NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)
TẠ VĂN ĐĨNH - NGUYỄN HỒ QUỲNH

Bài tập
TOÁN CAO CẤP

Tập hai

Phép tính giải tích một biến số

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (chủ biên)
TẠ VĂN ĐĨNH - NGUYỄN HỒ QUỲNH

BÀI TẬP
TOÁN CAO CẤP

TẬP HAI

PHÉP TÍNH GIẢI TÍCH MỘT BIẾN SỐ

(Tái bản lần thứ tám)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Quyển bài tập này trình bày lời giải của các bài tập đã ra trong quyển TOÁN HỌC CAO CẤP *tập hai, phép tính giải tích một biến số của tác giả Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh và Nguyễn Hồ Quỳnh. Một số bài tập khác đã được bổ sung vào. Ở cuối sách có bổ sung thêm một số bài tập hỗn hợp có tính chất tổng hợp và nâng cao.*

Như chúng ta đã biết, trong học toán, giữa việc hiểu sâu sắc lý thuyết và làm thành thạo các bài tập có một mối quan hệ mật thiết. Chính trong quá trình học lý thuyết rồi làm các bài tập, từ những bài tập vận dụng đơn giản lý thuyết đến những bài tập ngày càng khó hơn, chúng ta dần dần hiểu được các khái niệm toán học mới, nắm được các phương pháp cơ bản, nhớ được các kết quả cơ bản.

Đối với các bạn sinh viên dùng quyển sách này, chúng tôi khuyên các bạn hãy tự mình giải các bài tập đã ra trong giáo trình và chỉ xem lời giải trong quyển sách này để kiểm tra lại, tự mình đánh giá kết quả học tập của mình. Mong rằng quyển sách này giúp các bạn học tốt hơn và tìm được những lời giải hay hơn.

Quyển sách này viết lần đầu nên không tránh khỏi các sai sót. Chúng tôi mong nhận được ý kiến đóng góp của độc giả. Xin chân thành cảm ơn.

CÁC TÁC GIẢ

Chương 1

SỐ THỰC

A. ĐỀ BÀI

1. Dùng kí hiệu tập hợp, biểu diễn các tập sau :

1) Các số nguyên dương bé thua 12

2) Các số nguyên dương là bội số của 4 và bé thua 43

3) Các phân số có tử số là 3 và mẫu số là một số nguyên dương bé thua 9.

2. Cho F : = {1, 4, 7, 10} và G : = {1, 4, 7}. Hỏi các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng :

1) $G \subset F$

2) Tập {1, 7} là tập con thực sự của F

3) Tập {1, 4, 7} là tập con thực sự của G.

3. Liệt kê mọi tập con của các tập sau :

1) {a, b, c} ;   2) {1, 2, 3, 4}.

4. Cho A : = {a, b, c} ; B : = {1, 2, 3} ; C : = {b, c, a} ; D = {3, 2, 1}.

Hỏi :

1) A = C ?   2) A = B ?   3) A tương đương B ?   4) B = D ?

5. Xét xem các tập cho dưới đây, tập nào vô hạn, tập nào hữu hạn :

1) Tập mọi số nguyên dương lớn hơn 100

2) Tập mọi số nguyên dương bé thua 1 000 000 000

3) Tập mọi điểm nằm trên đoạn thẳng nối liền hai điểm phân biệt A, B.

6. Cho $A := \{q, r, t, u\}$; $B := \{p, q, s, u\}$ và $C := \{t, u, v, w\}$.

1) Tìm $A \cap (B \cup C)$ và $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Chúng có bằng nhau không ?

2) Tìm $A \cup (B \cap C)$ và $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Chúng có bằng nhau không ?

7. Cho A, B là hai tập hữu hạn, chứng minh rằng

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

8. Cho $A := \{0, 1, 2\}$; $B := \{1, 3\}$.

1) Tìm $A \times B$ và $B \times A$

2) Tính $\text{card}(A \times B)$; $\text{card}(B \times A)$; $\text{card}(A \times A)$; $\text{card}(B \times B)$.

9. Xét ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$; f có là đơn ánh ? toàn ánh ?

Tìm $f(\mathbf{R})$?

10. Dùng lập luận phản chứng, chứng minh rằng $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

11. Dùng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh rằng

1) $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

12. Xét xem đã dùng tiên đề nào trong các tiên đề về số thực để chứng minh các hệ thức dưới đây :

1) $5 + 3 = 3 + 5$; 2) $9 + 0 = 9$;

3) $-3 + 0 = -3$; 4) $(-3 + 4) + 7 = -3 + (4 + 7)$;

5) $0 + 0 = 0$; 6) $(-1)(1) = -1$;

7) $(-3) + [-(-3)] = 0$; 8) $4\left(\dfrac{1}{4}\right) = 1$.

13. Dùng định nghĩa "lớn hơn", "bé thua" và các tiên đề thứ tự, chứng minh (giả thiết $a, b, c \in \mathbf{R}$) :

1) Nếu $a > b$ và $c > 0$ thì $ac > bc$

2) Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$

3) Nếu $a > 0$ thì $-a < 0$

4) Nếu $a \neq 0$ thì $a^2 > 0$

5) Nếu $a > b$ thì $a^2 > b^2$ (với $a > 0$, $b > 0$).

14. Giải các phương trình và bất phương trình :

1) $|x+3|=7$; 2) $|2x-6|=14$;

3) $|x-4|<7$; 4) $|5x-1|\leq 4$;

5) $|4x-2|>4$; 6) $|5+9x|\geq 4$.

15. Cho $A \subset \mathbf{R}$; $B \subset \mathbf{R}$, định nghĩa :

$$A + B := \{x \in \mathbf{R} \mid \exists a \in A, \exists b \in B,\ x = a + b\}$$

$$AB := \{x \in \mathbf{R} \mid \exists a \in A, \exists b \in B,\ x = ab\}$$

nghĩa là $A + B$ là tập các số thực có dạng $a + b$, với $a \in A$ và $b \in B$; AB là tập các số thực có dạng ab, với $a \in A$ và $b \in B$.

1) Giả sử A, B bị chặn trên, chứng minh rằng :

$$\sup (A + B) = \sup A + \sup B.$$

2) Giả sử A, B bị chặn trên và $A \subset \mathbf{R}^+$, $B \subset \mathbf{R}^+$, chứng minh rằng :

$$\sup (AB) = (\sup A)(\sup B).$$

16. Xét sự hội tụ của dãy $x_n := (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$.

17. Chứng tỏ rằng các dãy sau đây hội tụ và tìm giới hạn của chúng, $n \geq 1$:

1) $x_n := \dfrac{n+1}{n}$; 2) $x_n := \dfrac{n}{n+1}$;

3) $x_n := \dfrac{1}{n^2+1}$; 4) $x_n := \dfrac{n}{n^2+1}$.

18. Tìm giới hạn của các dãy sau (nếu hội tụ) :

1) $x_n := n - \sqrt{n^2 - n}$; 2) $x_n := \sqrt{n(n+a)} - n$;

3) $x_n := n + \sqrt[3]{1 - n^3}$; 4) $x_n := \dfrac{n}{2}\sin\dfrac{n\pi}{2}$;

5) $x_n := \dfrac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$.

19. Xét dãy $x_n := x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}$, với $x_o = 1$.

1) Chứng minh rằng x_n không có giới hạn hữu hạn.

2) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

20. Xét dãy $x_n := \dfrac{a_n}{b_n}$, với $a_n := 2a_{n-1} + 3b_{n-1}$

$$b_n := a_{n-1} + 2b_{n-1}, \text{ với } a_o > 0,\ b_o > 0.$$

1) Chứng minh rằng $a_n > 0$; $b_n > 0$.

2) Tính x_{n+1} theo x_n.

3) Tính $x_{n+1} - x_n$ và chứng tỏ rằng dãy x_n đơn điệu, suy ra $\{x_n\}$ có giới hạn độc lập với a_o, b_o.

21. Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của dãy

$$x_n := \frac{2}{x_{n-1}} + 1 \text{ với } x_o = 1.$$

22. Cho hai số a và b thoả $0 < a < b$, xét hai dãy

$$x_n := \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}} \ ; \quad y_n := \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})$$

với $x_o = a$ và $y_o = b$.

Chứng minh rằng hai dãy trên hội tụ và có chung giới hạn.

23. Xét sự hội tụ của dãy :

$$x_n := \sqrt{1 + x_{n-1}}\text{ , với } x_o = \sqrt{3}.$$

24. Đặt $x_o := 1$ và x_n thoả hệ thức

$$(3 + x_{n-1})x_n + 1 = 0.$$

Chứng tỏ rằng x_n hội tụ và tìm giới hạn của x_n.

B. LỜI GIẢI

1. 1) $\{n \in \mathbf{N}^* \mid n < 12\}$

2) $\{n \in \mathbf{N} \mid n = 4k \text{ ; } k = 1, 2, ..., 10\}$

3) $\left\{\frac{3}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, 3, ..., 8\right\}$.

2. 1) đúng ; 2) đúng ; 3) sai.

3. 1) $\{a, b, c\}$; $\{a, b\}$; $\{a, c\}$; $\{b, c\}$; $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$; ϕ.

2) $\{1, 2, 3, 4\}$; $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 2, 4\}$; $\{1, 3, 4\}$; $\{2, 3, 4\}$; $\{1, 2\}$; $\{1, 3\}$; $\{1, 4\}$; $\{2, 3\}$; $\{2, 4\}$; $\{3, 4\}$; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{4\}$; ϕ.

4. 1) đúng ; 2) sai ; 3) đúng ; 4) đúng.

5. 1) vô hạn ; 2) hữu hạn ; 3) vô hạn.

6. 1) $B \cup C = \{p, q, s, u, t, v, w\}$

$A \cap (B \cup C) = \{q, t, u\}$; $A \cap B = \{q, u\}$

$A \cap C = \{t, u\}$, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{q, t, u\}$. Vậy

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2) $B \cap C = \{u\}$; $A \cup B = \{q, r, t, u, p, s\}$

$A \cup C = \{q, r, t, u, v, w\}$, $A \cup (B \cap C) = \{q, r, t, u\}$.

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{q, r, t, u\}$. Vậy

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

7. Gọi card (A) = m ; card (B) = n ; card $(A \cap B)$ = p. Khi đó, vì $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$ nên :

card $(A \cup B)$ = card $(A \cap \overline{B})$ + card $(B \cap \overline{A})$ + card $(A \cap B)$ $= (m - p) + (n - p) + p = m + n - p$

nghĩa là card $(A \cup B)$ = card (A) + card (B) − card $(A \cap B)$.

8. 1) $A \times B = \{(0, 1), (0, 3), (1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$

$B \times A = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$.

2) card $(A \times B)$ = card $(B \times A)$ = 6 ; card $(A \times A)$ = 9 ; card $(B \times B)$ = 4.

9. f không đơn ánh vì với $0 < |y| < 1$, phương trình $\dfrac{2x}{1+x^2} = y$ luôn có hai nghiệm, f cũng không toàn ánh vì với $|y| > 1$ phương trình $\dfrac{2x}{1+x^2} = y \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$ (ẩn là x) vô nghiệm. Ngoài ra, theo bất đẳng thức Cauchy :

$1 + x^2 \geq 2|x|$, đạt dấu = khi $|x| = 1$, do đó luôn có

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \text{ ; và } f(\mathbf{R}) = [-1, 1].$$

10. Giả sử $\sqrt{3}$ là một số hữu tỉ, khi đó có thể viết $\sqrt{3} = \dfrac{m}{n}$; m, n là 2 số nguyên dương chỉ có ước số chung là 1 ; từ đó : $m^2 = 3n^2$; do đó m^2 chia hết cho 3, do đó m chia hết cho 3, và có thể viết m = 3k với k nguyên dương ; suy ra $m^2 = 9k^2 = 3n^2$, nghĩa là $n^2 = 3k^2$, n^2 chia hết cho 3 ; do đó n chia hết cho 3 ; nghĩa là m và n cùng có ước số chung là 3 ; và điều đó mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $\sqrt{3}$ là một số vô tỉ.

11. 1) Hiển nhiên công thức đúng với n = 1 ; bây giờ giả sử công thức đúng với n = k, sẽ chứng minh rằng công thức cũng đúng với n = k + 1. Thật vậy, vì công thức đúng với n = k nên có

$$1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

suy ra

$$1+2+...+k+k+1=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\left(\frac{k}{2}+1\right)(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

2) Công thức hiển nhiên đúng với n = 1 ; giả sử công thức đúng với n = k, nghĩa là giả sử có :

$$1^2+2^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Khi đó :

$$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=(k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6}+(k+1)\right)$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)\left[2k(k+2)+3(k+2)\right]}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Hệ thức cuối cùng chứng tỏ rằng công thức cũng đúng với n = k + 1.

12. 1) Giao hoán ; 2) Đồng nhất ; 3) Đồng nhất ; 4) Kết hợp ; 5) Đồng nhất ; 6) Đồng nhất ; 7) Nghịch đảo ; 8) Nghịch đảo.

13. 1) $ac - bc = (a - b)c$ (kết hợp)

$a > b \Rightarrow a - b > 0$, $(a - b)c > 0$ (tiên đề 8).

2) Luôn có $a - b = a + c - c - b = (a + c) - (b + c)$

$a - b > 0$ (theo giả thiết) $\Rightarrow (a + c) - (b + c) > 0$

$\Rightarrow a + c > b + c$.

3) Theo định nghĩa : $-a < 0 \Leftrightarrow 0 - (-a) = a > 0$.

Từ giả thiết $a > 0$, suy ra kết luận.

4) Nếu $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$; nếu $a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$.

5) $a^2 > b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 > 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) > 0$, bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng vì $a > b$ (giả thiết) và $a + b > 0$.

14. 1) $|x+3| = 7 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 7^2 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 7^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3 - 7)(x + 3 + 7) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 10) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4$; $x_2 = -10$.

2) $|2x - 6| = 14 \Leftrightarrow (2x-6)^2 = (14)^2 \Leftrightarrow x_1 = -4$; $x_2 = 10$.

3) $|x-4| < 7 \Leftrightarrow (x-4)^2 < 7^2 \Leftrightarrow (x-4)^2 - 7^2 < 0 \Leftrightarrow (x-4-7)(x-4+7) < 0 \Leftrightarrow (x-11)(x+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 11$.

4) $|5x-1| \le 4 \Leftrightarrow (5x-1)^2 \le 4^2 \Leftrightarrow (5x-1)^2 - 4^2 \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{5} \le x \le 1$.

5) $|4x-2| > 4 \Leftrightarrow (4x-2)^2 > 4^2 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2}$ hoặc $x > \dfrac{3}{2}$.

6) $|5+9x| \ge 4 \Leftrightarrow (5+9x)^2 \ge 4^2 \Leftrightarrow x \le -1$ hoặc $x \ge -\dfrac{1}{9}$.

15. 1) Theo giả thiết, A, B bị chặn trên, do đó tồn tại supA và supB ; và A + B < supA + supB, do đó $$\sup(A + B) \le \sup A + \sup B \quad (1)$$

Mặt khác, theo định nghĩa cận trên đúng, có :

$$\sup A < A + \varepsilon_1$$

$$\sup B < B + \varepsilon_2$$

với ε_1, ε_2 là các số dương đủ bé, do đó :

$$\sup A + \sup B < A + B + \varepsilon, \text{ với } \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

do đó $$\sup A + \sup B \le \sup (A + B) \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) suy ra $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

2) Cũng lập luận tương tự câu 1 ; $(\sup A)(\sup B)$ là cận trên của tích AB ; $(A > 0 ; B > 0)$, dùng định nghĩa cận trên đúng suy ra

$$\sup (AB) = (\sup A)(\sup B).$$

16. $n+1 > n \Rightarrow \dfrac{n+1}{n} > 1 \Rightarrow |x_n| > 1$. Mặt khác $x_n < 0$ khi n lẻ và $x_n > 0$ khi n chẵn, do đó không thể tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, dãy $\{x_n\}$ phân kì.

17. 1) $x_n = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$; dãy $\{x_n\}$ giảm và bị số 1 chặn dưới, do đó $\{x_n\}$ hội tụ.

2) $x_n = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+1-1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$; dãy $\{x_n\}$ tăng và bị số 1 chặn trên nên $\{x_n\}$ hội tụ.

3) $x_n = \dfrac{1}{n^2+1}$, $\{x_n\}$ giảm và $0 < x_n < \dfrac{1}{2}$, do đó $\{x_n\}$ hội tụ.

4) $x_n = \dfrac{n}{n^2+1} = \dfrac{1}{n + \dfrac{1}{n}}$, mẫu số của x_n tăng vô hạn, do đó $\{x_n\}$ hội tụ đến 0.

18. 1) $x_n = \dfrac{n^2 - n^2 + n}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \dfrac{n}{n\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{1}{n}}\right)} \to \dfrac{1}{2}$

2) $x_n = \dfrac{n^2 + an - n^2}{\sqrt{n(n+a)} + n} = \dfrac{an}{n\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{a}{n}}\right)} \to \dfrac{a}{2}$

3) $x_n = n + \sqrt[3]{1 - n^3} = \dfrac{\left(n + \sqrt[3]{1 - n^3}\right)\left(n^2 - n\sqrt[3]{1 - n^3} + \sqrt[3]{(1 - n^3)^2}\right)}{n^2 - n\sqrt[3]{1 - n^3} + \sqrt[3]{(1 - n^3)^2}}$

$$= \frac{n^3 + 1 - n^3}{n^2 - n\sqrt[3]{1 - n^3} + \sqrt[3]{(1 - n^3)^2}} \to 0$$

4) Khi $n \to \infty$ thì $\sin\dfrac{n\pi}{2}$ không xác định, do đó dãy $x_n = \dfrac{n}{2}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ phân kì.

5) $x_n = \dfrac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n} \le \dfrac{2}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$

19. 1) Từ định nghĩa suy ra $\{x_n\}$ tăng ; $x_n > 1$, $\forall n$; giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, ($l > 1$). Khi đó, theo định lí về giới hạn và theo biểu thức ta có :

$$l = l + \frac{1}{l} \Rightarrow \frac{1}{l} = 0.$$

Phương trình $\dfrac{1}{l} = 0$ vô nghiệm, do đó x_n không thể có giới hạn hữu hạn.

2) Vì $x_n > 1$, và $\{x_n\}$ tăng nên

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

20. 1) Từ các biểu thức định nghĩa, có :

$$a_1 = 2a_o + 3b_o > 0,\ b_1 = a_o + 2b_o > 0 \text{ (vì } a_o > 0 \text{ ; } b_o > 0).$$

suy ra $a_n > 0$, $b_n > 0$, $\forall n$.

2) Theo định nghĩa :

$$x_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{2a_n + 3b_n}{a_n + 2b_n} = \frac{2x_n + 3}{x_n + 2}$$

(chia tử và mẫu cho $b_n > 0$) ; do đó $x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 3}{x_n + 2}$.

3) $x_{n+1} - x_n = \dfrac{2x_n + 3}{x_n + 2} - x_n = \dfrac{(\sqrt{3} - x_n)(\sqrt{3} + x_n)}{x_n + 2}$

Vì $x_n = \dfrac{a_n}{b_n} > 0$ nên dấu của $x_{n+1} - x_n$ là dấu của $\sqrt{3} - x_n$, mặt khác, từ câu 2), có :

$$\sqrt{3} - x_n = \sqrt{3} - \frac{2x_{n-1} + 3}{x_{n-1} + 2} = \frac{\sqrt{3}x_{n-1} + 2\sqrt{3} - 2x_{n-1} - 3}{x_{n-1} + 2}.$$

Có thể viết tử số của phân số trên thành

$$\begin{aligned} &\sqrt{3}x_{n-1} - x_{n-1} + \sqrt{3} - x_{n-1} + \sqrt{3} - 3 \\ &= (\sqrt{3} - 1)x_{n-1} + \sqrt{3}(1 - \sqrt{3}) + \sqrt{3} - x_{n-1} \\ &= (\sqrt{3} - 1)(x_{n-1} - \sqrt{3}) + \sqrt{3} - x_{n-1} \\ &= (\sqrt{3} - x_{n-1})(1 + 1 - \sqrt{3}) = (\sqrt{3} - x_{n-1})(2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Do vậy, dấu của $\sqrt{3} - x_n$ là dấu của $\sqrt{3} - x_{n-1}$; tiếp tục suy diễn, có dấu của $\sqrt{3} - x_n$ là dấu của $\sqrt{3} - x_o$. Khi đó

• Nếu $\sqrt{3} - x_o > 0 \Rightarrow \{x_n\}$ tăng và bị $\sqrt{3}$ chặn trên do đó $\{x_n\}$ hội tụ, hơn nữa, từ hệ thức

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(\sqrt{3} - x_n)(\sqrt{3} + x_n)}{x_n + 2}$$

suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

• Nếu $\sqrt{3} - x_o < 0 \Rightarrow \{x_n\}$ giảm và $\{x_n\}$ bị $\sqrt{3}$ chặn dưới, cũng suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

• Nếu $\sqrt{3} - x_o = 0 \Rightarrow x_n = \sqrt{3}$.

Vậy trong mọi trường hợp có

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}.$$

21. Trước hết để ý rằng nếu x_n có giới hạn là l thì từ hệ thức định nghĩa suy ra :

$$l = \frac{2}{l} + 1.$$

Hơn nữa vì $x_o = 1$ nên $x_n > 1$, do đó suy ra l là nghiệm dương của phương trình bậc hai

$$l^2 - l - 2 = 0.$$

Nghĩa là $l = 2$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

Thật vậy, ta biểu diễn x_{n+1} theo x_{n-1} :

$$x_{n+1} = \frac{2}{x_n} + 1 = \frac{2}{1 + \frac{2}{x_{n-1}}} + 1 = \frac{2x_{n-1}}{x_{n-1} + 2} + 1 \ ;$$

$$x_{n+1} - 2 = \frac{x_{n-1} - 2}{x_{n-1} + 2} \text{ và } x_{n+1} - x_{n-1} = \frac{-x_{n-1}^2 + x_{n-1} + 2}{x_{n-1} + 2}$$

Do đó nếu $x_{n-1} > 2 \Rightarrow x_{n+1} > 2$.

Hơn nữa, dấu của $x_{n+1}-x_{n-1}$ là dấu của tam thức bậc hai $-x_{n-1}^2+x_{n-1}+2$. Suy ra nếu $x_{n-1}>2$ thì $x_{n+1}<x_{n-1}$ và nếu $x_{n-1}<2$ thì $x_{n+1}>x_{n-1}$. Như thế dãy con $\{x_{2p}\}$ tăng (theo p) và bị số 2 chặn trên vì $x_2<2$ và dãy con $\{x_{2p+1}\}$ giảm và bị chặn dưới bởi số 2 vì $x_1=3$. Cả hai dãy xen kẽ nhau và có chung giới hạn là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$.

22. Sẽ chứng minh rằng $\{x_n\}$ tăng và $\{y_n\}$ giảm :

$$\frac{x_1}{a}=\frac{b}{x_1}=\sqrt{\frac{b}{a}}>1$$

$$y_1-a=b-y_1=\frac{b-a}{2}>0 \text{ (vì } 0<a<b).$$

Suy ra $x_o<x_1<y_1<y_o$.

Tổng quát hoá

$$y_{n-1}-x_{n-1}=\frac{\left(\sqrt{y_{n-2}}-\sqrt{x_{n-2}}\right)^2}{2}>0$$

vì $$y_{n-1}=\frac{1}{2}(x_{n-2}+y_{n-2})\ ;\ \ x_{n-1}=\sqrt{x_{n-2}y_{n-2}}$$

$$y_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}<2.\frac{y_{n-1}}{2},$$

nghĩa là $y_n<y_{n-1}$, $x_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}>\sqrt{x_{n-1}^2}$,

nghĩa là $x_n>x_{n-1}$.

Cuối cùng

$$y_n-x_n=\left(\sqrt{\frac{y_{n-1}}{2}}-\sqrt{\frac{x_{n-1}}{2}}\right)^2>0.$$

Vậy :

$$a<x_1<x_2<...<x_n<y_n<y_{n-1}<...<y_1<b.$$

Dãy $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên bởi mọi y_n, do đó có giới hạn, $\{y_n\}$ giảm và bị mọi x_n chặn dưới, cũng có giới hạn, ngoài ra, gọi L, l lần lượt là các giới hạn, ta có

$$L = \sqrt{Ll} \text{ và } l = \frac{L + l}{2} \Rightarrow L = l.$$

23. Ta sẽ chứng minh rằng $\{x_n\}$ giảm và bị chặn dưới :

$$x_1 = \sqrt{1 + \sqrt{3}} < x_o, \text{ vì } x_o = \sqrt{3}$$

$$x_2 = \sqrt{1 + x_1} < \sqrt{1 + x_o}, \text{ tức là } x_2 < x_1.$$

Giả sử $x_n < x_{n-1}$, khi đó

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} < \sqrt{1 + x_{n-1}}, \text{ vì } x_n < x_{n-1} \text{ tức là } x_{n+1} < x_n.$$

Mặt khác $x_o > 1$, $x_1 > 1$, giả sử $x_n > 1$, khi đó

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} > \sqrt{2} \Rightarrow x_n > 1, \quad \forall n.$$

Vậy x_n có giới hạn là l thoả $l = \sqrt{1 + l}$, tức là l là nghiệm lớn hơn 1 của phương trình

$$l^2 - l - 1 = 0; \quad l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Do đó $l = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

24. Bằng quy nạp, có thể chứng minh rằng $x_n < 0$, $n > 1$, từ đó, x_n giảm theo n tăng, $|x_n| \le 1$, do vậy $x_n > -\dfrac{1}{2}$, từ đó suy ra $\{x_n\}$ hội tụ, và nếu gọi $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ thì l là nghiệm lớn hơn $-\dfrac{1}{2}$ của phương trình

$$x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Vậy
$$\lim_{n\to\infty} x_n = l = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Chương 2

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

A. ĐỀ BÀI

1. Tìm miền xác định của các hàm số :

1) $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

2) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$;

3) $y=\sqrt{\cos x^2}$;

4) $y=\lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$;

5) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$;

6) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$;

7) $y=\arccos(2\sin x)$;

8) $y=\lg\left[\cos(\lg x)\right]$;

9) $y=\sqrt[4]{\lg(\operatorname{tg}x)}$.

2. Tìm miền giá trị của các hàm số :

1) $y=\sqrt{2+x-x^2}$;

2) $y=\lg(1-2\cos x)$;

3) $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$;

4) $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

3. Cho $f(x):=\lg x^2$, tìm $f(-1)$, $f(-0{,}001)$, $f(100)$.

4. Cho

$$f(x):=\begin{cases}1+x & \text{khi } -\infty<x\le 0\\ 2^x & \text{khi } x>0\end{cases}$$

Tìm $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

5. Cho $f(x) := \dfrac{1-x}{1+x}$, tìm $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ và $\dfrac{1}{f(x)}$.

6. Tìm hàm số $f(x)$ có dạng $f(x) = ax + b$, biết rằng $f(0) = -2$ và $f(3) = 5$ (nội suy tuyến tính).

7. Tìm hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, biết rằng $f(-2) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 5$ (nội suy bậc hai).

8. Hàm số $y = \operatorname{sgn} x$ (đọc là dấu của x) được định nghĩa như sau :

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} -1 & \text{nếu} \quad x < 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \\ 1 & \text{nếu} \quad x > 0 \end{cases}$$

Vẽ đồ thị của hàm số đó và chứng minh rằng :

$$|x| = x \operatorname{sgn} x.$$

9. Giả sử hàm số $f(u)$ xác định khi $0 < u < 1$; tìm miền xác định của $f(\sin x)$, $f(\ln x)$.

10. Cho $f(x) := \dfrac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right)$, $a > 0$; chứng minh rằng :

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \,.\, f(y).$$

11. Giả sử $f(x) + f(y) = f(z)$. Hãy xác định z nếu :

1) $f(x) = ax$; 2) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $\left(|x| < 1\right)$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; 4) $f(x) = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$.

12. Tìm $f(f(x))$, $g(g(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$ nếu :

1) $f(x) = x^2$; $g(x) = 2^x$; 2) $f(x) = \operatorname{sgn} x$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$;

3) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \le 0 \\ x & \text{khi } x > 0 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \le 0 \\ -x^2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$

13. Tìm f(x), nếu :

1) $f(x+1)=x^2-3x+2$

2) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2} \quad (|x|\geq 2)$

3) $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2} \quad (x>0)$

4) $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2.$

14. Tìm hàm số ngược của các hàm số :

1) $y = 2x + 3$

2) $y=x^2$: (a) $-\infty<x\leq 0$; (b) $0\leq x<+\infty$

3) $y=\frac{1-x}{1+x} \ (x\neq -1)$

4) $y=\sqrt{1-x^2}$: (a) $-1\leq x\leq 0$; (b) $0\leq x\leq 1$

5) $y = \text{sh}x$, với $\text{sh}x := \frac{1}{2}(e^x-e^{-x}), -\infty<x<+\infty.$

15. Hàm số f(x) xác định trong một khoảng đối xứng $(-l, l)$ được gọi là *chẵn* nếu $f(x) = f(-x)$, *lẻ* nếu $f(x) = -f(-x)$. Xét tính chẵn lẻ các hàm số :

1) $f(x):=3x-x^3$

2) $f(x):=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$

3) $f(x):=a^x+a^{-x} \ (a>0)$

4) $f(x):=\ln\frac{1-x}{1+x}$

5) $f(x):=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$

16. Chứng minh rằng bất kì một hàm số nào xác định trong một khoảng đối xứng $(-l, l)$ cũng có thể viết được dưới dạng tổng một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

17. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì các hàm số :

1) $f(x) := A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$

2) $f(x) := \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$

3) $f(x) := 2\text{tg}\frac{x}{2} - 3\text{tg}\frac{x}{3}$

4) $f(x) := \sin^2 x$

5) $f(x) := \sin x^2$

6) $f(x) := \sqrt{\text{tg}x}$

7) $f(x) := \sin x + \sin(x\sqrt{2})$.

18. Viết các hàm số sau đây dưới dạng hàm số hợp :

1) $y = (3x^2 - 7x + 1)^3$; 2) $y = 2^{\text{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}$

3) $y = \ln\left(\text{tg}\frac{x}{2}\right)$; 4) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

5) $y = \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$.

19. Dùng phương pháp vẽ từng điểm, vẽ đồ thị các hàm số :

1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \cos 3x$;

3) $y = \cos\frac{x}{3}$; 4) $y = 3^x$; 5) $y = \log_2\frac{1}{x}$.

B. LỜI GIẢI

1. 1) Miền xác định là tập $\left\{x \,\middle|\, \frac{1+x}{1-x} \geq 0\right\}$, nghĩa là

$$(1+x)(1-x) \geq 0 \ (x \neq 1) \Leftrightarrow -1 \leq x < 1.$$

2) Miền xác định là tập $\{x \mid x \geq 0 ;\ \sin\sqrt{x} \geq 0\}$; nghĩa là :

$$2k\pi \leq \sqrt{x} \leq (2k+1)\pi ;\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\Leftrightarrow 4k^2\pi^2 \leq x \leq (2k+1)^2\pi^2 ;\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

3) $\cos x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{\pi}{2}$, hoặc $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x^2 \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

hoặc $\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k-1)} \leq |x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}(4k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$

4) $\sin\frac{\pi}{x} > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$ hoặc

$$-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$$

hoặc $-\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

5) $\sin \pi x \neq 0,\ \ x \geq 0 \Leftrightarrow x > 0, x \neq n, n = 1, 2, \ldots$

6) $-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{1+x} + 1 \geq 0 \\ \frac{2x}{1+x} - 1 \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ hoặc } x \geq -\frac{1}{3} \\ -1 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 1.$$

7) $-1 \leq 2\sin x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$-\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

8) $\cos\lg x > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < \lg x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow 10^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi} < x < 10^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}, \ k \in \mathbf{Z}.$$

9) $\lg(\mathrm{tg}x) \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}x \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}.$

2. 1) $2 + x - x^2 \geq 0$, $2 + x - x^2$ đạt cực đại khi $x = \dfrac{1}{2}$; do đó $0 \leq y \leq \dfrac{9}{4}$.

2) $1 - 2\cos x > 0$, $\cos x \geq -1 \Leftrightarrow 0 < 1 - 2\cos x \leq 3 \Rightarrow -\infty < y \leq \lg 3$.

3) $-1 \leq \dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y \leq \pi$.

4) $-1 \leq \lg\dfrac{x}{10} \leq 1 \Rightarrow -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$.

3. $f(x) := \lg x^2$; $f(-1) = \lg(-1)^2 = \lg 1 = 0$

$f(-0{,}001) = \lg(-0{,}001)^2 = \lg(0{,}000001) = \lg 10^{-6} = -6$

$f(100) = \lg(100)^2 = \lg 10^4 = 4$.

4. $f(-2) = 1 - 2 = -1$; $f(-1) = 1 - 1 = 0$; $f(0) = 1 + 0 = 1$;

$f(1) = 2^1 = 2$; $f(2) = 2^2 = 4$.

5. $f(0) = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$; $f(-x) = \dfrac{1-(-x)}{1+(-x)} = \dfrac{1+x}{1-x}$

$f(x+1) = \dfrac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = -\dfrac{x}{x+2}$

$f(x) + 1 = \dfrac{1-x}{1+x} + 1 = \dfrac{1-x+1+x}{1+x} = \dfrac{2}{1+x}$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x}{1-x}.$$

6. $f(x) = ax + b,\ f(0) = -2 \Rightarrow -2 = a.0 + b,\ b = -2.$

$f(3) = 5 = a.3 + b = 3a - 2 \Rightarrow 3a = 7\ ;\ \ a = \frac{7}{3}.$

Vậy $f(x) = \frac{7}{3}x - 2.$

7. $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = 1 = a.0 + b.0 + c \Rightarrow c = 1$

$f(-2) = 0 = a(-2)^2 + b(-2) + c \Rightarrow 4a - 2b + 1 = 0$

$f(1) = 5 = a(1)^2 + b(1) + c \Rightarrow a + b = 4.$

Từ hệ hai phương trình

$$\begin{cases} 4a - 2b = -1 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{7}{6}\ ;\ b = \frac{17}{6}.$$

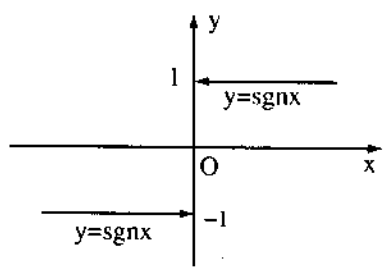
Vậy $f(x) = \frac{7}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1.$

8. $|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$x > 0 : |x| = x = x\,\mathrm{sgn}\,x$

$x < 0 : |x| = -x = x\,\mathrm{sgn}\,x$

Vậy $|x| = x\,\mathrm{sgn}\,x.$



Hình 1

9. Theo giả thiết f(u) xác định với $0 < u < 1$, do đó f(sinx) xác định với $0 < \sin x < 1 \Leftrightarrow 2k\pi < x < (2k+1)\pi\ ;\ k \in \mathbf{Z}.$

$f(\ln x)$ xác định với $0 < \ln x < 1 \Leftrightarrow 1 < x < e.$

10. Theo định nghĩa f(x) :

$$f(x+y)=\frac{1}{2}\left(a^{x+y}+a^{-(x+y)}\right)$$

$$f(x-y)=\frac{1}{2}\left(a^{x-y}+a^{-(x-y)}\right).$$

Suy ra :

$$f(x+y)+f(x-y)=\frac{1}{2}a^{x}(a^{y}+a^{-y})+\frac{1}{2}a^{-x}(a^{y}+a^{-y})$$

$$=\frac{1}{2}(a^{y}+a^{-y})(a^{x}+a^{-x})=2f(x)f(y).$$

11. 1) $f(x) = ax$; $f(y) = ay$; $f(z) = az$.

$f(x) + f(y) = f(z) \Rightarrow ax + ay = az \Rightarrow z = x + y$.

2) Đặt arctgx = u ; arctgy = v $\Rightarrow \dfrac{x+y}{1-xy}=\mathrm{tg}(u+v)\Rightarrow$

$u + v = \mathrm{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy} =$ arctgx + arctgy = arctgz (vì f(x) = arctgx và f(x) + f(y) = f(z)) ; do đó

$$z=\frac{x+y}{1-xy}\ ;\ \ |x|<1.$$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $f(y)=\dfrac{1}{y}$; $f(z)=\dfrac{1}{z}$.

$$f(x)+f(y)=f(z)\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}\Rightarrow z=\frac{xy}{x+y}.$$

4) $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$; $f(y)=\lg\dfrac{1+y}{1-y}$; $f(z)=\lg\dfrac{1+z}{1-z}$; $f(x)+f(y)=f(z)$

$$\Rightarrow\lg\frac{1+x}{1-x}+\lg\frac{1+y}{1-y}=\lg\frac{1+z}{1-z}$$

$$\Rightarrow\lg\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}=\lg\frac{1+z}{1-z}.$$

Suy ra $\dfrac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = \dfrac{1+z}{1-z}$, vì vậy

$$z = \frac{(1+x)(1+y)-(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)+(1-x)(1-y)} = \frac{x+y}{1+xy}.$$

12.1) $f(x) = x^2 \Rightarrow f(f(x)) = (f(x))^2 = (x^2)^2 = x^4$

$g(x) = 2^x \Rightarrow g(g(x)) = 2^{g(x)} = 2^{2^x}$

$f(g(x)) = (g(x))^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$

$g(f(x)) = 2^{f(x)} = 2^{x^2}.$

2) $f(x) = \operatorname{sgn}x \Rightarrow f(f(x)) = \operatorname{sgn}f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

$g(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow g(g(x)) = \dfrac{1}{g(x)} = x \ (x \neq 0)$

$f(g(x)) = \operatorname{sgn}(g(x)) = \operatorname{sgn}x \ (x \neq 0)$

$g(f(x)) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\operatorname{sgn}x} = \operatorname{sgn}x \ (x \neq 0).$

3) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow f(f(x)) = \begin{cases} 0, & f(x) \le 0 \\ f(x), & f(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$f(f(x)) = f(x)$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow g(g(x)) = \begin{cases} 0, & g(x) \le 0 \\ -(g(x))^2, & g(x) > 0 \end{cases}$$

Vì $g(x) \le 0 \Rightarrow g(g(x)) = 0$

$$f(g(x)) = \begin{cases} 0, & g(x) \le 0 \\ g(x), & g(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(g(x)) = 0$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} 0, & f(x) \le 0 \\ -(f(x))^2, & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = g(x).$$

13. 1) Đặt $t = x + 1$, $x = t - 1$, $f(x + 1) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow$

$f(t) = (t - 1)^2 - 3(t - 1) + 2 = t^2 - 5t + 6$; tức là

$f(x) = x^2 - 5x + 6$.

2) Cũng có thể đặt $t = x + \frac{1}{x}$ rồi giải x theo t như bài 1, nhưng ở đây, để ý rằng :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2, \text{ do đó}$$

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$$

nghĩa là $$f(x) = x^2 - 2 \ (|x| \geq 2).$$

3) Có thể viết

$$x + \sqrt{1 + x^2} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{x - \sqrt{1 + x^2}} = \frac{-1}{x - \sqrt{1 + x^2}}.$$

Chia cả tử lẫn mẫu cho x ($x > 0$) :

$$x + \sqrt{1 + x^2} = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}. \text{ Như thế}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}, \quad f(x) = \frac{-x}{1 - \sqrt{x^2 + 1}}, \quad (x > 0).$$

4) Đặt $t = \frac{x}{1 + x} \Rightarrow x = \frac{t}{1 - t}$, do đó

$$f\left(\frac{x}{1 + x}\right) = x^2 \Rightarrow f(t) = \left(\frac{t}{1 - t}\right)^2, \ f(x) = \left(\frac{x}{1 - x}\right)^2.$$

14. 1) $y = 2x + 3$, $x = \frac{1}{2}(y-3)$, hàm ngược là :

$$y = \frac{1}{2}(x-3).$$

2) $y = x^2$; $x = \pm\sqrt{y}$, với $x \le 0$ hàm ngược là $y = -\sqrt{x}$

và với $x \ge 0$, hàm ngược là $y = \sqrt{x}$.

3) Từ $y = \frac{1-x}{1+x}$, giải x theo y và được

$x = \frac{1-y}{1+y}$, do đó hàm ngược là $y = \frac{1-x}{1+x}$, $x \ne -1$.

4) Giải x theo y từ phương trình $y = \sqrt{1-x^2}$ được $x = \pm\sqrt{1-y^2}$, do đó

(a) $-1 \le x \le 0$, hàm ngược là $y = -\sqrt{1-x^2}$

(b) $0 \le x \le 1$, hàm ngược là $y = \sqrt{1-x^2}$.

5) $y = \text{sh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; gọi $\text{ch}x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, dễ thấy rằng $(\text{ch}x + \text{sh}x)(\text{ch}x - \text{sh}x) = \text{ch}^2x - \text{sh}^2x = 1$. Suy ra $\sqrt{1+y^2} = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, do đó $y + \sqrt{1+y^2} = e^x$, suy ra : $x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$, do đó hàm ngược là

$y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

15. 1) $f(-x) = 3(-x) - (-x)^3 = x^3 - 3x = -f(x)$

$$\Rightarrow f(x) \text{ là hàm lẻ.}$$

2) $f(-x)=\sqrt[3]{(1-(-x))^2}+\sqrt[3]{(1+(-x))^2}$

$$=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}=f(x)\Rightarrow f(x) \text{ là hàm chẵn.}$$

3) $f(-x)=a^{-x}+a^{-(-x)}=a^{x}+a^{-x}=f(x)\Rightarrow f(x)$ là hàm chẵn.

4) $f(-x)=\ln\left(\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}\right)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)=$

$$=-\ln\frac{1-x}{1+x},\ f(-x)=-f(x)\Rightarrow f(x) \text{ là hàm lẻ.}$$

5) $f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$

$$=\ln\left(\frac{1+x^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

$f(-x)=-f(x)\Rightarrow f(x)$ là hàm lẻ.

16. Luôn có thể viết

$$f(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))+\frac{1}{2}(f(x)-f(-x)).$$

Gọi $g(x):=\dfrac{1}{2}(f(x)+f(-x))$,

$$h(x):=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x)).$$

Hiển nhiên $g(x)$ là hàm chẵn và $h(x)$ là hàm lẻ, do đó

$f(x) = g(x) + h(x)$ là tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

17. 1) $f(x+T)=A\cos(\lambda x+\lambda T)+B\sin(\lambda x+\lambda T)$

$$=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x\ ;\ \forall x$$

$\Rightarrow A(\cos\lambda x-\cos(\lambda x+\lambda T))+B(\sin\lambda x-\sin(\lambda x+\lambda T))=0,\ \forall x$

$\Rightarrow \cos\lambda x-\cos(\lambda x+\lambda T)=0,\ \forall x$

$$\sin\lambda x - \sin(\lambda x + \lambda T) = 0,\ \forall x$$

$$\Rightarrow \cos\lambda x = \cos(\lambda x + \lambda T),\quad \sin\lambda x = \sin(\lambda x + \lambda T) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{\lambda}$.

2) Dùng kết quả bài 1 ; sinx có chu kì 2π ; sin2x có chu kì π và sin3x có chu kì $\frac{2\pi}{3}$. Do vậy chu kì của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ là bội số chung nhỏ nhất của ba chu kì 2π, π và $\frac{2\pi}{3}$, nghĩa là chu kì $T = 2\pi$.

3) Để ý rằng hàm số $\mathrm{tg}\lambda x$ có chu kì T nếu :

$$\mathrm{tg}\lambda(x + T) = \mathrm{tg}\lambda x \Leftrightarrow \mathrm{tg}(\lambda x + \lambda T) = \mathrm{tg}\lambda x = \mathrm{tg}(\lambda x + \pi)$$

$\Leftrightarrow \lambda T = \pi \Rightarrow T = \frac{\pi}{\lambda}$, $\lambda \neq 0$. Do đó $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ có chu kì 2π ; $\mathrm{tg}\frac{x}{3}$ có chu kì 3π. Do đó hàm số :

$$f(x) = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 3\mathrm{tg}\frac{x}{3}$$

có chu kì $T = 6\pi$ là bội số chung nhỏ nhất của 2π và 3π.

4) Có thể viết $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, do vậy dùng kết quả bài 1, suy ra $f(x) = \sin^2 x$ là một hàm số có chu kì $T = \pi$.

5) Để $f(x) = \sin x^2$ có chu kì là $T > 0$, phải có

$$\sin\,(x + T)^2 = \sin x^2 = \sin(x^2 + 2\pi).$$

Suy ra : $$x^2 + 2Tx + T^2 = x^2 + 2\pi,$$

tức là T là nghiệm của phương trình bậc hai chứa tham số x :

$$T^2 + 2xT - 2\pi = 0.$$

Dĩ nhiên, nghiệm T của phương trình đó phụ thuộc x, do vậy $f(x) = \sin x^2$ không phải là một hàm số tuần hoàn.

6) $\sqrt{tg(x+T)} = \sqrt{tgx} = \sqrt{tg(x+\pi)}$.

Suy ra $f(x) = \sqrt{tgx}$ tuần hoàn với chu kì π.

7) sinx có chu kì là 2π ; $\sin(x\sqrt{2})$ có chu kì $\pi\sqrt{2}$. Vì ta không tìm được số nguyên n nào để cho $n\pi$ là bội số chung nhỏ nhất của 2π và $\pi\sqrt{2}$, nên f(x) không tuần hoàn.

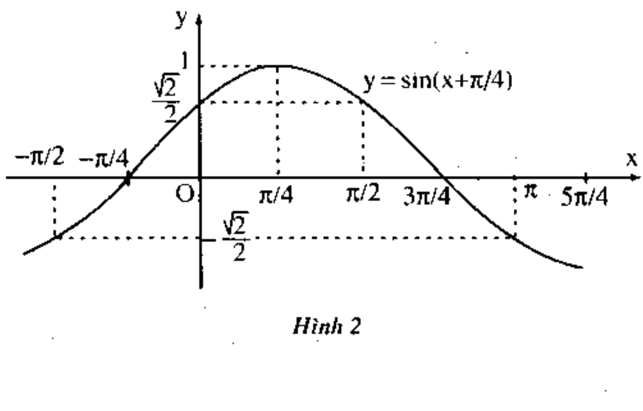
18. 1) $y = u^3$, $u = 3x^2 - 7x + 1$; 2) $y = 2^u$; $u = tgv$; $v = \dfrac{1}{x}$;

3) $y = \ln u$; $u = tgv$; $v = \dfrac{x}{2}$; 4) $y = \sqrt{u}$; $u = x + \sqrt{x}$;

5) $y = \arcsin u$; $u = \sqrt{v}$; $v = \dfrac{x}{1+x}$.

19. 1) Từ tính tuần hoàn, chu kì $T = 2\pi$ và từ bảng một số giá trị của hàm số, có thể vẽ đồ thị từng điểm :

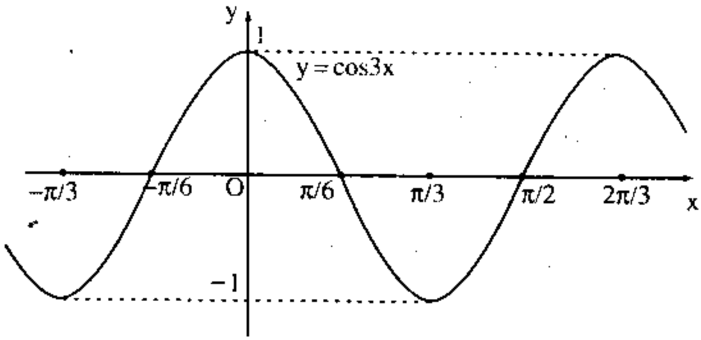
x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$



Hình 2

2) Hàm số có chu kì $T = \frac{2\pi}{3}$ và dưới đây cho một số giá trị để vẽ từng điểm đồ thị của hàm số :

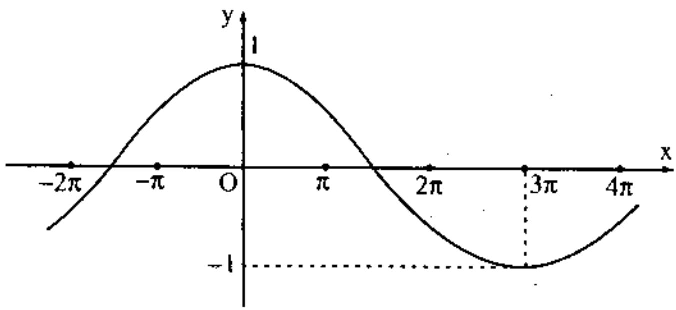
x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\cos 3x$	-1	0	1	0	-1	0	1



Hình 3

3) Hàm số có chu kì $T = 6\pi$ và từ bảng một số giá trị cho dưới đây có thể vẽ đồ thị từng điểm :

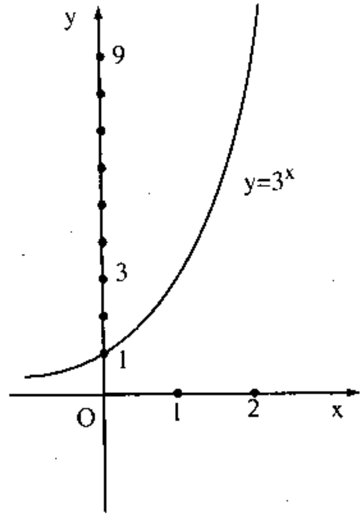
x	-2π	$-\pi$	0	π	2π	3π	4π
$\cos\frac{x}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$



Hình 4

4) Từ bảng một số giá trị hàm số cho dưới đây có thể vẽ đồ thị hàm số :

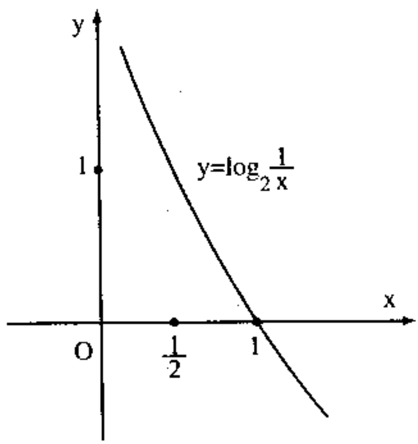
x	0	1	2
3^x	1	3	9



Hình 5

5) Bảng vài giá trị hàm số :

x	$\frac{1}{2}$	1
$\log_2 \frac{1}{x}$	1	0



Hình 6

Chương 3

GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

A. ĐỀ BÀI

1. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$, $x_n := n^{(-1)^n}$ không dần tới vô cùng nhưng cũng không bị chặn.

2. Tính $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right].$$

3. Tìm các giới hạn :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$.

4. Tìm các giới hạn :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

5. Tìm các giới hạn :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$.

6. Tìm các giới hạn :

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

7. Tìm các giới hạn :

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x)$.

8. Tìm các giới hạn :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to +0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$; 6) $\lim\limits_{x\to +\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$; 8) $\lim\limits_{n\to +\infty}n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)$, $(x>0)$.

9. Cho đồ thị của hàm số liên tục $y = f(x)$, cho trước điểm có hoành độ $x = a$, cho trước số $\varepsilon > 0$, hãy tìm số $\delta > 0$ sao cho khi $|x-a|<\delta$ có $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

10. Dùng định nghĩa "$\varepsilon - \delta$" để chứng minh hàm số $f(x) = x^2$ liên tục tại điểm $x = 5$ và điền vào chỗ trống bảng dưới đây :

ε	1	0,1	0,01	0,001	...
δ					

11. Cho hàm số $f(x) := x + 0{,}001E(x)$, trong đó $E(x)$ là phần nguyên của x (xem thí dụ (d) mục 2.1, chương 2, sách đã dẫn). Chứng minh rằng với mỗi $\varepsilon > 0{,}001$ có thể tìm được $\delta := \delta(\varepsilon, x) > 0$ sao cho khi $|x' - x| < \delta$ có $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ và với $0 < \varepsilon \le 0{,}001$ thì với bất kì giá trị nào của x cũng không tìm được δ thoả mãn yêu cầu trên. Hàm số f(x) không liên tục tại những điểm nào ?

12. Xét sự liên tục của các hàm số :

1) $f(x) = |x|$

2) $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 4)/(x-2) & \text{nếu } x \neq 2 \\ A & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{nếu } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & \text{nếu } 1 < x \le 2 \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{nếu x hữu tỉ} \\ 0, & \text{nếu x vô tỉ} \end{cases}$

13. Cho $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{nếu } x < 0 \\ a + x, & \text{nếu } x \ge 0 \end{cases}$

Hãy chọn số a sao cho f(x) liên tục.

14. Cho f và g là hai hàm số liên tục trên [a, b] và giả sử f = g tại mọi điểm hữu tỉ của [a, b]. Hỏi có thể kết luận f = g được không ?

15. Dùng phương pháp phân đôi, tìm nghiệm dương của phương trình $1{,}8x^2 - \sin 10x = 0$ với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-5}.

16. Xét xem trong ba hàm số $f = \sqrt{x}$, $g = x^2$ và $h = \cos x^2$, hàm số nào liên tục đều trên $\mathbf{R}^+$.

B. LỜI GIẢI

1. Vì $(-1)^n$ bằng -1 hay $+1$ tuỳ theo n lẻ hay chẵn, do đó dãy $\{x_n\}$ lấy các giá trị xen kẽ nhau $\frac{1}{n}$ và n, do đó không thể có số $A > 0$ để $n^{(-1)^n} > A$, $\forall n$ thoả $n > n_0$ nào đó, và cũng không thể tìm được số $B > 0$ để $n^{(-1)^n} < B$, $\forall n$ thoả $n > n_1$ nào đó. Do vậy $\{x_n\}$ không dần tới vô cùng nhưng cũng không bị chặn.

2. Có thể viết $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Do đó :

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Vì $\frac{1}{n+1} \to 0$ khi $n \to \infty$ nên :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right]=1.$$

3. 1) Để ý rằng

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2) \ ; \ x^3 - 12x + 16 = (x - 2)^2(x + 4).$$

Do đó :

$$\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}=\frac{(x+1)^{20}(x-2)^{20}}{(x+4)^{10}(x-2)^{20}}=\frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}}.$$

Vậy
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}=\frac{(2+1)^{20}}{(2+4)^{10}}=\frac{3^{20}}{6^{10}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}.3^{10}=\left(\frac{3}{2}\right)^{10}.$$

2) Có thể viết

$$x + x^2 + ... + x^n - n = (x - 1) + (x^2 - 1) + ... + (x^n - 1)$$

$$= (x - 1)[1 + (x + 1) + (x^2 + x + 1) + ... + (x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)].$$

Do đó :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}[1+(x+1)+...+(x^{n-1}+...+x+1)]$$

$$=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

3) Có thể viết

$$x^{50} - 2x + 1 = x^{50} - x - (x - 1)$$

$$= x(x^{49} - 1) - (x - 1)$$

$$= (x - 1)x(x^{48} + x^{47} + ... + x + 1) - (x - 1)$$

$$= (x - 1)[x(x^{48} + x^{47} + ... + x + 1) - 1]$$

(dùng công thức $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$).

Tương tự :

$$x^{100} - 2x + 1 = (x-1)[x(x^{98} + x^{97} + ... + x + 1) - 1].$$

Do đó :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} = \frac{98}{48} = 2\frac{1}{24}.$$

4) Có thể viết

$$x^n - a^n - na^{n-1}(x-a) =$$
$$= (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-1}) - na^{n-1}(x-a)$$
$$= (x-a)[(x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-1}) - na^{n-1}]$$

và :

$$x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-1} - na^{n-1} =$$
$$= (x^{n-1} - a^{n-1}) + (ax^{n-2} - a^{n-1}) + ... + (xa^{n-2} - a^{n-1})$$
$$= (x-a)(x^{n-2} + ... + a^{n-2}) + a(x^{n-2} - a^{n-2}) + ... + a^{n-2}(x-a)$$
$$= (x-a)[(x^{n-2} + ... + a^{n-2}) + a(x^{n-3} + ... + a^{n-3}) + ... + a^{n-2}].$$

Do đó :

$$x^n - a^n - na^{n-1}(x-a) =$$
$$= (x-a)^2[(x^{n-2} + ... + a^{n-2}) + a(x^{n-3} + ... + a^{n-3}) + ... + a^{n-2}]$$

và

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}.$$

4. 1) Chia tử và mẫu của phân thức cho $\sqrt{x}$ và được

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\sqrt{\frac{1}{x^4}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}.$$

Khi $x \to +\infty$ thì $\frac{1}{x} \to 0$; $\frac{1}{x^2} \to 0$; $\frac{1}{x^4} \to 0$, do đó

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = 1.$$

2) Cũng như bài trên, chia tử và mẫu cho $\sqrt{x}$ và chuyển qua giới hạn, có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. 1) Để ý rằng :

$$\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x} = \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{\alpha x}\cdot\alpha$$

Dùng kết quả của thí dụ (b) trong mục 3.2, các tính chất giới hạn, trang 72 sách Toán học cao cấp tập II (của cùng tác giả) suy ra :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x} = \frac{\alpha}{m}.$$

Và bây giờ, có :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[m]{1+\alpha x}-1)-(\sqrt[n]{1+\beta x}-1)}{x}$$

$$= \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}.$$

2) Có thể viết

$$\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1 = (\sqrt[m]{1+\alpha x}-1)\sqrt[n]{1+\beta x}+(\sqrt[n]{1+\beta x}-1).$$

Do đó, dùng kết quả bài trên, suy ra :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x} = \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}.$$

6. 1) Ta có :

$$\frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \frac{1}{2}.$$

Để ý rằng

$$\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \to 1 \text{ khi } x \to a \text{ và } \cos\frac{x+a}{2} \to \cos a \text{ khi } x \to a,$$

do đó $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a.$

2) Có thể viết

$$\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \frac{1 + \mathrm{tg}x - 1 - \sin x}{x^3(\sqrt{1+\mathrm{tg}x} + \sqrt{1+\sin x})}$$

$$= \frac{\mathrm{tg}x}{x} \cdot \frac{(1-\cos x)}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}x} + \sqrt{1+\sin x}}.$$

Như ta đã biết

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}x}{x} = 1\ ;\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \text{ (sách đã dẫn, trang 75)}$$

và $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+\mathrm{tg}x} + \sqrt{1+\sin x}) = 2.$

Do đó

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \frac{1}{4}.$$

3) Có thể viết

$$1 - \cos x\cos 2x\cos 3x = (1 - \cos x)\cos 2x\cos 3x + (1 - \cos 2x)\cos 3x + + (1 - \cos 3x),$$

để ý rằng

$$\frac{1-\cos kx}{x^2}=\frac{1-\cos kx}{k^2x^2}\cdot k^2$$

nghĩa là

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{x^2}=\frac{k^2}{2}\text{ (xem bài trên)}$$

và $$\lim_{x\to 0}\cos 2x=\lim_{x\to 0}\cos 3x=\lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

Do đó :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}=14.$$

4) Có thể viết

$$\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{(\sqrt{\cos x}-1)-(\sqrt[3]{\cos x}-1)}{\sin^2 x}.$$

Ta có :

$$\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x}=\frac{\cos x-1}{\sin^2 x(\sqrt{\cos x}+1)}=\frac{\dfrac{\cos x-1}{x^2}}{\dfrac{\sin^2 x(\sqrt{\cos x}+1)}{x^2}}$$

Khi $x\to 0$ thì :

$$\frac{\cos x-1}{x^2}\to-\frac{1}{2};\ \frac{\sin^2 x}{x^2}\to 1;\ \sqrt{\cos x}+1\to 2.$$

Do đó :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x}=-\frac{1}{4}.$$

Tương tự :

$$\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 x}=\frac{\cos x-1}{\sin^2 x(\sqrt[3]{(\cos x)^2}+\sqrt[3]{\cos x}+1)}.$$

Do đó :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 x}=-\frac{1}{6}.$$

Vậy : $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}.$$

7. 1) $$\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}=\frac{(\sqrt{x}-2)}{(x-4)(x-1)}\cdot\frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\frac{(x-4)}{(x-4)(x-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}.$$

Vậy :

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{12}.$$

2) $\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x=$

$$=\frac{(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x)(\sqrt[3]{(x^3+x^2-1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+x^2)}{(\sqrt[3]{(x^3+x^2-1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+x^2)}$$

$$=\frac{x^3+x^2-1-x^3}{x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^6}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

do đó :

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x)=\frac{1}{3}.$$

8. 1) $\frac{x^3}{1-x}=-x^2-x-1+\frac{1}{1-x}$.

Khi $x \to +\infty$ thì $\frac{x^3}{1-x} \to -\infty$. Do đó khi $x \to +\infty$ thì

$$\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}} \to \left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty}$$

nghĩa là : $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}=0.$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$.

Vậy : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=1$.

3) Đặt : $A:=\sqrt[x]{1-2x}=(1-2x)^{\frac{1}{x}}$, do đó :

$$\ln A=\frac{\ln(1-2x)}{x}=(-2)\cdot\frac{\ln(1-2x)}{-2x}.$$

Dùng công thức (3.17a) trang 89 (sách đã dẫn)

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Có : $\lim\limits_{x\to0}\ln A=\lim\limits_{x\to0}(-2)\cdot\frac{\ln(1-2x)}{-2x}=-2$.

Vậy $\lim\limits_{x\to0}A=\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}=e^{-2}$.

4) Đặt $A:=\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=(1+(\cos\sqrt{x}-1))^{\frac{1}{x}}$. Khi đó

$$\ln A=\frac{\ln(1+(\cos\sqrt{x}-1))}{x}=\frac{\ln(1+(\cos\sqrt{x}-1))}{(\cos\sqrt{x}-1)}\cdot\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}.$$

Để ý rằng :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}-\frac{1-\cos\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}=-\frac{1}{2}\ \text{(bài 6.2)}$$

và $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos\sqrt{x}-1))}{(\cos\sqrt{x}-1)}=1.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\ln A=-\dfrac{1}{2}$ và cuối cùng

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

5) Đặt $A=(\sin x)^{\mathrm{tg}x}=[1+(\sin x-1)]^{\mathrm{tg}x}$,

$$\ln A=\mathrm{tg}x\ln(1+(\sin x-1))=\frac{\ln(1+(\sin x-1))}{\mathrm{cotg}x}=$$

$$=\frac{\ln(1+(\sin x-1))}{\sin x-1}\cdot\frac{\sin x-1}{\mathrm{cotg}x}$$

và $$\frac{\sin x-1}{\mathrm{cotg}x}=\sin x\cdot\frac{\sin x-1}{\cos x}.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{\mathrm{cotg}x}=0.$

Cuối cùng

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln A=0,\ \text{nghĩa là :}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}x}=e^0=1.$$

6) $\sin\ln(x+1) - \sin\ln x =$

$$= 2\cos\left[\frac{1}{2}(\ln(x+1) + \ln x)\right]\sin\left[\frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln x)\right]$$

$$= 2\cos\left(\frac{1}{2}\ln(x(x+1))\right)\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)$$

và $\ln\frac{x+1}{x} \to \ln 1 = 0$ khi $x \to \infty$ do đó :

$$\lim_{x\to\infty}[\sin\ln(x+1) - \sin\ln x] = 0.$$

7) Để ý rằng

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\alpha\cdot\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x} = \alpha$$

và

$$\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x - \sin\beta x} = \frac{(e^{\alpha x}-1)+(1-e^{\beta x})}{\sin\alpha x - \sin\beta x} = \frac{\dfrac{e^{\alpha x}-1}{x} - \dfrac{e^{\beta x}-1}{x}}{\dfrac{\sin\alpha x}{x} - \dfrac{\sin\beta x}{x}}.$$

Do đó

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x - \sin\beta x} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} = 1.$$

8) Có thể viết

$$n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) = n^2\left(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n+1}}\right) = n^2 \,.\, x^{\frac{1}{n+1}}\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right)$$

$$= x^{\frac{1}{n+1}}\frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\frac{1}{n^2}} = \frac{x^{\frac{1}{n+1}}\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)}{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n(n+1)}}$$

$$= \frac{n}{n+1} x^{\frac{1}{n+1}} \frac{\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right)}{\frac{1}{n(n+1)}}.$$

Bây giờ dùng công thức (3.18) trang 89 (sách đã dẫn) :

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^{\alpha} - 1}{\alpha} = \ln a \ \ (a > 0)$$

ta có :

$$\frac{1}{n(n+1)} \to 0 \text{ khi } n \to \infty,$$

$$x^{\frac{1}{n+1}} \to 1 \text{ khi } n \to \infty,$$

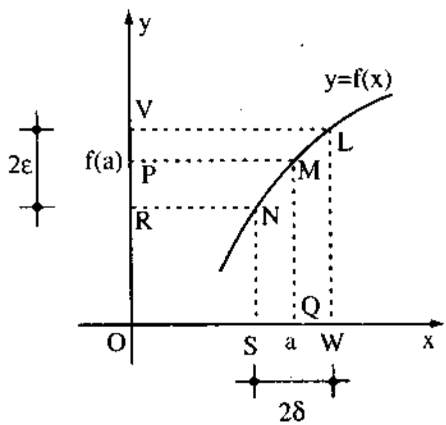
$$\frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} \to \ln x \ (x > 0) \text{ khi } n \to \infty$$

và cuối cùng :

$$\lim_{n \to \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) = \ln x.$$

9. Hàm số y = f(x) liên tục, có đồ thị là một đường liền (hình 7), trên đồ thị đó chọn điểm M (a, f(a)).

Từ M hạ MQ, MP lần lượt vuông góc với trục toạ độ. Lấy P là trung điểm, trên trục tung lấy đoạn RV = 2ε với ε > 0 tuỳ ý cho trước. Từ R và V vẽ các đường song song với trục hoành, chúng cắt



Hình 7

đồ thị $y = f(x)$ tại N và L. Từ N và L hạ NS và LW vuông góc với trục hoành, khi đó đặt $2\delta = SW$; và nhìn hình vẽ ta thấy rằng khi x lọt vào đoạn SW thì f(x) lọt vào đoạn RV và điều đó chứng tỏ rằng, với $\varepsilon = \frac{VR}{2}$ thì khi $(x - a) < \delta = \frac{SW}{2}$, sẽ có $\left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon$.

10. Muốn chứng minh $f(x) = x^2$ liên tục tại điểm x = 5 ta phải chứng minh rằng với bất kì $\varepsilon > 0$ cho trước luôn tìm được $\delta > 0$ sao cho

$$\left|x - 5\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(5)\right| = \left|x^2 - 5^2\right| < \varepsilon.$$

Thật vậy, có thể viết

$$\left|x^2 - 5^2\right| = \left|(x - 5)(x + 5)\right|.$$

Vì ta chỉ xét những giá trị x rất gần x = 5 nên có thể giả thiết, chẳng hạn $\left|x + 5\right| < 10$.

Do đó $\left|x^2 - 5^2\right| < \left|x - 5\right|10$ và muốn $\left|x^2 - 5^2\right| < \varepsilon$, chỉ cần $10\left|x - 5\right| < \varepsilon$, nghĩa là $\left|x - 5\right| < \frac{\varepsilon}{10}$.

Do đó chỉ cần chọn $\delta = \frac{\varepsilon}{10}$ và như thế có :

ε	1	0,1	0,01	0,001	...
δ	0,1	0,01	0,001	0,0001	...

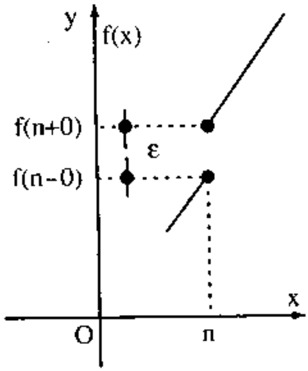
11. Theo giả thiết, ta có (hình 8).

Với $x = n \in \mathbf{Z}$ thì

$$f(n + 0) - f(n - 0) = 0,001.$$

Với $x \notin \mathbf{Z}$ thì

$$f(x + 0) = f(x - 0).$$



Hình 8

Vậy với $\varepsilon > 0{,}001$, luôn tìm được $\delta(\varepsilon, x) > 0$ thoả $|x' - x| < \delta$ $\Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Với $\varepsilon \le 0{,}001$; tại $x = n \in \mathbf{Z}$ thì $\delta(\varepsilon, x) = 0$, do đó không tồn tại δ thoả yêu cầu. Hàm số $f(x)$ không liên tục tại $x = n \in \mathbf{Z}$.

12. 1) $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Dĩ nhiên $f(x)$ liên tục tại mọi $x \neq 0$; tại $x = 0$, ta cũng có

$$f(0) = 0 = \lim_{x\to 0} x = \lim_{x\to 0}(-x).$$

Do đó $f(x)$ liên tục với mọi x.

2) Có $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2}(x + 2) = 4.$

Do vậy nếu $A = 4$ thì $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ và nếu $A \neq 4$ thì $f(x)$ gián đoạn tại $x = 2$.

3) Vì $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ và x, $\sin\dfrac{1}{x}$ liên tục tại mọi $x \neq 0$ và theo giả thiết $f(0) = 0$ nên $f(x)$ liên tục với mọi x.

4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ và $f(0) = 0$ nên $f(x)$ liên tục với mọi x.

5) Theo giả thiết $f(x)$ xác định trong đoạn $[0, 2]$ và $f(x)$ liên tục trong các khoảng $[0, 1)$ và $(1, 2]$. Ngoài ra $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 1$, vậy $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

6) $f(k) = \sin k\pi = 0$, $\forall k \in \mathbf{Z}$; $f(x) \neq 0$. $\forall x \neq k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ngoài ra $f(x) = 0$ khi x vô tỉ, do đó $f(x)$ gián đoạn tại mọi $x \neq k$, $k \in \mathbf{Z}$.

13. Hiển nhiên f(x) liên tục tại mọi $x \neq 0$; ngoài ra

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} e^x = 1 \text{ và}$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} (a+x) = a.$$

Do đó f(x) liên tục tại x = 0 khi a = 1.

14. Gọi x_o là điểm vô tỉ, $x_o \in [a, b]$, gọi α là số thập phân hữu tỉ xấp xỉ dưới của x_o, viết đến 10^{-n}, vì f = g tại những điểm hữu tỉ : $f(\alpha) = g(\alpha)$, do đó tồn tại $n_o \in N$ sao cho khi $n \geq n_o$, có $\alpha \in [a, b]$:

$$f(x_o) - g(x_o) = f(x_o) - f(\alpha) - (g(x_o) - g(\alpha)).$$

Vì $|x_o - \alpha| < 10^{-n}$ nên $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in N$ sao cho $n \geq n_1 \Rightarrow$ $|f(x_o) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$ và $|g(x_o) - g(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Do đó $|f(x_o) - g(x_o)| < \varepsilon$.

Vì ε là tuỳ ý, suy ra $f(x_o) = g(x_o) \Rightarrow f(x) = g(x)$.

15. Xét hàm số $f(x) = 1,8x^2 - \sin 10x$ và tính : $f(0,69) < 0$; $f(0,7) > 0$, do đó nghiệm của phương trình f(x) = 0 nằm trong khoảng [0,69, 0,7]

Xét $x_1 = \frac{1}{2}(0,69 + 0,7) = 0,695$, $f(0,695) < 0$;

Xét $x_2 = \frac{1}{2}(0,695 + 0,7) = 0,6975$, $f(0,6975) < 0$;

Xét $x_3 = \frac{1}{2}(0,6975 + 0,7) = 0,69875$, $f(0,69875) < 0$;

Xét $x_4 = \frac{1}{2}(0,69875 + 0,7) = 0,699375$, $f(0,699375) < 0$;

Xét $x_5 = \frac{1}{2}(0,699375 + 0,7) = 0,6996875$, $f(0,6996875) < 0$;

Xét $x_6 = \frac{1}{2}(0,6996875 + 0,7) = 0,6999375$, $f(0,6999375) < 0$;

Xét $x_7 = \frac{1}{2}(0,6999375 + 0,7) = 0,69996875$, $f(x_7) < 0$;

Xét $x_8 = \frac{1}{2}(0,69996875 + 0,7) = 0,699984375$, $f(x_8) < 0$.

$\alpha = 0,69999 \pm 0,00001$.

16. Không giảm tính tổng quát, có thể giả thiết $0 \leq x' < x''$ và xét xem khi $|x'' - x'| < \delta$ có kéo theo $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước hay không ?

Với hàm số $f(x) = \sqrt{x}$, ta có :

$$\sqrt{x''} - \sqrt{x'} = \frac{x'' - x'}{\sqrt{x''} + \sqrt{x'}} < \frac{x'' - x'}{2\sqrt{x'}} \text{ nếu } x' > 0.$$

Muốn $\sqrt{x''} - \sqrt{x'}$ dương và bé thua ε ; chỉ cần $x'' - x' < 2\varepsilon\sqrt{x'}$, hay là nếu lấy $x' \geq x_o > 0$ với x_o cố định thì chỉ cần $x'' - x' < 2\varepsilon\sqrt{x_o}$, do đó $\delta = 2\varepsilon\sqrt{x_o}$, do đó có sự liên tục đều trên $[x_o, +\infty)$.

Ngoài ra, vì f(x) liên tục nên cũng liên tục đều trên đoạn $[0, x_o]$ và do đó f(x) liên tục đều trên $[0, +\infty)$.

Với hàm số $g(x) = x^2$, xét hiệu :

$$x''^2 - x'^2 = (x'' - x')(x'' + x') > 2x'(x'' - x').$$

Khi đó, dầu là $x'' - x' < \delta$, với δ khá bé cũng không đảm bảo $x''^2 - x'^2 < \varepsilon$ vì, chẳng hạn,

$$x'' - x' = \frac{\delta}{2},\ x' > \frac{1}{\delta} \Rightarrow x''^2 - x'^2 > 1.$$

Vậy g(x) không thể liên tục đều trên $[0, +\infty)$.

Cuối cùng, xét $h(x) = \cos x^2$, h(x) không đơn điệu nên không thể lập luận như hai trường hợp trên được nhưng do h(x) luôn có cực đại và cực tiểu liên tiếp nhau (tính chất của hàm số cos (.)), có :

$\cos x^2 = 1$ với $x^2 = 2k\pi$; $x = \sqrt{2k\pi}$, $k \in \mathbf{N}$

$\cos x^2 = -1$ với $x^2 = (2k+1)\pi$; $x = \sqrt{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbf{N}$.

Bây giờ đặt : $x'' = \sqrt{2k\pi}$, $x' = \sqrt{(2k+1)\pi}$ thì

$$x'' - x' < \frac{1}{\sqrt{2k\pi}} \to 0 \text{ khi } k \to \infty$$

và $$|h(x'') - h(x')| = 2,$$

và điều đó chứng tỏ rằng h(x) không liên tục đều trên $[0, +\infty)$.

Chương 4

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

A. ĐỀ BÀI

1. Cho $f(x) := (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$; tính $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$?

2. Cho $f(x) := x + (x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, tính $f'(1)$?

3. Tính đạo hàm các hàm số :

1) $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$;

2) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

3) $y = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

4) $y = \sqrt[(m+n)]{(1-x)^m(1+x)^n}$

5) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$;

6) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

7) $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$;

8) $y = \dfrac{1}{\cos^n x}$

9) $y = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} - \mathrm{cotg}\dfrac{x}{2}$;

10) $y = x^{\frac{1}{x}}$

11) $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;

12) $y = e^x \ln\sin x$

13) $y = \log_3(x^2 - \sin x)$; 14) $y = e^{\text{arctg}x}$

15) $y = e^{x^{x}}$

4. Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong :

$$y = x^3 - 3x^2 - x + 5$$

tại điểm A(3, 2).

5. Chứng minh rằng đoạn tiếp tuyến của đường hypebôn xy = m gồm giữa các trục toạ độ bị tiếp điểm chia làm hai phần bằng nhau.

6. Tìm đạo hàm và vẽ đồ thị của hàm số và của đạo hàm các hàm số :

1) $y = |x|$; 2) $y = x|x|$; 3) $y = \ln|x|$.

7. Tìm đạo hàm các hàm số :

$$1)\ y = \begin{cases} 1 - x, & \text{khi } -\infty < x < 1 \\ (1-x)(2-x), & \text{khi } 1 \le x \le 2 \\ -(2-x), & \text{khi } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

$$2)\ y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & \text{khi } |x| \le 1 \\ \dfrac{1}{e}, & \text{khi } |x| > 1. \end{cases}$$

8. Tính y' nếu (với f là một hàm khả vi)

1) $y = f(x^2)$; 2) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$; 3) $y = f(e^x)e^{f(x)}$.

9. Cho f(x) : = x(x − 1) (x − 2) ... (x − 100). Tính f '(0) ?

10. Với điều kiện nào thì hàm số

$$f(x) := \begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x}, & \text{khi } x \ne 0 \\ 0, & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

1) liên tục tại x = 0

2) khả vi tại x = 0

3) có đạo hàm liên tục tại x = 0.

11. Chứng minh rằng hàm số $f(x) := |x - a|\,\varphi(x)$ trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số liên tục, $\varphi(a) \neq 0$, không có đạo hàm tại điểm $x = a$.

12. Xét tính khả vi của các hàm số :

1) $y = \left|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right|$; 2) $y = |\cos x|$.

13. Tìm đạo hàm trái $f'_-(x)$ và đạo hàm phải $f'_+(x)$ của các hàm số :

1) $f(x) = |x|$; 2) $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

14. Tìm vi phân các hàm số :

1) $y = \dfrac{1}{x}$; 2) $y = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$, $(a \neq 0)$

3) $y = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$, $(a \neq 0)$ 4) $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|$

5) $y = \arcsin\dfrac{x}{a}$, $(a \neq 0)$.

15. Cho $u(x)$, $v(x)$ là hai hàm số khả vi, chứng minh rằng

1) $d(Cu) = Cdu$, C là hằng số ; 2) $d(u + v) = du + dv$

3) $d(uv) = vdu + udv$; 4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

16. Tìm

1) $d(xe^x)$; 2) $d\sqrt{a^2 + x^2}$;

3) $d\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$; 4) $d\ln(1 - x^2)$.

17. Tìm

1) $\dfrac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9)$; 2) $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$;

3) $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

18. Dùng công thức số gia của hàm số khả vi, tìm giá trị xấp xỉ các biểu thức :

1) $\sqrt[3]{1{,}02}$; 2) $\sin 29^0$;

3) lg11 ; 4) arctg1,05.

19. Chứng minh công thức xấp xỉ

$$\sqrt{a^2+x} \approx a + \frac{x}{2a}, \ (a > 0)$$

với $|x| << a$ (hệ thức $A << B$ với $A, B > 0$ kí hiệu A rất bé so với B). Dùng công thức trên tính các giá trị xấp xỉ của

1) $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{34}$; 3) $\sqrt{120}$.

20. Tìm y'', nếu

1) $y = x\sqrt{1+x^2}$; 2) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

3) $y = e^{-x^2}$; 4) $y = \ln f(x)$.

21. Tìm y'_x, y''_{xx} của hàm số $y = f(x)$ cho dưới dạng tham số

1) $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$; 2) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$;

3) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

22. Tìm đạo hàm cấp cao các hàm số :

1) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$, $y^{(8)}$? 2) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, $y^{(100)}$?

3) $y = x^2e^{2x}$, $y^{(20)}$? 4) $y = x^2\sin 2x$, $y^{(50)}$?

23. Tìm $y^{(n)}$ nếu

1) $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$; 2) $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$;

3) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$; 4) $y = e^{ax}\sin bx$.

24. Dùng phương pháp quy nạp, chứng minh rằng

$$\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}.$$

25. Cho đa thức Legendre : $P_m(x) := \frac{1}{2^m m!}\left[(x^2-1)^m\right]^{(m)}$, $m = 0, 1, 2, ...$ Chứng minh rằng $P_m(x)$ thoả phương trình

$$(1-x^2)P''_m(x) - 2xP'_m(x) + m(m+1)P_m(x) = 0.$$

26. Cho đa thức Tchebychev – Hermite

$$H_m(x) := (-1)^m e^{x^2}(e^{-x^2})^{(m)}, \; m = 0, 1, 2, ...$$

Chứng minh rằng

$$H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

Tìm biểu thức hiện của $H_m(x)$.

B. LỜI GIẢI

1. $f'(x) = (x-2)^2(x-3)^3 + 2(x-2)f_1(x) + 3(x-3)^2f_2(x)$ trong đó $f_1(x) = (x-1)(x-3)^3$; $f_2(x) = (x-1)(x-2)^2$.

Do đó $f'(1) = (1-2)^2(1-3)^3 + 0 + 0 = -8$

$f'(2) = 0 + 0 + 0 = 0$

$f'(3) = 0 + 0 + 0 = 0.$

2. $$f'(x) = 1 + \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + (x-1)g(x)$$

với $$g(x) = \left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)'$$

Do đó : $f'(1) = 1 + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{\pi}{4}$.

3. 1) $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = x + x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}$

$$y' = 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

2) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-1} + x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}}$

$$y' = (-1)x^{-1-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1}$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$$

3) $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} = x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + (-2)\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

4) $y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n} = (1-x)^{\frac{m}{m+n}}(1+x)^{\frac{n}{m+n}}.$

$\ln y = \frac{1}{m+n}\left[m\ln(1-x) + n\ln(1+x)\right].$

Để ý rằng $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$; $(\ln(1-x))' = -\frac{1}{1-x}.$

Do đó lấy đạo hàm hai vế biểu thức lny, được :

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{m+n}\left(\frac{n}{1+x} - \frac{m}{1-x}\right) = \frac{1}{(m+n)}\cdot\frac{(n-m)-(n+m)x}{(1-x)(1+x)}.$$

Suy ra :

$$y' = y\cdot\frac{1}{m+n}\cdot\frac{(n-m)-(n+m)x}{(1-x)(1+x)} =$$

$$= \frac{(n-m)-(n+m)x}{m+n}(1-x)^{\frac{m}{m+n}-1}(1+x)^{\frac{n}{m+n}-1}$$

tức là

$$y' = \frac{(n-m)-(n+m)x}{(m+n)\sqrt[(m+n)]{(1-x)^n(1+x)^m}}.$$

5) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}} = \left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{\frac{1}{3}}.$

$\ln y = \dfrac{1}{3}\left[\ln(1+x^3) - \ln(1-x^3)\right].$

$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{3x^2}{1+x^3} + \dfrac{3x^2}{1-x^3}\right] = x^2\left[\dfrac{1}{1+x^3} + \dfrac{1}{1-x^3}\right].$

$y' = \dfrac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$, $|x| \neq 1$.

6) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} = u^{\frac{1}{2}}$; $u = x + \sqrt{v}$;

$v = x + \sqrt{x}$.

$y' = \dfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}u'$; $u' = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{v}} \cdot v'$; $v' = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{v}}\right)\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) =$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right).$

Cuối cùng :

$$y' = \frac{1+2\sqrt{x}+2\sqrt{x+\sqrt{x}}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}, \; x > 0.$$

7) $y' = \dfrac{(\sin^2 x)'(\sin x^2) - (\sin^2 x)(\sin x^2)'}{(\sin x^2)^2}$

Ta có $\quad (\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x,$

$\qquad\qquad (\sin x^2)' = 2x\cos x^2.$

Cuối cùng :

$$y' = \frac{2\sin x(\cos x \sin x^2 - x\sin x\cos x^2)}{\sin^2 x^2}.$$

8) $y = \dfrac{1}{\cos^n x} = (\cos x)^{-n}$, $y' = -n(\cos x)^{-n-1}(-\sin x)$

$y' = \dfrac{n\sin x}{\cos^{n+1} x}.$

9) $y = \text{tg}\dfrac{x}{2} - \text{cotg}\dfrac{x}{2}$, $y' = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$

$y' = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{2}{\sin^2 x}.$

10) Để ý rằng hàm số $y = x^{\frac{1}{x}}$ không thuộc dạng a^x (vì x không phải là hằng số), cũng không thuộc dạng x^α (vì $\dfrac{1}{x}$ không phải hằng số), do đó, muốn tính y' nhất thiết phải lấy lôga của hai vế và khi đó có :

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln x$$

và

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x).\ \text{Do đó :}$$

$$y' = \frac{y}{x^2}(1 - \ln x) = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1 - \ln x).$$

11) $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = \ln u,\ \ u = x + \sqrt{v}\ ;\ v = 1 + x^2.$

$$y' = \frac{1}{u} \cdot u'\ ;\ u' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot v'\ ;\ v' = 2x.$$

Vậy :

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

12) $y = e^x \ln\sin x$, $y' = e^x \ln\sin x + e^x(\ln\sin x)'$

$$(\ln\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Do đó :

$$y' = e^x(\ln\sin x + \cot g x),\ \sin x > 0.$$

13) $y = \log_3(x^2 - \sin x) = \dfrac{\ln(x^2 - \sin x)}{\ln 3} = \dfrac{1}{\ln 3}\ln u\ ;$

$u = x^2 - \sin x$

$$y' = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{u} \cdot u'\ ;\ u' = 2x - \cos x$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\frac{1}{x^2 - \sin x} \cdot (2x - \cos x) = \frac{2x - \cos x}{(\ln 3)(x^2 - \sin x)},$$

$$x^2 - \sin x > 0.$$

14) $y = e^{\operatorname{arctg} x} = e^u$, $u = \operatorname{arctg} x$

$$y' = e^u.u',\ u' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}e^{\text{arctgx}}.$$

15) $y = e^{x^x} = e^u$, $u = x^x$.

$$y' = e^u.u'$$

Để tính u' ta phải lấy lôga biểu thức của u:

$$\ln u = x\ln x.$$

Đạo hàm hai vế, được :

$$\frac{u'}{u} = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = 1 + \ln x.$$

Suy ra :

$$u' = x^x(1 + \ln x).$$

Thế giá trị u' vào biểu thức của y', được :

$$y' = e^{x^x}(1+\ln x)x^x.$$

4. Phương trình tiếp tuyến tại điểm A có dạng :

$$y - y_A = y'(x_A)(x - x_A).$$

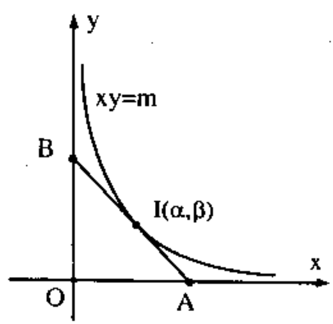
Ở đây có : $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$, suy ra :

$$y' = 3x^2 - 6x - 1,\ y'(x_A) = 3.3^2 - 6.3 - 1 = 8.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại A (3 ; 2) là

$$y - 2 = 8(x - 3) \text{ hay } y = 8x - 22.$$

5. Gọi $I(\alpha, \beta)$ là tiếp điểm của đoạn tiếp tuyến của đường hypebôn $xy = m$; tiếp tuyến này cắt trục hoành tại A và trục tung tại B. Cần phải chứng minh rằng IA = IB (xem hình 9).



Hình 9

Thật vậy, phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm I là

$$y - \beta = y'(\alpha)(x - \alpha).$$

Suy ra : $x_B = 0$ và $y_B = \beta - \alpha y'(\alpha)$

và $y_A = 0$ và $x_A = \alpha - \dfrac{\beta}{y'(\alpha)}$.

Mặt khác, phương trình hypebôn xy = m có thể viết $y = \dfrac{m}{x}$, suy ra

$y' = -\dfrac{m}{x^2}$, nghĩa là : $y'(\alpha) = -\dfrac{m}{\alpha^2}$ và $\beta = \dfrac{m}{\alpha}$.

Thế giá trị của β và y'(α) vào các biểu thức của x_A và y_B được :

$$x_A = \alpha - \frac{m}{\alpha}\left(-\frac{\alpha^2}{m}\right) = 2\alpha$$

$$y_B = \beta - \alpha\left(-\frac{m}{\alpha^2}\right) = \frac{m}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} = \frac{2m}{\alpha} = 2\beta.$$

Suy ra :

$$\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2\alpha + 0}{2} = \alpha$$

$$\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 2\beta}{2} = \beta.$$

Ta thấy rằng trung bình cộng các toạ độ của A và B trùng với toạ độ của I(α, β) và điều đó chứng tỏ rằng I là trung điểm của AB : IA = IB.

6. 1) $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, suy ra $y' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

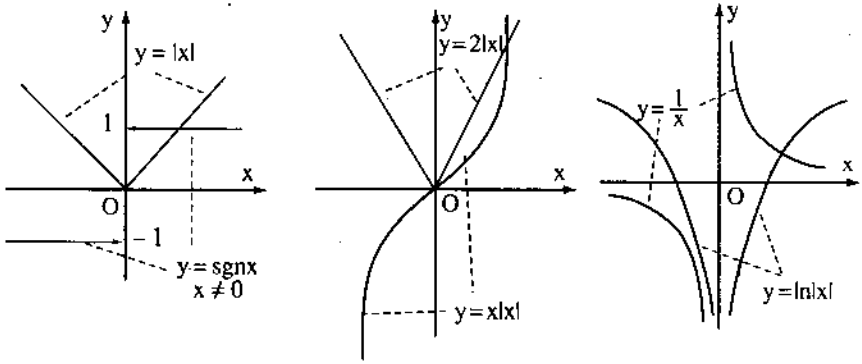
Tại x = 0 thì $y'_-(0) = -1$; và $y'_+(0) = 1$, do đó tại x = 0 hàm số không có đạo hàm và : y' = sgn(x) ; x ≠ 0.

2) $y = x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$, suy ra : $y' = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$ nghĩa là

$$y' = 2|x|.$$

3) $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$ suy ra $y' = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Dưới đây cho đồ thị các hàm số và đạo hàm các hàm số đã cho trong các bài tập trên.



Hình 10

7. 1) $y = \begin{cases} 1-x, & x < 1 \\ (1-x)(2-x), & 1 \leq x \leq 2, \\ -(2-x), & x > 2 \end{cases}$

$$y' = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ 2x-3, & 1 \leq x \leq 2. \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

2) $y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{e}, & |x| > 1 \end{cases}$, $y' = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1-x^2), & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$.

8. 1) $y' = 2xf'(x^2)$.

2) $y' = 2\sin x\cos x f'(\sin^2 x) - 2\sin x\cos x f'(\cos^2 x)$

$= 2\sin x\cos x(f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x))$.

3) $y' = e^x f'(e^x)e^{f(x)} + f(e^x)e^{f(x)}f'(x)$

$$y' = e^{f(x)}(e^x f'(e^x) + f'(x)f(e^x)).$$

9. $$f'(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-100) + g(x)$$

với $g(x) = x(x-2)\ldots(x-100) + \ldots$ Suy ra

$$f'(0) = (-1)(-2)\ldots(-100) + g(0)\,;$$

Vì $g(0) = 0$ nên suy ra :

$$f'(0) = 100\,!$$

10. Xét $f(x) = \begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

1) Rõ ràng f(x) liên tục với mọi $x \neq 0$; tại $x = 0$ phải có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, nghĩa là :

$$\lim_{x\to 0} x^n \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Vì $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$ nên $\lim\limits_{x\to 0} x^n \sin\dfrac{1}{x} = 0$ khi $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$ nghĩa là khi $n > 0$ thì $\lim\limits_{x\to 0} x^n \sin\dfrac{1}{x} = 0$ và f(x) liên tục tại $x = 0$.

2) Để xét tính khả vi của f(x) tại x = 0 ta lập số gia

$$\Delta f = f(0 + \Delta x) - f(0) = (\Delta x)^n \sin\frac{1}{\Delta x} - 0.$$ Suy ra

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^n \sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (\Delta x)^{n-1} \sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Vì $\left|\sin\dfrac{1}{\Delta x}\right| \leq 1$ nên :

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (\Delta x)^{n-1} = 0 \text{ khi } n - 1 > 0.$$

Mặt khác theo giả thiết f(0) = 0 nên, với n − 1 > 0 tức là n > 1 hàm số f(x) khả vi tại x = 0.

3) Với $x \neq 0$, ta có :

$$f'(x) = nx^{n-1}\sin\frac{1}{x} - \frac{x^n}{x^2}\cos\frac{1}{x}$$
$$= nx^{n-1}\sin\frac{1}{x} - x^{n-2}\cos\frac{1}{x}$$
$$= x^{n-2}\left(nx\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right).$$

Theo câu 2, ta có f(x) khả vi tại x = 0 và f'(0) = 0 nên để f'(x) liên tục tại x = 0, phải có

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} x^{n-2}\left(nx\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) = 0$$

và điều đó chỉ xảy ra khi $n - 2 > 0 \Rightarrow n > 2$. Nói khác đi khi $n > 2$ thì f(x) có đạo hàm liên tục tại x = 0.

11. $f(x) = |x - a|\varphi(x) = \begin{cases} (x-a)\varphi(x), & x \geq a \\ (a-x)\varphi(x), & x < a \end{cases}.$

Suy ra

với $x \neq a$, có $f'(x) = \begin{cases} \varphi(x) + (x-a)\varphi'(x), & x > a \\ -\varphi(x) + (a-x)\varphi'(x), & x < a \end{cases}.$

Từ đó :

$$f'_+(a) = \varphi(a)\ ;\ f'_-(a) = -\varphi(a).$$

Theo giả thiết $\varphi(a) \neq 0$, do đó $f'_+(a) \neq f'_-(a)$, hàm f(x) không có đạo hàm tại x = a, do đó không khả vi tại x = a.

12. 1) $y = \left|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right| = \begin{cases} (x-1)(x-3)^3(x-2)^2, & (x-1)(x-3) \geq 0 \\ -(x-1)(x-3)^3(x-2)^2, & (x-1)(x-3) < 0 \end{cases}$

Vì $(x-1)(x-3) \geq 0$ khi $x \leq 1$ hoặc $x \geq 3$,

$(x-1)(x-3) < 0$ khi $1 < x < 3$.

Suy ra :

Với $x < 1$ hoặc $x > 3$:

$$y' = (x-3)^3(x-2)^2 + 3(x-3)^2(x-1)(x-2)^2 + 2(x-2)(x-1)(x-3)^3.$$

Với $1 < x < 3$:

$$y' = -[(x-3)^3(x-2)^2 + 3(x-3)^2(x-1)(x-2)^2 + 2(x-2)(x-3)^3].$$

Suy ra : $y'_+(3) = y'_-(3) = 0 \Rightarrow$ hàm số có đạo hàm và đạo hàm bằng 0 tại $x = 3$.

Tại $x = 1$ có :

$$y'_+(1) = -(1-3)^3(1-2)^2 = 8,$$

$$y'_-(1) = (1-3)^3(1-2)^2 = -8.$$

Vì $y'_+(1) \neq y'_-(1)$ nên y không có đạo hàm tại $x = 1$, do đó không khả vi tại $x = 1$.

2) $y = |\cos x| = \begin{cases} \cos x, & \cos x \geq 0 \\ -\cos x, & \cos x < 0 \end{cases}.$

Như thế y có đạo hàm tại mọi x sao cho $\cos x \neq 0$ và $y' = -\sin x$ nếu $\cos x > 0$, $y' = \sin x$ nếu $\cos x < 0$. Tại những giá trị x sao cho $\cos x = 0$, nghĩa là tại $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ thì $\sin x = \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1$ phụ thuộc k chẵn hay lẻ, do đó :

$$y'_+\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) \neq y'_-\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Vậy hàm số không khả vi tại $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

13. 1) Từ bài 6.1 suy ra

$$f'_+(x) = f'_-(x),\ x \neq 0\ ;\ f'(x) = \operatorname{sgn}(x),\ x \neq 0.$$

$$f'_+(0) = 1\ ;\ f'_-(0) = -1.$$

2) Hàm số $y = \sqrt{\sin x^2}$ xác định với mọi x thoả :

$$\sqrt{2k\pi} \leq |x| \leq \sqrt{(2k+1)\pi},\ k \in \mathbf{N}.$$

Tuy nhiên khi $x^2 = 2k\pi$ hoặc $x^2 = (2k + 1)\pi$ thì $\sin x^2 = 0$, do đó : Với $\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbf{N}$ thì :

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}.$$

Khi $x \to 0$ thì $\sin x^2 \sim x^2$ và $\sqrt{\sin x^2} \sim |x|$.

Do đó :

Với x = 0 thì : $f'_-(0) = -1$; $f'_+(0) = 1$.

Cuối cùng, với $x = \pm\sqrt{2k\pi}$ hoặc $x = \pm\sqrt{(2k+1)\pi}$, có

$$f'_\pm(\sqrt{2k\pi}) = \pm\infty,\ k \in \mathbf{N}^+$$

$$f'_\pm(\sqrt{(2k+1)\pi}) = \pm\infty,\ k \in \mathbf{N}^+.$$

14. 1) $dy = d\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)' dx = -\frac{1}{x^2}dx.$

2) $dy = d\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)' dx = \frac{dx}{a^2 + x^2},\ a \neq 0.$

3) $dy = d\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right) = \left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)' dx = \frac{dx}{x^2 - a^2},\ a \neq 0$

4) $dy = d\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|\right) = \left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|\right)' dx = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$

5) $dy = d\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) = \left(\arcsin\frac{x}{a}\right)' dx = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}(\operatorname{sgn} a),\ a \neq 0.$

15. 1) $d(Cu) = (Cu)'dx = Cu'dx = Cdu$.

2) $d(u + v) = (u + v)'dx = u'dx + v'dx = du + dv$.

3) $d(uv) = (uv)'dx = u'vdx + uv'dx = vdu + udv$.

4) $$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)'dx = \frac{u'v - uv'}{v^2}dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

16. 1) $d(xe^x) = (xe^x)'dx = (e^x + xe^x)dx = e^x(1 + x)dx$.

2) $$d(\sqrt{a^2 + x^2}) = (\sqrt{a^2 + x^2})'dx = \frac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

3) $$d\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)'dx = \frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}},\ |x| < 1.$$

4) $$d(\ln(1 - x^2)) = (\ln(1 - x^2))'dx = -\frac{2x}{1 - x^2}dx,\ |x| < 1.$$

17. 1) $d(x^3 - 2x^6 - x^9) = (3x^2 - 12x^5 - 9x^8)dx$,

$$d(x^3) = 3x^2dx,$$

$$\frac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9) = \frac{(3x^2 - 12x^5 - 9x^8)dx}{3x^2dx} = 1 - 4x^3 - 3x^6.$$

2) $$d\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}dx,\ d(x^2) = 2xdx,$$

$$\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{2x^3}(x\cos x - \sin x).$$

3) $$\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = \frac{\cos xdx}{-\sin xdx} = -\text{cotg}x,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

18. Nhắc lại công thức tính xấp xỉ :

$$f(x_o + \Delta x) \approx f(x_o) + f'(x_o)\Delta x.$$

Muốn dùng công thức xấp xỉ phải chọn được hàm số f(x) ; chọn x_o, chọn Δx.

1) Chọn $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$; $x_o = 1$; $\Delta x = 0{,}02$. Khi đó :

$$\sqrt[3]{1{,}02} = \sqrt[3]{1 + 0{,}02} \approx \sqrt[3]{1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_o^2}} \cdot \Delta x = 1 + \frac{0{,}02}{3\,.\,1} \approx 1{,}007\ ;$$

theo bảng tính thì $\sqrt[3]{1{,}02} \approx 1{,}0066$.

2) Chọn f(x) = sinx ; $x_o = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = -\frac{\pi}{180} \approx -\frac{3{,}1416}{180}$

$$\sin 29^o = \sin(30^o - 1^o) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3{,}1416}{180}\right) =$$

$$\approx \sin\frac{\pi}{6} + \left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(-\frac{3{,}1416}{180}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{3{,}1416}{180}\right) \approx 0{,}4849\ ;$$

theo bảng tính thì $\sin 29^o \approx 0{,}4848$.

3) Chọn f(x) = lgx ; $x_o = 10$; $\Delta x = 1$. Khi đó

$$\lg 11 = \lg(10 + 1) \approx \lg 10 + \frac{1}{10\,.\,\ln 10} = 1 + \frac{1}{10\,.\,\ln 10}.$$

Theo công thức trang 81 (sách đã dẫn) :

$$\ln 10 = 2{,}302585.$$

Do đó :

$$\lg 11 \approx 1 + \frac{1}{10\ .\ 2{,}302585} \approx 1{,}043\ ;$$

theo bảng thì $\lg 11 \approx 1{,}041$.

4) Chọn f(x) = arctgx ; $x_o = 1$; $\Delta x = 0{,}05$.

$$\mathrm{arctg}(1{,}05) = \mathrm{arctg}(1 + 0{,}05)$$
$$\approx \mathrm{arctg}1 + \frac{1}{1+1^2}0{,}05 = \frac{\pi}{4} + \frac{0{,}05}{2}$$

nghĩa là $\mathrm{arctg}(1{,}05) \approx 0{,}8104 \approx 46^\circ 26'$;

theo bảng thì $\mathrm{arctg}1{,}05 \approx 46^\circ 24'$.

19. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{a^2 + x}$; $|x| \ll a,\ a > 0$

Chọn $x_o = 0$; $\Delta x = x - x_o = x - 0 = x$.
Dùng công thức xấp xỉ :

$$f(x_o + \Delta x) \approx f(x_o) + f'(x_o)\Delta x$$

ta được :

$$\sqrt{a^2 + x} \approx \sqrt{a^2 + 0} + \frac{1}{2\sqrt{a^2 + 0}} \cdot x$$

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a},\ a > 0.$$

Dùng công thức xấp xỉ này ta được :

1) $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1} \approx 2 + \frac{1}{2.2} = 2{,}25$;

theo bảng thì $\sqrt{5} \approx 2{,}24$.

2) $\sqrt{34} = \sqrt{36 + (-2)} = \sqrt{6^2 + (-2)} \approx 6 - \frac{2}{2.6} \approx 5{,}833$;

tính theo bảng số thì $\sqrt{34} \approx 5{,}831$.

3) $\sqrt{120} = \sqrt{121 + (-1)} = \sqrt{11^2 + (-1)} \approx 11 - \frac{1}{22} \approx 10{,}9545$;

tính theo bảng số thì $\sqrt{120} \approx 10{,}9546$.

20. 1) $y = x\sqrt{1 + x^2}$, $y' = \frac{1 + 2x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$, $y'' = \frac{x(3 + 2x^2)}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

2) $y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $y' = \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $y'' = \frac{3x}{(1 - x^2)^{\frac{5}{2}}}$, $|x| < 1$.

3) $y=e^{-x^2}$, $y'=-2xe^{-x^2}$, $y''=2e^{-x^2}(2x^2-1)$.

4) $y=\ln f(x)$, $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $y''=\dfrac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}$, $f(x)>0$.

21. 1) $dx=(2-2t)dt=2(1-t)dt$

$dy=(3-3t^2)dt=3(1-t^2)dt$

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{3(1-t^2)dt}{2(1-t)dt}=\frac{3}{2}(1+t)$$

$$y''_{xx}=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{2}(1+t)'_t.t'_x=\frac{3}{2}t'_x.$$

Vì $dx=2(1-t)dt\Rightarrow t'_x=\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2(1-t)}$.

Vậy $y''_{xx}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2(1-t)}=\dfrac{3}{4(1-t)}$; $t\neq 1$.

2) $dx=-a\sin t dt$, $t'_x=-\dfrac{1}{a\sin t}$;

$dy=a\cos t dt$, $y'_x=-\text{cotg}t$.

$$y''_{xx}=-(\text{cotg}t)'_t.t'_x=\frac{1}{\sin^2 t}\left(-\frac{1}{a\sin t}\right)=-\frac{1}{a\sin^3 t};\ t\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

3) $dx=a(1-\cos t)dt$, $t'_x=\dfrac{1}{a(1-\cos t)}=\dfrac{1}{2a\sin^2\dfrac{t}{2}}$

$$dy=a\sin t dt=2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt$$

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt}{2a\sin^2\frac{t}{2}dt}=\text{cotg}\frac{t}{2}$$

$$y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\right)'_t . t'_x = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}},\ t \neq 2k\pi\ ;\ k \in \mathbf{Z}.$$

22. 1) $y = \dfrac{x^2}{1-x} = \dfrac{1-(1-x^2)}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - (1+x).$

$$y^{(8)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(8)} - (1+x)^{(8)} = ((1-x)^{-1})^{(8)} - 0 =$$

$$= (-1)(-1)(-2)(-1)...(-1-8+1)(-1) \cdot \frac{1}{(1-x)^{1+8}}$$

$$y^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9},\ x \neq 1.$$

2) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}} = (1+x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$

Dùng công thức $(uv)^{(n)}$ (quy tắc Leibnitz, trang 125, sách đã dẫn) có :

$$y^{(100)} = ((1-x)^{-\frac{1}{2}})^{(100)}(1+x) + 100((1-x)^{-\frac{1}{2}})^{(99)}(1+x)'$$

và để ý rằng :

$$\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{(n)} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \frac{1}{(1-x)^n\sqrt{1-x}}$$

Thay lần lượt n = 99 ; n = 100 vào biểu thức $y^{(100)}$ ta được

$$y^{(100)} = \frac{199!!}{2^{100}} \cdot \frac{1+x}{(1-x)^{100}\sqrt{1-x}} + \frac{197!!}{2^{99}} \cdot \frac{100}{(1-x)^{99}\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{197!!}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}(399-x),\ x < 1.$$

3) $y = e^{2x}x^2$, dùng công thức $(uv)^{(n)}$ có

$$y^{(20)} = (e^{2x})^{(20)}x^2 + 20(e^{2x})^{(19)}(x^2)' + \frac{20.19}{2!}(e^{2x})^{(18)}(x^2)'' ;$$

để ý rằng $(e^{2x})^{(n)} = 2^n e^{2x}$.

Lần lượt thay n = 18, 19, 20 vào biểu thức $y^{(20)}$ được :

$$y^{(20)} = 2^{20}e^{2x}(x^2 + 20x + 95).$$

4) $y = (\sin 2x)x^2$.

$$y^{(50)} = (\sin 2x)^{(50)}x^2 + 50(\sin 2x)^{(49)}(x^2)' + \frac{50.49}{2}(\sin 2x)^{(48)}(x^2)''.$$

Để ý rằng

$$(\sin 2x)^{(50)} = 2^{50}(-1)^{25}\sin 2x = -2^{50}\sin 2x,$$

$$(\sin 2x)^{(49)} = 2^{49}(-1)^{24}\cos 2x = 2^{49}\cos 2x,$$

$$(\sin 2x)^{(48)} = 2^{48}(-1)^{24}\sin 2x = 2^{48}\sin 2x.$$

Thế các giá trị các đạo hàm cấp cao của sin2x vào $y^{(50)}$:

$$y^{(50)} = 2^{50}\left(-x^2\sin 2x + 50x\cos 2x + \frac{1225}{2}\sin 2x\right).$$

23. 1) $y = \dfrac{1}{x(1-x)} = \dfrac{x + (1-x)}{x(1-x)} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{x}$;

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = n!\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\right].$$

2) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{1}{(1-x)(2-x)} = \dfrac{(2-x)-(1-x)}{(1-x)(2-x)} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{2-x}$.

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{2-x}\right)^{(n)} =$$

$$= n!\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{1}{(2-x)^{n+1}}\right],\ x \neq 1,\ x \neq 2.$$

3) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{3}}x$;

$$y^{(n)} = \left((1+x)^{-\frac{1}{3}}x\right)^{(n)} = \left((1+x)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n)} x + n\left((1+x)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n-1)} \quad ;$$

để ý rằng :

$$\left((1+x)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n)} = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots\left(\frac{-(3n-2)}{3}\right)\frac{1}{(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{1}{3^n}(1.4 \ldots (3n-2))\frac{1}{(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}.$$

Do đó :

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}(1 \,.\, 4 \ldots (3n-5))\frac{(3n+2x)}{(1+x)^{n+\frac{1}{3}}},\ n \geq 2\ ;\ x \neq -1.$$

4) $y = e^{ax}\sin bx$

$y' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx.$

Nếu đặt $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ thì :

$$y' = \sqrt{a^2+b^2}\ e^{ax}(\sin bx\cos\varphi + \cos bx\sin\varphi)$$

$$= (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax}\sin(bx+\varphi).$$

Có thể dùng phương pháp quy nạp suy ra :

$$y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \,.\, e^{ax} \,.\, \sin(bx+n\varphi).$$

Thật vậy, công thức trên đã đúng cho trường hợp n = 1 ; bây giờ giả sử công thức cũng đúng cho n = k, nghĩa là ta có :

$$y^{(k)} = (a^2+b^2)^{\frac{k}{2}} e^{ax}\sin(bx+k\varphi).$$

Ta sẽ chứng minh rằng :

$$y^{(k+1)} = (a^2 + b^2)^{\frac{k+1}{2}} e^{ax} \sin(bx + (k+1)\varphi) ;$$

và muốn thế, lấy đạo hàm 2 vế biểu thức của $y^{(k)}$ có :

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = \left(a^2 + b^2\right)^{\frac{k}{2}} e^{ax} [a \sin X + b \cos X]$$

trong đó $X := bx + k\varphi$.

Mặt khác, lại có :

$$a \sin X + b \cos X = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(X + \varphi) =$$

$$= (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \sin(bx + (k+1)\varphi).$$

Rốt cuộc, ta được

$$y^{(k+1)} = (a^2 + b^2)^{\frac{k+1}{2}} e^{ax} \sin(bx + (k+1)\varphi).$$

24. Hiển nhiên công thức đã đúng với $n = 0$, giả sử công thức đúng cho $n = k$, nghĩa là có :

$$\left(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)} = (-1)^k \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+1}}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng công thức cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh rằng

$$\left(x^k e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)} = (-1)^{k+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}}.$$

Thật vậy, ta có :

$$\left(x^k e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)} = \left(x . x^{k-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)}$$

$$= \left(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)} x + (k+1)\left(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}.$$

Mặt khác :

$$\left(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)} = \left[\left(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}\right]' = \left((-1)^k \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+1}}\right)'$$

(theo giả thiết quy nạp)

$$= (-1)^{k+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}}\left(\frac{1}{x} + (k+1)\right).$$

Thế các giá trị của biểu thức vừa tính được vào biểu thức đạo hàm cấp (k + 1) ta được :

$$\left(x^k e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)} = (-1)^{k+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}}\left[\left(\frac{1}{x} + (k+1)\right)x\right] + (k+1).(-1)^k \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+1}}$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}}[1 + (k+1)x - (k+1)x] = (-1)^{k+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}}.$$

25. Để cho gọn ta đặt

$L := \dfrac{1}{2^m m!}$; $u := (x^2-1)^m$. Khi đó, ta có, theo đề bài :

$P_m(x) = Lu^{(m)}$; $P'_m(x) = Lu^{(m+1)}$; $P''_m(x) = Lu^{(m+2)}$

Với các kí hiệu mới này, biểu thức cần chứng minh trở thành :

$$(1-x^2)u^{(m+2)} - 2xu^{(m+1)} + m(m+1)u^{(m)} = 0.$$

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh hệ thức này, muốn thế lấy đạo hàm u' và được

$$u' = 2mx(x^2-1)^{m-1},$$

suy ra

$$(x^2-1)u' = 2mxu.$$

$$P'_m(x) = Lu^{(m+1)}\ ;\ \ P''_m(x) = Lu^{(m+2)}$$

Lấy đạo hàm (m + 1) lần đẳng thức trên :

$$((x^2-1)u')^{(m+1)} = 2m(xu)^{(m+1)} \quad (1)$$

Mặt khác, có :

$$2m(xu)^{(m+1)} = 2m[u^{(m+1)}x + (m+1)u^{(m)}.1]$$

$$2m(xu)^{(m+1)} = 2mxu^{(m+1)} + 2m(m+1)u^{(m)} \quad (2)$$

và :

$$((x^2-1)u')^{(m+1)} = u^{(m+2)}(x^2-1) + (m+1)u^{(m+1)}(x^2-1)' +$$

$$+\frac{m(m+1)}{2}u^{(m)}(x^2-1)''$$

$$= u^{(m+2)}(x^2-1) + 2x(m+1)u^{(m+1)} + \frac{m(m+1)}{2}\cdot 2 \cdot u^{(m)}. \quad (3)$$

Cuối cùng, thế các biểu thức (2) và (3) vào (1) sẽ được hệ thức cần chứng minh.

26. Để cho gọn, ta đặt

$$A := (-1)^m \; ; \; u := e^{-x^2}$$

và khi đó :

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2}(e^{-x^2})^{(m)} = Ae^{x^2}u^{(m)}.$$

$$H'_m(x) = 2xH_m + Ae^{x^2}u^{(m+1)}$$

$$H''_m(x) = 2H_m + 2xH'_m + 2Axe^{x^2}u^{(m+1)} + 2Ae^{x^2}u^{(m+2)}.$$

Hệ thức cần chứng minh sẽ trở thành

$$2Ae^{x^2}[u^{(m+2)} + 2xu^{(m+1)} + 2(m+1)u^{(m)}] = 0.$$

Vậy, muốn chứng minh hệ thức đã cho chỉ cần chứng minh hệ thức :

$$u^{(m+2)} + 2xu^{(m+1)} + 2(m+1)u^{(m)} = 0.$$

Thật vậy, vì $u = e^{-x^2}$ nên lấy đạo hàm hai vế :

$$u' = -2xe^{-x^2} \text{, tức là } u' + 2xu = 0.$$

Lấy đạo hàm liên tiếp (m + 1) lần hệ thức u' + 2xu = 0 ta được

$$(u')^{(m+1)} + 2(xu)^{(m+1)} = 0$$

tức là

$$u^{(m+2)} + 2xu^{(m+1)} + 2(m+1)u^{(m)} = 0.$$

Muốn tính $H_m(x)$ dưới dạng tường minh ta để ý rằng

$$(e^{-x^2})^{(m+1)} = -2[x(e^{-x^2})^{(m)} + m(e^{-x^2})^{(m-1)}].$$

Do đó :

$$H_{m+1}(x) = (-1)^{m+1} e^{x^2} [-2x(e^{-x^2})^{(m)} - 2m(e^{-x^2})^{(m-1)}]$$

$$H_{m+1}(x) = 2xH_m(x) - 2mH_{m-1}(x).$$

Suy ra :

$$H_o(x) = 1 \ ; \ H_1(x) = 2x \ ;$$

$$H_2(x) = 2xH_1(x) - 2.1H_o(x) = (2x)^2 - 2.1 \ ;$$

$$H_3(x) = 2xH_2(x) - 2.2H_1(x) = (2x)^3 - 6.(2x)$$

$$= (2x)^3 - \frac{3(3-1)}{1!}(2x)^{3-2} \ ;$$

$$H_4(x) = 2xH_3(x) - 2.3.H_2(x) = (2x)^4 - 12.(2x)^2 + 12$$

$$= (2x)^4 - \frac{4(4-1)}{1!}(2x)^{4-2} + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{2!}(2x)^{4-4}.$$

Một cách tổng quát :

$$H_m(x) = (2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-4} - \ldots$$

Chương 5

CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

A. ĐỀ BÀI

1. Xét xem định lí Rolle có áp dụng được cho hàm số

$$f(x) := (x-1)(x-2)(x-3) \text{ không ?}$$

2. Hàm số $f(x) := 1 - \sqrt[3]{x^2}$ triệt tiêu khi $x_1 = -1$ và $x_2 = 1$ nhưng $f'(x) \neq 0$ với $|x| \leq 1$, điều đó có mâu thuẫn với định lí Rolle không ?

3. Chứng minh rằng nếu mọi nghiệm của đa thức

$$P_n(x) := a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n \; ; \; a_n \neq 0$$

với $a_k \in \mathbf{R}$; $k = \overline{0, n}$, là thực thì các đạo hàm $P'_n(x), \ldots, P_n^{(n-1)}(x)$ cũng chỉ có nghiệm thực.

4. Tìm trên đường cong $y = x^3$ các điểm có tiếp tuyến song song với dây cung nối 2 điểm $A(-1, -1)$ và $B(2, 8)$.

5. Chứng minh rằng trong khoảng 2 nghiệm thực của phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm (thực) của phương trình $f'(x) = 0$.

6. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$, với n nguyên dương không thể có quá 2 nghiệm thực phân biệt nếu n chẵn, không quá 3 nghiệm thực phân biệt nếu n lẻ.

7. Giải thích tại sao công thức Cauchy không áp dụng được đối với các hàm số

$$f(x) := x^2 \,;\, g(x) := x^3 \,;\, -1 \le x \le 1.$$

8. Chứng minh các bất đẳng thức

1) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$

2) $|\mathrm{arctg}\, a - \mathrm{arctg}\, b| \le |a - b|$

3) $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b},\ 0 < b < a.$

9. 1) Cho f, g, h là ba hàm số liên tục trên [a, b] và khả vi trên (a, b). Với $x \in [a, b]$; đặt :

$$F(x) := \begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f(b) \\ g(x) & g(a) & g(b) \\ h(x) & h(a) & h(b) \end{vmatrix}$$

(i) Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$F'(c) = 0.$$

(ii) Chứng tỏ rằng với cách chọn g và h thích hợp thì từ (i) có thể suy ra định lí *Lagrange*.

(iii) Chứng tỏ rằng với cách chọn h thích hợp thì từ (i) có thể suy ra định lí *Cauchy*.

2) Cho f là một hàm số liên tục trên [a, b] và khả vi trên (a, b) và $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in \mathbf{R}$, tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = \alpha f(c)$.

3) Cho f là một hàm số khả vi trên [a, b] và d là một số ở giữa $f'(a)$ và $f'(b)$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = d$.

10. Tìm các giới hạn

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - b^x}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-\cos\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+a\,tg^2x\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$, $a\neq 0$.

11. Xác định a, b sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi $x\to 0$:

$$f(x) := \frac{1}{\sin^3 x}-\frac{1}{x^3}-\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}.$$

12. Cho f(x) là một hàm số thực khả vi trên [a, b] và có đạo hàm f'(x) trên (a, b), chứng minh rằng $\forall x\in(a, b)$ có thể tìm được ít nhất một điểm $c\in(a, b)$ sao cho :

$$f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)=\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c).$$

13. Cho $f(x) := x^{10}-3x^6+x^2+2$, tìm 3 số hạng đầu của khai triển Taylor tại $x_o = 1$; áp dụng để tính f(1,03).

14. Cho $f(x) := x^8-2x^7+5x^6-x+2$; tìm 3 số hạng đầu của khai triển Taylor tại $x_o = 2$; áp dụng để tính xấp xỉ f(2,02) và f(1,97).

15. Tính xấp xỉ các giá trị sau và đánh giá sai số :

1) $\cos 10^{o}$; 2) ln(1,5).

16. Khảo sát tính đơn điệu các hàm số :

1) $y = x^3 + x$; 2) $y = \operatorname{arctg}x - x$.

17. Tìm cực trị các hàm số :

1) $y = 2x^3 - 3x^2$; 2) $y = \dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$;

3) $y = x\sqrt{x^2-2}$; 4) $y = x - \ln(1+x)$;

5) $y = \dfrac{1+3x}{\sqrt{4+x^2}}$.

18. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số :

1) $y = \dfrac{2 - x^2}{1 + x^4}$; 2) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$;

3) $y = \dfrac{x^4 + 8}{x^3 + 1}$; 4) $y = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$;

5) $y = \dfrac{|1 + x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$; 6) $y = 1 - x + \sqrt{\dfrac{x^3}{x + 3}}$.

19. Khảo sát vẽ đồ thị hàm số

$$r = a + b\cos\varphi,\ 0 < a \le b.$$

20. Dùng phương pháp Newton, tính gần đúng nghiệm của các phương trình sau với sai số tuyệt đối không quá 10^{-5}

1) $x^2 - \sin\pi x = 0$ 2) $2\lg x - \dfrac{x}{2} + 1 = 0.$

B. LỜI GIẢI

1. Hàm số $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ thoả mãn mọi giả thiết của định lí Rolle trong các khoảng có các mút là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

2. Tại $x = 0$ hàm số không có đạo hàm, do vậy tại $x = 0$ hàm số $f(x)$ không thoả mãn giả thiết về đạo hàm của định lí Rolle, do vậy không có mâu thuẫn gì với định lí Rolle.

3. Xét đa thức bậc n :

$$P_n(x) := a_o + a_1x + \dots + a_nx^n,\ a_n \ne 0,\ a_k \in \mathbf{R},\ k = \overline{0, n}\ ;$$

theo giả thiết, phương trình $P_n(x) = 0$ có n nghiệm thực phân biệt hoặc có một số nghiệm bội, không giảm tính tổng quát, gọi các nghiệm thực đó là $x_1, x_2, ..., x_k$, $k \le n$; xét đa thức đạo hàm $P'_n(x)$, đa thức này có bậc là $(n-1)$; khi đó, vì :

$$P_n(x_1) = P_n(x_2) = ... = P_n(x_k) = 0,$$

nên đa thức $P_n(x)$ thoả các giả thiết của định lí Rolle trong các đoạn $[x_o, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{k-1}, x_k]$, do đó, tồn tại $x_i' \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{1, k}$ sao cho

$$P'_n(x_i') = 0.$$

Hệ thức này chứng tỏ đa thức đạo hàm $P'_n(x)$ cũng chỉ có $(n-1)$ nghiệm thực phân biệt hoặc trùng nhau. Lập luận tương tự, có thể kết luận các đạo hàm $P''_n(x), ..., P_n^{(n-1)}(x)$ cũng chỉ có nghiệm thực.

4. Hệ số góc k của dây cung nối hai điểm A(−1, −1) và B(2, 8) là

$$k = \frac{8-(-1)}{2-(-1)} = \frac{9}{3} = 3.$$

Bài toán trở thành : Tìm trên đồ thị của hàm số $y = x^3$ một điểm mà tại đó tiếp tuyến của đồ thị có hệ số góc là 3 ; điều đó dẫn đến việc tìm x sao cho y' = 3 nghĩa là

$$3x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Suy ra điểm phải tìm là $x = -1$; $y = (-1)^3$ và $x = 1$, $y = (1)^3$, tức là các điểm A(−1, −1) và C(1, 1).

5. Theo giả thiết, gọi 2 nghiệm thực phân biệt của phương trình f(x) = 0 là x_1 và x_2, nghĩa là

$$f(x_1) = f(x_2) = 0.$$

Khi đó, nếu hàm số f(x) liên tục khả vi trong khoảng (x_1, x_2) thì theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (x_1, x_2)$ sao cho f'(c) = 0, điều đó có nghĩa là phương trình f '(x) = 0 có ít nhất một nghiệm thực.

6. Gọi $P_n(x) := x^n + px + q$.

Khi đó $P'_n(x) = nx^{n-1} + p$. Đa thức $P_n(x)$ có n nghiệm thực hoặc phức, phân biệt hoặc trùng nhau và đa thức $P'_n(x)$ có $(n-1)$ nghiệm thực hoặc phức, phân biệt hoặc trùng nhau, đặc biệt, nghiệm của đa thức đạo hàm là nghiệm của phương trình $x^{n-1} = -\frac{p}{n}$; phương trình này chỉ có 1 nghiệm thực khi n chẵn và có không quá 2 nghiệm thực khi n lẻ. Do đó, nếu n chẵn và nếu $P_n(x)$ có 3 nghiệm thực phân biệt x_1, x_2, x_3 thì áp dụng định lí Rolle vào $[x_1, x_2]$ và $[x_2, x_3]$ sẽ suy ra đa thức $P'_n(x)$ có ít nhất 2 nghiệm thực, và điều này mâu thuẫn với điều khẳng định trên ; trường hợp n lẻ cũng lập luận tương tự.

7. Giả thiết của định lí Cauchy đòi hỏi $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in [-1, 1]$; ở đây $g'(x) = 3x^2$, và $g'(x) = 0$ khi $x = 0$, do vậy không thể áp dụng được công thức Cauchy đối với các hàm số

$$f(x) := x^2 \ ; \ g(x) := x^3 \ ; \ x \in [-1, 1] .$$

8. 1) Xét hàm số $f(t) = \sin t$ trên $[x, y]$, theo công thức Lagrange ta có :

$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c), \ c \in (x, y)$

tức là $\qquad \sin y - \sin x = (y - x)\cos c$;

suy ra

$$|\sin x - \sin y| = |y - x||\cos c|$$

vì $|\cos c| \leq 1$ nên suy ra :

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

2) Xét hàm số $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in [a, b]$. Hàm số này thoả các giả thiết của công thức Lagrange, do đó :

$$\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = (b - a)(\operatorname{arctg} x)'_{x=c} \ ; \ c \in (a, b), \text{ nghĩa là :}$$

$$\text{arctgb} - \text{arctga} = (b - a)\,\frac{1}{1 + c^2}$$

$$\left|\text{arctga} - \text{arctgb}\right| = \left|b - a\right| \cdot \frac{1}{1 + c^2} \le \left|b - a\right|.$$

3) Xét hàm số $f(x) = \ln x$, $x \in [b, a]$, $b > 0$. Hàm $\ln x$ thoả mọi giả thiết của công thức Lagrange, do đó có :

$$f(a) - f(b) = (a - b)f'(c)\ ;\ b < c < a,$$

tức là :

$$\ln a - \ln b = (a - b)\frac{1}{c},$$

$$\ln\frac{a}{b} = (a - b)\frac{1}{c}$$

Vì $b < c < a$ nên

$$\frac{a-b}{a} < \frac{a-b}{c} < \frac{a-b}{b}.$$

Suy ra :

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

9. 1. (i) Theo giả thiết và theo cách tính định thức, suy ra $F(x)$ liên tục trong $[a, b]$ và khả vi trong (a, b). Hơn nữa, theo tính chất của định thức, suy ra :

$$F(a) = F(b) = 0.$$

Vậy, theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $F'(c) = 0$.

(ii) Chọn $g(x) \equiv x$ và $h(x) \equiv 1$, ta có

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f(b) \\ x & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Do vậy (dĩ nhiên, g và h thoả giả thiết của đề bài), theo tính chất của định thức có thể viết:

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f(b)-f(a) \\ x & a & b-a \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Suy ra

$$F(x) = (b-a)f(a) - a[f(b) - f(a)] - (b-a)f(x) + x[f(b) - f(a)].$$

Suy ra :

$$F'(x) = -(b-a)f'(x) + f(b) - f(a).$$

Dùng phần (i) đã chứng minh ở trên suy ra, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$F'(c) = 0 = -(b-a)f'(c) + f(b) - f(a).$$

Từ đó, suy ra (ii).

(iii) Chỉ cần chọn $h(x) \equiv 1$ và lập luận tương tự phần (ii) sẽ suy ra kết luận của (iii).

2. Ta xét hàm số

$$g(x) := e^{-\alpha x}f(x), \forall \alpha \in \mathbf{R} ; x \in [a, b].$$

Vì f(x) liên tục trên [a, b], khả vi trên (a, b) nên suy ra g(x) cũng liên tục trên [a, b] và khả vi trên (a, b). Hơn nữa, vì $f(a) = f(b) = 0$ nên

$$g(a) = g(b) = 0.$$

Vậy hàm số g(x) thoả mãn giả thiết của định lí Rolle, do đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho :

$$g'(c) = 0$$

cũng tức là :

$$-\alpha e^{-\alpha c}f(c) + e^{-\alpha c}f'(c) = 0.$$

Vì $e^{-\alpha c} \neq 0 \; \forall \alpha, c$, suy ra :

$$f'(c) = \alpha f(c).$$

3. Xét hàm $g(x) := d(x - a) - f(x)$.

Vì $f(x)$ khả vi trên $[a, b]$ nên $g(x)$ cũng khả vi trên (a, b) và :

$$g'(x) = d - f'(x) \; ; \; x \in (a, b).$$

Vì d là một số ở giữa $f'(a)$ và $f'(b)$ nên dĩ nhiên $d \neq f'(a)$; $d \neq f'(b)$ và $f'(a) \neq f'(b)$. Do đó $g'(x)$ không thể dương với mọi $x \in (a, b)$ và $g'(x)$ cũng không thể âm với mọi $x \in (a, b)$, vậy tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $g'(c) = d - f'(c) = 0$

Suy ra $f'(c) = d$.

10. 1) $$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} + 1}.$$

Dùng công thức khai triển hữu hạn (5.21a), trang 149)

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

có thể viết, chẳng hạn

$$\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Suy ra :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}.$$

2) Ta có : $$a^x = e^{x\ln a} = 1 + x\ln a + o(x)$$

(dùng công thức (5.18a), trang 148)

và $$\frac{a^x - b^x}{x} = \frac{1 + x\ln a + xo_1(x) - 1 - x\ln b - xo_2(x)}{x}$$

$$= \ln\frac{a}{b} + o_1(x) - o_2(x)\text{ ; tại lân cận } x = 0.$$

Do đó : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - b^x}{x} = \ln\dfrac{a}{b}$.

3) Ta có :

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o_1\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{2x^2} + o_2\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + o_3\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Do đó : khi $x \to \infty$, có thể viết

$$\frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o_1\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 + \frac{1}{2x^2} + o_3\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1 - 1 + \frac{1}{2x^2} + o_2\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

và $$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x^2}} = +\infty.$$

4) Dùng các công thức

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o_1(x^2),\ x \to 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o_2(x^3),\ x \to 0$$

và đặt $A := (1+\mathrm{atg}^2x)^{\frac{1}{x\sin x}}$ ta có :

$$\ln A = \frac{\ln(1+\mathrm{atg}^2x)}{x\sin x}$$

$$= \frac{\mathrm{atg}^2x - \frac{1}{2}a^2\mathrm{tg}^4x + o_1(a^2\mathrm{tg}^4x)}{x\left(x - \frac{x^3}{3!} + o_2(x^3)\right)}, \text{ (tại lân cận } x = 0).$$

Suy ra

$$\lim_{x\to 0} \ln A = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{atg}^2x}{x^2} = a.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0} A = \lim\limits_{x\to 0} (1+\mathrm{atg}^2x)^{\frac{1}{x\sin x}} = e^a$.

11. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^3x} - \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{a}{x^2} - \dfrac{b}{x} = \dfrac{x^3 - \sin^3x(1+ax+bx^2)}{x^3\sin^3x}$.

Tại lân cận $x = 0$, có thể viết

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Do đó, mẫu số của f(x) có thể viết :

$$x^3\left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right]^3 = x^6 + o(x^6)$$

và

$$\sin^3x(1+ax+bx^2) = x^3 + ax^4 + \left(b - \frac{1}{2}\right)x^5 + cx^6 + o(x^6),$$

trong đó c là hệ số của x^6,

và :

$$f(x) = \frac{ax^4 + \left(b - \frac{1}{2}\right)x^5 + cx^6 + o(x^6)}{x^6 + o(x^6)}.$$

Do đó để tồn tại giới hạn hữu hạn của f(x) khi $x \to 0$, phải có $a = 0$ và $b = \frac{1}{2}$.

12. Đặt

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \frac{(x - a)(x - b)}{2}\cdot\lambda.$$

Lấy $x_o \in (a, b)$; xác định λ từ điều kiện :

$$\varphi(x_o) = f(x_o) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_o - a) - \frac{(x_o - a)(x_o - b)}{2}\cdot\lambda = 0.$$

Khi đó, có $\qquad \varphi(x_o) = \varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Theo giả thiết và theo định nghĩa hàm $\varphi(x)$, suy ra φ liên tục, khả vi trên $[a, x_o]$, do đó $\varphi(x)$ thoả giả thiết định lí Rolle với $x \in [a, x_o]$, do đó, tồn tại $c_1 \in (a, x_o)$ sao cho $\varphi'(c_1) = 0$.

Hoàn toàn tương tự, tồn tại $c_2 \in (x_o, b)$ sao cho $\varphi'(c_2) = 0$. Mặt khác, từ định nghĩa, suy ra :

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \lambda\left(x - \frac{a + b}{2}\right).$$

Theo giả thiết f(x) có đạo hàm cấp hai, suy ra φ cũng có đạo hàm cấp 2 và vì $\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = 0$ nên, cũng theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (c_1, c_2)$ sao cho $\varphi''(c) = 0$, nghĩa là

$$\varphi''(c) = f''(c) - \lambda = 0$$

và hệ thức trên dẫn đến

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = \frac{(x - a)(x - b)}{2} \cdot f''(c),\ c \in (a, b).$$

13. $f'(x) = 10x^9 - 18x^5 + 2x$; $f'(1) = -6$.

$f''(x) = 10.9.x^8 - 18.5.x^4 + 2$; $f''(1) = 2$.

$f(1) = 1 - 3 + 1 + 2 = 1$.

$f(x) = 1 - 6(x - 1) + (x - 1)^2 + \ldots$

$f(1{,}03) \approx 1 - 6(0{,}03) + (0{,}03)^2 \approx 0{,}821$.

14. $f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 2$

$f(2) = 320$.

$f'(x) = 8x^7 - 14x^6 + 30x^5 - 1$; $f'(2) = 1087$

$f''(x) = 56x^6 - 84x^5 + 150x^4$; $f''(2) = 3296$.

$f(x) = 320 + 1087(x - 2) + 1648(x - 2)^2 + \ldots$

$f(2{,}02) \approx 320 + 1087(0{,}02) + 1648(0{,}02)^2 \approx 342{,}399$;

$f(1{,}97) \approx 320 + 1087(-0{,}03) + 1648(-0{,}03)^2 \approx 288{,}873$.

15. 1) Dùng công thức

$\cos x \sim 1 - \dfrac{x^2}{2}$ với sai số $\delta < x^2$ có :

$$\cos 10^\circ \approx 1 - \left(\frac{10 \,.\, 3{,}1416}{180}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}985 \text{ với } \delta < 0{,}001.$$

2) Dùng công thức

$$\ln(1 + x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

với sai số $\delta < x^3$ có

$$\ln(1,5) = \ln(1 + 0,5) \approx 0,5 - \frac{(0,5)^2}{2} + \frac{(0,5)^3}{3} \approx 0,42$$

với sai số $\delta < 0,01$.

16. 1) $y = x^3 + x$, $y' = 3x^2 + 1$.

$y' > 0\ \forall x$, hàm số tăng với mọi x.

2) $y = \text{arctg}x - x$; $y' = \dfrac{1}{1+x^2} - 1 = \dfrac{-x^2}{1+x^2}$.

$y' \le 0\ \forall x$, hàm số giảm với mọi x.

17. 1) $y = 2x^3 - 3x^2$, $y' = 6x^2 - 6x = 6x\,(x - 1)$;

$y' = 0$ khi $x = 0$, $x = 1$.

$y_{max} = y(0) = 0$; $y_{min} = y(1) = -1$.

2) $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1} = 3 + \dfrac{x+1}{x^2 + x + 1}$, $y' = -\dfrac{x(x+2)}{(x^2 + x + 1)^2}$

$x^2 + x + 1 > 0\ \forall x$; dấu y' là dấu $-x(x + 2)$.

$y' = 0$ khi $x = -2$, $x = 0$.

$y_{min} = y(-2) = \dfrac{8}{3}$; $y_{max} = y(0) = 4$.

3) $y = x\sqrt{x^2 - 2}$; miền xác định : $|x| \ge \sqrt{2}$.

$$y' = \frac{2(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 2}}$$

$y' = 0$ khi $x = \pm 1$, những điểm này không thuộc miền xác định.

$y' = \pm\infty$ khi $x = \pm\sqrt{2}$, y' không đổi dấu khi x qua các giá trị $x = \pm\sqrt{2}$.

Vậy hàm số không có cực trị.

4) $y = x - \ln(1 + x)$; miền xác định : $x > -1$.

$$y' = 1 - \frac{1}{1 + x} = \frac{x}{1 + x}.$$

$y' = 0$ khi $x = 0$ và $y''(0) > 0$, do đó :

$y_{min} = y(0) = 0$.

5) $y = \dfrac{1 + 3x}{\sqrt{4 + x^2}}$; miền xác định : $\forall x$.

$$y' = \frac{12 - x}{(4 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$y' = 0$ khi $x = 12$; $y''(12) < 0$, do đó :

$$y_{max} = y(12) = \frac{37}{\sqrt{148}}.$$

18. 1) Hàm số $y = \dfrac{2 - x^2}{1 + x^4}$ xác định với mọi x và là một hàm số chẵn : đồ thị đối xứng qua trục tung, do vậy chỉ cần khảo sát trong khoảng $[0, +\infty)$.

Đạo hàm $$y' = \frac{2x(x^4 - 4x^2 - 1)}{(1 + x^4)^2}.$$

Dấu y' là dấu của tích số $x(x^4 - 4x^2 - 1)$, mặt khác vì có thể viết

$$x^4 - 4x^2 - 1 = \left[x^2 - (2 + \sqrt{5})\right]\left[x^2 - 2 + \sqrt{5}\right]$$

$$= \left(x - \sqrt{2 + \sqrt{5}}\right)\left(x + \sqrt{2 + \sqrt{5}}\right)\left(x^2 - 2 + \sqrt{5}\right)$$

và $x^2 - 2 + \sqrt{5} > 0\ \forall x$ nên, dấu y' trở thành dấu của $x\left(x - \sqrt{2 + \sqrt{5}}\right)\left(x + \sqrt{2 + \sqrt{5}}\right)$, do đó có bảng dấu y' :

x	0		$\sqrt{2+\sqrt{5}}$		$+\infty$
y'	0	$-$	0	$+$	

Như thế ta có :

$$y_{max} = y(0) = 2\ ;\ y_{min} = y\left(\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}\right) = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Ngoài ra :

$$y = 0 \text{ khi } x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

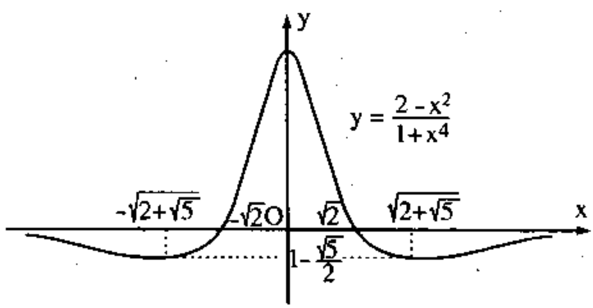
Ta lại có

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+2}{1+x^4} = 0$$

nên tiệm cận ngang là trục hoành Ox.

Dưới đây là bảng biến thiên và đồ thị tương ứng :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2+\sqrt{5}}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{2+\sqrt{5}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$1-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$1-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\nearrow$	0



Hình 11

2) Hàm số $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$ xác định với mọi x, có đạo hàm

$$y' = \frac{3x^2 - 2x - 1}{3\sqrt[3]{\left(x^3 - x^2 - x + 1\right)^2}} = \frac{(x-1)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{3\sqrt[3]{(x-1)^4(x+1)^2}}$$

$\lim\limits_{x \to -1} y' = \infty$ nhưng y' không đổi dấu khi qua giá trị $x = -1$;

mặc khác $\lim\limits_{x \to 1} y' = \pm\infty$ và đổi dấu khi qua giá trị $x = 1$, do vậy có :

$$y_{max} = y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$$

$$y_{min} = y(1) = 0.$$

Để tìm tiệm cận ta viết y dưới dạng

$$y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1} = \sqrt[3]{x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}$$

$$y = x\sqrt[3]{1 + u}, \ \ u = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

hay là $$y = x(1 + u)^{\frac{1}{3}}.$$

Dùng công thức khai triển hữu hạn (5.21) trang 149, sách đã dẫn :

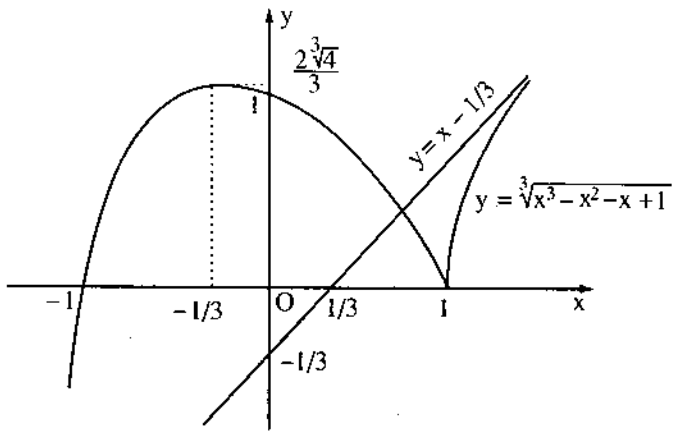
$$(1 + u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u + o(u^2)$$

ta được :

$$y = x\left[1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right], \text{ tức là :}$$

$$y = x - \frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Vậy, tiệm cận xiên : $y = x - \frac{1}{3}$.



Hình 12

Ngoài ra, ta có

$$y = 0 \text{ khi } x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+1) = 0$$

nghĩa là khi $x = \pm 1$.

Dưới đây cho bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	0	−	0	−	‖	+	
y	$x-\frac{1}{3}$	↗	0	↗	$\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$	↘	2	↘	0	↗	$x-\frac{1}{3}$

3) Hàm số $y = \dfrac{x^4+8}{x^3+1}$ xác định với mọi $x \neq -1$.

$$y' = \frac{x^2(x^4+4x-24)}{(x^3+1)^2}$$

Dấu của y' là dấu của $x^4 + 4x - 24$, và ta có :

$$\begin{aligned} x^4 + 4x - 24 &= x^4 - 16 + 4x - 8 \\ &= (x^4 - 16) + 4(x-2) \\ &= (x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 12). \end{aligned}$$

Ta viết $$x^4 + 4x - 24 = (x - 2)g(x)$$

với $$g(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 12.$$

Vì g(x) là một đa thức bậc ba và vì :

$$g'(x) = 3x^2 + 4x + 4 > 0, \forall x$$

nên g(x) chỉ có một nghiệm thực duy nhất α : $g(\alpha) = 0$, hơn nữa vì g(x) đồng biến và $g(0) = 12$ nên nhất thiết nghiệm $\alpha < 0$, cụ thể, ta có

$$g(-2{,}5) = -1{,}125 < 0 \text{ ; } g(-2{,}4) = 0{,}096 > 0$$

do đó có thể lấy $\alpha \approx -2{,}4$, và có thể viết

$$g(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 12 \approx (x + 2{,}4)\underbrace{(x^2 - 0{,}4x + 4{,}96)}_{>0}.$$

Tóm lại, có thể viết

$$(x^4 + 4x - 24) \approx (x - 2)(x + 2{,}4)\,(x^2 - 0{,}4x + 4{,}96)$$

và dấu y' chính là dấu của tích số $(x - 2)(x + 2{,}4)$, suy ra :

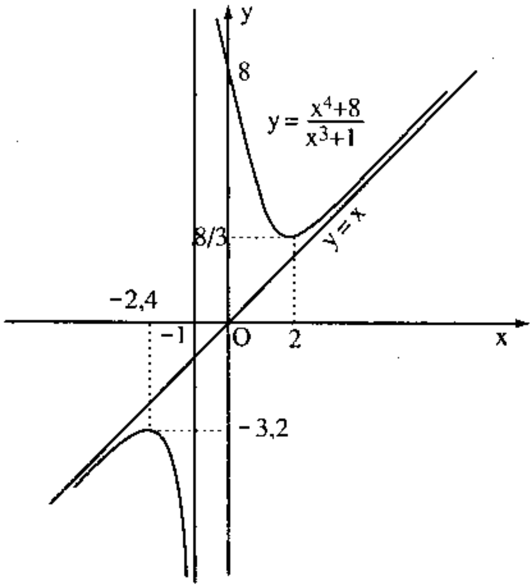
$$y_{min} = y(2) = \frac{8}{3}; \; y_{max} \approx y(-2{,}4) = -3{,}2.$$

Bây giờ để ý rằng khi $x \to -1 \Rightarrow y \to \infty$, tiệm cận đứng là $x = -1$, ngoài ra vì :

$$y = \frac{x^4 + 8}{x^3 + 1} = x + \frac{8 - x}{x^3 + 1}.$$

Suy ra khi $x \to \infty$ thì $y = x$ là tiệm cận xiên. Dưới đây là bảng biên thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		$-2{,}4$		-1		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	|	−	0	+	
y	x	↗	$-3{,}2$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	8	↘	8/3	↗	x



Hình 13

4) Hàm số xác định với mọi x.

$$y' = \frac{1+2x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$y' = 0$ khi $1 + 2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$y_{min} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{5}.$

$y'' = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^3}[4x^2 + 3x - 2]$

$y'' = 0$ khi $4x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3+\sqrt{41}}{8} \approx -1{,}18,$

$$x_2 = \frac{\sqrt{41}-3}{8} \approx 0{,}43.$$

$x = x_1$ và $x = x_2$ là các điểm uốn của đồ thị ;

$y(x_1) \approx -2{,}06$; $y(x_2) \approx -1{,}46$.

$y = 0$ khi $x = 2$.

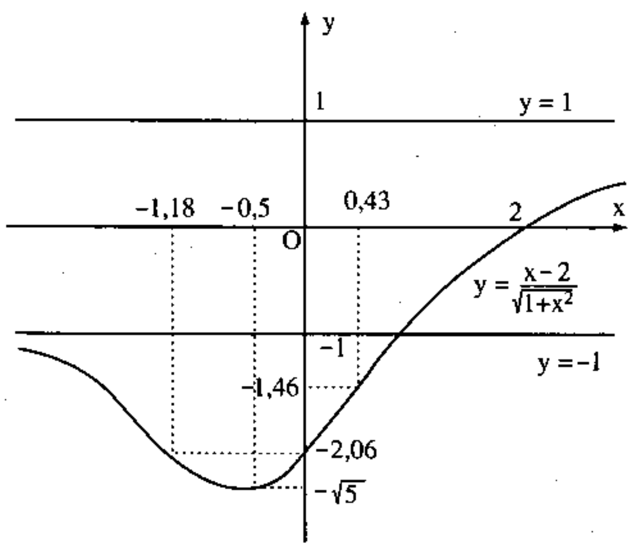
Vì $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x-2}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$

nên $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -1 \Rightarrow$ tiệm cận ngang $y = -1$

và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +1 \Rightarrow$ tiệm cận ngang $y = 1$.

Dưới đây là bảng biến thiên và đồ thị :

x	$-\infty$		$-1{,}18$		$-1/2$		0		$0{,}43$		2		$+\infty$
y'		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
y''		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
y	-1	↘	$-2{,}06$	↘	$-\sqrt{5}$	↗	-2	↗	$-1{,}46$	↗	0	↗	1



Hình 14

5) Hàm số xác định với mọi $x > 0$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{x}}(2x-1)$$

$y' = 0$ khi $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

$$y_{min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2,6.$$

$$y'' = \frac{3\sqrt{x}}{2x^3\sqrt{1+x}}(x+1), \quad y'' > 0, \quad \forall x > 0.$$

Có thể viết

$$y = \frac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} = (1+x)\sqrt{\frac{1+x}{x}} = (1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dùng khai triển hữu hạn của $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, có :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Do đó, có thể viết

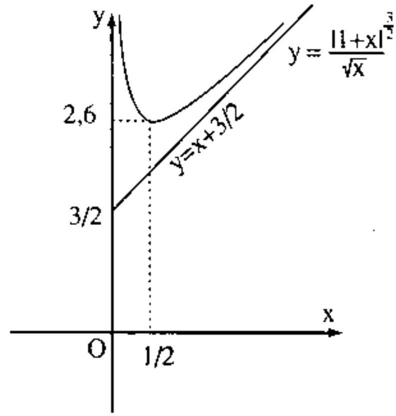
$$y = (1+x)\left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 1 + x + \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Vậy khi $x \to \infty$ thì $y \to x + \frac{3}{2}$: tiệm cận xiên $y = x + \frac{3}{2}$.

Khi $x \to 0$ thì $y \to +\infty$: tiệm cận đứng $x = 0$.

Bảng biến thiên và đồ thị cho dưới đây :

x	0		1/2		$+\infty$
y'	‖	$-$	0	$+$	
y	‖ $+\infty$	↘	2,6	↗	$x+\frac{3}{2}$



Hình 15

6) Hàm số $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$ xác định khi

$x(3 + x) \geq 0$; $x \neq -3$

Do đó miền xác định là $x < -3$ hoặc $x \geq 0$.

$$y' = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{3+x}} \cdot \frac{9+2x}{3+x}.$$

Khi $x < -3$:

$y' = 0$ khi $x = -4$.

$y' > 0$ với $-4 < x < -3$

$y' < 0$ với $x < -4$

$y_{min} = y(-4) = 13$.

Khi $x \geq 0$, phương trình $y' = 0$ vô nghiệm, do đó $y' < 0$ với $x > 0$.

Giá trị lớn nhất của y khi $x \geq 0$ là $y(0) = 1$.

Khi $x \to -3 - 0$ thì $y \to +\infty$.

Ngoài ra, có thể viết

$$y = 1 - x + |x|\sqrt{\frac{x}{3+x}} = 1 - x + |x|\left(1 - \frac{3}{3+x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dùng biểu thức khai triển hữu hạn của $\left(1 - \frac{3}{3+x}\right)^{\frac{1}{2}}$ được :

$$\left(1-\frac{3}{3+x}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3+x}+o\left(\frac{3}{3+x}\right)$$

Do đó $$y=1-x+|x|-\frac{1}{2}\cdot\frac{3|x|}{3+x}+o\left(\frac{3}{3+x}\right).$$

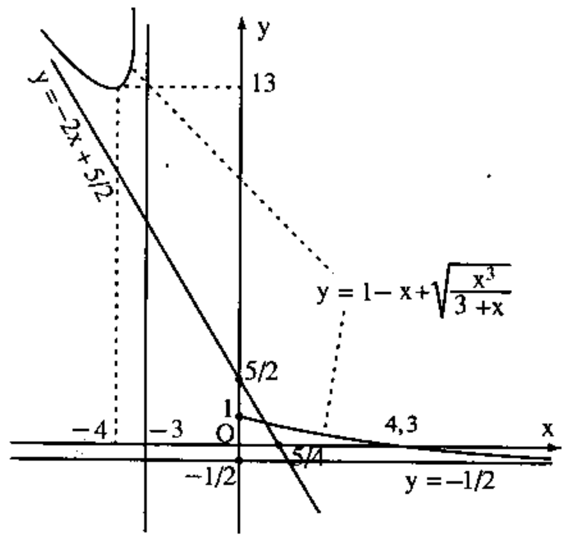
Suy ra :

Khi $x \to -\infty \Rightarrow y = 1 - x - x + \frac{3}{2}$, $y=-2x+\frac{5}{2}$ là tiệm cận xiên.

Khi $x \to +\infty \Rightarrow y = 1 - x + x - \frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang. Khi y = 0 thì $x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}\approx 4{,}3$.

Dưới đây cho bảng biến thiên và đồ thị :

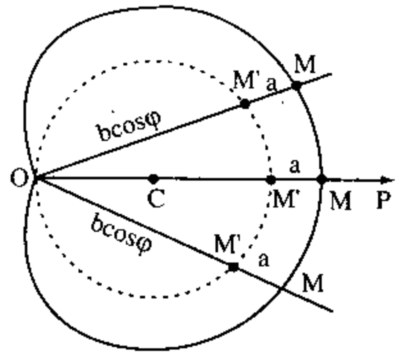
x	$-\infty$		-4		-3	0		$4{,}3$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖		$-$	|	$-$	
y	$-2x+\frac{5}{3}$	↘	13	↗ $+\infty$	‖	1	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$



Hình 16

19. 1) Để thấy ý nghĩa hình học của phương trình (đồng thời cũng là bản chất hình học của đường cong)

$$r = a + b\cos\varphi$$



Hình 17

ta có thể vẽ một đường tròn có đường kính là b, lấy một điểm trên đường tròn làm gốc cực O và vẽ trục cực OP đi qua tâm C của đường tròn (xem hình 17). Khi đó, hiển nhiên một điểm M' bất kì trên đường tròn đều thoả $r = b\cos\varphi$, từ đó suy ra, muốn có điểm M của đồ thị chỉ cần nối OM' kéo dài và lấy $M'M = a \le b$.

Ngoài ra, có thể thấy rằng hàm số $r = a + b\cos\varphi$ $(0 < a \le b)$ xác định với $r \ge 0$; $|\varphi| \le \alpha$; với $\alpha = \arccos\left(-\dfrac{b}{a}\right)$; đường cong kín, đồ thị đối xứng đối với trục cực, r đạt giá trị lớn nhất $r = a + b$ khi $\varphi = 0$ và $r = 0$ khi $\varphi = \pm\alpha$.

2) Hàm số xác định khi $\cos3\varphi > 0$ nghĩa là khi

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 3\varphi < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

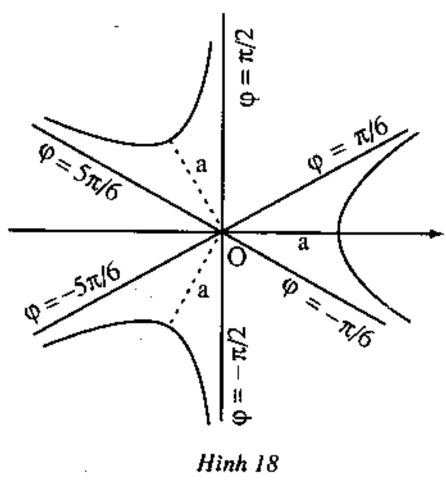
tức là khi

$$|\varphi| < \frac{\pi}{6}$$

hoặc

$$\frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5\pi}{6}$$

với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{3}$.



Hình 18

r đạt giá trị nhỏ nhất khi $\varphi = 0$, và $\varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$ và khi đó r = a.

Đồ thị có tiệm cận là các tia

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{6} \; ; \; \varphi = \pm\frac{\pi}{2} \; ; \; \varphi = \pm\frac{5\pi}{6}.$$

Xem đồ thị ở hình 18.

19. 1) Xét hàm số $f(x) := x^2 - \sin\pi x$

Để ý rằng $f(0{,}75) \approx 0{,}5625 - 0{,}7071 = -0{,}1446$

$$f(0{,}85) \approx 0{,}7225 - 0{,}4540 = 0{,}2685.$$

Như thế khoảng [0,75, 0,85] chứa nghiệm của phương trình $x^2 - \sin\pi x = 0$.

Ngoài ra, đạo hàm $f'(x)$ không đổi dấu trong khoảng đóng [0,75, 0,85] nên khoảng đó chỉ chứa một nghiệm của phương trình đã cho. Hơn nữa vì

$$f''(x) = 2 + \pi^2\sin\pi x$$

và

$$f''(0{,}85) \approx 6{,}4808 > 0$$

nên ta chọn nghiệm ban đầu $x_o = 0{,}85$.

Dùng công thức lặp :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{f'(x_n)}f(x_n)$$

với

$$x_o = 0{,}85$$

ta được

$$x_1 \approx 0{,}85 - \frac{0{,}2685}{4{,}4992} \approx 0{,}7903$$

$$x_2 \approx 0{,}7903 - \frac{0{,}124}{4{,}0702} \approx 0{,}7598$$

và

$$f(0{,}7598) \approx -0{,}0482.$$

Do đó, ta có thể dùng thủ tục lặp và lấy nghiệm xấp xỉ là $x \approx 0{,}7598$.

2) Xét hàm số $f(x) = 2\lg x - \frac{x}{2} + 1$. Để ý rằng

$$f(0,38) \approx -0,0304 < 0$$

$$f(0,40) \approx 0,4041$$

và $f'(x) = \frac{2}{x} - 0,5$ không đổi dấu trong khoảng đóng [0,38, 0,40], do đó phương trình $2\lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$ có một nghiệm nằm trong [0,38, 0,40]. Ngoài ra, vì f"(0,38) = − 13,85 < 0 nên chọn nghiệm ban đầu là $x_o = 0,38$ và dùng công thức lặp

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{f'(x_n)} f(x_n)$$

ta có lần lượt :

$$x_1 \approx 0,38 + \frac{0,0304}{4,7632} \approx 0,3864$$

$$x_2 \approx 0,3864 + \frac{0,0191}{4,6760} \approx 0,3905$$

$$x_3 \approx 0,3905 + \frac{0,0120}{4,6216} \approx 0,3947$$

$$x_4 \approx 0,3947 + \frac{0,0048}{4,5671} \approx 0,3958$$

$$x_5 \approx 0,3958 + \frac{0,0031}{4,5530} \approx 0,3965$$

$$x_6 \approx 0,3965 + \frac{0,0018}{4,5441} \approx 0,3969$$

$$x_7 \approx 0,3969 + \frac{0,0011}{4,5390} \approx 0,3971$$

$$x_8 \approx 0,3971 + \frac{0,0007}{4,5365} \approx 0,3973$$

$$x_9 \approx 0,3973 + \frac{0,0004}{4,5340} \approx 0,3974$$

$$x_{10} \approx 0,3974 + \frac{0,0002}{4,5327} \approx 0,39745$$

$$x_{11} \approx 0,39745 + \frac{0,0002}{4,5321} \approx 0,39754.$$

Vì $$f(0,39754) \approx 0,00006 > 0$$

nên ta có thể dừng ở x_{11} và chọn nghiệm xấp xỉ là $x \approx 0,39754$.

Chương 6

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

A. ĐỀ BÀI

1. Tính các tích phân

1) $\int x^2(5-x)^4 dx$;

2) $\int\left(\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^3}{x^3}\right)dx$;

3) $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$;

4) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$;

5) $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$;

6) $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$;

7) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$;

8) $\int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx$, $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$;

9) $\int\frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$;

10) $\int\frac{dx}{2-3x^2}$;

11) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$;

12) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$;

13) $\int(\sin 5x-\sin 5y)dx$;

14) $\int\frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$;

15) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$;

16) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$;

17) $\int \frac{dx}{ch^2 \frac{x}{2}}$;

18) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

19) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$;

20) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$;

21) $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$;

22) $\int \frac{e^x}{2+e^x}dx$;

23) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

24) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$;

25) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx$;

26) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$;

27) $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx$;

28) $\int \frac{xdx}{(x+2)(x+5)}$;

29) $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$;

30) $\int \sin^2 x\,dx$;

31) $\int \sin x \sin(x+y)dx$;

32) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$.

2. Tính các tích phân

1) $\int \mathrm{arctg}x dx$;

2) $\int \frac{1+\cos x}{\sin x-1}dx$;

3) $\int \frac{dx}{tg^3 x}$;

4) $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$;

5) $\int \sin^6 x\cos^4 x dx$;

6) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}}dx$;

7) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+2}}$; 8) $\int x\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx$;

9) $\int \sin^5 x\cos^3 xdx$; 10) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$;

11) $\int \sin^{n-1}x\sin(n+1)xdx$; 12) $\int \frac{xe^{\text{arctg}x}dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

13) $\int \frac{dx}{1+x^3}$; 14) $\int \frac{dx}{1+x^6}$;

15) $\int \max(1,\ x^2)dx$; 16) $\int \{|1+x|-|1-x|\}\,dx$.

3. Tính các tích phân :

1) $I_n := \int \frac{dx}{\cos^n x}$, $n \in \mathbf{N}$; tính I_o, I_1, I_2 và lập công thức truy hồi để tính I_n.

2) $I_n := \int x^n e^x dx$; 3) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$;

4) $\int e^{-2x}\cos 3xdx$; 5) $\int x^2\ln xdx$;

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

B. LỜI GIẢI

1. 1) $\int x^2(5-x)^4dx = \int x^2(5^4-4.5^3x+6.5^2x^2-4.5x^3+x^4)dx$

$= \int (5^4x^2-4.5^3x^3+6.5^2x^4-4.5x^5+x^6)dx$

$= \frac{5^4}{3}x^3-5^3x^4+6.5x^5-4.5.\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}+C.$

2) $\int\left(\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^3}{x^3}\right)dx = y\int\frac{dx}{x}+y^2\int\frac{dx}{x^2}+y^3\int\frac{dx}{x^3}$

$$= y\ln|x| - \frac{y^2}{x} - \frac{y^3}{2x^2} + C.$$

3) $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$

4) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\ dx = \int(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}})dx = \frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C.$

5) $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx = \int\left(2\left(\frac{1}{5}\right)^x-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)dx =$

$$= -\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x + C.$$

6) $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx = \int\frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{1+e^x}dx$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C.$$

7) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx =$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right| + C.$$

8) Vì $1 + \sin 2x = \cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x = (\sin x + \cos x)^2$

nên $\qquad I = \int\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}\,dx = \int|\sin x+\cos x|dx$

Vì $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ nên

$$I = \int (\sin x + \cos x)dx = \sqrt{2}\int \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx =$$

$$= -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

9) $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{5}\int (5x-2)^{-\frac{5}{2}} d(5x-2) = -\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}} + C.$

10) $\int \frac{dx}{2-3x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(x\sqrt{3})}{2-(\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right| + C.$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(\sqrt{3}x)^2}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{2-(\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + C.$$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{(\sqrt{3}x)^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2-2}\right| + C.$

13) $\int (\sin 5x - \sin 5y)dx = -\frac{1}{5}\cos 5x - x\sin 5y + C.$

14) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + C.$

15) $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

16) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\int\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=$

$$=-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.$$

17) $\displaystyle\int\frac{dx}{\mathrm{ch}^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{ch}^2\frac{x}{2}}=2\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)+C.$

18) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=2\int\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}=2\mathrm{arctg}\left(\sqrt{x}\right)+C.$

19) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\frac{1}{x^2}dx}{\frac{1}{x^2}\left(x\sqrt{x^2+1}\right)}=-\int\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}}=$

$$=-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+C.$$

20) Để ý rằng $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\dfrac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ (xem bài tập số 16, chương 4), có

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\int d\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.$$

21) $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}\int(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}d(x^2-1)=-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+C.$

22) $\int \frac{e^x}{2+e^x}dx = \int \frac{d(2+e^x)}{2+e^x} = \ln(2+e^x)+C.$

23) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{1+(e^x)^2} = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \operatorname{arctg}(e^x)+C.$

24) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{2+\operatorname{tg}^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg}x)}{2+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

25) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx = -\int (\cos x)^{-\frac{3}{2}} d(\cos x) = \frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C.$

26) $$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}} = \int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

$$= \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)+C.$$

27) $$\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx = \frac{2}{n+2}\int \frac{d\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)}{\sqrt{1+\left(x^{(n+2)/2}\right)^2}}$$

$$= \frac{2}{n+2}\ln\left(x^{\frac{n+2}{2}}+\sqrt{1+x^{n+2}}\right)+C.$$

28) $$\int \frac{x}{(x+2)(x+5)}dx = \int\left[\frac{5}{3(x+5)} - \frac{2}{3(x+2)}\right]dx$$

Vì : $$\frac{x}{(x+2)(x+5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+5}\ ;\ A = \frac{-2}{-2+5} = -\frac{2}{3}\ ;$$

$$B = \frac{-5}{-5+2} = \frac{5}{3}.$$

Cuối cùng

$$\int \frac{x}{(x+2)(x+5)}dx = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x+5)^5}{(x+2)^2}\right| + C.$$

29) Để ý rằng : với $a \neq b$:

$$\frac{1}{(x+a)^2(x+b)^2} = \left[\frac{1}{(x+a)(x+b)}\right]^2 = \left[\frac{(x+b)-(x+a)}{(b-a)(x+a)(x+b)}\right]^2$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right]^2$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\left\{\frac{1}{(x+a)^2} - 2\cdot\frac{1}{(x+a)(x+b)} + \frac{1}{(x+b)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\left\{\frac{1}{(x+a)^2} - 2\cdot\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right) + \frac{1}{(x+b)^2}\right\}.$$

Do đó, với $a \neq b$:

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} =$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\int\left[\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{2}{b-a}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right) + \frac{1}{(x+b)^2}\right]dx$$

$$= -\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{2}{b-a}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|\right] + C.$$

Với a = b có

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = \int \frac{dx}{(x+a)^4} = \int (x+a)^{-4} d(x+a) =$$

$$= -\frac{1}{3(x+a)^3} + C.$$

30) $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

31) Dùng công thức lượng giác

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

có $\int \sin x \sin(x+y) dx = \frac{1}{2} \int \left[\cos y - \cos(2x+y)\right] dx =$

$$= \frac{1}{2} x \cos y - \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \cos(2x+y) d(2x+y)$$

$$= \frac{1}{2} x \cos y - \frac{1}{4} \sin(2x+y) + C.$$

32) Dùng công thức lượng giác

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

có $\int \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{3} dx = \frac{1}{2} \int \left(\cos\frac{5x}{6} + \cos\frac{x}{6}\right) dx =$

$$= \frac{3}{5} \sin\frac{5x}{6} + 3\sin\frac{x}{6} + C.$$

2. 1) Đặt u = arctgx, dv = dx, có

$$du = \frac{1}{1+x^2} dx \ ; \ \ v = x.$$

Do đó

$$\int \text{arctgx}dx = \text{xarctgx} - \int \frac{xdx}{1+x^2}$$

$$= \text{xarctgx} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

2) Viết $\qquad \dfrac{1+\cos x}{\sin x - 1} = \dfrac{1}{\sin x - 1} + \dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$

và để ý rằng

$$d(\sin x - 1) = \cos x dx \ ; \ \sin x = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

ta có :

$$\int \frac{1+\cos x}{\sin x - 1}dx = \int \frac{dx}{\sin x - 1} + \int \frac{\cos x}{\sin x - 1}dx$$

$$= -\int \frac{dx}{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} + \int \frac{d(\sin x - 1)}{\sin x - 1}$$

$$= \ln|\sin x - 1| - \text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

3) Về nguyên tắc, với bài này có thể thực hiện phép đổi biến tgx = t ; nghĩa là viết

$$\int \frac{dx}{\text{tg}^3 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\text{tg}^3 x}{\cos^2 x}} = \int \frac{d(\text{tg}x)}{\text{tg}^3 x(1+\text{tg}^2 x)} = \int \frac{dt}{t^3(1+t^2)}.$$

Mặt khác, ta có :

$$\frac{1}{t^3(1+t^2)} = \frac{1+t^2-t^2}{t^3(1+t^2)} = \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t(1+t^2)}$$

và $$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)t} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$$

nghĩa là

$$\frac{1}{t^3(1+t^2)} = \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} + \frac{t}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dt}{t^3(1+t^2)} = -\frac{1}{2t^2} - \ln|t| + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C$$

do đó

$$\int \frac{dx}{tg^3x} = -\frac{1}{2tg^2x} - \ln|tgx| + \frac{1}{2}\ln(1+tg^2x) + C.$$

Tuy nhiên, ta cũng có thể dùng phép đổi biến sinx = t nghĩa là viết

$$\int \frac{dx}{tg^3x} = \int \frac{\cos^3x}{\sin^3x}dx = \int \frac{\cos^2x.\cos x}{\sin^3x}dx$$

$$= \int \frac{1-\sin^2x}{\sin^3x}\cos x\,dx = \int \frac{(1-t^2)}{t^3}dt$$

$$= \int \frac{dt}{t^3} - \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2t^2} - \ln|t| + C.$$

Vậy $$\int \frac{dx}{tg^3x} = -\frac{1}{2\sin^2x} - \ln|\sin x| + C.$$

4) $\int \sqrt{e^x-1}\,dx = \int \frac{e^x-1}{\sqrt{e^x-1}}dx$

Thực hiện phép đổi biến $u^2 + 1 = e^x$, được

$$\frac{2udu}{u^2+1} = dx$$

và $\int\sqrt{e^x-1}\,dx = \int\frac{2u^2}{1+u^2}du = 2\int\left[1-\frac{1}{1+u^2}\right]du$

$= 2[u - \text{arctgu}] + C = 2\left[\sqrt{e^x-1} - \text{arctg}\sqrt{e^x-1}\right] + C.$

5) Ta có :

$$\sin^6x\cos^4x = (\sin^2x\cos^2x)^2\sin^2x$$

$$= \frac{1}{16}(\sin^2 2x)^2\frac{(1-\cos 2x)}{2}$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2(1-\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{128}(1-2\cos 4x+\cos^2 4x)(1-\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{256}(3-4\cos 4x+\cos 8x)(1-\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{256}\left[3-\cos 2x-4\cos 4x+\frac{3}{2}\cos 6x+\cos 8x-\frac{1}{2}\cos 10x\right].$$

do đó

$$\int\sin^6x\cos^4x\,dx =$$

$$= \int\left[3-\cos 2x-4\cos 4x+\frac{3}{2}\cos 6x+\cos 8x-\frac{1}{2}\cos 10x\right]\frac{1}{256}dx$$

$$= \frac{1}{256}\left[3x-\frac{1}{2}\sin 2x-\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 6x+\frac{1}{8}\sin 8x-\frac{1}{20}\sin 10x\right]+C.$$

6) $\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x+6}}dx + \left(2+\frac{5}{2}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

và $\int\frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x+6}}dx = \int t^{-\frac{1}{2}}dt$ (với $t = x^2-5x+6$)

$$= 2\sqrt{t} = 2\sqrt{x^2-5x+6}.$$

Ngoài ra, vì

$$x^2-5x+6=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+6-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

nên :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}=\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-\frac{1}{4}}}\ (\text{với } y=x-\frac{5}{2})$$

$$=\ln\left|y+\sqrt{y^2-\frac{1}{4}}\right|+C=\ln\left|\left(x-\frac{5}{2}\right)+\sqrt{x^2-5x+6}\right|+C.$$

Cuối cùng, ta có

$$\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}}dx=\sqrt{x^2-5x+6}+\frac{9}{2}\ln\left|\left(x-\frac{5}{2}\right)+\sqrt{x^2-5x+6}\right|+C.$$

7) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$

$$=\sqrt{x^2+x+2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}}=$$

$$=\sqrt{x^2+x+2}-\frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2+x+2}\right|+C.$$

8) Có thể viết

$$x\sqrt{-x^2+3x-2}=-\frac{1}{2}(-2x+3)\sqrt{-x^2+3x-2}+\frac{3}{2}\sqrt{-x^2+3x-2}$$

do đó

$$\int x\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\sqrt{-x^2+3x-2}(-2x+3)dx+\frac{3}{2}\int\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx.$$

Tích phân thứ nhất của vế phải của hệ thức trên sẽ là $\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{t^3}$, với $t = -x^2 + 3x - 2$. Với tích phân thứ hai ta có :

$$\int\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx = \int\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \int\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)}{2}\sqrt{-x^2+3x-2} + \frac{1}{8}\arcsin\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{(2x-3)}{4}\sqrt{-x^2+3x-2} + \frac{1}{8}\arcsin(2x-3) + C.$$

Cuối cùng, ta được :

$$\int x\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx = -\frac{1}{3}\cdot\sqrt{(-x^2+3x-2)^3} +$$

$$+\frac{3}{8}(2x-3)\sqrt{-x^2+3x-2} + \frac{3}{16}\arcsin(2x-3) + C.$$

9) $\int \sin^5 x\cos^3 x dx = \int \sin^5 x\cos^2 x\cos x dx =$

$= \int \sin^5 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \int t^5(1-t^2)dt$, (với $t = \sin x$)

$$= \int (t^5 - t^7)dt = \frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{8}t^8 + C$$

$$= \frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{8}\sin^8 x + C.$$

10) Vì $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$ nên

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+5)^2} = \int\frac{dx}{((x+1)^2+4)^2} = \int\frac{dt}{(t^2+4)^2}$$

với $t = x + 1$.

Bây giờ để ý rằng có thể viết

$$\frac{1}{(t^2+4)^2} = \frac{t^2+4-t^2}{4(t^2+4)^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{t^2+4} - \frac{t^2}{(t^2+4)^2}\right].$$

do đó :

$$\int\frac{dt}{(t^2+4)^2} = \frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{t^2+4} - \frac{t^2}{(t^2+4)^2}\right]dt$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\int\frac{t^2}{(t^2+4)^2}dt.$$

Gọi $J = \int\frac{t^2}{(t^2+4)^2}dt$, ta có :

$$J = \frac{1}{2}\int t\cdot\frac{2t}{(t^2+4)^2}dt = \frac{1}{2}\int t\cdot\frac{d(t^2+4)}{(t^2+4)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}t(-1)\cdot\frac{1}{t^2+4} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+4} = -\frac{1}{2}\,\frac{t}{t^2+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{t}{2}.$$

Vậy ta có :

$$\int\frac{dt}{(t^2+4)^2} = \frac{1}{8}\text{arctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{t}{(t^2+4)} + \frac{1}{4}\text{arctg}\frac{t}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{t}{(t^2+4)} + \frac{1}{16}\text{arctg}\frac{t}{2} + C.$$

Cuối cùng, ta được

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}=\frac{1}{8}\frac{(x+1)}{(x^2+2x+5)}+\frac{1}{16}\text{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

11) Vì sin(n + 1)x = sinnxcosx + cosnxsinx nên

$$\int\sin^{n-1}x\sin(n+1)xdx=\int\sin nx\sin^{n-1}x\cos xdx+\int\cos nx\sin^{n}x\,dx.$$

Bây giờ gọi $I=\int\sin nx\sin^{n-1}x\cos xdx$ thì vì :

$$d(\sin^n x)=n\sin^{n-1}x\cos x \text{ nên :}$$

$$I=\frac{1}{n}\int\sin nxd(\sin^n x)=\frac{1}{n}\left[\sin^n x\sin nx-n\int\cos nx\sin^n x\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{n}\sin^n x\sin nx-\int\cos nx\sin^n x\,dx.$$

Thế giá trị của I vào biểu thức đầu tiên ta được

$$\int\sin^{n-1}x\sin(n+1)xdx=\frac{1}{n}\sin^n x\sin nx+C.$$

12) Thực hiện phép đổi biến t = arctgx ta được

$$x=\text{tg}t\ ;\ \frac{dx}{1+x^2}=dt\ ;\ \sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\text{tg}^2t}=\frac{1}{\cos t}.$$

Do đó :

$$\int\frac{xe^{\text{arctg}x}dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int e^t\sin tdt=\int\sin td(e^t)=$$

$$=e^t\sin t-\int\cos te^tdt=e^t\sin t-\int\cos td(e^t)=$$

$$=e^t\sin t-e^t\cos t-\int e^t\sin tdt.$$

Suy ra :

$$\int e^t\sin tdt=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C, \text{ nghĩa là :}$$

$$\int \frac{xe^{\text{arctgx}}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{1}{2}e^{\text{arctgx}} \cdot \frac{(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

13) Để ý rằng có thể viết :

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1-x^2+x^2}{1+x^3} = \frac{x^2}{1+x^3} + \frac{1-x^2}{1+x^3} = \frac{x^2}{1+x^3} + \frac{1-x}{1-x+x^2}.$$

Do vậy

$$I = \int \frac{dx}{1+x^3} = I_1 + I_2.$$

với $\quad I_1 = \int \frac{x^2}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + C$

$$I_2 = \int \frac{1-x}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

- Cuối cùng :

$$I = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

14) Có thể viết

$$\frac{1}{1+x^6} = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^4+1)-(x^4-1)}{1+(x^2)^3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4+1}{(x^2+1)(1-x^2+x^4)} - \frac{x^4-1}{(x^2+1)(1-x^2+x^4)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4-x^2+1+x^2}{(x^2+1)(1-x^2+x^4)}-\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+(x^3)^2}-\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}\right].$$

Vậy

$$I=\int\frac{dx}{1+x^6}=\frac{1}{2}(I_1+I_2-I_3)$$

trong đó :

$$I_1=\int\frac{dx}{1+x^2}=\text{arctg}x+C_1$$

$$I_2=\int\frac{x^2dx}{1+(x^3)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{1+(x^3)^2}=\frac{1}{3}\text{arctg}(x^3)+C_2$$

$$I_3=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left(\frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right)+C_3$$

Cuối cùng

$$I=\frac{1}{2}\text{arctg}x+\frac{1}{6}\text{arctg}(x^3)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}+C.$$

15) Vì $\max(1,x^2)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ x^2, & |x|>1\end{cases}$

nên $\max(1, x^2)$ là một hàm số liên tục với mọi $x \in \mathbf{R}$. Do đó, tồn tại nguyên hàm $I(x) = \int \max(1, x^2)dx$ và cụ thể là

$$I(x) = \begin{cases} \int 1.dx, & |x| \le 1 \\ \int x^2 dx, & |x| > 1 \end{cases}$$

Vậy

$$I(x) = \begin{cases} x + C_1, & |x| \le 1 \\ \dfrac{x^3}{3} + C_2, & |x| > 1 \end{cases}$$

Tuy nhiên, vì I(x) là một hàm liên tục nên phải có

$$\lim_{x \to -1}(x + C_1) = \lim_{x \to -1}\left(\frac{x^3}{3} + C_2\right) \qquad (*)$$

và

$$\lim_{x \to 1}(x + C_1') = \lim_{x \to 1}\left(\frac{x^3}{3} + C_2'\right) \qquad (**)$$

Điều kiện (*) cho

$$-1 + C_1 = -\frac{1}{3} + C_2$$

từ đó, chọn $C_1 = 0$, suy ra $C_2 = -\dfrac{2}{3}$.

Tương tự, điều kiện (**) cho

$$1 + C_1' = \frac{1}{3} + C_2'$$

và nếu chọn $C_1' = 0$, suy ra $C_2' = \dfrac{2}{3}$.

Kết hợp các trường hợp trên, có thể viết

$$I(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1 \\ \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}\operatorname{sgn}(x), & |x| > 1 \end{cases}$$

trong đó sgn(x) là hàm dấu của x (xem bài tập số 8 chương 2).

16) Ta có

$$\left|1+x\right|=\begin{cases}1+x\ ;\ x\geq -1\\ -1-x\ ;\ x<-1\end{cases};\ \left|1-x\right|=\begin{cases}1-x\ ;\ x\leq 1\\ -1+x\ ;\ x>1.\end{cases}$$

Suy ra bảng giá trị

x		-1		1	
$\|1+x\|$	$-1-x$	0	$1+x$	|	$1+x$
$\|1-x\|$	$1-x$	|	$1-x$	0	$-1+x$
$\|1+x\|-\|1-x\|$	-2	|	$2x$	|	2

Vì $\lim\limits_{x\to -1} 2x=-2,\ \lim\limits_{x\to 1} 2x=2$

nên hàm số $f(x):=|1+x|-|1-x|$ liên tục với mọi $x\in \mathbf{R}$ do đó $f(x)$ có nguyên hàm là $I(x)$:

$$I(x)\ :=\int(|1+x|-|1-x|)dx=\begin{cases}\int -2dx;\ x\leq -1\\ \int 2xdx;\ -1<x\leq 1\\ \int 2dx;\ x>1\end{cases}$$

Suy ra :

$$I(x)=\begin{cases}-2x+C_1\ ;\ x\leq -1\\ x^2+C_2\ ;\ -1<x\leq 1\\ 2x+C_3\ ;\ x>1\end{cases}$$

Mặt khác $I(x)$ là một hàm liên tục nên phải có :

$$\lim_{x\to -1}(-2x+C_1)=\lim_{x\to -1}(x^2+C_2)$$

và
$$\lim_{x\to 1}(x^2+C_2')=\lim_{x\to 1}(2x+C_3)$$

Từ các điều kiện trên suy ra :

$$C_1=C_3=0\ ;\ C_2=1\ ;\ C_2'=1$$

và cuối cùng có thể biểu diễn I(x) dưới dạng :

$$I(x) := \int(|1+x|-|1-x|)dx = \frac{1}{2}\left[(1+x)|1+x|+(1-x)|1-x|\right].$$

3. 1) $I_o = \int dx = x + C.$

$$I_1 = \int\frac{dx}{\cos x} = \int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \int\frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \int\frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \int\frac{d\left(tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}{tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

$$I_2 = \int\frac{dx}{\cos^2 x} = \int d(tgx) = tgx + C.$$

Với $n \ge 2$ có :

$$I_n = \int\frac{dx}{\cos^n x} = \int\frac{1}{\cos^{n-2}x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int\frac{1}{\cos^{n-2}x}d(tgx)$$

$$= \frac{tg x}{\cos^{n-2}x} - \int tgx(\cos^{2-n}x)'dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} - (n-2)\int\frac{\sin^2 x}{\cos^n x}dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} - (n-2)\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^n x}dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} - (n-2)\int\left[\frac{1}{\cos^n x} - \frac{1}{\cos^{n-2}x}\right]dx$$

$I_n = \dfrac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}$. Suy ra công thức truy hồi :

$$I_n = \frac{1}{(n-1)} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

2) $I_n = \int x^n e^x dx = \int x^n d(e^x) = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx$ tức là :

$I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$.

3) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

$$= \sqrt{x^2-1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

4) Có thể dùng cách tính tích phân từng phần thông thường để tính, chẳng hạn viết :

$$\int e^{-2x} \cos 3x dx = -\frac{1}{2}\int \cos 3x d(e^{-2x})$$

rồi tiếp tục..., nhưng ở đây, do tính chất của hàm số $e^{ax}\cos bx$ nên ta có thể tính bằng cách đặt :

$$\int e^{-2x} \cos 3x dx = e^{-2x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + C.$$

Đạo hàm cả hai vế đối với x, ta được

$$e^{-2x} \cos 3x = e^{-2x}\left[(-2A+3B)\cos 3x - (3A+2B)\sin 3x\right].$$

Suy ra : $\begin{cases} -2A+3B=1 \\ 3A+2B=0 \end{cases}$.

Giải hệ hai phương trình trên, tìm được

$$A = -\frac{2}{13} \text{ và } B = \frac{3}{13}.$$

Vậy :

$$\int e^{-2x} \cos 3x dx = \frac{e^{-2x}}{13}[-2\cos 3x + 3\sin 3x] + C.$$

5) Đặt $u = \ln x$; $du = \frac{1}{x}dx$; $dv = x^2dx$, $v = \frac{1}{3}x^3$.

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + C.$$

6) Đặt $t^6 = x$, có $\sqrt{x} = t^3$; $\sqrt[3]{x} = t^2$; $dx = 6t^5dt$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^3}{t+1}dt = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}dt =$$

$$= 6\int (t^2 - t + 1)dt - 6\int \frac{dt}{t+1}$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t\right) - 6\ln(t+1) + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C.$$

Chương 7

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

A. ĐỀ BÀI

1. Dùng định nghĩa tính các tích phân :

1) $\int_1^2 e^x dx$; 2) $\int_a^b \frac{dx}{x^2}, 0 < a < b$; 3) $\int_0^1 a^x dx, a > 0$.

2. Ước lượng các tích phân :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} dx$; 2) $\int_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} dx$

3. Tính các đạo hàm

1) $\frac{d}{dx}\int_x^y e^{t^2} dt$; 2) $\frac{d}{dy}\int_x^y e^{t^2} dt$; 3) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

4. Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn :

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\alpha}+\frac{1}{n\alpha+\beta}+\frac{1}{n\alpha+2\beta}+\ldots+\frac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}\right], (\alpha > 0, \beta > 0)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}\right)$.

5. Tìm các giới hạn :

1) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\text{tg}t}\,dt}{\int\limits_0^{\text{tg}x}\sqrt{\sin t}\,dt}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int\limits_0^{x}(\text{arctg}t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

6. Có thể dùng công thức Newton – Leibnitz để tính các tích phân sau đây được không ? Tại sao ?

1) $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_0^2 x\sqrt{1-x^2}\,dx$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{(2+\text{tg}^2x)\cos^2x}$.

7. Tính các tích phân :

1) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$; 2) $\int\limits_0^2 f(x)dx$, với $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 2-x, & \text{khi } 1<x\le 2\end{cases}$

3) $\int\limits_0^1\sqrt{9-4x^2}\,dx$; 4) $\int\limits_0^1(x^3-2x+5)e^{-\frac{x}{2}}dx$;

5) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{dx}{4x^2+4x+5}$; 6) $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$;

7) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{d\theta}{3\cos^2\theta+4\sin^2\theta}$; 8) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\text{tg}^4\theta\,d\theta$;

9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$;   10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx$.

8. Chứng minh rằng nếu f(x) liên tục trên [0, 1] thì :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

2) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

9. Thực hiện phép đổi biến $t := x + \dfrac{1}{x}$ tính tích phân

$$I := \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1 + x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx.$$

10. Từ công thức tính $J_n := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ (thí dụ (b) mục 7.6, trang 265 sách đã dẫn) và từ bất đẳng thức hiển nhiên (?) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\, dx$$

chứng minh công thức Wallis :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1}$$

11. Chứng minh rằng nếu f(x) là một hàm số liên tục trên **R**, tuần hoàn, có chu kì T, thì với mọi a, luôn có :

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

12. Tính tích phân :

$$\int_{-1}^{3} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx, \text{ trong đó } f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$$

13. Cho f(x), g(x) là hai hàm số khả tích trên [a, b], giả sử $f^2(x)$, $g^2(x)$ và f(x). g(x) cũng khả tích trên [a, b]. Chứng minh bất đẳng thức Cauchy – Schwartz (với a < b) :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

14. Dùng công thức hình thang và công thức Simpson, tính gần đúng các tích phân sau :

1) $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$, (chia [2, 5] thành 6 khoảng bằng nhau).

2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos x}\,dx$, (chia $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ thành 10 khoảng bằng nhau).

15. Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

1) Đường cong $y = x^2$ $(x \ge 0)$ và các đường thẳng $x = 0$, $y = 4$

2) Đường parabôn $y = x^2 + 4$ và đường thẳng $x - y + 4 = 0$

3) Đường bậc ba $y = x^3$ $(x \ge 0)$ và các đường thẳng $y = x$, $y = 2x$

4) Đường tròn $x^2 + y^2 = 4x$ và parabôn $y^2 = 2x$

5) Đường $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

16. Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ và } y^2 + z^2 = a^2 \ (a > 0).$$

17. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt parabôlôit $z = 4 - y^2$, các mặt phẳng toạ độ và mặt phẳng $x = a$.

18. Tìm thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường :

1) $y^2 + x - 4 = 0$; $x = 0$ khi quay quanh trục Oy

2) $xy = 4$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 4$ khi quay quanh trục Ox

3) $y = x^2$, $y = 4$ khi quay quanh đường thẳng $x = -2$.

19. Tìm độ dài đường cong :

1) $9y^2 = 4(3 - x)^3$ gồm giữa các giao điểm của nó với trục Oy

2) $2y = x^2 - 2$ gồm giữa các giao điểm của nó với trục Ox.

20. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo bởi đường axtơrôit :

$$x = a\cos^3 t \ ; \ y = a\sin^3 t, \ a > 0$$

khi quay quanh trục Ox.

21. Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau :

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$;   2) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \cos x dx$;

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$;   4) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx$;

5) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;   6) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$;

7) $\int_0^1 x\ln^2 x dx$;

8) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2-1}$.

22. Xét sự hội tụ của các tích phân sau :

1) $\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$;

2) $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$;

3) $\int_1^{\infty} \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$;

4) $\int_1^{\infty} \frac{1+x^2}{x^3}dx$;

5) $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$;

6) $\int_0^1 \frac{dx}{\text{tg}x - x}$;

7) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$;

8) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}$.

B. LỜI GIẢI

1. 1) Xét hàm số $f(x) = e^x$, $x \in [1, 2]$; hàm số này liên tục trên $[1, 2]$ do đó khả tích trên $[1, 2]$. Chia đoạn $[1, 2]$ thành n đoạn bằng nhau bởi hệ phân điểm $x_o = 1$; $x_1 = 1+\frac{1}{n}$, ..., $x_i = 1+\frac{i}{n}$, ..., $x_n = 1+\frac{n}{n} = 2$; $x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n} = \frac{2-1}{n} = \Delta x_i$.

Chọn $\xi_i = x_i$, khi đó tổng tích phân là

$$\sigma_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} e^{1+\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} e \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}}$$

và $$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\frac{e}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} = e\lim_{n\to\infty}\frac{e-1}{\dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\dfrac{1}{n}}}$$

Vì $$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\dfrac{1}{n}} = 1$$

nên $$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \int_1^2 e^x dx = e^2 - e = e(e-1).$$

2) Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x\in[a, b]$, với $0 < a < b$, hàm số này khả tích trên $[a, b]$. Chia $[a, b]$ thành n đoạn bằng nhau bởi hệ phân điểm :

$$x_o = a,\ x_1 = a+\Delta x_1,\ x_2 = a+2\Delta x_2,\ ...,\ x_i = a+i\Delta x_i,\ ...,$$
$$x_n = a+n\Delta x_n = a+n.\frac{b-a}{n} = b$$

trong đó $\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n = \dfrac{b-a}{n} = \Delta x.$

Chọn $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$: $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$.

Như thế

$$f(\xi_i) = \frac{1}{x_i x_{i+1}} = \frac{1}{(a+i\Delta x)(a+(i+1)\Delta x)}.$$

Khi đó, tổng tích phân

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(a+i\Delta x)(a+(i+1)\Delta x)}.\Delta x.$$

Theo định nghĩa tích phân xác định, ta có :

$$I = \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(a+i\Delta x)(a+(i+1)\Delta x)} \Delta x.$$

Vì có thể viết :

$$\frac{1}{(a+i\Delta x)(a+(i+1)\Delta x)} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{a+i\Delta x} - \frac{1}{a+(i+1)\Delta x}\right)$$

nên :

$$I = \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a+i\Delta x} - \frac{1}{a+(i+1)\Delta x}\right)$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right).$$

3) Xét hàm số $f(x) = a^x$, $x \in [0, 1]$, hàm số này khả tích trên $[0, 1]$. Chia đoạn $[0, 1]$ thành n đoạn bằng nhau bởi hệ phân điểm :

$$x_o = 0,\ x_1 = 0 + \Delta x_1, ..., x_i = 0 + i\Delta x_i, ..., x_n = 0 + n\Delta x_n$$

với $\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}.$

Chọn $\xi_i = x_i$, khi đó $f(\xi_i) = a^{x_i}$ và tổng tích phân σ_n là :

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} a^{x_i}\Delta x_i$$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a^{\frac{i}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1}{\dfrac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}}.$$

Vì $$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln a$$

nên $$I=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\int_0^1 a^x dx=\frac{a-1}{\ln a}.$$

2. 1) Vì $0\le \sin^2 x\le 1$ nên

$$1\le e^{\sin^2 x}\le e$$

và $$\frac{\pi}{2}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}dx\le e\frac{\pi}{2}.$$

2) Để ý rằng :

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{1+(10)^4}}<(10)^{-2};\ x\in[10,18].$$

Do đó : $$\left|\int_{10}^{18}\frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}dx\right|\le 10.(10)^{-2}=(10)^{-1}.$$

3. 1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^y e^{t^2}dt=-\dfrac{d}{dx}\int_y^x e^{t^2}dt=-e^{x^2}.$

2) $\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_x^y e^{t^2}dt=e^{y^2}.$

3) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{d}{dx}\left[\int_{x^2}^{a}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}+\int_a^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}\right]$

với a sao cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ khả tích trong $[x^2, a]$ và $[a, x^3]$.

Khi đó :

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=-\frac{d}{dx}\int_a^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}+\frac{d}{dx}\int_a^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Mặt khác, ta có :

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{d}{d(x^2)}\left(\int_a^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}\right)(x^2)_x{}'=\frac{2x}{\sqrt{1+(x^2)^4}}=\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$$

và $$\frac{d}{dx}\int_a^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{d}{d(x^3)}\left(\int_a^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}\right)(x^3)_x{}'$$

$$=\frac{3x^2}{\sqrt{1+(x^3)^4}}=\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}.$$

Vậy : $$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=-\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}+\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$$

4. 1) Có thể viết

$$\sigma_n:=\frac{1}{n\alpha}+\frac{1}{n\alpha+\beta}+\frac{1}{n\alpha+2\beta}+\ldots+\frac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+\frac{\beta}{n}}+\frac{1}{\alpha+\frac{2\beta}{n}}+\ldots+\frac{1}{\alpha+(n-1)\frac{\beta}{n}}\right]$$

Biểu thức này gợi ý xét hàm số :

$$f(x):=\frac{1}{\alpha+\beta x},\ x\in[0,1].$$

Khi đó, có :

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

với $\xi_i = 0 + \frac{i\beta}{n}$; $i = \overline{0, n-1}.$

$\Delta x_i = \Delta x_o = ... = \Delta x_{n-1} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}\cdot$ Mặt khác, theo giả thiết, $\alpha > 0$;

$\beta > 0$ nên hàm số $f(x) = \frac{1}{\alpha + \beta x}$ khả tích trên [0, 1], do đó, theo định nghĩa tích phân xác định, ta có :

$$\lim_{n\to 0} \sigma_n = \int_0^1 \frac{dx}{\alpha + \beta x} = \frac{1}{\beta}\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha}.$$

2) Đặt

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + ... + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$$

và xét hàm số

$$f(x) = \sqrt{1+x},\ x \in [0, 1].$$

Khi đó có :

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

với $x_i = 0 + \frac{i}{n}$; $\Delta x_i = \Delta x_1 = ... = \Delta x_n = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}.$

Hàm số f(x) = $\sqrt{1+x}$ khả tích trên [0,1], do đó theo định nghĩa tích phân xác định, có :

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

3) Đặt $\sigma_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n)!}}$ và có thể viết

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(n+n)} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)...\left(\frac{n+n}{n}\right)}$$

$$\sigma_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}.$$

Lấy lôga cơ số e của hai vế biểu thức của σ_n ta được :

$$\ln\sigma_n = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)$$

$$\ln\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Biểu thức cuối cùng này gợi ý xét hàm số

$$f(x) := \ln(1+x)\ ;\ x \in [0, 1].$$

Hàm số f(x) = ln(1 + x) khả tích trên [0, 1], do vậy nếu dùng hệ phân điểm đều trên đoạn [0, 1], với $x_0 = 0$; $x_1 = 0 + \frac{1}{n}, ...,$ $x_k = 0 + \frac{k}{n}, ...,$ $x_n = 0 + \frac{n}{n}$, với $\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n = \Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$, và chọn $f(\xi_i) = f(x_i)$ thì vế phải của biểu thức của $\ln\sigma_n$ chính là tổng tích phân, nghĩa là :

$$\lim_{n\to\infty}(\ln\sigma_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x)dx.$$

Do đó :

$$\lim_{n\to\infty}(\ln\sigma_n) = \ln\frac{4}{e}.$$

Cuối cùng, ta được :

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{4}{e}.$$

5. 1) Ta có

$$\lim_{x\to+0} \sqrt{\mathrm{tg}x} = \lim_{x\to+0} \sqrt{\sin x} = 0.$$

Như thế, giới hạn cần tìm có dạng $\frac{0}{0}$, ta có thể dùng quy tắc De L'Hospital và được :

$$\lim_{x\to+0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\mathrm{tg}t}\,dt}{\int_0^{\mathrm{tg}x} \sqrt{\sin t}\,dt} = \lim_{x\to+0} \frac{\left(\int_0^{\sin x} \sqrt{\mathrm{tg}t}\,dt\right)'}{\left(\int_0^{\mathrm{tg}x} \sqrt{\sin t}\,dt\right)'}$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{\sqrt{\mathrm{tg}(\sin x)}}{\sqrt{\sin(\mathrm{tg}x)}} = 1.$$

2) Ta có :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{x} (\mathrm{arctg}t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^{x} (\mathrm{arctg}t)^2\,dt\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\mathrm{arctg}x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\mathrm{arctg}x)^2}{\dfrac{x}{|x|\sqrt{1+1/x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (\mathrm{arctg}x)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}.$$

6. 1) Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\to+\infty$ khi $x\to 0$ do đó không dùng công thức Newton – Leibnitz được.

2) Vì $1-x^2\ge 0$ khi $|x|\le 1$, do đó hàm số $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ không xác định trong khoảng (1, 2] do đó không thể áp dụng công thức Newton – Leibnitz.

3) Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{(2+tg^2x)\cos^2x}$ xác định, liên tục trên $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ nên có thể áp dụng công thức Newton – Leibnitz.

7. 1) Ta có

$$|\ln x|=\begin{cases}\ln x, & \ln x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1\\ -\ln x, & \ln x<0\Leftrightarrow x<1\end{cases}$$

Do đó, có thể viết :

$$I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x dx+\int_{1}^{e}\ln x dx.$$

Vì $\int\ln x dx=x(\ln x-1)+C$ nên

$$I=-x(\ln x-1)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+x(\ln x-1)\Big|_{1}^{e}=2\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

2) Hàm số đã cho liên tục với mọi $x\in[0,2]$, do đó

$$I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2-x)dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1-\frac{1}{2}(2-x)^2\Big|_1^2=\frac{5}{6}.$$

3) $\sqrt{9-4x^2}=\sqrt{\left(\dfrac{9}{4}-x^2\right)4}=2\sqrt{\dfrac{9}{4}-x^2}.$

$$I=\int_0^1\sqrt{9-4x^2}\,dx=2\int_0^1\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}\,dx=2\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{9}{4}\arcsin\frac{2}{3}.$$

4) Để ý rằng, có thể viết

$$\int(x^3-2x+3)e^{-\frac{x}{2}}dx=e^{-\frac{x}{2}}(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+K$$

trong đó các hằng số A, B, C, D thoả điều kiện

$$(x^3-2x+3)e^{-\frac{x}{2}}=\left(e^{-\frac{x}{2}}(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\right)'.$$

Nghĩa là phải có :

$$-\frac{1}{2}A=1\Rightarrow A=-2\ ;\ \ 2B-\frac{C}{2}=-2\Rightarrow C=-44$$

$$3A-\frac{B}{2}=0\Rightarrow B=-12\ ;\ \ C-\frac{D}{2}=5\Rightarrow D=-98.$$

Cuối cùng, được :

$$\int(x^3-2x+3)e^{-\frac{x}{2}}dx=e^{-\frac{x}{2}}(-2x^3-12x^2-44x-98)+K.$$

Do đó :

$$\int_0^1(x^3-2x+3)e^{-\frac{x}{2}}dx=e^{-\frac{x}{2}}(-2x^3-12x^2-44x-98)\Big|_0^1\ =\frac{-58}{\sqrt{e}}.$$

5) $$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{4x^2+4x+5}=\frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^2+x+\frac{5}{4}}=\frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{16}.$$

6) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \quad (x = \operatorname{tg} t)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{3\cos^2\theta + 4\sin^2\theta} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{3+4t^2} \quad (t = \operatorname{tg}\theta)$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}\Big|_0^A = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$$

8) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2\theta \sin^2\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2\theta(1-\cos^2\theta) d(\operatorname{tg}\theta)$$

$$= \int_0^1 t^2\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt \quad (t := \operatorname{tg}\theta)$$

$$= \int_0^1 \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \left(\frac{1}{3}t^3 - t + \operatorname{arctg} t\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.$$

9) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\cos x)dx.$$

Đặt $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\cos x)dt$ và đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$

thì sẽ có

$$J = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(1+\sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\cos x)dx.$$

Cuối cùng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin x)dx = 0.$$

10) $$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \frac{1}{n} d(\sin nx)$$

$$= \frac{1}{n}\cos^n x \sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \sin nx\, dx.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\left[\cos(n-1)x - \cos(n+1)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos(n-1)xdx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos(n+1)xdx$$

$$= \frac{1}{2}I_{n-1} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\,[\cos nx \cos x - \sin nx \sin x]dx$$

Xét tích phân :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x[\cos nx \cos x - \sin nx \sin x]dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \sin nx dx = I_n - I_n = 0.$$

Vậy, ta có

$$I_n = \frac{1}{2} I_{n-1}, \text{ suy ra}$$

$$I_{n-1} = \frac{1}{2} I_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$I_1 = \frac{1}{2} I_o$$

$$I_o = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Nhân vế với vế (n + 1) đẳng thức trên suy ra :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \pi.$$

8. 1) Để ý rằng với $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ thì sinx và cosx gồm giữa 0 và 1 do đó theo giả thiết f(x) liên tục trong [0, 1] suy ra f(sin x) và f(cos liên tục với $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, và f(sinx), f(cosx) khả tích trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right.$

Hơn nữa, ta có :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt \qquad \left(x=\frac{\pi}{2}-t\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

2) Thực hiện phép đổi biến $x = \pi - t$, có :

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t)f\big(\sin(\pi - t)\big)dt =$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - t)f(\sin t)dt = \int_0^{\pi} \pi f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \pi f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx.$$

Chuyển vế, ta được :

$$2\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

Suy ra : $$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

9. Trước hết, để ý rằng khi x tăng từ $\frac{1}{2}$ đến 2 (khoảng lấy tích phân đối với x là $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$) thì $t := x + \frac{1}{x}$ không biến thiên đơn điệu : $x = \frac{1}{2}$ thì $t = \frac{5}{2}$; $x = 2$, $t = \frac{5}{2}$. Ngoài ra, xét sự biến thiên của t theo x, ta thấy

$$\frac{dt}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Suy ra $\frac{dt}{dx} < 0$ khi $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$\frac{dt}{dx} > 0 \text{ khi } x \in [1, 2].$$

$\frac{dt}{dx} = 0$ khi $x = 1$. (Không lấy giá trị $x = -1$ vì giá trị này không nằm trong khoảng lấy tích phân đối với x. Như thế, ta có :

Với x tăng từ $\frac{1}{2}$ đến 1, t giảm từ $\frac{5}{2}$ đến 2.

Với x tăng từ 1 đến 2, t tăng từ 2 đến $\frac{5}{2}$.

Do đó, ta có thể phân tích tích phân I cần tính thành hai tích phân ứng với hai khoảng biến thiên đơn điệu của t :

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx = I_1 + I_2$$

trong đó : $$I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx \;;$$

$$I_2 = \int_{1}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx.$$

Bây giờ, với mỗi tích phân I_1, I_2 ta có thể xử lí theo quy tắc đổi biến trong phép tính tích phân xác định thông thường và ta có : từ biểu thức $t = x + \frac{1}{x}$ suy ra :

Với $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ thì

$$1 + x - \frac{1}{x} = t + \frac{t - \sqrt{t^2 - 4} - 4}{t - \sqrt{t^2 - 4}}$$

$$dx = \frac{\sqrt{t^2 - 4} - t}{2\sqrt{t^2 - 4}} dt$$

$$I_1 = \int_{\frac{5}{2}}^{2} \left(t + \frac{t - \sqrt{t^2 - 4} - 4}{t - \sqrt{t^2 - 4}}\right)\left(\frac{\sqrt{t^2 - 4} - t}{2\sqrt{t^2 - 4}}\right) e^t dt$$

$$= -\int_{2}^{\frac{5}{2}} \left(t + \frac{t - \sqrt{t^2 - 4} - 4}{t - \sqrt{t^2 - 4}}\right)\left(\frac{\sqrt{t^2 - 4} - t}{2\sqrt{t^2 - 4}}\right) e^t dt.$$

Với $x \in [1, 2]$ thì :

$$1 + x - \frac{1}{x} = t + \frac{t + \sqrt{t^2 - 4} - 4}{t + \sqrt{t^2 - 4}} \; ; \; dx = \frac{\sqrt{t^2 - 4} + t}{2\sqrt{t^2 - 4}} dt$$

$$I_2 = \int_{2}^{\frac{5}{2}} \left(t + \frac{t + \sqrt{t^2 - 4} - 4}{t + \sqrt{t^2 - 4}}\right)\left(\frac{\sqrt{t^2 - 4} + t}{2\sqrt{t^2 - 4}}\right) e^t dt$$

Do đó :

$$I = I_1 + I_2 = \int_{2}^{\frac{5}{2}} te^t dt = e^t(t - 1)\Big|_2^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}} - e^2$$

10. Với $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ thì $0 \le \sin x \le 1$; do đó :

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x.$$

Suy ra : $$J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1}$$

với $J_n := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. Mặt khác, theo công thức ở thí dụ (b) mục 7.6 trang 265 sách đã dẫn, ta có : $J_{2n+1} = \dfrac{2n!!}{(2n+1)!!}$, $J_{2n} = \dfrac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}$.

Do đó, từ bất đẳng thức kép trên suy ra

$$\frac{2n!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \text{ tức là :}$$

$$\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n}.$$

Suy ra hiệu giữa hai biểu thức bên phải và bên trái :

$$\frac{1}{(2n+1)(2n)}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 < \frac{1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Hiệu này dần tới 0 khi $n \to \infty$ do đó $\dfrac{\pi}{2}$ là giới hạn chung của chúng, nghĩa là

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

11. Theo giả thiết f(x) liên tục trên **R**, nên với mọi a thực, luôn có thể viết

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_a^{0} f(x)dx + \int\limits_0^{T} f(x)dx + \int\limits_T^{a+T} f(x)dx.$$

Xét tích phân thứ ba : $\int\limits_T^{a+T} f(x)dx$, với tích phân này, thực hiện phép đổi biến $x = t + T$, có

$$\int_{T}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t+T)dt = \int_{0}^{a} f(x+T)dx.$$

Mặt khác, f(x) có chu kì là T nên : f(x + T) = f(x) do đó

$$\int_{T}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x+T)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Trở lại biểu thức tích phân đầu tiên, ta có

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{T} f(x)dx$$

tức là

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx.$$

12. Vì hàm số f(x) không xác định tại các điểm x = 0 và x = 2, nên phải tách tích phân cần tính thành 3 tích phân và có

$$I = \int_{-1}^{3} \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)} = I_1 + I_2 + I_3$$

trong đó :

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)} \;;\;\; I_2 = \int_{0}^{2} \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)} \;;\;\; I_3 = \int_{2}^{3} \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)}.$$

Mặt khác, để ý rằng

$$\int \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)} = \int \frac{d(f)}{1+f^2} = \operatorname{arctg} f(x).$$

Do đó, với $f(x) = \dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$

$$I_1 = \operatorname{arctg} f(x)\Big|_{-1}^{0} = \operatorname{arctg} f(0) - \operatorname{arctg} f(-1)$$

$$= \operatorname{arctg}(-\infty) - \operatorname{arctg}(0) = -\frac{\pi}{2}$$

$$I_2 = \operatorname{arctg} f(x)\Big|_{0}^{2} = \operatorname{arctg} f(2^-) - \operatorname{arctg} f(0^+)$$

$$= \operatorname{arctg}(-\infty) - \operatorname{arctg}(+\infty)$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

và cuối cùng

$$I_3 = \operatorname{arctg} f(x)\Big|_{2}^{3} = \operatorname{arctg} f(3) - \operatorname{arctg} f(2^+)$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{32}{27} - \operatorname{arctg}(+\infty)$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{32}{27} - \frac{\pi}{2}.$$

Vậy :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{\pi}{2} - \pi + \operatorname{arctg}\frac{32}{27} - \frac{\pi}{2}$$

$$I = \operatorname{arctg}\frac{32}{27} - 2\pi.$$

13. Với các hằng số α, β bất kì, luôn có :

$$(\alpha f + \beta g)^2 \geq 0.$$

Do đó, luôn có :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)^2 dx \geq 0, \ (a < b).$$

Mặt khác :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)^2 dx = \int_a^b (\alpha^2 f^2 + 2\alpha\beta fg + \beta^2 g^2)dx$$

$$= \alpha^2 \int_a^b f^2 dx + 2\alpha\beta \int_a^b fg dx + \beta^2 \int_a^b g^2 dx.$$

Vậy, luôn có : (với mọi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$)

$$\alpha^2\int_a^b f^2dx + 2\alpha\beta\int_a^b fgdx + \beta^2\int_a^b g^2dx \geq 0.$$

Vế trái của bất đẳng thức trên là một tam thức bậc hai đối với α hoặc β, tam thức này luôn không âm do đó luôn có

$$\left(\int_a^b fgdx\right)^2 - \left(\int_a^b f^2dx\right)\left(\int_a^b g^2dx\right) \leq 0.$$

14. 1) Dưới đây cho bảng giá trị của x và $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ tương ứng :

x	$f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$
$x_o = 2,0$	$y_o \approx 1,44269$
$x_1 = 2,5$	$y_1 \approx 1,09137$
$x_2 = 3,0$	$y_2 \approx 0,91024$
$x_3 = 3,5$	$y_3 \approx 0,79823$
$x_4 = 4,0$	$y_4 \approx 0,72135$
$x_5 = 4,5$	$y_5 \approx 0,66486$
$x_6 = 5,0$	$y_6 \approx 0,62133$

Gọi $I := \int_2^5 \dfrac{dx}{\ln x}$ và lưu ý rằng hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ không có nguyên hàm có thể biểu diễn dưới dạng các hàm sơ cấp, tuy nhiên nếu gọi I_T, I_S là các giá trị xấp xỉ của I tính theo công thức hình thang và công thức Simpson ta được :

$$I_T = 0,5\left[\frac{y_o + y_6}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5\right]$$

$$= 0,5[1,03201 + 4,18605] = 2,60903$$

và $\quad I_S = \frac{5-2}{3.6}[(y_o + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)]$

$$= \frac{1}{6}[2,06402 + 10,21784 + 3,26318] = 2,59084$$

$$|I_S - I_T| < 0,019.$$

2) Dưới đây cho bảng giá trị x và f(x) = $\sqrt{\cos x}$ tương ứng :

x (độ)	f(x) = $\sqrt{\cos x}$
$x_o = 0$	$y_o = 1,000000$
$x_1 = 6$	$y_1 \approx 0,997257$
$x_2 = 12$	$y_2 \approx 0,980130$
$x_3 = 18$	$y_3 \approx 0,975218$
$x_4 = 24$	$y_4 \approx 0,955796$
$x_5 = 30$	$y_5 \approx 0,930605$
$x_6 = 36$	$y_6 \approx 0,899450$
$x_7 = 42$	$y_7 \approx 0,862060$
$x_8 = 48$	$y_8 \approx 0,818000$
$x_9 = 54$	$y_9 \approx 0,766670$
$x_{10} = 60$	$y_{10} \approx 0,707110$

Gọi I_T là giá trị xấp xỉ của $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos x}\,dx$ theo công thức hình thang và I_S là giá trị xấp xỉ theo công thức Simpson ta có :

$$I_T = \frac{6\,.\,3,1416}{180}[(y_o + y_{10})/2 + (y_1 + y_2 + ... + y_9)]$$

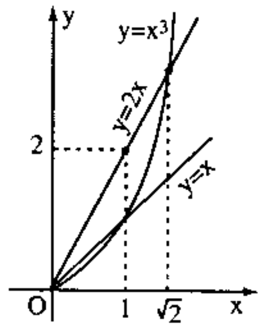
$$= (0,10472)[0,853555 + 8,194069]$$

$$= (0,10472)(9,047624) \approx 0,9475$$

và

$$I_S = (0,03491)[(y_o + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + ... + y_9) + 2(y_2 + ... + y_8)]$$
$$= (0,03491)[(1,70711) + 4(4,537705) + 2(3,662559)]$$
$$= (0,03491)[1,70711 + 18,15082 + 7,324518]$$
$$= (0,03491)(27,182448) = 0,9489.$$
$$|I_S - I_T| < 0,0014$$

15. 1) $S = \int\limits_0^4 \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3}y\sqrt{y}\Big|_0^4 = \frac{16}{3}$



Hình 19

2) $S = \int\limits_0^1 (x + 4 - (x^2 + 4))dx =$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

3) $S = \int\limits_0^1 (2x - x)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} (2x - x^3)dx$

$$= \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \text{ (xem hình 19).}$$

4) Với $x \in [0, 2]$ thì $4 - x^2 \geq 2x$, do đó :

$$S = 2\int\limits_0^2 (\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{2x})dx$$

$$= 2\left(\left[\frac{(2-x)}{2}\sqrt{4x - x^2} + \frac{4}{2}\arcsin\frac{2-x}{2}\right]_0^2 - \sqrt{2}.\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^2\right)$$

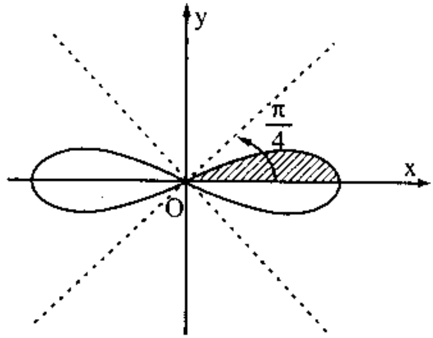
$$= 2\pi - \frac{16}{3}$$

5) Vì lẽ đối xứng, ta có : (xem hình 20)

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}$$

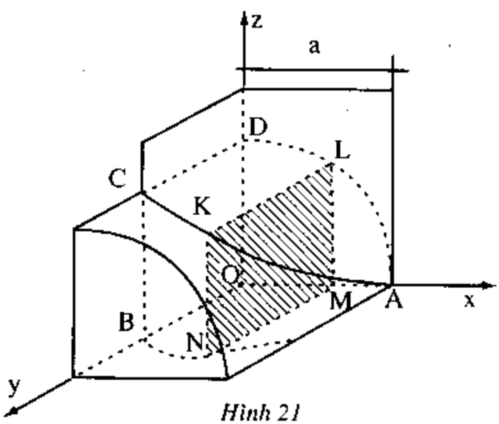
Vậy $S = a^2$.



Hình 20

16. Hình 21 cho thấy hình OABCD là một phần tám của vật thể tạo thành bởi phần chung của hai hình trụ lần lượt có phương trình

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ và}$$
$$y^2 + z^2 = a^2.$$



Hình 21

Một điểm M trên trục hoành Ox, có hoành độ là x ; qua M dựng thiết diện vuông góc với trục Ox, đó là hình vuông KLMN có cạnh $MN = \sqrt{a^2 - x^2}$, do vậy diện tích S(x) của thiết diện là

$$S(x) = a^2 - x^2.$$

Do đó, theo công thức tính thể tích của vật thể ứng với thiết diện có diện tích S(x) là :

$$V = 8\int_0^a S(x)dx = 8\int_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{16}{3}a^3.$$

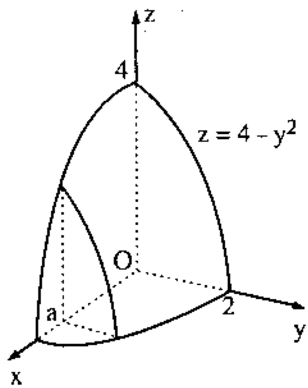
(Công thức 7.82 trang 283 sách đã dẫn).

17. Theo công thức (7.82) sách Toán Cao cấp tập II (của cùng tác giả) thể tích V phải tìm là

$$V = \int_0^a S(x)dx$$

với S(x), theo đề bài (xem hình 22) là

$$S(x) = \int_0^2 (4 - y^2)dy = 4y - \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$



Hình 22

Vậy
$$V = \int_0^a \frac{16}{3}dx = \frac{16}{3}x\Big|_0^a = \frac{16}{3}a.$$

18. 1) $y^2 = 4 - x,\ x = 0 \Rightarrow y = \pm 2.$

$$V = \pi\int_{-2}^{2}(4 - y^2)^2 dy = 2\pi\int_0^2 (4 - y^2)^2 dy = \frac{512\pi}{15}.$$

2) $xy = 4,\ y = \frac{4}{x};\ y^2 = \frac{16}{x^2}.$

$$V = \pi\int_1^4 \frac{16}{x^2}dx = 12\pi.$$

3) Tịnh tiến gốc toạ độ đến điểm (–2, 0) thì phương trình $y = x^2$ trong hệ toạ độ mới sẽ là $Y = (X - 2)^2 \Rightarrow X = 2 \pm \sqrt{Y}$, do đó

$$V = \pi\int_0^4 [(2 + \sqrt{Y})^2 - (2 - \sqrt{Y})^2]dY = \frac{128\pi}{3}.$$

19. 1) Khi $x = 0 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$; $x = 3 \Rightarrow y = 0.$

$$L = 2\int_0^3 \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Ở đây : $9y^2 = 4(3 - x)^3$

$$18yy' = -12(3 - x)^2,\ y' = -\frac{2}{3y}(3 - x)^2$$

$$y'^2 = \frac{4}{9y^2}(3 - x)^4 = \frac{4(3 - x)^4}{4(3 - x)^3} = 3 - x$$

$$1 + y'^2 = 1 + 3 - x = 4 - x.$$

Vậy $$L = 2\int_0^3 \sqrt{4 - x}\,dx = \frac{28}{3}.$$

2) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$; $x = 0 \Rightarrow y = -1$; $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}.$

$$L = 2\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2}\,dx$$

$$= \sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

20. Dùng công thức :

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt.$$

Vì lẽ đối xứng (xem hình 23) có

$$\frac{1}{2}S = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$$

Vì $x = a\cos^3 t$

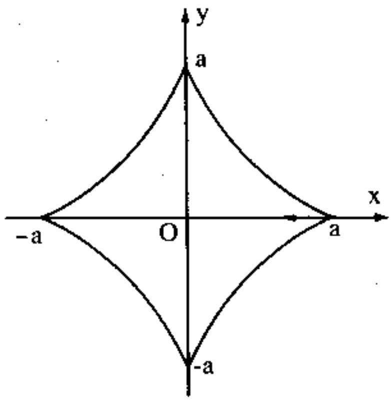
$y = a\sin^3 t$

nên $x' = -3a\cos^2 t\sin t$

$y' = 3a\sin^2 t\cos t.$

$$x'^2 + y'^2 = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t.$$

Thế vào biểu thức tích phân và được :



Hình 23

$$\frac{1}{2}S = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}\,dt$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t.3a\sin t\cos t\,dt$$

(vì $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ nên $\sin t, \cos t \geq 0$)

$$= \frac{6}{5}\pi a^2.$$

Cuối cùng :

$$S = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

21. 1) Đặt $x = -t$, ta có

$$I = \int_{-\infty}^{0} xe^x dx = -\int_{+\infty}^{0} (-t)e^{-t}dt = -\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$$

thì I có dạng $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$, với $p = 2$ do đó, theo thí dụ (d) trang 302 sách đã dẫn, I hội tụ và

$$I = e^{-t}(t-1)\Big|_0^{\infty} = 1.$$

2) Theo định nghĩa ta có :

$$I = \int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \cos x dx = \lim_{A\to+\infty} \sin x\Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty} \sin A.$$

Vì không tồn tại $\lim\limits_{A\to+\infty} \sin A$ nên I phân kì.

3) Ta có : $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

Xét tích phân

$$J := \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^a \frac{dx}{(1+x^2)^2} + \int_a^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

với mọi $a > 0$.

Để ý rằng

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} < \frac{1}{x^4},\ x \in [a, +\infty).$$

Theo thí dụ (d) trang 293 sách đã dẫn, ta có $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ hội tụ, do đó $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ hội tụ và do đó I hội tụ. Bây giờ ta tính I, muốn thế, thực hiện phép đổi biến : $x = \text{cotg}t$, có :

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

4) Điểm bất thường của tích phân là $x = 2$, thực hiện phép đổi biến $x^2 = t$, có

$$I = \int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{t^2}{\sqrt{4-t}} dt.$$

Điểm bất thường của tích phân mới là t = 4, tích phân này hội tụ (tiêu chuẩn hội tụ trang 301 sách đã dẫn) và để tính tích phân này ta thực hiện phép đổi biến $4 - t = u^2$, đi đến :

$$I = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{t^2}{\sqrt{4-t}}dt = \int_0^2 (4-u^2)^2 du = \frac{256}{15}.$$

5) Tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

là trường hợp riêng của thí dụ (a) trang 302, sách đã dẫn với các điểm bất thường là x = 0 và x = 1, do đó I hội tụ và

$$I = \pi.$$

6) Tích phân

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Cả hai tích phân ở vế phải đều có điểm bất thường là x = 1, là trường hợp riêng của thí dụ (d) trang 299, sách đã dẫn với $\alpha = 2$, do đó phân kì.

7) Trước hết, để ý rằng :

$$\lim_{x\to 0} x^2\ln^2 x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x^2}} = 0$$

và
$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Bây giờ, theo định nghĩa ta viết

$$I = \int_0^1 x\ln^2 x dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 x\ln^2 x dx.$$

Gọi $$J(a)=\int_a^1 x\ln^2 x dx=\frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_a^1-\int_a^1 x\ln x dx$$

$$=-\frac{a^2}{2}\ln^2 a+\frac{a^2}{2}\ln a+\int_a^1\frac{1}{2}xdx$$

$$J(a)=-\frac{a^2}{2}\ln^2 a+\frac{a^2}{2}\ln a-\frac{a^2}{4}+\frac{1}{4}.$$

Từ hai hệ thức giới hạn trên suy ra :

$$I=\lim_{a\to 0}J(a)=\frac{1}{4}.$$

8) Tích phân

$I=\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2-1}$ có hai điểm bất thường là $x=\pm 1$.

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x^2-1}+\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-1}+\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^2-1}.$$

Vì $$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x^2-1}=\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^2-1},\quad \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-1}=2\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2-1}$$

nên có thể viết

$$I=2\left[\int_0^1\frac{dx}{x^2-1}+\int_1^2\frac{dx}{x^2-1}\right].$$

Cả hai tích phân bên phải hệ thức trên đều có thể đưa về dạng của bài tập số 20.5 ở trên nên I phân kì.

22. 1) Vì $\frac{\ln(1+x)}{x}>\frac{1}{x},\ x>e$

và $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ phân kì (thí dụ (d) trang 293 sách đã dẫn) nên tích phân đã cho phân kì.

2) Xét hàm số $y = e^{-x^2}$, có $y' = -2xe^{-x^2}$

$y' < 0$ khi $x > 0$ nên y nghịch biến khi $x > 0$ do đó

$e^{-x^2} < 1$ khi $x > 0$ và vì thế $\frac{e^{-x^2}}{x^2} < \frac{1}{x^2}$.

Tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ (thí dụ (d) trang 293 sách đã dẫn) do đó :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx \text{ hội tụ.}$$

3) Ta có $$\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{2}{x}\right) dx = 2\int_1^{+\infty} \sin^2\frac{1}{x} dx$$

Vì $\sin^2\frac{1}{x} < \frac{1}{x^2}$ khi x đủ lớn, do đó $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{2}{x}\right) dx$ hội tụ.

4) Với $x > 1$ ta luôn có

$$\frac{1+x^2}{x^3} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} > \frac{1}{x}.$$

Như đã biết $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ phân kì, do đó $\int_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3} dx$ phân kì.

5) Vì $\frac{1}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}$ là vô cùng lớn có bậc $\frac{2}{3}$ so với $\frac{1}{x}$ do đó, với điểm bất thường $x = 0$ thì tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}$ hội tụ.

6) Điểm bất thường là $x = 0$ và khi $x \to 0$ thì ta có $\frac{1}{\operatorname{tg}x - x}$ có bậc 3 so với $\frac{1}{x}$ do đó, tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg}x - x}$ phân kì.

7) Thực hiện phép đổi biến $x^2 = t$, ta có :

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{5}{3}} dt.$$

Tích phân này có điểm bất thường $t = 0$ và có thể viết dưới dạng

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{5}{3}} dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{1-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{2}{3}-1} dt$$

tích phân thuộc lớp tích phân có dạng $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ với $a = 1$ và $b = -\frac{2}{3}$, do đó thí dụ (c) trang 302, sách đã dẫn, tích phân I phân kì.

8) Vì $x = 0$ là điểm bất thường và vì

$$\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sin x} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \ x \to 0$$

nên $\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1}$ là một vô cùng lớn khi $x \to 0$; hơn nữa, vô cùng lớn này cùng bậc với $\frac{1}{\sqrt{x}}$, do đó tích phân $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x} - 1}$ hội tụ.

Chương 8

CHUỖI

A. ĐỀ BÀI

1. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây :

1) $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+n+1}$;

2) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$

3) $u_n = \operatorname{arctg}\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$;

4) $u_n = \dfrac{2^n+n}{3^n+3n+3}$

5) $u_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{n^2(n^2+3)}$;

6) $u_n = 1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

7) $u_n = \ln\left(1+\operatorname{tg}\dfrac{1}{n^2}\right)$;

8) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}$

9) $u_n = \dfrac{\sqrt{n(n+2)}}{n^2+3\ln n}$;

10) $u_n = \dfrac{2+\cos n}{n^\alpha}$ $(\alpha>0)$.

2. Cùng câu hỏi như bài 1.

1) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$;

2) $u_n = \ln\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n^2}$, $n\ge 2$

3) $u_n = \dfrac{k^n}{n^k}$ $(k>0)$;

4) $u_n = \dfrac{a^n}{n+b^n}$ $(a>0,\ b>0)$

5) $u_n = \ln\frac{1}{\sqrt{n}} - \ln\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$;　　6) $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$

7) $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;　　8) $u_n = \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$

9) $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{n^2}{n^2+an+b}\right)$;　　10) $u_n = na^{\sqrt{n}}$ $(a > 0)$

11) $u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3}$.

3. Các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây có hội tụ không ? Tính tổng của chúng khi chúng hội tụ.

1) $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;　　2) $u_n = \frac{1}{n^2+n}$

3) $u_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;　　4) $u_n = (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

5) $u_n = \text{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$;　　6) $u_n = \frac{n}{n^4+n^2+1}$

7) $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 2$;　　8) $u_n = \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}.\cos\frac{1}{n+1}}$

9) $u_n = \ln\left(2\cos\frac{\alpha}{2^n} - 1\right)$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

10) $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

4. Cùng câu hỏi như bài 1.

1) $u_n = \frac{1}{(2n-1).2^{2n-1}}$;　　2) $u_n = \frac{n^2}{n!}$

3) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n + n}$;   4) $u_n = \dfrac{2.4.6...(2n)}{n^n}$

5) $u_n = \dfrac{a^n}{n^2+1}$, $a > 0$;   6) $u_n = \left(\dfrac{2n^2-1}{3n^2+2}\right)^n$.

7) $u_n = \left(\dfrac{n-1}{2n-1}\right)^{n\ln n}$;   8) $u_n = \left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}\right)^n$

9) $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$;

10) $u_n = \operatorname{tg}^n\left(a + \dfrac{b}{n^2}\right)$, $0 < a \le \dfrac{\pi}{2}$, $b > 0$

11) $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^\alpha}$;   12) $u_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$

13) $u_n = \left(1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{\ln n}{n}\right)^n$;   14) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$

15) $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;   16) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n} + n\right)\pi$

17) $u_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{(\ln n)^n}$;   18) $u_n = \dfrac{1 + (-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$

19) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$;   20) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$

21) $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$;   22) $u_n = \ln\left[1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right]$, $\alpha > 0$.

5. 1) Khảo sát sự hội tụ của hai dãy hàm số $\{f_n\}, \{g_n\}$ xác định bởi

$$f_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{x}{x+n},\quad g_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{nx}{1+nx}$$

a) trên đoạn [0, 1]

b) trên khoảng $[1, +\infty)$.

2) Cho dãy hàm số $\{f_n\}$ xác định bởi

$$f_n : [0, 2] \to \mathbf{R},\ x \mapsto f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

a) Khảo sát sự hội tụ của dãy $\{f_n\}$. Sự hội tụ ấy có đều không ?

b) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)dx = 1$

3) Chứng minh rằng dãy hàm số $\{f_n\}$ xác định bởi

$$f_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{nếu } x \in [0, n] \\ 0 & \text{nếu } x > n \end{cases}$$

hội tụ tới một hàm số f. Sự hội tụ ấy có đều không ?

6. 1) a) Chứng minh rằng chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$ hội tụ đều trên đoạn $[-1, 1]$.

b) Chứng minh rằng chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, xe^{-n^2 x}$ hội tụ đều trên $\mathbf{R}^+$.

c) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$.

2) Chứng minh rằng chuỗi hàm số với số hạng tổng quát $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^2 + n}{n^2}$ hội tụ đều trên mọi đoạn [a, b], nhưng không hội tụ tuyệt đối.

7. Chứng minh rằng chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ hội tụ đều trên khoảng $[a, +\infty)$ với $a > 0$, nhưng không hội tụ đều trên khoảng $[0, +\infty)$. Tính tổng của chuỗi hàm số ấy với $x > 0$.

8. Cho các hàm số

$$x \mapsto u_n(x) = \begin{cases} x^{n+1} \ln x & \text{nếu } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

1) Chứng minh rằng chuỗi hàm số $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n(x)$ hội tụ đều trên đoạn $[0, 1]$.

2) Chứng minh rằng chuỗi hàm số $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ không đều trên đoạn $[0, 1]$.

9. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)}$ xác định, liên tục và khả vi trên $\mathbf{R}^+$.

10. Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$.

Khảo sát sự hội tụ của nó. Có thể nói gì về sự liên tục và khả vi của nó.

11. Tìm miền hội tụ của các chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau :

1) $u_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$;

2) $u_n(x) = \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$

3) $u_n(x) = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}$;

4) $u_n(x) = (nx)^n$

5) $u_n(x) = x^n \ln n$;

6) $u_n(x) = \dfrac{(5x)^n}{n!}$

7) $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha},\ \alpha > 0$;

8) $u_n(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n!}$

9) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $0 < a_o < \dfrac{\pi}{2}$, $a_n = \sin a_{n-1}\ \forall n \geq 1$.

12. Tìm miền hội tụ và tính tổng của các chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau :

1) $u_n(x) = (3n+1)x^{3n},\ n \geq 1$

2) $u_n(x) = (2^n + 3^n)x^n,\ n \geq 0$

3) $u_n(x) = \dfrac{n^2 + 3n - 1}{n+3} \cdot \dfrac{x^n}{n!},\ n \geq 0$

4) $u_n(x) = \text{chna}.x^n,\ a > 0,\ n \geq 0$

5) $u_n(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{n},\ n \geq 1.$

13. Khai triển hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm $x_o = 3$.

14. Khai triển thành chuỗi luỹ thừa ở lân cận điểm $x_o = 0$ các hàm số sau :

1) $f(x) = \text{ch}x$;

2) $f(x) = x^2e^x$

3) $f(x) = \sin^2 x$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

5) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$;

6) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(t^2)dt$

7) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 2 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$; 8) $f(x) = e^{x}\cos x$.

15. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

không thể khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm $x_o = 0$.

16. Tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát là

$$u_n(x) = \left(1 + (-1)^n \frac{1}{n}\right)^{n^2} . x^n.$$

17. Cho hai chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$, có bán kính hội tụ theo thứ tự là R, R'.

1) Chứng minh rằng nếu có một số nguyên dương n_o sao cho $|a_n| \leq |b_n|$, $\forall n \geq n_o$ thì $R \geq R'$.

2) Chứng minh rằng nếu $|a_n| \sim |b_n|$ khi $n \to \infty$ thì R = R'.

3) Tính bán kính hội tụ của các chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau :

a) $u_n(x) = \dfrac{\text{ch}n}{\text{sh}^2 n} x^n$

b) $u_n(x) = \arccos\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) x^n$

c) $u_n(x) = (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}) x^n$

d) $u_n(x) = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}) x^n$.

18. Tính các số sau với độ chính xác 0,0001 :

1) $\sqrt{e}$; 2) $\sqrt[5]{1,1}$; 3) $\ln(1,04)$.

19. 1) Tính $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ với độ chính xác 0,001.

2) Tính $\int_0^1 \mathrm{sh}(x^2)dx$ với độ chính xác 0,0001.

20. Tính $\cos 18^{\circ}$ với độ chính xác 0,0001.

21. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) lẻ, tuần hoàn với chu kì 2π, bằng $\pi - x$ với $0 < x < \pi$.

22. Khai triển thành chuỗi Fourier, hàm số f(x) chẵn, tuần hoàn với chu kì 2π, bằng $1 - \dfrac{2x}{\pi}$ với $0 \le x \le \pi$. Suy ra giá trị tổng của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

23. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) tuần hoàn có chu kì 2π, bằng $1-\dfrac{x^2}{\pi^2}$ với $-\pi \le x \le \pi$. Suy ra giá trị của các chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

24. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) tuần hoàn có chu kì 2π, bằng $\sin\dfrac{x}{2}$ với $-\pi < x \le \pi$.

25. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) tuần hoàn có chu kì 2π, bằng $\cos ax$ với $-\pi \le x \le \pi$, trong đó $0 < a < 1$. Suy ra đẳng thức

$$\cot g\pi a = \frac{1}{\pi a} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2 - n^2}.$$

26. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) tuần hoàn có chu kì $2l$, bằng e^x với $-l \le x \le l$.

27. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) xác định trên đoạn $[0, \pi]$, cho bởi :

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ nếu } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ nếu } \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

28. Cho hàm số $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 nx}{n!}$$

1) Chứng minh rằng hàm số f(x) liên tục và khả vi liên tục trên **R**.

2) Khai triển hàm số f(x) thành chuỗi Fourier. Suy ra biểu thức của f(x).

B. LỜI GIẢI

1. 1) Số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+n+1}$ dần tới $2 \ne 0$ khi $n \to \infty$. Từ điều kiện cần của sự hội tụ của chuỗi số suy ra rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

2) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \sim \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2} \ne 0$ khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi số đã cho phân kì.

3) $u_n = \operatorname{arctg}\dfrac{n^2-1}{n^2+1} \to \operatorname{arctg}1 = \dfrac{\pi}{4} \ne 0$ khi $n \to \infty$. Chuỗi số đã cho phân kì.

4) $u_n = \dfrac{2^n+n}{3^n+n^3+3} \sim \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ khi $n \to \infty$. Vì $\dfrac{2}{3} < 1$, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ hội tụ, nên chuỗi số đã cho hội tụ.

5) $u_n = \frac{(n+1)(n+2)}{n^2(n^2+3)} \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là chuỗi số Riemann với $\alpha = 2 > 1$, nó hội tụ. Do đó chuỗi số đã cho hội tụ.

6) $u_n = 1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2n}$ khi $n \to \infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi số điều hoà, nó phân kì. Do đó chuỗi số đã cho phân kì.

7) $u_n = \ln\left(1 + \mathrm{tg}\frac{1}{n^2}\right) \sim \mathrm{tg}\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

8) $u_n = \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{2n}} \sim \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ khi $n \to \infty$. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ hội tụ. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

9) $u_n = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n^2 + 3\ln n} \sim \frac{1}{n}$ khi $n \to \infty$. Chuỗi số đã cho phân kì.

10) Vì $-1 \le \cos n \le 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$, nên $\frac{1}{n^\alpha} \le u_n \le \frac{3}{n^\alpha}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^\alpha}$ cùng hội tụ nếu $\alpha > 1$, cùng phân kì nếu $\alpha \le 1$. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ nếu $\alpha > 1$, phân kì nếu $\alpha \le 1$.

2. 1) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(e^{\frac{1}{n}} - 1) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ khi $n \to \infty$.

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

2) Khi $n \to \infty$, ta có

$$\ln\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n} = \ln\left(1+\frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}\right) \sim \frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},\ \operatorname{tg}\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

Do đó

$$u_n \sim \frac{1}{n^3} \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

3) Nếu $k > 1$, $u_n = \dfrac{k^n}{n^k} \to +\infty$ khi $n \to \infty$, vậy chuỗi số phân kì.

Nếu $k = 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}$. Chuỗi số đã cho là chuỗi số điều hoà, nó phân kì.

Nếu $k < 1$, ta có $n^2 u_n = n^{2-k}.\ k^n \to 0$ khi $n \to \infty$. Vậy với mọi số $C > 0$ cho trước, tồn tại số nguyên dương n_o sao cho với $n \ge n_o$ ta có

$$n^2 u_n \le C \Rightarrow u_n \le \frac{C}{n^2}.$$

Chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^2}$ hội tụ, vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

Tóm lại chuỗi số đã cho hội tụ khi $k < 1$, phân kì khi $k \ge 1$. Bài này cũng có thể giải được bằng cách dùng quy tắc Cauchy. Ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{k}{n^{\frac{k}{n}}} = k.e^{-\frac{k}{n}\ln n} \to k \text{ khi } n \to \infty, \text{ vì } \frac{k}{n}\ln n \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó chuỗi số đã cho hội tụ khi $k < 1$, phân kì khi $k > 1$; còn khi $k = 1$, ta có chuỗi số điều hoà, nó phân kì.

4) Giả sử $b > 1$. Khi đó $n + b^n \sim b^n$ khi $n \to \infty$, do đó $u_n \sim \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ nếu $a < b$, phân kì nếu $a \ge b$.

Nếu $b \le 1$, thì $u_n = \dfrac{a^n}{n+b^n} \sim \dfrac{a^n}{n}$ khi $n \to \infty$. Chuỗi số đã cho hội tụ khi $a < 1$, phân kì khi $a \ge 1$.

Tóm lại chuỗi số hội tụ nếu ($a < b$ và $b > 1$) hoặc ($a < 1$ và $b \le 1$).

5) $u_n = \ln\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \ln\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}} = -\ln\dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

Theo công thức khai triển hữu hạn của hàm số sinx, ta có

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

trong đó $o(x^3)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn x^3 khi $x \to 0$. Vậy khi $n \to \infty$

$$u_n = -\ln\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Do đó

$$u_n \sim -\ln\left(1 - \frac{1}{6n}\right) \sim \frac{1}{6n}$$

Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{6n}$ phân kì, vậy chuỗi số đã cho phân kì.

6) Ta có

$$n^{\alpha}u_n = n^{\alpha-2}\ln n \to 0 \text{ khi } n \to \infty \text{ nếu } \alpha < 2.$$

Lấy một số α sao cho $1 < \alpha < 2$. Vì $n^{\alpha}u_n \to 0$ khi $n \to \infty$, nên tồn tại một số nguyên dương n_o sao cho khi $n > n_o$

$$n^{\alpha}u_n < 1 \Rightarrow u_n < \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ (vì đã chọn $\alpha > 1$), nên chuỗi số đã cho hội tụ.

Cũng có thể nhận xét rằng chuỗi số có số hạng tổng quát $u_n = \frac{\ln n}{n^2} = \frac{1}{n^2(\ln n)^{-1}}$ là chuỗi Bertrand với $\alpha = 2 > 1$, nó hội tụ.

7) Ta có

$$0 \le u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}}dx \le \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

8) Ta có

$$0 \le u_n = \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^4+1}},$$

vì ta có $\forall x \in \left[n, n+\frac{1}{2}\right]$

$$\frac{1}{\sqrt{x^4+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$$

Nhưng khi $n \to \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

9) Ta có

$$\frac{n^2}{n^2+an+b}=1-\frac{an+b}{n^2+an+b}$$

Do đó

$$u_n=\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{an+b}{n^2+an+b}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{an+b}{n^2+an+b}\right).$$

Khi $n\to\infty$, nếu $a\neq 0$ thì $u_n\sim\frac{\pi}{2}\frac{an+b}{n^2+an+b}\sim\frac{\pi a}{2n}$, chuỗi số đã cho phân kì. Nếu $a=0$, $b\neq 0$ thì $u_n\sim\frac{\pi b}{2n^2}$ khi $n\to\infty$, chuỗi số hội tụ. Nếu $a=b=0$ thì $u_n=0$, chuỗi số hội tụ. Tóm lại chuỗi số đã cho hội tụ khi và chỉ khi $a=0$.

10) $u_n=na^{\sqrt{n}}\ (a>0)$.

Nếu $a\geq 1$, $u_n\to+\infty$ khi $n\to\infty$, vậy chuỗi số phân kì. Nếu $0<a<1$, vì $u_n=ne^{\sqrt{n}\ln a}$ và vì $\ln a<0$, ta có

$$n^2u_n=n^3e^{\sqrt{n}\ln a}\to 0\ \text{khi}\ n\to\infty.$$

Vậy tồn tại số nguyên dương n_o sao cho với $n>n_o$ ta có

$$n^2u_n\leq 1\Rightarrow u_n\leq\frac{1}{n^2}.$$

Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ, do đó chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.

Tóm lại chuỗi số đã cho hội tụ khi $0<a<1$, phân kì khi $a\geq 1$.

11) $u_n=\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}=n\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}-n\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Ta có công thức khai triển hữu hạn

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

trong đó $o(x^2)$ là một vô cùng bé cấp cao đối với x^2 khi $x \to 0$. Do đó khi $n \to \infty$

$$u_n \sim n\left(1 + \frac{a}{3n^2} - \frac{a^2}{9n^4}\right) - n\left(1 + \frac{3}{2n^2} - \frac{9}{8n^4}\right) = \frac{2a-9}{6n} + \frac{81-8a^2}{72n^3}.$$

Vậy nếu $2a - 9 \neq 0$ thì $u_n \sim \dfrac{2a-9}{6n}$, chuỗi số đã cho phân kì ; còn nếu $2a - 9 = 0$, tức là $a = \dfrac{9}{2}$, thì $u_n \sim -\dfrac{9}{8n^3}$, chuỗi số đã cho hội tụ.

Tóm lại chuỗi số đã cho hội tụ khi $a = \dfrac{9}{2}$, phân kì khi $a \neq \dfrac{9}{2}$.

3. 1) $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} \sim \dfrac{1}{4n^2}$ khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ. Ta có

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Do đó

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Vậy
$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

2) $u_n = \dfrac{1}{n^2+n} \sim \dfrac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$.

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ. Ta có

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Do đó

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

3) $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \sim \dfrac{2}{n^3}$ khi $n \to \infty$.

Chuỗi số đã cho hội tụ. Ta có

$$u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Do đó

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

4) Chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ là một chuỗi số đan dấu,

$|u_n| = \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ giảm khi n tăng, giảm tới 0 khi $n \to \infty$.

Vậy chuỗi số ấy hội tụ theo định lí Leibniz. Ta có

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

Do đó

$$S_n = \left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) - \ldots + (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}.$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

5) $u_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} \sim \frac{1}{n^2+n+1} \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ. Ta có

$$u_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{1+\frac{1}{n(n+1)}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}.$$

Do đó

$$S_n = \left(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}.$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}.$$

6) $u_n = \frac{n}{n^4+n^2+1} \sim \frac{1}{n^3}$ khi $n \to \infty$.

Do đó chuỗi số đã cho hội tụ. Ta có

$$n^4 + n^2 + 1 = (n+1)^2 - n^2 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1).$$

Suy ra

$$\frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right).$$

Do đó

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right]$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

7) $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$.

Do đó chuỗi số đã cho hội tụ. Ta có

$$u_n = \ln\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}.$$

Suy ra

$$S_n = \ln\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \ln\frac{n+1}{2n}$$

$$S_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$$

8) $u_n = \dfrac{\sin\dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos\dfrac{1}{n}\cdot\cos\dfrac{1}{n+1}} \sim \dfrac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$.

Do đó chuỗi số đã cho hội tụ. Ta có

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}{\cos\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n+1}} = \operatorname{tg}\frac{1}{n} - \operatorname{tg}\frac{1}{n+1}.$$

Suy ra

$$S_n = \left(\operatorname{tg}1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\right) + \left(\operatorname{tg}\frac{1}{2} - \operatorname{tg}\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\operatorname{tg}\frac{1}{n} - \operatorname{tg}\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \operatorname{tg}1 - \operatorname{tg}\frac{1}{n+1}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \operatorname{tg}1.$$

9) Ta có $\forall\alpha \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $\forall n \geq 0$

$$2\cos\frac{\alpha}{2^n} - 1 = 1 - 2\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2^n}\right) = 1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2^{n+1}} > 0.$$

Do đó

$$u_n = \ln\left(2\cos\frac{\alpha}{2^n} - 1\right) \sim -4\frac{\alpha^2}{2^{2n+2}} = -\frac{\alpha^2}{4^n}.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ. Ta có $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

$$2\cos x - 1 = \frac{2\cos 2x + 1}{2\cos x + 1}.$$

Suy ra

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(2\cos\frac{\alpha}{2^k} - 1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \ln\frac{2\cos\frac{\alpha}{2^{k-1}} + 1}{2\cos\frac{\alpha}{2^k} + 1} =$$

$$= \ln\prod_{k=0}^{n} \frac{2\cos\frac{\alpha}{2^{k-1}} + 1}{2\cos\frac{\alpha}{2^k} + 1} = \ln\frac{2\cos 2\alpha + 1}{2\cos\frac{\alpha}{2^n} + 1}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \ln\frac{2\cos 2\alpha + 1}{3}.$$

10) Ta có

$$n+1=n\left(1+\frac{1}{n}\right),\ n+2=n\left(1+\frac{2}{n}\right).$$

Do đó

$$u_n=(1+a+b)\ln n+a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right).$$

Theo công thức khai triển hữu hạn của hàm số ln(1+ x), ta có

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}$$

$$\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\sim\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}.$$

Suy ra

$$u_n\sim(1+a+b)\ln n+\frac{a+2b}{n}-\frac{a+4b}{n^2}.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a+b+1=0\\ a+2b=0\end{cases}$$

Giải hệ phương trình ấy, ta được a = –2, b = 1. Với các giá trị ấy, ta được

S_n =(ln1 – 2ln2 + ln3) + (ln2 – 2ln3 + ln4) + (ln3 – 2ln4 + ln5) +

+ ... + [lnn – 2ln(n + 1) + ln(n + 2)] =

$$=-\ln 2+\ln\frac{n+2}{n+1}.$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=-\ln 2.$$

4. 1) Áp dụng quy tắc D'Alembert, ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}=\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{1}{4}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{1}{4}<1.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

2) Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^2}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1.$$

Chuỗi số đã cho hội tụ.

3) Ta có

$$u_n=\frac{n^2}{2^n+n}\sim\frac{n^2}{2^n}\ \text{khi}\ n\to\infty$$

Đặt $v_n=\dfrac{n^2}{2^n}$, ta có

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2}\frac{(n+1)^2}{n^2}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2}<1.$$

Vậy chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ hội tụ, nên chuỗi số đã cho hội tụ.

4) Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2(n+1)}{(n+1)^{n+1}}\cdot n^n=\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{e} < 1.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

5) Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a \cdot \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ nếu a < 1, phân kì nếu a > 1. Nếu a = 1, $u_n = \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$, chuỗi số hội tụ.

6) Áp dụng quy tắc Cauchy, ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2n^2-1}{3n^2+2}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{2}{3} < 1.$$

Chuỗi số đã cho hội tụ.

7) Ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n-1}{2n-1}\right)^{\ln n}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln n} = 0 < 1.$$

Chuỗi số đã cho hội tụ.

8) Ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n} = 0 < 1.$$

Chuỗi số đã cho hội tụ.

9) Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{[n!]^2} = \frac{n+1}{2(2n+1)}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4}.$$

Chuỗi số đã cho hội tụ.

10) Ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \operatorname{tg}\left(a + \frac{b}{n^2}\right).$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \operatorname{tg}a.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ nếu $\operatorname{tg}a < 1$, tức là $a < \frac{\pi}{4}$, phân kì nếu $\operatorname{tg}a > 1$, tức là $a > \frac{\pi}{4}$. Nếu $a = \frac{\pi}{4}$, ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{n^2}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{b}{n^2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{b}{n^2}}.$$

Khi $n \to \infty$ thì $\sqrt[n]{u_n} \to 1$, nhưng vì $\sqrt[n]{u_n} > 1, \forall n$, nên u_n không dần tới 0 khi $n \to \infty$, chuỗi số phân kì.

11) Ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{\alpha-1}} = e^{-n^{\alpha-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Khi $n \to \infty$, ta có

$$-n^{\alpha-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim -n^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n} = -n^{\alpha-2}.$$

Nếu $\alpha > 2$ thì $-n^{\alpha-2} \to -\infty$ khi $n \to \infty$, vậy $\sqrt[n]{u_n} \to 0 < 1$ khi $n \to \infty$, chuỗi số đã cho hội tụ.

Nếu $\alpha = 2$ thì $-n^{\alpha-2} = -1$, vậy $\sqrt[n]{u_n} \to \frac{1}{e} < 1$ khi $n \to \infty$, chuỗi số đã cho hội tụ.

Nếu $\alpha < 2$ thì $-n^{\alpha-2} \to 0$, vậy $\sqrt[n]{u_n} \to 1$ khi $n \to \infty$, chưa thể kết luận được gì. Ta viết $u_n = e^{v_n}$, trong đó $v_n = n^{\alpha}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Do công thức khai triển hữu hạn của hàm $\ln(1+x)$, ta được

$$v_n = -n^{\alpha}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] =$$

$$= -n^{\alpha-1} + \frac{1}{2}n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2}) \text{ khi } n \to \infty.$$

Với $\alpha < 1$, $v_n \to 0$ khi $n \to \infty$, do đó $u_n = e^{v_n} \to 1 \neq 0$, nên chuỗi số phân kì.

Với $\alpha = 1$, $v_n \to -1$ khi $n \to \infty$, do đó $u_n \to \frac{1}{e} \neq 0$, nên chuỗi số phân kì.

Với $1 < \alpha < 2$, ta có

$$u_n = e^{-n^{\alpha-1}}.e^{\frac{1}{2}n^{\alpha-2}+o(n^{\alpha-2})} \sim e^{-n^{\alpha-1}} \text{ khi } n \to \infty \text{ vì } n^{\alpha-2} \to 0.$$

Đặt $w_n = e^{-n^{\alpha-1}}$. Ta có

$$n^2 w_n = e^{2\ln n - n^{\alpha-1}} \to 0 \text{ khi } n \to \infty,$$

do đó tồn tại một số nguyên dương n_o sao cho với $n \geq n_o$ ta có

$$n^2 w_n \leq 1 \Rightarrow w_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ hội tụ, suy ra chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Tóm lại chuỗi số đã cho hội tụ với $\alpha > 1$, phân kì với $\alpha \leq 1$.

12) Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n[n!]^2} = \frac{2n+2}{2n+1}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Theo quy tắc D'Alembert, chưa thể kết luận được gì. Nhưng $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1, \forall n \in \mathbf{N}$, do đó $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbf{N}$, dãy số $\{u_n\}$ là dãy tăng, u_n không thể dần tới 0 khi $n \to \infty$. Chuỗi số đã cho phân kì.

13) Ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = 1 - \frac{3}{2}\frac{\ln n}{n}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1.$$

Chưa thể kết luận được gì theo quy tắc Cauchy. Ta có

$$u_n = e^{n\ln\left(1-\frac{3}{2}\frac{\ln n}{n}\right)}.$$

Theo công thức khai triển hữu hạn của hàm số $\ln(1 + x)$, ta được

$$n\ln\left(1-\frac{3}{2}\frac{\ln n}{n}\right) = -\frac{3}{2}\ln n + o(1)$$

khi $n \to \infty$. Do đó

$$u_n \sim e^{-\frac{3}{2}\ln n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

14) Chuỗi số có số hạng tổng quát $u_n = (-1)^n \frac{1}{n\ln n}$ là một chuỗi số đan dấu. Vì $|u_n| = \frac{1}{n\ln n}$ giảm khi n tăng và dần tới 0 khi $n \to \infty$, nên chuỗi số ấy hội tụ theo định lí Leibniz. Vì chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ là chuỗi số Bertrand với $\alpha = 1, \beta = 1$, nó phân kì. Vậy chuỗi số đã cho bán hội tụ.

15) Ta có

$$u_n = \sin(n\pi + \sqrt{n^2+1}\,\pi - n\pi) = (-1)^n \sin[\pi(\sqrt{n^2+1} - n)] =$$

$$= (-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi số đan dấu. Vì $|u_n| = \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ giảm khi n tăng và dần tới 0 khi $n \to \infty$, nên chuỗi số ấy hội tụ. Khi $n \to \infty$ ta có

$$|u_n| \sim \frac{\pi}{2n},$$

do đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kì. Vậy chuỗi số đã cho bán hội tụ.

16) Ta có

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n}+n\right)\pi = \sin\left(\frac{\pi}{n}+n\pi\right) = (-1)^n \sin\frac{\pi}{n}.$$

Chuỗi số đã cho là một chuỗi số đan dấu, thoả mãn các điều kiện của định lí Leibniz, do đó nó hội tụ. Vì

$$|u_n| = \sin\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n} \text{ khi } n \to \infty$$

nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kì, chuỗi số đã cho bán hội tụ.

17) Áp dụng quy tắc Cauchy vào chuỗi số có số hạng tổng quát là $|u_n| = \frac{n^2}{(\ln n)^n}$, ta có

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{n^{\frac{2}{n}}}{\ln n} = \frac{e^{\frac{2}{n}\ln n}}{\ln n}.$$

Vì $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\ln n = 0$, nên $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{2}{n}\ln n} = 1$, do đó

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = 0 < 1.$$

Vậy chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}|u_n|$ hội tụ, chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}u_n$ hội tụ tuyệt đối.

18) Ta có

$$u_n = v_n + w_n$$

trong đó

$$v_n = \frac{1}{1+n}, \ w_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+n}.$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$ là một chuỗi số dương phân kì.

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+n}$ là một chuỗi số đan dấu. Khi n tăng thì $|w_n| = \frac{\sqrt{n}}{1+n}$ giảm (vì hàm số $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ có đạo hàm $y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}}{(1+x)^2} < 0, \forall x > 0$) và dần tới 0 khi $n \to \infty$.

Chuỗi số ấy hội tụ. Chuỗi số đã cho có số hạng tổng quát là $u_n = v_n + w_n$, nó phân kì.

Chú ý rằng trong bài này không thể lập luận như sau : Vì $u_n \sim (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ khi $n \to \infty$, mà chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ là một chuỗi số đan dấu hội tụ theo định lí Leibniz, nên chuỗi số đã cho hội tụ. Sở dĩ như vậy, vì định lí so sánh chỉ đúng với các chuỗi số dương, mà chuỗi số đã cho không phải là chuỗi số dương.

19) Ta có bằng cách dùng công thức khai triển hữu hạn

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = v_n + w_n,$$

trong đó

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n}, \ w_n = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} \text{ khi } n \to \infty.$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ là chuỗi số đan dấu hội tụ theo định lí Leibniz, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ là chuỗi số dương hội tụ vì $w_n \sim \frac{1}{n^2}$. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

20) Ta có

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = v_n + w_n,$$

trong đó

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\ w_n = \frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \text{ khi } n \to \infty.$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là chuỗi số đan dấu hội tụ, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ là chuỗi số phân kì vì $w_n \sim \frac{1}{n}$. Vậy chuỗi số đã cho phân kì.

21) Ta có

$$u_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left[\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] =$$

$$= \sqrt{n}\left(\frac{(-1)^n}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = v_n + w_n,$$

trong đó

$$v_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}},\ w_n = -\frac{1}{8n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \sim -\frac{1}{8n^{\frac{3}{2}}} \text{ khi } n \to \infty.$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là chuỗi số đan dấu hội tụ, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ là chuỗi số hội tụ vì $w_n \sim -\frac{1}{8n^{\frac{3}{2}}}$. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

22) Ta có

$$u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = v_n + w_n$$

trong đó

$$v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}},\ w_n = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$$

khi $n \to \infty$. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là chuỗi số đan dấu hội tụ, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ hội tụ khi và chỉ khi $2\alpha > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{1}{2}$. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ với $\alpha > \frac{1}{2}$.

5. 1) Với $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$, ta có nếu $x = 0$, $f_n(0) = 0$, $\forall n$, nên

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0 = f(0).$$

Nếu $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. Vậy tại mọi điểm của đoạn [0, 1], dãy hàm số $\{f_n(x)\}$ hội tụ tới 0. Vì

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{x}{x+n}\right| \le \frac{1}{n},\ \forall x \in [0, 1],$$

mà $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, nên $f_n(x)$ hội tụ đều trên đoạn [0, 1] tới 0.

Với $g_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(0) = 0$, còn với $x > 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 1$. Vậy trên đoạn [0, 1], dãy $g_n(x)$ hội tụ tới

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 & \text{nếu } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Các hàm số $g_n(x)$ liên tục trên đoạn [0, 1], hội tụ trên đoạn đó tới một hàm số gián đoạn, vậy dãy hàm số $g_n(x)$ hội tụ không đều trên đoạn [0, 1] tới hàm số g(x).

Dễ thấy rằng dãy $\{g_n\}$ hội tụ đều tới g(x) trên đoạn [a, 1] với $0 < a < 1$.

b) Trên khoảng $[1, +\infty)$, dãy $f_n(x)$ hội tụ tới 0. Nhưng

$$\sup_{x\ge 1} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\ge 1} \frac{x}{x+n} = 1,$$

nên $f_n(x)$ hội tụ không đều trên khoảng $[1, +\infty)$ tới 0.

Với $x \ge 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 1$, còn

$$\sup_{x\ge 1} |g_n(x) - 1| = \sup \frac{1}{1+nx} = \frac{1}{1+n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Vậy $g_n(x)$ hội tụ đều trên khoảng $[1, +\infty)$ tới 1.

2) Xét dãy hàm số $\{f_n(x)\}$ với $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $x \in [0, 2]$.

a) Trên đoạn [0, a] với $0 < a < 1$, ta có $0 \le f_n(x) \le x^n \le a^n$. Vì $a^n \to 0$ khi $n \to \infty$, nên $f_n(x)$ hội tụ đều trên [0, a] tới 0.

Nếu x = 1, $f_n(x) = \frac{1}{2}, \forall n$, nên $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = \frac{1}{2} = f(1)$.

Còn trên đoạn [b, 2], với 1 < b < 2, ta có

$$|f_n(x) - 1| = \frac{1}{1+x^n} \le \frac{1}{1+b^n} \to 0 \text{ (khi } n \to \infty),$$

nên $f_n(x)$ hội tụ đều trên đoạn [b, 2] tới hàm f(x) = 1.

Như vậy tại những điểm của đoạn [0, 2], dãy $f_n(x)$ hội tụ tới hàm số gián đoạn

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{nếu } x = 1 \\ 1 & \text{nếu } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Các hàm số $f_n(x)$ đều liên tục trên đoạn [0, 2], vậy sự hội tụ của dãy $\{f_n(x)\}$ tới f(x) là không đều trên [0, 2].

b) Đặt $I_n = \int\limits_0^2 f_n(x)dx - 1$. Với a cố định, 0 < a < 1, ta có

$$I_n = \int\limits_0^{1-a} f_n dx + \int\limits_{1-a}^{1+a} f_n dx + \int\limits_{1+a}^{2} (f_n - 1)dx - \int\limits_1^{1+a} dx$$

$$\Rightarrow |I_n| \le \left|\int\limits_0^{1-a} f_n dx\right| + \left|\int\limits_{1-a}^{1+a} f_n dx\right| + \left|\int\limits_{1+a}^{2} (f_n - 1)dx\right| + \left|\int\limits_1^{1+a} dx\right| \quad (*)$$

Vì $f_n(x)$ hội tụ đều tới 0 trên đoạn [0, 1 − a], nên với số $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số nguyên dương n_o sao cho với $n \ge n_o$ ta có

$$\left|\int\limits_0^{1-a} f_n(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Cũng như vậy, tồn tại số nguyên dương n_1 sao cho với $n \ge n_1$ ta có

$$\left|\int_{1+a}^{2}[f_n(x)-1]dx\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Vì $|f_n(x)| \le 1, \forall n,$ nên trị tuyệt đối của hai số hạng còn lại của vế phải của (*) không vượt quá $\frac{\varepsilon}{4}$. Vậy với $n \ge \max(n_o, n_1)$, ta có $|I_n| < \varepsilon$, do đó $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0.$

Chú thích. Vì $f_n(x)$ hội tụ không đều trên [0, 2] tới f(x) nên không thể suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^2 f_n(x)dx = \int_0^2 f(x)dx.$$

3) Giả sử $x_o \in \mathbf{R}_+$. Với $n > x_o$, $f_n(x_o) = \left(1-\frac{x_o}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{x_o}{n}\right)}$,

$f_n(x_o) \to e^{-x_o}$ khi $n \to \infty$. Vậy $f_n(x)$ hội tụ tới $f(x) = e^{-x}$ tại mọi điểm $x_o \in \mathbf{R}_+$. Để khảo sát sự hội tụ đều của dãy $f_n(x)$, ta hãy đánh giá $\max\limits_{\mathbf{R}_+}|f_n(x)-f(x)|$. Cố định số nguyên $n > 1$. Đặt

$$g(x) = f(x) - f_n(x) = e^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n, \;\; x \in [0, n].$$

Ta có

$$g'(x) = -e^{-x} + n\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} = e^{-x}\left[e^{\ln n\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}+x} - 1\right],$$

dấu của g'(x) là dấu của $h(x) = \ln n\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} + x$. Vì $h'(x) = \frac{1-x}{n-x}$, nên h(x) tăng trên [0, 1], giảm trên [1, n]. Nhưng h(0) = lnn, $h(x) \to -\infty$ khi $x \to n^-$, do đó tồn tại số $\alpha \in (1, n)$ sao cho

$$h(x) \geq 0 \text{ trên } [0, \alpha], \ h(x) \leq 0 \text{ trên } [\alpha, n].$$

Vì $g'(x)$ có dấu của $h(x)$ nên $g(x)$ tăng trên $[0, \alpha]$ và giảm trên $[\alpha, n]$.

Nhưng $g(0) = 0$, $g(n) = e^{-n} \geq 0$ nên

$$\forall x \in [0, n], \ 0 \leq g(x) \leq g(\alpha) \text{ với } g'(\alpha) = 0.$$

Vậy chỉ cần đánh giá $g(x)$. Vì $g'(\alpha) = 0$, nên $\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-1} = e^{-\alpha}$, do đó

$$g(\alpha) = e^{-\alpha} - \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) = \frac{\alpha}{n}e^{-\alpha} \qquad (**)$$

Hàm số $x \mapsto xe^{-x}$ đạt cực đại tại $x = 1$, nên $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$ trên $\mathbf{R}_+$. Vì vậy, từ (**) suy ra

$$0 \leq g(x) \leq g(\alpha) \leq \frac{1}{ne} \quad \forall x \in [0, n]$$

Hay

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{ne} \quad \forall x \in [0, n].$$

Bất đẳng thức ấy cũng đúng $\forall x \in [n, +\infty)$, do đó nó đúng $\forall x \in \mathbf{R}_+$. Vậy $f_n(x)$ hội tụ đều tới e^{-x} trên $\mathbf{R}_+$.

6. 1) a) Trước hết ta chú ý rằng hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ xác định $\forall x \neq -2$, có đạo hàm $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \ \forall x \neq -2$. Do đó khi x tăng từ -1 đến $+1$, thì $f(x)$ tăng từ -1 đến $+1$. Vậy

$$\left|\frac{2x+1}{x+2}\right| \leq 1, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Do đó ta có

$$\left|\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n\right| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \ \forall x \in [-1, 1].$$

Vì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ hội tụ, nên theo định lí Weierstrass chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên đoạn [-1, 1].

b) Trước hết ta xét sự biến thiên của hàm số

$x \mapsto u_n(x) = \sqrt{n}\,xe^{-n^2x}$ với n cố định. Ta có

$$u_n'(x) = \sqrt{n}\,e^{-n^2x}(1-n^2x).$$

Vậy $u'_n(x) = 0$ khi $x = \frac{1}{n^2}$. Ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{n^2}$		$+\infty$
$u'_n(x)$		$+$	0	$-$	
$u_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Do đó ta có

$$|u_n(x)| \le u_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{en^{\frac{3}{2}}},\quad \forall x \in \mathbf{R}^+.$$

Vì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{en^{\frac{3}{2}}}$ hội tụ, nên chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $\mathbf{R}^+$.

c) Nếu $x \le 0$, $u_n(x) = (-1)^n n^{-x}$ không dần tới 0 khi $n \to \infty$, chuỗi hàm số phân kì.

Nếu x > 1, ta có

$$|u_n(x)| = \frac{1}{n^x}.$$

Chuỗi hàm số hội tụ tuyệt đối.

Nếu $0 < x \le 1$, chuỗi hàm số là một chuỗi đan dấu thoả mãn các điều kiện của định lí Leibniz, nó hội tụ, nhưng không hội tụ tuyệt đối.

Gọi $R_n(x)$ là phần dư thứ n của chuỗi hàm số đang xét với $x > 0$. Vì đó là một chuỗi đan dấu nên ta có

$$|R_n(x)| \le |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{(n+1)^x}$$

Nếu $x \ge a > 0$ với a cố định, ta có

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, ta chọn n sao cho

$$\frac{1}{(n+1)^a} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}.$$

Do đó với mọi $n \ge n_o = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}} - 1$, ta có

$$|R_n(x)| < \varepsilon,\ \forall x \ge a.$$

Vậy chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên khoảng $[a, +\infty)$ với $a > 0$ cố định.

2) Chuỗi hàm số với số hạng tổng quát

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$

với mọi $x \in \mathbf{R}$ là một chuỗi đan dấu, thoả mãn các điều kiện của định lí Leibniz, nên nó hội tụ trên $\mathbf{R}$. Gọi $R_n(x)$ là tổng riêng thứ n của nó, ta có

$$|R_n(x)| \le |u_{n+1}(x)| = \frac{x^2+(n+1)}{(n+1)^2}$$

Đặt $M = \max(|a|, |b|)$. Ta có

$$|R_n(x)| \le \frac{M^2 + (n+1)}{(n+1)^2}, \ \forall x \in [a, b]$$

Vế phải dần tới không khi $n \to \infty$, với mọi $x \in [a, b]$, vậy chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên đoạn [a, b].

Vậy chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên [a, b].

vì $|u_n(x)| = \frac{x^2 + n}{n^2} \sim \frac{1}{n}$ khi $n \to \infty$, nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ phân kì.

Do đó chuỗi hàm số đã cho không hội tụ tuyệt đối.

7. Nếu $x \in [a, +\infty)$, trong đó a > 0, ta có

$$ne^{-nx} \le ne^{-na}.$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-na}$ là chuỗi số dương hội tụ vì theo quy tắc D'Alembert

$$\frac{(n+1)e^{-(n+1)a}}{ne^{-na}} = \frac{n+1}{n} e^{-a} \to e^{-a} < 1$$

khi $n \to \infty$. Do đó chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ hội tụ đều trên khoảng $[a, +\infty)$. Chuỗi ấy không hội tụ đều trên $[0, +\infty)$ vì tại x = 0, chuỗi ấy trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} n$, nó phân kì.

Nếu x > 0, chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, trong đó $u_n(x) = e^{-nx}$ là một cấp số nhân lùi vô hạn, có số hạng đầu là e^{-x} và công bội là e^{-x}, do đó nó hội tụ và có tổng là $\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$. Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ hội tụ đều trên $[a,+\infty)$ với mọi $a > 0$ như ta đã thấy ở trên. Vậy với $x > 0$ ta có thể lấy đạo hàm từng số hạng chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} = -\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = -\left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)' = \frac{e^x}{(e^x-1)^2}$$

8. 1) Với $x \in (0, 1]$, ta có $u_n(x) < 0$, vậy chuỗi hàm số đã cho là một chuỗi đan dấu, thoả mãn các điều kiện của định lí Leibniz, nó hội tụ. Tại $x = 0$, $u_n(0) = 0$, chuỗi cũng hội tụ. Gọi $R_n(x)$ là phần dư thứ n của chuỗi với $x \in (0, 1]$, ta có

$$|R_{n-1}(x)| \le |u_n(x)| = |x^{n+1} \ln x|.$$

Xét hàm số $x \mapsto u_n(x) = x^{n+1} \ln x$ với n cố định. Ta có

$$u'_n(x) = x^n[1 + (n+1)\ln x]$$

$$u'_n(x) = 0 \text{ khi } x_0 = e^{-\frac{1}{n+1}}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	0		x_0		1
$u'_n(x)$		$-$	0	$+$	
$u_n(x)$	0	↘		↗	0

Do đó ta có

$$|R_{n-1}(x)| \le |u_n(x)| \le \left|u_n\left(e^{-\frac{1}{n+1}}\right)\right| = \frac{1}{e(n+1)}, \ \forall x \in [0, 1].$$

Với $\varepsilon > 0$ cho trước, ta chọn n sao cho

$$\frac{1}{e(n+1)} < \varepsilon \Leftrightarrow n > n_o = \frac{1}{e\varepsilon} - 1.$$

Do đó với $n > n_o$, ta có

$$|R_{n-1}(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in [0, 1].$$

Tóm lại chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n(x)$ hội tụ đều trên [0, 1].

2) Với $0 < x < 1$, chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \ln x$ là một cấp số nhân vô hạn có số hạng đầu là xlnx, công bội là x, nên

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = 0 \\ \dfrac{x}{1-x} \ln x & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$

Nhưng $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x \ln x}{1-x} = -1$.

Vậy tổng của chuỗi hàm số đã cho là một hàm số không liên tục trên [0, 1], do đó chuỗi hàm số ấy không thể hội tụ đều trên [0, 1].

9. Ta có

$$\left| \frac{1}{n(n+x)} \right| \le \frac{1}{n^2}, \ \forall x \in \mathbf{R}^+.$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ, do đó $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)}$ hội tụ đều trên $\mathbf{R}^+$.

Các số hạng $\dfrac{1}{n(n+x)}$ của nó cũng liên tục trên $\mathbf{R}^+$, do đó hàm số f(x) xác định và liên tục trên $\mathbf{R}^+$.

Đặt $u_n(x)=\frac{1}{n(n+x)}$. Ta có $u'_n(x)=-\frac{1}{n(n+x)^2}$. Vì $|u'_n(x)|\le\frac{1}{n^3}$, $\forall x\in\mathbf{R}^+$, nên chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$ hội tụ đều trên $\mathbf{R}^+$, do đó hàm số f(x) khả vi trên $\mathbf{R}^+$ và ta có $f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+x)^2}$.

10. Đặt $u_n(x)=\frac{1}{1+x^n}$. Nếu $|x|\le 1$, $u_n(x)$ không dần tới 0 khi $n\to\infty$, vậy chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ phân kì. Nếu $|x|>1$ ta có $|u_n(x)|\sim\frac{1}{|x|^n}$ khi $n\to\infty$, do đó chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ hội tụ. Vậy miền hội tụ của nó là

$$\{x\in\mathbf{R}:|x|>1\}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên mọi đoạn [a, b] nằm trong miền hội tụ của nó. Thật vậy, ta xét trường hợp $1<a\le x\le b$. Ta có

$$1+x^n\sim x^n \text{ khi } n\to\infty.$$

Vậy khi n đủ lớn

$$\frac{|1+x^n|}{|x|^n}>\frac{1}{2}.$$

Do đó
$$|1+x^n|>\frac{|x|^n}{2}>\frac{a^n}{2}.$$

Suy ra
$$|u_n(x)|=\frac{1}{|1+x^n|}<\frac{2}{a^n};\ \forall x\in[a,b].$$

Do $\frac{1}{a}<1$, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a^n}$ hội tụ, nên chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ hội tụ đều trong đoạn [a, b]. Ta cũng chứng minh tương tự trường hợp

$a \le x \le b < -1$. Như vậy tổng của chuỗi hàm số đã cho là liên tục với $|x| > 1$.

Bây giờ ta xét chuỗi hàm số có số hạng tổng quát là

$$u'_n(x) = -\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

Chuỗi ấy cũng hội tụ với $|x| > 1$, vì

$$|u'_n(x)| \sim \frac{n}{|x|^{n+1}} \text{ khi } n \to \infty.$$

Sự hội tụ đều của nó được chứng minh như đối với chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Xét trường hợp $1 < a \le x \le b$. Với n đủ lớn

$$|u'_n(x)| < \frac{4nb^{n-1}}{a^{2n}}, \ \forall x \in [a, b].$$

Đặt $v_n = \frac{4nb^{n-1}}{a^{2n}}$. Ta có

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{b}{a^2} \to \frac{b}{a^2} \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ nếu $\frac{b}{a^2} < 1$, tức là

$$b < a^2 \qquad (*)$$

Do đó chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ hội tụ đều trên mọi đoạn $[a, b] \subset [1, +\infty)$ thoả mãn điều kiện (*), điều này luôn thực hiện được vì a > 1. Trong trường hợp $a \le x \le b < -1$, cũng chứng minh tương tự. Tóm lại tổng của chuỗi hàm số đã cho khả vi với $|x| > 1$.

Có thể chứng minh được rằng tổng của chuỗi hàm số ấy khả vi vô hạn lần với $|x| > 1$.

11. 1) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

Do đó bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa là R = 1. Tại x = −1, ta có chuỗi số $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, nó phân kì. Tại x = 1, ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, đó là chuỗi số đan dấu thoả mãn các điều kiện của định lí Leibniz, nó hội tụ. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $-1 < x \le 1$.

2) $u_n(x) = a_n(x-4)^n$, trong đó $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Vì $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, nên R = 1. Chuỗi luỹ thừa hội tụ với −1 < x − 4 < 1, tức là 3 < x < 5. Tại x = 3, ta có chuỗi số đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, nó hội tụ. Tại x = 5, ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, nó phân kì. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $3 \le x < 5$.

3) $u_n(x) = a_n X^n$, trong đó $a_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$, $X = (x-2)^2$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Do đó R = 2. Chuỗi luỹ thừa hội tụ với $|X| < 2$, tức là $(x-2)^2 < 2$, hay $2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$. Khi $x = 2 \pm \sqrt{2}$, ta có chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n.$$

Số hạng tổng quát của nó có thể viết là

$$\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}$$

khi $n \to \infty$, $n\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right) \sim \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n = e^{\frac{1}{2}} \neq 0.$$

Vậy chuỗi số ấy phân kì. Miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$.

4) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $a_n = n^n$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Do đó $R = 0$.

5) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $a_n = \ln n$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1.$$

Do đó $R = 1$. Tại $x = -1$ và $x = 1$, ta có theo thứ tự các chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln n$, $\sum_{n=2}^{\infty}\ln n$, chúng phân kì vì số hạng tổng quát của chúng không dần tới 0 khi $n \to \infty$. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $-1 < x < 1$.

6) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $a_n = \frac{5^n}{n!}$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1} = 0.$$

Do đó $R = \infty$. Miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $-\infty < x < +\infty$.

7) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = 1.$$

Do đó R = 1. Tại x = −1, ta có chuỗi số đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$, nó

hội tụ theo định lí Leibniz. Tại x = 1 ta có chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$,

nó hội tụ nếu $\alpha > 1$, phân kì nếu $\alpha \le 1$. Vậy nếu $\alpha \le 1$, miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $-1 \le x < 1$, còn nếu $\alpha > 1$, miền hội tụ của nó là $-1 \le x \le 1$.

8) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Do đó $R = \infty$. Miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $-\infty < x < +\infty$.

9) Vì $0 < a_o < \frac{\pi}{2}$, nên $0 < a_1 = \sin a_o < a_o$. Bằng quy nạp, có thể

chứng minh được rằng $a_n < a_{n-1}$, $\forall n$. Do đó dãy số $\{a_n\}$ đơn điệu giảm, nó lại bị chặn dưới bởi 0, nên dãy số ấy dần tới một giới hạn l khi $n \to \infty$. Từ hệ thức

$$a_n = \sin a_{n-1},$$

suy ra rằng $l = \sin l$,

do đó $l = 0$, vì $0 \le l < \frac{\pi}{2}$. Vậy $\{a_n\}$ là một dãy số giảm dần và dần

tới 0 khi n tăng dần đến ∞. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1.$$

Do đó R = 1. Tại x = −1, ta có chuỗi số đan dấu $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ hội tụ theo định lí Leibniz. Tại x = 1, ta có chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ta có $a_n > a_n^2, \forall n$. Ta sẽ chứng minh rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ phân kì, do đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì. Thật vậy, từ công thức khai triển hữu hạn của hàm sinx, suy ra

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \text{ khi } x \to 0.$$

Khi $n \to \infty$, $a_n \to 0$, do đó khi $n \to \infty$,

$$\ln\frac{\sin a_n}{a_n} \sim \ln\left(1 - \frac{a_n^2}{6}\right) \sim -\frac{a_n^2}{6}.$$

Vì vậy để khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, ta xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{\sin a_n}{a_n}$. Ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{\sin a_k}{a_k} = \ln\left(\frac{a_1}{a_o}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln\frac{a_{n+1}}{a_o},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{\sin a_k}{a_k} = \lim_{n\to\infty}\ln\frac{a_{n+1}}{a_o} = -\infty.$$

Do đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{\sin a_n}{a_n}$ phân kì, nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ phân kì, suy ra chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa là $-1 \le x < 1$.

12. 1) $(3n+1)x^{3n}$ là đạo hàm của x^{3n+1}. Chuỗi có số hạng tổng quát là x^{3n+1} là một cấp số nhân công bội x^3, do đó nó hội tụ với $|x^3|<1$, tức là $|x|<1$. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa đang xét cũng là $|x|<1$. Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{3n+1} = x^4 . \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \frac{x^4}{1-x^3}.$$

Do đó với $|x|<1$, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3n+1)x^{3n} = \left(\frac{x^4}{1-x^3}\right)' = \frac{4x^3-x^6}{(1-x^3)^2}.$$

2) $(2^n+3^n)x^n = (2x)^n+(3x)^n$. Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2x)^n$ là một cấp số nhân có công bội 2x, nó hội tụ nếu $|2x|<1$, tức là $|x|<\frac{1}{2}$ và có tổng là $\frac{1}{1-2x}$. Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3x)^n$ là một cấp số nhân có công bội 3x, nó hội tụ nếu $|3x|<1$, tức là $|x|<\frac{1}{3}$ và có tổng là $\frac{1}{1-3x}$. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho là $|x|<\frac{1}{3}$. Tổng của nó là $\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{1-3x}$.

3) $u_n(x)=\left(n-\frac{1}{n+3}\right)\frac{x^n}{n!}=v_n(x)-w_n(x)$, trong đó

$$v_n(x)=\frac{nx^n}{n!},\ w_n(x)=\frac{1}{n+3}\cdot\frac{x^n}{n!}.$$

Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ hội tụ $\forall x \in \mathbf{R}$ và có tổng là xe^x.

Ta có

$$w_n(x) = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{x^{n+3}}{n+3} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^{n+2}}{n!}dt = \frac{1}{x^3}\int_0^x t^2 \cdot \frac{t^n}{n!}dt.$$

Do đó

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) = \frac{1}{x^3}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^2 \cdot \frac{t^n}{n!}dt.$$

Vì chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hội tụ $\forall x \in \mathbf{R}$ và có tổng là e^x nên ta được

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) = \frac{1}{x^3}\int_0^x t^2 . \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}dt = \frac{1}{x^3}\int_0^x t^2 e^t dt,\ \forall x \neq 0.$$

Bằng phương pháp tích phân từng phần ta được

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) = \frac{1}{x^3}[e^x(x^2 - 2x + 2) - 2].$$

Tóm lại chuỗi luỹ thừa đã cho hội tụ $\forall x \neq 0$ và có tổng là

$$xe^x - \frac{1}{x^3}[e^x(x^2 - 2x + 2) - 2].$$

4) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó a_n = chna. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{(n+1)a} + e^{-(n+1)a}}{e^{na} + e^{-na}} = e^a.$$

Do đó $R = e^{-a}$. Với $x = \pm e^{-a}$, ta có

$$\left|u_n(\pm e^{-a})\right| = e^{-na}\text{ch } na = e^{-na}\left[\frac{e^{na} + e^{-na}}{2}\right] \to \frac{1}{2} \neq 0$$

khi $n \to \infty$. Chuỗi phân kì. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho là $(-e^{-a}, e^{-a})$.

Ta có

$$u_n(x) = \frac{1}{2}(e^{na} + e^{-na})x^n = \frac{1}{2}[(e^a x)^n + (e^{-a}x)^n].$$

Với $|x| < e^{-a}$, ta có $|e^a x| < 1$, $|e^{-a}x| < 1$. Chuỗi luỹ thừa đã cho là tổng của hai cấp số nhân vô hạn có công bội $e^a x$ và $e^{-a}x$, chúng hội tụ và có tổng là $\frac{1}{2}\frac{1}{1-xe^a}$ và $\frac{1}{2}\frac{1}{1-xe^{-a}}$.

Vậy tổng của chuỗi luỹ thừa đã cho là

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-xe^a} + \frac{1}{1-xe^{-a}}\right] = \frac{1}{2}\frac{2-x(e^a+e^{-a})}{(1-xe^a)(1-xe^{-a})}$$

$$= \frac{1-x\operatorname{ch}a}{1+x^2-2x\operatorname{ch}a}.$$

5) $u_n(x) = a_n x^{n-1}$, trong đó $a_n = (-1)^{n-1}.\frac{1}{n}$. Dễ dàng thấy rằng $R = 1$. Tại $x = -1$ ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, nó phân kì. Tại $x = +1$, ta có chuỗi số đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, nó hội tụ theo định lí Leibniz.

Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho là $-1 < x \le 1$.

Gọi f(x) là tổng của chuỗi luỹ thừa với $|x| < 1$. Ta có

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n} + \cdots$$

Do đó

$$xf(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$
$$= \ln(1+x)$$

Vậy

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

13. Ta có

$$x = 3 + (x-3) = 3\left(1 + \frac{x-3}{3}\right)$$

$$\frac{1}{x} = 3^{-1}\left(1 + \frac{x-3}{3}\right)^{-1}.$$

Áp dụng công thức khai triển hàm số $(1+X)^{\alpha}$ thành chuỗi luỹ thừa ở lân cận $X = 0$, ta được ở lân cận $x = 3$

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{x-3}{3} + \left(\frac{x-3}{3}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^3 + \cdots + (-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n + \cdots\right].$$

14. 1) $f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) =$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \cdots\right) =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \ R = \infty$$

2) $f(x) = x^2e^x = x^2\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) =$

$$= x^2 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+2}}{n!} + \cdots, \ R = \infty.$$

3) $f(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{2n!} + \cdots\right)\right] =$$

$$= \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \ R = \infty.$$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1} =$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}.$$

Nhưng

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \text{ với } |x| < 1$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{2}\right)^n + \cdots\right]$$

với $|x| < 2$.

Do đó

$$f(x) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)x + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)x^2 + \ldots + \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n + \ldots,$$

$R = 1$.

5) Ta có

$$x^2 - 5x + 6 = 6\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{3}\right).$$

Do đó

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6) = \ln 6 + \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right).$$

Nhưng

$$\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \cdots - \frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \cdots, \ |x| < 2$$

$$\ln\left(1 - \frac{x}{3}\right) = -\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \cdots - \frac{1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n + \cdots, \ |x| < 3.$$

Vậy

$$f(x) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)x^n, \ |x| < 2.$$

6) $f'(x) = \cos x^2 = 1 - \dfrac{x^4}{2!} + \dfrac{x^8}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{4n}}{(2n)!} + \cdots, \ R = \infty.$

Do đó

$$f(x) = x - \frac{x^5}{2!5} + \frac{x^9}{4!9} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)} + \cdots, \ R = \infty.$$

7) Ta có với $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right).$$

Do đó với $|x| < 1, \ x \neq 0$ ta có

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n+1} + \cdots\right).$$

Cả hai vế đều liên tục tại $x = 0$, đều có giá trị bằng 2 tại $x = 0$. Do đó khai triển trên cũng đúng tại $x = 0$.

8) Ta có

$$e^x \cos x = \mathrm{Re}(e^{(1+i)x}).$$

Đặt $z := (1+i)x = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}x.$ Ta được

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}} x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}x^n + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{4}x^n.$$

Do đó

$$e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} \cos\frac{n\pi}{4} x^n, \ \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Ta cũng được

$$e^x \sin x = \mathrm{Im}(e^{(1+i)x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} \sin\frac{n\pi}{4} x^n \ \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

15. Hàm số f(x) khả vi vô hạn lần tại mọi $x \neq 0$. Nay ta xét tại $x = 0$.

Khi $x \to 0$, $-\dfrac{1}{x^2} \to -\infty$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \to 0 = f(0)$, vậy f(x) liên tục tại $x = 0$.

Để xét xem f(x) có khả vi tại $x = 0$ hay không, ta tìm $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^2}} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t}{e^{t^2}}$ (ở đây ta đã đặt $t = \dfrac{1}{h}$).

Rõ ràng giới hạn cũng tồn tại và bằng 0, vậy f(x) khả vi tại $x = 0$ và $f'(0) = 0$.

Ta lại xét xem $f'(x)$ có khả vi tại $x = 0$ hay không. Ta có

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ nếu } x \neq 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h^4} e^{-\frac{1}{h^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t^4}{e^{t^2}} = 0.$$

Vậy $f'(x)$ cũng khả vi tại $x = 0$ và $f''(0) = 0$.

Bây giờ ta chứng minh bằng quy nạp rằng $\forall n \in \mathbf{N}$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

trong đó $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ là một đa thức nào đó (không nhất thiết bậc n) của $\frac{1}{x}$. Giả sử điều đó đúng với n. Ta có $\forall x \neq 0$

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P'_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

trong đó $P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}P'_n\left(\frac{1}{x}\right) + 2\cdot\frac{1}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ cũng là một đa thức của $\frac{1}{x}$. Ta lại có

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}P_n\left(\frac{1}{h}\right)e^{-\frac{1}{h^2}} = \lim_{t\to\infty}\frac{tP_n(t)}{e^{t^2}} = 0.$$

Vậy $f^{(n+1)}(0) = 0$, đó là điều cần chứng minh. Tóm lại hàm số f(x) có đạo hàm mọi cấp tại x = 0 và $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Do đó nếu hàm số f(x) có thể khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận x = 0 thì ta có

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 0.x^n = 0,$$

điều này vô lí, vì $e^{-\frac{1}{x^2}} > 0$ $\forall x \neq 0$.

16. $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$. Ta có

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n.$$

Nếu n = 2p, $\sqrt[2p]{|a_{2p}|} = \left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{2p} \to e$ khi $p \to \infty$.

Nếu $n = 2p+1$, $\sqrt[2p+1]{|a_{2p+1}|} = \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^{2p+1} \to \frac{1}{e}$ khi $p \to \infty$.

Vậy chưa thể kết luận được gì.

Bây giờ ta xét riêng hai chuỗi luỹ thừa $\sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}x^{2p}$, và $\sum_{p=1}^{\infty} a_{2p-1}x^{2p-1}$.

Đặt

$$\sigma_p = a_2x^2 + a_4x^4 + ... + a_{2p}x^{2p}$$

$$\sigma'_p = a_1x + a_3x^3 + ... + a_{2p-1}x^{2p-1}.$$

Dùng công thức khai triển hữu hạn của hàm số $\ln(1+x)$, khi $x \to 0$, ta được

$$a_{2p} = e^{4p^2 \ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)} = e^{4p^2\left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{8p^2} + o\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)},$$

Do đó

$$a_{2p} = e^{2p - \frac{1}{2} + o(1)} \sim e^{-\frac{1}{2}}e^{2p}.$$

Suy ra

$$a_{2p}x^{2p} \sim e^{-\frac{1}{2}}(ex)^{2p}.$$

Vậy chuỗi luỹ thừa $\sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}x^{2p}$ hội tụ khi $|ex| < 1$, tức là $|x| < \frac{1}{e}$, phân kì nếu $|x| \geq \frac{1}{e}$.

Tương tự, ta được

$$a_{2p-1} \sim e^{-\frac{1}{2}}e^{-(2p-1)},\ a_{2p-1}x^{2p-1} \sim \left(\frac{x}{e}\right)^{2p-1} \text{ khi } p \to \infty.$$

Vậy chuỗi luỹ thừa $\sum_{p=1}^{\infty} a_{2p-1}x^{2p-1}$ hội tụ tuyệt đối nếu $|x| < e$, phân kì nếu $|x| \ge e$. Như vậy : Nếu $|x| < \frac{1}{e}$, các tổng riêng σ_p và σ'_p dần tới những giới hạn σ, σ' hữu hạn khi $p \to \infty$. Nếu gọi S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi luỹ thừa đã cho thì $S_{2p} = \sigma_p + \sigma'_p$ dần tới σ + σ' khi $p \to \infty$; $S_{2p+1} = \sigma_p + \sigma'_{p+1}$ cũng dần tới σ + σ' khi $p \to \infty$. Do đó chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ đã cho hội tụ.

Nếu $|x| \ge \frac{1}{e}$, $a_{2p}x^{2p}$ không dần tới 0 khi $p \to \infty$, vậy a_n không dần tới 0 khi $n \to \infty$, chuỗi đã cho phân kì.

Vậy bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho là $R = \frac{1}{e}$.

17. 1) Nếu $|x| < R'$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ hội tụ tuyệt đối. Nhưng vì $|a_n| \le |b_n| \ \forall n \ge n_o$, nên $|a_n||x^n| \le |b_n||x^n|$, do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ cũng hội tụ tuyệt đối. Suy ra R' ≤ R.

2) Vì $|a_n| \sim |b_n|$ khi $n \to \infty$, nên tồn tại số nguyên dương n_o sao cho với $n \ge n_o$ ta có

$$\frac{1}{2}|a_n| \le |b_n| \le 2|a_n|.$$

Do 1), từ bất đẳng thức đầu ta có R' ≤ R, từ bất đẳng thức sau ta có R ≤ R'. Vì vậy R = R'.

3) a) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $a_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n}$. Ta có

$$a_n \sim \frac{2e^n}{e^{2n}} = \frac{2}{e^n} \text{ khi } n \to \infty.$$

Đặt $b_n = \frac{2}{e^n}$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{1}{e}.$$

Vậy R = e.

b) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $a_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Khi $n \to \infty$ $\arccos\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \to 0$, do đó

$$\arccos\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \sim \sin\left(\arccos\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{1-\cos^2 \arccos\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = \left(1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{n}\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{n}\left[1-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \sim \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Bằng quy tắc D'Alembert, dễ dàng thấy rằng bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{n} x^n$ bằng 1, vậy bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho bằng 1.

c) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó

$$a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n}\left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} - 1\right) = e^{\frac{1}{n}\ln n}.\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right)$$

Khi $n \to \infty$, $\frac{1}{n}\ln n \to 0$, nên $e^{\frac{1}{n}\ln n} \to 1$. Vì $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$ khi $n \to \infty$, nên

$$e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 \sim \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

Vậy $a_n \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$, mà bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ bằng 1, vậy bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho bằng 1.

d) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó

$$a_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) = \cos\left(\pi n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Nhưng

$$\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2\right)$$

$$= 1+\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Do đó

$$a_n = \cos\left(\pi n+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}$$

khi $n \to \infty$. Bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}$ bằng 1, vậy bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho bằng 1.

18. 1) Ta có công thức

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

Nếu ta tính gần đúng bởi công thức

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

thì sai số tuyệt đối phạm phải là

$$|R_n(x)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}|x|^{n+1},$$

trong đó $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$. Thay $x = \frac{1}{2}$, ta có

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{1!2} + \frac{1}{2!2^2} + \dots + \frac{1}{n!2^n},$$

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{3}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Ta cần xác định n để $\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < 10^{-4}$. Ta có

$$\left|R_4\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{3}{5!2^5} = \frac{1}{1280};$$

$$\left|R_5\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{3}{6!2^6} = \frac{1}{15360} \le 10^{-4}.$$

Vậy ta lấy n = 5, do đó

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{1!2} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} + \frac{1}{4!2^4} + \frac{1}{5!2^5} =$$

$= 1{,}00000 + 0{,}50000 + 0{,}12500 + 0{,}02083 + 0{,}00260 + 0{,}00026$
$= 1{,}6487.$

2) Áp dụng công thức khai triển $(1+x)^{\frac{1}{5}}$ với x = 0,1, ta được

$$\sqrt[5]{1{,}1} = (1+0{,}1)^{\frac{1}{5}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{5}\cdot(0{,}1) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot(0{,}1)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)\cdot(0{,}1)^3 + \dots =$$

$$= 1 + 0{,}02 - 0{,}0008 + 0{,}00004 - \dots$$

Vì ta có một chuỗi số đan dấu thoả mãn các điều kiện của định lí Leibnitz, mà số hạng thứ tư đã nhỏ hơn 0,0001, nên

$$\sqrt[5]{1,1} \approx 1 + 0,02 - 0,0008 = 1,0192.$$

3) Áp dụng công thức khai triển ln(1 + x) với x = 0,04, ta được

$$\ln(1,04) = \ln(1+0,04) = 0,04 - \frac{1}{2}(0,04)^2 + \frac{1}{3}(0,04)^3 - \cdots$$

$$= 0,04 - 0,0008 + 0,00002 - \cdots$$

Vì ta được một chuỗi số đan dấu thoả mãn các điều kiện của định lí Leibniz mà số hạng 0,00002 đã nhỏ hơn 0,0001 nên ta chỉ cần tính tổng của 2 số hạng đầu. Ta được

$$\ln(1,04) \approx 0,04 - 0,0008 = 0,0392$$

19. 1) Từ công thức khai triển hàm số e^x, ta có

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots,\ R = \infty.$$

Do đó

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!5} - \frac{1}{3!7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)} + \cdots$$

Vế phải là một chuỗi số đan dấu thoả mãn các điều kiện của định lí Leibniz, nên nếu ta tính gần đúng nó bằng tổng của n số hạng đầu tiên thì sai số tuyệt đối phạm phải $|R_n|$ được xác định bởi

$$|R_n| \le \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}.$$

Cần xác định n để

$$\frac{1}{(n+1)!(2n+3)} \le 10^{-3}.\ \text{Do đó } n \ge 4.\ \text{Vậy}$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216}$$

$$\approx 1 - 0,3333 + 0,1 - 0,0238 + 0,0046$$

$$\approx 0,747.$$

2) Ta có

$$\operatorname{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,\ R = \infty.$$

Do đó

$$\operatorname{sh}(x^2) = x^2 + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \cdots + \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Vậy

$$\int_0^1 \operatorname{sh}(x^2)dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3!7} + \frac{1}{5!11} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!(4n+3)} + \cdots \qquad (*)$$

Đặt $u_n = \dfrac{1}{(2n+1)!(4n+3)}\cdot$ Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4n+3}{4n+7}\cdot\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \le$$

$$\le \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \le \frac{1}{(2+2)(2+3)} =$$

$$= \frac{1}{20} \quad \forall n \ge 1.$$

Do đó

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdots\frac{u_2}{u_1}\cdot u_1 \le \left(\frac{1}{20}\right)^{n-1} u_1.$$

Nếu gọi R_n là phần dư thứ n của chuỗi số (*), ta có

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k \le u_1.\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{20}\right)^{k-1} = \frac{u_1}{19.(20)^{n-2}}.$$

Nhưng $u_1 = \dfrac{1}{3!7} = \dfrac{1}{42}$, nên $R_n \le \dfrac{1}{798.(20)^{n-2}}.$

Nếu lấy n = 3, ta có

$$R_3 \leq \frac{1}{15960} < 7.10^{-5}.$$

Vậy

$$\int_0^1 \mathrm{sh}(x^2)dx \approx \frac{1}{3}+\frac{1}{42}+\frac{1}{1320}+\frac{1}{75600}$$

$$\approx 0,33333+0,02381+0,00076+0,00001$$

$$\approx 0,3579$$

20. Ta có

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\ R=\infty.$$

Do đó

$$\cos 18^o = \cos\frac{\pi}{10} =$$

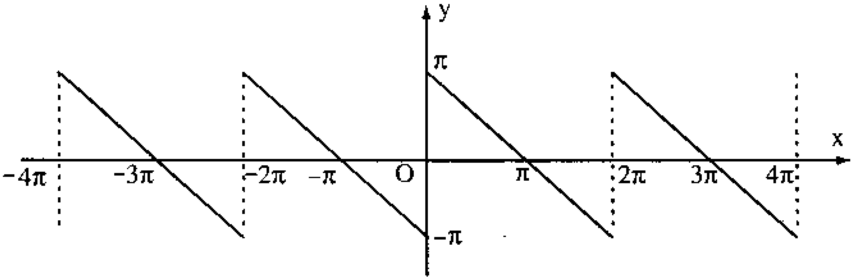
$$= 1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n}+\cdots$$

Vế phải là một chuỗi số đan dấu thoả mãn các điều kiện của định lí Leibniz. Vì $\frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6 < 0,0001$, nên chỉ cần tính tổng của 3 số hạng đầu của chuỗi số trên. Ta có

$$\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \approx 0,09870\ ;\ \left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \approx 0,03101$$

Vậy
$$\cos 18^o \approx 1-\frac{0,09870}{2}+\frac{0,03101}{24} \approx 0,9519.$$

21. Đồ thị của f(x) được cho ở hình 24. Hàm số ấy thoả mãn các điều kiện của định lí Dirichlet, nên có thể khai triển được thành chuỗi Fourier. Vì hàm số f(x) lẻ nên $a_n = 0$, n = 0, 1, 2, ...



Hình 24

Ta tính b_n. Bằng phương pháp tích phân từng phần, ta được

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx dx = 2\int_0^{\pi}\sin nx dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx dx =$$

$$= -2\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right] =$$

$$= \frac{2}{n}[1-(-1)^n] + \frac{2}{\pi}\left[\pi\cdot\frac{(-1)^n}{n} - \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{n},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Vậy

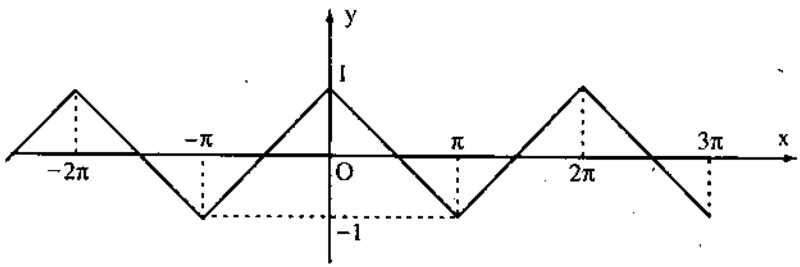
$$f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots\right)$$

với $x \neq 2n\pi$. Tại $x = 2n\pi$, tổng của chuỗi Fourier ấy bằng

$$\frac{1}{2}[f(2n\pi + 0) + f(2n\pi - 0)] = 0.$$

22. Đồ thị của f(x) được cho ở hình 25. Hàm số f(x) chẵn, nên $b_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Tính a_n, ta được

$$a_o = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(x - \frac{x^2}{\pi}\right)\Big|_0^{\pi} = 0$$



Hình 25

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx - \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\cos nx dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}\left[x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi^2 n^2}[1-(-1)^n] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{8}{\pi^2 n^2} & \text{nếu n lẻ} \\ 0 & \text{nếu n chẵn.} \end{cases}$$

Vậy

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \dots\right]$$

$\forall x \in \mathbf{R}$, vì f(x) liên tục tại mọi $x \in \mathbf{R}$. Cho x = 0, ta được

$$1 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Do đó

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

23. Đồ thị của f(x) được cho ở hình 26. Hàm số f(x) chẵn nên $b_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Tính a_n, ta được

$$a_o = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(x - \frac{x^3}{3\pi^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\cos nx dx$$

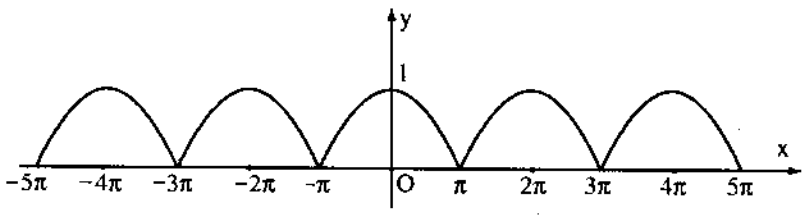
Dùng phương pháp tích phân từng phần hai lần để tính tích phân ấy, ta được

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx - \frac{2}{\pi^3}\int_0^{\pi}x^2\cos nx dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi^3}\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}2x\frac{\sin nx}{n}dx\right] = \frac{4}{\pi^3 n}\int_0^{\pi}x\sin nx dx =$$

$$= \frac{4}{\pi^3 n}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi^3 n}\left[\frac{(-\pi)(-1)^n}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\Bigg|_0^{\pi}\right] = (-1)^{n+1}\frac{4}{\pi^2 n^2}.$$



Hình 26

Vì f(x) thoả mãn các điều kiện của định lí Dirichlet và liên tục tại mọi $x \in \mathbf{R}$, nên ta có $\forall x \in \mathbf{R}$

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2} = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \qquad (*)$$

Thế $x = \pi$ vào hai vế của đẳng thức (*), ta được

$$0 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Thế $x = 0$ vào hai vế của đẳng thức (*), ta được

$$1 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Áp dụng công thức Parseval vào hàm số $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$, ta được

$$\frac{4}{9} + \frac{8}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)^2 dx = \frac{8}{15}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8}\left(\frac{8}{15} - \frac{4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

24. Đồ thị của f(x) được cho ở hình 27. Hàm số f(x) lẻ nên $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Tính b_n, ta được

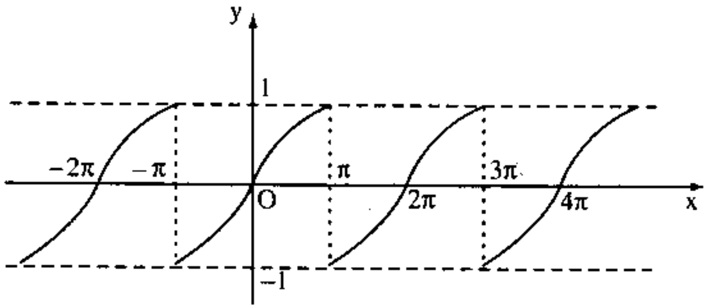
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{1}{2} - n\right)x - \cos\left(\frac{1}{2} + n\right)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\sin\left(\frac{1}{2} - n\right)x}{\frac{1}{2} - n}\right|_0^{\pi} - \left.\frac{\sin\left(\frac{1}{2} + n\right)x}{\frac{1}{2} + n}\right|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right)}{\frac{1}{2} - n} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)}{\frac{1}{2} + n}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos n\pi}{\frac{1}{2}-n}-\frac{\cos n\pi}{\frac{1}{2}+n}\right]=\frac{1}{\pi}(-1)^n\left(\frac{2}{1-2n}-\frac{2}{1+2n}\right)$$

$$=\frac{8}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{n}{4n^2-1}.$$



Hình 27

Hàm số f(x) liên tục và có đạo hàm liên tục tại mọi $x \neq (2n+1)\pi$, nó thoả mãn các điều kiện của định lí Dirichlet nên khai triển được thành chuỗi Fourier. Ta có $\forall x \neq (2n+1)\pi$

$$f(x)=\sin\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{4n^2-1}\sin nx.$$

Tại $x = (2n+1)\pi$, tổng của chuỗi Fourier ấy bằng 0.

25. Đồ thị của f(x) được cho ở hình 28. Hàm số f(x) chẵn, nên $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Tính a_n, ta được

$$a_o=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin ax}{a}\right)\Bigg|_0^{\pi}=2\frac{\sin\pi a}{\pi a}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(a+n)x + \cos(a-n)x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n} + \frac{\sin(a-n)\pi}{a-n}\right].$$

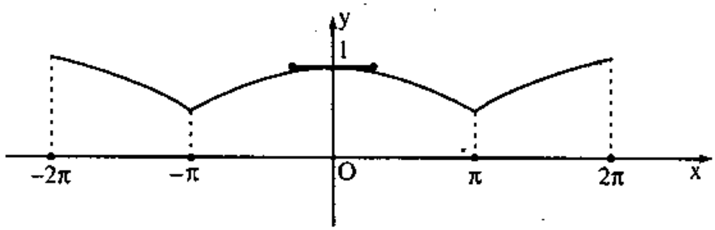
Nhưng

$$\sin(a+n)\pi = \sin(a-n)\pi = (-1)^n \sin a\pi,\ \forall n \in \mathbf{N}$$

Do đó

$$a_n = (-1)^n \frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right) = (-1)^n \frac{2a\sin \pi a}{\pi(a^2 - n^2)},\ n = 1, 2, \ldots$$

Hàm số f(x) thoả mãn các điều kiện của định lí Dirichlet, liên tục trên **R**, nên ta có $\forall x \in \mathbf{R}$



Hình 28

$$f(x) = \frac{\sin \pi a}{\pi a} + \frac{2a\sin \pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nx}{a^2 - n^2}.$$

Thế $x = \pi$ vào hai vế của đẳng thức ấy, ta được

$$\cos \pi a = \frac{\sin \pi a}{\pi a} + \frac{2a\sin \pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos n\pi}{a^2 - n^2}.$$

Nhưng $(-1)^n \cos n\pi = 1$, nên nếu chia hai vế cho $\sin a\pi$ ($\neq 0$ vì $0 < a < 1$), ta được

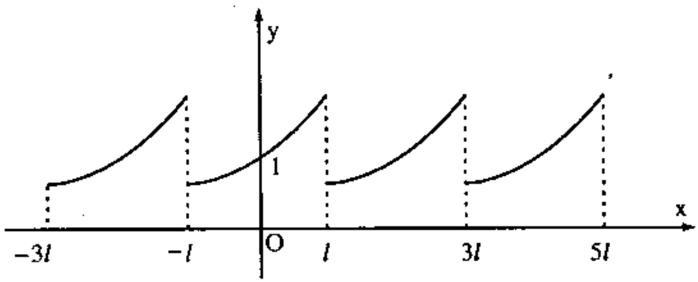
$$\text{cotg}\pi a = \frac{1}{\pi a} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2 - n^2}.$$

26. Đồ thị của f(x) được cho ở hình 29. Vì f(x) thoả mãn các điều kiện của định lí Dirichlet, nên tại mọi $x \neq (2n+1)l$, ở đó f(x) liên tục, ta có $f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$, trong đó

$$a_o = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} e^x dx = \frac{e^l - e^{-l}}{l}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} e^x \cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} e^x \sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 1, 2, ...$$



Hình 29

Đặt

$$I_n := \int_{-l}^{l} e^x \cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ J_n := \int_{-l}^{l} e^x \sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Ta có

$$I_n = e^x \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_{-l}^{l} - \int_{-l}^{l}\frac{l}{n\pi}e^x \sin\frac{n\pi x}{l}dx = -\frac{l}{n\pi}J_n =$$

$$= -\frac{l}{n\pi}\left[-e^x \frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} + \frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l} e^x \cos\frac{n\pi x}{l}dx\right] =$$

$$= \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 (e^l \cos n\pi - e^l \cos(-n\pi)) - \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 I_n.$$

Do đó

$$I_n\left(1 + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\right) = (-1)^n (e^l - e^{-l})\frac{l^2}{n^2\pi^2}$$

$$I_n = (-1)^n \left(e^l - e^{-l}\right)\frac{l^2}{l^2 + n^2\pi^2}$$

$$J_n = -(-1)^n (e^l - e^{-l})\pi l \frac{n}{l^2 + n^2\pi^2}.$$

Suy ra

$$a_n = (-1)^n (e^l - e^{-l})\frac{l}{l^2 + n^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, ...$$

$$b_n = -(-1)^n (e^l - e^{-l})\pi \frac{n}{l^2 + n^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, ...$$

Vậy ta có $\forall x \neq (2n+1)l$

$$f(x) = \frac{e^l - e^{-l}}{2l} + l(e^l - e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos\frac{n\pi x}{l}}{l^2 + n^2\pi^2} -$$

$$-\pi(e^l - e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^2 + n^2\pi^2}$$

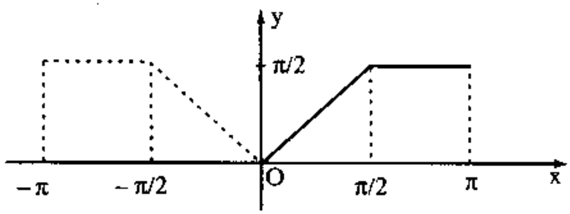
Tại $x = (2n + 1)l$, tổng của chuỗi Fourier ấy bằng

$$\frac{1}{2}(e^l + e^{-l}) = \text{ch}l.$$

27. Đồ thị của hàm số f(x) được cho ở hình 30. Ta biết rằng có vô số cách xây dựng hàm số g(x) tuần hoàn có chu kì lớn hơn hay bằng π, sao cho $g(x) = f(x)\ \forall x \in [0, \pi]$. Trong lời giải này, trước hết ta thác triển chẵn hàm số f(x) bằng cách đặt

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{nếu } 0 \le x \le \pi \\ f(-x) & \text{nếu } -\pi \le x \le 0 \end{cases}$$

rồi gọi g(x) là hàm số tuần hoàn có chu kì 2π, có giá trị bằng $\bar{f}(x)$ nếu $-\pi \le x \le \pi$. Hàm số g(x) ấy thoả các điều kiện của định lí Dirichlet và liên tục trên **R**, do đó có thể khai triển được thành chuỗi Fourier trên **R**. Vì g(x) chẵn, nên $b_n = 0$, n = 1, 2, ... Tính a_n, ta được



Hình 30

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} dx\right] = \frac{3\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}\cos nx dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{n} dx + \frac{\pi}{2}\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right] =$$

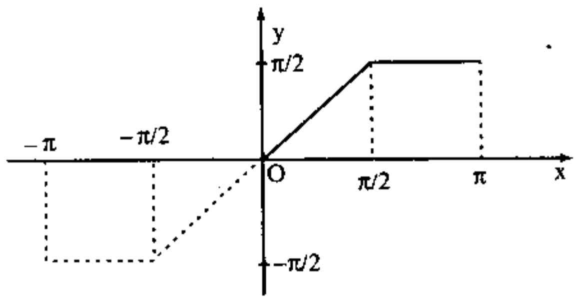
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\cos nx}{n^2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right) = -\frac{4\sin^2\frac{n\pi}{4}}{\pi n^2}$$

Do đó, ta có $\forall x \in \mathbf{R}$

$$g(x) = \frac{3\pi}{8} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{\pi n^2}\cos nx.$$

Nhưng g(x) = f(x) nếu $x \in [0, \pi]$, nên chuỗi Fourier trên có tổng là f(x) nếu $x \in [0, \pi]$.



Hình 31

Ta cũng có thể thác triển lẻ hàm số f(x) bằng cách đặt

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{nếu } 0 \le x \le \pi \\ -f(-x) & \text{nếu } -\pi \le x \le 0 \end{cases}$$

(hình 31, gọi h(x) là hàm số tuần hoàn có chu kì 2π, có giá trị bằng $\bar{f}(x)$ nếu $-\pi \le x \le \pi$. Hàm số h(x) ấy cũng thoả mãn các điều kiện của định lí Dirichlet, nên cũng có thể khai triển được thành chuỗi Fourier, đó cũng là chuỗi Fourier của hàm số f(x). Nhưng vì h(x) có gián đoạn loại 1 tại $x = (2n + 1)\pi$, nên hệ số Fourier của nó là những vô cùng bé có cấp của $\frac{1}{n}$ khi $n \to \infty$, sự hội tụ của nó chậm hơn sự hội tụ của chuỗi Fourier xây dựng ở trên.

28. 1) Đặt $u_n(x) = \frac{\sin^3 nx}{n!}$. Ta có

$$|u_n(x)| = \frac{|\sin^3 nx|}{n!} \le \frac{1}{n!} \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ hội tụ (do quy tắc D'Alembert), nên chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên **R**. Các số hạng $u_n(x)$ liên tục trên **R**, do đó f(x) liên tục trên **R**. Ta cũng có $\forall x \in \mathbf{R}$

$$|u_n'(x)| = \frac{|3\sin^2 nx \cos nx|}{(n-1)!} \le \frac{3}{(n-1)!}.$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!}$ hội tụ, nên chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ hội tụ đều trên **R**, do đó f(x) khả vi trên **R** và ta có

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sin^2 nx \cos nx}{(n-1)!}.$$

Hơn nữa, vì các số hạng $u'_n(x)$ liên tục trên **R** nên f'(x) cũng liên tục trên **R**.

Bạn đọc có thể chứng minh rằng hàm số f(x) có đạo hàm mọi cấp.

2) Ta có

$$\sin^3 nx = \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{8i}(6i\sin nx - 2i\sin 3nx) =$$

$$= \frac{3}{4}\sin nx - \frac{1}{4}\sin 3nx.$$

Do đó

$$f(x) = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3nx}{n!}.$$

Vế phải của đẳng thức trên chính là chuỗi Fourier của hàm số f(x), trong đó $b_n = \dfrac{3}{4.n!}$ nếu $n \neq 3k$, $k \in N$

$$b_{3n} = \frac{3}{4.(3n)!} - \frac{1}{4.n!} \text{ với } n \geq 1.$$

Để tìm biểu thức của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n!}$, ta nhận xét rằng

$$\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix}).$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n!} \right).$$

Đặt $z = e^{ix}$, ta được

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Vậy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} = \mathrm{Im}(e^{e^{ix}}) = \mathrm{Im}(e^{\cos x + i \sin x}) = \mathrm{Im}(e^{\cos x}.e^{i \sin x})$$

$$= \mathrm{Im}\left[e^{\cos x}(\cos(\sin x) + i\sin(\sin x)) \right]$$

$$= e^{\cos x} \sin(\sin x).$$

Tương tự

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3nx)}{n!} = e^{\cos x} \sin(\sin 3x).$$

Suy ra

$$f(x) = \frac{3}{4} e^{\cos x} \sin(\sin x) - \frac{1}{4} e^{\cos 3x} \sin(\sin 3x).$$

MỘT SỐ BÀI TẬP HỖN HỢP

Bài 1

1) Cho dãy $\{u_n\}$, $n \geq 1$ định nghĩa bởi hệ thức truy hồi

$$u_{n+1} = u_n - 2u_n^3$$

với u_1 cho trước và thoả $0 < u_1 < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chứng minh rằng $0 < u_n < \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \forall n \geq 1$.

Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$, $n \geq 1$ hội tụ và tìm giới hạn của dãy đó.

2) Xét dãy $\{v_n\}$, $n \geq 1$ định nghĩa bởi

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \text{ với } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng dãy có số hạng tổng quát V_n :

$$V_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

dần tới $+\infty$.

b) Chứng minh rằng $v_n \leq \dfrac{2}{1-2u_1^2}u_n$ và suy ra dáng điệu của dãy có số hạng tổng quát

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

3) Chứng minh rằng dãy $\{w_n\}$, $n \geq 1$ định nghĩa bởi :

$$w_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \text{ hội tụ đến 4.}$$

4) a) Chứng minh rằng nếu một dãy $\{a_n\}$; $n \geq 1$ hội tụ đến l thì dãy $\{b_n\}$, $n \geq 1$ định nghĩa bởi

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$$

cùng hội tụ đến l ;.

b) Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{n}\,u_n = 1 \text{ (nghĩa là } u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}\text{)}.$$

Bài 2

Cho $x \mapsto g(x)$ là một hàm số lẻ, xác định và 4 lần khả vi trên khoảng $[-a, a]$ với $a > 0$, cố định.

1) Xét tính chẵn, lẻ của g', g'', $g^{(3)}$, $g^{(4)}$ và tính các giá trị $g(0)$; $g''(0)$; $g^{(4)}(0)$?

2) Chứng minh rằng tồn tại một số c, $0 < c < a$ sao cho

$$g(a) = \frac{a}{3}\left[g'(a) + 2g'(0)\right] - \frac{a^4}{72}g^{(4)}(c).$$

Gợi ý : có thể xét hàm phụ :

$$\varphi(x) = g(x) - \frac{x}{3}\left[g'(x) + 2g'(0)\right] + \frac{x^4}{72}A$$

với A là một hằng số được chọn sao cho $\varphi(a) = 0$, rồi tính φ', φ'', $\varphi^{(3)}$.

Bài 3

1) Viết khai triển hữu hạn đến bậc 3, khi $x \to 0$ của biểu thức $e^x \mathrm{tg}x$.

2) Xét hàm số f(x) xác định trên I : $=\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ với $f(x) = e^x \mathrm{tg}x$.

Chứng minh rằng trên I, f khả vi vô hạn lần và $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$.

Suy ra f có hàm ngược $g : t \mapsto x = g(t)$ khả vi vô hạn lần trên **R** và có khai triển hữu hạn ở mọi bậc khi $t \to 0$. Viết khai triển hữu hạn của g đến bậc 3 (dùng hệ thức $f(g(t)) = t$).

3) Cho $n \in \mathbf{N}$, chứng minh rằng trong khoảng $\left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình $e^x \mathrm{tg}x = 1$ chỉ có một nghiệm và kí hiệu nghiệm đó là $n\pi + \alpha_n$. Biểu diễn α_n theo hàm số g đã định nghĩa ở trên.

Chứng minh rằng $\alpha_n \sim e^{-n\pi}$ khi $n \to +\infty$.

Đặt $\beta_n := e^{2n\pi}(\alpha_n - e^{-n\pi})$; chứng minh rằng β_n có giới hạn hữu hạn l và tìm l ; viết một biểu thức tương đương với $\beta_n - l$.

4) Tổng quát hơn, cho f(x) là một hàm số khả vi vô hạn lần trên một khoảng $J := [a, b]$, $a < 0 < b$ sao cho $f(0) = 0$; $f'(0) \neq 0$.

Chứng minh rằng trên một khoảng $K := (\alpha, \beta)$, $\alpha < 0 < \beta$ nào đó, f có một hàm ngược g và g cũng có khai triển hữu hạn ở mọi bậc tại lân cận 0. Hãy nêu cách xác định khai triển hữu hạn đến bậc n của g(t) khi biết khai triển hữu hạn của f(x) cũng ở bậc n.

Bài 4

Xét hàm số $f(x) := \ln(1 - 2a\cos x + a^2)$

trong đó a là một số thực cho trước sao cho $|a| \neq 1$.

1) a) Xét sự biến thiên của hàm số f.

b) Tìm một cận trên và cận dưới của tích phân :

$$g(a) := \int_0^{\pi} f(x)dx$$

suy ra :

$$\lim_{a \to 0} g(a) = 0.$$

2) a) Chứng minh các hệ thức

$$g(a) = g(-a)\ ;\ \int_0^{2\pi} f(x)dx = 2g(a)\ ;\ g(a) = \frac{1}{2}g(a^2).$$

b) Chứng minh rằng nếu $|a| < 1$ thì $g(a) = 0$.

c) Tính g(a) khi $|a| > 1$.

3) Giả sử $a > 0$.

a) Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbf{R} : |a - e^{ix}|^2 = e^{f(x)}$.

b) Đặt $P_n := \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - 2a\cos\frac{2k\pi}{n} + a^2\right)$.

Chứng minh rằng $P_n = |a^n - 1|^2$.

c) Tìm $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln P_n\right)$.

d) Suy ra, với $a \neq 1$, giá trị của tích phân

$$\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)dx.$$

Bài 5

1) Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Giả sử tồn tại một số nguyên dương n_o sao cho ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}\ \ \forall n \geq n_o.$$

Chứng minh rằng nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, còn nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì.

2) Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Giả sử rằng khi $n \to \infty$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

trong đó $a \in \mathbf{R}$. Bằng cách so sánh với chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, trong đó $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, hãy chứng minh rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nếu $a > 1$, phân kì nếu $a < 1$ (quy tắc Duhamel).

3) Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Giả sử rằng khi $n \to \infty$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

trong đó $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$. Bằng cách so sánh với chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, trong đó $v_n = \frac{1}{n+c}$, $c \in \mathbf{R}$, hãy chứng minh rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nếu $a > 1$, phân kì nếu $a \le 1$. (Quy tắc Gauss).

4) Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số có số hạng tổng quát u_n sau :

a) $u_n = \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \ldots (3n)}\right)^2$

b) $u_n = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha-n+1)}{n!}$, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$

c) $u_n = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}\right)^2$.

Bài 6

1) Chứng minh rằng với $|t|<1,\ x\in\mathbf{R}$ ta có

$$\operatorname{arctg}\frac{t\sin x}{1-t\cos x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\sin nx \qquad (*)$$

Tính

$$I_n=\int_0^{\pi}\operatorname{arctg}\frac{t\sin x}{1-t\cos x}\sin nx\,dx$$

với n nguyên dương, $|t|<1$.

2) Hệ thức (*) có còn đúng khi $|t|=1$ không ? Gọi f(x) là hàm số tuần hoàn chu kì 2π xác định bởi

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Tìm biểu thức của f(x) khi $0 < x < 2\pi$. Chứng minh rằng chuỗi hàm số trên không hội tụ đều trên **R**, cũng không hội tụ tuyệt đối trừ tại $x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, nhưng hội tụ đều trên đoạn $[\delta, 2\pi-\delta]$ với $0<\delta<\pi$. Bằng tính toán trực tiếp hãy khai triển hàm số f(x) thành chuỗi Fourier.

3) Giả sử

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k} \text{ với } x\in(0,\pi).$$

Tìm nghiệm dương nhỏ nhất x_n của phương trình

$$S'_n(x)=0.$$

Chứng tỏ rằng x_n là điểm cực đại của $S_n(x)$.

4) Tính tổng của các chuỗi Fourier

a) $f_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$

b) $f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$

c) $f_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$.

LỜI GIẢI

Bài 1

1) Với n = 1, hệ thức truy hồi cho :

$$u_2 = u_1 - 2u_1^3 = u_1(1 - 2u_1^2).$$

Vì $0 < u_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$, suy ra $0 < 1 - 2u_1^2 < 1$, do đó :

$$0 < u_2 < u_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bằng lập luận quy nạp và giả sử $0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n \geq 1$ ta có

$$0 < u_n^2 < \frac{1}{2};\ 0 < 1 - 2u_n^2 < 1 \text{ và}$$

$$0 < u_{n+1} = u_n(1 - 2u_n^2) < u_n < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy dãy $\{u_n\}$ giảm, bị chặn dưới bởi số 0 và bị chặn trên bởi $\frac{1}{\sqrt{2}}$, do đó $\{u_n\}$ hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l, \text{ với } l \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Mặt khác, hàm số $f(x) = x - 2x^3$ liên tục, và hệ thức truy hồi cho khi $n \to \infty$:

$$l = l - 2l^3 \text{ suy ra } l = 0.$$

2) a) $V_n = \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$

$$V_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_1}.$$

Khi $n \to +\infty$, $u_{n+1} \to 0^+$, $\frac{1}{u_{n+1}} \to +\infty$ và

$$V_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n \to +\infty.$$

b) $v_n = \frac{1}{u_n - 2u_n^3} - \frac{1}{u_n} = \frac{1-(1-2u_n^2)}{u_n(1-2u_n^2)} = \frac{2u_n}{1-2u_n^2}$;

vì $u_n \neq 0$.

Như đã biết $0 < u_n < u_1$, suy ra :

$$0 < u_n^2 < u_1^2,\ -u_1^2 < -u_n^2,\ 1-2u_n^2 > 1-2u_1^2.$$

Vậy : $0 < \frac{1}{1-2u_n^2} < \frac{1}{1-2u_1^2}$ và $0 < v_n < \frac{2}{1-2u_1^2}u_n$.

Suy ra

$$u_n > kv_n,\ \text{với}\ k = \frac{1-2u_1^2}{2} > 0.$$

Vậy :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n > kV_n,\ \text{với}\ V_n \to +\infty.$$

Do đó

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

3) $w_n = \frac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} = \frac{u_n^2 - u_n^2(1-2u_n^2)^2}{u_n^2(1-2u_n^2)^2} = \frac{4(1-u_n^2)}{(1-2u_n^2)^2}$

Khi $n \to +\infty$; $u_n \to 0$ do đó

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 4.$$

4) a) Theo giả thiết $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ nên có thể đặt $a_n = l + \alpha_n$; với $\alpha_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Khi đó : $b_n = l + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$; vì $\alpha_n \to 0$ nên để chứng minh điều khẳng định của mệnh đề chỉ cần chứng minh $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \to 0.$

Thật vậy, với $n \geq n_o + 1$, ta có

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_o}\alpha_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n_o+1}^{n}\alpha_k$$

$$|S_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_o+1}^{n}|\alpha_k|$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_o$ sao cho $n \geq n_o \Rightarrow |\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2}$, suy ra

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n_o+1}^{n}|\alpha_k| < \frac{n - n_o}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

và $\exists n_1$ sao cho $n \geq n_1 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_o}|\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2}$, với n_o cố định.

Vậy, với $n \geq n_2 = \max(n_o, n_1) \Rightarrow |S_n| < \varepsilon$ do đó $S_n \to 0$ và :

$$a_n \to l \Rightarrow b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k \to l$$

b) Áp dụng kết quả a) vào dãy w_n : vì $w_n \to 4$

$$z_n = \frac{1}{n}(w_1 + w_2 + \ldots + w_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_1^2}\right) \to 4.$$

Vì $u_{n+1}^2 \to 0^+$ và $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_1^2} \sim \frac{1}{u_{n+1}^2}$ khi $n \to +\infty$ nên :

$$nu_{n+1}^2 \sim \frac{1}{4},\ u_{n+1}^2 \sim \frac{1}{4n} \sim \frac{1}{4(n+1)},\ \text{hay}$$

$$u_n^2 \sim \frac{1}{4n}.$$

Vì $u_n > 0$, suy ra :

$$u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}},\ n \to +\infty.$$

Bài 2

1) $g(-x) = -g(x) \Rightarrow -g'(-x) = -g'(x),\ g'(-x) = g'(x)$

Vậy g' là hàm số chẵn.

Cũng vậy :

$$-g''(-x) = g''(x) \Rightarrow g'' \text{ là hàm số lẻ.}$$

Tương tự : $g^{(3)}$ chẵn và $g^{(4)}$ lẻ.

Từ biểu thức $g(-x) = -g(x)$, với $x = 0$ suy ra

$$g(0) = -g(0),\ \text{vậy } g(0) = 0.$$

Tương tự : $g''(0) = 0$ và $g^{(4)}(0) = 0$.

2) Gọi $\varphi(x) := g(x) - \frac{x}{3}[g'(x) + 2g'(0)] + \frac{x^4}{72}A$

trong đó A là hằng số được chọn một cách duy nhất sao cho $\varphi(a) = 0$, phương trình (với ẩn A) :

$$g(a) - \frac{a}{3}[g'(a) + 2g'(0)] + \frac{a^4}{72}A = 0 \qquad (1)$$

có nghiệm duy nhất vì $\frac{a^4}{72} \neq 0$.

Với A đã được chọn, ta tính các đạo hàm :

$$\varphi'(x) = g'(x) - \frac{1}{3}[g'(x) + 2g'(0)] - \frac{x}{3}g''(x) + \frac{x^3}{18}A$$

$$= \frac{2}{3}[g'(x) - g'(0)] - \frac{x}{3}g''(x) + \frac{x^3}{18}A.$$

$$\varphi''(x) = \frac{2}{3}g''(x) - \frac{1}{3}g''(x) - \frac{x}{3}g^{(3)}(x) + \frac{x^2}{6}A$$

$$= \frac{1}{3}[g''(x) - xg^{(3)}(x)] + \frac{x^2}{6}A.$$

$$\varphi^{(3)}(x) = \frac{1}{3}[g^{(3)}(x) - g^{(3)}(x) - xg^{(4)}(x)] + \frac{x}{3}A$$

$$= \frac{x}{3}[A - g^{(4)}(x)].$$

Dễ thấy rằng:

$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$. Áp dụng công thức Taylor đến bậc 3, đối với hàm số φ trên khoảng $[0, a]$ được :

$$\varphi(a) = \varphi(0) + a\varphi'(0) + \frac{a^2}{2}\varphi''(0) + \frac{a^3}{6}\varphi^{(3)}(c)$$

với $c \in (0, a)$.

Suy ra

$$0 = \frac{a^3}{6} \cdot \frac{c}{3}[A - g^{(4)}(c)].$$

Vì $a \neq 0$; $c \neq 0$ suy ra $A = g^{(4)}(c)$.

Thế biểu thức A bởi $g^{(4)}(c)$ vào (1) ta được :

$$g(a) = \frac{a}{3}[g'(a) + 2g'(0)] - \frac{a^4}{72}g^{(4)}(c) \; ; \; 0 < c < a.$$

Bài 3

1) Ta biết rằng khi $x \to 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$tgx = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).\ \text{Do đó :}$$

$$e^x tgx = x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + o(x^3)$$

(Chú ý rằng trong khai triển của e^x không cần viết số hạng x^3 vì $e^x tgx$ là vô cùng bé bậc nhất khi $x \to 0$).

2) $f'(x) = e^x tgx + e^x(1 + tg^2x) > 0 \ \ \forall x$, vì đa thức $u^2 + u + 1$ luôn dương, do đó f tăng trên $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (xem bảng dưới đây)

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f(x)	‖	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$	‖

Vậy f có một hàm ngược g xác định, tăng trên **R** và g(0) = 0.

Mặt khác, f là tích của hai hàm số khả vi vô hạn lần trên $I := \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, do đó bản thân f cũng khả vi vô hạn lần trên I.

Ngoài ra, t = f(x) ⇔ x = g(t) nên ta có $g'(t) = \frac{1}{f'(x)}$ xác định trên **R**, vì f'(x) > 0, và :

$$g''(t) = -\frac{f''(x)}{f'^2(x)}$$

bản thân g'' cũng khả vi v.v..., cứ thế tiếp tục, suy ra g(t) khả vi vô hạn lần trên **R**, do đó có thể khai triển hữu hạn g(t) đến mọi bậc khi $t \to 0$, và dùng công thức Maclaurin ta được :

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2!}g''(0) + ... + \frac{t^n}{n!}g^{(n)}(0) + o(t^n).$$

Vì $g(0) = 0,\ g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1$ nên khai triển của g(t) có dạng

$$g(t) = t + at^2 + bt^3 + o(t^3).$$

Để xác định các hệ số a, b ta có thể dùng công thức của khai triển Maclaurin, tuy nhiên, để đơn giản hơn, ta tận dụng tính duy nhất của khai triển và viết

$$f(g(t)) = g(t) + g^2(t) + \frac{5}{6}g^3(t) + o(t^3)$$

$$= t + at^2 + bt^3 + (t^2 + 2at^3) + \frac{5}{6}t^3 + o(t^3)$$

$$= t + (a+1)t^2 + \left(b + 2a + \frac{5}{6}\right)t^3 + o(t^3) = t.$$

Suy ra (bằng cách cho triệt tiêu các hệ số của t^2 và t^3)

$$a = -1,\ b = \frac{7}{6}$$

và cuối cùng được :

$$g(t) = t - t^2 + \frac{7}{6}t^3 + o(t^3) \qquad (1)$$

3) α_n được định nghĩa từ biểu thức :

$$e^{n\pi+\alpha_n}\mathrm{tg}\alpha_n = 1,\ e^{\alpha_n}\mathrm{tg}\alpha_n = e^{-n\pi}, \text{ vậy}$$

$\alpha_n = g(e^{-n\pi})$, vì $\alpha_n \in I$. Khi $n \to +\infty$, $e^{-n\pi} \to 0$ và $\alpha_n \sim e^{-n\pi}$

theo (1). Khi đó : $\beta_n = e^{2n\pi}(\alpha_n - e^{-n\pi}) = \frac{1}{t^2}[g(t) - t]$,

nếu $t = e^{-n\pi} \to 0$

$g(t) - t \sim -t^2$ (theo (1)) và $\beta_n \to -1 = l$.

Cuối cùng

$$\beta_n - l = \beta_n + 1 = \frac{1}{t^2}[g(t) - t + t^2] \sim \frac{1}{t^2}.\frac{7}{6}t^3 = \frac{7}{6}t.$$

Vậy :

$$\beta_n - l \sim \frac{7}{6}e^{-n\pi}.$$

4) Nếu f khả vi vô hạn lần trên J : = (a, b) và $f'(0) \neq 0$, f' liên tục trên I và tồn tại một lân cận của 0, chẳng hạn $K := (\alpha, \beta)$, $a \leq \alpha < 0 < \beta \leq b$, sao cho f ' không đổi dấu và cùng dấu với f '(0) trên K, do đó f đơn điệu trên K và có một hàm ngược g.

Cũng lập luận như câu 2), có $g'(t) = \frac{1}{f'(x)}$, $g''(t) = -\frac{f''(x)}{f'^2(x)}$, v.v...

suy ra g khả vi vô hạn lần trên $(f(\alpha),\ f(\beta))$ và vì $f(0) = 0 \Rightarrow 0 = g(0)$ và g có khai triển hữu hạn ở mọi bậc :

$$g(t) = b_1(t) + b_2t^2 + ... + b_nt^n + o(t^n).$$

Ta sẽ dùng các hệ số a_j của khai triển của f rồi dùng phương pháp đồng nhất hệ số để xác định các hệ số b_i, ta có :

$$f(g(t)) = a_1(b_1t + b_2t^2 + ... + b_nt^n) + a_2(b_1^2t^2 + 2b_1b_2t^3 + ...)$$
$$+ a_3(b_1^3t^3 + 3b_1^2b_2t^4 + ...) + ... + a_nb_1^nt^n + o(t^n) = t.$$

Từ đó rút ra :

$$a_1b_1 = 1,\ a_1b_2 + a_2b_1^2 = 0,\ a_1b_3 + 2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3 = 0 \text{ v.v...},$$

suy ra lần lượt :

$$b_1 = \frac{1}{a_1},\ b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3},\ \text{v.v...}$$

Bài 4

1) a) f xác định khi $1 - 2a\cos x + a^2 > 0$.

Vì $1 - 2a\cos x + a^2 = (a - \cos x)^2 + \sin^2 x \geq 0$ và biểu thức này chỉ triệt tiêu khi $\cos x = a$ và $\sin x = 0$, và vì $a \neq \pm 1$ nên điều đó là không thể, do vậy miền xác định của f là **R**.

Vì f chẵn, chu kì 2π nên chỉ cần khảo sát trên $[0, \pi]$, ta có :

$$f'(x) = \frac{2a\sin x}{1 - 2a\cos x + a^2}.$$

Dấu của $f'(x)$ là dấu của a khi $a \neq 0$ và $x \in (0, \pi)$.

$$f'(0) = f'(\pi) = 0.$$

Với $a = 0$, $f(x) = 0\ \forall x$.

Với $a \neq 0$ có 2 bảng biến thiên tuỳ theo dấu của a :

$a > 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'(x)	0	+		+	0
f(x)	$2\ln\|1-a\|$	$\nearrow$	$\ln(1+a^2)$	$\nearrow$	$2\ln\|1+a\|$

$a < 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'(x)	0	–		–	0
f(x)	$2\ln\|1-a\|$	$\searrow$	$\ln(1+a^2)$	$\searrow$	$2\ln\|1+a\|$

Muốn có đồ thị đầy đủ của f chỉ cần lấy đối xứng của đồ thị ứng với $[0, \pi]$ qua trục y và tịnh tiến theo trục hoành $2k\pi$.

b) Theo bảng biến thiên trên, f(x) gồm giữa $2\ln|1 - a|$ và $2\ln|1 + a|$, vậy $g(a) = \int_0^{\pi} f(x)dx$ gồm giữa $2\pi\ln|1 - a|$ và $2\pi\ln|1 + a|$ và mỗi cận này dẫn tới 0 khi $a \to 0$. Vậy

$$\lim_{a \to 0} g(a) = 0.$$

2) a) Có

$$g(-a) = \int_0^{\pi} \ln(1 + 2a\cos x + a^2)dx$$

Thực hiện phép đổi biến $x = \pi - t$, được

$$g(-a) = \int_{\pi}^{0} \ln(1 - 2a\cos t + a^2)(-dt) =$$

$$= \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos t + t^2)dt = g(a).$$

Ta viết

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx = g(a) + \varphi(a)$$

với $$\varphi(a) := \int_{\pi}^{2\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)dx.$$

Thực hiện phép đổi biến $x = \pi + a$ ta được

$$\varphi(a) = \int_0^{\pi} \ln(1 + 2a\cos u + a^2)du = g(-a) = g(a).$$

Suy ra :

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 2g(a).$$

Cuối cùng, so sánh $g(a^2)$ và $2g(a)$ có :

$$g(a^2) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2\cos x + a^4)dx$$

$$2g(a) = g(a) + g(-a)$$

$$= \int_0^\pi \ln[(1 - 2a\cos x + a^2)(1 + 2a\cos x + a^2)]dx$$

$$= \int_0^\pi \ln[(1 + a^2)^2 - 4a^2\cos^2 x]dx = \int_0^\pi \ln(1 + a^4 - 2a^2\cos 2x)dx$$

$$= \int_0^\pi \ln(1 + a^4 - 2a^2\cos y)dy = g(a^2) \text{ với } 2x = y.$$

Vậy : $g(a) = \frac{1}{2}g(a^2)$.

b) Với $|a| < 1$, ta viết :

$$g(a) = \frac{1}{2}g(a^2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}g(a^4) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}g(a^8), \ldots$$

Bằng quy nạp đơn giản suy ra :

$g(a) = \frac{1}{2^n}g(a^{2^n})\ \forall n$. Vì khi $n \to \infty$, $2^n \to +\infty$, $\frac{1}{2^n} \to 0$, $a^{2^n} \to 0$ (vì $|a| < 1$).

Vậy với $|a| < 1$, có

$$g(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}g(a^{2^n}) = 0$$

c) Với $|a| > 1$, đặt $a = \frac{1}{b}$, khi đó $|b| < 1$ và

$$g(a) = \int_0^\pi \ln\frac{b^2 - 2b\cos x + 1}{b^2}dx = g(b) - \int_0^\pi \ln b^2 dx = -2\pi\ln|b|$$

vì $g(b) = 0$, suy ra :

$$g(a) = 2\pi\ln|a|.$$

3) a) $a - e^{ix} = a - \cos x - i\sin x$

$$|a - e^{ix}|^2 = (a - \cos x)^2 + \sin^2 x = e^{f(x)}.$$

b) $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left|a - e^{2i\frac{k\pi}{n}}\right|^2 = \prod_{k=0}^{n-1} |a - \alpha_k|^2 = \left|\prod_{k=0}^{n-1}(a - \alpha_k)\right|^2.$

Vì với k = 0, 1, 2, ..., n −1. các α_k là những căn bậc n của đơn vị, nghĩa là n nghiệm của đa thức $z^n - 1$, do vậy, bằng $\prod_{k=0}^{n-1}(z - \alpha_k)$ và ta có :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(a - \alpha_k) = a^n - 1.$$

Vậy

$$P_n = |a^n - 1|^2.$$

c) Gọi $u_n = \frac{1}{n}\ln P_n = \frac{2}{n}\ln|a^n - 1|.$

Với $|a| < 1$, $a^n \to 0$, $|a^n - 1| \to 1$, $\ln|a^n - 1| \to 0$, $\frac{2}{n} \to 0$ và $u_n \to 0$.

Với $a > 1$, $a^n - 1 \to +\infty$, $\ln(a^n - 1) \to +\infty$ và u_n có dạng vô định ; tuy nhiên $\ln(a^n - 1) = \ln a^n + \ln\left(1 - \frac{1}{a^n}\right)$ và

$$\ln\left(1 - \frac{1}{a^n}\right) \to 0 \; ; \; \ln(a^n - 1) \sim \ln a^n = n\ln a.$$

Suy ra

$$u_n \sim \frac{2}{n} n\ln a = 2\ln a$$

$$\text{và } \lim_{n\to\infty} u_n = 2\ln a \text{ với } a > 1.$$

d) Nếu ta dùng hệ phân điểm $x_k = 2k\cdot\frac{\pi}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$ và chia $[0, 2\pi]$ thành n khoảng nhỏ bằng nhau, và :

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

$$= 2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - 2a\cos\frac{2k\pi}{n} + a^2\right)$$

$$= 2\pi \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln P_n\right) = 2\pi \lim_{n\to\infty} u_n.$$

(dùng kí hiệu ở câu c)).

Vậy, khi

$$a < 1, \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)dx = 0$$

$$a > 1, \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)dx = 4\pi\ln a.$$

Hiển nhiên, ta thấy lại kết quả ở câu 2).

Bài 5

1) Không giảm tính tổng quát, có thể xem $n_o = 1$. Ta có

$$\frac{u_2}{u_1} \le \frac{v_2}{v_1}$$

$$\frac{u_3}{u_2} \le \frac{v_3}{v_2}$$

....

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \le \frac{v_n}{v_{n-1}}$$

Nhân các bất đẳng thức ấy từng vế một, ta được

$\frac{u_n}{u_1} \le \frac{v_n}{v_1} \Rightarrow u_n \le \frac{u_1}{v_1} v_n \quad \forall n \ge 1$. Do đó nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ ; nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì.

2) Ta có

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha}.$$

Áp dụng công thức khai triển hữu hạn, ta được :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\alpha - a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ khi } n \to \infty.$$

Nếu $a > 1$, ta chọn số α sao cho $1 < \alpha < a$. Khi đó với n đủ lớn ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ vì $\alpha > 1$. Do đó theo kết quả của câu 1) chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Nếu $a < 1$, ta chọn số α sao cho $a < \alpha < 1$. Khi đó với n đủ lớn

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ phân kì vì $\alpha < 1$. Do đó theo kết quả của câu 1) chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

3) Trong câu này chỉ cần xét trường hợp a = 1. Các trường hợp khác đã được giải quyết bởi quy tắc Duhamel (ở câu 2). Vậy khi $n \to \infty$, ta có theo giả thiết

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Mặt khác, khi $n \to \infty$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n+c}\right)^{-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+c} + \frac{1}{(n+c)^2} + o\left(\frac{1}{(n+c)^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{c}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{c}{n}\right)^{-2} + o\left(\frac{1}{(n+c)^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n}\left[1 - \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{1}{n^2}\left[1 - \frac{2c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] + o\left(\frac{1}{(n+c)^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n} + \frac{c+1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Do đó khi $n \to \infty$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{b-(c+1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ta chọn c sao cho

$$b - (c+1) > 0 \Leftrightarrow c < b - 1.$$

Khi đó với n đủ lớn

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+c}$ phân kì, do đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

4) a) $u_n = \left(\dfrac{1 . 4 . 7 ... (3n-2)}{3 . 6 . 9 ... (3n)}\right)^2.$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2 = 1.$$

Vậy nếu dùng quy tắc D'Alembert, ta chưa thể kết luận được gì. Nhưng ta có khi $n \to \infty$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 - \frac{2}{3n+3}\right)^2 = \left(1 - \frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = 1 - \frac{4}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Theo quy tắc Duhamel, vì $a = \dfrac{4}{3} > 1$, chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

b) $u_n = (-1)^n \dfrac{\alpha(\alpha-1) ... (\alpha - n + 1)}{n!}.$

Trước hết ta chú ý rằng bắt đầu từ một số hạng nào đó trở đi, dấu của các số hạng của chuỗi không đổi, vì

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{\alpha - n}{n+1} = 1 - \frac{\alpha+1}{n+1} = 1 - \frac{\alpha+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Khi $n \to \infty$. Theo quy tắc Duhamel, chuỗi số đã cho hội tụ nếu $\alpha + 1 > 1$, tức là $\alpha > 0$, phân kì nếu $\alpha + 1 < 1$, tức là $\alpha < 0$.

c) $u_n = \left(\dfrac{1 . 3 . 5 ... (2n-1)}{2 . 4 . 6 ... (2n)}\right)^2.$

Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right)^2$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ khi } n \to \infty.$$

Trong trường hợp này, quy tắc Duhamel chưa cho ta kết luận được. Ta sẽ tìm khai triển hữu hạn đến cấp 2 của $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{4n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{4n^2}\left(1-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n} + \frac{5}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Vậy chuỗi số đã cho phân kì theo quy tắc Gauss.

Bài 6

1) Hàm số $t \mapsto F(t) = \operatorname{arctg}\frac{t\sin x}{1-t\cos x}$ có đạo hàm là

$$F'(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{t\sin x}{1-t\cos x}\right)^2}\cdot\frac{(1-t\cos x)\sin x + t\sin x\cos x}{(1-t\cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x}{t^2 - 2t\cos x + 1}.$$

Mẫu số là một tam thức bậc hai đối với t có 2 nghiệm phức liên hợp là $\cos x + i\sin x = e^{ix}$ và $\cos x - i\sin x = e^{-ix}$. Do đó ta có thể phân tích

$$F'(t) = \frac{\sin x}{(t-e^{ix})(t-e^{-ix})} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{t-e^{ix}} - \frac{1}{t-e^{-ix}}\right)$$

$$= -\frac{e^{-ix}}{2i}\left(\frac{1}{1-te^{-ix}}\right) + \frac{e^{ix}}{2i}\left(\frac{1}{1-te^{ix}}\right).$$

Nếu $|z|<1$ thì $\frac{1}{1-z}$ là tổng của cấp số nhân $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Do đó với $|t|<1$, ta có $|te^{-ix}|<1$, $|te^{ix}|<1$, vì vậy

$$F'(t) = -\frac{e^{-ix}}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{-inx} + \frac{e^{ix}}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{inx}$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} t^n [e^{i(n+1)x} - e^{-i(n+1)x}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sin(n+1)x.$$

Bằng cách lấy tích phân theo t từng số hạng vế phải ta được

$$F(t) = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}\sin(n+1)x.$$

Vì $F(0) = 0$, ta được

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}\sin(n+1)x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\sin nx.$$

Hàm số $x \mapsto \operatorname{arctg}\frac{t\sin x}{1-t\cos x}$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, thoả mãn các điều kiện của định lí Dirichlet. Vế phải của công thức (*) chính là chuỗi Fourier của hàm số ấy. Do đó

$$\frac{2}{\pi}I_n = \frac{t^n}{n} \Rightarrow I_n = \frac{\pi t^n}{2n}.$$

2) Với $t = 1$, chuỗi số ở vế phải của hệ thức (*) được viết là $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, chuỗi ấy hội tụ vì các hệ số $\frac{1}{n}$ dương, giảm dần tới 0 khi n tăng tới ∞. Tổng f(x) của chuỗi hàm số ấy là giới hạn của

$$\operatorname{arctg}\frac{t\sin x}{1-t\cos x}$$

khi $t \to 1^-$.

Với $t = -1$, ta được chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x+\pi)}{n}.$$

Ta lại trở về trường hợp $t = 1$.

Ta có

$$f(x) = \lim_{t\to 1^-}\operatorname{arctg}\frac{t\sin x}{1-t\cos x} = \operatorname{arctg}\frac{\sin x}{1-\cos x} =$$

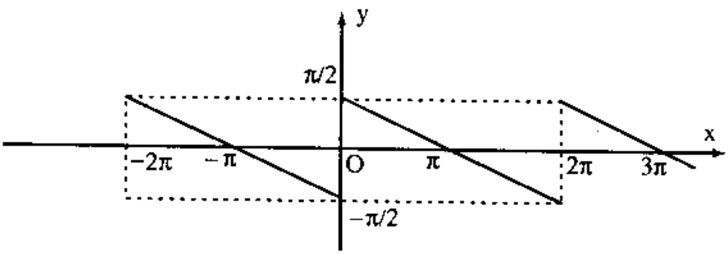
$$= \operatorname{arctg}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg}\left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$$

với điều kiện $0 < \frac{x}{2} < \pi$, tức là $0 < x < 2\pi$.

Hàm số f(x) là tổng của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, tổng f(x) không liên tục trên **R** (xem đồ thị của nó ở hình 32), các số hạng $\frac{\sin nx}{n}$ lại liên tục trên **R**, vậy chuỗi hàm số ấy không thể hội tụ đều trên **R**.

Chuỗi hàm số ấy cũng không hội tụ tuyệt đối trừ tại $x = k\pi$ vì $\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \geq \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1-\cos 2nx}{2n}$, mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ phân kì, còn chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n}$ hội tụ với $x \neq k\pi$ (vì hệ số $\frac{1}{2n}$ của nó giảm dần tới 0 khi n tăng dần tới ∞), vì vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n}\right|$ phân kì.



Hình 32

Ta áp dụng tiêu chuẩn Cauchy về hội tụ đều để chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ hội tụ đều trên đoạn $[\sigma, 2\pi-\sigma]$ với $\sigma \in (0, \pi)$.

Giả sử p, q là hai số nguyên sao cho $0 < p < q$. Ta có

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{n=p}^{q}\frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=p}^{q}\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin nx}{n} =$$

$$= \sum_{n=p}^{q}\frac{1}{n}\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] =$$

$$= \frac{1}{p}\cos\left(p-\frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{q}\cos\left(q+\frac{1}{2}\right)x + \sum_{n=p+1}^{q}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x$$

Do đó ta có $\forall x \in [\sigma, 2\pi-\sigma]$

$$\left|\sum_{n=p}^{q}\frac{\sin nx}{n}\right| \leq \frac{1}{2\sin\frac{\sigma}{2}}\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\sum_{n=p+1}^{q}\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right|\right].$$

Nhưng dãy số $\left(\frac{1}{n}\right)$ giảm dần tới 0 nên $\sum_{n=p+1}^{q}\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right|=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$.

Vì vậy $\left|\sum_{n=p}^{q}\frac{\sin nx}{n}\right|\le\frac{1}{p\sin\frac{\sigma}{2}}$ $\forall x\in[\sigma, 2\pi-\sigma]$. Với mọi số $\varepsilon>0$ cho trước, nếu chọn $n_o>\frac{1}{\varepsilon\sin\frac{\sigma}{2}}$, ta được

$$\left|\sum_{n=p}^{q}\frac{\sin nx}{n}\right|<\varepsilon \;\; \forall n\ge n_o,\; \forall x\in[\sigma, 2\pi-\sigma].$$

Hàm số f(x) tuần hoàn có chu kì 2π, bằng $\frac{\pi-x}{2}$ trong khoảng $(0, 2\pi)$ nên có thể khai triển được thành chuỗi Fourier. vì f(x) lẻ, nên

$$a_n = 0,\; n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx dx,\; n = 1, 2, ...$$

Bằng phương pháp tích phân từng phần, ta được

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[-(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right]=\frac{1}{n}.$$

Do đó ta được kết quả đã biết

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

3) Ta có

$$S_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}\right)=$$

$$= \operatorname{Re}\left(e^{ix}\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{i\frac{x}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}\right).$$

Nhưng

$$e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{i\frac{x}{2}} = \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \cos\frac{x}{2} + i\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}\right],$$

$$e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}} = 2i\sin\frac{x}{2}.$$

Do đó

$$S'_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Vì vậy $S'_n(x) = 0$ khi

$$\frac{nx}{2} = k\pi, \text{ tức là } x = \frac{2k\pi}{n}$$

hoặc $(n+1)\frac{x}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, tức là $x = \frac{(2k+1)\pi}{n+1}$. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $S'_n(x) = 0$ là $x_n = \frac{\pi}{n+1}$.

Ta có $S_n(0) = 0$, $S_n(x) > 0$ $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right)$ vì khi đó tất cả các số hạng $\frac{\sin kx}{k}$ đều dương. Vì vậy x_n là điểm cực đại của $S_n(x)$.

4) Ta đã thấy rằng chuỗi Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

hội tụ đều trên mọi đoạn $[\sigma, 2\pi-\sigma]$ với $\sigma\in(0,\pi)$ và hội tụ tại $x = 0$. Vì vậy ta có thể lấy tích phân từng số hạng chuỗi hàm số ấy từ 0 đến x với $x\in(0, 2\pi)$. Ta được

$$\int_0^x \frac{\pi - x}{2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\sin nx}{n}\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^x.$$

Do đó
$$\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Nhưng $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (xem bài tập 23 chương 8 hoặc dùng đẳng thức Parveval), ta được

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}.$$

Dễ dàng chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ hội tụ đều trên **R**, vì vậy có thể lấy tích phân từng số hạng chuỗi hàm số ấy. Ta được

$$\int_0^x f_2(x)dx = \int_0^x\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\cos nx}{n^2}\,dx$$

hay
$$\frac{x^3}{12} - \pi\frac{x^2}{4} + \frac{\pi^2}{6}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3} = f_3(x).$$

Cũng như vậy, bằng cách lấy tích phân từng số hạng chuỗi hàm trên, ta được

$$\frac{x^4}{48} - \pi\frac{x^3}{12} + \pi^2\frac{x^2}{12} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

Nhưng $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, ta được

$$f_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4} = -\frac{x^4}{48} + \pi\frac{x^3}{12} - \pi^2\frac{x^2}{12} + \frac{\pi^4}{90}.$$

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu :
NGUYỄN TRỌNG BÁ
Biên tập tái bản :
NGUYỄN XUÂN BÌNH
Biên tập kĩ thuật :
NGUYỄN LIÊN HƯƠNG
Sửa bản in :
LÊ HỒNG VÂN
Chế bản :
PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

BÀI TẬP TOÁN CAO CẤP - Tập hai
Mã số: 7K281T7 - DAI

In 5.000 bản, khổ 14,3 x 20,3 cm, tại Xí nghiệp in Hà Tây.
Số in: 705/DAI; Số xuất bản: 11-2007/CXB/219-2119/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2007.

8934980759172

Giá: **14.600đ**