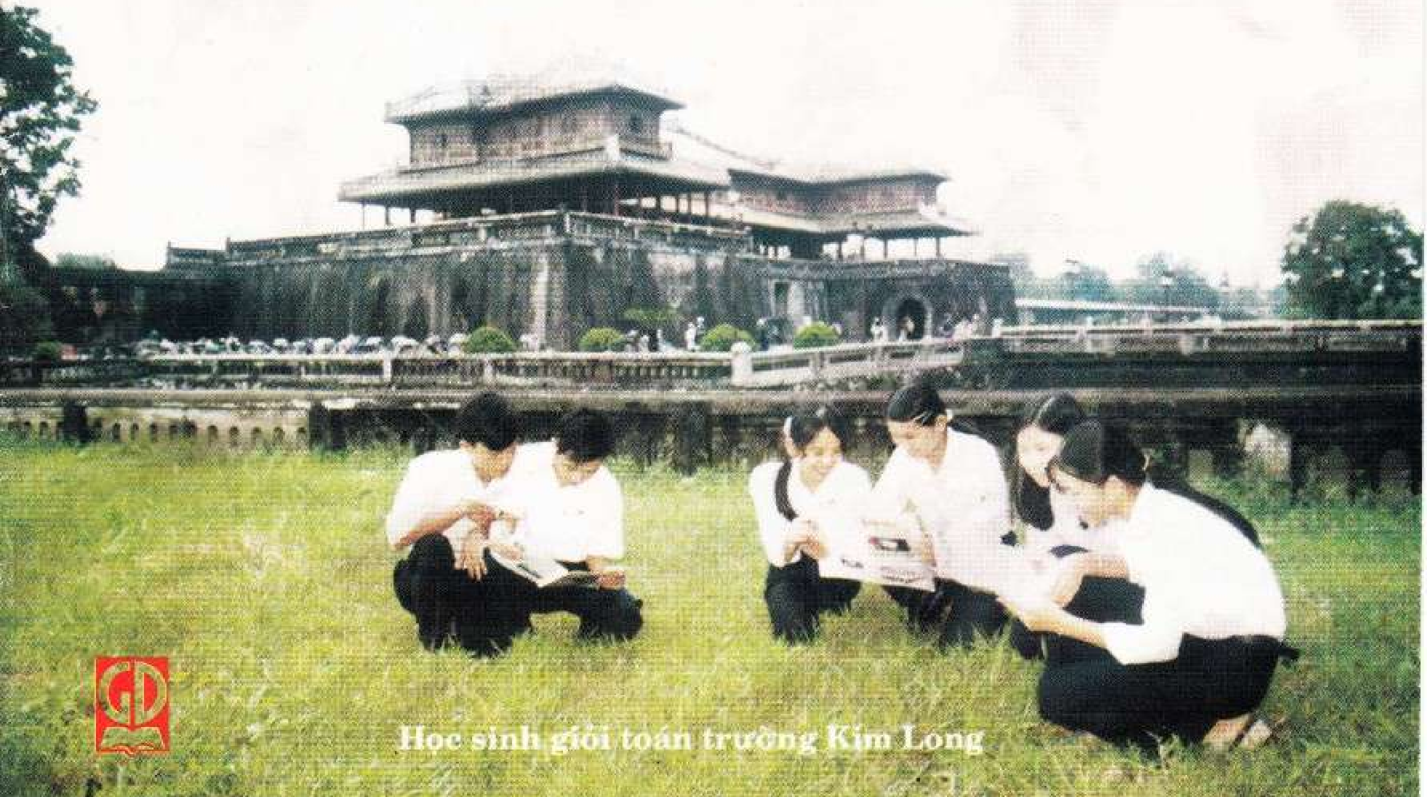
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

12
2002

SỐ 306 - NĂM THỨ 39 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Tổ toán trường Kim Long



Học sinh giỏi toán trường Kim Long

KHỐI PHỔ THÔNG CHUYÊN TOÁN - TIN ĐHSP HÀ NỘI ĐÓN NHẬN HUÂN CHƯƠNG LAO ĐỘNG HẠNG NHẤT

Ngày 18-11-2002 trong không khí tưng bừng kỉ niệm ngày Nhà giáo Việt Nam, Khối PT chuyên Toán - Tin ĐHSP Hà Nội đã tổ chức lễ đón nhận Huân chương Lao động hạng Nhất của Nhà nước trao tặng.

Trải qua 36 năm (1965 - 2002) phát triển, khối PTCTT đã có 36 khóa đào tạo với hơn 1200 học sinh tốt nghiệp. Nhiều học sinh của khối nay đã trở thành những cán bộ khoa học có uy tín trong nhiều lĩnh vực trên cả nước.

Hiệu trưởng trường ĐHSP Đinh Quang Báo và NGƯT Nguyễn An Nghi, Chủ nhiệm khối PTCTT

Các thầy giáo và đại biểu trong ngày vui

Tham gia đều đặn các kì thi học sinh giỏi quốc gia, đội tuyển Toán và đội tuyển Tin ĐHSP Hà Nội đã giành hàng trăm huy chương các loại và luôn là một trong những đội tuyển mạnh. Từ năm 1974 đến nay, các học sinh của khối phổ thông chuyên Toán - Tin ĐHSP Hà Nội đã giành được 35 Huy chương (9 vàng, 16 bạc, 10 đồng) trong các kì thi Olympic Toán và Tin Quốc tế.

Ghi nhận thành tích đặc biệt của khối PTCTT ĐHSP Hà Nội, Nhà nước đã tặng Khối :

- Huân chương Lao động hạng Ba năm 1986
- Huân chương Lao động hạng Nhì năm 1996
- Huân chương Lao động hạng Nhất năm 2002.

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

THAY ĐỔI ĐIỀU KIỆN THỨ YẾU TRONG BÀI TOÁN HÌNH HỌC

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV Tp. Hồ Chí Minh)

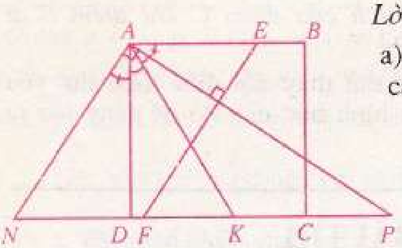
Khi nghiên cứu kĩ chứng minh các bài toán hình học ta thấy một số điều kiện là thiết yếu, còn một số điều kiện khác đóng vai trò thứ yếu, không có ảnh hưởng lớn đến phương pháp giải. Nếu thay đổi điều kiện thứ yếu này ta sẽ hiểu thực chất mối liên hệ giữa giả thiết và kết luận, từ đó sẽ dẫn đến bài toán tổng quát hơn. Xin minh họa điều trên qua các ví dụ dưới đây.

Bài toán 1. *Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm M trên cạnh BC. Đường thẳng AM cắt đường thẳng CD tại P. Đường thẳng EF vuông góc với AM trong đó E, F tương ứng nằm trên AB, CD. Đường phân giác của góc DAM cắt CD tại K. Chứng minh rằng :*

a) $EF = BM + DK$;

b) $\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AP^2}$

Lời giải. (h. 1)



Hình 1

a) Kẻ $AN \perp AM$, cắt đường thẳng CD tại N thì $ANFE$ là hình bình hành nên $EF = AN$ (1)

Ta có $\widehat{DAN}=\widehat{BAM}$, $AD = AB$, $\widehat{ADN}=\widehat{ABM} = 90^o$ nên $\Delta ADN = \Delta ABM \Rightarrow BM = ND$, $AN = AM$ (2)

Mặt khác có $\widehat{NAK} = \widehat{KAD}+\widehat{DAN} = \widehat{KAM}+\widehat{BAM} = \widehat{KAB}=\widehat{AKN}$ nên $NA = NK$ (3)

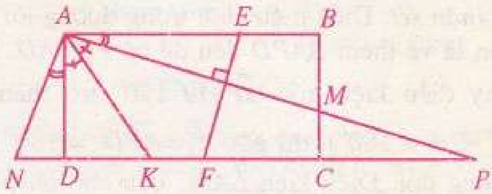
Kết hợp (1) (2) (3) ta có $EF = AN = NK = ND+DK = BM + DK$.

b) Ta có $\widehat{NAP} = 90^o$. Trong ΔNAP vuông tại A với đường cao AD ta có

$$\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AP^2}$$

Từ đó và (2) suy ra $\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AP^2}$

Nhận xét. Điều mấu chốt trong đường lối giải trên là vẽ thêm ΔADN để có $\Delta ADN = \Delta ABM$. Nếu ở đề bài thay điều kiện *ABCD từ hình vuông trở thành hình chữ nhật* (h. 2) thì trong lời giải sẽ có $\Delta ADN \backsim \Delta ABM \Rightarrow \dfrac{AN}{AM}=\dfrac{DN}{BM}=\dfrac{AD}{AB} = t\ (t > 0)$. Lúc đó ta có :



Hình 2

a) $EF = AN = NK = ND + DK = t.BM + DK$

b) $\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{1}{AN^2}+\dfrac{1}{AP^2}$,

suy ra $\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{t^2}{AP^2}$

Ta có bài toán tổng quát hơn bài toán 1 như sau :

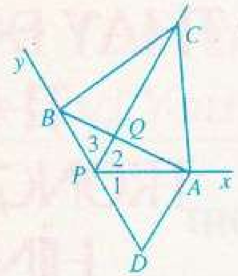
Bài toán 1'. *Cho hình chữ nhật ABCD với AD = t.AB (t > 0). Lấy điểm M trên cạnh BC. Đường thẳng AM cắt đường thẳng CD tại P. Đường thẳng EF vuông góc với AM trong đó E, F tương ứng nằm trên AB, CD. Đường phân giác của góc DAM cắt CD tại K. Chứng minh rằng :*

a) $EF = t.BM + DK$

b) $\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{t^2}{AP^2}$

Bài toán 2. *Cho góc $\widehat{xPy} = 120^o$ và điểm A nằm trên tia Px. Dựng tam giác đều ABC sao* *cho B thuộc tia Py và C thuộc tia phân giác của góc xPy. Gọi Q là giao điểm của AB và PC. Chứng minh rằng :*

$$\frac{1}{PQ}=\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}$$



Hình 3

Lời giải. Lấy điểm D trên tia đối của tia Py sao cho $PD = PA$ (h. 3).

Do $\widehat{APD}=\widehat{P_1} = 60^o$ nên ΔAPD là đều

$\Rightarrow PD = PA = AD$ (4)

Ta có $\widehat{P_1}=\widehat{P_2}=\widehat{P_3} = 60^o$. Trong ΔABD có $PQ//DA$ nên theo ĐL Ta–let thì

$$\frac{PB}{PQ}=\frac{DB}{DA}=\frac{PB+PD}{DA}=\frac{PB}{DA}+\frac{PD}{DA}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{PQ}=\frac{1}{DA}+\frac{PD}{DA.PB} \quad (5)$$

Từ (4), (5) có : $\frac{1}{PQ}=\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}$ (6)

Nhận xét. Điều mấu chốt trong đường lối giải trên là vẽ thêm ΔAPD đều để có $PQ//AD$. Nếu thay điều kiện góc $\widehat{xPy}$ từ 120^o trở thành α ($0^o < \alpha < 180^o$), thì góc $\widehat{P_1}=\widehat{APD} = 180^o - \alpha$ không đổi. Điều kiện ΔABC đều cho phép xác định được điểm C khi biết điểm B trên tia Py, lúc đó không cần yêu cầu điểm C thuộc tia phân giác của góc xPy.

Ta xét 2 trường hợp mở rộng bài toán 2 :

a) Giả sử điểm C nằm bên trong góc xPy (h. 3). Kẻ $AD // PC$ cắt đường thẳng PB tại D. Gọi AH, DK lần lượt là đường cao của ΔAPD (có thể không đều) thì :

$PA\sin P_1 = AH = DA\sin P_3 = DA\sin(\alpha - P_2)$ (7)

$PD\sin P_1 = DK = DA\sin\widehat{PAD} = DA\sin P_2$ (8)

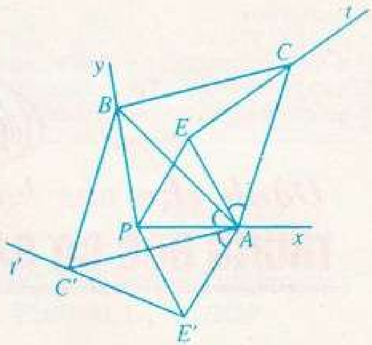
Vì $PQ//AD$ nên vẫn có (5). Thay (7), (8) vào (5) được $\frac{1}{PQ}=\frac{\sin(\alpha-P_2)}{PA\sin P_1}+\frac{\sin P_2}{PB\sin P_1}$ (9)

Trường hợp riêng của hệ thức (9) là hệ thức (6) khi $\alpha = 120^o$ và $P_1 = P_2 = P_3 = 60^o$.

Khi cho $\alpha = 90^o$ hệ thức (9) trở thành

$$\frac{1}{PQ}=\frac{\cos P_2}{PA}+\frac{\sin P_2}{PB}$$

b) Ta xét xem khi $\widehat{xPy} = \alpha$ thì điểm C nằm trên đường nào? Dựng bốn tam giác đều ABC và ABC', PAE và PAE', thì điểm E, E' cố định (h. 4). Ta có $AC = AB = AC'$, $\widehat{EAC}=\widehat{PAB} = \widehat{E'AC'}$, $AE = AP = AE'$ nên $\Delta AEC = \Delta APB = \Delta AE'C'$. Từ đó $\widehat{AEC}=\widehat{APB} = \widehat{AE'C'} = \alpha$



Hình 4

Như vậy khi ΔABC và $\Delta ABC'$ là đều còn B chạy trên tia Py thì điểm C chạy trên tia Et và điểm E' chạy trên tia $E't'$. (Các bạn tự chứng minh phần đảo).

Ta có bài toán tổng quát hơn bài toán 2 như sau :

Bài toán 2'. *Cho góc $\widehat{xPy} = \alpha$ ($0^o < \alpha < 180^o$) và điểm A nằm trên tia Px. Dựng tam giác đều ABC sao cho B thuộc tia Py. Gọi Q là giao điểm của AB và PC.*

a) Với C là điểm nằm trong góc xPy, chứng minh rằng

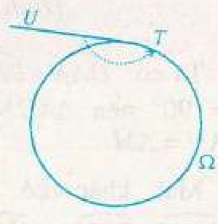
$$\frac{\sin\widehat{APB}}{PQ}=\frac{\sin\widehat{BPC}}{PA}+\frac{\sin\widehat{APC}}{PB}$$

b) Tìm quỹ tích của điểm C khi điểm B di động trên tia Py.

Các bạn hãy thử thay đổi điều kiện thứ yếu trong bài toán hình học nào đó để sáng tạo ra bài toán mới.

LỜI GIẢI BÀI THI... *(Tiếp trang 6)*

Vì không có lúc nào TU có điểm chung với nhiều hơn hai đường tròn trong chúng cả, cho nên T chỉ thuộc về nhiều lắm là n-1 cung, tương ứng với cặp các đường tròn (C_1, C_2), (C_2, C_3), ..., (C_{n-1}, C_n). Từ đó suy ra trong tổng S, chu vi của đường tròn Ω được tính nhiều lắm là n-1 lần, tức là $S \le (n\text{-}1)2\pi\rho$, từ (2) có



Hình 5

$$\sum_{1\le i\le j\le n}\frac{1}{O_iO_j}=\frac{S}{8\rho}\le\frac{(n-1)2\pi\rho}{8}=\frac{(n-1)\pi}{4}$$

Các bạn có thể xem bản tiếng Anh (không hoàn toàn như lời giải được trình bày trên đây) của Ban tổ chức IMO 2002 trên mạng Internet với trang Web http : www.imo2002.

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT NK ĐHKHTN - ĐHQG TP. HỒ CHÍ MINH 2002

MÔN TOÁN

NGÀY THỨ NHẤT

(Dành cho mọi thí sinh)

(Thời gian : 150 phút)

Câu I. Cho phương trình

$$x + 2\sqrt{x-1} - m^2 + 6m - 11 = 0$$

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Chứng minh phương trình có nghiệm với mọi m.

Câu II. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+|y|+m\left(x^3+2x^2|y|+2xy^2+|y|^3\right)=1-m \\ x|y|=-6 \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 0$.

b) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

Câu III. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD của hình chữ nhật $ABCD$. Biết rằng đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ có đường kính bằng $\sqrt{8+2\sqrt{3}}$ và tồn tại điểm I thuộc đoạn MN sao cho góc $\widehat{DAI} = 45^o$, góc $\widehat{IDA} = 30^o$.

a) Tính diện tích hình chữ nhật $ABCD$.

b) Gọi K, H lần lượt là trọng tâm của tam giác AID và BIC. Tính diện tích tam giác NKH.

Câu IV. Tam giác ABC có góc $\widehat{ABC} = 30^o$ và góc $\widehat{ACB} = 15^o$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M, N, P, I lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB, OC.

a) Tính góc $\widehat{PON}$. Chứng minh A, M, I thẳng hàng.

b) Chứng minh P là trực tâm của tam giác OMN.

Câu V. a) Tìm tất cả số thực a và b sao cho $|2x+a| = |bx+5|$ với mọi số thực x.

b) Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa điều kiện : $|ax+b| + |cx+d| = |ex+f|$ với mọi số thực x.

Biết a, c và e khác 0, chứng minh rằng $ad = bc$.

