TỦ SÁCH LUYỆN THI

62 DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

* CÓ ĐÁP ÁN
* CẬP NHẬT THÊM NHIỀU DẠNG TOÁN MỚI
* KIẾN THỨC TỪ CƠ BẢN ĐẾN NÂNG CAO

ÔN THI THPT QUỐC GIA

Chuyên đề:

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

(chuyên đề gồm 106 trang)

ĐỀ CƯƠNG CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN TRONG CHƯƠNG HÀM SỐ

- Các dạng toán về hàm ẩn liên quan đến bài toán xét tính đơn điệu của hàm số
- Các dạng toán về hàm ẩn liên quan đến bài toán tìm cực trị của hàm số
- Các dạng toán về hàm ẩn liên quan đến bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số
- Các dạng toán về hàm ẩn liên quan đến bài toán tìm tiệm cận của hàm số
- Các dạng toán về hàm ẩn liên quan đến bài toán tiếp tuyến của đồ thị hàm số
- Các dạng toán về hàm ẩn liên quan đến bài toán giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình.
- Các dạng toán về hàm ẩn liên quan đến bài toán xét sự tương giao của đồ thị hai hàm số.
- Các dạng toán về hàm ẩn liên quan đến phép biến đổi đồ thị

PHẦN A - CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

PHẦN 1: Biết đặc điểm của hàm số $y=f(x)$

Dạng toán 1. Các bài toán về tính đơn điệu của hàm ẩn bậc 2 (dành cho khối 10)

Câu 1: Cho parabol (P): $y=f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ biết: (P) đi qua $M(4;3)$, (P) cắt Ox tại $N(3;0)$ và Q sao cho ΔINQ có diện tích bằng 1 đồng thời hoành độ điểm Q nhỏ hơn 3. Khi đó hàm số $f(2x-1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn C

Vì (P) đi qua $M(4;3)$ nên $3=16a+4b+c$ (1)

Mặt khác (P) cắt Ox tại $N(3;0)$ suy ra $0=9a+3b+c$ (2), (P) cắt Ox tại Q nên $Q(t;0)$, $t<3$

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} t+3=-\dfrac{b}{a} \\ 3t=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

Ta có $S_{\Delta INQ}=\frac{1}{2}IH.NQ$ với H là hình chiếu của $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ lên trục hoành

Do $IH=\left|-\frac{\Delta}{4a}\right|$, $NQ=3-t$ nên $S_{\Delta INQ}=1\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|-\frac{\Delta}{4a}\right|.(3-t)=1$

$$\Leftrightarrow (3-t)\left|\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}\right|=\left|\frac{2}{a}\right|\Leftrightarrow (3-t)\left|\frac{(t+3)^2}{4}-3t\right|=\left|\frac{2}{a}\right|\Leftrightarrow (3-t)^3=\frac{8}{|a|} \text{ (3)}$$

Từ (1) và (2) ta có $7a+b=3\Leftrightarrow b=3-7a$ suy ra $t+3=-\frac{3-7a}{a}\Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{4-t}{3}$

Thay vào (3) ta có $(3-t)^3=\frac{8(4-t)}{3}\Leftrightarrow 3t^3-27t^2+73t-49=0\Leftrightarrow t=1$

Suy ra $a=1\Rightarrow b=-4\Rightarrow c=3$.

Vậy (P) cần tìm là $y=f(x)=x^2-4x+3$.

Khi đó $f(2x-1)=(2x-1)^2-4(2x-1)+3=4x^2-12x+8$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 2: Cho hai hàm số bậc hai $y=f(x), y=g(x)$ thỏa mãn $f(x)+3f(2-x)=4x^2-10x+10$; $g(0)=9; g(1)=10; g(-1)=4$. Biết rằng hai đồ thi hàm số $y=f(x), y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt là A,B. Đường thẳng d vuông góc với AB tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 36. Hỏi điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d?

A. $M(-2;1)$ **B.** $N(-1;9)$ **C.** $P(1;4)$ **D.** $Q(3;5)$

Lời giải

Chọn B

Gọi hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ ta có $f(x)+3f(2-x)=4x^2-10x+10$

$\Leftrightarrow ax^2+bx+c+3\left[a(2-x)^2+b(2-x)+c\right]=4x^2-10x+10$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ -2b-12a=-10 \\ 12a+6b+4c=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^2-x+1.$

Gọi hàm số $g(x)=mx^2+nx+p$ ta có $g(0)=9; g(1)=10; g(-1)=4$ ra hệ giải được

$m=-2; n=3; p=9 \Rightarrow g(x)=-2x^2+3x+9.$

Khi đó tọa độ hai điểm A, B thỏa mãn hệ phương trình

$\begin{cases} y=x^2-x+1 \\ y=-2x^2+3x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=2x^2-2x+2 \\ y=-2x^2+3x+9 \end{cases} \Rightarrow 3y=x+11$

Do đó đường thẳng AB: $y=\frac{1}{3}x+\frac{11}{3} \Rightarrow d: y=-3x+k$. Đường thẳng d cắt hai trục tọa độ tại $E(0;k); F\left(\frac{k}{3};0\right)$. Diện tích tam giác OEF là $\frac{1}{2}|k|\left|\frac{k}{3}\right|=6 \Leftrightarrow k=\pm 6$

Vậy phương trình đường thẳng d là: $d: y=-3x+6,\ y=-3x-6$. Chọn đáp án B

Câu 3: Biết đồ thị hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ có điểm chung duy nhất với $y=-2,5$ và cắt đường thẳng $y=2$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 5. Tính $P=a+b+c$.

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

Gọi (P): $y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$.

Ta có:

+) (P) đi qua hai điểm $(-1;2);(5;2)$ nên ta có $\begin{cases} a-b+c=2 \\ 25a+5b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4a \\ c=2-5a \end{cases}$

+) (P) có một điểm chung với đường thẳng $y=-2,5$ nên

$\frac{-\Delta}{4a}=-2,5 \Leftrightarrow \frac{b^2-4ac}{4a}=2,5 \Leftrightarrow 16a^2-4a(2-5a)=10a \Leftrightarrow 36a^2-18a=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$

Do đó: $b=-2; c=-\frac{1}{2}$.

Dạng toán 2. Dạng toán có thể tìm được biểu thức cụ thể của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)<0$ và $\left[f(x)-x\right]f(x)=x^6+3x^4+2x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)+2x^2$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;3)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left[f(x)-x\right]f(x)=x^6+3x^4+2x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2-x.f(x)-x^6-3x^4-2x^2=0$

Đặt $t=f(x)$ ta được phương trình $t^2-x.t-x^6-3x^4-2x^2=0$

Ta có $\Delta=x^2-4\left(-x^6-3x^4-2x^2\right)=4x^6+12x^4+9x^2=\left(2x^3+3x\right)^2$

Vậy $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{x+2x^3+3x}{2}=x^3+2x \\ t=\dfrac{x-2x^3-3x}{2}=-x^3-x \end{array}\right.$. Suy ra $\left[\begin{array}{l} f(x)=x^3+2x \\ f(x)=-x^3-x \end{array}\right.$

Do $f(1)<0$ nên $f(x)=-x^3-x$.

Ta có

$g(x)=-x^3+2x^2-x \Rightarrow g'(x)=-3x^2+4x-1>0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<1$.

Câu 5: Cho đa thức $f(x)$ hệ số thực và thỏa điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2,\ \forall x\in R$. Hàm số $y=3x.f(x)+x^2+4x+1$ đồng biến trên

A. $R\setminus\{-1\}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** R. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, thay x bởi $x-1$ ta được $2f(1-x)+f(x)=(x-1)^2$.

Khi đó ta có $\begin{cases} 2f(x)+f(1-x)=x^2 \\ 2f(1-x)+f(x)=x^2-2x+1 \end{cases} \longrightarrow 3f(x)=x^2+2x-1$.

Suy ra $y=x^3+3x^2+3x+1 \Rightarrow y'=3x^2+6x+3\ge 0, \forall x\in R$. Nên hàm số đồng biến trên R.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$ và thỏa $f(1)=0$, $\left(f'(x)\right)^2+4f(x)=8x^2+16x-8$. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-2x+3$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-1;2)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn C

Chọn $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\ne 0)$ (lý do: vế phải là hàm đa thức bậc hai).

$\Rightarrow f'(x)=2ax+b$.

Ta có:

$\left(f'(x)\right)^2+4f(x)=8x^2+16x-8 \Leftrightarrow (2ax+b)^2+4\left(ax^2+bx+c\right)=8x^2+16x-8$

$\Leftrightarrow \left(4a^2+4a\right)x^2+(4ab+4b)x+b^2+4c=8x^2+16x-8$

Đồng nhất 2 vế ta được:

$$\begin{cases}4a^2+4a=8\\4ab+4b=16\\b^2+4c=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=2\\c=-3\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}a=-2\\b=-4\\c=-6\end{cases}.$$

Do $f(1)=0 \Rightarrow a+b+c=0 \Rightarrow a=1,\ b=2$ và $c=-3$.

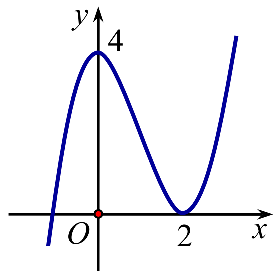
Vậy $f(x)=x^2+2x-3 \Rightarrow g(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2 \Rightarrow g'(x)=-x^2+2x \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau



A. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

B. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{2};0\right)$.

D. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, có đồ thị như hình vẽ.

Do đó $x=0 \Rightarrow d=4$; $x=2 \Rightarrow 8a+4b+2c+d=0$; $f'(2)=0 \Rightarrow 12a+4b+c=0$; $f'(0)=0 \Rightarrow c=0$. Tìm được $a=1;b=-3;c=0;d=4$ và hàm số $y=x^3-3x^2+4$.

Ta có $g(x) = f\left(\sqrt{x^2+x+2}\right) = \left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^3 - 3\left(x^2+x+2\right)+4$

$\Rightarrow g'(x) = \frac{3}{2}(2x+1)\sqrt{x^2+x+2} - 3(2x+1) = 3(2x+1)\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+2}-1\right)$;

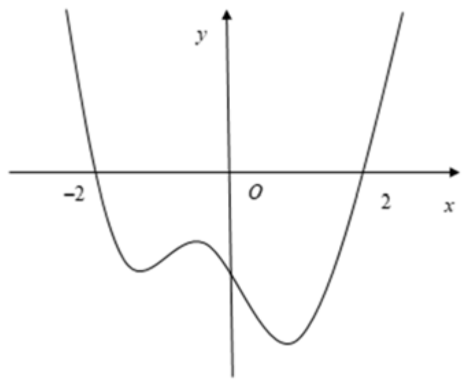
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của hàm $y = g(x)$:

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\frac{7\sqrt{7}-10}{8}$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{2};0\right)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-2) < 0$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = \left|f\left(1-x^2\right)\right|$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $y = \left|f\left(1-x^2\right)\right|$ đồng biến trên $(-\infty;-2)$.

C. Hàm số $y = \left|f\left(1-x^2\right)\right|$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\left|f(-2)\right|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$				$f(2)$		

Ta có $f(-2)<0;1-x^2\le 1\Rightarrow f\left(1-x^2\right)<0.\forall x\in\mathbb{R}$

$$t=1-x^2\Rightarrow f'(t)<0\Rightarrow t\in(-2;1)\Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$$

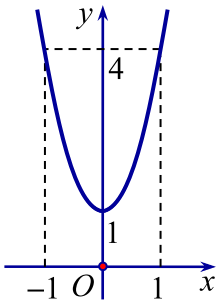
$$0<f'(t)\Rightarrow t\in(-\infty;-2)\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$$

$$g(x)=\left|f\left(1-x^2\right)\right|\Rightarrow g'(x)=\sqrt{f^2\left(1-x^2\right)}=\frac{-4xf(t)f'(t)}{\sqrt{f^2(t)}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g\left(-\sqrt{3}\right)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g\left(\sqrt{3}\right)$	$\nearrow$	

Dạng toán 3. Dạng toán có thể tìm được biểu thức cụ thể của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\ne 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ



Tính giá trị $H=f(4)-f(2)$.

A. $H=58$. **B.** $H=51$. **C.** $H=45$. **D.** $H=64$.

Lời giải

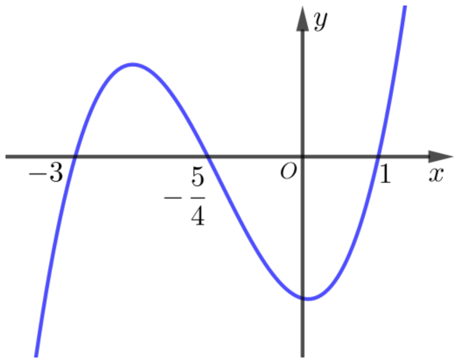
Chọn A

Do $f(x)$ là hàm số bậc ba nên $f'(x)$ là hàm số bậc hai.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ thì $f'(x)$ có dạng $f'(x)=ax^2+1$ với $a>0$. Đồ thị đi qua điểm $A(1;4)$ nên $a=3$ vậy $f'(x)=3x^2+1$.

Vậy $H=f(4)-f(2)=\int_2^4 f'(x)\mathrm{d}x=\int_2^4\left(3x^2+1\right)\mathrm{d}x=58$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+m$, (với $a,b,c,d,m\in\mathbb{R}$). Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=48ax+m$ có số phần tử là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d\ \ (1)$.

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=a(x-1)(4x+5)(x+3)=4ax^3+13ax^2-2ax-15a\ \ (2)$ và $a\neq 0$.

Từ (1) và (2) suy ra $b=\frac{13}{3}a$, $c=-a$ và $d=-15a$.

Khi đó:

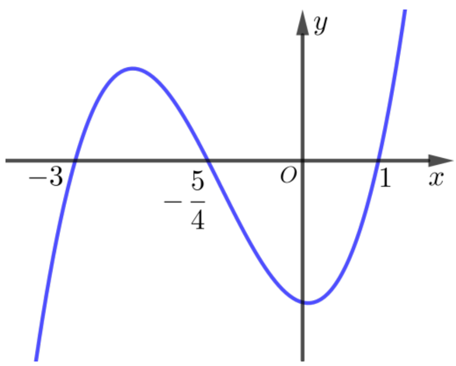
$f(x)=48ax+m \Leftrightarrow ax^4+bx^3+cx^2+dx=48ax$

$\Leftrightarrow a\left(x^4+\frac{13}{3}x^3-x^2-63x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x^4+13x^3-3x^2-189x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=48ax+m$ là $S=\{0;3\}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=x^4+bx^3+cx^2+dx+m$, (với $a,b,c,d,m\in\mathbb{R}$). Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Biết rằng phương trình $f(x)=nx+m$ có 4 nghiệm phân biệt. Tìm số các giá trị nguyên của n.

A. 15. **B.** 14. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=4x^3+3bx^2+2cx+d \quad (1)$.

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=(x-1)(4x+5)(x+3)=4x^3+13x^2-2x-15$

Từ (1) và (2) suy ra $b=\dfrac{13}{3}$, $c=-1$ và $d=-15$.

Khi đó:

$f(x)=nx+m \Leftrightarrow x^4+bx^3+cx^2+dx=nx$

$$\Leftrightarrow x^4+\frac{13}{3}x^3-x^2-15x=nx \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3+\dfrac{13}{3}x^2-x-15=n \qquad (*) \end{array}\right.$$

Phương trình $f(x)=nx+m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0

Xét hàm số $g(x)=x^3+\dfrac{13}{3}x^2-x-15$

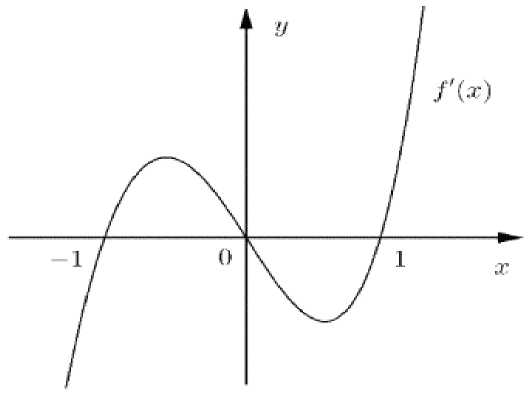
$$g'(x)=3x^2+\frac{26}{3}x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\dfrac{1}{9} \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		0		$\frac{1}{9}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-15	$\searrow$	$-\frac{10976}{729}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0 biệt khi và chỉ khi $n\in\{-1;-2;...;-14\}$

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c\,(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(f'(x))$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Vì các điểm $(-1;0),(0;0),(1;0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} -1+a-b+c=0 \\ c=0 \\ 1+a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \Rightarrow f'(x)=x^3-x \Rightarrow f''(x)=3x^2-1 \\ c=0 \end{cases}$$

Ta có: $g(x) = f(f'(x)) \Rightarrow g'(x) = f'(f'(x)).f''(x)$

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow g'(x)=f'(f'(x)).f''(x)=0 \Leftrightarrow f'(x^3-x)(3x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-x=0 \\ x^3-x=1 \\ x^3-x=-1 \\ 3x^2-1=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=0 \\ x=1,325 \\ x=-1,325 \\ x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

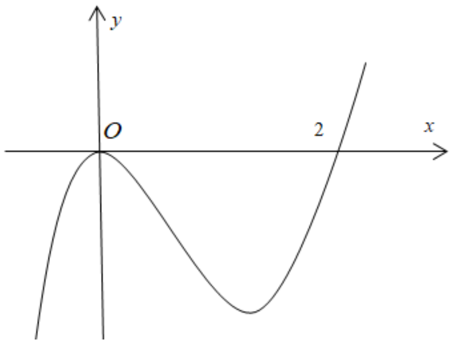
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1,325$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$1,325$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$

Dạng toán 4. Biết đặc điểm của hàm số hoặc đồ thị, hoặc BBT hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, xét sự biến thiên của hàm $y=f(\varphi(x));\ y=f(f(x)),...y=f(f(f...(x)))$ **trong bài toán không chứa tham số**

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $g(x)=f(x^2-x)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn C

$g(x)=f(x^2-x)\Rightarrow g'(x)=(2x-1)f'(x^2-x)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ f'(x^2-x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ x^2-x=0\\ x^2-x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ x=0\\ x=1\\ x=-1\\ x=2\end{array}\right..$$

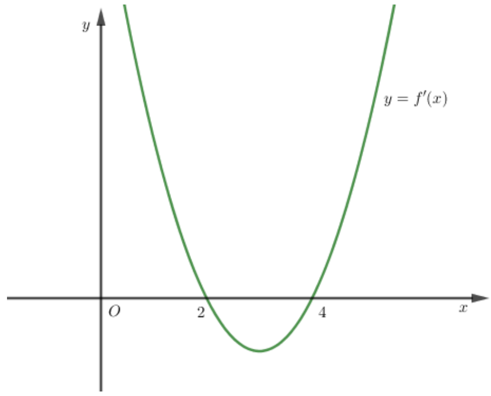
Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x^2-x)>0\Leftrightarrow x^2-x>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\ x<-1\end{array}\right.$,

Xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x^2-x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(1+x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\sqrt{3};-1\right)$. **C.** $\left(1;\sqrt{3}\right)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\left[f\left(1+x^2\right)\right]'=2x.f'\left(1+x^2\right)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\1+x^2=2\\1+x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Mặt khác ta có

$f'\left(1+x^2\right)<0\Leftrightarrow 2<1+x^2<4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{3}<x<-1\\1<x<\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(1+x^2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=f\left(1+x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;\sqrt{3}\right)$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2\left(x-2028\right)\left(x-2023\right)^2$. Khi đó hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+2019\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-2;2)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-3;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=g(x)=f\left(x^2+2019\right)\Rightarrow y'=g'(x)=\left(x^2+2019\right)'f'\left(x^2+2019\right)=2x.f'\left(x^2+2019\right)$.

