BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

3
2001

SỐ 285 - NĂM THỨ 38 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Giám đốc Sở GD-ĐT Nguyễn Kim Hoàn cùng tổ Toán - tin của trường

TRƯỜNG THPT HÀ NỘI - AMSTERDAM, ĐƠN VỊ ANH HÙNG

MẬT MÃ HÌNH VUÔNG

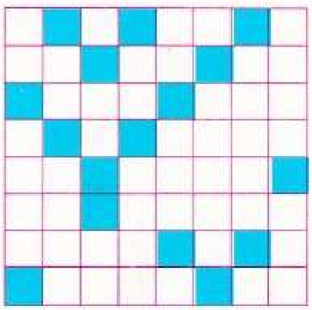
A B

Â	C	Ữ	H	T	N	Ú	H
R	Ì	C	N	N	M	O	G
Ừ	N	À	Y	N	H	Q	G
À	G	T	B	U	N	R	Ố
Á	C	Ạ	I	H	T	B	N
Ế	T	G	Ạ	I	M	P	N
M	H	L	Ì	Á	U	I	Ụ
N	Ô	N	N	N	H	Ở	H

D C

Hình 1

M N



Q P

Hình 2

Nhân ngày 8-3 một bạn trai gửi cho bạn gái thân yêu một bức thư nhưng không muốn người khác đọc được thư nên đã sử dụng *mật mã* để chuyển thành bức thư ở hình vuông *ABCD*. (hình 1)

Để đọc thư này bạn gái cần biết *khóa mật mã* ghi trên tờ giấy hình vuông *MNPQ* (hình 2). Hãy cắt bỏ các ô màu hồng, đặt *MNPQ* trùng với *ABCD* rồi đọc chữ ở các ô trống từ hàng trên xuống hàng dưới. Làm tương tự như thế khi cho *QMNP, PQMN, NPQM* lần lượt trùng với *ABCD*.

Ta hãy *số hóa* khóa mật mã. Ở hàng 1 của *MNPQ* ô trắng ghi số 0, ô hồng ghi số 1 theo thứ tự được 01010010. Coi số này viết trong *hệ nhị phân* ta có :

$0.2^7 + 1.2^6 + 0.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2 + 0 = 64 + 16 + 2 = 82$ viết trong hệ thập phân. Làm tương tự, ta có 8 số viết theo 8 hàng từ trên xuống dưới của *MNPQ* là :

$$82 - 36 - 136 - 80 - 33 - 32 - 10 - 132$$

Thay cho hình *MNPQ* bạn trai chỉ cần gửi cho bạn gái *khóa mật mã gồm 8 số* này.

Để *giải mã* bạn gái đổi cách viết các số trong hệ thập phân sang hệ nhị phân rồi vẽ hình vuông *MNPQ*.

Cách đổi số từ hệ thập phân sang hệ nhị phân : Chia số (trong hệ thập phân) liên tiếp cho 2 đến khi được thương bằng 0, lấy các số dư theo thứ tự rồi viết chúng thành hàng ngang từ phải sang trái.

Nếu bức thư gần đến 64 chữ thì viết thêm các chữ *a, b, c, ...,* nếu nhiều hơn thì dùng hình vuông kích thước lớn hơn.

Rất khó đọc được thư nếu không biết khóa mật mã 8 số vì với hình vuông kích thước 8×8 ô có $4^{16} = 4\ 294\ 967\ 296$ khóa mật mã khác nhau.

DÀNH CHO BẠN ĐỌC

1. Hãy viết nội dung thư của bạn trai gửi cho bạn gái.
2. Chỉ ra phương pháp chọn một khóa mật mã theo ý mình (để khi quay hình vuông thì ở mỗi ô chỉ viết đúng một chữ)

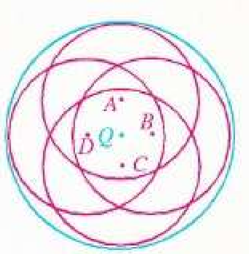
Tặng phẩm đang chờ các bạn có lời giải tốt.

Giải đáp bài: NHỮNG VÒNG TRÒN KÌ ẢO

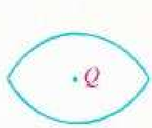
Ta *chỉ tính* các bộ 8 số mà các số sắp xếp *liên tiếp* nhau :
- Có 8 bộ số nằm trên bán kính đường tròn lớn
- Có 8 bộ số nằm trên các đường tròn đồng tâm với tâm *Q* nằm giữa hình (h.3)
- Có 5×4 bộ số nằm trên các đường tròn đồng tâm với tâm là *A, B, C, D (h.3)*
- Có 5×2 bộ số nằm trên các hình gồm 2 cung tròn có chung đầu mút như hình 4, 5.
- Có 5×2 bộ số nằm trên các hình gồm 2 cung tròn có chung đầu mút như hình 6, 7.

Bạn có thể tạo ra những vòng tròn kì ảo mới bằng cách bớt đi cùng một số ở mỗi số đã cho.

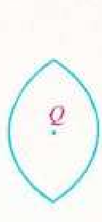
(Xem tiếp trang 3)



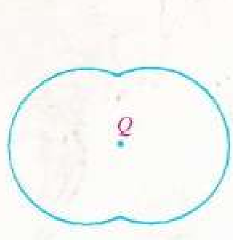
Hình 3



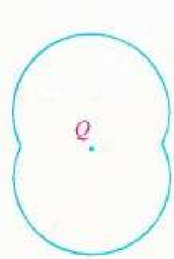
Hình 4



Hình 5



Hình 6



Hình 7

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 38
Số 285 (3-2001)
Tòa soạn : Ngõ 187, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: 04.5142648

TRONG SỐ NÀY

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

GIẢI TOÁN CỰC TRỊ ĐẠI SỐ VỚI CÁC BIẾN CÓ ĐIỀU KIỆN

NGUYỄN NGỌC KHOA
(GV trường THPT Huỳnh Thúc Kháng, Sơn Tịnh, Quảng Ngãi)

Chúng ta đã quen biết bài toán tìm cực trị của hai biến mà các biến có một điều kiện ràng buộc :

Bài toán 1. *Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của tích xy với x, y là các số dương thỏa mãn điều kiện x+y = s, trong đó s là số dương cho trước.* Việc đưa ra nhiều cách giải bài này sẽ có ích.

Cách 1. Áp dụng trực tiếp bất đẳng thức (BĐT) Côsi

$$xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{4}.$$

Vậy $\text{GTLN}(xy) = \frac{s^2}{4}$.

Cách 2. Đưa về xét cực trị của hàm một biến

$$xy = x(s-x) = sx - x^2 = \frac{s^2}{4} - \left(x^2 - sx + \frac{s^2}{4}\right)$$

$$= \frac{s^2}{4} - \left(x - \frac{s}{2}\right)^2 \le \frac{s^2}{4}.$$

Vậy $\text{GTLN}(xy) = \frac{s^2}{4}$

Cách 3. Sắp thứ tự giá trị các biến (theo điều kiện hoặc khi vai trò của chúng như nhau) và so sánh với giá trị không đổi xen giữa chúng.

Giả sử $x \le y$. Từ $x+y = s$ có $x \le \frac{s}{2} \le y$ nên

$$\left(x - \frac{s}{2}\right)\left(y - \frac{s}{2}\right) \le 0 \Leftrightarrow xy \le \frac{s}{2}\left(x + y - \frac{s}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow xy \le \frac{s^2}{4}.$$

Vậy $\text{GTLN}(xy) = \frac{s^2}{4}$.

Trong cả 3 cách giải trên tích xy đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x = y = \frac{s}{2}$.

Việc giải bài toán như trên sẽ khó khăn hơn khi các biến bị ràng buộc thêm một điều kiện nữa.

Bài toán 2. *Tìm giá trị lớn nhất của tích xy với x, y là các số dương thỏa mãn 2 điều kiện :*

(1) $x + y = s$;

(2) $y \ge a$

trong đó s, a là những số dương cho trước và $a < s$

Lời giải. • Nếu $a \le \frac{s}{2}$ thì theo cách giải bài toán 1 ta có $\text{GTLN}(x,y) = \frac{s^2}{4}$ khi $x = y = \frac{s}{2} \ge a$.

• Xét trường hợp $a > \frac{s}{2}$. Lúc này không thể sử dụng cách giải 1 của bài 1.

Theo cách 2, đặt $y = a+t$ với $t \ge 0$.

Từ đó $xy = (s-y)y = (s-a-t)(a+t) = -t(t+2a-s) + a(s-a) \le a(s-a)$ vì $t \ge 0$, $t + 2a - s \ge 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $t=0$, $y = a$ và $\text{GTLN}(xy) = a(s-a)$

Theo cách 3 ta thấy $x < \frac{s}{2} < a \le y$ nên

$(x-a)(y-a) \le 0 \Leftrightarrow xy \le a(x+y) - a^2$

$\Leftrightarrow xy \le as - a^2 = a(s-a)$.

Đẳng thức xảy ra khi $y = a$ và $x = s-a$. Vậy $\text{GTLN}(xy) = a(s-a)$.

Trong bài toán 2 có thể thay điều kiện (2) bởi điều kiện $x \le b$ với $b < s$, lúc đó trong lời giải xét 2 trường hợp : $b \ge \frac{s}{2}$ và $b < \frac{s}{2}$ (chứng minh tương tự trên hoặc đặt $b = s-a$).

Bài toán 3. *Tìm giá trị lớn nhất của tích xyz với x, y, z là các số dương thỏa mãn các điều kiện :*

(1) $x+y+z = s$

(2) $z \ge a$

trong đó s, a là những số dương cho trước và $a < s$.

Lời giải.

- Nếu $a \le \frac{s}{3}$ thì áp dụng BĐT Côsi ta có

$$xyz \le \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \left(\frac{s}{3}\right)^3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{s}{3}$, lúc đó GTLN $(xyz) = \left(\frac{s}{3}\right)^3$.

- Xét trường hợp $a > \frac{s}{3}$.

Theo BĐT Côsi : $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ (*)

Ta có : $x + y + a \le x + y + z = s < 3a \Rightarrow x + y < 2a \Rightarrow \frac{x+y}{2} < a$.

Áp dụng cách giải 3 từ $\frac{x+y}{2} < a \le z$ có

$$\left(\frac{x+y}{2} - a\right)(z-a) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)z \le a\left(\frac{x+y}{2} + z - a\right) \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) và sử dụng BĐT Côsi có

$$xyz \le \left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)z \le a\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2} + z - a\right)$$

$$\le a\left(\frac{\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + z - a}{2}\right)^2 = a\left(\frac{s-a}{2}\right)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi $z = a$ và $x = y = \frac{s-a}{2}$, lúc đó GTLN$(xyz) = a\left(\frac{s-a}{2}\right)^2$

Kết quả của bài toán 3 có thể không xảy ra như trên nếu ta thêm điều kiện $x < \frac{s-a}{2} < y$.

Bài toán 4. *Phát biểu như bài toán 3 và thêm điều kiện :*

(3) $y \ge b$ với b là số dương cho trước và $b \le a < s$

Lời giải.

- Nếu $b \le \frac{s-a}{2}$ thì giải như bài toán 3.

- Xét trường hợp $b > \frac{s-a}{2} \Leftrightarrow s < a+2b$.

Lúc đó $x = s - (y+z) < s - (a+b) < a + 2b - (a+b) = b$

Áp dụng cách giải 3 với $x < b \le y$, ta có

$(x-b)(y-b) \le 0 \Leftrightarrow xy \le b(x+y-b)$ (***)

Lại có $x+y-b = s-z-b < s-a-b <$
$< (a+2b) - (a+b) = b \le a$

Từ $x+y-b < a \le z$ có $(x+y-b-a)(z-a) \le 0$
$\Leftrightarrow (x+y-b)z \le a(x+y-b+z-a) = a(s-a-b)$

Từ đó và (***) suy ra

$xyz \le b(x+y-b)z \le ba(s-a-b)$.

Đẳng thức xảy ra khi $z = a$, $y = b$ và $x = s-a-b$, lúc đó GTLN$(xyz) = ab(s-a-b)$.

Kết luận của bài toán 4 :

- Nếu $s \ge 3a \Rightarrow$ GTLN$(xyz) = (s/3)^3$
- Nếu $a + 2b \le s < 3a \Rightarrow$ GTLN$(xyz) = a\left(\frac{s-a}{2}\right)^2$
- Nếu $s < a+2b \Rightarrow$ GTLN $(xyz) = ab(s-a-b)$.

Bạn hãy phát biểu bài toán 4 khi thay điều kiện (2) và (3) bởi $z \le a$ và $y \le b$ với $a \le b < s$.

Như vậy từ một bài toán tìm cực trị đại số với các biến có 1 điều kiện ta đã đề xuất và giải bài toán cực trị đại số với các biến bị ràng buộc bởi nhiều điều kiện hơn.

Mời các bạn tiếp tục giải các bài toán sau :

1) Tìm giá trị lớn nhất của $xy + yz + zx$ trong bài toán 4.

2) Tìm giá trị lớn nhất của tích $xyzt$ với x, y, z, t là các số dương thỏa mãn các điều kiện : $x+y+z+t = s$; $t \ge a$; $z \ge b$; $y \ge c$ trong đó s, a, b, c là các số dương đã cho và $c < b < a < s$.

TOÁN HỌC MUÔN MÀU *(Tiếp bìa 2)*

Xin trao tặng phẩm cho các bạn :

1) *Lương Tiến Dũng*, 11A, THPT NK Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang**

2) *Đào Minh Lâm*, 12E, THPT Như Thanh, **Thanh Hóa.**

3) *Vũ Thị Hương*, 32 phố Phạm Ngũ Lão, thị trấn Ân Thi, **Hưng Yên.**

4) Một bạn làm rất tốt nhưng quên ghi tên. Bạn hãy mô tả lại bài giải của bạn với những đặc điểm riêng và gửi địa chỉ về Tòa soạn.

PHI PHI

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU - ĐHQG TP. HỒ CHÍ MINH - NĂM 2000

Vòng 1: ĐỀ TOÁN CHUNG *(Thời gian : 150 phút)*

Bài 1. Cho x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - 7x + 3 = 0$$

1) Hãy lập phương trình bậc hai có nghiệm là $2x_1 - x_2$ và $2x_2 - x_1$.

2) Hãy tính giá trị của biểu thức

$$A = |2x_1 - x_2| + |2x_2 - x_1|.$$

Bài 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ xy = 8 \end{cases}$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = z^2 \\ x = 2(y+z) \\ xy = 2(z+1) \end{cases}$$

Bài 3. 1) Giải phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

2) Gọi α, β là số đo mỗi góc trong của hai đa giác đều có số cạnh lần lượt là m và n. Tìm m và n nếu $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{7}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC có đường cao BD. Giả sử (C) là một đường tròn có tâm O nằm trên đoạn AC và lần lượt tiếp xúc với BA, BC tại M và N.

a) Chứng minh rằng 4 điểm B, M, D, N nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $\angle ADM = \angle CDN$.

Bài 5. Trong một giải bóng đá có 10 đội bóng thi đấu vòng tròn một lượt. Trong mỗi trận, đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua không có điểm. Các đội có cùng số điểm sẽ được xếp hạng theo các chỉ số phụ nào đó.

a) Gọi A là một đội bóng tham dự giải, hỏi đội bóng A có thể đạt được những điểm số nào.

b) Giả sử đội bóng A được xếp thứ nhì khi kết thúc giải. Tìm số điểm tối đa, số điểm tối thiểu mà đội bóng A có thể đạt được.

Vòng 2. ĐỀ TOÁN CHO LỚP CHUYÊN TOÁN
(Thời gian : 150 phút)

Bài 1. 1) Cho số nguyên không âm A. Hãy xác định A biết rằng trong 3 mệnh đề P, Q, R dưới đây có 2 mệnh đề đúng và 1 mệnh đề sai :

P: "$A+51$ là số chính phương"

Q : "Chữ số tận cùng của A là 1"

R: "$A-38$ là số chính phương".

2) Có thể xếp hay không các số 0, 1, 2, ..., 9 lên các đỉnh của một đa giác đều 10 đỉnh sao cho hiệu 2 số trên 2 đỉnh kề nhau bất kì nhận một trong các giá trị −3, −4, −5, 3, 4, hoặc 5.

