TUYỂN TẬP ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN MÔN TOÁN 2019 - 2020

ĐỀ CHÍNH THỨC

(GIẢI CHI TIẾT)

TỪ CÁC TRUOWGNF CHUYÊN

OMỚI NHẤT

TUYỂN TẬP ĐỀ THI VÀO LỚP 10
CHUYÊN TOÁN NĂM HỌC 2019-2020

(GIẢI CHI TIẾT)

TUYỂN TẬP ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG CHUYÊN MÔN TOÁN NĂM HỌC 2019-2020

MÔN TOÁN

LỜI NÓI ĐẦU

*Để góp phần định hướng cho việc dạy - học ở các trường nhất là việc ôn tập, rèn luyện kĩ năng cho học sinh sát với thực tiễn giáo dục, nhằm nâng cao chất lượng các kì thi tuyển sinh, **sachhoc.com** giới thiệu Bộ đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên môn toán năm học 2019-2020 có đáp án chi tiết.*

Về nội dung kiến thức, kĩ năng: Tài liệu được biên soạn theo hướng bám Chuẩn kiến thức, kĩ năng của Bộ GDĐT, trong đó tập trung vào những kiến thức cơ bản, trọng tâm và kĩ năng vận dụng, được viết theo hình thức Bộ đề ôn thi dựa trên các đề thi năm 2019 các trường chuyên trên cả nước. Mỗi đề thi đều có hướng dẫn giải chi tiết!

Hy vọng đây là Bộ tài liệu ôn thi có chất lượng, góp phần quan trọng nâng cao chất lượng dạy - học ở các trường THCS và kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT năm học 2020-2021 và những năm tiếp theo.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian, trí tuệ của đội ngũ những người biên soạn, song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự đóng góp của các thầy, cô giáo và các em học sinh trong toàn tỉnh để Bộ tài liệu được hoàn chỉnh hơn.

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất trong các kỳ thi sắp tới!

MỤC LỤC

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN – TRƯỜNG ĐH VINH
Năm học 2019-2020

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 1
(Đề thi có một trang)

Môn thi chuyên: **TOÁN**
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1. *(6,0 điểm)*

a) Giải phương trình $x^3 - x^2 + 12x\sqrt{x-1} + 20 = 0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)(xy+1) = 6 \\ x^2(y^2+y+1) = 7 \end{cases}$.

Câu 2. *(3,0 điểm)*

a) Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \in N^*)$ thỏa mãn $P(9) - P(6) = 2019$. Chứng minh $P(10) - P(7)$ là một số lẻ.

b) Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $x^2y + x + y$ chia hết cho $xy^2 + y + 1$.

Câu 3. *(2,0 điểm)* Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = a + b + c + 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}$.

Câu 4 *(7,0 điểm).* Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là điểm nằm chính giữa của cung nhỏ BC. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $EM = EC$, đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại N (N khác B). Các đường thẳng EA và EN cắt cạnh BC lần lượt tại D và F.

a) Chứng minh tam giác AEN đồng dạng với tam giác FED.

b) Chứng minh M là trực tâm của tam giác AEN.

c) Gọi I là trung điểm của AN, tia IM cắt đường tròn (O) tại K. Chứng minh đường thẳng CM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMK.

Câu 5 *(2,0 điểm).* Cho 12 điểm trên mặt phẳng sao cho 3 điểm nào cũng là đỉnh của một tam giác mà mỗi tam giác đó luôn tồn tại ít nhất một cạnh có độ dài nhỏ hơn 673. Chứng minh rằng có ít nhất hai tam giác mà chu vi của mỗi tam giác nhỏ hơn 2019.

----------Hết----------

Họ và tên ....Số báo danh ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 2

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1: (2,0 điểm)

a) Cho $x=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $P=x(2-x)$.

b) Cho ba số a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=2019$ .Chứng minh:

$$\frac{a^2-bc}{a^2+2019}+\frac{b^2-ca}{b^2+2019}+\frac{c^2-ab}{c^2+2019}=0 .$$

Câu 2: (2,0 điểm) Giải phương trình, hệ phương trình sau:

a) $x^3+\sqrt{(x+1)^3}=9x+8$.

b) $\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=3+x^2y^2\\ \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+3=x^3y^3\end{cases}$.

Câu 3: (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC (Với AB < AC) nội tiếp đường tròn tâm O. Đường phân giác và đường phân giác ngoài của BAC cắt đường tròn (O) lần lượt tại D và E (cùng khác A). Gọi G là hình chiếu vuông góc của E lên cạnh AC, gọi M và N tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BC và BA. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng GM, H là giao điểm của đường thẳng AB và đường thẳng MG, F là giao điểm của đường thẳng MN và đường thẳng AE.

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng AD và GM song song.

b) Chứng minh FH = MC.

c) Chứng minh $KE+KN\le\sqrt{2}.EN$.

Câu 4: (1,5 điểm) a) Chứng minh rằng nếu n là số nguyên thì $\dfrac{n^5+29n}{30}$ cũng là số nguyên.

b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ sao cho $2(x^2+y^2-3x+2y)-1$ và $5(x^2+y^2+4x+2y+3)$ đều là số chính phương.

Câu 5: (1,5 điểm)

a) Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $(a^4+b^4)(b^4+c^4)(c^4+a^4)=8$. Chứng minh rằng

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\ge 1 .$$

b) Trước ngày thi vào lớp 10 chuyên, thầy giáo dùng không quá 49 cây bút đem tặng cho tất cả 32 bạn học sinh lớp 9A sao cho ai cũng nhận được bút của thầy. Chứng minh rằng có một số bạn lớp 9A nhận được bút tổng cộng là 25.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 3

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1 *(2,0 điểm):*

1/ Cho ba số thực dương a,b,c thõa mãn a b c=1.

Chứng minh rằng $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1$

2/ Cho các số a,b,c khác 0 thỏa mãn 2 a b+b c+2 c a=0.

Hãy tính giá trị của biểu thức $A=\frac{bc}{8a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}$

Câu 2 *(2,0 điểm):*

1/ Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x \quad (1)$

2/ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{2} \\ xy+\frac{1}{xy}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=5 \end{cases}$

Câu 3 *(2,0 điểm):* 1/ Tìm tất cả các cặp số nguyên (x ; y) thõa mãn $y^2+y=x^4+x^3+x^2+x$.

2/ Cho hai số nguyên dương x, y với x > 1 và thỏa mãn điều kiện $2x^2 – 1 = y^{15}$.

Chứng minh rằng x chia hết cho 15.

Câu 4 *(3,0 điểm):* Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với AB < AC. Gọi M là trung điểm của BC, AM cắt (O) tại D khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC cắt đường thẳng AC tại E khác C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường thẳng AB tại F khác B.

1/ Chứng minh hai tam giác BDF, CDE đồng dạng.

2/ Chứng minh rằng ba điểm E, M, F thẳng hàng và $OA \perp EF$.

3/ Đường phân giác của góc BAC cắt EF tại điểm N. Đường phân giác của góc CEN cắt CN tại P, đường phân giác của góc BFN cắt BN tại Q. Chứng minh rằng PQ // BC.

Câu 5 *(1,0 điểm):* Trong mặt phẳng, kẻ 2022 đường thẳng sao cho không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tam giác tạo bởi ba đường thẳng trong số các đường thẳng đã cho gọi là tan giác đẹp nếu nó không bị đường thẳng nào trong số các đường thẳng còn lại cắt. Chứng minh rằng số tam giác đẹp không ít hơn 674.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 4

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên Tin)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1: (2,0 điểm)

1. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}=\frac{44}{45}$$
2. Cho x là số thực âm thỏa mãn $x^2+\frac{1}{x^2}=23$. Tính giá trị của biểu thức:
$$A=x^3+\frac{1}{x^3}$$

Câu 2: (2,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2$
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y-2xy+x=0 \\ \left(x^2+y\right)^2-6x^2y+3x^2=0 \end{cases}$

Câu 3: (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2-xy-5x+5y+2=0$
2. Cho biểu thức: $A=\left(a^{2020}+b^{2020}+c^{2020}\right)-\left(a^{2016}+b^{2016}+c^{2016}\right)$ với a,b,c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho 30.

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O) có tâm là O. Các đường cao BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường phân giác ngoài của BHC cắt các cạnh AB,AC lần lượt tại M,N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác của BAC tại điểm I khác A, IM cắt BE tại điểm P và IN cắt CF tại điểm Q.

1. Chứng minh tam giác AMN cân tại A.
2. Chứng minh $HPIQ$ là hình bình hành.
3. Chứng minh giao điểm của hai đường thẳng HI và AO thuộc đường tròn (O).

Câu 5: (1,0 điểm)

Với các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$S=\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)$

---------------- Hết---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐÀ NẴNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 5

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 1. (2,0 điểm) a) Tìm giá GTNN biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}}{\sqrt{\dfrac{81}{x^2}-\dfrac{18}{x}+1}}$, với $x>9$.

b) Tìm x thỏa $|9x-8|+|7x-6|+|5x-4|+|3x-2|+x=0$.

Bài 2. (2,0 điểm) a) Cho ba số thực dương phân biệt a,b,c thỏa $a+b+c=3$. Xét ba phương trình bậc hai $4x^2+4ax+b=0,\ 4x^2+4bx+c=0,\ 4x^2+4cx+a=0$. Chứng minh rằng trong ba phương trình trên có ít nhất một phương trình có nghiệm và có ít nhất một phương trình vô nghiệm.

b) Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) và điểm $A(2;2)$. Gọi d_m là đường thẳng qua A có hệ số góc m. Tìm tất cả các giá trị của m để d_m cắt đồ thị (P) tại hai điểm A và B, đồng thời cắt trục Ox tại điểm C sao cho $AB=3AC$.

Bài 3. (2,0 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^2-6(x+3)\sqrt{x+1}+14x+3\sqrt{x+1}+13=0$

b) $\begin{cases} 8xy+22y+12x+25=\dfrac{1}{x^3} \\ y^3+3y=(x+5)\sqrt{x+2} \end{cases}$

Bài 4: (1,5 điểm) Trên nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2r lấy điểm C khác A sao cho CA < CB. Hai tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại B, C cắt nhau ở M. Tia AC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác MCB tại điểm thứ hai là D. Gọi K là giao điểm thứ hai của BD và nửa đường tròn (O) , P là giao điểm của AK và BC. Biết rằng diện tích hai tam giác CPK và APB lần lượt là $\frac{r^2\sqrt{3}}{12}$ và $\frac{r^2\sqrt{3}}{3}$, tính diện tích tứ giác ABKC.

Bài 5. (1,5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn (BA < BC) nội tiếp trong đường tròn (O) . Vẽ đường tròn (Q) đi qua A và C sao cho (Q) cắt các tia đối của tia AB và CB lần lượt tại các điểm thứ hai là D và E. Gọi M là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE. Chứng minh QM vuông góc BM.

Bài 6. (1,0 điểm) Ba bạn A,B,C cùng chơi một trò chơi: Sau khi A chọn hai số tự nhiên từ 1 đến 9 (có thể giống nhau), A nói cho B chỉ mỗi tổng và nói cho C chỉ mỗi tích của hai số đó. Sau đây là các câu đối thoại giữa B và C.

B nói : Tôi không biết hai số A chọn nhưng chắc chắn C cũng không biết.

C nói: Mới đầu thì tôi không biết nhưng giờ thì biết hai số A chọn rồi. Hơn nữa , số mà A đọc cho tôi lớn hơn số của bạn.

B nói: À, vậy thì tôi cũng biết hai số A chọn rồi.

Xem B và C là các nhà suy luận logic hoàn hảo, hãy cho biết hai số A chọn là hai số nào ?

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐIỆN BIÊN

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Đề số 6

(Đề thi có một trang)

Câu 1 *(2,5 điểm).* 1. Cho biểu thức $P=\left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right).\left(x-\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\right)$ với $x\geq 0$ và $x\neq 4$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm x để $P\sqrt{2-x}<0$.

2. Chứng minh rằng: $\frac{1}{3+2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}$.

Câu 2 *(1,5 điểm).* 1. Giải phương trình: $x^2-4x+(x-3)\sqrt{x^2-x+1}=-1$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4x^2+4x-y^2=-1\\4x^2-3xy+y^2=1.\end{cases}$

Câu 3 *(2,0 điểm).*

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: y=2mx+m+2$ (m là tham số) và parabol $(P): y=2x^2$. Chứng minh với mọi giá trị của m thì d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2. Tìm m sao cho $x_1^2-6x_2^2-x_1x_2=0$.

2. Cho a, b, c là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$.

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq 2.$

Câu 4 *(3,0 điểm).* 1. Cho tam giác nhọn ABC $AB<AC$ nội tiếp đường tròn tâm I. Gọi E là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng AI. T là giao điểm của BE và đường tròn tâm I.

a) Chứng minh rằng tam giác ABT cân tại A. Từ đó suy ra AC là đường phân giác của góc BCT.

b) Gọi M là trung điểm của BC và D là giao điểm của ME và AC. Chứng minh rằng $BD\perp AC$.

2. Cho tam giác ABC, trên đường trung tuyến AD lấy điểm I cố định (I khác A và D). Đường thẳng d đi qua I cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích tam giác AMN đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5 *(1,0 điểm).*

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $\frac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}$ là số hữu tỷ và $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố.

---------------- Hết---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TUYÊN QUANG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 7

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1 *(1,0 điểm)* Tính tổng $S=\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{2019^2}+\sqrt{2019^2-2}}$

Câu 2 *(2,0 điểm)* Cho phương trình $x^2-2mx+m-4$ (1) (m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn:

$$x_1+x_2=\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}$$

Câu 3 *(2,0 điểm)* Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}=x-2+2\sqrt{-2x^2+11x-5}$; b) $\begin{cases}2\sqrt{x+y}+2\sqrt{x-y}=4+\sqrt{x^2-y^2}\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2\end{cases}$.

Câu 4 *(3,0 điểm)* Cho đường tròn (O) cố định và điểm A cố định ở ngoài đường tròn (O). Từ A kẻ đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại B. Một tia Ax thay đổi, nằm trong miền OAB, cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D (C ở giữa A và D). Từ B kẻ BH vuông góc với AO tại H. Chứng minh rằng:

a) Tích $AC.AD$ không đổi;

b) CHOD là tứ giác nội tiếp;

c) Phân giác của CHD cố định.

Câu 5 *(2,0 điểm)* a) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $A=\frac{x^4+x^2+x+2}{x^4+3x^3+7x^2+3x+6}$ nhận giá trị là một số nguyên.

b) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}+3\sqrt{c}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}+3\sqrt{a}}$.

---------------- **Hết**---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Đề số 8

(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(2 điểm)*

1. Cho hai biểu thức $A=\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}+\frac{2(x+1)}{\sqrt{x}}$ và $B=\sqrt{x}+1+\frac{x}{\sqrt{x}-1}$ với $x>0,\ x\neq 1$.

a. Rút gọn biểu thức *A*.

b. Tìm *x* để $A=B$.

2. Cho *a, b* là hai số thực thỏa mãn $0<a<1,\ 0<b<1,\ a\neq b$ và $a-b=\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}$ Tìm giá trị của biểu thức $Q=\sqrt{a^2+b^2}+2019$.

Câu 2. *(2 điểm)*

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y=\frac{-1}{2020}x+\frac{3}{2020}$ và Parabol $(P): y=2x^2$. Biết đường thẳng (*d*) cắt (*P*) tại hai điểm *B* và *C*. Tìm tọa độ điểm *A* trên trục hoành để $|AB-AC|$ lớn nhất.

2. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$xy^2-(y-45)^2+2xy+x-220y+2024=0.$$

Câu 3. *(2 điểm)*

1. Giải phương trình $\sqrt{5x+11}-\sqrt{6-x}+5x^2-14x-60=0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x^2y-xy^2=5\\64x^3-y^3=61\end{cases}$.

Câu 4. *(3 điểm)* Cho hình vuông *ABCD* tâm *O* cạnh *a*. Lấy *M* là điểm bất kì trên cạnh *AB* $(M\neq A,\ M\neq B)$, qua *A* kẻ đường thẳng vuông góc với *CM* tại *H*, *DH* cắt *AC* tại *K*.

1. Chứng minh rằng *MK* song song với *BD*.

2. Gọi *N* là trung điểm của *BC*, trên tia đối của tia *NO* lấy điểm *E* sao cho $\frac{ON}{OE}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, *DE* cắt *OC* tại *F*. Tính $\frac{FO}{FC}$.

3. Gọi *P* là giao điểm của *MC* và *BD*, *Q* là giao điểm của *MD* và *AC*. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác *CPQD* khi *M* thay đổi trên cạnh *AB*.

Câu 6. *(1điểm)*. Với *x, y* là các số thực thỏa mãn điều kiện $(2+x)(y-1)=\frac{9}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+4x+2}+\sqrt{y^4-8y^3+24y^2-32y+17}$.

---------------- **Hết**---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH THUẬN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 9

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 1 (2,0 điểm):

Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\left(x^2+xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=185 \ \ (1)\\ \left(x^2-xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=65 \ \ (2)\end{cases}$

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Chứng minh rằng số $M=(n+1)^4+n^4+1$ chia hết cho một số chính phương khác 1 với mọi số n nguyên dương.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n để phương trình $x^2-n^2x+n+1=0$ (ẩn số x) có các nghiệm là số nguyên.

Bài 3 (2.0 điểm): Cho các số dương $x; y; z$ thỏa : $xyz=\dfrac{1}{2}$

Chứng minh : $\dfrac{yz}{x^2(y+z)}+\dfrac{xz}{y^2(x+z)}+\dfrac{xy}{z^2(x+y}\geq xy+yz+xz$

Bài 4 (3,0 điểm): Cho tam giác ABC cân tại A $\left(A<90°\right)$nội tiếp đường tròn (O) .Gọi D là một điểm trên cung AB không chứa C (D khác $A; B$).Hai dây cung AD và BC kéo dài tại E .Đường thẳng qua E song song với CD cắt AB tại F .Vẽ tiếp tuyến FG với đường tròn (O)(G là tiếp điểm)

a)Chứng minh : $FG=FE$

b)Từ trung điểm I của BC vẽ $IJ\perp AC(J\in AC)$ .Gọi H là trung điểm của IJ .Chứng minh : $AH\perp BJ$

Bài 5 (1,0 điểm): Trong một buổi tổ chức lễ tuyên dương các học sinh có thành tích học tập xuất sắc của một huyện, ngoại trừ bạn An , hai ngươi bất kì đều bắt bắt tay nhau .An chỉ bắt tay với những người mình quen .Biết rằng một cặp (hai người) chỉ bắt tay không quá 1 lần và có tổng cộng 420 bắt tay.Hỏi bạn An có bao nhiêu người quen trong buổi lễ tuyên dương đó ?

---------------- Hết---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ YÊN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 10

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức: $A=\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right):\left(\frac{x-2}{x-\sqrt{x}-2}-1\right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để $P=2.A-\frac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Giải PT: $x^2+6x+8=3\sqrt{x+2}$.

b) Giải hệ PT: $\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=(x+2)(y+2) \\ \left(\frac{x}{y+2}\right)^2+\left(\frac{y}{x+2}\right)^2=1 \end{cases}$

Câu 3. (1,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho BD = BA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, AD. Đường thẳng qua B và song song với AD cắt MN tại E.

a) Chứng minh tứ giác NAEB là hình chữ nhật.

b) Chứng minh góc ACE = DCN.

Câu 4. (1,5 điểm)

a) Tồn tại hay không 3 số a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{b^2-ca}=\frac{b}{c^2-ab}=\frac{c}{a^2-bc}=\frac{1}{2019}$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{85}{13}$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại M, N. Kẻ dây MA của đường tròn (O) tiếp xúc với (O') và dây MB của đường tròn (O') tiếp xúc với (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB cắt đường thẳng MN tại P (P khác M). CMR: PN = MN.

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 1. CMR:

$$a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1}\ge 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

---------------- Hết---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI PHÒNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 11

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 1*(2,0 điểm)*

a.Cho các biểu thức: $P=\left(\dfrac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right):\dfrac{\sqrt{x}+3}{x-\sqrt{x}+1}$ (với $x\ge 0$)

Rút gọn biểu thức P. Tìm các giá trị của x để $P\ge\dfrac{1}{5}$

b. Cho phương trình $x^2+4x-m=0$ (1) (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)\left(x_1^2+x_2^2\right)=4(m+2)$

Bài 2. *(2,0 điểm)*. a. Giải phương trình $2x^2+3x-2=(2x-1)\sqrt{2x^2+x-3}$

b. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y\sqrt{y}=9\\ x^2+2y=x+4\sqrt{y}\end{cases}$

Bài 3: *(3,0 điểm)* Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn *(O)* ($AB<AC$). Kẻ đường cao AH ($H\in BC$) của tam giác ABC và kẻ đường kính AD của đường tròn *(O)*.

a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng DH. Chứng minh OM là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

b. Gọi S, T là các giao điểm của đường tròn *(O)* với đường tròn tâm A bán kính AH; F là giao điểm của ST và BC. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với DH tại E. Chứng minh $FB.FC=FH^2$ và 3 điểm F, E, A thẳng hàng.

c. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AH.

Bài 4 *(1,0 điểm)*Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn $x(x-z)+y(y-z)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^3}{x^2+z^2}+\dfrac{y^3}{y^2+z^2}+\dfrac{x^2+y^2+4}{x+y}$

Bài 5: *(2,0 điểm)* a) Tìm các số nguyên tố p, q thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) p^2q+p chia hết cho p^2+q

ii) pq^2+q chia hết cho q^2-p

b) Viết lên bảng 2019 số: $1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3};...;\dfrac{1}{2018};\dfrac{1}{2019}$. Từ các số đã viết xoá đi 2 số bất kì x, y rồi viết lên bảng số $\dfrac{xy}{x+y+1}$ (các số còn lại trên bảng giữ nguyên). Tiếp tục thực hiện thao tác trên cho đến khi bảng chỉ còn lại đúng một số. Hỏi số đó bằng bao nhiêu?

--------------- Hết--------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NINH

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Đề số 12

(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(1,5 điểm)*

Cho biểu thức $A=\dfrac{-4x-9\sqrt{x}+3}{x+3\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ (với $x\ge 0$).

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Câu 2. *(2,5 điểm)*

1. Giải phương trình: $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}-\sqrt{(x+1)(4-x)}=1$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2=(2-y)(2+y) \\ 2x^3=(x+y)(4-xy) \end{cases}$.

Câu 3. *(1,0 điểm)*

Tìm các số nguyên không âm $a,\ b,\ n$ thỏa mãn: $\begin{cases} n^2=a+b \\ n^3+2=a^2+b^2 \end{cases}$.

Câu 4. *(3,5 điểm)*

Cho đường tròn $(O;\ R)$, đường kính AB, điểm M nằm trên đoạn OB (M khác O và B). Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt (O) tại hai điểm C và E. Gọi F là hình chiếu của C trên AE và I là hình chiếu của M trên CF. Đường thẳng AI cắt (O) tại điểm thứ hai H.

a) Chứng minh tứ giác $CIMH$ nội tiếp;

b) Tiếp tuyến tại C của (O) cắt đường thẳng AB tại D. Gọi (O_1) là đường tròn ngoại tiếp tam giác CHD (điểm O_1 là tâm đường tròn). Chứng minh đường thẳng BD là tiếp tuyến của (O_1);

c) Gọi O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMD. Biết $OM=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$, tính diện tích tam giác OO_1O_2 theo R.

Câu 5. *(1,5 điểm)*

1. Cho các số thực $a,\ b,\ c$ thỏa mãn: $|a|\le 1,\ |b|\le 1,\ |c|\le 1$ và $a+b+c=0$.

Chứng minh: $a^{2018}+b^{2019}+c^{2020}\le 2$.

2. Cho trước p là số nguyên tố. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, lấy hai điểm $A(p^8;0)$ và $B(p^9;0)$ thuộc trục Ox. Có bao nhiêu tứ giác $ABCD$ nội tiếp sao cho các điểm C, D thuộc trục Oy và đều có tung độ là các số nguyên dương.

---------------- Hết---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NAM

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 13

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1 (*2,0 điểm*).

a) Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+1}-\dfrac{2\sqrt{x}+8}{x\sqrt{x}+1}\right)\cdot\dfrac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ với $x\ge 0$.

Rút gọn biểu thức A và tìm x để $A=6$.

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số $M=9.3^{4n}-8.2^{4n}+2019$ chia hết cho 20.

Câu 2 (*1,0 điểm*).

Cho parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng $(d): y=x+m-2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2<3$.

Câu 3 (*2,0 điểm*). a) Giải phương trình $x^2-\sqrt{x^2-4x}=4(x+3)$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+4x+2y=3 \\ x^2+7y^2-4xy+6y=13. \end{cases}$

Câu 4 (*2,0 điểm*). Cho hình bình hành ABCD có góc A nhọn. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên các đường thẳng AB, AD.

a) Chứng minh $AB.AH+AD.AK=AC^2$.

b) Trên hai đoạn thẳng BC, CD lần lượt lấy hai điểm M, N (M khác B, M khác C) sao cho hai tam giác ABM và ACN có diện tích bằng nhau; BD cắt AM và AN lần lượt tại E và F. Chứng minh $\dfrac{BM}{BC}+\dfrac{DN}{DC}=1$ và $BE+DF>EF$.

Câu 5 (*2,0 điểm*).

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Ba điểm D, E, F lần lượt là chân các đường cao vẽ từ A, B, C của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC, P là giao điểm của EF và BC. Đường thẳng DF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là K.

a) Chứng minh $PB.PC=PE.PF$ và KE song song với BC.

b) Đường thẳng PH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là Q. Chứng minh tứ giác BIQF nội tiếp đường tròn.

Câu 6 (*1,0 điểm*). Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(1+a)^2+b^2+5}{ab+a+4}+\frac{(1+b)^2+c^2+5}{bc+b+4}+\frac{(1+c)^2+a^2+5}{ca+c+4}.$$

---------------- Hết---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 14

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1 *(2,0 điểm).*

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng d đi qua điểm $M(0;1)$ có hệ số góc k.

a) Chứng minh rằng đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt với mọi giá trị k.

b) Chứng minh ΔOAB là tam giác vuông với mọi giá trị k (O là gốc tọa độ).

Câu 2 *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}\ 1 - x$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 5y + 3 + 6\sqrt{y^2 - 7x + 4} = 0 \\ y(y - x + 2) = 3x + 3 \end{cases}$.

Câu 3 *(1,0 điểm)*

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = \sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2019x^2 + 2xy + 2019y^2} + \sqrt{2019y^2 + 2yz + 2019z^2} + \sqrt{2019z^2 + 2zx + 2019x^2} \geq 2\sqrt{2020}.$$

Câu 4 *(3,5 điểm).* Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD = 4a$ $(a > 0)$. Đường thẳng vuông góc với AC tại C cắt các đường thẳng AB và AD lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh tứ giác $EBDF$ nội tiếp.

b) Gọi I là giao điểm của các đường thẳng BD và EF. Tính độ dài đoạn thẳng ID theo a.

c) M là điểm thay đổi trên cạnh AB (M khác A, M khác B), đường thẳng CM cắt đường thẳng AD tại N. Gọi S_1 là diện tích của tam giác CME và S_2 là diện tích của tam giác AMN. Xác định vị trí của M sao cho $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{3}{2}$.

Câu 5 *(1,5 điểm).* Cho $\overline{abc}$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỉ.

---------------- Hết---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 15

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1 *(2,0 điểm)*

a) Cho số thực x thỏa mãn $x+\frac{1}{x}=3$. Tính giá trị biểu thức $P=x^3+\frac{1}{x^3}$.

b) Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}=1$.

Câu 2 *(2,0 điểm)*

a) Cho a,b,c là các số thực dương, chứng minh rằng $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\geq\frac{4a}{a+c}$.

b) Có 15 bạn học sinh nam và 15 bạn học sinh nữ ngồi quanh một bàn tròn. Chứng minh rằng luôn tồn tại một học sinh mà 2 bạn ngồi cạnh bạn đó đều là nữ.

Câu 3 *(2,0 điểm)* Với mỗi số thực x, kí hiệu $\left[x\right]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Ví dụ $\left[\sqrt{2}\right]=1;\left[-\frac{3}{2}\right]=-2$

a) Chứng minh rằng $x-1<\left[x\right]\leq x<\left[x\right]+1=\left[x+1\right]$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

b) Có bao nhiêu số nguyên dương $n\leq 840$ thỏa mãn $\left[\sqrt{n}\right]$ là ước của n?

Câu 4 *(3,0 điểm)* Cho tam giác ABC vuông tại B, đường cao $BH\left(H\in AC\right)$. Gọi (ω) là đường tròn tâm C bán kính CB. Gọi F là một điểm bất kì trên đoạn thẳng BH (F khác B và H). AF cắt (ω) tại hai điểm D,E (D nằm giữa A và E). Gọi K là trung điểm DE.

a) Chứng minh rằng $FKCH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $AD.AE=AH.AC=AF.AK$;

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK tiếp xúc với (ω) tại B.

Câu 5 *(1 điểm)* Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho $\frac{n^{2019}}{2^n}<\frac{1}{2020}$

--------------- Hết--------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO CẦN THƠ

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2019-2020

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 16

(Đề thi có 02 trang)

Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1. *(1,5 điểm)* Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}.\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)$, trong đó $x>1, x\neq 2$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức A là số nguyên.

Câu 2. *(1,0 điểm)* Anh Bình vừa tốt nghiệp loại xuất sắc nên được nhiều công ty mời về làm việc, trong đó có hai công ty A và B. Để thu hút người tài, cả hai công ty đưa ra hình thức trả lương trong thời gian thử việc như sau:

Công ty A: Anh Bình được nhận 1400 USD ngay khi ký hợp đồng thử việc và mỗi tháng sẽ được trả lương 1700USD.

Công ty B: Anh Bình được nhận 2400 USD ngay khi ký hợp đồng thử việc và mỗi tháng sẽ được trả lương 1500USD.

Em hãy tư vấn giúp anh Bình lựa chọn công ty để thử việc sao cho tổng số tiền nhận được là nhiều nhất. Biết thời gian thử việc của cả hai công ty đều từ 3 tháng đến 8 tháng.

Câu 3. *(1,5 điểm)* Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1): y=m^2x-m^4+2$ và $(d_2): y=\dfrac{m^2}{m^2+1}x+2$ (m là tham số thực khác 0). Tìm tất cả giá trị của tham số m để (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm A duy nhất sao cho diện tích của hình thang ABHK bằng $\dfrac{15}{2}$. Biết $B(-1;2)$ và hai điểm H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và A lên trục hoành.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2+3x+2}+\sqrt{4x^2+6x+21}=11$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \\ x+y-xy=2y^2-x^2 \end{cases}$.

c) Tìm tất cả cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $2020(x^2+y^2)-2019(2xy+1)=5$

Câu 5. *(2,0 điểm)* Cho tam giác nhọn ABC không cân có AB < AC, trực tâm H và đường trung tuyến AM. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên AM, D là điểm đối xứng của A qua M và L là điểm đối xứng của K qua BC.

a) Chứng minh các tứ giác BCKH và ABLC nội tiếp.

b) Chứng minh $LAB = MAC$.

c) Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên AL, X là giao điểm của AL và BC. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác IXM và đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC tiếp xúc với nhau.

Câu 6. *(1,0 điểm)*

a) Cho a, b, c là các số thực bất kỳ và x, y, z là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $\frac{a^3+8}{a^3(b+c)}+\frac{b^3+8}{b^3(c+a)}+\frac{c^3+8}{c^3(a+b)}$, với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.

---------------- Hết---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 17

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (chuyên)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1: *(1,5 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$. Tìm x để $P = 3$.

b) Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $Q = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$.

Câu 2: *(2,0 điểm)*

a) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = \dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = \dfrac{1}{2}x + 3$. Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ (với $x_A < x_B$) là các giao điểm của (P) và (d), $C(x_C; y_C)$ là điểm thuộc (P) sao cho $x_A < x_C < x_B$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(x - y) + x^2y^2 = 1 \\ x^2(xy + 3) - 3xy = 3 \end{cases}$.

Câu 3: *(1,5 điểm)* a) Giải phương trình $\sqrt{x + 3 + 3\sqrt{2x - 3}} + \sqrt{x - 1 + \sqrt{2x - 3}} = 2\sqrt{2}$.

b) Cho phương trình (ẩn x) $x^2 + (m - 1)x + m - 6 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = (x_1^2 - 4)(x_2^2 - 4)$ có giá trị lớn nhất.

Câu 4: *(3,0 điểm)* Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và trực tâm là T. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC và D là điểm đối xứng với T qua đường thẳng BC; I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB và AC; E và F lần lượt là trung điểm của AC và IH.

a) Chứng minh ABDC là tứ giác nội tiếp và hai tam giác ACD và IHD đồng dạng.

b) Chứng minh ba điểm I, H, K thẳng hàng và DEF là tam giác vuông.

c) Chứng minh $\dfrac{BC}{DH} = \dfrac{AB}{DI} + \dfrac{AC}{DK}$.

Câu 5: *(2,0 điểm)* a) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 2$. Chứng minh

$$\frac{x}{2x^2 + y^2 + 5} + \frac{2y}{6y^2 + z^2 + 6} + \frac{4z}{3z^2 + 4x^2 + 16} \le \frac{1}{2}.$$

b) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho $\dfrac{2^{2020}}{3x + 1}$ là số nguyên ?

---------------- Hết---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐĂK NÔNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 18

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1: *(1,0 điểm)* Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{3\sqrt{a}+5}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1}\right).\left(\dfrac{(\sqrt{a}+1)^2}{4\sqrt{a}}-1\right)$.

Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P.

Câu 2: *(1,0 điểm)* Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $2x^2y-1=x^2+3y$.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình $(x-2)^2(x-1)(x-3)=12$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+3y^2+x=3 \\ x^2+xy-2y^2=0 \end{cases}$.

Câu 4: *(1,0 điểm)* Quãng đường từ Gia Nghĩa đến thành phố Buôn Ma Thuột dài 120 km. Một người dự định đi xe máy từ Gia Nghĩa đến thành phố Buôn Ma Thuột với vận tốc không đổi. Sau khi đi được 45 phút, người ấy dừng lại nghỉ 15 phút. Để đến thành phố Buôn Ma Thuột đúng thời gian đã dự định, người đó phải tăng vận tốc thêm 5 km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc của người đi xe máy theo dự định ban đầu.

Câu 5: *(1,0 điểm)* Tìm m để phương trình $x^2-2(m+1)x+4m=0$ (x là ẩn, m là tham số) có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^3-x_1^2=x_2^3-x_2^2$.

Câu 6: *(3,0 điểm)* Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ hai đường thẳng d và d' lần lượt là hai tiếp tuyến tại các tiếp điểm A và B của đường tròn (O). Điểm M thuộc đường tròn (O) (M khác A và B), tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt d, d' lần lượt tại C và D. Đường thẳng BM cắt d tại E.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng CM, CA, CE.

b) Đường thẳng EO cắt hai đường thẳng d', AD lần lượt tại I và J. Chứng minh các điểm A, B, I, J cùng thuộc một đường tròn.

c) Giả sử $AE=BD$, tính độ dài đoạn thẳng AM theo R.

Câu 7: *(1,0 điểm)* Cho hai số thực a, b thỏa mãn $1\le a\le 2, 1\le b\le 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{2}{a}\right)$.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 19

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 1. *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình $2x^2+\sqrt{x^2-2x-19}=4x+74$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+3y-6x=0 \\ 9x^2-6xy^2+y^4-3y+9=0 \end{cases}$

Bài 2. *(2,5 điểm)*

a) Cho biểu thức $P=\dfrac{2x+3}{\sqrt{x}}+\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ với $x>0, x\neq 1$. Rút gọn và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P

b) Cho hai số thực a,b thỏa mãn $a^2+4ab-7b^2=0$ ($a\neq b$ và $a\neq -b$). Tính giá trị của biểu thức $Q=\dfrac{2a-b}{a-b}+\dfrac{3a-2b}{a+b}$

c) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d): y=(m+2)x-m+1$ và $(d'): x+(m+2)y=m+2$ trong đó m là tham số. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng nói trên thuộc một đường cố định khi m thay đổi.

Bài 3. *(1,5 điểm)*

a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x+y+3}+1=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

b) Số tự nhiên $n=111^6$ có tất cả bao nhiêu ước số nguyên dương phân biệt? Tính tích của tất cả các ước số đó.

Bài 4. *(3,5 điểm)* Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn thẳng OB (M khác O và P). Tia CM cắt đường tròn (O) tại N; DB cắt CN tại P; AN cắt CD tại Q

a) Chứng minh $PQ \parallel AB$

b) Chứng minh ΔCAQ đồng dạng với ΔAMC, từ đó suy ra diện tích tứ giác $ACMQ$ không đổi khi M di động trên đoạn thẳng OB

c) Chứng minh hệ thức $\dfrac{CQ}{AM}=\left(\dfrac{CN}{AN}\right)^2$

d) Xác định vị trí của điểm M trên đoạn thẳng OB để NQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CPQ. Tính OM theo R trong trường hợp đó

Bài 5. *(0,5 điểm)*Trên một bảng ô vuông, ở mỗi ô người ta điền toàn bộ dấu +. Sau đó thực hiện quá trình đổi dấu (dấu + sang dấu -, dấu – sang dấu +) lần lượt theo các bước sau:

Bước 1: Các ô ở dòng thứ i đều được đổi dấu i lần, $i=1,2,...,2019$.

Bước 2: Các ô ở cột thứ j đều được đổi dấu $3j+1$ lần, $j=1,2,...,2019$.

Tính số dấu còn lại trên bảng ô vuông sau khi thực hiện xong quá trình đổi dấu trên.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TÂY NINH

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Đề số 20

(Đề thi có một trang)

Câu 1: (1,0 điểm) Giải phương trình $x^4+x^2-20=0$

Câu 2: (1,0 điểm) Rút gọn biểu thức $T=\dfrac{\left(\sqrt{2a}-2\sqrt{2}\right)(a-1)}{a-\sqrt{a}-2}$ với $a>0, a\neq 4$.

Câu 3: (1,0 điểm) Cho hình thang cân $ABCD\left(AB//CD\right)$ có $CD=2AD=2AB=8$. Tính diện tích của hình thang cân đó.

Câu 4: (1,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-5xy+x-5y^2=42 \\ 7xy+6y^2+42=x \end{cases}$.

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho hai phương trình $x^2+6ax+2b=0$ và $x^2+4bx+3a=0$ với a,b là các số thực. Chứng minh nếu $3a+2b\geq 2$ thì ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 6: (1,0 điểm)

Tìm số tự nhiên có bốn chữ số có dạng $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd}=k^2\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ và $\overline{ab}-\overline{cd}=1$ (các chữ số tự nhiên a,b,c,d có thể giống nhau).

Câu 7: (1,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC có $BAC=60^\circ$ và $AB<AC$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB,AC lần lượt tại D và E. Kéo dài BI,CI lần lượt cắt DE tại F và G, gọi M là trung điểm BC. Chứng minh tam giác MFG đều.

Câu 8: (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) có tâm O.

a)(1,0 điểm) Trên cung nhỏ AB của đường tròn (O) lấy điểm D (khác A,B). Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm A bán kính AC với đường thẳng BD. Chứng minh AD là đường trung trực của CK.

b)(1,0 điểm) Lấy P là điểm bất kỳ trên đoạn OC (khác O,C). Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên AB và AC. Gọi Q là điểm đối xứng của P qua đường thẳng EF. Chứng minh Q thuộc đường tròn (O).

Câu 9: (1,0 điểm)

Chứng minh $(x+y+z)^3+9xyz\geq 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$ với x,y,z là các số thực không âm. Đẳng thức xảy ra khi nào?

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH ĐỊNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 21

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 1 *(5,0 điểm).* 1.Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + y^3 - 3(x+y)$, biết rằng

$$x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\ ;\ y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$$

2. Cho hai số thức m,n khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$

Chứng minh rằng phương trình $(x^2 + mx + n)(x^2 + nx + m) = 0$ luôn có nghiệm

Bài 2. *(5,0 điểm)* 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y = 1 \\ \sqrt{x} - \sqrt[3]{y} + 4x = 5 \end{cases}$

2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2xy^2 + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

Bài 3 *(3,0 điểm)*

1. Trong mặt phẳng cho 8073 điểm mà diện tích của mọi tam giác với các đỉnh là các điểm đã cho không lớn hơn 1. Chứng minh rằng trong số các điểm đã cho có thể tìm được 2019 điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn 1.

2. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1} \le 5$$

Bài 4 *(7,0 điểm).*

1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Lấy điểm M bất kỳ trên đoạn AD (M không trùng với A). Gọi N,P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh AB,AC và H là hình chiếu vuông góc của N lên đường thẳng PD.

a) Chứng minh rằng AH vuông góc với BH

b) Đường thẳng qua B song song với AD cắt đường trung trực của AB tại I. Chứng minh ba điểm H,N,I thẳng hàng.

2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Gọi M là giao điểm của AO và BC. Chứng minh rằng $\frac{HB}{HC} + \frac{MB}{MC} \ge 2\frac{AB}{AC}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH PHƯỚC

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 22

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1. *(2,0 đ)* Cho biểu thức $A=\dfrac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$

a. Rút gọn A

b. Tính giá trị của A khi $x=4-2\sqrt{3}$

Câu 2. *(1,0 đ)* Cho phương trình $x^2-\left(m+2\right)x+3m-3=0\ \left(1\right)$ với m là tham số.

Tìm các giá trị của m để phương trình 1 có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 sao cho x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông với cạnh huyền có độ dài bằng 5

Câu 3. *(2,0 đ)* a. Giải phương trình $x+\sqrt{4-x^2}=2+3x\sqrt{4-x^2}$

b. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^3+2x^2y-xy=y^2-x-y\\2x^3-xy+x^2=4\end{cases}$

Câu 4. *(3,0 đ)*. Cho đường tròn $O;R$ và đường tròn $O';R'$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C. Kẻ tiếp tuyến CD, CE với đường tròn $O;R$, trong đó D, E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn $O';R'$. Đường thẳng AD, AE cắt đường tròn $O';R'$ lần lượt tại M và N (M, N khác A). Tia DE cắt MN tại I.

Chứng minh rằng:

a. Tứ giác $BEIN$ nội tiếp b. $\Delta MIB\sim\Delta AEB$ c. $O'I\perp MN$

Câu 5. *(1,0 đ)* a. Giải phương trình nghiệm nguyên $4y^2=2+\sqrt{199-x^2-2x}$

b. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố p, q sao cho $p^2-2q^2=41$

Câu 6 *(1,0 đ)*

a. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy\le 1$ chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\le\frac{2}{1+\sqrt{xy}}$$

b. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\left(x+y\right)^3+4xy\le 12$

Tìm GTLN của $P=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+2018xy$

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 23

(Đề thi có 02 trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a) Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{x^4-2x^3+3x^2-38x+5}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ khi $x=2+\sqrt{3}$.

b) Cho hai hàm số $y=x^2$ và $y=(m-1)x-1$ (với m là tham số) có đồ thị lần lượt là P và d. Tìm m để P cắt d tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ sao cho $y_1^3-y_2^3=18(x_1^3-x_2^3)$.

Câu 2. *(2,5 điểm)*

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2+2xy+4=2x+5y \\ 5x^2+7y-18=\sqrt{x^4+4} \end{cases}$.

b) Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\sqrt{x^2-6x+25}+\sqrt{y^2-6y+25}+\sqrt{z^2-6z+25}$.

Câu 3. *(1,5 điểm)*

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $x;y$ thỏa mãn

$$(xy+x+y)(x^2+y^2+1)=30.$$

b) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $2\sqrt{12n^2+1}+2$ là số chính phương.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB<AC$. Các đường cao AD,BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Gọi O là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DHEC$, trên cung nhỏ EC của đường tròn O lấy điểm I (khác điểm E) sao cho $IC>IE$. Đường thẳng DI cắt đường thẳng CE tại điểm N, đường thẳng EF cắt đường thẳng CI tại điểm M.

a) Chứng minh rằng $NI.ND=NE.NC$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng CH.

c) Đường thẳng HM cắt đường tròn O tại điểm K (khác điểm H), đường thẳng KN cắt đường tròn O tại điểm G (khác điểm K), đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại điểm T. Chứng minh rằng ba điểm H, T, G thẳng hàng.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho 2020 cái kẹo vào 1010 chiếc hộp sao cho không có hộp nào chứa nhiều hơn 1010 cái kẹo và mỗi hộp chứa ít nhất 1 cái kẹo. Chứng minh rằng có thể tìm thấy một số hộp mà tổng số kẹo trong các hộp đó bằng 1010 cái.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 24

(Đề thi có 02 trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1: *(3 điểm)*

a) Giải phương trình: $\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1\right)=9$

b) Cho parabol $(P): y=2ax^2\ (a>0)$ và đường thẳng $d: y=4x-2a^2$. Tìm a để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N có hoành độ x_M, x_N sao cho $K=\dfrac{8}{x_M+x_N}+\dfrac{1}{2x_Mx_N}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2: *(1,5 điểm)*

Giả sử ba số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a>0$, $b=3a^2$, $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng: $a\ge\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}}$.

Câu 3: *(2 điểm)*

a) Tính giá trị biểu thức: $P=\left(4x^5+4x^4-5x^3+5x-2\right)^{2018}+2019$ tại $x=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$.

b) Tìm tất cả các số nguyên x cho $\dfrac{x-3}{x^2+1}$ là một số nguyên.

Câu 4: *(3,5 điểm)* Cho điểm M thuộc nữa đường tròn (O) đường kính AB $(M\ne A, M\ne B, MA<MB)$. Tia phân giác của góc AMB cắt AB tại C. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt các đường thẳng AM, BM theo thứ tự tại D, H.

a) Chứng minh rằng: $CA=CH$.

b) Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên tiếp tuyến tại A của (O), F là hình chiếu vuông góc của D trên tiếp tại B của. Chứng minh rằng: E, M, F thẳng hàng.

c) Gọi S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích của các tứ giác $ACHE$ và $BCDF$. Chứng minh rằng: $CM^2<\sqrt{S_1\cdot S_2}$.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
SƠN LA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 25

(Đề thi có 02 trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1 *(2,0 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $A=\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

b) Tính giá trị biểu thức $B=(x^2+4x-2)^{2019}$ tại $x=\frac{(\sqrt{3}-1)\left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$

Câu 2 *(2,0 điểm)* Cho phương trình $x^2-mx+m-1=0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn biểu thức $A=\frac{4x_1x_2+6}{x_1^2+x_2^2+2(1+x_1x_2)}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 3 *(1,0 điểm)* Giải phương trình: $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$

Câu 4 *(3,0 điểm)*

Từ một điểm I nằm ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến IA và IB đến đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Tia Ix nằm giữa hai tia IA và IB, Ix không đi qua O và cắt đường tròn (O) tại C và E (E nằm giữa C và I), đoạn IO cắt AB tại M. Chứng minh:

a) Tứ giác OMEC nội tiếp

b) $AMC=AME$

c) $\left(\frac{MB}{MC}\right)^2=\frac{IE}{IC}$

Câu 5 *(1,0 điểm)* Cho a, b, c > 0 thỏa mãn a + b + c ≤ 3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{362}{ab+bc+ca}\geq 121$$

Câu 6 *(1,0 điểm)*

Trong các tam giác có cạnh đáy bằng a, chiều cao tương ứng là h (a, h cho trước, không đổi). Hãy tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TIỀN GIANG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 26

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 1: *(3,0 điểm)*

1. Cho $x=\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-2\sqrt{3}}-1$. Tính giá trị biểu thức $P=x^3\left(x^2+3x+9\right)^3$

2. Giải phương trình: $x^2+6x+5=\sqrt{x+7}$

3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(3x-y-1)\sqrt{y+1}+3x-1=y\sqrt{3x-y}\\ x^2+y^2=5\end{cases}$

Bài 2: *(3,0 điểm)*

1. Cho parabol (P): $y=2x^2$, các đường thẳng (d_1): $y=-\frac{1}{4}x$. Viết phương trình đường thẳng (d_2), biết d_2 vuông góc với d_1 và d_2 cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $\sqrt{5}AB=\sqrt{17}OI$, với I là trung điểm của đoạn AB.

2. Cho phương trình $x^2+5x+4-9m=0$ (1), với m là tham số. Tìm giá trị của m để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1\left(x_1^2-1\right)-x_2\left(8x_2^2+1\right)=5$

3. Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x\left(x^3+y^3\right)+6xy(x+y-2)=(x+y)^2(xy+4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)$

Bài 3: *(1,0 điểm)*

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$(2x+5y+1)\left(2^{|x|-1}+y+x^2+x\right)=65$$

Bài 4: *(3,0 điểm)*

Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên cùng mặt phẳng bờ AB, vẽ các tiếp tuyến Ax, By của (O). Trên (O), lấy điểm C (CA < CB) và trên đoạn thẳng OA lấy điểm D (D khác O, A). Đường thẳng vuông góc với CD tại C cắt Ax, By lần lượt tại E, F. AC cắt DE tại G, BC cắt DF tại H, OC cắt GH tại I.

1. Chứng minh hai tam giác AGE, FHC đồng dạng và I là trung điểm của GH.
2. Gọi J, K lần lượt là trung điểm của DE, DF. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.
3. Gọi M là giao điểm của JO và DK. Chứng minh tam giác JOK vuông và ba đường thẳng DE, IM, KO đồng quy.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KHÁNH HÒA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 27

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 1. *(2 điểm)* Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho (P) $y = x^2$ và đường thẳng (d) $y = 2mx + 2m + 3$

a/ Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b/ Gọi y_1, y_2 lần lượt là tung độ các giao điểm của đường thẳng (d) và (P). Tìm tất cả các giá trị m để $y_1 + y_2 \le 5$.

Bài 2. *(2điểm)*

a/ Cho $A = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{2019}$ và $B = 2^{2020}$. Chứng minh rằng: A, B là hai số tự nhiên liên tiếp.

b/ Giải phương trình: $\frac{2x^2 - 3x + 10}{x+2} = 3\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 4}{x+2}}$

Bài 3. *(3 điểm)* Cho hai đường tròn (O) và (O') không cùng bán kính, cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Các tiếp tuyến tại A của (O) và (O') cắt (O') và (O) lần lượt tại C và D. Trên đường thẳng AB lấy M sao cho B là trung điểm đoạn AM.

a/ chứng minh hai tam giác ABD và CBA đồng dạng

b/ Chứng minh $MB^2 = BD.BC$

c/ Chứng minh $ADMC$ là tứ giác nội tiếp

Bài 4. *(2 điểm)*

a/ Chứng minh rằng với mọi số thực a, b luôn có: $a^2 + b^2 \ge \frac{1}{2}(a+b)^2$ và $ab \le \frac{1}{4}(a+b)^2$

b/ Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $5(x^2 + y^2 + z^2) - 9x(y+z) - 18yz = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{2x - y - z}{y+z}$

Bài 5. *(1 điểm)* Huyện KS có 33 công ty, huyện KV có 100 công ty. Biết rằng, mỗi công ty của huyện KS hợp tác với ít nhất 97 công ty huyện KV. Chứng minh rằng có ít nhất một công ty của huyện KV hợp tác với tất cả các công ty của huyện KS.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 28

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1: *(1,0 điểm).*

Cho a,b,c là ba số thực thỏa điều kiện $a+b+c=1$. Tính giá trị của biểu thức: $A=a^3+b^3+c^3-3(ab+c)(c-1)$.

Câu 2: *(2,5 điểm).*

a) Giải phương trình: $5\sqrt{x-1}-\sqrt{x+7}=3x-4$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x+y)-xy=4 \\ xy(x+y-4)=-2 \end{cases}$.

Câu 3: *(1,5 điểm).*

Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Gọi K là hình chiếu vuông góc của M lên NP.

Chứng minh: KM là tia phân giác BKC.

Câu 4: *(2,0 điểm).*

Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $[0;2]$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$.

a) Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2<6$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Câu 5: *(2,0 điểm).*

Cho tam giác đều ABC. Gọi M, N là hai điểm nằm trên cạnh BC sao cho $MAN=30^\circ$ (M nằm giữa B và N). Gọi K là giao điểm của hai đường tròn (ABN) và (ACM). Chứng minh rằng:

a) Hai điểm K và C đối xứng với nhau qua AN.

b) Đường thẳng AK đi qua tâm đường tròn (AMN).

Câu 6: *(1,0 điểm).*

Cho m,n là hai số nguyên. Chứng minh rằng: nếu $7(m+n)^2+2mn$ chia hết cho 225 thì mn cũng chia hết cho 225.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẠC LIÊU

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 29

(Đề thi có 02 trang)

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1: (4 điểm)

a) Chứng minh rằng số có dạng $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không phải là số chính phương, trong đó $n \in N, n > 1$.

b) Rút gọn biểu thức: $B = \left(13 - 4\sqrt{3}\right)\left(7 + 4\sqrt{3}\right) - 8\sqrt{20 + 2\sqrt{43 + 24\sqrt{3}}}$.

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Một người mang trứng ra chợ bán. Tổng số trứng bán ra được tính như sau: Ngày thứ nhất bán được 8 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Ngày thứ hai bán được 16 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Ngày thứ ba bán được 24 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết trứng. Biết số trứng bán được mỗi ngày đều bằng nhau. Hỏi tổng số trứng người đó bán được là bao nhiêu và bán hết trong mấy ngày ?

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{7x + y} + \sqrt{2x + y} = 5 \\ \sqrt{2x + y} + x - y = 2 \end{cases}$.

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Cho phương trình $2018x^2 - \left(m - 2019\right)x - 2020 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\sqrt{x_1^{\ 2} + 2019} - x_1 = \sqrt{x_1^{\ 2} + 2019} + x_2 \ .$$

b) Giải phương trình: $2\left(x^2 + 2\right) = 5\sqrt{x^3 + 1}$.

Câu 4: (4,0 điểm)

Cho ΔABC không cân, biết ΔABC ngoại tiếp đường tròn $\left(I\right)$. Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn $\left(I\right)$. Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC, biết AD cắt đường tròn $\left(I\right)$ tại điểm N $\left(N \neq D\right)$, gọi K là giao điểm của AI và EF.

a) Chứng minh rằng AK.AI = AN.AD và các điểm I, D, N, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn $\left(I\right)$.

Câu 5: (4,0 điểm)

Cho đường tròn $(O;R)$ và hai điểm B, C cố định sao cho góc $BOC = 120^0$. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho ΔABC nhọn. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AC và F là điểm đối xứng với C qua AB. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE, ΔACF cắt nhau tại K $(K \neq A)$. Gọi H là giao điểm của BE và CF.

a) Chứng minh KA là phân giác trong góc BKC và tứ giác BHCK nội tiếp.
b) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác BHCK lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác BHCK theo R.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
GIA LAI

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Đề số 30

(Đề thi có một trang)

Câu 1 *(2,0 điểm).*

a) Rút gọn biểu thức: $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

b) Tính thể tích của hình cầu, biết diện tích mặt cầu là $36\pi cm^2$

Câu 2 *(2,0 điểm).*

a) Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+m-2$, m là tham số. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2-3y^2+2xy-2x-10y+4=0$.

Câu 3 *(2,0 điểm).*

a) Giải phương trình: $\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}-2=2\sqrt{(x-1)(5-x)}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x^2+y^2)(x+y+2)=4(y+2)\\ x^2+y^2+(y+2)(x+y+2)=4(y+2)\end{cases}$

Câu 4 *(3,0 điểm).*

Cho đường tròn $(O;R)$, DC là một dây cố định không đi qua O. Gọi S là điểm di động trên tia đối của DC (S không trùng D). Qua S kẻ hai tiếp tuyến SA, SB với đường tròn $(O;R)$, (A, B là hai tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của DC.

a) Chứng minh 5 điểm S, A, B, I, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi H là giao điểm của SO và AB. Chứng minh $DHC = DOC$.

c) Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi S di động.

Câu 5 *(1,0 điểm).*

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $xy+yz+zx=5$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $3x^2+3y^2+z^2$.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẠC LIÊU

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 31

(Đề thi có 01 trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 1. *(2,0 điểm):* Tính giá trị của biểu thức $T=\left(2\sqrt{3}+1\right)\left(3\sqrt{2}-1\right)\sqrt{13-4\sqrt{3}}\sqrt{19+6\sqrt{2}}$

Bài 2. *(1,5 điểm):* Cho hàm số $y=2x^2$ có đồ thị là (P) và hàm số $y=6x+m+4$ có đồ thị là (d).Tìm m để (P) và (d) tiếp xúc nhau

Bài 3. *(1,5 điểm):* Tính số đo góc nhọn α biết $10\sin^2\alpha+6\cos^2\alpha=8$

Bài 4. *(1,5 điểm):* Biết rằng $\underbrace{111...1}_{2018\text{chữ số}1}\ \underbrace{5555...5}_{2018\text{chữ số}5}$ là tích của hai số lẻ liên tiếp. Tính tổng hai số lẻ đó

Bài 5. *(1,5 điểm):* Cho tam giác ABC có $C-B=90^0$ và AH là đường cao của tam giác. Chứng minh rằng $AH^2=BH.CH$

Bài 6. *(2 ,0điểm):* Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y=4\\x^3+y^3=4x^2+4y^2-12\end{cases}$

Bài 7. *(1,5điểm):* Cho đường tròn $(O;R)$.Hai dây AB và CD song song với nhau sao cho tâm O nằm trong dải song song tạo với AB và CD. Biết khoảng cách giữa hai dây đó bằng $11cm$ và $AB=10\sqrt{3}cm;CD=16cm$. Tính R

Bài 8. *(1,5điểm):* Cho các số a,b,c,x,y,z đều khác 0 và thõa mãn các đều kiện

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ và $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$. Chứng minh rằng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Bài 9. *(1,5điểm):* Cho tam giác ABC cân tại A $\left(A<90^0\right)$, đường vuông góc với AB tại A cắt đường thẳng BC tại D.Dựng DE vuông góc với $AC(E\in AC)$. Gọi H là trung điểm BC .Chứng minh rằng $AH=HE$

Bài 10. *(2,0 điểm):* Cho phương trình $x^2+2(a+b)x+4ab=0$ (x là ẩn số; a, b là tham số). Tìm điều kiện của a và b để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt trong đó có ít nhất một nghiệm dương

Bài 11. *(1,5 điểm) :* Cho a,b,c là ba số thực thõa điều kiện $a+b+c=10$.Tính giá trị nhỏ nhất của $M=a^2+b^2+c^2$

Bài 12. *(2,0 điểm):* Cho đường tròn (O) đường kính BC. Điểm A thuộc đường tròn (O). Kẻ $AH\perp BC(H\in BC)$. Gọi I, K theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác AHB, AHC. Đường thẳng IK cắt AB, AC lần lượt tại M, N

a. Chứng minh tam giác AMN vuông cân

b. Chứng minh $S_{AMN}\le\frac{1}{2}S_{ABC}$

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÀ RỊA VŨNG TÀU

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 32

(Đề thi có 01 trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1: *(3 điểm)*

a. Rút gọn biểu thức $A=\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x\geq 0, x\neq 1$

b. Giải phương trình $x^2+\frac{9x^2}{(x-3)^2}=40$

c. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2y^2=-1 \\ 2x^3-y^3=2y-x \end{cases}$

Câu 2(2 điểm)

a. Cho các số thực a,b thỏa mãn $a+b\geq 2$. Chứng minh phương trình $ax^2+bx-2a+2=0$ luôn có nghiệm.

b. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m;n) thỏa mãn phương trình $2^m.m^2 = 9n^2 - 12n + 19$.

Câu 3: *(1 điểm)* Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}$$

Câu 4 *(3 điểm)* Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC với AB< AC. Gọi I là trung điểm của BC. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại J khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IBJ cắt đường thẳng AB tại M khác B và đường tròn ngoại tiếp tam giác ICJ cắt đường thẳng AC tại N khác C.

a. Chứng minh rằng $BJM = CJN$ và ba điểm M,I,N thẳng hàng.

b. Chứng minh JA là tia phân giác của góc BJN và OA vuông góc với MN.

c. Tia phân giác của góc BAC cắt MN tại E. Tia phân giác của các góc BME và CNE lần lượt cắt BE,CE tại P,Q. Chứng minh PB.QE=PE.QC.

Bài 5 *(1 điểm)* Trên mặt phẳng cho 17 điểm phân biệt, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Giữa hai điểm bất kì trong ba điểm đã cho ta nối một đoạn thẳng và trên đoạn thẳng đó ghi một số nguyên dươn (các số ghi trên các đoạn thẳng là các số nguyên dương khác nhau). Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có cạnh là các đoạn thẳng đã nối mà tổng các số ghi trên ba cạnh của tam giác đó chia hết cho 3.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KON TUM

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 33

(Đề thi có 01 trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1 : *(2,0 điểm)*

1. Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{5}}.(3+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$

2. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức $Q=\dfrac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ tại $x=2020-2\sqrt{2019}$

Câu 2 : *(2,5 điểm)*

1.Cho parapol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+m^2+1$, m là tham số. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parapol (P) tại hai điểm $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ sao cho $\dfrac{y_A}{x_B}+\dfrac{y_B}{x_A}=\dfrac{-38}{5}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2-6=0 \\ (x+y-1)^2-\left(\dfrac{2}{x-y}\right)^2-3=0 \end{cases}$ (I)

Câu 3 : *(2,5 điểm)*

Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB cố định và đường kính CD thay đổi sao cho CD không vuông góc cũng không trùng với AB. Gọi d là tiếp tuyến tại A của $(O;R)$. Các đường thẳng BC
và BD cắt d tương ứng tại E và F

1. Chứng minh rằng $CDFE$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi M là trung điểm của EF và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDEF$. Chứng minh rằng tứ giác $KMBO$ là hình bình hành.
3. Gọi H là trực tâm tam giác DEF, chứng minh H luôn chạy trên một đường tròn cố định.

Câu 4 : *(2,0 điểm)*

1. Cho số thực x thỏa mãn $-1\le x\le 1$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\ge 2-x^2$.
2. Cho tập hợp A gồm 41 phần tử là các số nghuên khác nhau thỏa mãn tổng của 21 phần tử bất kỳ lớn hơn tổng của 20 phần tử còn lại. Biết các số 401 và 402 thuộc tập A. Tìm tất cả các phần tử của tập hợp A.

Câu 5 : *(1,0 điểm)* Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2a, BC=a\sqrt{2}$. Lấy đoạn AB làm đường kính, dựng về phía ngoài hình chữ nhật nửa đường tròn. Điểm M thuộc nữa đường tròn đó. Các đường thẳng MD, MC
cắt AB lần lượt tại N, L. Chứng minh $\dfrac{AL^2+BN^2}{AB^2}=1$.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 34

(Đề thi có 01 trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (Vòng 1)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 1

a, Giải phương trình $\dfrac{26x+5}{\sqrt{x^2+30}}+2\sqrt{26x+5}=3\sqrt{x^2+30}$

b, Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ (x+2y)(2+3y^2+4xy)=27 \end{cases}$

Bài 2

a, Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn $(x^2-x+1)(y^2+xy)=3x-1$

b, Với x,y là các số thực thay đổi thỏa mãn $1\le y\le 2$ và $xy+2\ge 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{x^2+4}{y^2+1}$

Bài 3 Cho hình vuông ABCD, đường tròn (O) nội tiếp hình vuông tiếp xúc với các cạnh AB, AD tại hai điểm E,F. Gọi G là giao điểm các đường thẳng CE và BF.

a, Chứng minh rằng năm điểm A,F,O,G,E cùng nằm trên một đường tròn

b, Gọi giao điểm của đường thẳng FB và đường tròn là M(M≠F). CMR M là trung điểm của đoạn thẳng BG.

c, CMR trực tâm của tam giác GAF nằm trên đường tròn (O)

Bài 4 Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn xy + yz + xz =1. Chứng minh:

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\ge\frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3$$

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 35

(Đề thi có 01 trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (Vòng 2)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1.

a. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2+y^2+4xy=8 \\ (x+y)(x^2+xy+2)=8 \end{cases}$.

b. Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{27+x^2+x}}{2+\sqrt{5-(x^2+x)}}=\dfrac{\sqrt{27+2x}}{2+\sqrt{5-2x}}$

Câu 2.

a. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có

$$\left[(27n+5)^7+10\right]^7+\left[(10n+27)^7+5\right]^7+\left[(5n+10)^7+27\right]^7$$

chia hết cho 42.

b. Với x,y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện

$$4x^2+4y^2+17xy+5x+5y\ge 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=17x^2+17y^2+16xy$.

Câu 3. Cho tam giác ABC cân tại A, có đường tròn nội tiếp (I). Các điểm E,F theo thứ tự thuộc các cạnh CA,AB (E khác C và A; F khác B và A) sao cho EF tiếp xúc với đường tròn (I) tại điểm P. Gọi K,L lần lượt là hình chiếu vuông góc của E,F trên BC. Giả sử FK cắt EL tại điểm J. Gọi H là hình chiếu vuông góc của J trên BC.

a. Chứng minh rằng HJ là phân giác của góc EHF.

b. Kí hiệu S_1,S_2 lần lượt là diện tích của các tứ giác $BFJL$ và $CEJK$. Chứng minh rằng $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{BF^2}{CE^2}$.

c. Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng ba điểm P,J,D thẳng hàng.

Câu 4. Cho M là tập tất cả 4039 số nguyên liên tiếp từ -2019 đến 2019. Chứng minh rằng trong 2021 số đôi một phân biệt được chọn bất kì từ M luôn tồn tại ba số phân biệt có tổng bằng 0.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
AN GIANG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 36

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 1. (2,0 điểm) Rút gọn

$$A=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{1-\sqrt{3}}\right)^2.$$

Bài 2. (2,0 điểm)

Phương trình $x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})x+\sqrt{6}=0$ có các nghiệm đều là nghiệm của phương trình $x^4+bx^2+c=0$ $(*)$. Tìm $b;c$ và giải phương trình $(*)$ ứng với $b;c$ vừa tìm được.

Bài 3. (2,0 điểm)

Cho hàm số $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ có đồ thị (P).

a) Xác định hệ số a biết đồ thị (P) đi qua điểm $A(\sqrt{5};\sqrt{50})$. Vẽ đồ thị hàm số ứng với a vừa tìm được.

b) Với giá trị a vừa tìm ở trên, cho biết điểm $M(m;n)$ thuộc đồ thị (P). Hỏi điểm $N(n;m)$ có thuộc đồ thị (P) được hay không? Tìm điểm đó nếu có (m,n là hai số khác 0).

Bài 4. (1,0 điểm)

Cho $x;y$ là hai số thỏa mãn $x+y=1$. Hãy tính

$$A=x^4+y^4-2x^3-2x^2y^2+x^2-2y^3+y^2.$$

Bài 5. (2,0 điểm)

Cho hình chữ nhật $ABCD$, hai điểm K,P thuộc hai cạnh AD và BC sao cho tam giác DKP đều và có cạnh $18\,cm$. Biết đường chéo BD đi qua trung điểm N của đoạn KP. Đường thẳng qua A song song với KP cắt BC tại M.

a) Tính diện tích hình chữ nhật $ABCD$.

b) Chứng minh rằng tứ giác $AKNM$ nội tiếp.

Bài 6. (1,0 điểm)

Một chiếc bút chì có dạng hình trụ có đường kính đáy $8\,mm$ và chiều cao bằng $200\,mm$. Thân bút chì được làm bằng gỗ, phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng hình trụ có chiều cao bằng chiều dài bút và đáy là hình tròn có bán kính $1\,mm$. Tính thể tích phần lõi và phần gỗ của bút chì.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
SƯ PHẠM HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 37

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (vòng 1)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1. a) Cho a là số thực khác 1 và -1. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2+3}{\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2+3}\div\dfrac{a^3+1}{a^3-1}-\dfrac{2a}{a-1}$.

b) Cho các số thực x, y, a thoản mãn $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{y^4x^2}}=a$.

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$.

Câu 2. Trên quãng đường dài 20 km, tại cùng một thời điểm, bạn An đi bộ từ A đến B và bạn Bình đi bộ từ B đến A. Sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát, An và Bình gặp nhau tại C và cùng nghỉ lại 15 phút (vận tốc của An trên quãng đường AC không thay đổi, vận tối của Bình trên quãng đường BC không thay đổi). Sau khi nghỉ, An đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc của An trên quáng đường AC là 1 km/h, Bình đi tiếp đến A với vận tốc lớn hơn vận tốc của Bình trên quãng đường BC là 1 km/h. Biết rằng An đến B sớm hơn so với Bình đến A là 48 phút. Hỏi vận tốc của An trên quãng đường AC là bao nhiêu?

Câu 3. Cho các đa thức $P(x)=x^2+ax+b$, $Q(x)=x^2+cx+d$ với a, b, c, d là các số thực..

a) Tìm tất cả các giá trị của a, b để 1 và a là nghiệm của phương trình $P(x)=0$.

b) Giả sử phương trình $P(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $Q(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 sao cho $P(x_3)+P(x_4)=Q(x_1)+Q(x_2)$. Chứng minh rằng $|x_1-x_2|=|x_3-x_4|$.

Câu 4. Cho đường tròn (O), bán kính R, ngoại tiếp tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC (A_1 thuộc BC, B_1 thuộc CA, C_1 thuộc AB). Đường thẳng A_1C_1 cắt đường tròn (O) tại A' và C' (A_1 nằm giữa A' và C_1). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A' và C' cắt nhau tại B'.

a) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $HC_1.A_1C=A_1C_1.HB_1$.

b) Chứng minh rằng ba điểm B, B', O thẳng hàng.

c) Khi tam giác ABC là tam giác đều, hãy tính $A'C'$ theo R.

Câu 5. Cho các số thực x, y thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=xy(x-2)(y+6)+13x^2+4y^2-26x+24y+46.$$

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 38

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (vòng 2)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1. a) Cho a là số thực khác 1 và -1. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2+3}{\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2+3}\div\dfrac{a^3+1}{a^3-1}-\dfrac{2a}{a-1}$.

b) Cho các số thực x, y, a thoản mãn $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{y^4x^2}}=a$.

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$.

Câu 2. Trên quãng đường dài $20\,\text{km}$, tại cùng một thời điểm, bạn An đi bộ từ A đến B và bạn Bình đi bộ từ B đến A. Sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát, An và Bình gặp nhau tại C và cùng nghỉ lại 15 phút (vận tốc của An trên quãng đường AC không thay đổi, vận tối của Bình trên quãng đường BC không thay đổi). Sau khi nghỉ, An đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc của An trên quáng đường AC là 1 km/h, Bình đi tiếp đến A với vận tốc lớn hơn vận tốc của Bình trên quãng đường BC là 1 km/h. Biết rằng An đến B sớm hơn so với Bình đến A là 48 phút. Hỏi vận tốc của An trên quãng đường AC là bao nhiêu?

Câu 3. Cho các đa thức $P(x)=x^2+ax+b$, $Q(x)=x^2+cx+d$ với a, b, c, d là các số thực..

a) Tìm tất cả các giá trị của a, b để 1 và a là nghiệm của phương trình $P(x)=0$.

b) Giả sử phương trình $P(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $Q(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 sao cho $P(x_3)+P(x_4)=Q(x_1)+Q(x_2)$. Chứng minh rằng $|x_1-x_2|=|x_3-x_4|$.

Câu 4. Cho đường tròn (O), bán kính R, ngoại tiếp tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC (A_1 thuộc BC, B_1 thuộc CA, C_1 thuộc AB). Đường thẳng A_1C_1 cắt đường tròn (O) tại A' và C' (A_1 nằm giữa A' và C_1). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A' và C' cắt nhau tại B'.

a) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $HC_1.A_1C=A_1C_1.HB_1$.

b) Chứng minh rằng ba điểm B, B', O thẳng hàng.

c) Khi tam giác ABC là tam giác đều, hãy tính $A'C'$ theo R.

Câu 5. Với a, b là hai số thực thỏa mãn $ab=\dfrac{9}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{(a-1)^4+1}+\sqrt{(b-1)^4+1}$.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KON TUM

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi chuyên: **TOÁN (chung)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Đề số 39

(Đề thi có một trang)

Câu 1 : *(2,0 điểm)*

1. Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{5}}.\ 3+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$

2. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức $Q=\dfrac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ tại $x=2020-2\sqrt{2019}$

Câu 2 : *(2,5 điểm)*

1.Cho parapol $P\ :y=x^2$ và đường thẳng $d\ :y=2x+m^2+1$, m là tham số. Tìm m để

đường thẳng d cắt parapol P tại hai điểm $A\ x_A;y_A\ ,B\ x_B;y_B$ sao cho $\dfrac{y_A}{x_B}+\dfrac{y_B}{x_A}=\dfrac{-38}{5}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2-6=0 \\ x+y-1\ ^2-\left(\dfrac{2}{x-y}\right)^2-3=0 \end{cases}$ (I)

Câu 3 : *(2,5 điểm)* Cho đường tròn $O;R$ có đường kính AB cố định và đường kính CD thay đổi sao cho CD không vuông góc cũng không trùng với AB. Gọi d là tiếp tuyến tại A của $O;R$. Các đường thẳng BC và BD cắt d tương ứng tại E và F

1. Chứng minh rằng $CDFE$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi M là trung điểm của EF và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDEF$. Chứng minh rằng tứ giác $KMBO$ là hình bình hành.
3. Gọi H là trực tâm tam giác DEF, chứng minh H luôn chạy trên một đường tròn cố định.

Câu 4 : *(2,0 điểm)*

1. Cho số thực x thỏa mãn $-1\le x\le 1$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\ge 2-x^2$.
2. Cho tập hợp A gồm 41 phần tử là các số nghuên khác nhau thỏa mãn tổng của 21 phần tử bất

kỳ lớn hơn tổng của 20 phần tử còn lại. Biết các số 401 và 402 thuộc tập A. Tìm tất cả các phần tử của tập hợp A.

Câu 5 : *(1,0 điểm)*

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2a,BC=a\sqrt{2}$. Lấy đoạn AB làm đường kính, dựng về phía ngoài hình chữ nhật nửa đường tròn. Điểm M thuộc nữa đường tròn đó. Các đường thẳng MD, MC cắt AB lần lượt tại N, L. Chứng minh $\dfrac{AL^2+BN^2}{AB^2}=1$.

----------Hết---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi chuyên: **TOÁN (chung)**
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Đề số 40

(Đề thi có một trang)

Câu 1 (*2,0 điểm*).

1) Rút gọn biểu thức $A=2\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{20}-20\sqrt{\frac{1}{5}}$.

2) Cho hai đường thẳng (d): $y=(m-2)x+m$ và $(\Delta): y=-4x+1$

a) Tìm m để (d) song song với (Δ).

b) Chứng minh đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(-1;2)$ với mọi m.

c) Tìm tọa độ điểm B thuộc (Δ) sao cho AB vuông góc với (Δ).

Câu 2 (*2,0 điểm*).

1) Giải phương trình $x^4+2x^2+x\sqrt{2x^2+4}=4$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)^2=xy+3y-1\\ x+y=\dfrac{x^2+y+1}{1+x^2}\end{cases}$

Câu 3 (*2,0 điểm*).

Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+m^2+4=0$ (1) (m là tham số)

1) Giải phương trình khi $m=2$.

2) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn: $x_1^2+2(m+1)x_2=3m^2+16$.

Câu 4 (*3,0 điểm*).

Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ các nửa đường tròn đường kính AB và AC sao cho các nửa đường tròn này không có điểm nào nằm trong tam giác ABC. Đường thẳng d đi qua A cắt các nửa đường tròn đường kính AB và AC theo thứ tự ở M và N (khác điểm A). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC.

1) Chứng minh tứ giác BMNC là hình thang vuông.

2) Chứng minh IM = IN.

3) Giả sử đường thẳng d thay đổi nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện đề bài. Hãy xác định vị trí của đường thẳng d để chu vi tứ giác BMNC lớn nhất.

Câu 5 (*1,0 điểm*).

Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2\le 3y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{(y+2)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}$.

--------------- **HẾT** ---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi chuyên: **TOÁN (chung)**
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Đề số 41

(Đề thi có một trang)

Câu 1 (2,0 điểm).

1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $P=\dfrac{2019}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3}{x-9}$.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=\left(m^2-1\right)x+7$ và đường thẳng $y=3x+m+5$ (với $m\neq\pm1$) là hai đường thẳng song song.

3) Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 6cm, BC = 10cm. Tính độ dài đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC.

4) Một hình trụ có diện tích hình tròn đáy là 9π cm², độ dài đường sinh là 6cm. Tính thể tích hình trụ đó.

Câu 2 (1,5 điểm). Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right):\left(\dfrac{a^2+a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)$ với $a>0, a\neq1$.

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Tìm các giá trị nguyên của a để P nhận giá trị là số nguyên.

Câu 3 (2,5 điểm).

1) Cho phương trình $x^2+2(m-2)x-m^2-5=0$ (với m là tham số).

a) Giải phương trình với $m=0$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1<x_2$) thỏa mãn $|x_1|-|x_2+1|=5$.

2) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{4-x}+2\right)=-2x$.

Câu 4 (3,0 điểm). Cho hình bình hành $ABCD$ (BD < AC). Đường tròn (O) đường kính AC cắt các tia AB, AD lần lượt tại H, I khác A. Trên dây HI lấy điểm K sao cho $HCK = ADO$. Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt BD tại E (D nằm giữa B, E). Chứng minh rằng:

1) $\Delta CHK \sim \Delta DAO$ và $HK=\dfrac{AO.KC}{OB}$.

2) K là trung điểm của đoạn HI.

3) $EI.EH+4OB^2<AE^2$.

Câu 5 (1,0 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y)^2+4=3y-5x+2\sqrt{(x+1)(y-1)}\\ \dfrac{3xy-5y-6x+11}{\sqrt{x^3+1}}=5\end{cases}$

2) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=2019xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2+1+\sqrt{2019x^2+1}}{x}+\frac{y^2+1+\sqrt{2019y^2+1}}{y}+\frac{z^2+1+\sqrt{2019z^2+1}}{z}\le 2019.2020xyz.$$

--------------- **HẾT** ---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PTNK HỒ CHÍ MINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 42

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (vòng 1)**
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 1 (1.0 điểm). Tìm a, biết: $\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{4\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}-\dfrac{\left(\sqrt{2a+1}+\sqrt{a+1}\right)\left(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a+1}\right)}{a\left(\sqrt{a}+1\right)}=1$.

Bài 2 (2.0 điểm). a) Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+2}-x\right)\left(\sqrt{2x-5}-1\right)=0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+y+3}=\sqrt{2x+3y+1}\\ x(y+1)-4(x+y)+54=0\end{cases}$.

Bài 3 (2.0 điểm). Cho phương trình (ẩn x, tham số m): $x^2-(2m+1)x-12=0$. (1)

a) Với các giá trị nào của số thực m thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1+x_2-2x_1x_2=25$?

b) Tìm tất cả các giá trị của số thực m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2-x_2^2-7(2m+1)=0$.

Bài 4 (2.0 điểm).

a) Từ ngày $1/1/2019$ đến ngày $20/5/2019$, giá bán lẻ xăng RON 95 có đúng bốn lần tăng và một lần giảm. Các thời điểm thay đổi giá xăng RON 95 trong năm 2019 (tính đến ngày $20/5/2019$) được cho bởi bảng sau (giá xăng được tính theo đơn vị đồng, giá được niêm yết cho 1 lít xăng):

Ngày	1/1	2/3	2/4	17/4	2/5	17/5
Giá	17600	18540	20030	21230	...	21590

Từ 16 giờ chiều $2/5/2019$, giá bán lẻ 1 lít xăng RON 95 tăng thêm khoảng 25% so với giá 1 lít xăng RON 95 ngày $1/1/2019$. Nếu ông A mua 100 lít xăng RON 95 ngày $2/1/2019$ thì cũng với số tiền đó ông A sẽ mua được bao nhiêu lít xăng RON 95 vào ngày $3/5/2019$? Cũng trong hai ngày đó ($2/1$ và $3/5$), ông B đã mua tổng cộng 200 lít xăng RON 95 với tổng số tiền là 3850000 đồng, hỏi ông B đã mua bao nhiêu lít xăng RON 95 vào ngày $3/5/2019$?

b) Tứ giác $ABCD$ có chu vi $18cm$, $AB=\dfrac{3}{4}BC$, $CD=\dfrac{5}{4}BC$ và $AD=2AB$. Tính độ dài các cạnh của tứ giác $ABCD$. Biết $AC=CD$, tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Bài 5 (3.0 điểm). HÌnh chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(\mathcal{T})$ có tâm O, bán kính $R=2a$. Tiếp tuyến của $(\mathcal{T})$ tại C cắt các tia AB, AD lần lượt tại E, F.

a) Chứng minh rằng $AB.AE=AD.AF$ và $BEFD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Đường thẳng d qua A, d vuông góc với BD và d cắt $(\mathcal{T})$, EF theo thứ tự tại M, N $(M\neq A)$. Chứng minh rằng $BMNE$ là tứ giác nội tiếp và N là trung điểm của EF.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF. Tính IN theo a.

--------------- HẾT ---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PTNK HỒ CHÍ MINH

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi chuyên: **TOÁN (vòng 2)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Đề số 43

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (2 điểm) Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\,(1)$ thỏa mãn các điều kiện: $a>0$ và $2\sqrt{|ac|}<\sqrt{|b|}<a+c$.

a) Chứng minh rằng phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và

$$(1-x_1)(1-x_2)>0 \text{ và } (1+x_1)(1+x_2)>0.$$

b) Biết rằng $a>c$. Chứng minh rằng $-1<x_1, x_2<1$.

Câu 2. (1,5 điểm)

a) Tìm tất cả những số tự nhiên n sao cho 2^n+1 chia hết cho 9.

b) Cho n là số tự nhiên $n>3$. Chứng minh rằng 2^n+1 không chia hết cho 2^m-1 với mọi số tự nhiên m sao cho $2<m\le n$.

Câu 3. (2 điểm) Cho a và b là hai số thực phân biệt thỏa mãn điều kiện $a^4-4a=b^4-4b$.

a) Chứng minh rằng $0<a+b<2$.

b) Biết rằng $a^4-4a=b^4-4b=k>0$. Chứng minh rằng $-\sqrt{k}<ab<0$.

Câu 4. (3 điểm) Cho tam giác ABC có $AB<AC$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là các đường phân giác trong và ngoài góc $\angle BAC$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên d_1, d_2. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên d_1, d_2.

a) Chứng minh rằng MN và PQ lần lượt đi qua trung điểm của AB, AC.

b) Chứng minh rằng MN và PQ cắt nhau trên BC.

c) Trên d_1 lấy các điểm E và F sao cho $\angle ABE=\angle BCA$ và $\angle ACF=\angle CBA$. (E thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa C; F thuộc nửa mặt phẳng bờ AC chứa B). Chứng minh rằng $\dfrac{BE}{CF}=\dfrac{AB}{AC}$.

d) Các đường thẳng BN và CQ lần lượt cắt AC và AB tại các điểm K và L. Chứng minh rằng các đường thẳng KE và LF cắt nhau trên đường thẳng BC.

Câu 5. (1,5 điểm) Trong một buổi gặp gỡ giao lưu giữa các học sinh đến từ n quốc gia, người ta nhận thấy rằng cứ 10 học sinh bất kỳ thì có ít nhất 3 học sinh đến từ cùng một quốc gia.

a) Gọi k là số các quốc gia có đúng 1 học sinh tham dự buổi gặp gỡ. Chứng minh rằng $n<\dfrac{k+10}{2}$.

b) Biết rằng số các học sinh tham dự buổi gặp gỡ là 60. Chứng minh rằng có thể tìm được ít nhất là 15 học sinh đến từ cùng một quốc gia.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG TRỊ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 44

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (vòng 2)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1. *(2 điểm)*

a) Cho biểu thức: $A = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}+1} + \frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{2x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \quad (x \ge 0, x \ne 1)$

Tìm tất cả các giá trị của x để A ≤ 0

b) Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ và $|x_1| - |x_2| = -4$.

Câu 2. *(2 điểm)*

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+6y=13 \\ 2x^2 = (x+2y-3)(2-x) \end{cases}$
2. Giải phương trình: $x^6 + (x^3-3)^3 = 3x^5 - 9x^2 - 1$

Câu 3. *(2 điểm)*

1) Cho số tự nhiên có 3 chữ số $\overline{abc}$ chứng minh rằng $\overline{abc}$ chia hết cho 21 khi và chỉ khi $a-2b+4c$ chia hết cho 21.
2) Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn $x^y = z-1$

Câu 4. *(3 điểm)* Trên đường tròn (O) đường kính AB lấy điểm C (C khác A và B), điểm D nằm trên đường thẳng AB sao cho BD = AC. Kẻ DE vuông góc với AC tại E, đường phân giác góc BAC cắt DE và (O) tại G và F (F khác A). Đường thẳng CG cắt AC và (O) tại I và H (H khác C). Chứng minh:

a) Tứ giác AGDH nội tiếp đường tròn
b) Ba điểm H, D và F thẳng hàng
c) I là chung điểm của AD

Câu 5. *(1 điểm)*

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c+2=abc$.

Chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \le \frac{3}{2}$

--------------- HẾT ---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
SƯ PHẠM HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 45

(Đề thi có một trang)

ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi chuyên: **TOÁN (vòng 2)**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1. Cho hai số thực phân biệt a và b thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3=a^2b^2\left(ab-3\right)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b-ab$.

Câu 2. Cho các đa thức $P\left(x\right)=m_1x^2+n_1x+k_1$, $Q\left(x\right)=m_2x^2+n_2x+k_2$, $R\left(x\right)=m_3x^2+n_3x+k_3$ với m_i, n_i, k_i là các số thực và $m_i>0, i=1,2,3$. Giả sử phương trình $P\left(x\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt a_1, a_2; phương trình $Q\left(x\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt b_1, b_2; phương trình $R\left(x\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt c_1, c_2 thỏa mãn

$$P\left(c_1\right)+Q\left(c_1\right)=P\left(c_2\right)+Q\left(c_2\right),$$
$$P\left(b_1\right)+R\left(b_1\right)=P\left(b_2\right)+R\left(b_2\right),$$
$$Q\left(a_1\right)+R\left(a_1\right)=Q\left(a_2\right)+R\left(a_2\right).$$

Chứng minh rằng $a_1+a_2=b_1+b_2=c_1+c_2$.

Câu 3.

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $x^2y^2-4x^2y+y^3+4x^2-3y^2+1=0$.

b) Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 14. Chứng minh rằng abc cũng chia hết cho 14.

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$ và $AB>AC$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao của tam giác ABC hạ từ A, B. Gọi F là chân đường vuông góc hạ từ B lên đường thẳng AO.

a) Chứng minh rằng B, D, E, F là bốn đỉnh của một hình thang cân.

b) Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của BC.

c) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng AO và đường tròn $\left(O\right)$, M và N lần lượt là trung điểm của EF và CP. Tính số đo góc BMN.

Câu 5. Cho tập hợp X thỏa mãn tính chất sau: Tồn tại 2019 tập con $A_1, A_2,..., A_{2019}$ của X sao cho mỗi tập con $A_1, A_2,..., A_{2019}$ có đúng ba phần tử và hai tập A_i, A_j đều có đúng một phần tử chung với mọi $1\le i<j\le 2019$. Chứng minh rằng

a) Tồn tại 4 tập hợp trong các tập hợp $A_1, A_2,..., A_{2019}$ sao cho giao của 4 tập hợp này có đúng một phần tử.

b) Số phần tử của X phải lớn hơn hoặc bằng 4039.

--------------- **HẾT** ---------------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đề số 1

Câu 1:

a) Điều kiện: $x \ge 1$

$(1) \Leftrightarrow x^2(x-1) - 12x\sqrt{x-1} + 20 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x\sqrt{x-1} - 2\right)\left(x\sqrt{x-1} - 10\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\sqrt{x-1} = 2 \\ x\sqrt{x-1} = 10 \end{array}\right.$

TH1: $x\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện)

TH2: $x\sqrt{x-1} = 10 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = 5$.

b) Hệ phương trình $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y + xy + x = 5 \\ x^2y + x^2y^2 +^2 = 7 \end{cases}$

Đặt $xy = a$, $x = b$. Ta có:

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} ab + a + b = 5 \\ ab + a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab + a + b = 5 \\ (a+b)^2 - ab = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow (a+b)^2 + a + b - 5 = 7 \Leftrightarrow (a+b)^2 + (a+b) - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (a+b-3)(a+b+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b = 3 \\ a+b = -4 \end{array}\right.$

TH1: $a + b = 3$ suy ra $ab = 2$

$\Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow (a;b) = (1;2);(2;1)$

$\Rightarrow (x;y) = \left(2;\frac{1}{2}\right);(1;2)$

TH2: $a + b = -4$ suy ra $ab = 9$

$\Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình: $X^2 + 4X + 9 = 0$ (phương trình vô nghiệm)

Câu 2:

a)Ta có:

$P(9) - P(6) = 2019$

$\Leftrightarrow (8ba + 9b + c) - (36a + 6b + c) = 2019$

$\Leftrightarrow 45a + 3b = 2019(1)$

Lại có: $P(10)-P(7)=(100a+10b+c)-(29a+7b+c)=51a+3b$

Đặt $P(10)-P(7)=t \Rightarrow 51a+3b=t(2)$

Trừ vế theo vế (2) cho (1) ta có: $6a=t-2019$, mà $6a$ chẵn, 2019 lẻ nên t lẻ, ta có điều phải chứng minh

b) Ta có:

$$x^2y+x+y \vdots xy^2+y+1$$
$$\Leftrightarrow y\left(x^2y+x+y\right)-x\left(xy^2-y+1\right) \vdots xy^2+y+1$$
$$\Leftrightarrow y^2-x \vdots xy^2+y+1$$

TH1: $y^2=x \Rightarrow \begin{cases} y=m \\ x=m^2 \end{cases}$:Với mọi m là số tự nhiên khác 0

Thử lại thấy thỏa mãn

TH2: $y^2>x$, ta có:

$$xy^2+y+1 \le y^2-x$$
$$\Leftrightarrow (x-1)y^2+y+x+1 \le 0$$

(vô lí do $x, y \ge 1$)

TH3: $y^2<x$

Ta có:

$$xy^2+y+1<x-y^2$$
$$\Leftrightarrow x\left(y^2-1\right)+y^2+y+1<0$$

vô lí do $x, y \ge 1$)

Vậy, $(x;y)=\left(m^2;m\right)$ với m thuộc tập số tự nhiên khác 0

Câu 3:

Từ đẳng thức $abc=a+b+c+2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{2}{abc}=1$

Đặt $\dfrac{1}{a}=\dfrac{x}{y+z};\dfrac{1}{b}=\dfrac{y}{z+x};\dfrac{1}{c}=\dfrac{z}{x+y}(x,y,z>0)$

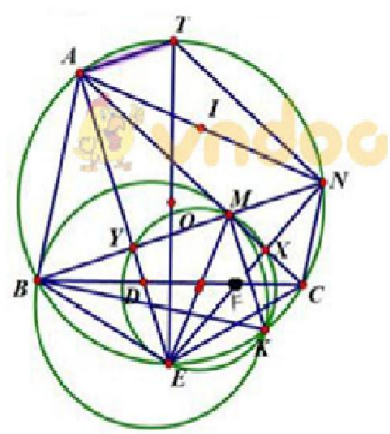
Ta có: $P=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{2ab}}+\dfrac{1}{\sqrt{2bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{2ca}}$

Mặt khác: $\dfrac{1}{\sqrt{2ab}}=\sqrt{\dfrac{xy}{(x+z)(y+z)}}.\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+z}+\dfrac{y}{y+z}\right).\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Tương tự thì ta cũng có:

$$\frac{1}{\sqrt{2bc}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+x} + \frac{z}{z+x}\right).\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2ca}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{z}{y+z} + \frac{x}{y+x}\right).\frac{1}{\sqrt{2}}$$



Cộng vế theo vế ta có: $P \le \frac{3}{2\sqrt{2}}$ Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$. Hay là $a = b = c = 2$

Câu 4:

a)

Có $\widehat{EDF} = 180^\circ - \widehat{BDE}$(hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{EDF}$=180°-$\widehat{DEC} - \widehat{DCE}$=$\widehat{ANC} - \widehat{DCE} = \widehat{ANC} - \widehat{ENC} = \widehat{ANE}$(Do cung $DE = EC$)

Suy ra ΔDEF đồng dạng với ΔNEA

b) Ta có $EB = EC = EM$ do E là điểm chính giữa cung BC và theo giả thiết $EM = EC$. Mặt khác AE là tia phân giác $\widehat{BAM}$ suy ra AE là trung trực đoạn thẳng BM hay vuông góc với tia NM

Chứng minh tương tự thì NE là tia phân giác của $\widehat{BNC}$, suy ra NE là đường trung trực của đoạn thẳng MC hay NE vuông góc với AM .

Từ hai điều trên ta có M là trực tâm của ΔAEN

c)

Gọi giao điểm của AM với EN là X , của BN với AE là Y

Gọi giao điểm của IM với đường tròn (O) là T . Dễ thấy rằng $ATNM$ là hình bình hành nên TN vuông góc với EN suy ra ET là đường kính đường tròn (O)

$\Rightarrow \widehat{EKT}$=90° hay $\widehat{MKE}$=90° hay K thuộc đường tròn đường kính EM , suy ra năm điểm X,Y,M,K,E cùng thuộc một đường tròn

Ta có $\widehat{KMC} = \widehat{KMX} = \widehat{XEK} = \widehat{NEK} = \widehat{NBK}$(do tứ giác $MEKX$ nội tiếp)

Suy ra CM là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác BMK

Câu 5:

Ta tô màu các đoạn thẳng có đầu mút là 2 trong 12 điểm đã cho:

-Tô đỏ các đoạn thẳng có độ dài nhỏ hơn 673

-Tô xanh các đoạn thẳng còn lại

thì mỗi tam giác có ít nhất một cạnh màu đỏ. Ta sẽ chứng minh có ít nhất 2 tam giác có 3 cạnh đều là màu đỏ.

+Xét 6 điểm trong 12 điểm đã cho. Từ một điểm A nối đến các đoạn thẳng còn lại tạo thành 5 đoạn thẳng, được tô tới hai màu xanh, nên tồn tại 3 cạnh cùng màu. Giả sử đó là AB, AC, AD

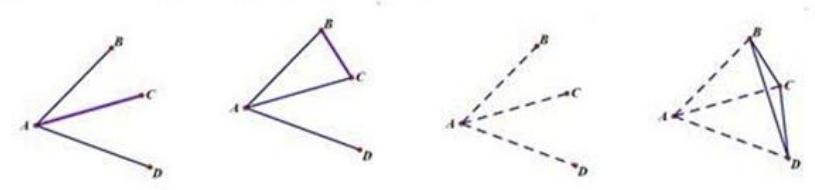
Nếu AB, AC, AD tô đỏ (nét liền, h1) thì tam giác BCD phải có 1cạnh tô đỏ(h1)., chẳn hạn BC thì tam giác ABC có 3 cạnh tô đỏ(h2). Nếu AB, AC, AD tô xanh (nét đứt, h3). Do mỗi tam giác phải có ít nhất một cạnh đỏ nên BC, CD, BD và tam giác BCD có 3 cạnh đỏ(h1).

Suy ra trong 6 điểm này luôn tồn tại ít nhất một tam giác có 3 cạnh màu đỏ

+Xét 6 điểm còn lại, chứng minh tương tự

Vậy trong 12 điểm luôn tồn tại ít nhất 2 tam giác có hai cạnh đều màu đỏ. Suy ra tồn tại ít nhất hai tam giác mà chu vi mỗi tam giác bé hơn 2019

(Từ trái qua phải lần lượt là h1,h2,h3,h4)



Đề số 2

Câu 1: a) (1,0 điểm)

Có $x^2 = \left(\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}\right)^2 = 6 + 2\sqrt{3^2 - \left(5+2\sqrt{3}\right)} = 6 + 2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

$$= 6 + 2\left(\sqrt{3}-1\right) = 4 + 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}+1\right)^2 .$$

Do $x > 0$ nên $x = \sqrt{3}+1$.

Suy ra $(x-1)^2 = 3$ hay $x^2 - 2x = 2$, do đó $P = -2$.

b) (1,0 điểm)

Từ $ab + bc + ca = 2019$ suy ra $a^2 + 2019 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$.

Tương tự có $b^2 + 2019 = (b+c)(b+a)$, $c^2 + 2019 = (c+a)(c+b)$.

Vế trái của đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a^2 - bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2 - ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2 - ab}{(c+a)(c+b)}$$

$$= \frac{\left(a^2 - bc\right)(b+c) + \left(b^2 - ca\right)(c+a) + \left(c^2 - ab\right)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Khai triển và làm gọn biểu thức trên tử ta được kết quả là 0 nên có đpcm.

Câu 2: a) (1,0 điểm)

Điều kiện xác định: $x \geq -1$.

Phương trình cho tương đương với $(x+1)\left[x^2 - x - 8 + \sqrt{x+1}\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x^2 - x - 8 + \sqrt{x+1} = 0 \end{array}\right. .$$

Ta có $x^2 - x - 8 + \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow (x-3)\left[x + 2 + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right] = 0$ (1)

Do $x + 2 + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2} > 0$, $\forall x \geq -1$ nên (1) $\Leftrightarrow$ x = 3.

Tập nghiệm của phương trình là $\{-1;3\}$.

b) (1,0 điểm)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 3 + x^2y^2 \ (1) \\ \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} + 3 = x^3y^3 \quad (2) \end{cases}$$

+ Điểu kiện xác định: $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

+ Ta có $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} + 3 = x^3y^3 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{y}\right)^3 + (-xy)^3 = 3.\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{y}.(-xy)$

Sử dụng hằng đẳng thức

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \dfrac{a+b+c}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$ ta thu được (2) $\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y} = -xy \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - xy = 0 \end{array}\right. .$$

Trường hợp 1: $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y} = -xy \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 1 = -x^2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Thử vào (1) thấy không thỏa mãn.

+ Trường hợp 2: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-xy=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=xy \Leftrightarrow x+y=(xy)^2$.

Có (1) $\Leftrightarrow x^2+y^2=3x^2y^2+x^4y^4 \Leftrightarrow (x+y)^2-2xy=3x^2y^2+x^4y^4$ hay có

$x^4y^4-2xy=3x^2y^2+x^4y^4 \Leftrightarrow xy(3xy+2)=0 \Leftrightarrow xy=-\frac{2}{3}$ (do có điều kiện $xy\neq 0$).

Vậy $\begin{cases} x+y=(xy)^2 \\ xy=-\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{4}{9} \\ xy=-\frac{2}{3} \end{cases}$, dẫn đến x,y là các nghiệm của phương trình

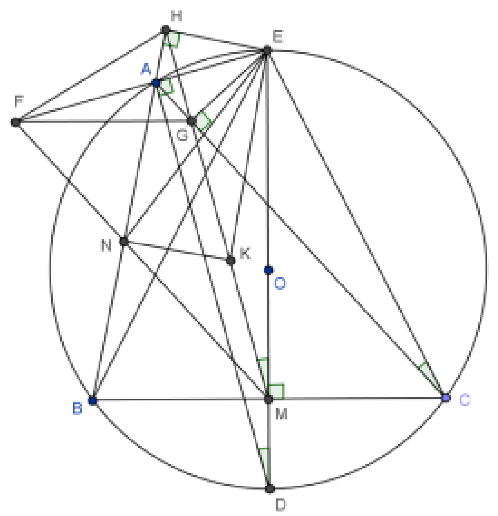
$t^2-\frac{4}{9}t-\frac{2}{3}=0$ hay phải có $(x;y)$ là $\left(\frac{2+\sqrt{58}}{9};\frac{2-\sqrt{58}}{9}\right)$ hoặc $\left(\frac{2-\sqrt{58}}{9};\frac{2+\sqrt{58}}{9}\right)$.

+ Kết luận: Hệ đã cho có đúng hai nghiệm $(x;y)$ là $\left(\frac{2+\sqrt{58}}{9};\frac{2-\sqrt{58}}{9}\right)$,

$\left(\frac{2-\sqrt{58}}{9};\frac{2+\sqrt{58}}{9}\right)$.

Câu 3: (3,0 điểm)

Hình vẽ:



a) (1,0 điểm)

+ Có AD, AE là các phân giác trong và ngoài của góc BAC nên chúng vuông góc, suy ra ED là đường kính của (O) .

+ Lại có D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC của (O) nên có OD vuông góc với BC tại trung điểm M. Vậy D,M,O,E thẳng hàng và DE $\perp$ BC.

+ Xét tứ giác EGMC có $EGC = EMC = 90^0$ nên EGMC là tứ giác nội tiếp.

+ Suy ra $EMG = ECG$, lại có $ECG = EDA$ nên $EMG = EDA$, suy ra GM // AD.

b) (1,0 điểm)

+ AE ⊥ AD và MG // AD nên MG ⊥ FE. Lại có EG ⊥ AC và MF // AC nên EG ⊥ MF. Từ đó suy ra G là trực tâm tam giác MFE, do đó FG ⊥ ME hay FG ⊥ DE.

+ Có FG // MC (vì cùng vuông góc với DE), FM // GC nên FMCG là hình bình hành, suy ra FG = MC.

+ Từ AE là phân giác của HAG và HG ⊥ AE suy ra đường thẳng AE là đường trung trực của đoạn HG.

Suy ra FH = FG. Vậy FH = MC.

c) (1,0 điểm)

+ Từ $EAB = EGM$ (vì cùng cộng với ECB ra 180^0), $ABE = GME$ (vì cùng bằng ECA), suy ra $\Delta EAB \sim \Delta EGM$ (g.g)

+ Có N và K là các trung điểm của hai cạnh tương ứng là AB và GM nên $EKG = ENA$, suy ra tứ giác EKNH là tứ giác nội tiếp.

+ Lại có $AHE = AGE = 90^0$ (Do H,G đối xứng nhau qua AE) nên dẫn đến $NKE = 90^0$.

Có $NE^2 = EK^2 + KN^2$. Từ $2\left(KE^2 + KN^2\right) \geq \left(KE + KN\right)^2$ có $2NE^2 \geq \left(KE + KN\right)^2$ hay $KE + KN \leq NE\sqrt{2}$, vậy có đpcm.

Câu 4: (1,5 điểm)

a) (0,75 điểm)

+ Ta có $\dfrac{n^5 + 29n}{30} = \dfrac{n^5 - n}{30} + n = \dfrac{n\left(n^4 - 1\right)}{30} + n = \dfrac{(n-1)n(n+1)\left(n^2+1\right)}{30} + n$.

+ Với n nguyên thì $n-1, n, n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên trong ba số này phải có số chia hết cho 2 và có số chia hết cho 3, suy ra $(n-1)n(n+1) \vdots 6$, do đó $n^5 - n \vdots 6$.

+ Nếu $n \vdots 5$ thì $\left(n^5 - n\right) \vdots 5$; nếu n chia cho 5 dư một trong các số 1,2,3,4 thì n^4 chia cho 5 dự 1, suy ra $n\left(n^4 - 1\right) \vdots 5$.

+ Vì $(5;6) = 1$ nên suy ra $\left(n^5 - n\right) \vdots 30$, theo đó $\dfrac{n^5 + 29n}{30} = \dfrac{n^5 - n}{30} + n$ là số nguyên.

b) (0,75 điểm)

+ Giả sử tồn tại cặp số tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu. Khi đó $a,b\in N^*$ mà

$\begin{cases}2(x^2+y^2-3x+2y)-1=a^2\\5(x^2+y^2+4x+2y+3)=b^2\end{cases}$, suy ra $a^2+b^2=7\left[(x+1)^2+(y+1)^2\right]$

Nói cách khác phương trình (1): $A^2+B^2=7(X^2+Y^2)$ có nghiệm $(X;Y;A;B)$ với $X,Y\in N^*$ và $A,B\in N$. Ta coi $(X;Y;A;B)$ là bộ nghiệm của (1) thỏa mãn điều kiện X + Y nhỏ nhất.

+ Từ (1) có $(A^2+B^2)\vdots 7$. Nhận thấy một số chính phương chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 0.1.2.4 nên $(A^2+B^2)\vdots 7$ khi và chỉ khi $A\vdots 7$ và $B\vdots 7$, dẫn tới biểu diễn $A=7A_1,\ B=7B_1$ với $A_1,B_1\in N^*$. Khi đó (1) trở thành $X^2+Y^2=7(A_1^2+B_1^2)$.

Lập luận tương tự dẫn đến $X=7X_1, Y=7Y_1$ với $X_1,Y_1\in N^*$.

Câu 5: (1,5 điểm)

a) (0,75 điểm)

+ Ta chứng minh kết quả $2(a^2-ab+b^2)^2\ge a^4+b^4$ (1).

Thật vậy , (1) $\Leftrightarrow$ $2\left(a^4+b^4+a^2b^2+2a^2b^2-2ab(a^2+b^2)\right)\ge a^4+b^4$

$\Leftrightarrow$ $(a^2+b^2-2ab)^2\ge 0$.

$\Leftrightarrow$ $(a-b)^4\ge 0$, bất đẳng thức đúng, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b

+ Tương tự có (2): $2(b^2-bc+c^2)^2\ge b^4+c^4$, (3) : $2(c^2-ca+a^2)^2\ge c^4+a^4$.

+ Thấy các vế của (1), (2), (3) đều không âm, nhân theo vế các bất đẳng thức này ta được

$$8(a^2-ab+b^2)^2(b^2-bc+c^2)^2(c^2-ca+a^2)^2\ge(a^4+b^4)(b^2+c^4)(c^4+a^4)=8$$

Hay $(a^2-ab+b^2)^2(b^2-bc+c^2)^2(c^2-ca+a^2)^2\ge 1$ (*).

Do $a^2-ab+b^2,\ b^2-bc+c^2, c^2-ca+a^2\ge 0$ nên từ (*) suy ra

$(a^2-ab+b^2)^2(b^2-bc+c^2)^2(c^2-ca+a^2)^2\ge 1$, có đpcm.

b) (0,75 điểm)

Gọi a_i là số bút mà học sinh thứ I (trong 32 học sinh) nhận được (i = 1,2,..,32).

Như vậy $a_i\in N^*$ và $a_1+a_2+...+a_{32}\le 49$. Ta kí hiệu:

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2\ ,$$
$$\ldots\ldots.$$
$$S_{32} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{32}$$

Với mỗi $i \in \{1;2;\ldots;32\}$ ta có : $1 \le S_i \le 49$, $S_i + 25 \le 74$; $S_i + 50 \le 99$, $S_i + 75 \le 124$.

Xét 128 số gồm: 32 số nhóm (1) là $S_1, S_2, \ldots, S_{32}$,

32 số nhóm (2) là $S_1 + 25, S_2 + 25, \ldots, S_{32} + 25,$

32 số nhóm (3) là $S_1 + 50, S_2 + 50, \ldots, S_{32} + 50$,

32 số nhóm (4) là $S_1 + 75, S_2 + 75, \ldots, S_{32} + 75$,

Thấy 128 số này lấy giá trị nguyên dương trong phạm vi từ 1 đến 124, theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số nào đó trong chúng bằng nhau. Vì $S_1 < S_2 < \ldots < S_{32}$ nên dãy 32 giá trị trong mỗi nhóm ở trên tăng dần kể từ trái qua phải. Suy ra tồn tại $j > i > 1$ mà $S_J + k_1.25 = S_J + k_2.25$ với $k_1, k_2 \in \{0,1,2,3\}$ và $k_1 \ne k_2$ (do hai số bằng nhau thì không cùng nhóm).

Vì $S_j > S_i$ nên $0 < S_j - S_i = 25(k_1 - k_2)$, suy ra $k_1 - k_2 \in \{1,2,3\}$. Lại có $S_j - S_i < S_j \le 49$ nên $25(k_1 - k_2) < 49$, suy ra $k_1 - k_2 = 1$. Vậy $S_j - S_i = 25$ hay $a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j = 25$, nghĩa là nhóm gồm các học sinh từ học sinh thứ $i+1$ đến học sinh thứ j nhận được tổng cộng 25 cây bút.

Đề số 3

Câu 1:

1/ Ta có VT $= \dfrac{a}{ab+a+1} + \dfrac{ab}{abc+ab+a} + \dfrac{abc}{ab\cdot ac+abc+ab} = \dfrac{a}{ab+a+1} + \dfrac{a\cdot b}{1+ab+a} + \dfrac{1}{a+1+ab}$

$= \dfrac{ab+a+1}{ab+a+1} = 1 = VP(dpcm)$

2/ Đặt x=2 a, y=b, z=c ta được $xy + yz + zx = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$

Khi đó $2A = \dfrac{bc}{4a^2} + \dfrac{2ac}{b^2} + \dfrac{2ab}{c^2} = \dfrac{yz}{x^2} + \dfrac{zx}{y^2} + \dfrac{xy}{z^2} = xyz\left(\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} + \dfrac{1}{z^3}\right)$

Mặt khác từ hằng đẳng thức $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} + \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{3}{xyz} = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{xy} - \dfrac{1}{yz} - \dfrac{1}{2x}\right) = 0$

ta có $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} + \dfrac{1}{z^3} = \dfrac{3}{xyz} \Rightarrow 2A = xyz \cdot \dfrac{3}{xyz} = 3$. Vậy $A = \dfrac{3}{2}$.

Câu 2:

1/ Điều kiện xác định $\forall x \in \mathbb{R}$

Từ giả thiết ta nhận thấy x > 0 (do vế trái dương),

Chia cả hai vế cho x, ta có $\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=3$

Đặt $t=\frac{1}{x}(t>0)$ ta được phương trình $\sqrt{t^2+t+2}+\sqrt{t^2-t+1}=3$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{t^2+t+2}-2\right)+\left(\sqrt{t^2-t+1}-1\right)=0 \Leftrightarrow \frac{t^2+t-2-4}{\sqrt{t^2+t+2}+2}+\frac{t^2-t+1-1}{\sqrt{t^2-t+1}+1}=0$

$\Leftrightarrow (t-1)\left(\frac{t+2}{\sqrt{t^2+t+2}+2}+\frac{t}{\sqrt{t^2-t+1}+1}\right)=0 \Leftrightarrow t-1=0$

$\Leftrightarrow (t-1)\left(\frac{t+2}{\sqrt{t^2+t+2}+2}+\frac{1}{\sqrt{t^2-t+1}+1}\right)=0 \Leftrightarrow t-1=0$

Với $t-1=0 \Rightarrow x=1$

Vậy phương trình có đúng một nghiệm $x=1$.

2/ Điều kiện: $x\neq 0; y\neq 0$

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{2} \\ x\left(y+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}+y\right)=5 \end{cases} \left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=\frac{9}{2} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=\frac{9}{2} \\ \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=5 \end{cases}$

Đặt $u=x+\frac{1}{x}, v=y+\frac{1}{y}$ lúc này (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=\frac{9}{2} \\ u\cdot v=5 \end{cases}$

Vậy u, v là 2 nghiệm của phương trình $x^2-\frac{9}{2}x+5=0$, Phương trình này có hai nghiệm

$X_1=2, X_2=\frac{5}{2}$

Trường hợp 1: $u=2, v=\frac{5}{2}$ cho ta hệ: $\begin{cases} x+\frac{1}{x}=2 \\ y+\frac{1}{y}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ 2y^2-5y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$

Hay $(1;2)\cdot\left(1;\frac{1}{2}\right)$ là các nghiệm của hệ đã cho.

Trường hợp 2: $u=\frac{5}{2}, v=2$ ta có hệ $\begin{cases} x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \\ y+\frac{1}{y}-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+2=0 \\ y^2-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$

hay $(2;1),\left(\frac{1}{2};1\right)$ là các nghiệm của hệ đã cho.

Kết luận: Hệ đã cho có 4 nghiệm $(x ; y)$ là $(1;2)\cdot\left(1;\frac{1}{2}\right);(2;1),\left(\frac{1}{2};1\right)$

Câu 3:

1/ Ta có $y^2+y=x^4+x^3+x^2+x \Leftrightarrow 4y^2+4y+1=4x^4+4x^3+4x^2+4x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2y+1)^2=\left(2x^2+x\right)^2+(3x+1)(x+1)\\(2y+1)^2=\left(2x^2+x+1\right)^2-x(x+1)\end{cases}$$

Ta thấy : nếu $x<-1$hoặc $x>2$ thì $(3x+1)(x+1)>0$ và $x(x-2)>0$ nên từ (1) và (2) ta suy ra $\left(2x^2+x+1\right)^2>(2y+1)^2>\left(2x^2+x\right)^2$ (*) Loại vì không có số nguyên y thỏa mãn.

Từ đó suy ra $-1\le x\le 2 \Rightarrow x\in\{-1,0,1,2\}$

Xét $x=2 \Rightarrow y^2+y=30 \Rightarrow y=5, y=-6$

Xét $x=1 \Rightarrow y^2+y=4$ loại

Xét $x=0 \Rightarrow y^2+y=0 \Rightarrow y=0, y=-1$

Xét $x=-1 \Rightarrow y^2+y=0 \Rightarrow y=0, y=-1$

Vậy hệ đã cho có 6 nghiệm là $(0,5)(2\cdot-6)(0:0),(0;-1),(-1,0),(-1,-1)$

2/ Trước tiên, ta chứng minh x ⋮ 3.

Đặt $y^5 = a$, $a \in N^*$, ta có $2x^2 – 1 = y^{15} \Leftrightarrow 2x^2 = a^3 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$ (1)

Gọi ƯCLN$(a + 1; a^2 – a + 1) = d$ $(d \in N^*)$, ta có: $a + 1$ d, $a^2 – a + 1$ ⋮ d.

Suy ra $(a^2 – a + 1) – (a + 1)(a – 2) = 3$ ⋮ d$\Rightarrow$ d = 1 hoặc d = 3

* Nếu d = 1 thì từ (1), ta có:

$\begin{cases}a+1=2\\a^2-a+1=x^2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a+1=x^2\\a^2-a+1=2\end{cases}$ (loại vì $a \notin N^*$)

$\begin{cases}a+1=2\\a^2-a+1=x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\x^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\x=1\end{cases}$ (loại vì phải có $x > 1$)

* nếu d = 3 thì từ (1) ta có: $2x^2$ ⋮ 9. Vì ƯCLN(2; 9) = 1nên x^2 ⋮ 9 $\Rightarrow$ x ⋮ 3 (*)

Chứng minh x ⋮ 5.

Đặt $y^3 = b$, $b \in N^*$, ta có: $2x^2 – 1 = b^5 \Leftrightarrow 2x^2 = b^5 + 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 = (b + 1)(b^4 – b^3 + b^2 – b + 1)$ (2)

Gọi ƯCLN$(b + 1; b^4 – b^3 + b^2 – b + 1) = k$ $(k \in N^*)$

Ta có: $b + 1$ ⋮ k; $b^4 – b^3 + b^2 – b + 1$ ⋮ k

$\Rightarrow (b^4 - b^3 + b^2 - b + 1) - (b + 1)(b^3 - 2b^2 + 3b - 4) = 5 \,\vdots\, k$

Suy ra k = 1 hoặc k = 5.

* Nếu k = 1 thì từ (2) có

$\begin{cases} b+1=x^2 \\ b^4-b^3+b^2-b+1=2 \end{cases}$ (loại vì $b \notin N^*$) Hoặc: $\begin{cases} b+1=2 \\ b^4-b^3+b^2-b+1=x^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ x=1 \end{cases}$ (loại vì phải có x > 1)

* Nếu k = 5 thì từ (2) suy ra $2x^2 \,\vdots\, 25$. Vì ƯCLN(2; 25) = 1 nên $x^2 \,\vdots\, 25 \Rightarrow x \,\vdots\, 5$ (**)

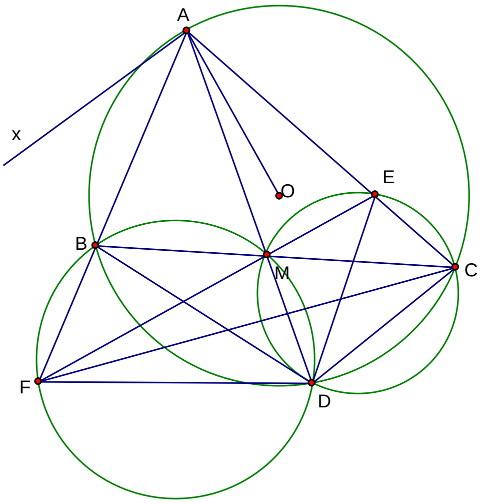
Từ (*) và (**) suy ra $x \,\vdots\,$ BCNN(3; 5) hay $x \,\vdots\, 15$ (đpcm)

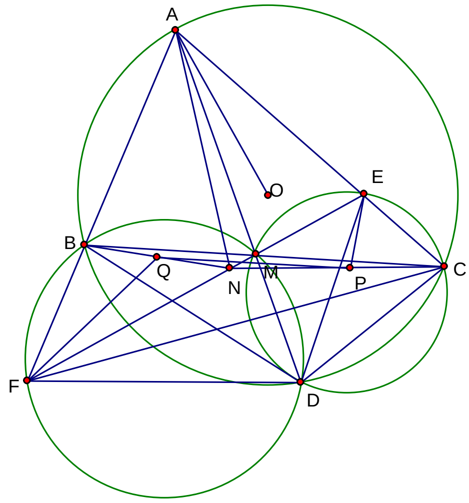
Câu 4:

1/ Do các tứ giác M E C D, M B F D nội tiếp nên $DEC = DMC = DFB \quad (1)$

Tứ giác ABDC nội tiếp nên $DCE = DCA = DBF \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta BDF - \Delta CDE (g-g)$ đpcm





2/ Ta có $\overline{BMF} = BDF, EMC = EDC$ và $BDF = CDE.$ (do $\Delta BDF \sim \Delta CDE$), suy ra $BMF = EMC.$ Vậy E, M, F thẳng hàng.

Từ hai tứ giác MECD, MBFD nội tiếp suy ra $AB, AF = AM \cdot AD = AE \cdot AC$,suy ra tứ giác BECF nội tiếp. Do đó $AFE = ACB.$ Vẽ tiếp tuyến Ax của (O) thì

$ACB = BAx$,suy ra Ax // EF. Vậy $OA \perp EF$.

3/ theo tính chất phân giác ta có $\frac{PN}{PC}=\frac{EN}{EC},\frac{QN}{QB}=\frac{FN}{FB}$ và $\frac{NE}{NF}=\frac{AE}{AF}$ suy ra

$$\frac{PN}{PC}:\frac{QN}{QB}=\frac{EN}{EC}:\frac{FN}{FB}=\frac{EN}{FN}.\frac{FB}{EC}=\frac{AE}{AF}\cdot\frac{FB}{EC}=\frac{AB}{AC},\frac{FB}{EC}\quad(3)$$

Ta có $1=\frac{MB}{MC}=\frac{S_{DAB}}{S_{DAC}}=\frac{S_{DAB}}{S_{BDF}}.\frac{S_{BDF}}{S_{CDE}}.\frac{S_{CDE}}{S_{DAC}}=\frac{AB}{BF}\cdot\frac{BF^2}{CE^2}\cdot\frac{CE}{AC}=\frac{AB.BF}{CE\cdot AC}\quad(4)$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{PN}{PC}=\frac{QN}{QB}$, hay PQ // BC.

Câu 5:

Gọi các đường thẳng đã cho là $d_1,d_2,\ldots,d_{2022}$. A_{ij} là giao điểm của đường thẳng d_i và d_j $\left(i,j=\overline{1;2022},i\neq j;A_j=A_n\right)$.

Xét đường thẳng d_n bất kỳ trong số 2022 đường thẳng đã cho. Do không có 3 đường thẳng nào đồng quy nên các giao điểm A_{ij} (n khác i, j) của các cặp đường thẳng d_i và d_j không nằm trên d_n. Do số giao điểm là hữu hạn nên tồn tại một giao điểm gần d_n nhất, giả sử là A_{ij} (nếu có nhiều giao điểm như vậy thì ta chọn 1 giao điểm nào đó) .

Ta sẽ chứng minh tam giác $A_{ij}A_{ni}A_{nj}$ là tam giác đẹp.

Nếu tam giác này bị đường thẳng d_m nào đó trong số 2019 đường thẳng còn lại cắt thì d_m phải cắt ít nhất một trong hai đoạn $A_{ij}A_{ni},A_{ij}A_{nj}$.Giả sử d_m cắt đoạn $A_{ij}A_{ni}$ tại điểm A_{mi} thì A_{mi} gần d_n trái giả thiết A_{ij} gần d_n nhất.

Suy ra, với mỗi đường thẳng d_n luôn tồn tại một tam giác đẹp có cạnh nằm trên d_n. Trên mỗi đường thẳng d_n, ta chọn một cạnh của tam giác đẹp thì ta thu được 2022 cạnh của tam giác đẹp.

Vậy số tam giác đẹp không ít hơn 2022:3 = 674.

Đề số 4

Câu 1.

1. Xét: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Áp dụng đẳng thức ở trên ta có:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2024}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}$$
$$=1-\frac{1}{\sqrt{2025}}=1-\frac{1}{45}=\frac{44}{45}(\text{dpcm})$$

2. Từ giả thiết

$$x^2+\frac{1}{x^2}=23$$
$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=23$$
$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=25\Rightarrow x+\frac{1}{x}=-5\ \ (do\ x<0)$$

Ta có:

$$A=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3.x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=(-5)^3-3(-5)$$
$$=-110$$

Vậy A = -110.

Câu 2.

1. ĐKXĐ: $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2};x\neq 0$

Đặt: $\sqrt{2-x^2}=a$ ta được:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}=2\\ x^2+a^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+x=2ax\\ (a+x)^2-2ax=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+x=2ax\\ (a+x)^2-(a+x)-2=0\quad(1)\end{cases}$$

Giải (1):

$$(a+x)^2-(a+x)-2=0$$
$$\Leftrightarrow(a+x+1)(a+x-2)=0$$

Suy ra: $a+x=-1$ hoặc $a+x=2$

+) Với $a+x=-1\Rightarrow ax=-\frac{1}{2}$ ta được: $x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ (thỏa mãn)

+) Với $a+x=2\Rightarrow ax=1$. Ta tìm được x = 1 (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1;x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$

2. Nhận thấy $x=0$, $y=0$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Với $x\neq 0$. Từ hệ PT, ta có:

$$\begin{cases}3x\left(x^2+y\right)-6x^2y+3x^2=0\\ \left(x^2+y\right)^2-6x^2y+3x^2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(x^2+y\right)^2-3x\left(x^2+y\right)=0$$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y\right)\left(x^2+y-3x\right)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y=0 \\ x^2+y-3x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-x^2 \\ y=-x^2+3x \end{array}\right.$

Với $y=-x^2$. Từ pT (1) $\Rightarrow 2x^3+x=0 \Leftrightarrow x=0$

Với $y=-x^2+3x$. Từ Pt (1) $\Rightarrow x^3-3x^2+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Khi $x=1 \Rightarrow y=2$; Khi $x=2 \Rightarrow y=2$

Vậy nghiệm của hệ PT là $(x,\ y)=\{(0,\ 0);(1;\ 2);(2;\ 2)\}$

Câu 3.

1. Từ $x^2-xy-5x+5y=2$

$\Leftrightarrow x(x-y)-5(x-y)=2$

$\Leftrightarrow (x-y)(x-5)=2$

Vì $2=1.2=2.1=(-1).(-2)=(-2).(-1)$ nên ta có 4 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} x-y=1 \\ x-5=2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=6 \\ x=7 \end{cases}(TM)$

Trường hợp 2: $\begin{cases} x-y=2 \\ x-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=6 \end{cases}(TM)$

Trường hợp 3: $\begin{cases} x-y=-1 \\ x-5=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=3 \end{cases}(TM)$

Trường hợp 4: $\begin{cases} x-y=-2 \\ x-5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \\ x=4 \end{cases}(TM)$

Vậy có 4 cặp (x,y) thỏa mãn là: $(7;\ 6);\ (6;\ 4);\ (3;\ 4);\ (4;\ 6)$.

2. Ta có : $x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x(x^2 - 1)\left[(x^2-4)+5\right]$

$= (x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) + 5(x - 1)(x + 1)x$

Ta có : $(x - 2)(x -1)\, x(x + 1)(x + 2)$ chia hết ch 5 và 6

mà $(5,6) = 1$ nên $(x - 2)(x -1)\, x(x + 1)(x + 2) \vdots 30$

lại có $(x-1)x(x+1)$ Chia hết cho 2 và 3 mà $(2,3)=1$ nên $5(x - 1)x(x+1) \vdots 30$

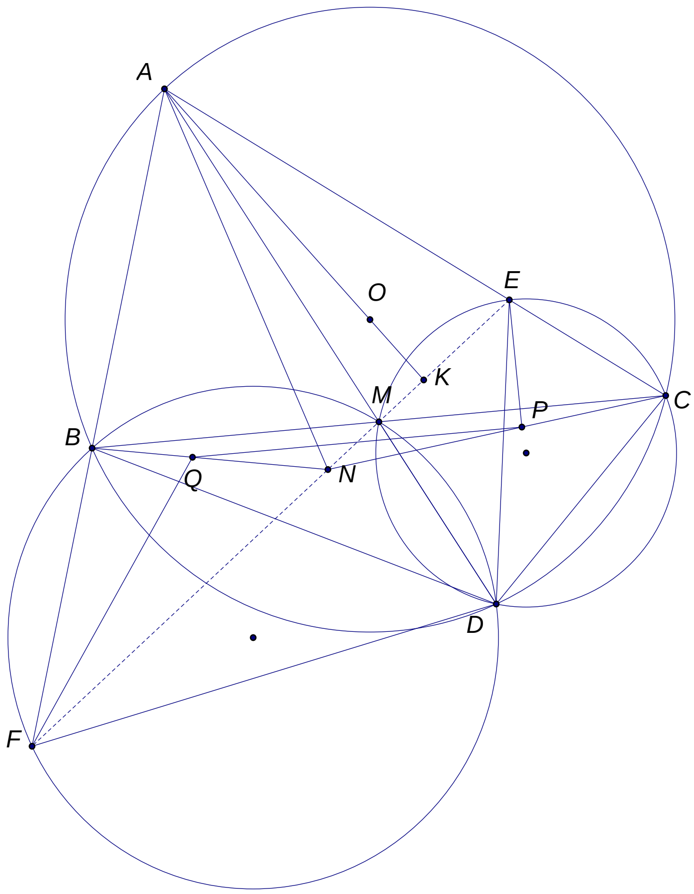
Do đó $x^5 - 1 \vdots 30$

Suy ra $A = (a^{2020} + b^{2020}+c^{2020}) - (a^{2016} + b^{2016} + c^{2016})$

$A = a^{2015}(a^5 - a) + b^{2015}(b^5 - b) + c^{2015}(c^5 - c) \vdots 30$

Vậy $A \vdots 30$

Câu 4.



1. Có $BFD = DMC = DEC; FBD = ACD = DCE \Rightarrow \Delta BDF \backsim \Delta CDE$

2. Tứ giác BMDF nội tiếp $\Rightarrow BDF = BMF$ (cùng chắn cung FB)

Tứ giác CEMD nội tiếp $\Rightarrow CDE = CME$ (cùng chắn cung EC)

Do $\Delta BDF \backsim \Delta CDE$ (cmt) $\Rightarrow BDF = CDE$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow BMF = CME$

Mà các điểm B; M; C thẳng hàng $\Rightarrow$ Các điểm $E;M;F$ thẳng hàng (đpcm)

*) Kẻ AO cắt EF tại K; $OAC = KAE = OCA = \dfrac{180^0 - AOC}{2} = \dfrac{180^0 - 2ABC}{2} = 90^0 - ABC$

$\Rightarrow KAE = 90^0 - ADC = 90^0 - AEK \Rightarrow AEK + KAE = 90^0 \Rightarrow AK \perp KE \Rightarrow AO \perp EF$

3. $\Delta ABM \backsim \Delta ADF \Rightarrow \dfrac{AF}{DF} = \dfrac{AM}{BM}$ và $\Delta ACM \backsim \Delta ADE \Rightarrow \dfrac{AE}{ED} = \dfrac{AM}{CM}$, mà BM = CM (gt)

$\Rightarrow \dfrac{AF}{DF} = \dfrac{AE}{ED} \Rightarrow \dfrac{FN}{NE} = \dfrac{DF}{DE}$ (do $\dfrac{FN}{NE} = \dfrac{AF}{AE}$)

$\Rightarrow \dfrac{FN}{NE} = \dfrac{BF}{CE}$ (do $\Delta BDF \backsim \Delta CDE$) $\Rightarrow \dfrac{FN}{FB} = \dfrac{NE}{CE} \Rightarrow \dfrac{QN}{QB} = \dfrac{NP}{PC} \Rightarrow PQ//BC$ (sử dụng tính chất tia phân giác kết hợp với ta lét đảo)

Câu 5.

Áp dụng Bất đẳng thức Bunhiacopsky ta có :

$(a.1 + b.1 + c.1)^2 \le (a^2 + 1^2 + 1^2)(b^2 + c^2 + 1) = (a^2 + 2)(1 + b^2 + c^2)$ (1)

Do vai trò của a, b, c là như nhau theo nguyên lý Dirichlet thì trong 3 số $a^2 - 1$, b^2-1, c^2-1 luôn tồn tại 2 số cùng dấu, giả sử b^2-1; c^2-1

$\Rightarrow (b^2-1)(c^2-1) \ge 0$

$\Leftrightarrow b^2c^2 - b^2 - c^2 + 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow b^2c^2 + 2b^2 + 2c^2 + 4 \ge 3 + 3b^2 + 3c^2$

$\Leftrightarrow (b^2+2)(c^2+2) \ge 3(1 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \ge 3(a^2+2)(1+b^2+c^2)$ (2)

Từ (1) và (2) , suy ra:

$S = = (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \ge 3(a + b + c)^2 = 3.9 = 27$

Vậy GTNN của S = 27 khi và chỉ khi a = b = c = 1

Đề số 5

Câu 1.

a) (1 điểm)

Ta có $\sqrt{x + 6\sqrt{x-9}} = \sqrt{x-9} + 3$; $\sqrt{x - 6\sqrt{x-9}} = \left|\sqrt{x-9} - 3\right|$

Và $\sqrt{\dfrac{81}{x^2} - \dfrac{18}{x} + 1} = \left|\dfrac{9}{x} - 1\right| = \dfrac{x-9}{x} \Rightarrow A = x.\dfrac{\sqrt{x-9} + 3 + \left|\sqrt{x-9} - 3\right|}{x-9}$

Khi $x \ge 18$ thì $A = \dfrac{2x}{\sqrt{x-9}} = 2\sqrt{x-9} + \dfrac{18}{\sqrt{x-9}} \ge 12$, dấu bằng xảy ra khi x = 18 (1).

Khi $9 < x < 18$ thì $A = \dfrac{6x}{x-9} = 6 + \dfrac{54}{x-9} > 6 + \dfrac{54}{9} = 12$ (2)

Suy ra $A_{\min} = 12$.

b) (1 điểm)

Từ đề bài suy ra x < 0

Suy ra 9x – 8 < 0; 7x – 6 < 0; 5x – 4 < 0; 3x – 2 < 0

Phương trình đã cho trở thành $-9x + 8 - 7x + 6 - 5x + 4 - 3x + 2 + x = 0$

$\Leftrightarrow$ -23x + 20 = 0. Kết luận pt vô nghiệm

Câu 2.

a) (1 điểm)

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử a > b > c > 0.

Từ a + b + c = 3 thì $\Rightarrow\ a>1>c>0$.

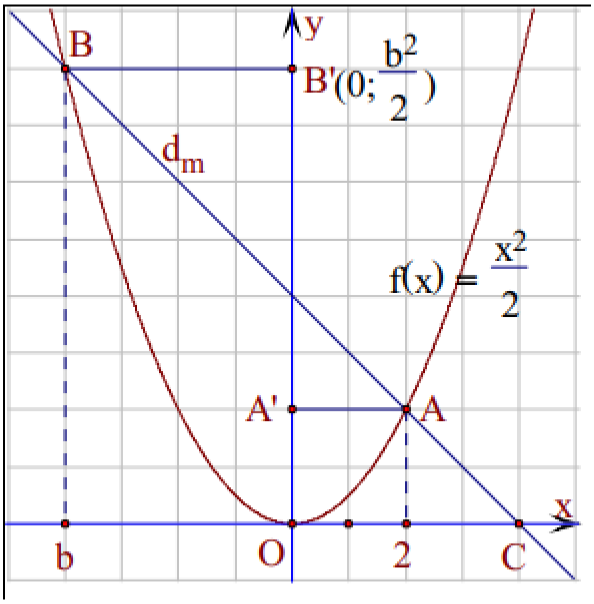
Ba phương trình đã cho lần lượt có các biệt số Δ' là:

$\Delta_1 = 4a^2 - 4b$; $\Delta_2 = 4b^2 - 4c$; $\Delta_3 = 4c^2 - 4a$

Suy ra $\Delta_3 < 0$ (vì $c^2 < 1 < a$) $\Rightarrow$ phương trình $4x^2 + 4cx + a = 0$ vô nghiệm

Và $\Delta_1 > 4a^2 - 4a > 0$ (vì a > b và a > 1) $\Rightarrow$ phương trình $4x^2 + 4ax + b = 0$ có nghiệm.

b) (1,00 điểm) cách 1



Đường thẳng d_m có phương trình là $y = m(x-2)+2$ luôn đi qua điểm $A(2;2)$ của (P) .

Hình chiếu vuông góc của C lên Oy là $O(0;0)$, của A lên Oy là $A'(0;2)$, của $B\left(b;\dfrac{b^2}{2}\right)$ lên Oy là $B'\left(0;\dfrac{b^2}{2}\right)$.

Theo định lí Thales có : $3 = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'O} \Rightarrow A'B' = 3A'O$

Suy ra A’B’ = 6 $\Rightarrow$ OB’ = 8 $\Rightarrow \dfrac{b^2}{2} = 8 \Rightarrow b = \pm 4$

Nếu b = 4, thế vào d_m tìm được m = 3; Nếu b = -4, thế vào d_m tìm được m = -1.

b) Cách 2

Phương trình đường thẳng d_m là $y = mx - 2m + 2 \Rightarrow$ tọa độ điểm C là

$C\left(\dfrac{2m-2}{m};0\right)$

Phương trình hoành độ giao điểm của d_m và $(P): x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$ (1). Vì $A(2;2)$ thuộc (P) và d_m nên (1) có 1 nghiệm $x_A = 2 \Rightarrow B(2m-2;2m^2-4m+2)$

$AB^2 = 4(m-2)^2(m^2+1)$, $AC^2 = \dfrac{4(m^2+1)}{m^2}$ từ AB = 3AC $\Leftrightarrow$ $4(m-2)^2(m^2+1) =$ $9.\dfrac{4(m^2+1)}{m^2}$

$\Leftrightarrow$ $(m-2)^2 m^2 = 9 \Leftrightarrow m(m-2) = \pm 3 \Leftrightarrow$ m = -1 hoặc m = 3.

Kết luận

Câu 3.

a) (1 điểm) Giải phương trình $x^2 - 6(x+3)\sqrt{x+1} + 14x + 3\sqrt{x+1} + 13 = 0$.

Điều kiện $x \geq -1$ khi đó: $(1) \Leftrightarrow (x+1)(x+13) - (6x+15)\sqrt{x+1} = 0$.

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{x+1}\left[(x+13)\sqrt{x+1} - (6x+15)\right] = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $(x+13)\sqrt{x+1} = 6x+15$ (2)

Do 2 vế của (2) đều không âm nên (2)

$\Leftrightarrow (x^2+26x+169)(x+1) = 36x^2 + 180x + 225$

$\Leftrightarrow$ $x^3 - 9x^2 + 15x - 56 = 0 \Leftrightarrow (x-8)(x^2-x+7) = 0$

$\Leftrightarrow$ x = 8 hoặc $x^2 - x + 7 = 0$ (vô nghiệm). Kết luận

b) (1điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8xy + 22y + 12x + 25 = \dfrac{1}{x^3} & (1) \\ y^3 + 3y = (x+5)\sqrt{x+2} & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $x \geq -2$; $x \neq 0 \Rightarrow y \geq 0$

$(2) \Leftrightarrow y^3 + 3y = \sqrt{x+2}^3 + 3\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \left(y - \sqrt{x+2}\right)\left(y^2 + y\sqrt{x+2} + x + 5\right) = 0$

Do $x \geq -2$ và $y \geq 0$ nên $y^2 + y\sqrt{x+2} + x + 5 > 0 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow y = \sqrt{x+2}$

Thay vào (1): $8x\sqrt{x+2} + 22\sqrt{x+2} + 12x + 25 = \dfrac{1}{x^2}$

$$\Leftrightarrow\ 8(x+2)\sqrt{x+2}+3.4(x+2)+3.2\sqrt{x+2}+1=\frac{1}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow\ \left(2\sqrt{x+2}+1\right)^3=\frac{1}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow\ x\left(2\sqrt{x+2}+1\right)=1\ \Leftrightarrow\ x^2+2x+1=x^2-2x\sqrt{x+2}+x+2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2=\left(x-\sqrt{x+2}\right)^2$$

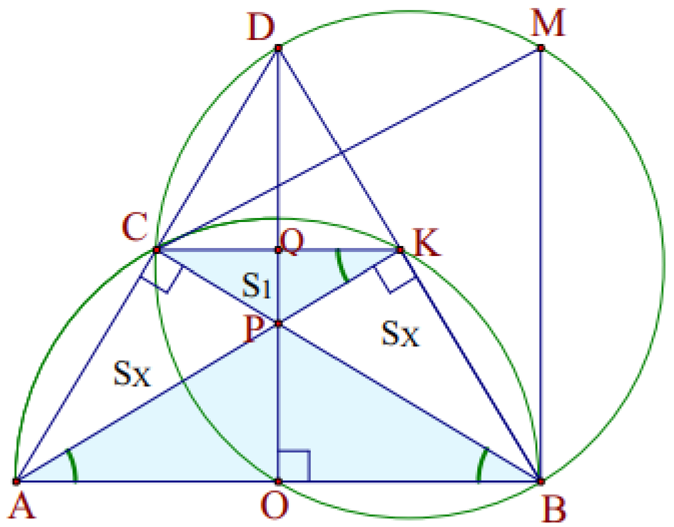
$\Leftrightarrow x+1=x-\sqrt{x+2}$ (vô nghiệm) hoặc $x+1=\sqrt{x+2}-x$ (3)

(3) $\Leftrightarrow$ $2x+1=\sqrt{x+2}$. Với điều kiện $x\ge-\frac{1}{2}$ thì

(3) $\Leftrightarrow 4x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow x=-1$ (loại) hoặc $x=\frac{1}{4}$ (thỏa).

Kết luận : $(x;y)=\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right)$

Câu 4.



Chứng minh được DO là đường cao tam giác DAB và D,P,O thẳng hàng

Chứng minh được ABKC là hình thang

Chứng minh được ABKC là hình thang

Suy ra diện tích của chúng bằng nhau đặt bằng S_x

Hai tam giác KCP và KPD có cùng đường ao nên $\frac{dt(\Delta KCP)}{dt(\Delta KPB)}=\frac{S_1}{S_x}=\frac{CP}{PB}$ (với S_1 là diện tích ΔCPK)

Hai tam giác ACP và APB có cùng đường cao nên

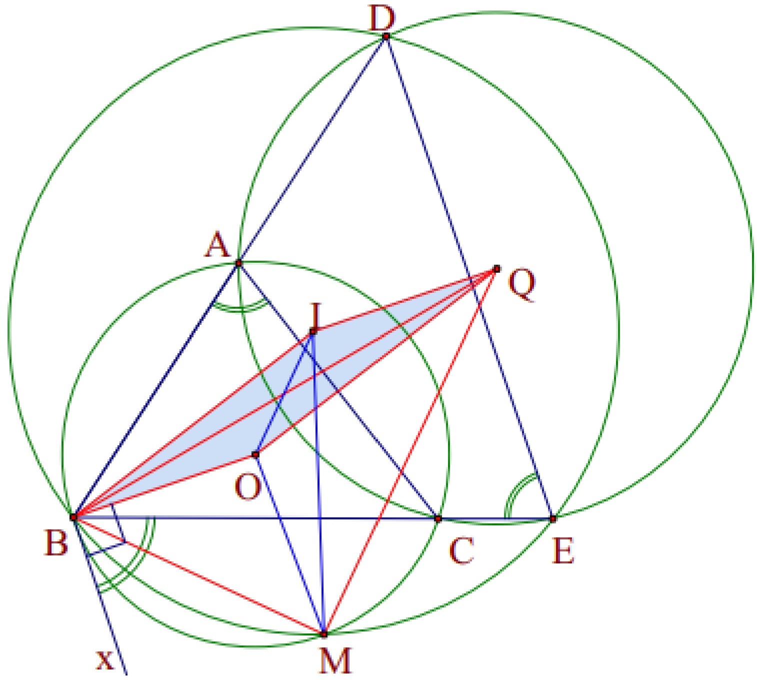
$$\frac{dt(\Delta ACP)}{dt(\Delta APB)} = \frac{S_X}{S_2} = \frac{CP}{PB}$$ (với S_2 là diện tích ΔAPB

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_X} = \frac{S_X}{S_2} \Rightarrow S_X{}^2 = S_1.S_2 = \frac{r^4}{12} \Rightarrow S_X = \frac{r^2\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy diện tích tứ giác ABKC là

$$dt(ABKC) = S_1 + S_2 + 2S_X = \frac{r^3\sqrt{3}}{12} + \frac{r^2\sqrt{3}}{3} + \frac{r^2\sqrt{3}}{3} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$$

Câu 5.



Vẽ tia tiếp tuyến Bx như hình vẽ, gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE, ta có

$CBx = CAB$ (cùng chắn cung CB)

$BED = CAB$ (tứ giác ACED nội tiếp)

Suy ra $CBx = BED$ $\Rightarrow$ Bx // DE

Mà BO $\perp$ Bx và IQ $\perp$ DE (đường nối tâm)

$\Rightarrow$ BO // IQ

Tương tự vẽ tiếp tuyến By của (I) ta cũng suy ra được BI // OQ suy ra BOQI là hình bình hành

Suy ra OB = IQ và IB = OQ mà OB = OM và IB = IM $\Rightarrow$ OM = IQ và IM = OQ

$\Rightarrow$ Tứ giác OIQM là hình thang nên OI // MQ

Mà $OI \perp BM \Rightarrow QM \perp BM$

Câu 6.

Khi biết tổng nhưng B nói : *Tôi không biết 2 số A chọn nhưng chắc chắn C cũng không biết*. Do đó ta loại các cặp có tổng bằng 2; 3; 17; 18 là $(1;1),(1;2),(8;9),(9;9)$ vì nếu biết tổng này thì B phải đoán được hai số đó ngay.

Ngoài ra, dựa vào việc khẳng định C cũng không biết nên có các trường hợp của tổng sau:

TH1: 4 = 1+ 3 = 2 + 2 thì tích có thể bằng 3 = 1.3, C đoán được ngay, Mà B KHẲNG ĐỊNH C CŨNG KHÔNG BIẾT nên trường hợp này loại.

TH2: 6 = 1 + 5 = … thì tích có thể bằng 5 = 1.5, C đoán được ngay! Mà B KHẲNG ĐỊNH C CŨNG KHÔNG BIẾT nên trường hợp này loại.

Tương tự đối với các trường hợp tổng là 7 = 2+ 5, 8 = 3+5, 9 = 4+5, 10 = 5+5, 11 = 5+6, 12 = 3+9, 13 =6+7, 14 = 7+7, 15 = 7+8, 16 = 8+8 cũng loại

Do đó, sau khi B phát biểu thì C đoán được tổng của 2 số là 5 (= 1+4 = 2+3).

Khi đó tích có thể là 4 = 1.4 = 2.2 hoặc 6 = 1.6 = 2.3.

Vì C biết tổng bằng 5 và tích 2 số (bằng 4 hay 6) nên suy ra được ngay.

C nói : *Mới đầu thì tôi không biết nhưng giờ thì biết hai số A chọn rồi. Hơn nữa số mà A đọc cho tôi lớn hơn số của bạn*. Như vậy C biết tích bằng 6 > 5.

Sau đó B cũng biết vì hai số ban đầu có tổng bằng 5 và tích bằng 6.

Vậy 2 số A chọn là 2 và 3.

Đề số 6

Câu 1.

1) a) Ta có:

$$P=\left(\frac{2x+1-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}\right)\left(x-\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}-2}\right)$$

$$P=\left(\frac{x-\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}\right)\left(x-\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}-2}\right)$$

$$P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)\left(x-\sqrt{x}-2\right)$$

$$P=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-2$$

b) Ta có $P\sqrt{2-x}<0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right).\sqrt{2-x}<0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-x>0\\ \sqrt{x}-2<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\ x\geq 0\\ x<4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x<2\end{cases}$$

Vậy $x\in[0;2)$ là giá trị cần tìm

2) Ta có:

$$VT=\frac{1}{3+2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\left(1+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)+\left(2+\sqrt[3]{4}\right)}=\frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^2+\sqrt[3]{4}\left(1+\sqrt[3]{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{2}\right)\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)}=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\left(1+\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)}=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}=VP$$

Câu 2.

a) *Giải phương trình:* $x^2-4x+(x-3)\sqrt{x^2-x+1}=-1$ *(*)*

(*) $\Leftrightarrow (x^2-x+1)-3x+(x-3)\sqrt{x^2-x+1}=0$

Đặt: $t=\sqrt{x^2-x+1}$, $t\geq 0$ ta có phương trình $t^2-3x+(x-3)t=0$.

$$\Leftrightarrow t(t-3)+x(t-3)=0\Leftrightarrow(t-3)(t+x)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\ t=-x\end{array}\right.$$

TH1: $t=3\Rightarrow\sqrt{x^2-x+1}=3\Leftrightarrow x^2-x-8=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{2}$

TH2: $t=-x\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+1}=-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\ x=1\text{ (loại)}.\end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{2}$

b) *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases}4x^2+4x-y^2=-1 & 1\\ 4x^2-3xy+y^2=1 & 2\end{cases}$.

Ta có $1 \Leftrightarrow 2x+1^{\;2}-y^2=0 \Leftrightarrow 2x+1+y\;\; 2x+1-y\;=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2x-1 \\ y=2x+1 \end{array}\right.$$

TH1: $y=-2x-1$ thay vào (2) ta được

$$14x^2+7x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=-1 \\ x=\dfrac{-1}{2} \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$$

TH2: $y=2x+1$ thay vào (2) ta được

$$2x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=\dfrac{-1}{2} \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm $(0;-1),(0;1),\left(\dfrac{-1}{2};0\right)$.

Câu 3.

1) Phương trình hoành độ giao điểm của d và P là

$2x^2 = 2mx+m+2 \Leftrightarrow 2x^2-2mx-m-2=0 \quad *$

Ta có $\Delta' = m^2-2\;\, -m-2 \;=\; m+1^{\;2}+3>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ d luôn cắt P tại hai điểm phân biệt

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*). Theo định lý Viet ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=\dfrac{-m-2}{2} \end{cases}$$

Theo giả thiết

$$x_1^2-6x_2^2-x_1x_2=0 \Leftrightarrow (x_1-3x_2)(x_1+2x_2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=3x_2 \\ x_1=-2x_2 \end{array}\right.$$

TH1: $x_1=3x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_2=\dfrac{m}{4} \\ x_1=\dfrac{3m}{4} \end{cases}$ do đó ta có

$\dfrac{m}{4}.\dfrac{3m}{4}=\dfrac{-m-2}{2} \Leftrightarrow 3m^2+8m+16=0$ (vô nghiệm).

TH2: $x_1 = -2x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -m \\ x_1 = 2m \end{cases}$ do đó ta có

$$-2m^2 = \frac{-m-2}{2} \Leftrightarrow 4m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

Vậy $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$ là giá trị cần tìm.

2)

Ta có $a+b+c = a+(b+c) \ge 2\sqrt{a(b+c)} \Rightarrow (a+b+c)^2 \ge 4a(b+c)$

* Lưu ý: Với điều kiện $ab+bc+ca>0 \Rightarrow b+c>0$

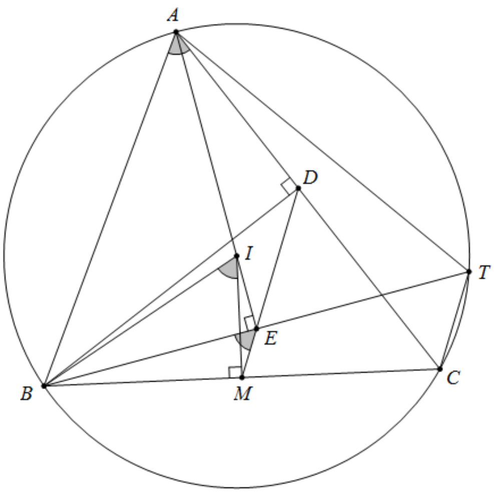
$$\Rightarrow \frac{1}{b+c} \ge \frac{4a}{(a+b+c)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \ge \frac{2a}{a+b+c}$$

Tương tự ta có $\sqrt{\dfrac{b}{c+a}} \ge \dfrac{2b}{a+b+c}; \sqrt{\dfrac{c}{a+b}} \ge \dfrac{2c}{a+b+c}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge \frac{2a+2b+2c}{a+b+b} = 2 \quad \text{(ĐPCM)}$$

Câu 4.

1)



a) Ta có $AE \perp BT$ (giả thiết)

Do AE đi qua tâm I nên E là trung điểm của BT

$\Rightarrow \Delta ABT$ cân tại A.

Ta có $BCA = \dfrac{1}{2}$sđ AB và $ACT = \dfrac{1}{2}$sđ AT

Do sđ AB = sđ AT. Suy ra $BCA = ACT$ hay AC là đường phân giác của góc BCT.

b)Ta có $\widehat{IEB} = \widehat{IMB} = 90^0 \Rightarrow BMEI$ là tứ giác nội tiếp

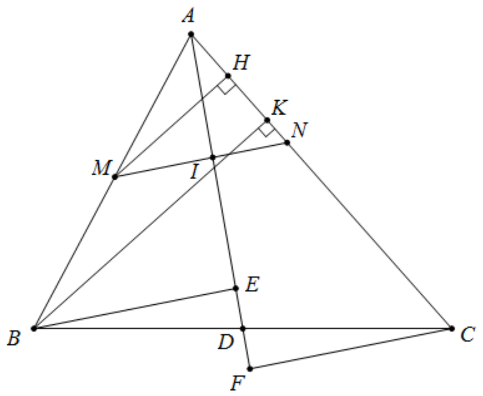
$\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{BEM}$

Mặt khác $\widehat{BIM} = \frac{1}{2}\widehat{BIC} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BEM} = \widehat{BAC}$

Do đó $\widehat{BED} + \widehat{BAD} = \widehat{BED} + \widehat{BEM} = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác $ABED$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{BEA} = 90^0$ hay $BD \perp AC$

2)



Từ B, C kẻ các đường thẳng song song với đường thẳng d, cắt đường thẳng AD lần lượt tại E và F.

Ta có $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{AE}{AI} + \frac{AF}{AI} = \frac{AE + AF}{AI} = 2\frac{AD}{AI}$ (không đổi)

Goi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, B trên AC.

$$\Rightarrow \frac{BK}{MH} = \frac{AB}{AM} \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AMN}} = \frac{BK.AC}{MH.AN} = \frac{AB}{AM}.\frac{AC}{AN}$$

$$\leq \left(\frac{\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN}}{2}\right)^2 = \frac{AD^2}{AI^2} \Rightarrow S_{\Delta AMN} \geq S_{\Delta ABC}.\frac{AI^2}{AD^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} \Leftrightarrow MN//BC$.

Vậy $\min S_{AMN} = S_{ABC}.\frac{AI^2}{AD^2}$ khi d là đường thẳng đi qua I và song song với BC.

Câu 5.

Đặt $\frac{x + y\sqrt{2019}}{y + z\sqrt{2019}} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow nx - my = \sqrt{2019}(mz - ny),\ (m, n \in \mathbb{Z}; n \neq 0)$

Để $nx - my = \sqrt{2019}\left(mz - ny\right) \in \mathbb{Q}$ ta có:

$$\begin{cases} nx - my = 0 \\ mz - ny = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} \Rightarrow y^2 = zx$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (x+z)^2 - 2xz + y^2 = (x+z)^2 - y^2$

$= (x+y+z)(x-y+z)$

Vì $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố, $x+y+z$ là số nguyên lớn hơn 1

$\Rightarrow x - y + z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$

Mà $x^2 \ge x;\ y^2 \ge y;\ z^2 \ge z \Rightarrow x = 1,\ y = 1,\ z = 1$

Vậy $x = y = z = 1$ là các giá trị cần tìm.

Đề số 7

Câu 1.

Ta có: $S = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{2019^2-2}+\sqrt{2019^2}}$

$$\Rightarrow S = \frac{1-\sqrt{3}}{1-3} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7} + \ldots + \frac{\sqrt{2019^2-2}-\sqrt{2019^2}}{2019^2-2-2019^2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\ldots+\sqrt{2019^2-2}-\sqrt{2019^2}}{-2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1-\sqrt{2019^2}}{-2} = \frac{1-2019}{-2} = 1009$$

Vậy $S = 1009$

Câu 2.

a) Phương trình: $x^2 - 2mx + m - 4$ (1)

Phương trình (1) là phương trình bậc hai của x có:

$\Delta' = \left(-m\right)^2 - 1.\left(m-4\right) = m^2 - m + 4$

$\Rightarrow \Delta' = \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{15}{4} > 0$ với mọi m

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b) Với mọi m phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;\ x_2$.

Theo định lí Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m - 4 \end{cases}$

Ta lại có:

$$x_1 + x_2 = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{\left(x_1 + x_2\right)\left(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2\right)}{x_1 x_2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)\left(\frac{x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2}{x_1 x_2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right).\frac{\left(x_1 - x_2\right)^2}{x_1 x_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \text{ hoặc } \frac{\left(x_1 - x_2\right)^2}{x_1 x_2}$$

- TH1: $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$
- TH2: $\frac{\left(x_1 - x_2\right)^2}{x_1 x_2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 x_2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ x_1 x_2 \ne 0 \end{cases}$ (vô nghiệm vì $\Delta' > 0, \forall m$)

Vậy với $m = 0$ thì thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn:

$$x_1 + x_2 = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$$

Câu 3.

a) Giải phương trình: $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x} = x - 2 + 2\sqrt{-2x^2 + 11x - 5}$ (2)

Phương trình xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \ge 0 \\ 5 - x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x \le 5$

Khi đó phương trình (2) $\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x} = x - 2 + 2\sqrt{\left(2x-1\right)\left(5-x\right)}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{2x-1} = a \\ \sqrt{5-x} = b \end{cases}$ $(a; b \ge 0) \Rightarrow x + 4 = a^2 + b^2 \Rightarrow x - 2 = a^2 + b^2 - 6$

Ta có phương trình: $a + b = a^2 + b^2 - 6 + 2ab \Leftrightarrow \left(a+b\right)^2 - \left(a+b\right) - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(a+b-3\right)\left(a+b+2\right) = 0 \Leftrightarrow a + b - 3 = 0 \text{ (do } a + b + 2 > 0, \forall a; b \ge 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow a + b = 3 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 9 \Leftrightarrow x + 4 + 2\sqrt{\left(2x-1\right)\left(5-x\right)} = 9$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(2x-1\right)\left(5-x\right)} - \left(5-x\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5-x}\left(2\sqrt{2x-1} - \sqrt{5-x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{5-x}=0 \Leftrightarrow x=5 \text{ (thỏa mãn)} \\ 4(2x-1)=5-x \Leftrightarrow 9x=9 \Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn)}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{1;5\}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2\sqrt{x+y}+2\sqrt{x-y}=4+\sqrt{x^2-y^2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2\end{cases}$

ĐKXĐ: $x \ge y \ge 0$. Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x+y} \\ b=\sqrt{x-y}\end{cases}$ $(a \ge b \ge 0)$. Ta có: $2a+2b=4+ab$

$$\Leftrightarrow (ab-2a)-(2b-4)=0 \Leftrightarrow a(b-2)-2(b-2)=0 \Leftrightarrow (a-2)(b-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+y}=2 \Leftrightarrow x+y=4 \\ b-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-y}=2 \Leftrightarrow x-y=4\end{array}\right.$$

- TH1: $\begin{cases}x+y=4 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=4 \\ x+y+2\sqrt{xy}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=4 \\ \sqrt{xy}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4 \\ y=0\end{cases}$

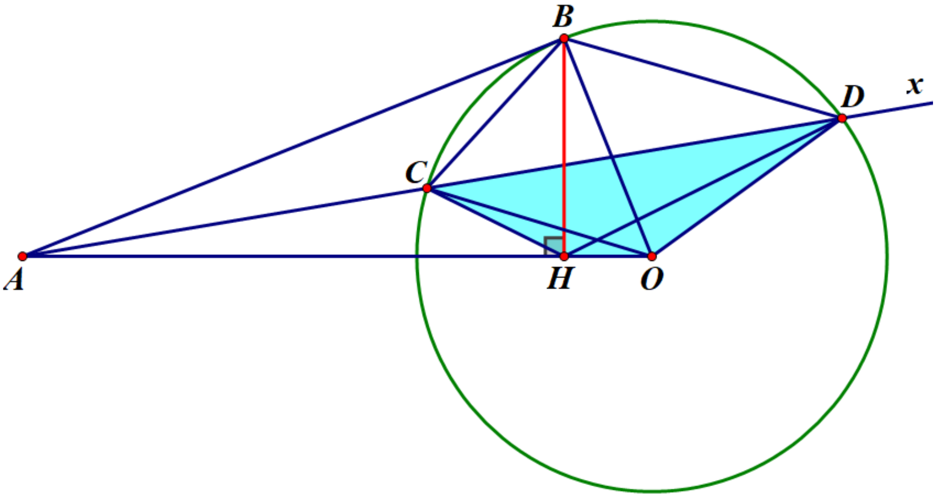
(do $x \ge y \ge 0$)

- TH2: $\begin{cases}x-y=4 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y+4 \\ x+y+2\sqrt{xy}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y+4 \\ y+\sqrt{xy}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4 \\ y=0\end{cases}$

(do $x \ge y \ge 0$)

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=4 \\ y=0\end{cases}$

Câu 4.



a)Xét ΔABC và ΔADB có: BAD chung; $ABC = ADB = \frac{1}{2}$sđBC

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADB$ (góc-góc)

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AC.AD = AB^2$ (3)

Do đường tròn (O), A cố định $\Rightarrow AB$ không đổi $\Rightarrow AC.AD$ không đổi

b) ΔABO vuông tại B, đường cao BH$\Rightarrow AB^2 = AH.AO$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow AC.AD = AH.AO \Rightarrow \frac{AC}{AH} = \frac{AO}{AD}$, mà OAD chung

$\Rightarrow \Delta AHC \sim \Delta ADO$ (cạnh-góc-cạnh)

$\Rightarrow AHC = ADO$ (5) $\Rightarrow$ Tứ giác CHOD nội tiếp

c)Tứ giác CHOD nội tiếp $\Rightarrow OHD = OCD$ (6)

ΔCOD cân tại O $\Rightarrow OCD = ODC$ hay $OCD = ADO$ (7)

Từ (5); (6) và (7) $\Rightarrow AHC = OHD$

Mà $AHC + BHC = OHD + BHD = 90^0 \Rightarrow BHC = BHD$

$\Rightarrow BH$ là phân giác của CHD, BH cố định $\Rightarrow$ ĐPCM

Câu 4.

a)Ta có: $A = \frac{x^4 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 3x + 6} = \frac{x^2(x^2+1) + (x+2)}{(x^4 + x^2) + (3x^3 + 3x) + (6x^2 + 6)}$

$\Rightarrow A = \frac{x^2(x^2+1) + (x+2)}{x^2(x^2+1) + 3x(x^2+1) + 6(x^2+1)} = \frac{x^2(x^2+1) + (x+2)}{(x^2+1)(x^2+3x+6)}$

Do A; x nguyên $\Rightarrow x^2(x^2+1) + (x+2)$ chia hết cho $(x^2+1)(x^2+3x+6)$

$\Rightarrow x^2(x^2+1) + (x+2)$ chia hết cho $x^2+1 \Rightarrow x+2$ chia hết cho x^2+1

$\Rightarrow (x+2)(x-2)$ chia hết cho $x^2+1 \Rightarrow x^2 - 4$ chia hết cho x^2+1

$\Rightarrow (x^2+1) - 5$ chia hết cho $x^2+1 \Rightarrow 5$ chia hết cho x^2+1

$\Rightarrow x^2+1$ là ước dương của $5 \Rightarrow x^2+1 \in \{1;5\} \Rightarrow x^2 \in \{0;4\} \Rightarrow x \in \{0;\pm 2\}$

Thử lại: Với $x = -2$ thì A nguyên

Vậy với $x=-2$ thì A nhận giá trị là một số nguyên.

b) Ta có: $P=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ca}}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki (dạng phân thức). Ta có:

$$P=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ca}}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}$$

$$P=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ca}}\geq\frac{16}{4+3\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}$$

(do $a+b+c=4$)

Theo bất đẳng thức Cô-si. Ta có:

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$; $b+c\geq 2\sqrt{bc}$; $c+a\geq 2\sqrt{ca}$

$\Rightarrow 2a+2b+2c\geq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}$

$\Rightarrow \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leq a+b+c=4\Rightarrow P\geq\frac{16}{4+3.4}=1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a;b;c>0\\a+b+c=4\Leftrightarrow a=b=c=\frac{4}{3}\\a=b=c\end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1 khi $a=b=c=\frac{4}{3}$

Đề số 8

Câu 1. a. Ta có

$$A=\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}+\frac{2(x+1)}{\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}-\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}+\frac{2(x+1)}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{2(x+1)}{\sqrt{x}}=\frac{2(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}.$$

Vậy $A=\frac{2(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$ với $x>0,\ x\neq 1$.

b. ĐK: $x>0,\ x\neq 1$.

$A=B\Leftrightarrow\frac{2(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}=\frac{2x-1}{\sqrt{x}-1}\Leftrightarrow 2x\sqrt{x}-2=2x\sqrt{x}-\sqrt{x}\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$ (TMĐK).

Vậy với $x=4$ thì $A=B$.

2. $a-b=\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2} \Leftrightarrow a-b=\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2}} \Leftrightarrow a+b=\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2}$

Từ đó ta có hệ: $\begin{cases} a-b=\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2} \\ a+b=\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2} \end{cases} \Rightarrow a=\sqrt{1-b^2} \Leftrightarrow a^2+b^2=1 \Rightarrow Q=2020$.

Câu 2.

1. Ta có $|AB-AC| \le BC$ nên GTLN$|AB-AC|=BC$ khi *A, B, C* thẳng hàng hay *A* là giao điểm của (d) với Ox $\Rightarrow A(3;0)$.

2. Ta có $xy^2-(y-45)^2+2xy+x-220y+2024=0 \Leftrightarrow (y+1)(xy+x-y-129)=-128=-2^7$

$\Rightarrow y+1 \in \{2;4;8;16;32;64;128\} \Rightarrow y \in \{1;3;7;15;31;63;127\} \Rightarrow (x;y) \in \{(33;1),(25;3),(15;7)\}$.

Câu 3. 1. ĐK: $-\dfrac{11}{5} \le x \le 6$.

Ta có:

$\sqrt{5x+11}-\sqrt{6-x}+5x^2-14x-60=0 \Leftrightarrow (\sqrt{5x+11}-6)-(\sqrt{6-x}-1)+(x-5)(5x+11)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5(x-5)}{\sqrt{5x+11}+6}+\dfrac{x-5}{\sqrt{6-x}+1}+(x-5)(5x+11)=0$

$\Leftrightarrow (x-5)\left(\dfrac{5}{\sqrt{5x+11}+6}+\dfrac{1}{\sqrt{6-x}+1}+5x+11\right)=0 \Leftrightarrow x=5$.

(Do $\dfrac{5}{\sqrt{5x+11}+6}+\dfrac{1}{\sqrt{6-x}+1}+5x+11>0$ với $-\dfrac{11}{5} \le x \le 6$).

Vậy Phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

2. $\begin{cases} 4x^2y-xy^2=5 \\ 64x^3-y^3=61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(4x-y)=5 \\ (4x-y)\left((4x-y)^2+12xy\right)=61 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u=xy \\ v=4x-y \end{cases}$ hệ trở thành: $\begin{cases} u.v=5 \\ v(v^2+12u)=61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{5}{v} \\ v^3+60=61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ v=1 \end{cases}$

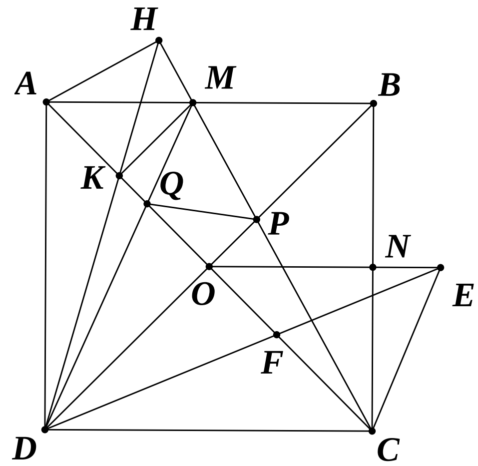
Suy ra $\begin{cases} xy=5 \\ 4x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=-5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{5}{4} \\ y=4 \end{cases} \end{array}\right.$. Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \left\{(-1;-5),(\dfrac{5}{4};4)\right\}$.

Câu 4. 1. Tứ giác $ADCH$ có $AHC + ADC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ADCH$ nội tiếp

$\Rightarrow ADH = ACH$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AKH = DAK + ADK = MAK + ADH \\ AKH = KCH + CHK = ACH + MHK \Rightarrow MAK = MHK \Rightarrow AHMK \text{ là tứ giác nội tiếp} \\ ADH = ACH \end{cases}$$

$\Rightarrow AKM = 90^\circ \Rightarrow MK \perp AC$ mà $BD \perp AC$ (Hai đường chéo hình vuông) $\Rightarrow MK // BD$.



2. ΔONC vuông cân tại N

$\Rightarrow \dfrac{ON}{OC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OE = OC = OD \Rightarrow \Delta DOE$ cân tại O

$\Rightarrow ODE = OED$ (1). Mà $OE // CD \Rightarrow CDE = OED$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ODE = CDE \Rightarrow DE$ là tia phân giác của góc CDO $\Rightarrow \dfrac{FO}{FC} = \dfrac{DO}{DC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Đặt $AM = x > 0$ ta có ΔAMK vuông cân tại K

$\Rightarrow MK = AK = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow CK = a\sqrt{2} - \dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{2a - x}{\sqrt{2}}$. Do $AM // CD$

$$\Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{CD} = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{AQ}{AC} = \frac{x}{a+x} \Rightarrow AQ = \frac{AC.x}{a+x} = \frac{a\sqrt{2}.x}{a+x}$$

$$\Rightarrow CQ = AC - AQ = \frac{a^2\sqrt{2}}{a+x}.$$

$$OP // MK \Rightarrow \frac{OC}{CK} = \frac{OP}{MK} \Rightarrow OP = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{2a-x}{\sqrt{2}}}.\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{ax}{(2a-x)\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow DP = OP + OD = \frac{ax}{(2a-x)\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.\frac{2a}{2a-x}.$$

$$S_{CPQD} = \frac{1}{2}DP.CQ = \frac{1}{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{a+x}.\frac{a}{\sqrt{2}}.\frac{2a}{2a-x} = a^4\frac{1}{(a+x)(2a-x)}.$$

S_{CDPQ} đạt GTNN $\Leftrightarrow (a+x)(2a-x)$ đạt GTLN. Mà $(a+x)(2a-x) \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a+2a+x-x}{2}\right)^2 = \dfrac{9a^2}{4}$.

$\Rightarrow S_{CDPQ} \ge \dfrac{4a^2}{9}$. Dấu "=" xảy ra khi $a + x = 2a - x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB.

Vậy $Min\ S_{CDPQ} = \dfrac{4a^2}{9} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB.

Câu 5.

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ v = y-2 \end{cases}$. Ta có: $(2+x)(y-1) = \dfrac{9}{4} \Rightarrow (u+1)(v+1) = \dfrac{9}{4}$

Ta có $\dfrac{9}{4} = (u+1)(v+1) \le \dfrac{1}{4}(u+v+2)^2 \Leftrightarrow (u+v+2)^2 \ge 9$

Theo Bunhia ta có: $\left(u^2+v^2+1^2\right)\left(1^2+1^2+2^2\right) \ge (u+v+2)^2 \ge 9 \Leftrightarrow u^2+v^2 \ge \dfrac{1}{2}$

Ta có: theo Mincopxki:

$$A = \sqrt{u^4+1} + \sqrt{v^4+1} \ge \sqrt{(u^2+v^2)^2+(1+1)^2} = \sqrt{(u^2+v^2)^2+4} \ge \sqrt{\frac{1}{4}+4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$. Vậy $Min\,A = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$ khi $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$.

Đề số 9

Bài 1: Cộng các pt vế theo vế ta có :

$2\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2} = 250$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 125 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 5$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 25$

Thay vaò (1) ta có :

$\left(25+xy\right)\sqrt{x^2+y^2} = 185$

$\Leftrightarrow \left(25+xy\right).5 = 185 \Leftrightarrow xy = 12$

Như vậy hệ đã cho

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{12}{x} \\ x^2 + \dfrac{144}{x^2} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{12}{x} \\ x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{12}{x} \\ \left(x^2-16\right)\left(x^2-9\right) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y=\dfrac{12}{x} \\ (x-3)(x+3)(x-4)(x+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$$

Kết luận : Nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(3;4);(-3;-4),(4;3)(-4;-3)$

Bài 2 :

a) Ta có:

$$\begin{aligned} M &= (n+1)^4+n^4+1 \\ &= \left[(n^2+2n+1)^2-n^2\right]+\left[(n^4+2n^2+1)-n^2\right] \\ &= (n^2+n+1)(n^2+3n+1)+(n^2+n+1)(n^2-n+1) \\ &= (n^2+n+1)(2n^2+2n+2) \\ &= 2(n^2+n+1)^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Vì $n \in N^*$ nên $(n^2+n+1)^2$ là số chính phương khác 1.

Do đó, từ (*) suy ra $M=(n+1)^4+n^4+1$ chia hết cho một số chính phương khác 1 với mọi số n nguyên dương (đpcm).

b) Xét phương trình: $x^2-n^2x+n+1=0$ (ẩn số x) (1)

Để phương trình (1) có nghiệm thì $\Delta \ge 0 \Rightarrow n^4-4n-4\ge 0 \Rightarrow n \notin \{0;1\}$ $(\text{do } n \in N)$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Áp dụng hệ thức Vi-et, ta được: $\begin{cases} x_1+x_2=n^2 \\ x_1x_2=n+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow x_1+x_2-x_1x_2=n^2-n-1$$

$$\Leftrightarrow x_1(1-x_2)-(1-x_2)=n^2-n-2$$

$$\Leftrightarrow (x_1-1)(1-x_2)=(n-2)(n+1)$$

$$\Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)=(2-n)(n+1)$$

Với $n \in N, n \notin \{0;1\}$ thì $\begin{cases} x_1+x_2=n^2 \ge 4 \\ x_1x_2=n+1\ge 3 \end{cases}$

Do đó $x_1 \ge 1; x_2 \ge 1 \Rightarrow (x_1-1)(x_2-1)\ge 0 \Rightarrow (2-n)(n+1)\ge 0$

$\Rightarrow 2-n \ge 0$ $(\text{do } n+1>0, \forall n \in N) \Rightarrow n \le 2$

Mà $n \in N, n \notin \{0;1\} \Rightarrow n=2$. Khi đó, phương trình (1) trở thành:

$$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (t/m\ x\in Z) \\ x=3\ (t/m\ x\in Z) \end{array}\right.$$

Vậy với $n \in N$, để phương trình đã cho có các nghiệm là số nguyên thì $n=2$.

Bài 3:

Ta có $VT=\dfrac{yz}{x^2(y+z)}=\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{y+z}{yz}}=\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$; $\dfrac{xz}{y^2(x+z)}=\dfrac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}$; $\dfrac{xy}{z^2(x+y)}=\dfrac{\frac{1}{z^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

Đặt $\dfrac{1}{x}=a;\ \dfrac{1}{y}=b;\ \dfrac{1}{z}=c\,(a;b,c>0) \Rightarrow abc=2$

Theo bất đăng thức Cô si ta có :

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{4}}=a;\quad \frac{b^2}{a+c}+\frac{a+c}{4}\ge b;\quad \frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\ge c$$

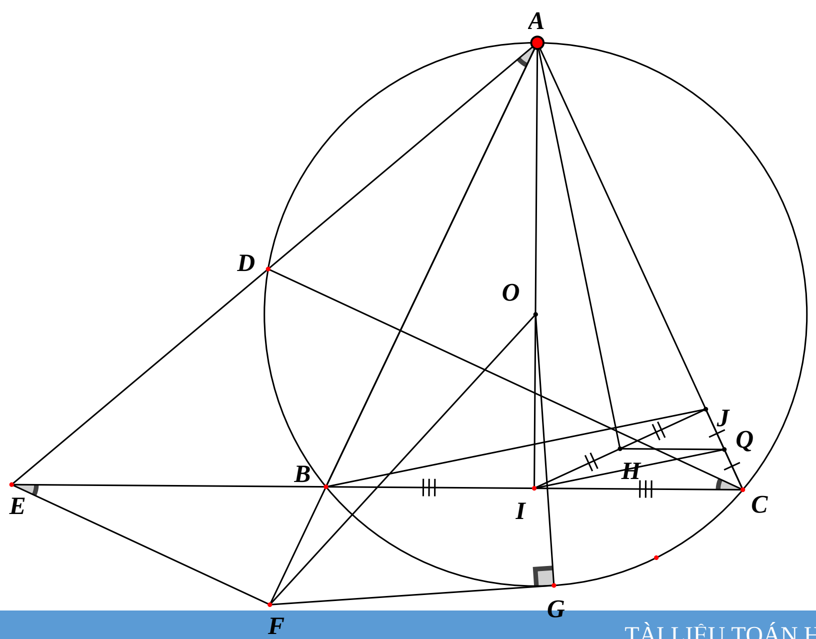
Cộng các vế lại với nhau ta có:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b+c}{2}\ge a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge \frac{a+b+c}{2}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=xy+yz+xz$$

$$\Rightarrow \frac{yz}{x^2(y+z)}+\frac{xz}{y^2(x+z)}+\frac{xy}{z^2(x+y}\ge xy+yz+xz \text{ (DPCM)}$$

Bài 4:



a) Chứng minh : $FG=FE$

Ta có :

$FG//CD \Rightarrow FEB=DCB$ (cặp góc so le trong)

Và $DCB=DAB$ (cùng chắn cung AD) vậy nên

$$FEB = FAE \Rightarrow \Delta FBE \sim \Delta FEA(g.g) \Rightarrow \frac{FE}{FA} = \frac{FB}{FE} \Rightarrow FE^2 = FA.FB$$

Do FG là tiếp tuyến tại G của đường tròn $(O) \Rightarrow FGB = FAG$ (cùng chắn cung GB)

Thế nên dễ dàng có : $\Delta FGB \sim \Delta FAG(g.g) \Rightarrow \frac{FG}{FB} = \frac{FA}{FG} \Rightarrow FG^2 = FA.FB$

Do đó : $FG^2 = FE^2 \Rightarrow FG = FB$

b) Chứng minh : $AH \perp BJ$

Ta gọi Q là trung điểm CJ thì IQ là đườn g trung bình tam giác $BJC \Rightarrow IQ//BJ$

Ta sẽ chứng minh : $AH \perp IQ$

Do $HQ//IC$ (HQ là đường trung bình tam giác JIC) và $AI \perp BC \Rightarrow AI \perp IC$ (do tam giác ABC cân tại A có AI là đường trung tuyến) $\Rightarrow HQ//IA$

Kết hợp với $IH \perp AQ$ khi đó H là trực tâm tam giác $AIQ \Rightarrow AH \perp IQ \Rightarrow AH \perp BJ$

Bài 5.

Giả sử ngoài bạn An còn có n bạn và An quen m bạn, điều kiện $m \le n;\ m,n \in \mathbb{N}^*$.

Số cái bắt tay là $\frac{n(n-1)}{2} + m$.

Theo bài ra ta có phương trình

$$\frac{n(n-1)}{2} + m = 420 \Leftrightarrow n(n-1) + 2m = 840 \quad (1).$$

Mặt khác $2m \le 2n$, kết hợp với (1) ta suy ra $n(n-1) + 2n \ge 840 \Leftrightarrow n^2 + n \ge 840 \Rightarrow n \ge 29$.

Và $2m \ge 2$, kết hợp với (1) ta suy ra $n^2 - n - 838 \le 0 \Rightarrow n \le 29$, từ đó suy ra $n = 29$.

Thay $n = 29$ vào (1) ta có $2m + 29.28 = 840 \Leftrightarrow 2m = 28 \Leftrightarrow m = 14$.

Vậy An quen 14 người.

Đề số 10

Câu 1. (2,0 điểm)

ĐKXĐ: $x > 0, x \ne 4, x \ne 9$.

a) $A = \left(\frac{x-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{x-4}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left(\frac{x-2-x+\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}-2} \right)$

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}-2} \right) = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

b) Ta có: $P = 2.A - \frac{1}{x} = 2.\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{1}{x} = 3 - \left(1 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) = 3 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

=> $P = 3 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \le 3\ (\forall x \ne 0)$

=> $P_{Max} = 3 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1 (TM)$

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Giải PT: $x^2 + 6x + 8 = 3\sqrt{x+2}$.

ĐKXĐ: $x \ge -2$

$x^2 + 6x + 8 = 3\sqrt{x+2} \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 + 3(x+2) = 3\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+2) + 3\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+2) + 3\sqrt{x+2}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2} + \frac{3}{\sqrt{x+2}+1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+2} = 0 \left(Do: \sqrt{x+2} + \frac{3}{\sqrt{x+2}+1} > 0\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \end{array}\right. (TM)$

b) Giải hệ PT: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = (x+2)(y+2) \\ \left(\frac{x}{y+2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+2}\right)^2 = 1 \end{cases}$

ĐKXĐ: $x \ne -2, y \ne -2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = (x+2)(y+2) \\ \left(\frac{x}{y+2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+2}\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y+2} + \frac{y}{x+2} = 1 \\ \left(\frac{x}{y+2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

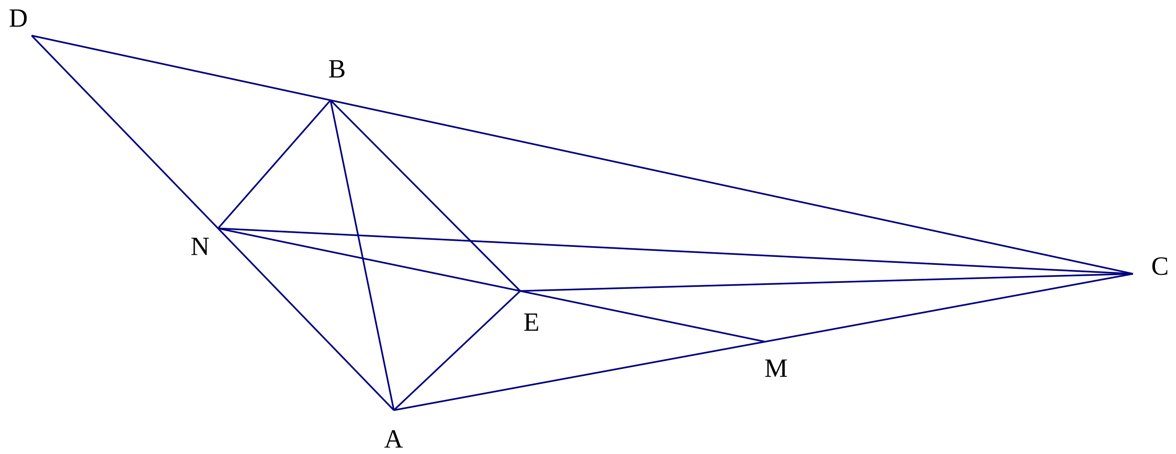
Đặt: $\begin{cases} a = \dfrac{x}{y+2} \\ b = \dfrac{y}{x+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y+2} + \dfrac{y}{x+2} = 1 \\ \left(\dfrac{x}{y+2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{x+2}\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ (a)^2 + (b)^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1-a \\ (a)^2 + (1-a)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} (TM) \\ \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} (TM) \end{array}\right.$$

Với $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} (TM)$

Với $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} (TM)$

Câu 3. (1,5 điểm)



a) Ta thấy rằng M, N lần lượt là trung điểm của AC, AD nên MN là đường TB của tam giác ACD => MN // CD hay ANE = ADB

Vì : BA = BD => ABD cân tại B => BN $\perp$ AB; BDA = BAD

Vì: BE // AD => BNA = NBE = 90; ANE = NEB

Từ đây => BAN = ADB = ANE = NEB

=> BEAN nội tiếp => NEA = 180 − 90 = 90

Vì: NAE = BNA = NBE = 90

=> đpcm

b) Dễ thấy $MAE = DAB$ (cùng phụ với BAE) $\Rightarrow MAE = MNA$

Lại có AME là góc chung nên $\Delta MAE \sim \Delta MNA$(g.g)) $\Rightarrow \frac{MA}{ME} = \frac{MN}{MA}$

Mà MA = MC $\Rightarrow \frac{MC}{ME} = \frac{MN}{MC}$

Do EMC là góc chung $\Rightarrow \Delta MEC \sim \Delta MCN(c.g.c) \Rightarrow ECM = MNC$

Lại có: MN//CD (đường trung bình) nên $MNC = DCN$

$\Rightarrow ACE = DCN(dpcm)$

Câu 4. (1,5 điểm)

a) Tồn tại hay không 3 số a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{b^2 - ca} = \frac{b}{c^2 - ab} = \frac{c}{a^2 - bc} = \frac{1}{2019}$

Giả sử tồn tại bộ số thực (a, b, c) thỏa mãn yêu cầu đề bài

rõ ràng ĐK a, b, c là: $a^2 \neq bc, b^2 \neq ca, c^2 \neq ab.$

Nếu a = b = c thì $a^2 - bc = a^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = bc$ (vô lý)

Vậy nên trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 2 số khác nhau. Khi đó:

$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0$

AD t/c dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{b^2 - ca} = \frac{b}{c^2 - ab} = \frac{c}{a^2 - bc} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]} = \frac{1}{2019}$$

=> a+b+c > 0. Khi đó nếu tồn tại 2 số bằng nhau, giả sử a = b thì:

$$\frac{a}{b^2 - ca} = \frac{b}{c^2 - ab} \Rightarrow b^2 - ca - c^2 + ab = 0$$

$$=> (a+b+c)(b-c) = 0 => b = c$$

=> a=b=c (Vô lý)

Từ dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a-b}{b^2 - ca - c^2 + ab} = \frac{b-c}{c^2 - ab - a^2 + bc} = \frac{c-a}{a^2 - ab - b^2 + ca} = \frac{1}{2019}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{(b-c)(a+b+c)}=\frac{b-c}{(c-a)(a+b+c)}=\frac{a-b}{(a-b)(a+b+c)}=\frac{1}{2019}$$

Đặt: $\begin{cases} x^2 = yz \\ y^2 = zx \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx \\ z^2 = xy \end{cases}$

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0 \Leftrightarrow x=y=z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2c \\ c+b=2a \\ a+c=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2c \\ c+b=2a \\ a-b=2b-2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2c \\ c+b=2a \\ 3(a-b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c$$

Kết quả cho thấy vô lý. Vậy không tồn tại bộ 3 số thỏa mãn theo yêu cầu.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}=\dfrac{85}{13}$

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+y,\ x^2+y^2 \in \mathbb{Z}$

=> $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}=\dfrac{85}{13} \Leftrightarrow 85(x+y)=13(x^2+y^2)>0$

=> $x + y > 0$.

Áp dụng BĐT: $x^2+y^2 \ge \dfrac{(x+y)^2}{2} \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$

(Luôn đúng)

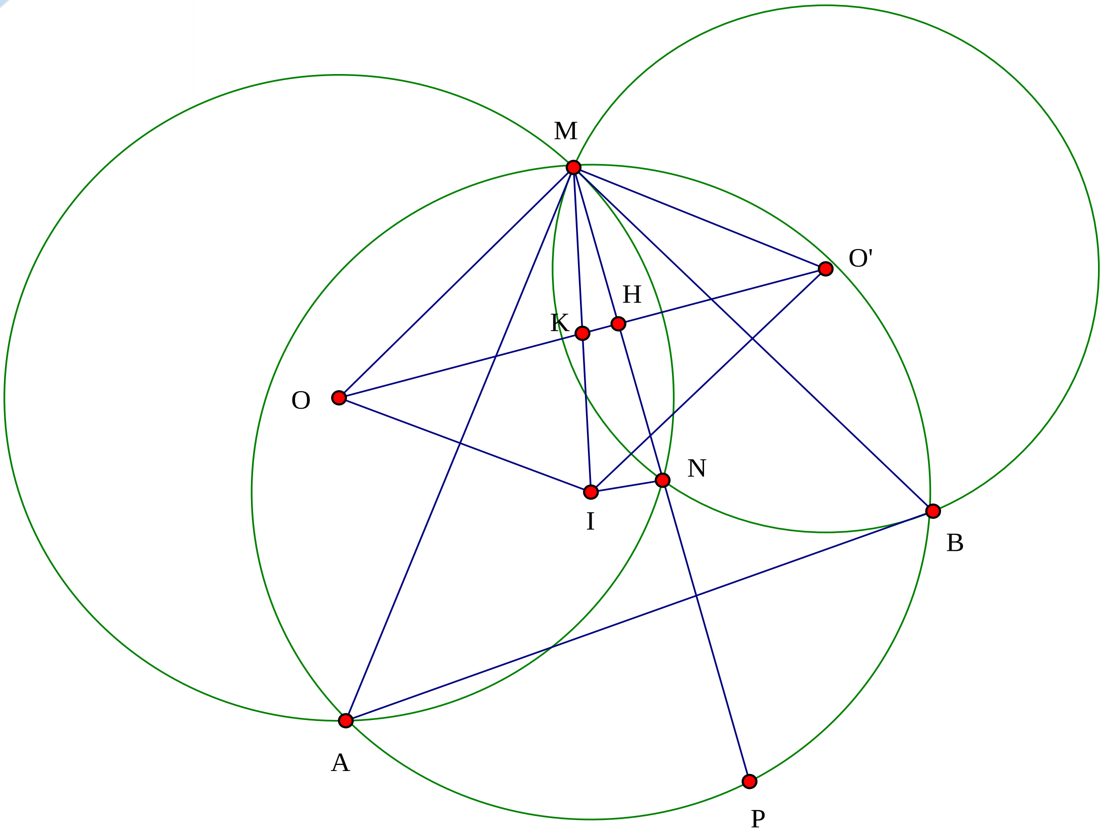
Ta có: $85(x+y)=13(x^2+y^2) \ge \dfrac{13}{2}(x+y)^2 \Rightarrow x+y \le \dfrac{170}{13} \Rightarrow x+y \le 13$

Mà: $\begin{cases} x+y>0 \\ x+y \vdots 13 \end{cases} \Rightarrow x+y=13 \Rightarrow x^2+y^2=85$

=> $\begin{cases} x+y=13 \\ x^2+y^2=85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=13-x \\ x^2+(13-x)^2=85 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=7 \end{cases} (TM) \\ \begin{cases} x=7 \\ y=6 \end{cases} (TM) \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của PT là: (x; y) = (6; 7) ; (7; 6)

Câu 5.



Gọi I là tam đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB. Gọi H, K theo thứ tự là giao điểm của OO' với MN và MI. Rõ ràng $OO' \perp MN$ và HM = HN.

Ta thấy: IM = IP nên NP = NM nên OI là đường trung trực của đoạn MA.

=> $MA \perp OI$ => OI // MO' (Vì: $MA \perp MO'$)

Tương tự: O'I // MO => OIMO' là HBH. Khi đó K là trung điểm của MI.

=> HK là đường TB của ΔMNI => NI // HK hay NI // OO'.

Mà: $MN \perp MO' \Rightarrow MN \perp IN \ hay \ IN \perp MP => đpcm$

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn ab+bc+ca = 1. CMR:

$$a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1} \geq 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

Cách 1:

Áp dụng Bunhiakopxky ta có:

$$\frac{4}{3}\left(b^2+1\right)=\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(b^2+1\right) \geq \left(\frac{b}{\sqrt{3}}+1\right)^2 \Rightarrow a\sqrt{b^2+1} \geq \frac{ab}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Tương tự ta có: $VT \geq \frac{ab+bc+ca}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$

Tiếp tục áp dụng BĐT Cauchy ta được:

$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 3 \Rightarrow a+b+c \geq \sqrt{3}$

Khi đó: $VT \geq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 2$

Dấu "=" xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=b=c>0 \\ ab+bc+ca=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Cách 2:

Bình phương 2 vế ta cần cm tương đương:

$$a(b^2+1)+b(c^2+1)+c(a^2+1)+2ab\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)}$$

$$+2bc\sqrt{(c^2+1)(a^2+1)}+2ca\sqrt{(b^2+1)(a^2+1)} \geq 4 \quad (*)$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} = \sqrt{a^2b^2+a^2+b^2+1} \geq \sqrt{a^2b^2+2ab+1} = ab+1$$

Gọi vế trái của (*) là S. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$S \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2+b^2+c^2+2ab(bc+1)$$
$$+2bc(ca+1)+2ca(ab+1)$$
$$=(ab+bc+ca)^2+(a+b+c)^2 \geq (ab+bc+ca)^2+3.(ab+bc+ca)=4$$

Dấu "=" xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=b=c>0 \\ ab+1=bc+1=ca+1 \Leftrightarrow a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$

Đề số 11

Bài 1.

a) (1,0 điểm)

$P = \frac{1}{x-\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}+3}{x-\sqrt{x}+1}$

$= \frac{1}{\sqrt{x}+3}$.

$P \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+3} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 4$.

Vậy $0 \le x \le 4$ thỏa mãn bài toán

b) (1,0 điểm)

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 4 + m > 0 \Leftrightarrow m > -4.$

Áp dụng hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_x x_2 = -m \end{cases}.$$

$$gt \Leftrightarrow \frac{4(16+2m)}{m} = 4(m+2)(m \neq 0)$$

$\Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4.$

Kết hợp với điều kiện $m > -4; m \neq 0$ t được $m = 4$ thỏa mãn.

Bài 2.

a) (1,0 điểm)

ĐKXĐ: $x \ge 1$ hoặc $x \le -\frac{3}{2}$.

$$\text{PT} \Leftrightarrow (2x-1)(x+2) = (2x-1)\sqrt{2x^2 + x - 3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 0 \\ x + 2 = \sqrt{2x^2 + x - 3} \end{array}\right..$$

$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (không thỏa mãn ĐKXĐ)

$$x + 2 = \sqrt{2x^2 + x - 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ 2x^2 + x - 3 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x^2 - 3x - 7 = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1 = \frac{3+\sqrt{37}}{2}; x_2 = \frac{3-\sqrt{37}}{2}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

b) (1,0 điểm)

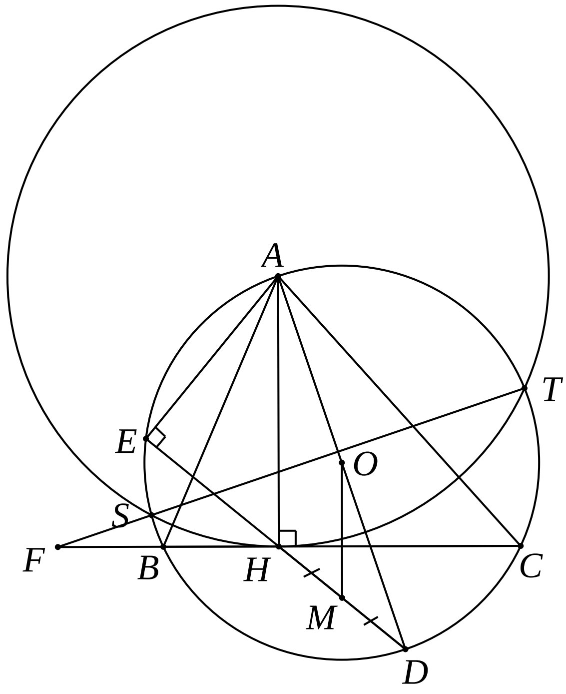
ĐKXĐ: $y \ge 0$. Lấy phương trình thứ nhất trừ đi ba lần phương trình thứ hai:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 8 - 12\sqrt{y} + 6y - y\sqrt{y} \Leftrightarrow (x-1)^3 = \left(2 - \sqrt{y}\right)^3 \Leftrightarrow x - 1 = 2 - \sqrt{y}.$$

Thế $\sqrt{y} = 3 - x$ vào phương trình thứ nhất: $x^3 + (3-x)^3 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(1;4),(2;1)$ (TMĐKXĐ)

Bài 3.



a) 1,0 điểm)

Ta có $OM\,//\,AH$ (tính chất đường trung bình) mà $AH \perp BC \Rightarrow OM \perp BC$.

$\Rightarrow OM$ là đường trung trực của đoạn thẳng BC (đpcm).

b) (1,0 điểm)

$\Delta FTB" \sim \Delta FCS$ (g.g) $\dfrac{FT}{FC} = \dfrac{FB}{FS} \Rightarrow FB.FC = FT.FS(1)$.

FH là tiếp tuyến của đường tròn tâm A bán kính $AH \Rightarrow FT.FS = FH^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $FB.FC = FH^2$

Gọi E′ là giao điểm của FA với $(O) \Rightarrow FE'.FA = FH^2 \Rightarrow \Delta FE'H" \sim \Delta FHA(c.g.c)$

$\Rightarrow FE'H = FHA = 90^o \Rightarrow HE' \perp AF$. Mà $DE' \perp AF$

$\Rightarrow E'; H; D$ là ba điểm thẳng hàng $\Rightarrow E \equiv F$ (đpcm)

c) (1,0 điểm)

Gọi I là điểm đối xứng với H qua E. Ta có AF là đường trung trực của đoạn thẳng HI nên $FH = FI$ và $AH = AI$, nghĩa là I thuộc đường tròn tâm A bán kính AH.

$\Delta AFI = \Delta AFH(c.c.c) \Rightarrow AIF = AHF = 90^o \Rightarrow FI$ tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AH tại I (3)

Có $\Delta HBE" \backsim \Delta HDC(g.g) \Rightarrow \dfrac{HB}{HD} = \dfrac{HE}{HC} \Rightarrow HB.HC = HD.HE = 2HM.\dfrac{1}{2}HI = HM.HI$

$\Delta HBI" \backsim \Delta HMC(c.g.c) \Rightarrow HBI = HMC \Rightarrow$ Tứ giác $IBMC$ nội tiếp.

Lại có: $FI^2 = FB.FC$ (cùng bằng FH^2) $\Rightarrow FI$ tiếp xúc với đường tròn $(IBMC)$ tại I. Kết hợp với (3) suy ra đpcm.

Bài 4.

Áp dụng bất bằng thức Côsi $\frac{x^3}{x^2+z^2}=x-\frac{xz^2}{x^2+z^2}\ge x-\frac{xz^2}{2xz}=x-\frac{z}{2}$.

Tương tự $\frac{y^3}{y^2+z^2}\ge y-\frac{z}{2}$.Suy ra $P\ge x+y-z+\frac{x^2+y^2+4}{x+y}$.

Theo gt $z=\frac{x^2+y^2}{x+y}\Rightarrow P\ge x+y+\frac{4}{x+y}\ge 4$.

Vậy $P_{\min}=4\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài 5.

a) 1,0 điểm)

$p^2q+p\,\vdots\, p^2+q\Rightarrow q\left(p^2+q\right)-\left(p^2q+p\right)=q^2-p\,\vdots\, p^2+q.$

$pq^2+q\,\vdots\, q^2-p\Rightarrow\left(pq^2+q\right)-p\left(q^2-p\right)=p^2+q\,\vdots\, q^2-p.$

$q^2-p=-\left(p^2+q\right)\Leftrightarrow q^2+q+p^2-p=0(VN).$

$q^2-p=p^2+q\Leftrightarrow(q+p)(q-p-1)=0\Leftrightarrow q-p-1=0\Leftrightarrow q=p+1.$

Mà p, q là hai số nguyên tố nên $p=2,q=3$ (thỏa mãn bài toán)

b) 1,0 điểm)

Đặt $z=\frac{xy}{x+y+1}\Rightarrow\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}\Rightarrow\frac{1}{z}+1=\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{y}+1\right)(1).$

Với mỗi tập các số dương $\{x_1;x_2;...x_n\}$ tùy ý, xét biểu thức:

$$P\left(x_1;x_2;...x_n\right)=\left(\frac{1}{x_1}+1\right)\left(\frac{1}{x_2}+1\right)....\left(\frac{1}{x_n}+1\right).$$

Từ (1) suy ra mỗi lần xóa đi 2 số bất kì x; y rồi viết lên bảng số $\frac{xy}{x+y+1}$ các số còn lại trên bảng giữ nguyên thì giá trị biểu thức P của các số trên bảng không đổi.

Gọi số cuối cùng là $a\Rightarrow P(a)=P\left(\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};...;\frac{1}{2018};\frac{1}{2019}\right)$

$$\Rightarrow\frac{1}{a}+1=\left(\frac{1}{1}+1\right).\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}+1\right)...\left(\frac{1}{\frac{1}{2018}}+1\right).\left(\frac{1}{\frac{1}{2019}}+1\right)=2020!\Rightarrow a=\frac{1}{2020!-1}.$$

Đề số 12

Câu 1.

1.a) Ta có:

$$A=\frac{-4x-9\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}+\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}-\frac{\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{\left(1-5\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{1-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$$

1.b) Ta có:

$A=\frac{1-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=-5+\frac{6}{\sqrt{x}+1}$. Với mọi $x\ge 0$ ta có: $\sqrt{x}+1\ge 1$ nên $\frac{6}{\sqrt{x}+1}\le 6$

Do đó $A=-5+\frac{6}{\sqrt{x}+1}\le 1$. Giá trị lớn nhất của A là 1 đạt được khi $x=0$.

Câu 2.

2.1) Ta có

$\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}-\sqrt{(x+1)(4-x)}=1 \quad (1)$ Điều kiện $-1\le x\le 4$

Đặt $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=t\ge 0\Rightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)}=\frac{t^2-5}{2}$.

Pt (1) trở thành: $t-\frac{t^2-5}{2}=1$. Tính được $t_1=-1$ (loại), $t_2=3$ (TM).

$t_2=3$ biến đổi pt được $\sqrt{(x+1)(4-x)}=\frac{3^2-5}{2}=2\Leftrightarrow -x^2+3x=0$

Tính được $x_1=0;\ x_2=3$ (tmđk). Vậy tập nghiệm của pt là $S=\{0;3\}$.

2.2) Ta có:

$$\begin{cases}x^2=(2-y)(2+y)\\2x^3=(x+y)(4-xy)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=4 & (1)\\2x^3=(x+y)(4-xy) & (2)\end{cases}$$

Thế $4=x^2+y^2$ từ phương trình (1) vào phương trình (2) ta được:

$2x^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)\Leftrightarrow x^3=y^3\Leftrightarrow x=y$.

Thay $x=y$ vào phương trình (1) ta được: $x^2=2\Leftrightarrow\ x=\pm\sqrt{2}$.

Hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là: $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right);\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

Câu 3.

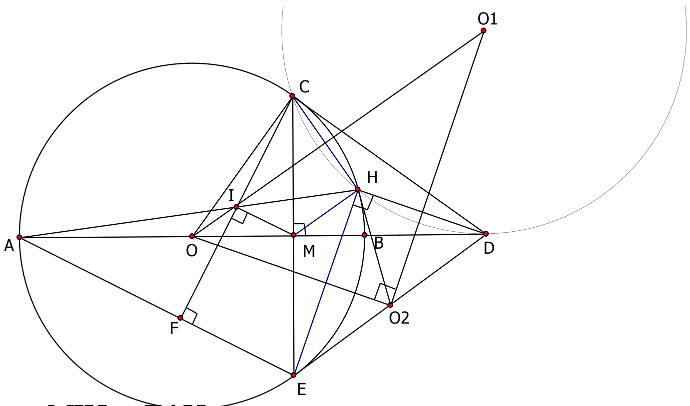
Có: $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ suy ra $n^4 \le 2(n^3+2)$, hay $n^3(n-2)-4 \le 0$.

Nếu $n \ge 3$ thì $n^3(n-2)-4 \ge n^3-4>0$ (Loại). Do đó $n=0;\ 1;\ 2$.

Với $n=0;\ 1$ chỉ ra không tồn tại $a;b$ thỏa mãn đề bài.

Với $n=2$ chỉ ra $a=1;b=3$ hoặc $a=3;b=1$ thỏa mãn đề bài rồi kết luận.

Câu 4.



a) Chỉ ra $IM//AE$ suy ra $MIH = EAH$,

Mà $EAH = ECH$ nên $MIH = MCH$,

Suy ra tứ giác $CIMH$ nội tiếp.

b)Chỉ ra được ED là tiếp tuyến của (O) suy ra $HED = HCE$. (1)

Do tứ giác $CIMH$ nội tiếp nên $CHM = 90^0$ suy ra $HCM + HMC = 90^0$. Mà $HMD + HMC = 90^0$ nên $CHM = HMD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $HED = HMD$ nên tứ giác $EMHD$ nội tiếp.

Do đó $HDM = HEM$ mà $HEM = HCD$ nên $HDM = HCD$.

Từ đó chứng minh được BD là tiếp tuyến của (O_1).

c) Sử dụng tính chất đường nối tâm vuông góc với dây chung ta có: $OO_2 \perp HE,\ O_2O_1 \perp HD$ và do $EH \perp HD$ suy ra $OO_2 \perp O_2O_1$.

Chỉ ra $COM = 45^0$ suy ra $CAE = 45^0$ nên $O_2OO_1 = 45^0$. Tam giác O_2OO_1 vuông cân tại O_2.

Chỉ ra tứ giác $OCDE$ là hình vuông cạnh R và O_2 là trung điểm của DE.

Tính được $O_2O^2 = \dfrac{5R^2}{4}$. Vậy diện tích tam giác OO_1O_2 là $\dfrac{5R^2}{8}$.

Câu 4.

5.1) Từ giả thiết ta có: $(a+1)(b+1)(c+1) \ge 0$ và $(1-a)(1-b)(1-c) \ge 0$

suy ra $(a+1)(b+1)(c+1)+(1-a)(1-b)(1-c) \ge 0$

Rút gọn ta được: $-2(ab+bc+ba) \le 2$.

Mặt khác: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \le 2$.

Vì $|a|\le 1 \Rightarrow a^{2017} \le a^2$, $|b|\le 1 \Rightarrow b^{2018} \le b^2$, $|c|\le 1 \Rightarrow c^{2019} \le c^2$

Nên: $a^{2018}+b^{2019}+c^{2020} \le a^2+b^2+c^2 \le 2$.

Dấu "=" xảy ra khi chẳng hạn $a=0, b=1, c=-1$.

5.2) Xét tứ giác $ABCD$ thỏa mãn đề bài. Gọi $C(0;c), D(0;d)$ thì $c>d>0$.

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi $OC.OD = OA.OB$ suy ra $c.d = p^8.p^9 = p^{17}$. (1)

Do p nguyên tố và c, d nguyên dương nên có 9 cặp $(c;d)$ với $c>d$ thỏa mãn (1) là:

$(p^{17};1), (p^{16};p), ..., (p^9;p^8)$.

Vậy có 9 tứ giác thỏa mãn đề bài.

Đề số 13

Câu 1.

a) Ta có:

Với $x \ge 0$, ta có:

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{2\sqrt{x}+8}{x\sqrt{x}+1}\right)\cdot\frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)-2\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}\cdot\frac{x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)+(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{x+3\sqrt{x}+2-2\sqrt{x}-8}{x\sqrt{x}+1}\cdot\frac{(x\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+3}$$

$$=(x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6)\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$$

$$=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$$

$$=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)$$

$$=x-3\sqrt{x}+2$$

$A=6 \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+2=6 \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}-4=0$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-4\sqrt{x}-4=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-4=0$ (vì $\sqrt{x}+1>0\ \forall x\ge 0$)

$\Leftrightarrow x=16$ (TMĐK)

Vậy với $x = 16$ thì $A = 6$.

b) Ta có:

$M = 9.3^{4n} - 8.2^{4n} + 2019 = 9.81^n - 8.16^n + 2019$

Ta có:

$81 \equiv 1 (\bmod 4) \Rightarrow 81^n \equiv 1 (\bmod 4) \Rightarrow 9.81^n \equiv 9 \equiv 1 (\bmod 4)$

$8.16^n \equiv 0 (\bmod 4)$

$\Rightarrow M \equiv 1 - 0 + 2019 \equiv 2020 \equiv 0 (\bmod 4)$

hay $M \vdots 4$ (1)

Lại có:

$81 \equiv 1 (\bmod 5) \Rightarrow 81^n \equiv 1 (\bmod 5) \Rightarrow 9.81^n \equiv 9 \equiv 4 (\bmod 5)$

$16 \equiv 1 (\bmod 5) \Rightarrow 16^n \equiv 1 (\bmod 5) \Rightarrow 8.16^n \equiv 8 \equiv 3 (\bmod 5)$

$\Rightarrow M \equiv 4 - 3 + 2019 \equiv 2020 \equiv 0 (\bmod 5)$

hay $M \vdots 5$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M \vdots BCNN(4,5)$ hay $M \vdots 20$ (đpcm)

Câu 2.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$-x^2 = x + m - 2 \Leftrightarrow x^2 + x + m - 2 = 0 \qquad (1)$$

Ta có: $\Delta = 1 - 4(m-2) = 9 - 4m$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{9}{4}$ (2)

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = m - 2 \end{cases}$

Theo đề bài:

$x_1^2 + x_2^2 < 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 3$

$\Rightarrow 1 - 2(m-2) < 3 \Leftrightarrow 5 - 2m < 3 \Leftrightarrow m > 1$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow 1 < m < \dfrac{9}{4}$ là giá trị cần tìm.

Câu 3.

a) $x^2 - \sqrt{x^2 - 4x} = 4(x+3) \Leftrightarrow (x^2 - 4x) - \sqrt{x^2 - 4x} - 12 = 0$ (1)

Đặt $\sqrt{x^2 - 4x} = y$ $(y \geq 0)$. Phương trình (1) trở thành:

$$y^2 - y - 12 = 0 \qquad (2)$$

Giải phương trình (2) được:

$$y_1 = 4 \text{ (TMĐK) };\ y_2 = -3 \text{ (loại)}$$

Với $y = 4$ thì:

$$\sqrt{x^2 - 4x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 16 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 20 \Leftrightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{5}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2 \pm 2\sqrt{5}$.

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 2y = 3 \\ x^2 + 7y^2 - 4xy + 6y = 13 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 8 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 + 3y^2 + 6y + 3 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 = 8 & (1) \\ (x-2y)^2 + 3(y+1)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+2)^2 + 2(y+1)^2 = 16 \\ (x-2y)^2 + 3(y+1)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(x+2)^2 - (x-2y)^2 - (y+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - (x-2y)^2 + (x+2)^2 - (y+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-2y+2)(2y+2) + (x+y+3)(x-y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)(4y+4) + (x+y+3)(x-y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)(x+5y+7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = y - 1 & (2) \\ x = -5y - 7 & (3) \end{array}\right.$$

Thay (2) vào (1) được:

$$(y-1+2)^2 + (y+1)^2 = 8 \Leftrightarrow 2(y+1)^2 = 8 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 0 \\ y = -3 \Rightarrow x = -4 \end{array}\right.$$

Thay (3) vào (1) được:

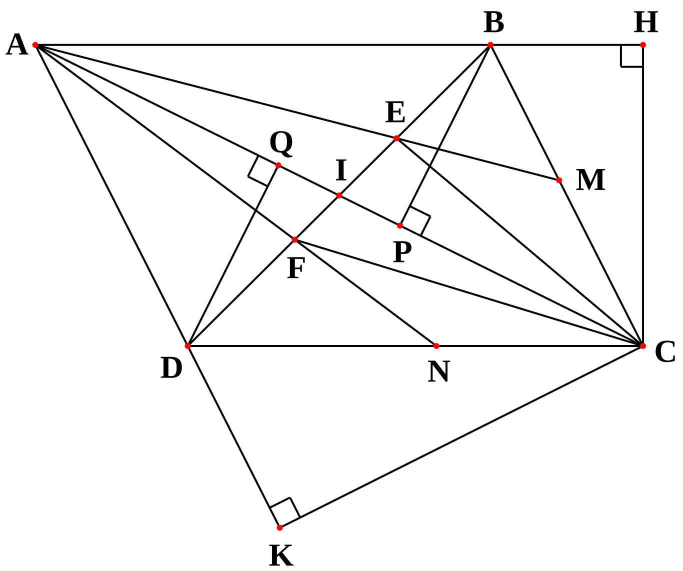
$$(-5y-7+2)^2 + (y+1)^2 = 8 \Leftrightarrow 26(y+1)^2 = 8 \Leftrightarrow (y+1)^2 = \frac{4}{13}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 + \dfrac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow x = -2 - \dfrac{10}{\sqrt{13}} \\ y = -1 - \dfrac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow x = -2 + \dfrac{10}{\sqrt{13}} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$(x;y)\in\left\{(0;1),(-4;-3),\left(-2-\frac{10}{\sqrt{13}};-1+\frac{2}{\sqrt{13}}\right),\left(-2+\frac{10}{\sqrt{13}};-1-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\right\}.$$

Câu 4.



a) Kẻ $BP\perp AC$, $DQ\perp AC$

Dễ chứng minh $\Delta\,AQD=\Delta\,CPB$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow AQ=CP\Rightarrow AQ+AP=AC$ (1)

$\Delta\,APB \backsim \Delta\,AHC$ (g-g)

$\Rightarrow\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AP}{AH}\Rightarrow AB.AH=AC.AP$ (2)

Tương tự: $AD.AK=AC.AQ$ (3)

Từ (1), (2) và (3)

$$\Rightarrow AB.AH+AD.AK=AC.AP+AC.AQ=AC(AP+AQ)=AC^2$$

b)Hai tam giác ADN và ADC có chung chiều cao kẻ từ A

$\Rightarrow\dfrac{DN}{DC}=\dfrac{S_{ADN}}{S_{ADC}}$

Tương tự: $\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{S_{ABM}}{S_{ABC}}$

Mà $S_{ABM}=S_{ACN}$ (GT) và $S_{ABC}=S_{ADC}$ (vì ABCD là hình bình hành)

$\Rightarrow\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{S_{ACN}}{S_{ADC}}$

$\Rightarrow\dfrac{BM}{BC}+\dfrac{DN}{DC}=\dfrac{S_{ACN}}{S_{ADC}}+\dfrac{S_{ADN}}{S_{ADC}}=\dfrac{S_{ACN}+S_{ADN}}{S_{ADC}}=1$

Gọi I là giao điểm của AC và BD $\Rightarrow$ IA = IC

Ta có:

$S_{AMCN} = S_{ACM} + S_{ACN} = S_{ACM} + S_{ABM} = S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABD}$

Vì IA = IC nên:

$S_{AEF} = S_{AIE} + S_{AIF} = S_{CIE} + S_{CIF} = S_{CEF} < S_{EMCNF}$

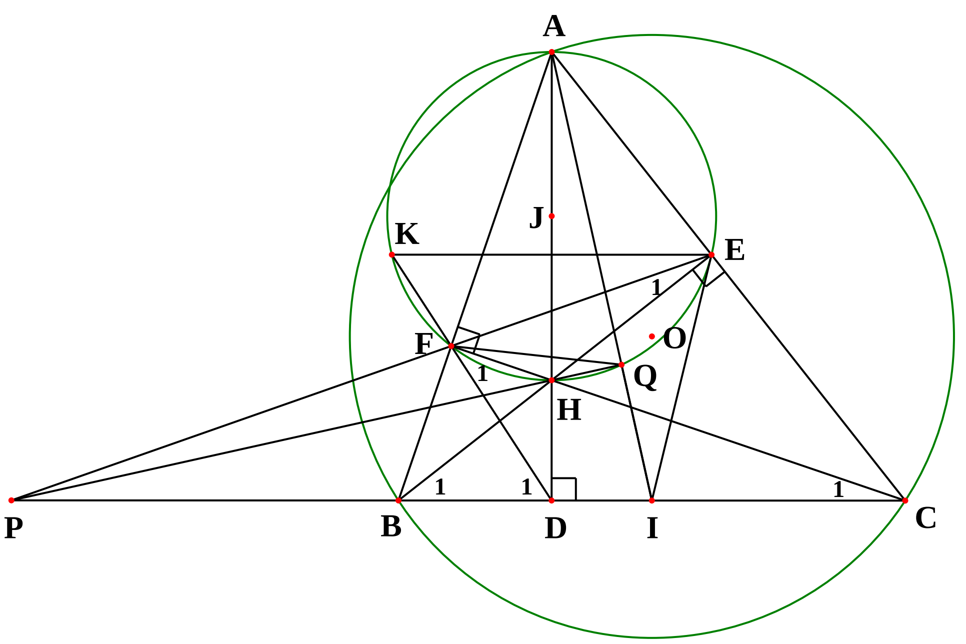
$\Rightarrow S_{AEF} < \frac{1}{2}S_{AMCN} \Rightarrow S_{AEF} < \frac{1}{2}S_{ABD}$

$\Rightarrow EF < \frac{1}{2}BD$

Mà BE + DF + EF = BD

$\Rightarrow$ $BE + DF > EF$ (đpcm).

Câu 5.



Tứ giác BCEF có:

$\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^o$ (GT)

$\Rightarrow$ BCEF là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{E_1}$

ΔPBE và ΔPFC có: $\widehat{EPC}$ chung ; $\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$

$\Rightarrow \Delta PBE \backsim \Delta PFC$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{PB}{PF} = \frac{PE}{PC} \Rightarrow PB.PC = PE.PF$

Tứ giác BDHF có:

$BDH = BFH = 90^{o}$ (GT)

$\Rightarrow BDH + BFH = 180^{o}$

$\Rightarrow$ BDHF là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow B_1 = F_1$

Gọi J là trung điểm của AH. Dễ thấy ΔHEF nội tiếp đường tròn $\left(J; \dfrac{AH}{2}\right)$

Tứ giác HEKF nội tiếp đường tròn (J)

$\Rightarrow F_1 = HEK \ \left(= 180^{o} - HFK\right)$

Mà $B_1 = F_1 \Rightarrow B_1 = HEK$

$\Rightarrow$ KE // BC

b)

Trước hết, ta chứng minh DIEF là tứ giác nội tiếp

<u>*Cách 1:*</u>

Tứ giác BCEF nội tiếp $\Rightarrow B_1 = HFE$

Mà $B_1 = F_1 \Rightarrow DFE = 2B_1$ (1)

ΔEBC vuông tại E, đường trung tuyến EI

$\Rightarrow IB = IE = \dfrac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta IBE$ cân tại I

$\Rightarrow \hat{I}_1 = 2B_1$ (tính chất góc ngoài của tam giác) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \hat{I}_1 = DFE$

$\Rightarrow$ DIEF là tứ giác nội tiếp

<u>*Cách 2:*</u>

Chứng minh được $IEH = B_1 = HFE \Rightarrow IEH = \dfrac{1}{2}$sđ$HE$

$\Rightarrow$ EI là tiếp tuyến của (J)

$\Rightarrow IEF = EAF = BHF = D_1$

$\Rightarrow$ DIEF là tứ giác nội tiếp

Dễ chứng minh $\Delta PDF \backsim \Delta PEI$ (g-g)

$\Rightarrow PD.PI = PE.PF$

Dễ chứng minh $\Delta PHE \backsim \Delta PFQ$ (g-g)

$\Rightarrow PE.PF = PH.PQ$

$\Rightarrow \text{PD.PI} = \text{PH.PQ} \Rightarrow \dfrac{\text{PD}}{\text{PQ}} = \dfrac{\text{PH}}{\text{PI}}$

$\Rightarrow \Delta\,\text{PDH} \backsim \Delta\,\text{PQI}$ (c-g-c) $\Rightarrow \text{PHD} = \text{PIQ}$

Lại có $\text{PHD} = \text{AHQ} = \text{AFQ}$

$\Rightarrow \text{AFQ} = \text{PIQ}$

$\Rightarrow$ BIQF là tứ giác nội tiếp.

Câu 6.

Dễ chứng minh các bất đẳng thức:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \;;\; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \text{ với } x, y > 0$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Áp dụng các bất đẳng thức trên, ta có:

$$\frac{(1+a)^2 + b^2 + 5}{ab+a+4} = \frac{a^2+b^2+2a+6}{ab+a+4} \geq \frac{2ab+2a+6}{ab+a+4} = \frac{2(ab+a+4)-2}{ab+a+4}$$

$$= 2 - \frac{2}{ab+a+4} = 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{(ab+a+1)+3} \geq 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{11}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{ab+a+1}$$

Tương tự:

$$\frac{(1+b)^2 + c^2 + 5}{bc+b+4} \geq \frac{11}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{bc+b+1}$$

$$\frac{(1+c)^2 + a^2 + 5}{ca+c+4} \geq \frac{11}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{ca+c+1}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{11}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1}\right)$$

Vì $abc = 1$ nên:

$$\frac{1}{bc+b+1} = \frac{a}{abc+ab+a} = \frac{a}{ab+a+1}$$

$$\frac{1}{ca+c+1} = \frac{ab}{a^2bc+abc+ab} = \frac{ab}{ab+a+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} = \frac{1}{ab+a+1} + \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{ab+a+1}$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{11}{2} - \frac{1}{2} = 5$$

Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ ab+a+1=bc+b+1=ca+c+1=3 \Leftrightarrow a=b=c=1 \\ abc=1 \end{cases}$$

Vậy $\min P = 5 \Leftrightarrow a=b=c=1$

Đề số 14

Câu 1.

a) Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M\left(0;1\right)$ có hệ số góc k: $y = kx+1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và $\left(P\right)$: $x^2 - kx - 1 = 0$ (1).

Phương trình (1) có $\Delta = k^2 + 4 > 0, \forall k$.

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt hay đường thẳng d luôn cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm A, B phân biệt với mọi giá trị k.

b) Gọi $A\left(x_1; x_1^2\right)$ và $B\left(x_2; x_2^2\right)$. Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1), suy ra $x_1.x_2 = -1$.

Phương trình đường thẳng OA: $y = x_1.x$

Phương trình đường thẳng OB: $y = x_2.x$

Do $x_1.x_2 = -1$ nên $OA \perp OB$. Vậy ΔOAB là tam giác vuông .

Câu 2.

a) Điều kiện $x \geq 1$.

$$x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}\ \ 1-x \ \ \Leftrightarrow x(x-1) + 2\sqrt{x-1}\ \ x-1\ \ -4 = 0 \text{ (1)}$$

Đặt $y = \sqrt{x-1}, y \geq 0$.

Phương trình (1) trở thành

$$(y^2+1)y^2 + 2y.y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 2y^3 + y^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y^3 + 3y^2 + 4y + 4) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ vì } y \geq 0.$$

Suy ra $\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) $\begin{cases} x^2 - 5y + 3 + 6\sqrt{y^2 - 7x + 4} = 0 \text{ (1)} \\ y(y - x + 2) = 3x + 3 \text{ (2)} \end{cases}$

Điều kiện: $y^2 - 7x + 4 \geq 0$.

$$(2) \Leftrightarrow (y+3)(y-x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3 \\ y=x+1 \end{array}\right.$$

Với $y=-3$, từ (1) ta có $x^2+18+6\sqrt{13-7x}=0$ (vô nghiệm)

Với $y=x+1$, từ (1) ta có $x^2-5x+5\ +6\sqrt{x^2-5x+5}-7=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+5=-7 \\ x^2-5x+5=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+12=0 \text{ (VN)} \\ x^2-5x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right..$$

Với $x=1 \Rightarrow y=2$ (TMĐK), với $x=4 \Rightarrow y=5$ (TMĐK).

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm (1;2) và (4;5).

Câu 3.

Đặt $S=\sqrt{2019x^2+2xy+2019y^2}+\sqrt{2019y^2+2yz+2019z^2}+\sqrt{2019z^2+2zx+2019x^2}$

Ta có $2019x^2+2xy+2019y^2=1009(x-y)^2+1010(x+y)^2 \geq 1010(x+y)^2$

Suy ra $\sqrt{2019x^2+2xy+2019y^2} \geq \sqrt{1010}(x+y)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Tương tự

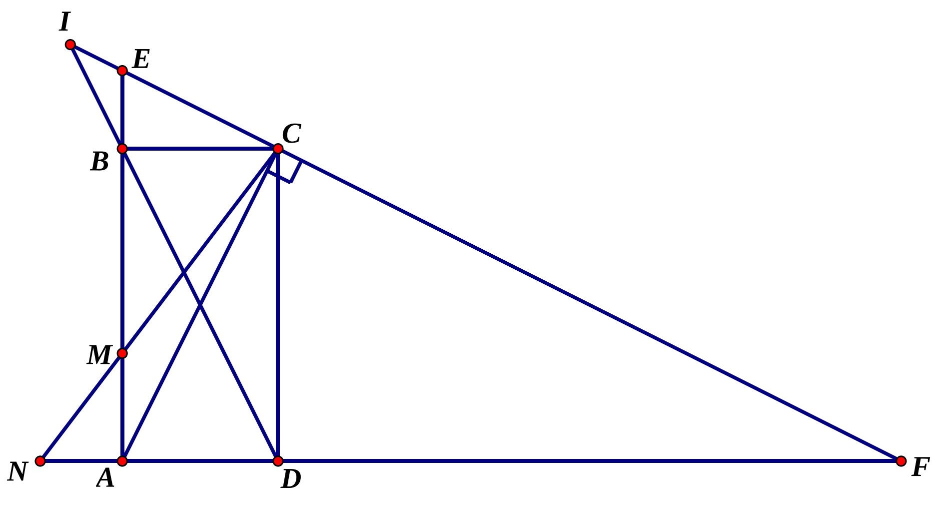
$\sqrt{2019y^2+2yz+2019z^2} \geq \sqrt{1010}(y+z)$.

$\sqrt{2019z^2+2zx+2019x^2} \geq \sqrt{1010}(z+x)$.

Do đó $S \geq 2\sqrt{1010}(x+y+z)=2\sqrt{2020}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 4.



a) Do ABCD là hình chữ nhật nên $BDA = CAD.$

Mặt khác $CAD = AEF$ (cùng phụ với AFE)

Suy ra $BDA = AEF$.

Tứ giác $EBDF$ có $BEF + BDF = BDA + BDF = 180^0.$ Vậy tứ giác $EBDF$ nội tiếp.

b)Tam giác ACE vuông tại C và $CB \perp EA$ nên ta có $CB^2 = BE.BA$

Suy ra $BE = \dfrac{CB^2}{BA} = \dfrac{(2a)^2}{4a} = a.$

Ta có $BD^2 = AB^2 + AD^2 = (4a)^2 + (2a)^2 = 20a^2 \Rightarrow BD = 2a\sqrt{5}.$

Do BE song song với CD nên $\dfrac{IB}{ID} = \dfrac{BE}{DC} = \dfrac{a}{4a} = \dfrac{1}{4}$

Suy ra $ID = \dfrac{4}{3}BD$. Vậy $ID = \dfrac{8\sqrt{5}a}{3}.$

c)Đặt $AM = x, 0 < x < 4\text{a}$. Suy ra $MB = 4a - x, ME = 5a - x$.

Do BC song song với AN nên $\dfrac{AN}{BC} = \dfrac{MA}{MB} \Rightarrow AN = \dfrac{MA.BC}{MB} = \dfrac{2ax}{4a - x}$

Suy ra

$$S_1 = \frac{1}{2}CB.ME = \frac{1}{2}.2a.(5a - x) = a(5a - x)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}AM.AN = \frac{1}{2}x.\frac{2ax}{4a - x} = \frac{ax^2}{4a - x}$$

Do đó $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{(5a - x)(4a - x)}{x^2} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 + 18a.x - 40a^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2a)(x + 20a) = 0 \Leftrightarrow x = 2a$ (vì $(0 < x < 4\text{a})$.

Kết luận: Khi M là trung điểm của AB thì $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{3}{2}.$

Câu 5.

Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm hữu tỉ, khi đó $\Delta = b^2 - 4ac = m^2, (m \in \mathbb{N})$.

Suy ra $b^2 > m^2$ hay $b > m.$ (1)

Ta có $4a.\overline{abc} = 4a(100a + 10b + c) = 400a^2 + 40ab + 4ac$

$=\left(400a^2+40ab+b^2\right)-\left(b^2-4ac\right)=\left(20a+b\right)^2-m^2$

$=\left(20a+b+m\right)\left(20a+b-m\right)$

Do $\overline{abc}$ là số nguyên tố nên $\left(20a+b+m\right)\vdots\overline{abc}$ hoặc $\left(20a+b-m\right)\vdots\overline{abc}$, suy ra $20a+b+m\geq\overline{abc}$ (2)

Từ (1) ta có $20a+2b=20a+b+b>20a+b+m$

Từ (2) ta có $20a+b+m\geq 100a+10b+c>100a+10b$

Do đó

$20a+2b>100a+10b\Leftrightarrow 2(10a+b)>10(10a+b)\Leftrightarrow 2>10$ (vô lý)

Vậy Δ không thể là số chính phương nên phương trình $ax^2+bx+c=0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Đề số 15

Câu 1

a) Từ gt có $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3=3^3$ hay $x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=27.$ => $x^3+\dfrac{1}{x^3}+3.3=27.$

=> $P=x^3+\dfrac{1}{x^3}=27-9=18.$

b) Điều kiện xác định $\begin{cases}x\geq 0\\ x\neq 1\end{cases}.$

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{2\sqrt{x}}{x-1}=1$ <=> $x-2\sqrt{x}-1=0.$

Đặt $\sqrt{x}=t\left(t\geq 0;t\neq 1\right)$ ta có $t^2-2t-1=0\Leftrightarrow t=1+\sqrt{2}$ (do $t\geq 0$).

Khi đó $x=\left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2}.$

=> Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=6+2\sqrt{5}.$

Câu 2

a) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}\geq\dfrac{4a}{a+c}\Leftrightarrow\left(ac+b^2\right)\left(a+c\right)\geq 4abc$

Theo côsi

$ac+b^2\geq 2\sqrt{ab^2c}>0$

$a+c\geq 2\sqrt{ac}>0$

$\Rightarrow\left(ac+b^2\right)\left(a+c\right)\geq 4abc.$

b)Giả sử tồn tại một cách xếp 30 bạn lên bàn tròn sao cho không có bạn nào ngồi giữa hai bạn nữ. Gọi các bạn theo thứ tự là $A_1;A_2;\ldots;A_{30}$. Chúng ta chia 30 bạn sang hai bàn tròn gồm $\left(A_1;A_3;\ldots;A_{29}\right)$ và $\left(A_2;A_4;\ldots;A_{30}\right)$ và giữ nguyên thứ tự.

Khi đó ở cả hai bàn mới, không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau.

=> Số bạn nữ ở mỗi bàn sẽ không vượt quá $\frac{15}{2}$.

Suy ra tổng số bạn nữ ở cả hai bàn nhỏ hơn 15 (trái giả thiết).

Vậy luôn tồn tại một học sinh mà 2 bạn ngồi cạnh bạn đó đều là nữ.

Câu 3

a) Ta có ngay $[x]\le x$ (theo định nghĩa)

G/s $[x]+1\le x$ thì $[x]+1$ là số nguyên mà $[x]+1>[x]$;

mà theo định nghĩa thì $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x (mâu thuẫn do $[x]<[x]+1$). Do đó $x<[x]+1$

$$\Rightarrow x-1<[x]$$

Lại có $\begin{cases}[x]+1\le x+1\\ [x+1]\le x+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[x]+1\le x+1\\ [x+1]-1\le x\end{cases}$

Mặt khác do $[x]+1$ và $[x+1]-1$ đều là các số nguyên nên

$$\begin{cases}[x]+1\le[x+1]\\ [x+1]-1\le[x]\end{cases}\Rightarrow[x]+1=[x+1]\,(4).$$

Vậy $x-1<[x]\le x<[x]+1=[x+1]$

b) Giả sử n là số nguyên dương thỏa mãn

Đặt $k=\left[\sqrt{n}\right]$ thì $1\le k\le 28$ và $k^2\le n<(k+1)^2$ hay $k^2\le n\le k^2+2k$.

=> $n=k^2+r$ với $0\le r\le 2k$.

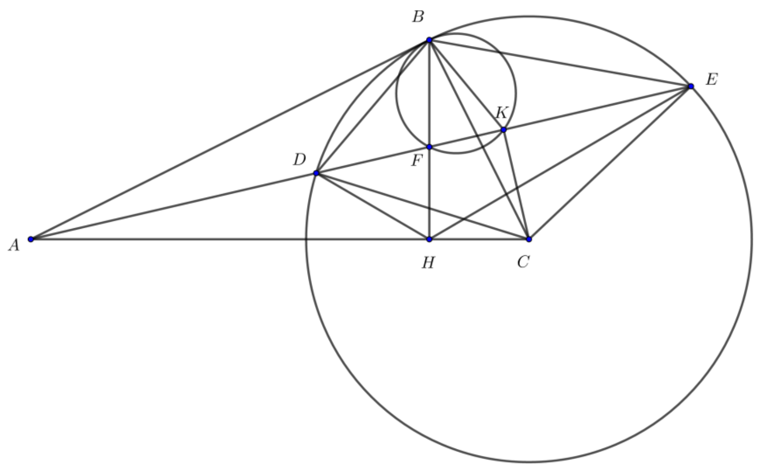
Mặt khác $n\,\vdots\,k$ hay $\left(k^2+r\right)\vdots\,k$ nên $r=0;k;2k$ với $1\le k\le 28$

Lại có $840=28^2+2.28$

Mà n có dạng $k^2;k^2+k;k^2+2k$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

=> Số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu bài toán là $3.28=84$.

Câu 4



a) $FKC = FHC = 90°$ => $FKCH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét hai tam giác ADB và ABE có góc A chung và $ABD = AEB.$

Do đó tam giác $\Delta ADB \sim \Delta ABE$ (g.g).

Suy ra $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE}$ hay $AD.AE = AB^2$.

Mặt khá $AB^2 = AH.AC.$

Do đó $AD.AE = AH.AC$

Ta có $\Delta AFH \sim \Delta ACK$ (g.g) suy ra $AF.AK = AH.AC$

=> $AD.AE = AH.AC = AF.AK.$

c) Ta có $AH.AC = AB^2$ nên $AF.AK = AB^2$.

Ta có $\Delta AFB \sim \Delta ABK$ (c.g.c) suy ra $ABF = AKB$ hay AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK,

=> AB là tiếp tuyến chung => Đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK tiếp xúc với (ω) tại $B.$

Câu 5

Ta chứng minh $n = 1000000000$ thỏa mãn

Thật vậy

$$\frac{\left(10^9\right)^{2019}}{2^{1000000000}} = \frac{10^{9.2019}}{2^{1000000000}} < \frac{\left(2^4\right)^{9.2019}}{2^{1000000000}} = \frac{2^{4.9.2019}}{2^{1000000000}} = \frac{1}{2^{999927316}} < \frac{1}{2020}.$$

Tiếp theo ta chứng minh nhận xét:

Nếu $n = a > 1000000000$ thỏa mãn, thì $n = 2a$ cũng thỏa mãn

Thật vậy

$$\frac{n^{2019}}{2^n}=\frac{(2a)^{2019}}{2^{2a}}=\frac{2^{2019}}{2^a}.\frac{a^{2019}}{2^a}<\frac{2^{2019}}{2^{1000000000}}.\frac{a^{2019}}{2^a}<\frac{a^{2019}}{2^a}<\frac{1}{2020}.$$

Từ nhận xét trên kết hợp với quy nạp, ta thấy $n=2^k.10^9$ thỏa mãn bài toán với mọi $k\in\mathbb{N}$.

Vậy tồn tại vô số số nguyên dương n

Đề số 16

Câu 1:

a) $$A=\frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}.\left(1-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$A=\frac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{x^2-4x+4}}.\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$

$$A=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}}.\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$

$$A=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}}.\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$

$$A=\frac{\left|\sqrt{x-1}-1\right|+\left|\sqrt{x-1}+1\right|}{|x-2|}.\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$

Nếu $1<x<2$ thì $A=\dfrac{1-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}+1}{-(x-2)}.\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)=\dfrac{2}{-(x-2)}.\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)=\dfrac{-2}{x-1}$

Nếu $x>2$ thì $A=\dfrac{\sqrt{x-1}-1+\sqrt{x-1}+1}{x-2}.\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)=\dfrac{2\sqrt{x-1}}{x-2}.\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$

b) TH1: Nếu $1<x<2$ thì $A=\dfrac{-2}{x-1}$

Để A nhận giá trị nguyên thì x – 1 phải là ước dương của 2 (vì x nguyên và x > 1)

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=1\\x-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\ \ (loại)\\x=3\ \ (loại)\end{array}\right.$$

TH2: Nếu $x>2$ thì $A=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$

Vì x nguyên, x > 2 nên x – 1 nguyên và x – 1 > 1

A nhận giá trị nguyên nên $\sqrt{x-1}$ là ước lớn hơn 1 của 2 $\Rightarrow\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x=5$ (nhận)

Vậy với x = 5 thì A nhận giá trị nguyên.

Câu 2: Gọi x (tháng) là số tháng thử việc của anh Bình. (x $\in N^*$, $3\le x\le 8$).

Gọi y (USD) là số tiền anh Bình nhận được sau x tháng thử việc.

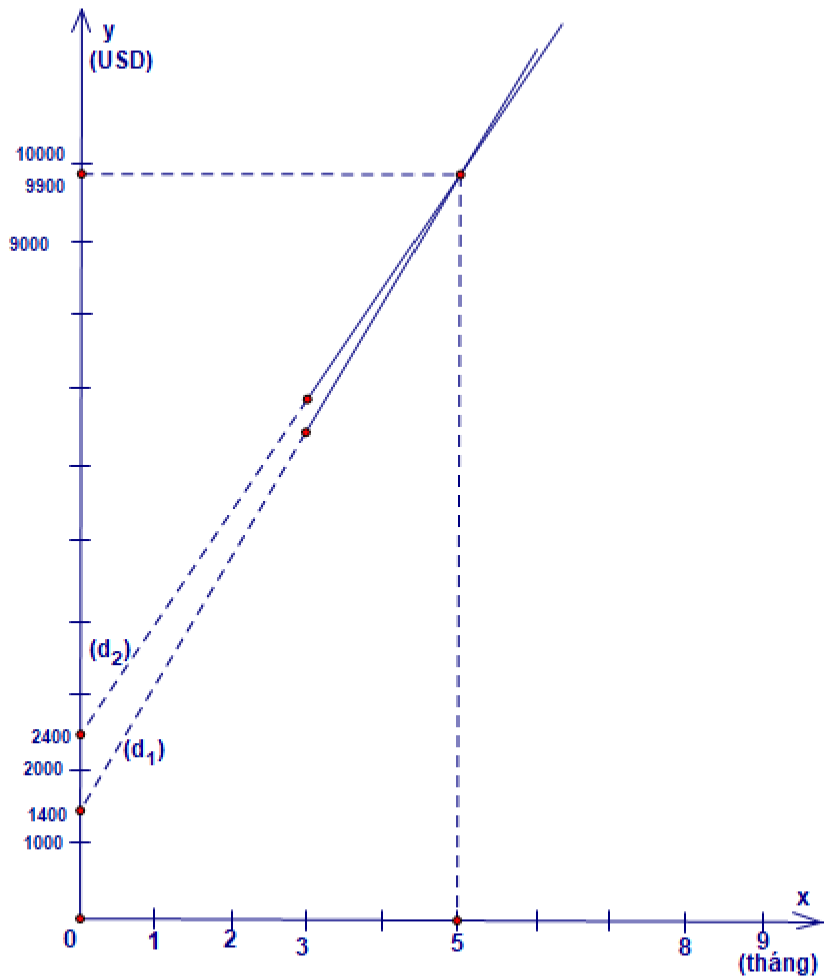
Theo công ty A thì số tiền anh Bình nhận được: y = 1400 + 1700x (d_1)

Theo công ty B thì số tiền anh Bình nhận được: y = 2400 + 1500x (d_2)

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_1):

$1400 + 1700x = 2400 + 1500x \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow y = 9900$

Xét đồ thị biểu diễn hai hàm (d_1) và (d_2) như sau:



Căn cứ vào đồ thị, ta có thể tư vấn cho anh Bình như sau:

+Nếu thử việc từ 3 đến dưới 5 tháng thì anh Bình nên chọn công ty B sẽ thu được tiền nhiều hơn.

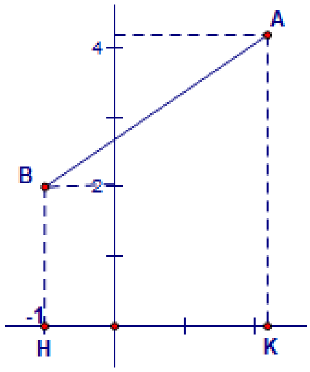
+Nếu thử việc từ hơn 5 tháng thì anh Bình nên chọn công ty A sẽ thu được tiền nhiều hơn.

+Nếu thử việc đúng 5 tháng thì anh Bình chọn công ty nào cũng sẽ thu được tiền như nhau.

Câu 3: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2):

$$m^2x - m^4 + 2 = \frac{m^2}{m^2+1}x + 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^4}{m^2+1}x = m^4 \Leftrightarrow x = m^2+1 \text{ (vì m } \neq 0) \Rightarrow y = m^2+2 \Rightarrow A(m^2+1; m^2+2)$$



H, K lần lượt là hình chiếu của B, A lên Ox nên H(– 1; 0), $K(m^2+1;0)$

$$S_{ABHK} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow \frac{(AK+BH)HK}{2} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow (AK+BH)HK = 15$$

$$\Leftrightarrow (m^2+4)(m^2+2) = 15 \Leftrightarrow m^4 + 6m^2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m^2 = -7 (vô\ nghiệm) \end{cases} \Rightarrow m = \pm 1$$

Câu 4:

a) $\sqrt{2x^2+3x+2} + \sqrt{4x^2+6x+21} = 11$

Ta có: $2x^2+3x+2 = 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0, \forall x$

$$4x^2+6x+21 = 4\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{75}{4} > 0, \forall x$$

Đặt $a = 2x^2+3x+2$ (a > 0), phương trình cho trở thành: $\sqrt{a} + \sqrt{2a+17} = 11$ (1)

Bình phương hai vế phương trình (1) ta được:

$$3a + 17 + 2\sqrt{2a^2+17a} = 121$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2a^2+17a} = 104 - 3a \quad (a < \frac{104}{3})$$

$$\Rightarrow 4(2a^2+17a) = 10816 - 624a + 9a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 692a + 10816 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 676 \text{ (loại)} \\ a = 16 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

Với a = 16 $\Rightarrow 2x^2+3x+2=16 \Leftrightarrow 2x^2+3x-14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{-7}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: x = 2; $x=\dfrac{-7}{2}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 & (1) \\ x+y-xy=2y^2-x^2 & (2) \end{cases}$

PT (2) $\Leftrightarrow (x+y)-(xy+y^2)+(x^2-y^2)=0 \quad \Leftrightarrow (x+y)(1-2y+x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ 1-2y+x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x=2y-1 \end{array}\right.$$

Với x = −y, từ PT (1) $\Rightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=1 \end{array}\right.$

Với x = 2y – 1, từ PT (1) $\Rightarrow (2y-1)^2+y^2+(2y-1)y=1$

$$\Leftrightarrow 7y^2-5y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\dfrac{5}{7} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{3}{7} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm: $(x;y)=(1;-1);(-1;1);(-1;0);\left(\dfrac{3}{7};\dfrac{5}{7}\right)$

c) $2020(x^2+y^2)-2019(2xy+1)=5$

$\Leftrightarrow 2019(x-y)^2+x^2+y^2=2024 \qquad (1)$

$\Rightarrow 2019(x-y)^2 \le 2024 \Rightarrow (x-y)^2 \le \dfrac{2024}{2019} \Rightarrow 0 \le (x-y)^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le |x-y| \le 1$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} |x-y|=0 \\ |x-y|=1 \end{array}\right.$

Nếu $|x-y|=0 \Rightarrow x=y$, từ (1) $\Rightarrow 2x^2=2024 \Rightarrow x^2=1012$ (vô nghiệm nguyên)

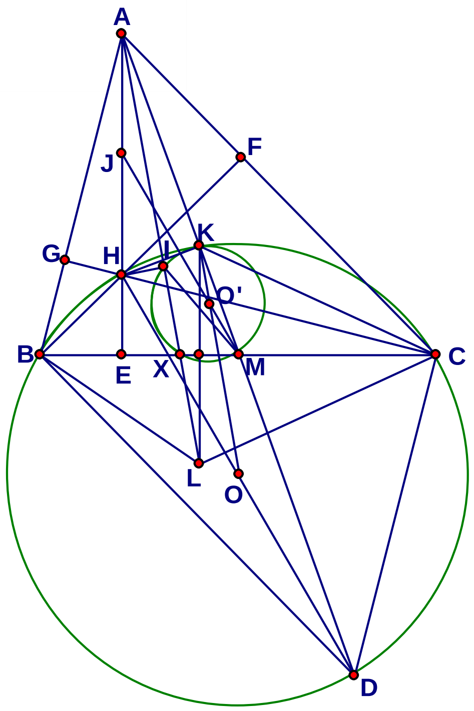
Nếu $|x-y|=1$ thì $\left[\begin{array}{l} x-y=1 \\ x-y=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=x+1 \end{array}\right.$ và từ (1) $\Rightarrow x^2+y^2=5$ (2)

Thay $y=x-1$ vào (2) ta được: $\Rightarrow x^2+(x-1)^2=5 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=1 \end{array}\right.$

Thay $y=x+1$ vào (2) ta được: $\Rightarrow x^2+(x+1)^2=5 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên: $(x;y)=(-1;2);(-2;1);(1;-2);(2;-1)$

Câu 5:



a) Gọi E, F, G theo thứ tự là chân các đường cao AE, BF, CG của tam giác ABC.

$\Delta AHK \backsim \Delta AME(g.g) \Rightarrow \dfrac{AK}{AE} = \dfrac{AH}{AM} \Rightarrow AK.AM = AH.AE$

$\Delta AHF \backsim \Delta ACE(g.g) \Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AF}{AE} \Rightarrow AC.AF = AH.AE$

Từ đó suy ra: AK.AM = AF.AC suy ra: $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{AF}{AM} \Rightarrow \Delta AFK \backsim \Delta AMC \Rightarrow AKF = ACM$

ΔFBC vuông tại F có FM là đường trung tuyến $\Rightarrow FM = MC = \dfrac{1}{2}BC$

$\Rightarrow \Delta MFC$ cân tại M $\Rightarrow MFC = MCF = ACB$

Xét tứ giác BHKC có:

$HKC + HBC = HKM + MKC + HBC$

$= 90^0 + MFC + HBC$

$= 90^0 + ACB + HBC = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Suy ra: tứ giác BHKC nội tiếp.

Ta có: AGHF nội tiếp $\Rightarrow BAC + GHF = 180^0$

Mà $GHF = BHC$ (đối đỉnh)

Lại có: BHKC nội tiếp $\Rightarrow BHC = BKC$

Mà $BKC = BLC$ (K, L đối xứng qua BC)

Từ đó: $BAC + BLC = 180^0$. Suy ra: tứ giác ABLC nội tiếp.

b) Ta có: $LAB = LCB$ (ABLC nội tiếp, cùng chắn cung BL)

Mà $\widehat{LCB} = \widehat{KCM}$ (K đối xứng L qua BC)

$\Rightarrow \widehat{LAB} = \widehat{KCM}$ (1)

ΔAMC và ΔCMK có KMC chung và MKC = ACB

$\Rightarrow \Delta AMC \backsim \Delta CMK(g.g) \Rightarrow \widehat{KCM} = \widehat{MAC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{LAB} = \widehat{MAC}$

c) Ta có: ABDC là hình bình hành vì MA = MD, MB = MC

Suy ra: $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$

Mà $\widehat{BHC} + \widehat{BAC} = 180^0$ $\Rightarrow \widehat{BHC} + \widehat{BDC} = 180^0 \Rightarrow$ BHCD nội tiếp

$\Rightarrow$ B, H, K, C, D cùng thuộc một đường tròn

AB // CD mà $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp CD \Rightarrow$ HD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔBHC

Gọi O là trung điểm HD thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBHC

Ta có: AI.AX = AH.AE và AH. AE = AK.AM suy ra: AI.AX = AK.AM

$\Rightarrow \frac{AI}{AM} = \frac{AK}{AX} \Rightarrow \Delta AKI \backsim \Delta AXM \Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{AXM} \Rightarrow$ IXMK nội tiếp

Suy ra: K thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔIXM

Suy ra: đường tròn ngoại tiếp ΔBHC và đường tròn ngoại tiếp ΔIXM có điểm chung K.

$OD = OK$ (bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBHC) $\Rightarrow \Delta OKD$ cân $\Rightarrow \widehat{OKD} = \widehat{ODK}$

Gọi J là trung điểm AH, IM là đường trung bình của tam giác AHD, JM cắt OK tại O′

$\Rightarrow JM$ // HD $\Rightarrow \widehat{O'MK} = \widehat{ODK}$ (đồng vị) $\widehat{O'MK} = \widehat{OKD}$ $\Rightarrow \Delta O'KM$ cân tại O′

Suy ra: O′ thuộc đường trung trực của KM (*)

Mặt khác: AHIK nội tiếp đường tròn tâm J, đường kính AH

$\Rightarrow \widehat{HKI} = \widehat{HAI}$ (cùng chắn cung HI) và JK = JI

AH // KL (cùng vuông góc với BC) $\Rightarrow \widehat{HAI} = \widehat{ILK}$ $\Rightarrow \widehat{HKI} = \widehat{ILK}$

$\Rightarrow$ HK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔKIL

Mà HK $\perp AM$ suy ra tâm đường tròn này thuộc AM

Lại có BC là đường trung trực của KL và M thuộc BC

Suy ra: M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔKIL

Suy ra: MK = MI

Mà JI = JK suy ra: JM là trung trực của IK (**)

Từ (*) và (**) suy ra: O′ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔIXM

Mà ta có: OO′ = OK – O′K

Suy ra: đường tròn ngoại tiếp ΔBHC và đường tròn ngoại tiếp ΔIXM tiếp xúc trong với nhau tại K.

Câu 6:

a) Ta có: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)(x+y+z)\ge(a+b+c)^2 \text{ (vì x, y, z > 0)}$$

$$\Leftrightarrow a^2+\frac{a^2y}{x}+\frac{a^2z}{x}+\frac{b^2x}{y}+b^2+\frac{b^2z}{y}+\frac{c^2x}{z}+\frac{c^2y}{z}+c^2\ge a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a^2y}{x}-2ab+\frac{b^2x}{y}\right)+\left(\frac{a^2z}{x}-2ca+\frac{c^2x}{z}\right)+\left(\frac{b^2z}{y}-2bc+\frac{c^2y}{z}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(a\sqrt{\frac{y}{x}}-b\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2+\left(a\sqrt{\frac{z}{x}}-c\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2+\left(b\sqrt{\frac{z}{y}}-c\sqrt{\frac{y}{z}}\right)^2\ge 0 \text{ (luôn đúng với x, y, z > 0)}$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} a\sqrt{\frac{y}{x}}=b\sqrt{\frac{x}{y}}\\ a\sqrt{\frac{z}{x}}=c\sqrt{\frac{x}{z}}\\ b\sqrt{\frac{z}{y}}=c\sqrt{\frac{y}{z}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ay=bx\\ az=cx\\ bz=cy\end{cases}\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Vậy: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

b) $P=\frac{a^3+8}{a^3(b+c)}+\frac{b^3+8}{b^3(c+a)}+\frac{c^3+8}{c^3(a+b)}$

$$P=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}+\frac{8}{a^3(b+c)}+\frac{8}{b^3(c+a)}+\frac{8}{c^3(a+b)}$$

$$P=\frac{\frac{1}{bc}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{\frac{1}{ca}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}+\frac{\frac{1}{ab}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{8}{a^2(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}+\frac{8}{b^3(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})}+\frac{8}{c^3(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})} \quad \text{(vì abc = 1)}$$

Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$ $\Rightarrow$ x, y, z > 0 và xyz = 1

$$P=\left(\frac{yz}{y+z}+\frac{zx}{z+x}+\frac{xy}{x+y}\right)+8\left[\frac{x^2}{(y+z)}+\frac{y^2}{(z+x)}+\frac{z^2}{(x+y)}\right]$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{yz}{y+z}+\frac{y+z}{4}\geq 2\sqrt{\frac{yz}{y+z}.\frac{y+z}{4}}=\sqrt{yz}$$

$$\frac{zx}{z+x}+\frac{z+x}{4}\geq 2\sqrt{\frac{zx}{z+x}.\frac{z+x}{4}}=\sqrt{zx}$$

$$\frac{xy}{x+y}+\frac{x+y}{4}\geq 2\sqrt{\frac{xy}{x+y}.\frac{x+y}{4}}=\sqrt{xy}$$

Suy ra: $\frac{yz}{y+z}+\frac{zx}{z+x}+\frac{xy}{x+y}+\frac{x+y+z}{2}\geq\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{x^2y^2z^2}}=3$

$$\Rightarrow \frac{yz}{y+z}+\frac{zx}{z+x}+\frac{xy}{x+y}\geq 3-\frac{x+y+z}{2} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức ở câu a, ta có:

$$\frac{x^2}{(y+z)}+\frac{y^2}{(z+x)}+\frac{z^2}{(x+y)}\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}$$

Suy ra: $8\left[\frac{x^2}{(y+z)}+\frac{y^2}{(z+x)}+\frac{z^2}{(x+y)}\right]\geq 4(x+y+z)$ (2)

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:

$$\frac{yz}{y+z}+\frac{zx}{z+x}+\frac{xy}{x+y}+8\left[\frac{x^2}{(y+z)}+\frac{y^2}{(z+x)}+\frac{z^2}{(x+y)}\right]\geq 3+\frac{7(x+y+z)}{2}$$

Suy ra: $P\geq 3+\frac{7(x+y+z)}{2}\geq 3+\frac{7}{2}.3\sqrt[3]{xyz}=3+\frac{21}{2}=\frac{27}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z = 1 suy ra a = b = c = 1

Vậy MinP = $\frac{27}{2}$ khi a = b = c = 1

Đề số 17

Câu 1: ***(1,5 điểm)***

a) Điều kiện: $x\geq 0, x\neq 1$. Ta có

$$P=\frac{3x+3\sqrt{x}-3-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.$$

$P=3\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=3\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn điều kiện).

b) Ta có $2=xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+Q$

$$\Rightarrow (2-Q)^2 = \left[xy + \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}\right]^2$$

$$\Rightarrow 4 - 4Q + Q^2 = 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 + 2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}.$$

Ta lại có $Q^2 = x^2(y^2+1) + y^2(x^2+1) + 2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}$

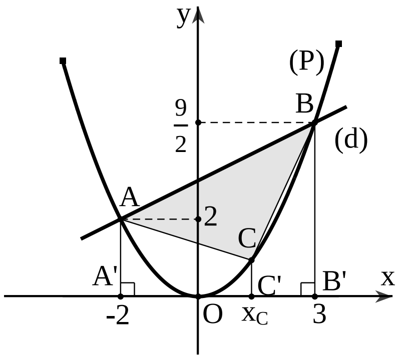
$$\Rightarrow Q^2 = 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}.$$

Do đó $4 - 4Q = 1 \Rightarrow Q = \frac{3}{4}\cdot$

Câu 2: ***(2,0 điểm)***

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow x = -2,\ x = 3.$$



Các giao điểm là $A(-2;2)$ và $B\left(3;\frac{9}{2}\right)$.

Gọi $C\left(x_C;\frac{x_C^2}{2}\right)$ với $-2 < x_C < 3$. Gọi A', B', C' theo thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên trục hoành. Ta có

$$S_{ABC} = S_{ABB'A'} - S_{ACC'A'} - S_{BCC'B'} = \frac{1}{2}\left(2+\frac{9}{2}\right)\cdot 5 - \frac{1}{2}\left(2+\frac{x_C^2}{2}\right)\cdot(x_C+2) - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}+\frac{x_C^2}{2}\right)(3-x_C)$$

$$= -\frac{5}{4}x_C^2 + \frac{5}{4}x_C + \frac{15}{2}.$$

Ta có $S_{ABC} = \frac{125}{16} - \frac{5}{4}\left(x_C - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{125}{16}.$

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất bằng $\frac{125}{16}$ khi $x_C = \frac{1}{2}$.

b) Viết lại hệ $\begin{cases} x^4 - 2x^3y + x^2y^2 + x^3y = 1 \\ x^3y + 3(x^2 - xy) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - xy)^2 + x^3y = 1 \\ x^3y + 3(x^2 - xy) = 3 \end{cases}.$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 - xy \\ v = x^3y \end{cases}$, ta có hệ $\begin{cases} u^2 + v = 1 \quad (1) \\ v + 3u = 3 \quad (2) \end{cases}$.

(2) ta có $v = 3 - 3u$. Thay vào (1) ta được $u^2 - 3u + 2 = 0 \Leftrightarrow u = 1, u = 2.$

TH1: Với $u = 1$ thì $v = 0$. Ta có $\begin{cases} x^2 - xy = 1 \\ x^3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}.$

Hệ có hai nghiệm $(x;y) = (1;0), (-1;0).$

TH2: Với $u=2$ thì $v=-3$. Ta có $\begin{cases} x^2-xy=2 \\ x^3y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\dfrac{3}{x^2}=2 \\ x^2y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-2x^2+3=0 \\ x^2y=-3 \end{cases}$.

Hệ này vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x;y)=(1;0),(-1;0)$.

Câu 3:

a) Điều kiện: $x \geq \dfrac{3}{2}$.

Phương trình (1) viết lại $\sqrt{2x+6+6\sqrt{2x-3}}+\sqrt{2x-2+2\sqrt{2x-3}}=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-3+6\sqrt{2x-3}+9}+\sqrt{2x-3+2\sqrt{2x-3}+1}=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{2x-3}+3)^2}+\sqrt{(\sqrt{2x-3}+1)^2}=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-3}+3+\sqrt{2x-3}+1=4$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-3}=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

b) $\Delta=(m-1)^2-4(m-6)=m^2-6m+25=(m-3)^2+16>0\ \forall m$.

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

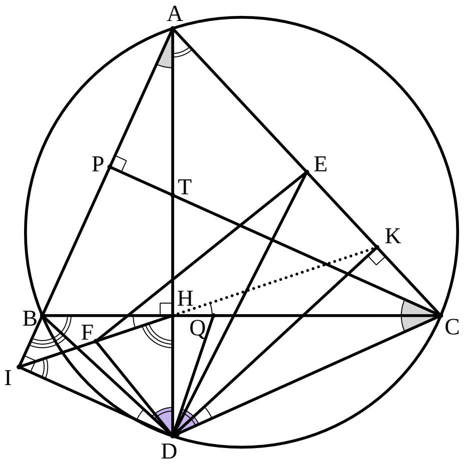
Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1+x_2=-(m-1)$, $x_1x_2=m-6$.

Ta có: $A=x_1^2x_2^2-4(x_1^2+x_2^2)+16=x_1^2x_2^2-4(x_1+x_2)^2+8x_1x_2+16$.

$$A=(m-6)^2-4(m-1)^2+8(m-6)+16=-3m^2+4m=-3\left(m-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}\leq\frac{4}{3}$$

Vậy khi $m=\dfrac{2}{3}$ thì A có giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{4}{3}$.

Bài 4:



a) Tia CT cắt cạnh AB tại P.

Ta có $\widehat{DAB}=\widehat{TCB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$), $\widehat{TCB}=\widehat{DCB}$ (T và D đối xứng qua BC).

Do đó $\widehat{DAB}=\widehat{DCB} \Rightarrow$ ABDC là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{DIH}=\widehat{DBH}=\widehat{DAC}$ và $\widehat{IHD}=\widehat{IBD}=\widehat{ACD}$.

Do đó hai tam giác ACD và IHD đồng dạng.

b) Tứ giác IBHD nội tiếp nên $\widehat{BHI}=\widehat{BDI}$.

Tứ giác DHKC có hai đỉnh H và K cùng nhìn đoạn DC dưới một góc vuông nên nội tiếp.

Suy ra $KHC = KDC.$

Các tứ giác ABDC và AIDK nội tiếp nên $IDK = BDC$ (cùng bù với BAC).

Suy ra $BDI = KDC.$ Do đó $BHI = KHC.$ Vì I và K nằm khác phía đối với đường thẳng BC nên ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Hai tam giác ACD và IHD đồng dạng với nhau có DE và DF lần lượt là các đường trung tuyến nên $\dfrac{DC}{DH} = \dfrac{DE}{DF}.$

Hai tam giác DCE và DHF đồng dạng nên $EDC = FDH.$ Suy ra $HDC = FDE.$

Do đó hai tam giác HDC và FDE đồng dạng suy ra $DFE = DHC = 90^o.$

Vậy tam giác DEF vuông tại F.

c) Trên cạnh BC lấy điểm Q sao cho $QDC = BDA.$ Lại có $BAD = BCD$ nên hai tam giác DBA và DQC đồng dạng. Suy ra $\dfrac{AB}{CQ} = \dfrac{AD}{CD}.$

Hai tam giác AID và CHD đồng dạng nên $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{DI}{DH}.$

Suy ra $\dfrac{AB}{CQ} = \dfrac{DI}{DH}$ hay $\dfrac{AB}{DI} = \dfrac{CQ}{DH}$ (1).

Vì $QDC = BDA$ nên $HDC = BDQ.$

Suy ra hai tam giác BDQ và ADC đồng dạng do đó $\dfrac{BQ}{AC} = \dfrac{DB}{DA}$ (2).

Ta có $BAD = BCD = HKD$. Mặt khác $ABD = 180^o - IBD,$ $KHD = 180^o - IHD.$ Vì $IBD = IHD$ nên $ABD = KHD.$

Suy ra hai tam giác ABD và KHD đồng dạng. Do đó $\dfrac{DB}{DA} = \dfrac{DH}{DK}$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $\dfrac{BQ}{AC} = \dfrac{DH}{DK}$ hay $\dfrac{AC}{DK} = \dfrac{BQ}{DH}$ (4).

Từ (1) và (4) suy ra $\dfrac{AB}{DI} + \dfrac{AC}{DK} = \dfrac{CQ}{DH} + \dfrac{BQ}{DH} = \dfrac{BC}{DH}.$

Bài 5:

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có

$$2x^2 + y^2 + 5 = (x^2 + y^2) + (x^2 + 1) + 4 \geq 2xy + 2x + 4 = 2(xy + x + 2),$$

$$6y^2 + z^2 + 6 = (4y^2 + z^2) + 2(y^2 + 1) + 4 \geq 4yz + 4y + 4 = 4(yz + y + 1),$$

$$3z^2+4x^2+16=(z^2+4x^2)+2(z^2+4)+8\ge 4zx+8z+8=4(zx+2z+2).$$

Suy ra $\dfrac{x}{2x^2+y^2+5}\le\dfrac{x}{2(xy+x+2)}$, $\dfrac{2y}{6x^2+z^2+6}\le\dfrac{y}{2(yz+y+1)}$,

$\dfrac{4z}{3z^2+4x^2+16}\le\dfrac{z}{zx+2z+2)}$.

Cộng các bất đẳng thức theo vế, ta được

$$P\le\frac{x}{2(xy+x+2)}+\frac{y}{2(yz+y+1)}+\frac{z}{zx+2z+2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{xy+x+2}+\frac{y}{yz+y+1}+\frac{2z}{zx+2z+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{xy+x+2}+\frac{xy}{xyz+xy+x}+\frac{2z}{zx+2z+xyz}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{xy+x+2}+\frac{xy}{xy+x+2}+\frac{2}{x+xy+2}\right)=\frac{1}{2}.$$

b) Cho x là số nguyên. Ta có $\dfrac{2^{2020}}{3x+1}$ là số nguyên khi $2^{2020}\,\vdots\,(3x+1)$. Suy ra $3x+1=\pm 2^b$ với $b=0,1,\ldots,2020$.

TH 1: Xét b là số chẵn, tức là $b=2k$ $(k\in\mathbb{N})$.

+ Xét phương trình

$3x+1=2^{2k}\Leftrightarrow 3x=4^k-1\Leftrightarrow 3x=3(4^{k-1}+\cdots+1)\Leftrightarrow x=4^{k-1}+\cdots+1.$

Vì $0\le 2k\le 2020\Leftrightarrow 0\le k\le 1010$ nên trường hợp này có 1011 nghiệm.

+ Xét phương trình $3x+1=-2^{2k}\Leftrightarrow 3(x+1)=2-4^k$.

Vì $(2-4^k)\not\vdots\,3$ nên trường hợp này không có nghiệm nguyên nào.

TH 2: Xét b là số lẻ, tức là $b=2k+1$ $(k\in\mathbb{N})$.

+ Xét phương trình $3x+1=2.4^k\Leftrightarrow 3(x+1)=2(1+4^k)$.

Vì $2(1+4^k)\not\vdots\,3$ nên nên trường hợp này không có nghiệm nguyên nào.

+ Xét phương trình $3x+1=-2.4^k\Leftrightarrow 3x=-1-2.4^k$.

Vì $(-1-2.4^k)\,\vdots\,3$ nên phương trình có nghiệm $x=\dfrac{-1-2.4^k}{3}$.

Ta có $0\le 2k+1\le 2020\Rightarrow 0\le k\le 1009$ nên trường hợp này có 1010 nghiệm.

Vậy có tất cả $1011+1010=2021$ số nguyên x để $\dfrac{2^{2020}}{3x+1}$ là số nguyên.

Đề số 18

Câu 1.

$$P=\left(\frac{1}{a-1}+\frac{3\sqrt{a}+5}{(a-1)(\sqrt{a}-1)}\right).\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}$$

Điều kiện: $a>0, a\neq 1$.

$$=\frac{4(\sqrt{a}+1)}{(a-1)(\sqrt{a}-1)}.\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Câu 2.

$2(2x^2y-x^2-3y-1)=0 \Leftrightarrow (2x^2-3)(2y-1)=5$ (*)

Suy ra $2y-1\in Ư(5)=\{\pm1;\pm5\}$ mà $2y-1>-1, \forall y>0$ nên $\left[\begin{array}{l}2y-1=1\\2y-1=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\y=3\end{array}\right.$.

Với $y=1$ thay vào (*) ta được $2x^2-3=5 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2(n)\\x=-2(l)\end{array}\right.$

Với $y=3$ thay vào (*) ta được $2x^2-3=1 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ (loại).

Vậy các số nguyên dương thỏa mãn là $x=2, y=1$.

Câu 3.

a) PT biến đổi thành $(x^2-4x+4)(x^2-4x+3)=12$.

Đặt $t=x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$, phương trình trở thành

$t^2-t-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=4(n)\\t=-3(l)\end{array}\right.$.

Với $t=4$, ta được $x^2-4x+4=4 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0,\ x=4$.

b) Phương trình (2) $\Leftrightarrow (x^2-y^2)+y(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y)=0$,

ta được $x=y$ hoặc $x=-2y$.

* Với $x=y$, thế vào (1) ta có: $4x^2+x-3=0 \Leftrightarrow$ $x=-1$ hoặc $x=\frac{3}{4}$.

Khi đó $x=y=-1,\ x=y=\frac{3}{4}$.

* Với $x=-2y$, thế vào (1) ta có $y^2-2y-3=0 \Leftrightarrow y=-1$ hoặc $y=3$

Nếu $y=-1 \Rightarrow x=2$. Nếu $y=3 \Rightarrow x=-6$.

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm: $(-1;-1)$; $\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$; $(2;-1)$; $(-6;3)$.

Câu 4.

Gọi x (km/h) là vận tốc dự định; $x>0$.

Thời gian đi dự định : $\frac{120}{x}(h)$

Quãng đường đi được sau 45 phút : $\frac{3}{4}x$ (km).

Quãng đường còn lại: $120-\frac{3}{4}x$ (km).

Thời gian đi quãng đường còn lại : $\frac{120-\frac{3}{4}x}{x+5}(h)$

Theo đề bài ta có PT: $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{120-\frac{3}{4}x}{x+5}=\frac{120}{x}$

$$\Leftrightarrow x^2+20x-2400=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=40(n) \\ x=-60(l) \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc dự định : 40 km/h.

Câu 5.

Phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 khi

$\Delta'=(m+1)^2-4m=(m-1)^2\ge 0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}$.

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+2 \\ x_1x_2=4m \end{cases}$.

Theo đề $x_1^3-x_1^2=x_2^3-x_2^2 \Leftrightarrow x_1^3-x_2^3=x_1^2-x_2^2$

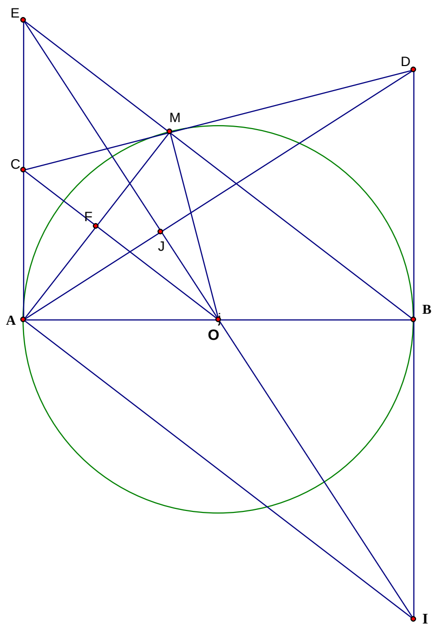
$$\Leftrightarrow (x_1-x_2)\left[(x_1+x_2)^2-x_1x_2-(x_1+x_2)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1-x_2=0 \\ (x_1+x_2)^2-x_1x_2-(x_1+x_2)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'=0 \\ (2m+2)^2-4m-2m-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ 4m^2+2m+2=0(vo\,nghiem) \end{array}\right. \Leftrightarrow m=1$$

Vậy $m=1$ thỏa mãn bài toán.

Câu 6.



a) Ta có $CM = CA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) (1)

Suy ra ΔACM cân tại $C \Rightarrow CAM = CMA$.

Mặt khác $\begin{cases} CME + CMA = 90^0 \\ CEM + CAM = 90^0 \end{cases}$ nên $CME = CEM$ suy ra ΔCME cân tại $C \Rightarrow CE = CM$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $CM = CA = CE$.

b) $\Delta OAE = \Delta OBI$ (g.c.g)

Suy ra $AEBI$ là hình bình hành $\Rightarrow AI // BE$.

Ta có $OD \perp BE \Rightarrow OD \perp AI$, mà $AB \perp DI$.

$\Rightarrow O$ là trực tâm của $\Delta\ ADI$.

$\Rightarrow OI \perp AD \Rightarrow AJI = 90^0$

Mà $ABI = 90^0$ nên tứ giác $AJBI$ nội tiếp.

c) Tam giác COD vuông tại O (vì OC, OD là hai phân giác của hai góc kề bù), có OM là đường cao nên $OM^2 = CM.MD$.

Theo a) ta có $CM = CA = CE \Rightarrow 2CM = AE$, mà $BD = MD$ và $AE = BD$ (gt) $\Rightarrow 2CM = MD$.

$\Rightarrow 2CM^2 = R^2$ (do $MO = R$ và $OM^2 = CM.MD$).

$\Rightarrow CM = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AE = R\sqrt{2}$ (do $AE = 2CM$).

Vì tam giác AEB vuông tại A nên $\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{AB^2}$

$$\Rightarrow AM = \frac{AE.AB}{\sqrt{AE^2 + AB^2}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 7.

Biến đổi $P = ab + \frac{4}{ab} + 4 \geq 2\sqrt{ab\frac{4}{ab}} + 4 = 8$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} ab = 2 \\ 1 \leq a, b \leq 2 \end{cases}$.

Mặt khác $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 2$ suy ra $1 \leq ab \leq 4 \Leftrightarrow (ab-1)(ab-4) \leq 0 \Leftrightarrow (ab)^2 \leq 5ab - 4$.

Khi đó $P = \frac{(ab)^2 + 4ab + 4}{ab} \leq \frac{5ab - 4 + 4ab + 4}{ab} = 9$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} ab = 1 \\ ab = 4 \end{array}\right. \\ 1 \leq a, b \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 2 \\ a = b = 1 \end{array}\right.$.

Vậy $P_{\min} = 8$ khi $ab = 2$ và $1 \leq a, b \leq 2$ và $P_{Max} = 9$ khi $a = b = 1$ hoặc $a = b = 2$.

Đề số 19

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $2x^2 + \sqrt{x^2 - 2x - 19} = 4x + 74$

Điều kiện $x^2 - 2x - 19 \geq 0$

$2(2x^2 - 2x - 19) + \sqrt{x^2 - 2x - 19} - 36 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x - 19}, t \geq 0$

Phương trình tương đương với $2t^2 + t - 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4\,(n) \\ t = -\frac{9}{2}\,(l) \end{array}\right.$

$t = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 19} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 19 = 16 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 35 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = -5 \end{array}\right.$

Thay vào điều kiện ta thấy hai nghiệm thỏa mãn

Vậy $S = \{-5; 7\}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 3y - 6x = 0 \\ 9x^2 - 6xy^2 + y^4 - 3y + 9 = 0 \end{cases}$

Cộng vế theo vế hai phương trình ta được

$9x^2 - 6xy^2 + y^4 + x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (3x - y)^2 + (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y^2 = 3x \end{cases}$

$\Rightarrow (x; y) = (3; 3)$ hoặc $(x; y) = (3; -3)$

Thử lại ta thấy nghiệm $(x; y) = (3; 3)$ thỏa mãn hệ phương trình.

Bài 2. (2,5 điểm)

a) Cho biểu thức $P=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ với $x>0, x\neq 1$. Rút gọn và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P

$$P=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}+1\right)}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{\left(x\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{\left(x\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\frac{2x+2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}+2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\geq 2\sqrt{6}\Rightarrow P\geq 2+2\sqrt{6}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{3}{2}(tmdk)$

b) Cho hai số thực a,b thỏa mãn $a^2+4ab-7b^2=0$ ($a\neq b$ và $a\neq -b$). Tính giá trị của biểu thức $Q=\frac{2a-b}{a-b}+\frac{3a-2b}{a+b}$

$$Q=\frac{2a-b}{a-b}+\frac{3a-2b}{a+b}=\frac{2a^2+ab-b^2+3a^2-5ab+2b^2}{a^2-b^2}=\frac{5a^2-4ab+b^2}{a^2-b^2}$$

Vì $a^2+4ab-7b^2=0$ nên ta có

$$Q=\frac{6\left(a^2-b^2\right)-\left(a^2+4ab-7b^2\right)}{a^2-b^2}=\frac{6\left(a^2-b^2\right)}{a^2-b^2}=6$$

c) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d): y=(m+2)x-m+1$ và $(d'): x+(m+2)y=m+2$ trong đó m là tham số. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng nói trên thuộc một đường cố định khi m thay đổi.

Nhận xét $A(1;3)\in(d)$; $B(0;1)\in(d')$

- Với $m=-2$ thì : $(d): y=3$ và $(d'): x=0$ vuông góc với nhau
- Với $m\neq -2$ thì : $(d'): y=-\frac{1}{m+2}x+1$

  Khi đó ta có $a.a'=(m+2)\left(-\frac{1}{m+2}\right)=-1\Rightarrow(d)\perp(d')$

Vậy $(d)\perp(d')$ với mọi m

Vậy giao điểm của hai đường thẳng nói trên nhìn đoạn AB cố định dưới một góc vuông nên thuộc đường tròn đường kính AB khi m thay đổi.

Bài 3. (1,5 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x+y+3}+1=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\sqrt{x+y+3}+1=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\Leftrightarrow x+y+3+2\sqrt{x+y+3}+1=x+2\sqrt{xy}+y$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+y+3}=\sqrt{xy}-2$

$\Leftrightarrow x+y+3=xy-4\sqrt{xy}+4$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy}=\dfrac{xy-x-y+1}{4}$

Nếu xy là số không chính phương thì VT là số vô tỉ còn VP là số hữu tỉ, vô lý

Vậy $xy=k^2 \Rightarrow \sqrt{xy}=k$

Ta có $x+y+3=xy-4\sqrt{xy}+4 \Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy}=xy-2\sqrt{xy}+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{xy}+1\right)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}-1$ (*)

$\Leftrightarrow \sqrt{y}=k-1-\sqrt{x} \Leftrightarrow y=(k-1)^2-2(k-1)\sqrt{x}+x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{(k-1)^2+x-y}{2(k-1)}$ **vì** $(k>2)$

Nếu x là số không chính phương thì VT là số vô tỉ còn VP là số hữu tỉ, vô lý

Vậy x là số chính phương, Lý luận tương tự thì y là số chính phương

Đặt $x=a^2; y=b^2$

Từ (*) $a+b=ab+1 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)=2$

Ta tìm được $(a;b)=(2;3);(3;2) \Leftrightarrow (x;y)=(4;9);(9;4)$

b) Số tự nhiên $n=111^6$ có tất cả bao nhiêu ước số nguyên dương phân biệt? Tính tích của tất cả các ước số đó.

$n=111^6=3^6.37^6$

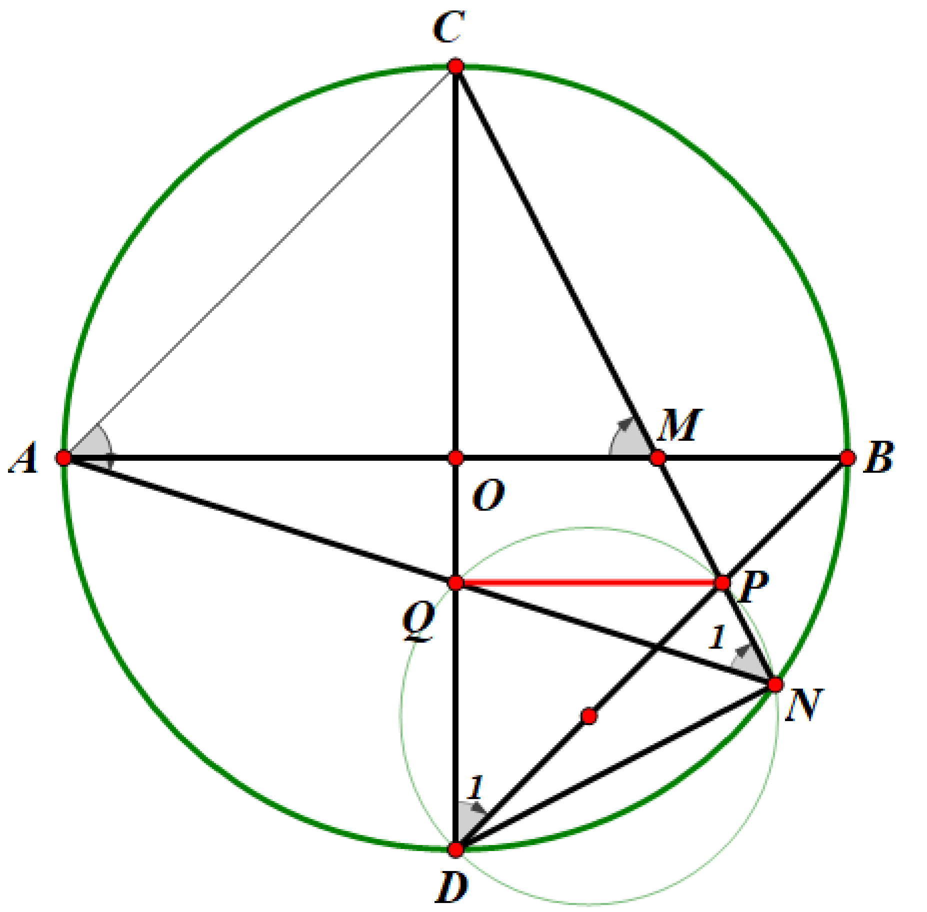
Mỗi ước số nguyên dương của n có dạng $3^x.37^y$ trong đó $x\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$ và $y\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Do x có thể nhận 7 giá trị và y cũng có thể nhận giá trị 7 nên n có tất cả $7x7=49$ ước số nguyên dương phân biệt

Nếu a là một ước số nguyên dương của $n, a\neq 111^3$ thì $b=\dfrac{n}{a}$ cũng là một ước số nguyên dương của $n, b\neq a$. Khi đó a và b tạo thành một cặp ước số nguyên dương của n và chúng có tích đúng bằng n

Trong 49 ước số nguyên dương phân biệt của n, ngoại trừ 111^3 còn 48 ước số còn lại được chia thành 24 cặp ước số có tính chất như cặp ước (a,b)

Vậy tích tất cả các ước nguyên dương phân biệt của n là $\left(111^6\right)^{24}.111^3 = 111^{147}$

Bài 4.



Vì $AB \perp CD$ nên $CA = CB \Rightarrow D_1 = N_1$ nên tứ giác $PQDN$ nội tiếp $\Rightarrow PND + PQD = 180^0$ mà

$PND = 90^0 \Rightarrow PQD = 90^0 \Rightarrow PQ \perp CD \Rightarrow PQ \parallel AB$.

a) Xét hai tam giác CAQ và AMC

$ACQ = MAC = 45^0$

$CAQ = AMC$ (do $sd\,AC + sd\,BN = sd\,BC + sd\,BN$)

Vậy $\Delta CAQ \backsim \Delta MAC(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{CA}{AM} = \dfrac{CQ}{AC} \Rightarrow AM.CQ = AC^2 = 2R^2$

Tứ giác $ACMQ$ có $AM \perp CQ \Rightarrow S_{ACMQ} = \dfrac{AM.CQ}{2} = \dfrac{AC^2}{2} = \dfrac{2R^2}{2} = R^2$

b) Ta có $\Delta CAQ \backsim \Delta MAC(g-g) \Rightarrow \dfrac{CA}{AM}=\dfrac{CQ}{AC}=\dfrac{AQ}{MC} \Rightarrow \dfrac{CQ}{AM}=\left(\dfrac{AQ}{MC}\right)^2$ (1)

$\Delta COM \backsim \Delta CND(g-g)$ (vì DCN chung, $COM=CND=90^0$)

Suy ra $\dfrac{CM}{CD}=\dfrac{CO}{CN} \Rightarrow CM.CN=2R.R=2R^2$

Tương tự : $AQ.AN=2R^2$

Vậy $CM.CN=AQ.AN \Rightarrow \dfrac{AQ}{MC}=\dfrac{CN}{AN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{CQ}{AM}=\left(\dfrac{CN}{AN}\right)^2$

c) Ta có tứ giác $PQDN$ nội tiếp $\Rightarrow PQN=PDN$

Mà $PDN=BCN$ nên $PQN=BCN$

NQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔCPQ khi $PQN=PCQ$

Do đó $BCN=PCQ$ hay $BN=ND$

Suy ra CN là phân giác của góc OCB

Tan giác BOC vuông cân tại $O \Rightarrow BC=OB\sqrt{2}=R\sqrt{2}$

Vì CM là phân giác của tam giác BOC nên $\dfrac{OM}{MB}=\dfrac{OC}{CB}=\dfrac{R}{R\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Ta có $OM+MB=R \Rightarrow OM=R\left(\sqrt{2}-1\right)$

Vậy khi $OM=R\left(\sqrt{2}-1\right)$ thì NQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔCPQ

Bài 5.

Theo quá trình đổi dấu trên thì ô vuông ở dòng i cột j được đổi dấu $i+3j+1$ lần

Mà $i+3j+1$ và $i+j$ hai số không cùng tính chẵn lẻ (vì $(i+3j+1)-(i+j)=2j+1$ là số lẻ)

Do đó những ô vuông ở dòng i cột j mà $i+j$ là số lẻ sẽ đổi dấu một số chẵn lần và dấu ở ô vuông đó vẫn là dấu +, còn những ô vuông ở dòng i cột j mà $i+j$ là số chẵn sẽ đổi dấu một số lẻ lần và dấu ở ô vuông đó là dấu –

Mà từ 1 đến 2019 có 1009 số chẵn và 1010 số lẻ nên số cặp $(i;j)$ mà $i+j$ bằng

1009.1010+1010.1009=2038180

Vậy số các ô vuông còn lại mang dấu + bằng 2038180.

Đề số 20

Câu 1.

Đặt $t = x^2, t \ge 0$, phương trình đã cho trở thành $t^2 + t - 20 = 0 \quad (1)$

$\Delta = b^2 - 4ac = 81$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $t = 4$ (nhận); $t = -5$ (loại)

Với $t = 4$ tìm được $x = \pm 2$. Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = \pm 2$

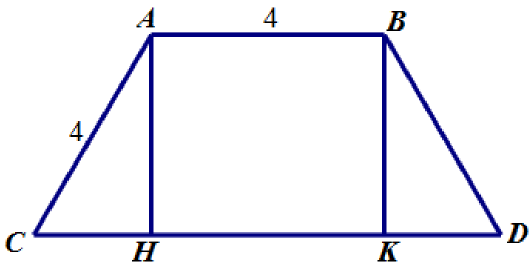
Câu 2. Ta có: $\left(\sqrt{2a} - 2\sqrt{2}\right)(a-1) = \sqrt{2}\left(\sqrt{a} - 2\right)(a-1)$

$= \sqrt{2}\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)$

$a - \sqrt{a} - 2 = \left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-2\right)$

Vậy $T = \sqrt{2}\left(\sqrt{a}-1\right)$.

Câu 3.



Gọi H, K lần lượt là chân đường cao kẻ từ A và B xuống CD.

S_{ABCD} là diện tích hình thang $ABCD$.

Ta có $\triangle ADH = \triangle BCK$ do $AHD = BKC = 90^\circ; ADH = BCK$ và $AD = BC$ nên $DH = CK$

Mặt khác $ABKH$ là hình chữ nhật nên $AB = HK$ suy ra $DH = \dfrac{CD - HK}{2} = 2$

Do đó $AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = 2\sqrt{3}$

$$\text{Vậy } S_{ABCD} = \frac{AH\left(AB + CD\right)}{2} = 12\sqrt{3}$$

Câu 4.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 5xy + x - 5y^2 = 42 & (1) \\ 7xy + 6y^2 + 42 = x & (2) \end{cases}$.

Lấy $(1)+(2)$ ta được $(x+y)^2=0 \Leftrightarrow x=-y$

Thay $x=-y$ vào (1) ta được $x^2+x-42=0$

Giải phương trình trên ta được $x=-7; x=6$

Với $x=-7$ ta có $y=7$; Với $x=6$ ta có $y=-6$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(-7;7)$ và $(6;-6)$.

Câu 5.

$\Delta_1'=9a^2-2b, \Delta_2'=4b^2-3a$

$\Delta_1'+\Delta_2'=(3a-1)^2+(2b-1)^2+3a+2b-2$

Do $3a+2b\geq 2$ nên $\Delta_1'+\Delta_2'\geq 0$

Suy ra có ít nhất một trong hai giá trị Δ_1', Δ_2' không âm hay ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 6.

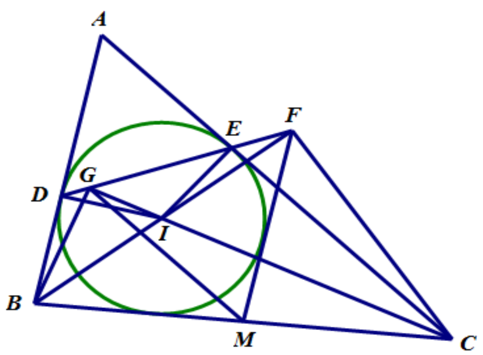
$\overline{abcd}=k^2\left(k\in\mathbb{N}^*\right)\Rightarrow k^2=100\overline{ab}+\overline{cd}=100\left(1+\overline{cd}\right)+\overline{cd}$

$\Rightarrow k^2=100+101\overline{cd}\Leftrightarrow 101\overline{cd}=k^2-100\Leftrightarrow 101\overline{cd}=(k-10)(k+10)$

Do $k<100$ (vì k^2 chỉ có 4 chữ số) $\Rightarrow k-10<101$ và do 101 là số nguyên tố $\Rightarrow (k+10)\vdots 101\Rightarrow k+10=101\Leftrightarrow k=91$

Suy ra $\overline{abcd}=91^2=8281$.

Câu 7.



Ta có tứ giác $CIEF$ nội tiếp vì $CEF=AED=60^\circ$ ($\triangle ADE$ đều) và $CIF=\frac{1}{2}\left(ABC+ACB\right)=60^\circ$.

Suy ra $IFC=IEC=90^\circ$ nên $FM=MB=MC$ (1)

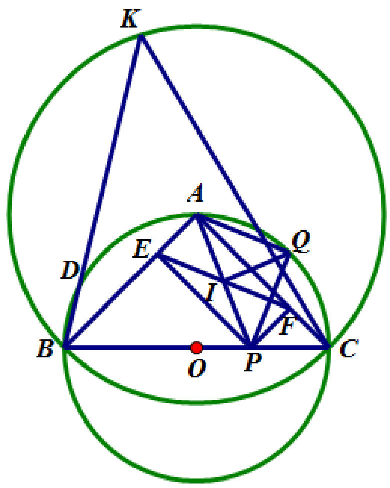
Mặt khác tứ giác $BDGI$ nội tiếp vì $ADE=60^\circ$ ($\triangle ADE$ đều) và $BIG=CIF=60^\circ$

Suy ra $IGB = IDB = 90^\circ$ nên $GM = MB = MC$ (2)

Lại có $GMF = 180^\circ - CMF - BMG = 180^\circ - ABC - ACB = 60^\circ$ (3)

Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra $MF = MG$ và $GMF = 60^\circ$ nên $\triangle MFG$ đều

Câu 8.



a) Ta có:

$BKC = \dfrac{1}{2}BAC = 45^\circ$ (1)

$BDC = 90^\circ \Rightarrow KDC = 90^\circ$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $\triangle KDC$ vuông cân tại D nên $DC = DK$

Ta lại có $AC = AK$ do đó AD là trung trực của CK.

b)Gọi I là giao điểm của AP, EF. Ta có $IP = IQ = IA$ nên $\triangle AQP$ vuông tại Q (1)

Ta có $FP = FQ$ và $\triangle PFC$ vuông cân tại F nên F là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle PCQ$

Do đó $PQC = \dfrac{1}{2}PFC = \dfrac{1}{2}.90^\circ = 45^\circ$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $AQC = AQP + PQC = 135^\circ$

Suy ra $AQC + ABC = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$.

Vậy tứ giác $ABCQ$ nội tiếp, nên Q thuộc đường tròn (O).

Câu 9.

$(*) \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz - x^2y - x^2z - y^2x - y^2z - z^2x - z^2y \geq 0$.

$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) \geq 0$ $(**)$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z \geq 0$.

Khi đó $(**) \Leftrightarrow z(z-x)(z-y)+(x-y)\left[x(x-z)-y(y-z)\right] \geq 0$ (hiển nhiên đúng)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ hoặc hai trong 3 số bằng nhau, số còn lại là 0.

Đề số 21

Bài 1.

1. Đặt $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} = a+b$ khi đó

$x^3 = (a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b) = 3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}.x$

$\Rightarrow\ x^3 = 6+3x \Leftrightarrow x^3-3x = 6\quad (1)$

Đặt $y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}} = c+d$ khi đó

$y^3 = (c+d)^3 = c^3+d^3+3cd(c+d) = 17+12\sqrt{2}+17-12\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})}.y$

$\Rightarrow y^3 = 34+3y \Leftrightarrow y^3-3y = 34\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A = x^3+y^3-3(x+y) = x^3+y^3-3x-3y = 6+34 = 40$

2. Ta có $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2(m+n)}{2mn}=\dfrac{mn}{2mn} \Leftrightarrow 2(m+n)=mn$

Ta có $(x^2+mx+n)(x^2+nx+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+mx+n=0\ \ (1)\\ x^2+nx+m=0\ \ (2)\end{array}\right.$

Phương trình (1) là PT bậc hai có $\Delta_1 = m^2-4n$

Phương trình (2) là PT bậc hai có $\Delta_2 = n^2-4m$

Do đó $\Delta_1+\Delta_2 = m^2-4n+n^2-4m = m^2+n^2-4(m+n) = m^2+n^2-2mn = (m-n)^2 \geq 0$

Suy ra trong Δ_1 và Δ_2 có ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 0.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm

Bài 2.

1. $\begin{cases} x^2+xy+y=1 & (1)\\ \sqrt{x}-\sqrt[3]{y}+4x=5 & (2)\end{cases}$. Điều kiện $x \geq 0$

Cách 1:

PT (1) $\Leftrightarrow x^2+xy+y-1=0\quad (3)$

PT (3) là phương trình bậc hai ẩn x có $\Delta = y^2-4y+4=(y-2)^2 \geq 0$

Do đó PT (3) có hai nghiệm $x=-1$ (loại vì $x \geq 0$), $x=-\dfrac{c}{a}=1-y$ (điều kiện $y \leq 1$ vì $x \geq 0$)

$\Rightarrow y = -x+1$. Thay $y=-x+1$ vào PT (2) ta có

$\sqrt{x}-\sqrt[3]{-x+1}+4x=5 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1+\sqrt[3]{x-1}+4x-4=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}+\sqrt[3]{x-1}+4(x-1)=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1}\left[\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt{x}+1}+1+4\sqrt[3]{(x-1)^2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x-1}=0\\ \dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt{x}+1}+1+4\sqrt[3]{(x-1)^2}=0\end{array}\right. \Rightarrow x=1 \text{ (TMĐK) suy ra } y=0 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x\,;\,y)$ là $(1\,;\,0)$

Cách 2: đặt điều kiện như cách 1

PT (1) $\Leftrightarrow x^2+xy+y-1=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)+y(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1+y)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1(\text{loai})\\ y=1-x\end{array}\right.$$

Thay $y=1-x$ vào (2) ta được

$\sqrt{x}-\sqrt[3]{1-x}+4x=5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt[3]{x-1}+4x=5 \quad (3)$

Ta thấy $x=1$ là nghiệm của pt (3) khi đó $y=0$

Nếu $x>1$ thì vế trái lớn hơn 5 nên pt (3) không có nghiệm lớn hơn 1.

Nếu $0\le x<1$ thì vế trái bé hơn 5 do đó pt (3) không có nghiệm $0\le x<1$.

2. $2xy^2+x+y+1=x^2+2y^2+xy \Leftrightarrow x^2-x\left(2y^2-y+1\right)+2y^2-y-1=0$ (1)

Cách 1:

Đặt $2y^2-y+1=a$, khi đó PT (1) trở thành $\Leftrightarrow x^2-ax+a-2=0$ (2)

Phương trình (2) có $\Delta=a^2-4a+8=(a-2)^2+4$

Phương trình (1) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm nguyên

$\Rightarrow$ Δ là số chính phương

Đặt $(a-2)^2+4=k^2$ $(k\in N)$ $\Leftrightarrow k^2-(a-2)^2=4 \Leftrightarrow (k+a-2)(k-a+2)=4$

Vì $(k+a-2)+(k-a+2)=2k$ là số chẵn và có tích cũng là số chẵn nên $(k+a-2)$ và $(k-a+2)$ là số chẵn.

Do đó $\begin{cases}k+a-2=2\\ k-a+2=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}k+a-2=-2\\ k-a+2=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=2\\ a=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}k=-2\\ a=2\end{cases}$

Vậy phương trình (2) có 2 nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{a + \sqrt{k^2}}{2} = \dfrac{2 + 2}{2} = 2 \\ x = \dfrac{a - \sqrt{k^2}}{2} = \dfrac{2 - 2}{2} = 0 \end{array}\right.$

Ta có $2y^2 - y - 1 = a = 2 \Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 2y + y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (y-1)(2y+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. Ta chọn $y = 1$ (vì $y \in Z$)

Vậy nghiệm nguyên $(x\ ;\ y)$ của phương trình là $(2\ ;\ 1)$ và $(0\ ;\ 1)$

Cách 2: Có thể phân tích đưa về phương trình ước số (các bạn tự giải)

Bài 3:

1. Gọi A_iA_j là hai điểm xa nhau nhất trong các điểm thuộc tập hợp 8073 điểm đã cho .

Giả sử A_k là điểm cách xa đoạn thẳng A_iA_j nhất . Khi đó

Tam giác $A_iA_j\ A_k$ là tam giác lớn nhất và có diện tích không lớn hơn 1

Vẽ các đường thẳng đi qua các điểm A_i, A_j, A_k lần lượt song song với các cạnh của $\Delta A_iA_jA_k$

Ta được 4 tam giác nhỏ bằng nhau và một tam giác lớn chứa cả 4 tam giác nhỏ

Tam giác lớn có diện tích không quá 4 đơn vị. Do đó, tam giác lớn chứa tất cả 8073 điểm đã cho

Ta có 8073 chia cho 4 được 2018 và dư là 1 nên theo nguyên lý Dirichlet suy ra có ít nhất 1 trong 4 tam giác có 1 tam giác chứa 2019 trong 8073 điểm đã cho.

2. Đặt $P = a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1}$ suy ra

$2P = 2a\sqrt{b^3+1} + 2b\sqrt{c^3+1} + 2c\sqrt{a^3+1} =$

$2a\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)} + 2b\sqrt{(c+1)(c^2-c+1)} + 2c\sqrt{(a+1)(a^2-a+1)}$

$\le a(b^2+2) + b(c^2+2) + c(a^2+2) = ab^2 + bc^2 + ca^2 + 6 = Q + 6$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $b \le c \le a$ ta có

$b(a-c)(c-b) \ge 0 \Leftrightarrow abc + b^2c \ge ab^2 + bc^2 \Leftrightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 \le abc + b^2c + ca^2$

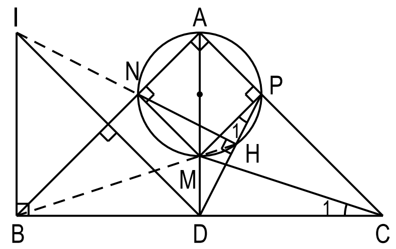
Do đó $Q \le abc + b^2c + ca^2 \le 2abc + b^2c + ca^2 = c(a+b)^2 = 4c\dfrac{a+b}{2}.\dfrac{a+b}{2}$

$\le \dfrac{4}{27}\left(c + \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a+b}{2}\right)^3 = \dfrac{4(a+b+c)^2}{27} = \dfrac{4.3^3}{27} = 4$

Do đó $2P \le 10 \Leftrightarrow P \le 5$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a+b+c=3,\ b \le c \le a,\ 2c=a+b,\ abc=2abc$

$\Leftrightarrow b=0,\ c=1,\ a=2.$

Bài 4.



a) Ta có $AD \perp BC$ tại D (vì ΔABC vuông cân tại A)

$ANM = APM = 90^0$ nên $AMNP$ là tứ giác nội tiếp (1)

$NAP = NHP = 90^0$ nên $NAPH$ là tứ giác nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) suy ra N, A, P, H, M cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow AMH + APH = 180^0$ và $ANM = APM = 90^0$ nên

$AMNP$ là tứ giác nội tiếp (1)

Ta có $APC = MDC = 90^0$ nên $AMNP$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $P_1 = C_1$ mà $C_1 = MBD$ (vì AD là trung trực của BC)

$\Rightarrow MBD = P_1$

Ta có $AMB = ADB + MBD = 90^0 + MBD$ mà $MBD = P_1$

Suy ra $AMB = 90^0 + P_1 = APM + P_1 = APH \Rightarrow AMB + AMH = APH + AMH = 180^0$

Do đó B, M, H thẳng hàng $\Rightarrow AH \perp BH$

b) Ta có $IBA = BAD = 45^0$ (vì $BI \,//\, AD$)

Tam giác ADB vuông tại D có DI là trung trực nên DI là phân giác góc ADB

$\Rightarrow ADI = BDI = 45^0$. Do đó $IBA = IDA\left(=45^0\right) \Rightarrow$ A, I, B, D cùng thuộc một đường tròn (3)

Ta có $AHB = ADB = 90^0$ nên A, H, D, B cùng thuộc một đường tròn (4)

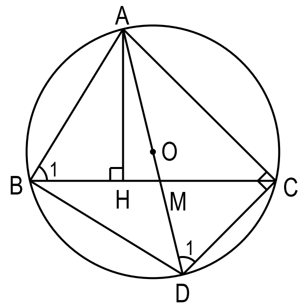
Từ (3) và (4) suy ra A, H, D, B, I cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow IHD + IBD = 180^0 \Rightarrow IHD = 90^0$ (vì $IBD = 90^0$) lại có $NHD = 90^0$

Do đó H, N, I thẳng hàng.

2.

✓ **Cách 1:**



Kẻ AD là đường kính của đường tròn (O)

Xét 2 tam giác vuông ΔHBA và ΔCDA

có $B_1 = D_1$ (vì nội tiếp cùng chắn AC)

nên $\Delta HBA \backsim \Delta CDA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{HB}{CD} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow HB.AD = AB.CD$

Tương tự $\Delta HCA \backsim \Delta BDA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{HC}{BD} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow HC.AD = AC.BD$

Do đó $\frac{HB}{HC} = \frac{AB}{AC}.\frac{DC}{DB}$ (1)

Ta có $\Delta AMB \backsim \Delta CMD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{NB}{MD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow MB.CD = MD.AB$

Tương tự $\frac{MC}{MD} = \frac{AC}{BD} \Rightarrow MC.BD = AC.MD$

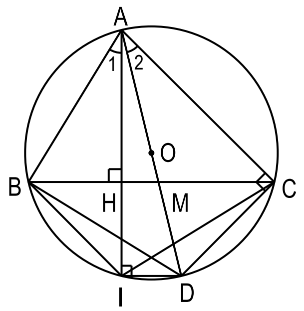
Do đó $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}.\frac{DB}{DC}$ (2)

Ta có $\frac{HB}{HC} + \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}\left(\frac{DC}{DB} + \frac{DB}{DC}\right) \ge \frac{AB}{AC}.2.\sqrt{\frac{DC}{DB}.\frac{DB}{DC}} = 2.\frac{AB}{AC}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow DB = DC \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

✓ **Cách 2: (Cách này ai không thích thì xóa đi nha. Do mình copy nên để nguyên trạng)**

Gọi I là giao điểm của AH với đường tròn (O). Kẻ đường kính AD.



Ta có $ABD = ACD = AID = 90^0$. Do đó BC // DI $\Rightarrow$ BI = CD

$\Rightarrow A_1 = A_2$

Ta có DIBC là hình thang cân nên CD = BI, CI = BD

Xét ΔAHB và ΔACD có $A_1 = A_2$, $AHB = ACD \left(= 90^0\right)$

$\Rightarrow \Delta AHB \backsim \Delta ACD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{HB}{CD} = \frac{AB}{AD}$ (1)

Xét ΔABD và ΔAHC có $BAD = HAC$, $ABD = AHC \left(= 90^0\right)$

$\Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta AHC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BD}{HC} = \frac{AD}{AC}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\frac{HB}{CD}.\frac{BD}{HC} = \frac{AB}{AD}.\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{AB}{AC}.\frac{CD}{BD}$ (3)

Xét ΔABI và ΔAMC có $A_1 = A_2$, $AIB = ACB \left(= \frac{1}{2}sđAC\right)$

$\Rightarrow \Delta ABI \backsim \Delta AMC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BI}{MC} = \frac{AB}{AM}$ (4)

Xét ΔABM và ΔAIC có $BAM = IAC$, $ABC = AIC \left(= \frac{1}{2}sđAC\right)$

$\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta AIC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MB}{CI} = \frac{AM}{AC}$ (5)

Từ (4), (5) suy ra $\frac{BI}{MC}.\frac{MB}{CI} = \frac{AB}{AM}.\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}.\frac{CI}{BI}$ (6)

Từ (3) và (6) suy ra $\frac{HB}{HC}.\frac{MB}{MC} = \frac{AB^2}{AC^2}.\frac{CD}{BD}.\frac{CI}{BI} = \frac{AB^2}{AC^2}.\frac{CD}{BI}.\frac{CI}{BD} = \frac{AB^2}{AC^2}$ (vì CD = BI, CI = BD)

Ta có $\frac{HB}{HC} + \frac{MB}{MC} \geq 2\sqrt{\frac{HB}{HC}.\frac{MB}{MC}} = 2\sqrt{\frac{AB^2}{AC^2}} = 2.\frac{AB}{AC}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{MB}{MC} \Leftrightarrow \frac{HB}{HB + HC} = \frac{MB}{MB + MC} \Leftrightarrow \frac{HB}{BC} = \frac{MB}{BC} \Leftrightarrow H \equiv M$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

Đề số 22

Câu 1.

a. Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 9 \quad (*)$

$$A = \frac{x\sqrt{x} - 3 - 2\left(\sqrt{x} - 3\right)^2 - \left(\sqrt{x} + 3\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)} = \frac{x\sqrt{x} - 3 - 2x + 12\sqrt{x} - 18 - x - 4\sqrt{x} - 3}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x} - 3x + 8\sqrt{x} - 24}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)} = \frac{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(x + 8\right)}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)} = \frac{x + 8}{\sqrt{x} + 1}$$

b. $x = 4 - 2\sqrt{3}$ thỏa mãn $(*)$. Với $x = 4 - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$ ta có:

$$A = \frac{x + 8}{\sqrt{x} + 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3} + 8}{\sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} + 1} = \frac{12 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - 2$$

Câu 2.

Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện bài toán là:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ x_1^2 + x_1^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(m + 2\right)^2 - 4\left(3m - 3\right) > 0 \\ m + 2 > 0 \\ 3m - 3 > 0 \\ \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 16 > 0 \\ m > -2 \\ m > 1 \\ \left(m + 2\right)^2 - 2\left(3m - 3\right) = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ m > -2 \\ m > 1 \\ m = 5 \text{ hoặc } m = -3 \end{cases} \Rightarrow m = 3$$

Vậy $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3.

a. $x+\sqrt{4-x^2}=2+3x\sqrt{4-x^2}$. Điều kiện: $-2\le x\le 2$

Đặt $t=x+\sqrt{4-x^2}\Rightarrow x\sqrt{4-x^2}=\dfrac{t^2-4}{2}$, khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$3t^2-2t-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=\dfrac{-4}{3}\end{array}\right.$$

*) $t=2\Rightarrow x+\sqrt{4-x^2}=2\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=2-x\Leftrightarrow 2x^2-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\quad tm\\ x=2\quad tm\end{array}\right.$

*) $t=\dfrac{-4}{3}\Rightarrow x+\sqrt{4-x^2}=\dfrac{-4}{3}\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=\dfrac{-4}{3}-x\Leftrightarrow 2x^2+\dfrac{8}{3}x-\dfrac{20}{9}=0\Leftrightarrow x=$

b. $\begin{cases}2x^3+2x^2y-xy=y^2-x-y\quad 1\\ 2x^3-xy+x^2=4\quad 2\end{cases}$

Ta có $\;1\;\Leftrightarrow 2x^2-y\;\;x+y\;+\;x+y\;=0\Leftrightarrow\;x+y\;\;2x^2-y+1\;=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-x\\ y=2x^2+1\end{array}\right.$

*) Với $y=-x\Rightarrow\;2\;\Leftrightarrow 2x^3+2x^2-4=0\Leftrightarrow 2\;\;x-1\;\;x^2+2x+2\;=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=-1$

*) Với $y=2x^2+1\Rightarrow\;2\;\Leftrightarrow x^2-x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\\ x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.$

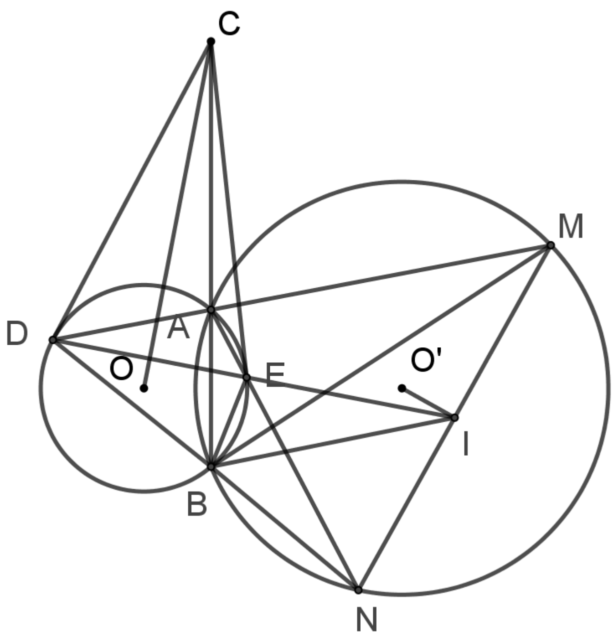
khi $x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\Rightarrow y=10+\sqrt{17}$

khi $x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\Rightarrow y=10-\sqrt{17}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là:

$$\left\{\;1;-1\;,\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};10+\sqrt{17}\right),\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2};10-\sqrt{17}\right)\right\}$$

Câu 4.



a. *Chứng minh tứ giác $BEIN$ nội tiếp*

Tứ giác $BAMN$ nội tiếp nên ta có:

$BAD=BNM$ hay $BAD=BNI\quad 1$

Tứ giác $BEAD$ nội tiếp nên ta có: $BAD=BED\quad 2$

Từ 1 và 2 suy ra: $BED = BNI$

Vậy tứ giác $BEIN$ nội tiếp

b. ***Chứng minh:*** $\Delta MIB \sim \Delta AEB$

Tứ giác $BAMN$ nội tiếp $\Rightarrow \begin{cases} BMI = BAE \quad 1 \\ MNA = MBA \quad 2 \end{cases}$

Tứ giác $BEIN$ nội tiếp $\Rightarrow MNA = INE = IBE \quad 3$

Từ 2 và 3 $\Rightarrow MBA = IBE \Rightarrow IBM + MBE = EBA + MBE \Rightarrow IBM = EBA \quad 4$

Từ 1 và 4 $\Rightarrow \Delta MIB \sim \Delta AEB$ (G-G)

c. ***Chứng minh*** $O'I \perp MN$

***)** CD là tiếp tuyến của O nên: $CDA = CBD \Rightarrow \Delta CDA \sim \Delta CBD$ (G-G)$\Rightarrow \dfrac{BD}{DA} = \dfrac{CD}{CA}$

Tương tự ta có: $\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{EB}{EA}$ mặt khác $CD = CE$ (Tính chất tiếp tuyến), suy ra: $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{EB}{EA}$

5

*) $\Delta MIB \sim \Delta AEB$ (C/m ở câu b)$\Rightarrow \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{IB}{IM} \quad 6$

***)** $ABD = AED = IEN$ mà $IEN = IBN$ (Tứ giác $BEIN$ nội tiếp)$\Rightarrow ABD = IBN$

Mặt khác $INB = DAB$ (C/m ở câu a). Từ đó ta có: $\Delta INB \sim \Delta DAB$ (G-G)$\Rightarrow \dfrac{DB}{DA} = \dfrac{IB}{IN}$

7

Từ 5 ; 6 ; 7 $\Rightarrow \dfrac{IB}{IN} = \dfrac{IB}{IM} \Rightarrow IN = IM \Rightarrow I$ là trung điểm của $MN \Rightarrow O'I \perp MN$.

Câu 5.

a. Giải phương trình nghiệm nguyên $4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x}$

ĐK: $199 - x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x+1^{\ 2} \leq 200 \Rightarrow x \in -15;-14;-13;\ldots;12;13$ (Vì $x \in Z$)

Ta có: $4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x} = 2 + \sqrt{200 - x+1^{\ 2}} \leq 2 + 10\sqrt{2} \Rightarrow 0 < y^2 \leq 4$, mà $y \in Z$

Suy ra: $y \in -2;-1;1;2$.

$y=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-15\\x=13\end{array}\right.$; $\quad y=-1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-15\\x=13\end{array}\right.$; $\quad y=-2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\end{array}\right.$;

$y=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\end{array}\right.$

Vậy tập hợp các cặp số $x;y$ nguyên thỏa mãn đề bài là:

$S=\ 13;-1\ ,\ 13;1\ ,\ -15;-1\ ,\ -15;1\ ,\ -3;2\ ,\ -3;-2\ \ 1;2\ ,\ 1;-2$

b. **Tìm tất cả các cặp số nguyên tố** p,q **sao cho** $p^2-2q^2=41\quad *$

$p^2-2q^2=41\Rightarrow p^2=41+2q^2\Rightarrow p^2$ là số lẻ $\Rightarrow p$ lẻ$\Rightarrow p=2k+1\ \ k\in N^*$, thay vào $*$ suy ra:

$q^2=2k\ \ k+1\ -20\ \Rightarrow q$ chẵn, mà q là số nguyên tố nên $q=2\Rightarrow p^2=49\Rightarrow p=7$.

Câu 6.

a. **Cho** x,y **là các số thực dương thỏa mãn** $xy\le 1$ **chứng minh rằng:**

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\le\frac{2}{1+\sqrt{xy}}$$

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\le\frac{2}{1+\sqrt{xy}}\Leftrightarrow\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+\sqrt{xy}}+\frac{1}{1+y}-\frac{1}{1+\sqrt{xy}}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{xy}-x}{1+x\ \ 1+\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{xy}-y}{1+y\ \ 1+\sqrt{xy}}\le 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}}.\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}-\frac{\sqrt{y}}{1+y}\right)\le 0$$

$\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{y}-\sqrt{x}\ ^2\ \sqrt{xy}-1}{1+x\ \ 1+y\ \ 1+\sqrt{xy}}\le 0$, bất đẳng thức này luôn đúng với các số thực $x;y>0$ và $xy\le 1$.

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng.

b. **Cho** x,y **là các số thực dương thỏa mãn điều kiện** $x+y\ ^3+4xy\le 12$ **.Tìm GTLN của:**

$$P=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+2018xy$$

Ta có: $12\ge\ x+y\ ^3+4xy\ge\ 2\sqrt{xy}\ ^3+4xy$ (Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số thực không âm $x;y$). Đặt $t=\sqrt{xy}\quad t>0$, khi đó:

$12 \geq 8t^3 + 4t^2 \Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 + 3t + 3) \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$ (Vì $t > 0 \Rightarrow$ $2t^2 + 3t + 3 > 0$)

$t \leq 1 \Rightarrow 0 < xy \leq 1$. Theo câu a ta có:

$$P = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + 2018xy \leq \frac{2}{1+\sqrt{xy}} + 2018xy.$$

Đặt $t = \sqrt{xy}$ $(0 < t \leq 1)$, ta được: $P \leq \dfrac{2}{1+t} + 2018t^2$

Ta sẽ chứng minh GTLN của P là 2019, thật vậy ta chứng minh bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\frac{2}{1+t} + 2018t^2 \leq 2019 \Leftrightarrow 2018t^3 + 2018t^2 - 2019t - 2017 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(2018t^2 + 4036t + 2017) \leq 0$$

Bất đẳng thức sau luôn đúng với $0 < t \leq 1$. Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} t = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

Vậy GTLN của P là 2019 đạt được khi $x = y = 1$.

Đề số 23

Câu 1.

a)Ta có $x - 2 = \sqrt{3} \Rightarrow (x-2)^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$.

$\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{x^2 - 4x + 1 + 4} = 2$.

$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 38x + 5$

$= (x^4 - 4x^3 + x^2) + (2x^3 - 8x^2 + 2x) + (10x^2 - 40x + 10) - 5 = -5 \Rightarrow A = \dfrac{-5}{2}$.

b)Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $x^2 - (m-1)x + 1 = 0$ (1).

(P) cắt d tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta = (m-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow |m-1| > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -1 \end{array}\right. \text{ (*)}.$$

Áp dụng ĐL Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = m - 1$; $x_1x_2 = 1$.

Từ giả thiết ta có $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$.

Khi đó $y_1^3 - y_2^3 = 18(x_1^3 - x_2^3) \Leftrightarrow x_1^6 - x_2^6 = 18(x_1^3 - x_2^3) \Leftrightarrow (x_1^3 - x_2^3)(x_1^3 + x_2^3 - 18) = 0$ (2).

Do $x_1 \neq x_2$ nên $(2) \Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 - 18 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) - 18 = 0$.

Do đó,

$(m-1)^3-3(m-1)-18=0 \Leftrightarrow (m-1-3)\left[(m-1)^2+3(m-1)+6\right]=0 \Leftrightarrow m=4$ (t/m (*)).

Câu 2.

a) $\begin{cases} y^2+2xy+4=2x+5y \quad (1) \\ 5x^2+7y-18=\sqrt{x^4+4} \quad (2) \end{cases}$

ĐK: $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(1) \Leftrightarrow y^2-y+2x(y-1)+4(1-y)=0 \Leftrightarrow (y-1)(y+2x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=4-2x \end{array}\right.$$

Với $y=1$ thay vào (2) ta được

$$5x^2-11=\sqrt{x^4+4} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq \dfrac{11}{5} \\ 24x^4-110x^2+117=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{55+\sqrt{217}}{24} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{55+\sqrt{217}}{24}}.$$

Với $y=4-2x$ thay vào (2) ta được $5x^2+28-14x-18=\sqrt{x^4+4}$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+2)+\sqrt{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}-6(x^2-2x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2x+2}=2\sqrt{x^2-2x+2} \\ \sqrt{x^2+2x+2}=-3\sqrt{x^2-2x+2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2+2x+2=4(x^2-2x+2)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-10x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5-\sqrt{7}}{3} \Rightarrow y=\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3} \\ x=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow y=\dfrac{2-2\sqrt{7}}{3} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left(\sqrt{\frac{55+\sqrt{217}}{24}};1\right);\left(-\sqrt{\frac{55+\sqrt{217}}{24}};1\right);\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3};\frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right);\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3};\frac{2-2\sqrt{7}}{3}\right).$$

b)Từ giả thiết suy ra $0 \leq x;y;z \leq 3$. Ta có

$9(x^2-6x+25)=(x^2-30x+225)+8x^2-24x=(15-x)^2+8x(x-3) \leq (15-x)^2$ với $\forall x, 0 \leq x \leq 3$

(do $0 \leq x \leq 3 \Rightarrow 8x(x-3) \leq 0$, dấu bằng xảy ra khi $x=0$ hoặc $x=3$).

Do đó $\sqrt{9(x^2-6x+25)} \leq 15-x$ hay $\sqrt{x^2-6x+25} \leq \dfrac{15-x}{3}$ với $\forall x, 0 \leq x \leq 3$.

Tương tự $\sqrt{y^2-6y+25}\le\dfrac{15-y}{3};\sqrt{z^2-6z+25}\le\dfrac{15-z}{3}$ với $\forall y,z:0\le y,z\le 3$.

Do đó, $M\le\dfrac{15-x+15-y+15-z}{3}=\dfrac{45-3}{3}=14$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x;y;z = 3;0;0$ hoặc $x;y;z = 0;3;0$ hoặc $x;y;z = 0;0;3$.

Ta có $5\ x^2-6x+25 = x^2-22x+121 + 4x^2-8x+4$

$$= 11-x^{\ 2}+4\ x-1^{\ 2}\ge 11-x^{\ 2} \text{ với } \forall x,0\le x\le 3$$

(do $4\left(x-1\right)^2\ge 0$, dấu bằng xảy ra khi $x=1$).

Do đó $\sqrt{5\ x^2-6x+25\ }\ge 11-x$ hay $\sqrt{x^2-6x+25}\ge\dfrac{11-x}{\sqrt{5}}$ với $\forall x,0\le x\le 3$.

Tương tự $\sqrt{y^2-6y+25}\ge\dfrac{11-y}{\sqrt{5}};\sqrt{z^2-6z+25}\ge\dfrac{11-z}{\sqrt{5}}$ với $\forall y,z:0\le y,z\le 3$.

Do đó, $M\ge\dfrac{11-x+11-y+11-z}{\sqrt{5}}=\dfrac{33-3}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Vậy $GTLN$ của M là 14 đạt được khi $x;y;z = 3;0;0$ hoặc $x;y;z = 0;3;0$ hoặc $x;y;z = 0;0;3$ và $GTNN$ của M là $6\sqrt{5}$ đạt được khi $x=y=z=1$.

Câu 3.

a)Vì x,y nguyên dương và $x;y = 1;1$ không thỏa mãn phương trình nên $x^2+y^2+1>3;xy+x+y>3$. Suy ra $xy+x+y$ là ước nguyên dương lớn hơn 3 của 30 gồm: $5;6$

Nếu $xy+x+y=5\Leftrightarrow x+1\ \ y+1 =6$ ta được các trường hợp

+) $\begin{cases}x+1=2\\y+1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện đầu bài)

+) $\begin{cases}x+1=3\\y+1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện đầu bài)

Nếu $xy+x+y=6\Leftrightarrow x+1\ \ y+1 =7$ không thỏa mãn

Vậy các cặp số $x;y$ thỏa mãn là $1;2$, $2;1$.

b)Vì $12n^2+1$ là số lẻ nên để $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên thì $12n^2+1= 2m+1^{\ 2},m\in\mathbb{N}$.

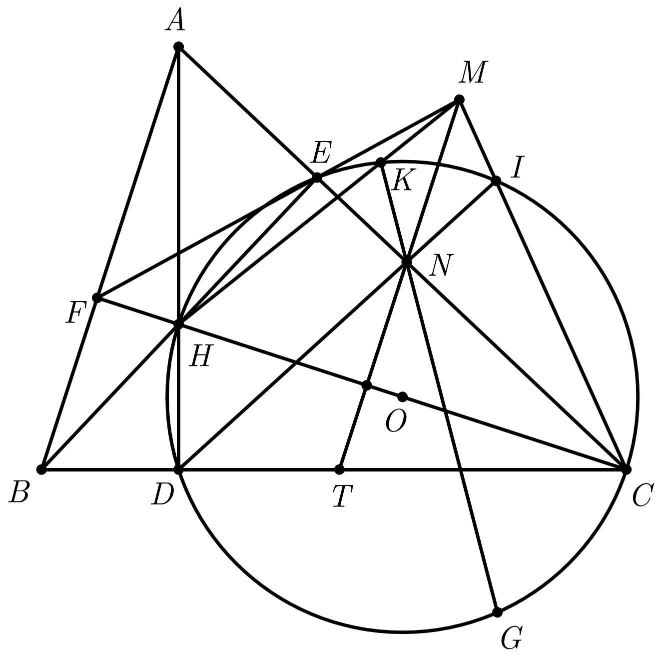
Suy ra, $m\ \ m+1\ \ =3n^2$.

Vì $\ \ m;m+1\ \ =1$ nên xảy ra hai trường hợp $\left[\begin{array}{l} m=3u^2;m+1=v^2 \\ m=v^2;m+1=3u^2 \end{array}\right., u,v\in\mathbb{Z}^*$.

Nếu $m=v^2;m+1=3u^2$ thì $v^2=3u^2-1$ hay v^2 là số chính phương chia 3 dư 2. Điều này không xảy ra vì mọi số chính phương chia 3 dư là 0 hoặc 1. Do đó chỉ xảy ra $m=3u^2;m+1=v^2$.

Ta có $2\sqrt{12n^2+1}+2=2\ \ 2m+1\ \ +2=4m+4=4v^2$ là số chính phương (điều phải chứng minh)

Câu 4.



a)Xét ΔNDE và ΔNCI có:

$END = INC$ (đối đỉnh)

$EDN = ICN$ (cùng chắn cung EI)

Suy ra $\Delta NDE \backsim \Delta NCI$ (g.g) nên $\dfrac{ND}{NC}=\dfrac{NE}{NI}$.

$\Rightarrow NI.ND = NE.NC$.

b)Do các tứ giác $BFEC$, $DEIC$, $ABDE$ nội tiếp nên:

$AFE = ACB = DIE$.

$MEC = ABC = DEC = DIC \Rightarrow$ Tứ giác $MENI$ nội tiếp.

$\Rightarrow DIE = EMN \Rightarrow AFE = EMN \Rightarrow MN//AB$.

Mà $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp MN$.

c)Xét $\Delta ENM, \Delta TNC$ có

$EMN = EIN = NCT, ENM = TNC \Rightarrow \Delta ENM \backsim \Delta TNC$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{NE}{NT} = \frac{NM}{NC} \Rightarrow NC.NE = NM.NT \quad 1 \; .$$

Xét $\Delta ENK, \Delta GNC$ có $KEN = CGN, ENK = GNC \Rightarrow \Delta ENK \backsim \Delta GNC$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{NE}{NG} = \frac{NK}{NC} \Rightarrow NC.NE = NG.NK \quad 2 \; .$$

Từ 1 , 2 suy ra $NM.NT = NG.NK \Rightarrow \dfrac{NK}{NT} = \dfrac{NM}{NG} \Rightarrow \Delta TGN \backsim \Delta KMN$.

$\Rightarrow KMN = TGN \left(3\right)$.

Mà $KMN = HCK$ (cùng phụ với KHC) $\Rightarrow KMN = HGN \left(4\right)$.

Từ $\left(3\right)$ và $\left(4\right)$ ta có $TGN = HGN \Rightarrow H, T, G$ thẳng hàng.

Câu 5.

TH1: Tất cả các hộp có số kẹo bằng nhau và bằng 2, khi đó lấy 505 chiếc hộp bất kỳ ta sẽ có tổng số kẹo là 1010.

TH2: Tồn tại hai hộp có số kẹo khác nhau, khi đó ta sắp xếp các hộp thành một hàng ngang sao cho hai hộp đầu tiên không có cùng số kẹo. Ký hiệu a_i là số kẹo trong hộp thứ i, $i = 1;2;...;1010$. Xét các số

$S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; ...; S_{1010} = a_1 + a_2 + ... + a_{1010}$, với $1 \le a_i \le 1010$.

+) Nếu tồn tại hai số trong $S_1; S_2; ...; S_{1010}$ có cùng số dư khi chia cho 1010, giả sử là $S_i, S_j \;\; i < j$ thì $S_j - S_i = \; a_{i+1} + ... + a_j \; \vdots 1010$.

Do $1 \le S_j - S_i \le 2019$; $S_j - S_i \; \vdots 1010$ nên $S_j - S_i = 1010$ hay $a_{i+1} + ... + a_j = 1010$

+) Nếu trong $S_1; S_2; ...; S_{1010}$ không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho $1010 \quad 1$.

Xét 1011 số $S_1; S_2; ...; S_{1010}, a_2$, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 1010. Mà $S_1 = a_1 \ne a_2, 1 \le a_1, a_2 \le 1010$ nên S_1, a_2 không cùng số dư khi chia cho 1010 $\;2\;$.

Từ 1 và 2 suy ra tồn tại $k = 2;3;...;1010$ sao cho S_k, a_2 cùng số dư khi chia cho 1010. Khi đó

$S_k - a_2 = a_1 + a_3 + \ldots + a_k \vdots 1010$.

Mà $1 \le a_1 + a_3 + \ldots + a_k \le 2019 \Rightarrow a_1 + a_3 + \ldots + a_k = 1010$.

Suy ra điều phải chứng minh.

Đề số 24

Câu 1:

a) Ta có:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1\right)=9$$

$$\Rightarrow \left(x^2+x+2\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2+\sqrt[3]{3x-2}+1\right]=9$$

$$\Rightarrow \left(x^2+x+2\right)\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2+\sqrt[3]{3x-2}+1\right]=9\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)$$

$$\Rightarrow \left(x^2+x+2\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^3-1\right]=9\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)$$

$$\Rightarrow \left(x^2+x+2\right)(3x-3)=9\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)$$

$$\Rightarrow \left(x^2+x+2\right)(x-1)-3\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)=0$$

$$\Rightarrow x^3-1-3\sqrt[3]{3x-2}+3=0$$

$$\Rightarrow x^3-3\sqrt[3]{3x-2}+2=0 \qquad (*)$$

Đặt $\sqrt[3]{3x-2}=t \Rightarrow t^3=3x-2$.

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} x^3-3t+2=0 \\ t^3=3x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3-3t+2=0 & (1) \\ t^3-3x+2=0 & (2) \end{cases}$$

Lấy $(1)-(2)$, ta được:

$$x^3-t^3-3t+3x=0$$

$$\Rightarrow (x-t)\left(x^2+xt+t^2\right)+3(x-t)=0$$

$$\Rightarrow (x-t)\left(x^2+xt+t^2+3\right)=0$$

$$\Rightarrow (x-t)\left[x^2+t.x+\left(t^2+3\right)\right]=0$$

$$x=t \Rightarrow x=\sqrt[3]{3x-2}$$

$$\Rightarrow x^3=3x-2$$

$$\Rightarrow x^3-3x+2=0$$

$$\Rightarrow x^3-x-2x+2=0$$

$$\Rightarrow x\left(x^2-1\right)-2(x-1)=0$$

$\Rightarrow x(x-1)(x+1)-2(x-1)=0$

$\Rightarrow (x-1)\left[x(x+1)-2\right]=0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+x-2)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (kép) \\ x=-2 \end{array}\right.$

$x^2+t.x+(t^2+3)=0$

$\Delta = t^2-4.1.(t^2+3)=-3t^2-12<0$

Vậy $x^2+t.x+(t^2+3)=0$ vô nghiệm.

Vậy $S=\{-2;1\}$.

a) Phương trình hoành độ của (P) và d là:

$$2ax^2=4x-2a^2 \Leftrightarrow 2ax^2-4x+2a^2=0 \qquad (*)$$

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt M,N thì $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt , nghĩa là

$\Delta>0 \Rightarrow (-4)^2-4.2a.2a^2>0 \Rightarrow 16-16a^3>0 \Rightarrow 1-a^3>0 \Rightarrow (1-a)(1+a+a^2)>0$

$\Rightarrow (1-a)\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>0 \Rightarrow 0<a<1$

Ngoài ra, ta có:

$x_M=\frac{4+\sqrt{16-16a^3}}{2.2a}=\frac{1+\sqrt{1-a^3}}{a} \quad x_N=\frac{4-\sqrt{16-16a^3}}{2.2a}=\frac{1-\sqrt{1-a^3}}{a}$

$x_M+x_N=\frac{1+\sqrt{1-a^3}}{a}+\frac{1-\sqrt{1-a^3}}{a}=\frac{2}{a}$

$2x_M.x_N=2.\frac{1+\sqrt{1-a^3}}{a}.\frac{1-\sqrt{1-a^3}}{a}=2a$

Mà $K=\frac{8}{x_M+x_N}+\frac{1}{2x_Mx_N}=\frac{8}{\frac{2}{a}}+\frac{1}{2a}=4a+\frac{1}{2a}\overset{BĐT\ Cô-si}{\geq}2\sqrt{4a.\frac{1}{2a}}=2\sqrt{2}$

Do đó K đạt giá trị nhỏ nhất, ngĩa là

$4a+\frac{1}{2a}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow 8a^2-4\sqrt{2}a+1=0 \Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{4}$

Vậy $a=\frac{\sqrt{2}}{4}$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 2: Ta thấy $3a^2=bc \Rightarrow 3a^3=abc \Rightarrow a^3=\frac{abc}{3}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si:

$$3a^2 = bc \le \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{3a^3-a}{2}\right)^2 \Rightarrow 3a^2 \le \frac{\left(3a^3-a\right)^2}{4} \Rightarrow 12a^2 \le \left(3a^3-a\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2\left(3a^2-1\right)^2 \ge 12a^2 \Rightarrow \left(3a^2-1\right)^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow \left(3a^2-1+2\sqrt{3}\right)\left(3a^2-1-2\sqrt{3}\right) \ge 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3a^2-1-2\sqrt{3} \ge 0 \\ 3a^2-1+2\sqrt{3} \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3a^2-1-2\sqrt{3} \le 0 \\ 3a^2-1+2\sqrt{3} \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2 \ge \dfrac{1-2\sqrt{3}}{3} \\ a^2 \ge \dfrac{1+2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 \le \dfrac{1-2\sqrt{3}}{3} \\ a^2 \le \dfrac{1+2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow a^2 \ge \frac{1+2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a \ge \sqrt{\frac{1+2\sqrt{3}}{3}} \text{ (Do } a>0\text{).}$$

Câu 3:

a) Ta có: $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{1}} = \dfrac{1}{2}\left|\sqrt{2}-1\right| = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$

Đặt $A = 4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x - 2$

Ta thấy:

$A = 4x^3\left(x^2+x+1\right) - x^3 + 5x - 2$

$= x^3\left(4x^2+4x-1\right) - x\left(4x^2+4x-1\right) + \left(4x^2+4x-1\right) - 1$

$= \left(4x^2+4x-1\right)\left(x^3-x+1\right) - 1$

Mà $4x^2+4x-1 = 4\cdot\left[\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\right]^2 + 4\cdot\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right) - 1 = 0$.

Thay $4x^2+4x-1=0$ vào A, ta được $A=-1$.

Vậy $P = (-1)^{2018} + 2019 = 2020$

b) Vì $\dfrac{x-3}{x^2+1}$ là số nguyên nên $\dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2+1}$ cũng là số nguyên.

Ta thấy $\dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2+1} = \dfrac{x^2-9}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1}{x^2+1} - \dfrac{10}{x^2+1} = 1 - \dfrac{10}{x^2+1}$.

Do đó $10 \vdots x^2+1 \Rightarrow x^2+1 \in Ư(10)=\{\pm1;\pm2;\pm5;\pm10\}$.

$$x^2+1=-1 \Rightarrow x^2=-2 \ (vô\ lí)$$

$$x^2+1=1 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$$

$$x^2+1=-2 \Rightarrow x^2=-2 (vô\ lí)$$

$$x^2+1=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1 \vee x=-1$$

$$x^2+1=-5 \Rightarrow x^2=-6 \ (vô\ lí)$$

$$x^2+1=5 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2 \vee x=-2$$

$$x^2+1=-10 \Rightarrow x^2=-11 \ (vô\ lí)$$

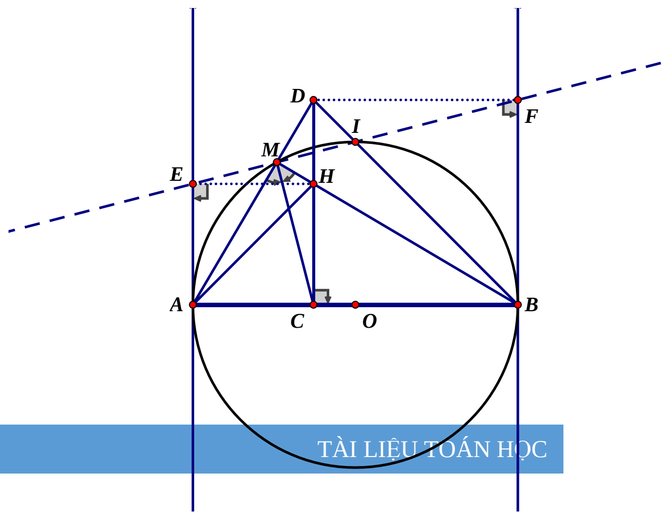
$$x^2+1=10 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=3 \vee x=-3$$

Thử lại:

- Thay $x=0$ vào $\dfrac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\dfrac{0-3}{0^2+1}=-3 \in Z$
- Thay $x=1$ vào $\dfrac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\dfrac{1-3}{1^2+1}=-1 \in Z$
- Thay $x=-1$ vào $\dfrac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\dfrac{-1-3}{(-1)^2+1}=-2 \in Z$
- Thay $x=2$ vào $\dfrac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\dfrac{2-3}{2^2+1}=\dfrac{-1}{5} \notin Z$
- Thay $x=-2$ vào $\dfrac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\dfrac{-2-3}{(-2)^2+1}=-1 \in Z$
- Thay $x=2$ vào $\dfrac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\dfrac{2-3}{2^2+1}=\dfrac{-1}{5} \notin Z$
- Thay $x=-3$ vào $\dfrac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\dfrac{-3-3}{(-3)^2+1}=\dfrac{-3}{5} \notin Z$
- Thay $x=3$ vào $\dfrac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\dfrac{3-3}{3^2+1}=0 \in Z$

Vậy $x \in \{-2;-1;0;1;3\}$ thì $\dfrac{x-3}{x^2+1}$ là một số nguyên.

Câu 4:



a) Tứ giác $AMHC$ nội tiếp đường tròn (Vì $AMH = AMH = 90^\circ$)

$\Rightarrow HAC = CMH = 45^\circ$ (Hai góc cùng chắn cung HC)

$\Rightarrow \Delta ACH$ vuông cân.

$\Rightarrow AC = CH$

b) Tứ giác $MHCA$ thuộc đường tròn đường kính AH, mà $EACH$ là hình vuông.

$\Rightarrow EACH$ thuộc đường tròn đường kính AH

$\Rightarrow EACHM$ nội tiếp đường tròn

Vì $EACH$ là hình vuông nên $CE = AH$

$\Rightarrow EC$ cũng là đường kính.

$\Rightarrow EM \perp MC \quad (1)$

Ta lại có: $HMI = HDI = HAC = CMH$ (do các tứ giác $MHID, MACH$ nội tiếp)

$\Rightarrow CMH = HMI = 45^\circ$

$\Rightarrow MC \perp MI \quad (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow M, I, E$ thẳng hàng.

Chứng minh tương tự, ta được M, I, F thẳng hàng.

Vậy M, I, E, F thẳng hàng.

c) Các tứ giác $EACH$, $FDCB$ là hình vuông.

$\Rightarrow S_1 \cdot S_2 = AC^2 \cdot CB^2 \Rightarrow \sqrt{S_1 \cdot S_2} = AC \cdot CB$

$\Rightarrow AC \cdot CB = (AO - OC)(OB + OC) = (R - OC)(R + OC) = R^2 - OC^2 = OM^2 - OC^2$

$\Rightarrow CM^2 < OM^2 - OC^2$ (đúng vì ΔMCO tù tại C)

Vậy $CM^2 < \sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

Đề số 25

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x \geq 0$; $x \neq 4; x \neq 9$

$$A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x - 5\sqrt{x}+6}\right)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{x - 9 - x + 4 + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} . \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

b) Ta có

$$x = \frac{(\sqrt{3}-1)\left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}}{\sqrt{(1+2\sqrt{5})^2}+3}$$

$$= \frac{2}{2(2+\sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = -2 + \sqrt{5}$$

Vậy

$$B=(x^2+4x-2)^{2019}=\left[\left(-2+\sqrt{5}\right)^2+4\left(-2+\sqrt{5}\right)-2\right]^{2019}$$

$$=\left(4-4\sqrt{5}+5-8+4\sqrt{5}-2\right)^{2019}=\left(-1\right)^{2019}=-1$$

Câu 3.

a) Phương trình $x^2-mx+m-1=0$ có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4m+4>0\\ m>0\\ m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-2)^2>0\\ m>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m>1\end{cases}$$

Vậy với $\begin{cases}m\neq 0\\ m>1\end{cases}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt

b) Vì $\Delta=(m-2)^2\geq 0$ với mọi m nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo hệ thức vi – ét ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1x_2=m-1\end{cases}$$

$$A=\frac{4x_1x_2+6}{x_1^2+x_2^2+2(1+x_1x_2)}=\frac{4x_1x_2+6}{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2+2x_1x_2}=\frac{4x_1x_2+6}{(x_1+x_2)^2+2}$$

Khi đó $\Leftrightarrow A=\dfrac{4(m-1)+6}{m^2+2}=\dfrac{4m+2}{m^2+2}$

$\Leftrightarrow A(m^2+2)=4m+2$

$\Leftrightarrow Am^2-4m+2A-2=0 \quad (1)$

(1) có nghiệm khi

$\Delta'\geq 0\Leftrightarrow 4-A(2A-2)\geq 0$

$\Leftrightarrow 2A^2-2A-4\leq 0$

$\Leftrightarrow (A+1)(A-2)\leq 0$

$\Leftrightarrow -1\leq A\leq 2$

Vậy Min A = -1; khi đó

$(1)\Leftrightarrow -m^2-4m-4=0$

$\Leftrightarrow (m+2)^2=0$

$\Leftrightarrow m=-2$

Vậy với m = -2 thì phương trình có hai nghiệm thỏa mãn đề bài

Câu 2.

Có $x^2-3x+5=x^2-2.\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}+\frac{11}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0$ với mọi $x\in R$

$\Rightarrow VT>0$ với mọi $x\in R$

ĐKXĐ: $x>\frac{-7}{3}$

$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-3x+5}+x^2-3x+5-12=0$

Đặt $\sqrt{x^2-3x+5}=t$ $(t>0)$ ta có phương trình

$t^2+t-12=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=3\ (TM) \\ t=-4\,(KTM)\end{array}\right.$

Với t = 3 ta có

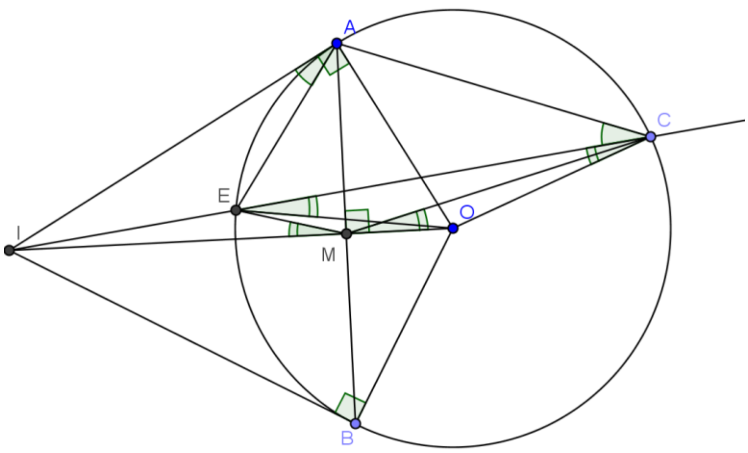
$\sqrt{x^2-3x+5}=3$

$\Leftrightarrow x^2-3x-4=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1(TM) \\ x=4\,(TM)\end{array}\right.$

Vậy phương trình (1) có tập nghiệm $S=\{-1;4\}$

Câu 4.



a) ΔIAE và ΔICA có $IAE=ICA$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AE)

và góc I chung

$\Rightarrow\Delta IAE\backsim\Delta ICA$ (g.g)

$\Rightarrow\frac{IA}{IC}=\frac{IE}{IA}\Rightarrow IA^2=IE.IC$ (1)

Lại có ΔIAO vuông tại A có AM $\perp$ IO (do IO là trung trực của AB)

$\Rightarrow IA^2 = IM.MO$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$IE.IC = IM.IO$

$\Leftrightarrow \frac{IE}{IM} = \frac{IO}{IC}$

ΔIEM và ΔIMC góc I chung và $\frac{IE}{IM} = \frac{IO}{IC}$

$\Rightarrow \Delta IEM \backsim \Delta IOC$ (c.g.c)

$\Rightarrow IME = OCE$

$\Rightarrow$Tứ giác OMEC nội tiếp (góc trong của tứ giác bằng góc ngoài ở đỉnh đối diện)

b)Do tứ giác OMEC nội tiếp (câu a)

$\Rightarrow OEC = OMC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OC)

Mà $OEC = OCE$ (do tam giác OCE cân tại O)

Và $OCE = IME$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow IME = OMC$

Mà $IME + EMA = 90^0$ và $OMC + CMA = 90^0$ (do AB $\perp$ IO)

$\Rightarrow \text{AMC} = AME$

c)

ΔCMO và ΔICO có

$CMO = ICO$ $(= OEC)$

IOC chung

$\Rightarrow \Delta CMO \backsim \Delta ICO$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{CM}{MO} = \frac{IC}{CO}$

$\Rightarrow CM.CO = MO.IC$

$\Rightarrow CM^2.CO = CM.MO.IC$

$\Rightarrow \frac{CM^2}{MO.IC} = \frac{CM}{CO}$ (1)

Lại có: $\Delta IEM \backsim \Delta COM$ (g.g) (do $\text{IEM} = MOC\,(= IOC)$ theo câu a và $\text{EMI} = OMC$ (câu b)

$\Rightarrow \frac{IM}{IE} = \frac{CM}{CO}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$\frac{IM}{IE} = \frac{CM^2}{MO.IC} \Rightarrow \frac{IM.MO}{MC^2} = \frac{IE}{IC}$

Mà $MA^2 = MI.MO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông IAO)

$$\Rightarrow \frac{MA^2}{MC^2} = \frac{IE}{IC} \text{ mà } MA = MB$$

$$\Rightarrow \frac{MB^2}{MC^2} = \frac{IE}{IC}\ hay \left(\frac{MB}{MC}\right)^2 = \frac{IE}{IC}$$

Câu 5.

Với 3 số thực dương a, b, c ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

Thật vậy: Ta có

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+3$$

$$\overset{cô-si}{\geq} 2+2+2+3 = 9$$

Vậy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ (*)

Dấu "=" sảy ra khi a = b = c

* Với ba số thực a, b, c ta có

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$$

Thậy vậy:

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow 3ab+3bc+3ca \leq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geq 0$$

Luôn đúng với mọi a, b, c

Vậy $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$ (**)

Dấu "=" sảy ra khi a = b = c

Áp dụng (*) (**) và giả thiết $a + b + c \leq 3$ ta có

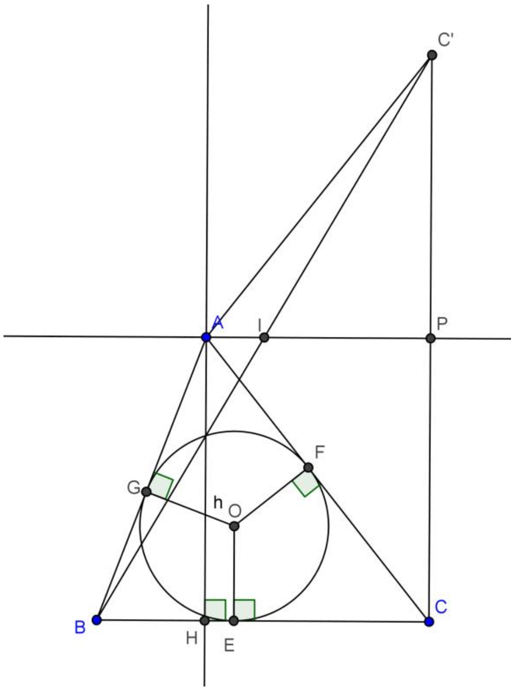
$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{362}{ab+bc+ca}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{360}{ab+bc+ca}$$

$$\geq \frac{9}{(a+b+c)^2}+\frac{360}{\frac{(a+b+c)^2}{3}} \geq \frac{9}{9}+\frac{360.3}{9} = 121$$

Dấu "=" sảy ra khi a = b = c = 1

Câu 6.



Tam giác ABC có B, C cố định, AH = h

Vậy A thuộc đường thẳng d cố định song song với BC và cách BC một đoạn h

Gọi (O; r) là đường trong nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt tại E, F, G Ta có

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC$ (không đổi) (1)

Mặt khác $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COA} = \frac{1}{2}r(AB + BC + CA)(2)$

Từ (1) và (2) ta có r lớn nhất khi AB + AC nhỏ nhất

Lấy C′ đối xứng với C qua d $\Rightarrow$ C′ cố định và AC = AC′

$\Rightarrow$ AB + AC = AB + AC′ $\geq$ BC′

$\Rightarrow$ AB + AC nhỏ nhất khi A $\equiv$ I (I là giao của BC′ và d)

Gọi P là trung điểm của CC′ vì d//BC nên I là trung điểm của BC′

$\Rightarrow$ IB = IC′=IC $\Rightarrow$ AB = AC

Vậy r lớn nhất khi tam giác ABC cân tại A

Đề số 26

Câu 1.

1) $x=\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-2\sqrt{3}}-1 \Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-2\sqrt{3}}$

$\Rightarrow (x+1)^3=4-6(x+1)\Rightarrow x^3+3x^2+9x=-3$

$P=x^3\left(x^2+3x+9\right)^3=\left(x^3+3x^2+9x\right)^3$

$P=-27$

2) (Điều kiện $x\geq -7$)

$x^2+6x+5=\sqrt{x+7}\Leftrightarrow (x-3)^2-(x+7)+x+3-\sqrt{x+7}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+3-\sqrt{x+7}\right)\left(x+3+\sqrt{x+7}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3-\sqrt{x+7}=0(1) \\ x+3+\sqrt{x+7}+1=0(2) \end{array}\right.$

(1) $\Leftrightarrow x+3=\sqrt{x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ x+7=x^2+6x+9 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}$

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{x+7}=-x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -4 \\ x^2+7x+9=0 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{-7-\sqrt{13}}{2}$

Phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}$; $x=\dfrac{-7-\sqrt{13}}{2}$

3) $\begin{cases} (3x-y-1)\sqrt{y+1}+3x-1=y\sqrt{3x-y}(1) \\ x^2+y^2=5(2) \end{cases}$

Điều kiện $3x-y>\geq 0; y\geq 0$

(1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-y}-1\right)\left(\sqrt{y+1}+1\right)\left(\sqrt{3x-y}-\sqrt{y+1}+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x-y}-1=0(3) \\ \sqrt{3x-y}-\sqrt{y+1}+2=0(4) \end{array}\right.$

(3) $\Leftrightarrow y=3x-1$ thế vào (2), ta được

$x^2+(3x-1)^2=5 \Leftrightarrow 10x^2-6x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=2 \\ x=-\dfrac{2}{5}\Rightarrow y=-\dfrac{11}{5} \end{array}\right.$

Loại nghiệm $(x;y)=\left(-\frac{2}{5};-\frac{11}{5}\right)$

$(4)\Leftrightarrow\sqrt{3x-y}+\frac{3-y}{2+\sqrt{y+1}}=0(5)$

Từ (2), ta có: $|y|\le\sqrt{5}<3\Rightarrow 3-y>0\Rightarrow(5)$ vô nghiệm

Vậy tập nghiệm $S=\{(1;2)\}$

Câu 2.

1) Vì d2 vuông góc với d1 nên d2: y = 4x+ b

Phương trình hoành độ giao điểm giữa d2 và (P) :

$2x^2=4x+b\Leftrightarrow 2x^2-4x-b=0(1)$

d2 cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow(1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\Delta'=4+2b>0\Leftrightarrow b>-2$

Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ với x_1,x_2 là nghiệm của (!)

Ta có: $x_1+x_2=2\Rightarrow x_I=1;y_I=\frac{y_1+y_2}{2}=2(x_1+x_2)+b=4+b$

Vậy $I(1;4+b)$

Suy ra: $OI^2=b^2+8b+17,AB=\sqrt{17(x_1-x_2)^2}=\sqrt{17(4+2b)}$

$\sqrt{5}AB=\sqrt{17}OI\Leftrightarrow 5(4+2b)=b^2+8b+17$

$\Leftrightarrow b^2-2b-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-1\\b=3\end{array}\right.$ (thỏa điều kiện)

Vậy d2 : y = 4x – 1 hoặc d2: y = 4x + 3

2) Phương trình (1) có hai nghiệm $\Leftrightarrow\Delta\ge 0\Leftrightarrow m\ge-\frac{1}{4}$

Theo định lí Vi-et $\begin{cases}x_1+x_2=-5\\x_1.x_2=4-9m\end{cases}$

$x_1(x_1^2-1)-x_2(8x_2^2+1)=5\Leftrightarrow x_1^3-8x_2^3-(x_1+x_2)=5\Leftrightarrow x_1^3-8x_2^3=0\Leftrightarrow x_1=2x_2$

Suy ra : $\begin{cases} x_1+x_2=-5 \\ x_1.x_2=4-9m \\ x_1=2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{10}{3} \\ x_2=-\dfrac{5}{3} \\ x_1x_2=4-9m \end{cases}$

Suy ra $4-9m=\dfrac{50}{9} \Rightarrow m=-\dfrac{14}{81}$ (thỏa điều kiện)

Vậy $m=-\dfrac{14}{81}$

3) Đặt $S=x+y, P=x.y, S>0, P>0$

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{S^2-2P}{P}+1\right)\Rightarrow P=\frac{S^2}{2T+1}$$

$$\Leftrightarrow 2S^3-12\frac{S^2}{2T+1}=S^2\left(\frac{S^2}{2T+1}+4\right)$$

$$\Leftrightarrow S^2-2(2T+1)S+8T+16=0(1)$$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'\geq 0 \Leftrightarrow 4T^2-4T-15\geq 0 \Rightarrow T\geq \dfrac{5}{2}$

Vậy $\min T=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} S=6 \\ P=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+\sqrt{3} \\ y=3-\sqrt{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=3-\sqrt{3} \\ y=3+\sqrt{3} \end{cases}$

Câu 3.

Vì 65 lẻ nên $2x+5y+1$ lẻ và $2^{|x|-1}+y+x^2+x$ lẻ

Mà $2x+1$ lẻ nên $5y$ chẵn, suy ra y chẵn

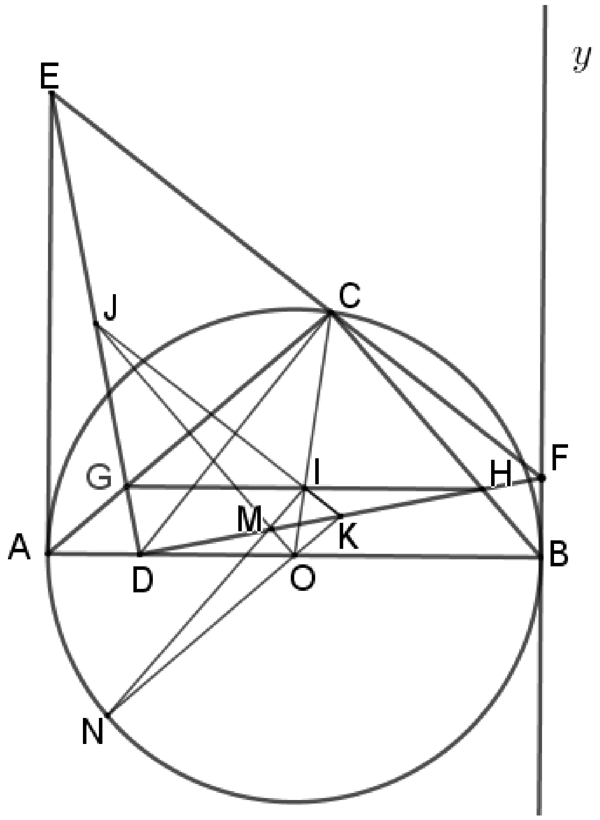
Mặt khác $x^2+x=x(x+1)$ chẵn nên $2^{|x|-1}$ lẻ, suy ra $|x|-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Với x = 1 $\Rightarrow (5y+3)(y+3)=65 \Rightarrow y=2$

Với x = -1 $\Rightarrow (5y+3)(y+3)=65 \Leftrightarrow 5y^2+4y-66=0$ Phương trình này không có nghiệm nguyên.

Vậy: $(x;y)=(1;2)$

Câu 4.



1. Chứng minh hai tam giác AGE, FHC đồng dạng và I là trung điểm của GH.

Ta có: $CAE = ABC$ (cùng chắn cung AC)

CDBF nội tiếp $\Rightarrow ABC = CFD$ (cùng chắn cung CD)

Suy ra: $CAE = CFD$ (1)

ADCE nội tiếp $\Rightarrow AED = ACD$ (cùng chắn cung AD)

$ACD = BCF$ (cùng phụ BCD)

Suy ra: $AED = BCF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: hai tam giác AGE, FHC đồng dạng

Ta có: $CGD = AGE = CHF \Rightarrow CGDH$ nội tiếp $\Rightarrow CGH = CDH$

$CDH = CBF$ (CDBF nội tiếp)

Suy ra: $CGH = CBF$. Mà $CBF = CAB \Rightarrow CGH = CAB \Rightarrow GH // AB$

Suy ra: $\dfrac{GI}{AO} = \dfrac{IH}{OB}$. Vì AO = OB nên GI = IH $\Rightarrow$ I là trung điểm GH

2. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Vì I, J lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác CGDH, ADCE nên $IJ \perp CD$

Vì J, K lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác ADCE, BDCF nên $JK \perp CD$

Suy ra: I, J, K thẳng hàng.

3. Chứng minh tam giác JOK vuông và ba đường thẳng DE, IM, KO đồng quy.

Ta có: J là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AOCE $\Rightarrow OJ \perp AC$

$\Rightarrow OJ//BC\left(BC \perp AC\right)$

Mặt khác $JK//EF$ (tính chất đường trung bình)

Do đó: $MJK = BCF$

Mà $BCF = BDF$ (BDCF nội tiếp)

Suy r: $MJK = BDF = ODK \Rightarrow$ JDOK nội tiếp

Suy ra: $JOK = JDK$

Mà: $JDK = 90^0$ (CGDH nội tiếp và $GCH = 90^0$)

Suy ra: $JOK = 90^0$. Suy ra tam giác JOK vuông tại O

Gọi N là giao điểm của ED và OK

Ta có: M là trực tâm tam giác JNK nên $NM \perp JK$ (3)

$MOI = JOC = OCB = OBC = CFD$ (vì OJ//BC)

Mà $CFD = IKD$ (JK//EF) $\Rightarrow MOI = IKM$ suy ra IMOK nội tiếp

Suy ra: $IM \perp JK$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra ba đường thẳng DE, IM, KO đồng quy.

Đề số 27

Bài 1.

a/ Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$x^2 = 2mx + 2m + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m - 3 = 0 \quad (*)$$

Có: $\Delta' = m^2 + 2m + 3 = \left(m+1\right)^2 + 2 > 0, \forall m \in R$

Vì thế: phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt

Hay: (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b/ Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ hai giao điểm của (d) và (P)

Khi đó: $\begin{cases} y_1 = 2m.x_1 + 2m + 3 \\ y_2 = 2m.x_2 + 2m + 3 \end{cases}$ và x_1, x_2 chính là hai nghiệm của (*)

Theo Vi-ét, có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = -2m - 3 \end{cases}$

Có: $y_1 + y_2 \le 5$

$\Leftrightarrow 2m.x_1 + 2m + 3 + 2m.x_2 + 2m + 3 \le 5$

$\Leftrightarrow 2m.(x_1 + x_2) + 4m + 6 \le 5$

$\Leftrightarrow 2m.2m + 4m + 6 - 5 \le 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 \le 0$

$\Leftrightarrow (2m+1)^2 \le 0$

$\Leftrightarrow 2m + 1 = 0$ (do $(2m+1)^2 \ge 0, \forall m \in R$)

$\Leftrightarrow m = \dfrac{-1}{2}$

Vậy $m = \dfrac{-1}{2}$.

Bài 2. (2đ)

a/ Có $A = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{2019}$

$2A = 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2020}$

Trừ vế theo vế, ta được:

$$2A - A = \left(2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2020}\right) - \left(2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{2019}\right)$$

$\Rightarrow A = 2^{2020} - 1$

Lại có: $B = 2^{2020} \in \mathbb{N}$ (lũy thừa 2020 theo cơ số 2)

Nên: $A = 2^{2020} - 1 \in \mathbb{N}$

Và $B - A = 1$. Vậy A, B là hai số tự nhiên liên tiếp.

b/ $\dfrac{2x^2 - 3x + 10}{x+2} = 3\sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 4}{x+2}}$ ĐK: $x + 2 \ne 0$ và $\dfrac{x^2 - 2x + 4}{x+2} \ge 0$ (*)

Phương trình tương đương:

$$2x - 7 + \frac{24}{x+2} = 3.\sqrt{x - 4 + \frac{12}{x+2}}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 8 + \frac{24}{x+2} + 1 = 3.\sqrt{x - 4 + \frac{12}{x+2}}$$

Đặt $t = x - 4 + \dfrac{12}{x+2}$.

(**) $\Rightarrow 2t + 1 = 3.\sqrt{t}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t+1 \ge 0 \\ 9t = 4t^2 + 4t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge \frac{-1}{2} \\ 4t^2 - 5t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge \frac{-1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{4} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = \frac{1}{4}.$$

Khi $t = 1$ thì $x - 4 + \frac{12}{x+2} = 1$

$$\Rightarrow (x-4)(x+2) - (x+2) + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \quad (n) \\ x = 1 \quad (n) \end{array} \right. \quad \text{(do ĐK (*))}$$

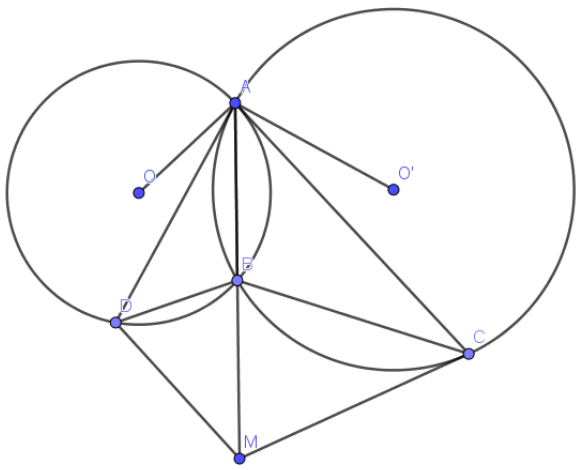
Khi $t = \frac{1}{4}$ thì $x - 4 + \frac{12}{x+2} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow 4(x-4)(x+2) - (x+2) + 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 9x + 14 = 0 \quad \text{(Vô nghiệm)}$$

Vậy $S = \{1; 2\}$

Bài 3. (3đ)



a/ Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CBA$. Có:

$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CAB$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tt và dây chắn AB của (O))

$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ACB$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tt và dây chắn AB của (O'))

$\Rightarrow \triangle ABD$ đồng dạng $\triangle CBA$ (g.g)

b/ Vì $\triangle ABD$ đồng dạng $\triangle CBA$ (câu a)

Nên: $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$ hay $AB^2 = BD.BC$

Mà: B là trung điểm AM $\Rightarrow MB^2 = AB^2 = BD.BC$ (đpcm)

c/ Có: $\sphericalangle MBD = \sphericalangle BAD + \sphericalangle BDA$ (Góc ngoài $\triangle ABD$)

$\sphericalangle MBC = \sphericalangle BAC + \sphericalangle BCA$ (Góc ngoài $\triangle ABC$)

Mà: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCA$ và $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BAC$ (ở câu a)

Nên: $\sphericalangle MBD = \sphericalangle MBC$. Lại có: $MB^2 = BD.BC \Leftrightarrow \frac{MB}{BD} = \frac{BC}{MB}$

Suy ra: $\triangle BDM$ đồng dạng $\triangle BMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \sphericalangle BDM = \sphericalangle BMC$.

Xét tứ giác ADMC có:

$$\measuredangle A+\measuredangle M=\measuredangle BAD+\measuredangle BAC+\measuredangle M$$
$$\Leftrightarrow \measuredangle A+\measuredangle M=\measuredangle BAD+\measuredangle BDA+\measuredangle M$$
$$\Leftrightarrow \measuredangle A+\measuredangle M=\measuredangle DBM+\measuredangle BMD+\measuredangle BMC$$
$$\Leftrightarrow \measuredangle A+\measuredangle M=180^0-\measuredangle BDM+\measuredangle BMC$$
$$\Leftrightarrow \measuredangle A+\measuredangle M=180^0$$

Vậy: ADMC là tứ giác nội tiếp.

Bài 4. (2đ)

a/ Ta chứng minh bằng phép biến đổi tương đương

Xét: $a^2+b^2\ge \frac{1}{2}(a+b)^2$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2\ge a^2+2ab+b^2$$
$$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0\quad \text{(luon dung)}$$

Vậy: $a^2+b^2\ge \frac{1}{2}(a+b)^2$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b$

Xét: $ab\le \frac{1}{4}(a+b)^2$

$$\Leftrightarrow 4ab\le a^2+2ab+b^2$$
$$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0\quad \text{(luon dung)}$$

Vậy: $ab\le \frac{1}{4}(a+b)^2$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b$

b/ Có: $5\left(x^2+y^2+z^2\right)-9x(y+z)-18yz=0$

$$\Leftrightarrow 5x^2+5\left(y^2+z^2\right)-9x(y+z)-18yz=0 \Leftrightarrow 5x^2-9x(y+z)=-5\left(y^2+z^2\right)+18yz$$

Mà theo câu a. Có: $y^2+z^2\ge \frac{1}{2}(y+z)^2 \Leftrightarrow -5\left(y^2+z^2\right)\le \frac{-5}{2}(y+z)^2$

và $yz\le \frac{1}{4}(y+z)^2 \Leftrightarrow 18yz\le \frac{9}{2}(y+z)^2$

Nên: $-5\left(y^2+z^2\right)+18yz\le 2(y+z)^2$

$$\Leftrightarrow 5x^2-9x.(y+z)\le 2(y+z)^2$$
$$\Leftrightarrow 5x^2-9x.(y+z)-2(y+z)^2\le 0$$
$$\Leftrightarrow 5x^2-10x.(y+z)+x.(y+z)-2(y+z)^2\le 0$$

$\Leftrightarrow (x-2.(y+z)).(5x+(y+z)) \le 0$

$\Leftrightarrow x-2.(y+z) \le 0$ (do $5x+y+z>0$)

Hay $x \le 2.(y+z)$

Có: $Q=\dfrac{2x-y-z}{y+z}=\dfrac{2x}{y+z}-1 \le \dfrac{2.2.(y+z)}{y+z}-1=3$

$\Rightarrow Q_{max}=3$. Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} y=z \\ x=2.(y+z) \end{cases} \Leftrightarrow x=4y=4z$

Vậy $Q_{max}=3$ khi $x=4y=4z$

Bài 5.

Lời bình: Tư duy từ nguyên lý Dirichlet

Quy ước, ta xem sự hợp tác của công ty A với công ty B là một liên kết một chiều từ A vào B. Và hiển nhiên, cũng sẽ có liên kết một chiều ngược từ B vào A.

Vì mỗi công ty của huyện KS hợp tác ít nhất 97 công ty huyện KV. Khi đó, số liên kết tối thiểu từ KS vào KV là: $33.97=3201$ (liên kết)

Giả sử: tất cả mỗi một công ty huyện KV đều có tối đa 32 liên kết với các công ty huyện KS. Khi đó, số liên kết tối đa từ KV vào KS là: $100.32=3200<3201$ (liên kết) (mâu thuẫn !)

Vậy tồn tại ít nhất một công ty huyện KV có 33 liên kết với các công ty huyện KS (đpcm)

Đề số 28

Câu 1: (*1,0 điểm*).

Ta có: $ab+c=ab+c(a+b+c)=(a+c)(b+c)$

và $c-1=-(a+b)$.

Do đó: $A=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)^3=1$.

Câu 2: (*2,5 điểm*).

a) $5\sqrt{x-1}-\sqrt{x+7}=3x-4$

Điều kiện: $x \ge 1$.

Với điều kiện trên phương trình trở thành: $\dfrac{25(x-1)-(x+7)}{5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}}=3x-4$

$\Leftrightarrow \dfrac{8(3x-4)}{5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}}=3x-4 \Leftrightarrow (3x-4)\left(\dfrac{8}{5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}}-1\right)=0$

$$\left[\begin{array}{l}3x-4=0\\ \dfrac{8}{5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}}-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{4}{3}(nhan)\\ 5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+7}=8\ (*)\end{array}\right.$$

Giải $(*)$, ta được: $25(x-1)+x+7+10\sqrt{x^2+6x-7}=64 \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2+6x-7}=-13x+41\left(x\le\dfrac{41}{13}\right)$

$\Leftrightarrow 25\left(x^2+6x-7\right)=169x^2-1066x+1681$

$\Leftrightarrow -144x^2+1216x-1856=0$

$\Leftrightarrow -144(x-2)\left(x-\dfrac{58}{9}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2(nhan)\\ x=\dfrac{58}{9}(loai)\end{array}\right.$.

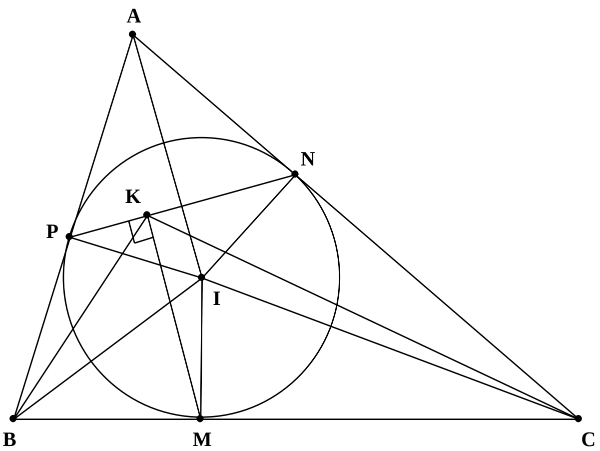
Vậy $S=\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$.

b) $\begin{cases}2(x+y)-xy=4\\ xy(x+y-4)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(y-2)-2(y-2)=0\\ xy(x+y-4)=-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(y-2)(x-2)=0\\ xy(x+y-4)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2;x=2\\ xy(x+y-4)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2\\ x=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}\end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình trên có nghiệm: $(1;2)$, $(2;1)$.

Câu 3: *(1,5 điểm)*.



Theo tính chất của tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $MB=BP$, $MC=CN$, $AN=AP$.

Trên đoạn NP, ta lấy điểm K' sao cho: $\dfrac{K'N}{K'P}=\dfrac{CN}{BP}$.

Ta có ΔANP cân tại A nên $ANP=APN$.

Lại có: $BPK'+APN=180°$ và $CNK'+ANP=180°$ nên $BPK'=CNK'$.

xét $\Delta BPK'$ và $\Delta CNK'$, có:

$BPK' = CNK'$

$\dfrac{K'N}{K'P} = \dfrac{CN}{BP}$

Vậy $\Delta BPK' \sim \Delta CNK'$ $(c-g-c)$.

Suy ra: $BK'P = CK'N$ và $\dfrac{K'B}{K'C} = \dfrac{BP}{CN} = \dfrac{MB}{MC}$.

Do $\dfrac{K'B}{K'C} = \dfrac{MB}{MC}$ nên $K'M$ là phân giác của $BK'C$.

mà $BK'P = CK'N$

nên $MK'P = MK'B + BK'P = \dfrac{1}{2}BK'C + \dfrac{1}{2}\left(BK'P + CK'N\right) = 90°$.

Suy ra $MK' \perp NP$.

Vậy $K' \equiv K$.

Do đó: KM là tia phân giác BKC.

Câu 4: (*2,0 điểm*).

a) Theo giả thiết, ta có: $(2-x)(2-y)(2-z) \geq 0$

$\Rightarrow 8 - 4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) - xyz \geq 0$

Từ đó, ta có: $x^2+y^2+z^2 \leq x^2+y^2+z^2+8-4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)-xyz$

$=(x+y+z)^2 - 4(x+y+z) + 8 - xyz$

$=5 - xyz \leq 5 < 6$.

b) Ta có: $P = (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right) = 3\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$

$=\dfrac{3}{2}\left[3\left(x^2+y^2+z^2\right)-(x+y+z)^2\right] = \dfrac{3}{2}\left[3\left(x^2+y^2+z^2\right)-9\right]$

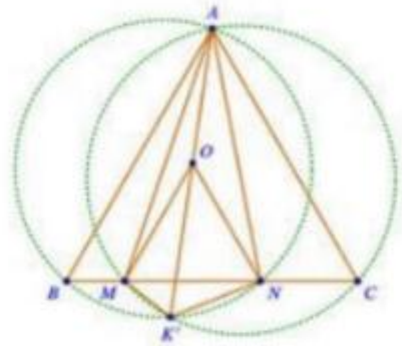
theo chứng minh trên thì $x^2+y^2+z^2 \leq 5$. Từ đó, ta suy ra:

$P \leq \dfrac{3}{2}(3.5-9) = 9$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (x,y,z) là một hoán vị của $(2,1,0)$.

Vậy $\max P = 9$.

Câu 5: (*2,0 điểm*).



a) Bên trong MAN, lấy điểm K' sao cho $AK' = AC$ và $K'AN = NAC$.

xét $\Delta K'AN$ và ΔCAN , có:

$K'AN = NAC$

$K'A = CA$

AN : cạnh chung

Vậy $\Delta K'AN = \Delta CAN\left(c - g - c\right)$.

$\Rightarrow AK'N = ACN = 60^\circ = ABN$

Do đó, tứ giác $ABK'N$ nội tiếp. suy ra K' thuộc đường tròn $\left(ABN\right)$. (1)

Ta có: $MAN = 30^\circ = K'AN + K'AM = NAC + K'AM$.

và $NAC + MAB = 30^\circ$.

Nên $K'AM = MAB$. Từ đó, bằng cách chứng minh tương tự như trên, ta cũng có K' thuộc đường tròn $\left(ACM\right)$. (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra K' là điểm chung thứ hai của hai đường tròn $\left(ABN\right)$ và $\left(ACM\right)$, tức là K' trùng K.

Bây giờ, do $\Delta K'AN = \Delta CAN$ nên $NC = NK' = NK$.

Suy ra N thuộc trung trực của KC.

Lại có $AC = AK' = AK$

nên A cũng thuộc trung trực của KC.

Do đó AN là trung trực của KC. Tức là K và C đối xứng với nhau AN.

b) Trên đoạn AK lấy điểm O sao cho $OMN = 60^\circ$. Khi đó, do $AKN = ABN = 60^\circ$ nên $AKN = OMN = 60^\circ$, suy ra tứ giác $OMNK$ nội tiếp. Từ đây ta có:

$ONM = OKM = ACM = 60^\circ$.

Mà $OMN = 60^\circ$ nên ΔOMN đều.

Ta có $MOK = MNK$ (cùng chắn cung MK của đường tròn $\left(OMNK\right)$)

$MNK = BAK$ (cùng chắn cung BK của đường tròn (ABN))

và $BAK = 2MAK$ (dựa trên chứng minh ở câu a)) nên $MOK = 2MAK$.

Mặt khác, ta lại có: $MOK = MAK + OMA$ nên $MAK = OMA$. Suy ra ΔOMA cân tại O,tức là ta có $OA = OM = ON$.

Vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMN và như thế, ta có AK đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMN.

Câu 6: *(1,0 điểm).*

Ta có: $A = 7(m+n)^2 + 2mn = 7\left(m^2+n^2\right) + 16mn = 7(m-n)^2 + 30mn$.

Do $A \vdots 225$ nên $A \vdots 15$.

Lại có $30mn \vdots 15$ nên $7(m-n)^2 \vdots 225$.

Suy ra $(m-n) \vdots 15$.

Từ đây, ta có: $7(m-n)^2$ chia hết cho 225.

Dẫn đến $30mn \vdots 225$, tức là $mn \vdots 15$.

Mà $mn = (m-n)n + n^2$ nên $n^2 \vdots 15$ tức $n \vdots 15$. Từ đó, suy ra $m \vdots 15$ (do $(m-n) \vdots 15$).

Vậy $mn \vdots 15^2 = 225$.

Đề số 29

Câu 1: (4,0 điểm)

a) Ta có: $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$

$$= n^2\left[n^2(n-1)(n+1) + 2(n+1)\right]$$

$$= n^2\left[(n+1)\left(n^3 - n^2 + 2\right)\right]$$

$$= n^2(n+1)\left[\left(n^3+1\right) - \left(n^2-1\right)\right]$$

$$= n^2(n+1)^2\left(n^2 - 2n + 2\right)$$

Với $n \in N; n > 1$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$

Và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$

Vậy $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$ nên $n^2 - 2n + 2$ không là số chính phương.

Do đó A không là số chính phương với $n \in N; n > 1$

b) $B = \left(13 - 4\sqrt{3}\right)\left(7 + 4\sqrt{3}\right) - 8\sqrt{20 + 2\sqrt{43 + 24\sqrt{3}}}$

$= 91 + 52\sqrt{3} - 28\sqrt{3} - 48 - 8\sqrt{\left(\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^2}$

$= 43 + 24\sqrt{3} - 8\left(\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)$

$= 43 + 24\sqrt{3} - 8\left(\sqrt{\left(2\sqrt{3} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2}\right)$

$= 43 + 24\sqrt{3} - 8\left(2\sqrt{3} - 1 + 2 + \sqrt{3}\right)$

$= 35$

Câu 2: (4,0 điểm)

Gọi x là số trứng bán được $\left(x \in N, x > 8\right)$, thì:

Số trứng bán được trong ngày thứ nhất là : $8 + \dfrac{x-8}{8}$

Số trứng bán được trong ngày thứ hai là : $16 + \dfrac{x - \left(16 + 8 + \dfrac{x-8}{8}\right)}{8}$

Theo bài ra ta có phương trình :

$$8 + \frac{x-8}{8} = 16 + \frac{x - \left(16 + 8 + \dfrac{x-8}{8}\right)}{8}$$

Giải phương trình ta được: x = 392.

Vậy tổng số trứng bán được là 392 trứng

Số trứng bán được mỗi ngày là $8 + \dfrac{392-8}{8} = 56$

Số ngày là 392 : 56 = 7 ngày

b) Điều kiện: $\begin{cases} 7x + y \ge 0 \\ 2x + y \ge 0 \end{cases}$ $(*)$

Đặt $u = \sqrt{7x + y}$, $v = \sqrt{2x + y}$ (với $u, v > 0$

Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} u + v = 5 & (1) \\ v + x - y = 2 & (2) \end{cases}$$

Ta thấy: $u^2 - v^2 = 5x$ .Kết hợp với (1) suy ra: $v = \dfrac{5-x}{2}$ thay vào (2) ta được

$x = 2y - 1$ (3)

Thay (3) vào (2) ta có $\sqrt{5y-2} = 3 - y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \le 3 \\ 5y - 2 = (3-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 3 \\ y^2 - 11y + 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \le 3 \\ \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{11-\sqrt{77}}{2} \\ y = \dfrac{11+\sqrt{77}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow y = \dfrac{11-\sqrt{77}}{2} \Rightarrow x = 10 - \sqrt{77} \text{ (thỏa (*))}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: $\left(10 - \sqrt{77}; \dfrac{11-\sqrt{77}}{2}\right)$

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Do a,c < 0 nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

Ta có: $\sqrt{x_1^2 + 2019} - x_i = \sqrt{x_2^2 + 2019} + x_2$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + 2019} - \sqrt{x_2^2 + 2019} = x_2 + x_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 2019} - \sqrt{x_2^2 + 2019}} = x_2 + x_1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ \sqrt{x_1^2 + 2019} - \sqrt{x_2^2 + 2019} = x_1 - x_2 \end{array}\right.$$

* Trường hợp 1: $x_1 + x_2 = 0$

$\Leftrightarrow$ m – 2019 = 0

$\Leftrightarrow$ m = 2019

* Trường hợp 2: Không xảy ra do: $\sqrt{x_1^2 + 2019} > |x_1|$; $\sqrt{x_2^2 + 2019} > |x_2|$

Vậy m = 2019.

b) ĐK: $x^3 + 1 \ge 0$

$$2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - x + 1 + x + 1) = 5\sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow\ 2.\frac{x+1}{x^2-x+1}-5\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}+2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=2 \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

* Trường hợp 1: $\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=2 \Leftrightarrow 4x^2-5x+3=0$ (vô nghiệm)

* Trường hợp 2: $\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2-5x-3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5-\sqrt{37}}{2} \\ x=\dfrac{5+\sqrt{37}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm : $x=\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}\ ; x=\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$

Câu 4: (4,0 điểm)

a) Ta có: AE, AF là hai tiếp tuyến của đường tròn (I) , suy ra: AE = AF, AI là phân giác của góc EAF.

ΔAEF cân tại A, AI là đường phân giác do đó AI là đường cao của tam giác AEF

ΔEAI vuông tại E, EK là đường cao suy ra $AE^2=AK.AI$

Xét ΔAEN và ΔADE có EAN chung.

$AEN=ADE$. (Hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Do đó: $\Delta AEN \sim \Delta ADE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AE}{AD}=\frac{AN}{AE} \Rightarrow AE^2=AN.AD$$

Ta có: AK.AI = AN.AD (cùng bằng AE^2)

Xét ΔANK và ΔAID có:

KAN chung.

$\dfrac{AN}{AI}=\dfrac{AK}{AD}$ (Do AK.AI = AN.AD)

Do đó: $\Delta ANK \sim \Delta AID$ (c.g.c)

$\Rightarrow AKN = ADI$

Do đó: DNKI nội tiếp

Vậy bốn điểm I,D,N,K cùng thuộc một đường tròn.

b) Do MD là tiếp tuyến của (I) nên MD $\perp$ ID.

Tứ giác MKID có $MKI + MDI = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Do đó: MIKD nội tiếp, suy ra M,N,K,I,D cùng thuộc một đường tròn.

Suy ra: $MNI = MKI = 90^0$

Ta có: MN $\perp$ IN $\left(N \in (I)\right)$

Vậy MN là tiếp tuyến của đường tròn (I)

Câu 5: (4,0 điểm) (Hình vẽ 0.25 điểm)

a) Ta có: $AKB = AEB$ (cùng chắn AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB

Mà $ABE = AEB$ (tính chất đối xứng) suy ra $AKB = ABE$ (1)

Ta có: $AKC = AFC$ (Cùng chắn cung AC của đường tròn ngoại tiếp ΔAFC)

Mà $ACF = AFC$ (tính chất đối xứng) suy ra $AKC = ACF$ (2)

Mặt khác $ABE = ACF$ (Cùng phụ BAC) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $AKB = AKC$ hay KA là phân giác tron của BKC

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của BE với AC và CF với AB

Ta có: $BOC = 120^0$ nên $BC = R\sqrt{3}$, $BAC = \frac{1}{2}BOC = 60^0$.

Trong tam giác vuông ABP có: $APB = 90^0, BAC = 60^0$, suy ra $ABP = 30^0$. Hay $ABE = ACF = 30^0$.

Tứ giác APHQ có: $AQH + APH = 180^0$

Suy ra $PAQ + PHQ = 180^0 \Rightarrow PHQ = 120^0 \Rightarrow BHC = 120^0$ (đối đỉnh)

Ta có: $AKC = ABE = 30^0$, $AKB = ACF = ABE = 30^0$.

Mà $BKC = AKC + AKB = AFC + AEB = ACF + ABE = 60^0$

Suy ra: $BHC + BKC = 180^0$.

Do đó tứ giác BHKC nội tiếp.

b) Gọi (O') là đường tròn đi qua bốn điểm B,H,C,K. Ta có dây $BC = R\sqrt{3}$

$BKC = 60^0 = BAC$ nên bán kính đường tròn (O') bằng bán kính R của đường tròn (O) .

Gọi M là giao điển AH và BC suy ra MH ⊥ BC; Kể KN vuông góc BC $(N \in BC)$, gọi I là giao điểm HK và BC.

Ta có: $S_{BHCK} = S_{BHC} + S_{BCK} = \frac{1}{2}BC.HM + \frac{1}{2}.BC.KN = \frac{1}{2}BC(HM + KN)$

$S_{BHCK} \le \frac{1}{2}BC(HI + KI) = \frac{1}{2}BC.KH$ (Do $HM \le HI, KN \le KI$)

Ta có: KH là dây cung của đường tròn $(O';R)$.

Suy ra $KH \le 2R$ (không đổi), nên S_{BHCK} lớn KH = 2R và HM + KN = HK = 2R .

Gía trị lớn nhất $S_{BHCK} = \frac{1}{2}R\sqrt{3}2R = \sqrt{3}R^2$

Khi HK là đường kính của đường tròn (O') thì M,N,I trùng nhau; suy ra I là trung điểm của BC nên ΔABC cân tại A; Khi đó A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

Đề số 30

Câu 1.

$$A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1^2} + \sqrt{\sqrt{5}^2 - 2\sqrt{5} + 1^2} + \frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}$$

a) $= \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} + \sqrt{5} - \sqrt{3}$

$$= \left|\sqrt{3}+1\right| + \left|\sqrt{5}-1\right| + \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} + 1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} - \sqrt{3} = 0$$

b) Gọi R là bán kính mặt cầu. Khi đó diện tích mặt cầu

$$4\pi R^2 = 36\pi cm^2 \Leftrightarrow R = 3\ (cm).$$

Thể tích hình cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi\ \left(cm^3\right)$.

Câu 2.

a) Phương trình hoành dộ giao điểm của (d) và (P):

$x^2 = 2x + m - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 2 = 0\ (*)$

Ta có: $\Delta' = m-1$. (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt, tức là $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m-1>0 \Leftrightarrow m>1$.

Vậy $m>1$.

b) Ta có $\begin{aligned}&x^2-3y^2+2xy-2x-10y+4=0\\ &\Leftrightarrow (x+3y+1)(x-y-3)+7=0\end{aligned} \Leftrightarrow (x+3y+1)(x-y-3)=-7$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên ta có các trường hợp sau

i) $\begin{cases} x+3y+1=-7 \\ x-y-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=-8 \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x+3y+1=-1 \\ x-y-3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=-2 \\ x-y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-3 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x+3y+1=7 \\ x-y-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=6 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} x+3y+1=1 \\ x-y-3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=0 \\ x-y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy nghiệm nguyên cần tìm là $(x;y)=(1;-3);(x;y)=(7;-3);(x;y)=(3;1);(x;y)=(-3;1)$.

Câu 3 Giải phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}-2=2\sqrt{(x-1)(5-x)}$.

Điều kiện: $1 \le x \le 5$. Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x-1} \\ v=\sqrt{5-x} \end{cases}$ ta có

$$\begin{cases} u+v-2=2uv \\ u^2+v^2=4 \\ u,v\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2+2uv \\ (u+v)^2=4+2uv \\ u,v\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2+2uv \\ (u+v)^2-(u+v)-2=0 \\ u,v\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2+2uv \\ \left[\begin{array}{l} u+v=-1 \\ u+v=2 \end{array}\right. \\ u,v\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2+2uv \\ u+v=2 \\ u,v\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv=0 \\ u+v=2 \\ u,v\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u=0 \\ v=0 \end{array}\right. \\ u+v=2 \\ u,v\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=0 \\ v=2 \end{cases} \\ \begin{cases} u=2 \\ v=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x-1}=0 \\ \sqrt{5-x}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x-1}=2 \\ \sqrt{5-x}=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right. (TM)$$

Vậy nghiệm cần tìm là $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2+y^2)(x+y+2)=4(y+2) & (1) \\ x^2+y^2+(y+2)(x+y+2)=4(y+2) & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có $x^2+y^2=(y+2)\left[2-(x+y)\right]$, thay vào (1) ta được

$$(y+2)\left[2-(x+y)\right](x+y+2)=4(y+2)$$

$$\Leftrightarrow (y+2)\left[4-(x+y)^2\right]=4(y+2)$$

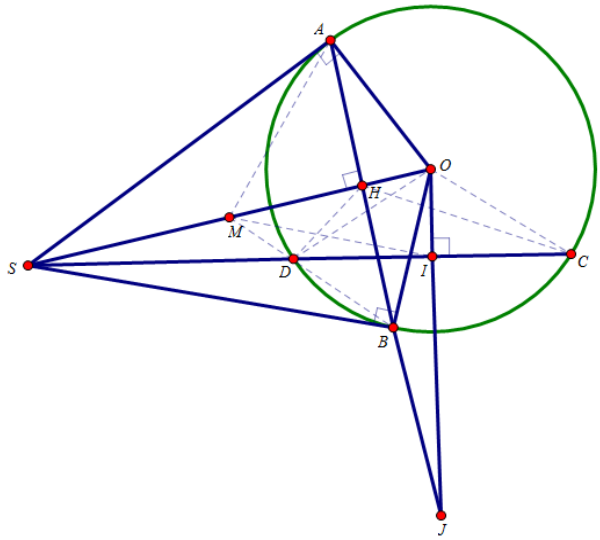
$$\Leftrightarrow (y+2)(x+y)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=-x \end{array}\right.$$

i) Với $y=-2$ thì (2) trở thành $x^2+4=0$, vô lý. Suy ra $y=-2$ không là nghiệm.

ii) Với $y=-x$ thì (1) trở thành $4x^2=4(-x+2) \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Khi đó hệ có nghiệm $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$

Câu 4



a) Chứng minh 5 điểm S, A, B, I, O cùng thuộc một đường tròn.

Vì SA, SB là các tiếp tuyến nên $SA \perp OA, SB \perp OB$, mặt khác I là trung điểm của CD nên $OI \perp CD$. Gọi M là trung điểm của SO. Khi đó ta có $MS=MO=MA=MI=MB$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông).

Suy ra 5 điểm S, A, B, I, O cùng thuộc một đường tròn (M).

b) Chứng minh $DHC = DOC$.

Xét hai ΔSDB và ΔSBC có $\begin{cases} S \text{ chung} \\ SBD = SCB \end{cases}$ suy ra $\Delta SDB \backsim \Delta SBC$ (g-g)

Suy ra $SB^2 = SD.SC$ (1)

Xét ΔSBO có $SB^2 = SH.SO$ (2)

Từ (1) và (2) $SD.SC = SH.SO \Leftrightarrow \dfrac{SC}{SH} = \dfrac{SO}{SD}$.

Xét hai ΔSDH và ΔSOC có $\begin{cases} S \text{ chung} \\ \dfrac{SC}{SH} = \dfrac{SO}{SD} \end{cases}$ suy ra $\Delta SDH \backsim \Delta SOC$ (c-g-c)

Suy ra $SDH = SOC$ (hai góc tương ứng).

Xét tứ giác DHOC có:

$HOC + HDC = SOC + HDC = SDH + HDC = 180^0$ suy ra tứ giác DHOC nội tiếp.

Suy ra $DHC = DOC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DC).

c) Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi S di động.

Gọi J là giao điểm của AB và OI. Xét hai ΔOIS và ΔOHJ có $\begin{cases} OIS = OHJ = 90^0 \\ O \text{ chung} \end{cases}$

suy ra $\Delta OIS \backsim \Delta OHJ$ (g-g)

Suy ra $OI.OJ = OH.OS$

Mặt khác $OH.OS = OB^2 = R^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông SBO)

Từ đó $OI.OJ = OH.OS = R^2 \Leftrightarrow OJ = \dfrac{R^2}{OI}$, hệ thức này chứng tỏ J là điểm cố định. Hay đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định J khi S di động.

Câu 5.

Vì $x, y, z > 0$ nên áp dụng BĐT AM-GM ta có

$$\begin{cases} 2x^2 + \dfrac{1}{2}z^2 \ge 2xz \\ 2y^2 + \dfrac{1}{2}z^2 \ge 2yz \\ x^2 + y^2 \ge 2xy \end{cases} \text{ suy ra } 3x^2 + 3y^2 + z^2 \ge 2(xy + yz + zx) = 10$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức trên là 10. Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} 2x^2 = \dfrac{1}{2}z^2 \\ 2y^2 = \dfrac{1}{2}z^2 \\ x = y \\ x, y, z > 0 \\ xy + yz + zx = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Đề số 31

Câu 1.

Tính được $\sqrt{13-4\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-1$

Và $\sqrt{19+6\sqrt{2}}=3\sqrt{2}-1$

Đưa được về dạng $T=\left[\left(2\sqrt{3}\right)^2-1^2\right]\left[\left(3\sqrt{2}\right)^2-1^2\right]$

Tính đúng kết quả $T=187$

Câu 2.

Viết được phương trình hoành độ giao điểm:

$2x^2=6x+m+4$

$\Leftrightarrow 2x^2-6x-m-4=0$

Lập luận để có $\Delta'=0;\Rightarrow(-3)^2-2(-m-4)=0$

Tính được $m=\dfrac{-17}{2}$

Câu 3.

Biến đổi được về đẳng thức:

$6(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+4\sin^2\alpha=8$

Suy ra được: $\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}$

Lập luận được $\sin\alpha\geq 0$ suy ra $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Tính được $\alpha=45^0$

Lưu ý: Học sinh không lập luận được $\sin\alpha\geq 0$ *trừ 0,25 điểm*

Câu 4.

Viết được số về dạng:

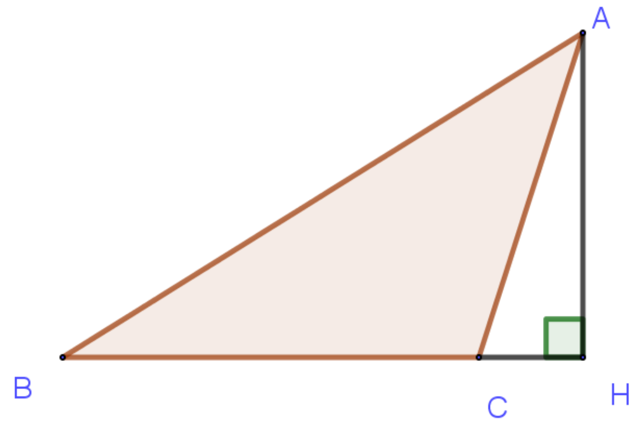
$$\underbrace{1111...1}_{\text{2018 chu so 1}}\underbrace{5555...5}_{\text{2018 chu so 5}}=\underbrace{1111...1}_{\text{2018 chu so 1}}.\underbrace{100...05}_{\text{2017 chu so 0}}$$

$$=\underbrace{1111...1}_{\text{2018 chu so 1}}.3.\underbrace{333...35}_{\text{2017 chu so 3}}$$

$$=\underbrace{3333...3}_{\text{2018 chu so 3}}.\underbrace{3333...35}_{\text{2017 chu so 3}}$$ là tích của 2 số lẻ liên tiếp

Tính được tổng hai số là: $\underbrace{6666...68}_{\text{2017 chu so 6}}$

Câu 5.



Chứng minh được: $B = CAH$

Chứng minh được $\Delta BAH \sim \Delta ACH$ (g-g)

Suy ra hệ thức $AH^2 = BH.CH$

Câu 6.

Biến đổi được phương trình: $x^3 + y^3 = 4x^2 + 4y^2 - 12$ về dạng

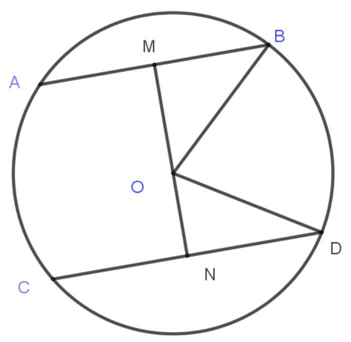
$$(x+y)(x^2+y^2-xy) = 4x^2+4y^2-12$$

Suy ra được: $xy = 3$

Qui việc tìm x, y về giải phương trình: $t^2 - 4t + 3 = 0$

Tìm được 2 cặp nghiệm: $(x=1; y=3); (x=3; y=1)$

Câu 7.



Kẻ $OM \perp AB; ON \perp CD$. Chứng minh được M, O, N thẳng hàng

Sử dụng tính chất đường kính và dây tính được:

$MB = 5\sqrt{3}cm; ND = 8cm$

Gọi $OM = x$

Dùng định lý Pytago được hệ thức

$$R^2 = \left(5\sqrt{3}\right)^2 + x^2 = 8^2 + (11-x)^2$$

Tìm được $x = 5cm$

Suy ra: $R = 10cm$

Câu 8

Từ điều kiện: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ suy ra được

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}\right)=1$$

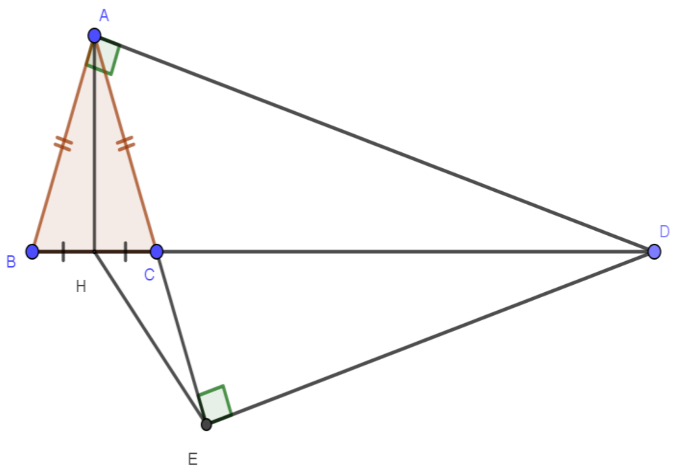
Quy đồng biểu thức trong ngoặc được:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2.\frac{xyc+xzb+yza}{abc}=1$$

Từ điều kiện $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ suy ra được: $xyc+xzb+yza=0$

Kết luận được: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Câu 9.



Chứng minh được $AH \perp BC$

Chứng minh được tứ giác AHDE nội tiếp

Chứng minh được $HAE = HEA$

Suy ra: $HA = HE$

Câu 10.

Tìm được điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Trong đó:

Tính được: $\Delta' = (a-b)^2$

Suy ra: $a \neq b$

Lập luận được trường hợp thứ nhất: Phương trình có hai nghiệm trái dấu, suy ra $ab < 0$

Lập luận được trường hợp thứ hai: Phương trình có hai nghiệm cùng dương, suy ra:

$$\begin{cases} ab > 0 \\ a + b < 0 \end{cases}$$

Kết luận được cả hai trường hợp là: $a \neq b$ và trong hai số a, b có ít nhất một số âm

Câu 11.

Biến đổi được biểu thức M về dạng

M=$(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$

Chứng tỏ được: $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$

Suy ra được: $M \geq 10^2 - 2M$

Tính được $M_{\min} = \dfrac{100}{3}$ đạt được khi $a=b=c=\dfrac{10}{3}$

Câu 12.

a) Chứng minh được $BAC = 90^0$

Suy ra ΔAMN vuông tại A

Gọi J là giao điểm của BI và CK.

Chứng minh được AJ là tia phân giác của MAN

Chứng minh được: ΔADC cân tại C, suy ra được KJ $\perp$ AI

Chứng minh được J là trực tâm của ΔAIK

Suy ra được AJ $\perp MN$

Chứng minh được ΔAMN vuông cân tại A

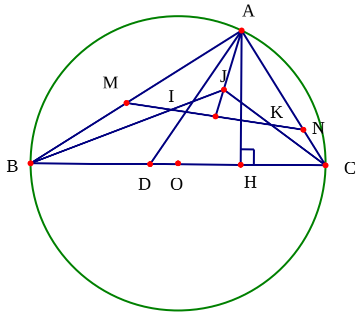
b) Chứng minh được $\Delta AMI \sim \Delta AHI \left(MAI = IAH; AMI = AHI = 45^0 \right)$

Suy ra được $AM = AH$

Chứng minh được $AH \leq OA; OA = \dfrac{1}{2}BC$

Tính được $S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2}AM.AN = \dfrac{1}{2}AH^2$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC$ suy ra được $S_{\Delta AMN} \leq \dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC}$



Đề số 32

Câu 1.

a) Ta có:

$$A=\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$=\frac{x+3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1\quad\sqrt{x}+2}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1\quad\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1\quad\sqrt{x}+2}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

b) Ta có:

$$x^2+\frac{9x^2}{x-3^{\ 2}}=40\Leftrightarrow\left(x+\frac{3x}{x-3}\right)^2-\frac{6x^2}{x-3}-40=0\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2-6.\frac{x^2}{x-3}-40=0$$

Đặt $t=\dfrac{x^2}{x-3}$ ta có phương trình t² – 6t -40 =0 $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=10\\t=-4\end{array}\right.$

$$t=10\Rightarrow\frac{x^2}{x-3}=10\Leftrightarrow x^2-10x+30=0 \text{ vô nghiệm}$$

$$t=-4\Rightarrow\frac{x^2}{x-3}=-4\Leftrightarrow x^2+4x-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-6\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\ -2;6$

c) Ta có:

$$\begin{cases}x^2-2y^2=-1 \ (1)\\2x^3-y^3=2y-x \ (2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^3-y^3=(x^2-2y^2)(x-2y)\Leftrightarrow x^3+2x^2y+2xy^2-5y^3=0$$

$$\Leftrightarrow\ x-y\quad x^2+3xy+5y^2\ =0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x^2+3xy+5y^2=0\end{array}\right.$$

TH1: x=y, thay vào phương trình (1) ta được x=y=±1

TH2:

$$x^2+3xy+5y^2=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{3}{2}y\right)^2+\frac{11}{4}y^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{3}{2}y=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=0$$

Thử lại , ta thấy x=y=0 không là nghiệm của hệ phương trình đã cho

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là (1;1), (-1;-1).

Câu 2.

a) Nếu $a = 0$ thì $b \geq 2$ và do đó phương trình có nghiệm $x = -\frac{2}{b}$

Nếu $a \neq 0$ thì $\Delta = b^2 + 8a(a-1)$

+ Nếu $\left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a \geq 1 \end{array}\right. \Rightarrow a(a-1) \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq 0$ nên phương trình có nghiệm

+ Nếu 0<a<1 thì

$a + b \geq 2 \Rightarrow b \geq 2 - a > 0 \Rightarrow b^2 \geq (2-a)^2 \Rightarrow \Delta \geq (2-a)^2 + 8a(a-1) = (3a-2)^2 \geq 0$

Nên phương trình có nghiệm

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi số thực a,b thỏa mãn $a + b \geq 2$

b) Ta có $2^m.m^2 = 9n^2 - 12n + 19 \Leftrightarrow 2^m.m^2 = (3n-2)^2 + 15$

Nếu m lẻ $\Rightarrow$ $m = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 2^m.m^2 = 2.4^k.m^2 = (3+1)^k 2m^2 \equiv 2m^2 \pmod 3$ mà $m^2 \equiv 0;1 \pmod 3$ nên $2.4^k.m^2 \equiv 0;2 \pmod 3$.

Mặt khác $(3n-2)^2 + 15 \equiv 1 \pmod 3$

Vậy trường hợp này không xảy ra

Nếu m chẵn $\Rightarrow$ $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$ thì ta có phương trình

$2^{2k}.m^2 - (3n-2)^2 = 15 \Leftrightarrow (2^k.m + 3n - 2)(2^k.m - 3n + 2) = 15$ (*)

Vì $m,n \in \mathbb{N}^*$ nên $2^k.m + 3n - 2 > 2^k.m - 3n + 2$ và

$2^k.m + 3n - 2 > 0 \Rightarrow 2^k.m - 3n + 2 > 0$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^k.m + 3n - 2 = 15 \\ 2^k.m - 3n + 2 = 1 \end{array}\right.$ hoặc $\left[\begin{array}{l} 2^k.m + 3n - 2 = 5 \\ 2^k.m - 3n + 2 = 3 \end{array}\right.$

TH1: $\left[\begin{array}{l} 2^k.m + 3n - 2 = 15 \\ 2^k.m - 3n + 2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k.2k = 8 \\ n = 3 \end{cases}$ (vô nghiệm)

TH2: $\left[\begin{array}{l} 2^k.m + 3n - 2 = 5 \\ 2^k.m - 3n + 2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k.2k = 4 \\ n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm m=2, n=1

Câu 3.

Ta sẽ chứng minh $\sqrt{a^2 - ab + 3b^2 + 1} \geq \frac{1}{4}(a + 5b + 2), \forall a,b > 0$ **(*)**

Thật vậy ta có (*) $\Leftrightarrow 16(a^2 - ab + 3b^2 + 1) \geq (a + 5b + 2)^2$

$\Leftrightarrow 13(a-b)^2 + 10(b-1)^2 + 2(a-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Do đó $P \leq \frac{4}{a + 5b + 2} + \frac{4}{b + 5c + 2} + \frac{4}{c + 5a + 2}$

Áp dụng BĐT quen thuộc $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}\quad\forall x,y>0$ ta có

$$P\leq\sum\left(\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{4b}\right)$$

$$\leq\sum\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2}\right)+\sum\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}\right)\leq\frac{3}{8}\sum\frac{1}{a}+\frac{3}{8}\leq\frac{3}{2}$$

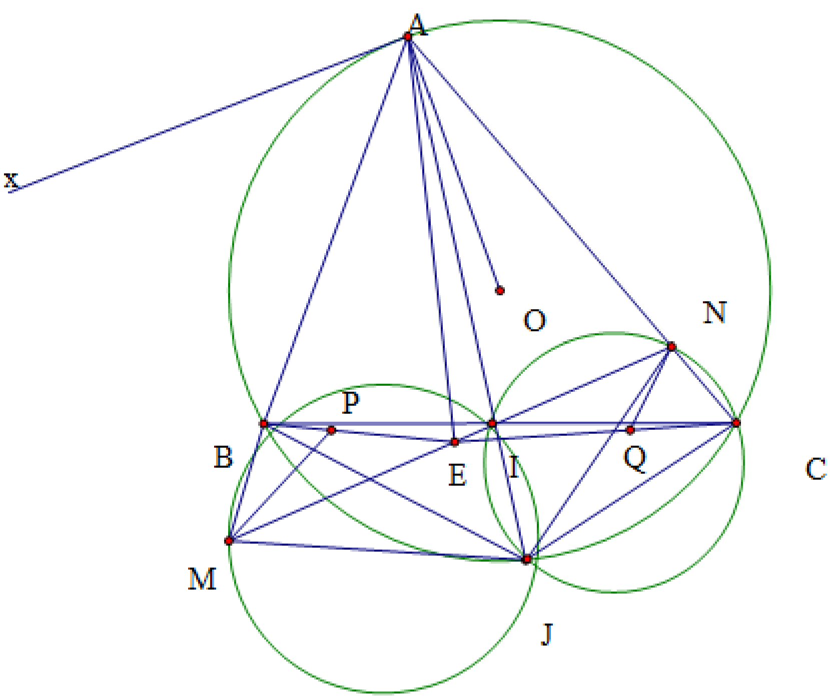
Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1. Vậy max P = $\frac{3}{2}$

Lưu ý: Có thể dùng bất đẳng thức Cauchy- Schwart để chứng minh (*) như sau:

$$\left[\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{11}{4}b^2+1\right]\left[\frac{1}{4}+\frac{11}{4}+1\right]\geq\left[\frac{1}{2}\left(a-\frac{b}{2}\right)+\frac{11}{4}b+1\right]^2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\geq\frac{1}{4}(a+5b+2)$$

Câu 4.



a)Tứ giác ABJC nội tiếp nên $JCN = MBJ$

Tứ giác MBIJ nội tiếp nên $BMJ = JIC$

Tứ giác NCJI nội tiếp nên $JIC = JNC \Rightarrow JNC = BMJ$

Do đó $\Delta BJM \sim \Delta CJN \Rightarrow BJM = CJN$

Ta lại có $BIM = BJM; CIN = CJN \Rightarrow BIM = CIN$

Suy ra M,I,N thẳng hàng

b)ABJC và CNIJ là tứ giác nội tiếp nên $AJB = ACB = NCI; NCI = NJI$

Suy ra $AJB = AJN \Rightarrow$ JA là tia phân giác của góc BJN

Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O). Suy ra $AJB = BAx$

Ta lại có $AJB = BMN$. do đó $BAx = BMN$ nên MN//Ax

Vậy AO vuông góc với MN

c)Vì $\Delta BJM \sim \Delta CJN \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta BJM}}{S_{\Delta CJN}} = \dfrac{MB^2}{CN^2}$

Vì I là trung điểm của BC nên $S_{\Delta ABJ} = S_{\Delta ACJ}$

Suy ra $1 = \dfrac{S_{\Delta ABJ}}{S_{\Delta ACJ}} = \dfrac{S_{\Delta ABJ}}{S_{\Delta BJM}}.\dfrac{S_{\Delta CJN}}{S_{\Delta ACJ}} = \dfrac{AB}{MB}.\dfrac{MB^2}{NC^2}.\dfrac{NC}{AC} = \dfrac{AB.MB}{AC.CN}$

Ta lại có MNIJ, NCJI nội tiếp nên AB.AM=AI.AJ=AN.AC

Suy ra $\dfrac{MB}{NC} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{EM}{EN} \Rightarrow \dfrac{MB}{ME} = \dfrac{NC}{NE}$

Áp dụng tính chất đường phân giác ta có

$\dfrac{MB}{ME} = \dfrac{PB}{PE}; \dfrac{QC}{QE} = \dfrac{NC}{NE}$

$\Rightarrow \dfrac{PB}{PE} = \dfrac{QC}{QE} \Rightarrow PB.QE = PE.QC$

Câu 5.

Ta tô màu các đoạn thẳng bằng ba màu đỏ, xanh, vàng. Ta sẽ chứng minh tồn tại một tam giác có ba cạnh được tô cùng màu.

Gọi A là một điểm đã cho, nối A với 16 điểm còn lại ta được 16 đoạn thẳng.

Ta có 16=3.5+1 nên theo định lí Dirichlet tồn tại ít nhất 6 đoạn thẳng được tô cùng một màu

Giả sử 6 đoạn thẳng đó là AB, AC, AD, AE, AF, AG có cùng màu đỏ. Xét các đoạn thẳng nối từng cặp điểm trong 6 điểm B,C,D,E,F,G thì xảy ra trường hợp sau

TH1: tồn tại một đoạn thẳng được tô màu đỏ, chẳng hạn là BC thì tam giác ABC có ba cạnh cùng màu đỏ

TH2: tất cả các đoạn thẳng nối B,C,D,E,F,G chỉ có màu xanh hoặc vàng. Ta xét 5 đoạn thẳng BC,BD,BE,BF,BG được tô bởi hai màu thì theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 3 đoạn thẳng có cùng một màu. Giả sử BC,BD,BE có cùng màu xanh.

+ Nếu trong ba đoạn thẳng CD,CE,DE có một đoạn tô màu xanh, chẳng hạn CD thì tam giác BCD có ba cạnh cùng màu xanh.

+ Nếu trong ba đoạn thẳng CD,CE,DE không có đoạn nào tô màu xanh, thì tam giác CDE có ba cạnh cùng màu vàng.

Do vậy tồn tại một tam giác có ba cạnh được tô cùng màu.

Lấy các số nguyên dương trên mỗi đoạn thẳng chia cho 3 ta được các số dư là 0,1,2. Tô màu các đoạn thẳng có số dư 0,1,2 tương ứng với ba màu đỏ, xanh, vàng.

Theo kết quả thì luôn tồn tại một tam giác có ba cạnh được tô cùng màu, tức là ba số ghi trên cạnh của tam giác có cùng số dư r khi chia cho 3, chẳng hạn là 3h+r, 3k+r, 3q+r.

Khi đó 3h+r +3k+r +3q+r =3(h+h+q+r) là số chia hết cho 3

Đề số 33

Câu 1.

1) Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{5}}.\left(3+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$

$$P=\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}.\left(3+\sqrt{5}\right).\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}.\left(3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}\right)}{8}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^{2}}.\left(2\sqrt{5}+2\right)}{8}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right).2.\left(\sqrt{5}+1\right)}{8}$$

$$=\frac{2.\left(5-1\right)}{8}=1$$

2) Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức $Q=\dfrac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ tại $x=2020-2\sqrt{2019}$

Ta có $x=2020-2\sqrt{2019}=2019-2\sqrt{2019}+1=\left(\sqrt{2019}-1\right)^{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{2019}-1$$

$$Q=\frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}=\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}-2}$$

$$Q=2\sqrt{x}+1$$

$$\Rightarrow Q=2\left(\sqrt{2019}-1\right)+1=2\sqrt{2019}-1$$

Câu 2.

1) Phương trình hoành độ giao điểm giữa d và P là

$$x^2 = 2x + m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 - 1 = 0$$

Phương trình bậc hai có $ac = -m^2 - 1 < 0$ với mọi m nên luôn có hai nghiệm

phân biệt khác 0 với mọi m. Do đó d luôn cắt parapol P tại hai điểm phân biệt

$A\ x_A; y_A\ , B\ x_B; y_B$ với mọi m

$x_A; x_B$ là các nghiệm khac 0 của phương trình $x^2 - 2x - m^2 - 1 = 0$.

Áp dụng hệ thức Vi et ta có : $\begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_A.x_B = -m^2 - 1 \end{cases}$

Do $\dfrac{y_A}{x_B} + \dfrac{y_B}{x_A} = \dfrac{-38}{5} \Leftrightarrow 5\ y_A.x_A + y_B.x_B\ = -38.x_A.x_B$

$\Leftrightarrow 5\ x_A^3 + x_B^3\ = -38.x_A.x_B \Leftrightarrow 5\left[\ x_A + x_B\ ^3 - 3x_A.x_B\ x_A + x_B\ \right] = -38.x_A.x_B$

$\Leftrightarrow 5\left[8 - 6\ -m^2 - 1\ \right] = -38.\ -m^2 - 1$

$\Leftrightarrow 8m^2 = 32 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Vậy $m = 2$ và $m = -2$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 - 6 = 0 \\ x + y - 1\ ^2 - \left(\dfrac{2}{x-y}\right)^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad (I)$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - y\ \ x + y\ = 6 \\ x + y - 1\ ^2 - \dfrac{4}{x - y\ ^2} - 3 = 0 \end{cases}$

Đặt $\Leftrightarrow \begin{cases} a = x + y \\ b = x - y \end{cases} \quad b \neq 0$

khi đó (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 6 \\ a - 1\ ^2 - \dfrac{4}{b^2} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{6} & (1) \\ a - 1\ ^2 - \dfrac{4a^2}{36} = 3 & (2) \end{cases}$

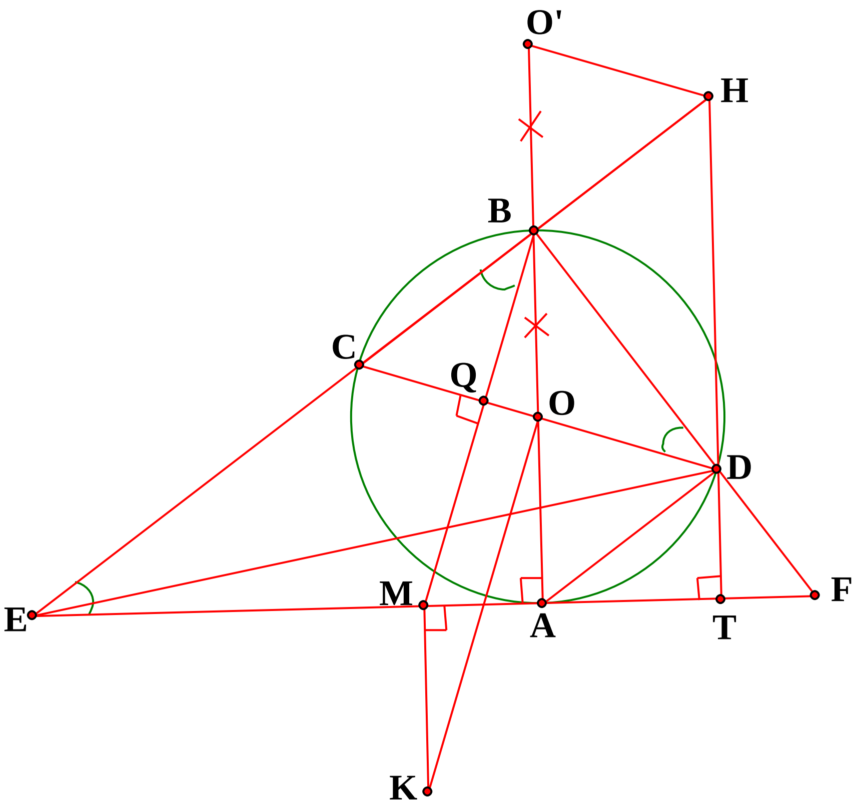
Từ (2) ta có phương trình $\Leftrightarrow 9\ a - 1\ ^2 - a^2 = 27 \Leftrightarrow 8a^2 - 18a - 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = \dfrac{-3}{4} \end{array}\right.$

Với $a=3$ ta có $b=2$ suy ra $\begin{cases}x+y=3\\x-y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Với $a=\dfrac{-3}{4}$ ta có $b=-8$ suy ra $\begin{cases}x+y=\dfrac{-3}{4}\\x-y=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-35}{8}\\y=\dfrac{29}{8}\end{cases}$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $x;y=\left(\dfrac{-35}{8};\dfrac{29}{8}\right);\ x;y=\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Câu 3.



1) Vì CD là đường kính nên $CBD=90^0$

Do đó $BEF=ABF$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn)

Mà $ABF=ODB$ $(OB=OD=R)$

Nên $BEF=ODB$. Do đó tứ giác $CDFE$ nội tiếp đường tròn

2) Gọi Q là giao điểm của BM và CD

Tam giác BEF vuông tại B nên $BM=ME\Rightarrow MBE=MEB$ (1)

Tam giác BCD vuông tại B nên $BCD+BDC=90^0$ mà $BDC=BEF$

(chứng minh câu 1) nên $BCD + BEF = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) : $BCD + MBE = 90^0 \Rightarrow BQC = 90^0$ hay $BM \perp CD$

K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác *CDFE*, *O* là trung điểm *CD*, nên $KO \perp CD \Rightarrow KO // MB$ (cùng vuông góc với *CD*) (3)

Ta có *M* là trung điểm *EF*, nên $KM \perp EF$ và $BA \perp EF$

$\Rightarrow KM // AB$ hay KM / BO (4)

Từ (3) và (4) suy ra *KMBO* là hình bình hành

3) *H* là trực tâm tam giác *DEF*, do đó $HD \perp EF$, suy ra $HD // AB$

Tương tự $BH // AD$ (cùng vuông góc *BF*)

Do đó *BHDA* là hình bình hành nên *BH* = *AD*

Mặt khác *BDAC* là hình chữ nhật nên *AD* = *BC* $\Rightarrow BH = BC$ (5)

Lấy *O′* đối xứng với *O* qua *B* ta có *BO′* = *BO* (6) với *O′* cố định vì *O*, *B* cố định

Từ (5) và (6) suy ra HO′CO là hình bình hành nên O′H = OC = R

Vậy H chạy trên đường tròn cố định $(O';R)$

Câu 4.

1) Cho số thực *x* thỏa mãn $-1 \le x \le 1$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \ge 2 - x^2$.

Với $-1 \le x \le 1$ ta có $0 \ge -x^2 \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1-x^2} \ge 2 - x^2 + 2\sqrt{1-x^2}$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)^2 \ge \left(1 + \sqrt{1-x^2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \ge 1 + \sqrt{1-x^2}$$

Lại có : $0 \le 1 - x^2 \le 1, \forall x \in [-1;1] \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \ge 1 - x^2 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1-x^2} \ge 2 - x^2$

Vậy $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \ge \sqrt{1-x^2} \ge 2 - x^2, \forall x \in [-1;1]$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases} -x^2 = 0 \\ \sqrt{1-x^2} = 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

2) Cho tập hợp *A* gồm 41 phần tử là các số nghuên khác nhau thỏa mãn tổng của 21 phần tử bất kỳ lớn hơn tổng của 20 phần tử còn lại. Biết các số 401 và 402 thuộc tập *A*. Tìm tất cả các phần tử của tập hợp *A*.

Giả sử $A = \{a_1; a_2; a_3; ...; a_{41}\}$ với $a_1; a_2; a_3; ...; a_{41} \in \mathbb{Z}$ và $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{41}$

Theo giả thiết ta có $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{21} > a_{22} + a_{23} + ... + a_{41}$

$\Leftrightarrow a_1 > a_{22} - a_2 + a_{23} - a_3 + ... + a_{41} - a_{21}$ (1)

Mặt khác với $x; y \in \mathbb{Z}$ và nếu $y > x$ thì $y \ge x + 1$

$\Rightarrow a_{22} - a_2 \ge 20, a_{23} - a_3 \ge 20, ..., a_{41} - a_{21} \ge 20$ (2)

Nên từ (1) suy ra $a_1 > 20 + 20 + 20 + ... + 20 = 400$

Mà a_1 nhỏ nhất và $401 \in A \Rightarrow a_1 = 401$

Ta có $401 > a_{22} - a_2 + a_{23} - a_3 + ... + a_{41} - a_{21} \geq 400$

$\Rightarrow a_{22} - a_2 + a_{23} - a_3 + ... + a_{41} - a_{21} = 400$

Kết hợp với (2)

$\Rightarrow a_{22} - a_2 = a_{23} - a_3 = ... = a_{41} - a_{21} = 20 \quad 3$

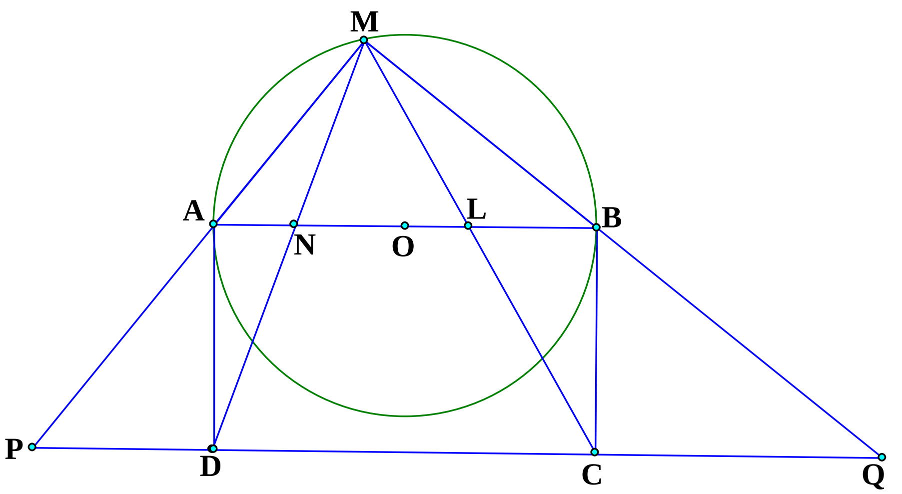
$\Rightarrow 20 = a_{22} - a_2 = \; a_{22} - a_{21} \; + \; a_{21} - a_{20} \; + ... + \; a_3 - a_2 \; \geq 20$

$\Rightarrow a_{22} - a_{21} = a_{21} - a_{20} = ... = a_3 - a_2 = 1 \quad 4$

Ta có $a_1 = 401$ mà $402 \in A \Rightarrow a_2 = 402$

Kết hợp (3) và (4) suy ra $A = \; 401; 402; 403; ...; 441$

Câu 5.



Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của CD với MA và MB.

Đặt $PD = x$; $CQ = y$

Ta có : $APD = QBC$ (góc có cặp cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta APD \sim \Delta QBC \Rightarrow \dfrac{PD}{AD} = \dfrac{BC}{QC} \Leftrightarrow \dfrac{x}{a\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{y} \Leftrightarrow xy = 2a^2$

$PC^2 + QD^2 = (x + 2a)^2 + (y + 2a)^2 = x^2 + y^2 + 4a(x + y) + 8a^2$

$= (x + y)^2 + 4a(x + y) + 8a^2 - 2xy$

$(x + y)^2 + 4a(x + y) + 4a^2 = (x + y + 2a)^2 = PQ^2$ (1)

Áp dụng định lý Tales, ta có : $\dfrac{MN}{MD} = \dfrac{ML}{MC} = \dfrac{MA}{MP} = \dfrac{MB}{MQ} = \dfrac{AL}{PC} = \dfrac{BN}{QD} = \dfrac{AB}{PQ}$

$$\Rightarrow \frac{AL^2}{PC^2} = \frac{BN^2}{QD^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AL^2+BN^2}{PQ^2+QD^2} = \frac{AL^2+BN^2}{PQ^2} \quad (\text{do } (1))$$

$$\Rightarrow AB^2 = AL^2 + BN^2 \Rightarrow \frac{AL^2+BN^2}{AB^2} = 1.$$

Đề số 34

Bài 1

a, Điều kiện $x \geq -\frac{5}{26}$ đặt $a = \sqrt{26x+5}$ và $b = \sqrt{x^2+30}$ $a \geq 0, b > 0$

Phương trình trở thành: $\frac{a^2}{b} + 2a = 3b$ ⇔ (a-b)(a+3b)=0⇔ a=b

$\sqrt{26x+5} = \sqrt{x^2+30}$

X=1 hoặc 25 là nghiệm của pt

b, thay $2 = x^2 + y^2$ vào PT thứ 2 ta được

$(x+2y)(x^2+y^2+3y^2+4xy)=27$

$(x+2y)^3=27$

⇔ $x = 3 - 2y$ thay vào PT thứ nhất ta được:

$(3-2y)^2+y^2=0$

y=1 hoặc y= $\frac{7}{5}$

x =1 hoặc $\frac{1}{5}$

Bài 2

a, từ biểu thức $(x^2-x+1)(y^2+xy)=3x-1$ ta nhận thấy 3x-1 phải chia hết cho (x^2-x+1)

ta có $(3x - 1)(3x - 2) = 9x^2 - 9x + 2 = 9(x^2 - x + 1)-7$ cũng phải chia hết cho (x^2-x+1)

suy ra 7 chia hết cho $(x^2 - x + 1)$

$(x^2 - x + 1) = 1$ hoặc 7

X = 0,1,3 và -2 lần lượt thay vào ta có y => (x,y) = (1,1),(1,-2) và (-2,1)

b, Từ giả thiết $xy + 2 \geq 2y$ => $4xy + 8 \geq 8y$

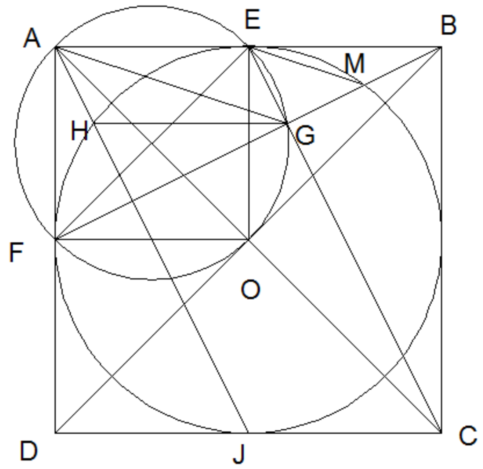
Mà ta lại có $4x^2 + y^2 \geq 4xy$

- ⇨ $4x^2 + y^2 + 8 \geq 4xy + 8 \geq 8y$
- ⇨ $4(x^2 + 4) \geq 8y + 8 - y^2$
- ⇨ $4(x^2 + 4) \geq 4(y^2 + 1) + (5y + 2)(2-y) \geq 4(y^2 + 1)$

$$M = \frac{x^2+4}{y^2+1} \geq 1$$

Dấu = xẩy ra khi x=1 và y=2, M_{min}=1.

Bài 3



a, Do đường tron (O) nội tiếp hình vuông ABCD nên E và F là trung điểm các cạnh AB và AD => Δ ABF và Δ BCE bằng nhau => góc EBG bằng góc BCG => góc BGC vuông => AEGF cùng nằm trên một đường tròn, mà AEOF cũng nằm trên một đường tròn => AEGOF cùng nằm trên một đường tròn.

b, Ta có AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên góc BEM=góc EFM,

lại có góc EAG và EFG cùng chắn cung EG nên góc EAG = EFG

- ⇨ EM//AG trong khi E là trung điểm của AB => M cũng là trung điểm của BG

Bài 4 $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\ge\frac{2}{3}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}})^3$

Ta có: $1 + x^2 = xy + yz + xz + x^2 = (x + y)(x + z)$

$1 + y^2 = xy + yz + xz + y^2 = (x + y)(y + z)$

$1 + z^2 = xy + yz + xz + z^2 = (z + y)(x + z)$

VT=$\frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

Ta có: $(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}})^2\le(x+y+z)(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2})$

$=(x+y+z)(\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(x+y)(y+z)}+\frac{z}{(z+y)(x+z)})$

$=\frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

Do đó VP=$\frac{4(x+y+z)}{3(x+y)(y+z)(z+x)}$ $(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}})$

Bất đẳng thức trở thành

$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3}{2}$

Ta có: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}\le\frac{1}{2}(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z})$

$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}\le\frac{1}{2}(\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z})$

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}\le\frac{1}{2}(\frac{z}{x+z}+\frac{z}{y+z})$$

$$=>\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Đề số 35

Câu 5.

a. Ta có

$$\begin{cases}3x^2+y^2+4xy=8\\(x+y)(x^2+xy+2)=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)(3x+y)=8\\(x+y)(x^2+xy+2)=8\end{cases}.$$

Do phương trình thứ nhất nên $x+y\ne 0$ do đó ta kết hợp hai phương trình lại ta có

$$x^2+xy+2=3x+y\Leftrightarrow(x-1)(x+y-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2-y\end{array}\right..$$

TH1: $x=1\Rightarrow 3+y^2+4y=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-5\end{array}\right..$

TH2: $x=2-y$ thay vào phương trình thứ nhất ta có $-4(y-1)=0\Leftrightarrow y=1$.

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm $(x;y)$ là $(1;1);(1;-5)$.

b. ĐK: $x\le\frac{5}{2};x^2+x\le 5$.

Đặt $a=\sqrt{5-(x^2+x)}$ và $b=\sqrt{5-2x}\,(a,b\ge 0)$. Ta có

$$\frac{\sqrt{32-a^2}}{2+a}=\frac{\sqrt{32-b^2}}{2+b}. \qquad (1)$$

Ta thấy, nếu $a>b\ge 0$ thì $\sqrt{32-a^2}<\sqrt{32-b^2}$ và $\frac{1}{a+2}<\frac{1}{2+b}$ tức là VT<VP, mâu thuẫn. Tương tự với $a<b$ cũng mẫu thuẫn. Do đó $a=b$, tức là phương trình ban đầu tương đương với

$$5-(x^2+x)=5-2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1(\text{TM})\\x=0(\text{TM})\end{array}\right..$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1,x=0$.

Câu 6.

a. Trước hết ta chứng minh rằng $x^7\equiv x(\bmod 42),\forall x\in\mathbb{Z}$.

(1)

Thật vậy, ta có $x^7-x=x(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$.

Dễ thầy $x(x-1)(x+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên nó chia hết cho 6.

Theo định lí Ơle thì $x^7-x\equiv 0 \pmod 7, \forall x\in\mathbb{Z}$, tức là x^7-x chia hết cho 7 .

Vậy x^7-x chia hết cho $\text{BCNN}(6;7)=42$. Khẳng định (1) được chứng minh.

Từ đó

$$\left[(27n+5)^7+10\right]^7+\left[(10n+27)^7+5\right]^7+\left[(5n+10)^7+27\right]^7$$

$$\equiv (27n+5)^7+10+(10n+27)^7+5+(5n+10)^7+27 \pmod{42}$$

$$\equiv 27n+5+10+10n+27+5+5n+10+27 \pmod{42}$$

$$\equiv 42(n+1) \pmod{42}$$

$$\equiv 0 \pmod{42}.$$

Từ đó ta có khẳng định của bài toán.

b. Đặt $a=x+y$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}=\dfrac{a^2}{4}$

Hay $\left(\dfrac{5}{2}a+1\right)^2\ge 2$.

Từ đó, ta có $a\ge\dfrac{2}{5}\left(\sqrt{2}-1\right)$. Suy ra

$P=17x^2+17y^2+16xy=17a^2-18xy\ge 17a^2-\dfrac{9}{2}a^2\ge 2\left(\sqrt{2}-1\right)^2=6-4\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{5}$.

Câu 7.

a. Sử dụng định lí Talet trong tam giác LKE với $JH \parallel EK$, ta có

$$\frac{LH}{HK}=\frac{LJ}{JE}.$$

Sử dụng định lí Talet trong tam giác JHE với $FL \parallel EK$, ta cũng có

$$\frac{FL}{EK}=\frac{LJ}{JE}.$$

Do đó

$$\frac{FL}{EK}=\frac{LH}{HK}.$$

Hai tam giác FLH và EKH có $\angle FLH=\angle EKH=90^0$ và $\dfrac{FL}{EK}=\dfrac{LH}{HK}$ nên

$\Delta FLH \backsim \Delta EKH \Rightarrow \angle LFH=\angle KEH$. Mặt khác, ta lại có $\angle LFH=\angle FHJ$ (so le trong) và $\angle KEH=\angle EHJ$ (so le trong). Do đó HJ là phân giác của góc EHF .

b. Go $HJ \parallel FL$ nên $S_{FJL} = S_{FLH}$. Suy ra $S_{BFJL} = S_{BFL} + S_{FLH} = S_{BFH}$. (1)

Chứng minh tương tự, ta cũng có $S_{CEJK} = S_{CEH}$. (2)

Theo chứng minh câu a, hai tam giác FTL và EKH đồng dạng nên

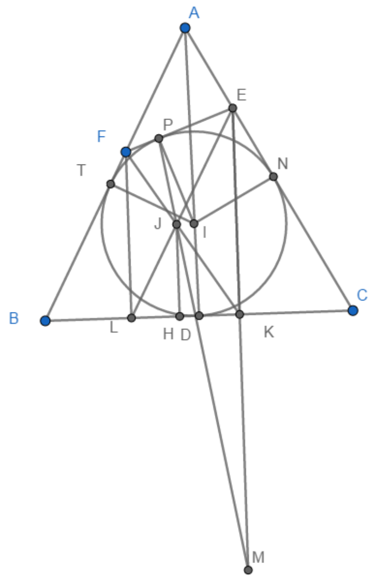
$$\angle FHB = \angle FHL = \angle EHK = \angle EHC.$$

Hai tam giác FHB và EHC có $\angle FBH = \angle ECH$ và $\angle FHB = \angle ECH$ nên đồng dạng với nhau. Suy ra $\frac{S_{FBH}}{S_{ECH}} = \frac{BF^2}{CE^2}$.

Ta kết hợp (1) và (2), ta thu được

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{FBH}}{S_{ECH}} = \frac{BF^2}{CE^2}.$$

Điều phải chứng minh.



c. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử P nằm cùng phíc với B so với AD như hình vẽ ở trên. Gọi M là giao điểm của PJ và EK. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác KFE với cát tuyến MJP, ta có

$$\frac{MK}{ME} \cdot \frac{PE}{PF} \cdot \frac{JF}{JK} = 1.$$

Mà hai tam giác BFH và CEH đồng dạng với nhau có FL và EK là hai đường cao tương ứng nên $\frac{JF}{JK} = \frac{FL}{EK} = \frac{BF}{CE}$.

Suy ra $\frac{MK}{ME} \cdot \frac{PE}{PF} \cdot \frac{BF}{CE} = 1$. (3)

Để chứng minh ba điểm P, J, D thẳng hàng, ta chỉ cần chứng minh M, D, J thẳng hàng. Theo định lí Menelaus đảo áp dụng cho tam giác LKE, điều này tương đương với ta phải chứng minh

$$\frac{MK}{ME}.\frac{JE}{JL}.\frac{DL}{DK}=1.$$

Lại có $\frac{JE}{JL}=\frac{EK}{FL}=\frac{CE}{BF}$ và $\frac{DL}{DK}=\frac{DL}{DB}.\frac{DC}{DK}.\frac{DB}{DC}=\frac{AF}{AB}.\frac{AC}{AE}.1=\frac{AF}{AE}$.

Do đó, chỉ cần chứng minh $\frac{MK}{ME}.\frac{CE}{BF}.\frac{AF}{AE}=1$ (4)

Kết hợp (3) và (4) , ta đưa bài toán về chứng minh $\frac{CE}{BF}.\frac{AF}{AE}=\frac{PE}{PF}.\frac{BF}{CE}$.

Hay $\frac{AF}{AE}.\frac{PF}{PE}=\frac{BF^2}{CE^2}$. (5)

Gọi T, N lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB, AC. Đặt $a=AB=AC, x=BD=CD, y=PF=TF, z=PE=EN$. Ta sẽ chứng minh

$$a=\frac{x(x+y)(x+z)}{x^2-yz} \qquad (6)$$

Thật vậy, sử dụng định lí cosin trong các tam giác ABC và AEF, ta có

$$2\cos A=\frac{AE^2+AF^2-EF^2}{AE.AF}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{AB.AC}.$$

Suy ra

$$\frac{(a-x-y)^2+(a-x-z)^2-(y+z)^2}{(a-x-y)(a-x-z)}=\frac{2a^2-4x^2}{a^2},$$

Hay

$$2-\frac{(a-x-y)^2+(a-x-z)^2-(y+z)^2}{(a-x-y)(a-x-z)}=2-\frac{2a^2-4x^2}{a^2}.$$

Từ đây, ta có

$$\frac{yz}{a^2-(2x+y+z)a+(x+y)(x+z)}=\frac{x^2}{a^2},$$

Hay

$$(x^2-yz)a^2-x^2(2x+y+z)a+x^2(x+y)(x+z)=0.$$

Như thế, ta có $(a-x)\left[(x^2-yz)a-x(x+y)(x+z)\right]=0$.

Do $a>x$ nên (6) được chứng minh, Sử dụng (6) vừa chứng minh ta có

$$\frac{AF}{AE}.\frac{PF}{PE}=\frac{a-x-y}{a-x-z}.\frac{y}{z}=\frac{\frac{x(x+y)(x+z)}{x^2-yz}-x-y}{\frac{x(x+y)(x-z)}{x^2-yz}-x-z}.\frac{y}{z}=\frac{(x+y)^2}{(x+z)^2}=\frac{BF^2}{CE^2}.$$

Đẳng thức (5) được chứng minh. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 8. Đặt $M_n = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| \le 2n-1\}$. Ta chứng minh mệnh đề tổng quát: *Trong* $2n+1$ *số phân biệt từ tập hợp* M_n*, luôn tồn tại ba số phân biệt có tổng bằng* 0. Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho thể chọn ra $2n+1$ số phân biệt từ tập hợp M_n mà trong đó không có ba số phân biệt nào có tổng bằng 0. Gọi n là số nhỏ nhất có tính chất như vậy. Khi đó $n>1$ (vì với $n=1$ thì mệnh đề đúng). Vì n là số nhỏ nhất làm cho mệnh đề không đúng nên mệnh đề đúng với $n-1$. Nếu trong các số được chọn có ít nhất $2n-1$ số thuộc M_{n-1} thì do mệnh đề đúng với $n-1$, sẽ tồn tại ba số phân biệt trong các số được chọn có tổng bằng 0. Mẫu thuẫn. Vậy có tối đa $2n-2$ số được chọn thuộc M_{n-1}. Suy ra trong bốn số $-2n+2, -2n+1, 2n-2, 2n-1$, có ít nhất ba số được chọn. Suy ra 0 không được chọn.

- Nếu cả hai số của cặp $(-2n+1, 2n-1)$ được chọn. Chia tập $M_n \setminus \{-2n+1, 2n-1, 0\}$ thành $2n-2$ cặp $(1;2n-2),(2;2n-3),\ldots,(-1;-2n+2),\ldots,(-n+1,-n)$ ta thấy từ mỗi cặp ta chỉ chọn được tối đa một số. Suy ra chỉ lấy được tối đa $2+2n-2=2n$ số. Mẫu thuẫn.
- Nếu chỉ có một số của cặp $(-2n+1, 2n-1)$ được chọn thì theo lí luận ở trên, cặp $(-2n+2, 2n-2)$ được chọn. Không mất tính tổng quát ta giả sử $2n-1$ được chọn còn $1-2n$ không được chọn. Lúc này chia các phần tử còn lại thành $2n-5$ cặp $(1;2n-3),(2;2n-4),\ldots,(n-2;n),(-2;-2n+3,\ldots,(-n+3;-n-1)$, một bộ ba số $(-n+2,-n+1,-n)$ và một phần tử lẻ cặp là $n-1$. Từ mỗi cặp ta lấy được tối đa một số, từ bộ ba số ta cũng lấy được tối đa một số. Từ đó ta lấy được tối đa $3+2n-5+1+1=2n$ số. Mẫu thuẫn.

Vậy trong mọi trường hợp đều dẫn đến mẫu thuẩn, tức điều giả sử sai. Mệnh đề được chứng minh. Áp dụng mệnh đề cho $n=1010$ ta có điều phải chứng minh.

Đề số 36

Câu 1.

$$A = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{1-\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2 - 4}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}\right)^2 - \left(\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2 - 4}{2\left(1-\sqrt{3}\right)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}\right)^2 - \left(\frac{-2\sqrt{3}}{2(1-\sqrt{3})}\right)^2$$

$$= \frac{3}{(1+\sqrt{3})^2} - \frac{3}{(1-\sqrt{3})^2} = \frac{3}{4+2\sqrt{3}} - \frac{3}{4-2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{12-6\sqrt{3}-12-6\sqrt{3}}{16-12} = -\frac{12\sqrt{3}}{4} = -3\sqrt{3}$$

Vậy $A = -3\sqrt{3}$.

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{1+\sqrt{3}}\right) = \frac{(1+\sqrt{3})^2 - 4}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{1-\sqrt{3}}\right) = \frac{(1-\sqrt{3})^2 - 4}{2(1-\sqrt{3})} = \frac{-2\sqrt{3}}{2(1-\sqrt{3})} = -\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3}{(1+\sqrt{3})^2} - \frac{3}{(1-\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{3}{4+2\sqrt{3}} - \frac{3}{4-2\sqrt{3}} = \frac{12-6\sqrt{3}-12-6\sqrt{3}}{16-12} = -\frac{12\sqrt{3}}{4}$$

Vậy $A = -3\sqrt{3}$.

Câu 2.

Xét phương trình $x^2 - (\sqrt{3}+\sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$

Dễ thấy phương trình có hai nghiệm $x = \sqrt{3}; x = \sqrt{2}$

do tổng $S = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ và tích $P = \sqrt{3}.\sqrt{2} = \sqrt{6}$

(hoặc giải phương trình bậc hai)

Thay hai nghiệm vào phương trình $x^4 + bx^2 + c = 0$ ta được hệ

$$\begin{cases} 9 + 3b + c = 0 \\ 4 + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b + c = -9 \\ 2b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ -10 + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ c = 6 \end{cases}$$

Vậy $b = -5,\ c = 6$ thì nghiệm của phương trình bậc hai là nghiệm của phương trình $(*)$

Với $b = -5, c = 6$ ta có phương trình là $x^4 - 5x^2 + 6 = 0\ (*)$.

Đặt $t = x^2, (ĐK\ t \geq 0)$ ta được phương trình $(*)$ trở thành

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2;\ t = 3$$

$$t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Phương trình $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt là

$$x = \pm\sqrt{2}; x = \pm\sqrt{3}$$

Câu 3.

a)

Đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $A\left(\sqrt{5}; \sqrt{50}\right)$

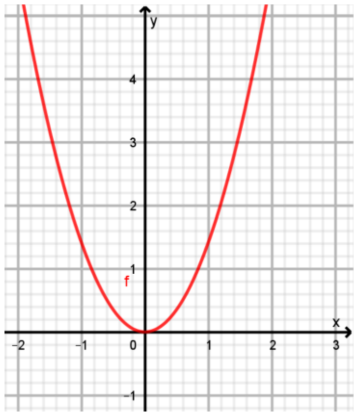
$$\Rightarrow \sqrt{50} = a.\sqrt{5}^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

Vậy $a = \sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2}x^2$

Bảng giá trị

x	-1	0	1
$y = \sqrt{2}x^2$	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$

Đồ thị như hình



b)

Điểm $M(m;\ n)$ thuộc đồ thị $\Rightarrow n = \sqrt{2}m^2$ (1)

Giả sử điểm $N(n; m)$ thuộc đồ thị $\Rightarrow m = \sqrt{2}n^2$ (2)

Lấy (1) trừ (2) ta được $n - m = \sqrt{2}(m^2 - n^2)$

$$(n - m)\left(1 + \sqrt{2}(n + m)\right) = 0$$

+ TH1: Nếu $n - m = 0 \Leftrightarrow n = m$ thay vào (1) ta được

$$n = \sqrt{2}n^2 \Rightarrow n = 0; n = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

+TH2: Nếu $1 + \sqrt{2}(n + m) = 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{2}n + \sqrt{2}m = 0$

$$\Rightarrow n = -\frac{\sqrt{2}}{2} - m$$

Thay vào (1) ta được

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - m = \sqrt{2}m^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}m^2 + m + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = -3 < 0$$

Phương trình vô nghiệm

Vậy $m = n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì điểm $M(m, n)$ thuộc đồ thị (P) khi đó điểm $N(n; m)$ thuộc (P).

Câu 4.

$A = x^4 + y^4 - 2x^3 - 2x^2y^2 + x^2 - 2y^3 + y^2$

$= (x^4 + y^4 - 2x^2y^2) - 2(x^3 + y^3) + x^2 + y^2$

$$= (x^2 - y^2)^2 - 2(x + y)(x^2 - xy + y^2) + (x^2 + y^2)$$

$= (x + y)^2(x - y)^2 - 2[(x + y)^2 - 3xy] + (x + y)^2 - 2xy$

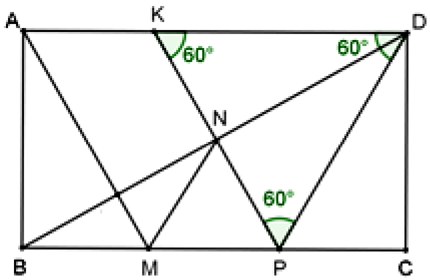
$= (x-y)^2 - 2(1-3xy) + 1 - 2xy$

$= (x+y)^2 - 4xy - 2 + 6xy + 1 - 2xy = 0$

Vậy $A = 0$

Câu 5.

a) Tam giác CDP vuông tại C có $\widehat{CDP} = 30^0$



$$\cos\widehat{CDP} = \frac{CD}{DP} \Longrightarrow CD = DP.\cos 30^0 = 18.\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

Tam giác DKP đều có N là trung điểm KP nên DB vuông góc KP và là đường phân giác của góc $\widehat{ADP} \Longrightarrow \widehat{CDB} = 60^0$

$$\Longrightarrow \tan\widehat{CDB} = \tan 60^0 = \frac{BC}{CD} \Longrightarrow BC = CD.\tan 60^0 = 9\sqrt{3}.\sqrt{3} = 27$$

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$

$$S_{ABCD} = BC.CD = 27.9\sqrt{3} = 243\sqrt{3}\ (cm^2)$$

b) Do AM song song KP nên $\widehat{KAM} = \widehat{DKP} = 60^0$ (đồng vị)

Ta có $AK = 27 - 18 = 9\ cm \Longrightarrow MP = 9\ cm = NP$

Mà $\widehat{MPN} = \widehat{NKD} = 60^0$(so le trong). Vậy tam giác MNP đều

$\Longrightarrow \widehat{MNP} = 60^0$

$\Longrightarrow \widehat{MNK} = 120^0$ (kề bù)

Vậy $\widehat{KAM} + \widehat{MNK} = 60^0 + 120^0 = 180^0$

Vậy tứ giác $AKNM$ nội tiếp

Câu 6. Ta có công thức tính thể tích hình trụ

$$V = \pi R^2 h$$

Thể tích phần than chì có dạng hình trụ chiều cao $200mm$ bán kính đáy $r = 1mm$.

$$V_{Thanchi} = \pi 1^2.200 = 200\pi (mm^3)$$

Thể tích bút chì có chiều cao $200\ mm$ bán kính đáy $R = 4\ mm$

$$V_{But} = \pi.4^2.200 = 3200\pi\ (mm^3)$$

Thể tich phần gỗ bút chì

$V_{Go} = V_{But} - V_{Thanchi} = 3200\pi - 200\pi = 3000\pi\ (mm^3)$.

Đề số 37

Câu 1.

a) Ta có $P=\dfrac{\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2+3}{\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2+3}\div\dfrac{a^3+1}{a^3-1}-\dfrac{2a}{a-1}=\dfrac{\dfrac{(a+1)^2+3(a-1)^2}{(a-1)^2}}{\dfrac{(a-1)^2+3(a+1)^2}{(a+1)^2}}\div\dfrac{(a+1)(a^2-a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)}-\dfrac{2a}{a-1}$

$=\dfrac{4(a^2-a+1)}{4(a^2+a+1)}.\dfrac{(a+1)^2}{(a-1)^2}.\dfrac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a+1)(a^2-a+1)}-\dfrac{2a}{a-1}=\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{2a}{a-1}=\dfrac{1-a}{a-1}=-1.$

Vậy $P=-1$.

b) Đặt $s=\sqrt[3]{x^2}$ và $t=\sqrt[3]{y^2}$ thì đẳng thức đề bài có thể viết lại thành $\sqrt{s^3+s^2t}+\sqrt{t^3+t^2s}=a$.

Do $s,t\ge 0$ nên $\sqrt{s^3+s^2t}=s\sqrt{s+t}$, $\sqrt{t^3+t^2s}=t\sqrt{s+t}$.

Từ đó ta có $(s+t)\sqrt{s+t}=a$ hay $(s+t)^3=a^2$.

Suy ra $s+t=\sqrt[3]{a^2}$. Đây là kết quả cần chứng minh.

Câu 2.

Gọi a (km/h) là vận tốc của An khi đi trên quãng đường AC, b (km/h) là vận tốc của Bình khi đi trên quãng đường BC. Rõ ràng $a>1, b>0$.

Ta thấy, độ dài quãng đường AC là $2a$ (km) và độ dài quãng đường BC là $2b$ (km).

Do $AC+BC=AB$ nên ta có $2a+2b=20$, tức $a+b=10$ (1)

Thời gian An đi trên quãng đường BC là $\dfrac{2b}{a-1}$ (giờ).

Thời gian Bình đi trên quãng đường AC là $\dfrac{2a}{b-1}$ (giờ).

Do An đến B sớm hơn so với Bình đến A là $\dfrac{4}{5}$ (giờ) (48 phút = $\dfrac{4}{5}$ giờ)

Nên $\dfrac{2a}{b+1}-\dfrac{2b}{a-1}=\dfrac{4}{5}$ hay $\dfrac{a}{b+1}+1-1-\dfrac{b}{a-1}=\dfrac{2}{5}$.

Một cách tương đương, ta có $\dfrac{a+b+1}{b+1}-\dfrac{a+b-1}{a-1}=\dfrac{2}{5}$. (2)

Từ (1), ta có $b=10-a$.

Thay vào phương trình (2), ta được $\dfrac{11}{11-a}-\dfrac{9}{a-1}=\dfrac{2}{5}$, hay $(a+44)(a-6)=0$.

Do $a>1$ nên ta có $a=6$, suy ra $b=4$ (thỏa mãn).

Vậy vận tốc của An trên quãng đường AC là 6 (km/h).

Câu 3.

a) Để 1 và a là nghiệm thì ta phải có $P(1)=1+a+b=0$, $P(a)=a^2+a^2+b=0$.

Rút $b=-1-a$ từ phương trình đầu, thay vào phương trình sau, ta được $2a^2-a-1=0$.

Từ đó $a=1$ hoặc $a=-\frac{1}{2}$, tương ứng $b=-2$ hoặc $b=-\frac{1}{2}$.

Vậy có hai cặp (a,b) thỏa mãn điều kiện đề bài là $(1;-2)$ và $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

b) Do x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $P(x)=0$ nên $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)$.

Tương tự, ta cũng có $Q(x)=(x-x_3)(x-x_4)$.

Điều kiện đề bài có thể viết lại thành $(x_3-x_1)(x_3-x_2+x_1-x_4)+(x_4-x_1+x_2-x_3)(x_4-x_2)=0$.

Hay $(x_3-x_2+x_1-x_4)(x_3-x_1+x_2-x_4)=0$.

Một cách tương đương, ta có $(x_1-x_2)^2=(x_3-x_4)^2$ hay $|x_1-x_2|=|x_3-x_4|$.

Đây chính là kết quả cần chứng minh.

Bình luận. Định lý về khai triển đa thức theo các nghiệm mà ta đã dùng $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)$ là một tính chất quan trọng của đa thức. Nếu không biết định lý này, ta vẫn giải được bài toán bằng các phép biến đổi, nhưng sẽ vất vả hơn.

Ở câu a), đề bài không nói a khác 1 nên nếu thí sinh dùng định lý Vieta sẽ bị thiếu nghiệm.

Câu 4.

a) Hai tam giác AB_1H và AA_1C có $\angle AB_1H=\angle AA_1C=90^0$ và chung góc $\angle HAB_1$ nên đồng dạng với nhau (g-g). Từ đó suy ra $\frac{HB_1}{A_1C}=\frac{AH}{AC}$. (1)

Tứ giác AC_1A_1C có $\angle AC_1C=\angle AA_1C=90^0$ nên nội tiếp.

Suy ra $\angle HC_1A_1=\angle CAH$ (cùng chắn cung A_1C của đường tròn (AC_1A_1C)) và $HA_1C_1=\angle HCA$ (cùng chắn cung AC_1 của đường tròn (AC_1A_1C)).

Từ đó, ta có $\Delta C_1A_1H\sim\Delta ACH$ (g-g). Suy ra $\frac{HC_1}{A_1C_1}=\frac{HA}{AC}$. (2)

Từ (1) và (2), ta được $\frac{HB_1}{A_1C}=\frac{HC_1}{A_1C_1}$ hay $HB_1.A_1C_1=HC_1.A_1C$.

Đây chính là kết quả cần chứng minh.

b) Theo tính chất của tiếp tuyến, ta có $OB'\perp A'C'$. (3)

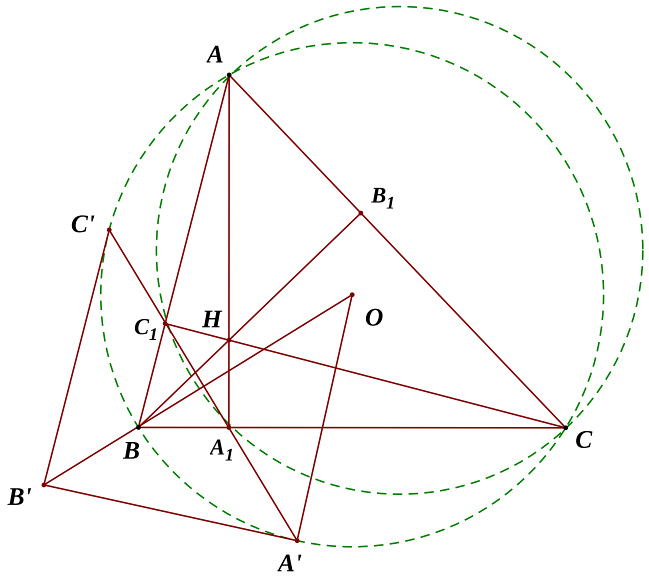
Ta sẽ chứng minh $OB\perp A'C'$, hay $OB\perp A_1C_1$.

Do tam giác OBC cân tại O nên $\angle OBA_1=\frac{180^0-\angle BOC}{2}=\frac{180^0-2\angle BAC}{2}=90^0-\angle BAC$.

Mặt khác, do tứ giác AC_1AC nội tiếp nên $\angle C_1A_1B=\angle BAC$ (cùng bù với $\angle C_1A_1C$).

Kết hợp với kết quả ở trên, ta được $\angle OBA_1+\angle C_1A_1B=90^0-\angle BAC=90^0$.

Do đó $OB \perp A_1C_1$, hay $OB \perp A'C'$. Kết hợp với (3), ta suy ra B, B', O thẳng hàng.



c) Khi tam giác ABC đều thì BO đi qua B_1, B_1 là trung điểm của AC và $A'C' \perp BO$.

Gọi K là giao điểm BO và $A'C_1$ thì K là trung điểm của $A'C'$.

Do tam giác AB_1C_1 đều và $OB \perp A_1C_1$ nên K cũng là trung điểm của A_1C_1.

Do tam giác ABC đều nên O cũng là trọng tâm của tam giác. Suy ra $OC_1 = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}R$.

Mặt khác, sử dụng hệ thức lượng trong tam giác OC_1B vuông tại C_1 có C_1K là đường cao, ta có $OC_1^2 = OK.OB$. Suy ra $OK = \frac{OC_1^2}{OB} = \frac{1}{4}R$.

Từ đây, sử dụng định lý Pythagoras trong tam giác $A'KO$ vuông tại K, ta có

$$A'K = \sqrt{OA'^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{16}R^2} = \frac{R\sqrt{15}}{4}.$$

Vậy $A'C' = 2A'K = \frac{R\sqrt{15}}{4}$.

Câu 5.

Biểu thức P có thể được viết lại dưới dạng $P = x(x-2)y(y+6) + 13x(x-2) + 4y(y+6) + 46$.

Đặt $a = x(x-2) = (x-1)^2 - 1$ và $b = y(y-+6) = (y+3)^2 - 9$ thì ta có

$$P = ab + 13a + 4b + 46 = (a+4)(b+13) - 6$$

$$= \left[(x-1)^2 + 3\right]\left[(y+3)^2 + 4\right] - 6 \geq 3.4 - 6$$

$$= 6.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$ và $y = -3$. Vậy $\min P = 6$.

Đề số 38

Câu 1.

a) Ta có $P=\dfrac{\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2+3}{\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2+3}\div\dfrac{a^3+1}{a^3-1}-\dfrac{2a}{a-1}=\dfrac{\dfrac{(a+1)^2+3(a-1)^2}{(a-1)^2}}{\dfrac{(a-1)^2+3(a+1)^2}{(a+1)^2}}\div\dfrac{(a+1)(a^2-a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)}-\dfrac{2a}{a-1}$

$=\dfrac{4(a^2-a+1)}{4(a^2+a+1)}\cdot\dfrac{(a+1)^2}{(a-1)^2}\cdot\dfrac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a+1)(a^2-a+1)}-\dfrac{2a}{a-1}=\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{2a}{a-1}=\dfrac{1-a}{a-1}=-1.$

Vậy $P=-1$.

b) Đặt $s=\sqrt[3]{x^2}$ và $t=\sqrt[3]{y^2}$ thì đẳng thức đề bài có thể viết lại thành $\sqrt{s^3+s^2t}+\sqrt{t^3+t^2s}=a$.

Do $s,t\geq 0$ nên $\sqrt{s^3+s^2t}=s\sqrt{s+t}$, $\sqrt{t^3+t^2s}=t\sqrt{s+t}$.

Từ đó ta có $(s+t)\sqrt{s+t}=a$ hay $(s+t)^3=a^2$.

Suy ra $s+t=\sqrt[3]{a^2}$. Đây là kết quả cần chứng minh.

Câu 2.

Gọi a (km/h) là vận tốc của An khi đi trên quãng đường AC, b (km/h) là vận tốc của Bình khi đi trên quãng đường BC. Rõ ràng $a>1, b>0$.

Ta thấy, độ dài quãng đường AC là $2a$ (km) và độ dài quãng đường BC là $2b$ (km).

Do $AC+BC=AB$ nên ta có $2a+2b=20$, tức $a+b=10$ (1)

Thời gian An đi trên quãng đường BC là $\dfrac{2b}{a-1}$ (giờ).

Thời gian Bình đi trên quãng đường AC là $\dfrac{2a}{b-1}$ (giờ).

Do An đến B sớm hơn so với Bình đến A là $\dfrac{4}{5}$ (giờ) (48 phút $=\dfrac{4}{5}$ giờ)

Nên $\dfrac{2a}{b+1}-\dfrac{2b}{a-1}=\dfrac{4}{5}$ hay $\dfrac{a}{b+1}+1-1-\dfrac{b}{a-1}=\dfrac{2}{5}$.

Một cách tương đương, ta có $\dfrac{a+b+1}{b+1}-\dfrac{a+b-1}{a-1}=\dfrac{2}{5}$. (2)

Từ (1), ta có $b=10-a$.

Thay vào phương trình (2), ta được $\dfrac{11}{11-a}-\dfrac{9}{a-1}=\dfrac{2}{5}$, hay $(a+44)(a-6)=0$.

Do $a>1$ nên ta có $a=6$, suy ra $b=4$ (thỏa mãn).

Vậy vận tốc của An trên quãng đường AC là 6 (km/h).

Câu 3.

a) Để 1 và a là nghiệm thì ta phải có $P(1)=1+a+b=0$, $P(a)=a^2+a^2+b=0$.

Rút $b=-1-a$ từ phương trình đầu, thay vào phương trình sau, ta được $2a^2-a-1=0$.

Từ đó $a=1$ hoặc $a=-\frac{1}{2}$, tương ứng $b=-2$ hoặc $b=-\frac{1}{2}$.

Vậy có hai cặp (a,b) thỏa mãn điều kiện đề bài là $(1;-2)$ và $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

b) Do x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $P(x)=0$ nên $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)$.

Tương tự, ta cũng có $Q(x)=(x-x_3)(x-x_4)$.

Điều kiện đề bài có thể viết lại thành $(x_3-x_1)(x_3-x_2+x_1-x_4)+(x_4-x_1+x_2-x_3)(x_4-x_2)=0$.

Hay $(x_3-x_2+x_1-x_4)(x_3-x_1+x_2-x_4)=0$.

Một cách tương đương, ta có $(x_1-x_2)^2=(x_3-x_4)^2$ hay $|x_1-x_2|=|x_3-x_4|$.

Đây chính là kết quả cần chứng minh.

Bình luận. Định lý về khai triển đa thức theo các nghiệm mà ta đã dùng $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)$ là một tính chất quan trọng của đa thức. Nếu không biết định lý này, ta vẫn giải được bài toán bằng các phép biến đổi, nhưng sẽ vất vả hơn.

Ở câu a), đề bài không nói a khác 1 nên nếu thí sinh dùng định lý Vieta sẽ bị thiếu nghiệm.

Câu 4.

a) Hai tam giác AB_1H và AA_1C có $\angle AB_1H=\angle AA_1C=90^0$ và chung góc $\angle HAB_1$ nên đồng dạng với nhau (g-g). Từ đó suy ra $\frac{HB_1}{A_1C}=\frac{AH}{AC}$. (1)

Tứ giác AC_1A_1C có $\angle AC_1C=\angle AA_1C=90^0$ nên nội tiếp.

Suy ra $\angle HC_1A_1=\angle CAH$ (cùng chắn cung A_1C của đường tròn (AC_1A_1C)) và $HA_1C_1=\angle HCA$ (cùng chắn cung AC_1 của đường tròn (AC_1A_1C)).

Từ đó, ta có $\Delta C_1A_1H \# \Delta ACH$ (g-g). Suy ra $\frac{HC_1}{A_1C_1}=\frac{HA}{AC}$. (2)

Từ (1) và (2), ta được $\frac{HB_1}{A_1C}=\frac{HC_1}{A_1C_1}$ hay $HB_1.A_1C_1=HC_1.A_1C$.

Đây chính là kết quả cần chứng minh.

b) Theo tính chất của tiếp tuyến, ta có $OB'\perp A'C'$. (3)

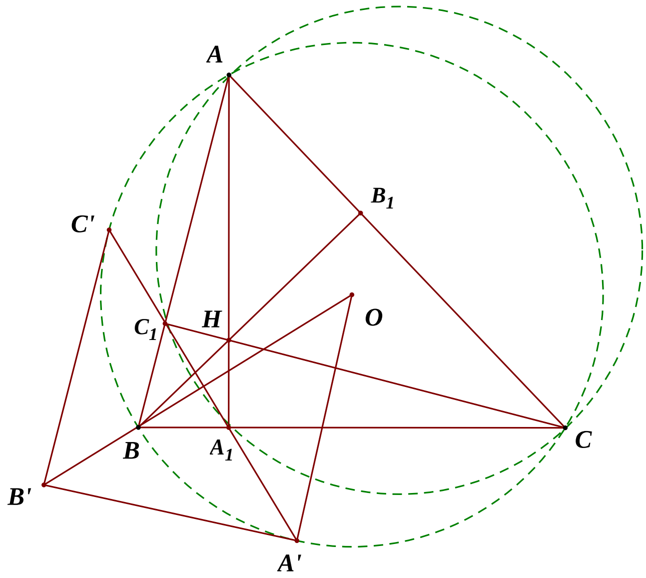
Ta sẽ chứng minh $OB\perp A'C'$, hay $OB\perp A_1C_1$.

Do tam giác OBC cân tại O nên $\angle OBA_1=\frac{180^0-\angle BOC}{2}=\frac{180^0-2\angle BAC}{2}=90^0-\angle BAC$.

Mặt khác, do tứ giác AC_1AC nội tiếp nên $\angle C_1A_1B=\angle BAC$ (cùng bù với $\angle C_1A_1C$).

Kết hợp với kết quả ở trên, ta được $\angle OBA_1=\angle C_1A_1B=90^0-\angle BAC=90^0$.

Do đó $OB\perp A_1C_1$, hay $OB\perp A'C'$. Kết hợp với (3), ta suy ra B, B', O thẳng hàng.



c) Khi tam giác ABC đều thì BO đi qua B_1, B_1 là trung điểm của AC và $A'C'\perp BO$.

Gọi K là giao điểm BO và $A'C_1$ thì K là trung điểm của $A'C'$.

Do tam giác AB_1C_1 đều và $OB\perp A_1C_1$ nên K cũng là trung điểm của A_1C_1.

Do tam giác ABC đều nên O cũng là trọng tâm của tam giác. Suy ra $OC_1=\frac{1}{2}OC=\frac{1}{2}R$.

Mặt khác, sử dụng hệ thức lượng trong tam giác OC_1B vuông tại C_1 có C_1K là đường cao, ta có $OC_1^2=OK.OB$. Suy ra $OK=\frac{OC_1^2}{OB}=\frac{1}{4}R$.

Từ đây, sử dụng định lý Pythagoras trong tam giác $A'KO$ vuông tại K, ta có

$$A'K=\sqrt{OA'^2-OK^2}=\sqrt{R^2-\frac{1}{16}R^2}=\frac{R\sqrt{15}}{4}.$$

Vậy $A'C'=2A'K=\frac{R\sqrt{15}}{4}$.

Câu 5.

Biểu thức P có thể được viết lại dưới dạng $P=x(x-2)y(y+6)+13x(x-2)+4y(y+6)+46$.

Đặt $a=x(x-2)=(x-1)^2-1$ và $b=y(y-+6)=(y+3)^2-9$ thì ta có

$$\begin{aligned}P&=ab+13a+4b+46=(a+4)(b+13)-6\\&=\left[(x-1)^2+3\right]\left[(y+3)^2+4\right]-6\geq 3.4-6\\&=6.\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$ và $y=-3$. Vậy $\min P=6$.

Đề số 39

Câu 1.

a) Điều kiện của x để biểu thức $\dfrac{x+1}{x-3}$ có nghĩa là $x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$

b) Ta có

$$\left(1-\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)\left(1-\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)=\left(1-\frac{\sqrt{a}\ \ \sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}\right)\left(1-\frac{\sqrt{a}\ \ \sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}\right)=\ 1-\sqrt{a}\ \ 1+\sqrt{a}\ \ =1-a$$

Câu 2.

Vì đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y=-3x+2019$ nên $a=-3, b\neq 2019$

$M\in d: y=-3x+b \Rightarrow 1=-3.2+b$

$\Rightarrow b=7$ (thỏa mãn)

Câu 3.

a) Ta có: $\Delta' = \ -m\ ^{2} -\ 4m-4\ = m^2-4m+4 = \ m-2\ ^{2}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi : $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m\neq 2$

b) Với $m\neq 2$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo hệ thức Vi ét ta có : $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1.x_2=4m-4 \end{cases}$

Do x_1 là nghiệm của phương trình nên thỏa $x_1^2+2mx_1+4m-4=0$

$\Rightarrow x_1^2=2mx_1-4m+4 \quad (*)$

Ta có $x_1^2+2mx_2-8m+5=0 \Leftrightarrow 2mx_1-4m+4+2mx_2-8m+5=0$ *(do (*))*

$\Leftrightarrow 2m\ \ x_1+x_2\ \ -12m+9=0 \Leftrightarrow 2m.2m-12m+9=0$ (hệ thức vi ét)

$\Leftrightarrow 4m^2-12m+9=0 \Leftrightarrow \ 2m-3\ ^{2}=0 \Leftrightarrow 2m-3=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy $m=\dfrac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 4. Gọi chiều rộng của mảnh đất là x *(m, 0 < x < 50)*

Chiều dài của mảnh đất là $4x$ *(m)*

Chi vi mảnh đất là $100m$: $\ x+4x\ .2=100 \Leftrightarrow 5x=50 \Leftrightarrow x=10$

Vậy chiều rộng của mảnh đất là $10m$, chiều dài mảnh đất là $40m$

Diện tích mảnh đất là : 40.10 = $400m^2$

Giá tiền của mảnh đất : 400x150000000 = 6000000000 đồng = 6 tỷ (đồng)

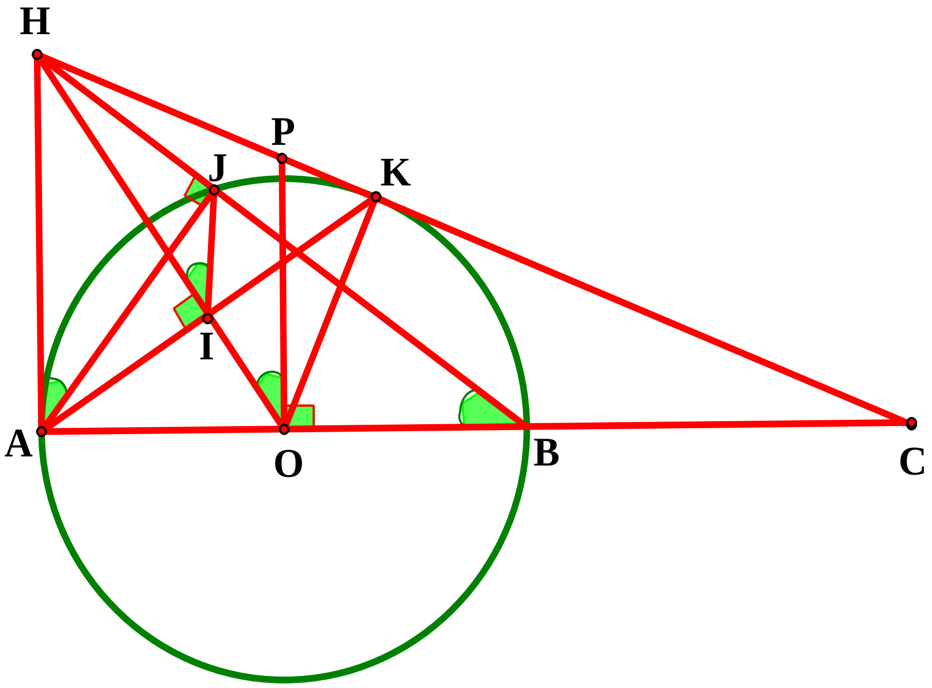
Câu 5.

Diện tích xung quanh của hình trụ : $S_{xq} = 2\pi rh$

$$\Leftrightarrow 20\pi = 2\pi r.5 \Leftrightarrow r = 2\ \ m$$

$V = \pi r^2 h = 20\pi\ \ m^3$

Câu 6.



a) ΔAHB vuông tại A (giả thiết AH là tiếp tuyến của đường tròn)

$AJB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nữa đường tròn (O))

suy ra AJ là đường cao của tam giác AHB

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông AHB ta có

$AJ.HB = AH.AB.$

b)Vì OH là đường trung trực của đoạn thẳng AK (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên OH vuông góc với $AK \Rightarrow HIA = 90^0$

Ta lại có $HJA = 90^0$ => tứ giác $AIJH$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow JAH = JIH$ (góc nội tiếp cùng chắn cung JH)

Mặt khác $JAH = ABH$ (do cùng phụ với góc AHB)

$\Rightarrow JIH = ABH$

Mà $JIH + JIO = 180^0 \Rightarrow ABH + JIO = 180^0$

Vậy 4 điểm B, O, I, J cùng nằm trên một đường tròn.

c) Ta có $OP\ //\ AH$ (vì cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow AHO = HOP$ (so le trong)

Mà $AHO = OHK$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow OHK = HOP$

Suy ra tam giác HOP cân tại $H \Rightarrow HP = OP$ (**)

Áp dụng định lý Ta let trong tam giác AHC ta có : $\dfrac{AH}{OP} = \dfrac{CH}{CP}$

$$\Rightarrow \frac{AH - OP}{OP} = \frac{CH - CP}{CP}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{OP} - 1 = \frac{HP}{CP} \Rightarrow \frac{AH}{HP} - \frac{HP}{CP} = 1\ (do\ (**))$$

Câu 7.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{400}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{400}+\sqrt{400}}\right)$$

$$< 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{400}+\sqrt{399}}\right)$$

$$Ta\ có:\ 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{400}+\sqrt{399}}\right)$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + ... + \sqrt{400} - \sqrt{399}$$

$$= 2\ -\sqrt{1} + \sqrt{400}\ = 38$$

Vậy $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{400}} < 38$

Đề số 40

Câu 1.

1) $$A = 2\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{20} - 20\sqrt{\frac{1}{5}} = 2\left|2-\sqrt{5}\right| + 2\sqrt{5} - 20\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$= 2\left(\sqrt{5}-2\right) + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 4 + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = -4$$

2a) (d) song song với (Δ)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2=-4 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m=-2$$

Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm.

2b) Thay $x=-1; y=2$ vào phương trình $y=(m-2)x+m$ được:

$2=(m-2).(-1)+m \Leftrightarrow 2=-m+2+m \Leftrightarrow 2=2$ (đúng với $\forall m$)

Vậy đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(-1;2)$ với mọi m.

2c)

Cách 1:

Vì điểm B thuộc (Δ) nên tọa độ điểm B có dạng $\left(x_0;1-4x_0\right)$

ĐK: B khác A hay $x_0 \neq -1$

Giả sử phương trình đường thẳng AB là $y = ax+b$

Vì $A(-1;2)$ và $B\left(x_0;1-4x_0\right)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -a+b=2 \\ ax_0+b=1-4x_0 \end{cases} \Rightarrow a(x_0+1) = -4x_0-1 \Rightarrow a = \frac{-4x_0-1}{x_0+1}$$

AB vuông góc với (Δ)

$$\Leftrightarrow aa' = -1 \text{ hay } \frac{-4x_0-1}{x_0+1}\cdot(-4) = -1$$

$$\Rightarrow 16x_0+4 = -x_0-1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{-5}{17}$$

$$\Rightarrow y_0 = 1-4\cdot\frac{-5}{17} = \frac{37}{17}$$

Vậy tọa độ điểm B là $\left(\frac{-5}{17};\frac{37}{17}\right)$.

Cách 2:

Giả sử phương trình đường thẳng AB là $y = ax+b$

AB vuông góc với (Δ)

$$\Leftrightarrow aa' = -1 \text{ hay } a\cdot(-4) = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng AB có dạng $y = \frac{1}{4}x+b$

Vì đường thẳng $y = \frac{1}{4}x+b$ đi qua $A(-1;2)$ nên:

$$2 = \frac{1}{4}\cdot(-1)+b \Leftrightarrow b = \frac{9}{4}$$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng AB là $y = \frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{4} \\ y = -4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-5}{17} \\ y = \dfrac{37}{17} \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{-5}{17}; \dfrac{37}{17}\right)$$

Câu 2.

1) $x^4 + 2x^2 + x\sqrt{2x^2 + 4} = 4$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 2) + \sqrt{2}.x\sqrt{x^2 + 2} = 4$ (1)

Đặt $x\sqrt{x^2 + 2} = y$. Phương trình (1) trở thành:

$y^2 + \sqrt{2}.y = 4 \Leftrightarrow y^2 + \sqrt{2}.y - 4 = 0$ (2)

Giải phương trình (2) được $y_1 = \sqrt{2}$; $y_2 = -2\sqrt{2}$

Với $y = \sqrt{2}$ thì

$$x\sqrt{x^2 + 2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2(x^2 + 2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x^2 + 1)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 1 = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \sqrt{3} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$$

Với $y = -2\sqrt{2}$ thì

$$x\sqrt{x^2 + 2} = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2(x^2 + 2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ (x^2 + 1)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \left\{\sqrt{\sqrt{3} - 1}; -\sqrt{2}\right\}$

2)

$$\begin{cases} (x + y)^2 = xy + 3y - 1 & (1) \\ x + y = \dfrac{x^2 + y + 1}{1 + x^2} & (2) \end{cases}$$

Dễ thấy $y = 0$ không là nghiệm của (1). Với $y \neq 0$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 = 3y - 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y + 1 = 4y - xy - y^2 \\ x^2 + 1 = 3y - xy - y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + y + 1}{x^2 + 1} = \frac{y(4 - x - y)}{y(3 - x - y)} = \frac{x + y - 4}{x + y - 3} \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow x+y=\dfrac{x+y-4}{x+y-3}$ (4)

Đặt $x+y=a$. Phương trình (4) trở thành:

$$a=\frac{a-4}{a-3}\Rightarrow a^2-3a=a-4\Leftrightarrow a^2-4a+4=0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2=0\Leftrightarrow a=2$$

$$\Rightarrow x+y=2\Leftrightarrow y=2-x$$

Thay $y=2-x$ vào (2) được:

$$2=\frac{x^2+2-x+1}{1+x^2}\Leftrightarrow 2+2x^2=x^2-x+3\Leftrightarrow x^2+x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=\frac{5\mp\sqrt{5}}{2}$$

Thử lại ta thấy $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ là các nghiệm của hệ đã cho. Vậy

…

Câu 3.

1) Khi $m=2$ thì phương trình (1) trở thành:

$$x^2-6x+8=0 \qquad (2)$$

Giải phương trình (2) được $x_1=4;x_2=6$

Vậy khi $m=2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm: $x_1=4;x_2=6$.

2) Xét $\Delta'=(m+1)^2-m^2-4=2m-3$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'\ge 0\Leftrightarrow m\ge 1,5$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên:

$$x_1^2-2(m+1)x_1+m^2+4=0\Leftrightarrow x_1^2=2(m+1)x_1-m^2-4$$

Theo đề bài:

$$x_1^2+2(m+1)x_2=3m^2+16$$

$$\Leftrightarrow 2(m+1)x_1-m^2-4+2(m+1)x_2=3m^2+16$$

$$\Leftrightarrow 2(m+1)(x_1+x_2)=4m^2+20$$

Mà $x_1+x_2=2(m+1)$ (theo hệ thức Vi-ét) nên:

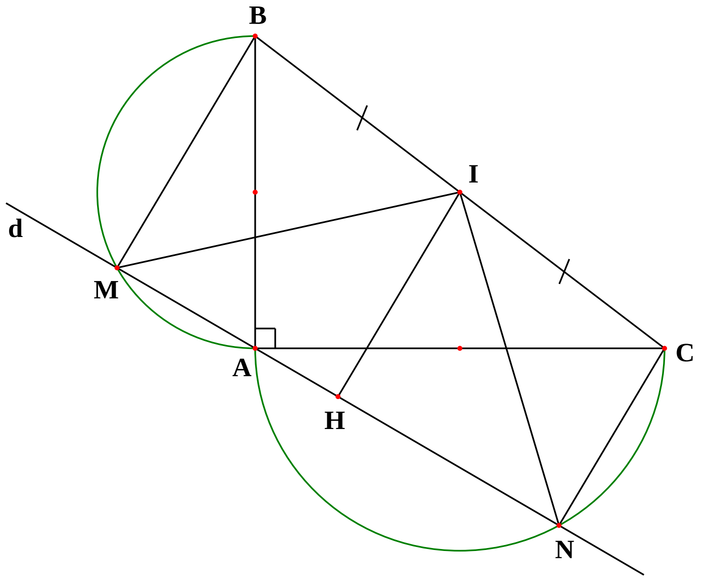
$$4(m+1)^2=4m^2+20$$

$$\Leftrightarrow 4m^2+8m+4=4m^2+20$$

$$\Leftrightarrow m=2 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy m = 2 là giá trị cần tìm.

Câu 4.



1) Vì AMB, ANC là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên:

$AMB = 90^o \Rightarrow MA \perp MB$

$ANC = 90^o \Rightarrow NA \perp NC$

$\Rightarrow$ MB // NC $\Rightarrow$ BMNC là hình thang

Lại có $AMB = 90^o$ nên BMNC là hình thang vuông.

2) Gọi H là trung điểm của MN

$\Rightarrow$ IH là đường trung bình của hình thang BMNC

$\Rightarrow$ IH // BM $\Rightarrow IH \perp MN$

Δ IMN có HM = HN và $IH \perp MN$

$\Rightarrow$ Δ IMN cân tại I

3) Gọi P là chu vi tứ giác BMNC. Ta có:

P = BC + BM + MN + CN = BC + (MA + MB) + (NA + NC)

Dễ chứng minh bất đẳng thức $a + b \le \sqrt{2(a^2 + b^2)}$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có:

$MA + MB \le \sqrt{2(MA^2 + MB^2)}$

Mà $MA^2 + MB^2 = AB^2$ (theo định lí Py-ta-go)

$\Rightarrow MA + MB \le \sqrt{2AB^2} = AB\sqrt{2}$

Tương tự: $NA + NC \le \sqrt{2AC^2} = AC\sqrt{2}$

$\Rightarrow P \le BC + \sqrt{2}(AB + AC)$

Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} MA = MB \\ NA = NC \end{cases} \Leftrightarrow MAB = NAC = 45^o$$

Vậy khi d tạo với tia AB và tia AC các góc 45º thì chu vi tứ giác BMNC đạt giá trị lớn nhất là $BC + \sqrt{2}(AB + AC)$

Câu 5.

Chọn điểm rơi $x = z = 1; y = 2$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki, ta có:

$(x+1)^2 \le 2(x^2+1)$

$(y+2)^2 \le 2(y^2+4)$

$(z+3)^2 = (z+1+1+1)^2 \le 4(z^2+3)$

$$\Rightarrow P \ge \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{0,5(y^2+4)} + \frac{4}{2(z^2+3)}$$

Dễ chứng minh $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \ge \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ với $x, y, z > 0$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có:

$$P \ge \frac{(1+1+2)^2}{2(x^2+1)+0,5(y^2+4)+2(z^2+3)} = \frac{16}{2(x^2+z^2)+0,5y^2+10}$$

Từ GT: $x^2 + y^2 + z^2 \le 3y \Rightarrow x^2 + z^2 \le 3y - y^2$

$\Rightarrow 2(x^2+z^2) + 0,5y^2 + 10 \le 2(3y - y^2) + 0,5y^2 + 10 = -1,5y^2 + 6y + 10$

$= 16 - 1,5(y-2)^2 \le 16$

$$\Rightarrow P \ge \frac{16}{16} = 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$. Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Đề số 41

Câu 1.

1) Ta có: $P = \dfrac{2019}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{3}{x-9}$

ĐKXĐ: $\begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} - 3 \ne 0 \\ x - 9 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 9 \end{cases}$

2) Hai đường thẳng $y = \left(m^2 - 1\right)x + 7$ và $y = 3x + m + 5$ (với $m \ne \pm 1$) song song với nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1=3 \\ 7\neq m+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2=4 \\ m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\pm 2 \\ m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m=-2 \text{ (TMĐK)}$$

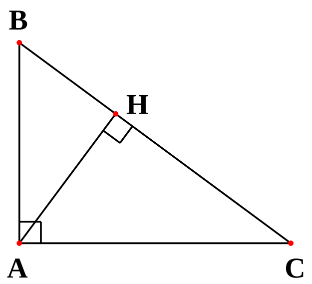
Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm.

3) Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có:

$$AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8\,(\text{cm})$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH.BC=AB.AC\Rightarrow AH=\frac{AB.AC}{BC}=\frac{6.8}{10}=4,8\,(\text{cm})$$



4) Trong hình trụ thì chiều cao bằng độ dài đường sinh

$\Rightarrow h=6\,\text{cm}$

Thể tích hình trụ là:

$V=S.h=9\pi.6=54\pi\,(\text{cm}^3)$

Câu 2.

1) Ta có:

$$P=\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right):\left(\frac{a^2+a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2+4\sqrt{a}\left(a-1\right)}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}:\frac{a\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}+1}$$

$$=\frac{a+2\sqrt{a}+1-a+2\sqrt{a}-1+4a\sqrt{a}-4\sqrt{a}}{a-1}:a\sqrt{a}$$

$$=\frac{4a\sqrt{a}}{a-1}:a\sqrt{a}=\frac{4}{a-1}$$

Vậy $P=\dfrac{4}{a-1}$ với $a>0, a\neq 1$

2) Với $a\in Z, a>0, a\neq 1\Rightarrow a-1\geq 1$

P nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{4}{a-1}\in Z\Leftrightarrow 4\,\vdots\, a-1$

Mà $a-1\geq 1\Rightarrow a-1\in\{1;2;4\}\Rightarrow a\in\{2;3;5\}$

Câu 3.

1a) Với m = 0, ta có phương trình:

$x^2-4x-5=0$

Giải phương trình được $x_1=-1;x_2=5$

1b) Phương trình $x^2+2(m-2)x-m^2-5=0$

Ta có $ac=-m^2-5<0\ \forall m$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm trái dấu

Mà $x_1<x_2\Rightarrow x_1<0<x_2$

$\Rightarrow |x_1|=-x_1$; $|x_2+1|=x_2+1$

Do đó:

$|x_1|-|x_2+1|=5\Leftrightarrow -x_1-x_2-1=5\Leftrightarrow x_1+x_2=-6$

Lại có: $x_1+x_2=-2(m-2)$ (theo hệ thức Vi-ét)

$\Rightarrow -2(m-2)=-6\Leftrightarrow m=5$

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm.

2) $\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{4-x}+2\right)=-2x \qquad (1)$

ĐK: $-4\leq x\leq 4$

Dễ thấy $x=0$ là nghiệm của phương trình (1)

Xét $x\neq 0$. Nhân cả hai vế của (1) với $\left(\sqrt{4+x}+2\right)$ được

$$x\left(\sqrt{4-x}+2\right)=-2x\left(\sqrt{4+x}+2\right)$$

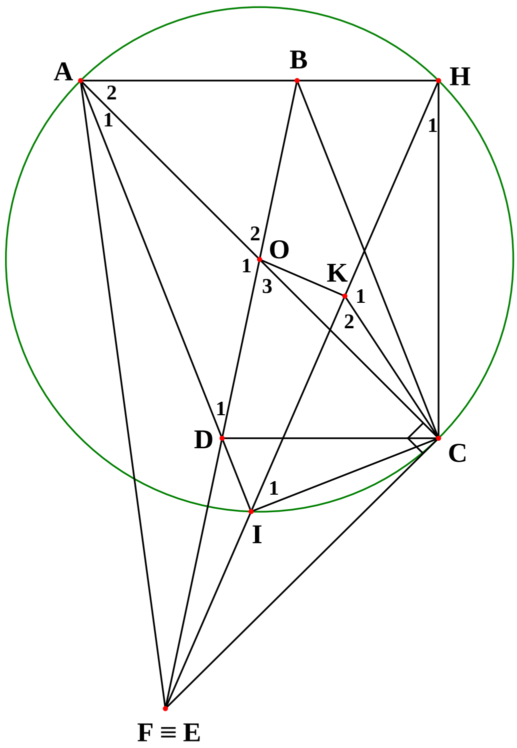
$\Rightarrow \sqrt{4-x}+2=-2\left(\sqrt{4+x}+2\right)$

$\Rightarrow \sqrt{4-x}=-2\sqrt{4+x}-6$

$\Rightarrow \sqrt{4-x}<0$ (vô nghiệm)

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x=0$

Câu 4.



1) $\Delta\, CHK$ và $\Delta\, DAO$ có:

$$HCK = D_1\ (GT)\ ;\ A_1 = H_1\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}IC\right)$$

$\Rightarrow \Delta\, CHK \sim \Delta\, DAO$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{HK}{AO} = \frac{KC}{OD} \Rightarrow HK = \frac{AO.KC}{OD} = \frac{AO.KC}{OB} \qquad (1)$$

2) Từ $\Delta\, CHK \sim \Delta\, DAO \Rightarrow K_1 = O_1 \Rightarrow K_2 = O_2$

$\Delta\, CIK$ và $\Delta\, BAO$ có:

$$K_2 = O_2\ ;\ \hat{I}_1 = A_2\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}HC\right)$$

$\Rightarrow \Delta\, CIK \sim \Delta\, BAO$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{IK}{AO} = \frac{KC}{OB} \Rightarrow IK = \frac{AO.KC}{OB} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow HK = IK$

Vậy K là trung điểm của HI.

3) Gọi F là giao điểm của BD và HI

Ta có $K_2 = O_2$ và $O_3 = O_2 \Rightarrow O_3 = K_2$

$\Rightarrow$ OKCF là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow OKF = OCF$

Vì K là trung điểm của dây HI $\Rightarrow OK \perp HI \Rightarrow OKF = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{OCF} = 90^o \Rightarrow$ FC là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow F \equiv E$

Dễ chứng minh $\Delta ECI \sim \Delta EHC$ (g-g)

$\Rightarrow EC^2 = EI.EH$ (3)

Vì $AC > BD \Rightarrow AC^2 > BD^2 \Rightarrow AC^2 > 4OB^2$ (4)

ΔACE vuông tại C $\Rightarrow AE^2 = EC^2 + AC^2$ (5)

Từ (3), (4), (5)

$\Rightarrow EI.EH + 4OB^2 < EC^2 + AC^2 = AE^2$ (đpcm)

Câu 5.

1) Ta có: $\begin{cases} (x-y)^2 + 4 = 3y - 5x + 2\sqrt{(x+1)(y-1)} & (1) \\ \dfrac{3xy - 5y - 6x + 11}{\sqrt{x^3+1}} = 5 & (2) \end{cases}$

ĐK: $x \ge -1; y \ge 1$

Đặt $\sqrt{x+1} = a$, $\sqrt{y-1} = b$ $(a > 0, b \ge 0) \Rightarrow x = a^2 - 1; y = b^2 + 1$

Phương trình (1) trở thành:

$$(a^2 - b^2 - 2)^2 + 4 = 3(b^2 + 1) - 5(a^2 - 1) + 2ab$$
$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2 - 2)^2 + 4 - 3b^2 + 5a^2 - 8 - 2ab = 0$$
$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2 - 2)^2 + 4 + 4(a^2 - b^2 - 2) + a^2 + b^2 - 2ab = 0$$
$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (a - b)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2[(a+b)^2 + 1] = 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow a = b$$

$\Rightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{y-1} \Rightarrow y = x + 2$ (3)

$(2) \Rightarrow 3xy - 5y - 6x + 11 = 5\sqrt{x^3+1}$ (4)

Thay (3) vào (4) được:

$$3x(x+2) - 5(x+2) - 6x + 11 = 5\sqrt{x^3+1}$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 5x - 10 - 6x + 11 = 5\sqrt{x^3+1}$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 1 = 5\sqrt{x^3+1}$$
$$\Leftrightarrow 3(x^2 - x + 1) - 2(x+1) - 5\sqrt{x+1}\sqrt{x^2 - x + 1} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - 2\sqrt{x+1}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} - 2\sqrt{x+1} = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = 4(x+1)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0$$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$ (TMĐK)

Với $x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{9\pm\sqrt{37}}{2}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$(x;y)\in\left\{\left(\frac{5+\sqrt{37}}{2};\frac{9+\sqrt{37}}{2}\right);\left(\frac{5-\sqrt{37}}{2};\frac{9-\sqrt{37}}{2}\right)\right\}.$$

2) Ta có:

$$x+y+z=2019xyz\Rightarrow 2019x^2=\frac{x^2+xy+xz}{yz}$$

$$\Rightarrow 2019x^2+1=\frac{x^2+xy+xz+yz}{yz}=\frac{(x+y)(x+z)}{yz}=\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(\frac{x}{z}+1\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2019x^2+1}=\sqrt{\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(\frac{x}{z}+1\right)}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+2\right)=1+\frac{x}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

(theo BĐT Cô-si)

$$\Rightarrow \frac{x^2+1+\sqrt{2019x^2+1}}{x}\le\frac{x^2+1+1+\frac{x}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}{x}=x+\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Tương tự:

$$\frac{y^2+1+\sqrt{2019y^2+1}}{y}\le y+\frac{2}{y}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{z^2+1+\sqrt{2019z^2+1}}{z}\le z+\frac{2}{z}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

$$\Rightarrow VT\le x+y+z+3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Chứng minh được $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{3(xy+yz+zx)}{xyz}=\frac{2019.3(xy+yz+zx)}{2019xyz}$$

$$\le\frac{2019.(x+y+z)^2}{x+y+z}=2019(x+y+z)$$

$$\Rightarrow VT\le 2020(x+y+z)=2020.2019xyz=VP$$

$\Rightarrow$ Đpcm.

Đề số 42

Bài 1. Điều kiện: $a>0$ và $a\neq 1$. Ta có:

$$\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2=\left(a+1+2\sqrt{a}\right)-\left(a+1-2\sqrt{a}\right)=4\sqrt{a}$$

và

$$\left(\sqrt{2a+1}+\sqrt{a+1}\right)\left(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a+1}\right)=(2a+1)-(a+1)=a.$$

Do đó, phương trình đã cho có thể được viết lại thành $\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}=1$.

Phương trình này tương đương với $\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)-\left(\sqrt{a}-1\right)}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}=1$ hay $\dfrac{2}{a-1}=1$.

Như thế, ta có $a-1=2$ hay $a=3$ (thỏa mãn).

Vậy có duy nhất một giá trị a thỏa mãn yêu cầu đề bài là $a=3$.

Bài 2.

a) Điều kiện: $x\geq\dfrac{5}{2}$. Từ phương trình đã cho, ta thấy có hai trường hợp xảy ra:

- Trường hợp 1: $\sqrt{x+2}-x=0$. Trong trường hợp này, ta có $x+2=x^2$, hay $(x+1)(x-2)=0$, tức $x=-1$ hoặc $x=2$, vô lý vì $x\geq\dfrac{5}{2}$.
- Trường hợp 2: $\sqrt{2x-5}-1=0$. Trong trường hợp này, ta có $2x-5=1$, tức $x=3$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

b) Điều kiện: $x+y+3\geq 0$ và $2x+3y+1\geq 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có $x+y+3=2x+3y+1$, tức $x=2-2y$.

Từ đây và các điều kiện $x+y+3\geq 0, 2x+3y+1\geq 0$, ta phải có $5-2y\geq 0$ và $5-y\geq 0$, tức $y\leq\dfrac{5}{2}$.

Bây giờ, thay $x=2-2y$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$(2-2y)(y+1)-4(2-y)+54=0$ hay $-2(y+4)(y-6)=0$.

Do $y\leq\dfrac{5}{2}$ nên từ đây, ta có $y=-4$ (tương ứng $x=10$). Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x,y)=(10,-4)$.

Bài 3. Phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn x có các hệ số tương ứng $a=1$, $b=-(2m+1)$ và $c=-12$. Do a và c trái dấu nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 trái dấu nhau. Theo Viet, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m+1\\x_1x_2=-12\end{cases}$.

a) Do $x_1+x_2-2x_1x_2=25$ nên ta có $2m+1+24=25$, tức $m=0$.

Vậy có duy nhất một giá trị m thỏa mãn yêu cầu này là $m=0$.

b) Ta có $x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)=(2m+1)(x_1-x_2)$. Do đó, để thỏa mãn yêu cầu đều bài thì ta phải có $(2m+1)(x_1-x_2-7)=0$, tức $m=-\frac{1}{2}$ hoặc $x_1-x_2=7$.

Ở trường hợp thứ hai, do $x_1+x_2=2m+1$ nên ta có $x_1=m+4$ và $x_2=m-3$.

Từ đây, do $x_1x_2=-12$ nên $(m+4)(m-3)=-12$, tức $m(m+1)=0$. Suy ra $m=0$ hoặc $m=-1$.

Vậy có ba giá trị m thỏa mãn yêu cầu này là $m=0$, $m=-1$ và $m=-\frac{1}{2}$.

Bài 4.

a) *Ở trường hợp của ông A:* Theo giả thiết, ta thấy giá bán lẻ một lít xăng RON 95 từ 16 giờ chiều ngày $2/5/2019$ là $17600(1+0,25)=22000$ (đồng). Khi ông A mua 100 lít xăng RON 95 vào ngày $2/1/2019$ thì do trong khoảng thời gian gian chưa có điều chỉnh giá nên giá một lít xăng RON 95 chính là giá niêm yết ngày $1/1/2019$, suy ra số tiền ông A đã bỏ ra là $17600.100=1760000$ (đồng).

Tương tự như trên, giá xăng RON 95 vào ngày $3/5/2019$ chính là giá niêm yết lúc 16 giờ chiều ngày $2/5/2019$. Do đó, với cùng số tiền đã bỏ ra để mua 100 lít xăng RON 95 vào ngày $2/1/2019$ thì vào ngày $3/5/2019$, ông A chỉ có thể mua được $176000\div 22000=80$ lít xăng RON 95.

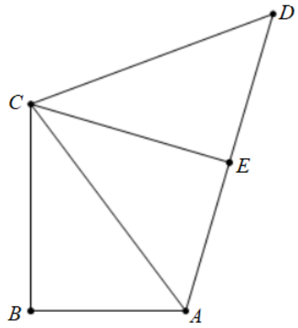
Ở trường hợp ông B: Gọi x là số lít xăng RON 95 mà ông B đã mua trong ngày $2/1/2019$, y là số lít xăng RON 95 mà ông B đã mua trong ngày $3/5/2019$. Rõ ràng $x,y\ge 0$. Theo đề bài, ta có: $\begin{cases}x+y=200\\17600x+22000y=3850000\end{cases}$. Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}x+y=200\\4x+5y=875\end{cases}$.

Do $4x+5y=4(x+y)+y=800+y$ nên ta có $y=75$, từ đó suy ra $x=125$ (thỏa mãn). Vậy số lít xăng RON 95 mà ông B đã mua vào ngày $3/5/2019$ là 75 lít.

b) Theo đề bài, ta có $AD=2AB=\frac{3}{2}BC$.

Do $AB+BC+CD+DA=18$ nên $\frac{3}{4}BC+BC+\frac{5}{4}BC+\frac{3}{2}BC=18$, hay $\frac{9}{2}BC=18$. Từ đây, ta tính được $BC=4(cm)$, $AB=3(cm)$, $CD=5(cm)$ và $DA=6(cm)$.

Do $AC=CD$ nên ta có $AC=5(cm)$. Suy ra $AB^2+BC^2=3^2+4^2=5^2=AC^2$. Từ đó, theo định lý Pythagoras đảo, tam giác ABC vuông tại B.



Do $AC = CD$ nên tam giác ACD cân tại C. Gọi E là trung điểm của AD thì ta có $CE \perp AD$.
Áp dụng định lý Pythagoras trong tam giác AEC vuông tại E, ta có

$CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Từ đây, ta tính được: $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}.AB.BC + \frac{1}{2}.AD.CE$

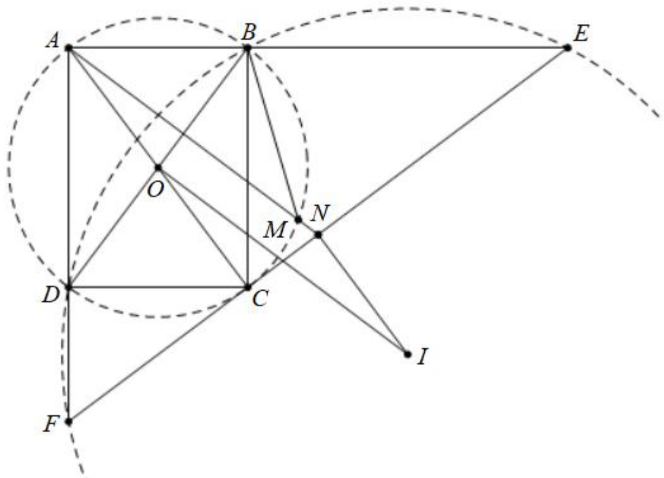
$= \frac{1}{2}.3.4 + \frac{1}{2}.6.4 = 18\left(cm^2\right)$.

Bài 5.

a) Theo tính chất của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp, ta có $\angle DCF = \angle DAC$ (cùng chắn cung DC của đường tròn $(\mathcal{T})$). Lại có $\angle DAC = \angle ADB$ (tính chất hình chữ nhật) và $\angle DCF = \angle AEF$ (đồng vị) nên $\angle AEF = \angle DCF = \angle DAC = \angle ADB$.

Xét tam giác ADB và tam giác AEF, ta có góc DAB chung và $\angle AEF = \angle ADB$ (chứng minh trên) nên $\Delta ADB \backsim \Delta AEF$ (góc – góc). Từ đó suy ra $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AF}$, hay $AB.AE = AD.AF$.

Bây giờ, do $\angle BEF = \angle AEF = \angle ADB$ nên ta có $\angle BEF + \angle BDF = \angle ADB + \angle BDF = 180^0$.
Từ đó suy ra tứ giác $BEFD$ nội tiếp.



b) Theo tính chất của góc nội tiếp, ta có $\angle AMB = \angle ADB$ (cùng chắn cung AB của đường tròn $(\mathcal{T})$). Lại có $\angle ADB = \angle AEF$ nên $\angle AMB = \angle AEF$.

Từ đây, ta có $\angle BEN + \angle BMN = \angle AEF + \angle BMN = \angle AMB + \angle BMN = 180^0$. Suy ra tứ giác $BMNE$ nội tiếp.

Bây giờ, do $AN \perp BD$ nên ta có $\angle NAE = 90^0 - \angle ABD = \angle DBC = \angle ADB = \angle AEF = \angle AEN$. Do đó tam giác NAE cân tại N, suy ra $NA = NE(1)$.

Mặt khác, do $\angle NAE = \angle AEN, \angle NAE = 90^0 - \angle NAF$ và $\angle AEN = 90^0 - \angle AFN$ nên ta cũng có $\angle NAF = \angle AFN$, suy ra tam giác NAF cân tại N. Từ đó ta có $NF = NA(2)$.

Từ (1) và (2) ta suy ra $NE = NF$, tức N là trung điểm của đoạn EF.

c) Do N là trung điểm của EF và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF nên $NI \perp EF$. Lại có EF là tiếp tuyến tại C của đường tròn $(\mathcal{T})$ và AC là đường kính của đường tròn $(\mathcal{T})$ nên $AC \perp EF$. Từ đó suy ta $AC // NI$, tức $AO // NI(3)$.

Do tứ giác $BEFD$ nội tiếp nên D thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF. Ta lại có O là trung điểm của BD và I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF nên $IO \perp BD$. Mà $NA \perp BD$ (theo giả thiết) nên $IO // NA(4)$.

Từ (3) và (4) ta suy ra tứ giác $ANIO$ là hình bình hành. Từ đó $IN = OA = 2a$.

Đề số 43

Câu 1.

a) Có: $|b| > 2\sqrt{|ac|}$ nên $b^2 > 4ac$.

Suy ra $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Có $|b| < a + c \Leftrightarrow -a - c < b < a + c \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c > 0 \\ a - b + c > 0 \end{cases}$

Suy ra $(1 - x_1)(1 - x_2) = 1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2 = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{a + b + c}{a} > 0$

Và $(1 + x_1)(1 + x_2) = 1 + (x_1 + x_2) + x_1x_2 = 1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{a - b + c}{a} > 0$.

b) Có $(1 - x_1)(1 - x_2) > 0$

Xét trường hợp: $\begin{cases} x_1 > 1 \\ x_2 > 1 \end{cases} \Rightarrow x_1x_2 > 1 \Rightarrow \frac{c}{a} > 1 \Rightarrow c > a$

Mâu thuẫn với giả thiết $a > c$.

Vậy $x_1, x_2 < 1$.

Có $(1 + x_1)(1 + x_2) > 0$

Xét trường hợp: $\begin{cases} x_1 < -1 \\ x_2 < -1 \end{cases} \Rightarrow x_1x_2 > 1 \Rightarrow \frac{c}{a} > 1 \Rightarrow c > a$

Mâu thuẫn với giả thiết $a > c$.

Vậy $x_1, x_2 > -1$.

Câu 2.

a) $n=3k$ suy ra $2^n+1=8^k+1\equiv(-1)^k+1\pmod 9$. Suy ra k lẻ, $k=2t+1$.

Suy ra $n=3(2t+1)=6t+3$.

Nếu $n=3k+1$ ta có $2^n+1=3.8^k+1\equiv(-1)^k.3+1\pmod 9$ suy ra 2^n+1 không chia hết cho 9.

Vậy với $n=6t+2$, với t là số tự nhiên là các số cần tìm.

b) **Cách 1**: Ta có $2^{km}-1\vdots 2^m-1$. Từ $2^{2n}=(2^n+1)(2^n-1)$.

Đặt $2n=km+q$ $(0\le q<m)$.

Khi đó $2^{2n}-1=2^{km+q}-2^q+2^q-1=2^q(2^{km}-1)+2^q-1$ chia hết cho 2^m-1, suy ra 2^q-1 chia hết cho m mà $0\le 2^q-1<2^m-1$, suy ra $q=0$.

Do đó $2^n=km$.

Trường hợp 1: Nếu m lẻ, suy ra k chẵn, $k=2k'$, suy ra $n=k'm$, $2^n+1=2^{k'm}+1=2^{k'm}-1+2$ chia hết cho 2^m-1, suy ra 2 chia hết cho 2^m-1 vô lý.

Trường hợp 2: Nếu m chẵn $m=2m'$ nên $n=km'$, suy ra $2^{km'}+1$ chia hết cho 2^m-1, mà 2^m-1 chia hết cho $2^{m'}-1$ nên $2^{km'}+1$ chia hết cho $2^{m'}-1$, suy ra 2 chia hết cho $2^{m'}-1$ vô lý vì $m'>1$.

Cách 2: Ta có $2^{n-m}(2^m-1)\vdots 2^m-1$, suy ra $2^n-2^{n-m}\vdots 2^m-1$, mà $2^n+1\vdots 2^m-1$ suy ra $2^{n-m}+1$ chia hết cho 2^m-1.

Lý luận tương tự ta có $2^{n-km}+1$ chia hết cho 2^m-1.

Giả sử $n=km+q,\ 0\le q<m$.

Chọn k như trên, ta có 2^q+1 chia hết cho 2^m-1. Mà $q<m$ nên $2^q+1=2^m-1$, giải ra $q=1, m=2$ (vô lý).

Câu 3.

a) Ta có $a^4-b^4=4(a-b)$, mà $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ nên đẳng thức được viết lại thành $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)=4(a-b)$.

Mà $a\ne b$ nên $(a+b)(a^2+b^2)=4$. Vì $a^2+b^2>0$ (do a,b không thể đồng thời bằng 0) nên ta có $a+b>0$.

Ngoài ra, ta cũng có đánh giá $a^2+b^2>\dfrac{(a+b)^2}{2}$ (đẳng thức không xảy ra vì $a\ne b$)

Nên $4>\dfrac{(a+b)^3}{2}\Leftrightarrow(a+b)^3<8\Leftrightarrow a+b<2$.

Vậy ta được $0<a+b<2$.

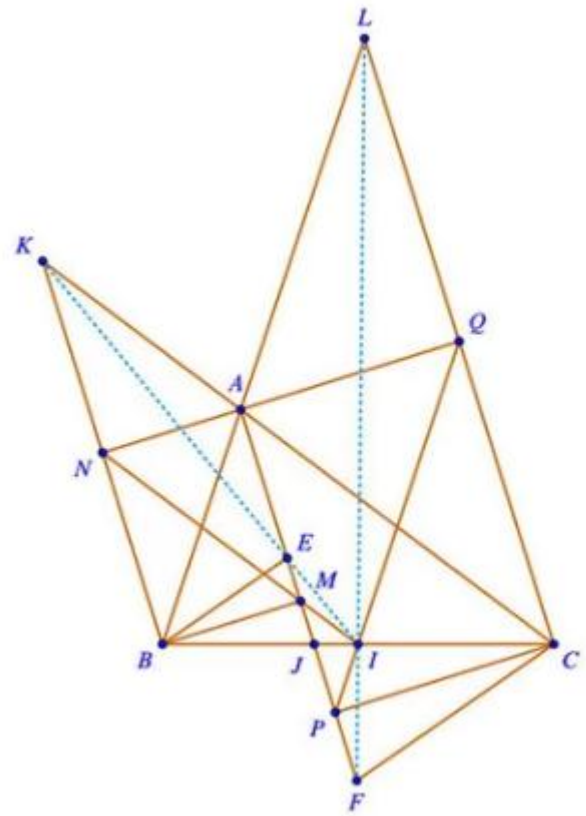
b) Rõ ràng $ab\ne 0$, ta sẽ chứng minh a,b trái dấu. Ta xét hai trường hợp:

- Nếu $a>0,b>0$ thì $a^4-4a=a\left(a^3-4\right)>0$ nên $a>\sqrt[3]{4}>1$. Tương tự thì $b>1$. Khi đó $a+b>2$, mâu thuẫn với a).
- Nếu $a<0,b<0$ thì $a+b<0$, cũng mâu thuẫn với a).

Do đó a,b trái dấu và $ab<0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a<0<b$ thì đặt $c=-a>0$, ta viết lại $c^4+4c=b^4-4b=k>0$. Từ đây dễ thấy $(b-c)\left(b^2+c^2\right)=4$ và $b\neq c$. Ta cần chứng minh $-\sqrt{k}<ab \Leftrightarrow -\sqrt{k}<-bc \Leftrightarrow bc<\sqrt{k}$.

Câu 4.



a) Tứ giác ANBM là hình chữ nhật nên hai đường chéo MN, AB bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Suy ra MN là trung điểm của AB.

Chứng minh tương tự ta cũng có PQ đi qua trung điểm của AC

b) Do ANBM là hình chữ nhật và NQ là phân giác ngoài của BAC nên $MNA=BAN=CAQ$

Mà MNA và CAQ ở vị trí đồng vị nên MN // AC.

Ta có MN // AC và MN đi qua trung điểm của AB nên MN là đường trung bình ứng với cạnh AC của tam giác ABC. Suy ra MN đi qua trung điểm I của BC.

Chứng minh tương tự ta cũng có PQ đi qua trung điểm I của BC. Vậy NM và PQ cắt nhau tại trung điểm I của BC.

c) Ta có: $IBC=ABC-ABE=ABC-ACB$

Tương tự ta cũng có: $ICB = ABC - ACB$

Do đó: $IBC = ICB$.Mà hai hóc này ở vị trí so le trong, suy ra BE // FC, từ đây ta sử dụng định lý Thales trong tam giác JFC và BE //FC (J là giao điểm của d_1 và BC), ta có: $\frac{BE}{CF} = \frac{JB}{JC}$

Mặt khác theo tính chất tia phân giác ta có: $\frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$

Kết hợp hai kết quả lại ta được: $\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC}$

d) Ta có: $BEC = ABE + BAE = BAC + \frac{1}{2}BAC = \text{EJB}$.

Do đó tam giác BEJ cân tại B. Mà BM vuông góc với EJ nên ta có M là trung điểm của EJ. Lại có tam giác KAB cân tại A (có AN vừa là phân giác vừa là đường cao). Suy ra N là trung điểm của KB. Bây giờ sử dụng định lý Thales trong tam giác IBN với MJ // BN, ta có: $\frac{IJ}{IB} = \frac{MJ}{BN} = \frac{\frac{1}{2}EJ}{\frac{1}{2}KB} = \frac{EJ}{KB}$.

Hai tam giác IJE và IBK có $IJE = IBK$ (đồng vị) và $\frac{IJ}{IB} = \frac{EJ}{KB}$ nên đồng dạng với nhau (c-g-c). Suy ra $EIJ = KIB$. Từ đó ta có K, E, I thẳng hàng. Vậy đường thẳng KE đi qua trung điểm I của BC.

Chứng minh tương tự, ta có LF đi qua trung điểm I của BC. Do đó, KE và LF cắt nhau tại trung điểm I của BC.

Câu 5.

a) Giả sử ngược lại rằng $n \geq \frac{k+10}{2}$ thì $2n - k \geq 0$. Gọi A là tập hợp các quốc gia có đúng 1 học sinh tham dự buổi gặp gỡ và B là tập hợp các quốc gia còn lại. Khi đó, mỗi quốc gia trong B sẽ có ít nhất 2 học sinh.

Ta chọn tất cả học sinh trong A và mỗi quốc gia trong B, chọn 2 học sinh thì có $k + 2(n-k) = 2n - k$ học sinh.

Các học sinh này có đặc điểm là: không có 3 học sinh nào đến từ cùng cùng quốc gia. Do $2n - k \geq 10$ nên có thể chọn ra trong đó 10 học sinh nào đó không thỏa mãn đề bài.

b) Theo câu a) ta có $2n - k < 10$ nên $2n - k \leq 9 \Leftrightarrow n \leq \frac{k+9}{2}$.

Do số học sinh tổng cộng là 60, để chỉ ra có 15 học sinh đến từ cùng quốc gia thì theo nguyên lý Dirichlet, ta chỉ cần chỉ ra rằng $\frac{60-k}{n-k} \geq 15 \Leftrightarrow 15n - 14k \leq 60$.

Ta sẽ chứng minh đánh giá trên đúng với mọi $(n;k)$. Vì ta đã có $n \leq \frac{k+9}{2}$ nên ta sẽ đưa về chứng minh $15\left(\frac{k+9}{2}\right)-14k\le 60\Leftrightarrow k\ge \frac{15}{13}$. Do đó, với $k\ge 2$ thì khẳng định đúng. Tiếp theo, ta xét hai trường hợp:

- Nếu $k=0$ thì theo (*), ta phải có $n\le 4$ nên $15n-14k=15n\le 60$, đúng.
- Nếu $k=1$ thì theo (*), khi đó loại trừ học sinh ở nước đó ra thì còn lại 59 học sinh, đến từ 4 quốc gia. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại 15 học sinh đến từ cùng quốc gia.

Đề số 44

Câu 1.

1) $A=2(\sqrt{x}-1)+x+\sqrt{x}-2\sqrt{x}$

$=x+\sqrt{x}-2=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)$

$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)\le 0\Leftrightarrow \sqrt{x}-1\le 0\Leftrightarrow 0\le x\le 1.$

Đối chiếu điều kiện giá trị cần tìm $0\le x<1$.

2) Vì $ac=-2<0$ nên PT có hai nghiệm phân biệt và vì $x_1<x_2$ nên $x_1<0<x_2$

do đó $-x_1-x_2=-4\Leftrightarrow x_1+x_2=4.$ Theo định lí Vi et $x_1+x_2=2(m+1).$

Nên $2(m+1)=4\Leftrightarrow m=1.$

Câu 2. 1) $\begin{cases}x+6y=13\\2x^2=(x+2y-3)(2-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{13-x}{6}\\2x^2=\left(x+2.\dfrac{13-x}{6}-3\right)(2-x)\end{cases}.$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{13-x}{6}\\2x^2=\dfrac{2(4-x^2)}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{13-x}{6}\\x=\pm 1\end{cases}.$$

Vậy nghiệm $(x;\,y)$ của hệ phương trình là: $(1;\,2)$, $\left(-1;\,\frac{7}{3}\right)$.

2) $x^6+\left(x^3-3\right)^3=3x^5-9x^2-1\Leftrightarrow\left(x^2\right)^3+\left(x^3-3\right)^3+1=3x^2\left(x^3-3\right)$

Đặt: $x^2=a,\ x^3-3=b$

Ta có phương trình: $a^3+b^3+1=3ab\Leftrightarrow(a+b)^3+1-3ab(a+b)-3ab=0$

$\Leftrightarrow(a+b+1)\left[(a+b)^2-(a+b)+1\right]-3ab\left[(a+b)+1\right]=0$

$\Leftrightarrow(a+b+1)\left(a^2+b^2-ab-a-b+1\right)=0$

+) $a^2+b^2-ab-a-b+1=0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2=0 \Leftrightarrow a=b=1$

$\Rightarrow x^2=x^3-1=1 \quad$ (VN)

+) $a+b+1=0 \Rightarrow x^2+x^3-3+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+2)=0 \Leftrightarrow x=1.$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1.$

Câu 3.

1) Ta có $4.\overline{abc}=21(19a+2b)+(a-2b+4c)$

Vì $21(19a+2b)\equiv 0(\mathrm{mod}\,21)$, nên $4.\overline{abc}\vdots 21$ khi và chỉ khi $(a-2b+4c)\vdots 21$

mà $(4,21)=1$ nên $\overline{abc}\vdots 21 \Leftrightarrow 4.\overline{abc}\vdots 21 \Leftrightarrow (a-2b+4c)\vdots 21$

2) Ta có $z=x^y+1$, mà x,y là các số nguyên tố nên $x\geq 2, y\geq 2 \Rightarrow z\geq 5$. Do đó z là số nguyên tố lẻ.

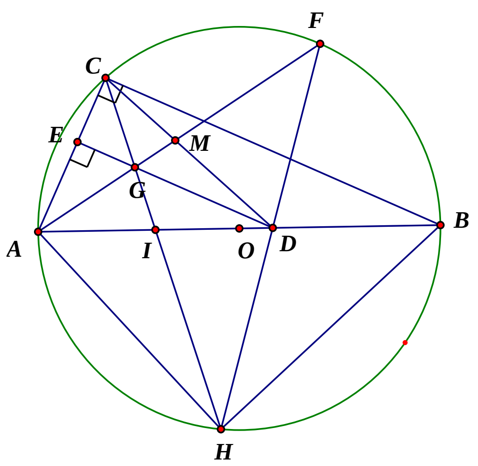
Vì $x^y=z-1$ nên x^y là số chẵn, vậy $x=2$. Khi đó $z=2^y+1$

Nếu y lẻ thì $2^y\equiv 2(\mathrm{mod}\,3) \Rightarrow 2^y+1\vdots 3 \Rightarrow z\vdots 3$ vô lý vì z là số nguyên tố.

Nếu y chẵn, y nguyên tố suy ra $y=2$ và $z=2^2+1=5.$

Vậy các số cần tìm là $x=y=2,\ z=5.$

Câu 4.



a) Vì $DE//BC$ nên

$ADE=ABC=AHC=AHG$ do đó tứ giác $AGDH$ nội tiếp.

b) Từ tứ giác $AGDH$ nội tiếp, ta có: $DHG=DAG=BAF=FAC=CHF=FHG$

Suy ra hai tia HD và HF trùng nhau.

Vậy H, D, F thẳng hàng.

c) Gọi M là giao điểm của CD và AF.

Ta có: $\frac{IA}{ID}.\frac{MD}{MC}.\frac{EC}{EA}=1$ (Định lý Ceva)

$\frac{MD}{MC}=\frac{AD}{AC}$ (Phân giác)

$\frac{EC}{EA}=\frac{DB}{DA}=\frac{AC}{DA}$ (Talet)

Suy ra: $\frac{IA}{ID}.\frac{AD}{AC}.\frac{AC}{DA}=1\Leftrightarrow\frac{IA}{ID}=1.$

Vậy I là trung điểm AD.

Câu 5. Ta có: $a+b+c+2=abc\Leftrightarrow\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1.$

Đặt $x=\frac{1}{a+1},y=\frac{1}{b+1},z=\frac{1}{c+1}.$

Ta có $x+y+z=1$ và $a=\frac{1}{x}-1=\frac{y+z}{x},b=\frac{z+x}{y},c=\frac{x+y}{z}.$

$$\frac{2}{\sqrt{ab}}+\frac{2}{\sqrt{bc}}+\frac{2}{\sqrt{ca}}=2\sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}}+2\sqrt{\frac{yz}{(y+x)(z+x)}}+2\sqrt{\frac{xz}{(x+y)(z+y)}}$$

$$\leq\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}+\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}+\frac{x}{x+y}+\frac{z}{z+y}=3.$$

Đề số 45

Câu 1.

Nếu $a=0$ thì ta có $b^3=0$ suy ra $b=0=a$, vô lý vì $a\neq b$. Do đó $a\neq 0$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $b\neq 0$. Từ đó giả thiết của bài toán có thể được viết lại thành $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}=1-\frac{3}{ab}$.

Đặt $x=\frac{1}{a}$ và $y=\frac{1}{b}$ thì ta có $x\neq y$ và $x^3+y^3=1-3xy$.

Sử dụng kết quả quen thuộc $A^3+B^3+C^3=(A+B+C)\left(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA\right)$, ta được

$0=x^3+y^3-1+3xy=x^3+y^3+(-1)^3-3.x.y.(-1)=(x+y-1)\left(x^2+y^2+1-xy+x+y\right)$.

Mặt khác ta lại có $x^2+y^2+1-xy+x+y=\frac{1}{2}\left[(x+1)^2+(y+1)^2+(x-y)^2\right]>0$.

Nên từ kết quả ở trên, ta suy ra $x+y=1$, tức là $a+b=ab$. Vậy $T=0$.

Câu 2.

Sử dụng định lý Vieta, ta có $S_1=a_1+a_2=-\frac{n_1}{m_1}$, $S_2=b_1+b_2=-\frac{n_2}{m_2}$, $S_3=c_1+c_2=-\frac{n_3}{m_3}$.

Ta có $P(c_1)-P(c_2)=m_1\left(c_1^2-c_2^2\right)+n_1(c_1-c_2)=\left(c_1-c_2\left[m_1(c_1+c_2)+n_1\right]\right)=m_1(c_1-c_2)(S_3-S_1)$.

Tương tự, ta cũng có $Q(c_1)-Q(c_2)=m^2(c_1-c_2)(S_3-S_2)$.

Do $P(c_1)-P(c_2)+Q(c_1)-Q(c_2)=0$ và $c_1 \neq c_2$ nên từ hai biến đổi trên, ta suy ra

$$m_1(S_3-S_1)+m_2(S_3-S_2)=0. \ (1)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có

$$m_2(S_1-S_2)+m_3(S_1-S_3)=0. \ (2)$$

$$m_3(S_2-S_3)+m_1(S_2-S_1)=0. \ (3)$$

Từ (1), (2) và (3), có thể thấy vai trò của S_1, S_2, S_3 là như nhau. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $S_1=\max\{S_1, S_2, S_3\}$. Khi đó, ta có $S_1-S_2 \geq 0$ và $S_1-S_3 \geq 0$. Lại có $m_2, m_3 > 0$ nên $VT_{(2)} \geq 0$. Để xảy ra dấu đẳng thức như (2) thì dấu bằng trong các đánh giá phải xảy ra, tứ ta phải có $S_1=S_2=S_3$. Đây chính là kết quả cần chứng minh.

Câu 3.

a) Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $x^2(y-2)^2+y^3-3y^2+4=3$

hay $(y-2)^2(x^2+y+1)=3$.

Suy ra $(y-2)^2=1$ và $x^2+y+1=3$. Giải ra, ta được $x=\pm 1$ và $y=1$. Vậy có hai cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài là $(1;1)$ và $(-1;1)$.

b) Do $a^3+b^3+c^3$ chẵn nên trong các số a, b, c có ít nhất một số chẵn. Từ đó suy ra tích abc chia hết cho 2. (1)

Giả sử trong ba số a, b, c không có số nào chia hết cho 7. Ta thấy rằng, với mọi x nguyên không chia hết cho 7 thì $x \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod 7$, suy ra $x^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$.

Do đó $a^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$, $b^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$, $c^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$.

Suy ra $a^3+b^3+c^3 \equiv -3, -1, 1, 3 \pmod 7$, tức $a^3+b^3+c^3$ không chia hết cho 7, mâu thuẫn. Vậy trong ba số a, b, c phải có ít nhất một số chia hết cho 7.

Từ đó suy ra tích abc chia hết cho 7. (2)

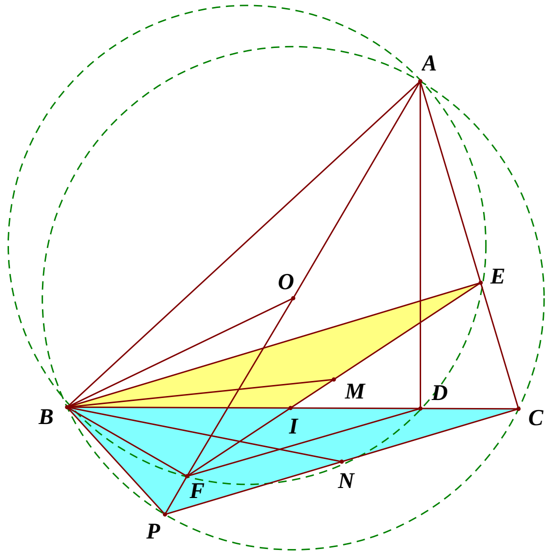
Từ (1) và (2) với chú ý $(2;7)=1$, ta có abc chia hết cho 14.

Câu 4.

a) Ta có $\angle AFB=\angle ADB=\angle AEB=90^0$ nên năm điểm A, B, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

Lại có $\angle DAE=90^0-\angle ACB$ và $\angle FAB=\angle OAB=\dfrac{180^0-\angle AOB}{2}=\dfrac{180^0-2\angle ACB}{2}=90^0-\angle ACB$

Nên $\angle FAB=\angle DAE$. Đây là góc nội tiếp chắn các cung tương ứng là BF và DE của đường tròn $(ABFDE)$, do đó $FB=DE$. Tứ giác $BFDE$ nội tiếp và có $BF=DE$ nên là hình thang cân.



b) Gọi I là giao điểm của EF và BC. Do tứ giác $BFDE$ là hình thang cân nên $BI = IE$. Suy ra tam giác BIE cân tại I. Từ đó, ta có $\angle IBE = \angle IEB$.

Lại có $\angle IBE = 90^0 - \angle ICE$ và $\angle IEB = 90^0 - \angle IEC$ nên $\angle ICE = \angle IEC$. Suy ra tam giác IEC cân tại I, tức ta có $IC = IE = IB$. Vậy EF đi qua trung điểm I của BC.

c) Do tứ giác $ABFE$ nội tiếp nên $\angle BFE = 180^0 - \angle BAC$.

Lại có $\angle BPC = 180^0 - \angle BAC$ (do tứ giác $APBC$ nội tiếp) nên $\angle BFE = \angle BPC$. (1)

Do $BFDE$ là hình thang cân nên $DF // BE$. Mà $BE \perp AC$ nên $DF \perp AC$.

Lại có $PC \perp AC$ nên $DF // PC$. Suy ra $\angle BCP = \angle BDF = \angle BEF$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra $\Delta \text{BEF} \sim \Delta \text{BCP}$ (g-g).

Lại có M là trung điểm của EF và N là trung điểm của CP nên từ kết quả trên, ta cũng suy ra $\Delta BEM \sim \Delta BCN$. Từ đó, ta có $\Delta NBC \sim \Delta MBE$. (3) và $\dfrac{BN}{BM} = \dfrac{BC}{BE}$. (4)

Từ (3), ta suy ra $\angle CBE = \angle MBN$. Kết hợp với (4), ta được $\Delta BMN \#\ \Delta BEC$.

Do đó $\angle BMN = \angle BEC = 90^0$.

Câu 5.

a) Xét tập hợp A_1 có ba phần tử a,b,c. Mỗi một tập hợp A_i với $i = 2,...,2019$ sẽ phải có chung với A_1 đúng một phần tử. Ta chia các tập hợp A_i với $i = 2,...,2019$ tạo thành ba nhóm. Nhóm thứ nhất gồm các tập hợp chứa phần tử a, nhóm thứ hai gồm các tập hợp chứa phần tử b và nhóm thứ ba gồm các tập hợp chứa phần tử c. Ba nhóm này tổng hợp lại có 2018 tập hợp, do đó phải có một nhóm chứa ít nhất 673 tập hợp. 673 tập hợp này cùng với A_1 sẽ tạo thành 674 tập hợp có đúng một phần tử chung. Chỉ cần lấy 4 tập hợp trong chúng ra sẽ được 4 tập hợp thỏa mãn yêu cầu bài toán. (Chú ý, giao của bốn tập hợp không thể có quá một phần tử).

b) Xét bốn tập hợp A_1, A_2, A_3, A_4 có chung phần tử a. Ta chứng minh tất cả các tập hợp còn lại đều có chung phần tử a. Thật vậy, giả sử tồn tại tập hợp A không chứa a. Khi đó mỗi một tập trong các A_1, A_2, A_3, A_4 sẽ có chung với A một phần tử (khác a). Vì A chỉ có ba phần tử nên theo nguyên lý Dirichlet, sẽ có hai tập hợp trong chúng có chung phần tử chung với A. Chẳng hạn A_1, A_2 có chung phần tử b với A. Nhưng lúc này ta có điều mâu thuẫn vì khi đó A_1, A_2 có chung hai phần tử a và b. Vậy tất cả các tập hợp đều có chung phần tử a. Do giao của hai tập hợp bất kỳ có đúng một phần tử nên tất cả các phần tử khác a còn lại đều đôi một khác nhau, suy ra $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{2019}| \geq 1 + 2019 \times 2 = 4039$.

Từ đó suy ra số phần tử của X không ít hơn 4039.

____________________Hết____________________