École Normale. Anh ta không tiền bạc. Họ nói anh ta sẽ bị điên hoàn toàn. Tôi sợ điều này là thật...

Cuối năm 1830, tất cả 19 sĩ quan thuộc đội pháo binh của Vệ binh quốc gia bị bắt và bị kết tội âm mưu lật đổ chính quyền. Họ được tuyên trắng án và ngày 09/05/1831, có 200 người theo phe cộng hòa tập trung ăn tối mừng việc này. Trong bữa tiệc, Galois nâng ly trong khi tay cầm con dao găm đang mở ra như vẻ hăm dọa nhà vua, Louis-Phillipe. Sau bữa ăn tối, Galois bị bắt và giam tại nhà tù Sainte-Pélagie. Ông được thả ra sau phiên xử ngày 15/6.

Ngày 14/7, ngày diễn ra cuộc tấn công nhà tù Bastille và Galois bị bắt trở lại vì đã mặc đồng phục của đội pháo binh của Vệ binh quốc gia vốn đã bị giải tán. Lúc đó ông cũng đang mang trong người một khẩu súng trường đã nạp đạn, vài khẩu súng ngắn và một dao găm. Galois bị đưa trở lại nhà tù Sainte-Pélagie. Thời gian này, ông nhận được tin công trình của mình đã bị bác bỏ. Poisson nhận xét:

Lập luận của Galois chưa đủ rõ ràng và chưa được phát triển đầy đủ để cho phép chúng tôi đánh giá được tính chính xác của nó.

Tuy nhiên, ông đã khuyến khích Galois công bố một bản tóm tắt đầy đủ hơn công trình của mình. Ở trong nhà tù Sainte-Pélagie, Galois đã cố dùng dao tự tử nhưng những bạn tù khác đã ngăn ông lại. Khi say rượu trong tù, ông bộc lộ tâm hồn mình:

Bạn có biết tôi thiếu gì không? Tôi chỉ tiết lộ với bạn thôi: Đó là người mà tôi chỉ có thể yêu thương và yêu thương trong tâm khảm. Tôi đã mất cha tôi và không ai có thể thay thế được ông, bạn có hiểu không?

Tháng 3/1832, một trận dịch tả quét qua Paris và những tù nhân, trong đó có Galois, được chuyển đến trại Sieur Faultrier. Nơi đây, dường như ông đã phải lòng Stephanie-Felice du Motel, con gái một bác sĩ địa phương. Sau khi ra tù ngày 29/4, Galois viết thư qua lại với Stephanie và rõ ràng là cô này đã tìm cách né tránh cuộc tình.

Cái tên Stephanie xuất hiện nhiều lần bên lề các bản ghi chép của Galois. Galois đấu súng với Perscheux d'Herbinville ngày 30/5 mà lý do không ai rõ nhưng chắc chắn việc này có liên quan đến Stephanie. Một trong số những ghi chép này có câu:

Có gì đó cần bổ sung trong chứng minh này. Nhưng tôi lại không có thời gian.

Chính điều này đã dẫn đến huyền thoại rằng ông đã dành đêm cuối cùng viết lại tất cả những gì ông biết về lý thuyết nhóm. Câu chuyện này có vẻ như đã được phóng đại lên.

Galois bị thương trong cuộc đấu súng và bị d'Herbinville và những người đi theo bỏ mặc cho đến khi một nông dân tìm thấy. Ông mất tại bệnh viên Cochin ngày $31/5$ và đám tang được tổ chức ngày $2/6$. Nó trở thành tâm điểm của cuộc nổi loạn của phe cộng hòa kéo dài nhiều ngày.

Em trai Galois và bạn ông, Chevalier, đã sao chép lại các bài viết liên quan đến toán học của ông và gửi cho Gauss, Jacobi cùng những người khác. Galois cũng từng mơ ước được Jacobi và Gauss nhận xét công trình của mình. Người ta không tìm thấy nhận xét của những người này. Tuy nhiên, các bài báo đã đến tay Liouville, người vào tháng $9/1843$ công bố trước viện hàn lâm rằng ông đã tìm thấy trong các bài báo của Galois một lời giải chính xác.

... vừa chính xác vừa sâu sắc cho bài toán tuyệt vời sau: Cho một phương trình bất khả quy với bậc nguyên tố, xét xem nó có giải được bằng căn thức không?

Liouville xuất bản những bài báo của Galois trên tạp chí của mình năm 1846. Lý thuyết mà Galois phác thảo trong những bài báo này ngày nay được gọi là lý thuyết Galois.

NGHỊCH ĐẢO MÖBIUS

Ngô Quang Hưng (*Đại học Buffalo, Mỹ*)

Phép nghịch đảo Möbius khởi nguyên là một công thức trong lý thuyết số. Đến những năm 1960 thì Giáo sư Gian-Carlo Rota cho chúng ta thấy công thức trong lý thuyết số là một trường hợp đặc biệt của một công thức áp dụng trên các tập thứ tự bán phần (poset). Công thức Möbius tổng quát có nhiều ứng dụng trong Toán và Máy Tính. Trong bài này ta rảo qua chứng minh của phép nghịch đảo Möbius trên các tập thứ tự bán phần và một vài ứng dụng của nó.

1. Ba ví dụ

1.1. Toán tổ hợp

Công thức inclusion-exclusion nói rằng, để đếm tổng số nhóc tì có Chí Phèo là bố hoặc thị Nở là mẹ, thì ta cộng số con của chí Phèo với số con của thị Nở trừ đi số con chung. Nói cách khác, cho n tập hợp hữu hạn $A_1, \cdots, A_n$ thì ta có thể tính lực lượng của hội của chúng bằng công thức:

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

Công thức này một số sách nói là của Abraham de Moivre; nhưng có vẻ nó xuất hiện năm 1854 từ một bài báo của Daniel da Silva, và lần nữa năm 1883 trong một bài báo của Joseph Sylvester [11].

Bài tập 1.1. Năm 1891, François Édouard Anatole Lucas (cha đẻ bài toán tháp Hà Nội) đặt câu hỏi sau đây: “cho một cái bàn tròn và m cặp vợ chồng, có bao nhiêu cách để xếp họ ngồi nam nữ xem kẽ sao cho không cặp vợ chồng nào ngồi kề nhau?" Ta có thể dùng công thức IE để trả lời câu hỏi của Lucas.

1.2. Lý thuyết số

Trong lý thuyết số có một công thức gọi là công thức nghịch đảo Möbius [10], xinh hơn hoa hậu! Công thức này phát biểu như sau: Cho 2 hàm số f, g bất kỳ trên miền số nguyên dương, ta có

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d), \ \forall n \geqslant 1$$

tương đương với

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(n/d), \ \forall n \geqslant 1$$

trong đó $\mu(d)$ là hàm Möbius định nghĩa như sau

$$\mu(d) = \begin{cases} 1 & d \text{ là tích của một số chẵn các số nguyên tố khác nhau} \\ -1 & d \text{ là tích của một số lẻ các số nguyên tố khác nhau} \\ 0 & d \text{ có ước số là bình phương của một số nguyên tố} \end{cases}$$

August Ferdinand Möbius là một nhà thiên văn người Đức, từng là trợ lý của Gauss; ông cũng là tác giả của cái băng Möbius lừng danh trong hình học Tô-pô.

1.3. Hình tô-pô

Công thức đa diện Euler phát biểu rằng $v - e + f = 2$, trong đó v, e, f là tổng số đỉnh, cạnh, và mặt của một khối đa diện ba chiều. Euler khám phá ra công thức này năm 1752, nhưng có vẻ như Descartes cũng đã biết nó từ 1640. Trăm năm sau, năm 1852, Schläfli phát biểu công thức tổng quát cho các đa diện lồi trong không gian n-chiều, nhưng chứng minh đúng phải chờ đến người khổng lồ Henry Poincaré (1893, [4]).
Công thức Euler tổng quát, cũng gọi là *công thức Euler-Poincaré*, phát biểu như sau. Gọi F_i là tổng số "mặt" i-chiều của đa diện n chiều ("mặt" 0-chiều là đỉnh, mặt 1-chiều là cạnh, vân vân). Ta quy ước $F_n = 1$ và $F_{-1} = 1$ để viết cho tiện. Thì ta có công thức Euler-Poincaré

$$\sum_{i=-1}^{n} (-1)^i F_i = 0.$$

1.4. Gian-Carlo Rota

Năm 1964, trong bài đầu tiên của một chuỗi bài báo kinh điển đặt nền móng cho lý thuyết tổ hợp đại số [5], Gian-Carlo Rota cho chúng ta biết cả ba công thức trên chẳng qua là trường hợp đặc biệt của phương pháp tính nghịch đảo Möbius trên các *tập hợp thứ tự một phần* (*partially ordered set*, hay *poset*). Mà phương pháp nghịch đảo Möbius trên posets thì chẳng qua chỉ là phát biểu sau đây: nếu A là một ma trận vuông khả nghịch, thì $x = Ay$ tương đương với $y = A^{-1}x$. Đại số tuyến tính muôn năm! Rota có quyển sách rất thú vị có nhiều giai thoại nổi tiếng trong giới chuyên môn tên là "Indiscrete Thoughts" [6].
Dưới đây chúng ta duyệt qua phương pháp của Rota, chứng minh cả ba công thức trên, và chứng minh bổ đề Sauer-Shelah để tự thưởng công.

2. Nghịch đảo Möbius trên posets

2.1. Tập hợp thứ tự bán phần (Poset)

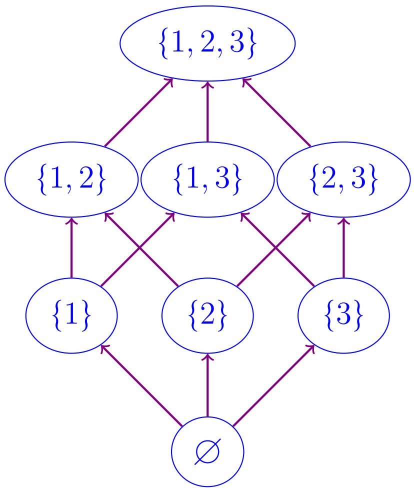
Poset đại khái là một tập hợp mà ta có thể so sánh lớn nhỏ giữa một số cặp phần tử nhưng không nhất thiết là so được tất cả các cặp. Thứ tự lớn nhỏ này có tính bắc cầu (transitive) và không tạo ra thứ tự luẩn quẩn.
Cụ thể hơn, một *poset* (tập thứ tự bán phần) là một cặp $(P, \preceq)$ trong đó P là một tập hợp và $\preceq$ là một quan hệ nhị phân (hay quan hệ hai ngôi) giữa các phần tử của P thỏa mãn 3 tính chất

1. $x \preceq y$ và $y \preceq z$ suy ra $x \preceq z$, với mọi $x, y, z \in P$ (tính bắc cầu – transitive)

2. $x \preceq x, \forall x \in P$ (tính phản xạ – reflexive)

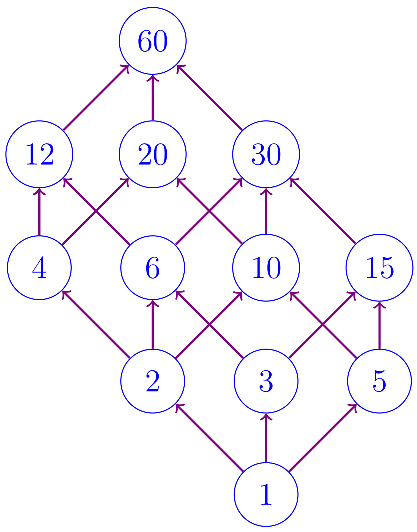
3. $x \preceq y$ và $y \preceq x$ suy ra $x = y$ (tính phản xứng – antisymmetric)

Ví dụ 2.1. $P = B_n$ là tập tất cả các tập con của $[n]$ và quan hệ nhị phân là $\subseteq$, nghĩa là $X \preceq Y$ nếu và chỉ nếu $X \subseteq Y$. Cái poset này gọi là *đại số Bool* (Boolean algebra). Xem ví dụ trên Hình 5.1.



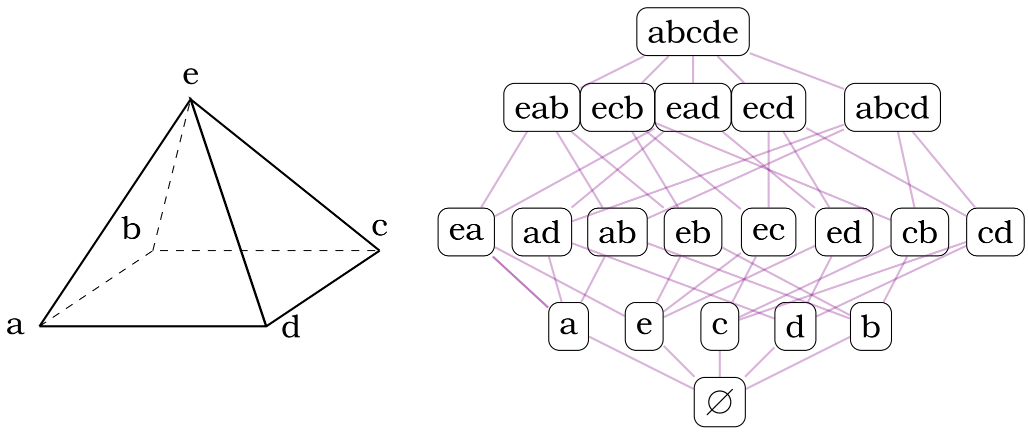
Hình 5.1: Đại số Bool B_3

Ví dụ 2.2. $P = D_n$ là tập tất cả các ước số dương của n, quan hệ nhị phân là quan hệ "chia hết", nghĩa là $i \preceq j$ nếu và chỉ nếu $i|j$. Ký hiệu $i|j$ nghĩa là j chia hết cho i (hay i chia hết j). Xem ví dụ trên Hình 5.2.



Hình 5.2: Poset các ước số của 60

Ví dụ 2.3. P là tập tất cả các "mặt" (faces) của một đa điện (polytope) trong không gian n chiều; và $x \preceq y$ nếu mặt x chứa trong mặt y. Mặt rỗng cũng là một mặt với chiều -1, và toàn bộ đa diện là một mặt với số chiều bằng n. Poset này còn gọi là face lattice của polytope. Xem ví dụ trên Hình 5.2.



Hình 5.3: Face lattice của hình Pyramid

2.2. Hàm Möbius của poset

Những điều ta viết sau đây đúng cho một trường K tùy hỉ và các posets vô hạn (miễn là nó hữu hạn địa phương[1]). Để cho đơn giản, ta phát biểu các kết quả với $K = \mathbb{C}$ và các posets hữu hạn thôi.

Gọi $(P, \preceq)$ là một poset hữu hạn. Ta xét các ma trận α kích thước $|P| \times |P|$ sao cho $\alpha(x, y) = 0$ nếu $x \npreceq y$. Khi $x \preceq y$ thì $\alpha(x, y) \in \mathbb{C}$ tùy hỉ. Tập các ma trận này gọi là *đại số kề* (incidence algebra) của P, ký hiệu là $I(P)$. Trong đại số kề thì ma trận δ định nghĩa bằng

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

là ma trận đơn vị.

Định lý 2.4. *Cho trước poset $(P, \preceq)$ trong đó P hữu hạn. Xét một ma trận $\alpha \in I(P)$ tùy ý thì α khả nghịch nếu và chỉ nếu $\alpha(x, x) \neq 0, \forall x \in P$.*

[1]Nghĩa là số các thành viên nằm giữa một cặp x và y là hữu hạn với mọi cặp x, y.

Chứng minh. Nếu ta vẽ "đồ thị" của P bằng cách xem P như tập các đỉnh và vẽ một mũi tên từ x đến y nếu $x \preceq y$ (như trong Hình 5.1 và 5.2) thì ta có một đồ thị có hướng nhưng không có vòng tròn (directed acyclic graph). Do đó, tồn tại một cách liệt kê tất cả các phần tử của P từ trái sang phải sao cho tất cả các mũi tên đều trỏ sang phải hoặc trỏ vào chính nó (loop trong đồ thị). Thứ tự này gọi là *trật tự tô-pô* (topological ordering) của đồ thị, là một bài tập cơ bản khi học các thuật toán duyệt đồ thị. Nếu ta viết các ma trận $\alpha \in I(P)$ mà các hàng và cột đánh chỉ số theo thứ tự này thì ta có các ma trận tam giác trên (upper-triangular). Do đó α khả nghịch nếu và chỉ nếu $\alpha(x, x) \neq 0, \forall x$, nghĩa là các phần tử trên đường chéo khác không. Lưu ý rằng ma trận nghịch đảo cũng là ma trận tam giác trên, và do đó cũng thuộc về đại số kề. □

Một thành viên quan trọng của đại số kề $I(P)$ là ma trận ζ, gọi là *hàm zeta* của P, định nghĩa bằng

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & x \preceq y \\ 0 & x \npreceq y \end{cases}$$

Định nghĩa 2.5 (Hàm Möbius của một poset)**.** *Hàm Möbius* của poset $(P, \preceq)$, ký hiệu là μ, chính là ma trận nghịch đảo của hàm zeta ζ. (Theo Định lý 2.4 thì ζ khả nghịch.)

Kế đến ta mô tả một công thức đệ quy để tính hàm Möbius của một poset. Từ định nghĩa của phép nhân ma trận, với $\alpha, \beta \in I(P)$ bất kỳ ta có

$$(\alpha\beta)(x, y) = \sum_{z \in P} \alpha(x, z)\beta(z, y) = \sum_{x \preceq z \preceq y} \alpha(x, z)\beta(z, y),$$

tại vì nếu $x \npreceq z$ thì $\alpha(x, z) = 0$, còn nếu $z \npreceq y$ thì $\beta(z, y) = 0$. Do đó, từ $\mu\zeta = \delta$ ta suy ra

$$\delta(x, y) = \sum_{x \preceq z \preceq y} \mu(x, z)\zeta(z, y) = \sum_{x \preceq z \preceq y} \mu(x, z).$$

Hay viết cụ thể hơn thì với mọi $x, y \in P$ ta có

$$\sum_{x \preceq z \preceq y} \mu(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x = y \\ 0 & \text{nếu } x \neq y. \end{cases} \tag{5.1}$$

Đẳng thức (5.1) suy ra công thức quy nạp để tính $\mu(x, y)$:

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ -\sum_{x \le z < y} \mu(x,z) & x < y \\ 0 & x \not\le y \end{cases}$$

Từ công thức này ta suy ra giá trị hàm Möbius cho ba posets ở trên. Hai đẳng thức đầu thì dễ (làm bài tập), cái thứ ba thì khó.

1. Nếu $P = B_n$ là tập tất cả các tập con của $[n]$ (đại số Bool), thì
$$\mu(A,B) = \begin{cases} (-1)^{|B|-|A|} & A \subseteq B \\ 0 & A \not\subseteq B \end{cases}$$

2. Nếu $P = D_n$ là tập tất cả các ước số của n, thì
$$\mu(x,y) = \begin{cases} (-1)^r & \text{nếu } y/x \text{ là tích của } r \text{ số nguyên tố khác nhau} \\ 0 & \text{nếu không phải thế.} \end{cases}$$

3. Nếu P là face-lattice của một đa điện n chiều thì
$$\mu(A,B) = \begin{cases} (-1)^{\dim(B)-\dim(A)} & \text{if } A \subseteq B \\ 0 & \text{nếu không.} \end{cases} \tag{5.2}$$

2.3. Nghịch đảo Möbius

Xét hai hàm số $f, g : P \to \mathbb{C}$ bất kỳ. Ta có thể xem chúng như hai vectors trong không gian $\mathbb{C}^{|P|}$. Công thức nghịch đảo Möbius trên poset nói hai điều rất đơn giản:

$$f = \zeta g \Leftrightarrow g = \mu f, \tag{5.3}$$

và, xoay ngang các vectors ra thì

$$f = g\zeta \Leftrightarrow g = f\mu. \tag{5.4}$$

Để hiểu ý nghĩa tổ hợp của sự tương đương này, ta viết rõ ràng hơn một chút vì ta biết $\zeta(x, y)$ và $\mu(x, y)$ bằng 0 nếu $x \not\le y$. Quan hệ (5.3) nói rằng:

$$f(x) = \sum_{x \le y} g(y), \forall x \in P \;\Leftrightarrow\; g(x) = \sum_{x \le y} \mu(x,y) f(y), \forall y \in P. \tag{5.5}$$

Đẳng thức này ta hiểu như sau. Giả sử ta có hàm g gán một con số $g(y)$ vào mỗi thành viên $y \in P$, và f gán vào mỗi $x \in P$ một con số là tổng của các $g(y)$ sao cho $x \preceq y$, thì vế phải của (5.3) cho ta cách tính g dựa trên f.
Đối ngẫu lại, quan hệ (5.4) nói rằng:

$$f(x) = \sum_{x \succeq y} g(y), \forall x \in P \;\Leftrightarrow\; g(x) = \sum_{x \succeq y} \mu(y, x) f(y), \forall y \in P. \tag{5.6}$$

Ví dụ 2.6. Để có công thức Euler-Poincaré, ta áp dụng (5.5) trong đó $g(y) = 1$ với $y = P$ và $g(y) = 0$ với mọi y còn lại trong P. Khi đó, rõ ràng là tất cả các $f(x)$ đều bằng 1. Dùng (5.2), ta có

$$0 = g(\varnothing) = \sum_{\text{mặt } B} (-1)^{\dim(B) - \dim(\varnothing)} f(B) = \sum_{\text{mặt } B} (-1)^{\dim(B)+1} = -\sum_{i=-1}^{n} (-1)^i F_i.$$

Ví dụ 2.7. Áp dụng (5.6) cho poset $P = D_n$, ta có ngay công thức nghịch đảo Möbius cổ điển trong lý thuyết số ở trên.

Ví dụ 2.8. Còn công thức inclusion-exclusion thì sao? Cách hiểu sau đây sẽ hữu dụng trong nhiều trường hợp. Giả sử ta có một tập "bi ve" $U = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Mỗi viên bi có nhiều màu. Các màu được đánh số từ 1 đến n. Gọi A_i là tập các viên bi có màu i. Với $X \subseteq [n]$ tùy ý, gọi $g(X)$ là tập tất cả các viên bi chỉ có *đúng* các màu trong X mà thôi. Khi đó,

$$f(X) = \sum_{X \subseteq Y} g(Y)$$

chính là số các viên bi mà mỗi viên có *ít nhất* các màu trong X, và $f(\varnothing) = |U|$. Do đó,

$$f(X) = \left| \bigcap_{i \in X} A_i \right|.$$

Áp dụng (5.5) cho poset $P = B_n$ ta kết luận

$$0 = g(\varnothing) = \sum_{Y \subseteq [n]} (-1)^{|Y|} \left| \bigcap_{i \in Y} A_i \right|.$$

Chuyển $f(\varnothing) = |U|$ sang một vế là ta có công thức inclusion-exclusion.

3. Bổ đề Sauer–Shelah

Chúng ta tự thưởng công bằng cách chứng minh một bổ đề tổ hợp quan trọng gọi là bổ đề Sauer-Shelah [7, 8]. Bổ đề này có ứng dụng sâu sắc trong lý thuyết học máy, cụ thể là lý thuyết "chiều Vapnik-Chervonenkis" (VC dimension) [13, 12].
Gọi $\mathcal{F}$ là một bộ các tập con của $[n]$. Với $S \subseteq [n]$ bất kỳ, định nghĩa "hình chiếu" của $\mathcal{F}$ lên S là tập

$$\Pi_{\mathcal{F}}(S) = \{F \cap S \mid F \in \mathcal{F}\}.$$

Ta nói $\mathcal{F}$ "băm nát" S nếu $\Pi_{\mathcal{F}}(S) = 2^{|S|}$.

Bổ đề 3.1 (Bổ đề Sauer-Shelah). *Cho trước $\mathcal{F}$ là một bộ các tập con của $[n]$. Gọi d là kích thước lớn nhất của một tập $S \subseteq [n]$ bị $\mathcal{F}$ băm nát, thì*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \Phi_d(n) = \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}.$$

Chứng minh. Ta chứng minh bổ đề này bằng "phương pháp chiều" (Đại Số tuyến tính van tuế!). Gọi $\binom{[n]}{\leqslant d}$ là tập tất cả các tập con của $[n]$ với kích thước bé hơn hoặc bằng d. Với mỗi $F \in \mathcal{F}$, định nghĩa một hàm số $\mathbf{h}_F : \binom{[n]}{\leqslant d} \to \mathbb{R}$ như sau:

$$\mathbf{h}_F(X) = \begin{cases} 1 & X \subseteq F \\ 0 & X \nsubseteq F \end{cases}.$$

Các hàm $\mathbf{h}_F$ là các vectors trong không gian $\mathbb{R}^{\Phi_d(n)}$. Có tất cả $|\mathcal{F}|$ vectors $\mathbf{h}_F$, do đó nếu chúng độc lập tuyến tính thì $|\mathcal{F}| \leqslant \Phi_d(n)$. Giả sử chúng không độc lập tuyến tính, nghĩa là tồn tại các hệ số α_F sao cho

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \alpha_F \mathbf{h}_F = 0 \tag{5.7}$$

và các hệ số này không cùng bằng 0. Để cho tiện, ta mở rộng định nghĩa và gán $\alpha_X = 0$ với mọi $X \in 2^{[n]} \setminus \mathcal{F}$.
Từ (5.7), với $X \in \binom{[n]}{\leqslant d}$ bất kỳ ta có $\sum_{F \in \mathcal{F}} \alpha_F \mathbf{h}_F(X) = 0$, hay nói cách khác với $X \in \binom{[n]}{\leqslant d}$ tùy ý ta có $\sum_{X \subseteq Y} \alpha_Y = 0$. Định nghĩa $\beta_X = \sum_{X \subseteq Y} g(Y)$, thì ta vừa thấy rằng $\beta_X = 0, \forall X \in \binom{[n]}{\leqslant d}$.
Gọi Y là tập con nhỏ nhất của $[n]$ sao cho $\beta_Y \neq 0$. (Nếu ta lấy tập $F \in \mathcal{F}$ có kích thước lớn nhất sao cho $\alpha_F \neq 0$ thì $\alpha_F = \beta_F \neq 0$, do

đó tồn tại tập Y nhỏ nhất như định nghĩa.) Dĩ nhiên $|Y| \geqslant d+1$. Ta chứng minh rằng Y bị $\mathcal{F}$ băm nát, từ đó dẫn đến điều vô lý. Để chứng minh Y bị băm nát thì ta cần chứng minh, với $Z \subseteq Y$ tùy ý, tồn tại $F \in \mathcal{F}$ sao cho $F \cap Y = Z$. Để chứng minh điều này thì chỉ cần chứng minh

$$\sum_{A \subseteq [n], A \cap Y = Z} \alpha_A \neq 0.$$

là xong, tại vì $\alpha_A = 0, \forall A \notin \mathcal{F}$. Đến đây ta xét poset B_m gồm tất cả các tập con của $Y - Z$ (đặt $m = |Y - Z|$). Poset này là đại số Bool bậc m. Với mỗi phần tử $W \subseteq Y - Z$, định nghĩa

$$g(W) = \sum_{X : X \cap Y = Z \cup W} \alpha_X.$$

Và định nghĩa, với mọi $V \subseteq Y - Z$,

$$f(V) = \sum_{V \subseteq W \subseteq Y - Z} g(W).$$

(Lưu ý rằng ta sẽ dùng dạng (5.5) của nghịch đảo Möbius.) Dễ thấy rằng

$$f(V) = \beta_{Z \cup V}, \quad \forall V \in B_m.$$

Do Y là tập nhỏ nhất với $\beta_Y = 0$, ta có $f(V) = 0, \forall V \neq Y - Z$, và $f(Y - Z) = \beta_Y \neq 0$. Theo nghịch đảo Möbius ta có

$$\sum_{A \subseteq [n], A \cap Y = Z} \alpha_A = g(\varnothing) = \sum_{V \subset Y - Z} (-1)^{|V|} f(V) = (-1)^{|Y-Z|} \beta_Y \neq 0.$$

□

4. Chú thích

Bộ sách của Stanley [10, 9] là tham khảo quan trọng nhất cho toán tổ hợp đếm bao gồm nghịch đảo Möbius, tổ hợp tô-pô. Sách của Vapnik [12] nói về lý thuyết học máy xác suất và lý thuyết chiều Vapnik-Chervonenkis. Một tham khảo tuyệt vời khác cho toán Tổ hợp là quyển sách của van Lint và Wilson [11]. Trong ngành máy tính, nghịch đảo Möbius có ứng dụng trong cơ sở dữ liệu [2], thuật toán [3, 1].

Tài liệu tham khảo

[1] Björklund, A., Husfeldt, T., Kaski, P., and Koivisto, M. Trimmed moebius inversion and graphs of bounded degree. *Theory Comput. Syst. 47*, 3 (2010), 637–654.

[2] Dalvi, N. N., and Suciu, D. The dichotomy of probabilistic inference for unions of conjunctive queries. *J. ACM 59*, 6 (2012), 30.

[3] Nederlof, J. Fast polynomial-space algorithms using möbius inversion: Improving on steiner tree and related problems. In *Automata, Languages and Programming, 36th International Colloquium, ICALP 2009, Rhodes, Greece, July 5-12, 2009, Proceedings, Part I* (2009), S. Albers, A. Marchetti-Spaccamela, Y. Matias, S. E. Nikoletseas, and W. Thomas, Eds., vol. 5555 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 713–725.

[4] Poincaré, H. Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris 117* (1893), 144–145.

[5] Rota, G.-C. On the foundations of combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 2* (1964), 340–368 (1964).

[6] Rota, G. C., and Palombi, F. *Indiscrete thoughts*. Birkhauser, 1996.

[7] Sauer, N. On the density of families of sets. *J. Combinatorial Theory Ser. A 13* (1972), 145–147.

[8] Shelah, S. A combinatorial problem; stability and order for models and theories in infinitary languages. *Pacific J. Math. 41* (1972), 247–261.

[9] Stanley, R. P. *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, vol. 62 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.

[10] STANLEY, R. P. *Enumerative combinatorics. Volume 1*, second ed., vol. 49 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[11] VAN LINT, J. H., AND WILSON, R. M. *A course in combinatorics*, second ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[12] VAPNIK, V. N. *The Nature of Statistical Learning Theory*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1995.

[13] VAPNIK, V. N., AND CHERVONENKIS, A. Y. Theory of uniform convergence of frequencies of events to their probabilities and problems of search for an optimal solution from empirical data. *Avtomat. i Telemeh.*, 2 (1971), 42–53.

CÁC BÀI TOÁN ĐỘI NÓN

Đặng Nguyễn Đức Tiến (*Đại học Trento, Italy*)

Trong số 1 của Epsilon, chúng tôi đã giới thiệu với độc giả 15 bài toán đội nón được sưu tập trong hơn 50 năm (từ 1961 đến 2013), phân bố ở những mức độ khó và thể loại khác nhau. Để tiếp tục cuộc hành trình, trong chuyên mục phần này chúng tôi chọn lọc và trình bày những lời giải đẹp cho các bài toán đã được trình bày. Chúng tôi cũng giới thiệu với độc giả những lời giải tổng quát cũng như những ứng dụng thực tế cho các vấn đề từ những bài toán giải trí này.

1. Bài toán 3 chiếc nón

Nhắc lại đề: Có 3 người chơi, mỗi người được đội ngẫu nhiên một nón có màu đỏ hoặc xanh dương. Họ nhìn thấy màu nón của 2 bạn mình nhưng không biết màu của mình. Mỗi người cần phải đoán ra màu nón của mình, hoặc chọn bỏ qua nếu không đoán được. Nếu ít nhất một người đoán đúng màu nón và những người còn lại không đoán sai, họ thắng trò chơi. Họ sẽ thua nếu có người đoán sai hoặc cả 3 cùng chọn bỏ qua. Họ được trao đổi chiến thuật với nhau trước khi chơi nhưng trong khi tham gia thì không được trao đổi bất cứ thông tin gì. Tìm chiến thuật có xác suất thắng cao nhất.

Để bắt đầu cuộc hành trình, chúng tôi mời quý độc giả cùng quay lại nhóm 3 bài toán đội nón số 4, số 5, và số 6.

Chúng ta bắt đầu bởi bài toán số đội nón số 4 trước. Theo luật chơi, ta có thể thấy rằng nếu như cả 3 đều chọn 'bỏ qua' thì họ sẽ thua trong mọi tình huống, vì vậy, trong các cách trả lời dễ thấy phải có ít nhất một người gọi lên màu nón. Xét trường hợp nếu cả 3 người chơi đều cùng chọn một màu, hoặc cùng chọn ngẫu nhiên mà không 'bỏ qua' thì xác suất để cả 3 cùng thắng là 1/8, tức 12.5% vì có tất cả 8 khả năng khác nhau cho 3 người. Một chiến thuật tốt hơn có thể dễ dàng được tìm thấy là 1 người chọn ngẫu nhiên, và 2 người chọn bỏ qua. Lúc này ta có xác suất thắng là 1/2 = 50%. Liệu đây có phải là chiến thuật tốt nhất?

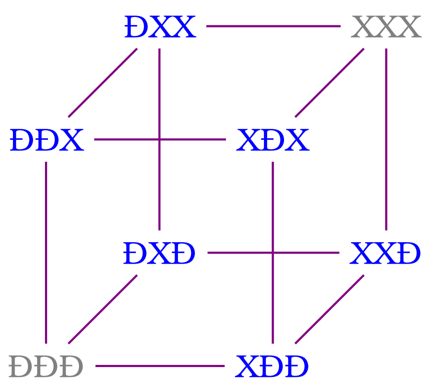
Như gợi ý của bài toán đội nón số 6, chiến thuật này chưa phải là chiến thuật tốt nhất. Lời giải sau cho ra xác suất thắng lợi cao hơn: nếu một người thấy 2 người đội nón khác màu nhau, họ sẽ chọn “bỏ qua" và nếu thấy 2 người đội nón trùng màu nhau, sẽ chọn màu ngược lại.
Với cách này, họ sẽ luôn đoán đúng 6/8 trường hợp và chỉ sai trong 2/8 trường hợp khi cả 3 nón cùng màu nhau (xem ví dụ ở Hình 6.1).

Hình 6.1: Mỗi người nếu thấy 2 nón khác màu sẽ chọn 'bỏ qua' và nếu thấy 2 nón cùng màu, sẽ chọn màu ngược lại. Trong ví dụ này, người đội nón đỏ sẽ đoán màu đỏ (do thấy 2 nón xanh) và 2 người đội nón xanh sẽ chọn bỏ qua (do họ thấy 2 nón khác màu nhau).

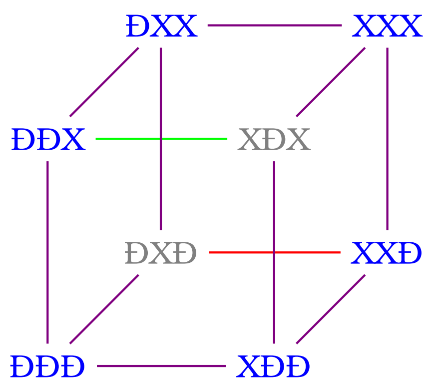
Lời giải này cho khả năng thắng lợi là 6/8 = 75% nếu như nón được đội thật sự là ngẫu nhiên. Tuy nhiên, trong thực tế (như mô tả trong bài toán đội nón số 6), người dẫn trò sẽ nhanh chóng nhận ra chiến thuật của họ và sẽ đội nón cho họ cùng màu nhau với tần suất nhiều hơn, hoặc thậm chí luôn luôn đội cùng màu. Khi đó khả năng chiến thắng từ 75% sẽ giảm xuống thành 0%! Vậy người chơi phải đối phó thế nào với **người dẫn trò “xảo quyệt”**?

Một đối sách có thể nghĩ ra cho chiến thuật chơi dài hạn là khi người quản trò đổi qua đội nón cùng màu, khi thấy 2 nón giống màu nhau, họ sẽ chọn màu đó. Như vậy với trường hợp này họ sẽ thắng 100%. Và tất nhiên, người quản trò lại học được cách này và quay lại phân bố với 6 trường hợp kia hoặc quay lại với phân bố ngẫu nhiên nón. Xác suất chiến thắng khi đó sẽ thay đổi 75% —> 0% —> 100% —> 75% —> ... lặp đi lặp lại như một cuộc chiến giữa những người chơi và người dẫn trò. Trung bình chiến thắng do vậy là 58%. Liệu có cách làm tốt hơn 58% để đối phó với người dẫn trò xảo quyệt?

Rất thú vị là chúng ta có thể nâng cấp chiến thuật cũ để bảo toàn khả năng chiến thắng 75%. Chiến thuật này như sau: Chúng ta có 8 cách đội nón khác nhau và các cách này có thể ghép thành từng cặp “đối xứng" nhau, đỏ đối với xanh. Ví dụ 3 nón đỏ-đỏ-đỏ ĐĐĐ, sẽ đối với 3 nón xanh-xanh-xanh XXX, hoặc ĐXĐ sẽ đối với XĐX. Tưởng tượng trên một hình lập phương với tọa độ các đỉnh tương ứng lần lượt với các cách đội nón, và 2 đỉnh nối với nhau khi chỉ có 1 nón khác màu nhau. Các cấu hình đội nón “đối xứng" chính là các đỉnh đối xứng nhau trên hình lập phương này.



Chiến thuật chọn hi sinh cặp đỉnh đồng màu.



Chiến thuật chọn hi sinh 2 đỉnh XĐX và ĐXĐ.

Hình 6.2: Chiến thuật đối phó với người dẫn trò “xảo quyệt".

Với cách thể hiện này, nhiệm vụ của người chơi là xác định nhóm mình ở đỉnh nào trên hình lập phương! Với mỗi người chơi, khi thấy được 2 màu nón của người chơi đối diện, người này sẽ xác định được mình đang ở cạnh nào và nhiệm vụ là hoặc bỏ qua, hoặc đoán xem mình ở đỉnh nào. Với cấu hình này, nếu chấp nhận “hi sinh" một cặp đỉnh đối xứng bất kỳ, ta sẽ luôn xác định được đỉnh cần tìm bằng cách luôn trả lời hướng về các đỉnh màu xanh khi tình trạng đang ở một cạnh nối giữa đỉnh “xanh" và đỉnh “xám", ngược lại sẽ chọn bỏ qua. Chiến thuật này chỉ sai khi nhóm người chơi có đỉnh rơi vào cặp đỉnh đã được chọn “hi sinh", lúc đó cả 3 người đều là 3 cạnh nối ra từ các đỉnh “xám" này. Như vậy, cách chơi theo chiến thuật ở câu hỏi 1 là chọn cặp đỉnh XXX và ĐĐĐ và có thể dễ dàng bị "bắt bài" bởi người dẫn trò chơi (Hình 6.2). Nhưng ta có thể chọn các cặp đỉnh như (XĐX và ĐXĐ), hay (XXĐ và ĐĐX)... và đều có xác suất thắng lợi là 75% cho trường hợp đội nón ngẫu nhiên. Lúc này, người dẫn chương trình không thể "bắt bài" vì nhóm người chơi luôn linh động thay đổi được cặp đỉnh "hi sinh" ngầm định, và buộc người dẫn trò phải đội nón một cách ngẫu nhiên cho họ, và chiến thắng đến với xác suất 75%!

Một chiến thuật ví dụ cho trường hợp nếu chọn cặp XĐX và ĐXĐ (xem Hình 6.2 bên phải) như sau:

- Người 1: nếu gặp xanh - đỏ sẽ chọn xanh, điều này tương ứng với cạnh ĐXĐ - XXĐ (màu đỏ trên hình), và vì cặp đỉnh "hi sinh" có chứa ĐXĐ nên ta chọn xanh. Nếu gặp đỏ - xanh sẽ chọn đỏ, điều này tương ứng với cạnh màu xanh lá cây trên hình. Người 1 chọn bỏ qua nếu thấy 2 nón cùng màu (vì các cạnh này nối các đỉnh không thuộc tập "hi sinh").
- Người 2: nếu gặp nón cùng màu, sẽ chọn màu đó, ngược lại sẽ chọn bỏ qua.
- Người 3: nếu gặp xanh - đỏ sẽ chọn đỏ; nếu gặp đỏ - xanh sẽ chọn xanh, và bỏ qua nếu cùng màu.

Xét cụ thể 8 cách đội nón có thể có, ta có kết quả như sau:

Nón 1	**Nón 2**	**Nón 3**	**Đoán 1**	**Đoán 2**	**Đoán 3**	**Kết quả**
Xanh	Xanh	Xanh	Bỏ qua	Xanh	Bỏ qua	Đúng
Xanh	Xanh	Đỏ	Xanh	Bỏ qua	Bỏ qua	Đúng
Xanh	Đỏ	Xanh	Đỏ	Xanh	Đỏ	Sai
Xanh	Đỏ	Đỏ	Bỏ qua	Bỏ qua	Đỏ	Đúng
Đỏ	Xanh	Xanh	Bỏ qua	Bỏ qua	Xanh	Đúng
Đỏ	Xanh	Đỏ	Xanh	Đỏ	Xanh	Sai
Đỏ	Đỏ	Xanh	Đỏ	Bỏ qua	Bỏ qua	Đúng
Đỏ	Đỏ	Đỏ	Bỏ qua	Đỏ	Bỏ qua	Đúng

Với 2 trường hợp còn lại (XXĐ - ĐĐX và XĐĐ - ĐXX) cũng không khó để tìm ra chiến thuật tương tự với khả năng thắng 6/8. Như vậy, với cách làm ngẫu nhiên chọn cặp đỉnh "hi sinh" người chơi đã buộc người dẫn trò phải đội nón ngẫu nhiên, và do vậy, xác suất thắng lợi bảo toàn với tỉ lệ 75%.

Tổng quát hóa cho $2^n - 1$ người chơi

Tiếp theo, chúng tôi xin mời độc giả cùng xem lời giải mở rộng cho bài toán với trường hợp $N = 2^n - 1$ người chơi, và đây cũng chính là câu trả lời cho bài toán đội nón số 5 khi thay $n = 4$.

Lưu ý rằng hiện nay lời giải đẹp chỉ mới được tìm thấy ở trường hợp tổng quát nhưng đặc biệt này, tức $N = 2^n - 1$. Với các trường hợp khác, lời giải vẫn còn đang bỏ ngõ. Chúng tôi sẽ trình bày cách làm cụ thể cho trường hợp này và sau đó sẽ liên kết cách làm này với mã Hamming, một mã sửa lỗi tuyến tính nổi tiếng và được sử dụng rộng rãi trong viễn thông.

Cách làm như sau: gán thứ tự cho người chơi từ 1 đến N, và đổi các số này sang nhị phân. Chúng ta sẽ sử dụng phép sánh khác (XOR)[1] trên các chuỗi nhị phân này. Đặc tính quan trọng của phép XOR là với số k bất kỳ, $k \oplus k = 0$, bởi vì k khớp với chính nó trên mọi bit. Gọi T là tổng (XOR) của tất cả người chơi có nón màu đỏ. Chiến thuật của người chơi là đoán sao cho T khác 0 và khi đó, họ sẽ thắng nếu T thật sự khác 0 (tất nhiên, họ sẽ sai khi $T = 0$).

Cụ thể chiến thuật như sau: Gọi t_k là tổng XOR các người đội nón đỏ mà người thứ k thấy được.

- Nếu $t_k = 0$, anh ta sẽ đoán “đỏ" (vì nếu anh ta đoán xanh, T sẽ không cập nhật và sẽ bằng 0).
- Nếu $t_k = k$, anh ta sẽ đoán “xanh” (vì nếu anh ta đoán đỏ thì $T = t_k \oplus k = k \oplus k = 0$).
- Ngược lại, nếu $t_k \neq 0$ và $t_k \neq k$, anh ta chọn bỏ qua.

Lúc này như ta thấy, nếu T thật sự bằng 0, tất cả đều sẽ đoán sai. Nếu $T = k \neq 0$, người thứ k sẽ đoán đúng và tất cả những người khác đều chọn bỏ qua, nên họ sẽ chiến thắng. Vì T có giá trị từ 0 đến N nên xác suất thắng lợi là $N/(N+1)$.

Liệu chiến thuật này có thể nâng cấp lên để đối phó với người dẫn trò “xảo quyệt"? Câu trả lời là có với cách làm tương tự như phần trình bày ở trên.

---

[1] Phép sánh khác (thuật ngữ tiếng Anh là “Exclusive OR", hay còn gọi là phép OR có loại trừ, và cũng còn gọi là tổng NIM), ký hiệu là $\oplus$, thực hiện "cộng" 2 chuỗi nhị phân bằng cách so sánh các bit từ phải sang trái. Ứng với mỗi cặp bit sẽ cho kết quả là 1 nếu 2 bit này khác nhau và kết quả là 0 nếu 2 bit này giống nhau. Ví dụ: $0110010 \oplus 1010111 = 1100101$.

MÃ HAMMING VÀ BÀI TOÁN ĐỘI NÓN SỐ 5

Giả sử tôi muốn gửi một thông điệp cho bạn và thông điệp này được mã hóa thành các bit nhị phân (ký số 0 hoặc 1). Tuy nhiên ở giữa đường truyền có kẻ can thiệp, và thay đổi một bit nào đó trước khi bạn nhận được thông điệp. Vì vậy, tôi phải tìm ra cách thêm vào một số thông tin bổ sung cho thông điệp sao cho khi nhận được, bạn có thể phát hiện thông điệp đã bị thay đổi và hơn nữa, bạn có thể khôi phục lại thông điệp gốc. Một trong những phương pháp cơ bản để phòng chống việc sửa đổi này là sử dụng "mã tái diễn": tôi sẽ gửi một lần 3 bit giống nhau cho cùng 1 bit mà tôi muốn gửi cho bạn: 000 hoặc 111. Lúc này, dù kẻ can thiệp có thay đổi bất kỳ bit nào, tôi cũng sẽ khôi phục lại được. Cách làm này tuy đạt mục đích, nhưng hiệu quả không cao, vì nội dung thừa chiếm đến 2 lần nội dung thông tin cần gửi.

Mã Hamming[a] đưa ra cách tốt hơn cho việc sửa lỗi này, trong đó cứ 2^k-1 bit thông tin gửi đi chỉ có k bit bổ sung, còn lại 2^k-k-1 bit là dữ liệu. Ví dụ với k = 4, khi gửi một thông điệp có chiều dài 15 bit thì trong đó 11 bit là dữ liệu (so với chỉ 5 bit là dữ liệu ở phương pháp sử dụng mã tái diễn). Chi tiết cách hoạt động của mã Hamming độc giả có thể dễ dàng tìm thấy tại Wikipedia. Ở đây, chúng tôi chỉ chỉ ra mối quan hệ giữa Hamming và bài toán đội nón số 5.

Một đặc tính đáng chú ý của mã Hamming là bất kỳ chuỗi (có chiều dài $2^k - 1$) nào cũng hoặc là một thông điệp đúng, hoặc chỉ bị sai ở một bit. Điều này khác biệt với mã tái diễn vì ở mã tái diễn có một số thông điệp sẽ không bao giờ xuất hiện. Ví dụ, bạn sẽ không bao giờ nhận được mã 001011 vì ở đây có đến 2 bit bị thay đổi. Ở mã Hamming, mọi chuỗi đều có khả năng xuất hiện.

Bây giờ, giả sử ta mã hóa những người đội nón xanh là 0 và nón đỏ là 1, khi đó một cách đội nón cho N người trở thành một "thông điệp" N bit. Lúc này, mỗi người sẽ có thể thấy toàn bộ những bit khác, trừ bit của anh ta, và tất nhiên chỉ có 2 khả năng hoặc anh ta là bit 0 (xanh), hoặc là bit 1 (đỏ). Người chơi sẽ dùng chiến thuật là luôn giả định chuỗi N bit hiện tại KHÔNG PHẢI là một "thông điệp" đúng. Cụ thể: nếu một người chơi thấy rằng nếu bit tương ứng với anh ta có giá trị 0 sẽ biến chuỗi thành một thông điệp đúng, anh ta sẽ chọn "đỏ" (ứng với bit 1), và ngược lại. Nếu anh ta thấy rằng cả 0 và 1 đều có thể làm thành một "thông điệp" đúng, anh ta chọn bỏ qua. Chiến thuật này chỉ gặp thất bại khi "thông điệp" ban đầu đúng và thành công nếu "thông điệp" sai. Vì cứ mỗi thông điệp đúng sẽ có tương ứng N thông điệp sai, nên xác suất thắng lợi là $N/(N+1)$, tương tự như chiến thuật đã nêu ở bài toán đội nón số 5.

[a]Mã Hamming được đặt theo tên của nhà toán học người Mỹ, Richard Wesley Hamming (1915 - 1998).

2. Các bài toán của Konstantin Knop

Chúng tôi mời độc giả tiếp tục đi đến phần lời giải của 2 bài toán tuyệt đẹp do Konstantin Knop đề xuất: bài toán đội nón số 7 và bài toán đội nón số 9.

Như đã đề cập đến ở **Epsilon** số 1, đây là nhóm các bài toán mà người chơi xếp thành hàng nên số lượng nón mà người chơi quan sát được gặp giới hạn. Điều này không xảy ra ở nhóm bài toán đội nón ở trên là mỗi người chơi đều thấy được nón của mọi người chơi khác (trừ nón của mình). Tuy nhiên, ở nhóm bài toán trước, người chơi không biết được những người khác sẽ đoán màu gì, còn ở nhóm bài toán này, thứ tự nêu lên màu nón cũng thuộc về chiến thuật chơi. Để tiện theo dõi, chúng tôi nhắc lại đề của bài toán đội nón số 7 cho trường hợp 3 màu:

Có 100 người được xếp thành một hàng, mỗi người được đội một nón chọn ngẫu nhiên trong 3 màu cho trước. Mỗi người chỉ nhìn thấy màu nón của những người đứng trước mình mà không thấy nón của mình và những người đứng sau. Lần lượt mỗi người sẽ phải đoán màu nón của mình và hô to cho những người khác nghe. Người đứng cuối cùng (là người thấy màu nón của toàn bộ 99 người trước) là người bắt đầu phải đoán. Người chơi không được trao đổi bất kỳ thông tin gì với nhau ngoại trừ lắng nghe màu nón từ người đoán trước. Đúng sai cũng chỉ được biết khi người cuối cùng đã đoán xong. Hãy tìm chiến chuật sao cho số người đoán sai là ít nhất.

Ở đây, sau khi đã quen thuộc với nhóm bài toán ở phần 1, ta thấy đây cũng là một dạng mã sửa sai. Cụ thể trong bài toán này, chiến thuật sử dụng modulo được áp dụng. Chúng tôi trình bày ở đây chiến thuật tổng quát cho bài toán với M người chơi và N màu nón, chiến thuật như sau:

- Gán mỗi màu tương ứng với một con số từ 0 đến $N - 1$.
- Người đầu tiên tính tổng tất cả những màu nón mà anh ta quan sát được, lấy modulo theo N và hô màu nón tương ứng.
- Những người tiếp theo, căn cứ vào lời hô của những người trước đó, và tổng của những người đứng trước mình sẽ đoán đúng màu nón của mình.

Như vậy, cách làm này chỉ có người đầu tiên là có khả năng đoán sai, và vì có N màu khác nhau, nên khả năng tất cả mọi người đều đoán đúng chỉ phụ thuộc vào khả năng người đầu đoán đúng, và khả năng này là $1/N$.

Hãy thử xét một ví dụ đơn giản với 5 người chơi, 3 màu nón và mỗi người lần lượt đội các nón là $(1, 2, 0, 2, 1)$:

- Người đầu tiên, quan sát được trước mình có các nón $(2, 0, 2, 1)$, có tổng bằng $2 + 0 + 2 + 1 \equiv 2 \pmod 3$, người này sẽ hô mình có màu 2 (và sai).
- Người tiếp theo, quan sát thấy trước mình có $(0, 2, 1)$ và căn cứ vào lời đoán của người trước đó 2, nên sẽ đoán là $2 - 0 - 2 - 1 \equiv 2 \pmod 3$ (đúng).
- Người thứ 3, quan sát thấy $(2, 1)$ và căn cứ vào lời đoán của 2 người trước $(2, 2)$, nên đoán là $2 - 2 - 2 - 1 \equiv 0 \pmod 3$ (đúng).
- Người thứ 4, quan sát thấy (1) và căn cứ vào lời đoán của 3 người trước $(2, 2, 0)$, nên đoán là $2 - 2 - 0 - 1 \equiv 2 \pmod 3$ (đúng).
- Người cuối cùng, căn cứ vào lời đoán của 4 người trước $(2, 2, 0, 2)$, nên đoán là $2 - 2 - 0 - 2 \equiv 1 \pmod 3$ (đúng).

Kết quả là 4 người sau đều luôn luôn đoán đúng và người đầu tiên xác suất đúng là $1/3$.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày lời giải cho bài toán đội nón số 9. Để tiện theo dõi, chúng tôi nêu lại đề ở đây.

Có 100 người xếp thành hàng, mỗi người được đội một nón trong số 101 nón khác màu nhau. Mỗi người chỉ thấy nón của những người đứng trước mình và không thấy nón của mình cũng như những người đứng sau. Lần lượt mỗi người từ sau ra trước phải đoán màu nón của mình và hô to cho mọi người cùng nghe. Màu nào đã hô rồi sẽ không được hô lại nữa. Người chơi không được trao đổi thông tin với nhau. Tìm chiến thuật sao cho khả năng tất cả đều đoán đúng là cao nhất.

Thoạt nhìn, 2 bài toán này khá giống nhau, nhưng khi thật sự giải chúng ta sẽ thấy đây là một bài khác, và mỗi bài có vẻ đẹp riêng biệt. Trước khi đi vào phân tích lời giải cho bài này, chúng tôi xin nhắc lại hai khác biệt cơ bản giữa bài toán đội nón số 9 so với bài toán số 7:

- N người chơi, mỗi người đội một nón trong số $N + 1$ nón khác màu nhau. Điều này có nghĩa là màu nón mỗi người đều khác nhau. Ở bài số 7, ta không có ràng buộc giữa số người chơi và số màu nón, hơn nữa họ có thể đội nón giống màu nhau.
- Màu hô rồi không được hô lại. Ở bài số 7, điều kiện này không có.

Như đã phân tích ở trên, ta thấy rằng có thể áp dụng chiến thuật cũ với modulo 101, nhưng vì điều kiện không cho phép màu hô rồi được dùng lại nên chiến thuật gặp trở ngại! Vì người chơi đầu tiên (đứng cuối hàng) sau khi đã chọn 1 màu nón (theo modulo), thì khả năng trùng với màu của một trong những người đứng trước là rất cao, lên đến $99/101$, nên có thể nói rằng gần như sẽ có một người tuy biết rõ màu nón của mình, nhưng không thể hô! Và chúng ta gặp bế tắc ở đây!

Konstantin Knop, tác giả của bài toán, đưa ra gợi ý như sau: Hãy để người chơi không may mắn hô lên màu nón của người xếp đầu hàng (người không thấy nón của ai). Lúc này, tất cả những người chơi chưa đoán màu nón của mình nếu thấy có người nào đó (trừ người đầu tiên) đoán màu của người đầu hàng, sẽ biết rằng đó là kẻ "không may mắn". Những người tiếp theo, căn cứ vào đó sẽ tính được màu nón của mình (và không trùng lại nữa), và chỉ có người đứng đầu hàng (người đoán cuối cùng) là đoán sai, do màu nón của anh ta đã bị sử dụng.

Như vậy với chiến thuật này, không quá 3 người phải hi sinh để cứu mọi người khác. Trong số này, không phải ai cũng là "anh hùng", vì người cuối hàng (người đoán đầu tiên) biết màu nón của mình với xác suất 1/2. Bằng cách thông báo những gì mình thấy, anh ta hi sinh cơ hội của mình. Hai người còn lại "ra đi" trước cả khi họ phải đoán.

Liệu phương án trình bày ở trên là tối ưu? Câu trả lời là chưa. Bạn đọc hẳn sẽ đặt câu hỏi vì sao chúng tôi (và cả tác giả của bài toán) bàn về phương án này, mặc dù nó chưa phải lời giải cần tìm? Đơn giản là vì nó đẹp và nó có thể giải quyết tổng quát với M > N nón.

Để đi đến đến lời giải tối ưu cho bài toán này, chúng tôi xin mời độc giả rời xa modulo mà chuyển sang một phương thức khác: sử dụng **hoán vị!**

Hãy tưởng tượng, ta có thêm một người chơi "ảo", đội chiếc nón còn lại và đứng sau người cuối hàng. Như vậy, toàn bộ cách đội nón trở thành hoán vị của 101 số!

Làm thế nào để người chơi (không ảo) đầu tiên có thể truyền tải thông tin cho các người khác đoán ra hoán vị của tất cả bọn họ? Trước mặt anh ta là 99 người, nên chỉ có 2 hoán vị có thể có khi quan sát từ vị trí này. Với chỉ một bit thông tin (ứng với 2 hoán vị) như vậy, làm sao họ có thể chiến thắng? Câu trả lời là anh ta sẽ chọn màu sao cho hoán vị tương ứng là một hoán vị chẵn (even permutation)[2]. Căn cứ vào đó những người chơi tiếp theo sẽ đoán ra màu nón của mình, nằm trong số 2 màu mà họ chưa nghe thấy hoặc chưa quan sát thấy. Nhờ vào hoán vị chẵn, họ sẽ chọn đúng màu nón của mình! Một lời giải đơn giản và tuyệt đẹp!

Chúng ta hãy cùng xét ví dụ cụ thể như sau: Giả sử có 3 người chơi và 4 nón:

- Giả sử người đứng cuối hàng thấy nón người đứng đầu tiên là 2 và người tiếp theo là 4, nghĩa là các hoán vị có thể có sẽ có dạng [* * 4 2]. Cụ thể, có 2 hoán vị có thể có

[2]Hoán vị chẵn (even permutation) là một hoán vị có số lượng nghịch thế (inversion), tức số cặp mà ở đó số lớn xuất hiện trước số nhỏ, là chẵn. Ví dụ [1 3 4 2] có 2 nghịch thế là (3, 2) và (4, 2) nên là hoán vị chẵn.

là [1 3 4 2] và [3 1 4 2]. Vì [1 3 4 2] là hoán vị chẵn ([3 1 4 2] là hoán vị lẻ), nên người đầu tiên sẽ hô mình có màu 3 (và gán 1 cho người "ảo").

- Lúc này, người tiếp theo có thông tin cho anh ta là [* 3 * 2], nên có 2 hoán vị tương ứng là [1 3 4 2] và [4 3 1 2], nên anh ta sẽ chọn [1 3 4 2] do [1 3 4 2] là hoán vị chẵn và [4 3 1 2] là hoán vị lẻ (có 5 nghịch thế). Vì vậy, anh ta hô màu 4 cho mình. Và đây là kết quả đúng.
- Người cuối cùng, lắng nghe thông tin từ 2 người trước, nên có [* 3 4 *] và có 2 hoán vị để anh ta có thể chọn là [1 3 4 2] và [2 3 4 1]. Ở đây một lần nữa anh ta sẽ chọn [1 3 4 2] vì đó là hoán vị chẵn ([2 3 4 1] có 3 nghịch thế, nên là hoán vị lẻ) nên sẽ hô màu 2 cho mình.

Vậy theo chiến thuật này, chắc chắn $N - 1$ người sau sẽ đoán đúng màu nón của mình và người đầu tiên có 2 khả năng để chọn nên khả năng chiến thắng cho tất cả mọi người là $1/2$.

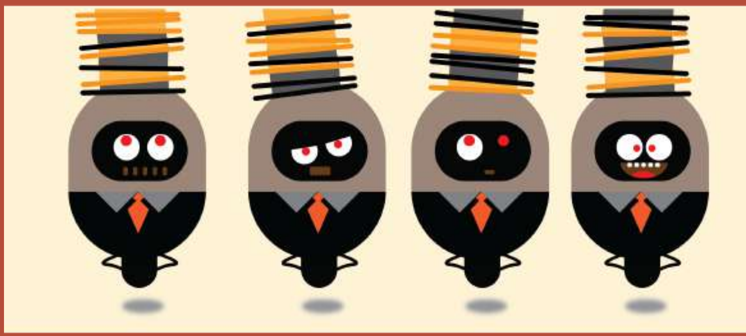
Tiếp theo, để kết thúc cho chuyên mục "Các bài toán đội nón", chúng tôi trình bày phần lời giải cho một trường hợp rất khó với bài toán vô hạn nón, trong đó phần lớn phải sử dụng đến sự hỗ trợ của máy tính.

3. Bài toán vô hạn nón

Trong phần này, chúng tôi tham khảo và gần như dịch lại phần lớn những ghi chú từ bài toán #1179 trong chuyên mục "Câu đố hàng tuần" của nhà toán học Stan Wagon (đại học Macalester). Như 2 phần trước, chúng tôi đăng lại đề bài ở đây để độc giả tiện theo dõi.

Bài toán này được đề ra bởi Lionel Levine (đại học Cornell) vào năm 2011 như sau: Bốn người cùng tham gia một trò chơi đoán nón như sau: Người dẫn trò sẽ đội vô hạn các nón có màu trắng hoặc đen lên đầu mỗi người với xác suất nón trắng và đen là như nhau và bằng $\frac{1}{2}$. Các nón của mỗi người được đánh số lần lượt $1, 2, \ldots$ Mỗi người chơi chỉ thấy được toàn bộ nón của 3 người khác nhưng nón của mình thì họ không thấy.

Mỗi người sẽ được phát một tờ giấy và họ được phép ghi vào đó một con số, ứng với chỉ số của nón của họ mà họ đoán là màu đen. Sau khi nhận đủ trả lời, người dẫn trò sẽ kiểm tra số được ghi trên giấy của mỗi người.



Nếu cả 4 người cùng đoán đúng (tức là 4 người đều ghi được con số ứng với nón màu đen của mình), họ thắng trò chơi, ngược lại, chỉ cần một người đoán không đúng, họ thua. Bốn người được thảo luận trước chiến thuật trước khi chơi và không có bất kỳ trao đổi nào sau đó. Họ cũng không biết được thời điểm mà những người khác đưa giấy cho người dẫn trò. Hãy tìm chiến thuật để xác suất thắng là cao nhất.

Ví dụ: họ đều ghi số 2015 vào các mảnh giấy. Khi đó, cơ hội chiến thắng sẽ là 1/16 vì xác suất nón thứ 2015 của mỗi người là 1/2.

3.1. Chiến thuật New Zealand

Lời giải đầu tiên trình bày ở đây được Stan Wagon gọi là chiến thuật New Zealand (vì đội bóng bầu dục của New Zealand có tên và biểu tượng là ALL-BLACKS). Chiến thuật như sau:

Người thứ j sẽ tìm ra chỉ số $\#j$ nhỏ nhất sao cho toàn bộ nón thứ $\#j$ của tất cả những người quan sát được đều có màu đen. Người này sẽ đoán màu nón thứ $\#j$ của mình cũng là màu đen.

Chiến thuật này sẽ thành công nếu tại vị trí nào đó tất cả đều đội nón đen và thất bại nếu như có 1 người đội nón trắng. Vì có n khả năng có 1 người đội nón trắng và 1 khả năng tất cả đều đội nón đen, nên xác suất thành công của chiến thuật sẽ là $1/(n+1)$.

Hãy thử phân tích cho trường hợp đơn giản với 2 người chơi: ta thấy nếu các nón đầu tiên có màu là Đen-Đen, họ sẽ thành công. Nếu có màu Trắng-Trắng họ sẽ đi lên cặp tiếp theo, nếu là Đen-Trắng hoặc Trắng-Đen, họ sẽ thất bại. Như vậy xác suất để chiến thắng là 1/3.

Stan Wagon, sau đó nhận ra rằng nếu như chiến thuật là tìm ra chỉ số $\#j$ nhỏ nhất trong đó có đúng k nón trắng cũng sẽ thành công với xác suất $1/(n+1)$ với $k < n$ bất kỳ. Chiến thuật New Zealand với mở rộng này đồng nghĩa với $k = 0$. Tư tưởng này khá gần với phần 1 của bài trong chiến thuật đối phó với người dẫn trò "xảo quyệt".

Đây có phải là chiến thuật tốt nhất? Câu trả lời là chưa phải, nhưng đây là một chiến thuật đơn giản có hiệu quả rất tốt. Theo Stan Wagon, với $n = 2$ và $n = 3$, hiệu quả của chiến thuật có thể so sánh với các chiến thuật phức tạp hơn. Tuy nhiên với n tổng quát, chiến thuật được đưa ra bởi Peter Winkler sẽ thành công với xác suất xấp xỉ $1/\log(n)$, khi n lớn sẽ vượt trội chiến thuật New Zealand.

3.2. Chiến thuật Winkler (2011)

Chiến thuật này như sau: tất cả người chơi sẽ thống nhất với nhau một số t và mỗi người sẽ đoán dựa trên 2 tiêu chí sau đây:

- **Tiêu chí (A).** Trong số t nón đầu tiên của mỗi người đều có ít nhất một nón đen.
- **Tiêu chí (B).** Tổng các chỉ số của nón đen đầu tiên trên đầu mọi người chia hết cho t.

Người chơi thứ j quan sát thấy toàn bộ $n-1$ nón đen đầu tiên của những người chơi khác nên khi có t và áp dụng 2 tiêu chí trên, anh ta sẽ nhanh chóng tính ra được chỉ số nón đen đầu tiên của mình. Và đó là con số duy nhất trong khoảng từ 1 đến t.

Xét tiêu chí (A) với $n = 1000$ người chơi và giá trị $t = 13$, khi đó xác suất trong 13 nón đầu có nón đen xuất hiện của một người là $1-(1/2)^{13}$ và do vậy xác suất cả n người đều có nón đen trong số t nón đầu sẽ là $(1-(1/2)^{13})^{1000} = 0.885$, nghĩa là xấp xỉ 88.5%. Xác suất này sẽ tiến dần đến xấp xỉ 100% khi t tăng.

Xét tiêu chí (B), xác suất để tổng tất cả các chỉ số của nón đen đầu tiên chia hết cho t là $1/t$.

Như vậy, chiến thuật Winkler đề ra sẽ thành công khi cả (A) và (B) đều đúng, nghĩa là xác suất thành công sẽ là:

$$\left(1-\frac{1}{2^t}\right)^n \frac{1}{t}$$

nếu ta xét (A) và (B) như 2 biến cố độc lập (mặc dù thực tế (A) và (B) không hoàn toàn độc lập).

Câu hỏi đặt ra là với chiến thuật như vậy, xác suất chiến thắng là bao nhiêu? Và giá trị t cần chọn là bao nhiêu? Để chiến thuật Winkler thành công với xác suất cao nhất, cần tìm ra giá trị t sao cho xác suất của cả (A) và (B) đồng xảy ra đạt giá trị cực đại.

Để tìm cực trị cho $(1-\frac{1}{2^t})^n\frac{1}{t}$, ta xét đạo hàm:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(1-\frac{1}{2^t})^n}{t}\right) = \frac{(1-2^{-t})^n(nt\log(2)-2^t+1)}{(2^t-1)t^2}$$

Vì $t>0$ và $n>0$ nên đạo hàm bằng 0 khi:

$$nt\log(2)-2^t+1=0 \Leftrightarrow 2^t = nt\log(2)+1$$

Ta có khai triển MacLaurin của 2^t là:

$$2^t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\log^n(2)}{n!}$$

Giá trị t thỏa mãn sẽ xấp xỉ $t \approx \log 2(2n-2)$.

Ở đây, tiêu chí (B) cần quan tâm cao hơn vì có khả năng giá trị tối ưu sẽ đạt được khi tổng các chỉ số đầu tiên có giá trị khác 0 (mod t), nghĩa là xác suất tối ưu có thể xảy ra khi tổng này đồng dư với $s \pmod t \neq 0$ nào đó. Chiến thuật Winkler vì vậy trở thành tìm cặp giá trị (t,s) sao cho giá trị xác suất đạt cực đại với đầu vào n cho trước. Ta có thể tìm ra giá trị này thông qua thuật toán như sau:

Gọi $F(n,t,s)$ là số cách đội nón cho n người với t nón đầu tiên sao cho cả 2 tiêu chí (A) và (B) đều thỏa. Khi đó, xác suất thành công chính là $F(n,t,s)/2^{tn}$.
F có thể xây dựng đệ quy như sau:

- F[1, t, 0] = 1, lưu ý, ở đây cần hiểu là $s=t$, và với $n=1$ thì chỉ có 1 khả năng là nón vị trí t là nón có đầu tiên có màu đen.
- F[1, t, s] = 2^{t-s}, vì chỉ cần nón ở vị trí s là nón đầu tiên màu đen, các nón sau đó có thể có màu tùy ý.
- F[n, t, s] = $\sum_{k=1}^{t} 2^{(t-k)}$ F[n - 1, t, modulo(s - k, s)], đây

chỉ là đệ quy dựa trên kết quả ở bước trước.

Một số kết quả tính toán với chiến thuật Winkler:

- $n = 2$ và $n = 3$: chiến thuật Winkler không tốt hơn chiến thuật New Zealand. Cụ thể xác suất tối ưu cho $n = 2$ là $F(2, 2, 0)/16 = 5/16 < 1/3$ và $n = 3$ là $F(3, 3, 0)/512 = 121/512 < 1/4$.
- $n = 4$, chiến thuật Winkler nhắm tới s = 0 không nhỉnh hơn New Zealand, nhưng với kết quả tối ưu $t = 4$ và $s = 1$, xác suất là 421/2048, hay 0.2056, khoảng 3% nhiều hơn 1/5.
- Với n lớn, chiến thuật Winkler vượt trội chiến thuật New Zealand. Với $n = 1000$, (t, s) tối ưu là $(13, 10)$ xác suất tính được xấp xỉ 0.068, tức là 68 lần tốt hơn xác suất 1/1001 của chiến thuật New Zealand.

3.3. Những ý tưởng mới

Chiến thuật Winkler mặc dù cho ra kết quả rất tốt với n lớn, tuy nhiên, đây vẫn chưa phải là chiến thuật tốt nhất. Năm 2014, Larry Carter, J-C Reyes, và Joel Rosenberg (San Diego) đã đề xuất ra hai chiến thuật mới như sau:

Chiến thuật "sửa sai"[3]. Ý tưởng của chiến thuật này như sau: nếu như một người nhận ra rằng có đồng đội nào đó của mình sẽ thất bại nếu tuân theo chiến thuật cơ bản của Winkler, lúc đó người này sẽ nhận ra rằng họ sẽ thất bại nếu cứng nhắc tuân theo chiến thuật gốc, vì vậy thay vì áp dụng trong đoạn từ 1 đến t chiến thuật Winkler, người này sẽ sửa sai bằng cách áp dụng chiến thuật trong đoạn từ $t+1$ đến $2t$. Và như vậy, nếu mọi người đều nhận ra không thể áp dụng chiến thuật trong đoạn 1 đến t, họ sẽ sửa sai bằng cách nhảy lên một đoạn. Chiến thuật này vẫn sẽ thất bại trong trường hợp có người chơi không thể tìm thấy lỗi. Ví dụ như người A có toàn bộ t nón đầu đều màu trắng, lúc đó A sẽ không thể nhận ra là cần phải sửa lỗi. Kiểm tra bằng máy tính, chiến thuật này thật sự tốt hơn chiến thuật Winkler, với $(n = 4, t = 4, s = 1)$, chiến thuật nâng xác suất thành công từ 0.205566 lên 0.210090.

[3]Thuật ngữ gốc là The "reset" strategy, ở đây chúng tôi gọi là "sửa sai" dựa trên ý tưởng của chiến thuật.

Chiến thuật hoán vị. Ý tưởng cơ bản là thay vì tuân theo chiến thuật (B) tính tổng toàn bộ những nón đen đầu tiên của đồng đội thì họ sẽ tính các tổng từ các hoán vị khác nhau. Điều này buộc phải sử dụng thêm giả định là người chơi ngầm định mỗi người có thứ tự khác biệt. Sử dụng trợ giúp của máy tính, Stan Wagon cho ra kết quả với $n = 3$, $t = 4$ và hoán vị (342), kết quả đạt được là $263/1024 = 0.256$, cao hơn $1/4$ của chiến thuật New Zealand và $121/512 = 0.236$ của chiến thuật Winkler. Với chiến thuật "sửa sai", kết quả là 0.259.

J-C Reyes và Joel Rosenberg tiếp tục đề xuất một chiến thuật mới đạt kết quả tốt hơn cho trường hợp $n = 3$. Stan Wagon cũng không giải thích được vì sao phương pháp này có thể đạt hiệu quả cao như vậy! Tuy nhiên, kiểm chứng bằng máy tính cho thấy kết quả thật sự tốt hơn. Cụ thể là xác suất với $n = 3$ là 0.2617, cao hơn toàn bộ các chiến thuật đã được giới thiệu tính đến đây.
Phương pháp này dựa trên 3 ma trận kích thước 8×8 được xây dựng trước:

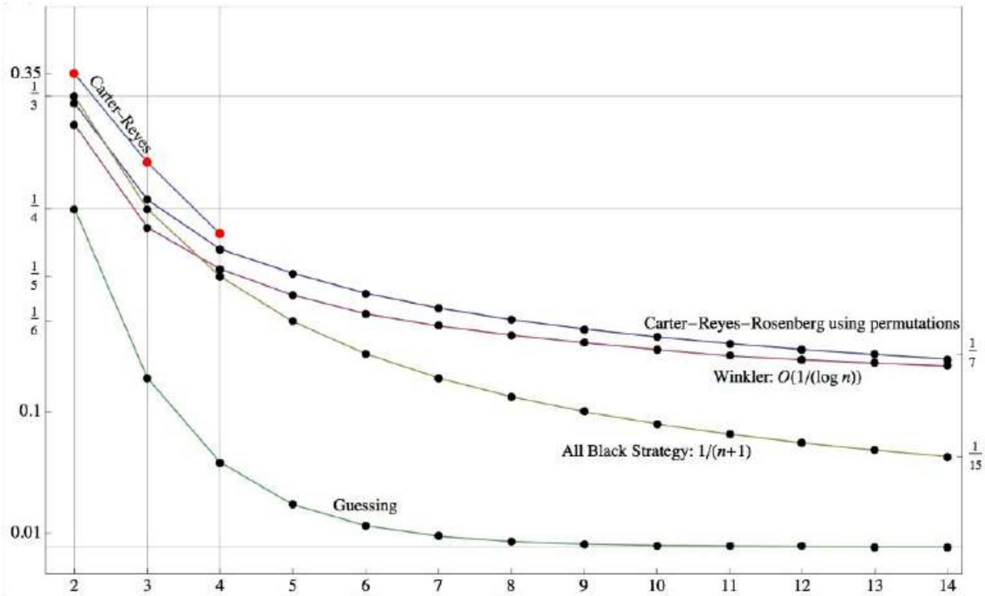
2, 1, 4, 3, 5, 6,	2, 1, 3, 5, 4, 6,	2, 1, 3, 5, 4, 6,
8, 7, 1, 3, 2, 5,	7, 8, 1, 3, 2, 4,	7, 8, 1, 3, 2, 4,
4, 7, 6, 8, 3, 2,	6, 5, 8, 7, 3, 2,	6, 5, 8, 7, 4, 2,
1, 4, 6, 5, 7, 4,	1, 1, 5, 4, 6, 6,	1, 6, 5, 8, 8, 6,
5, 4, 6, 2, 1, 3,	5, 4, 1, 3, 2, 7,	4, 5, 4, 2, 1, 7,
1, 2, 4, 5, 7, 1,	6, 5, 4, 5, 6, 2,	6, 7, 5, 4, 6, 1,
3, 2, 8, 6, 7, 6, 5,	1, 3, 7, 7, 7, 6, 4,	2, 3, 6, 1, 6, 7, 5,
8, 2, 1, 4, 3, 6, 8,	8, 3, 1, 2, 5, 6, 8,	3, 8, 2, 1, 4, 8, 6,
3, 7, 1, 4, 1, 2, 8,	5, 7, 2, 2, 3, 1, 8,	7, 6, 3, 1, 4, 2, 7,
7, 2, 6, 5, 6, 2, 1.	7, 8, 6, 1, 3, 1, 2.	8, 4, 5, 2, 4, 2, 1.
Ma trận A	Ma trận B	Ma trận C

Chiến thuật áp dụng như sau: người A sẽ tìm nón đen nhỏ nhất của B và C, sau đó sẽ chọn giá trị ở vị trí tương ứng ở ma trận A. Ví dụ như A thấy người B có nón đầu tiên là màu đen và người C có nón đầu tiên màu đen là nón thứ 5. Khi đó, A sẽ chọn số ở vị trí (1, 5) ở ma trận A, ứng với giá trị 5. B và C cũng làm tương tự với ma trận của mình. Chiến thuật sẽ chắc chắn sai khi có một người có nón đen đầu tiên nằm ngoài 8 vị trí đầu tiên. Lưu ý rằng các số trên dòng và cột ở các ma trận này không phải là hoán vị, nên tổng khả năng của các ma trận là $8^{3*64} = 10^{173}$.

Chiến thuật Winkler với $(n = 3, t = 3, s = 0)$ tương ứng với chiến thuật này với ma trận A = B = C và bằng

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Để tổng kết các phương pháp, chúng tôi sử dụng lại hình ảnh của tóm tắt Stan Wagon và trình bày lại ở Hình. 6.3.



Hình 6.3: Hiệu quả của các chiến thuật dùng để giải bài toán vô hạn nón. Nguồn: [5]

3.4. Trường hợp n = 2

Toàn bộ các chiến thuật ở trước đều cố gắng tìm ra phương án tốt hơn cho $n > 2$, vì với $n = 2$, đa số đều nghĩ rằng chiến thuật đơn giản New Zealand đã cho kết quả tối ưu. Tuy nhiên, Jim Roche đã khám phá ra rằng, ngay cả trong trường hợp $n = 2$, các phương án tốt hơn vẫn còn có thể được phát hiện! Cụ thể, chiến thuật sau đây sẽ thành công với xác suất $22/63 = 0.349 > 1/3$.

A và B sẽ tuân theo 7 "mẫu" như sau: nếu A thấy 3 nón đầu tiên của B là Đen-Đen-Đen hoặc Đen-Đen-Trắng hoặc Trắng-Đen-Đen, A sẽ chọn 1. Nếu A thấy 3 nón đầu là Đen-Trắng-Đen hoặc

Trắng-Trắng-Đen sẽ chọn 2 và nếu A thấy Trắng-Đen-Đen hoặc Trắng-Đen-Trắng sẽ chọn 3. Và B cũng làm tương tự. Chiến thuật này, Stan Wagon gọi đây là chiến thuật 3-nón[4].

Nếu A thấy 3 nón đầu của B đều màu trắng, A biết rằng chiến thuật không sử dụng được, A sẽ sửa sai bằng cách di chuyển quan sát lên các nón từ 4 đến 6 và lại áp dụng 7 luật như trên.

Kiểm tra bằng vét cạn (Brute-force), nếu không áp dụng sửa sai, chiến thuật cho kết quả $22/64 = 0.34375$ và với sửa sai, kết quả là $22/63 = 0.3492064$. Stan Wagon đã thử nghiệm với các ma trận khác nhau cho A và B, nhưng kết quả không cao hơn.

Các mở rộng với các giá trị của t với $n = 2$ và $n = 3$ được khảo sát bởi máy tính và kỷ lục hiện tại cho $n = 2$, $t = 8$ là 22937/65535 = 0.3499961 và **0.35 vẫn đang là một chặn trên cho trường hợp vô hạn nón có 2 người chơi**.

Tiefenbruck, Reyes, Carter, và Rosenberg đưa ra một cách lý luận đơn giản cho kết quả 0.35 như sau: bắt đầu với chiến thuật 3-nón 11213321 với xác suất 22/64. Nếu A thấy 3 nón đầu tiên của B là toàn trắng hoặc toàn đen, A sẽ bỏ qua và xem xét 3 nón tiếp theo và cứ thế tiếp tục. B cũng làm tương tự. Nghĩa là họ chỉ áp dụng chiến thuật 3-nón khi thấy 3 nón có màu khác nhau, do vậy, có 60 khả năng mà tại đó ít nhất A hoặc B phải đoán (không bỏ qua). Và họ sẽ thắng lợi với xác suất 21 trong tổng số 60 trường hợp này, ít hơn 1 trường hợp so với chiến thuật 3-nón (là trường hợp 3 nón đầu tiên của cả 2 người đều màu đen). Và như vậy, xác suất chiến thắng là $21/60 = 0.35$.

[4] Với 0 là đen và 1 là trắng, chiến thuật 3-nón tóm tắt như sau:
$(0,0,0) \to 1$,
$(0,0,1) \to 1$,
$(0,1,0) \to 2$,
$(0,1,1) \to 1$,
$(1,0,0) \to 3$,
$(1,0,1) \to 3$,
$(1,1,0) \to 2$, hay gọi ngắn gọn là 11213321, ứng với chỉ số cho bộ 8 giá trị khác nhau sinh ra từ 3 nón.

3.5. Sáng tạo bất tận

Liệu chúng ta có thể nâng cao hiệu quả cho bài toán? Để giải đáp được câu hỏi này, trước tiên cần phát biểu lại bài toán một cách hệ thống. Thử xét với trường hợp $n = 2$:

Gọi $\mathbb{P}$ là tập của tất cả các chuỗi 0 và 1; và $\mathbb{N}$ là tập số tự nhiên. Khi đó, một cách đội nón ở một chỉ số nào đó là một phần tử của $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$. [5] Một chiến thuật là một hàm $S : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{N}$, không quan tâm nếu hàm này có khả dụng hay không (hay dễ hiểu hơn là không quan tâm đến sự phức tạp của hàm này). Và như vậy với lý thuyết tập hợp dựa trên tiền đề chọn[6], tồn tại một chiến thuật mà nếu người chơi sử dụng họ sẽ đưa tập con của $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ về chiến thắng với độ đo ngoài bằng 1. Điều này có nghĩa là luôn tồn tại chiến thuật mà người chơi không thua! Hoặc, quay lại những nghi ngờ kinh điển của Toán học về tiên đề chọn với những tranh cãi cũng vô tận như chính bản thân của vấn đề!

Như vậy, mặc dù tồn tại chiến thuật luôn chiến thắng (Lưu ý: tiên đề chọn được sử dụng), với trường hợp $n = 2$, chiến thuật tốt nhất được ghi nhận hiện tại vẫn chỉ là 35% và với $n > 2$, kết quả hãy còn thấp hơn rất nhiều. Điều này có nghĩa là bài toán vẫn còn được để mở và mong chờ các đóng góp từ những người yêu toán học.

4. Lời kết

Như vậy là với 2 chuyên mục đầu tiên về toán học giải trí đăng tải ở 2 số đầu tiên của Epsilon, chúng tôi đã giới thiệu tương đối trọn vẹn "50 năm những bài toán đội nón". Thông qua những bài toán này, chúng tôi hi vọng đã mang đến cho độc giả không

[5] Kết quả này được chứng minh bởi Freiling với tên gọi định lý C. Freiling, có thể tham khảo ở liên kết cuối bài.

[6] Tiên đề chọn, hay còn gọi là tiên đề Zermelo-Fraenkel được đưa ra bởi Zermelo vào năm 1904, là tiên đề khẳng định rằng với mỗi họ tập hợp tùy ý không rỗng và đôi một không giao nhau luôn tồn tại một tập hợp mà mỗi phần tử của nó là phần tử của một tập hợp trong họ tập hợp kia và phần tử đó là duy nhất.

Một cách phát biểu khác của tiên đề chọn là: "Với một họ $\mathbb{X}$ bất kỳ các tập hợp không rỗng, luôn tồn tại một hàm chọn f định nghĩa trên $\mathbb{X}$". Đây chính là cơ sở của chứng minh cho bài toán vô hạn nón bằng cách áp dụng hàm chọn cho S.

chỉ là những bài toán đố thuần túy mà còn từ đó cho thấy giá trị và vẻ đẹp của toán học tiềm ẩn ở mọi nơi.

Để tiện tra cứu, độc giả có thể truy tìm lại nguồn gốc của từng bài thông qua những tài liệu sau:

- **Phần 1:** chúng tôi sử dụng chủ yếu tài liệu ở [1] và [2]. Phần bài toán đội nón số 6, "người dẫn trò xảo quyệt" khá hiếm gặp. Bài toán theo ghi nhận của chúng tôi xuất hiện một cách chính thức tại Việt Nam vào năm 2007, trong khóa học của giáo sư Michel Waldschimidt, khoa Toán đại học Pierre et Marie Curie, Paris. Ông đã đến trường Đại học Khoa học Tự nhiên TP.HCM trong dịp này và giảng cho sinh viên và học sinh phổ thông Năng Khiếu các bài giảng rất thú vị, phần bài giảng này, may mắn thay vẫn còn có thể được tìm thấy ở đây.

- **Phần 2:** Chúng tôi sử dụng chủ yếu từ [3] và tham khảo Blog của Tanya Khovanova.

- **Phần 3:** Bạn đọc có thể xem thêm ở [4] và đặc biệt là ở [5] (trang gốc của tác giả Stan Wagon).

Tài liệu tham khảo

[1] E. Brown and J. Tanton, “A dozen hat problems,” *Archives of Psychology*, vol. 16, no. 4, pp. 22–25, 2009.

[2] A. Zorn, “Colored hats and logic puzzles,” *Berkeley Math Circle*, 2013.

[3] T. Khovanova, “A line of sages,” *The Mathematical Intelligencer*, 2014.

[4] C. S. Hardin and A. D. Taylor, “An introduction to infinite hat problems,” *The Mathematical Intelligencer*, vol. 30, no. 30, pp. 20–25, 2008.

[5] S. Wagon, “Problem of the week 1179,” 2014.

BÀI TOÁN FROBENIUS VỀ NHỮNG ĐỒNG XU

Trần Nam Dũng (*Đại học KHTN, TP. Hồ Chí Minh*)

Nguyễn Tất Thu (*THPT Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai*)

Bài toán Frobenius về những đồng xu là một bài toán kinh điển đã được nhắc đến trong nhiều bài viết, nhiều công trình nghiên cứu. Một trong những lý do để đề tài tiếp tục được để ý là bài toán số 6 trong kỳ thi chọn học sinh giỏi toán quốc gia năm học 2014-2015 mới diễn ra vào tháng 1 vừa qua.

Tác giả thứ nhất của bài báo có nhiều duyên nợ với bài toán này. Khi còn là học sinh, anh đã gặp (và rất may mắn, giải được) bài toán 4 ở dưới đây. Sau này anh lại gặp lại bài toán nhiều lần, lúc này đã là trong vai trò thầy giáo, giảng viên.

1. Mở đầu

Chúng ta mở đầu bằng một bài toán vui sau đây: Chúng ta đều đã đọc truyện hoặc xem phim Tây Du Ký. Câu chuyện sau đây rút từ chuyến đi kỳ vĩ của thầy trò Đường Tăng đến Tây Trúc.

Vừa thoát khỏi kiếp nạn Bạch cốt tinh, thầy trò Đường tăng lại đi vào một vương quốc mới, gọi là vương quốc Ngũ Bát. Sở dĩ có cái tên này là bởi vì Ngân hàng trung ương của Vương quốc này chỉ phát hành 2 loại tiền 5 quan (Ngũ) và 8 quan (Bát).

Vương quốc này cũng chưa được phát triển lắm nên người dân ở đây chỉ biết phép tính cộng, không biết phép tính trừ. Vì thế, khi bán hàng, nếu mình đưa thừa người ta sẽ không trả lại (còn đưa thiếu thì người ta. . . không chịu - khôn lắm).

Thầy trò Đường tăng đang đi tung tăng trong thành thì thấy một siêu thị có tên là “Over 28”. Thấy tên lạ lạ, họ bèn bước vào.

Nhân viên bảo vệ ra chặn lại, xem chừng không muốn cho vào. Trư bát giới xông ra nói:

- Sao không cho chúng ta vào?

Tay bảo vệ chỉ tay vào số 28 (nhị thập bát) nói: Ông có thấy số gì đây không?

- 28 à. 28 tuổi mới được vào à. Yên tâm đi nhé chú em. Anh đây 360 tuổi rồi nhé. Còn ông anh đang gãi mông kia 720 tuổi. Cái chú đang gánh hàng được 240 tuổi. Ngay cả con ngựa này cũng 130 tuổi rồi. Trẻ nhất ở đây có lẽ là sư phụ của bọn anh, ông ấy vừa làm sinh nhật lần thứ 30. Các chú có cần xem chứng minh nhân dân không, loại mới nhé, có cả tên bố mẹ.

- Không, không, đây không phải tuổi, đây là...

- Đây là gì... Trư Bát giới được thể tấn công.

- Đây là siêu thị mà mọi món hàng đều từ 28 quan trở lên. Tôi thấy mấy ông nhà quê quá, sợ không đủ tiền nên không muốn cho vào.

- Ấy, chú đừng nghĩ thế. Bọn anh đây đều là con nhà có điều kiện nhé, tiền 5 quan, 8 quan bọn anh mới đổi ở cửa khẩu ních túi nhé.

- Vậy xin mời các anh vào ạ.

Bài toán mở đầu: Chứng minh rằng thầy trò Đường tăng có thể mua đúng (tức là trả đúng giá tiền) mọi món hàng ở trong siêu thị "Over 28".

Về mặt toán học, bài toán này tương đương với mệnh đề sau: Chứng minh rằng với mọi số nguyên $N \geqslant 28$, tồn tại x, y nguyên không âm sao cho $N = 5x + 8y$. Bài toán này là trường hợp riêng của bài toán Frobenius về những đồng xu mà ta sẽ nói đến dưới đây. Có hai cách để giải bài toán này, đều mang tính thuật toán.

Cách 1: Ta tìm cách biểu diễn cho các số 28, 29, 30, 31, 32. Sau đó chú ý rằng nếu N biểu diễn được thì $N + 5$ cũng biểu diễn được.

Cách 2: Cách này khó nghĩ đến hơn nhưng đẹp hơn. Cụ thể như sau: Ta chứng minh nếu $N \geqslant 28$ biểu diễn được thì $N+1$ cũng biểu diễn được. Nếu trong biểu diễn của N có 3 số 5 thì ta thay 3 số 5 bằng 2 số 8 được biểu diễn của $N+1$. Nếu trong biểu diễn của N có 3 số 8 thì ta thay 3 số 8 bằng 5 số 5 thì được biểu diễn của $N+1$. Một trong hai TH này phải xảy ra vì nếu không có thì $N \leqslant 2\cdot 5 + 2\cdot 8 = 26$.

Ví dụ ở trên được trích từ bài giảng của chúng tôi dành cho sinh viên khoa Toán-Tin học trường ĐH KHTN Tp HCM, môn Số học và logic, trong mục về thuật toán Euclide và định lý Bezout. Với cách phát biểu thú vị và hài hước, chúng tôi đã lôi kéo được các sinh viên vốn rất sợ Số học và Logic tham gia vào thảo luận và tìm kiếm lời giải. Thực tế, trên lớp các sinh viên đã tự mình tìm được lời giải cho bài toán theo cách 1.

Bài toán nói trên chỉ là một trường hợp đặc biệt của một bài toán tổng quát hơn: bài toán Frobenius về những đồng xu.

Bài toán Frobenius về những đồng xu là bài toán xác định số tiền lớn nhất không thể trả được khi chỉ sử dụng các đồng xu có mệnh giá cố định nào đó. Ví dụ với các đồng xu mệnh giá 3 và 5 đơn vị thì số tiền lớn nhất không trả được là 7 đơn vị. Số lớn nhất với mỗi bộ số như thế ta gọi là số Frobenius.

Một cách toán học, bài toán được phát biểu như sau:

Cho các số nguyên dương $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *có* $\gcd(a_1, \cdots, a_n) = 1$. *Tìm số nguyên lớn nhất không biểu diễn được dưới dạng* $k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n$ *với* $k_1, k_2, \cdots, k_n$ *là các số nguyên không âm. Số nguyên lớn nhất này được gọi là số* ***Frobenius*** *và thường được ký hiệu là* $g(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

Và bài viết này sẽ nói về một số kết quả liên quan đến bài toán nổi tiếng này.

2. Định lý Sylvester và bài toán số 6 trong đề thi VMO 2015

Trong kì thi VMO năm 2015 có bài toán số 6 là trường hợp đặc biệt của bài toán ***Frobenius*** ứng với $n = 3$. Bài toán có nội dung như sau:

Với a, n nguyên dương, xét phương trình $a^2x+6ay+36z=n$, trong đó x, y, z là các số tự nhiên

1. *Tìm tất cả các giá trị của a để với mọi $n \geqslant 250$, phương trình đã cho luôn có nghiệm (x, y, z).*

2. *Biết rằng $a > 1$ và nguyên tố cùng nhau với 6. Tìm giá trị lớn nhất của n theo a để phương trình đã cho không có nghiệm (x, y, z).*

Để giải bài toán trên, chúng ta đi xét các bài toán sau đây:

Bài toán 1. Cho a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, $b > 1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên N, tồn tại duy nhất cặp số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện

$$N = ax + by \text{ và } 0 \leqslant x < b.$$

Lời giải. • Chứng minh sự tồn tại
Vì $(a, b) = 1$ nên theo định lí Bezout, tồn tại hai số nguyên u, v sao cho

$$N = au + bv.$$

Mặt khác $u = b.q + r$ với $0 \leqslant r \leqslant b - 1$ nên ta có

$$N = a(b.q + r) + bv = a.r + b(v + a.q).$$

Chọn $x = r, y = v + a.q$ ta được $N = ax + by$ với$0 \leqslant x \leqslant b - 1$.
• Chứng minh tính duy nhất
Giả sử tồn tại hai bộ $(x; y)$ và $(x'; y')$ thỏa $0 \leqslant x, x' < b$ và

$$N = ax + by = ax' + by'$$

Hay

$$a(x - x') = b(y' - y) \quad (1)$$

Do $(a, b) = 1$ nên từ (1) ta suy ra $b|x - x'$. Lại có $0 \leqslant x, x' \leqslant b - 1$ nên suy ra $x = x'$ và $y = y'$.
Vậy bài toán được chứng minh. □

Bài toán 2. (Định lí Sylvester) Cho a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng $N_0 = ab – a – b$ là số nguyên lớn nhất không biểu diễn được dưới dạng $ax + by$ với x, y là các số nguyên không âm. Hơn nữa, với mọi p, q nguyên với $p + q = N_0$, có đúng một trong hai số p, q biểu diễn được dưới dạng $ax + by$ với x, y là các số nguyên không âm (mà ta sẽ gọi tắt là biểu diễn được).

Lời giải. Để giải quyết bài toán, cần thực hiện hai bước sau
Bước 1: Chứng minh N_0 không biểu diễn được dưới dạng $ax+by$ với x,y là các số nguyên không âm.
Giả sử tồn tại hai số nguyên không âm x, y sao cho

$$ax + by = N_0.$$

Hay

$$a(x+1) + b(y+1) = ab \quad (2).$$

Vì $(a,b) = 1$ nên từ (2), suy ra $x + 1 \vdots b$ hay $x + 1 \geqslant b$. Tương tự $y + 1 \geqslant a$.
Khi đó

$$ax + by \leqslant a(b-1) + b(a-1) = 2ab - a - b > ab - a - b.$$

Điều này dẫn đến mâu thuẫn. Do vậy N_0 không biểu diễn được dưới dạng $ax + by$ với $x, y \in \mathbb{N}$.
Bước 2: Chứng minh với mọi số nguyên $N > N_0$ thì N biểu diễn được dưới dạng $ax + by$ với $x, y \in \mathbb{N}$.
Theo kết quả ***Bài toán 1*** ta suy ra: tồn tại duy nhất cặp (x, y) để

$$N = ax + by \text{ với } 0 \leqslant x < b.$$

Ta chỉ cần chứng minh $y \geqslant 0$. Thật vậy

$$y = \frac{N - ax}{b} > \frac{ab - a - b - a(b-1)}{b} = -1.$$

Mà y là số nguyên nên ta có $y \geqslant 0$.
Vậy bài toán được chứng minh. □

Trở lại bài toán trong đề thi VMO -2015. Bài toán đó có thể được phát biểu thành bài toán tổng quát hơn như sau

Bài toán 3. Cho các số nguyên dương a, b nguyên tố cùng nhau. Khi đó $N_0 = a^2b + b^2a - a^2 - b^2 - ab$ là số nguyên dương lớn nhất không biểu diễn được dưới dạng $a^2x + aby + b^2z$ với x, y, z là các số nguyên không âm.

Lời giải. Tương tự như bài toán 2 và bài toán 3, ta chứng minh bài toán qua hai bước.
Bước 1: Chứng minh N_0 không biểu diễn được dưới dạng a^2x+

$aby + b^2z$.
Giả sử tồn tại các số tự nhiên x, y, z để

$$N_0 = a^2x + aby + b^2z$$

Hay

$$a^2(b - x - 1) + b^2(a - z - 1) = ab(y + 1).$$

Từ đây, suy ra một trong hai số $b - x - 1$ và $a - z - 1$ có ít nhất một số dương. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $b - x - 1 \geqslant 0$.

Khi đó, do $(a, b) = 1$ nên ta suy ra $b - x - 1 \vdots b$, dẫn tới $b - x - 1 \geqslant b$ hay $x \leqslant -1$ (vô lí).
Do vậy N_0 không biểu diễn được qua $a^2x + aby + b^2z$.
Bước 2: Chứng minh với mọi số nguyên $N > N_0$ thì N biểu diễn được dưới dạng $a^2x + aby + b^2z$.
Do $N > N_0$ nên $N - ab^2 + a^2 + ab - a > ab^2 - b^2 - a$ nên theo định lí ***Sylvester*** ta suy ra tồn tại các số tự nhiên u, z sao cho

$$N - ab^2 + a^2 + ab - a = ua + b^2z \quad (4).$$

Vì $u \geqslant 0$ nên $u + ab - a - b + 1 > ab - a - b$ nên tiếp tục áp dụng định lí ***Sylvester*** suy ra tồn tại các số tự nhiên x, y sao cho

$$u + ab - a - b + 1 = xa + yb \quad (5).$$

Thay (5) vào (4) ta được

$$N - ab^2 + a^2 + ab - a = a(ax + by - ab + a + b - 1) + b^2z$$

Hay

$$N = a^2x + aby + b^2z.$$

Bài toán được chứng minh. □

Tại kì thi IMO năm 1983 có bài toán sau

Bài toán 4. Cho các số nguyên dương a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng $N_0 = 2abc - ab - bc - ca$ là số nguyên dương nhỏ nhất không biểu diễn được dưới dạng $abx + bcy + caz$ với x, y, z là các số nguyên không âm.

Lời giải. Tương tự như cách chứng minh định lí ***Sylvester***, bài toán được chứng minh qua hai bước
Bước 1: Chứng minh N_0 không biểu diễn được qua $abx + bcy + caz$. Chứng minh điều này tương tự như cách chứng minh định

lí ***Sylvester***.
Bước 2: Chứng minh với mọi số nguyên dương $N > N_0$ thì N luôn biểu diễn được dưới dạng $abx + bcy + caz$.
Vì $(a; bc) = 1$ nên theo ***bài toán 1*** tồn tại u, y sao cho $au + bcy = N$ với $0 \leqslant y \leqslant a - 1$. Tương tự, tồn tại v, z sao cho $N = vb + zac$ với $0 \leqslant z \leqslant b - 1$.

Từ đó, suy ra $bcy + caz - N \vdots ab$. Hay tồn tại số nguyên x sao cho

$$abx + bcy + caz = N.$$

Ta chỉ cần chứng minh $x \geqslant 0$. Thật vậy

$$x = \frac{N - bcy - caz}{ab} > \frac{2abc - ab - bc - ca - bc(a-1) - ca(b-1)}{ab} = -1.$$

Suy ra $x \geqslant 0$. Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 5. (VN TST 2000) Cho ba số nguyên dương a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau.Số nguyên dương n được gọi là ***số bướng bỉnh*** nếu n không biểu diễn được dưới dạng $abx + bxy + caz$ với x, y, z là các số nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu số bướng bỉnh.

Lời giải. Để giải bài toán này, ta chia làm hai bước
Bước 1: Chứng minh $N_0 = 2abc$ là số nguyên dương lớn nhất không biểu diễn được dưới dạng $abx + bcy + caz$ với x, y, z là các số nguyên dương.
Việc chứng minh N_0 không biểu diễn được qua $abx + bcy + caz$ với x, y, z là các số nguyên dương được chứng minh tương tự như các bài toán trên.
Ta chứng minh với mọi số nguyên dương $N > N_0$ thì N luôn biểu diễn được qua $abx + bcy + caz$ với x, y, z là các số nguyên dương.
Trước hết ta chứng minh nhận xét:
Với $1 \leqslant x \leqslant b$, $1 \leqslant y \leqslant a$ thì $ax + by$ lập thành hệ thặng dư đầy đủ theo mô đun ab.
Thật vậy: Dễ thấy có tất cả $a.b$ tổng $ax + by$ với $1 \leqslant x \leqslant b$, $1 \leqslant y \leqslant a$.
Giả sử tồn tại $1 \leqslant x, x' \leqslant b$, $1 \leqslant y, y' \leqslant a$ sao cho $ax + by \equiv ax' + by' (\mod ab)$.

Hay $a(x - x') \equiv b(y' - y) (\mod ab)$. Từ đây, suy ra $x - x' \vdots b$. Mà $1 \leqslant x, x' \leqslant b$ nên suy ra $x = x'$, dẫn đến $y = y'$. Do vậy nhận xét được chứng minh.

Theo nhận xét trên và kết hợp với a, b, c đôi một nguyên tố nên với $1 \leqslant x \leqslant b$, $1 \leqslant y \leqslant a$ thì $c(ax+by) = acx + bcy$ lập thành hệ thặng dư đầy đủ theo mô đun ab. Do đó với mọi số nguyên dương $N > N_0$, luôn tồn tại $1 \leqslant z_0 \leqslant a$, $1 \leqslant y_0 \leqslant b$ sao cho $acz_0 + bcy_0 \equiv N \pmod{ab}$ hay tồn tại số nguyên x_0 sao cho

$$acz_0 + bcy_0 + abx_0 = N.$$

Lại có $acz_0 + bcy_0 \leqslant acb + bca = 2abc < N$ nên ta có $x_0 > 0$.
Vậy với mọi $N > N_0$ thì N biểu diễn được dưới dạng $abx+bcy+caz$ với x, y, z là các số nguyên dương.
Bước 2: Đặt B là tập các số nguyên dương không biểu diễn được dưới dạng $abx + bcy + caz$ với x, y, z là các số nguyên dương.
Và $A = \{1, 2, \cdots, ab + bc + ca - 1\} \cup \{ab + bc + ca, ab + bc + ca + 1, \cdots, 2abc\}$.
Dễ thấy $\{1, 2, \cdots, ab + bc + ca - 1\} \subset B$.
Đặt $C = \{ab+bc+ca, ab+bc+ca+1, \cdots, 2abc\}$. Ta cần tìm $|B \cap C|$.
Với mỗi $n \in C$ ta xét hàm $f(n) = 2abc + ab + bc + ca - n$. Ta chứng minh

$$n \in B \Leftrightarrow f(n) \notin B \quad (1).$$

Với $n \in B$, theo chứng minh trên suy ra tồn tại các số nguyên $1 \leqslant y_0 \leqslant b$, $1 \leqslant z_0 \leqslant c$ và x_0 sao cho

$$n = abx_0 + bcy_0 + caz_0.$$

Vì $n \in B$ nên $x_0 \leqslant 0$. Khi đó

$$f(n) = ab(1 - x_0) + bc(1 + a - y_0) + ca(1 + b - z_0) \notin B.$$

Giả sử tồn tại $n \notin B$ để $f(n) \notin B$. Suy ra tồn tại các số nguyên dương x, y, z,x', y', z' sao cho

$$n = abx + bcy + caz \text{ và } f(n) = abx' + bcy' + caz'$$

Hay

$$2abc = (x + x' - 1)ab + (y + y' - 1)bc + (z + z' - 1)ca$$

Suy ra $2abc \notin B$ vô lí. Vậy (1) được chứng minh.
Từ chứng minh trên ta suy ra

$$|B \cap C| = \frac{1}{2}|C| = \frac{2abc - ab - bc - ca + 1}{2}.$$

Vậy số các số bướng bỉnh là: $abc + \dfrac{ab + bc + ca - 1}{2}$. $\square$

3. Một hướng tiếp cận khác: Hàm sinh

Trong phần này ta sẽ đưa ra một hướng tiếp cận khác cho trường hợp $n = 2$ của bài toán Frobenius. Với hướng tiếp cận này, khi mở rộng cho trường hợp $n \geqslant 3$ sẽ thu được những kết quả thú vị, đi xa hơn so với các tiếp cận truyền thống đã trình bày ở phần trước.
Với hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau a, b và số tự nhiên n ta đặt

$$p_{\{a,b\}}(n) = \left\{(k,l) \in Z^2 \,|k,l \geqslant 0;\ ak + bl = n\right\}$$

Ta xét tích của hai cấp số nhân

$$\frac{1}{1-z^a}.\frac{1}{1-z^b} = \left(1 + z^a + a^{2a} + ...\right)\left(1 + z^b + z^{2b} + ...\right)$$

Nếu ta nhân tất cả các thừa số ta sẽ được chuỗi của các lũy thừa là tổ hợp tuyến tính (với hệ số tự nhiên) của a và b. Và z^n sẽ có hệ số đúng bằng $p_{\{a,b\}}(n)$. Vì vậy

$$\frac{1}{1-z^a}.\frac{1}{1-z^b} = \sum_{k,l\geqslant 0}^{\infty} z^{ka}.z^{lb} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\{a,b\}}(n) z^n$$

Như vậy hàm số này là hàm sinh của dãy $p_{\{a,b\}}(n)$. Ý tưởng bây giờ ta sẽ đi nghiên cứu tính chất của hàm số ở vế trái.
Ta muốn tìm công thức đẹp cho $p_{\{a,b\}}(n)$ bằng cách xem xét kỹ lưỡng hơn hàm số ở vế trái. Để dễ tính toán hơn ta sẽ tìm hệ số tự do của một dãy liên quan, cụ thể, $p_{\{a,b\}}(n)$ là số hạng tự do của

$$f(z) = \frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)z^n} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{\{a,b\}} z^{k-n}.$$

Chuỗi cuối cùng này không phải là chuỗi lũy thừa, vì nó có chứa những số hạng với số mũ âm. Chuỗi này được gọi là chuỗi Laurent, theo tên của Pierre Alphonse Laurent (1813–1854). Đối với chuỗi lũy thừa, để tính số hạng tự do ta chỉ cần thay $z = 0$ vào. Nhưng với chuỗi có lũy thừa âm thì việc thay $z = 0$ vào là không được phép. Để xử lý tình huống này, ta sẽ loại đi tất cả các số hạng với số mũ âm để được chuỗi lũy thừa. Số hạng tự do của nó (cũng là số hạng tự do của chuỗi ban đầu) sẽ được tính bằng cách thay $z = 0$ vào.

Để tính số hạng tự do này, ta sẽ khai triển f thành các phân số sơ cấp. Để hiểu rõ cách phân tích một phân số thành các phân số sơ cấp, trước hết ta bắt đầu từ trường hợp 1 chiều. Ký hiệu là căn nguyên thủy bậc a của đơn vị

$$\xi_a = \cos\frac{2\pi}{a} + i\sin\frac{2\pi}{a}$$

thì $1, \xi_a, \xi_a^2, ..., \xi_a^{a-1}$ là tất cả các căn bậc a của đơn vị.
Trước hết ta tìm phân tích sơ cấp cho $\frac{1}{1-z^a}$. Vì cực của hàm số này nằm tại các điểm căn bậc a của đơn vị, do đó

$$\frac{1}{1-z^a} = \sum_{k=0}^{a-1} \frac{C_k}{z-\xi_a^k}.$$

Các hệ số C_k có thể tính theo công thức

$$C_k = \lim_{z\to\xi_a^k} (z-\xi_a^k)\left(\frac{1}{1-z^a}\right) = \lim_{z\to\xi_a^k} \frac{1}{-az^{a-1}} = -\frac{\xi_a^k}{a},$$

trong đó đa đã sử dụng quy tắc L'Hopitale. Như vậy ta có khai triển

$$\frac{1}{1-z^a} = -\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{a-1} \frac{\xi_a^k}{z-\xi_a^k}.$$

Trở lại với bài toán của chúng ta, các cực của f nằm ở điểm $z=0$ với bậc n, tại $z=1$ với bậc 2 và tại các căn đơn vị bậc a và bậc b khác với bậc 1 vì a, b nguyên tố cùng nhau. Do đó, khai triển của f thành tổng các phân số sơ cấp sẽ có dạng

$$f = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + ... + \frac{A_n}{z^n} + \frac{B_1}{z-1} + \frac{B_2}{(z-1)^2} + \sum_{k=1}^{a-1} \frac{C_k}{z-\xi_a^k} + \sum_{j=1}^{b-1} \frac{D_j}{z-\xi_b^j} \quad (1).$$

Bằng phương pháp gần giống như ở trên, ta có thể tính được

$$C_k = -\frac{1}{a(1-\xi_a^{kb})\xi_a^{k(n-1)}}, \quad D_k = -\frac{1}{b(1-\xi_b^{ja})\xi_b^{j(n-1)}} \quad (2).$$

Để tính B_2, ta nhân cả hai vế của (1) cho $(z-1)$ và tính giới hạn khi $z \to 1$ để thu được

$$B_2 = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)^2}{(1-z^a)(1-z^b)z^n} = \frac{1}{ab},$$

bằng cách sử dụng quy tắc L'Hopitale 2 lần. Với số hạng B_1, ta tính

$$B_1 = \lim_{z\to 1}(z-1)\left(\frac{(z-1)^2}{(1-z^a)(1-z^b)z^n} - \frac{1}{ab(z-1)^2}\right) = \frac{1}{ab} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} - \frac{n}{ab},$$

với việc áp dụng quy tắc L'Hopitale một lần nữa.
Ta không cần tính các hệ số $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vì chúng chỉ đóng góp các số hạng với số mũ âm mà ta có thể bỏ qua; các số hạng này không đóng góp cho số hạng tự do của f. Vì ta đã có tất cả các hệ số khác, số hạng tự do của f, như ta đã nói ở trên, chính là giá trị của hàm số sau tính tại điểm 0:

$$\begin{aligned} p_{\{a,b\}}(n) &= \left(\frac{B_1}{z-1} + \frac{B_2}{(z-1)^2} + \sum_{k=1}^{a-1}\frac{C_k}{z-\xi_a^k} + \sum_{j=1}^{b-1}\frac{D_j}{z-\xi_b^j}\right)\Bigg|_{z=0} \\ &= -B_1 + B_2 - \sum_{k=1}^{a-1}\frac{C_k}{\xi_a^k} - \sum_{j=1}^{b-1}\frac{D_j}{\xi_b^j}. \end{aligned}$$

Từ đó

$$p_{\{a,b\}}(n) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{n}{ab} + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{kb})\xi_a^{kn}} + \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b-1}\frac{1}{(1-\xi_b^{jb})\xi_b^{jn}}. \quad (3).$$

Bây giờ ta tìm cách đơn giản các tổng trong (3) để được một công thức thuận tiện hơn.
Ta nghiên cứu trường hợp đặc biệt $b = 1$. Trường hợp này có thể tính dễ dàng vì $p_{\{a,1\}}(n)$ sẽ tính cách số điểm nguyên trong một đoạn:

$$p_{\{a,1\}}(n) = |\{(k,l) \in Z^2 : k, l \geqslant 0, ak+l = n\}| = |\{k \in Z : 0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{a}\}| = \left[\frac{n}{a}\right] + 1.$$

trong đó $[x]$ ký hiệu phần nguyên của số thực x.
Thay $b = 1$ vào (3), ta được

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2} + \frac{n}{a} + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^k)\xi_a^{kn}} = p_{\{a,1\}}(n) = \left[\frac{n}{a}\right] + 1.$$

Từ đó

$$\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^k)\xi_a^{kn}} = -\left\{\frac{n}{a}\right\} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}. \quad (4).$$

Trong đó x là phần lẻ của số thực x. Ta có thể chứng minh được rằng

$$\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{kb})\xi_a^{kn}}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{k})\xi_a^{b^{-1}kn}}, \quad (5)$$

Trong đó b^{-1} là số nguyên sao cho $b^{-1}.b\equiv 1(\mathrm{mod}\,a)$. Từ (4) và (5) suy ra

$$\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{kb})\xi_a^{kn}}=-\left\{\frac{b^{-1}n}{a}\right\}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2a}. \quad (6).$$

Bây giờ thay (6) và một công thức tương tự vào (3), ta được một công thức đẹp do ***Tiberiu Popovicu*** $(1906-1975)$ tìm ra.

Định lý. (Popovicu). Nếu a và b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thì

$$p_{\{a,b\}}(n)=\frac{n}{ab}-\left\{\frac{b^{-1}n}{a}\right\}-\left\{\frac{a^{-1}n}{b}\right\}+1,$$

trong đó $b^{-1}.b\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ a)$ và $a^{-1}.a\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ b)$.

Từ định lý Popovicu, dễ dàng chứng minh được bổ đề sau.

Bổ đề. Nếu a và b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, $n\in[1;ab-1]$ và không phải là bội số của a hoặc b, khi đó

$$p_{\{a,\,b\}}\,(n)+p_{\{a,b\}}\,(ab-n)=1.$$

Chứng minh. Ta có

$$p_{\{a,b\}}(ab-n)=\frac{ab-n}{ab}-\left\{\frac{b^{-1}(ab-n)}{a}\right\}-\left\{\frac{a^{-1}(ab-n)}{b}\right\}+1$$

$$=2-\frac{n}{ab}-\left\{\frac{-b^{-1}n}{a}\right\}-\left\{\frac{-a^{-1}n}{a}\right\}=-\frac{n}{ab}+\left\{\frac{-b^{-1}n}{a}\right\}+\left\{\frac{-a^{-1}n}{a}\right\}=1-p_{\{a,b\}}(n).$$

Ở đây ta đã sử dụng tính chất $\{-x\}=1-\{x\}$ với x không nguyên. Từ bổ đề này, ta dễ dàng chứng minh được định lý ***Sylvester*** ở phần trước với một cách tiếp cận khác. Hơn nữa, ta còn làm được hơn thế: mọi số tự nhiên nhỏ hơn ab nếu biểu diễn được dưới dạng $ax+by$ với x,y tự nhiên thì biểu diễn đó là duy nhất.

4. Bài toán Frobenius cho $n \geqslant 3$

Quay trở lại với bài toán Frobenius ở dạng tổng quát, ta thấy rằng, với kết quả của định lý ***Sylvester***, trường hợp $n = 2$ đã được giải quyết trọn vẹn, và ta có công thức $g(a, b) = ab - a - b$. Chính định lý đẹp đẽ này đã khiến cho các nhà toán học hướng sự chú ý của mình đến việc tìm công thức cho hàm $g(a_1, a_2, ..., a_n)$ với $n > 2$. Tuy nhiên tính đến nay thì các kết quả về hướng này còn xa mới đến được sự hoàn hảo. Ngoại trừ hai kết quả đẹp đẽ dành cho trường hợp "$n = 2.5$" ở trên (bài IMO 1983 và VMO 2015), những gì thu được là khá khiêm tốn.

1. Định lý Schur khẳng định rằng với điều kiện $(a_1, a_2, ..., a_2) = 1$ thì số Frobenius tồn tại.

2. Với $n = 3$, ta có định lý Davidson đánh giá chặn dưới cho $g(a, b, c)$:
$$g(a, b, c) \geqslant \sqrt{3abc} - a - b - c$$

3. Với n bất kỳ, tìm ra được công thức hàm g cho các cấp số cộng, cấp số nhân, ngoài ra là một số đánh giá chặn trên, chặn dưới.

4. Hướng sử dụng hàm sinh khi $n = 3$ cho ta công thức sau
$$\begin{aligned} p_{\{a,b,c\}}(n) = {} & \frac{n^2}{abc} + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right) + \\ & + \frac{1}{12}\left(\frac{3}{a} + \frac{3}{b} + \frac{3}{c} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right) + \\ & + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1} \frac{1}{(1 - \xi_a^{kb})(1 - \xi_a^{kc})\xi_a^{kn}} \\ & + \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b-1} \frac{1}{(1 - \xi_b^{ka})(1 - \xi_b^{kc})\xi_b^{kn}} + \\ & + \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{c-1} \frac{1}{(1 - \xi_c^{ka})(1 - \xi_c^{kb})\xi_c^{kn}}. \end{aligned}$$

Như vậy với $n > 2$ và các a_i bất kỳ thì tính tới nay chưa tìm được công thức tường minh cho hàm $g(a_1, a_2, ..., a_n)$ và có vẻ hướng đi này không khả thi.
Trong khi đó, với một số lượng đồng xu cố định, tồn tại thuật

toán để tính số Frobenius trong thời gian đa thức (tính theo logarith của giá trị tiền xu có trong dữ liệu vào). Hiện chưa có thuật toán thời gian đa thức theo số đồng xu, và bài toán tổng quát khi giá trị đồng xu là lớn tùy ý là bài toán NP-khó.
Hiện nay xu hướng nghiên cứu về bài toán Frobenius vẫn chia làm hai nhánh, nhánh công thức và nhánh thuật toán, trong đó nhánh thứ hai có tốc độ tiến triển tốt hơn hẳn.
Bài toán Frobenius có nhiều ứng dụng thú vị trong đời sống, ví dụ như bài toán McNuggets sau đây do Henri Picciotto đưa ra vào năm 1980 khi ngồi ăn tối với con trai tại nhà hàng Mc Donald's. Các hộp bánh của McDonalds được thiết kế có $6, 9$ hoặc 20 miếng bánh. Hỏi có thể mua được số lượng miếng bánh bao nhiêu mà chỉ dùng các hộp chẵn. Định lý Schur khẳng định rằng số các số không mua được và danh sách đó là: $1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 22, 23, 25, 28, 31, 34, 37$, và 43. Như thế 43 là số lớn nhất không biểu diễn được dưới dạng $6x + 9y + 20z$ với x, y, z nguyên không âm.
Tác giả thứ nhất của bài báo cũng lại vừa có một duyên nợ với bài toán, lần này ở khía cạnh ứng dụng. Trong chuyến đi giảng bài ở Saudi Arabia vừa qua, tác giả được phát một cơ số khá nhiều các phiếu ăn trị giá $16SR$ và $23SR$. Giá tiền các bữa ăn có dao động từ $16SR$ đến $50SR$. Và tác giả đã phải nhiều lần vận dụng bài toán Frobenius để có những cách chọn lựa món ăn phù hợp nhất (chỉ phải trả thêm hoặc bỏ phí $1, 2SR$).
Cũng là ít có những bài toán đang được nghiên cứu mạnh mẽ lại có những ứng dụng hết sức gần gũi như vậy.

5. Ghi chú và Chỉ dẫn lịch sử

1. Bài toán Frobenius được đặt theo tên của nhà toán học Georg Frobenius, người đã nêu ra bài toán này trong bài giảng của mình. Phần 1 của định lý Sylvester là một kết quả dân gian kinh điển mà chúng ta thường gộp chung luôn vào định lý Sylvester. Thật ra, trong bài báo của mình, Sylvester chỉ chứng minh phần 2 của định lý.

2. Bài toán Diophant tuyến tính của Frobenius không nên nhầm lẫn với bài toán tem thư. Bài toán tem thư đặt vấn đề tương tự nhưng có thêm điều kiện về số lượng tem thư: Cho số nguyên dương m và tập V các số nguyên dương,

tìm số nguyên dương z nhỏ nhất không biểu diễn được dưới dạng tổng $v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ của $k \leqslant m$số (không nhất thiết phân biệt) thuộc V.

3. Định lý Bezout là định lý khẳng định rằng nếu a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thì tồn tại các số nguyên x, y sao cho $ax + by = 1$. Có thuật toán hiệu quả để tìm các số x, y, được gọi là thuật toán Euclide mở rộng. Thuật toán Euclide mở rộng có rất nhiều ứng dụng trong lý thuyết mật mã, lý thuyết phụ hồi số hữu tỷ.

4. Lý thuyết hàm sinh có một lịch sử và truyền thống lâu đời. Ở đây ta chỉ sử dụng chúng như một công cụ. Những độc giả muốn nghiên cứu sâu hơn về hàm sinh và các ứng dụng kỳ ảo của chúng có thể tìm hiểu ở cuốn *Generatingfunctionology* của Herb Wilf và cuốn *Combinatorial Problems and Exercises* của Laszlo Lovasz.

5. Như ta đã thấy, trường hợp $n \geqslant 3$ khó hơn nhiều so với trường hợp $n = 2$. Tài liệu về bài toán Frobenius là rất nhiều và vẫn tiếp tục được bổ sung những công trình mới. Hiện nay có hơn 40 bài toán mở về vấn đề này. Xem thêm ở [4]

Tài liệu tham khảo

1. James J. Sylvester, On Subvariants, i.e. Semi-Invariants to Binary Quantics of an Unlimited Order, American Journal of Mathematics 5 (1882), 79–136.

2. J.J. Sylvester, Mathematical questions with their solutions, Educational Times 41 (1884), 21.

3. P. Erdos and E.L. Graham, On a linear diophantine problem of Frobenius, Acta Arithmetica (1972), 399–408.

4. The Coin-Exchange Problem of Frobenius, Internet resource, www.springer.com/cda/.../9780387291390-c1.pdf?...

5. J.L. Ramirez-Alfonsin, Complexity of the Frobenius problem, Combinatorica, 16(1):143 – 147, March 1996.

6. J.L.Jamirez Alfonsin, The Diophantine Frobenius Problem, Oxford Lectures Series in Mathematics and its Applications, No. 30, Oxford University Press, 2005.

7. Trần Nam Dũng, Tư duy thuật toán và tư duy công thức, Kỷ yếu Gặp gỡ Toán học 2014.

8. Trần Nam Dũng, Số học qua các định lý và các bài toán, Tài liệu Internet.

9. Lưu Bá Thắng, Số Frobenius cho 3 phần tử, Thông tin toán học, Tập 17 số 4, 12/2013.

ĐỀ THI VIỆT NAM TST 2015 NHẬN XÉT VÀ GỢI Ý GIẢI

Trần Nam Dũng

Đại học KHTN, TP. Hồ Chí Minh

Nguyễn Văn Lợi

Budapest, Hungary

Nguyễn Hùng Sơn
Đại học Warsaw, Ba Lan

Tóm tắt

Kỳ thi chọn đội tuyển quốc gia Việt Nam (thường gọi tắt là TST) năm 2015 chọn ra 6 thí sinh đi dự thi Olympic Toán quốc tế tại Chiang Mai, Thái Lan vào đầu tháng 7. Tham gia kỳ thi gồm có 1 em đoạt giải Nhất, 1 em đạt HCV trong kỳ thi IMO năm trước đó tại Nam Phi và 46 em đoạt giải Nhì trong kỳ thi học sinh giỏi Quốc gia VMO hồi đầu tháng 01 năm 2015.

Để đạt giải Nhì, các em cần phải đạt từ 21,5 đến 32,5 điểm (trên thang điểm 40) tức là từ khoảng 4,5 bài đến 6 bài trong tổng số 7 bài. Các đánh giá của chúng tôi một phần là dựa trên kết quả của các em trên bài thi VMO 2015.

Kỳ thi diễn ra trong 2 ngày tại ĐH Sư phạm Hà Nội:

1. Ngày đầu tiên là 25 tháng 03 năm 2015.
2. Ngày thứ hai là 26 tháng 03 năm 2015.

Thời gian thi theo truyền thống là 270 phút.

1. Đề Thi

1.1. Ngày thi thứ nhất

Bài toán 1. Gọi α là nghiệm dương của phương trình $x^2 + x = 5$. Giả sử n là số nguyên dương và các số nguyên không âm $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ thỏa mãn đẳng thức

$$c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \dots + c_n\alpha^n = 2015. \quad (*)$$

a) Chứng minh rằng $c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n \equiv 2 \pmod 3$.

b) Với n nào đó và $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ nhưng thỏa mãn điều kiện $(*)$ đã cho. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $c_0+c_1+c_2+\dots+c_n$.

Bài toán 2. Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không phải là đường kính. Xét điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Gọi I, H lần lượt là trung điểm cạnh BC và trực tâm tam giác ABC. Tia IH cắt lại đường tròn (O) tại K, đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại D và đường thẳng KD cắt lại đường tròn (O) tại M. Từ điểm M, kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng BC cắt AI tại điểm N.

a) Chứng minh rằng điểm N luôn thuộc một đường tròn cố định khi A thay đổi.

b) Đường tròn tiếp xúc với AK ở A và đi qua N cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Gọi J là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng đường thẳng AJ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài toán 3. Một số nguyên dương k có tính chất $T(m)$ nếu như với mọi số nguyên dương a, tồn tại số nguyên dương n sao cho

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k \equiv a \pmod m.$$

a) Tìm tất cả các số nguyên dương k có tính chất $T(20)$.

b) Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất $T(20^{15})$.

1.2. Ngày thi thứ hai

Bài toán 4. Có 100 sinh viên tham dự một cuộc thi vấn đáp. Ban giám khảo gồm 25 thành viên. Mỗi sinh viên được hỏi thi bởi một giám khảo. Biết rằng mỗi sinh viên thích ít nhất 10 giám khảo trong số các thành viên trên.

a) Chứng minh rằng có thể chọn ra 7 giám khảo mà mỗi thí sinh đều thích ít nhất 1 trong 7 người đó.

b) Chứng minh rằng có thể sắp xếp lịch thi sao cho mỗi thí sinh được đúng 1 giám khảo mình thích hỏi và mỗi giám khảo hỏi không quá 10 thí sinh.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nhọn, không cân và một điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle APB = \angle APC = \alpha$ với $\alpha > 180^\circ - \angle BAC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt đường thẳng AC ở E, đường tròn ngoại tiếp tam giác APC cắt đường thẳng AB ở F. Gọi Q là điểm nằm trong tam giác AEF sao cho $\angle AQE = \angle AQF = \alpha$. Gọi D là điểm đối xứng với Q qua EF, phân giác góc EDF cắt AP tại T.

a) Chứng minh rằng $\angle DET = \angle ABC, \angle DFT = \angle ACB$.

b) Đường thẳng PA cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại M, N. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PEM, PFN và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DIJ. Đường thẳng DT cắt (K) tại H. Chứng minh rằng HK đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DMN.

Bài toán 6. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho tồn tại n số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) Tổng của chúng là một số dương.

ii) Tổng lập phương của chúng là một số âm.

iii) Tổng lũy thừa bậc 5 của chúng là một số dương.

2. Nhận xét chung

Cấu trúc đề thi Việt Nam TST năm nay gồm có:

- Bài 1: Đại số (đa thức có hệ số nguyên và nghiệm vô tỷ)
- Bài 2: Hình học phẳng
- Bài 3: Số học
- Bài 4: Tổ hợp
- Bài 5: Hình học phẳng
- Bài 6: Bất đẳng thức

Như vậy cấu trúc của đề thi năm nay rất giống với cấu trúc các đề thi IMO. Theo đánh giá chủ quan của chúng tôi, độ khó của các bài là như sau:

- **Bài 1** và **bài 4** có độ khó trung bình (khoảng 50%-60% số học sinh sẽ làm được trọn vẹn).
- **Bài 2, bài 5a** và **bài 6** là các bài tương đối khó (khoảng 30%-50% sẽ làm được).
- **Bài 3** và **bài 5b** là các bài khó (khoảng 10%-20% số học sinh sẽ đạt điểm dương).

Sau đây chúng tôi có một số nhận xét cụ thể:

2.1. Về ngày thi thứ nhất

Chúng tôi rất thích bài thi ngày đầu tiên. Bài 1 và bài 2 đều là những bài không quá khó với các học sinh đã đạt giải Nhất/Nhì ở VMO-2015.

Bài 1 (đại số) gồm hai câu a) và b). Phương pháp giải chỉ dựa vào ý tưởng chia đa thức có hệ số nguyên cho một tam thức bậc hai. Ngoài ra câu a) cũng có thể làm bằng quy nạp. Câu b) khó hơn vì ý tưởng đầu tiên là xét 1 hệ bất phương trình và sẽ rất dễ bị nhầm lẫn.

Bài 2 (hình phẳng) cũng gồm 2 câu a) và b). Chúng tôi rất thích bài này vì đây là bài không dễ, nhưng lại có thể giải được bằng các kiến thức hoàn toàn nhẹ nhàng. Các em không nhất thiết phải sử dụng các định lý mà chỉ các học sinh chuyên Toán mới được làm quen. Tuy nhiên, việc cho điểm N vào câu b) là hoàn toàn không cần thiết và dễ làm các thí sinh lạc hướng.

Bài 3 (số học) thực chất bài này có thể sử dụng một số tính chất của lý thuyết số thường dùng cho mật mã như khái niệm: multiplicative order (hoặc modulo order) của một số nguyên và định lý Trung Hoa về các số dư. Đây là bai toán "*hàn lâm*" nhất trong cả 6 bài, từ hình thức cho đến nội dung. Bắt đầu bằng việc xây dựng lý thuyết $t(m)$ và môt số kêt quả trong trường hợp cụ thể. Có lẽ phải đọc $t(m)$ là Tờ-Mờ, vì một số thí sinh chắc sẽ choáng với cách định nghĩa này. Một bài toán đưa vào tương đối táo bạo, vì vấn đề đầu tiên sẽ là việc hiểu và tiếp cận bài toán trong một thời gian ngắn.

Sau khi đã tiếp cận được bài toán và cảm giác được bài toán có liên quan đến định lý Trung Hoa và phương trình Frobenius thì đó là dấu hiệu báo trước sự khó khăn của bài toán.

Bài toán này liên quan đến những vấn đề rất thời sự trong lý thuyết mật mã. Theo chúng tôi đây là một hướng đi giống như thông lệ chung của IMO là chọn các bài thi từ nhưng nghiên cứu còn đang nóng hổi.

Như vậy ngoài kiến thức về số học thì muốn làm được bài số 3, thí sinh cần phải làm rất nhanh 2 bài số 1 và số 2. Vì vậy có lẽ chỉ vài em dạng "*đặc biệt*" mới biết làm được bài này. Theo chúng tôi, số học sinh làm trọn vẹn bài số 3 chắc có thể chỉ đếm được trên một bàn tay. Hy vọng đây là bài thực sự tốt cho vai trò phân loại.

2.2. Về ngày thi thứ hai

Bài 4 (tổ hợp) lại là 1 bài rất giống bài tổ hợp ở kì thi VMO 2015 và có lẽ cả 2 bài là của cùng 1 tác giả. Tuy nhiên đây là bài toán dễ hơn, và nếu các em đã nghiên cứu kĩ lời giải ở kì thi VMO-2015 thì các em sẽ không gặp khó khan gì. Tôi cho rằng đây là 1 bài mà nhờ nó phần lớn các em sẽ ra về với số điểm dương.

Bài 5 (hình học) là bài hình học rất phức tạp kể từ khâu dựng hình. Bài toán này đòi hỏi khả năng vẽ hình chính xác và gọn gàng trong thời gian ngắn. Chúng tôi cho rằng bài toán này có nhiều sự lắp ghép trong đó và không thực sự đẹp mắt. Ban giám khảo sẽ rất đau đầu để chấm các lời giải của bài này.

Ngoài ra, việc để 2 bài hình thuần túy lại rất giống nhau (tam giác nội tiếp trong đường tròn) là rất phí phạm cho quỹ ra đề. Chúng tôi cho rằng có thể thay bài 4 và bài 5 bằng 1 bài tổ hợp dạng khác hoặc một bài hình học trên đa giác hoặc hình học tổ hợp (đang thực sự là trào lưu thế giới).

Bài 6 (đại số) Đây có lẽ là bài hay nhất trong kỳ thi năm nay vì nhiều lý do. Nó vừa có vẻ đẹp tự nhiên ai cũng hiểu và ai cũng hy vọng tìm được vũ khí nào đó để giải quyết nhưng nó cũng đủ bướng bỉnh để làm thất vọng những thí sinh muốn đánh nhanh diệt gọn! Một bài toán đủ khó nhưng lại không quá khó và kết cục có thể là sẽ ít người đạt được số điểm tối đa. Nếu thí sinh kiên nhẫn và không "sợ" xét nhiều trường hợp thì sẽ có thể giải quyết tốt bài toán này.

Bên cạnh đó, bài toán này có thể sẽ tìm được nhiều cách tiếp cận và làm bài giảng bồi dưỡng cho các học sinh thế hệ sau. Chúng tôi hy vọng sẽ tìm ra các lời giải đẹp và ngắn gọn cho bài toán này.

Nhìn chung, đề thi năm nay thỏa mãn được yêu cầu đặt ra có nghĩa là đảm bảo để chọn được 6 em xuất sắc nhất đại diện cho học sinh cả nước đi tham dự kì thi IMO tại Thái lan vào tháng 7 năm nay. Tuy nhiên chúng tôi vẫn cảm thấy rằng trong đề thi vẫn có chỗ để thêm các bài toán về các lĩnh vực khác của Toán học như thuật toán, tối ưu, lý thuyết trò chơi, ... nhằm góp phần trong công việc lựa chọn các học sinh ưu tú đại diện đi tham dự kỳ thi IMO. Theo kinh nghiệm của chúng tôi, sự lựa chọn các bài thi HSG quốc gia và chọn đội tuyển TST không chỉ có ý nghĩa tức thời là chọn học sinh giỏi mà còn định hướng để các thầy cô và các em học sinh có được các chủ đề và lên kế hoạch rèn luyện trong các năm tiếp theo.

Chúng tôi cho rằng bài thi TST này khó hơn IMO. Nếu chọn tất cả các em đạt trên 20 điểm trong kỳ thi TST này đi thi IMO thì chắc các em đều đạt giải. Rất tiếc chỉ được chọn 6 em, nên nếu chỉ làm được 3 bài trong kỳ thi này thì có lẽ chưa đủ để được chọn vào đội tuyển Quốc Gia. Dự đoán của chúng tôi là mốc điểm để được chọn vào đôi tuyển Quốc gia sẽ vào khoảng từ 23 đến 27, có nghĩa là nếu em nào làm được trọn vẹn 4 bài thì sẽ có nhiều hy vọng được chọn.

3. Gợi ý giải

Bài 1.

a) Chứng minh rằng đa thức

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0 - 2015,$$

chia hết cho đa thức $x^2 + x - 5$.

b) Đầu tiên ta hãy nhận xét rằng nếu $c_0, c_1, \ldots, c_n$ là bộ thỏa mãn điều kiện

$$c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \cdots + c_n\alpha^n = 2015,$$

và $c_0 + c_1 + \cdots + c_n$ nhỏ nhất thì sẽ có $0 \leqslant c_i \leqslant 4$. Từ đó, khai thác đẳng thức sau đây:

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0 - 2015 = (x^2 + x - 5)(a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0).$$

Bài 2.

a) Chỉ cần chứng minh B, C, H, N cùng thuộc một đường tròn. Để thực hiện điều này, ta có thể gọi F là giao điểm của trung tuyến AM với đường tròn (O) và N, F đối xứng nhau qua trung trực của BC.

b. Gọi (S) là đường tròn đi qua A, tiếp xúc với AK và đi qua N. Ta chứng minh DP, DQ là các tiếp tuyến của đường tròn (S), từ đó suy ra AJ, AH đẳng giác trong tam giác ABC hay AJ đi qua O cố định.

Bài 3.

a) Có thể giải dễ dàng nếu nhận xét rằng số dư khi chia

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

theo 20 là tuần hoàn.

b) Dựa vào kết quả câu a) ta dự đoán $k = 4$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán. Để chứng minh $k = 4$ thỏa mãn tính chất $T(2015)$, ta sử dụng định lý phần dư Trung Hoa để quy về các modulo lũy thừa nguyên tố là 3, $2n$ và $5n$.

Sau đó dùng ý tưởng nâng lũy thừa để giải quyết.

Bài 4.

Ý tưởng chung của cả hai câu là dùng thuật toán, và là thuật toán ăn tham dựa vào nguyên lý Dirichlet. Với ý b) chú ý con số 25 không quan trọng.

Bài 5.

a) Chứng minh AP, AQ liên hợp đẳng giác trong góc BAC và A, X liên hợp đẳng giác trong tam giác EQF để có X, Q, A thẳng hàng. Từ đó suy ra T, Q liên hợp đẳng giác trong tam giác AEF.

b) Chứng minh tứ giác $DEPF$ ngoại tiếp đường tròn tâm T. Gọi Y là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN thì D, Y, I, J nội tiếp nên YH là đường kính của đường tròn (DIJ) nên YH đi qua K.

Bài 6.

Ta chứng minh $n = 5$ bằng cách lần lượt chứng minh hai kết quả sau:

(a) Không tồn tại 4 số thực thỏa mãn điều kiện đề bài.

(b) Chỉ ra 5 số thực thỏa mãn điều kiện đề bài.

Trong chứng minh ý (a), ta dùng phản chứng xét các trường hợp khác nhau về dấu của 4 số, trong đó khó nhất là trường hợp 2 số dương, 2 số âm. Có thể dùng đại số hoặc dùng giải tích, dựa vào số nghiệm của phương trình

$$a^x + b^x - c^x - d^x = 0,$$

trong đó a, b, c, d là các số dương.

Trong ý (b), ta đi tìm bộ số thỏa mãn điều kiện dưới dạng

$$a = 2x,\ b = c = 1,\ d = e = -(x + 1).$$

Khi đó thì $a + b + c + d + e = 0$. Ta chọn x sao cho

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 < 0,$$

và

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 > 0.$$

Cuối cùng, ta điều chỉnh d, e để $a+b+c+d+e > 0$, mà hai điều kiện kia vẫn thỏa mãn.

LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN HAI BÀI HÌNH THI CHỌN ĐỘI TUYỂN VIỆT NAM 2015

Trần Quang Hùng (*THPT Chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Tóm tắt

Trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2015, có hai bài toán hình học phẳng khó và cũng khá thú vị. Dưới đây, chúng tôi sẽ trình bày lời giải chi tiết, phân tích các vấn đề liên quan cùng các mở rộng của chúng.

1. Bài hình ngày thứ nhất

Bài toán thứ nhất có nội dung như sau

Bài toán 1. Cho đường tròn (O) có dây BC cố định và không phải là đường kính. Xét điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Gọi I, H lần lượt là trung điểm cạnh BC và trực tâm tam giác ABC. Tia IH cắt lại đường tròn (O) tại K, đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại D và đường thẳng KD cắt lại đường tròn (O) tại M. Từ điểm M, kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng BC cắt AI tại điểm N.

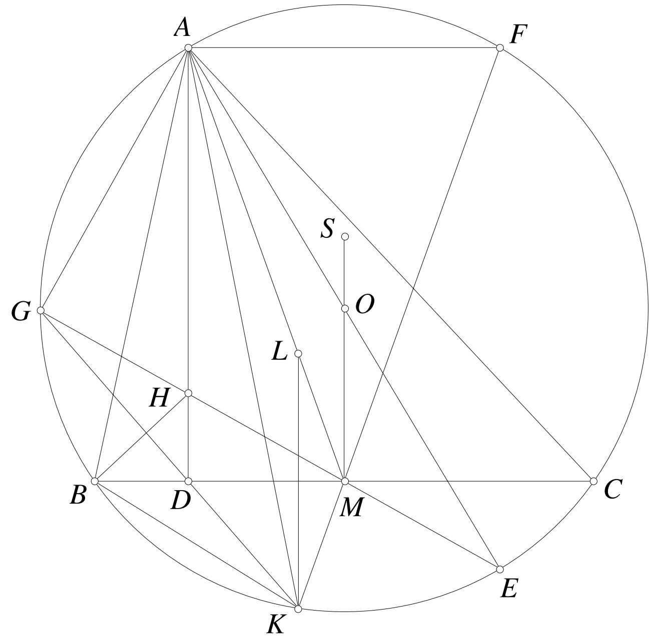
a) Chứng minh rằng điểm N luôn thuộc một đường tròn cố định khi A thay đổi.

b) Đường tròn tiếp xúc với AK ở A và đi qua N cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Gọi J là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng đường thẳng AJ luôn đi qua một điểm cố định.

Nhận xét. Đây bài toán hay dựa trên một cấu hình khá quen thuộc về điểm Miquel. Tuy vậy có thể thấy rằng hai ý của bài toán hầu như không liên quan tới nhau vì thực chất ý b) chỉ cần đường tròn bất kỳ qua A tiếp xúc AK là bài toán đúng, mặt khác điểm cố định lại chính là O xuất hiện ngay trong đề bài nên giảm nhiều thú vị của bài toán.

Do đó, chúng tôi sẽ tách riêng hai ý của bài toán rồi giải và phân tích. Ta bắt đầu từ bài toán sau:

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). AD là đường cao và H là trực tâm tam giác ABC. M là trung điểm BC. Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại G khác A. GD cắt (O) tại K khác A. Đường thẳng qua K vuông góc BC cắt AM tại L. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, L, H cùng thuộc một đường tròn.



Đầu tiên là lời giải của tác giả bài viết:

Lời giải 1. Do G nằm trên đường tròn đường kính AH nên gọi GH cắt (O) tại E khác G thì AE là đường kính của (O). Từ đó, dễ thấy tứ giác $HBEC$ là hình bình hành nên HE đi qua M. Gọi KM cắt (O) tại F khác K. Chú ý tứ giác $AGDM$ nội tiếp nên

$$\angle AMB = 180^\circ - \angle AGD = \angle AFM$$

Ta có, BC tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác AFM. Do đó, $OM \perp BC \perp SM$ với S là tâm ngoại tiếp tam giác SFM do đó S thuộc OM.

Mặt khác, dễ dàng có được $SO \perp AF$ nên suy ra $AF \parallel BC$.

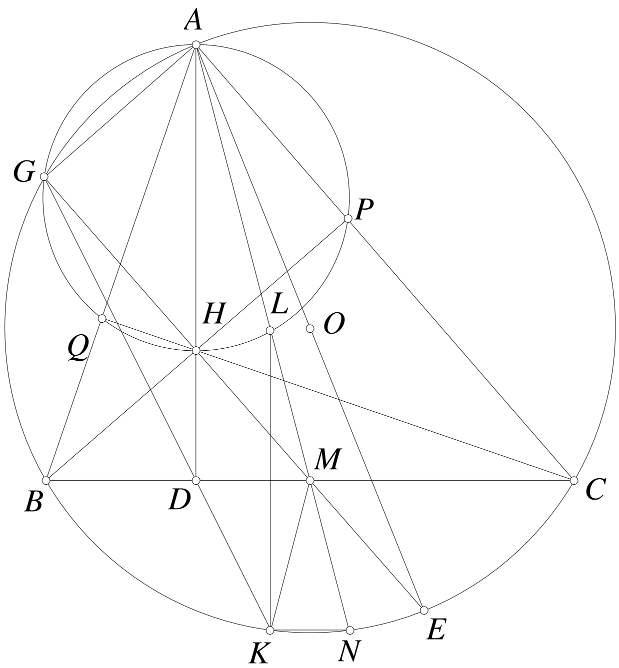
Từ đó, ta cũng có tam giác MAF cân nên

$$\angle LMB = \angle MAF = \angle MFA = \angle BMK.$$

Tam giác KLM cân nên K, L đối xứng qua BC. Chú ý đối xứng của H qua BC thuộc (O) nên H, L, B, C thuộc đường tròn đối xứng với (O) qua BC.

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Tiếp theo là lời giải của tác giả Nguyễn Chương Chí tham khảo ở [2]:



Lời giải 2. Do G nằm trên đường tròn đường kính AH nên gọi GH cắt (O) tại E khác G thì AE là đường kính của (O). Từ đó, dễ thấy tứ giác $HBEC$ là hình bình hành nên HE đi qua M.

Gọi AM cắt (O) tại N khác A. Từ tứ giác $AGDM$ và $AGKN$ nội tiếp suy ra

$$\angle GDM = 180^\circ - \angle AGD = \angle GKN$$

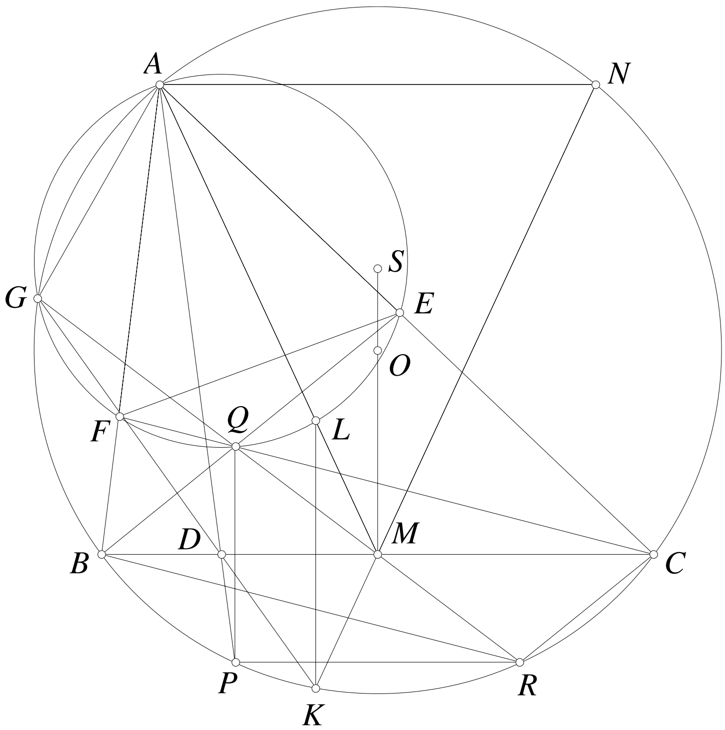
suy ra $KN \parallel BC$. Do đó, tứ giác $BCNK$ là một hình thang cân mà M là trung điểm BC nên theo tính đối xứng $MK = MN$.

Dễ thấy tam giác LKN vuông tại K nên suy ra M là trung điểm LN hay L đối xứng K qua BC. Chú ý điểm đối xứng của H qua BC cũng thuộc (O) nên H, L, B, C cùng thuộc đường tròn đối xứng với (O) qua BC.

Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán này hiển nhiên bao hàm câu a) bài toán 1. Chú ý rằng có một số tính chất hệ quả như điểm L cũng thuộc đường tròn đường kính AH và AK là đường đối trung của tam giác ABC. Thực chất các tính chất đó đều là các mô hình khá quen thuộc. Sau đây chúng tôi xin đưa ra hai mở rộng khác nhau cho bài toán này:

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm P thuộc cung BC không chứa A. Q đối xứng P qua BC. QB, QC cắt CA, AB tại E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A. AP cắt BC tại D. GD cắt (O) tại K khác G. M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua K vuông góc BC cắt AM tại L.
a) Chứng minh rằng B, C, L, Q cùng thuộc một đường tròn.
b) Chứng minh rằng L nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.



Lời giải. Gọi GQ cắt (O) tại R khác G. Ta thấy $\angle CQR = \angle GQF = \angle GAB = \angle GRB$. Từ đó $CQ \parallel BR$. Tương tự $BQ \parallel CR$. Vậy tứ giác BRCQ là hình bình hành hay QR đi qua M. Từ đó cũng dễ thấy $PR \parallel BC$. Ta có $\angle EBD = \angle BCR = \angle CBP = \angle DAC$. Suy ra tứ giác ABDE nội tiếp. Suy ra $\angle BDA = \angle BEA = 180^\circ - AGQ$ hay $\angle ADM = 180^\circ - \angle BDA = \angle AGQ$. Từ đó tứ giác AGDM nội tiếp. Gọi KM cắt (O) tại N khác K. Vì tứ giác AGDM nội tiếp nên $\angle AMB = 180^\circ - \angle AGD = \angle ANM$. Từ đó BC tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác ANM. Vậy $OM \perp BC \perp SM$ với S là tâm ngoại tiếp tam giác SNM do đó S thuộc OM. Mặt khác dễ có $SO \perp AN$ nên suy ra $AN \parallel BC$. Như vậy, ta cũng có tam giác MAF cân suy ra $\angle LMB = \angle MAF = \angle MFA = \angle BMK$. Từ đó tam giác KLM cân nên K, L đối xứng qua BC. Vậy B, C, L, Q đều thuộc đường tròn đối xứng với (O) qua B, C.

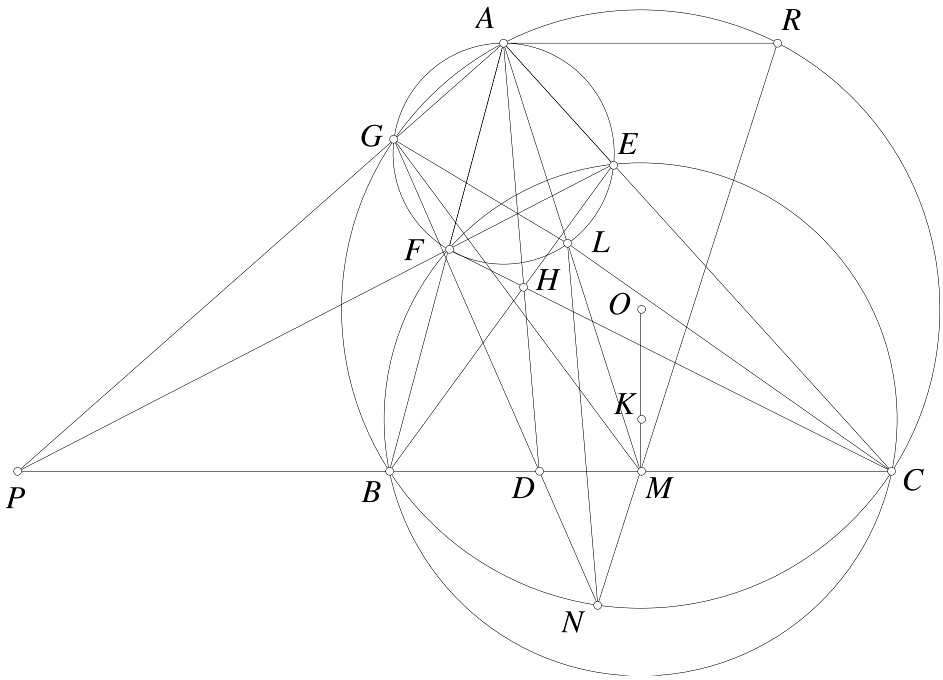
b) Gọi AM cắt (O) tại P khác A. Từ tứ giác AGDM nội tiếp ta có $\angle AMD = 180^\circ - \angle AGD = \angle APK$ suy ra $PK \parallel DM$ vậy $\angle CAK = \angle BAM$. Từ đó $\angle LQC = \angle LBC = \angle KBC = \angle BCR = \angle CAK = \angle BAM$. Vậy tứ giác AFQL nội tiếp hay L nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. □

Nhận xét. Bài toán này khi $AP \perp BC$ thì Q là trực tâm ta thu được bài toán 2. Chú ý rằng ta hoàn toàn có một số yếu tố cố định khi P thay đổi đó chính là các điểm K và L. Từ đó ta có thể đề xuất bài toán sau có ý nghĩa hơn.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm P thuộc cung BC không chứa A. Q đối xứng P qua BC. QB, QC cắt CA, AB tại E, F.
a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua một điểm cố định khác A khi P thay đổi.
b) Chứng minh rằng tâm đường tròn Euler của tam giác AEF luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P thay đổi.

Ta tiếp tục đi tới một mở rộng khác cho bài toán 2:

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (K) đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F khác B, C. BE cắt CF tại H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A. AH cắt BC tại D. GD cắt (O) tại N khác G. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng đường thẳng qua N song song AD và AM cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.



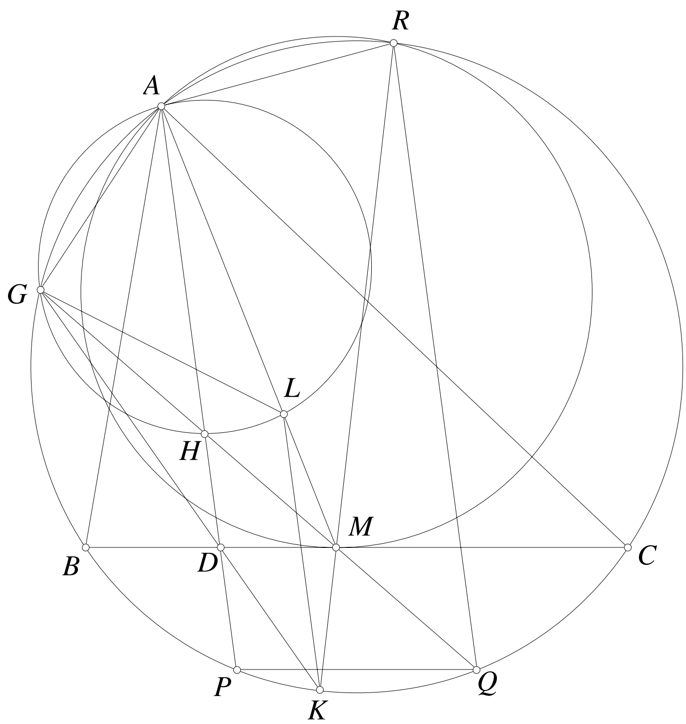
Lời giải. Theo tính chất trục đẳng phương dễ thấy AG, EF, BC đồng quy tại P. Gọi MN cắt (O) tại R khác M ta có $(BC, DP) = -1$ suy ra $G(BC, DP) = -1$ chiếu lên đường tròn (O) suy ra $(BC, AN) = -1$ suy ra chùm $R(BC, AN) = -1$ nhưng do RN đi qua trung điểm BC suy ra $RA \parallel BC$. Từ đó $\angle RAE = \angle ACB = \angle AFE$ suy ra AR tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Vậy nếu gọi AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại L suy ra $\angle GNM = 180^\circ - \angle GAR = \angle GLA$. Suy ra tứ giác $GLMN$ nội tiếp. Mặt khác với chú ý $(BC, DP) = -1$ ta có $PG.PA = PB.PC = PD.PM$ suy ra tứ giác $GAMD$ nội tiếp. Từ đó $\angle GDA = \angle GMA = \angle GNL$ suy ra $NL \parallel AD$ vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Nếu (K) là đường tròn đường kính BC thì ta thu được bài toán 2. Từ tính chất hàng điều hòa trên đường tròn ta cũng chứng minh được AN là đường đối trung của tam giác ABC. Với các ý tưởng từ hai lời giải trên, chúng ta tiếp tục với một mở rộng khác như sau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và D thuộc đoạn BC. AD cắt (O) tại P khác A. Q thuộc (O) sao cho $PQ \parallel BC$ và R thuộc (O) sao cho $QR \parallel AP$. Một đường tròn qua A, R và tiếp xúc với đoạn BC tại M. QM cắt (O) tại G khác Q và cắt AD tại H. GD cắt (O) tại K khác G. Chứng minh rằng AM

và đường thẳng qua K song song AD cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp AGH.

Tuy rằng là một bài toán tổng quát nhưng thực ra bài toán có lời giải đơn giản vì hầu như không phải dựng thêm hình phụ, ý tưởng tổng quát xuất phát từ lời giải 1 của bài toán 2:



Lời giải. Từ $PQ \parallel BC$ và các góc nội tiếp bằng nhau

$$\angle AGM = \angle APQ = \angle ADM$$

suy ra tứ giác $AGDM$ nội tiếp. Từ đó, chú ý đường tròn ngoại tiếp tam giác ARM tiếp xúc BC nên

$$\angle ARM = \angle AMD = 180^\circ - \angle AGD = \angle ARK$$

Do đó, RM đi qua K. Từ $AP \parallel QR$, ta có

$$\angle RAH = \angle APQ = \angle AGH$$

suy ra AR là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AGH.

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác AGH cắt AM tại L thì

$$\angle GKR = 180^\circ - \angle GAR = \angle GLA$$

nên suy ra tứ giác $GLMK$ nội tiếp. Từ đó $\angle GDA = \angle GMA = \angle GKL$ hay $KL \parallel AD$.

Ta có điều phải chứng minh. □

Ta quay lại ý b) của bài toán 1. Ta tách nó thành bài toán sau:

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và trực tâm H. Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại G khác A. Một đường tròn tiếp xúc AG tại A cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác A. Chứng minh rằng AO chia đôi EF.

Lời giải. Gọi GH cắt (O) tại D khác A thì AD là đường kính của (O). Từ đó tứ giác $HBDC$ là hình bình hành nên HD đi qua trung điểm M của BC.

Gọi AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại P khác A và AP cắt EF tại N. Ta dễ thấy

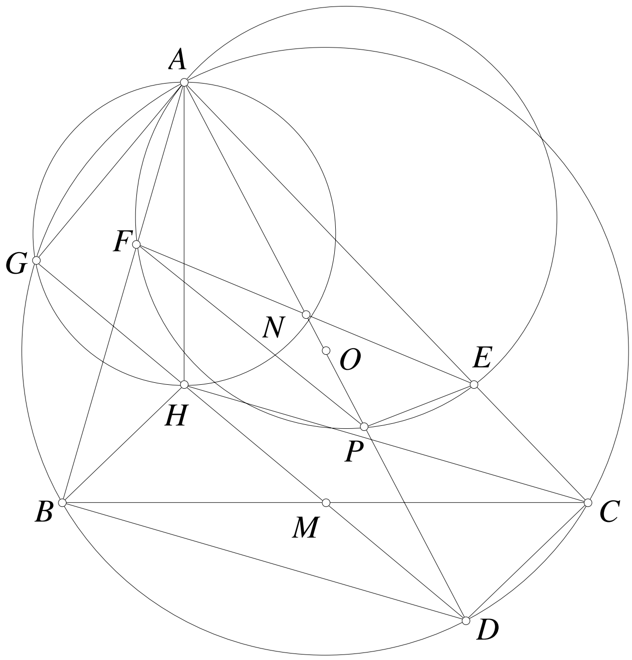
$$\angle FPN = \angle FAE = \angle GAB = \angle BDM$$

và

$$\angle PFE = \angle PAE = \angle DBM$$

Từ đó tam giác DBM và PFM đồng dạng. Tương tự tam giác DCM và PEN đồng dạng.

Mà M là trung điểm BC dễ suy ra N là trung điểm EF. □



Nhận xét. Việc chỉ ra bốn điểm thẳng hàng G, H, M, D đóng vai trò quan trọng trong lời giải này. Một cách dùng kỹ thuật góc và đồng dạng hoàn toàn tương tự ta có các bài toán như sau các bạn hãy làm như các bài luyện tập:

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm P thuộc BC không chứa A. Q đối xứng P qua BC. QB, QC cắt CA, AB tại E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A. Một đường tròn tiếp xúc AG tại A cắt CA, AB lần lượt tại M, N. R thuộc (O) sao cho $PR \parallel BC$. Chứng minh rằng AR chia đôi MN.

Bài toán 9. Cho tam giác ABC với G thuộc (O). Một đường tròn tiếp xúc AG tại A cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác A. D thuộc BC. GD cắt (O) tại L khác G. AL cắt EF tại K. Chứng minh rằng trung điểm của BF, CE và DK thẳng hàng.

Bài toán 10. (Đề châu Á Thái Bình Dương 2012) Cho tam giác ABC nhọn. Gọi D là chân đường cao kẻ từ A đến BC, M là trung điểm của BC và H là trực tâm tam giác ABC. Giả sử E là giao điểm của đường tròn Γ ngoại tiếp tam giác ABC với tia MH. Gọi F là giao điểm của đường thẳng ED và đường tròn Γ. Chứng minh rằng $\dfrac{BF}{CF} = \dfrac{AB}{AC}$.

2. Bài hình ngày thứ hai

Cũng trong đề chọn đội tuyển Việt Nam ngày thứ 2, có bài hình học như sau:

Bài toán 11. Cho tam giác ABC nhọn không cân và có điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle APB = \angle APC = \alpha > 180^\circ - \angle BAC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt AC ở E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APC cắt AB ở F khác A. Gọi Q là điểm nằm trong tam giác AEF sao cho $\angle AQE = \angle AQF = \alpha$. Gọi D là điểm đối xứng với Q qua EF, phân giác góc $\angle EDF$ cắt AP tại T.

a) Chứng minh rằng $\angle DET = \angle ABC, \angle DFT = \angle ACB$.

b) Đường thẳng PA cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại M, N. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PEM, PFN và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DIJ. Đường thẳng DT cắt (K) tại H. Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DMN.

Nhận xét. Đây là bài toán hay. Câu a) dùng gợi ý hướng giải cho câu b). Nếu để ý kỹ thực chất bài toán này là sự ghép nối của hai bài toán khác. Sau đây chúng tôi xin giới thiệu lại với các bạn cả hai bài toán đó cùng với nguồn gốc của nó.

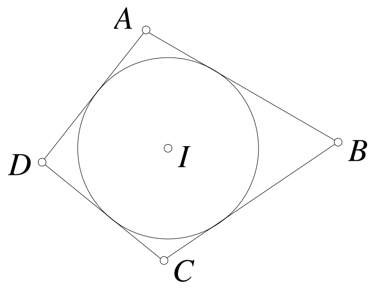
Trước hết ta nhắc lại hai bài toán quan trọng về tứ giác ngoại tiếp.

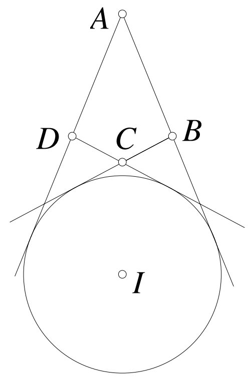
Bài toán 12. Cho tứ giác $ABCD$.

a) Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp khi và chỉ khi $AB + CD = AD + BC$. Tứ giác $ABCD$ gọi là ngoại tiếp tức là tồn tại đường tròn (I) tiếp xúc các cạnh AB, BC, CD, DA.

b) Tứ giác $ABCD$ bàng tiếp góc A, C khi và chỉ khi $AB+AD = CB+CD$. Tứ giác $ABCD$ gọi là bàng tiếp tức là tồn tại một đường tròn (I) chứa trong góc A hoặc C tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA kéo dài.

Bài toán trên là kết quả cơ bản có trong nhiều tại liệu. Để chứng minh, ta chỉ cần dựng các tam giác cân và chỉ ra các phân giác của các góc đồng quy, chi tiết lời giải xin dành cho bạn đọc.

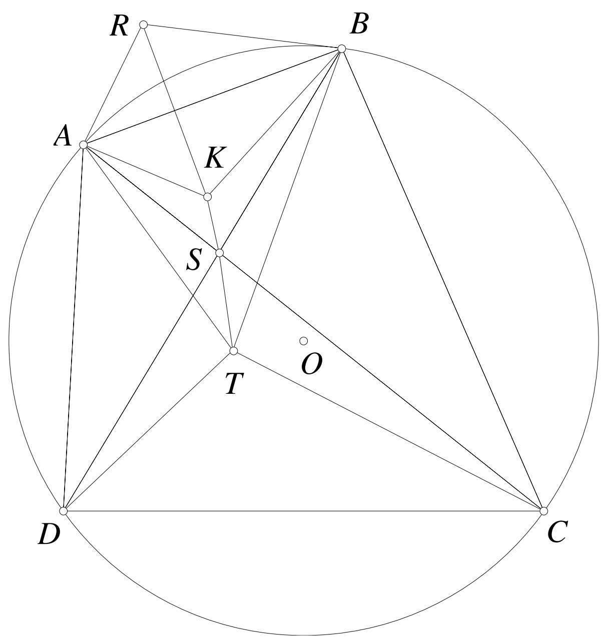




Chúng ta bắt đầu từ bài toán đầu tiên tham khảo [3] là đề chọn đội tuyển Indonesia năm 2007:

Bài toán 13. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại S. Đường tròn ngoại tiếp tam giác SAD, SBC cắt tại tại T khác S. Dựng ra ngoài tứ giác tam giác ABR đồng dạng với DCT. Chứng minh rằng tứ giác $ATBR$ là tứ giác ngoại tiếp.

Đây là bài toán hay có rất nhiều cách tiếp cận khác nhau. Tuy vậy chúng tôi chọn lời giải sau gần như là ngắn gọn nhất và cũng chính là sử dụng hướng đi trong bài toán 11.



Lời giải. Gọi K đối xứng R qua BC. Ta thấy

$$\begin{aligned}\angle KAS &= \angle BAS - \angle BAK = \angle BDC - \angle RAB \\ &= \angle BDC - \angle TDC = \angle SDT = \angle SAT.\end{aligned}$$

Từ đó, AS là phân giác $\angle KAT$. Tương tự, BS là phân giác $\angle KBT$. Dễ thấy TS là phân giác $\angle ATB$.

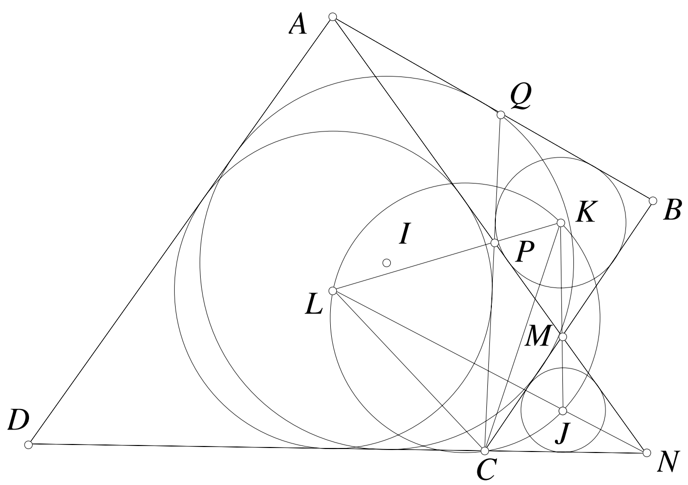
Từ đó, đường tròn (S) tiếp xúc với KA, KB, TA, TB suy ra $AK - AT = BK - BT$. Theo tính đối xứng, suy ra $AR - AT = BR - BT$ hay $AR + BT = BR + AT$ suy ra tứ giác $ARBT$ ngoại tiếp.

Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Trong [3] cũng có một lời giải khác và ngoài ra bài toán cũng có thể giải bằng phép nghịch đảo hoặc tính chất phương tích. Ta dễ chứng minh được tâm nội tiếp tứ giác $ATBR$ là đẳng giác của K trong tam giác SAB đó chính là nội dung bài toán 11 phần a). Để tiếp tục chúng tôi xin nhắc lại và chứng minh bài toán G8 trong IMO Shortlist 2009 trong [4] như sau:

Bài toán 14. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Một đường thẳng đi qua A cắt đoạn thẳng BC và cắt tia đối tia CD tại N. Gọi J, K, L là tâm nội tiếp tam giác CNM, MAB và NAD. Chứng minh rằng trực tâm tam giác JKL nằm trên MN.

Đây là một kết quả đẹp, bao hàm trong đó nhiều ý tưởng. Chúng tôi xin giới thiệu lời giải sử dụng bài toán 12 như sau:



Lời giải. Gọi tiếp tuyến của đường tròn (L) nội tiếp tam giác NAD cắt AM, AB tại P, Q. Như vậy tứ giác $APCD$ nội tiếp.

Kết hợp $ABCD$ nội tiếp suy ra

$$PA - PC = DA - DC = BA - BC.$$

Từ đó tứ giác $APCB$ bàng tiếp hay tứ giác $BQPM$ ngoại tiếp vậy CP tiếp xúc (K).

Từ đó

$$2\angle LCK = \angle BCD = \angle CMN + \angle CNM = 2\angle JMN + 2\angle JNM = 2\angle MJL.$$

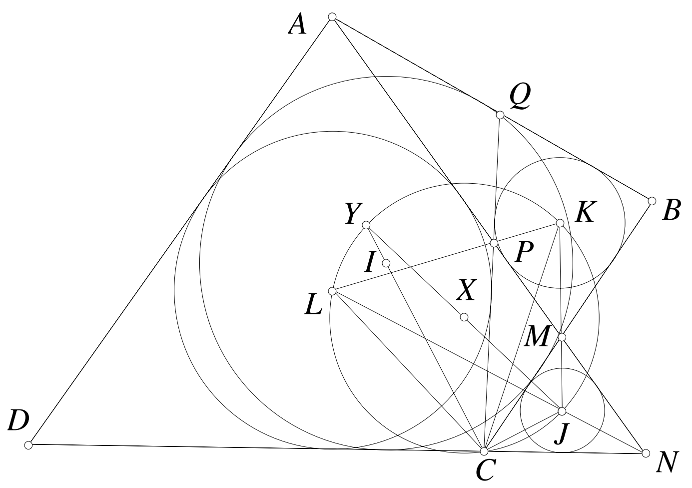
Từ đó, tứ giác $CJKL$ nội tiếp. Theo định lý đường thẳng Steiner thì đường thẳng nối đối xứng của C qua JK, JL đi qua trực tâm tam giác JKL.

Chú ý theo tính chất phân giác thì đường thẳng đó chính là MN. Vậy MN đi qua trực tâm tam giác JKL.

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán này có kết cấu chặt chẽ và ý tưởng hay. Chú ý điều kiện N thuộc tia đối tia CD cần thiết để bài toán đúng. Để ý rằng $CI \perp CJ$ nên nếu CI cắt đường tròn (X) ngoại tiếp tứ giác $CJKL$ tại Y thì JY là đường kính của (X).

Phần nhận xét này chính là kết quả câu b) bài toán 11. Nếu để ý kỹ thi mô hình bài toán IMO shortlist này cũng đã xuất hiện một lần trong đề thi VMO năm 2011 xem [5]



Trở lại bài toán 11, ta chú ý rằng do điều kiện chặt chẽ của bài toán Shortlist nên ta cần bổ sung thêm điều kiện cho bài toán 11 là M, N phải luôn cùng phía với P trên đường thẳng AP. Từ đó chú ý tứ giác $BCEF$ nội tiếp. Bài toán chỉ là sự kết hợp một cách cơ học của bài toán 13 và bài toán 14.

Chú ý rằng ta hoàn toàn có thể thay thế AP thành một đường thẳng bất kỳ đi qua P. Và khi đó, ta có thể phát biểu lại bài toán này đẹp hơn như sau:

Bài toán 15. Cho tam giác ABC và có điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle APB = \angle APC = \alpha$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB, PAC lần lượt cắt CA, AB tại E, E khác A. Điểm Q là điểm nằm trong tam giác AEF sao cho $\angle AQE = \angle AQF = \alpha$. Gọi D là điểm đối xứng với Q qua EF.

Một đường thẳng đi qua P cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại M, N sao cho M, N cùng phía với P. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PEM, PFN và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DIJ. Phân giác $\angle EDF$ cắt (K) tại H.

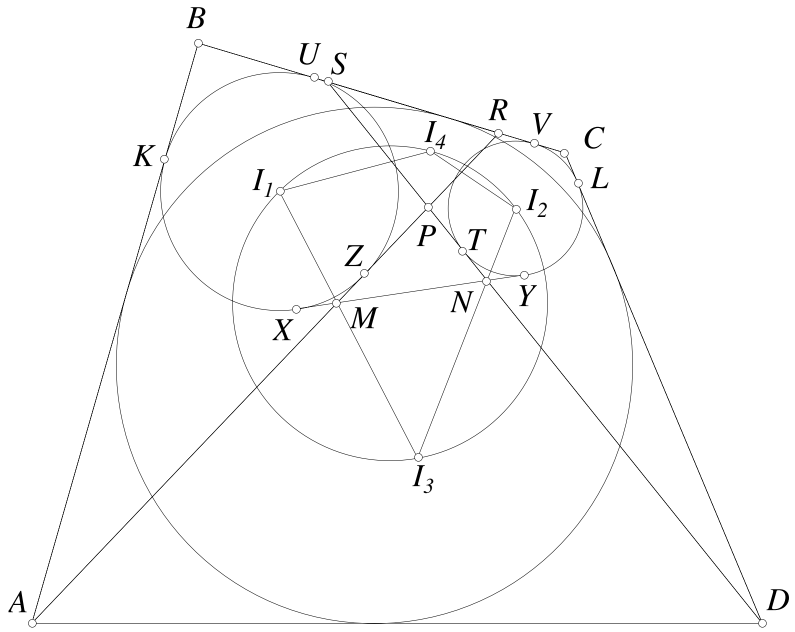
Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DMN.

Nhận xét. Do bài toán chỉ là một cách kết hợp cơ học hai bài toán trên nên một khi giải và phân tích rõ hai bài toán trên thì bài toán kết hợp không còn mang nhiều ý nghĩa. Tuy vậy việc sử dụng cả hai bài toán lớn trong cùng một bài toán làm độ khó của bài toán thi tăng nhiều lần và chính vì vậy nó được đánh giá cao và phân loại tốt học sinh.

Tác giả Nguyễn Văn Linh phát hiện rằng bài toán G8 trong IMO Shortlist 2009 có một mở rộng đã có trên diễn đàn AoPS trước đó xem [6,7]. Cũng rất thú vị là tác giả Trần Quang Hùng cũng đề nghị độc lập một vấn đề tương tự trong cuộc thi kỷ niệm 45 tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, xem [8] và lời giải của tác giả được đăng trong [9].

Bài toán có phát biểu như sau:

Bài toán 16. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp và điểm P nằm trong tứ giác sao cho các đường thẳng AP, DP tương ứng cắt đoạn BC tại S, R theo thứ tự. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABS, DCR, PAD, PSR cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải. Gọi $(I_1), (I_2), (I_3), (I_4)$ theo thứ tự là đường tròn nội tiếp của các tam giác ABS, DCR, PAD, PSR. Gọi X, Y là tiếp điểm của tiếp tuyến chung khác BC của $(I_1), (I_2)$ với $(I), (I)$. Gọi M, N là giao của XY với PA, PD. Gọi Z, K, U là tiếp điểm của (I_1) với AS, AB, SB.

Gọi T, L, V là tiếp điểm của (I_2) với DR, DC, RC. Dễ thấy

$$\begin{aligned}
&(1)\, BU = BK, CV = CL,\\
&(2)\, XY = UV, AZ = AK, DT = DL,\\
&(3)\, MX = MZ, NY = NT
\end{aligned}$$

Ta có các biến đổi tương đương sau của cạnh: Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
&CB + AD = AB + CD\\
&\Leftrightarrow BU + UV + VC + AD = AK + KB + DL + LC\\
&\Leftrightarrow UV + AD = AK + DL, \text{ theo } (1)\\
&\Leftrightarrow XY + AD = AZ + DT, \text{ theo } (2)\\
&\Leftrightarrow XM + MN + NY + AD = AM + MZ + DN + NT\\
&\Leftrightarrow MN + AD = AM + DN, \text{ theo } (3)
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $AMND$ ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp $AMDN$ chính là (I_3). Do đó,

$$\angle MI_3N = 180^\circ - \angle AI_3D = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle APD) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle APD$$

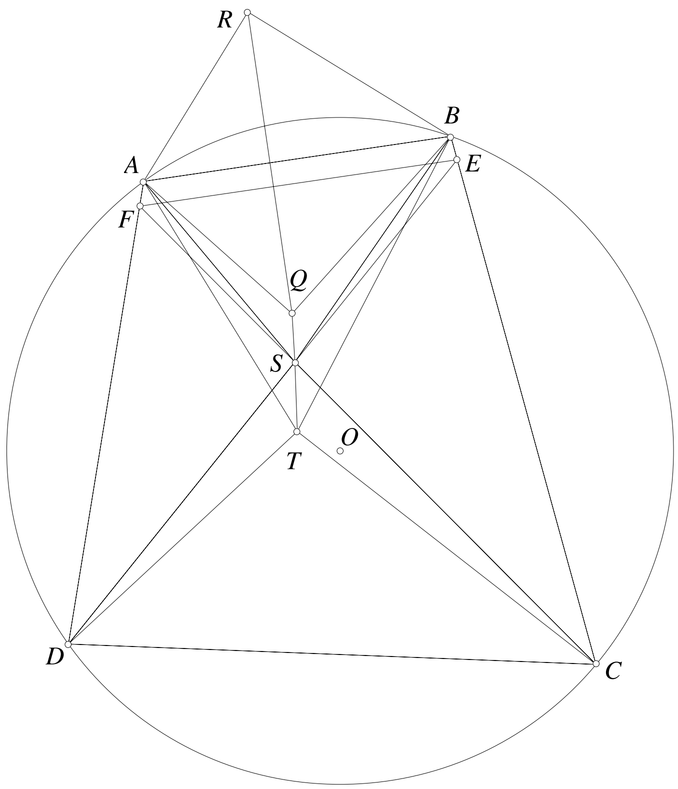
nên

$$\angle I_1I_3I_2 = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle SPR) = 180^\circ - \angle I_1I_4I_2.$$

Vậy $I_1I_2I_3I_4$ nội tiếp, ta có điều phải chứng minh. □

Chúng ta tiếp tục với một mở rộng thú vị sau cho bài toán 13.

Bài toán 17. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Các điểm E, F thuộc cạnh CB, AD sao cho $EF \parallel AB$. DE cắt CF tại S. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ASD và BSC cắt nhau tại T khác S. Dựng điểm R ở ngoài tứ giác $ABCD$ sao cho $\angle RAB = \angle ASF + \angle TDC$ và $\angle RBA = \angle BSE + \angle TCD$. Chứng minh rằng tứ giác $ATBR$ ngoại tiếp.



Lời giải. Ta dễ thấy tứ giác $CDFE$ nội tiếp nên

$$\angle STA = \angle SDF = \angle SCE = \angle STB.$$

Từ đó, TS là phân giác $\angle ATB$. Ta lại có

$$\begin{aligned}\angle QAS &= \angle SAB - \angle QAB = \angle DAB - \angle DAS - \angle RAB\\ &= \angle DFE - (\angle DFS - \angle FSA) - (\angle ASF + \angle TDC)\\ &= \angle SFE - \angle TDC = \angle SDC - \angle TDC = \angle SDT = \angle SAT.\end{aligned}$$

Do đó, AS là phân giác $\angle QAT$. Tương tự, ta cũng có BS là phân giác $\angle QBT$. Từ đó, suy ra đường tròn (S) tiếp xúc với QA, QB, TA, TB hay $AQ - AT = BQ - BT$.

Theo tính đối xứng suy ra $AR - AT = BR - BT$ hay $AR + BT = BR + AT$, ta suy ra tứ giác $ARBT$ ngoại tiếp.

Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Việc phát biểu bài toán dùng góc hình học trong nhiều trường hợp chưa thật chính xác xong phần nào giúp cho bài toán nhìn đẹp hơn, việc phát biểu một cách chặt chẽ bằng khái niệm góc có hướng các bạn có thể tự tìm hiểu thêm. Khi EF trùng AB ta thu được bài toán 13. Nếu việc kết hợp bài toán 13 và bài toán 14 cho ta bài toán TST thì việc kết hợp bài toán 17 và bài toán 14 sẽ cho ta một mở rộng của bài toán đã dùng trong kỳ thi TST, nhưng rõ ràng việc kết hợp một cách cơ học như các bạn đã thấy nó cũng không còn mang nhiều ý nghĩa nữa.

Tuy vậy, để thú vị hơn chúng tôi xin đưa ra một ý tưởng như sau từ đề bài toán 11. Những điểm P nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle APB = \angle APC$ thì các điểm P đó có gì đặc biệt hay nói cách khác, quỹ tích P là gì. Bài toán sau sẽ giải đáp thắc mắc đó, chúng ta sẽ không cố gắng tìm quỹ tích P mà sẽ tìm quỹ tích điểm đẳng giác của P. Đó là một quỹ tích đẹp và chứng minh đơn giản, các bạn hãy làm như một bài luyện tập:

Bài toán 18. Cho tam giác ABC có đường tròn Apollonius ứng với A là (K). P là một điểm thuộc (K). Q đẳng giác với P trong tam giác ABC. Chứng minh rằng $\angle AQB = \angle AQC$.

Tài liệu tham khảo

[1] Đề thi chọn đội tuyển Việt Nam thi IMO năm 2015

[2] Facebook Bài toán hay - Lời giải đẹp https://www.facebook.com/BÀI TOÁN HAY - LỜI GIẢI ĐẸP - ĐAM MÊ TOÁN HỌC

[3] Indonesia IMO 2007 TST, Stage 2, Test 5, Problem 1 http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h312083

[4] IMO Shortlist 2009 - Problem G8
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h355795p1932940

[5] A, M, N, P are concyclic iff d passes through I- [VMO 2011]
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h386167p2144390

[6] Vietnam TST 2015 Problem 5
https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2015/03/28/vietnam-tst-2015-problem-5/

[7] Tangential quadrangle
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h247411

[8] Tạp chí THTT số 381 tháng 3 năm 2009

[9] Tạp chí THTT số 385 tháng 7 năm 2009

CÁC VẤN ĐỀ CỔ ĐIỂN VÀ HIỆN ĐẠI

Trần Nam Dũng
Đại học KHTN, TP. Hồ Chí Minh

Chuyên mục này dành cho các vấn đề cổ điển và hiện đại được trình bày dưới dạng các bài toán xâu chuỗi. Đó có thể là chuỗi các bài để giải bài toán đẳng chu, chứng minh đẳng thức Euler kỳ hiệu $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$, một chuỗi bài toán vận trù ... Cách trình bày xuất phát từ những vấn đề đơn giản, dễ hiểu, những khái niệm mới sẽ được định nghĩa luôn trong bài để có thể đọc tương đối độc lập. Và mỗi một chuỗi bài sẽ nêu ra những vấn đề nhất định, có thể là giải quyết một bài toán kinh điển hay nêu ra những giả thuyết mới, những vấn đề mới.

Ban biên tập khuyến khích các độc giả gửi lời giải (toàn phần hoặc từng phần) cho Ban biên tập. Các lời giải hay sẽ được chọn đăng trong các số tiếp theo $(N+3)$. Thư điện tử xin gửi về theo địa chỉ trannamdung@yahoo.com, tiêu đề [Epsilon] [Lời giải].

Trong số này chúng tôi chọn đăng chuỗi bài toán về Bất đẳng thức Schapiro do A.Khabrov đề nghị cho Hội nghị mùa hè của Cuộc thi toán giữa các thành phố, năm 2004 và bài toán về mạng lưới xa lộ trích từ đề thi Olympic toán của Pháp năm 2014.

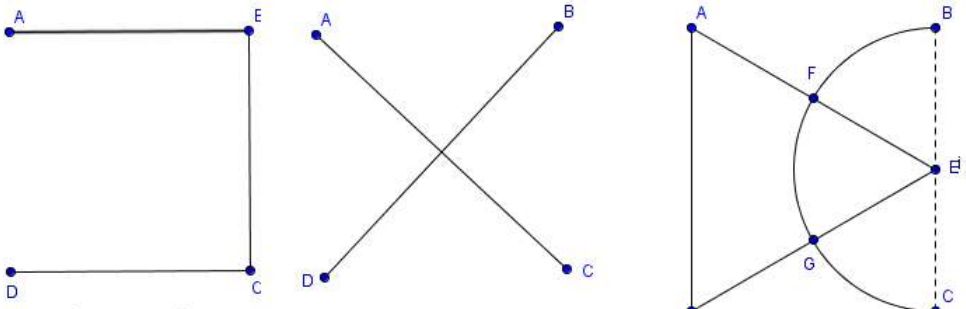
Đề bài. *Bốn thành phố Alençon, Bélançon, Célançon và Délançon nằm trên đỉnh của một hình vuông có cạnh 100 km. Bộ giao thông vận tải muốn nối liền các thành phố với nhau bằng một mạng lưới xa lộ có tổng chiều dài ngắn nhất có thể.*

1. Phần A

"*Ta có thể xây xa lộ đi từ Alençon đến Bélançon, sau đó đến Célançon, cuối cùng đến Délançon*" - Trợ lý thứ nhất nói.

“*Hay là, ta có thể xây hai xa lộ chéo nhau: Một từ Alençon đến Célançon và xa lộ còn lại từ Délançon đến Bélançon*” - Trợ lý thứ hai đề xuất.

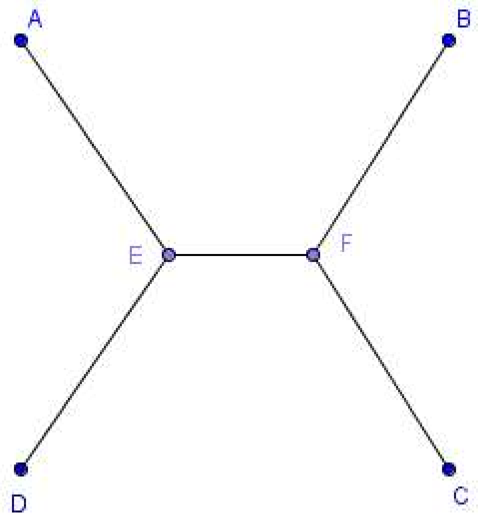
“*Và tại sao lại không dựng một xa lộ dạng nửa đường tròn, được bổ sung bởi hai đoạn xa lộ thẳng ?*” - Trợ lý thứ ba góp ý kiến.



Assistance $n^{\circ}1$ Assistance $n^{\circ}2$ Assistance $n^{\circ}3$

1. Phương án nào trong ba phương án trên là ngắn nhất ?

2. Một nhà toán học đã đề xuất một phương án khác: “*Ta có thể nối Alençon và Délançon bằng một tam giác cân (tam giác* AED *trong hình 4), sau đó Bélançon và Célançon bằng một tam giác cân đồng dạng (tam giác* BFC) *và nối hai đỉnh* E *và* F *như ta thấy trong hình sau*”: Nếu $\mathsf{EF} = 20$ km, mạng lưới thống xa lộ được thể hiện trên hình 4 có ngắn hơn các mạng lưới mà các trợ lý đã đề xuất trên đây không ?

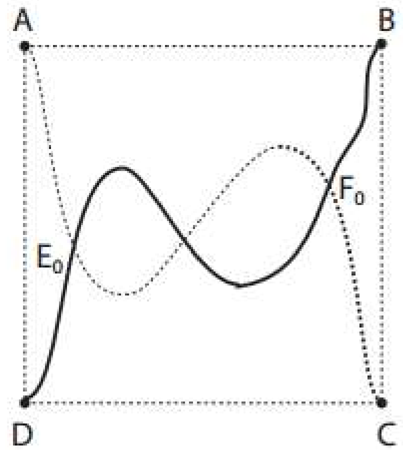


2. Phần B

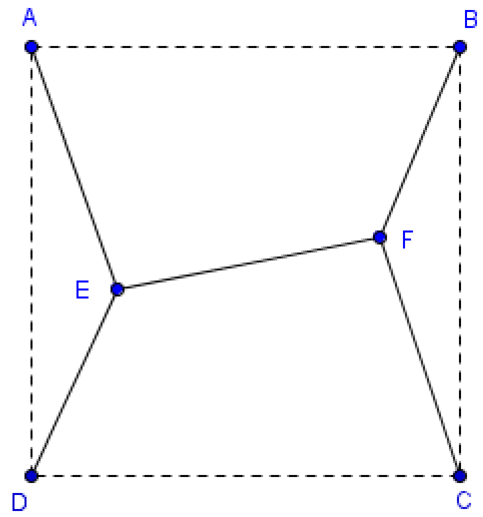
Trong phần này, chúng ta muốn chứng minh rằng mạng lưới xa lộ ngắn nhất thực sự là mô hình của nhà toán học đã đề xuất. Do đó ta sẽ tìm chiều dài của đoạn EF để đạt được mạng lưới ngắn nhất này.

Nhắc nhở hình học: *Nếu* A, B, C *là ba đỉnh của một tam giác thì* $AB + BC \geqslant AC$, *dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi* B *thuộc đoạn* AC. *Chúng ta cũng biết rằng, nếu vẽ một đường cong bất kỳ giữa* A *và* B, *chiều dài của đường cong sẽ luôn lớn hơn hay bằng chiều dài đoạn (đường thẳng là đường ngắn nhất).*

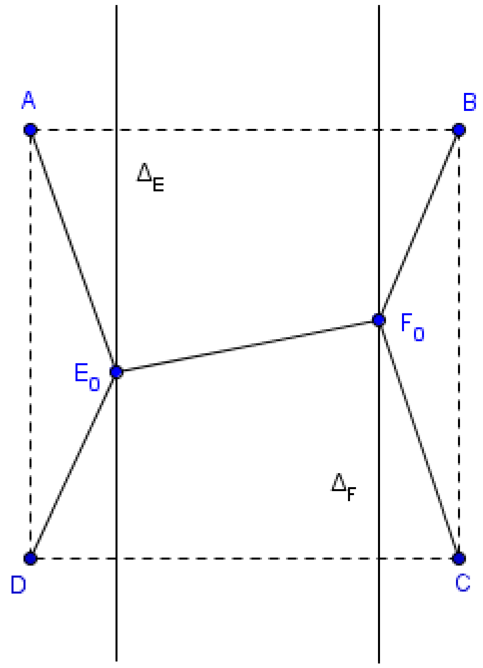
Bài toán 1. Quay trở lại với mạng lưới xa lộ của chúng ta. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử là mạng lưới của chúng ta được tạo thành bở hai đường con nối các đỉnh đối diện (một nối A với C và một nối B với D), và hai đường cong này nằm bên trong hình vuông cạnh 100 km như hình vẽ dưới đây.



Xét một mạng lưới được tạo bởi hai đường cong như hình 5. Ta xét xa lộ giữa Alençon và Célançon, bắt đầu từ Alençon. Gọi E_0 là giao điểm đầu tiên mà xa lộ này gặp với xa lộ nối Délançon và Bélançon và F_0 là giao điểm cuối cùng (hai điểm này có thể trùng nhau (hình 5). Chứng minh rằng tổng chiều dài của mạng lưới này lớn hơn hay bằng tổng chiều dài của mạng lưới dưới đây, tạo thành bởi các đoạn thẳng (hình 6).



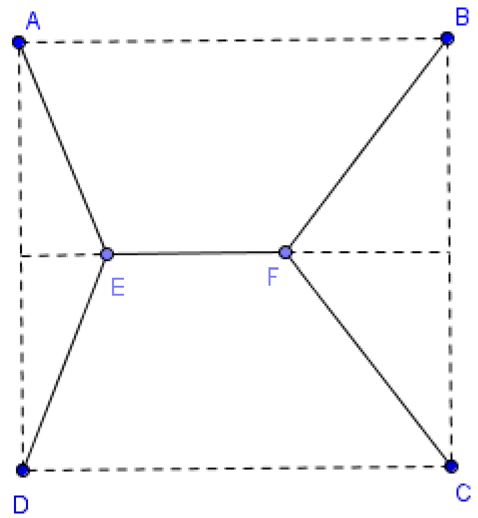
Bài toán 2. Xét các đường thẳng Δ_E và Δ_F, qua E_0 và F_0 tương ứng và song song với AD (xem hình 7 dưới đây).



(a) Xác định điểm E trên Δ_E sao cho tổng các khoảng cách $DE + EA$ là nhỏ nhất. Ta gọi F là điểm tương tự trên Δ_F sao cho $FB + FC$ nhỏ nhất.

(b) Chứng minh rằng $EF \leqslant E_0F_0$.

(c) Từ các lý luận ở trên suy ra rằng mạng lưới cần tìm bắt buộc phải có dạng sau, trong đó E và F nằm trên trung trực đoạn AD (hình 8).



Bài toán 3. Ta đã công nhận rằng trong mạng lưới tối ưu cần tìm, các điểm E và F phải nằm trên trung trực của AB.

(a) Hãy đưa ra lý luận chứng tỏ rằng mạng lưới tối ưu cần tìm phải đối xứng qua trung trực của AB.

(b) Sau tất cả những điều nói trên, mạng lưới cần tìm sẽ phải có dạng như nhà toán học đã đề xuất (hình 4). Bạn có thể giúp xác định chiều dài của EF sao cho mạng lưới xa lộ dạng này có tổng chiều dài ngắn nhất có thể ?

(c) Khi đó góc $\angle DEA$ bằng bao nhiêu ?

BẤT ĐẲNG THỨC SHAPIRO[1]

1. Bất đẳng thức Shapiro

Tháng 10/1954, trong Tạp chí "American Mathematical Monthly" xuất hiện bài toán của nhà toán học Mỹ Harold Shapiro: *Với các số dương* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *hãy chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geqslant\frac{n}{2}, \qquad (1)$$

với dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tất cả các mẫu số bằng nhau.

Trong tạp chí "Monthly", khác với các tạp chí khác, ví dụ như Kvant hay Toán học và tuổi trẻ, cho phép đăng cả các bài toán mà chưa có ai giải được, và điều này không được báo trước cho độc giả. Và lần này cũng vậy. Tác giả bài toán khi gửi bài chỉ có lời giải cho $n = 3$ và 4.

Trong các bài toán đề nghị dưới đây, thay vì đòi hỏi tính dương của tất cả các x_k, ta chỉ yêu cầu các số x_k là không âm và tất cả các mẫu số khác 0. Nếu như bất đẳng thức đúng cho các số dương thì từ đó có thể suy ra bất đẳng thức cho các số không âm làm cho các mẫu số khác 0. Đặt:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}.$$

1. Chứng minh bất đẳng thức (1) cho $n = 3, 4, 5, 6$.

2. Chứng minh rằng bất đẳng thức (1) không đúng:

- **a)** cho $n = 20$;
- **b)** cho $n = 14$;
- **c)** cho $n = 25$.

[1]Trích đề toán từ *Cuộc thi toán giữa các thành phố*, năm 2004. Được đề nghị và giới thiệu bởi A. Khabrov, I. Bogdanov, V. Bugaenko, K. Kuiumdjan, K. Kokhas, A. Skopenkov, G. Chelnokov.

3. Chứng minh bất đẳng thức (1) đúng cho các dãy đơn điệu.

4. Chứng minh rằng nếu bất đẳng thức (1) không đúng với $n = m$ thì nó cũng không đúng cho $n = m + 2$.

5. Chứng minh rằng nếu bất đẳng thức (1) không đúng với $n = m$, trong đó m là số tự nhiên lẻ, thì nó cũng không đúng với mọi n lớn hơn m.

6. Chứng minh rằng bất đẳng thức (1) đúng với $n = 8, 10, 12$ và $n = 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23$. Theo mệnh đề 4, để thực hiện điều này, ta chỉ cần chứng minh cho hai trường hợp $n = 12$ và $n = 23$.

7. Chứng minh rằng $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1) \geqslant n$.

8. Giả sử rằng tại điểm $a_1, \ldots, a_n > 0$, hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ đạt cực tiểu địa phương.

a) Nếu n chẵn, chứng minh rằng $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{2}$.

b) Chứng minh mệnh đề tương tự cho n lẻ. (∗)

c) Sử dụng a), b), chứng minh bất đẳng thức (1) cho $n = 7$ và $n = 8$.

9. Chứng minh bất đẳng thức $f(x_1, x_2, \ldots x_n) \geqslant cn$ cho các giá trị sau của hằng số c:

a) $c = \frac{1}{4}$;

b) $c = \sqrt{2} - 1$;

c) $c = \frac{5}{12}$.

Khi cuộc thi diễn ra, các thí sinh đã giải quyết khá tốt các bài toán đề nghị ở mục 1, và Ban tổ chức đã quyết định bổ sung hai bài toán sau, thực chất là chứng minh một kết quả rất mạnh của V. Drinfeld về bất đẳng thức Shapiro (kết quả mạnh nhất cho các đánh giá dạng 9).

10. **a)** Với mọi số nguyên dương n, tồn tại số $q_n > 1$, sao cho với mọi số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thuộc đoạn $\left[\frac{1}{q_n}, q_n\right]$ bất đẳng thức (1) đúng.

b) *Tồn tại hay không số $q > 1$, sao cho với mọi số nguyên dương n và với mọi $x_i \in \left[\frac{1}{q}, q\right]$ bất đẳng thức (1) đúng?

11. Gọi $S = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là vế trái của bất đẳng thức Shapiro. Ký hiệu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_2}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n-1}}, \frac{x_1}{x_n}$ được xếp theo thứ tự tăng dần.

a) Chứng minh rằng

$$S \geqslant \frac{1}{a_1(1+a_n)} + \frac{1}{a_2(1+a_{n-1})} + \cdots + \frac{1}{a_n(1+a_1)};$$

b) Đặt:

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{1}{a_k a_{n+1-k}}, & a_k a_{n+1-k} \geqslant 1 \\ \dfrac{2}{a_k a_{n+1-k} + \sqrt{a_k a_{n+1-k}}}, & a_k a_{n+1-k} < 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $2S \geqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

c) Gọi g là hàm lồi lớn nhất không vượt quá các hàm e^{-x} và $2\left(e^x + e^{\frac{x}{2}}\right)^{-1}$. Chứng minh rằng

$$2S \geqslant g(\ln a_1 a_n) + g(\ln a_2 a_{n-1}) + \cdots + g(\ln a_n a_1) \geqslant n \cdot g(0).$$

d) Chứng minh rằng với mọi $\lambda > \frac{1}{2} \cdot g(0)$, tồn tại số nguyên dương n và các số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sao cho $S \leqslant \lambda n$.

2. Các bất đẳng thức hữu dụng liên quan

Chứng minh các bất đẳng thức dưới đây với điều kiện tất cả các số x_k dương. Hãy kiểm tra rằng các hằng số được in đậm không thể thay thế bằng các số lớn hơn (với mỗi n).

1. Bất đẳng thức Mordell.

a) Với mọi số không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ta có bất đẳng thức

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \geqslant \mathbf{min}\left\{\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}, \mathbf{3}\right\} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k(x_{k+1} + x_{k+2}).$$

b) Hãy xác định với những giá trị không âm nào của $x_1, \ldots, x_n$, bất đẳng thức Mordell trở thành đẳng thức.

2. Với mọi số thực không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n$, hãy chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \geqslant \mathbf{min}\left\{\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\right\} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k(x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3}).$$

3. **a)** Với $n \leqslant 8$, hãy chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{x_2}{x_3 + x_4 + x_5} + \cdots + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + x_3} \geqslant \frac{n}{3}.$$

b) *Bất đẳng thức trên còn đúng với giá trị nào khác của n hay không?

4. $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1)$, $\forall n \geqslant 4$.

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k + x_{k+1}}$.

6. $\dfrac{x_1}{x_n + x_2} + \dfrac{x_2}{x_1 + x_3} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_n} + \dfrac{x_n}{x_{n-1} + x_1} \geqslant \mathbf{2}$, $\forall n \geqslant 4$.

7. $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 + x_3} + \dfrac{x_2 + x_3}{x_2 + x_4} + \cdots + \dfrac{x_{n-1} + x_n}{x_{n-1} + x_1} + \dfrac{x_n + x_1}{x_n + x_2} \geqslant \mathbf{4}$, $\forall n \geqslant 4$.

8. $\dfrac{x_1}{x_n + x_3} + \dfrac{x_2}{x_1 + x_4} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_1} + \dfrac{x_n}{x_{n-1} + x_2} \geqslant \mathbf{3}$, $n \geqslant 6$.

9. $\dfrac{x_2 + x_3}{x_1 + x_4} + \dfrac{x_3 + x_4}{x_2 + x_5} + \cdots + \dfrac{x_n + x_1}{x_{n-1} + x_2} + \dfrac{x_1 + x_2}{x_n + x_3} \geqslant \mathbf{6}$, $\forall n \geqslant 6$.

10. $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 + x_4} + \dfrac{x_2 + x_3}{x_2 + x_5} + \cdots + \dfrac{x_{2004} + x_1}{x_{2004} + x_3} \geqslant \mathbf{6}$.

11. $\dfrac{x_1}{x_n + x_4} + \dfrac{x_2}{x_1 + x_5} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_{n-1} + x_3} \geqslant \mathbf{4}$, với $n > 5$, n chẵn.

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_{k+1}^2 - x_{k+1}x_{k+2} + x_{k+2}^2} \geqslant \left[\frac{\mathbf{n+1}}{\mathbf{2}}\right]$.

PHƯƠNG PHÁP MỞ RỘNG VÀ SÁNG TẠO CÁC ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC CỔ ĐIỂN

Đào Thanh Oai (*Hà Nội*)

Tóm tắt

Đam mê và môi trường nghiên cứu là hai yếu tố quan trọng giúp cho sự thành công của một nhà Toán học. Đam mê cộng với phương pháp nghiên cứu sẽ tạo ra kết quả nghiên cứu. Môi trường nghiên cứu giúp cho kết quả nghiên cứu đó được đánh giá một cách chính xác nhất bởi giới chuyên môn cũng như cộng đồng. Ngoài ra, môi trường nghiên cứu cũng là nơi để nhà nghiên cứu học hỏi trao đổi chia sẻ các vấn đề họ đang quan tâm. Khi thành quả nghiên cứu được cộng đồng công nhận chính là nguồn động lực để một nhà nghiên cứu duy trì niềm đam mê của mình. Làm thế nào có thể tạo ra được các vấn đề Toán học hay các bài toán một cách nhanh chóng, làm sao có thể kiểm chứng được các kết quả đó một cách dễ dàng nhất là hai vấn đề mà một nhà nghiên cứu nên quan tâm.

Xuất phát từ kinh nghiệm nghiên cứu Toán học trong việc tạo ra các vấn đề hình học, tác giả viết bài báo này nhằm chia sẻ kinh nghiệm đó đến các bạn học sinh và sinh viên và tất cả những ai có niềm đam mê Toán học, đặc biệt là bộ môn hình học phẳng.

*Trình bày **phương pháp mở rộng và sáng tạo các vấn đề hình học cổ điển** và một số vấn đề liên quan từ việc kiểm tra ý tưởng đúng hay sai, mới hay cũ, mở rộng ý tưởng và công bố nó đến cộng đồng được minh họa thông qua nhiều ví dụ sinh động.*

Tác giả hi vọng bài báo này sẽ giúp cho các bạn trẻ có được sự gợi mở để bắt đầu sáng tạo vấn đề Toán học nói chung.

1. Vai trò của các đối tượng cơ bản

Đối với nghiên cứu Toán học, điều trước tiên ta cần tìm hiểu là các tính chất vốn có (hay còn gọi là các tính chất tự nhiên của các đối tượng), các mối kết hợp về một đối tượng, lớp các đối tượng thuộc lĩnh vực ta đang muốn nghiên cứu mà đã được đông đảo cộng đồng thừa nhận. Tiếp theo là nghiên cứu ra các cấu trúc và tính chất (vấn đề) mới.

Nếu như ta không biết cái gì là đã được biết đến thì ta cũng khó có thể biết cái gì là mới. Do đó việc hiểu các đối tượng, tính chất, khái niệm, cấu trúc cơ bản có một vai trò căn bản. Nếu không nắm bắt hiểu về các đối tượng, tính chất, khái niệm, cấu trúc cơ bản của một đối tượng, và các cấu trúc cơ bản kết hợp giữa các đối tượng thì chúng ta không tìm được cách phát biểu cho việc đưa ra giả thiết, không thể hình thành, các ý tưởng.

Vì thế, muốn nghiên cứu bất cứ lĩnh vực gì cũng phải có các khái niệm cơ bản của lĩnh vực đó. Nói cách khác, lĩnh vực ta quan tâm có các đối tượng nào? Các đối tượng đó được hiểu thế nào? Các tính chất của các đối tượng đó là gì?

Đối với lĩnh vực hình học cổ điển phải biết các đối tượng cơ bản của hình học là điểm, đường thẳng, tam giác, tứ giác, đường tròn,... Nghiên cứu về điểm phải biết các tính chất, khái niệm cơ bản liên quan đến điểm ví dụ:

- Xác định được một đường thẳng qua hai điểm phân biệt.
- Ba điểm gọi là thẳng hàng nếu điểm thứ ba nằm trên đường thẳng nối hai điểm thứ nhất và thứ hai. Khi nghiên cứu đường thẳng ta lại cần biết các khái niệm về song song, vuông góc, góc của hai đường thẳng, đường thẳng giao nhau, ba đường thẳng đồng quy, ...
- Nghiên cứu góc thì ta phải biết thế nào là góc nhọn, góc tù, góc bẹt, liên hợp đẳng giác, ...
- Ba điểm không thẳng hàng thì tạo thành tam giác bằng cách kẻ đường thẳng đi qua các điểm này, hình giới hạn (bao bởi ba đường thẳng này) được gọi là tam giác. Khi nghiên cứu về tam giác lại phải biết các tính chất của tam giác, các tam giác đặc biệt như tam giác vuông, tam giác cân và tam giác đều, tam giác đồng dạng, ...

- Mở rộng hơn một chút sang đến đường cong, mà đường cong dễ xây dựng nhất là đường tròn, từ đường tròn rồi ta có thể mở rộng để tìm hiểu về các đường conic.

Tóm lại: *Các định lý hình học được xây dựng bằng cách nêu nên một giả thiết về cấu trúc của một số đối tượng đối tượng hình học, sau đó suy ra một mối quan hệ hoặc tính chất từ cấu trúc đó. Vì vậy, vai trò của các đối tượng và tính chất cơ bản của các đối tượng là hết sức quan trọng.*

2. Nắm bắt xu hướng nghiên cứu

Sau khi nắm vững các khái niệm về các đối tượng , tính chất cơ bản, ... Mới bắt đầu chúng ta sẽ không thể biết chúng ta cần nghiên cứu cái gì? Cái gì đáng được quan tâm? Cách nhanh nhất để có thể đi đến việc phát hiện được các kết quả mới đáng chú ý đó là phải nắm bắt được xu hướng nghiên cứu. Hay nói cách khác là hòa vào dòng nghiên cứu chủ đạo của các đối tượng trong lĩnh vực ta đang muốn nghiên cứu. Việc này thật sự không hề đơn giản với những người mới bắt đầu. Vì khi mới bắt đầu chúng ta còn rất mờ mịt đến các khái niệm tính chất cũng chưa nắm bắt hết làm sao có thể hiểu hết được dòng xu hướng nghiên cứu?

Câu trả lời là muốn biết được xu hướng được quan tâm của lĩnh vực, cần phải chú ý đến các kết luận nổi bật nhất, rồi nổi bật kém hơn một chút, chính là việc xem các bài báo, các bài viết về các thành tựu Toán học nổi bật mà chúng ta đang quan tâm ... Từ đó, ta hiểu được các vấn đề đang được quan tâm có ý nghĩa, cái gì còn thiếu cần bổ sung và sau khi có kết quả ta cũng dễ để truy tìm vấn đề cũ hay mới, ý nghĩa hay không.

Hình học là một lĩnh vực thu hút được sự chú ý của tôi trong thời gian qua, khi bắt đầu quan tâm đến hình học, tôi không biết cái gì hay, tôi hay theo dõi trang web **Cut the Knot** (http://www.cut-the-knot.org/ - một trang phổ biến Toán học của một Tiến sĩ của Mỹ). Người quản lý của trang này cũng đồng thời tạo một trang thông tin trên facebook nhằm chia sẻ, trao đổi với mọi người về các vấn đề hình học.

Thời gian ban đầu khi tôi theo dõi nó, trang này thường gửi các kết quả về tam giác đều khiến tôi nghĩ hình học chỉ có mỗi tam giác đều và chỉ quan tâm đến đó. Tuy nhiên có một lần trao đổi với một người bạn nước ngoài, họ nói tam giác đều cũng đẹp nhưng không đẹp bằng các tính chất của ba điểm thẳng hàng và đồng quy. Tôi nhận ra rằng hình học Euclid không chỉ có riêng tam giác đều cần nghiên cứu. Từ đó hướng suy nghĩ của tôi đến các kết luận để đi đến các cấu trúc đồng quy và thẳng hàng. Tôi cũng chỉ muốn tạo ra các cấu trúc đồng quy và thẳng hàng, nhưng sau đó người bạn kia lại chia sẻ một trân facebook của anh ta rằng: *Anh ta ước ao tìm ra một đường tròn như đường tròn Lester, tôi lại quan tâm đến đường tròn Lester và cũng muốn nghiên cứu ra các đường tròn mới.*

Cứ như vậy, cho đến hiện nay tôi nghiên cứu khá nhiều cấu trúc hình học Euclid và nhận ra dòng nghiên cứu chủ đạo của hình học Euclid cho đến hiện nay là tạo ra các cấu trúc để đi đến các kết quả:

- **Ba điểm thẳng hàng:** Các kết quả nổi tiếng về một cấu trúc tạo ra ba điểm thẳng hàng là các định lý Menelaus, định lý Pascal, định lý Desages, định lý Gauss-Newton, định lý Droz-Frany, ...
- **Ba đường thẳng đồng quy:** Các kết quả nổi tiếng về cấu trúc tạo ra ba đường thẳng đồng quy là định lý Ceva, định lý Shiffler, điểm Fermat, định lý Jacobi, định lý Cartnot, định lý Kariya, định lý Kiepert, ...
- **Bốn điểm nằm trên đường tròn:** Các kết quả nổi tiếng về cấu trúc tạo ra bốn điểm năm trên đường tròn như định lý Lester, định lý van Lamoen, ...
- **Một đa giác là đa giác đều:** Tạo ra một cấu trúc để có thể tạo ra một tam giác đều, một hình vuông, lục giác đều các ví dụ kinh điển của xu hướng này là các định lý Napoleon, định lý Morley, định lý van Aubel, ...
- **Các hệ thức toán học:** Giữa các góc, độ dài đoạn thẳng, chẳng hạn như định lý Pythagoras, định lý cos, định lý sin, định lý Stewart, ...
- **Một điểm nào đó là một điểm đặc biệt**: Chẳng hạn như trung điểm, trọng tâm, trực tâm, ...

Các bạn muốn sáng tạo hình học Euclid nên tìm hiểu các định lý ở trên tôi vừa giới thiệu. Các bạn cũng nên chú ý là hình học Euclid hiện nay không còn là một lĩnh vực toán học mũi nhọn nữa. Nhưng việc nghiên cứu hình học Euclid ở lứa tuổi học sinh đặc biệt là các bạn từ lớp 8 đến lớp 12 là rất phù hợp. Nó tạo hành trang vững chắc để mai sau chúng ta nghiên cứu sang các lĩnh vực Toán cao cấp hơn. Ở lĩnh vực Toán cao cấp, các đối tượng, các cấu trúc được xây dựng từ các đối tượng này sẽ phức tạp hơn, khó khăn hơn có tính ứng dụng cao hơn nhưng phương pháp nghiên cứu và cách làm ở đây theo cá nhân tôi vẫn có thể phần nào giúp chúng ta tìm được các kết quả hay và ý nghĩa.

Một điều rất quan trong cần bổ sung là việc tìm hiểu lịch sử các vấn đề toán học cũng giúp cho chúng ta nắm bắt được dòng chảy nghiên cứu toán học.

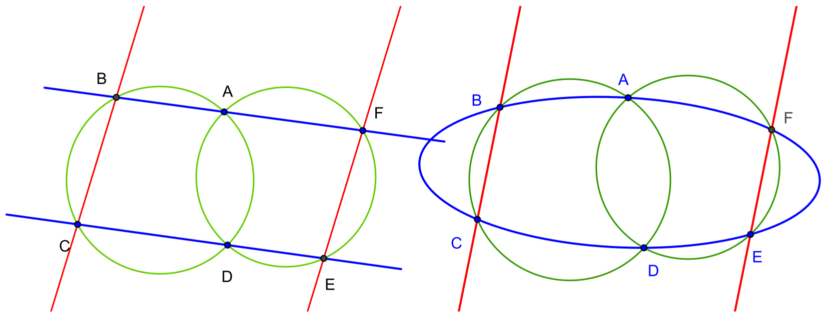
3. Vai trò cộng đồng và một diễn đàn toán học

Khi mới nghiên cứu Toán học, các bạn còn gặp nhiều khó khăn về việc học để nắm bắt đối tượng và nghiên cứu nghiên cứu nên thời gian đầu có lẽ chưa thể đạt thành quả ngay điều đó sẽ khiến cho các bạn chán nản. Bản thân các bạn đã chán nản nhưng nếu giả sử thành quả của các bạn lại không được thừa nhận sẽ khiến các bạn mất động lực sáng tạo (điều này cũng đúng với các công việc khác). Thực tế chứng minh rằng chỉ khi được ghi nhận, hoặc chỉ khi làm việc có năng suất có hiệu quả mới khuyến khích được người ta chủ động tích cực và hăng say làm việc.

Do đó, vai trò quan trọng của cộng đồng trong việc khuyến khích các bạn học tập nghiên cứu là nên ghi nhận các đóng góp và thành quả của các bạn, nếu như thành quả của các bạn không được ghi nhận sẽ không khuyến khích các bạn hăng say và đi tiếp các công việc đang làm.

Tôi lấy kinh nghiệm của cá nhân, tuy chưa từng có một bài toán nào đăng trên tạp chí toán trong nước, tuy nhiên lại được ghi nhận trên các tạp chí và từ điển cũng như trang web của các cá nhân bên Canada, Mỹ, Romania,... Điều đó chính là động lực để khiến tôi thích nghiên cứu hình học. Bài toán đầu tiên mà tôi được đăng trên trang Cut The Knot [1], chính là một mở rộng của định lý Reim:

Định lý Reim: Cho các điểm E, B, D *thẳng hàng, các điểm* F, C, G *thẳng hàng thỏa mãn điều kiện hai tứ giác* $EBCF, DBCG$ *nội tiếp thì hai đường thẳng* EF *và* DG *song song.*



Hình 12.1: Định lý Reim và mở rộng

Tôi phát hiện ra rằng chỉ cần E, B, E, G, C, F *nằm trên một đường conic và hai tứ giác* $EBCF, DBCG$ *nội tiếp thì hai đường thẳng* EF *và* DG *song song.*

Mặc dù sau này được biết mở rộng định lý Reim của tôi vẫn là cũ vì năm 1974, các tác giả **Evelyn, C. J. A.; Money-Coutts, G. B.; and Tyrrell, J. A.** tác giả đã tìm ra mở rộng này như là một trược hợp đặc biệt của định lý ba đường conic. Tuy nhiên, nếu như thời điểm đó trang Cut the Knot không công bố phát hiện này thì chắc cũng không khuyến khích tôi tìm hiểu và có các phát hiện mới trong lĩnh vực hình học.

Vạn sự khởi đầu nan. Các kết quả nghiên cứu trong thời gian đầu thường là không có, hoặc xấu xí, hiển nhiên, lặp lại kết quả của người khác, vì thế lúc ban đầu, thành quả nghiên cứu của các bạn chưa được cộng đồng ghi nhận thì cũng đừng chán nản. Các bạn cứ nghiên cứu đi, sẽ có ngày nào đó các bạn được ghi nhận (nếu các phát hiện của các bạn là mới và hay), đó chính là các phần thưởng to lớn hơn bất kỳ món thưởng tiền bạc nào. Có một người bạn trên xe chia sẻ với tôi rằng: *Chỉ cần có những cái nhỏ nhắn và xinh xắn nhưng là của mình(không cần phải cái đao to búa lớn).*

Lưu ý thêm để cho bạn đọc khỏi hiểu nhầm, tôi nói được ghi nhận có nghĩa là các bài toán được đăng nên một trang Toán học chứ không có nghĩa là ghi nhận bằng cách lăng xê cá nhân các bạn. Vì vậy, mong muốn của tôi vẫn là thành lập một tạp chí phổ biến Toán học trong nước.

Tôi cũng nghĩ để các bạn nghiên cứu có thành quả, các bạn nên tham gia một diễn đàn Toán học thật sự nơi mà có các nhà nghiên cứu trao đổi với nhau. Ở đó, các bạn sẽ học hỏi trao đổi được rất nhiều điều và các ý tưởng của các bạn cũng dễ dàng hơn để đến được giới chuyên môn, để được thẩm định là mới hay cũ, và cũng dễ dàng hơn trong việc chia sẻ ý tưởng của các bạn đến cộng đồng. Tham gia một diễn đàn như vậy nghĩa là các bạn đang được các nhà chuyên môn biết đến.

Tôi thấy bên Mỹ có các diễn đàn do các tạp chí lập ra để thảo luận riêng biệt về các lĩnh vực hình học, lĩnh vực số học, và các lĩnh vực khác nhưng lại được chủ trì bởi các nhà nghiên cứu thật sự. Thiết nghĩ, Việt Nam cũng nên học theo mô hình nghiên cứu này.

4. Phương pháp mở rộng các định lý trong hình học phẳng

4.1. Phương pháp mở rộng giả thiết

Phương pháp sáng tạo một vấn đề mới, hoặc mở rộng một định lý hình học dựa trên nền tảng một định lý đã có mà tác giả thường xuyên áp dụng như sau:

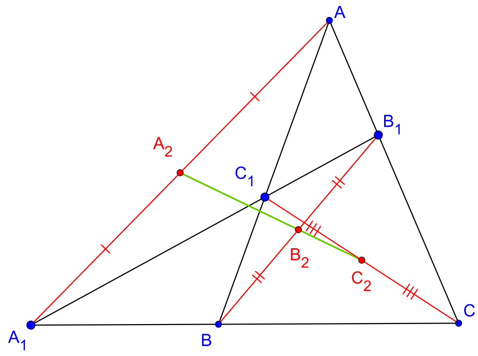
Cho đối tượng A *và* B*. Trong đó* A *có đầy đủ thuộc tính của* B*(hoặc thuộc tính của* B *tương tự với* A*). Nếu một định lý nào đó đúng với các giả thiết được xây dựng từ đối tượng* A *thì hãy kiểm tra định lý đó với các giả thiết được xây dựng từ đối tượng* B*.*

Để minh họa cho phương pháp trên chúng ta sẽ xem một số ví dụ sau đây:

4.1.1. Ví dụ một tính chất đúng cho tam giác trung bình mở rộng đúng cho mọi tam giác Cevian

Định lý đường thẳng Gauss-Newton là một định lý khá nổi tiếng nói về một tính chất của tứ giác toàn phần [2], định lý này phát biểu như sau :

Trung điểm của các đường chéo trong một tứ giác toàn phần nằm trên một đường thẳng.



Hình 12.2: Định lý đường thẳng Gauss-Newton

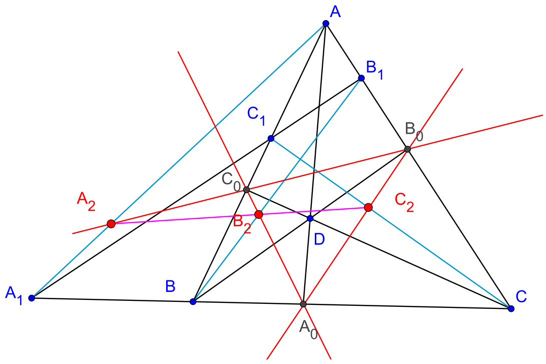
Trong hình vẽ trên, đường thẳng cắt ba cạnh tại các điểm A_1, B_1, C_1 và A_2, B_2, C_2 là trung điểm của ba đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 thì A_2, B_2, C_2 thẳng hàng. Tuy nhiên, ta thấy ba điểm A_2, B_2, C_2 ở trên đều nằm trên ba cạnh tương ứng của tam giác trung bình của tam giác ABC ta có thể phát biểu lại định lý này như sau:

Cho đường thẳng (L) *cắt ba cạnh của tam giác* BC, CA, AB *tại* A_1, B_1, C_1. *Đặt* A_2, B_2, C_2 *là giao điểm của đường thẳng* AA_1, BB_1, CC_1 *lần lượt với ba cạnh tương ứng của tam giác trung bình của tam giác* ABC *thì* A_2, B_2, C_2 *thẳng hàng.*

Ta có thể mở rộng định lý trên nếu thay tam giác trung bình bởi một tam giác mở rộng hơn của tam giác trung bình không? Tam giác Cevian là một tam giác tổng quát hơn tam giác trung bình. Thật vậy tam giác $A_1B_1C_1$ gọi là tam giác Cevian của tam giác ABC ứng với điểm P nếu AP, BP, CP lần lượt giao với ba cạnh BC, CA, AB tại các điểm A_1, B_1, C_1. Khi tam giác Cevian ứng với trọng tâm tam giác thì chính là tam giác trung bình của tam giác ABC. Như vậy, rõ ràng tam giác Cevian là tổng quát của tam giác trung bình.

Từ cơ sở trên ta có thể đi đến một mở rộng của định lý Gass-Newton [3] như sau:

Vấn đề 1: *Cho đường thẳng* (L) *cắt ba cạnh* BC, CA, AB *của tam giác tại* A_1, B_1, C_1. *Đặt* A_2, B_2, C_2 *là giao điểm của đường thẳng* AA_1, BB_1, CC_1 *lần lượt với ba cạnh tương ứng của một tam giác Cevian bất kỳ của tam giác* ABC *thì* A_2, B_2, C_2 *thẳng hàng.*



Hình 12.3: Mở rộng định lý đường thẳng Gauss-Newton

4.1.2. Ví dụ một tính chất đúng cho tam giác Napoleon và Morley mở rộng ra hai tam giác Jacobi bất kỳ.

Tam giác Napoleon và tam giác Morley là các tam giác đều nổi tiếng trong hình học sơ cấp, tại đây chúng ta không tìm hiểu lại khái niệm này. Chúng ta cùng nhau tìm hiểu khái niệm về tam giác Jacobi, khái niệm này như sau:

Cho tam giác ABC, dựng các tam giác BA_0C, CB_0A, AC_0B *cùng ra ngoài (hoặc vào trong) ba cạnh tam giác ABC, sao cho* $\angle C_0AB = \angle B_0AC$, $\angle C_0BA = \angle A_0BC$, $\angle A_0CB = \angle B_0CA$ *khi đó tam giác* $A_0B_0C_0$ *gọi là một tam giác Jacobi của tam giác ABC.*

Đối chiếu với khái niệm trên, ta thấy tam giác Napoleon và tam giác Morley đều là các trường hợp đặc biệt của tam giác Jacobi. Thầy **Trần Quang Hùng** (giáo viên THPT chuyên Tổng Hợp - ĐHQGHN) phát hiện tính chất sau:

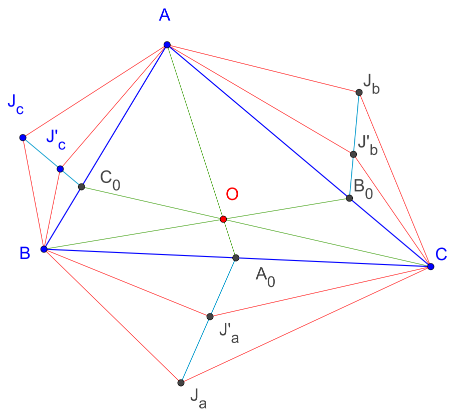
Cho tam giác ABC, và các tam giác Napoleon và tam giác Morley tương ứng là $M_AM_BM_C$, $N_AN_BN_C$ *gọi* A_1 *là giao điểm của* M_AN_A *và BC, định nghĩa* B_1, C_1 *tương tự khi đó* AA_1, BB_1, CC_1 *đồng quy* [4].

Trước đó, một nhà nghiên cứu người Phần Lan tên là van Lamoen cũng đã tìm ra tính chất như sau:

Nếu gọi A_1, B_1, C_1 *là chân đường cao của ba đỉnh* A_0, B_0, C_0 *trên ba cạnh tam giác thì* AA_1, BB_1, CC_1 *đồng quy* [5].

Ta thấy rằng đường cao kẻ từ A_1, B_1, C_1 lần lượt xuống BC, CA, AB chính là các đường thẳng nối đỉnh A_1, B_1, C_1 lần lượt với các tam giác cân đáy là cạnh BC, CA, AB và có góc ở đáy bằng 90°. Do vậy, nếu ta ta quan sát kết quả của van Lamoen và Trần Quang Hùng thì chúng đều là những trường hợp đặc biệt của một vấn đề sau đây:

Vấn đề 2: *Gọi* $J_aJ_bJ_c$ *và* $J'_aJ'_bJ'_c$ *là hai tam giác Jacobi của* ABC*; gọi* $A_0B_0C_0$ *là giao điểm của các đường thẳng* $J_aJ'_a$ *với* BC*;* $J_bJ'_b$ *với* AC *;* $J_cJ'_c$ *với* AB *khi đó* AA_0, BB_0, CC_0 *đồng quy* [6].



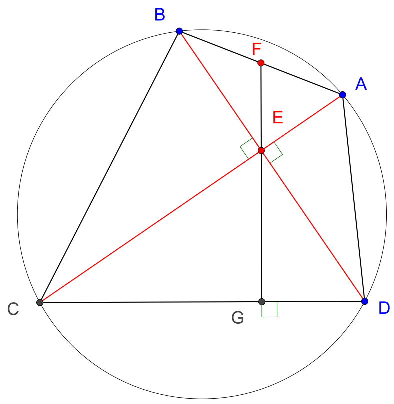
Hình 12.4: Vấn đề hai tam giác Jacobi

4.1.3. Ví dụ định lý đúng cho giao điểm của một tứ giác có hai đường chéo vuông góc cũng đúng cho một điểm thỏa mãn tính chất đặc biệt trong tứ giác.

Mục này chúng ta cùng nhau tìm hiểu một mở rộng của **định lý Brahmagupta** nổi tiếng về tứ giác nội tiếp có hai đường chéo vuông góc. Brahmagupta(598-670) một nhà toán học nổi tiếng của Ấn Độ. Nội dung định lý:

Cho một tứ giác nội tiếp có hai đường chéo vuông góc, khi đó đường thẳng nối trung điểm của một cạnh với giao điểm của hai đường chéo sẽ vuông góc với cạnh đối diện [7].
Ta tìm hiểu một chút về giả thiết và kết luận của định lý này. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp gọi F là trung điểm của AB, E là giao điểm của hai đường chéo, theo định lý Brahmagupta ta có FE vuông góc với CD, gọi điểm giao nhau giữa FE với CD là G.

Ta nhận thấy định lý này có đặc điểm là góc $\angle DEA = \angle BEG = 90^\circ$. Các điểm B, E, D thẳng hàng và A, E, C thẳng hàng. Ngoài

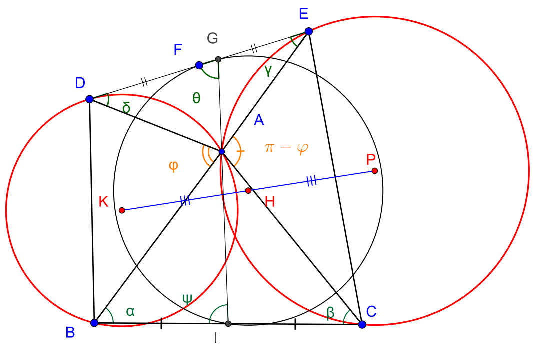


Hình 12.5: Định lý Brahmagupta

ra, vì tứ giác ABCD nội tiếp nên theo tính chất phương tích ta có $EB \cdot ED = EA \cdot EC$. Từ các nhận xét này ta sẽ tìm cách mở rộng giả thiết của định lý Brahmagupta xem có giữ được các kết luận đúng, hoặc kết luận tương tự với kết luận của định lý Brahmagupta trên nền các giả thiết mới hay không?

Bây giờ chúng ta không đưa ra giả thiết về góc $\angle DEA = \angle BEC = 90^\circ$ nữa nhưng vẫn giữ tổng hai góc này bằng 180°, các điểm B, E, D không còn thẳng hàng và các điểm A, E, C không còn thẳng hàng, tứ giác ABCD không còn nội tiếp nữa nhưng vẫn giữ điều kiện $EA \cdot EC = EB \cdot ED$ khi đó sẽ có một kết luận cũng tương tự như kết luận của định lý Brahmagupta. Tuy nhiên, việc xây dựng một điểm thỏa E thỏa mãn các tính chất của giả thiết này từ một tứ giác ABCD cho trước là rất khó khăn nên ta sẽ xây dựng bài toán từ các nhận xét trên xuất phát từ một bài toán tam giác sau đây.

Vấn đề 3: *Dựng ra ngoài các cạnh* AB, AC *của tam giác* ABC *hai tam giác* BAD *và* CAE, *sao cho* $\angle DAB + \angle EAC = 180^\circ$ *và* $BA \cdot AE = CA \cdot AD$. *Gọi* F, I *lần lượt là trung điểm của* DE, BC. *Gọi* IA *giao với* DE *tại* G. *Gọi* K, M, P *lần lượt là tâm của các đường tròn* (BAD),(FGI),(CAE), *khi đó* $\angle AGC = \angle CAE$ *và* M *là trung điểm của* KP [8].



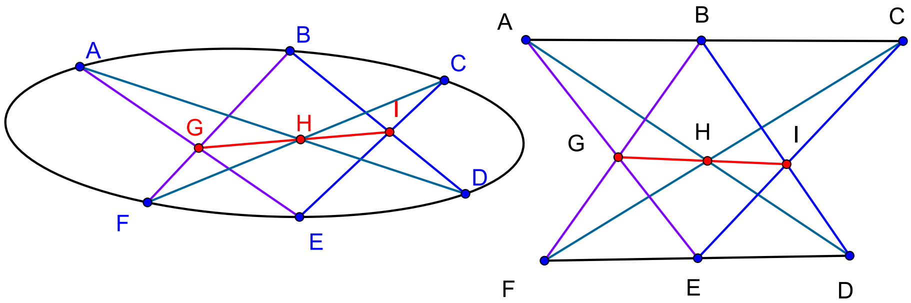
Hình 12.6: Mở rộng định lý Brahmagupta

4.1.4. Một ví dụ về định lý đúng cho hai cặp đường thẳng thì cũng đúng cho một đường conic

Nhắc lại **định lý Reim:** *Cho* E, B, D *thẳng hàng và* F, C, G *thẳng hàng và hai tứ giác* $EBCF$, $DBCG$ *nội tiếp thì hai đường thẳng* EF *và* DG *song song*. Như phần trên ta thấy rằng chỉ cần E, B, E, G, C, F nằm trên một đường conic và hai tứ giác $EBCF$, $DBCG$ nội tiếp thì hai đường thẳng EF và DG song song.

Như vậy ta thấy đối với cấu trúc định lý Reim thì khi thay hai đường thẳng $\overline{EBD}$, và $\overline{ECG}$ bởi một đường conic đi qua sáu điểm E, B, D, G, C, F thì kết luận của định lý vẫn đúng [9].

Đối với **định lý Pascal**: *Cho một lục giác có các đỉnh nằm trên một đường conic thì giao điểm của ba cặp cạnh đối diện thẳng hàng.*



Hình 12.7: Định lý Pascal, định lý Pappus

Trong hình vẽ trên, các điểm A, B, C, D, E, F cùng nằm trên một đường conic và ba điểm G, H, I thẳng hàng. Ta thử thay đường conic trong định lý Pascal bởi hai đường thẳng với ba điểm A, B, C nằm trên đường thẳng thứ nhất và D, E, F bằm trên đường thẳng thứ hai và quan sát kết quả thấy G, H, I vẫn thẳng hàng [10][11], kết quả này là nội dung của **định lý Pappus**.

Qua hai ví dụ trên, ta thấy rằng nếu tính chất nào đó được phát biểu là đúng cho một cặp đường thẳng thì hãy kiểm tra tính chất đó nếu ta thay chúng bởi một đường conic.

Định lý con bướm cũng là một ví dụ minh họa trong trường hợp trên. Lời giải thích là vì một đường conic có thể suy biến thành một cặp đường thẳng.

4.2. Tìm kết luận tương tự các định lý

4.2.1. Tìm một cấu trúc để tạo ra một tam giác đều-vấn đề Dual của mở rộng định lý Napoleon

Với điều kiện nào thì tam giác Hofstadter là tam giác đều, câu trả lời cho câu hỏi này thông qua định lý góc chia ba của Morley. Với điều kiện nào thì tam giác Kiepert là tam giác đều? Câu trả lời được hiểu thông qua định lý Napoleon.

Ta biết rằng, cho tam giác ABC và một điểm P, tam giác bàn đạp của điểm P là tam giác tạo bởi các điểm là hình chiếu của P trên ba cạnh của ABC. Tam giác Cevian của điểm P là tam giác tạo bởi các điểm là giao điểm của đường thẳng từ đỉnh qua P với cạnh đối diện. Tại thời điểm mới bắt đầu nghiên cứu hình học phẳng, tác giả đã có các câu hỏi như tìm một điểm sao cho tam giác bàn đạp của nó là một tam giác đều, hoặc tam giác Cevian của nó là một tam giác đều.

Người ta tìm được hai điểm thỏa mãn tính chất tam giác bàn đạp của điểm đó là một tam giác đều, hai điểm đó được biết đến với tên điểm Isodynamic thứ nhất và thứ hai, các điểm này là điểm liên hợp đẳng giác của điểm Fermat.

Tam giác bàn đạp của điểm Isodynamic là một tam giác đều, điều này khá phổ biến. Nhưng tam giác Cevian của một điểm là tam giác đều thì lại ít người biết đến, việc dựng được điểm như vậy là rất khó khăn, sau khi trao đổi với một số người nghiên cứu chuyên nghiệp tác giả nhận được câu trả lời điểm thỏa mãn tính chất đó đã được đề xuất bởi **Jiang Huanxin** và **David Goering** [12].

Như vậy câu hỏi tìm điều kiện để tam giác bạn đạp là một tam giác đều, hay tìm điều kiện để một tam giác Cevian là một tam giác đều đã được quan tâm và làm rõ. Tác giả lại đặt câu hỏi tìm một điểm sao cho đối xứng của điểm đó qua ba cạnh tam giác ABC cho trước là một tam giác đều, tác giả tìm được điểm đó lại chính là hai điểm Isodynamic, việc chứng minh điều này thật sự rất dễ dàng vì tam giác này là vị tự của tam giác đều bàn đạp của hai điểm đó.

Nếu như dừng lại ở đây thì kết quả trở nên hết sức bình thường không có gì đáng nói và hoàn toàn chính là vấn đề tìm một điểm sao cho tam giác bàn đạp của nó là một tam giác đều. Nhưng điều đặc biệt là các đường thẳng nối các đỉnh tương ứng của tam giác đều này với tam giác ABC lại đồng quy tại điểm Fermat. Do các đỉnh của tam giác đều này được xác định là đối xứng của điểm Isodynamic với ba cạnh của tam giác điều đó có suy ra rằng các đường thẳng nối điểm Isodynamic với ba đỉnh tam giác đều đó vuông góc với ba cạnh tương ứng của tam giác ABC.
Sau khi nghiên cứu đưa ra mở rộng định lý Napoleon tác giả nhớ lại kết quả nghiên cứu được đánh dấu in nghiêng ở đoạn trên tác giả phát hiện một vấn đề mở rộng của vấn đề đối xứng của một điểm qua ba cạnh tam giác tạo thành một tam giác đều như sau.

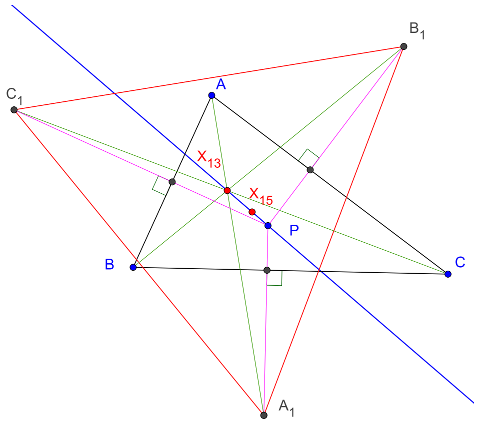
Vấn đề 4: *Cho tam giác* ABC, F *là điểm Fermat thứ nhất hoặc thứ hai,* I *là điểm liên hợp đẳng giác của* F, P *là điểm nằm trên đường thẳng* FI. A_0 *là giao điểm của đường thẳng qua* P *và vuông góc với cạnh* BC *và đường thẳng* AF. *Định nghĩa* B_0, C_0 *tương tự. Chứng minh* $A_0B_0C_0$ *là tam giác đều* [13].

Trường hợp đặc biệt xảy ra khi P là điểm Symmedian. Với trường hợp này ta có hai tam giác Dual với tam giác đều Napeleon. Hai tam giác đều mới đó có nhiều tính chất rất thú vị. Một trong các tính chất này là:

Vấn đề 5: *Bốn điểm gồm hai điểm Fermat và trọng tâm hai tam giác đều vừa đề cập ở trên nằm trên một đường tròn*

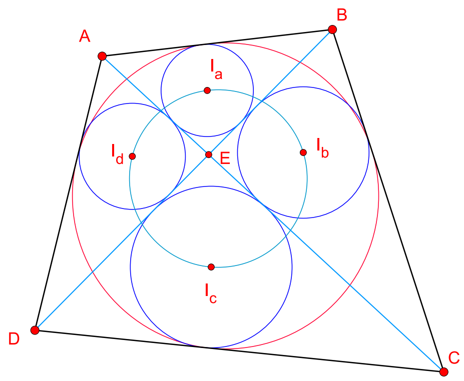
4.2.2. Tìm một cấu trúc tương tự định lý Christopher Bradley

Định lý Christopher Bradley được phát biểu như sau:



Hình 12.8: Vấn đề dual của định lý của Napoleon

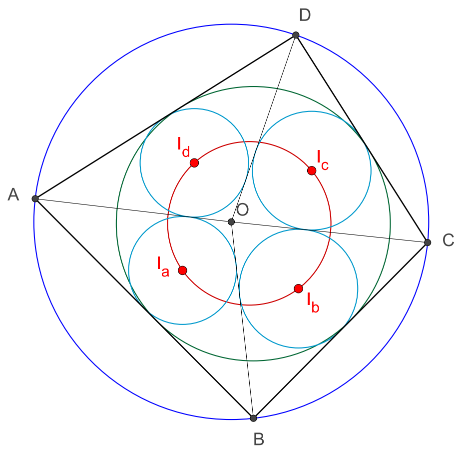
Cho tứ giác ABCD *ngoại tiếp đường tròn, gọi* E *là giao điểm của hai đường chéo. Khi đó tâm của bốn đường tròn nội tiếp các tứ giác* EAB, EBC, ECD, EDA *nằm trên một đường tròn* [14].



Hình 12.9: Định lý Christopher Bradley

Câu hỏi tương tự: *Cho tứ giác* ABCD *ngoại tiếp đường tròn, tìm một điểm* P *trên mặt phẳng sao cho tâm nội tiếp của các tam giác* PAB, PBC, PCD, PDA *nằm trên một đường tròn.* Từ câu hỏi trên tác giả tìm được một số vấn đề [15] sau đây:

Vấn đề 6: *Tứ giác* ABCD *vừa nội ngoại tiếp,* O *là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABC, khi đó tâm của bốn đường tròn nội tiếp các tam giác* OAB, OBC, OCD, ODA *nằm trên một đường tròn.*



Hình 12.10: Vấn đề 6

Tác giả tìm được hai điểm nữa nữa thỏa mãn tính chất bốn tâm nội tiếp nằm trên một đường tròn. Hai vẫn đề này được hiểu thông qua khái niệm về **tứ giác trung trực của tứ giác ngoại tiếp** sau đây.

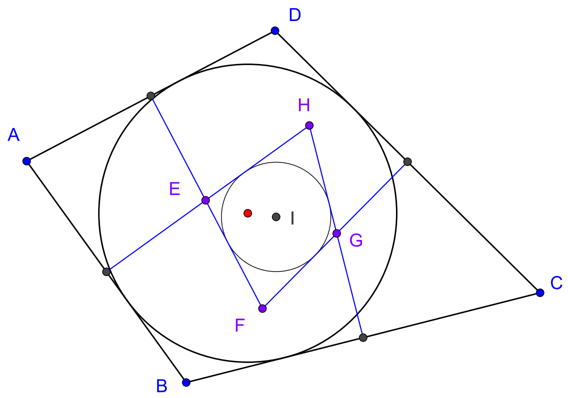
Cho tứ giác lồi ABCD *ngoại tiếp một đường tròn, bốn đường trung trực của bốn cạnh tứ giác hợp với nhau thành tạo thành một tứ giác ngoại tiếp.*

Tính chất trên được biết đến trong quyển sách của Mike de Villiers, chứng minh đưa ra bởi Jordan Tabov [16]. Nhưng trước đó đã được xuất hiện tại tài liệu bên Nga [17]. Hiện nay chưa thống nhất được tên gọi riêng cho tứ giác trên nên chúng ta sẽ tạm gọi tứ giác trên với tên là **tứ giác trung trực của tứ giác ngoại tiếp.**

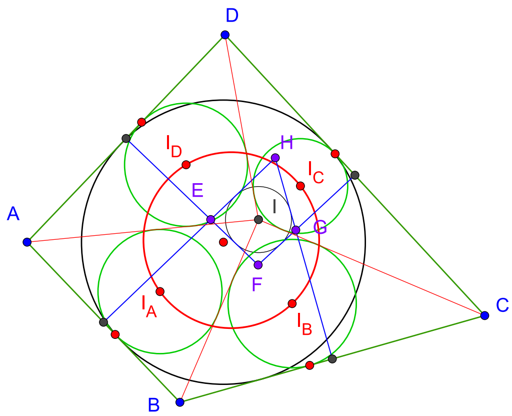
Vấn đề 7: *Gọi* O *là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác trung trực của tứ giác ngoại tiếp* ABCD *khi đó tâm bốn đường tròn nội tiếp các tam giác* OAB, OBC, OCD, ODA *nằm trên một đường tròn.*

Vấn đề 8: *Gọi* L *giao điểm của hai đường chéo của tứ giác trung trực của tứ giác ngoại tiếp* ABCD *khi đó tâm bốn đường tròn nội tiếp các tam giác* LAB, LBC, LCD, LDA *nằm trên một đường tròn.*

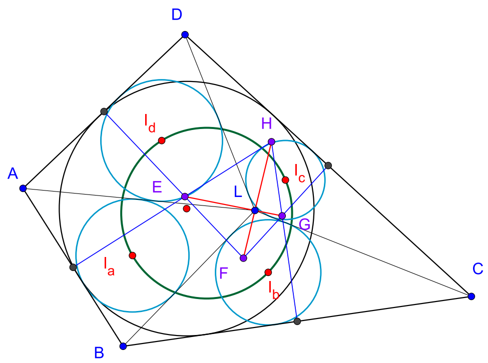
Các định lý hình học luôn có xu hướng được mở rộng ra. Trong mục tiếp theo, tác giả trình bày một số ví dụ về các hướng mở rộng định lý Napoleon.



Hình 12.11: Tứ giác trung trực của một tứ giác ngoại tiếp



Hình 12.12: Vấn đề 7



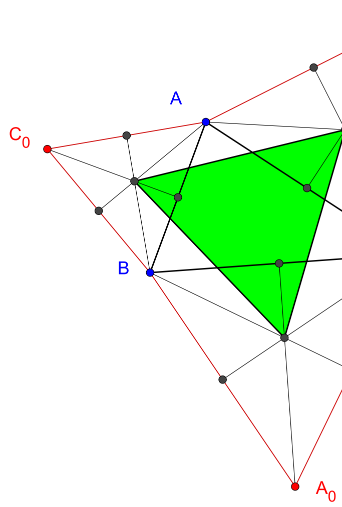
Hình 12.13: Vấn đề 8

4.3. Dòng chảy mở rộng định lý Napoleon

Một định lý hình học đẹp được đặt theo tên của vị hoàng đế nước Pháp là Napoleon Bonaparte(1769-1821). **Định lý Napoleon** được phát biểu như sau:

Cho tam giác ABC*, dựng ba tam giác đều* BA_0C, CB_0A, AC_0B *ra ngoài (hoặc vào trong) ba cạnh tam giác* ABC*; khi đó, trọng tâm tam giác đó là các đỉnh của một tam giác đều.*

Tam giác đều mới đó gọi là tam giác Napoleon ngoài (hoặc trong) của tam giác ABC [18].

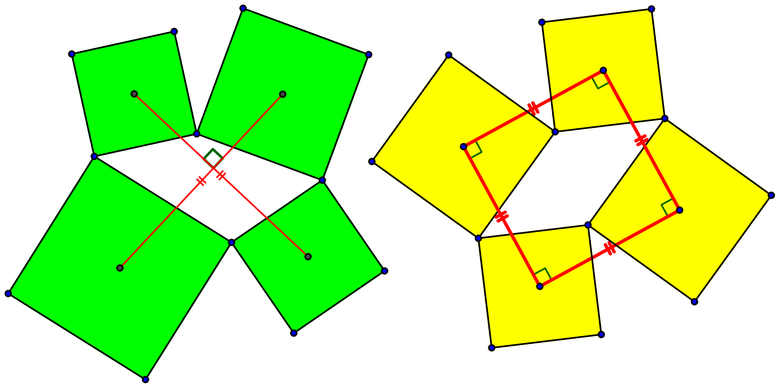


Hình 12.14: Định lý Napoleon

Định lý Napoleon là một định lý đẹp trong hình học cổ điển, vì thế nó thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của rất nhiều người từ các nhà toán học, giáo viên và học sinh đến cả những người nghiên cứu nghiệp dư. Các nghiên này đã đưa ra nhiều cách chứng minh khác nhau cho định lý, các chứng minh dựa vào lượng giác, số phức và tọa độ...

Một số định lý nổi tiếng khác đã được lấy cảm hứng từ định lý Napoleon, thay vì cấu trúc dựng trên các cạnh một tam giác 3 tam giác đều thì **định lý van Aubel** nội dung là *dựng ra ngoài một tứ giác bất kỳ các hình vuông thì đoạn thẳng nối tâm của hai hình vuông trên hai cạnh đối diện vuông góc và bằng nhau* [20], hay **định lý Thebault** với nội dung là *dựng ra ngoài một hình bình hành các hình vuông thì tâm của các các hình vuông này là các đỉnh của một hình vuông...*

Một nghiên cứu khác có lẽ cũng được lấy cảm hứng từ định lý Napoleon do Ludwig Kiepert đề xuất. Thay vì dựng trên ba cạnh



Hình 12.15: Định lý van Auble và định lý Thebault

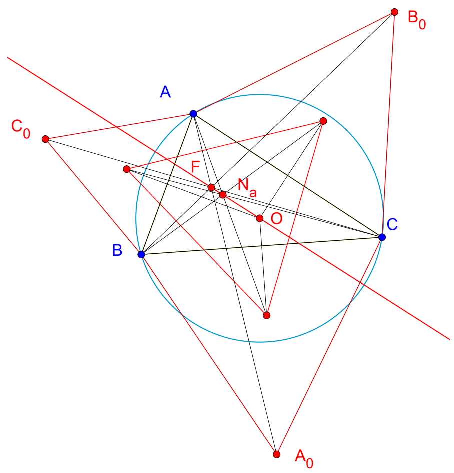
tam giác các tam giác đều, Kiepert dựng trên ba cạnh tam giác các tam giác cân đồng dạng và ông quan sát thấy một kết quả thú vị được thể hiện qua **định lý Kiepert** sau:

Cho tam giác ABC, dựng ba tam giác cân và đồng dạng BA_0C, CB_0A, AC_0B *ra ngoài (hoặc vào trong) ba cạnh tam giác ABC khi đó* AA_0, BB_0, CC_0 *đồng quy* [21].

Điểm đồng quy ở trên đều có một tên chung là điểm Kiepert. Giả sử góc đáy của tam giác cân là θ thì ta sẽ có các điểm đồng quy tương ứng với góc θ đó được ký hiệu là $K(\theta)$. Tuy nhiên trong một số trường hợp đặc biệt điểm Kiepert sẽ có tên riêng, nếu như góc $\theta = 45^\circ$ thì điểm Kiepert này được gọi với tên riêng là điểm Vecten, nếu như $\theta = 60^\circ$ thì điểm Kiepert này được gọi với một tên riêng là điểm Fermat. Tập hợp tất cả các điểm đồng quy được tạo ra khi ta thay đổi các tam giác cân đồng dạng sẽ tạo nên một đường hyperbol với tên đường hyperbol Kiepert (đây là một đường cong có thể biểu diễn bởi phương trình $y = \frac{m}{x}$).

Từ định lý Kiepert ta có thể nhận thấy rằng các đường thẳng nối các đỉnh của tam giác ABC và các đỉnh tương ứng với tam giác Napoleon của tam giác ABC là đồng quy, các điểm đồng quy này gọi là các điểm Napoleon. Vì có hai tam giác Napoleon trong và ngoài nên ta cũng có hai điểm Napoleon là điểm Napoleon thứ nhất và điểm Napoleon thứ hai, tất nhiên chúng nằm trên đường Kiepert hyperbola. Dễ dàng nhận thấy rằng các đỉnh của tam giác Napoleon nằm trên đường trung trực của ba cạnh của tam giác ABC, nghĩa là *ba đường thẳng đi qua ba đỉnh tam giác*

Napoleon và vuông góc với ba cạnh tam giác sẽ đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp. Nếu ta vẽ hình và quan sát thì có thể thấy: *Điểm Fermat thứ nhất, điểm Napoleon ngoài và tâm đường tròn ngoại tiếp là thẳng hàng.* Tương tự như vậy ba điểm: *Điểm Fermat thứ hai, điểm Napoleon trong và tâm đường tròn ngoại tiếp thẳng hàng.* [22]

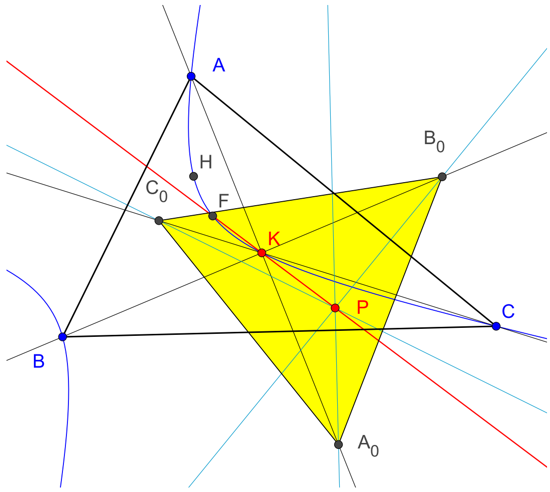


Hình 12.16: Điểm Fermat, điểm Napoleon, O thẳng hàng

Từ các quan sát được đánh dấu bằng chữ nghiêng ở trên tác giả tìm ra một vấn đề mở rộng định lý Napoleon như sau.

Vấn đề 1: *Cho tam giác* ABC, F *là điểm Fermat trong hoặc ngoài,* K *là điểm Kiepert,* P *là điểm nằm trên đường thẳng* FK. *Định nghĩa* A_0 *là giao điểm của* AK *và đường thẳng qua* P *và vuông góc với* BC. *Định nghĩa* B_0, C_0 *tương tự. Khi đó tam giác* $A_0B_0C_0$ *là tam giác đều* [23].

Như trên chúng ta thấy đã có nhiều định lý có cấu hình được gợi mở từ định lý Napoleon, như định lý Thebault, định lý van Aubel và đặc biệt là định lý Kiepert, tuy nhiên nếu tìm hiểu chúng ta lại phát hiện có một định lý tương tự với định lý Kiepert đó là định lý Kariya. Nói một cách khác đinh lý Kiepert khẳng định rằng lấy các điểm trên ba đường trung trực sao cho đoạn thẳng tính từ trung điểm của ba cạnh tương ứng với các đường trung trực đó tỉ lệ với độ dài ba cạnh thì đường thẳng nối ba điểm đó với ba đỉnh tam giác sẽ đồng quy. Ba đường trung trực của ba cạnh đồng quy tại tâm ngoại tiếp.



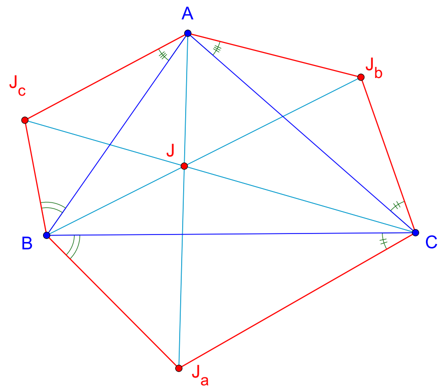
Hình 12.17: Mở rộng định lý Napoleon với hyperbol Kiepert

Nhà hình học Kariya đã đưa ra một ý tưởng tương tự (với cấu trúc của định lý Kiepert) nhưng áp dụng với trường hợp ba đường vuông góc với ba cạnh đồng quy tại tâm nội tiếp(thay vì tâm ngoại tiếp), và các đoạn thẳng thay vì tỉ lệ với ba cạnh thì bây giờ là các đoạn thẳng bằng nhau đó biến thành **định lý Kariya** như sau:

Gọi I *là tâm đường tròn nội tiếp tam giác* ABC*, dựng ba tam giác* BA_0C, CB_0A, AC_0B *cùng ra ngoài (hoặc vào trong) ba cạnh tam giác* ABC*, sao cho* $IA_0 = IB_0 = IC_0$ *và* I *khi đó* AA_0, BB_0, CC_0 *đồng quy [24].*

Khi nghiên cứu định lý Kariya tác giả đặt ra câu hỏi định lý có còn đúng đúng nếu ta thay tâm nội tiếp bởi tâm bàng tiếp, câu trả lời mong nhận được từ bạn đọc.

Tiếp theo chúng ta quan sát thấy rằng trong định lý Kiepert và định lý lý Kariya, đều có điểm chung là các góc $\angle C_0AB = \angle B_0AC$, $\angle C_0BA = \angle A_0BC$, $\angle A_0CB = \angle B_0CA$. Và ta thử tạo bài toán với phát biểu: *Cho tam giác ABC, dựng các tam giác* BA_0C, CB_0A, AC_0B *cùng ra ngoài (hoặc vào trong) ba cạnh tam giác ABC, sao cho* $\angle C_0AB = \angle B_0AC$, $\angle C_0BA = \angle A_0BC$, $\angle A_0CB = \angle B_0CA$*, nếu ta nối các đường thẳng* AA_0, BB_0, CC_0 *ta cũng quan sát thấy ba đường thẳng này đồng quy.* Kết quả trên là nội dung của định lý Jacobi, tam giác $A_0B_0C_0$ gọi là tam giác Jacobi.
Dòng chảy còn tiếp tục đi đến một trường hợp đặc biệt của định lý Jacobi đó là định lý Hofstadter. Nhà toán học Hofstadter



Hình 12.18: Định lý Jacobi

đã đưa ra một cấu trúc đặc biệt góc $\angle C_0AB = \angle B_0AC = k.\angle A$, $\angle C_0BA = \angle A_0BC = k.\angle B$, $\angle A_0CB = \angle B_0CA = k \cdot \angle C$, đối với trường hợp này tam giác $A_0B_0C_0$ được gọi là tam giác Hofstadter [25].

Tóm lại: *Định lý đúng với điểm này thì kiểm tra với điểm khác, tìm quỹ tích các điểm thỏa mãn. Định lý đúng với các đường thẳng song song thì kiểm tra với các đường thẳng cắt nhau. Định lý đúng với tam giác đều thì kiểm tra nó với tam giác cân, với tam giác bất kỳ. Định lý đúng với một tứ giác đặc biệt thì hãy kiểm tra nó với tứ giác ít đặc biệt hơn ...*

5. Xử lý ý tưởng

Chúng ta không thể làm được gì tiếp theo nếu ý tưởng chúng ta là sai ngay từ đầu. Do đó sau khi có ý tưởng, việc đầu tiên cần phải làm là kiểm tra ý tưởng đúng hay sai. Ta có thể số hóa (nếu có thể) để kiểm tra, đó là một bước kiểm tra sơ bộ. Nếu chúng ta có máy tính chúng ta hãy sử dụng các công cụ phần mềm có sẵn, ví dụ phần mềm geogebra hoặc chúng ta tự lập trình để kiểm tra ngay các ý tưởng của mình ngay khi nó vừa được lóe lên. Hãy nhớ *đừng để ý tưởng lóe nên và rồi vụt tắt.*

Nếu ý tưởng của các bạn là đúng tiếp theo các bạn phải biết ý tưởng đó mới hay cũ? Nếu như ý tưởng đã cũ thì cần phải biết để tìm hiểu xem nó đã phát triển tổng quát đến đâu để tiếp tục nghiên cứu. Hoặc cũng qua đó, ta biết thêm các kiến thức giúp cho việc hình thành các ý tưởng về sau. Nó giúp cho công tác tìm kiếm, tra cứu kết quả, và có thể sẽ nghiên cứu phát triển hình thành các ý tưởng mới.

Đối với lĩnh vực hình học cơ bản thì hai từ điển sau dùng để tra cứu rất có giá trị:

1. Từ điển bách khoa về các điểm và đường đặc biệt trong tam giác, trang web: http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html nói về các tâm tam giác(các điểm đặc biệt) được xây dựng chính bởi Clack Kimberling một giáo sư trường University of Evansville. Các tâm tam giác được đánh số theo mục theo thứ tự $X(1), X(2), ..., X(n)$, chẳng hạn, tâm nội tiếp là $X(1)$, trọng tâm là $X(2)$, tâm ngoại tiếp là $X(3)$, trực tâm là (4), ... Và nó liệt kê gần như đầy đủ các tính chất quan trọng từ lớn đến nhỏ của các tâm của tam giác. Hiện nay, từ điển này đã liệt kê ra được khoảng 6400 điểm và đường đặc biệt trong tam giác.

2. Một từ điển hàn lâm khác rất đáng tham khảo đó là bách khoa thư về các đường bậc ba, từ điển này ta có thể sử dụng để tìm quỹ tích các điểm thỏa mãn một tính chất nào đó: http://bernard.gibert.pagesperso-orange.fr/ctc.html Bách khoa thư này mô tả các đường cubic trong tam giác, các đường cubic này đi qua các tâm trong một tam giác. Ta sẽ thử lấy một ví dụ để nêu ra cách áp dụng từ điển trên cho việc tra cứu.

   Ví dụ tra cứu: Xuất phát từ **vấn đề IV của Thebault**: H *là trực tâm tam giác ABC, và* H_a, H_b, H_c *là chân ba hình chiếu của* H *nên ba cạnh tam giác* ABC*, thì đường thẳng Euler của các tam giác* AH_bH_c, BH_cH_a *và* CH_aH_b *đồng quy.*

   Khi đã thành thạo phương pháp mở đã được trình bày ở trên, rất nhanh chóng, tôi đặt ra một câu hỏi là đi tìm một điểm P trên mặt phẳng tam giác ABC, sao cho với P_a, P_b, P_c là hình chiếu của P trên ba cạnh của tam giác ABC, thì đường thẳng Euler của các tam giác AP_bP_c, BP_cP_a và CP_aP_b đồng quy.

Thông thường với kinh nghiệm có sẵn, ta sẽ thử với các điểm đặc biệt trước ví dụ ta thử điểm đó là tâm đường tròn nội tiếp. Ta phát hiện nó đúng, ta kiểm tra nó với một số điểm đặc biệt khác ví dụ trực tâm, trọng tâm, hai điểm Fermat, tâm ngoại tiếp... và trong quá trình kiểm tra đó ta thấy tính chất này cũng đúng nếu điểm P tâm đường tròn chín điểm $X(5)$. Tiếp theo ta tra tại Catalogue thấy:

K005 NAPOLEON CUBIC, FEUERBACH CUBIC, pK(X6, X5), D(0) X(1), X(3), X(4), X(5), X(17), X(18), X(54), X(61), X(62), X(195), X(627), X(628), X(2120), X(2121), X(3336), X(3460), X(3461), X(3462), X(3463), X(3467), X(3468), X(3469), X(3470), X(3471), X(3489), X(3490)

Ta thấy đường Napoleon cubic là đường Cubic đầu tiên mà ta thấy nó đi qua các điểm tâm đường tròn nội tiếp $X(1)$, trực tâm $X(4)$, tâm đường tròn chín điểm $X(5)$... Ta dự đoán rằng tính chất trên đúng nều P nằm trên đường Napoleon Cubic.

Tiếp theo, ta click vào và thấy ngay rằng tính chất đó đã được nêu ra như một tính chất đầu tiên của đường Napoleon cubic.

Tuy nhiên, nếu giả sử nó chưa được nêu ra tại từ điển này ta sẽ tiếp tục kiểm tra với điểm $X(17), X(18)$, ... ta thấy nó đúng. Và như vậy dự đoạn của ta về tính chất trên sẽ đúng nếu P nằm trên đường Napoleon Cubic. Tất nhiên nếu trường hợp này xảy ra ta sẽ có nghiên cứu mới về một tính chất của đường Napoleon cubic(tuy nhiên điều này là giả tưởng vì thực tế nó đã được nghiên cứu).

Nếu như kết quả là mới có lẽ sẽ đến bước quan trọng nhất là tìm cách chứng minh và công bố kết quả. Công bố kết quả có nhiều cách, ví dụ đưa lên blog cá nhân, diễn đàn hoặc đề xuất lên tạp chí hoặc là gửi đến một số nhà toán học uy tín, hoặc tìm cách chứng minh và viết báo độc lập hoặc cộng tác với một người khác cùng nghiên cứu viết báo.

Hiện nay đối với hình học cổ điển tôi khuyên cáo các bạn có thể công bố tại tạp chí Crux của hội toán học Canada, tạp chí AMM của hội toán học Mỹ, tạp chí Forum Geometricorum của khoa toán đại học Florida Atlantic.

1. **Tạp chí Crux:** Một tạp chí về Toán sơ cấp của hội Toán học Canada, hiện nay miễn phí từ các số ra đầu tiên cho đến năm 2008. Các bạn có thể truy cập tại địa chỉ: https://cms.math.ca/crux/

2. **Tạp chí AMM:** Một tạp chí toán hàng tháng của hội Toán học Mỹ, cũng xuất bản các bài báo và vấn đề hình học cổ điển. http://www.maa.org

3. **Tạp chí Forum Geometricorum:** Đây là một tạp chí điện tử, miễn phí, hàn lâm đối với lĩnh vực hình học cổ điển. Tạp chí này được của khoa Toán đại học Florida Atlantic, Mỹ. Tạp chí này chỉ nhận đăng bài báo hoàn chỉnh: http://forumgeom.fau.edu/

6. Bài tập thực hành

Bài toán 1. Cho tam giác ABC, F là điểm Fermat, ba đường thẳng qua G và vuông góc với FA, FB, FC cắt ba cạnh tam giác tại A_0, B_0, C_0 ta thấy A_0, B_0, C_0 thẳng hàng. Hãy kiểm tra tính chất trên nếu thay điểm trọng tâm G bởi điểm Vecten, điểm Napoleon và sau đó hãy kiểm tra với các điểm nằm trên quỹ tích nào thì thỏa mãn tính chất này, và đi đến kết luận tổng quát hơn nữa.

Bài toán 2. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, khi đó đường thẳng Euler của các tam giác OBC, OCA, OAB đồng quy. Hãy kiểm tra tính chất này nếu ta thay điểm O bởi điểm tâm đường tròn nội tiếp, trực tâm, và tâm đường tròn chín điểm... Tìm quỹ tích các điểm thỏa mãn tính chất này.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC, một đường thẳng L cắt ba cạnh BC, CA, AB của tam giác lần lượt tại A_0, B_0, C_0. S là điểm bất kỳ trên đường thẳng L. Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng của A_0, B_0, C_0 qua S thì AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy. Hãy kiểm tra kết quả bài toán này nếu ta thay S bởi một đường tròn và phép đối xứng qua điểm bởi phép nghịch đảo qua đường tròn.

Bài toán 4. Cho hình vuông $ABCD$ dựng ra ngoài cạnh AB và BC hai tam giác đều AMB, BNC khi đó tam giác DMN là một tam giác đều. Hãy kiểm tra tính chất này nếu thay hình vuông $ABCD$ bởi một hình bình hành $ABCD$.

Bài toán 5. Dựng trên ba cạnh của tam giác ABC cùng ra ngoài (hoặc vào trong) các tam giác đều BA_0C, CB_0A, AC_0B ta thấy AA_0, BB_0, CC_0 đồng quy, hãy kiểm tra tính chất này nếu thay ba tam giác đều bởi ba tam giác cân đồng dạng.

Bài toán 6. Định lý bảy đường tròn phát biểu rằng: Cho sáu đường tròn trong mặt phẳng sao cho mỗi đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn liền kề. Sáu đường tròn đó cùng tiếp xúc với đường tròn thứ bảy. Hãy thử tìm các tính chất của một bài toán được xây dựng từ giả thiết: Cho sáu đường tròn, mỗi đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn liền kề nhau sao cho các điểm tiếp xúc này cùng nằm trên một đường tròn.

Tài liệu tham khảo

[1] A. Bogomolny, Two Circles, Ellipse, and Parallel Lines, available at http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/CircleCircleEllipse.shtml

[2] R. A. Johnson, *A Modern Geometry: An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle*, Houghton Mifflin, Boston, 1929, pp.152–153.

[3] O. T. Dao, Advanced Plane Geometry, message 1283, May 9, 2014.

[4] H. Q. Tran, Advanced Plane Geometry, message 1736, September 19, 2014.

[5] Darij Grinberg, Math Forum, *Synthetic Proofs of Jacobi and Lamoen Theorems* , March 21, 2003.

[6] O. T. Dao, Advanced Plane Geometry, message 1765, September 19, 2014.

[7] R. Honsberger, Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry, MAA, 1995.

[8] O. T. Dao, Quadri-Figures-Group, message 241, September 23, 2013.

[9] Evelyn, C. J. A.; Money-Coutts, G. B.; and Tyrrell, J. A. *The Seven Circles Theorem and Other New Theorems*. London: Stacey International, pp. 11-18, 1974.

[10] Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L. *Geometry Revisited*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., pp. 74-76, 1967.

[11] Johnson, R. A. *Modern Geometry: An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle*. Boston, MA: Houghton Mifflin, pp. 237-238, 1929.

[12] Jiang Huanxin and David Goering, Problem 10358* and Solution, *Equilateral cevian triangles*, American Mathematical Monthly 104 (1997) 567-570.

[13] O. T. Dao, Advanced Plane Geometry, message 2267, January 25, 2015.

[14] Darij Grinberg, CTK Exchange, *Synthetic proof of Christopher Bradley's Conjecture*, January 11, 2004.

[15] O. T. Dao, Quadri-Figures-Group, message 409, January 16, 2014.

[16] M. de Villiers, *Some Adventures in Euclidean Geometry*, Univ. of Durban-Westville, 1994 (revised 1996), pp. 192-193.

[17] Titanium, *Tangential quadrilateral well known properties?* http://artofproblemsolving.com,January16,2014.

[18] Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L. *Geometry Revisited*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., pp. 60-65, 1967.

[19] van Aubel, H. H. *Note concernant les centres de carrés construits sur les côtés d'un polygon quelconque*. Nouv. Corresp. Math. 4, 40-44, 1878.

[20] Casey, J. *A Treatise on the Analytical Geometry of the Point, Line, Circle, and Conic Sections, Containing an Account of Its Most Recent Extensions with Numerous Examples*, 2nd rev. enl. ed. Dublin: Hodges, Figgis, & Co., pp. 442-448, 1893.

[21] Kimberling.C, Encyclopedia of Triangle Centers, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

[22] O. T. Dao, Advanced Plane Geometry, message 2261, January 24, 2015.

[23] D. Grinberg, Hyacinthos message 10504, September 20, 2004.

[24] Kimberling, C, *Hofstadter Points*, available at http://faculty.evansville.edu/ck6/tcenters/recent/hofstad.html.

INEQUALITIES A JOURNEY INTO FIBONACCI & LUCAS NUMBERS

Vandanjav Adiyasuren
National University of Mongolia

Bold Sanchir
Mongolian University of Life Sciences

1. Fibonacci and Lucas numbers

The Fibonacci numbers may this be defined as follows:

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ and } F_n = F_{n-1} + F_{n-1}, \quad n \geqslant 2 \tag{$*$}$$

The sequence of Fibonacci numbers is:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$$

The Lucas numbers may this be defined as follows:

$$L_0 = 2, L_1 = 1 \text{ and } L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n \geqslant 2$$

The sequence of Lucas numbers is:

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \ldots$$

Both Fibonacci and Lucas numbers satisfy numbers identities that have been discovered over the centuries. In this part we explore several of these fundamental identities.

Proposition 1.1.

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1 \tag{1}$$

Proof. Using the Fibonacci recurrence relation, we have

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 - F_2 \\ F_2 &= F_4 - F_3 \\ &\vdots \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1} \end{aligned}$$

Adding these equations, we get

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

□

Proposition 1.2.

$$\text{a)} \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n} \tag{2}$$

$$\text{b)} \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2k+1} - 1 \tag{3}$$

Proof. a) Using the Fibonacci recurrence relation, we have

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 - F_1 \\ F_3 &= F_4 - F_2 \\ &\vdots \\ F_{2n-3} &= F_{2n-2} - F_{2n-4} \\ F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2} \end{aligned}$$

Adding these equations, we get

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}$$

b)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} F_2k &= \sum_{k=1}^{2n} F_k - \sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} \\ &\quad (\text{ by Proposition 1.1.1 and 1.1.2 (a)}) \\ &= (F_{2n+2} - 1) - F_{2n} \\ &= (F_{2n+2} - F_{2n}) - 1 = F_{2n+1} - 1 \end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{4}$$

where $n \geqslant 1$

Proof. (By PMI) Since $F_0F_2 - F_1^2 = 0 \cdot 1 - 1 = -1 = (-1)^1$, the given statement is clearly true when $n = 1$ Now we assume it is true for an arbitrary positive integer n: $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$. Then

$$\begin{aligned}
F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}^2 \\
&= F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 - F_{n-1}F_n - F_{n-1}F_{n+1} - F_{n+1}^2 \\
&\qquad \text{(by the IH:)} \\
&= F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_n - F_n^2 - (-1)^n \\
&= F_nF_{n+1} - F_n(F_{n-1} + F_n) + (-1)^{n+1} \\
&= F_nF_{n+1} - F_nF_{n+1} + (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Thus the formula works for $(n+1)$. So, by PMI, the statement is true for every integer $n \geqslant 1$. □

Proposition 1.4.

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1} \tag{5}$$

Proof. (by PMI) When $n = 1$, the

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \sum_{k=1}^{1} F_k^2 = F_1^2 = 1 \\
&= 1 \cdot 1 = F_1 \cdot F_2 = \text{RHS}
\end{aligned}$$

So the result is true when $n = 1$. Assume it is true for an arbitrary positive integer n: $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}$. Then

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} F_k^2 + F_{k+1}^2 \\
&\qquad \text{(by the IH:)} \\
&= F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}F_{n+2}.
\end{aligned}$$

So the statement is true when $(n+1)$.So, by PUI, the statement is true for every integer $n \geqslant 1$. □

Interestingly enough, Identities $(1)-(5)$ have analogous results for Lucas number also:

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3 \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} L_{2k-1} = L_{2n} - 2 \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{n} L_{2k} = L_{2n+1} - 1 \tag{8}$$

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5 \cdot (-1)^{n-1} \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} L_k^2 = L_n L_{n+1} - 2 \tag{10}$$

These identities can be established using PMI.

Proposition 1.5. *(Binet's Formula)*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

where $n \geqslant 1$.

Proof. This can be established easily using PMI

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)F_n + F_{n-1}, n \geqslant 1$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)F_n + F_{n-1}, n \geqslant 1$$

Let $U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, where $n \geqslant 1$.

Then $U_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$ and $U_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = 1$. Suppose $n \geqslant 3$. Then

$$\begin{aligned} U_{n-1} + U_{n-2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right) = U_n \end{aligned}$$

This, U_n satisfies the $\mathsf{FRR}(*)$ and the two initial conditions. This gives us an explicit formula for F_n:

$$F_n = U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$\square$

Hệ quả 1.1.

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1} \tag{11}$$

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n} \tag{12}$$

Corresponding to Binet's formula for F_n, there is one for L_n also.

Proposition 1.6. *Let* $n \geqslant 1$ *Then*

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Hệ quả 1.2.

$$F_{2n} = F_n L_n \tag{13}$$

$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n \tag{14}$$

$$F_{n+2} - F_{n-2} = L_n \tag{15}$$

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n \tag{16}$$

Proposition 1.7.

$$\sum_{k=1}^{n} F_k F_{k+2} = \frac{1}{2}(F_n F_{n+1} + F_{n+2}^2 - 1) \tag{17}$$

Proof. (by PMI) When $n = 1$, the

$$(\mathsf{LHS}) = F_1 F_3 = 2 = \frac{1}{2}(F_1 F_3 + F_3^2 - 1) = (\mathsf{RHS}).$$

So the result is true when $n = 1$.
Assume it is true for an arbitrary positive integer n :

$$\sum_{k=1}^{n} F_k F_{k+2} = \frac{1}{2}(F_n F_{n+1} + F_{n+2}^2 - 1).$$

Then, by the IH and by the Fibonacci recurrence relation:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} F_k F_{k+2} &= \sum_{k=1}^{n} F_k F_{k+2} + F_{n+1}F_{n+3} \\
&= \frac{1}{2}(F_n F_{n+1} + F_{n+2}^2 - 1) + F_{n+1}F_{n+3} \\
&= \frac{1}{2}\left(F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) + 2F_{n+1}F_{n+3} + (F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2) - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(F_{n+1}F_{n+2} + 2F_{n+1}F_{n+3} + F_n F_{n+3} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(F_{n+1}F_{n+2} + (2F_{n+1} + F_n)F_{n+3} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}(F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+3}^2 - 1).
\end{aligned}$$

So the statement is true when $(n+1)$. Thus it is true for every positive integer n. □

Proposition 1.8.

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n} \tag{18}$$

Proof. Let $g_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} F_k$, and let $h_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{k+1}$. We have

$$\begin{aligned}
g_{n+1} - g_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} F_k - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} F_k \\
&= F_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}\right] F_k \\
&= F_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} F_k = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} F_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{k+1} = h_n,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} h_{n+1} - 2h_n &= h_{n+1} - h_n - h_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{k+2} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (F_{k+2} - F_{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = g_n. \end{aligned}$$

From these results we get

$$\left.\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= h_n \\ h_{n+1} - 2h_n &= g_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow g_n = 3g_{n-1} - g_{n-2}.$$

Thus we have

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = (F_{n-2} + F_{n-3}) + F_{n-2} = 2F_{n-2} + F_{n-3},$$

which implies, via $F_{n-3} = F_{n-2} - F_{n-4}$, that $F_n = 3F_{n-2} - F_{n-4}$. Since $g_1 = 1 = F_2$ and $g_2 = 3 = F_4$, the sequence $\{g_n\}$ has the same initial conditions and satisfies the same recurrence relation as the even Fibonacci numbers. Thus $F_{2n} = g_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} F_k$. □

2. Inequalities including Fibonacci and Lucas numbers

Problem 2.1. Let n be a positive integer. Prove that

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{L_k^2}{F_k} \geqslant \frac{(L_{n+2} - 3)^2}{F_{n+2} - 1}$$

(Juan Jose Egozcue)

Proof. Using Cauchy-Schwarz Inequality we get

$$\begin{aligned} (L_{n+2} - 3)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} L_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{\sqrt{F_k}} \cdot \sqrt{F_k} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{L_k^2}{F_k} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} F_k \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{L_k^2}{F_k} \right) (F_{n+2} - 1). \end{aligned}$$

Here we used $\sum\limits_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3$, $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$. Equality occurs only iff $n = 1$. $\square$

Problem 2.2. Let n be a positive integer. Prove that

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{F_k}{1+L_k}\right)^2 \geqslant \frac{1}{F_n F_{n+1}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^2}{1+L_k}\right)^2 \geqslant F_n^3 F_{n+1}^3 \left(\sum_{k=1}^{n} F_k^2(1+L_k)\right)^{-2}.$$

(Jose Luis Diaz-Barrero)

Proof. Using Cauchy-Schwarz Inequality and the identity $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$, we get

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^2}{1+L_k}\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot \frac{F_k}{1+L_k}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} F_k^2\right) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{F_k}{1+L_k}\right)^2 \\ &= F_n F_{n+1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{F_k}{1+L_k}\right)^2,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}F_n^2 F_{n+1}^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} F_k^2\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{\sqrt{1+L_k}} \cdot F_k\sqrt{1+L_k}\right)^2 \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^2}{1+L_k}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} F_k^2(1+L_k)\right).\end{aligned}$$

Therefore the desired inequalities proved. $\square$

Problem 2.3. Let T_n be the nth triangular number defined by $T_n = \binom{n+1}{2}$ for all $n \geqslant 1$. Prove that

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{T_k}{F_k}\right)^2 \geqslant \frac{T_{n+1}^2}{9F_n F_{n+1}}.$$

(Jose Luis Diaz-Barrero)

Proof. Note that

$$\frac{nT_{n+1}}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3} = \sum_{k=1}^{n} T_k.$$

Using Cauchy-Schwarz Inequality, we get

$$\sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{T_k}{F_k}\right) F_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{T_k}{F_k}\right)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} F_k^2}$$

which is equivalent to the desired inequality, after using following well known identity,

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

□

Problem 2.4. Let n be a positive integer and l be a whole number. Then

$$\left(F_1^l + F_2^l + \cdots + F_n^l\right) \left[\frac{1}{F_1^{l-4}} + \frac{1}{F_2^{l-4}} + \cdots + \frac{1}{F_n^{l-4}}\right] \geqslant F_n^2 F_{n+1}^2.$$

(P.G.Popescu, J.L.Diaz-Barrero)

Proof. Taking account that $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$, as is well known, and the fact that the function $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, defined by $f(x) = \frac{1}{x}$ is convex, then by Jensen's Inequality we get

$$\frac{1}{\frac{F_1^l}{F_{n+1}} + \frac{F_2^l}{F_{n+1}} + \cdots + \frac{F_n^l}{F_{n+1}}} \leqslant \frac{1}{F_n^2 F_{n+1}} \left[\frac{1}{F_1^{l-4}} + \frac{1}{F_2^{l-4}} + \cdots + \frac{1}{F_n^{l-4}}\right].$$

From the preceding expression immediately follows

$$\left(F_1^l + F_2^l + \cdots + F_n^l\right) \left[\frac{1}{F_1^{l-4}} + \frac{1}{F_2^{l-4}} + \cdots + \frac{1}{F_n^{l-4}}\right] \geqslant F_n^2 F_{n+1}^2$$

and this completes proof. □

Problem 2.5. Let $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ be positive real numbers. Prove that

$$\left(\frac{F_n F_{n+1}}{n}\right)^n \geqslant \prod_{cyc} \frac{\alpha_1 F_1^2 + \cdots + \alpha_n F_n^2}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \geqslant (F_1 F_2 \cdots F_n)^2$$

(Jose Luis Diaz-Barrero)

Proof. First, we prove that, for all positive real numbers $x_1, x_2, ..., x_n$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n \geqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha_1 x_k + \cdots + \alpha_n x_{k+n-1}}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \geqslant x_1 x_2 \cdots x_n. \qquad (1)$$

If $A_k = \frac{\alpha_1 x_k + \cdots + \alpha_n x_{k+n-1}}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$ then by weighted AM-GM Inequality

$$A_k \geqslant (x_k^{\alpha_1} x_{k+1}^{\alpha_2} \cdots x_{k+n-1}^{\alpha_n})^{\frac{1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}.$$

Taking the product over $k = 1, 2, ..., n$ gives the right-hand side inequality of (1). Again using AM-GM Inequality we get

$$\prod_{k=1}^{n} A_k \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k\right)^n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n.$$

This proves the left-hand side inequality of (1).
To solve the given inequality, in (1) take $x_k = F_k^2$ and use the identity $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$. □

Problem 2.6. Let n be a positive integer. Prove that

$$\frac{1}{F_1 F_3} + \frac{1}{F_2 F_4} + \cdots + \frac{1}{F_n F_{n+2}} \geqslant \frac{2n^2}{F_n F_{n+1} + F_{n+2}^2 - 1}$$

(P.G.Popescu)

Proof. Using following identity

$$\sum_{k=1}^{n} F_k F_{k+2} = \frac{1}{2}\left(F_n F_{n+1} + F_{n+2}^2 - 1\right)$$

and by Cauchy-Schwarz Inequality, we get

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_k F_{k+2}} \geqslant \frac{n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k F_{k+2}} = \frac{2n^2}{F_n F_{n+1} + F_{n+2}^2 - 1}.$$

□

Problem 2.7. Let n be a positive integer. Prove that

$$\frac{1}{F_{n+2}} + \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{F_k^2} + \frac{1}{F_{k+1}^2}} < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_k}$$

(Miquel Grau-S¶anchez)

Proof. Denote

$$L(n) = \frac{1}{F_{n+2}} + \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{F_k^2} + \frac{1}{F_{k+1}^2}},$$
$$R(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_k}.$$

If we can prove that

$$L(n+1) - L(n) < R(n+1) - R(n), \qquad (n \geqslant 1)$$

the result would follow by induction, since then $L(n+1) < L(n) - R(n) + R(n+1) < R(n+1)$. Therefore

$$D_n = R(n) - R(n-1) - (L(n) - L(n-1)) = \frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_{n+1}} - \frac{1}{F_{n+2}} - \frac{\sqrt{F_{2n+1}}}{F_n F_{n+1}}$$
$$= x + y - \frac{xy}{x+y} - \sqrt{x^2+y^2} = \frac{x^2 + xy + y^2 - (x+y)\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}$$
$$= \frac{x^2y^2}{(x+y)[x^2 + xy + y^2 + (x+y)\sqrt{x^2+y^2}]} > 0$$

where $x = \frac{1}{F_n}$, $y = \frac{1}{F_{n+1}}$. □

Problem 2.8. For x is a real number and n is a positive integer, prove the following inequality

$$S_n = \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^x + \left(\frac{F_3}{F_2}\right)^x + \cdots + \left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)^x \geqslant n + x \ln F_{n+1}$$

(Zdravko F.Starc)

Proof. From the AM-GM Inequality, we get

$$S \geqslant n \left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)^{\frac{x}{n}} = n \exp\left(\frac{x}{n} \ln F_{n+1}\right) \geqslant n + x \ln F_{n+1},$$

where we have used the inequality $e^x \geqslant 1 + x, \quad x \geqslant 0.$ □

Problem 2.9. Prove that

$$F_1^{F_1} F_2^{F_2} \cdots F_n^{F_n} \leqslant e^{(F_n - 1)(F_{n+1} - 1)}$$

(Zdravko F.Starc)

Proof. Recall that $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ and $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$. Since $f(x) = \ln x$ functions is concave on $(0, +\infty)$. Using Jensen's Inequality we get

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{F_{n+2}-1} \ln F_i \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{F_i^2}{F_{n+2}-1}\right) = \ln\left(\frac{F_n F_{n+1}}{F_{n+2}-1}\right)$$
$$\leqslant \frac{F_n F_{n+1}}{F_{n+2}-1} - 1 = \frac{(F_n - 1)(F_{n+1} - 1)}{F_{n+2}-1}.$$

Thus,

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \ln F_i \leqslant (F_n - 1)(F_{n+1} - 1).$$

Taking exponentials yields the result. □

Problem 2.10. Let $n > 2$ be an integer. Prove that

$$\prod_{k=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(F_{k+2} - F_j - 1)^2}\right) \geqslant \frac{1}{F_n F_{n+1}} \left(\frac{n}{F_3 F_4 \cdots F_n}\right)^2$$

(Jose Luis Diaz-Barrero)

Proof. We first prove that

$$kF_k F_{k+1} \geqslant (F_{k+2} - 1)^2 \quad (k \geqslant 1.) \tag{1}$$

For $k = 1, ..., 7$, this can be verified directly. If $k \geqslant 8$, then $F_{k+2} < 2F_{k+1} < 4F_k$, and therefore $kF_kF_{k+1} > (k/8)F_{k+2}^2 \geqslant F_{k+2}^2 > (F_{k+2}-1)^2$. Let $k \geqslant 2$. The function

$$f(x) = \frac{1}{(F_{k+2} - x - 1)^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant F_k$$

is convex, as is seen from its second derivative. From (1) and applying Jensen's Inequality and using well known $\sum_{j=1}^{k} F_j = F_{k+2} - 1$, we get

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(F_{k+2} - F_j - 1)^2} \geqslant \left(\frac{k}{k-1}\right)^2 \frac{k}{(F_{k+2}-1)^2} \geqslant \left(\frac{k}{k-1}\right)^2 \frac{k}{F_k F_{k+1}}.$$

Taking the product over $k = 2, ..., n$, we obtain the desired inequality. □

Problem 2.11. Let $n \geqslant 0$ be a non-negative integer. Prove that

$$F_n^{L_n} L_n^{F_n} \leqslant (F_{n+1}^{F_{n+1}})^2$$

(Juan Jose Egozcue)

Proof. We shall prove that, for all non-negative integers n,

$$F_n^{L_n} L_n^{F_n} \leqslant F_{2n}^{F_{n+1}} \leqslant F_{n+1}^{2F_{n+1}}, \tag{1}$$

with equality on the left-hand side only when $n = 0$ or $n = 1$, and on the right-hand side only when $n = 1$.
If x and y are distinct positive real numbers, then, by the weighted AM-GM Inequality,

$$x^y y^x \leqslant \left(\frac{2xy}{x+y}\right)^{x+y}.$$

Since $\frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}$, we have

$$x^y y^x \leqslant (xy)^{\frac{x+y}{2}} \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y}. \tag{2}$$

The cases $n = 0$ and $n = 1$ can be treated directly. If $n \geqslant 2$, then $) < F_n < L_n$ and (2) gives

$$F_n^{L_n} L_n^{F_n} \leqslant (F_n L_n)^{\frac{F_n+L_n}{2}} \leqslant \left(\frac{F_n+L_n}{2}\right)^{F_n+L_n}.$$

From $F_n L_n = F_{2n}$ and $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ and $F_n + L_n = 2F_{n+1}$ so given inequality is proved. □

Problem 2.12. Let n be a positive integer. Prove that

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^2}{L_k}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^3}{L_k^2}\right) \geqslant \frac{(F_{n+2}-1)^5}{(L_{n+2}-3)^2}$$

where F_n, respectively L_n represent the n^{th} Fibonacci number respectively the n^{th} Lucas number. (Batinetu-Giurgiu)

Proof. Using the following well known identities $L_1+L_2+\ldots+L_n = L_{n+2} - 3$ and $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$ we have

$$\left(\sum_{k=1}^{n} L_k\right)^3 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^2}{L_k}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^3}{L_k^2}\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right)$$

It is enough to prove the above inequality. Applying the Holder's inequality, we get

$$\left(\sum_{k=1}^{n} L_k\right)^{3/5} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^2}{L_k}\right)^{1/5} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^3}{L_k^2}\right)^{1/5}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \left(L_k^{3/5}\right)^{\frac{5}{3}}\right)^{3/5} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{F_k^2}{L_k}\right)^{1/5}\right)^5\right)^{1/5} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{F_k^3}{L_k^2}\right)^{1/5}\right)^5\right)^{1/5}$$

$$\geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} L_k^{1/5} \cdot \frac{F_k^{2/5}}{L_k^{1/5}} \cdot \frac{F_k^{3/5}}{L_k^{2/5}}\right) = \sum_{k=1}^{n} F_k$$

Hence our inequality is proved. □

Problem 2.13. Let n be a positive integer . Prove that

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k} \cdot F_k}\right)^{n} \geqslant e^{n-F_{2n}}$$

(Jose Luis Diaz-Barrero)

Proof. The Cauchy-Schwarz Inequality gives

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k} F_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} F_k\right) \geqslant n^2.$$

Using

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n}$$

this identity, we obtain

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k} F_k} \geqslant \frac{n^2}{F_{2n}}.$$

The well known inequality $e^x \geqslant 1 + x$, $x \in \mathbb{R}$, with $x = \frac{F_{2n}}{n} - 1$ implies

$$\frac{n}{F_{2n}} \geqslant e^{1-\frac{F_{2n}}{n}}.$$

The stated inequality follows. □

Problem 2.14. Let n be a positive integer. For any real number $\gamma > 1$, show that

$$\frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{n}\left(F_k^{2\gamma}L_k^{2(1-\gamma)} + (\gamma-1)L_k^2\right) \geqslant F_nF_{n+1}$$

(Jose Luis Diaz-Barrero)

Proof. Using Bernoulli's inequality, we have

$$\left(1+\left(\frac{F_k^2}{L_k^2}-1\right)\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leqslant \frac{F_k^2}{L_k^2}.$$

Therefore, we obtain the inequality

$$F_k^{2\gamma}L_k^{2(1-\gamma)} + (\gamma-1)L_k^2 - \gamma F_k^2 \geqslant 0.$$

Using this inequality and the identity $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}$, and summing up, we get desired inequality. □

Problem 2.15. Let $n \geqslant 3$ be a positive integer. Prove that

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{F_n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{L_n^2}}} > \frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{F_{n+1}}{F_{2n}}\right)^2}}$$

(P.G.Popescu)

Proof. If $n \geqslant 3$, the Harmonic-quadratic mean inequality gives

$$\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{F_n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{L_n^2}}}} < \sqrt{\frac{\left(\sqrt{1-\frac{1}{F_n^2}}\right)^2 + \left(\sqrt{1-\frac{1}{L_n^2}}\right)^2}{2}} = \sqrt{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{F_n^2}+\frac{1}{L_n^2}\right)}.$$

Note that this inequality is strict since $F_n \neq L_n$. Indeed $L_n = F_{n+1} + F_{n-1} > F_n$ for $n \geqslant 2$. Now, we will show that

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{F_n^2}+\frac{1}{L_n^2}\right) > \frac{F_{n+1}^2}{F_{2n}^2}$$

holds for $n \geqslant 2$. Now if we use $F_{2n} = F_nL_n$ and $2F_{n+1} = F_n + L_n$ then last inequality is equivalent to

$$2F_n^2 + 2L_n^2 > (F_n + L_n)^2$$

which is AM-GM Inequality. □

Problem 2.16. Let n be a positive integer. Prove that

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{F_k^2}{\sqrt{1+F_k^2}}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(1+F_n^2)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant F_nF_{n+1}$$

(Jose Luis Diaz Barrero)

Proof. Since $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}$, the proposed inequality is equivalent to

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{F_k^2}{\sqrt{1+F_k^2}}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(1+F_n^2)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} F_k^2.$$

This may be proved by the AM-GM Inequality and Chebyshev inequalities as follows

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{F_k^2}{\sqrt{1+F_k^2}}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(1+F_n^2)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{F_k^2}{\sqrt{1+F_k^2}}\right)\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+F_k^2}}{n}\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} F_k^2.$$

Since both sequences $\left\{\frac{F_k^2}{\sqrt{1+F_k^2}}\right\}$ and $\left\{\sqrt{1+F_k^2}\right\}$ have the same monotonicity. □

Problem 2.17. Prove that

$$\arctan\sqrt{\frac{F_n^2+F_{n+1}^2}{2}}+\arctan\sqrt{\frac{L_n^2+L_{n+1}^2}{2}} \geqslant \arctan\frac{F_{n+2}}{2}+\arctan\frac{L_{n+2}}{2}.$$

(D.M.Batinetu-Guirgiu, student)

Proof. Using $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ and AM-GM Inequality we get □

Problem 2.18. Let n be a positive integer. Prove that

$$\left(\frac{\sqrt[3]{F_n^2}+\sqrt[3]{F_{n+1}^2}}{\sqrt[3]{F_{n+2}^2}}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{L_n^2}+\sqrt[3]{L_{n+1}^2}}{\sqrt[3]{L_{n+2}^2}}\right) < \sqrt[3]{4}.$$

(Diana Alexandrescu)

Proof. Since the function $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ is concave for all $x \geqslant 0$, Jensen's inequality yields

$$\sqrt[3]{\frac{(x+y)^2}{4}} > \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}}{2},$$

for $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x \neq y$.
Under the same conditions, this inequality can be equivalently written as

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} < \sqrt[3]{2(x+y)^2}.$$

For $x = F_n$ and $y = F_{n+1}$, we obtain

$$\sqrt[3]{F_n^2} + \sqrt[3]{F_{n+1}^2} < \sqrt[3]{2(F_n + F_{n+1})} = \sqrt[3]{2F_{n+2}^2}.$$

This implies

$$\frac{\sqrt[3]{F_n^2} + \sqrt[3]{F_{n+1}^2}}{\sqrt[3]{F_{n+3}^2}} < \sqrt[3]{2}. \qquad (1)$$

Similarly, letting $x = L_n$ and $y = L_{n+1}$ yields

$$\frac{\sqrt[3]{L_n^2} + \sqrt[3]{L_{n+1}^2}}{\sqrt[3]{L_{n+2}^2}}. \qquad (2)$$

Multiplying inequalities (1) and (2) yields the desired result. $\square$

Problem 2.19. Let n a positive integer. Prove that

$$\frac{1}{F_n F_{n+1}}\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} F_k^{2n} + \prod_{k=1}^{n} F_k^2\right] \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} F_k^{(1-1/n)}\right)^2.$$

(Jose Luis Diaz-Barrero)

Proof. Using $F_n F_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_k^2$, the proposed inequality may be written equivalently as

$$(n-1)\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k^{2n}}{n} + \prod_{k=1}^{n} F_k^2 \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} F_k^2\right)^{(n-1/n)} \sum_{k=1}^{n} F_k^2,$$

which follows by the AM-GM inequality. $\square$

Problem 2.20. Let n be a positive integer. Prove that

$$F_{2n} < \frac{1}{2}\left(\frac{2^n F_n F_{n+1}}{F_{n+2}-1} + \binom{2n}{n}\frac{F_{n+2}-1}{2^n}\right).$$

(Jose Luis Diaz-Barrero)

Proof. After AM-GM Inequality, it suffices to show that

$$F_{2n} < \sqrt{\binom{2n}{n} F_n F_{n+1}}.$$

Using following well known identities

$$F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k,$$
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2,$$
$$F_n F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} F_k^2.$$

Therefore the desired inequality follows immediately from Cauchy-Schwarz Inequality. □

Problem 2.21. Prove that

$$(F_1-\sqrt{F_1F_2}+F_2)^2+(F_2-\sqrt{F_2F_3}+F_3)^2+\cdots+(F_n-\sqrt{F_nF_1}+F_1)^2 \geqslant F_nF_{n+1} \quad (1)$$

$$(L_1-\sqrt{L_1L_2}+L_2)^2+(L_2-\sqrt{L_2L_3}+L_3)^2+\cdots+(L_n-\sqrt{L_nL_1}+L_1)^2 \geqslant L_nL_{n+1}-2 \quad (2)$$

for any positive integer n. (D. M. Batinetu-Giurgiu)

Proof. Using the AM-GM inequality, we obtain

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}}{2},$$

and so

$$x-\sqrt{xy}+y \geqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

for any positive real numbers x and y. Thus, the left-hand side of (1), *LHS*, is

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS} &\geqslant \frac{F_1^2+F_2^2}{2}+\frac{F_2^2+F_3^2}{2}+\cdots+\frac{F_n^2+F_1^2}{2}\\ &=\sum_{k=1}^{n}F_k^2\\ &=F_nF_{n+1}.\end{aligned}$$

Inequality (2) is proved in the same way by using $\sum_{k=1}^{n} L_k^2 = L_nL_{n+1} - 2$. □

Problem 2.22. Let $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ be a sequence of real numbers defined by $a_1 = 3, a_2 = 5$ and for all $n \geqslant 3, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 + 1)$. Prove that

$$1+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{L_k}{\sqrt{1+a_k}}\right)^2 < \frac{L_nL_{n+1}}{2}.$$

(Jose Luis Diaz-Barrero)

Proof. Since $\sum_{k=1}^{n} L_k^2 = L_nL_{n+1} - 2$, the proposed inequality is equivalent to

$$1+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{L_k}{\sqrt{1+a_k}}\right)^2 < 1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}L_k^2$$

or

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{L_k}{\sqrt{1+a_k}}\right)^2 < \sum_{k=1}^{n}\frac{L_k^2}{2}.$$

By the Cauchy-Schwarz inequality,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{L_k}{\sqrt{1+a_k}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}L_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}\right).$$

We now prove that

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k+1} < \frac{1}{2}.$$

We have

$$\begin{aligned}
a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 + 1) \Rightarrow a_{n+1} - 1 &= \frac{1}{2}(a_n^2 - 1) \\
\Rightarrow a_{n+1} - 1 &= \frac{1}{2}(a_n + 1)(a_n - 1) \\
\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1} - 1} &= \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n + 1} \\
\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}.
\end{aligned}$$

Hence

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + a_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_{k+1} - 1} \right) = \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1} < \frac{1}{2}$$

and the problem is done. □

Problem 2.23. Let $T_k = \frac{k(k+1)}{2}$ for all $k \geqslant 1$. Prove that

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{F^{2m+2}}{T_k^m} \geqslant \frac{3^m (F_n Fn + 1)^{m+1}}{n^m T_{n+1}^m}$$

for any positive integer $n \geqslant 1$ and for any positive real number m.
(D.M. Batinetu-Giuriu)

Proof. Let $S = S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} F_k^2$, and $U = U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} T_k$. It is well-known that $S = F_n F_{n+1}$, and it is easily derived that

$$U_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{nT_{n+1}}{3}.$$

We see that we may write the desired inequality as follows:

$$S^{m+1} \leqslant U^m \sum_{k=1}^{n} F_k^2 \left(\frac{F_k^2}{T_k} \right)^m \qquad (1)$$

Now Holder's Inequality for sums states that for any two non-negative sequences $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ and $\{b_k\}_{k\geqslant 1}$, we have for all $n \neq 1$, and for all $p > 1$ and $q > 1$ such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{1/q}. \qquad (2)$$

In particular, take $\frac{1}{p} = \frac{m}{m+1}, \frac{1}{q} = \frac{1}{m+1}$, where m is any positive number. Also, take $a_k = T_k^{1/p}, b_k = F_k^2/T_k^{1/p}$. Then Holder's Inequality takes the form:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} T_k\right)^{m/(m+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^{2m+2}}{T_k^m}\right)^{1/(m+1)}$$

or

$$S \leqslant U^{m/(m+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} F_k^2 \left(\frac{F_k^2}{T_k}\right)^m\right)^{1/(m+1)}$$

Raising both sides to the power $q = m+1$ yields the desired inequality in (1). □

Problem 2.24. Prove that

$$\frac{F_{2n+1} - 1}{F_{2n+4} - 3F_{n+2} - L_{n+2} + 3} \geqslant \frac{1}{n}$$

for all $n \geqslant 1$. (Ovidiu Furdui)

Proof. Using induction, it is easy to show that for $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1, \quad \sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1.$$

In addition, $F_{2k} = F_k L_k$ follows immediately from Binet's formulas. Finally, recall that Chebyshev inequality asserts that

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

for all nondecreasing positive sequences $\{a_k\}$ and $\{b_k\}$. Combining these results, we find

$$\frac{F_{2n+1} - 1}{F_{2n+4} - 3F_{n+2} - L_{n+2} + 3} = \frac{F_{2n+1} - 1}{(F_{n+2} - 1)(L_{n+2} - 3)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k L_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} L_k\right)} \geqslant \frac{1}{n}$$

for all $n \geqslant 1$. □

Problem 2.25. Prove that if $m > 0$ and $p > 0$, then

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F^{m+1}}{L_k^m}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^{p+1}}{L_k^p}\right) \geqslant \frac{(F_{n+2}-1)^{m+p+2}}{(L_{n+2}-3)^{m+p}}$$

for any positive integer n. (D.M. Batinetu-Giurgiu)

Proof. Using a special case of Holder's inequality, for two sequences $\{a_k\}$ and $\{b_k\}$ we have

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^u\right)^{1/u} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^v\right)^{1/v} \tag{1}$$

where $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$. We let $a_k = (L_k)^{m/m+1}$ and $b_k = \frac{F_k}{(L_k)^{m/m+1}}$; and we let $\frac{1}{u} = \frac{m}{m+1}$ and $\frac{1}{v} = \frac{1}{m+1}$. Then

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = \sum_{k=1}^{n} F_k = (F_{n+2}-1) \tag{2}$$

Then on the RHS of (1) we have

$$\left(\sum_{k=1}^{n} L_k\right)^{m/m+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^{m+1}}{L_k^m}\right)^{1/m+1} \tag{3}$$

Raising (2) and (3) to the (m+1) power and further noting $\sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3$ we get

$$(F_{n+2}-1)^{m+1} \leqslant (L_{n+2}-3)^m \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^{m+1}}{L_k^m}\right) \tag{4}$$

But now , for another value, say o, we also get the relation

$$(F_{n+2}-1)^{p+1} \leqslant (L_{n+2}-3)^p \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^{p+1}}{L_k^p}\right) \tag{5}$$

Multiplying (4) by (5) and dividing throungh by the Lucas sums we obtain the stated inequality. This completes the proof. □

Problem 2.26. Let n be a positive integer. Prove that

$$\left(\sum_{k=1}^{n} F_k F_{2k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^2}{\sqrt{L_k}}\right) \geqslant F_n^3 F_{n+1}^3$$

(Jose Luis Diaz-Barrero)

Proof. We will show that the indicated inequality is a special of Holder's Inequality:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k)^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (b_k)^q\right)^{1/q} \qquad (1)$$

where p, q the a_k's and b_k's are positive numbers, with $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Let $p=3,\ q=3/2,\ a_k=(F_k)^{2/3}(L_k)^{1/3},\ B_k=(F_k)^{4/3}(L_k)^{-1/3}$. We see that the indicated quantities satisfy the conditions required ef Holder's Inequality. Then , by (1), we have:

$$\sum_{k=1}^{n} (F_k)^2 \leqslant \left(\sum_{1}^{n} (F_k)^2 L_k\right)^{1/3} \left(\sum_{k=1}^{n} (F_k)^2 (L_k)^{-1/2}\right)^{2/3}$$

Cubing both sides and noting that $(F_k)^2 L_k = F_k F_{2k}$, we obtain:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (F_k)^2\right)^3 \leqslant \sum_{k=1}^{n} F_k F_{2k} \left(\sum_{1}^{n} (F_k)^2 (L_k)^{-1/2}\right)^2 \qquad (2)$$

Finally, we use the well-known identity:

$$\sum_{k=1}^{n} (F_k)^2 = F_n F_{n+1} \qquad (3)$$

Substituting the result of (3) into (2) yields the desired inequality. $\square$

Problem 2.27. Let n be a positive integer, Prove that

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} F_{k+1}^2} \leqslant \frac{1}{2n}\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (F_k + (n^2-1)L_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} ((n^2-1)F_k + L_k)^2}\right)$$

(Jose Luis Diaz-Barrero)

Proof. Starting with Minkowski's inequality

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

let

$$a_k = F_k + (n^m - 1)L_k, \qquad b_k = (n^m - 1)F_k + L_k.$$

By adding these two quantities together we have

$$a_k + b_k = 2n^m F_{k+1}.$$

Using these quantities in the given inequality we have the result

$$\left(\sum_{k=1}^{n} F_{k+1}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{2n^m}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}[F_k + (n^m - 1)L_k]^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}[(n^m - 1)F_k + L_k]^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

If we let $m = 2$ and $p = 2$ then we have the required result. $\square$

Problem 2.28. Prove that

$$\frac{F_n^{2^n} F_{n+1}^{2^n}}{n^{2^n-1}} \leqslant F_1^{2^{n+1}} + F_2^{2^{n+1}} + \cdots + F_n^{2^{n+1}}$$

for all integers $n \geqslant 1$. (Ovidiu Furdui)

Proof. The well known formula

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

will be used. In view of the function $x \to x^{2^n}$ on $(0, \infty)$ we get that

$$\left(\frac{F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2}{n}\right)^{2^n} \leqslant \frac{F_1^{2^{n+1}} + F_2^{2^{n+1}} + \cdots + F_n^{2^{n+1}}}{n}$$

or equivalently

$$\frac{F_n^{2^n} F_{n+1}^{2^n}}{n^{2^n-1}} \leqslant F_1^{2^{n+1}} + F_2^{2^{n+1}} + \cdots + F_n^{2^{n+1}}.$$

We are done. $\square$

Problem 2.29. Let n be a nonnegative integer. Prove that

$$\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(1 + F_k)\right)^2 \leqslant F_n F_{n+1}$$

(Miquel Geau-Sanchez)

Proof. For $x \geqslant 0$, it is well-known that $x \geqslant \ln(x+1)$. Thus,

$$\sum_{k=0}^{n} F_k \geqslant \sum_{k=0}^{n} \ln(1+F_k),$$

and so

$$\left(\sum_{k=0}^{n} F_k\right)^2 \geqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \ln(1+F_k)\right)^2.$$

Since $\sum\limits_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$, by the Cauchy-Schwarz inequality,

$$(n+1)(F_n F_{n+1}) = \left(\sum_{k=0}^{n} 1\right)\left(\sum_{k=0}^{n} F_k^2\right) \geqslant \left(\sum_{k=0}^{n} F_k\right)^2 \geqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \ln(1+F_k)\right)^2.$$

It follows that

$$\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(1+F_k)\right)^2 \leqslant F_n F_{n+1}.$$

$\square$

Problem 2.30. Let l be a positive integer greater than or equal to 2. Show that, for $x > 1$,

$$\log_{F_{l+1}F_{l+2}\cdots F_{l+n}} x^{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \log_{F_{l+k}} x.$$

(Juan Jose Egozcue)

Proof. It follows from Cauchy-Schwarz Inequality that

$$n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\ln F_{l+k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln F_{l+k}}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \ln F_{l+k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln F_{l+k}}\right).$$

For $x > 1$, we have $\ln x > 0$. Hence

$$\frac{n^2 \ln x}{\ln F_{l+1}F_{l+2}\cdots F_{l+n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln x}{\ln F_{l+k}},$$

which completes the proof, because $\ln x/\ln a = \log_a x$ for any $a > 0$. $\square$

Problem 2.31. Let n be a positive integer. prove that

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{L_k^2}{\sqrt{1+L_k^2}}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(1+L_k^2)\right)^{\frac{1}{2n}} \leqslant L_nL_{n+1}-2.$$

(Sergio Falcon)

Proof. Using AM-GM Inequality, we can see that

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{L_k^2}{\sqrt{1+L_k^2}}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(1+L_k^2)\right)^{\frac{1}{2n}} \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{L_k^2}{\sqrt{1+L_k^2}}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+L_k^2}\right)}{n}.$$

Since $\left\{\frac{L_k^2}{\sqrt{1+L_k^2}}\right\}$ and $\left\{\sqrt{1+L_k^2}\right\}$ are non-decreasing sequences,we conclude that

$$\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{L_k^2}{\sqrt{1+L_k^2}}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+L_k^2}\right)}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{L_k^2}{\sqrt{1+L_k^2}}\sqrt{1+L_k^2} = \sum_{k=1}^{n}L_k^2.$$

Since $\sum\limits_{k=1}^{n}L_k^2 = L_nL_{n+1}-2$, the inequality follows. □

Problem 2.32. Prove that

$$\begin{aligned} &a) \quad F_n^2+F_{n+1}^2+5F_{n+2}^2 > 4\sqrt{6}\sqrt{F_nF_{n+1}}F_{n+2},\\ &b) \quad L_n^2+L_{n+1}^2+5L_{n+2}^2 > 4\sqrt{6}\sqrt{L_nL_{n+1}}L_{n+2} \end{aligned}$$

for any positive integer n. (D.M. Batinetu-Giurgiu)

Proof. a) From

$$F_{n+4}^2 = (F_{n+2}+F_{n+3})^2 = (2F_n+3F_{n+1})^2 = ((2F_n)^2+(3F_{n+1})^2)+12F_nF_{n+1}$$

and the inequality of arithmetic and geometric means we have that

$$F_{n+4}^2 \geqslant 12F_nF_{n+1}+12F_nF_{n+1} = 24F_nF_{n+1}$$

That is, $2\sqrt{6F_nF_{n+1}} \leqslant F_{n+4}$. Therefore,

$$4\sqrt{6}\sqrt{F_nF_{n+1}}F_{n+2} \leqslant 2F_{n+4}F_{n+2} = 2(2F_{n+2}+F_{n+1})F_{n+2} = 4F_{n+2}^2+2F_{n+1}F_{n+2}.$$

This and the inequality of arithmetic and geometric mean imply

$$2F_{n+1}F_{n+2} \leqslant F_n^2 + F_{n+1}^2.$$

So,

$$4\sqrt{6}\sqrt{F_nF_{n+1}}F_{n+2} \leqslant 4F_{n+2}^2 + 2F_{n+1}F_{n+2} < 5F_{n+2}^2 + F_n^2 + F_{n+1}^2.$$

b) The proof of

$$4\sqrt{6}\sqrt{L_nL_{n+1}L_{n+2}} < 5L_{n+2}^2 + L_n^2 + L_{n+1}^2$$

is similar to the previous proof. It is enough to replace F_n with L_n. □

Problem 2.33. Let n be a positive integer. Prove that

$$\sum_{k=1}^{n} F_{k+2} \geqslant \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{L_{k+1}^{\frac{n+1}{n}} - F_{k+1}^{\frac{n+1}{n}}}{L_{k+1} - F_{k+1}} \right).$$

(Jose Luis Diaz-Barrero)

Proof. Direct computation shows that equality holds with $n = 1$. Now, suppose that $n \geqslant 2$. If a and b are real numbers such that $b > a > 0$, then, by Holder's Inequality,

$$\int_a^b t^{\frac{1}{n}}\, dt \leqslant \left(\int_a^b t\, dt \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_a^b dt \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

or, equivalently,

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{b^{\frac{n+1}{n}} - a^{\frac{n+1}{n}}}{b-a} \leqslant \left(\frac{a+b}{2} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Taking here $a = F_{k+1}$, $b = L_{k+1}$, noting that $F_{k+1} + L_{k+1} = 2F_{k+2}$, and taking the product over $k = 1, \dots, n$ gives

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{L_{k+1}^{\frac{n+1}{n}} - F_{k+1}^{\frac{n+1}{n}}}{L_{k+1} - F_{k+1}} \right) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} F_{k+2} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

After AM-GM Inequality our problem will be solved. □

Problem 2.34. Let n be a positive integer. Prove that

$$\text{a)} \qquad F_n^{F_{n+1}} + F_{n+1}^{F_{n+2}} + F_{n+2}^{F_n} < F_n^{F_n} + F_{n+1}^{F_{n+1}} + F_{n+2}^{F_{n+2}}$$

$$\text{b)} \qquad F_n^{F_{n+1}} F_{n+1}^{F_{n+2}} F_{n+2}^{F_n} < F_n^{F_n} F_{n+1}^{F_{n+1}} F_{n+2}^{F_{n+2}}$$

(Jose Luis Diaz-Barrero)

Proof. First we will prove first part. Given inequality is true if $n = 1, 2$. So we need to prove $n \geqslant 3$. Note that

$$\begin{aligned}
&F_n^{F_n} + F_{n+1}^{F_{n+1}} + F_{n+2}^{F_{n+2}} - \left(F_n^{F_{n+1}} + F_{n+1}^{F_{n+2}} + F_{n+2}^{F_n}\right) \\
&= \left[(F_n^{F_n} + F_{n+1}^{F_{n+1}}) - (F_n^{F_{n+1}} + F_{n+1}^{F_n})\right] + \left[(F_{n+2}^{F_{n+2}} - F_{n+2}^{F_n}) - (F_{n+1}^{F_{n+2}} - F_{n+1}^{F_n})\right]
\end{aligned}$$

Therefore, our statement will be established if we prove that, for $n \geqslant 3$,

$$F_n^{F_{n+1}} + F_{n+1}^{F_n} < F_n^{F_n} + F_{n+1}^{F_{n+1}} \tag{1}$$

and

$$F_{n+1}^{F_{n+1}} + F_{n+1}^{F_n} < F_n^{F_n} + F_{n+1}^{F_{n+1}} \tag{2}$$

hold.

In fact, we consider the integral

$$I_1 = \int_{F_n}^{F_{n+1}} \left(F_{n+1}^x \ln F_{n+1} - F_n^x \ln F_n\right) \, dx.$$

Since $F_n < F_{n+1}$ if $n \geqslant 3$, then, for $F_n \leqslant x \leqslant F_{n+1}$, we have

$$F_n^x \ln F_n < F_{n+1}^x \ln F_n < F_{n+1}^x \ln F_{n+1}$$

so we get $I_1 > 0$.

On the other hand, evaluating the integral, we obtain

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{F_n}^{F_{n+1}} \left(F_{n+1}^x \ln F_{n+1} - F_n^x \ln F_n\right) \, dx = \left(F_{n+1}^x - F_n^x\right)\Big|_{F_n}^{F_{n+1}} \\
&= F_n^{F_n} + F_{n+1}^{F_{n+1}} - \left(F_n^{F_{n+1}} + F_{n+1}^{F_n}\right)
\end{aligned}$$

and (1) is proved.

To prove (2), we consider the integral

$$I_2 = \int_{F_n}^{F_{n+2}} \left(F_{n+1}^x \ln F_{n+1} - F_{n+1}^x \ln F_{n+1}\right) \, dx.$$

Since $F_{n+1} < F_{n+2}$, then, for $F_n \leqslant x \leqslant F_{n+2}$, we have

$$F_{n+1}^x \ln F_{n+1} < F_{n+2}^x \ln F_{n+2}$$

and I_2.
On the other hand, evaluating I_2, we obtain

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{F_n}^{F_{n+2}} \left(F_{n+2}^x \ln F_{n+2} - F_{n+1}^x \ln F_{n+1}\right)\, dx = \left(F_{n+2}^x - F_{n+1}^x\right)\Big|_{F_n}^{F_{n+2}} \\ &= \left(F_{n+2}^{F_{n+2}} - F_{n+2}^{F_n}\right) - \left(F_{n+1}^{F_{n+2}} - F_{n+1}^{F_n}\right). \end{aligned}$$

This completes the proof of first part.
Now we will prove second part of our statement. The proof will be done in two steps. First, we will prove that

$$F_n^{F_{n+1}} F_{n+1}^{F_{n+2}} F_{n+2}^{F_n} > \left(\frac{F_n + F_{n+1} + F_{n+2}}{3}\right)^{F_n+F_{n+1}+F_{n+2}} \qquad (3).$$

Using weighted AM-GM Inequality we get

$$F_n^{F_{n+1}} F_{n+1}^{F_{n+2}} F_{n+2}^{F_n} < \left(\frac{F_n F_{n+1} + F_{n+1} F_{n+2} + F_{n+2} F_n}{F_n + F_{n+1} + F_{n+2}}\right)^{F_n+F_{n+1}+F_{n+2}}.$$

Inequality (3) will be established if we prove that

$$\left(\frac{F_n F_{n+1} + F_{n+1} F_{n+2} + F_{n+2} F_n}{F_n + F_{n+1} + F_{n+2}}\right)^{F_n+F_{n+1}+F_{n+2}} < \left(\frac{F_n + F_{n+1} + F_{n+2}}{3}\right)^{F_n+F_{n+1}+F_{n+2}}$$

or, equivalently,

$$(F_n + F_{n+1} + F_{n+2})^2 \geqslant 3(F_n F_{n+1} + F_{n+1} F_{n+2} + F_{n+2} F_n)$$

which is AM-GM Inequality.
Finally, we will prove that

$$\left(\frac{F_n + F_{n+1} + F_{n+2}}{3}\right)^{F_n+F_{n+1}+F_{n+2}} < F_n^{F_n} F_{n+1}^{F_{n+1}} F_{n+2}^{F_{n+2}}$$

which is weighted HM-GM Inequality.
This completes the proof of second part and we are done. $\square$

References

[1] P.G. Popescu , J.L. Diaz-Barrero, *Certain Inequalities for Convex Functions*. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol 7, Issue 2, Article 41, 2006.

[2] The Fibonacci Quarterly, some problems around 2000-2015.

[3] mathproblems-ks.com, Vol 4, Issue I, 2014, page 239-241.

TOÁN HỌC TRONG MẮT AI

Nguyễn Quốc Khánh (*Hà Nội*)

Năm 1982, đạo diễn Trần Văn Thủy đã làm một bộ phim tài liệu, đặt tên là **"Hà Nội trong mắt ai"**, một bộ phim hay. Bộ phim này mở đầu bằng tiếng đàn guitar tinh tế và truyền cảm của nghệ sĩ Văn Vượng, một người sinh ra và lớn lên tại Hà Nội.

Nghệ sĩ Văn Vượng.

Nghệ sĩ Văn Vượng vốn chỉ mong muốn một lần được tận mắt chứng kiến vẻ đẹp của Hà Nội. Làm như thế, có lẽ ý đồ của đạo diễn là muốn mượn cái thế giới quan thuần khiết của một nghệ sĩ mù để mà lắng nghe tiếng động của những cuộc sống xung quanh. Trong toán học cũng có một điều gì đó tương tự, đôi khi chúng ta có thể cùng nhau ngồi lại, thật bình tâm và yên lặng để cùng quan sát và cảm thụ lấy cái thế giới quan của bạn bè mình, tức là những điều mà thường khi đã bị phần tính, giống như những hư ảnh nhiều màu, lấn át đi.

Vậy thì tôi muốn nhân cái sự đồng điệu với bộ phim **"Hà Nội trong mắt ai"** này để làm cảm hứng mà viết thành một bài điểm sách, tựa là **"Toán học trong mắt ai"**. Mục đích ban đầu tất nhiên là để giới thiệu với các bạn độc giả của **Epsilon** một vài cuốn sách viết về toán học mà tôi đã đọc và cảm thấy thích thú, nhưng cũng là để mong rằng về sau này, việc đọc của các bạn cũng có thể trở nên vui vẻ hơn, theo cách là thay vì mệt mỏi đuổi theo những điều hơi tiểu tiết trong toán, mà bằng một cách nào đó có thể chia sẻ với các tác giả của các cuốn sách mà các bạn đã đọc một cái sự cảm thụ nào đó, mà bắt nguồn là từ chuyện chia sẻ nhiều hơn về thế giới quan toán học của mỗi người vậy ☺.

Nhưng nói như thế thì mục đích của tôi có vẻ hơi bị nhiều và trừu tượng quá, chi bằng lựa chọn lấy một mục đích rõ ràng hơn, cụ thể và trực diện hơn, chẳng hạn như là làm thế nào để mọi người đều có thể trở nên thích đọc sách? Tất nhiên, đây là một câu hỏi khó lắm, toàn bộ cả ngành xuất bản vẫn còn đang đau đầu để cùng nhau đi tìm câu trả lời mà vẫn chưa ra.

Rất may, **NXB Kim Đồng** đã nhận thức được tầm quan trọng của câu hỏi này, nên gần đây họ mới xuất bản một cuốn sách có cái tựa đề rất lạ, là **"Bí kíp khiến bạn thích đọc sách"**. Cuốn sách này dành cho "ngay cả với những bạn không thích sách". Có lẽ với cái tựa dễ thương như thế, thì cuốn sách này, cùng với nhân vật chính của nó là **Mọt sách**, cũng rất hợp với các bạn độc giả của **Epsilon**, mà Ban biên tập vốn tự xác định, là những người yêu toán, tức là Mọt toán, hoặc sắp yêu toán, và cả những người yêu những người yêu toán vậy. Tôi rất hi vọng rằng, chỉ trong tương lai rất gần thôi, sẽ có một cuốn sách nào đó, mà nhân vật chính của nó sẽ được đặt tên là Mọt toán, và chủ đề của cuốn sách ấy, có lẽ sẽ là **"Bí kíp khiến bạn không hề còn ghét hay là sợ toán"**.

Các bạn độc giả hãy thông cảm cho cái tật ăn nói dài dòng của tôi. Tôi buộc phải làm như thế để ngay sau đây các bạn sẽ bớt sự chê trách tôi hơn, khi mà tôi lại lựa chọn một cuốn sách mà có lẽ trong số các bạn ai cũng đều đã có, và cũng đã đọc qua. Cuốn sách này thực sự đã lập một kỉ lục trong làng sách Việt Nam, khi mà chỉ mới in ra lần đầu được có mấy năm, tới nay cuốn sách đã được in đi in lại tới gần cả chục lần. Với hàng vạn bản đã được bán hết veo chỉ trong mấy năm, cuốn tiểu thuyết **toán-hiệp made-in-Vietnam** đầu tiên có tên là **"Ai và Ky ở xứ sở những con số tàng hình"** thực sự là một best-seller đáng ngưỡng mộ.

Tới đây, tôi đã bắt đầu nghe thấy có tiếng thở dài đâu đó, bởi vì hẳn là sẽ có những bạn đang nói thầm rằng "Ôi tưởng giới thiệu sách gì, hóa ra sách này, sách nổi tiếng thế này rồi thì còn giới thiệu làm gì nữa cho tốn giấy tốn mực". Ừ nhỉ, nhưng mà nếu thực sự có bạn nào đang hỏi một điều tương tự thế này, thì phải rất cảm ơn bạn, vì bạn đã đặt ra một câu hỏi đúng! Tại sao lại là một câu hỏi đúng? Và rốt cuộc thì tại sao lại chọn giới thiệu một cuốn sách đã thừa sự phổ biến như thế này đây? Tôi sẽ nói lý do của mình ngay lập tức.

Trước tiên phải kể lại với bạn rằng, cuốn sách này đã ra đời như là một tác phẩm chung của một blogger vô cùng nổi tiếng, là Anh Xu Béo Nguyễn Phương Văn, và một nhà toán học mà có lẽ tới thời điểm này thì gần như không người Việt Nam nào không biết tới, là Giáo sư Ngô Bảo Châu, người đã được nhận huy chương Fields năm 2010, nhờ đó trực tiếp "giúp" nền toán học Việt Nam cân bằng "thành tích giật Fields" với một cường quốc toán học, đó là nước Đức. Hơn nữa, các tác giả cùng với đơn vị làm sách là **Nhà sách Nhã Nam** đã rất cẩn thận tìm được một họa sĩ rất trẻ và cũng rất tài năng để minh họa cho toàn bộ

chuyến phiêu lưu của rất nhiều các nhân vật trong cuốn tiểu thuyết huyền ảo này, là nữ họa sĩ Thái Mỹ Phương. Đã có lúc tôi ngạc nhiên vì làm sao mà Thái Mỹ Phương có thể vẽ được các nhân vật chính xác với sự mường tượng của các tác giả tới như thế, tất nhiên là còn cả việc họa sĩ đã phải học rất nhiều tí toán để có được những bức hình minh họa các ý tưởng toán học rất khó, như là **nghịch lý Zermelo** chẳng hạn, nhưng cái thần của các nhân vật có lẽ mới là điều khó khăn nhất trong công việc minh họa cho một cuốn sách "đẹp" như thế này.

Và như thế, bạn có thấy không, với danh tiếng của hai tác giả, cùng với sự minh họa xuất sắc của Thái Mỹ Phương, việc "Ai và Ky" bán chạy không phải một điều gì khó hiểu. Vậy điều gì là khó hiểu ở đây? Xin bạn đừng giật mình khi nghe tôi nói điều này nhé, điều đặc biệt ở đây, và cũng là lý do chính mà tôi muốn giới thiệu cuốn sách này tới với các bạn, là vì đây **thực sự là một cuốn sách không hay!**

Tới đây, xin các bạn độc giả hãy bình tĩnh! Vì tôi sẽ không mở ra một cuộc tranh luận về việc thế nào là một cuốn sách hay trên **Epsilon**. Thay vào đó, tôi sẽ kể cho các bạn nghe một câu chuyện khác, về một trong hai tác giả của cuốn sách này. Có một lần, Giáo sư Ngô Bảo Châu có hỏi tôi rằng "Tại sao anh đã dành rất nhiều thời gian để viết một số chuyên đề rất sơ cấp, mà có vẻ không mấy ai đọc nhỉ?" Cái chuyên đề chính mà Giáo sư Châu nhắc tới ở đây chính là cái chuyên đề **"Về việc giải đa thức một ẩn"** được đăng trên Epsilon số này. Chuyên đề này đã được đăng trên trang nhà Facebook của Giáo sư một thời gian trước, nhưng rất ít người chia sẻ và đọc. Nếu bạn nào tinh ý một chút, sẽ nhận ra ngay rằng, cái chuyên đề mười trang ấy thực chất là cùng một nội dung với toàn bộ cuốn sách "Ai và Ky" dày tới mấy trăm trang, tất nhiên là chuyên đề còn chứa đựng một số nội dung cao cấp

hơn chút xíu. Nhưng chuyện không chỉ có thế, trong buổi nói chuyện về phương pháp giải toán và làm toán mà Giáo sư Châu đặc biệt dành tặng cho các bạn học sinh có mặt tại buổi ra mắt

Vườn ươm tài năng Talinpa tại Tuần Châu, Hạ Long những ngày đầu năm nay, thì cái câu chuyện toán học chính yếu mà Giáo sư sử dụng để nói về, cũng là chủ đề giải phương trình đại số như cả hai lần trước. Tại sao lại phải lặp đi lặp lại cùng một chủ đề như thế, và mỗi lần lại là một định dạng khác nhau, lúc thì là sách, lúc thì là chuyên đề, lúc thì là bài nói chuyện, mỗi lần lại có những sự khác nhau điển hình?

Trả lời được câu hỏi này không phải dễ. Nhưng tôi muốn các bạn tạm thời quên cuốn "Ai và Ky" này đi để cùng nhau ngắm nghía một bức tranh rất đặc biệt, là bức tranh này.

Bạn thấy thế nào? Tôi sẽ kể cho các bạn nghe lai lịch của bức tranh này. Bức tranh này là do một cô bé tên là Mirella vẽ. Mirella là con gái của một nhà toán học. Nhà toán học này những lúc ở nhà thường hay ngồi chơi và học toán cùng con gái. Nhà toán học ấy tức là Giáo sư Nguyễn Tiến Zũng, người tự ví mình như là **"con cừu đen của làng Toán Việt Nam"** vậy. Tại sao lại là "con cừu đen", và thế nào là "con cừu đen"? Chúng ta sẽ không nói về chuyện ấy ở đây, mà ở đây tôi muốn giới thiệu với các bạn một cuốn sách khác, tức là cuốn **"Các bài giảng về toán cho Mirella"**. Cuốn sách này là một tuyển tập các câu chuyện toán học mà Giáo sư Zũng đã cặm cụi viết thành sau những buổi học toán cùng với Mirella. Cuốn sách này có lẽ dần dần sẽ trở thành một bộ sách nhiều tập, và hãy cùng đọc một vài điều mà Giáo sư Hà Huy Khoái đã viết thành cảm nhận về "khu vườn" của Giáo sư Zũng ở đây.

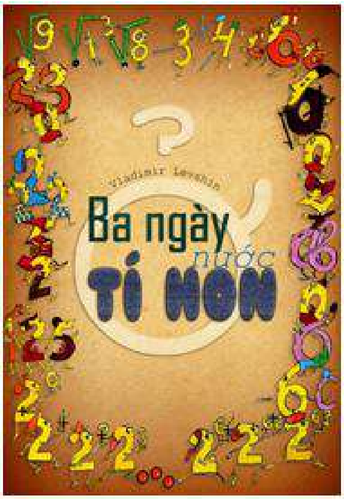
Hôm nay, ông chủ của khu vườn đó lại dẫn chúng ta vào một khu vườn khác, cũng với niềm say mê như thế. Không những ta được ông chủ chỉ cho xem, được chiêu đãi những hoa thơm quả ngọt của khu vườn, mà còn được tận tình chỉ bảo cách tạo nên những hoa thơm quả ngọt đó. Khu vườn có tên là Toán học.
(Giáo sư Hà Huy Khoái giới thiệu về sách "Bài giảng cho Mirella" của Giáo sư Nguyễn Tiến Zũng)

Các bài giảng về toán cho Mirella thực sự là một cuốn sách giáo khoa toán học cho tất cả mọi người, đặc biệt cho những ai muốn tìm hiểu vẻ đẹp của toán học mà còn ngại tính toán! Nói cho cùng, trong toán học có hai phần "tính" và "toán". Nếu như các kỳ thi thường hay bắt thí sinh phải thạo "tính", thì tác giả lại cho người đọc hiểu phần "toán", tức là phần bản chất nhất của toán học. Hơn nữa, khi đã hiểu "toán" thì việc "tính" cũng sẽ tự nhiên như trồng một cái cây, gieo một hạt giống thôi. Đã đến lúc chúng ta cùng người làm vườn và cô bé Mirella bước vào khu vườn Toán học, với niềm vui của người khám phá và sáng tạo.
(Giáo sư Hà Huy Khoái giới thiệu về sách "Bài giảng cho Mirella")

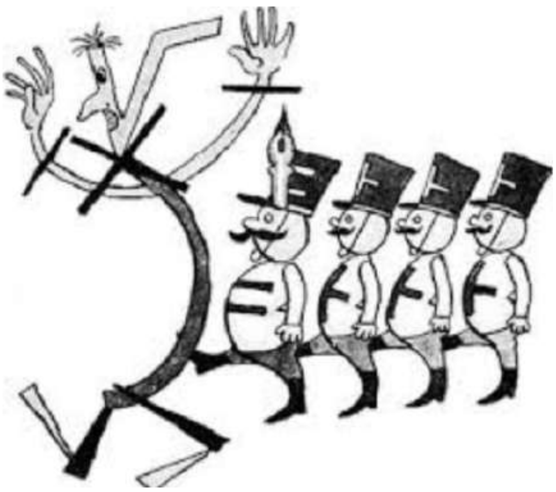
Hãy cùng nhau thử xem mục lục các bài giảng mà Giáo sư Zũng đã giảng cho Mirella. Đó là bài toán công chúa Dido khoanh đất ven bờ biển, bài toán con khỉ đi bán chuối, bài toán bò gặm cỏ, bài toán một đàn kiến đi trên dây, bài toán cắt ghép hình vuông, bài toán bánh xe hình vuông, và nhiều nhiều nữa. Có thể thấy, tất cả đều là những bài toán riêng lẻ, và cách mà Giáo sư Zũng đã vô cùng tỉ mỉ để giảng cho Mirella là cách tiếp cận các vấn đề cụ thể từng bước, từng bước, quan sát, suy luận, thực hiện, thí nghiệm, và đạt tới những hiểu biết và cảm thụ toán học thực thụ. Vậy thì thật đúng như cách mà Giáo sư Khoái đã ví von, công việc ấy của Giáo sư Zũng quả thực giống như một người làm vườn với tất cả những sự say mê. Và điều đó thực tốt. Bởi vì làm sao có thể dạy cho người khác yêu thích hay đam mê toán học, ngoại trừ cách thể hiện cho người nghe của bạn một niềm đam mê thực sự của bạn, để rồi thông qua cái cảm hứng mà bạn có gắng thể hiện và truyền tải cho họ, thì bạn còn có thể làm gì khác hơn?

Nhắc tới chuyện làm vườn, tôi biết có nhiều bạn thích, nhưng cũng có nhiều bạn không. Điều này không đáng ngạc nhiên, bởi vì có lẽ bên cạnh những bạn thích làm vườn, luôn còn có cả những bạn chỉ thích được bơi ra biển, chẳng hạn như chuyện Hyppasus vì tìm ra sự tồn tại của số vô tỷ mà bị Pythagoras bắt phạt ra bơi 3 tiếng ngoài BIỂN giống như "Ai và Ky" đã kể lại như thế này đây

Nhưng bây giờ, nếu chỉ làm vườn hay bơi ra biển thì có vẻ vẫn còn quá bình thường? Các nhà toán học là những người có trí tưởng tượng, chuyện bay lên vũ trụ vẫn chỉ là điều gì đó rất đỗi bình thường. Nếu đã tưởng tượng, thì nhất định phải đi tới với những miền đất chưa ai có thể nghĩ tới, chứ không chỉ là chưa từng đặt chân đến. Đó chính là điều mà cuốn sách **"Ba ngày ở nước tí hon"** đã làm được. Đúng như lời giới thiệu của Giáo sư Zũng, đây thực sự là một cuốn sách kỳ diệu, một cuốn "truyện thần thoại tuy không phải là thần thoại". Cuốn sách này nói về một chuyến "du lịch ngắn ngày" tới với xứ sở diệu kỳ của các con số tí hon. Ba "lữ khách" kỳ này là ba bạn nhỏ, nhưng chưa đến nỗi tí hon cho lắm, gồm có cô bé Tanhia học giỏi nhất lớp, cậu bé Seva lắm mồm nhưng tốt tính, và Oleg hơi trầm tính nhưng lại rất tinh tế và sâu sắc. Cuốn sách này là một cuốn sách đáng kinh ngạc. Bản thân tôi không thể nhớ được mình đã bao nhiêu lần đã hết sức “rung động đến rùng mình” khi đọc được những cái cách “giảng toán” bằng những phép ví von đến là táo tợn như thế này:



“tên khai căn đã tẩu thoát khỏi nhà kho chuyên chứa tất cả các loại toán tử, hắn lập tức trở thành một đối tượng bị truy nã khắp nơi, bởi vì nếu không tóm hắn trở về, thì hắn, tức là dấu khai căn, chính hắn sẽ chạy đi khắp nơi và khai căn trái phép tất cả mọi người, mà nếu hắn cứ làm như thế, thì mỗi lúc cư dân của cả cái xứ sở tí hon này sẽ lùn tịt đi mãi”. Hoặc là như thế này: “cả thành phố trở nên náo loạn, tất cả chỉ là vì cậu bé số 0 nghịch ngợm đã “thuổng” mất dấu nhân và chạy đi đâu mất. Thị trưởng đã quyết định rằng thành phố đã rơi vào tình trạng khẩn cấp, bởi vì bất kỳ ai cũng có thể tử vong, bởi vì hễ cậu bé số 0 mà dung dấu nhân chạm vào ai thì lập tức người đó biến mất. Như vậy buộc phải mời các bác khổng lồ tới, các bác khổng lồ ở đây tức là các số lớn vô cùng, chỉ có các bác ấy họa may mới có thể trị được cậu bé số 0, ấy là bởi vì chỉ có các bác ấy mới được tiêm chủng phòng bệnh số 0”. Thật là tuyệt!



Tên “khai căn" bị tóm vì tội tẩu thoát khoải nhà kho toán tử và tội “khai căn trái phép"

Thành phố rơi vào tình trạng "giới nghiêm" vì cậu bé số 0 đã "thuổng" mất dấu nhân và chạy biến đi đâu mất

Sự "tái xuất" của cuốn sách kỳ diệu của Vladimir Levshin lần này, thông qua những ngôn từ tiếng Việt "sắc nét" của chính Giáo sư Nguyễn Tiến Zũng, thực sự là một sự cổ vũ lớn đối với những người yêu toán của rất nhiều thế hệ cộng dồn lại. Có lẽ đã có không ít người yêu toán bị ám ảnh bởi chương gần áp chót có tên là "Q.S.T.K". Q là quan sát, S là suy luận, T là tính toán, K là kết luận. Với tư cách của một nhà toán học nổi tiếng, Levshin đã đưa ra quan điểm của mình về công việc trí óc nói chung.

Đối với ông thì tất cả chúng ta đều giống như những cậu bé muốn bước vào một căn phòng nhận thức, nhưng ở ngay trước cửa căn phòng này lại có bốn bậc thang, tương ứng với Q.S.T.K. Bất kỳ cậu bé nào cũng sẽ láu táu muốn nhảy qua vài bước để đến với căn phòng một cách tiết kiệm thời gian nhất có thể. Nhưng nhảy cóc luôn đem lại hậu quả nhiều hơn là những giá trị đích thực. Levshin đã khuyên rằng các cậu bé đều luôn nên đi lên từng bước một, đừng bao giờ nóng vội, và biết đâu đấy, nhiều khi cho dù đã bước vào căn phòng, nhưng vì thiếu mất một bước nào đó, mà bạn vẫn không thể biết được trong căn phòng đó có gì. Cái sự kì ảo của căn phòng nhận thức có lẽ vĩnh viễn sẽ là chủ đề cốt lõi nhất mà bất kỳ ai cũng sẽ dành một sự quan tâm thật lớn. Ngày nay, rất nhiều các học thuyết giáo dục đang được đem ra nghiên cứu và ứng dụng tràn lan, nhưng đôi khi, chính những gì căn bản nhất như là những điều mà Levshin và cuốn sách "Ba ngày ở nước tí hon" đã đề cập đến thì dễ bị quên đi, vì nghe chừng nó có vẻ quá ư đơn giản?

Bây giờ tôi sẽ cùng các bạn trở lại với chủ đề ban đầu mà chúng ta đã tạm trì hoãn ngay từ nãy giờ, chủ đề đó là tại sao "Ai và Ky" lại không phải một cuốn sách hay, và tại sao Giáo sư Ngô Bảo Châu lại liên tục thể nghiệm những cách diễn đạt mới cho cùng một chủ đề về tính giải được của phương trình đại số một ẩn? Để làm việc đó, trước tiên, chúng ta hãy cùng nhau thử nghĩ về những niềm vui trong toán học của các tác giả của những cuốn sách ở trên, hoặc nói một cách khác, đó là thử cùng nhau cảm nhận cái thế giới quan toán học của họ.

Giáo sư Ngô Bảo Châu nói về sự cần thiết của tinh thần lạc quan trong làm toán nói riêng và làm khoa học hay các hoạt động trí óc nói chung

Đối với cuốn sách của Levshin, ắt hẳn tác giả (cùng với vợ của mình là nhà văn Emilia Aleksandrove) phải có sự yêu thương trẻ con tới thế nào thì mới có thể viết ra cả một thế giới dễ thương như vậy. Trong cái thế giới ấy, bạn có thể dễ dàng nhận thấy ngay rằng tất cả mọi thứ đều được dành cho một sự tôn trọng và nâng niu rất lớn. Cái thế giới quan toán học của Levshin vì thế thực sự là một cái thế giới quan thuần khiết của trẻ thơ, được đặt trên một cái nền tảng triết lý của một người lao động khoa học thực thụ đã trải qua nhiều tháng năm "trận mạc", nghĩa là Q.S.T.K.

Giáo sư Nguyễn Tiến Zũng – con cừu đen của làng toán Việt Nam – dịch giả mới của cuốn "Ba ngày ở nước tí hon" – tác giả của cuốn "Các bài giảng về toán cho Mirella"

Nhân nói tới "trận mạc", tôi thấy mình rất muốn được chia sẻ với các bạn một cuốn sách mà tôi đã đọc từ thuở vỡ lòng, và cho tới nay, nó có lẽ vẫn là một trong số ít những cái nơi mà tôi có thể tìm về mỗi khi cảm thấy hoang mang với cuộc sống xung quanh, ấy là cuốn sách **"Những tấm lòng cao cả"** của nhà văn người Ý tên là **Edmondo de Amicis**. Truyện lấy bối cảnh của một lớp học, với rất nhiều những cậu bé tính cách vô cùng khác nhau, các cậu bé ấy đã lớn lên cùng nhau, được liên tục cùng nhau trải qua những bài học nho nhỏ về cuộc sống, đôi khi chỉ là những ứng xử rất bình thường, mà dưới ngòi bút của Amicis đã lại trở nên có ý nghĩa lớn lao hơn nhiều so với những gì chúng ta vẫn tưởng. Nhưng dù sao thì vì đây đã là một cuốn sách huyền thoại, một khúc tráng ca về lòng nhân ái, nên tôi sẽ không kể lại nhiều hơn về những nội dung trong sách nữa. Tôi chỉ muốn chia sẻ với các bạn sự ngạc nhiên tới chừng nào của mình khi được biết rằng tác giả của cuốn sách này là một quân nhân, sau ngày giải ngũ, ông xách ba lô lên và đi qua khắp các chiến trường châu Âu, chỉ để hiểu hơn nữa về những cuộc chiến tranh, là điều mà ông vừa kết thúc. Với ý tưởng sau khi có tư liệu, thì sẽ viết một điều gì đó về chiến tranh, nhưng khi đã đi qua khắp những vùng đất ấy, chứng kiến tất cả những số phận của những con người bản xứ ấy, Amicis lại nhận thấy rằng chính cái nhân cách đầu đời của trẻ con mới là chuyện tiên quyết để có được một xã hội văn minh hơn, bớt khổ đau hơn. Hôm nay nhắc chuyện Amicis, cũng là một cách để hiểu hơn về thế giới quan toán học nói riêng và giá trị của cuốn sách kỳ diệu của Levshin nói chung.

Ở bên trên, các bạn có thể thấy được bức ảnh đại diện của Giáo sư Nguyễn Tiến Zũng, người mà gần như bất kỳ lúc nào gặp gỡ, chúng ta cũng đều luôn thấy được những niềm vui và những tiếng cười rạng rỡ. Tôi không hiểu làm sao mà Giáo sư Zũng có thể làm toán và vui vẻ suốt cả ngày như vậy. Nhưng có lẽ chính nhờ việc luôn tươi cười như vậy, mà Giáo sư Zũng thực sự đã luôn là người trẻ trung nhất trong toàn thể các bạn bè đồng trang lứa. Tin tốt là ngay chính trong những dòng chữ giảng bài cho Mirella, bạn đọc cũng đều có thể cảm nhận được vô vàn những niềm vui như vậy, và do đó, đấy thực sự là một cuốn sách rất hay dành cho tất cả mọi người, không chỉ là học sinh, mà có thể là cả phụ huynh của các em ấy nữa. Tưởng tượng về cái thế giới quan toán học của Giáo sư Zũng, thì có lẽ ta sẽ thấy giống như là một người trẻ, được đi dọc bờ biển, được lắng nghe những cơn sóng biển, được ngắm nhìn những cánh chim chao lượn trên trời, cả cảnh hoàng hôn trên biển, và thi thoảng lại có thể cúi mình xuống mà mân mê chơi đùa với những mảnh sò đủ các màu sắc tươi vui. Cái thế giới quan toán học ấy, rõ ràng là một thế giới diệu kỳ của tuổi bé thơ thuần khiết được cả ngày nô đùa cùng với những con số, những hình họa, những ý tưởng triền miên không dứt, và tất nhiên là cả những niềm vui và tiếng cười giòn giã.

Thế còn niềm vui toán học của Giáo sư Châu thì sẽ như thế nào? Dưới đây là câu trả lời của chính Giáo sư, và cũng chính là điều giúp chúng ta hiểu hơn về cuốn sách “Ai và Ky”, cũng như cả chuyên đề về tính giải được của phương trình đại số một ẩn của Giáo sư mà Epsilon đăng tải ngay trong số này.

Bước thứ 4, cũng là bước cuối cùng trong sơ đồ của Pólya là "nhìn lại vấn đề". Có thể đối với một số người, thì đó có thể là một bước nhàm chán, nhưng đối với tôi thì đó lại là bước đem lại nhiều cái "khoái cảm" nhất khi làm toán. Nếu như ở ba bước đầu tiên, bạn sẽ phải chịu đựng rất nhiều sự ức chế, có rất nhiều áp lực, thì tới đây, bạn đã biết mình đã giải được bài toán rồi, nhưng bạn muốn viết lại lời giải của mình theo một cách hay nhất, đẹp nhất có thể.

Không bao giờ nên bỏ qua bước này. Thứ nhất là chính bởi vì bước này rất thú vị, giờ đây bạn đã có thời gian để ngồi lại và "tỉa tót" lời giải của chính mình. Nhiều khi trong quá trình tìm tòi thực hiện kịch bản, bạn đã làm nhiều điều rất phức tạp, rắc rối, rất có thể bạn đã phải đi đi lại lại rất nhiều lần những bước thừa, hơn nữa, khi chưa biết đường, có thể bạn đã phải đi qua rất nhiều đường vòng, vậy thì ngay lúc này, bạn sẽ có thể loại bỏ tất cả những cái thừa đó, lọc bỏ những cái thừa, bạn sẽ tìm ra con đường ngắn nhất để đi đến gần hơn nữa với chân lý toán học.

Giáo sư Ngô Bảo Châu – Vườn ươm tài năng Talinpa, Quảng Ninh 2015

Tôi muốn nhấn mạnh vào chuyện này. Ngay tại đây, các bạn có thể thấy rằng nếu như thế giới quan toán học của Levshin đã cho chúng ta những sự ví von, những trực giác tuyệt mĩ về những khái niệm toán học căn bản nhất, dựa trên sự trân trọng, lòng nhân ái, và cả một triết lý lao động khoa học chân chính; còn thế giới toán học của Giáo sư Zũng lại là một bờ biển dài lộng gió, với thật nhiều những cảnh tượng đẹp đẽ; thì cái thế giới quan toán học của Giáo sư Châu dường như lại tự nhiên chứa đựng cả rất nhiều những dấu ấn của nghệ thuật, ngôn ngữ, và triết học xung quanh. Chính sự khác biệt giữa ba cái thế giới quan này đã khiến cho cuốn sách của Levshin được rất nhiều người đọc và yêu thích, cuốn sách của Giáo sư Zũng sẽ được ít người đọc hơn một chút, nhưng mọi người lại có thể đọc rất dễ dàng, còn cuốn sách "Ai và Ky", thì tuy rằng là một best-seller thực sự, nhưng số người đọc được, và cảm được chắc có lẽ không nhiều.

Nói là không nhiều, bởi vì như thế này. Cả ba lần Giáo sư Châu

nói về tính giải được của phương trình đa thức một ẩn, thì lần thứ nhất là dẫn nhập các khái niệm căn bản bằng ngôn ngữ miêu tả khung cảnh như một chuyến phiêu lưu thật đẹp, nhưng người ta sẽ chẳng hiểu được những điều ấy sẽ dẫn tới đâu, lần thứ hai là một chuyên đề đầy đủ và cặn kẽ về các **"thao tác toán học đơn giản"**, nhưng lại kén người đọc vì cách thức tiếp cận thuần túy lý thuyết, còn lần thứ ba thì lại là một bài nói chuyện kể về cách mà Giáo sư thưởng thức và nhìn nhận lại những gì cốt lõi nhất thuộc về cái gọi là nhóm Galois và lý thuyết Galois. Bài nói chuyện ấy là một bài nói chuyện tuyệt hay, và toàn bộ "chân lý" về lý thuyết Galois đã được Giáo sư giảng lại chỉ trong vòng "ba nốt nhạc". Bài viết ấy đã được đăng tải trên trang mạng **Học Thế Nào**, có lẽ tất cả các bạn độc giả của Epsilon đều nên ghé qua thăm. Ở đây, tôi muốn nói rằng, khi trực tiếp đọc qua những bài báo và những bài blog của Giáo sư Châu về toán học hiện đại, thì cái cảm xúc của tôi chỉ đơn giản là, Giáo sư viết về toán học hiện đại quả tình quá hấp dẫn, bởi vì mọi thứ đều rất rõ ràng, tường tận, cặn kẽ, có điểm khởi đầu, có điểm kết thúc, và có cả những điều mở ra, cái đó thật khác so với "Ai và Ky" theo một nghĩa nào đó là hơi mập mờ và không rõ rành về mục tiêu dành cho người đọc.

Tôi nghĩ, chính cái thế giới quan toán học có xu hướng thưởng thức như một môn nghệ thuật, một môn triết học, một môn ngôn ngữ học đã khiến "Ai và Ky" trở nên kén người cảm thụ. Nhưng dù sao thì đó vẫn là một cuốn sách thật đẹp, và nếu chẳng may có bạn nào đó mà cảm thụ được cái thế giới quan toán học của Giáo sư Châu, thì chắc là cũng sung sướng như được cùng Giáo sư nâng lên một ly rượu vang thật là ngon lành, trong một bữa tối đầm ấm ở giữa những người thân quen.

Trong một bữa tối vui vẻ như vậy, có lẽ bạn sẽ hỏi tôi rằng, tại sao điểm sách "Bài giảng cho Mirella", mà lại không đăng ảnh bìa? Thế thì khi đó tôi sẽ mìm cười mà xin bạn bỏ qua cái thiếu sót ấy, bù lại, tôi sẽ rất vui lòng được tặng cho bạn một cuốn **"Đối thoại toán học"** như thế này đây. Mong sao bạn cũng sẽ thích cuốn sách này, và bỏ quá cho thiếu sót nhỏ ấy của tôi ☺.

Trí Ngủ.