Mặt khác $f'\left(x\right)=x^2\left(x-2028\right)\left(x-2023\right)^2$. Nên suy ra:

$$y' = g'(x) = 2x.f'\left(x^2+2019\right) = 2x.\left(x^2+2019\right)^2\left(x^2+2019-2038\right)\left(x^2+2019-2023\right)^2$$
$$= 2x.\left(x^2+2019\right)^2\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)^2 = 2x.\left(x^2+2019\right)^2(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2$$

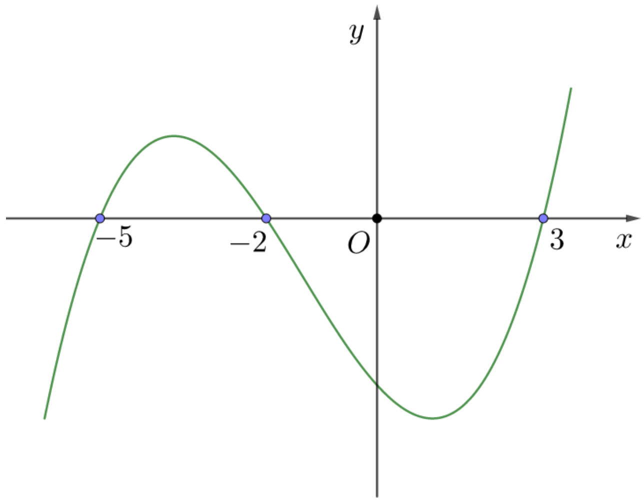
$$y' = 2x.\left(x^2+2019\right)^2(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \ (nghiem\ don) \\ x=3 \ (nghiem\ don) \\ x=-3 \ (nghiem\ don) \\ x=2 \ (nghiem\ boi\ 2) \\ x=-2 \ (nghiem\ boi\ 2) \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$			$\nearrow$				$\searrow$			$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = g(x) = f\left(x^2+2019\right)$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y = f\left(x^2-5\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-\infty;-3)$. **B.** $(-5;-2)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = f\left(x^2-5\right)$

Ta có $y' = 2x.f'\left(x^2-5\right)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-5=-5 \\ x^2-5=-2 \\ x^2-5=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=0 \\ x^2=3 \\ x^2=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \quad (nghiem\ boi\ 3) \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm 2\sqrt{2} \end{array}\right. .$$

Ta lại có: khi $x>3 \Rightarrow f'(x)>0$ suy ra:

$x^2-5>3 \Rightarrow x>2\sqrt{2} \Rightarrow f'(x^2-5)>0 \Rightarrow 2x.f'(x^2-5)>0$

Từ đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

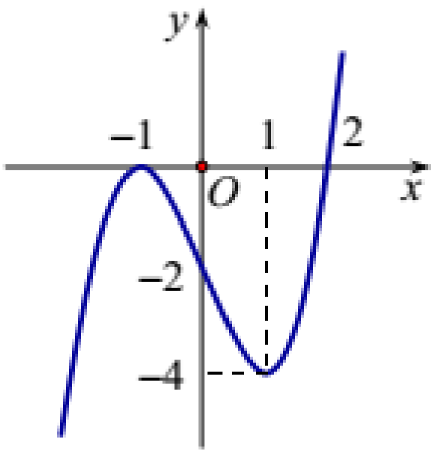
Từ bảng xét dấu ta có hàm số đồng biến trên các khoảng

$\left(-2\sqrt{2};-\sqrt{3}\right);\left(0;\sqrt{3}\right);\left(2\sqrt{2};+\infty\right)$.

Mà $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right) \subset \left(0;\sqrt{3}\right)$.

Dạng toán 5. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc BBT hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, xét sự biến thiên của hàm $y=f(f(x)),...y=f(f(f...(x)))$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Biết S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m thoả mãn $m \in (-2019;2019)$ sao cho hàm số $g(x)=f(x-m)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. Số phần tử của tập S là

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2015. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x-m)$.

Suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-m=-1 \\ x-m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-1 \\ x=m+2 \end{array}\right.$.

Do đó từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ suy ra
$g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x-m)>0 \Leftrightarrow x-m>2 \Leftrightarrow x>m+2$.

Hàm số $g(x)=f(x-m)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$ khi và chỉ khi
$g'(x)\geq 0, \forall x\in(-2;0) \Leftrightarrow m+2\leq -2 \Leftrightarrow m\leq -4$.

Mà tham số $m\in(-2019;2019)$ và là gía trị nguyên thoả mãn $m\leq -4$ nên
$m\in\{-2018;-2017;...;-5;-4\}$. Vậy tập S có 2015 phần tử.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)(x^2+mx+5)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x)=f(x^2+x-2)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=(2x+1)f'(x^2+x-2)$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi $(2x+1)f'(x^2+x-2)\geq 0$, $\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(x^2+x-2)\geq 0$, $\forall x\in(1;+\infty)$
$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2(x^2+x)\left[(x^2+x-2)^2+m(x^2+x-2)+5\right]\geq 0$, $\forall x\in(1;+\infty)$ (1).

Đặt $t=x^2+x-2$ với $t>0$, do $x\in(1;+\infty)$.

$(1)\Rightarrow t^2(t+2)(t^2+mt+5)\geq 0$, $\forall t>0 \Leftrightarrow t^2+mt+5\geq 0$, $\forall t>0 \Leftrightarrow m\geq -\left(t+\dfrac{5}{t}\right)$, $\forall t>0$

$\Leftrightarrow m\geq -2\sqrt{5}\approx -4,47$.

Do m nguyên âm nên $m\in\{-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=f'(x^2+3x-m)=(2x+3)f'(x^2+3x-m)$.

Theo đề bài ta có: $f'(x)=(x-1)(x+3)$

suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > 1 \end{array}\right.$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow (2x+3)f'(x^2+3x-m) \geq 0, \forall x \in (0;2)$.

Do $x \in (0;2)$ nên $2x+3 > 0, \forall x \in (0;2)$. Do đó, ta có:

$$y' \geq 0, \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow f'(x^2+3x-m) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-m \leq -3 \\ x^2+3x-m \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq x^2+3x+3 \\ m \leq x^2+3x-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \max\limits_{[0;2]}(x^2+3x+3) \\ m \leq \min\limits_{[0;2]}(x^2+3x-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{array}\right..$$

Do $m \in [-10;20]$, $m \in \mathbb{Z}$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

Dạng toán 6. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc đồ thị, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, xét sự biến thiên của hàm $y = \ln(f(x)), y = e^{f(x)}, \sin f(x), \cos f(x)...$ **trong bài toán không chứa tham số**

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-2;1)$.

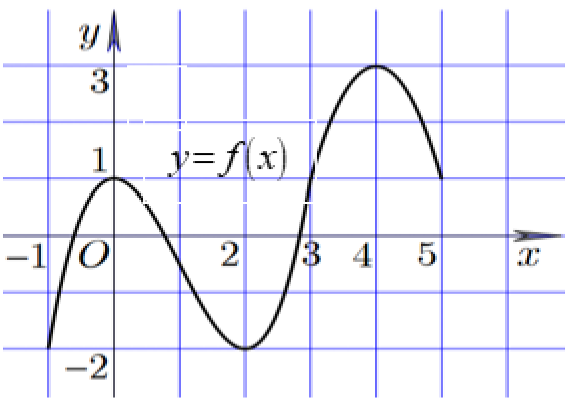
Lời giải

Chọn D

Ta có : $y' = -3f'(2-x).e^{3f(2-x)+1} - f'(2-x).3^{f(2-x)}.\ln 3 = -f'(2-x).\left(3e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)}.\ln 3\right)$.

$$y' > 0 \Leftrightarrow -f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x < -1 \\ 1 < 2-x < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{array}\right..$$

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Hỏi hàm số $y=g(x)=e^{2017f(x-2020)+2018}+\pi^{2019f(x-2020)}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2016;\ 2018)$. **B.** $(2017;\ 2019)$. **C.** $(2018;\ 2020)$. **D.** $(2021;\ 2023)$.

Lời giải

Chọn C

+) Xét hàm số $y=g(x)=e^{2017f(x-2020)+2018}+\pi^{2019f(x-2020)}$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có

$$g'(x)=2017f'(x-2020)e^{2017f(x-2020)+2018}+2019\ln\pi f'(x-2020)\pi^{2019f(x-2020)}$$

$$g'(x)=f'(x-2020)\left[2017e^{2017f(x-2020)+2018}+2019\pi^{2019f(x-2020)}\ln\pi\right],\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

+) Do $2017e^{2017f(x-2020)+2018}+2019\pi^{2019f(x-2020)}\ln\pi>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên

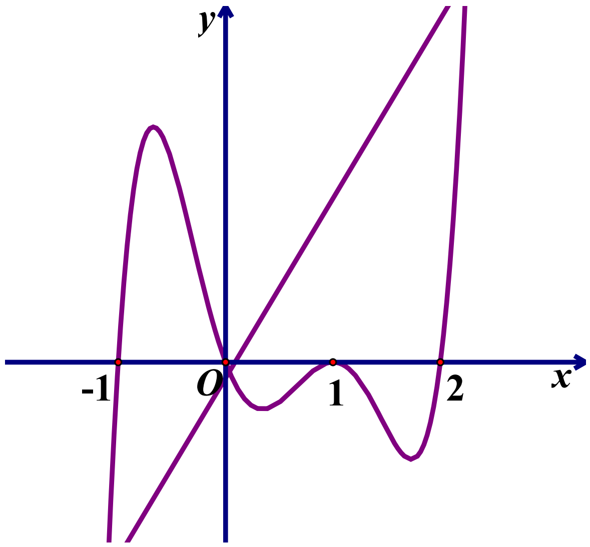
$g'(x)<0\Leftrightarrow f'(x-2020)<0.$

Hơn nữa từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$, ta thấy hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(0;\ 2)$ và $(4;\ +\infty)$, suy ra $f'(x)<0,\ \forall x\in(0;\ 2)\cup(4;\ +\infty)$.

Khi đó bất phương trình $f'(x-2020)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x-2018<2\\x-2018>4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2018<x<2020\\x>2022\end{array}\right.$.

+) Vậy $g'(x)<0,\ \forall x\in(2018;\ 2020)\cup(2022;\ +\infty)$. Khi đó hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(2018;\ 2020)$ và $(2022;\ +\infty)$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=2018^{2019-2f(x)+2f^2(x)-f^3(x)}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Xét $g'(x)=-f'(x).\left[3f^2(x)-4f(x)+2\right].2018^{2019-2f(x)+2f^2(x)-f^3(x)}.\ln 2018$

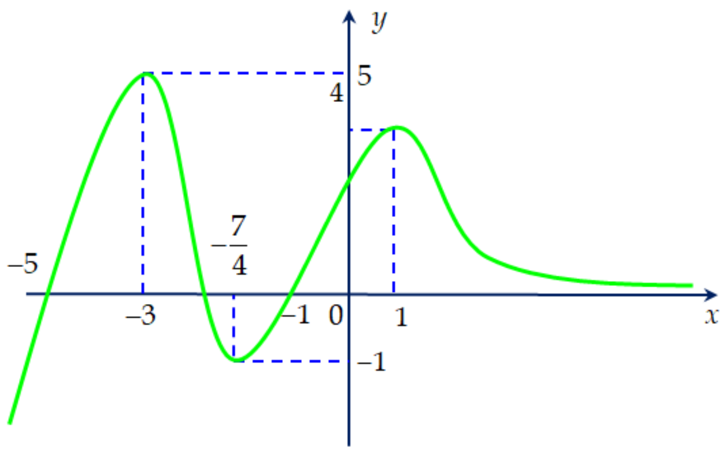
Có $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$, trong đó $x=1$ là nghiệm kép.

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng, suy ra hàm số nghịch biến trên $(2;3)$, do $(2;3)\subset(2;+\infty)$.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ sau



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=f\left(e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-5)$. **B.** $\left(-3;\frac{-7}{4}\right)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-3;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$g'(x)=\left(3f'(x).e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}.f'(x).\ln 2\right).f'\left(e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}\right)$$
$$=f'(x).\left(3.e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}.\ln 2\right).f'\left(e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}\right)$$

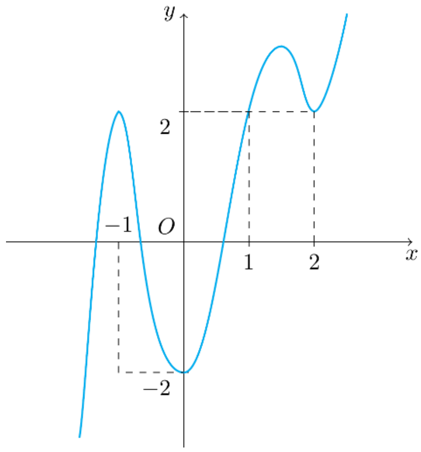
$ycbt \Leftrightarrow g'(x)<0$. Mà ta thấy rằng:

$$\begin{cases} 3.e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}.\ln 2>0 \\ e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3.e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}.\ln 2>0 \\ f'\left(e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}\right)>0 \end{cases}$$

Suy ra $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-5 \\ x_0<x<-1\left(x_0\in\left(-3;\frac{-7}{4}\right)\right)\end{array}\right.$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-5)$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ.



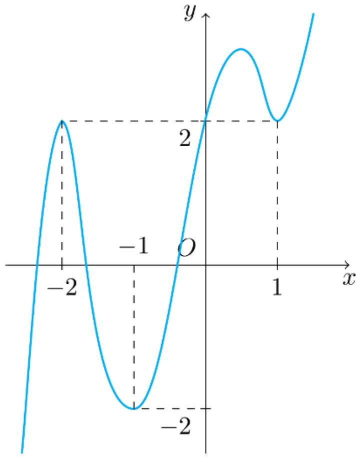
Hàm số $y=\pi^{2f(x)-4x}$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải

Chọn C

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x-1)$ sang trái 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như sau



Xét hàm số $y=\pi^{2f(x)-4x}$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=\pi^{2f(x)-4x}\cdot(2f'(x)-4)\cdot\ln\pi$

$y'=0 \Leftrightarrow f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=1\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Dạng toán 7. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc đồ thị, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, xét sự biến thiên của hàm $y=\ln(f(x)), y=e^{f(x)}, \sin f(x), \cos f(x)$... **trong bài toán chứa tham số**

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x^2-mx+9)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x)=e^{f(x)}$ đồngbiến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=f'(x).e^{f(x)}$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(x)\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty) \Leftrightarrow x(x-1)^2(x^2-mx+9)\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\le \dfrac{x^2+9}{x},\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\le \min\limits_{(0;+\infty)} h(x)$ với $h(x)=x+\dfrac{9}{x}, \forall x\in(0;+\infty)$.

Ta có: $h(x)=x+\dfrac{9}{x}\ge 2\sqrt{x.\dfrac{9}{x}}=6, \forall x\in(0;+\infty)$ nên $m\le 6 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+} m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	0	-	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=e^{f(x)-m^2+2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(4;+\infty)$ **B.** $(-1;4)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=g\left(x\right)=e^{f\left(x\right)-m^2+2}$.

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right).e^{f\left(x\right)-m^2+2}$, $e^{f\left(x\right)-m^2+2}>0\forall x\in\mathbb{R}$.

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=4\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y=g\left(x\right)=e^{f\left(x\right)-m^2+2}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(0;4\right)$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên

Và hàm số $y=g(x)$ có bảng biến thiên

Hàm số $y=f(x).g\left(x\right)+\sqrt{2x+3}-\dfrac{1}{x+2}$ chắc chắn đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(-2;1\right)$. **B.** $\left(-1;1\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{3}{2};1\right)$. **D.** $\left(1;4\right)$.

Lời giải

Chọn B

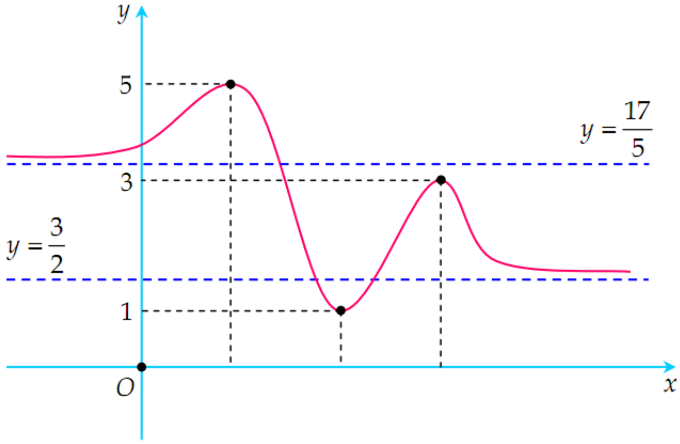
Xét $y=f(x).g\left(x\right)+\sqrt{2x+3}-\dfrac{1}{x+2}$.

Tập xác định: $D=\left[-\dfrac{3}{2};1\right]$. Từ tập xác định loại được phương án A, D

Ta có: $y' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) + \dfrac{2}{\sqrt{2x+3}} + \dfrac{1}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in (-1;1)$.

Với phương án C, có $g'(x) < 0$ trên $\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$ nên chưa kết luận được về dấu của hàm số cần xét.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nguyên nhỏ nhất của tham số m để phương trình

$\mathrm{e}^{f^3(x)+2f^2(x)-7f(x)+5} + \ln\left(f(x) + \dfrac{1}{f(x)}\right) = m$ có nghiệm là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị ta thấy $1 \le f(x) \le 5, \forall x \in \mathbb{R}$, đặt $t = f(x)$ giả thiết trở thành

$\mathrm{e}^{t^3+2t^2-7t+5} + \ln\left(t + \dfrac{1}{t}\right) = m$.

Xét hàm: $g(t) = t^3 + 2t^2 - 7t + 5,\ \mathrm{t} \in [1;5]$

$g'(t) = 3t^2 + 4t - 7 \ge 0\ \forall t \ge 1 \Rightarrow g(1) \le g(t) \le g(5) \Leftrightarrow 1 \le g(t) \le 145$.

Mặt khác $h(t) = t + \dfrac{1}{t}, h'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2} \ge 0\ \forall t \in [1;5] \Rightarrow 2 \le h(t) \le \dfrac{26}{5}$.

Do đó hàm $u(t) = \mathrm{e}^{t^3+2t^2-7t+5} + \ln\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$ đồng biến trên đoạn $[1;5]$.

Suy ra: Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \mathrm{e} + \ln 2 \le m \le \mathrm{e}^{145} + \ln\dfrac{26}{5}$.

Vậy giá trị nguyên nhỏ nhất của m là 4.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Hàm số $y = e^{f(x)-m^2+2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(4;+\infty)$ **B.** $(-1;4)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = g(x) = e^{f(x)-m^2+2}$.

$g'(x) = f'(x).e^{f(x)-m^2+2}$, $e^{f(x)-m^2+2} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Vậy hàm số $y = g(x) = e^{f(x)-m^2+2}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1) \cup (0;4)$.

Dạng toán 8. Các dạng khác với các dạng đã đưa ra…

PHẦN 2: Biết biểu thức của hàm số $y = f'(x)$

Dạng toán 9. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x-3)(x-4)(x-2)^2(x-1), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = g(x) = f(x) + \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 4x^2 - 4x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$ **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$g'(x)=f'(x)+x^3-5x^2+8x-4=f'(x)+(x-1)(x-2)^2=(x-1)(x-2)^2(x^2-7x+13).$

Khi đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của hàm số $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=x^2(x-1)^2(x-3)$. Hàm số $g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-5$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(0;\,2)$. **B.** $\left(2;\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\,2\right)$. **D.** $\left(0;\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=f'(x)+x^2$,

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)^2(x-3)=-x^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (x-1)^2(x-3)=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3-5x^2+7x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		2		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy trên khoảng $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\,2\right)$ thì hàm số $y=g(x)$ đồng biến.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x+2)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=f(x)-2x^2+4x$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-4;0)$ **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-4;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$g'(x)=f'(x)-4x+4=(x-1)(x+2)^2-4(x-1)=(x-1)(x^2+4x),\forall x\in\mathbb{R}$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\x^2+4x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=-4\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Kết luận: Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;0)$

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=x^2(x-1)(4-x)$

Hàm số $y=g(x)=f(x)+f(1-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(x)-f'(1-x)=x^2(x-1)(4-x)-(1-x)^2(-x)(x+3)$

$g'(x)=x(x-1)[x(4-x)+(x-1)(x+3)]=x(x-1)(6x-3)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{1}{2}\\x=1\end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dạng toán 10. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x^2+mx+16)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để hàm số $g(x)=f(x)+\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2019$ đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$?

A. 2019. **B.** 2021. **C.** 2028. **D.** 4038.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x)+x^3-2x^2+x$

$=x(x-1)^2(x^2+mx+16)+x(x-1)^2$

$=x(x-1)^2(x^2+mx+17)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$ thì $g'(x)\ge 0\forall x\in(5;+\infty)$

$\Leftrightarrow x(x-1)^2(x^2+mx+17)\ge 0\forall x>5 \Leftrightarrow x^2+mx+17\ge 0\forall x>5$

$\Leftrightarrow m\ge\dfrac{-x^2-17}{x}\forall x>5$.

Xét hàm số $h(x)=\dfrac{-x^2-17}{x}=-x-\dfrac{17}{x}$ trên khoảng $(5;+\infty)$

$h'(x)=-1+\dfrac{17}{x^2}=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{17}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{17}$		0		$\sqrt{17}$		5		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$h(x)$					$\|\|$				$-\dfrac{42}{5}$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m\ge-\dfrac{42}{5}$.

Vậy có 2028 giá trị của m thỏa mãn bài ra.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m<100$ để hàm số $g(x)=f(x^2-8x+m)+m^2+1$. đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

A. 18. **B.** 82. **C.** 83. **D.** 84.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\x>2\end{array}\right.$.

Xét $g'(x)=(2x-8).f'(x^2-8x+m)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\ \forall x>4$

$\Leftrightarrow(2x-8).f'(x^2-8x+m)\ge 0,\ \forall x>4$

$\Leftrightarrow f'(x^2-8x+m)\ge 0,\ \forall x>4$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-8x+m\le 0,\ \forall x\in(4;+\infty)\\x^2-8x+m\ge 2,\ \forall x\in(4;+\infty)\end{array}\right.\Leftrightarrow m\ge 18.$

Vậy $18 \le m < 100.$.

Câu 36: (VD) Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $m\left(1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)+x(2-x)\le 0$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

A. $m\le\frac{1}{3}$. **B.** $m\le\frac{2}{3}$. **C.** $m\le\frac{4}{3}$. **D.** $m\le\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $m\left(1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)+x(2-x)\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{1+\sqrt{x^2-2x+2}}\ge m$

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2}$ $,x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$. Khi đó:

$$t'=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}},\ t'=0\Leftrightarrow x=1$$

Bảng biến thiên:

x	$0 \quad 1 \quad 1+\sqrt{3}$
t'	$-\quad 0 \quad +$
t	2 $\sqrt{2}$ 1

Từ bảng biến thiên ta suy ra $t\in[1;2]$. Khi đó bất phương trình trở thành:

$$\frac{t^2-2}{t+1}\ge m \text{ có nghiệm } t\in[1;2]\Leftrightarrow \max_{[1;2]}\left(\frac{t^2-2}{t+1}\right)\ge m$$

Đặt $f(t)=\frac{t^2-2}{t+1}$, $t\in[1;2]$. Khi đó:

$$f'(t)=\frac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}>0,\ \forall t\in[1;2]$$

Bảng biến thiên:

t	$1 \quad 2$
$f'(t)$	$+$
$f(t)$	$\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{2}$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $\max\limits_{[1;2]} f(t) = \frac{2}{3}$. Vậy $\frac{2}{3} \ge m$ hay $m \le \frac{2}{3}$.

Câu 37: (VDC) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $\sqrt{(m+2)x-m} \ge |x+1|$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$.

A. 14. **B.** 20. **C.** 16. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\sqrt{(m+2)x-m} \ge |x+1| \Leftrightarrow (m+2)x-m \ge (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+1 \le m(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+1}{x-1} \le m \text{ nếu } m \in (1;2] \\ \dfrac{x^2+1}{x-1} \ge m \text{ nếu } m \in [-2;1) \end{array}\right.$$

Do đó, bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \min\limits_{(1;2]}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right) \le m \\ \max\limits_{[-2;1)}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right) \ge m \end{array}\right. \qquad (*)$$

Đặt $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, $x \in [-2;2]$. Khi đó:

$f'(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$ -2 $1-\sqrt{2}$ 1 2 $1+\sqrt{2}$ $+\infty$			
$f'(t)$	$+$	$+$ 0 $-$	$-$	$-$ 0 $+$
$f(t)$		$2-2\sqrt{2}$ $-\frac{5}{3}$ $-\infty$	$+\infty$ 5	

Từ bảng biến thiên ta có:

$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 \le m \\ 2-2\sqrt{2} \ge m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 5 \\ m \le 2-2\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{-10;-9;-8;...;-1;5;6;7;8;9;10\}$.

Vậy Có 16 giá trị m thỏa đề.

Câu 38: Biết rằng bất phương trình $m\left(|x|+\sqrt{1-x^2}+1\right) \le 2\sqrt{x^2-x^4}+\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}+2$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \in \left(-\infty; a\sqrt{2}+b\right]$, với $a,b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của $T=a+b$.

A. $T=3$. **B.** $T=2$. **C.** $T=0$. **D.** $T=1$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $-1 \le x \le 1$.

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có : $g'(x)=x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$g'(x)$ không xác định khi $x=0$, $x=\pm 1$. Bảng biến thiên :

x	$-1 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 1$
$g'(x)$	$\|\| \; + \; 0 \; - \; \|\| \; + \; 0 \; - \; \|\|$
$g(x)$	$\sqrt{2} \quad \sqrt{2}$ $1 \; 1 \; 1$

Suy ra $1 \le g(x) \le \sqrt{2}$.

Đặt $t=\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}$, $1 \le t \le \sqrt{2}$. Bất phương trình trở thành :

$m(t+1) \le t^2+t+1 \Leftrightarrow m \le t+\frac{1}{t+1}$ (Do $1 \le t \le \sqrt{2}$ nên $t+1>0$).

Xét hàm số $f(t)=t+\frac{1}{t+1}$ trên đoạn $\left[1;\sqrt{2}\right]$.

Có $f'(t)=1-\frac{1}{(t+1)^2}>0,\ \forall x \in \left[1;\sqrt{2}\right]$. Bảng biến thiên :

x	$1 \quad \sqrt{2}$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$2\sqrt{2}-1$ $\frac{3}{2}$

Do đó, $\max\limits_{\left[1;\sqrt{2}\right]} f(t)=f\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-1$.

Suy ra bất phương trình đã cho có nghiệm khi $m \le \max\limits_{\left[1;\sqrt{2}\right]} f(t)$ hay $m \le 2\sqrt{2}-1$.

Do đó, $a=2$, $b=-1$.Vậy $T=1$.

Câu 39: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right) = 3x^2 + 6x + 1, \forall x \in R$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $\left(-50;50\right)$ của tham số m để hàm số $g\left(x\right) = f\left(x\right) - \left(m+1\right)x - 2$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;2\right)$?

A. 26. **B.** 25. **C.** 51. **D.** 50.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g\left(x\right) = f\left(x\right) - \left(m+1\right)x - 2 \Rightarrow g'\left(x\right) = f'\left(x\right) - \left(m+1\right)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$ khi

$g'(x) \le 0, \forall x \in (0;2)$ (dấu $"="$chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên khoảng $(0;\ 2)$).

$\Leftrightarrow f'(x) - (m+1) \le 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x \le m, \forall x \in (0;2)$ $\qquad (*)$

Xét hàm số $h(x) = 3x^2 + 6x,\ x \in (0;2)$.

Ta có $h'(x) = 6x + 6 > 0, \forall x \in (0;2)$.

Bảng biến thiên:

x	0		2
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	24

Nhìn bảng biến thiên suy ra điều kiện để $(*)$ xảy ra là: $m \ge 24$.

Do $m \in Z$, thuộc khoảng $\left(-50;50\right)$ nên $\mathrm{m} \in [24;50)$ và $m \in Z$ hay $\mathrm{m} \in \{24, 25, ..., 49\}$.

Vậy có 26 số nguyên m thỏa mãn.

Dạng toán 11. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f\left(u(x)\right)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x - 2)$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có $g'(x)=(1-2x)f'(x-x^2)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow (1-2x)f'(x-x^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-2x=0\\ f'(x-x^2)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x-x^2=-1\\ x-x^2=1\\ x-x^2=2\end{array}\right.$$

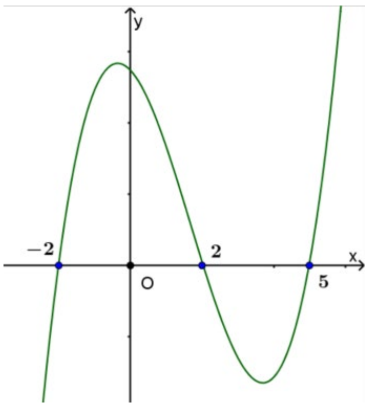
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	+	0	−	0	−	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $g(x)=f(x-x^2)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=g(x)=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;+\infty)$.

C. $(0;2)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn A

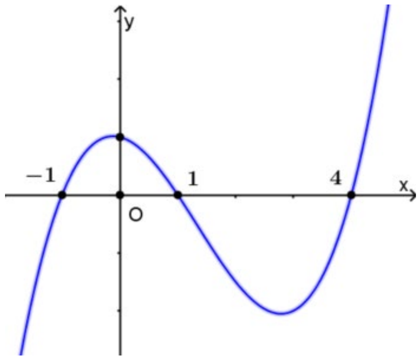
• Từ đồ thị $(C): y=f'(x)$; $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<x<2\\ x>5\end{array}\right.$ (1)

• Mà $g'(x)=-2.f'(3-2x)$ (2)

• (1), (2); $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(3-2x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<3-2x<2\\ 3-2x>5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{5}{2}\\ x<-1\end{array}\right..$

• Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ và $(-\infty;-1)$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=g(x)=f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn B

• $g'(x)=2x.f'(x^2)$.

• Nhận xét:

+ $f'(t)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<t<1 \\ 4<t \end{array}\right.$.

+ $f'(t)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-1 \\ 1<t<4 \end{array}\right.$.

• Hàm số g nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ f'(x^2)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>0 \\ f'(x^2)<0 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ -1<x^2<1 \vee 4<x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x>0 \\ x^2<-1 \vee 1<x^2<4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ -1<x<0 \\ 1<x<2 \end{array}\right..$$

• Vậy hàm số $y=g(x)=f(x^2)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$, $(-1;0)$ và $(1;2)$.

Dạng toán 12. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)(x^2+mx+5)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=(2x+1)f'(x^2+x-2)$.

Hàm số $g(x)=f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow g'(x)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow(2x+1)f'(x^2+x-2)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(x^2+x-2)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$ (vì $2x+1>0,\forall x\in(1;+\infty)$)

$\Leftrightarrow(x^2+x-2)^2(x^2+x)\left[(x^2+x-2)^2+m(x^2+x-2)+5\right]\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$

$\left[(x^2+x-2)^2+m(x^2+x-2)+5\right]\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$ (*)(vì $(x^2+x-2)^2(x^2+x)\ge 0,(1;+\infty)$).

Đặt $t=x^2+x-2$. Khi đó $x>1\Rightarrow t>0$.

(*) trở thành $t^2+mt+5\ge 0,\forall t>0$ $\Leftrightarrow m\ge -t-\dfrac{5}{t},\forall t>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có $t+\dfrac{5}{t}\ge 2\sqrt{5}$ $\Leftrightarrow -t-\dfrac{5}{t}\le -2\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{5}{t}\\ t>0\end{cases}$ $\Leftrightarrow t=\sqrt{5}$.

$\Rightarrow \max\limits_{(0;+\infty)}\left(-t-\dfrac{5}{t}\right)=-2\sqrt{5}$ $\Rightarrow m\ge -2\sqrt{5}$.

Mà m nguyên âm nên $m\in\{-4;-3;-2;-1\}$. Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4);\forall x\in\mathbb{R}$.Có bao nhiêu số nguyên $m<2019$ để hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x)=-\dfrac{3}{(x+1)^2}f'\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow$ $g'(x)\ge 0;\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow -\dfrac{3}{(x+1)^2}f'\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)\ge 0;\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow$ $f'\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)\le 0;\forall x\in(2;+\infty)$

Ta có: $f'(x) \le 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-4) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ 1 \le x \le 4 \end{array}\right.$

Do đó: $f'\left(\dfrac{2-x}{1+x} - m\right) \le 0;\ \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \dfrac{2-x}{1+x} - m \le -1;\ \forall x \in (2;+\infty) & (1) \\ 1 \le \dfrac{2-x}{1+x} - m \le 4;\ \forall x \in (2;+\infty) & (2) \end{array}\right.$

Hàm số $h(x) = \dfrac{2-x}{1+x} - m$; $x \in (2;+\infty)$ có bảng biến thiên:

x		2		$+\infty$
$h'(x)$		||	$-$	
$h(x)$		|| $-m$		$-\infty$

Căn cứ bảng biến thiên suy ra: Điều kiện (2) không có nghiệm m thỏa mãn.

Điều kiện (1) $\Leftrightarrow -m \le -1 \Leftrightarrow m \ge 1$,kết hợp điều kiện $m < 2019$ suy ra có 2018 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Có thể mở rộng bài toán đã nêu như sau:

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4);\ \forall x \in \mathbb{R}$.Có bao nhiêu số nguyên $m < 2019$ để hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{2-x}{1+x} + h(m)\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m \le 20$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ đồng biến trên $(4;+\infty)$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = (2x-8)f'(x^2-8x+m)$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(4;+\infty)$

$\Leftrightarrow g'(x) \ge 0, \forall x \in (4;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(x^2-8x+m) \ge 0, \forall x \in (4;+\infty)$ (vì $2x-8>0, \forall x \in (4;+\infty)$).

Ta có $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2-2x) \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 x(x-2) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le 0 \end{array}\right.$.

Do đó $f'(x^2-8x+m) \ge 0, \forall x \in (4;+\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+m \ge 2, \forall x \in (4;+\infty) (1) \\ x^2-8x+m \le 0, \forall x \in (4;+\infty) (2) \end{array}\right.$.

Xét $h(x)=x^2-8x+m$

Ta có $h'(x)=2x-8$.

Lập bảng biến thiên của $h(x)=x^2-8x+m$, ta được

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-16$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên:

+ (2) vô nghiệm vì $x^2-8x+m\geq m-16, \forall x\in(4;+\infty)$.

+ $(1)\Leftrightarrow m-16\geq 2\Leftrightarrow m\geq 18$.

Theo giả thiết thì $m\leq 20$ và m là số nguyên nên $m\in\{18;19;20\}$. **Chọn B**

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x^2+mx+9)$ với mọi $\forall x\in R$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $f'(3-x)=(3-x)(2-x)^2[(3-x)^2+m(3-x)+9]$.

Ta có $g'(x)=-f'(3-x)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi và chỉ khi

$g'(x)\geq 0, \forall x\in(3;+\infty)$.

$\Leftrightarrow -f'(3-x)\leq 0, \forall x\in(3;+\infty)$.

$\Leftrightarrow (3-x)(2-x)^2[(3-x)^2+m(3-x)+9]\leq 0, \forall x\in(3;+\infty)$.

$\forall x\in(3;+\infty)$ thì $(3-x)\leq 0, (2-x)^2\geq 0$, suy ra $(3-x)^2+m(3-x)+9\geq 0, \forall x\in(3;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow m\leq\frac{(3-x)^2+9}{(x-3)}, \forall x\in(3;+\infty)\Leftrightarrow m\leq \underset{(3;+\infty)}{Min}\frac{(3-x)^2+9}{(x-3)}.$$

Ta có $\dfrac{(3-x)^2+9}{(x-3)}=(x-3)+\dfrac{9}{x-3}\geq 2\sqrt{(x-3).\dfrac{9}{x-3}}=6$.

Suy ra $m\leq 6$.

Vì m nguyên dương suy ra $m\in\{1;2;3;4;5;6\}$. **Chọn B**

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18 **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Xét dấu $f'(x)$ ta được

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $y'=(2x+3)f'(x^2+3x-m)$.

Vì $2x+3>0, \forall x\in(0;2)$. Do đó, để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ thì $f'(x^2+3x-m)\geq 0, \forall x\in(0;2)$ (*).

Đặt $t=x^2+3x-m$. Vì $x\in(0;2)\Rightarrow t\in(-m;10-m)$.

(*) trở thành: $f'(t)\geq 0, \forall t\in(-m;10-m)$.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có: $\left[\begin{array}{l}10-m\leq -3\\ 1\leq -m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\geq 13\\ m\leq -1\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}13\leq m\leq 20\\ -10\leq m\leq -1\end{array}\right.\\ m\in Z\end{cases}$

$\Rightarrow m\in\{-10;-9;..;-1;3;4;..;20\}$.

Dạng toán 13. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn: $f'(x)=(1-x^2)(x-5)$ Hàm số $y=3f(x+3)-x^3+12x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;5)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=(1-x^2)(x-5)$ suy ra $f'(x+3)=\left[1-(x+3)^2\right](x+3-5)$ $=-(x+4)(x+2)(x-2)$.

Mặt khác: $y'=3.f'(x+3)-3x^2+12=-3\left[(x+4)(x+2)(x-2)+(x^2-4)\right]$ $=-3(x-2)(x+2)(x+5)$.

Xét $y'<0 \Leftrightarrow -3(x-2)(x+2)(x+5)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5<x<-2 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y=3f(x+3)-x^3+12x$ nghịch biến trên các khoảng $(-5;-2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+1$ trong đó $g(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+x+2$ nghịch biến trên các khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+1 \Rightarrow f'(1-x)=x(3-x)g(1-x)+1$

Mặt khác: $y'=\left(f(1-x)\right)'+1=-f'(1-x)+1=-\left[x.(3-x).g(1-x)+1\right]+1$

$=-x.(3-x).g(1-x)$

Ta có: $y'<0 \Leftrightarrow -x.(3-x).g(1-x)<0$ (*)

Do $g(x)<0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow g(1-x)<0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x.(3-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<0 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y=f(1-x)+x+2$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=x(2x-1)\cdot(x^2+3)+2$. Hàm số $y=f(3-x)+2x+2019$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(3;5)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=-f'(3-x)+2$.

$y'>0 \Leftrightarrow -f'(3-x)+2>0 \Leftrightarrow f'(3-x)<2 \Leftrightarrow (3-x)\left[2(3-x)-1\right]\left[(3-x)^2+3\right]+2<2$

$\Leftrightarrow (3-x)(5-2x)\left[(3-x)^2+3\right]<0$

Vì $\left[(3-x)^2+3\right]>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $y'>0$ khi và chỉ khi $(3-x)(5-2x)<0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}<x<3$.

Vậy hàm số $y=f(3-x)+2x+2019$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2};3\right)$.

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4)$. Xét hàm số $g(x)=12f(x^2)+2x^6-15x^4+24x^2+2019$. Khẳng định đúng là:

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2\,;-1)$.

B. Hàm số $g(x)$ có hai điểm cực tiểu.

C. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2\,;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D=\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=24xf'(x^2)+12x^5-60x^3+48x=12x\left[2f'(x^2)+x^4-5x^2+4\right]$

$=12x\left[(x^2+1)(x^2-1)(x^2-4)+(x^2-1)(x^2-4)\right]=12x(x^2-1)(x^2-4)(x^2+2)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=4 \\ x^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \\ x=\pm 1 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Qua bảng biến thiên ta có phương án D là phương án đúng.

Câu 52: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)(x-4)$

Hàm số $y=3f(x+2)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Xét $y=3f(x+2)-x^3+3x$.

Cách 1: $y'=3.\left[f'(x+2)+(1-x^2)\right]$

$$\text{Ta có } f'(x+2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\le x+2\le 3 \\ x+2\ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\le x\le 1 \\ x\ge 2 \end{array}\right..$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f'(x+2)\ge 0, \forall x\in(-1;1) \\ 1-x^2>0, \forall x\in(-1;1) \end{cases} \Rightarrow y'>0, \forall x\in(-1;1).$$

Vậy ta chọn đáp án **C.**

Cách 2:

Xét $y=3f\left(x+2\right)-x^3+3x$.

$y'=3.\left[f'\left(x+2\right)+\left(1-x^2\right)\right]$

Ta có $y'\left(\frac{3}{2}\right)=3.\left[f'\left(\frac{7}{2}\right)-\frac{5}{4}\right]<0$ nên loại đáp án A, **D.**

$y'\left(-2\right)=3.\left[f'\left(0\right)-3\right]<0$ nên loại đáp án **B.**

Vậy ta chọn đáp án **C.**

Dạng toán 14. Biết biểu thức hàm số $y=f'\left(x\right)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(u\left(x\right)\right)+h\left(x\right)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 53: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2+2x-3,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-10;20\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2+3x-m\right)+m^2+1$ đồng biến trên $\left(0;2\right)$?

A. 16. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 19.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'\left(t\right)=t^2+2t-3\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\leq -3\\ t\geq 1\end{array}\right.$ $(*)$.

Có $g'\left(x\right)=\left(2x+3\right)f'\left(x^2+3x-m\right)$

Vì $2x+3>0,\forall x\in\left(0;2\right)$ nên $g\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;2\right)\Leftrightarrow g'\left(x\right)\geq 0,\forall x\in\left(0;2\right)$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2+3x-m\right)\geq 0,\forall x\in\left(0;2\right)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+3x-m\leq -3,\forall x\in\left(0;2\right)\\ x^2+3x-m\geq 1,\forall x\in\left(0;2\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+3x\leq m-3,\forall x\in\left(0;2\right)\\ x^2+3x\geq m+1,\forall x\in\left(0;2\right)\end{array}\right.$ $(**)$

Có $h\left(x\right)=x^2+3x$ luôn đồng biến trên $\left(0;2\right)$ nên từ $(**)$ $\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m-3\geq 10\\ m+1\leq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq 13\\ m\leq -1\end{array}\right.$

Vì $\left\{\begin{array}{l}m\in\left[-10;20\right]\\ m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Rightarrow$ Có 18 giá trị của tham số m.

Vậy có 18 giá trị của tham số m cần tìm.

Câu 54: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)e^x$, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $\left[-2019;2019\right]$ để hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(\ln x\right)-mx^2+mx-2$ nghịch biến trên $\left(1;e^2\right)$.

A. 2018. **B.** 2019.

C. 2020. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn B

Trên $\left(1;e^2\right)$ ta có $g'(x)=\frac{1}{x}.f'(\ln x)-2mx+m=\ln x+1-(2x-1)m$

Để hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $\left(1;e^2\right)$ thì $g'(x)=\ln x+1-(2x-1)m\le 0,\forall x\in\left(1;e^2\right)$

$$\Leftrightarrow \ln x+1-(2x-1)m\le 0,\forall x\in\left(1;e^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln x+1}{2x-1}\le m,\forall x\in\left(1;e^2\right)$$

Xét hàm số $h(x)=\frac{\ln x+1}{2x-1}$ trên $\left(1;e^2\right)$, ta có $h'(x)=\frac{-\frac{1}{x}-2\ln x}{(2x-1)^2}<0,\forall x\in\left(1;e^2\right)$, từ đây suy ra $m\ge 1$. Vậy có 2019 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Câu 55: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có $f'(x)=x.(x+1)^3.(x-1)^4.(x-4)^5$. Giá trị của tham số m để hàm số $y=g(x)=f(1-x)+\frac{1}{x^2+mx+m^2+1}$ chắc chắn luôn đồng biến trên $(-3;0)$.

A. $m\in(-2;-1)$. **B.** $m\in(-\infty;-2)$.

C. $m\in[-1;0]$. **D.** $m\in[0;+\infty)$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x^2+mx+m^2+1\ne 0$ (luôn đúng vì $x^2+mx+m^2+1=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2+\frac{3m^2}{4}+1>0$)

$$g'(x)=-f'(1-x)-\frac{2x+m}{\left(x^2+mx+m^2+1\right)^2}$$

Đặt $t=1-x;x\in(-3;0)\Rightarrow t\in(1;4)\Rightarrow -f'(1-x),x\in(-3;0)$ chính là $-f'(t),t\in(1;4)$. Do đó $-f'(t)>0,\forall t\in(1;4)\Leftrightarrow -f'(1-x)>0,\forall x\in(-3;0)$

Ycbt $\Leftrightarrow -\frac{2x+m}{\left(x^2+mx+m^2+1\right)^2}\ge 0,\forall x\in(-3;0)\Leftrightarrow 2x+m\le 0,\forall x\in(-3;0)$

$\Leftrightarrow m\le -2x,\forall x\in(-3;0)\Leftrightarrow m\le \min\limits_{[-3;0]}(-2x)\Leftrightarrow m\le 0$. Vậy $m\in[0;+\infty)$

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-20;20)$ để hàm số $g(x)=f(x+1)-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 20. **B.** 19. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x)-m$.

Hàm số $g(x)=f(x+1)-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow g'(x)\ge 0\ \forall x$.

$$\Leftrightarrow f'(x+1)\ge m\ \ \forall x\Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\ge m\ \ \forall x\Leftrightarrow \min_{\mathbb{R}}\left(\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right)\ge m\ \ (*).$$

Đặt $h(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Ta có $h'(x)=\dfrac{-1-2x}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Cho $h'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow h\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{5}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$					
$h(x)$	-1	↗	$\sqrt{5}$	↘	1

Từ bảng biến thiên ta thấy $(*)\Leftrightarrow m\le -1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in(-20;20)$ nên $m\in\{-19;-18;-1\}$.

Câu 57: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-2)$. Tìm m để hàm số $y=g(x)=f(x+2)-mx$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

A. $m\le\dfrac{-9}{4}$. **B.** $-\dfrac{9}{4}\le m\le 10$. **C.** $m\ge\dfrac{-9}{4}$. **D.** $m\ge 10$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=g(x)=f(x+2)-mx$. Suy ra $g'(x)=f'(x+2)-m$.

Để hàm số $y=g(x)$ đồng biến $\forall x\in(-1;2)$ thì $g'(x)\ge 0\ \ \forall x\in(-1;2)$.

Hay $f'(x+2)\ge m\ \ \forall x\in(-1;2)\Leftrightarrow m\le f'(x+2)\ \ \forall x\in(-1;2)\Leftrightarrow m\le x(x+3)\ \forall x\in(-1;2)$.

$m \le \underset{x\in(-1;2)}{Min}\left(x^2+3x\right)$. Đặt $h(x)=x^2+3x$, $h'(x)=2x+3, h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3}{2}$.

Ta có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty \quad -1 \quad -\frac{3}{2} \quad 2 \quad +\infty$
$h'(x)$	- 0 +
$h(x)$	$-2 \quad 10$ $-\frac{9}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m \le -\frac{9}{4}$. Đáp án **A.**

Câu 58: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=1-x^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x^2+2x\right)+2m\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

A. 8.　　　　**B.** 7.　　　　**C.** 9.　　　　**D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=g\left(x\right)=f\left(x^2+2x\right)+2m\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$. Suy ra $g'\left(x\right)=\left(2x+2\right)f'\left(x^2+2x\right)+\frac{2m\left(x+1\right)}{x^2}$

.

Để hàm số $y=g\left(x\right)$ nghịch biến $\forall x\in\left(1;+\infty\right)$ thì $g'\left(x\right)\le 0\quad \forall x\in\left(1;+\infty\right)$.

Hay $\left(2x+2\right)\left[f'\left(x^2+2x\right)+\frac{m}{x^2}\right]\le 0\ \ \forall x\in\left(1;+\infty\right)\Leftrightarrow f'\left(x^2+2x\right)+\frac{m}{x^2}\le 0\ \ \forall x\in\left(1;+\infty\right)$. (vì $2x+2>0\ \ \forall x\in\left(1;+\infty\right)$).

Do đó $1-\left(x^2+2x\right)^2+\frac{m}{x^2}\le 0\ \ \forall x\in\left(1;+\infty\right)\Leftrightarrow m\le\left[x^2\left(x^2+2x\right)^2-x^2\right]\ \ \forall x\in\left(1;+\infty\right)$

Đặt $h\left(x\right)=x^2\left(x^2+2x\right)^2-x^2$, $h'\left(x\right)=2x\left(3x^5+4x^4+6x^3+8x^2-1\right), h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=0$

Phương trình $3x^5+4x^4+6x^3+8x^2-1=0$ không có nghiệm $x>1$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$h'\left(x\right)$	0 +
$h\left(x\right)$	8 0

Từ bảng biến thiên ta thấy $m\le 8$. Mà $m\in\mathbb{Z}_+$. Suy ra m có 8 giá trị.

Dạng toán 15. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+f(v(x))+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 16. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+f(v(x))+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 17. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm $f'(x)=(x+2)(x^2-9)(x^4-16)$ trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=\left[f(2x-x^2)\right]^{2019}$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=(x+2)(x^2-9)(x^4-16)=(x-3)(x-2)(x+3)(x+2)^2(x^2+4)$.

$g'(x)=2019.\left[f(2x-x^2)\right]^{2018}\left[f(2x-x^2)\right]'=2019.\left[f(2x-x^2)\right]^{2018}(2-2x)f'(2x-x^2)$

$=2019\left[f(2x-x^2)\right]^{2018}(2-2x)(2x-x^2-3)(2x-x^2-2)(2x-x^2+3)(2x-x^2+2)^2\left[(2x-x^2)^2+4\right]$

$=(1-x)(2x-x^2+3)A$

Trong đó:

$A=2.2019\left[f(2x-x^2)\right]^{2018}(2x-x^2+2)^2(x^2-2x+3)(x^2-2x+2)\left[(x^2-2x)^2+4\right]\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Khi đó $g'(x)\ge 0\Rightarrow(1-x)(2x-x^2+3)\ge 0\Leftrightarrow x\in[-1;1]\cup[3;+\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=g(x)=\left[f(2x-x^2)\right]^{2019}$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(x)=(x-2)(x+5)(x+1)$ và $f(-5)=f(2)=1$. Hàm số $g(x)=\left[f(x^2)\right]^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty;0)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

C. $(0;+\infty)$. **D.** $\left(-\sqrt{2};0\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Lời giải

NHÓM TOÁN VD – VDC

Chọn D

Từ giả thiết ta có $f'(x)=(x-2)(x+5)(x+1) \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-5 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $y=f(x)$

x	$-\infty$		-5		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT suy ra $f(x)>0 \ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $g(x)=\left[f\left(x^2\right)\right]^2$

$g'(x)=\left(\left(f'\left(x^2\right)\right)^2\right)'=4x.f'\left(x^2\right)f\left(x^2\right)=4x\left(x^2-2\right)\left(x^2+5\right)\left(x^2+1\right)f\left(x^2\right)$

Do $f(x)>0 \ \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f\left(x^2\right)>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

BBT của $g(x)=\left[f\left(x^2\right)\right]^2$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT trên ta chọn đáp án **D.**

Dạng toán 18. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 19. Biết biểu thức hàm số $y=f'(u(x))$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'\left(-2x+\dfrac{7}{2}\right)=3x^2-12x+9$. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây.

A. $\left(\frac{1}{4};\frac{9}{4}\right)$.   **B.** $\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.

C. $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.   **D.** $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta cần giải bất phương trình $f'(x)<0$.

Từ $f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)=3x^2-12x+9 \Rightarrow f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)<0 \Leftrightarrow 1<x<3$.

Đặt $t=-2x+\frac{7}{2} \Rightarrow x=\frac{7-2t}{4}$. Khi đó ta có $f'(t)<0 \Leftrightarrow 1<\frac{7-2t}{4}<3 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}<t<\frac{3}{2}$.

Vậy hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên R và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2018$ với $g(x)<0, \forall x \in R$.
Khi đó hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$.   **B.** $(0;3)$.   **C.** $(-\infty;3)$.   **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=h(x)=f(1-x)+2018x+2019$

Ta có $h'(x)=-f'(1-x)+2018=-x(3-x)g(1-x)$

Vì $g(x)<0, \forall x \in R$ nên $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

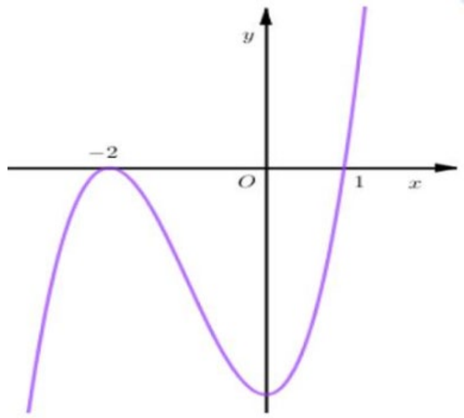
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

NHÓM TOÁN VD – VDC

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(3x+5)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)$ nghịch trên khoảng nào?



A. $(-\infty;8)$.   **B.** $\left(-\frac{7}{3};+\infty\right)$.   **C.** $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$.   **D.** $(-\infty;10)$.

Lời giải

Chọn A

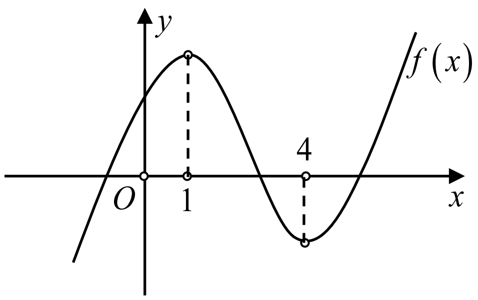
Đặt $x=3t+5$. Khi đó $g(t)=f(3t+5)\Rightarrow g'(t)=3f'(3t+5)$.

Ta có $g'(t)<0\Leftrightarrow f'(3t+5)<0\Leftrightarrow t<1$.

Khi đó $f'(x)<0\Leftrightarrow \frac{x-5}{3}<1\Leftrightarrow x<8$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;8)$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $f(3x-2)$ nghịch biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$. Khi đó giá trị lớn nhất của $\beta-\alpha$ là:



A. 9.   **B.** 3.   **C.** 6.   **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

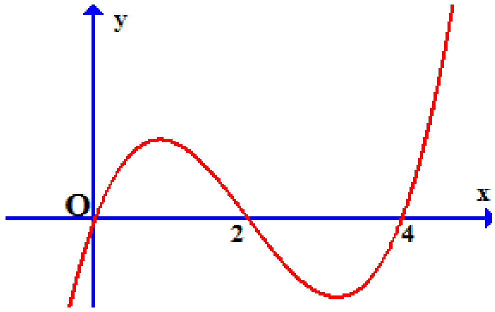
Ta có: $y=f(3x-2)\Rightarrow y'=3.f'(3x-2)$.

Hàm số $y=f(3x-2)$ nghịch biến $\Leftrightarrow y'\le 0\Leftrightarrow 3.f'(3x-2)\le 0\Leftrightarrow f'(3x-2)\le 0$.

$\Leftrightarrow 1 \le 3x - 2 \le 4 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2$.

Vậy khoảng $(\alpha;\beta)$ lớn nhất là $(1;2)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(2-x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-2;4)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x = 2 - t$ ta có $y = f(2-t) \Rightarrow y' = -f'(2-t)$.

$y' > 0 \Leftrightarrow f'(2-t) < 0 \Leftrightarrow 2 < t < 4$ hay

Khi đó $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 < 2 - x < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 0$.

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng $(-2;0)$.

Dạng toán 20. Biết biểu thức hàm số $y = f'(u(x))$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 8: Cho hàm số $g(x) = f(5-x)$ có đạo hàm $g'(x) = (5-x)(2-x)^2\left[x^2 - (m+10)x + 5m + 41\right]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = -f'(5-x) \Rightarrow f'(5-x) = -g'(x)$. Suy ra

$$f'(5-x) = -g'(x) = (x-5)(2-x)^2\left[x^2 - (m+10)x + 5m + 41\right]$$

$$\Leftrightarrow f'(5-x) = (x-5)\left((5-x)-3\right)^2\left[(5-x)^2 + m(5-x) + 16\right]$$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ khi và chỉ khi $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in(-\infty;-1)$

(Dấu "$=$" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm)

$\Leftrightarrow -x(x-3)^2(x^2+mx+16)\geq 0,\ \forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow x^2+mx+16\geq 0,\ \forall x\in(-\infty;-1)$ (vì $x<0$ và $(x-3)^2>0, \forall x\in(-\infty;-1)$)

$\Leftrightarrow m\leq \dfrac{-x^2-16}{x},\ \forall x\in(-\infty;-1) \Leftrightarrow m\leq \min\limits_{(-\infty;-1)} h(x)$

Với $h(x)=\dfrac{-x^2-16}{x}=-x-\dfrac{16}{x}\geq 2.\sqrt{(-x).\left(\dfrac{-16}{x}\right)}=8$, dấu "=" xảy ra khi $x=-4$.

$\Rightarrow \min\limits_{(6;+\infty)} h(x)=8 \ \Rightarrow m\leq 8$, kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta suy ra $m\in\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn.

Dạng toán 21. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 22. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 23. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 24. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 25. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán không chứa tham số.**

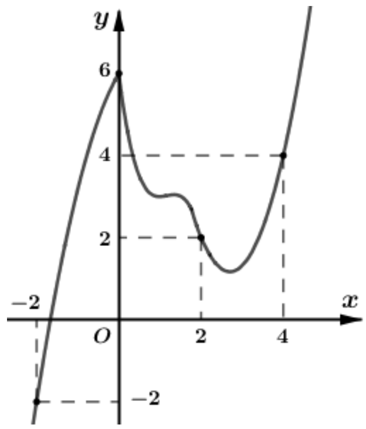
Dạng toán 26. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán chứa tham số.**

NHÓM TOÁN VD – VDC

PHẦN 3: Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$

Dạng toán 27. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

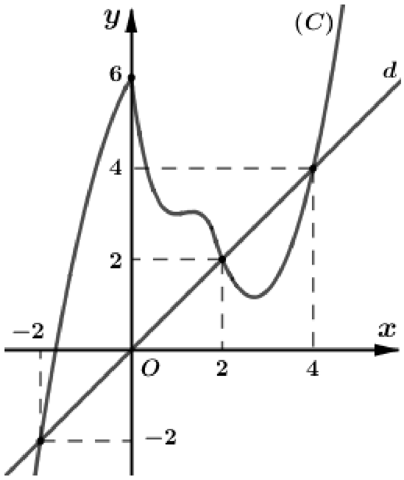
A. $(-\infty; -2)$. **B.** $(-2; 2)$. **C.** $(2; 4)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $d: y = x$ (như hình vẽ bên dưới).



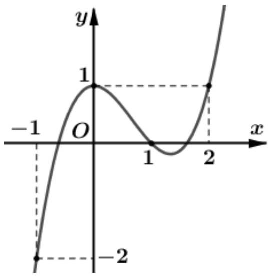
Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

$\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-2;2)$ và $(4;+\infty)$. So sánh 4 đáp án **Chọn B**

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

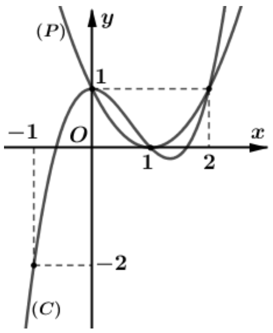
A. $(-1;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(x)-x^2+2x-1$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=(x-1)^2$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $f'(x)$ và parabol $(P): y=(x-1)^2$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

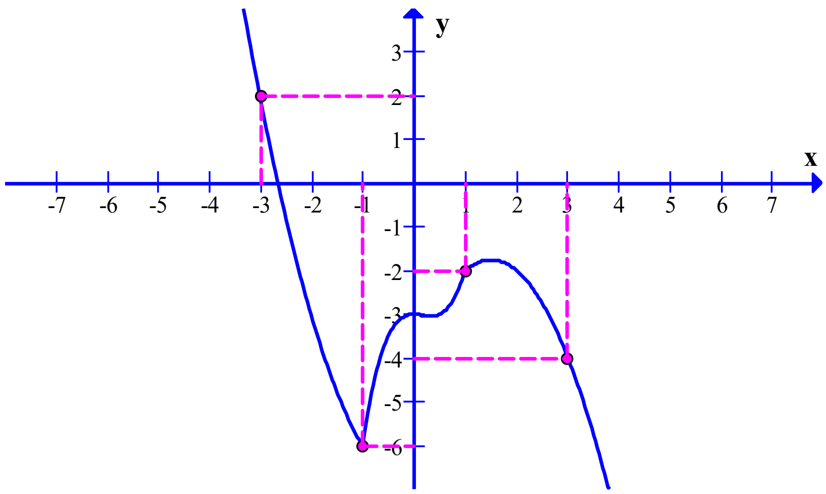
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **Chọn D**

Lưu ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty;0)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y=(x-1)^2$ nên $g'(x)$ mang dấu $-$.

Nhận thấy các nghiệm $x=0, x=1, x=2$ là các nghiệm đơn nên qua $g'(x)$ đổi dấu.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-\infty;3)$.

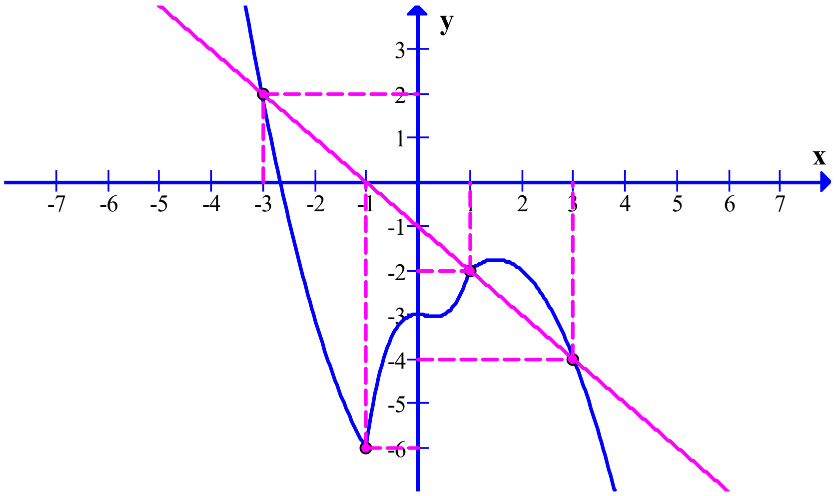
Lời giải

Chọn B

Tập xác định của $g(x)$ là $\mathbb{R}$. Ta có $g'(x)=2\left[f'(x)+x+1\right]$.

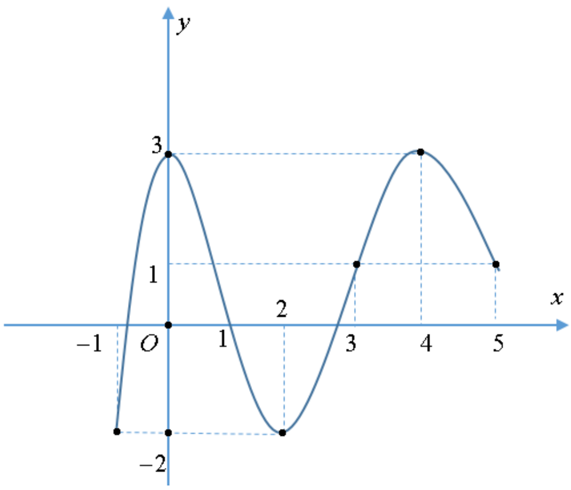
Hàm số đồng biến khi và chỉ khi $f'(x)\geq -x-1$, (dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm).

Vẽ chung đồ thị $y=f'(x)$ và $y=-x-1$ trên cùng một hệ trục như sau:



Từ đồ thị ta có $f'(x)\geq -x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -3 \\ 1\leq x\leq 3 \end{array}\right.$. **Chọn B**

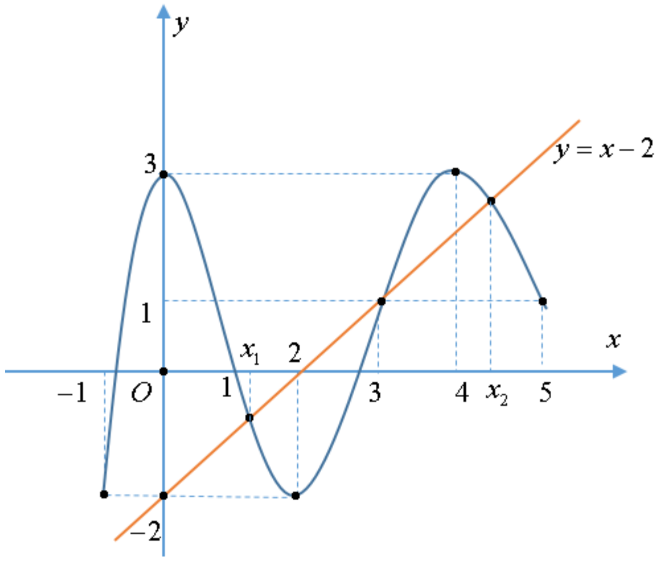
Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$xác định và liên tục trên $[-1;5]$có đồ thị của hàm $y=f'(x)$ được cho như hình bên dưới. Hàm số $g(x)=-2f(x)+x^2-4x+4$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn C



Xét hàm số $g(x)=-2f(x)+x^2-4x+4$ trên $[-1;5]$ ta có:

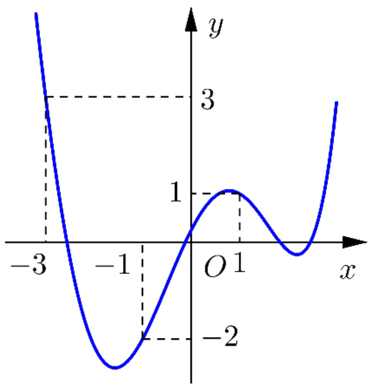
$$g'(x)=-2f'(x)+2x-4;\ g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(0;\,2) \\ x=3 \\ x=x_2\in(4;\,5) \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	-1	0	x_1	2	3	4	x_2	5
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Xét hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2018$. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-2)$ **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

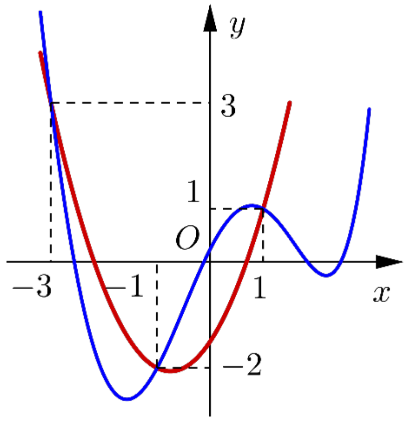
Chọn C

NHÓM TOÁN VD – VDC

Ta có: $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = f'(x) - \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

Ta vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$



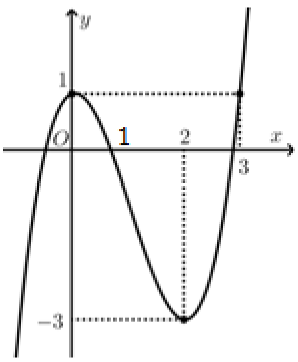
Dựa nào đồ thị $\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dạng toán 28. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Các giá trị của m để hàm số $y = f(x) + (m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$ là



A. $m > 4$. **B.** $m \le 4$. **C.** $m \ge 4$. **D.** $0 > m > 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=f\left(x\right)+\left(m-1\right)x\Rightarrow y'=f'\left(x\right)+m-1$.

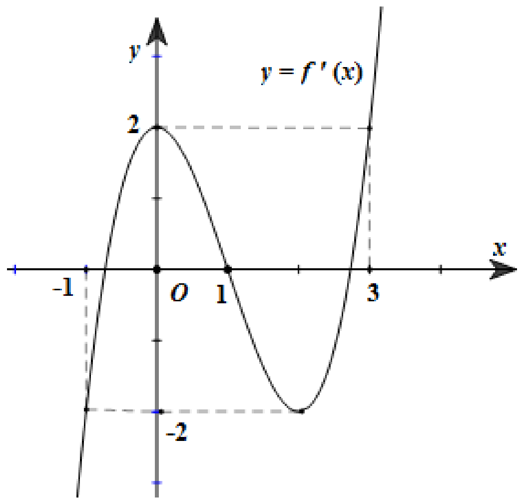
Hàm số $y=f\left(x\right)+\left(m-1\right)x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;3\right)$

$\Leftrightarrow\ y'\geq 0,\ \forall x\in\left(0;3\right)\Leftrightarrow f'\left(x\right)+m-1\geq 0,\forall x\in\left(0;3\right)$

$\Leftrightarrow -m+1\leq f'\left(x\right),\forall x\in\left(0;3\right)$

$\Leftrightarrow -m+1\leq \min\limits_{x\in\left(0;3\right)} f'\left(x\right)\Leftrightarrow -m+1\leq -3\Leftrightarrow m\geq 4$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Đặt $g\left(x\right)=f\left(x-m\right)-\frac{1}{2}\left(x-m-1\right)^2+2019$ với m là tham số thực. Gọi S là

tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g\left(x\right)$ đồng biến trên khoản $\left(5;6\right)$.

Tổng các phần tử của S bằng:

A. 4.   **B.** 11.   **C.** 14.   **D.** 20.

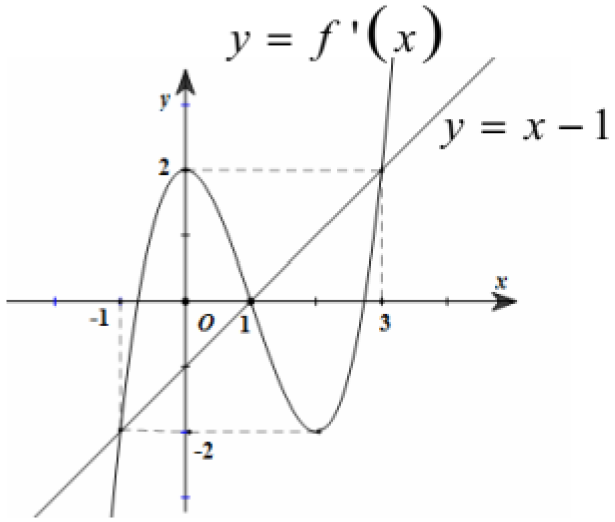
Lời giải

Chọn C

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x-m\right)-\left(x-m-1\right)$

Đặt $h\left(x\right)=f'\left(x\right)-\left(x-1\right)$. Từ đồ thị $y=f'\left(x\right)$ và đồ thị $y=x-1$ trên hình vẽ ta suy ra

$h\left(x\right)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\leq x\leq 1\\ x\geq 3\end{array}\right.$



Ta có $g'(x)=h(x-m)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\le x-m\le 1\\ x-m\ge 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1\le x\le m+1\\ x\ge m+3\end{array}\right.$

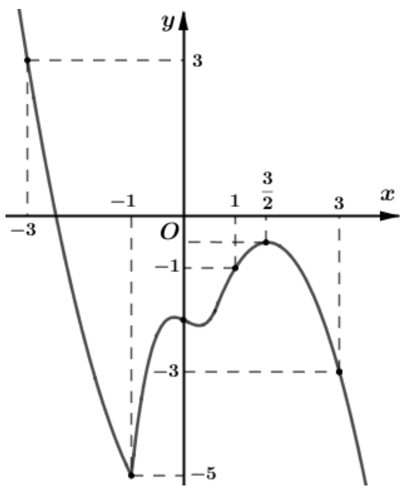
Do đó hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(m-1;m+1)$ và $(m+3;+\infty)$

Do vậy, hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1\le 5\\ m+1\ge 6\end{cases}\\ m+3\le 5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5\le m\le 6\\ m\le 2\end{array}\right.$

Do m nguyên dương nên $m\in\{1;2;5;6\}$, tức $S=\{1;2;5;6\}$

Tổng các phần tử của S bằng 14.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Đặt hàm số $g(x)=f(1+m-x)+\frac{x^2}{2}-x-mx$, m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;0]$ để hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$?

A. 2016. **B.** 2017. **C.** 2019. **D.** 2020.

Lời giải.

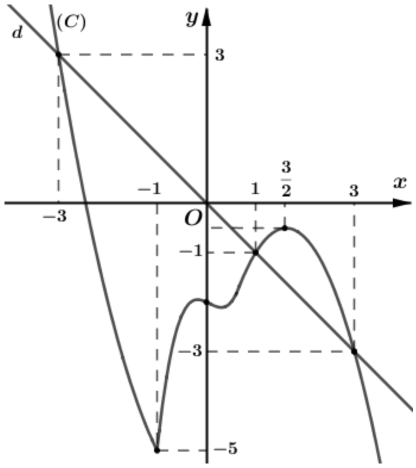
NHÓM TOÁN VD – VDC

Ta có $g'(x) = -f'(m+1-x) + x - 1 - m$.

Ta có $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(m+1-x) > x - 1 - m$.

Đặt $t = m+1-x$, bất phương trình trở thành $f'(t) > -t$.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = -x$ (hình vẽ bên dưới) ta thấy đường thẳng $y = -x$ cắt đồ thị hàm số $f'(x)$ lần lượt tại ba điểm $x = -3$; $x = 1$; $x = 3$.



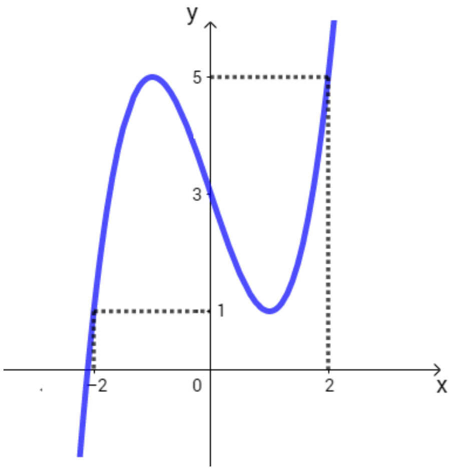
Quan sát đồ thị ta thấy $f'(t) > -t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -3 \\ 1 < t < 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m+1-x < -3 \\ 1 < m+1-x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4+m \\ -2+m < x < m \end{array}\right.$

Suy ra hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(4+m; +\infty)$ và $(-2+m; m)$.

Để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$ thì $\left[\begin{array}{l} 4+m \leq -2 \\ \left\{\begin{array}{l} -2+m \leq -2 \\ m \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -6 \\ m = 0 \end{array}\right.$

Vậy trên đoạn $[-2020; 0]$ có tất cả 2016 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}(x^2 + m^2) - 3(x+m)$. Khi đó khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. Với mọi giá trị của tham số m thì $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

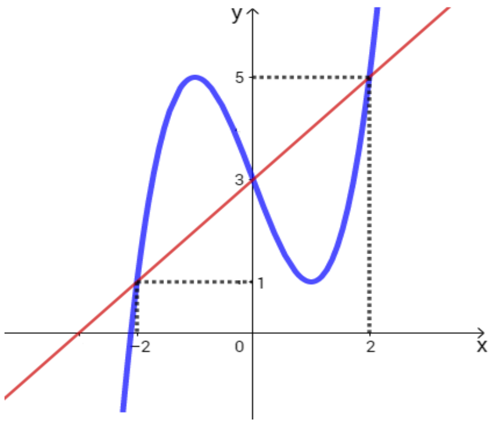
B. Chỉ có đúng 1 giá trị của tham số m để $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

C. Với mọi giá trị của tham số m thì $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

D. Chỉ có đúng 1 giá trị của tham số m để $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C



Với mọi giá trị của tham số m ta luôn có: $g'(x) = f'(x) - x - 3$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

NHÓM TOÁN VD – VDC

Bảng biến thiên:

x		-2		0		2	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$

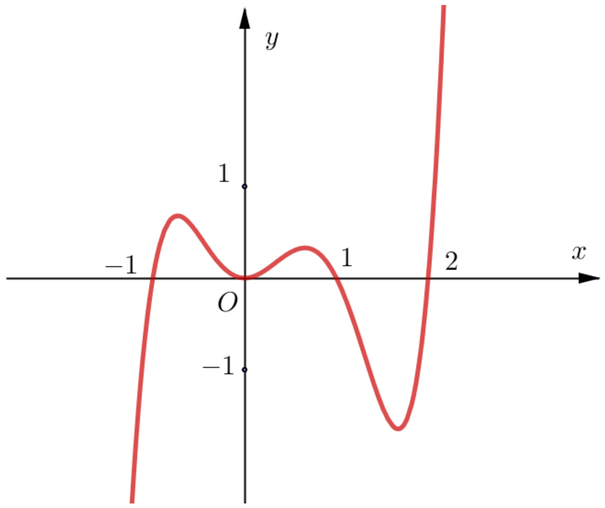
$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Dạng toán 29. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

A. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(0;\sqrt{3}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

C. $\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(0;+\infty\right)$.



Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)\Rightarrow y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x^2+1}=-1\\ \sqrt{x^2+1}=0\\ \sqrt{x^2+1}=1\\ \sqrt{x^2+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x^2+1}=1\\ \sqrt{x^2+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2+1=1\\ x^2+1=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\sqrt{3}\\ x=\sqrt{3}\end{array}\right.$$

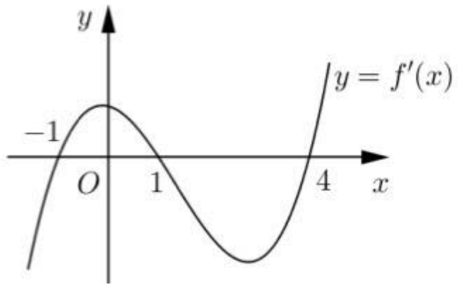
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Vậy hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

NHÓM TOÁN VD – VDC

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$.Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng:



A. $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-\infty;2)$.

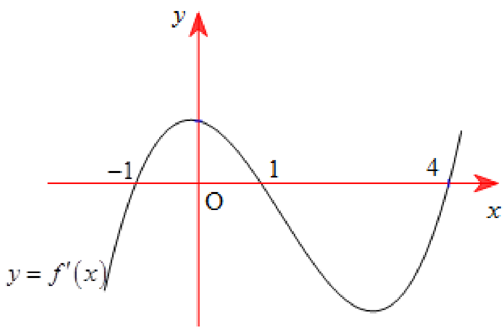
Lờigiải

Chọn C

Ta có: $\left(f(2-x)\right)'=(2-x)'.f'(2-x)=-f'(2-x)$

Hàm số đồng biến khi $\left(f(2-x)\right)'>0 \Leftrightarrow f'(2-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-x<-1\\1<2-x<4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\-2<x<1\end{array}\right.$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(1;2)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=f(x^2)$.

$g'(x)=2x.f'(x^2)$.

Cách 1:Hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0$ (dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm) $\Leftrightarrow x.f'(x^2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ f'(x^2)\ge 0\end{cases}(1)\\ \begin{cases}x\le 0\\ f'(x^2)\le 0\end{cases}(2)\end{array}\right.$.

$(1)\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ f'(x^2)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}-1\le x^2\le 1\\ x^2\ge 4\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}-1\le x\le 1\\ x\le -2\\ x\ge 2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le x\le 1\\ x\ge 2\end{array}\right.$.

$(2)\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ f'(x^2)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x^2\le -1((\text{loại}))\\ 1\le x\le 4\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x\le -1\\ x\ge 1\end{array}\right.\\ -2\le x\le 2\end{cases} \Leftrightarrow -2\le x\le -1$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;-1),(0;1),(2;+\infty)$.

Cách 2:

Dựa vào đồ thị có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\\ x=4\end{array}\right.$.

Chọn $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4)$.

$\Rightarrow g'(x)=2x(x^2+1)(x^2-1)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 1\\ x=\pm 2\end{array}\right.$.

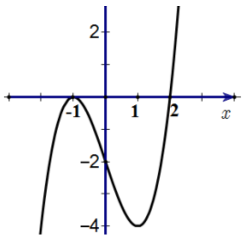
Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;-1),(0;1),(2;+\infty)$.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên R và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x^2-2x-1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

NHÓM TOÁN VD – VDC



A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x)=(2x-2).f'(x^2-2x-1)$.

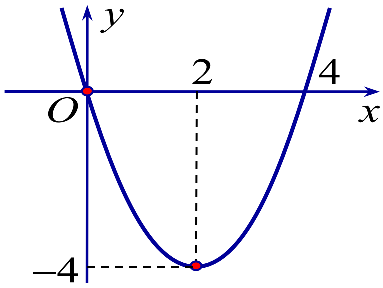
Lại có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-1=-1 \\ x^2-2x-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=2; x=3 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(-x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(-1;\frac{-1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{-1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$ và $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 4 \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x) = f(-x - x^2)$ có $g'(x) = (-1 - 2x) f'(-x - x^2)$

Để hàm số $g(x)$ nghịch biến thì $g'(x) < 0 \Rightarrow (-1 - 2x) f'(-x - x^2) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 - 2x < 0 \\ f'(-x - x^2) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -1 - 2x > 0 \\ f'(-x - x^2) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \dfrac{-1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} -x - x^2 < 0 \\ -x - x^2 > 4 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{-1}{2} \\ -x - x^2 > 0 \\ -x - x^2 < 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \dfrac{-1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x < -1, x > 0 \\ x \in \varnothing \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{-1}{2} \\ x \in \mathbb{R} \\ -1 < x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ -1 < x < \dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \dfrac{-1}{2}\right)$ và $(0; +\infty)$.

Vậy B là đáp án đúng.

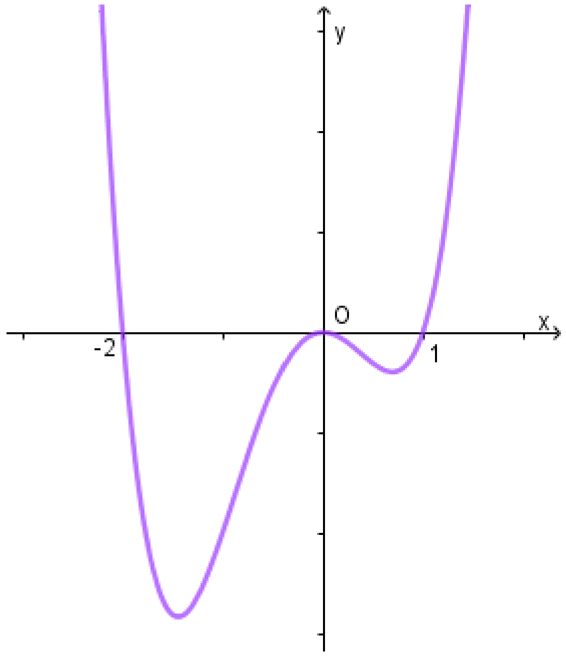
Dạng toán 30. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 31. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 32. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 33. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + f(v(x)) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hỏi hàm số $g(x)=f(x+1)+f(2-x)-x^2+6x-3$ đồng biến trên khoảng nào cho dưới đây

A. $(-\infty;0)$ **B.** $(0;3)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(3;+\infty)$

Lời giải

Chọn C

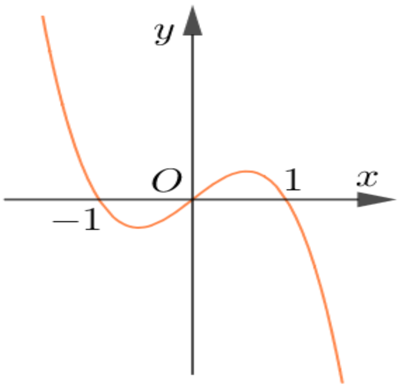
Ta có $g'(x)=f'(x+1)-f'(-2-x)+6-2x\geq 0\forall x\in K$ ta chỉ cần chọn x sao cho

$$\begin{cases}f'(x+1)\geq 0\\ f'(2-x)\leq 0\\ 6-2x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+1\geq 1\\ x+1\leq -2\end{array}\right.\\ -2\leq 2-x\leq 1\\ x\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow 1\leq x\leq 3$$ đối chiếu đáp án ta tìm được đáp án C

Dạng toán 34. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+f(v(x))+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 35. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=\left[f(2x-1)\right]^3$ nghịch biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(-1;0)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$

Lời giải

Chọn C

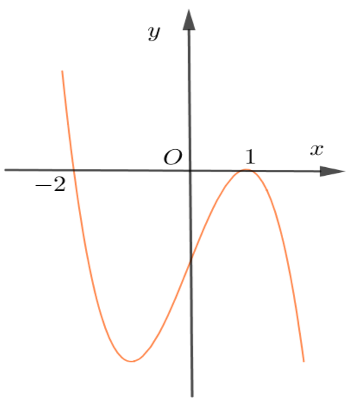
Ta có $g'(x)=6f^2(2x-1).f'(2x-1)$

Do $6f^2(2x-1)\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên để hàm số nghịch biến thì $f'(2x-1)\leq 0$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có

Để $f'(2x-1)\leq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1\geq 1\\ -1\leq 2x-1\leq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 1\\ 0\leq x\leq \frac{1}{2}\end{array}\right.$

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=\left[f(1-x)\right]^{2019}$ nghịch biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(-1;5)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải

Chọn D

NHÓM TOÁN VD – VDC
NHÓM TOÁN VD – VDC

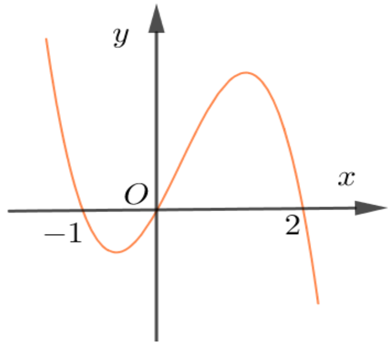
Ta có $g'(x) = -2019 f^{2018}(1-x).f'(1-x)$

Do $-2019 f^{2018}(1-x) \le 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên để hàm số nghịch biến thì $f'(1-x) \ge 0$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có

Để $f'(1-x) \ge 0 \Rightarrow 1 - x \le -2 \Leftrightarrow x \ge 3$.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-1) = f(2) = 0$



Hàm số $g(x) = \left[f(x^2 - 3)\right]^2$ đồng biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(1;2)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(-2;-1)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = 4xf(x^2-3).f'(x^2-3)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Do $f(-1) = f(2) = 0$ nên $f(x^2-3) \le 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ để hàm số đồng biến thì $x.f'(x^2-3) \le 0$

TH1: $x \ge 0$ thì $f'(x^3-3) \le 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le x^2 - 3 \le 0 \\ x^2 - 3 \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{3} \le x \le -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \le x \le \sqrt{3} \\ x \ge \sqrt{5} \\ x \le -\sqrt{5} \end{array}\right.$

NHÓM TOÁN VD – VDC

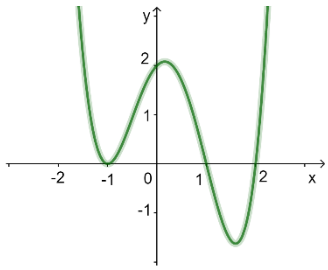
Vì $x \geq 0$ nên $\left[\begin{array}{l}\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3} \\ x \geq \sqrt{5}\end{array}\right.$

TH2: $x \leq 0$ thì $f'\left(x^3-3\right) \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}0 \leq x^2-3 \leq 2 \\ x^2-3 \leq -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\sqrt{5} \leq x \leq -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\end{array}\right.$

Vì $x \leq 0$ nên $\left[\begin{array}{l}-\sqrt{5} \leq x \leq -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \leq x \leq 0\end{array}\right.$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{5};-\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{2};0\right)$, $\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{5};+\infty\right)$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ. Hàm số $y=g(x)=\left[f(x-2)\right]^3$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây



A. $(1;2)$ **B.** $(3;4)$ **C.** $(-\infty;-1)$ **D.** $(4;+\infty)$

Lời giải

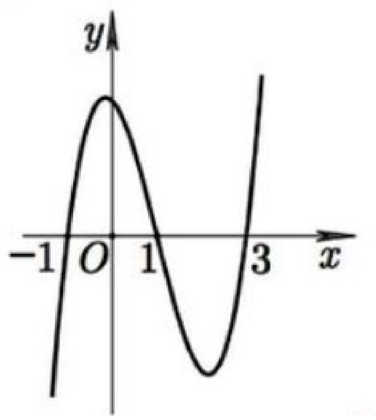
Chọn B

Ta có $g'(x)=3\left[f(x-2)\right]^2 f'(x-2)$, hàm số $y=g(x)=\left[f(x-2)\right]^3$ nghịch biến khi và chỉ khi $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x-2 \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4$

Dạng toán 36. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 37. Biết đồ thị hàm số $y=f'(u(x))$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(2x+\frac{3}{2}\right)$ như hình vẽ bên.



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta cần giải bất phương trình $y' = f'(x) > 0$.

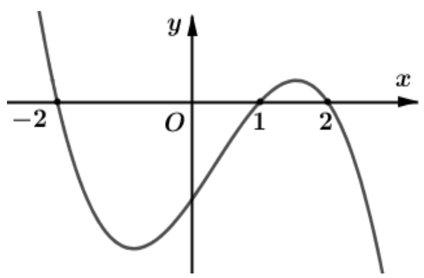
Dựa vào đồ thị $y = f'\left(2x+\dfrac{3}{2}\right)$. Ta có $f'\left(2x+\dfrac{3}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<1 \\ x>3 \end{array}\right.$ $(*)$

Đặt $t = 2x+\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}(2x-3)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f'(t) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<\dfrac{2t-3}{4}<1 \\ \dfrac{2t-3}{4}>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2}<t<\dfrac{7}{2} \\ t>\dfrac{15}{2} \end{array}\right.$.

Do đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{15}{2};+\infty\right)$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(3x-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty;-6)$. **B.** $(1;5)$. **C.** $(2;6)$. **D.** $(-\infty;-7)$.

Lời giải

NHÓM TOÁN VD – VDC

Chọn D

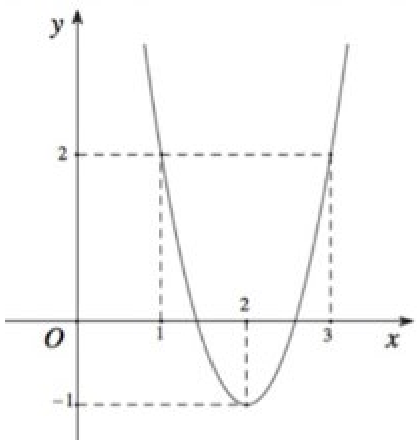
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(3x-1)$ ta có: $f'(3x-1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ 1 < x < 2 \end{array}\right.$

Đặt $t = 3x - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{t+1}{3}$

Suy ra: $f'(t) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{t+1}{3} < -2 \\ 1 < \dfrac{t+1}{3} < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+1 < -6 \\ 3 < t+1 < 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -7 \\ 2 < t < 5 \end{array}\right.$

Do đó: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-7)$ và $(2;5)$

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'\left(-2x + \dfrac{7}{2}\right) + 2$ như hình bên



Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{9}{4}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{9}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

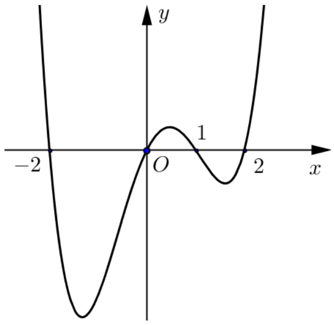
Quan sát đồ thị hàm số $y = f'\left(-2x + \dfrac{7}{2}\right) + 2$ ta có

$f'\left(-2x + \dfrac{7}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow f'\left(-2x + \dfrac{7}{2}\right) + 2 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 3 (*)$ (đồ thị hàm số nằm dưới đường thẳng $y = 2$ khi và chỉ khi $x \in (1;3)$)

Đặt $t = -2x + \dfrac{7}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{7-2t}{4}$ khi đó (*) $\Leftrightarrow f'(t) < 0 \Leftrightarrow 1 < \dfrac{7-2t}{4} < 3 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{2} < t < \dfrac{3}{2}$

điều đó chứng tỏ hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

Câu 31: Cho đồ thị hàm số $y=f'\left(x^3+1\right)$ như hình vẽ. Hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trong khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $\left(-2;2\right)$. **B.** $\left(2;5\right)$. **C.** $\left(5;10\right)$. **D.** $\left(10;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị suy ra $f'\left(x^3+1\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<0\\1<x<2\end{array}\right.$.

Đặt $t=x^3+1\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{t-1}$.

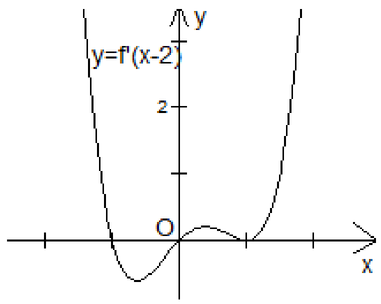
Suy ra $f'\left(t\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<\sqrt[3]{t-1}<0\\1<\sqrt[3]{t-1}<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-8<t-1<0\\1<t-1<8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-7<t<1\\2<t<9\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trong các khoảng $\left(-7;1\right)$ và $\left(2;9\right)$.

Dạng toán 38. Biết đồ thị hàm số $y=f'\left(u\left(x\right)\right)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=f\left(x\right)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 32: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'\left(x-2\right)$ có đồ thị như hình dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-8x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(4;\dfrac{9}{2}\right)$.

A. 1 **B.** 2. **C.** 3 **D.** 4.



Lời giải

Chọn A

Ta có: đồ thị hàm số $y=f'(x-2)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ sang phải hai đơn vị. Khi đó hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Mặt khác: $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)\Rightarrow g'(x)=(2x-8)f'\left(x^2-8x+m\right)$

$g'(x)=(2x-8)f'\left(x^2-8x+m\right)<0\forall x\in(4;\frac{9}{2})$

$$-3\le x^2-8x+m\le -2\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+8x-3\le m;\forall x\in(4;\frac{9}{2})\\ -x^2+8x-2\ge m;\forall x\in(4;\frac{9}{2})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\ge 13\\ m\le 13,75\end{cases}\Leftrightarrow m=13.$$

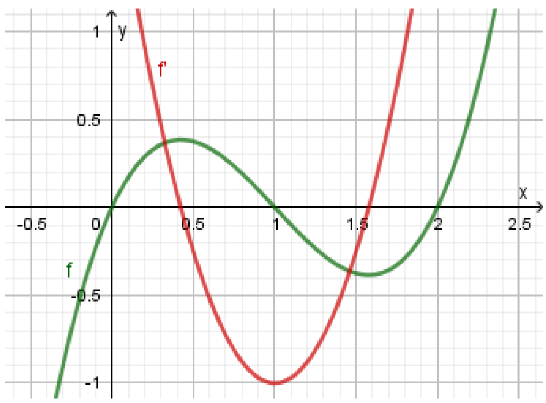
Do đó có 1 giá nguyên của m để $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(4;\frac{9}{2}\right)$.

Dạng toán 39. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 40. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 41. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x),y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên khoảng $(0;2)$, hàm số $y=e^{-x}.f(x)$ có bao nhiêu khoảng đồng biến?



A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

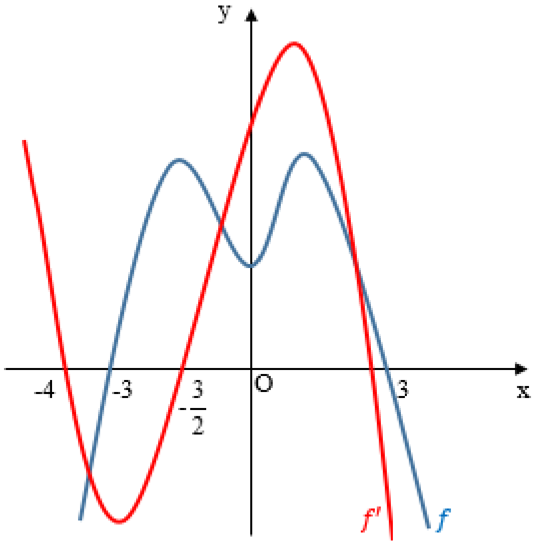
Chọn C

$y=e^{-x}.f(x)\to y'=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)$

Dựa vào đồ thị ta có: $y'=0 \leftrightarrow f'(x)=f(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a, 0<a<\frac{1}{2} \\ x=b, 1<b<\frac{3}{2} \end{array}\right.$

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;a),(b;2)$.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên khoảng $(-4;3)$, hàm số $y=e^{-x+10}f(x)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến?



A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=-e^{-x+10}f(x)+f'(x).e^{-x+10}=e^{-x+10}\left[-f(x)+f'(x)\right]$

Dựa vào đồ thị, ta có: $y'=0 \Leftrightarrow f'(x)=f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a, -4<a<-3 \\ x=b, -\frac{3}{2}<b<0 \\ x=c, 0<c<3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	-4		a		-3		$\frac{-3}{2}$		b		0		c		3
y'		+	0	-		-		-	0	+		+	0	-	

y	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y = e^{-x+10} f(x)$ có hai khoảng nghịch biến $(a,b);(c;3)$

Dạng toán 42. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 43. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 44. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán chứa tham số.**

PHẦN 4: Biết BBT của hàm số $y = f'(x)$

Dạng toán 45. Biết BBT hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Đặt $y = g(x) = f(x) + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

C. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

D. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số $y=g(x)$ là $\mathbb{R}$

Ta có:

$$y=g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y'=g'(x)=f'(x)+x^2-x$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right. ;\ x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $y'=g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2-x		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y'=g'(x)$		Chưa xác định dấu		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của $y'=g'(x)$ suy ra:

Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(1;+\infty)$ mà $(1;2)\subset(1;+\infty)$

nên đáp án B đúng.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R và bảng xét dấu của $y=f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x)=f(x)-\ln\left(x^2+x+1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm $g(x)$ là $D=R$

Ta có $g'(x)=f'(x)-\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Đặt $h(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\Rightarrow h'(x)=\dfrac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

Ta có $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\\ x=\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

Ta có $h(-1)=-1;h(0)=h(1)=1;h\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$.

Từ bảng biến thiên có $h(x)>1,\forall x\in(0;1);f'(x)<0,\forall x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$.

Nên suy ra $f'(x)-h(x)<0,\forall x\in(0;1)\Leftrightarrow g'(x)<0,\forall x\in(0;1)$.

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Từ bảng biến thiên có $h(x)\in(-1;0);f'(x)>0,\forall x\in\left(-1;\dfrac{-1}{2}\right)$.

$\Rightarrow f'(x)-h(x)>0,\forall x\in\left(-1;\dfrac{-1}{2}\right)$. Do đó hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên $\left(-1;\dfrac{-1}{2}\right)$.

Lại có trong các miền $(-\infty;0);(-1;+\infty);(-1;0)$ đều chứa miền $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$ nên loại A,C,**D.**

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $y=f'(x)$ như sau:

x	$-$		-1		1		x		$+$
$f'(x$	$-\infty$	↗	3	↘	-3	↗	3	↗	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(x) - 3x$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(2;2019)$ **B.** $(-2019;-2)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(-1;1)$

Lời giải:

Chọn A

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 3$

Hàm số $y = g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow f'(x) - 3 \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 2.$

Dạng toán 46. Biết BBT hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 38: Cho f(x) có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên y = f'(x) được cho như sau:

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
f'(x)	$+\infty$	↘	5	↗	15	↘	5	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương để hàm số g(x) = f(x) - $\ln(x^2+1)$ - mx đồng biến trên $[-1;1]$.

A. 5 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 7

Lời giải

Chọn C

Ta có: g(x) = f(x) - $\ln(x^2+1)$ - mx có txđ $D = \mathbb{R}$

$g'(x) = f'(x) - \dfrac{2x}{x^2+1} - m$

Hàm số g(x) đồng biến trên $[-1;1] \Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \forall x \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow f'(x)-\dfrac{2x}{x^2+1}-m\geq 0\ \forall x\in[-1;1]$

$\Leftrightarrow m\leq f'(x)-\dfrac{2x}{x^2+1}\forall x\in[-1;1](1)$

$do: f'(x)\geq 5(bbt)\forall x\in[-1;1];\dfrac{2x}{x^2+1}\leq 1\forall x\in[-1;1]$

$\Rightarrow f'(x)-\dfrac{2x}{x^2+1}\geq 4\forall x\in[-1;1]$ dấu "=" xảy ra khi "x=1"

Vậy (1) $\Leftrightarrow m\leq 4$.

Dạng toán 47. Biết BBT hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=g(x)=f(x^2+2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=g'(x)=\left[f(x^2+2x)\right]'=(x^2+2x)'.f'(x^2+2x)=(2x+2).f'(x^2+2x)$.

Ta có $x^2+2x=(x+1)^2-1\geq -1$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ dựa vào bảng xét dấu trên ta có $f'(x^2+2x)\leq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ dấu "=" chỉ xảy ra tại $x=-1$.

Từ đó $y'\geq 0\Leftrightarrow (2x+2).f'(x^2+2x)\geq 0\Leftrightarrow 2x+2\leq 0\Leftrightarrow x\leq -1$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$.

Mặt khác $(-\infty;-2)\subset(-\infty;-1)$ nên phương án **C** thỏa mãn bài toán.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

.

Hàm số $y=f\left(2-e^x\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(0;\ln 3)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=f\left(2-e^x\right)$, hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=-e^x f'\left(2-e^x\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-e^x=-1\\2-e^x=1\\2-e^x=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\ln 3\\x=0\\e^x=-2 \text{ (vô nghiệm)}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y=g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$; $(\ln 3;+\infty)$.

Vậy chọn phương án **D.**

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x)=f\left(|x-2|\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây:.

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn C

- Do $h(x)=f\left(|x|\right)$ là hàm chẵn, đồ thị hàm số $y=h(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng

NHÓM TOÁN VD – VDC

nên từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số

$h(x) = f(|x|)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $h(x) = f(|x|)$ sang phải (theo trục hoành) 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $g(x) = f(|x-2|)$. Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(|x-2|)$:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(|x-2|)$ ta thấy hàm số $g(x) = f(|x-2|)$ nghịch biến trên $(-1;2)$ và $(5;+\infty)$ nên ta chọn đáp án **C.**

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Hàm số $y = f(|f(x)|)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = f(|f(x)|) \Rightarrow g'(x) = f'(|f(x)|).\dfrac{f(x).f'(x)}{|f(x)|}$

Do đó $g'(x)$ không xác định khi $f(x) = 0$ hay $x = 0$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(|f(x)|)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ |f(x)|=1 \\ |f(x)|=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ f(x)=\pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Từ bảng biến thiên của $f(x)$ ta có $|f(x)|\in[0;1],\ \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $f'(|f(x)|)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Từ đó suy ra $g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f(2\cos x+1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$. **B.** $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy các tập hợp trong các đáp án đều là tập con của tập $(0;\pi)$ nên ở bài này ta xét trên khoảng $(0;\pi)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)\geq 0$ và $g'(x)=0$ tại hữu hạn điểm

$\Leftrightarrow -2\sin x.f'(2\cos x+1)\geq 0 \Leftrightarrow f'(2\cos x+1)\leq 0$ (do $\sin x>0,\forall x\in(0;\pi)$)

$\Leftrightarrow 1\leq 2\cos x+1\leq 2 \ \Leftrightarrow 0\leq \cos x\leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}\leq x\leq \frac{\pi}{2}$.

Dạng toán 48. Biết BBT hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ cáo đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như sau

x	-∞		-2		1		2		4		+∞
y'		+	0	+	0	-	0	-	0	+	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(0;2020)$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$?

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2016. **D.** 2015.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=(2x-1).f'\left(x^2-x+m\right)$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)\Leftrightarrow g'(x)\le 0,\forall x\in(-1;0)\quad(*)$

Vì $2x-1<0,\forall x\in(-1;0)$ nên $(*)\Leftrightarrow f'\left(x^2-x+m\right)\ge 0,\forall x\in(-1;0)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x+m\le 1,\forall x\in(-1;0)\\x^2-x+m\ge 4,\forall x\in(-1;0)\end{array}\right.$$

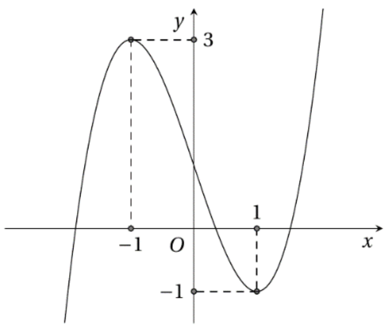
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -x^2+x+1,\forall x\in(-1;0)\\m\ge -x^2+x+4,\forall x\in(-1;0)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-x^2+x+1\ge m,\forall x\in(-1;0)\\-x^2+x+4\le m,\forall x\in(-1;0)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\ge m\\4\le m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -1\\m\ge 4\end{array}\right.$$

Vậy $m\in\{4;5;6;...;2019\}$. Chọn đáp số **C.**

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2+x+m\right)$ nghịch biến trên $(0;1)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

NHÓM TOÁN VD – VDC
NHÓM TOÁN VD – VDC

Ta có $y' = (2x+1)f'\left(x^2+x+m\right)$.

Hàm số $y = f\left(x^2+x+m\right)$ nghịch biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $y' \le 0, \forall x \in (0;1)$.

Vì $2x+1>0, \forall x \in (0,1)$ nên điều này tương đương với

$$f'\left(x^2+x+m\right) \le 0, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+m \ge -1, \forall x \in (0;1) \\ x^2+x+m \le 1, \forall x \in (0;1). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x \ge -1-m, \forall x \in (0;1) \\ x^2+x \le 1-m, \forall x \in (0;1). \end{cases}$$

Ta có hàm số $g(x) = x^2+x$ luôn đồng biến trên $[0;1]$; do đó, ràng buộc trên tương đương với $\begin{cases} -1-m \le g(0) = 0 \\ 1-m \ge g(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy có duy nhất một giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2\left(x^2-2x\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m < 100$ để hàm số $g(x) = f\left(x^2-8x+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

A. 18. **B.** 82. **C.** 83. **D.** 84.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = (x-1)^2\left(x^2-2x\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Xét $g'(x) = (2x-8).f'\left(x^2-8x+m\right)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \ge 0,\ \forall x > 4$

$\Leftrightarrow (2x-8).f'\left(x^2-8x+m\right) \ge 0,\ \forall x > 4$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2-8x+m\right) \ge 0,\ \forall x > 4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+m \le 0,\ \forall x \in (4;+\infty) \\ x^2-8x+m \ge 2,\ \forall x \in (4;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow m \ge 18.$

Vậy $18 \le m < 100$.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2\left(x^2+mx+9\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

NHÓM TOÁN VD – VDC

Từ giả thiết suy ra $f'(3-x)=(3-x)(2-x)^2\left[(3-x)^2+m(3-x)+9\right]$.

Ta có $g'(x)=-f'(3-x)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\ \forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(3-x)\le 0,\ \forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow (3-x)(2-x)^2\left[(3-x)^2+m(3-x)+9\right]\le 0,\ \forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\le \dfrac{(x-3)^2+9}{x-3},\ \forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\le \min\limits_{(3;+\infty)} h(x)$ với $h(x)=\dfrac{(x-3)^2+9}{x-3}$.

Ta có $h(x)=\dfrac{(x-3)^2+9}{x-3}=(x-3)+\dfrac{9}{x-3}\ge 2\sqrt{(x-3).\dfrac{9}{x-3}}=6$.

Vậy suy ra $m\le 6\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+} m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)\left(x^2+mx+5\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $f'\left(x^2\right)=x^4\left(x^2-1\right)\left(x^4+mx^2+5\right)$.

Ta có $g'(x)=2xf'\left(x^2\right)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2xf'\left(x^2\right)\ge 0,\ \forall x>1$

$\Leftrightarrow 2x.x^4\left(x^2-1\right)\left(x^4+mx^2+5\right)\ge 0,\ \forall x>1$

$\Leftrightarrow x^4+mx^2+5\ge 0,\ \forall x>1$

$\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{x^4+5}{x^2},\ \forall x>1$

$\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{(1;+\infty)} h(x)$ với $h(x)=-\dfrac{x^4+5}{x^2}$.

Khảo sát hàm $h(x)=-\dfrac{x^4+5}{x^2}$ trên $(1;+\infty)$ ta được $\max\limits_{(1;+\infty)} h(x)=-2\sqrt{5}$.

Suy ra $m \geq -2\sqrt{5} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^-} m \in \{-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(3x^4 + mx^3 + 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $f'(x^2) = x^2(x^2-1)^2(3x^8 + mx^6 + 1)$.

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0,\ \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow 2xf'(x^2) \geq 0,\ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2x.x^2(x^2-1)^2(3x^8 + mx^6 + 1) \geq 0,\ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^8 + mx^6 + 1 \geq 0,\ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \geq -\dfrac{3x^8+1}{x^6},\ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \geq \max\limits_{(0;+\infty)} h(x)$ với $h(x) = -\dfrac{3x^8+1}{x^6}$.

Khảo sát hàm $h(x) = -\dfrac{3x^8+1}{x^6}$ trên $(0;+\infty)$ ta được $\max\limits_{(0;+\infty)} h(x) = -4$.

Suy ra $m \geq -4 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^-} m \in \{-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$, $(1;3)$ và liên tục tại $x = 1$ nên đồng biến trên $(-1;3)$.

Ta có $g'(x) = f'(x+m)$ và $x \in (0;2) \Leftrightarrow x + m \in (m;m+2)$.

$g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ $\Leftrightarrow (m;2+m) \subset (-1;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ 2+m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$.

NHÓM TOÁN VD – VDC

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên m có 3 giá trị là $m=-1;m=0;m=1$.

Câu 51: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x+m\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;2\right)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-1;1\right)$, $\left(1;3\right)$ và liên tục tại $x=1$ nên đồng biến trên $\left(-1;3\right)$.

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x+m\right)$ và $x\in\left(0;2\right)\Leftrightarrow x+m\in\left(m;m+2\right)$.

$g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;2\right)$ $\Leftrightarrow\left(m;2+m\right)\subset\left(-1;3\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq -1\\2+m\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq m\leq 1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên m có 3 giá trị là $m=-1;m=0;m=1$.

Câu 52: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là một hàm đa thức và có bảng xét dấu của $f'\left(x\right)$ như hình bên dưới:

x	$-\infty$		1		3		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(\sqrt{x-2}+m)$ (1) nghịch biến trên khoảng $\left(11;25\right)$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x-2}+m$, với $x\in\left(11;25\right)$ thì $t\in\left(3+m;5+m\right)$, hàm số trở thành: $y=f(t)$ (2)

Dễ thấy x và t cùng chiều biến thiên nên hàm (1) nghịch biến trên $\left(11;25\right)$ thì hàm (2) nghịch biến trên $\left(3+m;5+m\right)$.

Dựa vào bảng xét dấu của hàm $f'\left(x\right)$ suy ra hàm $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;3\right)$.

Do đó hàm $f(t)$ nghịch biến trên $\left(3+m;5+m\right)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}m+3\geq 1\\m+5\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq -2\\m\leq -2\end{cases}\Leftrightarrow m=-2$$

Vậy có duy nhất một giá trị nguyên của tham số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng toán 49. Biết BBT hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(1 - x^2 + x^3) + x^3 - x^2 - 5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0; \frac{1}{3}\right)$. **B.** $(-\infty; 0)$. **C.** $\left(0; \frac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 2x).f'(1 - x^2 + x^3) + 3x^2 - 2x$.

$\Leftrightarrow g'(x) = (3x^2 - 2x)\left[f'(1 - x^2 + x^3) + 1\right]$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x) \Rightarrow f'(x) \geq -1 \ \forall x \in R$

$\Rightarrow f'(1 - x^2 + x^3) + 1 \geq 0 \ \forall x \in R$

Xét $g'(x) \leq 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$.

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x) = f(3x + 1) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(-2; \frac{2}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1

Ta có $y' = 3f'(3x + 1) - 3x^2 + 3 = 3\left[f'(3x + 1) - x^2 + 1\right]$.

$y' \ge 0 \Leftrightarrow f'(3x+1) \ge x^2 - 1$

Ta có

$x^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$

$f'(3x+1) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+1 \ge 4 \\ 1 \le 3x+1 \le 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ 0 \le x \le \frac{2}{3} \end{array}\right.$

Suy ra với $0 \le x \le \frac{2}{3}$ thì $f'(3x+1) \ge 0 \ge x^2 - 1$.

Suy ra hàm số $y = f(3x+1) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{2}{3}\right)$

Mà $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right) \subset \left(0; \frac{2}{3}\right)$ nên chọn đáp án **A.**

Cách 2

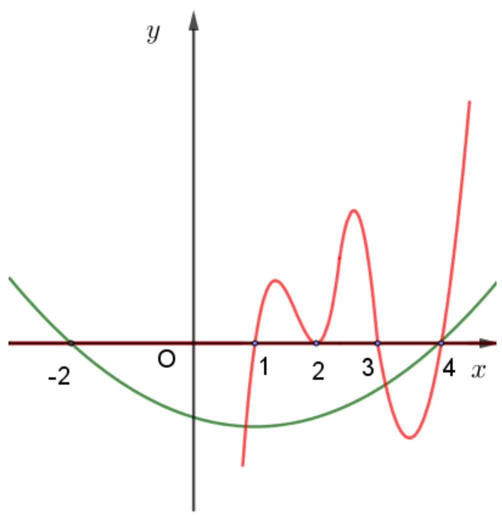
Ta có $y' = 3f'(3x+1) - 3x^2 + 3 = 3\left[f'(3x+1) - x^2 + 1\right]$.

Đặt $t = 3x+1 \Rightarrow x = \frac{t-1}{3}$

$y' \ge 0 \Leftrightarrow f'(3x+1) \ge x^2 - 1 \Leftrightarrow f'(t) \ge \frac{t^2 - 2t - 8}{9}$

Vẽ đồ thị hàm số $g(t) = \frac{t^2 - 2t - 8}{9}$

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị $f'(t)$.



NHÓM TOÁN VD – VDC
NHÓM TOÁN VD – VDC

Từ đồ thị ta có $f'(t) \geq \frac{t^2-2t-8}{9}$ khi $1<t<3 \Leftrightarrow 1<3x+1<3 \Leftrightarrow 0<x<\frac{2}{3}$

Lời bình: Do hàm $f(x)$ chưa biết nên

+ Phương án B sai.

+ Phương án C có thể đúng

+ Phương án D có thể đúng.

Do đó, để chắc chắn chỉ có một phương án đúng thì nên điều chỉnh phương án C, D thành

C. $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $(-\infty;0)$.

ĐỀ XUẤT SỬA LỜI GIẢI THÀNH

Ta có: $g'(x)=3\left[f'(3x+1)+\left(1-x^2\right)\right]$

Có: $f'(3x+1)=0 \Leftrightarrow x=0; x=\frac{1}{3}; x=\frac{2}{3}; x=1$.

$1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$		0		-1		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$f'(3x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$1-x^2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$		Không XĐ được dấu		$+$		$+$		Không XĐ được dấu		Không XĐ được dấu	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$ và $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right) \Rightarrow$ Chọn *A*.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	3 $\searrow$	1	-1	$\nearrow$ 2	4

Hàm số $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-4;-2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Chọn A

Xét $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$. Ta có $g'(x)=-\frac{1}{2}f'\left(1-\frac{x}{2}\right)+1$

Xét $g'(x)\le 0 \Leftrightarrow f'\left(1-\frac{x}{2}\right)\ge 2$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ ta có:

+) TH1: $f'\left(1-\frac{x}{2}\right)>2 \Leftrightarrow 2<1-\frac{x}{2}<3 \Leftrightarrow -4<x<-2$. Do đó hàm số nghịch biến trên $(-4;-2)$

.

+) TH2: $f'\left(1-\frac{x}{2}\right)>2 \Leftrightarrow -1<1-\frac{x}{2}<a \ <0 \Leftrightarrow 2<2-2a<x<4$ nên hàm số chỉ nghịch biến trên khoảng $(2-2a;4)$ chứ không nghịch biến trên toàn khoảng $(2;4)$.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên $(-4;-2)$.

Chú ý: Từ trường hợp 1 ta có thể chọn đáp án A nhưng cứ xét tiếp trường hợp 2 xem thử.

Dạng toán 50. Biết BBT hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 51. Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+f(v(x))+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 52. Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+f(v(x))+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 53. Biết BBT hàm số $y=f'\left(x\right)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g\left(x\right)=\left[f\left(u\left(x\right)\right)\right]^k$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 56: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Biết $f\left(-2\right)=f\left(2\right)=0$, hỏi hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(3-x\right)\right]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(-2;-1\right)$. **B.** $\left(1;2\right)$. **C.** $\left(2;5\right)$. **D.** $\left(5;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng xét dấu của hàm số $y=f'\left(x\right)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Ta có $g'\left(x\right)=-2.f'\left(3-x\right).f\left(3-x\right)$. Xét $g'\left(x\right)\le 0\Leftrightarrow f'\left(3-x\right).f\left(3-x\right)\ge 0\quad (1)$

Từ bảng biến thiên suy ra $f\left(3-x\right)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f'\left(3-x\right)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le 3-x\le 1\\3-x\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\le x\le 5\\x\le 1\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $g\left(x\right)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;1\right)$, $\left(2;5\right)$.

Dạng toán 54. Biết BBT hàm số $y=f'\left(x\right)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g\left(x\right)=\left[f\left(u\left(x\right)\right)\right]^k$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 57: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ, đồ thị $y=f'\left(x\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-3;1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-10;20\right]$ để hàm số $y=\left(f\left(x^2+3x-m\right)\right)^3$ đồng biến trên khoảng $\left(0;2\right)$

NHÓM TOÁN VD – VDC

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

A. 20. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 18.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3(2x+3)f'(x^2+3x-m).\left[f(x^2+3x-m)\right]^2$.

Theo đề bài ta có: $f'(x)=(x-1)(x+3)$ suy ra $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>1 \end{array}\right.$ và $f'(x)<0 \Leftrightarrow -3<x<1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi $y'\ge 0, \forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow y'=3(2x+3)f'(x^2+3x-m).\left[f(x^2+3x-m)\right]^2\ge 0, \forall x\in(0;2)$.

Do $x\in(0;2)$ nên $2x+3>0, \forall x\in(0;2)$ và $\left[f(x^2+3x-m)\right]^2\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$ Do đó, ta có:

$$y'\ge 0 \Leftrightarrow f'(x^2+3x-m)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-m\le -3 \\ x^2+3x-m\ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge x^2+3x+3 \\ m\le x^2+3x-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge \max\limits_{(0;2)}(x^2+3x+3) \\ m\le \min\limits_{(0;2)}(x^2+3x-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 13 \\ m\le -1 \end{array}\right..$$

Do $m\in[-10;20]$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

Dạng toán 55. Biết BBT hàm số $y=f'(u(x))$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 58: Cho hàm số $y=f(x+2)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến tên khoảng nào sau đây

A. $(0;2)$ **B.** $(2;5)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-4;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left[f(x+2)\right]' = (x+2)'.f'(x+2) = f'(x+2)$

Đặt $t = x+2$ khi đó $y = f(x+2) = f(t)$ và $y' = \left[f(x+2)\right]' = f'(t)$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x+2)$ ta có $f'(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 0 \end{array}\right.$

Vậy ta có bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-2;0)$

Dạng toán 56. Biết BBT hàm số $y = f'(u(x))$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 59: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-1) = 2$. Biết $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $y=\ln\left(f(x)+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+m\right)$ đồng biến trên $(-1;3)$

A. 2008.   **B.** 2007.   **C.** 2009.   **D.** 2010.

Lời giải

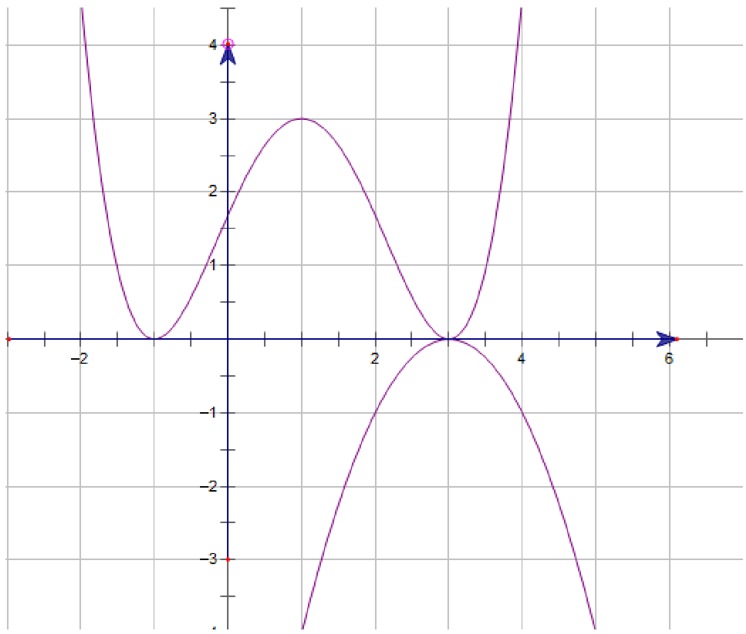
Chọn A

Hàm số $y=\ln\left(f(x)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x+m\right)$ xác định trên R

$\Leftrightarrow g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x+m>0,\forall x\cup\in(-1;3)$

$\Rightarrow g'(x)=f'(x)+x^2-6x+9\Rightarrow g'(x)=0\Rightarrow f'(x)=-x^2+6x+9$

Vẽ hai đồ thị $y=f'(x)\vee y=-x^2+6x-9$ trên cùng hệ trục



Vậy $g'(x)\ge 0\forall x\in(-1;3)\Rightarrow g(x)>g(-1)=-\frac{31}{3}+m\ge 0\Rightarrow m\ge\frac{31}{3}$

$y=\ln\left(f(x)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x+m\right)\Rightarrow y'=\dfrac{f'(x)+x^2-6x+9}{f(x)+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+m}\ge 0,\forall x\in(-1;3)$

Để hàm số đồng biến trên $(-1;3)$ thì $m \in \left(\dfrac{31}{3};2019\right) \Rightarrow m = 11;...;2018$ có 2008 số.

Câu 60: Cho hàm số $y = f(x+2)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $y = f'(x+2)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y'	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số

$y = f(x) - \dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - (2m-1)x + m$ đồng biến trên $(1;3)$

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn A

$$y = f(x) - \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - (2m-1)x + m \Rightarrow y' = f'(x) - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - 2m + 1$$

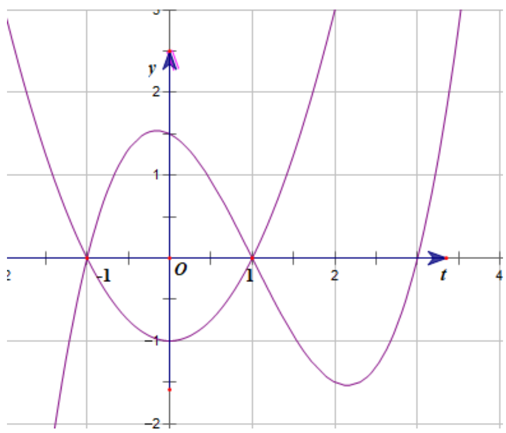
Để hàm số đồng biến trên $(1;3) \Rightarrow y' = f'(x) - \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - 2m + 1 \ge 0, \forall x \in (1;3)(1)$

Đặt $x = t + 2 \Rightarrow t \in (-1;1)(1)$ trở thành

$$f'(t+2) - \frac{1}{3}(t+2)^3 + 2(t+2)^2 - 3(t+2) - 2m + 1 \ge 0, \forall t \in (-1;1)$$

$$\Leftrightarrow g(t) = f'(t+2) - \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3} \ge 2m, \forall t \in (-1;1) \Rightarrow g'(t) = f''(t+2) - t^2 + 1$$

Vẽ hai đồ thị $y = f''(t)$ và $y = t^2 - 1$ trên cùng hệ trục



Từ đồ thị ta thấy $g'(t) \ge 0. \forall t \in (-1;1) \Rightarrow g(t)$ là hàm số đồng biến $\forall t \in (-1;1)$

$\Rightarrow 2m \le g(t), \forall t \in (-1;1) \Leftrightarrow 2m \le \min\limits_{[-1;1]} g(t) = g(-1) = f'(1) + 1 = 3 \Rightarrow m \le \dfrac{3}{2}$

Kết hợp $m \in [-2019; 2019] \Rightarrow m = -2019, ..., 0, 1$ có 2021 số

Dạng toán 57. Biết BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 61: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1) = 0$. Biết bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	0	↗		↘	0	↘	$-\infty$

Hàm số $g(x) = (x^2 - x - 2) f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(2; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -1)$. **C.** $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $(-1; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	0	↗		↗		↘	

Ta có $g'(x) = (2x-1) f(x) + (x^2 - x - 2) f'(x)$.

Ta lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	|	$-$	0		$+$		|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	|		$+$		0	Chưa xác định	
$(2x-1)f(x)$		$+$	0	$-$	|		$+$		0	Chưa xác định	
x^2-x-2		$+$	0	$-$	|		$-$		0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	|		$+$		0	$-$	
$(x^2-x-2)f'(x)$		$+$	0	$-$	|		$-$		0	$-$	
$g'(x)$		$+$	|	$-$	|		Chưa xác định		|	Chưa xác định	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Dạng toán 58. Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 62: Cho hàm số $y=f(x)$ và $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ và $f'(4)=0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2019;2019]$ để hàm số $y=e^{-x^2+mx+1}f(x)$ đồng biến trên $(1;4)$

A. 2011 **B.** 2013 **C.** 2012 **D.** 2014

Lời giải

Chọn C

$y=e^{-x^2+mx+1}f(x)\Rightarrow y'=e^{-x^2+mx+1}\left[(-2x+m)f(x)+f'(x)\right]$

Hàm số đồng biến trên $(1;4)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(1;4)\Leftrightarrow(-2x+m)f(x)+f'(x)\ge 0,\forall x\in(1;4)(1)$

Vì $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ $(1)\Leftrightarrow m\ge 2x-\frac{f'(x)}{f(x)}=g(x),\forall x\in(1;4)$

Xét hàm số g(x) ta có $g'(x)=2-\frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}$

Theo BBT của hàm số $f'(x)$ ta thấy $\forall x\in(1;4)$ thì $f''(x)<0$ nên

NHÓM TOÁN VD – VDC

$f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2<0\left(f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\right)$

$\Rightarrow -\dfrac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}>0,\forall x\in(1;4)\Rightarrow g'(x)=2-\dfrac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}>0,$

$\Rightarrow y=g(x)$ đồng biến trên $(1;4)$

Do đó để $m\ge g(x)\ \forall x\in(1;4)$ thì $m\ge \max\limits_{[1;4]} g(x)=g(4)=8.$

Do $m\in[-2019;2019]$ nên $m\in\left[8;2019\right]$

Có 2012 số nguyên thỏa ycbt.

Dạng toán 59. Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 63: Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(0)=0$ và hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
y'	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Khi đó, hàm số $y=xf(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=xf(x)\Rightarrow y'=f(x)+xf'(x)$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=a\end{array}\right.$ với $a<-3$.

Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$.

x	$-\infty$		a		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta có $f(x)>0,\forall x\in(-2;0)$

Và $f'(x)<0,\forall x\in(-2;0)\Rightarrow xf'(x)>0,\forall x\in(-2;0)$

NHÓM TOÁN VD – VDC

Từ đó suy ra $y' = f(x) + xf'(x) > 0, \forall x \in (-2;0)$. Do đó hàm số $y = xf(x)$ đồng biến trên $(-2;0)$.

Trên khoảng $(-\infty;0)$ thì $f(x)$ và $xf'(x)$ có thể âm hoặc dương nên không thể kết luận hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;0) \Rightarrow$ đáp án **A** sai.

Trên $(0;2)$ thì $f(x) < 0$ và $f'(x) < 0 \Rightarrow xf'(x) < 0 \Rightarrow f(x) + xf(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(0;2)$ $\Rightarrow$ đáp án **C** sai.

Đáp án **C** sai nên đáp án **D** sai.

Câu 64: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$y(1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(2;5)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-2;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(3-x) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = -2f'(3-x)f(3-x)$.

Xét $g'(x) < 0 \Leftrightarrow -2f'(3-x)f(3-x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 3-x < 1 \\ 3-x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 5 \\ x < 1 \end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;5)$.

Dạng toán 60. Biết BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 65: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	-	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Với $m<0$, hàm số $y=\left(x^2-2x+m\right).f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A. $\left(-1;0\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(1;3\right)$. **D.** $\left(-\infty;-1\right)$.

Lời giải

Chọn B

$y'=\left(2x-2\right).f\left(x\right)+\left(x^2-2x+m\right).f'\left(x\right)$

+ Ta có $2x-2<0,\forall x\in\left(0;1\right)$ và $f\left(x\right)<0,\forall x\in\left(0;1\right)(1)$

Bảng biến thiên của hàm $y=g\left(x\right)=x^2-2x+m$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-			0	+	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	m	$\searrow$	$m-1$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ hai BBT suy ra $g\left(x\right)=x^2-2x+m<0,\forall x\in\left(0;1\right)$ (do $m<0$) và $f'\left(x\right)<0,\forall x\in\left(0;1\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $y'=\left(2x-2\right).f\left(x\right)+\left(x^2-2x+m\right).f'\left(x\right)>0\quad\forall x\in\left(0;1\right)$.

Trong các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$, $\left(-1;0\right)$, $\left(1;3\right)$ thì chưa thể xác định được dấu của

$y'=\left(2x-2\right).f\left(x\right)+\left(x^2-2x+m\right).f'\left(x\right)$ nên dựa vào các đáp án ta **Chọn B**

Dạng toán 61. Biết BBT của hàm số $y=f'\left(x\right)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{g\left(x\right)}{f\left(x\right)}$ hoặc $y=\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 66: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có $f(0)=-\dfrac{1}{3}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'\left(x\right)$ như hình vẽ

x	$-\infty$		0	1		$+\infty$
$f''(x)$		+		0	-	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	0	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$ **B.** $\left(2-\sqrt{3};2\right)$ **C.** $(4;+\infty)$ **D.** $(3;+\infty)$

Lời giải

Chọn C

Vì $y=f(x)$ là hàm số bậc ba nên $y=f'(x)$ là hàm số bậc hai.

Gọi $f'(x)=ax^2+bx+c$ suy ra $f''(x)=2ax+b$. Ta có hệ sau:

$$\begin{cases} f''(1)=0 \\ f'(1)=0 \\ f'(0)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \\ a+b+c=0 \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}.\text{ Vậy } f'(x)=-x^2+2x-1$$

Suy ra $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(-x^2+2x-1\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x+m$, do $f(0)=-\frac{1}{3}\Rightarrow m=-\frac{1}{3}$.

Vậy $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x-\frac{1}{3}$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{f'(x).e^x-e^x.f(x)}{e^{2x}}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-\frac{2}{3}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=2-\sqrt{3} \\ x=2+\sqrt{3} \end{array}\right..$$

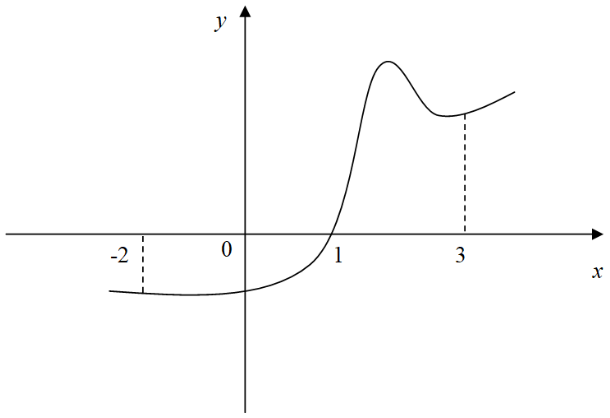
Lập bảng xét dấu $y=g'(x)$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ hàm số nghịch biến trên $(4;+\infty)$.

Dạng toán 62. Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 67: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có như sau:



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có giao điểm với trục hoành và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, f(x)=-1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có duy nhất 1 giao điểm với trục hoành.Có bao nhiêu giá trị của tham số m để

hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)^2\left((-2m^2+1)x+m\right)}{f(x)}$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, f(x)=-1 \Rightarrow f(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$

$$g'(x)=\frac{(x-1)\left((-2m^2+1)(3x-1)+2m\right)f(x)-(x-1)^2\left((-2m^2+1)x+m\right)f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=\frac{(x-1)\left[\left((-2m^2+1)(3x-1)+2m\right)f(x)-(x-1)\left((-2m^2+1)x+m\right)f'(x)\right]}{\left(f(x)\right)^2}$$

Đặt $\left((-2m^2+1)(3x-1)+2m\right)f(x)-(x-1)\left((-2m^2+1)x+m\right)f'(x)=h(x)$

Vì $g'(x)$ có 1 nghiệm bội lẻ $x=1$ nên để $g'(x)\geq 0$ thì điều kiện cần là $h(x)$ cũng có nghiệm là $x=1$.

$$h(1)=2(-2m^2+m+1)f(1)=0 \Leftrightarrow -2m^2+m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$$

Th1: Với $m=1$ ta có

$$g'(x)=\frac{-3(x-1)^2 f(x)+(x-1)^3 f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}>0\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

TH2: Với $m=\dfrac{-1}{2}$ ta có

$$g'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(x-1)^2 f(x)-(x-1)^3 f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}<0\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn đề bài yêu cầu.