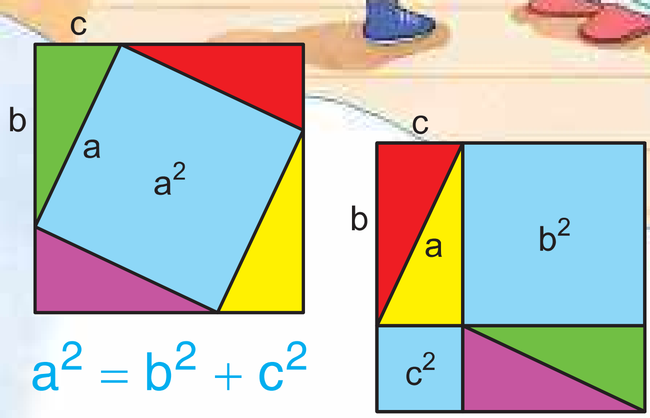
NĂM THỨ
MƯỜI CHÍN
ISSN 1859-2740

Toán tuổi thơ 2

3/9
188 + 189
NĂM HỌC 2018 - 2019

TRUNG HỌC CƠ SỞ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO



Chứng minh định lí Pythagoras bằng nhiều cách

NEW

THỂ LỆ CUỘC THI "Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc"

"TRƯỜNG ĐẶNG" THÀNH PHỐ VINH TRÒN 40 TUỔI

Năm học 1978-1979, để thực hiện tốt việc bồi dưỡng cho các học sinh có năng khiếu Văn, Toán tham gia các kì thi học sinh giỏi và bảo đảm quyền lợi học tập toàn diện cho học sinh tham gia đội tuyển, UBND TP. Vinh ra Quyết định thành lập trường Bồi dưỡng năng khiếu Văn Toán TP. Vinh với 4 lớp 4VT, 5VT, 6VT, 7VT.

Từ năm học 1979-1980 đến năm học 1981-1982, do nhiều điều kiện khách quan nên trường không tồn tại nữa mà chỉ tổ chức thành các lớp năng khiếu Văn và Toán gửi vào các trường cấp 1, 2 Hưng Dũng, Hưng Bình, Khu phố 4 (Lê Mao ngày nay)...

Năm học 1982-1983, UBND TP. Vinh đã ra Quyết định thành lập Trường Năng khiếu Vinh, ban đầu chỉ có 8 lớp.

Năm học 1997-1998, thực hiện Nghị quyết TW 2 khóa VIII với những yêu cầu đổi mới của ngành Giáo dục, Trường Năng khiếu Vinh được đổi tên thành Trường THCS Đặng Thai Mai, số học sinh của nhà trường lên đến 24 lớp với hơn 1126 học sinh.

Ban Giám hiệu nhà trường nhận Cờ Đơn vị xuất sắc trong phong trào thi đua năm học 2016 - 2017 của Chính phủ

Năm 2003, để đáp ứng yêu cầu nhiệm vụ của một ngôi trường chất lượng cao trên địa bàn thành phố, đề án phát triển nhà trường đã được UBND tỉnh phê duyệt và trường được đổi tên là Trường bán công chất lượng cao Đặng Thai Mai.

Cuối năm 2007, thực hiện chủ trương của Bộ Giáo dục và Đào tạo xóa bỏ trường bán công, trường trở lại với tên cũ, Trường THCS Đặng Thai Mai.

Năm học 2018-2019 trường có 29 lớp, 61 cán bộ, giáo viên và 1137 học sinh.

Được ươm mầm từ mái trường này cho trường THPT chuyên Phan Bội Châu, sau này có nhiều em đoạt học sinh giỏi quốc tế mang vinh quang về cho gia đình, nhà trường, quê hương, Tổ quốc như các em Nguyễn Huy Hoàng, Đào Anh Đức, Văn Sỹ Chí, Trần Hữu Bình Minh đoạt học sinh giỏi Quốc tế môn Vật lí; Phan Nhật Duật, Hoàng Nghĩa Tuyến, Đào Thanh Hải, Phạm Thái Khánh Hiệp đoạt học sinh giỏi Quốc tế môn Hóa học; Trương Bá Tú, Nguyễn Cảnh Hào đoạt học sinh giỏi Quốc tế môn Toán. Gần đây nhất, trong năm học 2016-2017 em Nguyễn Cảnh Hoàng đưa Huy chương Vàng môn Toán Quốc tế về cho Tổ quốc. Đặc biệt năm học 2017-2018, lần đầu tiên tỉnh Nghệ An có học sinh với sản phẩm sáng tạo Khoa học kĩ thuật đoạt giải quốc gia, được tham gia dự thi Quốc tế tại Hoa Kỳ cũng đều là học sinh từ trường Đặng, đó là em Phùng Văn Long và Mai Nhật Anh. Các em đã mang lại niềm tự hào cho người dân xứ Nghệ và ghi dấu ấn về tuổi trẻ Việt Nam trên sân chơi sáng tạo Khoa học kĩ thuật trẻ thế giới.

Trong quá trình xây dựng, trưởng thành, Trường THCS Đặng Thai Mai đã đạt được những thành tích nổi bật thật đáng tự hào: Năm 2009 trường đạt chuẩn Quốc gia và tiếp tục được công nhận lại vào năm 2017. Năm 2010, nhà trường đạt đơn vị văn hóa. Năm học 2011-2012 được UBND tỉnh tặng Cờ thi đua hoàn thành xuất sắc, toàn diện nhiệm vụ công tác, dẫn đầu phong trào thi đua yêu nước. Năm học 2013-2014, trường được tặng Bằng khen của Thủ tướng chính phủ; Bằng khen của Tổng Liên đoàn Lao động Việt Nam; Bằng khen của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Năm học 2016-2017, nhà trường được Chính phủ tặng Cờ Đơn vị xuất sắc trong phong trào thi đua; Liên tục nhiều năm liền, nhà trường được UBND tỉnh công nhận Tập thể lao động xuất sắc.

Xin chúc mừng sự phát triển của "Trường Đặng" trên chặng đường 40 năm qua! Xin chúc trường đạt được nhiều kết quả xuất sắc trong sự nghiệp trồng người!

Toán tuổi thơ 2 — TRUNG HỌC CƠ SỞ

Children's Fun Maths Journal

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TÒA SOẠN

Tầng 2, nhà A, số 187B Giảng Võ, phường Cát Linh, quận Đống Đa, Hà Nội
Điện thoại: 024.35682701 - Fax: 024.35682702
Email (Ban biên tập): bbttoantuoitho@gmail.com
Email (Trị sự - Phát hành): tapchitoantuoitho@gmail.com
Website: http://www.toantuoitho.vn

ĐỐI TÁC ĐẠI DIỆN PHÍA NAM

Công ty cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. Hồ Chí Minh
ĐT: 028.73035556, Email: thitruong@phuongnam.edu.vn

Trị sự - Phát hành:
TRỊNH THỊ TUYẾT TRANG,
NGUYỄN THỊ HUYỀN THANH, NGUYỄN THỊ HẢI ANH
Biên tập - Chế bản: **VŨ THỊ MAI, ĐỖ TRUNG KIÊN**
Mĩ thuật: **TRẦN NGỌC TRƯỜNG**

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NXBGD Việt Nam:
NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam:
HOÀNG LÊ BÁCH
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
PHAN XUÂN THÀNH

TRONG SỐ NÀY

CHỨNG MINH MỘT TAM GIÁC LÀ TAM GIÁC VUÔNG

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

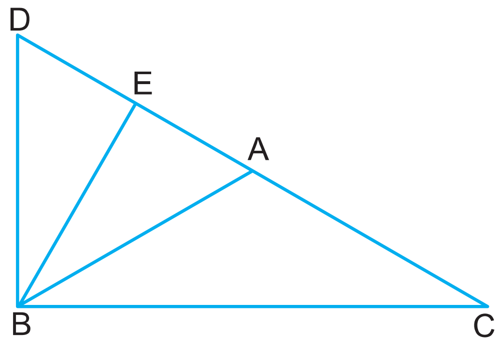
Trong quá trình giải toán, để chứng minh một tam giác là tam giác vuông, ta thường dùng các cách sau:

- *Cách 1. Chứng minh tam giác đó có một góc vuông.*
- *Cách 2. Chứng minh hai đường thẳng chứa hai cạnh của tam giác đó vuông góc với nhau.*
- *Cách 3. Chứng minh tam giác đã cho có bình phương một cạnh bằng tổng bình phương của hai cạnh còn lại. (Định lí Pythagoras đảo)*
- *Cách 4. Chứng minh tam giác đã cho có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh đó.*

Sau đây là một số bài tập vận dụng:

Bài toán 1. Cho ΔABC có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 30^o$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho AD = AC. Lấy điểm E thuộc cạnh CD sao cho $\widehat{DBE} = 30^o$. Chứng minh rằng ΔAEB là tam giác vuông.

Lời giải.



Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 30^o$ và AD = AC nên

$AB = AC = AD = \dfrac{CD}{2}$.

Suy ra ΔCBD vuông tại B

$\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{CBD} - \widehat{DBE} = 90^o - 30^o = 60^o$

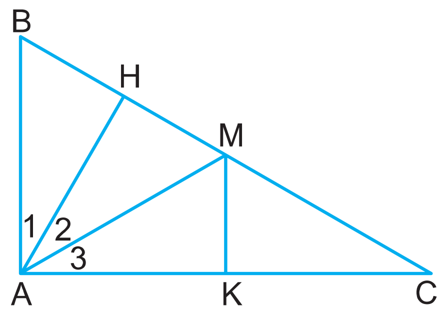
$\Rightarrow \widehat{BEC} = 180^o - \widehat{CBE} - \widehat{C}$

$= 180^o - 60^o - 30^o = 90^o$.

Vậy ΔAEB vuông tại E.

Bài toán 2. Cho ΔABC, H là hình chiếu vuông góc của A trên BC, M là trung điểm của BC. Biết rằng $\widehat{BAH} = \widehat{HAM} = \widehat{MAC}$. Chứng minh rằng ΔABC vuông tại A.

Lời giải.



Ta thấy ΔBAM có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ và $AH \perp BM$ nên ΔBAM cân tại A và $HB = HM = \dfrac{MB}{2} = \dfrac{MC}{2}$.

Kẻ $MK \perp AC$. ($K \in AC$)

Ta có $\Delta MKA = \Delta MHA$ (cạnh huyền - góc nhọn)

suy ra $MK = MH = \dfrac{MC}{2}$.

Do đó tam giác vuông MKC có một cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền nên ΔMKC là nửa tam giác đều.

Suy ra $\widehat{C} = 30^o \Rightarrow \widehat{HAC} = 90^o - 30^o = 60^o$

$\Rightarrow \widehat{A_3} = \widehat{A_2} = \widehat{A_1} = 30^o \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^o$.

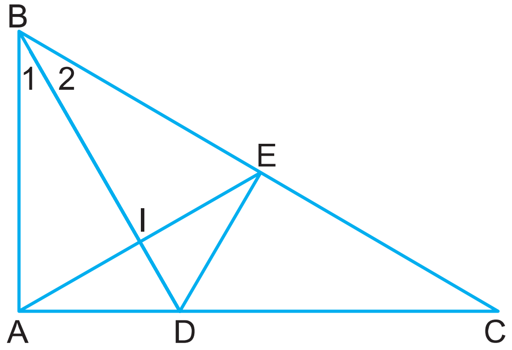
Vậy ΔABC vuông tại A.

Bài toán 3. Cho ΔABC vuông tại A, BD là đường phân giác trong của $\widehat{ABC}$. (D thuộc AC). Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho BE = BA.

a) Chứng minh rằng ΔDEC là tam giác vuông.

b) Gọi I là giao điểm của AE và BD. Chứng minh rằng ΔAIB là tam giác vuông.

Lời giải.



a) Xét ΔBED và ΔBAD có

$BE = BA$, BD là cạnh chung, $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$.

Suy ra $\Delta BED = \Delta BAD$ (c.g.c). (1)

Do đó $\widehat{BED} = \widehat{BAD} = 90^{o} \Rightarrow \widehat{DEC} = 90^{o}$.

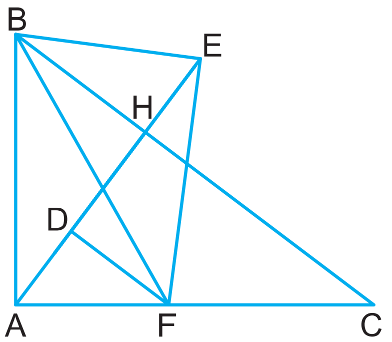
Vậy ΔDEC vuông tại E.

b) Từ (1) suy ra $ED = AD$, kết hợp với $BE = BA$ suy ra BD là đường trung trực của AE.

Do đó $BI \perp AI$ hay ΔAIB vuông tại I.

Bài toán 4. Cho ΔABC vuông tại A, H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Lấy điểm D nằm giữa A và H. Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho $HE = AD$. Lấy điểm F thuộc cạnh AC sao cho DF // BC. Chứng minh rằng ΔBEF vuông tại E.

Lời giải.



Theo đề bài ta có DF // BC và $AH \perp BC$ nên $AD \perp DF$.

Ta lại có $HE = AD \Rightarrow AH = DE$.

Áp dụng định lí Pythagoras ta được

$EB^2 + EF^2 = HB^2 + HE^2 + DF^2 + DE^2$

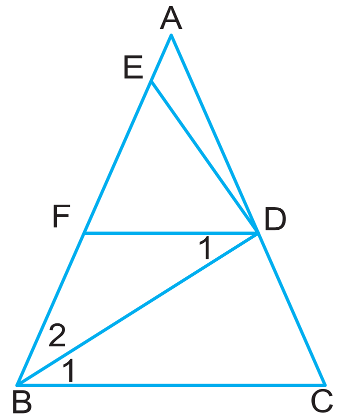
$= AB^2 - AH^2 + AD^2 + AF^2 - AD^2 + AH^2$

$= AB^2 + AF^2 = BF^2$.

Theo định lí Pythagoras đảo thì ΔBEF vuông tại E.

Bài toán 5. Cho ΔABC cân tại A, BD là đường phân giác trong của $\widehat{ABC}$. Trên tia BA lấy điểm E sao cho $BE = 2CD$. Chứng minh rằng ΔBDE là tam giác vuông.

Lời giải.



Gọi F là trung điểm của BE, ta có

$BF = \dfrac{BE}{2} = CD$.

Ta lại có $AB = AC$ nên $AF = AD$.

Do đó ΔAFD cân tại A.

Suy ra $\widehat{AFD} = \dfrac{180^{o} - \widehat{A}}{2} = \widehat{ABC} \Rightarrow DF$ // BC

$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{B_1} = \widehat{B_2} \Rightarrow \Delta BFD$ cân tại F

$\Rightarrow FB = FD$.

Trong ΔBDE có $FB = FD = FE = \dfrac{BE}{2}$.

Do đó ΔBDE vuông tại D.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho ΔABC vuông tại A, H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

a) Chứng minh rằng ΔMHN là tam giác vuông.

b) Gọi I là giao điểm của AH và MN. Chứng minh rằng ΔAIN là tam giác vuông.

Bài 2. Cho ΔABC, $\widehat{B} < 90^{o}$, H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Biết $AB = 30$ cm, $AC = 40$ cm, $BH = 18$ cm. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác vuông.

SỬ DỤNG KIẾN THỨC VỀ ĐỒNG DƯ
ĐỂ CHỨNG MINH CHIA HẾT

TRƯƠNG QUANG AN
(GV. THCS Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Trong các bài toán chứng minh chia hết, nếu biết sử dụng một cách khéo léo các kiến thức về đồng dư thì chúng ta sẽ dễ dàng tìm được lời giải các bài toán đó.
Một số kiến thức về đồng dư:

- **Định nghĩa.** Cho a, b $\in \mathbb{Z}$, m $\in \mathbb{N}^*$, a được gọi là đồng dư với b theo modunlo m nếu a và b có cùng số dư khi chia cho m. Kí hiệu là $a \equiv b \pmod m$.
- **Tính chất.** Cho a, b, c, d, e $\in \mathbb{Z}$, m, n $\in \mathbb{N}^*$ và $a \equiv b \pmod m$, $c \equiv d \pmod m$ thì

* $a + c \equiv b + d \pmod m$.
* $a - c \equiv b - d \pmod m$.
* $a + e \equiv b + e \pmod m$.
* $ac \equiv bd \pmod m$.
* $ae \equiv be \pmod m$.
* $a^n \equiv b^n \pmod m$.
* $an \equiv bn \pmod{mn}$.
* $\frac{a}{e} \equiv \frac{b}{e} \pmod m$ với $e \in$ ƯC(a, b) và (e, m) = 1.

- **Định lí Fermat nhỏ.** Cho a là số nguyên và p là số nguyên tố thì $a^p \equiv a \pmod p$.
- **Đặc biệt.** Cho a là số nguyên và p là số nguyên tố và (a, p) = 1 thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Sau đây là một số bài tập minh họa:

Bài toán 1. Chứng minh rằng $2^{2002} - 4$ chia hết cho 31.

Lời giải. Ta có $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$
$\Rightarrow (2^5)^{400} \equiv 1^{400} \pmod{31}$
$\Rightarrow (2^5)^{400}.2^2 \equiv 1.2^2 \pmod{31}$
$\Rightarrow 2^{2002} \equiv 4 \pmod{31}$
Suy ra $2^{2002} - 4$ chia hết cho 31.

Bài toán 2. Chứng minh rằng $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

Lời giải. Ta có $2222 \equiv 3 \pmod 7$
$\Rightarrow 2222^5 \equiv 3^5 \pmod 7 \equiv 5 \pmod 7$
$\Rightarrow 2222^{5555} \equiv 5^{1111} \pmod 7$. (1)
Ta lại có $5555 \equiv 4 \pmod 7$
$\Rightarrow 5555^2 \equiv 4^2 \equiv 2 \pmod 7$
$\Rightarrow 5555^{2222} \equiv 5^{1111} \pmod 7$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $2222^{5555} + 5555^{2222}$ $\equiv 5^{1111} + 2^{1111} \pmod 7$. (3)
Mặt khác $5 \equiv -2 \pmod 7$.
Suy ra $5^{1111} \equiv (-2)^{1111} = -2^{1111} \pmod 7$.
Do đó $5^{1111} + 2^{1111} \equiv 0 \pmod 7$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

Bài toán 3. Chứng minh rằng $2014^{200} - 256$ chia hết cho 2016.

Lời giải. Ta có $2014^3 \equiv 2008 \pmod{2016}$.
$2014^2 \equiv 4 \pmod{2016}$.
$\Rightarrow 2014^5 \equiv 2014^3.2014^2 \equiv 2008.4$
$\equiv 1984 \pmod{2016}$
$\Rightarrow 2014^{10} = (2014^5)^2 \equiv 1984^2$
$\equiv 1024 \pmod{2016}$
$\Rightarrow 2014^{30} \equiv 1024^3 \equiv 64 \pmod{2016}$
$\Rightarrow 2014^{90} \equiv 64^3 \equiv 64 \pmod{2016}$.
Do đó
$2014^{100} \equiv 1024.64 \equiv 1024 \pmod{2016}$
$\Rightarrow 2014^{200} \equiv 1024^2 \equiv 256 \pmod{2016}$
Vậy $2014^{200} - 256 \vdots 2016$.

Bài toán 4. Chứng minh rằng $1234^{30} - 1388$ chia hết cho 2014.

Lời giải. Ta có $1234^3 \equiv 778 \pmod{2014}$
$\Rightarrow 1234^9 \equiv 778^3 \equiv 1500 \pmod{2014}$

$\Rightarrow 1234^{27} \equiv 1500^3$
$\equiv 1234 \pmod{2014}$
$\Rightarrow 1234^3.1234^{27} \equiv 778.1234 \pmod{2014}$
$\Rightarrow 1234^{30} \equiv 1234.778 \equiv 1388 \pmod{2014}$.

Vậy $1234^{30} - 1388 \vdots 2014$.

Bài toán 5. Chứng minh rằng
$A = 10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + 10^{10^4} + ... + 10^{10^{10}} - 5$
chia hết cho 7.

Lời giải. Vì 7 là số nguyên tố và (10, 7) = 1 nên theo định lí Fermat nhỏ ta có
$10^6 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 10^{6k} \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 7$.

Với mọi số tự nhiên n khác 0 thì $10^n + 2 = \underbrace{100...0}_{n-1}2$ chia hết cho 2 và 3 nên $10^n + 2 \vdots 6$.

Do đó $10^n \equiv 4 \pmod 6$.

Đặt $10^n = 6k + 4,\ k \in \mathbb{N}$.

Khi đó ta có $10^{10^n} = 10^{6k+4} = 10^{6k}.10^4$
$\equiv 1.10^4 \pmod 7 \equiv 10^4 \pmod 7$.

Suy ra $10^{10} \equiv 10^4 \pmod 7$;
$10^{10^2} \equiv 10^4 \pmod 7$;
$10^{10^3} \equiv 10^4 \pmod 7$;
...
$10^{10^{10}} \equiv 10^4 \pmod 7$.

Suy ra $A \equiv 10.10^4 - 5 \equiv 0 \pmod 7$.

Vậy $A \vdots 7$.

Bài toán 6. Chứng minh rằng số $B = 4^{2n+1} + 3^{n+2}$ chia hết cho 13 với mọi số tự nhiên n.

Lời giải. Ta có $4^2 \equiv 3 \pmod{13}$
$\Rightarrow (4^2)^n \equiv 3^n \pmod{13}$
$\Rightarrow 4.(4^2)^n \equiv 4.3^n \pmod{13}$
$\Rightarrow 4^{2n+1} \equiv 4.3^n \pmod{13}$. (1)
$3^2 \equiv -4 \pmod{13}$
$\Rightarrow 3^2.3^n \equiv -4.3^n \pmod{13}$
$\Rightarrow 3^{n+2} \equiv -4.3^n \pmod{13}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra
$4^{2n+1} + 3^n \equiv 4.3^n - 4.3^n = 0 \pmod{13}$.

Vậy $B = 4^{2n+1} + 3^n$ chia hết cho 13 với mọi số tự nhiên n.

Bài toán 7. Chứng minh rằng số $A = 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19 với mọi số tự nhiên n.

Lời giải. Ta có $A = 7.25^n + 12.6^n$.

Ta lại có $25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow 25^n \equiv 6^n \pmod{19}$
$\Rightarrow 7.25^n \equiv 7.6^n \pmod{19}$
$\Rightarrow 7.25^n + 12.6^n \equiv 7.6^n + 12.6^n \pmod{19}$
$\Rightarrow 7.25^n + 12.6^n \equiv 19.6^n \equiv 0 \pmod{19}$.

Vậy $A = 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19 với mọi số tự nhiên n.

Bài toán 8. Chứng minh rằng $A = 1^{1331} + 2^{1331} + 3^{1331} + ... + 1331^{1331}$ chia hết cho 11.

Lời giải. Vì 11 là số nguyên tố nên theo định lí Fermat nhỏ ta có $a^{11} \equiv a \pmod{11}$, với mọi số nguyên a.

Suy ra
$a^{121} = (a^{11})^{11} \equiv a^{11} \equiv a \pmod{11}$.

Do đó
$a^{1331} = (a^{121})^{11} \equiv a^{11} \pmod{11} \equiv a \pmod{11}$.

Áp dụng kết quả trên ta được:
$1^{1331} + 2^{1331} + ... + 1331^{1331}$
$\equiv 1 + 2 + ... + 1331 \equiv 886446 \equiv 0 \pmod{11}$.

Vậy $A \vdots 11$.

Các bài toán chứng minh chia hết cũng có thể phát biểu dưới dạng những bài toán tìm số dư trong phép chia. Các bạn hãy vận dụng các kiến thức về đồng dư để tìm số dư khi chia các lũy thừa cho một số trong các bài toán sau:

Bài 1. Tìm số dư của phép chia $12^{25} + 21^{52}$ cho 2014.

Bài 2. Tìm số dư của phép chia $2013^{2013} + 2014^{2014}$ cho 2023.

Bài 3. Tìm số dư của phép chia $2014^{2014} - 2013^{2013}$ cho 2023.

Bài 4. Tìm số dư của phép chia $15^{20}.23^{18}$ cho 2011.

Bài 5. Tìm số dư của phép chia $2013^{2013}.2014^{2014}$ cho 2023.

ĐỀ THI "TÌM KIẾM TÀI NĂNG TOÁN HỌC TRẺ 2018" (MYTS)

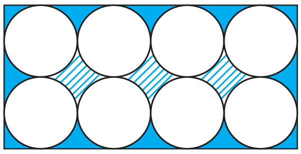
Đề thi khối lớp 6, gồm 24 câu hỏi. Thời gian làm bài: 120 phút

PHẠM VĂN THUẬN

(Trung tâm Toán và Khoa học Hexagon)

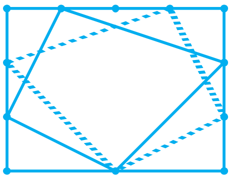
1. Số $10^{2018} - 2018$ có bao nhiêu chữ số?

2. Có 8 hình tròn bằng nhau nằm trong một hình chữ nhật như hình vẽ. Tính tỉ số của diện tích phần tô đậm với diện tích phần gạch chéo.

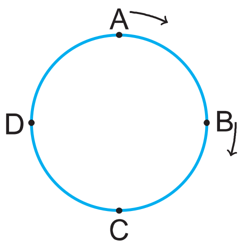


3. Một hiệu ảnh có giá in ảnh như sau: mỗi tấm ảnh giá 6000 đồng; cứ in 20 tấm thì được miễn phí 3 tấm. An muốn in 61 tấm ảnh thì phải trả bao nhiêu tiền?

4. Mỗi cạnh của một hình chữ nhật được chia thành 2, 3 hoặc 4 đoạn bằng nhau như hình vẽ. Tính tỉ số của diện tích tứ giác tạo bởi các đường nét liền với diện tích tứ giác tạo bởi các đường nét đứt.

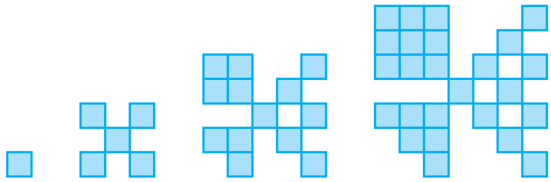


5. Bốn vị trí A, B, C, D chia một đường chạy quanh hồ hình tròn thành các phần bằng nhau, như hình vẽ. Hải bắt đầu chạy từ vị trí A và Phượng bắt đầu chạy từ vị trí B. Biết rằng Hải và Phượng cùng xuất phát một lúc, cùng chạy theo chiều kim đồng hồ và vận tốc của Hải bằng 6/5 vận tốc của Phượng. Hỏi ở lần đầu tiên đuổi kịp Phượng, Hải đã chạy được bao nhiêu vòng hồ?



6. Trong một chương trình xây dựng tủ sách cho trường, có 2 nhóm bạn đã quyên góp sách. Nhóm thứ nhất, Dũng góp 5 quyển và An, Đăng, Tường mỗi bạn góp 10 quyển. Nhóm thứ hai, mỗi bạn góp ít nhất một quyển và số sách các bạn góp đôi một khác nhau. Tổng số sách 2 nhóm đã góp là 102 quyển. Hỏi hai nhóm đó có nhiều nhất bao nhiêu bạn?

7. Một chương trình máy tính tạo ra một chuỗi các hình theo một quy luật; dưới đây là 4 hình đầu tiên của chuỗi đó:

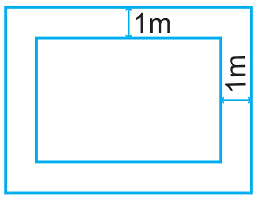


Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

Biết rằng ô vuông đầu tiên có cạnh là 1 đơn vị, hỏi hình thứ 6 trong chuỗi có diện tích phần tô màu bằng bao nhiêu?

8. Cho $A = 10 \times 11 \times ... \times 99$. Đổi chỗ chữ số hàng chục và hàng đơn vị của mỗi thừa số trong tích trên, ta được số $B = 01 \times 11 \times 21 \times ... \times 99$. Tính thương $\frac{A}{B}$.

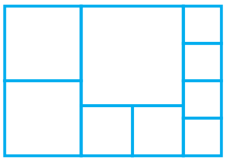
9. Một người muốn xây một mảnh vườn hình chữ nhật có lối đi bao quanh như hình vẽ, sao cho cạnh của mảnh vườn theo đơn vị mét là một số nguyên và diện tích mảnh vườn bằng diện tích lối đi. Hỏi mảnh vườn có chu vi nhỏ nhất là bao nhiêu?



10. Trong một chương trình xây dựng tủ sách cho trường, có 2 nhóm bạn đã quyên góp sách. Nhóm thứ nhất, Dũng góp 5 quyển và An, Đăng, Tường mỗi bạn góp 10 quyển. Nhóm thứ hai, mỗi bạn góp ít nhất một quyển và số sách các bạn góp đôi một khác nhau. Tổng số sách 2 nhóm đã góp là 102 quyển. Hỏi hai nhóm đó có nhiều nhất bao nhiêu bạn?

11. Có 25 sản phẩm với giá trung bình là 120 nghìn đồng/sản phẩm. Không sản phẩm nào có giá dưới 40 nghìn đồng và đúng 10 sản phẩm trong số đó có giá dưới 100 nghìn đồng. Hỏi một sản phẩm có thể có giá cao nhất là bao nhiêu?

12. Một hình chữ nhật được chia thành các hình vuông như hình vẽ. Biết các cạnh của hình vuông đều là các số nguyên dương. Hỏi hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất là bao nhiêu?



13. Bốn bạn nhỏ hát và đệm đàn cho nhau. Với mỗi bài hát, có một bạn đánh đàn và ba bạn kia hát. Biết rằng, An đã hát 9 bài, Bình đã hát 5 bài, Lan đã hát 6 bài và Hoa đã hát 7 bài. Hỏi Bình đã đệm đàn cho mấy bài hát?

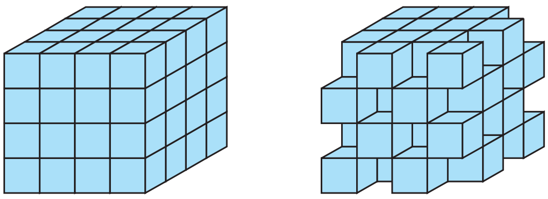
14. Các số lẻ được sắp xếp thành các hàng như sau:

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 25 27 29
... ...

Tính tổng của các số trong hàng thứ 20.

15. Tuyết viết số lớn nhất có tính chất: gồm 4 chữ số đôi một khác nhau; là một bội của 9; khi bỏ chữ số hàng nghìn, được số có 3 chữ số là một bội của 3; khi bỏ chữ số hàng nghìn và chữ số hàng trăm, được số có 2 chữ số là một bội của 2. Hương viết số nhỏ nhất có cùng tính chất đó. Tính tổng hai số Tuyết và Hương đã viết.

16. Có hai khối lập phương cạnh 4 được tạo thành bởi các khối lập phương cạnh 1. Ở một khối, người ta bỏ đi 14 khối lập phương nhỏ ở các vị trí như hình vẽ dưới đây. Tính hiệu diện tích bề mặt của hai khối mới.

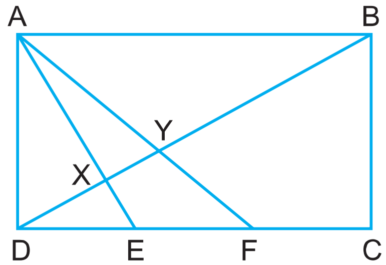


17. Bạn An có 13 tấm thẻ ghi số từ 1 đến 13. Hỏi An có thể chọn ra nhiều nhất bao nhiêu thẻ sao cho tích các số trên các tấm thẻ đã chọn là một số chính phương?

18. Lan có 37 kẹo, Thảo có 49 kẹo và Mai có 67 kẹo. Mỗi ngày, một trong ba bạn cho tất cả các bạn khác trong lớp (không gồm Lan, Thảo, Mai) mỗi người 1 cái kẹo. Đến khi không chia được như vậy nữa thì số kẹo còn lại của cả Lan, Thảo và Mai đều bằng nhau. Hỏi lớp có tối đa bao nhiêu bạn?

19. Trong khu rừng, Thỏ nói thật vào thứ 2, thứ 3 và nói dối vào các ngày còn lại. Hổ nói thật vào thứ 4, thứ 5, thứ 6 và nói dối vào các ngày còn lại. Sư tử nói thật vào thứ 3, thứ 6 và nói dối vào các ngày còn lại. Vào một ngày, cả Thỏ, Hổ và Sư tử cùng nói: Ngày kia tôi sẽ nói dối. Hỏi hôm đó là thứ mấy?

20. Hai điểm E, F nằm trên cạnh CD của một hình chữ nhật ABCD sao cho DE = EF = FC. AE và AF cắt BD lần lượt tại X và Y. Tính tỉ số $\frac{XY}{BD}$.



21. Bảng số dưới đây được tạo thành theo một quy luật:

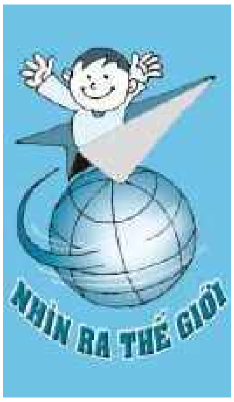
9	5	20	10	A
6	8	6	12	B
3	1	2	2	3
18	40	60	60	93

Hỏi có bao nhiêu cách điền số vào các ô A, B?

22. Có bao nhiêu cách nhốt 5 con vật, gồm hổ, báo, sư tử, gấu và mèo rừng, vào 5 chuồng được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 sao cho mỗi con được nhốt vào một chuồng và hổ không ở chuồng 1, báo không ở chuồng 5?

23. Có 40 cầu thủ tham gia một giải đấu bóng đá. Trong đó, có 6 cầu thủ mà mỗi cầu thủ cùng quê với đúng một cầu thủ khác, có 9 cầu thủ mà mỗi cầu thủ cùng quê với đúng 2 cầu thủ khác và có 4 cầu thủ mà mỗi cầu thủ cùng quê với đúng 3 cầu thủ khác. Các cầu thủ còn lại đều có quê quán đôi một khác nhau. Hỏi 40 cầu thủ đó đến từ bao nhiêu miền quê?

24. Có 12 quyển truyện tiếng Anh, 16 quyển thơ, 18 quyển truyện tranh và 30 quyển sách nhạc. Hỏi có thể chia số sách đó cho nhiều nhất bao nhiêu người sao cho mỗi người được nhận đúng 3 quyển sách đôi một khác loại?



LỜI GIẢI ĐỀ THI TOÁN QUỐC TẾ BULGARIA (BIMC) 2018
PHẦN THI CÁ NHÂN CẤP THCS

(Đề đăng trên TTT2 số 187)

ThS. PHÙNG KIM DUNG

(Nguyên Tổ trưởng tổ Toán -Tin, trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Sưu tầm và giới thiệu)

ThS. ĐỖ THỊ THÚY NGỌC

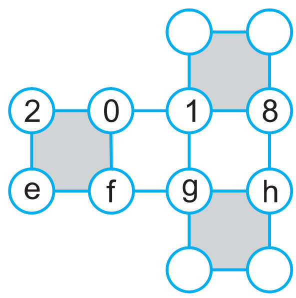
(Phó Trưởng phòng Giáo dục Trung học, Sở GD - ĐT Ninh Bình, Dịch)

Câu 1. *Cách 1.* Từ giả thiết của bài toán ta có sơ đồ sau:

Từ 19h00 đến 21h12 là 132 phút.
Từ 21h12 phút đến khi bộ phim kết thúc dài bằng $132:11=12$ (phút).
Do đó thời điểm bộ phim kết thúc là 21h24.
Cách 2. Mark ở trong nhà vệ sinh một khoảng thời gian dài bằng $\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{1+7}=\frac{1}{12}$ độ dài bộ phim.
Khi Mark quay trở lại, thời gian chiếu phim còn $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$ độ dài bộ phim.
Vào lúc 21h12, thời gian chiếu phim còn $\frac{7}{12}\times\frac{1}{1+6}=\frac{1}{12}$ độ dài bộ phim.
Từ 19h00 đến 21h12 là 132 phút. Thời gian này bằng $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$ độ dài bộ phim.
Vậy độ dài của bộ phim là
$132:\frac{11}{12}=144$ (phút).
Mà 144 phút $=$ 2 giờ 24 phút.
Do đó bộ phim kết thúc vào lúc 21h24.

Câu 2. Ta có $1300=7\times180+40$. Do đó Peter có thể giảm số tiền trả ban đầu của mình đi 40 Euro và trả thêm 7 tháng nữa. Tương tự, ta có $1000=4\times240+40$ và $600=2\times280+40$. Do đó Anna và Andria cũng có thể giảm số tiền trả ban đầu của mình đi 40 Euro. Vậy giá thành thấp nhất của chiếc xe hơi bằng 40 cộng với bội chung nhỏ nhất của 180, 240 và 280. Bội chung nhỏ nhất này là 5040. Do đó giá bán thấp nhất của chiếc xe hơi là 5080 Euro.

Câu 3.

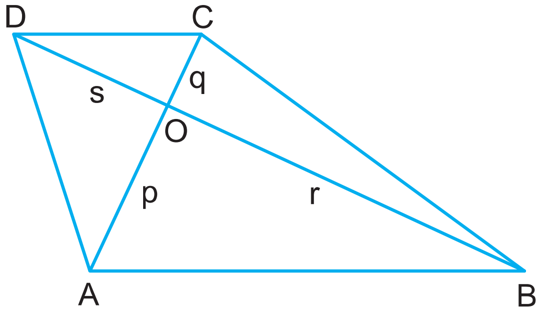


Gọi các số điền vào bốn hình tròn nằm phía dưới các số 2, 0, 1, 8 tương ứng là e, f, g và h như trong hình vẽ. Gọi tổng không đổi các số nằm trong bốn đỉnh của mỗi hình vuông là S.
Với ba hình vuông được tô đậm, ta có:
$3S=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66.$
Do đó $S=22$.
Vì $2+0+e+f=22$ nên $e+f=20$.
Nếu $e=11$ thì $f=9$, từ đó $g=22-1-0-f=12$, mâu thuẫn với giả thiết $g\le11$.
Do đó $e=9$, $f=11$.
Từ đó ta có $g=22-1-0-f=10$.
Suy ra $h=3$.
Vậy số điền vào hình tròn có dấu "?" là số 3.

Câu 4. • *Cách 1.* Gọi số của Andrei là $\overline{ababab}$ thì số của Natalie là $\overline{bababa}$.
Ta có $5.\overline{ababab}=6.\overline{bababa}$
$\Leftrightarrow 5\times10101\times\overline{ab}=6\times10101\times\overline{ba}$
$\Leftrightarrow 5(10a+b)=6(10b+a)$
$\Leftrightarrow 44a=55b \Leftrightarrow 4a=5b \Rightarrow a=5, b=4.$
Vậy số của Andrei là 545454.
• *Cách 2.* Chú ý rằng mỗi số có sáu chữ số

thỏa mãn yêu cầu như trong đề bài gấp 10101 lần số tạo bởi hai chữ số đầu tiên của số đó (chữ số hàng chục nghìn và chữ số hàng nghìn) ($\overline{ababab} = 10101 \times \overline{ab}$).
Vì $5 \times 6 = 30 = 6 \times 5$ và $5 \times 60 = 300 = 6 \times 50$ nên số có hai chữ số của Andrei là $60 - 6 = 54$ và số có hai chữ số của Natalie là $50 - 5 = 45$.
Do đó số của Andrei là 545454.

Câu 5. • *Cách 1.*



Vì tam giác OAB đồng dạng với tam giác OCD nên suy ra $ps - qr = 0$.
Theo định lí Pythagoras ta có
$$21^2 = AB^2 \times CD^2 = (p^2 + r^2)(q^2 + s^2)$$
$$= (pq + rs)^2 + (ps - rq)^2 = (pq + rs)^2.$$
Suy ra $pq + rs = 21$.

• *Cách 2.* Vì tam giác OAB đồng dạng với tam giác OCD nên suy ra $\frac{q}{p} = \frac{s}{r} = \frac{3}{7}$.

Do đó $q = \frac{3}{7}p$, $s = \frac{3}{7}r$.

Suy ra $pq + rs = \frac{3}{7}(p^2 + r^2) = \frac{3}{7} \times 7^2 = 21$.

• *Cách 3.* Vì tam giác OAB đồng dạng với tam giác OCD nên ta có thể đặt $CO = 3a = q$, $DO = 3b = s$, $AO = 7a = p$, $BO = 7b = r$, với $a^2 + b^2 = 1$. Do đó
$$pq + rs = 7a \times 3a + 7b \times 3b = 21(a^2 + b^2) = 21.$$

Câu 6. Số dư của phép chia số 2418 cho 9 là 6. Vì hai trong ba số là các bội số của 9, còn số thứ ba chia cho 9 dư 6. Do vậy chữ số không dùng đến phải là chữ số 3.
Các chữ số có thể kết hợp với 9 để tạo thành số có ba chữ số chia hết cho 9 là 7 và 2, hoặc 5 và 4. Các chữ số có thể kết hợp với 8 để tạo thành số có ba chữ số chia hết cho 9 là 1 và 0. Các khả năng có thể xảy ra được cho trong bảng dưới đây.

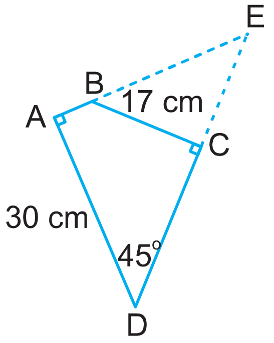
Các khả năng	8, 1, 0
9, 7, 2	$972 + 801 + 645$
9, 5, 4	$945 + 801 + 672$

Vậy giá trị nhỏ nhất có thể của số thứ ba là 645.

Câu 7. Ta có
$\overline{BIMC} + \overline{BI} + \overline{MC} + B + I + M + C - 1 = 2018$
$\Leftrightarrow 1011B + 102I + 21M + 3C = 2019$.
Suy ra B chỉ có thể nhận giá trị bằng 1.
Từ đó ta có
$102I + 21M + 3C = 1008 \Leftrightarrow 34I + 7M + C = 336$.
• Nếu $I \le 7$ thì $7M + C \ge 98$ nhưng $7 \times 9 + 8$ mới chỉ bằng 71. Vậy $I \ge 8$.
• Nếu $I = 8$ thì $7M + C = 64$. Khi đó $M = 9$ hoặc $M = 8$. Nhưng $M \ne I$ nên $M = 9$, suy ra $C = 1 = B$ (loại).
Vậy $I = 9$. Khi đó $7M + C = 30$.
Suy ra $M = 4$ hoặc $M = 3$.
* Nếu $M = 4$ thì $C = 2$ và $\overline{BIMC} = 1942$.
* Nếu $M = 3$ thì $C = 9 = I$ (loại).
Vậy giá trị của $\overline{BIMC}$ chỉ có thể là 1942.

Câu 8. Gọi bốn chữ số khác 0 đôi một khác nhau được sử dụng là a, b, c, d với $a > b > c > d > 0$.
Khi đó số nhỏ thứ hai được tạo ra là $\overline{dcab}$, do đó $b = 5$.
Số lớn thứ năm là $\overline{adbc}$, số nhỏ thứ năm là $\overline{dacb}$, mà hiệu số giữa hai số này nằm giữa 3000 và 4000 nên suy ra $a - d = 4$.
Số lớn thứ hai là $\overline{abdc}$ là một số chẵn nhưng không chia hết cho 4, do đó $c = 4$ hoặc $c = 2$. Khi $c = 2$, suy ra d bằng 1 (loại do $\overline{dc} = 12 \vdots 4$). Vậy $c = 4$, từ đó $d = 3$; $a = 7$.
Suy ra $\overline{abcd} = 7543$. Thật vậy, 3475 là một bội của 5, 7534 là một số chẵn nhưng không chia hết cho 4 và $7354 - 3745 = 3609$.

Câu 9. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD.
Ta có $\widehat{AED} = 180^o - (90^o + 45^o) = 45^o$.
Suy ra AD = AE = 30 (cm).
Mặt khác, $\widehat{CBE} = 180^o - (90^o + 45^o) = 45^o$.
Suy ra CE = BC = 17 (cm).



Từ đó ta có

$$S_{ABCD} = S_{ADE} - S_{BCE} = \frac{30 \times 30}{2} - \frac{17 \times 17}{2}$$
$$= \frac{611}{2} = 305\frac{1}{2} = 305{,}5\,(\text{cm}^2).$$

Câu 10. Chú ý rằng $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ nên một trong các số tuổi phải là một bội của 5.

- TH1. Nếu số đó bằng 5, thì tổng của hai số tuổi kia là 20 và tích của chúng là 72. Không có hai số tự nhiên nào thỏa mãn.
- TH2. Nếu số đó bằng 10, thì tổng của hai số tuổi kia là 15 và tích của chúng là 36. Hai số đó là 12 và 3.
- TH3. Nếu số đó bằng 15, thì tổng của hai số tuổi kia là 10 và tích của chúng là 24. Hai số đó là 6 và 4.
- TH4. Nếu số đó bằng 20, thì tổng của hai số tuổi kia là 5 và tích của chúng là 18. Không có hai số tự nhiên nào thỏa mãn.

Vậy cậu bé lớn thứ hai là 10 tuổi và cô bé lớn thứ hai là 6 tuổi. Hiệu số giữa hai số tuổi là 4.

Câu 11. Có 4 cách chọn màu cho tấm thảm ở giữa. Khi đó có 3 cách chọn 2 màu trong 3 màu còn lại cho vòng ở giữa và 2 màu này được bố trí theo 2 cách khác nhau. Do đó có 24 cách phối màu khác nhau cho phần bên trong tấm thảm. Không mất tổng quát, gọi màu ở ô 19 là a, ở các ô 13, 15, 17 là b và ở các ô 14, 16, 18 là c. Gọi d là màu thứ tư.

* Nếu vòng ngoài cùng không có màu a, thì ô 1 là màu c hoặc d.

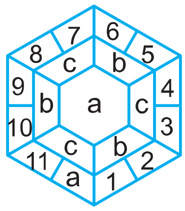
+ Nếu ô 1 là màu c, thì ô số 2 là màu d, ô số 3 là màu b, ô số 4 là màu d, và cứ lặp lại như vậy.

+ Nếu ô số 1 là màu d, thì ô số 2 là màu c. Khi đó nếu ô số 3 là màu d, thì ô số 4 là màu b, và cứ lặp lại như vậy. Nếu ô số 3 là màu b, thì ô số 4 là màu d, và do đó ô số 12 là màu d, mà ô số 12 lại kề với ô số 1 là màu d, điều này không thỏa mãn yêu cầu là hai tấm thảm có chung cạnh dọc theo viền của chúng thì phải có màu khác nhau.

Suy ra nếu vòng ngoài cùng không có màu a, thì với mỗi cách phối màu cho phần trong tấm thảm sẽ có hai cách phối màu cho vòng ngoài cùng. Vậy trong trường hợp này số cách phối màu là $24 \times 2 = 48$.

* Nếu vòng ngoài cùng có màu a, 1 trong 12 tấm thảm ở vòng ngoài đều có thể là màu a. Không mất tổng quát, giả sử tấm số 12 có màu a. Sơ đồ dưới đây cho ta thấy khi đó có 7 cách phối màu cho vòng ngoài cùng. Vậy trong trường hợp này có

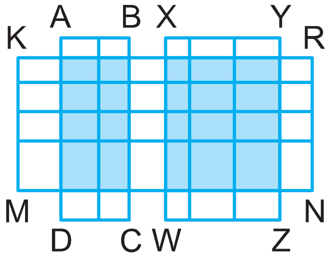
$24 \times 12 \times 7 = 2016$ cách.



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
c d b d c d b d c d b
d → c → b → d c d b d c d b
d → b → c d b d v d b
d → c → b d c d b
d → b → c d b
d → c → b
d

Vậy tổng cộng có $48 + 2016 = 2064$ cách phối màu.

Câu 12.



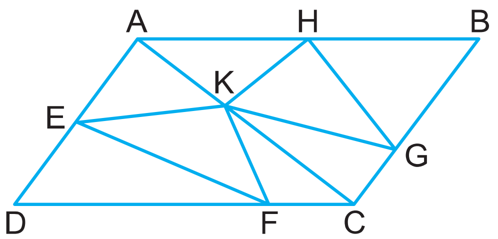
Đầu tiên ta đếm số hình chữ nhật có trong miền KMNR. Có $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ cách chọn hai cạnh bên của hình chữ nhật, có $\frac{9 \times 8}{2} = 36$ cách chọn hai cạnh trên và dưới của hình chữ nhật, do đó có $10 \times 36 = 360$ hình chữ nhật trong miền KMNR.

Tương tự số hình chữ nhật trong miền ABCD là $\frac{7 \times 6}{2} \times \frac{3 \times 2}{2} = 63$ hình, số hình chữ nhật trong miền WXYZ là $\frac{7 \times 6}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 126$ hình.

Tuy nhiên ta phải trừ đi các hình chữ nhật có trong hai miền được tô màu vì chúng được đếm hai lần. Số hình chữ nhật trong hai miền này lần lượt là $\dfrac{5\times4}{2}\times\dfrac{3\times2}{2}=30$ và $\dfrac{5\times4}{2}\times\dfrac{4\times3}{2}=60$.

Vậy số hình chữ nhật trong miền đã cho là $360+63+126-30-60=459$ hình.

Câu 13.



Vì AC là một đường chéo của hình bình hành ABCD, diện tích của tam giác ADC là $\dfrac{1}{2}\times240=120\ (\text{cm}^2)$.

Vì $AE=\dfrac{1}{2}AD$ và $AK=\dfrac{2}{5}AC$ nên diện tích của tam giác AKE là $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}\times120=24\ (\text{cm}^2)$.

Vì $DE=\dfrac{1}{2}DA$ và $DF=\dfrac{3}{4}DC$ nên diện tích tam giác DEF là $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times120=45\ (\text{cm}^2)$.

Vì $CF=\dfrac{1}{4}CD$ và $CK=\dfrac{3}{5}CA$ nên diện tích tam giác CFK là $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{5}\times120=18\ (\text{cm}^2)$.

Do đó diện tích tam giác EFK là

$120-24-45-18=33\ (\text{cm}^2)$.

Tương tự ta tính được diện tích tam giác HKG là $32\ \text{cm}^2$.

Do đó hiệu số diện tích của hai tam giác EFK và HKG là $1\ \text{cm}^2$.

Câu 14. Ta coi bảng 64 ô vuông là một bàn cờ vua và tô các ô bằng hai màu đen, trắng như bàn cờ thông thường. Khi đó hai số tự nhiên liên tiếp sẽ nằm trong hai ô có màu khác nhau, trong khi các số có cùng tính chẵn lẻ sẽ nằm trong các ô có cùng màu. Ngoại trừ số 2, các số nguyên tố đều là các số lẻ, và có 4 vị trí cho các số lẻ trên một hàng hoặc một cột bất kì. Do đó trên một hàng có thể có nhiều nhất 5 số nguyên tố. Các bảng dưới đây cho thấy điều đó có thể xảy ra.

2	3	6	7	10	11	28	29
1	4	5	8	9	12	27	30
18	17	16	15	14	13	26	31
19	20	21	22	23	24	25	32
40	39	38	37	36	35	34	33
41	42	43	44	45	46	47	48
56	55	54	53	52	51	50	49
57	58	59	60	61	62	63	64

2	3	6	7	10	11	16	17
1	4	5	8	9	12	15	18
64	53	52	41	40	13	14	19
63	54	51	42	39	30	29	20
62	55	50	43	38	31	28	21
61	56	49	44	37	32	27	22
60	57	48	45	36	33	26	23
59	58	47	46	35	34	25	24

2	3	6	7	10	11	12	13
1	4	5	8	9	28	27	14
64	53	52	41	40	29	26	15
63	54	51	42	39	30	25	16
62	55	50	43	38	31	24	17
61	56	49	44	37	32	23	18
60	57	48	45	36	33	22	19
59	58	47	46	35	34	21	20

Câu 15. Tổng của tất cả các số trong một miền hình chữ nhật bằng trung bình cộng số nằm ở góc trên cùng bên trái A và số nằm ở góc dưới cùng bên phải B nhân với số dòng rồi nhân với số cột của miền đó.

Nếu cả số dòng và số cột của miền hình chữ nhật đều bằng 7, tức là ta xét cả hình vuông lớn đã cho, thì tổng các số trong miền đó rõ ràng là một bội số của 49.

(Xem tiếp trang 14)

TOÁN HỌC VÀ BÓNG ĐÁ
MỘT SỐ ĐIỀU CÓ THỂ BẠN CHƯA BIẾT

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Trong bài viết này, chúng tôi muốn giới thiệu cũng như trao đổi với bạn đọc các bài toán liên quan đến bóng đá.

Bài toán 1. Một quả bóng đá có diện tích bề mặt là 484π cm^2. Tính thể tích của quả bóng đó.

Lời giải. Quả bóng đá có dạng một hình cầu, công thức tính diện tích mặt cầu là $S = 4\pi r^2$.

Suy ra $4\pi r^2 = 484\pi \Leftrightarrow r = 11$ (cm).

Thể tích của quả bóng cũng chính là thể tích hình cầu bán kính r, có công thức sau: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Do đó $V = \dfrac{4}{3}\pi.11^3 = \dfrac{5324\pi}{3}$ (cm^3).

• Thông tin dành cho bạn đọc

Trong các giải bóng đá chuyên nghiệp và tại giải FIFA World Cup, quả bóng đá có các thông số sau:

- Bán kính 4,3 – 4,5 inch (11 – 11,5 cm).
- Trọng lượng 14 – 16 ounce (400 – 500 g).
- Áp suất 8,5 – 15,6 PS.

Bài toán 2. Có một quả bóng được khâu từ 32 miếng da: các miếng hình lục giác đều màu trắng và các miếng hình ngũ giác đều màu đen. Mỗi miếng màu đen chỉ giáp với 5 miếng màu trắng, mỗi miếng màu trắng giáp với 3 miếng màu đen. Hỏi có tất cả bao nhiêu miếng da màu trắng?

Lời giải. Gọi số miếng da màu trắng là x, $x \in \mathbb{N}^*$.

Số miếng da màu đen là 32 – x.

Ta nhận thấy mỗi miếng da màu trắng và đen tiếp giáp nhau sẽ tạo ra một biên đen-trắng, gọi tắt là một biên.

Theo đề bài, mỗi miếng da màu đen chỉ giáp với 5 miếng da màu trắng, nên số biên đen-trắng sẽ là $5(32 - x)$. (1)

Mỗi miếng da màu trắng chỉ giáp với 3 miếng da màu đen, nên số biên đen-trắng là 3x. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $5(32 - x) = 3x$

$\Leftrightarrow x = 20$. (thỏa mãn điều kiện)

Vậy số miếng da màu trắng là 20.

• Thông tin dành cho bạn đọc

- Các vòng chung kết World Cup từ năm 1970 cho đến năm 2002, trái bóng chính thức được tạo bởi từ 20 mảnh ghép hình lục giác đều và 12 mảnh ghép hình ngũ giác đều như bài toán trên.
- Về sau các mảnh ghép của trái bóng chính thức đã được giảm dần, năm 2006 tại Đức, trái bóng còn 14 mảnh ghép, năm 2010 tại Nam Phi trái bóng còn 8 mảnh và năm 2014 ở Brasil, năm 2018 ở Nga là 6 mảnh.

Bài toán 3. Một sân bóng đá hình chữ nhật, chiều dài hơn chiều rộng 37 m, diện tích của sân bóng là 7140 m^2. Tìm kích thước của sân bóng này.

Lời giải. Gọi chiều rộng sân bóng là x (m) $(x > 0)$.

Khi đó chiều dài sân bóng là $x + 37$ (m).

Diện tích sân bóng là $x(x + 37)$ (m^2).

Suy ra $x(x + 37) = 7140$

$\Leftrightarrow x = 68$ hoặc $x = -105$ (loại).

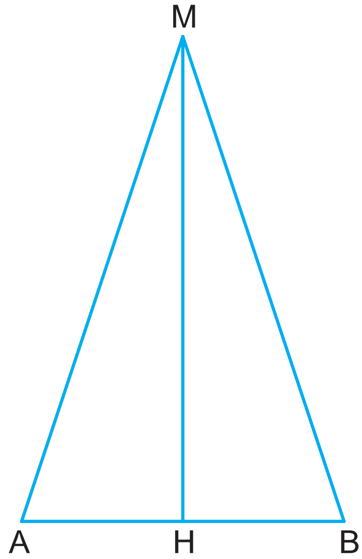
Vậy chiều rộng của sân bóng là 68 m, chiều dài sân bóng là 105 m.

- **Thông tin dành cho bạn đọc**

Kể từ năm 2007, để tiêu chuẩn hóa kích thước sân bóng đá nhân tạo dành cho các trận đấu quốc tế, IFAB - Ủy ban điều hành hiệp hội bóng đá thế giới đã quyết định đặt kích thước cố định của sân bóng đá là chiều dài 105 m, chiều rộng 68 m.

Bài toán 4. Chiều rộng của cầu môn trong bóng đá là 7,32 m. Biết chấm phạt đền trong bóng đá đặt cách cầu môn 11 m và ở chính giữa cầu môn. Hỏi góc sút của quả phạt đền 11 m là bao nhiêu độ?

Lời giải. Gọi vị trí đặt bóng để sút quả phạt đền là M và hai đầu mút cầu môn là A, B. Gọi H là trung điểm của AB.



Vì M nằm trên đường trung trực của AB nên $MH \perp AB$.

Ta có $AH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{7,32}{2} = 3,66$ (m)

$\Rightarrow \tan\widehat{AMH} = \dfrac{AH}{MH} = \dfrac{3,66}{11}$

$\Rightarrow \widehat{AMH} \approx 18^o24' \Rightarrow \widehat{AMB} = 2\widehat{AMH} \approx 36^o48'$.

Vậy góc sút của chấm phạt đền là $36^o48'$.

- **Thông tin dành cho bạn đọc**

Từ điểm cách cột dọc 16,5 m trên đường biên ngang của mỗi phần sân bóng đá, kẻ vào phía trong hai đoạn thẳng song song (cùng vuông góc với đường biên ngang) có độ dài 16,5 m. Tiếp theo lại kẻ đường nối liền hai đoạn thẳng đó và đường biên ngang gọi là khu phạt đền. Trong mỗi khu phạt đền có một điểm với đường kính 22 cm được đánh dấu rõ ràng cách điểm chính giữa đường biên ngang 11 m đó là điểm phạt đền. Lấy điểm phạt đền làm tâm, kẻ cung tròn có bán kính 9,15 m để xác định vị trí đứng của những cầu thủ khi có một cầu thủ thực hiện quả phạt đền 11 m.

LỜI GIẢI ĐỀ THI TOÁN QUỐC TẾ...

(Tiếp theo trang 12)

Xét các miền hình chữ nhật chỉ có số cột bằng 7. Khi đó ta phải có $A + B \equiv 0 \pmod 7$. Mặt khác $A \equiv 1 \pmod 7$ và $B \equiv 0 \pmod 7$. Vì vậy không thể có $A + B \equiv 0 \pmod 7$.

Xét các miền hình chữ nhật chỉ có số dòng bằng 7.

Ta vẫn phải có $A + B \equiv 0 \pmod 7$.

Trong trường hợp này A có thể bằng 1, 2, 3 và 7 (tương ứng với B bằng 48, 47, 46, 49).

Cuối cùng, xét các miền hình chữ nhật có số dòng và số cột đều khác 7. Ta phải có $A + B = 49$ hoặc $A + B = 98$.

Do đó

$A \in \{7; 8; 9; 10; 14; 15; 16; 17; 21; 22; 23; 24; 49\}$.

Vậy tổng số miền hình chữ nhật thỏa mãn yêu cầu bài toán là $1 + 0 + 4 + 13 = 18$.

HỌC RA SAO

ỨNG DỤNG CỦA MỘT HẰNG ĐẲNG THỨC

TRẦN VĂN HƯNG
(GV. THCS Yên Thanh, Thanh Lộc, Can Lộc, Hà Tĩnh)

Khi giải toán, việc sử dụng các hằng đẳng thức một cách hợp lí giúp ta tìm ra lời giải ngắn gọn cho nhiều bài toán.

- Ta có hằng đẳng thức

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$

- Nhận xét:

* Nếu $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ thì

$a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$.

* Nếu $a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$ thì

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$.

Bạn đọc tự chứng minh hằng đẳng thức và hai nhận xét trên. Bài viết này chúng tôi xin giới thiệu một số bài toán vận dụng hằng đẳng thức trên.

Bài toán 1. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Tính giá trị của biểu thức $M = \left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$.

Lời giải. Vì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ nên

$a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$.

- Nếu $a + b + c = 0$ thì

$$M = \left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) = \frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{c+a}{a}$$

$$= \frac{(-c)}{b}.\frac{(-a)}{c}.\frac{(-b)}{a} = -1.$$

- Nếu $a = b = c$ thì $M = (1+1)(1+1)(1+1) = 8$.

Bài toán 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 6xy - 8 \\ 2x + y = 1. \end{cases}$$

Lời giải. Ta có $x^3 + y^3 = 6xy - 8$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + 2^3 - 3.x.y.2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y + 2 = 0 \\ x = y = 2. \end{array}\right.$$

- Nếu $x + y + 2 = 0$ thì ta có

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -5. \end{cases}$$

- Nếu $x = y = 2$ (không thoả mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (3; -5)$.

Bài toán 3. Giải phương trình

$$27(x-3)^3 = 8(x-2)^3 + (x-5)^3.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$(3x-9)^3 + (4-2x)^3 + (5-x)^3 = 0$. (1)

Ta có $(3x - 9) + (4 - 2x) + (5 - x) = 0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$3(3x - 9)(4 - 2x)(5 - x) = 0$.

Suy ra $x = 3$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = 5$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{2; 3; 5\}$.

Bài toán 4. Cho các số thực a, b, c phân biệt khác 0 thỏa mãn $a + b + c = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right).$$

Lời giải. Ta đặt $M = \frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}$.

Khi đó

$$M.\frac{a}{b-c} = 1+\frac{a}{b-c}\left(\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)$$

$$= 1+\frac{a}{b-c}.\frac{c^2-ca+ba-b^2}{bc} = 1+\frac{2a^2}{bc} = 1+\frac{2a^3}{abc}.$$

Tương tự ta có

$$M.\frac{b}{c-a} = 1+\frac{2b^3}{abc} \text{ và } M.\frac{c}{a-b} = 1+\frac{2c^3}{abc}.$$

Do đó $P = 3 + \dfrac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc}$.

Vì $a + b + c = 0$ nên $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Suy ra $P = 9$.

Bài toán 5. Giả sử bộ ba số $\dfrac{a}{b-c}$; $\dfrac{b}{c-a}$; $\dfrac{c}{a-b}$ là nghiệm của phương trình $\dfrac{x^2}{yz} + \dfrac{y^2}{zx} + \dfrac{z^2}{xy} = 3$.

Chứng minh bộ ba số $\dfrac{a}{(b-c)^2}$; $\dfrac{b}{(c-a)^2}$; $\dfrac{c}{(a-b)^2}$ cũng là nghiệm của phương trình đó.

Lời giải. Ta có $\dfrac{x^2}{yz} + \dfrac{y^2}{zx} + \dfrac{z^2}{xy} = 3$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$.

Do đó $x = y = z$ hoặc $x + y + z = 0$.

Vì nghiệm của phương trình đã cho là bộ ba số khác 0 nên các số a, b, c là ba số khác nhau và khác 0.

- Nếu $\dfrac{a}{b-c} = \dfrac{b}{c-a} = \dfrac{c}{a-b} = k \neq 0$

$\Rightarrow a = k(b - c), b = k(c - a), c = k(a - b)$.

Suy ra $a + b + c = 0 \Leftrightarrow a + b = -c$.

Từ $\dfrac{a}{b-c} = \dfrac{b}{c-a} \Leftrightarrow \dfrac{a}{b+a+b} = \dfrac{b}{-a-b-a}$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 = 0$

$\Leftrightarrow a = b = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$. (loại)

- Nếu $\dfrac{a}{b-c} + \dfrac{b}{c-a} + \dfrac{c}{a-b} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{a}{b-c} = \dfrac{b}{a-c} + \dfrac{c}{b-a} = \dfrac{b(b-a)+c(a-c)}{(c-a)(a-b)}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{(b-c)^2} = \dfrac{b^2 - ba + ca - c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$. (1)

Tương tự ta có

$\dfrac{b}{(c-a)^2} = \dfrac{c^2 - cb + ab - a^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$. (2)

$\dfrac{c}{(a-b)^2} = \dfrac{a^2 - ac + bc - b^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra

$\dfrac{a}{(b-c)^2} + \dfrac{b}{(c-a)^2} + \dfrac{c}{(a-b)^2} = 0$.

Đặt $m = \dfrac{a}{(b-c)^2}$; $n = \dfrac{b}{(c-a)^2}$; $p = \dfrac{c}{(a-b)^2}$ thì $m + n + p = 0$, suy ra $m^3 + n^3 + p^3 = 3mnp$

$\Rightarrow \dfrac{m^2}{np} + \dfrac{n^2}{mp} + \dfrac{p^2}{mn} = 3$.

Vậy bộ ba số $\dfrac{a}{(b-c)^2}$; $\dfrac{b}{(c-a)^2}$; $\dfrac{c}{(a-b)^2}$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức

a) $M = \dfrac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3}$, với a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ và $a + b + c \neq 0$.

b) $N = \left(1 + \dfrac{a}{b}\right)\left(1 + \dfrac{b}{c}\right)\left(1 + \dfrac{c}{a}\right)$, với a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2$.

Bài 2. Cho $\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{z+x} = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$P = \dfrac{(y+z)(z+x)}{(x+y)^2} + \dfrac{(x+y)(z+x)}{(z+y)^2} + \dfrac{(y+x)(z+y)}{(x+z)^2}$.

Bài 3. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a + b + c = (a - b)(b - c)(c - a)$.

Chứng minh rằng

$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ chia hết cho 81.

Bài 4. Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases} x^3 + 27y^3 = 27xy - 27 \\ x + y = 4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 6. \end{cases}$

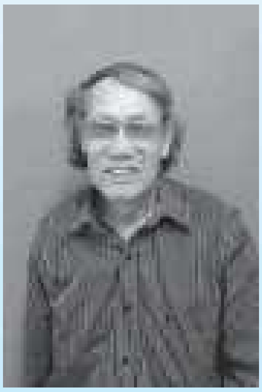
MỘT SỐ Ý KIẾN CỦA CÁC ỦY VIÊN HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP TẠP CHÍ

TS. Trần Quang Vinh

Tạp chí Toán Tuổi thơ đã có nhiều đóng góp trong sự nghiệp phát triển Giáo dục. Tạp chí có nhiều hoạt động tạo hiệu ứng xã hội tốt như các cuộc thi Olympic Toán Tuổi thơ, Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ, ... Thời đại công nghệ thông tin phát triển mạnh, tài liệu trên mạng nhiều nhưng tạp chí Toán Tuổi thơ vẫn rất hấp dẫn bạn đọc. Đó là thành công lớn của Tạp chí. Mong rằng trong thời gian tới, Tạp chí đến với nhiều bạn đọc hơn và phủ khắp các vùng miền trong cả nước.

Là một trong những người sáng lập ra tạp chí Toán Tuổi thơ, tôi luôn mong đứa con tinh thần của mình ngày một trưởng thành hơn. Tôi xin chân thành cảm ơn các Giáo sư, Tiến sĩ, các thầy cô giáo trong Hội đồng biên tập, các cộng tác viên đã nhiệt tình đóng góp những bài viết hay, những ý kiến thiết thực để nội dung của Tạp chí luôn hấp dẫn, phù hợp với bạn đọc. Tạp chí mong được sự quan tâm hơn nữa của lãnh đạo Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, các Sở GD - ĐT, các trường tiểu học và Trung học cơ sở trong cả nước để Tạp chí tới tay nhiều bạn đọc hơn nữa.

TS. Lê Thống Nhất



Nhà giáo Nguyễn Áng

Là người tham gia Hội đồng biên tập từ số đầu tiên của Tạp chí, tôi rất thích các chuyên mục của tạp chí vì nó hấp dẫn và gần gũi với nhà trường. Đây là một tờ tạp chí chuyên môn không những dành cho học sinh mà còn dành cho giáo viên, phụ huynh. Vì vậy tôi mong những thành viên trong Hội đồng biên tập là lãnh đạo, cán bộ ở Vụ, Viện và Bộ GD - ĐT quan tâm, viết bài gửi Tạp chí.

Tôi rất thích Toán Tuổi thơ, ngay từ khi còn là tập san của Toán học và Tuổi trẻ. Toán Tuổi thơ đã có các chuyên mục phong phú dành cho giáo viên và học sinh. Tuy nhiên thời gian tới, Tạp chí cần có thêm bài viết liên quan đến nội dung, chương trình Sách giáo khoa mới của các chuyên gia, các tác giả Sách giáo khoa. Đặc biệt, Tạp chí cần có trang giới thiệu khuynh hướng dạy và học toán của các nước.

TS. Tạ Ngọc Trí

NGND. Vũ Hữu Bình

Toán Tuổi thơ mới ra đời đã gây tiếng vang lớn. Tôi đã được chứng kiến sự háo hức, mong đợi Toán Tuổi thơ hàng tháng của các em học sinh. Có Toán Tuổi thơ trong tay là các em say sưa giải rồi xin ý kiến của thầy. Toán Tuổi thơ đã truyền cảm hứng cho thầy trò chúng tôi trong việc dạy và học toán. Trong thực tế các em thường lúng túng khi trình bày bài giải một số dạng toán. Nên chăng Toán Tuổi thơ có bài viết về cách trình bày, phương pháp giải một số bài toán mà chưa có ở các sách tham khảo.

Toán Tuổi thơ là sân chơi trí tuệ cho các em học sinh. Nhiều cuộc thi của Toán Tuổi thơ đã thúc đẩy phong trào dạy và học toán trong nhà trường. Tuy nhiên Tạp chí cần có thêm bài viết về nội dung, chương trình Sách giáo khoa mới, phương pháp dạy học tích cực. Đặc biệt Tạp chí cần có trang web hoạt động thường xuyên để đáp ứng xu thế mới.

PGS. TS. Trần Diên Hiển

TS. Hoàng Mai Lê

Tạp chí Toán Tuổi thơ có nhiều bài toán vui, bài toán ứng dụng cuộc sống rất thú vị. Nhờ có Toán Tuổi thơ mà tôi biết được những thầy cô có chuyên môn toán giỏi ở các tỉnh thành. Trong các cuộc tập huấn hay chuyên đề ở các cơ sở giáo dục, tôi thường lấy bài viết của mình trong Toán Tuổi thơ làm ví dụ vì trong các bài viết đó có ý tưởng của phương pháp dạy học mới. Bên cạnh những tác giả có tên tuổi trong làng toán Tiểu học và Trung học cơ sở, Toán Tuổi thơ cũng cần có bài viết về giải toán, về tình huống ứng xử sư phạm của các thầy cô trực tiếp giảng dạy. Đó chính là vốn kinh nghiệm quý để bồi dưỡng nghiệp vụ chuyên môn trong nhà trường.

Tôi rất vinh dự được là ủy viên của Hội đồng biên tập tạp chí Toán Tuổi thơ, được trực tiếp gặp gỡ những bậc thầy trong làng toán mà trước kia tôi chỉ biết tên tuổi họ qua các tài liệu, sách tham khảo. Tôi thích Toán Tuổi thơ ngay từ khi còn là học sinh. Hiện nay, trong tay tôi có đủ các số báo từ khi Tạp chí mới ra đời. Toán Tuổi thơ có nhiều bài rất hay và không giống với bất cứ tài liệu nào khác. Nhiều đề thi cấp tỉnh đã lấy từ các bài toán trong Toán Tuổi thơ. Tôi mong tạp chí Toán Tuổi thơ luôn là cầu nối để các giáo viên như chúng tôi được chia sẻ những kinh nghiệm trong quá trình giảng dạy toán.

ThS. Trần Quang Hùng

Toán học & đời sống

BÀI TOÁN ĐONG CHẤT LỎNG TRONG ĐỜI SỐNG

NGUYỄN HẠ HÀ UYÊN
(TP. Hồ Chí Minh)

Trong thực tế đời sống, đôi khi chúng ta không dùng dụng cụ chia vạch theo thể tích để đong một dung tích chất lỏng (nước, xăng, dầu, rượu,...), mà chỉ dùng các bình chứa có dung tích nhất định. Bài toán đặt ra là chúng ta cần tìm cách để có thể đong được lượng chất lỏng như ý muốn mặc dù không có công cụ chia thể tích chính xác.

Bài toán 1. Cho một thùng chứa không ít hơn 13 *l* nước, làm thế nào để lấy ra 8 *l* nước mà chỉ có một chiếc bình 9 *l* và một chiếc bình 5 *l*? Giả sử khi đong nước sự hao hụt là không đáng kể.

Lời giải. Giả sử trong thùng có a *l* nước ($a \geq 13$).

Ta sẽ đong nước lần lượt theo các thứ tự sau

- Lần 1: Chuyển nước từ thùng qua bình 9 *l* cho đầy.
- Lần 2: Chuyển nước từ bình 9 *l* qua bình 5 *l* cho đầy.

Lúc này bình 9 *l* còn lại 4 *l* nước.

- Lần 3: Chuyển nước từ bình 5 *l* trở lại hết vào thùng.
- Lần 4: Chuyển số nước còn lại từ bình 9 *l* (4 *l*) vào bình 5 *l*.

Như vậy bình 5 *l* lúc này chứa 4 *l* nước.

- Lần 5: Chuyển nước từ thùng lớn qua đầy bình 9 *l*.
- Lần 6: Chuyển nước từ bình 9 *l* sang qua cho đầy bình 5 *l*, lúc này bình 5 *l* chỉ còn thiếu 1 *l* là đầy.

Khi đó bình 9 *l* còn lại $9 - 1 = 8$ (*l*).

Ta có thể minh họa cách chuyển nước của bài toán trên bằng bảng sau:

	Thùng	Bình 9 *l*	Bình 5 *l*
Lúc đầu	a	0	0
Lần 1	a – 9	9	0
Lần 2	a – 9	4	5
Lần 3	a – 4	4	0
Lần 4	a – 4	0	4
Lần 5	a – 13	9	4
Lần 6	a – 13	8	5

Bài toán 2. Có hai chiếc bình 5 *l* và 7 *l*. Làm thế nào đong được đúng 4 *l* nước ở một vòi nước máy?

Lời giải. Ta minh họa cách đong nước bằng bảng tương tự bài toán 1.

	Bình 7 *l*	Bình 5 *l*
Lần 1	7	0
Lần 2	2	5
Lần 3	2	0
Lần 4	0	2
Lần 5	7	2
Lần 6	4	5

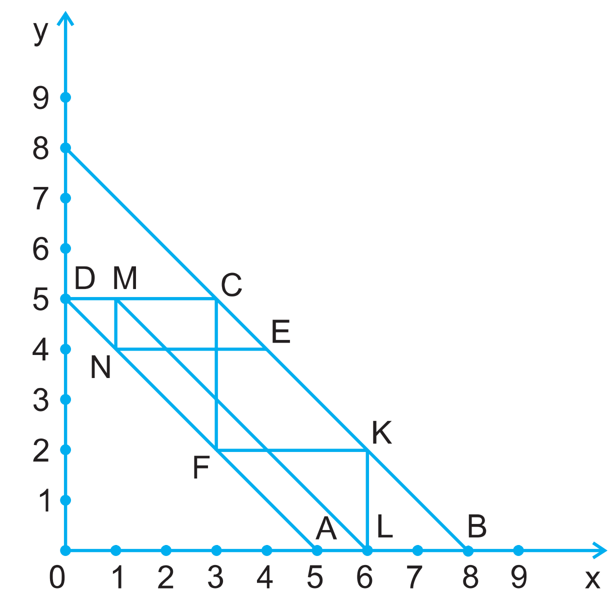
Bài toán 3. Có ba chiếc bình có dung tích lần lượt là 8 *l*, 5 *l*, 3 *l*. Bình 8 *l* chứa đầy sữa. Làm thế nào để chia số sữa đó thành hai phần bằng nhau mà chỉ dùng ba chiếc bình trên?

Lời giải. Ta minh họa các bước chuyển sữa bằng bảng sau

	Bình 8 *l*	Bình 5 *l*	Bình 3 *l*
Lúc đầu	8	0	0
Lần 1	3	5	0
Lần 2	3	2	3
Lần 3	6	2	0
Lần 4	6	0	2
Lần 5	1	5	2
Lần 6	1	4	3
Lần 7	4	4	0

Nhận xét. Xin giới thiệu một cách suy nghĩ khác để có lời giải trên.

Kí hiệu x, y là lượng sữa chứa trong các bình 8 *l*, 5 *l* sau mỗi lần chuyển, lúc đó số lượng sữa trong bình 3 *l* sẽ là 8 – x – y (*l*).



Trong hệ trục tọa độ Oxy cặp (x, y) ứng với một điểm, các điểm thỏa mãn điều kiện $0 \le x \le 8$, $0 \le y \le 5$, $0 \le 8 - x - y \le 3$ tạo thành hình bình hành ABCD.

Lượng sữa ban đầu ứng với điểm B(8; 0), lượng sữa cần tìm ứng với E(4; 4). Nối B với E bằng đường gấp khúc mà các đỉnh nằm trên hình bình hành ABCD, mỗi đoạn thẳng của đường gấp khúc song song với trục tọa độ hoặc với BC. Chúng ta có đường gấp khúc BCFKLMNE, mỗi điểm trên đường gấp khúc cho ta một giá trị của cặp (x, y), từ đó ta biết được lượng sữa chứa trong các bình qua mỗi lần chuyển và nêu ra được các bước chuyển tương ứng.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Có ba chiếc bình có thể tích lần lượt là 10 *l*, 7 *l*, 3 *l*. Bình 10 *l* chứa đầy dầu. Làm thế nào để chia số dầu đó thành hai phần bằng nhau mà chỉ dùng ba chiếc bình trên?

Bài 2. (Poát-xông chia sữa)

Một hôm Poát-xông (Nhà toán học người Pháp) ra chợ định mua 6 *l* sữa. Người bán hàng có một bình 12 *l* đựng đầy sữa và một bình trống có dung tích 5 *l*. Còn Poát-xông thì có một bình trống dung tích 8 *l*. Phải làm thế nào để Poát-xông lấy được đúng 6 *l* sữa đem về?

Bài 3. Có ba chiếc bình có thể tích lần lượt là 12 *l*, 7 *l*, 5 *l*. Bình 12 *l* đựng đầy nước mắm, làm cách nào để chia số nước mắm đó thành hai phần bằng nhau mà chỉ dùng ba chiếc bình trên?

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 HUYỆN TAM DƯƠNG TỈNH VĨNH PHÚC

Năm học 2017 - 2018

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. *(4 điểm)*

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x-y}{x+2y}+\dfrac{x-2y}{y-x}-\dfrac{4y^2-x^2-4xy}{x^2+xy-2y^2}\right):\left(1+\dfrac{2y}{x-y}\right)$.

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A.

b) Cho biết $x^2+2016y^2=2017xy$. Hãy tính giá trị của biểu thức A.

Bài 2. *(5 điểm)*

a) Thực hiện phép tính $B=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{10}}{\sqrt{23-3\sqrt{5}}}$.

b) Giải phương trình $\dfrac{3}{x^2+5x+4}+\dfrac{2}{x^2+10x+24}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{9}{x^2+3x-18}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=\sqrt{16x^2+8x+1}+\sqrt{16x^2-24x+9}$.

Bài 3. *(4 điểm)*

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $3x^2+5y^2=255$.

b) Cho a, b và c là ba số nguyên dương thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}\le\frac{1}{2}.$$

Bài 4. *(6 điểm)*

Cho điểm M di động trên đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các hình vuông AMCD, BMEF.

a) Chứng minh rằng $AE\perp BC$.

b) Gọi H là giao điểm của AE và BC. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{MH^2}=\dfrac{1}{MD^2}+\dfrac{1}{MF^2}$.

c) Gọi I là giao điểm của AC và DF, kẻ IK vuông góc với AB. Biết MD = $6\sqrt{2}$ cm, MF = $3\sqrt{2}$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng IK.

Bài 5. *(1 điểm)*

Trong mặt phẳng cho 4037 điểm, biết rằng 3 điểm bất kì trong 4037 điểm trên luôn chọn được hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng trong các điểm nói trên có ít nhất 2019 điểm nằm trong đường tròn bán kính bằng 1.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT TP. HÀ NỘI

Năm học 2018-2019

Môn thi: Toán (chuyên Toán)

(Đề đăng trên TTT2 số 185+186)

Đọc lại cho đúng. *Do lỗi chế bản nên tạp chí đã đăng chưa chính xác đề bài 1 phần 1 trang 28, TTT2 số 185+186. Mong bạn đọc thông cảm.*

Đề đúng: Giải phương trình

$x^2+3x+8=(x+5)\sqrt{x^2+x+2}.$

Bài 1. 1) Đặt $t=\sqrt{x^2+x+2}>0$. Phương trình trở thành $t^2-(x+5)t+2x+6=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=x+3. \end{array}\right.$$

Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+2}=2$ tìm được $x=1;\ x=-2.$

Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+2}=x+3$ tìm được $x=-\frac{7}{5}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm là

$S=\left\{1;-2;-\frac{7}{5}\right\}$.

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1\ (1) \\ y^2=x^3+8x^2-x+1\ (2) \end{cases}$$

$(1)\Leftrightarrow (y-x)^2=(3x-1)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-x=3x-1 \\ x-y=3x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=4x-1 \\ y=-2x+1. \end{array}\right.$$

• TH1. $y=4x-1$ thế vào phương trình (2) ta có $(4x-1)^2=x^3+8x^2-x+1$

$\Leftrightarrow 16x^2-8x+1=x^3+8x^2-x+1$

$$\Leftrightarrow x^3-8x^2+7x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=7. \end{array}\right.$$

Tìm được (x; y) là $(0;-1);\ (1;3);\ (7;27)$.

• TH2. $y=-2x+1$ thế vào phương trình (2) ta có $(-2x+1)^2=x^3+8x^2-x+1$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=x^3+8x^2-x+1$

$$\Leftrightarrow x^3+4x^2+3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=-3. \end{array}\right.$$

Tìm được (x; y) là $(0;1);(-1;3);(-3;7)$.

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là

$S=\{(0;-1);\ (0;1);\ (1;3);\ (-1;3);\ (7;27);\ (-3;7)\}$.

Bài 2. 1) $p^4+2019q^4=p^4-q^4+2020q^4$;

$p^4-q^4=(p^2+q^2)(p^2-q^2)$

$=(p^2+q^2)(p-q)(p+q).$

Vì p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5 nên p, q là các số lẻ, suy ra $(p-q)(p+q)\,\vdots\,4$. (3)

Vì p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5 nên p, q là các số không chia hết cho 5.

Từ đó $p^2\equiv 1;\ 4\ (\text{mod } 5)$ và $q^2\equiv 1;\ 4\ (\text{mod } 5)$

$\Rightarrow p^4\equiv 1\ (\text{mod } 5)$ và $q^4\equiv 1\ (\text{mod } 5)$.

Do đó $p^4-q^4\,\vdots\,5$. (4)

Vì 4 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau nên từ (3) và (4) suy ra $p^4+2019q^4\,\vdots\,20$.

2) a) Ta có $bc=\frac{1}{4}(c+b)^2-\frac{1}{4}(c-b)^2$ và

$ad=\frac{1}{4}(a+d)^2-\frac{1}{4}(d-a)^2$.

Mặt khác, có $\frac{1}{4}(c-b)^2<\frac{1}{4}(d-a)^2$ và ad = bc nên $\frac{1}{4}(a+d)^2>\frac{1}{4}(b+c)^2 \Rightarrow a+d>b+c.$

b) Ta có $0<\sqrt{d}-\sqrt{a}\le 1$

$\Rightarrow a+d\le 1+2\sqrt{ad}=1+2\sqrt{bc}\le 1+b+c.$

Vì $a+d>b+c$ nên $b+c<a+d\le b+c+1$, mà a, b, c, d là các số nguyên nên $a+d=b+c+1$, do đó $b=c$ và $\sqrt{d}-\sqrt{a}=1$.

Ta có $\sqrt{d}-\sqrt{a}=1 \Rightarrow d=a+1+2\sqrt{a}$ mà a, d là các số nguyên nên a là số chính phương.

Bài 3. 1) Ta có

$$\frac{1}{yz+y+1}=\frac{1}{\frac{1}{x}+y+1}=\frac{x}{xy+x+1}.$$

$$\frac{1}{zx+z+1}=\frac{xyz}{zx+z+xyz}=\frac{xy}{xy+x+1}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}$$

$$=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{xy+x+1}+\frac{xy}{xy+x+1}=1.$$

2) Ta có

$$2x^2+y^2+3=x^2+y^2+x^2+1+2\geq 2xy+2x+2$$

$$\Rightarrow\ 2x^2+y^2+3\geq 2(xy+x+1)$$

Tương tự ta có

$$2y^2+z^2+3\geq 2(yz+y+1);$$

$$2z^2+x^2+3\geq 2(zx+z+1).$$

Từ đó suy ra

$$\frac{P^2}{3}\leq \frac{1}{2x^2+y^2+3}+\frac{1}{2y^2+z^2+3}+\frac{1}{2z^2+x^2+3}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}\right).\ (*)$$

$$3=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\ \Rightarrow\ xyz\geq 1.$$

Vì $xyz\geq 1$ và $x>0$ nên $yz\geq \dfrac{1}{x}$.

Suy ra $\dfrac{1}{yz+y+1}\leq \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+y+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{yz+y+1}\leq \frac{x}{xy+x+1}.\ (5)$$

Ta có $\dfrac{1}{zx+z+1}\leq \dfrac{xyz}{zx+z+xyz}$

$\Leftrightarrow (xyz-1)(xz+z)\geq 0$ (luôn đúng).

Suy ra $\dfrac{1}{zx+z+1}\leq \dfrac{xy}{xy+x+1}.\ (6)$

Từ (5), (6) ta có

$$\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}$$

$$\leq \frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{xy+x+1}+\frac{xy}{xy+x+1}=1.\ (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $P^2\leq \dfrac{3}{2}\Rightarrow P\leq \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

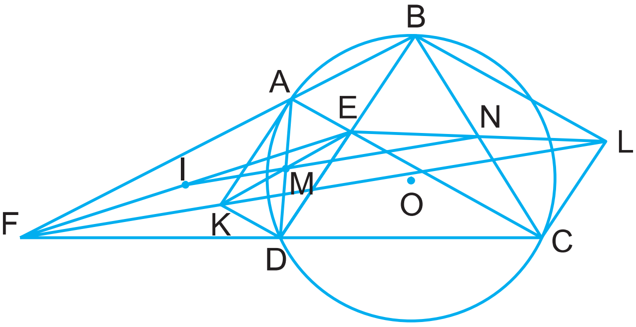
Vậy GTLN của $P=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, đạt được khi $x=y=z=1$.

Bài 4. 1) Do tứ giác ABCD nội tiếp, nên $\Delta FAD\backsim\Delta FCB$ và $\Delta EAD\backsim\Delta EBC$.

$$\Rightarrow \frac{DK}{EB}=\frac{EA}{EB}=\frac{AD}{BC}=\frac{FD}{FB}.$$

Vì DK // EA nên $\widehat{KDF}=\widehat{ACF}=\widehat{DBA}=\widehat{EBF}$.

Suy ra $\Delta FKD\backsim\Delta FEB$ (c.g.c).



2) Gọi I là trung điểm EF. Gọi L là điểm đối xứng với E qua N.

Chứng minh tương tự như trên, ta có $\Delta FLC\backsim\Delta FEA$. Từ đó ta có

$\widehat{CFL}=\widehat{CFK}$ (vì cùng bằng với $\widehat{BFE}$).

$\Rightarrow$ F, K, L thẳng hàng

$\Rightarrow$ I, M, N thẳng hàng.

Vậy MN đi qua trung điểm của đoạn EF.

3) Do $\Delta FKD\backsim\Delta FEB$ nên $\dfrac{FK}{FE}=\dfrac{KD}{EB}=\dfrac{AE}{EB}.\ (7)$

Chứng minh tương tự ta có

$\Delta FLC\backsim\Delta FEA$ nên $\dfrac{FE}{FL}=\dfrac{AE}{CL}=\dfrac{AE}{EB}.\ (8)$

Từ (7) và (8) suy ra $\dfrac{FK}{FE}=\dfrac{FE}{FL}$.

Từ đó $\Delta FKE\backsim\Delta FEL$ nên ta có

$\widehat{FEK}=\widehat{FLE}=\widehat{MNE}$.

Suy ra EF tiếp xúc với đường tròn (MEN).

Bài 5. 1) Xét tập hợp A gồm 40 phần tử còn lại của S sau khi loại đi 10 phần tử 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 của S.

Ta sẽ chứng minh tập hợp A ở trên thỏa mãn đề bài.

Giả sử có bộ số nguyên (x; y; z) với x, y, z $\in$ A thỏa mãn $x^2+y^2=z^2$.

(Xem tiếp trang 37)

Kì này TÌM SỐ THÍCH HỢP

Bài 1. Hãy thay dấu ? bởi số thích hợp.

	7	
10	12	6
	4	

	3	
−1	−10	−4
	−5	

	8	
7	21	12
	5	

	10	
6	?	−5
	2	

Bài 2. Bạn hãy điền số thích hợp vào dấu ? sao cho hợp lôgic.

6 44 2   7 50 1

2 31 3   5 ? 4

TẠ THẬP *(TP. Hồ Chí Minh)*

Kết quả ĐIỀN SỐ THÍCH HỢP (TTT2 số 185+186)

Quy luật. Bài 1. Trong mỗi hình, số nằm ở giữa hình vuông bằng kết quả phép tính ở tam giác bên trái trừ đi kết quả phép tính ở tam giác bên phải rồi chia cho 2.

Vậy số thích hợp điền vào ô trống là

$[8 \times 2 - (4 + 2)] : 2 = \mathbf{5}$.

Nhận xét. Tất cả các bạn tham gia gửi bài đều cho kết quả đúng. Tuy nhiên nhiều bạn chỉ cho đáp số hoặc viết các phép tính mà không phát biểu quy luật thành lời.

Xin trao thưởng cho các bạn trình bày chính xác, ngắn gọn: *Trần Công Hưng*, 9A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**; *Bùi Quỳnh Hoa*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Lê Thị Thanh Hằng*, 9A3, THCS Trưng Vương, Mê Linh, **Hà Nội**; *Đoàn Minh Đức*, 6A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Trần Lương Nguyên*, 6A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

Các bạn sau được tuyên dương: *Nguyễn Việt Hoàng*, 8C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Đặng Đức Kiên*, 9A2, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Lê Đức Chính*, 8B, THCS Nhữ Bá Sỹ, thị trấn Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Phan Khánh An*, 7A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Phạm Đình Thiên Bảo*, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Kết quả CUỘC THI VUI
SỐ VÀ HÌNH 2018

Bài 1(183).

```
   C H Ơ I
       Đ Ố
+    V U I
       H È
  ---------
   2 0 1 8
```

Từ H + V $\geq$ 8 (do nhớ 1 hoặc 2 từ hàng chục) nên C = 1. Vì các số hạng đều là số nguyên tố nên I, Ố, È chỉ lấy các giá trị (khác 1) là 3, 7, 9, do đó 2.I + Ố + È $\geq 2.3 + 7 + 9 = 22$, từ đó 2.I + Ố + È = 28.

Suy ra I = 9, còn Ố, È lấy giá trị 3 và 7.

Do các chữ số khác nhau nên Ơ, Đ, U, H và V lấy giá trị 2, 4, 6, 8 và 5, dẫn đến Ơ + Đ + U + H $\geq 2 + 4 + 6 + 5 = 17$, lại bớt đi 2 từ hàng đơn vị chuyển sang nên Ơ + Đ + U + H = 21 – 2 = 19 và V + H = 8.

Mà 2 + 4 + 6 + 8 + 5 = 25, do đó Ơ, Đ, U, H lấy các giá trị 2, 4, 5, 8.

Từ đó chỉ có thể H = 2 nên V = 6.

Suy ra È = 3, Ố = 7.

Số 689 = 13.53, còn số 659 và 1289 là các số nguyên tố.

Vậy bài toán có nghiệm duy nhất là

1289 + 47 + 659 + 23 = 2018.

Bài 2(183). Giả sử $2018 = m^2 + n^2$.

Từ $2018 = m^2 + n^2$ có $n^2 < 2018 < 2n^2$.

Suy ra $32 \leq n \leq 44$.

Xét số dư khi chia cho 10. Chữ số tận cùng của một số chính phương chỉ có thể là 0, 1, 4, 5, 6, 9 mà tổng hai số chính phương (bằng 2018) có tận cùng là 8 nên m^2 và n^2 chỉ có thể có chữ số tận cùng là 4 và 4, hoặc 9 và 9, do đó chữ số tận cùng của số n chỉ có thể là 2, 8, 3, 7. Thử với n bằng 32, 33, 37, 38, 42, 43 ta tìm được nghiệm duy nhất là $2018 = 43^2 + 13^2$. Có thể giải theo cách giải khác. Làm tương tự như trên, xét số dư khi chia cho 5, hoặc xét số dư khi chia cho 9.

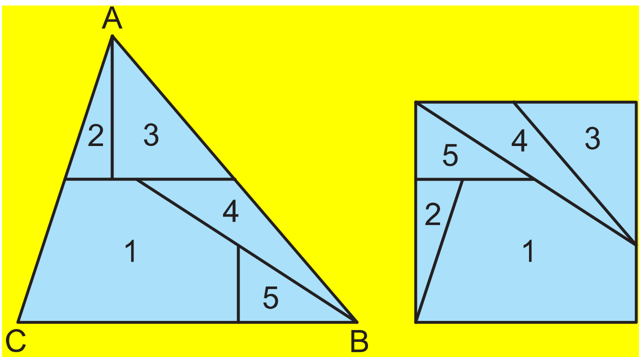
Bài 3(183). a) Giả sử 2018 là cạnh huyền của một tam giác vuông. Từ kết quả Bài 2 áp dụng đẳng thức $(n^2 + m^2)^2 = (n^2 - m^2)^2 + 4m^2n^2$ ta có $2018^2 = (43^2 + 13^2)^2 = (43^2 - 13^2)^2 + 4.43^2.13^2 = 1680^2 + 1118^2$.

Như vậy tồn tại tam giác vuông có ba cạnh là 1118, 1680 và 2018.

b) Giả sử 2018 là cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền là n và cạnh góc vuông là m thì có $2018^2 = n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$. Do 2018 = 2.1009 với 1009 là số nguyên tố và hai số n – m, n + m cùng chẵn hoặc cùng lẻ nên chỉ xảy ra n – m = 2 và $n + m = 2.1009^2 = 2036162$.

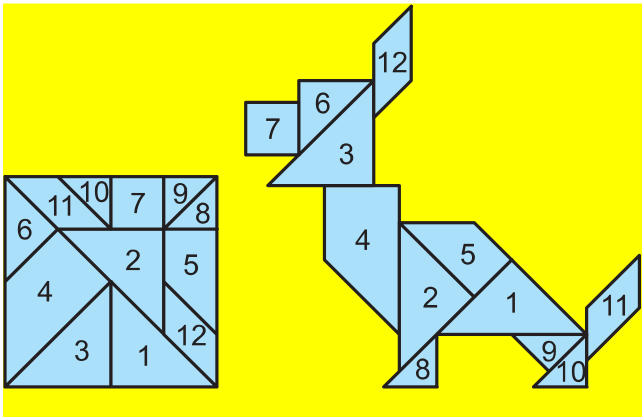
Từ đó n = 1018082 và m = 1018080, suy ra được $2018^2 + 1018080^2 = 1018082^2$. Như vậy tồn tại tam giác vuông có ba cạnh là 2018, 1018080 và 1018082.

Bài 4(183). Giả sử có tam giác ABC với AB: BC: CA = 20: 18: 16. Ta chuyển hình tam giác từ hình 1a thành hình vuông có cùng diện tích như ở hình 1b.



Hình 1a   Hình 1b

Bài 5(183). Cắt hình vuông thành 12 đa giác từ hình 2a rồi ghép lại thành hình con chó như ở hình 2b.



Hình 2a   Hình 2b

Bài 6(184). Xét hình vuông gồm 4 $\times$4 ô vuông với 16 số a, b, c, d, …, t, s, r, q được đặt vào các ô vuông như ở hình 3 với điều kiện $3 \le a, b, c, d, \ldots, t, s, r, q \le 7$.

a	h	k	t
b	g	m	s
c	f	n	r
d	e	p	q

Hình 3

3	6	6	3
3	5	4	6
7	3	3	5
5	4	5	4

Hình 4

Theo giả thiết tổng số mỗi hàng, tổng số mỗi cột đều bằng 18.

- Ban đầu chọn đặt mảnh bìa (a; b) = (3; 3) thì c + d = 18 – 3 – 3 = 12 = 7 + 5 = 6 + 6.

Tiếp theo chọn mảnh bìa (c; d) = (7; 5) như ở hình 4. Lúc đó ở hàng thứ nhất h + k + t = 18 – 3 = 15 = 6 + 6 + 3. Khi chọn (h; k; t) = (6; 6; 3) thì (g; m; s) = (5; 4; 6) do có các mảnh bìa (h; g) = (6; 5), (k; m) = (6; 4) và (t; s) = (3; 6). Từ đó đặt nốt các mảnh bìa (f; e) = (3; 4), (n; p) = (3; 5) và (r; q) = (5; 4) sẽ thỏa mãn yêu cầu đề bài như ở hình 4.

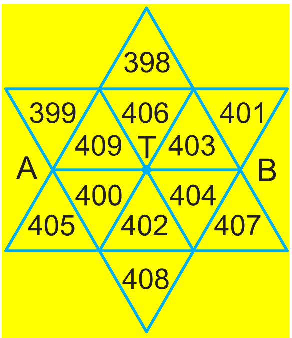
- Nếu ban đầu chọn mảnh bìa (a; b) theo kiểu khác sẽ được các nghiệm khác. Chẳng hạn chọn (a; b) = (3; 5) thì (c; d) = (6; 4),…

Bài toán có nhiều nghiệm, chẳng hạn, trong hình 4 có thể đổi hai cột nào đó cho nhau, hoặc đổi hàng 1, 2 và hàng 3, 4 cho nhau.

Bài 7(184). Giả sử ta đặt hai số 403 và 404 vào trong hai tam giác như ở hình 5. Lúc đó tổng ba số còn lại theo chiều mũi tên là

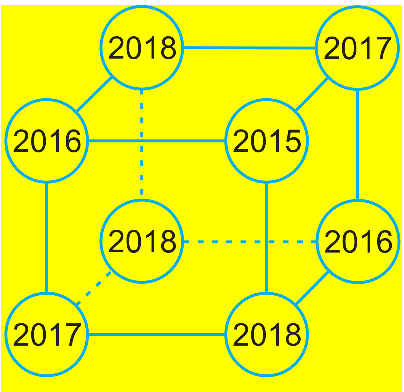
2018 – (403 + 404) = 1211 = 398 + 406 + 407 = 401 + 402 + 408. Điền tiếp các số 398, 406, 407, 401, 402, 408 vào trong các tam giác như ở hình 5. Từ đó suy ra cách điền các số còn lại.

Bài toán có nhiều nghiệm, chẳng hạn, lấy hình đối xứng với hình 5 qua trục AB, hoặc quay hình 5 quanh tâm T một góc 60°, hoặc 120°, hoặc 180° theo chiều kim đồng hồ, hoặc quay một góc 60°, hoặc 120° ngược chiều kim đồng hồ. Có thể ban đầu ta đặt hai số 403 và 404 vào trong hai tam giác không kề nhau, rồi làm tương tự như trên cũng được nghiệm khác.



Hình 6

Bài 8(184).



Hình 7

Giả sử đã ghi 8 số vào trong 8 vòng tròn nhỏ ở các đỉnh hình lập phương như ở hình 6. Ta thấy 8 số ban đầu này gồm 5 số chẵn và 3 số lẻ nên tổng 8 số ban đầu trên 8 đỉnh là số lẻ. Sau một bước cộng thêm 1 vào mỗi số ghi trên hai đỉnh bất kì thì tổng 8 số mới trên 8 đỉnh tăng thêm 2 so với tổng 8 số cũ, như thế sau một số bước tùy ý thì tổng 8 số mới trên 8 đỉnh tăng thêm một số chẵn so với tổng 8 số ban đầu, do đó sau một số bước thì tổng 8 số mới trên 8 đỉnh cũng là số lẻ, suy ra tổng 8 số mới trên 8 đỉnh không chia hết cho 8, tức là không thể thu được 8 số bằng nhau trên 8 đỉnh của hình lập phương.

Bài 9(184). Đặt $n = 9.\overline{abcd} = \overline{eghik}$ với các chữ số a, b, c, d, e, g, h, i, k khác 0, suy ra n chia hết cho 9, do đó tổng (e + g + h + i + k) chia hết cho 9. Do tổng 9 chữ số a, b, c, d, e, g, h, i, k bằng 1 + 2 +…+ 9 = 45 = 9.5 nên tổng m = a + b + c + d = 45 – (e + g + h + i + k) cũng chia hết cho 9, do đó m chỉ có thể bằng 9, 18, 27.

Ta xét giá trị của chữ số a lần lượt từ 1 đến 9.

1) Với a = 1 thì 10800 = 9.1200 < n < 9.2000 = 18000 nên e = 1 = a (loại).

2) Với a = 2 thì 18000 = 9.2000 < n < 9.3000 = 27000 mà a = 2 nên e = 1, nhưng với b > 2 thì n > 9.2300 = 20700 (loại).

3) Với a = 3 thì 27000 = 9.3000 < n < 9.4000 = 36000 mà a = 3 nên e = 2, nhưng với b > 3 thì n > 9.3400 = 30600 (loại).

Vậy b = 1 và m ≥ 3 + 1 + 4 + 5 = 13 nên c + d = 18 – (3 + 1) = 14.

Thử với (c, d) bằng (5; 9), (9; 5), (6; 8), (8; 6) đều không thỏa mãn.

4) Với a = 4 thì 36000 = 9.4000 < n < 9.5000 = 45000 mà a = 4 nên e = 3, nhưng với b > 4 thì n > 9.4500 = 40500 (loại).

Vậy b ≤ 2 và m ≥ 4 + 1 + 2 + 5 = 12.

• Nếu b = 1 thì c + d = 18 – (4 + 1) = 13. Thử với (c, d) bằng (5; 8), (8; 5), (6; 7), (7; 6) đều không thỏa mãn.

• Nếu b = 2 thì c + d = 18 – (4 + 2) = 12. Thử với (c, d) bằng (5; 7), (7; 5) đều không thỏa mãn.

5) Với a = 5 thì 45000 = 9.5000 < n < 9.6000 = 54000 mà a = 5 nên e = 4, nhưng với b > 5 thì n > 9.5600 = 50400 (loại).

Vậy b ≤ 3. Khi b = 1 thì c + d = 12, khi b = 2 thì c + d = 11, khi b = 3 thì c + d = 10. Thử thấy không thỏa mãn.

6) Với a = 6 thì 54000 = 9.6000 < n < 9.7000 = 63000 mà a = 6 nên e = 5, nhưng với b > 6 thì n > 9.6700 = 60300 (loại).

Vậy b ≤ 4 và m ≥ 6 + 1 + 2 + 4 = 13.

• Nếu b = 1 thì c + d = 18 – (6 + 1) = 11.
Thử với (c, d) bằng (2; 9), (9; 2), (3; 8), (8; 3), (4; 7), (7; 4) đều không thỏa mãn.

• Nếu b = 2 thì c + d = 18 – (6 + 2) = 10.
Thử với (c, d) bằng (1; 9), (9; 1), (3; 7), (7; 3) đều không thỏa mãn.

• Nếu b = 3 thì c + d = 18 – (6 + 3) = 9.
Thử với (c, d) bằng (1; 8), (8; 1), (2; 7), (7; 2) chỉ có (c, d) = (8; 1) thỏa mãn, lúc đó n = 9.6381 = 57429.

• Nếu b = 4 thì c + d = 18 – (6 + 4) = 8, hoặc c + d = 27 – (6 + 4) = 17. Thử với (c, d) bằng (1; 7), (7; 1) (8; 9), (9; 8) chỉ có (c, d) = (7; 1) thỏa mãn, lúc đó n = 9.6471 = 58239.

7) Với a = 7 thì 63000 = 9.7000 < n < 9.8000 = 72000 mà a = 7 nên e = 6, nhưng với b > 7 thì n > 9.7800 = 70200 (loại).

Vậy b ≤ 5 và m ≥ 7 + 1 + 2 + 3 = 13.

Khi $b = 1$ thì $c + d = 10$, khi $b = 2$ thì $c + d = 9$, khi $b = 3$ thì $c + d$ bằng 8 hoặc 17, khi $b = 4$ thì $c + d$ bằng 7 hoặc 16, khi $b = 5$ thì $c + d$ bằng 6 hoặc 15. Thử thấy không thỏa mãn.

8) Với $a = 8$ thì $72000 = 9.8000 < n < 9.9000 = 81000$ mà $a = 8$ nên $e = 7$, nhưng với $b = 9$ thì $n > 9.8900 = 80100$ (loại).

Vậy $b \le 6$ và $m \ge 8 + 1 + 2 + 3 = 14$.

Khi $b = 1$ thì $c + d = 9$, khi $b = 2$ thì $c + d$ bằng 8 hoặc 17, khi $b = 3$ thì $c + d$ bằng 7 hoặc 16, khi $b = 4$ thì $c + d$ bằng 6 hoặc 15, khi $b = 5$ thì $c + d$ bằng 5 hoặc 14, khi $b = 6$ thì $c + d$ bằng 4 hoặc 13.

Thử lại chỉ có $(c, d) = (6; 1)$ thỏa mãn, lúc đó $n = 9.8361 = 75249$.

9) Với $a = 9$ thì $81000 = 9.9000 < n$ mà $a = 9$ nên $e = 8$ và $m \ge 9 + 1 + 2 + 3 = 15$.

Khi $b = 1$ thì $c + d$ bằng 8 hoặc 17, khi $b = 2$ thì $c + d$ bằng 7 hoặc 16, khi $b = 3$ thì $c + d$ bằng 6 hoặc 15, khi $b = 4$ thì $c + d$ bằng 5 hoặc 14, khi $b = 5$ thì $c + d$ bằng 4 hoặc 13, khi $b = 6$ thì $c + d$ bằng 3 hoặc 12, khi $b = 7$ thì $c + d$ bằng 11. Thử thấy không thỏa mãn.

Bài toán có ba nghiệm là $n = 9.6381 = 57429$, $n = 9.6471 = 58239$ và $n = 9.8361 = 75249$.

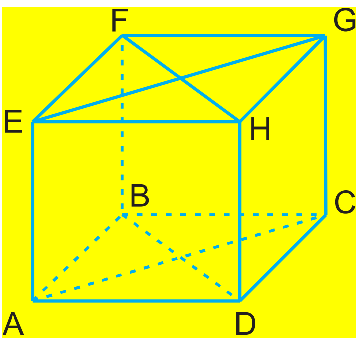
Bài 10(184). Gọi số chẵn nhỏ nhất là a thì tổng 8 số chẵn liên tiếp bằng

$136 = a + (a + 2) + (a + 4) + (a + 6) + (a + 8) + (a + 10) + (a + 12) + (a + 14)$

$= 8a + 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 8a + 56$, suy ra $a = 10$.

Giả sử ta điền các số A, B, C, D, E, F, G, H như hình vẽ.

Ta đã biết **A** = **10** và **C** = **20**.



Theo giả thiết, tổng của 4 số của mỗi mặt bên đều bằng nhau và bằng tổng của 4 số của mỗi mặt chéo, đặt tổng này là x ta có $2x = 136$ nên $68 = x = 10 + B + 20 + D = 10 + E + H + D = 10 + E + F + B = 10 + E + G + 20 = 20 + G + F + B = 20 + G + H + D = F + E + H + G = F + B + D + H$.

Mặt khác từ các đẳng thức trên suy ra

$y = 10 + E = 20 + G = F + B = H + D$.

Do đó $4y = 30 + B + D + E + F + G + H = 30 + 12 + 14 + 16 + 18 + 22 + 24 = 136$.

Do đó mỗi tổng $y = 136 : 4 = 34$.

Suy ra **E** = **24** và **G** = **14**, còn $F + B = H + D = 34 = 12 + 22 = 18 + 16$.

Chú ý rằng $B + D = 68 - 10 - 20 = 38$ và $F + H = 68 - 24 - 14 = 30$.

Vậy ta có thể chọn **F** = **12**, **B** = **22**, **H** = **18**, **D** = **16** hoặc chọn **F** = **18**, **B** = **16**, **H** = **12**, **D** = **22** đều thỏa mãn đề bài.

ĐAN QUỲNH

DANH SÁCH CÁC BẠN ĐOẠT GIẢI CUỘC THI VUI SỐ VÀ HÌNH 2018

✻ **GIẢI NHÌ:** *Nguyễn Công Hải*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

✻ **GIẢI BA:** *Lê Văn Quang Trung*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM NĂM MƯƠI BẢY

Người thách đấu: *Trịnh Phong Quang*, GV. THCS Quảng Lạc, Nho Quan, Ninh Bình.

Bài toán thách đấu: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\dfrac{a}{a+c}} + \sqrt{\dfrac{b}{b+c}} - \dfrac{9\sqrt{c^2+1}}{8c}$.

Thời hạn: Trước ngày 08.12.2018 theo dấu bưu điện.

Kết quả TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM NĂM MƯƠI LĂM (TTT2 số 185+186)

Đề bài. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $(x + 1)(y + 1) = 4xy$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3y^2+1}} \le 1.$$

Lời giải. Kí hiệu $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}$. Từ giả thiết ta có $4 = \dfrac{x+1}{x}.\dfrac{y+1}{y} = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$

$= (1+a)(1+b) = 1 + a + b + ab.$

Suy ra $3 = a + b + ab$

$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab} + ab \ge 2\sqrt{ab} + ab.$

Từ đó $ab \le 1$.

Do vậy áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số thực dương ta có

$$\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}} = \frac{a}{\sqrt{a+b+ab+a^2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{(a+1)(a+b)}} = \sqrt{\frac{a}{a+b}.\frac{a}{a+1}}$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+1}\right).$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{\sqrt{3y^2+1}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+1}\right).$$

Do đó $\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3y^2+1}}$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{2ab+a+b}{(a+1)(b+1)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{ab+3}{4} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1+3}{4} = 1.$$

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$ $\Leftrightarrow x = y = 1$.

Nhận xét. Đây không phải là bài toán bất đẳng thức quá khó. Ngoài việc cần có kinh nghiệm để đặt $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}$ các kĩ năng còn lại là các kĩ năng cơ bản, không phức tạp. Rất tiếc trong các lời giải của độc giả gửi đến tòa soạn không có lời giải nào đúng. Không có võ sĩ nào đăng quang trong trận đấu này.

NGUYỄN MINH ĐỨC

THỂ LỆ CUỘC THI
"CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC"

(Thực hiện từ năm học 2018 - 2019)

1. THI CÁ NHÂN

1.1. Đề thi, thời gian làm bài

- Đề thi gồm có 15 bài toán bằng tiếng Việt, trong đó 12 bài đầu chỉ ghi đáp số *(mỗi bài 5 điểm)*, 3 bài còn lại là bài tự luận, bài 13 *(10 điểm)*, bài 14 *(15 điểm)*, bài 15 *(15 điểm)* học sinh trình bày lời giải bằng tiếng Việt vào tờ trả lời. Tổng điểm tối đa là 100 điểm.
- Thời gian làm bài là 60 phút.

1.2. Gửi đề dự tuyển, chọn đề, chấm thi

- Đại diện của các đoàn được cử tham gia Ban chuyên môn của cuộc thi gửi 1 đề dự tuyển bằng tiếng Việt về Ban tổ chức qua email: **cuocthiclbttt@gmail.com** (Ban tổ chức sẽ gửi các đoàn đề mẫu). Mức độ khó của đề dự tuyển do người ra đề quyết định. Các đoàn gửi đề dự tuyển trước ngày 30/4 hàng năm.

+ Đề dự tuyển của cấp Tiểu học gồm 15 bài toán: 9 bài số học và 6 bài hình học. Ba bài tự luận gồm 2 bài số học và 1 bài hình học. Các bài toán có nội dung kiến thức đến hết lớp 5.

+ Đề dự tuyển của bậc Trung học cơ sở gồm 15 bài toán: 5 bài số học, 5 bài đại số và 5 bài hình học. Ba bài tự luận gồm 1 bài số học, 1 bài đại số và 1 bài hình học. Các bài toán có nội dung kiến thức đến hết lớp 8.

- Việc chọn đề, in đề và tổ chức thi, chấm thi được thực hiện trong 1 ngày.

• Buổi sáng

+ Đại diện các đoàn tham gia Ban chuyên môn tập trung lúc 7h00.

+ Hội đồng chọn đề được chia làm hai nhóm: Nhóm chọn đề Tiểu học và nhóm chọn đề Trung học cơ sở.

+ Đề thi được chọn, thẩm định, in và niêm phong trong buổi sáng.

+ Ban tổ chức sẽ sơ chọn khoảng 60 bài toán của mỗi cấp học từ các đề dự tuyển và gửi đến từng thành viên Ban chọn đề.

+ Mỗi thành viên Ban chọn đề chọn 15 bài toán, trong đó có 3 bài tự luận (mỗi địa phương chọn không quá 1 bài) theo cấu trúc đề đã công bố.

+ Ban thư kí sẽ tổng hợp kết quả, ở mỗi cấp học, mỗi địa phương có không quá 1 bài toán được chọn cho đề thi chính thức. Các bài toán được biên tập lại để làm đề thi chính thức.

• Buổi chiều

- Từ 14h00 đến 15h00: Thi cá nhân.
- Từ 15h15 đến 15h45: Thi Tiếp sức toán cấp Tiểu học và bậc Trung học cơ sở.
- Từ 16h15 đến 16h45: Thi Du lịch Toán học cấp Tiểu học.
- Từ 17h00 đến 17h30: Thi Du lịch Toán học bậc Trung học cơ sở.

- Từ 18h00: Chấm thi cá nhân, các thầy cô giáo trong các đoàn được cử vào Ban chuyên môn tập trung để chấm thi phần thi cá nhân.
+ Bài làm của thí sinh được rọc phách hoặc dán kín thông tin của thí sinh.
+ Mỗi bài thi được chấm bởi hai giám khảo.

2. THI CÁC CÂU LẠC BỘ

2.1. Thi Tiếp sức toán

- Đề thi toán bằng tiếng Anh chỉ ghi đáp số.
- Các thí sinh của mỗi đội ngồi theo thứ tự số báo danh tăng dần từ trên xuống (các đoàn đánh số báo danh theo hướng dẫn và gửi về Ban tổ chức). Sáu thí sinh của mỗi đội lần lượt giải 6 bài toán chỉ ghi đáp số. Khi thí sinh đầu tiên của đội làm bài xong, nộp bài cho giám khảo và quay về cuối hàng, thí sinh thứ hai mới được nhận đề để giải, cứ tiếp tục như thế với các thí sinh tiếp theo. Thời gian tối đa là 30 phút cho 6 bài toán.
- Khi thí sinh cuối cùng của đội hoàn thành bài thi và nộp bài cho giám khảo thì giám sát của đội đó phất cờ báo hiệu cho Ban tổ chức biết để tìm ra ba đội nhanh nhất mỗi cấp học đồng thời chốt tổng thời gian làm bài đội mình phụ trách với giám khảo. Ba đội giải bài nhanh nhất mỗi cấp học được cộng 1 điểm.
- Khi có trống báo hiệu hết giờ hoặc thông báo tất cả các đội đã kết thúc phần thi thì giám khảo mở đáp án, chấm điểm trực tiếp vào bài và cộng tổng điểm. Thư kí trường thi sẽ thu kết quả tại bàn của giám khảo.
- Giám khảo chỉ được ghi số điểm mỗi bài và tổng điểm bằng bút mực đỏ do Ban tổ chức cung cấp, không sử dụng bất cứ màu mực nào khác.
- Mỗi cấp học có 12 đội điểm cao nhất được tham dự phần thi Du lịch Toán học để tranh Cup Vàng, Cup Bạc, Cup Đồng.

2.2. Thi Du lịch Toán học

- Đề thi toán bằng tiếng Anh chỉ ghi đáp số.
- Có 6 vị trí mang tên 6 thành phố cho các bạn học sinh đến tham quan. Mỗi thành phố có hai giám khảo đại diện.
- Các em học sinh của mỗi đội cùng giải 6 bài toán. Khi có hiệu lệnh, Đội trưởng đến thành phố thứ nhất *(theo hướng dẫn trên Thẻ du lịch)* để lấy đề bài 1. Sau đó các em học sinh của đội cùng giải bài rồi Đội trưởng nộp kết quả cho giám khảo ở thành phố thứ nhất. Nếu kết quả chưa đúng thì giám khảo sẽ yêu cầu làm lại đến khi đội đó đưa ra được kết quả đúng bài 1 thì mới có được chữ kí của giám khảo ở thành phố thứ nhất để đến thành phố thứ hai nhận đề bài 2 giải tiếp. Cứ tiếp tục như thế cho đến bài 6. Tổng thời gian tối đa để làm cả 6 bài toán là 30 phút. Phần thi Du lịch Toán học sẽ kết thúc khi hết giờ hoặc đã có 3 đội giải được cả 6 bài *(Đội nào đã giải đúng cả 6 bài thì Đội trưởng phất cờ để Ban tổ chức biết).* Sau khi có trống báo hiệu hết giờ, Thư kí trường thi đến thu kết quả tại bàn của các đội. Mỗi bài giải đúng được 2 điểm.
- Sau khi kết thúc phần thi Thi Tiếp sức toán và Du lịch Toán học, Ban tổ chức cộng tổng điểm cả hai phần thi và xếp giải.

BAN TỔ CHỨC

Kết quả

Giải toán qua thư

Bài 1(185+186). Tìm các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=91$ và $b^2=ca$.

Lời giải. Xét $a \le b \le c$.

Đặt $b=qa$, $(q \in \mathbb{Q}, q>1) \Rightarrow c=q^2a$.

Khi đó, ta có

$$a+b+c=a(1+q+q^2)=91=1.91=7.13.$$

∗ Nếu $q \in \mathbb{N}^*$ thì $1+q+q^2>1$ khi đó $a<91$. Do đó ta có

• TH1. $\begin{cases} a=1 \\ 1+q+q^2=91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ q=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=9 \\ c=81. \end{cases}$

• TH2. $\begin{cases} a=7 \\ 1+q+q^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ q=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=21 \\ c=63. \end{cases}$

• TH3. $\begin{cases} a=13 \\ 1+q+q^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=13 \\ q=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=13 \\ b=26 \\ c=52. \end{cases}$

∗ Nếu $q \notin \mathbb{N}^*$ thì $q=\frac{x}{y},(x \ge 3, y \ge 2)$ và $(x,y)=1$.

Ta có $a(1+q+q^2)=91$

$\Leftrightarrow a(x^2+xy+y^2)=91y^2$

Ta có $c=\frac{ax^2}{y^2} \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow t=\frac{a}{y^2} \in \mathbb{N}^*$ (vì $(x^2;y^2)=1$)

$\Rightarrow a=ty^2 \Rightarrow t(x^2+xy+y^2)=91$

Vì $x \ge 3, y \ge 2$ nên $x^2+xy+y^2 \ge 19$

$\Rightarrow x^2+xy+y^2=91 \Rightarrow 6 \le x \le 9$, thử chọn ta được $x=6; y=5$.

$\Rightarrow a=25; b=30; c=36.$

Vậy có 8 bộ (a; b; c) thỏa mãn đề bài là (1; 9; 81); (81 ; 9; 1); (7; 21; 63); (63; 21; 7); (13; 26; 52); (52; 26; 13); (25; 30; 36); (36; 30; 25).

Nhận xét. Nhiều bạn đã bỏ quên trường hợp q có thể là số hữu tỉ dẫn đến thiếu nghiệm của bài toán. Các bạn sau có lời giải tốt: *Trần Anh Tuấn*, 9C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**.

PHÙNG KIM DUNG

Bài 2(185+186). Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

1) $|b+c-a|+|c+a-b|+|a+b-c|+|a+b+c| \ge 2(|a|+|b|+|c|)$.

2) $|a|+|b|+|c|+|a+b+c| \ge |a+b|+|b+c|+|c+a|$.

Lời giải. a) Trong 3 số a, b, c luôn tồn tại hai số cùng dấu, giả sử hai số đó là a và b. Khi đó ta có

$|b+c-a|+|c+a-b|+|a+b-c|+|a+b+c|$

$\ge |b+c-a+c+a-b|+|a+b-c+a+b+c|$

$=2|c|+2|a+b|$

$=2(|a|+|b|+|c|)$.

b) Trong 3 số a + b, b + c, c + a luôn tồn tại hai số "cùng dấu", giả sử hai số đó là b + c và c + a. Khi đó $|a|+|b|+|c|+|a+b+c|$

$\ge |a+b|+|c+a+b+c|$

$=|a+b|+|b+c|+|a+c|$.

Chú ý. *Hai số cùng dấu được hiểu là hai số cùng không âm, hoặc cùng không dương.*

Nhận xét. Phần b) có thể giải bằng cách đặt ẩn phụ và chuyển về bất đẳng thức ở phần a). Có nhiều bạn gửi lời giải đến tòa soạn, nhưng rất tiếc có một số bạn biến đổi đại số sai. Hai bạn sau có lời giải đúng: *Nguyễn Văn Bảo Châu,* 7/5, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Đinh Xuân Linh,* 7A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

BÙI MẠNH TÙNG

Bài 3(185+186). Cho các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Người ta lập ra các số có 7 chữ số khác nhau từ các chữ số đã cho. Hỏi trong các số được lập ra có tồn tại hai số mà số này chia hết cho số kia không?

Lời giải. Giả sử tồn tại hai số a và b trong tập hợp các số được lập ra mà $a \vdots b$

$\Rightarrow a = kb\ (k \in \mathbb{N}^*)$.

Trong các số được lập ra, số lớn nhất là 7654321 và số nhỏ nhất là 1234567 mà 7654321 chia cho 1234567 được thương là 6 và còn dư.

Suy ra $2 \le k \le 6$.

Mỗi chữ số được lập ra có tổng các chữ số là 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 chia cho 9 dư 1 nên a và b đều chia cho 9 dư 1. (1)

Đặt $b = 9m + 1\ (m \in \mathbb{N})$.

Khi đó $a = (9m + 1)k = 9mk + k$.

Vậy a chia cho 9 dư k.

Mà $2 \le k \le 6 \Rightarrow k \ne 1$ (mâu thuẫn với (1)).

Vậy không có 2 số nào trong các số lập được mà số này chia hết cho số kia.

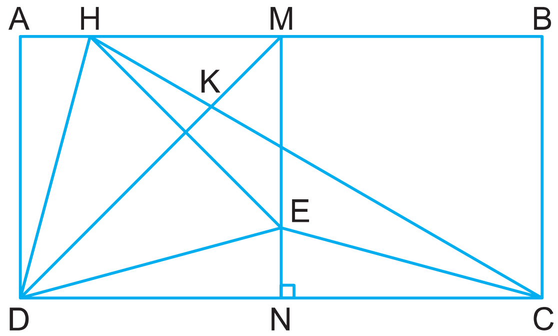
Nhận xét. Số bài giải gửi đến tòa soạn khá nhiều nhưng có một số bạn chỉ đưa ra số dư mà không giải thích. Các bạn sau có lời giải đúng: *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Văn Bảo Châu*, 7/5, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Đinh Xuân Linh*, 7A; *Nguyễn Gia Bảo*, 6B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

LÊ ĐỨC THUẬN

Bài 4(185+186). Cho hình chữ nhật ABCD với AB = 2AD, M là trung điểm của đoạn AB. Trên AB lấy điểm H sao cho $\widehat{ADH} = 15^o$. Hai đường thẳng CH và DM cắt nhau tại K. Hãy so sánh độ dài các đoạn thẳng DH và DK.

Lời giải. Gọi N là trung điểm của CD.

Trên đoạn thẳng MN lấy điểm E sao cho $\widehat{EDN} = 15^o$.



Từ giả thiết bài toán ta thấy tứ giác AMND là hình vuông, nên AD = AM.

Từ đó $\Delta NDE = \Delta ADH$ (g.c.g), suy ra DH = DE.

Mà $\widehat{HDE} = 90^o - \widehat{ADH} - \widehat{EDN}$

$= 90^o - 15^o - 15^o = 60^o$.

Do đó ΔDHE là tam giác đều.

Suy ra EH = ED. (1)

Tam giác EDC có EN vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên ΔEDC cân tại E.

Suy ra ED = EC. (2)

Từ (1) và (2) ta có EH = EC.

Suy ra ΔEHC cân tại E.

Ta có $\widehat{HEC} = 360^o - \widehat{DEH} - \widehat{DEC}$.

Mà $\widehat{DEC} = 180^o - \widehat{EDC} - \widehat{ECD}$

$= 180^o - 15^o - 15^o = 150^o$.

Từ đó $\widehat{HEC} = 360^o - 60^o - 150^o = 150^o$.

Do đó $\widehat{EHC} = \dfrac{180^o - \widehat{HEC}}{2} = 15^o$;

$\widehat{DHK} = 60^o + 15^o = 75^o$.

Mà ΔADM vuông cân tại A nên

$\widehat{ADM} = 45^o \Rightarrow \widehat{HDK} = 45^o - 15^o = 30^o$.

Trong ΔHDK có $\widehat{DHK} = 75^o$, $\widehat{HDK} = 30^o$

$\Rightarrow \widehat{DKH} = 180^o - 75^o - 30^o = 75^o = \widehat{DHK}$.

Do đó ΔHKD cân tại D.

Vậy DH = DK.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt: *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Phan Khánh An*, 7A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Bùi Hoàng Vinh*, *Đoàn Minh Đức*, 6A; *Lê Anh Tuấn*, 6C; *Trần Gia Huy*, *Lê Văn Minh*, *Phạm Đình Thiên Bảo*, *Lê Thị Huyền Trâm*, *Lương Thùy Dương*, *Nguyễn Ngọc Trâm*, *Trần Thị Đan Lê*, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức

Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Văn Bảo Châu*, 7/5, THCS Nguyễn Khuyến, Q. Hải Châu, **Đà Nẵng**.

HỒ QUANG VINH

Bài 5(185+186). Tìm các số nguyên dương n sao cho $3^n + 4^n + 2018^n$ là số chính phương.

Lời giải. Ta có nhận xét sau: Với số nguyên a ta có a^2 chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 1, a^2 chia hết cho 4 hoặc chia cho 4 dư 1.

- Với $n = 1$ ta có

$3^1 + 4^1 + 2018^1 = 2025 = 45^2$ (thỏa mãn).

- Với $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ ta có $4^n \equiv 1 \pmod 3$ và $2018^n = 2018^{2k} \equiv (-1)^{2k} = 1 \pmod 3$.

Do đó $3^n + 4^n + 2018^n \equiv 2 \pmod 3$, suy ra $3^n + 4^n + 2018^n$ không là số chính phương.

- Với $n = 2k+1$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ ta có

$3^n = 3^{2k+1} = 3.3^{2k} \equiv 3(-1)^{2k} = 3 \pmod 4$.

Do đó $3^n + 4^n + 2018^n \equiv 3 \pmod 4$, suy ra $3^n + 4^n + 2018^n$ không là số chính phương.

Vậy $n = 1$.

Nhận xét. Số bài gửi về tòa soạn tương đối nhiều, hầu hết các bạn đều giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn: *Nguyễn Việt An*, 7M2, THCS Marie Curie, Q. Nam Từ Liêm; *Lê Ngọc Quang*, 7N, THCS Cát Linh, Q. Đống Đa; *Nguyễn Khắc Việt*, 7A5, THCS Nam Trung Yên, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Trần Cao Bảo Châu*, 7A, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Buôn Ma Thuật, **Đắk Lắk,** *Đoàn Minh Đức*, *Nguyễn Trần Bảo Anh*, *Võ Thị Phương Thảo*, 6A, *Trần Gia Huy*, *Phạm Đình Thiên Bảo*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Lê Đức Thắng*, 6C; *Phạm Khánh Ngọc*, 7D, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Chu Hải Tuyến*, 7E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Phan Khánh An*, 7A; Ngô Thị An Bình, 7E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Phạm Ngọc Trinh*, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**.

CAO VĂN DŨNG

Bài 6(185+186). Tìm các số tự nhiên a và b nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn điều kiện $\dfrac{2ab}{a^2+4b^2} + \dfrac{b^2}{3a^2+2b^2} \geq \dfrac{3}{5}$.

Lời giải. Với mọi số thực dương a, b, x, y, ta sẽ chứng minh

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}. \quad (1)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(x+y)\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right) = a^2 + b^2 + \frac{ya^2}{x} + \frac{xb^2}{y}$$

$$\geq a^2 + b^2 + 2\sqrt{\frac{ya^2}{x} \cdot \frac{xb^2}{y}}$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{ya^2}{x} = \dfrac{xb^2}{y}$ hay $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\dfrac{4ab}{a^2+4b^2} + \dfrac{2b^2}{3a^2+2b^2} \geq \dfrac{6}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{4ab}{a^2+4b^2} + 1 + \frac{2b^2}{3a^2+2b^2} \geq \frac{6}{5} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+2b)^2}{a^2+4b^2} + \frac{2b^2}{3a^2+2b^2} \geq \frac{11}{5}. \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức (1) ta có

$$\frac{(a+2b)^2}{a^2+4b^2} = \frac{3(a+2b)^2}{3a^2+12b^2} = \frac{3(a+2b)^2}{(3a^2+2b^2)+10b^2}$$

$$\leq 3\left[\frac{a^2}{3a^2+2b^2} + \frac{(2b)^2}{10b^2}\right] = \frac{3a^2}{3a^2+2b^2} + \frac{6}{5}. \quad (3)$$

Từ đó suy ra $\dfrac{(a+2b)^2}{a^2+4b^2} + \dfrac{2b^2}{3a^2+2b^2}$

$$\leq \frac{3a^2}{3a^2+2b^2} + \frac{6}{5} + \frac{2b^2}{3a^2+2b^2} = \frac{11}{5}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra đẳng thức xảy ra trong các bất đẳng thức trên, tức là

$$\frac{a}{3a^2+2b^2}=\frac{2b}{10b^2} \Leftrightarrow 5ab=3a^2+2b^2$$
$\Leftrightarrow (a-b)(3a-2b)=0.$

Do đó $a=b$ hoặc $3a=2b.$

- Nếu $a=b$ thì do $(a,\ b)=1$ nên $a=b=1.$
- Xét trường hợp $3a=2b.$ Dễ thấy a chia hết cho 2 nên ta có thể đặt $a=2k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$ suy ra $b=3k.$ Từ đó ta có $1=(a,\ b)=(2k,\ 3k)=k.$ Do đó $a=2,\ b=3.$

Tóm lại, có hai bộ số $(a,\ b)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là (1; 1) và (2; 3).

Nhận xét. Bất đẳng thức (1) chính là trường hợp riêng của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng cộng mẫu. Đây là một bất đẳng thức mạnh và có nhiều ứng dụng trong giải toán. Ngoài cách tiếp cận như đã trình bày ở trên, bài toán này cũng có thể giải bằng phương pháp biến đổi tương đương, ta có thể viết lại bất đẳng thức đã cho dưới dạng $(a-b)^2(3a-2b)^2\le 0.$ Từ đó đưa bài toán về xét trường hợp đẳng thức giống như trong lời giải trên. Tất cả các lời giải gửi đến tòa soạn đều sử dụng phương pháp này.

Các bạn sau đây có lời giải tốt là: *Lê Đức Chính*, *Nguyễn Thị Hiền Diệu*, *Lê Minh Long*, *Nguyễn Thanh Tiến*, 8B, *Trương Ngọc Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, thị trấn Bút Sơn, Hoằng Hóa, *Trịnh Duy Minh*, 9C, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Bá Hoàng*, 8E; *Lương Minh Hiếu*; *Trần Anh Vũ*, 8C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Trần Hằng Linh*, 8C1, THCS Archimedes Academy, **Hà Nội**.

VÕ QUỐC BÁ CẨN

Bài 7(185+186). Một giải bóng đá gồm các đội bóng trong nước và một số đội bóng nước ngoài với thể thức thi đấu vòng tròn một lượt. Số đội bóng trong nước gấp 5 lần số đội bóng nước ngoài. Kết thúc giải thì tổng số điểm của các đội trong nước gấp đôi tổng số điểm của các đội nước ngoài. Biết rằng không có trận nào hòa và ở mỗi trận đấu thì đội thắng được 3 điểm, đội thua được 0 điểm. Hỏi có bao nhiêu đội nước ngoài và cho biết thứ tự trong bảng xếp hạng của các đội nước ngoài?

Lời giải. Gọi x là số đội nước ngoài $(x\in\mathbb{N}^*)$.

Số đội trong nước là 5x.

Với 6x đội thi đấu vòng tròn 1 lượt thì tổng số trận đấu là $\frac{6x(6x-1)}{2}=3x(6x-1).$

Vì không có trận hòa, mỗi trận thắng được 3 điểm, thua được 0 điểm và tổng số điểm các đội bóng trong nước gấp đôi tổng số điểm các đội bóng nước ngoài nên tổng số điểm các đội bóng trong nước là:

$$\frac{6x(6x-1)}{2}.3.\frac{2}{3}=6x(6x-1).$$

Tổng số điểm của các đội bóng nước ngoài là $6x(6x-1):2=3x(6x-1).$

Mặt khác 5x đội trong nước thi đấu với nhau thì đạt được số điểm là

$$\frac{5x(5x-1)}{2}.3=\frac{15x(5x-1)}{2}.$$

Do đó ta có

$$6x(6x-1)\ge\frac{15x(5x-1)}{2}\Leftrightarrow x\le 1.$$

Vì $x\in\mathbb{N}^*$ nên $x=1.$

Do đó chỉ có 1 đội bóng nước ngoài và 5 đội bóng trong nước. Số điểm đội bóng nước ngoài đó đạt được là

$3x(6x-1)=3.1(6.1-1)=15.$

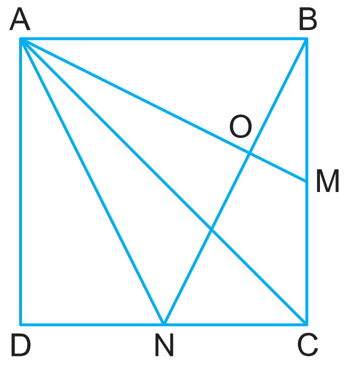
Như vậy, đội bóng nước ngoài thắng cả 5 trận đấu và đội bóng nước ngoài xếp thứ nhất trong bảng xếp hạng.

Nhận xét. Đây là bài toán thú vị, có nhiều bạn gửi bài đến tòa soạn, tuy nhiên có nhiều bạn có lời giải sai hoặc lập luận chưa chặt chẽ. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn: *Nguyễn Tuấn Dương*, 8C5, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Nguyễn Minh Khải*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Nguyễn Thị Diệu Linh*, 9A1, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Gia Bảo*, 6B; *Nguyễn Hồng Khánh Lâm*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Trọng Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kiến An, Kế Sách, **Sóc Trăng**.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

Bài 8(185+186). Cho hình vuông ABCD với M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD; AM cắt BN tại điểm O. Biết diện tích tứ giác AOND bằng 55 cm^2. Tính độ dài cạnh của hình vuông.

Lời giải. Gọi độ dài cạnh hình vuông ABCD là a.



Ta có $\Delta ABM = \Delta BCN$ (c.g.c).

Do đó $AM \perp BN$ tại O.

Sử dụng các hệ về cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có

$$\frac{1}{BO^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{5}{a^2}.$$

$$BN^2 = CN^2 + BC^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

Từ đó $\dfrac{BN^2}{BO^2} = \dfrac{5a^2}{4}.\dfrac{5}{a^2} = \dfrac{25}{4}.$

$$\Rightarrow \frac{BN}{BO} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{BN}{NO} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{NO}{BN} = \frac{3}{5}.$$

Ta có

$$\frac{S_{ADN}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{ADN}}{S_{ADC}} \cdot \frac{S_{ADC}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \quad (1)$$

$$\frac{S_{AON}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{AON}}{S_{ANB}} \cdot \frac{S_{ANB}}{S_{ABCD}} = \frac{NO}{NB} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{S_{AOND}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{ADN}}{S_{ABCD}} + \frac{S_{AON}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} = \frac{11}{20}.$$

Do đó ta có

$$a^2 = S_{ABCD} = \frac{20}{11} S_{AOND} = \frac{20}{11} \cdot 55 = 100\ (cm^2).$$

Vậy $a = 10\,cm$.

Nhận xét. Điểm mấu chốt của bài toán là chỉ ra tỉ số diện tích $\dfrac{S_{AOND}}{S_{ABCD}} = \dfrac{11}{20}$. Các bạn có thể thay trung điểm của BC, CD thành các điểm chia BC, CD tỉ số bất kì và giữ nguyên giả thiết, ta cũng có thể tính được tỉ số diện tích trên theo các tỉ số đã cho.

Có khá nhiều bạn tham gia giải và giải theo nhiều cách khác nhau. Lời giải trên sử dụng kiến thức trong phạm vi chương trình lớp 8 và dùng khá ít biến đổi. Rất tiếc có một bạn đã gửi lời giải đúng nhưng quên ghi tên. Các bạn sau có lời giải tốt là: *Đào Quỳnh Hương*, 9A1, THCS Mộc Châu, Mộc Châu, **Sơn La**; *Hán Vũ Long*, *Lương Minh Hiếu*, *Nguyễn Thị Diệu Linh*, *Nguyễn Thảo Chinh*, *Nguyễn Bảo Long*, 8C, *Nguyễn Bá Hoàng*, *Đinh Gia Huy*, 8E, *Nguyễn Ngọc Đăng*, 9H, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; *Vũ Minh Khải*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Trần Đức Huy*, *Bùi Hà Linh*, 8D; *Nguyễn Thành Phi Long*, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Lê Văn Quang Trung*, *Nguyễn Huy Hoàng*, *Lê Văn Mạnh*, *Lê Anh Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Phạm Ngọc Trinh*, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**; *Phạm Khánh Huyền*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Trọng Tâm*, *Trương Ngọc Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; *Lương Anh Minh*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Tuấn Dương*, 8C5, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; *Nguyễn Hải Khoa*, 9A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**.

TRẦN QUANG HÙNG

Kết quả (TTT2 số 185+186)

Vụ án trước cửa hàng sách

Thám tử quay về quán cà phê để trả tiền. Cô chủ quán nhanh nhảu:

- Chú ơi, chú làm thế nào mà bà ấy không đòi tiền nữa vậy. Chú giỏi quá!

- Có gì đâu, nhìn thái độ của bà ấy là biết không phải người mất tiền.

- Cháu nghĩ nhìn vậy chưa chắc đã đúng ạ!

- Tất nhiên, còn cần lí lẽ nữa cháu ạ.

* Bà ta nói dối việc vào ngân hàng rút tiền, vì 7h bà ta đã có mặt ở cửa hàng sách, nếu thế bà ta phải vào ngân hàng trước 7h để rút tiền, mà ngân hàng 7h chưa làm việc.

* Bà ta nói dối về việc mua sách: Quầy sách Từ điển Tiếng Anh ở góc khuất trong cùng của cửa hàng sách, không thể vừa chọn sách vừa nhìn ra cửa được. Mà chẳng ai chọn 1 cuốn sách định mua từ trước lại mất cả tiếng đồng hồ. Bà ta ở trong đó chờ đổ tội cho anh thợ khoá.

* Bảo vệ là cháu bà ta sao bà ta không nhờ anh ta giữ tiền giúp hoặc trông giúp. Chỉ có điều chú chưa rõ là sao bà ta lại cứ ầm ĩ đổ tội cho anh thợ khoá.

- A, cháu biết rồi. Anh bảo vệ và anh thợ khoá đã từng gây gổ với nhau mấy lần đấy ạ! Chắc bà ta muốn đuổi anh thợ khoá ra khỏi khu vực đó.

- À ra thế!

Phần thưởng kì này sẽ được gửi tới các thám tử sau: *Trần Công Hưng*, 9A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; *Nguyễn Việt Hoàng*, 8C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Đoàn Minh Đức*, 6A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Phương Linh*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Đinh Quang Hoàng*, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

Thám tử Sê Lốc Cốc

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH...

(Tiếp theo trang 23)

Vì $x, y, z \in A$ nên x, y, z đều không chia hết cho 5 và $x^2; y^2; z^2 \equiv 1; 4 \pmod 5$. (*)

Mặt khác $x^2 + y^2 = z^2$ nên $z^2 \equiv 1 + 1; 1 + 4; 4 + 4; 4 + 1 \pmod 5$ mâu thuẫn với (*) nên điều giả sử là sai. Do đó tập A với 40 phần tử vừa tìm là thỏa mãn đề bài. Tập hợp A ở trên có thể không phải là tập duy nhất thỏa mãn.

2) Các bộ số Pythagoras (x; y; z) với $x, y, z \le 50$ là:

+ Ứng với số 5: (3; 4; 5); (5; 12; 13).

+ Ứng với số 10: (6; 8; 10); (10; 24; 26).

+ Ứng với số 15: (9; 12; 15); (8; 15; 17); (15; 36; 39); (15; 20; 25).

+ Ứng với số 20: (15; 20; 25); (12; 16; 20).

+ Ứng với số 25: (15; 20; 25); (7; 24; 25).

+ Ứng với số 30: (18; 24; 30); (30; 40; 50); (16; 30; 34).

+ Ứng với số 35: (21; 28; 35).

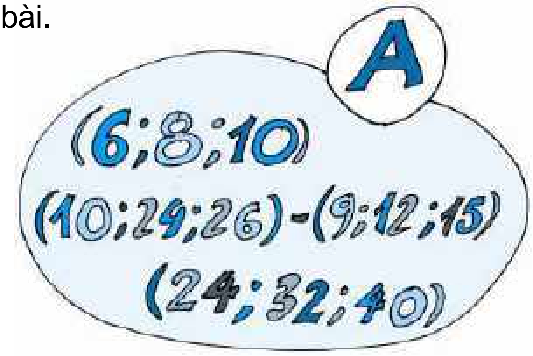
+ Ứng với số 40: (30; 40; 50); (24; 32; 40); (9; 40; 41).

+ Ứng với số 45: (27; 36; 45).

+ Ứng với số 50: (30; 40; 50); (14; 48; 50).

Có ít nhất một tập A có 41 phần tử thỏa mãn. Thật vậy, khi bổ sung 5 phần tử 10, 15, 25, 40 và 45 vào tập A, ta thấy có tất cả 9 bộ số tạo thành bộ độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông là: (6; 8; 10); (10; 24; 26); (9; 12; 15); (8; 15; 17); (15; 36; 39); (7; 24; 25); (24; 32; 40); (9; 40; 41) và (27; 36; 45).

Như vậy ta chỉ cần loại đi 4 phần tử 8, 9, 24, 36 thì tập A có 41 phần tử còn lại thỏa mãn đề bài.



ĐỀ THI CÂU LẠC BỘ TTT

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Kì 20

CLB1. Let a, b, c be non-zero real numbers such that $a+b+c=\dfrac{1}{abc}$ and a + b is integer. Prove that $\dfrac{(1+b^2c^2)(1+a^2c^2)}{c^2+a^2b^2c^2}$ is a square number.

CLB2. Find the quadratic polynomial such P(x) such that $P(0) = 20$, $P(1) = 11$, $P(2) = 2017$.

CLB3. Find all whole number n such that $n^2 - 2n + 15$ is divisible by 7^n.

CLB4. There are 24 numbers in a circle, each number is equal the absolute value of the difference between 2 preceding numbers with clockwise direction. The total sum is 32. Find these numbers.

CLB5. Let ABC be a right-angled triangle at A with altitude AH. Prove that

a) $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{AH^2}$; b) $\dfrac{1}{AB^5}+\dfrac{1}{AC^5}<\dfrac{1}{AH^5}$.

DƯƠNG THU TRANG *(dịch)*

Đọc lại cho đúng. Trong lời giải bài CLB1 số 187, TTT đã có lời giải chưa chính xác, mong bạn đọc thông cảm. Sau đây là lời giải đúng.

Xét a = –p, b = –1, c = 1 với p là số nguyên tố, là bộ ba số nguyên thỏa mãn đề bài.

Khi đó a + b = –(p + 1) không đạt giá trị nhỏ nhất vì không có số nguyên tố lớn nhất.

Kết quả Kì 18 (TTT2 số 185+186)

CLB1. Từ $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c$

$\Rightarrow (a+b)^3=(-c)^3 \Rightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$.

$\Rightarrow 3abc=a^3+b^3+c^3=0 \Rightarrow abc=0$.

CLB2. Ta có

$$|x|+x=\begin{cases}2x, \text{ với } x\ge 0\\ 0, \text{ với } x<0\end{cases} \Rightarrow |x|+x \,\vdots\, 2, \forall x\in\mathbb{Z}.$$

Áp dụng ta có $|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-a|$ $=(|a-b|+a-b)+(|b-c|+b-c)+(|c-d|+c-d)$ $+(|d-a|+d-a)$ chia hết cho 2 với mọi số nguyên a, b, c, d.

Do đó $a^{2018}+2019=|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-a|$ chia hết cho 2. Từ đó a^{2018} chia 2 dư 1

$\Rightarrow$ a chia 2 dư 1, do đó a lẻ $\Rightarrow a^2$ chia 8 dư 1

$\Rightarrow a^6-1$ chia hết cho 8 và a^6+1 chia hết cho 2.

Vậy $a^{12}=a^{12}-1+1=(a^6-1)(a^6+1)+1$ chia 16 dư 1.

CLB3. Gọi tuổi của con hiện nay là x $(x\in\mathbb{N}^*, x<49)$, khi đó tuổi của cha là 49 – x.

Sau 3 năm nữa, tuổi con bằng 37,5% tuổi cha nên $x+3=0{,}375(49-x+3) \Leftrightarrow x=12$ (thỏa mãn).

Do đó hiện nay con 12 tuổi, cha 37 tuổi.

Giả sử trước đây y năm tuổi cha bằng 3,5 lần tuổi con $(y\in\mathbb{N}^*, y<12)$.

Ta có phương trình

$37-y=3{,}5(12-y) \Leftrightarrow y=2$ (thỏa mãn).

Vậy cách đây 2 năm tuổi của cha bằng 3,5 lần tuổi con.

CLB4. *(Hình 1).* Ta có

$AE = AD - DE = 12 - 7 = 5$ (cm).

Tam giác ABE vuông tại A nên ta có

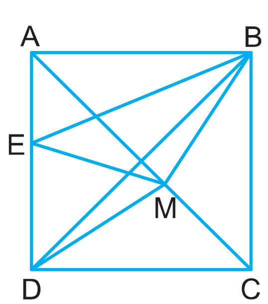
$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 169 \Rightarrow BE = 13$ (cm).

Ta có ABCD là hình vuông nên BD là đường trung trực của đoạn thẳng AC.

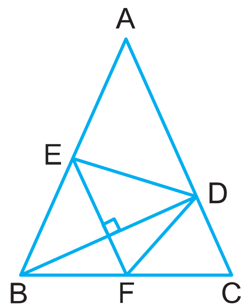
Do đó BM = DM

$\Rightarrow MD + ME = MB + ME \ge BE = 13$ (cm).

Vậy MD + ME nhỏ nhất khi B, M, E thẳng hàng.



Hình 1



Hình 2

CLB5. *(Hình 2).* Vì EF là đường trung trực của đoạn thẳng BD nên ta có

$DE = BE = AB - AE$, $DF = BF$, $\widehat{EDF}=\widehat{EBF}=60^\circ$.

Ta có $\widehat{ADF}=\widehat{BCA}+\widehat{DFC}$ (góc ngoài tam giác DFC) $\Rightarrow 60^\circ+\widehat{ADE}=60^\circ+\widehat{DFC} \Rightarrow \widehat{DFC}=\widehat{ADE}$.

Từ đó $\Delta ADE \backsim \Delta CFD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{CF}=\dfrac{DE}{FD}=\dfrac{AE}{CD}$.

Không mất tổng quát, giả sử AB = BC = CA = 3.

Do đó $\dfrac{2}{CF}=\dfrac{3-AE}{BF}=\dfrac{AE}{1}=\dfrac{2+3-AE+AE}{CF+BF+1}=\dfrac{5}{4}$.

$\Rightarrow AE=\dfrac{5}{4} \Rightarrow CF=\dfrac{8}{5} \Rightarrow \dfrac{S_{ADE}}{S_{CFD}}=\left(\dfrac{AD}{CF}\right)^2=\dfrac{25}{16}$.

Nhận xét. Không có bạn nào giải đúng kì này.

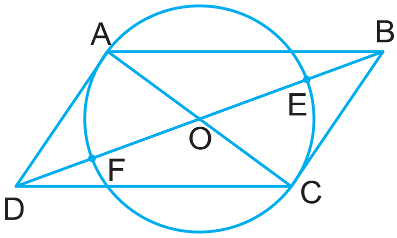
THIỀU QUANG TÙNG

LỜI GIẢI ĐÃ HOÀN HẢO CHƯA?

CAO NGỌC TOẢN
(GV. THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)

Bài toán. Cho hình bình hành ABCD, gọi O là giao điểm của AC và BD. Đường tròn tâm O bán kính R cắt OB, OD theo thứ tự tại E và F. Chứng minh rằng BF = DE.

Lời giải.



Ta có OB = OE + EB; OD = OF + FD.

Mà OB = OD nên BE = DF. (1)

Ta có

BF = BE + EF. (2)

DE = DF + FE. (3)

Từ (1); (2) và (3) suy ra BF = DE.

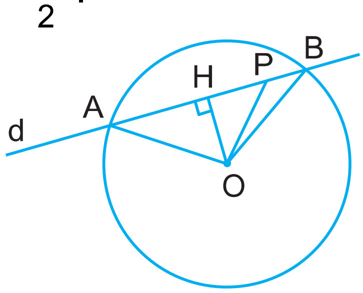
Theo bạn, lời giải trên đã hoàn hảo chưa?

Kết quả **(TTT2 số 185+186)**

LỜI GIẢI ĐÚNG CHƯA?

Lời bàn. Lời giải đã đăng chỉ đúng khi $OP \geq \frac{R}{\sqrt{2}}$. Thật vậy vì diện tích lớn nhất của tam giác AOB là $\frac{R^2}{2}$, khi $OH = \frac{R}{\sqrt{2}}$, nhưng $OP \geq OH$. Do đó khi $OP < \frac{R}{\sqrt{2}}$ thì $OH < \frac{R}{\sqrt{2}}$, như vậy $AB > R\sqrt{2}$, nên đẳng thức như lời giải không thể xảy ra.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O lên đường thẳng d. Vì đường thẳng d không đi qua tâm O của đường tròn nên H là trung điểm của đoạn thẳng AB, suy ra $AH = BH = \frac{AB}{2}$.



* TH1. $OP \geq \frac{R}{\sqrt{2}}$ (Lời giải như TTT2 số 185+186).

* TH2. $OP < \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Khi đó $OH \leq OP < \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow OH < \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Ta sẽ chứng minh

$S_{AOB} \leq OP.\sqrt{R^2 - OP^2}$. (1).

Thật vậy: $(1) \Leftrightarrow OH\sqrt{R^2 - OH^2} \leq OP \cdot \sqrt{R^2 - OP^2}$

$\Leftrightarrow OH^2(R^2 - OH^2) \leq OP^2(R^2 - OP^2)$

$\Leftrightarrow R^2(OH^2 - OP^2) - (OH^2 - OP^2)(OH^2 + OP^2) \leq 0$

$\Leftrightarrow (OH^2 - OP^2)(R^2 - OH^2 - OP^2) \leq 0$. (2)

Vì $OP < \frac{R}{\sqrt{2}}, OH < \frac{R}{\sqrt{2}}$ nên $OP^2 + OH^2 < R^2$.

Từ đó suy ra $R^2 - OP^2 - OH^2 > 0$.

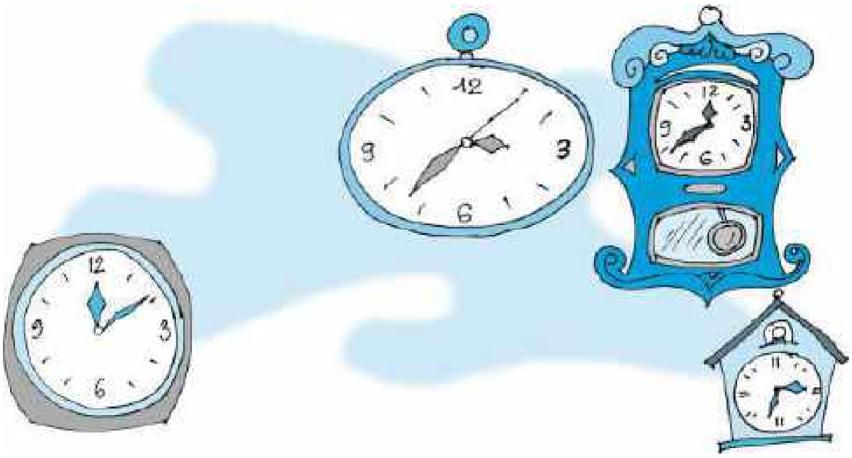
Vậy bất đẳng thức (2) đúng.

Do đó $S_{AOB} \leq OP \cdot \sqrt{R^2 - OP^2}$.

Suy ra diện tích tam giác AOB lớn nhất là $OP.\sqrt{R^2 - OP^2}$ khi tam giác AOB cân tại O và P là trung điểm của AB.

Nhận xét. Đây là bài toán hay và khó, rất tiếc không có bạn nào phát hiện và giải quyết được trường hợp 2. Phần thưởng xin dồn vào kì sau.

VI MẠNH TƯỜNG



VỤ ÁN CHIẾC ĐỒNG HỒ QUẢ LẮC

ĐINH HUY HOÀNG *(Hà Nội)*

Vào một buổi sáng mùa thu Hà Nội, trời se lạnh, phảng phất trong gió là mùi hương của ổi, bầu không khí tràn ngập sức sống, Sê Lốc Cốc vươn vai hít một hơi thật dài như để nuốt trọn sự trong lành ấy vào cơ thể.

Reng! Reng! Reng!, những hồi chuông điện thoại di động của thám tử vang lên bất chợt như muốn phá tan đi bầu không khí êm ả.

- Chào nhà tỷ phú Đỗ, có chuyện gì mà gọi tôi sớm thế?

Một giọng nam vẻ hốt hoảng phía đầu dây bên kia cất lên:

- Tôi biết hôm nay là ngày nghỉ, nhưng sự việc đến bất ngờ quá, tôi đành phiền đến ông vậy.

- Cứ bình tĩnh kể tôi nghe, chắc là việc quan trọng và gấp gáp lắm phải không?

- Đúng vậy - ông Đỗ đáp lời - như ông biết đấy, tôi có sở thích sưu tầm đồng hồ cổ, nhưng thật buồn khi sáng sớm nay lúc cô giúp việc nhà tôi vào phòng để lau chùi dọn dẹp, chị ấy phát hiện chiếc đồng hồ quả lắc từ thời ông cố tôi để lại đã không cánh mà bay.

- Hẳn là ông rất nóng lòng tìm lại nó rồi. Tôi sẽ đến đó ngay.

Nói xong Sê Lốc Cốc cúp máy, khoảng 30 phút sau, ông tới nhà tỷ phú Đỗ. Khi bước qua cánh cổng, thám tử không quên xoa đầu vuốt ve chú chó nghiệp vụ mà ông Đỗ mua về từ lâu để giữ nhà.

- Bạn của tôi thật tốt bụng! Mời ông vào căn phòng trưng bày của tôi.

Hai người cùng đi vào căn phòng, mọi thứ dường như không có nhiều xáo trộn. Thám tử đã từng vào đây vài lần. Ông khá nhớ chiếc đồng hồ quả lắc, nó là chiếc đồng hồ chỉ có kim và có một quả lắc rất đẹp phía dưới. Ông còn nhận ra có một lỗ hình tròn be bé đủ để nhìn vào căn phòng ở ngay trên tường, thông ra sân vườn phía sau. Chiếc lỗ đó nếu từ ngoài nhìn vào phòng, sẽ thấy chiếc gương phẳng cỡ đại mà ông Đỗ bố trí ở ngay thẳng đó.

- Tại sao cái lỗ kì lạ kia ông chưa bịt nó đi nhỉ? - Sê Lốc Cốc thắc mắc.

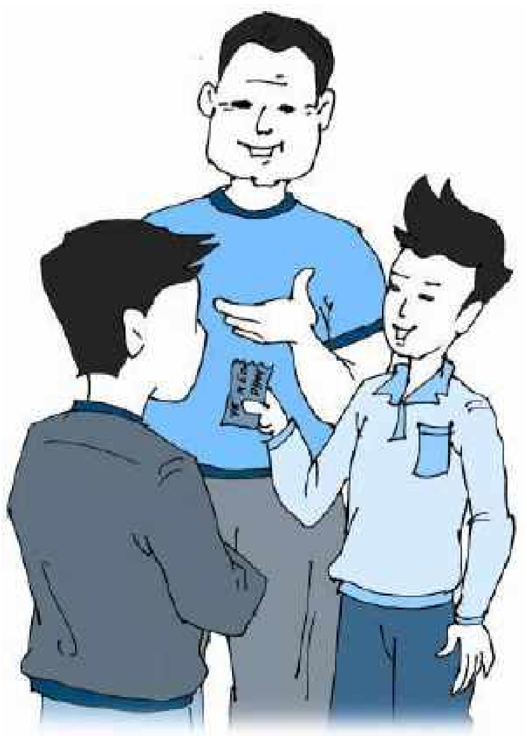
- À, khi phòng đang khóa tôi hay nhìn vào qua chiếc lỗ, tôi sẽ ngắm chiếc đồng hồ quả lắc qua cái gương, vì nó được treo đối diện ngay cái gương mà, hơn nữa tôi vẫn muốn có chút không khí từ ngoài vườn len vào phòng khi tôi đóng kín cửa.

Thám tử bật cười:

- Cái lỗ cũng lợi hại đấy. Mà ta vào vấn đề chính thôi, đồng hồ quả lắc đó tối qua ông còn nhìn thấy nó không?

- Tôi chỉ thường đi qua phòng đó một lần trong ngày, hôm qua tôi vào phòng lúc 10 giờ sáng để lấy một chiếc đồng hồ đem đi ra hiệu sửa, lúc ấy chiếc đồng hồ quả lắc vẫn còn. À... hình như tôi quên không khóa cửa.

Rồi không đợi thám tử nói gì thêm, ông Đỗ gọi ngay chị giúp việc đang ở ngoài sân vào và hỏi:
- Hôm qua chị dọn dẹp có thấy tôi quên khóa cửa phòng trưng bày không?
- Hôm qua lúc tôi đi dọn dẹp ngang qua, tôi có thấy phòng trưng bày chưa khóa, tôi nghĩ ông chủ quên nên đã khóa ngay, tiếc là tôi chủ quan không kiểm tra lại nên có thể đồng hồ lúc ấy đã mất.
Sê Lốc Cốc nói:
- Tôi cũng nghĩ vậy, ông Đỗ có nói ra khỏi phòng là 10 giờ, chị có để ý lúc chị khóa phòng là mấy giờ không?
- Có hai lần tôi đi qua phòng, lần một tôi đi phía sau đằng sân vườn để quét lá, tôi chỉ nhìn đồng hồ qua cái lỗ nhỏ, lúc đó đồng hồ quả lắc vẫn còn và nó chỉ 1 giờ. Sau đó tôi đi làm việc, lúc tôi đi ngang qua phòng mới thấy cửa còn chưa khóa nên tôi vội khóa lại, rồi tôi về phòng khách dọn dẹp, lúc đó đồng hồ phòng khách chỉ 1 giờ rưỡi.



Thám tử trầm ngâm: “Chỉ trong vòng nửa tiếng mà kẻ gian đã quá nhanh tay, lúc ấy có lẽ ông Đỗ đang nghỉ trưa, liệu còn ai biết chiếc đồng hồ này không ông?”
- Còn hai người nữa, một là đứa cháu tôi tên Mạnh, lần nào đến đây nó cũng mượn tôi chìa khóa để vào ngắm bộ đồng hồ, người còn lại là ông bạn làm ăn của tôi, tên là Trung, cũng từng vào căn phòng này, tôi thường hay kể về chiếc đồng hồ này vì ông Trung cũng thích nó. Hôm nay tôi cũng mời ông Trung sang đây để kể về việc bị mất đồng hồ và bàn một số chuyện làm ăn đây.
Sê Lốc Cốc nói:
- Vậy thì hay quá, tôi đang cần hỏi ông ta mấy điều, ông gọi cháu Mạnh sang đây luôn nhé.
- Tôi gọi ngay đây.
Một lúc sau, khi cả 2 người có mặt, thám tử Sê Lốc Cốc bắt tay ông Trung và hỏi:
- Xin lỗi ông, ông vui lòng cho biết khoảng từ 1 giờ đến 1 giờ rưỡi chiều hôm qua ông làm gì, ở đâu?
- Hôm qua tôi ở công ty làm việc từ sáng đến chiều. Ông có thể hỏi người ở công ty tôi.
- Cảm ơn ông! - Thám tử quay sang nhìn Mạnh - Vậy còn cháu Mạnh thì sao, lúc ấy cháu làm gì?
- Sáng qua thì cháu khá rảnh rỗi, cháu ở nhà thôi, nhưng cháu đi xem phim từ lúc 12 giờ trưa đến 2 giờ chiều, cháu còn giữ cuống vé đây chú, cháu đi xem với lớp nên chú có thể hỏi thêm các bạn ấy ạ.
Sê Lốc Cốc cầm cuống vé và chau mày:
- Đúng là thế thật, như vậy cả 2 người đều có bằng chứng ngoại phạm rồi, vậy thì ai là thủ phạm đây?
Thám tử đi đi lại lại, chợt nhớ ra điều gì đó ông liền quay sang hỏi bạn mình:
- Chú chó mà anh nuôi giữ nhà rất tốt đúng không? Chó nghiệp vụ mà.
- Chính xác. Nó đi quanh nhà tôi cả ngày, nhất là giờ trưa hay đêm thì nó càng đi nhiều, tôi nghĩ không có kẻ gian nào đột nhập được đâu vì trưa qua tôi không nghe nó sủa gì.
- Chà! Vụ này hóc búa đấy, cũng may là tôi đã phát hiện ra manh mối rồi, tôi có hai cơ sở lớn để nghi ngờ và cần hỏi thêm một trong hai người là ông Trung hoặc cậu Mạnh, còn chị giúp việc tôi vẫn nghi ngờ nhưng tôi sẽ hỏi sau.
Các thám tử Tuổi Hồng có đoán ra ai là người mà thám tử sẽ hỏi thêm không? Hai lí do thám tử nghĩ tới là gì?

Problem 2(188+189). The number of pairs of red socks, the number of blue socks and the number of white socks Mr. Zack has are consecutive even numbers respectively. He always puts all of his socks in a box. It is known that when blinded, he has to take out 26 socks to make sure that he has exactly 1 pair of white socks. How many socks does he have in total? (The right sock is different from the left one and all the socks are paired).

TS. ĐỖ ĐỨC THÀNH

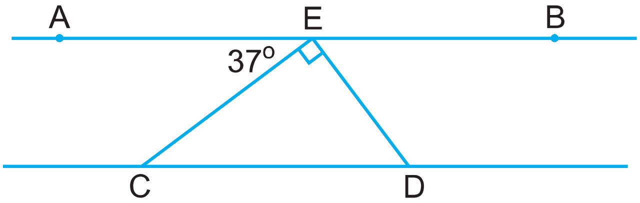
(GV. Trường liên cấp Tiểu học và THCS Ngôi Sao Hà Nội)

Các bạn hãy giải bài toán trên bằng tiếng Anh và gửi về tòa soạn nhé! Năm bạn có bài giải tốt nhất sẽ được nhận quà.

Kết quả **(TTT2 số185+186)**

PERPENDICULAR LINES AND PARALLEL LINES

Solution.



Because points A, E, B are on the same line, hence, $\angle AEC + \angle CED + \angle DEB = 180^o$

$\Rightarrow \angle DEB = 180^o - (\angle AEC + \angle CED)$

$= 180^o - (37^o + 90^o) = 53^o$.

As $\angle CDE$ and $\angle DEB$ are alternate angles, so, they are equal in size.

Thus, $\angle CDE = \angle DEB = 53^o$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng và được thưởng kì này: *Hà Nguyên Vũ*, 7C, THCS Hùng Vương, thị xã Phú Thọ, **Phú Thọ**; *Lê Thị Thanh Hằng,* 9A3, THCS Trưng Vương, Mê Linh, **Hà Nội**.

ĐỖ ĐỨC THÀNH

ĐƯỢC THƯỞNG KÌ NÀY

Thi giải toán qua thư

Tạ Kim Nam Tuấn, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Văn Bảo Châu,* 7/5, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Trần Gia Huy; Phạm Đình Thiên Bảo,* 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Phạm Ngọc Trinh*, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; *Nguyễn Phan Khánh An*, 7A; *Nguyễn Gia Bảo*, 6B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Tuấn Dương*, 8C5, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Nguyễn Thị Diệu Linh*, 9A1; *Nguyễn Bá Hoàng*, 8E; *Lương Minh Hiếu*; *Trần Anh Vũ*, 8C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**.

Ô chữ
ĐỊA ĐIỂM THAM QUAN

HỒ THỊ THU HƯỜNG
(GV. TH Vượng Lộc, Can Lộc, Hà Tĩnh)

Kì này Hồng được Hà dẫn đến rất nhiều điểm tham quan, mua sắm và giải trí trong thành phố SPRING xinh đẹp. Đó là những nơi nào? Mời các bạn nhanh tay, nhanh mắt tìm xem nhé! Các phần quà đang chờ các bạn đó!

R	I	V	E	R	R	E	U	S	H	S	C
E	F	A	C	T	O	R	Y	C	O	U	L
S	E	R	Q	B	O	S	A	H	T	P	J
T	U	R	R	A	D	G	I	O	E	E	H
A	P	O	E	N	V	L	R	O	L	R	F
U	P	A	R	K	T	N	P	L	L	M	R
R	J	D	P	R	I	S	O	N	I	A	S
A	O	T	S	J	E	X	R	B	B	R	H
N	C	H	U	R	C	H	T	L	R	K	Y
T	D	C	B	U	C	K	H	I	A	E	W
W	L	L	M	U	S	E	U	M	R	T	H
O	H	O	S	P	I	T	A	L	Y	L	E

Kết quả Ô chữ BIRDS (TTT2 số 185+186)

Tên các loài chim đang "ẩn trốn" trong ô chữ đã cho là

- ALBATROSS — Chim hải âu
- HAWK — Chim diều hâu
- CRANE — Con sếu
- OWL — Con cú
- HERON — Chim diệc
- SWAN — Con thiên nga
- PEACOCK — Con công
- PELICAN — Chim bồ nông
- PARROT — Con vẹt
- STORK — Con cò

Nhận xét. TTT nhận được rất nhiều bài tham dự từ khắp mọi miền Tổ quốc. Bạn nào cũng nêu ra được một vài cái tên trong họ nhà chim, tuy nhiên chỉ có 5 bạn sau được nhận quà vì đã nêu được đủ 10 tên: *Nguyễn Hà Trang*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Thiện Dũng*, 6A; *Nguyễn Mai Chi*, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Đinh Bảo Ngọc*, 6E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Lê Hoàng Minh*, 8D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

NGUYỄN MINH THU

Kì này ĐA GIÁC 2017 CẠNH

Bài toán. Cho đa giác lồi có 2017 cạnh. Vẽ tất cả các đường chéo của đa giác. Một đường thẳng d không đi qua đỉnh nào của đa giác và cắt hai cạnh của đa giác. Hồng nói rằng: Đường thẳng d này cắt một số chẵn các đường chéo.

Hà nói rằng: Đường thẳng d này cắt một số lẻ các đường chéo.

Theo bạn, ai nói đúng? Vì sao?

TẠ THẬP *(TP. Hồ Chí Minh)*

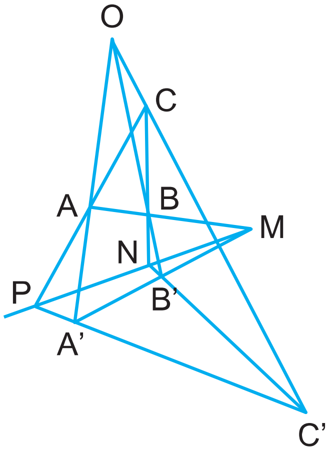
Kết quả **(TTT2 số 185+186)**

VẼ THẾ NÀO NHỈ?

Để dựng được hình theo yêu cầu, ta cần có định lí Desargues.

Định lí. Trong mặt phẳng cho ΔABC và ΔA'B'C'. Giả sử AB và A'B' cắt nhau tại M; BC và B'C' cắt nhau tại N; CA và C'A' cắt nhau tại P thì ba điểm M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi AA', BB', CC' đồng quy.

Ta sẽ chứng minh nếu AA', BB', CC' đồng quy tại O thì M, N, P thẳng hàng. (Phần ngược lại bạn đọc tự chứng minh).



Áp dụng định lí Menelaus cho các tam giác OBC, OCA, OAB với các cát tuyến NB'C', PA'C', MB'A' tương ứng ta có

$$\frac{NB}{NC}.\frac{C'C}{C'O}.\frac{B'O}{B'B}=1 \ (1)$$

$$\frac{PC}{PA}.\frac{A'A}{A'O}.\frac{C'O}{C'C}=1 \ (2)$$

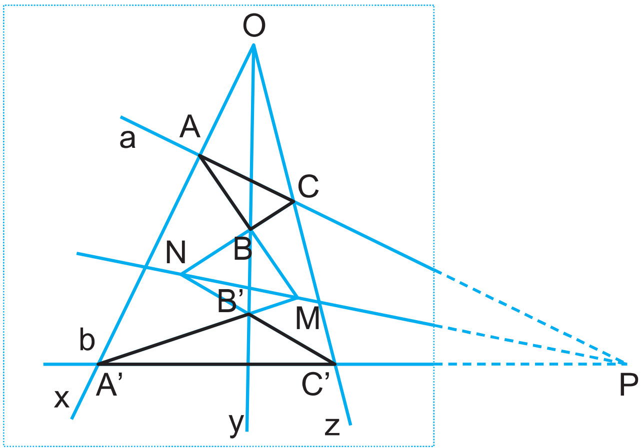
$$\frac{MA}{MB}.\frac{B'B}{B'O}.\frac{A'O}{A'A}=1 \ (3)$$

Nhân (1); (2); (3) theo từng vế ta được

$$\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}.\frac{MA}{MB}=1.$$

Theo định lí Menelaus thì ba điểm N, P, M thẳng hàng.

Trở lại giải bài toán kì trước.



Từ điểm O kẻ ba tia Ox, Oy, Oz không đi qua M sao cho Ox cắt a và b thứ tự tại A và A', Oz cắt a và b lần lượt tại C và C'. Vẽ các đường thẳng MA, MA' cắt Oy thứ tự tại B và B'. Vẽ các đường thẳng BC, B'C', chúng cắt nhau tại N. Nối MN ta được đường thẳng cần dựng (Theo định lí Desargues thì M, N, P thẳng hàng).

Nhận xét. Không có bạn nào có lời giải đúng bài toán này. Phần quà kì này TTT sẽ để dành cho kì sau.

VŨ ĐÌNH HÒA

Kì này KÌ 36

Hãy thay các chữ cái bởi các chữ số. Các chữ khác nhau biểu diễn các chữ số khác nhau sao cho thỏa mãn cả hai phép tính. Lời giải cần có lập luận lôgic.

$$\begin{array}{r} \text{FIVE} \\ - \ \text{FOUR} \\ \hline \text{ONE} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{FIVE} \\ + \ \text{FIVE} \\ \hline \text{EVEN} \end{array}$$

ĐÔNG BA

Kết quả KÌ 34 (TTT2 số 185+186)

Vì S × S =...O mà O khác S nên S chỉ có thể là 2, 3, 4, 7, 8, 9 và O chỉ có thể tương ứng là 4, 9, 6, 9, 4, 1 (xem bảng dưới):

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S × S	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Kết quả	Loại	Loại	Nhận	Nhận	Nhận	Loại	Loại	Nhận	Nhận	Nhận

Tức là OS chỉ có thể là 42, 93, 64, 97, 48, 19.
Vì 316 × 316 = 99856 (5 chữ số) và 317 × 317 = 100489 nên DOS × DOS = CUATRO là số có sáu chữ số thì D chỉ có thể bằng 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Thử (để kiểm tra DOS × DOS = CUATRO, số nào trùng thì loại). Tiêu chí loại: Kết quả nào có chữ số trùng thì loại, vì CUATRO là các số có tất cả các chữ số khác nhau và phải khác với D, S.

• Với D = 3 ta có bảng sau

DOS	342	364	397	348	319
DOS	342	364	397	348	319
CUATRO	116964	132496	157609	121104	101761
Kết quả	Loại	Loại	Loại	Loại	Loại

• Với D = 4 ta có bảng sau

DOS	493	497	419
DOS	493	497	419
CUATRO	243049	247009	175561
Kết quả	Loại	Loại	Loại

• Với D = 5 ta có bảng sau

DOS	542	593	564	597	548	519
DOS	542	593	564	597	548	519
CUATRO	293764	351649	318096	356409	300304	269361
Kết quả	Loại	Loại	Nhận	Loại	Loại	Loại

• Với D = 6 ta có bảng sau

DOS	642	693	697	648	619
DOS	642	693	697	648	619
CUATRO	412464	480249	485809	419904	383161
Kết quả	Loại	Loại	Loại	Loại	Loại

• Với D = 7 ta có bảng sau

DOS	742	793	764	748	719
DOS	742	793	764	748	719
CUATRO	550564	628849	583696	559504	516961
Kết quả	Loại	Loại	Loại	Loại	Loại

• Với D = 8 ta có bảng sau

DOS	842	893	897	848	819
DOS	842	893	897	848	819
CUATRO	708964	797449	746496	804609	670761
Kết quả	Loại	Loại	Loại	Loại	Loại

• Với D = 9 ta có bảng sau

DOS	942	993	997
DOS	942	993	997
CUATRO	887364	929296	898704
Kết quả	Loại	Loại	Loại

Vậy bài toán có nghiệm duy nhất là 564 × 564 = 318096.

TTT

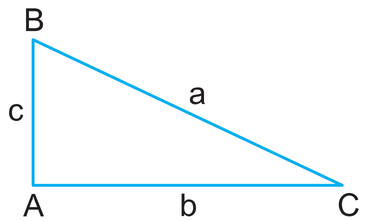
CHỨNG MINH ĐỊNH LÍ PYTHAGORAS BẰNG NHIỀU CÁCH

HÀ VĂN NHÂN
(GV. THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hóa, Thanh Hóa)

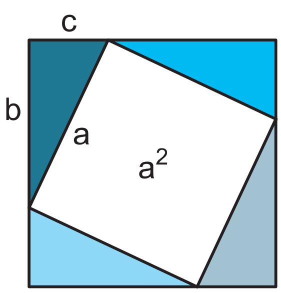
Định lí Pythagoras có nhiều ứng dụng khi giải các bài toán hình học. Nhiều bạn yêu toán đã tìm nhiều cách chứng minh định lí này. Việc chứng minh một bài toán hay một định lí theo nhiều cách giúp các bạn học sinh có thói quen nghiên cứu sâu các bài toán, từ đó rút ra những bài học bổ ích. Sau đây chúng tôi xin giới thiệu một số cách chứng minh định lí nổi tiếng này.

Định lí Pythagoras. *Trong một tam giác vuông tổng bình phương hai cạnh góc vuông bằng bình phương cạnh huyền.*

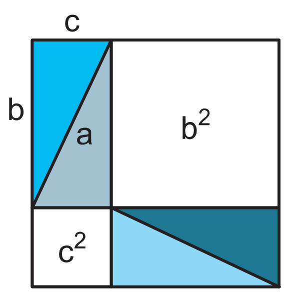
Chứng minh. Xét tam giác ABC vuông tại A có BC = a, AB = c, AC = b. Ta sẽ chứng minh $a^2 = b^2 + c^2$.



● **Cách 1.** Ta xếp bốn hình tam giác vuông bằng nhau vào trong hình vuông có cạnh dài là b + c theo hai cách như sau:



Hình 1



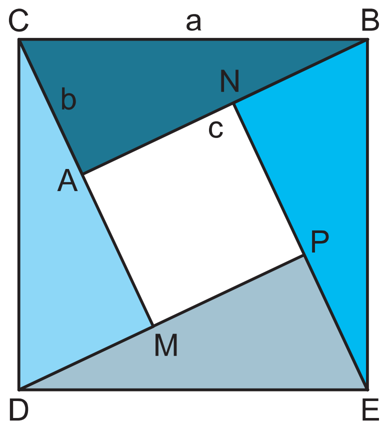
Hình 2

Từ hình vẽ trên ta thấy ở hình 1 thì hình vuông nhỏ có cạnh là a và có diện tích là a^2, ở hình 2 thì hai hình vuông nhỏ có cạnh là b và c nên có diện tích lần lượt là b^2 và c^2.

Suy ra $a^2 = b^2 + c^2$.

● **Cách 2.** Ta xếp bốn hình tam giác vuông bằng nhau để được hình vuông CBED có độ dài cạnh là a như hình vẽ.

Khi đó tứ giác ANPM là hình vuông có độ dài cạnh là $|c - b|$ (nếu b = c thì bốn điểm A, N, P, M trùng nhau).



Ta có $S_{CBED} = S_{ANPM} + 4.S_{ABC}$

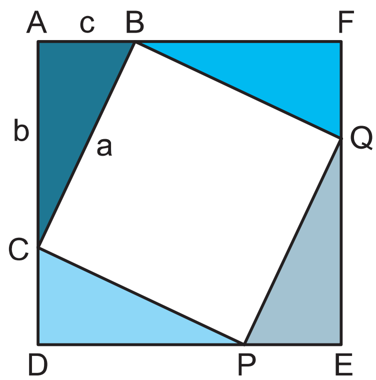
$$\Rightarrow a^2 = (c-b)^2 + 4.\frac{bc}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 = c^2 - 2bc + b^2 + 2bc$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

● **Cách 3.** Ta xếp bốn hình tam giác vuông bằng nhau để được hình vuông AFED có độ dài cạnh là b + c như hình vẽ.

Khi đó dễ dàng chứng minh tứ giác BQPC là hình vuông có độ dài cạnh là a.



Ta có $S_{AFED} = S_{BQPC} + 4S_{ABC}$

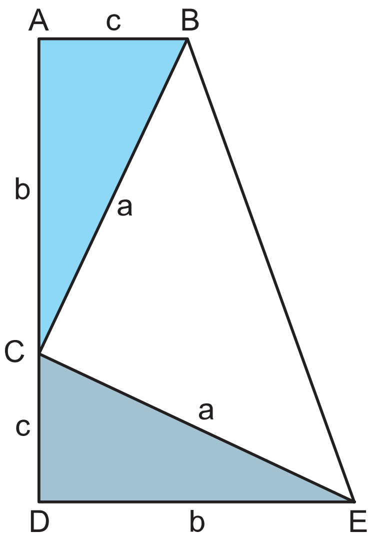
$\Rightarrow (b + c)^2 = a^2 + 4.\dfrac{bc}{2}$

$\Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$

$\Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$.

● **Cách 4.** Ta xếp hai hình tam giác vuông bằng nhau như hình vẽ sao cho A, C, D thẳng hàng.

Dễ dàng chứng minh ΔCBE là tam giác vuông cân tại C và tứ giác ABED là hình thang vuông.



Ta có $S_{ABED} = S_{ABC} + S_{CDE} + S_{BCE}$

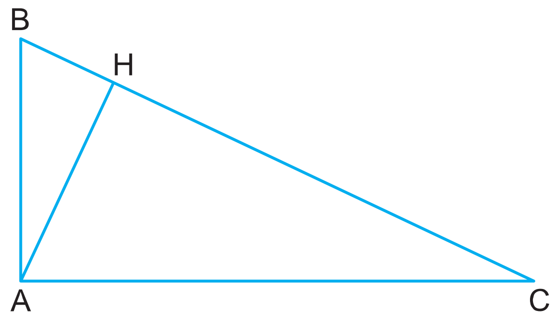
$\Rightarrow \dfrac{(b+c)(b+c)}{2} = \dfrac{bc}{2} + \dfrac{bc}{2} + \dfrac{a^2}{2}$

$\Rightarrow (b + c)^2 = 2bc + a^2$

$\Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$

$\Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$.

● **Cách 5.**



Kẻ AH vuông góc với BC.

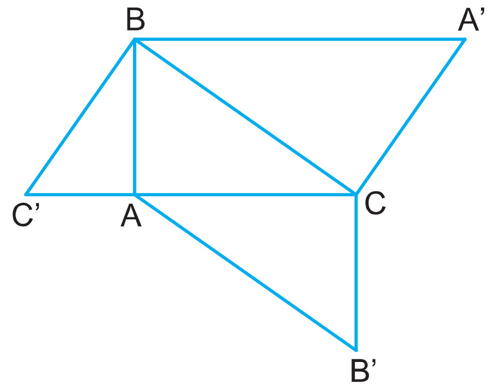
Ta có các tam giác vuông ABC, HAC, HBA đồng dạng.

Suy ra $AB^2 = BC.BH$ và $AC^2 = BC.HC$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC(BH + HC) = BC^2$.

$\Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$.

● **Cách 6.** Qua B dựng đường thẳng vuông góc với BC cắt AC ở C'. Dựng các hình bình hành ABCB' và BC'CA'.



Ta có $\Delta ABC = \Delta CB'A$.

Do đó $S_{CB'A} + S_{ABC'} = S_{ABC} + S_{ABC'} = S_{BCC'} = S_{BCA'}$

$\Rightarrow AB.AC + AB.AC' = BC.CA'$. (1)

Ta có $AC'.AC = AB^2$ nên $AC' = \dfrac{AB^2}{AC}$. (2)

Vì $\Delta CA'B \backsim \Delta ABC$ nên $CA'.CA = BA.BC$

$\Rightarrow CA' = \dfrac{BA.BC}{CA}$. (3)

Thay vào (2) và (3) vào (1) ta được

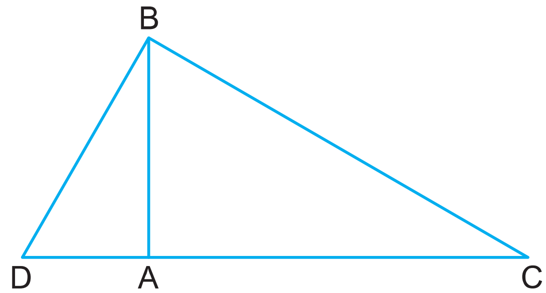
$AB.AC + AB.\dfrac{AB^2}{AC} = BC.\dfrac{BA.BC}{CA}$

$\Rightarrow AC + \dfrac{AB^2}{AC} = \dfrac{BC^2}{CA}$

$\Rightarrow AC^2 + AB^2 = BC^2$

$\Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$.

● **Cách 7.** Kẻ đường thẳng qua B vuông góc với BC cắt AC ở D.



Ta có $2S_{ABD} + 2S_{ABC} = 2S_{BCD}$

$\Rightarrow AB.AD + AB.AC = BD.BC$. (1)

Vì $AB^2 = AD.AC$ nên $AD = \dfrac{AB^2}{AC}$.

Vì $AB.DC = 2S_{BCD} = BD.BC$ nên

$BD = \dfrac{AB.DC}{BC}$. (2)

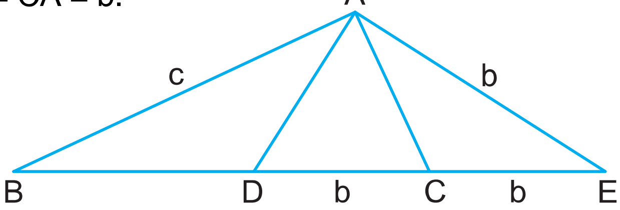
Thay vào (2) vào (1) ta được

$$AB.\frac{AB^2}{AC}+AB.AC=BC.\frac{AB.DC}{BC}$$

$$\frac{AB^2}{AC}+AC=DC$$

$$\Leftrightarrow AB^2+AC^2=DC.AC=BC^2 \Rightarrow b^2+c^2=a^2.$$

● **Cách 8.** Trên tia CB lấy điểm D và trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho CD = CE = CA = b.



Xét ΔADE có đường trung tuyến AC bằng nửa cạnh đối diện nên ΔADE vuông tại A.

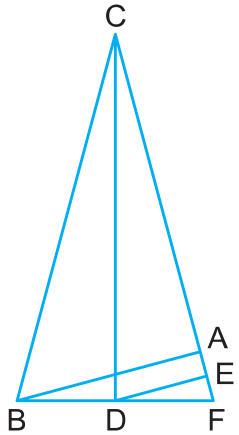
Do đó ΔBAD ∽ ΔBEA (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BA}{BE}=\frac{BD}{BA}\Rightarrow\frac{c}{a+b}=\frac{a-b}{c}$$

$$\Rightarrow c^2=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$\Rightarrow c^2+b^2=a^2.$$

● **Cách 9.** Trên tia CA lấy điểm F sao cho CF = CB.



Gọi D, E thứ tự là trung điểm của BF, AF.

Ta có CD ⊥ BF, DE ⊥ AF.

Suy ra ΔBFA ∽ ΔCDE (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{EC}=\frac{AF}{ED}\Rightarrow AB.DE=CE.AF.\ (1)$$

Ta có AF = CF – AC = CB – CA. (2)

$$CE=CA+AE=AC+\frac{AF}{2}$$

$$=AC+\frac{CB-CA}{2}=\frac{AC+BC}{2}.\ (3)$$

$DE=\dfrac{AB}{2}$ (đường trung bình của tam giác). (4)

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta được

$$\frac{AB.AB}{2}=\frac{(AC+BC)}{2}.(BC-AC)$$

$$\Leftrightarrow AB^2=BC^2-AC^2$$

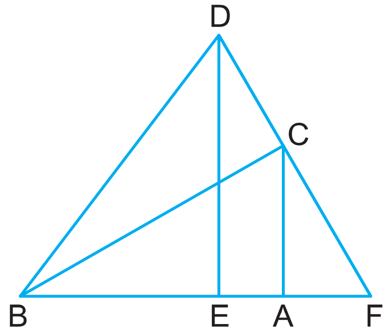
$$\Leftrightarrow AB^2+AC^2=BC^2$$

$$\Leftrightarrow b^2+c^2=a^2.$$

● **Cách 10.** Kẻ đường thẳng qua C vuông góc với BC cắt đường thẳng AB tại F. Trên tia đối của tia CF lấy điểm D sao cho DF = a, vẽ DE ⊥ BF.

Ta có ΔDEF = ΔBAC (cạnh huyền - góc nhọn)

⇒ DE = BA = c, EF = AC = b.



Ta lại có ΔCAF ∽ ΔDEF (g.g) nên

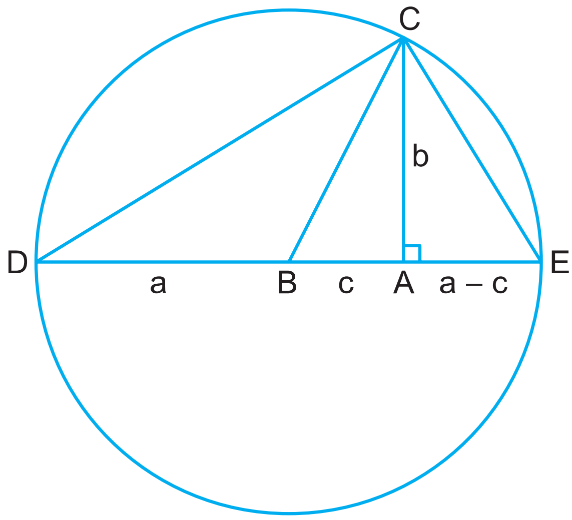
$$\frac{CA}{DE}=\frac{AF}{EF}\Rightarrow AF=\frac{CA.EF}{DE}=\frac{b.b}{c}=\frac{b^2}{c}$$

$$\Rightarrow BF=BA+AF=c+\frac{b^2}{c}.$$

Ta lại có $\dfrac{BC.DF}{2}=S_{BDF}=\dfrac{DE.BF}{2}$

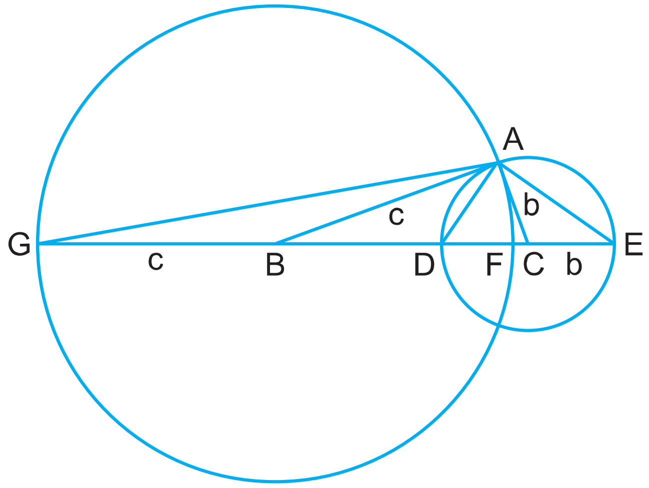
Suy ra $a.a=c\left(c+\dfrac{b^2}{c}\right)\Rightarrow a^2=b^2+c^2.$

● **Cách 11.** Vẽ đường tròn (B; a). Gọi DE là đường kính của đường tròn đi qua A.



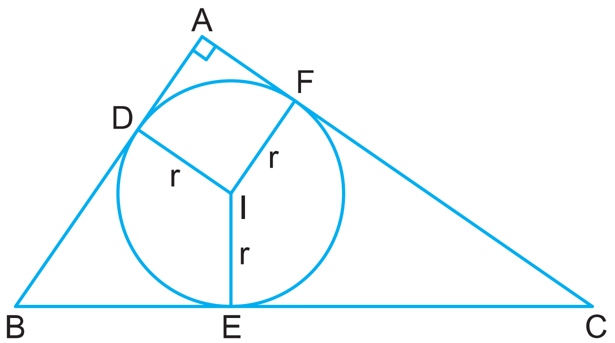
Ta có $AE = a - c$; $BD = BC = a$; $AD = a + c$.
Vì ΔCDE vuông ở C nên $AC^2 = AD.AE$.
$\Rightarrow b^2 = (a + c)(a - c)$
$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$
$\Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$.

● **Cách 12.** Vẽ đường tròn (C; b) cắt đường thẳng BC ở D, E. Vẽ đường tròn (B; c) cắt đường thẳng BC ở G, F.



Ta có BA là tiếp tuyến của đường tròn (C; b).
Suy ra $\Delta BAD \backsim \Delta BEA$ (g.g)
$\Rightarrow BA^2 = BD.BE$
$\Rightarrow c^2 = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
$\Rightarrow c^2 + b^2 = a^2$.

● **Cách 13.**



Gọi (I; r) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F.
Dễ dàng chứng minh tứ giác ADIF là hình vuông.
Suy ra $AD = AF = r$.
Theo tính chất tiếp tuyến cắt nhau ta có
$BD = BE = c - r$; $CE = CF = b - r$.
Suy ra $BC = a = c - r + b - r = c + b - 2r$
$\Rightarrow 2r = b + c - a$
$\Rightarrow r = p - a$ (với p là nửa chu vi tam giác ABC)
$\Rightarrow S_{ABC} = p.r = p.(p - a)$.

Mặt khác $S_{ABC} = \dfrac{bc}{2}$.

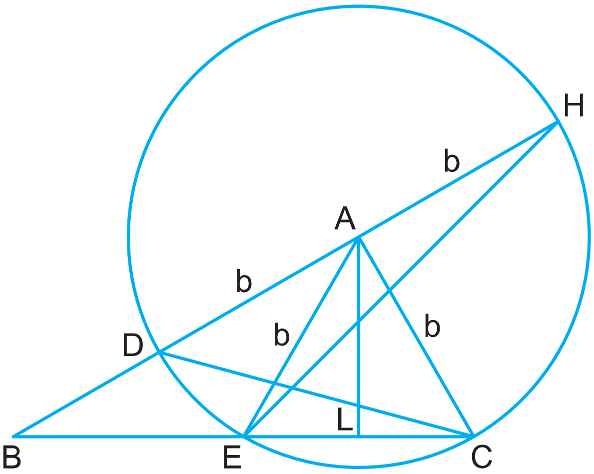
Suy ra $p(p - a) = \dfrac{bc}{2}$

$$\Rightarrow \frac{a + b + c}{2}.\frac{b + c - a}{2} = \frac{bc}{2}$$

$\Rightarrow (b + c)^2 - a^2 = 2bc$

$\Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$.

● **Cách 14.** Không mất tổng quát, giả sử $c \geq b$. Vẽ đường tròn (A; b) cắt đường thẳng AB tại D và H, cắt cạnh BC tại E.



Kẻ $AL \perp EC$ ($L \in BC$). Ta có
$\Delta BEH \backsim \Delta BDC$ (g.g) nên $BD.BH = BE.BC$
$\Rightarrow (c - b)(c + b) = a(a - 2CL)$. (1)

Mà $AC^2 = CL.CB$ nên $CL = \dfrac{AC^2}{BC} = \dfrac{b^2}{a}$. (2)

Thay (2) vào (1) ta được

$$c^2 - b^2 = a\left(a - 2.\frac{b^2}{a}\right) = a^2 - 2b^2$$

$\Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$.

Các bạn hãy tìm thêm các cách chứng minh định lí này nhé.

MỘT SỐ BÀI TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN CHỨA SỐ NGUYÊN TỐ

PHẠM HẢI ĐĂNG

(GV. THCS Yên Thanh, Thanh Lộc, Can Lộc, Hà Tĩnh)

Khi giải các bài toán về phương trình nghiệm nguyên có xuất hiện số nguyên tố, ta thường sử dụng nhận xét sau:

• **Nhận xét.** Nếu tích của hai hay nhiều số nguyên chia hết cho một số nguyên tố p thì có ít nhất một thừa số chia hết cho p.

Bạn đọc tự chứng minh nhận xét trên.

Bài toán 1. Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn $7(x + y + z) = xyz$.

Lời giải. Ta có $7(x + y + z) = xyz \Rightarrow xyz \,\vdots\, 7$.

Suy ra tồn tại ít nhất một trong ba số x, y, z chia hết cho 7.

Không mất tổng quát giả sử $x \,\vdots\, 7$.

Vì x là số nguyên tố nên $x = 7$.

Phương trình đã cho trở thành $7 + y + z = yz$

$\Leftrightarrow (y - 1)(z - 1) = 8$. (1)

Không mất tổng quát giả sử $y \geq z \geq 2$, suy ra $y - 1 \geq z - 1 \geq 1$, kết hợp với (1) ta được

$$\begin{cases} y-1=8 \\ z-1=1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} y-1=4 \\ z-1=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=9 \\ z=2 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} y=5 \\ z=3 \end{cases}.$$

Vì y, z là các số nguyên tố nên ta chọn $y = 5$ và $z = 3$.

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y; z) = (7; 5; 3)$ và các hoán vị của chúng.

Bài toán 2. Tìm các số nguyên dương x, y và số nguyên tố p thỏa mãn phương trình $x^3 + y^3 = p^2$.

Lời giải. Ta có $x^3 + y^3 = p^2$

$\Rightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) = p^2$. (1)

Vì $x^3 < x^3 + y^3 = p^2$ nên $x < p$, tương tự $y < p$.

Mặt khác $x + y \geq 2$ nên từ (1) ta suy ra hai trường hợp sau

• TH1. $\begin{cases} x+y=p^2 \\ x^2-xy+y^2=1. \end{cases}$

Ta có $x^2 - xy + y^2 = (x - y)^2 + xy \geq 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$.

Suy ra $p^2 = 2$. (loại)

• TH2. $\begin{cases} x+y=p \Rightarrow x^2+2xy+y^2=p^2 \\ x^2-xy+y^2=p. \end{cases}$

$\Rightarrow 3xy = p(p - 1) \,\vdots\, p$.

Mà $x, y < p$ và p là số nguyên tố nên x và y đều không chia hết cho p. Suy ra $3 \,\vdots\, p \Rightarrow p = 3$.

Do đó $(x, y) = (2; 1)$ hoặc $(x, y) = (1; 2)$.

Vậy các bộ số (x, y, p) thỏa mãn bài toán là (1; 2; 3), (2; 1; 3).

Bài toán 3. Tìm các số nguyên dương x, y và số nguyên tố p thỏa mãn $p^x = y^4 + 4$.

Lời giải. Ta có $y^4 + 4 = (y^2 + 2)^2 - 4y^2$

$= (y^2 - 2y + 2)(y^2 + 2y + 2)$

$\Rightarrow p^x = (y^2 - 2y + 2)(y^2 + 2y + 2)$. (1)

• Nếu $y = 1$ ta được $p^x = 5 \Rightarrow p = 5$ và $x = 1$.

• Nếu $y \geq 2$.

* Nếu $x = 1$ thay vào phương trình (1) ta được

$p = (y^2 - 2y + 2)(y^2 + 2y + 2)$. (2)

Vì p là số nguyên tố và $y^2 + 2y + 2 > y^2 - 2y + 2$, nên từ (2) suy ra $y^2 - 2y + 2 > 0$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 2 = 1 \Rightarrow (y - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow y = 1$ (mâu thuẫn với $y \geq 2$).

* Nếu $x \geq 2$ mà $y \geq 2$, kết hợp với (1) ta có

$$\begin{cases} y^2+2y+2 \,\vdots\, p \\ y^2-2y+2 \,\vdots\, p \end{cases} \Rightarrow 4y \,\vdots\, p \Rightarrow 4 \,\vdots\, p \text{ hoặc } y \,\vdots\, p.$$

+ Nếu $4 \vdots p \Rightarrow p = 2$.

+ Nếu $y \vdots p$, kết hợp với $y^2 + 2y + 2 \vdots p$ ta được $2 \vdots p \Rightarrow p = 2$.

Khi đó phương trình (1) trở thành
$2^x = y^4 + 4$. (3)
Ta có $y \geq 2 \Rightarrow 2^x \geq 2^4 + 4 = 20 \Rightarrow x \geq 5$.
Suy ra $2^x \vdots 8$. (4)

Từ (3) ta có $y \vdots 2$ nên $y^4 + 4$ chia cho 8 dư 4. (5)

Từ (4) và (5) suy ra phương trình (3) vô nghiệm.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(p, x, y) = (5; 1; 1)$.

Bài toán 4. Cho m là số nguyên dương và p, q là các số nguyên tố. Giải phương trình nghiệm nguyên $2^m.p^2 + 1 = q^5$.

Lời giải. Ta có $2^m . p^2 + 1 = q^5$
$\Rightarrow (q - 1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) = 2^m.p^2$. (1)
Nếu p = 2 thì phương trình (1) trở thành
$(q - 1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) = 2^{m+2}$.
Suy ra q là số lẻ lớn hơn 1, từ đó $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ là số lẻ lớn hơn 5 (vô lí vì 2^{m+2} không có ước lẻ lớn hơn 1). Do đó $p \neq 2$.
Vì p là số nguyên tố nên p là số lẻ.
Mặt khác $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ luôn là số lẻ với mọi q, nên từ phương trình (1) xảy ra hai trường hợp sau:

- TH1. $\begin{cases} q - 1 = 2^m.p \\ q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = p. \end{cases}$

Ta lại có $p < 2^m.p = q - 1$
$\Rightarrow q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < q - 1$ (vô lí).

- TH2. $\begin{cases} q - 1 = 2^m \\ q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = p^2. \end{cases}$

$\Rightarrow 4(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) = 4p^2 = (2p)^2$.
Ta có $(2q^2 + q)^2 < 4(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$
$< (2q^2 + q + 2)^2$
$\Rightarrow (2q^2 + q)^2 < (2p)^2 < (2q^2 + q + 2)^2$
$\Rightarrow (2p)^2 = (2q^2 + q + 1)^2$
$\Rightarrow 4(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) = (2q^2 + q + 1)^2$
$\Rightarrow q^2 - 2q - 3 = 0$
$\Rightarrow q = 3$.

Suy ra $p^2 = 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 121$
$\Leftrightarrow p = 11 \Rightarrow m = 1$.
Vậy phương trình có nghiệm $(m, p, q) = (1; 11; 3)$.

Bài toán 5. Tìm các số nguyên dương a, b, c sao cho $a^2 + 1$ và $b^2 + 1$ đều là các số nguyên tố đồng thời $(a^2 + 1)(b^2 + 1) = (c^2 + 1)$.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b$.
Ta có $(a^2 + 1)(b^2 + 1) = c^2 + 1$. (1)
$\Leftrightarrow b^2(a^2 + 1) = (c - a)(c + a)$. (2)
Do $a^2 + 1$ là số nguyên tố nên $(c - a) \vdots (a^2 + 1)$ hoặc $(c + a) \vdots (a^2 + 1)$.

Suy ra $c \geq a^2 - a + 1$. (3)
Từ (2) và (3) suy ra $b^2(a^2 + 1) \geq (a - 1)^2(a^2 + 1)$
$\Rightarrow b \geq a - 1$. (4)
Mà $a \geq b$. (5)
Từ (4) và (5) suy ra $a = b$ hoặc $a = b + 1$.

- Nếu $a = b$, phương trình (1) trở thành
$c^2 + 1 = (a^2 + 1)^2 \Leftrightarrow (a^2 - c + 1)(a^2 + c + 1) = 1$.
Phương trình trên vô nghiệm vì $a^2 + c + 1 \geq 3$.
- Nếu $a = b + 1$ thì $b^2 + 1$ và $a^2 + 1 = b^2 + 2b + 2$ đều là các số nguyên tố.
Vì $b^2 + 2b + 2 > 2$ nên $b^2 + 2b + 2$ là số nguyên tố lẻ
$\Rightarrow$ b lẻ $\Rightarrow b^2 + 1$ là số nguyên tố chẵn.

Suy ra $b^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 3 \end{cases}$

(Thử lại thỏa mãn).
Vậy các bộ số (a, b, c) thỏa mãn bài toán là (2; 1; 3), (1; 2; 3).

Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho p là số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên k sao cho biểu thức $\sqrt{k^2 - kp}$ là số nguyên.

Bài 2. Cho p, q, r là các số nguyên tố thỏa mãn phương trình $p^n + q^n = r^2$. (n là số nguyên dương). Chứng minh rằng n = 1.

Bài 3. Tìm các số nguyên tố p để biểu thức $\sqrt{\dfrac{3^{p-1} - 1}{p}}$ nhận giá trị nguyên dương.

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ SỐ VÔ TỈ

LÊ VĂN QUYNH
(Phó Hiệu trưởng THCS Yên Phong, Yên Phong, Bắc Ninh)

Các dạng toán về số vô tỉ xuất hiện nhiều trong các đề thi học sinh giỏi, đề thi vào lớp 10 THPT. Bài viết này giúp chúng ta có phương pháp để giải một số dạng toán về số vô tỉ. Sau đây là một số định nghĩa và nhận xét.

+ Số hữu tỉ là số viết được dưới dạng $\frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên và $b \neq 0$.
+ Số vô tỉ là các số thập phân vô hạn không tuần hoàn.
+ Nếu x là số nguyên dương không là số chính phương thì $\sqrt{x}$ là số vô tỉ.
+ Nếu x là số tự nhiên và $\sqrt{x}$ là số hữu tỉ thì x là số chính phương.
+ Trong các bài toán sau ta thường biến đổi các đẳng thức trong giả thiết về dạng $a\sqrt{n} = b$, với n là số tự nhiên không là số chính phương và a, b là số hữu tỉ. Từ đó suy ra $a = b = 0$.

Sau đây là một số bài toán minh họa:

Dạng 1. Chứng minh một số là số hữu tỉ hay là số vô tỉ

Bài toán 1. Chứng minh rằng tổng của một số hữu tỉ và một số vô tỉ là số vô tỉ.

Lời giải. Giả sử tổng của một số hữu tỉ và một số vô tỉ là số hữu tỉ.
Gọi a là số hữu tỉ và b là số vô tỉ.
Đặt $c = a + b$ thì $b = c - a$.
Vì a và c là số hữu tỉ nên b là số hữu tỉ (mâu thuẫn với điều giả sử).
Vậy tổng của một số hữu tỉ và một số vô tỉ là số vô tỉ.

Bài toán 2. Chứng minh rằng $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ là số vô tỉ.

Lời giải. Giả sử $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ là số hữu tỉ.
Đặt $x = \sqrt{1+\sqrt{3}}$, ta có $1+\sqrt{3} = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{3} = x^2 - 1$.
Vì $x \in \mathbb{Q}$, $1 \in \mathbb{Q}$ nên $\sqrt{3} = x^2 - 1 \in \mathbb{Q}$ (vô lí vì 3 không phải là số chính phương nên $\sqrt{3}$ là số vô tỉ).
Do đó điều giả sử là sai.
Vậy $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ là số vô tỉ.

Bài toán 3. Chứng minh rằng $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ là số vô tỉ.

Lời giải. Giả sử $a = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ là số hữu tỉ.
Suy ra $\sqrt{2}+\sqrt{3} = a - \sqrt{5}$

$$\Rightarrow (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = (a-\sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow 5 + 2\sqrt{6} = a^2 + 5 - 2a\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} + a\sqrt{5} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow (\sqrt{6}+a\sqrt{5})^2 = \left(\frac{a^2}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{30} = \frac{\frac{a^4}{4} - 6 - 5a^2}{2a}.$$

Suy ra $\sqrt{30}$ là số hữu tỉ. (vô lí vì $\sqrt{30}$ là số vô tỉ). Do đó điều giả sử là sai.
Vậy $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ là số vô tỉ.

Dạng 2. Tìm số hữu tỉ thỏa mãn điều kiện cho trước

Bài toán 4. Tìm các số hữu tỉ a và b thỏa mãn: $\frac{3}{a+b\sqrt{3}} - \frac{2}{a-b\sqrt{3}} = 7 - 20\sqrt{3}$.

Lời giải. ĐKXĐ $a \neq \pm b\sqrt{3}$.

Ta có $\frac{3}{a+b\sqrt{3}} - \frac{2}{a-b\sqrt{3}} = 7 - 20\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{3(a-b\sqrt{3}) - 2(a+b\sqrt{3})}{(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})} = 7 - 20\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a-3b\sqrt{3}-2a-2b\sqrt{3}}{a^2-3b^2}=7-20\sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow a-5b\sqrt{3}=(a^2-3b^2)(7-20\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow a-5b\sqrt{3}=7a^2-20a^2\sqrt{3}-21b^2+60b^2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow (60b^2-20a^2+5b)\sqrt{3}=a-7a^2+21b^2$. (1)

- Nếu $60b^2-20a^2+5b\neq 0$ thì từ (1) suy ra

$\sqrt{3}=\dfrac{a-7a^2+21b^2}{60b^2-20a^2+5b}\in\mathbb{Q}$ (vô lí).

- Nếu $60b^2-20a^2+5b=0$ thì từ (1) suy ra

$$\begin{cases}60b^2-20a^2+5b=0\\ a-7a^2+21b^2=0.\end{cases}$$

Giải hệ trên ta được (a; b) = (7; 4) (thỏa mãn).
Vậy (a; b) = (7; 4).

Bài toán 5. Tìm các số tự nhiên a và b thỏa mãn $\sqrt{a\sqrt{7}}-\sqrt{b\sqrt{7}}=\sqrt{11\sqrt{7}-28}$.

Lời giải. ĐKXĐ $a, b\geq 0$.

Ta có $\sqrt{a\sqrt{7}}-\sqrt{b\sqrt{7}}=\sqrt{11\sqrt{7}-28}$

$\Rightarrow a\sqrt{7}+b\sqrt{7}-2\sqrt{7ab}=11\sqrt{7}-28$

$\Rightarrow a+b-2\sqrt{ab}=11-4\sqrt{7}$

$\Rightarrow a+b-11=2\sqrt{ab}-4\sqrt{7}$ (*)

$\Rightarrow (a+b-11)^2=(2\sqrt{ab}-4\sqrt{7})^2$

$\Rightarrow (a+b-11)^2=4ab-16\sqrt{7ab}+112$

$\Rightarrow \sqrt{7ab}=\dfrac{4ab+112-(a+b-11)^2}{16}$. (1)

Ta lại có $\dfrac{4ab+112-(a+b-11)^2}{16}\in\mathbb{Q}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra 7ab là số chính phương.

Đặt $ab=7t^2\ (t\in\mathbb{N})$.

Thay $ab=7t^2$ vào (*) ta được

$a+b-11=2t\sqrt{7}-4\sqrt{7}$

$\Rightarrow (2t-4)\sqrt{7}=a+b-11$. (3)

- Nếu $t\neq 2$ thì từ (3) suy ra

$\sqrt{7}=\dfrac{a+b-11}{2t-4}\in\mathbb{Q}$ (Vô lí, vì $\sqrt{7}$ là số vô tỉ).

- Nếu $t=2$ thì từ (3) suy ra

$$\begin{cases}2t-4=0\\ a+b-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\ a+b-11=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ab=28\\ a+b-11=0.\end{cases}$$

Giải hệ trên ta được (a; b) = (7; 4) (thỏa mãn).
Vậy (a; b) = (7; 4).

Bài toán 6. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (x; y; z) thỏa mãn $\dfrac{x+y\sqrt{2013}}{y+z\sqrt{2013}}$ là số hữu tỉ đồng thời $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố.

Lời giải. Ta có $\dfrac{x+y\sqrt{2013}}{y+z\sqrt{2013}}$ là số hữu tỉ nên

ta đặt $\dfrac{x+y\sqrt{2013}}{y+z\sqrt{2013}}=\dfrac{m}{n}$ $(m, n\in\mathbb{N}^*, (m, n)=1)$.

Suy ra $nx-my=\sqrt{2013}(mz-ny)$. (1)

- Nếu $mz-ny\neq 0$ thì từ (1), suy ra

$\sqrt{2013}=\dfrac{nx-my}{mz-ny}\in\mathbb{Q}$ (vô lí, vì $\sqrt{2013}$ là số vô tỉ).

- Nếu $mz-ny=0$ thì từ (1), suy ra

$$\begin{cases}nx-my=0\\ mz-ny=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}nx=my\\ mz=ny\end{cases}$$

$\Rightarrow mnxz=mny^2\Rightarrow xz=y^2$.

Ta lại có $x^2+y^2+z^2=(x+z)^2-2xz+y^2$

$=(x+z)^2-y^2=(x+y+z)(x-y+z)$.

Vì $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố và $x+y+z$ là số nguyên lớn hơn 1 nên $x-y+z>0$.

Suy ra $x-y+z=1$ và $x+y+z$ là số nguyên tố. Do đó $x^2+y^2+z^2=x+y+z$.

Vì x, y, z là các số nguyên dương nên
$x^2\geq x,\ y^2\geq y,\ z^2\geq z$.

Suy ra $x^2+y^2+z^2\geq x+y+z$.

Đẳng thức xảy ra khi $x^2=x,\ y^2=y,\ z^2=z$.

Suy ra $x=y=z=1$. Thử lại thấy đúng.

Vậy (x; y; z) = (1; 1; 1).

Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho phương trình

$x^3+ax^2+bx-1=0$.

Tìm các số hữu tỉ a, b sao cho phương trình có nghiệm là $x=2-\sqrt{3}$.

Bài 2. Tìm số nguyên m để $\sqrt{m^2+m+23}$ là số hữu tỉ.

Bài 3. Giải phương trình nghiệm nguyên

$\dfrac{11}{5}x-\sqrt{2x+1}=3y-\sqrt{4y-1}+2$.

MỘT DẠNG TOÁN SỬ DỤNG ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

TS. LÊ THỐNG NHẤT và Nhà giáo NGUYỄN ĐỨC TẤN

Điều kiện có nghiệm thực của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ là $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. Ý nghĩa của điều kiện này không chỉ để đặt điều kiện cho phương trình bậc hai có nghiệm mà còn được sử dụng trong những dạng toán liên quan đến tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 1. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = xy - x + 2y$. (1). Chứng minh rằng $\frac{-2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Phân tích. *Chúng ta cần dẫn đến bất đẳng thức đánh giá ẩn x. Bởi vậy viết hệ thức (1) đã cho thành phương trình bậc hai ẩn y, lúc này biệt thức Δ chỉ chứa x, và ta sử dụng điều kiện $\Delta \geq 0$ để suy ra điều kiện của x.*

Lời giải. Phương trình (1) tương đương với

$y^2 - (x + 2)y + x^2 + x = 0$. (2)

Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta = (x + 2)^2 - 4(x^2 + x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{-2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Nhận xét. Đổi vai trò của x và y ta cũng có $\frac{-2\sqrt{3}}{3} \leq y \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Hơn nữa từ điều vừa chứng minh, x và y chỉ có thể nhận các giá trị nguyên là 0; 1; –1. Như vậy ta có ngay lời giải cho bài toán sau:

"Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = xy - x + 2y$".

Bài toán 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $y = \frac{x+1}{x^2+x+1}$. (1)

Phân tích. *Ta đưa (1) về dạng phương trình bậc hai ẩn x, qua đó đánh giá y thông qua điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai này.*

Lời giải. Ta có $x^2 + x + 1 > 0$ $\forall x$ vì vậy phương trình (1) tương đương với

$yx^2 + (y - 1)x + y - 1 = 0$. (2)

* Nếu $y = 0$ thì (2) có nghiệm $x = -1$.

* Nếu $y \neq 0$, phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = (y - 1)^2 - 4y(y - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (y - 1)(-1 - 3y) \geq 0$.

$\Leftrightarrow \frac{-1}{3} \leq y \leq 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của y là 1 đạt được khi $x = 0$ và giá trị nhỏ nhất của y là $\frac{-1}{3}$ đạt được khi $x = -2$.

Bài toán 3. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4xy + 5x - 10y + 2z - 5$. (1) Chứng minh rằng $1 \leq x - 2y \leq 4$.

Phân tích. *Ta cần đánh giá $x - 2y$, do đó ta đưa (1) về phương trình bậc hai ẩn z rồi tiếp tục sử dụng điều kiện $\Delta \geq 0$.*

Lời giải. Phương trình (1) tương đương với

$z^2 - 2z + (x - 2y)^2 - 5(x - 2y) + 5 = 0$.

Đặt $t = x - 2y$ ta được

$z^2 - 2z + t^2 - 5t + 5 = 0$. (2)

Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - (t^2 - 5t + 5) \geq 0$

$\Leftrightarrow (t - 1)(t - 4) \leq 0$

$\Leftrightarrow 1 \leq t \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq x - 2y \leq 4$.

Bài toán 4. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a^2 + 4b^2 = 1$. Chứng minh rằng $|a - b| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Phân tích. *Bài toán chỉ có hai ẩn a, b và ta cần đánh giá biểu thức a – b. Ta sẽ đưa thêm ẩn t = a – b để đưa về bài toán xuất hiện ẩn t và một trong hai ẩn a, b.*

Lời giải. Đặt $t = a - b \Leftrightarrow a = t + b$.

Theo giả thiết $a^2 + 4b^2 = 1$ nên

$(t + b)^2 + 4b^2 = 1 \Leftrightarrow 5b^2 + 2tb + t^2 - 1 = 0$. (1)

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 5(t^2 - 1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow t^2 \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow |t| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow |a-b| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Bài toán 5. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c=4 \\ ab+bc+ca=5. \end{cases}$

Chứng minh rằng $\frac{2}{3} \leq a,b,c \leq 2$.

Phân tích. *Vì vai trò của a, b, c là bình đẳng, nên nếu coi hai số b và c là ẩn và a là tham số, ta có thể đưa về phương trình bậc hai nhờ vào định lí Vi-ét. Từ đó sử dụng điều kiện phương trình có nghiệm để tạo ra bất đẳng thức đánh giá cho số a.*

Lời giải. Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} b+c=4-a \\ bc=5-a(b+c) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+c=4-a \\ bc=a^2-4a+5. \end{cases}$$

Theo định lí Vi-ét thì b và c là hai nghiệm của phương trình $x^2 - (4 - a)x + a^2 - 4a + 5 = 0$. (1)

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta = (4 - a)^2 - 4(a^2 - 4a + 5)$

$= -3a^2 + 8a - 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 2)(3a - 2) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq a \leq 2.$$

Chứng minh tương tự ta được $\frac{2}{3} \leq b,c \leq 2$.

Vậy $\frac{2}{3} \leq a, b, c \leq 2$.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

a) $y = \dfrac{2x+3}{x^2+2x+3}$;

b) $y = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 = 1$ thì $-\sqrt{2} \leq a-b \leq \sqrt{2}$.

Bài 3. Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn

a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=3; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=6. \end{cases}$

Bài 4. Cho $x \geq 1$ và $y \geq 0$ thỏa mãn $y^2\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=y$.

Chứng minh rằng $x \leq \frac{5}{4}$.

Bài 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + 5y^2 + 4xy - 2x + 6y$.

Bài 6. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 4y^2 = 25$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = x + 2y$.

LƯỢC SỬ BÀI TOÁN "VỪA GÀ - VỪA CHÓ"

TẠ DUY PHƯỢNG *(Viện Toán học, Hà Nội)*
ĐOÀN THỊ LỆ *(Đại học Thanh Hoa, Đài Loan)*
CUNG THỊ KIM THÀNH, PHAN THỊ ÁNH TUYẾT

1. Nhập đề

Bài toán.

"Vừa gà vừa chó
Bó lại cho tròn
Ba mươi sáu con
Một trăm chân chẵn
Hỏi có bao nhiêu gà, chó?"

Bài toán trên vốn có nguồn gốc từ Trung Hoa, nhưng khá quen thuộc với học sinh Việt Nam. Bài toán này cũng đã đi vào trong sinh hoạt văn hóa của người Việt dưới dạng *toán đố*, và đi vào các sách toán phổ thông dưới dạng *toán-thơ*. Nó có một lịch sử lâu đời và nay vẫn là nguồn cảm hứng nghiên cứu của các nhà toán học (xem thí dụ [2]). Bài viết này sơ lược điểm qua đôi nét lịch sử của bài toán "*Vừa gà vừa chó*".

2. Lịch sử

Gốc của bài toán này có thể tìm thấy trong *Tôn tử toán kinh*, một cuốn sách có lẽ được viết vào thời Nam-Bắc triều (nhà Tấn, thế kỉ V). Trong *Tôn tử toán kinh*, Quyển Hạ có bài toán sau:

Kim hữu kê
Thố đồng lung
Thượng hữu tam thập ngũ đầu
Hạ cửu thập tứ túc
Vấn kê, thố các kỉ hà?

Dịch. Nay có gà, thỏ chung lồng, trên có 35 đầu, dưới 94 chân. Hỏi gà, thỏ mỗi loại bao nhiêu?

Đáp số. Gà 23 con, thỏ 12 con.

Giải. Trên có 35 đầu, dưới có 94 chân. Chia đôi số chân của chúng, được 47. Lấy tổng số chân là 94 trừ với số vừa chia cho 2 có được là 47, sau đó trừ đi số đầu 35 thì có được số thỏ, từ đó tính được số gà.

Giải thích. Bài toán này đã được giải bằng *Phương pháp giả thiết tạm*: Giả sử tất cả là gà. Vậy sẽ có 47 con. Nhưng chỉ có 35 đầu. Vậy số chênh lệch $47 - 35 = 12$ chính là số thỏ.

Cấu trúc của các sách toán cổ Trung Hoa (và Việt Nam) thường là: Phát biểu bài toán, Đáp số, Lời giải.

Bài toán này có lẽ cũng được nhắc lại trong nhiều cuốn sách toán Trung Hoa khác. Thí dụ, trong *Tăng bổ toán pháp thống tông*, được bổ sung (tăng bổ) từ cuốn sách *Toán pháp thống tông* của Trình Đại Vị (in lần đầu năm 1592) cũng phát biểu lại bài toán này với đúng số liệu như trên. Tuy nhiên lời giải có khác đôi chút như sau:

Lấy tổng số đầu, nhân đôi, được 70. Lấy tổng số chân, trừ đi 70, còn dư 24, chia đôi, được 12, là số thỏ. Lấy 4 chân nhân với nó (với 12), được 48 chân. Lấy tổng số chân, trừ đi nó (trừ 48), còn dư 46, là số chân gà, chia đôi, được 23 con, hợp với bài ra.

3. Các sách toán Hán Nôm Việt Nam

Chúng tôi tra cứu được ba cuốn sách toán Hán Nôm của Việt Nam sau đây có bài toán dạng *Vừa gà vừa chó*.

3.1. Ý Trai toán pháp nhất đắc lục (Nguyễn Hữu Thận, 1829, [3], Quyển 6).

Bài toán. Thiết hữu kê thố đồng lung, đãn tri đầu cộng tam thập lục, túc cộng nhất bách, vấn kê thố các kỉ hà?

Dịch. Giả sử có gà và thỏ nhốt chung lồng, chỉ biết tổng số đầu là 36, tổng số chân là 100. Hỏi số gà và thỏ mỗi loại là bao nhiêu?

Giải. ([3] Quyển 6): Lấy số chân gà 2 chân và thỏ 4 chân trừ đi nhau, còn 2 làm phép *thông nhau* (làm ước chung). Nếu cần tìm số thỏ trước, lấy gà 2 chân nhân với tổng số là 36, được 72 chân. Lấy tổng số chân 100 trừ đi, còn 28 chân là số chân thỏ. Dùng phép *thông nhau* là chia nó cho 2, được thỏ 14 con. Biết số thỏ thì có thể biết số gà. Nếu cần tìm số gà trước, lấy thỏ 4 chân nhân với tổng số là 36, được 144 chân. Lấy tổng số chân trừ đi 100, còn 44 chân là số chân gà. Dùng phép *thông nhau* là chia nó cho 2, được gà 22 con. Biết số gà thì có thể biết số thỏ.

Phép tính này dùng số gà tìm số thỏ, thử dùng (giả thiết tạm) 36 đều là gà, thì số chân tương ứng là 72. Ta có tổng số chân là 100 thì thừa ra 28, ắt có những con thỏ 2 chân. Cho nên dùng phép chia cho 2, cũng là chia nửa mà được số thỏ là 14. Cách dùng số thỏ tìm số gà cũng vậy, nghĩa của nó đã rất rõ, không cần giải thích lại.

3.2. Lập thành toán pháp

Phép toán gà thỏ ([4], trang 21b)
Nay có gà và thỏ ở chung một lồng. Trên thì thấy 81 đầu. Dưới thì thấy 190 chân. Hỏi số gà, số thỏ là bao nhiêu?

Đáp số. Số gà 67, số thỏ 14.

Cách làm. Trên bày số đầu. Dưới bày số chân rồi chia đôi. Rồi lấy dưới trừ trên thành thỏ. Từ đó tìm được số gà.

Giải thích. *Giả thiết tạm* tất cả là gà. Lấy 190 chia đôi, được 95 (gà). Nhưng chỉ có 81 đầu. Lấy 95 trừ 81 được số thỏ là 14. Lấy 81 trừ 14 được số gà là 67.

3.3 Bút toán chỉ nam (Nguyễn Cẩn, 1909, [1]).

Đệ cửu đề. Kê khuyển cộng tam thập lục, đầu chủy hợp hữu bách túc? Vấn kê thiên khuyển thiên?

Đề số 9. Gà chó cộng lại được 36 con, 100 chân. Hỏi số gà bao nhiêu, chó bao nhiêu?

Đáp. Kê nhị thập nhị chủy khuyển thập tứ đầu.

Đáp. Gà 22 con, chó 14 con.

Phép tính như sau. Đầu tiên lấy số gà 2 chân hợp với chó 4 chân được 6 chân. Chia trung bình ra được 3 chân. Lấy 36 nhân với nó được 108. Lấy 100 chân trừ đi số đó thì kém 8. Đặt làm thực (làm số bị chia). Lại lấy gà 2 chân trừ đi chó 4 chân thì kém 2. Làm phép quy trừ được số 4 (lấy 8 chia 2 được 4, chính là số chênh lệch giữa gà và chó). Sau đó lấy 36 lại chia trung bình, mỗi thứ được 18. Lấy 18 trừ cho 4 được số chó là 14. Lấy 4 thêm 18 được số gà là 22.

Giải thích. *Giả thiết tạm* gà và chó có số chân bằng nhau là 3. Khi ấy số chân phải là $36 \times 3 = 108$. Nhưng chỉ có 100 chân, vậy thừa ra 8 chân. Số chân gà và chó lệch nhau là 2, lấy 8 chia 2, được 4, chính là số chênh lệch giữa gà, chó và số trung bình cộng. Sau đó lấy 36 lại chia trung bình, mỗi thứ được 18. Lấy 18 trừ cho 4 được số chó là 14. Lấy 4 thêm 18 được số gà là 22.

Lời bình 1. Lời giải trong *Tôn tử toán kinh*, *Tăng bổ toán pháp thống tông*, *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*, *Lập thành toán pháp* và *Bút toán chỉ nam* đều dựa trên *Phương pháp giả thiết tạm*. Cách giải trong *Bút toán chỉ nam* có mới so với các sách cũ, nhưng theo chúng tôi, không hay bằng (khó giải thích hơn).

Lời bình 2. Trong hai cuốn sách của Việt Nam cũ hơn (*Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* và *Lập thành toán pháp*), bài toán vẫn được phát biểu dưới dạng *vừa gà vừa thỏ*, như trong các sách toán Trung Hoa. Có lẽ Nguyễn Cẩn là người đầu tiên phát biểu bài toán dưới dạng *vừa gà vừa chó*, cho hợp với người Việt Nam hơn (*chó* là bạn của người Việt trong mỗi gia đình Việt, gần gũi hơn *thỏ*). Tuy nhiên, bài toán vẫn được phát biểu ở dạng văn xuôi. Tài liệu nào đầu tiên chuyển thể bài toán “vừa gà vừa chó” sang dạng thơ? Đây là câu hỏi, theo chúng tôi, là thú vị. Chúng ta sẽ tìm hiểu trong các số báo tiếp theo.

Tài liệu trích dẫn

[1] 阮 瑾 Nguyễn Cẩn, 筆 算 指 南 *Bút toán chỉ nam*, Hà Nội, 1909), Thư viện Hán Nôm: A. 1031.

[2] Nguyễn Đăng Phất, *Suy ngẫm quanh một bài toán đố cổ*, Tạp chí Toán Tuổi thơ 1; Tạp chí Toán Tuổi thơ 2, số 123.

[3] 阮 有 慎 Nguyễn Hữu Thận, 意 齋 算 法 一 得 錄 *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* (1829), Thư viện Hán Nôm: A.1336; VHv.1184; A. 982; A.1336/a.

[4] *Lập thành toán pháp*, 立 成 算 法, Không rõ tác giả, Thư viện Hán Nôm, Vhv 497.

AUSTRALIAN MATHEMATICS COMPETITION AMC 2018

UPPER PRIMARY DIVISION

AUSTRALIAN SCHOOL YEARS 5 AND 6

Time allowed: 60 *minutes*

ĐỖ TRUNG KIÊN *(Sưu tầm và giới thiệu)*

Questions 1 to 10, 3 marks each

1. Which one of these numbers is closest to 208?

(A) 190 (B) 200 (C) 205 (D) 210 (E) 218

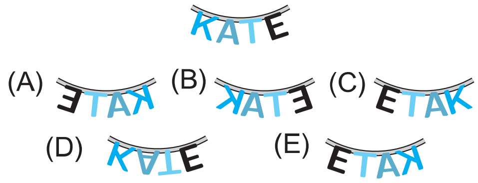
2. Callie has $47 and then gets $25 for her birthday. How much does she have now?

(A) $52 (B) $62 (C) $65 (D) $69 (E) $72

3. Which one of the following numbers is a multiple of 8?

(A) 18 (B) 28 (C) 38 (D) 48 (E) 58

4. Kate made this necklace from alphabet beads. She put it on the wrong way around, showing the back of the beads. What does this look like?



5. Write the number for eight thousand, eight hundred and eight.

(A) 88008 (B) 80808 (C) 80088
(D) 888 (E) 8808

6. Jane has a number of 20c coins and Tariq has a number of 50c coins. They have the same amount of money. What is the smallest number of coins they could have all together?

(A) 2 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 10

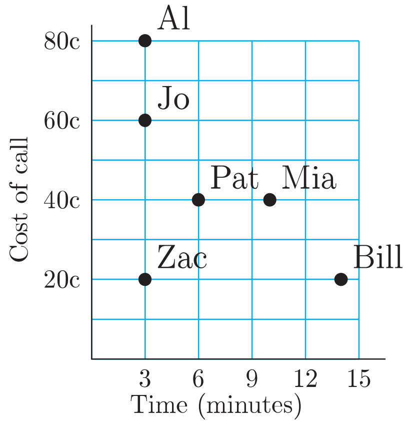
7. Mrs Chapman put 58 books back on the library shelves. She put 12 books on each shelf except the last shelf. How many books did she put on the last shelf?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

8. A shopkeeper displays plastic cups like this. Each level has one less than the level below it, and the top level has only one cup.
She keeps this pattern going until she has 28 cups. How many levels is this?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

9. Six friends each make a phone call to another city.
The cost of each call depends on the time taken for the call as well as the distance.



From this diagram decide whose phone call lasts longer than Pat's, but costs less.

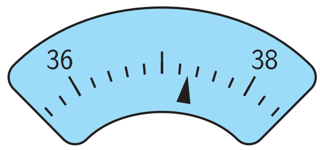
(A) Al (B) Bill (C) Jo
(D) Mia (E) Zac Cost of call

10. Aimee, Bilal and Caitlin are comparing their ages. Aimee is 8 years old. In three years time, Bilal will be 9. Two years ago, Caitlin was 5. Ordered from youngest to oldest, they are

(A) Aimee, Bilal, Caitlin (B) Bilal, Caitlin, Aimee
(C) Caitlin, Aimee, Bilal (D) Bilal, Aimee, Caitlin
(E) Aimee, Caitlin, Bilal

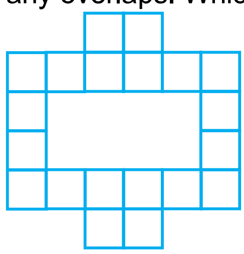
Questions 11 to 20, 4 marks each

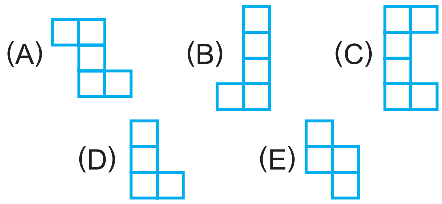
11. What value is indicated on this popularity meter?



(A) 36.65 (B) 37.15 (C) 37.3
(D) 37.65 (E) 38.65

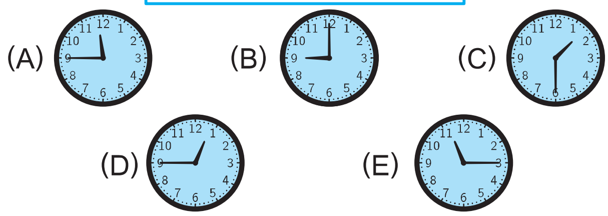
12. One of these shapes made of squares has been flipped and turned to make the following pattern, without any overlaps. Which one?



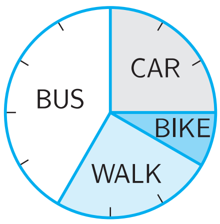


13. Fred looked at the clock during the Library lesson. Which one of these times could the clock have shown?

Friday timetable	
9.00 am	English
10.00 am	Mathematics
11.00 am	Recess
11.30 am	Library
12.30 pm	Assembly
1.00 pm	Lunch
2.00 pm	Sport

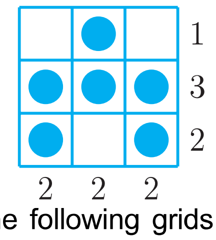


14. Last year Alan worked 5 days a week for 48 weeks. The graph shows how Alan travelled to work each day. On how many days did Alan travel by bus?

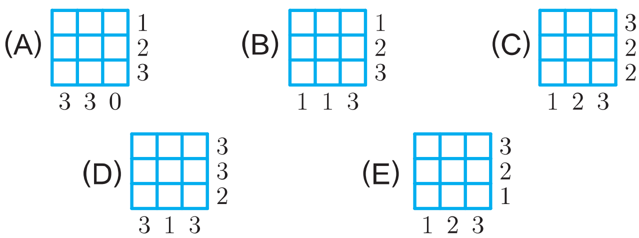


(A) 20 (B) 80 (C) 100 (D) 140 (E) 240

15. In this grid, each number at the end of a row or below a column indicates how many squares in that row or column contain a counter.



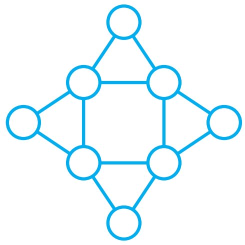
Which one of the following grids could also have counters with these rules?



16. To send large parcels overseas, it costs \$24 for the first 10 kg and \$8 for each extra 5 kg or part thereof. How much would it cost to send a 28 kg parcel overseas?

(A) \$48 (B) \$52 (C) \$56 (D) \$60 (E) \$64

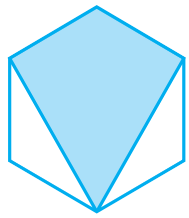
17. The numbers from 1 to 3 are entered into the circles in the grid shown. Two circles joined by a line may not contain the same number.



There are several ways of doing this. What is the smallest possible total of the eight numbers?

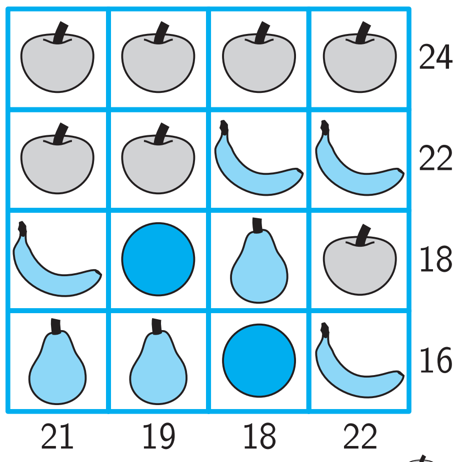
(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 16

18. What fraction of this regular hexagon is shaded?



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{4}{5}$

19. Pictures of fruit have been placed in this grid to represent numbers less than 10.
The totals for each row and column are shown.



What is the total value of an apple and an orange?

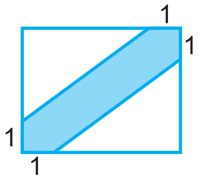
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

20. Andrew is doing some tidying. He can tidy 2 big rooms in the same time it takes to tidy 3 small rooms. He can tidy one big room and three small rooms in 90 minutes.
How long will it take him to tidy 3 big rooms and 6 small rooms?

(A) 3.5 hours (B) 4 hours (C) 4.5 hours
(D) 5 hours (E) 5.5 hours

Questions 21 to 25, 5 marks each

21. A rectangle measures 3 cm by 4 cm. A diagonal stripe is shaded which starts 1 cm from the diagonal corners, as in the diagram.
What fraction of the area of the rectangle is this shaded strip?

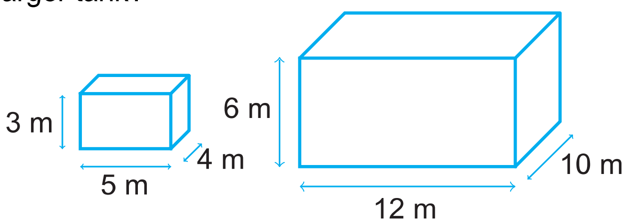


(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{2}{5}$

22. Beginning with a row of 20 coins, Anh takes the first coin, then every fourth coin after that.

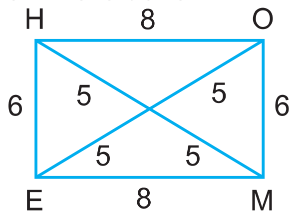
From the remaining coins, Brenda takes the first coin and every third coin after that.
From the remaining coins, Chen takes the first coin and every second coin after that.
Dimitris takes all the remaining coins.
Does anyone get more coins than all the others?
(A) Yes, Anh does (B) Yes, Brenda does
(C) Yes, Chen does (D) Yes, Dimitris does
(E) No, they all get the same number of coins

23. These two water tanks are to be filled. A hose used to do this can fill the smaller tank in 2 hours. How many hours will the same hose take to fill the larger tank?



(A) 4 (B) 6 (C) 9 (D) 12 (E) 24

24. A farmer has a rectangular property 8 km by 6 km, with fencing along the boundary and diagonal fences as shown. One day she leaves her farmhouse at H to inspect all her fences, returning home to H when this is done.



What is the minimum distance, in kilometres, she must travel to do this?
(A) 48 (B) 58 (C) 59 (D) 60 (E) 64

25. What is the sum of the digits in the result of the subtraction

$$\underbrace{111...111}_{20 \text{ digits}} - \underbrace{222...222}_{10 \text{ digits}}$$

where the first number has 20 digits each 1, and the second has 10 digits, each 2?
(A) 72 (B) 81 (C) 89 (D) 90 (E) 99

For questions 26 to 30, shade the answer as a whole number from 0 to 999 in the space provided on the answer sheet.
Questions 26–30 are worth 6, 7, 8, 9 and 10 marks, respectively.

26. In the algorithm below, the letters a, b and c represent diferent digits from 0 to 9.
What is the three-digit number abc?

$$\begin{array}{rrrrr} & & & & a \\ & & & a & b \\ & & a & b & c \\ + & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 8 \end{array}$$

27. Using only digits 0, 1 and 2, this cube has a diferent number on each face.
Numbers on each pair of opposite faces add to the same 3-digit total.
What is the largest that this total could be?

28. I wrote the counting numbers joined together:
1234567891011121314151617 . . .
Which of the counting numbers was I writing when the 100th zero was written?

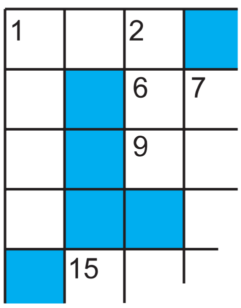
29. Jan and Jill are both on a circular track.
Jill runs at a steady pace, completing each circuit in 72 seconds.
Jan walks at a steady pace in the opposite direction and meets Jill every 56 seconds.
How long does it take Jan to walk each circuit?

30. The answer to a cross-number puzzle clue is a whole number (not word).
A fragment of such a puzzle is shown. Some clues are:

Across
1. Square of 27-down.
6. Half of 1-across.

Down
1. Twice 2-down.
2. A multiple of 9.

What is 2-down?



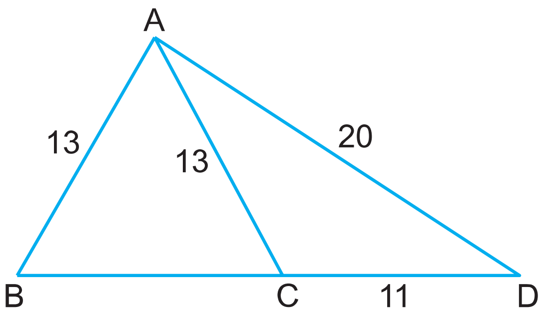
ĐỀ TỰ LUYỆN CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC

VÕ XUÂN MINH
(GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Câu 1. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia hết cho 18 và tất cả các chữ số đều chẵn.

Câu 2. Cho biết $A + 2B = 3C$ và $5B + C = 3A$. Tính giá trị biểu thức $\frac{A}{B+C}$ $(B + C \neq 0)$.

Câu 3. Cho hình vẽ có AB = AC = 13 cm, CD = 11 cm, AD = 20 cm. Tính độ dài BC.



Câu 4. Tính tổng tất cả các số có 2 chữ số mà tổng 2 chữ số bằng 9.

Câu 5. Bạn An mua một quyển sách giá 50 000 đồng. Bạn An trả tiền gồm đủ 3 loại tiền với các mệnh giá 2000 đồng, 5000 đồng và 10 000 đồng. Hỏi bạn An đã trả mỗi loại mấy tờ tiền? Biết bạn An trả tất cả không quá 10 tờ tiền.

Câu 6. Có 16 đội bóng. Các đội bóng bốc thăm đấu loại trực tiếp. Sau đó các đội thắng cuộc cũng bốc thăm đấu loại trực tiếp. Hỏi:
a) Có tất cả bao nhiêu trận đấu?
b) Đội vô địch đã thi đấu bao nhiêu trận?

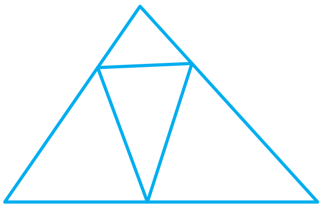
Câu 7. Tìm x và y biết $2x^2 + 4y^2 = 6x + 4y - 9$.

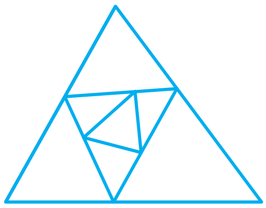
Câu 8. Tổng diện tích các mặt của một hình lập phương bằng 150 cm^2. Tính tổng độ dài các cạnh của hình lập phương đó.

Câu 9. Tìm số tiếp theo của dãy số: 1; 3; 8; 20; 48; ...

Câu 10. Giải bất phương trình $x^2 - 2x < 3$.

Câu 11. Ba đỉnh của tam giác này thuộc ba cạnh của tam giác kia gọi là hai tam giác lồng nhau.
Hai tam giác lồng nhau (hình 1) có tất cả 5 tam giác. Ba tam giác lồng nhau (hình 2) có tất cả 9 tam giác. Hỏi 5 tam giác lồng nhau có tất cả bao nhiêu tam giác?

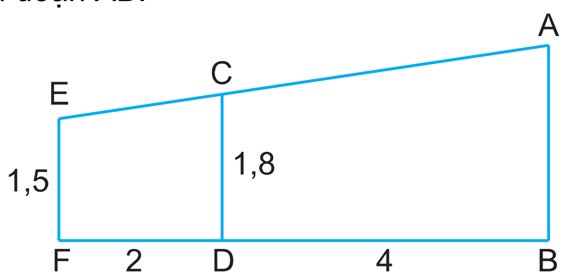

Hình 1


Hình 2

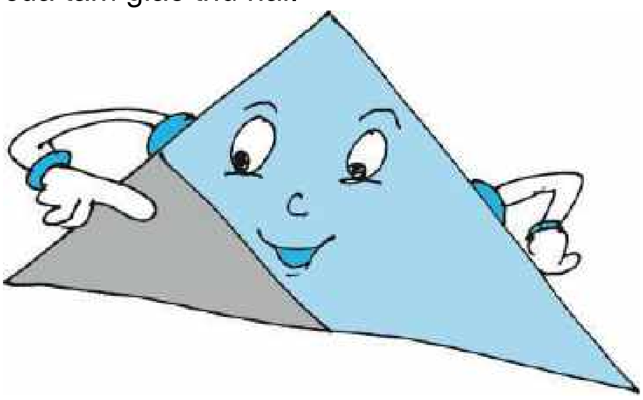
Câu 12. Chiều rộng, chiều cao, chiều dài của một hình hộp chữ nhật lần lượt tỉ lệ với 3, 4, 5. Tổng diện tích 6 mặt của hình hộp đó bằng 376 cm^2. Tính thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

Câu 13. Tìm các số tự nhiên x và y thỏa mãn $x > y > 1$ và $x^y.y^x = 5184$.

Câu 14. Cho hình vẽ biết EF = 1,5 m; CD = 1,8 m; FD = 2 m; DB = 4 m. Các đoạn thẳng EF, CD, AB vuông góc với FB. Tính độ dài đoạn AB.



Câu 15. Cho hai tam giác đồng dạng với nhau. Tam giác thứ nhất có số đo ba cạnh lần lượt là 4,5 cm; 6 cm và 7,5 cm. Tam giác thứ hai có diện tích là 54 cm^2. Tính các cạnh của tam giác thứ hai.



Thì thầm... Thì thầm thôi...

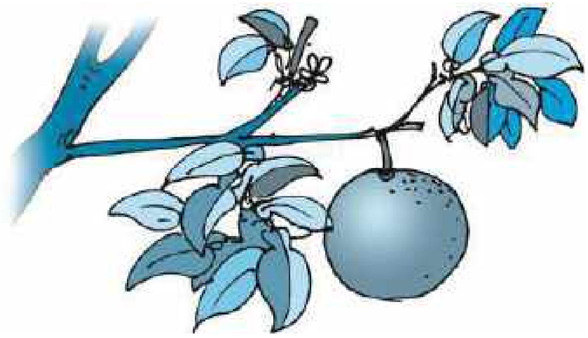
Tuổi hồng... xin cứ tuổi hồng
Chuyện gì quá sớm... xin không trả lời

Hỏi: Bài kiểm tra đầu năm em đã bị điểm kém. Theo anh có nên buồn không?

HỒ THỊ H
(PTCS Hồ Tùng Mậu, Quỳnh Đôi, Quỳnh Lưu, Nghệ An)

Đáp:

Có chăng chỉ một chút buồn
Hàng ngày em nhớ chăm ôn luyện bài
Thời gian thì vẫn còn dài
Điểm cao sẽ đến theo tài của em.

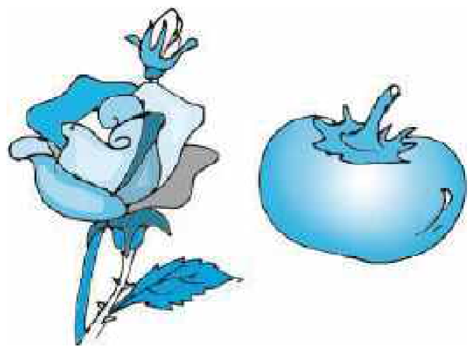


Hỏi: Anh ơi! Cây chanh thì cho hoa chanh, quả chanh. Cây bưởi cho hoa bưởi, quả bưởi. Có khi nào tên hoa giống nhau mà không ở cùng một cây không?

LÊ XUÂN TIẾN
(Một trường THCS ở Thọ Xuân, Thanh Hóa)

Đáp:

Nghĩ mãi hoa, quả thân quen
Khác cây mà lại cùng tên lạ đời
Hoa hồng mầu sắc đẹp tươi
Quả hồng trái ngọt, mọi người đều mê.



Hỏi: Em là học sinh giỏi liên tục các năm học. Sách giáo khoa em giữ gìn cẩn thận để dành cho em em học nhưng "nó" cứ đòi mẹ em mua sách mới. Thế có hư không anh?

ĐẶNG THÀNH CÔNG
(TP. Vinh, Nghệ An)

Đáp:

Đừng nói là "nó" hư ghê!
Mới thì ai cũng dễ mê, muốn xài
Khuyên em phải thật êm tai:
"Sách anh trao tặng lây tài sang em..."

Hỏi: Anh ơi! Trường em tổ chức Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ nhưng em chưa tham gia. Theo anh tham gia thì được gì ạ?

Em gái hay xấu hổ
(THCS Ban Mai, Hà Nội)

Đáp:

Muốn sáng thì ở gần đèn
Xin đừng xấu hổ, sẽ quen thôi mà
Được gì khi sẽ tham gia
Được vui, được học để mà giỏi hơn!

ANH PHÓ GỠ XƯA

CÁC LỚP 6 & 7

Bài 1(188+189). Tìm các số nguyên x sao cho $\dfrac{x-1}{9x+7}$ là bình phương của một phân số.

LẠI QUANG THỌ

(Phòng GD-ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

Bài 2(188+189). Tìm các chữ số x, y, z, t, u thỏa mãn $(\overline{xy}+\overline{ztu})^2=\overline{xyztu}$.

TRƯƠNG QUANG AN

(GV. THCS Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài 3(188+189). Tìm số nguyên dương nhỏ nhất bằng ba lần lập phương của một số tự nhiên và bằng bốn lần lũy thừa bậc bốn của một số tự nhiên.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài 4(188+189). Cho hai tam giác ABC và ADC thỏa mãn $\widehat{BAC}, \widehat{BCA}, \widehat{DAC}, \widehat{DCA}$ đều là các góc nhọn và B, D nằm khác phía đối với AC. Biết $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$. Chứng minh rằng $AC \perp BD$.

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

SOLVE VIA MAIL COMPETITION QUESTIONS

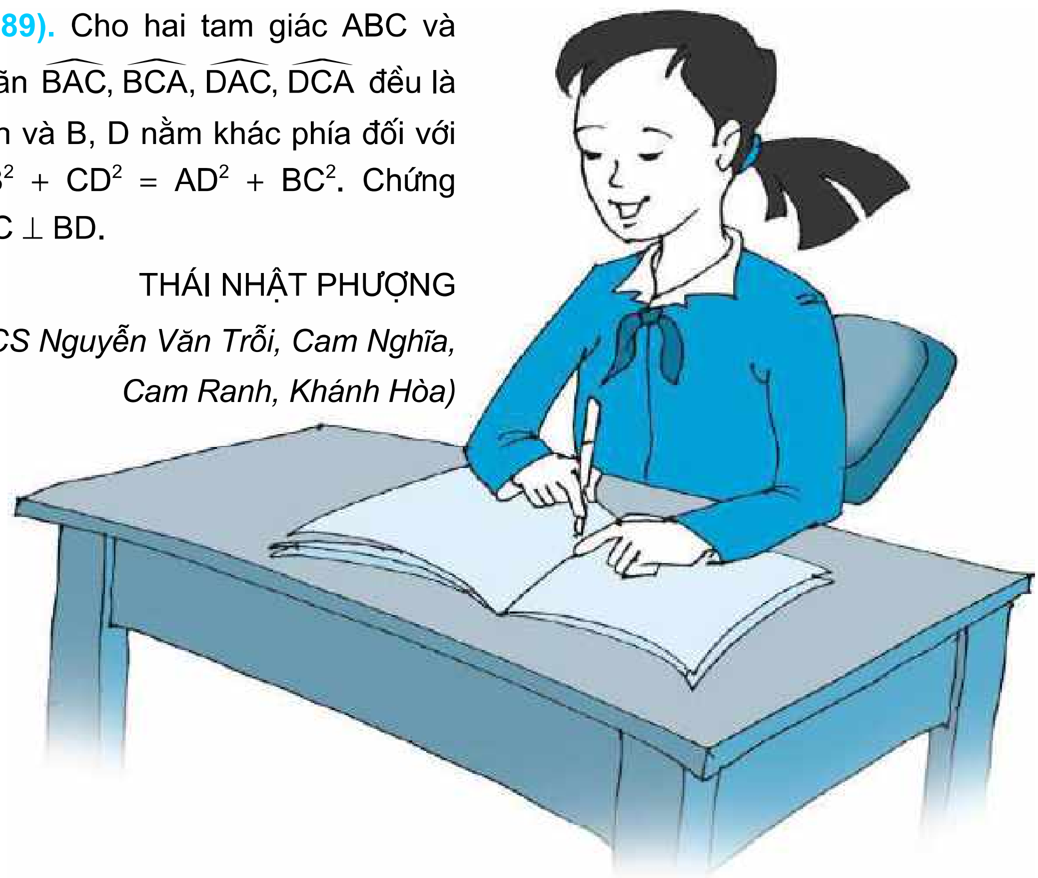
Translated by Trang Duong Thu

1(188+189). Find the integer x such that $\dfrac{x-1}{9x+7}$ is the square of a fraction.

2(188+189). Find digits x, y, z, t, u such that $(\overline{xy}+\overline{ztu})^2=\overline{xyztu}$.

3(188+189). Find the smallest positive integer equal to 3 times the cube of a whole number and 4 times the exponent of fourth of another whole number.

4(188+189). Let ABC and ADC be triangles such that $\widehat{BAC}, \widehat{BCA}, \widehat{DAC}, \widehat{DCA}$ are acute angles and B, D are on the opposite side of AC. Given that $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$, prove $AC \perp BD$.



CÁC LỚP THCS

Bài 5(188+189). Tìm các cặp số nguyên dương (a; b) thỏa mãn $9a^2b^2 - 5a + 5b$ là số chính phương và $a^{2019} = 2020b^{2018}$.

NGUYỄN NGỌC HÙNG

(GV. THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Bài 6(188+189). Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho họ đường thẳng có phương trình $y = (m - 1)x + 2m - 3$. Trong họ đường thẳng này ta chọn ra ba đường thẳng nào đó. Trong các góc (không có điểm chung trong) tạo bởi hai trong ba đường thẳng vừa chọn ta xét góc có số đo lớn nhất. Gọi x là số đo góc đó. Tìm giá trị nhỏ nhất của x.

LẠI TRƯỜNG SINH

(GV. THCS Đông Trung, Tiền Hải, Thái Bình)

Bài 7(188+189). Một ghế băng có 4 chỗ ngồi. Có 4 người lần lượt đi đến và ngồi xuống ghế băng. Người đầu tiên ngồi vào một chỗ tùy ý. Mỗi người đến sau cố gắng chọn chỗ ngồi để không phải ngồi cạnh ai cả, nếu không có chỗ ngồi nào thỏa mãn thì họ chọn một chỗ trống tùy ý để ngồi. Hỏi rằng có bao nhiêu khả năng sắp xếp chỗ ngồi cho bốn người đó phù hợp với quy tắc như vậy?

VŨ ĐÌNH HÒA *(Hà Nội)*

Bài 8(188+189). Cho tam giác ABC vuông tại C với AC = b, CB = a; AB = c. Kẻ đường trung tuyến AE, BF của ΔABC. Biết AE = m; BF = n. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Tìm giá trị lớn nhất của $A = \dfrac{r^2}{m^2 + n^2}$.

LÊ TRẦN QUỐC CẢNH

(GV. THCS Gia Lộc, Trảng Bàng, Tây Ninh)

SOLVE VIA MAIL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Trang Duong Thu

5(188+189). Find all pairs of positive integers (a; b) such that $9a^2b^2 - 5a + 5b$ be a square number and $a^{2019} = 2020b^{2018}$.

6(188+189). On Oxy co-ordinate, given lines with equation $y = (m - 1)x + 2m - 3$. In these lines, we choose 3 arbitrary lines. In these angles formed by two lines of these 3 lines which are no common interior points, we choose the angle with the greatest measure x. Find the smallest value of x.

7(188+189). A bench has 4 seats. 4 people sit in this bench. The first person sits randomly. The next three people choose the seats with no adjacent people. If they cannot find the seat they want, they will choose the vacant seats. How many ways to arrange the seats for these four people are there?

8(188+189). Let ABC be a right-angled triangle at C with AC = b, CB = a; AB = c. AE, BF are medians of triangle ABC. AE = m; BF = n. Let r be a radius of the inscribe circle of triangle ABC.

Find the greatest value of $A = \dfrac{r^2}{m^2 + n^2}$.

KHÚC CA TRƯỜNG ĐẶNG THAI MAI

Lời: Lê Thống Nhất

Tươi vui - Nhộn nhịp *Nhạc: Vũ Quốc Nam*

Nhân dịp trường THCS Đặng Thai Mai, thành phố Vinh, Nghệ An tròn 40 tuổi, nhạc sĩ Vũ Quốc Nam (phụ huynh em Vũ Đan Chi, lớp 6E) đề nghị TS. Lê Thống Nhất viết lời để mình viết ca khúc tặng trường. Đây cũng là tiết mục lớp 6E hát mừng trong ngày hội trường. Xin gửi tặng các thế hệ học sinh của "Trường Đặng" thân yêu.

Dành cho giáo viên, phụ huynh và trẻ em từ 12 tuổi đến dưới 16 tuổi.

Giấy phép xuất bản: số 31/GP-BVHTT, cấp ngày 23/1/2003 của Bộ Văn hóa và Thông tin.

Mã số: 8BTT188M18. **In tại:** Công ty cổ phần in Công Đoàn Việt Nam, 167 Tây Sơn, Đống Đa, Hà Nội. In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2018.

Giá: 20 000 đồng