Bài 2. Giải các hệ phương trình :

1. $\begin{cases} xy = x + 3y \\ yz = 2(2y+z) \\ zx = 3(3z+2x) \end{cases}$; 2. $\begin{cases} (x+y+z)^3 = 12t \\ (y+z+t)^3 = 12x \\ (z+t+x)^3 = 12y \\ (t+x+y)^3 = 12z \end{cases}$

Bài 3. 1) Cho 4 số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4 sao cho $1 \le a_k \le k$ với mọi $k = 1, 2, 3, 4$ và tổng $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ là một số chẵn. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các số dạng $\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4$ có trị bằng 0.

2) Cho 1000 số nguyên dương a_1, a_2, ..., a_{1000} sao cho $1 \le a_k \le k$ với mọi $k = 1, 2, ..., 1000$ và tổng $S = a_1 + a_2 + ... + a_{1000}$ là một số chẵn. Hỏi trong các số dạng $\pm a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_{1000}$ có số nào bằng 0 hay không ? Giải thích vì sao.

Bài 4. 1) Cho góc vuông xAy và đường tròn **C** tâm O tiếp xúc với Ax và Ay lần lượt tại P và Q. d là một tiếp tuyến thay đổi của **C**. Gọi a, p, q lần lượt là các khoảng cách từ A, P, Q đến đường thẳng d. Chứng minh khi d thay đổi tỉ số $\frac{a^2}{pq}$ không đổi.

2) Khẳng định trên còn đúng không nếu xAy không phải là góc vuông ? Vì sao ?

Bài 5. 1) Cho a, b, c là 3 số không âm thỏa điều kiện :

$$a^2 + b^2 + c^2 \le 2(ab + bc + ca) \qquad (1)$$

Chứng minh bất đẳng thức :

$$(a+b+c) \le 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \qquad (2)$$

Hỏi từ (2) có thể suy ra (1) hay không ? Vì sao ?

2) Cho a, b, c là 3 số không âm thỏa điều kiện (1) và p, q, r là 3 số thực thỏa $p+q+r = 0$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$apq + bqr + crp \le 0.$$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 39

Problem. Let m and n be two arbitrary positive integers. Prove that the number of partitions of n into at most m parts is equal to the number of partitions of n whose parts are all less than or equal m. For example, if $n = 5$ and $m = 3$, the partitions of the first type are

5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1,

while those of the second type are

3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1.

Solution. Let A be any partition: $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ with the parts arranged in decreasing order $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_k$. Draw a row with n_1 dots, beneath it a row of n_2 dots, etc., as shown below for the partition 9 = 4+2+2+1

• • • •

• •

• •

•

This figure is called the graph of the given partition A. If the graph is read by columns instead of rows we obtain a new partition A' of n, called the conjugate of A. For example, the conjugate of the partition 9 = 4+2+2+1 is the partition 10 = 4+3+1+1. If A is a partition of n into at most m parts, then its graph will have at most m rows. Consequently, the conjugate partition A' will have all its parts less than or equal m. Since the converse is also true, we obtain thereby a one-to-one correspondence between the two types of partitions.

Từ mới:

arbitrary = bất kỳ (tính từ)
partition = sự phân chia, sự chia cắt
at most = nhiều nhất
part = phần, bộ phận
type = kiểu, loại
arrange = bố trí, sắp xếp (động từ)
decrease = giảm (động từ)
order = thứ tự, bậc
draw = vẽ
row = hàng
dot = chấm, điểm
beneath = phía dưới, ở dưới (giới từ)
graph = đồ thị
column = cột
instead = thay cho, thay vì (giới từ)
conjugate = (phần) liên hợp
converse = phần đảo
obtain = nhận được (động từ)
thereby = bằng cách ấy, do đó (phó từ)
one-to-one correspondence = tương ứng một - một

NGÔ VIỆT TRUNG

NHẬN DẠNG TAM GIÁC *(Tiếp trang 7)*

Cuối cùng mời các bạn làm một số bài tập sau :

Bài 1. Tam giác ABC thỏa mãn :

$$\begin{cases} \sin B + \sin C = 2\sin A \\ tgB + tgC = 2tgA \end{cases};$$

Nhận dạng tam giác ABC.

Bài 2. Tam giác ABC thỏa mãn :

$$\frac{4\sin A\sin B\sin C}{ab+bc+ca} = \frac{a+b+c}{18R^3}$$

Nhận dạng tam giác ABC.

Bài 3. Tam giác ABC thỏa mãn :

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - (\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C) = \sqrt{3}$$

Nhận dạng tam giác ABC.

Bài 4. Tam giác ABC thỏa mãn :

$$\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} = \frac{1}{8}\cos A\cos B\cos C$$

Nhận dạng tam giác ABC.

DÀNH CHO THI VÀO ĐẠI HỌC

NHẬN DẠNG TAM GIÁC

NGUYỄN THANH GIANG
(*GV trường THPT năng khiếu tỉnh Hưng Yên*)

Bài toán về nhận dạng tam giác thường là bài toán khó trong các kì thi, đặc biệt là các kì thi tuyển sinh. Bài viết này đề cập đến một số hướng biến đổi để nhận dạng tam giác trong các đề thi như thế.

1. Xác định quan hệ giữa các cạnh hoặc các góc của tam giác

Ví dụ 1. *Xác định dạng của tam giác ABC biết các góc của tam giác thỏa mãn phương trình :*

$$\sin 2x + \sin x - \cos x = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Giải. Ta có

$(1) \Leftrightarrow 2\sin x(2\cos x+1) - (2\cos x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(2\sin x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi \end{array}\right.$$

Với $0<x<\pi$ ta có $x = \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$ do đó tam giác ABC chỉ có thể có 2 góc $\frac{\pi}{6}$ và 1 góc $\frac{2\pi}{3}$.

Vậy tam giác ABC cân, góc ở đỉnh có số đo $\frac{2\pi}{3}$

Ví dụ 2. *Tam giác ABC thỏa mãn* $r : r_a : R = 2 : 6 : 5$.

Nhận dạng tam giác ABC ?

Lời giải.

Ta có : $r = \frac{S}{p}$; $r_a = \frac{S}{p-a}$; $\frac{r}{r_a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{p-a}{p} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow p = \frac{3a}{2} \Rightarrow b+c = 2a \qquad (2)$$

Lại có $S = \frac{abc}{4R}$; $\frac{r}{R} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{4S^2}{abcp} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow 10(p-a)(p-b)(p-c) = abc$

$\Rightarrow 5[p^2 - p(b+c) + bc] = bc$

Thay $p = \frac{3a}{2}$ ta có $bc = \frac{15a^2}{16}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có b, c là nghiệm của phương trình :

$$x^2 - 2ax + \frac{15a^2}{16} = 0 \Rightarrow x = \frac{3a}{4}; \frac{5a}{4}$$

Do đó tam giác ABC vuông tại B hoặc C.

2. Sử dụng các phép biến đổi lượng giác để tính góc

Ví dụ 3. *Tam giác ABC thỏa mãn*

$$r + r_a + r_b + r_c = a+b+c$$

Nhận dạng tam giác ABC ?

Lời giải. Sử dụng kết quả

$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$; $p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$r_a = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$; $r_b = 4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$;

$r_c = 4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$;

$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

và biến đổi đẳng thức đề bài đưa về :

$$\left(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{A}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{A}{2} = \cos\dfrac{A}{2} \\ \cos\dfrac{B-C}{2} = \cos\dfrac{A}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{\pi}{2} \\ B ; C = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Vậy tam giác ABC là tam giác vuông.

Ví dụ 4. *Tam giác ABC thỏa mãn*

$$2\cos A\sin B\sin C + \sqrt{3}(\sin A+\sin B+\sin C) = \frac{17}{4} \quad (4)$$

Nhận dạng tam giác ABC ?

Lời giải. Sử dụng định lí hàm số cosin ta có :

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B\sin C}$$

$\Rightarrow 2\cos A\sin B\sin C = \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A$

Do đó :

$(4) \Leftrightarrow \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A + \sqrt{3}\sin A + \sqrt{3}\cos B + \sqrt{3}\cos C = \frac{17}{4}$

$\Leftrightarrow 2 - (\cos^2 C - \sqrt{3}\cos C) - (\cos^2 B - \sqrt{3}\cos B) - (\sin^2 A - \sqrt{3}\sin A) = \frac{17}{4}$

$$\Leftrightarrow \left(\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos B = \cos C = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C = \dfrac{\pi}{6} \\ A = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Vậy tam giác ABC cân tại A và $A = \frac{2\pi}{3}$

4. Sử dụng bất đẳng thức cơ bản trong tam giác và các bất đẳng thức đại số

Ví dụ 5. *Tam giác ABC thỏa mãn*

$$\sqrt{tg^8A + tg^8B + tg^8C} = 3tgAtgBtgC \quad (5)$$

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $tgAtgBtgC > 0 \Rightarrow tgA > 0$; $tgB > 0$; $tgC > 0 \Rightarrow \Delta ABC$ nhọn

Với ΔABC bất kì ta chứng minh được :

$$tgAtgBtgC = tgA + tgB + tgC$$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$$tgAtgBtgC = tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt[3]{tgAtgBtgC}$$

$$\Leftrightarrow (tgAtgBtgC)^2 \geq 27$$

$$\Leftrightarrow (tgAtgBtgC)^8 \geq 27(tgAtgBtgC)^6$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{tgAtgBtgC}\ )^8 \geq 3\ (\sqrt[3]{tgAtgBtgC}\ )^6$$

$$\Leftrightarrow 9tg^2Atg^2Btg^2C \leq 3\sqrt[3]{tg^8Atg^8Btg^8C} \leq$$

$$\leq tg^8A + tg^8B + tg^8C \quad (6)$$

Khi đó (5) thỏa mãn $\Leftrightarrow$ (6) trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow tgA = tgB = tgC \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Ví dụ 6. Tam giác ABC nhọn thỏa mãn

$$P = \frac{tg^2A}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{tg^2B}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{tg^2C}{\sin\frac{C}{2}} = 18 \quad (7)$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho $\frac{tgA}{\sqrt{\sin\frac{A}{2}}}; \frac{tgB}{\sqrt{\sin\frac{B}{2}}}; \frac{tgC}{\sqrt{\frac{C}{2}}}$ và $\sqrt{\sin\frac{A}{2}}, \sqrt{\sin\frac{B}{2}}, \sqrt{\sin\frac{C}{2}}$ ta có :

$$\left(\frac{tg^2A}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{tg^2B}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{tg^2C}{\sin\frac{C}{2}}\right)\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\geq (tgA + tgB + tgC)^2 \quad (a)$$

Do đó : $P \geq \dfrac{(tgA + tgB + tgC)^2}{\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}} = Q$

Với tam giác ABC nhọn ta luôn có :

$$\begin{cases} tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt{3}\ ; \\ \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \end{cases} \quad (b)$$

Từ đó suy ra $Q \geq 18 \Rightarrow P \geq 18$ (8)

Tam giác ABC nhọn thỏa mãn (7)

$\Leftrightarrow$ (8) trở thành đẳng thức

$\Leftrightarrow$ (a), (b) trở thành đẳng thức

$\Leftrightarrow$ ΔABC là tam giác đều.

4. Sử dụng các bất đẳng thức chứa tham số

Ví dụ 7.

1) Chứng minh rằng :

$$x^\alpha \geq \alpha x - \alpha + 1\ ;\ \forall\alpha > 1\ ;\ \forall x > 0$$

2) Tam giác ABC thỏa mãn :

$$\left(tg\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(tg\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(tg\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} = 3^{1-\sqrt{2}} \quad (9)$$

Nhận dạng tam giác ABC ?

Lời giải. 1) Bằng cách sử dụng đạo hàm ta chứng minh được

$$x^\alpha \geq \alpha x - \alpha + 1\ ;\ \forall\alpha > 1\ ;\ \forall x > 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$.

2) Nhận xét :

Liên hệ với câu 1

Dễ thấy đẳng thức ở (9) xảy ra khi tam giác ABC đều do đó phải điều chỉnh hệ số của $tg\frac{A}{2}$ để có được điều này.

Liên hệ với bất đẳng thức trong tam giác bất kì :

$$tg^2\frac{A}{2} + tg^2\frac{B}{2} + tg^2\frac{C}{2} \geq 1$$

Do đó lấy $x = 3tg^2\frac{A}{2}$ và $\alpha = \sqrt{2}$ ta có :

$$\left(3tg^2\frac{A}{2}\right)^{\sqrt{2}} \geq 3\sqrt{2}\ tg^2\frac{A}{2} - \sqrt{2} + 1\ ;$$

$$\left(3tg^2\frac{B}{2}\right)^{\sqrt{2}} \geq 3\sqrt{2}tg^2\frac{B}{2} - \sqrt{2} + 1$$

$$\left(3tg^2\frac{C}{2}\right)^{\sqrt{2}} \geq 3\sqrt{2}tg^2\frac{C}{2} - \sqrt{2} + 1$$

Từ đó bài toán sẽ được giải quyết

(Xem tiếp trang 5)

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐHSP VINH - NĂM 2000
MÔN TOÁN (Khối A, B, E)

Câu I. *(Dùng chung cho thí sinh hệ chuyên ban và hệ chưa phân ban)*

Tìm các giá trị của m để đường thẳng $mx - y + 1 = 0$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x+2)^2 - 1}{2}$ tại hai điểm phân biệt.

2. Chứng minh rằng tiệm cận xiên của đồ thị hàm số :

$$y = \frac{(m+2)x^2 + (3-4m)x - 2m}{x - m}$$

luôn tiếp xúc với một parabol cố định (m là tham số).

Câu II. *(Dùng chung cho thí sinh hệ chuyên ban và hệ chưa phân ban)*

1) Cho phương trình :

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+1)(3-x)} = m$$

(m là tham số)

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

2. Giải và biện luận phương trình :

$$4^{|x|} - 2^{|x|+1} - m = 0 \text{ (} m \text{ là tham số).}$$

3. Giải bất phương trình :

$$3^{x^2-4} + (x^2-4)3^{x-2} \geq 1.$$

Câu III. *(Dùng chung cho thí sinh hệ chuyên ban và hệ chưa phân ban)*

Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có ba kích thước $AB = p$, $AD = q$, $AA_1 = r$ với $0 < p < q < r$. Gọi I, J tương ứng là các trung điểm của các cạnh AB và C_1D_1, các điểm M, N thỏa mãn : $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN} = k\,\overrightarrow{BB_1}$, trong đó $0 \leq k \leq 1$ (1)

1. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BDA_1)

2. Chứng minh rằng với mỗi giá trị của k thỏa mãn điều kiện (1) bốn điểm I, M, J, N thuộc một mặt phẳng và tìm các giá trị của k thỏa mãn điều kiện (1) để cho đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng IJ.

3. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABDA_1$ và xác định tâm H của đường tròn là giao của mặt cầu (S) với mặt phẳng (BDA_1)

Câu Va. *(Dùng riêng cho thí sinh hệ chưa phân ban)*

Chứng minh rằng : $\dfrac{\sqrt{3}}{12} \leq \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot gx}{x}\,dx \leq \frac{1}{3}$.

Câu Vb. *(Dùng riêng cho thí sinh hệ chuyên ban)*

Có bao nhiêu số khác nhau gồm bảy chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số là một số chẵn.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1) Đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $\dfrac{(x+2)^2 - 1}{x+2} = mx + 1$ có hai nghiệm phân biệt.

Đáp số : $m \neq 1$.

2) Tiệm cận xiên :

$y = (m+2)x + (m^2 - 2m + 3)$ với $m \neq 0$; $m \neq 1$.

Kết quả : $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + 3x + 2$.

Câu II. 1) Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$ thì $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$. Khi đó phương trình trở thành :

$$f(t) = -\frac{t^2}{2} + t + 2 = m.$$

a) Với $m = 2$ thì $t = 0$ hoặc $t = 2$. Do điều kiện $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$ nên $t = 2 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

b) Lập bảng biến thiên của $f(t)$ với $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$ ta có : $2\sqrt{2} - 2 \leq m \leq 2$.

2) Đặt $t = 2^{|x|} \geq 1$ thì phương trình trở thành $f(t) = t^2 - 2t = m$. Sử dụng đồ thị ta có

+ Nếu $m < -1$ thì phương trình vô nghiệm.

CÂU LẠC BỘ THTT

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ MỚI

Mời các bạn tham gia cuộc chơi hàng tháng

ĐOÁN TUỔI VÀ BIẾT AI QUA ẢNH

Bạn hãy cắt phiếu cuộc chơi và *dán ở bên ngoài phong bì* gửi Tòa soạn THTT sau khi đã điền câu trả lời. Bên trong phong bì bạn có thể viết cảm tưởng về cuộc chơi nhưng không gửi bài khác. Nhớ ghi địa chỉ của bạn !

Người trong ảnh ?

Họ và tên :

. . . .

Ảnh chụp khi . . . . tuổi.

+ Nếu $m = -1$ thì phương trình có nghiệm $x = 0$

+ Nếu $m > -1$ thì phương trình có hai nghiệm.

$$x = \pm\log_2(1 + \sqrt{1+m}).$$

3) Nếu $|x| \geq 2$ thì $3^{x^2-4} \geq 1$ và $(x^2 - 4).3^{x-2} \geq 0$ nên $|x| \geq 2$ thỏa mãn bất phương trình.

Nếu $|x| < 2$ thì $3^{x^2-4} < 1$ và $(x^2 - 4).3^{x-2} < 0$ nên $|x| < 2$ không thỏa mãn. Do đó nghiệm của bất phương trình là :

$$x \in (-\infty ; -2] \cup [2; +\infty).$$

Câu III. 1) Từ giả thiết dẫn tới cotg$A$, cotg$B$, cotg$C$ cùng dương nên tam giác ABC nhọn.

Vì $\frac{1}{tgA} = \frac{2}{tgB} = \frac{3}{tgC}$ nên tg$B$ = 2tg$A$ và tg$C$ = 3tg$A$.

Từ hệ thức tg$A$ + tg$B$ + tg$C$ = tg$A$.tg$B$.tg$C$ ta có tg$A$ = 1 ; tg$B$ = 2 ; tg$C$ = 3.

Từ đó : $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\sin C = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Áp dụng định lí hàm số sin ta có : $a = 2\sqrt{2}$; $b = \frac{8\sqrt{5}}{5}$; $c = \frac{6\sqrt{10}}{5}$

2) Viết phương trình về dạng :

$(2\cos 4x + 1)^2 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\frac{1}{2} \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{2l\pi}{3} \end{cases} (k, l \in Z)$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi \ (n \in Z).$$

Câu IV. Chọn hệ tọa độ Đềcác vuông góc sao cho $A(0, 0, 0)$; $B(p, 0, 0)$; $D(0, q, 0)$, $A_1(0, 0, r)$. Từ giả thiết ta có M thuộc đoạn AD và N thuộc đoạn BB_1.

1) Mặt phẳng (BDA_1) có phương trình

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

nên khoảng cách từ A tới (BDA_1) là

$$d = \frac{pqr}{\sqrt{q^2r^2 + p^2r^2 + p^2q^2}}$$

2) Ta có : $I\ (\frac{p}{2}, 0, 0)$. Mặt khác từ $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AD}$ nên $\overrightarrow{AM}\ (0, kq, 0) \Rightarrow M(0, kq, 0)$.

Vì $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$ nên $B_1(p, 0, r)$. Ta có $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$ nên $\overrightarrow{IJ}\ (0, q, r)$. Dễ dàng có $\overrightarrow{IM}\ (-\frac{p}{2}, kq, 0)$ và $\overrightarrow{IN}\ (\frac{p}{2}, 0, kr)$ nên $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{k}\overrightarrow{IM} + \frac{1}{k}\overrightarrow{IN} \Rightarrow \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}$ đồng phẳng $\Rightarrow$ I, J, M, N đồng phẳng.

Ta có : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -k\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BB_1}$ nên $\overrightarrow{MN}\ (p, -kp, kr)$.

Do đó : $MN \perp IJ \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{IJ} = 0 \Leftrightarrow k(r^2 - q^2) = 0 \Leftrightarrow k = 0$ (do $r > q > 0$) $\Leftrightarrow MN$ trùng AB.

3) Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABDA_1$ là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp. Do đó tâm O của mặt cầu (S) là trung điểm của AC_1 với $C_1\ (p, q, r)$ nên $O\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}, \frac{r}{2}\right)$ và bán kính R của (S) là $R = \frac{1}{2}AC_1 = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$.

Giao của (S) với (BDA_1) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BDA_1, có tâm H là hình chiếu vuông góc của O lên (BDA_1). Vectơ pháp tuyến của (BDA_1) cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) qua O vuông góc với (BDA_1) tại H, vectơ này là $\vec{n}\,(qr, pr, pq)$.

Suy ra phương trình của (Δ) là

$$\begin{cases} x = \frac{p}{2} + qrt \\ y = \frac{q}{2} + prt \\ z = \frac{r}{2} + pqt \end{cases}$$

Thay vào phương trình của (BDA_1) ta có

$$t = \frac{-pqr}{2(p^2r^2 + q^2r^2 + p^2q^2)}$$

Thay t vào phương trình của (Δ) dễ dàng có tọa độ của H.

Câu Va. Xét $y = \frac{cotgx}{x}$ có $y' < 0$ với $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ nên :

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq y \leq y\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\pi} \leq y \leq \frac{4}{\pi}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu Vb. Với mỗi số có 6 chữ số $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ ta lập được 10 số có 7 chữ số $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ mà trong đó chỉ có 5 số có tổng các chữ số là số chẵn. Ta thấy a_1 có 9 cách chọn, còn các chữ số a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 thì mỗi chữ số có 10 cách chọn. Do đó số các số thỏa mãn bài toán là : $9.10^5.5 = 45.10^5$.

Hướng dẫn giải :
ĐÀO TAM - MAI TƯ
(ĐHSP Vinh, Nghệ An)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

MỘT HÀM SỐ SỐ HỌC LIÊN QUAN ĐẾN HỆ NHỊ PHÂN

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV THPT Hùng Vương, PlâyKu, Gia Lai)

Giả sử có hai số tự nhiên a, b viết trong hệ nhị phân là

$a = 10101 = 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 1$

$b = \ \ 1100 = \qquad 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 0$

Ta thực hiện phép lấy tổng đigit (tổng các chữ số) của a và b, kí hiệu $a \oplus b = c$ là cách lấy tổng đigit của hai chữ số cùng hàng (hàng đơn vị, hàng chục, ...) của a và b theo quy tắc : $1 \oplus 1 = 0 \oplus 0 = 0$ và $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$

Chẳng hạn :
$$\begin{array}{r} \oplus \ 10101 \\ 1100 \\ \hline 11001 \end{array}$$

ta được $a \oplus b = c = 11001$

Phép lấy tổng đigit có ứng dụng trong lí thuyết trò chơi. Ở đây ta xét số các chữ số khác nhau trong từng hàng của a và b viết trong hệ nhị phân, chẳng $f(a, b) = f(10101, 1100) = 3$, đó chính là số các chữ số 1 của $c = a \oplus b$.

Định nghĩa.

1) Gọi N là tập số nguyên không âm. Xét hàm số $f : N \times N \to N$ được xác định bởi :

(i) $f(0, 0) = 0$

(ii) $$f(a, b) = \begin{cases} f([a/2], [b/2]) \\ \quad \text{nếu } a+b \equiv 0 \pmod 2 \\ 1 + f([a/2], [b/2]) \\ \quad \text{nếu } a+b \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

trong đó kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của số x.

Dễ thấy rằng khi viết trong hệ nhị phân

$a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_o} = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1} \ . \ 2 + a_o$

thì $\left[\dfrac{a}{2}\right] = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1}$

Chẳng hạn $f(10101, 1100) =$

$= 1 + f(1010, 110) = 1 + f(101, 11)$

$= 1 + f(10, 1) = 2 + f(1, 0) = 3 + f(0, 0) = 3.$

2) Giả sử $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ với $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên không âm không nhất thiết phân biệt nhau. Ta kí hiệu $S(A) = \sum\limits_{a_i,\ a_j \in A} f(a_i, a_j)$ trong đó tổng gồm C_n^2 số hạng.

II. Tính chất

Giả sử $a = \overline{a_n ... a_1 a_o}$ và $b = \overline{b_n ... b_1 b_o}$ viết trong hệ nhị phân. Từ định nghĩa dễ dàng suy ra :

1) $f(a, b) = f([a/2], [b/2]) \Leftrightarrow a_o + b_o \equiv 0 \pmod 2 \Leftrightarrow a_o = b_o$ nghĩa là a, b cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

2) $f(a, b) = 1 + f([a/2], [b/2]) \Leftrightarrow a_o + b_o = 1$, nghĩa là a, b khác tính chẵn lẻ.

3) • $f(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ nghĩa là $a_i = b_i$ $(i = 0, 1, 2, ..., n)$.

• $S(A) = 0 \Leftrightarrow$ mọi phần tử của A đều bằng nhau.

4) $f(a, b)$ là số các chữ số khác nhau trong mỗi hàng của a và b, nghĩa là $f(a, b)$ là số các chữ số 1 của $c = a \oplus b$. Điều này suy ra từ tính chất 1 và 2.

5) Giả sử $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ và $A' = \{a'_1, a'_2, ..., a'_p\}$ trong đó $a'_i = [a_i/2]$ $(i = 1, 2, ..., p)$

• Nếu A gồm toàn số chẵn, hoặc toàn số lẻ thì theo tính chất 1 có

$$S(A) = \sum_{a_i, a_j \in A} f(a_i, a_j) = \sum_{a'_i, a'_j \in A'} f(a'_i, a'_j) = S(A')$$

• Giả sử A có m số chẵn $a_1, a_2, ..., a_m$ và t số lẻ $a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_{m+t}$ với $m+t = p$ thì theo tính chất 1 và 2, với kí hiệu $M = \{1, 2, ..., m\}$, $T = \{m+1, m+2, ..., m+t)\}$ ta có :

$$S(A) = \sum_{a_i, a_j \in A} f(a_i, a_j)$$

$$= \sum_{i, j \in M} f(a_i, a_j) + \sum_{i, j \in T} f(a_i, a_j) + \sum_{i \in M, j \in T} f(a_i, a_j)$$

$$= \sum_{i, j \in M} f(a'_i, a'_j) + \sum_{i, j \in T} f(a'_i, a'_j) + $$

$$+ \Big(\sum_{i \in M, j \in T} f(a'_i, a'_j) + mt \Big) = S(A') + mt.$$

Vậy $S(A) = S(A') + mt$

III. Ứng dụng

Giả sử tập A có p $(p \geq 3)$ phần tử $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$, mỗi phần tử a_i $(i = 1, 2, ..., p)$ viết trong hệ nhị phân có độ dài chung lớn nhất là n, nghĩa là $0 \leq a_i \leq 2^n - 1$ $(i = 1, 2, ..., p)$.

Gọi $k = \max_{a_i, a_j \in A} f(a_i, a_j)$ và $h = \min_{a_i, a_j \in A} f(a_i, a_j)$ thì $k + h = n$.

1) *Mệnh đề 1*

Với $p > 3$ và p chẵn thì $\frac{h}{n} \leq \frac{p}{2(p-1)}$ và $\frac{k}{n} \geq \frac{p-2}{2(p-1)}$

Chứng minh: Giả sử tập A có m số chẵn và t số lẻ. Số p chẵn và

$p = m + t$ thì $mt \leq \left(\frac{m+t}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$

Áp dụng tính chất 5 ta có

$$S(A) = S(A') + mt \leq \frac{p^2}{4} + S(A').$$

Tương tự nếu tập A' có m_1 số chẵn và t_1 số lẻ thì $m_1 t_1 \leq \frac{p^2}{4}$ nên $S(A') \leq \frac{p^2}{4} + S(A'')$. Tiếp tục làm như thế đến lần thứ n thì được tập gồm toàn số 0. Như thế $S(A) \leq n \cdot \frac{p^2}{4}$ (1)

Mặt khác $S(A) = \sum_{a_i, a_j \in A} f(a_i, a_j) \geq h \cdot C_p^2$ (2)

Từ (1) và (2) có $\frac{hp(p-1)}{2} \leq n\frac{p^2}{4}$

$\Rightarrow \frac{h}{n} \leq \frac{p}{2(p-1)}$

Từ đó $k = n - h \geq n - \frac{np}{2(p-1)} \Rightarrow \frac{k}{n} \geq \frac{p-2}{2(p-1)}$

2) *Mệnh đề 2*. Với $p > 3$ và p lẻ thì $\frac{h}{n} \leq \frac{p+1}{2p}$ và $\frac{k}{n} \geq \frac{p-1}{2p}$

Chứng minh : Giả sử tập A có m số chẵn và t số lẻ.

Số p lẻ và $p = m + t$ thì $4mt < (m+t)^2$
$\Rightarrow 4mt \leq (m+t)^2 - 1$ hay $4mt \leq p^2 - 1$.

Áp dụng tính chất 5 ta có $S(A) = S(A') + mt \leq \frac{p^2-1}{4} + S(A')$.

Lập luận tương tự với tập A' với tập A' ta có $S(A') \leq \frac{p^2-1}{4} + S(A'')$. Tiếp tục như thế đến lần thứ n thì được tập gồm toàn số 0. Như thế

$$S(A) \leq n\left(\frac{p^2-1}{4}\right) \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) có $\frac{hp(p-1)}{2} \leq \frac{n(p^2-1)}{4}$

$\Rightarrow \frac{h}{n} \leq \frac{p+1}{2p}$

Từ đó $k = n - h \geq n - \frac{n(p+1)}{2p} \Rightarrow \frac{k}{n} \geq \frac{p-1}{2p}$

III. Bài 3 thi Olympic toán quốc tế năm 1998 tại Đài Loan (do Ấn Độ đề nghị)

Trong một cuộc thi có n thí sinh và p giám khảo, ở đó p ≥ 3 và là một số lẻ. Mỗi giám khảo đánh giá từng thí sinh và cho kết luận, thí sinh đó đỗ hay trượt. Giả sử k là số thỏa mãn điều kiện : Với hai giám khảo bất kì, số thí sinh mà họ cho kết luận giống nhau nhiều nhất là k. Chứng minh rằng $\frac{k}{n} \geq \frac{p-1}{2p}$.

Nếu ta kí hiệu 1 là *đỗ* và 0 là *trượt* thì mỗi cách đánh giá của một giám khảo cho n thí sinh biểu thị bởi một số nhị phân x_i độ dài n. Gọi $A = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ thì $0 \leq x_i \leq 2^n - 1$. Yêu cầu của bài toán chính là một kết quả của mệnh đề 2.

Cách tiếp cận khác của bài toán trên: Xét điểm của mỗi thí sinh nhận được từ p giám khảo. Giả sử thí sinh thứ i $(1 \leq i \leq n)$ nhận được x_i điểm 1 (đỗ) và y_i điểm 0 (trượt) thì $x_i + y_i = p$. Số cặp giám khảo nhất trí đánh giá đối với thí sinh này là $C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2$.

Ta có $2(C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2) = x_i(x_i - 1) + y_i(y_i - 1)$

$= x_i^2 + y_i^2 - x_i - y_i$

$\geq \frac{1}{2}(x_i + y_i)^2 - (x_i + y_i)$

$\Rightarrow 4(C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2) \geq (p-1)^2 - 1$.

Vì p lẻ thì $4(C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2) \geq (p-1)^2$ (4)

Mặt khác có C_p^2 cặp giám khảo nên

$$kC_p^2 \geq \sum_{i=1}^{n} (C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2)$$

Từ đó và (4) có $4k\frac{p(p-1)}{2} \geq n(p-1)^2$

$\Rightarrow \frac{k}{n} \geq \frac{p-1}{2p}$ (đpcm)

Cách giải này ngắn gọn hơn cách giải trước, tuy nhiên việc nghiên cứu một hàm số số học cùng với các tính chất của nó giúp ta có cách nhìn sâu sắc hơn bài toán này đồng thời sẽ có ích đối với nhiều bài toán khác.

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/285. Cho số tự nhiên lẻ p và các số nguyên a, b, c, d, e thỏa mãn các điều kiện : tổng $a+b+c+d+e$ và tổng $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ đều chia hết cho p. Chứng minh rằng số $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$ cũng chia hết cho p.

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T2/285. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^5 - x^4 + 2x^2y = 2 \\ y^5 - y^4 + 2y^2z = 2 \\ z^5 - z^4 + 2z^2x = 2 \end{cases}$$

PHẠM HOÀNG HÀ
(SV lớp CLC K49 khoa Toán Tin ĐHSP Hà Nội)

Bài T3/285. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{2x^2+3y^2}{2x^3+3y^3} + \frac{2y^2+3x^2}{2y^3+3x^3} \le \frac{4}{x+y}$$

trong đó x, y là các số dương. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

VŨ ĐỨC CẢNH
(Ninh Bình)

Bài T4/285. Cho tam giác ABC với điểm M nằm trong tam giác. Các tia AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F. Gọi K là giao điểm của DE và CM, gọi H là giao điểm của DF và BM. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BK, CH đồng quy.

NGUYỄN HỮU PHƯỚC
(SV ĐH Bách Khoa, Hà Nội)

Bài T5/285. Cho tam giác ABC. Gọi MN, PR, QS là hình chiếu vuông góc của AB, BC, CA lên các đường phân giác ngoài của các góc C, A, B tương ứng. Gọi S, r lần lượt là diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC. Chứng minh rằng $MN + PR + QS \ge 6\sqrt[3]{Sr}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

NGUYỄN LÁI
(GV THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/285. Tìm số nguyên dương k sao cho dãy số sau gồm toàn số nguyên : $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{ka_n^2 - 8}$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

ĐỖ QUANG DƯƠNG
(SV BK 46 – K44 ĐH Bách khoa Hà Nội)

Bài T7/285. Xét dãy số (x_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ được xác định bởi $x_1 = a \ge 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 - 2\{x_n\}^2}{[x_n]^2}$ trong đó $[x]$ là phần nguyên của x và $\{x\}$ là phần thập phân của x. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn khi n tăng vô hạn và tìm giới hạn đó.

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Bài T8/285. Tìm tất cả các giá trị thực của x sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số không âm a, b, c :

$[a^2 + b^2 + (x-1)c^2][a^2 + c^2 + (x-1)b^2][b^2 + c^2 + (x-1)a^2] \le (a^2+xbc)(b^2+xac)(c^2+xab)$.

TRẦN TUẤN ANH
(SV Khoa Toán Tin 2000 ĐHKHTN – ĐHQG Tp Hồ Chí Minh)

Bài T9/285. Cho tam giác ABC. Gọi O và I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác đó. Các tia AI, BI, CI cắt đường tròn tâm O tương ứng tại A', B', C'. Gọi R_a, R_b, R_c là bán kính các đường tròn bàng tiếp của ΔABC ứng với các góc A, B, C. Gọi R'_c, R'_b, R'_c là bán kính các đường tròn bàng tiếp của $\Delta A'B'C'$ ứng với các góc A', B', C'

Chứng minh rằng :

$R'_a + R'_b + R'_c \ge R_a + R_b + R_c$

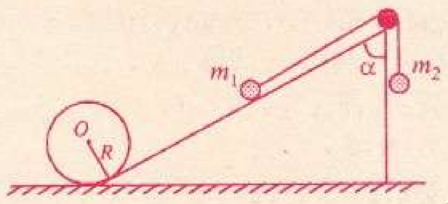
TRƯƠNG CAO DŨNG
(SV Điện tử 5 – K43 trường ĐH Bách Khoa Hà Nội)

Bài T10/285. Cho 5 điểm phân biệt A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 không đồng phẳng nhưng cùng nằm trên một mặt cầu. Chứng minh rằng các mặt phẳng, mỗi mặt đi qua trọng tâm của tam giác có các đỉnh là 3 trong 5 điểm nói trên và vuông góc với đường thẳng nối hai điểm còn lại, thì đồng quy.

VŨ ĐỨC SƠN
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/285. Máng nghiêng gồm phần thẳng và phần hình tròn bán kính R như hình vẽ ; góc $\alpha = 60^\circ$. Hai quả cầu $m_1 = 1{,}2$kg, $m_2 = 0{,}8$kg nối với nhau bằng sợi dây vắt qua ròng rọc cố định. Lúc đầu m_2 cách sàn một khoảng $h = 5{,}2$ m và m_1 ở thấp hơn m_2 một khoảng $h_o = 1{,}6$m. Sau khi 2 quả cầu bắt đầu chuyển động được 2 giây thì m_2 đột ngột bị tuột khỏi dây nối. Bỏ qua mọi ma sát, khối lượng dây,



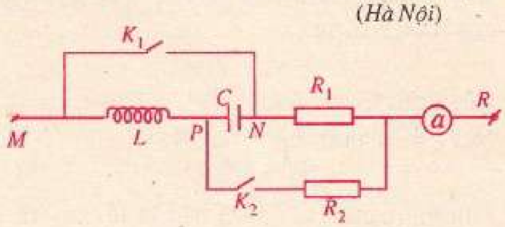
ròng rọc và kích thước của vật. Lấy $g= 10m/s^2$. Tính trị số lớn nhất của R để quả cầu m_1 không rời máng khi chuyển động.

ĐỖ QUỐC HÙNG
(*GV THPT chuyên Vĩnh Phúc*)

Bài L2/285. Cho một mạch điện như sơ đồ bên : $R_1 = 10\Omega$, $C = 100\mu F$; cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm L ; $R_a \approx 0$; $u_{MQ} = 100\sqrt{2}\ \sin 100\pi t(V)$. Tìm R_2 và L, biết rằng ampe kế đều chỉ 10A khi : a) khóa K_1 và K_2 đều mở và b) khóa K_1 đóng, K_2 mở.

Tìm số chỉ ampe kế khi khóa K_1 và K_2 đều đóng.

NGUYỄN QUANG HẬU
(*Hà Nội*)



PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/285. Let p be an odd natural number and a, b, c, d, e be five integers such that $a+b+c+d+e$ and $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ are divisible by p. Prove that $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$ is also divisible by p.

T2/285. Solve the system of equations :

$$\begin{cases} x^5 - x^4 + 2x^2y = 2 \\ y^5 - y^4 + 2y^2z = 2 \\ z^5 - z^4 + 2z^2x = 2 \end{cases}$$

T3/285. Prove the inequality

$$\frac{2x^2+3y^2}{2x^3+3y^3} + \frac{2y^2+3x^2}{2y^3+3x^3} \le \frac{4}{x+y}$$

for positive numbers x, y. When does equality occur ?

T4/285. Let M be a point inside the triangle ABC. The rays AM, BM, CM cut respectively the sides BC, CA, AB at D, E, F. Let K be the point of intersection of DE and CM and let H be that of DF and BM.

Prove that the lines AD, BK, CH are concurrent

T5/285. Let ABC be a triangle and MN, PR, QS be the orthogonal projections of AB, BC, CA respectively on the exterior bisectors of the angles C, A, B. Let S be the area and r be the inradius of ΔABC. Prove that $MN + PR + QS \ge 6\sqrt[3]{Sr}$. When does equality occur ?

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/285. Find the positive integers k such that all terms of the sequence of numbers defined by $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{ka_n^2 - 8}$ (n = 1, 2, 3, ...) are integers.

T7/285. Consider the sequence of numbers (x_n) (n = 1, 2, 3, ...) defined by $x_1=a \ge 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 - 2\{x_n\}^2}{[x_n]^2}$, where $[x]$ is the integral part of x, $\{x\}$ is the decimal part of x. Prove that the sequence (x_n) has a limit and find out its limit.

T8/285. Find all real numbers x such that the following inequality holds for all non negative numbers a, b, c :

$$[a^2 + b^2 + (x-1)c^2][a^2 + c^2 + (x-1)b^2]\,[b^2 + c^2 + (x-1)a^2] \le (a^2+xbc)(b^2+xac)(c^2+xab).$$

T9/285. Let ABC be a triangle, O and I be respectively its circumcenter and incenter. The rays AI, BI, CI cut the circumcircle respectively at A', B', C'. Let R_a, R_b, R_c be the radii of the escribed circles of ΔABC respectively in the angles A, B, C. Let R'_a, R'_b, R'_c be the radii of the escribed circles of $\Delta A'B'C'$ respectively in the A', B', C'. Prove that :

$$R'_a + R'_b + R'_c \ge R_a + R_b + R_c$$

T10/285. Let be given five distinct, non coplanar points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 on a sphere. Prove that the planes passing through the centroid of a triangle admitting three of these five given points as vertices and perpendicular to the line joining the two other points are concurrent.

Bài T1/281. *Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình :*

$$54x^3 + 1 = y^3$$

Lời giải. *Cách 1.*

Đặt $z = 3x$ phương trình cho ta :

$$2z^3 + 1 = y^3 \qquad (1)$$

Phương trình (1) có vế trái là lẻ, suy ra y^3 lẻ và y lẻ. Đặt $y = 2k+1$ $(k \in Z)$ ta có :

$2z^3 + 1 = (2k+1)^3$

$\Leftrightarrow z^3 = 4k^3 + 6k^2 + 3k \Rightarrow z \vdots k.$

Đặt $z = tk$ $(t \in Z) \Leftrightarrow t^3k^3 = k^3 + 3k(k+1)^2$

$\Leftrightarrow k(t^3k^2 - k^2 - 3(k+1)^2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ t^3k^2 = k^2 + 3(k+1)^2 \end{array}\right.$$

- Xét $k = 0 \Rightarrow y = 1, z = 0, \Rightarrow x = 0$

- Xét $t^3k^2 = k^2 + 3(k+1)^2$

$\Leftrightarrow (t^3-1)k^2 = 3(k+1)^2$

• Nếu $t = 1 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow 3x = z = -1 \Rightarrow$ x không nguyên.

• Nếu $t \neq 1 \Rightarrow k \neq -1 \Rightarrow 3(k+1)^2 \vdots k^2$

Nhưng $(k, k+1) = 1 \Rightarrow 3 \vdots k^2 \Rightarrow k^2 = 1$ $\Rightarrow k = 1.$

Từ đó có $y = 3$. Nhưng với giá trị này của y thì x không nguyên.

Vậy phương trình (1) có cặp nghiệm nguyên duy nhất $(x = 0, y = 1)$

Cách 2. (của *Trần Thị Lệ Hằng*, 9A, THCS Hương Canh, **Vĩnh Phúc**).

Ta có $54x^3 + 1 = y^3$ (1)

$\Leftrightarrow 1 = y^3 - 54x^3$

$\Leftrightarrow 1 = (y - \sqrt[3]{54}\,x)(y^2 + \sqrt[3]{54}\,xy + \sqrt[3]{54^2}\,x^2)$ (2)

Nhưng vì $y^2 + \sqrt[3]{54}\,xy + \sqrt[3]{54^2}\,x^2$

$$= \left(y + \frac{\sqrt[3]{54}}{2}x\right)^2 + \frac{3\sqrt[3]{54^2}}{4}x^2 > 0 \ \forall(x, y)$$

nên phương trình (2) xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} y - \sqrt[3]{54}\,x = 1 \\ y^2 + \sqrt[3]{54}\,xy + \sqrt[3]{54^2}\,x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + \sqrt[3]{54}\,x & (3) \\ y^2 + \sqrt[3]{54}\,xy + \sqrt[3]{54^2}x^2 = 1 & (4) \end{cases}$$

Thế giá trị của y ở (3) vào (4) ta được

$(1+\sqrt[3]{54}x)^2 + \sqrt[3]{54}\,(1+\sqrt[3]{54}\,x)x + \sqrt[3]{54^2}x^2 = 1$

$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{54}\,x(\sqrt[3]{54}\,x + 1) = 0$

Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 1$

Nếu $\sqrt[3]{54}\,x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{54}} \notin Z$ (loại)

Vậy phương trình có nghiệm nguyên duy nhất là $(x = 0, y = 1)$

Nhận xét. Các bạn sau đây cũng có lời giải như cách 2 : *Lê Thành Công, Nguyễn Trung Hiếu*, 9A, THCS Vĩnh Tường; *Nhâm Tùng Giang*, 8A, THCS Vĩnh Yên, Tx. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/281. *Giải phương trình*

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 16\sqrt{x} - 9 = 0$$

Lời giải. (của bạn *Bùi Danh Nam*, lớp 8B, THCS Nam Đàn, **Nghệ An**)

Đặt $\sqrt[3]{x} = y$, ta có phương trình sau tương đương với phương trình đã cho :

$y^9 - 3y^6 + 3y^3 - 16y - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$(y+1)(y^2-y-1)(y^6+2y^4-2y^3+4y^2-2y+9) = 0 \Leftrightarrow$

$(y+1)(y^2-y-1)[(y^3-1)^2 + 2y^4+3y^2+(y-1)^2+7] = 0$

$\Leftrightarrow (y+1)(y^2-y-1) = 0$

Phương trình cuối có ba nghiệm $y_1 = -1$, $y_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $y_3 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, nên phương trình ban đầu có ba nghiệm là $x_1 = -1$, $x_2 = 2 + \sqrt{5}$, $x_3 = 2 - \sqrt{5}$.

Nhận xét. Rất nhiều bạn có kết quả đúng nhưng lời giải không thật chuẩn xác. Có một số bạn ra đáp số sai hoặc giải còn thiếu nghiệm. Một bạn quên không đề tên và những bạn sau đây có lời giải chính xác và chặt chẽ :

Nam Định: *Trần Trung Kiên*, 9A2, và *Đinh Duy Tiến*, 9A, THCS Lê Quý Đôn, huyện Ý Yên, Nam Định, *Nguyễn Nhị Long*, 9A1, Phùng Chí Kiên thành phố Nam Định; **Bến Tre:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 9C, THCS thị xã Bến Tre; **Ninh Bình:** *Lê Thanh Cảnh*, 9A, THCS Lí Tử Trọng, *Nguyễn Quang Vinh*, 8A, THCS Trương Hán Siêu, thị xã Ninh Bình; **Nghệ An:** *Phan Trung Kiên*, 8C, THCS thị trấn Nam Đàn, **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Vĩnh Hà*, 9B, THCS Vĩnh Yên, thị xã Vĩnh Yên, *Nhâm Tùng Giang*, 8A, THCS Vĩnh Yên, thị xã Vĩnh Yên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thế Tùng*, THCS Việt Trì; **Hà Tây:** *Dương Minh Sơn, Lê Quý Lợi, Lê Trọng Đông* và *Trịnh Xuân Tú*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hải Dương:** *Phạm Huy Hoàng*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương; **Hà Nội:** *Lê Hùng Việt Bảo*, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa, *Nguyễn Đức Tâm*, 8C, THCS Giảng Võ, Ba Đình, *Nguyễn Quang Tùng*, 9H, THCS Trưng Vương, Hoàn Kiếm; **Thanh Hóa:** *Lê Ngọc Vượng*, 6B, THCS

Triều Dương, Tĩnh Gia; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Tất Việt*, 6A, THCS Tân Hồng, Từ Sơn.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/281. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$(a_1+a_2+a_3)(a_3+a_4+a_5)(a_5+a_6+a_1),$$

trong đó các số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 lấy các giá trị khác nhau trong tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Lời giải. Gọi biểu thức là $F = F(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$

a) Tìm giá trị lớn nhất của F :

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$F = (a_1+a_2+a_3)(a_3+a_4+a_5)(a_5+a_6+a_1)$$

$$\le \left[\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+(a_1+a_3+a_5)}{3}\right]^3$$

$$= \left[\frac{21+(a_1+a_3+a_5)}{3}\right]^3 \le \left[\frac{21+(6+5+4)}{3}\right]^3$$

$$= 1728$$

Khi $a_1 = 6$; $a_2 = 1$; $a_3 = 5$, $a_4 = 3$; $a_5 = 4$; $a_6 = 2$ thì $F = 1728$, vậy F lớn nhất là 1728.

b) Do vai trò bình đẳng của a_2, a_4, a_6 nên có thể giả sử $a_2 = \min\{a_2, a_4, a_6\}$. Vì F chỉ có không quá $6! = 720$ giá trị nên giá trị nhỏ nhất của F tồn tại. Giả sử F nhỏ nhất khi $a_1 = n_1$, $a_2 = n_2$, $a_3 = n_3$, $a_4 = n_4$, $a_5 = n_5$, $a_6 = n_6$ với $\{n_1 ; n_2 ; n_3 ; n_4 ; n_5 ; n_6\} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

+ Nếu $n_2 \le 2$ thì trong 2 số n_1 và n_3 phải có một số lớn hơn n_2, giả sử $n_1 > n_2$. Khi đó :

$F(n_2, n_1, n_3, n_4, n_5, n_6) < F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ mâu thuẫn với giả thiết

+ Nếu $n_3 = 3$ thì trong 2 số n_1 và n_2 nếu có số lớn hơn n_2 thì sẽ dẫn đến mâu thuẫn như ở trên. Nếu $\{n_1, n_3\} = \{1, 2,\}$ thì thử các khả năng ta có $F \ge 720$.

+ Nếu $n_2 \ge 4$ thì $n_4 \ge 4$, $n_6 \ge 4$ nên $\{n_2, n_4, n_6\} = \{4, 5, 6\} \Rightarrow \{n_1, n_2, n_3\} = \{1, 2, 3\}$. Thử các khả năng ta có $F \ge 693$.

Khi $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$, $a_4 = 6$, $a_5 = 3$, $a_6 = 5$ thì $F = 693$. Vậy giá trị nhỏ nhất của F là 693.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán có rất ít bạn tham gia giải. Trong các bạn gửi lời giải về thì cũng khá nhiều bạn làm sai phần giá trị nhỏ nhất của F.

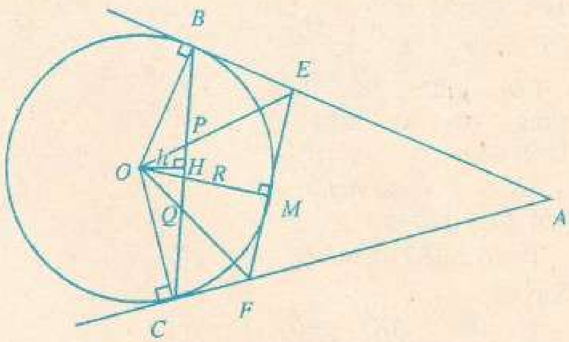
2) Một số bạn dùng nhận xét cảm tính thay cho việc chứng minh : "Vì a_1, a_3, a_5 xuất hiện hai lần nên F nhỏ nhất khi

$\{a_1, a_3, a_5\} = \{1, 2, 3\}$.

3) Các bạn có lời giải tốt là : **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Minh, Nguyễn Quang Tùng*, 9H, THCS Trưng Vương; **Hải Phòng:** *Nguyễn Đức Phương*, 8A, NK Trần Phú; **Thái Bình:** *Phạm Văn Hùng*, 9C, THCS thị trấn Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Hà Nam:** *Vũ Quang Thanh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên; **Nam Định:** *Đặng Đình Trường B*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/281. *Từ điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là các tiếp điểm). Gọi M là điểm nào đó (khác B, C) trên đường tròn. Tiếp tuyến qua M cắt AB và AC ở E và F. Đường thẳng BC cắt OE và OF ở P và Q. Chứng minh rằng tỉ số $\frac{PQ}{EF}$ không đổi khi M di chuyển trên đường tròn.*



Lời giải. Xét trường hợp M thuộc cung nhỏ BC. Trường hợp còn lại chứng minh tương tự. Hạ $OH \perp BC$.

Vì EB và EM là tiếp tuyến nên $\angle OEB = \angle OEM = 90^\circ - \frac{\angle AEF}{2}$.

Tương tự $\angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2}$.

Do đó $\angle BPE = 180^\circ - \angle ABC - \angle OEB$

$= \frac{\angle AEF + \angle BAC}{2} = 90^\circ - \frac{\angle AFE}{2} = \angle OFE$

Hay $\angle OPQ = \angle OFE$.

Suy ra $\Delta OPQ \backsim \Delta OFE$ (g-g)

Do vậy $\frac{PQ}{EF} = \frac{OH}{OM} = \frac{h}{R}$ không đổi

Vậy tỉ số $\frac{PQ}{EF}$ không đổi khi M di chuyển trên đường tròn.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

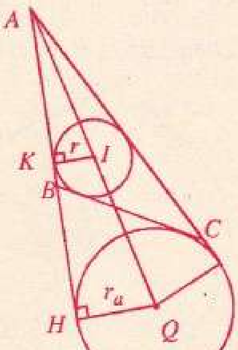
Hòa Bình: *Nguyễn Lâm Tuyên*, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy, *Nguyễn Thị Thủy*, 9A, THCS Kim

Đồng, Tân Lạc; **Vĩnh Phúc:** *Kim Đình Trường*, 9B, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Thị Hoài Lê*, 9A, THCS Vĩnh Tường, **Hà Tây:** *Tạ Duy Hưng*, 9B, THCS *Nguyễn Thượng Hiền*, Ứng Hòa; **Hải Phòng:** *Phạm Anh Minh*, 8A, THPT Trần Phú, **Nam Định:** *Nguyễn Nhị Long*, 9A1, *Phùng Chí Kiên, Ngô Huy Hoàng, Nguyễn Đăng Hợp*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Nguyễn Tấn Bá*, 9A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, **Khánh Hòa:** *Nguyễn Ngọc Nga Sơn*, THCS Thái Nguyên, Nha Trang

VŨ KIM THỦY

Bài T5/281. *Cho tam giác ABC với BC = a, CA = b, AB = c. Gọi r và r_a, r_b, r_c theo thứ tự là bán kính của đường tròn nội tiếp và các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C của tam giác đó. Chứng minh rằng:*

$$\frac{abc}{r} \geq \frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c} \quad (*)$$



Lời giải. Dễ thấy rằng với kí hiệu ở hình vẽ ta có

$AK = p - a$, $AH = p$ với $2p = a+b+c$.

Ta có $\Delta AKI \backsim \Delta AHQ$.

Suy ra

$$\frac{r}{r_a} = \frac{IK}{HQ} = \frac{AK}{AH} = \frac{p-a}{p}$$

$$\text{Xét } T = \frac{abc}{r} - \left(\frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c}\right)$$

$$= \frac{abc}{r} - \frac{a^3(p-1)}{rp} - \frac{b^3(p-b)}{rp} - \frac{c^3(p-c)}{rp}$$

$$= \frac{1}{rp}[pabc - a^3(p-a) - b^3(p-b) - c^3(p-c)]$$

Bất đẳng thức (*) tương đương với $Trp \geq 0$. Vì vai trò của a, b, c như nhau nên giả sử $a \geq b \geq c$. Xét

$$Trp = (a+b+c)abc - a^3(b+c-a) - b^3(c+a-b) - c^3(a+b-c)$$

$$= a^2bc + b^2ca + c^2ab - a^3b - a^3(c-a) - b^3c - b^3(a-b) - c^3a - c^3(b-c)$$

$$= a^2b(c-a) - a^3(c-a) + b^2c(a-b) - b^3(a-b) + c^2a(b-c) - c^3(b-c)$$

$$= a^2(c-a)(b-a) + b^2(a-b)(c-b) + c^2(b-c)(a-c)$$

$$= a^2(c-b+b-a)(b-a) + b^2(a-b)(c-b) + c^2(b-c)(a-c)$$

$$= (c-b)(b-a)(a^2-b^2) + a^2(b-a)^2 + c^2(b-c)(a-c) \geq 0$$

Vậy $Trp \geq 0 \Rightarrow$ (*) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét. Trừ một số ít bạn biến đổi dài, hầu hết các bạn đều giải đúng, trong đó có rất nhiều bạn lớp 7, lớp 8.

Yên Bái: *Thành Đặng Kiên*, 9A, THCS Quang Trung, Tx. Yên Bái ; **Phú Thọ:** *Lê Thanh Tùng*, 9C, THCS Việt Trì, Nguyễn Duy Đào, 8T, THCS Thọ Sơn, Việt Trì, *Trần Đình Thịnh*, 9A1, THCS DT NT Hạ Hòa; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Hạnh*, 7A, THCS Thiện Kế, Bình Xuyên, *Phạm Huy*, 6C, THCS Tam Đảo, Tam Dương, *Trần Thị Tố Linh*, 8B, THCS Yên Lạc, *Văn Thị Lan*, 8A5, THCS Hồng Châu, Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Cúc*, 7A, THCS Việt Đoàn, Tiên Du, *Đoàn Văn Kì*, 6, THCS Vạn Ninh, Gia Bình; **Hà Nam:** *Vũ Quang Thanh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên; **Hà Tây:** *Phan Lạc Dũng, Nguyễn Ngọc Tuấn*, 8A, THCS Thạch Thất ; **Ninh Bình** : Nguyễn Quang Vinh, 8C, THCS Trương Hán Siêu, Tx Ninh Bình ; **Hải Dương**: *Đặng Thị Thu Huyền*, 7D, THCS An Bình, Nam Sách, *Trần Thị Thanh Bình*, 7A, THCS Thanh Miện, *Lê Đình Huy*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Hải Phòng:** *Lê Thị Hồng Nhung*, 7C/11, THCS Trần Phú, Lê Chân, *Phạm Duy Thành, Bùi Tuấn Anh, Trần Xuân Dũng, Phạm Anh Minh*, 8A, THNK Trần Phú; **Hà Tĩnh:** *Phạm Việt Hùng*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Ngãi:** *Phạm Nguyễn Hoàng Chương*, 8B, THCS Đức Phổ, *Ngô Ngọc Khiêm*, 9/2, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn; **Phú Yên:** *Huỳnh Thị Thùy Lam*, 7B1, THCS Phú Lâm, huyện Tuy Hòa; **Đồng Nai:** *Lương Hoàng Việt*, 7/10, THCS Trưng Vương, Xuân Lộc, *Lý Huệ Thủy* 8/1 THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tp Biên Hòa; **Bến Tre:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 9/2 THCS Mỹ Hóa, Tx. Bến Tre.

VIỆT HẢI

Bài T6/281. *Chứng minh rằng trong dãy số tự nhiên liên tiếp*

n, $n+1$, $n+2$, ..., $n^k + n^{k-1} + ... + n^2 + n + 2$ với $k \geq 2$, bao giờ cũng tìm được lũy thừa bậc $k+1$ của một số tự nhiên.

Lời giải. (của bạn *Phùng Văn Thắng*, 11 Toán, Lê Hồng Phong, **Nam Định**).

Nếu $n = m^{k+1}$ ($m \in N^*$) thì bài toán được chứng minh. Nếu trái lại tồn tại $m \in N^*$ sao cho

$m^{k+1} < n < (m+1)^{k+1}$

Ta sẽ chứng minh

$$n^k + n^{k-1} + ... + n^2 + n + 2 \geq (m+1)^{k+1} \quad (1)$$

Thật vậy ta có với $m > 1$:

$$n^k + n^{k-1} + ... + n + 2 > m^{k(k+1)} + ... + m^{k+1} + 2$$

$$= \frac{m^{(k+1)^2} - 1}{m^{k+1} - 1} + 1 > \frac{m^{(k+1)^2}}{m^{k+1}}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{m^{(k+1)^2}}{m^{k+1}} > (m+1)^{k+1} \Leftrightarrow \frac{m^{k+1}}{m} > m+1.$$

$\Leftrightarrow m^k > m+1$ bất đẳng thức này đúng với $m>1$, $k \geq 2$.

Nếu $m=1$ bất đẳng thức (1) cũng đúng vì

$$n^k + n^{k-1} + ... + n + 2$$
$$\geq 2^k + 2^{k-1} + ... + 2^2 + 2 + 2 = 2^{k+1}.$$

Nhận xét. Các bạn giải tốt bài toán bao gồm :

Nguyễn Anh Thắng, 12H, **Phú Thọ**, *Nguyễn Anh Ngọc*, 10A1, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương**, *Đào Quang Hà*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**, *Lương Thế Nhân*, 12T, *Lê Anh Hoàng*, 11T, ĐHQG **Tp Hồ Chí Minh** ; *Nguyễn Tất Hảo*, 12A, Từ Sơn, **Bắc Ninh**, *Vũ Xuân Kiên*, 12H, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**; *Đặng Đình Khánh*, 10A1, ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Văn Du*, 10T, ĐHSP Vinh, *Trần Quốc Hoàn*, 8B, Thanh Hà, **Hải Dương**, *Nguyễn Trường Thọ*, 8A, Phù Ninh, **Phú Thọ**, *Phạm Văn Trung*, 10T, Lê Khiết, **Quảng Ngãi**, *Nguyễn Hoàng Thạch*, 11 Amsterdam, **Hà Nội**, *Trần Xuân Dũng*, **Hải Phòng**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/281. *Xét dãy số nguyên dương (a_n) ($n = 0, 1, 2, ...$) thỏa mãn các điều kiện: $a_o = 1$, $a_n^2 > a_{n-1}a_{n+1}$ với mọi $n = 1, 2, ...$*

a) Chứng minh rằng $a_n > n$ với mọi $n \geq 1$

b) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + ... + \frac{n}{a_n}\right)$

Lời giải. (của đa số các bạn).

a) Trước hết ta chứng minh $\{a_n\}$ là dãy số tăng thực sự. Thật vậy, giả sử tồn tại $k \geq 1$ sao cho $a_{k+1} \leq a_k$. Từ giả thiết $a_{k+1}^2 > a_k a_{k+2}$ dễ dàng suy ra $a_{k+1} > a_{k+2}$. Cứ như vậy, ta được :

$$a_{k+1} > a_{k+2} > a_{k+3} ...$$

Nghĩa là, bắt đầu từ chỉ số k, dãy đã cho giảm thực sự. Điều này không xảy ra vì $\{a_n\}$ là dãy vô hạn các số nguyên dương. Như vậy, ta có $a_1 > a_o = 1$. Bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh $a_n > n$.

b) Theo kết quả trên, ta có

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + ... + \frac{n}{a_n}\right) < 1 + 1 + ... + 1 = n$$

Đặt $u_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + ... + \frac{n}{a_n}\right)$

Suy ra $0 < u_n < \frac{1}{n}$

Do đó, dễ dàng thấy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Bắc Ninh: *Nguyễn Bá Thịnh*, 11A1, *Ngô Quý Hoàn*, 10A1, THPT Yên Phong I, *Lê Đăng Nam*, 9A, THCS Yên Phong, *Nguyễn Thế Thủy*, 11AT, THPT NK Hàn Thuyên; **Hải Phòng:** *Đồng Dương Thảo*, 11T, THPT chuyên Trần Phú; **Thanh Hóa:** *Lê Văn Bắc*, 8A, THCS Quảng Lĩnh, Quảng Xương, *Lê Hoàng Tuấn*, 12T, *Hoàng Thắng*, 11T1, *Nguyễn Chí Hải*, 10T1, *Nguyễn Việt Hà*, THPT Lam Sơn; **Nam Định:** *Phùng Văn Huân*, 12D, THPT Giao Thủy A; *Đặng Đình Công*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, *Nguyễn Xuân Trường*, 11A, THPT Xuân Trường ; **Hải Dương:** *Đặng Ngọc Mạnh*, *Lê Quang Hòa*, 10T, *Phạm Văn Phùng*, *Lê Hải Yến* và *Nguyễn Anh Nguyên*, 11T, THPT Nguyễn Trãi ; **Ninh Bình:** *Đinh Quyết Tiến*, 10A2, THPT chuyên Yên Khánh A; *Trần Văn Giang*, và *Bùi Tự Cường*, 11T, THPT Lương Văn Tụy; **Thái Bình:** *Lê Thái Hà*, 11A10, THPT Nguyễn Đức Cảnh; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Đức Dân*, 11T, *Bùi Mạnh tiến*, 10T, THPT chuyên; **Yên Bái:** *Trần Bình Minh*, 10A1, *Nguyễn Tiến Cường*, 11A1 và *Lục Trí Tuyên*, 12A1, THPT chuyên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Duy Thanh*, 12S, THPT Tam Nông, Việt Trì, *Nguyễn Tiến Dũng*, 10A1, *Hoàng Quyền*, 11A1 và *Nguyễn Tất Thắng*, 12A1, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Trường Sơn*, 11A1, THPT chuyên, *Trần Trung Hiếu*, 12A10, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, *Trần Đặng Vũ*, 11A1, THPT Lê Xoay, Vĩnh Tường; **Hòa Bình:** *Nguyễn Lâm Quyền*, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy, *Hà Hữu Cao Trình*, 10T và *Giang Sơn Đạt*, 11T, THPT NK Hoàng Văn Thụ; **Hà Tây:** *Vũ Xuân Quỳnh*, 10T1, *Nguyễn Tường Việt*, *Trần Ngọc Diệp*, 12T1, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hà Nội:** *Nguyễn Mạnh Long*, 11N, THPT Thăng Long, *Nguyễn Tuấn Dương*, 11AT, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; *Lê Hùng Việt Bảo*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ; *Nguyễn Hoàng Thạch* và *Nguyễn Trung Chính*, 11T, trường Amsterdam ; **Đà Lạt:** *Phạm Đình Thắng*, 12T, THPT chuyên, Lâm Đồng; **Hưng Yên:** *Hàn Ngọc Đức*, 11C, THPT Mỹ Hào; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Công Thắng*, 11T, THPT Cao Lãnh; **Đồng Nai:** *Nguyễn Phan Tử Tâm*, 11T2, *Nguyễn Hải Phong*, 11T1, *Lê Phương* và *Đỗ Quang Trí*, 10T1, THPT Lương Thế Vinh, Biên Hòa ; **Quảng Trị:** *Hồng Ngọc Bình*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, *Phan Quốc Hưng*, THPT Hải Lăng; **Quảng Ngãi:** *Lê Hữu Khải*, 12C1, *Trần Quốc Tuấn*, *Ngô Quốc Hiển*, 11T2, *Nguyễn Duy Thành*, 10L, *Phạm Văn Trung*, 10T, *Phạm Lê Thịnh*, chuyên Lê Khiết ; **Quảng Bình :** *Lê Nguyễn Hồng*, 11T, THPT NK ;