NGÀY THỨ HAI

(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán)

(Thời gian : 150 phút)

Câu VI. Cho phương trình

$x - \sqrt{x+1} = m$ (1) trong đó m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Câu VII. Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 = z^2$.

a) Chứng minh rằng trong hai số x, y có ít nhất một số chia hết cho 3.

b) Chứng minh rằng tích xy chia hết cho 12.

Câu VIII. Cho đường tròn (C) đường kính $BC = 2R$ và điểm A thay đổi trên (C) (A không trùng với B, C). Đường phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt đường tròn (C) tại điểm K ($K \neq A$). Hạ AH vuông góc với BC.

a) Đặt $AH=x$. Tính diện tích S của tam giác AHK theo R và x. Tìm x sao cho S đạt giá trị lớn nhất.

b) Chứng minh rằng khi A thay đổi, tổng AH^2+HK^2 luôn là một đại lượng không đổi. Tính góc $\widehat{B}$ của tam giác ABC biết rằng $\dfrac{AH}{HK}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

Câu IX. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + \dfrac{1}{b} = b + \dfrac{1}{c} = c + \dfrac{1}{a}$

a) Cho $a = 1$, hãy tìm b, c.

b) Chứng minh rằng nếu a, b, c đôi một khác nhau thì $a^2b^2c^2 = 1$.

c) Chứng minh rằng nếu a, b, c đều dương thì $a = b = c$.

Câu X. Trong một giải bóng đá có N đội tham gia thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (hai đội bất kì đều gặp nhau đúng một lần). Sau mỗi trận đấu, đội thắng được ba điểm, đội thua không được điểm nào, còn nếu trận đấu có kết quả hòa thì mỗi đội cùng được 1 điểm. Các đội được xếp hạng dựa theo tổng điểm. Trong trường hợp một số đội có tổng điểm bằng nhau thì các đội này được xếp hạng theo các chỉ số phụ. Kết thúc giải người ta nhận thấy rằng không có trận đấu nào kết thúc với tỉ số hòa ; các đội xếp nhất, nhì, ba có tổng điểm lần lượt là 15, 12, 12 và tất cả các đội xếp tiếp theo có tổng điểm đôi một khác nhau.

a) Chứng minh rằng $N \geq 7$.

b) Tìm N và tổng điểm của mỗi đội tham gia giải.

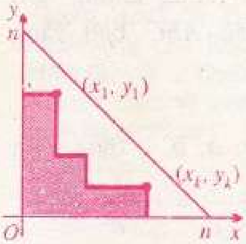
LỜI GIẢI BÀI THI TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 43

VŨ ĐÌNH HÒA
(Viện Công nghệ thông tin)

Kì thi toán quốc tế lần thứ 43 (IMO 2002) đã diễn ra tại Glasgow thuộc Vương quốc Anh. Kết quả của đội tuyển Việt Nam thi toán quốc tế được đăng trên số báo THTT tháng 8 năm 2002. Bài này giới thiệu đề thi và lời giải tóm tắt của 6 bài thi toán quốc tế.

Bài 1. *Cho n là một số nguyên dương. Gọi T là tập hợp các điểm (x, y) trên mặt phẳng tọa độ với x và y là các số nguyên không âm thỏa mãn $x + y < n$. Mỗi điểm của T được tô đỏ hoặc xanh. Nếu điểm (x, y) được tô đỏ thì tất cả các điểm (x', y') của T với đồng thời $x' \le x$ và $y' \le y$ cũng được tô đỏ. Một X – tập là một tập hợp gồm n điểm xanh có hoành độ đôi một khác nhau, và một Y – tập là một tập hợp gồm n điểm xanh có tung độ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng các số X – tập bằng số các Y – tập.*

Lời giải. Nếu không có điểm đỏ nào thì hiển nhiên khẳng định của bài toán là đúng.



Hình 1

Trong trường hợp có ít nhất một điểm đỏ, ta gọi a_i là số điểm xanh có hoành độ i và b_i là số điểm xanh có tung độ là i. Khi đó số các X – tập là $a_0a_1 \ldots a_{n-1}$ và tương tự số các Y – tập là $b_0b_1 \ldots b_{n-1}$. Ta sẽ chứng minh rằng $a_0a_1 \ldots a_{n-1} = b_0b_1 \ldots b_{n-1}$ bằng cách tính các tích này (số X – tập và số Y – tập) theo tọa độ các điểm $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ với (x_i, y_i) $(i \le k)$ là các điểm đỏ có tính chất là các điểm $(x_i + 1, y_i)$ và $(x_i, y_i + 1)$ nếu thuộc T sẽ có màu xanh (xem hình 1). Xét hai trường hợp có thể xảy ra :

1) Tồn tại điểm $\left(x_{i_o}, y_{i_o}\right) = n - 1$.

Khi đó $a_{i_o} = b_{i_o} = 0$ và khẳng định bài toán hiển nhiên đúng.

2) $x_i + y_i \ne n - 1$ cho mọi $i \le k$.

Khi đó bằng tính toán đơn giản, ta sẽ có số X – tập là

$$\frac{(n-1-y_1)!}{(n-2-y_1-x_1)!}\cdot\frac{(n-2-y_2-x_1)!}{(n-2-y_2-x_2)!}\cdots\frac{(n-2-y_k-x_{k-1})!}{(n-2-y_k-x_k)!}(n-1-x_k)!$$

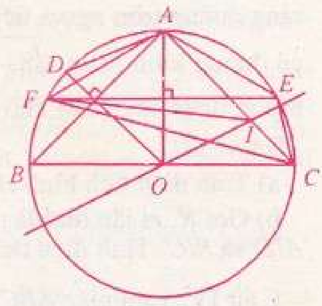
Tương tự, số các Y – tập là bằng

$$\frac{(n-1-x_k)!}{(n-2-y_k-x_k)!}\cdot\frac{(n-2-y_k-x_{k-1})!}{(n-2-y_{k-1}-x_{k-1})!}\cdots\frac{(n-2-y_2-x_1)!}{(n-2-y_1-x_1)!}(n-1-y_1)!$$

và hiển nhiên số các X – tập cũng bằng số các Y – tập.

Bài 2. *Cho trước BC là đường kính của đường tròn Γ có tâm là điểm O. A là một điểm trên Γ sao cho $0^\circ < \widehat{AOB} < 120^\circ$. D là điểm giữa của cung $\overset{\frown}{AB}$ (cung không chứa điểm C). Đường thẳng qua O song song với DA cắt đường thẳng AC tại I. Trung trực của OA cắt Γ tại E và F. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CEF.*

Lời giải. Vì $0^\circ < \widehat{AOB} < 120^\circ$, cho nên A và C không cùng phía với EF (hình 2). Do EF là trung trực của AO, cho nên $AE = AF = OE = OF = R$ là bán kính của đường tròn Γ, suy ra CA là phân giác của $\widehat{ECF}$ (*)



Hình 2

Vì D là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$ cho nên DO vuông góc với AB, và do BC là đường kính của Γ, cho nên AC vuông góc với AB, do đó $ADOI$ là hình bình hành, suy ra $AI = R$. Cho nên ta có $AI = AE = AF$. (**)

Vì $\widehat{AFI} = \widehat{AFE} + \widehat{EFI} = \widehat{ACE} + \widehat{EFI}$ và vì $\widehat{AIF} = \widehat{IFC} + \widehat{ICF}$, nên theo (*) và (**), ta có $\widehat{EFI} = \widehat{IFC}$. Vậy cho nên I nằm trên giao điểm của các đường phân giác của góc $\widehat{F}$ và $\widehat{C}$ của tam giác EFC và do đó I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác EFC.

Bài 3. *Tìm tất cả các cặp số nguyên $m, n \ge 3$ sao cho tồn tại vô hạn số nguyên dương a mà tại đó biểu thức $\dfrac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$ nhận giá trị nguyên.*

Lời giải. Đặt $f(x) = x^m + x - 1$, $g(x) = x^n + x^2 - 1$ và $f(x) = q(x).g(x) + r(x)$ với $r(x)$ là đa thức dư. Từ giả thiết đầu bài suy ra $\frac{r(x)}{g(x)}$ nhận vô hạn giá trị nguyên khi $x \to \infty$. Do bậc của $g(x)$ lớn hơn bậc của $r(x)$, cho nên $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{r(x)}{g(x)} = 0$ do đó $\frac{r(x)}{g(x)}$ chỉ có thể nhận giá trị nguyên 0 tại vô hạn giá trị nguyên dương x, nghĩa là $r(x) = 0$. Tóm lại $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

Do $g(0) = -1$ và $g(1) = 1$, cho nên $g(x)$ có một nghiệm $\alpha \in (0, 1)$, và cũng có $f(\alpha) = 0$ do $f(x)$ là bội của $g(x)$. Ngoài ra, ta có $f(x) = g(x).x^{m-n} + (1-x)((x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1)$ chia hết cho $g(x)$ mà $g(1) \neq 0$ nên $h(x) = x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1$ phải là bội của $g(x)$. Dễ thấy rằng nếu $m - n \geq n$ thì có $0 < h(\alpha) < g(\alpha)$, và $h(x)$ không thể là bội của $g(x)$ được. Do đó phải có $m < 2n$, cho nên $m - n + 1 \leq n$. Do $h(x)$ là bội của $g(x)$ nên phải có $m-n+1 = n$, và $m-n = 2$. Từ đó $m = 5$, $n = 3$. Thử lại thấy ngay là đa thức $f(x) = x^5 + x - 1 = (x^2 - x + 1)g(x)$, với $g(x) = x^3 + x^2 - 1$.

Bài 4. *Cho n là một số nguyên lớn hơn 1. Tất cả ước nguyên dương của n là $d_1, d_2, ..., d_k$ với $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$.*

Đặt $D = d_1d_2 + d_2d_3 + ... + d_{k-1}d_k$

(a) Chứng minh rằng $D < n^2$

(b) Xác định tất cả n sao cho D là một ước số của n^2.

Lời giải. a) Dễ dàng thấy bất đẳng thức

$d_1d_2 + d_2d_3 + ... + d_{k-1}d_k \leq n^2$

tương đương với

$$\frac{d_1d_2 + d_2d_3 + ... + d_{k-1}d_k}{n^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{d_1}{n}.\frac{d_2}{n} + \frac{d_2}{n}.\frac{d_3}{n} + ... + \frac{d_{k-1}}{n}.\frac{d_k}{n} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{d_k}.\frac{1}{d_{k-1}} + ... + \frac{1}{d_3}.\frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_2}.\frac{1}{d_1} \leq 1 \quad (*)$$

(do $n = d_1d_k = d_2d_{k-1} = ...$) và bất đẳng thức (*) đúng vì

$$\frac{1}{d_k}.\frac{1}{d_{k-1}} + ... + \frac{1}{d_3}.\frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_2}.\frac{1}{d_1} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{d_{k-1}} - \frac{1}{d_k}\right) + ... + \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_3}\right) + \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{d_k} \leq 1$$

b) Nếu $n = p$ là số nguyên tố thì $D = n$ là ước của n^2. Nếu n là hợp số và p là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n thì $d_k = n$, $d_2 = p$, $d_{k-1} = \frac{n}{p}$ và do đó $D > \frac{n^2}{p}$. Theo a), ta có $n^2 > D > \frac{n^2}{p}$, nên D không thể là ước số của n^2 được.

Bài 5. *Tìm tất cả các hàm số f từ tập hợp các số thực R vào chính nó sao cho*

$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$

với mọi $x, y, z, t \in R$. (*)

Lời giải. Thay $x = y = z = 0$ vào phương trình đã cho ta thu được $2f(0)(f(0)+f(t)) = 2f(0)$ (1)

Cho $t = 0$ thì $4(f(0))^2 = 2f(0)^2$ và do đó hoặc $f(0) = 0$ hoặc $f(0) = 1/2$. Ta xét các trường hợp có thể xảy ra :

1) Nếu $f(0) = 1/2$.

Khi đó, từ (1) đúng với mọi t, ta có $f(t) = 1/2$.

Thử thấy đây là một nghiệm của phương trình hàm đã cho.

2) Nếu $f(0) = 0$. Thay $z = t = 0$ vào (*), ta thu được $f(x)f(y) = f(xy)$ (2)

và hàm $f(x)$ có tính chất nhân, đặc biệt $f(1) = (f(1))^2$, cho nên $f(1) = 0$ hoặc $f(1) = 1$. Xét 2 trường hợp :

2a) Nếu $f(1) = 0$. Từ (2) ta có $f(x) = 0$ cho mọi x (với $y = 1$). Thử thấy hàm số này là một nghiệm của phương trình hàm đã cho.

2b) Nếu $f(1) = 1$. Thay $x = 0$, $y = t = 1$ vào (*), ta thu được $2f(z) = f(-z) + f(z)$ và do đó $f(-z) = f(z)$, vậy hàm $f(x)$ là hàm chẵn, ta chỉ cần chứng minh $f(x) = x^2$ cho mọi $x \geq 0$ là đủ. Lưu ý

$f(x) = f\left((\sqrt{x})^2\right) = f\left(\sqrt{x}\right)^2 \geq 0$ cho mọi $x \geq 0$ (3)

Do $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, từ (2) ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp rằng $f(n) = n^2$ cho mọi số tự nhiên n, và cũng do (2) suy ra $f(x) = x^2$ cho mọi số hữu tỉ x.

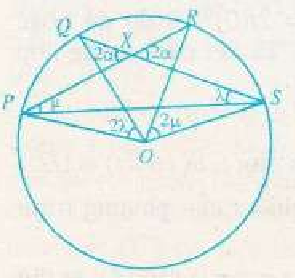
Thay $t = x$, $z = y$ vào (*), ta thu được

$(f(x) + f(y))^2 = f(x^2 + y^2)$, từ (3) có $f(x^2 + y^2) \geq (f(x))^2 = f(x^2)$ cho mọi $x \geq 0 \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ là hàm không giảm trên $[0, \infty)$. Bây giờ với mỗi $x \in [0, \infty)$ ta chọn hai dãy số hữu tỉ không âm u_i, v_i với u_i là dãy không giảm $u_i \to x$ *và* v_i là dãy không tăng $v_i \to x$. Do tính đơn điệu của hàm số $f(x)$, ta có $\lim f(u_i) \leq f(x) \leq \lim f(v_i)$, và do $\lim f(u_i) = \lim u_i^2 = x^2$, $\lim f(v_i) = \lim v_i^2 = x^2$, cho nên ta có $f(x) = x^2$. Thử thấy hàm số này là nghiệm thứ ba của phương trình hàm đã cho.

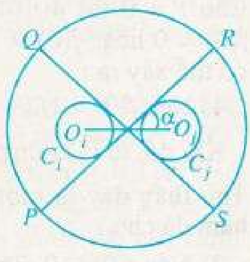
Bài 6. *Cho Γ_1, Γ_2, ..., Γ_n là các đường tròn bán kính 1 trên mặt phẳng, ở đây $n \geq 3$. Kí hiệu tâm của các đường tròn này một cách tương ứng là O_1, O_2, ..., O_n. Giả sử rằng không có đường thẳng nào có điểm chung với quá hai trong số các đường tròn này. Hãy chứng minh rằng :*

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{1}{O_iO_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}$$

Lời giải. Trước hết dễ thấy hai cung PR, QS cắt nhau tại một điểm X trong hình tròn Ω bán kính ρ (Hình 3) sao cho $\widehat{PXQ} = \widehat{RXS} = 2\alpha$ thì $\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{RS} = 4\alpha\rho$ (1)



Hình 3



Hình 4

Từ điều kiện đã cho dễ thấy rằng các hình tròn đã cho không có điểm chung. Đem phủ các hình tròn cho trước bởi một hình tròn lớn Ω bán kính ρ (Hình 4). Xét hai hình tròn C_i và C_j cho trước với tâm tương ứng là O_i và O_j. Gọi 2α là góc giữa hai tiếp tuyến chung trong PR, QS của chúng. Ta có $\sin\alpha = \dfrac{2}{O_iO_j}$. Từ bất đẳng thức quen thuộc $\alpha \geq \sin\alpha$, ta có được $\alpha \geq \sin\alpha = \dfrac{2}{O_iO_j}$. Từ (1) ta có $\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{RS} = 4\alpha\rho \geq \dfrac{8\rho}{O_iO_j}$ và do đó $\dfrac{1}{O_iO_j} \leq \dfrac{\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{RS}}{8\rho}$ (2)

Ta xét tổng S tất cả các cung khi i và j nhận tất cả các giá trị có thể. Ta khẳng định là khi đó mỗi điểm của Ω được phủ nhiều lắm là $n-1$ cung. Để thấy điều này, gọi T là điểm bất kì của Ω và xét tia tiếp tuyến TU của Ω xuất phát từ T (Hình 5). Khi quay tia TU quanh điểm T như trong hình, và không mất tổng quát quát giả sử rằng các hình tròn đã cho bị cắt lần lượt là C_1, C_2, ..., C_n theo thứ tự quay này. Rõ ràng T bị phủ bởi một cung trong tổng S khi và chỉ khi TU cắt hai hình tròn tương ứng.

(Xem tiếp trang 3)

KỈ NIỆM 200 NĂM SINH NIELS HENRIK ABEL

Câu chuyện của chúng ta bắt đầu từ cuối thế kỉ 18. Vào thời ấy ở Na Uy chưa có trường đại học. Xiôren Ghêooc Abel, cậu con trai thứ của mục sư Han Machiac Abel, được gửi đi học ở Đan Mạch. Sau khi tốt nghiệp đại học Xiôren Abel được cử làm phó mục sư và giúp việc cho bố. Mùa hè năm 1799 Xiôren kết hôn với Ana Maria, mười chín tuổi, con một thương gia giàu có. Niel Henrich Abel, nhà toán học vĩ đại sau này là con thứ hai của Xiôren Abel, chào đời ngày 5.8.1802. Lúc bấy giờ chiến tranh giữa khối Đại Pháp với khối Anh, Thụy Điển đã lan đến Côpenhagen, uy hiếp Na Uy. Mùa thu 1815, Niel Henrich được cha gửi đi học ở Ôslô. Cho đến năm 15 tuổi Niel Henrich vẫn được đánh giá là ngoan và học giỏi. Anh học toán khá nhưng vẫn bị thầy Bađơ đánh. Năm 1818 Bađơ bị thải hồi, chức trợ giáo trường trung học được giao cho thầy Hônbôê. Đây là bước ngoặt lớn trong cuộc đời Abel vì chính Hônbôê đã khêu gợi và cổ vũ cho tài năng của Abel, hướng dẫn anh những bước đi độc lập đầu tiên trên con đường nghiên cứu khoa học. Nhờ thầy Hônbôê, Abel đã đọc những tài liệu về vi tích phân do Ơle viết bằng tiếng La tinh. Anh còn đọc Lacroa, Phrăngken Poatxông, Gausơ, Vecniê, Lagrăng...

Cuối trung học Abel đã bắt đầu nghiên cứu cách giải phương trình bậc 5 và cao hơn (các công thức giải nếu tồn tại phải được biểu thị dưới dạng tổ hợp các căn thức). Abel đưa kết quả của mình cho Hônbôê, Hangxtin xem và hai ông đã gửi công trình đến Đêghen, nhà toán học nổi tiếng của Đan Mạch. Không phát hiện được sai lầm, Đêghen thận trọng viết "Cho dù cách giải của Abel không đúng chăng nữa thì công trình đó cũng chứng tỏ cậu Abel trẻ tuổi có những năng khiếu toán học xuất chúng so với lứa tuổi còn non trẻ và điều đó hứa hẹn rất nhiều ở tương lai tươi sáng của cậu". Đêghen cũng khuyên Abel nên quan tâm đến các hàm siêu việt elliptic, một vấn đề có ý nghĩa đối với sự phát triển của giải tích và cơ học. Đọc xong thư Đêghen, Abel nhận thấy cách giải của mình là chưa đúng cho mọi trường hợp. Công trình của Abel nổi tiếng khắp thành phố. Đó cũng là lúc gia đình Xiôren lâm và cảnh túng thiếu do cuộc khủng hoảng tài

Chuyện kể về Niel Henrich Abel

chính xảy ra sau chiến tranh. Năm 1820, Xiôren qua đời. Niel Henrich từ đây phải chật vật để dùng số học bổng ít ỏi của mình giúp đỡ hai em.

1821, Abel thi vào đại học và đạt điểm cao về Số học và Hình học. Vì bố mất, mẹ còn năm em nhỏ nên những năm ở đại học Abel không thể trông chờ vào sự giúp đỡ của gia đình. Anh được nhận vào ở kí túc xá, không phải trả tiền. Ông hiệu trưởng Trêsôp và nhiều giáo sư đã bỏ tiền túi của mình để cấp cho Abel ăn học. Mọi người đã bắt đầu biết đến năng khiếu xuất chúng của Abel. Nhưng anh rất khiêm tốn, không ca ngợi những thành tựu của mình.

Năm 1823 tạp chí Khoa học tự nhiên đầu tiên của Hội khoa học Na Uy ra đời. Ngay số thứ hai, tạp chí đã in một bài báo của Abel. Được sự cổ vũ của Hangxtin, Abel lại viết thêm một số bài lần lượt đăng các số tiếp sau. Độc giả đón đọc các bài báo đó với mối cảm tình sâu sắc. Trong các bài báo đó có bài bàn đến cách giải phương trình bằng số của những cái mà nay ta gọi là tích phân. Năm 1823 Abel đã đệ trình trước Hội đồng khoa học nhà trường một báo cáo ở đó nêu một phương pháp cho phép kiểm tra tính khả tích của các biểu thức. Giáo sư Rasmuxen khen ngợi Abel, tặng anh tiền và khuyên Abel dùng nó để đi Côpenhagen tìm hiểu những công trình nổi tiếng của các nhà toán học Đan Mạch. Abel đã gặp Fôn Xmit và Đêghen ở Đan Mạch. Đêghen đã xem bài báo Abel viết về các hàm elliptic ngược. Đêghen không phát hiện được sai lầm nào. Từ Côpenhaghen, Abel đã gửi thư cho Hônbôê để cập đến một số kết quả liên quan đến bài toán Fecma. Những hệ thức mà Abel nêu ra ngày nay được gọi là "*Công thức Abel*". Sau khi từ Côpenhagen về Abel tập trung vào hai hướng mới : các hàm elliptic và lí thuyết các phương trình. Các nhà toán học thời đó nhận thấy một số loại tích phân của các hàm chứa căn bậc hai của các đa thức bậc ba, bậc bốn giữ một vai trò quan trọng trong việc giải các bài toán và ứng dụng trong cơ học, thiên văn... Một trong những bài toán thuộc loại này là bài toán tìm độ dài của một cung ellip. Người ta gọi các tích phân này là các tích phân elliptic. Các công trình của Lơgiăng là xuất phát điểm cho các công trình của Abel. Để nghiên cứu các tích phân này Abel phải nghiên cứu những hàm ngược, đó chính là các hàm elliptic.

Lĩnh vực thứ hai mà Abel quan tâm là phương trình đại số. Trước đây, vào năm 1545 Cacđanô đã công bố cuốn sách "*Những sáng tạo vĩ đại*". Cuốn sách có nói cách giải phương trình bậc ba và ghi công cho Ferô và tiếp đó là Tactaglia là những người có lời giải đầu tiên. Cuốn sách còn nêu cách giải phương trình bậc bốn. Từ phương trình bậc bốn đến phương trình bậc năm, nhân loại phải đi mất 278 năm. Năm 1823 Abel đã chứng minh rằng phương trình bậc năm không thể giải được bằng căn thức. Anh viết bài báo đó bằng tiếng Pháp. Ngày nay, tài liệu đó được xem là một công trình có giá trị. Nhưng ngày đó, không một nhà toán học nào ở châu Âu chú ý đến bài báo này. Cách đấy khoảng hai mươi năm nhà toán học người Ý là Paolô Ruphini cũng đã đi đến kết quả tương tự và đã công bố kết quả của mình tuy kết quả chưa đầy đủ như của Abel. Các nhà lịch sử toán sau này đã gọi định lí về sự không giải được ở dạng căn thức của phương trình bậc năm là định lí Ruphini - Abel.

Nhờ sự can thiệp của các giáo sư, năm 1825 Abel đã có thể ra nước ngoài bằng học bổng. Các giáo sư Hangxtin và Rasmuxen đã giới thiệu Abel với nhà vua bằng những lời ca ngợi "Ít có sinh viên có được những triển vọng to lớn như Abel. Rất có thể một ngày gần đây, với những phát minh của mình trong lĩnh vực toán học thuần túy, anh sẽ lừng danh khắp châu Âu". Ở Đức Abel đã quen với hai nhà toán học Krelê và Điarêcxen. Chính thời điểm đó tạp chí toán học đầu tiên của Đức ra đời và Abel đã có những bài đầu tiên đăng ở số 1 "*Tạp chí Krelê*". Abel bắt đầu nghiên cứu vấn đề tìm tất cả các phương trình có thể giải được bằng đại số. Anh còn nghiên cứu về các chuỗi. 1826 Abel đi Áo rồi đến Pháp. Ngay từ năm 1824 Abel đã có một số kết quả về lí thuyết tích phân, (ngày nay được gọi là định lí Abel) nhưng anh để trình bày trước Viện Hàn lâm khoa học Pháp, thay thư giới thiệu. Abel cũng đã tìm gặp Lơgiăng nhưng chưa có dịp nói chuyện về khoa học. Abel cũng rất khâm phục Côsi. Nhưng Côsi chính là người đã làm Abel thất vọng khi ông hờ hững bỏ quên công trình "Hồi kí về các tính chất tổng quát của một lớp rất rộng các hàm siêu việt" của Abel mà ông được giao đọc phản biện.

Tháng 4.1827 Abel rời Beclin về Ôslô. Tiền đã hết lại chưa được bố trí việc gì nên Abel vay nợ để sống và chờ đợi. Anh được bầu vào Hội đồng Khoa học Hoàng gia của Na Uy. Đây là lần duy nhất công lao của anh được thừa nhận. Thời gian này anh hoàn chỉnh lí thuyết quan trọng mà sau này mang tên là Lí thuyết các hàm Abel. Mãi đến 3.1828 công việc mới tạm ổn, có chỗ dạy Abel không phải lo nhiều về nợ nần. Tháng 2.1828 Abel đã kết thúc phần thứ hai của tập "*Nghiên cứu*", trình bày các kết quả về đường lemniscat và lí thuyết về các phép biến đổi.

(Xem tiếp trang 9)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

BÀI TOÁN JOSEPHUS

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(Trường ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

I. Câu chuyện truyền thuyết

Vespasien là hoàng đế La Mã trong thế kỉ thứ nhất (từ năm 69 đến năm 79 theo dương lịch). Thời ấy, có Josephus (Giô-de-phơ) là nhà viết sử bị Vespasien truy nã vì can tội tổ chức chống lại triều đình. Tục truyền rằng Vespasien tìm được hang ẩn náu của 100 người chống đối và kêu gọi họ ra hàng nếu không sẽ tàn sát tất cả. Đa số muốn tự sát, quyết không đầu hàng, chỉ có một người nói nhỏ với Josephus là vì hoàn cảnh riêng muốn đầu hàng để sống. Josephus rất thông cảm với người này và đặt ra quy tắc sau, được tất cả mọi người nhất trí thi hành :

100 người đứng thành vòng tròn đánh số từ 1 đến 100 theo chiều kim đồng hồ. Người thứ nhất cầm dao đếm 1 rồi đưa dao cho người thứ hai. Người thứ hai đếm 2 rồi tự sát. Người thứ ba cầm dao và lại đếm 1 rồi đưa cho người thứ tư. Người thứ tư đếm 2 rồi tự sát... Cứ như thế mà tiếp tục từ vòng này qua vòng khác. Cuối cùng còn một người sống. Hỏi Josephus phải sắp xếp người muốn sống ở vị trí nào ?

Ta thử xét lần lượt từng vòng :

Sau vòng thứ nhất còn lại các người mang số : 1, 3, 5, ..., 97, 99. Sau vòng thứ hai còn lại các người mang số : 1, 5, 9, ..., 93, 97. Sau vòng thứ ba còn các số : 1, 9, 17, ..., 89, 97. Sau vòng thứ tư còn các số : 9, 25, 41, 57, 73, 89. Sau vòng thứ năm còn các số : 9, 41, 73. Sau vòng thứ sáu còn : 9, 73. Cuối cùng còn lại số 73. Vậy Josephus phải xếp người muốn sống ở vị trí 73.

Nếu thay 100 bởi n thì người muốn sống mang số bao nhiêu ?

II. Bài toán Josephus

Giả sử Josephus có $n-1$ bạn, n người này đứng thành vòng tròn đánh số từ 1 tới n theo chiều kim đồng hồ và tự sát theo quy tắc như trên. Gọi $f(n)$ là vị trí của người sống sót duy nhất. Tìm công thức của $f(n)$.

Giải : Nếu $n = 2k$. Sau vòng thứ nhất còn lại các số : 1, 3, 5, ..., $2k-1$ và k người này được đánh số mới là 1, 2, ..., k. Nếu một người có số $2i-1$ ở vòng trước thì vòng này mang số i ($i = 1, ..., k$). Người sống sót có số cũ là $f(2k)$ nay mang số mới là $f(k)$. Vậy ta có

$$f(2k) = 2f(k) - 1. \quad (1)$$

Nếu $n = 2k + 1$. Sau vòng thứ nhất (kể cả 1 là $2k+2$) còn lại k số: 3, 5, ..., $2k + 1$ và k người này được đánh số mới là 1, 2, ..., k. Nếu một người có số $2i+1$ ở vòng trước thì vòng này mang số i ($i = 1, ..., k$). Người sống sót có số cũ là $f(2k+1)$ mang số mới là $f(k)$. Vậy ta có

$$f(2k+1) = 2f(k) + 1 \quad (2)$$

Ta coi $f(1) = 1$. Đặt $g(n) = f(n) - 2n - 1$. Với $n = 2k$ từ (1) có

$$g(2k) = f(2k) - 4k - 1 = 2f(k) - 2 - 4k = 2g(k)$$

Tương tự với $n = 2k+1$ từ (2) có $g(2k+1) = 2g(k) = g(2k)$ (3)

Vì $g(1) = -2$ nên suy ra $g(2^l) = g(2^l+1) = -2^{l+1}$

Ta chứng minh rằng : Nếu $n = 2^{i_1} + 2^{i_2} + ... + 2^{i_k}$ ở đó $0 \le i_1 < i_2 < ... < i_k$ thì $g(n) = -2^{i_k+1}$.

Chứng minh quy nạp theo k. Với $k = 1$ đúng. Giả sử đúng với $k - 1$. Áp dụng (3) ta có

$$g(n) = g\left(2^{i_1}(2^{i_k-i_1} + ... + 2^{i_2-i_1} + 1)\right)$$
$$= 2^{i_1} g\left(2^{i_k-i_1} + ... + 2^{i_2-i_1} + 1\right)$$
$$= 2^{i_1} g\left(2^{i_k-i_1} + ... + 2^{i_2-i_1}\right)$$
$$= -2^{i_1} 2^{i_k-i_1+1} = -2^{i_k+1}$$

Vậy khẳng định đúng với k.

Giả sử n có biểu diễn cơ số 2 là $n = \left(1x_{k-1}...x_0\right)_2 = \sum_{i=0}^{k} x_i 2^i$ với $x_i \in \{0, 1\}$, $x_k = 1$. Khi đó

$$f(n) = g(n) + 2n + 1 = -2^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} x_i 2^{i+1} + 1 = \sum_{i=0}^{k-1} x_i 2^{i+1} + 1.$$

Nghĩa là nếu $n = \left(1x_{k-1}...x_0\right)_2$ thì $f(n) = \left(x_{k-1}...x_0 1\right)_2$ (nhận được từ n viết trong hệ nhị phân bằng cách chuyển chữ số 1 ở đầu trái sang đầu phải).

Thí dụ $100 = \left(1100100\right)_2$

thì $f(100) = \left(1001001\right)_2 = 73$

III. Bài toán Josephus tổng quát

Bài toán Josephus đã được giải xong. Nhưng những người yêu thích tìm tòi sáng tạo toán học chưa muốn dừng ở đây. Tổng quát, tổng quát nữa, tổng quát mãi, đó là khẩu hiệu của các nhà toán học. Sau khi giải xong một bài toán họ lại muốn tìm một bài toán khác bao trùm bài toán vừa giải sao cho bài toán vừa giải trở thành một trường hợp riêng của nó.

Hãy tưởng tượng rằng Josephus có $n-1$ bạn trong đó có k người không muốn tự sát. Josephus đặt ra quy tắc sau : n người đứng thành vòng tròn đánh số từ 1 đến n theo chiều kim đồng hồ. Người thứ nhất chuyền dao cho người thứ hai, người thứ hai cho người thứ ba, cho đến người thứ $k+1$. Người thứ $k+1$ tự sát. Người $k+2$ đếm 1, người thứ $k+3$ đếm 2 v.v... cho đến người thứ $2k+2$. Người thứ $2(k+1)$ tự sát. Tiếp tục quá trình như vậy, cứ sau k lần chuyển dao thì đến một cuộc tự sát, cho đến khi nào chỉ còn lại k người. Hỏi Josephus phải sắp xếp k người muốn sống này ở vị trí nào ?

Gọi $f_k(n)$ là tập hợp gồm các số của k người sống sót này. Bài toán đặt ra là tìm công thức của $f_k(n)$?

Chẳng hạn với $n = 41$, $k = 2$ ta xét lần lượt từng vòng thì thấy :

Sau vòng thứ nhất các số tự sát là 13 số : 3, 6, 9, ..., 36, 39. Sau vòng thứ 2 loại thêm 9 số : 1, 5, 10, 14, 19, 23, 28, 32, 37, 41. Sau vòng thứ 3 loại thêm 6 số : 7, 13, 20, 26, 34, 40. Sau vòng thứ 4 loại thêm 4 số : 8, 17, 29, 38. Sau vòng thứ 5 loại thêm 2 số : 11, 25. Sau vòng thứ 6 loại thêm 2 số: 2, 22. Sau vòng thứ 7 loại thêm 2 số : 4 và 35. Đến đây còn lại hai số là 16 và 31.

Vậy $f_2(41) = \{16, 31\}$.

Sau đây là chương trình tính hàm $f_k(n)$ viết theo ngôn ngữ Pascal (do Đặng Thế Anh, 12D2, Chu Văn An, Hà Nội lập trình).

```
Uses Crt ;
  const
  maxN = 10000 ;
Type
  mang B = array[1...maxN] of Boolean ;
var
   n : Long Int ;
   step : Long Int ;
   dx : mang B ;
Function next(x : Long Int) : Long Int ;
begin
  if (x:n) then next : = x+1 else
  next :=1 ;
end ;
Function tien(x : Long Int) : Long Int ;
var
  t : Integer
begin
  t := x ;
  repeat
  t := next(t) ;
  Until (not dx[t]) ;
  tien := t ;
end;
Procedure Main ;
var
   i, j, x : Integer
begin
  x := 1 ;
  FillChar (dx, SizeOf(dx),False) ;
  for i := 1 to n-step do
end
begin
  for j := 1 to step do
  x := tien(x) ;
  dx[x] := true ;
  x := tien(x) ;
  end ;
  for i := 1 to n do
  if (not dx[i]) then
  writeln(i) ;
end ;
BEGIN
  Clrscr ;
  step : = 4 ;
  n :=200 ;
  Main ;
  readln ;
END
```

Sử dụng chương trình tính này ta có $f_2(100) = \{58, 91\}$, $f_2(200) = \{53, 128\}$, $f_3(100) = \{34, 45, 97\}$, $f_4(200) = \{72, 113, 121, 176\}$.

Tuy nhiên đây chưa phải là *lời giải toán học của bài toán Josephus tổng quát.* Tòa soạn mong nhận được lời giải bài toán Josephus tổng quát của các bạn. Các bạn có thể tham khảo về bài toán này trên THTT số 193 (7/1993) và số 203 (5/1994).

CHUYỆN KỂ VỀ ... *(Tiếp trang 7)*

Cùng với các công trình của Giacôbi, các thành tựu của Abel về các dạng siêu việt elliptic đã vượt trước cả các công trình thuộc lĩnh vực này mà Gauxơ định công bố. Ở vào thời đó Giacôbi nổi tiếng hơn Abel nhiều. Thực ra Abel đã đi xa hơn Giacôbi. Cuộc đua tranh về thời gian công bố các tác phẩm đã diễn ra âm thầm giữa hai người. Abel in phần thứ hai của tập "*Nghiên cứu*" và "*Lời giải của một bài toán tổng quát*" trên tờ "*Tin tức thiên văn*". Sức khỏe Abel bắt đầu giảm sút. Mùa thu 1828 Abel đã hoàn thành bài báo về tích phân hypeelliptic. 1829 Abel đăng định lí mà anh trích từ tập *Hồi kí* ở Pari. Đây thực sự là đài kỉ niệm về Abel. Abel cũng không ngờ đó là bài báo cuối cùng của mình,. Ngày 6.4.1829 Abel đã trút hơi thở cuối cùng vì bệnh phổi. Mãi 1841 tập *Hồi kí* của Abel mới được Viện Hàn lâm Pháp chuẩn bị công bố. Nhưng Libri, người được giao làm trực tiếp đã tuyên bố bản thảo lại thất lạc. 1859 người ta mới lại thấy hai bản gốc của Abel : "*Lí thuyết giản yếu về các hàm elliptic*" và "*Chứng minh một tính chất tổng quát một lớp hàm siêu việt*". 1881 tuyển tập trọn vẹn các công trình của Abel mới ra mắt thế giới. Tên tuổi Abel ngời sáng với những định lí Abel, hàm Abel, tích phân Abel mới, nhóm Abel, phép biến đổi Abel...

VŨ KIM THỦY

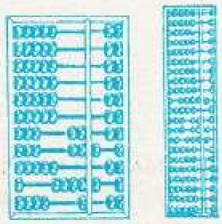
Theo "Cuộc đời nhà toán học Niel Henrich Abel"

LỊCH SỬ TOÁN HỌC

LỊCH SỬ NGẮN GỌN VỀ MÁY TÍNH

TRƯƠNG CÔNG THÀNH
(NXB Giáo dục)

Máy tính là kết quả cuối cùng của một quá trình cải tiến công cụ tính toán, phát minh ra các máy... đầy gian khổ và kéo dài hàng nghìn năm, nhằm giảm bớt nỗi nhọc nhằn trong tính toán. Bài viết này phác họa những nét sơ lược về quá trình xuất hiện các công cụ tính toán cùng với tác giả đã phát minh ra máy.



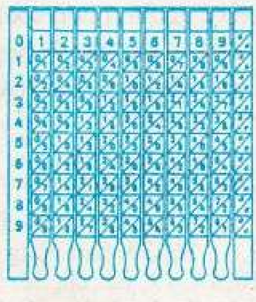
Hình 1

Khoảng 3000 năm trước CN
Bàn tính Trung Quốc (bên trái h.1)
Bàn tính Nhật Bản (bên phải h. 1)

Dùng tay gẩy các viên gỗ tròn trên bàn tính để thực hiện các phép tính cộng, trừ.

1614. John Napier (hoặc Neper) người Scôtlen, dùng phép tính lôgarit để chuyển phép nhân và chia về phép cộng và trừ.

1617. ***Thanh Nêpe*** (h. 2) xuất hiện, gồm các thanh trượt, cho phép thực hiện các phép nhân, chia căn bậc hai.

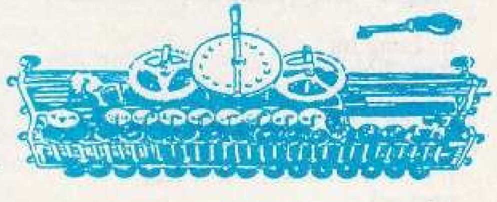


Hình 2

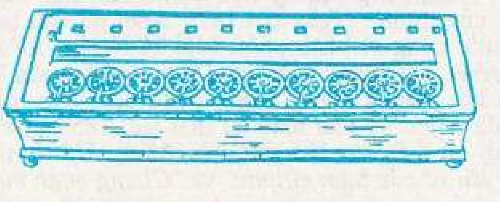
1621. ***Thước tính lôgarit*** (h. 3) của Oughtred (người Anh). Trên thanh ngoài và thanh giữa chia thang vạch theo lôgarit. Trượt thanh giữa rồi cộng trừ độ dài để được kết quả phép tính cộng, trừ, nhân, chia.

Hình 3

1642-1644. ***Máy tính cơ học*** (h. 4) do Pascal người Pháp sáng chế. Mỗi trục có bánh xe gắn với mỗi chữ số từ 0 đến 9, khi bánh xe quay một vòng sẽ dịch chuyển một số, thực hiện được 4 phép tính : cộng, trừ, nhân chia.



Hình 4



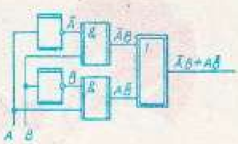
Hình 5

1670. ***Máy tính cơ học*** (h. 5) do Leibnitz người Đức cải tiến. Chiếc máy này là nguyên mẫu của các máy tính dùng trong thương mại chế tạo trước năm 1875.

1790. ***Máy thêu công nghiệp*** do Jacquard người Pháp chế tạo. Trong chi tiết máy có những tấm bìa đục lỗ để vẽ kiểu.

1812-1834. Babbage người Anh đã soạn thảo cấu trúc *máy vi sai giúp tính toán các bảng số*, sau đó lập dự án chế tạo *máy phân tích* thực hiện chương trình hóa các thao tác trên tấm bìa đục lỗ có ghi các dữ liệu, nhằm thực hiện tự động hàng loạt phép tính số học, nhưng máy chưa ra đời.

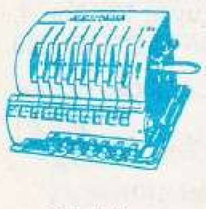
1854. Nhà toán học Anh Bool sử dụng các kí tự mới để biểu thị các phép toán lôgic : phủ định $\overline{A}$, và (&), hoặc (+) ... (h. 6). *Hàm số Bool* là cơ sở lí thuyết của máy tính điện tử.



Hình 6

1855. Kĩ sư Scheutz người Thụy Điển đã cải tiến thành công ***máy vi sai*** của Babbage.

1870. Lord Kelvin, người Anh chế tạo ***máy tính tương tự*** cho phép tính toán thời đoạn và độ cao của thủy triều.



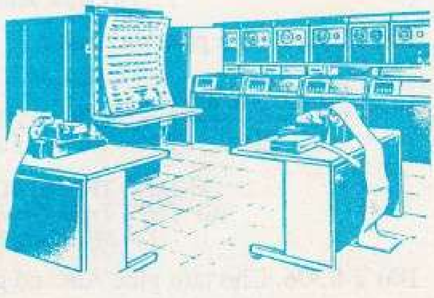
Hình 7

1887. ***Máy kế toán*** (h. 7) do Felt chế tạo, có các số xếp đặt theo bảng giống như máy chữ, được sử dụng rộng rãi để tính toán.

1890. Hollerith người Mỹ chế tạo ***máy thống kê*** (h. 7) lần đầu tiên sử dụng phiếu đục lỗ. Nhờ dòng điện từ được tạo ra khi qua mỗi lỗ đục, máy sắp xếp lại các tấm bìa rồi cho kết quả.

1930. ***Máy tính tương tự*** do Bush hoàn thiện nhằm trợ giúp các máy ngắm.

1944. ***Máy tính điện cơ Mark I*** (h. 8) do H. Aiken người Mỹ chế tạo với sự giúp đỡ của hãng IBM. Máy có thể giải nhanh hàng loạt bài toán với tốc độ khá cao.

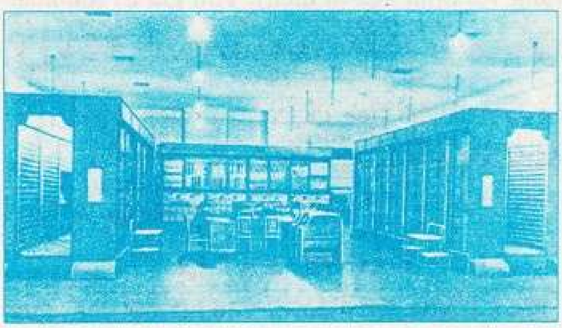


Hình 8

1944. ***Máy Colossus*** do một nhóm kĩ sư với biệt danh "Bletchley Park Team" sáng chế nhằm giải mã các tín hiệu thông tin, được sử dụng trong Đại chiến thế giới thứ hai.

1946. ***Máy tính đa năng ENIAC*** lần đầu tiên sử dụng các "ống chân không" do Eckert và Mauchly người Mỹ chế tạo.

1949. ***Máy tính EDSAC*** của Wilkes lần đầu tiên có thể kiểm soát được các chương trình lưu trữ.



Hình 9

1951. Eckert và Mauchly sáng chế ***Máy UNIVAC*** là ***máy tính điện tử*** EIBM đầu tiên (h. 9) sử dụng bóng điện tử (thế hệ 1) xử lí cả thông tin số và văn bản dùng trong quản lí.

1956. Lần đầu tiên ***trasitor*** (linh kiện sử dụng chất bán dẫn do Bratten và Shockley phát minh từ 1948) được sử dụng làm cho máy tính nhỏ đi nhiều lần và giá rẻ hơn.

1960. ***Máy tính sử dụng transitor*** (thế hệ hai) nhỏ hơn, nhanh và tin cậy hơn được bán trên thị trường.

1965. ***Máy vi tính*** đã tích hợp các vi mạch (thế hệ ba) được sử dụng. Kích cỡ máy nhỏ gọn, sử dụng ít năng lượng, rẻ hơn...

Từ 1972 đến nay các ***máy tính thế hệ thứ 4*** dùng các mạch in, nhờ công nghệ vi hóa nên kích thước giảm (các mạch nhỏ li ti gắn trên chip riêng biệt), đạt tốc độ 1000000 chỉ thị/giây. Dự báo thế kỉ 21 ***máy tính thế hệ thứ 5*** sẽ là máy tính song song tốc độ cao, các loại máy tính tối ưu như máy vi tính quang, máy vi tính ADN, máy vi tính phân tử./.

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/306. Tìm mọi nghiệm nguyên dương của phương trình : $10(2^x - 1) = x(13x - 3)$

VŨ TRÍ ĐỨC
(Ninh Bình)

Bài T2/306. Chứng minh rằng

$$(a+b-c-1)(b+c-a-1)(c+a-b-1) \le 8$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$

PHAN THỊ MÙI
(GV THCS Trần Quốc Toản, Tx. Tuy Hòa, Phú Yên)

Bài T3/306. Giải phương trình :

$$\left(\frac{8x^3+2001}{2002}\right)^3 = 4004x - 2001$$

HOÀNG THANH TOÀN
(GV THPT Triệu Quang Phục, Yên Mỹ, Hưng Yên)

Bài T4/306. Cho tam giác ABC có góc C tù và $\hat{A} = 2\hat{B}$. Đường thẳng qua B vuông góc với BC cắt đường thẳng AC tại D. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$.

TRẦN NAM DŨNG
(GV PTNK ĐHKHTN – ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T5/306. Cho tam giác ABC. Lấy điểm D trên cạnh BC (D khác B, C). Đường trung trực của DB, DC theo thứ tự cắt các đường thẳng AB, AC tại M, N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp ΔAMN luôn đi qua một điểm cố định khác A khi điểm D di động trên đoạn BC.

NGUYỄN ĐỄ
(Sở GD–ĐT Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/306. Giả sử hàm số $f : N^* \to N^*$ thỏa mãn điều kiện

$f(m.f(n)) = n^2.f(m)$ với mọi m, n thuộc N^*.

a) Chứng minh rằng $f(2003)$ hoặc là số nguyên tố hoặc là bình phương của một số nguyên tố.

b) Hãy xây dựng một hàm f thỏa mãn điều kiện trên.

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV THPT Hùng Vương, Plây Ku, Gia Lai)

Bài T7/306. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm thực duy nhất :

$$x^7 - 7x^6 + 35x^5 - x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 39x - 1 = 0$$

NGUYỄN QUANG MINH
(GV THPT Krông Buk, Đăc Lăc)

Bài T8/306. Cho m là số nguyên lớn hơn 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $ab^{m-1} + a^{m-1}b$, trong đó a, b là các số thỏa mãn các điều kiện $a+b = 1$ và $0 \le a,\ b \le \frac{m-2}{m}$.

TRẦN TUẤN ANH
(SV khoa Toán Tin 2000, ĐHKHTN – ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T9/306. Cho tứ giác lồi $ABCD$ với các cạnh $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Gọi S là diện tích của $ABCD$. Chứng minh rằng với $n \ge 1$ thì

$$4S^n \le a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} + d^{2n} - \left[\left(\frac{a-b}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{b-c}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{c-d}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{d-a}{2}\right)^{2n}\right]$$

VÕ GIANG GIAI
(GV THPT Nguyễn Thái Bình, Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T10/306. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA, AC, BD của tứ diện $ABCD$ lấy các điểm Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 theo thứ tự (các điểm này không trùng với đỉnh của tứ diện). Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1V_2V_3V_4}{V^4}$, trong đó V_1, V_2, V_3, V_4, V lần lượt là thể tích của các tứ diện $AQ_1Q_4Q_5$, $BQ_1Q_2Q_6$, $CQ_2Q_3Q_5$, $DQ_3Q_4Q_6$, $ABCD$.

ĐỖ THANH HÂN
(GV THPT chuyên Bạc Liêu)

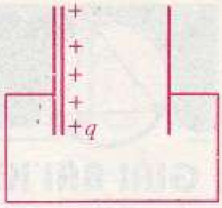
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/306. Từ điểm O trên bờ một con sông rộng $l = OA = 0{,}5$km, một người muốn đi tới điểm A đối diện ở bên kia sông bằng cách đi thuyền từ O đến B, rồi đi bộ từ B đến A (hình vẽ). Vận tốc của thuyền đối với nước là $v_1 = 3$km/h ; vận tốc chảy của nước đối với bờ sông là $v_2 = 2$km/h ; vận tốc đi bộ của anh ta trên bờ là $v = 5$km/h.

Tìm độ dài BA để thời gian chuyển động là ngắn nhất và tính thời gian ngắn nhất đó.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/306. Một tụ điện phẳng chưa tích điện, điện môi là chân không, có điện dung C. Nối 2 bản tụ điện với nhau bằng một dây dẫn. Một bản kim loại mỏng, phẳng có kích thước bằng kích thước của bản tụ điện và tích điện $+q$ được đặt sát một trong 2 bản tụ (hình vẽ). Tính công cần thiết của lực điện trường để tịnh tiến bản kim loại đó theo phương vuông góc với các bản tụ đến vị trí cách đều các bản tụ.



Bỏ qua tác dụng của trọng lực với bản kim loại.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/306. Find all positive integer-roots of the equation : $10(2^x - 1) = x(13x - 3)$

T2/306. Prove that

$(a+b-c-1)(b+c-a-1)(c+a-b-1) \le 8$

where a, b, c are real numbers satisfying the condition $ab + bc + ca = abc$

T3/306. Solve the equation

$$\left(\frac{8x^3+2001}{2002}\right)^3 = 4004x - 2001$$

T4/306. Let ABC be a triangle with obtuse angle C and $\widehat{A} = 2\widehat{B}$. The line passing through B perpendicular to BC cuts the line AC at D. Let M be the midpoint of AB. Prove that $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$.

T5/306. Let ABC be a triangle, D be a point on the side BC (D distinct from B, C). The orthogonal bisectors of the segments DB, DC cut respectively the lines AB, AC at M, N. Prove that the circumcircle of triangle AMN passes through a fixed point distinct from A when D moves on the segment BC.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/306. Let $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ be a function satisfying the condition :

$f(m.f(n)) = n^2.f(m)$ for all $m, n \in \mathbb{N}^*$.

i) Prove that $f(2003)$ is a prime number or a square of a prime number.

ii) Construct a function satisfying the above mentioned condition.

T7/306. Prove that following equation has a unique real root :

$$x^7 - 7x^6 + 35x^5 - x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 39x - 1 = 0$$

T8/306. Let m be an integer greater than 4. Find the greatest value and the least value of the expression $ab^{m-1} + a^{m-1}b$, where a, b are numbers satisfying the conditions : $a+b = 1$ and $0 \le a,\ b \le \dfrac{m-2}{m}$.

T9/306. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral with sides $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ and let S be its area. Prove that for $n \ge 1$,

$$4S^n \le a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} + d^{2n} - \left[\left(\frac{a-b}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{b-c}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{c-d}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{d-a}{2}\right)^{2n}\right]$$

T10/306. Let Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 be arbitrary points respectively on the sides AB, BC, CD, DA, AC, BD of a tetrahedron $ABCD$ (none of them coincides with a vertex of $ABCD$). Find the greatest value of the ratio $\dfrac{V_1V_2V_3V_4}{V^4}$ where V_1, V_2, V_3, V_4, V are respectively the volumes of the tetrahedra $AQ_1Q_4Q_5$, $BQ_1Q_2Q_6$, $CQ_2Q_3Q_5$, $DQ_3Q_4Q_6$, $ABCD$.

ĐÍNH CHÍNH

Trong THTT số 305 (11/2002) có in nhầm dấu. Bạn đọc vui lòng sửa lại như sau :

• Trang 1 dòng 1, 2 ↑ :

$\Delta = -3m - 14 < 0 \Leftrightarrow m > -14/3$

• Trang 3 dòng 2 ↓ :

$$m = \sqrt{x} - \frac{\sqrt{4x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$$

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THTT

Bài T1/302. *Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số nguyên (khác 0) thỏa mãn điều kiện* $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3$ *thì tích số abc là lập phương của một số nguyên.*

Lời giải. (Dựa theo bài giải của *Võ Sỹ Bắc*, 9/4, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Biên Hoà, **Đồng Nai** và của *Ngô Vĩnh Thái*, 8A1, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**):

Đặt $x^3=\frac{a}{b}$, $y^3=\frac{b}{c}$ và $z^3=\frac{c}{a}$. Từ giả thiết ta có $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$, hay

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

Từ đó có hai trường hợp :

1) $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$
$\Rightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0 \Rightarrow x=y=z.$

Từ đây, dễ suy ra a = b = c. Do đó $abc=a^3$, ta có đpcm.

2) $x+y+z=0$, tức là : $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a}}=0.$

Nhân cả hai vế của đẳng thức này lần lượt với $\sqrt[3]{b^2c}$ và $\sqrt[3]{ac^2}$, ta được hệ :

$$\begin{cases}\sqrt[3]{abc}+b+\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=0\\ \frac{1}{b}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+\sqrt[3]{abc}+c=0\end{cases}$$

Khử $\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ trong hệ này, ta tính được :

$$(a-b)\sqrt[3]{abc}=b(c-a) \qquad (1)$$

Do $abc\neq 0$ nên nếu $a-b=0$ thì : (1) $\Rightarrow a=b=c$ (không xảy ra vì $x+y+z=0$).

Nếu $a-b\neq 0$ thì : (1)

$$\Rightarrow \sqrt[3]{abc}=\frac{b(c-a)}{a-b}\Rightarrow abc=\left(\frac{b(c-a)}{a-b}\right)^3 \ (2).$$

(2) chứng tỏ abc là lập phương của một số hữu tỉ. Nhưng vì abc nguyên nên nó là lập phương của một số nguyên.

Vậy trong mọi trường hợp, abc đều là lập phương của một số nguyên (đpcm).

Nhận xét : 1) Trong số gần 70 bài gửi đến toà soạn, chỉ có 9 bài giải đúng. Các lỗi phổ biến là :

+ Áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho 3 số mà không để ý giả thiết 3 số đó phải không âm.

+ Coi rằng *a, b, c* có vai trò như nhau nên đưa thêm giả thiết a ≤ b ≤ c. Đây là sai lầm rất dễ mắc phải. Thực tế, biểu thức $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ hoàn toàn thay đổi nếu cố định a, thay thế b bởi c và thay thế c bởi b. Điều đó chứng tỏ vai trò của a, b, c không hoàn toàn bình đẳng.

2) Ngoài các bạn trên, các bài giải đúng là :

Phú Thọ : *Nguyễn Quang Huy* và *Trần Duy Thành*, 9G, THCS Văn Lang, Việt Trì ; *Nguyễn Trung Kiên*, 8A1, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh ; **Hải Phòng :** *Nguyễn Vũ Lân*, 9A, PTNK Trần Phú ; **Hải Dương :** *Hoàng Đình Phương*, 8/3, THCS Lê Quý Đôn ; **Thanh Hoá :** *Trịnh Thành Kiên*, 9A1, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa.

NGUYỄN HUY ĐOAN

Bài T2/302. *Giải phương trình*

$$(2001-x)^4+(2003-x)^4=2000 \qquad (1)$$

Lời giải. Đặt ẩn số phụ $y=2002-x$ thì

PT(1) $\Leftrightarrow (y-1)^4+(y+1)^4=2000$

$\Leftrightarrow y^4+6y^2-999=0$

Lại đặt $y^2=t>0$, giải PT $t^2+6t-999=0$ được nghiệm $t=12\sqrt{7}-3$. Từ đó PT (1) có 2 nghiệm là $x_1=2002+\sqrt{12\sqrt{7}-3}$, $x_2=2002-\sqrt{12\sqrt{7}-3}$.

Nhận xét. 1) Để giải phương trình bậc 4 dạng

$$(x+a)^4+(x+b)^4=c \qquad (2)$$

Với $c\geq 0$, ta đặt ẩn số phụ $y=x+\frac{a+b}{2}$ thì PT(2) trở thành $\left(y+\frac{a-b}{2}\right)^4+\left(y-\frac{a-b}{2}\right)^4=c \Leftrightarrow 16y^4+24(a-b)^2y^2+(a-b)^4-8c=0$

Giải phương trình trùng phương này ta tìm được nghiệm.

2) Hơn 200 bạn đã gửi lời giải, đa số giải đúng, còn một số bạn sai do tính nhầm số, hoặc ghi 1 nghiệm, hoặc ghi 4 nghiệm.

Các bạn lớp 7, 8 đã tham gia giải nhiều và các bạn lớp 8, 9 có nhận xét về cách giải bài toán tổng quát :

Yên Bái : *Nguyễn Thúy Hà*, 8A, THCS Phú Thịnh, Yên Bình ; **Thái Nguyên :** *Phạm Hoàng Hà*, 8C10, THCS Trung tâm Tx. Sông Công ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Trung Kiên A*, 8A, *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh ; **Vĩnh Phúc :** *Trần Thị Huyền*, 9A, THCS Phạm Công Bình, Yên Lạc, *Đỗ Đình Khanh*, *Nguyễn Kim Thuật*, 7A, THCS Yên Lạc, *Trần Tấn Phong*, 7A, THCS Lập Thạch, *Vũ Thị Phượng*, 6A, THCS Lãng Công, Lập Thạch, *Nguyễn Thị Thanh Ngân*, 7D, *Nguyễn Hồng Hạnh*, 7A, *Vũ Hồng Toản*, 8A3, *Nguyễn Văn Bắc*, 9A3, THCS Vĩnh Tường, *Nguyễn Duy Hội*, 8A, THCS Tam Dương ; **Hà Nội :** *Ninh Đức Việt Anh*, 8N, THCS Trưng Vương, Hoàn Kiếm, *Ngô Anh Tuấn*, 9G, THCS Nguyễn Trãi, Thanh Xuân ; **Bắc Giang :** *Trần Thị Duyên*, 9A, THCS Quảng Minh I, Việt Yên ; **Bắc Ninh :** *Tạ Khắc Công*, 7B, THCS Yên Phong, *Nguyễn Công Anh*, 8C, THCS Hàn Thuyên ; **Hải Dương :** *Nguyễn Trung Thành*, 7/1, *Phạm Quang Cường*, 8/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương, *Trần Quốc Hoàn*, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà ; **Hải Phòng** : *Tiêu Đan Trường*, 7T, THCS Chu Văn An ; **Quảng Ninh :** *Tô Ngọc*, 8A, THCS Ngô Quyền, Cẩm Phả ; **Nam Định :** *Nguyễn Xuân Đình*, 9E, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy, *Vũ Đức Khánh*, 8C, THCS Đào Sư Tích, TT. Cổ Lễ, Trực Ninh ; **Ninh Bình:** *Vũ Tiến Thành*, 9E, THCS Trực Ninh, Yên Khánh ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Mạnh Đức*, 9B, THCS Lê Đình Kiên, *Lưu Đức Ba*, 8B, THCS TT. Quán Lào, Yên Định, *Vũ Ngọc Thanh*, 7E, THCS Thái Hòa, Triệu Sơn ; **Nghệ An :** *Nguyễn Cảnh An*, 6E, THCS Thượng Sơn, Đô Lương, *Võ Quang Vinh*, 7D, THCS Thái Hòa II, Nghĩa Đàn, *Nguyễn Thị Huyền*, 9C, THCS Ttr. Quỳ Hợp, *Trần Anh Minh*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh ; **Hà Tĩnh :** *Phương Minh Châu*, 8A1, THCS Bình An, Can Lộc ; **Quảng Nam :** *Nguyễn Dương Nguyên*, *Phạm Thị Ngọc Loan*, 8/3 THCS Nguyễn Du, Tx. Tam Kỳ; **Quảng Ngãi :** *Phạm Như Nguyên*, 7T, THCS Bình Châu, Bình Sơn, *Trần Ngọc Cảm*, 8A, THCS Nghĩa Lâm ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 7/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, *Nguyễn Văn Hưng*, 9/2, THPT BC Trần Hưng Đạo, Cam Ranh ; **Đắc Lắc :** *Lê Phong Nhã*, 7A4, THCS Buôn Trấp, Krông Ana ; **Tây Ninh :** *Phạm Thị Cẩm Huyền*, 8A1, THCS Trần Bình Trọng, Hòa Thành ; **Đồng Nai :** *Nguyễn Hải Đăng*, 9A3, THCS Nguyễn Công Trứ, Xuân Lộc ; **Đồng Tháp :** *Nguyễn Trọng Nguyên*, 6T, THPT Tx. Cao Lãnh ; **Cần Thơ :** *Nguyễn Minh Luân*, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng.

VIỆT HẢI

Bài T3/302. *Chứng minh rằng*

$$\frac{x^{m+n}}{y^m}+\frac{y^{m+n}}{z^m}+\frac{z^{m+n}}{x^m}\ge x^n+y^n+z^n$$

trong đó x, y, z là các số thực dương và m, n là các số nguyên dương.

Lời giải. (của bạn *Lưu Thị Thu Trang*, 9A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**)

Đặt $x^{m+n}=a,\ y^{m+n}=b,\ z^{m+n}=c,\ \dfrac{1}{x^m}=u,$ $\dfrac{1}{y^m}=v,\ \dfrac{1}{z^m}=t.$

Không mất tính tổng quát giả sử $x\ge y>0$, $x\ge z>0$. Lúc đó $a\ge b$, $a\ge c$ và $u\le v$, $u\le t\Rightarrow$ $(a-c)(v-u)\ge 0$ (1)

BĐT cần chứng minh tương đương với :

$av+bt+cu\ge au+bv+ct$

$\Leftrightarrow av+bt+cu-au-bv-ct\ge 0$

$\Leftrightarrow a(v-u)+b(t-v)+c[(v-t)+(u-v)]\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-c)(v-u)+(b-c)(t-v)\ge 0$ (2)

• Nếu $y\ge z>0$ thì $b\ge c$ và $v\le t$

$\Rightarrow (b-c)(t-v)\ge 0$ (3)

• Nếu $z>y>0$ thì $b<c$ và $v>t\Rightarrow$ (3) đúng.

Kết hợp (1) và (3) suy ra (2) đúng nên BĐT ở đề bài đúng.

Đẳng thức xảy ra ở đề bài $\Leftrightarrow$ đẳng thức xảy ra ở cả (1) và (3) $\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow x=y=z$.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn giải như trên nhưng biến đổi trực tiếp theo BĐT ở đề bài nên dài hơn. Một số bạn không xét 2 trường hợp đối với giá trị của *y*, *z* như trên, ở đây vai trò *x*, *y*, *z* không bình đẳng mà chỉ là hoán vị vòng quanh. Nhiều bạn đã chỉ ra rằng bài này là trường hợp riêng của bài T7/283 và dùng BĐT Cô-si cho *n* số để chứng minh, tuy nhiên đây là kiến thức toán THPT.

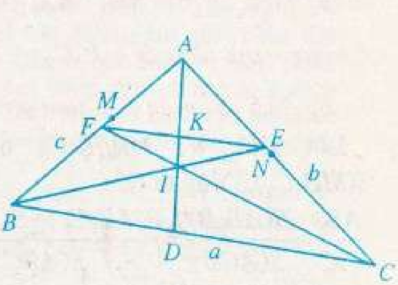
2) Ngoài bạn Trang, các bạn sau có lời giải tốt :

Phú Thọ : *Phan Bình Dương*, 9H, THCS Văn Long, Việt Trì ; **Bắc Giang :** *Phan Tuấn Anh*, 9A, THCS Đức Giang, Yên Dũng ; **Hải Dương :** *Hoàng Đình Phương*, 8/3, *Nguyễn Anh Tuấn* và *Nguyễn Duy Mạnh*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương ; **Ninh Bình :** *Vũ Tiến Thành*, 9E, THCS Ttr. Ninh, Yên Khánh ; **Thanh Hóa :** *Lê Mạnh Thành* và *Nguyễn Tuấn Nam*, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa ; **Nghệ An :** *Nguyễn Hoài An*, 9D, THCS Đặng Thai Mai, Vinh ; **Đà Nẵng :** *Vũ Hứa Hạnh Nguyên*, 8T, THCS Lê Thị Hồng Gấm.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T4/302. *Gọi AD, BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC vuông ở A. AD cắt EF tại K. Đường thẳng qua K song song với BC cắt AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng* $MN\ge\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}(AB+AC)$

Lời giải. Đặt $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ta có $a^2=b^2+c^2\ge\dfrac{1}{2}(b+c)^2$, suy ra $\dfrac{b+c}{a}\le\sqrt{2}$ (1)



Vì CF là phân giác nên: $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AF}{FB}$,

suy ra $\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{AC}{BC+AC}$ hay $AF=\dfrac{AB.AC}{BC+AC}=\dfrac{bc}{a+b}$

Tương tự $AE=\dfrac{bc}{a+c}$ (2)

Xét diện tích hai tam giác ΔABD, ΔADC và diện tích ΔABC có :

$bc = (c + b)AD \times \sin 45^{\circ}$ nên $AD = \dfrac{\sqrt{2}bc}{b+c}$

Tương tự

$$AK = \frac{\sqrt{2}\,AE.AF}{AE+AF} = \frac{\sqrt{2}bc}{2a+b+c} \text{ (do có (2))}$$

Nên $\dfrac{AK}{AD} = \dfrac{b+c}{2a+b+c}$ hay $\dfrac{MN}{a} = \dfrac{b+c}{2a+b+c}$ (vì $MN // BC$). Từ đó và (1) có

$$MN = (b+c) \times \frac{1}{2+\dfrac{b+c}{a}} \geq (b+c)\,\frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}(AB+AC).$$

Vậy $MN \geq \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}(AB+AC)$

Đẳng thức xảy ra khi $b = c$ nghĩa là ΔABC vuông cân tại A.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn : **Phú Thọ :** *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thế Hùng*, 8A3, THCS Vĩnh Tường ; **Hà Nội :** *Vũ Nhật Minh*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy ; **Hải Phòng:** *Bùi Ngọc Khôi*, *Nguyễn Mạnh Chiến*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Hải Dương :** *Nguyễn Anh Tuấn*, 9/3 THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Tuấn Dương*, 9A1, THCS Trần Mai Ninh ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Kiều Phong*, 8^3 THCS Đồng Khởi, Q. Tân Bình.

VKT

Bài T5/302. *Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB và thỏa mãn điều kiện $A_1B_1 // AM$, $B_1C_1 // BM$, $C_1A_1 // CM$. Chứng minh rằng $S(A_1B_1C_1) \leq \frac{1}{3}S(ABC)$ trong đó S chỉ diện tích tam giác.*

Lời giải. Vì $MB // B_1C_1$ nên $S(BB_1C_1) = S(MB_1C_1)$. Vậy ta có :

$$\frac{AB_1}{AC} = \frac{S(AB_1B)}{S(ACB)} = \frac{S(AB_1C_1)+S(BB_1C_1)}{S(ABC)}$$

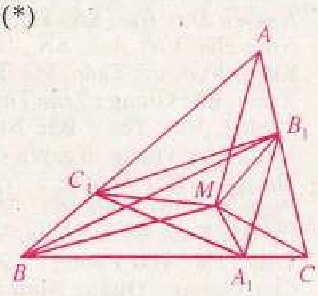
$$= \frac{S(AB_1C_1)+S(MB_1C_1)}{S(ABC)} = \frac{S(AB_1MC_1)}{S(ABC)} \quad (1)$$

Tương tự như vậy ta có :

$$\frac{BC_1}{BA} = \frac{S(BC_1MA_1)}{S(ABC)},\ \frac{CA_1}{CB} = \frac{S(CA_1MB_1)}{S(ABC)} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra :

$$\frac{AB_1}{AC} + \frac{BC_1}{BA} + \frac{CA_1}{CB} = 1 \ (*)$$



Mặt khác, ta có :

$$\frac{S(MB_1C_1)}{S(ABC)} = \frac{S(BB_1C_1)}{S(ABC)}$$

$$= \frac{S(BB_1C_1)}{S(BB_1A)} \cdot \frac{S(BB_1A)}{S(ABC)}$$

$$= \frac{BC_1}{BA} \cdot \frac{AB_1}{AC} \quad (3).$$ Tương tự có :

$$\frac{S(MC_1A_1)}{S(ABC)} = \frac{CA_1}{CB} \cdot \frac{BC_1}{BA};\ \frac{S(MA_1B_1)}{S(ABC)} = \frac{AB_1}{AC} \cdot \frac{CA_1}{CB} \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra :

$$\frac{S(A_1B_1C_1)}{S(ABC)} = \frac{BC_1}{BA} \cdot \frac{AB_1}{AC} + \frac{CA_1}{CB} \cdot \frac{BC_1}{BA} + \frac{AB_1}{AC} \cdot \frac{CA_1}{CB}$$

$$\leq \frac{1}{3}\left(\frac{AB_1}{AC} + \frac{BC_1}{BA} + \frac{CA_1}{CB}\right)^2 = \frac{1}{3} \text{ (theo (*))}$$

Suy ra : $S(A_1B_1C_1) \leq \dfrac{1}{3}S(ABC)$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{AB_1}{AC} = \dfrac{BC_1}{BA} = \dfrac{CA_1}{CB}$ (**)

Dễ thấy, (**) chỉ xảy ra khi M là trọng tâm tam giác ABC.

Nhận xét. 1) Đối với học sinh THCS, đây là bài toán khó. Chỉ có 22 bạn tham gia giải. Một số bạn giải quá dài.

2) Ngoài lời giải trên một số bạn cho lời giải thông qua định lí Peletier (THTT số 270 tháng 12/1999).

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Vĩnh Phúc :** *Trần Tấn Phong*, 7A, THCS Lập Thạch ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, *Nguyễn Trung Kiên*, 8A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Hà Nội :** *Nguyễn Trọng Nhật Quang*, 9A, THPT Hà Nội, Amsterdam, *Nguyễn Trung Kiên, Đỗ Xuân Huy, Trần Việt Tuấn, Nguyễn Hoàng Việt, Vũ Nhật Minh*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Khánh Hòa :** *Hồ Sĩ Đông*, 9/16, THCS Thái Nguyên, Nha Trang.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T6/302. *Xét hàm số $f : Z^+ \to Z^+$ thỏa mãn các điều kiện :*

1) Với mỗi số nguyên dương n thì $f(n+1)$ hoặc bằng $f(n) - 1$, hoặc bằng $4f(n) - 1$.

2) Với mỗi số nguyên dương m thì tồn tại duy nhất một số nguyên dương n sao cho $f(n) = m$.

Hãy tính $f(2002)$.

Lời giải. (của bạn *Vũ Nhật Huy*, 12A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**).

Xét dãy $f(1), f(2), ...$

Đây là các số nguyên dương đôi một phân biệt. Ta có nhận xét sau :

a) Nếu $f(n+1) > f(n)$ thì với mọi $k \geq n+1$ ta đều có $f(k) > f(n)$.

b) Vì mỗi số nguyên dương xuất hiện trong dãy đúng một lần nên $f(n+1) = f(n) - 1$ nếu $f(n) - 1 \notin \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$. Trong trường hợp trái lại thì $f(n+1) = 4f(n) - 1$.

c) Nếu $f(1) \neq 1$ thì tồn tại a để $f(a) = 1 \Rightarrow f(a+1) = 3 \Rightarrow f(a-1) = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(1) = 2$ do đó $f(1) \in \{1, 2\}$.

Trường hợp 1 : Nếu $f(1) = 1$. Ta sẽ chứng minh $f(2^n+k)=2^{n+1}-(k+1)$ với $0 \leq k \leq 2^n - 1$.

Ta chứng minh quy nạp theo $s = 2^n + k$

Dễ thấy $s = 1, 2, 3$ đúng. Giả sử đúng tới s. Nếu $s = 2^n + k$ với $0 \leq k \leq 2^n - 2$ thì $f(s) = 2^{n+1} - (k+1)$. Theo nhận xét b) $f(s+1) = f(s) - 1 = 2^{n+1} - (k+1+1)$.

Nếu $s = 2^n + k$ với $k = 2^n - 1$ thì $f(s) = 2^n$ vì $f(2^{n-1}) = 2^n - 1 = f(s) - 1$ đã xuất hiện trong dãy $\{f(1), ..., f(s)\}$ nên theo nhận xét b) thì $f(s+1) = 4f(s) - 1 = 2^{n+2} - 1$. Mệnh đề được chứng minh.

Trường hợp 2. Nếu $f(1) = 2$ thì chứng minh tương tự cho ta $f(4^n+k) = 3.4^n - (k+1)$ nếu $0 \leq k \leq 2.4^n - 1$ và $f(4^n + k) = 6.4^n - (k+1)$ nếu $2.4^n \leq k \leq 3.4^n - 1$

Từ đó $f(2002) = 1069$ hoặc $f(2002) = 2093$

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt : **Hải Dương :** *Nguyễn Thế Lộc*, THPT chuyên Nguyễn Trãi ; **Vĩnh Phúc :** *Phạm Văn Hoàng*, 10A, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Bình Định :** *Lê Thanh Bình*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Nghệ An :** *Đinh Viết Sang*, 12A1, THPT Phan Bội Châu ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Văn Thảo*, 12, THPT Hàn Thuyên ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Lâm Hưng*, PTNK ; **Đồng Tháp :** *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, 12T, THPT Sa Đec ; **Cần Thơ :** *Mạch Nguyệt Minh*, 12, THPT Lý Tự Trọng.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/302. *Chứng minh rằng*

$$\frac{x^m y^n}{z^n} + \frac{y^m z^n}{x^n} + \frac{z^m x^n}{y^n} \geq x^m + y^m + z^m$$

trong đó x, y, z, m, n là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x \geq y \geq z$ và $m \geq n$.

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, **Phú Thọ** và một số bạn khác)

Xét $H = \dfrac{x^m y^n}{z^n} + \dfrac{y^m z^n}{x^n} + \dfrac{z^m x^n}{y^n} - x^m - y^m - z^m$

$$= \frac{x^m(y^n - z^n)}{z^n} + \frac{y^m(z^n - x^n)}{x^n} + \frac{z^m(x^n - y^n)}{y^n}$$

Vì $x \geq y \geq z > 0$, $m \geq n > 0$ ta có

$y^n.H \geq x^m(y^n - z^n) + y^m(z^n - x^n) + z^m(x^n - y^n)$ (1)

$= (x^m - y^m)(y^n - z^n) - (x^n - y^n)(y^m - z^m) = K$

Nếu $(x-y)(y-z) = 0$ thì $K = 0$. Vậy $H \geq 0$. $H = 0$ khi và chỉ khi $x = y = z$.

Nếu $(x-y)(y-z) \neq 0$, tức là $x > y > z$, ta có

$\dfrac{x^m - y^m}{y^m - z^m} \geq \dfrac{x^n.y^{m-n} - y^m}{y^m - z^n.y^{m-n}} = \dfrac{x^n - y^n}{y^n - z^n}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = n$. Vậy $K \geq 0$. Do đó $H \geq 0$.

Chú ý ở (1) có dấu "=" khi và chỉ khi $x = y = z$.

Như vậy ta có $H \geq 0$ và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Nhận xét. 1) Bất đẳng thức $\dfrac{x^m y^n}{z^n} + \dfrac{y^m z^n}{x^n} + \dfrac{z^m x^n}{y^n} \geq x^n + y^n + z^n$ có thể sai, ví dụ với $x = 1$, $y = \dfrac{1}{2}$, $z = \dfrac{1}{3}$ và $m = 2$, $n = 1$. Một số lớn các bạn chứng minh bất đẳng thức trên do khẳng định sai rằng $t^m \geq t^n$, $\forall t > 0$.

2) Bạn *Phan Tuấn Thành*, 10T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** nhận xét rằng với $m = 2$, $n = 1$ bài toán trên là bài 6, thi học sinh giỏi toàn quốc THPT bảng A, 1991.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/302. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{C_i^k} = 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_{n-1}^{k-2}.C_n^k}$$

trong đó C_i^k là tổ hợp chập của k của i và $n \geq k \geq 2$.

Lời giải : *Nhận xét :* Với $n \geq k$ ta có

$$\sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{1}{(j+1)C_j^{k+1}} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(n+2)C_{n+1}^k} \quad (*)$$

Chứng minh : Với $j > k$ từ

$$\frac{1}{jC_{j-1}^k} - \frac{1}{(j+1)C_j^k} = \frac{k!(j-k-1)!}{(j-1)!j} - \frac{k!(j-k)!}{j!(j+1)}$$

$$= \frac{k!(j-k-1)!}{(j+1)!}[(j+1)-(j-k)]$$

$= \dfrac{(k+1)!)(j-k-1)!}{(j+1)!} = \dfrac{1}{(j+1)C_j^{k+1}}$ suy ra :

$$\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{1}{(j+1)C_j^{k+1}}=\sum_{j=k+1}^{n+1}\left(\frac{1}{j.C_{j-1}^k}-\frac{1}{(j+1)C_j^k}\right)$$

$$=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{(n+2)C_{n+1}^k}.$$

Trở lại bài toán đã cho : chú ý rằng với $n \ge k$ thì $(k+2)C_{j+1}^{k+2}=\dfrac{j!(j+1)}{(k+1)!(j-k-1)!}=(j+1)C_j^{k+1}$

$$\Rightarrow \sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{1}{(k+2)C_{j+1}^{k+2}}=\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{1}{(j+1)C_j^{k+1}}=$$

$$=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{(n+2)C_{n+1}^k} \text{ (theo nhận xét trên).}$$

Vậy $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{1}{C_{j+1}^{k+2}}=\frac{k+2}{k+1}-\frac{k+2}{(n+2)C_{n+1}^k}$ (1)

Mặt khác $\dfrac{k+2}{(n+2).C_{n+1}^k}=\dfrac{k+2}{n+2}.\dfrac{(n-k+1)!k!}{(n+1)!}=$

$\dfrac{(n-k+1)!k!(k+2)}{(n+2)!}=\dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{C_{n+1}^k.C_{n+2}^{k+2}}$ (2).

Từ (1), (2) có

$$\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{1}{C_{j+1}^{k+2}}=1+\frac{1}{k+1}-\frac{C_{n+1}^{k+1}}{C_{n+1}^k.C_{n+2}^{k+2}} \quad (3)$$

Đặt $k+2=m$, $n+2=p$ thì $p \ge m \ge 2$. Từ (3) có : $\displaystyle\sum_{j=m-1}^{p-1}\frac{1}{C_{j+1}^m}=1+\frac{1}{m-1}-\frac{C_{p-1}^{m-1}}{C_{p-1}^{m-2}.C_p^m}$ hay

$$\sum_{i=m}^{p}\frac{1}{C_i^m}=1+\frac{1}{m-1}-\frac{C_{p-1}^{m-1}}{C_{p-1}^{m-2}.C_p^m} \text{ (đpcm)}$$

Nhận xét : Đây là một bài toán thuộc dạng cơ bản, do đó có nhiều bài giải gửi đến tòa soạn, trong đó rất nhiều bạn cho lời giải tốt.

QUANG PHÚC

Bài T9/302. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác lần nữa tại A_2, B_2, C_2 tương ứng. Chứng minh rằng :*

$$\frac{4\sqrt3}{3}(A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1) \le AA_2+BB_2+CC_2 \le \frac{2\sqrt3}{3}(AB+BC+CA) \quad (*)$$

Lời giải. Đặt $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Gọi H là trực tâm, R, r là các bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ΔABC, khi đó

$$AA_2=2R\sin\widehat{ABA_2}=2R\sin\left(B+\frac{\pi}{2}-C\right)$$
$$=2R.\cos(B-C).$$

Tương tự $BB_2=2R\cos(C-A)$,
$CC_2=2R\cos(A-B)$.

Lại vì : $B_1C_1=AH.\sin A=$

$$=\frac{AC_1.\sin A}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)}=\frac{AC.\cos A.\sin A}{\sin B}=R\sin 2A;$$

$C_1A_1=R\sin 2B$; $A_1B_1=R\sin 2C$, nên BĐT (*) cần chứng minh tương đương với :

$$\frac{2}{\sqrt3}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)\le$$
$$\le\cos(A-B)+\cos(B-C)+\cos(C-A)$$
$$\le\frac{2}{\sqrt3}(\sin A+\sin B+\sin C)$$
$$\Leftrightarrow \frac{8}{\sqrt3}\sin A\sin B\sin C\le$$
$$\le 2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)-(\cos A+\cos B+\cos C)\le\frac{2}{\sqrt3}(\sin A+\sin B+\sin C)$$
$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt3}S_{ABC}\le\frac12(ab+bc+ca)-R(R+r)\le$$
$$\le\frac{R}{\sqrt3}(a+b+c) \quad (**)$$

• Chứng minh vế trái của (**) :

$$\frac12(ab+bc+ac)-R(R+r)\ge\frac{4}{\sqrt3}S_{ABC} \quad (1)$$

Để CM (1) ta sử dụng các kết quả :
$R\ge 2r$ (2) ; $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$ (3) ;
$2(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2+4r(r+4R)$ (4)
$a^2+b^2+c^2\ge 4(R+r)^2$ (nếu ΔABC nhọn) (5).

Để chứng minh (5) xét BĐT Cô–si cho các số dương:

$$2\cos A\cos B=\sqrt{\sin 2A.\cot gA.\sin 2B.\cot gB}\le$$
$$\le\frac12(\sin 2A.\cot gB+\sin 2B.\cot gA).$$

Tương tự cho 2 BĐT còn lại, suy ra :

$$2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$$
$$\le\frac12\left[\cot gA(\sin 2B+\sin 2C)+\cot gB(\sin 2C+\sin 2A)+\cot gC(\sin 2A+\sin 2B)\right]$$
$$=-(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)$$
$$=3-(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C)-(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C)$$

$\Rightarrow (\cos A+\cos B+\cos C)^2 \le \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$

$\Rightarrow$ (5) được CM

Áp dụng các kết quả (2), (3), (4) ta được :

$16p^2=4[2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ac)-(a^2+b^2+c^2)]$
$\le 4[18R^2 + 4r(r+4R)]$
$= 3(5R+2r)^2 - (R-2r)(3R+2r)$
$\le 3(5R+2r)^2$

Ta có : $\dfrac{4pr}{\sqrt{3}} \le 2r^2 + 5Rr =$
$= (R^2 + 2Rr + r^2) + r(r+4R) - R(R + r)$
$\le \dfrac{1}{2}(ab+bc+ca)-R(R+r) \quad \Rightarrow$

BĐT (1) được CM.

• Chứng minh vế phải của (**)

$$\frac{1}{2}(ab+bc+ac) - R(r+R) \le \frac{R}{\sqrt{3}}(a+b+c) \quad (6)$$

Theo (3): $R \ge \dfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \ge \dfrac{1}{3\sqrt{3}}(a+b+c)$, từ đó :

$$\frac{R}{\sqrt{3}}(a+b+c) \ge \frac{1}{9}(a+b+c)^2 \ge \frac{1}{3}(ab+bc+ca) \quad (7)$$

Theo (3), (4) thì

$$ab+bc+ca \le \frac{9R^2}{2}+2r(r+4R) \quad (8)$$

Từ (2) có $\left(\dfrac{3R}{2}+r\right)(R-2r) \ge 0$

$$\Rightarrow \frac{9R^2}{2}+2r(r+4R) \le 6R^2 + 6Rr \quad (9)$$

Từ (7) (8) (9) suy ra BĐT (6) đúng . Dấu đẳng thức ở (1) và (6) xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Nhận xét. 1) Bất đẳng thức (1) thực chất là hệ quả của một BĐT do *Jack Garfulkel* đề xuất. Các bạn có thể tham khảo một số cách chứng minh BĐT này ở bài viết *"Về một bất đẳng thức lượng giác trong tam giác"* của các tác giả *Trần Xuân Đáng, Vũ Thành Long* (THTT số 291 (9/2001).

2) Hầu hết các bạn đều sử dụng công cụ đạo hàm để CM các BĐT ở bài ra. Một số bạn áp dụng BĐT Trê–bư–sép cho hai dãy đơn điệu ngược chiều : {sin*A*, sin*B*, sin*C*} và {sin2*A*, sin2*B*, sin2*C*} cũng cho lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải gọn hơn cả là :

Vĩnh Phúc : *Phạm Văn Hoàng*, 10A1, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Bắc Ninh :** *Bùi Phan Phúc, Phạm Thái Sơn*, 11T, *Lê Văn Nghĩa, Nguyễn Văn Thảo*, 12T, THPT NK Hàn Thuyên ; **Hà Nội :** *Nguyễn Chí Hiệp*, 12A1, khối PTCT–T, ĐHSP Hà Nội, *Lê Hùng Việt Bảo*, 11A, Khối PTCT–T, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Hải Phòng :** *Lê Hải Yến*, 11T, THPT NK Trần Phú ; **Hải Dương :** *Đoàn Mạnh Hà*, 11A1, THPT Thanh Hà, *Phạm Việt Hải*, 11A4, THPT Hồng Quang ; **Thái Bình:** *Nguyễn Quang Vương*, 12C, THPT Bắc Duyên Hà, Hưng Hà ; **Ninh Bình :** *Lê Văn Nghĩa*, 12T, THPT chuyên Lương Văn Tụy ; **Thanh Hóa :** *Lê Quốc Hiệp*, 11T2, THPT Lam Sơn, *Trần Văn Bình*, 12A1, THPT Hậu Lộc I ; **Nghệ An :** *Nguyễn Danh Hào*, 11A1, THPT Phan Bội Châu, Tp. Vinh ; **Đà Nẵng :** *Thái Thanh Hải*, 10A1, THPT Lê Quý Đôn, Q. Hải Châu ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Văn Thắng*, 11T, *Phạm Văn Trung*, 12T, THPT chuyên Lê Khiết ; **Phú Yên :** *Phan Thành Nam*, 12T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh ; **Cần Thơ :** *Mạch Nguyệt Minh*, 12A1, THPT Lý Tự Trọng, Tp.Cần Thơ.

HỒ QUANG VINH

Bài T10/302. *Gọi V, r và R lần lượt là thể tích, bán kính mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp tứ diện ABCD. Chứng minh rằng*

$$\frac{r}{R} \ge \frac{24V^2}{AB.AC.AD.BC.BD.CD} \quad (*)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Ta kí hiệu $BC = a$; $DA = a'$; $CA = b$, $DB = b'$; $AB = c$, $DC = c'$ và S_a, S_b, S_c, S_d lần lượt là diện tích các mặt *BCD, CDA, DAB, ABC*

Trước hết, ta chứng minh các bổ đề sau :

Bổ đề 1. Nếu *a, b, c* là độ dài các cạnh và *S* là diện tích của một tam giác thì ta có BĐT :

$$S \le \frac{3abc}{4\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad (1)$$

Thật vậy, dễ dàng chứng minh được hệ thức sau : $a^2 + b^2 + c^2 = 9(R^2 - d^2) \le 9R^2$

$$\Rightarrow R \ge \frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad (2)$$

(trong đó $d = OG$ là khoảng cách giữa trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác có bán kính là *R*). Sử dụng BĐT (2) và hệ thức $abc = 4RS$ ta thu được BĐT (1). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác là đều.

Bổ đề 2. *Trong một tứ diện, bốn lần tổng bình phương diện tích các mặt không lớn hơn tổng bình phương của tích độ dài các cạnh đối diện :*

$$4(S_a^2+S_b^2+S_c^2+S_d^2) \le a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2 \quad (3)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tứ diện là một tứ diện trực tâm (các đường cao đồng quy).

Thật vậy, áp dụng công thức Hê–rông cho diện tích tam giác, ta có :

$$16S_a^2 = 2a^2b'^2 + 2a^2c'^2 + 2b'^2c'^2 - a^4 - b'^4 - c'^4$$

Tương tự có công thức đối với $16S_b^2$, $16S_c^2$, $16S_d^2$ (4). Áp dụng (4) và biến đổi có :

$(a^2a'^2+b^2b'^2 + c^2c'^2) - 16(S_a^2+S_b^2+S_c^2+S_d^2)$
$= (a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2)^2 + (b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2)^2 +$
$(c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2)^2 \ge 0 \Rightarrow$ BĐT (3) được CM.

Đẳng thức xảy ra ở (3) khi và chỉ khi :

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2 \quad (5)$$

$\Leftrightarrow$ tứ diện đã cho là tứ diện trực tâm

Hệ quả. Từ bổ đề 2 (BĐT (3)), áp dụng BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki ta thu được BĐT sau :

$$S_a + S_b + S_c + S_d \le \sqrt{a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2} \quad (6)$$

Đẳng thức xảy ra ở (6) khi và chỉ khi $S_a = S_b = S_c = S_d$ và $a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2$. Khi đó, tứ diện đã cho là đều.

Bổ đề 3. *(Công thức Crelle). Trong một tứ diện, tích độ dài các cặp cạnh đối diện biểu thị độ dài các cạnh của một tam giác ($\mathcal{T}$) nào đó, và diện tích Σ của ($\mathcal{T}$) liên hệ với thể tích V và bán kính R mặt cầu ngoại tiếp tứ diện bởi công thức $\Sigma = 6VR$* (7)

Các bạn có thể xem chứng minh công thức Crelle trong cuốn sách "*340 bài toán HHKG*" của Sa–rư–ghin (Bài toán 302), hoặc ở THTT số 282 (12-2000). Cuối cùng, áp dụng BĐT (1) vào tam giác ($\mathcal{T}$) có diện tích S và độ dài các cạnh aa', bb', cc', BĐT (6) và hệ thức (7), ta thu được BĐT (*) cần tìm. Đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi *ABCD* là một tứ diện đều.

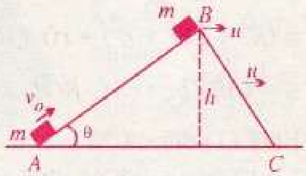
Nhận xét. 1) Số các bạn tham gia giải BT này không nhiều, hầu hết đều chứng minh các BĐT (1), (6) và sử dụng công thức Crelle (7). Tuy nhiên, cách chứng minh bổ đề (2) hoặc BĐT (6) có khác nhau. Không có bạn nào biết sử dụng công thức Hê-rông thông thường cho diện tích tam giác mà hầu như đều phải sử dụng tích ngoài hay tích có hướng của hai véctơ khi tính diện tích các mặt của tứ diện *ABCD*. Một vài bạn biết sử dụng phương pháp hình hộp ngoại tiếp tứ diện và chứng minh rằng tổng bình phương diện tích các mặt của một tứ diện bằng 1/2 tổng bình phương diện tích các mặt của hình hộp ngoại tiếp nó rồi từ đó suy ra BĐT (6).

2) Các bạn sau đây có lời giải tương đối gọn :

Hà Nội : *Trần Anh Tuấn*, 12A, ĐHKHTN – ĐHQG ; **Vĩnh Phúc :** *Vũ Nhật Huy*, 12A1, *Nguyễn Duy Hưng*, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Bắc Ninh :** *Bạch Hoàng Yến*, 11 Anh, *Nguyễn Văn Thảo*, 12 Toán, THPT NK HànThuyên ; **Bắc Giang :** *Phan Tuấn Anh*, 9A, THCS Đức Giang, Yên Dũng ; **Hải Dương :** *Phạm Việt Hải*, 11A4, THPT Hồng Quang, *Đoàn Mạnh Hà*, 11A1, THPT Thanh Hà, *Lê Quang Hòa*, *Phạm Thành Trung*, *Phan Tuấn Thành*, 10T, *Nguyễn Thế Lộc*, 12 THPT chuyên Nguyễn Trãi ; **Ninh Bình :** *Trịnh Thùy Nhung*, 12T, THPT Lương Văn Tụy ; **Nghệ An :** *Phan Hoàng Phương*, 10A1, *Trần Quang Vũ*, 12A3, THPT chuyên Phan Bội Châu ; **Quảng Bình :** *Phan Bình Quang*, 12A, THPT Đào Duy Từ ; **Quảng Trị :** *Trần Minh*, 11A, THPT Hải Lăng ; **Phú Yên :** *Nguyễn Quang Khả*, 11T2, *Phan Thành Nam*, 12T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh ; **Khánh Hòa :** *Phan Lê*, 10A3, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang ; **Tây Ninh :** *Phạm Hữu Vàng*, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Lệ Kha, Tây Ninh ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Đình Hiển*, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong ; **Đồng Nai :** *Nguyễn Cảnh Lâm*, 12 Tin, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa ; **Cần Thơ :** *Nguyễn Minh Luân*, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng, *Mạch Nguyệt Minh*, 12A1, THPT Lý Tự Trọng, Tp. Cần Thơ.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/302. *Trên mặt bàn nằm ngang có một chiếc nêm có khối lượng M, có mặt cắt là hình tam giác ABC vuông ở B. Góc giữa hai cạnh AB và AC là θ, chiều cao từ B đến mặt sàn là h. Trên mặt phẳng nghiêng AB tại A đặt một vật có khối lượng là m (hình vẽ). Lúc đầu vật và nêm đều đứng yên. Sau đó cho vật m chuyển động theo hướng AB với vận tốc đầu v_o. Bỏ qua ma sát giữa nêm và mặt sàn và ma sát giữa vật và mặt AB.*



Hỏi v_o phải lớn hơn giá trị bao nhiêu để vật có thể vượt qua được đỉnh B ?

Lời giải. Ta hãy tìm $v_{o\min}$ để vật *m* đến được điểm *B* thì dừng lại (so với nêm) ; khi đó nêm và vật có cùng vận tốc *u* (xem hình vẽ). Áp dụng định luật bảo toàn động lượng theo phương ngang ; $mv_o\cos\theta = (m+M)u$ (1)

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng :

$$\frac{mv_{o\min}^2}{2} = \frac{(m+M)u^2}{2} + mgh \quad (2)$$

Từ (1) và (2) tìm được

$v_{o\min} = \sqrt{\dfrac{2gh(m+M)}{M+m\sin^2\theta}}$. Vậy khi vận tốc v_o của vật có trị số $v_o > \sqrt{\dfrac{2gh(m+M)}{M+m\sin^2\theta}}$ thì vật vượt được đỉnh B.

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt :

Yên Bái : *Phan Thị Kim Hoa*, 12A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành ; **Hải Dương :** *Lê Ngọc Hoàng*, 12A2, THPT Hồng Quang ; **Hải Phòng:** *Bùi Mạnh Hoàng*, 12A7, THPT Yên Lãng, Yên Lãng ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Văn Bách*, 11C6, THPT Đào Duy Từ ; **Vĩnh Phúc :** *Hoàng Vĩnh Hưng*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Bạc Liêu :** *Lê Thanh Hoàn*, 12T1, THPT Bạc Liêu ; **Bắc Ninh :** *Vũ Công Thành*, 11 Lí, *Nguyễn Văn Thảo*, 12 Toán, THPT NK Hàn Thuyên ; *Nguyễn Văn Phong*, 11A1, THPT Thuận Thành I.

MAI ANH

LỄ PHÁT ĐỘNG LÀM SÁCH GIÁO KHOA MỚI LỚP 2 VÀ LỚP 7

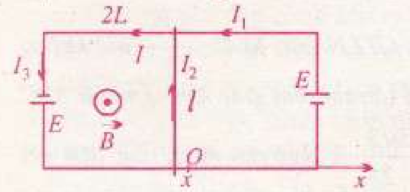
Sáng ngày 4.12.2002 tại hội trường chính Nhà xuất bản Giáo dục đã diễn ra *Lễ phát động làm sách giáo khoa mới lớp 2 và lớp 7*. Đến dự buổi lễ có : Bà Đặng Huỳnh Mai, Thứ trưởng Bộ GD và ĐT ; Ông Lê Quang Trung, đại diện Văn phòng Chính phủ ; lãnh đạo Vụ Tiểu học ; Ban chỉ đạo biên soạn chương trình SGK mới ; các báo, đài Trung ương và Hà Nội ; Phó GĐ Tổng biên tập NXBGD Vũ Dương Thụy cùng các biên tập viên SGK mới của NXBGD...

Sau lời phát biểu khai mạc của Thứ trưởng Đặng Huỳnh Mai, Ông Đặng Tự Ân, Vụ phó Vụ Tiểu học đọc Quyết định của Bộ trưởng Bộ GD và ĐT về danh sách cán bộ biên tập SGK lớp 2. PGS Đỗ Đình Hoan, Giám đốc Trung tâm nội dung và phương pháp GDPT, Viện KHGD đã thông báo việc thẩm định SGK lớp 2, lớp 7 của Hội đồng thẩm định Quốc gia.

Phó GĐ Tổng biên tập Nhà xuất bản Giáo dục Vũ Dương Thụy đã tổng kết đợt làm SGK mới lớp 1, lớp 6, đồng thời phát động chiến dịch làm SGK mới lớp 2, lớp 7 theo tinh thần chỉ đạo của Bộ GD và ĐT.

PV

Bài L2/302. *Hai thanh ray đồng chất, tiết diện đều, có cùng chiều dài là 2L, đều có điện trở suất ρ đặt trên mặt phẳng ngang, song song với nhau, cách nhau một khoảng l. Các thanh ray được nối với nhau qua các nguồn điện như hình vẽ. Suất điện động mỗi nguồn là E, điện trở trong rất nhỏ.*



Một thanh kim loại khối lượng m, chiều dài l, điện trở R tì lên 2 thanh ray và có thể trượt không ma sát trên chúng.

Hệ thống được đặt trong từ trường đều $\vec{B}$ có phương thẳng đứng. Từ vị trí cân bằng của thanh, dịch chuyển thanh một đoạn rất nhỏ theo phương song song với 2 thanh ray. Chứng tỏ rằng thanh dao động điều hòa. Tìm chu kì dao động.

Lời giải. Phản lực của các thanh ray lên thanh cân bằng với trọng lực $\vec{P}=m\vec{g}$ của thanh. Thanh chỉ còn chịu tác dụng của lực từ. Ở vị trí cân bằng của thanh, lực từ tác dụng lên thanh bằng *không* nghĩa là không có dòng điện qua thanh. Điều đó chứng tỏ vị trí cân bằng của thanh là trung điểm O của các thanh ray. Chọn trục Ox như trên hình vẽ. Xét khi thanh lệch khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ $|x|$ ($|x| \ll L$), khi đó dòng điện chạy qua thanh có cường độ I_2 như trên hình. Ta có :

$I_1 + I_2 = I_3$ (1) ; $\frac{2I_1\rho}{S}(L+|x|)-I_2R=E$ (2);

$2I_3\frac{\rho}{S}(L-|x|)+I_2R = E$ (3)

Từ (1), (2), (3) có

$$I_2=\frac{E|x|}{\frac{\rho}{S}(L^2-x^2)+RL}\approx\frac{E|x|}{\frac{\rho}{S}L^2+RL}$$

chứng tỏ chiều dòng điện đúng như trên hình vẽ. Lực từ tác dụng lên thanh hướng về vị trí cân bằng và có cường độ $F = I_2Bl=\dfrac{EBl|x|}{L\left(\frac{\rho}{S}L+R\right)}$

Áp dụng định luật II Niutơn ta có :

$mx'' = -\dfrac{EBl}{L\left(\frac{\rho}{S}L+R\right)}x \Rightarrow x'' + \omega^2x = 0$ với

$\omega^2 = \dfrac{EBl}{mL\left(\frac{\rho}{S}L+R\right)}$. Chu kì dao động của thanh

là $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mL\left(\frac{\rho}{S}L+R\right)}{EBl}}$.

Nhận xét. Các em có lời giải gọn và đúng :

Nam Định : *Hoàng Thanh Vân*, 12E, THPT Giao thủy A ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Văn Thắng*, 11T, THPT Lê Khiết ; **Bình Định:** *Lê Văn Thông*, 12 Lí, THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn ; **Hà Tĩnh :** *Nguyễn Văn Tý*, 12 Lí, THPT NK Hà Tĩnh ; **Hà Tây:** *Đào Xuân Dũng*, 11 Lí 1, THPT Nguyễn Huệ ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Đức Nhân*, 11B1, THPT chuyên Hùng Vương ; **Nghệ An :** *Nguyễn Minh Tiến*, 11A, THPT Cửa Lò.

MAI ANH

Cuộc chơi 2002 : AI BIẾT NHIỀU HƠN ?

NHỮNG SỐ NÀO NHỈ ?

Toàn đang viết bài báo trên máy tính. Chẳng hiểu phần mềm bị lỗi thế nào mà các con số bỗng nhiên biến mất. Bạn có thể giúp Toàn được không?

• Năm..., thời Lý Nhân Tông mở khoa thi Nho học tam trường đầu tiên ở nước ta. Lê Văn Thịnh đỗ thủ khoa kì thi đó.

• Năm ..., Nguyễn Quan Quang (Tam Sơn, Tiên Sơn, Bắc Ninh) đỗ Trạng nguyên, là Trạng nguyên đầu tiên của Việt Nam.

• Năm ..., Nguyễn Hiền (Dương Á, Nam Thắng, Nam Trực, Nam Định) đỗ Trạng nguyên khi mới ... tuổi, là Trạng nguyên nhỏ tuổi nhất nước ta.

• Năm ..., Trịnh Tuệ (Sóc Biên, Vĩnh Lộc, Thanh Hóa) đỗ Trạng nguyên, là Trạng nguyên cuối cùng của Khoa cử Việt Nam. Có tất cả ... khoa thi với ... Đình nguyên. Trong đó có ... Trạng nguyên. Xét về quê quán thì các tỉnh có số Trạng nguyên như sau :

Bắc Ninh : . . . vị ;	Hải Dương : . . . vị
Hà Nội : . . . vị ;	Hà Tây : . . . vị
Hải Phòng : . . . vị ;	Hưng Yên : . . . vị
Nam Định : . . . vị ;	Bắc Giang : . . . vị
Thái Bình : . . . vị ;	Hà Tĩnh : . . . vị
Phú Thọ : . . . vị ;	Nghệ An : . . . vị
Thanh Hóa : . . . vị ;	Quảng Bình . . . vị

BÍNH NAM HÀ

Giải đáp : LỊCH SỬ TOÁN NGẮN GỌN

• Theo nghĩa cổ điển toán học là khoa học nghiên cứu về các *quan hệ số lượng và hình dạng không gian trong thế giới khách quan.*

Toán học theo nghĩa đó đã phát triển qua ba giai đoạn. Từ thời thượng cổ đến thế kỉ thứ 5 trước Công nguyên là giai đoạn "*toán học kinh nghiệm*" (chưa có lí luận). Từ thế kỉ thứ 5 trước công nguyên đến đầu thế kỉ thứ 17 là giai đoạn *toán học sơ cấp* (có lí luận, chưa có khái niệm biến số và hàm số).

Từ đầu thế kỉ 17 đến cuối thế kỉ 19 là giai đoạn *toán học cao cấp* (có khái niệm biến số và hàm số, phương pháp tọa độ).

• Theo nghĩa hiện đại thì toán học là khoa học nghiên cứu về các *tập hợp gồm một số loại phần tử gọi là các khái niệm cơ bản và các tương quan giữa chúng gọi là tương quan cơ bản thỏa mãn một hệ tiên đề. Toán học hiện đại nghiên cứu các cấu trúc toán học.* Từ cuối thế kỉ 19 toán học chuyển sang giai đoạn mới gọi là giai đoạn *toán học hiện đại.* Ngày nay, toán học vẫn đang phát triển như vũ bão, đối tượng nghiên cứu càng mang tính trừu tượng cao độ.

Nhận xét. Chỉ có bạn *Lại Văn Thiết*, lớp K25A, Toán – Tin, ĐHSP Hà Nội 2 trả lời gần đúng các câu hỏi.

VKT

Giải đáp bài : ĐÃ PHẢI LÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CHƯA ?

Kết quả lời giải bài toán là sai vì *từ* $M \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ *suy ra GTLN của M là* $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ *mà không kiểm tra xem có tồn tại tam giác không nhọn ABC sao cho* $M = \frac{3\sqrt{3}}{2}$? Nguyên nhân dẫn đến kết quả sai này là người giải không nắm vững khái niệm GTLN của một hàm hay một biểu thức nào đó như bạn *Nguyễn Viết Hòa* (GV THPT Ân Thi, Hưng Yên) đã nhận xét. Một lời giải đúng cho bài toán này là :

Giả sử ΔABC có $A \ge \frac{\pi}{2}$, khi đó : $M = \sin A + \sin B + \sin C = \sin A + 2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2} \le \sin A + 2\cos\frac{A}{2} \le 1 + 2\cos\frac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \cos\frac{B-C}{2} = 1 \\ \sin A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ ΔABC vuông cân tại A.

Do đó GTLN của biểu thức M là $1+\sqrt{2}$, giá trị này đạt được khi ΔABC vuông cân.

Nhận xét. Đây là một sai lầm dễ nhận thấy nên có rất đông các bạn tham gia phát hiện và sửa chữa lại lời giải bài toán trên. Tất cả các bạn đều có lời giải lại đúng, tuy nhiên chỉ có các bạn sau có lời giải gọn hơn cả :

Hà Nội : *Trần Ngọc Thắng*, K50A, khoa Toán – Tin, ĐHSP Hà Nội ; **Vĩnh Phúc :** *Phạm Quang Chiến*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Nghệ An :** *Phan Hoàng Phương*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Tp. Vinh ; **Quảng Nam** *Nguyễn Anh Tâm*, 11/5, THPT Hoàng Diệu ; **Quảng Ngãi :** *Võ Thị Thúy Nga*, 11A, THPT Ba Tơ, Ba Tơ.

NGỌC HIỂN

Kết quả :

NĂM THỨ 39 TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tổng các số từ 1 đến 39 là $T = \dfrac{39.40}{2} = 780$.

Gọi n_i, r_i, s_i ($i = 1, 2, ..., 13$) là các số trên mỗi vòng tròn. Từ giả thiết bài toán suy ra tổng các số theo mỗi vòng tròn :

$$\sum_{i=1}^{13} n_i = \sum_{i=1}^{13} r_i = \sum_{i=1}^{13} s_i = \frac{T}{3} = 260$$

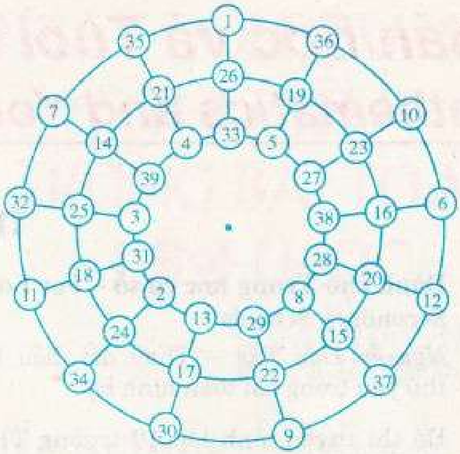
Tổng các số theo mỗi đường thẳng hướng tâm là:

$$n_i + r_i + s_i = \frac{T}{13} = 60 \ (i = 1, 2, ..., 13)$$

Lập bảng tính :

n	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
$p_i = 60 - n_i$	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
r_i	23	20	22	17	18	25	26	24	21	19	15	16	14
s_i	10	12	9	13	11	3	1	2	4	5	8	6	7

Ở đây $r_i + s_i = p_i = 60 - n_i$ ($i = 1, 2, ..., 13$). Có nhiều cách phân tích $p_i = r_i + s_i$ với các ràng buộc: $14 \le r_i \le 23$, $1 \le s_i \le 13$, $s_i + 4 \le r_i \le n_i - 4$ ($i = 1, 2, ..., 13$). Vì $\sum_{i=1}^{13} r_i = 60$ nên chỉ cần chọn các số n_i và s_i đôi một khác nhau như bảng trên. Một phương án chọn và sắp xếp n_i, r_i, s_i trên mỗi vòng tròn được thể hiện ở sơ đồ bên.



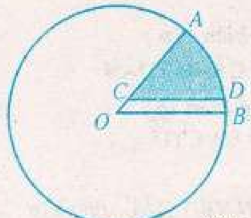
Nếu sắp xếp 13 số trên mỗi vòng tròn và chọn cặp (n_i, s_i) khác đi thì ta có các nghiệm khác.

Nhận xét. Những bạn sau đưa ra được nhiều đáp án đúng, trình bày rõ ràng : **Vĩnh Phúc :** *Phạm Thị Thúy Ngần*, K27C Toán – Tin, ĐHSP Hà Nội II, Xuân Hòa, Mê Linh, Tô Thị Ngọt, khu 8, Đồng Văn, Yên Lạc ; **Hà Nội :** *Nguyễn Thị Thu Hà*, 11A2, THPT Ngọc Hồi, Thanh Trì; **Hà Tây :** *Đặng Xuân Nam*, 10 Tin, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Tx. Hà Đông ; **Tp. Huế :** *Mai Thanh Vân*, 110 Thạch Hãn, Thuận Hòa.

HỒNG QUANG

TÍNH GÓC

Bằng cách cắt đi một hình quạt ACD của một tấm bìa hình tròn, sau đó dán khuất hình $OCDB$ sao cho hai đoạn OA, OB trùng nhau ta sẽ được một vật đựng hàng có dạng hình nón. Nếu bạn muốn làm một vật đựng hàng như trên có thể tích lớn nhất thì góc ở tâm $\widehat{AOB}$ phải bằng bao nhiêu ?



BÙI CÔNG THỨC

(Kho Thành phẩm, Công ty Mabuchi KCN Biên Hòa 2, Đồng Nai)

ĐÃ CHÍNH XÁC ... CHƯA ?

Liên nhờ Long giải hộ bài toán :

Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \le a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \quad (1)$$

Sau khi suy nghĩ Long đưa ra một lời giải :

BĐT (1) $\Leftrightarrow ab(2ab - c^2) + bc(2bc - a^2) + ca(2ca - b^2) \le a^4 + b^4 + c^4$ (2)

Ta có : $2ab - c^2 \le a^2 + b^2 - c^2 \Rightarrow ab(2ab - c^2) \le$

$$ab(a^2 + b^2 - c^2) \le \frac{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{2} \quad (3)$$

Tương tự :

$$bc(2bc - a^2) \le \frac{(b^2 + c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{2} \quad (4)$$

$$ca(2ca - b^2) \le \frac{(c^2 + a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}{2} \quad (5)$$

Từ (3), (4), (5) suy ra BĐT (2) được chứng minh. Do đó BĐT (1) được chứng minh.

Các bạn thấy lời giải của Long đã chính xác chưa ? Còn lời giải của bạn ?

TRẦN NGỌC THẮNG

(SV K50A, khoa Toán – Tin, ĐHSP Hà Nội I)

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 39
Số 306 (12-2002)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỨ

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc NXB Giáo dục :
NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập NXB Giáo dục :
VŨ DƯƠNG THỤY

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI. *Biên tập :* VŨ KIM THỦY, HỒ QUANG VINH.
Trị sự : VŨ ANH THƯ. *Trình bày :* NGUYỄN THỊ OANH, NGUYỄN THANH LONG, NGUYỄN TIẾN DŨNG
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THTT SỐ 307 (1/2003)

- Bài toán cắt bánh chưng ngày Tết
- Thuật toán hiệu quả tìm số nguyên tố bằng máy tính !
- Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh lớp 10 THPTNK ĐHKHTN - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh
- Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh Đại học khối D 2002
- Đề thi Olympic toán Hoa Kỳ 2002 (tiếp).
- Các bài thú vị đầu năm 2003 của các mục : Câu lạc bộ, Giải trí toán học, Toán học muôn màu ...

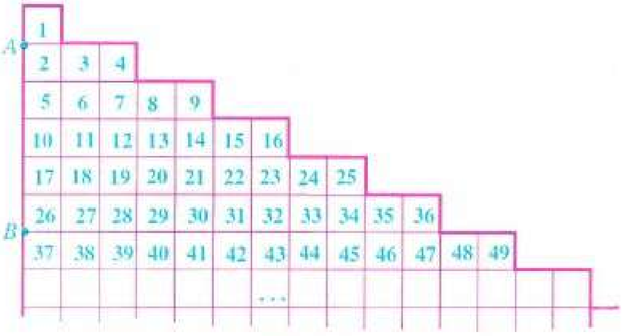
Mời các bạn đặt mua Toán học & Tuổi trẻ năm 2003 tại các cơ sở Bưu điện

THTT

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

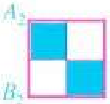
TÌM BỘI SỐ
TRÊN BẢNG SỐ BẬC THANG

Để tìm được các bội số, số nguyên tố trong tập hợp số tự nhiên được thuận tiện ta lập bảng gồm các ô vuông bằng nhau xếp thành hình bậc thang (chẳng hạn như h. 1), rồi xếp tất cả các số tự nhiên khác 0 từ nhỏ đến lớn vào bảng đó theo quy tắc : từ trên xuống dưới và từ trái sang phải. Nếu mỗi bậc thang (trừ bậc trên cùng) có độ dài bằng p cạnh ô vuông thì ta gọi bảng số đó là *bảng số bậc thang kiểu p*. Ở bài này chỉ xét *bảng số bậc thang kiểu 2* (gọi tắt là bảng kiểu 2) (h. 1)

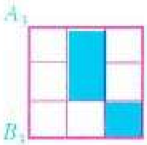


Hình 1

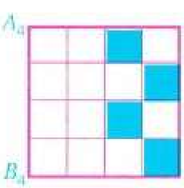
Để tìm bội của số k ($k > 1$) trên bảng kiểu 2, ta làm tấm bìa hình vuông V_k kích thước $k \times k$ ô vuông (bằng ô vuông trên bảng), đục lỗ hổng ở các ô màu xanh như ở hình 2 (ứng với $k = 2$), hình 3 ($k = 3$), hình 4 ($k = 4$), hình 5 ($k = 5$), ... Đặt hình vuông V_k vào bảng kiểu 2 sao cho tia A_kB_k trùng với tia AB thì ở mỗi ô vuông hổng hiện lên một bội số của k. Tiếp tục đặt V_k như thế phủ kín bảng kiểu 2 sao cho hình V_k mới có đúng 1 cạnh chung với hình cũ, ta sẽ tìm được mọi bội số của k trong bảng số.



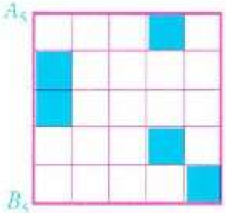
Hình 2



Hình 3



Hình 4



Hình 5

Dành cho bạn đọc

Hãy chứng minh các tính chất sau của V_k, trong đó ô (x, y) kí hiệu ô ở cột x (tính từ trái sang phải) và hàng y (tính từ trên xuống dưới) của V_k :

1) Các ô $(k-1, 1)$, $(k-1, k-1)$, (k, k) có màu xanh

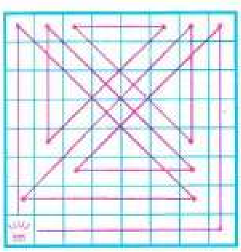
2) V_k có và chỉ có k ô màu xanh.

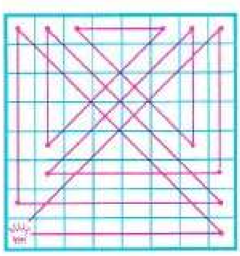
3) Nếu bỏ hàng thứ k của V_k thì hình chữ nhật còn lại cùng với các ô màu xanh là hình đối xứng với trục nằm ngang.

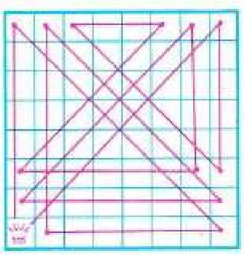
Giải đáp : ĐƯỜNG ĐI CỦA QUÂN HẬU

1) Bài toán được phát biểu theo ngôn ngữ hình học :

Có 64 điểm là đỉnh của 64 ô vuông được tạo thành từ 8 đường thẳng nằm ngang và 8 đường thẳng đứng. Hãy vẽ các đường gấp khúc khép kín, mỗi đường có số cạnh ít nhất đi qua mỗi điểm ít nhất một lần theo cạnh hoặc đường chéo của các ô vuông mà không vượt ra ngoài hình vuông chứa đúng 64 điểm đó.


Hình 6


Hình 7


Hình 8

2) Đường gấp khúc khép kín với số cạnh ít nhất gồm 14 đoạn thẳng. Có tất cả 3 cách vẽ như ở hình 6, 7, 8 (chưa kể cách lấy đối xứng qua đường chéo của hình vuông lớn).

Rất tiếc là không có bạn nào tìm được đường đi gồm 14 đoạn.

PHI PHI

TRƯỜNG THCS KIM LONG THÀNH PHỐ HUẾ

Từ trái sang :
Phó hiệu trưởng Nguyễn Phước
Hiệu trưởng Võ Xuân Hậu
Phó hiệu trưởng Lê Thị Khách

Trường THCS Kim Long đóng trên địa bàn phường Kim Long với diện tích trên 9.500m^2. Khuôn viên trường có cây xanh, sân chơi, bãi tập TDTT. Trường có 37 lớp, 1660 học sinh, 70 cán bộ giáo viên, nhân viên, 28 phòng học, phòng chức năng. Trường đã có nhiều cố gắng vượt bậc và vươn lên trong tốp các trường dẫn đầu của thành phố Huế : 4 năm liền đạt giải toàn đoàn về thi học sinh giỏi thành phố về các bộ môn văn hóa (2 giải Nhì, 1 giải Ba, 1 giải Khuyến khích) ; bốn năm liền đạt giải toàn đoàn Hội khỏe Phù Đổng thành phố (2 giải Nhất, 1 giải Ba, 1 giải Khuyến khích); đặc biệt có 3 huy chương Vàng, 3 huy chương Bạc tại giải điền kinh trẻ toàn quốc ; 3 năm đạt giải toàn đoàn trong Hội thi tiếng hát giáo viên và học sinh TP Huế (2 giải Nhất, 1 giải Ba, 1 giải Khuyến khích). Trường được ban chỉ đạo phòng chống ma túy và tội phạm của Tỉnh khen thưởng về thành tích phòng chống tội phạm ; UBND tỉnh Thừa Thiên Huế tặng Bằng khen về thành tích xuất sắc trong phong trào TDTT năm 2001 ; nhiều năm được UBND tỉnh Thừa Thiên Huế công nhận *trường tiên tiến xuất sắc* của tỉnh ; hai năm liên tục (năm học 2000-2001 và 2001-2002) được Ban chấp TƯ Đoàn TNCS Hồ Chí Minh tặng Bằng khen về thành tích xuất sắc trong công tác Đội và phong trào thiếu nhi.

Năm học 2001-2002 trường THCS Kim Long là một trong bốn trường THCS thuộc phòng Giáo dục thành phố Huế được công nhận *trường tiên tiến xuất sắc* của tỉnh đồng thời là một trong những trường THCS đầu tiên được thành phố tập trung chỉ đạo để xây dựng trường THCS đạt chuẩn Quốc gia.

Đội tuyển học sinh giỏi khối 8

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT08M2

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2002

Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng