

+ CÂU CHUYỆN VỀ SỐ HOÀN HẢO  
Trần Nam Dũng

+ TRÒ CHƠI VÔ HẠN VỚI  
THÔNG TIN HOÀN HẢO  
Lý Ngọc Tuệ

+ TRỊ SỐ P RA TÒA  
Nguyễn Văn Tuấn

+ HỘI CHỨNG CAROL  
José-Manuel Rey



“

- Chúa trời có một cuốn sách trong đó chứa những lời giải đẹp của tất cả các bài toán. Nhiệm vụ của con người chỉ là tìm ra chúng.  
Paul Erdős

- Không có gì đẹp đẽ, huyền bí, sâu sắc nhưng đồng thời cũng vô dụng như số hoàn hảo.  
Martin Gardner

”



Chủ biên:

TRẦN NAM DŨNG

Biên tập viên:

VÕ QUỐC BÁ CÂN

TRẦN QUANG HÙNG

NGUYỄN VĂN HUYỆN

NGUYỄN TIẾN LÂM

LÊ PHÚC LŨ

NGUYỄN TẮT THU

ĐẶNG NGUYỄN ĐỨC TIẾN

13

16

THÁNG 2

# LỜI NGỎ CHO EPSILON SỐ 7

Ban Biên tập Epsilon

Epsilon số 7 được ra đời vào đúng dịp Tết Nguyên đán, khi năm con Dê chuyển cây gậy thời gian cho năm con Khỉ. Xin được thay mặt cho Ban Biên tập và đội ngũ làm báo gửi lời chúc mừng năm mới đến toàn thể các tác giả, cộng tác viên, độc giả và ủng hộ viên của Epsilon. Chúc tất cả mọi người một năm mới an lành, hạnh phúc, sức khỏe và thành công.

Quay trở về với Epsilon, ta thấy, dù còn vất vả nhưng thử thách trong năm đầu tiên của Epsilon đã được vượt qua, 6 số báo đầy đặn về nội dung và ngày càng đẹp về hình thức đã được gửi đến quý độc giả.

Nghiên cứu tiếng Nga, ta sẽ thấy một điều khá thú vị. Nói về số đếm thì 1 (odin) là số ít, nhưng 2, 3, 4 (dva, tri, treture) vẫn chưa phải là số nhiều, mà mới là số vừa vừa. Phải từ 5 trở lên tiếng Nga mới coi là nhiều hẳn.

Xét theo quan điểm như thế thì đến số Epsilon 7 này, cũng có thể coi là Epsilon đã chuyển được sang trạng thái “nhiều”. Nhưng số 7 là số đầu tiên của năm thứ hai, làm năm chuyển tiếp từ số ít sang số nhiều vừa. Và chặng đường tiếp theo là 3 năm nữa để có thể chuyển từ trạng thái “tờ báo xuất bản được vài năm” sang trạng thái “tờ báo xuất bản được nhiều năm”.

Đôi chút về số báo Xuân, số báo được chuẩn bị trong năm Ất Mùi và hoàn tất trong năm Bính Thân này. Epsilon 7 vẫn trung thành với định hướng đa dạng về nội dung, phong cách, mức độ chuyên sâu. Trong số này sẽ có những bài viết khá chuyên sâu của các tác giả Lý Ngọc Tuệ (Trò chơi vô hạn với thông tin hoàn hảo), Ngô Quang Hưng (Bất đẳng thức kiểu Shannon và vài ứng dụng), các bài viết về các vấn đề chuyên sâu nhưng bằng ngôn ngữ phổ thông, thường thức của Nguyễn Văn Tuấn (Trị số P ra tòa), Job Bouwman (Phép biến đổi Fourier có ý nghĩa Vật lý gì?), các bài toán mang tính học thuật (ở mức độ phổ thông) của Võ Quốc Bá Cẩn (Sự bằng nhau của hai đa thức và ứng dụng vào giải phương trình hàm), Nguyễn Văn Thế (Về một bổ đề số học), Nguyễn Văn Huyện (Bổ đề hoán vị), Trần Ngọc Thắng (Sử dụng hệ thặng dư đầy đủ trong một số bài toán đếm) Lê Thị Minh Thảo (Công cụ truy hồi và quy nạp trong các bài toán trò chơi), Nguyễn Tiến Dũng (Về một bài toán hình học trong kỳ thi VMO 2016), Trần Quang Hùng (Về bài hình học G5 trong IMO Short list năm 2000).

Về các chuyên mục, chuyên mục lịch sử toán học sẽ góp mặt với bài Câu chuyện về số hoàn hảo do Trần Nam Dũng tổng hợp, toán thường thức sẽ góp mặt với bài Hội chứng Carol do thành viên chuyên san EXP ĐHKHTN Tp HCM đóng góp, chuyên mục cầu nối giữa toán phổ thông và toán hiện đại sẽ có bài về đường thẳng Simson của tác giả Ngô Quang Dương, mục toán giải trí sẽ là Bài toán cân tiền của Đặng Nguyễn Đức Tiến và mục điểm sách sẽ có bài của nhà đồng sáng lập Tủ sách Sputnik Nguyễn Tiến Dũng. Chuyên mục Bài toán hay – Lời giải đẹp sẽ giới thiệu những chứng minh đẹp đẽ và bất ngờ cho đẳng thức  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$  còn chuyên mục Các vấn đề cổ điển và hiện đại sẽ giới thiệu lời giải và bình luận các bài toán về khối vuông Rubik và đẳng đề thi mẫu của kỳ thi Olympic toán dành cho học sinh THPT trong

khuôn khổ kỳ thi Olympic toán sinh viên do Hội toán học Việt Nam tổ chức vào tháng 4 sắp tới. Epsilon 7 thật sự là một sự hòa quyện đẹp đẽ và đầy màu sắc, vừa có sự kết nối vừa có sự tung hứng trong các chủ đề toán trò chơi, xác suất thống kê, số học, toán thường thức, lịch sử toán học...

Ban biên tập cảm ơn sự ủng hộ của các tác giả và sự đón nhận nồng nhiệt của các độc giả. Hãy tiếp tục chung tay sát cánh cùng chúng tôi trên con đường đầy gian nan phía trước.

Đi nhiều người, ta sẽ đi rất xa.

## MỤC LỤC

### *Ban Biên tập Epsilon*

Lời ngỏ cho Epsilon số 7 . . . . .	3
------------------------------------	---

### *Ngô Quang Hưng*

Bất đẳng thức kiểu Shannon và vài ứng dụng . . . . .	7
--	---

### *Lý Ngọc Tuệ*

Trò chơi vô hạn với thông tin hoàn hảo . . . . .	23
--	----

### *Nguyễn Văn Tuấn*

Trị số $P$ ra toà . . . . .	35
-----------------------------	----

### *Job Bouwman*

Phép biến đổi Fourier có ý nghĩa vật lý gì? . . . . .	41
---	----

### *Đặng Nguyễn Đức Tiến*

Bài toán cân tiền phần 2: Các bài toán sử dụng cân số . . . . .	51
---	----

### *Trần Nam Dũng*

Câu chuyện về số hoàn hảo . . . . .	61
-------------------------------------	----

### *Nguyễn Văn Thế*

Về một bổ đề số học . . . . .	71
-------------------------------	----

### *Võ Quốc Bá Cẩn*

Sự bằng nhau của hai đa thức và ứng dụng vào giải phương trình hàm . . . . .	79
--	----

### *Nguyễn Văn Huyện*

Bổ đề hoán vị . . . . .	89
-------------------------	----

### *Trần Ngọc Thắng*

Sử dụng hệ thặng dư đầy đủ trong một số bài toán đếm . . . . .	103
--	-----

*Lê Thị Minh Thảo*

Công cụ truy hồi và quy nạp trong các bài toán trò chơi . . . . . 111

*Nguyễn Tiến Dũng*

Về một bài toán hình học trong kỳ thi VMO 2016 . . . . . 125

*Trần Quang Hùng*

Về bài hình học G5 trong IMO Shortlist năm 2000 . . . . . 137

*Ngô Quang Dương*

Đường thẳng Simson . . . . . 153

*Trần Nam Dũng*

Bài toán hay lời giải đẹp . . . . . 171

*José-Manuel Rey*

Hội chứng Carol . . . . . 175

*Trần Nam Dũng*

Các vấn đề cổ điển và hiện đại . . . . . 181

*Nguyễn Tiến Dũng*

Tủ sách toán phổ thông . . . . . 193

# BẤT ĐẲNG THỨC KIỂU SHANNON VÀ VÀI ỨNG DỤNG

Ngô Quang Hưng  
(Đại học Buffalo, Mỹ)

Entropy là khái niệm cơ bản của lý thuyết thông tin, có cực kỳ nhiều ứng dụng, cả lý thuyết lẫn thực hành. Bài này mô tả cơ bản khái niệm entropy, các bất đẳng thức entropy của Shannon, và vài ứng dụng của chúng. Một thông điệp của bài là, ta có thể chứng minh nhiều bất đẳng thức tổ hợp bằng cách áp dụng các bất đẳng thức cơ bản của Shannon.

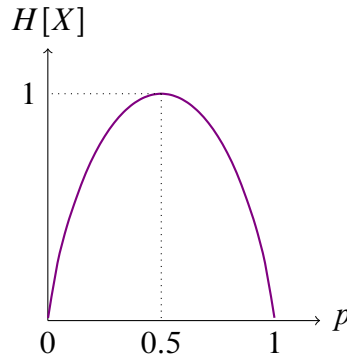
## 1. Entropy

Trong toàn bài viết này ta sẽ chỉ xét các biến  $X$  trong một miền  $\mathcal{X}$  rời rạc. Ví dụ  $X$  là con số của mặt ngửa của con xúc sắc nếu ta ném bừa nó xuống bàn, hay  $X$  là lương tháng tính bằng cent của một người Mỹ chọn ngẫu nhiên. Entropy là hàm số cho ta biết “lượng thông tin” chứa trong một biến  $X$  như vậy. Làm thế nào để định nghĩa cái gọi là “lượng thông tin”? Shannon [15] bắt đầu bằng một số quan sát mà hàm này phải thoả mãn, và đi đến kết luận rằng hàm duy nhất thoả mãn các tính chất này là hàm

$$H[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} \text{Prob}[X = x] \log_b \frac{1}{\text{Prob}[X = x]}.$$

Trong đó,  $b$  là một hằng số  $> 1$  nào đó. Trong toán rời rạc và toán máy tính thì ta thường chọn  $b = 2$ , khi đó ta có entropy nhị phân, dùng để đo tổng số “bits” thông tin của một biến ngẫu nhiên. Các tính chất mà Shannon đưa ra có thể xem là một hệ “tiên đề” cho hàm đo lượng thông tin, và ông chứng minh rằng hàm entropy trên là hàm duy nhất thoả các tiên đề này. Khinchin [10] đưa ra một hệ thống tiên đề khác với các tiên đề đầu tiên của Shannon, và đi đến cùng kết luận hàm  $H[X]$  ở trên. Thay đổi cơ sở từ 2 đến số  $b$  nào đó chỉ có tác động co giãn hàm Shannon entropy với một hằng số  $\log_b 2$ , do đó chúng ta chỉ (cần) xét  $b = 2$  trong bài này.

Thay vì chép lại các tiên đề của Shannon và chứng minh rằng  $H[X]$  là làm duy nhất thoả mãn chúng, ta làm điều ngược lại, đơn giản hơn: ta kiểm tra xem cái hàm  $H[X]$  định nghĩa ở trên có thoả mãn các tính chất mang tính trực quan của cái gọi là “lượng thông tin” hay không. Qua quá trình kiểm chứng này ta sẽ thấy rằng rất nhiều tính chất của entropy có thể suy ra được bằng trực quan dù chưa biết chứng minh. Entropy là một khái niệm rất dễ hiểu, không phải như một số sách viết khó hơn cần thiết.



Hình 2.1: Entropy của biến Bernoulli  $X$  trên phân bố với tham số  $p$ .

### 1.1. Lượng thông tin là mức khó đoán hay độ hỗn loạn

Có một quan sát đơn giản nhưng có thể không trực quan lắm, là “lượng thông tin” nên được hiểu là “tính khó đoán” của biến ngẫu nhiên.<sup>1</sup> Ví dụ, nếu ta ném một đồng xu mà xác suất ra mặt ngửa ( $X = 1$ ) bằng 1, và xác suất ra mặt sấp ( $X = 0$ ) bằng 0. Thì, biến  $X$  có “lượng thông tin” bằng 0. Tại vì, có ném đồng xu này một tỉ lần thì ta cũng có kiến thức bằng với khi không ném. Trong trường hợp này:

$$H[X] = \text{Prob}[X = 1] \log_2 \frac{1}{\text{Prob}[X = 1]} + \text{Prob}[X = 0] \log_2 \frac{1}{\text{Prob}[X = 0]} = 0,$$

tại vì  $\lim_{x \rightarrow 0} x \log(1/x) = 0$ . Lý luận tương tự thì khi đồng xu hoàn toàn công bằng, với xác suất sấp ngửa bằng  $1/2$ , thì “lượng thông tin” của  $X$  phải là cao nhất. Nói tóm lại, nếu xác suất ra mặt ngửa là  $p$ , thì hàm  $H[X]$  trong trường hợp này phải tăng từ  $p = 0$  đến  $p = 1/2$  rồi giảm từ  $p = 1/2$  xuống  $p = 1$ , và phải hoàn toàn đối xứng. Quả là như thế, nếu ta vẽ đồ thị của hàm

$$H[X] = p \log_2 \frac{1}{p} + (1 - p) \log_2 \frac{1}{1 - p}$$

thì ta có Hình 2.1. Người ta cũng viết  $H(p)$  thay vì  $H[X]$  trong biểu thức trên.

Có cách khác để kiểm chứng giả thiết “phân bố càng đều thì càng khó đoán”, nghĩa là “lượng thông tin” càng lớn. Giả sử  $\mathcal{X}$  có  $N$  phần tử  $x_1, \dots, x_N$ . Trong phân bố thứ nhất, thì  $\text{Prob}[X = x_i] = p_i, \forall i \in [N]$ , trong đó  $p_1 + \dots + p_N = 1$  và  $p_i \geq 0, \forall i \in [N]$ . Trong phân bố thứ hai, phân bố đều, thì  $\text{Prob}[X = x_i] = 1/N$ . Entropy của phân bố đều, dễ thấy, là  $\log_2 N$ . Ta cần kiểm chứng rằng

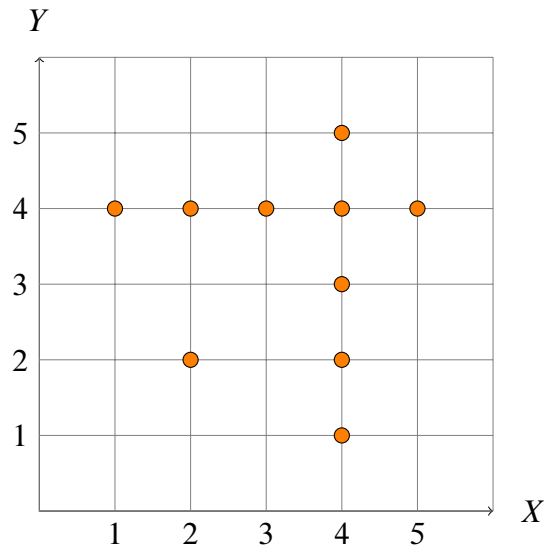
$$\sum_{i=1}^N p_i \log \frac{1}{p_i} \leq \log N.$$

Để làm điều này, ta lưu ý rằng hàm  $f(x) = \log_2 x$  là hàm lõm trong khoảng  $(0, \infty)$ . Do đó, theo bất đẳng thức Jensen

$$\sum_{i=1}^N p_i \log_2 \frac{1}{p_i} \leq \log_2 \left( \sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{p_i} \right) = \log_2 N.$$

<sup>1</sup>Đây là một lý do mà Shannon chọn cái tên entropy, vốn dùng bên Vật Lý để đo độ “hỗn loạn” của một hệ thống nhiệt động.





Hình 2.2: Một tập điểm 2 chiều, một điểm “nặng” 1/10.

Gọi *giá đỡ*<sup>2</sup> của một phân bố là tập các điểm mà phân bố đó có xác suất dương, thì ta vừa chứng minh điều sau đây

**Bổ đề 1.** Trong các phân bố có cùng giá đỡ hữu hạn gồm  $N$  điểm, thì phân bố đều có entropy lớn nhất, bằng  $\log_2 N$ .

Điều thứ hai ta cần kiểm chứng là định nghĩa của entropy không liên quan đến *độ lớn* của  $X$ . Ví dụ, thay vì  $X \in \mathcal{X} = \{0, 1\}$  ta có biến  $Y \in \mathcal{Y} = \{-10^9, 10^{90}\}$  thì entropy của biến  $X$  và biến  $Y$  là giống nhau nếu  $\text{Prob}[X = 0] = \text{Prob}[Y = -10^9]$ . Tương tự như vậy, nếu ta có biến  $Z \in \mathcal{Z} = \{3, 5, 7, 100\}$  sao cho

$$\begin{aligned}\text{Prob}[Z = 5] &= \text{Prob}[X = 0] \\ \text{Prob}[Z = 3] &= \text{Prob}[X = 1] \\ \text{Prob}[Z = 7] &= 0 \\ \text{Prob}[Z = 100] &= 0.\end{aligned}$$

Thì dễ thấy  $H[X] = H[Y] = H[Z]$ : tính khó đoán không phụ thuộc vào việc ta đang đoán ngày mai mưa hay nắng, hoặc giá chứng khoán tăng hay giảm, nếu như *phân bố xác suất* của chúng giống nhau. Trong ví dụ này thì giá đỡ của phân bố của  $Z$  là tập  $\{3, 5\}$  mặc dù miền biến thiên của nó có nhiều điểm hơn.

## 1.2. Entropy của các phân bố đa biến

Bây giờ ta xét trường hợp  $\mathcal{X}$  là một tập các vectors và  $X$  là một vector ngẫu nhiên. Nhìn thoáng qua thì không có gì khác biệt: tập  $\mathcal{X}$  vẫn là một tập các điểm rời rạc, và  $X$  lấy “giá trị” là một trong các điểm này theo một phân bố xác suất nào đó. Ví dụ, Hình 2.2 vẽ một tập  $\mathcal{X}$  có 10 điểm cả thảy, và giả sử “cân nặng xác suất”<sup>3</sup> của chúng là đúng 1/10 cho mỗi điểm. Do biến ngẫu

<sup>2</sup>Support

<sup>3</sup>Probability mass

nhiên của ta là biến hai chiều, ta dùng ký tự đậm  $\mathbf{X}$  để ký hiệu nó, và ký tự nhạt  $X, Y$  để ký hiệu hai chiều của nó. Biến ngẫu nhiên  $\mathbf{X} = (X, Y) \in \mathcal{X}$  được tạo ra bởi một *phân bố liên kết*<sup>4</sup> của hai biến ngẫu nhiên  $X$  và  $Y$ . Nếu mà ta không quan tâm gì đến các tọa độ  $X$  và  $Y$  thì việc  $\mathcal{X}$  có nhiều chiều hay không là việc hoàn toàn không quan trọng.

Mọi thứ chỉ trở nên thú vị khi mà  $\mathcal{X}$  là một tập hợp trên không gian nhiều chiều, và các tọa độ của chúng có sự liên hệ về mặt xác suất với nhau. Ví dụ,  $\mathcal{X}$  có thể là tập các thanh niên trong độ tuổi lấy vợ, và các “tọa độ” của các thanh niên này bao gồm “cao” (hay không?), “to” (hay không?), “đen”, “hôi”, và “giỏi xác suất” hay không. Nếu chỉ nói về  $\mathcal{X}$  là tập các thanh niên thì không thú vị lắm. Nhưng nếu ta tìm ra được rằng “cao to đen hôi” thì dễ lấy vợ, và “giỏi xác suất” thì khó lấy vợ, thì cuộc sống trở nên thú vị hơn.

Vẫn tiếp tục với ví dụ trong Hình 2.2: giả sử ta lấy một điểm  $\mathbf{X} = (X, Y)$  bất kỳ từ phân bố đều, rồi hỏi xác suất  $X = 2$  là bao nhiêu, thì dễ rầy rằng xác suất này bằng  $2/10$ , tại vì có hai điểm có  $X = 2$  và mỗi điểm này được chọn với xác suất  $1/10$ . Phân bố của biến  $X$  có cân nặng  $1/10, 2/10, 1/10, 5/10, 1/10$ , và nó được gọi là *phân bố ngoại biên*<sup>5</sup> của  $X$ . Tổng quát hơn, khi ta có một phân bố đa chiều trên tập  $\mathbf{X}$  các biến. Gọi  $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$  là một tập con các biến, thì ta có phân bố ngoại biên trên các biến (hay các tọa độ)  $\mathbf{Y}$ .

Entropy của một biến đa chiều được định nghĩa hệt như biến một chiều. Ví dụ:

$$H(X, Y) = \sum_{(x, y)} \text{Prob}[X = x, Y = y] \log_2 \frac{1}{\text{Prob}[X = x, Y = y]}.$$

Điều này khá hiển nhiên, vì chúng ta có thể xem  $\mathbf{X}$  là biến “một chiều” được chọn ra từ tập các điểm  $\mathcal{X}$ . Sự kiện  $\{X = x, Y = y\}$  chỉ là một cách viết khác của sự kiện  $\mathbf{X} = (x, y)$ . Trong ví dụ của Hình 2.2 thì  $H(X, Y) = \log_2 10$ . Câu hỏi thú vị hơn là entropy của phân bố ngoại biên của  $X$ , hoặc của  $Y$ , so với  $H(X, Y)$  như thế nào? Về mặt trực quan mà nói thì có *thêm* biến ngẫu nhiên thì tính khó đoán phải *tăng lên*, nghĩa là ta hy vọng  $H[X] \leq H[X, Y]$ . Chứng minh điều này tầm thường:

$$\begin{aligned} H[X] &= \sum_x \text{Prob}[X = x] \log_2 \frac{1}{\text{Prob}[X = x]} \\ &= \sum_x \sum_y \text{Prob}[X = x, Y = y] \log_2 \frac{1}{\text{Prob}[X = x]} \\ &\leq \sum_x \sum_y \text{Prob}[X = x, Y = y] \log_2 \frac{1}{\text{Prob}[X = x, Y = y]} \\ &= H[X, Y]. \end{aligned}$$

Tổng quát lên một cách tự nhiên, gọi  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  là một bộ các biến ngẫu nhiên trong miền  $n$ -chiều  $\mathcal{X}$ . Từ giờ trở đi, ta dùng  $\mathbf{x}$  để ký hiệu một phần tử cụ thể của  $\mathcal{X}$ ; nghĩa là  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Thì entropy của  $\mathbf{X}$  được định nghĩa là

$$H[\mathbf{X}] := \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \text{Prob}[\mathbf{X} = \mathbf{x}] \log_2 \frac{1}{\text{Prob}[\mathbf{X} = \mathbf{x}]}. \quad (1.1)$$

<sup>4</sup>Joint distribution

<sup>5</sup>Marginal distribution

Gọi  $S \subseteq [n]$  là một tập chỉ số bất kỳ, thì  $\mathbf{X}_S$  dùng để ký hiệu bộ  $(X_i)_{i \in S}$  các biến ngẫu nhiên. Tương tự như vậy,  $\mathbf{x}_S$  là một bộ các giá trị cụ thể của các biến đó. Ví dụ,  $\mathcal{X} = \mathbb{N}^n$ , thì  $\mathbf{X}_{\{1,3,7\}} = (X_1, X_3, X_7)$  là bộ ba biến ngẫu nhiên, và  $\mathbf{x}_{\{1,3,7\}} = (x_1, x_3, x_7)$  là một bộ ba số tự nhiên nào đó.

**Bổ đề 2.** Gọi  $\mathbf{X}_{[n]}$  là một biến ngẫu nhiên đa chiều, và  $S \subseteq T \subseteq [n]$  Thì,  $H[\mathbf{X}_S] \leq H[\mathbf{X}_T]$ .

Lưu ý rằng trong bổ đề trên thì tất cả các biến đều đến từ cùng một phân bố liên kết. Chứ còn, nếu ta cho  $(X, Y)$  đến từ một phân bố, và  $X$  lại từ một phân bố hoàn toàn khác, thì không có gì đảm bảo  $H[X] \leq H[X, Y]$ .

### 1.3. Entropy có điều kiện

Tính chất  $H[X] \leq H[X, Y]$  được gọi là *tính đơn điệu*<sup>6</sup> của hàm entropy. Một cách khác để nghĩ về sự đơn điệu là thông qua khái niệm entropy có điều kiện<sup>7</sup>. Đại lượng  $H[X, Y] - H[X]$  hiểu nôm na là “lượng thông tin chứa trong hai biến  $X, Y$  trừ đi lượng thông tin chứa trong biến  $X$ . Như vậy, ta có thể hiểu nó là lượng thông tin chứa trong  $Y$  sau khi đã biết thông tin về  $X$ . Từ đó, ta định nghĩa

$$H[Y|X] = H[X, Y] - H[X]$$

là *entropy có điều kiện* của  $Y$  cho biết  $X$ <sup>8</sup>. Nếu ta phải viết ra cụ thể một công thức cho entropy có điều kiện thì từ định nghĩa entropy (1.1) ta có

$$\begin{aligned} H[Y|X] &= H[X, Y] - H[X] \\ &= \sum_x \sum_y \text{Prob}[X = x, Y = y] \log_2 \frac{1}{\text{Prob}[X = x, Y = y]} \\ &\quad - \sum_x \text{Prob}[X = x] \log_2 \frac{1}{\text{Prob}[X = x]} \\ &= \sum_x \sum_y \text{Prob}[X = x, Y = y] \log_2 \frac{1}{\text{Prob}[X = x, Y = y]} \\ &\quad - \sum_x \sum_y \text{Prob}[X = x, Y = y] \log_2 \frac{1}{\text{Prob}[X = x]} \\ &= \sum_x \sum_y \text{Prob}[X = x, Y = y] \log_2 \frac{\text{Prob}[X = x]}{\text{Prob}[X = x, Y = y]} \\ &= \sum_x \sum_y \text{Prob}[X = x, Y = y] \log_2 \frac{1}{\text{Prob}[Y = y|X = x]}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Một số sách vở về lý thuyết thông tin dùng công thức này để định nghĩa entropy có điều kiện còn công thức  $H[Y|X] = H[X, Y] - H[X]$  được gọi là luật chuỗi<sup>9</sup> của entropy. Phát triển của chúng ta ở trên tự nhiên hơn, ít nhất là trong ngữ cảnh của bài này.

<sup>6</sup>Monotonicity

<sup>7</sup>Conditional entropy

<sup>8</sup>Conditional entropy of  $Y$  given  $X$

<sup>9</sup>Chain rule

Trong không gian nhiều hơn hai chiều, như ta chứng minh ở trên nếu  $S \subseteq T \subseteq [n]$  thì  $H[\mathbf{X}_S] \leq H[\mathbf{X}_T]$ , và ta dùng đại lượng  $H[\mathbf{X}_T|\mathbf{X}_S] = H[\mathbf{X}_T] - H[\mathbf{X}_S]$  để làm định nghĩa entropy có điều kiện của  $\mathbf{X}_T$  cho biết  $\mathbf{X}_S$ . Lưu ý rằng, ta viết  $H[\mathbf{X}_T|\mathbf{X}_S]$  chứ không phải là  $H[\mathbf{X}_{T-S}|\mathbf{X}_S]$ . Viết kiểu này tiện hơn nhiều cho không gian nhiều chiều. Các biến trong  $\mathbf{X}_{T \cap S}$  không ảnh hưởng gì đến giá trị entropy, tại vì các biến đó đã biết. Ví dụ,  $H[X, Y|X] = H[Y|X]$ . Để cho cụ thể hơn nữa, xét trường hợp  $S, T \subseteq [n]$  bất kỳ, không nhất thiết là  $S$  là tập con của  $T$  hay ngược lại không. Ta định nghĩa

$$H[\mathbf{X}_S|\mathbf{X}_T] = H[\mathbf{X}_{S \cup T}] - H[\mathbf{X}_T].$$

Dễ thấy định nghĩa này đồng nhất với tất cả những điều ta đã xét ở trên.

## 1.4. Thông tin tương hỗ

Tiếp tục quá trình “kiểm chứng” các tính chất của hàm entropy, ta lại xét hai biến ngẫu nhiên  $X$  và  $Y$ . Ở phần trước, ta đã kiểm chứng được rằng “có thêm biến thì tính hỗn loạn càng tăng”:  $H[X] \leq H[X, Y]$ . Thế còn điều ngược lại thì thế nào? Nếu ta đã biết  $X$  thì sự hỗn loạn (hay tính khó đoán) của  $Y$  có giảm đi hay không? Trực quan bảo là có, tại vì biết thêm càng nhiều thì tính khó đoán phải càng giảm. Cụ thể hơn, ta muốn kiểm chứng rằng

$$H[Y|X] \leq H[Y].$$

Đến đây thì cái công thức entropy có điều kiện (1.3) trở nên hữu dụng:

$$\begin{aligned} & H[Y|X] - H[Y] \\ &= \sum_x \sum_y \text{Prob}[X = x, Y = y] \log_2 \frac{1}{\text{Prob}[Y = y|X = x]} \\ &\quad - \sum_y \text{Prob}[Y = y] \log_2 \frac{1}{\text{Prob}[Y = y]} \\ &= - \sum_x \sum_y \text{Prob}[X = x, Y = y] \log_2 \text{Prob}[Y = y|X = x] \\ &\quad + \sum_y \sum_x \text{Prob}[Y = y, X = x] \log_2 \text{Prob}[Y = y] \\ &= \sum_x \sum_y \text{Prob}[X = x, Y = y] (\log_2 \text{Prob}[Y = y] - \log_2 \text{Prob}[Y = y|X = x]) \\ &= \sum_x \sum_y \text{Prob}[X = x, Y = y] \left( \log_2 \frac{\text{Prob}[Y = y]}{\text{Prob}[Y = y|X = x]} \right) \\ &= \sum_x \sum_y \text{Prob}[X = x, Y = y] \left( \log_2 \frac{\text{Prob}[Y = y]\text{Prob}[X = x]}{\text{Prob}[Y = y, X = x]} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \log_2 \left( \sum_{x,y} \text{Prob}[X = x, Y = y] \cdot \frac{\text{Prob}[Y = y] \text{Prob}[X = x]}{\text{Prob}[Y = y, X = x]} \right) \\
 &= \log_2 \left( \sum_{x,y} \text{Prob}[Y = y] \text{Prob}[X = x] \right) \\
 &= \log_2 \left( \sum_y \text{Prob}[Y = y] \sum_x \text{Prob}[X = x] \right) \\
 &= \log_2 1 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ở đây ta dùng luật chuỗi của xác suất  $\text{Prob}[X = x, Y = y] = \text{Prob}[Y = y|X = x]\text{Prob}[X = x]$ , và bất đẳng thức Jensen, do hàm log là hàm lõm trong khoảng  $(0, \infty)$ . Ngoài ra, một điều thú vị nữa là đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu

$$\text{Prob}[X = x, Y = y] = \text{Prob}[X = x]\text{Prob}[Y = y], \forall x, y$$

nghĩa là nếu và chỉ nếu  $X$  và  $Y$  là hai biến độc lập. Điều này có thể “suy ra” một cách trực quan:  $H[Y|X] = H[Y]$  nếu và chỉ nếu biết  $X$  không cho ta bất kỳ thông tin gì thêm về  $Y$ , nghĩa là hai biến này độc lập với nhau.

Đại lượng  $H[Y] - H[Y|X]$  cũng có thể được viết thành

$$H[Y] - H[Y|X] = H[Y] - (H[X, Y] - H[X]) = H[X] + H[Y] - H[X, Y] = H[X] - H[X|Y].$$

Đây là đại lượng đối xứng trên hai biến  $X, Y$ , và thường được gọi là *thông tin tương hỗ*  $I(X; Y)$ :

$$I(X; Y) = H[X] + H[Y] - H[X, Y]. \quad (1.4)$$

Thế có thông tin tương hỗ có điều kiện không? Có chứ! Xét ba biến  $X, Y, Z$  bất kỳ thì thông tin tương hỗ có điều kiện được định nghĩa một cách rất tự nhiên là

$$I(X; Y|Z) = H[X|Z] + H[Y|Z] - H[X, Y|Z]. \quad (1.5)$$

(Cái gọi là “có điều kiện” chẳng qua là ta giới hạn không gian xác suất vào một không gian xác suất “nhỏ” hơn.)

### Bài tập 1. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned}
 I(X; Y|Z) &= H[Y|Z] - H[Y|X, Z] \\
 I(X; Y|Z) &\geq 0.
 \end{aligned}$$

(Lưu ý rằng đại lượng  $H[Y|X, Z]$  chẳng có gì đặc biệt, nó vẫn là entropy có điều kiện, của  $Y$ , cho biết  $(X, Z)$ , trong đó ta nghĩ về  $(X, Z)$  như một biến ngẫu nhiên hai chiều.) Chúng ta vừa chứng minh rằng

**Bổ đề 3.** Thông tin tương hỗ  $I(X; Y)$  và thông tin tương hỗ có điều kiện  $I(X; Y|Z)$  là các đại lượng không âm.

Trong bổ đề này ta có thể thay các biến  $X, Y, Z$  bằng các vectors của các biến ngẫu nhiên. Một vector biến ngẫu nhiên cũng là một biến ngẫu nhiên thôi.

## 2. Các bất đẳng thức Shannon

### 2.1. Polymatroids

Nhìn định nghĩa của thông tin tương hỗ (1.4) ở trên, câu hỏi tự nhiên là nếu ta mở rộng biểu thức ra một chút, xét đại lượng  $H[\mathbf{X}_S] + H[\mathbf{X}_T] - H[\mathbf{X}_{S \cup T}]$  với hai tập  $S, T \subseteq [n]$  nào đó thì đại lượng này có không âm hay không? Câu trả lời là có, nhưng trước khi trả lời chúng ta đơn giản hoá các ký hiệu lại một chút.

Từ giờ trở đi ta chỉ xét các phân bố xác suất trên  $n$  biến  $X_1, \dots, X_n$ . Entropy của một phân bố cụ thể sẽ cho ta một con số  $H[\mathbf{X}_S]$  với mỗi tập con  $\emptyset \neq S \subseteq [n]$ . Do đó, ta đơn giản hoá ký hiệu và viết là  $H(S)$  thay vì  $H[\mathbf{X}_S]$ . Như thế, entropy của một phân bố cho trước là một hàm số  $H : 2^{[n]} - \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Người ta thường gọi một hàm như vậy là *hàm tập hợp*<sup>10</sup>, tại vì nó gán một giá trị cho mỗi một tập con (khác rỗng) của  $[n]$ . Một cách khác để nghĩ về  $H$  là nó là một vector trên không gian  $\mathbb{R}_+^{2^n - 1}$ , tại vì có tất cả  $2^n - 1$  tập con khác rỗng của  $[n]$ , và mỗi tập con là một toạ độ. Với một phân bố khác thì ta lại có entropy khác, nghĩa là một hàm tập hợp khác và một vector khác trong không gian  $\mathbb{R}_+^{2^n - 1}$ .

Từ  $I(X_i; X_j) \geq 0$ , dùng ký hiệu mới ta có

$$H(\{i\}) + H(\{j\}) - H(\{i, j\}) \geq 0, \forall i \neq j \in [n].$$

Từ  $I(X_i; X_j | \mathbf{X}_T) \geq 0$ , dùng ký hiệu mới ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq (H(\{i\} \cup T) - H(T)) + (H(\{j\} \cup T) - H(T)) - (H(\{i, j\} \cup T) - H(T)) \\ &= H(T \cup \{i\}) + H(T \cup \{j\}) - H(\{i, j\} \cup T) - H(T). \end{aligned}$$

**Bài tập 2.** Từ bất đẳng thức

$$H(T \cup \{i\}) + H(T \cup \{j\}) \geq H(\{i, j\} \cup T) + H(T) \geq 0$$

với mọi  $i, j \in [n]$ ,  $T \subset [n]$ , chứng minh rằng

$$H(S) + H(T) \geq H(S \cup T) + H(S \cap T) \quad (2.1)$$

với mọi tập con  $S, T \subseteq [n]$ . (Ở đây, ta qui ước  $H(\emptyset) = 0$ .)

Hàm tập hợp thoả bất đẳng thức (2.1) được gọi là hàm *submodular*<sup>11</sup>. Như vậy, ta đã thu tập được ba tính chất quan trọng của hàm entropy.

**Định lý 2.1.** Xét một phân bố xác suất liên kết của  $n$  biến tuỳ hỉ. Entropy của phân bố này thoả ba tính chất sau đây:

- Tính không âm:  $H(S) \geq 0, \forall S \subseteq [n]$ .
- Tính đơn điệu:  $H(S) \leq H(T), \forall S \subseteq T \subseteq [n]$ .
- Tính submodular:  $H(S \cup T) + H(S \cap T) \leq H(S) + H(T), \forall S, T \subseteq [n]$ .

<sup>10</sup>Set function

<sup>11</sup>Tôi không biết dịch tiếng Việt là gì

Tất cả các bất đẳng thức đúng với mọi entropy mà suy ra được từ ba (họ) bất đẳng thức trên thì được gọi là các *bất đẳng thức kiểu Shannon*<sup>12</sup>. Một hàm tập hợp thỏa mãn ba bất đẳng thức trên được gọi là một *polymatroid*.

Có rất nhiều ví dụ của các bất đẳng thức (kiểu) Shannon được dùng phổ biến trong lý thuyết thông tin, học máy, và toán tổ hợp. Ta điểm lại đây một vài ví dụ. Bạn đọc có thể tự chứng minh rằng ta suy ra được tất cả bốn chúng từ ba bất đẳng thức cơ bản trên:

- Biết thêm một chút thì entropy giảm:  $H[X|Y] \leq H[X]$ .
- Thông tin tương hỗ có điều kiện là đại lượng không âm:  $I(X; Y|Z) \geq 0$
- Lượng thông tin toàn bộ nhỏ hơn tổng lượng thông tin từng phần:

$$H[X_1, \dots, X_n] \leq \sum_{i=1}^n H[X_i]. \quad (2.2)$$

- Thông tin tương hỗ tăng nếu có thêm biến tham gia:

$$I(X; Y, Z) \geq I(X; Y).$$

(Lưu ý,  $I(X; Y, Z) = H(X) + H(Y, Z) - H(X, Y, Z)$ .) Đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  là một chuỗi Markov.

- Với ba biến ngẫu nhiên thì

$$H[X, Y, Z] \leq \frac{1}{2} (H[X, Y] + H[X, Z] + H[Y, Z]). \quad (2.3)$$

Có một số vô hạn các bất đẳng thức như vậy, ta chỉ cần lấy một tổ hợp tuyến tính (không âm) bất kỳ của các bất đẳng thức cơ bản là có một bất đẳng thức mới. Có những bất đẳng thức chứng minh không tầm thường, như bất đẳng thức cuối cùng (2.3) ở trên. Có những cái thì tầm thường, như 4 bất đẳng thức còn lại.

## 2.2. Bất đẳng thức Shearer

Bất đẳng thức (2.3) ở trên là một bất đẳng thức kiểu Shannon, là một trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Shearer [5], một bất đẳng thức kiểu Shannon rất hữu dụng. Trước khi phát biểu bất đẳng thức Shearer, chúng ta thử chứng minh (2.3) bằng tính polymatroid của hàm entropy. Ta viết:

$$\begin{aligned} H[X, Y, Z] &= H[X, Y, Z] - H[X, Y] + H[X, Y] - H[X] + H[X] - H[\emptyset] \\ H[X, Y] &= H[X, Y] - H[X] + H[X] - H[\emptyset] \\ H[Y, Z] &= H[Y, Z] - H[Y] + H[Y] - H[\emptyset] \\ H[X, Z] &= H[X, Z] - H[X] + H[X] - H[\emptyset]. \end{aligned}$$

<sup>12</sup>Shannon-type inequalities

Do tính sub-modularity, từng số hạng trong các khai triển của  $H[X, Z]$ ,  $H[Y, Z]$ , và  $H[X, Y]$  đều lớn hơn hoặc bằng số hạng cùng cột của khai triển của  $H[X, Y, Z]$ . Cụ thể là:

$$\begin{aligned} H[Y, Z] - H[Y] &\geq H[X, Y, Z] - H[X, Y] \\ H[X, Z] - H[X] &\geq H[X, Y, Z] - H[X, Y] \\ H[Y] - H[\emptyset] &\geq H[X, Y] - H[X]. \end{aligned}$$

Do đó, nhân các khai triển của  $H[X, Y]$ ,  $H[Y, Z]$ , và  $H[X, Z]$  với các hệ số không âm  $\lambda_{X,Y}$ ,  $\lambda_{Y,Z}$ , và  $\lambda_{X,Z}$  rồi cộng lại, ta có

$$\lambda_{X,Y} \cdot H[X, Y] + \lambda_{Y,Z} \cdot H[Y, Z] + \lambda_{X,Z} \cdot H[X, Z] \geq H[X, Y, Z] \quad (2.4)$$

miễn là các hệ số  $\lambda$  này thoả điều kiện

$$\begin{aligned} \lambda_{X,Y} + \lambda_{Y,Z} &\geq 1 \\ \lambda_{X,Y} + \lambda_{X,Z} &\geq 1 \\ \lambda_{Y,Z} + \lambda_{X,Z} &\geq 1. \end{aligned}$$

Mỗi một bộ  $\lambda$  thoả điều kiện trên lại cho ta một bất đẳng thức kiểu Shannon (2.4) (với  $n = 3$ ). Bất đẳng thức (2.3) là do ta chọn các  $\lambda$  bằng  $1/2$ .

Tổng quát chứng minh trên và ta có bất đẳng thức Shearer. Để làm điều này chúng ta dùng ký hiệu  $H(S)$  thay vì  $H[\mathbf{X}_S]$ , với  $S \subseteq [n]$ . Gọi  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  là một siêu đồ thị với tập đỉnh là tập  $\mathcal{V} = [n]$ , và mỗi cạnh của  $\mathcal{H}$  là một tập hợp  $F \subseteq [n]$ . (Siêu đồ thị chẳng qua là một bộ các tập hợp.) Một vector  $(\lambda_F)_{F \in \mathcal{E}}$  được gọi là một *phủ cạnh hữu tỉ*<sup>13</sup> của đồ thị nếu vector này thoả mãn các điều kiện sau đây

$$\begin{aligned} \sum_{F: v \in F} \lambda_F &\geq 1, \quad \forall v \in \mathcal{V} \\ \lambda_F &\geq 0, \quad \forall F \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

**Định lý 2.2 (Bất đẳng thức Shearer).** Xét một phân bố liên kết của  $n$  biến ngẫu nhiên  $X_1, \dots, X_n$  tùy ý. Gọi  $H$  là hàm entropy của phân bố,  $\mathcal{H} = (\mathcal{V} = [n], \mathcal{E})$  là một siêu đồ thị, và  $(\lambda_F)_{F \in \mathcal{E}}$  là một phủ cạnh hữu tỉ của  $\mathcal{H}$ . Ta có

$$\sum_{F \in \mathcal{E}} \lambda_F \cdot H[F] \geq H[\mathcal{V}]. \quad (2.5)$$

*Chứng minh.* Từ tính chất sub-modularity, với mọi  $F \in \mathcal{E}$  và với mọi  $k \in F$  ta có:

$$H(F \cap [k]) - H(F \cap [k-1]) \geq H([k]) - H([k-1]),$$

<sup>13</sup>Fractional edge cover



tại vì  $(F \cap [k]) \cup [k-1] = [k]$ , và  $(F \cap [k]) \cap [k-1] = F \cap [k-1]$ . Nhân bất đẳng thức này với  $\lambda_F$  và cộng tất cả bọn chúng lại là xong:

$$\begin{aligned}
 \sum_{F \in \mathcal{E}} \alpha_F H[F] &= \sum_{F \in \mathcal{E}} \sum_{k \in F} \alpha_F \cdot (H(F \cap [k]) - H(F \cap [k-1])) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{F \in \mathcal{E}, k \in F} \alpha_F \cdot (H(F \cap [k]) - H(F \cap [k-1])) \\
 &\geq \sum_{k=1}^n \sum_{F \in \mathcal{E}, k \in F} \alpha_F \cdot (H([k]) - H([k-1])) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{F \in \mathcal{E}, k \in F} \alpha_F \right) \cdot (H([k]) - H([k-1])) \\
 &\geq \sum_{k=1}^n (H([k]) - H([k-1])) \\
 &= H([n]).
 \end{aligned}$$

□

Chứng minh này là phát kiến tuyệt vời của Radhakrishnan [14], mà ta sửa lại hơi khác một chút.

### 3. Vài ứng dụng

#### 3.1. Hàm nóng

Bất đẳng thức đơn giản như (2.2), còn gọi là tính *sub-additive* của hàm entropy, cũng đã có ứng dụng hay ho. Nó là phiên bản entropy của *chặn hội*<sup>14</sup> Ta dùng nó để chứng minh một bất đẳng thức cơ bản của các hệ số nhị thức:

$$\sum_{i \leq \alpha n} \binom{n}{i} \leq 2^{H(\alpha)n}, \quad (3.1)$$

trong đó  $\alpha \in [0, 1/2]$  là một hằng số, còn  $H(\alpha)$  là entropy của biến Bernoulli với tham số  $\alpha$ . Để chứng minh bất đẳng thức này, ta chọn từ bộ tất cả các tập con của  $[n]$  với kích thước  $\leq \alpha n$  một tập con tùy ý với xác suất đồng đều – mỗi tập con như vậy có cùng xác suất được chọn, bằng  $1/N$ , trong đó  $N$  là vế trái của bất đẳng thức trên. Ta dùng một vector  $(X_1, \dots, X_n)$  để mã hoá tập con được chọn:  $X_i = 1$  nếu  $i$  thuộc về tập con được chọn, và 0 nếu ngược lại. Như vậy, bằng cách chọn ngẫu nhiên một tập con như trên ta có một phân bố liên kết của  $n$  biến nhị phân.

Từ Bổ Đề 1 ta có  $H[X_1, \dots, X_n] = \log_2 |N|$ . Chỉ cần chứng minh  $H[X_i] \leq H(\alpha)$ , với mọi  $i \in [n]$  nữa là xong; vì khi đó (2.2) suy ra (3.1). Với mọi  $i \in [n]$  thì  $X_i$  cũng là một biến Bernoulli, nhưng ta chưa biết tham số  $p_i = \text{Prob}[X_i = 1]$  của nó. Từ Hình 2.1 ta thấy rằng chỉ cần chứng minh  $p_i \leq \alpha$  là được, vì  $\alpha \leq 1/2$ .

<sup>14</sup>Union bound:  $\text{Prob}[A \cup B] \leq \text{Prob}[A] + \text{Prob}[B]$ .

Gọi  $S$  là tập ngẫu nhiên được chọn. Ta có

$$\begin{aligned}
 p_i = \text{Prob}[i \in S] &= \sum_{k \leq \alpha n} \text{Prob}[i \in S \mid |S| = k] \cdot \text{Prob}[|S| = k] \\
 &= \sum_{k \leq \alpha n} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} \text{Prob}[|S| = k] \\
 &= \sum_{k \leq \alpha n} \frac{k}{n} \text{Prob}[|S| = k] \\
 &\leq \alpha \sum_{k \leq \alpha n} \text{Prob}[|S| = k] \\
 &= \alpha.
 \end{aligned}$$

### 3.2. Đếm tam giác

Kể đến ta xét một bài toán không có vẻ gì liên quan đến xác suất hay entropy. Cho một đồ thị  $G = (V, E)$  (đồ thị bình thường, không phải siêu đồ thị), gồm  $N$  cạnh. Hỏi: đồ thị có nhiều nhất là bao nhiêu tam giác? (Một tam giác là một bộ ba đỉnh khác nhau  $\{x, y, z\}$  sao cho  $xy, yz, xz$  là các cạnh trong tập  $E$ ).

Ta nghĩ về câu hỏi này một cách hình học. Ta gán cho mỗi đỉnh trong  $V$  một số nguyên khác nhau. Gọi  $R$  là một tập các điểm nguyên  $(x, y)$  trên mặt phẳng  $(X, Y)$  sao cho  $xy \in E$ . Tại vì  $G$  là đồ thị vô hướng, với mỗi cạnh  $xy \in E$  ta sẽ thêm hai điểm  $(x, y)$  và  $(y, x)$  vào tập  $R$ . Như vậy  $R$  có tất cả  $2N$  điểm. Tương tự như vậy, ta tạo một tập  $S$  các điểm nguyên  $(y, z)$  trên mặt phẳng  $(Y, Z)$  và  $T$  các điểm nguyên  $(x, z)$  trên mặt phẳng  $(X, Z)$ . Một bộ ba  $\{x, y, z\}$  là một tam giác nếu như điểm  $(x, y, z)$  trên không gian ba chiều thoả điều kiện là hình chiếu của  $(x, y, z)$  lên ba mặt phẳng  $(X, Y)$ ,  $(Y, Z)$ , và  $(X, Z)$  thuộc về các tập  $R, S$ , và  $T$ , theo thứ tự. Mỗi một tam giác  $\{x, y, z\}$  sẽ xuất hiện 6 lần vì có  $3! = 6$  cách hoán đổi toạ độ.

Như vậy, ta thay câu hỏi bằng một câu hỏi khác. Giả sử ta có ba tập các điểm nguyên  $R, S, T$ , trên ba mặt phẳng như trên. Gọi  $P$  là tập tất cả các điểm  $(x, y, z)$  trên không gian ba chiều sao cho  $(x, y) \in R$ ,  $(y, z) \in S$ , và  $(x, z) \in T$ . Câu hỏi là kích thước lớn nhất của  $|P|$  là bao nhiêu nếu ta biết  $|R|, |S|, |T|$ ?

Đến đây ta dùng một cái mẹo đơn giản. Giả sử ta chọn ngẫu nhiên một điểm  $(x, y, z) \in P$  với xác suất  $1/|P|$ . Thì ta có một phân bố xác suất trên không gian ba chiều. Phân bố này có giá đỡ là  $P$ , và nó là phân bố đều, do đó theo Bổ Đề 1 thì

$$H[X, Y, Z] = \log_2 |P|.$$

Bây giờ ta xét ba phân bố ngoại biên trên các cặp biến  $(X, Y)$ ,  $(Y, Z)$ , và  $(X, Z)$  của phân bố này, thì giá đỡ của các phân bố ngoại biên là tập con của các tập  $R, S$ , và  $T$ . Do đó, cũng theo bổ đề 1 thì

$$\begin{aligned}
 H[X, Y] &\leq \log_2 |R| \\
 H[Y, Z] &\leq \log_2 |S| \\
 H[X, Z] &\leq \log_2 |T|.
 \end{aligned}$$

Vậy ta áp dụng bất đẳng thức Shearer (2.3) ta có

$$\log_2 |P| = H[X, Y, Z] \leq \frac{1}{2} (H[X, Y] + H[Y, Z] + H[X, Z]) \leq \frac{1}{2} (\log_2 |R| + \log_2 |S| + \log_2 |T|).$$

Nghĩa là

$$|P| \leq \sqrt{|R| \cdot |S| \cdot |T|}. \quad (3.2)$$

**Bài tập 3.** Chứng minh bất đẳng thức (3.2) dùng Cauchy-Schwarz.

Với câu hỏi chặn số tam giác đầu tiên, thì ta có chặn trên là  $\frac{1}{6}(2N)^{3/2}$ .

### 3.3. Các bất đẳng thức hình học của Loomis-Whitney và Bollobas-Thomason

Bất đẳng thức (3.2) là một trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Loomis-Whitney[11] chứng minh năm 1949. Đến năm 1995, Bollobas và Thomason [4] tổng quát hoá bất đẳng thức Loomis-Whitney. Bất đẳng thức của họ được phát biểu trên không gian độ đo. Ở đây chúng ta chỉ phát biểu dùng không gian độ đo rời rạc, nhưng chứng minh tổng quát không khác gì mấy.

**Định lý 3.1 (Bollobás-Thomason).** Gọi  $P$  là một tập điểm tọa độ nguyên trên không gian  $n$ -chiều. Các chiều là  $X_1, \dots, X_n$ . Gọi  $\mathcal{H} = (\mathcal{V} = [n], \mathcal{E})$  là một siêu đồ thị nào đó. Với mỗi cạnh  $F \in \mathcal{E}$ , gọi  $R_F$  là tập các hình chiếu của  $P$  lên không gian con của các chiều  $(X_v)_{v \in F}$ . Gọi  $(\lambda_F)_{F \in \mathcal{E}}$  là một phủ cạnh hữu tỉ của  $\mathcal{H}$ . Thì

$$|P| \leq \prod_{F \in \mathcal{E}} |R_F|^{\lambda_F}.$$

Bạn đọc có thể thấy ngay chứng minh định lý này qua bất đẳng thức Shearer. Thậm chí, phát biểu của ta ở trên còn tổng quát hơn phát biểu của Bollobás và Thomason một chút.

Từ bất đẳng thức Bollobás-Thomason, thay vì câu hỏi đếm tam giác ta có thể chặn tổng số lần xuất hiện của một siêu đồ thị nhỏ trong một (siêu) đồ thị khổng lồ. Và ta sẽ có các kết quả của Alon [2] và Friedgut-Kahn [8].

### 3.4. Truy vấn hội trong cơ sở dữ liệu và các bài toán thoả mãn ràng buộc

Trong cơ sở dữ liệu quan hệ, truy vấn hội<sup>15</sup> là một câu hỏi cực kỳ cơ bản. Ví dụ, cơ sở dữ liệu (CSDL) quản lý học sinh có thể có nhiều bảng (quan hệ), ví dụ như bảng *Học sinh* chứa các thuộc tính như “Họ”, “Tên”, “Ngày Sinh”, “Năm Sinh”, vân vân. Mỗi bảng như vậy là một tập hợp các vectors nhiều chiều, mỗi chiều tương ứng với một thuộc tính. Các thuộc tính của bảng *Học sinh* thường là khác với các thuộc tính của bảng *Môn Học*, bảng *Thầy Cô*, vân vân. Nhưng thường là chúng cũng chia sẻ các thuộc tính với nhau.

Từ một bộ các bảng như vậy, một truy vấn hội thường hỏi những câu hỏi đại loại như “Tìm tất cả các học sinh đã từng học lớp Đại Số Tuyến Tính năm 2000 với thầy Nam Dũng”. Ta có thể

<sup>15</sup>Conjunctive query

chuyển câu hỏi đó về dạng hình học: tìm tất cả các điểm trong không gian  $n$  chiều, sao cho hình chiếu của mỗi điểm xuống các thuộc tính của bảng Học Sinh thì bằng một hàng của bảng học sinh, xuống các thuộc tính của bảng Thầy Cô thì có tên Trần Nam Dũng, xuống bảng Môn Học thì có năm 2000. Và từ đó bất đẳng thức Shearer cho ta biết chặn trên của tổng số câu trả lời của truy vấn hội.

Một ví dụ khác là các bài toán thoả mãn ràng buộc<sup>16</sup> rất phổ biến trong Vận Trù Học. Một bài toán đơn giản là đồ ô chữ. Mỗi ô ta có thể xem là một toạ độ. Một tập các ô liên nhau là một bộ các toạ độ  $(X_1, X_2, X_5, X_7)$  chẳng hạn. Ta cần điền ký tự vào tất cả các ô sao cho mỗi bộ các ô liên nhau (dọc hoặc ngang) là một từ trong từ điển, thoả mãn gợi ý của bài toán. Bộ các ô liên nhau cùng với gợi ý là một cái bảng, gồm tất cả các từ trong từ điển với chiều dài bằng số ô, và ý nghĩa thoả gợi ý. Từ đó, ta lại chuyển về dạng của bất đẳng thức Shearer ở trên.

## 4. Chú thích

Các bất đẳng thức kiểu Shannon và kiểu không Shannon có ứng dụng trong cả mật mã học (chia sẻ bí mật) [7, 3]. Còn rất nhiều bài toán tổ hợp có thể giải được tương đối tự nhiên bằng entropy [14].<sup>17</sup> Vấn đề thuật toán định trị truy vấn hội sao cho thời gian chạy tối đa bằng với chặn trên do bất đẳng thức Shearer là vấn đề thú vị, xem [12, 13]. Chứng minh thời gian chạy của thuật toán thì ta lại phải dùng bất đẳng thức Hölder. Ta cũng chứng minh được các hệ quả ở trên của bất đẳng thức Shearer dùng bất đẳng thức Hölder [12, 13].

Có nhiều dạng tổng quát hơn của bất đẳng thức Shearer. Ví dụ, trên thực tế các biến ngẫu nhiên có thêm các ràng buộc phụ thuộc hàm. Ta biết  $X_2 = X_5^2 + X_7$  chẳng hạn. Câu hỏi là cho trước một bộ các phụ thuộc hàm như vậy thì bất đẳng thức của chúng ta phải như thế nào? Thuật toán phải thiết kế ra sao. Đã có một câu trả lời gần đây, liên quan đến lý thuyết lattice [1].

Hai quyển sách của Cover và Thomas [6] và của Yeung [16] là các tham khảo rất tốt về nhập môn lý thuyết thông tin. Quyển của Thomas và Cover đã là tham khảo kinh điển trong một thời gian dài. Nhưng các kết quả hiện đại hơn một chút thì được thảo luận trong quyển của Yeung. Tính submodularity của entropy được Fujishige [9] chứng minh đầu tiên năm 1978. Trong hơn nửa thế kỷ, tất cả các bất đẳng thức về entropy người ta biết là các bất đẳng thức kiểu Shannon. Năm 1998, Zhang và Yeung [17] khám phá ra một bất đẳng thức không chứng minh được bằng các tính chất của polymatroid:

$$2I(X_3; X_4) \leq I(X_1; X_2) + I(X_1; X_3, X_4) + 3I(X_3; X_4|X_1) + I(X_3; X_4|X_2).$$

Từ đó trở đi có một số vô hạn các bất đẳng thức không-Shannon được khám phá.

<sup>16</sup>Constraint satisfaction problems

<sup>17</sup>Xem thêm <http://arxiv.org/abs/1406.7872>

## Tài liệu tham khảo

- [1] ABO KHAMIS, M., NGO, H. Q., AND SUCIU, D. Worst-case optimal algorithms for queries with functional dependencies.
- [2] ALON, N. On the number of subgraphs of prescribed type of graphs with a given number of edges. *Israel J. Math.* 38, 1-2 (1981), 116–130.
- [3] BEIMEL, A., AND ORLOV, I. Secret sharing and non-Shannon information inequalities. *IEEE Trans. Inform. Theory* 57, 9 (2011), 5634–5649.
- [4] BOLLOBÁS, B., AND THOMASON, A. Projections of bodies and hereditary properties of hypergraphs. *Bull. London Math. Soc.* 27, 5 (1995), 417–424.
- [5] CHUNG, F. R. K., GRAHAM, R. L., FRANKL, P., AND SHEARER, J. B. Some intersection theorems for ordered sets and graphs. *J. Combin. Theory Ser. A* 43, 1 (1986), 23–37.
- [6] COVER, T. M., AND THOMAS, J. A. *Elements of information theory*, second ed. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2006.
- [7] CSIRMAZ, L. The size of a share must be large. *J. Cryptology* 10, 4 (1997), 223–231.
- [8] FRIEDGUT, E., AND KAHN, J. On the number of copies of one hypergraph in another. *Israel J. Math.* 105 (1998), 251–256.
- [9] FUJISHIGE, S. Polymatroidal dependence structure of a set of random variables. *Inform. and Control* 39, 1 (1978), 55–72.
- [10] KHINCHIN, A. I. *Mathematical foundations of information theory*. Dover Publications, Inc., New York, N. Y., 1957. Translated by R. A. Silverman and M. D. Friedman.
- [11] LOOMIS, L. H., AND WHITNEY, H. An inequality related to the isoperimetric inequality. *Bull. Amer. Math. Soc* 55 (1949), 961–962.
- [12] NGO, H. Q., PORAT, E., RÉ, C., AND RUDRA, A. Worst-case optimal join algorithms: [extended abstract]. In *PODS (2012)*, M. Lenzerini and M. Benedikt, Eds., ACM, pp. 37–48.
- [13] NGO, H. Q., RÉ, C., AND RUDRA, A. Skew strikes back: new developments in the theory of join algorithms. *SIGMOD Record* 42, 4 (2013), 5–16.
- [14] RADHAKRISHNAN, J. Entropy and counting. *Computational Mathematics, Modelling and Algorithms* (2003).
- [15] SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *Bell System Tech. J.* 27 (1948), 379–423, 623–656.
- [16] YEUNG, R. W. *A first course in information theory*. Information Technology: Transmission, Processing and Storage. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2002. With a foreword by Toby Berger, With 1 CD-ROM.
- [17] ZHANG, Z., AND YEUNG, R. W. On characterization of entropy function via information inequalities. *IEEE Trans. Inform. Theory* 44, 4 (1998), 1440–1452.



# TRÒ CHƠI VÔ HẠN VỚI THÔNG TIN HOÀN HẢO

Lý Ngọc Tuệ

(Đại học Brandeis, Massachusetts, Mỹ)

Lý thuyết trò chơi hiện nay ngày càng trở nên phổ biến, với rất nhiều ứng dụng trong các ngành kinh tế học, tâm lý học, xã hội học, khoa học máy tính, ... Nhân dịp Tết Bính Thân năm nay, chúng tôi xin giới thiệu với độc giả của Epsilon về một nhánh ít được biết đến của lý thuyết trò chơi mà trong đây đối tượng nghiên cứu chính là các *trò chơi vô hạn với thông tin hoàn hảo*.

## 1. Trò chơi với thông tin hoàn hảo

Trò chơi với thông tin hoàn hảo trò chơi theo lượt gồm có hai người chơi, Bình và An, và trong đây cả hai đều biết được toàn bộ các thông tin sau:

- (i) các bước đã đi,
- (ii) các lựa chọn cho bước tiếp theo mà đối thủ (hoàn toàn) có thể thực hiện.

Cờ vua, cờ tướng, cờ vây, ô ăn quan, ... là các ví dụ phổ biến về trò chơi với thông tin hoàn hảo. Còn cờ cá ngựa, cờ tỉ phú, ... không phải là trò chơi với thông tin hoàn hảo, vì xác suất đóng vai trò chính trong việc quyết định bước đi tiếp theo. Các trò đánh bài như poker cũng không phải là trò chơi với thông tin hoàn hảo vì người chơi không biết được bài của đối thủ, nên không xác định được chính xác các bước tiếp theo của đối thủ.

Tuy đã được phổ biến hàng ngàn năm, mãi đến đầu thế kỷ 17 trò chơi với thông tin hoàn hảo mới lần đầu tiên được mô tả dưới dạng toán học bởi nhà toán học người Pháp Claude Gaspard Bachet de Méziriac [1] thông qua trò chơi tổ hợp như sau:

- (i) Bình và An thay phiên nhau chọn một trong các số từ 1 đến 10.
- (ii) Người cuối cùng thực hiện bước đi sao cho tổng các số đã chọn bằng 100 là người chiến thắng.

Các trò chơi dạng như trên được gọi là Nim trở nên rất phổ biến trong thế kỷ 17-19, và đến đầu thế kỷ 20, lý thuyết toán học về những trò chơi Nim đã được hoàn thiện bởi nhà toán học Charles Leonard Bouton [2]. Đến năm 1913, trong khi nghiên cứu về cờ vua, nhà toán học Ernst Zermelo đã chứng minh kết quả tổng quát đầu tiên của lý thuyết trò chơi với thông tin hoàn hảo sau:

**Định lý 1** (Định lý Zermelo [25]). *Các trò chơi hữu hạn với thông tin hoàn hảo là xác định. Nói một cách khác, nếu như một trò chơi hữu hạn với thông tin hoàn hảo không có hòa, thì một trong hai người chơi, Bình hoặc An, sẽ có chiến lược để thắng.*

Trong những năm 1920, các công trình nghiên cứu của Émile Borel, John von Neumann, và Hugo Steinhaus đã đặt nền móng cho lý thuyết trò chơi phát triển sau này. Đến năm 1944, khái niệm trò chơi vị trí (hữu hạn) với thông tin hoàn hảo được định nghĩa chính thức trong tác phẩm kinh điển “*Theory of games and economic behavior*” [16] của nhà toán học John von Neumann và nhà kinh tế học Oskar Morgenstern.

Các trò chơi được xét đến trong các công trình nghiên cứu ở trên đều có số lượt đi là hữu hạn. Ví dụ về trò chơi với thông tin hoàn hảo có số lượt đi vô hạn xuất hiện đầu tiên vào năm 1935, và hiện nay được biết đến với tên gọi *trò chơi Banach-Mazur*.

## 2. Trò chơi Banach-Mazur và Phạm trù Baire

Vào những năm 1930, các nhà toán học Ba Lan của trường toán Łwów<sup>1</sup> thường gặp nhau ở quán Scottish Café để thảo luận. Tại đây, vào năm 1935, nhà toán học nổi tiếng Stefan Banach đã đặt ra một quyển sổ dày, gọi là Scottish Book, để mọi người ghi lại các bài toán hay cùng với lời giải hoàn thiện hoặc ý tưởng tiếp cận vấn đề. Bài toán thứ 43 trong quyển Scottish Book được đưa ra bởi nhà toán học Stanisław Mazur là về một trò chơi vô hạn được mô tả như sau:

- (i) Đầu tiên, Bình chọn một đoạn đóng bị chặn  $B_1 = [a_1, b_1]$  tùy ý có độ dài khác 0.
- (ii) Sau đấy, An và Bình thay phiên nhau chọn các đoạn đóng có độ dài khác 0 nằm trong đoạn mà đối thủ chọn trước đấy. Nói một cách khác, nếu như  $A_n$  và  $B_n$  là lựa chọn tương ứng của An và Bình ở lượt đi thứ  $n$  thì  $B_{n+1} \subseteq A_n \subseteq B_n$ .
- (iii) Tập con  $S \subseteq \mathbb{R}$  được cho trước sẽ là tập mục tiêu của An. An sẽ thắng nếu như giao của tất cả các đoạn đã chọn và  $S$  giao nhau:

$$S \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = S \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \right) \neq \emptyset,$$

còn nếu không thì Bình thắng.

Tập con  $S \subseteq \mathbb{R}$  được gọi là một tập *thắng cuộc* nếu như An có chiến lược (sẽ được định nghĩa chi tiết hơn trong phần sau) để chắc chắn thắng, bất kể Bình có đi như thế nào. Nếu Bình có chiến lược để chắc chắn thắng, bất kể An có đi như thế nào đi nữa thì tập  $S$  sẽ được gọi là một tập *thua cuộc*. Còn nếu cả An và Bình đều không có chiến lược để thắng, thì tập  $S$  sẽ được gọi là một tập *không xác định*.

Một quan sát đơn giản là nếu như tập  $S$  không trù mật<sup>2</sup>, nghĩa là tồn tại một đoạn mở  $(a, b)$  không giao với  $S$ :  $(a, b) \cap S = \emptyset$ , thì Bình có thể luôn luôn thắng bằng cách chọn  $B_1 \subseteq (a, b)$ .

Mở rộng quan sát trên, nếu như  $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$  là một hợp đếm được các tập không đâu trù mật<sup>3</sup>

$S_n$ , thì Bình luôn có thể chọn các đoạn  $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$  sao cho  $B_n \cap S_n = \emptyset$ . Với chiến lược này, Bình sẽ chiến thắng vì:

$$S \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m \right) \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left( S_m \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \right) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} (S_m \cap B_m) = \emptyset.$$

<sup>1</sup>hiện nay là Lviv, Ukraine.

<sup>2</sup>dense

<sup>3</sup>nowhere dense



Những tập  $S$  như ở trên còn được gọi là *thuộc phạm trù thứ nhất*. Lập luận tương tự như trên, nếu như phần bù của  $S$  thuộc phạm trù thứ nhất trong  $\mathbb{R}$  thì  $S$  sẽ là một tập thắng cuộc. Mazur đã nhận ra mối liên hệ này giữa tính chất thắng cuộc và phạm trù Baire, và ông đã phỏng đoán rằng điều kiện đủ cho tập  $S$  là tập thắng cuộc này cũng đồng thời là điều kiện cần. Vấn đề này là bài toán thứ 43 được ghi lại trong quyển Scottish Book, và nó đã được chứng minh bởi chính Banach (vì thế nên có tên gọi trò chơi Banach-Mazur):

**Định lý 2** (Banach 1935). (i)  $S$  là tập thắng cuộc khi và chỉ khi  $S$  có phần bù thuộc phạm trù thứ nhất trong  $\mathbb{R}$ .

(ii)  $S$  là tập thua cuộc khi và chỉ khi tồn tại một đoạn mở  $I \subseteq \mathbb{R}$  sao cho  $S \cap I$  thuộc phạm trù thứ nhất trên  $I$ .

Dựa vào định lý trên, nếu như với mọi đoạn mở  $I \subseteq \mathbb{R}$ , cả  $S \cap I$  và  $I \setminus S$  đều không thuộc phạm trù thứ nhất thì cả An và Bình đều không có chiến lược để chắc chắn thắng; nói một cách khác,  $S$  là một tập không xác định. Với Tiên đề Chọn, ta có thể xây dựng được các tập  $S$  không xác định, với 2 ví dụ tiêu biểu sau:

(i) *Tập Vitali*: tập  $V$  bao gồm một và chỉ một đại diện của mỗi phần tử của  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ . Lưu ý rằng  $V$  có thể không trù mật, khi đấy Bình luôn luôn có thể thắng. Nếu như  $V$  trù mật thì trò chơi Banach Mazur với  $S = V$  sẽ là không xác định. Mặt khác,  $S = \mathbb{R} \setminus V$  luôn luôn không xác định.

(ii) *Tập Bernstein*: tập  $B$  sao cho cả  $B$  và phần bù của  $B$  đều giao với mọi tập đóng không đếm được.

Bạn đọc có thể tham khảo chứng minh đầy đủ của Định lý 2 trong sách của Oxtoby [17] (chương 6).

Từ sau thế chiến thứ 2, khoảng những năm 1950 cho đến nay, có rất nhiều biến thể của trò chơi Banach-Mazur (thường được gọi chung là các trò chơi topo<sup>4</sup>) được giới thiệu và ứng dụng vào việc mô tả và phân loại các tính chất của tập hợp trong lý thuyết topo tổng quát, lý thuyết mô tả tập hợp, lý thuyết tính toán, ...

### 3. Trò chơi Gale-Stewart và Bài toán xác định

Mãi gần 20 năm sau khi trò chơi Banach-Mazur được phát hiện, cơ sở của lý thuyết trò chơi vô hạn với thông tin hoàn hảo mới được xây dựng một cách độc lập bởi Gale và Stewart [8] vào năm 1953 ở Mỹ, và bởi Mycielski và Zięba [15] vào năm 1955 ở Ba Lan.

Trong trò chơi vô hạn tổng quát của Gale và Stewart (gọi là *trò chơi Gale-Stewart*), An và Bình sẽ chơi trên một tập không rỗng  $E$ , gọi là *tập các vị trí*, cùng với topo rời rạc trên  $E$ . Tập hợp các dãy hữu hạn và vô hạn trong  $E$  sẽ được ký hiệu lần lượt là  $E^*$  và  $E^{\mathbb{N}}$ . Các phần tử của  $E^* \cup E^{\mathbb{N}}$  sẽ được gọi là các *ván đấu*. Độ dài của mỗi ván đấu  $\omega \in E^* \cup E^{\mathbb{N}}$  sẽ được ký hiệu là  $|\omega|$  ( $|\omega| = \infty$  nếu  $\omega \in E^{\mathbb{N}}$ ).

Để cho tiện, chúng tôi sẽ sử dụng ký hiệu  $E^0 = \{\omega_0\}$ , với  $\omega_0 \in E$ , cho vị trí bắt đầu của trò chơi (chẳng hạn như bàn cờ trống trong cờ vây, hay vị trí đầu tiên của bàn cờ vua). Tất cả các ván đấu đều bắt đầu bằng  $\omega_0$ , nên ta có thể bỏ qua  $\omega_0$  khi ghi lại vị trí của một ván đấu nào đó.

<sup>4</sup>topological games

Luật chơi của trò chơi Gale-Stewart khi đầy được xác định bằng một hàm:

$$\Gamma : \prod_{n \in \mathbb{N}} E^{n-1} \rightarrow \mathcal{P}^*(E),$$

với  $\mathcal{P}^*(E)$  là họ các tập con không rỗng<sup>5</sup> của  $E$ . Một ván đấu  $\omega \in E^* \cup E^{\mathbb{N}}$  được gọi là *hợp lệ* nếu như:

$$\omega_n \in \Gamma(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) \text{ với mọi } n \leq |\omega|.$$

Tập các ván đấu hợp lệ sẽ được ký hiệu là  $E_{\Gamma}^* \cup E_{\Gamma}^{\mathbb{N}}$ .

Cho trước một tập các ván đấu hợp lệ có độ dài vô hạn  $S \subseteq E_{\Gamma}^{\mathbb{N}}$  làm tập mục tiêu của An, trò chơi Gale-Stewart  $(E, \Gamma, S)$  giữa An và Bình có thể được mô tả như sau:

- (i) An và Bình thay phiên nhau chọn các phần tử của  $E$ : Bình chọn  $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots$  và An chọn  $\omega_2, \omega_4, \omega_6, \dots$  một cách hợp lệ:  $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in E_{\Gamma}^*$  với mọi  $n \in \mathbb{N}$ .
- (ii) An sẽ thắng nếu như kết quả  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in S$ , nếu không thì Bình thắng.

Chiến lược chơi của An có thể được hiểu nôm na là một cách cố định chọn bước đi hợp lệ tiếp theo ở mỗi lượt dựa trên các bước đi đã được thực hiện trước đây. Áp dụng ký hiệu như ở trên, chúng ta có thể định nghĩa một *chiến lược của An* là một hàm:

$$\sigma_A : \prod_{n \in \mathbb{N}} E_{\Gamma}^{2n-1} \rightarrow E \text{ sao cho } \sigma_A(\omega) \in \Gamma(\omega) \text{ với mọi } \omega \in \prod_{n=0}^{\infty} E_{\Gamma}^{2n+1}.$$

Tương tự như vậy, một *chiến lược của Bình* là một hàm

$$\sigma_B : \prod_{n=0}^{\infty} E_{\Gamma}^{2n} \rightarrow E \text{ sao cho } \sigma_B(\omega) \in \Gamma(\omega) \text{ với mọi } \omega \in \prod_{n=0}^{\infty} E_{\Gamma}^{2n}.$$

Nếu như An chọn chiến lược  $\sigma_A$  và Bình chọn chiến lược  $\sigma_B$ , chúng ta sẽ có được một ván đấu vô hạn tương ứng, ký hiệu là  $(\sigma_A, \sigma_B)$ :

$$(\sigma_A, \sigma_B) = (\sigma_B(\omega_0), \sigma_A(\sigma_B(\omega_0)), \sigma_B(\sigma_A(\sigma_B(\omega_0))), \dots) \in E_{\Gamma}^{\mathbb{N}}.$$

Với ký hiệu như trên, tập  $S$  sẽ là một tập thắng cuộc khi và chỉ khi tồn tại một chiến lược  $\sigma_A$  của An sao cho với mọi chiến lược  $\sigma_B$  của Bình,  $(\sigma_A, \sigma_B) \in S$ :

$$R_{\sigma_A} := \{(\sigma_A, \sigma_B) : \sigma_B \text{ là một chiến lược của Bình}\} \subseteq S.$$

Tương tự như vậy,  $S$  sẽ là một tập thua cuộc khi và chỉ khi tồn tại một chiến lược  $\sigma_B$  của Bình sao cho với mọi chiến lược  $\sigma_A$  của An,  $(\sigma_A, \sigma_B) \notin S$ :

$$R_{\sigma_B} := \{(\sigma_A, \sigma_B) : \sigma_A \text{ là một chiến lược của An}\} \subseteq E_{\Gamma}^{\mathbb{N}} \setminus S,$$

và trò chơi  $(E, \Gamma, S)$  sẽ là không xác định nếu như không tồn tại  $\sigma_A$  hay  $\sigma_B$  như trên.

Trang bị tập  $E^{\mathbb{N}}$  với topo tích, và  $E_{\Gamma}^{\mathbb{N}}$  với topo không gian con thừa hưởng từ  $E^{\mathbb{N}}$ , Gale và Stewart đã chứng minh định lý tổng quát đầu tiên về tính xác định của trò chơi Gale-Stewart như sau:

<sup>5</sup>để đảm bảo An và Bình luôn có lựa chọn cho bước đi tiếp theo

**Định lý 3** (Gale-Stewart [8]). *Nếu như  $S \subseteq E_\Gamma^\mathbb{N}$  là một tập mở hoặc tập đóng, thì trò chơi  $(G, \Gamma, S)$  là xác định, hay nói một cách khác, khi đây An hoặc Bình có chiến lược để thắng.*

Định lý 3 có thể được xem là mở rộng của Định lý 1 thông qua cách hình dung trò chơi Gale-Stewart  $(E, \Gamma, S)$  như một cây vô hạn như sau:

- (i) Vị trí bắt đầu của trò chơi  $\omega_0$  tương ứng với gốc của cây.
- (ii) Các phần tử của  $E_\Gamma^n$  tương ứng với các đỉnh mà khoảng cách tới  $\omega_0$  bằng  $n$ .
- (iii) Với mỗi đỉnh hữu hạn của cây tương ứng với  $\omega$ , phần tử  $e \in \Gamma(\omega)$  tương ứng với cạnh nối từ  $\omega \in E_\Gamma^{|\omega|}$  đến  $(\omega, e) \in E_\Gamma^{|\omega|+1}$ .
- (iv) Các phần tử của  $E_\Gamma^\mathbb{N}$  sẽ tương ứng với các đường đi dài vô hạn không lặp lại đỉnh bắt đầu từ  $\omega_0$ .

Tương tự như vậy, mỗi trò chơi hữu hạn với thông tin hoàn hảo có thể xem như một cây hữu hạn (mặc dù có thể là rất lớn), và ta có thể mở rộng cây hữu hạn này ra thành vô hạn bằng cách kéo dài tất cả các lá ra thành dài vô hạn (chẳng hạn như bước đi tiếp theo duy nhất của cả An và Bình khi một bàn cờ vua đã kết thúc là giữ các quân cờ ở nguyên vị trí).

Với mỗi cây vô hạn như vậy, tập tất cả các nhánh con dài vô hạn của một đỉnh là một tập vừa đóng vừa mở trong  $E_\Gamma^\mathbb{N}$ , và họ các tập như vậy tạo thành một cơ sở của topo trên  $E_\Gamma^\mathbb{N}$ . Khi ta mở rộng một trò chơi hữu hạn ra thành vô hạn như ở trên, ta có thể thấy rằng cơ sở của topo này bao gồm các tập chứa 1 điểm<sup>6</sup> của  $E_\Gamma^\mathbb{N}$ . Nói một cách khác, topo trên  $E_\Gamma^\mathbb{N}$  là topo rời rạc, mọi tập con của  $E_\Gamma^\mathbb{N}$  đều là tập mở, và Định lý 3 của Gale-Stewart suy ra Định lý 1 của Zermelo.

Cũng trong bài báo [8], Gale và Stewart đặt ra câu hỏi về tính xác định của các tập hợp cao hơn trong phân cấp Borel, hay tổng quát hơn, tất cả các tập con Borel của  $E_\Gamma^\mathbb{N}$ . Câu hỏi này đã trở thành một trong những vấn đề trung tâm của lý thuyết trò chơi vô hạn với thông tin hoàn hảo trong hơn 20 năm sau đó. Chỉ trong vòng 2 năm, Định lý 3 đã được mở rộng ra cho các tập  $F_\sigma$  và  $G_\delta$  một cách độc lập bởi Wolfe [24] (1955) và Mycielski-Świerczkowski-Zięba [14] (1956). Tuy nhiên, tính xác định của các phân cấp Borel cao hơn trở nên phức tạp hơn rất nhiều. Mãi gần 10 năm sau, tính xác định của các tập  $F_{\sigma\delta}$  và  $G_{\delta\sigma}$  mới được chứng minh bởi Davis [5] vào năm 1964, và sau đây là các tập  $F_{\sigma\delta\sigma}$ ,  $G_{\delta\sigma\delta}$  vào năm 1972 bởi Paris [18]. Cuối cùng, đến năm 1975, áp dụng Tiên đề Chọn, Donald A. Martin [10] đã chứng minh được tính xác định của các tập Borel, giải quyết trọn vẹn câu hỏi của Gale và Stewart. Kết quả này của Martin thường được gọi là *Định lý xác định Borel*<sup>7</sup>:

**Định lý 4** (Martin [10]). *Nếu như  $S \subseteq E_\Gamma^\mathbb{N}$  là một tập Borel, thì trò chơi  $(G, \Gamma, S)$  là xác định.*

Trở lại câu hỏi về sự tồn tại của tập mục tiêu  $S \subseteq E_\Gamma^\mathbb{N}$  không xác định, Định lý 1 cho thấy rằng không phải tất cả các trò chơi Gale-Stewart đều tồn tại một tập  $S$  như vậy. Nếu như  $E, \Gamma$  không quá “suy biến”, chẳng hạn như ở mỗi bước của trò chơi, cả An và Bình đều có ít nhất 2 lựa chọn, thì với Tiên đề Chọn, chúng ta có thể xây dựng được tập  $S$  sao cho  $(E, \Gamma, S)$  là không xác định. Tổng quát hơn một tí, trò chơi Gale-Stewart  $(E, \Gamma)$  được gọi là *không suy biến*<sup>8</sup> nếu như với mọi dãy vô hạn  $\omega \in E_\Gamma^\mathbb{N}$ , tồn tại ít nhất một chiến lược  $\sigma_A$  của An và một chiến lược  $\sigma_B$  của Bình sao cho:

$$\omega \notin R_{\sigma_A} \quad \text{và} \quad \omega \notin R_{\sigma_B},$$

hay nói một cách khác, cả An và Bình đều có chiến lược để tránh  $\omega$ .

<sup>6</sup>singleton

<sup>7</sup>Borel Determinacy Theorem

<sup>8</sup>non-degenerate

**Định lý 5** (Gale-Stewart [8]). *Nếu như  $(E, \Gamma)$  là không suy biến thì với Tiên đề Chọn, tồn tại tập  $S \subseteq E_\Gamma^\mathbb{N}$  sao cho trò chơi  $(E, \Gamma, S)$  là không xác định. Hay cụ thể hơn, khi tập  $S$  là một tập Bernstein của  $E_\Gamma^\mathbb{N}$ .*

Vào năm 1962, Mycielski và Steinhaus [13] đặt ra một tiên đề mới gọi là Tiên đề Xác định ( $AD^9$ ) như sau:

**Tiên đề Xác định (AD).** Xét trò chơi Gale-Stewart với An và Bình chọn các số tự nhiên bất kỳ:  $E = \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(\omega) = \mathbb{N}$  với mọi  $\omega \in E^*$ . Mọi tập mục tiêu  $S \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$  đều là tập xác định.

Theo như Định lý 5 thì Tiên đề Xác định mâu thuẫn với Tiên đề Chọn, tuy nhiên Mycielski và Steinhaus chứng minh rằng Tiên đề Xác định không mâu thuẫn với các tiên đề tập hợp của Zermelo-Fraenkel, và mô hình lý thuyết tập hợp (ZF+AD) trở thành một nhánh nghiên cứu thú vị trong lý thuyết mô tả tập hợp<sup>10</sup>. Một số hệ quả thú vị của Tiên đề Xác định:

- (i) Tiên đề Chọn đếm được<sup>11</sup>, một phiên bản yếu hơn của Tiên đề Chọn.
- (ii) Mọi tập con của tập số thực  $\mathbb{R}$  đều (Lebesgue) đo được (Solovay [21]).
- (iii) Tập Vitali (hay là  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ) có lực lượng lớn hơn lực lượng của tập số thực  $\mathbb{R}$ .
- (iv) Mọi tập con không đếm được của  $\mathbb{R}$  đều chứa một tập hoàn hảo.
- (v) Mọi tập con của  $\mathbb{R}$  đều có tính chất Baire.

Bạn đọc có thể tham khảo thêm về Tiên đề Xác định và các phiên bản khác của nó trong sách của Moschovakis [12] hoặc Kechris [9].

## 4. Trò chơi Schmidt và Số học metric

Vào năm 1966, W. M. Schmidt [19] giới thiệu một biến thể của trò chơi Banach-Mazur và áp dụng nó vào trong xấp xỉ Diophantine. Hơn 40 năm sau, trò chơi của Schmidt và các biến thể của nó đã trở thành một trong những công cụ mạnh nhất của lý thuyết xấp xỉ Diophantine và được ứng dụng trong động học thuần nhất<sup>12</sup>, hình học hyperbolic, không gian moduli, ...

Gọi  $(X, d)$  là một không gian metric đầy đủ. Cho trước 2 số thực  $\alpha$  và  $\beta$  với  $0 < \alpha, \beta < 1$ . An và Bình chơi trò chơi  $(\alpha, \beta)$  của Schmidt trên  $X$  với tập đối tượng  $S \subseteq X$  của An, ký hiệu là  $(\alpha, \beta, S)$  như sau:

- (i) Bình chọn một quả bóng (đóng) bất kỳ  $B_1$  có bán kính  $r(B_1) > 0$ .
- (ii) Ở bước thứ  $n$  của An, An chọn quả bóng bất kỳ  $A_n$  nằm trong quả bóng  $B_n$  trước đây của Bình với bán kính  $r(A_n) = \alpha r(B_n)$ .
- (iii) Ở bước thứ  $n + 1$  của Bình, Bình chọn quả bóng bất kỳ  $B_{n+1}$  nằm trong quả bóng  $A_n$  trước đây của An với bán kính  $r(B_{n+1}) = \beta r(A_n)$ .

<sup>9</sup>Axiom of Determinacy

<sup>10</sup>Descriptive Set Theory

<sup>11</sup>Axiom of Countable Choice

<sup>12</sup>homogeneous dynamics

- (iv) Vì  $(X, d)$  là một không gian metric đầy đủ, và các quả bóng đã được chọn lồng nhau  $B_1 \supseteq A_1 \supseteq B_2 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  với bán kính tiến về 0, kết quả của một ván đấu giữa An với Bình là một điểm duy nhất:

$$\{x_\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

- (v) An thắng nếu như  $x_\infty \in S$ , và ngược lại, Bình thắng nếu như  $x_\infty \notin S$ .

Lưu ý rằng, khi  $X$  không phải là một không gian Banach, thì chúng ta dùng các *quả bóng hình thức*<sup>13</sup> (các phần tử của  $X \times \mathbb{R}_{>0}$  cùng với một phép thực hiện topo  $I : X \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{P}(X)$  như sau:

$$I(x, \rho) := \{y \in X : d(x, y) \leq \rho\}.$$

Khi đấy, quả bóng (hình thức)  $A = (c_A, \rho_A)$  được gọi là *nằm trong*  $B = (c_B, \rho_B)$ , ký hiệu là  $A \preceq B$  khi và chỉ khi:

$$d(c_A, c_B) \leq \rho_B - \rho_A.$$

Hiển nhiên  $A \preceq B$  suy ra  $I(A) \subseteq I(B)$ , nhưng chiều ngược lại có thể sai khi  $X$  không phải là một không gian Banach. Khi  $X$  là một không gian Banach thì 2 quan hệ nằm trong này là tương đương nhau.

Đặt hàm tâm và bán kính của các quả bóng hình thức  $c : X \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow X$ ,  $r : X \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  như sau:

$$c(x, \rho) = x \quad \text{và} \quad r(x, \rho) = \rho.$$

Với ký hiệu như trên, chúng ta có thể xây dựng một trò chơi Gale-Stewart  $(E, \Gamma, S^*)$  đi kèm với trò chơi  $(\alpha, \beta)$  của Schmidt trên  $X$  như sau:

- (i)  $E = X \times \mathbb{R}_{>0}$ .
- (ii)  $\Gamma(\omega_0) = E$ .
- (iii)  $\Gamma(\omega_1, \dots, \omega_{2n-1}) = \{A \in E : A \preceq \omega_{2n-1} \text{ và } r(A) = \alpha r(\omega_{2n-1})\}$ , với  $n \in \mathbb{N}$ .
- (iv)  $\Gamma(\omega_1, \dots, \omega_{2n}) = \{B \in E : B \preceq \omega_{2n} \text{ và } r(B) = \beta r(\omega_{2n})\}$ , với  $n \in \mathbb{N}$ .
- (v)  $S^* = \left\{ \omega \in E_{\Gamma}^{\mathbb{N}} : S \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} I(\omega_n) \neq \emptyset \right\}$ .

Khi đấy ta có thể thấy rằng An (Bình) có chiến lược để thắng trong trò chơi  $(\alpha, \beta, S)$  của Schmidt khi và chỉ khi An (Bình) có chiến lược để thắng trong trò chơi Gale-Stewart  $(E, \Gamma, S^*)$ .

Vậy tính xác định của trò chơi  $(\alpha, \beta, S)$  của Schmidt như thế nào? Có 2 trường hợp đơn giản như sau:

- (i) Khi  $1 + \alpha\beta \leq 2\alpha$  thì dù An có đi như thế nào, Bình vẫn luôn luôn có thể cố định tâm của các quả bóng  $B_n$ . Như vậy, nếu như  $S \neq X$ , thì Bình luôn luôn thắng, và ngược lại, thì đương nhiên An luôn thắng.

<sup>13</sup>formal balls

- (ii) Tương tự như vậy, khi  $1 + \alpha\beta \leq 2\beta$  thì dù Bình có đi như thế nào, An vẫn luôn luôn có thể cố định tâm của các quả bóng  $A_n$ . Như vậy, nếu như  $S$  trù mật trong  $X$  thì An luôn luôn thắng, và nếu không thì Bình luôn thắng.

Tuy nhiên, ngoài 2 trường hợp hiển nhiên trên, thì việc phân loại hoàn toàn các tập thắng cuộc và thua cuộc của trò chơi  $(\alpha, \beta)$  của Schmidt vẫn là một vấn đề mở cho đến nay.

Ý tưởng đặc biệt nhất khi Schmidt nghĩ ra trò chơi  $(\alpha, \beta)$  là áp dụng nó vào trong xấp xỉ Diophantine thông qua những định nghĩa sau:

- (i)  $S$  được gọi là một tập  $(\alpha, \beta)$ -thắng cuộc nếu như An có chiến lược để thắng trong trò chơi  $(\alpha, \beta, S)$ .
- (ii)  $S$  được gọi là một tập  $\alpha$ -thắng cuộc nếu như  $S$  là một tập  $(\alpha, \beta)$ -thắng cuộc với mọi  $0 < \beta < 1$ .
- (iii)  $S$  được gọi là một tập thắng cuộc nếu như  $S$  là một tập  $\alpha$ -thắng cuộc với một  $0 < \alpha < 1$  bất kỳ.

Schmidt [19] đã chứng minh rằng các tập thắng cuộc sở hữu những tính chất đặc biệt sau:

**Định lý 6** (Schmidt [19]). (i) Nếu như  $X$  là một tập con mở của một không gian Banach, và  $S$  là một tập  $\alpha$ -thắng cuộc, thì  $S$  có cùng số chiều Hausdorff với  $X$ .

(ii) Nếu như  $S_1, S_2, \dots$  là các tập  $\alpha$ -thắng cuộc, thì giao của chúng  $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$  cũng là một tập  $\alpha$ -thắng cuộc.

(iii) Nếu như  $f$  là một phép biến đổi affine khả nghịch trên  $\mathbb{R}^n$ , và  $S$  là một tập  $\alpha$ -thắng cuộc, thì  $f(S)$  cũng là một tập  $\alpha$ -thắng cuộc.

(iv) Nếu như  $f_1, f_2, \dots : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  là các vi phân<sup>14</sup>, và  $S$  là một tập thắng cuộc, thì  $\bigcap_{n=1}^{\infty} f_n(S)$  cũng là một tập thắng cuộc.

Ví dụ đầu tiên về ứng dụng của trò chơi của Schmidt trong số học metric như sau: Một số thực  $x$  được gọi là chuẩn trong cơ số  $b$ <sup>15</sup> nếu như khi viết số  $x$  dưới dạng mở rộng theo cơ số  $b$ :  $x = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_0 + a_{-1}b^{-1} + a_{-2}b^{-2} + \dots$ , các chữ số  $a_n, a_{n-1}, \dots$  được phân phối đều:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{-N < i \leq n : a_i = k\}}{N + n} = \frac{1}{b} \quad \text{với } k = 0, 1, \dots, b-1.$$

Chúng ta có thể chứng minh được rằng hầu hết (theo độ đo Lebesgue) các số thực là chuẩn trong mọi cơ số  $b$ . Như vậy, tập các số không chuẩn trong một cơ số  $b$  nào đó có độ đo Lebesgue bằng 0. Áp dụng Định lý 6, Schmidt đã chứng minh rằng tập các số thực không chuẩn trong mọi cơ số  $b$ <sup>16</sup> (ký hiệu là  $\mathbf{NN}$ ) có chiều Hausdorff bằng 1:

**Định lý 7** (Schmidt [19]). Với mọi cơ số  $b$ , tập các số không chuẩn theo cơ số  $b$  là một tập  $1/2$ -thắng cuộc. Và vì thế, tập  $\mathbf{NN}$  các số không chuẩn theo mọi cơ số là một tập thắng cuộc.

<sup>14</sup>diffeomorphism

<sup>15</sup>normal in base  $b$

<sup>16</sup>normal to no base

Một ứng dụng khác của trò chơi Schmidt trong bài báo [19] là tập **BA** của các số xấp xỉ kém. Nhắc lại rằng một số vô tỉ  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  được gọi là *xấp xỉ kém* nếu như tồn tại một hằng số  $c > 0$  (tùy thuộc vào  $x$ ) sao cho với mọi số hữu tỉ  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^2}.$$

Theo như Định lý Khintchine trong xấp xỉ Diophantine, tập **BA** có độ đo Lebesgue bằng 0. Hơn thế nữa, tập **BA** còn là một tập thuộc phạm trù thứ nhất, bởi vì ta có thể phân tích tập **BA** thành ra như sau:

$$\mathbf{BA} = \bigcup_{c>0} \left( \mathbb{R} \setminus \left( \bigcup_{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}} \left[ \frac{p}{q} - \frac{c}{q^2}, \frac{p}{q} + \frac{c}{q^2} \right] \right) \right),$$

với các tập không đâu trù mật:

$$\mathbf{BA}_c := \mathbb{R} \setminus \left( \bigcup_{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}} \left[ \frac{p}{q} - \frac{c}{q^2}, \frac{p}{q} + \frac{c}{q^2} \right] \right).$$

Theo như Định lý 2, **BA** là một tập thua cuộc trong trò chơi Banach-Mazur. Như vậy xét theo 2 tiêu chí độ dài (độ đo Lebesgue) và phạm trù Baire, **BA** là một tập nhỏ. Với một tập nhỏ như vậy, nếu như ta xê dịch **BA** đi một tí, chưa chắc **BA** +  $c$  có giao với **BA**. Tuy nhiên, Schmidt đã chứng minh rằng **BA** là một tập  $(\alpha, \beta)$ -thắng cuộc với mọi  $\alpha, \beta$  không hiển nhiên, dẫn đến một hệ quả thú vị sau về tập **BA**:

**Định lý 8** (Schmidt [19]). *Nếu như  $f_1, f_2, \dots$  là các biến đổi affine khả nghịch, hay tổng quát hơn nữa là các vi phôi trên  $\mathbb{R}$ , thì giao của ảnh của **BA** dưới  $f_n$  có chiều Hausdorff bằng 1:*

$$\dim_H \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n(\mathbf{BA}) \right) = 1.$$

Hơn thế nữa, Fishman còn áp dụng trò chơi của Schmidt để chứng minh rằng, nếu như  $K$  là một fractal “tốt” trên  $\mathbb{R}$ , chẳng hạn như tập Cantor, thì giao của **BA** và  $K$  cũng vẫn là một tập thắng cuộc, và có chiều Hausdorff bằng với chiều Hausdorff của  $K$ :

**Định lý 9** (Fishman [6]). *Nếu như  $K$  là một fractal “tốt”, và  $f_1, f_2, \dots$  là các vi phôi trên  $\mathbb{R}$ , thì:*

$$\dim_H \left( K \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n(\mathbf{BA}) \right) = \dim_H K$$

Các kết quả trên đã được mở rộng ra cho không gian các véc tơ  $\mathbb{R}^n$  và không gian các ma trận  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  bởi Schmidt [20], Fishman và các tác giả khác [7, 3, 4] sử dụng các biến thể của trò chơi Schmidt. Trong phần 4 của loạt bài về lý thuyết xấp xỉ Diophantine, chúng ta sẽ chứng minh chi tiết những kết quả này cho tập các véc tơ xấp xỉ kém trên  $\mathbb{R}^n$ , áp dụng một biến thể của trò chơi Schmidt được giới thiệu trong [3].



## Tài liệu tham khảo

- [1] C. G. Bachet de Méziriac, *Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres* (1612).
- [2] C. L. Bouton, *Nim, a game with a complete mathematical theory*, Annals of Math. **3** (1901–1902), pp. 35–39.
- [3] R. Broderick, L. Fishman, D. Kleinbock, A. Reich, và B. Weiss, *The set of badly approximable vectors is strongly  $C^1$ -incompressible*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **153**, no. 2 (2012), pp. 211–253.
- [4] R. Broderick, L. Fishman, và D. Simmons, *Badly approximable systems of affine forms and incompressibility on fractals*, J. Number Theory **133** (2013), pp. 2186–2205.
- [5] M. Davis, *Infinite games of perfect information*, trong *Advances in game theory*, Princeton (1964), pp. 85–101.
- [6] L. Fishman, *Schmidt's game on fractals*, Israel J. Math. **171** (2009), pp. 77–92.
- [7] L. Fishman, *Schmidt's game, badly approximable matrices and fractals*, J. Number Theory **129**, no. 9 (2009), pp. 2133–2153.
- [8] D. Gale và F. M. Stewart, *Infinite games with perfect information*, in: Contribution to the theory of games, Vol. II, Annals of Math. Studies **28** (1953), pp. 245–266.
- [9] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag (1994).
- [10] D. A. Martin, *Borel determinacy*, Annals of Math. **102** (1975), pp. 363–371.
- [11] D. A. Martin, *A purely inductive proof of Borel determinacy*, Proc. Sympos. Pure Math. **42** (1985), pp. 303–308.
- [12] Y. N. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*, North Holland (1980).
- [13] J. Mycielski và H. Steinhaus, *A mathematical axiom contradicting the axiom of choice*, Bull. Acad. Polon. Sci. **10** (19662), pp. 1–3.
- [14] J. Mycielski, S. Świerczkowski, và A. Zięba, *On infinite positional games*, Bull. Acad. Polon. Sci. **4** (1956), pp. 485–488.
- [15] J. Mycielski và A. Zięba, *On infinite games*, Bull. Acad. Polon. Sci. **3** (1955), pp. 133–136.
- [16] J. von Neumann và O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press (1944).
- [17] J. C. Oxtoby, *Measure and Category*, Graduate Texts in Mathematics **2**, Springer-Verlag (1971).
- [18] J. B. Paris,  $ZF \vdash \Sigma_4^0$  determinateness, J. Symbolic Logic **37** (1972), pp. 661–667.
- [19] W. M. Schmidt, *On badly approximable numbers and certain games*, Trans. Amer. Math. Soc. **123** (1966), pp. 178–199.



- [20] W. M. Schmidt, *Badly approximable systems of linear forms*, J. Number Theory **1** (1969), pp. 139–154.
- [21] R. M. Solovay, *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Ann. of Math **92** (1970), pp. 1–56.
- [22] R. Telgársky, *Topological games: On the 50<sup>th</sup> anniversary of the Banach–Mazur game*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **17** (1987), pp. 227–276.
- [23] S. M. Ulam, *The Scottish Book* (translated and edited by S. M. Ulam), Los Alamos Scient. Lab. Monograph, Los Alamos (1977).
- [24] P. Wolfe, *The strict determinateness of certain infinite games*, Pacific J. Math. **5** (1955), pp. 841–847.
- [25] E. Zermelo, *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie Schachspiels*, in: Proc. Fifth Internat. Cong. of Mathematicians (Cambridge 1912), Vol. II, Cambridge Univ. Press (1913), pp. 501–504.



# TRỊ SỐ $P$ RA TOÀ

Nguyễn Văn Tuấn

(Đại học New South Wales và Đại học Công nghệ Sydney, Úc)<sup>1</sup>

Trong lịch sử khoa học hiện đại, hiếm thấy một trị số nào có ảnh hưởng sâu rộng đến hoạt động khoa học và đời sống như trị số  $P$ , thường viết hoa và nghiêng.  $P$  là viết tắt chữ *Probability* – xác suất. Trị số  $P$  được sử dụng như là một thước đo chứng cứ khoa học. Vì tính chất chứng cứ, nên mới đây trị số này phải ra toà về một loại thuốc trị cảm cúm. Nhưng rất ít người hiểu rõ ý nghĩa của trị số  $P$  là gì. Nhân dịp trị số  $P$  ra hầu toà bên Mỹ, có lẽ chúng ta nên tìm hiểu ý nghĩa của trị số này và ảnh hưởng của nó trong cuộc sống kinh tế – xã hội.

Câu chuyện bắt đầu từ một phiên tòa liên quan đến thuốc **Zicam**<sup>2</sup>. Zicam là một loại kẽm được bào chế để điều trị bệnh cảm cúm. Nhà sản xuất Zicam là công ti được Matrixx. Thuốc bán khá chạy trên thị trường. Nhưng từ 1999 về sau, nhiều bệnh nhân và bác sĩ để ý thấy thuốc có vài phản ứng phụ đáng kể như cảm giác nóng bừng, có khi mất khứu giác. Các bác sĩ và bệnh nhân báo cho Matrixx biết, nhưng công ti không trả lời và có vẻ lờ đi.

Một bác sĩ bức xúc trước thái độ của công ti và xuất hiện trên chương trình truyền hình **Good Morning America** nói về những phản ứng của thuốc Zicam. Sau đó cổ phần của Matrixx bị giảm trầm trọng. Thế là các nhà đầu tư kiện Matrixx ra toà<sup>3</sup>, vì họ cho rằng Matrixx đã không thành thật báo cáo về phản ứng phụ của thuốc, và việc giấu giếm làm cho họ ... mất tiền. Phía công ti Matrixx, họ lí giải rằng những phản ứng phụ đó *không có ý nghĩa thống kê* (statistically non-significant). Và, theo lí giải của Matrixx, vì không có ý nghĩa thống kê, nên không thể kết luận rằng thuốc là nguyên nhân gây nên những phản ứng đó.

Tuy nhiên, khi ra toà, với một nhân chứng là một nhà kinh tế và cũng là một chuyên gia thống kê, toà phán rằng không thể biện minh rằng có ý nghĩa thống kê là điều kiện để suy luận nhân quả được. Matrixx thua kiện và phải bồi thường rất nhiều tiền cho bệnh nhân và các nhà đầu tư.

Vậy trị số  $P$  là gì mà được tòa án quan tâm như thế? Có thể nói rằng trị số  $P$  (hay  $P$  value) là một trị số rất phổ biến trong khoa học.  $P$  là viết tắt chữ *probability* trong ngữ vựng tiếng Anh, có nghĩa là *xác suất*. Bất cứ ai từng học đại học, bất cứ ngành nào, từ khoa học tự nhiên đến kinh tế học và khoa học nhân văn, đều phải học qua trị số  $P$ . Tuy được học nhiều như thế, nhưng số người thật sự hiểu ý nghĩa của nó thì không nhiều. Trong một cuộc điều tra trên 100 bác sĩ trên 15 năm kinh nghiệm và một số giáo sư đại học (những người đã từng có công bố quốc tế), chỉ có 15% hiểu đúng trị số  $P$ , phần còn lại đều hiểu sai!

<sup>1</sup> Giáo sư Nguyễn Văn Tuấn hiện tại là giáo sư y khoa, Đại học New South Wales; Giáo sư Y khoa Tiên lượng, Đại học Công nghệ Sydney (University of Technology, Sydney).

<sup>2</sup> Tất cả các liên kết đến các trang Web đều là bổ sung của Ban Biên tập. Chúng tôi tham khảo các liên kết này vào tháng 12 năm 2015. Tất cả chú thích trong bài này đều của Ban Biên tập.

<sup>3</sup> Bạn đọc có thể xem thêm thông tin ở [đây](#).

## Vô tội cho đến khi được chứng minh có tội

Qui trình mà khoa học sử dụng để kiểm định một giả thuyết rất giống với qui trình của bồi thẩm đoàn trong tòa án. Nhưng trước khi giải thích phát biểu đó, có lẽ cần phải làm quen với khái niệm *giả thuyết vô hiệu* (null hypothesis) qua một ví dụ. Bạn là nhà kinh tế học và có một nghi ngờ rằng có sự kì thị giới tính trong bổ nhiệm giám đốc điều hành doanh nghiệp. Nhưng là nhà khoa học, bạn không chỉ “nghi ngờ” mà phải phát biểu thành một giả thuyết cụ thể: *trong giới giám đốc doanh nghiệp tỉ lệ nữ giới thấp hơn nam giới*.

Nhưng theo **Karl Popper** (một triết gia khoa học lớn) thì chúng ta không thể chứng minh giả thuyết, mà chỉ bác bỏ một giả thuyết. Để bác bỏ giả thuyết, bạn cần đến một giả thuyết vô hiệu. Giả thuyết vô hiệu, như tên gọi là một phát biểu ngược lại với giả thuyết chính. Trong ví dụ trên, giả thuyết vô hiệu sẽ phát biểu là: *trong giới giám đốc doanh nghiệp tỉ lệ nữ giới bằng với nam giới*.

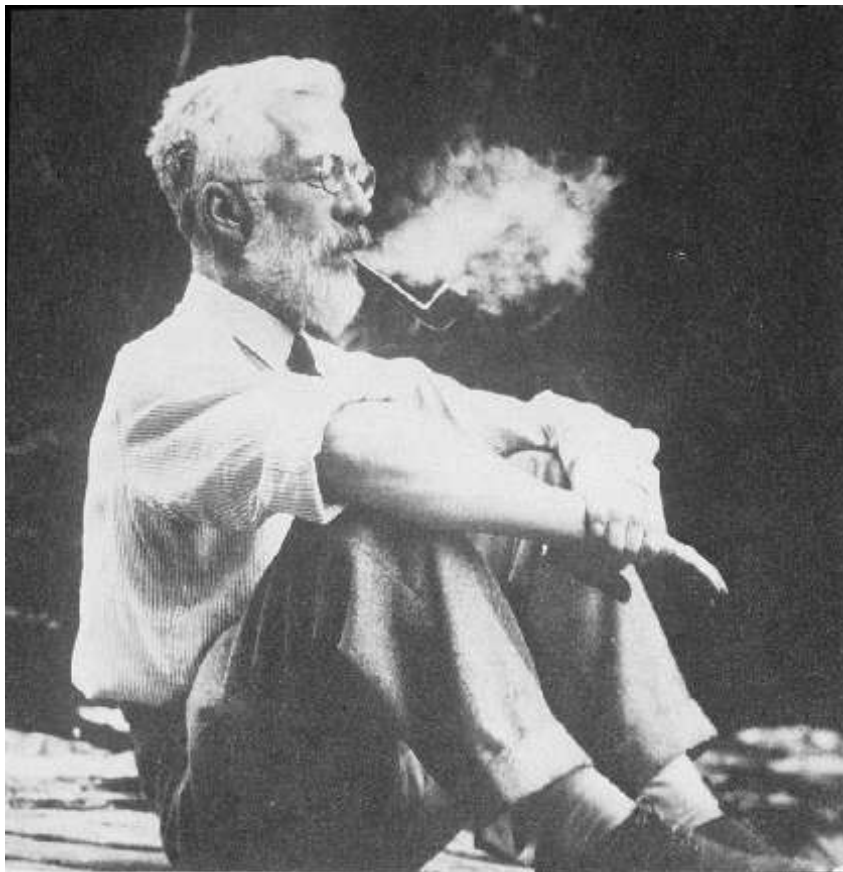
Sau đó, bạn sẽ thu thập dữ liệu, có thể là dữ liệu so sánh tỉ lệ nữ giám đốc trong các doanh nghiệp với tỉ lệ ngoài cộng đồng hay một ngành nghề khác. Vấn đề đặt ra là hai tỉ lệ có thật sự khác nhau, và để trả lời câu hỏi này, bạn phải tính trị số  $P$ . Nếu trị số  $P$  quá nhỏ, bạn có thể bác bỏ giả thuyết bình đẳng (tức giả thuyết vô hiệu). Hầu hết các phương pháp thuyết thống kê được phát triển để bác bỏ giả thuyết vô hiệu.

Qui trình bác bỏ giả thuyết vô hiệu cũng giống như qui trình suy luận của bồi thẩm đoàn trong tòa án. Có thể lấy ví dụ song song về tòa án và ảnh hưởng của thuốc Zicam như sau:

- Bồi thẩm đoàn bắt đầu với giả định rằng nguyên đơn *vô tội*. Tương tự, nhà khoa học bắt đầu với giả thuyết vô hiệu rằng thuốc Zicam *không* có tác động phụ;
- Tòa án cần *chứng cứ*. Nhà khoa học cần *dữ liệu* (data). Nhà khoa học làm thí nghiệm (nghiên cứu) để thu thập dữ liệu;
- Tòa án và bồi thẩm đoàn phải xử lí chứng cứ. Nhà khoa học cũng xử lí dữ liệu bằng phân tích thống kê để đi đến quyết định, và kết quả xử lí dữ liệu thường là trị số  $P$ . Trị số  $P$  được xem là thước đo về chứng cứ.
- Bồi thẩm đoàn sẽ quyết định nguyên đơn có tội nếu chứng cứ không phù hợp với giả định vô tội. Tương tự, nếu dữ liệu nghiên cứu không nhất quán với giả thuyết vô hiệu, nhà khoa học sẽ bác bỏ giả thuyết vô hiệu và tuyên bố chấp nhận giả thuyết chính.

Qui trình kiểm định giả thuyết vừa mô tả là một phương pháp trong triết lí phản nghiệm (falsificationism) rất phổ biến và trở thành một mô hình để giải thích sự tiến bộ của khoa học. Chịu ảnh hưởng bởi triết lí này, **Ronald A. Fisher** (1890 – 1962), một nhà di truyền học người Anh và cũng là “cha đẻ” của nền thống kê học hiện đại, đề xuất một phương pháp định lượng để phản nghiệm một giả thuyết khoa học. Ông gọi phương pháp này là “*Test of Significance*” (tôi tạm dịch là: *phương pháp kiểm định ý nghĩa thống kê*). Fisher quan niệm rằng thống kê là một bộ phận quan trọng của phương pháp suy luận theo phép qui nạp (inductive inference), tức là phương pháp suy luận dựa vào quan sát từ các mẫu (sample) và khái quát cho một quần thể (population). Theo Fisher, qui trình phản nghiệm có thể tóm lược như sau:

- Đề ra một giả thuyết vô hiệu, gọi là  $H_0$ ;



Ronald A. Fisher, “cha đẻ” của khoa học thống kê hiện đại.

- Tiến hành thí nghiệm để thu thập dữ liệu, gọi dữ liệu là  $D$ ;
- Tính xác suất quan sát  $D$  nếu  $H_0$  là đúng, tức tính  $P(D|H_0)$ . Đây là trị số  $P$ .

Ông đề nghị lấy  $P = 0.05$  như là một ngưỡng để quyết định bác bỏ hay chấp nhận giả thuyết vô hiệu.

Do đó, tiêu chuẩn để bác bỏ giả thuyết vô hiệu là trị số  $P < 0.05$ . Khi kết quả có  $P < 0.05$ , có thể kết luận rằng mối tương quan giữa Zicam và tác động phụ có ý nghĩa thống kê (tức *statistically significance*). Một mối tương quan có ý nghĩa thống kê có nghĩa là một mối tương quan đáng chú ý, chứ không phải là hiện tượng ngẫu nhiên. Nếu một thuốc có ảnh hưởng lâm sàng có ý nghĩa thống kê được hiểu rằng đó là hiệu quả thật, chứ không phải là ngẫu nhiên.

Ngược lại nếu  $P > 0.05$ , thì mối tương quan *không* có ý nghĩa thống kê, và chúng ta chấp nhận giả thuyết vô hiệu, tức không có khác biệt. Đây cũng chính là cách lí giải của của công ti Matrixx: vì  $P > 0.05$ , nên không thể nói rằng thuốc gây tác hại hay phản ứng phụ. Đã gần một thế kỉ nay, chúng ta được dạy như thế, và chấp nhận cách diễn giải đó.

Ronald Fisher (người Anh), một nhà di truyền học, nhưng cũng là một “đại thụ”, cũng có thể xem là cha đẻ của khoa học thống kê hiện đại. Các  $z$  test,  $r$ -to- $z$  test,  $F$ —test, v.v. mà chúng ta dùng ngày nay là sáng kiến của ông Fisher (mẫu tự  $F$  trong  $F$ —test là viết tắt của chữ Fisher). Ông này cực kì thông minh (dĩ nhiên), nhưng cũng cực kì khó tính và có khi hẹp hòi. Ông từng

làm cố vấn cho công ti thuốc lá và dùng khả năng thống kê của ông để biện minh rằng hút thuốc lá chẳng gây ung thư phổi! Về khoản này (thuốc lá và ung thư phổi) thì ông sai hoàn toàn.

Nhưng trị số  $P$  rất dễ bị hiểu lầm. Một trong những hiểu lầm phổ biến nhất là trị số  $P$  phản ánh xác suất của một giả thuyết. Trong ví dụ trên vì giả thuyết là không có ảnh hưởng của thuốc, nên nếu  $P = 0.03$  thì được hiểu là xác suất của giả thuyết không có ảnh hưởng là 3% (hoặc xác suất của giả thuyết có ảnh hưởng là 97%). Nhưng cách hiểu đó sai.

Nếu xem xét kĩ qui trình trên, chúng ta dễ dàng thấy rằng trị số  $P$  phản ánh *xác suất của dữ liệu* nếu giả thuyết vô hiệu là đúng (chứ không hề phản ánh *xác suất của giả thuyết vô hiệu*). Nếu gọi dữ liệu là  $D$ , và giả thuyết vô hiệu là  $H$ , trị số  $P$  chính là (chú ý dấu | có nghĩa là “với điều kiện”, và  $P$  là xác suất):

$$P(D|H)$$

Chứ không phải:

$$P(H)$$

$P(H)$  là xác suất không có điều kiện, còn xác suất  $P(D|H)$  là xác suất có điều kiện. Trị số  $P$  không phải là  $P(H)$ , mà là  $P(D|H)$ . Nói cách khác, trị số  $P$  là một xác suất có điều kiện. Do đó, trị số  $P$  có ý nghĩa khá ... lắt léo. Trong thực tế, chúng ta muốn biết “với dữ liệu có được thì xác suất thuốc gây ảnh hưởng là bao nhiêu” (cũng giống như nếu kết quả xét nghiệm là dương tính, thì xác suất tôi thật sự mắc bệnh là bao nhiêu). Chúng ta không cần biết “nếu giả thuyết không ảnh hưởng là đúng thì khả năng dữ liệu xảy ra là bao nhiêu” (nếu tôi mắc bệnh thì xác suất tôi có kết quả dương tính là bao nhiêu). Ấy thế mà trị số  $P$  trả lời câu hỏi thứ hai. Do đó, trị số  $P$  cung cấp cho chúng ta một thông tin chúng ta không cần biết!

Do đó, cách lí giải của Matrixx (ví dụ: vì  $P > 0.05$  nên không thể nói rằng thuốc có ảnh hưởng) là không đúng. Giả dụ như  $P = 0.10$ , thì Matrixx không thể nói rằng khả năng thuốc không có ảnh hưởng phụ là 10%, bởi vì ý nghĩa thật có nó là: nếu không có ảnh hưởng phụ thì xác suất mà dữ liệu xảy ra là 10%.

Có lẽ nói không ngoa rằng trị số  $P$  là một con số phổ biến nhất trong khoa học từ khoảng 100 năm qua. Hầu hết các bài báo khoa học đều trình bày trị số  $P$  như hàm ý nâng cao tính khoa học và độ tin cậy của bài báo. Tuy nhiên, ngay từ lúc mới “ra đời”, trị số  $P$  đã bị phê bình dữ dội. Một trong những phê bình là trị số  $P$  không phản ánh giá trị mà chúng ta cần biết (trong trường hợp Matrixx, chúng ta cần biết thuốc có tác động phụ hay không). Ngoài ra, rất dễ có một kết quả có ý nghĩa thống kê ( $P < 0.05$ ) nếu nhà nghiên cứu chịu khó tăng số cỡ mẫu hay làm thí nghiệm rất nhiều lần. Cách chọn ngưỡng 0.05 cũng là một cách làm tùy tiện, và dẫn đến nhiều hệ quả bất lợi cho khoa học, kể cả gian dối trong phân tích dữ liệu.

Rất nhiều lần đi dự hội nghị khoa học bên Việt Nam (và nhiều nơi khác ở Á châu) tôi thấy “rầu” khi diễn giả tỏ ra “nô lệ” với trị số  $P$ . Họ thường nhầm lẫn rằng hệ kết quả nào có trị số  $P < 0.05$  là “có ý nghĩa” hay “có ảnh hưởng”, còn  $P > 0.05$  – thậm chí 0.051 – họ suy luận rằng “không có ảnh hưởng”. Suy luận này dần dần trở thành quán tính, nó làm cho người ta lười suy nghĩ, không xem xét gì đến giả thuyết khoa học và các chứng cứ khác. Nhưng muốn thay một văn hoá trị số  $P$  không phải dễ chút nào. Mỗi lần nói chuyện với các bạn trong nước là mỗi lần phải thuyết phục họ rằng trị số  $P$  không quan trọng như họ tưởng, nhưng họ nói các thầy cô dạy  $P < 0.05$  là “có ý nghĩa”, cái nào  $P > 0.05$  là bỏ qua (có người còn không chịu trình bày

kết quả với  $P > 0.05$ ), làm tôi rất ngạc nhiên và bất ngờ. Cần phải thay đổi cách dạy như thế, nhất là trong thế giới y học.

Các tập san khoa học cũng bắt đầu “mệt” với trị số  $P$ . Trước đây, khi tập san **Epidemiology** (rất nổi tiếng một thời) có tổng biên tập mới là **K. Rothman**, việc đầu tiên ông này làm là tẩy chay trị số  $P$ . Bài báo nào báo cáo trị số  $P$  là bị ông ấy bác bỏ hay bắt phân tích / trình bày lại. Sau một năm thực hiện “luật Rothman” thì số bản thảo đệ trình cho tập san giảm rõ rệt. Kết quả là ông Rothman bị yêu cầu nghỉ trước nhiệm kỳ! Mới đây<sup>4</sup>, khi tôi được bầu vào Publication Committee của ASBMR, tôi được giao nhiệm vụ soạn thảo bản guidelines cho tập san **Journal of Bone and Mineral Research**. Cơ hội tới tay, nên tôi viết rõ rằng nếu tác giả nào lệ thuộc vào trị số  $P$  thì bài báo sẽ bị từ chối, rằng tập san sẽ không chào đón những bài báo chỉ dựa vào trị số  $P$  để kết luận. Chưa biết sắp tới tôi sẽ bị cho ra khỏi Committee hay là sao, nhưng phải thử một phen cho biết.

Có người cho rằng việc ứng dụng trị số  $P$  trong suy luận khoa học là một bước lùi, là một sự thoái hóa của khoa học, nên đề nghị không sử dụng trị số này trong nghiên cứu khoa học. Nhưng dù chịu nhiều chỉ trích và phê bình, ứng dụng phương pháp kiểm định giả thuyết và trị số  $P$  vẫn còn phổ biến trong khoa học và tòa án, đơn giản vì chúng ta chưa có một phương pháp khác tốt hơn, hay hợp lí hơn, hay đơn giản hơn. Vấn đề không phải là xóa bỏ trị số  $P$  khỏi khoa học và tòa án (vì chuyện này khó xảy ra), nhưng cần phải diễn giải trị số  $P$  đúng theo ý nghĩa thật của nó cũng như những hạn chế về logic.

---

<sup>4</sup>Bài này được giáo sư Nguyễn Văn Tuấn soạn thảo vào khoảng đầu năm 2014.





# PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER CÓ Ý NGHĨA VẬT LÝ GÌ?

Job Bouwman

(Trần Nam Dũng dịch, Đặng Nguyễn Đức Tiến hiệu đính)

Ứng dụng của biến đổi Fourier xuất hiện rất nhiều trong đời sống hàng ngày của chúng ta. Bạn lắng nghe một bản nhạc qua itunes, xem một đoạn video trên youtube, hay chính việc đang đọc tạp chí Epsilon đều ít nhiều có liên quan đến biến đổi Fourier!

Vậy biến đổi Fourier là gì? Trong bài viết này, Epsilon giới thiệu với độc giả một tiếp cận mới lạ thông qua bài viết đăng trên quora.com của tác giả Job Bouwman: **Phép biến đổi Fourier có ý nghĩa vật lý gì?**



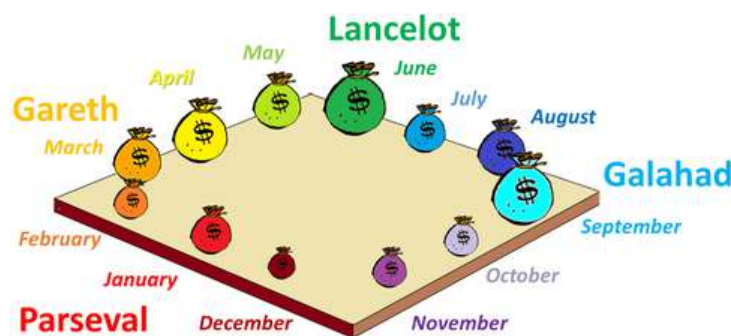
Khi Joseph Fourier tiết lộ làm thế nào các hàm số có thể được phân tích ra thành chuỗi vô hạn các hàm sin (sinusoid function) <sup>1</sup>, ông không hề biết rằng ông đã phát minh lại chiếc bánh xe.

Hơn một ngàn năm trước đó, vua Arthur và 12 hiệp sĩ của ông ta đã phát triển phép biến đổi Fourier cơ học.

Bằng cách kết hợp một kết cấu tài tình với một phương pháp xuất chúng, họ đã có thể làm toán mà không cần dùng đến toán. Câu chuyện này như sau.

## Hệ thống thuế Hoàng gia

Ngày xưa ngày xưa, vương quốc Anh được cai trị bởi đức vua huyền thoại Arthur, người đã đi trước thời đại cả về tư duy phân tích lẫn phương thức quản lý tổ chức. Với mong muốn ngăn chặn tham nhũng trong hệ thống thuế Hoàng gia của mình, Arthur đã phân mười hai tháng trong năm cho mười hai hiệp sĩ, mỗi người đảm nhận việc thu thuế trong tháng mà họ được phân công. Ông cũng quyết định sẽ thưởng cho hiệp sĩ nào đảm bảo được khoản đóng góp lớn nhất cho ngân khố của Hoàng gia. Tuy nhiên, trong năm đầu tiên, điều này đã châm ngòi một cuộc tranh cãi nảy lửa.



Hình 5.1: Hệ thống thuế hoàng gia. Mười hai hiệp sĩ được phân đều theo 12 tháng trên một chiếc bàn hình vuông.

Mặc dù rõ ràng là Lancelot (tháng Sáu) đã thu thập nhiều vàng nhất trong tháng của mình nhưng Parseval (tháng Giêng) tranh cãi rằng Lancelot đã được như vậy vì có nhiều thuận lợi hơn do vào mùa hè thì ngày dài và thời tiết dễ chịu (xem hình 5.1). Hầu hết các hiệp sĩ đều đồng ý hiệu ứng này cần phải được tính đến để có sự so sánh công bằng, nên Arthur đã phải đau đầu để tìm ra một kết cấu tài tình<sup>2</sup> cho phép họ đo được mức độ ảnh hưởng của 'hiệu ứng mùa hè'.

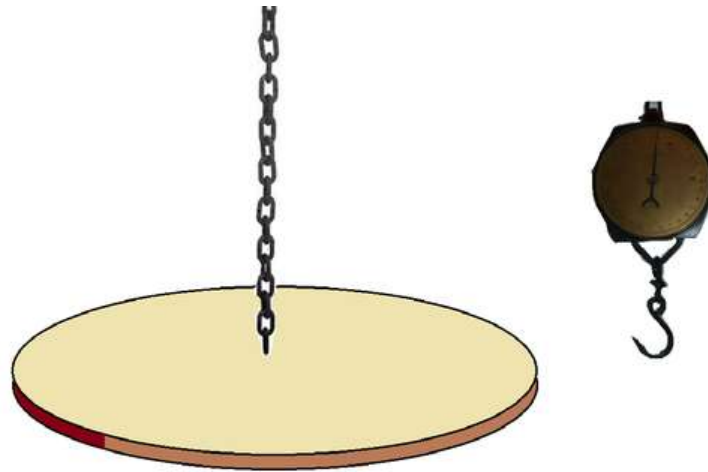
## Kết cấu tài tình

Không chậm trễ, Arthur triệu tập các thợ mộc của hoàng gia và ra lệnh cho họ gọt bớt các góc của chiếc bàn vuông nổi tiếng của mình. Tiếp theo đó, các thợ rèn được ra lệnh treo chiếc bàn

<sup>1</sup>Đăng ở 'Théorie analytique de la chaleur', 1822.

<sup>2</sup>Chúng tôi dịch từ Ingenious construction. Do bài viết đang đề cập đến một hệ thống vật lý, và hệ thống này bao gồm nhiều thành phần nên chúng tôi chọn dịch construction là kết cấu như kiểu kết cấu trong xây dựng.

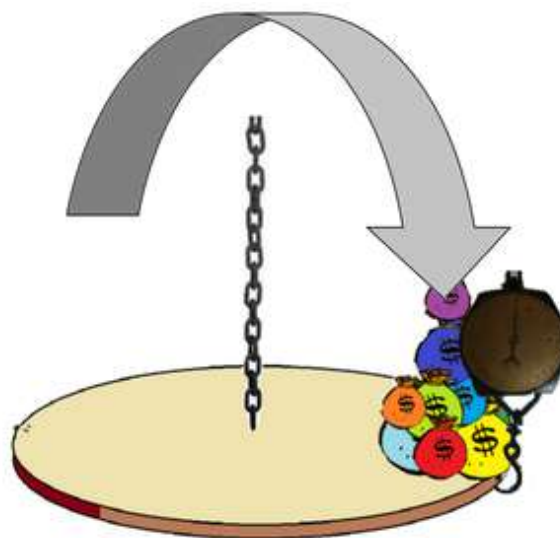
tròn lên trần của cung điện bằng một sợi xích dài. Cuối cùng, ông ra lệnh cho đầu bếp hoàng gia mang chiếc cân lớn nhất lớn nhất từ trù phòng của hoàng gia:



Hình 5.2: Kết cấu dùng để đo ảnh hưởng của ‘hiệu ứng mùa hè’.

### Đo tổng trọng lượng: dùng để đối chiếu

Trước khi có thể xác định mức độ ảnh hưởng của hiệu ứng mùa hè, đầu tiên ông đã cân tổng lượng vàng để có được thông tin tham khảo. Để thực hiện điều này, tất cả các túi vàng được gom về vị trí của Lancelot, trong khi chiếc cân lớn dùng để giữ cho chiếc bàn cân bằng. Con số ghi trên cân sẽ cho ta biết tổng doanh thu của năm đó.

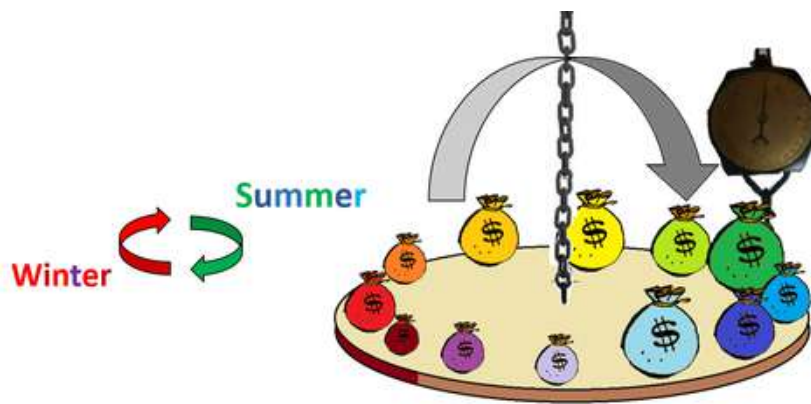


Hình 5.3: Đặt tất cả vàng về một bên của bàn mang thông tin tham khảo: tổng khối lượng của tất cả các túi.

## Đo hiệu ứng mùa hè (biến động chính / tần số)

Sau khi lấy thông tin này [tổng trọng lượng]<sup>3</sup>, ông đã có thể xác định hiệu ứng mùa hè như sau. Ông ra lệnh cho các hiệp sĩ đặt túi của mình theo mùa xung quanh bàn. Ông yêu cầu họ để thật chính xác ở các vị trí đều nhau xung quanh bàn, khoảng cách giữa các túi bằng nhau, giống như những con số trên đồng hồ.

Như vậy, tháng Năm sẽ đặt túi của mình ở phía bên phải của túi Lancelot [tháng Sáu], trong khi tháng Bảy sẽ đặt túi vào bên trái túi của Lancelot và tất cả các hiệp sĩ khác tiếp tục quy tắc này. Như dự đoán, điều này làm cho bàn nghiêng về phía các túi mùa hè. Bằng cách thử nghiệm cẩn thận, Arthur sau đó tìm ra chính xác điểm trên chu vi của bàn mà ông phải giữ bằng chiếc cân để bàn vẫn thăng bằng.



Hình 5.4: Arthur đặt doanh thu của năm thành một vòng xung quanh bàn, các tháng cách nhau với một khoảng cách bằng nhau. Điều này đã làm bàn nghiêng về phía nửa bàn của Lancelot, tiết lộ thời gian tốt nhất trong năm để thu thuế. Với chiếc cân, Arthur đã có thể đo được thông số về sự biến động chính của năm nay, và so sánh nó với tổng khối lượng đo trước đó.

Để có được sự cân bằng hoàn hảo này, ông đã phải đặt cái móc cân bên phải túi của Lancelot một chút. Từ đó ông có thể xác định được rằng thời gian tốt nhất trong năm để thu thuế là trong nửa đầu tiên của tháng Sáu. Quan trọng hơn, kết quả ông thu được không phải là do doanh thu thuận lợi từ riêng tháng này: tất cả các túi đã góp phần vào vị trí và sức mạnh của hiệu ứng này.

Arthur lưu ý rằng chiếc cân lúc này chỉ một con số có giá trị bằng khoảng hai phần năm giá trị mà nó đã thể hiện khi cân doanh thu cả năm. Tuy nhiên, với thông tin này, không ai biết làm thế nào có thể sử dụng giá trị này để bù đắp cho hiệu ứng mùa hè.

## Kết nối

Từ quan điểm của ngày hôm nay chúng ta có thể thấy rằng Arthur chỉ lượng hóa các hàm sin với tần số cơ bản của một năm. Với công cụ toán học hiện đại, chẳng hạn như lượng giác và giải tích, chúng ta có thể tư vấn cho ông cách tính các giá trị của hàm sin này cho mỗi tháng, và sau đó trừ đi các giá trị từ các khối lượng của mỗi túi để bù đắp cho hiệu ứng mùa hè.

<sup>3</sup>Tất cả các phần trong ngoặc vuông là giải thích của người dịch.

Thật không may cho Arthur, tại thời điểm đó lượng giác mới chỉ có ở Ấn Độ, nơi mà nó đã được phát triển để dự đoán quỹ đạo của các hiện tượng thiên văn.

Còn ở châu Âu lúc đó? Vâng, lúc đó thì cũng đã có giải tích rồi, hừm, nhưng mà không phải là giải tích của Newton mà không có gì khác hơn là một từ đồng nghĩa với ‘đếm đá’<sup>4</sup>!

## Kết hợp với người đối diện: Một hiệp ước bí mật

Mặc dù không quá thông minh nhưng Galahad (tháng Chín) cũng không cần phải là tiến sĩ về Topo đại số để biết rằng ông đã thực hiện khá tốt công việc [thu thuế] trong thời gian của mình. Vì thế ông có động lực lớn để tìm một cơ chế bù đắp để làm cho ông trôi lên. Vì người bạn thân Gareth (tháng Ba) ở phía đối diện của bàn có phần thông minh hơn, ông đã ra hiệu cho Gareth giúp đỡ.

Tất nhiên là Gareth biết Galahad muốn gì, nhưng, ông cứ giả vờ như không biết và hành động cứ như là Galahad muốn vào một nhóm với ông. Gareth biết rằng họ sẽ là một cặp chiến thắng, miễn là bằng cách nào đó ông có thể buộc Lancelot vào cặp với tháng Mười Hai.

Và điều này có thể đạt được bởi một phương pháp đơn giản, nhưng xuất chúng...

## Phương pháp xuất chúng

### Hủy bỏ hiệu ứng mùa hè: hướng tới điều hòa bậc hai

Sự xuất chúng trong đề xuất của Gareth là nó hủy bỏ được hiệu ứng mùa hè một cách rất đơn giản mà không có hiệp sĩ nào có thể phản đối. Ông đề nghị tạo ra hai chu kỳ, thay vì một: nếu tất cả các hiệp sĩ tăng gấp đôi khoảng cách lẫn nhau của họ, sáu tháng đầu năm đã tạo thành một vòng tròn hoàn chỉnh xung quanh bàn. Doanh thu của tháng Bảy sau đó sẽ được đặt vào vị trí của tháng Giêng, tháng Tám thêm vào tháng Hai. Ghép cặp các tháng đối diện với nhau sẽ bù đắp đầy đủ cho thời gian ban ngày trong khi thứ tự thời gian vẫn được bảo đảm, vì thế sẽ không tạo ra thêm sự thiên vị nào.

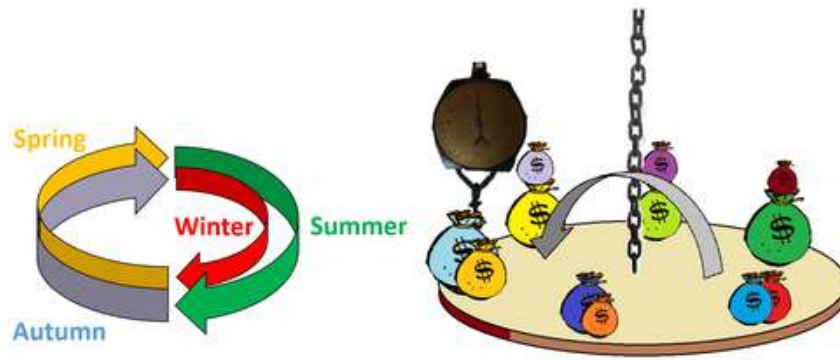
Arthur, ấn tượng bởi sự tao nhã trong kế hoạch của Gareth, đã đồng ý và ra lệnh cho các hiệp sĩ của mình đặt túi của họ vào các vị trí mới. Chỉ một mình Lancelot đã không hứng thú lắm trong việc mang túi của mình đi, vì biết điều này sẽ chấm dứt tham vọng giành được phần thưởng của ông, và vẫn ngồi ở chỗ cũ của mình. Vì vậy tháng Năm chuyển một ghế sang bên phải, tháng Bảy chuyển một ghế sang bên trái, và tất cả các hiệp sĩ khác tiếp tục quy luật này:

Cách xoay đúp này đã thực sự hủy bỏ được hiệu ứng mùa hè và, trước sự ngạc nhiên của hầu hết các hiệp sĩ, làm cho chiếc bàn nghiêng về phía Gareth và Galahad. Nhưng vào đúng lúc họ chờ để tuyên bố chiến thắng ...

---

<sup>4</sup>Từ nguyên của “giải tích” (“calculus”) có nghĩa là hòn sỏi hay hòn đá nhỏ dùng để đếm. Tương truyền, kỹ sư kiến trúc sư người La Mã Vitruvius vào khoảng năm 15 trước công nguyên đã chế ra các xe đẩy mà cứ mỗi vòng quay của bánh xe thì sẽ rơi ra một hòn sỏi (calculus). Khi đó để tính công thổ hàng, người đánh xe chỉ cần đếm số hòn sỏi rơi ra trong suốt chuyến đi.





Hình 5.5: Xoay doanh thu thành hai chu kỳ xung quanh bàn hủy bỏ được hiệu ứng mùa hè. Tuy nhiên, bây giờ bàn nghiêng một chút ở phía kết hợp của xuân và mùa thu. Điều này lộ ra đáng dấp của điều hòa bậc hai [như trong biến đổi Fourier hiện đại].

Parseval lại phản đối nữa: "Đợi một chút! Khoan vội kết luận ở đây. Sau khi đo được ảnh hưởng tích cực rõ ràng của ánh nắng mặt trời, chúng ta đã không trao giải cho Lancelot, đúng không? Thay vào đó ta chọn cách bù đắp cho nó. Vì vậy bây giờ chiếc bàn này đã cho thấy một quy luật thứ hai vốn bị che khuất bởi vấn đề mùa hè – chúng ta phải tìm ra một lời giải thích trong các mùa, không phải là đóng góp cá nhân. Tất cả chúng ta đều phát hiện ra rằng các khoản thu của mùa xuân và mùa thu không thể được dự đoán bằng cách đơn giản là lấy trung bình của mùa hè và mùa đông. Thay vào đó, bàn tròn ma thuật này nhắc nhở chúng ta một lần nữa là điều kiện của mùa đông là cực kỳ khắc nghiệt."

Và Gareth [tháng ba] trả lời: "Vâng, nếu anh nhấn mạnh vào việc tìm khuyết điểm trong mô hình thời gian này, thì có phải là nó đã được tính khi tôi và hai hiệp sĩ khác đã được lợi với các khoản thuế thành phố thu vào tháng Ba, tháng Bảy và tháng Mười Một?"

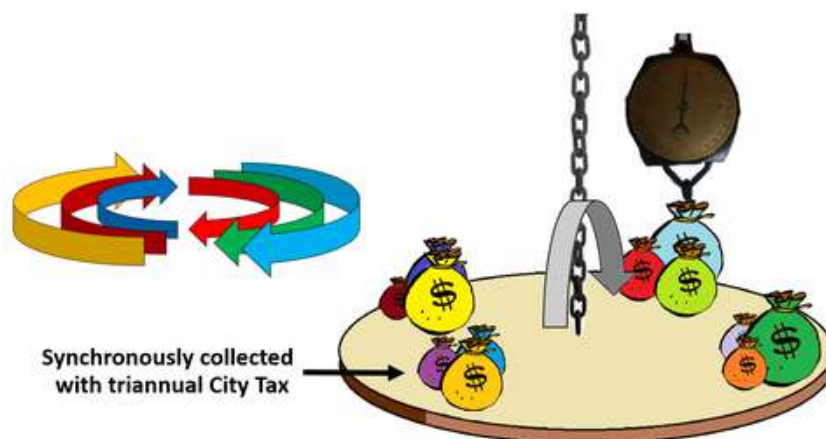
Arthur cũng háo hức điều tra sự ảnh hưởng này. Một lần nữa ông lại phải ôm vương miện để suy nghĩ và đề xuất cấu hình sau:

### Mối liên hệ giữa thuế thu ba lần một năm, sự hài hòa bậc ba

Để nghiên cứu ảnh hưởng của các loại thuế thành phố, thu thập ba lần một năm [vào tháng Ba, tháng Bảy và tháng Mười Một], Arthur nhập doanh thu của năm trong ba chu kỳ xung quanh bàn, vì vậy mà tháng Ba, tháng Bảy và tháng Mười Một đã được nhóm lại với nhau. Vì thế, một lần nữa, tháng Năm chuyển một chỗ ngồi sang bên phải, tháng Bảy chuyển một chỗ ngồi sang bên trái, và tất cả các hiệp sĩ khác tiếp tục theo quy tắc như hình 5.6.

Và, đúng như Gareth đã dự đoán, bàn nghiêng về phía ba tháng có thu thuế thành phố, cho thấy rằng thực sự có một sự liên hệ giữa hai hệ thống thuế.

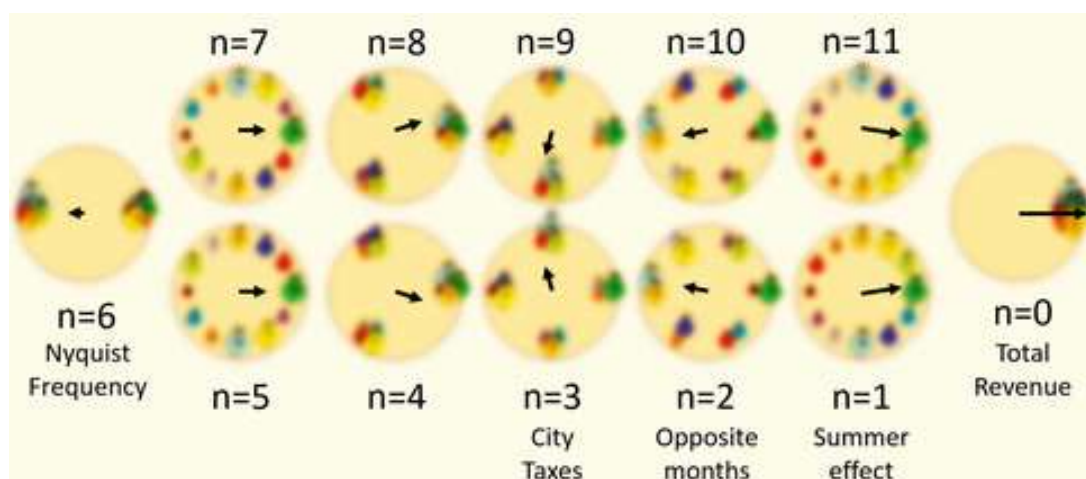
Và rồi đột nhiên, tất cả các Hiệp sĩ nhảy tưng tưng lên và bắt đầu la hét về tất cả các loại hiện tượng thời tiết có ảnh hưởng đến khả năng thu thuế của họ. Thôi thì mọi duyên cớ. Từ chu kỳ của mặt trăng đến thay đổi nhân sự tại Ngự lâm quân thường đi kèm với các đoàn thuế. Đề nghị kỳ quặc nhất đến từ hiệp sĩ Hairy Quist, khi ông tin rằng sự may mắn nằm trong các số lẻ, do đó đã gợi ý rằng phải có một mô hình với chu kỳ theo mỗi hai tháng.



Hình 5.6: Với ba chu kỳ, thuế thành phố của các tháng Ba, Bảy và Mười một được nhóm thành một nhóm, chỉ ra sự ảnh hưởng tiêu cực của các tháng này lên doanh thu thuế Hoàng gia.

### Phổ đầy đủ: tránh sự thiên vị

Để kết thúc cuộc náo loạn, và để giải quyết các cuộc tranh luận mà không có thiên vị cho bất kỳ hiệp sĩ nào, Arthur cuối cùng đã ra lệnh rằng tất cả các mô hình thời gian có thể đều sẽ được đo. Vì vậy, ông nhập doanh thu của năm trong bốn, năm, sáu, ... lên đến mười một chu kỳ xung quanh bàn, và mỗi lần như vậy ghi nhận một cách cẩn thận cần đặt móc cân ở đâu. Biên độ và pha được ghi nhận trong sơ đồ sau:



Hình 5.7: Sơ đồ của Arthur: Các mũi tên màu đen minh họa cho các phép đo tại mỗi 'tần số' (số vòng/lần bao quanh bàn), trong đó chiều dài đại diện cho độ lớn, và hướng chỉ pha. Dưới con mắt của thời hiện đại ta thấy rằng Arthur chỉ định lượng các chuỗi Fourier của doanh thu thay đổi trong một năm. Đo lường ở phía bên tay phải [ $n = 0$ ] là tổng khối lượng (tham chiếu). Đo lường ở phía bên tay trái [ $n = 6$ ] là đề xuất mà hiệp sĩ Hairy Quist đã nói tới (tháng lẻ so với tháng chẵn).

Bị tràn ngập bởi dữ liệu, một cách trực giác Arthur hiểu rằng không thể phân biệt được hiệu suất cá nhân từ các mô hình thời gian. Cảm thấy nhẹ nhõm hơn, sau đó ông yêu cầu Parseval giúp ông

phân tích cơ chế của bàn tròn ma thuật này cùng với phương pháp sau đây, mà họ đặt tên là **phép biến đổi Arthur rời rạc**.

## Các tính chất tuyệt vời

**Ẩn danh** Khi lần đầu tiên nhìn thấy biên độ với  $n = 9$ , Arthur nghi ngờ vợ mình, nữ hoàng Ayliacyn, người đã đi Paris chín lần một năm cho việc mua sắm. Có thể cô ấy đã xin vàng của các hiệp sĩ của mình cho mỗi chuyến đi?

Parseval, tuy nhiên, đã nhắc nhà vua rằng ba trong các chuyến đi của nữ hoàng đã rơi vào các tháng thu thuế thành phố [tháng Ba, tháng Bảy và tháng Mười Một]. Và sau khi kiểm tra cẩn thận các sơ đồ, ông phát hiện ra rằng các phép đo thu giống nhau hoàn toàn với  $n = 9$  và  $n = 3$ . Chỉ có pha là ngược lại. Rõ ràng, chỉ với 12 túi, họ đã không thể để gỡ rối (disentangle) các tần số này. Vì vậy, ông không có lựa chọn nào khác hơn là coi nó như là một ảnh hưởng của thuế thành phố. Đúng không?

**Tần số Nyquist** Thực sự thì hiệu ứng của ‘tháng lẻ’ mà hiệp sĩ Hairy Quist đã bình luận ( $n = 6$ ) là tần số cao nhất mà họ có thể phục hồi được từ dữ liệu (mặc dù nó hầu như không đáng kể).

**Đối xứng liên hợp** Họ đã kết luận rằng các tần số cao hơn,  $n = 7, 8, 9, 10, 11$ , đều là ẩn danh đối xứng gương (‘Aliacyns’) với các tần số thấp hơn,  $n = 5, 4, 3, 2, 1$ , có biên độ giống và pha đối nghịch. Thực sự thì Parseval nhớ rằng trong khi đo tần số thứ 11, các Hiệp sĩ ngồi trong cầu hình tương tự như khi đo hiệu ứng mùa hè, chỉ xoay vòng theo hướng ngược lại. Phép đo thứ mười một là liên hợp đối xứng với phép đo đầu tiên.

### Chỉ có một nửa của các phép đo Arthur là cần thiết!

Arthur đã kết luận rằng bảy phép đo ( $n = 0, 1, \dots, 6$ ) đã đủ để đo lường tất cả mọi thứ mà họ cần. Vì mỗi phép đo mang lại ‘hai mẫu thông tin’ (biên độ và pha) điều này đã cho họ tổng cộng 14 thông tin. Điều này lúc đầu làm họ ngạc nhiên, khi chỉ có 12 túi, tuy nhiên, bằng cách nhìn vào sơ đồ họ hiểu rằng trong dữ liệu  $n = 0 - 6$  thực tế họ chỉ có 12 thông tin. Tại sao? Bởi vì tổng khối lượng thực sự không chứa thông tin pha, tương tự với tần số Nyquist.

**Tái lập khối lượng của Lancelot.** Vào lúc đó, Arthur phát hiện ra một sợi dây dưới ghế của Lancelot. "Khốn nạn! Ra vậy, đây là lý do tại sao hắn vẫn ngồi tại chỗ. Hắn giấu cái này trong túi của mình để khuếch đại ảnh hưởng của hắn trong các phép đo!"

"Vâng, đó sẽ là điều khá ngu ngốc ...", Parseval cho biết: "Trong tất cả hiệp sĩ, khối lượng của Lancelot sẽ dễ dàng phục dựng lại nhất từ các phép đo."

"Ta không hiểu, làm thế nào khanh có thể phục hồi lại khối lượng của một túi duy nhất, trong khi tất cả các phép đo bị ảnh hưởng bởi tất cả các túi?"

"Điều này khá dễ dàng, thưa bệ hạ. Giả sử tất cả hiệp sĩ sẽ có mười một túi ảo bổ sung, có trọng lượng tương tự như túi ban đầu của họ. Và giả sử rằng chúng ta đã thực hiện tất cả các phép đo cùng một lúc."

"Ta không nghĩ, kể cả sử dụng chiếc cân Hoàng gia, là đủ tốt để đo được!" Arthur cười.

"Bệ hạ sẽ ngạc nhiên! Ví dụ, bàn sẽ nghiêng về bên nào nếu nó có luôn tất cả túi ảo của thần?"

"À, cũng giống như phần còn lại thôi, khanh sẽ bắt đầu ở vị trí của Lancelot [vì bây giờ phần của Parseval sẽ nặng nhất], nhưng trong đề xuất của Nyquist [ $n = 6$ ] khanh sẽ ngồi ở phía đối diện, nên nó đã loại bỏ ... Nhưng sau đó khanh cũng sẽ ngồi ở chiếc ghế thứ năm, và thứ mười ... ha, nghĩa là khanh đã được ngồi ở tất cả các ghế!" Arthur nói.



"Vâng, tâu bệ hạ, vì vậy ảnh hưởng rờng của thần theo thời gian là gì?"

"Đúng thế, tất cả bị triệt tiêu!" Arthur nói.

"Thật vậy," Parseval cho biết, "và điều này cũng đúng cho tất cả hiệp sĩ khác ... ngoại trừ Lancelot. Khối lượng của ông ta đã được đo một lần nữa và một lần nữa vào các vị trí tương tự. Vì vậy, trung bình tất cả các mũi tên sẽ cho chúng ta khối lượng túi của Lancelot!"

### **Phép biến đổi Arthur ngược**

Cuối cùng họ đã có thể phục hồi lại tất cả các khối lượng khác. Ví dụ, để tái tạo lại doanh thu của tháng Ba, họ chỉ cần phải sửa đổi các giá trị pha của các phép đo trước khi thêm các mũi tên. Bí quyết là cứ vờ như thực sự Gareth là hiệp sĩ đã được ngồi vào chiếc ghế này, thay vì Lancelot. Ví dụ, trong phép đo đầu tiên, Gareth đã ngồi 90 độ ở bên phải của Lancelot. Bằng cách quay mũi tên mà Lancelot nhìn thấy với góc quay trừ 90 độ, pha sẽ được thay đổi như là Gareth có một vị trí cố định. Đối với các phép đo thứ hai thì thông số này là 180 độ, và cứ như vậy. Vì vậy, tất cả các mũi tên đã được quay theo hướng ngược lại vị trí của Gareth đối với Lancelot. Vì vậy, thay vì đặt các túi thành vòng xung quan bàn (như họ đã làm trong phép biến đổi Arthur thuận), các mũi tên đã được đặt quanh bàn theo thứ tự ngược lại. Hóa ra với "phép biến đổi Arthur ngược" này họ có thể phục hồi một cách chính xác khối lượng của túi của mỗi cá nhân, và Arthur đã vui mừng rút lại cáo buộc chống lại Lancelot.

**Định lý Parseval.** Mặc dù không trực tiếp hữu ích vào thời điểm đó, Parseval quan sát thấy rằng trung bình của bình phương các biên độ bằng tổng các bình phương khối lượng các túi (chứng minh của định lý này nằm trong phần bình luận).

### **Lời kết**

Để lập lại hòa đồng giữa các Hiệp sĩ, Arthur quyết định sử dụng số tiền để dành làm phần thưởng để chiêu đãi một bữa tiệc hoành tráng. Tại buổi tiệc, các Hiệp sĩ - những người đã phục vụ nhà vua với danh dự và trách nhiệm - đã thề rằng sẽ không khiến ông phải sử dụng lại hệ thống khen thưởng này một lần nữa. Và vì vậy toàn bộ câu chuyện nói trên đã nhắc chúng ta về phát hiện huyền thoại bị lãng quên này, với tên gọi chiếc bàn nổi tiếng của Arthur:



Chúng ta là những hiệp sĩ bàn tròn.

*Ok, bạn có thể nghi ngờ tính chính xác lịch sử, nhưng những vấn đề toán học là hoàn toàn nghiêm túc. Làm thế nào để phép biến đổi Arthur có thể xử lý được các dữ liệu âm và phức, hãy xem trong phần bình luận.*

(Phần ý kiến bình luận sẽ được đăng trong số tạp chí Epsilon số 8)

# BÀI TOÁN CÂN TIỀN PHẦN 2: CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG CÂN SỐ

Đặng Nguyễn Đức Tiến  
(Đại học Trento, Italia)

## LỜI GIỚI THIỆU

Tiếp nối chuyên mục Toán học Giải trí kỳ trước, Epsilon số này giới thiệu với độc giả phần hai của bài toán cân tiền (counterfeit coin problem) qua 8 bài toán sử dụng cân số.

Trước khi bắt đầu, chúng tôi tạm nhắc lại dạng thức chung của các bài toán cân tiền là có một hoặc một số đồng hoặc túi tiền giả được đặt lẫn lộn với các đồng hoặc túi tiền thật. Các đồng tiền giả có bề ngoài giống hệt tiền thật nhưng khác khối lượng so với tiền thật. Cần sử dụng cân đĩa hoặc cân số với một số lần cân xác định để tìm ra (một hoặc một số) đồng hoặc túi tiền giả này. Ở đây chúng tôi cũng nhắc lại hai khái niệm về hai loại cân được sử dụng. Cân đĩa giúp chúng ta so sánh khối lượng của các vật được đặt ở 2 bên của đĩa cân và kết quả trả về hoặc nặng hơn, hoặc nhẹ hơn, hoặc cân bằng. Cân số cho phép xác định chính xác khối lượng của vật được đặt trên cân. Trong các bài toán được trình bày ở số này, chúng tôi luôn giả sử rằng các cân được sử dụng luôn có độ chính xác tuyệt đối.

Và bây giờ, xin mời bạn đọc hãy bắt đầu với bài toán cân tiền đầu tiên ...

## 1. Nhóm bài toán 10 túi tiền xu

Như thường lệ, chúng tôi bắt đầu cho bài viết với bài khá đơn giản như sau:

Có 10 túi tiền xu, trong mỗi túi có nhiều đồng xu. Biết rằng trong số các túi tiền này có một túi chứa toàn tiền giả còn 9 túi còn lại đều chứa toàn tiền thật. Các đồng tiền thật nặng 10g và các đồng tiền giả nặng 11g. Với một cân số, bằng ít lần cân nhất, hãy chỉ ra túi chứa các đồng tiền giả.

Bài toán trên, theo chúng tôi là bài toán phổ biến nhất của nhóm bài toán cân tiền sử dụng cân số. Đáp án của bài toán, hẳn độc giả sẽ nhanh chóng tìm ra là chỉ với một lần cân ta sẽ có thể xác định được đâu là túi chứa tiền giả!

Thật vậy, nếu chúng ta lấy 1 đồng từ túi thứ 2, lấy 2 đồng từ túi thứ 3, lấy 3 đồng từ túi thứ 4,... và lấy 9 đồng từ túi thứ 10 và đặt tất cả các đồng này lên cân, ta sẽ tìm ra được túi chứa tiền giả.

Tổng cộng chúng ta lấy  $1 + 2 + \dots + 9 = 45$  đồng, nếu cân chỉ ra trọng lượng là 450g, thì tất cả các đồng này đều là thật, nên suy ra túi thứ 1 chứa tiền giả. Nếu cân nặng 451g, thì ta biết được

túi thứ 2 chứa tiền giả. Hai nói cách khác, bằng cách xét khác biệt giữa 45 đồng đặt lên cân và trọng lượng chuẩn cần có (450g), ta giải quyết xong bài toán. Độc giả hẳn cũng xác định được với 1 lần cân thì số lượng 45 đồng này cũng là số lượng đồng xu nhỏ nhất cần để tìm ra túi chứa tiền giả!

**Liệu rằng thay vì cân số, ta có thể sử dụng cân đĩa để tìm ra túi chứa tiền giả (không giới hạn bởi 1 lần cân)?** Câu trả lời, lại một lần nữa là có. Hãy đặt lên đĩa cân bên trái:

- 10 đồng ở túi thứ 1
- 20 đồng ở túi thứ 2
- 30 đồng ở túi thứ 3
- 40 đồng ở túi thứ 4
- 50 đồng ở túi thứ 5

và đặt lên đĩa cân bên phải:

- 10 đồng ở túi thứ 6
- 20 đồng ở túi thứ 7
- 30 đồng ở túi thứ 8
- 40 đồng ở túi thứ 9
- 50 đồng ở túi thứ 10

Lúc này, đĩa cân nào nhẹ hơn thì tất cả các túi tương ứng sẽ chứa tiền thật. Không mất tính tổng quát, giả sử đĩa bên phải nhẹ hơn, giữ nguyên tình trạng cân, ta thêm vào 1 đồng lấy từ các túi tiền thật (túi 6 - túi 10) ở đĩa cân này. Nếu sau khi thêm 1 đồng mà cân trở nên cân bằng, ta xác định được túi 1 chứa tiền giả. Nếu cân vẫn chưa cân bằng, ta lại thêm 1 đồng thật nữa vào đĩa cân bên phải, nếu cân cân bằng, ta biết túi 2 chứa tiền giả ... Và như vậy ta xác định được túi tiền giả với cả việc sử dụng cân đĩa!

Và bây giờ, chúng tôi giới thiệu bài toán cân tiền thứ hai trong nhóm này: Bài toán 10 túi tiền với nhiều túi chứa tiền giả.

Có 10 túi tiền xu, trong mỗi túi có rất nhiều đồng tiền. Biết rằng trong số các túi tiền này có thể có một số túi chứa toàn tiền giả. Các đồng tiền thật nặng 10g và các đồng tiền giả nặng 11g. Với một cân số, bằng một lần cân, hãy chỉ ra tất cả các túi chứa các đồng tiền giả, nếu có.

Bài toán này chỉ khác bài toán đầu tiên ở chỗ thay vì có đúng 1 túi chứa tiền giả thì ở đây, có thể có nhiều túi, có thể tất cả mọi túi đều giả và cũng có thể không có túi nào giả. Vậy làm cách nào chỉ với một lần cân ta có thể tìm ra các túi này?

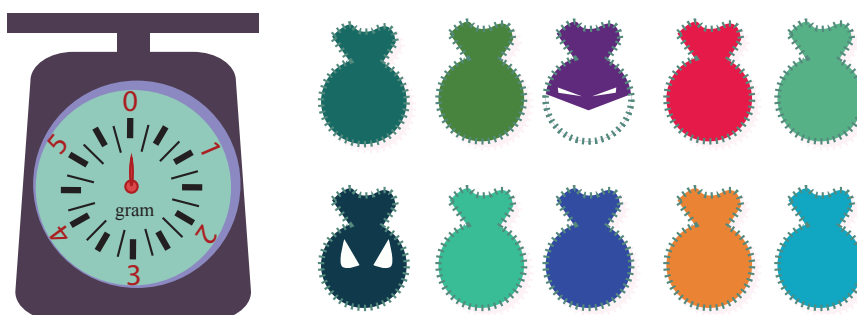
Mấu chốt ở đây là chúng ta phải lấy số lượng tiền sao cho tổ hợp khác nhau của các túi tiền là duy nhất. Một trong những cách đó, ta có thể lấy theo lũy thừa của 2. Cụ thể là ta lấy  $2^0 = 1$  đồng từ túi 1, lấy  $2^1 = 2$  đồng từ túi 2, lấy  $2^2 = 4$  đồng từ túi 3, lấy  $2^3 = 8$  đồng từ túi 4... cho đến  $2^9 = 512$  đồng từ túi 10. So sánh  $2^0 + 2^1 + \dots + 2^9 = 2^{10} - 1 = 1023$  đồng này với 10230g, ta sẽ biết được các túi nào chứa tiền giả. Ví dụ nếu trọng lượng là 10237g, ta biết được nó nặng hơn 7g nếu so với các đồng tiền thật, vậy suy ra các túi 1, 2, và 3 chứa tiền giả.

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu bài toán cuối cùng trong nhóm bài toán 10 túi tiền này. Bài toán như sau:

Có 10 túi tiền xu, trong mỗi túi có rất nhiều đồng tiền. Biết rằng trong số các túi tiền này đúng một túi chứa toàn tiền giả. Ta cũng được biết thêm rằng tất cả các đồng tiền thật đều nặng bằng nhau và có khối lượng nguyên dương (tính theo g), tất cả các đồng tiền giả đều nặng bằng nhau và nặng hơn các đồng tiền thật đúng 1g. Với một cân số, bằng ít lần cân nhất, hãy chỉ ra túi chứa các đồng tiền giả.

Bài toán trên khó hơn hai bài trước, vì chúng ta không biết được khối lượng của các đồng tiền, chúng ta chỉ biết hiệu của chúng. Mặc dù vậy, một gợi ý quan trọng là tất cả các đồng tiền đều có khối lượng nguyên dương. Và chính từ yếu tố này, cũng chỉ với một lần cân, ta có thể tìm ra túi chứa tiền giả!

Thật vậy, nếu lấy lần lượt (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31) đồng từ các túi và đặt lên cân, ta sẽ xác định được túi nào chứa tiền giả! Tổng trọng lượng của 131 (là một số nguyên tố) đồng này phải là bội của 131 cộng với khối lượng tương ứng từ các đồng của túi chứa tiền giả. Vì số lượng đồng mà chúng ta lấy ra từ các túi cũng đều nguyên tố, nên đáp án cho túi tiền giả là duy nhất. Hay nói cách khác, lấy khối lượng cân được trừ đi số tiền lấy ra tương ứng ở mỗi túi, nếu hiệu nào là bội của 131 thì túi tương ứng chứa tiền giả!



## 2. Lò đúc của ApSimon

Trong loạt bài toán tiếp theo, chúng tôi giới thiệu với độc giả những bài toán cân tiền mà thông tin có được bị giảm đi đáng kể so với nhóm bài toán trước. Chúng tôi gọi tên cho nhóm bài toán này là bài toán lò đúc của ApSimon, do lấy cảm hứng từ bài toán cùng tên.

Bài toán 15 túi tiền. Có 15 túi tiền xu, trong mỗi túi có nhiều đồng xu. Biết rằng trong số các túi tiền này có đúng một túi chứa toàn tiền giả. Các đồng tiền thật nặng bằng nhau, các đồng tiền giả cũng nặng bằng nhau, nhưng có trọng lượng khác với tiền thật. Với một cân số, bằng ít lần cân nhất, hãy xác định túi chứa tiền giả.

Như vậy với bài toán này, chúng ta không có điều kiện cân nặng nguyên dương, cũng như không biết được khác biệt giữa tiền thật và tiền giả. Với các yếu tố này, bằng một lần cân là không thể giải quyết bài toán. Ở đây, chúng tôi giới thiệu một cách làm với 3 lần cân đơn giản như sau:

**Lần 1.** Lấy 1 đồng từ túi 1, 2 đồng từ túi 2, 3 đồng từ túi 3 ... cho đến 15 đồng từ túi 15 và cân.

**Lần 2.** Lấy 1 đồng từ túi 15, 2 đồng từ túi 14, 3 đồng từ túi 13 ... cho đến 15 đồng từ túi 1 và cân.

Nếu cả 2 lần chỉ ra cùng trọng lượng. Túi thứ 8 có chứa tiền giả vì chỉ có túi này được lấy cùng số đồng trong cả 2 lần cân. Nếu cân khác biệt, túi thứ 8 chứa tiền thật, và được sử dụng làm tham chiếu: **lần 3** chỉ cần cân một đồng từ túi này và từ đó dễ dàng xác định ra túi tiền giả.

Liệu rằng chỉ với 2 lần cân, ta có thể giải quyết được bài toán? Chúng tôi xin dành lại câu hỏi khó hơn này cho độc giả!

Bài toán tiếp, là một bài toán khá tổng quát, phát biểu như sau:

Có  $n > 1$  túi tiền, trong mỗi túi có nhiều đồng tiền. Biết rằng trong số các túi tiền này có thể có một số túi chứa toàn tiền giả. Các đồng tiền thật nặng bằng nhau và khối lượng này được biết trước, các đồng tiền giả cũng nặng bằng nhau, nhưng có trọng lượng khác với tiền thật, và ta cũng không biết là nặng hơn hay nhẹ hơn. Với một cân số, bằng ít lần cân nhất, hãy xác định các túi chứa tiền giả, nếu có, và khối lượng của tiền giả.

Bài toán này, dễ thấy không thể giải quyết với một lần cân. Với hai lần cân, bài toán có thể được giải quyết. Ở đây, chúng tôi giới thiệu một lời giải như sau:

Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là khối lượng của tiền thật và giả.

**Lần 1.** lấy mỗi túi một đồng ra cân. Nếu khối lượng là  $nx$ , tất cả đều là tiền thật. Ngược lại, ta sẽ nhận được khối lượng  $nx + \delta$  ( $\delta$  có thể âm hoặc dương). Và ta biết rằng  $y - x = \delta/j$  với giá trị  $j$  nào đó  $\in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Lần 2.** Ở túi thứ  $i$  ta lấy  $k^{i-1}$  đồng, với  $k$  là một số nguyên dương lớn hơn  $n^2 + 1$ . Nếu tất cả các đồng đều là thật, khối lượng ở lần này sẽ phải là  $W = \frac{k^n - 1}{k - 1}x$ . Nếu túi  $i$  chứa tiền giả, ảnh hưởng của nó lên  $W$  sẽ ở trong khoảng  $a_i = k^{i-1}|\delta|/n$  và  $b_i = k^{i-1}|\delta|$ . Lưu ý rằng:

$$a_{i+1} = \frac{k^i |\delta|}{n} > n \frac{k^{i-1} |\delta|}{k - 1} = n |\delta| (k^{i-1} + k^{i-2} + \dots + 1) = n(b_i + b_{i-1} + \dots + b_1).$$

Vì vậy, nếu  $W'$  là khối lượng cân được ở lần 2, ta có thể tìm được giá trị  $i$  lớn nhất sao cho  $|W - W'| > a_i$  và biết rằng túi  $i$  chứa tiền giả và các túi từ  $i + 1$  tới  $n$  chứa tiền thật. Vì vậy  $|W - W'| = k^i |\delta|/j + S(*)$  với  $S$  là một số thực không âm và  $S \leq b_{i-1} + b_{i-2} + \dots + b_1 < \frac{k^i |\delta|}{n^2}$  ( $S$  chính là "sai biệt" từ túi 1 đến túi  $i - 1$ ).

Vì ta biết giá trị của  $|W - W'|$ ,  $|\delta|$ , và  $|k^i \delta/m - k^i \delta/m'| > S$  với mọi  $m, m'$  phân biệt thuộc  $\{1, 2, \dots, n\}$ , chỉ có một khả năng duy nhất cho  $j$  thỏa mãn (\*) và vì vậy ta có thể tìm được  $y$ . Khi đã biết  $y$ , xác định các túi chứa tiền giả từ kết quả lần cân thứ 2 là đơn giản.

Với cách làm trên, ta chứng minh được với 2 lần cân, ta có thể xác định mọi túi chứa tiền giả. Tuy nhiên, nếu yêu cầu đặt ra là với 2 lần cân, nhưng cần lấy ít nhất số tiền để cân thì phải làm như thế nào? Hiện tại, vẫn chưa có lời giải cho trường hợp tổng quát, nhưng với các trường hợp  $n$  cụ thể và nhỏ, các đáp án tối ưu đã được tìm thấy và chứng minh, mà một trong số đó là với trường hợp  $n = 5$ , thông qua bài toán mang tên Lò đúc của ApSimon:

Ở một vương quốc nọ có 5 lò đúc tiền. Vào một ngày nọ, mật thám của nhà vua cho biết có thể có một số lò đúc ra tiền giả. Vì vậy, nhà vua phái tể tướng đi xác minh sự việc. Khối lượng của đồng tiền thật được biết rõ nhưng khối lượng của đồng giả thì không biết, chỉ biết rằng chúng nặng bằng nhau và khác khối lượng so với tiền thật. Tể tướng có một chiếc cân cực kỳ chính xác, nhưng chỉ phí vận hành cũng như kích thước của cân bị giới hạn, vì vậy ngài đặt ra yêu cầu là phải lấy số lượng ít đồng nhất từ các lò đúc và chỉ được vận hành cân tối đa 2 lần. Hãy tìm cách tìm ra các lò đúc tiền giả (nếu có) theo yêu cầu của tể tướng.

Bài toán này được ApSimon nêu ra ở [1] và chỉ được ApSimon giải với trường hợp  $n = 5$  như đầu bài. Ở đây, chúng tôi trình bày một chiến thuật tổng quát hơn, đề xuất bởi Khovanova ở [2] như sau:

Gọi  $P_r$  và  $Q_r$  là số tiền lấy ra từ lò  $r$  ở lần cân 1 và 2 tương ứng. Như vậy, mục đích của ta là cực tiểu hóa tổng  $\sum \max(P_r, Q_r)$ . Gọi  $W$  là khối lượng của đồng thật và  $W(1 + \epsilon)$  là khối lượng của đồng giả. Ta không biết  $\epsilon$ , chỉ biết nó khác 0.

Đặt  $d_r$  bằng 0 hoặc 1, cho biết lò thứ  $r$  đúc ra tiền thật hay tiền giả, nghĩa là lò thứ  $r$  sẽ đúc ra các đồng có trọng lượng  $W(1 + d_r\epsilon)$ . Vì chúng ta biết trọng lượng  $W$ , cũng như kết quả của 2 lần cân, nên chúng ta có thể xác định hai giá trị:  $a = \sum P_r d_r \epsilon$  và  $b = \sum Q_r d_r \epsilon$ .

Rõ ràng chúng ta phải cân ít nhất một đồng từ mỗi lò đúc mới có thể xác định lò này có đúc ra tiền giả hay không, nên chúng ta có  $P_r + Q_r > 0$ .

Nếu cả  $a$  và  $b$  đều bằng 0, tất cả các lò đều đúc ra tiền thật.

Khi  $a$  và  $b$  khác 0, chúng ta gần như không có bao nhiêu thông tin từ  $a$  và  $b$  do không biết giá trị  $\epsilon$ . Để triệt tiêu  $\epsilon$ , ta có thể lấy  $a$  chia cho  $b$ . Trường hợp này ta có thể có  $2^n - 1$  khả năng: vì vậy ta phải chọn  $P_r$  và  $Q_r$  sao cho thương  $a/b$  có  $2^n - 1$  đáp án khác nhau với tập các giá trị  $d_r$ . Và đây chính là chiến thuật để giải quyết bài toán lò đúc của ApSimon!

Hãy xét vài trường hợp với  $n$  nhỏ:

- $n = 1$ , rõ ràng ta chỉ cần 1 lần cân và cân 1 đồng.
- $n = 2$ , chúng ta cần 2 đồng, mỗi lò một đồng.
- $n = 3$ , ta phải cần lấy 4 đồng, trong đó lần 1 lấy (0, 1, 2) và lần 2 lấy (1, 1, 0) từ 3 lò tương ứng. Ta có thể dễ dàng kiểm chứng lại kết quả này khi  $(d_2 + 2d_3)/(d_1 + d_2)$  có 7 kết quả phân biệt với các giá trị khác nhau của  $d_i$ .
- $n = 4$ , ta phải lấy 8 đồng,  $P = (1, 2, 1, 0)$  và  $Q = (4, 0, 1, 1)$ .
- $n = 5$ , cũng chính là đầu bài, ta phải lấy ít nhất 15 đồng,  $P = (0, 1, 1, 4, 5)$  và  $Q = (2, 1, 2, 5, 0)$ .

Hiện tại, các kết quả tìm ra bởi máy tính cũng chỉ dừng lại ở  $n = 8$ , bạn đọc có thể xem chi tiết hơn tại đây: <http://oeis.org/A007673>.

Như vậy là chúng tôi đã giới thiệu với bạn đọc 6 bài toán cân tiền, mà trong đó yêu cầu chính đều là xác định các túi chứa tiền giả. Tiếp theo, chúng tôi sẽ giới thiệu một bài toán mà ở đó chúng ta không làm việc với các túi tiền nữa, mà là với các đồng tiền, hay nói cách khác, xem như số tiền trong mỗi túi chỉ là 1 đồng.



### 3. Bài toán với $n$ đồng xu

Có  $n$  đồng xu, trong đó có thể có một số đồng giả. Đồng thật nặng bằng nhau và nặng bằng  $a$ , đồng giả cũng nặng bằng nhau và nặng bằng  $b$ . Cả  $a$  và  $b$  đều được biết trước. Bằng một cân số, hãy dùng ít lần cân nhất để xác định tất cả các đồng giả.

Hãy giải bài toán với trường hợp cụ thể  $n = 7$ ,  $a = 10$  và  $b = 20$ .

Bài toán này đã được khảo sát, và giải quyết trọn vẹn bởi hai nhà toán học huyền thoại Paul Erdős và Alréd Rényi vào năm 1963 ở [3]. Với  $n = 5$ , bài toán đã được nêu ra (và giải quyết) với Shapiro, một nhà toán học cũng đã được Epsilon nhiều lần giới thiệu ở các số trước.

Paul Erdős và Alréd Rényi đã chứng minh được: giả sử  $2^n$  khả năng của các đồng có xác suất như nhau thì cần  $\frac{2n}{\log_2 n}(1 + \epsilon)$  lần cân với mọi  $\epsilon > 0$  khi  $n$  lớn. Việc chứng minh chi tiết nằm ngoài khuôn khổ của một bài toán học giải trí, độc giả quan tâm, có thể xem ở [2].



Với trường hợp cụ thể trong phần 2 của bài toán:  $n = 7$ ,  $a = 10$  và  $b = 20$ , đáp án cần 7 lần cân. Một chiến thuật tổng quát, độc giả có thể xem ở [], cũng được đề xuất bởi một nhà toán học nổi tiếng: David Geoffrey Cantor. Cụ thể các lần cân như sau:

- Lần 1: 1, 2, 4, 5, 7, 9, 11
- Lần 2: 2, 3, 5, 6, 12
- Lần 3: 1, 3, 5, 7, 8, 10
- Lần 4: 5, 6, 8, 9
- Lần 5: 1, 2, 4, 6, 8, 10
- Lần 6: 2, 3, 8, 9
- Lần 7: 1, 3, 6, 9

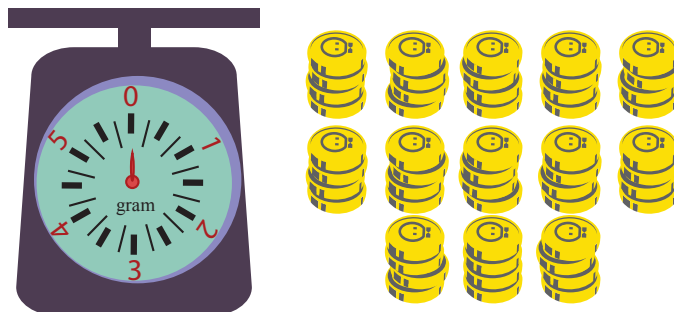
### 4. Bài toán 52 đồng xu

Bài toán cân tiền cuối cùng chúng tôi muốn giới thiệu với bạn đọc ở số này là một bài toán khá lạ, được lấy từ một bài phỏng vấn của Microsoft, đăng lại bởi giáo sư Rustan Leino [tại đây](#). Lời giải và bình luận của bài toán, được chúng tôi trích từ blog cá nhân của [Guillaume Riesen](#).

Bài toán như sau:



Có 13 túi tiền xu, trong mỗi túi có 4 đồng tiền. Biết rằng trong số các túi tiền này có đúng một túi chứa toàn tiền giả. Các đồng tiền thật nặng  $X$  nguyên dương và các đồng tiền giả nặng  $X + \Delta$  với  $\Delta$  là một số thực khác 0 trong phạm vi  $(-5, 5)$ . Với một cân số, hãy xác định  $X$ ,  $\Delta$  và túi tiền giả, bằng 2 lần cân.



Như vậy, về cơ bản, bài toán khá giống với nhóm bài toán thứ 2 mà chúng tôi giới thiệu, khi mà khối lượng của đồng thật, đồng giả lẫn các túi tiền đều không biết. Nhưng ở đây, khác biệt là chúng ta bị giới hạn số lượng tiền (chỉ 4 đồng/túi) cần phải cân. Chúng ta có thêm thông tin là  $X$  nguyên dương và giới hạn của  $\Delta$ .

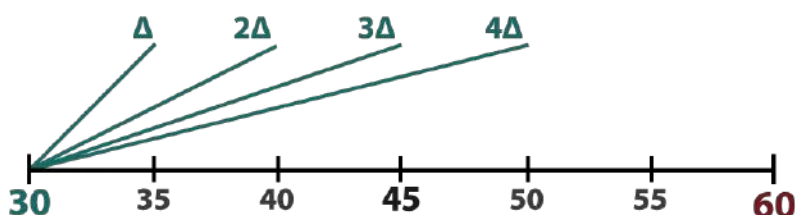
Chúng tôi giới thiệu vắn tắt cách giải của Guillaume Riesen như sau:

**Lần 1.** Lấy trong mỗi túi 1, 2, 3, mỗi túi 1 đồng, trong mỗi túi 4, 5, 6, mỗi túi 2 đồng, trong mỗi túi 7, 8, 9, mỗi túi 3 đồng, và trong mỗi túi 10, 11, 12, mỗi túi 4 đồng (tổng cộng là 30 đồng).

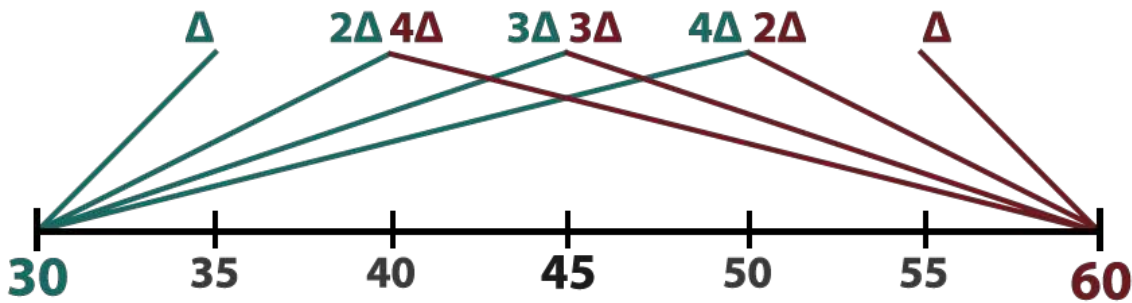


Khối lượng của 30 đồng này phải bằng  $P = 30X + \delta = 30X + k\Delta$  với  $k$  bằng 0, 1, 2, 3, hoặc 4. Dễ thấy, nếu  $P$  là bội số của 30 (khi đó  $k = 0$  thì túi thứ 13 phải là giả, và ta chỉ cần cân lần 2 một đồng ở túi này là giải quyết xong bài toán).

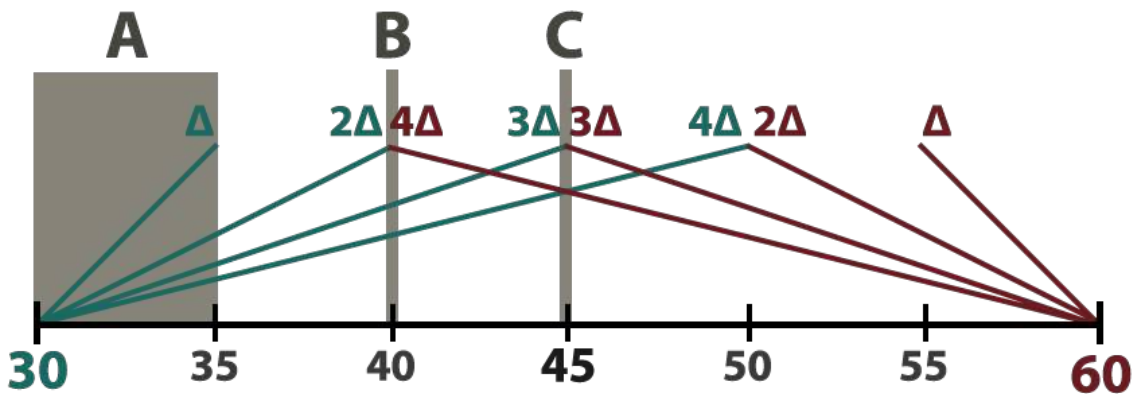
Bây giờ ta xét trường hợp đồng giả nằm trong 12 túi ở lần cân đầu. Hãy giả sử  $X = 1$ , khi đó  $P$  có thể chạy trong phạm vi  $(30, 50)$ , tùy theo đồng giả rơi vào nhóm nào (xem hình dưới). Dễ thấy nếu  $P$  rơi vào khoảng 30 - 35, ta không thể biết được túi nào giả, nhưng nếu  $P > 45$ , thì chỉ có thể có các túi 10, 11, 12 là giả (ứng với  $k = 4$ ).



Tuy nhiên,  $\Delta$  có thể âm, và trong trường hợp  $X = 2$ , bài toán trở nên phức tạp hơn vì khi  $P > 45$  vẫn có thể rơi vào trường hợp  $k$  nhỏ hơn.

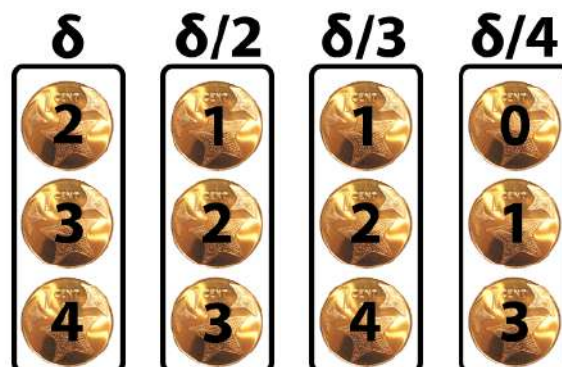


Vì vậy để giải quyết, Guillaume Riesen chọn cách xét theo nhiều trường hợp khác nhau: trường hợp A rất gần bội của 30 (giữa 30 và 35 hoặc giữa 55 và 60), trường hợp B: bằng đúng 40 và trường hợp C: bằng đúng 45 (lưu ý nếu  $P$  lớn hơn thì ta vẫn đưa về các trường hợp này được). Các trường hợp ở giữa khoảng 35, 40 và 40, 45 đơn giản và có thể giải quyết tương tự.



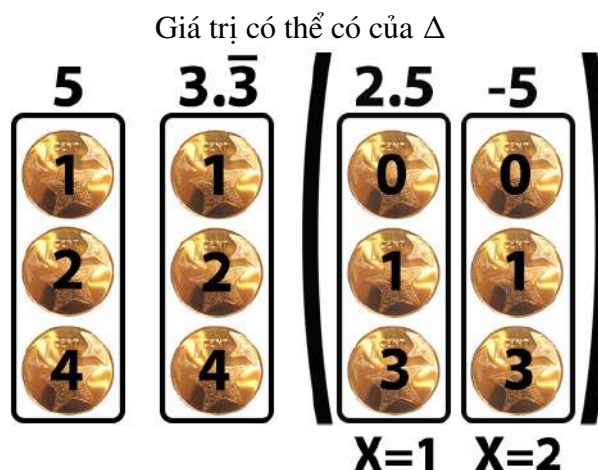
**Trường hợp A. Xác định được  $X$ .** Đây là trường hợp mà  $P$  rất gần với các bội của 30, khi đó ta dễ dàng xác định được  $X$ . Từ đó, ta cũng tính ra được  $\delta$ . Ở lần cân thứ 2, ta lấy như sau:

Giá trị có thể có của  $\Delta$

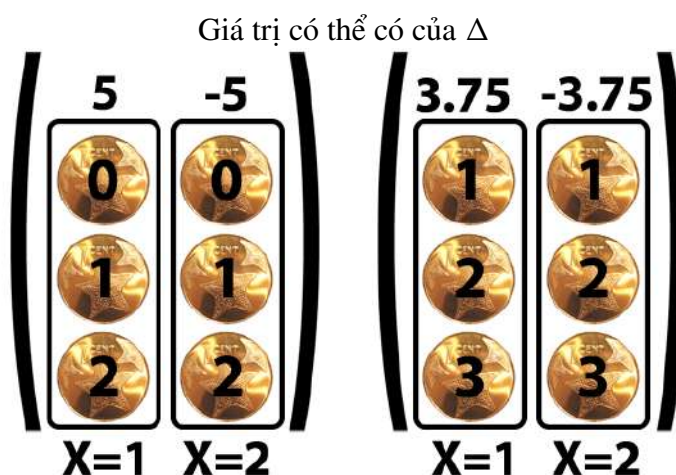


Với cách lấy này, chúng ta sẽ có 12 bộ giá trị khác nhau và sẽ xác định được cụ thể túi chứa tiền giả. Phân tích chi tiết vì sao cách lấy này có thể hoạt động chúng tôi dành cho độc giả.

**Trường hợp B.  $P = 40$ .** Ta cân lần 2 như sau:



**Trường hợp C.  $P = 45$ .** Ta cân lần 2 như sau:



Và như vậy, bài toán đã được giải quyết!

## Tài liệu tham khảo

- [1] H. ApSimon, "Mathematical Byways in Ayling, Beeling, and Ceiling," *Oxford University Press*, 1991.
- [2] Paul Erdős and Alréd Rényi, "On two problems of information theory," *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, pp 229–243, 1963.
- [3] Tanya Khovanova, "Attacking ApSimon's Mints," arXiv:1406.3012, 2014.
- [4] Cantor, David G. and Mills, W.H., "Determination of a subset from certain combinatorial properties," *Canad. J. Math*, 18, pp 42–48, 1966.



# CÂU CHUYỆN VỀ SỐ HOÀN HẢO

(Trần Nam Dũng – Đại học Khoa học Tự nhiên – ĐHQG TP.HCM)

*Thật khó có thể tìm được một tập hợp các số nguyên vừa có một lịch sử hấp dẫn, vừa được bao quanh bởi các tính chất đẹp đẽ, vừa có chiều sâu của sự bí ẩn nhưng đồng thời cũng vừa vô dụng như là những số hoàn hảo.*

**Martin Gardner**

Hồi nhỏ tôi rất thích đọc những bài báo về số hoàn hảo, số nguyên tố Mersenne, những kỷ lục về số nguyên tố lớn nhất. Đơn giản vì nó dễ hiểu lại gắn liền với lịch sử và tên tuổi của các nhà toán học lừng danh.

Số hoàn hảo được gắn với những điều huyền bí và được nghiên cứu từ rất xa xưa. Euclid có thể là người đã đưa ra định lý đầu tiên về số hoàn hảo khi khẳng định mọi số hoàn hảo đều có dạng  $2^{p-1}(2^p - 1)$  với điều kiện  $2^p - 1$  là số nguyên tố. Sau này chúng ta biết rằng hóa ra đây là tất cả các số hoàn hảo chẵn (Euler là người đã chứng minh định lý này) và có thể là tất cả các số hoàn hảo (cho đến nay người ta vẫn chưa tìm được một số hoàn hảo lẻ nào).

Số hoàn hảo được đề cao vì nó là trường hợp biên của hai loại số: Số dư thừa (số có tổng các ước số thực sự lớn hơn số đó, ví dụ  $12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6$ ) và số thiếu (số có tổng các ước số thực sự nhỏ hơn số đó, ví dụ  $10 > 1 + 2 + 5$ ). Ta có 4 số hoàn hảo đầu tiên là 6, 28, 496 và 8128.

Như trong câu nói của Martin Gardner, ngoài những điều thú vị, bí ẩn và truyền thuyết thì số hoàn hảo không có ích lợi thực thụ nào. Tuy nhiên, nhờ nghiên cứu số hoàn hảo mà nhiều khái niệm và công cụ quan trọng đã được xây dựng. Fermat trong quá trình nghiên cứu số hoàn hảo đã tìm ra định lý nhỏ Fermat mà sau này có rất nhiều ứng dụng sâu sắc trong lý thuyết mật mã, lý thuyết các hàm số học cũng được xây dựng để hỗ trợ cho việc nghiên cứu tổng các ước số của một số nguyên. Và số hoàn hảo, như đã nói ở trên, cũng liên quan đến số nguyên tố Mersenne là dạng số nguyên tố mà các kỷ lục số nguyên tố lớn nhất nhiều năm gần đây đều có dạng đó.

Bài viết này được gợi cảm hứng từ bài toán số 7 trong kỳ VMO 2016 vừa qua. Thật lâu lắm rồi mới có một bài toán về số hoàn hảo xuất hiện trong một đề thi Olympic. Bài viết sẽ giới thiệu một số tính chất sơ cấp về số hoàn hảo cũng như giới thiệu những thông tin mới nhất về các số có cái tên và lịch sử đầy huyền bí này.

## 1. Định nghĩa và các kết quả sơ cấp

**Định lý 1.** Tổng các ước số là hàm số  $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$  trong đó tổng tính theo tất cả các ước nguyên dương của số  $n$  (kể cả 1 và chính nó). Ví dụ  $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$ .

**Định lý 2.** Số nguyên dương  $N$  được gọi là hoàn hảo (perfect) nếu  $\sigma(N) = 2N$ , thừa (abundant) nếu  $\sigma(N) > 2N$  và thiếu (deficient) nếu  $\sigma(N) < 2N$ .

Định nghĩa của số hoàn hảo trên đây tương đương với định nghĩa tổng các ước thật sự của  $N$  bằng chính nó. Định nghĩa cũ này tự nhiên hơn và hay hơn nhưng ở đây ta dùng định nghĩa thông qua hàm  $\sigma$  bởi một nguyên nhân là hàm này có những tính chất đẹp đẽ, dễ dàng cho chúng ta hơn trong sử dụng. Cụ thể  $\sigma$  có tính chất quan trọng sau.

**Định lý 3.** Với  $m, n$  là hai số nguyên dương thỏa mãn  $(m, n) = 1$  thì  $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ .

**Chứng minh.** Nếu  $d$  là ước của  $mn$  thì theo định lý cơ bản của số học,  $d$  có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tích của một ước số của  $m$  với một ước số của  $n$  (vì  $m$  và  $n$  không có ước số chung khác 1). Có nghĩa là mọi số hạng của  $\sigma(mn)$  đều xuất hiện đúng một lần trong tổng  $\sigma(m)\sigma(n)$  (tích của tất cả các ước số của  $m$  và  $n$ ). Điều ngược lại cũng đúng: Mọi tích như vậy đều là ước của  $mn$ , như vậy hai tổng bằng nhau. Định lý được chứng minh.  $\square$

Như thế hàm số  $\sigma$  sẽ hoàn toàn xác định nếu chúng ta xác định được  $\sigma$  trên tập hợp các lũy thừa của số nguyên tố. Vì thế định lý sau đây là rất quan trọng.

**Định lý 4.** a) Nếu  $p$  là số nguyên tố thì

$$\sigma(p^k) = 1 + p + \dots + p^k = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}.$$

b) Nếu  $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  là phân tích chính tắc của số nguyên dương  $N$  ra thừa số nguyên tố thì

$$N = \prod_{i=1}^k (1 + p_i + \dots + p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

**Chứng minh.** a) Do  $p^k$  chỉ có các ước số là  $1, p, p^2, \dots, p^k$  nên ta có ngay

$$\sigma(p^k) = 1 + p + \dots + p^k = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}.$$

b) Suy ra từ a) và định lý 3.  $\square$

Để chúng ta có cảm nhận tốt hơn về hàm tổng các ước số, ta sẽ chứng minh hai kết quả đơn giản nhưng thú vị sau.

Ta thấy hiển nhiên là nếu  $N'$  là ước của  $N$  thì hiển nhiên là  $\sigma(N') \leq \sigma(N)$ . Ta có thể chứng minh được tính chất mạnh hơn

**Định lý 5.** Nếu  $N'$  là ước của  $N$  thì  $\frac{\sigma(N')}{N'} \leq \frac{\sigma(N)}{N}$ , dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $N' = N$ .

**Chứng minh.** Chú ý rằng nếu  $d \mid N$  thì  $kd = N$  với  $k$  nào đó, vì thế  $k = \frac{N}{d} \mid N$ . Lập luận này cũng đúng cho điều ngược lại, vì thế  $d \mid N$  khi và chỉ khi  $\frac{N}{d} \mid N$  từ đó suy ra

$$\sigma(N) = \sum_{d \mid N} d = \sum_{d \mid N} \frac{N}{d} = N \sum_{d \mid N} \frac{1}{d}.$$

Do đó nếu  $N'$  là ước thật sự của  $N$  thì ta có

$$\frac{\sigma(N)}{N} = \sum_{d|N} \frac{1}{d} > \sum_{d|N'} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(N')}{N'}.$$

Còn nếu  $N' = N$  thì dấu bằng xảy ra. □

Từ đó có được hệ quả

**Định lý 6.** Số  $N$  là hoàn hảo khi và chỉ khi  $\sum_{d|N} \frac{1}{d} = 2$ .

## 2. Số hoàn hảo chẵn

Người đầu tiên một cách thật sự đưa ra các đặc trưng của số hoàn hảo là nhà toán học Hy Lạp Euclid. Ông nhận thấy rằng 4 số hoàn hảo đầu tiên có dạng rất đặc biệt

$$\begin{aligned} 6 &= 21(1 + 2) = 2 \cdot 3, \\ 28 &= 22(1 + 2 + 22) = 4 \cdot 7, \\ 496 &= 24(1 + 2 + 22 + 23 + 24) = 16 \cdot 31, \\ 8128 &= 26(1 + 2 + \dots + 26) = 64 \cdot 127. \end{aligned}$$

Nhưng chúng ta cũng để ý rằng các số

$$\begin{aligned} 90 &= 23(1 + 2 + 22 + 23) = 8 \cdot 15, \\ 2016 &= 25(1 + 2 + \dots + 25) = 32 \cdot 63, \end{aligned}$$

lại không có trong danh sách các số hoàn hảo. Như Euclid đã chỉ ra là bởi vì  $15 = 3 \cdot 5$  và  $63 = 32 \cdot 7$  là các hợp số, trong khi 3, 7, 31, 127 là các số nguyên tố.

Trong Quyển IX, mệnh đề 36 của cuốn Cơ sở, Euclid viết: “Nếu ta cộng các số bắt đầu từ một sau đó cứ nhân đôi lên cho đến khi tổng là một số nguyên tố và ta lấy tổng này nhân với số hạng cuối cùng của tổng thì kết quả sẽ là một số nguyên tố”.

Ta phát biểu lại nhận xét này dưới dạng gọn hơn như sau:

**Định lý 7.** (Euclid) Nếu  $2^p - 1$  là số nguyên tố thì  $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$  là số hoàn hảo.

**Chứng minh.** Do  $2^p - 1$  là số nguyên tố nên ta có

$$\sigma(N) = \sigma(2^{p-1})\sigma(2^p - 1) = (1 + 2 + \dots + 2^{p-1})2^p = 2^p(2^p - 1) = 2N,$$

nên  $N$  là số hoàn hảo. □

Việc đi tìm các số hoàn hảo như vậy một cách tự nhiên liên quan đến việc đi tìm các số nguyên tố có dạng  $2^n - 1$ . Những số nguyên tố như vậy được gọi là số nguyên tố Mersenne, theo tên của nhà toán học – thầy tu Marin Mersenne, đồng nghiệp cùng thời với Descartes, Fermat và Pascal. Ông đã nghiên cứu các số nguyên tố dạng này từ khoảng năm 1644 và tìm ra được rằng  $2^n - 1$  là nguyên tố với  $n = 2, 3, 5, 11, 13, 17$  và 19. Xuất sắc hơn là đưa ra dự đoán cho các trường hợp  $n = 31, 67, 127, 257$ . Người ta phải tốn gần 200 năm để kiểm tra các số này.

Một tiêu chuẩn quan trọng liên quan đến số nguyên tố Mersenne là tiêu chuẩn sau:



**Định lý 8.** (Cataldi - Fermat). Nếu  $2^n - 1$  là số nguyên tố thì  $n$  cũng là số nguyên tố.

**Chứng minh.** Ta sử dụng hằng đẳng thức  $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + \dots + x + 1)$ . Giả sử rằng ta có thể viết  $n = rs$ , với  $r, s > 1$ . Thì

$$2^n - 1 = (2^r)^s - 1 = (2^r - 1)[2^{r(s-1)} + \dots + 2^r + 1],$$

là số nguyên tố (mâu thuẫn). Nên định lý được chứng minh.  $\square$

Chú ý rằng điều ngược lại không đúng, số  $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$  là một phản ví dụ.

Có phải mọi số hoàn hảo phải có dạng của Euclid? Leonard Euler, trong một bài báo của mình đã chứng minh rằng mọi số hoàn hảo chẵn đều có dạng này. Sau đó thì đã có nhiều chứng minh tuyệt vời khác cho kết quả này.

**Định lý 9.** (Euler) Nếu  $N$  là một số hoàn hảo chẵn thì  $N$  có thể viết dưới dạng  $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$  trong đó  $2^n - 1$  là số nguyên tố.

**Chứng minh 1.** Chứng minh đầu tiên thuộc về Euler [28].

Giả sử  $N = 2^{n-1} \cdot m$  là số hoàn hảo, trong đó  $m$  là số lẻ. Vì  $(2^{n-1}, m) = 1$  nên ta có  $\sigma(N) = \sigma(2^{n-1}) \cdot \sigma(m) = (2^n - 1)\sigma(m)$ .

Vì  $N$  là số hoàn hảo nên  $\sigma(N) = 2N = 2n \cdot m$ . Từ đó ta suy ra  $(2^n - 1)\sigma(m) = 2^n \cdot m$ . Đặt  $s = \sigma(m)$  thì  $m = (2^n - 1) \frac{s}{2^n}$ . Vì  $(2^n - 1, 2n) = 1$  nên  $2^n$  phải là ước của  $s$ , vì  $m$  là số nguyên.

Đặt  $s = q \cdot 2^n$ . Nếu  $q = 1$  thì ta được  $2^n - 1$  là số nguyên tố và  $N$  có dạng Euclid. Nếu  $q > 1$  thì  $m = q(2^n - 1)$ . Ta tính lại tổng các ước số của số  $m$  thì ta thấy chỉ ít nó có các ước số là  $m, 2^n - 1, q$  và  $1$ . Từ đó

$$\sigma(m) \geq (2n - 1)q + 2n - 1 + q + 1 = 2n(q + 1),$$

có nghĩa là  $q \cdot 2^n \geq 2^n(q + 1)$  nhưng điều này là mâu thuẫn.  $\square$

**Chứng minh 2.** Chứng minh này đơn giản hơn, thuộc về Dikson [27].

Từ  $2^n m = (2^n - 1)\sigma(m)$  ta chú ý rằng

$$\sigma(m) = \frac{2^n m}{2^n - 1} = m + \frac{m}{2^n - 1}.$$

Vì cả  $m$  và  $\sigma(m)$  đều là số nguyên nên  $d = \frac{m}{2^n - 1}$  phải là số nguyên. Suy ra  $2^n - 1$  là ước của  $m$  và  $d$  cũng là ước của  $m$ . Nhưng  $\sigma(m) = m + d$  là tổng của tất cả các ước số của  $m$ . Suy ra  $m$  không còn ước số nào nữa. Điều này chỉ có thể xảy ra khi  $d = 1$ , tức là  $m = 2^n - 1$  và hơn nữa  $m$  phải là số nguyên tố.  $\square$

**Chứng minh 3.** Chứng minh này được đưa ra bởi McDaniel [29].

Vì  $2^n m = (2^n - 1)\sigma(m)$  mọi ước nguyên tố của  $2^n - 1$  cũng chia hết  $m$  (vì nó lẻ nên không thể chia hết  $2^n$ ). Vì vậy giả sử  $p^\alpha$  chia hết  $2^n - 1$  với  $p$  nguyên tố.

Theo định lý 5 thì

$$\frac{\sigma(m)}{m} \geq \frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} = \frac{1 + p + \dots + p^{\alpha-1} + p^\alpha}{p^\alpha} \geq \frac{p^{\alpha-1} + p^\alpha}{p^\alpha} = \frac{1 + p}{p}.$$



Do đó

$$1 = \frac{\sigma(N)}{2N} = \frac{\sigma(2^{n-1})\sigma(m)}{2^n m} \geq \frac{(2^n - 1)(1 + p)}{2^n p} = 1 + \frac{(2^n - 1) - p}{2^n p}.$$

Điều này chỉ có thể được thỏa mãn khi phân số ở vế phải bằng 0, tức là  $2^n - 1 = p$  và như thế  $N$  có dạng Euclid.  $\square$

Như vậy số hoàn hảo chẵn đều có dạng Euclid và như thế liên quan đến số nguyên tố Mersenne. Cụ thể, cứ có bao nhiêu số nguyên tố Mersenne thì sẽ có bấy nhiêu số hoàn hảo chẵn.

Theo thông tin của trang [www.mersenne.org](http://www.mersenne.org) thì tính đến ngày 7/1/2016, đã tìm được tất cả 49 số nguyên tố Mersenne, trong đó số lớn nhất (và cũng là số nguyên tố lớn nhất) là số  $2^{74207281} - 1$ . Số này có 22338618 chữ số, được tìm ra vào ngày 7/1/2016 bởi Curtis Cooper bằng cách sử dụng gói phần mềm GIMPS (nếu hình dung thì đây là con số rất lớn và nếu gõ ra thì bạn sẽ tạo ra một file text có dung lượng tới 44 MB). Điều đó cũng có nghĩa là số hoàn hảo lớn nhất hiện nay mà ta biết là số  $2^{74207280}(2^{74207281} - 1)$ . Tuy nhiên ta không biết được số thứ tự của số hoàn hảo này, vì trong cuộc tìm kiếm số nguyên tố Mersenne, kể từ số thứ 45, đã có thể có những lỗ hổng, tức là có số nguyên tố Mersenne chưa được tìm thấy.

Ngoài những tính chất căn bản như nói ở trên, số hoàn hảo chẵn còn thỏa mãn hàng loạt tính chất thú vị khác mà ta sẽ liệt kê ở đây (bạn đọc có thể chứng minh không mấy khó khăn).

**Định lý 10.** Nếu  $N$  là số hoàn hảo chẵn thì  $N$  là số tam giác, tức là có dạng  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

**Định lý 11.** Nếu  $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$  là số hoàn hảo với  $n > 2$  thì

$$N = 1^3 + 3^3 + \dots + \left(2^{\frac{n+1}{2}} - 1\right)^3.$$

**Định lý 12.** Nếu  $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$  là số hoàn hảo và  $N$  được viết trong hệ đếm cơ số 2 thì nó có  $2n - 1$  chữ số, trong đó  $n$  chữ số đầu tiên là 1 và  $n - 1$  chữ số cuối là 0.

### 3. Số hoàn hảo lẻ

Trong khi danh sách các số hoàn hảo chẵn đang ngày một dài thêm thì cho đến nay vẫn chưa tìm được một số hoàn hảo lẻ nào. Và những cố gắng chứng minh không tồn tại số hoàn hảo lẻ vẫn chưa mang lại kết quả.

René Descartes tưởng như đã tìm ra được  $D = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021$  là số hoàn hảo lẻ vì

$$\begin{aligned}\sigma(D) &= (1 + 3 + 32)(1 + 7 + 72)(1 + 11 + 112)(1 + 13 + 132) \cdot 22022 \\ &= (13) \cdot (3 \cdot 19) \cdot (7 \cdot 19) \cdot (3 \cdot 61) \cdot (22 \cdot 1001) \\ &= 2 \cdot (32 \cdot 72 \cdot 112 \cdot 132)(192 \cdot 61) \\ &= 2 \cdot 32 \cdot 72 \cdot 112 \cdot 132 \cdot 22021 \\ &= 2D.\end{aligned}$$

Tuy nhiên, chỉ cần định thần lại thì ta thấy rõ ràng  $22021 = 192 \cdot 61$  (có trong biến đổi ở trên luôn) không phải là số nguyên tố, và do đó  $D(22021)$  không phải là  $22022$ .

Nếu bạn muốn nổi tiếng bằng cách đi tìm một số hoàn hảo lẻ thì những thông tin dưới đây chắc chắn sẽ làm bạn suy nghĩ: Có nên làm điều đó không và mình có đủ công cụ để tìm được không?

- Giá trị chặn dưới:* Có nhiều giới hạn cho sự tồn tại của số hoàn hảo lẻ và giá trị chặn dưới chỉ là một trong số đó. Con số chặn dưới này vẫn đang liên tục được nâng lên. Đầu tiên Kanold chứng minh rằng nếu có số hoàn hảo lẻ thì nó phải lớn hơn  $10^{20}$  [17]. Kanold sử dụng các kết quả của Ore về số điều hòa [24]. Kết quả này được làm mạnh bởi Tuckerman, người đã chứng minh rằng số hoàn hảo lẻ phải lớn hơn  $10^{36}$  [26]. Điều này được thực hiện bởi một thuật toán sinh cây vô hạn mà nếu được phép thực hiện sẽ đánh số tất cả các số hoàn hảo lẻ. Một bước thực hiện thành phần đã giúp Tuckerman chứng minh được rằng mọi số hoàn hảo lẻ sẽ phải có thành phần đủ lớn và đưa đến kết quả của ông. Kết quả này lại được nâng lên bởi Haggis, người đã nghiên cứu các trường hợp khác nhau của số hoàn hảo lẻ và kết hợp các kết quả, nâng chặn dưới lên con số  $10^{50}$ , và tiếp theo là Brent và Cohen, những người đã nâng chặn dưới lên con số  $10^{160}$  [6] [2]. Brent và Cohen đã sử dụng thuật toán, với phương pháp đường cong elliptic để hạn chế số lần phân tích ra thừa số, để tính kết quả của họ, và sau đó bằng những cải tiến thuật toán đã nâng chặn dưới lên  $10^{300}$  [3]. Một bài báo rất mới của Ochem và Rao đã cải tiến thuật toán của Cohen và Brent để thu được chặn dưới là  $10^{1500}$  [23]. Đây là kết quả mới nhất mà ta biết về chặn dưới của số hoàn hảo lẻ.
- Số các ước nguyên tố:* Các nghiên cứu chỉ ra rằng để một số lẻ là số hoàn hảo thì nó phải có một con số tối thiểu các ước nguyên tố. Đầu tiên là một giả thuyết, sau đó được chứng minh bởi Gradshteyn, rằng số hoàn hảo lẻ phải ít nhất 6 ước nguyên tố phân biệt [1]. Haggis sau đó chứng minh được phải có ít nhất 8 ước nguyên tố phân biệt [7]. Điều này thu được bằng cách giả sử tồn tại số hoàn hảo lẻ với 6 hoặc 7 ước số nguyên tố phân biệt thì dẫn đến mâu thuẫn. Những thông tin mới nhất mà ta có về số các ước số nguyên tố phân biệt đến từ Nielsen, người đã xây dựng một thuật toán để chứng minh rằng số hoàn hảo lẻ phải có ít nhất 9 ước nguyên tố phân biệt. Ông đã thu được điều này bằng cách chỉ ra mâu thuẫn trong trường hợp chỉ có 8 ước nguyên tố phân biệt. Trong nghiên cứu của mình, Nielsen cũng cải thiện được các kết quả trước đó về số các ước nguyên tố phân biệt mà một số hoàn hảo lẻ phải có trong trường hợp nó không chia hết cho 3. Kishore và Haggis khẳng định là nó phải ít ra là 10 và 11 tương ứng, nhưng Nielsen nâng được lên ít nhất là 12 [18] [8] [21]. Norton chứng minh được rằng nếu một số hoàn hảo lẻ không chia hết cho 3 và cho 5 thì nó phải có ít nhất 15 ước nguyên tố phân biệt và nếu như thêm vào đó, nó còn không chia hết cho 7 thì nó phải có ít nhất 27 ước nguyên tố phân biệt [22]. Đây là những kết quả tốt nhất cho đến hôm nay về giới hạn số các ước nguyên tố phân biệt. Người ta cũng quan tâm đến số các ước nguyên tố nói chung, chứ không chỉ là các ước nguyên tố phân biệt. Iannucci và Sorli chứng minh được rằng một số hoàn hảo lẻ phải có ít nhất 37 ước nguyên tố, trong khi Hare cải thiện kết quả này để chứng minh rằng phải có ít nhất 47 [15] [11]. Hare đã sử dụng một thuật toán phân hoạch, cho phép ông làm việc trong các cơ sở nhỏ. Hare sau đó đã cải tiến thuật toán của mình và chứng minh được số hoàn hảo lẻ phải có ít nhất 75 ước nguyên tố [12]. Ochem và Rao, trong bài báo vừa công bố, đã tăng con số này lên 101. Họ cũng đang thực hiện công trình để chứng minh rằng thành phần lớn nhất phải lớn hơn 1062 [23].
- Ước nguyên tố lớn nhất:* Cũng có những điều kiện cho ước số nguyên tố lớn nhất của một số hoàn hảo lẻ. Haggis chứng minh được rằng mọi số hoàn hảo lẻ phải chia hết cho một số nguyên tố lớn hơn  $10^4$ . Sau đó ông đã cải thiện được kết quả của chúng mình để chứng minh được một số hoàn hảo lẻ phải chia hết cho một ước nguyên tố lớn hơn  $10^5$  [10]. Điều này được thực hiện bằng cách giả sử tồn tại một số nguyên tố lẻ trong đó không có ước số nguyên tố nào lớn hơn con số mà ông giả sử và thu được mâu thuẫn. Cohen và Haggis đã

làm việc với nhau để nâng được cận dưới lên con số  $10^6$  [9]. Jenkins lại cải thiện kết quả này để nói rằng mọi số hoàn hảo lẻ phải có một ước nguyên tố lớn hơn  $10^7$  [16]. Goto gần đây đã nâng chặn dưới cho ước số nguyên tố lớn nhất lên  $10^8$  [5]. Iannucci cũng chứng minh được rằng các ước nguyên tố lớn thứ nhì và thứ ba phải lớn hơn 10000 và 100 tương ứng [13] [14].

Như vậy, số hoàn hảo lẻ, nếu tồn tại thì phải rất lớn. Và giả thuyết không tồn tại số hoàn hảo lẻ là hoàn toàn có cơ sở. Ta kết thúc bài viết bằng việc đưa ra một tiêu chuẩn về dạng của số hoàn hảo lẻ, nếu có, được chứng minh bởi nhà toán học vĩ đại Leonard Euler.

**Định lý 13.** (Euler) Nếu  $n$  là số hoàn hảo lẻ thì  $n$  phải có dạng  $n = p^{4t+1}m^2$ , trong đó  $p$  là số nguyên tố dạng  $4k + 1$  còn  $m$  là số nguyên dương không chia hết cho  $p$ .

Định lý này chính là câu a) trong bài 7 của VMO 2016. Có lẽ câu này được ra với hàm ý gợi ý cho câu b). Sơ đồ chứng minh gồm các ý sau: Vì  $n$  lẻ và  $\sigma(n) = 2n$  nên  $\sigma(n)$  là một số chẵn và không chia hết cho 4. Từ đó, do  $\sigma(p^k)$  sẽ lẻ nếu  $k$  chẵn và chẵn nếu  $k$  lẻ nên  $n$  phải có dạng  $p^s \cdot m^2$  với  $s$  lẻ và  $m$  không chia hết cho  $p$ .

Tiếp theo cần chứng minh  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , sử dụng  $p + 1 \mid \sigma(p^s)$  với  $s$  lẻ, cuối cùng là chứng minh  $s \equiv 1 \pmod{4}$ , sử dụng  $\sigma(p^s) \equiv s + 1 \pmod{4}$  khi  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

Sử dụng định lý này và những lý luận số học cơ bản, ta có thể giải quyết được ý b) trong bài 7, được phát biểu dưới dạng định lý sau:

**Định lý 14.** Nếu  $n$  là số nguyên dương sao cho  $n - 1$  và  $\frac{n(n+1)}{2}$  là các số hoàn hảo thì  $n = 7$ .

## Tài liệu tham khảo

- [1] Ball, W. W. R.; Coxeter, H. S. M. Mathematical Recreations and Essays, Ed. 13. New York: Dover, 1987.
- [2] Brent, R. P.; Cohen, G. L. (1989). “A New Lower Bound for Odd Perfect Numbers”. Mathematics of Computation, Vol. 53(187) : pp. 431 – 437.
- [3] Brent, R. P.; Cohen, G. L.; te Riele, H. J. J. (1991). “Improved Techniques for Lower Bounds for Odd Perfect Numbers”. Mathematics of Computation, Vol. 57 : pp. 857 – 868.
- [4] Dickson, L. E. (2005). History of the Theory of Numbers, Vol. 1 : Divisibility and Primality. New York: Dover, pp. 3 – 33.
- [5] Goto, T; Ohno, Y (2008). “Odd perfect numbers have a prime factor exceeding 108”. Mathematics of Computation, Vol. 77(263) : pp. 1859–1868.
- [6] Hagi, P. (1973). “A Lower Bound for the Set of Odd Perfect Numbers”. Mathematics of Computation, Vol. 27(124) : pp. 951 – 953.
- [7] Hagi, P. (1980). “Outline of a Proof that Every Odd Perfect Number has at Least Eight Prime Factors”. Mathematics of Computation, Vol. 35(151) : pp. 1027 – 1032.
- [8] Hagi, P. (1983). “Sketch of a Proof that an Odd Perfect Number Relatively Prime to 3 has at Least Eleven Prime Factors”. Mathematics of Computation, Vol. 40(161) : pp. 399 – 404.

- [9] Hagi, P.; Cohen, G. L. (1998). “*Every Odd Perfect Number has a Prime Factor Which Exceeds 106*”. Mathematics of Computation, Vol. 67(223) : pp. 1323 – 1330.
- [10] Hagi, P; McDaniel, W. L. (1975). “*On the Largest Prime Divisor of an Odd Perfect Number II*”. Mathematics of Computation. Vol. 29(131) : pp. 922 – 924.
- [11] Hare, K. G. (2005). “*More on the total number of prime factors of an odd perfect number*”. Mathematics of Computation, Vol. 74(250) : pp. 1003–1008.
- [12] Hare, K.G. (2007). “*New techniques for Bounds on the Total Number of Prime Factors of an Odd Perfect Number*”. Mathematics of Computation, Vol. 76 : pp. 2241 – 2248.
- [13] Iannucci, D. E. (1999). “*The Second Largest Prime Divisor of an Odd Perfect Number Exceeds Ten Thousand*”. Mathematics of Computation, Vol. 68 : pp. 1749 – 1760.
- [14] Iannucci, D. E. (2000). “*The Third Largest Prime Divisor of an Odd Perfect Number Exceeds One Hundred*”. Mathematics of Computation, Vol. 69 : pp. 867 – 879.
- [15] Iannucci, D. E.; Sorli, R. M. (2003). “*On the Total Number of Prime Factors of an Odd Perfect Number*”. Mathematics of Computation, Vol. 72(244) : pp. 2077 – 2084.
- [16] Jenkins, P. M. (2003). “*Odd Perfect Numbers Have a Prime Factor Exceeding 107*”. Mathematics of Computation, Vol. 72 : pp. 1549 – 1554.
- [17] Kanold, H. J. (1957). “*Über Mehrfache Vollkommene Zahlen. II*”, J. Reine Agnew. Mathematics, Vol. 197 : pp. 82 – 96.
- [18] Kishore, M. (1977). “*Odd Perfect Numbers Not Divisible by 3 Are Divisible by at Least Ten Distinct Primes*”. Mathematics of Computation, Vol. 31(137) : pp. 274 – 279.
- [19] [www.Mersenne.org](http://www.Mersenne.org)
- [20] Nielsen, P. P. (2003). “*An upper bound for odd perfect numbers*”. INTEGERS: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, Vol. 3(A14).
- [21] Nielsen, P. P. “*Odd Perfect Numbers Have at Least Nine Distinct Prime Factors*”. 22 Feb 2006. <http://arxiv.org/abs/math.NT/0602485>
- [22] Norton, K. K. (1960). “*Remarks on the Number of Factors of an Odd Perfect Number*”. Acta Arith, Vol. 6 : pp. 365 – 374.
- [23] Ochem, P.; Rao, M. (2012). “*Odd Perfect Numbers are Greater than 101500*”. Mathematics of Computation, Vol. 81(279) : pp. 1869 – 1877.
- [24] Ore, O. (1948). “*On the averages of the divisors of a number*”. American Mathematics Monthly, Vol. 55 : pp. 615 – 619.
- [25] Touchard, J. (1953). “*On Prime Numbers and Perfect Numbers*”. Scripta Math. Vol. 19 : pp. 35 – 39.
- [26] Tuckerman, B. (1973). “*A Search Procedure and Lower Bound for Odd Perfect Numbers*”. Mathematics of Computation, Vol. 27(124) : pp. 943 – 949.

- [27] L. E. Dickson, Notes on the theory of numbers, Amer. Math. Monthly 18(1911), 109.28.  
Leonard Eugene Dickson, History of the theory of numbers, vol. 1, pp. 3–33, Chelsea Pub. Co., New York, 1971.
- [28] Wayne L. McDaniel, On the proof that all even perfect numbers are of Euclid's type, Math.Mag. 48(1975), 107–108.



# VỀ MỘT BỔ ĐỀ SỐ HỌC

Nguyễn Văn Thế – Trường THPT Chuyên Hà Tĩnh

Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu về một bổ đề số học liên quan đến tính chia hết trong các bài số mũ.

## 1. Giới thiệu bổ đề

**Bổ đề:** Cho  $a, b$  là các số nguyên;  $n$  là số nguyên dương và  $p$  là số nguyên tố thỏa mãn  $(n, p-1) = 1$ . Khi đó nếu  $p|a^n - b^n$  thì  $p|a - b$ .

**Chứng minh.**

Nếu  $a, b$  cùng chia hết cho  $p$ , hoặc  $p = 2$  thì dễ dàng ta có điều phải chứng minh.

Bây giờ ta chỉ cần xét trường hợp  $p$  là số nguyên tố lẻ và  $a, b$  không chia hết cho  $p$ .

Do  $(n, p-1) = 1$  nên tồn tại các số nguyên dương  $x, y$  sao cho

$$nx - y(p-1) = 1 \Leftrightarrow nx = (p-1)y + 1.$$

Vì  $a, b$  không chia hết cho  $p$ , nên theo định lý *Fermat* ta có

$$a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow a^{y(p-1)} \equiv b^{y(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mặt khác từ  $a^n \equiv b^n \pmod{p}$  thì

$$a^{nx} \equiv b^{ny} \pmod{p}$$

hay

$$a^{(p-1)y+1} \equiv b^{(p-1)y+1} \pmod{p} \Rightarrow a \equiv b \pmod{p}.$$

Vậy bổ đề chứng minh xong!

**Chú ý:** Khi  $n$  lẻ thì bổ đề trên vẫn đúng cho dấu cộng tức giữ nguyên giả thiết. Với  $n$  lẻ nếu có  $p|a^n + b^n$  thì  $p|a + b$ , việc chứng minh điều này làm hoàn toàn tương tự như chứng minh ở trên. Bây ta sẽ đi vào một số bài tập ứng dụng của bổ đề này.

## 2. Một số bài toán áp dụng bổ đề

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu một số bài toán được giải quyết bằng cách sử dụng bổ đề trên.

**Bài toán 2.1. (CMO TST 2006)** Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(a, n)$  sao cho  $\frac{(a+1)^n - a^n}{n}$  là số nguyên

**Chứng minh.** Nhận thấy cặp  $(a, 1)$  luôn thỏa mãn. Xét  $n > 1$ .

Gọi  $p$  là số nguyên tố nhỏ nhất của  $n$  thì  $(n, p-1) = 1$  lúc này theo bổ đề ta có ngay  $p$  là ước của  $p|1$ , vô lý.  $\square$

**Nhận xét 2.1.** Bài toán trên là một bài chọn đội tuyển tham dự IMO, có thể thấy nếu không biết bổ đề thì nó là một bài toán khó, nhưng nếu chúng ta đã biết bổ đề thì dường như bài toán là hiển nhiên. Điều đáng nói ở đây, là các đại lượng dường như đều là ẩn số, và vẫn xuất hiện các dạng tính chất như chia hết, hay tìm số nguyên điều này làm cho ta liên tưởng đến bổ đề, đặc biệt là số mũ của một số.

**Bài toán 2.2.** Chứng minh rằng: Nếu  $x$  là số nguyên dương và  $p, q$  là hai số nguyên tố sao cho  $q \mid \frac{x^p - 1}{x - 1}$  thì  $p = q$  hoặc  $q \equiv 1 \pmod{p}$ .

*Chứng minh.* Đặt  $d = (q - 1, p)$  thì do  $p$  nguyên tố nên  $d \in \{1, p\}$ .

+) Nếu  $d = p$  thì  $q - 1$  chia hết cho  $d = p$ , hay  $q \equiv 1 \pmod{p}$ .

+) Nếu  $d = 1$  thì chú ý từ giả thiết ta có  $q \mid x^p - 1$ , nên theo “bổ đề” ta có  $q \mid x - 1$ . Viết lại giả thiết thành dạng

$$q \mid x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1.$$

Chú ý rằng  $x \equiv 1 \pmod{q}$  nên ta có

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 \equiv p \pmod{q},$$

mà  $p, q$  đều là số nguyên tố nên

$$q \mid x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 \Leftrightarrow p \equiv 0 \pmod{q} \Leftrightarrow p = q.$$

Vậy bài toán chứng minh xong! □

**Nhận xét 2.2.** Bài toán trên phát biểu một cách tương đối ngắn gọn với các đại lượng quen thuộc như số nguyên tố, mặt khác chúng ta vẫn có dạng giả thiết của bổ đề là  $q \mid x^p - 1$ , điều đó dẫn cho chúng ta một suy nghĩ tự nhiên là như thế thì liệu áp dụng bổ đề có được không. Từ phân tích đó ta có được lời giải như trên, vì khi áp dụng bổ đề ta có cần điều kiện  $(p, q - 1) = 1$  nên theo một phản xạ tự nhiên ta gọi ước chung và chia trường hợp cho nó. Các bài toán sau này để áp dụng bổ đề chúng ta thường làm kiểu như vậy, kiểu tách giả thiết ra, để quy bài toán lớn thành những bài toán nhỏ, mà những bài toán nhỏ đó chúng ta có thể có các cách chứng minh đơn giản hơn. Cùng kiểu cách làm đó chúng ta có thể xem thêm lời giải của bài toán ngay sau đây:

**Bài toán 2.3.** Cho  $n$  là số nguyên dương và  $p$  là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng nếu  $q$  là ước nguyên tố lẻ của  $n^p + 1$  thì  $2p \mid q - 1$  hoặc  $q \mid n + 1$ .

*Chứng minh.* Đặt  $d = (p, q - 1)$  thì  $d \in \{1, p\}$ . Nếu  $d = p$  thì ta có ngay  $p \mid q - 1$  chú ý  $2 \mid q - 1$  và  $(2, p) = 1$  nên ta có  $2p \mid q - 1$ . Nếu  $d = 1$  thì chú ý rằng  $n^p + 1 = n^p - (-1)$  và  $(-1)^{q-1} = 1^{q-1}$  (do  $q$  lẻ) nên áp dụng “bổ đề” ta có ngay  $q \mid n + 1$ . Vậy bài toán chứng minh xong! □

**Nhận xét 2.3.** Bài toán trên dường như mang quá nhiều dáng vóc của “Bài toán 2” tuy nhiên, nhìn một cách tổng thể, bài này có cũng có cái hay ở đó. Bài toán trên vẫn đúng với  $p = 2$ , tức giả thiết không cần  $p$  lẻ. Với  $p = 2$  thì bản chất bài toán chỉ là một bổ đề quen thuộc đó là  $n^2 + 1$  không có ước nguyên tố dạng  $4k + 3$ , từ đó ta có ngay điều phải chứng minh.

**Bài toán 2.4. (Bugaria 1995)** Tìm tất cả các số nguyên tố  $q, p$  sao cho

$$pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q).$$



**Chứng minh.** Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử  $p \leq q$ . Do  $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$  không chia hết cho 2 và 5 nên  $p \geq 3$ ;  $p, q \neq 5$ .

Do  $p$  nguyên tố và  $p|(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$  nên  $p|5^p - 2^p$  hoặc là  $p|5^q - 2^q$ . Mặt khác chú ý rằng  $(p, p-1) = 1$  và  $(q, p-1) = 1$  nên dù ở trường hợp nào thì theo “**bổ đề**” ta luôn có  $p|5-2=3$ . Từ đây ta có  $p=3$ .

Với  $p=3$  thì khi đó thế lại vào giả thiết ta có  $3q|(5^3 - 2^3)(5^q - 2^q) = 117(5^q - 2^q)$  hay

$$q|39(5^q - 2^q).$$

Do đó  $q|39$  hoặc  $q|5^q - 2^q$ .

Nếu  $q|39$  thì  $q \in \{3, 13\}$ .

Ngược lại nếu  $q|5^q - 2^q$  thì do  $(q, q-1) = 1$  nên theo “**bổ đề**” ta có  $q|5-2=3$ . Từ đây ta cũng có  $q=3$ .

Vậy các cặp số  $(p, q)$  cần tìm là  $\{(3, 3); (3, 13); (13, 3)\}$ . □

**Nhận xét 2.4.** Dựa vào hình thức phát biểu với dạng quen thuộc cùng vóc dáng của bổ đề, từ phân tích và sử dụng các tính chất cơ bản của số nguyên tố. Việc nghĩ đến bổ đề trong bài toán này là khá hiển nhiên do các giả thiết dường như đang quan tâm đến các tính chất như số nguyên tố, chia hết trong số mũ. Đáng chú ý, việc giả sử  $p \leq q$  nhằm cho chúng ta điều kiện  $(q, p-1) = 1$ , thông thường trong các bài toán số học mà các đại lượng là đối xứng hay hoán vị thì chúng ta thường giả sử như vậy để giảm bớt trường hợp.

Như vậy, đối với việc làm xuất hiện đủ điều kiện giả thiết để áp dụng bổ đề, chúng ta cần linh hoạt trong việc thu hẹp giả thiết của bài toán. Hơn nữa trong các bài toán số học khó, thì việc tiếp cận vấn đề và chia nhỏ giả thiết là một việc hết sức tự nhiên.

**Bài toán 2.5.** Cho  $p$  là số nguyên tố và  $q > 5$  là ước nguyên tố của  $2^p + 3^p$ . Chứng minh rằng:  $q > p$ .

**Chứng minh.** Gọi  $d = (q-1, p)$  thì  $d \in \{1, p\}$ . Nếu  $p \leq 5$  thì hiển nhiên ta có điều phải chứng minh. Xét  $p > 5$ , khi đó nếu  $d = 1$  thì mọi điều kiện áp dụng bổ đề đều thỏa mãn, vậy áp dụng “**bổ đề**” ta có ngay  $q|2+3=5 \Rightarrow q=5$ , điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy ta phải có  $d=p$ . Tức lúc này thì  $p|q-1 \Rightarrow p \leq q-1 < q$ , điều phải chứng minh. □

**Nhận xét 2.5.** Nhìn kết luận chắc hẳn chúng ta có cảm giác lạ lẫm, tuy nhiên nếu chú ý giả thiết thì phần quan trọng nhất vẫn là số mũ và số nguyên tố, điều đó giúp chúng ta có ý nghĩ về việc sử dụng bổ đề. Lại một lần nữa chúng ta có kiểu làm quen thuộc, gọi  $d = (p, q-1)$  thì điều này cho ta rất nhiều lợi thế trong việc chia nhỏ bài toán, khi mà một cái thì chúng ta có thể áp dụng bổ đề, cái kia lại là bài toán đơn giản hơn bài toán đầu. Điểm nhấn của bài toán này là về chứng minh là một bất đẳng thức thì tại sao lại làm như vậy? Chú ý rằng trong số học để chứng minh  $b \leq a$  thì ta thường đi chứng minh  $b|a$ , đây có thể coi là mấu chốt của bài toán.

**Bài toán 2.6. (IMO Shortlist 2006)** Giải phương trình nguyên của phương trình:

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1.$$

**Chứng minh.** Viết lại giả thiết thành

$$x^6 + x^5 + \dots + x + 1 = y^5 - 1$$

với điều kiện  $x \neq 1$ .

Gọi  $p$  là ước nguyên tố của  $x^6 + x^5 + \dots + x + 1$ . Ta có  $p|x^7 - 1$ .

Đặt  $d = (7, p - 1)$  thì  $d = \{1, 7\}$ .

Với  $d = 1$  thì áp dụng “bổ đề” ta có  $p|x - 1$ . Khi đó

$$x^6 + x^5 + \dots + x + 1 \equiv 7 \pmod{p} \Rightarrow p = 7.$$

Với  $d = 7$  thì  $p \equiv 1 \pmod{7}$ .

Nói tóm lại mọi ước dương  $k$  của  $\frac{x^7 - 1}{x - 1}$  thì  $k \equiv 0, 1 \pmod{7}$ .

Bây giờ giả sử  $(x, y)$  là một nguyên của phương trình đã cho. Mà

$$y^5 - 1 = (y - 1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1)$$

nên ta có

$$y - 1 \equiv 0, 1 \pmod{7} \text{ và } y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 \equiv 0, 1 \pmod{7}.$$

Từ đây ta có điều mâu thuẫn vì khi  $y \equiv 1, 2 \pmod{7}$  thì

$$y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 \equiv 5, 2 \pmod{7}.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. □

**Nhận xét 2.6.** Bài toán trên là nếu không biết bổ đề thì chúng ta có thể dùng cấp để biết được các dạng ước của  $x^7 - 1$  nhưng khá phức tạp. Nếu ai để ý thì bước đầu tiên chính là Bài toán 3 mà tôi đã nêu ra ở trên. Để ý rằng với một bài toán nghiệm nguyên thì tính chất nghiệm của chúng luôn là một vấn đề được khai thác rất nhiều. Qua đó giải quyết định bài toán này một cách rất sơ cấp.

**Bài toán 2.7. (IMO 1990)** Xác định tất cả các số nguyên  $n > 1$  thỏa mãn  $\frac{2^n + 1}{n^2}$  là một số tự nhiên

*Chứng minh.* Để giải bài toán này, ta sẽ cần một bổ đề quen thuộc sau:

Gọi  $v_p(n)$  là số mũ đúng của  $p$  trong  $n$ , thì với  $a, b$  là các số nguyên dương và  $p$  là số nguyên tố thỏa mãn  $p|a - b$ , và  $p$  không là ước của  $a, b$ . Khi đó với  $n$  lẻ thì ta có

$$v_p(a^n + b^n) = v_p(a + b) + v_p(n)$$

Bổ đề trên là bổ đề **LTE** quen thuộc, xin không chứng minh ở đây.

Quay trở lại bài toán:

Do  $2^n + 1$  lẻ nên để

$$\frac{2^n + 1}{n^2} \in \mathbb{N}$$

thì  $n$  lẻ. Gọi  $p$  là ước số nguyên tố nhỏ nhất của  $n$ . Khi đó ta có  $(n, p - 1) = 1$ , áp dụng “bổ đề” ta có  $p|2 + 1 = 3$ , từ đây ta có  $p = 3$ .

Áp dụng bổ đề **LTE** với  $p = 3$  ta có

$$v_3(2^n + 1) = v_3(2 + 1) + v_3(n) = 1 + v_3(n)$$

Mặt khác, do  $n^2|2^n + 1$  nên với mọi  $p$  nguyên tố là ước của  $n$  thì

$$v_p(n^2) \leq v_p(2^n + 1).$$

Như vậy, với  $p = 3$  thì ta có

$$2v_3(n) \leq 1 + v_3(n) \Rightarrow v_3(n) = 1 \text{ (do } 3|n).$$

Đặt  $n = 3x$ , với  $x$  là số nguyên dương lẻ không chia hết cho 3. Thay lại vào giả thiết ta có

$$\frac{8^x + 1}{9x^2} \in \mathbb{N}$$

hay

$$9x^2 | 8^x + 1 \Rightarrow x^2 | 8^x + 1.$$

+) Nếu  $x = 1$  thì  $n = 3$ , thử lại ta thấy  $n = 3$  thỏa mãn.

+) Với  $x > 1$ , gọi  $q$  là ước nguyên tố nhỏ nhất của  $x$  thì  $(x, q - 1) = 1$ , từ đây áp dụng “bổ đề” ta có  $q | 8 + 1 = 9$ , kết hợp  $q$  nguyên tố ta có  $q = 3$ , hay  $3 | x$ , mâu thuẫn.

Vậy ta có các giá trị cần tìm của  $n$  là  $n = 3$ .

□

**Nhận xét 2.7.** Bài toán trên kết hợp khá nhiều kiến thức quan trọng của số học, điểm nhấn là việc kết hợp giữa “bổ đề” để tìm ra một ước rồi sử dụng bổ đề LTE để biết chứa số mũ đúng của ước đó là bao nhiêu. Khi đó, chúng ta sẽ ước lượng được giá trị chuẩn và giúp bài toán trở nên gọn nhẹ hơn hoặc đưa về một bài toán mới cùng kiểu giả thiết để áp dụng lại cách làm như kiểu xuống thang trong phương trình.

**Bài toán 2.8. [IMO Shortlist 1999]** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  $(n, p)$  sao cho  $n \leq 2p$  và  $p$  là số nguyên tố thỏa mãn

$$n^{p-1} | (p-1)^n + 1.$$

**Chứng minh.** Nhận thấy  $n = 1$  thì mọi số  $p$  là số nguyên tố đều thỏa mãn hay cặp  $(n, p) = (1, p)$  thỏa mãn bài toán. Ta chỉ việc xét bài toán trên với  $n > 1$ .

Nếu  $p = 2$  thì từ giả thiết ta có  $n = 2$ . Xét  $p > 2$  thì  $p$  lẻ nên  $(p-1)^n + 1$  lẻ khi đó để  $n^{p-1} | (p-1)^n + 1$  thì  $n$  lẻ.

Gọi  $q$  là ước nguyên tố nhỏ nhất của  $n$ , khi đó ta có  $(q-1, n) = 1$  và từ giả thiết ta cũng có  $q | (p-1)^n + 1$ , khi đó áp dụng “bổ đề” ta có  $q | (p-1) + 1 = p \Rightarrow q = p$ .

Do  $q = p$  nên  $p | n$  mà  $n \leq 2p$  và  $n$  lẻ nên  $n = p$ .

+) Với  $n = p$  thì thay vào giả thiết ta có

$$p^{p-1} | (p-1)^p + 1.$$

Do  $p$  lẻ nên áp dụng bổ đề LTE ta có

$$v_p((p-1)^p + 1) = v_p((p-1) + 1) + v_p(p) = 2.$$

Từ đây, ta có điều kiện để  $p^{p-1} | (p-1)^p + 1$  là  $p-1 \leq 2 \Rightarrow p = 3$ , do  $p$  là số nguyên tố lẻ. Vậy các cặp  $(n, p)$  cần tìm là  $\{(1, p); (2, 2); (3, 3)\}$ . □

**Nhận xét 2.8.** Ở bài toán trên, chúng ta có thể thấy sức mạnh của “bổ đề” bên cạnh đó, các bài toán liên quan đến số mũ như bài toán trên thì chúng ta cũng thường nghĩ về số mũ của một số nguyên tố, ở đó bổ đề LTE cũng là một công cụ rất mạnh khi đã giải quyết định phần khó của bài toán.

**Bài toán 2.9. (USA 2013)** Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố  $(p, q, r)$  thỏa mãn đồng thời

$$\begin{cases} p|q^r + 1 \\ q|r^p + 1 \\ r|p^q + 1. \end{cases}$$

*Chứng minh.* Giả sử  $r = \min\{p, q, r\}$ .

Khi đó ta có  $(r - 1, q) = 1$  nên từ  $r|p^q + 1$ , áp dụng “bổ đề” ta có  $r|p + 1$ .

Đặt  $d = (p - 1, r)$  thì do  $r|p + 1$  nên  $d = (2, r)$ .

Khi đó nếu  $d = 1$  thì từ  $p|q^r + 1$  áp dụng “bổ đề” ta có  $p|q + 1$ . Mặt khác để ý rằng khi  $d = 1$  thì  $r$  lẻ mà  $r = \min\{p, q, r\}$  nên

$$p|q + 1 \Rightarrow p|\frac{q+1}{2} \Rightarrow p \leq \frac{q+1}{2} < q.$$

Mặt khác  $p$  lẻ và  $p|q + 1$  nên  $(p, q - 1) = 1$ . Do vậy, áp dụng “bổ đề” cho phương trình  $q|r^p + 1$  ta có  $q|r + 1$  mà  $q, r$  lẻ nên  $q|\frac{r+1}{2} \Rightarrow q < r$ , mâu thuẫn.

Vậy ta phải có  $d = 2$ , tức lúc này  $r = 2$ . Giả thiết bài toán lúc này trở thành

$$\begin{cases} p|q^2 + 1 \\ q|2^p + 1 \\ 2|p^q + 1. \end{cases}$$

Đặt  $k = (q - 1, p)$  thì  $k \in \{1, p\}$ .

Nếu  $k = p$  thì

$$p|q - 1 \Rightarrow p|q^2 - 1,$$

kết hợp  $p|q^2 + 1$  ta có  $p = 2$ , điều này mâu thuẫn do  $2|p^q + 1$ . Từ đây ta thu được  $k = 1$ .

Lúc này từ phương trình  $q|2^p + 1$  áp dụng “bổ đề” ta thu được  $q|3 \Rightarrow q = 3$ , đến đây không khó để ta thu được  $p = 5$ .

Vậy  $(p, q, r) = (5, 3, 2)$  và các hoán vị vòng quanh.

□

**Nhận xét 2.9.** Bài toán trên là một minh chứng điển hình cho thấy sức mạnh công phá của bổ đề, chúng ta có thể thấy dấu hiệu đặc trưng của bổ đề qua giả thiết liên quan đến số nguyên tố và các số mũ. Từ chỗ linh động trong khâu xử lý giả thiết, chúng ta đã làm vấn đề bài toán được sáng tỏ từng bước, từng bước một. Một cách tự nhiên, chúng ta sẽ giản ước đi giả thiết hoặc thu hẹp giả thiết, giống như một cách để tạo nên điều kiện cần để áp dụng bổ đề.

Ngoài cách đi từng bước như trên thì chúng ta có thể làm bài này bằng cách áp dụng Bài toán 3 bằng việc xét trường hợp cả 3 số cùng lẻ và trường hợp có một số bằng 2. Bản chất cũng không thay đổi nhưng hơi thiếu đi sự tự nhiên trong việc rút gọn giả thiết như cách làm ở trên.

**Bài toán 2.10. (VMEO tháng 10)** Cho trước số nguyên dương  $k$ . Tìm điều kiện của số nguyên dương  $m$  theo  $k$  sao cho tồn tại duy nhất một số nguyên dương  $n$  thỏa mãn:

$$n^m | 5^{n^k} + 1.$$

*Chứng minh.* Đầu tiên ta có  $n = 1$  luôn thỏa mãn đề bài, tức ta cần tìm  $m$  theo  $k$  sao cho không tồn tại số nguyên dương  $n > 1$  thỏa mãn đề bài.

+) Xét  $m \leq k + 1$ . Khi đó chọn  $n = 3$  ta có:

$$v_3(5^{3^k} + 1) = v_3(5 + 1) + v_3(3^k) = 1 + k.$$

Suy ra  $3^m | 5^{3^k} + 1$ . Hay  $n = 3$  thỏa mãn, mâu thuẫn với giả thiết  $n$  là duy nhất.

+) Xét  $m > k + 1$ . Ta sẽ chứng minh rằng  $n = 1$  là số duy nhất thỏa mãn giả thiết.

Thật vậy, giả sử tồn tại  $n > 1$  thỏa mãn  $n^m | 5^{n^k} + 1$ , khi đó ta có

$$5^{n^k} + 1 \equiv 2 \pmod{4}$$

nên nếu  $n$  chẵn thì

$$v_2(n^m) = m.v_2(n) \geq m > k + 1,$$

suy ra  $n^m$  không là ước của  $5^{n^k} + 1$ , vô lý. Vậy ta phải có  $n$  lẻ.

Gọi  $p$  là ước nguyên tố nhỏ nhất của  $n$  thì ta có  $p$  lẻ và  $(p - 1, n) = 1$ . Lúc này

$$p | n^m \Rightarrow p | 5^{n^k} + 1 = 5^{n^k} + (-1)^{n^k}.$$

Áp dụng “bổ đề” ta có  $p | 5 + (-1) = 6$  mà  $p$  lẻ nên  $p = 3$ . Do  $n^m | 5^{n^k} + 1$  nên ta có

$$v_3(n^m) \leq v_3(5^{n^k} + 1),$$

mặt khác theo bổ đề **LTE** ta có:

$$v_3(5^{n^k} + 1) = v_3(5 + 1) + v_3(n^k) = 1 + k.v_3(n).$$

Như vậy, ta thu được

$$m.v_3(n) \leq 1 + k.v_3(n) \Leftrightarrow (m - k).v_3(n) \leq 1. \quad (*)$$

Do  $v_3(n) \geq 1$  nên từ (\*) ta có:

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} m = k + 1 \\ v_3(n) = 1 \end{array} \right. \\ m \leq k. \end{array} \right.$$

( Mâu thuẫn với trường hợp đang xét là  $m > k + 1$ ).

Vậy điều kiện cần tìm của  $m$  là  $m > k + 1$ .

□

**Bài toán 2.11. (Nghệ An 2015)** Tìm tất cả các số tự nhiên  $a$  sao cho tồn tại số tự nhiên  $n > 1$  thỏa mãn

$$n^2 | a^n + 1.$$

*Chứng minh.* Ta sẽ chứng minh tất cả các số  $a \neq 2^k - 1$  với  $k \in \mathbb{N}^*$  đều thỏa mãn bài toán.

Thật vậy, với  $a \neq 2^k - 1$  thì khi đó  $a + 1 \neq 2^k$ , hay tồn tại số nguyên tố  $p$  lẻ là ước của  $a + 1$ .

Chọn  $n = p$ , khi đó ta có  $p^2 | a^p + 1$ , đpcm.

Bây giờ ta sẽ chứng minh  $a = 2^k - 1$  không thỏa mãn bài toán.

Giả sử có số  $a = 2^k - 1$  thỏa mãn bài toán, tức tồn tại số nguyên dương  $n$  sao cho

$$n^2 | (2^k - 1)^n + 1.$$

Gọi  $p$  là ước nguyên tố nhỏ nhất của  $n$  thì  $(p - 1, n) = 1$ . Mặt khác chú ý rằng  $n$  không thể chẵn vì nếu  $n$  chẵn thì  $n^2 \equiv 0 \pmod{4}$  còn  $(2^k - 1)^n + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ , vô lý. Vậy phải có  $n$  lẻ, lúc này áp dụng “**Bổ đề**” ta có

$$p | (2^k - 1) + 1 = 2^k \Rightarrow p = 2$$

tức  $n$  chẵn, mâu thuẫn. Vậy các số  $a$  cần tìm là  $a \neq 2^k - 1, a \in \mathbb{N}^*$ .

□

### 3. Một số bài tập vận dụng

**Bài 3.1. (AoPs)** Cho  $n$  là số nguyên dương thỏa mãn  $13|6^n + 7^n$ . Chứng minh rằng  $13|n$ .

**Bài 3.2. (T10-439 THPT)** Tìm tất các số nguyên dương lẻ  $n$  sao cho  $15^n + 1$  chia hết cho  $n$ .

**Bài 3.3.** Tìm tất cả các cặp số nguyên tố  $p, q$  thỏa mãn  $\begin{cases} p^2 + 1 | 2003^q + 1 \\ q^2 + 1 | 2003^p + 1 \end{cases}$ .

**Bài 3.4.** Tìm tất cả các số nguyên dương  $m, n$  thỏa mãn  $n > 1$  và

$$n | 1 + 3^{3^n} + 3^{2 \cdot 3^n}.$$

**Bài 3.5. (Trung Quốc 2009)** Tìm tất cả các cặp số nguyên tố  $(p, q)$  sao cho

$$pq | 5^p + 5^q.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Tài liệu Chuyên Toán Giải Tích 12, Đoàn Quỳnh (Chủ biên), NXB GD năm 2015

[2] Diễn đàn toán học VMF

[3] Diễn đàn toán học AoPs.

# SỰ BẰNG NHAU CỦA HAI ĐA THỨC VÀ ỨNG DỤNG VÀO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Võ Quốc Bá Cẩn

(Trường Archimedes Academy, Hà Nội)

Khi tìm hiểu về đa thức, chúng ta đều biết rằng nếu hai đa thức bằng nhau thì các hệ số tương ứng của các số hạng của chúng cũng bằng nhau. Ngoài ra, ta cũng biết thêm rằng: nếu hai đa thức  $P(x)$ ,  $Q(x)$  có bậc  $n$  và nhận giá trị bằng nhau tại  $n + 1$  giá trị thì chúng bằng nhau.

Đây là những tính chất hay và có nhiều ứng dụng trong các mảng toán khác nhau, đặc biệt là đại số. Ở đây, trong bài viết nhỏ này, chúng tôi xin giới thiệu ứng dụng của chúng trong việc giải các bài toán phương trình hàm. Xin được bắt đầu bằng ví dụ sau:

**Bài toán 1.** Cho số tự nhiên  $n \geq 2$ . Tìm tất cả các hàm số  $f$  cộng tính  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f(x^n) = f^n(x)$$

với mọi số thực  $x$ .

Đây là một bài toán quen thuộc liên quan đến hàm cộng tính. Hai trường hợp điển hình phổ biến là  $n = 2$  và  $n = 3$ . Khi đó, hầu hết các cách giải được biết đều xoay quanh việc tính  $f((x + 1)^n)$  và  $f((x - 1)^n)$  rồi kết hợp chúng với nhau. Tuy nhiên, điều này sẽ rất khó thực hiện nếu  $n$  là một số khá lớn. Dưới đây, chúng ta sẽ cùng tiếp cận bài toán bằng góc nhìn của đa thức.

Xin lưu ý rằng, trong lời giải được trình bày bên dưới, chúng tôi có sử dụng các tính chất tương đương điển hình của hàm cộng tính mà không chứng minh (bạn đọc có thể tự chứng minh lại) là:

1.  $f(x) = xf(1)$  với mọi  $x$  hữu tỉ;
2.  $f(kx) = kf(x)$  với mọi  $k$  hữu tỉ;
3. nếu  $f(x)$  đơn điệu và cộng tính trên  $\mathbb{R}$  thì  $f(x) = ax$  với mọi số thực  $x$ .

**Lời giải.** Nếu  $n = 2$ , ta có  $f(x^2) = f^2(x)$  với mọi  $x$  nên  $f(x)$  nhận giá trị không âm với mọi  $x$  không âm. Ta dễ dàng suy ra  $f$  là hàm không giảm. Từ đó, ta tìm được hai hàm số thỏa mãn là  $f(x) = 0$  và  $f(x) = x$ .

Xét trường hợp  $n > 2$ . Đặt  $f(1) = a$ , ta dễ thấy  $f(x) = ax$  với mọi  $x$  hữu tỉ. Ta sẽ tính  $f((x + y)^n)$  (ở đây  $x \in \mathbb{R}$  và  $y \in \mathbb{Q}$ ) bằng hai cách. Sử dụng điều kiện giả thiết, ta có

$$f((x + y)^n) = [f(x + y)]^n = [f(x) + ay]^n = \sum_{i=0}^n C_n^i f^{n-i}(x)(ay)^i.$$

Mặt khác, ta cũng có

$$f((x + y)^n) = f\left(\sum_{i=0}^n C_n^i x^{n-i} y^i\right) = \sum_{i=0}^n f(C_n^i x^{n-i} y^i) = \sum_{i=0}^n C_n^i y^i f(x^{n-i}).$$

Do đó, kết hợp với kết quả ở trên, ta thu được

$$\sum_{i=0}^n C_n^i f^{n-i}(x)(ay)^i = \sum_{i=0}^n C_n^i y^i f(x^{n-i})$$

với mọi  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{Q}$ . Cố định  $x$  và xem hai biểu thức ở trên là hai đa thức ẩn  $y$  thì rõ ràng chúng bằng nhau (do  $y$  có thể nhận giá trị hữu tỉ bất kỳ, còn bậc của hai đa thức là hữu hạn).

Bây giờ, bằng cách so sánh hệ số của  $y^{n-2}$  ở hai vế, ta thu được

$$a^{n-2} f^2(x) = f(x^2)$$

với mọi số thực  $x$ . Ta xét hai trường hợp như sau:

1. Với  $n$  chẵn: Từ giả thiết, ta có

$$a^n = f^n(1) = f(1^n) = f(1) = a$$

nên  $a = 0$  hoặc  $a = 1$ . Nếu  $a = 1$  thì bài toán trở về trường hợp  $n = 2$ . Còn nếu  $a = 0$  thì ta có  $f(x^2) = 0$  nên  $f(x) = 0$  với mọi  $x \geq 0$ , từ đó do  $f$  lẻ nên  $f(x) = 0$  với mọi  $x$ .

2. Với  $n$  lẻ: Tương tự như trên, ta tính được  $a = 0, 1, -1$ . Hai trường hợp  $a = 0$  và  $a = 1$  đã được xét ở trên. Còn với  $a = -1$ , ta có  $f(x^2) = -f^2(x)$  nên  $f(x)$  nhận giá trị không dương với mọi  $x$  không âm, từ đó ta dễ dàng chứng minh được  $f$  không tăng và tìm được hai nghiệm hàm thỏa mãn là  $f(x) = 0$  và  $f(x) = -x$ .

**Kết luận:** Các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là  $f(x) = 0$ ,  $f(x) = x$  và  $f(x) = -x$  (trong trường hợp  $n$  là số tự nhiên lẻ  $\geq 3$ ).  $\square$

**Bài toán 2.** Cho số tự nhiên  $n \geq 2$ . Tìm tất cả các hàm số  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f(x^n + f(y)) = y + f^n(x)$$

với mọi cặp số thực  $x, y$ .

Trường hợp  $n = 2$  của bài toán này chính là đề thi IMO năm 1992. Trường hợp này và trường hợp  $n$  chẵn nói riêng là các trường hợp dễ của bài toán.

Với  $n$  lẻ thì không như vậy, ta sẽ gặp nhiều khó khăn để tính  $f(0)$ , một mấu chốt quan trọng để chứng minh  $f$  cộng tính.

Cách tính  $f(0)$  thường gặp là sử dụng tính song ánh của  $f$  để tính một giá trị nào đó theo nhiều cách. Cách đó tương đối phức tạp và không dễ để thực hiện. Dưới đây là một cách tiếp cận bằng đa thức khá thú vị.

**Lời giải.** Đặt  $f(0) = a$ . Từ giả thiết, ta dễ thấy

$$f(f(y)) = y + a^n$$

với mọi số thực  $y$ . Sử dụng kết quả này, ta có

$$f(f^n(x) + y) = f(f(x^n + f(y))) = x^n + f(y) + a^n$$



với mọi  $x, y \in \mathbb{R}$ . Trong đẳng thức trên, ta thay  $y$  bởi  $f(y)$  thì thu được

$$x^n + y + 2a^n = x^n + f(f(y)) + a^n = f(f^n(x) + f(y)) = y + f^n(f(x)) = y + (x + a^n)^n,$$

hay

$$x^n + 2a^n = (x + a^n)^n.$$

Bằng cách so sánh hệ số của  $x^{n-1}$  ở hai vế, ta dễ dàng suy ra  $a = 0$ . Lúc này, ta có  $f(f(y)) = y$  nên bằng cách thay  $y$  bởi  $f(y)$  vào giả thiết, ta được

$$f(x^n + y) = f^n(x) + f(y)$$

với mọi  $x, y \in \mathbb{R}$ . Thay  $y = 0$  vào đẳng thức trên, ta cũng có

$$f(x^n) = f^n(x) \quad (1)$$

với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Do đó, đẳng thức ở trên có thể được viết lại dưới dạng

$$f(x^n + y) = f(x^n) + f(y)$$

với mọi  $x, y \in \mathbb{R}$ . Nếu  $n$  lẻ thì  $x^n$  có thể nhận mọi giá trị trên  $\mathbb{R}$  nên ta suy ra  $f$  cộng tính. Kết hợp với (1), ta đưa bài toán về trường hợp của bài toán 1 đã được xét ở trước.

Nếu  $n$  chẵn thì do  $x^n$  có thể nhận mọi giá trị không âm nên ta suy ra

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

với mọi  $x \geq 0$  và  $y \in \mathbb{R}$ . Bằng cách thay  $y = -x$ , ta dễ thấy  $f$  là hàm lẻ. Từ đó, với mọi  $x < 0, y \in \mathbb{R}$ , ta có

$$-f(x + y) = f((-x) + (-y)) = f(-x) + f(-y) = -f(x) - f(y),$$

hay

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Vậy  $f$  là hàm cộng tính. Kết hợp với (1), ta đưa được bài toán về trường hợp của bài toán 1 đã được xét ở bài trước.  $\square$

**Bài toán 3 (Chọn đội tuyển PTNK, 2013).** *Tìm tất cả các hàm số  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn*

$$f(x^3 + y + f(y)) = 2y + x^2 f(x)$$

với mọi cặp số thực  $x, y$ .

**Lời giải.** Để thấy  $f$  là một toàn ánh nên tồn tại  $a \in \mathbb{R}$  sao cho  $f(a) = 0$ . Thay  $x = 0$  và  $y = a$  vào phương trình giả thiết, ta tính được  $a = 0$ . Nói cách khác,  $x = 0$  là số duy nhất làm cho  $f(x) = 0$ . Tiếp theo, thay  $y = -\frac{x^2 f(x)}{2}$  vào phương trình giả thiết, ta được

$$f\left(x^3 - \frac{x^2 f(x)}{2} + f\left(-\frac{x^2 f(x)}{2}\right)\right) = 0,$$

suy ra

$$-\frac{x^2 f(x)}{2} + f\left(-\frac{x^2 f(x)}{2}\right) = -x^3$$

với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Tiếp theo, bằng cách thay  $y$  bởi  $-\frac{y^2 f(y)}{2}$  và sử dụng kết quả trên, ta được

$$f(x^3 - y^3) = x^2 f(x) - y^2 f(y)$$

với mọi  $x, y \in \mathbb{R}$ . Từ đây, bằng cách thay lần lượt  $x = 0$  và  $y = 0$ , ta chứng minh được  $f(x^3) = x^2 f(x)$ ,  $f(-y^3) = -y^2 f(y)$  nên suy ra

$$f(x^3 - y^3) = f(x^3) + f(-y^3).$$

Mà  $x^3$  và  $-y^3$  có thể nhận mọi giá trị trên  $\mathbb{R}$  nên ta suy ra  $f$  cộng tính. Do đó  $f(x) = kx$  với mọi  $x$  hữu tỉ. Bây giờ, ta tính  $f((x + y)^3)$  (với  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{Q}$ ) bằng hai cách. Trước hết, ta thấy

$$f((x + y)^3) = (x + y)^2 f(x + y) = (x + y)^2 [f(x) + ky].$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\begin{aligned} f((x + y)^3) &= f(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \\ &= f(x^3) + f(3x^2y) + f(3xy^2) + f(y^3) \\ &= x^2 f(x) + 3yf(x^2) + 3y^2 f(x) + ky^3. \end{aligned}$$

Do đó

$$(x + y)^2 [f(x) + ky] = x^2 f(x) + 3yf(x^2) + 3y^2 f(x) + ky^3$$

với mọi  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{Q}$ . Cố định  $x$  và xem hai biểu thức ở hai vế là hai đa thức ẩn  $y$ . Hai đa thức này bằng nhau vì chúng có bậc  $\leq 3$  mà nhận giá trị bằng nhau tại mọi  $y$  hữu tỉ. Từ đây, bằng cách đồng nhất hệ số của  $y^2$  ở hai vế, ta được

$$f(x) + 2kx = 3f(x),$$

suy ra  $f(x) = kx$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Thay trở lại phương trình ban đầu, ta tính được  $k = 1, -2$ . Vậy có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là  $f(x) = x$  và  $f(x) = -2x$ .  $\square$

**Bài toán 4 (Hàn Quốc, 2015).** *Tìm tất cả các hàm số  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn*

$$f(x^{2015} + f^{2015}(y)) = y^{2015} + f^{2015}(x)$$

với mọi cặp số thực  $x, y$ .

**Lời giải.** Từ giả thiết, ta dễ thấy  $f$  là một song ánh. Do đó, tồn tại duy nhất  $b \in \mathbb{R}$  sao cho  $f(b) = 0$ . Đặt  $f(0) = a$ . thay  $x = 0$  và  $y = b$  vào phương trình giả thiết, ta được

$$a = a^{2015} + b^{2015}.$$

Mặt khác, thay  $x = b$  và  $y = 0$  vào phương trình giả thiết, ta cũng có

$$f(a^{2015} + b^{2015}) = 0 = f(b),$$

suy ra

$$b = a^{2015} + b^{2015}.$$

Kết hợp với trên, ta suy ra  $a = b$ . Do đó  $f(f(0)) = 0$  và  $2a^{2015} = a$ . Bây giờ, thay  $y$  bởi  $f(y)$  vào phương trình giả thiết, ta có

$$f(x^{2015} + f^{2015}(f(y))) = f^{2015}(x) + f^{2015}(y) \quad (1)$$

với mọi  $x, y \in \mathbb{R}$ . Thực hiện đảo vai trò của  $x$  và  $y$  trong phương trình trên, đồng thời chú ý rằng vế phải là một biểu thức đối xứng của  $x$  và  $y$ , ta có

$$f(x^{2015} + f^{2015}(f(y))) = f(y^{2015} + f^{2015}(f(x))),$$

từ đó suy ra

$$x^{2015} + f^{2015}(f(y)) = y^{2015} + f^{2015}(f(x)).$$

Thay  $y = 0$  vào đẳng thức trên, ta được

$$f^{2015}(f(x)) = x^{2015} + f^{2015}(f(0)) = x^{2015},$$

suy ra  $f(f(x)) = x$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Do đó, phương trình (1) có thể được viết lại dưới dạng

$$f(x^{2015} + y^{2015}) = f^{2015}(x) + f^{2015}(y) \quad (2)$$

với mọi  $x, y \in \mathbb{R}$ . Lần lượt thay  $y = 0$  và  $y = -x$  vào phương trình trên, ta được

$$f(x^{2015}) = f^{2015}(x) + a^{2015} \quad (3)$$

và

$$f^{2015}(x) + f^{2015}(-x) = a \quad (4)$$

với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Kết hợp (3) và (2), ta suy ra

$$f(x^{2015} + y^{2015}) = f(x^{2015}) + f(y^{2015}) - 2a^{2015}.$$

Do đó, ta có

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - 2a^{2015} \quad (5)$$

với mọi  $x, y \in \mathbb{R}$ . Thay  $y = -x$  vào phương trình trên, ta được

$$f(-x) = 2a^{2015} + a - f(x) = 2a - f(x).$$

Thay kết quả này vào (4), ta được

$$f^{2015}(x) + [2a - f(x)]^{2015} = a$$

với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Do  $f$  song ánh nên từ đây ta suy ra

$$x^{2015} + (2a - x)^{2015} = a$$

với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Thực hiện đồng nhất hệ số của  $x^{2014}$  ở hai vế, ta tính được  $a = 0$ . Thay kết quả này vào (5) và (3), ta suy ra  $f$  cộng tính và  $f(x^{2015}) = f^{2015}(x)$ . Bài toán được đưa về trường hợp của bài toán 1 đã được xét ở trước.  $\square$

**Bài toán 5 (Romania TST, 1996).** Cho số tự nhiên  $n \geq 1$  và một số thực  $a$ . Giả sử  $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  là các hàm cộng tính thỏa mãn

$$f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x) = ax^n$$

với mọi số thực  $x$ . Chứng minh rằng

- a) Nếu  $a \neq 0$  thì tất cả các hàm số nói trên đều là hàm tuyến tính.
- b) Nếu  $a = 0$  thì tồn tại một chỉ số  $i$  sao cho  $f_i(x) \equiv 0$ .

**Lời giải.** Đặt  $f_i(1) = k_i$ , khi đó với mọi  $y \in \mathbb{Q}$ , ta có

$$f_i(y + x) = k_i y + f_i(x).$$

Do đó, từ giả thiết, ta suy ra

$$[k_1 y + f_1(x)][k_2 y + f_2(x)] \cdots [k_n y + f_n(x)] = a(y + x)^n$$

với mọi  $x \in \mathbb{R}$  và  $y \in \mathbb{Q}$ . Cố định  $x$ , ta xem hai vế là hai đa thức ẩn  $y$  thì chúng có bậc hữu hạn và nhận giá trị bằng nhau tại mọi giá trị hữu tỉ của  $y$ , do đó hai đa thức này phải đồng nhất bằng nhau. Nói cách khác, ta có

$$[k_1 y + f_1(x)][k_2 y + f_2(x)] \cdots [k_n y + f_n(x)] = a(y + x)^n \quad (1)$$

với mọi cặp số thực  $x, y$ .

a) Với  $a \neq 0$ : Thực hiện đồng nhất hệ số của  $y^n$  trong (1), ta được

$$k_1 k_2 \cdots k_n = a \neq 0,$$

suy ra  $k_i \neq 0$ . Bây giờ, thay  $y = -\frac{f_i(x)}{k_i}$  vào (1), ta được

$$a \left( x - \frac{f_i(x)}{k_i} \right)^n = 0,$$

suy ra  $f_i(x) = k_i x$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Ta có điều phải chứng minh.

b) Với  $a = 0$ : Ta sẽ chứng minh kết quả bài toán bằng quy nạp theo  $n$ . Rõ ràng khẳng định đúng với  $n = 1$ . Giả sử khẳng định đúng đến  $n - 1$ , ta chứng minh nó cũng đúng với  $n$ .

Nếu  $f_n(x) \equiv 0$ , ta có điều phải chứng minh. Xét trường hợp  $f_n(x) \not\equiv 0$ , khi đó tồn tại  $c_0 \in \mathbb{R}$  sao cho  $f_n(c_0) \neq 0$ . Để ý rằng với mọi  $y \in \mathbb{Q}$  và với mọi  $x \in \mathbb{R}$ , ta có

$$f_i(yx + c_0) = yf_i(x) + f_i(c_0),$$

nên từ giả thiết ta suy ra

$$[yf_1(x) + f_1(c_0)][yf_2(x) + f_2(c_0)] \cdots [yf_n(x) + f_n(c_0)] = 0$$

với mọi  $y \in \mathbb{Q}$ . Sử dụng tính chất của đa thức bằng nhau, ta thấy đẳng thức trên cũng đúng với mọi giá trị thực của  $y$ .

Do  $f_n(c_0) \neq 0$  nên  $y f_n(x) + f_n(c_0) \neq 0$ . Do đó, tồn tại vô số giá trị thực của  $y$  sao cho

$$y f_n(x) + f_n(c_0) \neq 0.$$

Từ đây suy ra, tồn tại vô số các giá trị của  $y$  sao cho

$$[y f_1(x) + f_1(c_0)][y f_2(x) + f_2(c_0)] \cdots [y f_{n-1}(x) + f_{n-1}(c_0)] = 0.$$

Sử dụng tính chất của đa thức bằng nhau, ta có

$$[y f_1(x) + f_1(c_0)][y f_2(x) + f_2(c_0)] \cdots [y f_{n-1}(x) + f_{n-1}(c_0)] \equiv 0.$$

Thực hiện đồng nhất hệ số của  $y^{n-1}$ , ta được

$$f_1(x) f_2(x) \cdots f_{n-1}(x) = 0$$

với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Từ đây, sử dụng giả thiết quy nạp, ta suy ra điều phải chứng minh.  $\square$

**Bài toán 6.** *Tìm tất cả các hàm số  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn*

$$f(x^2) + 4y^2 f(y) = [f(x+y) + y^2][f(x-y) + f(y)]$$

với mọi cặp số thực  $x, y$ .

**Lời giải.** Trước hết, ta sẽ chứng minh  $f$  chẵn. Thay  $y = 0$  vào phương trình giả thiết, ta được

$$f(x^2) = f(x)[f(x) + f(0)]. \quad (1)$$

Suy ra  $f(0) = 2f^2(0)$ . Bây giờ, thay  $x$  bởi  $-x$  vào phương trình trên, ta được

$$f(x)[f(x) + f(0)] = f(-x)[f(-x) + f(0)],$$

hay

$$[f(x) - f(-x)][f(x) + f(-x) + f(0)] = 0 \quad (2)$$

với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Mặt khác, thay  $x = 0$  vào phương trình giả thiết, ta cũng có

$$f(0) + 4y^2 f(y) = [f(y) + y^2][f(y) + f(-y)]. \quad (3)$$

Trong phương trình này, ta thay  $y$  bởi  $-y$  thì cũng có

$$f(0) + 4y^2 f(-y) = [f(-y) + y^2][f(y) + f(-y)].$$

Trừ tương ứng hai phương trình, ta được

$$[f(y) - f(-y)][f(y) + f(-y) - 4y^2] = 0. \quad (4)$$

Giả sử tồn tại  $x_0$  sao cho  $f(-x_0) \neq f(x_0)$ . Khi đó, từ (2), ta suy ra

$$f(x_0) + f(-x_0) + f(0) = 0.$$

Mặt khác, từ (4), ta cũng có

$$f(x_0) + f(-x_0) - 4x_0^2 = 0.$$

Từ đó suy ra  $0 = f(0) + 4x_0^2 = 2f^2(0) + 4x_0^2$ , suy ra  $x_0 = f(0) = 0$ . Tuy nhiên, điều này sẽ dẫn đến  $f(-x_0) = f(x_0) = f(0) = 0$ , mâu thuẫn. Vậy  $f$  chẵn.

Lúc này, từ (3), ta có

$$f(0) + 4y^2 f(y) = 2f(y)[f(y) + y^2],$$

suy ra

$$f(0) + 2y^2 f(y) = 2f^2(y) \quad (5)$$

với mọi  $y \in \mathbb{R}$ . Suy ra  $f(0) + 2f(1) = 2f^2(1)$ . Mặt khác, từ (1), ta cũng có

$$f(1) = f(1)[f(1) + f(0)].$$

Bằng việc giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f(0) = 2f^2(0) \\ f(0) + 2f(1) = 2f^2(1) \\ f(1) = f(1)[f(1) + f(0)] \end{cases}$$

ta tìm được  $f(0) = 0$ . Từ đó kết hợp với (5), ta suy ra  $f^2(y) = y^2 f(y)$  với mọi  $y \in \mathbb{R}$ . Như vậy, với mọi  $x \in \mathbb{R}$ , ta có  $f(x) = 0$  hoặc  $f(x) = x^2$ .

Kiểm tra trực tiếp, ta thấy  $f(x) \equiv 0$  và  $f(x) \equiv x^2$  lần lượt là các nghiệm của bài toán. Bây giờ, giả sử có  $a, b \neq 0$  sao cho  $f(a) = a^2$  và  $f(b) = 0$ .

Do  $f$  chẵn nên ta cũng có  $f(-b) = 0$ . Thay  $y = -b$  vào phương trình giả thiết, ta được

$$f(x^2) = f(x + b)[f(x - b) + b^2]$$

với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Chú ý rằng  $f(x^2) = f^2(x)$  (do (1)) nên  $f(a^2) = f^2(a) = a^4 \neq 0$ . Thay  $x = a$  vào phương trình trên, ta suy ra  $f(a + b) \neq 0$  nên  $f(a + b) = (a + b)^2 \neq 0$ . Tiếp tục, thay  $x = a + b$  và lý luận tương tự, ta cũng có  $f(a + 2b) = (a + 2b)^2 \neq 0$ . Một cách tổng quát, ta chứng minh được

$$f(a + nb) = (a + nb)^2 \neq 0$$

với mọi  $n \in \mathbb{N}$ . Từ đó, bằng cách thay  $x = a + nb$  (với  $n \in \mathbb{N}^*$ ) vào phương trình trên, ta được

$$(a + nb)^4 = [a + (n + 1)b]^2 \{ [a + (n - 1)b]^2 + b^2 \}$$

với mọi  $n$  nguyên dương. Sử dụng tính chất của đa thức bằng nhau, ta thấy hai đa thức (ẩn  $n$ ) ở hai vế bằng nhau. Từ đó, bằng cách đồng nhất hệ số của  $n^2$  ở hai vế, ta được

$$6a^2b^2 = b^2(a + b)^2 + b^2[(a - b)^2 + b^2] + 4b^2(a - b)(a + b),$$

suy ra  $b^4 = 0$ , mâu thuẫn. Vậy bài toán chỉ có hai nghiệm hàm là  $f(x) = 0$  và  $f(x) = x^2$ .  $\square$

Qua các ví dụ trên, có thể thấy việc để ý và sử dụng tính chất của đa thức bằng nhau đã giúp cho các bước biến đổi khó của các bài toán được thực hiện dễ dàng hơn, tạo điều kiện thuận lợi cho việc đi tìm lời giải. Đây chỉ là một kinh nghiệm nhỏ mà chúng tôi đúc kết được qua quá trình tìm hiểu và học hỏi. Sẽ có những cái còn thiếu sót chưa được hoàn thiện. Rất mong rằng, sau bài viết này, chúng tôi sẽ nhận được nhiều ý kiến đóng góp quý báu từ bạn đọc gần xa để bài viết trở nên hoàn chỉnh hơn nữa. Sau cùng, xin đề xuất một số bài tập tự luyện để bạn đọc cùng thử sức.

**Bài toán 7.** Cho số nguyên dương  $n$ . Tìm tất cả các hàm  $f$  đơn điệu:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f(x) + y^n$$

với mọi cặp số thực  $x, y$ .

**Bài toán 8.** Cho số nguyên dương  $n$ . Tìm tất cả các hàm số  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f(x^{n+1} + y^{n+1}) = x^n f(x) + y^n f(y)$$

với mọi cặp số thực  $x, y > 1$ .

**Bài toán 9.** Cho số tự nhiên  $n \geq 2$ . Tìm tất cả các hàm số  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f(x^n + 2f(y)) = f^n(x) + y + f(y)$$

với mọi cặp số thực  $x, y$ .





# BỔ ĐỀ HOÁN VỊ

Nguyễn Văn Huyền

(SV trường Đại học GTVT, thành phố Hồ Chí Minh)

## 1. Mở đầu

Năm 2008 trên diễn đàn toán học Art of Problem Solving ([xem tại đây](#)) anh Võ Quốc Bá Cẩn đề xuất một bổ đề khá thú vị sau:

**Bổ đề.** Với mọi số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ , đặt  $q = ab + bc + ca$  ( $1 \geq 3q$ ). Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} - 6. \quad (1.1)$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

**Lời giải.** Đặt  $p = a + b + c$ ,  $q = ab + bc + ca$  và  $r = abc$  (ta sẽ thống nhất cách đặt này cho cả bài viết) khi đó

$$(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2 = p^2q^2 - 4q^3 + 2p(9q - 2p^2)r - 27r^2.$$

Ta có đánh giá

$$\begin{aligned} 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) &= \sum ab(a + b) + (a - b)(b - c)(c - a) \\ &= pq - 3r + (a - b)(b - c)(c - a) \\ &\geq pq - 3r - \sqrt{(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2} \\ &= pq - 3r - \sqrt{p^2q^2 - 4q^3 + 2p(9q - 2p^2)r - 27r^2}, \end{aligned}$$

vì thế

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq \frac{pq - 3r - \sqrt{p^2q^2 - 4q^3 + 2p(9q - 2p^2)r - 27r^2}}{2}.$$

Mặt khác từ giả thiết ta được  $p = 1$  cho nên

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{abc} \geq \frac{q - 3r - \sqrt{q^2 - 4q^3 + 2(9q - 2)r - 27r^2}}{2r}.$$

Xét hàm số

$$f(r) = \frac{q - 3r - \sqrt{q^2 - 4q^3 + 2(9q - 2)r - 27r^2}}{2r},$$

tính đạo hàm

$$f'(r) = \frac{q^2 - 4q^3 + (9q - 2)r - q\sqrt{q^2 - 4q^3 + 2(9q - 2)r - 27r^2}}{2r^2\sqrt{q^2 - 4q^3 + 2(9q - 2)r - 27r^2}},$$

do đó phương trình  $f'(r) = 0$  có nghiệm

$$r = r_0 = \frac{q^2 \left[ 9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)} \right]}{27q^2 - 9q + 1}.$$

Lập bảng biến thiên ta được  $f(r) \geq f(r_0)$ . Biến đổi

$$\begin{aligned} f(r_0) &= \frac{q - 3r_0 - \sqrt{q - 4q^3 + 2(9q - 2)r_0 - 27r_0^2}}{2r_0} \\ &= \frac{q - 3r_0 - \frac{q^2 - 4q^3 + (9q - 2)r_0}{q}}{r_0} \\ &= \frac{2q^3 + (1 - 6q)r_0}{qr_0} = \frac{2q^2}{r_0} + \frac{1}{q} - 6 \\ &= \frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} - 6. \end{aligned}$$

Đây chính là điều phải chứng minh. □

**Nhận xét.**

- (1) Ở thời điểm đó bổ đề trên là một bài toán rất khó, do hình thức khá cồng kềnh, không đẹp mắt (có căn thức nằm ở mẫu số) nên không nhận được sự quan tâm của nhiều người, sau này vào năm 2011 anh Lê Hữu Điền Khuê mới đưa ra một chứng minh khác trên Diễn Đàn Toán Học ([xem tại đây](#)).
- (2) Đây là một kết quả rất chặt với vô số các trường hợp để đẳng thức xảy ra và cũng là dạng chặt nhất trong lớp các bài toán có dạng

$$f\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}, a + b + c, ab + bc + ca\right) \geq 0.$$

- (3) Bổ đề này sẽ giúp chúng ta sẽ giải quyết được rất nhiều bài toán khó sau đây (đã từng là unsolve suốt một thời gian dài trên AoPS).

## 2. Các bài toán áp dụng

**Bài toán 1.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{28(ab + bc + ca)}{(a + b + c)^2} \geq 12.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

**Lời giải.** Do tính thuần nhất của bài toán nên ta có thể chuẩn hóa  $p = 1$ , khi đó

$$\frac{28(ab + bc + ca)}{(a + b + c)^2} = \frac{28q}{p^2} = 28q.$$

Áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} - 6 + 28q \geq 12,$$

hay là

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} + 28q \geq 18. \quad (2.1)$$

Bất đẳng thức lúc này chỉ còn một biến nên hai công cụ đầu tiên mà chúng ta nghĩ đến là khảo sát hàm hoặc quy đồng phân tích nhân tử. Tuy nhiên biểu thức này khi lấy đạo hàm sẽ cho ra một kết quả “*rất khủng*” còn nếu phân tích nhân tử thì biểu thức thu được cũng không khá hơn mấy vì sự xuất hiện của căn thức ở mẫu.

Viết (2.1) lại như sau

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q) \cdot q \cdot \sqrt{\frac{1-3q}{q}}} + \frac{1}{q} + 28q \geq 18. \quad (2.2)$$

Đặt  $x = \sqrt{\frac{1-3q}{q}} \geq 0$  thì  $q = \frac{1}{x^2 + 3}$ , bất đẳng thức (2.2) trở thành

$$\frac{2(x^2 + 3x + 3)}{x + 1} + x^2 + \frac{28}{x^2 + 3} \geq 15.$$

Xét hiệu hai vế ta được

$$\frac{2(x^2 + 3x + 3)}{x + 1} + x^2 + \frac{28}{x^2 + 3} - 15 = \frac{(x^3 + 5x^2 + 3x + 1)(x - 1)^2}{(x + 1)(x^2 + 3)} \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi và chỉ khi

$$\frac{a}{\sqrt{7} - \tan \frac{\pi}{7}} = \frac{b}{\sqrt{7} - \tan \frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sqrt{7} - \tan \frac{4\pi}{7}}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

**Bài toán 2.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{7(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{17}{2}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

**Lời giải.** Tương tự như trên ta cũng chuẩn hóa  $p = 1$ , khi đó

$$\frac{7(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{7q}{p^2 - 2q} = \frac{7q}{1 - 2q}.$$

Áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} - 6 + \frac{7q}{1 - 2q} \geq \frac{17}{2},$$

hay là

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q) \cdot q \cdot \sqrt{\frac{1-3q}{q}}} + \frac{1}{q} + \frac{7q}{1-2q} \geq \frac{29}{2}. \quad (2.3)$$

Đặt  $x = \sqrt{\frac{1-3q}{q}} \geq 0$  thì  $q = \frac{1}{x^2 + 3}$ , bất đẳng thức (2.3) trở thành

$$\frac{2(x^2 + 3x + 3)}{x + 1} + x^2 + \frac{7}{x^2 + 1} \geq \frac{23}{2},$$

tương đương với

$$\frac{(2x^3 + 10x^2 + 9x + 3)(x - 1)^2}{2(x + 1)(x^2 + 1)} \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a}{\sqrt{7} - \tan \frac{\pi}{7}} = \frac{b}{\sqrt{7} - \tan \frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sqrt{7} - \tan \frac{4\pi}{7}}.$$

Bài toán được chứng minh. □

**Nhận xét.** Bài toán này là hệ quả của bài toán 1. Thật vậy vì

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 12 - \frac{28(ab + bc + ca)}{(a + b + c)^2},$$

nên ta chỉ cần chứng minh

$$12 - \frac{28(ab + bc + ca)}{(a + b + c)^2} + \frac{7(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{17}{2},$$

hay là

$$\frac{7(a + b + c)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \geq \frac{28(ab + bc + ca)}{(a + b + c)^2},$$

hoặc

$$8(ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2) \leq (a + b + c)^4.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$8(ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2) \leq [2(ab + bc + ca) + (a^2 + b^2 + c^2)]^2 = (a + b + c)^4.$$

Khi đẳng thức xảy ra thì ta được đẳng thức khá đẹp mắt  $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$ .

**Bài toán 3.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 + \frac{70(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 60.$$

(Nguyễn Văn Huyện)

*Chứng minh.* Chuẩn hóa  $p = 1$  và áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\left[ \frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} - 6 \right]^2 + \frac{70q}{1 - 2q} \geq 60. \quad (2.4)$$

Đặt  $x = \sqrt{\frac{1 - 3q}{q}} \geq 0$  thì  $q = \frac{1}{x^2 + 3}$ , bất đẳng thức (2.4) trở thành

$$\left( \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x + 1} \right)^2 + \frac{70}{x^2 + 1} \geq 60,$$

tương đương với

$$\frac{(x^6 + 8x^5 + 31x^4 + 84x^3 + 119x^2 + 76x + 19)(x - 1)^2}{(x^2 + 1)(x + 1)^2} \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a}{\sqrt{7} - \tan \frac{\pi}{7}} = \frac{b}{\sqrt{7} - \tan \frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sqrt{7} - \tan \frac{4\pi}{7}}.$$

Bài toán được chứng minh. □

**Bài toán 4.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 + \frac{280(ab + bc + ca)}{(a + b + c)^2} \geq 95.$$

(Tạ Hồng Quảng)

*Chứng minh.* Chuẩn hóa  $p = 1$  và áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\left[ \frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} - 6 \right]^2 + 280q \geq 95. \quad (2.5)$$

Đặt  $x = \sqrt{\frac{1 - 3q}{q}} \geq 0$  thì  $q = \frac{1}{x^2 + 3}$ , bất đẳng thức (2.5) trở thành

$$\left( \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x + 1} \right)^2 + \frac{280}{x^2 + 3} \geq 95,$$

tương đương với

$$\frac{(x^6 + 8x^5 + 33x^4 + 100x^3 + 144x^2 + 88x + 22)(x - 1)^2}{(x^2 + 3)(x + 1)^2} \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a}{\sqrt{7} - \tan \frac{\pi}{7}} = \frac{b}{\sqrt{7} - \tan \frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sqrt{7} - \tan \frac{4\pi}{7}}.$$

Bài toán được chứng minh. □

**Bài toán 5.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{6(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2}.$$

(Nguyễn Văn Quý)

**Chứng minh.** Chuẩn hóa  $p = 1$  và áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} - 6 \geq \frac{1 - 2q}{q} + 6(1 - 2q). \quad (2.6)$$

Đặt  $x = \sqrt{\frac{1 - 3q}{q}} \geq 0$  thì  $q = \frac{1}{x^2 + 3}$ , bất đẳng thức (2.6) trở thành

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x + 1} \geq \frac{(x^2 + 9)(x^2 + 1)}{x^2 + 3},$$

hay là

$$\frac{2x^2(x - 1)^2}{(x + 1)(x^2 + 3)} \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc

$$\frac{a}{\sqrt{7} - \tan \frac{\pi}{7}} = \frac{b}{\sqrt{7} - \tan \frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sqrt{7} - \tan \frac{4\pi}{7}}.$$

Chứng minh hoàn tất. □

**Bài toán 6.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{k(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 3 + k,$$

trong đó  $k = 3\sqrt[3]{4} - 2$ .

(Ji Chen)

**Lời giải.** Chuẩn hóa  $p = 1$  và áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} + \frac{kq}{1 - 2q} \geq 9 + k. \quad (2.7)$$

Đặt  $x = \sqrt{\frac{1 - 3q}{q}} \geq 0$  thì  $q = \frac{1}{x^2 + 3}$  bất đẳng thức (2.7) trở thành

$$\frac{2(x^2 + 3x + 3)}{x + 1} + x^2 + \frac{k}{x^2 + 1} \geq k + 6,$$

hay là

$$\frac{x^2[x^3 + 3x^2 + (1 - k)x - k + 3]}{(x + 1)(x^2 + 1)} \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì với  $k = 3\sqrt[3]{4} - 2$ , thì

$$x^3 + 3x^2 + (1 - k)x - k + 3 = (x + 1 + 2\sqrt[3]{2})(x + 1 - \sqrt[3]{2})^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = 0$  hoặc  $x = \sqrt[3]{2} - 1$ , cụ thể

- Nếu  $x = 0$  thì  $q = \frac{1}{3}$  kết hợp với  $p = 1$  ta được  $a = b = c$ .
- Nếu  $x = \sqrt[3]{2} - 1$  thì  $q = \frac{2 + \sqrt[3]{2}}{10}$  dẫn đến  $r = \frac{3 - \sqrt[3]{2}}{50}$ , kết hợp với  $p = 1$  ta thấy  $a, b, c$  lần lượt là ba nghiệm của phương trình

$$t^3 - t^2 + \frac{2 + \sqrt[3]{2}}{10}t - \frac{3 - \sqrt[3]{2}}{50} = 0.$$

Bằng Maple hoặc Wolframalpha ta tìm được

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8 - 6\sqrt[3]{2}}{5}} \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{101 - 54\sqrt[3]{4}}{20}}\right) \\ b = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8 - 6\sqrt[3]{2}}{5}} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{101 - 54\sqrt[3]{4}}{20}}\right) \\ c = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8 - 6\sqrt[3]{2}}{5}} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{101 - 54\sqrt[3]{4}}{20}}\right) \end{cases}$$

cùng các hoán vị.

Bài toán được chứng minh. □

**Bài toán 7.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \geq \frac{(9 + 3k)(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2},$$

với  $k = 3\sqrt[3]{2} - 3$ .

(Võ Quốc Bá Cẩn, Bách Ngọc Thành Công)

**Lời giải.** Chuẩn hóa  $p = 1$  và áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} - 6 + k \geq (9 + 3k)(1 - 2q). \quad (2.8)$$

Đặt  $x = \sqrt{\frac{1 - 3q}{q}} \geq 0$  thì  $q = \frac{1}{x^2 + 3}$ , bất đẳng thức (2.8) trở thành

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x + 1} + k \geq \frac{(9 + 3k)(x^2 + 1)}{x^2 + 3}.$$

Với  $k = 3\sqrt[3]{2} - 3$ , ta có

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x + 1} + k - \frac{(9 + 3k)(x^2 + 1)}{x^2 + 3} = \frac{x^2(x + 1 + 2\sqrt[3]{4})(x + 1 - \sqrt[3]{4})^2}{(x + 1)(x^2 + 3)} \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a, b, c$  lần lượt là ba nghiệm của phương trình

$$t^3 - t^2 + \frac{2 + \sqrt[3]{4}}{12}t - \frac{1}{36} = 0,$$

cụ thể

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{2 - \sqrt[3]{4}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \sqrt{\frac{7 - \sqrt[3]{2}}{4}}\right) \\ b = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2 - \sqrt[3]{4}} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos \sqrt{\frac{7 - \sqrt[3]{2}}{4}}\right) \\ c = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2 - \sqrt[3]{4}} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} \arccos \sqrt{\frac{7 - \sqrt[3]{2}}{4}}\right) \end{cases} \quad (2.9)$$

cùng các hoán vị. Bài toán được chứng minh.  $\square$

**Bài toán 8.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \sqrt{9 - k} + \frac{k(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca},$$

trong đó  $k = 3(1 + \sqrt[3]{2})^2$ .

(Võ Quốc Bá Cẩn)

**Lời giải.** Chuẩn hóa  $p = 1$  và áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} - 6 \geq \sqrt{9 - k} + \frac{k(1 - 2q)}{q}. \quad (2.10)$$

Đặt  $x = \sqrt{\frac{1 - 3q}{q}} \geq 0$  thì  $q = \frac{1}{x^2 + 3}$ , bất đẳng thức (2.10) trở thành

$$\frac{2(x^2 + 3x + 3)}{x + 1} + x^2 - 3 \geq \sqrt{9 + kx^2},$$

hay là

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x + 1} \geq \sqrt{9 + kx^2},$$

hoặc

$$\begin{aligned} (x^3 + 3x^2 + 3x + 3)^2 &\geq (9 + kx^2)(x + 1)^2, \\ x^2[x^4 + 6x^3 + (15 - k)x^2 + 2(12 - k)x - k + 18] &\geq 0. \end{aligned}$$

Đặt

$$P = x^4 + 6x^3 + (15 - k)x^2 + 2(12 - k)x - k + 18,$$



ta sẽ chứng minh  $P \geq 0$ . Thật vậy, với  $k = 3(1 + \sqrt[3]{2})^2$  thì

$$P = (x + 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(x + 3 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(x + 1 - \sqrt[3]{4})^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a, b, c$  lần lượt là ba nghiệm của phương trình

$$t^3 - t^2 + \frac{2 + \sqrt[3]{4}}{12}t - \frac{1}{36} = 0.$$

Giải phương trình này ta được nghiệm (2.9). Chứng minh hoàn tất.  $\square$

**Bài toán 9.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{(4\sqrt{2} - 4)(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 4\sqrt{2} - 2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

(Nguyễn Văn Huyện)

**Lời giải.** Chuẩn hóa  $p = 1$  và áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} - 6 + \frac{(4\sqrt{2} - 4)q}{1 - 2q} \geq 4\sqrt{2} - 2 + \frac{1 - 2q}{q},$$

hay là

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{(4\sqrt{2} - 4)q}{1 - 2q} \geq 4\sqrt{2} + 2. \quad (2.11)$$

Đặt  $x = \sqrt{\frac{1 - 3q}{q}} \geq 0$  thì  $q = \frac{1}{x^2 + 3}$ , khi đó bất đẳng thức (2.11) trở thành

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x + 1} \geq \frac{x^4 + 4\sqrt{2}x^2 + 3}{x^2 + 1}.$$

Xét hiệu hai vế ta được

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x + 1} - \frac{x^4 + 4\sqrt{2}x^2 + 3}{x^2 + 1} = \frac{2x^2(x + 1 - \sqrt{2})^2}{(x + 1)(x^2 + 1)} \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a, b, c$  lần lượt là ba nghiệm của phương trình

$$t^3 - t^2 + \frac{3 + \sqrt{2}}{14}t - \frac{2 + 3\sqrt{2}}{196} = 0,$$

cụ thể

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10 - 6\sqrt{2}}{7}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \sqrt{\frac{115 - 27\sqrt{2}}{196}}\right) \\ b = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10 - 6\sqrt{2}}{7}} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos \sqrt{\frac{115 - 27\sqrt{2}}{196}}\right) \\ c = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10 - 6\sqrt{2}}{7}} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} \arccos \sqrt{\frac{115 - 27\sqrt{2}}{196}}\right) \end{cases}$$

Bài toán được chứng minh.  $\square$

**Bài toán 10.** Cho ba số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{5}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca).$$

(Nguyễn Văn Huyền)

**Lời giải.** Chuẩn hóa  $p = 1$  từ giả thiết áp dụng bổ đề (1.1) ta có

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} - 6 \leq \frac{5(1 - 2q)}{2q}. \quad (2.12)$$

Đặt  $x = \sqrt{\frac{1 - 3q}{q}} \geq 0$  thì  $q = \frac{1}{x^2 + 3}$ , khi đó (2.12) trở thành

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x + 1} \leq \frac{5(x^2 + 1)}{2},$$

tương đương với

$$\frac{(x - 1)(3x^2 + 2x + 1)}{x + 1} \geq 0.$$

Suy ra  $x \geq 1$ , hay là

$$(a + b + c)^2 \geq 4(ab + bc + ca),$$

hoặc

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc

$$\frac{a}{\sqrt{7} - \tan \frac{\pi}{7}} = \frac{b}{\sqrt{7} - \tan \frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sqrt{7} - \tan \frac{4\pi}{7}}.$$

Chứng minh hoàn tất. □

**Bài toán 11.** Với  $k \geq 0$  là một số thực cho trước và  $a, b, c$  là ba số thực dương sao cho

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = (k + 1)^2 + \frac{2}{k + 1}.$$

Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq (k^2 + 1)(ab + bc + ca).$$

(Nguyễn Văn Huyền, VMEO IV)

**Lời giải.** Chuẩn hóa  $p = 1$  từ giả thiết áp dụng bổ đề (1.1) ta được

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} - 6 \leq (k + 1)^2 + \frac{2}{k + 1}. \quad (2.13)$$

Đặt  $x = \sqrt{\frac{1-3q}{q}} \geq 0$  thì  $q = \frac{1}{x^2+3}$ , khi đó (2.13) trở thành

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x+1} \leq (k+1)^2 + \frac{2}{k+1},$$

hay

$$(x+1)^2 + \frac{2}{x+1} \leq (k+1)^2 + \frac{2}{k+1},$$

tương đương với

$$\frac{(x-k)[(k+1)x^2 + (k^2+4k+3)x + k^2+3k]}{(x+1)(k+1)} \leq 0.$$

Suy ra  $x \leq k$  hay là

$$(a+b+c)^2 \leq (k^2+3)(ab+bc+ca),$$

hoặc

$$a^2+b^2+c^2 \leq (k^2+1)(ab+bc+ca).$$

Bài toán được chứng minh. □

**Nhận xét.** Trường hợp  $k = 1$  ta được bài toán rất đẹp sau :

*Nếu  $a, b, c$  là ba số thực dương thỏa mãn*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 5,$$

*thì*

$$a^2+b^2+c^2 \leq 2(ab+bc+ca).$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

### 3. Các bài toán rèn luyện

Để kết thúc chuyên đề xin được giới thiệu một số bài tập để bạn đọc tự luyện

**Bài tập 4.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^3 + \frac{525(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{775}{2}.$$

(Nguyễn Văn Huyện)

**Bài tập 5.** Chứng minh rằng với mọi số thực  $k \geq 12$  ta luôn có

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{k(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq 4 + 2\sqrt{k-12},$$

trong đó  $a, b, c$  là ba số thực dương thay đổi bất kỳ.

(Tạ Hồng Quảng)

**Bài tập 6.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \sqrt{\frac{k(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2}} + 9 - \frac{k}{3},$$

trong đó  $k = 54\sqrt[3]{2}$ .

(Bách Ngọc Thành Công)

**Bài tập 7.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \sqrt{9 + k - \frac{k(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2}},$$

luôn đúng với mọi số thực dương  $a, b, c$ .

**Bài tập 8.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \geq \sqrt{\frac{k^2(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca}} + 3,$$

luôn đúng với mọi số thực dương  $a, b, c$  bất kỳ.

**Bài tập 9.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + 2\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}}.$$

**Bài tập 10.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{k(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca} \geq 3 + \frac{k}{2},$$

trong đó  $k = 2(3\sqrt[3]{9} - 1)$ .

(Nguyễn Văn Huyền)

**Bài tập 11.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \geq \sqrt{\frac{3k^2(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2}} + 3,$$

luôn đúng với mọi số thực dương  $a, b, c$  bất kỳ.

(Phạm Sinh Tân)

**Bài tập 12.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \left( \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2 \geq 3 + k,$$

luôn đúng với mọi số thực dương  $a, b, c$  bất kỳ.

**Bài tập 13.** Với  $k \geq 1$  là một số thực cho trước và  $a, b, c$  là ba số thực dương sao cho

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{(k^2 + 9)(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2}.$$

Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq (k^2 + 1)(ab + bc + ca).$$

(Nguyễn Văn Huyền)

## Tài liệu tham khảo

- [1] Võ Quốc Bá Cẩn, *Chuyên Đề Bất Đẳng Thức Hiện Đại*, 2008.
- [2] Diễn đàn toán học: <http://diendantoanhoc.net>
- [3] Art of Problem Solving: <http://artofproblemsolving.com>



# SỬ DỤNG HỆ THẶNG DƯ ĐẦY ĐỦ TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẾM

Trần Ngọc Thắng  
 (THPT Chuyên Vĩnh Phúc)

Trong bài viết này, tác giả đưa ra một số ứng dụng của hệ thặng dư đầy đủ trong một số bài toán đếm liên quan đến tổ hợp số học. Các bài toán này có thể giải quyết theo một số hướng khác nhưng chúng ta có thể sử dụng kiến thức về hệ thặng dư đầy đủ làm cho lời giải được tự nhiên hơn và gần gũi với kiến thức và nhận thức của học sinh.

**Hệ thặng dư đầy đủ.** Cho số nguyên dương  $m > 1$ . Khi đó tập hợp các số nguyên  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  được gọi là một hệ thặng dư đầy đủ theo modulo  $m$  nếu như

$$a_i \not\equiv a_j \pmod{m}, \forall i \neq j; i, j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

**Nhận xét.** Nếu  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  là hệ thặng dư đầy đủ modulo  $m$  thì với mọi số nguyên  $x$ , tồn tại  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  sao cho  $x \equiv a_i \pmod{m}$ .

**Bổ đề.** Cho số nguyên  $a$ , số nguyên dương  $m$  với  $(a, m) = 1$  và  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  là hệ thặng dư đầy đủ modulo  $m$ . Khi đó  $\{aa_1, aa_2, \dots, aa_m\}$  là hệ thặng dư đầy đủ modulo  $m$ .

Bổ đề này chứng minh rất dễ dàng và ta thấy phát biểu của nó của khá đơn giản nhưng lại có nhiều ứng dụng trong các bài toán đếm liên quan đến phần số học tổ hợp. Sau đây ta bắt đầu từ bài toán 1, đây là bài toán rất quan trọng liên quan đến tính chất chia hết của tổng các phần tử của các tập hợp con của một tập hợp.

**Bài 1.** Cho  $p$  là một số nguyên tố và tập hợp  $A = \{1, 2, \dots, p\}$  với  $i, k$  là các số tự nhiên thỏa mãn  $0 \leq i \leq p-1, 1 \leq k \leq p-1$ . Chứng minh rằng số các tập con gồm  $k$  phần tử của tập  $A$  và tổng các phần tử của mỗi tập con đó đồng dư với  $i$  theo modulo  $p$  sẽ bằng  $\frac{C_p^k}{p}$ .

*Lời giải.* Kí hiệu  $A_i$  là tập hợp các tập con có  $k$  phần tử và tổng các phần tử của mỗi tập con đồng dư với  $i$  theo modulo  $p$ . Xét hai số tự nhiên phân biệt

$$m, n \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}.$$

Xét  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \in A_n$ . Do  $(k, p) = 1$  nên

$$\{kx | x = 0, 1, 2, \dots, p-1\}$$

là hệ thặng dư đầy đủ modulo  $p$  nên suy ra tồn tại  $c \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  sao cho  $kc \equiv m - n \pmod{p}$ .

Xét tập hợp  $\{a_1 + c, a_2 + c, \dots, a_k + c\}$ , ta có

$$\begin{aligned}
 a_1 + c + a_2 + c + \dots + a_k + c &= a_1 + a_2 + \dots + a_k + kc \\
 &\equiv n + m - n \equiv m \pmod{p}
 \end{aligned}$$

Suy ra  $\{a_1 + c, a_2 + c, \dots, a_k + c\}$  tương ứng với một phần tử trong tập  $A_m$ .

Do đó

$$|A_n| = |A_m| \Rightarrow |A_i| = \frac{|A_0| + |A_1| + \dots + |A_{p-1}|}{p} = \frac{C_p^k}{p}.$$

Vậy bài toán 1 được chứng minh.  $\square$

Sau đây ta đưa ra một số bài toán ứng dụng của bài toán 1. Đầu tiên ta xét bài toán Problem 6, IMO 1995. Đây là bài toán khó và sâu sắc, có một số lời giải bài toán này theo hướng sử dụng số phức, phân lớp tập hợp... nhưng dưới đây, chúng tôi sẽ giới thiệu một lời giải khác dựa vào bài toán 1 và cũng từ đó đưa ra lời giải tổng quát cho bài toán này.

**Bài 2.** (IMO 1995) Cho  $p$  là số nguyên tố lẻ và tập hợp

$$X = \{1, 2, \dots, 2p\}.$$

Tìm số tập con gồm  $p$  phần tử của tập  $X$  sao cho tổng các phần tử của mỗi tập con chia hết cho  $p$ ?

*Lời giải.* Do  $p$  là số nguyên tố lẻ nên

$$1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2} \div p$$

và

$$p + 1 + p + 2 + \dots + 2p = p^2 + \frac{p(p+1)}{2} \div p$$

suy ra hai tập hợp  $\{1, 2, \dots, p\}$  và  $\{p + 1, p + 2, \dots, 2p\}$  là hai tập thỏa mãn có  $p$  phần tử và tổng các phần tử chia hết cho  $p$ .

Xét tập hợp  $A$  với  $|A| = p$  và

$$\sum_{x \in A} x \equiv 0 \pmod{p}, A \neq \{1, 2, \dots, p\}, \{p + 1, p + 2, \dots, 2p\}.$$

Giả sử trong  $A$  có  $k$  phần tử được chọn từ  $\{1, 2, \dots, p\}$  và tổng các phần tử này đồng dư với  $i$  theo modulo  $p$  thì  $p - k$  phần tử còn lại phải được chọn từ tập hợp

$$\{p + 1, p + 2, \dots, 2p\}$$

và tổng  $p - k$  phần tử này phải đồng dư với  $p - i \pmod{p}$ .

Như vậy theo bài toán 1 thì mỗi cách chọn  $k$  phần tử thuộc tập  $\{1, 2, \dots, p\}$  thì số cách chọn  $p - k$  phần tử còn lại của  $A$  bằng  $\frac{C_p^{p-k}}{p} = \frac{C_p^k}{p}$ .

Do đó, số cách chọn tập  $A$  với  $|A| = p$  và

$$\sum_{x \in A} x \equiv 0 \pmod{p}, A \neq \{1, 2, \dots, p\}, \{p + 1, p + 2, \dots, 2p\}$$

bằng

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{C_p^k \cdot C_p^k}{p} = \frac{(C_p^0)^2 + (C_p^1)^2 + \dots + (C_p^p)^2 - 2}{p} = \frac{C_{2p}^p - 2}{p}$$

Do đó số các tập con thỏa mãn yêu cầu bài toán là:  $\frac{C_{2p}^p - 2}{p} + 2$ .  $\square$



**Bài 3.** (Mở rộng IMO 1995) Cho  $p$  là một số nguyên tố lẻ, số nguyên dương  $m \geq p$  và tập  $X = \{1, 2, \dots, m\}$ . Tìm số tập con gồm  $p$  phần tử của tập  $X$  sao cho tổng các phần tử của mỗi tập con chia hết cho  $p$ ?

*Lời giải.* Đặt  $m = pq + r, 0 \leq r < p \Rightarrow q = \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor$ .

Chia tập  $x$  thành các tập như sau:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 2, \dots, p\} \\ A_2 &= \{p + 1, p + 2, \dots, 2p\} \\ &\dots \\ A_q &= \{(q - 1)p + 1, (q - 1)p + 2, \dots, pq\} \\ A_{q+1} &= \{pq + 1, pq + 2, \dots, pq + r\} \end{aligned}$$

Do  $p$  là số nguyên tố lẻ nên  $A_1, A_2, \dots, A_q$  là các tập thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Xét tập hợp  $A \neq A_i, \forall i = 1, 2, \dots, q$  thỏa mãn yêu cầu bài toán, dễ thấy  $A \neq A_{q+1}$ .

Tập hợp  $A$  gồm có  $i_1 + i_2 + \dots + i_{q+1} = p$  phần tử gồm  $i_k$  phần tử thuộc tập  $A_k, k = 1, 2, \dots, q + 1$ , kết hợp với  $A \neq A_i, \forall i = 1, 2, \dots, q$  nên  $0 \leq i_1, i_2, \dots, i_{q+1} < p$ . Theo bài toán 1 thì số tập hợp  $A$  bằng

$$\begin{aligned} \sum \frac{C_p^{i_1} C_p^{i_2} \dots C_p^{i_q} C_r^{i_{q+1}}}{p} &= \frac{\sum C_p^{i_1} C_p^{i_2} \dots C_p^{i_q} C_r^{i_{q+1}} - q}{p} \\ &= \frac{C_{pq+r}^p - q}{p} = \frac{C_m^p - \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor}{p} \end{aligned}$$

trong đó tổng lấy theo các bộ  $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_{q+1})$  số nguyên không âm và nhỏ hơn  $p$ , đồng thời thỏa mãn

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_{q+1} = p.$$

Vậy số tập thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$\frac{C_m^p - \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor}{p} + q = \frac{C_m^p - \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor}{p} + \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor.$$

□

**Bài 4.** (Baltic Way 2014) Cho  $p$  là một số nguyên tố và  $n$  là một số nguyên dương. Tìm số bộ sắp thứ tự  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  thỏa mãn

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{0, 1, 2, \dots, p^n - 1\} \text{ và } p^n | (a_1 a_2 + a_3 a_4 + 1)?$$

*Lời giải.* Trước hết, ta thấy rằng:

Nếu  $x$  là một số nguyên không chia hết cho  $p$  thì

$$(x, p^n) = 1 \Rightarrow \{xk \mid k = 0, 1, 2, \dots, p^n - 1\}$$

là hệ thặng dư đầy đủ modulo  $p^n$ . Ta xét các trường hợp:

1. Nếu  $a_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$  và với mỗi cách chọn  $a_3, a_4$  thì tồn tại duy nhất một số  $a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, p^n - 1\}$  thỏa mãn  $p^n | (a_1 a_2 + a_3 a_4 + 1)$ .

Do đó, số bộ sắp thứ tự  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  trường hợp này là số cách chọn  $a_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$  và  $a_3, a_4 \in \{0, 1, 2, \dots, p^n - 1\}$  suy ra số bộ là :

$$\varphi(p^n) \cdot p^n \cdot p^n = p^{3n} - p^{3n-1}.$$

2. Nếu  $a_1 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a_3, a_4 \not\equiv 0 \pmod{p}$  và với mỗi cách chọn  $a_3 \not\equiv 0 \pmod{p}, a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, p^n - 1\}$  thì tồn tại duy nhất một số  $a_4 \in \{0, 1, 2, \dots, p^n - 1\}, a_4 \pmod{p}$  thỏa mãn

$$p^n | (a_1 a_2 + a_3 a_4 + 1).$$

Do đó số bộ sắp thứ tự  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  trường hợp này là số cách chọn  $a_1 \equiv 0 \pmod{p}, a_3 \not\equiv 0 \pmod{p}, a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, p^n - 1\}$  và là

$$(p^n - \varphi(p^n)) \cdot p^n \cdot \varphi(p^n) = p^{3n-1} - p^{3n-2}.$$

Do đó số bộ sắp thứ tự thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$p^{3n} - p^{3n-1} + p^{3n-1} - p^{3n-2} = p^{3n} - p^{3n-2}.$$

□

**Bài 5.** (Canada Mathematical Olimpiad 2014) Cho  $p$  là một số nguyên tố lẻ. Tìm số bộ số nguyên có tính thứ tự  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1.  $a_1, a_2, \dots, a_p \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ ;
2.  $a_1 + a_2 + \dots + a_p$  không chia hết cho  $p$ ;
3.  $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{p-1} a_p + a_p a_1$  chia hết cho  $p$ .

*Lời giải.* Kí hiệu  $A_i, i = 0, 1, \dots, p-1$  là tập hợp các bộ sắp thứ tự

$$(a_1, a_2, \dots, a_p)$$

thỏa mãn điều kiện (1), (2) và thỏa mãn

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{p-1} a_p + a_p a_1 \equiv i \pmod{p}.$$

Xét bộ  $(a_1, a_2, \dots, a_p) \in A_i$ . Do  $(2(a_1 + a_2 + \dots + a_p), p) = 1$  nên suy ra

$$\{2(a_1 + a_2 + \dots + a_p)k \mid k = 0, 1, \dots, p-1\}$$

lập thành một hệ thặng dư đầy đủ suy ra với mỗi số  $j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  thì tồn tại số  $c \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  sao cho

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_p)c \equiv j - i \pmod{p}.$$

Xét bộ  $(a_1 + c, a_2 + c, \dots, a_p + c)$ , ta thấy bộ này thỏa mãn điều kiện (2). Tiếp theo ta kiểm tra điều kiện (3),

$$\begin{aligned} & (a_1 + c)(a_2 + c) + (a_2 + c)(a_3 + c) + \dots + (a_p + c)(a_1 + c) \\ &= a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_pa_1 + 2c(a_1 + a_2 + \dots + a_p) + pc^2 \\ &\equiv i + j - i \equiv j \pmod{p} \end{aligned}$$

Suy ra  $(a_1 + c, a_2 + c, \dots, a_p + c)$  thỏa mãn điều kiện (2), (3). Do đó, bằng cách xét theo  $\text{mod } p$  thì mỗi bộ  $(a_1 + c, a_2 + c, \dots, a_p + c)$  tương ứng với một bộ thuộc  $A_j$ .

Từ đó suy ra

$$|A_0| = |A_1| = \dots = |A_{p-1}| = \frac{|A_0| + |A_1| + \dots + |A_{p-1}|}{p} \quad (*).$$

Chú ý rằng  $|A_0| + |A_1| + \dots + |A_{p-1}|$  là số bộ  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  thỏa mãn điều kiện (2), dễ thấy số bộ này bằng  $p^{p-1}(p-1)$ , kết hợp với (\*) ta có

$$|A_0| = \frac{|A_0| + |A_1| + \dots + |A_{p-1}|}{p} = \frac{p^{p-1}(p-1)}{p} = p^{p-2}(p-1).$$

Vậy số bộ cần tìm bằng  $p^{p-2}(p-1)$ . □

Tiếp theo, ta xét một bài toán tương tự bên dưới:

**Bài 6.** Cho  $p$  là một số nguyên tố lẻ. Tìm số bộ số nguyên có tính thứ tự  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

1.  $a_1, a_2, \dots, a_p \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ ;
2.  $a_1 + a_2 + \dots + a_p$  không chia hết cho  $p$ ;
3.  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_p^2$  chia hết cho  $p$ .

*Lời giải.* Kí hiệu  $A_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, p-1$  là tập hợp các bộ sắp thứ tự

$$(a_1, a_2, \dots, a_p)$$

thỏa mãn điều kiện (1), (2) và thỏa mãn

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_p^2 \equiv i \pmod{p}.$$

Xét bộ  $(a_1, a_2, \dots, a_p) \in A_i$ . Từ điều kiện  $(2(a_1 + a_2 + \dots + a_p), p) = 1$ , ta suy ra

$$\{2(a_1 + a_2 + \dots + a_p)k \mid k = 0, 1, \dots, p-1\}$$

lập thành một hệ thặng dư đầy đủ suy ra với mỗi số  $j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  thì tồn tại số  $c \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  sao cho

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_p)c \equiv j - i \pmod{p}.$$

Xét bộ  $(a_1 + c, a_2 + c, \dots, a_p + c)$ , ta thấy bộ này thỏa mãn điều kiện (2). Tiếp theo ta kiểm tra điều kiện (3),

$$\begin{aligned} & (a_1 + c)^2 + (a_2 + c)^2 + \dots + (a_p + c)^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_p^2 + 2c(a_1 + a_2 + \dots + a_p) + pc^2 \\ &\equiv i + j - i \equiv j \pmod{p} \end{aligned}$$

Suy ra  $(a_1 + c, a_2 + c, \dots, a_p + c)$  thỏa mãn điều kiện (2), (3). Do đó, bằng cách xét theo  $\text{mod } p$  thì mỗi bộ  $(a_1 + c, a_2 + c, \dots, a_p + c)$  tương ứng với một bộ thuộc  $A_j$ .

Từ đó suy ra

$$|A_0| = |A_1| = \dots = |A_{p-1}| = \frac{|A_0| + |A_1| + \dots + |A_{p-1}|}{p} \quad (*).$$

Ta cũng chú ý rằng  $|A_0| + |A_1| + \dots + |A_{p-1}|$  là số bộ  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  thỏa mãn điều kiện (2), để thấy số bộ này bằng  $p^{p-1}(p-1)$ , kết hợp với (\*) ta có

$$|A_0| = \frac{|A_0| + |A_1| + \dots + |A_{p-1}|}{p} = \frac{p^{p-1}(p-1)}{p} = p^{p-2}(p-1).$$

Vậy số bộ cần tìm bằng  $p^{p-2}(p-1)$ . □

**Bài 7.** (Mở rộng Canada Mathematical Olimpiad 2014) Cho  $p$  là một số nguyên tố lẻ và số nguyên dương  $n$ . Tìm số bộ số nguyên, sắp thứ tự  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

1.  $a_1, a_2, \dots, a_p \in \{1, 2, \dots, np\}$ ;
2.  $a_1 + a_2 + \dots + a_p$  không chia hết cho  $p$ ;
3.  $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$  chia hết cho  $p$ .

Bài toán 7 hoàn toàn tương tự bài toán 5.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), Chuyên đề chọn lọc Tổ hợp và Toán rời rạc, NXB Giáo dục, 2008.
- [2] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), Toán Rời rạc và một số vấn đề liên quan, Tài liệu bồi dưỡng giáo viên hè 2007, Trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội.
- [3] Trần Nam Dũng (chủ biên), Chuyên đề toán học số 8, 9, Trường PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.
- [4] Le Hai Chau - Le Hai Khoi, Selected Problems of the Vietnamese Maththematical Olympiad (1962 - 2009), World Scientific.
- [5] Tạp chí Toán học tuổi trẻ, Crux - Canada, AMM - USA

- [6] Titu Andreescu - Zuming Feng, A path to combinatorics for underfrduates, Birkhauser.
- [7] Arthur Engel, Problem - Solving Strategies, Springer.
- [8] Titu Andreescu and Zuming Feng. 102 combinatorial problems from the training of the USA IMO team.
- [9] Các nguồn tài liệu từ internet [www.mathlinks.org](http://www.mathlinks.org); [www.imo.org.yu](http://www.imo.org.yu)



# CÔNG CỤ TRUY HỒI VÀ QUY NẠP TRONG CÁC BÀI TOÁN TRÒ CHƠI

Lê Thị Minh Thảo  
(ĐHSP TP Hồ Chí Minh)

Đối với những học sinh yêu toán sơ cấp, đặc biệt là tổ hợp thì ắt hẳn, phương pháp truy hồi và nguyên lý quy nạp đã không còn gì xa lạ. Tuy nhiên, để áp dụng được các công cụ đặc lực trên vào giải bài toán thành công thì đôi khi cần trải qua những quá trình và suy luận ban đầu không phải dễ dàng. Trong bài viết này, tác giả xin đóng góp một số ý tưởng trong quá trình tìm tòi, phân tích đó thông qua hai bài toán trò chơi nổi tiếng.

## 1. Bài toán tháp Hà Nội và một số dạng mở rộng liên quan

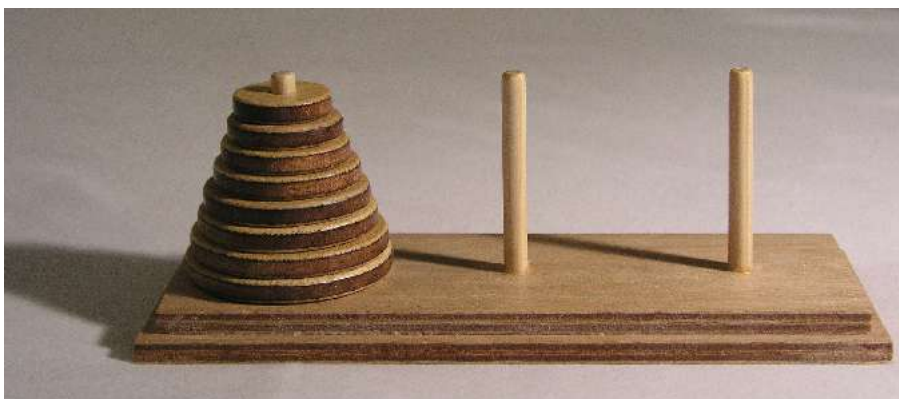
Tháp Hà Nội là một trò chơi toán học. Nó có thể đã xuất hiện ở Đông Á từ thế kỷ XIX hoặc trước đó. Trò chơi này sau được đưa sang phương Tây lần đầu bởi nhà toán học người Pháp Edouard Lucas vào năm 1883. Đầu tiên ta hãy xem thử phát biểu của bài toán gốc.

**Bài 1.** Tương truyền rằng ở một ngôi tháp tại Hà Nội có một tấm đế bằng đồng, trên đó có đặt ba chiếc cọc bằng kim cương. Lúc khai thiên lập địa, trên cọc số 1, Phật tổ Như Lai đã xếp 64 chiếc đĩa bằng vàng có đường kính khác nhau sao cho các đĩa có đường kính lớn hơn xếp ở dưới, các đĩa ở phía trên càng trên cao càng nhỏ dần. Các nhà sư được yêu cầu chuyển tất cả các chiếc đĩa ở cọc số 1 sang cọc số 3 với quy tắc sau:

- Mỗi lần chỉ chuyển đi một chiếc đĩa.
- Trong quá trình di chuyển không được đặt đĩa lớn lên trên đĩa nhỏ (do đó cần thiết có thêm chiếc cọc trung gian số 2).

Giả sử mỗi lần chuyển một chiếc đĩa mất 1 giây. Hỏi các nhà sư cần thời gian ít nhất là bao lâu để chuyển tất cả các đĩa ở cọc số 1 sang cọc số 3?

**Phân tích.**



Đầu tiên ta hãy thử với các số đĩa nhỏ. Gọi số đĩa là  $n$  và  $u_n$  là số lần ít nhất để chuyển tất cả các chiếc đĩa ở cọc số 1 sang cọc số 3.

Ta thử tính một vài giá trị của  $u_n$ .

Với  $n = 2$ , ta cần thực hiện 3 phép chuyển sau:

- Chuyển đĩa bé sang cọc số 2.
- Chuyển đĩa lớn sang cọc số 3.
- Chuyển đĩa bé về cọc số 3.

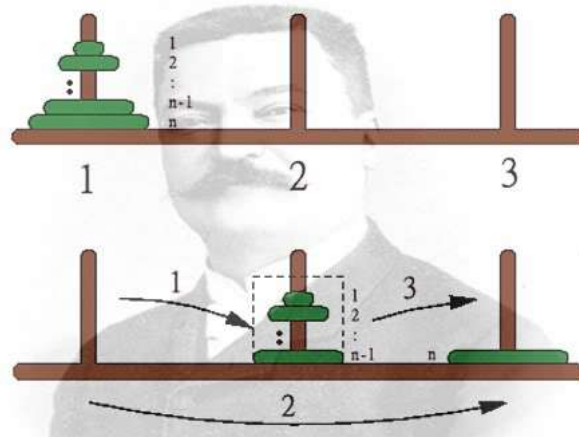
Suy ra  $u_2 = 3$ . Với  $n = 3$ , ta cần thực hiện theo 3 giai đoạn sau:

- Chuyển hai đĩa ở phía trên sang cọc số 2. Như đã thấy ở trường hợp  $n = 2$ , ta cần 3 phép chuyển.
- Chuyển đĩa lớn nhất sang cọc số 3.
- Chuyển hai đĩa ở cọc số 2 về cọc số 3. Như đã thấy ở trường hợp  $n = 2$ , ta cần 3 phép chuyển.

Do đó, ta cần  $3 + 1 + 3 = 7$  phép chuyển và  $u_3 = 7$ .

Trường hợp  $n = 3$  gợi ý cho ta thiết lập quan hệ truy hồi mà dãy  $(u_n)$  phải thỏa mãn. Để chuyển được  $n$  chiếc đĩa theo quy tắc trên, ta phải thực hiện theo 3 công đoạn sau:

1. Công đoạn 1: Chuyển  $n - 1$  đĩa ở phía trên chiếc đĩa lớn nhất sang cọc số 2 theo quy tắc trên. Ta chỉ cần  $u_{n-1}$  phép chuyển. Chiếc đĩa lớn nhất vẫn giữ nguyên ở cọc số 1 khi di chuyển tất cả các chiếc đĩa trên nó.
2. Công đoạn 2: Chuyển đĩa lớn nhất sang cọc số 3.
3. Công đoạn 3: Chuyển  $(n - 1)$  đĩa ở cọc số 2 về cọc số 3 và đặt lên trên chiếc đĩa lớn nhất. Ta cần  $u_{n-1}$  phép chuyển.



Đến đây thì công việc còn lại hoàn toàn rõ ràng, xin nhường lại cho bạn đọc. Bằng quy nạp, ta cũng dễ dàng chứng minh được tính ít nhất của phép chuyển đã nêu ở trên.

**Nhận xét.** Trong bài toán trên việc quan trọng là ta xác định các công đoạn bắt buộc, nhất thiết phải thực hiện dựa vào giả thiết, và sau đó sử dụng truy hồi để tính số bước ngắn nhất.

Tiếp theo, chúng ta hãy cùng đến với một số dạng mở rộng sau đây:



**Bài 2.** (Codeforces contest 2012) Có ba hộp bóng đặt cạnh nhau trên đường thẳng, đánh số thứ tự là 1, 2, 3 từ trái sang phải. Hộp đầu tiên chứa  $n$  quả bóng, kích thước đôi một khác nhau. Hai hộp còn lại rỗng. Người ta cho phép chuyển bóng theo quy tắc sau:

1. Mỗi lần chuyển chỉ chuyển được một quả bóng sang hộp đặt cạnh nó.
2. Quả bóng được chuyển phải là quả bóng lớn nhất trong hai hộp.

Hãy tính số bước chuyển nhỏ nhất để có thể chuyển tất cả các quả bóng thứ 1 sang hộp thứ 3.

**Phân tích.**

Vẫn như các lần trước, chúng ta sẽ lại thử và dự đoán, với hy vọng rằng trong các tình huống đơn giản, có thể tìm ra được quy luật nào đó cho bài toán này.

Với  $n = 1$ , số bước chuyển hiển nhiên là 2.

Với  $n = 2$ , nhiều hơn 1 quả so với trường hợp trên, nhưng ta vẫn dễ dàng làm được. Cụ thể các bước chuyển trong bảng bên dưới:

Lần	Hộp 1	Hộp 2	Hộp 3
0	1 2	0	0
1	1	2	0
1	1	2	0
2	1	0	2
3	0	1	2
4	0	1 2	0
5	2	1	0
6	2	0	1
7	0	2	1
8	0	0	1 2

Quy ước số 0 trong hộp nghĩa là hộp không có gì. Để thuận tiện ta đánh số các quả bóng là 1, 2, 3 theo thứ tự kích thước  $1 < 2 < 3$ .

Ở trường hợp này số bước chuyển là 8.  $n = 3$ . Trường hợp này có lẽ cần khá nhiều bước?

Lần	Hộp 1	Hộp 2	Hộp 3	Lần	Hộp 1	Hộp 2	Hộp 3
0	1 2 3	0	0	14	0	1 2	3
1	1 2	3	0	15	2	1	3
2	1 2	0	3	16	2	1 3	0
3	1	2	3	17	2 3	1	0
4	1	2 3	0	18	2 3	0	1
5	1 3	2	0	19	2	3	1
6	1 3	0	2	20	2	0	1 3
7	1	3	2	21	0	2	1 3
8	1	0	2 3	22	0	2 3	1
9	0	1	2 3	23	3	2	1
10	0	1 3	2	24	3	0	1 2
11	3	1	2	25	0	3	1 2
12	3	1 2	0	26	0	0	1 2 3
13	0	1 2 3	0				

Ở trường hợp này ta cần 26 bước.

Nhìn lại các giá trị ta đã tính được:

- $n = 1$  thì ta có 2,
- $n = 2$  thì ta có 8,
- $n = 3$  thì ta có 26.

Nhận thấy các số này tăng rất nhanh, và nếu ta làm tiếp  $n = 4$  thì có lẽ số bước thu được là rất lớn. Suy luận một chút ta tìm một mối quan hệ giữa các số trên, ta hoàn toàn có thể liên tưởng tới con số  $3^n - 1$ . Nếu "ăn gian" một chút nhằm củng cố thêm độ tin cậy của công thức trên, trong trường hợp  $n = 0$ , rõ ràng không cần chuyển gì cả và 0 lần cũng tương ứng với  $3^0 - 1$ .

Việc dự đoán tới đây là xong, bây giờ việc cần làm là phải liệt kê các trạng thái bắt buộc phải có trong quá trình chuyển để thiết lập quan hệ. Gọi  $u_n$  là số bước chuyển cần tìm ứng với  $n$ .

Nhận thấy với giả thiết hai điều kiện bắt buộc trên thì để chuyển được bóng số 1 sang hộp 3 thì ta phải đạt được trạng thái:

Hộp 1	Hộp 2	Hộp 3
$2, 3, \dots, n - 1$	1	0

Và tiếp tục mạch suy luận như trên, để đạt được trạng thái trên thì ta phải có trạng thái:

Hộp 1	Hộp 2	Hộp 3
1	0	$2, 3, \dots, n - 1$

Do bóng được chuyển phải là bóng lớn nhất và mỗi lần chỉ chuyển được sang hộp bên cạnh thì muốn chuyển số 1 qua hộp thứ hai thì  $(n - 1)$  quả bóng còn lại phải nằm ở hộp thứ 3.

Suy luận đến đây có vẻ rõ ràng, nếu chuyển được bóng số 1 từ hộp 2 sang hộp 3 thì khi đó  $(n - 1)$  quả bóng còn lại phải nằm ở hộp 1, và lúc này do điều kiện 2 nên bóng số 1 không làm ảnh hưởng đến việc chuyển  $(n - 1)$  quả bóng kia từ hộp 1 sang hộp 3 và số bước chuyển trong lúc này là  $u_{n-1}$ .

Vì thế nên ta chỉ cần tính số bước chuyển bóng 1 từ hộp 1 sang hộp 2. Theo suy luận trên thì lúc này các quả bóng còn lại phải nằm ở hộp 3, và để chuyển các quả bóng đó từ hộp 1 sang hộp 3 thì cần  $u_{n-1}$  bước chuyển. Tới đây thì ý tưởng đã rõ ràng, các bước cần làm để có số bước chuyển nhỏ nhất cho  $n$  quả bóng là:

- Công đoạn 1: Chuyển  $(n - 1)$  quả lớn nhất từ hộp 1 sang hộp 3, có  $u_{n-1}$  bước chuyển.

Sau đó chuyển quả bóng 1 sang hộp 2.

- Công đoạn 2: Chuyển  $(n - 1)$  quả bóng đó từ hộp 3 sang hộp 1, có  $u_{n-1}$  bước chuyển.

Sau đó chuyển quả bóng 1 sang hộp 3.

- Công đoạn 3: Chuyển  $(n - 1)$  quả bóng từ hộp 1 về hộp 3, có  $u_{n-1}$  bước chuyển.

Một lần nữa, công việc còn lại xin nhường cho bạn đọc. Đáp số bài toán chính là con số đã dự đoán ban đầu.

Bài toán trên nhìn ban đầu có vẻ rắc rối vì có những hai điều kiện ràng buộc, nhưng bằng suy luận khéo léo, chúng ta đã biến những ràng buộc đó trở thành những điều kiện thuận lợi cho công cụ truy hồi đặc lực của ta.

Từ đây ta có cảm tưởng như chưa hẳn nhiều điều kiện đã khó mà đôi khi có thể những điều kiện ban đầu bị nổi lỏng mới làm khó bài toán của ta. Sau đây, hãy cũng tìm hiểu thêm một số dạng cải biên của bài toán Tháp Hà Nội.

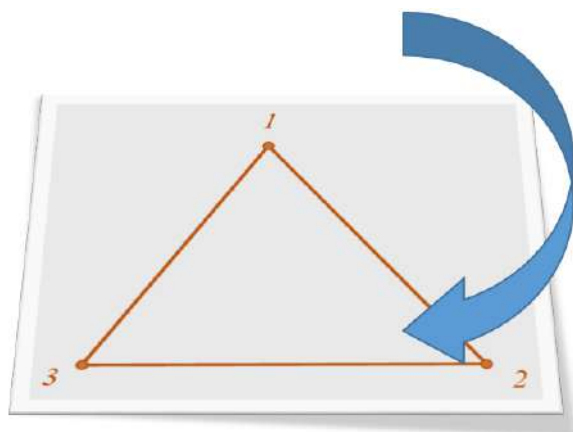
**Bài 3.** (cyclic moving) Giả thiết như bài toán 1, và thêm điều kiện: đóng ba cọc trên ba đỉnh tam giác, chỉ được chuyển đĩa từ cọc này sang cọc bên cạnh theo chiều kim đồng hồ (hoặc ngược lại).

**Bài 4.** (parallel moving) Giả thiết như bài toán 1, thêm vào điều kiện: có thể chuyển các đĩa từ cọc này sang cọc khác trong cùng một thời gian.

Tương tự như hai bài toán 1 và bài toán 2, ta hãy cùng giải quyết các bài toán vừa mới đưa ra ở trên. Trước hết là bài toán 3.

#### Phân tích:

Không mất tính tổng quát, ta giả sử chiều chuyển đĩa là  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$ .



Với  $n = 1$ , hiển nhiên  $u_n = 1$ .

Với  $n = 2$  ta có các bước chuyển sau:

Lần	Cọc 1	Cọc 2	Cọc 3
0	1 2	0	0
1	2	1	0
2	2	0	1
3	0	2	1
4	1	2	0
5	0	1 2	0

Do đó  $u_2 = 5$ .

Với  $n = 3$  ta có bảng sau:

Lần	Cọc 1	Cọc 2	Cọc 3	Lần	Cọc 1	Cọc 2	Cọc 3
0	1 2 3	0	0	8	0	3	1 2
1	2 3	1	0	9	1	3	2
2	2 3	0	1	10	0	1 3	2
3	3	2	1	11	2	1 3	0
4	1 3	2	0	12	2	3	1
5	1 3	0	2	13	0	2 3	1
6	3	1	2	14	1	2 3	0
7	3	0	1 2	15	0	1 2 3	0

Do đó  $u_3 = 15$ .

Ta có thể tính được  $u_4 = 43$ , tuy nhiên số bước chuyển tương đối nhiều không trình bày ở đây.

Có lẽ ta vẫn chưa đoán được điều gì về con số tổng quát, đồng thời ta vẫn chưa thấy được truy hồi? Ta cần một ý tưởng mới hơn. Tại sao không đặt thêm một ẩn phụ để giải quyết bài toán, gỡ các nút thắt lung tung khi và phải những kiểu "truy hồi" dài bất tận.

Ta nhận thấy muốn chuyển đĩa  $n$  từ cọc 1 sang cọc 2 (để số bước chuyển nhỏ nhất), thì ta phải chuyển được  $(n - 1)$  đĩa nhỏ ở trên sang cọc 3. Và sau đó ta lại phải chuyển  $(n - 1)$  đĩa nhỏ đó từ cọc 3 về lại cọc 2. Như thế còn chờ gì nữa ta không đặt một ẩn phụ  $S_n$  cho số bước chuyển nhỏ nhất mà ta phải chuyển  $n$  đĩa từ cọc hiện có sang một cọc cách nó một cọc khác (theo cách chuyển theo chiều kim đồng hồ).

Muốn chuyển được  $n$  đĩa từ cọc 1 sang cọc 3, dễ dàng suy luận, ta có các công đoạn sau (để số bước chuyển nhỏ nhất)

- Công đoạn 1: Chuyển  $(n - 1)$  đĩa từ cọc 1 sang cọc 3.
- Công đoạn 2: Chuyển đĩa thứ  $n$  từ cọc 1 sang cọc 2.
- Công đoạn 3: Chuyển  $(n - 1)$  đĩa từ cọc 3 sang cọc 2.
- Công đoạn 4: Chuyển đĩa thứ  $n$  từ cọc 2 sang cọc 3.
- Công đoạn 5: Chuyển  $(n - 1)$  đĩa từ cọc 1 sang cọc 3.

Theo đó ta có được hệ thức truy hồi  $S_n = 2S_{n-1} + u_{n-1} + 2$ . Do đó ta có hệ phương trình truy hồi sau:

$$\begin{cases} u_n = 2S_{n-1} + 1 \\ S_n = 2S_{n-1} + u_{n-1} + 2 \end{cases}$$

Mọi chuyện đến đây coi như đã xong.

Tiếp theo là bài toán 3 (parallel moving). Ở đây ta quy ước các bước chuyển đúng luật là:

1. Chuyển hai đĩa trên cùng của một cọc sang hai cọc khác nhau.
2. Hoán đổi vị trí hai đĩa trên cùng của hai cọc.
3. Chuyển hai đĩa trên cùng của hai cọc về cọc thứ ba.
4. Chuyển một đĩa của một cọc (cọc thứ nhất) sang cọc khác (cọc thứ 2), và chuyển đĩa khác từ cọc thứ ba về cọc thứ nhất.

Các bước chuyển trên chỉ được phép thực hiện khi sao cho yêu cầu "đĩa nhỏ nằm trên đĩa lớn" vẫn được đảm bảo.

**Phân tích:** Ở đây ta không phân tích kĩ bài toán này, vì thực chất nó là một cách thu gọn các bước của bài toán 1, bài toán này hoàn toàn có thể được giải bằng phương pháp truy hồi mà ta đang tìm hiểu.

**Nhận xét:** Bằng phương pháp truy hồi, các bài toán trên đã được giải quyết trọn vẹn bằng tư tưởng tự nhiên và rõ ràng. Thêm vào đó, bằng cách đổi điều kiện, thêm bớt giả thiết bài toán gốc ban đầu, ta có thể sáng tạo một loạt các bài toán khác, lạ mắt hơn nhưng vẫn nằm trong tầm giải quyết của phương pháp này.

**Bài 5.** Giả thiết tương tự bài toán 1, thay điều kiện chuyển đĩa thành:

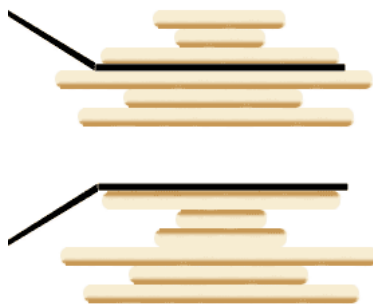
1. Đĩa nhỏ luôn nằm trên đĩa lớn.
2. Chỉ được chuyển đĩa sang cọc bên cạnh.
3. Mỗi lần chỉ được chuyển một đĩa.

**Bài 6.** Giả thiết tương tự bài toán 2 nhưng bỏ bớt điều kiện phải chuyển bóng sang hộp bên cạnh (nghĩa là có thể thực hiện chuyển bóng ở hộp bất kì).

Hai bài toán 5 và 6 xin dành cho các bạn tự luyện. Ta hãy cùng nhau phân tích bài toán 7.

**Bài 7.** Đầu bếp của chúng tôi là người tùy tiện và khi ông ta làm một chồng bánh rán thì bánh có đủ kích cỡ. Vì thế, khi tôi dọn bánh cho một khách hàng, trên đường ra bàn ăn tôi sắp xếp lại (để cho cái nhỏ nhất nằm lật mặt trên cùng và cứ thế, cho đến cái lớn nhất nằm dưới cùng) bằng cách cầm nhiều bánh trên cùng lật lại, lặp đi lặp lại như vậy (thay đổi số lượng bánh được lật) thật nhiều lần cho đến khi hoàn tất. Nếu tôi có  $n$  bánh rán, tôi có thể sẽ phải lật tối thiểu bao nhiêu lần trong mọi trường hợp để sắp xếp lại chúng?

(Đây là bài toán được đăng trên tạp chí Chuyên Toán năm 1979 với tên gọi là "*Pancake sorting*" và chủ nhân lời giải tạp chí chính là Bill Gates)



**Phân tích.**

Gọi số lần lật tối thiểu trong mọi trường hợp với  $n$  bánh rán là  $u_n$ .

Với  $n = 1$  thì  $u_1 = 0$ .

Với  $n = 2$  thì  $u_2 = 1$ .

Với  $n = 3$ , ta xét trường hợp các bánh sắp theo thứ tự từ trên xuống dưới là  $1 - 3 - 2$ .

Dễ thấy, ta có thể làm theo một trong hai cách sau đây:

- Cách 1. Bước đầu tiên lật 2 bánh. Ta có các bước sau  $1-3-2, 3-1-2, 2-1-3, 1-2-3$ . Ta có 3 bước.
- Cách 2. Bước đầu tiên lật 3 bánh. Ta có các bước sau  $1-3-2, 2-3-1, 3-2-1, 1-2-3$ . Ta có 3 bước.

Trong cả hai trường hợp, ta có 3 bước là số bước ít nhất.

Do đó,  $u_3 = 3$ .

Với  $n = 4$ . Ta cần tìm số lần lật tối thiểu cho tất cả các trường hợp. Để làm ngắn gọn lời giải hơn, ta có một số nhận xét sau (để chứng minh):

- Nếu các bánh có thứ tự  $ABxy$  được lật trong  $k$  lần thì các bánh có thứ tự  $BAXy$  có thể được lật trong  $k + 1$  lần (lưu ý đây không phải số lần lật tối thiểu).
- Nếu bánh số 4 được đặt trên cùng thì số  $u_4$  tối đa là 4, còn nếu bánh số 4 đặt dưới cùng thì  $u_4 = 3$ .

Từ các nhận xét trên ta chỉ cần xét các trường hợp bánh số 4 ở vị trí thứ 2 và 3. Ta có bảng sau:

Trạng thái	Các bước lật bánh	Số lần
1 4 2 3	4 1 2 3, 3 2 1 4, 1 2 3 4	3
2 4 3 1	3 4 2 1, 4 3 2 1, 1 2 3 4	3
3 4 2 1	4 3 2 1, 1 2 3 4	2
2 3 4 1	4 3 2 1, 1 2 3 4	2
1 3 4 2	4 3 1 2, 2 1 3 4, 1 2 3 4	3
2 1 4 3	4 1 2 3, 3 2 1 4, 1 2 3 4	3

Từ các nhận xét và bảng trên ta có  $u_4 = 4$ .

Từ các giá trị đã tính được  $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 3, u_4 = 4$ . Ta dự đoán các giá trị cần tính có thể chia làm hai nhóm  $u_{2k}$  và  $u_{2k+1}$  để dễ suy luận.

Ta xét  $n = 2k + 1$  và chứng minh rằng khi  $k$  tăng một đơn vị thì số bước chuyển tối thiểu phải tăng ít nhất 3 đơn vị.

Với  $k = 0, n = 1$  thì số bước chuyển tối thiểu là 0.

Với  $k = 1, n = 3$  thì ta có số bước chuyển tối thiểu là 3.

Sau đây ta có một số dự đoán:

1.  $u_{2k+1} = u_{2k} + 1$  và  $u_{2k} = u_{2k-1} + 2$ .

2.  $u_n = \left\lfloor \frac{3n-1}{2} \right\rfloor - 1$ .

Và dĩ nhiên là đó chỉ là dự đoán, nó chỉ giúp ta phần nào định hướng rõ ràng những việc ta cần làm.

Công việc còn lại quả thật rất thú vị, bạn hãy thử xem nhé.

## 2. Về bài toán Shuffle pages

Đầu tiên, ta cùng phân tích bài toán sau đây, là một trò chơi nổi tiếng trên các trang web internet, thường được gọi là trò chơi "Chú ếch thông minh":

**Bài 8.** Có ba chú ếch vàng và ba chú ếch xanh ngồi trên lá sen theo mô hình sau:  $VVV\_XXX$ , trong đó dấu  $\_$  chỉ lá sen còn trống,  $V$  chỉ ếch vàng,  $X$  chỉ ếch xanh.

Mỗi bước ta thực hiện điều khiển ếch di chuyển tuân theo các quy tắc sau:

1. Mỗi lần chỉ được di chuyển một con ếch.
2. Ếch chỉ có thể nhảy sang lá sen còn trống bên cạnh nó hoặc nhảy qua đầu đúng một con ếch khác để nhảy vào lá sen còn trống.
3. Ếch chỉ được nhảy tới, không được nhảy lùi.

Hỏi sau ít nhất bao nhiêu bước nhảy thì ta có thể đưa ếch về trạng thái  $XXX\_VVV$ ? Từ đó tìm lời giải cho bài toán tổng quát.



**Phân tích.** Mục đích chính của ta không chỉ là tìm cách nhảy cho 3 con ếch vàng và 3 con ếch xanh, điều ta mong muốn ở đây là tìm một công thức tổng quát cho số bước nhảy tối thiểu của  $n$  con ếch vàng và  $n$  con ếch xanh.

Với  $n = 1$  dễ dàng ta có 3 là số bước nhảy tối thiểu.

Với  $n = 2$  ta có các bước nhảy sau:

Lần	Trạng thái
0	V V _ X X
1	V _ V X X
2	V X V _ X
3	V X V X _
4	V X _ X V
5	_ X V X V
6	X _ V X V
7	X X V _ V

Với  $n = 3$  ta có các bước nhảy sau:

Lần	Trạng thái	Lần	Trạng thái
0	V V V _ X X X	8	X V X V _ V X
1	V V _ V X X X	9	X V X V X V _
2	V V X V _ X X	10	X V X V X _ V
3	V V X V X _ X	11	X V X _ X V V
4	V V X _ X V X	12	X _ X V X V V
5	V _ X V X V X	13	X X _ V X V V
6	_ V X V X V X	14	X X X V _ V V
7	X V _ V X V X	15	X X X _ V V V

Nhìn vào cá bảng trên, ta phần nào có thể dự đoán được kết quả tổng quát là  $n^2 + 2n$ . Bây giờ ta sẽ kiểm chứng điều đó. Từ giả thiết bài toán ta có thể dễ dàng suy ra các nhận xét sau đây:

1. Không tồn tại trạng thái hai con ếch cùng màu nằm cạnh nhau mà trước đó có ít nhất một con ếch khác màu chưa nhảy về đích và trước đó không có lá sen còn trống.
2. Muốn đưa về trạng thái theo yêu cầu bài toán thì luôn tồn tại trạng thái xen kẽ:  $_V X V X V X \dots V X$ . (giả sử con ếch nhảy về đích đầu tiên là ếch xanh-nghĩa là con ếch đã nhảy được về vị trí mới nằm ở đầu đoạn thẳng)

Ta chứng minh nhận xét 2 (dễ dàng chứng minh được nhận xét 1).

Do ếch về đích đầu tiên là ếch xanh nên ta phải có trạng thái  $_ \dots$ . Do điều giả sử trên nên tại đầu bên kia, tồn tại một con ếch xanh vẫn ở nguyên vị trí. Ta suy ra, các con ếch phải ở trạng thái xen kẽ. Thật vậy, giả sử tồn tại hai con ếch cùng màu ở cạnh nhau, từ nhận xét 1 và điều giả sử suy ra, hai con ếch đó phải là ếch xanh, và do đó cũng phải tồn tại hai con ếch vàng ở cạnh nhau, mâu thuẫn nhận xét 1 (do lá sen còn trống là lá đầu tiên). Vậy nhận xét 2 được chứng minh.

Dễ dàng tính được từ trạng thái xen kẽ

$$_V X V X \dots V X$$

muốn đưa về trạng thái trong kết luận thì cần tối thiểu  $\frac{1}{2}(n^2 + 3n)$ . Do đó ta chỉ cần tính số bước nhảy tối thiểu để các con ếch đạt trạng thái xen kẽ.

Dựa vào các bảng trên, (có thể làm thử thêm với trường hợp  $n = 4$ ) ta có thể dự đoán số bước nhảy là  $\frac{1}{2}(n^2 + n)$ . Ta sẽ chứng minh điều đó bằng quy nạp và truy hồi.

Với  $n = 1, 2$  khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng với  $n = k$ , ta chứng minh nó cũng đúng với  $n = k + 1$ .

Để đạt được trạng thái xen kẽ

$$_V X V X \dots V X$$

ta nhất thiết phải đạt được trạng thái trước đó là

$$V _X V X \dots V X$$



và từ nhận xét 1, kết hợp suy luận trên ta suy ra trước đó nhất thiết phải có trạng thái

$$V\_VXVX \dots VXX.$$

Mặt khác theo giả thiết quy nạp để đạt được trạng thái trên ta cần tối thiểu  $\frac{1}{2}(k^2 + k)$  và dễ dàng thấy từ trạng thái trên để chuyển về trạng thái xen kẽ mong muốn thì cần thêm tối thiểu  $k + 1$  bước chuyển. Từ đây, theo nguyên lí quy nạp ta suy ra khẳng định trên là đúng.

Vậy từ các lập luận trên ta suy ra số bước chuyển tối thiểu cần thiết trong trường hợp  $n$  con ếch vàng và  $n$  con ếch xanh là  $n^2 + 2n$ .

**Nhận xét:** Trong bài toán trên, ta đã sử dụng tư tưởng chung đã nêu ở ban đầu, nghĩa là sử dụng phương pháp truy hồi như một công cụ đắc lực kết hợp với nguyên lí quy nạp. Tuy nhiên trong suốt quá trình giải quyết những bài toán đó thì việc tìm ra những công đoạn, hay ở đây chính là trạng thái bắt buộc phải đạt được đóng một vai trò quan trọng, như là mấu chốt giải quyết bài toán.

Để có thể hiểu rõ những tư tưởng trên hơn, xin mời mọi người đến với những bài toán có dạng gần giống sau đây.

**Bài 9.** Có một số viên ngọc khối lượng đôi một khác nhau, và không có cách nào chọn hai nhóm ngọc sao cho tổng các khối lượng các viên ngọc trong hai nhóm bằng nhau. Mục đích bài toán là thực hiện ít lần cân nhất để có thể sắp xếp các viên ngọc theo thứ tự khối lượng tăng dần.

1. Nếu có 4 viên ngọc, chứng minh rằng 4 lần cân là không đủ.
2. Nếu có 4 viên ngọc, tìm số lần cân nhỏ nhất có thể được.
3. Chứng minh rằng nếu có 8 viên ngọc thì 15 lần cân là không đủ. Tìm một cách thực hiện với 17 lần cân.
4. Chứng minh rằng nếu có  $2^n$ , ( $n > 0$ ) viên ngọc thì  $(n - 1)2^n + 1$  lần cân là đủ.

**Bài 10.** Có 6 học sinh có chiều cao khác nhau đang xếp hàng dọc. Một thầy bói mù phải xếp các bạn đứng lại theo thứ tự cao dần. Mỗi lần thầy bói chọn ra 2 bạn và đo xem ai cao hơn, sau đó thầy sẽ yêu cầu một số bạn trong hàng thay đổi vị trí.

1. Chứng minh rằng nếu thầy bói chỉ gọi 9 cặp bạn ra như vậy thì không thể sắp xếp các bạn theo thứ tự cao dần được.
2. Thầy bói có thể thực hiện việc sắp xếp này nếu gọi 11 cặp bạn ra đo hay không?

**Bài 11.** Cho hai dãy số  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  và  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  sắp xếp theo thứ tự tăng dần và tất cả  $2n$  số này đều đôi một khác nhau. Mục đích của bài toán là tạo nên một dãy số theo thứ tự tăng dần từ  $2n$  số này bằng cách thực hiện các phép so sánh các cặp số với nhau.

1. Chỉ ra một cách thực hiện bằng  $2n - 1$  phép so sánh.
2. Chứng minh rằng trong trường hợp  $n = 1, 2, 3, 4$  thì  $2n - 1$  là số tối thiểu các phép so sánh cần làm.

Ta hãy cùng phân tích những bài toán trên, đầu tiên là bài toán 2.

Từ điều kiện "không có cách nào chọn hai nhóm ngọc sao cho tổng các khối lượng các viên ngọc trong hai nhóm bằng nhau" ta suy ra khi ta thực hiện cân bất kì thì cân chỉ cho hai giá trị là: "trái nặng hơn phải"- kí hiệu là 0 hoặc "trái nhẹ hơn phải"- kí hiệu là 1. Gọi kết quả của lần cân thứ  $i$  là  $a_i$ , đặt  $A = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  là dãy kết quả của  $k$  lần cân.

1. Với  $k = 4$  thì có thể có tối đa  $2^4 = 16$  giá trị của  $A$  (vì mỗi  $a_i \in \{0, 1\}$ ), nhưng ta có đến  $4! = 24$  bộ sắp xếp 4 quả cân. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai bộ sắp xếp 4 quả cân có cùng một bộ giá trị của  $A$ . Từ đây suy ra với 4 lần cân thì không đủ để thỏa mãn đề bài.
2. Kế tiếp ta chỉ ra một cách cân thỏa mãn đề bài với 5 lần cân. Gọi khối lượng bốn viên ngọc lần lượt là  $A, B, C, D$ .
  - Lần 1. Cân  $A$  và  $B$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $A < B$ .
  - Lần 2. Cân  $C$  và  $D$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $C < D$ .
  - Lần 3. Cân  $B$  và  $D$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $B < D$ . Đến đây, ta suy ra  $D = \max\{A, B, C, D\}$  nên ta sắp xếp cho ba viên ngọc  $A, B, D$  theo thứ tự tăng dần như sau  $A < B < D$ . Do đó, ta chỉ còn xác định vị trí của  $C$  trong dãy trên là xong.
  - Lần 4. Cân  $C$  và  $A$ .
  - Lần 5. Cân  $C$  và  $B$ .

Rõ ràng theo lập luận trên, theo năm lần cân đã trình bày, thì ta chắc chắn sẽ sắp xếp được bốn viên ngọc theo thứ tự tăng dần với số lần cân ít nhất là 5.

3. Phần đầu trình bày tương tự câu 9. Ta cùng tìm một cách với 17 lần cân thỏa mãn đề bài cho 8 viên ngọc  $A_1, A_2, \dots, A_8$ .
  - Lần cân 1 đến 5: Cân 4 viên ngọc  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , theo câu 9, ta sắp xếp được dãy giả sử là  $A_1 < A_2 < A_3 < A_4$ .
  - Lần cân 6 đến 10. Cân bốn viên ngọc còn lại, tương tự ta có:

$$A_5 < A_6 < A_7 < A_8.$$

- Lần 11. Cân  $A_8$  và  $A_4$ , không mất tính tổng quát, giả sử  $A_4 < A_8$ . Từ đây ta lập được dãy

$$A_1 < A_2 < A_3 < A_4 < A_8.$$

Các lần cân còn lại ta cân như sau: Lần lượt ta cân  $A_7$  với các viên ngọc  $A_4, A_3, A_2, A_1$  với số lần cân ít nhất đến khi ta sắp xếp được các viên ngọc  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_7, A_8$  theo thứ tự tăng dần (nghĩa là nếu  $A_7 > A_4$  thì ta dừng lại vì đã sắp xếp được

$$A_1 < A_2 < A_3 < A_4 < A_7 < A_8,$$

còn nếu  $A_7 < A_4$  thì ta cân tiếp  $A_7$  và  $A_3$ , và tiếp tục cứ thế).

Sau khi đã sắp xếp được  $A_7$  vào dãy thì ta thực hiện quá trình tương tự với  $A_5$  và  $A_6$  (lưu ý là nếu ta đã sắp xếp được viên ngọc  $A_i$  vào giữa hai viên ngọc  $A_n$  và  $A_{n+1}$  thì ta chỉ cần thực hiện những lần cân kế tiếp với viên ngọc  $a_n$  trở về trước).

(Ta có thể ngầm hiểu như sau: Nếu cân  $A_7$  một lần thì  $A_7 > A_4$ , nếu cân  $A_7$  hai lần thì  $A_3 < A_7 < A_4, \dots$ . Nhưng do lưu ý trên, cứ một lần cân của viên ngọc  $A_n$  tăng lên thì lần cân của  $A_{n-1}$  giảm xuống ít nhất 1 đơn vị.)

Với cách cân và suy luận như trên, ta dễ dàng suy ra số lần cân tối đa là 6 vì mỗi quả phải cân ít nhất một lần và có tối đa một quả cân 4 lần.

Vậy cách cân như trên gồm tối đa 17 lần cân và theo đó ta có thể sắp xếp 8 quả cân theo thứ tự tăng dần như yêu cầu bài toán.

4. Đây là câu hỏi mang tư tưởng chính của bài viết này, ta sẽ chứng minh bằng nguyên lí quy nạp.

Với  $n = 1, 2$  khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đúng với  $n = k$ , ta chứng minh nó cũng đúng với  $n = k + 1$ . Thật vậy,

- Lần 1 đến lần thứ  $(k - 1)2^k + 1$ , ta cân và sắp xếp được các viên ngọc từ 1 đến  $2^k$  theo thứ tự tăng dần (theo giả thiết quy nạp):

$$A_1 < A_2 < \dots < A_{2^k}$$

- Lần thứ  $(k - 1)2^k + 2$  đến lần thứ  $2[(k - 1)2^k + 1]$ , ta cân và sắp xếp được các viên ngọc từ  $2^k + 1$  đến  $2^{k+1}$  theo thứ tự tăng dần:

$$B_1 < B_2 < \dots < B_{2^k}.$$

- Lần thứ  $2[(k - 1)2^k + 1] + 1$  ta cân  $A_{2^k}$  và  $B_{2^k}$ , không mất tính tổng quát giả sử  $A_{2^k} < B_{2^k}$ .
- Các lần cân sau ta cân như ý thứ 3, suy luận tương tự ta có số lần cân tối đa mà vẫn thỏa yêu cầu đề bài là  $2[(k - 1)2^k + 1] + 2^k + 2^k - 1 = k \cdot 2^{k+1} + 1$  (tại sao?)

Do đó khẳng định đúng với  $n = k + 1$  nên theo nguyên lí quy nạp khẳng định đúng với mọi  $n \in \mathbb{N}$ . Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Bài toán kết thúc.

Bài toán 3 và 4 xin dành cho các bạn tự luyện tập bởi vì các bài toán này chỉ là một dạng phát biểu khác của bài toán 2.

### 3. Lời kết

Với công cụ đắc lực là phương pháp truy hồi và nguyên lí quy nạp thì nhóm các bài toán ta đưa ra đều được giải quyết trọn vẹn. Đa số chúng ta đều tự đặt câu hỏi khi nào thì ta sử dụng được hai công cụ trên? Rất nhiều bài toán tổ hợp có thể dùng phương pháp truy hồi để giải, truy hồi gợi cho ta những ý tưởng liên kết các suy nghĩ ban đầu đến kết luận xa xôi của bài toán, là mấu nối giữa những trường hợp nhỏ đến những công thức tổng quát cần tìm và cho ta lời giải sáng sủa về ý tưởng rất tự nhiên.

Nhưng không phải lúc nào ta cũng truy hồi vô tội vạ. Với những bài toán đã nêu ở trên thì ta đã thấy rất rõ ràng, truy hồi và quy nạp chỉ là những công cụ đắc lực khi ta có những ý tưởng, những hiểu biết sâu sắc về bản chất bài toán (ở các ví dụ trong chuyên đề, bản chất bài toán là những trạng thái phải đạt được từ đó mới sử dụng được các suy luận cũng như công cụ đã nêu). Nếu như ta lầm tưởng "cứ truy hồi là xong" mà không tư duy, sáng tạo, thì đôi khi gặp những bài toán mới lạ thì ta đành phải chịu thua.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Bài giảng luyện thi VMO 2013.
- [2] Wikipedia – bài toán Tháp Hà Nội.
- [3] Thuật toán Frame - Stewart giải bài toán Tháp Hà Nội tổng quát.
- [4] Phan Thị Hà Dương , Bài toán trò chơi và tính số các trường hợp, Mathclub 4/2012.
- [5] Trò chơi "Chú ếch thông minh" trên mạng Internet.

# VỀ MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG KỲ THI VMO 2016

Nguyễn Tiến Dũng  
 (Hà Nội)

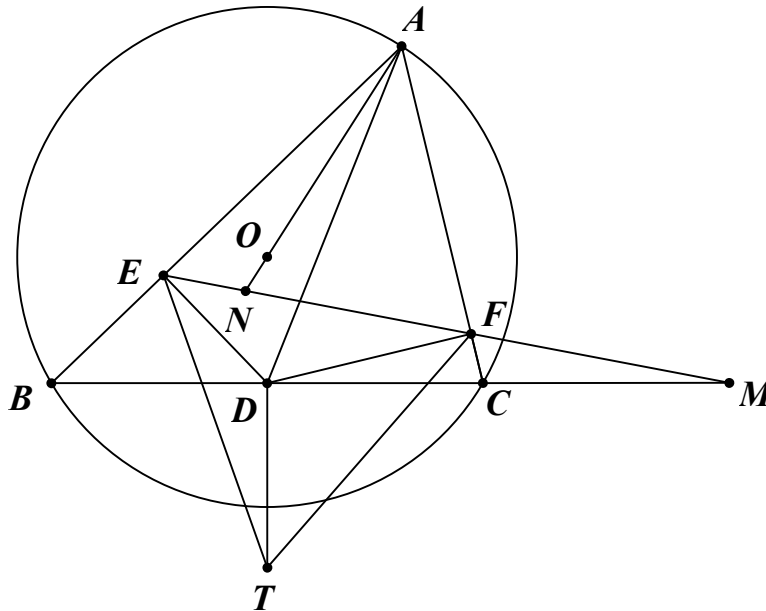
Bài viết đưa ra những khai thác xung quanh bài toán hình học số 3 trong kỳ VMO 2016 và hướng tổng quát bài toán đó.

Bài toán hình học số 3 trong kỳ VMO 2016 có nội dung được đề cập trong [1] như sau:

**Bài toán 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $B, C$  cố định,  $A$  thay đổi sao cho tam giác  $ABC$  nhọn. Gọi  $D$  là trung điểm của  $BC$  và  $E, F$  tương ứng là hình chiếu vuông góc của  $D$  lên  $AB, AC$ .

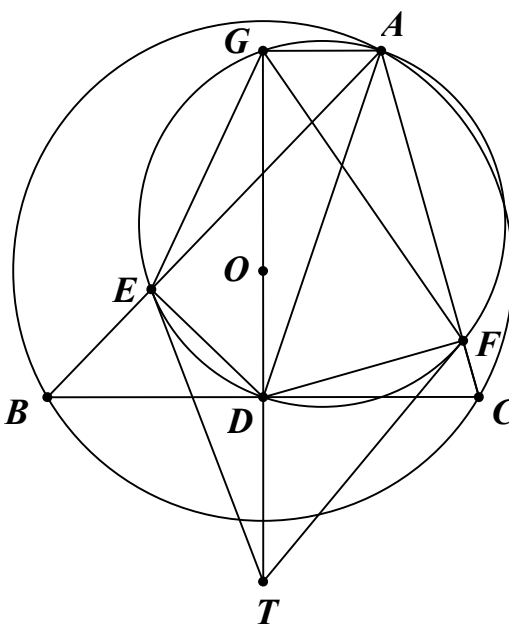
a) Gọi  $O$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .  $EF$  cắt  $AO$  và  $BC$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMN$  đi qua một điểm cố định.

b) Các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AEF$  tại  $E, F$  cắt nhau tại  $T$ . Chứng minh  $T$  thuộc một đường thẳng cố định.



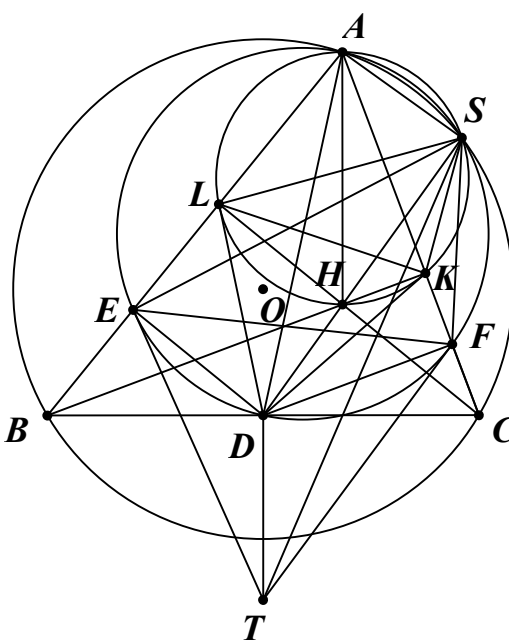
**Lời giải.** a) Vì  $EF$  cắt  $BC$  tại  $M$  nên  $AB \neq AC$ . Xét trường hợp  $AB > AC$ , trường hợp còn lại chứng minh tương tự. Ta có  $\angle BAN = \angle CDF = 90^\circ - \angle ACB$ . Vì tứ giác  $AEDF$  nội tiếp đường tròn đường kính  $AD$  nên  $\angle DAE = \angle DFE$ . Từ đó  $\angle NMD = \angle EFD - \angle CDF = \angle EAD - \angle NAE = \angle NAD$  nên  $A, M, N, D$  cùng thuộc một đường tròn. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMN$  luôn đi qua điểm  $D$  cố định.

b) **Lời giải thứ nhất.**



Đường tròn đường kính  $AD$  cắt trung trực  $BC$  tại  $G$ , thế thì  $AG \parallel BC \perp GD$ . Chú ý rằng  $D$  là trung điểm  $BC$ . Ta có  $A(G, D; E, F) = A(G, D; B, C) = -1$  nên tứ giác  $GEDF$  điều hòa. Do đó  $GD$  đi qua giao điểm  $T$  của các tiếp tuyến tại  $E, F$  của đường tròn đường kính  $AD$ . Vậy  $T$  thuộc trung trực  $BC$  cố định.

**Lời giải thứ hai.**



Gọi các đường cao  $BK, CL$  của tam giác  $ABC$  cắt nhau tại  $H$ . Đường tròn đường kính  $AH$  cắt  $(O)$  tại  $S$  khác  $A$ . Theo kết quả quen thuộc,  $D, H, S$  thẳng hàng và  $DK, DL$  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính  $AH$  nên  $S$  thuộc đường tròn đường kính  $AD$ . Dễ thấy  $\triangle SEL \sim \triangle SFK$  nên  $\triangle SKL \sim \triangle SFE$ . Từ đó với chú ý  $TE, TF$  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính  $AD$  ta có  $\triangle SEL \sim \triangle STD$ . Do đó  $\angle SDT = \angle SLE = 180^\circ - \angle SLA = 180^\circ - \angle SHA = \angle AHD$  nên  $TD \parallel AH \perp BC$ . Vậy  $T$  thuộc trung trực  $BC$  cố định.  $\square$

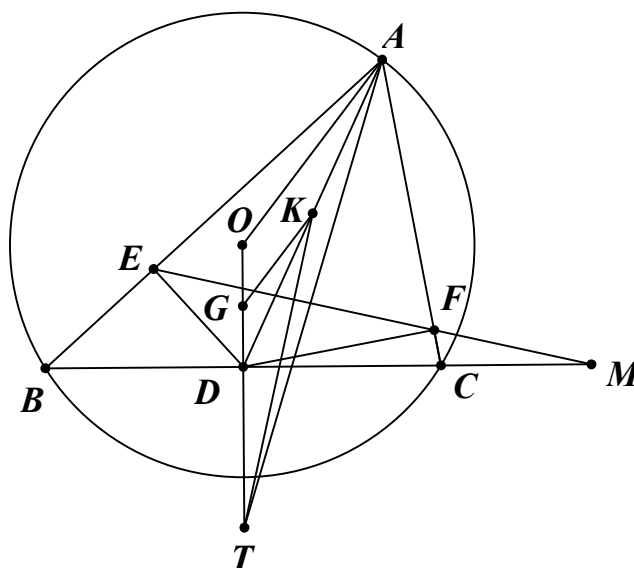
**Nhận xét.** Giả thiết trong ý 1a) chưa chặt chẽ. Sự kiện  $EF$  cắt  $BC$  chỉ có được nếu tam giác  $ABC$  không cân tại  $A$ . Vì thế nên bổ sung thêm chi tiết này vào giả thiết bài toán. Ý 1b) có thể được giải quyết nhanh chóng bằng việc sử dụng các kiến thức về chùm điều hòa và tứ giác điều hòa như trong lời giải thứ nhất. Lời giải thứ hai thuần túy hình học dựa trên lời giải bài toán tổng quát đã có trong [2] của thầy Trần Quang Hùng, bài toán được phát biểu như sau

**Bài toán 2.** Cho tam giác  $ABC$ , trực tâm  $H$  và  $M$  là trung điểm  $BC$ .  $P$  là một điểm thuộc đường thẳng  $HM$ . Đường tròn  $(K)$  đường kính  $AP$  cắt  $CA, AB$  lần lượt tại  $E, F$  khác  $A$ . Chứng minh rằng tiếp tuyến tại  $E, F$  của  $K$  cắt nhau trên trung trực  $BC$ .

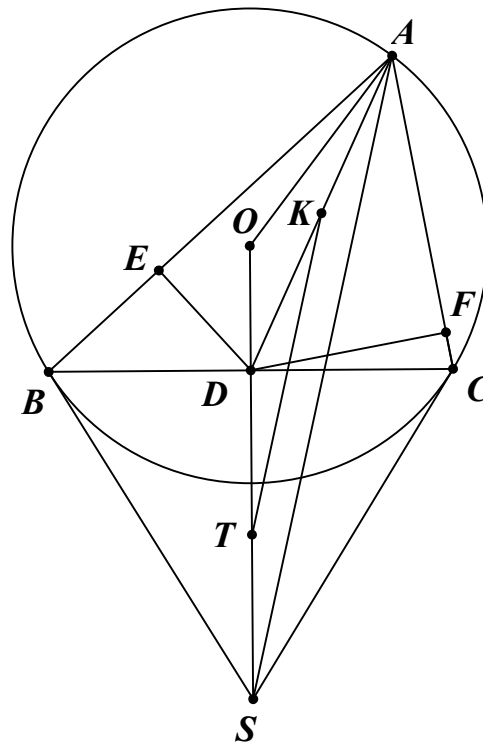
Tiếp tục khai thác cấu hình bài toán 1, chúng ta có các bài toán sau đây.

**Bài toán 3.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O, R)$  cho trước,  $A$  di động trên cung  $BC$  cố định và  $D$  là trung điểm  $BC$ .  $E, F$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $D$  trên  $AB, AC$ . Chứng minh rằng đường đối trung đỉnh  $A$  của tam giác  $AEF$  luôn đi qua một điểm cố định.

**Lời giải.** Gọi  $T$  là giao điểm các tiếp tuyến tại  $E, F$  của đường tròn đường kính  $AD$  thì  $AT$  là đường đối trung của tam giác  $AEF$ . Theo ý 1b) thì  $T$  thuộc trung trực  $BC$ . Ta chứng minh  $T$  cố định. Ta xét bài toán khi  $AB > AC$ .



**Lời giải thứ nhất.** Gọi  $EF$  cắt  $BC$  tại  $M$ .  $K, G$  theo thứ tự là trung điểm của  $DA, DO$ . Chứng minh tương tự ý 1a) ta có  $\angle OAD = \angle EMD$ . Chú ý rằng  $DT \perp BC, KT \perp EF, KG \parallel OA$  ta có  $\angle GTK = \angle EMD = \angle OAD = \angle GKD$ . Từ đó  $GK^2 = GD \cdot GT$ , lại có  $G, D$  cố định và  $GK = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R$  không đổi nên  $T$  cố định.



**Lời giải thứ hai.** Gọi  $(K)$  là đường tròn đường kính  $AD$ . Đường thẳng qua  $A$  vuông góc với  $EF$  cắt trung trực  $BC$  tại  $S$ . Chú ý rằng  $AS \perp EF$ ,  $DF \perp AC$  ta có  $\angle SAC = \angle DFE = \angle DAB$  nên  $AS$  là đường đối trung của tam giác  $ABC$ . Vì thế  $SB, SC$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .  $B, C$  và  $(O)$  cố định nên  $S$  cố định. Ta có  $KT \parallel AS \perp EF$ ,  $K$  là trung điểm  $AD$  nên  $T$  là trung điểm của  $SD$ .  $S, D$  cố định nên  $T$  cố định.  $\square$

Từ bài toán 3, chúng ta có thể đưa ra các bài toán sau.

**Bài toán 4.** Cho tam giác  $ABC$  có các đường cao  $BD, CE$ .  $M$  là trung điểm  $DE$ .  $K, L$  theo thứ tự là hình chiếu của  $M$  trên  $AC, AB$ .  $P, Q$  theo thứ tự là trung điểm  $BD, CE$ . Chứng minh rằng đường đối trung đỉnh  $A$  của tam giác  $AKL$  chia đôi  $PQ$ .

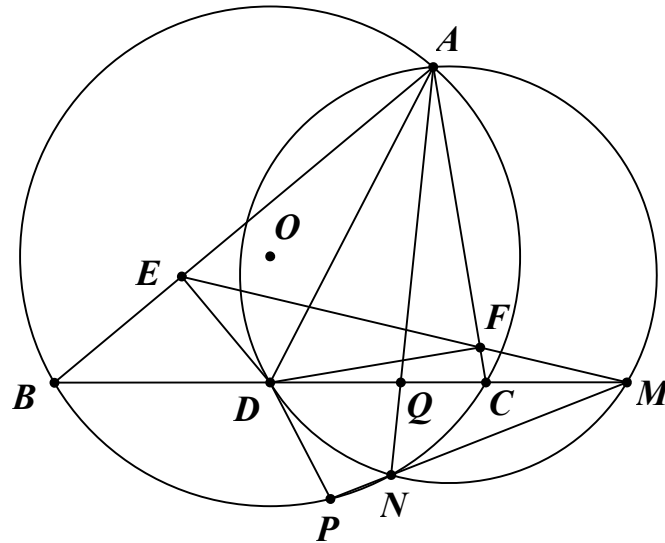
**Bài toán 5.** Cho tam giác  $ABC$  có đường tròn ngoại tiếp  $(O)$ ,  $J$  là tâm đường tròn bàng tiếp góc  $A$  và  $M$  là trung điểm  $BC$ . Gọi  $N$  là điểm chính giữa cung  $BAC$  của đường tròn  $(O)$ .  $D, E$  theo thứ tự là hình chiếu của  $M$  trên phân giác ngoài các góc  $B, C$  của tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng đường đối trung đỉnh  $J$  của tam giác  $JDE$  chia đôi  $MN$ .

**Bài toán 6.** Cho tam giác  $ABC$  không cân tại  $A$ , nội tiếp đường tròn  $(O)$  có  $D$  là trung điểm  $BC$ .  $E, F$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $D$  trên  $AB, AC$ .  $EF$  cắt  $BC$  tại  $M$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ADM$  cắt  $(O)$  tại  $N$  khác  $A$ .  $MN$  cắt  $(O)$  tại  $P$  khác  $N$ .  $AN$  cắt  $BC$  tại  $Q$ .

a) Chứng minh rằng  $AP$  là đường đối trung của tam giác  $ABC$ .

b) Chứng minh rằng  $D, N, P, Q$  cùng thuộc một đường tròn.





**Lời giải.** a) Vì  $A, D, M, N$  cùng thuộc một đường tròn nên  $\angle ADB = \angle ANP = \angle ACP$ . Lại có  $\angle ABC = \angle APC$  nên  $\angle BAD = \angle CAP$ .  $AM$  là đường trung tuyến của tam giác  $ABC$  nên  $AP$  là đường đối trung của tam giác  $ABC$ .

b) Từ câu a) ta có tứ giác  $ABPC$  điều hòa nên  $PA$  là đường đối trung của tam giác  $PBC$ . Do đó ta có  $\angle PDQ = \angle PBC + \angle BPD = \angle PAC + \angle CPA = \angle DAB + \angle CBA = \angle ADM = \angle QNM$ . Từ đó  $D, N, P, Q$  cùng thuộc một đường tròn.  $\square$

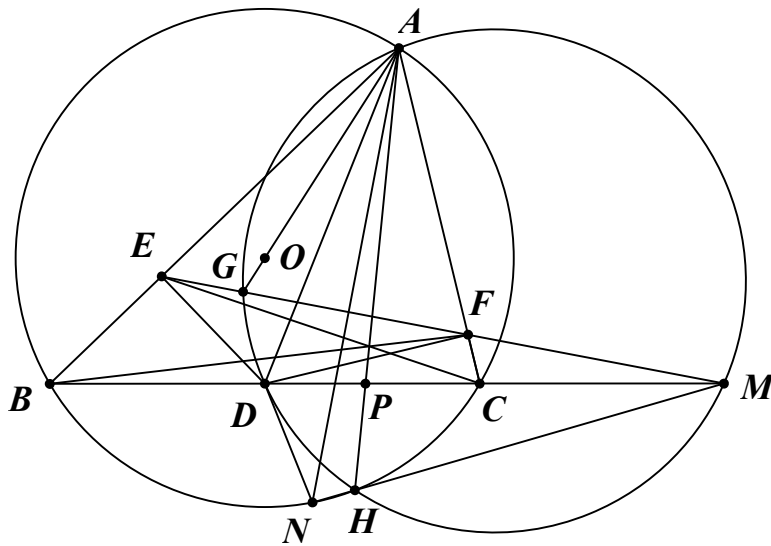
Bài toán 6 rất đơn giản nhưng từ đó, chúng ta có thể đề xuất nhiều bài toán hay.

**Bài toán 7.** Cho tam giác  $ABC$  không cân, nội tiếp đường tròn  $(O)$  có  $M_a$  là trung điểm  $BC$ .  $A_b, A_c$  theo thứ tự là hình chiếu của  $M_a$  trên  $AB, AC$ .  $A_b A_c$  cắt  $BC$  tại  $A_1$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AM_a A_1$  cắt  $(O)$  tại  $A_2$  khác  $A$ .  $A_1 A_2$  cắt  $(O)$  tại  $A_3$  khác  $A_2$ .  $B_3, C_3$  xác định tương tự. Chứng minh rằng  $AA_3, BB_3, CC_3$  đồng quy.

**Bài toán 8.** Cho tam giác  $ABC$  không cân, nội tiếp đường tròn  $(O)$  có  $M_a$  là trung điểm  $BC$ .  $A_b, A_c$  theo thứ tự là hình chiếu của  $M_a$  trên  $AB, AC$ .  $A_b A_c$  cắt  $BC$  tại  $A_1$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AM_a A_1$  cắt  $(O)$  tại  $A_2$  khác  $A$ .  $AA_2$  cắt  $BC$  tại  $A_3$ . Đường tròn  $(M_a A_2 A_3)$  cắt  $(O)$  tại  $A_4$  khác  $A_2$ .  $B_4, C_4$  xác định tương tự. Chứng minh rằng  $AA_4, BB_4, CC_4$  đồng quy.

**Bài toán 9.** Cho tam giác  $ABC$  không cân, nội tiếp đường tròn  $(O)$  có  $M_a$  là trung điểm  $BC$ .  $A_b, A_c$  theo thứ tự là hình chiếu của  $M_a$  trên  $AB, AC$ .  $A_b A_c$  cắt  $AO$  tại  $A_1$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AM_a A_1$  cắt  $(O)$  tại  $A_2$  khác  $A$ .  $AA_2$  cắt  $BC$  tại  $A_3$ . Đường tròn  $(M_a A_2 A_3)$  cắt  $(O)$  tại  $A_4$  khác  $A_2$ .  $B_4, C_4$  xác định tương tự. Chứng minh rằng  $AA_4, BB_4, CC_4$  đồng quy.

**Bài toán 10.** Cho tam giác  $ABC$  không cân tại  $A$ , nội tiếp đường tròn  $(O)$  có  $D$  là trung điểm  $BC$ .  $E, F$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $D$  trên  $AB, AC$ .  $AO$  cắt  $EF$  tại  $G$ . Đường tròn  $(AGD)$  cắt  $(O)$  tại  $H$  khác  $A$ . Chứng minh rằng  $AH, BF, CE$  đồng quy.



**Lời giải.** Gọi  $EF$  cắt  $BC$  tại  $M$ ,  $MH$  cắt  $(O)$  tại  $N$  khác  $H$ ,  $AH$  cắt  $BC$  tại  $P$ . Theo bài toán 6,  $D, P, N, H$  cùng thuộc một đường tròn nên  $\overline{MD} \cdot \overline{MP} = \overline{MN} \cdot \overline{MH} = \overline{MB} \cdot \overline{MC}$ . Do  $M$  là trung điểm  $BC$  nên theo hệ thức Maclaurin ta có  $(M, P; B, C) = -1$  suy ra  $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$ . Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  $ABC$  với  $M, F, E$  thẳng hàng ta có  $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = 1$ . Từ đó  $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = -1$  nên theo định lý Ceva đảo  $AH, BF, CE$  đồng quy.  $\square$

**Bài toán 11.** Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $A$  cố định trên  $(O)$  và một đường thẳng  $\Delta$  không vuông góc với  $OA$ . Kẻ dây  $BC$  thay đổi của  $(O)$  luôn song song với  $\Delta$ .  $D$  là trung điểm  $BC$ .  $E, F$  theo thứ tự là hình chiếu của  $D$  trên  $AB, AC$ .  $EF$  cắt  $BC$  tại  $M$ .  $BF$  cắt  $CE$  tại  $N$ .  $AN$  cắt  $(O)$  tại  $P$  khác  $A$ .  $MP$  cắt  $(O)$  tại  $Q$  khác  $P$ . Chứng minh rằng  $QD$  luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài toán 12.** Cho tam giác  $ABC$  không cân, nội tiếp đường tròn  $(O)$  có  $M_a$  là trung điểm  $BC$ .  $A_b, A_c$  theo thứ tự là hình chiếu của  $M_a$  trên  $AB, AC$ .  $A_b A_c$  cắt  $BC$  tại  $A_1$ .  $BA_c, CA_b$  cắt nhau tại  $A_2$ .  $AA_2$  cắt  $(O)$  tại  $A_3$  khác  $A$ .  $A_1 A_3$  cắt  $(O)$  tại  $A_4$  khác  $A_3$ .  $B_4, C_4$  xác định tương tự. Chứng minh rằng  $AA_4, BB_4, CC_4$  đồng quy.

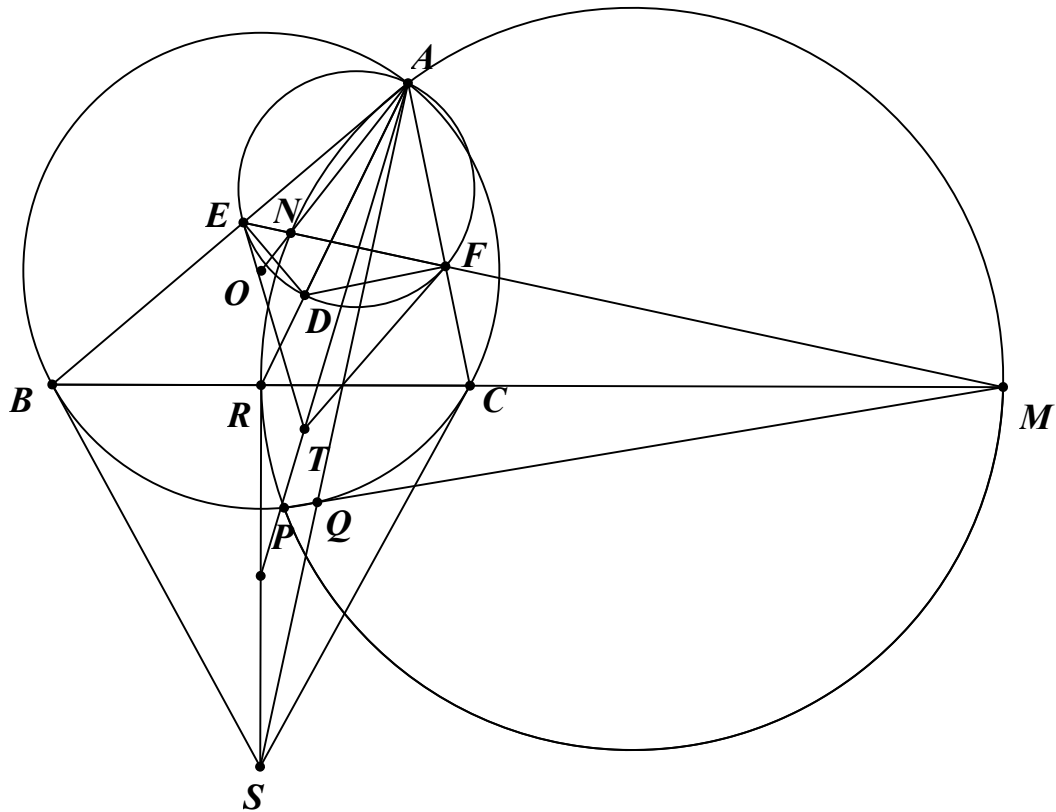
Bây giờ chúng ta sẽ bắt đầu mở rộng bài toán 1 thông qua các bài toán sau đây.

**Bài toán 13.** Cho tam giác  $ABC$  không cân nội tiếp đường tròn  $(O)$  cho trước có  $B, C$  cố định,  $A$  thay đổi. Điểm  $D$  thay đổi trên trung tuyến đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ .  $E, F$  theo thứ tự là hình chiếu của  $D$  trên  $AB, AC$ .  $EF$  cắt  $BC, AO$  theo thứ tự ở  $M, N$ .

a) Chứng minh rằng đường tròn  $(AMN)$  luôn đi qua một điểm cố định.

b) Đường tròn  $(AMN)$  cắt  $(O)$  tại  $P$  khác  $A$ .  $MP$  cắt  $(O)$  tại  $Q$  khác  $P$ . Chứng minh rằng  $AQ$  luôn đi qua một điểm cố định.

c) Gọi  $T$  là giao điểm các tiếp tuyến tại  $E, F$  của đường tròn  $(AEF)$ . Chứng minh rằng  $DT \perp BC$  và  $AT$  luôn đi qua một điểm cố định.



**Gợi ý.** a) Bằng biến đổi góc đơn giản tương tự ý 1a) ta có đường tròn  $(AMN)$  luôn đi qua trung điểm  $R$  của  $BC$ .

b) Chứng minh tương tự ý 6 a) ta có  $AQ$  là đường đối trung của tam giác  $ABC$  nên  $AQ$  đi qua giao điểm  $S$  của các tiếp tuyến tại  $B, C$  của  $(O)$ .

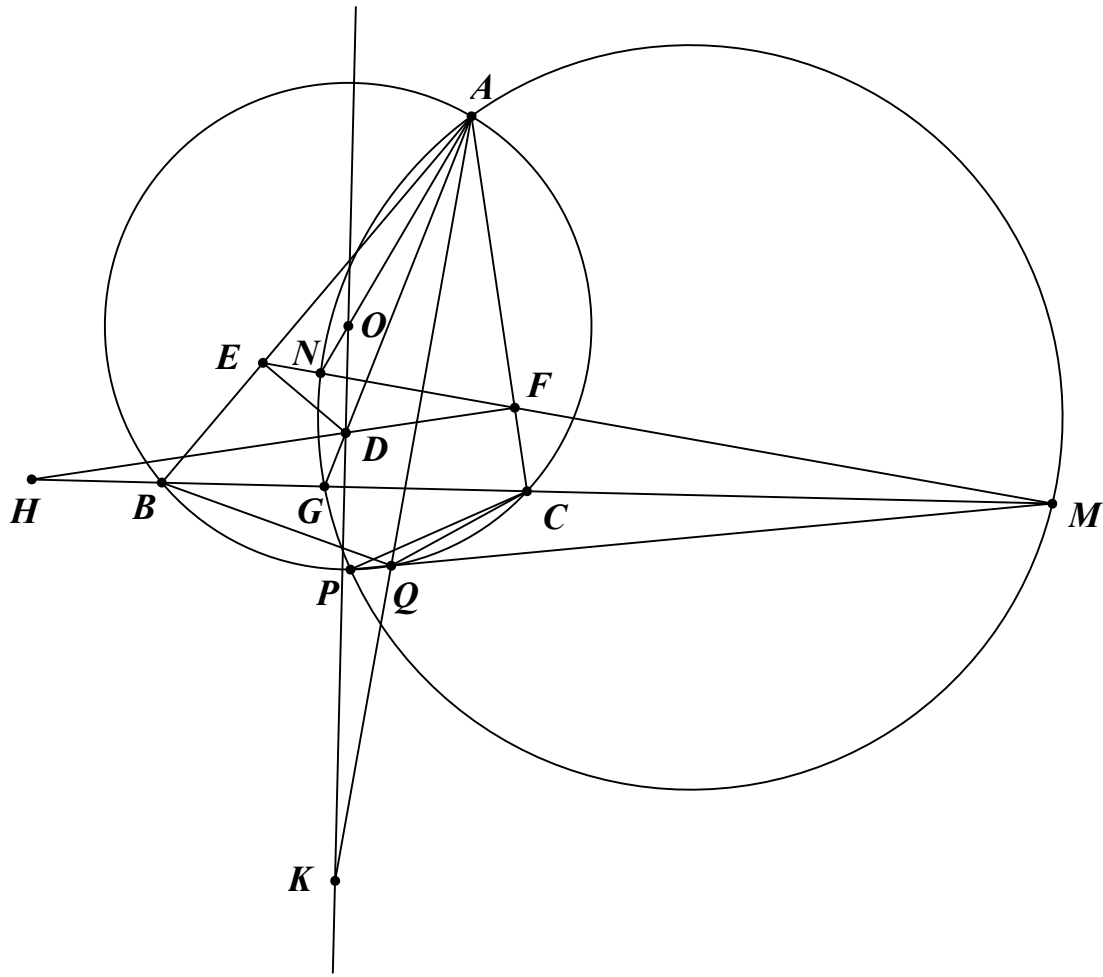
c) Sử dụng phép vị tự tâm  $A$  tỷ số  $\frac{AD}{AR}$  và kết quả ý 1b), bài toán 3. □

**Bài toán 14.** Cho tam giác  $ABC$  không cân nội tiếp đường tròn  $(O)$ , điểm  $D$  thay đổi trên trung trực  $BC$  sao cho  $AD$  không song song với  $(BC)$ .  $EF$  theo thứ tự là hình chiếu của  $D$  trên  $AB, AC$ .  $EF$  cắt  $BC, AO$  theo thứ tự ở  $M, N$ .

a) Chứng minh rằng đường tròn  $(AMN)$  đi qua giao điểm của  $AD$  và  $BC$ .

b) Đường tròn  $(AMN)$  cắt  $(O)$  tại  $P$  khác  $A$ .  $MP$  cắt  $(O)$  tại  $Q$  khác  $P$ . Chứng minh rằng  $\angle BAD = \angle CAQ$ . Từ đó chứng minh rằng nếu  $B, C, D$  và  $(O)$  cố định,  $A$  thay đổi trên  $(O)$  thì  $AQ$  luôn đi qua một điểm cố định.

c) Chứng minh rằng nếu tam giác  $ABC$  cố định,  $D$  thay đổi trên trung trực  $BC$  thì giao điểm tiếp tuyến tại  $E, F$  của đường tròn  $(AEF)$  thuộc một đường thẳng cố định.

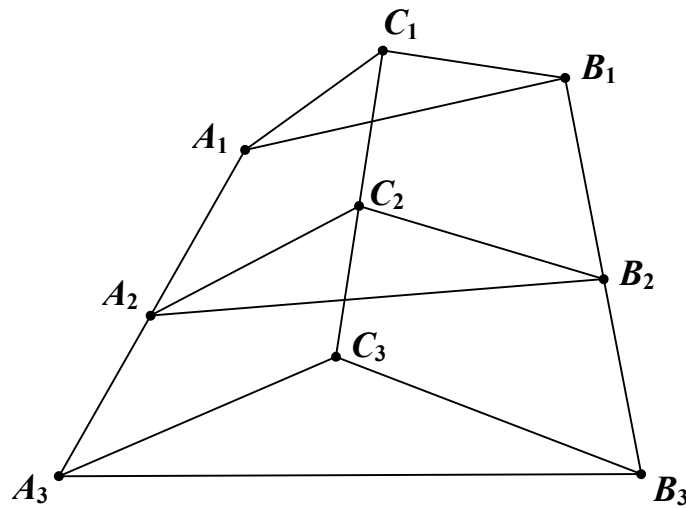


**Lời giải.** a) Gọi  $AD$  cắt  $BC$  tại  $G$ ,  $DF$  cắt  $BC$  tại  $H$ . Ta có  $\angle BAN = \angle CHF = 90^\circ - \angle ACB$ . Tứ giác  $AEDF$  nội tiếp nên  $\angle DAE = \angle DFE$ . Do đó  $\angle GAN = \angle DAE - \angle BAN = \angle DFE - \angle CHF = \angle GMN$  nên  $A, M, N, G$  cùng thuộc một đường tròn. Vậy đường tròn  $(AMN)$  đi qua giao điểm  $G$  của  $AD, BC$ .

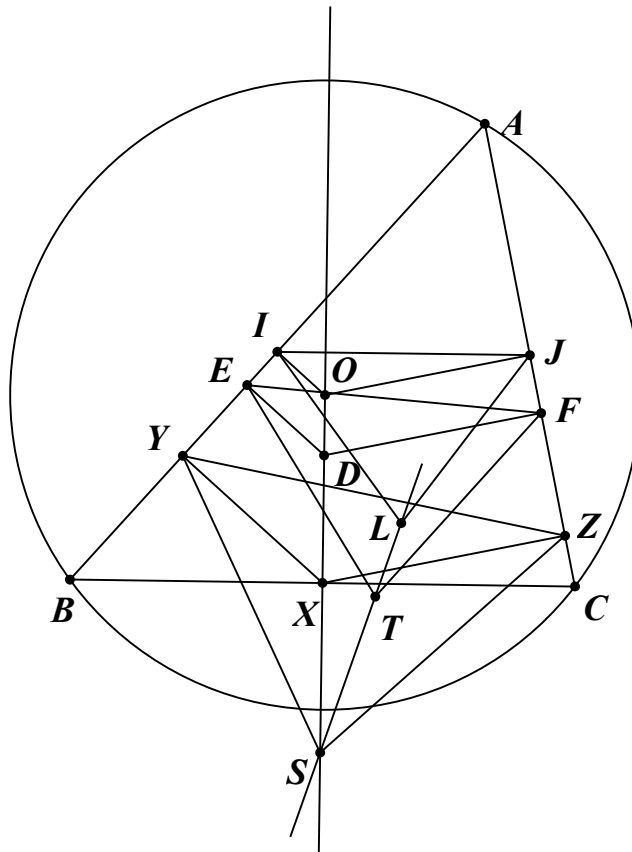
b) Chú ý rằng  $A, G, Q, M$  cùng thuộc một đường tròn nên ta có  $\angle BAD = \angle AGM - \angle ABC = \angle APM - \angle APC = \angle CPQ = \angle CAQ$ .  $AQ$  cắt trung trực  $BC$  tại  $K$ . Chú ý rằng ta có  $\angle CAQ = \angle BAD = \angle DFE$  và  $DF \perp AC$  nên  $AQ \perp EF$ . Lại có  $OK \perp BC$  nên  $\angle OKA = \angle GMN = \angle OAD$ , từ đó  $OA^2 = OD \cdot OK$ . Vì  $B, C, D$  và  $(O)$  cố định,  $A$  thuộc  $(O)$  nên  $OA, OD$  không đổi, do đó  $K$  cố định. Vậy  $AQ$  luôn đi qua điểm  $K$  cố định.

c) Để giải quyết ý 14c) chúng ta cần có bổ đề sau đây.

**Bổ đề.** Cho hai bộ ba điểm thẳng hàng  $A_1, A_2, A_3$  và  $B_1, B_2, B_3$  sao cho  $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_3}} = k$ . Dựng các tam giác  $C_1A_1B_1, C_2A_2B_2, C_3A_3B_3$  đôi một đồng dạng cùng hướng. Khi đó  $C_1, C_2, C_3$  thẳng hàng và  $\frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{C_1C_3}} = k$ .



**Chứng minh.** Ta có  $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_2B_1}$ ,  $k\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{A_1A_3} + k\overrightarrow{A_3B_3} + k\overrightarrow{B_3B_1}$ . Trừ từng vế hai đẳng thức với chú ý rằng  $\overrightarrow{A_1A_2} = k\overrightarrow{A_1A_3}$ ,  $\overrightarrow{B_1B_2} = k\overrightarrow{B_1B_3}$  ta có  $(1-k)\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} - k\overrightarrow{A_3B_3}$ . Do các tam giác  $C_1A_1B_1$ ,  $C_2A_2B_2$ ,  $C_3A_3B_3$  đôi một đồng dạng cùng hướng nên  $\frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{A_2C_2}{A_2B_2} = \frac{A_3C_3}{A_3B_3} = m$  và  $(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}) = (\overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_2C_2}) = (\overrightarrow{A_3B_3}, \overrightarrow{A_3C_3}) = \alpha \pmod{2\pi}$ . Như vậy các vector  $\overrightarrow{A_1C_1}$ ,  $\overrightarrow{A_2C_2}$ ,  $\overrightarrow{A_3C_3}$  theo thứ tự là ảnh của các vector  $m\overrightarrow{A_1B_1}$ ,  $m\overrightarrow{A_2B_2}$ ,  $m\overrightarrow{A_3B_3}$  trong phép quay vector góc quay  $\alpha$ , do đó ta thu được  $(1-k)\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_2C_2} - k\overrightarrow{A_3C_3}$ . Ta có các đẳng thức vector  $\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2C_2}$ ,  $k\overrightarrow{C_1C_3} = k\overrightarrow{C_1A_1} + k\overrightarrow{A_1A_3} + k\overrightarrow{A_3C_3}$ . Trừ từng vế hai đẳng thức ta được  $\overrightarrow{C_1C_2} - k\overrightarrow{C_1C_3} = (\overrightarrow{A_1A_2} - k\overrightarrow{A_1A_3}) + [(1-k)\overrightarrow{A_1C_1} - (\overrightarrow{A_2C_2} - k\overrightarrow{A_3C_3})] = \vec{0}$ . Từ đó suy ra  $C_1, C_2, C_3$  thẳng hàng và  $\frac{\overrightarrow{C_1C_2}}{\overrightarrow{C_1C_3}} = k$ . Bổ đề được chứng minh xong.  $\square$



$X$  là trung điểm  $BC$ .  $I, J$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên  $AB, AC$ ;  $Y, Z$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $X$  trên  $AB, AC$ .  $L$  là giao điểm các tiếp tuyến tại  $I, J$  của  $(AIJ)$ ,  $S$  là giao điểm các tiếp tuyến tại  $Y, Z$  của đường tròn  $(AYZ)$ ,  $T$  là giao điểm các tiếp tuyến tại  $E, F$  của  $(AEF)$ . Dễ thấy  $\frac{IE}{IY} = \frac{OD}{OX} = \frac{JF}{JZ}$  và các tam giác  $LIJ, TEF, SYZ$  đôi một đồng dạng, theo bổ đề trên ta có  $L, T, S$  thẳng hàng. Vậy  $T$  thuộc đường thẳng  $SL$  cố định.  $\square$

**Nhận xét.** Ta có thể thấy rằng ý 14c) và bài toán 2 đều là hệ quả của bổ đề trên. Chúng ta cũng có thể chứng minh bổ đề bằng cách sử dụng phép đồng dạng. Nói riêng, ý 14c) cũng có thể giải bằng phép đồng dạng rất đẹp mắt. Công việc này dành cho bạn đọc xem như bài tập.

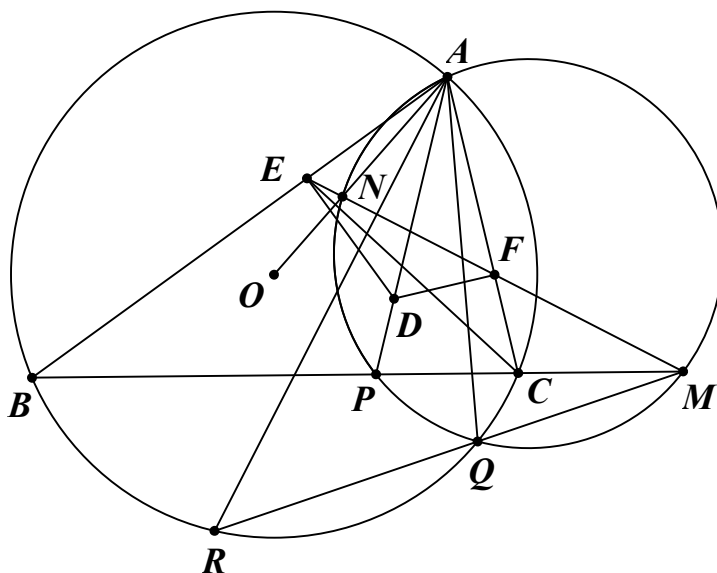
Kết luận của ý 14c) vẫn đúng nếu  $D$  di động trên một đường thẳng  $\Delta$  cố định, các đường thẳng  $DE, DF$  có phương không đổi và tương ứng không song song với  $AB, AC$ . Ta có thể phát biểu bài toán đó như sau.

**Bài toán 15.** Cho tam giác  $ABC$  và các đường thẳng  $\Delta, \Delta_B, \Delta_C$  cố định sao cho  $\Delta_B$  không song song với  $AB, \Delta_C$  không song song với  $AC$ .  $D$  thay đổi trên  $\Delta$ .  $E, F$  theo thứ tự thuộc  $AB, AC$  sao cho  $DE \parallel \Delta_B, DF \parallel \Delta_C$ . Chứng minh rằng giao điểm tiếp tuyến tại  $E, F$  của đường tròn  $(AEF)$  luôn thuộc một đường cố định.

Ta có thể tổng quát bài toán 1 cho điểm  $D$  bất kỳ trong mặt phẳng như sau.

**Bài toán 16.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  và điểm  $D$  bất kỳ trong mặt phẳng.  $E, F$  theo thứ tự là hình chiếu của  $D$  trên  $AB, AC$ . Giả sử  $EF$  cắt  $BC, AO$  theo thứ tự ở  $M, N$ ;  $AD$  cắt  $BC$  tại  $P$ .

- a) Chứng minh rằng  $A, M, N, P$  cùng thuộc một đường tròn.  
 b) Đường tròn  $(AMN)$  cắt  $(O)$  tại  $Q$  khác  $A$ .  $MQ$  cắt  $(O)$  tại  $R$  khác  $Q$ . Chứng minh rằng  $\angle BAP = \angle CAR$ .  
 c) Chứng minh rằng khi  $B, C, D$  và  $(O)$  cố định thì giao điểm các tiếp tuyến tại  $E, F$  của đường tròn  $(AEF)$  luôn thuộc một đường tròn cố định.



Từ bài toán 16, chúng ta có thể đề xuất các bài toán sau.

**Bài toán 17.** Cho tam giác  $ABC$  không cân nội tiếp đường tròn  $(O)$ , điểm  $M$  trên phân giác góc  $\angle BAC$ .  $A_1, B_1, C_1$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $BC, CA, AB$ .  $A_1C_1$  cắt  $AC$  tại  $B_2$ .  $BO$  cắt  $A_1C_1$  tại  $B_3$ . Đường tròn  $(BB_2B_3)$  cắt  $(O)$  tại  $B_4$  khác  $B$ .  $B_2B_4$  cắt  $(O)$  tại  $B_5$  khác  $B_4$ .  $C_5$  xác định tương tự. Chứng minh rằng  $AM, BB_5, CC_5$  đồng quy.

**Bài toán 18.** Cho tam giác  $ABC$  không cân nội tiếp đường tròn  $(O)$ , điểm  $M$  nằm trong tam giác  $AM, BM, CM$  cắt  $BC, CA, AB$  theo thứ tự ở  $A_1, B_1, C_1$ . Gọi  $A_b, A_c$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $AB, AC$ .  $AO$  cắt  $A_bA_c$  tại  $A_2$ . Đường tròn  $(AA_1A_2)$  cắt  $A_bA_c, (O)$  theo thứ tự ở  $A_a, A_3$  trong đó  $A_3$  khác  $A$ .  $A_aA_3$  cắt  $(O)$  tại  $A_4$  khác  $A_3$ .  $B_4, C_4$  xác định tương tự. Chứng minh rằng  $AA_4, BB_4, CC_4$  đồng quy.

Với tư tưởng tạo ra các yếu tố cố định và thay đổi, tác giả xin đề xuất các bài toán tổng quát sau để bạn đọc cùng suy nghĩ.

**Bài toán 19.** Cho đường tròn  $(O)$  có dây  $BC$  cố định và  $A$  thay đổi trên  $(O)$ .  $P$  là điểm cố định trong mặt phẳng.  $E, F$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $P$  trên  $AB, AC$ . Chứng minh giao điểm các tiếp tuyến tại  $E, F$  của đường tròn  $(AEF)$  luôn thuộc một đường tròn cố định.

**Bài toán 20.** Cho đường tròn  $(O)$  và dây  $BC$  cố định,  $AD$  là một đường kính thay đổi của  $(O)$ .  $P$  là một điểm cố định trong mặt phẳng.  $E, F, G, H$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $P$  trên  $AB, AC, DB, DC$ .  $S$  là giao điểm các tiếp tuyến tại  $E, F$  của đường tròn  $(AEF)$ .  $T$  là giao điểm các tiếp tuyến tại  $G, H$  của đường tròn  $(DGH)$ . Chứng minh rằng  $ST$  luôn đi qua một điểm cố định.

Như vậy, tác giả đã trình bày xong một số khai thác và phát triển xung quanh bài hình học số 3 trong kỳ VMO 2016. Mong rằng độc giả tiếp tục khai thác được nhiều điều thú vị xung quanh cấu hình này.

Tác giả xin chân thành cảm ơn thầy **Trần Quang Hùng** giáo viên trường THPT chuyên KHTN đã đọc và đưa ra những ý kiến quý báu để bài viết được hoàn thiện hơn.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Trần Nam Dũng, Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quang Hùng, Lê Phúc Lữ, Lời giải và bình luận đề thi VMO 2016.  
<https://www.dropbox.com/s/kuqimymkc3dcy8/loi-giai-quoc-gia.pdf>
- [2] Trần Quang Hùng, Về một bài toán hay trên THPT, Blog Hình học sơ cấp  
<http://analgeomatrica.blogspot.com/2014/06/ve-mot-bai-toan-hay-tren-thpt.html>



# VỀ BÀI HÌNH HỌC G5 TRONG IMO SHORTLIST NĂM 2000

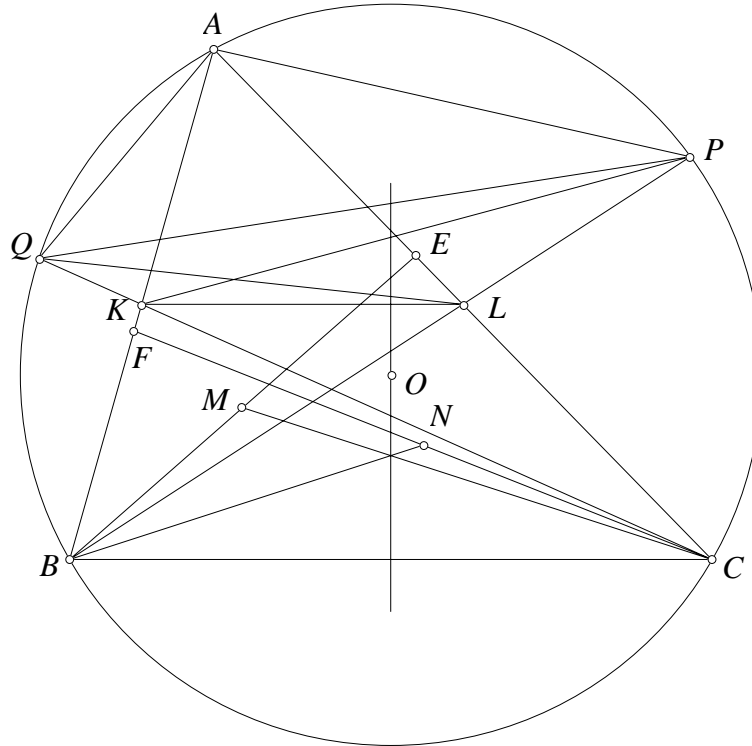
Trần Quang Hùng  
 (THPT chuyên KHTN, Hà Nội)

Bài viết tổng quát hóa bài toán G5 trong IMO Shortlist năm 2000 theo nhiều hướng khác nhau, với mỗi hướng tổng quát sẽ cho chúng ta những áp dụng bất ngờ và thú vị khác nhau.

## 1. Lời giải và các mở rộng

Trong IMO Shortlist 2000 có bài toán hình học G5 như sau [1]

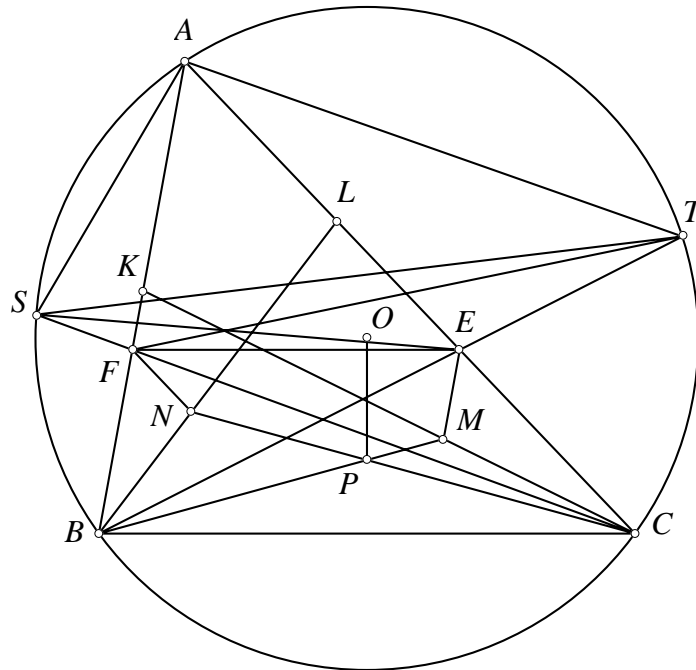
**Bài toán 1.** Cho tam giác  $ABC$  với đường đối trung  $BE, CF$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm của  $BE, CF$ . Chứng minh rằng  $BN, CM$  và trung trực của  $BC$  đồng quy.



**Lời giải.** Cho đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Đường trung tuyến  $BL, CK$  kéo dài cắt  $(O)$  tại  $P, Q$ . Vì  $BE, CF$  là đối trung, ta dễ thấy các tam giác  $BFC$  và  $QAC$  đồng dạng. Các tam giác này có các trung tuyến  $BN, QL$ , nên  $\angle NBC = \angle CQL$ . Tương tự,  $\angle MCB = \angle BPK$ . Mặt khác, dễ thấy  $KL \parallel BC$ , do vậy  $\angle QPL = \angle QCB = \angle LKC$ . Từ đó tứ giác  $PQKL$  nội tiếp. Nên  $\angle MCB = \angle BPK = \angle CQL = \angle NBC$  hay  $BN, CM$  và trung trực của  $BC$  đồng quy. Ta có điều phải chứng minh.  $\square$

**Nhận xét.** Đây là một bài toán hay và nó đã được sử dụng lại nhiều lần trong [2,3,4]. Đã có nhiều lời giải được đề nghị. Các lời giải từ tính toán cho tới các lời giải thuần túy hình học được lần lượt đưa ra trong [1,2,3,4]. Tuy nhiên ngắn gọn và đẹp nhất là lời giải của tác giả **Tạ Hồng Sơn** trong [2], lời giải đó được tác giả bài viết viết lại như ở trên. Trong lời giải việc dựng thêm đường tròn ngoại tiếp rồi sau đó sử dụng bài toán "đồng dạng trung tuyến" là điểm rất thú vị, chúng ta thấy rằng yếu tố đường tròn không hề xuất hiện trong đề bài nhưng khi giải cần dựng thêm đường tròn ngoại tiếp. Mặt khác trong [3] cũng xuất hiện một mở rộng cho bài toán này. Các bài toán dưới đây trình bày một số mở rộng thú vị khác và các áp dụng của những bài toán này. Bài toán mở rộng sau được tác giả đề nghị trong kỳ thi kiểm tra trường Đông toán học ở Vinh năm 2015 với lời giải sử dụng ý tưởng của lời giải trên

**Bài toán 2.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn, không cân. Các điểm  $E, F$  lần lượt thuộc đoạn thẳng  $CA, AB$  sao cho  $EF \parallel BC$ . Lấy điểm  $M$  nằm trong tam giác  $ABC$  sao cho  $EM \parallel AB$  và  $\angle ECM = \angle FCB$ . Lấy điểm  $N$  nằm trong tam giác  $ABC$  sao cho  $FN \parallel AC$  và  $\angle FBN = \angle EBC$ . Gọi  $BM$  cắt  $CN$  tại  $P$ . Chứng minh rằng  $P$  luôn thuộc một đường thẳng cố định khi  $E, F$  di chuyển.



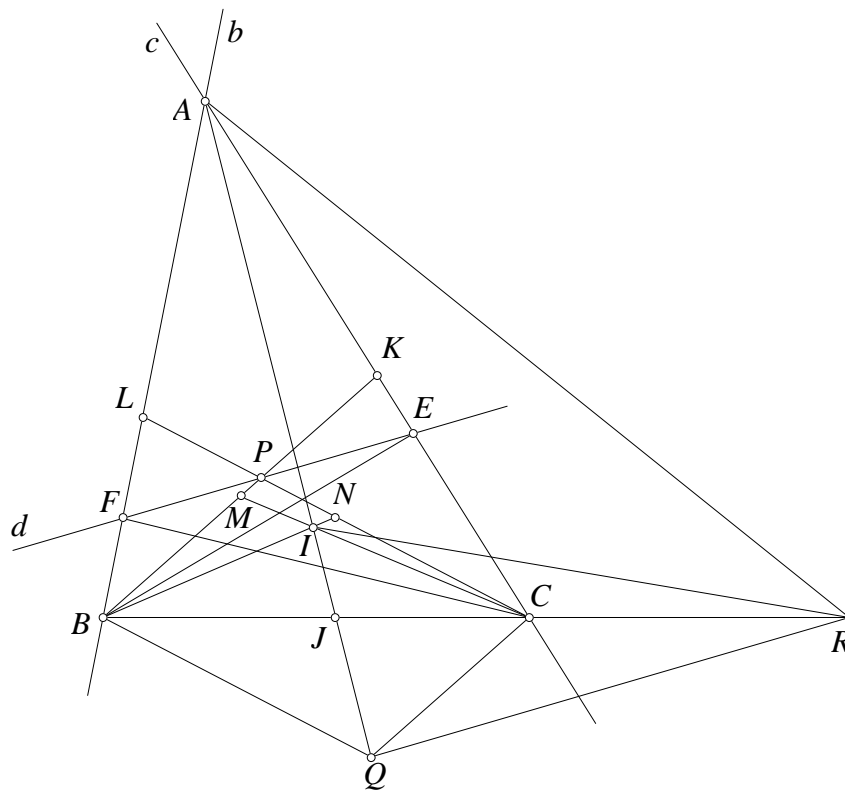
**Lời giải.** Gọi  $(O)$  là đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Gọi  $CF, BE$  lần lượt cắt  $(O)$  tại  $S, T$  khác  $C, B$ . Gọi  $CM, BN$  cắt  $AB, AC$  tại  $K, L$ . Từ đề bài ta có  $\angle CBL = \angle TBA$ , lại từ góc nội tiếp ta có  $\angle LCB = \angle ATB$ . Từ đó  $\triangle BAT \sim \triangle BLC$ . Theo định lý Thales ta lại có  $\frac{FB}{FA} = \frac{NB}{NL}$ . Từ hai nhận xét trên ta thu được  $\triangle BCN \sim \triangle BTF$ , từ đó suy ra  $\angle BCN = \angle BTF$ . Chứng minh tương tự ta có  $\angle CBM = \angle CSE$ . Lại có  $\angle BEF = \angle EBC = \angle TSC$  ta suy ra tứ giác  $STEF$  nội tiếp. Từ đó  $\angle CBM = \angle CSE = \angle BTF = \angle BCN$ , ta suy ra tam giác  $PBC$  cân tại  $P$  nên  $P$  thuộc trung trực  $BC$  cố định.  $\square$

**Nhận xét.** Khi  $E, F$  là trung điểm  $CA, AB$ , ta thu được bài toán G5. Bài toán mở rộng cũng có nhiều ứng dụng khi  $EF$  trùng với các đường song song đặc biệt của tam giác. Ta đi tới một mở rộng khác cho bài toán 1 như sau

**Bài toán 3.** Cho tam giác  $ABC$  với điểm Lemoine là  $L$  và  $M$  là trung điểm của  $BC$ .  $P$  thuộc đường thẳng  $ML$ .  $PB, PC$  cắt  $CA, AB$  tại  $E, F$ . Gọi  $Q, R$  là trung điểm  $BE, CF$ . Chứng minh rằng  $\angle QCB = \angle RBC$ .

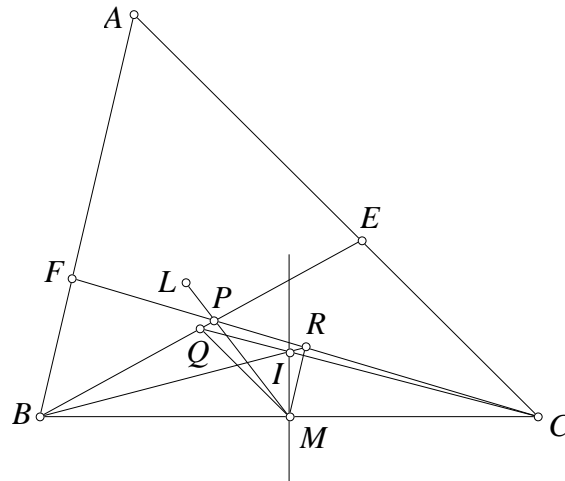
Để giải bài toán này ta sử dụng một bổ đề sau.

**Bổ đề.** Cho  $b, c$  là hai đường thẳng cố định không song song và  $B, C$  cố định lần lượt thuộc  $b, c$ .  $P$  là một điểm di chuyển trên đường thẳng  $d$  cố định.  $PB, PC$  lần lượt cắt  $c, b$  tại  $K, L$ .  $M, N$  là trung điểm của  $BK, CL$ . Chứng minh rằng giao điểm của  $BN$  và  $CM$  luôn nằm trên đường thẳng cố định khi  $P$  thay đổi.



**Chứng minh.** Gọi giao điểm của  $b, c$  là  $A$ .  $BN$  cắt  $CM$  tại  $I$ . Lấy  $Q$  đối xứng  $P$  qua trung điểm  $BC$ . Khi đó  $BQ \parallel CL, CQ \parallel BL$  nên hai chùm  $B(CL, PQ)$  và  $C(BK, PQ)$  điều hòa. Từ đó  $B(CL, NQ) = C(BK, MQ)$  ta suy ra  $A, I, Q$  thẳng hàng. Gọi  $AQ$  cắt  $BC$  tại  $J$  thì hàng  $(AJ, IQ)$  điều hòa. Đường thẳng qua  $Q$  song song  $d$  là đối xứng của  $d$  qua trung điểm  $BC$  nên cố định. Từ đó lấy  $R$  thuộc  $BC$  sao cho  $RQ \parallel d$  thì  $R$  cố định. Từ đó chùm  $R(AJ, IQ)$  điều hòa mà các tia  $RA, RJ, RQ$  cố định nên tia  $RI$  cố định. Từ đó  $I$  thuộc đường thẳng cố định đi qua  $R$ .  $\square$

Quay lại bài toán

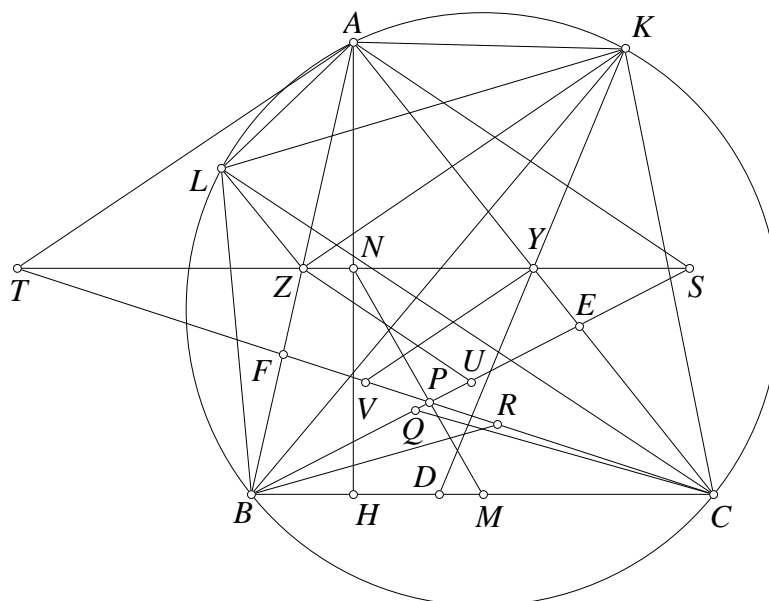


**Lời giải.** Theo bổ đề thì giao điểm của  $BR$  và  $CQ$  luôn nằm trên đường thẳng cố định. Khi  $P$  trùng  $L$  thì theo bài G5 giao điểm thuộc trung trực  $BC$ . Khi  $P$  trùng  $M$  để thấy giao điểm đó cũng chính là  $M$ . Vậy đường thẳng cố định đó phải là trung trực  $BC$ . Như vậy  $BR, CQ$  luôn cắt nhau trên trung trực  $BC$  nói cách khác  $\angle QCB = \angle RBC$ .  $\square$

**Nhận xét.** Mặc dù được coi là mở rộng của bài G5 nhưng cách giải bài toán này vẫn dựa trên kết quả chứng minh của bài G5. Mặt khác ta để ý rằng trong tam giác điểm Lemoine luôn nằm trên đường nối trung điểm của đường cao và cạnh đối diện, do đó ta dễ dàng đề xuất bài toán sau

**Bài toán 4.** Cho tam giác  $ABC$  với đường cao là  $AH$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AH$ .  $P$  thuộc đường thẳng  $MN$ .  $PB, PC$  cắt  $CA, AB$  tại  $E, F$ . Gọi  $Q, R$  là trung điểm  $BE, CF$ . Chứng minh rằng  $\angle QCB = \angle RBC$ .

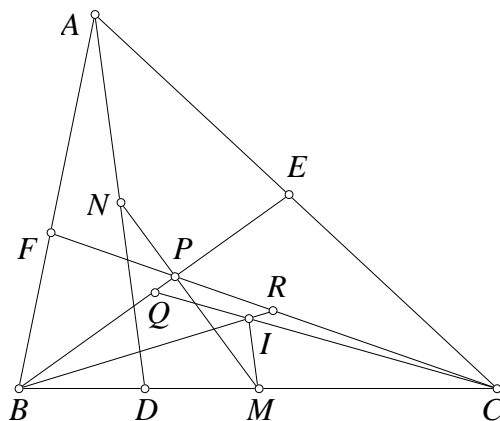
Bài toán trên hoàn toàn có thể chứng minh trực tiếp thông qua bổ đề trong bài trước. Tuy vậy thực sự nếu tách rời thì đây là một mở rộng rất thú vị cho bài toán 1. Vẫn với ý tưởng đồng dạng trung tuyến rất thú vị, tôi xin giới thiệu lời giải của bạn **Trịnh Huy Vũ** học sinh lớp 12A1 Toán, trường THPT chuyên KHTN.



**Lời giải.** Gọi  $Y, Z$  là trung điểm của  $AC, AB$ .  $BE, CF$  lần lượt cắt  $YZ$  tại  $S, T$ .  $U, V$  theo thứ tự là trung điểm  $BS, CT$ . Lấy các điểm  $K, L$  nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  sao cho các tia  $BK, CL$  lần lượt là đẳng giác của  $BE, CF$  trong các góc  $\angle ABC, \angle ACB$ . Ta có  $N$  là trung điểm  $ST$  nên tam giác  $AST$  cân tại  $A$ . Ta suy ra  $\angle VYT = \angle ATY = \angle ASZ = \angle UZS$ . Mặt khác, từ các đường đẳng giác dễ thấy hai tam giác  $CYT$  và  $ALB$  đồng dạng (g.g) lại có  $YV, LZ$  là hai trung tuyến tương ứng. Từ đó ta suy ra  $\angle BLZ = \angle VYT$ . Tương tự,  $\angle CKY = \angle UZS$ . Vậy  $\angle BLZ = \angle CKY$ . Gọi  $YK$  cắt  $BC$  tại  $D$ . Từ đây ta sẽ có  $\angle ZLK = \angle BLK - \angle BLZ = 180^\circ - \angle BCK - \angle CKY = 180^\circ - \angle BDK = 180^\circ - \angle ZYK$  hay tứ giác  $YZLK$  nội tiếp, vậy  $\angle ZLY = \angle ZKY$ . Mà ta dễ có  $\angle CLZ = \angle CLB - \angle BLZ = \angle BKC - \angle CKY = \angle BKY$ . Từ đó suy ra,  $\angle YLC = \angle ZKB$ . Đến đây làm tương tự bài toán 1 ta thu được điều phải chứng minh.  $\square$

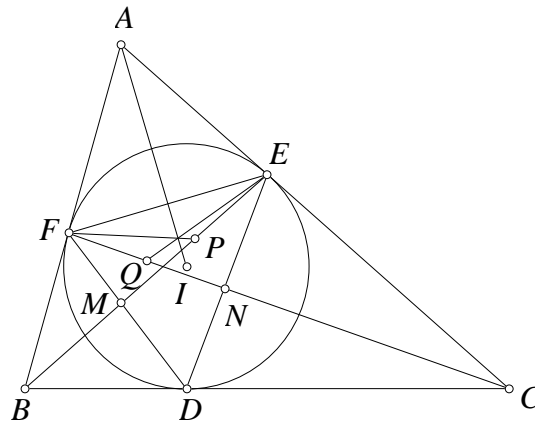
**Nhận xét.** Nếu ta lại kết hợp với việc điểm Lemoine luôn nằm trên đường nối trung điểm của đường cao và cạnh đối diện thì ta thu lại được bài toán G5. Với cách phát biểu này ta hoàn toàn có thể đề xuất bài toán tổng quát hơn nữa như sau

**Bài toán 5.** Cho tam giác  $ABC$  với  $D$  thuộc cạnh  $BC$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AD$ .  $P$  thuộc đường thẳng  $MN$ .  $PB, PC$  cắt  $CA, AB$  tại  $E, F$ . Gọi  $Q, R$  là trung điểm  $BE, CF$ . Gọi  $BR$  cắt  $CQ$  tại  $I$ . Chứng minh rằng  $MI \parallel AD$ .



Ta đã biết một tính chất quen thuộc của đường đối trung là đường đối trung ứng với một đỉnh đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ở hai đỉnh còn lại. Sử dụng tính chất này kết hợp bài toán G5 ta đề xuất bài toán sau cho tam giác và đường tròn nội tiếp.

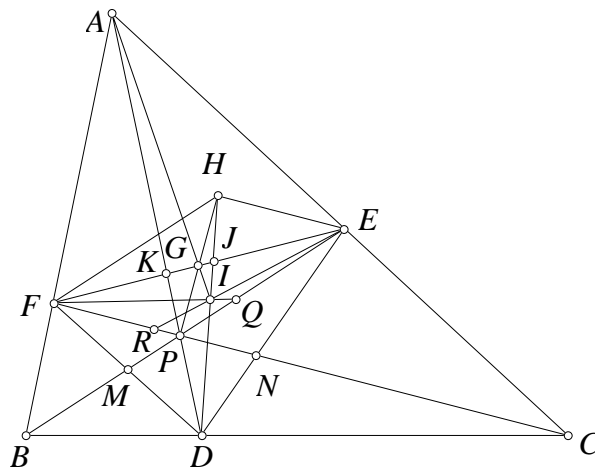
**Bài toán 6.** Cho tam giác  $ABC$  có đường tròn nội tiếp  $(I)$  tiếp xúc  $BC, CA, AB$  tại  $D, E, F$ .  $BE, CF$  lần lượt cắt  $DF, DE$  tại  $M, N$ . Gọi  $P, Q$  là trung điểm của  $EM, FN$ . Chứng minh rằng  $FP, EQ$  và  $AI$  đồng quy.



**Lời giải.** Chú ý trong tam giác  $DEF$  thì  $EM, FN$  là các đường đối trung và  $AI$  là trung trực  $EF$ . Áp dụng bài toán G5 cho tam giác  $DEF$  ta suy ra  $FP, EQ$  và  $AI$  đồng quy.  $\square$

Khi viết bài toán lại cho đường tròn nội tiếp như trên ta lại thu ngay được một mở rộng khá đơn giản như sau

**Bài toán 7.** Cho tam giác  $ABC$  và  $P$  là một điểm bất kỳ. Gọi  $PA, PB, PC$  lần lượt cắt  $BC, CA, AB$  tại  $D, E, F$ .  $BE, CF$  lần lượt cắt  $DF, DE$  tại  $M, N$ . Gọi  $Q, R$  là trung điểm của  $EM, FN$ . Gọi  $G$  là trung điểm  $EF$ . Chứng minh rằng  $FQ, ER$  và  $AG$  đồng quy.



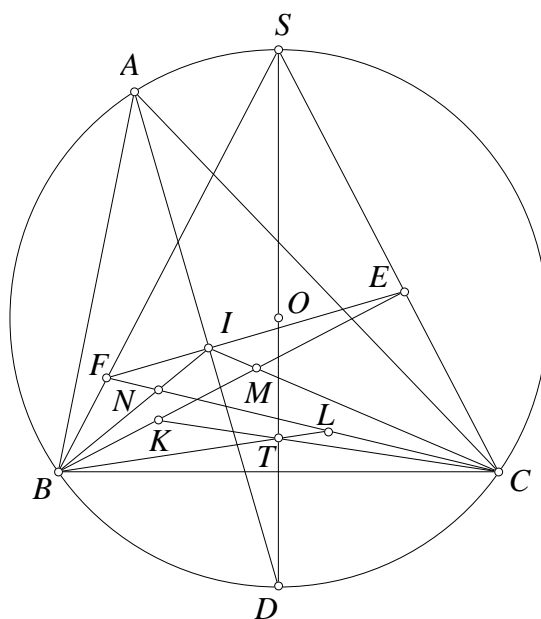
**Lời giải.** Gọi  $H$  đối xứng  $P$  qua  $G$ . Gọi  $FQ$  cắt  $ER$  tại  $I$ . Dễ thấy  $EH \parallel FC$  và  $FH \parallel EB$ . Từ đó ta có các chùm  $E(FN, RH)$  và  $F(EM, QH)$  điều hòa. Từ đó  $E(FN, RH) = F(EM, QH)$  nên  $D, I, H$  thẳng hàng. Gọi  $DH$  cắt  $EF$  tại  $J$  thì hàng  $(DJ, IH)$  điều hòa. Mặt khác gọi  $AD$  cắt  $EF$  tại  $K$  thì hàng  $(DK, PA)$  điều hòa. Từ đó ta có  $(DK, PA) = (DJ, HI)$  nên  $PH, AI$  và  $KJ$  đồng quy tại  $G$  hay  $AI$  đi qua  $G$ .  $\square$

**Nhận xét.** Ý tưởng vẽ song song với hàng trung điểm trong chứng minh bổ đề trên được sử dụng lại trong chứng minh bài toán này. Nếu để ý kỹ thực chất chúng ta có thể thấy bài toán này cũng là một trường hợp riêng của bổ đề đã chứng minh. Trong bài toán tam giác Ceva thực sự cần thiết để sử dụng hàng điều hòa cơ bản  $(DK, PA)$ .

## 2. Một số ứng dụng

Trong phần này ta sẽ sử dụng các bài toán ở phần trước để giải một số bài toán khác, qua đó ta thấy được ý nghĩa của bài toán G5 và các mở rộng.

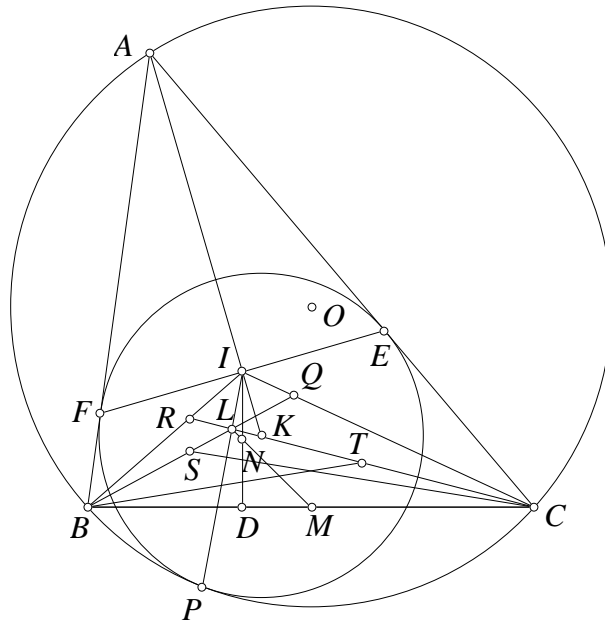
**Bài toán 8.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  với tâm nội tiếp  $I$ .  $S$  là trung điểm cung  $BC$  chứa  $A$ . Đường thẳng qua  $I$  vuông góc  $IA$  cắt  $SC, SB$  lần lượt tại  $E, F$ . Gọi  $BE, CF$  lần lượt cắt  $IC, IB$  tại  $M, N$ . Gọi  $K, L$  lần lượt là trung điểm của  $BM, CN$ . Gọi  $BL$  cắt  $CK$  tại  $T$ . Chứng minh rằng  $S, O, T$  thẳng hàng.



**Lời giải.** Gọi  $AI$  cắt  $(O)$  tại  $D$  khác  $A$ . Theo bài toán quen thuộc thì  $D$  là tâm ngoại tiếp tam giác  $BIC$ . Do đó  $SC, SB$  và  $EF$  chính là các tiếp tuyến tại  $C, B, I$  của tam giác  $IBC$ . Vậy  $BM, CN$  là các đường đối trung của tam giác  $IBC$ . Từ đó theo bài G5 thì  $BL, CK$  cắt nhau trên trung trực  $BC$  hay nói cách khác  $S, O, T$  thẳng hàng.  $\square$

**Nhận xét.** Khi giải bài toán này nếu biết trước bài G5 thì việc nhận ra mô hình của bài G5 không mấy khó khăn nhưng nếu chưa biết trước bài G5 như bổ đề thì bài toán này cũng tương đối là thách thức. Dựa trên nhận xét trong tam giác điểm Lemoine luôn nằm trên đường nối trung điểm của đường cao và cạnh đối diện, kết hợp một số tính chất đường tròn mixtilinear, ta đề xuất bài toán sau

**Bài toán 9.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường tròn nội tiếp  $(I)$  tiếp xúc  $BC$  tại  $D$ . Đường tròn  $(K)$  tiếp xúc  $CA, AB$  và tiếp xúc trong  $(O)$  tại  $P$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm của  $BC$  và  $ID$ . Gọi  $MN$  cắt  $IP$  tại  $L$ .  $LB, LC$  lần lượt cắt  $IC, IB$  tại  $Q, R$ . Gọi  $S, T$  lần lượt là trung điểm của  $BQ, CR$ . Chứng minh rằng  $\angle SCB = \angle TBC$ .



**Lời giải.** Ta chú ý rằng theo tính chất quen thuộc của đường tròn mixtilinear thì  $PI$  đi qua trung điểm cung  $BC$  chứa  $A$ . Theo bài trên suy ra  $PI$  chính là đường đối trung của tam giác  $IBC$ . Mặt khác điểm Lemoine nằm trên  $MN$  là đường nối trung điểm  $BC$  và trung điểm đường cao  $ID$  của tam giác  $IBC$ . Do đó  $PI$  cắt  $MN$  tại  $L$  chính là điểm Lemoine của tam giác  $ABC$ . Từ đó  $BQ, CR$  là đường đối trung của tam giác  $IBC$ . Theo bài toán G5 thì  $\angle SCB = \angle TBC$ .  $\square$

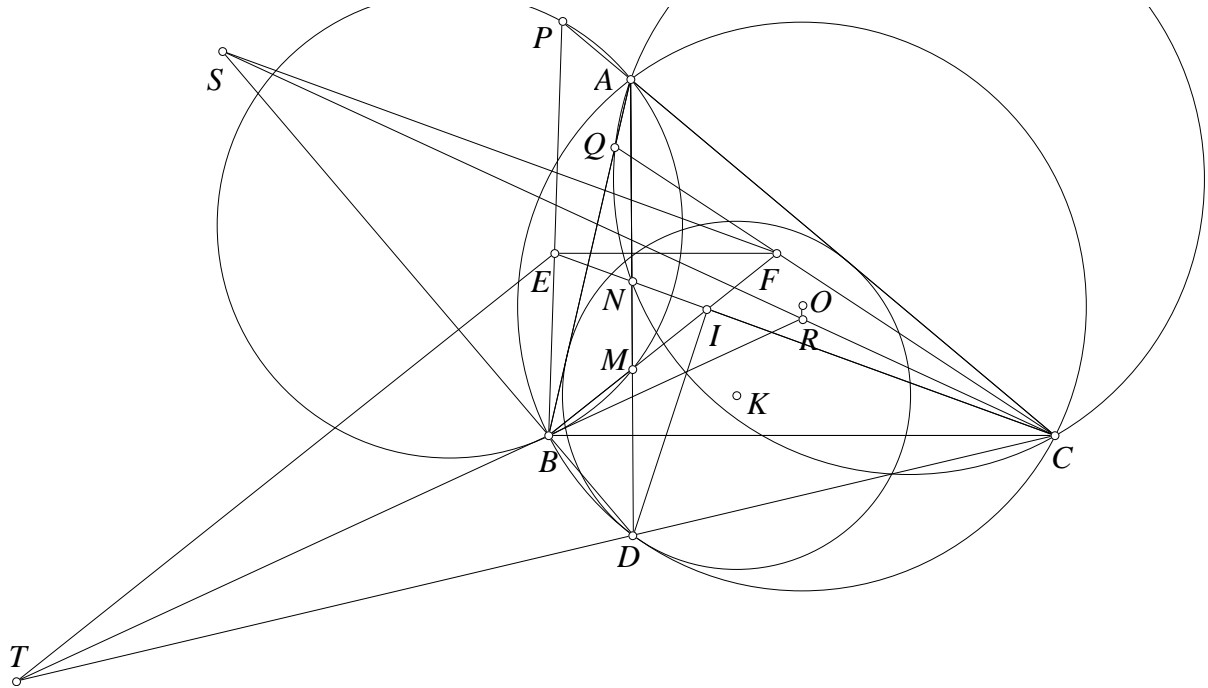
**Nhận xét.** Sau khi biết bài toán 3 thì chúng ta hoàn toàn có thể thay thế trung điểm  $ID$  thành điểm bất kỳ trên  $ID$ .

**Bài toán 10.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường tròn  $(K)$  tiếp xúc  $CA, AB$  và tiếp xúc trong  $(O)$  tại  $D$ .  $AD$  cắt  $IB, IC$  tại  $M, N$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABM$  và  $ACN$  lần lượt cắt  $CA, AB$  tại  $P, Q$  khác  $A$ .  $IC, IB$  cắt  $BP, CQ$  lần lượt tại  $E, F$ . Trên  $DB, DC$  lần lượt lấy  $S, T$  sao cho  $FS \parallel IC$  và  $ET \parallel IB$ . Gọi  $BT$  cắt  $CS$  tại  $R$ . Chứng minh rằng  $RB = RC$ .

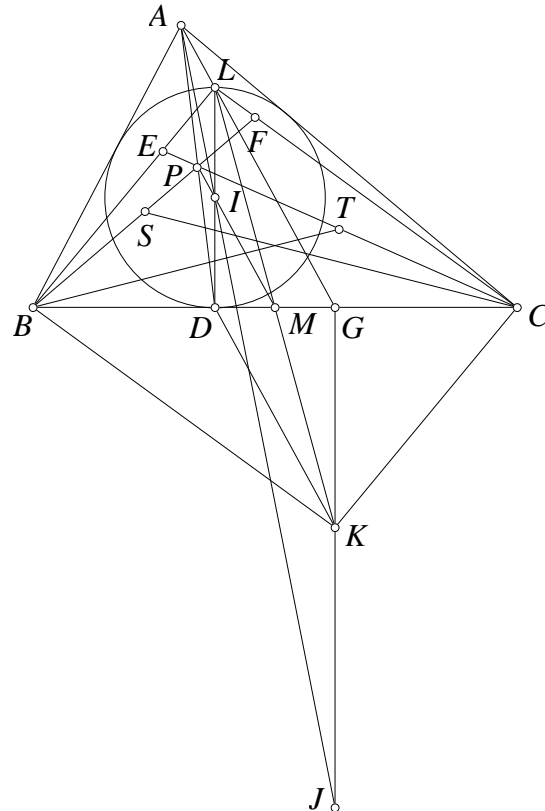
**Lời giải.** Từ tứ giác nội tiếp  $APBM$  ta có  $\angle PBM = \angle MAC = \angle DBC$ . Ta có  $BP$  và  $BD$  là hai tia đẳng giác trong  $\angle IBC$ . Tương tự  $CQ$  và  $CD$  là hai tia đẳng giác trong  $\angle ICB$ . Từ đó  $D$  và giao điểm của  $BP$  và  $CQ$  là hai điểm đẳng giác trong tam giác  $IBC$ . Theo bài trước thì  $D$  nằm trên đường đối trung của tam giác  $IBC$ , nên giao điểm của  $BP$  và  $CQ$  nằm trên trung tuyến của tam giác  $IBC$ , từ đó  $EF \parallel BC$ . Vậy ta áp dụng bài toán 2 vào tam giác  $IBC$  với  $E, F$  lần lượt thuộc  $IC, IB$  sao cho  $EF \parallel BC$ . Lại có  $S, T$  lần lượt thuộc  $DB, DC$  sao cho  $FS \parallel IC$  và  $ET \parallel IB$  nên  $BT$  và  $CS$  cắt nhau trên trung trực  $BC$ .  $\square$

**Nhận xét.** Các giả thiết về đường tròn ngoại tiếp trong đề bài thực chất là để dựng lại điểm đẳng giác của  $D$  trong tam giác  $IBC$ . Ở đây chúng ta có thuận lợi vì điểm  $D$  vừa nằm trên đường đối trung của tam giác  $IBC$  lại vừa nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .





**Bài toán 11.** Cho tam giác  $ABC$  có đường tròn nội tiếp  $(I)$  tiếp xúc  $BC$  tại  $D$ . Tâm bàng tiếp góc  $A$  là  $J$ .  $P$  là trung điểm  $AD$ . Trên đường thẳng qua  $J$  vuông góc  $BC$  lấy  $K$  sao cho  $DK \parallel PI$ . Lấy các điểm  $E, F$  lần lượt thuộc  $PC, PB$  sao cho  $BE \parallel CK$  và  $CF \parallel BK$ . Gọi  $S, T$  là trung điểm của  $BF, CE$ . Chứng minh rằng  $\angle SCB = \angle TBC$ .



**Lời giải.** Theo kết quả quen thuộc  $PI$  đi qua trung điểm  $M$  của  $BC$ . Gọi  $L$  đối xứng  $D$  qua  $I$ . Gọi  $(J)$  tiếp xúc  $BC$  tại  $G$ . Theo kết quả quen thuộc thì  $A, L, G$  thẳng hàng và  $M$  là trung

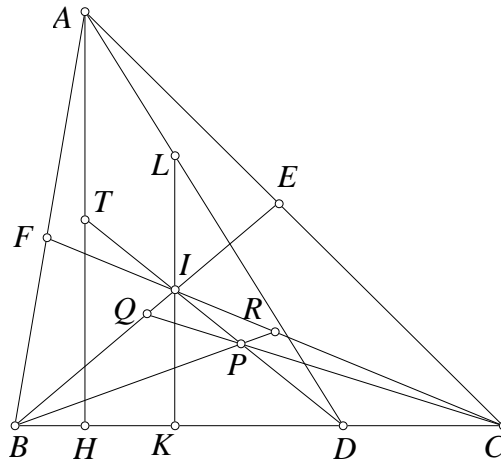
điểm  $DG$ . Từ đó  $LG \parallel IM \parallel DK$  và  $LD \parallel KG$  nên tứ giác  $LDKG$  là hình bình hành. Do đó  $M$  là trung điểm  $KL$ . Vậy  $LBKC$  là hình bình hành. Theo giả thiết  $BE \parallel CK$  và  $CF \parallel BK$  nên  $E, F$  lần lượt thuộc  $LB, LC$ . Trong tam giác  $LBC$  có  $P$  nằm trên đường nối  $IM$  với  $I, M$  lần lượt là trung điểm đường cao  $LD$  và trung điểm  $BC$ . Từ đó áp dụng bài toán 3 cho tam giác  $LBC$ , ta suy ra  $\angle SCB = \angle TBC$ .  $\square$

**Nhận xét.** Trong bài toán trên ta hoàn toàn có thể thay  $P$  bằng điểm bất kỳ trên  $IM$ . Tuy vậy đề ra như trên cũng có điểm thú vị là khi làm bài này bắt buộc chúng ta phải dựng lại trung điểm  $M$  của  $BC$ .

**Bài toán 12.** Cho tam giác  $ABC$  với phân giác  $BE, CF$  cắt nhau tại  $I$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $Q, R$  là trung điểm  $BE, CF$ . Gọi  $BR$  cắt  $CQ$  tại  $P$ . Chứng minh rằng  $IP$  chia đôi  $AH$ .

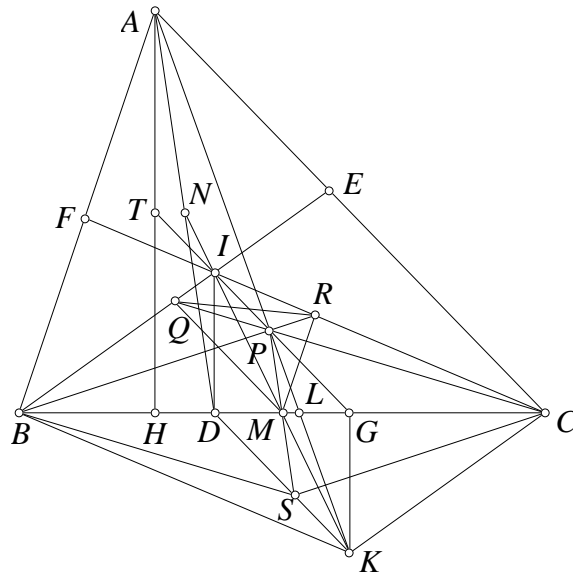
Lời giải thứ nhất dựa theo ý tưởng của bạn **Nguyễn Tiến Dũng**

**Lời giải thứ nhất.** Ta có  $\frac{RI}{RC} = \frac{CI - CR}{CR} = \frac{CI}{CR} - 1 = \frac{2CI}{CF} - 1 = \frac{2(BC + CA)}{AB + BC + CA} - 1 = \frac{BC + CA - AB}{AB + BC + CA}$ . Tương tự  $\frac{QI}{QB} = \frac{BC - CA + AB}{AB + BC + CA}$ . Gọi  $D$  là tiếp điểm đường tròn bàng tiếp góc  $A$  với  $BC$  thì  $\frac{DB}{DC} = \frac{BC + CA - AB}{BC - CA + AB}$ . Từ đó theo định lý Ceva cho tam giác  $IBC$  thì  $ID, BR, CQ$  đồng quy tại  $P$ . Theo bài toán quen thuộc nếu đường tròn nội tiếp  $(I)$  tiếp xúc  $BC$  tại  $K$  và  $KL$  là đường kính của  $(I)$  thì  $A, L, D$  thẳng hàng. Từ đó  $DI$  chia đôi  $AH$  hay  $PI$  chia đôi  $AH$ .  $\square$



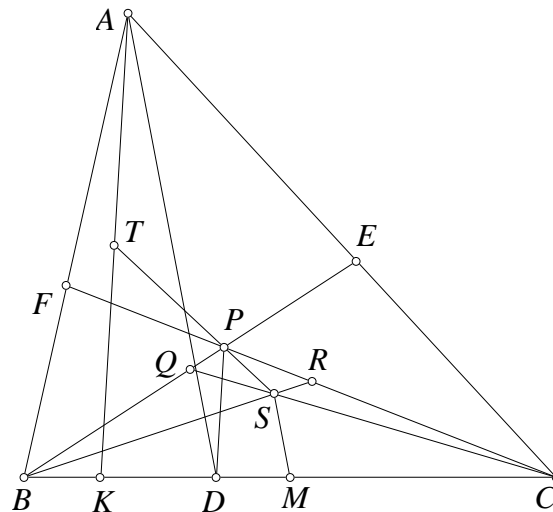
Lời giải thứ hai dựa vào việc sử dụng bài toán 4

**Lời giải thứ hai.** Gọi đường tròn nội tiếp  $(I)$  tiếp xúc  $BC$  tại  $D$ .  $M, N$  là trung điểm của  $BC, AD$ , dễ thấy  $M, N, I$  thẳng hàng. Theo bài toán 4 thì  $PM \parallel AD$ . Dựng  $K$  đối xứng  $I$  qua  $M$  thì tứ giác  $IBKC$  là hình bình hành. Từ đó  $BK \parallel CF$  và  $CK \parallel BE$ . Vậy ta có các chùm  $B(CF, RK)$  và  $C(BE, QK)$  điều hòa. Từ đó  $B(CF, RK) = C(BE, QK)$  nên  $A, P, K$  thẳng hàng và  $AP$  cắt  $BC$  tại  $L$  thì hàng  $(AL, PK)$  điều hòa. Gọi  $PM$  cắt  $DK$  tại  $S$  thì do  $N$  là trung điểm  $AD$  và  $PS \parallel AD$  nên  $M$  là trung điểm  $PS$ . Từ đó nếu  $G$  đối xứng  $D$  qua  $M$  thì  $G$  nằm trên  $IP$ , mặt khác thì  $KG \parallel ID \perp BC$ . Từ đó chùm  $G(AL, PK)$  điều hòa mà  $AH \parallel GK$  nên  $GP$  chia đôi  $AH$  hay  $IP$  chia đôi  $AH$ .  $\square$



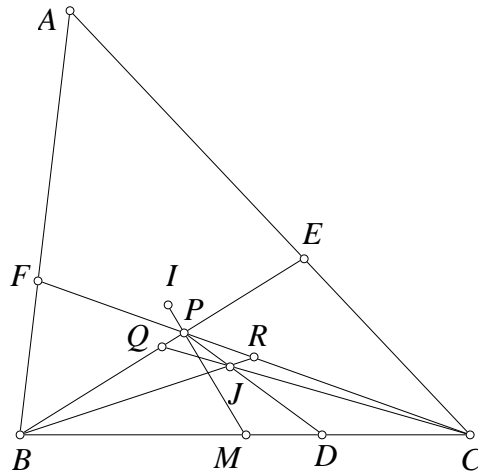
**Nhận xét.** Làm theo cách thứ nhất rất ngắn gọn tuy nhiên khi làm theo cách thứ hai các bạn còn có thể chứng minh được bài tổng quát như sau

**Bài toán 13.** Cho tam giác  $ABC$  với  $P$  bất kỳ.  $PB, PC$  cắt  $CA, AB$  tại  $E, F$ .  $Q, R$  là trung điểm của  $BE, CF$ .  $BR$  cắt  $CQ$  tại  $S$ .  $M$  là trung điểm  $BC$ .  $D$  thuộc  $BC$  sao cho  $AD \parallel SM$ .  $K$  thuộc  $BC$  sao cho  $AK \parallel PD$ . Chứng minh rằng  $PS$  chia đôi  $AK$ .

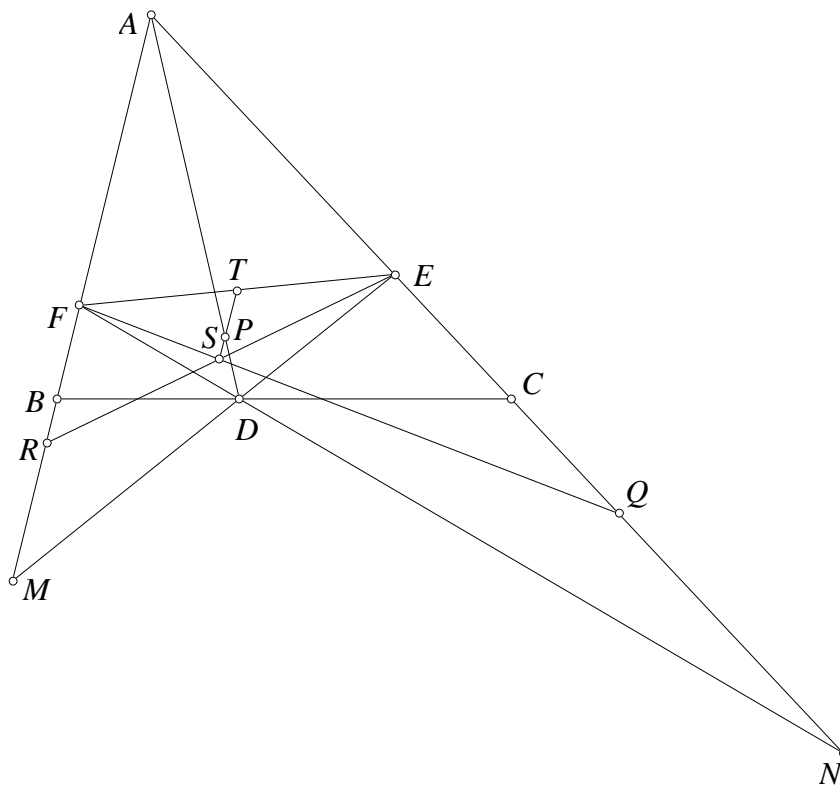


Ta tổng quát một cách khác như sau

**Bài toán 14.** Cho tam giác  $ABC$  với tâm nội tiếp  $I$  và  $M$  là trung điểm của  $BC$ .  $P$  thuộc  $IM$ .  $PB, PC$  cắt  $CA, AB$  tại  $E, F$ . Gọi  $Q, R$  là trung điểm của  $BE, CF$ .  $BR$  cắt  $CQ$  tại  $J$ . Chứng minh rằng  $PJ$  đi qua tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc  $A$  trên  $BC$ .



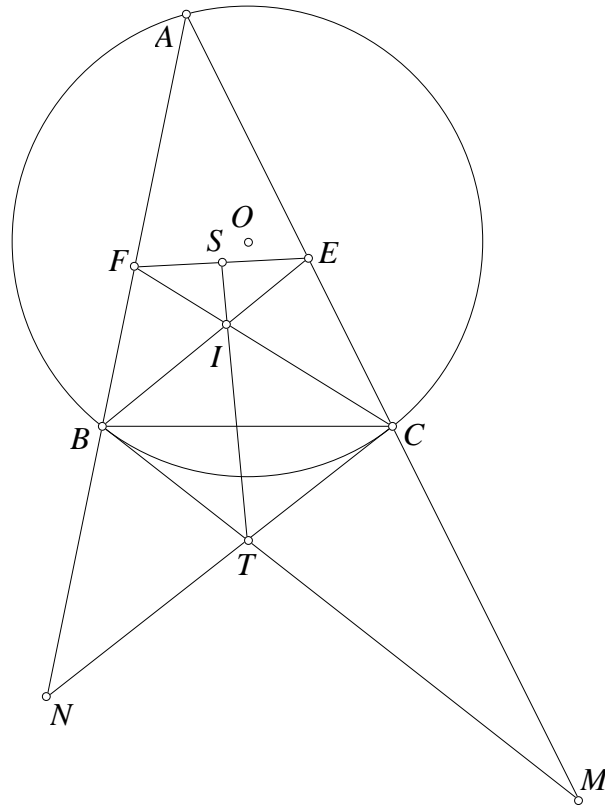
**Bài toán 15.** Cho tam giác  $ABC$  và  $P$  là điểm bất kỳ.  $PA, PB, PC$  cắt  $BC, CA, AB$  lần lượt tại  $D, E, F$ .  $DE, DF$  lần lượt cắt  $AB, AC$  tại  $M, N$ . Gọi  $Q, R$  là trung điểm của  $EN, FM$ .  $ER$  cắt  $FQ$  tại  $S$ . Chứng minh rằng  $PS$  chia đôi  $EF$ .



**Lời giải.** Trong tam giác  $PBC$  có  $DEF$  là tam giác Ceva của điểm  $A$ . Áp dụng bài toán 7 cho tam giác  $PBC$  và điểm  $A$ . Ta có điều phải chứng minh.  $\square$

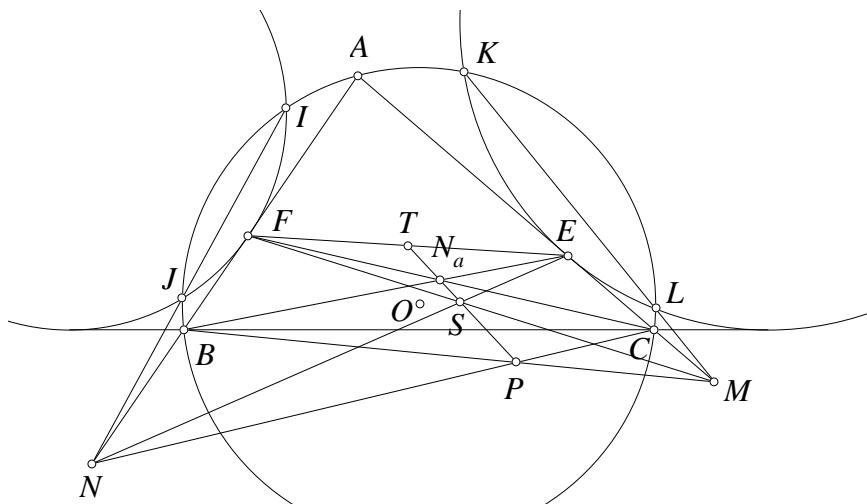
**Nhận xét.** Ta chú ý rằng các hàng điểm  $(AC, EN)$  và  $(AB, FM)$  là điều hòa.  $Q, R$  là trung điểm các đoạn  $EN$  và  $FM$  có nhiều ý nghĩa hình học thú vị.

**Bài toán 16.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Các phân giác  $BE, CF$  cắt nhau tại  $I$ . Tiếp tuyến tại  $B, C$  của  $(O)$  cắt nhau tại  $T$ . Chứng minh rằng  $TI$  chia đôi  $EF$ .



**Lời giải.** Gọi  $TB, TC$  cắt  $CA, AB$  lần lượt tại  $M, N$ . Khi đó  $M$  là trung điểm đoạn nối  $E$  và chân phân giác ngoài đỉnh  $B$  cũng chính là điểm liên hợp điều hòa của  $E$  với  $A, C$ . Tương tự với  $N$ . Áp dụng bài toán 15 ta có ngay  $TI$  chia đôi  $EF$ .  $\square$

**Bài toán 17.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường tròn bàng tiếp góc  $B$  tiếp xúc  $CA$  tại  $E$  và cắt  $(O)$  tại  $K, L$ . Đường tròn bàng tiếp góc  $C$  tiếp xúc  $AB$  tại  $F$  và cắt  $(O)$  tại  $I, J$ .  $KL, IJ$  lần lượt cắt  $CA, AB$  tại  $M, N$ . Gọi  $NE$  cắt  $MF$  tại  $S$  và  $BE$  cắt  $CF$  tại  $N$ . Chứng minh rằng  $SNa$  chia đôi  $EF$ .

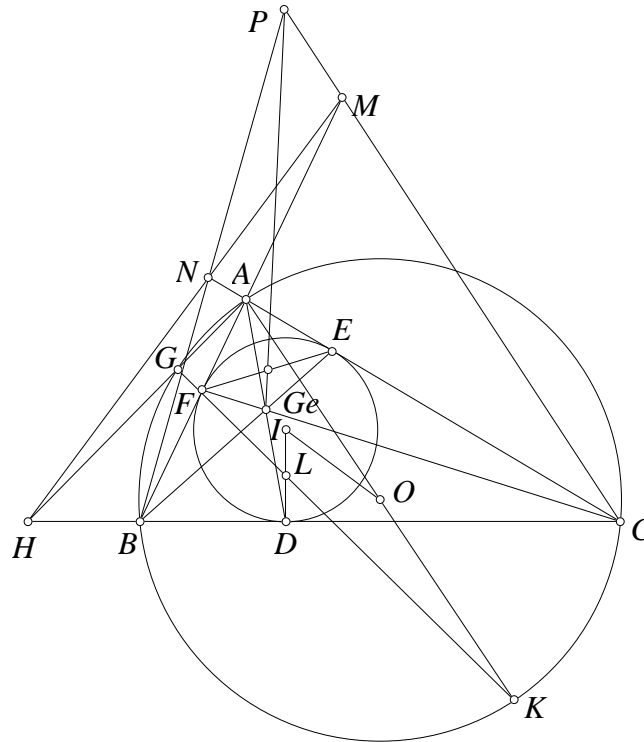


**Lời giải.** Ta có  $ME^2 = MK.ML = MA.MC$ , từ đó  $M$  là trung điểm đoạn nối  $E$  và điểm liên hợp điều hòa của  $E$  với  $A, C$ . Tương tự với  $N$ . Gọi  $BM$  cắt  $CN$  tại  $P$ . Theo định lý Pappus dễ thấy  $P, S, Na$  thẳng hàng. Áp dụng bài toán 15 thì  $PNa$  chia đôi  $EF$ , ta có điều phải chứng minh.  $\square$

Bài toán sau các bạn có thể giải tương tự

### 3. Một số bài toán tự luyện

**Bài toán 18.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường tròn nội tiếp  $(I)$  tiếp xúc  $BC, CA, AB$  tại  $D, E, F$ .  $AK$  là đường kính của  $(O)$ .  $L$  là trung điểm của  $ID$ .  $KL$  cắt  $(O)$  tại  $G$  khác  $K$ .  $AG$  cắt  $BC$  tại  $H$ . Đường thẳng qua  $H$  vuông góc  $OI$  cắt  $CA, AB$  tại  $M, N$ .  $BM$  cắt  $CN$  tại  $P$ .  $BE$  cắt  $CF$  tại  $Ge$ . Chứng minh rằng  $PGe$  chia đôi  $EF$ .



**Bài toán 19.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn, trực tâm  $H$ , tâm ngoại tiếp  $O$ .  $M, N$  là trung điểm  $HB, HC$ . Đường thẳng qua  $H$  vuông góc  $OA$  cắt đường thẳng qua  $M, N$  vuông góc với  $OC, OB$  tại  $K, L$ .  $NK, ML$  lần lượt cắt  $HB, HC$  tại  $S, T$ . Dựng các hình bình hành  $HMUT$  và  $HNVS$ . Chứng minh rằng  $\angle UCB = \angle VBC$ .

**Bài toán 20.** Cho tam giác  $ABC$  có các đường đối trung  $AD, BE, CF$  đồng quy tại  $L$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác.  $X, Y, Z$  là trung điểm của  $AD, BE, CF$ .  $BZ$  cắt  $CY$  tại  $U$ . Tương tự có  $V, W$ . Chứng minh rằng  $AU, BV, CW$  đồng quy tại một điểm trên đường thẳng  $GL$ .

**Bài toán 21.** Cho tam giác  $ABC$  và  $P$  bất kỳ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .  $PA, PB, PC$  lần lượt cắt  $BC, CA, AB$  tại  $D, E, F$ .  $X, Y, Z$  là trung điểm của  $AD, BE, CF$ .  $BZ$  cắt  $CY$  tại  $U$ . Tương tự có  $V, W$ . Chứng minh rằng  $AU, BV, CW$  đồng quy tại một điểm trên đường thẳng  $PG$ .

Bài toán trên lại được mở rộng như sau

**Bài toán 22.** Cho tam giác  $ABC$  với  $P, Q$  là hai điểm bất kỳ.  $QA, QB, QC$  cắt  $BC, CA, AB$  tại  $D, E, F$ .  $PA, PB, PC$  lần lượt cắt  $EF, FD, DE$  tại  $X, Y, Z$ .  $BZ$  cắt  $CY$  tại  $U$ . Tương tự có  $V, W$ . Chứng minh rằng  $AU, BV, CW$  đồng quy tại một điểm trên đường thẳng  $PQ$ .

Kết thúc bài viết tôi xin đề nghị một ứng dụng đẹp mắt của bài toán 1

**Bài toán 23.** Cho tam giác  $ABC$  với trung tuyến  $BE, CF$  và đường đối trung  $AD$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $AD$ . Đường tròn qua  $A, B$  tiếp xúc  $AC$  tại  $BM$  tại  $P$ . Đường tròn qua  $A, C$  tiếp xúc  $AB$  cắt  $CM$  tại  $Q$ .  $AP, AQ$  lần lượt cắt  $BE, CF$  tại  $K, L$ . Chứng minh rằng  $\angle KCA = \angle LBA$ .

Cuối bài viết tác giả muốn nói lời cảm ơn chân thành tới bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương và bạn **Trịnh Huy Vũ** lớp 12A1 Toán trường THPT chuyên KHTN đã đọc kỹ bài viết và giúp tác giả hoàn thiện bài viết này.

## Tài liệu tham khảo

- [1] nice [symmedians in a triangle,  $\angle ABM = \angle BAN$ ]  
<http://artofproblemsolving.com/community/c6h19806p131967>
- [2] angle with tangential circle  
<http://artofproblemsolving.com/community/c6h207440>
- [3] Concurrent  
<http://artofproblemsolving.com/community/c6h193904>
- [4] Angle (Equal)  
<http://artofproblemsolving.com/community/q5h217854p1208193>





# ĐƯỜNG THẲNG SIMSON

Ngô Quang Dương  
 (THPT chuyên KHTN, Hà Nội)

Bài viết này như một tài liệu tổng kết một khá đầy đủ về đường thẳng Simson.

## 1. Giới thiệu

### 1.1. Lời nói đầu

Bài viết này như một tài liệu tổng kết khá đầy đủ về đường thẳng Simson, gọi như vậy là bởi bài viết góp nhặt lại những kết quả quen thuộc và từ những bài viết khác, đúc kết thành tài liệu. Bài viết này hướng tới các bạn học sinh, các giáo viên, những người yêu thích hình học. Chỉ với việc biết những khái niệm và công cụ cơ bản, quen thuộc, bạn đọc có thể hiểu hết được nội dung chi tiết của bài viết. Phần lớn các định lý trong đây là sơ cấp, chỉ có riêng phần cuối, nói về tam giác cong thì tác giả cũng đã cố gắng diễn đạt, trình bày để bạn đọc có thể dễ dàng hiểu được, và không thấy ngại khi đọc về một đường cong bậc cao này.

### 1.2. Kí hiệu trong bài viết

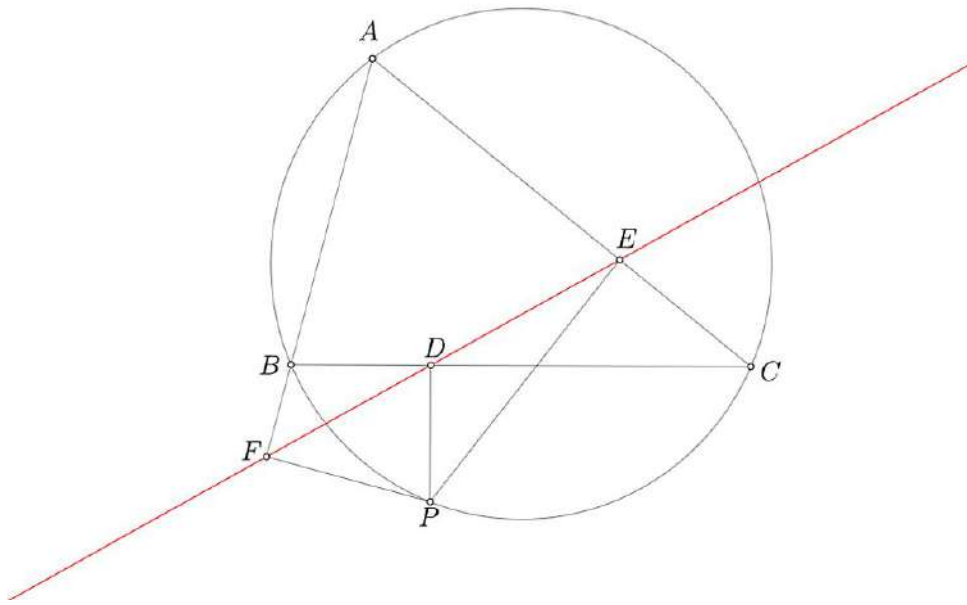
Bài viết sử dụng các khái niệm, công cụ được kí hiệu như trong bảng sau.

Kí hiệu	Nghĩa
$(a, b)$	Góc định hướng giữa hai đường thẳng $a, b \pmod{\pi}$
$\angle(a, b)$	Góc không tù giữa $a, b$
$(A_1 A_2 \dots A_n)$	Đường tròn ngoại tiếp $A_1 A_2 \dots A_n$
$M_{XY}$	Trung điểm $XY$
$\mathcal{H}_O^k$	Phép vị tự tâm $O$ , tỉ số $k$

### 1.3. Đường thẳng Simson

**Định lý 1.**  $P$  nằm trên đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . Khi đó hình chiếu vuông góc của  $P$  lên  $BC, CA, AB$  thẳng hàng.

Đường thẳng đi qua ba hình chiếu đó của  $P$  được gọi là *đường thẳng Simson* của  $P$  với  $\triangle ABC$ . Khái niệm này được đặt theo tên *Robert Simson*[1], giáo sư toán đại học Glasgow, Scotland. Nhưng thực ra đường thẳng này lần đầu được công bố bởi *William Wallace* vào năm 1797 nên đôi khi được gọi là *đường thẳng Wallace-Simson*. Đường thẳng Simson có mối liên hệ với nhiều khái niệm và các kết quả hình học khác và bản thân nó có rất nhiều mở rộng, phát triển.



Hình 1. Đường thẳng Simson

*Chứng minh.* Chứng minh chỉ đơn giản bằng biến đổi góc.

$$\begin{aligned}(DE, DF) &= (DE, DP) + (DP, DF) \\ &= (CE, CP) + (BP, BF) \\ &= (CA, CP) - (BA, BP) \\ &= 0\end{aligned}$$

Do đó  $D, E, F$  thẳng hàng. □

Từ chứng minh trên, ta còn thu được rằng  $D, E, F$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $P$  nằm trên đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

**Định lý 2.** Sau đây là các trường hợp đặc biệt của đường thẳng Simson.

1. Đường thẳng Simson của  $A$  là đường cao từ  $A$  của  $\triangle ABC$ .
2. Đường thẳng Simson của điểm đối xứng với  $A$  qua tâm ngoại tiếp là cạnh  $BC$ .

## 2. Tính chất

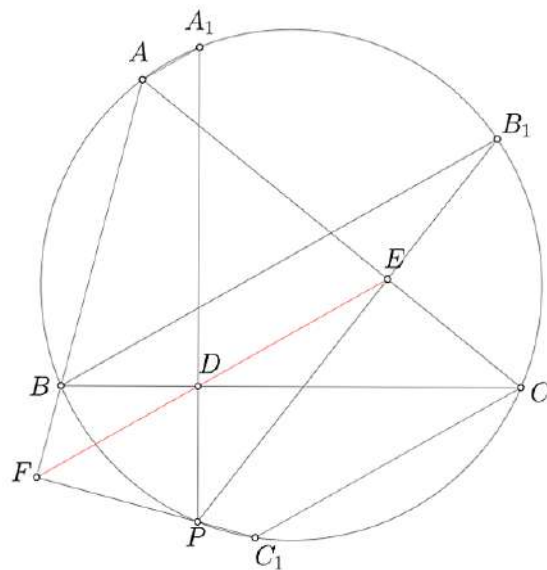
### 2.1. Các tính chất kinh điển

**Định lý 3.**  $PD, PE, PF$  cắt  $(ABC)$  tại  $A_1, B_1, C_1$ .

Thì  $AA_1, BB_1, CC_1$  song song với đường thẳng Simson của  $P$  với  $\triangle ABC$ .

*Chứng minh.*

$$\begin{aligned}(AA_1, DE) &= (AA_1, AC) + (EC, ED) \\ &= (PA_1, PC) + (PC, PD)\end{aligned}$$



Hình 2

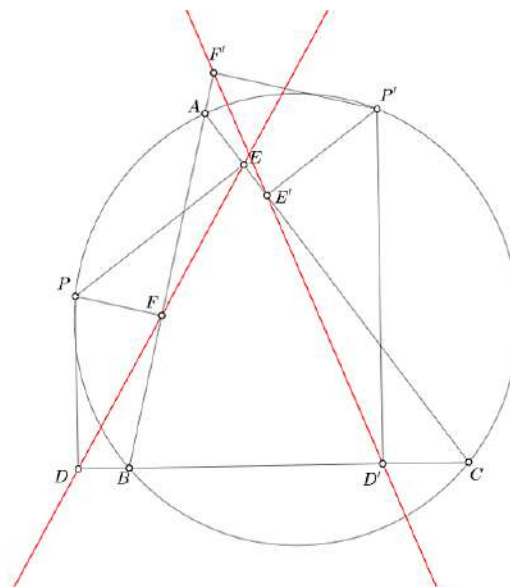
= 0

Vậy  $AA_1 \parallel \overline{DE, F}$ .

□

**Định lý 4.**  $P, P'$  là hai điểm trên  $(ABC)$  thì góc giữa đường thẳng Simson của  $P$  và  $P'$  bằng nửa số đo cung  $PP'$

*Chứng minh.* Gọi  $D', E', F'$  là hình chiếu vuông góc của  $P'$  lên  $BC, CA, AB$ .



Hình 3

$$\begin{aligned} (DE, D'F') &= (DE, DP) + (D'P', D'F') \\ &= (CE, CP) + (BP', BF') \end{aligned}$$

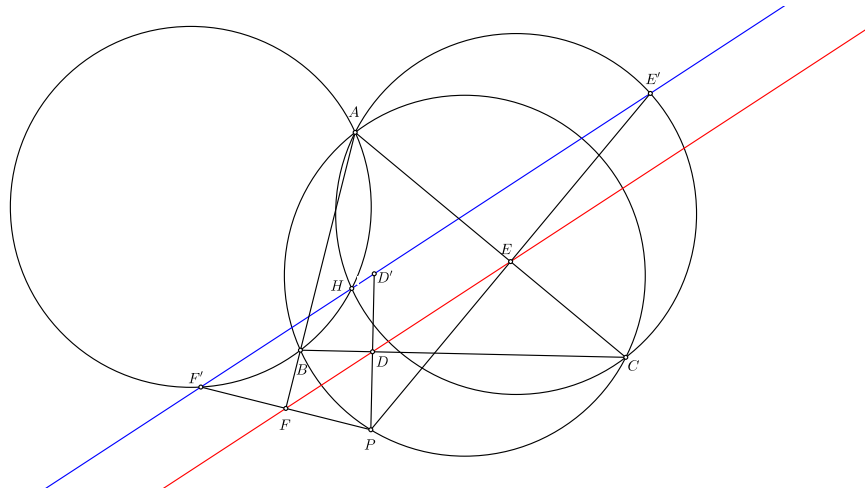
$$\begin{aligned}
 &= (CA, CP) + (CP', CA) \\
 &= (CP', CP)
 \end{aligned}$$

$(CP', CP)$  chính bằng nửa số đo cung  $PP'$ . □

**Định lý 5.**  $H$  là trực tâm  $\triangle ABC$ . Khi đó đường thẳng Simson của  $P$  với  $\triangle ABC$  chia đôi đoạn  $HP$ .

*Chứng minh.* Gọi  $D', E', F'$  là đối xứng của  $P$  qua  $BC, CA, AB$  rồi chỉ ra  $H, D', E', F'$  thẳng hàng. Vậy, chỉ cần chứng minh  $H, E', F'$  thẳng hàng là đủ.

Ta có  $(HA, HC) = (BC, BA) = (PC, PA) = (E'A, E'C)$  nên  $H, E', C, A$  đồng viên. Tương tự ta cũng có  $H, F', A, B$  đồng viên.



Hình 4

$$\begin{aligned}
 (HE', HF') &= (HE', HA) + (HA, HF') \\
 &= (CE', CA) + (BA, BF') \\
 &= (CA, CP) + (BP, BA) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

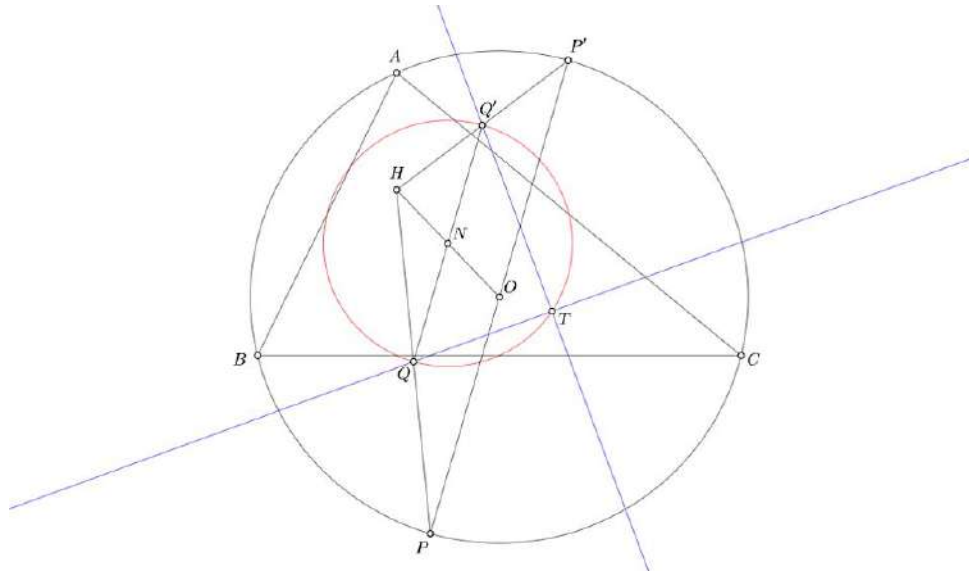
Vị tự tâm  $P$ , tỉ số  $1/2$  thì ta thu được đường thẳng Simson chia đôi đoạn  $HP$ . □

**Định lý 6.**  $P'P$  là đường kính của  $(ABC)$ . Khi đó đường thẳng Simson của  $P$  và  $P'$  vuông góc với nhau tại một điểm trên đường tròn chín điểm của  $\triangle ABC$ .

*Chứng minh.* Gọi  $H$  là trực tâm và  $N$  là tâm đường tròn chín điểm của  $\triangle ABC$ , khi đó  $N$  là trung điểm  $OH$ .  $T$  là giao của đường thẳng Simson của  $P$  và  $P'$  với  $\triangle ABC$ .  $Q, Q'$  là trung điểm  $HP$  và  $HP'$ . Theo định lý 5, đường thẳng Simson của  $P, P'$  lần lượt đi qua  $Q, Q'$ .

$$\mathcal{H}_H^{1/2} : P, P', (ABC) \mapsto Q, Q', \text{đường tròn chín điểm}$$

Vì vậy  $QQ'$  là đường kính đường tròn chín điểm. Hơn nữa  $TQ' \perp TQ$  theo định lý 4, nên  $T$  nằm trên đường tròn chín điểm. □



Hình 5

**Định lý 7.**  $\triangle ABC$  và  $\triangle A'B'C'$  cùng nội tiếp một đường tròn thì góc giữa đường thẳng Simson của  $P$  với  $\triangle ABC$  và  $\triangle A'B'C'$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm  $P$  trên đường tròn ngoại tiếp.

*Chứng minh.* Để cho đơn giản, từ giờ ta kí hiệu đường thẳng Simson của  $P$  với  $\triangle ABC$  là  $s(P, ABC)$ .

$$\begin{aligned} (s(P, ABC), s(P, A'B'C')) &= (s(P, ABC), s(A, ABC)) \\ &\quad + (s(A, ABC), s(A', A'B'C')) \\ &\quad + (s(A', A'B'C'), s(P, A'B'C')) \\ &= (BA, BP) + (BC, B'C') + (BP, BA') \text{ (Định lý 4)} \\ &= (BA, BA') + (BC, BC') + (C'B, C'B') \\ &= (PA, PA') + (PB, PB') + (PC, PC') \end{aligned}$$

Góc này không phụ thuộc vào vị trí của  $P$ . □

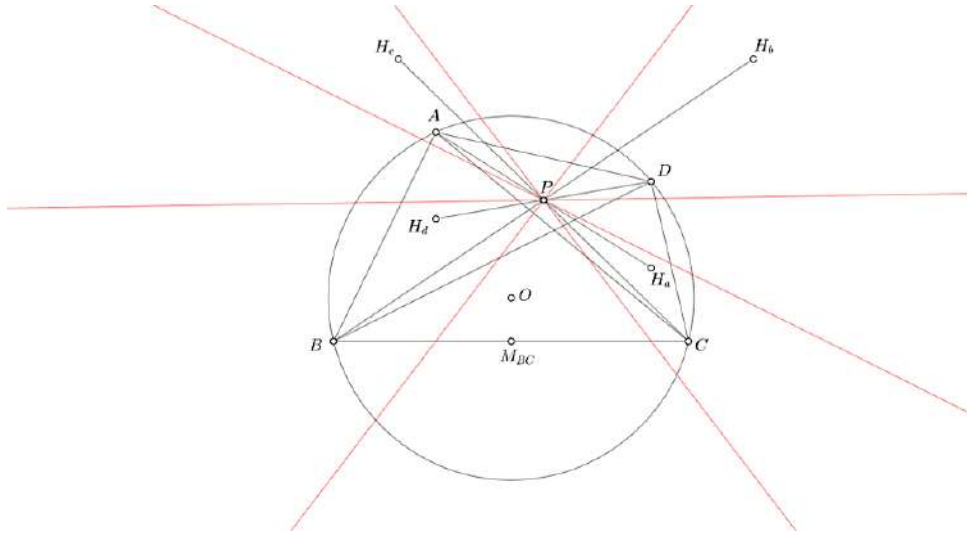
## 2.2. Liên hệ với các khái niệm khác

### 2.2.1. Tứ giác nội tiếp

Ta thu được đường thẳng Simson khi và chỉ khi ta có bốn điểm đồng viên. Với suy nghĩ đó thì đường thẳng Simson hẳn là có liên quan tới tứ giác nội tiếp. Cho một tứ giác nội tiếp, thì ta dễ dàng thu được bốn đường thẳng Simson. Hãy đến với bài toán quen thuộc sau.

**Định lý 8.**  $A, B, C, D$  đồng viên. Khi đó đường thẳng Simson của  $A, B, C, D$  với  $\triangle BCD$ ,  $\triangle CDA$ ,  $\triangle DAB$ ,  $\triangle ABC$  đồng quy tại một điểm  $P$ .

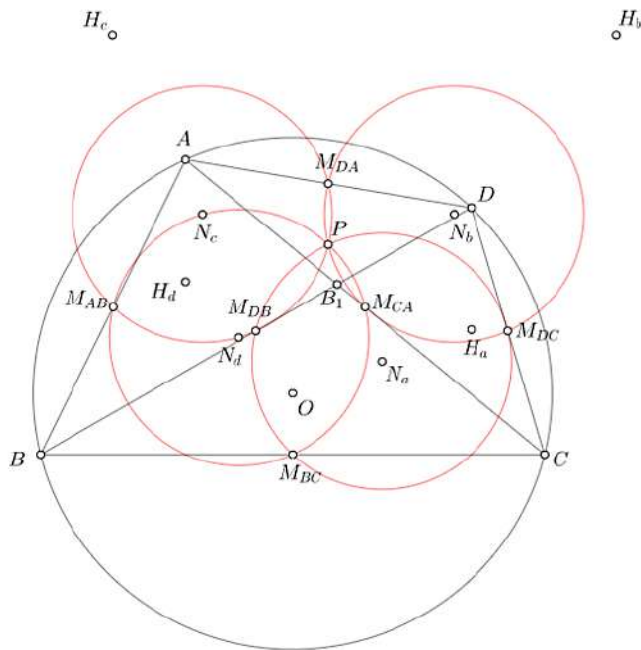
*Chứng minh.* Gọi  $H_a, H_b, H_c, H_d$  là trực tâm  $\triangle BCD$ ,  $\triangle CDA$ ,  $\triangle DAB$ ,  $\triangle ABC$ ,  $O$  là tâm ngoại tiếp  $(ABCD)$ .



Hình 6. Bốn đường thẳng Simson đồng quy

Ta đã biết rằng  $\overrightarrow{AH_d} = \overrightarrow{DH_a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM_{BC}}$ . Do đó,  $ADH_dH_a$  là hình bình hành  $AH_a$ ,  $DH_d$  cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Hoàn toàn tương tự,  $AH_a$ ,  $BH_b$ ,  $CH_c$ ,  $DH_d$  có chung trung điểm  $P$ . Theo định lý 5, đường thẳng Simson của  $A, B, C, D$  với  $\triangle BCD$ ,  $\triangle CDA$ ,  $\triangle DAB$ ,  $\triangle ABC$  đồng quy tại  $P$ .  $\square$

**Định lý 9.**  $A_1, B_1, C_1$  là giao điểm các cặp đường thẳng  $DA$  và  $BC$ ,  $DB$  và  $CA$ ,  $DC$  và  $AB$ .  
 (1)  $P$  nằm trên đường tròn chín điểm của  $\triangle BCD$ ,  $\triangle CDA$ ,  $\triangle DAB$ ,  $\triangle ABC$ .  
 (2)  $P$  là trực tâm các tam giác  $\triangle A_1M_{DA}M_{BC}$ ,  $\triangle B_1M_{DB}M_{CA}$ ,  $\triangle C_1M_{DC}M_{AB}$ .



Hình 7

*Chứng minh.*  $N_a, N_b, N_c, N_d$  là tâm đường tròn chín điểm của  $\triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB, \triangle ABC$ .

(1)  $\mathcal{H}_{H_a}^{1/2}$  biến  $(BCD)$  thành đường tròn chín điểm của  $\triangle BCD$  và biến  $A$  thành  $P$  nên  $P$  thuộc đường tròn chín điểm của  $\triangle BCD$ .

(2) Do sự đối xứng nên chỉ cần chứng minh  $P$  là trực tâm  $\triangle A_1 M_{BC} M_{DA}$  là đủ.

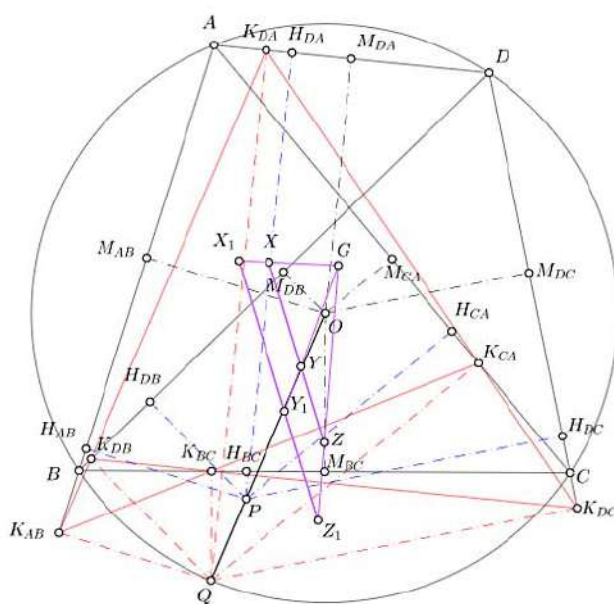
Bởi  $P, M_{DA}$  là điểm chung của đường tròn chín điểm các tam giác  $\triangle CDA, \triangle DAB$  nên  $PM_{DA} \perp N_b N_c$ .

$N_b N_c \parallel H_b H_c \parallel BC$ , vì  $N_b, N_c$  là trung điểm  $OH_b, OH_c$  và  $P$  là trung điểm  $BH_b, CH_c$ .

Do vậy,  $PM_{DA} \perp BC$ , hay tương đương với  $PM_{DA} \perp A_1 M_{BC}$ . Tương tự,  $PM_{BC} \perp A_1 M_{DA}$  nên  $P$  là trực tâm  $\triangle A_1 M_{BC} M_{DA}$ .  $\square$

Lưu ý rằng  $P$  là điểm Euler-Poncelet của  $A, B, C, D$ . Cứ bốn điểm trong mặt phẳng (không nhất thiết là bốn điểm đồng viên) thì đều có một điểm Euler-Poncelet[2]. Điểm này nằm trên đường tròn chín điểm của các  $\triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB, \triangle ABC$  và còn rất nhiều tính chất thú vị [3], bạn đọc có thể xem trong mục bài tập và tham khảo. Đây là điểm rất quan trọng trong hình học tứ điểm.

**Định lý 10.** Cho bốn điểm đồng viên  $A, B, C, D$  và một điểm  $P$  bất kì.  $H_{BC}, H_{DA}, H_{CA}, H_{DB}, H_{AB}, H_{DC}$  là hình chiếu vuông góc của  $P$  lên  $BC, DA, CA, DB, AB, DC$ . Trung điểm  $X, Y, Z$  của  $H_{DA}H_{BC}, H_{DB}H_{CA}, H_{DC}H_{AB}$  thẳng hàng.



Hình 8

Định lý 10 đã được đề cập trong nhiều tài liệu.

*Chứng minh.* Ta thấy điều này là hiển nhiên khi  $P$  trùng với tâm ngoại tiếp  $O$ , bởi khi đó  $X, Y, Z$  trùng với trọng tâm của  $A, B, C, D$ . Bây giờ ta xét trường hợp  $P \neq O$ . Gọi  $Q$  là một điểm chung của  $OP$  và  $(ABCD)$ .  $K_{BC}, K_{DA}, K_{CA}, K_{DB}, K_{AB}, K_{DC}$  là hình chiếu vuông góc của  $Q$  lên  $BC, DA, CA, DB, AB, DC$ .

Theo đường thẳng Simson mà ta có ngay các bộ ba điểm sau  $(K_{BC}, K_{DB}, K_{DC}), (K_{CA}, K_{DC}, K_{DA}), (K_{AB}, K_{DA}, K_{DB}), (K_{BC}, K_{CA}, K_{AB})$  thẳng hàng. Do đó mà trung điểm  $X_1, Y_1, Z_1$  của  $K_{BC}K_{DA}, K_{CA}K_{DB}, K_{AB}K_{DC}$  thẳng hàng - đây là *đường thẳng Newton-Gauss*[4] của tứ giác toàn phần  $(K_{BC}K_{DB}K_{DC}, K_{CA}K_{DC}K_{DA}, K_{AB}K_{DA}K_{DB}, K_{BC}K_{CA}K_{AB})$ .

$G$  là trọng tâm  $A, B, C, D$  thì  $G$  là trung điểm  $M_{DA}M_{BC}, M_{DB}M_{CA}, M_{DC}M_{AB}$ .

Theo định lý Thales

$$\frac{\overline{M_{DA}H_{DA}}}{\overline{M_{DA}K_{DA}}} = \frac{\overline{M_{BC}H_{BC}}}{\overline{M_{BC}K_{BC}}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}$$

Theo *định lý E.R.I.Q*,  $G, X, X_1$  thẳng hàng và  $\overline{GX}/\overline{GX_1} = \overline{OP}/\overline{OQ}$ . Đồng thời ta thu được:

$$\frac{\overline{GX}}{\overline{GX_1}} = \frac{\overline{GY}}{\overline{GY_1}} = \frac{\overline{GZ}}{\overline{GZ_1}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}$$

Vì  $X_1, Y_1, Z_1$  thẳng hàng, kéo theo  $X, Y, Z$  cũng thẳng hàng. □

Chứng minh nêu trên khéo léo ở chỗ, nó quy việc chứng minh định lý về việc chứng minh một đường hợp đặc biệt, và rồi chỉ ra rằng trường hợp tổng quát chỉ là hệ quả của trường hợp đặc biệt qua một phép vị tự.

### 2.2.2. Cực trực giao và đồng quy

Phần này tác giả viết lại theo một bài viết của thầy Trần Quang Hùng: *Đường thẳng Simson và các bài toán trực giao*.

**Định nghĩa cực trực giao:** Cho  $\triangle ABC$  và đường thẳng  $d$ .  $D, E, F$  là hình chiếu vuông góc của  $A, B, C$  lên  $d$ , các đường thẳng qua  $D, E, F$  và vuông góc với  $BC, CA, AB$  sẽ đồng quy tại một điểm  $I$ .  $I$  được gọi là cực trực giao của  $d$  với  $\triangle ABC$ .

**Định lý 11.** Đường thẳng  $d$  luôn đi qua điểm  $P$  nằm trên  $(ABC)$  thì cực trực giao của  $d$  với  $\triangle ABC$  nằm trên đường thẳng Simson của  $P$  với  $\triangle ABC$ .

**Chứng minh.**  $D, E, F$  là hình chiếu vuông góc của  $P$  lên  $BC, CA, AB$  và  $B', C'$  là hình chiếu vuông góc của  $B, C$  lên  $d$ .  $I$  là cực trực giao của  $d$  với  $\triangle ABC$ .

$$\begin{aligned}(B'F, C'E) &= (B'F, B'P) + (C'P, C'E) \\ &= (DF, DP) + (DP, DE) \\ &= 0\end{aligned}$$

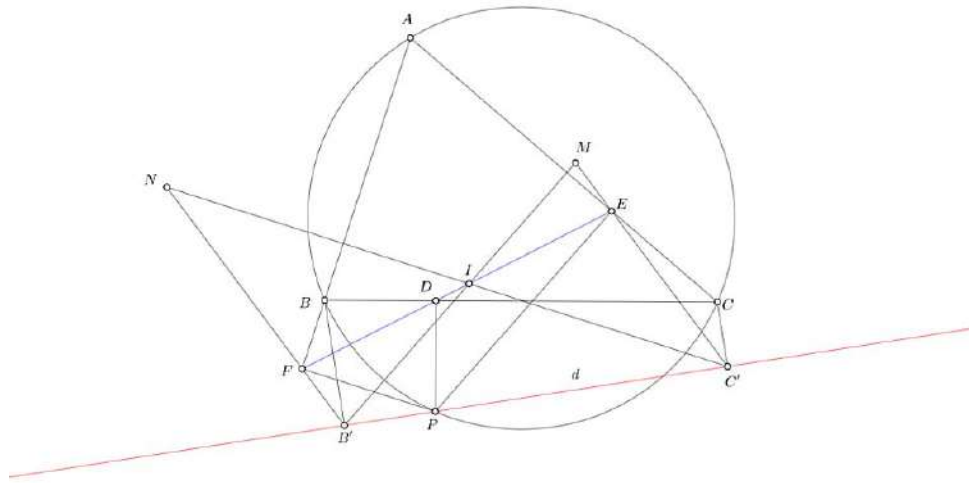
$\Rightarrow FB' \parallel EC'$ . Chú ý rằng  $IC' \parallel PF (\perp AB)$  và  $IB' \parallel PE (\perp AC)$ .  $IB', IC'$  cắt  $EC', FB'$  tại  $M, N$ . Bằng định lý Thales

$$\frac{\overline{FB'}}{\overline{FN}} = \frac{\overline{PB'}}{\overline{PC'}} = \frac{\overline{EM}}{\overline{EC'}}$$

Theo định lý chùm đường thẳng đồng quy,  $EF, NC', MB'$  đồng quy, tức là  $I, E, F$  thẳng hàng. □

Ta đến với một kết quả hết sức đẹp đẽ về cực trực giao.





Hình 9

**Định lý 12.** (Trần Quang Hùng [5])  $A, B, C, D, E, F$  đồng viên.

$A_1, B_1, C_1$  là cực trực giao của  $BC, CA, AB$  với  $\triangle DEF$ .

$D_1, E_1, F_1$  là cực trực giao của  $EF, FD, DE$  với  $\triangle ABC$ .

Thì  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$  đồng viên.

*Chứng minh.* (Dựa theo chứng minh của Luiz Gonzalez)

$H, H'$  là trực tâm  $\triangle ABC$  và  $\triangle DEF$ .  $A', B', C', D', E', F', K$  là trung điểm  $H'A, H'B, H'C, HD, HE, HF, HH'$ .

Để có được chứng minh, ta cần các bổ đề sau.

**Bổ đề 13.**  $D, E, F$  thuộc  $BC, CA, AB$ .  $(AEF), (BFD), (CDE)$  đồng quy tại  $O$  theo định lý Miquel.

$O$  là tâm ngoại tiếp  $\triangle ABC$  khi và chỉ khi  $O$  là trực tâm  $\triangle DEF$ .

*Chứng minh bổ đề*  $O$  là trực tâm  $\triangle DEF$  khi và chỉ khi  $(AEF), (BFD), (CDE)$  bằng nhau.

Sử dụng định lý sin:

$$\frac{OA}{\sin \angle(AB, OF)} = \frac{OB}{\sin \angle(BC, OD)} = \frac{OC}{\sin \angle(CA, OE)}$$

$\Rightarrow \sin \angle(AB, OF) = \sin \angle(BC, OD) = \sin \angle(CA, OE)$ , vậy  $OA = OB = OC$ . Nên  $O$  là tâm ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

**Bổ đề 14.**

$$(BC, s(A, DEF)) = (s(D, ABC), EF)$$

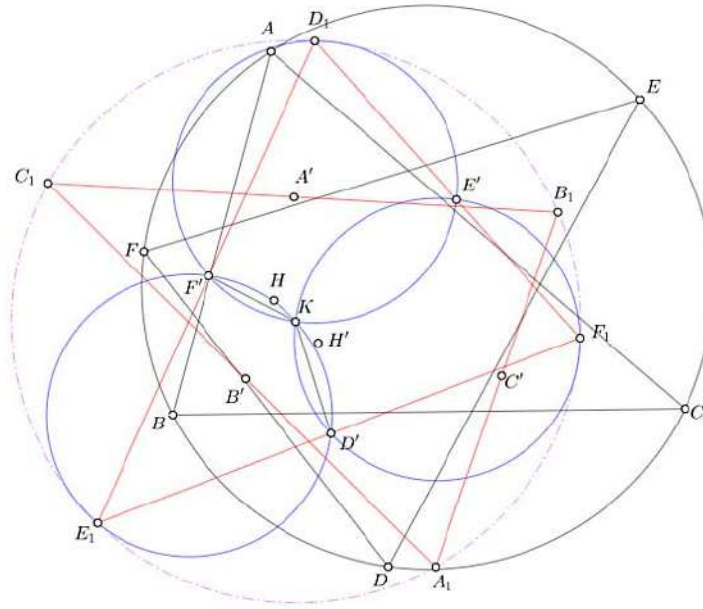
*Chứng minh bổ đề.* Theo định lý 4:

$$\begin{aligned} (BC, s(A, DEF)) &= (BC, AH) + (s(A, ABC), s(A, DEF)) \\ &= \frac{\pi}{2} + (s(A, ABC), s(A, DEF)) \\ (s(D, ABC), EF) &= (EF, H'D) + (s(D, ABC), s(D, DEF)) \\ &= \frac{\pi}{2} + (s(D, ABC), s(D, DEF)) \end{aligned}$$

$(s(A, ABC), s(A, DEF)) = (s(D, ABC), s(D, DEF))$ , theo định lý 7.

Quay lại với việc chứng minh định lý ban đầu.

Từ định lý 5,  $E_1F_1, F_1D_1, D_1E_1$  đi qua  $D', E', F'$ ;  $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$  đi qua  $A', B', C'$ .



Hình 10

$KD' \parallel H'D \perp EF \Rightarrow KD' \perp EF$ . Tương tự, ta có  $KE' \perp F'D'$  nên  $K$  là trực tâm  $\triangle D'E'F'$ .

$$\begin{aligned} (KE', KF') &= (H'E, H'F) \\ &= (DF, DE) \\ &= (s(E, ABC), s(F, ABC)) \\ &= (D_1F_1, D_1E_1) \\ &= (D_1E', D_1F') \end{aligned}$$

Do đó  $K$  thuộc  $(D_1E'F')$ .  $K$  đồng thời cũng thuộc  $(E_1F'D')$ ,  $(F_1D'E')$ . Theo bổ đề 13,  $K$  là tâm ngoại tiếp  $\triangle D_1E_1F_1$  và  $\triangle A_1B_1C_1$ . Bây giờ, ta chỉ cần chỉ ra  $(D_1E_1F_1)$  và  $(A_1B_1C_1)$  có cùng bán kính. Theo định lý sin:

$$\begin{aligned} KD_1 &= \frac{E'F'}{\sin \angle(D_1E_1, D_1F_1)} \sin \angle(KE', F'D') \\ &= \frac{EF}{2 \sin \angle(DE, DF)} \sin \angle(KE', F_1D_1) \\ &= R \cos \angle(FD, F_1D_1) = R \cos \angle(FD, s(E, ABC)) \\ KA_1 &= R \sin \angle(CA, C_1A_1) = R \cos \angle(CA, s(B, DEF)) \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng tính được  $KD_1 = KA_1$ . Kí hiệu  $R$  là bán kính của  $(ABCDEF)$ .

$KA_1 = KD_1$ , mà  $K$  là tâm ngoại tiếp  $\triangle A_1B_1C_1, \triangle D_1E_1F_1$  nên  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$  đồng viên.  $\square$

**Hệ quả 15.**  $s(D, ABC), s(E, ABC), s(F, ABC)$  đồng quy khi và chỉ khi  $s(D, ABC), s(E, ABC), s(F, ABC)$  lần lượt vuông góc với  $EF, FD, DE$ .

*Chứng minh.* Từ chứng minh của định lý 12:

$$KD_1 = R \cos \angle(FD, s(E, ABC))$$

$$KE_1 = R \cos \angle(DE, s(F, ABC))$$

$$KF_1 = R \cos \angle(EF, s(D, ABC))$$

$s(D, ABC), s(E, ABC), s(F, ABC)$  đồng quy khi và chỉ khi  $KD_1 = KE_1 = KF_1 = 0$ , tương đương  $s(D, ABC), s(E, ABC), s(F, ABC)$  vuông góc với  $EF, FD, DE$ .  $\square$

Còn bây giờ, tác giả xin giới thiệu tới bạn đọc một kết quả rất đẹp khác về đường thẳng Simson.

### 2.2.3. Tam giác cong Steiner - Hình bao của đường thẳng Simson

Đầu tiên ta định nghĩa hình bao. Nếu như quỹ tích là tập hợp điểm, thì hình bao là một hình cố định mà luôn tiếp xúc với một đường thay đổi. Để cho rõ hơn, xin đưa ra một ví dụ đơn giản về hình bao:  $\triangle ABC$  nội tiếp  $(O)$  và ngoại tiếp  $(I)$ .  $M$  thay đổi trên  $(O)$ . Hai dây  $MD, ME$  của  $(O)$  tiếp xúc với  $(I)$  thì  $EF$  luôn tiếp xúc  $(I)$ . Khi đó  $(I)$  chính là hình bao của đường thẳng  $EF$  di động

Thứ hai, ta định nghĩa thế nào là một tam giác cong (deltoid)[6].

**Định lý 16.** Hai đường tròn  $(O, 3R)$  và  $(I, R)$  tiếp xúc trong tại  $M$ .

1.  $(O, 3R)$  cố định, còn  $(I, R)$  lăn, nhưng không trượt trên  $(O, 3R)$  thì  $M$  (gắn chặt với  $(I, R)$ ) cũng di động theo và vạch ra một đường gọi là tam giác cong.
2. Trong tọa độ Descartes,  $(O, R)$  có phương trình

$$x^2 + y^2 = 9R^2$$

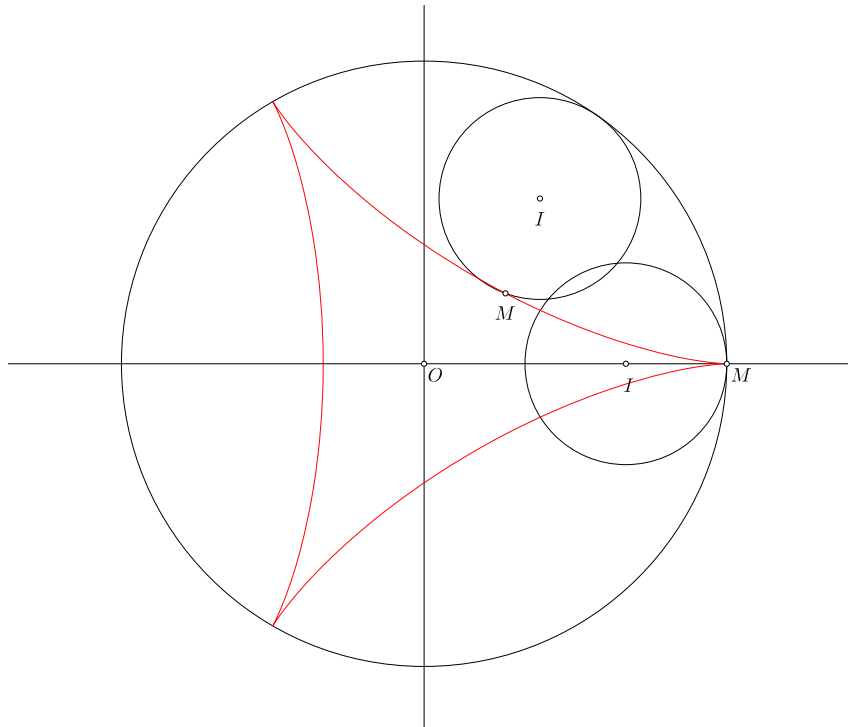
và  $M(3R, 0)$  thì tam giác cong có phương trình tham số

$$x = 2R \cos t + R \cos 2t \quad y = 2R \sin t - R \sin 2t$$

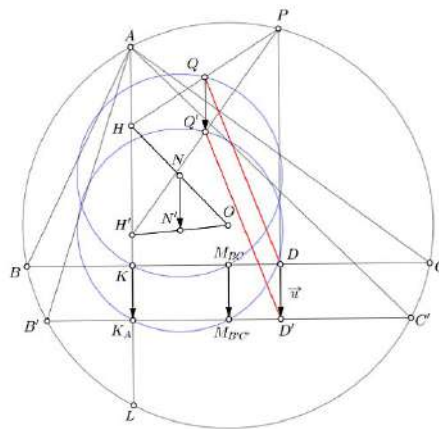
**Định lý 17.** (Jakob Steiner) Khi  $P$  di động trên  $(ABC)$  thì  $s(P, ABC)$  luôn tiếp xúc với một tam giác cong.[7]

Jakob Steiner[8] là một nhà hình học người Thụy Sĩ, ông có nhiều đóng góp quan trọng cho hình học Euclide, lý thuyết đồ thị, được xem là một trong những nhà hình học tài năng nhất. Steiner luôn tìm cách chứng minh thuần túy hình học, tức là không sử dụng hệ tọa độ. Định lý trên được phát hiện và cũng chứng minh bởi Steiner, cũng là một chứng minh thuần túy hình học. Tuy nhiên ở đây chúng ta kết hợp chứng minh thuần túy của M. de Guzman[9] với việc sử dụng tọa độ Descartes. Ý tưởng chính là quy việc chứng minh với tam giác bất kì về trường hợp tam giác đều.

*Chứng minh.* Trước hết, ta cần một số bổ đề.



Hình 11. Tam giác cong



Hình 12. Bổ đề 18

**Bổ đề 18.**  $P, B', C'$  thuộc  $(ABC)$  sao cho  $BC \parallel B'C'$ .  $\vec{u} \perp BC, B'C'$  và có điểm cuối thuộc  $BC$ , điểm ngọn thuộc  $B'C'$ . Phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u}$  ký hiệu là  $T(\vec{u})$  biến đường thẳng  $BC$  thành đường thẳng  $B'C'$  thì

1.  $T(\vec{u}) : s(P, ABC) \rightarrow s(P, AB'C')$ .
2.  $T(\vec{u}) : \text{đường tròn chín điểm } \triangle ABC \rightarrow \text{đường tròn } \triangle AB'C'$ .

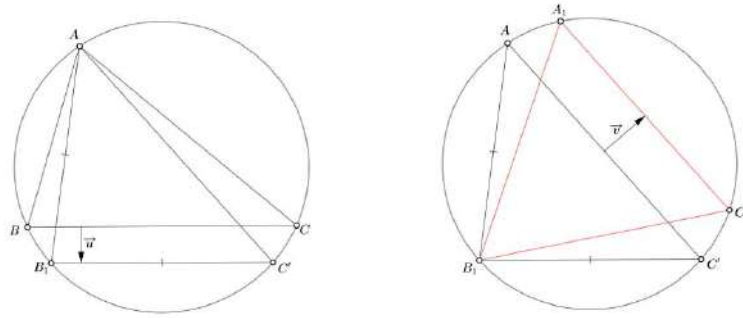
*Chứng minh bổ đề 18.*  $H, H'$  là trực tâm,  $N, N'$  là tâm đường tròn chín điểm  $\triangle ABC$  và  $\triangle AB'C'$ . Ta dễ dàng thu được:

$$\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{M_{BC}M_{B'C'}} = \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$$

Lưu ý rằng  $T(\vec{u})$  không nên bị nhầm lẫn với phép biến hình tịnh tiến. Ở đây, hãy xem biến đổi  $T$  giống như việc nắn tam giác vậy.

**Bổ đề 19.** Tồn tại 2 phép nắn mà hợp của chúng biến  $\triangle ABC$  thành một tam giác đều  $\triangle A_1 B_1 C_1$ .

Với bổ đề này, ta chỉ cần sử dụng hình vẽ và vài lời giải thích, bởi bổ đề nhìn chung là trực quan.



Hình 13. Minh họa bổ đề 19

Dễ thấy tồn tại  $T_{BC}(\vec{u})$  nắn  $BC$  thành  $B_1 C'$  sao cho  $\triangle A B_1 C'$  cân tại  $B_1$ , và cũng hiển nhiên là tồn tại một phép nắn  $T_{C'A}(\vec{v})$  biến  $AC'$  thành  $A_1 C_1$  sao cho  $\triangle A_1 B_1 C_1$  là một tam giác đều. Ta quay lại chứng minh định lý

Theo bổ đề 18, 19, khi ta nắn  $\triangle ABC$  thành một tam giác đều, thì đường thẳng Simson chỉ bị tịnh tiến đi, nên nếu nó có hình bao thì hình bao đó cũng bị tịnh tiến. Như vậy ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp  $\triangle ABC$  là tam giác đều mà thôi. Tối đây ta sẽ sử dụng hệ tọa độ Descartes trong mặt phẳng.

Đầu tiên ta chọn tọa độ của  $A, B, C, P$ .

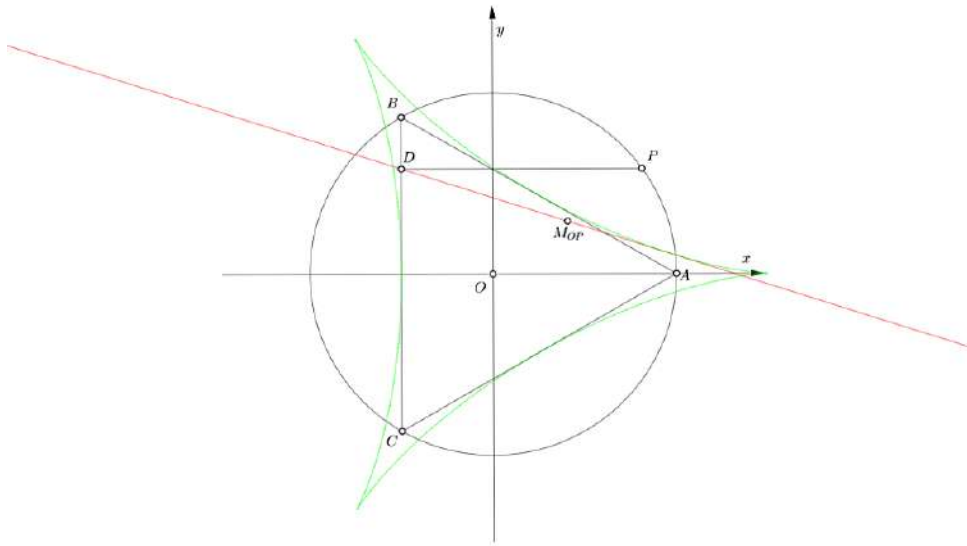
$$A(2R, 0) \quad B(-R, R\sqrt{3}) \quad C(-R, -R\sqrt{3}) \quad P(2R \cos \theta, 2R \sin \theta)$$

Vì  $O(0, 0)$  là trực tâm  $\triangle ABC$ , nên đường thẳng đi qua hình chiếu vuông góc  $D$  của  $P$  lên  $BC$  và trung điểm  $OP$  chính là  $s(P, ABC)$ .

$$D(-R, 2R \sin \theta) \quad M_{OP}(R \cos \theta, R \sin \theta)$$

$s(P, ABC)$  có phương trình

$$\begin{aligned} \frac{x - R \cos \theta}{-R - R \cos \theta} &= \frac{y - R \sin \theta}{R \sin \theta} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{R(1 + \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta)} + \frac{y}{R \sin \theta(1 + 2 \cos \theta)} &= \frac{1}{1 + \cos \theta} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{R \cos \frac{\theta}{2}(1 + 2 \cos \theta)} + \frac{y}{R \sin \frac{\theta}{2}(1 + 2 \cos \theta)} &= \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$



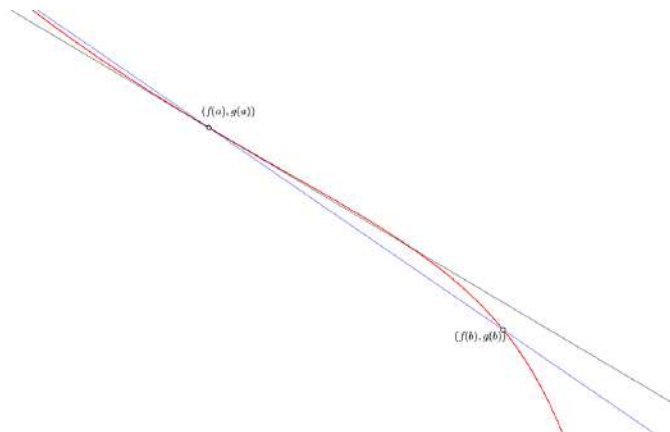
Hình 14. Trong tọa độ Descartes

**Bổ đề 20.** Trong tọa độ Descartes, đường cong  $C$  có phương trình tham số

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

Tiếp tuyến tại  $A(f(a), g(a))$  của  $C$  có phương trình

$$\frac{x}{f'(a)} - \frac{y}{g'(a)} = \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{g(a)}{g'(a)}$$



Hình 15

Chứng minh bổ đề 20.  $B(f(b), g(b))$  là một điểm trên  $C$ . Ta lập được phương trình đường thẳng đi qua  $A(f(a), g(a))$  và  $B(f(b), g(b))$  là:

$$\frac{x - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{y - g(a)}{g(b) - g(a)}$$

Khi  $b \rightarrow a$  thì  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \rightarrow f'(a)$  và  $\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \rightarrow g'(a)$ , và  $AB \rightarrow$  tiếp tuyến tại  $A$ , từ đó mà bổ đề được chứng minh.

Bây giờ ta chỉ ra  $s(P, ABC)$  tiếp xúc với một tam giác con có phương trình tham số là:

$$x = f(t) = 2R \cos t + R \cos 2t \quad y = g(t) = 2R \sin t - R \sin 2t$$

Nhờ bổ đề 20, sau vài phép biến đổi đại số và lượng giác, ta được tiếp tuyến tại  $(f(t), g(t))$  của tam giác con có phương trình:

$$\frac{x}{R \sin t(1 + 2 \cos t)} + \frac{y}{R(1 - \cos t)(1 + 2 \cos t)} = \frac{1}{\sin t}$$

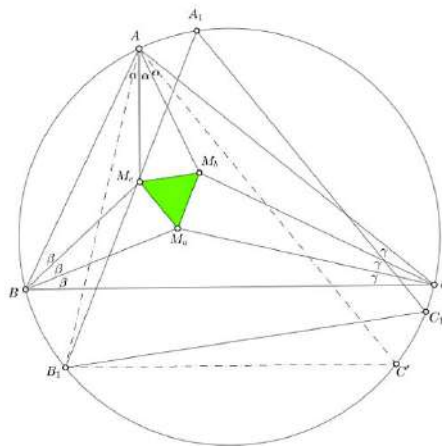
$$\Leftrightarrow \frac{x}{R \cos \frac{t}{2}(1 + 2 \cos t)} + \frac{y}{R \sin \frac{t}{2}(1 + 2 \cos t)} = \frac{1}{\cos \frac{t}{2}} (*)$$

Rõ ràng phương trình của  $s(P, ABC)$  có dạng  $(*)$  nên  $s(P, ABC)$  tiếp xúc với một tam giác con.  $\square$

**Định lý 21.** (Một số tính chất của tam giác con Steiner)

1. Đường tròn chín điểm của  $\triangle ABC$  là đường tròn nội tiếp tam giác con Steiner.
2. Các đỉnh của tam giác con Steiner tạo thành một tam giác đều, và tam giác này vị tự với tam giác Morley của  $\triangle ABC$ .

*Chứng minh.* Tính chất 1 hiển nhiên theo phép nắn tam giác ta đã đề cập ở trên. Ở đây ta sẽ đưa ra chứng minh cho tính chất 2, ở đây cũng cần tới bổ đề trong bài viết của M.de Guzman



Hình 16. Tam giác Morley

Từ chứng minh định lý Morley của M. T. Naraniengar[10]:

$$\angle(BC, M_b M_c) = \frac{|B - C|}{3} \quad \angle(CA, M_c M_a) = \frac{|C - A|}{3} \quad \angle(AB, M_a M_b) = \frac{|A - B|}{3}$$

Ta cũng thu được các đẳng thức tương tự với tam giác Morley của  $\triangle AB_1 C_1$ . Từ đó dễ dàng kiểm tra được hai tam giác Morley của  $\triangle ABC$  và  $\triangle AB_1 C_1$  có các cạnh tương ứng song song. Tương tự, thì tam giác Morley của  $\triangle ABC$  và  $\triangle A_1 B_1 C_1$  cũng có các cạnh tương ứng song song. Theo chứng minh của định lý 17, hai tam giác Steiner (tam giác thẳng, phân biệt với tam giác con) của  $\triangle ABC$  và  $\triangle A_1 B_1 C_1$  là ảnh của nhau qua 2 phép tịnh tiến. Hơn nữa,  $\triangle A_1 B_1 C_1$  đều nên các đỉnh của nó sẽ vị tự với tam giác Steiner của  $\triangle A_1 B_1 C_1$  (với tam giác đều thì điều này xem là hiển nhiên).

Kết hợp những điều trên, tam giác Morley của  $\triangle ABC$  vị tự với tam giác Steiner của  $\triangle ABC$ .  $\square$

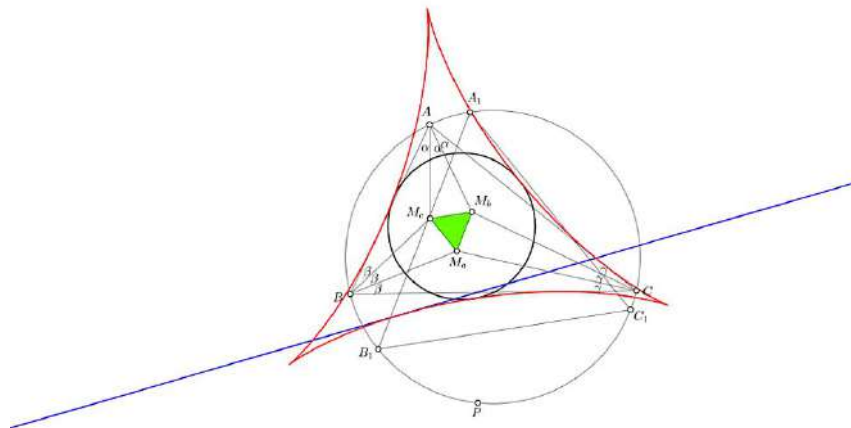


Figure 17. Tam giác cong Steiner - Hình bao của đường thẳng Simson

Định lý sau là cách dựng tiếp điểm của đường thẳng Simson với tam giác cong Steiner.

**Định lý 22.** (Phép dựng tam giác cong Steiner) Một đường thẳng  $\ell$  tiếp xúc  $(ABC)$  thì cực trực giao của  $\ell$  với  $\triangle ABC$  nằm trên tam giác cong Steiner của  $\triangle ABC$ .

*Chứng minh.* Tác giả đưa ra một chứng minh sử dụng giới hạn trong hình học. Gọi  $P$  là tiếp điểm của  $\ell$  với  $(ABC)$ , như vậy cực trực giao của  $\ell$  với  $\triangle ABC$  phải nằm trên  $s(P, ABC)$ , theo định lý 11.  $Q$  thuộc  $(ABC)$ , ta đặt  $\angle(OP, OQ) = \delta$ ,  $O$  là tâm ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . Cực trực giao  $T$  của  $PQ$  với  $\triangle ABC$  là giao của  $s(P, ABC)$  và  $s(Q, ABC)$ .  $s(P, ABC)$  và  $s(Q, ABC)$  đều tiếp xúc với tam giác cong Steiner. Khi  $\delta \rightarrow 0$  thì  $T$  sẽ tiến tới một giới hạn, chính là tiếp điểm của  $s(P, ABC)$  với tam giác cong Steiner. Vì vậy, cực trực giao của  $\ell$  với  $\triangle ABC$  thuộc tam giác cong Steiner.  $\square$

Ta còn thu được một hình bao khác, cũng là một tam giác cong.

**Định lý 23.**  $P$  chạy trên  $(ABC)$ . Đường thẳng qua  $P$  và vuông góc với  $s(P, ABC)$  luôn tiếp xúc với một tam giác cong.

*Chứng minh.*  $PP'$  là đường kính của  $(ABC)$ .  $Q'$  là trung điểm  $P'H$ . Do  $Q', O$  là trung điểm  $P'H$ ,  $PP'$  nên ta dễ dàng thu được rằng  $PQ'$  đi qua trọng tâm  $G$  của  $\triangle ABC$  và  $\overline{GQ'}/\overline{GP} = -1/2$ . Mà đường thẳng qua  $P$ , vuông góc  $s(P, ABC)$  và đường thẳng  $s(P', ABC)$  song song nên đường thẳng qua  $P$  vuông góc  $s(P, ABC)$  là ảnh của  $s(P', ABC)$  qua phép vị tự tâm  $G$ , tỉ số  $-2$ . Điều này dẫn tới đường thẳng qua  $P$  và vuông góc  $s(P, ABC)$  sẽ tiếp xúc với ảnh của tam giác cong Steiner qua phép vị tự tâm  $G$  tỉ số  $-2$ .  $\square$

Tam giác cong Steiner, cũng như hình bao nói trên, là một trong những đường cong bậc cao (cụ thể ở đây, hai đường này đều bậc bốn) rất nổi tiếng trong hình học tam giác. Hiện không có nhiều người nghiên cứu về những đường cong thể này trong hình học tam giác, bạn đọc có thể tham khảo qua [7], và các bài viết của tác giả Bernard Gibert.

### 3. Bài tập đề nghị

Các bài 1,2,3 sử dụng cùng kí hiệu, trong cùng một cấu hình.



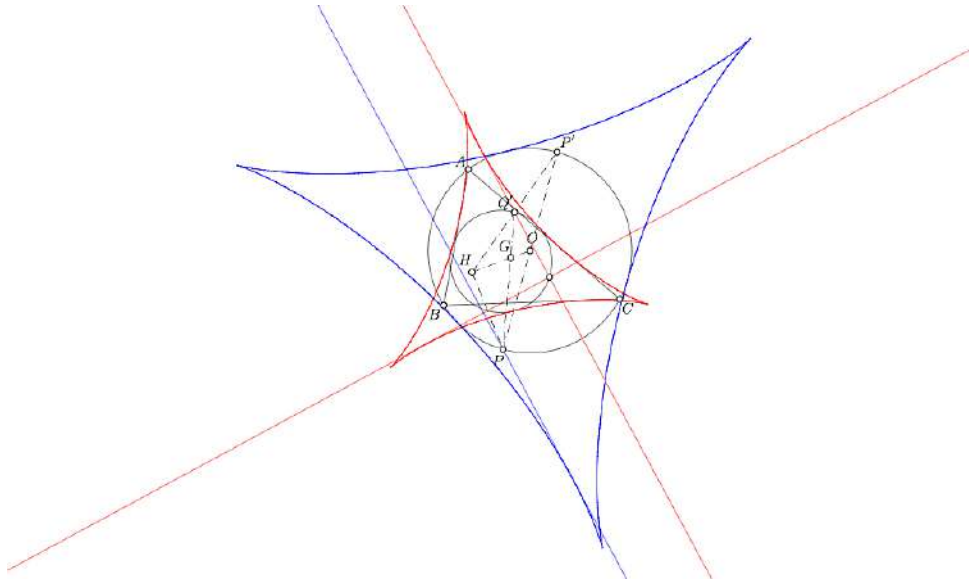


Figure 18.

**Bài tập 1.**  $\triangle ABC$ ,  $P$  thuộc  $(ABC)$ .  $D, E, F$  là hình chiếu vuông góc của  $P$  lên  $BC, CA, AB$ .  $PD, PE, PF$  cắt  $(ABC)$  tại  $A', B', C'$ . Chứng minh rằng trục tâm của tam giác tạo bởi  $s(P, ABC), s(B', ABC), s(C', ABC)$  chạy trên một đường tròn cố định khi  $P$  thay đổi

**Bài tập 2.** Trục tâm và tâm ngoại tiếp của tam giác tạo bởi  $s(A', ABC), s(B', ABC), s(C', ABC)$  cùng chạy trên một đường tròn cố định khi  $P$  thay đổi

**Bài tập 3.** Tâm đường tròn Miquel của tứ giác toàn phần  $(AB, AC, s(B', ABC), s(C', ABC))$  chạy trên một đường tròn cố định khi  $P$  thay đổi.

**Bài tập 4.** (Trần Quang Hùng)  $P$  thỏa mãn hệ thức:

$$(BC, PA) + (CA, PB) + (AB, PC) = \frac{\pi}{2}$$

$D, E, F$  thuộc  $(ABC)$  sao cho  $AD \perp PA, BE \perp PB, CF \perp PC$ . Chứng minh rằng  $s(D, ABC), s(E, ABC), s(F, ABC)$  đồng quy.

**Bài tập 5.** (Đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần) Cho 4 đường thẳng  $a, b, c, d$  đôi một cắt nhau, 3 đường bất kì không đồng quy. Chứng minh trục tâm của  $\triangle bcd, \triangle cda, \triangle dab, \triangle abc$ , cực trục giao của  $a, b, c, d$  lần lượt với  $\triangle bcd, \triangle cda, \triangle dab, \triangle abc$  thẳng hàng.

Điểm Anti-Steiner của  $P$  với  $\triangle ABC$  là điểm đồng quy của đối xứng của  $HP$  qua  $BC, CA, AB$ . Trong đó  $H$  là trực tâm  $\triangle ABC$ .

**Bài tập 6.**  $P_a, P_b, P_c$  đối xứng với  $P$  qua  $BC, CA, AB$  thì  $(AP_b P_c), (BP_c P_a), (CP_a P_b)$  đồng quy tại điểm Anti-Steiner của  $P$ .

**Bài tập 7.** (Đào Thanh Oai) Đường thẳng  $\ell$  qua trực tâm  $\triangle ABC$ , cắt  $BC, CA, AB$  tại  $D, E, F$ .

- Đường thẳng qua  $E, F$ , vuông góc  $CA, AB$  cắt  $BC$  tại  $A_b, A_c$  và cắt nhau tại  $X$  thì  $(XA_b A_c)$  tiếp xúc  $(ABC)$ .
- Tương tự câu a, ta định nghĩa  $B_c, B_a, C_a, C_b, Y, Z$ . Chứng minh rằng  $(AB_a C_a), (BC_b A_b), (CA_c B_c)$  đôi một tiếp xúc tại một điểm trên  $(ABC)$ .

**Bài tập 8.** Cho 4 điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh đường tròn chín điểm của  $\triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB, \triangle ABC$ , đường tròn pedal của  $A, B, C, D$  với  $\triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB, \triangle ABC$  đồng quy. Trong đó, đường tròn pedal của  $A$  với  $\triangle BCD$  là đường tròn đi qua hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $CD, DB, BC$ .

Trên đây là tổng kết của tác giả về đường thẳng Simson. Hi vọng bạn đọc thấy bài viết là một tài liệu có ích. Có thể bài viết chưa thực sự đầy đủ, mọi góp ý, câu hỏi xin gửi về địa chỉ [tenminhladuong@gmail.com](mailto:tenminhladuong@gmail.com)

## Tài liệu tham khảo

- [1] *Robert Simson*, Wikipedia
- [2] *Poncelet point*, Wikipedia
- [3] QA-P2: Euler-Poncelet point  
[chrisvantienhoven.nl/quadrangle-objects/10-mathematics/quadrangle-objects/12-qa-p2.html](http://chrisvantienhoven.nl/quadrangle-objects/10-mathematics/quadrangle-objects/12-qa-p2.html)
- [4] Newton Line  
[chrisvantienhoven.nl/other-quadrilateral-objects/17-mathematics/quadrilateral-objects/artikelen-ql/137-ql-11.html](http://chrisvantienhoven.nl/other-quadrilateral-objects/17-mathematics/quadrilateral-objects/artikelen-ql/137-ql-11.html)
- [5] Trần Quang Hùng, Six orthopoles lie on a circle  
[artofproblemsolving.com/community/q1h496827p2790078](http://artofproblemsolving.com/community/q1h496827p2790078)
- [6] *Deltoid*, Wikipedia
- [7] *Steiner Deltoid*  
[bernard.gibert.pagesperso-orange.fr/curves/q000.html](http://bernard.gibert.pagesperso-orange.fr/curves/q000.html)
- [8] *Jakob Steiner*, Wikipedia
- [9] *M. de Guzman, The envelope of the Wallace-Simson lines of a triangle. A simple proof of the Steiner dinhly on the deltoid.*
- [10] *Morley dinhly, M.T.Naranielgar's proof*  
[cut-the-knot.org/triangle/Morley/Naraniengar.shtml](http://cut-the-knot.org/triangle/Morley/Naraniengar.shtml)

# BÀI TOÁN HAY LỜI GIẢI ĐẸP

Trần Nam Dũng – Đại học Khoa học Tự nhiên – ĐHQG TP.HCM

## LỜI GIỚI THIỆU

Chuyên mục này được lấy cảm hứng từ bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên ở Epsilon số 3 trong kỳ thi IMO 2001 với 5 cách giải khác nhau. Mục này sẽ để dành viết về những bài toán hay, lời giải đẹp và những câu chuyện thú vị xung quanh những bài toán và lời giải đó.

Tên của chuyên mục được mượn từ tên của một nhóm những người yêu toán trên Facebook do anh Nguyễn Văn Lợi sáng lập “*Bài toán hay – Lời giải đẹp – Đam mê toán học*”. Chuyên mục ghi nhận các đề cử của bạn đọc và sẽ chọn đăng mỗi kỳ 1, 2 bài toán.

Số này chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc về một bài toán kinh điển với nhiều lời giải hết sức bất ngờ.

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  ta có đẳng thức

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

Đây là một kết quả tuyệt đẹp. Tổng lập phương của  $n$  số nguyên dương đầu tiên bằng bình phương của tổng các số đó. Tất cả chúng ta đều biết cách giải của Gauss khi tính tổng  $n$  số nguyên dương đầu tiên  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , do cấp số cộng có tính chất: Tổng của số hạng đầu tiên và số hạng cuối cùng bằng tổng của số hạng thứ hai và số hạng kế cuối ... Nhưng để tính tổng lập phương của  $n$  số nguyên dương đầu tiên thì tính chất “đầu - cuối” như thế không còn đúng nữa. Thật bất ngờ khi ta phát hiện được quy luật tuyệt đẹp nói trên. Và tất nhiên là nếu đó là một quy luật đúng thì ta có thể chứng minh được nó.

Cách chứng minh thứ nhất là cách chứng minh kinh điển. Dùng quy nạp toán học ta có thể dễ dàng chứng minh được rằng

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Vì cách này quá kinh điển và đơn giản nên ta sẽ bỏ qua.

Cách chứng minh thứ hai, cũng là cách có thể tổng quát hóa để tính các tổng lũy thừa bậc khác của  $n$  số nguyên dương đầu tiên là dùng sai phân và “lũy thừa rời rạc”.

**Lời giải.** Với một hàm số  $f(x)$ , ta đặt  $\Delta f(x) = f(x) - f(x-1)$ . Khi đó, nếu muốn tính tổng  $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ , ta chỉ cần tìm được hàm  $F(x)$  sao cho  $\Delta F(x) = f(x)$  thì

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = F(n) - F(0).$$

Ta gọi nôm na  $F(x)$  là “nguyên hàm rời rạc” của  $f(x)$ .

Xét lũy thừa rời rạc  $x^{[n]} = x(x+1) \cdots (x+n-1)$ . Dễ dàng thấy rằng

$$\Delta x^{[n+1]} = x(x+1) \cdots (x+n) - (x-1)x \cdots (x+n-1) = (n+1)x^{[n]}.$$

Từ đó suy ra “nguyên hàm” của  $x^{[n]}$  chính là  $\frac{x^{[n+1]}}{n+1}$ . Vì phép lấy nguyên hàm cộng tính nên để tìm nguyên hàm của  $x^3$ , ta chỉ cần tìm cách phân tích  $x^3$  thành tổng của các lũy thừa rời rạc.

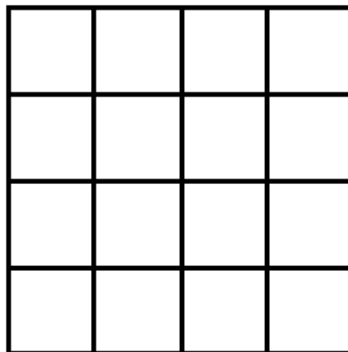
Rõ ràng là

$$x^3 = x(x+1)(x+2) - 3x(x+1) + x = x^{[3]} - 3x^{[2]} + x^{[1]}.$$

Do đó nguyên hàm của  $x^3$  là  $\frac{x^{[4]}}{4} - x^{[3]} + \frac{x^{[2]}}{2} = \frac{x^2(x+1)^2}{4}$ , suy ra điều phải chứng minh.  $\square$

Hai cách chứng minh đại số này dù ít hơn hay nhiều hơn nhưng cũng đều là những cách chứng minh khá quen thuộc. Bây giờ ta sẽ chuyển sang một cách chứng minh thú vị khác “dùng tổ hợp”. Lời giải này xuất phát từ một bài toán tưởng chừng như không liên quan sau đây:

**Bài toán 2.** Cho hình vuông  $n \times n$  tạo bởi  $n^2$  hình vuông nhỏ xếp gần nhau (như hình vẽ là hình vuông  $4 \times 4$ ).

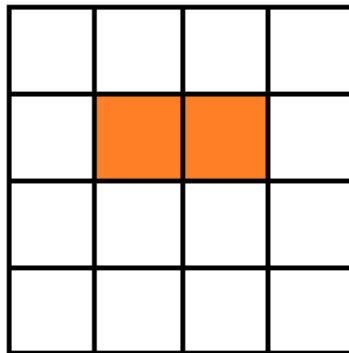


Hỏi có bao nhiêu hình chữ nhật tạo thành từ các hình vuông nhỏ liền nhau?

Việc đếm bằng phương pháp liệt kê là khá tốn công sức và không thể tổng quát hóa được. Tuy nhiên, ta vẫn cần phải thực hiện điều đó với một số giá trị đầu tiên của  $n$ .

**Lời giải.** Với  $n = 1$  có 1 hình chữ nhật, với  $n = 2$  có 9 hình chữ nhật, với  $n = 3$  có 36 hình chữ nhật và với  $n = 4$  có 100 hình chữ nhật. Có thể nhận thấy quy luật là số hình chữ nhật bằng  $(1 + 2 + \cdots + n)^2$ . Ta có thể chứng minh chặt chẽ điều này bằng lý luận sau:

Đánh số cách đường thẳng tạo nên lưới vuông từ trái sang phải và từ trên xuống dưới là  $1, 2, \dots, n+1$  và  $1, 2, \dots, n+1$ . Khi đó một hình chữ nhật bất kỳ tạo bởi các hình vuông con kề nhau được xác định hoàn toàn bởi số thứ tự của hai cạnh ngang và số thứ tự của hai cạnh dọc. Ví dụ hình chữ nhật màu cam trong hình dưới



được xác định bởi hai cặp số  $(2, 3)$  và  $(2, 4)$ . Từ đó suy ra số các hình chữ nhật bằng số bộ 4 số  $(i, j, k, l)$  với  $1 \leq i < j \leq n + 1$  và  $1 \leq k < l \leq n + 1$ . Suy ra đáp số chính là  $(C_{n+1}^2)^2$ .  $\square$

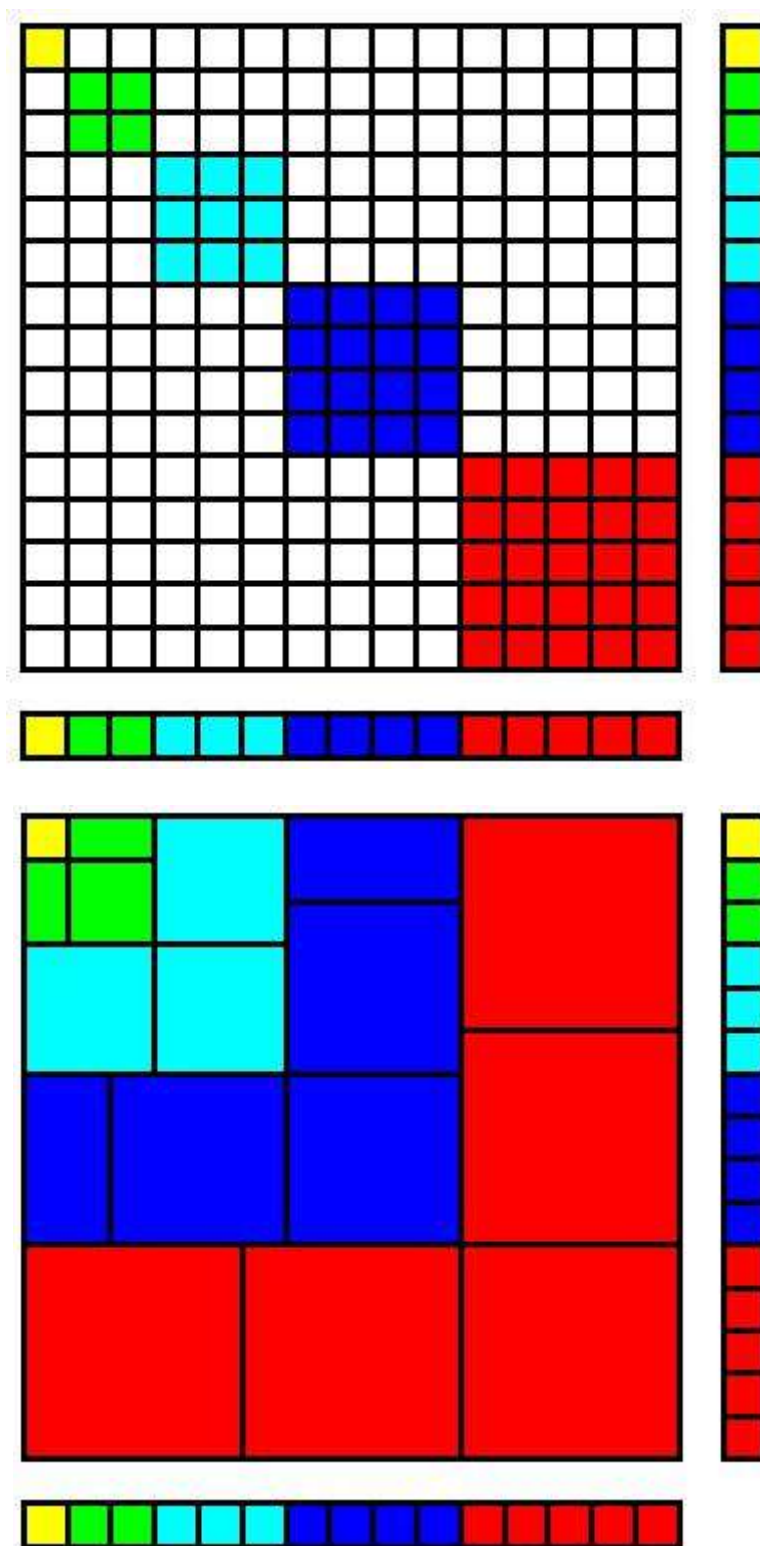
Bài toán có lẽ đã kết thúc tại đây nếu ta không đặt câu hỏi: Kết quả bài toán là  $(1 + 2 + \dots + n)^2$ . Vậy liệu có cách nào liên hệ nó với đẳng thức ở bài 1 không? Hay nói cách khác, có cách nào tính số các hình chữ nhật để ra đáp số là  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ , từ đó theo nguyên lý đếm bằng hai cách, suy ra đẳng thức  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$  không?

Câu trả lời là có, bây giờ ta gọi số hình chữ nhật có trong hình vuông  $n \times n$  là  $S(n)$ . Khi ta bổ sung vào cột thứ  $n + 1$  và hàng thứ  $n + 1$ , ta muốn đếm xem có bao nhiêu hình chữ nhật mới được hình thành.

Ta thấy đỉnh góc trên phía bên trái của một hình chữ nhật như vậy sẽ có tọa độ là  $(i, j)$  với  $1 \leq i, j \leq n + 1$ . Ứng với mỗi đỉnh như vậy, sẽ có một số cách chọn đỉnh góc dưới bên phải khác nhau (góc dưới bên phải phải nằm ở cột thứ  $n + 2$  hoặc hàng thứ  $n + 2$ ). Tuy nhiên, ta có thể thấy rằng ứng với 2 điểm xuyên tâm đối đối với hình vuông  $n \times n$  thì tổng số cách chọn đỉnh góc dưới bên phải cho hai điểm này bằng  $2(n + 1)$ . Do có  $\frac{(n+1)^2}{2}$  cặp (trường hợp  $n$  chẵn sẽ có 1 điểm đi cặp với chính nó), mỗi cặp tương ứng với  $2(n + 1)$  hình chữ nhật mới nên ta suy ra có tất cả  $(n + 1)^3$  hình chữ nhật mới, tức là  $S(n + 1) = S(n) + (n + 1)^3$ .

Cách này tuy lý giải được một cách tổ hợp đẳng thức đã cho nhưng vẫn còn quá rắc rối, vả lại cũng dùng đến tư tưởng quy nạp. Đúng là chưa thật đẹp.

Nhưng cách giải “không lời” dưới đây thì chắc chắn sẽ làm chúng ta sửng sốt và thú vị. Thiết nghĩ bạn đọc có thể tự giải thích được mà không cần bất cứ lời bình dẫn nào. Đây là hình minh họa cho trường hợp  $n = 4$  và đẳng thức  $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$ . Hơi khác với cách giải trước, ở đây bài toán đếm là đơn giản: Đếm các ô vuông con trong hình vuông  $(1 + 2 + \dots + n) \times (1 + 2 + \dots + n)$  bằng hai cách.



# HỘI CHỨNG CAROL

José-Manuel Rey



Bạn tôi, Carol rất tốt và xinh đẹp. Mọi người đều cá rằng cô ấy có rất nhiều mối tình. Nhưng hóa ra sự thật không phải như vậy.

Sự thật là Carol chưa từng hẹn hò với ai trong một khoảng thời gian dài. Và mặc dù cô ấy rất ngại ngùng, cô ấy vẫn rộng mở với những lời tỏ tình thật lòng và mong muốn tìm kiếm một người đặc biệt. Thế nhưng Carol khẳng định rằng các chàng trai không hay tiếp cận cô ấy. Cô nghĩ rằng cô khiến họ sợ hãi. Liệu đó có phải là cô gặp xui xẻo? Hay do một cái gì khác? Có lẽ Carol đã có một cái nhìn méo mó về thực tế.

May mắn, đây là một vấn đề tự nhiên được nhắc đến trong toán học. Nếu đó là câu hỏi về sự may mắn, toán học có lẽ sẽ làm sáng tỏ vấn đề của Carol. Chúng ta cùng tìm hiểu xem.

## 1. Tình trạng khó xử của Carol

Xét một anh chàng, gọi anh ta là Guy, người thích Carol và có cơ hội nói chuyện với cô ấy, chẳng hạn như ở trong quầy cà phê. Nhận ra rằng Carol đang ngượng, anh ta cân nhắc xem có nên tiếp cận cô ấy không. Guy xem xét các kết quả có thể xảy ra sau:

- 1) Anh ấy nói chuyện với Carol và cô ấy đáp lại một cách thân thiện. Anh ấy có được số điện thoại của cô ấy và sẽ có cái hẹn vào tuần sau.
- 2) Anh ấy không tiếp cận Carol. Anh ấy có thể làm những thứ bổ ích khác (như đọc báo chẳng hạn).
- 3) Anh ấy nói chuyện với Carol và cô ấy cảm thấy không hứng thú. Anh ấy sẽ cảm thấy đau khổ trong 1 tuần liền.



Guy đánh giá kết quả này bằng việc gán các giá trị  $a$ ,  $b$  và  $0$  vào các lựa chọn  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(c)$  tương ứng, trong đó  $a > b > 0$ . Bằng cách này, Guy muốn lựa chọn  $(a)$  hơn lựa chọn  $(b)$ , và cuối cùng là kịch bản tồi tệ nhất  $(c)$ .

Bây giờ Guy nhận ra rằng mình không phải là chàng trai duy nhất trong thành phố. Anh ta nhận thức được thực tế rằng kết quả phụ thuộc đáng kể vào hành động của những chàng trai khác một cách độc lập, quyết định rằng có nên tiếp cận Carol hay không. Giả sử rằng Guy nghĩ anh ta có thể nhận được  $(a)$  chỉ khi không một ai khác tiếp cận Carol và  $(c)$  khi anh ấy không phải là người duy nhất tiếp cận Carol. Tất nhiên nếu như không nói chuyện với Carol, anh ta sẽ nhận được  $(b)$ . Sự khiêm tốn của Guy xem ra khá dễ hiểu bởi anh không tự tin vào bản thân cho lắm trong các cuộc nói chuyện trực tiếp.

Sự thật rằng những lựa chọn của anh ta phụ thuộc mạnh mẽ vào lựa chọn của những người khác, tạo nên vấn đề quyết định tương tác. Nghiên cứu về những hành vi đơn lẻ được quy định bởi môi trường xã hội như thế nào là mục tiêu của tâm lý xã hội học. Sự tương tác liên quan ở đây chính là lý thuyết trò chơi, được phát triển vào thế kỉ XX.

## 2. Bài toán Carol

Giải pháp cho vấn đề của Guy và của tất cả những chàng trai khác đó là bó buộc các hành động được coi là hợp lý trong khuôn mô tả. Giả định rằng tất cả mọi người đều cư xử hợp lý có vẻ hơi phi thực tế nhưng đây là điều rất quan trọng trong cách tiếp cận lý thuyết trò chơi, bởi vì toán học không thể giải thích được việc ai đó hành xử phi lý hoặc chống lại lợi ích của chính họ. Tính đối xứng của vấn đề - Guy có thể là bất cứ ai - ngụ ý rằng tất cả sẽ hành động theo cùng một cách vì tất cả đều cân nhắc làm sao cho hợp lý. Tính hợp lý cho phép loại bỏ các giải pháp đối xứng khi không ai nói với Carol: Cho rằng không ai trong số những người này nói chuyện với cô, Guy sẽ được một kết quả tốt hơn khi tiếp cận cô ấy, vì vậy tính hợp lý cho rằng Guy có tiếp cận cô ấy. Một lý do tương tự cho phép bỏ giải pháp rằng tất cả mọi người nói chuyện với Carol. Không có giải pháp đối xứng rõ ràng hơn.



Tiếp cận hay không tiếp cận Carol?

Guy cần phải hành xử thật khôn khéo. Anh ta có thể nghĩ cách xử lý tình huống khó xử này là tung đồng xu, điều này làm cho Guy trở nên không chắc phải làm gì. Nếu ta công nhận “trở nên



*không chắc*” là một giải pháp khả thi cho tình huống trên, thì tỉ lệ 50 – 50 là hợp lý hay liệu có một mức không chắc chắn nào khác, như 30 – 70 có thể tiếp cận Carol, hoặc tốt hơn thế? Liệu đây thậm chí là cách hợp lý cho sự không chắc chắn? Đây có vẻ là một ý tưởng thú vị. Cùng xem điều này dẫn chúng ta đến đâu.

Sự không chắc chắn của Guy được mô tả bởi xác suất  $p$  khả năng tiếp cận Carol (vì vậy  $1 - p$  là xác suất không tiếp cận được cô ấy). Do tính đối xứng, sự không chắc chắn của mọi người được đại diện bởi cùng một số  $p$ — mọi người đều đưa ra lựa chọn một cách độc lập, phụ thuộc vào  $p$ . Mục tiêu là phải tìm ra giá trị tốt nhất  $p^*$  của  $p$ .

Giá trị của  $p^*$  thu được gián tiếp thông qua quan sát sau. Ta xác định một bó các tính không chắc chắn là  $p^*$  là hợp lý khi và chỉ khi Guy (và bất kì chàng trai khác) có cùng “*kết quả*” với hai khả năng sau: Tiếp cận hoặc không tiếp cận Carol, cho rằng phần còn lại đều không chắc chắn với xác suất  $p^*$ . Mặt khác không có một sự không chắc chắn nên làm gì: Guy sẽ chọn theo hướng có lợi hơn.

Nhưng làm thế nào để Guy có thể gán một giá trị thưởng cho một bó của sự không chắc chắn? Một câu trả lời do John Von Neumann và Oskar Morgenstern đề xuất là chia đều các giá trị thưởng được gán cho tất cả các bó hành động với trọng số tương đương với xác suất xảy ra của họ. Điều này được gọi là giá trị kỳ vọng. Tính hợp lý dựa trên giá trị kỳ vọng trở thành các mô hình chính của ngành phân tích đưa ra quyết định (decision making analysis) từ những năm 50 của thế kỉ XIX.

Giả sử nếu có  $N$  chàng trai quyết định một cách độc lập, như vậy có  $2^N$  bó hành động khả thi. Guy tính toán như sau:

- Bó mà trong đó chỉ duy nhất Guy tiếp cận Carol theo trường hợp ( $a$ )— với giá trị thưởng  $a$ — và xảy ra với xác suất  $(1 - p)^{N-1}$ , bởi vì mọi quyết định được đưa ra một cách độc lập. Bất kì bó mà cả Guy và người khác tiếp cận Carol theo trường hợp ( $c$ ) đều có giá trị thưởng là 0. Vì vậy, giá trị kỳ vọng khi tiếp cận Carol là  $a(1 - p)^{N-1}$ .
- Bất kì bó hành động nào mà Guy không nói chuyện với Carol đều nhận kết quả có giá trị là  $b$  bất chấp những người khác làm gì. Vì vậy giá trị kỳ vọng khi không tiếp cận Carol rõ ràng là  $b$ . Guy không hề biết phải làm gì khi hai giá trị này bằng nhau:  $a(1 - p)^{N-1} = b$ . Giải  $p$  anh ta được

$$p^* = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Vì  $a > b$ , nên  $p^*$  nằm giữa 0 và 1, xác định một xác suất thích hợp.



Tính toán cơ hội

Kết luận là bất kì ai nên tiếp cận Carol với xác suất  $p^*$ . Đây là giải pháp hợp lý cho tình huống của Carol khi cô có  $N$  người để ý giống hệt nhau.

Vì  $a > b$ , với  $N$  không quá lớn thì có khả năng  $a > 2^{N-1}b$ , trong trường hợp  $p^* > \frac{1}{2}$  thì có khả năng lớn Guy sẽ nói chuyện với Carol. Tuy nhiên, ngay khi  $N$  đạt giá trị đủ lớn,  $2^{N-1} > \frac{a}{b}$ , khả năng không có ai tiếp cận Carol càng trở nên rõ rệt. Thực tế,  $p^*$  tiến về 0 khi  $N$  càng lớn, cho dù Carol có xinh đẹp thế nào.

Như vậy, cơ chế sau sẽ ảnh hưởng đến việc Guy có tiếp cận Carol hay không:

- (1) Càng nhiều người theo đuổi Carol thì càng nhiều khả năng Guy không nói chuyện với cô.
- (2) Carol càng quyến rũ thì khả năng có rất nhiều chàng trai sẽ cân nhắc quyết định của mình.

Do đó dẫn đến việc Guy tin rằng  $N$  càng lớn thì  $p^*$  tương ứng càng nhỏ. Hệ quả là anh ta có vẻ sẽ chọn việc đọc báo hơn là nguy cơ bị Carol từ chối.

### 3. Hội chứng Carol

Điểm mấu chốt về việc Carol cảm thấy như mình khiến các chàng trai sợ hãi bỏ đi không phải là xác suất  $p^*$  mà là xác suất  $p_{\text{không}}$  rằng không ai nói chuyện với cô ấy. Bởi vì tất cả chàng trai đều hành động độc lập nên

$$p_{\text{không}} = (1 - p^*)^N = \frac{b^{\frac{N}{N-1}}}{a}.$$

Theo công thức trên thì  $p_{\text{không}}$  tăng khi  $N$  tăng. Càng nhiều cuộc hẹn hò thì càng nhiều khả năng Carol bị bỏ rơi.

Hơn nữa, khi  $N$  đạt giá trị lớn,  $p_{\text{không}}$  không biến mất mà tiến về  $\frac{b}{a}$ . Vì thế  $p_{\text{không}}$  luôn nằm giữa hai giá trị

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 < p_{\text{không}} < \frac{b}{a}.$$

Rõ ràng, miễn là  $a$  không lớn hơn  $b$ , ta có  $p_{\text{không}} > \frac{1}{2}$  và nguy cơ là không ai nói chuyện với Carol. Điều này là đúng bất kể số lượng chàng trai và sẽ tệ hơn cho Carol khi mà số lượng này tăng lên.

Carol nhận thức rằng cô ấy làm các chàng trai sợ hãi không phải là ảo tưởng. Theo như bài toán ở trên, Carol có lý do chính đáng khi nghĩ rằng các chàng trai giữ khoảng cách với cô ấy. Đây không phải là vấn đề xui xẻo mà là ảnh hưởng phụ của tính tương tác hợp lý. Một hệ quả nghịch lý là sức hấp dẫn của Carol đóng vai trò đẩy các chàng trai ra xa. Hiện tượng đáng ngạc nhiên này, mà chúng ta gọi là hội chứng Carol, là một sự tương tác tâm lý xã hội.



## 4. Bằng chứng đáng sợ

Hội chứng Carol không chỉ đơn thuần là lý thuyết, nhiều cô nàng, chàng trai hấp dẫn đã báo rằng mình mắc phải hội chứng này. Tìm kiếm trên mạng chỉ ra một số trường hợp nổi tiếng, trong một cuộc phỏng vấn tờ Sunday Times vào tháng 2 năm 2008, nữ diễn viên người Mỹ Uma Thurman chia sẻ rằng: “*Các chàng trai hiếm khi nói chuyện với tôi*”. Cô cho rằng mình kém may mắn với lời nguyện không đàn ông suốt đời. Trường hợp tương tự với ngôi sao ca nhạc người Mỹ Jessica Simpson, người đã tuyên bố trên tivi: “*Tôi khiến các chàng trai xa lánh*”. Một ví dụ khác, được báo cáo vào tháng 3 năm 2009 bởi tờ Telegraph online, rằng diễn viên 19 tuổi người Anh, Emma Watson, với vai diễn nổi tiếng trong tiểu thuyết Harry Potter, mang đến một biệt danh nổi tiếng khắp thế giới, “*Người phụ nữ mà các chàng trai không dám lại gần*”.

Do đó, sự may mắn của Carol không hề thừa, mặc dù hiển nhiên khác so với những người nổi tiếng như Thurman. Toán học có thể giải thích như sau. Số lượng người hâm mộ Thurman là khổng lồ nên giá trị của  $\frac{b}{a}$  xấp xỉ tốt cho  $p_{\text{không}}$  và điều đó làm Thurman thoải mái. Còn đối với

Carol,  $N$  không lớn như vậy, nhưng tỉ số  $\frac{b}{a}$  ứng với  $p_{\text{không}}$  tiến về 1. Đó là nguyên nhân dẫn đến hội chứng Carol.

Dịch bởi thành viên chuyên san EXP, Đại học KHTN - ĐHQG TP.HCM.

Nguồn: <https://plus.maths.org/content/carol-syndrome>

# CÁC VẤN ĐỀ CỔ ĐIỂN VÀ HIỆN ĐẠI

Trần Nam Dũng – Đại học Khoa học Tự nhiên – ĐHQG TP.HCM

## LỜI GIỚI THIỆU

Chuyên mục này dành cho các vấn đề cổ điển và hiện đại được trình bày dưới dạng các bài toán xâu chuỗi. Đó có thể là chuỗi các bài để giải bài toán đẳng chu, chứng minh đẳng thức Euler kỳ diệu  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ , một chuỗi bài toán vận trù ... Cách trình bày xuất phát từ những vấn đề đơn giản, dễ hiểu, những khái niệm mới sẽ được định nghĩa luôn trong bài để có thể đọc tương đối độc lập. Và mỗi một chuỗi bài sẽ nêu ra những vấn đề nhất định, có thể là giải quyết một bài toán kinh điển hay nêu ra những giả thuyết mới, những vấn đề mới. Lời giải và thảo luận về các bài toán sẽ được đăng ở số  $N + 3$ .

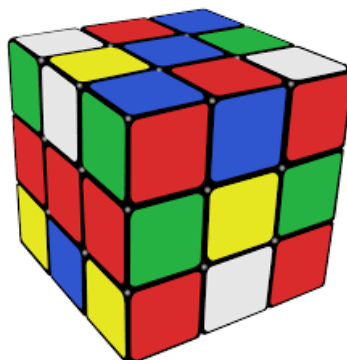
Trong số này chúng tôi giới thiệu các đề toán mẫu cho cuộc thi Olympic Toán dành cho học sinh THPT do Hội toán học Việt Nam tổ chức trong khuôn khổ kỳ thi Olympic toán sinh viên toàn quốc được tổ chức vào tháng 4 tới đây tại Quy Nhơn. Bạn đọc có thể cảm nhận thấy sự khác biệt lớn về cách ra đề và độ sâu cũng như mục đích của các đề toán. Hy vọng là cuộc thi sẽ được đón nhận nhiệt tình và sẽ góp phần thúc đẩy phong trào dạy và học toán ở bậc THPT.

Trong số này, chúng tôi đăng một số bình luận cho các bài toán về khối vuông Rubik và bài toán Higman đã đăng ở số 3.

## Khối vuông Rubik và cách xếp

(Giải đáp và bình luận một số vấn đề đã đăng ở số 3 của tạp chí)

Rubik là một trò chơi giải đố do giáo sư Ernő Rubik người Hungary phát minh ra năm 1974. Như vậy cho đến hôm nay, khối vuông Rubik đã vào tuổi 42. Phiên bản tiêu chuẩn của Rubik là khối lập phương cạnh  $3 \times 3$  với 6 màu ở 6 mặt: Đỏ, vàng, cam, xanh lá cây, xanh dương và trắng. Chiều dài cạnh của lập phương Rubik tiêu chuẩn là khoảng 5,7 cm.



Rubik có cách chơi đơn giản nhưng lại ... siêu khó, giống như giải một bài toán vậy. Trò chơi bắt đầu bằng việc xáo trộn các ô màu trên Rubik và nhiệm vụ của người chơi là tìm cách xếp lại Rubik về hình dạng ban đầu với 6 mặt màu đồng nhất.

Đối với người mới tập chơi, nếu không có phương pháp, họ gần như không bao giờ giải được bài toán Rubik. Trên thế giới hiện nay, người xếp Rubik nhanh nhất là Lucas Etter. Trong khuôn khổ sự kiện River Hill Fall 2015 diễn ra tại thị trấn Clarkville, thuộc bang Maryland, Mỹ, cậu bé 14 tuổi này đã khiến nhiều người sửng sốt khi xoay rubik chỉ trong 4,9 giây.

Bản chất của Rubik là sử dụng các thuật toán hoán vị để thành công. Mỗi Rubik tiêu chuẩn có 43 tỉ tỉ hoán vị khác nhau. Nếu coi mỗi khối Rubik là một hoán vị và xếp chúng thành bề mặt cong, số lượng này đủ phủ kín bề mặt Trái đất 256 lần.

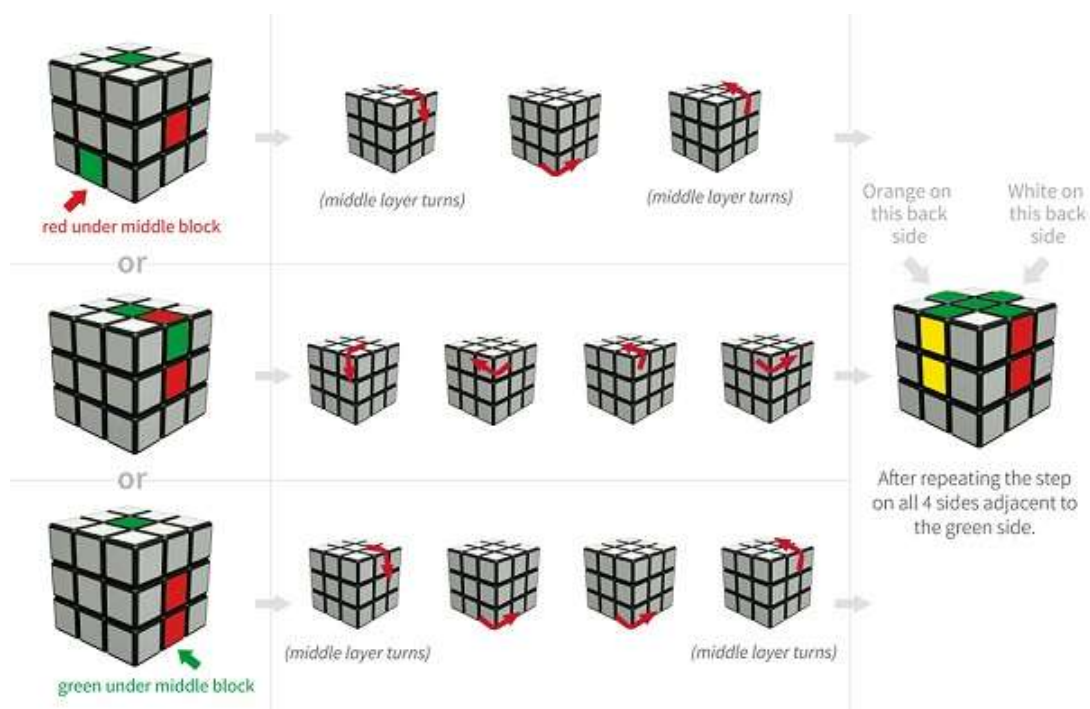
Để giải thành công một khối Rubik tiêu chuẩn ( $3 \times 3$ ), có rất nhiều phương pháp khác nhau. Một số phương pháp xoay nhanh được Jessica Fridrich, Philip Marshall hay Ryan Heise phát triển có thể giúp giải Rubik chỉ sau 40 – 65 lần xoay.

Tuy nhiên, cách này thường chỉ dùng cho những người chơi lâu năm, vì thuật toán khó và thậm chí còn rất nhiều (với phương pháp Fridrich, bạn phải ghi nhớ 120 thuật toán khác nhau).

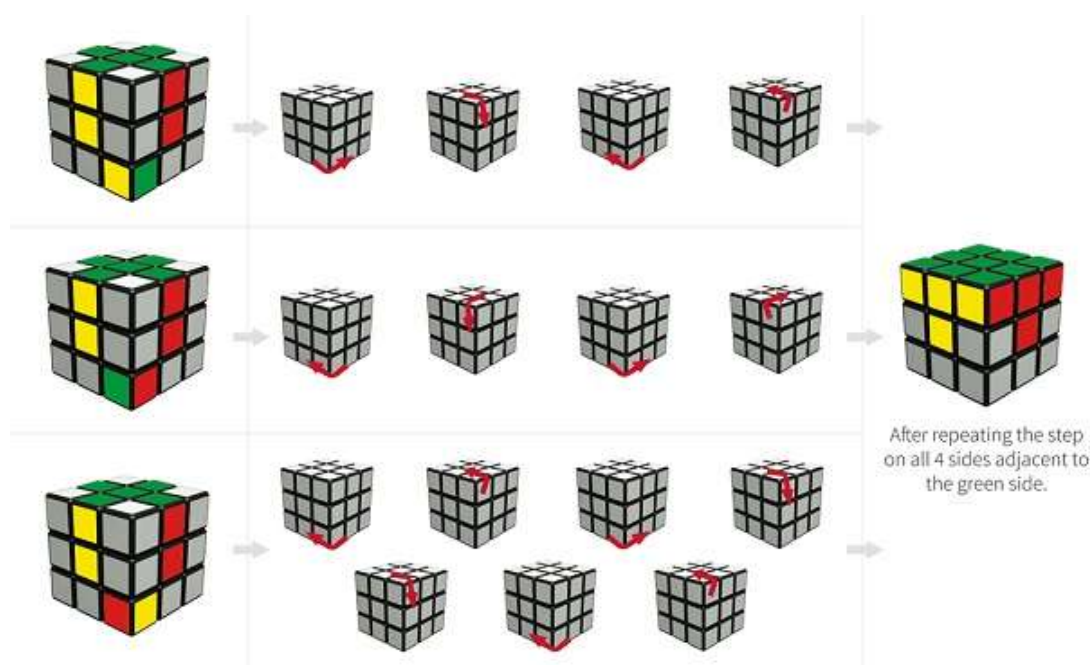


Cách phổ biến và thông dụng nhất dùng để giải Rubik phù hợp với mọi đối tượng là phương pháp của David Singmaster - một nhà toán học người Anh.

Một cách đơn giản, có thể hiểu đây là cách thức xếp Rubik theo từng tầng. Đối với tầng thứ nhất, người chơi cần xếp được một chữ thập chuẩn ở một mặt (màu của các đỉnh chữ thập trùng với màu mặt đang xếp và màu của 4 mặt xung quanh tương ứng).

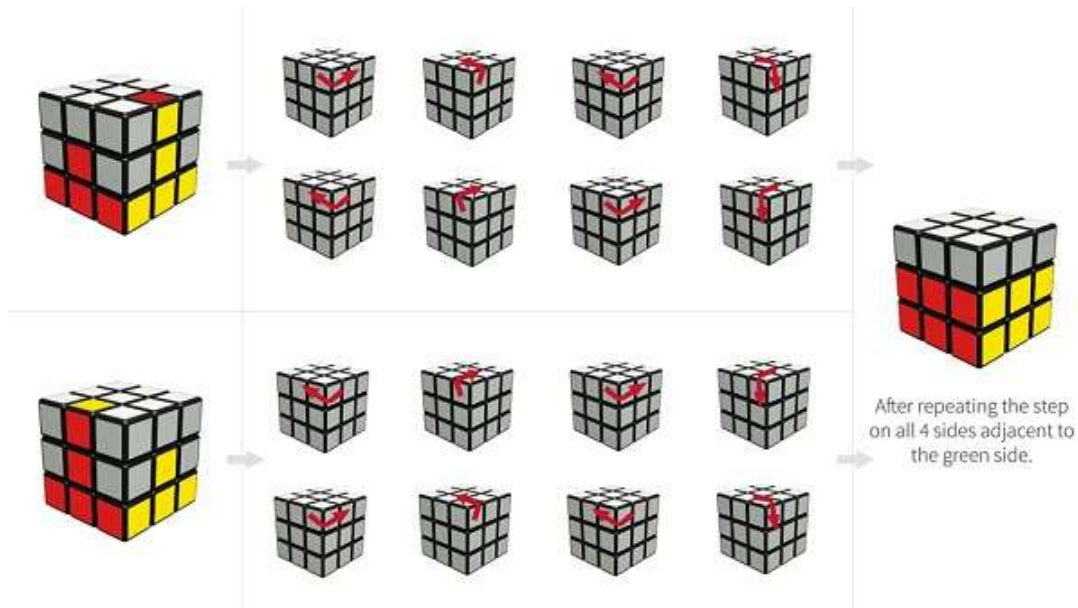


Sau đó, người chơi xếp nốt 4 khối ở góc vào đúng vị trí của chúng để hoàn thiện tầng một. Trong quá trình xếp, cần giữ nguyên vị trí của chữ thập mình đã xếp được.



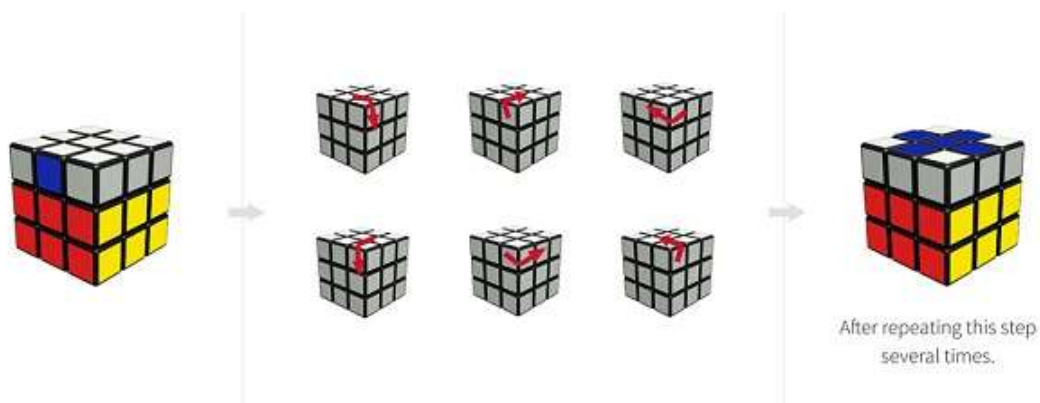
Đối với tầng thứ hai, công việc bắt đầu phức tạp hơn. Người chơi phải xếp 4 góc của tầng này vào đúng vị trí mà không được phá vỡ cấu trúc của tầng đáy vừa xây xong.





Tầng thứ ba là công đoạn khó nhất trong việc giải quyết một khối Rubik. Đối với tầng này, người chơi phải nhớ khá nhiều thuật toán. Một trong những cách điển hình là xếp sao cho mặt cuối cùng đồng màu (dù các khối nhỏ ở vị trí sai).

Tiếp đó, sử dụng công thức để đổi chỗ sao cho 4 khối nhỏ ở góc về đúng chỗ mà không thay đổi cấu trúc đã xếp ở các tầng dưới. Cuối cùng, người chơi xếp nốt các viên cạnh ở giữa về đúng vị trí là hoàn thành.



## 1. Thuật toán Herbert Kociemba

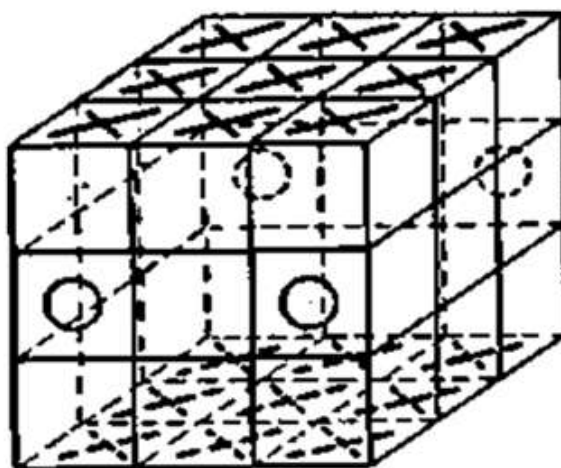
Năm 1992, một người chơi khối vuông Rubik từ Darmstadt, Đức đã tìm ra một thuật toán có thể giải khối vuông Rubik trong vòng 21 lần xoay. Đầu tiên con số 21 này được tìm ra bằng phương pháp thực nghiệm. Cụ thể là với tất cả các trạng thái ban đầu được đưa ra một cách ngẫu nhiên (hoặc cố tình lựa chọn) thì thuật toán của Kociemba đều giải được với không quá 21 lần xoay. Sau đó, vào tháng 7/2010, Kociemba cùng với Tomas Rokicki, Morley Davidson, và John Dethridge, với dự giúp đỡ của máy tính, đã chứng minh được là “con số của chúa” cho khối vuông Rubik là 20.



## 2. Ý tưởng thuật toán Hebert Kociemba

Nói đúng ra thì điều mà Kociemba đưa ra không phải là thuật toán “*xếp Rubik*” theo đúng nghĩa mà những người chơi Rubik vẫn hiểu. Các thuật toán xếp Rubik thông thường là tập hợp các quy tắc giúp chúng ta từ mọi trạng thái của khối vuông đặt ra một mục tiêu gần nhất, cố gắng đạt được mục tiêu đó bằng cách thực hiện chuỗi các phép xoay mô tả trong cách chơi trong tình huống cụ thể đó. Như vậy, khối vuông chuyển đến một trạng thái mới, gần trạng thái đúng hơn (ít nhất là theo quan điểm của thuật toán đó). Ví dụ, mục tiêu có thể là tìm khối vuông nhỏ ở góc chưa đúng chỗ và chuyển nó về góc của mình, không đụng đến các khối góc khác. Và số lượng các bước nhỏ như vậy ta phải thực hiện rất nhiều.

Thuật toán Kociemba chỉ đặt một mục tiêu trung gian - khối vuông phải được đưa về một trong các trạng thái, được gọi luôn là trạng thái trung gian. Chúng được đặc trưng bởi tính chất: Bất kỳ một trạng thái trung gian nào cũng có thể thu được từ trạng thái đúng (và có nghĩa là ngược lại, có thể chuyển từ nó về trạng thái đúng) bằng cách xoay chỉ bốn mặt bên một góc  $180^\circ$ , còn các mặt trên và dưới thì xoay góc bất kỳ (tất nhiên, phải là bội số của  $90^\circ$ ). Một mô tả trực quan hơn cho lớp các trạng thái trung gian là cách phối màu đặc biệt của khối vuông, minh họa trong hình dưới đây:



Mặt trên và mặt dưới của khối vuông được tô bởi một màu, còn trên mỗi một khối vuông bên của lớp ngang giữa, một trong hai mặt nhỏ được tô bởi màu thứ hai, các mặt khác của khối vuông không được tô gì. Mục tiêu đầu tiên (vấn đề của bước 1) của thuật toán Kociemba là thiết lập cách tô này từ trạng thái lộn xộn ban đầu. Tất nhiên, ở bước này ta có thể dùng mọi cách xoay. Ở bước 2, ta sẽ chỉ sử dụng các cách xoay đã mô tả ở trên. Để thấy rằng các cách xoay này sẽ bảo toàn cách phối màu phụ trợ của chúng ta. Về bản chất, ở bước 2 ta chỉ thực hiện các bước chuyển các khối vuông nhỏ về chỗ của nó. Nhờ vào việc bảo toàn cách phối màu phụ trợ, định hướng đúng của các khối vuông nhỏ tại chỗ của mình sẽ được tự động đảm bảo. Như vậy, số các trạng thái trung gian bằng số các hoán vị đến được của các khối vuông nhỏ (tức là các hoán vị thu được từ hoán vị đúng bằng các phép quay các mặt), trong đó các khối vuông bên của lớp giữa vẫn ở lại lớp này.

Ta có thể tính dễ dàng con số này: Bốn khối vuông nhỏ ở lớp giữa có  $4!$  cách hoán vị, các khối vuông bên khác  $-8!$  cách, các khối góc cũng có  $8!$  cách. Tổng cộng số tất cả các hoán vị có

thể là  $(8!)^2 \times 4!$  và ta còn phải chia cho 2 để thu được số các hoán vị đến được. Như vậy có  $N_2 = (8!)^2 \times 4! \cdot \frac{1}{2} = 19,5 \times 10^9$  trạng thái trung gian. Con số này cho ta một ngưỡng tượng về số các phương án mà máy tính phải ghi trong bộ nhớ của mình để tìm chiến lược đủ ngắn để đạt được trạng thái trung gian. Ở bước 1, chương trình không quan tâm đến việc mô tả toàn bộ trạng thái đã cho của khối vuông (tức là không phải tất cả  $4,3 \times 10^{19}$  trường hợp có thể), mà chỉ là phân bố màu ban đầu của các phối màu phụ trợ mà ta phải đưa về dạng chuẩn (như hình ở trên). Nói cách khác, ở đây quan trọng là hướng của tất cả các khối vuông nhỏ và vị trí của 4 khối vuông nhỏ của lớp giữa. Như thế, số  $N_1$  các phương án được xét ở bước 1 bằng (số định hướng đúng của 8 khối góc  $\times$  (số định hướng đúng của 12 khối vuông bên)  $\times$  (số cách xếp các khối vuông của lớp ngang giữa)  $= 3^7 \times 2^{11} \times C_{12}^4 = 2,217 \times 10^9$ .

Rõ ràng  $N_1 N_2$  là tổng số tất cả các trạng thái đến được, và con số này lớn hơn con số  $N_1 + N_2$ , con số mà chương trình phải thực hiện đến 9 thứ nguyên. Tuy nhiên, ngay cả con số đã được giảm xuống này cũng quá lớn để có thể vét cạn và ghi nhớ kết quả. Vì thế máy tính sẽ không biết được trước lời giải nào nó sẽ cho ra đối với trạng thái khối vuông ban đầu được đưa vào. Nó sẽ tìm lời giải với “*sự có mặt của người đặt hàng*” và cho ra có thể không phải là cách giải ngắn nhất, nhưng là một phương án đủ ngắn.

Chú ý rằng phương pháp của Kociemba cũng có khởi nguồn từ thuật toán của Thistlethwaite. Tuy nhiên, trong thuật toán khởi nguyên của Thistlethwaite đã sử dụng không phải là một mà là ba lớp trạng thái trung gian lồng vào nhau, tương ứng với việc giảm từ từ các phép xoay được sử dụng, lớp thứ hai trong 3 lớp này tạo thành các trạng thái trung gian của Kociemba.

Dễ hiểu rằng nếu như bạn muốn đi từ điểm  $A$  (trạng thái ban đầu) đến điểm  $B$  (trạng thái đúng) mà trên đường bạn bắt buộc phải ghé điểm  $C$  (trạng thái trung gian) thì đường đi  $ACB$  như vậy có thể sẽ dài hơn đường đi thẳng  $AB$ , ngay cả trong trường hợp các đoạn thẳng  $AC$  và  $CB$  được đi một cách tối ưu.

Và nếu như trên đường đi từ  $A$  đến  $C$  ta lại còn phải ghé  $D$  và từ  $C$  đến  $B$  ta còn phải ghé trạng thái trung gian  $E$  thì ta thu được một đường đi còn dài hơn  $ADCEB$ . Tuy nhiên mỗi một đoạn của đường đi này đã được rút ngắn nên việc dùng vét cạn là có thể. Điều này giải thích vì sao có những kết quả kỷ lục của Thistlethwaite và Cloosterman.

### 3. Chương trình của Kociemba làm việc như thế nào

Nói một cách nôm na, Kociemba bắt máy tính xét tất cả các chuỗi các phép quay được phép trong bước tương ứng và bắt thời điểm mà mục tiêu của bước này đạt được. Nhưng với cách làm trực tiếp này thì khối lượng phương án là quá lớn.

Nước đi thứ nhất có thể thực hiện  $6 \times 3 = 18$  cách (mỗi một trong 6 mặt có 3 cách xoay,  $180^\circ$ ,  $\pm 90^\circ$ ), ở bước thứ hai và các bước tiếp theo số cách xoay là 15, vì sẽ không có ý nghĩa nếu ta xoay mặt vừa mới xoay xong. Như vậy, nảy sinh “*cây trường hợp*” mà từ mỗi nhánh lại tỏa ra 5 nhánh tiếp theo. (Trên thực tế, từ một thời điểm nhất định nào đó một số nhánh có thể nhập lại vì các chuỗi nước đi khác nhau có thể sinh ra các cách biến đổi giống nhau.) Số cách chuỗi nước đi độ dài không vượt quá  $n$  sẽ là tổng của cấp số nhân  $18(1 + 15 + \dots + 15n - 1)$ . Và chỉ đến  $n = 18$  thì số này mới vượt quá số  $N$  các trạng thái của khối vuông, và tức là chắc chắn sẽ tìm được những trạng thái mà không thể xếp được sau ít hơn 18 nước đi. Trong thực tế, do sự nhập một của một số nhánh của cây trường hợp, số 18 còn có thể tăng lên.

Như ta sẽ thấy kết quả mà chương trình của Kociemba đạt được là rất gần với kết quả tốt nhất. Hebert Kociemba đã giảm việc xét trường hợp bằng cách sử dụng chương trình lọc đặc biệt. Chương trình này lưu giữ thông tin nhất định về tất cả các chuỗi gồm, ví dụ như là, không quá 8 nước đi và cho phép sàng các trạng thái mà không xếp được (theo nghĩa bước 1 hoặc bước 2) bằng cách chuỗi như thế.

Bắt đầu chơi, máy tính sẽ được giao nhiệm vụ thực hiện bước thứ nhất với 10 nước đi. Nó thực hiện 2 nước đi đầu và mở bộ lọc 8 nước, nếu như trạng thái phát sinh không sàng được, nước đi thứ ba được thực hiện và mở bộ lọc 7 nước và cứ như vậy. Nếu như ở một bước nào đó xảy ra sự sàng lọc, ta phải đổi bước đi đã thực hiện trước đó. Cho đến nay thì đối với tất cả các vị trí đã đề xuất cho chương trình, có thể thực hiện được bước 1 với không quá 5 nước, còn bước 2 không quá 14 nước. Để thực hiện thuật toán của mình Kociemba sử dụng máy tính PC Atar iST với bộ nhớ 1MB và tần số 8MHz. Lỗi của chương trình - máy sinh các phép toán với block kiểm tra được viết trên ngôn ngữ Assembly. Kích cỡ của nhân máy này nhỏ hơn 500MB.

Các thành phần còn lại của chương trình mà không ảnh hưởng lớn đến tốc độ tính toán được viết trên ngôn ngữ Basic. Kết quả thời gian trung bình để tìm kiếm một lời giải là 1, 5 phút (10 giây cho bước 1 và 85 giây cho bước 2). Công việc được thiết kế như sau: Đầu tiên mô tả trạng thái ban đầu của khối vuông được đưa vào máy tính (vị trí và hướng của tất cả các khối vuông nhỏ). Sau đó máy tính tìm và ghi nhớ tất cả các đường đi tốt nhất (không quá 13 nước) để đạt được trạng thái trung gian, vào sau đó với đường đi ngắn nhất trong chúng mở thuật toán bước 2. Nếu như tổng số nước đi của hai bước sau chiến dịch này quá 21, máy tính sẽ quay lại bước 1 và tìm một đường đi ngắn hơn trên cơ sở một trạng thái trung gian khác, và có thể sẽ tăng độ dài của bước 1. Đưa cho máy tính các phương án khác nhau của trạng thái ban đầu, Hebert cho đến nay luôn tìm được cách thực hiện không quá 21 nước đi, mặc dù để làm điều này, chương trình phải làm việc nhiều giờ. Như vậy, bằng thực nghiệm (với các phép thử ngẫu nhiên, vì việc xét hết tất cả các trường hợp là không thể), Kociemba đã tìm được con số 21, rất gần với “*con số của chúa*”.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Science Buddies/How Stuff Works.
- [2] V.Dubrovsy, A.Kalinin, Tin tức mới về Cubic Rubik, Kvant, số 11/1992.
- [3] Wikipedia: [www.wikipedia.org/wiki/Optimal\\_solutions\\_for\\_Rubik's\\_Cube](http://www.wikipedia.org/wiki/Optimal_solutions_for_Rubik's_Cube)

## Kỳ thi Olympic Toán THPT 2016

Trong khuôn khổ kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên Toàn quốc, Hội Toán học và Trường Đại học Quy Nhơn sẽ phối hợp tổ chức một kỳ thi Olympic dành cho Học sinh Trung học Phổ thông chuyên. Kỳ thi sẽ được tổ chức theo đúng chuẩn mực của một kỳ thi Olympiad về Toán. Ngoài việc tham dự thi, giáo viên và học sinh sẽ có cơ hội giao lưu với các bạn bè và đồng nghiệp, đặc biệt là với các giảng viên đại học và sinh viên yêu toán từ hơn 80 trường Đại học, Cao đẳng và Học viện trong cả nước.



**LYMPIC TOÁN HỌC**  
**SINH VIÊN VÀ HỌC SINH 2016**  
*Quy Nhơn, 11-17/4/2016*

**Cơ quan tổ chức:** Bộ Giáo dục và Đào tạo  
 Liên hiệp các hội khoa học và kỹ thuật Việt Nam  
 Trung ương Hội sinh viên Việt Nam  
 Hội Toán học Việt Nam  
 Trường Đại học Quy Nhơn

**Nội tổ chức:** Trường Đại học Quy Nhơn

**Ban tổ chức:**  
 Đồng trưởng ban: GS. Nguyễn Hồng Anh  
 GS. Phùng Hồ Hải  
 Phó ban: GS. Phạm Thế Long  
 PGS. Đinh Thanh Đức  
 Ủy viên: TS. Nguyễn Thái Hòa  
 TS. Ngô Quốc Anh  
 TS. Ngô Lâm Xuân Châu  
 TS. Đoàn Trung Cường  
 TS. Lê Cường  
 TS. Nguyễn Duy Thái Sơn  
 TS. Mai Thành Tấn  
 TS. Nguyễn Chu Gia Vương

**Đối tượng tham dự:**  
 Sinh viên các trường Đại học, Cao đẳng và các Học viện  
 Học sinh các trường Trung học phổ thông chuyên  
 Thông tin chi tiết tại: <http://vms.org.vn>

Poster Olympic Toán học Sinh viên và Học sinh 2016

Tuy nhiên điểm khác biệt của kỳ thi là ở nội dung thi. Đề thi không là tập hợp rời rạc của một số bài toán mà là những bài toán được sắp xếp theo một mạch nối liền nhằm giới thiệu cho người dự



thì một nội dung lý thú của Toán học. Chắc chắn các bạn học sinh sẽ thấy Toán học hay hơn và có ý nghĩa hơn khi chuẩn bị và tham dự kỳ thi này.

Dưới đây là hai đề thi tham khảo, mỗi chủ đề thí sinh sẽ làm bài trong thời gian 180 phút.

## Chủ đề: Một mô hình đô thị lạ

Tại thành phố Olympic, mỗi nhà có số nhà là một số nguyên dương, còn số nhà của Tòa thị chính là 0. Nhà trong Olympic có số nhà đôi một khác nhau và lấp đầy tập các số nguyên dương. Do bản chất cong đặc thù của đường đi trong thành phố Olympic, người ta nhận thấy khoảng cách từ nhà  $n$  đến nhà  $m$  được tính như sau: Nếu  $m - n = 3^k l$ , trong đó  $l$  là một số nguyên không chia hết cho 3 và  $k$  là một số nguyên không âm, thì  $d(m, n) = 3^{-k}$ .

- 1) Trong số các nhà có số nhà dương, bé hơn 100, tìm (kèm theo chứng minh) tất cả những nhà gần tòa thị chính nhất.
- 2) Thử tìm một dãy vô hạn số nhà  $(h_n)$  sao cho

$$d(17, h_1) > d(17, h_2) > \dots > d(17, h_n) > \dots$$

Tập tất cả các nhà có cùng khoảng cách đến tòa thị chính như nhà  $n$  sẽ được gọi là lân cận của nhà  $n$  và sẽ được ký hiệu là  $N(n)$ . Dưới dạng công thức:

$$N(n) = \{m \in \mathbb{N}^* \mid d(m, 0) = d(n, 0)\}.$$

Ta có thể hình dung  $N(n)$  như một đường tròn bán kính  $d(n, 0)$ , với tâm là tòa thị chính.

- 3) Giả sử nhà  $n$  có  $d(n, 0) = \frac{1}{27}$ . Hãy xác định mười số nguyên dương  $m$  bé nhất sao cho  $m \in N(n)$ .
- 4) Chứng minh rằng  $d(a, c) \leq \max\{d(a, b), d(b, c)\}$  với mọi  $a, b$  và  $c$ .

Có một điều đáng tiếc là thành phố Olympic đã trở nên đông đúc mà người ta không thể xây dựng thêm: Mỗi số nguyên không âm đều đã tương ứng với một nhà (hoặc, với tòa thị chính, trong trường hợp số 0). Trong tình thế đó lại có 18 gia đình mới chuyển đến và mong được định cư ở thành phố này. Sau nhiều lần cân nhắc, tuyệt nhiên không chấp nhận việc dùng số nhà âm, thành phố quyết định đi theo một phương án khác: Đúng ngày 17 tháng Tư, xe chuyên dụng sẽ đến và chuyển mỗi gia đình từ nhà  $n$  sang ở nhà  $n + 18$ , với mọi số nguyên dương  $n$  (và như vậy không phải di chuyển tòa thị chính). Chẳng hạn, gia đình đang ở nhà 17 sẽ chuyển sang ở nhà 35.

- 5) Tìm một nhà có khoảng cách đến tòa thị chính bị thay đổi do sự di chuyển này.
- 6) Xác định tất cả các giá trị của  $n$  sao cho  $N(n)$  bị xê dịch toàn bộ (nghĩa là, khoảng cách đến tòa thị chính của mọi cư dân trong  $N(n)$  đều thay đổi sau khi di chuyển).
- 7) Một hôm, chủ nhà 23 nói “Tôi có cảm giác như thể tôi đang sống ở tâm của “nhóm 2” (biệt danh được đặt cho tập gồm các nhà  $n = 3k + 2$  với  $k \in \mathbb{N}$ ): Mỗi khi nhìn ra cửa sổ, tôi nhận thấy “nhóm 2” gồm đúng những nhà cách tôi một khoảng không quá  $\frac{1}{3}$ ”. Chủ nhà 32 khẳng định “tôi cũng thấy thế”. Hãy giải thích.

Để đối phó tốt hơn với tình trạng nhập cư, Hội đồng thành phố Olympic cũng quyết định phát triển thành phố theo một phương án đặc biệt: Số nhà bây giờ sẽ là các số hữu tỉ, nhưng cần phải đánh số sao cho nguyên tắc khoảng cách vẫn được đảm bảo: Khoảng cách giữa hai nhà số  $x$  và  $y$  là  $d(x - y)$ , được tính như sau.

Để xác định  $d\left(\frac{p}{q}\right)$ , với  $p$  và  $q$  là các số nguyên mà  $pq \neq 0$ , người ta viết  $\frac{p}{q} = \frac{3^k p'}{q'}$ , trong đó cả  $p'$  lẫn  $q'$  đều là các số nguyên không chia hết cho 3, và  $k$  là một số nguyên (không nhất thiết dương), khi đó  $d\left(\frac{p}{q}\right) = 3^{-k}$ .

8) Một người nhập cư đến từ thành phố IMO có nguyện vọng như sau: “Số nhà cũ của tôi là

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n} \right).$$

Số nhà của các bạn của tôi ở đây là toàn bộ các tổng riêng

$$H_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Tôi muốn ở số nhà sao cho khoảng cách từ đó với nhà  $H_n$  tiến dần tới 0 khi  $n$  tiến ra vô cùng”. Điều này có thể thực hiện được không, tại sao?

## Chủ đề: Đa thức Tchebyshev

Mục tiêu của bài toán là tìm hiểu một số tính chất đại số, giải tích và tổ hợp của các đa thức Tchebyshev. Trong toàn bộ đề bài, các đa thức được hiểu là các đa thức với hệ số thực.

### Các đa thức Chebyshev

Với  $n$  là một số tự nhiên, đa thức Chebyshev  $T_n(x)$  được định nghĩa như sau:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \text{ với mọi } n \geq 2. \end{cases}$$

1) Chứng minh rằng  $T_n(\cos t) = \cos(nt)$ , trong đó  $t$  là số thực bất kỳ.

2) Chứng minh rằng với mọi số thực  $|x| \geq 1$  ta luôn có

$$T_n(x) = \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}.$$

## Mô tả tổ hợp của các đa thức Chebysev

Cho một dải ô vuông  $1 \times n$  với  $n$  là một số nguyên dương cho trước. Xét các cách lát dải ô vuông bởi các ô vuông đơn vị  $1 \times 1$  và các domino  $1 \times 2$ . Ta gán mỗi ô vuông  $1 \times 1$  với trọng  $2x$  ( $x$  là một biến) và mỗi domino với trọng  $-1$ .

- 3) Ta định nghĩa *trọng của một cách lát* như là tích của tất cả các trọng của các ô vuông đơn vị và các domino trong cách lát đã cho. Gọi  $U_n(x)$  là tổng của các trọng của tất cả các cách lát dải  $1 \times n$ . Như vậy,  $U_1(x) = 2x$ ,  $U_2(x) = 2x \cdot 2x + (-1) = 4x^2 - 1$ , ... Ta quy ước  $U_0(x) = 1$ . Chứng minh rằng với mọi  $n \geq 2$ , thì

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x).$$

- 4) Trọng của một cách lát dải  $1 \times n$  với đúng  $k$  domino bằng bao nhiêu? Từ đó hãy chỉ ra

$$U_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{n-i}{i} (2x)^{n-2i}.$$

- 5) Ta định nghĩa *trọng điều chỉnh của một cách lát* như là:

- Tích của tất cả các trọng của các ô vuông đơn vị và các domino trong cách lát đã cho nếu ô vuông đầu tiên của dải  $1 \times n$  không được lát bởi ô vuông đơn vị (do đó phủ bởi một domino).
- Tích của tất cả các trọng của các ô vuông đơn vị và các domino trong cách lát đã cho chia cho 2 nếu ô vuông đầu tiên của dải  $1 \times n$  được lát bởi ô vuông đơn vị.

Chứng minh rằng với mọi  $n \geq 1$ , thì  $T_n(x)$  là tổng các trọng điều chỉnh của tất cả các cách lát dải  $1 \times n$ .

- 6) Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $m \geq 1$  và  $n \geq 1$  thì

$$T_{m+n}(x) = T_m(x)U_n(x) - T_{m-1}(x)U_{n-1}(x).$$





# TỦ SÁCH TOÁN PHỔ THÔNG

Nguyễn Tiến Dũng  
(Đại học Toulouse, Pháp)

Trong số tạp chí này, Epsilon trân trọng giới thiệu một bài điểm sách của giáo sư Nguyễn Tiến Dũng. Bài viết gốc bạn đọc có thể xem ở trang nhà của giáo sư [tại đây](#). Epsilon cũng mong độc giả lưu ý ở thời điểm hiện tại, một số sách mà giáo sư giới thiệu dạng (*đang dịch ?*) đã được dịch xong và đã phát hành.

Đây là danh sách các sách toán phổ thông mà tôi có được xem và thấy hay, kèm theo các thông tin và bình luận. Chủ yếu là sách tiếng nước ngoài, và hy vọng chúng sẽ được dịch sang tiếng Việt, để đến được với các bạn trẻ Việt Nam. Danh sách này sẽ được cập nhật mỗi khi có gì mới. Nếu ai thấy sách nào hay xin giới thiệu cho tôi biết. Xin cảm ơn!

Tôi sẽ xếp theo tên tác giả trong danh sách đầu tiên, rồi phân loại theo lứa tuổi ở các danh sách phía dưới

## Danh sách theo thứ tự tên tác giả

**Abbot, Thế giới phẳng: câu chuyện tình cảm nhiều chiều** (Flatland: a romance from many dimensions). Đây là một quyển sách kinh điển về hình học, được viết từ cuối thế kỷ 19 và cho đến những năm 2000 vẫn tiếp tục tái bản. “Thế giới phẳng” ở đây tức là thế giới 2 chiều. Tác giả tưởng tượng con người trong thế giới chỉ có 2 chiều sẽ sống ra sao, nhận biết các thứ thế nào, so với thế giới 1 chiều thì sao, và khi có người từ thế giới 3 chiều đến thăm thì sao, v.v. Qua đó hiểm thêm nhiều về hình học (ở mức phổ thông).

**Aigner & Ziegler, Các chứng minh từ Sách Trời** (Proofs from THE BOOK), tiếng Anh (chưa dịch?), tái bản lần 4, 2010. Các chứng minh hay nhất của một loạt các định lý kinh điển trong số học, hình học, tổ hợp (lý thuyết đồ thị), và giải tích. “Sách Trời” là cách nói ví von của nhà toán học Erdos: Chúa Trời có 1 quyển sách trong đó ghi tất cả mọi thứ toán học thật hay ho, cái gì mà hay thì tức là từ “Sách Trời” mà ra. Hợp cho học sinh cấp 3, tuy cấp 2 cũng có thể hiểu một số mục.

**Aleksandrova & Levshin.** Bộ sách tuyển thuyết toán học cho trẻ em của hai tác giả này là bộ sách kinh điển vô cùng hấp dẫn, với các quyển: **Ba ngày ở xứ Karlikania, Người mặt nạ đen từ nước Al-giép, Con tàu của thuyền trưởng Đơn vị**, và 4 quyển sách về các cuộc phiêu lưu của **Thạc sĩ khoa học đẳng trí**. Chủ yếu dành cho độ tuổi cấp 1, nhưng các học sinh lớn hơn mà chưa biết đến, đọc chắc cũng sẽ thích.

**Bellos, Cuộc phiêu lưu của Alex trong Numberland** (Alex’s adventures in Numberland), tiếng Anh, 2010. Gồm các câu chuyện hấp dẫn về lịch sử toán học, khả năng toán học của người và động vật, các ứng dụng thú vị của toán sơ cấp, v.v. Tác giả có bằng đại học toán và triết học, rồi làm nghề nhà báo.

**Bolt, Hộp Pandora toán học** (A mathematical Pandora's box). Tiếng Anh (chưa dịch), NXB đại học Cambridge, 193. 128 trang. Tuyển tập 142 bài toán thú vị để phát triển tư duy logic và sáng tạo của trẻ em. Cho mọi lứa tuổi. Theo huyền thoại, Hộp Pandora tức là hộp chứa con quỷ, đã mở ra là con quỷ chui ra, không nhốt lại nó vào được nữa. Một bài ví dụ: 3 bạn gấu có 1 bình 21 lít mật, muốn chia được thành 3 phần bằng nhau. Các bạn kiếm thêm được 3 bình khác, với dung tích là 11, 8 và 5 lít. Bằng cách đổ đi đổ lại mật giữa các bình, các bạn gấu đã chia được mật. Thế còn em có làm được không?

**Danesi, Tháp Hà nội và nghịch lý kẻ nói dối: 10 bài toán đồ lớn nhất mọi thời đại** (The Liar Paradox AND THE Towers of Hanoi THE 10 GREATEST MATH PUZZLES OF ALL TIME), 2004, quãng 250 trang. Đọc rất thú vị, về các khái niệm toán học như là thuật toán, số vô cùng lớn, v.v. Thích hợp với học sinh cấp 2 trở lên.

**Nguyễn Tiến Dũng, Các bài giảng về toán cho Mirella: Quyển 1**, 118 trang, 2013. Tiếng Việt. Thôi kèn khen lấy một chút, đây là sách do tôi viết, cho các năm cuối cấp 2. Viết xong từ cuối 2012.

**Nguyễn Tiến Dũng, Các bài giảng về toán cho Mirella: các quyển tiếp theo.** Sách đang viết. Quyển 2 sắp hoàn thành.

**Trần Nam Dũng, Sách giới thiệu về ABACUS.** Tiếng Việt, đang hoàn thành (?). ABACUS ở đây là cuộc thi toán trên mạng bằng tiếng Anh tổ chức liên tục cho trẻ em, xem: <http://www.gcschool.org/program/abacus/index.aspx>. Qua nhiều năm, ABACUS đã có một tuyển tập rất lớn các bài toán thú vị cho học sinh tiểu học và trung học cơ sở.

**Kajander, Các ý tưởng lớn cho các nhà toán học nhí** (Big ideas for small mathematicians), tiếng Anh, 162 trang, 2007. Cho độ tuổi 6-11. Giới thiệu 22 hoạt động và trò chơi để học toán một cách vui vẻ hấp dẫn.

**Kozlova, Câu đố và gợi ý: các bài tập cho câu lạc bộ toán học.** (Сказки и подсказки задачи для математического кружка). Tiếng Nga, in lần thứ 2 năm 2004. Có khoảng 300 câu đố và bài tập, rồi đến phần gợi ý hướng giải, rồi đến phần bài giải. Như vậy học sinh nếu không làm được, đầu tiên có thể xem gợi ý để nghĩ tiếp, nếu vẫn không nghĩ ra thì xem lời giải. Đang dịch ra tiếng Việt? Cho học sinh đầu cấp 2.

**Lichtman, Bí mật, dối trá, và đại số** (Do the Math 1: Secrets, Lies, and Algebra), 2008, gần 200 trang. Cho học sinh cấp 2. Quyển sách này là một cách học đại số qua nhân vật cô bé Tess. Sách được nhiều giải thưởng bên Mỹ. Trang web của tác giả là: <http://www.wendylichtman.com/>. Tôi đọc thử quyển này thấy rất ngộ, từ chương đầu (về so sánh to hơn, nhỏ hơn) đã thấy thích. Quyển sách này hay về mặt văn học, chứ không chỉ về toán.

**Lichtman, Mật mã viết trên tường** (Do the Math 2: The writing on the wall), 2008, 227 trang. Quyển tiếp theo của quyển "Secrets, lies, and algebra", học toán qua nhân vật Tess. Cô bé Jess học lớp 8, cứ nghĩ mãi để xác định xem một anh bạn cùng lớp có thích mình không, các thứ viết trên tường nhà thời có phải là mật mã chứa các thông tin gì đó. Và tại sao có một cô bạn cứ bắt chước những cái mình làm ... (Nếu dịch ra tiếng Việt thì nên dịch trọn bộ 2 quyển của Lichtman).

**Shen, Xác suất qua các ví dụ và bài tập** (Вероятность: примеры и задачи (с1) 2-е изд., М.: МЦНМО, 2008, 64 с., ISBN 978-5-94057-284-8). Tiếng Nga (chưa dịch?). Sách nhỏ 64

trang, giới thiệu về xác suất cho học sinh phổ thông cấp 2 và cấp 3, qua nhiều ví dụ và bài tập đơn giản và thực tế. Một số định lý quan trọng (luật số lớn và BĐT Chebyshev) được trình bày thông qua một dãy bài tập.

**Smullyan, Alice trong thế giới câu đố** (Alice in Puzzle Land), tiếng Anh (chưa dịch?), 1986, 196 trang. Sách viết dưới dạng truyện phiêu lưu, cho cả trẻ em từ 4-5 tuổi trở lên và người lớn, về logic, rất thú vị. Nhân vật Alice ở đây là mượn của “Alice trong thế giới thần kỳ”.

**Spivak, Câu lạc bộ toán lớp 7** (Математический кружок. 7 класс), 2000, 72 trang. Tiếng Nga, đang được dịch sang tiếng Việt. Quyển sách nhỏ này là tuyển tập gần 300 bài toán thú vị, chia làm nhiều mục khác nhau (vs dụ như tính chẵn lẻ, chia hết, tổ hợp, tổng và trung bình cộng, cắt ghép, v.v.), ứng với các kiến thức toán của học sinh lớp 7. Phần cuối quyển sách có hướng dẫn giải các bài. Chú ý: quyển này được in lại (có bổ sung?) năm 2003, thành sách 128 trang, và gọi là câu lạc bộ toán lớp 6 và lớp 7.

**Tahan, Cuộc chu du của một người biết làm toán** (The man who counted: a collection of mathematical adventures), tiếng Anh (chưa dịch?), 1993, hơn 100 trang. Sách về các phép tính toán học, viết dưới dạng một câu truyện phiêu lưu rất thú vị. Tác giả viết ở Brazil nhưng lấy bối cảnh là vùng cận đông thời cổ (xứ Persia). Học sinh cấp 1 trở lên có thể hiểu.

**Tikhomirov, Các câu chuyện về cực đại và cực tiểu** (Рассказы о максимумах и минимумах), tiếng Nga (chưa dịch?), tái bản 2006, 199 trang. Cho học sinh cấp 3 (học sinh cấp 2 có thể hiểu vài đoạn). Một tuyển tập các câu chuyện thú vị về các phương pháp toán học được dùng trong các bài toán tìm cực đại, cực tiểu trong thực tế ra sao. Các vấn đề tối ưu liên quan đến đủ thứ, từ các hiện tượng tự nhiên (như ánh sáng) cho đến cuộc sống thường ngày (như qui hoạch đất đai), cho đến các chuyến bay vào vũ trụ. Sách có được dịch sang tiếng Anh.

**Zvonkin, Câu lạc bộ toán học trẻ thơ** (Малыши и математика. Домашний кружок для дошкольников), tiếng Nga (chưa dịch?), 2006, 240 trang. Các hoạt động hấp dẫn được tổ chức dưới hình thức câu lạc bộ cho các bé ở độ tuổi mẫu giáo và cấp 1 để học về các khái niệm toán học. Tác giả là nhà toán học chuyên nghiệp, đã tổ chức các hoạt động này.

## Sách cho học sinh cấp 1

**Aleksandrova & Levshin.** Bộ sách tuyển thuyết toán học cho trẻ em của hai tác giả này là bộ sách kinh điển vô cùng hấp dẫn, với các quyển: **Ba ngày ở xứ Karlikania, Người mặt nạ đen từ nước Al-giép, Con tàu của thuyền trưởng Đơn vị**, và 4 quyển sách về các cuộc phiêu lưu của **Thạc sĩ khoa học đáng trí**. Chủ yếu dành cho độ tuổi cấp 1, nhưng các học sinh lớn hơn mà chưa biết đến, đọc chắc cũng sẽ thích.

**Bolt, Hộp Pandora toán học** (A mathematical Pandora's box). Tiếng Anh (chưa dịch), NXB đại học Cambridge, 193. 128 trang. Tuyển tập 142 bài toán thú vị để phát triển tư duy logic và sáng tạo của trẻ em. Cho mọi lứa tuổi. Theo huyền thoại, Hộp Pandora tức là hộp chứa con quỷ, đã mở ra là con quỷ chui ra, không nhốt lại nó vào được nữa. Một bài ví dụ: 3 bạn gấu có 1 bình 21 lít mật, muốn chia được thành 3 phần bằng nhau. Các bạn kiếm thêm được 3 bình khác, với dung tích là 11, 8 và 5 lít. Bằng cách đổ đi đổ lại mật giữa các bình, các bạn gấu đã chia được mật. Thế còn em có làm được không?

**Trần Nam Dũng, Sách giới thiệu về ABACUS.** Tiếng Việt, đang hoàn thành (?). ABACUS ở đây là cuộc thi toán trên mạng bằng tiếng Anh tổ chức liên tục cho trẻ em, xem: <http://www.gcschool.org/program/abacus/index.aspx>. Qua nhiều năm, ABACUS đã có một tuyển tập rất lớn các bài toán thú vị cho học sinh tiểu học và trung học cơ sở.

**Smullyan, Alice trong thế giới câu đố** (Alice in Puzzle Land), tiếng Anh (chưa dịch?), 1986, 196 trang. Sách viết dưới dạng truyện phiêu lưu, cho cả trẻ em từ 4-5 tuổi trở lên và người lớn, về logic, rất thú vị. Nhân vật Alice ở đây là mượn của “Alice trong thế giới thần kỳ”.

**Tahan, Cuộc chu du của một người biết làm toán** (The man who counted: a collection of mathematical adventures), tiếng Anh (chưa dịch?), 1993, hơn 100 trang. Sách về các phép tính toán học, viết dưới dạng một câu truyện phiêu lưu rất thú vị. Tác giả viết ở Brazil nhưng lấy bối cảnh là vùng cận đông thời cổ (xứ Persia). Học sinh cấp 1 trở lên có thể hiểu.

**Zvonkin, Câu lạc bộ toán học trẻ thơ** (Малыши и математика. Домашний кружок для дошкольников), tiếng Nga (chưa dịch?), 2006, 240 trang. Các hoạt động hấp dẫn được tổ chức dưới hình thức câu lạc bộ cho các bé ở độ tuổi mẫu giáo và cấp 1 để học về các khái niệm toán học. Tác giả là nhà toán học chuyên nghiệp, đã tổ chức các hoạt động này.

## Sách cho học sinh cấp 2

**Abbot, Thế giới phẳng: câu chuyện tình cảm nhiều chiều** (Flatland: a romance from many dimensions). Đây là một quyển sách kinh điển về hình học, được viết từ cuối thế kỷ 19 và cho đến những năm 2000 vẫn tiếp tục tái bản. “Thế giới phẳng” ở đây tức là thế giới 2 chiều. Tác giả tưởng tượng con người trong thế giới chỉ có 2 chiều sẽ sống ra sao, nhận biết các thứ thế nào, so với thế giới 1 chiều thì sao, và khi có người từ thế giới 3 chiều đến thăm thì sao, v.v. Qua đó hiểu thêm nhiều về hình học (ở mức phổ thông).

**Bolt, Hộp Pandora toán học** (A mathematical Pandora’s box). Tiếng Anh (chưa dịch), NXB đại học Cambridge, 193. 128 trang. Tuyển tập 142 bài toán thú vị để phát triển tư duy logic và sáng tạo của trẻ em. Cho mọi lứa tuổi. Theo huyền thoại, Hộp Pandora tức là hộp chứa con quỷ, đã mở ra là con quỷ chui ra, không nhốt lại nó vào được nữa. Một bài ví dụ: 3 bạn gấu có 1 bình 21 lít mật, muốn chia được thành 3 phần bằng nhau. Các bạn kiếm thêm được 3 bình khác, với dung tích là 11, 8 và 5 lít. Bằng cách đổ đi đổ lại mật giữa các bình, các bạn gấu đã chia được mật. Thế còn em có làm được không?

**Danesi, Tháp Hà nội và nghịch lý kẻ nói dối: 10 bài toán đồ lớn nhất mọi thời đại** (The Liar Paradox AND THE Towers of Hanoi THE 10 GREATEST MATH PUZZLES OF ALL TIME), 2004, quãng 250 trang. Đọc rất thú vị, về các khái niệm toán học như là thuật toán, số vô cùng lớn, v.v. Thích hợp với học sinh cấp 2 trở lên.

**Nguyễn Tiến Dũng, Các bài giảng về toán cho Mirella: Quyển 1**, 118 trang, 2013. Tiếng Việt. Thối kèn khen lấy một chút, đây là sách do tôi viết, cho các năm cuối cấp 2. Viết xong từ cuối 2012.

**Nguyễn Tiến Dũng, Các bài giảng về toán cho Mirella: các quyển tiếp theo.** Sách đang viết. Quyển 2 sắp hoàn thành.

**Trần Nam Dũng, Sách giới thiệu về ABACUS.** Tiếng Việt, đang hoàn thành (?). ABACUS ở đây là cuộc thi toán trên mạng bằng tiếng Anh tổ chức liên tục cho trẻ em, xem: <http://www.gcschool.org/program/abacus/index.aspx>. Qua nhiều năm, ABACUS đã có một tuyển tập rất lớn các bài toán thú vị cho học sinh tiểu học và trung học cơ sở.

**Kozlova, Câu đố và gợi ý: các bài tập cho câu lạc bộ toán học.** (Сказки и подсказки задачи для математического кружка). Tiếng Nga, in lần thứ 2 năm 2004. Có khoảng 300 câu đố và bài tập, rồi đến phần gợi ý hướng giải, rồi đến phần bài giải. Như vậy học sinh nếu không làm được, đầu tiên có thể xem gợi ý để nghĩ tiếp, nếu vẫn không nghĩ ra thì xem lời giải. Đang dịch ra tiếng Việt? Cho học sinh đầu cấp 2.

**Lichtman, Bí mật, dối trá, và đại số** (Do the Math 1: Secrets, Lies, and Algebra), 2008, gần 200 trang. Cho học sinh cấp 2. Quyển sách này là một cách học đại số qua nhân vật cô bé Tess. Sách được nhiều giải thưởng bên Mỹ. Trang web của tác giả là: <http://www.wendylichtman.com/>. Tôi đọc thử quyển này thấy rất ngộ, từ chương đầu (về so sánh to hơn, nhỏ hơn) đã thấy thích. Quyển sách này hay về mặt văn học, chứ không chỉ về toán.

**Lichtman, Mật mã viết trên tường** (Do the Math 2: The writing on the wall), 2008, 227 trang. Quyển tiếp theo của quyển “Secrets, lies, and algebra”, học toán qua nhân vật Tess. Cô bé Jess học lớp 8, cứ nghĩ mãi để xác định xem một anh bạn cùng lớp có thích mình không, các thứ viết trên tường nhà thời có phải là mật mã chứa các thông tin gì đó. Và tại sao có một cô bạn cứ bắt chước những cái mình làm ... (Nếu dịch ra tiếng Việt thì nên dịch trọn bộ 2 quyển của Lichtman).

**Shen, Xác suất qua các ví dụ và bài tập** (Вероятность: примеры и задачи (с1) 2-е изд., М.: МИИМО, 2008, 64 с., ISBN 978-5-94057-284-8). Tiếng Nga (chưa dịch?). Sách nhỏ 64 trang, giới thiệu về xác suất cho học sinh phổ thông cấp 2 và cấp 3, qua nhiều ví dụ và bài tập đơn giản và thực tế. Một số định lý quan trọng (luật số lớn và BDT Chebyshev) được trình bày thông qua một dãy bài tập.

**Smullyan, Alice trong thế giới câu đố** (Alice in Puzzle Land), tiếng Anh (chưa dịch?), 1986, 196 trang. Sách viết dưới dạng truyện phiêu lưu, cho cả trẻ em từ 4-5 tuổi trở lên và người lớn, về logic, rất thú vị. Nhân vật Alice ở đây là mượn của “Alice trong thế giới thần kỳ”.

**Spivak, Câu lạc bộ toán lớp 7** (Математический кружок. 7 класс), 2000, 72 trang. Tiếng Nga, đang được dịch sang tiếng Việt. Quyển sách nhỏ này là tuyển tập gần 300 bài toán thú vị, chia làm nhiều mục khác nhau (vs dụ như tính chẵn lẻ, chia hết, tổ hợp, tổng và trung bình cộng, cắt ghép, v.v.), ứng với các kiến thức toán của học sinh lớp 7. Phần cuối quyển sách có hướng dẫn giải các bài. Chú ý: quyển này được in lại (có bổ sung?) năm 2003, thành sách 128 trang, và gọi là câu lạc bộ toán lớp 6 và lớp 7.

**Tahan, Cuộc chu du của một người biết làm toán** (The man who counted: a collection of mathematical adventures), tiếng Anh (chưa dịch?), 1993, hơn 100 trang. Sách về các phép tính toán học, viết dưới dạng một câu truyện phiêu lưu rất thú vị. Tác giả viết ở Brazil nhưng lấy bối cảnh là vùng cận đông thời cổ (xứ Persia). Học sinh cấp 1 trở lên có thể hiểu.

## Sách cho học sinh cấp 3

**Abbot, Thế giới phẳng: câu chuyện tình cảm nhiều chiều** (Flatland: a romance from many dimensions). Đây là một quyển sách kinh điển về hình học, được viết từ cuối thế kỷ 19 và cho đến những năm 2000 vẫn tiếp tục tái bản. “Thế giới phẳng” ở đây tức là thế giới 2 chiều. Tác giả tưởng tượng con người trong thế giới chỉ có 2 chiều sẽ sống ra sao, nhận biết các thứ thế nào, so với thế giới 1 chiều thì sao, và khi có người từ thế giới 3 chiều đến thăm thì sao, v.v. Qua đó hiểm thêm nhiều về hình học (ở mức phổ thông).

**Aigner & Ziegler, Các chứng minh từ Sách Trời** (Proofs from THE BOOK), tiếng Anh (chưa dịch?), tái bản lần 4, 2010. Các chứng minh hay nhất của một loạt các định lý kinh điển trong số học, hình học, tổ hợp (lý thuyết đồ thị), và giải tích. “Sách Trời” là cách nói ví von của nhà toán học Erdos: Chúa Trời có 1 quyển sách trong đó ghi tất cả mọi thứ toán học thật hay ho, cái gì mà hay thì tức là từ “Sách Trời” mà ra. Hợp cho học sinh cấp 3, tuy cấp 2 cũng có thể hiểu một số mục.

**Danesi, Tháp Hà nội và nghịch lý kẻ nói dối: 10 bài toán đồ lớn nhất mọi thời đại** (The Liar Paradox AND THE Towers of Hanoi THE 10 GREATEST MATH PUZZLES OF ALL TIME), 2004, quãng 250 trang. Đọc rất thú vị, về các khái niệm toán học như là thuật toán, số vô cùng lớn, v.v. Thích hợp với học sinh cấp 2 trở lên.

**Nguyễn Tiến Dũng, Các bài giảng về toán cho Mirella: Quyển 1**, 118 trang, 2013. Tiếng Việt. Thôi kèn khen lấy một chút, đây là sách do tôi viết, cho các năm cuối cấp 2. Viết xong từ cuối 2012.

**Nguyễn Tiến Dũng, Các bài giảng về toán cho Mirella: các quyển tiếp theo.** Sách đang viết. Quyển 2 sắp hoàn thành.

**Trần Nam Dũng, Sách giới thiệu về ABACUS.** Tiếng Việt, đang hoàn thành (?). ABACUS ở đây là cuộc thi toán trên mạng bằng tiếng Anh tổ chức liên tục cho trẻ em, xem: <http://www.gcschool.org/program/abacus/index.aspx>. Qua nhiều năm, ABACUS đã có một tuyển tập rất lớn các bài toán thú vị cho học sinh tiểu học và trung học cơ sở.

**Shen, Xác suất qua các ví dụ và bài tập** (Вероятность: примеры и задачи (с1) 2-е изд., M.: МИИМО, 2008, 64 с., ISBN 978-5-94057-284-8). Tiếng Nga (chưa dịch?). Sách nhỏ 64 trang, giới thiệu về xác suất cho học sinh phổ thông cấp 2 và cấp 3, qua nhiều ví dụ và bài tập đơn giản và thực tế. Một số định lý quan trọng (luật số lớn và BĐT Chebyshev) được trình bày thông qua một dãy bài tập.

**Smullyan, Alice trong thế giới câu đố** (Alice in Puzzle Land), tiếng Anh (chưa dịch?), 1986, 196 trang. Sách viết dưới dạng truyện phiêu lưu, cho cả trẻ em từ 4-5 tuổi trở lên và người lớn, về logic, rất thú vị. Nhân vật Alice ở đây là mượn của “Alice trong thế giới thần kỳ”.

**Tikhomirov, Các câu chuyện về cực đại và cực tiểu** (Рассказы о максимумах и минимумах), tiếng Nga (chưa dịch?), tái bản 2006, 199 trang. Cho học sinh cấp 3 (học sinh cấp 2 có thể hiểu vài đoạn). Một tuyển tập các câu chuyện thú vị về các phương pháp toán học được dùng trong các bài toán tìm cực đại, cực tiểu trong thực tế ra sao. Các vấn đề tối ưu liên quan đến đủ thứ, từ các hiện tượng tự nhiên (như ánh sáng) cho đến cuộc sống thường ngày (như qui hoạch đất đai), cho đến các chuyến bay vào vũ trụ. Sách có được dịch sang tiếng Anh.

Sách đã xem qua, nhưng không thấy thật thú vị hay thích hợp cho việc dịch sang tiếng Việt:

**Brown and Walter, The art of problem posing**, 2004. Đây không phải là sách cho học sinh, mà là cho giáo viên, về nghệ thuật ra các đề bài toán như thế nào. (Có cần thiết làm công việc dịch sách cho giáo viên không? Lượng giáo viên còn ít hơn là lượng sinh viên đại học? Có lẽ là không. Các giáo viên phải chịu khó đọc trực tiếp tiếng Anh thôi).

**Courant & Robbins, What is mathematics?**, 2nd edition, 1996. Sách kinh điển, giới thiệu về các khái niệm toán học một cách sơ cấp. Dạng như là các bài giảng có kèm bài tập. Tuy nhiên sách thuộc loại “thế hệ cũ” rồi, hơi khô khan?

**Wandervelde, Circle in a box**, MSRI 2009. Sách dành cho giáo viên chứ không phải cho học sinh. Hướng dẫn cách lập các nhóm học toán cho học sinh thích toán, và các vấn đề và các hoạt động toán học có thể làm ở các nhóm đó, với nhiều ví dụ cụ thể.

Sách có trong tay nhưng chưa kịp đánh giá:

**Cadwell, Topics in recreational mathematics**, 2009. Gardner, Entertaining mathematical puzzles,?????. Sách nhỏ, hơn 60 trang.

**Penrose, The road to reality**, 2007. Sách dài 1000 trang, về toán và vật lý. Có lẽ là sách rất hay về khoa học, nhưng phải cuối cấp 3 và đại học mới tiếp cận được?

**Soifer, Mathematics as problem solving**, 120 trang, 2009. Sách được nhiều người như Erdos khen ngợi.

**Soifer, How does one cut a triangle?**, 2nd edition, 205 pages, 2009.

**Smullyan, This book needs no title**, 1980. Sách viết về các nghịch lý trong toán và trong cuộc sống.

**Stewart, Cái đẹp là chân lý (Why beauty is truth)**, 2007. Ông Stewart này viết rất nhiều, và khá hay, nhưng cho độ tuổi từ cấp 3 trở lên hoặc đại học mới hiểu được?

**Stewart, professor Stewart’s cabinet of mathematical curiosities**, 2009.

**Stewart, 17 equations that changed the world**, 2012. (Có vẻ hay, nhưng có khó quá không với học sinh phổ thông?)

Sách thấy giới thiệu là hay, nhưng chưa được xem:

**I love math!** series (cho trẻ thơ): Series này có ít nhất 12 quyển sách nhỏ về toán, nghe nói nhiều trẻ rất thích.

**Napoli et al., How Hungry are you?** (Có bán ở [amazon](#)). Sách dạy phép chia cho trẻ thơ, độ tuổi mẫu giáo và cấp 1.

**Neuschwander, Sir Comference and ...**: series sách toán hoạt hình với các nhân vật huyền thoại (hiệp sĩ, rồng, ...), cho độ tuổi từ 5 đến 10 tuổi.



Một số sách ở mức đại học đại cương (các ngành khác toán cũng dùng đến):

**Các bài giảng về xác suất và thống kê** (Dự án viết lại quyển “Nhập môn hiện đại xác suất và thống kê” thành sách này).

**Ghi chú:**

Một số nguồn để tìm sách trên mạng:

- Các trang web của các hiệu sách trên mạng, ví dụ như amazon.com.
- Các trang web về toán học, ví dụ như [trang này](#) (một tuyển tập sách toán tiếng Nga)
- Thư viện điện tử, ví dụ như libgen.
- [mathmamawrites.blogspot.fr](#)
- Một danh sách sách toán cho trẻ thơ [tại đây](#).