Quảng Ninh: *Đặng Văn Thơ*, 11A4, THPT Minh Hà, Yên Hưng; **Khánh Hòa:** *Lê Thị Khánh Hiền*, 12T, THPT Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Hàn Quốc Huy*, 12T, *Nguyễn Trần Thi*, *Huỳnh Tấn Trung* và *Ngô Thanh Nguyên*, 11T1, THPT Lương Văn Chánh, Tuy Hòa; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Hoàng Vũ*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, **Tiền Giang:** *Lữ Minh Thái* và *Nguyễn Tuấn Ngọc*, 10T, THPT chuyên; **Bình Định:** *Trần Thanh Tình*, 10T, *Phạm Thái Dương*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn; **Bến Tre:** *Phạm Hoài An*, 12C, THPT Lộc Thuận, Bình Đại; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Hải Long*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Tây Ninh:** *Trần Quốc Chung*, 11A2, THPT Hoàng Lê Kha; **Gia Lai:** *Lê Tiến Hoàng*, 12C3, *Đặng Tuấn Hiệp* và *Lê Hoàng An*, THPT Hùng Vương, Pleiku; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Vũ Thiên Nga*, 11CT, THPT Lê Hồng Phong, *Trần Anh Hoàng*, 11T, *Phạm Tuấn Anh*, 12T, *Lương Thế Nhân*, PTNK-ĐHQG; **Nghệ An:** *Lê Văn Đức*, 10T2, *Lê Việt Thuật*, Vinh; *Phạm Hoàng Minh*, 11I, THPT Huỳnh Thúc Kháng.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/281. *Tìm số tất cả các đa thức $P(x)$ bậc không lớn hơn 3 với các hệ số nguyên không âm và thỏa mãn điều kiện $P(3) = 2000$.*

Lời giải. (của *Đặng Đình Khánh*, 10A1, PTCT, ĐHSP I, **Hà Nội**)

Xét trường hợp bậc của $P(x) \le 1$. Giả sử $P(x) = ax + b$ $(a, b \in N)$;
$P(3) = a.3 + b = 2000$.

Suy ra $0 \le a \le \left[\dfrac{2000}{3}\right] = 666$.

Như vậy có 667 đa thức $P(x)$ với bậc ≤ 1 thỏa mãn điều kiện đề bài (1)

Xét trường hợp bậc của $P(x)$ bằng 2, $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in N, a > 0)$.

$P(3) = 9a + 3b + c = 2000$. Ta có

$$0 < a \le \left[\frac{2000}{9}\right] = 222$$

Do đó $3b+c = 2000 - 9a$. Suy ra $0 \le b \le 666 - 3a$. Tức là có $667 - 3a$ số b.

Bởi vậy số đa thức $P(x)$ của trường hợp này là

$$\sum_{a=1}^{222}(667-3a) =$$
$$= 667 \times 222 - 3(1+2+3+...+222) =$$
$$= 667 \times 222 - \frac{3 \times 222 \times 223}{2} = 73815 \qquad (2)$$

Trường hợp còn lại bậc của $P(x)$ bằng 3, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in N, a > 0)$.

$P(3) = 27a + 9b + 3c + d = 2000$.

Tương tự như các đánh giá ở trên ta có

$$1 \le a \le \left[\frac{2000}{27}\right] = 74$$

$0 \le b \le \left[\dfrac{2000-27a}{9}\right] = 222 - 3a$, có $223 - 3a$ giá trị b,

$0 \le c \le \left[\dfrac{2000-27a-9b}{3}\right] = 666 - 9a - 3b$, có $667 - 9a - 3b$ giá trị c.

Từ đó số đa thức của trường hợp này là :

$$\sum_{a=1}^{74}\sum_{b=0}^{222-3a}(667-9a-3b)$$
$$= \sum_{a=1}^{74}[(667-9a)(223-3a) - 3(0+1+...+(222-3a))]$$
$$= \sum_{a=1}^{74}\left[(667-9a)(223-3a) - \frac{3(222-3a)(223-3a)}{2}\right]$$
$$= \sum_{a=1}^{74}\left(74482 - \frac{4011}{2}.a + \frac{27}{2}.a^2\right) = 1807043$$

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra số đa thức $P(x)$ thỏa mãn đề bài là

$$667 + 73815 + 1807043 = 1881525.$$

Nhận xét. 1) Đây là bài toán tính toán theo cách liệt kê, không có lí luận toán học sâu sắc nhưng đòi hỏi phải tính toán tỉ mỉ, cẩn thận. Tòa soạn nhận được lời giải cua 90 bạn, có 20 bạn cho đáp số đúng.

2) Các bạn sau có lời giải tốt : **Hà Nội :** *Trần Việt Hưng*, *Nguyễn Hữu Thuẩn*, 10A, PTCT, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; **Hà Tây:** *Phan Anh Dũng*, 10A2, THPT Quốc Oai; **Vĩnh Phúc:** *Đào Hoàng Nam*, 10B2, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương**: *Nguyễn Thành Nam*, 10, THPT NK Nguyễn Trãi; **Ninh Bình:** *Đinh Quyết Tiến*, 10A2, THPT Yên Khánh A, **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Lâm Hưng*, 10t, PTNK-ĐHQG; v.v...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/281. *Cho tam giác ABC với đường tròn ngoại tiếp tâm O và đường tròn nội tiếp tâm I. Các tia AI, BI, CI lần lượt cắt đường tròn tâm O lần nữa tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng :*

a) $AB^2 + BC^2 + CA^2 \le A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2$

b) $IA^2 + IB^2 + IC^2 \le IA_1^2 + IB_1^2 + IC_1^2$

Lời giải. (của bạn *Trần Thế Hiển*, 11T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương**).

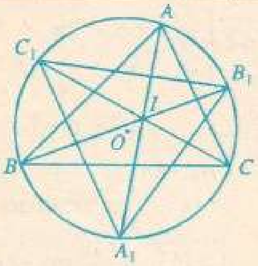
GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

a) Dễ thấy :

$\angle B_1A_1C_1 = \dfrac{\hat{B}+\hat{C}}{2}$;

$\angle C_1B_1A_1 = \dfrac{\hat{C}+\hat{A}}{2}$;

$\angle A_1C_1B_1 = \dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$ (h.1)



Theo ĐL hàm số sin ta có :

$AB^2 + BC^2 + CA^2 \le A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2$

$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$

$\le \sin^2\dfrac{B+C}{2} + \sin^2\dfrac{C+A}{2} + \sin^2\dfrac{A+B}{2}$

$\Leftrightarrow 2(1 + \cos A\cos B\cos C)$

$\le 2\left(1 + \cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{C+A}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C \le \cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{C+A}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}$ (1)

• Nếu ΔABC có góc không nhọn thì $\cos A\cos B\cos C \le 0$. Suy ra (1) đúng.

• Nếu ΔABC có 3 góc nhọn thì :

$\cos B\cos C \le \left(\dfrac{\cos B + \cos C}{2}\right)^2 \le \cos^2\dfrac{B+C}{2}$

Tương tự ta có : $\cos C\cos A \le \cos^2\dfrac{C+A}{2}$;

$\cos A\cos B \le \cos^2\dfrac{A+B}{2}$

Từ đó suy ra (1) đúng :

Tóm lại (1) đúng với mọi tam giác ABC.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ tam giác ABC đều

b) Dễ thấy : $IA = \dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}} = \dfrac{4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}$

$= 4R\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

Tương tự : $IB = 4R\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A}{2}$;

$IC = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}$

Vậy : $AB^2 = (\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA})^2 = IA^2 + IB^2 - 2\,\overrightarrow{IA}\,.\,\overrightarrow{IB}$

$= IA^2 + IB^2 - 2IA.IB\cos\angle AIB$

$= IA^2 + IB^2 -$

$- 2.4R\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\,.\,4R.\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A}{2}\cos\left(90^o + \dfrac{C}{2}\right)$

$= IA^2 + IB^2 + R^2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\,.\,\sin^2\dfrac{C}{2}$

Tính BC^2, CA^2 tương tự như vậy ta có :

$AB^2 + BC^2 + CA^2 =$

$= 2(IA^2 + IB^2 + IC^2) +$

$+ 32R^2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\left(\sin^2\dfrac{a}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2}\right)$

Chú ý rằng : $\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} \ge \dfrac{3}{4}$

Ta có : $AB^2 + BC^2 + CA^2 \ge$

$2(IA^2 + IB^2 + IC^2) + 24R^2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ (2)

Dễ thấy : $IA_1 = BA_1 = 2R\sin\dfrac{A}{2}$

Tương tự : $IB_1 = 2R\sin\dfrac{B}{2}$; $IC_1 = 2R\sin\dfrac{C}{2}$

Vậy : $A_1B_1^2 = (\overrightarrow{IB_1} - \overrightarrow{IA_1})^2$

$= IA_1^2 + IB_1^2 - 2\overrightarrow{IA_1}\,.\,\overrightarrow{IB_1} =$

$= IA_1^2 + IB_1^2 - 2.IA_1.IB_1\cos\angle A_1IB_1$

$= IA_1^2 + IB_1^2 - 2.2R\sin\dfrac{A}{2}\,.\,2R\sin\dfrac{B}{2}\cos\left(90^o + \dfrac{C}{2}\right)$

$= IA_1^2 + IB_1^2 - 8R^2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

Tương tự như vậy ta có :

$A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 =$

$= 2(IA_1^2 + IB_1^2 + IC_1^2) + 24R^2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ (3)

Từ câu a) và (2), (3) suy ra :

$$IA_1^2 + IB_1^2 + IC_1^2 \ge IA^2 + IB^2 + IC^2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ tam giác ABC đều

Nhận xét. a) Bài này có khá nhiều bạn tham gia giải. Câu a) dễ. Câu b) khó hơn và là bất đẳng thức khá thú vị. Ngoài lời giải của bạn Hiển, nhiều bạn khác cũng có lời giải tốt. Qua lời giải của các bạn ta có thể thấy :

$IA^2 + IB^2 + IC^2 \le IA_1^2 + IB_1^2 + IC_1^2$

$\Leftrightarrow h_a + h_b + h_c \le 2R + 5r$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos(B-C) + \cos(C-A) + \cos(A-B)}{4} + \dfrac{3}{4}$

$\le \cos A + \cos B + \cos C$

$\Leftrightarrow 4\left(\sin^2\dfrac{B}{2}\sin^2\dfrac{C}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2}\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{A}{2}\sin^2\dfrac{B}{2}\right)$

$\le \sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{p-a}{a} + \dfrac{p-b}{b} + \dfrac{p-c}{c} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{p-a} + \dfrac{b}{p-b} + \dfrac{c}{p-c}\right)$

b) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

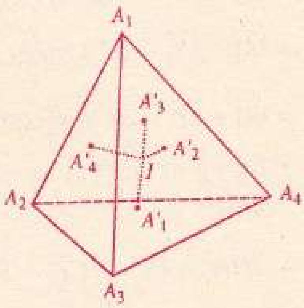
Phú Yên: *Phùng Thực Phan Nam*, 10T2, THPT Lương Văn Chánh; **Thái Bình:** *Ngô Quang Minh*, 12A1, THPT Quỳnh Thọ, Quỳnh Phụ; **Đắc Lắc:**

Nguyễn Minh Mẫn, 11A3, THPT Trần Quốc Toản, Eaka; **Hải Dương:** *Trần Quang Khải*, 12C3, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Công Thăng*, 11T, THPT Cao Lãnh ; **Hà Nội**: *Đặng Đình Khánh*, 10A1, - PTCT, ĐHSP...

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/281. *Tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có diện tích mặt $A_2A_3A_4$ bằng S và diện tích mỗi mặt còn lại đều bằng 1, các góc phẳng nhị diện cạnh A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 có số đo tương ứng bằng α, 2α, 3α. Chứng minh rằng : $2-\sqrt{3} < S^2 < 3$.*

Lời giải 1. (*Phạm Tuấn Anh*, 12T, PTNK-ĐHQG **Tp Hồ Chí Minh**, *Phạm Quang Nhật Minh*, 11A1, PTCT-T, ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Hoài Vũ*, 12A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**, *Nguyễn Đức Dân*, 11 Toán, THPT chuyên **Thái Nguyên**)



Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện, A'_i là tiếp điểm của mặt cầu trên mặt (có diện tích S_i) đối diện với đỉnh A_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Đặt $\overrightarrow{IA'_i} = \overrightarrow{n_i}$ và $|\overrightarrow{n_i}| = IA'_i = r = 1$; theo định lí "con nhím" ta có hệ thức :

$$S_1\overrightarrow{n_1} + S_2\overrightarrow{n_2} + S_3\overrightarrow{n_3} + S_4\overrightarrow{n_4} = \overrightarrow{0}$$

Từ đó và theo giả thiết, $S_1 = S$, $S_2 = S_3 = S_4 = 1$, ta được : $S\overrightarrow{n_1} = -(\overrightarrow{n_2} + \overrightarrow{n_3} + \overrightarrow{n_4})$

Suy ra :

$$S^2 = 3 + 2(\overrightarrow{n_2}.\overrightarrow{n_3} + \overrightarrow{n_2}.\overrightarrow{n_4} + \overrightarrow{n_3}.\overrightarrow{n_4})$$

Mặt khác, $(\overrightarrow{n_3}, \overrightarrow{n_4}) = \angle A'_3IA'_4 = \pi - \angle A_1A_2 = \pi - \alpha$;

$(\overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_4}) = \angle A'_2IA'_4 = \pi - \angle A_1A_3 = \pi - 2\alpha$;

$(\overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}) = \angle A'_2IA'_3 = \pi - \angle A_1A_4 = \pi - 3\alpha$.

Do đó ta được :

$$S^2 = 3 - 2(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha) =$$
$$= 3 - 2\cos 2\alpha(2\cos\alpha + 1) \qquad (1)$$

Lại theo tính chất các mặt của góc tam diện, ta được :

$\angle A'_2OA'_3 + \angle A'_3IA'_4 + \angle A'_4IA'_2 =$
$= (\pi - 3\alpha) + (\pi - \alpha) + (\pi - 2\alpha) < 2\pi$;

$\angle A'_2IA'_3 + \angle A'_2IA'_4 > \angle A'_3IA'_4$
$\Rightarrow (\pi - 3\alpha) + (\pi - 2\alpha) > \pi - \alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\pi - 6\alpha < 2\pi \\ 2\pi - 5\alpha > \pi - \alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}; \qquad (2)$$

$$\text{Suy ra :} \begin{cases} 0 < \cos 2\alpha < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} < \cos\alpha < \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) ta được :

$$3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(2.\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) < S^2 < 3$$

$\Rightarrow 2 - \sqrt{3} < S^2 < 3$ (đpcm).

Lời giải 2. (*Lưu Hoài Nam*, 11A8 THPT Phụ Dực, Quỳnh Phụ, **Thái Bình**; *Nguyễn Hoài Vũ* và nhiều bạn khác).

Để thiết lập hệ thức (1), có thể không cần sử dụng định lí "con nhím". Kí hiệu S_i là diện tích mặt (tam giác) $A_jA_kA_l$, đối diện với đỉnh A_i (mà theo giả thiết thì $S_1 = S$, $S_2 = S_3 = S_4 = 1$); x, y, z lần lượt là các góc phẳng nhị diện cạnh A_3A_4, A_4A_2, A_2A_1 tạo bởi các mặt của tứ diện.

Áp dụng công thức diện tích hình chiếu ($S' = S\cos\varphi$) vào tứ diện :

$$S_i = S'_j + S'_k + S'_l =$$
$$= S_j\cos\angle A_kA_l + S_k\cos\angle A_lA_j + S_l\cos\angle A_jA_k$$
$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

$\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, ta được :

$$\begin{cases} S = \cos x + \cos y + \cos z ; \\ 1 = \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + S\cos x ; \\ 1 = \cos\alpha + \cos 3\alpha + S\cos y ; \\ 1 = \cos\alpha + \cos 2\alpha + S\cos z \end{cases}$$

Từ đó suy ra hệ thức (1) như đã thiết lập trong lời giải 1 ở trên.

$$S^2 = 3 - 2(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha).$$

Nhận xét. 1) Bài toán này đòi hỏi đánh giá diện tích một mặt của một tứ diện theo diện tích ba mặt còn lại và các góc nhị diện của góc tam giác đối diện với mặt đó. Chính vì vậy mà lẽ tự nhiên đa số các bạn nghĩ đến việc sử dụng công thức diện tích hình chiếu $S' = S\cos\varphi$ (nếu không biết đến định lí "con nhím"). Hệ thức (1) có dạng $S = f(\alpha)$ là một hàm số của đối số α nên trước hết phải xét miền xác định của f rồi mới thiết lập bất đẳng thức đối với S.

2) Để thiết lập miền xác định (2) của f một số bạn đã sử dụng hai BĐT về tính chất các nhị diện của góc tam diện. Các tính chất đó là : Trong một góc tam diện

- tổng các nhị diện lớn hơn 2 (nhị diện) vuông ;
- mỗi góc nhị diện cộng với nhị diện bẹt (hai nhị diện vuông) lớn hơn tổng hai nhị diện kia

3) Để đánh giá miền giá trị của $S = f(\alpha)$, đa số các bạn nghĩ đến việc khảo sát hàm số. Đặt $x = \cos\alpha$ và sử dụng các công thức góc nhân đôi, góc nhân ba ($\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$) thì ta được:

$$S^2 = F(x) = -8x^3 - 4x^2 + 4x + 5 \text{ với } \frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rồi suy ra đpcm.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/281. *Vật có khối lượng $m_o = 0,5$ kg chuyển động với $v_o = 10m/s$ tới va chạm đàn hồi với vật có khối lượng m đang đứng yên. Bỏ qua mọi ma sát, biết rằng sau khi va chạm thì vật m_o bị lệch khỏi phương ban đầu một góc $\alpha = 30^o$. Hãy xác định m và vận tốc của hai vật sau khi va chạm.*

Hướng dẫn giải. Kí hiệu $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ là vận tốc của m_o và m sau va chạm và φ là góc giữa $\vec{v_2}$ và $\vec{v_o}$. Áp dụng định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn cơ năng :

$$m_o\vec{v_o} = m_o\vec{v_1} + m\vec{v_2} \qquad (1)$$

và $$\frac{m_o v_o^2}{2} = \frac{m_o v_1^2}{2} + \frac{m v_2^2}{2} \qquad (2)$$

Chiếu (1) lên phương của $\vec{v_o}$ và phương vuông góc với $\vec{v_o}$ tìm được :

$$m^2v_2^2 = 25 - \frac{5\sqrt{3}}{2}v_1 + \frac{v_1^2}{4} \qquad (3)$$

Từ (3) và (2) rút ra phương trình

$$\left(\frac{2m+1}{4}\right)v_1^2 - \frac{5\sqrt{3}}{2}v_1 + 25(1-2m) = 0$$

Phương trình này chỉ có 1 nghiệm v_1 duy nhất, suy ra $m = 0,25$kg, từ đó :

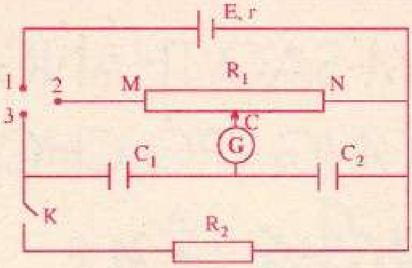
$$v_1 = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5,77 \text{ m/s và } v_2 = \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 11,55 \text{ m/s}$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và gọn :

Bắc Ninh: *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 11 Lí, PTNK Hàn Thuyên; **Hải Phòng:** *Trần Đức Trường*, 12 Lí, THPT NK Trần Phú; **Nghệ An:** *Phạm Cung Sơn*, 10A3, *Hồ Quốc Hưng*, 10A7, THPT Phan Bội Châu, Vinh ; **Hải Dương:** *Phạm Văn Quân*, 253 Lê Thanh Nghị, Tp Hải Dương.

MAI ANH

Bài L2/281. *Cho mạch điện như hình vẽ. Biết $r = 6\Omega$; $C_1 = 7\mu F$; $C_2 = 3\mu F$; $R_G \approx 0$; R_1 là vận dẫn đồng chất, tiết diện đều dài $MN = 30cm$.*



Nếu mở K, nối chốt (1) với (3), rồi tháo ra, sau đó nối chốt (2) với (3) và đóng K thì thấy nhiệt lượng tỏa ra trên R_1 bằng $\frac{1}{4}$ nhiệt lượng tỏa ra trên r.

Nếu nối chốt (1) với (2) và (2) với (3) thì thấy dù đóng K hay mở K công suất mạch ngoài vẫn không đổi ; ngoài ra nếu mở K và cho con chạy c di chuyển từ M đến N với vận tốc v = 3cm/s thì thấy dòng qua G là 12μA. Hãy tìm E, R_1 và R_2

Hướng dẫn giải. a) Mở K và nối (1) với (3) : nhiệt lượng tỏa ra trên r là :

$$Q_r = W - W_{12} = C_{12}E^2 - \frac{1}{2}C_{12}E^2 = \frac{1}{2}C_{12}E^2$$

(C_{12} là điện dung bộ tụ C_1, C_2)

b) Nối (2) với (3) và đóng K : ta có

$$\frac{Q_{R_2}}{Q_{R_1}} = \frac{R_1}{R_2} \text{ và } Q_{R_1} + Q_{R_2} = \frac{1}{2}C_{12}E^2 = Q_r \text{ (vì tụ}$$

phóng điện), suy ra $R_1 = 3R_2$ (1)

c) Nối (1) với (2) và (2) với (3) :

Vì công suất mạch ngoài không đổi nên suy ra :

$$R_1 \cdot \left(\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\right) = r^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) tìm được : $R_1 = 2r = 12\Omega$; $R_2 = \frac{2}{3}r = 4\Omega$. Ngoài ra, mở K và cho con chạy C di chuyển từ M đến N thì tổng điện tích di chuyển qua G là

$$Q = |q'_1 - q_1| + |q'_2 - q_2| = (C_1 + C_2)U_{MN}$$

với $U_{MN} = \frac{E}{R_1 + r} \cdot R_1$.

Dòng điện trung bình qua G :

$$\bar{I} = \frac{Q}{t} = \frac{(C_1 + C_2)U_{MN}}{t} = \frac{U_{MN}(C_1 + C_2)}{v} . \overline{MN}$$

$= 12\mu A$.

Từ đó suy ra $E = 18V$.

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

LÀM SAO THẮNG TRONG TRÒ CHƠI PHÓNG TÊN ?

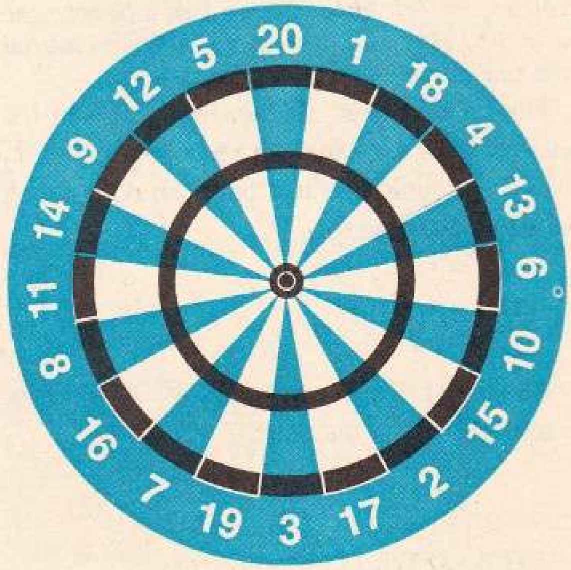
Trò chơi phóng tên (gọi là Darts) ở nước Anh rất được phổ biến, từ lâu đã đi vào các phòng trà, tiệm cà phê, các nơi vui chơi giải trí. Ở Pháp có 3000 tay chơi Darts có đăng kí, đa số ở Bretagne. Ở đó có Hiệp Hội Darts từ những năm 70. Hàng năm có tổ chức Hội thi Darts.

Trò chơi dựa trên "luật chơi 501", được hơn 3 triệu người chơi công nhận, có thể tóm tắt nhau sau : Mục tiêu là một bảng có chứa nhiều hình tròn đồng tâm, được chia thành 20 hình quạt bằng nhau đánh số từ 1 đến 20 (xem hình). Khi mũi tên trúng vào một trong ba hình vành khăn hoặc hình tròn nhỏ ở trung tâm thì được tính điểm.

Người chơi đứng cách mục tiêu 2,7m, mỗi lần phóng 3 mũi tên (gọi là 1 vôlê) rồi tính điểm.

Trúng hình vành khăn ngoài ở hình quạt nào thì số điểm ứng với hình quạt đó được nhân đôi. Trúng hình vành khăn giữa ở hình quạt nào thì số điểm ứng với hình quạt đó được nhân ba. Trúng hình vành khăn trong thì được 25 điểm. Trúng hình tròn trung tâm thì được 50 điểm. Lấy 501 điểm trừ đi tổng số điểm nhận được. Sau một số lần phóng người nào có kết quả (sau khi trừ) là số không đầu tiên (tức là đạt đến 501 điểm) thì thắng một ván, và lúc đó phải kết thúc bằng một "cú phóng nhân đôi".

Trò chơi không chỉ cần khéo tay mà còn biết tính xem nên phóng vào vòng nào, hình quạt nào. Hầu như ai cũng nhắm vào số 20 ở vòng giữa mà ném tên, vì nếu trúng thì được nhân với hệ số cao nhất : $20 \times 3 = 60$ (điểm). Nhưng cách đó cũng dễ gặp rủi ro, vì số 20 ở sát số 5 và số 1. Chệch ra ngòi thì xem như thiệt to ! Vậy nên dùng chiến thuật nào để có thể đạt được nhiều điểm ?



Một nhà toán học tên là David Percy ở Đại học Stalford nước Anh đã nghiên cứu và đề ra chiến thuật như sau :

Ông phát cho mỗi sinh viên 50 mũi tên, và cho họ ném tính điểm. Tập hợp tất cả những số liệu thống kê, sử dụng công thức xác suất Bayès ông ta đi đến kết luận :

Nhắm vào hình tròn trung tâm có lợi hơn nhắm vào điểm 20 ở vòng giữa, chiến thuật này làm tăng số điểm lên 5% so với chiến thuật cũ.

Bạn không tin ư ? Hãy thử nghiệm xem kết luận của Percy có đúng không, nhưng chú ý phải tuyệt đối đảm bảo an toàn tránh mũi tên có thể trúng vào người (nguy nhất là vào mắt).

PHAN THANH QUANG
(Theo Science et Avenir 7/99)

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng :

Hà Tây: *Nguyễn Minh Chính*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Vĩnh Phúc:** *Dương Ngọc Quang*, 11B2, *Dương Quốc Huy*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc;

Đà Nẵng: *Lê Anh Vũ*, 11A Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Giang*, 11A5, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Nam Định:** *Trần Đức Sinh*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Phú Thọ:** *Đặng Minh Sơn*, 11A7, THPT công nghiệp Việt Trì; **Đồng Nai:** *Trần Hữu Hiếu*, 11 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Hải Phòng:** *Trần Đức Trường*, 12 Lí, THPT NK Trần Phú.

MAI ANH

BẠN CÓ BIẾT ?

MỘT BÀI TOÁN DỰNG HÌNH KHÁ ĐỘC ĐÁO

PHAN THANH QUANG
(Tp Hồ Chí Minh)

Câu chuyện là thế này : Cha xứ người Ý Mascheroni Lorenzo đã chứng minh rằng "Mọi điểm của hình dựng được bằng một cái thước thẳng không có vạch chia và một compa đều có thể dựng được chỉ bằng compa".

Mệnh đề của Mascheroni cho phép vứt cái thước thẳng đi, chỉ cần dùng compa để xác định các điểm.

Mascheroni Lorenzo vốn ham nghiên cứu tiếng Hy Lạp và thơ. Ông là bạn thân của Napoléon. Ông mất năm 1800. Ông đến với toán rất muộn. Năm 1797 ông xuất bản cuốn "Hình học compa", trong đó có bài toán : *Dựng trung điểm của một đoạn thẳng chỉ bằng compa.* Mascheroni không ngờ rằng trước ông một thế kỉ nhà toán học Đan Mạch George Mohr đã làm được bài toán trên. Nhưng, rủi cho Mohr, công trình đó đã không được ai chú ý, rơi vào lãng quên... Cho đến năm 1928 một học trò của nhà toán học Đan Mạch J. Hjelmsler, nhân một lần đi dạo phố, lục tìm các sách cũ một cách vô tình, đã phát hiện ra bài toán của Mohr với lời giải đầy đủ.

Cho 2 điểm A, B. Cách dựng trung điểm của đoạn thẳng AB chỉ bằng compa như sau :

Dựng cung tròn tâm B, bán kính AB, kí hiệu là (B, AB). Trên cung tròn đó bắt đầu từ điểm A lấy ba lần cung AB và gọi điểm cuối cung thứ ba là C. Dựng cung (C, BC) và cung (A, AC) và gọi một giao điểm của chúng là D. Dựng cung (A, AB) và cung (C, AC) và gọi E là giao điểm của chúng, nằm cùng phía D đối với đường thẳng AC.

Dựng cung (C, ED) và cung (E, AE) và gọi F là giao điểm của chúng nằm cùng phía A đối với đường thẳng EC.

Vấn đề còn lại là chứng minh rằng F là trung điểm của đoạn AB, nghĩa là phải chứng minh :

+ A, F, B thẳng hàng (hoặc AB = AF + FB)

+ FA = FB.

Xin dành lại phần chứng minh cho bạn đọc.

Tôi tin rằng Mohr và Lozenzo làm được cách đây hơn 2 thế kỉ thì ngày nay các bạn cũng làm được.

VỀ MỘT CÁCH THỰC HÀNH TOÁN PHỔ THÔNG TRÊN MÁY TÍNH

PHẠM MINH
(Hà Nội)

Trong lĩnh vực sử dụng máy tính vào toán học đã có những chương trình của nước ngoài nổi tiếng khá quen biết ở Việt Nam như *Mathematica, Matlab, Maple, Cabri,* chúng giúp ta có thể vẽ ra các hình hình học, các đồ thị lí thú. Ở Việt Nam cũng bắt đầu có một số phần mềm như vậy.

Trong cuốn sách "*Thực hành toán phổ thông bởi phần mềm ToanPt trên máy tính*" (Nhà xuất bản Khoa học và Kĩ thuật - Hà Nội - 2001) và bài "*Phần mềm ToánPt cho hình học phổ thông*" trên báo Khoa học và Phát triển (số 27, thứ năm 6-12/7/2000) tác giả Lê Trọng Lục (Viện Toán học Việt Nam) đã soạn thảo một số các chương trình giúp cho việc thực hành toán ở trường phổ thông.

Ví dụ muốn giải tam giác trên hệ trục tọa độ, mở dạng (Form) Lớp 7 của *ToanPt* ta chọn 3 điểm bất kì A, B, C rồi ghi vào máy. Nháy chuột vào lệnh "*Giải ABC*" ta được hình kèm theo. Muốn biết các thông tin thêm về tọa độ đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến v.v... thì ta dùng các lệnh giải tương ứng. Muốn biết các thông tin có thể ghi chép được ta dùng lệnh "*Info*" thì sẽ cho ta một bảng các thông tin về tam giác ABC như tọa độ, độ dài, độ lớn của các yếu tố trong ΔABC.

Một số vấn đề khó hơn cũng được trình bày trong sách trên như : quỹ tích, đồ thị, các bài toán ngược...

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ

Nhiều bạn kêu Trời : "Khó quá ! Khó quá ! Nhìn ảnh từ thời nảo, thời nào mà *nhận ra người, đoán ra tuổi* thì thật là ngang với ... chơi xổ số !" Nhưng dù là "khó quá !" thì cũng dễ hơn là "chơi xổ số" chứ ? Các bạn hãy tìm lại các số tạp chí giới thiệu các cộng tác viên ruột thịt của THTT rồi ngắm đi, ngắm lại... "rờ a ra" thôi mà.

KẾT QUẢ CUỘC CHƠI THÁNG 1

Giải nhất : *Từ Như Huy*, 11 Hóa I, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, Hà Tây.

Giải nhì : *Lê Anh Vũ*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng.

Giải ba : *Trần Tấn Lộc*, 12 Lý, THPT chuyên Tiền Giang

Tâm sự của người được giải :

Từ Như Huy : "Cũng có thể thú vị"

Trần Tấn Lộc : "Theo em cuộc thi này giúp cho chúng em có dịp nghiên cứu lại hình ảnh và các công trình nghiên cứu của quý thầy, từ đó chúng em sẽ học tập theo gương quý thầy, phải tự trau dồi rèn luyện bản thân thêm nữa"

Cảm ơn các bạn và hãy chờ kết quả cuộc chơi tiếp theo nhé !

Đáp án : *Ảnh PGS. TS. Vũ Dương Thụy, Tổng biên tập Nhà xuất bản Giáo dục, chụp khi 47 tuổi.*

CLB

LỜI GIẢI đã đúng chưa?

Việc giải phương trình vô tỉ dễ xuất hiện các sai lầm nếu ta không lưu ý đến các phép biến đổi tương đương. Nhiều bạn đều phát hiện ra kết luận nghiệm đã thừa giá trị $x = \frac{56}{65}$. Lời giải đã bộc lộ sai lầm trong trường hợp xét $a+b-1 = 0$. Bạn *Vũ Thị Thu Hiền*, 10A2, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ đã nhận xét : $b = \sqrt{(2x-1)^2+3} \geq \sqrt{3}$ để loại luôn $a + b = 1$. Nhưng đây là sai lầm của lời giải. Bạn *Nguyễn Đức Kỳ*, 12A1, THPT Hàn Thuyên, Bắc Ninh đã lưu ý :

$$\begin{cases} a-b = 9x-3 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 9x-2 \\ 2b = 4-9x \end{cases}$$

Từ đó : $\frac{2}{9} \leq x \leq \frac{4}{9}$ nên loại $x = 0$ và $x = \frac{56}{65}$.

Lời giải tuy có thử lại các giá trị nhưng chỉ thử vào phương trình $2a = 9x - 2$ là chưa đủ. Tóm lại : Phương trình chỉ có nghiệm $x = \frac{1}{3}$ (không hiểu bạn học sinh giải thừa nghiệm như vậy, Hội đồng chấm thi sẽ cho bao nhiêu % điểm của bài này ?)

Các bạn Nguyễn Ngọc Tuấn, 11 Lý, NK Hàn Thuyên, Bắc Ninh; *Nguyễn Duy Thanh*, 12F, THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa; *Trần Xuân Dương*, 10A2, THPT Trần Hưng Đạo, Thanh Xuân, Hà Nội; *Nguyễn Hồng Anh*, 11E, THPT Nguyễn Viết Xuân, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc; *Phạm Trọng Quỳnh*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Tp Vinh, Nghệ An; *Nguyễn Tiến Quang*, 11A5, THPT Chương Mỹ A, Hà Tây cũng có nhận xét tốt.

KIHIVI

KẾT QUẢ NÀO ... SAI ?

Trên tạp chí THTT số 282 (12/2000) bạn *Nguyễn Vũ Sơn* đề cập đến "Bài toán hay, lời giải sai trong cuốn sách "Toán chọn lọc cấp II (NXB Hải Phòng, 1994)... Cuốn sách đó còn có bài toán sau :

Cho $a^2 + a + 1 = 0$. Tính tổng $a^{1981} + \frac{1}{a^{1981}}$

(Thi chuyên toán 1981)

(Bài số 12. Phần II Trong vườn hoa Đại số))

Lời giải. Từ đẳng thức $a^2+a+1 = 0$, suy ra $a^3+a^2+a = 0$ hay $a^3 = -a^2 - a = 1$

Từ đó $(a^3)^k = a^{3k} = 1$. Ta có $1981 = 3.660 + 1$.

Vậy $a^{1981} = a^{3.660+1} = a^{3.600}.a = a$

$$\text{Do đó } a^{1981} + \frac{1}{a^{1981}} = a + \frac{1}{a} = a + \frac{a^3}{a} = $$
$$= a + a^2 = -1.$$

Nhưng ... ! từ $a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$ thì

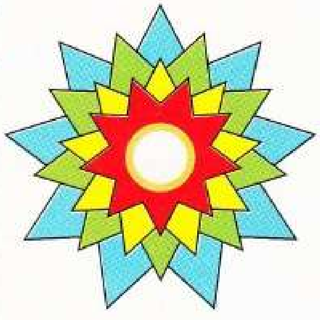
$$a^{1981} + \frac{1}{a^{1981}} = 1 + 1 = 2$$

Vậy tổng phải tìm là -1 hay là 2 ?

THĂNG LONG

(Quận Tân Bình, Tp Hồ Chí Minh)

TINH MẮT, KHÉO TAY



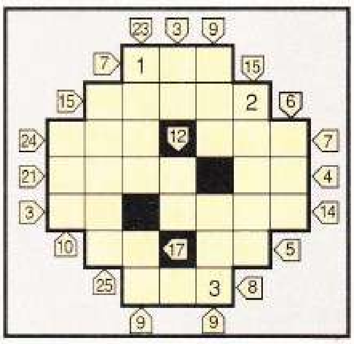
Nếu để ý các hình sao nhiều cánh từ nhỏ đến to thì 4 màu tuần hoàn theo thứ tự: vàng, xanh lá cây, xanh da trời, đỏ.

Hình 1 bắt đầu từ màu vàng, hình 2 bắt đầu từ màu xanh lá cây, hình 3 bắt đầu từ màu xanh da trời. Do đó hình 4 sẽ bắt đầu từ màu đỏ → màu vàng → màu xanh lá cây → màu xanh da trời.

Quá nhiều bạn giỏi đành bốc thăm để khen 5 bạn: *Nguyễn Ngọc Minh*, 8A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Thanh Hóa; *Lê Hải Hạnh*, 11C, THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Krông Păk, Đăk Lăk ; *Nguyễn Văn Thắng*, 9B, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc; *Nguyễn Thị Hường*, 7A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, Bắc Ninh; *Bùi Thị Thùy Dung*, 9C, THCS Trương Quang Trọng, Sơn Tịnh, Quảng Ngãi.

NGỌC MAI

ĐIỀN SỐ VÀO Ô TRỐNG



Bạn hãy điền nốt các số vào ô trống biết rằng mỗi mũi tên chỉ giá trị của tổng các số trong hàng tương ứng (theo chiều mũi tên). Chú ý : không sử dụng số 0.

B.C

TRƯỜNG HÀ NỘI - AMSTERDAM... (Tiếp bìa 4)

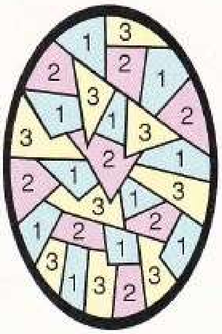
về thăm: cố Thủ tướng Phạm Văn Đồng, nguyên Tổng bí thư Đỗ Mười, Thủ tướng Phan Văn Khải, Chủ tịch Quốc hội Nông Đức Mạnh, Đại tướng Võ Nguyên Giáp...

Để ghi nhận những đóng góp xuất sắc của trường, năm 1997 nhà trường đã được nhà nước tặng thưởng Huân chương lao động hạng Ba, năm 2000 tổ giáo viên Vật lý cũng được nhận Huân chương lao động hạng Ba, tổ Toán và tổ Ngoại ngữ được nhận Bằng khen của Chính phủ. Đặc biệt ngày 5 tháng 9 năm 2000 vừa qua nhà trường đã được Chủ tịch nước ra quyết định phong tặng danh hiệu : ĐƠN VỊ ANH HÙNG LAO ĐỘNG. Đây là một vinh dự, một nguồn động viên to lớn đối với các thế hệ thầy và trò trường Hà Nội - Amsterdam.

Giải đáp bài

ĐÁNH SỐ NHANH

Rằng nhanh thì thật là nhanh
Ai cũng nhanh cả, giải dành trao ai ?
May sao chỉ có một "ngài"
Nói thêm một chút, nhưng "oai" nhất làng :
"Dù cho đánh số vội vàng
Chỉ được một cách đàng hoàng mà thôi"



Ai thế ? Đó là bạn *Nguyễn Tiến Nam*, 11 Tin, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông, Hà Tây. Đúng là học sinh của một đơn vị Anh hùng !

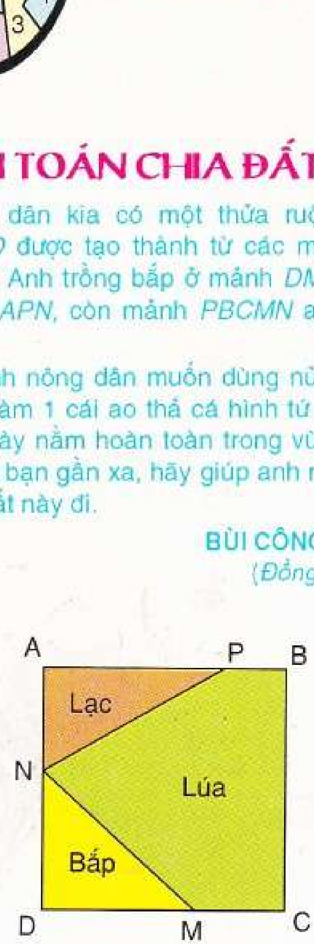
L.T.N

BÀI TOÁN CHIA ĐẤT

Anh nông dân kia có một thửa ruộng hình vuông *ABCD* được tạo thành từ các mảnh nhỏ như hình vẽ. Anh trồng bắp ở mảnh *DMN*, trồng lạc ở mảnh *APN*, còn mảnh *PBCMN* anh trồng lúa.

Bây giờ anh nông dân muốn dùng nửa số đất mình có để làm 1 cái ao thả cá hình tứ giác sao cho cái ao này nằm hoàn toàn trong vùng trồng lúa. Nào các bạn gần xa, hãy giúp anh nông dân chia mảnh đất này đi.

BÙI CÔNG THỨC
(Đồng Nai)



Nhà giáo ưu tú
ĐỖ LÊNH ĐIỆN
Hiệu trưởng nhà trường

TRƯỜNG HÀ NỘI - AMSTERDAM
ĐƠN VỊ ANH HÙNG

Vào những ngày ác liệt của năm 1972, khi máy bay B52 dội bom hòng hủy diệt Hà Nội, nhân dân thủ đô Amsterdam (Hà Lan) vô cùng lo lắng và muốn thể hiện sự ủng hộ đối với Việt Nam. Ngài Thị trưởng, tiến sĩ Samkolden đã vận động nhân dân quyên góp để xây cho Hà Nội một trường cấp III to đẹp, đàng hoàng sau ngày chiến thắng. Kết quả của nghĩa cử đó là sự ra đời ngôi trường 4 tầng trên đất Giảng Võ, quận Ba Đình lịch sử và sau này được mang tên trường THPT Hà Nội - Amsterdam.

Được sự quan tâm của UBND thành phố và sự chỉ đạo sát sao của Sở Giáo dục - Đào tạo, nhà trường được ưu tiên đầu tư những phương tiện tốt nhất, những thầy cô giáo giàu kinh nghiệm và những học sinh giỏi.

Thầy hiệu trưởng đầu tiên của trường, nhà giáo ưu tú Nguyễn Kim Hoãn (hiện là Giám đốc Sở GD-ĐT) ngay buổi họp đầu tiên của Hội đồng giáo dục đã nhấn mạnh mục tiêu giáo dục toàn diện, trong đó đào tạo một đội ngũ học sinh giỏi cho Hà Nội.

Với lòng say mê nghề nghiệp, với tài năng sư phạm sẵn có, lớp lớp thầy cô giáo của trường tiếp bước nhau trưởng thành. Đến nay nhà trường đã có một đội ngũ 114 thầy cô giáo trong đó có 1 tiến sĩ, 17 thạc sĩ. 6 thầy giáo đã được nhà nước phong tặng danh hiệu cao quý : NHÀ GIÁO ƯU TÚ.

Các thầy cô giáo của trường còn viết gần 20 đầu sách phục vụ cho công tác giảng dạy, nhiều thầy cô tham gia giảng dạy trên truyền hình.

Môi trường sư phạm lí tưởng, không khí học tập sôi nổi đã tạo điều kiện cho nhiều em vươn lên đạt những đỉnh cao trong học tập : Phan Phương Đạt, hai lần dự thi Toán Quốc tế, đem về 1 Huy chương Bạc và 1 Huy chương Đồng ; Đinh Sỹ Quảng, hai lần dự thi Vật lý Quốc tế, đem về 1 Huy chương Vàng, 1 Huy chương Đồng trong đó có chiếc Huy chương Vàng đầu tiên của học sinh Việt Nam trong các kì thi Vật lí Quốc tế ; Nguyễn Xuân Sơn, hai lần đạt Huy chương Bạc Vật lí Quốc tế.

Trường Hà Nội - Amsterdam đã thu được những kết quả đáng tự hào : 44 học sinh của trường tham dự các kì thi Olympic quốc tế đem về 38 huy chương trong đó có 13 huy chương Vàng, 927 học sinh đạt giải trong các kì thi quốc gia, 2638 học sinh đạt giải trong các kì thi học sinh giỏi thành phố. Trong các kì thi vào Đại học học sinh của trường thường xuyên thi đỗ trên 95% và có rất nhiều em đỗ thủ khoa của các trường, có em đỗ thủ khoa 2 hoặc 3 trường và nhiều em giành được suất đi du học ở nước ngoài.

Kiên trì mục tiêu đào tạo những con người toàn diện, trường Hà Nội - Amsterdam luôn là một điểm sáng về TDTT và học sinh của trường đã đem về 85 huy chương cấp thành phố trong đó có 42 huy chương vàng.

Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải, Hiệu trưởng của trường những năm 1995 - 1999, đã đặt quan hệ với nhiều trường của Anh, Mỹ, Pháp, Singapore... và vận động họ gửi các suất học bổng để du học. Đến nay đã có gần 80 học sinh của trường đang theo học ở các trường đại học nổi tiếng trên thế giới như Đại học Oxford, Cambridge (Anh), Conecticut, Bates (Mỹ), Bách khoa Paris, INSA (Pháp)..., ở đâu học sinh của trường cũng đều được đánh giá là những học sinh giỏi, nhiều năng lực.

15 năm chưa phải là một thời gian dài song đã kịp xuất hiện những hoa trái đầu mùa : Lê Minh Hà, Tiến sĩ Toán học giảng viên trường Đại học Toledo bang Ohio (Mỹ), Phan Thị Hà Dương, Tiến sĩ Tin học, giảng viên trường Đại học Tổng hợp Paris 7, Phan Thanh Tuấn vừa bảo vệ thành công luận án Tiến sĩ Vật lí một cách xuất sắc tại Đại học Bách khoa Paris. Ngày hôm nay, nhà trường đã lớn mạnh với 62 lớp và 2250 học sinh thuộc 3 hệ thống : THPT chuyên, THPT bình thường và PTCS.

Năm học vừa qua, trường đã giành được 58 giải Quốc gia, 203 giải thành phố và 60 giải quận Ba Đình cho khối cấp II. Đặc biệt em Đỗ Trường Giang đạt huy chương Đồng trong kì thi Toán châu Á Thái Bình Dương và em Trần Thanh Hoài giành Huy chương Đồng trong kì thi Olympic Tin học quốc tế tại Trung Quốc. Các em Vũ Thùy Anh, Phạm Thị Thu Hương tham gia hội nghị học sinh, sinh viên quốc tế tại Hà Oai, và gần đây nhất hai em Hà Lan Anh và Lê Xuân Linh đã thanm dự hội nghị nghị viện thanh niên thế giới ở Xítny đã gây được sự chú ý và mến phục của bạn bè.

Có được những thành tích nói trên, thầy và trò nhà trường luôn biết ơn sự quan tâm sâu sắc của các cấp lãnh đạo Đảng và Nhà nước. Trường đã vinh dự được đón nhiều vị lãnh đạo Đảng và Nhà nước...

(Xem tiếp bìa 3)

ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT87M1
Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, ngõ 187 phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2001
Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng