Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

2 mét

“Hai hàm ngược nhau thì có tính chất gì? Tính chất cơ bản là nếu f (x) = y thì g(y) = x, tức là đồ thị của hai hàm ngược nhau sẽ đối xứng với nhau qua đường thẳng y = x”
Phương pháp gián tiếp giải các bài toán định lượng
Trần Nam Dũng

2 mét

NO 17

2 mét

“Trong cánh đồng Galois tràn đầy những bông hoa, các căn nguyên thủy nhảy nhót cả tiếng đồng hồ”
Mã và các kỳ thi Olympic Toán (phần cuối)
S. B. Gashkov

2 mét

Dạy robot đánh cờ bằng hộp diêm - Võ Bích Khuê, Nguyễn Hùng Sơn
Mở rộng bất đẳng thức hình học Finsler – Hadwiger - Trần Quang Hùng
Vắc-xin bệnh đậu mùa: Cuộc tranh luận giữa Bernoulli và d’Alembert và tính toán xác suất - Camila Colombo, Mirko Diamanti

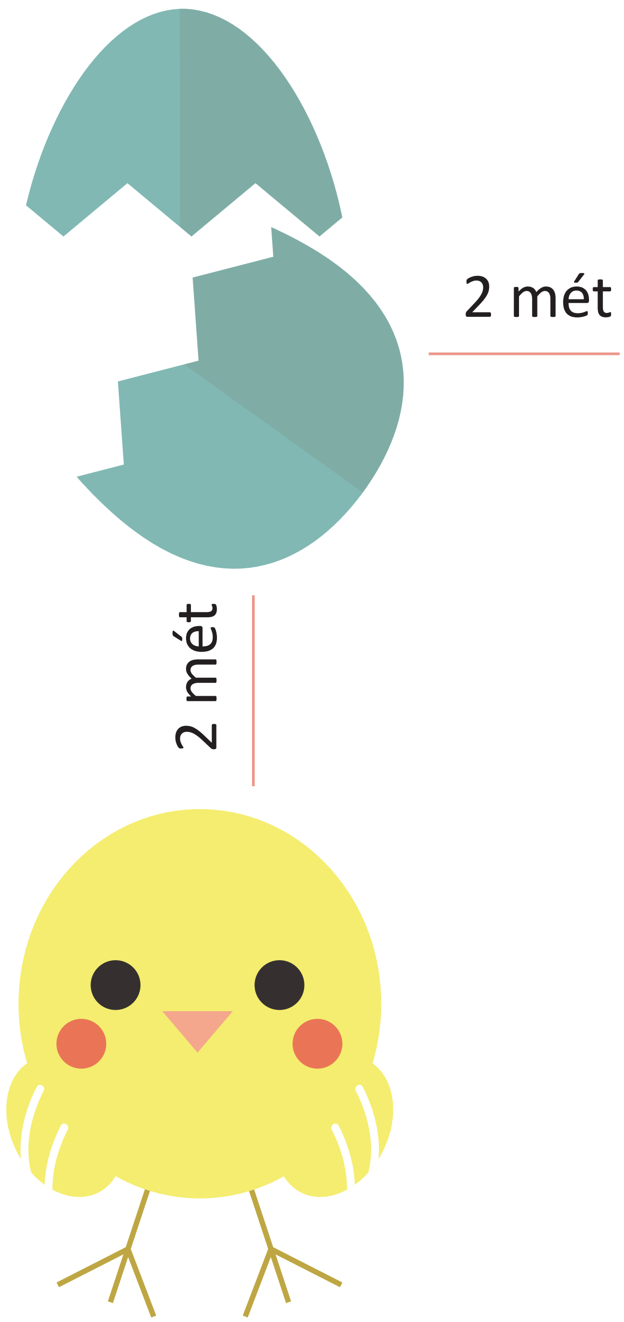
VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

2 mét

TRẦN NAM DŨNG

Lê Viết Ân

Lê Phúc Lữ



Tống Hữu Nhân

Nguyễn Tất Thu

Võ Quốc Bá Cẩn

Trần Quang Hùng

Ngô Quang Dương

Nguyễn Văn Huyện

Đặng Nguyễn Đức Tiến

LỜI NGỎ

Các bạn đang cầm trên ... máy tính số mới nhất của Epsilon, tạp chí online của những người yêu Toán: Epsilon 17.

Epsilon 17 được khởi động và xuất xưởng trong một bối cảnh đặc biệt khi đại dịch COVID-19 xuất phát từ Vũ Hán (Trung Quốc) đã lan ra và bùng nổ khắp toàn cầu. Và sự ảnh hưởng của nó vô cùng lớn lao, lớn nhất kể từ sau Chiến tranh thế giới lần thứ hai. Lần đầu tiên chúng ta nghe các cụm từ như tình trạng khẩn cấp, cách ly toàn diện, giãn cách xã hội được sử dụng một cách phổ dụng trên toàn thế giới. Cuộc sống offline đã có sự thay đổi rất lớn, và chắc chắn sẽ không còn như cũ nữa, ngay cả khi đại dịch qua đi và cuộc sống trở lại bình thường. Sẽ có nhiều quy tắc, chuẩn mực, thói quen, hành vi được xem xét và dần loại bỏ. Và chắc chắn những hoạt động online sẽ được cổ vũ và phát triển bởi vì nó: Tiện lợi hơn, hiệu quả hơn, tiết kiệm hơn và ... an toàn hơn.

Vì lẽ đó, Epsilon tiếp tục tự tin đi trên con đường của mình để tiếp tục là một diễn đàn trực tuyến tự do và chất lượng của những người yêu toán, muốn chia sẻ đến bạn đọc những nghiên cứu, khám phá, chiêm nghiệm của mình về toán học và những vấn đề liên quan.

Epsilon 17 là tuyển tập 15 bài viết với nội dung và thể loại phong phú, dành cho nhiều đối tượng, kể từ các em học sinh tiểu học đến những người yêu toán lớn tuổi. Từ học sinh chuyên đến học sinh không chuyên, từ sinh viên đại học đến học viên cao học đều có thể tìm thấy những điều bổ ích và phù hợp cho mình ở số báo này. Ban biên tập trân trọng cảm ơn tất cả các tác giả đã đóng góp bài cho Tạp chí và mong tiếp tục nhận được sự cộng tác quý báu này trong các số tiếp theo. Ban biên tập Epsilon trân trọng cảm ơn GS Đàm Thanh Sơn vẫn luôn quan tâm và dõi theo, và đã tìm chọn cho chúng tôi bài báo viết về cuộc tranh luận của Bernoulli và D'Alembert hồi cuối thế kỷ 18 về xác suất và ứng dụng vào mô hình nghiên cứu hiệu quả của tiêm chủng, một bài viết rất phù hợp với bối cảnh những ngày này.

Mặc dù đã cố gắng tối đa, nhưng những sai sót là không tránh khỏi. Chúng tôi mong bạn đọc sẽ phản hồi cho chúng tôi những sai sót này để kịp thời chỉnh sửa.

Còn bây giờ, hãy mở ra và thưởng thức Epsilon, món quà của tháng Tư.

MỤC LỤC

VẮC-XIN BỆNH ĐẬU MÙA CUỘC TRANH LUẬN GIỮA BERNOULLI VÀ D'ALEMBERT CÙNG TÍNH TOÁN XÁC SUẤT

Camila Colombo (UK), Mirko Diamanti (Italy)
Người dịch Nguyễn Vũ Duy Linh, Trần Nam Dũng

LỜI BAN BIÊN TẬP

Đại dịch COVID−19 vẫn đang hoành hành và thu hút sự quan tâm của toàn nhân loại. Trên tuyến đầu là các y, bác sĩ chống chọi trực tiếp với con virus nguy hiểm để giành giật sự sống, bảo vệ cho các bệnh nhân, chính quyền cùng các lực lượng y tế cộng đồng, quân đội, cảnh sát, ... thì triển khai các hoạt động cách ly, giãn cách xã hội, các nhà khoa học thì gấp rút nghiên cứu thử nghiệm vắc-xin ngừa virus và thuốc chữa virus. Và còn hàng trăm, hàng ngàn các công việc liên quan khác. Các nhà toán học cũng không ngoài cuộc, bằng các phương pháp thống kê, họ cũng đã có những phân tích, dự đoán để từ đó đưa ra các khuyến cáo thích hợp cho các nhà hoạch định chính sách, để có thể lựa chọn phương án chống dịch một cách hiệu quả nhất. Được sự giới thiệu của GS.Đàm Thanh Sơn (ĐH Chicago), chúng tôi chọn dịch bài viết của Camila Colombo và Mirko Diamanti về cuộc tranh luận cách đây hơn 200 năm giữa Daniel Bernoulli và Jean Le Rond d'Alembert về việc tiêm chủng bệnh đậu mùa và ứng dụng của xác suất trong nghiên cứu các vấn đề thực tế. Chúng ta có thể thấy trong câu chuyện của hơn 200 năm trước có những vấn đề rất gần gũi với thực tiễn chống dịch COVID−19 trên thế giới hôm nay.

1. Tổng quan

Nhu cầu cấp thiết và kịch tính nhằm giới thiệu và quảng bá vắc-xin chống bệnh đậu mùa, một tai họa cho xã hội vào cuối những năm 1700, đã tạo cơ hội cho một cuộc tranh luận sôi nổi giữa Daniel Bernoulli và Jean Le Rond d'Alembert. Bài viết này thảo luận những động cơ và lập luận trong cuộc tranh luận giữa Bernoulli, tác giả của mô hình xác suất chứng minh việc sử dụng vắc-xin là hợp lý hơn và d'Alembert, người phản bác lại lập luận này. Mục đích của bài phân tích này cho thấy "*nghệ thuật phỏng đoán*" mới tìm được là đối tượng của những diễn giải khác nhau, từ việc mô tả các nguyên tắc lý thuyết của nó, như khái niệm về kỳ vọng, cho đến câu hỏi về tính hợp pháp của nó trong các ứng dụng như là một "*hướng dẫn về cách sống thực tế*", sau khi diễn đạt lại những đóng góp của cả hai tác giả.

2. Dẫn nhập

Từ nửa đầu thế kỷ XVII, vấn đề dịch bệnh đậu mùa được coi là cấp bách và kịch tính. Ở các thành phố có mật độ dân số cao, chẳng hạn như London và Paris, người ta ước tính rằng khoảng mười phần trăm của tất cả các trường hợp tử vong là do bệnh đậu mùa. Hơn ai hết, trẻ em và thanh thiếu niên dễ bị mắc bệnh do một loại virus trong không khí gây ra, mặc dù không phải lúc nào bệnh cũng gây tử vong, nó thường khiến nạn nhân bị sẹo nặng hoặc mù vĩnh viễn. Do sự lây lan rộng rãi và tỷ lệ phần trăm dân số bị ảnh hưởng, bệnh đậu mùa được coi là một tai họa xã hội và là một biểu tượng của sự bất lực của y học. Do đó, các phương pháp phòng và chữa bệnh đã thu hút sự chú ý tập trung của các nhà khoa học và công chúng.

Mặc dù chưa có phương pháp điều trị hiệu quả nào được biết đến, nhưng có thời tại châu Á, người ta đã tiến hành một kỹ thuật tiêm chủng thô sơ, được gọi là chủng đậu, một cách đưa virus vào người thông qua việc tiêm truyền chất bị nhiễm virus. Cách làm này được giới thiệu ở Anh vào năm 1718 bởi Lady Montague, vợ của đại sứ Anh tại Đế chế Ottoman. Tuy nhiên, những rủi ro liên quan đến các phương pháp điều trị là rất đáng kể, vì thường những người bị tiêm nhiễm mắc bệnh và đã chết trong vòng 2 tháng. Hơn nữa, việc tiêm vắc-xin gây sốt thấp cũng như truyền nhiễm thấp: Do đó, bệnh nhân phải ở một mình trong vài tuần sau khi tiêm, làm cho nó trở nên thiết thực trừ các tầng lớp xã hội giàu có nhất. Mặc dù nước Pháp có tỷ lệ mắc bệnh cao ở mọi tầng lớp xã hội, vắc-xin đã được xem xét với sự hoài nghi. Trên thực tế, người ta lo ngại rằng kỹ thuật này sẽ góp phần vào việc lây lan bệnh truyền nhiễm và chỉ mang lại lợi ích đáng ngờ. Tóm tắt tình hình của Voltaire trình bày trong Những Lá Thư Triết Học là biểu tượng của sự dè dặt chung:

Tại các quốc gia Kitô giáo ở châu Âu, người ta khẳng định vô tư rằng người Anh là những kẻ ngốc và điên. Ngốc, bởi vì họ cho con cái họ nhiễm đậu mùa để ngăn chính căn bệnh này và điên, bởi vì họ cố tình gây ra một sự bất an rối loạn đáng sợ và chắc chắn cho con cái họ chỉ để ngăn chặn một tai họa không chắc chắn xảy ra ([7], Thư XI)[1]

[1]On dit doucement, dans l'Europe chrétienne, que les Anglais sont des fous et des enragés: Des fous, parcequ'ils donnent la petite vérole à leurs enfants, pour les empêcher de l'avoir, des enragés, parce qu'ils communiquent de

Do đó, trong một bối cảnh rất sôi nổi và được mọi người quan tâm cấp bách, giới trí thức đã tiến hành một chiến dịch văn hóa để vận động tiêm chủng, một chiến dịch thường được xem là nội dung chính của một trận chiến thực sự về ý thức hệ nhân danh tiến bộ ([2], pp. $83-89$). Từ các tổ chức đến các tờ báo, vấn đề ủng hộ hay chống lại tiêm chủng là đối tượng của các cuộc tranh luận thường xuyên từ năm 1750 đến 1770, với sự đóng góp đầy nhiệt huyết của nhiều trí thức Pháp. Voltaire, người sống sót sau khi mắc bệnh đậu mùa năm 1723, sau khi quan sát trực tiếp một số trường hợp tiêm chủng ở Anh, đã nhiệt tình tuyên bố ủng hộ nó trong Những Lá Thư Triết Học năm 1743. La Condamine đã đặt câu hỏi về chủ đề nói chuyện với Viện Hàn Lâm Khoa Học ở Paris vào năm 1754. Mục tiêu của những người ủng hộ tiêm chủng là các nhà chức trách phải xem việc tiêm chủng là bắt buộc, hoặc ít nhất là công khai khuyến khích nó, và bằng cách đó vượt qua sự chống đối của những kẻ ngu dân và thù địch với sự tiến bộ.

Trong bầu không khí hào hứng của cuộc thập tự chinh này, Daniele Bernoulli và Jean Baptiste Le Rond d'Alembert đã giữ vị trí đối lập nhau khi cân nhắc những rủi ro và lợi ích của việc tiêm phòng. Năm 1760, một bài báo của Bernoulli đã được xuất bản trên tờ Mércure de France, trong đó ông đưa ra kết quả thu được bằng cách áp dụng giải tích cho xác suất để trả lời câu hỏi về vắc-xin. Một phân tích định lượng như vậy, theo ý kiến của tác giả, sẽ chứng minh cho bất kỳ "*một người có lương tri*" nào sự cần thiết của tiêm chủng. Cùng năm đó, Bernoulli đã trình bày chi tiết tính toán của mình cho Viện Hàn Lâm Khoa Học, nhưng bài báo có tựa đề "*Luận văn về cách phân tích mới đối với tỷ lệ tử vong của bệnh đậu mùa và lợi ích của việc tiêm phòng để ngăn chặn nó*", không được công bố cho đến năm 1766. Trả lời của D'Alembert về sự can thiệp của Bernoulli, có trong cuốn "*Kỷ yếu thứ mười một, Về việc áp dụng tính toán xác suất trong tiêm phòng bệnh đậu mùa*": Đề xuất của Bernoulli đã bị chỉ trích gay gắt trước khi xuất bản văn bản cuối cùng, dẫn đến các cuộc tranh luận và phàn nàn về sự thiếu tôn trọng của các đồng nghiệp của Bernoulli.

Vượt ra ngoài các trận bút chiến trong các cuộc tranh luận, các khẳng định của d'Alembert rất thú vị bởi vì chúng chuyển câu hỏi sang mức độ tổng quát hơn khi giải thích chính khái niệm xác suất cũng như các tiêu chuẩn có thể có và nhược điểm tương đối của việc áp dụng phép tính giải tích mới. Chính xác đó là những hàm ý trong lời chỉ trích [của d'Alembert] đối với công trình của Bernoulli đã đề ra sự kiểm tra sâu sắc hơn từ quan điểm lý thuyết của d'Alembert. Trong nỗ lực đưa ra một đóng góp với tư cách một nhà bách khoa toàn thư sở đắc xác suất trong hệ thống kiến thức của nhân loại, chúng tôi dự định sẽ chỉ ra ở đây các lý lẽ về nhận thức luận mà ông ta sử dụng đã hoàn tất việc giới hạn lĩnh vực ứng dụng xác suất trong bối cảnh hoàn toàn trừu tượng, khi từ bỏ bất kỳ khả năng nào góp phần vào việc kiểm soát sự không chắc chắn

gaieté de coeur à ces enfants une maladie certaine et affreuse, dans la vue de un mal incertain (Voltaire, Lettres Philosophiques, Onzième Lettre. Sur l'insertion de la petite vérole).

trong đời thường.

3. Đề xuất của Daniel Bernoulli

Năm 1759, Maupertuis, một người nhiệt tình ủng hộ tiêm chủng, đã thuyết phục Daniel Bernoulli, đồng nghiệp của ông ở Basel, dành tâm trí cho một phân tích toán học về vấn đề vắc-xin. Giải pháp cho vấn đề này, theo Bernoulli, phải có dạng một giải đáp cho câu hỏi sau: Chính phủ có nên thúc đẩy việc tiêm chủng cho mọi cá nhân khi mới chào đời hay không? Mục đích của tính toán là, đưa ra xác suất bị bệnh và tử vong vì bệnh đậu mùa do tiêm vắc-xin, so sánh rủi ro và lợi ích của hai chiến lược khả dĩ. Khi những khó khăn do thiếu dữ liệu và độ tin cậy của dữ liệu không cao đã được khắc phục, Bernoulli tin rằng một phân tích nghiêm túc sẽ giúp chính phủ xác định nên theo chiến lược nào. Kết luận của tác giả là giải đáp tích cực cho câu hỏi ban đầu: Nên khuyến khích tiêm chủng vì nó dẫn đến tăng tuổi thọ trung bình.

Chúng ta có thể tóm tắt lý luận của Bernoulli trong ba bước:

1. Xây dựng một mô hình dân số, nghĩa là một đường cong mô tả sự thay đổi của dân số theo thời gian (tỷ lệ tử vong).

2. Tính toán sự thay đổi của tuổi thọ với điều kiện ban đầu là bệnh đậu mùa đã được loại bỏ (nghĩa là, nếu tất cả các cá nhân đã được tiêm phòng khi sinh).

3. Tính toán sự thay đổi của tuổi thọ xét đến nguy cơ tử vong do tiêm chủng.

Một cách ngắn gọn, Bernoulli đề nghị so sánh hai "*tình trạng của nhân loại*" chỉ khác nhau duy nhất bởi sự hiện diện của bệnh đậu mùa. Tiêu chuẩn để so sánh các đường cong dân số mô tả hai trạng thái ấy là tích phân của đường cong theo tuổi thọ trung bình. Điều kiện cần để thực hiện thao tác so sánh này là sự cô lập yếu tố tử vong do bệnh đậu mùa với tỷ lệ tử vong toàn phần.

4. Mô hình

Lý luận của Bernoulli được trình bày tường minh dưới dạng mô hình toán học dựa trên các giả thuyết được tác giả thừa nhận là dữ liệu đã bị đơn giản hóa, không chính xác và có lỗi. Như chúng ta sẽ thấy thêm, khả năng áp dụng tính toán xác suất khởi đầu từ dữ liệu không chắc chắn và không đầy đủ tạo thành một trong những động cơ trong lời chỉ trích trong luận văn của d'Alembert. Các giả thiết ban đầu của Bernoulli như sau:

- Những người bị nhiễm bệnh đậu mùa lần đầu tiên chết với xác suất p và sống sót với xác suất $1 - p$.
- Mỗi cá nhân có xác suất bị nhiễm mỗi năm là q. Trong một khoảng thời gian vô cùng bé dx, xác suất bị nhiễm giữa tuổi x và tuổi $x + dx$ (với $dx = 1$ cho đơn giản) là qdx.
- Những người sống sót sau khi mắc bệnh đậu mùa được miễn dịch trong phần còn lại của cuộc đời họ.

Dùng $m(x)$ là tỷ lệ tử vong do các nguyên nhân khác với bệnh đậu mùa và đại lượng tương ứng $m(x)dx$, Bernoulli xây dựng một mô hình dân số phù hợp trong đó tỷ lệ tử vong do bệnh [đậu mùa] được tách biệt ra. Đặt P_0 là một nhóm các cá nhân sinh cùng năm: $S(x)$ là số người, có nguy cơ nhiễm bệnh, sống và chưa bao giờ bị bệnh đậu mùa tính cho đến tuổi x, $R(x)$ là số người sống sót sau khi mắc bệnh đậu mùa ở tuổi x, vậy thì ta có $P(x) = S(x) + R(x)$ là số người còn sống ở tuổi x. Bernoulli sau đó cho $x = 0$ tương ứng với lúc chào đời, trong đó $S(0) = P(0) = P_0$ và $R(0) = 0$. Giữa x và $x + dx$, mỗi cá nhân có nguy cơ bị nhiễm qdx và $m(x)dx$ chết do các nguyên nhân khác. Do đó, vi phân của những người có nguy cơ là $dS = -Sqdx - Sm(x)dx$, dẫn đến phương trình vi phân

$$\frac{dS}{dx} = -qS - m(x)S. \tag{1}$$

Trong đó dS là vi phân của hàm $S(x)$. Trong cùng một khoảng thời gian, số người chết vì bệnh đậu mùa là $pSqdx$ và số người sống sót sau khi mắc bệnh đậu mùa là $(1 - p)Sqdx$. Số này sau đó được cộng thêm vào lượng những người chết vì các nguyên nhân khác $Rm(x)dx$. Vì thế

$$\frac{dR}{dx} = q(1 - p)S - m(x)R \tag{2}$$

Cộng các phương trình (1) và (2), ta có

$$\frac{dP}{dx} = -pqS - m(x)P \tag{3}$$

Đến lúc này, Bernoulli có thể suy ra tỷ lệ các cá nhân có nguy cơ [nhiễm bệnh] trong cộng đồng dân cư ứng với một độ tuổi nhất định x bằng cách sử dụng các phương pháp đã biết trong giải tích đối với phương trình vi phân

$$\frac{S(x)}{P(x)} = \frac{1}{(1 - P)e^{qx} + p} \tag{4}$$

5. Số liệu của bài toán

Sau khi tách biệt nhóm $R(x)$ các cá nhân có nguy cơ nhiễm bệnh trong cộng đồng dân cư, Bernoulli đã có tất cả các yếu tố để tính sự biến thiên của tuổi thọ trung bình. Tuy nhiên, mô hình phải được "*điền*" đầy đủ dữ liệu trong khoảng từ x đến $x+1$ cùng với tỷ lệ mắc bệnh và tử vong tương ứng của bệnh đậu mùa là p và q. Những dữ liệu đó không dễ dàng có được: Trong phần lớn các cơ quan đăng ký rửa tội và tang lễ thời đó không có tuổi tử vong nào được đưa ra, khiến cho người ta không thể xác định được tỷ lệ tử vong ứng với tuổi x. Mặc dù vướng phải những trở ngại này, bắt đầu từ những năm 1660, sự phát triển của những công ty bảo hiểm nhân thọ đã góp phần thúc đẩy các kỹ thuật tính toán tỷ lệ tử vong. Giải pháp được áp dụng bao gồm sử dụng dữ liệu của cộng đồng dân cư ổn định, trong đó số ca sinh và tử mỗi năm bằng nhau, để có thể xây dựng đường cong dân số. Năm 1693, Halley đã công bố một phân tích về dân số của thành phố Breslau, trong Đế chế Hapsburg [6], đáp ứng những yêu cầu này. Kết quả của nghiên cứu, được gọi là Bảng Nhân Thế Halley, bảng này cho biết trong số 1.300 cá nhân sinh năm 0, có bao nhiêu người vẫn còn sống ở tuổi x.

Căn cứ trên các quan sát mỗi ngày, Bernoulli sau đó đã chọn $p = \frac{1}{8}$ và $q = \frac{1}{8}$, phép chọn này hóa ra là khá chính xác. Sử dụng Bảng của Halley và mô hình dân số của ông ta, người ta có thể tính ra đại lượng $S(x)$ các cá nhân có nguy cơ nhiễm bệnh ở tuổi x và số $R(x) = P(x) - S(x)$ những người ở độ tuổi x mắc bệnh đậu mùa và sống sót. Số ca tử vong do bệnh đậu mùa giữa tuổi x và tuổi $x+1$ phải là $pq \int\limits_x^{x+1} S(x)dx$, nhưng công thức được Bernoulli sử dụng $pq[S(x) + S(x+1)]/2$, là một xấp xỉ tốt.

6. Phép so sánh tuổi thọ trung bình

Tại đây, Bernoulli xem xét tình huống tiêm vắc-xin vào từng cá nhân khi sinh (đề xuất của ông ở Mércure de France là khởi đầu bằng việc tiêm vắc-xin bắt buộc ở trại trẻ mồ côi), mà không gây ra bất kỳ trường hợp tử vong nào. Do đó, điều quan tâm là tính toán sự gia tăng tuổi thọ trung bình một khi bệnh đậu mùa được loại bỏ. Bắt đầu với cùng số lần sinh P_0, chúng ta gọi $P^*(x)$ là số người ở tuổi x khi bệnh đậu mùa biến mất: $\frac{dP^*}{dx} = -m(x)P^*$. Như vậy

$$P^* = \frac{P(x)}{1 - p + pe^{-qx}},$$

trong đó $P(x)$ là bộ phận dân cư ở tuổi x trước khi loại trừ được bệnh đậu mùa. So sánh $P(x)$ và $P^*(x)$ có nghĩa là ước lượng tuổi thọ trung bình từ lúc sinh ra, nghĩa là tích phân

$$\frac{1}{P_0}\int_0^\infty P(x)dx.$$

[với bệnh đậu mùa, hoặc không có bệnh đậu mùa thay thế bằng $P^*(x)$]. Bernoulli sử dụng công thức gần đúng

$$\frac{\frac{1}{2}P(0) + P(1) + P(2) + \cdots}{P_0}.$$

Kết quả thu được

- Tuổi thọ với bệnh đậu mùa là [2]

$$E = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1300 + 00 + \cdots + 20}{1300} \cong 26.57 \quad \text{(năm)}$$

- Tuổi thọ không có bệnh đậu mùa

$$E^* = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1300 + 1015 + \cdots + 23}{1300} \cong 29.65 \quad \text{(năm)}$$

Do đó, tiêm vắc-xin khi chào đời đảm bảo tăng hơn 3 năm tuổi thọ.

Tuy nhiên, tiêm vắc-xin phòng bệnh đậu mùa không phải là một quy trình an toàn, và do vậy Bernoulli xem xét p^l, xác suất tử vong do vắc-xin, với $p^l < p$ tuổi thọ trung bình khi ấy sẽ là $(1 - p^l)E^*$ nếu tất cả mọi đều được tiêm chủng khi sinh ra.

Để việc tiêm chủng là hợp lý, tác giả nhận thấy rằng bất đẳng thức sau đây phải được thỏa mãn

$$p^l < 1 - \frac{E}{E^*}.$$

nghĩa là, $p^l = 11\%$. Ngay cả khi không có dữ liệu chính xác, Bernoulli ước tính rằng tỷ lệ tử vong sau khi tiêm chủng sẽ dưới 1%. Do đó, việc tiêm chủng phải được chính phủ thúc đẩy tích cực: "*Tôi chỉ đơn giản hy vọng rằng, trong một câu hỏi liên quan chặt chẽ đến sự khỏe mạnh của loài người, sẽ không có quyết định nào được đưa ra mà không xem xét tất cả các thông tin từ một phân tích và tính toán khiêm tốn*" [1].

[2] Giá trị 1300 được tham chiếu bởi số liệu của bảng Halley mà Bernoulli sử dụng để nghiên cứu

7. Những lời chỉ trích của D'Alembert

Phục dựng một cách mạch lạc lại quan điểm của d'Alembert bằng cách nói rõ thông qua hàng loạt các chỉ trích mô hình của Bernoulli không phải là một công việc dễ dàng. Khởi đầu từ *Kỷ yếu thứ mười một* và tiếp theo được mở rộng trong các bài tiếp theo, các chỉ trích có phạm vi rất rộng, từ các cơ hội chính trị đến đề xuất sử dụng dữ liệu khác. Hơn nữa, ở phần cuối của cuốn kỷ yếu d'Alembert tuyên bố mình ủng hộ việc tiêm phòng, rõ ràng trái ngược với giọng điệu mà ông duy trì trong toàn bộ văn bản.

Sự nhầm lẫn xuất phát từ điều này có thể được coi là sự cạnh tranh cá nhân đối với Bernoulli, cùng với mong muốn không thể hiện mình công khai chống lại quan điểm (có lợi cho vắc-xin) được ủng hộ bởi giới khoa học và văn hóa.

Với kịch bản phức tạp của tranh luận, sẽ rất hữu ích khi tập trung vào hai yếu tố có liên quan về mặt khái niệm của những lời chỉ trích của D'Alembert mà không thể bắt nguồn từ cách giải thích yếu tố "*cơ hội*" cho quan điểm của ông.

8. Quan điểm của cá nhân so với xã hội: Phê phán tiêu chí về tuổi thọ trung bình

Điểm khác biệt đầu tiên giữa hai tác giả liên quan đến hướng đi mà từ đó tính hợp lý của vắc-xin được đánh giá. Như đã trình bày trong phần trước, Bernoulli đặt ra câu hỏi liệu có hợp lý không nếu chính phủ thúc đẩy tiêm chủng và như một hệ quả, sẽ tối đa hóa tuổi thọ trung bình, điều này sẽ giúp cho nhà nước có một số lượng lớn hơn các cá thể có thể làm việc và có thể làm việc hữu ích. Quan điểm này rõ ràng được hỗ trợ bởi quan sát của Bernoulli, về sự mất mát mà xã hội phải gánh chịu do cái chết của một người trẻ, người đã được nuôi dưỡng và lớn lên mà chưa đóng góp gì cho sự thịnh vượng chung của nó. Nói cách khác, Bernoulli đặt câu hỏi như một chủ đề về sức khỏe cộng đồng, tập trung vào các hậu quả xã hội của một chính sách có lợi cho vắc-xin.

Ngược lại, d'Alembert giải thích vấn đề tương tự như một sự lựa chọn cá nhân, tự hỏi mình điều gì hợp lý cho một cá nhân khi phải lựa chọn giữa việc tiêm vắc-xin hay không (hoặc có nên tiêm vắc-xin cho con mình hay không). Theo hướng đi này, tác giả nhận xét, tối đa hóa tuổi thọ trung bình không phải là một tiêu chí hợp lý để quyết định. Trước hết, không phải tất cả các năm của cuộc đời đều như nhau: Đối với một người đàn ông đứng tuổi, việc thêm 2 tuổi già không đáng chấp nhận nguy cơ tử vong trong 2 tháng tiêm chủng. Thứ đến, phân tích do Bernoulli đề xuất là không đủ để tính đến "*kinh nghiệm đạo đức*" mà người ta có khi chấp nhận rủi ro.

Bằng một thí nghiệm tinh thần của xổ số giả định mà ở đó chỉ định xác suất $\frac{1}{2}$ cho cái chết và cùng xác suất $\frac{1}{2}$ cho cuộc sống khỏe mạnh với kỳ vọng 100 tuổi, d'Alembert cho thấy tâm lý của rủi ro không thể được mô tả bằng thuật ngữ hoàn toàn định lượng. D'Alembert cho rằng mặc dù tuổi thọ trung bình là một chỉ số tối đa hóa cho chính phủ, nhưng nó không dành cho cá nhân: Vì lý do này, chính phủ không có quyền áp dụng tiêm chủng cho cá nhân, chí ít là với những người chọn một tiêu chí tối đa hóa khác.

Ngoài một số quan sát chung về tâm lý rủi ro, d'Alembert không xây dựng một giải pháp thay thế cho mô hình của Bernoulli, ông cũng không đề xuất một chỉ số phù hợp cho tối đa hóa cá nhân. Theo ông, cần so sánh nguy cơ tử vong từ hôm nay với một vài tuần sau khi tiêm vắc-xin với nguy cơ tử vong tự nhiên do bệnh đậu mùa trong cùng một khoảng thời gian. Tuy nhiên, về khả năng chính thức hóa kinh nghiệm đạo đức này, tác giả rất hoài nghi: Làm thế nào chúng ta có thể so sánh rủi ro hiện tại với một lợi ích không xác định hoặc từ xa? Liên quan đến vấn đề này, việc phân tích các trò chơi may rủi không nói cho chúng ta được điều gì ([3], trang $33-34$).

Sự không tin tưởng vào tính thỏa đáng của tính toán xác suất áp dụng vào vấn đề về vắc-xin bệnh đậu mùa là điểm bất đồng thứ hai của d'Alembert với Bernoulli. Trong giai đoạn này, sự chỉ trích của d'Alembert, một cách chung hơn được định hướng chống lại nỗ lực áp dụng các phương pháp xác suất cho một chủ đề liên quan thực tế. Giả thuyết này đòi hỏi một phân tích rộng hơn về quan điểm của D'Alembert với tư cách là một nhà lý thuyết về xác suất.

9. Nghệ thuật của phỏng đoán

Tập IV của cuốn *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie* năm 1759 có bài của d'Alembert *Essai sur les éléments de philosophie*. Sau khi trình bày phác thảo của tác phẩm, trong đó tác giả đặt ra để phân định kiến trúc của kiến thức con người, cho thấy các nguyên tắc làm nền tảng cho các lĩnh vực kiến thức khác nhau với sự phụ thuộc và tương quan tương đối của chúng, d'Alembert nói về logic trong chương V, chỉ trích tuyên bố của những nhà triết học cho rằng sử dụng logic như một kỹ thuật với các quy tắc chung, mà sự tôn trọng chúng đảm bảo tính đúng đắn của lý luận:

Chúng ta có vô số bài viết về logic, nhưng liệu khoa học lý luận có cần nhiều quy tắc như vậy không? Để có được thành công trong đó, không cần thiết phải đọc tất cả các tác phẩm này cũng giống như không cần thiết phải đọc các chuyên luận lớn về đạo đức để trở thành những người *đàn ông trung thực. Các nhà hình học, vốn không bị mệt mỏi với các giới luật của logic, và chỉ dùng các suy nghĩ tự nhiên làm kim chỉ nam, đã tìm được con đường đi đến được những chân lý xa nhất và trừu tượng nhất, trong khi đó nhiều nhà triết học, hay đúng hơn, những người viết về triết học, hình như là đã đặt vào ngay từ ban đầu tác phẩm của họ những chuyên luận lớn về nghệ thuật lý luận, sau đó đánh mất chính mình ở vài phương pháp, tương tự như những người chơi không may mắn, tính toán này nọ để rồi cuối cùng thua.*[3]

D'Alembert cũng đặt ra nghệ thuật phỏng đoán trong lĩnh vực logic, giải thích sự lựa chọn này bằng cách lưu ý rằng biết cách phỏng đoán tốt là một phần không thể thiếu của năng lực lý luận

Người chỉ nhận ra sự thật khi nó ảnh hưởng trực tiếp kém xa người không chỉ nhận biết nó khi nó ở gần mà dự đoán và nhận biết được nó từ xa, ngay cả với tính cách bí ẩn của nó. [4]

Tập V của cuốn *Mélanges*, có bài *Eclairsissements sur les éléments de philosophie*, trong đó d'Alembert mở rộng và phân biệt rõ các quan sát mà ông đã thực hiện trong Essai. Chương VI dành riêng cho nghệ thuật phỏng đoán và phân biệt ba lĩnh vực mà nó có thể được áp dụng. Thứ nhất là để "*phân tích các xác suất trong các trò chơi may rủi có thể tuân theo các quy tắc đã biết và tất định, hoặc ít nhất là được các nhà toán học nhìn thấy như vậy*".[5] Lĩnh vực thứ hai được xác định là phần mở rộng của phân tích này cho các câu hỏi liên quan đến cuộc sống hàng ngày, chẳng hạn như thời gian sống, lương hưu, bảo hiểm hàng hải, tiêm chủng và các chủ đề tương tự khác.

Theo d'Alembert, những câu hỏi này khác với các vấn đề liên quan đến trò chơi may rủi vì:

... trong khi trong [các vấn đề về trò chơi may rủi], các quy tắc kết hợp toán học đủ để xác định số lượng và tỷ lệ của các trường hợp có thể, trong các [vấn đề của cuộc sống hàng ngày], ngược lại, chỉ có kinh nghiệm và quan sát mới có thể hướng dẫn chúng ta số lượng các trường hợp, và

[3]Nous avons sur la logique des écrits sans nombre; mais la science du raisonnement a-t-elle besoin de tant de règles? Pour y réussir, il est aussi peu nécessaire d'avoir lu tous ces écrits, qu'il l'est d'avoir lu nos grands traités de morale pour être honnête homme. Les géomètres, sans s'épuiser en préceptes sur la logique, et n'ayant que le sens naturel pour guide, parviennent par une marche toujours sure aux vérités les plus détournées et les plus abstraites, tandis que tant de philosophes, ou plutôt d'écrivains en philosophie, paraissent n'avoir mis à la tête de leurs ouvrages de grands traités sur l'art du raisonnement, que pour s'égarer ensuite avec plus de méthode, semblables à ces joueurs malheureux qui calculent longtemps et finissent per perdre ([5], I, p. 152).

[4]4. L'esprit qui ne reconnait le vrai que lorsqu'il en est directement frappé, es bien au-dessous de celui qui sait non-seulement le reconnaitre de près, mais encore le pressentir et le remarquer dans le lointain à des caractères fugitifs ([5], I, p. 154)

[5]... l'analyse des probabilités dans les jeux de hasard ... soumise à des règles connues et certaines, ou du moins regardées comme telles par les mathématiciens ... ([5], p. 157).

chỉ hướng dẫn chúng ta một cách gần đúng.[6]

Tuy nhiên, d'Alembert tuyên bố trong nhánh ứng dụng thứ hai của nghệ thuật phỏng đoán này, việc truy đòi tính toán vẫn có thể xảy ra bởi "*sự không chắc chắn, nếu có, chỉ liện quan đến các sự kiện đóng vai trò nguyên tắc, những sự kiện này cho rằng các hệ quả nằm ngoài tầm với*"[7]

Loại nghệ thuật phỏng đoán thứ ba liên quan đến các môn trong đó hiếm khi hoặc không bao giờ có thể chứng minh. Ở đây nghệ thuật phỏng đoán là rất cần thiết. Những môn khoa học này được chia thành quan sát và và thực tế. Khoa học quan sát bao gồm vật lý và lịch sử, khoa học thực tế bao gồm y học, luật học và "*khoa học thế giới*", nghĩa là khả năng của một con người sống trong xã hội, rút ra từ mối quan hệ với những người khác lợi ích tối đa cho chính họ.

10. D'Alembert và "lý thuyết thông thường về xác suất"

Trong khi trong bối cảnh phân tích cấu trúc của kiến thức con người, d'Alembert có vẻ như đã chấp nhận khả năng sử dụng phép tính xác suất trong các đấu trường trong đó nghệ thuật phỏng đoán là cần thiết, hàng loạt các bài tiểu luận về xác suất cho thấy điều trái ngược với sự hoài nghi của ông. Điều ấn tượng là, trong thực tế, hai lĩnh vực đầu tiên của nghệ thuật phỏng đoán trong đó đòi hỏi tính toán xác suất lại dẫn đến một cách chấp nhận được đến cái thứ ba.

Chúng ta đã thấy trường hợp tiêm chủng, được trích dẫn rõ ràng trong *Eclairsissement* như một ví dụ về một chủ đề được đưa vào lĩnh vực thứ hai của nghệ thuật phỏng đoán, được d'Alembert cho là không có khả năng xử lý được bằng phân tích toán học .

Thay vào đó, liên quan đến trường hợp phân tích các trò chơi may rủi, thật thú vị khi lưu ý rằng d'Alembert dường như cũng đặt ra nghi ngờ về khả năng áp dụng toán học cho loại câu hỏi này. D'Alembert đã dành nhiều bài tiểu luận khác nhau để chỉ trích những nền tảng của những gì ông định nghĩa là "*lý thuyết thông thường về xác suất*".[8]

[6]... que dans celles-ci, les règles des combinaisons mathématiques suffisent... pour déterminer le nombre et le rapport des cas possibles, au lieu que dans celles-là, l'expérience et l'observation seules peuvent nous instruire de nombre de ces cas, et ne nous en instruisent qu'à peu prés ([5], p. 157).

[7]... l'incertitude, s'il y en a, ne tombe que sur les faits qui servent de principes, ces faits supposés, les conséquences sont hors d'atteinte ([5], p. 157).

[8]Bổng sung thêm vào các bài báo trong Encyclopédie thảo luận về chủ đề này (Avantage, Croix ou pile, Gageur, Dé, Loterie, Pari), chúng tôi cũng nhắc lại các tiểu luận có trong tập II (Hồi ký 10 và 11) và tập IV (hồi ký 23) của Opuscules mathématiques và tiểu luận với tiêu đề "*Doutes et questions sur le calcul des probabilités*" trong Mélanges.

Các lập luận được đưa ra bởi d'Alembert có thể được chia thành hai loại, toán học và thực nghiệm.[9] Với các lập luận toán học, d'Alembert đưa ra nghi ngờ về các khía cạnh lý thuyết của tính toán xác suất, chịu sự chỉ trích, trong số những khái niệm khác, có định nghĩa của khái niệm kỳ vọng, cách tính xác suất của biến cố trên cơ sở sự xác định của các trường hợp đồng khả năng.

Quan điểm mà d'Alembert dường như đã sử dụng trong những lời chỉ trích này giống như một nhà triết học, người đã vạch trần những ngụy biện của các nhà giả hình học, mặc dù lý thuyết xác suất, hơn cả một chủ đề của nghiên cứu toán học, là một câu hỏi được coi là logic.

Ngoài ra, chính sự phân loại của Éléments và công trình liên quan *Eclairsissement* cho thấy một vị trí trung gian cho lý thuyết này, nằm đâu đó giữa toán học và logic. Theo nghĩa này, một trong những lập luận thú vị nhất của phê bình là việc ông buộc tội các nhà lý thuyết xác suất về việc sử dụng các phép ngụy logic để chứng minh các kết quả của họ. Trong kỷ yếu thứ mười của Opuscules, d'Alembert coi lập luận này là ngụy biện

1. Xác suất được mặt sấp trong lần tung đầu tiên bằng xác suất mặt ngửa trong lần tung đầu tiên.
2. Xác suất được mặt ngửa trong lần tung đầu tiên gấp đôi xác suất được mặt ngửa trong lần tung đầu và sấp trong lần tung thứ hai, hay ngửa trong lần đầu và ngửa trong lần thứ hai.
3. Như vậy xác suất được mặt sấp trong lần tung đầu tiên gấp đôi xác suất được mặt ngửa trong lần tung đầu và sấp trong lần tung thứ hai, hay ngửa trong lần đầu và ngửa trong lần thứ hai.

Và đây là chỉ trích của d'Alembert đối với lập luận này:

Trong hai mệnh đề [1 *và* 2], *thuật ngữ trung bình không giống nhau, vì trong mệnh đề thứ nhất, thuật ngữ trung bình có nghĩa là xác suất để được mặt ngửa sau lần tung đầu tiên trước khi*

[9]Sự khác biệt này, mặc dù không được phát biểu một cách rõ ràng bởi d'Alembert, toát lên trong tiểu luận "*Doutes et questions sur le calcul des probabilités*" trong Mélanges, mà trong đó d'Alembert phân biệt chủ đề chỉ trích mà có thể được hiểu bởi các nhà toán học và các chủ đề mà các độc giả không chuyên nghiệp cũng có thể hiểu: J'adopte donc, o plutôt j'admets pour bonne dans la rigueur mathématique, la théorie ordinaire des Probabilités, & je vais seulement examiner si les résultats de cette théorie, quand ils seroient hors d'atteinte dans l'abstraction géométrique, ne sont pas susceptibles de restriction, lorsqu'on applique ces résultats à la nature ([4], p. 277). Do đó, tôi chấp thuận, hoặc tốt hơn, tôi chấp nhận, lý thuyết xác suất thông thường, và tôi tự giới hạn mình trong việc phân tích xem liệu kết quả của lý thuyết này, khi chúng vượt quá khả năng trừu tượng hình học, có chịu trách nhiệm hạn chế khi áp dụng vào tự nhiên hay không.

thực hiện nó và trong mệnh đề thứ hai là xác suất được mặt ngửa trong lần tung đầu tiên trong sự so sánh với xác suất nhận được mặt ngửa hoặc mặt sấp trong lần tung thứ hai. Bây giờ, xác suất cuối cùng này (tức là nhận được mặt ngửa hoặc mặt sấp trong lần tung thứ hai) giả định rằng lần tung đầu tiên đã được thực hiện và nó đã ra mặt ngửa, do đó, xác suất cuối cùng này giả định rằng điều đầu (tức là nhận được mặt ngửa trong lần tung đầu tiên) không còn là một xác suất, mà là một sự chắc chắn. [10]

Các thuật ngữ của logic được sử dụng bởi d'Alembert trong đoạn văn này cho thấy rõ ràng giọng điệu phê phán của ông. Rất thú vị khi lưu ý rằng sự phản đối được đưa ra bởi nhà bách khoa toàn thư vào thời điểm này, mặc dù không hoàn toàn rõ ràng, đã dẫn đến khái niệm xác suất có điều kiện, vốn sẽ chỉ xuất hiện vào cuối những năm 1700, với công trình của Bayes.

Các lập luận thực nghiệm mà d'Alembert sử dụng như sự chỉ trích cho khả năng áp dụng tính toán xác suất vào các tình huống cụ thể trong các trò chơi may rủi có thể được truy nguyên từ định nghĩa của các phạm trù khả năng siêu hình và khả năng vật lý:

Cần phân biệt cái nào là khả năng siêu hình và cái này là khả năng vật lý. Lớp đầu tiên bao gồm tất cả những thứ mà sự tồn tại của nó không có gì là vô lý, trong lớp thứ hai, không chỉ có điều kiện về sự tồn tại của nó không có gì là vô lý, mà còn phải không có gì quá phi thường và nằm ngoài tiến trình bình thường của các sự kiện. Một cách siêu hình ta có thể tung hai con xúc sắc đều ra hai mặt sáu một trăm lần liên tiếp, nhưng về mặt vật lý điều này là không thể, bởi nó chưa từng xảy ra và sẽ không bao giờ xảy ra. [11]

Sự khác biệt giữa khả năng siêu hình và khả năng vật lý có một hậu quả nghiêm trọng từ quan điểm phân tích xác suất của một hiện tượng thực. Một ví dụ quan trọng là phân tích các lần tung đồng xu. Theo d'Alembert, để xác lập khả năng vật lý cần phải thực hiện các thí nghiệm, qua đó xác định xác suất xảy ra một kết quả nhất định. Liên quan đến vấn đề này, ông cũng lưu ý

[10]... je dirai que dans cet argument le moyen terme d'est pas le même dans les deux Propositions. Car le moyen terme dans la premiere Proposition, est la probabilité d'amener pile au premier coup, avant d'avoir joué ce premier coup. Dans la seconde Proposition, le moyen terme est la probabilité d'amener pile au premier coup, comparée à la probabilité d'amener croix ou pile au second coup. Or cette derniere probabilité (celle d'amener croix ou pile au second coup) suppose que le premier coup est joué, & qu'il a donné pile, ainsi cette dernier probabilité suppose que la premiere probabilité (celle d'amener pile au premier coup) n'est plus une probabilité mais une certitude ([3], pp. $20-21$).

[11]C'est qu'il faut distinguer entre ce qui est métaphysiquement possible, & ce qui est possible physiquement. Dans la premiere classe sont toutes les choses dont l'existence n'a rien d'absurde, dans la seconde sont toutes celles dont l'existence non-seulement n'a rien d'absurde, mais même rien de trop extraordinaire, & qui ne soit dans le cours journalier des événemens. Il est métaphysiquement possible, qu'on amene rafle de six avec deux dez, cent fois de suite, mais cela est impossible physiquement, parce que cela n'est jamais arrivé, & n'arrivera jamais ([3], p. 10).

rằng sự xuất hiện của một kết quả nhất định nhiều lần thường làm cho sự xuất hiện của nó ít có thể xảy ra trong tương lai. Điều này, đến lượt mình dẫn đến rằng một dãy các lần tung đồng xu không còn đồng khả năng: Một dãy các lần tung gồm số lần ra mặt ngửa và mặt sấp gần như nhau sẽ có khả năng vật lý cao hơn dãy mà ở đó một kết quả ít hơn kết quả kia nhiều lần.

11. Kết luận

Như chúng ta đã thấy, một trong số các lập luận chỉ trích lý thuyết xác suất truyền thống là việc vạch trần một ngụy biện giả định, được thực hiện bởi d'Alembert vay mượn ngôn ngữ của các nhà logic học mà ông phê phán gay gắt. Chiến lược giải thích này không phải là nội tại cũng không phải là cơ hội: Chúng ta đã thấy cách d'Alembert, trong các phân loại của Eléments de philosophie, dẫn dắt lập luận xác suất đến bối cảnh của logic của phỏng đoán, do đó, đến một trong hai nhánh của logic mà ông đã xác định. Mặc dù trong *Eclairsissements*, ông bày tỏ sự ủng hộ tính ứng dụng của toán học vào nghệ thuật phỏng đoán, những lời chỉ trích về xác suất được phân tích ở đây cho thấy một sự không tin tưởng về khả năng đưa ra luận điểm này một cách cụ thể.

D'Alembert đã miễn cưỡng coi logic là một công cụ có thể được chuẩn bị để nói với con người cách suy luận trong tất cả các lĩnh vực kiến thức. Việc tính toán xác suất, được sắp xếp một cách mơ hồ giữa lĩnh vực logic và toán học, phải chịu những nghi ngờ giống như logic. Logic, được coi là nghệ thuật của lý trí, phải giới hạn bản thân trong việc cung cấp một vài hướng dẫn sơ bộ về cách suy luận:

Điều này nằm trong việc quan sát chính xác sự phụ thuộc lẫn nhau [của sự thật], không dùng đến một gia phả sai để lấp đầy những khoảng trống nơi thiếu hồ sơ, cuối cùng, bắt chước những nhà địa lý, những người tỉ mỉ đưa ra các chi tiết của các khu vực đã biết, không sợ để lại những khoảng trống tương ứng với những vùng đất chưa biết. [12]

D'Alembert dường như ngụ ý rằng nỗ lực áp dụng xác suất vào tự nhiên, giống như công việc của một nhà địa lý học không chuyên nghiệp, không đủ cẩn trọng trong việc đánh dấu những vùng đất chưa biết, những nơi mà sự không chắc chắn thống trị và lý luận chỉ có thể lấy được chút ít.

Lettera Mathematica 2, 185 − 192 (2015), *dịch từ tiếng Ý sang tiếng Anh bởi Kim Williams*

[12] Elle consiste à observer exactement leur dépendance mutuelle, à ne point remplir par une fausse généalogie les endroits où la filiation manque, à imiter enfin ces géographes qui, en détaillant avec soin sur leurs cartes les régions connues, ne craignent point de laisser des espaces vides à la place des terres ignorées ([5], vol. I, p. 152).

Tài liệu

[1] Bernoulli, D.: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour le prévenir. *Histoire et Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1760, parte 2, pp. $1 - 79$ (1760).

[2] Daston, L.: *Classical Probability in the Enlightenment*. Princeton University Press, Princeton, NJ (1988).

[3] D'Alembert J.-B. L. R. *Opuscules mathématiques*, t. II. Chez David, Paris (1761).

[4] D'Alembert J.-B. L. R. *Mélanges de litterature, d'histoire, et de philosophie*, t. V. Chatelain, Amsterdam (1767).

[5] D'Alembert, J.-B.L.R.: *Oeuvres de d'Alembert*. A. Belin, Paris (1821).

[6] Halley, E. An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from the curious Tables of the Births and the Funerals at the City of Breslau, with an Attempt to ascertain the Price of Annuities on Lives. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* $17 : 596 - 610$ (1693)

[7] Voltaire, F. M. A. de. *Letters on the English*. Vol. XXXIV, Part 2. The Harvard Classics. P.F. Collier & Son, New York (1909–14). Retrieved from: www.bartleby.com/34/2/, 17 November 2014.

SỰ TÍCH "TRÂU VÀNG", "CÁO CHÍN ĐUÔI" VÀ HỒ TÂY (PHẦN 2)

Nguyễn Lê Anh

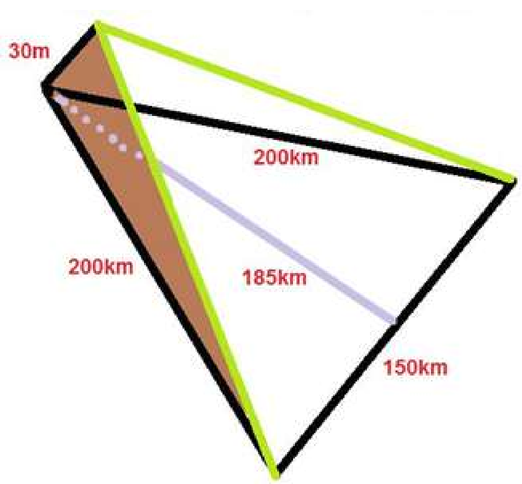
GIỚI THIỆU

"Để hiểu được lịch sử Việt Nam chúng ta cần phải tìm hiểu tình hình địa chất theo thời gian." Vẫn luôn là những góc nhìn mới lạ cùng với chuỗi lập luận logic dựa trên những nghiên cứu rất dày công, từ khảo cứu tài liệu đến đi thực địa ở các địa phương, tác giả Nguyễn Lê Anh đã đưa ra hàng loạt kết quả nghiên cứu mới về lịch sử, trong đó không ít kết quả đã đánh đổ những nhận định vốn đã tồn tại hàng trăm năm.

Ở Epsilon số 17 này, chúng tôi trân trọng giới thiệu tới độc giả phần 2 của loạt bài lịch sử này với một góc nhìn rất thú vị và mới lạ về Hồ Tây và sự tích "trâu vàng" và "cáo chín đuôi".

Thể tích một hình chóp bằng $\frac{1}{3}$ tích của chiều cao nhân với diện tích đáy.

Hình sau là chóp tứ diện vuông có đáy là tam giác cân. Tam giác đáy là tam giác cân có cạnh đáy dài 150km và chiều cao 185km. Chóp vuông tại đỉnh có chiều cao là 30m. Thể tích của nó là 139 triệu mét khối. Con số này nói lên điều gì thế?



$$\frac{1}{3} \times \frac{185 \text{ km} \times 150 \text{ km}}{2} \times 30 = 139000 \text{ triệu m}^3.$$

Anh Nguyễn Chí Công có luận điểm sự kết dính lớn nhất tạo ra một cộng đồng, cụ thể là cộng đồng Việt là văn hóa tâm linh, là hệ thống các đình đền chùa miếu,... nơi cư dân đến sinh hoạt.

Tâm linh không phải là sự hiện diện của Ma Quỷ, thế giới Âm. Những thứ ấy không có thật, mà nó được hình thành ra như những khái niệm, na ná như các số âm trong toán học. Trong thực tế thì không có đại lượng tương ứng với sự kiện số âm, tuy nhiên việc sử dụng số âm mang lại nhiều thuận tiện trong tính toán. Tâm Linh là sự hồi tưởng một cách có hệ thống về quá khứ để tỏ lòng biết ơn tổ tiên.

Sau đây là bản đồ phần trung tâm Hà Nội do Người Pháp vẽ vào năm 1873. Trên bản đồ chúng ta thấy các cụm dân cư Hà Nội sống trên các gò đồi xung quanh là ruộng lúa nước. Mỗi cụm như vậy là một làng. Giao thông đi lại chủ yếu bằng thuyền. Ở giữa các gò đồi là các chấm đỏ, đấy chính là các đình, đền, và chùa của làng. Các đồng lúa xưa ở trung tâm Hà Nội, nay đã bị đô thị hóa, các đầm hồ cũng bị lấp gần hết. Các làng cổ Hà Nội nay cũng không còn, mà chỉ còn lại các đình đền chùa. Những di tích này có thể kể lại cho chúng ta những câu chuyện về cuộc sống của ông cha chúng ta ra sao.

Để biết về lịch sử đình đền chùa qua những ghi chép thì không chuẩn, bởi chúng có thể mới được tu sửa làm mới lại, người coi giữ đình đền chùa thường là ít hiểu biết, có thể tùy nghi mà phịa ra nhiều tình tiết huyền bí sai sự thật. Chúng ta quan tâm tới sự kiện liên quan tới đình đền chùa chứ không phải bản thân việc xây dựng chúng.

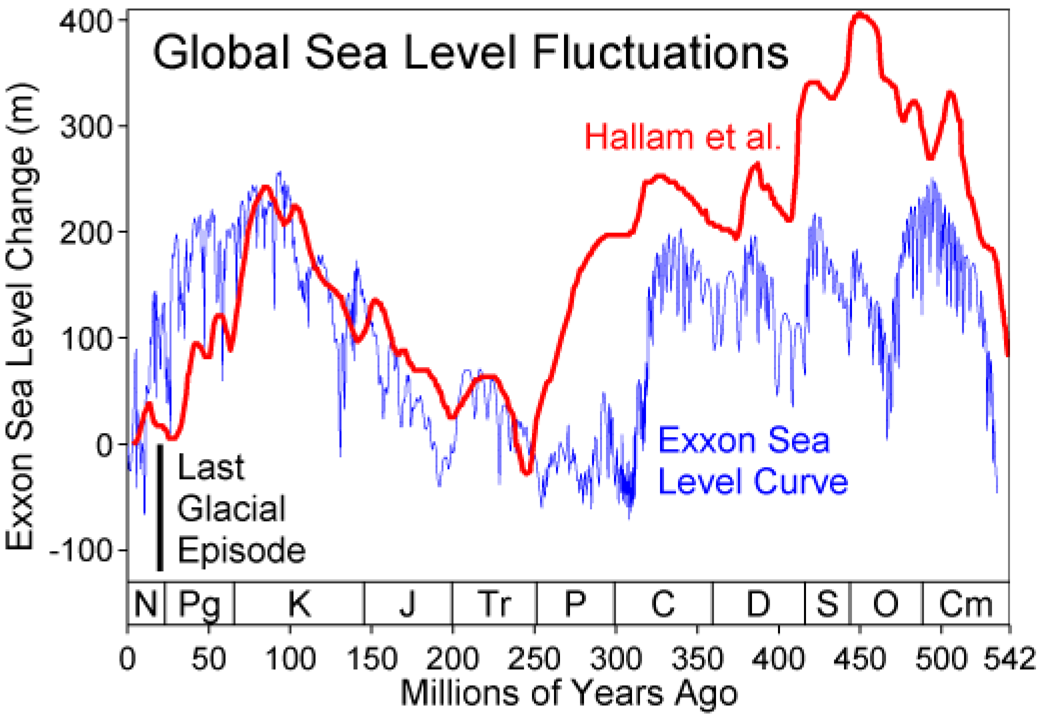
Qua nghiên cứu bản đồ Google chúng ta nhận thấy cư dân Việt định trên khắp đồng bằng Bắc Bộ cư tại các vùng gò đồi xung quanh là nước, các vùng gò đồi này cũng không lớn lắm và cũng không cao lắm. Mỗi gò là một làng. Họ đi lại chủ yếu bằng thuyền. Mỗi làng luôn có một ngôi nhà đầu tiên được dựng lên ở nơi cao nhất của gò, và về sau nó là Đình làng. Con cháu của những người đầu tiên ra sinh sống ở gò thường làm nhà ngay gần đấy, vì thế mà "*Mọi con đường làng đều đi tới Đình!*". Đình là là ngôi nhà đầu tiên được dựng ra trên gò, và giếng ấy trở thành Giếng Đình. Thành giếng được đắp cao để tránh nước lụt tràn vào. Thông thường thì nơi đỉnh gò là nơi có cây cao, và xét về bản chất thì, đỉnh gò cao lên được là nhờ những bụi cây ấy đã chắn gió để cho bụi quẩn lại mà cao dần lên. Những cây này thường là họ các cây mà chim hay ăn quả và vì thế mà chúng mang đi vãi hột khắp nơi gò nào cao chúng đậu được. Những cây ấy là cây đa bởi quả của nó vừa mồm cho chim ăn. Và như thế "*Cây đa giếng nước sân đình*" là những thứ in đậm vào trong tâm trí người Việt.

Người dân sống trên các gò cao và trồng lúa ở dưới ruộng. Ruộng lúa bao quanh làng, có nước tự chảy. Đầu làng là nơi dòng nước chảy đến và cuối làng là nơi cuối của gò đồi, là nơi nước chảy đi. Xét về mặt tâm linh, người Việt không bao giờ quên tổ tiên. Họ quan niệm tổ tiên, tức những người đã chết vẫn sống cùng, theo dõi và phù hộ cho họ. Vì thế người dân có ý thức chôn và bảo vệ mồ mả. Họ chôn người chết ở cuối làng, tức cuối nguồn nước. Giữa khu vực người sống và người chết có một cái nhà mà sau trở thành chùa. Chùa là nơi giao tiếp giữa người sống với người chết. Người ta đến chùa để được nhìn lại tổ tiên, để tỏ lòng thành kinh biết ơn. Càng về sau đất chật người đông, phía sau chùa chỉ còn được dùng để chôn cất các đời sư trụ trì, còn mồ mả được thay bằng việc lưu giữ các hộp tro, thậm chí chỉ là các bia tưởng niệm được lưu ở phía sau chùa. Như thế phía sau chùa là bãi tha ma, phía trước chùa là đình làng; và sự tồn tại của chùa Việt cho thấy quan niệm song song tồn tại của cả hai thế giới Âm và Dương. Cũng như sự tiện lợi trong việc sử dụng việc đồng thời khái niệm số Âm và Dương để nghiên cứu và ứng dụng khoa học kỹ thuật, việc sử dụng song song hai thế giới tạo ra sự thuận tiện nhất định trong việc xây dựng và bảo tồn văn hóa Việt. Ngoài ra do liên quan đến cộng đồng và đến tâm linh mà vị trí của Chùa thường là ít thay đổi theo thời gian. Bởi thế mà chúng ta có thể xác định lại vị trí nhiều làng cổ, con sông cổ, và hồ cổ, dựa trên vị trí của các chùa.

Yếu tố văn hóa này ảnh hưởng tới việc sinh hoạt cộng đồng người Việt. Tuy nhiên tâm linh người Việt luôn hướng tới việc thờ cúng cầu xin các lực siêu nhiên, mà người ta gọi là thánh là các vị có sức mạnh trong lịch sử. Vậy thì sự thật gì ẩn sau các nội dung thờ cúng ấy? Muốn vậy trước tiên chúng ta phải biết được thời điểm người dân có thể tới dựng đình đền chùa ở một vùng đất và dựa trên việc phân tích mật độ di tích cũng như phân tích sự sự liên kết logic nội dung thờ cúng để chắt lọc được nội dung lịch sử chứ đựng ở trong.

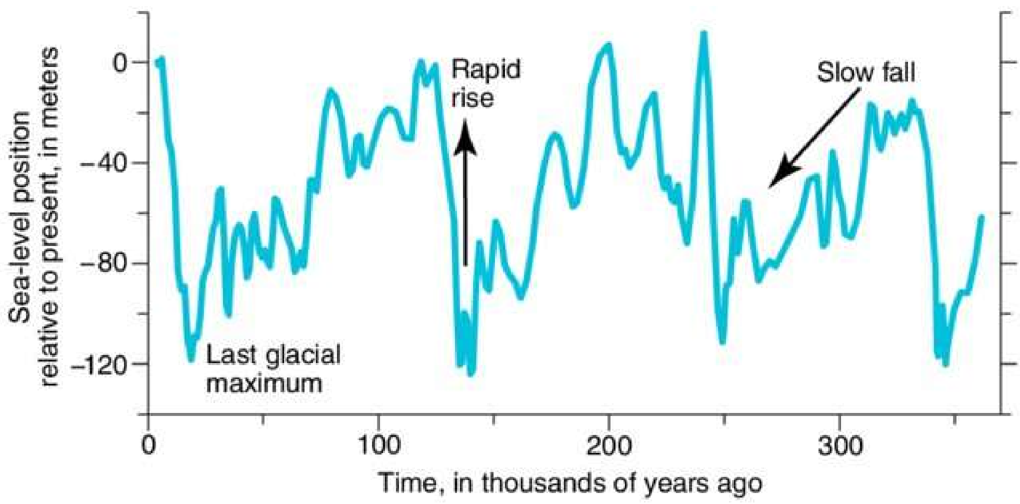
Nhiều bài báo khoa học cho thấy hiện nay bờ biển đang lùi ra xa, và ta có thể nghĩ là trong quá khứ cũng diễn ra như vậy. Cách đây khoảng 6 nghìn năm bờ biển ở vào vùng Phú Thọ, nó đã lùi dần 180km ra biển đến vị trí như ngày nay. Chúng cần phải xác định xem thời điểm cư dân có thể đến định cư trên một mô đất là khi nào. Chúng ta không thể tin khống vào khẳng định "*biển lùi, biển tiến*" một cách dễ dàng, hơn thế để xác định được thời điểm cư dân đến định cư tại một vùng đất chúng ta còn phải xác định được tốc độ lùi của biển.

Hoàn toàn không mấy khó khăn để có thể tìm được các dữ liệu đáng tin cậy cho thấy mực nước biển luôn giữ nguyên 6 nghìn năm qua. Người ta đã khoan sâu hàng nghìn mét để lấy mẫu băng ở Bắc Cực và Nam Cực, và phân tích độ dày cũng như đặc tính lý hóa của các lớp băng. Qua đó họ biết được tình hình khí hậu diễn ra trong từng năm kéo dài trong suốt 400 triệu năm vừa qua.

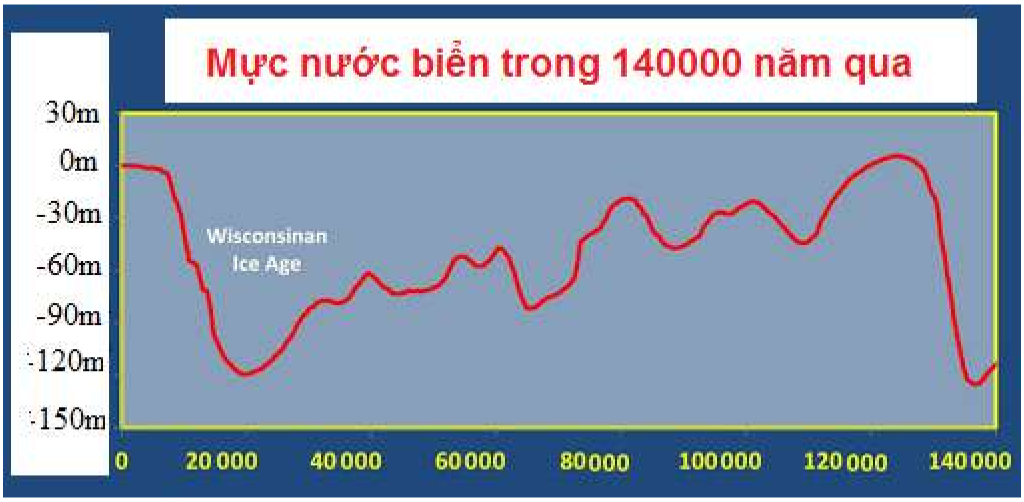


Từ việc biết được tình hình khí hậu của từng năm mà người ta xác định được mực nước biển từng thời kỳ. Nhìn vào độ thị mực nước biển theo thời gian chúng ta nhận thấy có lúc nó cao hơn mực nước biển hiện nay tới 400m. Nếu gặp may chúng ta có thể tìm thấy vết của sóng biển để lại ở các vách đá nơi độ cao ấy. Biển cũng có thể để lại dấu vết là các sinh vật biển bị mắc kẹt và bị hóa đá trong các tầng đất đá ở đấy. Những hang động ở trên độ cao vài trăm mét như động. Người Xưa ở khu vực Cúc Phương, và rất nhiều hang động ở Quảng Bình, Hà Tĩnh,... đều là những dấu vết của bàn tay tạo hóa từ nhiều triệu năm về trước.

Loài người xuất hiện ở châu Phi, khoảng 1 triệu năm trước đây. Trong khoảng thời gian 400 nghìn năm qua ấy khí hậu trái đất thay đổi không nhiều, và có tính tuần hoàn theo chu kỳ khoảng 130 nghìn năm. Mực nước biển cũng vì thế mà lên xuống trong biên độ từ thấp hơn hiện nay 130m cho tới cao hơn hiện nay 20m.

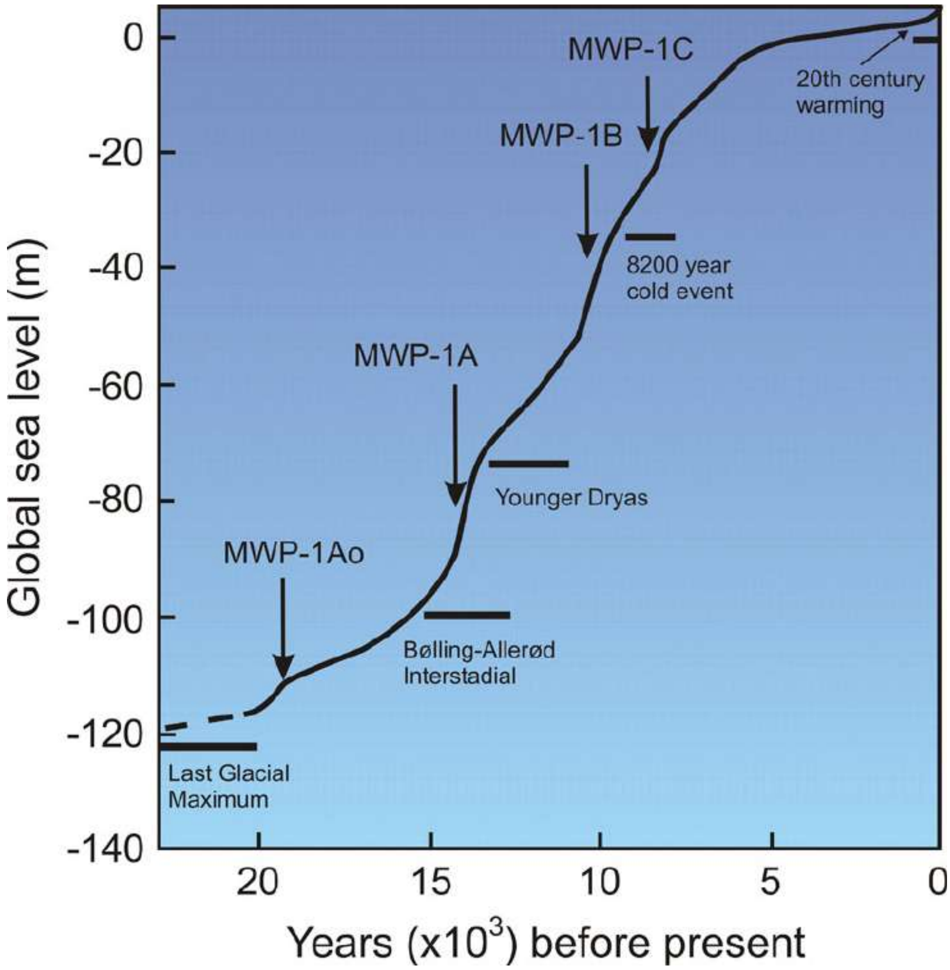


Trong vòng 140 nghìn năm qua mực nước biển có hai lần xuống rất thấp. Lần thấp nhất cuối cùng là cách đây 20 nghìn năm, khi ấy mực nước biển thấp hơn hiện nay 120m.



Nước biển xuống thấp là do nhiệt độ toàn cầu xuống thấp, nước trên trái đất đóng băng ở hai cực nhiều tới mức mực nước biển bị thấp đi. Trong khoảng thời gian 20 nghìn năm qua mực nước biển tăng dần, chứng tỏ bầu khí quyển trái đất cũng ấm dần lên.

Đồ thị mực nước biển tăng trong 20 nghìn năm qua như sau.



Như thế mức tăng mực nước biển tương đối đều, 100m cho khoảng 20 nghìn năm, tức khoảng 5mm cho một năm. Tuy nhiên trong 6000 năm vừa qua mực nước biển gần như giữ nguyên.

Qua quan sát trên bản đồ Google tôi nhận thấy đồng bằng sông Hồng là một tam giác cân mà đỉnh là Phú Thọ, và có thể ước lượng được chiều cao của Phú Thọ là khoảng 30m. Vậy đồng bằng sông Hồng đã hình thành như thế nào và tại sao bờ biển ngày một tiến ra phía biển?

Trước đây nhiều năm khi tham gia vào dự án tính toán trữ lượng nước ngầm cho Hà Nội tôi được anh Nguyễn Ngọc Kỷ, khi ấy là hiệu trưởng trường đại học Mỏ Địa Chất cho biết cấu trúc của đồng bằng sông Hồng vùng Hà Nội. Theo như anh Kỷ thì bên dưới Hà Nội 100m là tầng đá, tiếp theo khoảng 30m là cuội sỏi nơi nước ngầm chảy rất mạnh. Phía bên trên 30m cuội sỏi là lớp có độ dày khoảng 5m là tầng sét không thấm nước, và bên trên nữa là tầng đất phù sa.

Ngày nay thì tôi biết nhiều hơn. Những ai hay đi rừng leo núi thì hiểu từ đỉnh núi có các dãy núi chạy về các phía. Ở trên đỉnh núi chúng ta có thể bước một bước là từ dãy núi này sang dãy núi kia, nhưng khi nó đã chạy ra xa và hạ thấp độ cao thì việc đi từ dãy này sang dãy khác là không dễ. Ở giữa hai dãy núi là một cái khe và ở dưới lòng khe là nơi nước chảy, càng ra xa cái khe ấy càng rộng và sâu. Đồng bằng Bắc Bộ của chúng ta nằm ở giữa hai dãy núi, dãy Hoàng Liên sơn đổ ra biển ở tận cuối Ninh Bình, và dãy Đông Triều ở Quảng Ninh. Như thế ở dưới rất sâu bên dưới là thềm đá. Và cái khe hẹp ấy chính là con sông Thao. Thượng nguồn của sông Thao chảy từ phía Nam cao nguyên Tây Tạng, chảy tới vùng Phú Thọ thì hòa với sông Đà và sông Lô.

Sông Đà có lưu vực là vùng Tây Bắc có lưu lượng gấp 3 lần sông Lô, và sông Lô có lưu vực là vùng Đông Bắc có lưu lượng gấp 2 lần sông Thao. Cả 3 con sông nói tển hợp lại thành sông Hồng. Cách dây 20 nghìn năm, khi ấy mực nước biển thấp hơn hiện nay 120m thì, do vịnh Hạ long sâu trung bình 80m mà nó là rừng rậm, và con sông Hồng chảy ra tận phía ngoài đảo Hải Nam. Như vậy cái khe vĩ đại giữa hai dãy núi được phù sa bồi lấp dày tới 100m mà thành đồng bằng Bắc Bộ, và lẽ dĩ nhiên ở dưới sâu 100m là khe đá.

Quay trở lại câu chuyện với anh Kỷ, ngày ấy mấy anh em chúng tôi ngồi trong một căn phòng tồi tàn ở tầng 3 trường đại học Bách Khoa. Mọi người rất đói và rất ấu trĩ. Hầu như ai cũng tin rằng con đường thoát ra khỏi cái đói là việc tính toán qua các con số. Ngày ấy tôi là sĩ quan Học Viện Kỹ Thuật Quân Sự và là tiến sĩ toán lý trường MGU, là người có khả năng tính toán rất tốt. Mọi người đặt niềm tin cả vào tôi. Câu chuyện khoa học thì chắc chả có gì đáng để nói, bởi cái cách đặt vấn đề "*dùng tính toán làm nhanh ra miếng ăn*" như vậy thì cũng chả thể mang lại được điều gì có giá. Cái đáng kể lại là độ dày của tầng phù sa 100m, và có một chuyện đời thường nhưng đã sản sinh ra rất nhiều đại gia của trường ĐH Mỏ Địa Chất, mà đến bây giờ chắc họ cũng chả biết.

Ngày ấy anh Kỷ bảo chúng tôi, "*Anh ra ứng cử hiệu trưởng đây, chúng mình nên làm gì?*" Tôi nói với anh Kỷ, "*Anh nên lo cho cuộc sống của anh em*". Anh hỏi "*Cụ thể nên thế nào?*". Chúng tôi bảo là anh xin mua đất cho anh em làm nhà và làm ngơ đi cho họ muốn làm gì thì làm. Thế là anh đi xin đất. Đầu tiên lập mẹo xin làm cái nhà tập thể 5 tầng và rồi mua đất xung quanh. Tôi cũng mua được mua 1 xuất, nó là chính cái nhà tôi đang ở hiện nay. Rồi anh ấy đã để cho giáo viên đi nước ngoài vô tội vạ, chỉ miễn để lương lại cho anh em ở nhà lĩnh. Thật may, hệ thống XHCN sụp đổ và người dân Đông Âu cũng Như Liên Xô rơi vào hoảng loạn. Họ đói và rét, họ bị lừa mua từ cái áo ấm "*ma-dê-in*" Việt Nam mà bên trong độn rễ bèo tây. Rất nhiều đại gia là giáo viên bỏ dạy đi hợp tác nghiên cứu đã đánh hàng và phất lên ngày ấy. Chuyện kỷ niệm về anh Kỷ là như vậy. Rất tiếc anh Kỷ đã mất vì ung thư một thời gian sau đó.

Quay lại với sự hình thành đồng bằng sông Hồng. Tôi biết là toàn bộ phù sa dày khoảng 70m là do con sông Hồng mang tới, và rằng 6000 năm về trước biển vào tới tận Phú Thọ. Vậy hằng có gì mà mực nước biển thì không thay đổi mà bờ biển lại tiến ra tới mức độ vài chục mét một năm? Tôi bắt đầu hình dung là đồng bằng Bắc Bộ cứ dâng cao lên 5mm mỗi năm, và vì nó hơi nghiêng cho nên Phú Thọ nhô lên khỏi mặt nước biển trước các vùng đất khác nhô ra sau. Hỏi Google về sông Hồng, tôi biết sông Hồng được hình thành dựa trên cú đâm của địa Ấn vào Đại lục địa châu Á. Tôi rất thích đỉnh Everest. Tôi dõi theo từng sự kiện liên quan đén đỉnh núi ấy, vì thế ngay từ thời còn học phổ thông, tôi đã nhớ rất rõ sự kiện "*Dãy Hymalya và đỉnh Everest được hình thành từ cú đâm của lục địa Ấn, và rằng cho tới tận ngày nay đỉnh núi Everest vẫn được nâng cao 5mm một năm*". Vậy là tôi cho rằng đồng bằng sông Hồng cũng được nâng lên mỗi năm 5mm như vậy. Với khái niệm "*Lục địa dâng cao 5mm mỗi năm*" như thế, tôi gọi thời điểm một mô đất nhô ra khỏi biển là thời gian sinh ra nó. Chúng ta tạm gọi mô hình này là Everest.

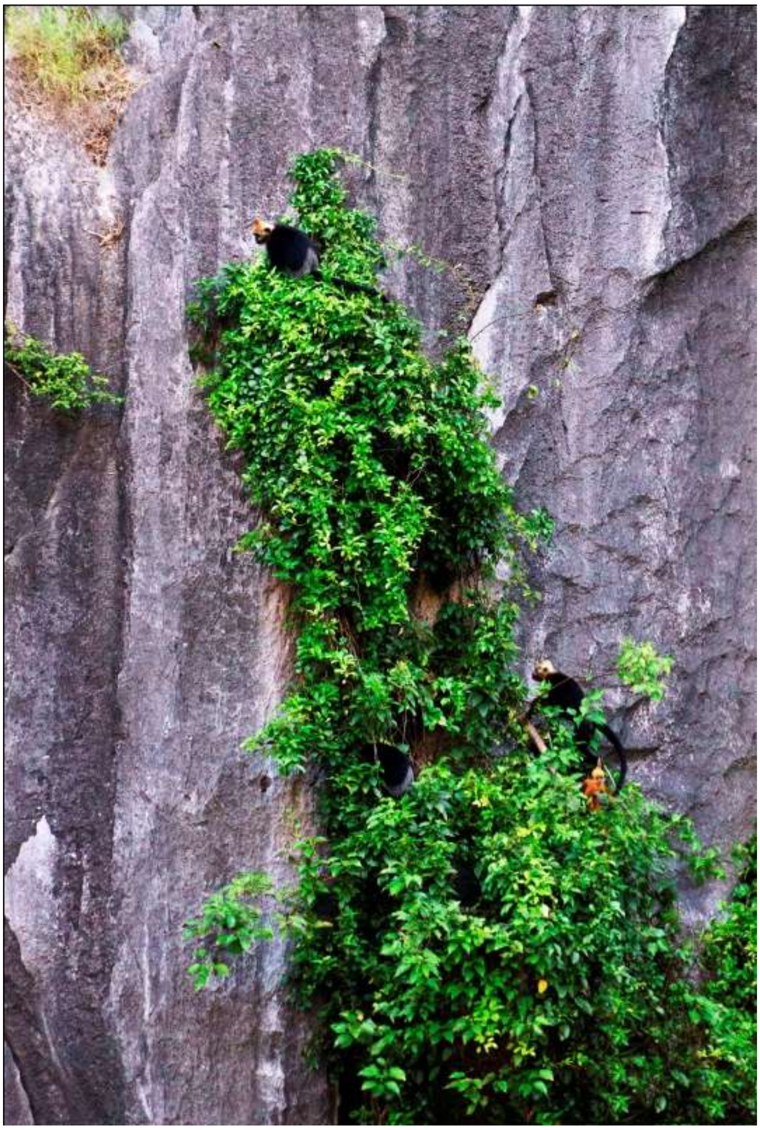
Nhớ là khoảng 6 nghìn năm về trước thì bờ biển ở vào vùng Phú Thọ. Hỏi anh Google chúng ta có thể thấy Phú Thọ là đỉnh của tam giác cân đồng bằng Bắc Bộ, có đáy dài khoảng 150km từ vùng Hạ Long tới Phát Diệm, và cạnh bên dài khoảng 200km. Cũng hỏi anh Google ta biết Phú Thọ ở độ cao hơn mực nước biển khoảng 30m.

Với mô hình "*Lục địa dâng cao* 5*mm mỗi năm*", thì sau 6000 năm, Phú Thọ ở độ cao 30m là hợp lý. Vậy như thế sau 6000 năm thì mực nước biển rút ra xa 180km, tức cứ 1000 năm rút ra xa khoảng 30km.

Áp dụng quan điểm Everest ta để nhận thức lịch sử chúng ta thấy vùng đất có "*đền thờ nhà Trần vùng thành phố Nam Định, nơi cách biển* 40*km*", vậy nó nhô lên khỏi mặt nước biển từ khoảng 1200 năm về trước, tức khoảng vào thế kỷ thứ 8 kể từ đầu Công Nguyên. Để có thể đến định cư làm nhà xây đình thì vùng đất này cũng phải nhô lên cao hơn mực nước biểm một tí, ví dụ để Nam Định nhô lên cao hơn mực nước biển từ 2 đến 3m thì mất thêm khoảng từ 400 nam cho đến 600 năm. Vậy là hợp lý, các đền đình chùa nhà Trần ở Nam Định được xây vào khoảng từ thế kỷ 12 cho đến 14.

Tôi cũng tính ra được thời điểm đầu Công Nguyên người dân dựng đền thờ hai Nữ tướng của Bà Trưng ở Cống Mọc. Vậy là tôi rất mừng vì đã có được một phương pháp xác định thời điểm người dân đến định cư tại một khu vực.

Sự việc tiếp theo bắt đầu từ việc nhiều người khẳng định trước đây vịnh Hạ Long có thể đi lại. Kiến thức này có trong nội dung học phổ thông. Tôi sẵn sàng tin điều ấy, vì ở nhiều đảo ngoài vịnh Hạ Long vẫn còn có Vọc sinh sống.



Nếu như mỗi năm thềm lục địa sông Hồng được nâng cao 5mm thì có nghĩa là khi lùi về quá khứ nó sẽ bị thấp đi 5mm mỗi năm. Lùi 20 nghìn năm về trước nó thấp hơn hiện nay 100m, cộng với lượng phù sa ước tính là 20m thì thấy đồng bằng sông Hồng ở thấp hơn hiện nay 120m. Việc lục địa dâng mang tính địa phương tại châu Á, trong khi mực nước biển dâng là toàn cầu. Như chúng ta đã biết 20 nghìn năm trước đây mực nước biển thấp hơn hiện nay 120m. Vậy là mực nước biển vẫn như hiện nay, khó mà có thể nói là có thể đi bộ qua vịnh ra đảo. Tôi rơi vào sự thất vọng với mô hình Everest, bởi nếu quả thật là thềm lục địa đồng bằng sông Hồng đã được nâng lên thì phải là nâng lên trong rất nhiều trăm nghìn năm, và khi ấy Hà Nội phải ở độ cao như đỉnh Everest. Mà điều này thì không đúng!.

Tất nhiên là tôi đã cố gắng đi tìm các tài liệu khoa học, và tìm thấy các tác giả của chúng. Tôi cũng có hỏi họ nhưng các câu trả lời không được thỏa mãn.

Tôi đã suy nghĩ và thấy rằng ngọn nến khi cháy vẫn để lại đám sùi ở ngay phía trên cùng của thân cây nến, mà đúng ra nước nến phải chảy xuống tận chân cây nến. Những đám sùi này là nến bị sức nóng của ngọn lửa mà chảy ra nước rồi bị sức hút trái đất mà chảy xuống thấp hơn dọc theo thân cây nến. Nước nến chảy xuống thân cây nến và khi gặp lạnh thì đông lại, cứ thế, hết lớp này đè lên lớp khác, mà khối sùi to dần lên. Phù sa từ Phú Thọ, về nguyên lý thì phải chảy xuôi theo dòng nước tới nơi thấp nhất, nhưng cũng như dòng nước nến gặp lạnh thì đông lại phù sa vẫn có thể đọng lại nếu vận tốc dòng nước phù sa chảy chậm. Khi dòng phù sa chảy đủ chậm các hạt phù sa sẽ kết dính được với nhau, và rồi hết lớp này rồi đến lớp kia cứ như thế nó làm cho lòng dòng chảy phía Phú Thọ cao dần lên. Lớp phù sa tạo ra độ nghiêng từ Phú Thọ ra tới tận ven biển, cho đồng bằng sông Hồng. Như vậy chính sức kết dính của các hạt phù sa là nguyên nhân làm cho nó bị đọng lại ngay ở vùng Phú Thọ trước mà không bị chảy tột xuống đáy biển sâu. Chúng ta gọi mô hình này là "*nến chảy*".

Hỏi Google thì biết được tổng lượng phù sa mà sông Hồng mang ra biển là 100 triệu tấn một năm và khối lượng riêng của đất là khoảng 1.4 tấn/1m^3. Vậy là mỗi năm con sông Hồng mang ra một lượng phù sa là 75 triệu mét khối đất. Ước tính tổng thể tích hình khối tứ giác vuông chiều cao 30m (ở Phú Thọ) và đáy là tam giác đồng bằng sông Hồng. Đáy là một tam giác cân cạnh 200km và đáy 150km là bờ biển từ Ninh Bình cho tới Hạ Long.

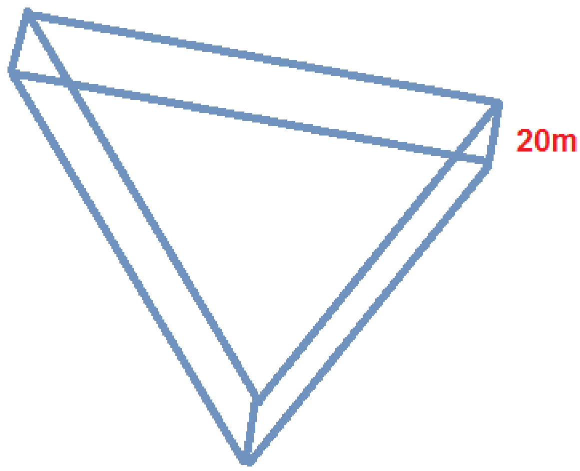
$$\frac{1}{3} \times \frac{185 \text{ km} \times 150 \text{ km}}{2} \times 30 = 139000 \text{ triệu m}^3.$$

Mỗi năm con sông Hồng mang ra biển 100 triệu tấn phù sa, tức 75 triệu mét khối đất, vậy thời gian để có được ngầy ấy phù sa là $\frac{139000}{75} = 1800$ năm. Như thế lượng phù sa trong khoảng thời gian 4000 năm bồi vào đâu?

Hiển nhiên là chúng ta phải coi lượng phù sa ấy bồi tại chỗ vùng đồng bằng Bắc Bộ, và 6000 năm trước đây đồng bằng Bắc Bộ là đáy của một cái vịnh, tạm gọi là vịnh Sông Hồng. Chiều sâu trung bình của vịnh này có thể ước tính được ra từ tổng lượng phù sa bồi lấp nó trong 4000 năm. Như thế vịnh Sông Hồng áng chừng sâu khoảng 20m.

$$\left(\frac{1}{3} \times \frac{185\text{ km} \times 150\text{ km}}{2} \times 30\text{m} + \frac{185\text{ km} \times 150\text{ km}}{2} \times 20\text{m}\right) \times \frac{1}{75\text{ triệu m}^3} = 5500\text{ năm.}$$

Vậy là rõ, lượng phù sa bồi đắp vịnh Sông Hồng, chính là do con sông Hồng mang ra trong 5500 năm qua. Vịnh này đáy cũng không thể bằng phẳng, nó hơi dốc về phía biển. Vậy chúng ta ước tính ở Phú Thọ vịnh Sông Hồng sâu khoảng 10m và ở ven biển sâu độ 40m. Nhìn vào biểu đồ mực nước biển trong vòng 20 nghìn năm qua, khoảng 10 nghìn năm về trước mực nước biển thấp hơn hiện nay khoảng 40m. Vậy là 10 nghìn năm về trước Việt nam chúng ta vẫn chưa bị ngập dưới mực nước biển.

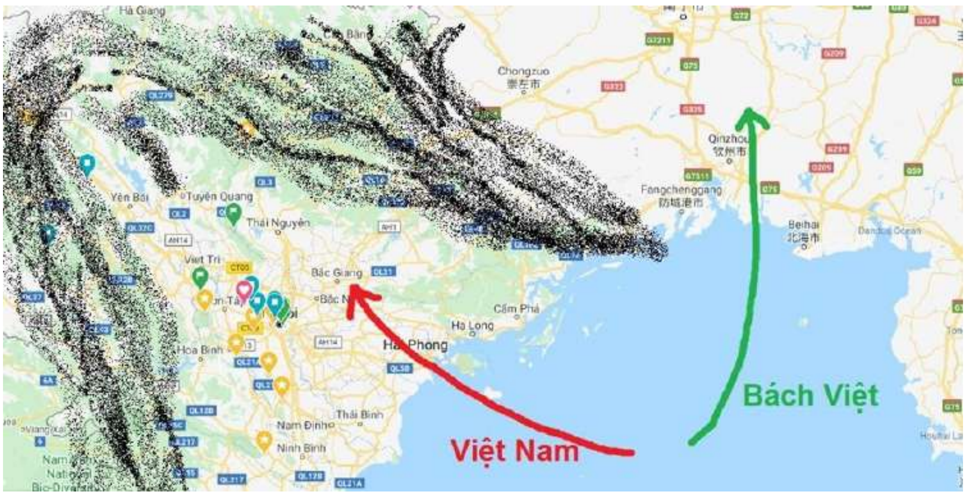


Tổng hợp lại 20 nghìn năm về trước mực nước biển thấp hơn hiện nay 120m và khi ấy vùng Hạ Long nay là rừng rậm. Nơi ấy chẳng những có vọc sinh sống mà kể cả là người tiền sử. Mực nước biển dâng cao dần 120m trong suốt 14 nghìn năm. Nhiều loài vọc đã ở lại trên các đỉnh núi cao ngoài vịnh Hạ Long, tuy hiên người tiền sử thì di cư dần lên chỗ cao hơn. Những người tiền sử di cư về phía bắc của vịnh Hạ Long là người Bách Việt, những người tiền sử di cư về phía đồng bằng Bắc bộ là tổ tiên trực tiếp của người Việt Nam chúng ta ngày nay. Khoảng 10 nghìn năm về trước mực nước biển thấp hơn hiện nay khoảng 40m và Việt Nam xưa có hình thù và diện tích đúng như ngày nay. Nó chính là đáy của vịnh Sông Hồng, nhưng nay đã bị vùi lấp ở độ sâu vài chục mét phía bên dưới đồng bằng Bắc Bộ ngày nay. Nước biển tiếp tục dâng dần trong 4000 năm, và khi ấy bờ biển vào tận Phú Thọ sóng biển vỗ bì bọp vào chân núi Ba Vì và Tam Đảo. Mực nước biển giữ nguyên như vậy trong suốt 6000 năm qua. Đồng bằng Bắc Bộ ngày nay, khi ấy là một cái vịnh nông, có độ sâu trung bình khoảng 20m. Trong suốt khoảng thời gian 6000 năm qua, phù sa sông Hồng đã bồi đắp vịnh thành đồng bằng.

Những người tiền sử ở lại trong các vùng cao ven núi là người Mường, những người di cư ra vùng đất mới bồi là người Kinh. Theo thời gian đất bồi ra xa, người Kinh đông dần lên và gia sản văn hóa Mường mang theo cũng nhạt dần đi nhường chỗ cho một thể dạng văn hóa mở.

Và vì mực nước dâng rất chậm, 100 năm mới lấn sâu vào đất liền được 2km như thế việc di cư là rất chậm, người dân vì thế có xu thế sàn nhà cao dần lên để ở lại. Như vậy nhà sàn của dân tộc Mường là di sản còn lại của 14000 năm nước biển dâng, và cấu trúc đình làng Việt là sự thừa hưởng từ nhà sàn của dân tộc Mường và là của văn hóa từ 20 nghìn năm về trước.

Vậy là thềm lục địa khu vực Đông Nam Á vẫn như vậy, không nâng lên hay hạ xuống, đồng bằng sông Hồng được tạo ra do phù sa đọng lại vì vận tốc dòng chảy giảm và 20 nghìn năm trước đây thì mực nước biển thấp hơn hiện nay 120m, khi ấy người Việt và các loại Vọc có thể dễ dàng di chuyển ra các đảo, kể cả quần đảo Hoàng Sa và Trường Sa. Khoảng 10 nghìn năm trước đây, khi nước biển dâng lên, sự di chuyển vào ra khỏi khu vực đồng bằng Bắc Bộ trở nên khó khăn hơn, bởi đồng bằng Bắc Bộ bị bao quanh bởi các dãy núi cao nhiều nghìn mét và rộng hàng trăm kilomet.



Điều này đã tạo ra gianh giới vật lý tách biệt cư dân sống ở đồng bằng sông Hồng với cư dân phía Nam Trung Quốc. Mặc dù vẫn có sự giao lưu bằng đường biển thông qua vùng Hà Cối Quảng Ninh giữa cư dân đồng bằng sông Hồng với cư dân phía Nam Trung Quốc nhưng đã có sự khác biệt về văn hóa giữa họ. Vậy là chúng ta vẫn có thể sử dụng mô hình "*Everest*" 5mm một năm để tính tuổi của một vùng đất nhưng chỉ là nâng lên trong khoảng 6 nghìn năm vừa qua mà thôi.

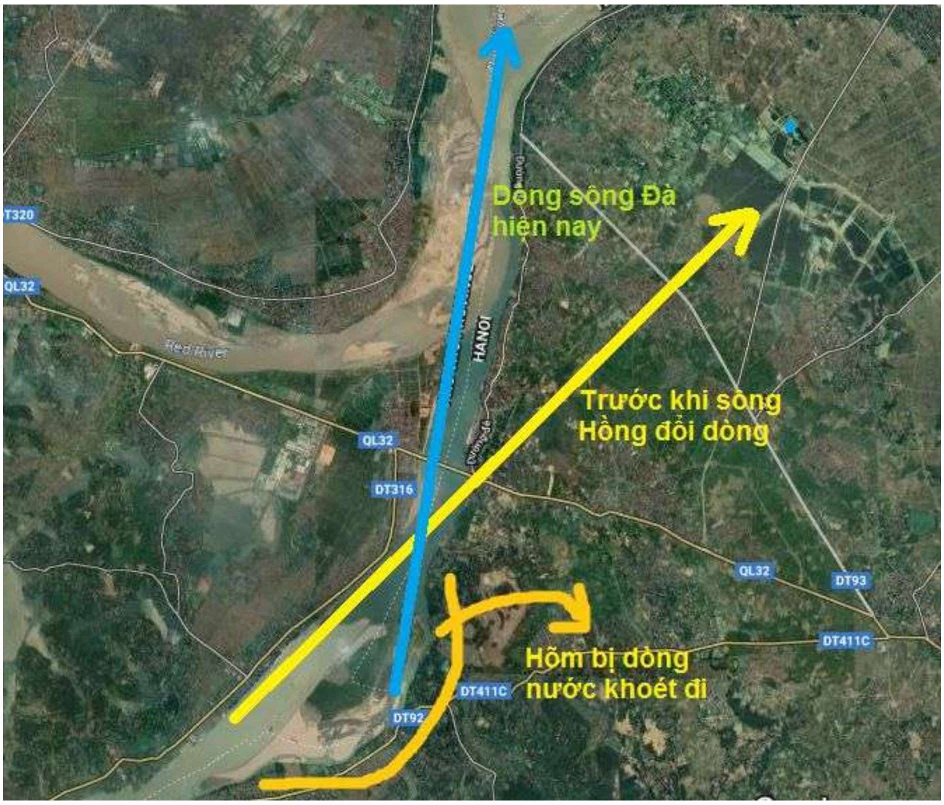
Dựa vào khái niệm "*nến chảy*" này chúng ta cố gắng đi tìm ra các vị trí nơi mà vận tốc dòng nước có phù sa giảm gần tới như bằng 0. Đấy chính là nơi phù sa đọng lại và hình thành ra các gò đất cổ. Những nghìn năm đầu tiên thì dòng sông Hồng bị dòng nước sông Đà đẩy hẳn về phía chân núi Tam Đảo nơi nó để lại vết là hồ Đại Lải, rồi qua mũi Thánh Gióng (đền Sóc) về tới chân núi Chí Linh rồi men ra biển phía Quảng Ninh. Ra biển nó bị dòng Hải Lưu đẩy ngược trở lại tạo thành xoáy ở khu vực phía Hải Dương. Phù sa bắt đầu đọng lại ở đây và đáy biển được nâng cao thành gò Hải Dương. Gò này ở xa ngoài biển và giữa gò với vùng Chí Linh có một cái eo biển. Theo thời gian do được phù sa bồi mà bờ biển phía Chí Linh nhô dần ra, và gò Hải Dương cũng lớn dần lên sát vào phía bờ, mà eo biển biến thành con sông Đuống. Các con sông khác như sông Bắc Ninh Cơ và sông Luộc,... cũng được hình thành từ cùng một nguyên lý như sông Đuống. Nếu để ý thì con sông Đuống con theo đúng dạng của lực Coriolics, bởi không phải lực sức nước của con sông Đà mà là chính là lực Coriolics đã đẩy dòng nước phù sa sông Hồng đi xa hàng trăm kilomet! Khi xưa nhánh chính, tức con sông Hồng ngày nay chưa có. Thời gian 6000 năm về trước cửa sông Hồng là ở Phú Thọ. Theo thời gian cái cửa "*Ba Lạt*" ấy chạy dần ra xa, khoảng 45km cho 1000 năm tính theo chiều dài sông cho tới cửa Ba Lạt nay. Bằng cách đo khoảng tới cửa Ba Lạt, chúng ta sẽ biết được tuổi của các con sông chia lưu của sông Hồng, và từ đây biết được tuổi của các làng hai ven sông và nưu thế biết được tuổi của các đình đền chùa ở đấy.

Xét trên bản đồ cấu tạo thềm đá thì Cổ Loa là phần "*sống trâu*" cuối của dãy núi Tam Đảo, sau đó là sườn núi dốc thẳng xuống vực. Hà Nội không phải là sống trâu của dãy núi, nó ở trên sườn dốc núi. Ở sâu dưới mặt đất Hà Nội có cấu tạo của các tầng than bùn. Do đồng bằng Bắc Bộ là khe núi, tức nó bị bao bọc bởi vành núi Đông Triều và Hoàng Liên Sơn cao hàng nghìn mét, nên mọi thứ gió từ biển thổi vào đều bị xoáy quẩn lại ở Hà Nội. Hà Nội cao lên thành gò là nhờ bụi quẩn lại từ mọi vùng đồng bằng Bắc Bộ xoáy về. Hồ Tây trên thực tế là một khu vực bị lún cục bộ từ đầu thế kỷ thứ 10. Bất chấp lực Coriolics, ngay sau khi chảy ra khỏi Hà Nội con sông Hồng chảy vòng ngay xuống phía Nam. Đó là bởi nó chảy về cái khe núi xưa giữa hai dãy núi. Khe ấy sâu, phù sa chưa thể bồi lấp ngay được.

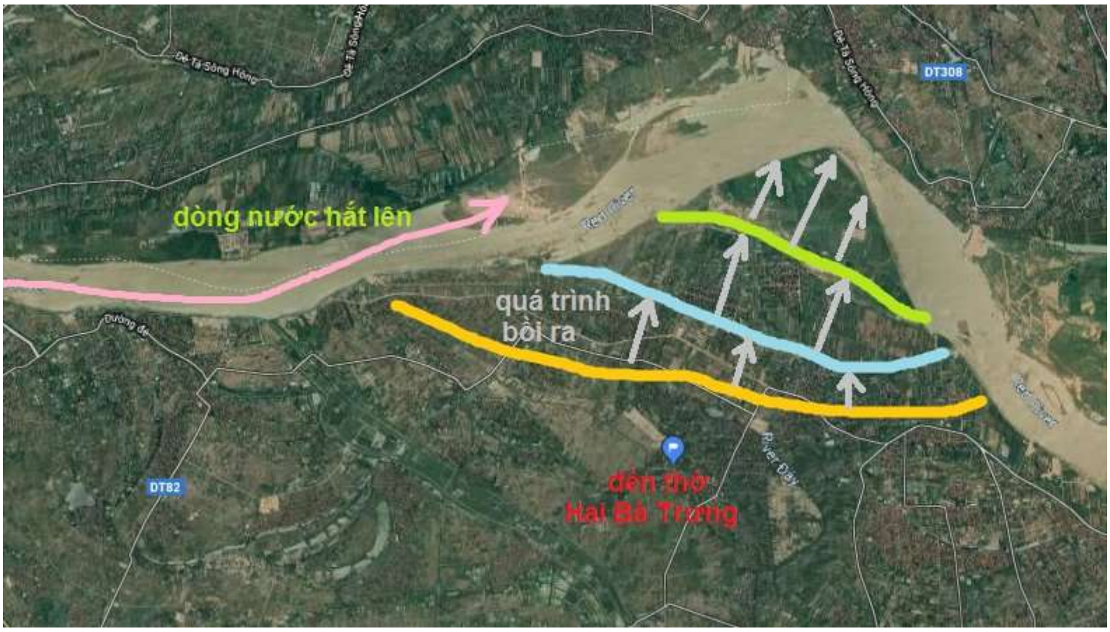
Khi xưa biển vào tới tận chân dãy núi Ba Vì và bờ biển đi sát Hòa Bình. Giữa Ba Vì và gò Hà Nội là eo biển. Vào mùa mưa Đông - Bắc, dòng nước của con sông Lô rất mạnh, nó đẩy dòng nước sông Hồng về phía cái eo biển này. Phù sa sông hồng bồi dần, bờ biển phía Ba Vì tiến ra khiến cho cái eo biển này hẹp lại mà thành sông Đáy.

Trong vòng nhiều nghìn năm dòng nước sông Đà xói dần bờ phía bên Ba Vì thành cái hõm, nên hướng chảy của nó đã bị lệch đi 30 độ.

Dòng chảy sông Đà đẩy dòng nước hướng dần về phía Việt Trì và bị hắt về Miếu Mèn thuộc Sơn Tây. Dòng chảy sông Hồng dần dần không còn đâm về phía hồ Đại Lải nữa, phù sa bồi lấp dần chân núi Tam Đảo ra thành vùng đồng bằng có di chỉ khảo cổ Đồng Đậu 3500 năm tuổi. Sự di chuyển dần dần dòng chảy để lại vệt đầm hồ Hồ Vân Trì phía bờ Bắc sông Hồng.



Dòng chảy sông Hồng về phía Miếu Mèn thuộc Sơn Tây cũng thay đổi dần hướng chảy, và hệ lụy của nó là cửa sông Hát Môn của sông Đáy xưa bị lùi sâu vào 4km.



Cũng như thế phía Mê Linh, quê của Hai bà Trưng, xưa là bờ sông Hồng thì nay cũng bị lùi sâu vào 4km.

Phía Bắc Hà nội là vùng đất cao Xuân Đỉnh, nơi đây từ nhiều nghìn năm về trước người tiền sử di cư từ phía Ba Vì tới. Hà Nội xưa là một cái đầm lớn với các gò đất:

1. Núi Sưa cao 16m trong vườn Bách Thảo. Ở núi này có nhiều cây sưa, trên đỉnh núi còn đền thờ Huyền Thiên Hắc Đế.

2. Khu vực Hoàng thành Thăng Long còn có núi Nùng còn gọi là núi Long Đỗ, (có nghĩa là rốn rồng). Ngày xưa, Lý Thái Tổ dựng chính điện ở trên núi Nùng. Đến đời Lê, vào năm 1430, xây điện Kính Thiên trên nền cũ này. Núi hiện nay không còn, chỉ còn 4 bệ rồng đá là dấu vết điện Kính Thiên cũ.

3. Núi Khán vị trí khoảng trước Phủ Chủ tịch bây giờ, là ngọn núi đất thấp thời Lê thường dùng làm nơi vua ngự xem duyệt binh, lâu rồi thành tên. Núi đã bị san bằng hồi cuối thế kỷ XIX.

4. Nằm trong khu vực giữa đường Thụy Khuê và đường Hoàng Hoa Thám thuộc quận Ba Đình còn có các núi đất, gồm núi Cung cao nhất 18m, tương truyền cung điện dựng ở đây.

5. Núi Cột Cờ cao 13m, núi Voi (còn gọi là núi Thái Hòa) cao 14m ở phía Đông núi Cột Cờ.

6. Núi Trúc cao 11m ở làng Vạn Phúc.

7. Núi Bò cao 8m cạnh hồ Thủ Lệ.

8. Gò Đống Đa.

9. Vùng đồi cao nhà Bát Cổ.

Gắn liền với những gò đồi trên là các dòng nước chảy quanh chúng. Nó rất có thể là các nhánh sông tạo ra câu truyện sau.

Đi liền với Hồ Tây là sự tích Trâu Vàng - Kim Ngưu: "*Sư Không Lộ đánh chuông, con Trâu Vàng ở kho tàng vua Tống nghe tiếng chuông đồng, bỗng phóng chạy về phương Nam. Nhà sư e rằng vàng bạc đất Trung Quốc sẽ theo nhau về Việt Nam, bèn lăn chuông xuống Hồ Tây*". Sự tích cho thấy hồ Tây xuất hiện khi đã có công nghệ đúc Đồng, tức là không quá 3000 về trước.

Đầm Xác Cáo là tên gọi xưa nhất của hồ Tây, gắn với sự tích con "*Hồ Ly Tinh chín đuôi*". Lịch sử ra đời của Hồ Tây được nhắc đến lần đầu tiên trong Lĩnh Nam chích quái do Vũ Quỳnh và Kiều Phú soạn vào khoảng năm 1492. Ở đây, tác giả đã kể về lai lịch Hồ Tây trong truyện Hồ Tinh. Theo đó ở phía tây thành Long Biên có hòn núi đá nhỏ, có con Hồ Tinh (yêu quái cáo, con quái sau Ngư Tinh, trước Mộc Tinh) chín đuôi sống hơn ngàn năm, có thể biến hóa vạn trạng, khi thành người khi thành quỷ ở khắp dân gian. Long Quân bèn ra lệnh cho sáu đạo quân của thủy phủ dâng nước lên công phá bắt cáo mà nuốt ăn. Nơi này trở thành một cái vũng sâu. Hồ Tây chính là hang con cáo chín đuôi phá hoại dân lành, bị Long Quân dâng nước lên công phá. Do đó, hồ có tên là đầm Xác Cáo. Để giữ kỷ niệm xưa, người ta đã đặt tên cho cánh đồng ở phía Tây đầm là Hồ Đống (hang cáo) và thôn xóm cạnh cánh đồng đó là Làng Cáo (Xuân Tảo), làng Hồ Thôn (nay là Hồ Khẩu) "*Hồ*" là "*con cáo*" đồng âm với "*hồ*" (hồ nước), hòa quyện với nhau trong những địa danh Hồ Khẩu, Cáo Đỉnh,... Đối với dân thường, ý nghĩa huyền thoại và đời sống hiện thực thật khó lòng tách bạch.

Nếu điều này mà đúng (và khả năng đúng là rất lớn) thì câu chuyện truyền thuyết thật sự thế nào? Câu chuyện đã được ghi lại thành Truyện (thay Hồ bằng Cáo) hay nó đã là như vậy?

Trên thực tế âm 湖 (cái Hồ) và âm 狐 (con Cáo) là gần giống nhau, như vậy có lẽ câu truyện con "*Cáo Chín Đuôi - Khẩu (cửa sông)*" chính là câu chuyện về cái Hồ có 9 nhánh chảy sông chảy ra. Vậy là do ký mã tên gọi "*Hồ Chín cửa Hậu*" mà bị sai lệch thành "*Cáo Chín Đuôi*".

Các em học sinh thân mến, chỉ từ việc biết tính thể tích của một hình chóp chúng ta có thể hiểu được khung cứng toàn bộ lịch sử của dân tộc chúng ta từ cách đây 20 nghìn năm. Chúng ta có thể hình dung ra tổ tiên đã sống ra sao, họ nghĩ gì, và nhiều nhiều thứ nữa. Sức mạnh của toán học là rất lớn. Nó đưa chúng ta lùi về quá khứ nhiều tỉ năm để biết được vũ trụ của chúng ta đã sinh ra ra sao, và nó cũng có thể tạo ra cho các em và dân tộc chúng ta một tương lai tốt đẹp.

DẠY ROBOT ĐÁNH CỜ BẰNG HỘP DIÊM

Võ Bích Khuê, Nguyễn Hùng Sơn

Tháng 4, 2020

TÓM TẮT

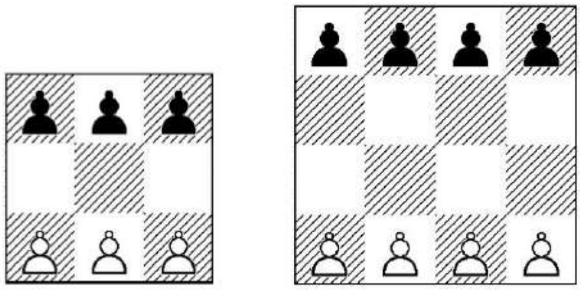
Học máy (machine learning) là một trong những ngành thú vị nhất của tin học. Mục đích của học máy là tìm các thuật toán cho máy tính để giải quyết các vấn đề phức tạp bằng cách tự học. Chẳng hạn, một máy tính có thể sử dụng phương pháp thử nghiệm khi nó đang học cách chơi trò chơi và giành chiến thắng bằng cách học hỏi từ những sai lầm của nó.

1. Giới thiệu trò chơi

Trong bài báo này, chúng ta sẽ chơi trò chơi hexapawn.

Hexapawn là một trò chơi dành cho hai người, được Martin Gardner[1] phát minh vào năm 1962. Trò chơi tổng quát được tiến hành trên các bảng hình chữ nhật có kích thước $m \times n$, mỗi người chơi bắt đầu bằng một hàng gồm n con tốt, mỗi con đứng trong một ô vuông trên hàng gần nhất với người đó.

Chúng ta sẽ minh họa dùng bàn cờ 3×3 cho đơn giản. Trường hợp này sẽ có 9 ô vuông, 2 người chơi, mỗi người chơi có 3 con tốt.



Hình 1: Trò chơi Hexapawn trên các bàn cờ 3×3 và 4×4

Mỗi người chơi sẽ lần lượt thực hiện một nước đi. Người chơi chỉ có thể dịch chuyển một con tốt vào ô vuông về phía trước (nếu ô vuông đó còn trống), hoặc ăn con tốt của đối phương theo đường chéo.

Có 3 cách để giành chiến thắng:

1. Con tốt tiến đến dòng cuối phía bên kia bàn cờ.
2. Ăn hết các con tốt của đối phương.
3. Đối phương không còn nước đi (như chiếu hết trong cờ vua)

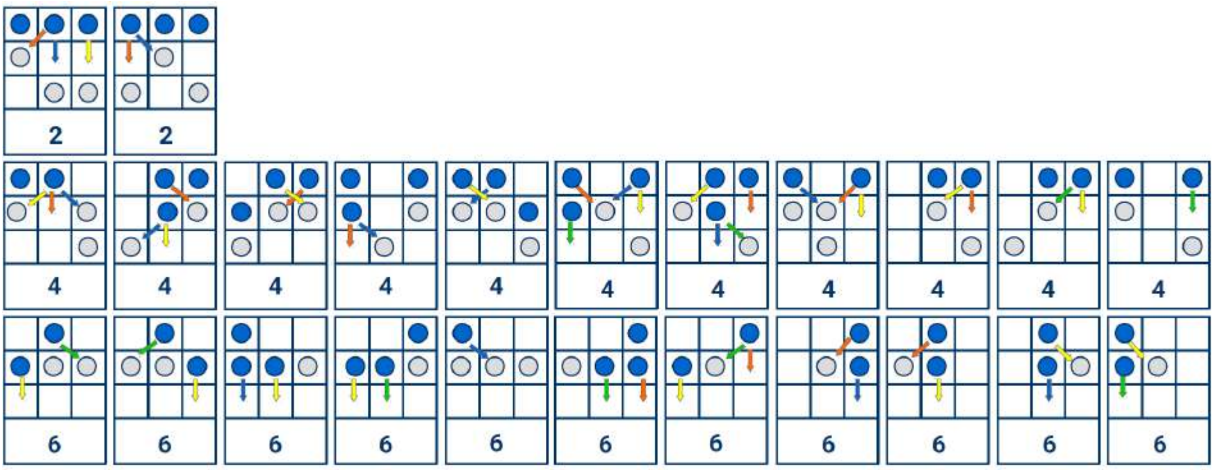
2. Phương pháp đào tạo robot chơi Hexapawn

Từ lúc này chúng ta sẽ gọi một trong hai đối thủ là "người chơi", còn đối thủ thứ hai là "robot" hoặc "máy tính". Hexapawn là trò chơi mà robot có thể luyện tập (học) để thắng người chơi. Chúng ta sẽ minh họa phương pháp mà máy tính sử dụng để chơi trò chơi Hexapawn trên bàn cờ 3×3. Người chơi sẽ đi trước (theo tác giả trò chơi) nên sẽ dùng quân trắng đi ở các nước đi lẻ $1, 3, 5, 7$. Máy tính sẽ đi ở các nước đi thứ $2, 4, 6, 8$ vì ta có thể chứng minh được rằng trò chơi sẽ kết thúc sau cùng lắm là 8 nước.

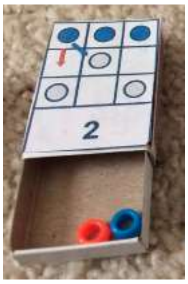
Bạn đọc đã hiểu nguyên lý trò chơi, vậy chúng ta hãy làm quen với phương pháp huấn luyện máy tính hoặc robot chơi cờ Hexapawn nhé.

2.1. Chuẩn bị

Đầu tiên chúng ta có thể nhận thấy rằng trong bước thứ nhất người chơi sẽ phải tiến một trong các con tốt lên hàng thứ 2. Như vậy, ở nước đi thứ 2, robot sẽ nhận được 1 trong 2 cấu hình của bàn cờ như trên Hình 2 (hai cấu hình có số 2 ở dưới). Tương tự nếu tiếp tục xét ta sẽ có 11 cấu hình ở nước thứ 4 và 11 cấu hình ở nước đi thứ 6. Hình 2 mô tả tất cả 24 cấu hình mà robot có thể gặp khi chơi Hexapawn.



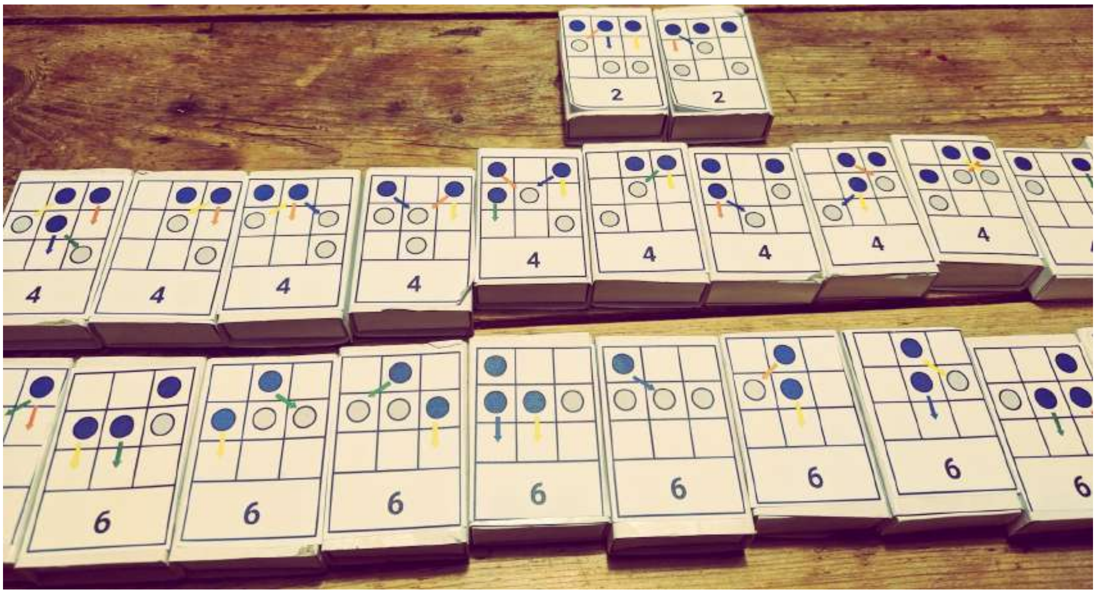
Hình 2: Tất cả các cấu hình và các nước đi của robot khi chơi trò Hexapawn



Hình 3: Một trong các hộp diêm có cấu hình và nước đi của robot khi chơi trò chơi Hexapawn

Trước hết chúng ta chuẩn bị 24 chiếc hộp nhỏ tương ứng với các cấu hình có thể có trên bàn cờ. Bạn đọc có thể in các cấu hình ở Hình 2 và dán lên 24 hộp diêm.

Sau khi chuẩn bị xong các hộp diêm, bạn đọc sẽ cần phải đặt một viên bi tương ứng với mỗi mũi tên được vẽ trên hình chữ nhật (một mũi tên màu xanh sẽ là một viên bi màu xanh trong hộp, mũi tên đỏ thì viên bi đỏ, v.v.). Sau khi bạn đã chuẩn bị xong, chúng ta đã sẵn sàng huấn luyện cho robot chơi cờ.



Hình 4: Các hộp diêm để luyện cho robot chơi trò Hexapawn

2.2. Thuật toán học chơi cờ Hexapawn

Các hộp diêm chính là cách để giúp robot chon ra nước đi. Trong mỗi ván cờ, khi đến lượt mình, robot sẽ tìm hộp diêm tương ứng với cấu hình trên bàn cờ và sẽ chọn nước đi bằng cách lấy ra ngẫu nhiên một viên bi từ hộp diêm đó. Robot thực hiện nước đi theo mũi tên cùng màu với viên bi vừa lấy ra và sẽ để viên bi bên cạnh hộp diêm (Hình 5). Viên bi đó sẽ được xử lý tùy thuộc vào kết quả của trận đấu. Tất nhiên, nếu hộp diêm rỗng thì robot cũng đầu hàng và nhận thua.

Khi robot thắng trận, chúng ta sẽ bỏ lại các viên bi vào các hộp diêm tương ứng, nhưng khi robot thực hiện một nước đi nào đó dẫn đến bị thua, nó sẽ bị phạt bằng cách bỏ đi viên bi tương

Hình 5: Robot dùng hộp diêm để chọn nước đi trong trò chơi Hexapawn

ứng với nước đi sai lầm đó. Bằng cách này, robot sẽ không thể lặp lại các nước đi sai lầm tương tự ở các trận tiếp theo khi tình huống này xảy ra. Bằng cách loại bỏ viên bi xấu này, robot sẽ học cách chơi cờ ngày một tốt hơn và chúng ta sẽ có cảm giác là nó sẽ ngày một thông minh hơn.

Nếu chơi với robot nhiều trận, chúng ta sẽ nhận thấy rằng càng chơi nhiều, thuật toán của robot sẽ càng hoàn thiện hơn và sẽ thắng nhiều hơn cho đến khi cuối cùng chúng ta (người chơi) sẽ không thể giành chiến thắng.

Nhưng sẽ có nhiều các nhà toán học, khoa học máy tính, nhà khoa học dữ liệu, hoặc bất kỳ lĩnh vực nào khác sẽ có ý kiến rằng thuật toán của chúng ta chưa đủ tốt. Tất nhiên họ có lý. Hy vọng bạn đọc đã có ý tưởng để làm tốt hơn.

Ví dụ, trong cách học chơi ở trên, chúng ta chỉ phạt robot khi nó bị thua? Việc phạt robot mỗi khi nào nó bị thua sẽ làm giảm khả năng robot chọn nước đi xấu và dần dần hoàn thiện cách chơi. Vấn đề là với thuật toán này, robot sẽ phải chơi rất nhiều ván để trở nên thông minh.

Nhưng điều gì sẽ xảy ra nếu chúng ta thưởng cho mỗi bước đi đúng?

Giả sử sau mỗi bước đi dẫn đến thắng lợi, ngoài việc trả lại bi vào hộp, chúng ta sẽ thưởng cho robot bằng cách cho thêm vào hộp diêm một viên bi cùng màu với nước đi đó. Bằng cách này, chúng ta sẽ làm giảm khả năng thua và tăng xác suất để robot chọn viên bi (bước đi) đúng. Và với thuật toán này, robot cuối cùng vẫn đạt được khả năng chơi hoàn hảo sau một số ít các ván cờ bởi vì nó đã giảm tác dụng hoặc loại bỏ các viên bi tương ứng với các bước đi sai.

Đây có thể không phải là thuật toán học đánh cờ đầu tiên. Chắc hẳn có nhiều thuật toán khác. Nhưng chúng ta có thể chắc chắn nói rằng đây là quá trình học đánh cờ thực sự, và máy tính của chúng ta sẽ chơi ngày càng hoàn hảo hơn.

Các em học sinh đều có thể lập trình cho máy tính chơi trò Hexapawn này một cách dễ dàng. Các thầy cô và các em học sinh có thể tham khảo cách viết chương trinh chơi Hexapawn trong Scratch tại địa chỉ: `https://scratch.mit.edu/projects/16765763/remixes/`

3. Kết luận

Bài báo mang tính chất minh họa về phương pháp học chơi cờ tự động với mục đích giúp các học sinh và các thầy cô tiếp cận với bộ môn học máy cũng như ngành trí tuệ nhân tạo.

Chúng ta có thể thấy 24 hộp diêm tương ứng với 24 cấu hình có thể có trên bàn cờ. Tại mỗi cấu hình chúng ta có từ 1 đến 4 nước đi. Vì vậy đây là tình huống khi chúng ta có đầy đủ thông tin về trò chơi.

Với những trò chơi khác, số cấu hình sẽ lớn hơn nhiều. Ví dụ như số cấu hình trong cờ đam (checkers) trên bàn cờ 8×8 là khoảng $2,3 \times 10^{21}$, còn trong cờ vua (theo Claude Shannon) thì có ít nhất 10^{120} cấu hình, trong đó có khoảng 10^{40} cấu hình có nghĩa. Phức tạp nhất là cờ vây vì có khoảng 10^{172} cấu hình. Trong các trò chơi này, việc ghi nhớ tất cả các cấu hình là không thể. Thách thức với các chuyên gia trí tuệ nhân tạo là phải (1) nghiên cứu, tìm tòi các thuật toán học chơi cờ phức tạp hơn để giải quyết bài toán trong trường hợp không thể nhớ tất cả các cấu hình và hơn nữa là (2) phải trả lời câu hỏi học bao lâu thì máy tính mới có thể đạt trình độ đánh bại các đại kiện tướng thế giới.

Các thuật toán tiên tiến cũng chỉ là mở rộng hoặc cải tiến của thuật toán được mô tả trong bài báo này. Trong các bài báo tiếp theo chúng tôi sẽ lần lượt giới thiệu đến bạn đọc các phương pháp học đánh cờ hiện đại.

Tài liệu

[1] Martin Gardner. Mathematical Games, Scientific American, March 1962, reprinted in The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions, pp. 93ff.

[2] https://www.rigb.org/christmaslectures08/html/activities/sweet-computer.pdf

MÃ VÀ CÁC KỲ THI OLYMPIC TOÁN (PHẦN CUỐI)

S.B.Gashkov

GIỚI THIỆU

Tiếp theo kỳ trước, xem phần mở đầu và các phần 1, 2, 3 ở Epsilon số 15 và 4, 5 ở Epsilon số 16

6. Mã Reed - Solomon

Trong cánh đồng Galois tràn đầy những bông hoa,

các căn nguyên thủy nhảy nhót cả tiếng đồng hồ[32])

S.B. Veinstein (IEEE Transactions of Information Theory, 1971)

Cho số nguyên tố $q > 2$. Nhắc lại rằng mã tuyến tính $q-$phân C độ dài n chiều k (viết tắt mã $[n, k]$) là một không gian con k chiều C bất kỳ của không gian $GF(q)^n$ tất cả các véc-tơ n chiều trên trường $GF(q)$. Dễ thấy khoảng cách mã của mã tuyến tính bằng trọng lượng nhỏ nhất mà một véc-tơ khác 0 có thể có. Nếu mã $[n, k]$ có khoảng cách mã d, thì nó được gọi là mã $[n, k, d]$.

Phương án đơn giản nhất để xây dựng mã Reed – Solomon[33]) trên trường $GF(q)$ (viết tắt là mã RS) như sau. Cho $k < nq$. Ta cho tương ứng mỗi một véc-tơ $a = (a_0, \ldots, a_{k-1}) \in GF(q)^k$ đa thức

$$a(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1},$$

bậc $k - 1$ trên trường $GF(q)$. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n \in GF(q)$ là các phần tử phân biệt của trường này. Ta xét ánh xạ tuyến tính $l : GF(q)^k \to GF(q)^n$, xác định bởi đẳng thức

$$l(a) = (a(x_1), \ldots, a(x_n)) \in GF(q)^n.$$

Ảnh $l(GF(q)^k)$ của ánh xạ này – mã tuyến tính C, được gọi là mã RS. Từ bất đẳng thức $n > k$ đa thức $a(x)$ bậc $k-1$ có thể được xác lập một cách duy nhất theo các giá trị của nó tại n điểm, vì thế ánh xạ $l : GF(q)^k \to C$ là tương ứng $1 - 1$. Nghĩa là lực lượng của mã C bằng q^k, do đó chiều của nó bằng k. Khoảng cách mã $d(C)n - k + 1$, bởi vì với mọi đa thức khác không $a(x)$, véc-tơ các giá trị của nó $(a(x_1), \ldots, a(x_n)) \in C \subset GF(q)^n$ có trọng lượng không nhỏ hơn $n - k + 1$, bởi vì đa thức khác không bậc $k - 1$ có không quá $k - 1$ nghiệm.

Thật sự thì $d(C) = n - k + 1$, bởi vì theo định lý cận Singleton, với mọi mã $[n, k]$ ta có bất đẳng thức $d(C)n - k + 1$. Các mã nằm trên cận này được gọi là mã với khoảng cách lớn nhất (maximum-distance seperable - MDS). Các mã RS có tính chất như vậy. Các mã nhị phân không đạt được cận này.

Định lý tương ứng có thể phát biểu như sau (định nghĩa $m_q(n, d)$ xem ở phần 2)

Định lý 4 (Cận Singleton[34], hay cận phép chiếu).

$$m_q(n, d)q^{n-d+1}.$$

Lời giải. Chỉ cần chiếu tất cả q^k từ mã lên không gian con $GF(q)^{k-1}$. Để làm điều này ta điền 0 vào vào $n - k + 1$ tọa độ cuối của véc-tơ mã, giữ nguyên $k - 1$ tọa độ đầu. Theo nguyên lý Dirichlet hai véc-tơ mã nào đó sẽ có cùng ảnh chiếu, tức là $k - 1$ tọa độ đầu của chúng trùng nhau. Do đó khoảng cách giữa chúng sẽ không vượt quá $n - k + 1$. Tức là $dn - k + 1$ (hơn nữa điều này cũng đúng với các mã không tuyến tính có lực lượng lớn hơn q^{k-1}). □

Bây giờ ta có thể dễ dàng giải các bài toán 28 và 29.

Bài toán 28. *Trên bàn cờ $k-$phân n chiều đặt $k^m + 1$ con xe. Chứng minh rằng tìm được hai con xe mà tọa độ của chúng khác nhau ở không quá $n - m$ vị trí. Nói riêng, nếu $m = n - 1$ thì tồn tại hai con xe ăn nhau.*

Bài toán 29. *Nếu k là lũy thừa của số nguyên tố và $n > m + 1$ thì trong bài toán 28, có thể đặt k^{m+1} con xe sao cho tọa độ của hai con xe bất kỳ khác nhau ở không quá $n - m$ vị trí. Nói riêng, nếu $m = n - 2$ thì trên bàn cờ $k-$phân n chiều có thể đặt k^{n-1} sao cho chúng đôi một không ăn nhau. Với $n = 2$ điều này là hiển nhiên.*

Với bài toán 30 ta đưa ra câu trả lời và lời giải.

Bài toán 30. *Bạn đi vào một căn phòng, ở đó có một bàn cờ, trên đó có một số quân cờ. Người ta cho bạn biết tọa độ của một ô và giao nhiệm vụ cho bạn chuyển thông tin về ô này cho người bạn của bạn vừa vào phòng sau bạn. Ăn một quân cờ hay đặt một quân cờ vào ô trống được gọi là một nước đi. Sau khi vào phòng, bạn không có điều kiện để gặp người bạn và báo cho anh ấy bất cứ điều gì. Cho đến khi người bạn đến bàn cờ sẽ không thay đổi. Tuy nhiên trước khi vào phòng, các bạn có thể trao đổi và thỏa thuận về chiến thuật chung. Hỏi có thể dùng ít nhất bao nhiêu nước đi để giải quyết bài toán đặt ra?*

Trả lời: *Chỉ cần 1 nước đi.*

Gợi ý: Tọa độ của các ô có thể "*mã hóa*" bằng các bộ nhị phân độ dài 6. Một cách đặt các quân cờ trên bàn cờ được xác định bởi bộ nhị phân độ dài 64. Hãy sử dụng ma trận kiểm tra mã tuyến tính $[64, 58]$, tức là mã Hamming, được mở rộng bằng cách thêm các tọa độ 0. Đó là ma trận nhị phân $(6, 64)$ mà tất cả các cột khác nhau (có thể xóa cột 0 từ nó và sử dụng ma trận $(6, 63)$ - ma trận kiểm tra của mã Hamming thông thường). Nếu nhân bộ nhị phân độ dài 64 với ma trận này, thay đổi nó ở một vị trí, có thể thu được một bộ bất kỳ. Bộ này có thể chọn sao cho nó "*mã hóa*" ô ta cần báo.

Và thêm một bài toán về chủ đề này:

Bài toán 31 (Trang 121[19]). *Một điệp viên đượng tung vào một quốc gia lạ, có thể liên lạc với trung tâm bằng cách sử dụng đài phát thanh địa phương, hàng ngày phát một thông điệp dài* 255 *bit. Điệp viên có thể tiếp cận được với bản tin trước khi nó được phát lên sóng, nhưng anh ta chỉ có quyền sửa nhiều nhất một trong các bit. Hỏi hàng ngày điệp viên có thể chuyển bao nhiêu bit thông tin về cho Trung tâm? (Tất nhiên điệp viên có thể thỏa thuận với Trung tâm về phương pháp mã hóa và giải mã trước đó.)*

7. Định lý Zarankevic và giải mã

Hamilton mở một trang sách ngẫu nhiên và hiểu rằng

cuốn sách, có lẽ là, tuyển tập của những ý tưởng điên rồ nhất ...

Richard Tierney "Tiếng kêu trong đêm tối"

Mã C với độ dài khối n được gọi là (e, l) - giải được kiểu danh sách nếu như với mọi từ y độ dài n trong hình cầu $B(y, e)$ bán kính e với tâm tại y (trong mê-tric Hamming) có không quá l từ mã, tức là $|B(y, e) \cap C|l$. Sudan và Gurusvami[35] ([18]) chứng minh[36] được định lý sau

Định lý 5. *Mọi mã* (n, k, d) *đều* $(e, n(d-e))$ *giải được kiểu danh sách với* $e < n - \sqrt{n(n-d)}$*. Nói riêng, mọi mã* $RS(n, k)_q$ *đều đều* $(e, n(d-e))$ *giải được kiểu danh sách với*

$$e < n - \sqrt{n(k-1)}.$$

Lời giải. Hiển nhiên là

$$n - d = \sqrt{n-d} \cdot \sqrt{n-d} < \sqrt{n(n-d)}, \quad n - \sqrt{n(n-d)}\frac{d}{2},$$

bởi vì $n - \frac{d}{2} = \frac{n+n-d}{2}\sqrt{n(n-d)}$. Theo bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân định lý sẽ được suy ra từ định lý Zarankevic, được phát biểu dưới dạng bài toán 6.

Giả sử $c_j \in B(y, e) \cap C$ *với* jm*, là tất cả các từ khóa nằm trong hình cầu* $B(y, e)$ *trong đó* $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *là một từ bất kỳ độ dài* n *trong bảng chữ cái mã. Cần chứng minh rằng*

$$mn(d-e).$$

Định nghĩa ma trận A kích thước(n, m) gồm 0 và 1 sao cho $a_{ij} = 1$, hay là $y_i = c_{j,i}$ trong đó $c_{j,i}$ là tọa độ thứ i của véc-tơ c_j. Vì với mọi j_1, j_2 theo định nghĩa của khoảng cách mã nhỏ nhất $d(c_{j_1}, c_{j_2})d$ nên số các tọa độ trùng nhau của các véc-tơ này không quá $n-d$, do đó trong các cột thứ j_1 và j_2 của ma trận A có không quá $n-d$ số 1 chung. Nghĩa là ma trận không chứa ma trận con kích thước $(n-d+1, 2)$ gồm toàn số 1. Do đó, số số 1 trong ma trận này, gọi là k, theo định lý Zarankevic, sẽ thỏa mãn bất đẳng thức

$$n \cdot \frac{\frac{k}{n}\left(\frac{k}{n} - 1\right)}{2} \frac{m(m-1)(n-d)}{2},$$

từ đó $k(k-n)nm(m-1)(n-d)$.

Các từ y, c_j trùng nhau ở không ít hơn $t = n - e > \sqrt{n(n-d)}$ vị trí, bởi vì theo điều kiện $d(c_j, y)e$, do đó trong mỗi cột của ma trận A có không ít hơn t số 1, từ đó suy ra kmt. Ta luôn có thể giả sử $k > n$, vì nếu không thì

$$m < \sqrt{\frac{n}{n-d}}\sqrt{n}n(d-e).$$

Do đó

$$mt(mt-n)k(k-n)m(m-1)n(n-d).$$

Từ đó

$$m^2t^2 - mntm(m-1)n(n-d).$$

Nghĩa là

$$m^2(t^2 - n(n-d))mn(t-n+d),$$

$$m\frac{n(t-n+d)}{t^2 - n(n-d)}n(t-n+d) = n(d-e) < n^2.$$

Định lý được chứng minh. □

8. Mã hóa theo bảng chữ cái

Bảng chữ cái đã trở nên quen thuộc hơn, và bây giờ,

ngoài các chữ cái, bắt đầu thấy cả các chữ số,

ở dạng thứ tự mà tôi không nhận ra ngay.

Scarlett Thomas, "The End of Mr. Y"

Lý thuyết mã hóa là một lĩnh vực rộng, có mối quan hệ chặt chẽ với đại số, lý thuyết số, tổ hợp, lý thuyết đồ thị, lý thuyết xác suất, lý thuyết thông tin. Nó không chỉ dừng lại ở lý thuyết mã sửa sai. Một trong những nhánh của nó là mã hóa theo bảng chữ cái. Nó không được dùng với mục đích sửa lỗi, mà, ví dụ để nén văn bản[37]), và trong quá khứ còn được dùng để làm mật mã[38]). Mã có tên gọi là mã genetic[39]) cũng có thể coi là một sơ đồ mã theo bảng chữ cái.

Các bài toán 32, 33, 34 liên quan đến lĩnh vực này.

Bài toán 32 (Moscow 1962, Vòng 2). *Cho 2^n dãy hữu hạn các số 0 và 1, trong đó không có dãy nào là phần đầu của một dãy khác. Chứng minh rằng tổng chiều dài của các dãy này không nhỏ hơn $n{\cdot}2^n$.*

Bài toán 33. *Trong cây gia phả của Đại công tước Riurik, không một ai trong các hậu duệ của ông có quá k con trai. Trong ngày sinh nhật đại công tước có tất cả n con cháu tụ tập và tính tổng chiều dài các nhánh cây gia phả của mình. Chứng minh tổng này không nhỏ hơn $n \cdot \log_k n$.*

Bài toán 34 (Olympic sinh viên khoa Toán-Cơ). *Trong danh sách gồm [n từ, tạo thành từ các chữ cái của bảng chữ cái gồm k chữ cái, không có một từ nào là phần đầu của một từ khác, số từ có độ dài cho trước l, với $l = 1, 2, \ldots, m$ bằng n_l. Chứng minh rằng*

$$\frac{n_1}{k} + \cdots + \frac{n_m}{k^m} 1,$$

dấu bằng có thể xảy ra[40].

Trong bài toán 32 thực chất đã nói về độ dài trung bình của từ mã sơ cấp khi mã hóa bảng chữ cái gồm n chữ cái bằng bảng chữ cái gồm hai chữ cái. Quy trình mã hóa các từ trong bảng chữ cái gồm n chữ cái đã cho, ví dụ bằng các từ nhị phân, được thực hiện bằng cách thay mỗi chữ cái của bảng chữ cái này bằng một từ mã nhị phân. Nếu như không có từ mã nào là phần đầu của một từ khóa khác, thì cách mã hóa được gọi là tiền tố. Điều kiện đối với các từ khóa này cho phép dễ dàng giải mã[41]). Trong bài toán 32 thực chất ta cần tìm mã tiền tố với độ dài trung bình của từ mã sơ cấp nhỏ nhất.

Bài toán này có thể giải được trong một tình huống tổng quát hơn – khi chữ cái của bảng chữ cái đã cho được cho tương ứng với các số $p_i > 0$, sao cho $p_1 + \cdots + p_n = 1$ (p_i là xác suất xuất hiện chữ cái này), còn để mã hóa ta dùng bảng chữ cái $k-$phân. Khi đó độ dài trung bình của từ mã sơ cấp sẽ bằng

$$l_c = p_1 l_1 + \cdots + p_n l_n,$$

trong đó l_i là độ dài từ mã. Đối với độ dài trung bình này Shannon thu được đánh giá sau:

Định lý 6. *Ta có bất đẳng thức $l_c H_k(p_1, \ldots, p_n)$, trong đó*

$$H_k(p_1, \ldots, p_n) = -(p_1 \log_k p_1 + \cdots + p_n \log_k p_n),$$

là entropy Shannon.

Phép chứng minh sẽ xuất hiện sau một chút, còn bây giờ trước hết ta chỉ ra mối liên hệ giữa mã tiền tố ở bảng chữ cái $k-$phân và cây $k-$phân có gốc. Cây $k-$phân có gốc là cây định hướng mà ở trong đó từ gốc (là đỉnh duy nhất của bậc 0) và từ một đỉnh trong bất kỳ của lớp i xuất phát không quá k cạnh hướng tới đỉnh lớp $i + 1$.

Bằng quy nạp theo thứ tự của lớp ta dễ dàng chứng minh được rằng số đỉnh ở bậc i không quá k^i. Theo định nghĩa, ở mỗi đỉnh, trừ gốc, chỉ có duy nhất một cạnh vào. Các đỉnh mà từ đó không có cạnh đi nào, được gọi là lá[43]). Với mỗi lá tồn tại duy nhất một đường đi nối từ gốc đến nó. Số cạnh trong đường đi này ta ký hiệu là l_i, trong đó i là thứ tự của lá (trong một cách đánh số bất kỳ). Nếu như với mọi đỉnh trong ta cho tương ứng các cạnh đi ra từ nó các số khác nhau (nhãn) từ tập hợp (bảng chữ cái) $A_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, thì một đường đi từ gốc đến lá i có thể cho tương ứng với một từ w_i trong bảng chữ cái A_k bằng cách ghi ra tất cả các nhãn của các cạnh trên đường đi này, bắt đầu từ cạnh xuất phát từ gốc. Tập hợp các từ w_i thu được sẽ tạo thành bộ các từ mã sơ cấp của sơ đồ mã hóa theo bảng chữ cái, xác định bởi cây đã cho. Hiển nhiên là sơ đồ này tiền tố.

Điều ngược lại cũng đúng, cụ thể là, theo một sơ đồ mã hóa theo bảng chữ cái tiền tố bất kỳ có thể xây dựng cây có gốc, mà bằng cách làm ở trên sẽ cho tương ứng với đúng sơ đồ mã hóa theo bảng chữ cái tiền tố đã cho. Cách chứng minh chặt chẽ khẳng định này có thể thực hiện bằng quy nạp và chúng tôi dành lại cho bạn đọc như một bài toán. Do có mối liên hệ giữa mã tiền tố và cây, các khẳng định về mã tiền tố có thể phát biểu lại như các khẳng định về cây. Vì vậy từ định lý 6 không chỉ suy ra các đánh giá cho bài toán 32, mà còn bài toán 33 (được coi là mở rộng của bài toán 32). Còn bài toán 34 có thể coi là hệ quả của định lý 7

Định lý 7 (Bất đẳng thức Kraft[44]). *Giả sử trong cây $k-$phân có gốc độ dài tất cả các đường đi từ gốc đến các lá bằng $l_i, i = 1, \ldots, n$. Khi đó ta có bất đẳng thức*

$$k^{-l_1} + k^{-l_2} + \cdots + k^{-l_n} 1.$$

Lời giải. Ta tưởng tượng rằng từ mỗi lá i, như là từ gốc, mọc thêm một nhánh có dạng một cây $k-$phân đầy đủ chiều cao $l - l_i$, trong đó $l = \max_i l_i$ (ta gọi cây $k-$phân là *đầy đủ chiều cao* h, nếu như từ mỗi đỉnh trong có đúng k cạnh ra, còn các lá tạo thành lớp thứ h). Khi đó nhánh này sẽ có k^{l-l_i} lá, và tất cả các lá của cây đã "*nở hoa*" tạo thành lớp thứ l của cây mới. Tất cả các là sẽ bằng

$$k^{l-l_1} + k^{l-l_2} + \cdots + k^{l-l_n} k^l,$$

vì ở lớp thứ l có không quá k^l lá. Bây giờ ta chỉ cần chia hai vế cho k^l là xong. □

Bây giờ ta đã có thể chứng minh định lý 6. Sử dụng tính chất là với hàm số $\log_k x$ với hằng số K thích hợp sẽ có bất đẳng thức $\log_k x K(x-1)$, có ý nghĩa hình học đơn giản: Đồ thị của hàm số này (ngoại trừ điểm tiếp xúc) sẽ nằm dưới tiếp tuyến của nó kẻ tại điểm $(x = 1,\ y = 0)$. Thay vào bất đẳng thức này $x = \frac{k^{-l_i}}{p_i}$, ta thu được

$$-l_i + \log_k \left(\frac{1}{p_i}\right) K \left(\frac{k^{-l_i}}{p_i} - 1\right),$$

Từ đó

$$l_i K \left(1 - \frac{k^{-l_i}}{p_i}\right) + \log_k \left(\frac{1}{p_i}\right).$$

Tiếp theo

$$p_i l_i K \left(p_i - k^{-l_i}\right) + p_i \log_k \left(\frac{1}{p_i}\right).$$

Cộng các bất đẳng thức này lại, ta được

$$\begin{aligned} p_1 l_1 + \cdots + p_n l_n K(p_1 + \cdots + p_n - k^{-l_1} - \cdots - k^{-l_n}) + p_1 \log_k \left(\frac{1}{p_1}\right) + \cdots + p_n \log_k \left(\frac{1}{p_n}\right) \\ = K(1 - k^{-l_1} - \cdots - k^{-l_n}) + H_k(p_1, \ldots, p_n) \\ H_k(p_1, \ldots, p_n). \end{aligned}$$

theo định lý 7. Như vậy, định lý 6 được chứng minh.

Ghi chú:

32) In Galois Fields, full of flowers, primitive elements dance for hours.

33) Irving Reed $(1923-2012)$ và Gustav Solomon $(1930-1996)$ – các chuyên gia người Mỹ về lý thuyết mã hóa.

34) Richard Collom Singleton $(1928 - 2007)$ – chuyên gia người Mỹ về lý thuyết mã hóa.

35) Madlu Sudan (sinh năm 1966) và Venkatesan Gurusvami (sinh năm 1976) là chuyên gia người Mỹ gốc Ấn về tin học

36) Thực chất họ đã chứng minh điều mạnh hơn nhiều, cụ thể họ đã đề xuất một thuật toán liệt kê danh sách tất cả các từ có khoảng cách không vượt quá e của một từ mã bất kỳ.

37) Có lẽ với mục đích này thì bảng chữ cái của Morse là ví dụ đầu tiên. Bảng chữ cái Morse là một sơ đồ mã hóa theo bảng chữ cái, tuy nhiên nó không tiền tố và không có tính chất giải mã duy nhất.

38) Ví dụ mật mã thay thế, mật mã Polybia, mật mã Bacon có thể coi là các sơ đồ mã hóa theo bảng chữ cái.

39) Cho tương ứng các axit amin 3 trong 4 chữ cái A, G, S, T.

40) Bài toán này được đề xuất ở một cuộc thi olympic vào những năm 1980, khi chưa có khóa học cũng như sách giáo khoa về toán rời rạc.

41) Tất nhiên, thay vì sử dụng mã tiền tố ta có thể sử dụng mã hậu tố, trong đó không có từ mã sơ cấp nào là đoạn cuối của một từ mã khác. Một điều khác không quá hiển nhiên là tồn tại mã không tiền tố, không hậu tố nhưng vẫn thỏa mãn tính chất giải mã duy nhất.

42) Bài toán 33 sẽ nói về khái niệm này.

43) Người ta cũng sử dụng thuật ngữ "*đỉnh treo*".

44) Bất đẳng thức này nhưng dành cho mã bất kỳ với tính chất giải mã duy nhất có phép chứng minh phức tạp hơn và gọi là bất đẳng thức McMillan.

Tài liệu

[1] Берлекэмп Э. Р. Алгебраическая теория кодирования. М.: Мир, 1971.

[2] Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.

[3] Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.

[4] Гашков С. Б. Разностные множества, конечные геометрии, матрицы Заранкевича и экстремальные графы // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 21. М.: МЦНМО, 2017. С. 145–185.

[5] Гашков С. Б. Графы-расширители и их применения в теории кодирования // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 13. М.: МЦНМО, 2009. С. 104–126.

[6] Левенштейн В. И. Элементы теории кодирования // Дискретная математика и математическая кибернетика. Т. 1. М.: Наука, 1974.

[7] Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979.

[8] Прасолов В. В. и др. Московские математические олимпиады 1935–1957 гг. М.: МЦНМО, 2010. Коды и олимпиады 173

[9] Прасолов В. В. и др. Московские математические олимпиады 1958–1967 гг. М.: МЦНМО, 2013. [10] Бегунц А. В. и др. Московские математические олимпиады 1981–1992 гг. М.: МЦНМО, 2017. [11] Фёдоров Р. М. и др. Московские математические олимпиады 1993–2005 гг. / 3-е изд. М.: МЦНМО, 2017.

[12] Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: МГУ, 1987. [13] Сидельников В. М. Теория кодирования. М.: Физматлит, 2008.

[14] Таранников Ю. В. Комбинаторные свойства дискретных структур и приложения к криптологии. М.: МЦНМО, 2011.

[15] Фейеш Тот Л. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматгиз, 1958. [16] Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

[17] Чашкин А. В. Дискретная математика. М.: Академия, 2012.

[18] Guruswami V., Sudan M. Improved decoding of Reed — Solomon and algebraicgeometric codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1999. Vol. 45. P. 1757–1767.

[19] Winkler P. Mathematical puzzles: a connoisseur's collection. Natick, USA: Taylor and Francis Inc., 2004.

PHÉP TỔNG HỢP BIỂU THỨC (RESULTANT) VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Benny Lê Văn

GIỚI THIỆU

Bài viết này trình bày cơ sở lý thuyết về phép tổng hợp biểu thức (resultant), ứng dụng trong việc giải toán và một số thảo luận liên quan theo ánh nhìn của tác giả.

1. Dẫn nhập

Phép tổng hợp biểu thức (resultant) là một khái niệm thuộc chuyên ngành đại số trừu tượng (abstract algebra) và có nhiều ứng dụng thực tiễn. Phép toán này được đề cập trong những môn học như đại số đại cương, đại số trừu tượng hay đại số hiện đại. Với những ứng dụng trong giải toán mà phép tổng hợp biểu thức mang lại, bài viết này được thực hiện nhằm trình bày định nghĩa của phép toán cũng như một số ví dụ minh họa liên quan. Bên cạnh những bộ giáo trình về đại số trừu tượng, cơ sở lý thuyết về phép tổng hợp biểu thức được trình bày tương đối đầy đủ bởi Woody [4], cũng như những ứng dụng liên quan được diễn giải khá chi tiết trong bài giảng của Lemmermeyer [1]. Như một bước tiếp nối, bài viết này làm rõ hơn một số áp dụng của phép tổng hợp biểu thức trong việc giải toán, đặc biệt là những bài toán sơ cấp. Theo đó, những phạm trù lý thuyết về phép tổng hợp biểu thức sẽ được giới thiệu trong phần 2, những ứng dụng thực tiễn được trình bày trong Phần 3 và Phần 4, và Phần 5 cung cấp một số thảo luận của dựa trên quan điểm của tác giả.

2. Phép tổng hợp biểu thức

Như diễn giải của Woody [4], với hai đa thức $P_n(x)$ và $Q_m(x)$:

$$\begin{cases} P_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-\alpha_j) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \\ Q_m(x) = \prod_{k=0}^{m}(x-\beta_j) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k \end{cases}$$

Phép tổng hợp biểu thức (resultant) của hai đa thức trên được ký hiệu là $\mathrm{Res}(P_n, Q_m, x)$ và được xác định như sau:

$$\mathrm{Res}(P_n, Q_m, x) = a_n^m b_m^n \prod_{i,j}^{1\leqslant j\leqslant n,\, 1\leqslant k\leqslant m} (\alpha_j - \beta_k).$$

Từ định nghĩa này, ta có nhận xét rằng:

(i) Phép tổng hợp biểu thức có tính giao hoán, tức là $\mathrm{Res}(P_n, Q_m, x) = \mathrm{Res}(Q_m, P_n, x)$.

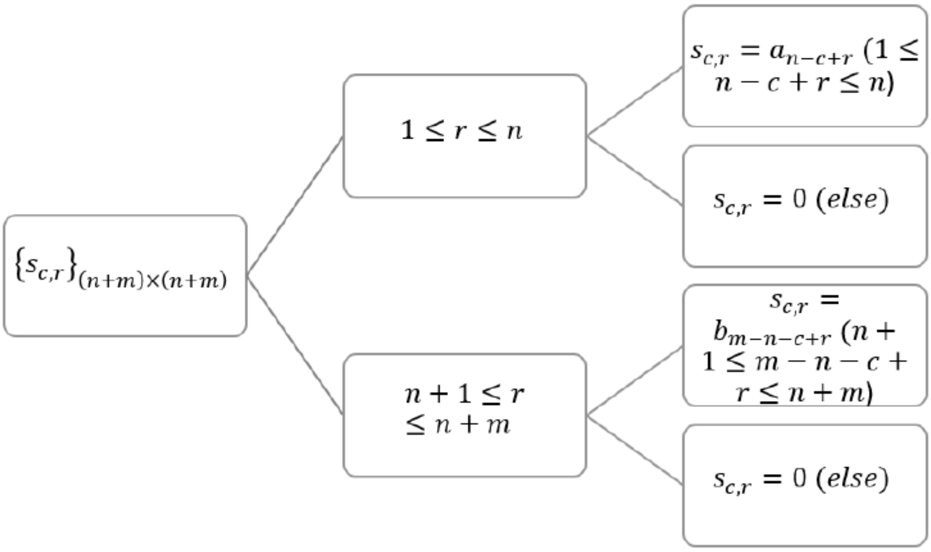
(ii) Nếu $P_n(x)$ và $Q_m(x)$ có nhân tử chung thì phép tổng hợp biểu thức của chúng sẽ mang giá trị 0, tức là $\mathrm{Res}(P_n, Q_m, x) = 0$.

Đây là hai tính chất quan trọng dẫn đến nhiều áp dụng của phép toán này.

Bên cạnh đó, người ta [5] chứng minh được rằng phép tổng hợp biểu thức của hai đa thức có thể được biểu diễn thông qua định thức của ma trận Sylvester. Đây là một ma trận vuông cấp $n+m$ được ký hiệu là $\mathrm{Syl}(P_n, Q_m, x)$ và được xây dựng như sau:

$$\mathrm{Syl}(P_n, Q_m, x) = \{s_{c,r}\}_{(n+m)\times(n+m)}.$$

Trong đó, những hạng tử $s_{c,r}$ của ma trận Sylvester được xác định qua sơ đồ:



Như vậy

$$\mathrm{Res}(P_n,\ Q_m, x) = |\mathrm{Syl}(P_n,\ Q_m, x)| = |\mathrm{Syl}(P_n,\ Q_m, x)^T|.$$

Từ định nghĩa về phép tổng hợp biểu thức thông qua ma trận Sylvester, chúng ta xây dựng khái niệm biệt thức (discriminant) của một đa thức. Theo đó, biệt thức của một đa thức mang giá trị 0 thì đa thức đó sẽ có nghiệm trùng. Khi một đa thức có nghiệm trùng, giá trị của đa thức cũng như đạo hàm của đa thức đó tại nghiệm trùng đều là 0. Như vậy, biệt thức của đa thức $P_n(x)$ với ký hiệu $\mathrm{Disc}(P_n)$ được định nghĩa như sau:

$$\mathrm{Disc}(P_n) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_n} \cdot \mathrm{Res}(P_n, P_n^{'}, x).$$

Trong đó, ma trận vuông Sylvester có kích thước là $n + (n-1) = 2n - 1$.

Chẳng hạn, với tam thức bậc hai $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, ta có $P_2^{'}(x) = 2ax + b$ và biệt thức

$$\mathrm{Disc}(P_2) = \frac{(-1)^{\frac{2(2-1)}{2}}}{a} \cdot \mathrm{Res}(P_2, P_2^{'}, x) = \frac{-1}{a}\begin{vmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} = \frac{ab^2 + 4a^2c - 2ab^2}{-a} = b^2 - 4ac.$$

Một ví dụ khác, với đa thức bậc ba dạng rút gọn $P_3(y) = y^3 + py + q$, ta có $P_3^{'}(y) = 3y^2 + p$ và biệt thức

$$\mathrm{Disc}(P_3) = \frac{(-1)^{\frac{3(3-1)}{2}}}{a} \cdot \mathrm{Res}(P_3, P_3^{'}, x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & -2p & -3q & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q \\ 0 & -2p & -3q & 0 \\ 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q \\ 0 & -2p & -3q & 0 \\ 0 & 0 & -2p & -3q \\ 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2p & 3q & 0 \\ 0 & -2p & -3q \\ 3 & 0 & p \end{vmatrix}$$
$$= -(4p^3 + 27q^2).$$

Ngoài việc xác định biệt thức, phép tổng hợp biểu thức còn có thể được áp dụng để giải các bài toán liên quan đến phương trình – hệ phương trình, biến đổi đa thức, khử biến (elimination) như minh họa trong phần tiếp theo sau đây.

3. Ứng dụng trong phép khử biến và tìm đa thức hữu tỷ

3.1. Phép khử biến trong việc giải hệ phương trình

Như tổng hợp của Woody [4], phép khử biến (elimination) là một ứng dụng của phép tổng hợp biểu thức trong việc giải hệ phương trình đại số. Ví dụ minh họa sau sẽ làm rõ điều này

Ví dụ 1. *Giải hệ phương trình trong tập số thực*

$$\begin{cases} x^2y^2 - 25x^2 + 9 = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$$

Lời giải. Để giải hệ trên, ta xác định các đa thức $f(x)$ và $g(x)$ như sau:

$$\begin{cases} f(x) = x^2y^2 - 25x^2 + 9 = 0 = x^2(y^2 - 25) + 9 \\ g(x) = 4x + y = 0 \end{cases}$$

Theo định nghĩa của phép tổng hợp biểu thức thì $f(x) = g(x) = 0$ nếu như $\mathrm{Res}(f, g, x) = 0$. Khử biến x trong hệ phương trình trên, ta có

$$\mathrm{Res}(f, g, x) = \begin{vmatrix} y^2 - 25 & 4 & 0 \\ 0 & y & 4 \\ 9 & 0 & y \end{vmatrix} = y^4 - 25y^2 + 144$$

Như vậy, để giải hệ phương trình trên ta cần tìm y sao cho:

$$y^4 - 25y^2 + 144 = 0.$$

Phương trình trùng phương này có 4 nghiệm là $y \in \{4, -4, 3, -3\}$. Từ đó hệ phương trình có những nghiệm là $(x, y) = (-1, 4),\ (1, -4),\ \left(-\frac{3}{4}, 3\right),\ \left(\frac{3}{4}, -3\right)$. □

Khi giải hệ phương trình dựa vào phép khử, ta cần lưu ý một số điểm:

(i) Có thể khử biến nào giúp cho việc giải được thuận tiện nhất có thể.

ii) Cần thử lại mọi nghiệm tìm được để đi đến đáp án cuối cùng.

3.2. Phép khử biến trong hình học giải tích

Trong hình học giải tích, đôi khi quan hệ giữa các biến được biểu thị qua những hàm tham số có dạng:

$$x = \frac{p(t)}{q(t)}, \quad y = \frac{s(t)}{r(t)}.$$

Theo như bài giảng của Lemmermeyer [1], phép khử biến t sẽ giúp ta tìm ra mối liên hệ trực tiếp giữa x và y. Thật vậy, xét những hàm số sau

$$\begin{cases} F(t) = xq(t) - p(t) \\ G(t) = yr(t) - s(t) \end{cases}$$

Theo đó, biến t sẽ được khử khi ta tìm được mối liên hệ giữa x và y sao cho $F(t) = G(t) = 0$. Tức là ta cần tìm x và y sao cho $\operatorname{Res}(F, G, t) = 0$. Ví dụ sau đây sẽ minh họa rõ hơn cho ứng dụng này của phép tổng hợp biểu thức.

Ví dụ 2. *Tìm mối liên hệ trực tiếp giữa x và y, biết rằng*

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad y = \frac{2t}{t^2+1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Xét hàm số $F(t)$ và $G(t)$ được xác định như sau

$$\begin{cases} F(t) = x(t^2+1) - (t^2-1) = (x-1)t^2 + x + 1 \\ G(t) = y(t^2+1) - 2t = yt^2 - 2t + y \end{cases}$$

Tiếp đến, ta cần tìm x và y sao cho $\operatorname{Res}(F, G, t) = 0$, trong đó

$$\operatorname{Res}(F, G, t) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & y & 0 \\ 0 & x-1 & -2 & y \\ x+1 & 0 & y & -2 \\ 0 & x+1 & 0 & y \end{vmatrix} = \frac{1}{x-1} \begin{vmatrix} x-1 & 0 & y & 0 \\ 0 & x-1 & -2 & y \\ 0 & 0 & -2y & -2(x-1) \\ 0 & x+1 & 0 & y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & -2 & y \\ 0 & -2y & -2(x-1) \\ x+1 & 0 & y \end{vmatrix} = \frac{1}{x-1} \begin{vmatrix} x-1 & -2 & y \\ 0 & -2y & -2(x-1) \\ 0 & 2(x+1) & -2y \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -y & -(x-1) \\ x+1 & -y \end{vmatrix}$$

$$= 4(x^2 + y^2 - 1).$$

Như vậy, $x^2 + y^2 = 1$ chính là mối liên hệ giữa x và y mà ta cần tìm. $\square$

Ngoài ra, trong ví dụ trên nếu như thay thế $t = \tan\theta$ với $\theta \in [0, 2\pi]$ thì ta có $x = -\cos(2\theta)$ và $y = \sin(2\theta)$, điều này cũng dẫn đến $x^2 + y^2 = 1$.

3.3. Đa thức hữu tỷ có nghiệm vô tỷ

Phép tổng hợp biểu thức cũng được áp dụng để tìm đa thức hữu tỷ mà ta đã biết trước một nghiệm vô tỷ. Chúng ta xem xét ví dụ sau

Ví dụ 3. *Tìm đa thức hữu tỷ $h(x)$ có một nghiệm là $x_0 = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.*

Lời giải. Theo diễn giải của Lemmermeyer [1], với các đa thức hữu tỷ $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt có các nghiệm là α và β thì đa thức hữu tỷ $h(x)$ có một nghiệm là $\alpha + \beta$ được xác định như sau

$$h(x) = \operatorname{Res}[f(x-y),\ g(y),\ y]. \tag{1}$$

Trong ví dụ này, ta có

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2, & \alpha = \sqrt{2} \\ g(x) = x^3 - 3, & \beta = \sqrt[3]{3} \end{cases}$$

Theo (1), đa thức hữu tỷ $h(x)$ được xác định như sau

$$h(x) = \operatorname{Res}[f(x-y),\ g(y),\ y] = \operatorname{Res}[(x-y)^2-2,\ y^3-3,\ y] = \operatorname{Res}[y^2-2xy+x^2-2,\ y^3-3,\ y]$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-2 & -2x & 1 \\ -3 & 0 & 0 & x^2-2 & -2x \\ 0 & -3 & 0 & 0 & x^2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-2 & -2x & 1 \\ 0 & 0 & 3 & x^2-2 & -2x \\ 0 & -3 & 0 & 0 & x^2-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2x & 1 & 0 \\ 0 & x^2-2 & -2x & 1 \\ 0 & 3 & x^2-2 & -2x \\ -3 & 0 & 0 & x^2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2x & 1 & 0 \\ 0 & x^2-2 & -2x & 1 \\ 0 & 3 & x^2-2 & -2x \\ 0 & -6x & 3 & x^2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2-2 & -2x & 1 \\ 3 & x^2-2 & -2x \\ -6x & 3 & x^2-2 \end{vmatrix}$$

$$= x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1.$$

Vậy $h(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$ là đa thức cần tìm. $\square$

Một cách tương tự

Đa thức hữu tỷ $\eta(x)$ có một nghiệm là $\frac{\alpha}{\beta}$ được xác định theo công thức

$$\eta(x) = \mathrm{Res}[f(xy),\ g(y),\ y]. \tag{2}$$

Như ví dụ tiếp theo

Ví dụ 4. *Tìm đa thức hữu tỷ $\eta(x)$ có một nghiệm là $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$.*

Lời giải. Áp dụng công thức (2), ta có

$$\eta(x) = \mathrm{Res}[f(xy),\ g(y),\ y] = \mathrm{Res}[x^2y^2 - 2,\ y^3 - 3,\ y] = 9x^6 - 8.$$

Thật vậy, do $x_1^6 = \frac{8}{9}$ nên $\eta(x_1) = 0$. □

4. Ứng dụng trong phương trình đại số

4.1. Hệ thức liên quan đến nghiệm phương trình đại số

Phần này trình bày ứng dụng của phép tổng hợp biểu thức trong việc chứng minh hệ thức liên quan đến nghiệm của một phương trình đại số. Ta xem xét ví dụ sau

Ví dụ 5. *Cho số thực a thỏa điều kiện $(a-1)^3 = 9a$, đặt $b = a^2 + a$. Chứng minh rằng*

$$(b+1)^3 = 27b^2.$$

Lời giải. Ví dụ trên có thể được giải bằng nhiều cách như biến đổi hệ thức hoặc giải trực tiếp phương trình bậc ba. Với phép tổng hợp biểu thức, đặt $x = a - 1$, ta có

$$\begin{cases} x^3 - 9x - 9 = 0 \\ b = a(a+1) = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2 \end{cases}$$

Xây dựng những hàm số sau

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 9x - 9 \\ g(x) = b - (x^2 + 3x + 2) = -x^2 - 3x + b - 2 \end{cases}$$

Khử biến x trong hệ $f(x) = g(x) = 0$, hệ thức độc lập của b được xác định là

$$\operatorname{Res}(f, g, x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -9 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -9 \\ -1 & -3 & b-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & b-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & b-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -9 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & -3 & b-11 & -9 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & b-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & b-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -9 & -9 \\ -3 & b-11 & -9 & 0 \\ -1 & -3 & b-2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & b-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & b-11 & -36 & -27 \\ 0 & -3 & b-11 & -9 \\ 0 & -1 & -3 & b-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-11 & -36 & -27 \\ -3 & b-11 & -9 \\ -1 & -3 & b-2 \end{vmatrix}$$

$$= b^3 - 24b^2 + 3b + 1.$$

Như vậy, hệ $f(x) = g(x) = 0$ có nghiệm khi $b^3 - 24b^2 + 3b + 1 = 0$, tức là $(b+1)^3 = 27b^2$, đây chính là điều phải chứng minh. □

Ví dụ trên thực chất là một phép biến đổi Tschirnhaus bậc hai đối với phương trình bậc ba. Phần tiếp theo sẽ khảo luận rõ hơn về vấn đề này.

4.2. Giải phương trình bậc ba theo phương pháp Tschirnhaus

Bên cạnh những phương pháp giải phương trình bậc ba phổ biến [6], Tschirnhaus [3] đề xuất một cách tiếp cận dựa vào phép biến đổi đa thức (Tschirnhaus transform). Theo đó, ứng dụng khử biến (elimination) của phép tổng hợp đa thức là một công cụ đắc lực cho cách tiếp cận này.

Xét phương trình bậc ba tổng quát có dạng

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + bx + c = 0.$$

Tschirnhaus đã đề xuất các phép đổi biến $x = p_n(y)$ vào phương trình trên, trong đó $p_n(y)$ là một đa thức bậc $n < 3$, với mục tiêu loại bỏ các số hạng bậc hai và bậc nhất của đa thức bậc ba tổng quát. Với $x = y - a$, phương trình bậc ba tổng quát trở thành hệ phương trình sau

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 3ax^2 + bx + c = 0 \\ g(x) = -x + y - a = 0 \end{cases}$$

Vận dụng phép tổng hợp biểu thức của $f(x)$ và $g(x)$ liên quan đến việc khử biến x trong hệ trên, ta cần có $\operatorname{Res}(f,\ g,\ x) = 0$, với

$$\operatorname{Res}(f,g,x) = \begin{vmatrix} 1 & 3a & b & c \\ -1 & y-a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & y-a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & y-a \end{vmatrix} = y^3 + py + q.$$

Trong đó p và q được xác định như sau

$$\begin{cases} p = b - 3a^2 \\ q = 2a^3 - ab + c \end{cases}$$

Với phép biến đổi Tschirnhaus bậc nhất như trên, ta đã loại được hệ số bậc hai của phương trình và chỉ cần tìm nghiệm cho phương trình bậc ba dạng rút gọn $y^3 + py + q = 0$.

Ý tưởng tiếp theo là loại bỏ hệ số bậc nhất. Đổi biến $z = y^2 + uy + v$, đây là một phép biến đổi Tschirnhaus bậc hai. Ta xét hệ phương trình sau

$$\begin{cases} h(y) = y^3 + py + q = 0 \\ k(y) = z - (y^2 + uy + v) = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình này dẫn đến $\operatorname{Res}(h,\ k,\ y) = 0$, trong đó

$$\operatorname{Res}(h,\ k,\ y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -u & -1 & 0 \\ p & 0 & z-v & -u & -1 \\ q & p & 0 & z-u & -u \\ 0 & q & 0 & 0 & z-v \end{vmatrix} = z^3 + rz^2 + sz + t.$$

Vậy $z^3 + rz^2 + sz + t = 0$, và để loại bỏ các hệ số bậc hai và bậc nhất trong phương trình này, ta cần tìm u và v sao cho $r = s = 0$. Tất nhiên với $p = 0$, phép biến đổi Tschirnhaus bậc hai này là không cần thiết. Do đó, ta giả sử rằng $p \neq 0$.

Trong $\operatorname{Res}(h,k,y)$, ta có $r = 2p - 3v$, để $r = 0$ thì ta cần $v = \frac{2p}{3}$, khi đó

$$s = pu^2 + 3qu - \frac{p^2}{3}.$$

Như vậy, để thỏa điều kiện $s = 0$ thì ta cần u sao cho

$$3pu^2 + 9qu - p^2 = 0,$$

tức
$$u = \frac{1}{6p}\left[-9q \pm \sqrt{3(4p^3 + 27q^2)}\right].$$
Trong công thức trên, việc u là một số thực hay một số thuần phức phụ thuộc vào biểu thức $-(4p^3 + 27q^2)$, đây cũng chính là biệt thức của phương trình bậc ba dạng rút gọn như đã trình bày trong phần 2, như vậy
$$t = qu^3 - \frac{2p^2}{3} \cdot u^2 - pqu - \left(\frac{2p^3}{27} + q^2\right).$$
Theo đó, trong tập số phức $\mathbb{C}$, ta tìm được $z = -\sqrt[3]{t}$, từ đó ta giải được y thông qua phương trình bậc hai
$$y^2 + uy + v - z = 0,$$
hay
$$y = \frac{1}{2}[-u \pm \sqrt{u^2 - 4(v - z)}].$$
Và cuối cùng, $x = y - a$.

Với cách tiếp cận bằng phép đổi biến Tschirnhaus bậc hai đối với phương trình bậc ba, ta có thể biến đổi trực tiếp dạng tổng quát về dạng $z^3 + t = 0$. Tuy nhiên, phép đổi biến Tschirnhaus bậc nhất như một bước trung gian giúp làm giảm một khối lượng tính toán đáng kể.

Ngoài ta, với cách tiếp cận này, từ ba giá trị của z, ta tìm được sáu giá trị của y và tương ứng là sáu giá trị của x. Vì thế, việc thử lại đối với phương trình dạng rút gọn cũng như dạng tổng quát là cần thiết để có được tập nghiệm chính xác.

5. Một số thảo luận

Xuyên suốt bài viết này, chúng ta đã khảo luận về cơ sở lý thuyết và một số ứng dụng của phép tổng hợp biểu thức (resultant). Thay lời kết, tác giả sẽ thảo luận thêm hai vấn đề, đó là

(i) Thuật ngữ *"resultant"* trong tiếng Việt.

(ii) Quan điểm của tác giả về việc sử dụng phép tổng hợp biểu thức trong giải toán sơ cấp.

Thứ nhất, về phương diện thuật ngữ. Tác giả mạo muội sử dụng thuật ngữ "*phép tổng hợp biểu thức*" để diễn tả khái niệm "*resultant*" trong tiếng Việt. Trong hình học và vật lý, chúng ta đã quen với tính từ "*resultant*" qua các thuật ngữ như "*hợp lực*" (resultant force) và "*vector tổng*" (resultant vector). Do đó, tác giả tin rằng thuật ngữ "*phép tổng hợp biểu thức*" là phù hợp để biểu đạt danh từ "*resultant*" trong đại số trừu tượng. Trong quá trình tìm cách tốt nhất để biên dịch thuật ngữ "*resultant*" sang tiếng Việt, tác giả có tham khảo một số tài liệu được viết trong ngôn ngữ có văn hóa gần với Việt Nam. Theo đó, chữ "*resultant*" được người Trung Quốc gọi là "*kết thức*" (結式) và được người Nhật Bản gọi là "*chung kết thức*" (終結式). Thiết nghĩ, sẽ thật sự không phù hợp nếu như ta mượn phiên âm chữ Trung Quốc hay Nhật Bản để dịch chữ "*resultant*" sang tiếng Việt. Như vậy, "*phép tổng hợp biểu thức*" được kỳ vọng là một đóng góp nhỏ nhoi xây dựng cho sự trong sáng và mới mẻ của tiếng Việt, theo tinh thần của ông Ngô Quang Châu [2].

Thứ nhì, về việc áp dụng phép tổng hợp biểu thức vào giải toán sơ cấp. Có thể nói rằng một khái niệm thuộc đại số trừu tượng như phép tổng hợp biểu thức là một công cụ mạnh mẽ để giải toán sơ cấp. Do đó, việc vận dụng này có thể gặp phải một số phản biện rằng cách giải bài toán không tương thích với phạm vi, khuôn khổ của một chương trình học hay một kỳ thi. Về vấn đề này, tác giả quan niệm rằng việc áp dụng những công cụ được cho là "*ngoài giới hạn*" sẽ nâng cao tinh thần sáng tạo và chia sẻ kiến thức trong toán học. Bởi lẽ, chúng ta không nên suy nghĩ bên trong "*chiếc hộp*", cũng không nên suy nghĩ ngoài "*chiếc hộp*", mà hãy nghĩ rằng chẳng có "*chiếc hộp*" nào cả.

6. Lời cám ơn

Tác giả xin gửi lời cám ơn chân thành đến Tiến sĩ Trần Nam Dũng về những lời khuyến khích, động viên và ý kiến quý báu của Thầy để cho bài viết này được hoàn thành.

Tài liệu

[1] Lemmermeyer F., *Resultants*, Department of Mathematics – Faculty of Science – University of Bilkent (2005), 41-46.

[2] Ngô Quang Châu, *Luận về tiếng Nam*, Nhà xuất bản Đời mới (1943).

[3] Tschirnhaus E. W. v., *A method for removing all intermediate terms from a given equation*, This Bulletin, Vol. 37 (1), No. 143 (2003), 1-3. [Nguyên bản: *Methodus auferendi omnes terminus intermedios ex data equation*, Acta Eruditorum, 2 (1683), 204-207]

[4] Woody H., *Polynomial Resultants, Department of Mathematics and Computer Science*, University of Payet Sound (2016), 1-10.

[5] https://math.stackexchange.com/q/2268111

[6] https://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html

BÀI TOÁN HÔN NHÂN BỀN VỮNG

Lương Văn Khải - Võ Thành Đạt
(SV trường ĐH Khoa học tự nhiên TPHCM)

1. Giới thiệu bài toán

1.1. Bài toán hôn nhân bền vững là gì?

Trong toán học và khoa học máy tính, bài toán hôn nhân bền vững (SMP) yêu cầu tìm một cặp ghép bền vững giữa các phần tử của hai tập hợp theo thứ tự ưu tiên của mỗi phần tử. Một cặp ghép là một ánh xạ từ các phần tử của tập hợp này tới các phần tử của tập hợp kia. Một cặp ghép là bền vững nếu hai điều kiện sau không đồng thời xảy ra:

Một phần tử A của tập hợp thứ nhất thích phần tử B của tập hợp thứ hai hơn phần tử được ghép với A, và B cũng thích A hơn phần tử được ghép với B Nói cách khác, một tổ hợp ghép là bền vững nếu không tồn tại cặp (A, B) trong đó cả A và B đều thích phần tử kia hơn phần tử được ghép với chúng.

Bài toán ”hôn nhân bền vững” có thể được phát biểu đơn giản như sau:

> Hãy tìm cách ghép cặp vợ-chồng cho n chàng trai và m cô gái sao cho các cuộc hôn nhân này là "bền vững". Tức là không được tồn tại hai cặp mà người chồng bên cặp này lại thích người vợ bên cặp kia hơn vợ mình, đồng thời người vợ bên cặp kia cũng thích người chồng bên cặp này hơn chồng mình, khi đó hai người này sẽ ngoại tình.

1.2. Lịch sử hình thành và phát triển

Năm 1960, hai nhà toán học người Mỹ là Lloyd Stowel Shapleyl[1] và David Gale[2] quan sát thực tiễn và nhận thấy rất nhiều hoạt động liên quan đến việc ghép đôi, tạo mối quan hệ, ví dụ như gặp gỡ kí kết hợp đồng giữa người mua và người bán hay tuyển sinh, v.v...

Hình 1: Lloyd Stowel Shapleyl (trái) và David Gale

Để giải quyết các vấn đề này, họ tìm ra thuật toán DAA (Deferred Acceptance Algorithm) hay còn gọi là thuật toán chấp nhận trì hoãn và công bố vào năm 1962 trong bài báo mang tên "Tuyển sinh đại học và sự ổn định của hôn nhân (College Admissions and the Stability of Marriage)".

Đến những năm 1980, khi nghiên cứu về sự tắc nghẽn của việc phân bổ lao động của một số thị trường tại Mỹ, Alvin Eliot Roth[3] đã nhận thấy sự tương đồng của những thị trường này với mô hình toán học đã được D. Gale và L. Shapley nghiên cứu trước đó, ông nghiên cứu và thiết kế lại những thị trường này dựa trên thuật toán DAA.

Năm 2012, Alvivin E.Roth và Lloyd S.Shapley được trao giải Nobel Kinh tế cho những cống hiến về "Lý thuyết phân phối ổn định và thực tiễn về tạo lập thị trường" (The theory of stable allocations and the practice of market design).

Ngày nay, bài toán hôn nhân bền vững có rất nhiều ứng dụng trong cuộc sống (y tế, giáo duc,...) Trong phần cuối, chúng ta sẽ nói về ứng dụng của bài toán hôn nhân bền vững trong cách xét tuyển vào đại học ở Việt Nam nói riêng và trên thế giới nói chung.

[1]Lloyd Stowell Shapley (2/6/1923 - 12/3/2016) là một nhà toán học và kinh tế học người Mỹ. Ông là Giáo sư danh dự tại đại học California, Los Angele. Ông đã đóng góp vào các lĩnh vực kinh tế toán học và đặc biệt là lý thuyết trò chơi. Năm 2012, ông được giải Nobel kinh tế cùng Alvin Elliot Roth.

[2]David Gale (13/12/1921 – 7/3/2008) là một nhà toán học và kinh tế học người Mỹ. Ông là giáo sư danh dự tại Đại học California, Berkeley. Ông đã đóng góp cho các lĩnh vực kinh tế toán học, lý thuyết trò chơi và phân tích lồi.

[3]Alvin Eliot Roth là một nhà kinh tế Mỹ, hiện là giáo sư thỉnh giảng tại đại học Stanford cũng như giáo sư George Gund về kinh tế và quản trị kinh doanh tại trường kinh doanh Harvard. Ông đã có các đóng góp đáng kể trong lĩnh vực lý thuyết trò chơi, thiết kế thị trường và kinh tế học thực nghiệm. Năm 2012, ông được giải Nobel kinh tế cùng Lloyd Stowell Shapley.

Hình 2: Alvin Eliot Roth

2. Tìm hiểu bài toán

2.1. Cơ sở lý thuyết

2.1.1. Một số khái niệm

Định nghĩa 1. *Một cách ghép cặp giữa các chàng trai và các cô gái được gọi là không bền vững nếu có hai cặp vợ chồng* (B_1, G_1) *và* (B_2, G_2) *sao cho chàng trai* B_1 *thích cô gái* G_2 *hơn cô vợ* G_1 *của mình, đồng thời cô gái* G_2 *cũng thích chàng trai* B_1 *hơn anh chồng* B_2 *của mình.*

Định nghĩa 2. *Một cách ghép cặp bền vững được gọi tối ưu nếu mỗi chàng trai đều lấy được người vợ ưng ý hơn so với bất kì một cách phân bố bền vững nào khác.*

2.1.2. Các vấn đề đặt ra

Vấn đề 1 (**Marriage problem**). *Có tồn tại hay không cách ghép cặp cho* n *chàng trai với* n *cô gái sao cho ai cũng lấy được người mình có cảm tình (một người có thể có cảm tình với nhiều người khác giới)? Nếu tồn tại thì chỉ ra cách ghép.*

Lời giải. Câu trả lời là có. Vấn đề này đã được giải bởi nhà Toán học Philip Hall vào năm 1935. Ông đã tìm ra điều kiện cần và đủ để tồn tại một cách ghép thỏa mãn yêu cầu, đó cũng chính là nội dung của "định lý hôn nhân" (Hall's marriage theorem). Xem [8] □

Vấn đề 2 (**Stable Marriage Theorem**). *Có thể ghép cặp để cho các cuộc hôn nhân này bền vững hay không?*

Lời giải. Vấn đề này được giải quyết bằng thuật toán DAA, được trình bày ở phần tiếp theo. □

COLLEGE ADMISSIONS AND THE STABILITY OF MARRIAGE

D. GALE* AND L. S. SHAPLEY, Brown University and the RAND Corporation

1. Introduction. The problem with which we shall be concerned relates to the following typical situation: A college is considering a set of n applicants of which it can admit a quota of only q. Having evaluated their qualifications, the admissions office must decide which ones to admit. The procedure of offering admission only to the q best-qualified applicants will not generally be satisfactory, for it cannot be assumed that all who are offered admission will accept. Accordingly, in order for a college to receive q acceptances, it will generally have to offer to admit more than q applicants. The problem of determining how many and which ones to admit requires some rather involved guesswork. It may not be known (a) whether a given applicant has also applied elsewhere; if this is known it may not be known (b) how he ranks the colleges to which he has applied; even if this is known it will not be known (c) which of the other colleges will offer to admit him. A result of all this uncertainty is that colleges can expect only that the entering class will come reasonably close in numbers to the desired quota, and be reasonably close to the attainable optimum in quality.

The usual admissions procedure presents problems for the applicants as well as the colleges. An applicant who is asked to list in his application all other colleges applied for in order of preference may feel, perhaps not without reason, that by telling a college it is, say, his third choice he will be hurting his chances of being admitted.

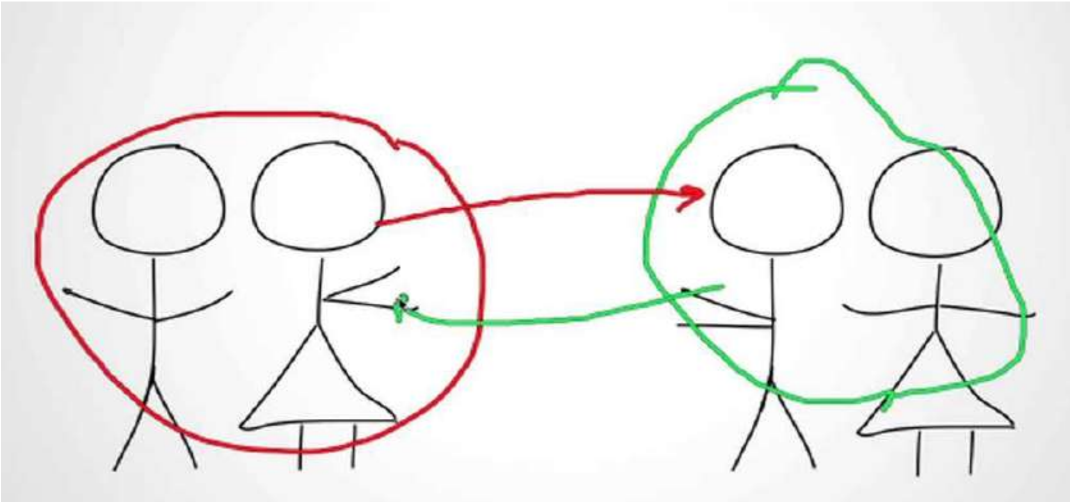
One elaboration is the introduction of the "waiting list," whereby an applicant can be informed that he is not admitted but may be admitted later if a vacancy occurs. This introduces new problems. Suppose an applicant is accepted by one college and placed on the waiting list of another that he prefers. Should he play safe by accepting the first or take a chance that the second will admit him later? Is it ethical to accept the first without informing the second and then withdraw his acceptance if the second later admits him?

We contend that the difficulties here described can be avoided. We shall describe a procedure for assigning applicants to colleges which should be satisfactory to both groups, which removes all uncertainties and which, assuming there are enough applicants, assigns to each college precisely its quota.

2. The assignment criteria. A set of n applicants is to be assigned among m colleges, where q_i is the quota of the ith college. Each applicant ranks the colleges in the order of his preference, omitting only those colleges which he would never accept under any circumstances. For convenience we assume there are no ties; thus, if an applicant is indifferent between two or more colleges he is nevertheless required to list them in some order. Each college similarly ranks the students who have applied to it in order of preference, having first eliminated those appli-

* The work of the first author was supported in part by the Office of Naval Research under Task NR047-018.

Hình 3: Trang đầu bài báo gốc về Bài toán hôn nhân bền vững



Hình 4: Hai cặp hôn nhân không bền vững

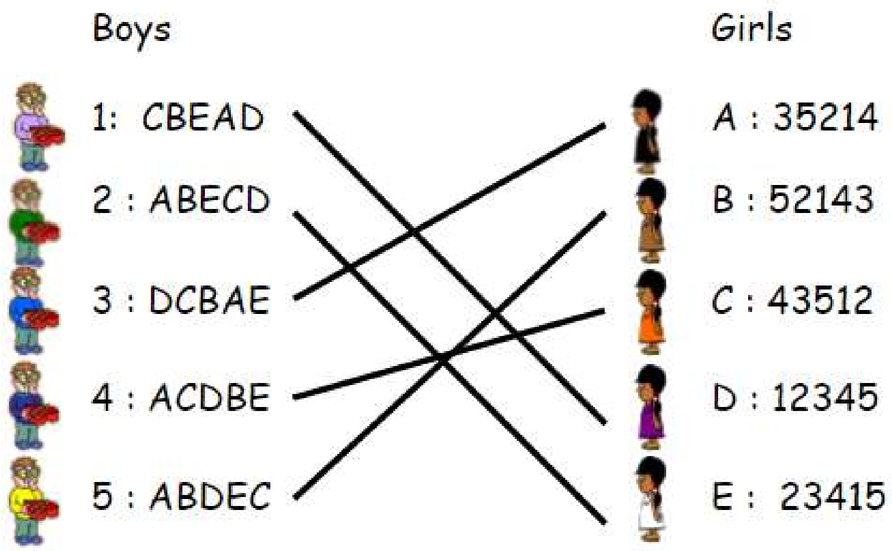
2.2. Thuật toán

Định lý 1. *Nếu số chàng trai bằng số cô gái thì luôn tồn tại một cách ghép cặp vợ-chồng cho họ sao cho các cuộc hôn nhân này là bền vững.*

Chứng minh. D. Gale và L. Shapley đã chứng minh định lý này bằng cách đưa thuật toán DAA. Thuật toán này có thể được mô tả bởi vòng lặp sau:

- **Bước 1:** Các chàng trai và cả các cô gái cùng lên một danh sách sắp thứ tự các cô gái và các chàng trai mà mình muốn lấy (theo thứ tự thích nhất, thích nhì, thích ba,...).
- **Bước 2:** Lần lượt các chàng trai sẽ cầu hôn các cô gái đứng đầu trong danh sách của mình. Cô gái nào nhận được nhiều lời cầu hôn thì sẽ chọn người mà mình thích nhất (dựa theo danh sách của mình).
    - Nếu người được chọn là người đứng đầu trong danh sách thì cô gái sẽ kết hôn với người này và từ chối mọi lời cầu hôn khác ở những lượt tiếp theo.
    - Còn nếu như không phải thì cô gái sẽ tìm cách "trì hoãn" bằng việc tạm nhận lời, coi như mình đang có một "hôn phu tạm thời" và chờ đợi lời cầu hôn từ một người có thứ hạng cao hơn. Nếu người này xuất hiện và cầu hôn cô gái (ở những lượt sau) thì dĩ nhiên cô ấy sẽ chia tay người "hôn phu tạm thời" của mình mà chọn người này.
- **Bước 3:** Các chàng trai sẽ xóa tên cô gái đã từ chối mình hoặc đã chia tay với mình khỏi danh sách.
- **Bước 4:** Lặp lại **bước 2**.

Vòng lặp sẽ kết thúc khi không còn chàng trai nào phải đi cầu hôn nữa. Khi đó cô gái nào chưa kết hôn thì sẽ kết hôn với người "hôn phu tạm thời" hiện tại của mình. □



Hình 5: Một cách ghép cặp hôn nhân bền vững

Nhận xét.

1. *Thuật toán DAA thực hiện hữu hạn vòng lặp.*

   Chứng minh. Ở mỗi lượt, một chàng trai chỉ được cầu hôn với một cô gái, nếu cô gái đó từ chối hoặc chia tay với anh ta thì anh ta không được cầu hôn lại mà phải cầu hôn cô gái khác ở lượt sau, do đó số vòng lặp sẽ không thể vượt quá n^2. □

2. *Sau khi thuật toán kết thúc, mọi người đều được kết hôn (không còn ai độc thân).*

   Chứng minh. Điều này dễ dàng thấy được do:

   - Sau khi thuật toán kết thúc, các chàng trai không còn phải đi cầu hôn nữa, tức là anh nào cũng đã được làm chồng hoặc "hôn phu tạm thời".
   - Mỗi cô gái đều đã nhận được ít nhất một lời cầu hôn vì không có cô gái nào có 2 chồng hoặc 2 "hôn phu tạm thời" cả.

   Tóm lại là các cô gái đều đã được ngỏ lời và các chàng trai đều đã được nhận lời nên mọi người đều được kết hôn. □

3. *Bằng việc thực hiện thuật toán như trên, các cuộc hôn nhân được thiết lập là bền vững.*

   Chứng minh. Giả sử tồn tại hai cặp vợ chồng (B_1, G_1) và (B_2, G_2) mà B_1 thích G_2 hơn cô vợ G_1 của mình, đồng thời G_2 cũng thích B_1 hơn anh chồng B_2 của mình. Khi đó rõ ràng B_1 phải cầu hôn G_2 trước G_1. Xét tại thời điểm B_1 cầu hôn G_2:

   - Nếu trước đó B_2 đã cầu hôn và hiện đang là "hôn phu tạm thời" của G_2 thì lúc này G_2 sẽ chia tay B_2 và chấp nhận B_1 vì G_2 thích B_1 hơn.

- Nếu B_2 cầu hôn G_2 sau B_1 thì chắc chắn B_2 sẽ bị từ chối ngay vì G_2 thích B_1 hơn B_2.

Khi đó, B_2 luôn luôn bị từ chối và chắc chắn không thể nào là chồng của G_2 được, mâu thuẫn. □

4. *Thuật toán DAA vẫn có thể áp dụng trong trường hợp số chàng trai không bằng số cô gái. Cụ thể:*

   - *Nếu $n < m$ thì thuật toán sẽ dừng khi n cô gái được cầu hôn.*
   - *Nếu $m < n$ thì thuật toán sẽ dừng khi mỗi chàng trai rơi vào một trong hai trạng thái sau:*
     - *Là hôn phu tạm thời của một cô gái nào đó.*
     - *Bị tất cả các cô gái từ chối.*

5. *Nếu các cô gái đi cầu hôn các chàng trai thì cũng có thể áp dụng thuật toán DAA để cho ra một cách ghép cặp bền vững. Hai cách ghép cặp đối với hai trường hợp có thể sẽ khác nhau. Ngoài ra, bên nào là bên cầu hôn thì kết quả của thuật toán sẽ tối ưu đối với bên đó.*

   Chứng minh. Xem ở phần kế tiếp. □

2.3. Tính tối ưu

Định lý 2. *Trong các cách ghép cặp bền vững, kết quả của thuật toán DAA là tối ưu nhất, tức là các chàng trai sẽ lấy được người vợ mà mình ưng ý nhất, so với các cách ghép bền vững khác.*

Chứng minh. Xét tất cả các cách ghép cặp bền vững. Đối với mỗi chàng trai, gọi vùng khả thi là tập hợp tất cả các cô gái mà anh ta có thể cưới trong các cách ghép đôi bền vững. Định nghĩa tương tự với các cô gái. Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng.

Gọi B là chàng trai đầu tiên bị cô gái G mà anh ta thích nhất trong vùng khả thi của mình từ chối. Điều này chứng tỏ G đã có hôn phu tạm thời là B' và G thích B' hơn B.

Gọi G' là cô gái mà B' thích nhất trong vùng khả thi của mình.

- TH1: G khác G'.

  Xét trong danh sách (lập ở bước 1 của thuật toán) của B', ta thấy G phải có thứ hạng cao hơn G', nếu không thì B' phải cầu hôn G' trước G và bị từ chối, tức là B' sẽ bị người thích nhất trong vùng khả thi của mình từ chối. Điều này vô lý do sự kiện B' bị G' từ chối xảy ra trước sự kiện B bị G từ chối, hay B không phải là chàng trai đầu tiên bị từ chối bởi người mình thích nhất trong vùng khả thi của minh (trình tự cụ thể: B' cầu hôn G' và từ chối, tiếp theo B' cầu hôn G, được G cho làm hôn phu tạm thời, sau đó B mới cầu hôn G và bị G từ chối). Tóm lại, trong danh sách của B' thì G có thứ hạng cao hơn G'.

  Mặt khác, ta xét một cách ghép cặp bền vững mà ở đó B và G kết hôn với nhau, còn B' sẽ kết hôn với cô gái G'' nào đó. Tuy nhiên B' lại thích G hơn G'' và G cũng thích B' hơn B nên mâu thuẫn với tính bền vững.

- TH2: G chính là G'.

  Tương tự TH1.

$\square$

Nhận xét.

1. *Các cô gái sẽ lấy chàng trai có thứ hạng thấp nhất trong vùng khả thi của mình. Như vậy, bên cầu hôn sẽ được lợi hơn bên được cầu hôn.*

   Chứng minh. Giả sử tồn tại cô gái G nào đó kết hôn với chàng trai B không phải là chàng trai xếp cuối vùng khả thi của cô ta. Theo định lý 2, ta có G chính là cô gái đứng đầu vùng khả thi của B. Xét cách ghép cặp bền vững mà G kết hôn với B' là chàng trai xếp cuối vùng khả thi của cô ta. Khi đó ta thấy G thích B hơn B', trong khi B phải kết hôn với cô gái có xếp hạng thấp hơn G, mâu thuẫn với tính bền vững. $\square$

2. *Nếu chỉ có một cách ghép cặp bền vững duy nhất thì tính tối ưu của các chàng trai và các cô gái là như nhau.*

   Chứng minh. Vì vùng khả thi của mỗi người lúc này chỉ có một người. $\square$

2.4. Mô hình và Code

2.4.1. Mô hình

INPUT:

- Tập các chàng trai $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$
- Tập các cô gái $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$
- Danh sách xếp hạng yêu thích của mỗi người, trong đó gọi $P_{b_i}(g_j)$ $(P_{g_i}(b_j))$ là thứ hạng mà bạn nam (nữ) thứ i đánh giá bạn nữ (nam) thứ j trong danh sách xếp hạng yêu thích của mình.

OUTPUT: Tập hôn nhân bền vững $S \subset B \times G$

- $|S| = n$
- $\forall b \in B, \exists! g \in G, (b, g) \in S$
- $\forall g \in G, \exists! b \in B, (g, h) \in S$
- $\neg\exists (b, g) \notin S : ((b, g') \in S) \wedge ((b', g) \in S) \wedge (P_b(g) < P_g(b')) \wedge (P_g(b) < P_g(b'))$

2.4.2. Code (Python)

```python
def deferred_acceptance_algorithm(man_pref, woman_pref, n):
    """
    Thuật toán chấp nhận trì hoãn (Gale-Shapley Algorithm)

    # LƯU Ý: thuật toán cài đặt ở mã nguồn này đánh index từ 0

    :param man_pref: list(list)
    - danh sách yêu thích của m thứ i là man_pref[i]
    :param woman_pref: list(list)
    - danh sách yêu thích của w thứ i là woman_pref[i]
    :param n: int - số lượng cặp đôi

    :return stable_marriage: list(tuple)
    - mỗi một tuple(m, w) là một cặp hôn nhân
    """
    # Người mà hiện tại w đang hẹn hò: fall_in_love[w] = m
    # Nếu w đang độc thân: fall_in_love[w] = -1
    fall_in_love = [-1] * n

    # Những người đàn ông độc thân
    free_man = list(range(n))

    # Lưu thứ hạng w thích m
    ranking = [[0] * n for i in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            ranking[i][woman_pref[i][j]] = j

    # chiến thuật tỏ tình bắt đầu
    while free_man:
        # xét một m độc thân
        m = free_man[0]
        # tỏ tình với w mà hiện tại m thích nhất
        w = man_pref[m].pop(0)

        # nếu w chưa hẹn hò
        if fall_in_love[w] == -1:
            # hẹn hò cùng m, m không còn độc thân
            fall_in_love[w] = m
            free_man.pop(0)
        else:
            # nếu w thích m hơn m'
            if ranking[w][m] < ranking[w][fall_in_love[w]]:
                # m hết độc thân, m' độc thân
                free_man.pop(0)
```

```
                free_man.append(fall_in_love[w])
                # m và w hẹn hò
                fall_in_love[w] = m

    # Danh sách [(m,w),...] hôn nhân bền vững
    stable_marriage = [(fall_in_love[i], i) for i in range(n)]

    # trả về tập hôn nhân bền vững
    return stable_marriage
# Chạy thử code
n = 4
man_pref = [[1,0,2,3],
            [3,0,1,2],
            [0,2,1,3],
            [1,2,0,3]]
woman_pref = [[0,2,1,3],
              [2,3,0,1],
              [3,1,2,0],
              [2,1,0,3]]
result = deferred_acceptance_algorithm(man_pref, woman_pref, n)
print(result)
# Kết quả
[(0, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3)]
```

3. ỨNG DỤNG

Thuật toán DAA có nhiều ứng dụng trong thực tế:

- Y tế: phân phối nội tạng được hiến tặng đến các bệnh nhân để đảm bảo tương đối tính công bằng và mang lại lợi ích nhiều nhất có thể (trao đổi thận của thân nhân ở Hoa Kì).
- Công việc: Phân công các tân bác sĩ đến các bệnh viện (Chương trình quốc gia về phân bổ bác sĩ nội trú Hoa Kì NRMP đang áp dụng).
- Giáo dục: Phân bổ học sinh trung học tại New York và nhiều thành phố khác.

Chúng ta sẽ lần lượt tìm hiểu về các ứng dụng của bài toán này.

3.1. Bài toán cho và nhận trong ghép tạng

Thuật toán DAA giúp làm tăng số lượng ca ghép thận thành công. Tình huống đặt ra là, có một số lượng người hiến thận và một số lượng bệnh nhân cần ghép thận. Tuy nhiên, ca ghép thận chỉ được coi là thành công nếu thận của người hiến tương thích với cơ thể người nhận. Nếu quả thận không tương thích, bệnh nhân sẽ được đưa vào "danh sách chờ".[4]

Theo Alvin, có nhiều thân nhân muốn hiến thận nhưng không thể ghép cho người nhà mình vì không tương thích. Điều này tạo ra một thực tế là phải thiết kế được một cơ chế cho phép những người có thân nhân cần thận và muốn được hiến thận để cứu người nhà có thể nối kết với nhau nhằm hiến thận và tạo điều kiện cho người thân của mình được ghép thận.

Với nền tảng là bài toán hôn nhân bền vững, Alvin Roth và các cộng sự đã thiết kế ra một cơ chế giúp các bệnh nhân có thể hoán đổi người hiến thận cho nhau, qua đó làm tăng số lượng các ca ghép thận thành công, cứu sống được thêm nhiều bệnh nhân. Xét hai cặp vợ chồng (H, W) và (H', W') với hai người vợ W, W' cần được ghép thận. Lý tưởng nhất là ông chồng sẽ hiến thận cho vợ mình: H hiến thận cho W, H' hiến thận cho W'. Tuy nhiên, có thể thận mà H lại không tương thích với vợ mình W, tương tự với H' và W'. Nếu may mắn, H có thể hiến thận cho W' còn H' sẽ hiến thận cho W. Nếu không may mắn, bác sĩ sẽ phải tìm ra một cặp vợ chồng khác (H'', W'') để tạo thành một chu trình H hiến thận cho W', H' hiến thận cho W'' và H'' hiên thận cho W. Chu trình này tiếp tục giúp chúng ta hình thành một chuỗi, trong đó ví dụ W' nhận từ H còn W nhận từ một người khác trong danh sách.

3.2. Bài toán ghép đôi bác sĩ thực tập và bệnh viện

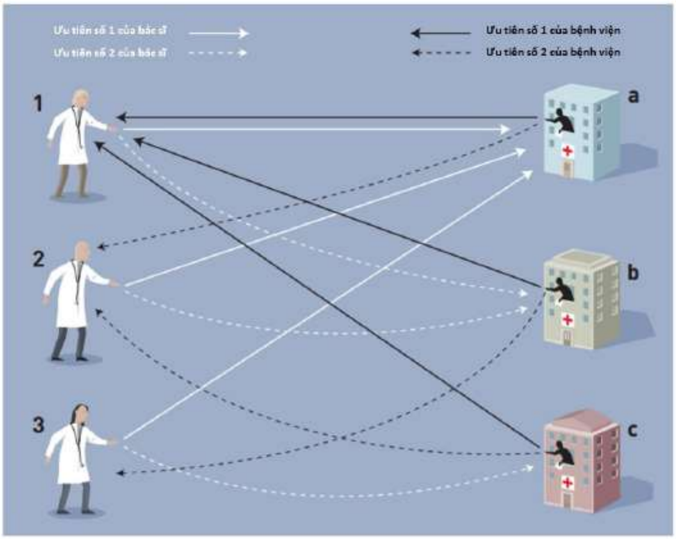
Hãy tưởng tượng chúng ta có một tình cảnh như sau:

- Bác sĩ A vừa chấp nhận hợp đồng thực tập của phòng khám X.
- Sau đó một tháng, bệnh viện Y gọi điện mời bác sĩ A tới kí hợp đồng không qua thực tập, với lí do "đã biết về thành tích của bác sĩ A ở trường". Hợp đồng của bệnh viện Y cung cấp mức lương gấp đôi hợp đồng chính thức của bệnh viện X, kèm theo các phụ cấp hậu hĩnh khác. Bác sĩ A bỏ qua hợp đồng của phòng khám X và đầu quân cho bệnh viện Y.
- Bị "nẫng tay trên", phòng khám X xem lại danh sách ứng viên và chọn ra một ứng viên khác, ứng viên này thấy phòng khám X chọn mình bèn bỏ việc ở bệnh viện Z sang làm cho phòng khám X.
- Bạn bác sĩ A là bác sĩ B, đang làm ở bệnh viện Z, nghe chuyện bác sĩ A kể lại, bèn nộp đơn vào bệnh viện Y. Hồ sơ bác sĩ B hoá ra lại đúng là những gì bệnh viện Y cần, thế là để nhận bác sĩ B, họ sa thải một bác sĩ trẻ khác của họ.

Rất hỗn loạn. Đó chính là những gì mà các bệnh viện nói riêng và các công ty nói chung phải đối mặt trong quá khứ. Trước đây, "cuộc chiến" giữa các bệnh viện để chọn ra các sinh viên

[4]Theo luật pháp Hoa Kỳ, việc mua bán thận bị coi là một dạng tội hình sự. Vì thế, những người cần ghép thận chỉ có thể chờ mong từ thận lấy từ cơ thể người chết hiến nội tạng, hoặc từ thân nhân còn sống hiến tặng. Tuy nhiên, việc thân nhân (như vợ/chồng) tặng thận lại gặp khó khăn, thí dụ vợ đã sinh nở và bị bệnh thận, chồng khó có thể tặng thận cho vợ vì cơ thể người vợ đã phát triển kháng thể chống lại protein của người chồng khiến việc ghép thận của chồng cho vợ trở nên khó thực hiện thành công.

phù hợp về bệnh viện của mình luôn rất "khốc liệt". Sinh viên Y Dược mới ra trường rất khó để xác định trình độ của mình đang ở đâu so với các đối thủ cạnh tranh, cũng khó xác định đâu là các bệnh viện phù hợp với năng lực của mình. Điều này thường dẫn tới quyết định sai lầm ở cả hai phía: bệnh viên có thể chọn những sinh viên có năng lực không đáp ứng được nhu cầu của mình, cũng như sinh viên có thể vào những bệnh viện quá sức với mình. Chưa kể còn vài vấn đề phát sinh: các cặp bác sĩ mới cưới muốn vào chung bệnh viện, hoặc các bác sĩ mới muốn về bệnh viện gần nhà,...



Hình 6: Ghép đôi bác sĩ với bệnh viện

Chính Alvin Roth, cùng với Elliott Peranson, đã thiết kế chương trình National Resident Matching Program (NRMP) dựa trên cơ sở bài toán hôn nhân bền vững, giúp "gán ghép" được hơn 20.000 bác sĩ tập sự với các cơ sở y tế. Xét mô hình NRMP với ba bác sĩ $1, 2, 3$ và ba bệnh viện a, b, c (hình trang bên) xếp theo thứ tự chất lượng từ trên xuống dưới.

- Khi các bác sĩ chọn bệnh viện, trước hết họ đều chọn bệnh viện a với mức đãi ngộ cao nhất, môi trường làm việc tốt nhất,...
- Trong số 3 ứng viên nộp vào, bệnh viện a chọn bác sĩ 1, cũng là ưu tiên số một của bệnh viện a.
- Với hai ứng viên $2, 3$ và hai bệnh viện b, c còn lại, trước hết bác sĩ 2 nộp hồ sơ vào bệnh viện b (ưu tiên số hai) và bác sĩ 3 nộp vào bệnh viện c (ưu tiên số hai). Tới đây, NRMP xuất hiện và tìm ra giải pháp tối ưu: bác sĩ 2 được chuyển sang bệnh viện c và bác sĩ 3 được chuyển sang bệnh viện b.

Thuật toán trên cũng được áp dụng với số bệnh viện và số bác sĩ bất kì.

3.3. Bài toán tuyển sinh đại học

3.3.1. Mô hình

Có m trường đại học, cao đẳng. Trường thứ i tuyển a_i học sinh. Tổng cộng có $S \geq a_1 + \cdots + a_i + \cdots + a_n$ học sinh tham gia đợt tuyển sinh này. Giả sử mỗi trường sử dụng một tiêu chuẩn nào đó sao cho khi lập danh sách thứ tự học sinh theo tiêu chuẩn đó thì không có học sinh nào cùng một mức độ. Khi đó mỗi trường được một bảng xếp hạng các học sinh. Trong trường hợp này, ta áp dụng thuật toán Gale – Shapley như sau:

1. Nếu có học sinh chưa được xếp vào trường nào và danh sách của người đó khác rỗng thì:
    - Xét trường đứng đầu danh sách của học sinh đó, nếu trường đó chưa có đủ học sinh theo chỉ tiêu, ta xếp học sinh đang xét vào trường này.
    - Ngược lại, nếu trường này đã đủ học sinh, ta so sánh hạng của học sinh đang xét trong bảng xếp hạng của trường với học sinh có các học sinh trong danh sách học sinh hiện tại của trường, nếu học sinh đang xét có thứ hạng cao hơn người xếp hạng cuối trong danh sách học sinh của trường thì ta loại học sinh đó ra, đưa học sinh đang xét vào. Cuối cùng ta xóa trường đó ra khỏi danh sách xếp hạng đang xét.
2. Nếu không còn tồn tại học sinh nào có danh sách xếp hạng khác rỗng, ta kết thúc thuật toán, danh sách học sinh hiện tại của các trường trở thành danh sách chính thức.

Thuật toán này luôn đảm bảo những học sinh có điểm số cao vào được một trường nào đó, các học sinh top đầu vào được trường, ngành mình yêu thích và các ngành, trường tốt nhất chọn được học sinh giỏi. Nói cách khác, thuật toán đảm bảo được tính công bằng và cho các học sinh nhiều lợi ích nhất.

Một đặc tính ưu việt của DAA (student-proposer) đó là việc thí sinh không thể can thiệp được vào kết quả. Đây là một tính chất rất đáng cân nhắc. Hiện nay rất nhiều thí sinh ở Việt Nam lựa chọn trường chỉ dựa vào khả năng được trường đó nhận học (thi đỗ) mà không quan tâm nhiều đến giá trị của ngành mình sẽ học, trường mình sẽ học. Hệ thống xét tuyển sử dụng DAA sẽ hiệu quả nếu các thí sinh nộp đơn với danh sách nguyện vọng thực tâm của mình.

3.3.2. Một số vấn đề phát sinh

Có một sự thật là, mô hình ghép cặp bác sĩ với bệnh viện có những điểm khác với mô hình tuyển sinh đại học. Có thể kể đến một vài điểm như sau:

1. Các bác sĩ đã được phỏng vấn trước, biết khả năng mình sẽ được vào nhưng trường cỡ nào, nên việc lựa chọn bản thân nó đã có sự chính xác tương đối cao. Các học sinh nộp hồ sơ đi học đại học thì ngược lại, không biết gì lắm về những môi trường đang chờ đón mình. Nhất là sinh viên Việt Nam.

2. Người đã trưởng thành, đi tìm việc tâm lý thái độ khác với học sinh đi học đại học. Thay vào đó, mô hình sinh viên sư phạm ra trường xin việc sẽ giống với mô hình ghép cặp bác sĩ - bệnh viện hơn.

3. DAA sẽ hạn chế quyền độc lập tuyển sinh của các trường.

Ba điều trên dẫn tới hệ quả là, DAA sẽ tạo ra một số sự không hài lòng cho nhiều bên, thí sinh, gia đình, trường đại học,... Điều này dẫn tới việc, nếu muốn áp dụng DAA vào việc tuyển sinh đại học ở Việt Nam, cần có sự cân nhắc nhiều yếu tố. Theo các thành viên của nhóm Đối thoại giáo dục, các yếu tố đó có thể bao gồm:

1. Sự khác nhau giữa các nền giáo dục. DAA được thực hiện thành công tại Mỹ vì các trường đại học Mỹ tuyển sinh dựa trên nhiều yếu tố: điểm số, hoạt động ngoài giờ, bài luận,... dẫn tới độ chính xác trong việc chọn trường cho sinh viên tốt hơn. Việt Nam chỉ xét tuyển sinh viên dựa trên điểm thi, nên sự khách quan giảm đi nhiều.

2. Giảm chất lượng sinh viên giỏi tại các trường đại học nhỏ hoặc các trường đại học mới thành lập, qua đó vô tình giảm cơ hội phát triển của họ.

Tài liệu

[1] D. Gale and L. S. Shapley, *College admissions and the stability of marriage.* https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/pubs/monthly_jan1962-StabilityofMarriage.pdf

[2] Alvin E. Roth, Lloyd S. Shapley, *Stable matching: Theory, evidence, and practical design*, https://mk0nrmp3oyqui6wqfm.kinstacdn.com/wp-content/uploads/2013/08/popular-economicsciences2012.pdf

[3] Blog Toán học cho mọi người, *Vài nét về bài toán hôn nhân bền vững*, https://blogm4e.wordpress.com/2016/09/09/vai-net-ve-bai-toan-hon-nhan-ben-vung/

[4] Wikipedia, *Bài toán hôn nhân bền vững*, https://vi.wikipedia.org/wiki/B%C3%A0i_to%C3%A1n_h%C3%B4n_nh%C3%A2n_b%E1%BB%81n_v%E1%BB%AFng

[5] Vũ Thị Nhinh, *Bài toán hôn nhân bền vững và ứng dụng trong thực tế*, https://katatunix.wordpress.com/2008/09/14/bai-toan-hon-nhan-b%E1%BB%81n-v%E1%BB%AFng/

[6] Trần Vinh Dự, *Khi kinh tế học nghiên cứu về cách "ghép đôi"*, tuoitre.vn/khi-kinh-te-hoc-nghien-cuu-ve-cach-ghep-doi-516607

[7] Thetalog, *Deferred-Acceptance Algorithm và bài toán hôn nhân bền vững* https://thetalog.com/algorithm/deferred-acceptance/

[8] Wikipedia, *Hall's marriage theorem*, https://en.wikipedia.org/wiki/Hall%27s_marriage_theorem

PHƯƠNG PHÁP GIÁN TIẾP GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG

Trần Nam Dũng
Thành phố Hồ Chí Minh

There are direct paths to a successful goal.

But there are plenty of indirect paths, too.

Định lý Vi-et cho phương trình bậc hai nói riêng và cho phương trình đa thức bậc n nói chung cho chúng ta một ví dụ về việc có thể tính toán các biểu thức liên quan đến nghiệm mà không cần biết đến giá trị của các nghiệm này. Trong bài viết này, chúng ta sẽ mở rộng ý tưởng này để nghiên cứu tính chất của các đối tượng mà không cần biết công thức tường minh của các đối tượng đó.

Chúng ta bắt đầu từ một bài toán lấy từ đề thi tuyển sinh của trường Đại học Độc lập Moscow (IUM), năm 1998.

Bài toán 1. *Tính tích phân từ* 0 *đến* 2 *của hàm số* $g(x)$, *biết* $g(a)$ *là nghiệm của phương trình*

$$x^5 + x = a.$$

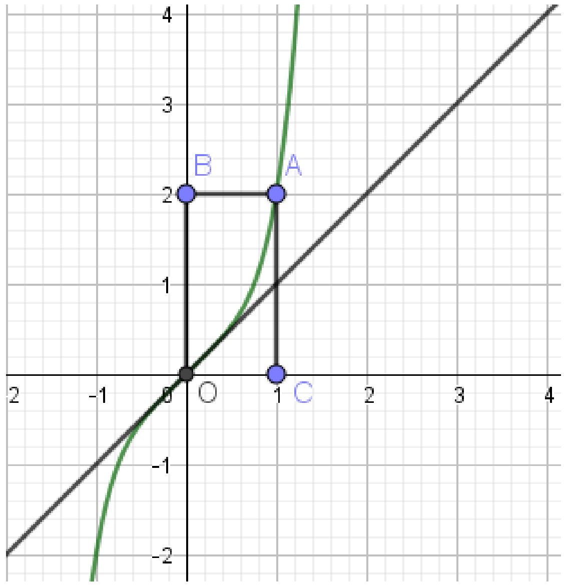
Lời giải. Ta biết là $g(a)$ xác định một cách duy nhất theo a, ví dụ $g(0) = 0$, $g(2) = 1$. Thế nhưng ta không có công thức cho $g(x)$. Không có công thức $g(x)$ thì làm sao có thể tính

$$\int_0^2 g(x)dx \ ?$$

Nếu cứ bó tư duy của mình vào công thức tính $g(x)$ thì chắc chắn ta sẽ không giải được. Ta phải khai thác định nghĩa của $g(x)$, theo như định nghĩa, $g(x)$ chính là hàm ngược của hàm

$$f(x) = x^5 + x.$$

Hai hàm ngược nhau thì có tính chất gì? Tính chất cơ bản là nếu $f(x) = y$ thì $g(y) = x$, tức là đồ thị của hai hàm ngược nhau sẽ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.



Từ đây dễ dàng suy ra

$$\int_0^2 g(y)dy + \int_0^1 f(x)dx = S(OCAB) = 2.$$

Nhưng

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^5 + x)dx = \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Suy ra

$$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 g(y)dy = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

□

Bài tập 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x) + 2f(x) = 1 - x$ với mọi $\mathbb{R}$. Tính tích phân

$$\int_{-2}^1 f(x)dx.$$

Như vậy, ở bài toán 1, mặc dù ta không có công thức cho hàm $g(x)$, nhưng nhờ vào mối quan hệ của nó với một hàm đã biết $f(x)$, ta vẫn có thể thực hành tính toán trên $g(x)$. Áp dụng ý tưởng này vào dãy số, ta có thể nghiên cứu được tính chất của các dãy số mà không biết công thức tường minh của nó (thậm chí không có cả công thức truy hồi).

Bài toán 2 (VMO 2002). *Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình*

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4x-1}+\cdots+\frac{1}{n^2x-1}=\frac{1}{2}. \tag{1}$$

chỉ có một nghiệm duy nhất thuộc $(1,+\infty)$, ký hiệu là x_n. Chứng minh rằng khi n dần đến vô cùng, x_n dần đến 4.

Lời giải. Đặt

$$f_n(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4x-1}+\cdots+\frac{1}{n^2x-1}-\frac{1}{2},$$

thì f là hàm liên tục trên $(1,+\infty)$ và có đạo hàm luôn âm. Hơn nữa

$$\lim_{x\to 1+} f_n(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f_n(x)=-\frac{1}{2},$$

nên phương trình $f_n(x)=0$ có nghiệm duy nhất x_n.

Ta cũng lưu ý rằng

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+\frac{1}{(n+1)^2x-1}.$$

Cho nên

$$f_{n+1}(x_n)=f_n(x_n)+\frac{1}{(n+1)^2x_n-1}>0.$$

Từ đây suy ra $x_{n+1}>x_n$. Tiếp theo, ta để ý

$$\begin{aligned} f_n(4)&=\frac{1}{4-1}+\frac{1}{4\cdot 4-1}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}-\frac{1}{2}\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)-\frac{1}{2}\\ &=-\frac{1}{4n+2}. \end{aligned}$$

Suy ra $x_n<4$. Như vậy dãy số (x_n) tăng và bị chặn trên bởi 4, suy ra (x_n) có giới hạn hữu hạn. Để chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=4$, ta dùng định lý Lagrange để đánh giá khoảng cách giữa x_n và 4.

Cụ thể, áp dụng định lý Lagrange, ta có

$$\frac{1}{4n+2}=|f_n(x_n)-f_n(4)|=|x_n-4||f_n'(c)|,$$

trong đó c nằm giữa x_n và 4. Nhưng

$$|f_n'(c)|=\frac{1}{(c-1)^2}+\frac{4}{(4c-1)^2}+\cdots+\frac{n^2}{(n^2c-1)^2}>\frac{1}{9}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{4n+2}>\frac{1}{9}|x_n-4|.$$

Cho n dần đến vô cùng, ta suy ra điều phải chứng minh. □

Bài tập 2 (IMU 1999). Gọi x_n là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-n} = 0.$$

nằm trong khoảng $(0, 1)$.

a) Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

b) Tìm giới hạn của x_n khi n dần đến vô cùng.

Bài tập 3 (VMO 2007). Cho số thực $a > 2$ và

$$f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \cdots + x + 1.$$

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, phương trình $f_n(x) = a$ chỉ có duy nhất một nghiệm dương.

b) Ký hiệu nghiệm dương duy nhất này là x_n, chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng.

Bài tập 4 (Ninh Bình 2013). Cho phương trình (ẩn x, tham số n nguyên dương)

$$x + 2x^2 + \cdots + nx^n - \frac{3}{4} = 0.$$

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n phương trình có 1 nghiệm dương duy nhất, kí hiệu nghiệm đó là x_n.

b) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$.

Để viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm hai phương trình đường tròn đi qua 3 điểm, theo phương pháp trực tiếp ta sẽ phải đi tìm tọa độ các điểm đó, rồi từ đó bằng cách này cách khác thực thi nhiệm vụ. Cách làm này, một mặt sẽ dẫn đến những tính toán khá phức tạp (đặc biệt là trong trường hợp đường tròn), một mặt là có thể bất khả thi (nếu phương trình để tìm tọa độ điểm có bậc cao thì không giải được ra nghiệm đẹp). Trong các tình huống đó, ta lại dùng định nghĩa của các điểm (thường các điểm sẽ được định nghĩa bằng cách quỹ tích tương giao) để chỉ ra phương trình đường thẳng hay đường tròn chứa các điểm đã cho, từ đó tìm ra lời giải của bài toán.

Chúng ta hãy minh họa ý tưởng này qua một ví dụ khá kinh điển, lấy từ đề thi của trường Đại học Ngoại thương những năm 90 của thế kỷ trước.

Bài toán 3. *Cho ellip* $(E) : \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, *và parabol* $(P) : y = x^2 - 2x$.

a) Chứng minh rằng (E) *và* (P) *cắt nhau tại 4 điểm phân biệt* A, B, C, D.

b) Chứng minh rằng A, B, C, D *cùng nằm trên một đường tròn. Tìm tâm và bán kính đường tròn đó.*

Lời giải. a) Phương trình hoành độ giao điểm của (E) và (P) có dạng

$$\frac{x^2}{9} + \left(x^2 - 2x\right)^2 - 1 = 0.$$

Đặt

$$f(x) = \frac{x^2}{9} + \left(x^2 - 2x\right)^2 - 1,$$

thì ta có

$$f(-1) = 8 + \frac{1}{9} > 0,\ f(0) = -1 < 0,\ f(1) = \frac{1}{9} > 0,\ f(2) = -\frac{8}{9} < 0,\ f(3) = 9 > 0.$$

Do đó phương trình hoành độ giao điểm có 4 nghiệm phân biệt

$$-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2 < x_4 < 3.$$

Suy ra cắt nhau tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D.

b) Để chứng minh 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn, nếu làm theo phương pháp trực tiếp, ta sẽ phải đi tìm tọa độ 4 điểm A, B, C, D rồi viết phương trình đường tròn đi qua A, B, C cuối cùng chứng minh D nằm trên đường tròn vừa viết. Để tìm được tọa độ các điểm A, B, C, D ta phải giải phương trình hoành độ giao điểm. Đó là một phương trình bậc 4 mà nói chung là ta ... không biết giải. Thực ra không biết trong trường hợp này lại là điều may mắn, bởi nếu biết (mà đúng là có cách giải thật), ta sẽ bị sa đà vào một hướng đi vô cùng mờ mịt với những tính toán khủng khiếp (kiểu như tính

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}\right),$$

bằng phương pháp khai triển theo nhị thức Newton).

Ta sẽ không đi theo hướng đó mà dựa vào định nghĩa hình học của A, B, C, D để tìm ra phương trình đường tròn đi qua A, B, C, D.

Cụ thể, ta thấy tọa độ của A thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x_A^2}{9} + y_A^2 - 1 = 0 \\ y_A - x_A^2 + 2x_A = 0 \end{cases}$$

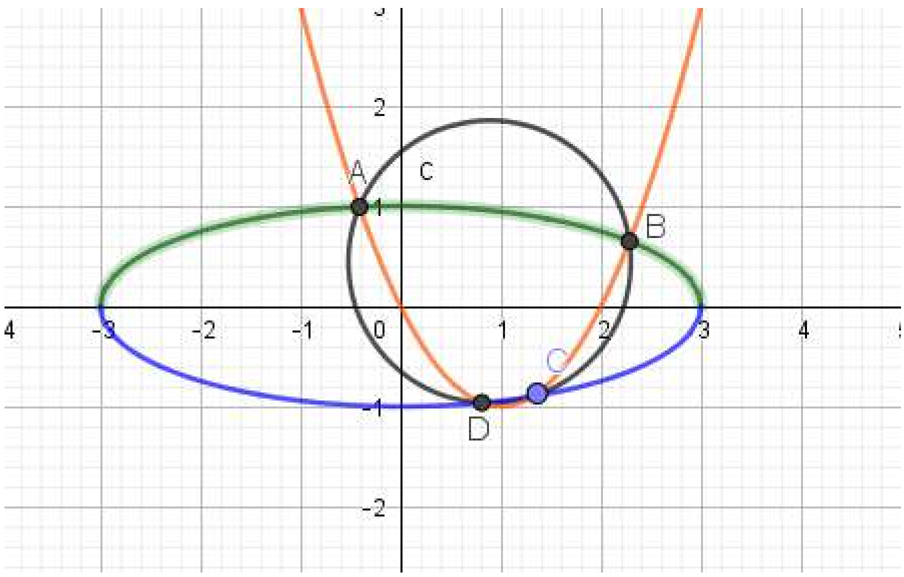
Nếu ta nhân phương trình thứ hai với $-\frac{8}{9}$ rồi cộng với phương trình đầu thì ta được

$$\frac{x_A^2}{9} + y_A^2 - 1 - \frac{8}{9}y_A + \frac{8}{9}x_A^2 - \frac{16}{9}x_A = 0.$$

Hay là

$$\left(x_A - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(y_A - \frac{4}{9}\right)^2 = \frac{161}{81}.$$

Các đẳng thức tương tự, hiển nhiên cũng đúng với B, C, D. Như vậy bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên đường tròn có phương trình



$$\left(x - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{9}\right)^2 = \frac{161}{81}.$$

Tức là đường tròn tâm tại điểm $I\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}\right)$ bán kính $\frac{\sqrt{161}}{9}$. □

Bài toán 4. *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 + 2x^2 + mx - 3$ cắt parabol $y = x^2 + x - 1$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng $\frac{3}{\sqrt{2}}$.*

Lời giải. Tương tự như bài trên, mục tiêu của chúng ta không phải là giải hệ phương trình

$$y = x^3 + 2x^2 + mx - 3, \quad y = x^2 + x - 1,$$

mà tìm phương trình đường tròn chứa cả 3 giao điểm. Đầu tiên ta thấy x_A, x_B, x_C là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 + x^2 + (m-1)x - 2 = 0.$$

Ta đang cần mối quan hệ giữa x và y không còn chứa x_3. Làm thế nào? Ý tưởng là ta sẽ lấy $y^2 = (x^2 + x - 1)^2$ và chia cho $x^3 + x^2 + (m-1)x - 2$ sẽ được phần dư có dạng $ax^2 + bx + c$.

Như thế

$$y^2 = (x^3 + x^2 + (m-1)x - 2)Q(x) + ax^2 + bx + c.$$

Thay tọa độ điểm A vào thì được

$$y_A^2 = ax_A^2 + bx_A + c.$$

Cuối cùng dùng phương trình $y_A = x_A^2 + x_A - 1$ để điều chỉnh cho hệ số của x_A^2, y_A^2 bằng nhau.

Đi vào chi tiết

$$(x^2 + x - 1)^2 = (x^3 + x^2 + (m-1)x - 2)(x+1) - (m+1)x^2 - (m-1)x + 3.$$

Từ đây suy ra

$$y_A^2 = -(m+1)x_A^2 - (m-1)x_A + 3.$$

Nhân đẳng thức $y_A = x_A^2 + x_A - 1$ với m rồi cộng với đẳng thức trên vế theo vế thì được

$$y_A^2 + my_A = -x_A^2 + x_A + 3 - m,$$

Suy ra

$$\left(y_A + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(x_A + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{m^2 - 4m + 13}{4}.$$

Đây chính là phương trình đường tròn đi qua A, B, C, vì hiển nhiên, tọa độ B, C cũng thỏa mãn phương trình này.

Để đường tròn trên có bán kính bằng $\frac{3}{\sqrt{2}}$, thì ta cần có

$$\frac{m^2 - 4m + 13}{4} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 = 0.$$

Giải ra ta được $m = 5$ hoặc $m = -1$. Với $m = 5$ thì phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 + x^2 + 4x - 2 = 0$ chỉ có một nghiệm thực, loại, với $m = -1$ phương trình hoành độ giao điểm là

$$x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2),$$

có 3 nghiệm phân biệt, nhận. $\square$

Bài tập 5. Cho hai hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = x^3 - x^2 - (m+4)x + m - 1$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt và ba điểm đó nằm trên một đường tròn bán kính bằng $\sqrt{5}$.

Bài toán 5. *Chứng minh rằng với mọi số thực m, đồ thị hàm số* $y = f(x) = \frac{x+m}{x^2+1}$, *có ba điểm uốn thẳng hàng.*

Lời giải. Tính đạo hàm bậc hai của $f(x)$, ta có (bỏ qua phép chứng minh phương trình $x^3 + 3mx^2 - 3x - m = 0$ luôn có ba nghiệm phân biệt)

$$f''(x) = \frac{2(x^3 + 3mx^2 - 3x - m)}{(x^2+1)^2}.$$

Ta chứng minh ba điểm uốn thẳng bằng cách chỉ ra phương trình đường thẳng chứa ba điểm uốn đó. Gọi ba điểm uốn là A, B, C. Xét điểm A có tọa độ (x_A, y_A), với

$$x_A^3 + 3mx_A^2 - 3x_A - m = 0,$$

và

$$y_A = \frac{x_A + m}{x_A^2 + 1}.$$

Với α là một hằng số nào đó, ta có

$$x_A + \alpha y_A = x_A + \frac{\alpha(x_A + m)}{x_A^2 + 1} = \frac{x_A^3 + x_A + \alpha x_A + \alpha m}{x_A^2 + 1} = \frac{-3mx_A^2 + (\alpha+4)x_A + m + \alpha m}{x_A^2 + 1}.$$

Ta muốn vế phải là một hằng số nên chọn $\alpha = -4$ và được $x_A - 4y_A + 3m = 0$. Đây chính là phương trình đường thẳng chứa A, B, C. Nghĩa là A, B, C. thẳng hàng. □

Bài tập 6. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 5}{x+1}$, xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

a) Chứng minh rằng hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị không thẳng hàng.

b) Gọi A, B, C là ba điểm cực trị. Tính diện tích tam giác ABC và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trong hình học giải tích phương pháp phân đôi tọa độ cho chúng ta một cách giải các bài toán tiếp tuyến, tiếp diện nhanh chóng và tiện lợi, tránh được những tính toán trực tiếp.

Bài toán 6 (Định lý về cực – đối cực của ellip). *Cho ellip* $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Một đường thẳng d nằm ngoài ellip. Từ một điểm A bất kỳ trên d, kẻ các tiếp tuyến đến (E), tiếp xúc với (E) tại T_1, T_2. Chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. Giả sử $(x_i,\ y_i)$ là tọa độ của T_i với $i = 1, 2$. Phương trình tiếp tuyến của (E) tại T_1 có dạng

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Tiếp tuyến này đi qua $A(x_A, y_A)$ nên ta có

$$\frac{x_1 x_A}{a^2} + \frac{y_1 y_A}{b^2} = 1.$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{x_2 x_A}{a^2} + \frac{y_2 y_A}{b^2} = 1.$$

Nhưng điều này có nghĩa là gì?

Điều này có nghĩa là các điểm T_1, T_2 đều nằm trên đường thẳng

$$\frac{x_A x}{a^2} + \frac{y_A y}{b^2} = 1!$$

Tức là

$$\frac{x_A x}{a^2} + \frac{y_A y}{b^2} = 1,$$

chính là phương trình đường thẳng đi qua T_1, T_2! Thật như là ảo thuật! Ta đã viết được phương trình đường thẳng T_1T_2 mà không cần tìm tọa độ của T_1, T_2.

Và hơn thế nữa, nếu đường thẳng d có phương trình $Ax + By + C = 0$ thì viết lại d dưới dạng $\alpha x + \beta y = 1$, ta thấy tất cả các đường thẳng T_1T_2 sẽ đi qua điểm $(\alpha a^2, \beta b^2)$.

Điểm $P(\alpha a^2, \beta b^2)$ được gọi là cực của đường thẳng d có phương trình $\alpha x + \beta y = 1$. Còn đường thẳng d được gọi là đối cực của điểm P. $\square$

Bài tập 7. Cho ellip $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tìm quỹ tích những điểm M trong mặt phẳng ellip mà từ đó có thể kẻ hai tiếp tuyến vuông góc đến (E).

Một cách tổng quát, phương pháp phân đôi tọa độ cho chúng ta công thức sau đây để viết phương trình tiếp tuyến của một đường cong bậc hai. Xét đường cong

$$(C) : ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Giả sử $A(x_A, y_A)$ là một điểm thuộc (C). Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại A có dạng

$$ax_A x + b(x_A y + y_A x) + cy_A y + d(x + x_A) + e(y + y_A) + f = 0.$$

Công thức này có được bằng cách lấy vi phân hai vế phương trình của (C) để được

$$(ax + by + d)dx + (bx + cy + e)dy = 0.$$

Từ đó phương trình tiếp tuyến có dạng

$$(ax_A + by_A + d)(x - x_A) + (bx_A + cy_A + e)(y - y_A) = 0.$$

Từ, đây, với chú ý

$$ax_A^2 + 2bx_Ay_A + cy_A^2 + 2dx_A + 2ey_A + f = 0,$$

ta có công thức như trên.

Phương pháp phân đôi tọa độ tiếp tục đúng trong không gian để giúp chúng ta viết phương trình tiếp diện của đường cong bậc hai tại một điểm thuộc đường cong.

Bài toán 7. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-13}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0$. Qua d dựng các tiếp diện với (S) tiếp xúc với (S) lần lượt tại T_1, T_2. Viết phương trình đường thẳng T_1T_2.*

Lời giải. Giả sử T_1 có tọa độ là (x_1, y_1, z_1). Phương trình tiếp diện của (S) tại T_1 có dạng

$$x_1x + y_1y + z_1z - x - x_1 - 2y - 2y_1 - 3z - 3z_1 - 67 = 0.$$

Vì tiếp diện này đi qua d nên ta có

$$x_1(13-t) + y_1(-1+t) + z_1 \cdot 4t - (13-t) - x_1 - 2(-1+t) - 2y_1 - 3 \cdot 4t - 3z_1 - 67 = 0, \quad \forall t,$$

hay

$$12x_1 - 3y_1 - 3z_1 - 78 + t(-x_1 + y_1 + 4z_1 - 13) = 0, \quad \forall t$$

Từ đó suy ra $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$ nằm trên đường thẳng cho bởi phương trình

$$\begin{cases} 12x - 3y - 3z - 78 = 0 \\ -x + y + 4z - 13 = 0 \end{cases}$$

Tương tự, T_2 cũng nằm trên đường thẳng này. Từ đó, phương trình đường thẳng T_1T_2 là (sau khi rút gọn)

$$\begin{cases} 4x - y - z - 26 = 0 \\ -x + y + 4z - 13 = 0 \end{cases}$$

Chuyển về dạng chính tắc $\frac{x-8}{-1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-5}{1}$. □

Bài tập 8. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d : \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$ và mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Hai mặt phẳng phân biệt qua d, tiếp xúc (S) tại A, B. Viết phương trình đường thẳng AB.

Bài tập 9. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f(f(x))$ có đồ thị lần lượt là (C) và $(C^{'})$. Đường thẳng $x = 2$ cắt (C) và $(C^{'})$ lần lượt tại M và N. Biết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là $y = 2x - 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C^{'})$ tại điểm N.

Bài tập 10. Cho số thực a thỏa điều kiện $(a-1)^3 = 9a$, đặt $b = a^2 + a$. Chứng minh rằng

$$(b+1)^3 = 27b^2.$$

Trong bài viết trên tôi đã sử dụng một số tư liệu từ tài liệu cá nhân, tạp chí Pi, trang web của IMU, đề thi đại học và đề thi HSG. Một số bài tập trên trang Facebook của Nhóm VD-VDC tôi đã sử dụng nhưng đổi từ dạng trắc nghiệm sang tự luận.

MỘT SỐ BÀI TOÁN DÙNG TÍNH KHÔNG BỊ CHẶN CỦA ĐA THỨC

Đào Xuân Luyện
(Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn ,Bình Định)

TÓM TẮT

Các bài toán về đa thức nói chung và nói riêng các bài toán về đa thức sử dụng tính không bị chặn của đa thức có vị trí rất quan trọng trong nhiều phân môn của toán học như giải tích, số học, biểu diễn xấp xỉ,... Các bài toán liên quan đến đa thức cũng thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi các cấp, thi olympic và trong cuộc thi IMO. Các tài liệu viết về đa thức cũng tương đối nhiều, ở đây tác giả chỉ đề cập về việc sử dụng tính không bị chặn của đa thức (khác hằng) trong một số dạng toán.

1. Một số mệnh đề cơ bản

Các đa thức nói về tính không bị chặn ở trong bài viết nếu không nói gì thì ta hiểu là đa thức có bậc dương.

Ngoài phần lý thuyết cơ bản về đa thức như định nghĩa, các khái niệm như bậc, nghiệm, định lý Viet, định lý Berzout, định lý cơ bản của đại số, tính liên tục, tính khả vi ..., ở đây bổ sung thêm một số kết quả sau.

Mệnh đề 1. *Cho số nguyên dương n và đa thức hệ số thực*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

1. *Khi n lẻ*

   a) *Nếu $a_n > 0$ thì* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   b) *Nếu $a_n < 0$ thì* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. *Khi n chẵn*

   a) *Nếu $a_n > 0$ thì* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   a) *Nếu $a_n < 0$ thì* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Hệ quả Cho số nguyên dương n và đa thức hệ số thực

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

1. Khi n lẻ

   a) Nếu $a_n > 0$ thì tồn tại $\alpha > 0$ để $f(\alpha) > 0$ và tồn tại $\beta < 0$ để $f(\beta) < 0$.

   b) Nếu $a_n < 0$ thì tồn tại $\alpha > 0$ để $f(\alpha) < 0$ và tồn tại $\beta < 0$ để $f(\beta) > 0$.

2. Khi n chẵn

   a) Nếu $a_n > 0$ thì tồn tại $\alpha > 0$ để $f(\alpha) > 0$ và tồn tại $\beta < 0$ để $f(\beta) > 0$.

   a) Nếu $a_n < 0$ thì tồn tại $\alpha > 0$ để $f(\alpha) < 0$ và tồn tại $\beta < 0$ để $f(\beta) < 0$.

Mệnh đề 2. *Cho các số nguyên dương m, n và các đa thức hệ số thực*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0.$$

1. Khi $n > m$

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *nếu* $a_n \cdot b_m > 0$.

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ *nếu* $a_n \cdot b_m < 0$.

2. Khi $n = m$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n}$.

3. Khi $n < m$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Mệnh đề 3. *Nếu hàm số đa thức hệ số thực $y = f(x)$ là hàm số tuần hoàn thì $f(x)$ là hằng số.*

Chứng minh mệnh đề. Rõ ràng nếu $f(x) = C$ với C là hằng số thì $f(x)$ là hàm số tuần hoàn.

Giả sử $f(x)$ có bậc dương và tuần hoàn. Gọi $T > 0$ là một chu kỳ của $f(x)$. Xét trên đoạn $[0; T]$, do đa thức $f(x)$ liên tục nên nó nhận giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M trên đoạn $[0; T]$.

Mặt khác, $f(x)$ có bậc dương và tuần hoàn chu kỳ T nên nó nhận giá trị trên đoạn $[m; M]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều này mâu thuẫn với mệnh đề ở trên. Mệnh đề được chứng minh xong. □

2. Sử dụng tính không bị chặn của đa thức trong các bài toán liên quan đến số học và đa thức nhận giá trị nguyên

Các bài toán đa thức liên quan đến số học thường rất khó. Chúng ta xét sau đây một số bài toán liên quan đến vấn đề này.

Bài toán 1. *Cho các số nguyên không âm m, n thỏa $m + n > 0$ và hai đa thức*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$
$$g(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m,$$

sao cho với mọi số thực x, ta có $f(x)$ là bình phương của một số nguyên khi và chỉ khi $g(x)$ là bình phương của một số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại đa thức $\Phi(x)$ hệ số thực sao cho $f(x) \cdot g(x) = \Phi^2(x)$.

Lời giải. Nếu $n > 0, m = 0$ thì $g(x) = a^2$ và $f(x)$ là số chính phương $\forall x \in \mathbb{R}$, điều này vô lý vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Nếu $m > 0, n > 0$, khi đó tồn tại khoảng $[N, +\infty)$ để các f, g tăng thực sự. Gọi a^2, b^2 là các số chính phương đầu tiên lớn hơn hay bằng $f(N), g(N)$. Vì f liên tục nên tồn tại dãy

$$N \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n,$$

sao cho $f(x_n) = (a + n)^2$, $\forall n \geq 0$. Ta sẽ chứng minh $g(x_n) = (b + n)^2$, $\forall n \geq 0$ bằng bằng quy nạp.

Với $n = 0$, khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng với $n \geq 0$, ta sẽ chứng minh $g(x_{n+1}) = (b + n + 1)^2$. Giả sử trái lại $g(x_{n+1}) = (b + m)^2$, $m \neq n + 1$, tồn tại x' sao cho $g(x') = (b + n + 1)^2$. Ta có

$$g(x_n) < g(x') < g(x_{n+1}) \Rightarrow x_n < x' < x_{n+1},$$

suy ra

$$f(x_n) < f(x') < f(x_{n+1}) \Rightarrow (a + n)^2 < f(x') < (a + n + 1)^2,$$

điều này vô lý vì $f(x')$ là số chính phương. Vậy $g(x_{n+1}) = (b + n + 1)^2$, phép quy nạp hoàn tất.

Từ đó, ta có

$$\sqrt{f(x_n)} - \sqrt{g(x_n)} = a - b \Rightarrow f(x_n) + g(x_n) - 2 \cdot \sqrt{f(x_n)} \cdot \sqrt{g(x_n)} = (a - b)^2,$$

suy ra

$$f(x_n) \cdot g(x_n) = \left[\frac{f(x_n) + g(x_n) - (a - b)^2}{2} \right]^2.$$

Như vậy, nếu đặt

$$\Phi(x) = \left[\frac{f(x_n) + g(x_n) - (a - b)^2}{2} \right]$$

thì $f(x) \cdot g(x) = \Phi^2(x)$. Ta được điều phải chứng minh. □

Nhận xét 1. *Để giải quyết bài toán chúng ta cần nhiều kiến thức liên quan như tính liên tục, tính không bị chặn của đa thức, lý thuyết về dãy số,... để xây dựng dãy giá trị hàm. Đây là bài toán rất khó và hay.*

Bài toán 2. ***(USAMO)** Chứng minh rằng mọi đa thức monic (đa thức có hệ số cao nhất bằng* 1*) bậc* n *hệ số thực đều là trung bình cộng của hai đa thức monic bậc* n *có* n *nghiệm thực.*

Lời giải. Gọi $f(x)$ là đa thức monic bậc n hệ số thực.

Nếu $n = 1$ thì $f(x) = x + a$, với $a \in \mathbb{R}$. Đặt $P(x) = x$, $Q(x) = x + 2a$ thì $P(x), Q(x)$ có 1 nghiệm thực và $f(x) = \dfrac{P(x) + Q(x)}{2}$.

Nếu $n > 1$, xét
$$g(x) = (x-2)(x-4)\ldots(x-2(n-1))$$
có bậc $n-1$. Đặt $P(x) = x^n - kg(x)$ và $Q(x) = 2f(x) - x^n + kg(x)$ thì $P(x), Q(x)$ là các đa thức monic bậc n hệ số thực và $f(x) = \dfrac{P(x)+Q(x)}{2}$. Ta sẽ chứng minh với k đủ lớn thì $P(x), Q(x)$ có n nghiệm thực.

Xét các giá trị của $g(x)$ tại n điểm $1, 3, \ldots, 2n-1$, những giá trị này đan dấu và có giá trị nhỏ nhất bằng 1 (vì nhiều nhất hai trong các thừa số có giá trị tuyệt đối bằng 1 và các thừa số còn lại có giá trị tuyệt đối lớn hơn 2).

Mặt khác, tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho với $0 \leq x \leq 2n$, ta có
$$|x|^n < c, \quad |2f(x) - x^n| < c.$$

Lấy $k > c$ thì $P(x), Q(x)$ có giá trị đan dấu tại n điểm $x = 1, 3, 5, \ldots, 2n-1$, nên $P(x), Q(x)$ đều có ít nhất $n-1$ nghiệm thực. Mà chúng là các đa thức bậc n nên mỗi đa thức đều có đủ n nghiệm thực. Bài toán được giải quyết. □

Nhận xét 2. *Đây là bài toán biểu diễn một đa thức monic bậc* n *bất kỳ qua hai đa thức cùng bậc có đủ* n *nghiệm thực. Việc xây dựng hai đa thức* $P(x), Q(x)$ *rất hay và kỹ thuật này có thể nghĩ đến khi gặp các bài toán về biểu diễn đa thức.*

Bài toán 3. *Cho* $f(x)$ *là đa thức bậc không bé hơn* 2 *với hệ số hữu tỷ và dãy dãy số hữu tỷ* $a_1, a_2, \ldots$ *thỏa mãn* $f(a_{n+1}) = a_n$*, với mọi số nguyên dương* n*. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương* N *để với mọi số nguyên dương* n *thì* Na_n *là số nguyên.*

Lời giải. Trước tiên, ta chứng minh dãy (a_n) bị chặn.

Do $\deg f > 1$ nên $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|f(x)|}{|x|} = +\infty$, do đó
$$\exists\, M \geq |a_1| : |f(x)| \geq |x|, \forall\, |x| \geq M.$$

Ta sẽ chứng minh $|a_n| \leq M, \forall n \geq 1$. Thật vậy, giả sử $\exists a_n : \; |a_n| > M$, khi đó
$$|a_{n-1}| = |f(a_n)| \geq |a_n| > M, \quad |a_{n-2}| = |f(a_{n-1})| \geq |a_{n-1}| > M, \quad \ldots \quad, |a_1| > M,$$

trái với cách chọn M. Như vậy (a_n) bị chặn.

Do $f(x)$ có hệ số hữu tỉ nên ta có thể viết $f(x)$ dưới dạng

$$f(x) = \frac{b_m x^m + \ldots + b_0}{c},$$

trong đó $b_0, b_1, \ldots, b_m, c$ là số nguyên. Giả sử $a_1 = \frac{p}{q}$, với p, q nguyên.

Ta đặt $N = qb_m$, khi đó $Na_1 = pb_m$ nguyên. Giả sử Na_n nguyên, ta sẽ chứng minh Na_{n+1} nguyên. Xét đa thức

$$P(x) = \frac{cN^m}{b_m} \cdot \left(f\left(\frac{x}{N}\right) - a_n \right),$$

thì $P(x)$ là đa thức monic hệ số nguyên. Mà $f(a_{n+1}) = a_n$ nên $P(Na_{n+1}) = 0$. Như vậy Na_{n+1} là nghiệm hữu tỉ của $P(x)$, và do đó nó cũng là nghiệm nguyên. Bài toán được giải quyết. □

Bài toán 4. *Cho đa thức*

$$P(x) = x^{2017} - 18x^{2016} + 11x^{2015} + 6x + 1.$$

Với a_0 là số nguyên bất kỳ khác 0 cho trước, xác định dãy (a_n) như sau $a_{n+1} = P(a_n)$. Chứng minh rằng với mọi cặp số nguyên dương m, n phân biệt thì a_m, a_n nguyên tố cùng nhau.

Lời giải. Dễ thấy (a_n) là dãy số nguyên khác 0 vì $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

Do $P(0) = P(1) = 1$ nên $P(x) = x(x-1)Q(x) + 1$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp

$$a_n \equiv 1 \pmod{a_0} a_1 \ldots a_{n-1}.$$

◦ Với $n = 1$, ta có

$$a_1 = P(a_0) = a_0(a_0 - 1)Q(a_0) + 1 \equiv 1 \pmod{a_0}.$$

◦ Giả sử đúng với n, tức là $a_n \equiv 1 \pmod{a_0} a_1 \ldots a_{n-1}$, hay $a_n = ka_0a_1 \ldots a_{n-1} + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$$a_{n+1} = P(a_n) = a_n(a_n - 1)Q(a_n) + 1 = ka_0a_1 \ldots a_{n-1}a_nQ(a_n) + 1,$$

suy ra $a_n \equiv 1 \pmod{a_0 a_1 \ldots a_{n-1} a_n}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $m < n$ và đặt $d = (a_m, a_n)$. Khi đó, tích $a_0a_1 \ldots a_{n-1}$ chứa thừa số a_m nên chia hết cho d, suy ra $a_n - 1$ chia hết cho d. Nói cách khác, $a_n, a_n - 1$ đều chia hết cho d nên $d = 1$. Vậy $(a_m, a_n) = 1$, $\forall m \neq n$. □

Bài toán 5. *Cho đa thức*

$$P(x) = x^{2018} + a_{20}x^{20} + a_{11}x^{11} + a_{10}x^{10} + \ldots + a_1x + 2017,$$

trong đó các hệ số a_k là các số nguyên có giá trị tuyệt đối không lớn hơn 100. Chứng minh rằng không thể phân tích đa thức $P(x)$ thành tích của hai đa thức hệ số nguyên có bậc dương.

Lời giải. Theo định lý cơ bản của đại số, $P(x)$ có đủ 2018 nghiệm (thực hay phức). Gọi z là một nghiệm của $P(x)$, ta sẽ chứng minh $|z| > 1$.

Thật vậy, giả sử $|z| \leq 1$. Ta có

$$P(z) = z^{2018} + a_{20}z^{20} + a_{11}z^{11} + a_{10}z^{10} + \ldots + a_1 z + 2017 = 0,$$

suy ra

$$\begin{aligned} 2017 &= \left|z^{2018} + a_{20}z^{20} + a_{11}z^{11} + a_{10}z^{10} + \ldots + a_1 z\right| \\ &\leq \left|z^{2018}\right| + \left|a_{20}z^{20}\right| + \left|a_{11}z^{11}\right| + \ldots + \left|a_1 z\right| \\ &\leq 1 + |a_{20}| + |a_{11}| + \ldots + |a_1| \leq 1 + 12 \cdot 100 = 1201, \end{aligned}$$

vô lý, do đó $|z| > 1$.

Giả sử $P(x) = g(x) \cdot h(x)$, trong đó $g(x), h(x)$ là các đa thức hệ số nguyên có bậc dương thì

$$|P(0)| = |g(0)| \cdot |h(0)| = 2017.$$

Mà 2017 là số nguyên tố nên $|g(0)| = 1$ hoặc $|h(0)| = 1$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $|g(0)| = 1$, với $1 \leq \deg g = m \leq 2017$ và hệ số cao nhất của $g(x), h(x)$ đều bằng 1. Gọi $z_1, z_2, ..., z_m$ là các nghiệm phức của $g(x)$ thì chúng cũng là các nghiệm phức của $P(x)$, do đó $|z_k| > 1, \forall k = 1, 2, \ldots, m$. Nhưng theo định lý Viet, ta lại có

$$|z_1 z_2 \ldots z_m| = |g(0)| = 1,$$

vô lý. Vậy $P(x)$ thành tích của hai đa thức hệ số nguyên có bậc dương. $\square$

Bài toán 6. *Ký hiệu p_k là số nguyên tố thứ k. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì phương trình*

$$2018x^4 + 108n^3 = 15nx^3 + 4n(p_{n+1} + p_{n+2})x^2 + 18n^2(p_{n+2} + p_{n+3} - 3n)x + 1925n^4$$

có nghiệm không bé hơn n.

Lời giải. Trước tiên, bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh $p_{n+1} + p_{n+2} \geq 6n$.

Với $n = 1, 2$, kiểm tra thấy đúng. Giả sử đúng với $n = k$, tức là $p_{k+1} + p_{k+2} \geq 6k$. Ta chứng minh đúng với $n = k + 1$, hay $p_{k+2} + p_{k+3} \geq 6k + 6$.

Theo giả thiết quy nạp, ta cần chứng minh $p_{k+2} + p_{k+3} \geq p_{k+1} + p_{k+2} + 6$, hay $p_{k+3} - p_{k+1} \geq 6$.

Thật vậy, giả sử $p_{k+3} - p_{k+1} < 6$. Vì p_{k+3}, p_{k+1} là số lẻ nên $p_{k+3} = p_{k+1} + 4$, hay $p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}$ là ba số lẻ liên tiếp. Do đó, một trong ba số phải có một số chia hết cho 3, vô lý vì $p_{k+1} > 3$.

Ta đặt

$$f(x) = 2018x^4 - 15nx^3 - 4n(p_{n+1} + p_{n+2})x^2 - 18n^2(p_{n+2} + p_{n+3} - 3n)x - 1925n^4 + 108n^3.$$

Vì $f(x)$ là đa thức bậc bốn có hệ số cao nhất dương nên $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Do đó, tồn tại $\alpha > n$ để $f(\alpha) > 0$. Mặt khác, ta có

$$f(n) = 78n^3 - 4n^3(p_{n+1} + p_{n+2}) - 18n^3(p_{n+2} + p_{n+3} - 3n) + 108n^3 \leq 0,$$

do $p_{n+1} + p_{n+2} \geq 6n$ và $p_{n+2} + p_{n+3} \geq 6n + 6$. Như vậy $f(n)f(\alpha) \leq 0$, do đó tồn tại $x_0 \geq n$ để $f(x_0) = 0$, hay phương trình đã cho có nghiệm không bé hơn n. $\square$

3. Sử dụng tính không bị chặn trong một số dạng toán về xác định đa thức

Mệnh đề 3, chúng ta đã xét lớp các hàm đa thức là tuần hoàn, trong bài toán 1 sau chúng ta xét xem hợp của một hàm tuần hoàn với một hàm đa thứclà hàm tuần hoàn thì các hàm đa thức đó là những hàm như thế nào.

Bài toán 7. *Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ hệ số thực sao cho hàm số $y = \sin f(x)$ là một hàm số tuần hoàn.*

Lời giải. Trước tiên, ta chứng minh nếu hàm f tuần hoàn, xác định trên R và có đạo hàm trên R thì hàm f' cũng tuần hoàn. Thật vậy, giả sử $T > 0$ là một chu kỳ của hàm f, khi đó

$$f(x+T) = f(x),\ \forall x \in R, \quad \Rightarrow \quad f'(x+T) = f'(x),\ \forall x \in R,$$

hay f' cũng là hàm tuần hoàn.

◦ Nếu $f(x) \equiv c$ hoặc $f(x) = ax + b$, với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ thì dễ thấy $y = \sin f(x)$ tuần hoàn.

◦ Nếu $\deg f \geq 2$, khi đó $y' = f'(x) \cos f(x)$ tuần hoàn nên nó bị chặn.

Mặt khác, do $f(x)$ liên tục và không bị chặn nên tồn tại dãy x_n sao cho $|f(x_n)| = |n\pi|\,, \forall n \geq 1$. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} |f'(x) \cos f(x)| = +\infty$. Điều này trái với tính bị chặn y'. Do đó nếu $\deg f \geq 2$ thì $y = \sin f(x)$ không tuần hoàn.

Vậy $f(x) \equiv c$ hoặc $f(x) = ax + b$, với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ là tất cả đa thức cần tìm. □

Bài toán 8. ***(Greece 2014)*** *Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thoả mãn*

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x-2), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Lời giải. Ta có $(*)$ tương đương với

$$(x-2)(x-4)P(x) = x(x+2)P(x-2), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lần lượt thay $x = 0, -2, 4$ vào (1), ta thu được $P(0) = P(-2) = P(2) = 0$, do đó đặt $P(x) = x(x-2)(x+2)Q(x)$. Thay vào (1), ta được

$$(x-2)Q(x) = xQ(x-2), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; \pm 2; 4\}.$$

Mà $Q(x)$ là đa thức nên

$$(x-2)Q(x) = xQ(x-2), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Thay $x = 0$ vào (2), ta có $Q(0) = 0$, do đó $Q(x) = xR(x)$. Tương tự như trên, thay vào (2), ta được

$$R(x) = R(x-2), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

hay $R(x)$ tuần hoàn. Do đó theo mệnh đề 3 thì $R(x) \equiv c$.

Như vậy $P(x) = c(x^4 - 4x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thỏa mãn. □

Bài toán 9. ***(Việt Nam 2003)*** *Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa*

$$(x^3+3x^2+3x+2)P(x-1) = (x^3-3x^2+3x-2)P(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Lời giải. Ta có $(*)$ tương đương với

$$(x+2)(x^2+x+1)P(x-1) = (x-2)(x^2-x+1)P(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lần lượt thay $x = -2; 2; -1; 1$ vào (1), ta thu được $P(-2) = P(-1) = P(0) = P(1) = 0$, do đó đặt $P(x) = (x-1)x(x+1)(x+2)Q(x)$. Thay vào (1), ta được

$$(x^2+x+1)Q(x-1) = (x^2-x+1)Q(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; \pm 1; \pm 2\}.$$

Mà $Q(x)$ là đa thức nên

$$(x^2+x+1)Q(x-1) = (x^2-x+1)Q(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Do $(x^2+x+1, x^2-x+1) = 1$ nên

$$Q(x) = (x^2+x+1)R(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad Q(x-1) = (x^2-x+1)R(x-1).$$

Từ đó, (2) trở thành

$$R(x-1) = R(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

hay $R(x)$ tuần hoàn. Do đó theo mệnh đề 3 thì $R(x) \equiv c$.

Như vậy $P(x) = c(x-1)x(x+1)(x+2)(x^2+x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thoả mãn. $\square$

4. Sử dụng tính không bị chặn của đa thức trong một số dạng toán khác

Bài toán 10. *Cho số nguyên dương $n \geq 2$ và đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc n và có n nghiệm thực đôi một phân biệt.*

(a) Chứng minh rằng đa thức $Q(x) = P(x) + P'(x)$ cũng có n nghiệm thực đôi một phân biệt.

(b) Gọi $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ là các nghiệm của $P(x)$ và $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ là các nghiệm của $Q(x)$. Chứng minh rằng $\min\limits_{1\leq i\leq n-1}\{a_{i+1} - a_i\} \leq \min\limits_{1\leq i\leq n-1}\{b_{i+1} - b_i\}$.

Lời giải. (a) Không mất tính tổng quát, giả sử hệ số cao nhất của $P(x)$ bằng 1. Vì $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các nghiệm của $P(x)$ nên

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Do đó

$$Q(a_i) = P'(a_i) = (a_i-a_1)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n).$$

Mà $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ nên từ đây suy ra dãy $Q(a_1), Q(a_2), \ldots, Q(a_n)$ là dãy đan dấu. Vì vậy giữa $a_i, a_{i+1}, i = \overline{1, n-1}$ có ít nhất một nghiệm của $Q(x)$.

Hơn nữa, ta có

∘ Nếu n chẵn thì $Q(a_1) < 0, \lim\limits_{x\to-\infty} Q(x) = +\infty$, do đó $Q(x)$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; a_1)$.

∘ Nếu n lẻ thì thì $Q(a_1) > 0, \lim\limits_{x\to-\infty} Q(x) = -\infty$, do đó $Q(x)$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; a_1)$.

Như vậy, $Q(x)$ có n nghiệm thực phân biệt.

(b) Phản chứng. Giả sử tồn tại j sao cho $b_{j+1} - b_j < \min\limits_{1\le i\le n-1}\{a_{i+1} - a_i\}$.

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - a_i}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Ta có

$$f'(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-a_i)^2} < 0,$$

nên f nghịch biến trên mỗi khoảng xác định. Mà b_j, b_{j+1} là nghiệm của $Q(x)$ nên

$$\frac{P'(b_j)}{P(b_j)} = \frac{P'(b_{j+1})}{P(b_{j+1})} = -1,$$

do đó tồn tại $k \in \{1; 2; \ldots; n\}$ sao cho $b_j < a_k < b_{j+1}$.

Ta có

$$a_{i+1} - a_i > b_{j+1} - b_j \Rightarrow b_j - a_i > b_{j+1} - a_{i+1}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Nhận thấy với mọi $1 \le i \le k-1$, cả hai vế bất đẳng thức trên cùng dương; với mọi $k \le i \le n-1$, cả hai vế của bất đẳng thức trên cùng âm, do đó

$$\frac{1}{b_j - a_i} < \frac{1}{b_{j+1} - a_{i+1}}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Chú ý rằng $\dfrac{1}{b_j - a_n} < 0 < \dfrac{1}{b_{j+1} - a_1}$, ta có

$$\frac{P'(b_j)}{P(b_j)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{b_j - a_i} + \frac{1}{b_j - a_n} < \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{b_{j+1} - a_{i+1}} + \frac{1}{b_{j+1} - a_1} = \frac{P'(b_{j+1})}{P(b_{j+1})},$$

mâu thuẫn. Vì vậy điều phản chứng sai, ta thu được điều phải chứng minh. □

Bài toán 11. *Cho đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc n và số thực $a \ge 3$. Chứng minh rằng*

$$\max_{0\le i\le n+1} |a^i - P(i)| \ge \left(\frac{a-1}{2}\right)^n.$$

Lời giải. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 0$ thì $P(x) \equiv c$, khi đó do $a > 3$ nên

$$\max_{0\le i\le 1}|a^i - P(i)| = \max\{|1-c|,\ |a-c|\} \ge \frac{|1-c|+|a-c|}{2} \ge \frac{|a-1|}{2} \ge 1.$$

Khẳng định bài toán đúng với $n = 0$.

Giả sử khẳng định bài toán đúng cho các đa thức hệ số thực bậc $n-1$. Xét đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc n, khi đó

$$\frac{P(x+1)-P(x)}{a-1}$$

là đa thức hệ số thực bậc $n-1$. Do đó theo giả thiết quy nạp thì

$$\exists\ 0 \le k \le n: \quad \left|a^k - \frac{P(k+1)-P(k)}{a-1}\right| \ge \left(\frac{a-1}{2}\right)^{n-1},$$

tương đương với

$$|(a^{k+1} - P(k+1)) - (a^k - P(k))| \ge \frac{(a-1)^n}{2^{n-1}}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\max\{|a^{k+1}-P(k+1)|,\ |a^k-P(k)|\} &\ge \frac{|a^{k+1}-P(k+1)|+|a^k-P(k)|}{2}\\ &\ge \frac{|(a^{k+1}-P(k+1))-(a^k-P(k))|}{2} = \left(\frac{a-1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

Do đó hiển nhiên

$$\max_{0\le i\le n+1}|a^i - P(i)| \ge \left(\frac{a-1}{2}\right)^n.$$

Phép quy nạp hoàn tất, bài toán được giải quyết. □

Bài toán 12. *Cho tam thức bậc 2 hệ số thực $f(x) = ax^2 + bx + c$ sao cho $f(x)$ không âm với mọi số thực x không âm. Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ sao cho đa thức $f(x)P(x)$ có tất cả các hệ số đều không âm.*

Lời giải. Do $f(x) \ge 0,\ \forall x \ge 0$ nên $c = f(0) \ge 0$ và $a > 0$, suy ra $\Delta_f = b^2 - 4ac \le 0$.

Nếu $b \ge 0$ thì chọn $P(x) = 1$, ta thu được điều phải chứng minh.

Nếu $b < 0$ thì ta sẽ tìm số nguyên $n \ge 2$ để $P(x) = (x+1)^n$ thỏa yêu cầu bài toán. Ta có

$$\begin{aligned}f(x)P(x) &= (ax^2+bx+c)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\\ &= ax^{n+2} + (b+na)x^{n+1} + \sum_{k=2}^{n}(aC_n^{k-2} + bC_n^{k-1} + cC_n^k)x^k + (b+nc)x + c.\end{aligned}$$

Ta cần chọn n sao cho $b + na > 0,\ b + nc > 0$ và $aC_n^{k-2} + bC_n^{k-1} + cC_n^k,\ \forall k \geq 2.$ $(*)$

Ta xét

$$\begin{aligned} h(k) &= aC_n^{k-2} + bC_n^{k-1} + cC_n^k \\ &= (a - b + c)k^2 - [a - (n+2)b + (2n+3)c]k + (n+1)(n+2)c. \end{aligned}$$

Vì $a, c > 0,\ b < 0$ nên $h(k)$ là một tam thức bậc 2 có hệ số cao nhất $a - b + c > 0$. Do đó để $h(k) > 0$ với mọi k,ta cần chọn n sao cho $\Delta_h < 0$.

Chú ý rằng $\Delta_h < 0$ là một tam thức bậc 2 theo n, có hệ số cao nhất là

$$(b - 2c)^2 - 4c(a - b + c) = b^2 - 4ac \leq 0.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta_h = -\infty$. Như vậy, với n đủ lớn thì $n > \max\left\{\dfrac{-b}{a}; \dfrac{-b}{c}\right\}$ và $\Delta_h < 0$, thỏa các điều kiện của $(*)$. Khi đó $P(x)$ thỏa yêu cầu bài toán. $\square$

Bài toán 13. *Cho số nguyên dương $n \geq 3$ và đa thức*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

thỏa mãn $P(x)$ dương với mọi số thực x dương. Chứng minh rằng khi đó tồn tại số tự nhiên s để đa thức $Q(x) = P(x)(x+1)^s$ có các hệ số đều không âm.

Lời giải. Ta xét hai trường hợp.

◦ Trường hợp 1 : Khi $n = 2m$ thì

$$P(x) = \prod_{k=1}^{m} (a_k x^2 + b_k x + c_k),$$

trong đó $a_k x^2 + b_k x + c_k > 0,\ \forall x > 0$. Theo bài toán 12, với mỗi tam thức $a_k x^2 + b_k x + c_k$ đều tồn tại số tự nhiên s_k sao cho đa thức

$$Q_k(x) = (a_k x^2 + b_k x + c_k)(x+1)^{s_k}$$

có các hệ số đều không âm. Từ đó

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{m} Q_k(x) = \prod_{k=1}^{m} (a_k x^2 + b_k x + c_k)(x+1)^{s_k} = P(x)(x+1)^{s_1+\ldots+s_m},$$

cũng có các hệ số đều không âm.

◦ Trường hợp 2 : Khi $n = 2m + 1$ thì $P(x)$ có ít nhất một nghiệm không dương là $-a$. Do đó $P(x) = (x + a)R(x)$, với $R(x) > 0,\ \forall x > 0$.

Do $\deg R = 2m$ nên theo trường hợp 1 tồn tại số tự nhiên s sao cho $R(x)(x+1)^s$ có các hệ số đều không âm. Do đó

$$Q(x) = P(x)(x+1)^s = (x+a)R(x)(x+1)^s,$$

cũng có các hệ số đều không âm.

Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều tìm được s thỏa yêu cầu bài toán. $\square$

Bài toán 14. *Cho đa thức hệ số nguyên* $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. *Biết rằng hệ số nguyên* a *không chia hết cho* 4. *Xác định* $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{ \sqrt[4]{|f(n)|} \right\}$.

Lời giải. Đặt $a = 4k + r$, với $r \in \{1; 2; 3\}$. Ta có

$$\begin{aligned} f(n) &= n^4 + an^3 + bn^2 + cn + d = (n+k)^4 + (a-4k)n^3 + (b-6k^2)n^2 + (c-4k^3)n + (d-k^4) \\ &= (n+k)^4 + rn^3 + (b-6k^2)n^2 + (c-4k^3)n + (d-k^4). \end{aligned}$$

Với n đủ lớn thì

$$rn^3 + (b-6k^2)n^2 + (c-4k^3)n + d - k^4 > 0,$$

nên $f(n) > (n+k)^4$, do đó $|f(n)| = f(n)$.

Tương tự như trên, ta có

$$\begin{aligned} f(n) &= n^4 + an^3 + bn^2 + cn + d = (n+k+1)^4 + [a-4(k+1)]n^3 + \dots \\ &= (n+k+1)^3 + (r-4)n^3 + \dots \end{aligned}$$

Với n đủ lớn thì

$$(r-4)n^3 + \dots < 0,$$

nên $f(n) < (n+k+1)^4$.

Do đó với n đủ lớn thì

$$(n+k)^4 < f(n) < (n+k+1)^4,$$

suy ra $\left\lfloor \sqrt[4]{f(n)} \right\rfloor = n + k$ và $\left\{ \sqrt[4]{|f(n)|} \right\} = \left\{ \sqrt[4]{f(n)} \right\} = \sqrt[4]{f(n)} - (n+k)$. Từ đó

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left\{ \sqrt[4]{f(n)} \right\} &= \lim_{n\to\infty} [\sqrt[4]{f(n)} - (n+k)] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(n) - (n+k)^4}{\left[\sqrt[4]{f(n)} + (n+k)\right]\left[\sqrt{f(n)} + (n+k)^2\right]} \left(= \lim_{n\to\infty} \frac{(a-4k)n^3 + \dots}{n^3(1+1)(0+1)} \right) \\ &= \frac{r}{4} = \left\{ \frac{a}{4} \right\}. \end{aligned}$$

□

Tài liệu

[1] Hà Huy Khoái, *Số học*, NXB Giáo dục.

[2] Nguyễn Văn Mậu, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỉ*, NXB Giáo dục.

[3] Trần Nam Dũng (chủ biên), *Các phương pháp giải toán qua các kỳ thi Olympic - 2014.*

[4] Tạp chí Toán học và tuổi trẻ.

[5] Tạp chí Pi.

[6] Tài liệu trên Internet.

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỌN LỌC VỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Lê Phúc Lữ
(Lớp Cao học Khoa học tự nhiên TPHCM)

TÓM TẮT

Các bài tập này trích một phần trong các bài giảng về Phương trình hàm của tác giả cho các đội tuyển HSG, hướng tới kỳ thi VMO năm học 2019-2020. Trong phần Ví dụ là các bài toán về Phương trình hàm trên tập số thực thông thường, ở phần Bài tập bổ sung là các trên tập số thực dương và trên lớp hàm liên tục để bạn đọc có thể rèn luyện thêm.

1. Kiến thức cần nhớ

Đối với phương trình hàm trên tập số thực, ta cần chú ý

- Phép thế, đổi biến thích hợp: $x \to 0, x \leftrightarrow \pm y, x \to f(x), \ldots$ thế biến để triệt tiêu các $f(u), f(v)$ ở hai vế nhằm tìm được các quan hệ mới.
- Đặt $a = f(0)$ để dễ biến đổi. "Đơn ánh tại điểm", tức là $f(a) = 0 \to a = 0$.
- Xét tính đơn ánh / toàn ánh của hàm số. Nếu $f(f(x)) = x + 2019$ thì suy ra điều gì?
- Chú ý rằng nên liệt kê các đẳng thức liên hệ thu được thông qua các phép thế để có thể liên kết chúng với nhau tạo ra các điều kiện mới.
- Hàm số $f(x)$ cộng tính suy ra được $f(x) = ax$ nếu thêm một trong các điều kiện
  - $f(x)$ đơn điệu (sử dụng dãy kẹp, chuyển từ hữu tỷ sang vô tỷ).
  - $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ (đưa về hàm đồng biến).
  - $f(x^n) = f^n(x), \forall n \geq 1$ (sử dụng đa thức để đồng nhất hệ số).
  - $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}, \forall x \neq 0$ (tính bằng hai cách).
  - $f(x^2) = xf(x)$ (tính bằng hai cách).

2. Các bài toán chọn lọc

Bài toán 1. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

i) $f(xy+f(x)) = xf(y)+f(x)$ *với mọi* $x,y\in\mathbb{R}$.

ii) Phương trình $f(x)=0$ *có không quá một nghiệm.*

Lời giải. Thay $y=0$ thì $f(f(x)) = xf(0)+f(x)$. Nếu $f(0)\neq 0$ thì kéo theo f đơn ánh. Lại thay $x=0$ thì $f(f(0)) = f(0) \Rightarrow f(0)=0$, vô lý. Do đó $f(0)=0$ và $f(f(x)) = f(x)$.

Giả sử tồn tại $a\neq b$ sao cho $f(a)=f(b)\neq 0$. Suy ra

$$af(b)+f(a) = f(ab+f(a)) = f(ab+f(b)) = bf(a)+f(b).$$

Do đó $(a+1)f(a) = (b+1)f(a) \Rightarrow a=b$ nên f đơn ánh. Thay $y=0$, ta có $f(f(x)) = f(x)$ nên $f(x)=x$. □

Bài toán 2. *Xét hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f\left(f(x)f(y)\right) = f(x+y)+f(xy)$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}$. *Gọi* S *là tập hợp các số thực* x_0 *sao cho* $f(x_0)=f(-x_0)$.

1. *Chứng minh rằng nếu* $u,v\in S$ *thì* $u+v\in S$.
2. *Chứng minh rằng nếu* $u,v\in\mathbb{R}$ *mà* $f(u)=f(v)$ *thì* $u-v\in S$.

Lời giải. 1) Ta có $u\in S\to -u\in S$. Do đó

$$f(u+v)+f(uv) = f\left(f(u)f(v)\right) = f\left(f(-u)f(-v)\right) = f(-u-v)+f(uv).$$

Suy ra $f(u+v) = f(-(u+v))$ nên $u+v\in S$.

2) Thay $(x,y) = (u,1),(v,1)$ ta có

$$f(u+1)+f(u) = f(f(u)f(1)) = f(f(v)f(1)) = f(v+1)+f(v).$$

Suy ra $f(u+1) = f(v+1)$. Thay $(x,y) = (u+1,-1),(v+1,-1)$ ta có

$$f(f(u+1)f(-1)) = f(-u-1)+f(u) \text{ và } f(f(v+1)f(-1)) = f(-v-1)+f(v).$$

Suy ra $f(-u-1) = f(-v-1)$ nên $f(-u) = f(-v)$. Thay $(x,y) = (u,-u),(v,-v)$, ta có $f(u^2) = f(v^2)$ nên $f(-u^2) = f(-v^2)$. Thay $(x,y) = (u,-v),(v,-v)$, ta có

$$f\left(f(u)f(-v)\right) = f(u-v)+f(-uv) \text{ và } f\left(f(v)f(-v)\right) = f(0)+f(-v^2).$$

Suy ra $f(u-v)+f(-uv) = f(0)+f(-v^2)$. Tương tự thì

$$f(v-u)+f(-uv) = f(0)+f(-u^2).$$

Mà $f(u-v) = f(v-u)$ nên $u-v\in S$. □

Bài toán 3. *Tìm tất cả các hàm số $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $g(1) = -24$ và*

$$f(x - 5f(y)) = xf(y) - yf(x) + g(x)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Nếu $f(x) \equiv 0$ thì kéo theo $g(x) \equiv 0$, vô lý nên tồn tại a để $f(a) \neq 0$.

Giả sử $f(y_1) = f(y_2)$ thì dễ thấy $y_1 = y_2$ nên f đơn ánh. Nếu $f(0) = 0$ thì thay $y = 0$, ta có $f(x) = g(x)$, thay tiếp $x = 0$ thì có $f(-5f(y)) = g(0) = f(0)$ nên $f(y) = 0, \forall y$, vô lý.

Do đó, $f(0) \neq 0$, thay $x = 0$ thì có ngay f toàn ánh. Giả sử $f(u) = 0$ thì thay $x = u$, ta có

$$f(u - 5f(y)) = uf(y) + g(u).$$

Điều này chứng tỏ f tuyến tính. Đặt $f(x) = ax + b$ thì thay vào, ta có

$$\begin{aligned}
& f(1 - 5(ay + b)) = ay + b - y(a + b) + g(1) \\
\Leftrightarrow\ & a(1 - 5ay - 5b) + b = b - yb - 12 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 5a^2 = b \\ a - 5ab = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases}
\end{aligned}$$

Do đó $f(x) = x + 5$. □

Bài toán 4.

1. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ thì*

$$f(x^2 - xy + f(y)) = f^2(x) - xf(y) + y.$$

2. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ thì*

$$f(xf(x) + f(y)) = f^2(x) + 4y.$$

Lời giải. a) Thay $x = 0$, ta thấy $f(f(y)) = f^2(0) + y$ nên dễ thấy f là song ánh trên $\mathbb{R}$. Giả sử a là số thỏa mãn $f(a) = 0$. Thay $x = y = a$, ta có $f(0) = a$. Suy ra

$$f(f(0)) = 0 = f^2(0) \text{ nên } f(0) = 0.$$

Tiếp theo, thay $y = 0$, ta có $f(x^2) = f^2(x)$. Lại thay $x = y$, ta có

$$f(f(x)) = f^2(x) - xf(x) + x \text{ hay } = f^2(x) = xf(x).$$

Suy ra $f(x)(x - f(x)) = 0$. Mà $f(0) = 0$ và f là song ánh nên $f(x) \neq 0, \forall x \neq 0$, thế nên ta có $f(x) = x, \forall x \neq 0$. Thử lại thấy thỏa.

2) Thay $x = 0$, ta có $f(f(y)) = f^2(0) + 4y$ nên f là song ánh. Giả sử $f(u) = 0$ thì thay $x = u$, ta có $f(f(y)) = 4y$ nên $f(4x) = 4f(x)$. Do đó $f(0) = 0$. Thay $y = 0$, ta có $f(xf(x)) = f^2(x)$. Thay $(x, y) \to (f(x), 0)$, ta có

$$f(4xf(x)) = 16x^2 \text{ nên } f(xf(x)) = 4x^2.$$

Do đó $f^2(x) = 4x^2$, kéo theo $f(x) = 2x \vee -2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Giả sử có $x, y \neq 0$ sao cho $f(x) = 2x$, $f(y) = -2y$, thay vào đề bài, ta có $f(2x^2 - 2y) = 4x^2 + 4y$. Do đó, ta phải có

$$4x^2 + 4y = 2(2x^2 - 2y) \vee -2(2x^2 - 2y)$$

nên $xy = 0$, vô lý. □

Bài toán 5. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x)f\left(yf(x) - 1\right) = x^2 f(y) - f(x)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Nếu tồn tại $u \neq 0$ để $f(u) = 0$ thì thay $x = u$, ta có ngay $f(x) = 0, \forall x$.

Nếu $f(u) = 0$ kéo theo $u = 0$ thì thay $x = y = 1$, ta có

$$f(1)f(f(1) - 1) = 0 \text{ nên } f(1) = 1 \vee f(0) = 0.$$

Thay $x = 1$, suy ra $f(y - 1) = f(y) - 1$. Từ đó suy ra

$$f(x)\left(f(yf(x) - 1\right) = x^2 f(y) - f(x) \text{ nên } f(x)f(yf(x)) = x^2 f(y).$$

Thay $y = 1$ thì

$$f(x)f(f(x)) = x^2.$$

Thay $x \to x + 1$ thì $\left(f(x) + 1\right)\left(f(f(x)) + 1\right) = (x + 1)^2$ nên

$$f(x) + f(f(x)) = 2x.$$

Giải hệ tổng-tích này, ta có $f(x) = f(f(x)) = x$. Thử lại ta thấy thỏa. □

Bài toán 6. *Xét hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x^2) + f(xy) = f(f(x)) + yf(x) + xf(y) \text{ với mọi } x, y.$$

1. *Chứng minh rằng f là hàm hằng.*
2. *Khẳng định còn đúng không nếu điều kiện đề bài đổi thành*

$$f(x^2) + f(xy) = f(f(x)) + yf(x) + |x|\, f(y)?$$

Lời giải. 1) Thay $x = 0$, ta có $2f(0) = f(f(0)) + yf(0)$; nếu $f(0) \neq 0$ thì $y = 2 - \frac{f(f(0))}{f(0)}$ là hằng số, vô lý. Do đó $f(0) = 0$. Thay $y = 0$, ta có

$$f(x^2) = f(f(x)) \text{ với mọi } x. \qquad (*)$$

Do đó, ta viết lại điều kiện đã cho là $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

- Thay $x = y = 1$ thì $f(1) = 2f(1)$ nên $f(1) = 0$.
- Thay $x = y = -1$ thì $f(1) = -2f(-1)$ nên $f(-1) = 0$.
- Thay $y = -1$ thì $f(-x) = -f(x)$ nên f là hàm số lẻ.

Cuối cùng, trong $(*)$ thay $x \to -x$ thì

$$f(f(x)) = f(x^2) = f(f(-x)) = f(-f(x)) = -f(f(x)).$$

Suy ra $f(f(x)) = f(x^2) = 0, \forall x$ nên $f(x) = 0, \forall x > 0$; mà $f(-x) = -f(x)$ nên ta cũng có $f(x) = 0, \forall x < 0$. Điều này chứng tỏ $f(x) \equiv 0$ là hàm hằng.

2) Câu trả lời là phủ định. Thật vậy, xét hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \forall x \geq 0 \\ -x, \forall x < 0 \end{cases}.$$

Khi đó, $f(x^2) = 0$ và $f(f(x)) = f(0) = 0, \forall x \geq 0$ và $f(f(x)) = f(-x) = 0, \forall x < 0$ nên ta luôn có $f(f(x)) = 0, \forall x$, điều kiện ban đầu trở thành

$$f(xy) = yf(x) + |x| f(y).$$

Dễ dàng kiểm tra nếu $x = 0$ hoặc $y = 0$ thì đẳng thức trên đúng. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $x > 0, y > 0$ thì dễ thấy tất cả các số hạng đều bằng 0, thỏa mãn.
- Nếu $x > 0, y < 0$ thì $-xy = 0 + x(-y)$, đúng.
- Nếu $x < 0, y < 0$ thì $0 = y(-x) + (-x)(-y)$, đúng.
- Nếu $x < 0, y > 0$ thì $-xy = y(-x) + (-x) \cdot 0$, cũng đúng.

Do đó, hàm số đã nêu thỏa mãn điều kiện đề bài. □

Bài toán 7. *Với các số thực m, n, giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + m \cdot f(xy)) = f(x) + n \cdot xf(y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

1. *Chứng minh rằng nếu f là hàm toàn ánh và $f(1) = 1$ thì phải có $m = n$.*
2. *Ứng với $m = n = 1$, tìm tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài.*

Lời giải. 1) Trước hết, ta thấy nếu $m = 0$ thì $n \cdot xf(y) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$, kéo theo $n = 0$. Còn nếu $n = 0$ thì

$$f(x + m \cdot f(x)f(y)) = f(x) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Nếu $m \neq 0$ thì xét x_0 sao cho$f(x_0) \neq 0$, chọn y để $f(y) = -\frac{x_0}{f(x_0)m}$ thay vào, ta có $f(0) = f(x_0)$, kéo theo $f(x)$ là hàm hằng, không thỏa mãn tính chất toàn ánh. Điều này cho ta thấy $m = 0$ và $n = 0$.

Cuối cùng, xét $mn \neq 0$. Gọi x_0 là số thực thỏa mãn $f(x_0) = 0$ thì cho $x = x_0$, ta có

$$f(x_0 + m \cdot f(x_0)) = f(x_0) + n \cdot x_0 f(1) \Rightarrow x_0 = 0$$

hay $f(0) = 0$. Thay $x = 1$ vào đề bài, ta có $f(1 + mf(y)) = 1 + nf(y)$ nên f tuyến tính, mà $f(0) = 0, f(1) = 1$ kéo theo $f(x) = x$, thay vào thì có ngay $m = n$.

2) Ta có

$$f(x + f(xy)) = f(x) + xf(y).$$

Cho $x = y = -1$, ta có $f(-1 + f(1)) = 0$ nên tồn tại u để $f(u) = 0$. (*) Thay $x = u, y = 1$, ta có $0 = muf(1) \Rightarrow uf(1) = 0$. Ta xét hai trường hợp:

1. Nếu $f(1) = 0$ thì thay $x = \frac{1}{y}, y \neq 0$, ta có $f(y) = 0, \forall y \neq 0$. Tiếp tục thay $y = 0$ thì
$$f(x + f(0)) = f(x) + xf(0).$$
Chọn $x \neq 0, x \neq -f(0)$ thì dễ dàng có được $f(0) = 0$ nên ta có $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Nếu $f(1) \neq 0$ thì $u = 0$ hay $f(0) = 0$. Thay vào (*), ta có $f(1) = 1$. Với $x, y \neq 0$, đặt $z = x + yf\left(\frac{x}{y}\right)$ thì trong đề bài, thay $x \to \frac{x}{y}, y \to 1$, ta có
$$f\left(\frac{x}{y} + f\left(\frac{x}{y}\right)\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{2y}$$
hay
$$f\left(\frac{z}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{2y}.$$
Thay $x \to y, y \to \frac{x}{y}$, ta có
$$f(y + f(x)) = f(y) + yf\left(\frac{x}{y}\right).$$
Cuối cùng, thay $x \to y, y \to \frac{z}{y}$ ta có
$$f(y + mf(z)) = f(y) + yf\left(\frac{z}{y}\right) = f(y) + yf\left(\frac{x}{y}\right) + x.$$
Do đó $f(y + f(z)) = f(y + f(x)) + x$. Thay $y = -f(x)$ thì $f(-f(x) + f(z)) = x$ nên f toàn ánh. Thay $x \to 1, y \to x$ thì
$$f(1 + f(x)) = f(1) + f(x).$$
Vì f toàn ánh nên đặt $t = f(x) + 1$, ta có $f(t) = t + f(1) - 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Thay vào đề bài, ta có $f(1) = 1$ nên $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tất cả các hàm cần tìm là $f(x) = 0, f(x) = x$. □

Bài toán 8. *Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f(x-y)f(y-z)f(z-x) = 8 \text{ và } f(x) \geq 2, \forall x \geq 0.$$

Xác định $f(x)$.

Đặt $f(x) = 2^{g(x)+1}$ thì có $g(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ và

$$g(x-y) + g(y-z) + g(z-x) = 0.$$

Suy ra $g(x) + g(y) + g(z) = 0$ với mọi $x + y + z = 0$. Suy ra g là hàm lẻ và cộng tính. Suy ra $g(x) = ax$ nên $f(x) = 2^{ax+1}$ với $a \geq 0$.

Bài toán 9. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho*

$$f(x + y^2 + z^3) = f(x) + f(y)^2 + f(z)^3$$

với mọi x, y, z.

Lời giải. Thay $x = y = z = 0$ có $f(0)^2 + f(0)^3 = 0$ nên $f(0) = 0, f(0) = -1$.

1. Nếu $f(0) = 0$ thì thay $z = 0$ là có $f(x + y^2) = f(x) + f(y)^2 \geq f(x)$ nên f đồng biến. Ngoài ra, ta cũng có
$$f(x + z^3) = f(x) + f(z)^3.$$
Suy ra $f(z^3) = f(z)^3$ nên $f(x + z^3) = f(x) + f(z^3)$, chứng tỏ f cộng tính và $f(x) = ax$.

2. Nếu $f(0) = -1$ thì thay vào có
$$f(y^2) = f(y)^2 - 2 \text{ nên suy ra } f(x)^2 = f(-x)^2.$$
Thay $y = 0$, dễ dàng có $f(x) + f(-x) = -2$. Giải ra có $f(x) = f(-x) = -1, \forall x$.

Vậy có hai hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x) = x$ và $f(x) = -1$. □

Bài toán 10. *Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(0) = 0$ và*

$$f(x + y^3) + f(x^2 + y) = xf(x) + x + f(f(y + y^3))$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Thế $x = 0$, ta có $f(y) + f(y^3) = f(f(y + y^3))$ nên viết lại đề bài thành

$$f(x + y^3) + f(x^2 + y) = xf(x) + x + f(y) + f(y^3). \tag{$*$}$$

Thay $x \to x^3, -x^3$, ta có

$$f(x^3 + y^3) + f(x^6 + y) = x^3 f(x^3) + x^3 + f(y) + f(y^3)$$

và

$$f(-x^3+y^3)+f(x^6+y)=-x^3f(-x^3)-x^3+f(y)+f(y^3).$$

Suy ra

$$f(x^3+y^3)-f(-x^3+y^3)=x^3\left(f(x^3)+f(-x^3)+2\right).$$

Đổi $x^3, y^3 \to x, y$ ta có

$$f(x+y)-f(y-x)=x(f(x)+f(-x)+2). \qquad (**)$$

Thay $y=0$, ta có $f(x)-f(-x)=x(f(x)+f(-x)+2)$ nên $(**)$ viết lại thành

$$f(x+y)-f(y-x)=f(x)-f(-x).$$

Thay $x=y$, ta có $f(x)-f(-x)=f(2x)$ nên $f(x+y)-f(y-x)=f(2x)$ với mọi x, y. Từ đây suy ra f cộng tính. Từ đây cũng có f là hàm lẻ. Thay lại vào (*), ta có

$$f(x)+f(x^2)=xf(x)+x.$$

Thay $x \to -x$, ta có $-f(x)+f(x^2)=xf(x)-x$ nên $f(x)=x$.

Thử lại thấy thỏa. Vậy tất cả các hàm số cần tìm là $f(x)=x$. □

3. Bài tập tự luyện

Bài 1. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

1. $f(xy)+f(x+y)=x+y+xy, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$.
2. $x^2\left(f(x)+f(y)\right)=(x+y)f\left(yf(x)\right), \forall x, y>0.$

Bài 2. Tìm tất cả các hàm $f, g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ sao cho $f(1)=g(1)$ và với mọi $x, y>0$ thì

$$f(g(x)+y)=f(x)+g(y)$$
$$g(f(x)+y)=g(x)+f(y)$$

Chứng minh rằng $f(x)=g(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Gợi ý. Chứng tỏ rằng $f(x)\ge x, g(x)\ge x$ với mọi $x>0$.

Bài 3. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ sao cho $f(f(x)+2y)=f(2x+y)+2y$ với mọi $x, y>0$.

Gợi ý. Nếu tồn tại $a>0, b\in\mathbb{R}$ thỏa $f(x+a)=f(x)+b$ với mọi $x>0$ thì $a=b$.

Bài 4. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(3f^2(xy)+(xy)^2\right)=\left(xf(y)+yf(x)\right)^2$$

với mọi $x, y>0$.

Gợi ý. Biến đổi thích hợp đưa về $xf(y) + yf(x) = cxy + f(xy)$.

Bài 5. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sao cho

$$f(x + f(y)) = f(x) - x + f(x + y)$$

với mọi $x, y > 0$.

Gợi ý. Dùng phương pháp thêm biến

$$(x, y) \to \left(z, \frac{f(y)}{2} + x\right), \left(y, \frac{f(z)}{2} + x\right)$$

để đưa về $f(x + u) = f(x + v) + w$ hay $f(x + u - v) = f(x) + w$. Từ đó chứng minh rằng $w = 2(u - v)$ để suy ra $f(x) - 2x = const$.

Bài 6. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sao cho

$$f(f(xy) - xy) + xf(y) + yf(x) = f(xy) + f(x)f(y), \forall x, y > 0.$$

Gợi ý. Sử dụng các phép thế

$$(x, y) \to (x + f(z), y), (x, z), (x + y, z)$$

để thu được các đẳng thức rồi cộng lại, từ đó chứng minh rằng $f(x) - x = const$.

Bài 7. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x)^2 - f(y)f(z) = f(x^y)f(y)f(z)[f(y^z) - f(z^x)]$$

với mọi số thực $x, y, z > 0$ phân biệt.

Gợi ý. Đổi vai trò (x, y, z) cho nhau rồi cộng lại, dùng bất đẳng thức $AM - GM$.

Bài 8. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

1. Cho biết rằng $f(x^{2020}) = f(x)^{2020}$. Chứng minh rằng $f(x) = ax, \forall x$.
2. Cho biết rằng$f(x^{2019}) = f(x)^{2019}$. Chứng minh rằng $f(x) = ax, \forall x$.

Gợi ý. 1) Từ giả thiết suy ra $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ nên f đồng biến. Ta có $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{Q}$ nên xét dãy để chỉ ra $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$.
2) Tính bằng hai cách biểu thức $f(x + y)^{2019}$.

Bài 9. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \text{ và } |f(x) - x| \leq 2019$$

với mọi x. Chứng minh rằng $f(x) = x$.

Gợi ý. Ta có $f(2x) = 2f(x)$ nên $f(2^n x) = 2^n f(x)$. Giả sử $f(x_0) = x_0 + \varepsilon$ thì

$$f(2^n x_0) = 2^n x_0 + 2^n \varepsilon$$

với $\varepsilon \neq 0$. Thay vào đề, ta có $|2^n \varepsilon| \leq 2019, \forall n$, vô lý.

Bài 10. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn $f(x + f(y+z)) + f(y + f(z+x)) + f(z + f(x+y)) = 0$ với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

1. Chứng minh rằng $f(0) = 0$.
2. Cho biết rằng $f(2019) \neq 0$, chứng minh rằng f là hàm số toàn ánh. Từ đó tìm tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài.

Gợi ý. 1) Cho $x = y = z$, ta có

$$f(x + f(2x)) = 0 \text{ nên } f\left(-\frac{x}{2} + f(x)\right) = 0.$$

Lại thay $x \to f(x) - \frac{x}{2}$ thì $f\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2}f(x)\right) = 0$, cứ như thế thì có $f(0) = 0$.
2) Ta có

$$f(f(2x) - x) = -2f(x)$$

nên nếu có $f(x_0) \neq 0$ thì xét dãy để có $f(x) \to \pm\infty$, và do tính liên tục nên nó toàn ánh. Cho $y = z = 0$ thì $f(x) + 2f(f(x)) = 0$ nên $f(x) = -\frac{x}{2}$.

Bài 11. Xét các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y > 0$ thì

i) $f(x) + f(y) \leq \frac{f(x+y)}{2}$.

ii) $(x + y)\,[yf(x) + xf(y)] \geq xyf(x + y)$.

1. Chứng minh rằng $f(2^n x) = 4^n f(x), \forall x > 0$.
2. Đặt $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, chứng minh rằng $g(nx) = ng(x), \forall n \in \mathbb{Z}^+, x > 0$.
3. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn đề bài.

Bài 12. Tìm tất cả các song ánh $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho

i) $f(f(x)) = 4f(x) - 3x$ với mọi số thực x.

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x - f(x)) = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x - f(x)) = +\infty$.

Bài 13. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn:

1. $f(f(f(x))) = 2x - f(x)$ với mọi x.
2. $f(f(x)) = af(x) + bx$ với mọi số thực x; trong đó $a, b \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 14. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : [-1; 1] \to [-1; 1]$ sao cho:

1. $f(x) = f(4x^3 - 3x)$ với mọi $-1 \le x \le 1$.
2. $2f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ với mọi $-1 \le x \le 1$.

Bài 15.

1. Cho các hàm số liên tục $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) \in \mathbb{Q}$ khi và chỉ khi $g(x) \notin \mathbb{Q}$. Chứng minh rằng f, g là các hàm hằng.
2. Giả sử f là hàm số liên tục thỏa mãn

$$f(x) + f\left(x + \frac{2019}{2}\right) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow f(x + 11) + f(x + 4) + f(x + 2019) \notin \mathbb{Q}.$$

Chứng minh rằng phương trình $x^{11} - 4x + 2019 = f(x)$ có nghiệm.

Bài 16. (PTH sau các phép biến đổi) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho:

1. $f(x^3) - f(x) = x(x^2 - 1)$.
2. $f(x) - x = f(f(x) - x)$ và $f(0) = 0$.
3. $f(x) + f(x^2 + 2x) = x^2 + 3x + 4026$ với mọi x.

Bài 17. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ liên tục sao cho:

i) $f(2x) = 2f(x)$.

ii) $f\left(f^3(x)\left(e^{f(x)} - 1\right)\right) = x^2(e^x - 1)f(x)$ với mọi $x > 0$.

iii) $f(e - 1) = (e - 1)f(1)$.

iv) $f(k) \in \mathbb{Z}^+, \forall k \in \mathbb{Z}^+$.

Bài 18. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^3 + y^3 + xf^2(x) + yf^2(y)) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Gợi ý. Đặt $g(x) = x(x^2 + f(x^2))$ thì g cũng liên tục, lẻ và $g(0) = 0$. Ta viết lại thành

$$2f(g(x) + g(y)) = f(x) + f(y).$$

Ta chứng minh rằng nếu $g(x)$ không bị chặn để suy ra $g(x)$ toàn ánh trên $\mathbb{R}$. Từ đó tìm được hai hàm là $f(x) = 0$ và $f(x) = \frac{1}{2} - x$.

Tài liệu

[1] Phạm Văn Ninh, Các bài toán về phương trình hàm liên tục, 2019.

[2] Group *"Hướng tới Olympic Toán VN"* trên facebook.

[3] Group *"Bài toán hay - Lời giải đẹp"* trên facebook.

[4] Võ Quốc Bá Cẩn, Xây dựng dãy số trong giải phương trình hàm (tạp chí Epsilon).

[5] `artofproblemsolving.com`.

[6] Nguyễn Trọng Tuấn, đề thi chọn đội tuyển PTNK 2018.

Một Số Bất Đẳng Thức Trong Các Kỳ Thi Olympic Toán Học Quốc Tế

Ngô Văn Thái
(Thái Bình)

Giới thiệu

Kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO) được tổ chức mỗi năm một lần bắt đầu từ năm 1959 đến nay. Kỳ thi này chỉ dành cho học sinh THPT, nội dung đề thi gồm có 6 bài toán thuộc các phân môn khác nhau trong chương trình Toán học sơ cấp. Đây là kỳ thi danh giá nhất hành tinh, vì thế qui mô kỳ thi ngày càng được phát triển không ngừng, chất lượng kỳ thi cũng được nâng lên ngang tầm thời đại. Ảnh hưởng tích cực của kỳ thi là rất lớn, đã tạo động lực thúc đẩy phong trào phát hiện và bồi dưỡng nhân tài Toán học trên Thế giới một cách rộng khắp mạnh mẽ. Những thí sinh đạt giải cao trong kỳ thi IMO, phần lớn các em sau đó đều đi theo nghiệp làm toán rồi trở thành hoặc các nhà toán học, hoặc các nhà khoa học, nhà giáo có sử dụng nhiều đến toán. Sau mỗi năm ban tổ chức kỳ thi Quốc tế thường thay đổi dạng toán và nâng dần độ khó đề thi. Bởi vậy từng quốc gia có thí sinh tham dự kỳ thi, phải nắm bắt qui luật này để đổi mới công việc tuyển học sinh năng khiếu, đổi mới nội dung và định thời gian giảng dậy cho phù hợp đạt hiệu quả cao nhất. Trong đề thi IMO của những năm gần đây không thấy xuất hiện câu chứng minh bất đẳng thức, lý do vì sao thì chỉ có ban giám khảo Quốc tế là hiểu rõ hơn ai hết. Song có một điều dễ nhận thấy, câu bất đẳng thức trong các kỳ thi Olympic trước đây thường là câu khó, nó đã cản trở nhiều sỹ tử muốn dành điểm thi tuyệt đối và cũng là câu đem lại sự quan tâm đặc biệt của những người đam mê Toán học sơ cấp.

Tác giả xin trân trọng gửi tới bạn đọc "Một số bài toán bất đẳng thức trong các kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế" có cách giải chỉ dùng kiến thức THCS và những mở rộng mới đẹp để bạn đọc tham khảo. Sau khi các bạn đọc xong chuyên đề này tác giả tin rằng giải toán bất đẳng thức sẽ không còn là một trở ngại đối với các bạn nữa, đó chính là điều tác giả mong muốn nhất.

1. IMO 1961, Hungary

Bài toán 1. *Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có diện tích là S. Chứng minh rằng*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S.$$

Lời giải 1. Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a + b - c > 0$, $b + c - a > 0$, $c + a - b > 0$. Ap dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)},$$

hay là

$$\sqrt[3]{(a + b + c)^4} \geqslant 3\sqrt[3]{16\left(\frac{a + b + c}{2}\right)\left(\frac{a + b - c}{2}\right)\left(\frac{b + c - a}{2}\right)\left(\frac{c + a - b}{2}\right)}$$

$$\sqrt[3]{(a + b + c)^4} \geqslant 3\sqrt[3]{16S^2},$$

Do đó

$$(a + b + c)^2 \geqslant 3\sqrt{3} \cdot 4S.$$

Kết hợp với đánh giá quen thuộc $3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geqslant (a + b + c)^2$, ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S.$$

Bài toán được chứng minh. □

Lời giải 2. Ta có đẳng thức (bạn đọc tự chứng minh)

$$2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) - \left(a^4 + b^4 + c^4\right) = 16S^2.$$

Kết hợp với đánh giá

$$\left(a^4 + b^4 + c^4\right) \geqslant \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2,$$

ta được

$$\left(a^4 + b^4 + c^4\right) + \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 \geqslant 16S^2 + \left(a^4 + b^4 + c^4\right),$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S.$$

Chứng minh hoàn tất. □

2. IMO 1961, Hungary

Bài toán 2. *Gọi P là điểm tùy ý nằm trong tam giác ABC, PA cắt BC ở D, PB cắt AC ở E, PC cắt AB ở F. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các tỷ số sau đây không lớn hơn 2:* $\frac{AP}{PD}, \frac{BP}{PE}, \frac{CP}{PF}$ *và cũng có ít nhất một trong các tỷ số trên không nhỏ thua 2.*

Lời giải. Theo định lý Gergonne thì

$$\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = 1,$$

suy ra trong ba tỷ số $\frac{PD}{AD}, \frac{PE}{BE}, \frac{PF}{CF}$ có ít nhất một tỷ số không nhỏ hơn $\frac{1}{3}$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử tỷ số $\frac{PD}{AD} \geqslant \frac{1}{3}$. Từ

$$\frac{PD}{AD} \geqslant \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{AD}{PD} \leqslant 3 \Leftrightarrow \frac{AP + PD}{PD} \leqslant 3 \Leftrightarrow \frac{AP}{PD} \leqslant 2$$

Chứng minh tương tự trong ba tỷ số $\frac{AP}{PD}, \frac{BP}{PE}, \frac{CP}{PF}$ cũng có ít nhất một tỷ số cũng không nhỏ thua 2. Khi điểm P trùng với trọng tâm G của tam giác ABC thì các tỷ số trên đều bằng 2.

Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Năm 1818 nhà toán học Gergonne người Pháp đã chứng minh định lý sau:

Nếu điểm P nằm trong tam giác ABC, các đường thẳng AP, BP, CP cắt các cạnh BC, AC, AB theo thứ tự lần lượt tại D, E, F, thì

$$\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = 1.$$

Cách chứng minh định lý Gergonne rất đơn giản xin dành lại cho bạn đọc. Như vậy thực chất bài toán này chỉ là một hệ quả của định lý Gergonne mà thôi (lời giải trên khác với lời giải đưa ra trong đáp án của kỳ thi).

3. IMO 1964, Liên Xô

Bài toán 3. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leqslant 3abc.$$

Lời giải 1. Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên

$$(a-b)^2(a+b-c) \geqslant 0,$$

$$(b-c)^2(b+c-a) \geqslant 0,$$

$$(c-a)^2(c+a-b) \geqslant 0,$$

Cộng vế theo vế của ba bất đẳng thức trên và rút gọn sẽ được

$$3abc \geqslant a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c)$$

Dấu bằng xảy ra khi tam giác đã cho đều. Bài toán được chứng minh. □

Lời giải 2. Không mất tính tổng quát giả sử

$$a \geqslant b \geqslant c > 0 \Rightarrow a^2 + bc \geqslant b^2 + ca \geqslant c^2 + ab.$$

Theo bất đẳng thức hoán vị sẽ được

$$a\left(a^2+bc\right) + b\left(b^2+ca\right) \geqslant a\left(b^2+ca\right) + b\left(a^2+bc\right),$$

$$a\left(a^2+bc\right) + c\left(c^2+ab\right) \geqslant a\left(c^2+ab\right) + c\left(a^2+bc\right),$$

$$b\left(b^2+ca\right) + c\left(c^2+ab\right) \geqslant b\left(c^2+ab\right) + c\left(b^2+ca\right),$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Với giải thiết tương tự, mời bạn đọc thử sức với các bất đẳng thức sau

$$a^2(2b-c) + b^2(2c-a) + c^2(2a-b) \geqslant 3abc.$$

$$a^2(2c-b) + b^2(2a-c) + c^2(2b-a) \geqslant 3abc.$$

4. IMO 1969, Rumania

Bài toán 4. *Cho $x_1, x_2 > 0, x_1y_1 > z_1^2, x_2y_2 > z_2^2$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} \geqslant \frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2) - (z_1+z_2)^2}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta được $y_1, y_2 > 0$. Đặt

$$x_1y_1 - z_1^2 = k_1, x_2y_2 - z_2^2 = k_2, \quad k_1, k_2 > 0.$$

Vì

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2 &= \left(x_1y_1 - z_1^2\right) + \left(x_2y_2 - z_2^2\right) + x_1y_2 + x_2y_1 - 2z_1z_2 \\ &= k_1 + k_2 + \left(\frac{k_1+z_1^2}{y_1}\right)y_2 + \left(\frac{k_2+z_2^2}{y_2}\right)y_1 - 2z_1z_2 \\ &= k_1 + k_2 + \left(\frac{k_1y_2}{y_1} + \frac{k_2y_1}{y_2}\right) + \left(\frac{z_1^2y_2}{y_1} + \frac{z_2^2y_1}{y_2}\right) - 2z_1z_2.\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz hai số ta được

$$\left(\frac{k_1y_2}{y_1} + \frac{k_2y_1}{y_2}\right) \geqslant 2\sqrt{k_1k_2}, \quad \left(\frac{z_1^2y_2}{y_1} + \frac{z_2^2y_1}{y_2}\right) \geqslant 2\left|z_1z_2\right|.$$

Do đó

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2 \geqslant k_1+k_2+2\sqrt{k_1k_2}+2\left|z_1z_2\right|-2z_1z_2 \geqslant \left(\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}\right)^2.$$

Suy ra

$$\frac{8}{\left(\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}\right)^2} \geqslant \frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}.$$

Lại sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta dễ dàng chứng minh được

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \geqslant \frac{8}{\left(\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}\right)^2}.$$

Vậy

$$\frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} \geqslant \frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$. Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Khái quát bài toán ta dễ dàng có được một mở rộng sau:

Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$, *thỏa mãn*

$$x_ky_k - z_k^2 > 0, \quad \forall k = \overline{1, n}.$$

Chứng minh

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_ky_k - z_k^2} \geqslant \frac{n^3}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right)^2}.$$

Nếu sử dụng hai bất đẳng thức Minkowsky ta còn chứng minh được bài toán tổng quát dưới đây:

Cho

$$x_{ik}, z_k > 0, \prod_{i=1}^{m} x_{ik} - z_k^m > 0, \quad \forall i = \overline{1, m}, \ \forall k = \overline{1, n}, \quad m, n \in N^*.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\prod\limits_{i=1}^{m} x_{ik} - z_k^m\right)} \geqslant \frac{n^{m+1}}{\prod\limits_{i=1}^{m} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_{ik}\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right)^m}.$$

5. IMO 1975, Bungaria

Bài toán 5. *Cho*

$$\begin{cases} a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \\ b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \end{cases}$$

gọi $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *là một hoán vị tùy ý của* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$*. Chứng minh rằng*

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2 \leqslant (a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + \cdots + (a_n - c_n)^2.$$

Lời giải. Vì $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nên

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2.$$

Theo bất đẳng thức hoán vị thì

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n \leqslant a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

tương đương với

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 - \cdots - 2a_nb_n \leqslant -2a_1c_1 - 2a_2c_2 - \cdots - 2a_nc_n,$$

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2 \leqslant (a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + \cdots + (a_n - c_n)^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hoặc

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n \quad \text{hoặc} \quad b_1 = b_2 = \cdots = b_n.$$

Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Dùng phép biến đổi tương đương bài toán trên ta sẽ được bài toán sau:

Cho $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n,\ b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$. Gọi $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Chứng minh rằng

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2 \geqslant (a_1 + c_1)^2 + (a_2 + c_2)^2 + \cdots + (a_n + c_n)^2.$$

Khái quát cách giải, áp dụng nhị thức Newton lại cho ta bài toán mở rộng đẹp sau:

Cho hai dãy số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n,\ b_1, b_2, \ldots, b_n$ và $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $m \in N^*$.

a) *Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sắp thứ tự cùng chiều, thì*

$$(a_1 + b_1)^m + (a_2 + b_2)^m + \cdots + (a_n + b_n)^m \geqslant (a_1 + x_1)^m + (a_2 + x_2)^m + \cdots + (a_n + x_n)^m.$$

b) *Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sắp thứ tự ngược chiều, thì*

$$(a_1 + b_1)^m + (a_2 + b_2)^m + \cdots + (a_n + b_n)^m \leqslant (a_1 + x_1)^m + (a_2 + x_2)^m + \cdots + (a_n + x_n)^m.$$

6. IMO 1983, Pháp

Bài toán 6. *Cho a, b, c là là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng*

$$a^2 b\,(a - b) + b^2 c\,(b - c) + c^2 a\,(c - a) \geqslant 0.$$

Lời giải 1. Thay

$$a = y + z,\ b = z + x,\ c = x + y \quad \text{(phép thế Ravi)}.$$

Bất đẳng thức đã cho có thể viết lại thành

$$(y + z)^2(z + x)(y - x) + (z + x)^2(x + y)(z - y) + (x + y)^2(y + z)(x - z) \geqslant 0.$$

hay là

$$x^3 z + y^3 x + z^3 y \geqslant x^2 yz + y^2 zx + z^2 xy.$$

Bất đẳng thức này đúng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dưới đây

$$(x^3 z + y^3 x + z^3 y)(y^2 zx + z^2 xy + x^2 yz) \geqslant (x^2 yz + y^2 zx + z^2 xy)^2.$$

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. □

Lời giải 2. (Leeb Bernhard) Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max(a, b, c)$, thì

$$\begin{aligned} &a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \\ &\qquad = a(b+c-a)(b-c)^2 + b(a-b)(a-c)(a+b-c) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất. □

Nhận xét. Bạn đọc có thể thử sức bằng cách thay điều kiện của bài toán thành $a \geqslant b \geqslant c > 0$.

Bài toán mở rộng:

Gọi a, b, c là là độ dài ba cạnh của một tam giác và $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Chứng minh rằng

$$a^nb(a-b) + b^nc(b-c) + c^na(c-a) \geqslant 0.$$

7. IMO 1984, Tiệp Khắc

Bài toán 7. *Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$0 \leqslant ab + bc + ca - 2abc \leqslant \frac{7}{27}.$$

Lời giải. Vì $a + b + c = 1$, nên

$$ab + bc + ca - 2abc = ab(1-c) + bc(1-a) + ca \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a, b, c) là một trong các bộ $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Từ giả thiết ta có

$$(1-2a) + (1-2b) + (1-2c) = 1.$$

Cho nên tổng của hai số bất kỳ trong 3 số $1-2a$, $1-2b$, $1-2c$ đều không âm nên chỉ có thể xảy ra hai trường hợp:

(i) Tất cả ba số đều không âm. Khi đó theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$(1-2a)(1-2b)(1-2c) \leqslant \left(\frac{(1-2a)+(1-2b)+(1-2c)}{3}\right)^3,$$

tương đương với

$$1 - 2(a+b+c) + 4(ab+bc+ca) - 8abc \leqslant \frac{1}{27},$$

$$4(ab+bc+ca) - 8abc \leqslant \frac{1}{27} + 1,$$

$$ab + bc + ca - 2abc \leqslant \frac{7}{27}.$$

(ii) Có đúng một số âm. Khi đó hiển nhiên

$$(1-2a)(1-2b)(1-2c) < \frac{1}{27},$$

hay là

$$ab + bc + ca - 2abc < \frac{7}{27}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài toán được chứng minh. □

8. IMO 1995, Canada

Bài toán 8. *Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Đặt $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ thì $xyz = 1$ và bất đẳng thức trở thành

$$C = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Theo bất đẳng thức Schwarz và bất đẳng thức Cauchy thì

$$C \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{(y+z)+(z+x)+(x+y)} = \frac{x+y+z}{2} \geqslant \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$, tức là $a = b = c = 1$. □

Nhận xét. Ta có bất đẳng thức tổng quát sau, với điều kiện tương tự

$$\frac{1}{a^k(b+c)} + \frac{1}{b^k(c+a)} + \frac{1}{c^k(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}, \quad k \geqslant 2.$$

9. IMO-1996, Ấn Độ

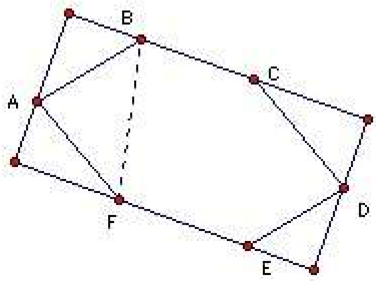
Bài toán 9. *Cho lục giác lồi $ABCDEF$ có AB song song với DE, BC song song với EF và CD song song với FA. Gọi R_A, R_C, R_E là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác FAB, BCD, DEF tương ứng và gọi P là chu vi của lục giác. Chứng minh rằng*

$$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{P}{2}.$$

Lời giải. (John Scholes) Áp dụng định lý hàm số sin cho các tam giác tương ứng, ta có

$$2R_A = \frac{BF}{\sin A}, \quad 2R_C = \frac{BD}{\sin C}, \quad 2R_E = \frac{FD}{\sin E}.$$

Kéo dài các cạnh BC và FE và kẻ các đường thẳng (a) và (d) qua A và D vuông góc với chúng. Khi đó BF lớn hơn hay bằng các đoạn vuông góc đi qua A và đi qua D.



Ta có thể tìm được độ dài các đoạn này bằng cách chiếu BA và AF lên (a) để được $AB\sin B + AF\sin F$. Tương tự, độ dài cạnh qua D bằng $CD\sin C + DE\sin E$. Do đó

$$2BF \geqslant AB\sin B + AF\sin F + CD\sin C + DE\sin E.$$

Tương tự

$$2BD \geqslant BC\sin B + CD\sin D + AF\sin A + EF\sin E,$$

và

$$2FD \geqslant AB\sin A + BC\sin C + DE\sin D + EF sinF.$$

Từ đó

$$\frac{2BF}{\sin A} + \frac{2BD}{\sin C} + \frac{2FD}{\sin E} \geqslant AB\left(\frac{\sin A}{\sin E} + \frac{\sin B}{\sin A}\right) + BC\left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin E}\right) + CD\left(\frac{\sin C}{\sin A} + \frac{\sin D}{\sin C}\right)$$
$$+ DE\left(\frac{\sin E}{\sin A} + \frac{\sin D}{\sin E}\right) + EF\left(\frac{\sin E}{\sin C} + \frac{\sin F}{\sin E}\right) + FA\left(\frac{\sin F}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin C}\right)$$

Bây giờ ta sử dụng điều kiện các cạnh song song để suy ra $A = D$, $B = E$, $C = F$. Mỗi một thừa số được nhân với các cạnh đều có dạng $x + \frac{1}{x}$ có giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 1$. Do đó

$$\frac{2BF}{\sin A} + \frac{2BD}{\sin C} + \frac{2FD}{\sin E} \geqslant 2P.$$

Bài toán được chứng minh. □

10. IMO 2000, Hàn Quốc

Bài toán 10. *Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

Lời giải. Từ điều kiện, ta đặt $x = a$, $y = 1$ $z = \frac{1}{b} = ca$, bất đẳng thức trở thành

$$(x - y + z)\left(\frac{y}{z} - 1 + \frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right) \leqslant 1,$$

tương đương với

$$\left(\frac{z + x - y}{y}\right)\left(\frac{x + y - z}{z}\right)\left(\frac{y + z - x}{x}\right) \leqslant 1,$$

$$(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \leqslant xyz.$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur quen thuộc. Bài toán được chứng minh. □

11. IMO 2001, Hoa Kỳ

Bài toán 11. *Cho x, y, z là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 8yz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 8zx}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 8xy}} \geqslant 1.$$

Lời giải 1. (Nguyễn Khắc Minh) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 8yz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 8zx}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 8xy}} \geqslant \frac{(x + y + z)^2}{x\sqrt{x^2 + 8yz} + y\sqrt{y^2 + 8zx} + z\sqrt{z^2 + 8xy}}.$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$x\sqrt{x^2 + 8yz} + y\sqrt{y^2 + 8zx} + z\sqrt{z^2 + 8xy} \leqslant \sqrt{(x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3 + 24xyz)}.$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$(x + y + z)^3 \geqslant x^3 + y^3 + z^3 + 24xyz,$$

$$x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y \geqslant 6xyz.$$

Hiển nhiên theo bất đẳng thức AM-GM. □

Lời giải. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}} \geqslant \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{z^4}}.$$

Thật vậy, bằng cách bình phương hai vế ta có thể viết bất đẳng thức trên lại như sau

$$\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{z^4}\right)^2 \geqslant \sqrt[3]{x^2}(x^2+8yz).$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{z^4}\right)^2-\left(\sqrt[3]{x^4}\right)^2 &= \left(2\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{z^4}\right)\left(\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{z^4}\right)\\ &\geqslant 4\sqrt[3]{x^2yz}\cdot 2\sqrt[3]{y^2z^2}\\ &= 8\sqrt[3]{x^2}\cdot yz.\end{aligned}$$

hay là

$$\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{z^4}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt[3]{x^4}\right)^2+8\sqrt[3]{x^2}\cdot yz = \sqrt[3]{x^2}\left(x^2+8yz\right),$$

tương đương với

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}} \geqslant \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{z^4}}.$$

Do đó

$$\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}} \geqslant \sum\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{z^4}} = 1.$$

Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Từ bài toán xin đề xuất hai bài toán mở rộng mới sau đây:

Cho x, y, z là ba số thực dương. Chứng minh rằng với $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ ta có

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}-\alpha x}+\frac{y}{\sqrt{y^2+8zx}-\alpha y}+\frac{z}{\sqrt{z^2+8xy}-\alpha z} \geqslant \frac{3}{3-\alpha}.$$

Cho ba số thực dương a, b, c và $p, q \in \mathbb{Z}^+$, $p \geqslant 2q$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt[p]{(a^2+8bc)^q}}+\frac{b}{\sqrt[p]{(b^2+8ca)^q}}+\frac{c}{\sqrt[p]{(c^2+8ab)^q}} \geqslant (a+b+c)^{\frac{p-2q}{p}}.$$

12. IMO 2005, Mexico

Bài toán 12. *Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz \geqslant 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geqslant 0.$$

Lời giải. (Iurie Boreico) Gọi S là vế trái của bài toán, với $x, y, z > 0$ thì

$$(x^3 - 1)\left[x^3(x^2 + y^2 + z^2) - (x^5 + y^2 + z^2)\right] = (x^3 - 1)^2(y^2 + z^2) \geqslant 0.$$

Do đó
$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geqslant \frac{x^3 - 1}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{x^2 + y^2 + z^2} \geqslant \frac{x^2 - yz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$
Cộng vế với vế bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự, ta được

$$S \geqslant \frac{x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)}{x^2 + y^2 + z^2} \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. □

Nhận xét. Một số bài toán tổng quát

Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn $xyz \geqslant 1$. Chứng minh rằng với $0 \leqslant 2r \leqslant k \leqslant \frac{5r}{2}$ ta có
$$\frac{x^k - x^r}{x^k + y^r + z^r} + \frac{y^k - y^r}{y^k + z^r + x^r} + \frac{z^k - z^r}{z^k + x^r + y^r} \geqslant 0.$$

Cho ba số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn điều kiện $xyz \geqslant 1$ và $\alpha \geqslant \beta + 3,\ \beta > -1,\ \lambda \in R$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^\alpha - x^\beta}{x^{\beta+\lambda+1} + y^\lambda + z^\lambda} + \frac{y^\alpha - y^\beta}{y^{\beta+\lambda+1} + z^\lambda + x^\lambda} + \frac{z^\alpha - z^\beta}{z^{\beta+\lambda+1} + x^\lambda + y^\lambda} \geqslant 0.$$

13. IMO 2008, Tây Ban Nha

Bài toán 13. *Cho ba số thực $x,\ y,\ z \neq 1$ thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1.$$

Chứng minh rằng đẳng thức xảy ra tại vô số bộ (x, y, z) hữu tỉ.

Lời giải. Vì $x,\ y,\ z \neq 1$ và $xyz = 1$ nên tồn tại ba số thực dương $a,\ b,\ c$ sao cho $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$, $z = \frac{c}{a}$ và a, b, c là ba số phân biệt. Ta cần chứng minh

$$\frac{a^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2}{(c-a)^2} \geqslant 1.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz sẽ được

$$\sum \frac{a^2}{(a-b)^2} \geqslant \frac{[a(a-c)+b(b-a)+c(c-b)]^2}{(a-b)^2(a-c)^2+(b-c)^2(b-a)^2+(c-a)^2(c-b)^2}. \tag{1}$$

Chú ý rằng

$$[a(a-c)+b(b-a)+c(c-b)]^2 = (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^2,$$

và

$$(a-b)^2(a-c)^2+(b-c)^2(b-a)^2+(c-a)^2(c-b)^2 = \left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)^2,$$

nên

$$\frac{a^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2}{(c-a)^2} \geqslant 1.$$

Đánh giá (1) xảy ra đẳng thức khi

$$\frac{\frac{a}{a-b}}{(a-b)(a-c)} = \frac{\frac{b}{b-c}}{(b-c)(b-a)} = \frac{\frac{c}{c-a}}{(c-a)(c-b)},$$

tương đương với

$$\frac{a}{(a-b)^2(a-c)} = \frac{b}{(b-c)^2(b-a)} = \frac{c}{(c-a)^2(c-b)}$$

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} = 3,$$

hay

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 3.$$

Từ phương trình này ta chọn

$$(x,y,z) = \left(\frac{n}{(n+1)^2}, -n(n+1), -\frac{n+1}{n^2}\right), \quad n \in \mathbb{Q}.$$

Chứng minh hoàn tất. □

14. IMO 2012, Argentina

Bài toán 14. *Cho $n-1$ số thực dương $a_2, a_3, \ldots, a_n$ thỏa mãn $a_2a_3\cdots a_n = 1$. Chứng minh*

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n > n^n.$$

Lời giải. Với $k \in N$, $2 \leqslant k \leqslant n$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$1 + a_k = \underbrace{\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-1}}_{k-1} + a_k \geqslant k\sqrt[k]{a_k \cdot \underbrace{\frac{1}{(k-1)} \cdot \frac{1}{(k-1)} \cdots \frac{1}{(k-1)}}_{k-1}},$$

do đó

$$(1 + a_k)^k \geqslant \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a_k,$$

suy ra

$$\prod_{k=2}^{n} (1 + a_k)^k \geqslant \prod_{k=2}^{n} \left[\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a_k \right] = n^n \cdot a_2 a_3 \cdots a_n = n^n.$$

Vậy

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \geqslant n^n. \tag{2}$$

Dấu bằng của (2) xảy ra khi

$$a_2 a_3 \cdots a_n = 1, \quad a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{3}, \ldots, a_n = \frac{1}{n-1},$$

hay là

$$a_2 a_3 \cdots a_n = 1, \quad a_2 a_3 \cdots a_n = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n-1},$$

hoặc

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdots (n-1)} = 1, \quad \text{(vô lý)}.$$

Do đó dấu đẳng thức của không xảy ra. Bài toán được chứng minh. □

Tài liệu

[1] Vũ Dương Thụy, Nguyễn Văn Nho, 2003, 40 *năm Olympic Toán học Quốc tế*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[2] Trần Nam Dũng, 2017, *Phương pháp giải toán qua các bài toán Olympic*, Nhà xuất bản Thế giới.

[3] Trần Phương, Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, 2010, *Vẻ đẹp bất đẳng thức trong các kỳ thi Olympic toán học*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[4] Ngô Văn Thái, 2018, *Sáng tạo-Làm chặt*, Tạp chí Epsilon.

[5] Ngô Văn Thái, 2019, *Phương pháp mới chứng minh bất đẳng thức*, Gặp gỡ Toán học-Vật lý, Bà Rịa Vũng Tàu.

[6] Phạm Kim Hùng, 2006, *Sáng tạo bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Tri thức.

[7] Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

[8] www.kalva.demon.co.uk

CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG KHÔNG GIAN TOẠ ĐỘ

Nguyễn Tất Thu
(Trường THPT chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai)

TÓM TẮT

Bài toàn cực trị nói chung hay cực trị tọa độ không gian $Oxyz$ thường tạo ra khó khăn cho học sinh. Khó khăn học sinh thường gặp khi đứng trước một bài toán cực trị trong không gian $Oxyz$ là: cách xử lí bài toán đó? kiến thức cần dùng?... và cả tâm lí nữa! Bài viết này nhằm giúp các em học sinh có thể tìm được hướng xử lí khi gặp bài toán cực trị trong không gian $Oxyz$.

Với bài toán cực trị trong không gian $Oxyz$, chúng ta thường xử lí theo một trong hai hướng sau:

Hướng 1: (Đại số) Chuyển đại lượng cần tìm $\min,\ \max$ về một biểu thức đại số và dùng các bất đẳng thức hoặc khảo sát hàm số để tìm $\min,\ \max$.

Hướng 2: (Hình học) Với hướng làm này, ta sử dụng các bất đẳng thức trong phần trên để đánh giá.

Với cách giải theo hướng đại số sẽ có lợi thế là ít cần đến trí tưởng tượng không gian mà cần tính toán nhiều hơn, do đó sẽ mất nhiều thời gian và dễ có sai sót.

Với cách giải theo hướng Hình học đòi hỏi học sinh cần có sự tưởng tượng không gian tốt hơn và thường sẽ có lời giải ngắn gọn hơn.

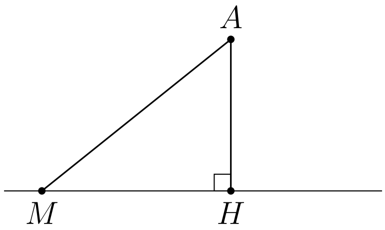
Dù là theo cách nào thì các em cần nắm được những kiến thức cơ bản về bất đẳng thức đại số, khảo sát hàm số và các bất đẳng thức hình học. Trước hết, chúng ta cũng ôn lại các kiến thức cơ bản đó.

1. Một số bất đẳng thức cơ bản

Những kết quả trình bày dưới đây các em đều đã được học ở cấp THCS và THPT.

Kết quả 1 (Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác). *Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn thì lớn hơn.*

Kết quả 2 (Quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc). *Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất. Như trong hình vẽ ta luôn có* $AM \geq AH$.



Kết quả 3 (Bất đẳng thức tam giác). *Với ba điểm* $A,\ B,\ C$ *bất kì ta luôn có bất đẳng thức*

$$AB + BC \geq AC.$$

Tổng quát hơn ta có bất đẳng thức của đường gấp khúc: Với n *điểm* $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ *ta luôn có*

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n.$$

Kết quả 4 (Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân). *Với hai số không âm* $x,\ y$ *ta luôn có*

$$\frac{x+y}{2} \geq 2\sqrt{xy}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Kết quả 5 (Bất đẳng thức về tích vô hướng của hai véctơ). *Với hai véctơ* $\vec{a},\ \vec{b}$ *ta luôn có*

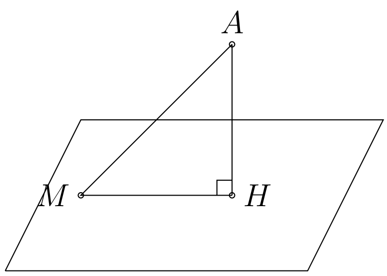
$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a} = k\vec{b},\ k \in \mathbb{R}$.

2. Một số bài toán thường gặp

Phần này sẽ giới thiệu một số bài toán thường gặp và cách giải các bài toán đó.

Bài toán 1. *Cho điểm* A *cố định và điểm* M *di động trên hình* (H) *(*(H) *là đường thẳng, mặt phẳng). Tìm giá trị nhỏ nhất của* AM.

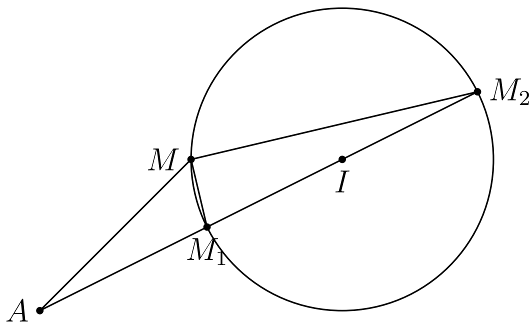


Lời giải. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên hình (H). Khi đó, trong tam giác AHM vuông tại M, ta có

$$AM \geq AH.$$

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$.
Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A lên (H). □

Bài toán 2. *Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R. M là điểm di động trên (S). Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM.*



Lời giải. Xét A nằm ngoài mặt cầu (S). Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu (S) $(AM_1 < AM_2)$ và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI. Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C). Ta có $\widehat{M_1MM_2} = 90°$, nên $\widehat{AMM_2}$ và $\widehat{AM_1M}$ là các góc tù, nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2 ta có

$$AI - R = AM_1 \leq AM \leq AM_2 = AI + R.$$

Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có

$$R - AI \leq AM \leq R + AI.$$

Vậy $\min AM = |AI - R|, \ \max AM = R + AI$. □

Bài toán 3. *Cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt $A, \ B$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho*

1. *$MA + MB$ nhỏ nhất.*
2. *$|MA - MB|$ lớn nhất.*

Lời giải.

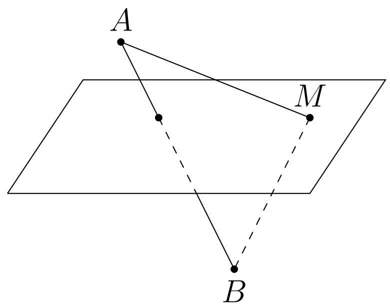
1. Ta xét các trường hợp sau

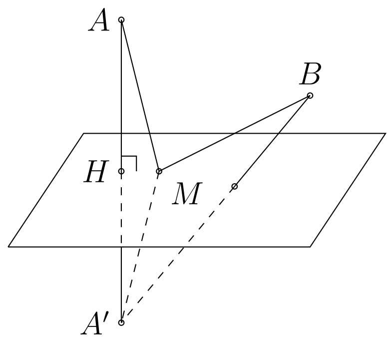
   - **TH 1:** Nếu A và B nằm về hai phía so với (P). Khi đó

     $$AM + BM \geq AB.$$

     Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

- **TH 2:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P). Khi đó
$$AM + BM = A'M + BM \geq A'B.$$
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).



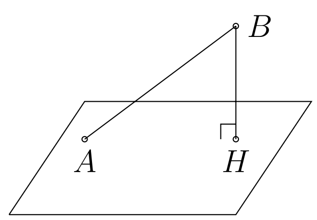


2. Ta xét các trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Khi đó
$$|AM - BM| \leq AB.$$
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).
- **TH 2:** Nếu A và B nằm về hai phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P). Khi đó
$$|AM - BM| = |A'M - BM| \leq A'B.$$
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).

□

Bài toán 4. *Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.*



Lời giải. Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P), khi đó
$$\mathrm{d}(B,(P)) = BH \leq BA.$$
Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB. □

Bài toán 5. *Cho các số thực dương $\alpha,\ \beta$ và ba điểm $A,\ B,\ C$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua C và $T = \alpha \mathrm{d}(A,(P)) + \beta \mathrm{d}(B,(P))$ nhỏ nhất.*

Lời giải.

1. Xét $A,\ B$ nằm về cùng phía so với (P).
   - Nếu $AB \parallel (P)$ thì
   $$P = (\alpha+\beta)\mathrm{d}(A,(P)) \le (\alpha+\beta)AC.$$
   - Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I. Gọi D là điểm thỏa mãn $\vec{IB} = \dfrac{\alpha}{\beta}\vec{ID}$ và E là trung điểm BD. Khi đó
   $$P = \alpha \mathrm{d}(A,(P)) + \beta\cdot\frac{IB}{ID}\cdot \mathrm{d}(D,(P)) = 2\alpha \mathrm{d}(E,(P)) \le 2(\alpha+\beta)EC.$$
2. Xét $A,\ B$ nằm về hai phía so với (P). Gọi I là giao điểm của AB và (P), B' là điểm đối xứng với B qua I. Khi đó
   $$P = \alpha \mathrm{d}(A,(P)) + \beta \mathrm{d}(B',(P)).$$
   Đến đây ta chuyển về trường hợp trên.

So sánh các kết quả ở trên ta chọn kết quả lớn nhất. □

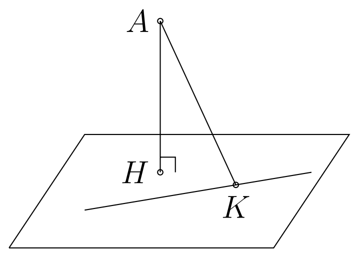
Bài toán 6. *Trong không gian cho n điểm $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n$ và điểm A. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm A_i ($i = \overline{1,n}$) lớn nhất.*

Lời giải.

- Xét n điểm $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n$ nằm cùng phía so với (P). Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho. Khi đó
$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(A_i,(P)) = n\mathrm{d}(G,(P)) \le nGA.$$
- Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác ($m+k=n$). Khi đó, gọi G_1 là trong tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của k điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A. Khi đó
$$P = m\mathrm{d}(G_3,(P)) + k\mathrm{d}(G_2,(P)).$$
Đến đây ta chuyển về bài toán trên.

□

Bài toán 7. *Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất.*



Lời giải. Gọi $H,\ K$ lần lượt là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ. Khi đó

$$\mathrm{d}(A,(P)) = AH \leq AK.$$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK. □

Bài toán 8. *Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$. Xét véc tơ*

$$\vec{w} = \alpha_1\vec{MA_1} + \alpha_2\vec{MA_2} + \cdots + \alpha_n\vec{MA_n}.$$

Trong đó $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|\vec{w}|$ có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$$\alpha_1\vec{GA_1} + \alpha_2\vec{GA_2} + \cdots + \alpha_n\vec{GA_n} = \vec{0}$$

(điểm G hoàn toàn xác định).

Ta có $\vec{MA_k} = \vec{MG} + \vec{GA_k}$ với $k = 1;\ 2;\ \ldots;\ n$, nên

$$\begin{aligned}\vec{w} &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\vec{MG} + \alpha_1\vec{GA_1} + \alpha_2\vec{GA_2} + \cdots + \alpha_n\vec{GA_n}\\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\vec{MG}.\end{aligned}$$

Do đó

$$|\vec{w}| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n| . \left|\vec{MG}\right|.$$

Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $|\vec{w}|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, mà $M \in (P)$ nên điểm M cần tìm là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P). □

Bài toán 9. *Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$. Xét biểu thức:*

$$T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \cdots + \alpha_n MA_n^2.$$

Trong đó $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ là các số thực cho trước. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho

1. *T giá trị nhỏ nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$.*
2. *T có giá trị lớn nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < 0$.*

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$$\alpha_1\vec{GA_1} + \alpha_2\vec{GA_2} + \cdots + \alpha_n\vec{GA_n} = \vec{0}.$$

Ta có $\vec{MA_k} = \vec{MG} + \vec{GA_k}$ với $k = 1; 2; \ldots; n$, nên

$$MA_k^2 = \left(\vec{MG} + \vec{GA_k}\right)^2 = MG^2 + 2\vec{MG}.\vec{GA_k} + GA_k^2.$$

Do đó

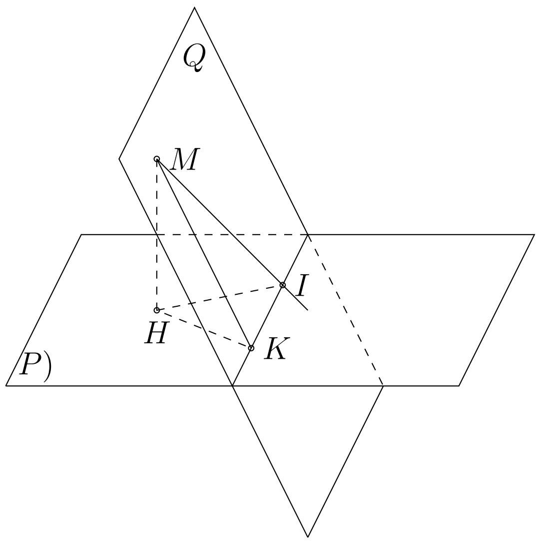
$$T = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)MG^2 + \alpha_1GA_1^2 + \alpha_2GA_2^2 + \cdots + \alpha_nGA_n^2.$$

Vì $\alpha_1GA_1^2 + \alpha_2GA_2^2 + \cdots + \alpha_nGA_n^2$ không đổi nên

- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.
- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < 0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.

Mà $M \in (P)$ nên MG nhỏ nhất khi điểm M là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P). □

Bài toán 10. *Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau. Viết phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.*



Lời giải. Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) và lấy điểm $M \in d,\ M \neq I$. Gọi $H,\ K$ lầ lượt là hình chiếu của M lên (P) và giao tuyến Δ của (P) và (Q).

Đặt ϕ là góc giữa (P) và (Q), ta có $\phi = \widehat{MKH}$, do đó

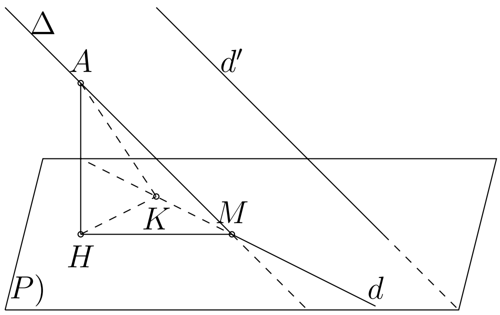
$$\tan\phi = \frac{HM}{HK} \geq \frac{HM}{HI}.$$

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (MHI), nên (Q) đi qua M và nhận $(\vec{n}_P \wedge \vec{u}_d) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT. □

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Gọi $\vec{n} = (a; b; c),\ a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là một VTPT của mặt phẳng (Q). Khi đó $\vec{n} \cdot \vec{u}_d = 0$, từ đây ta rút được a theo $b,\ c$ (hoặc b theo $a,\ c$ hoặc c theo $a,\ b$).
- Gọi ϕ là góc giữa (P) và (Q), ta có
$$\cos\phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_P|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_P|} = f(t),$$
với $t = \dfrac{b}{c},\ c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được $\max$ của $f(t)$.

Bài toán 11. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.*



Lời giải. Trên đường thẳng d, lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d'. Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d' và (P).

Trên đường thẳng Δ, lấy điểm A. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d, ϕ là góc giữa Δ và (P).

Khi đó $\phi = \widehat{AMH}$ và
$$\cos\phi = \frac{HM}{AM} \geq \frac{KM}{AM}.$$
Suy ra (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK). Do đó (P) đi qua M và nhận $(\vec{u}_d \wedge \vec{u}_{d'}) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT. □

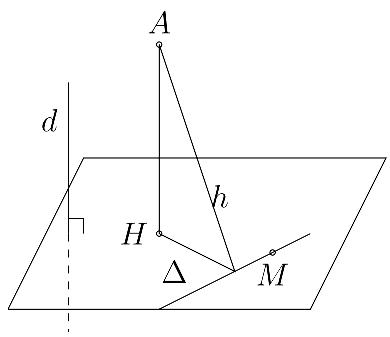
Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Gọi $\vec{n} = (a; b; c),\ a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là một VTPT của mặt phẳng (P). Khi đó $\vec{n} \cdot \vec{u}_d = 0$, từ đây ta rút được a theo $b,\ c$ (hoặc b theo $a,\ c$ hoặc c theo $a,\ b$).
- Gọi ϕ là góc giữa (P) và d', ta có
$$\sin\phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}_{d'}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}_{d'}|} = f(t),$$
với $t = \dfrac{b}{c},\ c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được $\max$ của $f(t)$.

3. Một số ví dụ

Ví dụ 1 (Thi thử lần 3, THPT Kim Liên - Hà Nội, 2019). *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z}{-1}$. Gọi Δ là đường thẳng qua M, vuông góc với đường thẳng d, đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất. Khoảng cách bé nhất đó là*

A. $\sqrt{29}$ **B.** 6 **C.** 5 **D.** $\frac{\sqrt{34}}{9}$



Lời giải. Bài toán yêu cầu tìm khoảng cách h nhỏ nhất từ A đến đường thẳng Δ, nên ta nghĩ đến việc so sánh khoảng cách h với AM, tuy nhiên ta có $h \leq AM$, do đó ta không sử dụng được đánh giá này!

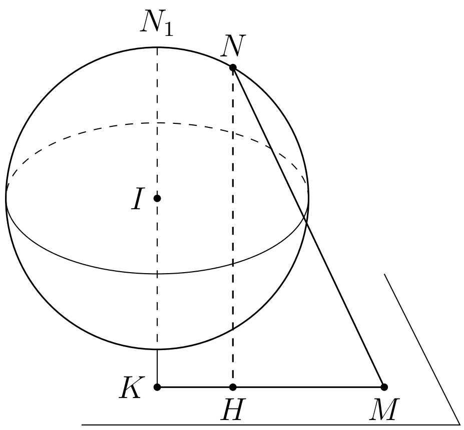
Dựa vào điều kiện của đường thẳng Δ (đi qua M và vuông góc với d) ta có được Δ luôn nằm trên mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với d, mặt phẳng (P) hoàn toàn được xác định và $h \geq \mathrm{d}(A,(P))$. Từ đó, ta có $\min h = \mathrm{d}(A,(P))$.

Ta có $(P)\colon 2x+2y-z+9=0$. Suy ra $\min h = \mathrm{d}(A,(P)) = \dfrac{|2\cdot +2\cdot 2-(-3)+9|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = 6$.

Chọn đáp án **B.** □

Ví dụ 2 (Đề tham khảo lần 3, năm 2017). *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho véctơ $\vec{MN}$ cùng phương với véctơ $\vec{u}(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.*

A. $MN=3$ **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$ **C.** $MN=3\sqrt{2}$ **D.** $MN=14$



Lời giải. Gọi ϕ là góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{n}_P$, ta có

$$\cos\phi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}_P}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}_P|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Gọi H là hình chiếu của N lên mặt phẳng (P), khi đó $\cos\widehat{MNH} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên

$$MN = \frac{NH}{\cos\widehat{MNH}} = \sqrt{2}NH.$$

Suy ra MN lớn nhất khi NH lớn nhất. Mà

$$\max NH = R + \mathrm{d}(I,(P)) = 1 + 2 = 3.$$

Do đó $\max MN = 3\sqrt{2}$. Chọn đáp án **C.** □

Ví dụ 3 (SGD Sóc Trăng 2018). *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-1=0$ và hai điểm $A(1;-3;0)$, $B(5;-1;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ nằm trên (P) và $|MA-MB|$ lớn nhất. Giá trị tích $a\cdot b\cdot c$ bằng*

A. 1 **B.** 12 **C.** 24 **D.** -24

Lời giải. Ta có A, B nằm về hai phía của mặt phẳng (P). Gọi B' là điểm đối xứng của B qua (P). Theo bài toán (3) ta suy ra $|MA-MB|$ lớn nhất khi M là giao điểm của AB' và mp(P).

Phương trình đường thẳng BB' là $\begin{cases} x = 5+t \\ y = -1+t \\ z = -2+t \end{cases}$

Gọi H là giao điểm của BB' và mp(P). Suy ra $H\left(\dfrac{14}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{7}{3}\right)$.

Do H là trung điểm của BB' nên $B'\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{8}{3}\right)$. Ta có $\vec{AB'} = \left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{8}{3}\right)$, suy ra phương trình đường thẳng AB' là $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -3 + 2t \\ z = -4t \end{cases}$

Tọa độ điểm $M(6; -1; -4)$, suy ra $a \cdot b \cdot c = 24$. Chọn đáp án **C.** □

Ví dụ 4. *Cho các điểm $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(2;\ 0;\ 1)$ và mặt phẳng $(P):\ 2x - y - z + 3 = 0$. Giả sử $M\,(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc (P) sao cho $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất. Tính $T = 3x_0 + y_0 + z_0$*

A. $T = 2$ **B.** $T = 10$ **C.** $T = 5$ **D.** $T = \frac{16}{5}$

Lời giải. Ký hiệu $f = 2x - y - z + 3$ thì ta có $f(A) = 2 + 1 - 2 + 3 = 4 > 0$, $f(B) = 4 - 1 - 1 + 3 = 5 > 0$. Vì thế các điểm A, B nằm cùng phía so với (P).

Gọi A' đối xứng với A quan (P). Khi đó theo bài toán (3) ta có M là giao điểm của $A'B$ với (P).

Gọi $H(x;\ y;\ z)$ là hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (P).

Ta có $\vec{AH}(x - 1;\ y + 1;\ z - 2)$ và $\begin{cases} \vec{AH} = t \cdot \vec{n}_{(P)} \\ H \in (P) \end{cases}$ nên tọa độ H thỏa mãn

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{-1} \\ 2x - y - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{3};\ \frac{8}{3}\right).$$

Tọa độ $A'\left(-\frac{5}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{10}{3}\right)$.

Do $\vec{A'B} = \frac{1}{3}(11;\ -1;\ -7)$ nên $A'B:\ \frac{x-2}{11} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-7}$.

Từ đó ta tìm được tọa độ điểm M là $M\left(-\frac{1}{5};\ \frac{1}{5};\ \frac{12}{5}\right)$. Suy ra $T = 2$. Chọn đáp án **A.** □

Ví dụ 5 (Thi thử lần 1, Trường Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng nai 2018). *Trong không gian $Oxzy$, cho bốn điểm $A(-4; -1; 3)$, $B(-1; -2; -1)$, $C(3; 2; -3)$ và $D(0; -3; -5)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua D và tổng khoảng cách từ A, B, C đến (α) lớn nhất, đồng thời ba điểm A, B, C nằm cùng phía so với (α). Trong các điểm sau, điểm nào thuộc mặt phẳng (α)*

A. $E_1(7; -3; -4)$ **B.** $E_2(2; 0; -7)$ **C.** $E_3(-1; -1; -6)$ **D.** $E_4(36; 1; -1)$

Lời giải. Theo kết quả của bài toán (6) ta có

$$\mathrm{d}(A, (P)) + \mathrm{d}(B, (P)) + \mathrm{d}(C, (P)) = 3\mathrm{d}(G, (P)) \leq 3GD.$$

Trong đó $G\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$ là trọng tâm của ba điểm $A,\ B,\ C$. Do đó (P) là mặt phẳng đi qua D và nhận $\vec{DG}=\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{8}{3};\dfrac{14}{4}\right)$ làm VTPT. Nên phương trình $(\alpha): x-4y-7z-47=0$.

Chọn đáp án **A.** □

Ví dụ 6. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3),\ B(-3;4;-1)$ và $C(2;0;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C và tổng khoảng cách từ A và B đến (P) lớn nhất. Tính khoảng cách h từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P).*

A. $h=\frac{4}{\sqrt{3}}$ **B.** $h=\frac{1}{\sqrt{3}}$ **C.** $h=\sqrt{3}$ **D.** $h=\frac{2}{\sqrt{3}}$

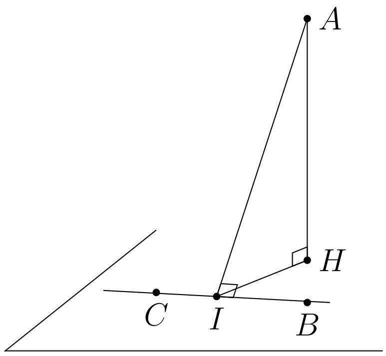
Lời giải. Ta xét hai trường hợp

- A và B nằm cùng phía so với (P). Khi đó
$$\mathrm{d}(A,(P))+\mathrm{d}(B,(P))=2\mathrm{d}(M,(P))\le 2MC=6\sqrt{3},$$
trong đó $M(-1;3;1)$ là trung điểm AB.
- A và B nằm khác phía so với (P). Khi đó
$$\mathrm{d}(A,(P))+\mathrm{d}(B,(P))=\mathrm{d}(A,(P))+\mathrm{d}(B',(P))=2\mathrm{d}(N,(P))\le 2NC=6,$$
trong đó $B'(7;-4;-3)$ là điểm đối xứng với B qua C và $N(4;-1;0)$ là trung điểm của AB'.

Từ đó ta có (P) là mặt phẳng đi qua C và nhận véctơ $\vec{MC}=(3;-3;-3)$ làm VTPT. Suy ra phương trình $(P)\colon x-y-z-4=0$. Do đó $h=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Chọn đáp án **D.** □

Ví dụ 7 (Đề TT lần 2, Ngô Quyền, Hải Phòng 2018). *Cho mặt phẳng $(\alpha): ax+by+cz+d=0$, $(a^2+b^2+c^2>0)$ đi qua hai điểm $B(1;0;2)$, $C(5;2;6)$ và cách $A(2;5;3)$ một khoảng lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=\dfrac{a}{b+c+d}$ là*

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** -2



Lời giải. Theo kết quả bài toán (7), ta có (α) là mặt phẳng đi qua B và nhận véctơ $\vec{AI}$ làm VTPT, với I hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BC.

Phương trình đường thẳng BC : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$

Gọi I là hình chiếu của A trên BC suy ra $I(3; 1; 4)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $x - 4y + z - 3 = 0$

Vậy $T = \dfrac{a}{b + c + d} = -\dfrac{1}{6}$. Chọn đáp án **C.** □

Ví dụ 8 (GHK2, THPT Nghèn - Hà Tĩnh, 2019). *Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 1; 2)$, $B(0; -1; -3)$. Xét các điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxz), giá trị nhỏ nhất của $P = \left|\vec{OM} + 2\vec{MA} + 3\vec{MB}\right|$ bằng*

A. 1 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Lời giải. Gọi I là điểm thỏa mãn

$$\vec{OI} + 2\vec{IA} + 3\vec{IB} = \vec{0}.$$

Ta có $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; -\frac{5}{4}\right)$. Khi đó theo bài toán (8), ta có

$$\left|\vec{OM} + 2\vec{MA} + 3\vec{MB}\right| = 4MI.$$

Do đó P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I lên (Oxz).

Theo đó $M\left(\frac{1}{2}; 0; -\frac{5}{4}\right)$.

Khi đó $\min P = 4 \cdot \mathrm{d}\left(I; (Oxz)\right) = 4IM = 4 \cdot \left|-\frac{1}{4}\right| = 1$. Chọn đáp án **A.** □

Ví dụ 9 (Đề thi thử THPTQG, 2018, SGD Phú Thọ). *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x - 3y + 2z - 15 = 0$ và ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(1; -1; 3)$, $C(1; -1; -1)$. Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P) sao cho $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị $2x_0 + 3y_0 + z_0$ bằng*

A. 11 **B.** 15 **C.** 5 **D.** 10

Lời giải. Gọi $G(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $2\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$. Ta có $G(1; 2; -2)$.

Khi đó theo bài toán (9), ta có M là hình chiếu của G lên (P).

Phương trình đường thẳng qua G và vuông góc với (P) là $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+2}{2}$.

Xét hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+2}{2} \\ 3x - 3y + 2z - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 3z = 8 \\ 3x - 3y + 2z = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Vậy $M(4; -1; 0)$ và giá trị của biểu thức cần tìm bằng $2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + 0 = 5$.

Chọn đáp án **C.** □

Ví dụ 10 (Đề tập huấn tỉnh Lai Châu,2019). *Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x - 2y + 2z - 5 = 0$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ và tạo với mặt phẳng (α) một góc nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax + by + cz + d = 0$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $a,\ b,\ c,\ d \in [-5; 5]$). Khi đó tích $abcd$ bằng bao nhiêu?*

A. 120 **B.** 60 **C.** -60 **D.** -120

Lời giải. Theo kết quả bài toán (10) thì (P) là mặt phẳng đi qua $M(1; 1; 0)$ và nhận

$$\vec{n} = (\vec{n}_\alpha \wedge \vec{u}_\Delta) \wedge \vec{u}_\Delta = (-8; 20; -16)$$

làm VTPT. Suy ra phương trình $(P)\colon 2x - 5y + 4z + 3 = 0$.

Từ đó, ta có $a = 2$, $b = -5$, $c = 4$, $d = 3$ nên $abcd = -120$. Chọn đáp án **D.** □

Ví dụ 11. *Cho $d : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{-1}$ và $d' : \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng (P) và góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' lớn nhất. Tọa độ giao điểm của (P) và trục Oy là*

A. $(0; 3; 0)$ **B.** $(0; 9; 0)$ **C.** $(0; -9; 0)$ **D.** $(0; -3; 0)$

Lời giải. Theo kết quả của bài toán (11), ta có (P) là mặt phẳng đi qua $M(1; -2; 0)$ và nhận vec tơ

$$\vec{n} = (\vec{u}_d \wedge \vec{u}'_d) \wedge \vec{u}_d = (14; -2; 10)$$

làm VTPT. Suy ra phương trình $(P)\colon 7x - y + 5z - 9 = 0$.

Từ đó ta tìm được giao điểm của (P) và d' là $(0; -9; 0)$. Chọn đáp án **C.** □

Ví dụ 12 (KSCL L4, Yên Lạc - Vĩnh Phúc, 2019). *Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$ và hai điểm $A(-1; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$. Gọi $K(a; b; c)$ là điểm thuộc (S) sao cho $KA + 2KB$ nhỏ nhất. Giá trị $a - b + c$ bằng*

A. $4 - \sqrt{3}$ **B.** $-\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $4 + \sqrt{3}$

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;0)$, bán kính $R = 2$.

Vì chúng ta cần đánh giá tổng $KA + 2KB$, nên ta tìm cách dựng điểm M sao cho $KA = 2KM \Leftrightarrow \dfrac{KA}{KM} = 2$ khi K thay đổi trên (S).

Ta thấy $IK = R = 2$ và $IA = 4$, nên $\dfrac{IA}{IK} = 2 = \dfrac{KA}{KM}$. Điều này gợi ý ta xét hai tam giác IAK và IKM đồng dạng với nhau. Do đó trên đoạn AI ta lấy M sao cho $IM = 1$. Khi đó hai tam giác IAK và IKM có góc I chung và $\dfrac{IA}{IK} = 2 = \dfrac{IK}{IM}$, nên hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

Ta tìm được $M(2;2;0)$. Khi đó

$$KA + 2KB = 2(KM + KB) \geq 2MB.$$

Hơn nữa, dễ thấy B nằm ngoài mặt cầu (S) và M nằm trong mặt cầu (S), nên ta có dấu bằng xảy ra khi K là giao điểm của đoạn thẳng MB với mặt cầu (S).

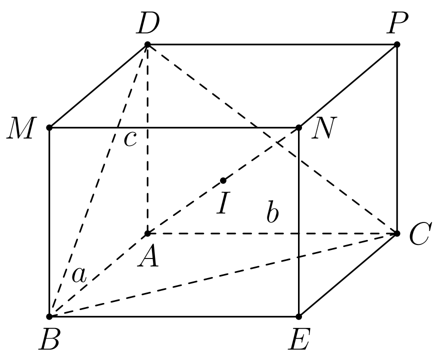
Phương trình của MB : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 + 3t \\ z = 0 \end{cases}$, suy ra $K(2;5+3t;0)$

$K \in (S) \Rightarrow 1 + (9(1+t)^2 = 4 \Leftrightarrow t = -1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow K(2;2-\sqrt{3};0)$ và $K(2;2+\sqrt{3};0)$.

Do K nằm giữa B, M nên $K(2;2+\sqrt{3};0) \Rightarrow a - b + c = -\sqrt{3}$. Chọn đáp án **B.** □

Ví dụ 13 (THPT QUỐC GIA 2018 - 101). *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;2)$ và đi qua điểm $A(1;-2;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng*

A. 72 **B.** 216 **C.** 108 **D.** 36



Lời giải. Đặt $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$ thì $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh A, nội tiếp mặt cầu (S).

Khi đó $ABCD$ là tứ diện đặt ở góc A của hình hộp chữ nhật tương ứng có các cạnh AB, AC, AD và đường chéo AA' là đường kính của cầu. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2$.

Xét $V = V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}abc \Leftrightarrow V^2 = \dfrac{1}{36}a^2b^2c^2$. Mà

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} &\Leftrightarrow \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3 \geqslant a^2b^2c^2 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{4R^2}{3}\right)^3 \geqslant 36\cdot V^2 \Leftrightarrow V \leqslant R^3\cdot\frac{4\sqrt{3}}{27}. \end{aligned}$$

Với $R = IA = 3\sqrt{3}$. Vậy $V_{\max} = 36$. Chọn đáp án **D.** □

Ví dụ 14 (TT, THPT Nghèn, Hà Tĩnh, lần 2, 2018). *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2=8$ và điểm $M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right)$. Đường thẳng d thay đổi đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của tam giác OAB.*

A. $S_{\max} = 4$ **B.** $S_{\max} = 2\sqrt{7}$ **C.** $S_{\max} = \sqrt{7}$ **D.** $S_{\max} = 2\sqrt{2}$

Lời giải. (S) có tâm $O(0;0;0)$ và có bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Gọi t là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng d ($t \le OM = 1$). Diện tích tam giác OAB là

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}t\cdot AB = t\sqrt{R^2-t^2} = t\sqrt{8-t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{7}}\left(\sqrt{7}t\right)\cdot\sqrt{8-t^2} \le \frac{7t^2+8-t^2}{2\sqrt{7}} \\ &= \frac{6t^2+8}{2\sqrt{7}} \le \frac{14}{2\sqrt{7}} = \sqrt{7}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi d vuông góc với OM. Chọn đáp án **C.** □

Ví dụ 15 (Thi thử, Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An, 2019-L1). *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $B(2;-1;-3)$ và $C(-6;-1;3)$. Trong các tam giác ABC thỏa mãn các đường trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau, điểm $A(a;b;0), (b>0)$ sao cho góc A lớn nhất, giá trị của $\dfrac{a+b}{\cos A}$ bằng*

A. 10 **B.** -20 **C.** 15 **D.** -5

Lời giải. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có

$$GB \perp GC \Leftrightarrow GB^2+GC^2 = BC^2 \Leftrightarrow AB^2+AC^2 = 5BC^2.$$

Khi đó

$$\cos A = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{4BC^2}{2AB\cdot AC} \ge \frac{4BC^2}{AB^2+AC^2} = \frac{4BC^2}{5BC^2} = \frac{4}{5}.$$

Do đó góc A lớn nhất khi $\cos A = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow AB = AC = 5\sqrt{10}$.

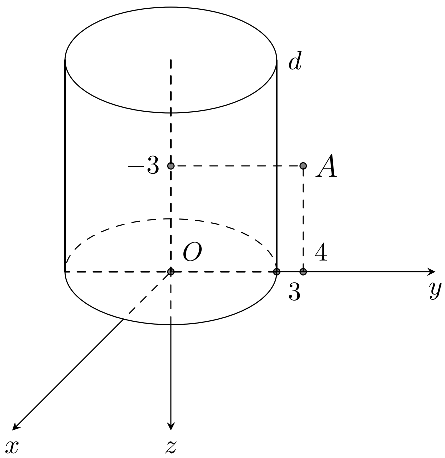
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2+9=(a+6)^2+(b+1)^2+9\\(a-2)^2+(b+1)^2+9=250\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\b=14\end{cases} (\text{vì } b>0)$$

Vậy $\dfrac{a+b}{\cos A}=15$. Chọn đáp án **C.** □

Ví dụ 16 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 101). *Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?*

A. $P(-3;0;-3)$ **B.** $M(0;-3;-5)$ **C.** $N(0;3;-5)$ **D.** $Q(0;5;-3)$



Lời giải. Ta có đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3 nên d nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là Oz và bán kính bằng 3.

Ta có

$$\mathrm{d}(A;d)\geq|\mathrm{d}(A;Oz)-\mathrm{d}(d;Oz)|=1$$

và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi d, trục Oz và điểm A đồng phẳng.

Do đó $\mathrm{d}(A;d)$ đạt nhỏ nhất bằng 1 khi đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (Oyz) và cách Oz một khoảng là 3 nên có phương trình là $d:\begin{cases}x=0\\y=3\\z=t.\end{cases}$

Trong bốn điểm $M(0;-3;-5)$, $N(0;3;-5)$, $P(-3;0;-3)$, $Q(0;5;-3)$ thì đường thẳng d đi qua điểm $N(0;3;-5)$. Chọn đáp án **C.** □

Ví dụ 17 (Thi thử, Sở GD và ĐT Lạng Sơn, 2019). *Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Trong các vectơ $\overrightarrow{u}$ cho dưới đây, đâu là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ đi qua M vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách A một khoảng bé nhất.*

A. $\overrightarrow{u}(1;0;2)$ **B.** $\overrightarrow{u}(2;1;6)$ **C.** $\overrightarrow{u}(-1;0;2)$ **D.** $\overrightarrow{u}(2;2;-1)$

Lời giải. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d. Ta có (P) đi qua (M), nhận véc-tơ chỉ phương của d là $(2;2;-1)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên (P) có phương trình:

$$2(x+2)+2(y+2)-z(-1)=0 \Leftrightarrow 2x+2y-z+9=0$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng d. Ta được $H(-3;-2;-1)$. Ta có $\mathrm{d}(A,(\Delta))=AK\leq AH$. Xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow K\equiv H$. Vậy đường thẳng Δ là đường thẳng AH có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AH}=(1;0;2)$. Chọn đáp án **A.** □

Ví dụ 18 (Đề tập huấn số 2, Sở GD và ĐT Quảng Ninh, 2019). *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất, hỏi Δ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?*

A. $M(-1;-2;1)$ **B.** $M(5;7;3)$ **C.** $M(3;4;3)$ **D.** $M(7;13;5)$

Lời giải. Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{6}=1$ hay $(ABC)\colon 2x+3y+z-6=0$. Dễ thấy $D\in(ABC)$.

Gọi H, K, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên Δ. Do Δ là đường thẳng đi qua D nên $AH\leq AD$, $BK\leq BD$, $CI\leq CD$. Khi đó

$$AH+BK+CI\leq AD+BD+CD.$$

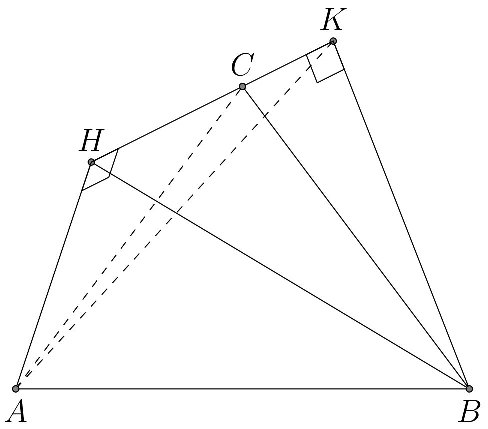
Vậy để tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ lớn nhất thì Δ là đường thẳng qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+3t \\ z=1+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ Ta thấy $M(5;7;3)\in\Delta$.

Chọn đáp án **B.** □

Ví dụ 19 (GHK2, Nguyễn Đình Chiểu-Tiền Giang, lần 1, 2019). *Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-2;1;2)$, $B(2;1;-2)$ và $C(1;1;1)$. Gọi d là đường thẳng đi qua C sao cho tổng khoảng cách từ A và B đến d lớn nhất. Giao điểm của d với mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+z=0$ có tọa độ là*

A. $\left(1;-\frac{1}{10};1\right)$ **B.** $(1;3;1)$ **C.** $(1;-3;1)$ **D.** $\left(1;\frac{1}{10};1\right)$



Lời giải. Ta có $AC = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{10}$. Gọi Δ là đường thẳng bất kì qua C, gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của A và B lên Δ. Ta có

$$(AH + BK)^2 \leq \frac{AH^2 + BK^2}{2} = \frac{20 - (CH^2 + CK^2)}{2},$$

do đó $AH + BK$ lớn nhất khi $CH^2 + CK^2$ nhỏ nhất. Mà $CH^2 + CK^2 \geq 0$ nên $CH^2 + CK^2$ nhỏ nhất khi H và K trùng với C, khi đó Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Vậy đường thẳng d cần tìm là đường thẳng qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 0; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (3; 0; -1)$. Suy ra $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (0; -8; 0)$ là véc-tơ chỉ phương của d.

Phương trình của d là

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 8t \\ z = 1. \end{cases}$$

Suy ra giao điểm của d và mặt phẳng (P) là điểm $M(1; -3; 1)$. Chọn đáp án **C.** □

Qua các ví dụ trên, hy vọng các em sẽ có được một số kỹ năng cách tiếp cận khi gặp bài toán cực trị trong không gian tọa độ $Oxyz$.

4. Bài tập

Bài 1 (TT, Lê Xoay, Vĩnh Phúc, 2018, L3)**.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 2; -2)$, $B(3; -3; 3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

A. $6\sqrt{3}$ **B.** $12\sqrt{3}$ **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ **D.** $5\sqrt{3}$

Bài 2 (Đề TT lần 1, Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, Sóc Trăng 2018)**.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -1)$ và mặt phẳng $(P) : x + y + 2z - 13 = 0$. Xét các mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ đi qua điểm A, tiếp xúc với mặt phẳng (P). Tính giá trị của biểu thức $T = a^2+2b^2+3c^2$ khi (S) có bán kính nhỏ nhất.

A. $T = 35$ **B.** $T = 20$ **C.** $T = 25$ **D.** $T = 30$

Bài 3 (Thi thử L6, Đại Học Ngoại Thương Hà Nội, 2018)**.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là các số thực dương thay đổi sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Tính khoảng cách lớn nhất từ O đến mặt phẳng (ABC).

A. $\frac{1}{3}$ **B.** 3 **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** 1

Bài 4 (HK2 (2017-2018), Sở Giáo Dục Lâm Đồng)**.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có phương trình lần lượt là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16$ và $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=4$. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1), (S_2). Tính khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P).

A. $\frac{9}{2}-\sqrt{15}$ **B.** $\sqrt{15}$ **C.** $\frac{9+\sqrt{15}}{2}$ **D.** $\frac{8\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$

Bài 5 (Đề tập huấn số 2, Sở GD và ĐT Quảng Ninh, 2019)**.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với $(P)\colon 2x-y-z+3=0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{7}$ **C.** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{7}$

B. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z+2}{7}$ **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{-7}$

Bài 6 (TT L3,Minh Châu,Hưng Yên,1718)**.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;4;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z+2018=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và α là góc nhỏ nhất giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Giá trị của $\cos\alpha$ là

A. $\cos\alpha=\dfrac{1}{6}$ **B.** $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$ **C.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{9}$ **D.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 7 (KSCL, Sở GD và ĐT - Thanh Hóa, 2018)**.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3) có bán kính $r=1$ và lần lượt có tâm là các điểm $A(0;3;-1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(4;-1;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất là

A. $R=2\sqrt{2}$ **B.** $R=\sqrt{10}-1$ **C.** $R=\sqrt{10}$ **D.** $R=2\sqrt{2}-1$

Bài 8 (KSCL, Sở GD và ĐT - Thanh Hóa, 2018)**.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7;2;3)$, $B(1;4;3)$, $C(1;2;6)$, $D(1;2;3)$ và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức $P=MA+MB+MC+\sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $OM=\sqrt{26}$ **B.** $R=\sqrt{10}-1$ **C.** $OM=\frac{5\sqrt{17}}{4}$ **D.** $\frac{3\sqrt{21}}{4}$

Bài 9 (Đề thi thử - Trường THPT chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai - Lần 1 - 2018)**.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$, $B(0;1;-1)$. Hai điểm D, E thay đổi trên các đoạn OA, OB sao cho đường thẳng DE chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau. Khi DE ngắn nhất thì trung điểm I của đoạn DE có tọa độ là

A. $I\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{4};\ 0\right)$ **B.** $I\left(\frac{\sqrt{2}}{3};\ \frac{\sqrt{2}}{3};\ 0\right)$ **C.** $I\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ 0\right)$ **D.** $I\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ 0\right)$

Bài 10 (Đề thi thử trường THPT Sơn Tây - Hà Nội, 2018)**.** Cho hai mặt cầu $(S_1)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$ và $(S_2)\colon (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$. Gọi d là đường thẳng đồng thời tiếp xúc với hai mặt cầu trên, cắt đoạn thẳng nối tâm hai mặt cầu và cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất. Nếu $\vec{u}=(a;1;b)$ là một véc-tơ chỉ phương của d thì tổng $S=2a+3b$ bằng bao nhiêu?

A. $S=2$ **B.** $S=1$ **C.** $S=0$ **D.** $S=4$

Bài 11 (Thi thử L4, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, 2018)**.** Cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z+3=0$. Đường thẳng d đi qua O và cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt A, B. Giá trị lớn nhất của $OA+OB$ bằng

A. $3\sqrt{6}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{6}$ **D.** $\sqrt{6}$

Bài 12 (Đề khảo sát chất lượng ,THPT Hàm Rồng, Thanh Hóa 2018)**.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(m;0;0)$, $B(0;2m+1;0)$, $C(0;0;2m+5)$ khác O. D là một điểm nằm khác phía với O so với mặt phẳng (ABC) sao cho tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối diện bằng nhau. Tìm khoảng cách ngắn nhất từ O đến tâm I mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\sqrt{11}$ **B.** $\sqrt{10}$ **C.** $\sqrt{6}$ **D.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$

Bài 13 (Thi thử L1, THPT Hậu Lộc 2, Thanh Hoá, 2019)**.** Trong không gian với toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;-2)$ và $B(3;4;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$ và $(S_2)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ là

A. $\sqrt{34}-1$ **B.** 5 **C.** $\sqrt{34}$ **D.** 3

Bài 14 (Thi Thử L1, Trường THPT Phụ Dực- Thái Bình, 2019)**.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-3)^2+(z-6)^2=45$ và $M(1;4;5)$. Ba đường thẳng thay đổi d_1, d_2, d_3 nhưng đôi một vuông góc tại O cắt mặt cầu tại điểm thức hai lần lượt là A, B, C. Tính khoảng cách lớn nhất từ M đến mặt phẳng (ABC) là

A. 3 **B.** $\sqrt{5}$ **C.** 4 **D.** $\sqrt{6}$

Bài 15 (Thi Thử L4, Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, 2018)**.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;3;10)$, $B(4;6;5)$ và M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho MA, MB cùng tạo với mặt phẳng (Oxy) các góc bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của AM.

A. $6\sqrt{3}$ **B.** 10 **C.** $\sqrt{10}$ **D.** $8\sqrt{2}$

Bài 16 (Tập huấn, Sở GD và ĐT lần 1, 2019)**.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$, $B(1;0;5)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d để MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;2;3)$ **B.** $M(2;0;5)$ **C.** $M(3;-2;7)$ **D.** $M(3;0;4)$

Bài 17 (Đề GHK2, Hàm Rồng, Thanh Hóa, năm 2019). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;1)$, $B(3;-2;0)$, $C(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến mặt phẳng (P) lớn nhất, biết rằng (P) không cắt đoạn BC. Khi đó pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $\vec{n}=(2;-2;-1)$ **C.** $\vec{n}=(-1;2;-1)$

B. $\vec{n}=(1;0;2)$ **D.** $\vec{n}=(1;0;-2)$

Bài 18 (Thi thử L1, Đức Thọ, Hà Tĩnh 2018). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối diện bằng nhau và D khác phía với O so với (ABC); đồng thời A, B, C lần lượt là giao điểm của các trục tọa độ Ox, Oy, Oz với mặt phẳng (P) : $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{m+2}+\dfrac{z}{m-5}=1$, $m\notin\{0;-2;-5\}$. Tính khoảng cách ngắn nhất từ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ đến O.

A. $\sqrt{30}$ **B.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$ **C.** $\sqrt{26}$ **D.** $\frac{\sqrt{26}}{2}$

Bài 19 (Hàm Rồng - Thanh Hóa,lần 2 - 2019). Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2y-z=0$. Biết điểm B thuộc (P), điểm C thuộc (Oxy) sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Hỏi giá trị nhỏ nhất đó là

A. $4\sqrt{5}$ **B.** $6\sqrt{5}$ **C.** $2\sqrt{5}$ **D.** $\sqrt{5}$

Bài 20 (Thi thử, Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên, 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;0;3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x-2y+2z+5=0$ **C.** $2x-2y+4z+3=0$

B. $x-y+2z+3=0$ **D.** $2x-y+2z=0$

Bài 21 (Thi thử L1, Chuyên Ngoại Ngữ, Hà Nội, 2018). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$ hai hai điểm $M(4;-4;2)$,$N(6;0;6)$. Gọi E là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho $EM+EN$ đạt giá trị lớn nhất. Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S) tại E.

A. $x-2y+2z+8=0$ **C.** $2x+2y+z+1=0$

B. $2x+y-2z-9=0$ **D.** $2x-2y+z+9=0$

Bài 22 (KSCL (2017-2018) lần 4,Thanh Miện 2,Hải Dương). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M, N và tạo với mặt phẳng $(Q)\colon 2x-y-2z-2=0$ góc có số đo nhỏ nhất. Điểm $A(1;2;3)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng là

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{7\sqrt{3}}{11}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

Bài 23 (Đề thi thử THPTQG sở Bình Phước - lần 2 - 2018). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2=1$, $(S_2)\colon x^2+(y-4)^2+z^2=4$ và các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\frac{1}{4};0;0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$. Gọi M là điểm thay đổi trên (S_1), N là điểm thay đổi trên (S_2). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=MA+2ND+4MN+6BC$ là

A. $2\sqrt{265}$ **B.** $\frac{5\sqrt{265}}{2}$ **C.** $3\sqrt{265}$ **D.** $\frac{7\sqrt{265}}{2}$

Bài 24. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(2;1;0)$, $C(2;0;2)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm B,C và cách A một khoảng cách lớn nhất. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của (α)?

A. $\overrightarrow{n}(1;0;-1)$ **C.** $\overrightarrow{n}(5;-2;-1)$

B. $\overrightarrow{n}(5;2;-1)$ **D.** $\overrightarrow{n}(5;1;-2)$

Bài 25 (Đề KSCL học kỳ 2 Toán 12 năm học 2017 – 2018 sở GD và ĐT Nam Định). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon 3x+4y-4z+5=0$ cắt mặt phẳng (P) tại B. Điểm M nằm trong mặt phẳng (P) sao cho M luôn nhìn đoạn thẳng AB dưới một góc vuông và độ dài MB lớn nhất. Tính độ dài MB.

A. $MB=\sqrt{5}$ **B.** $MB=\frac{\sqrt{5}}{2}$ **C.** $MB=\frac{\sqrt{41}}{2}$ **D.** $MB=\sqrt{41}$

Bài 26 (Đề KSCL trường THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ, năm 2018, lần 4). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-1=0$ và điểm $A(0;-2;3)$, $B(2;0;1)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Giá trị của $a^2+b^2+c^2$ bằng

A. $\frac{41}{4}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** 3

Bài 27 (Đề KSCL Toán 12 THPT năm học 2017 – 2018 sở GD và ĐT Thanh Hóa). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ đường thẳng (d) tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó, mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x-y-z-6=0$ **C.** $x-2y-3z-1=0$

B. $x+3y+2z+10=0$ **D.** $3x+z+2=0$

Bài 28 (2-GHK2-96-ThithuTHTT-Lan7). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A. $x+y-z=0$ **C.** $x+y-z+1=0$

B. $x+y-z-2=0$ **D.** $-x+2y+z+5=0$

Bài 29 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 110)**.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P(-3;0;-3)$ **B.** $Q(0;11;-3)$ **C.** $N(0;3;-5)$ **D.** $M(0;-3;-5)$

Bài 30 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 103)**.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\,(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P\,(-2;0;-2)$ **B.** $N\,(0;-2;-5)$ **C.** $Q\,(0;2;-5)$ **D.** $M\,(0;4;-2)$

MỞ RỘNG BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC FINSLER-HADWIGER

Trần Quang Hùng, Hà Nội

TÓM TẮT

Trong [1] đã giới thiệu về bất đẳng thức hình học Finsler-Hadwiger. Bài viết này được coi là tiếp nối [1] nhằm giới thiệu thêm một vài mở rộng liên quan tới bất đẳng thức hình học quan trọng này.

1. Mở đầu

Bất đẳng thức hình học Finsler-Hadwiger được phát biểu như sau, xem [4].

Định lý 1 (Finsler-Hadwiger, 1937)**.** Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và số đó diện tích là S. Khi đó ta có bất đẳng thức hình học sau

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2.$$

Theo [4], bất đẳng thức hình học Finsler-Hadwiger được coi là mở rộng trực tiếp cho bất đẳng thức hình học của Weitzenböck

Định lý 2 (Weitzenböck)**.** Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và số đó diện tích là S. Khi đó ta có bất đẳng thức hình học sau

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Điều này là hiển nhiên vì đại lượng

$$Q = (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 \geq 0.$$

Theo [5], Roland Weitzenböck (1885 - 1955) là một nhà toán học người Áo làm việc về hình học vi phân, được biết tới bởi kết quả "liên thông Weitzenböck". Ông được bổ nhiệm làm giáo sư toán học tại Đại học Amsterdam năm 1923. Bất đẳng thức hình học trên mang tên ông.

Theo [4], bất đẳng thức Finsler Hadwiger được đặt theo tên của Paul Finsler và Hugo Hadwiger từ một công trình chung năm 1937, xem [6]. Tuy nhiên, lần đầu tiên tên gọi chung của hai ông được biết tới khi hai ông xuất bản một bài báo về định lý Finsler-Hadwiger, định lý thuần túy hình học này đề cập đến một hình vuông xuất phát từ hai hình vuông khác có chung một đỉnh.

Trong hình học phẳng, việc đánh giá tương quan giữa các cạnh tam giác và diện tích là quan trọng. Trong đó thì việc đánh giá diện tích với bình phương cách cạnh được coi là đánh giá kinh điển vì đó là các đại lượng thứ nguyên 2, đặc trưng của mặt phẳng. Vì vậy, hai bất đẳng thức hình học của Weitzenböck và Finsler-Hadwiger là dấu mốc quan trọng của các bất đẳng thức hình học. Trong đó, bất đẳng thức của Weitzenböck là đánh giá sơ khai còn bất đẳng thức của Finsler-Hadwiger là tổng quát hơn. Tổng quát này có thể nói là "mạnh" vì có đại lượng Q.

Theo dòng lịch sử phát triển của bất đẳng thức hình học Finsler Hadwiger, bắt đầu từ năm bất đẳng thức được công bố, sau đó đã có rất nhiều những phát triển và mở rộng liên quan được ra đời. Vào tháng 9 năm 2008, tác giả bài viết có đưa ra một mở rộng cho bất đẳng thức này, và bài toán được xuất bản năm 2012, dưới dạng một đề toán trên tạp chí Toán học và tuổi trẻ, xem [2].

Định lý 3 (Mở rộng bất đẳng thức Finsler Hadwiger dùng trọng tâm)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O,R), trọng tâm G, diện tích S. Khi đó

$$a^2+b^2+c^2 \geq \left(4\sqrt{3}+\frac{OG^2}{R^2}\right)S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Sau khi nghiên cứu bài toán này, tác giả Nguyễn Văn Quý cũng đưa ra một mở rộng khác tương tự như sau

Định lý 4 (Mở rộng bất đẳng thức Finsler Hadwiger dùng tâm đường tròn nội tiếp)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O,R), ngoại tiếp đường tròn (I,r), diện tích S. Khi đó

$$a^2+b^2+c^2 \geq \left(4\sqrt{3}+\frac{OI^2}{R^2}\right)S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Sau đây, để đi sâu chứng minh hai mở rộng này, chúng tôi sẽ đưa ra một số công thức hình học thông dụng đối với các đại lượng cơ bản của tam giác.

Định lý 5. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Diện tích S, bán kính đường tròn ngoại tiếp R, bán kính đường tròn nội tiếp r, nửa chu vi p. Khi đó

1) $ab+bc+ca=p^2+r^2+4Rr.$

2) $a^2+b^2+c^2=2(p^2-r^2-4Rr).$

3) $Q=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2=p^2-3r^2-12Rr.$

4) $a^2+b^2+c^2-Q=2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)=4r(4R+r).$

5) $\frac{a^2+b^2+c^2-Q}{S}=\frac{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}{4S}=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}.$

Bốn công thức sau là hệ quả của công thức đầu tiên. Công thức đầu tiên ta có thể sử dụng định lý Heron về diện tích để chứng minh, các bạn có thể xem nó như một bài luyện tập.

2. Các chứng minh

Trong mục này chúng tôi sẽ chỉ trình bày chứng minh chi tiết cho các Định lý 3 và Định lý 4.

Để đưa ra lời giải cho Định lý 3, chúng tôi xin giới thiệu và chứng minh hai bổ đề.

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC, ta có bất đẳng thức lượng giác sau

$$\frac{1}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)+\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{8}+\sqrt{3}.$$

Chứng minh. Ta xét hàm $f(x)=\frac{1}{4}\sin x+\tan\frac{x}{2}$, $\forall x\in(0,\pi)$, ta có

$$f''(x)=-\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2}).$$

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}>0$, ta suy ra

$$f''(x)=\frac{-2t}{4(1+t^2)}+\frac{t}{2}(1+t^2)=\frac{t[(1+t^2)^2-1]}{2(1+t^2)}\geq 0,\ \forall t>0.$$

Do đó $f(x)$ lồi trên $(0,\pi)$, sử dụng bất đẳng thức Jensen và áp dụng vào tam giác ABC ta có

$$f(A)+f(B)+f(C)\geq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

hay

$$\frac{1}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)+\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{8}+\sqrt{3}.$$

Đó là điều phải chứng minh. □

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O,R), có trọng tâm G. Thì

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}-(\sin A+\sin B+\sin C)\geq\frac{OG^2}{R^2}.$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta dễ thấy

$$\frac{27}{4}-(\sin A+\sin B+\sin C)^2\geq\frac{27}{4}-3(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)=3(\frac{9}{4}-\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}).\quad(1)$$

Ta có hệ thức cơ bản $OG^2=R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$. (2)

Mặt khác do $\sin A+\sin B+\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$ nên

$$3\sqrt{3}[\frac{3\sqrt{3}}{2}-(\sin A+\sin B+\sin C)]\geq[\frac{3\sqrt{3}}{2}+(\sin A+\sin B+\sin C)][\frac{3\sqrt{3}}{2}-(\sin A+\sin B+\sin C)]=$$

$$= \frac{27}{4} - (\sin A + \sin B + \sin C)^2. \quad (3)$$

Từ $(1), (2), (3)$, ta suy ra

$$3\sqrt{3}[\frac{3\sqrt{3}}{2} - (\sin A + \sin B + \sin C)] \geq \frac{27OG^2}{4R^2}.$$

Vậy

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - (\sin A + \sin B + \sin C) \geq \frac{3\sqrt{3}OG^2}{4R^2} \geq \frac{OG^2}{R^2}.$$

Đó là điều phải chứng minh. □

Hai bổ đề trên đã sử dụng hai bất đẳng rất cơ bản của đại số là bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bất đẳng thức Jensen. Mặt khác, đạo hàm cũng là một khái niệm quan trọng của toán học hiện đại, do đó việc ứng dụng của đạo hàm trong toán học sơ cấp thông qua bất đẳng thức Jensen cũng là điều khá thú vị.

Chứng minh Định lý 3. Theo Định lý 5, mục 5), ta đã có

$$\frac{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}{4S} = \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}.$$

Vậy áp dụng bổ đề 1 ta suy ra

$$\frac{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}{4S} = \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}+\frac{1}{4}[\frac{3\sqrt{3}}{2}-(\sin A+\sin B+\sin C)].$$

Áp dụng tiếp tục bổ đề 2 suy ra

$$\frac{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}{4S} \geq \sqrt{3} + \frac{OG^2}{4R^2},$$

hay dễ thấy bất đẳng thức tương đương

$$a^2+b^2+c^2 \geq \left(4\sqrt{3} + \frac{OG^2}{R^2}\right) S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Đó là điều phải chứng minh. □

Tiếp tục với Định lý 4. Lời giải đầu tiên của tác giả bài báo kết hợp ý tưởng của tác giả bài toán phần đầu trong đó sử dụng một kết quả về bất đẳng thức hình học trong [3].

Chứng minh thứ nhất cho Định lý 4. Để ý rằng $OI < R$, sử dụng công thức Euler, ta có

$$\left(\sqrt{3} + \frac{OI^2}{4R^2}\right)^2 = 3 + \frac{\sqrt{3}OI^2}{2R^2} + \frac{OI^4}{16R^4} \leq 3 + \frac{OI^2}{R^2} = \frac{4R-2r}{R}.$$

Vậy ta cần chứng minh

$$\left(\frac{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2}{4S}\right)^2 \geq \frac{4R-2r}{R}. \quad (*)$$

Sử dụng Định lý 5 mục 4), bất đẳng thức trên tương đương với

$$\left(\frac{4r(4R+r)}{4S}\right)^2 \geq 4-\frac{2r}{R}$$

hay

$$p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{4R-2r}.$$

Bất đẳng thức trên chính là bất đẳng thức trên điểm Mittenpunk ở Bài toán 4 trong [3]. Vậy ta kết thúc chứng minh. □

Lời giải thứ hai của Nguyễn Văn Quý, tác giả bài toán

Chứng minh thứ hai cho Định lý 4. Ta cũng có thể chứng minh bất đẳng thức $(*)$ bằng biến đổi đại số. Đặt $a = m(n+p),\ b = n(p+m),\ c = p(m+n)$, với $m,n,p > 0$, ta có $p = mn+np+pm,\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = mnp\sqrt{mn+np+pm}$. Do đó

$$\frac{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2}{4S} = \frac{4mnp(m+n+p)}{4mnp\sqrt{mn+np+pm}} = \frac{m+n+p}{\sqrt{mn+np+pm}},$$

và

$$\frac{2r}{R} = \frac{8S^2}{abcp} = \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{8mnp}{(m+n)(n+p)(p+m)}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{(m+n+p)^2}{mn+np+pm} \geq 4-\frac{8mnp}{(m+n)(n+p)(p+m)},$$

hay

$$\frac{m^2+n^2+p^2}{mn+np+pm}+\frac{8mnp}{(m+n)(n+p)(p+m)} \geq 2.$$

Không mất tổng quát, giả sử $m \geq n \geq p$, ta có

$$\frac{m^2+n^2+p^2}{mn+np+pm} \geq \frac{m^2+n^2+p^2+p^2}{mn+np+pm+p^2} = \frac{m^2+n^2+2p^2}{(m+p)(n+p)}.$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{m^2+n^2+2p^2}{(m+p)(n+p)}+\frac{8mnp}{(m+n)(n+p)(p+m)} \geq 2,$$

$$(m+n)(m^2+n^2+2p^2)+8mnp \geq 2(m+n)(n+p)(p+m),$$

$$(m+n-2p)(m-n)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Phép chứng minh hoàn tất. □

Lời kết. Tác giả bài viết rất vui vì sau một thời gian dài lại có dịp được viết về các bất đẳng thức hình học và giới thiệu trên báo Epsilon. Toán học nói chung và hình học nói riêng có nhiều vẻ đẹp, đại số trong hình học sơ cấp cũng có một nét đẹp đặc trưng khác biệt. Các bất đẳng thức hình học của Weitzenböck và Finsler-Hadwiger thực sự đều là các kết quả hay và có ý nghĩa. Chắc chắn rằng các bất đẳng thức hình học này có ý nghĩa hơn rất nhiều so với những bài toán khác tự gắn mác "thuần túy hình học" nhưng lại bóp méo hình học. Nhân dịp này, tác giả cũng cảm ơn học trò **Nguyễn Văn Quý** ở trường THPT chuyên KHTN K43. Hiện nay, Quý cũng đang là đồng nghiệp của tác giả và đã đồng hành cùng tôi với các bất đẳng thức hình học từ ngày còn đi học cho tới khi làm thầy. Những người học trò yêu toán và thủy chung với toán như Quý chính là động lực lớn cho tôi trong nghiệp dạy.

Tài liệu

[1] Trần Quang Hùng, *Một số bất đẳng thức diện tích trong tam giác*, tạp chí Epsilon số 16.

[2] Trần Quang Hùng, *Bài toán T12/417*, mục đề ra kỳ này, Tạp chí Toán học và tuổi trẻ, tháng 3 năm 2012, số 417.

[3] Trần Quang Hùng, *Applying R, r, p method in some hard problems*, Tạp chí toán học MathVn, số 3 năm 2009.

[4] Wikipedia, *Hadwiger–Finsler inequality*, https://en.wikipedia.org/wiki/Hadwiger-Finsler_inequality.

[5] Wikipedia, *Roland Weitzenböck*, https://en.wikipedia.org/wiki/Roland_Weitzenbock.

[6] Paul Finsler and Hugo Hadwiger, *Einige Relationen im Dreieck*, tạp chí Commentarii Mathematici Helvetici số 10 năm 1937, trang 316–326.

MỘT MỞ RỘNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG STEINER

Nguyễn Ngọc Giang (ĐH Ngân hàng TPHCM)
Lê Viết Ân (PTNK TPHCM)

TÓM TẮT

Trong số trước của tạp chí Epsilon, đã có một mở rộng cho đường thẳng Simson. Trong số này, chúng tôi xin giới thiệu tiếp một mở rộng cho đường thẳng Steiner. Hơn nữa, bên cạnh đó chúng tôi còn giới thiệu thêm một áp dụng của mở rộng này.

1. Giới thiệu

Định lí về đường thẳng Steiner là một định lí nổi tiếng, được nhắc đến ở [1], [2] và [3]. Trong [5], định lí này được phát biểu như sau

Định lí 1.1. *Nếu P là một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, thì các ảnh đối xứng của P theo thứ tự qua các trục đối xứng BC, CA và AB nằm trên một đường thẳng đi qua trực tâm của tam giác ABC.* Đường thẳng này được gọi là **đường thẳng Steiner** của P đối với với tam giác ABC.

Và tại [4] và [5], chúng ta có một kết quả liên quan sau.

Định lí 1.2. (N.S. Collings). *Nếu một đường thẳng $\mathcal{L}$ đi qua trực tâm của tam giác ABC, thì các ảnh đối xứng của $\mathcal{L}$ theo thứ tự qua các trục đối xứng BC, CA và AB là đồng quy tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.* Điểm này được gọi là **cực Steiner** của $\mathcal{L}$ đối với tam giác ABC. Tất nhiên, $\mathcal{L}$ là đường thẳng Steiner của P đối với tam giác ABC khi và chỉ khi P là cực Steiner của $\mathcal{L}$ đối với tam giác ABC.

Định lí 1.1 có thể được mở rộng như sau.

Định lí 1.3. *Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp (O) và trực tâm H. Một đường thẳng ℓ đi qua H. Cho điểm P nằm trên (O) và điểm Q nằm trên ℓ (Q có thể là điểm vô cực). Các đường thẳng AQ, BQ, CQ theo thứ tự cắt lại (O) tại A', B', C'. Các đường thẳng PA', PB', PC' theo thứ tự cắt ℓ tại A_P, B_P, C_P. Gọi A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là đối xứng của A_P qua BC, B_P qua CA, C_P qua AB. Khi đó bốn điểm A_0, B_0, C_0 và H nằm trên cùng một đường thẳng.*

Rõ ràng khi Q thuộc PH hoặc Q thuộc (O) thì chúng ta đều nhận được định lí 1.1.

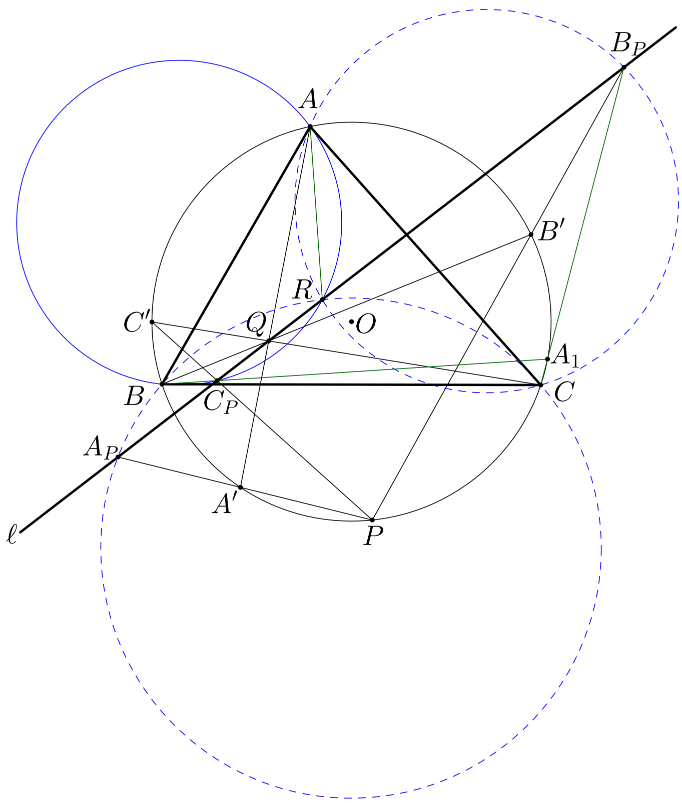
Trong bài viết này, chúng tôi xin giới thiệu chứng minh của định lí 1.3. Chúng tôi sử dụng (O), (XYZ) theo thứ tự là kí hiệu đường tròn tâm O, và đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ.

2. Chứng minh của định lý 1.3

Chúng ta cần có một bổ đề sau.

Bổ đề 2.1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng ℓ. Cho điểm P nằm trên (O) và điểm Q nằm trên ℓ (Q có thể là điểm vô cực). Các đường thẳng AQ, BQ, CQ theo thứ tự cắt lại (O) tại A', B', C'. Các đường thẳng PA', PB', PC' theo thứ tự cắt ℓ tại A_P, B_P, C_P. Khi đó các đường tròn $(BCA_P), (CAB_P)$ và (ABC_P) có một điểm chung nằm trên ℓ.*

Chứng minh. (xem hình 1). Gọi $A_1 := BC_P \cap CB_P$; R là giao điểm thứ hai của (ABC_P) và ℓ. Áp dụng định lí Pascal đảo cho sáu điểm $\begin{pmatrix} B & P & C \\ C' & A_1 & B' \end{pmatrix}$ với chú ý rằng ba điểm $C_P = BA_1 \cap PC', Q = BB' \cap CC', B_P = PB' \cap CA_1$ cùng thuộc đường thẳng ℓ và năm điểm B, P, C, C', B' cùng thuộc đường tròn (O). Suy ra A_1 thuộc (O).



Hình 1.

Sử dụng góc định hướng ($\mod \pi$), góc giữa hai đường thẳng, ta có

$$\begin{aligned}
(RA, RB_P) &\equiv (RA, RC_P) && \text{(vì } R, B_P, C_P \text{ thẳng hàng)}\\
&\equiv (BA, BC_P) && \text{(vì } B \in (ARC_P))\\
&\equiv (BA, BA_1) && \text{(vì } B, C_P, A_1 \text{ thẳng hàng)}\\
&\equiv (CA, CA_1) && \text{(vì } C \in (ABA_1))\\
&\equiv (CA, CB_P) && \text{(vì } C, B_P, A_1 \text{ thẳng hàng).}
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ R thuộc đường tròn (CAB_P).
Chứng minh tương tự, ta cũng có R thuộc đường tròn (BCA_P).
Bổ đề 2.1 đã được chứng minh.

Chứng minh định lí 1.3. (xem hình 2). Theo như bổ đề 2.1, có điểm $R := \ell \cap (BCA_P) \cap (CAB_P) \cap (ABC_P)$.
Vì H thuộc ℓ nên theo định lí 1.2, ℓ có điểm cực Steiner S ứng với tam giác ABC.
Đường thẳng AH cắt (O) tại A và A_2. Dễ dàng thấy rằng A_2 đối xứng với H qua BC. Do đó

$$SA_2 \text{ đối xứng với } \ell \text{ qua } BC. \tag{1}$$

Suy ra ba đường thẳng BC, ℓ và SA_2 hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.
Nếu BC, ℓ và SA_2 đôi một song song thì chú ý rằng mỗi bộ bốn điểm (B, C, R, A_P) và (B, C, S, A_2) cũng thuộc một đường tròn nên R, S theo thứ tự đối xứng với A_P, A_2 qua trung trực của BC. Suy ra R, S, A_P, A_2 cùng thuộc một đường tròn. Ngược lại, nếu $I := BC \cap \ell \cap SA_2$ thì theo tính chất của phương tích, ta có $\overline{IR}.\overline{IA_P} = \overline{IB}.\overline{IC} = \overline{IS}.\overline{IA_2}$. Suy ra bốn điểm R, S, A_P, A_2 cùng thuộc một đường tròn.
Vậy trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$R, S, A_P, A_2 \text{ cùng thuộc một đường tròn.} \tag{2}$$

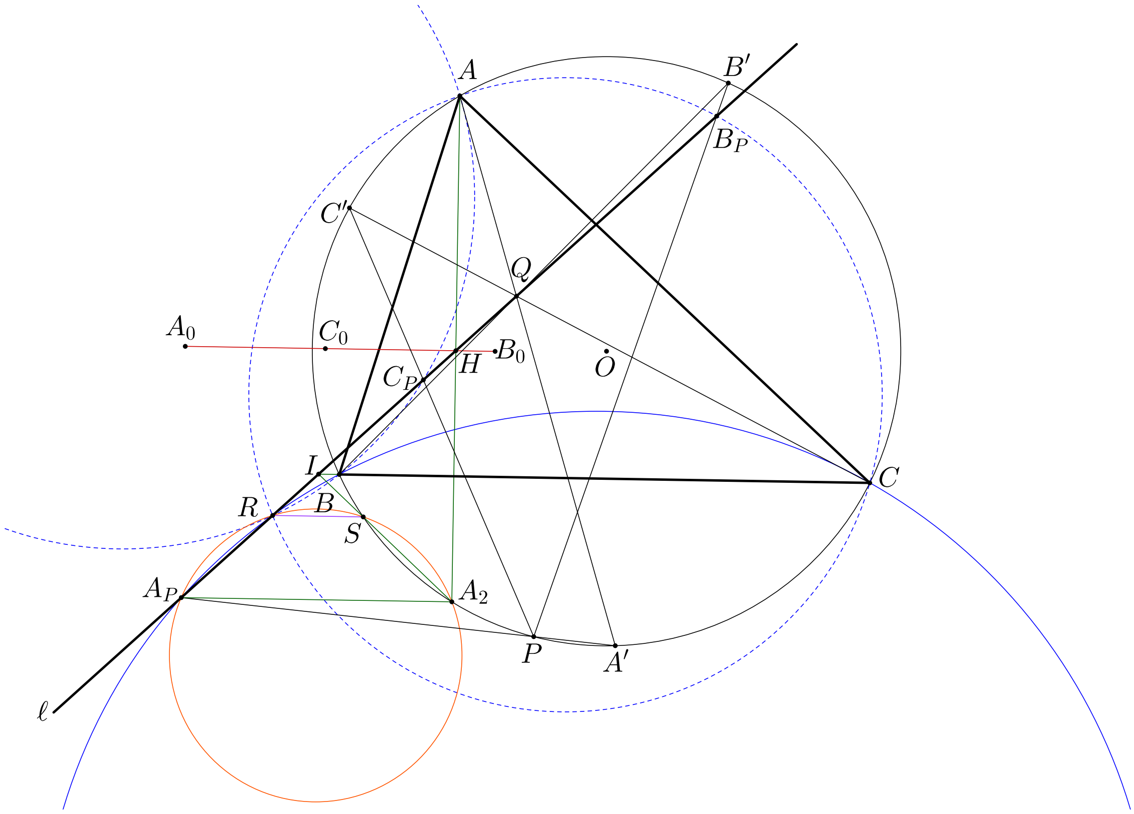
Mặt khác, dễ thấy

$$A_2A_P \text{ đối xứng với } HA_0 \text{ qua } BC. \tag{3}$$

Ta có,

$$\begin{aligned}
(RS, \ell) &\equiv (RS, RA_P) && \text{(vì } R, A_P \in \ell)\\
&\equiv (A_2S, A_2A_P) && \text{(vì (2))}\\
&\equiv (HA_0, \ell) && \text{(vì (1) và (3)).}
\end{aligned}$$

Suy ra RS song song hoặc trùng với HA_0.
Chứng minh tương tự ta cũng có RS song song hoặc trùng với HB_0 và HC_0.
Do đó bốn điểm A_0, B_0, C_0 và H cùng thuộc một đường thẳng song song hoặc trùng với RS.
Định lí 1.3 đã được chứng minh.



Hình 2.

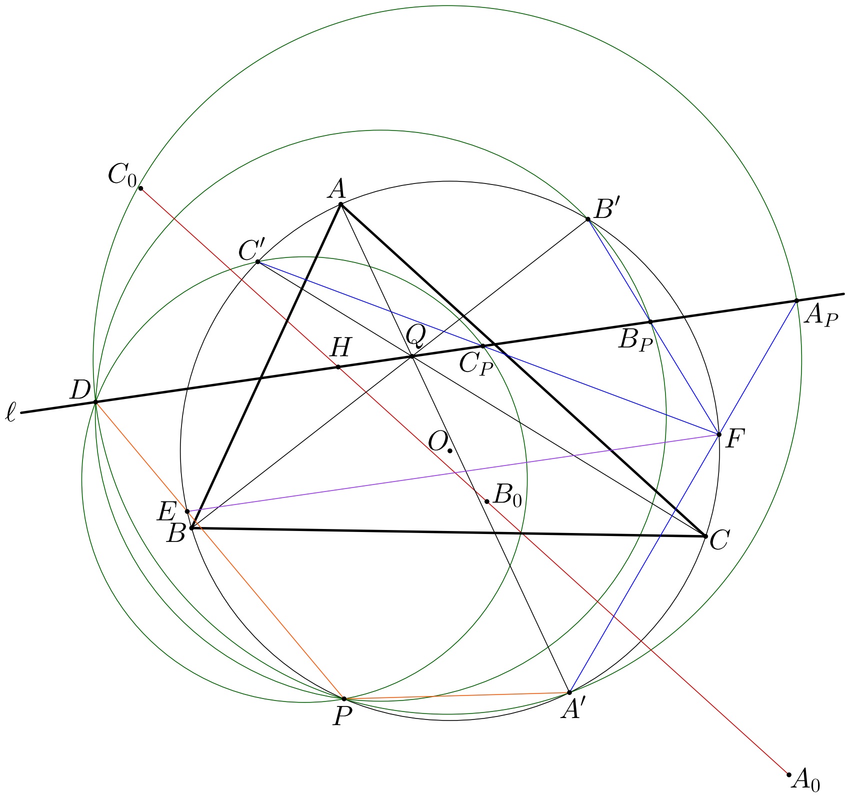
3. Một áp dụng của định lý 1.3

Định lí 3.1. *Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp (O) và trực tâm H. Một đường thẳng ℓ đi qua H. Cho điểm P nằm trên (O) và hai điểm Q và D cùng nằm trên ℓ. Các đường thẳng AQ, BQ, CQ theo thứ tự cắt lại (O) tại A', B', C'. Các đường tròn $(A'DP), (B'DP), (C'DP)$ theo thứ tự cắt ℓ tại A_P, B_P, C_P. Gọi A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là đối xứng của A_P qua BC, B_P qua CA, C_P qua AB. Khi đó bốn điểm A_0, B_0, C_0 và H nằm trên cùng một đường thẳng.*

• Khi P nằm trên ℓ thì đường thẳng $\overline{A_0, B_0, C_0, H_0}$ này chính là đường thẳng Steiner của P ứng với tam giác ABC.

Chứng minh. (xem hình 3). Đường thẳng DP cắt (O) tại P và E; dựng dây cung EF của (O) song song hoặc trùng với ℓ.
Sử dụng góc định hướng, ta có

$$\begin{aligned}
(A'A_P, EF) &\equiv (A'A_P, \ell) && \text{(vì } EF \text{ cùng phương với } \ell)\\
&\equiv (A_PA', A_PD) && \text{(vì } A_P, D \in \ell)\\
&\equiv (PA', PD) && \text{(vì } P \in (A'DA_P))\\
&\equiv (PA', PE) && \text{(vì } E \in DP)\\
&\equiv (FA', FE) && \text{(vì } F \in (A'EP)).
\end{aligned}$$



Hình 3.

Suy ra hai $A'A_P$ và $A'F$ trùng nhau. Do đó F thuộc $A'A_P$.
Chứng minh tương tự ta cũng có F cũng thuộc $B'B_P$ và $C'C_P$.
Áp dụng định lí 1.3 với chú ý rằng $A_P = FA' \cap \ell$, $B_P = FB' \cap \ell$ và $C_P = FC' \cap \ell$ thì ta có bốn điểm A_0, B_0, C_0 và H cùng nằm trên một đường thẳng.
Định lí 3.1 đã được chứng minh.

Tài liệu

[1] Steiner line, available at
http://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/SteinerLine.html.

[2] Steiner line, available at
http://www.xtec.cat/~qcastell/ttw/ttweng/llistes/l_Steiner_r.html.

[3] Droite de Steiner,
https://fr.wikipedia.org/wiki/Droite_de_Steiner.

[4] S. N. Collings: Reflections on a triangle 1, Math. Gazette, 57 (1973) 291–293.

[5] D. Grinberg, Anti-Steiner points with respect to a triangle, preprint 2003, available at http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/geometry2.html

[6] Jean-Pierre Ehrmann, Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral, Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 35–52.

[7] C. Pohoata, On the Euler Reflection Point, Forum Geometricorum, Volume 10 (2010) 157–163.

[8] P. Yiu, Introduction to the Geometry of the Triangle, 2001, new version of 2013, math.fau.edu/Yiu/YIUIntroductionToTriangleGeometry130411.pdf.

[9] R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, 1929, Dover reprint 2007.

[10] Nguyễn Minh Hà, Hình Học Phẳng Định Hướng, NXBGD Việt Nam.

BÀI TOÁN HAY LỜI GIẢI ĐẸP

Ban Biên Tập

GIỚI THIỆU

Chuyên mục này được lấy cảm hứng từ bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên ở số báo trước về bài toán số 6 trong kỳ thi IMO 2001 với 5 cách giải khác nhau. Mục này sẽ để dành viết về những bài toán hay, lời giải đẹp và những câu chuyện thú vị xung quan những bài toán và lời giải đó.

Tên của chuyên mục được mượn từ tên của một nhóm những người yêu toán trên Facebook do anh Nguyễn Văn Lợi sáng lập "*Bài toán hay – Lời giải đẹp – Đam mê toán học*". Chuyên mục ghi nhận các đề cử của bạn đọc và sẽ chọn đăng mỗi kỳ 1, 2 bài toán.

Số này chúng ta sẽ gặp lại thầy Nguyễn Duy Liên, GV trường THPT chuyên Vĩnh Phúc với câu chuyện về một bài toán bất đẳng thức trong đề thi chọn đội tuyển Iran năm 2016 và thầy Trần Nam Dũng với câu chuyện về một bài toán trong đề thi Olympic toán sinh viên quốc tế năm 2019.

1. Câu chuyện của thầy Nguyễn Duy Liên

Giải được bài toán Đại số hay và khó, ta đã cảm thích thú rồi. Nhưng nếu một bài toán đại số hay và khó mà giải được bằng nhiều cách mà từ đó ta có thể giải được, hay tạo ra một số bài toán cùng lớp bài toán đó thì niềm vui còn nhân lên nhiều lần. Bài viết này, tôi xin giới thiệu với các bạn 2 cách giải cho bài toán số 1 về bất đẳng thức khá hay và khó trong kỳ thi chọn đội tuyển dự thi Olympic của Iran năm 2016. Chúng ta cùng bắt đầu với bài toán đó nhé.

Bài toán 1. *Gọi a, b, c, d là các số thực dương sao cho*

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}=2.$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{d^2+1}{2}} \geqslant 3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)-8.$$

Lời giải 1. Viết bất đẳng thức lại như sau

$$\sum\left(\sqrt{\frac{a^2+1}{2}}-\sqrt{a}\right)\geqslant 2\left(\sum\sqrt{a}-4\right).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\sum\left(\sqrt{\frac{a^2+1}{2}}-\sqrt{a}\right)=\sum\frac{\frac{a^2+1}{2}-a}{\sqrt{\frac{a^2+1}{2}}+\sqrt{a}}\geqslant\frac{1}{2}\sum\frac{(a-1)^2}{\sqrt{2\left(\frac{a^2+1}{2}+a\right)}}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\sum\frac{(a-1)^2}{a+1}=\frac{1}{2}\sum\left(a-3+\frac{4}{a+1}\right)=\frac{1}{2}\sum a-2\\&=2\left(\frac{1}{4}\sum a-1\right)=2\left(\frac{1}{4}\sum(a+1)+\sum\frac{a}{a+1}-4\right)\\&=2\left(\sum\sqrt{a}-4\right).\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$. □

Lời giải 2. Ta cần chứng minh

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}-3\sqrt{x}\geqslant\frac{4}{x+1}-4,\quad\forall x>0.\tag{1}$$

Nếu $x=1$ thì bất đẳng thức (1) đúng.

Nếu $x\neq 1$, ta biến đổi (1) như sau

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}-\sqrt{x}\geqslant 2\sqrt{x}-\frac{4x}{x+1},$$

tương đương với

$$\frac{\frac{(x-1)^2}{2}}{\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}+\sqrt{x}}\geqslant\frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x+1},$$

$$(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)^2\geqslant 4\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}+\sqrt{x}\right),$$

$$(x+1)^2-4x\geqslant 2\sqrt{x}\left(2\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}-(x+1)\right),$$

$$(x-1)^2\geqslant\frac{2\sqrt{x}(x-1)^2}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}+(x+1)},$$

$$x+1+2\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}\geqslant 2\sqrt{x},$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng theo bất đẳng thức AM-GM.

Áp dụng (1) ta có

$$\sum \left(\sqrt{\frac{a^2+1}{2}} - \sqrt{a} \right) \geqslant \sum \left(2\sqrt{a} - \frac{4a}{a+1} \right),$$

hay là

$$\sum \sqrt{\frac{a^2+1}{2}} \geqslant 3 \sum a - 8$$

Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Qua hai lời giải trên cho ta vẻ đẹp của mỗi lời giải. Lời giải 1 là một sự kết hợp nhuần nhuyễn giữa các bất đẳng thức cổ điển. Lời giải 2 về giải tích thông qua phương pháp tiếp tuyến đánh giá hàm căn thức một biến với hàm phân thức bậc nhất liên quan đến giả thiết sau đó dùng biến đổi tương đương giải quyết bài toán. Ngoài cách giải trên các bạn cùng tôi tiếp tục đi tìm những lời giải mới, có thể cho những bài hay và khó trong vốn bài của bạn. Cứ như tôi thiết nghĩ đã mới khi trong đời ta đạt được các lời giải thật ngắn, đẹp và đắt. Nên ta vẫn trân trọng những lời giải của cá nhân tuy có dài dòng chút đỉnh với phương châm "*Cách giải này dài với bài này nhưng sẽ ngắn với bài khác*".

2. Câu chuyện của thầy Trần Nam Dũng

Bài toán dưới đây nằm trong đề Olympic sinh viên quốc tế năm 2019. Để giải nó, cần đến một số kiến thức cao cấp như hàm sinh, phương trình vi phân. Tuy nhiên, học sinh phổ thông có quen biết một chút với hàm sinh và tích phân hoàn toàn có thể hiểu tốt. Bài toán này cho thấy bên cạnh những ý tưởng chói sáng, một kỹ thuật cơ bản và điêu luyện cũng cần thiết để chúng ta giải toán thành công.

Bài toán 2 (IMC 2019). *Cho dãy số $a_0, a_1, \ldots$ được xác định bởi*

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2(n+3)a_{n+2} = (6n+9)a_{n+1} - na_n, \quad \forall n \geqslant 0.$$

Chứng minh rằng tất cả các số hạng của dãy số đều nguyên.

Để chứng minh tất cả các số hạng của một dãy số là số nguyên, cách tiếp cận căn bản nhất là tìm một hệ thức truy hồi mà theo đó a_{n+1} tính theo các số hạng trước đó với một biểu thức dạng đa thức có hệ số nguyên. Sự xuất hiện của các biểu thức chứa n trong hệ số gợi ý cho chúng ta đến đạo hàm của hàm sinh.

Ta có ý tưởng là dùng hàm sinh, rồi từ hệ thức truy hồi tìm ra phương trình hàm của hàm sinh. Giải phương trình hàm để tìm hàm sinh. Nếu thuận lợi thì khai triển hàm sinh để tìm công thức tổng quát cho a_n (trong trường hợp này sẽ còn một bước là chứng minh biểu thức tường minh này luôn nguyên). Một hướng đi khả dĩ khác là từ hàm sinh lại đi tìm một công thức truy hồi khác như phần phân tích ở trên.

Lời giải. Xét hàm sinh của dãy (a_n) :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 1 + 2x + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} \\ &= 1 + 2x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6n+9}{n+3} a_{n+1} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+3} a_n x^{n+2}. \end{aligned}$$

Đặt

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6n+9}{n+3} a_{n+1} x^{n+2}, \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+3} a_n x^{n+2}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} (x f_1(x))' &= \sum_{n=0}^{\infty} (6n+9) x^{n+2} = 6x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 3x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} \\ &= 6x^2 f'(x) + 3x(f(x) - 1), \end{aligned}$$

và

$$(x f_2(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x^3 f'(x).$$

Từ các hệ thức này, ta đi đến phương trình vi phân sau đây của f

$$(xf(x))' = 1 + 4x + (x f_1(x))' - (x f_2(x))' = 1 + 4x + 6x^2 f'(x) + 3x(f(x) - 1) - x^3 f'(x),$$

hay là

$$(x^3 - 6x^2 + x) f'(x) + (1 - 3x) f(x) - 1 - x = 0.$$

Viết dưới dạng chính tắc như sau

$$f'(x) + \frac{1-3x}{x^3 - 6x^2 + x} f(x) = \frac{1+x}{x^3 - 6x^2 + x}.$$

Phương trình trên thuộc dạng vi phân tuyến tính bậc nhất

$$f'(x) + a(x) f(x) = b(x).$$

Phương trình này giải bằng phương pháp thừa số tích phân như sau

Ta nhân hai vế của phương trình với $c(x)$ là một hàm số ta sẽ chọn thích hợp, để trở thành

$$c(x)f'(x) + c(x)a(x)f(x) = c(x)b(x).$$

Ta muốn rằng vế trái sẽ có dạng $(c(x)f(x))'$. Muốn vậy thì ta phải có $c'(x) = c(x)a(x)$ hay $(\ln(c(x)))' = a(x)$. Như vậy $c(x) = \exp\left(\int a(x)dx\right)$, chính là thừa số tích phân cần tìm. Từ đây ta tiếp tục tìm được

$$f(x) = \frac{\int c(x)b(x)dx}{c(x)}.$$

Như vậy, để tìm thừa số tích phân, ta cần tính tích phân hàm hữu tỷ $\frac{1-3x}{x^3-6x^2+x}$. Để tính tích phân này, ta tìm khai triển của biểu thức dưới dạng tổng của các phân số đơn giản, cụ thể

$$\frac{1-3x}{x^3-6x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-x_1} + \frac{C}{x-x_2}.$$

ở đây x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 6x + 1 = 0$.

Đồng nhất hệ số, ta được hệ điều kiện sau

$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B + C = 0 \\ -6A - B - 2C = -3 \end{cases}$$

Hay là $A = 1$, $B = C = -\frac{1}{2}$. Từ đây ta tính được

$$\int \frac{1-3x}{x^3-6x^2+x} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2(x-x_1)} - \frac{1}{2(x-x_2)}\right) dx = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2-6x+1}},$$

và

$$c(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-6x+1}}.$$

Tiếp sẽ là tích phân $c(x)b(x)$, trong tình huống của chúng ta là tích phân

$$\int \frac{1+x}{(x^2-6x+1)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Để tính tích phân dạng này, ta dự đoán là nó sẽ có dạng

$$g(x) = \frac{ax+b}{(x^2-6x+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Lấy đạo hàm của $g(x)$, ta được

$$g'(x) = \frac{a(x^2-6x+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{2x-6}{(x^2-6x+1)^{\frac{1}{2}}}(ax+b)}{x^2-6x+1} = \frac{a(x^2-6x+1) - (x-3)(ax+b)}{(x^2-6x+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Để kết quả là

$$\frac{1+x}{(x^2-6x+1)^{\frac{3}{2}}},$$

ta sẽ cần có

$$\begin{cases} a+3b=1 \\ -6a+3a-b=1 \end{cases}$$

Từ đây $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$. Vì vậy

$$\int \frac{1+x}{(x^2-6x+1)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-6x+1}} + C.$$

Và từ đó

$$f(x) = \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+C\sqrt{x^2-6x+1}}{x}.$$

Cho x dần về 0 với chú ý $f(0)=1$, ta tìm được $C=-\frac{1}{2}$. Từ đây

$$f(x) = \frac{-x+1-\sqrt{x^2-6x+1}}{2x}.$$

Tìm khai triển Taylor của hàm $\sqrt{x^2-6x+1}$ là không khả thi, do đó hướng tiếp cận tìm công thức tường minh cho an có thể loại bỏ. Ta thấy $f(x)$ có dạng nghiệm của một phương trình bậc hai. Bằng cách tính ngược từ công thức nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

ta dễ dàng tìm được phương trình đó là

$$xf^2(x)+(x-1)f(x)+1=0.$$

Bây giờ thay công thức hàm sinh vào, ta được

$$x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 + (x-1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + 1 = 0.$$

Tính hệ số của x^{n+1} ở vế trái, ta được

$$\sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i} + a_n - a_{n+1} = 0.$$

Từ đấy ta có

$$a_{n+1} = a_n + \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}.$$

Hiển nhiên là từ công thức này, ta suy ra an nguyên với mọi n. □

Về Kỳ Thi Thách Thức Toán Học Trực Tuyến

BTC kỳ thi Thách Thức Toán Học

1. Ý tưởng hình thành kỳ thi

Dưới ảnh hưởng của dịch COVID-19, trong thời gian này các hoạt động giáo dục trực tuyến được đẩy mạnh. Tuy nhiên, nếu chỉ dạy và học trực tuyến một cách đơn thuần trong thời gian dài, sự hứng thú và tinh thần học của học sinh ít nhiều sẽ bị chùng xuống, động lực dạy học của thầy cô và học sinh cũng sẽ phần nào bị ảnh hưởng. Điều này dẫn đến sự cần thiết có những sân chơi mới cho các bạn học sinh, giúp tạo thêm sự hứng khởi, giữ vững và khuyến khích tinh thần học tập cho các bạn trong thời gian nghỉ dài. Ý tưởng cho một kỳ thi online thuần Việt cho các bạn học sinh từ lớp 3 đến lớp 12 được các thành viên thuộc dự án BM2E Bring Math to Everyone hình thành từ đó.

Hình 1: Logo Thách thức Toán học trực tuyến

2. Cách thức đăng kí

- Thí sinh đăng kí cá nhân và giáo viên đăng kí tập thể truy cập link https://bom.to/P4IGQ4, điền đầy đủ các thông tin theo yêu cầu và nhấn "Gửi" để hoàn tất việc đăng kí.

Hình 2: BM2E (Bring Math to Everyone): Đơn vị tổ chức kỳ thi

- Trong vòng 48 giờ sau khi đăng kí, thí sinh hoặc giáo viên đăng kí sẽ nhận được email phản hồi từ ban tổ chức, kèm thông tin chuyển khoản lệ phí thi (100,000 VNĐ). Sau khi nhận email phản hồi và thông tin chuyển khoản, thí sinh đăng kí cá nhân tiến hành chuyển khoản theo cú pháp sau đây:

  [Họ và tên thí sinh][Lớp][Ngày sinh][LephithiOMC2020]

  Đối với giáo viên đăng kí tập thể, sau khi nhận email phản hồi và thông tin chuyển khoản, quý thầy cô tiến hành chuyển khoản theo cú pháp dưới đây:

  [Họ và tên giáo viên đăng kí][Đơn vị][Số lượng thí sinh đăng kí][LephithiOMC2020]

3. Hình thức thi

3.1. Vòng 1: Tournament

- Thí sinh sau khi hoàn tất mọi thủ tục đăng kí (điền form, chuyển khoản) sẽ nhận được tài khoản (tên đăng nhập + mật khẩu) cùng hướng dẫn truy cập vào hệ thống thi online muộn nhất 24 giờ trước ngày thi.

- Vào lúc $19:30$ ngày $26/04/2020$, thí sinh đăng nhập vào hệ thống theo hướng dẫn và bắt đầu làm bài trong thời gian 90 phút. Lưu ý: *Thí sinh chỉ được nộp bài một lần.*

3.2. Vòng 2: Super Cup

- Sau khi công bố kết quả, 8% thí sinh cao điểm nhất ở mỗi khối lớp sẽ tiếp tục thi vòng Super Cup. Cách thức thi vòng này sẽ được thông báo sau tới các thí sinh đủ điều kiện.

4. Tinh thần kỳ thi

Với cách thức tổ chức trực tuyến, sự thành công của kỳ thi sẽ phụ thuộc rất nhiều vào tinh thần tự giác của các thí sinh. Yêu cầu quan trọng nhất của BTC đối với các thí sinh là làm bài độc lập, trung thực, không nhận sự trợ giúp từ người khác. Chúng ta tham gia với tinh thần thoải mái, mục đích chính học hỏi, tạo thêm động lực và giữ vững tinh thần trong thời gian nghỉ dài, chứ không phải để thi đấu tranh đua với nhau.

Tuy nhiên, Ban tổ chức cũng cần có những biện pháp của riêng mình để phát hiện những trường hợp không trung thực trong thời gian thi. Nếu Ban tổ chức phát hiện một bài thi hoặc một nhóm bài thi nếu phát hiện có các dấu hiệu của sự gian lận.

5. Cơ cấu giải thưởng

1. Tất cả các thí sinh đăng kí tham dự sẽ được nhận một tài khoản VIP trên trang TaiLieu.vn `https://tailieu.vn/` (trị giá 120,000đ/tài khoản)
2. Cơ cấu giải thưởng cho vòng Tournament:
   - ***Giải nhất (8% thí sinh mỗi nhóm lớp):*** Giấy chứng nhận, quyền được thi tiếp vòng Super Cup, học bổng là 1 trong số các môn học thuộc nhóm CC1 của Đại học Trực tuyến FUNiX hoặc một lớp Scratch do Đại học Trực tuyến FUNiX và mentor Trương Đắc Tài đồng tài trợ. Chi tiết xem ở trang sau.
   - ***Giải nhì (12% thí sinh mỗi nhóm lớp):*** Giấy chứng nhận, quà tặng từ Sputnik Education.
   - ***Giải ba (20% thí sinh mỗi nhóm lớp):*** Giấy chứng nhận.
3. Giải thưởng vòng Super Cup sẽ được thông báo sau tới các thí sinh đạt giải.

6. Đề thi

Đề thi Thách thức Toán học trực tuyến gồm ba phần:

1. Phần A gồm 8 câu hỏi trắc nghiệm với 5 phương án A, B, C, D, E. Thí sinh chọn 1 trong 5 phương án để trả lời. Trả lời đúng được 4 điểm, trả lời sai hoặc không trả lời không bị trừ điểm.
2. Phần B gồm 8 câu hỏi điền đáp số. Thí sinh tính toán và điền đáp số để trả lời. Lưu ý trong ô điền đáp số, thí sinh chỉ điền số, dấu chấm, dấu phẩy, các kí hiệu toán học,... chứ không điền kí tự chữ cái.
3. Phần C gồm một bài toán có nhiều câu hỏi điền đáp số nhỏ. Thí sinh sẽ làm bài theo yêu cầu cụ thể trên đề thi của mỗi nhóm thi, vì mỗi nhóm thi thí sinh sẽ được yêu cầu điền đáp số theo một cách khác nhau.

Dưới đây Ban tổ chức xin đăng một số câu hỏi mẫu để các bạn học sinh từng nhóm thi tham khảo.

6.1. Nhóm lớp 3-4

Câu 1. Tìm chữ số tận cùng của tích sau:

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 14 \times 15.$$

A. 0 B. 4 C. 5 D. 8 E. Đáp số khác

Câu 2. Có bao nhiêu số có 2 chữ số chia hết cho 5 được lập từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$? (số chia hết cho 5 là số có tận cùng là 0 hoặc 5)

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12 E. Đáp số khác

Câu 3. Tìm những số còn thiếu trong dãy số sau:

$$15,\ 21,\ 18,\ 24,\ (...),\ (...)$$

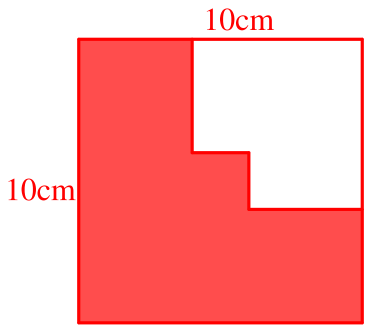
A. 24 và 30 B. 22 và 28 C. 21 và 27 D. 23 và 29 E. Đáp số khác

Câu 4. Số lớn nhất có 5 chữ số mà tổng của các chữ số là 27 là:

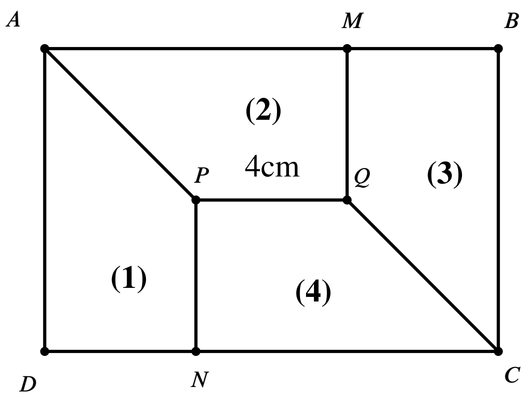
A. 98765 B. 98730 C. 99900 D. 99999 E. Đáp số khác

Câu 5. Cả 3 lớp 4A, 4B, 4C trồng được 120 cây. Lớp 4B trồng được nhiều hơn lớp 4A 5 cây nhưng lại kém lớp 4C 8 cây. Hỏi lớp 4C trồng được bao nhiêu cây?

Câu 6. Chu vi của hình được tô màu đỏ là bao nhiêu?



Câu 7. Biết rằng 4 hình thang trong hình sau là giống nhau, hãy tính diện tích của hình chữ nhật lớn.



Câu 8. Có 30 câu hỏi trong một bài thi toán. Mỗi câu trả lời đúng được cộng thêm 5 điểm và mỗi câu trả lời sai sẽ bị trừ đi 2 điểm. Nếu Colin được 115 điểm thì bạn ấy trả lời sai bao nhiêu câu?

Câu 9. Sudoku là một trò chơi câu đố sắp xếp chữ số dựa trên logic theo tổ hợp. Mục tiêu của trò chơi là điền các chữ số vào một lưới 9×9 sao cho mỗi cột, mỗi hàng, và mỗi phần trong số chín lưới con 3×3 cấu tạo nên lưới chính (cũng gọi là "hộp", "khối", hoặc "vùng") đều chứa tất cả các chữ số từ 1 tới 9. Câu đố đã được hoàn thành một phần, người chơi phải giải tiếp bằng việc điền số. Mỗi câu đố được thiết lập tốt có một cách làm duy nhất.

Sudoku có nhiều biến thể về kích thước lưới ô vuông, cách điền số,... Biến thể sau đây là một biến thể về kích thước, trong đó lưới 9×9 được thay bằng lưới 6×6 được chia thành các lưới 3×2.

a	b	2	6	5	4
4	6	c	d	e	f
g	3	h	4	i	5
5	j	4	3	1	k
l	m	n	2	o	3
p	4	q	r	s	t

Hãy điền các số thích hợp vào các ô chứa chữ trên lưới 6×6 trên sao cho mỗi hàng, mỗi cột và mỗi hình chữ nhật 3×2 đều có đủ các số từ 1 đến 6.

6.2. Nhóm lớp 5-6

Câu 1. Hỏi tổng 3 chữ số tận cùng của tích sau là bao nhiêu?

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \& \times 14 \times 15$$

A. 0 B. 9 C. 10 D. 12 E. Đáp số khác

Câu 2. Các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ mỗi chữ số được dùng đúng một lần để tạo ra hai số. Hỏi tổng của hai số này nhỏ nhất có thể bằng bao nhiêu?

A. 379 B. 381 C. 579 D. 480 E. Đáp số khác

Câu 3. Có bao nhiêu số có các chữ số khác nhau mà có tích các chữ số là 18? Ví dụ 36, 129, ...

A. 8 B. 16 C. 18 D. 20 E. Đáp số khác

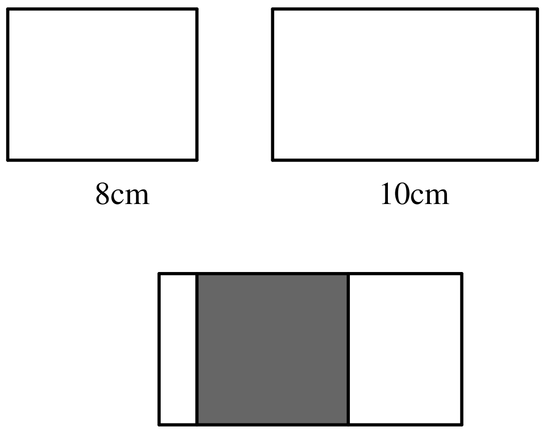
Câu 4. Cho hình bên dưới. Ta chỉ cần đổi chỗ hai số nào đó thì tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột và hai đường chéo bằng nhau; hỏi tổng hai số bằng bao nhiêu?

13	2	3	16
8	9	10	5
12	7	6	11
1	14	15	4

A. 10 B. 12 C. 16 D. 20 E. Đáp số khác

Câu 5. Hôm nay thầy hái được tổng cộng 240kg trái cây bao gồm bưởi, cam và chanh. Biết rằng tổng khối lượng cam và chanh nặng gấp đôi bưởi. Tổng khối lượng cam nặng hơn chanh 40kg. Hỏi thầy hái bao nhiêu kg cam?

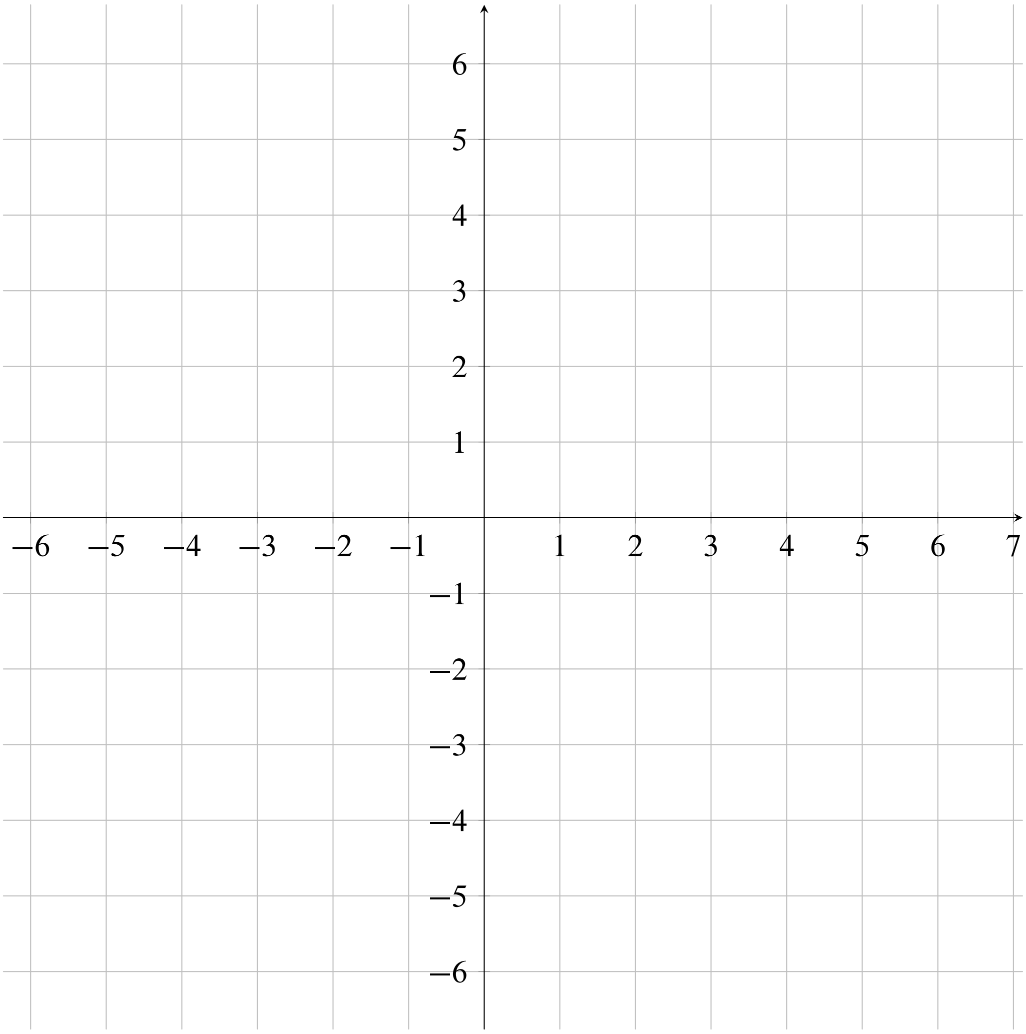
Câu 6. Ta có hai tấm bìa hình chữ nhật có cùng chiều rộng và có chiều dài lần lượt là 8cm và 10cm. Người ta tạo ra hình chữ nhật mới bằng cách chồng hai tấm bìa lên như nhau, biết rằng phần hình chồng lên nhau (phần tô đậm) là một hình vuông (như hình vẽ bên dưới). Tính chu vi của hình chữ nhật mới.



Câu 7. Nhân dịp khai trương có chương trình giảm giá, mẹ đi mua một chiếc xe đạp cho Nhi. Mẹ thấy chiếc xe đạp cần mua giảm 20% nên số tiền mẹ mang theo còn dư $260,000$ VNĐ. Nhưng nếu không giảm (mua với giá bình thường) thì số tiền mẹ sẽ thiếu $40,000$ VNĐ. Hỏi giá bình thường (chưa giảm) của chiếc xe đạp là bao nhiêu?

Câu 8. Hai chiếc xe A và B đi ngược chiều nhau từ trên một đoạn đường. Xe A chạy với vận tốc 50km/giờ, xe B chạy với vận tốc 45km/giờ. Hai xe gặp nhau tại vị trí cách điểm chính giữa một đoạn 10km. Tính chiều dài đoạn đường? (đơn vị km)

Câu 9. Ta điền vào các điểm có tọa độ nguyên của mặt phẳng tọa độ các số nguyên dương $1, 2, 3, 4, ...$ theo hình xoắn trôn ốc như sau: số 1 điền vào điểm $(0, 0)$, số 2 điền vào điểm $(0, 1)$, số 3 điền vào điểm $(1, 1)$, số 4 điền vào điểm $(1, 0)$, số 5 điền vào điểm $(1, -1)$, số 6 điền vào điểm $(0, -1), ...$



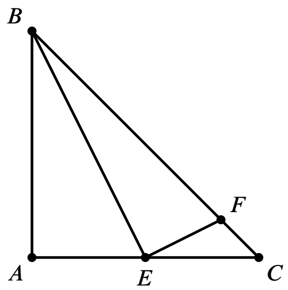
1. Cho biết điểm $(3, 3)$ được điền số mấy?
2. Cho biết số 30 được điền vào điểm có tọa độ nào? Viết hai tọa độ phân biệt nhau bởi dấu phẩy, hoành độ trước, tung độ sau.
3. Điểm $(5, 5)$ được điền số mấy?
4. Điểm $(10, 5)$ được điền số mấy?
5. Số 2020 được điền vào điểm có tọa độ nào?

6.3. Nhóm lớp 7-8

Câu 1. Có một số khối vuông đỏ và một số khối vuông xanh, mỗi khối vuông đều có khả năng chuyển màu (từ đỏ sang xanh hoặc từ xanh sang đỏ). Nếu có $\frac{6}{7}$ số khối vuông đỏ chuyển sang màu xanh và có $\frac{4}{5}$ số khối vuông xanh chuyển màu sang đỏ thì số khối vuông xanh và số khối vuông đỏ hoán đổi cho nhau. Hỏi tỉ lệ số khối vuông xanh trong tổng số các khối vuông ban đầu bằng bao nhiêu?

A. $\frac{7}{12}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{2}{3}$ E. Đáp số khác

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = 4\sqrt{3}$, trung tuyến BE. Lấy điểm F trên cạnh BC sao cho $FE \perp BE$. Tính diện tích tam giác CEF.

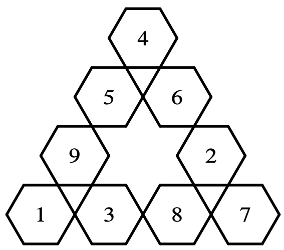


A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $2\sqrt{3}$ E. Đáp số khác

Câu 3. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $4x^2 + y^2 = 4x - 2y + 7$. Tìm giá trị lớn nhất của $5x + 6y$.

A. 16 B. 17 C. 18 D. 19 E. Đáp số khác

Câu 4. Trong hình vẽ bên dưới, các số tự nhiên $1, 2, \ldots, 9$ được điền vào các hình lục giác đều sao cho tổng tất cả các số ở các lục giác trên mỗi cạnh của tam giác lớn đều bằng 19.



Bây giờ, hãy đổi chỗ các số sao cho tổng tất cả các số ở các lục giác trên mỗi cạnh của tam giác lớn đều bằng nhau. Gọi M là tổng chung lớn nhất thu được và m là tổng chung nhỏ nhất thu được (tổng chung là tổng của tất cả các số ở các lục giác trên một cạnh của tam giác lớn). Tính $M + m$.

A. 40 B. 41 C. 42 D. 43 E. Đáp số khác

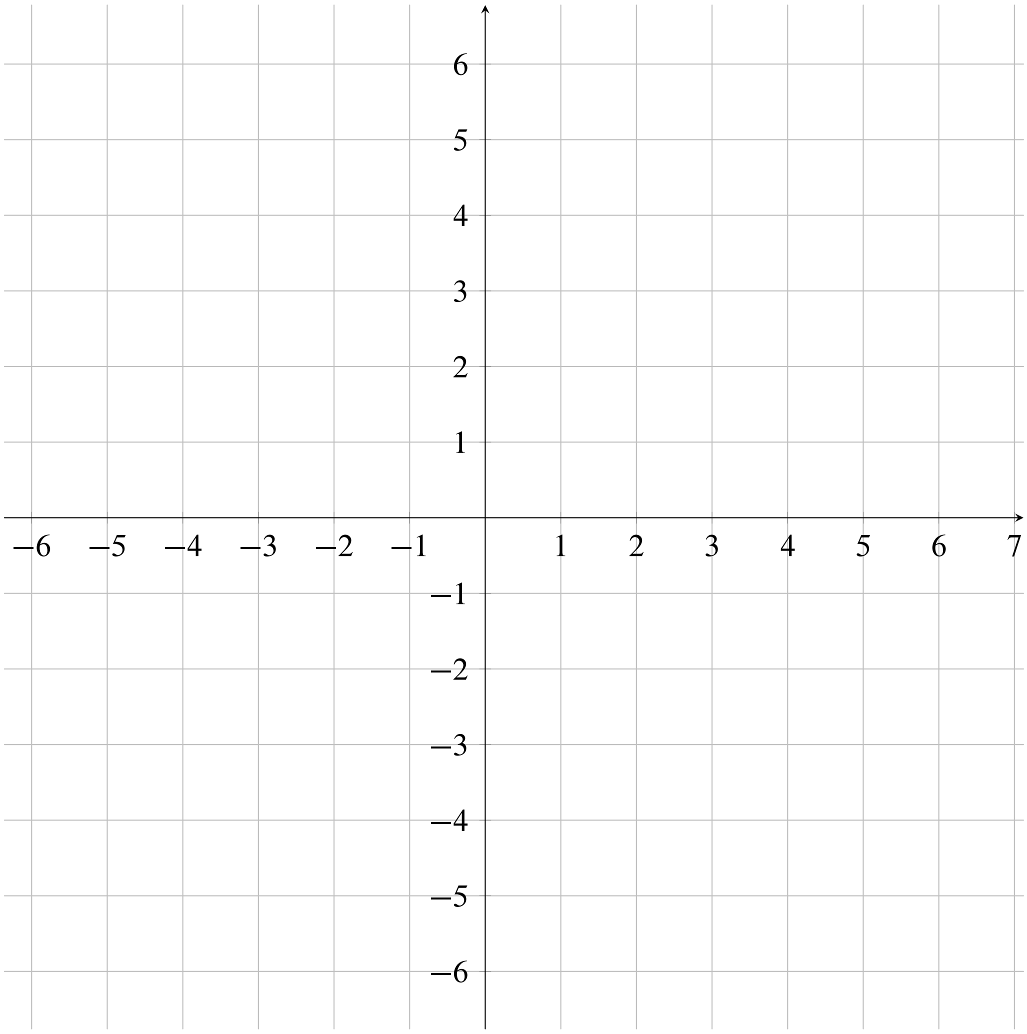
Câu 5. Cho số thực x thay đổi. Khi đó, giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{2019-|x-11|}{|x-4|+|x-25|}$ là bao nhiêu?

Câu 6. Có 1082 người tham gia bầu cử để chọn ra 14 đại biểu. Hỏi một đại biểu cần ít nhất bao nhiêu phiếu bầu để chắc chắn trúng cử, nếu số đại biểu lớn hơn 14, mỗt người chỉ bầu cho một đại biểu và mọi phiếu bầu đều hợp lệ?

Câu 7. Cho số nguyên a khác 0. Biết rằng $P^2 + 695$ chia hết cho a với mọi số nguyên tố P lớn hơn 3. Tìm giá trị lớn nhất của a.

Câu 8. Có một trung đội xếp thành một hàng dài 50 m đang tiến về phía trước với tốc độ không đổi thì ở phía sau, một người chỉ huy chạy lên gửi một thông tin đến vị trí đầu hàng, sau đó quay trở lại vị trí cuối hàng. Biết vận tốc của người chỉ huy là không đổi trong quá trình di chuyển và tính từ lúc người chỉ huy bắt đầu chạy đến lúc người chỉ huy quay về cuối hàng thì cả đội đã đi được 100 m. Hỏi người chỉ huy đã đi một quãng đường là bao nhiêu?

Câu 9. Ta điền vào các điểm có tọa độ nguyên của mặt phẳng tọa độ các số nguyên dương $1, 2, 3, 4, \ldots$ theo hình xoắn trôn ốc như sau: số 1 điền vào điểm $(0, 0)$, số 2 điền vào điểm $(0, 1)$, số 3 điền vào điểm $(1, 1)$, số 4 điền vào điểm $(1, 0)$, số 5 điền vào điểm $(1, -1)$, số 6 điền vào điểm $(0, -1)$, ...



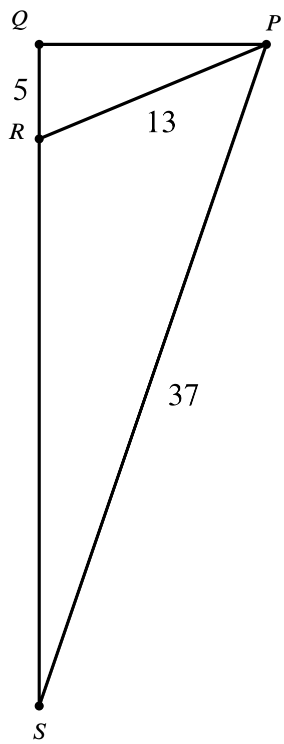
1. Cho biết điểm $(3, 3)$ được điền số mấy?
2. Cho biết số 30 được điền vào điểm có tọa độ nào? Viết hai tọa độ phân biệt nhau bởi dấu phẩy, hoành độ trước, tung độ sau.
3. Điểm $(5, 5)$ được điền số mấy?
4. Điểm $(10, 5)$ được điền số mấy?
5. Số 2020 được điền vào điểm có tọa độ nào?

6.4. Nhóm lớp 9-10

Câu 1. Với số nguyên dương n, ta ký hiệu $n!$ là tích các số nguyên dương từ 1 đến n. Ví dụ $4! = 1.2.3.4 = 24$. Ta cũng quy ước $0! = 1$. Với $n \geqslant 2$, biểu thức $\dfrac{(n-2)!(n+1)!}{(n!)^2}$ có thể rút gọn lại thành:

A. $\dfrac{1}{n}$ B. $\dfrac{1}{n-1}$ C. $\dfrac{n-1}{n(n+1)}$ D. $\dfrac{n+1}{(n-1)n}$ E. Đáp án khác

Câu 2. Trong hình vẽ dưới đây, chu vi tam giác PQR bằng bao nhiêu?



A. 55 B. 74 C. 80 D. 84 E. Đáp án khác

Câu 3. Có một viên xúc xắc đặc biệt với các mặt ghi các số $2, 2, 3, 3, 5$ và 8. Người ta tung con xúc xắc hai lần rồi cộng kết quả hai lần tung lại. Hỏi ta có thể thu được bao nhiêu tổng khác nhau?

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9 E. Đáp án khác

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn hay bằng 100 và có đúng 12 ước số nguyên dương?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. Đáp án khác

Câu 5. Ta định nghĩa một phép toán mới trên hai số thực x, y như sau

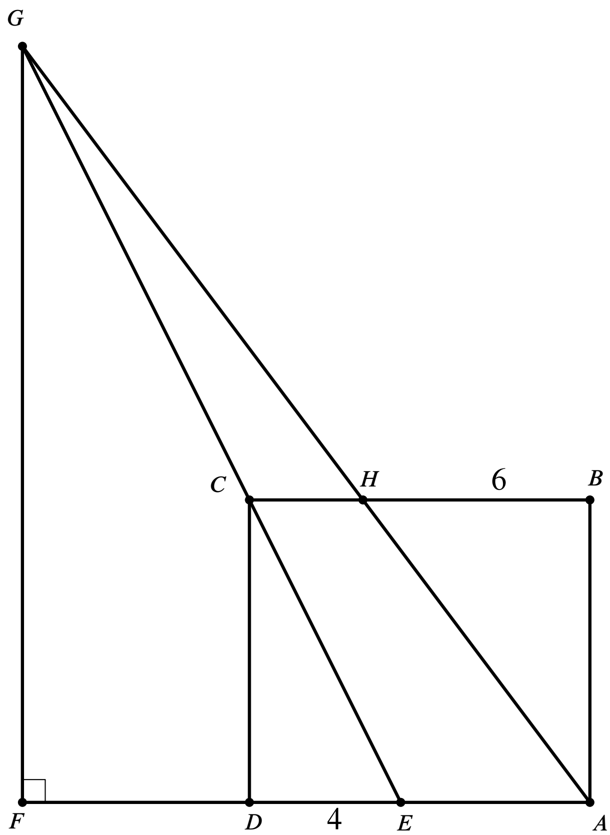
$$x * y = ax + by + c,$$

trong đó a, b và c là các hằng số. Nếu $3 * 5 = 16$ và $4 * 7 = 30$, thì $1 * 1$ bằng bao nhiêu?

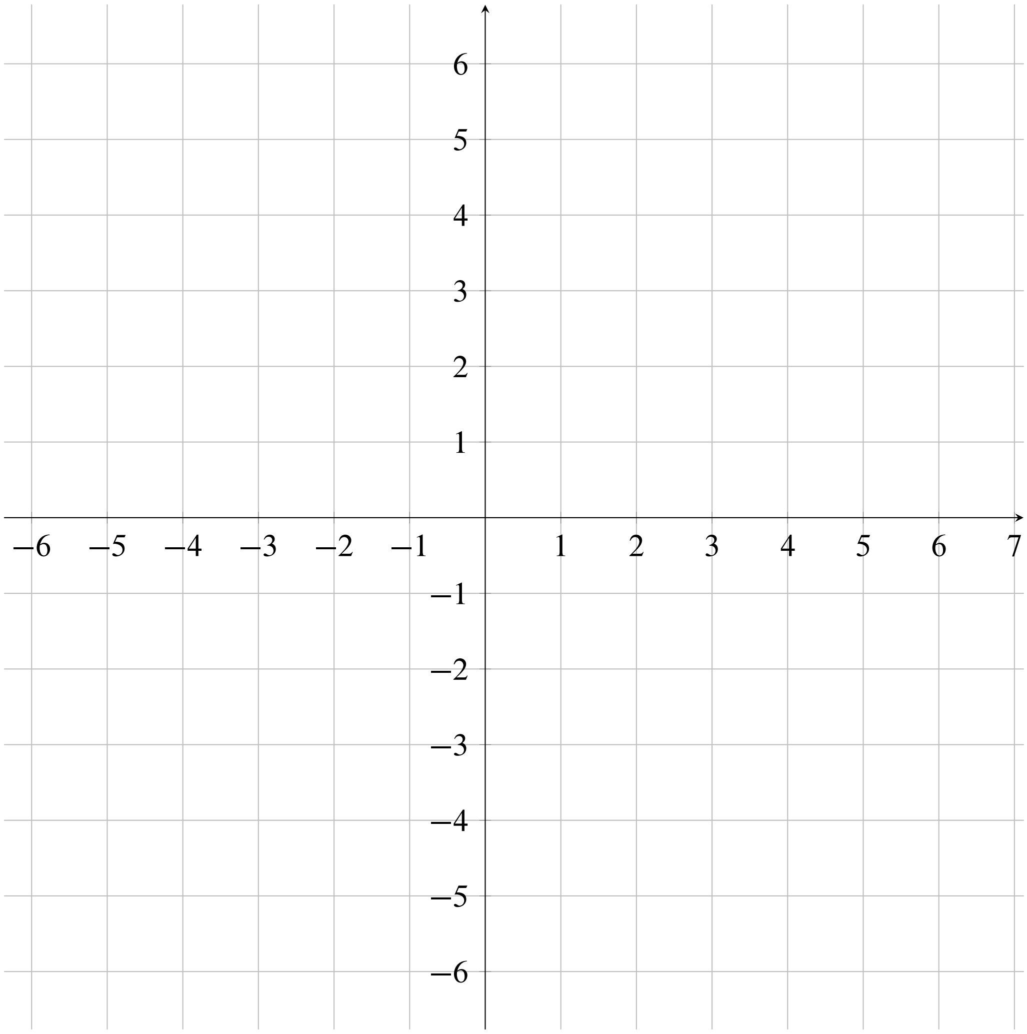
Câu 6. Tổng của một số số nguyên dương phân biệt bằng 30. Hỏi tích của chúng lớn nhất bằng bao nhiêu?

Câu 7. Trong hộp có 8 viên bi màu vàng, 7 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Hoàng bốc ra N viên bi mà không nhìn. Hoàng muốn rằng cho dù thế nào thì trong hộp cũng còn lại ít nhất 4 viên bi cùng màu nào đó và ít nhất 3 viên bi cùng một màu khác. Hỏi N lớn nhất có thể bằng bao nhiêu?

Câu 8. Trong hình chữ nhật $ABCD$ ta có $AB = 8, BC = 9$. H là điểm trên BC sao cho $BH = 6$, E là điểm trên AD sao cho $DE = 4$. Các đường thẳng EC và AH cắt nhau tại G, và điểm F trên đường thẳng AD sao cho $GF \perp AF$. Tìm độ dài GF.



Câu 9. Ta điền vào các điểm có tọa độ nguyên của mặt phẳng tọa độ các số nguyên dương $1, 2, 3, 4, \ldots$ theo hình xoắn trôn ốc như sau: số 1 điền vào điểm $(0, 0)$, số 2 điền vào điểm $(0, 1)$, số 3 điền vào điểm $(1, 1)$, số 4 điền vào điểm $(1, 0)$, số 5 điền vào điểm $(1, -1)$, số 6 điền vào điểm $(0, -1)$, ...



1. Cho biết điểm $(3, 3)$ được điền số mấy?
2. Cho biết số 30 được điền vào điểm có tọa độ nào? Viết hai tọa độ phân biệt nhau bởi dấu phẩy, hoành độ trước, tung độ sau.
3. Điểm $(10, 10)$ được điền số mấy?
4. Số 2020 được điền vào điểm có tọa độ nào?
5. Điểm $(30, 15)$ được điền số mấy?