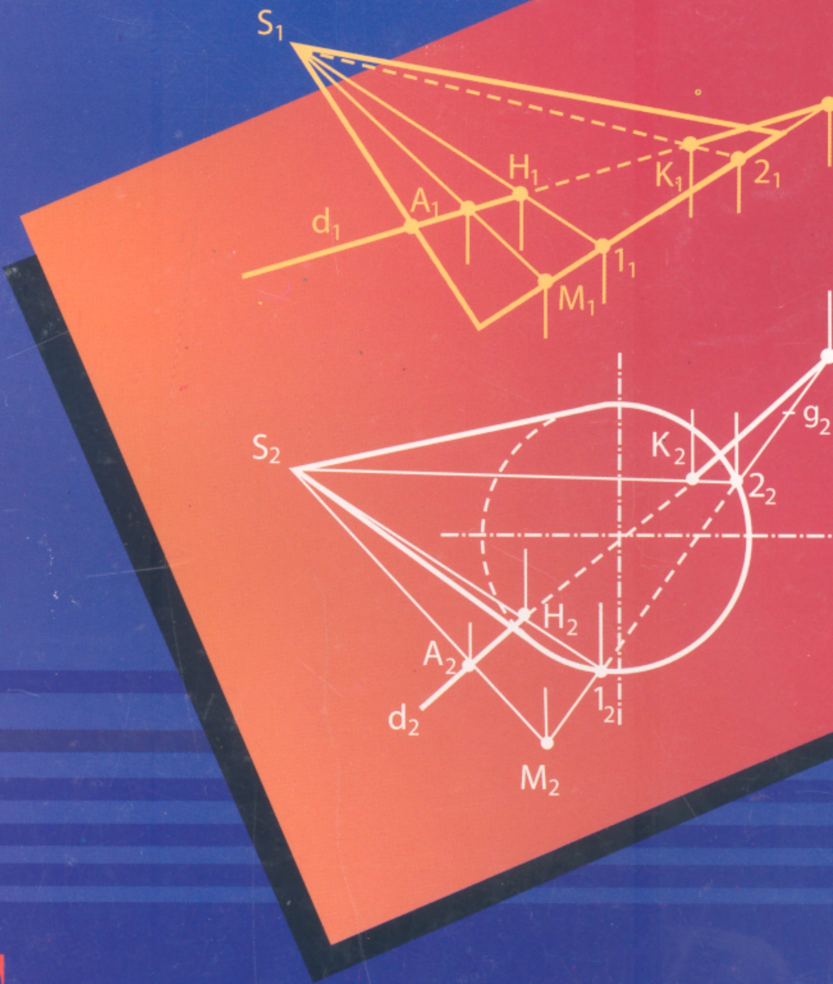
VŨ HOÀNG THÁI

HÌNH HỌC HỌA HÌNH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

VŨ HOÀNG THÁI

HÌNH HỌC HỌA HÌNH

(Sách dùng cho các trường Đại học và Cao đẳng)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Trong các trường kỹ thuật, môn vẽ kỹ thuật cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản để đọc và vẽ các bản vẽ kỹ thuật. Môn hình học hoạ hình lại là môn học cung cấp những kiến thức cơ bản để học môn vẽ kỹ thuật đó.

Cuốn sách này gồm có 3 phần chia làm 9 chương, phần mở đầu giới thiệu các phép chiếu: xuyên tâm và song song; hai phần chính là: Phương pháp hình chiếu thẳng góc và phương pháp hình chiếu trục đo.

Phần một phương pháp hình chiếu thẳng góc là phần quan trọng nhất của cuốn sách. Phần một có bốn mục là:

A – Điểm, đường thẳng và mặt phẳng.

B – Phương pháp biến đổi hình chiếu.

C – Đường và mặt.

D – Khai triển các mặt.

Trong đó, mục "Điểm, đường thẳng và mặt phẳng" là cơ bản. Vì có thể nói, các hình (các mặt) đều được xây dựng từ các yếu tố cơ bản là: điểm, đường thẳng và mặt phẳng. Vì vậy, nếu nắm được phần này thì đến phần sau sẽ thuận lợi, dễ dàng.

Mục "Phương pháp biến đổi hình chiếu" giới thiệu một số phép biến hình, để đưa các hình đã cho ở vị trí bất kỳ tới vị trí đặc biệt đối với các mặt phẳng hình chiếu, để giải một số bài toán. Tức là, bằng cách biến đổi hình chiếu, có thể chuyển một số bài toán khó trở thành các bài toán dễ hơn để giải.

Mục "Đường và mặt" giới thiệu cách biểu diễn các mặt (đa diện và mặt cong) và tìm giao của các mặt đó. Đó là những nội dung quan trọng, chuẩn bị cho việc tiếp cận môn vẽ kỹ thuật sau này.

Mục "Khai triển các mặt" có tính tương đối độc lập so với các phần khác, và nó có ứng dụng trong những lĩnh vực riêng.

Phần phương pháp hình chiếu trục đo giới thiệu những cơ sở để xây dựng hình chiếu trục đo, và các loại hình chiếu trục đo được dùng trong kỹ thuật.

Đây cũng là một phương pháp biểu diễn được dùng trong kỹ thuật; song hình chiếu trục đo chỉ là hình bổ trợ cho các hình chiếu thẳng góc khi cần. Nó giúp cho người đọc bản vẽ dễ nắm được hình dạng cơ bản của hình biểu diễn. Song với các hình phức tạp, thì nó khó biểu diễn đầy đủ được.

Sau mỗi chương đều có một số câu hỏi và bài tập, để bạn đọc thực hành và tự kiểm tra phần lý thuyết trước đó.

Cuốn sách này được viết với các đồ thức được xây dựng theo phương pháp đơn giản, dễ hiểu mà các trường vẫn dạy từ trước đến nay, nó có thể làm tài liệu học tập cho sinh viên các trường Đại học và Cao đẳng thuộc khối kỹ thuật, như cơ khí, xây dựng, v.v... Đồng thời, sách cũng có thể làm tài liệu tham khảo cho giáo viên của các trường Đại học và Cao đẳng thuộc khối kỹ thuật.

Cuốn sách chắc khó tránh khỏi còn thiếu sót, rất mong được sự góp ý của bạn đọc, để những lần tái bản sau được tốt hơn. Mọi góp ý xin gửi về : Công ty Cổ phần sách Đại học – Dạy nghề, 25 Hàn Thuyên, Hà Nội.

Tác giả

MỘT SỐ KÍ HIỆU

Để thuận tiện cho việc sử dụng sau này, ta thống nhất một số kí hiệu sau đây :

- *Điểm :* Kí hiệu bằng các chữ in hoa hoặc số :

Ví dụ : A, B, C, ..., M, N, ..., 1, 2, ...

- *Đường thẳng* : Kí hiệu bằng các chữ thường :

Ví dụ : a, b, c, ..., m, n, ...

Nếu đường thẳng xác định bằng hai điểm thì ta lại dùng kí hiệu điểm :

Ví dụ : AB, CD, IK, MN, ..., 12, 45, ...

- *Mặt phẳng* : Kí hiệu bằng các chữ hoa :

Ví dụ : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, ...

Nếu có các yếu tố xác định mặt phẳng thì để chúng trong ngoặc đơn sau tên mặt phẳng :

Ví dụ : $\mathcal{P}$(ABC), $\mathcal{Q}$ (a, b), $\mathcal{R}$ (d, M), ...

Cũng có thể kí hiệu mặt phẳng bằng các yếu tố xác định mặt phẳng đó :

Ví dụ : (ABC), (f, h), (M, k), ...

- *Trục hình chiếu* : kí hiệu bằng các chữ : x, y, z. (Ox, Oy, Oz).
- *Mặt phẳng hình chiếu* : kí hiệu bằng chữ π.

Mặt phẳng hình chiếu đứng : kí hiệu bằng chữ π^1.

Mặt phẳng hình chiếu bằng : kí hiệu bằng chữ π^2.

Mặt phẳng hình chiếu cạnh : kí hiệu bằng chữ π^3.

- Mặt cong: kí hiệu bằng các kí tự đặc biệt như: ϕ, Σ,...
- *Hình chiếu đứng :* có chỉ số là 1. Ví dụ : A_1, B_1, d_1, m_1, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{Q}_1$, ...
- *Hình chiếu bằng :* có chỉ số là 2. Ví dụ : C_2, D_2, a_2, b_2, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{Q}_2$
- *Hình chiếu cạnh :* có chỉ số là 3. Ví dụ : A_3, B_3, m_3, n_3, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{Q}_3$,

* *Vuông góc* : dùng dấu $\perp$, hoặc dấu $\llcorner$.

Ví dụ : $a \perp b$, $d \perp \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \perp \mathcal{R}$, ...

- *Song song* : dùng dấu //.

Ví dụ : a // b, d // $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}$ // $\mathcal{Q}$, ...

- *Thuộc* (thay cho từ *"đi qua"*, *"chứa"*, *"nằm trên"* mà ta vẫn dùng trước đây) :

Dùng kí hiệu : $\ni$.

Ví dụ : a $\ni \mathcal{R}$, M $\ni$ d, ...

- *Giao nhau (cắt nhau)* : dùng kí hiệu : ×, hoặc $\cap$

Ví dụ : M = a × b, d = $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$.

- *Trùng nhau*, dùng kí hiệu : ≡

Ví dụ : M ≡ N; a ≡ b, ...

- *Xấp xỉ (gần bằng)*, dùng kí hiệu : ≈

Ví dụ : $\alpha \approx 7^0, 10'$; $\beta \approx 41^0, 25'$; ...

Một số chữ viết tắt

* mffg I : mặt phẳng phân giác thứ I.
* mffg II : mặt phẳng phân giác thứ II.
* đdnđvmfhcđ : đường dốc nhất đối với mặt phẳng hình chiếu đứng π^1.
* đdnđvmfhcb : đường dốc nhất đối với mặt phẳng hình chiếu bằng π^2.

PHẦN MỞ ĐẦU

1. MỤC ĐÍCH MÔN HỌC

Hình học hoạ hình (gọi tắt là Hình hoạ) là môn học cơ bản trong các trường kỹ thuật. Nó có các mục đích sau :

* Nghiên cứu các phương pháp biểu diễn các hình trong không gian bằng các hình vẽ trên mặt phẳng.

* Giải các bài toán hình học không gian bằng các hình trên mặt phẳng đó.

* Nâng cao khả năng tưởng tượng (hình dung) các hình tương ứng trong không gian từ các hình biểu diễn trên mặt phẳng đó. Đây cũng là một yêu cầu quan trọng của môn học vẽ kỹ thuật sau này.

2. PHÉP CHIẾU XUYÊN TÂM

2.1. Định nghĩa. *Cho mặt phẳng π gọi là mặt phẳng hình chiếu, một điểm S (không thuộc π) gọi là tâm chiếu. Nếu có một điểm A, đường thẳng SA cắt mặt phẳng π tại điểm A_1 thì điểm A_1 đó gọi là hình chiếu xuyên tâm của điểm A (hình 1).*

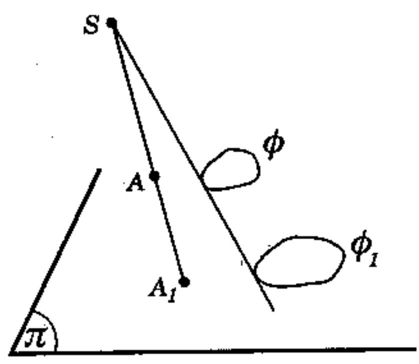
Đường thẳng SA đó gọi là đường thẳng chiếu (hoặc tia chiếu).

Nếu có một hình Φ thì tập hợp hình chiếu xuyên tâm của tất cả các điểm thuộc Φ là hình Φ_1, thì hình Φ_1 gọi là hình chiếu xuyên tâm của hình Φ.

2.2. Tính chất

** Hình chiếu xuyên tâm của một đường thẳng nói chung là một đường thẳng.*

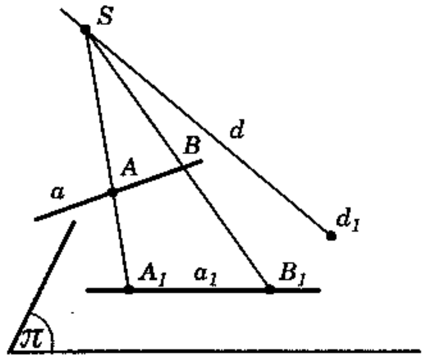
Thật vậy, giả sử ta có đường thẳng a(AB), mọi đường thẳng chiếu khi chiếu các điểm thuộc đường thẳng a đều thuộc mặt phẳng (S, a), nên giao tuyến của mặt phẳng (S, a) với mặt phẳng π là đường thẳng a_1, thì đường thẳng a_1 chính là hình chiếu xuyên tâm của đường thẳng a (hình 2).



Hình 1

Đặc biệt, *nếu đường thẳng đi qua tâm chiếu S thì hình chiếu xuyên tâm của nó là một điểm.* Ví dụ đường thẳng d trên hình 2, có hình chiếu xuyên tâm là điểm d_1 ($d_1 = d \times \pi$).

Đường thẳng d (đi qua tâm chiếu) như vậy gọi là đường thẳng chiếu, (hoặc tia chiếu).

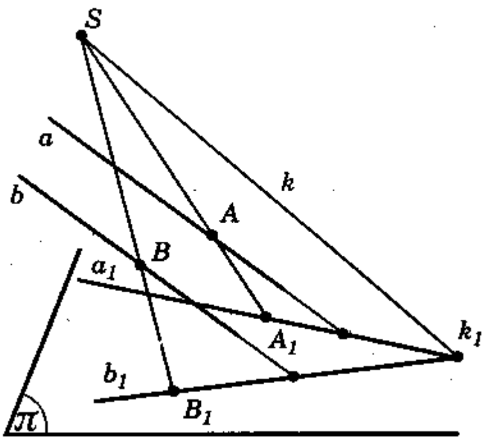


Hình 2

• *Hình chiếu xuyên tâm của hai đường thẳng song song, nói chung là hai đường thẳng cắt nhau.*

Thật vậy, giả sử ta có hai đường thẳng song song a // b (hình 3).

Các hình chiếu xuyên tâm của a và b tương ứng là a_1 và b_1 lần lượt là giao tuyến của các mặt phẳng $\mathcal{A}$(a, S) và $\mathcal{B}$(b, S) với mặt phẳng π.

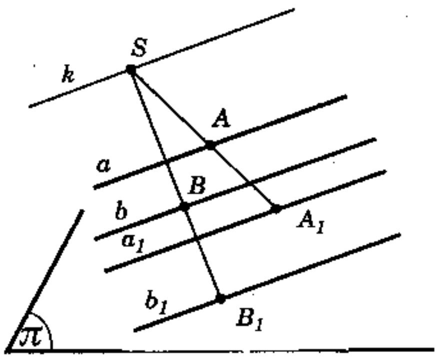


Hình 3

Vì hai mặt phẳng $\mathcal{A}$(a, S) và $\mathcal{B}$(b, S) có điểm S chung nên chúng phải cắt nhau theo đường thẳng k đi qua tâm chiếu S. Đường thẳng k (phải song song với a và b) cắt mặt phẳng π tại điểm k_1, thì k_1 chính là giao điểm của hai hình chiếu a_1 và b_1. Tức là hình chiếu của hai đường thẳng a, b là hai đường thẳng a_1, b_1 cắt nhau.

Đặc biệt, *nếu hai đường thẳng song song, mà chúng lại song song với mặt phẳng π thì hình chiếu xuyên tâm của chúng là hai đường thẳng song song.*

Thật vậy, giả sử ta có hai đường thẳng a và b song song : a // b (hình 4). Khi đó hai mặt phẳng (a, S) và (b, S) cắt nhau theo đường thẳng k (đi qua tâm chiếu S), vì k song song với a và b nên k cũng song song với mặt phẳng π. Nói cách khác, đường thẳng k cắt mặt phẳng π tại một điểm vô tận.



Hình 4

Gọi a_1 và b_1 tương ứng là hình chiếu xuyên tâm của a và b, thì a_1 và b_1 cũng cắt nhau tại một điểm vô tận. Hoặc, a_1 và b_1 song song : $a_1 // b_1$.

• *Hình chiếu xuyên tâm bảo tồn tỷ số kép của bốn điểm thẳng hàng.*

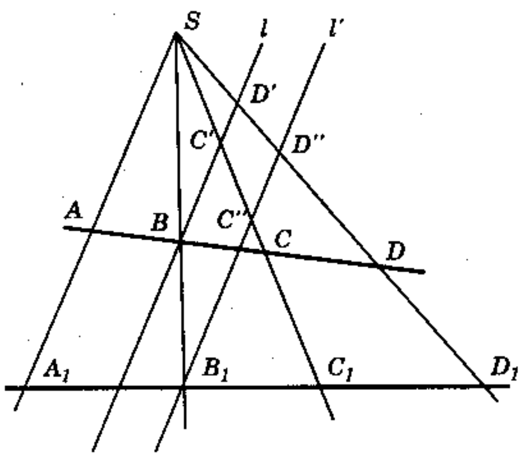
Thật vậy, giả sử ta có bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Ta gọi :

$k = \dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB}$ là tỷ số kép của bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Viết gọn lại là : k = (ABCD).

Gọi A_1, B_1, C_1 và D_1 tương ứng là hình chiếu xuyên tâm của bốn điểm A, B, C và D (hình 5). Qua B vẽ đường thẳng l // SA. Đường thẳng l cắt SC tại C' và cắt SD tại D'.



Hình 5

Dễ thấy hai tam giác SAC và C'BC đồng dạng, nên ta có :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{SA}{C'B} \qquad (1)$$

Hai tam giác SAD và D'BD cũng đồng dạng, nên ta có :

$$\frac{DA}{DB} = \frac{SA}{D'B} \qquad (2)$$

Chia (1) cho (2) ta có :

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{SA}{C'B} : \frac{SA}{D'B} = \frac{D'B}{C'B} \qquad (3)$$

Tương tự, qua B_1 vẽ đường thẳng l'// SA. Đường thẳng l' cắt SC tại C'' và cắt SD tại D''.

Và ta cũng có :

$$\frac{C_1A_1}{C_1B_1}:\frac{D_1A_1}{D_1B_1}=\frac{B_1D''}{B_1C''} \qquad (4)$$

Vì hai đường thẳng l và l' cùng song song với SA nên l//l', và ta có :

$$\frac{D'B}{C'B}=\frac{D''B_1}{C''B_1} \qquad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) ta có :

$$\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{C_1A_1}{C_1B_1}:\frac{D_1A_1}{D_1B_1} \qquad (6)$$

Viết gọn lại là :

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1). \qquad (6)'$$

Đó là điều phải chứng minh.

3. KHÔNG GIAN ƠCLIT 3 – CHIỀU CÓ BỔ SUNG CÁC YẾU TỐ VÔ TẬN

Để xây dựng hình biểu diễn của các hình trong không gian lên mặt phẳng ta phải dùng các phép chiếu. Ví dụ, trong phép chiếu xuyên tâm nói trên, nếu ta có một điểm M mà đường thẳng SM lại song song với mặt phẳng hình chiếu π, thì như quan niệm xưa nay, đường thẳng SM không cắt mặt phẳng π, nên điểm M không có hình chiếu xuyên tâm trên mặt phẳng π.

Như vậy, để có sự tương ứng giữa các yếu tố của không gian và các hình biểu diễn trên mặt phẳng hình chiếu π, ta bổ sung vào không gian Ơclit các yếu tố vô tận sau :

- Mỗi đường thẳng một *điểm vô tận*.
- Mỗi mặt phẳng một *đường thẳng vô tận*. Đó là tập hợp các điểm vô tận của tất cả các đường thẳng thuộc mặt phẳng đó.
- Toàn bộ không gian một *mặt phẳng vô tận*. Đó là tập hợp các đường thẳng vô tận của tất cả các mặt phẳng trong không gian.

Khi đó :

Hai đường thẳng song song thì cắt nhau ở một điểm vô tận;

Đường thẳng và mặt phẳng song song cũng cắt nhau ở một điểm vô tận;

Hai mặt phẳng song song cũng cắt nhau theo một đường thẳng vô tận.

Đây chỉ là một quy ước, một cách nói.

Trước đây ta nói : "hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng thuộc một mặt phẳng và không có điểm chung"; thì nay ta nói : "hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng thuộc một mặt phẳng và cắt nhau ở một điểm vô tận"; hoặc trước đây ta nói : "hai mặt phẳng song song là hai mặt phẳng không có điểm chung"; thì nay ta nói : "hai mặt phẳng song song là hai mặt phẳng cắt nhau theo một đường thẳng vô tận", ...

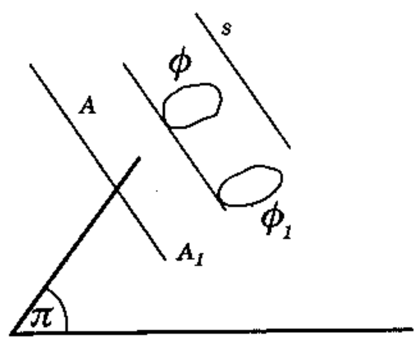
Điều đó không gây mâu thuẫn gì.

Cần lưu ý rằng, như trên đã nói, đây chỉ là một quy ước, mỗi đường thẳng có một điểm vô tận, mỗi mặt phẳng có một đường thẳng vô tận ..., không cần *bận tâm* đến việc xem điểm vô tận đó ở đầu phía nào của đường thẳng, và đường thẳng vô tận đó ở phía nào của mặt phẳng, và mặt phẳng vô tận ở phía nào của không gian?

Khi không gây khó khăn gì cho những lập luận của ta, thì ta vẫn có thể dùng cách nói như trước đây.

4. PHÉP CHIẾU SONG SONG

***4.1. Định nghĩa** : Cho mặt phẳng π gọi là mặt phẳng hình chiếu, một đường thẳng s (không song song với π) gọi là hướng chiếu. Nếu có một điểm A, qua A vạch đường thẳng song song với s, đường thẳng đó cắt mặt phẳng π tại điểm A_1, thì điểm A_1 đó gọi là hình chiếu song song của điểm A trên mặt phẳng π (hình 6).*



Hình 6

Nếu có một hình Φ, thì tập hợp hình chiếu song song của tất cả các điểm thuộc Φ là một hình Φ_1, thì hình Φ_1 gọi là hình chiếu song song của hình Φ.

Như vậy, nếu phép chiếu xuyên tâm mà tâm chiếu là một điểm vô tận (được xác định bởi hướng chiếu s), thì nó là một phép chiếu song song.

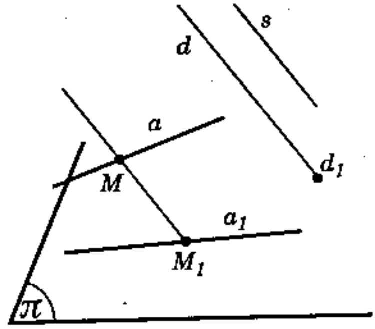
4.2. Tính chất

* *Hình chiếu song song của một đường thẳng, nói chung là một đường thẳng* (hình 7).

Cách chứng minh tương tự phần chiếu xuyên tâm. Hình chiếu song song của đường thẳng a là đường thẳng a_1.

Đặc biệt, *nếu đường thẳng song song với hướng chiếu s, thì hình chiếu song song của nó là một điểm.* Ví dụ đường thẳng d trên hình 7, có hình chiếu song song là điểm d_1.

Đường thẳng d (song song với hướng chiếu) như vậy gọi là đường thẳng chiếu (hoặc tia chiếu).

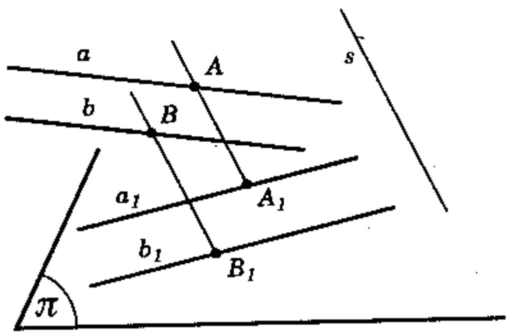


Hình 7

* *Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song.*

Thật vậy, giả sử ta có hai đường thẳng song song a // b (hình 8).

Hình chiếu song song của hai đường thẳng đó tương ứng là các giao tuyến a_1 và b_1 của hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$ với mặt phẳng hình chiếu π ($\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$ lần lượt đi qua a, b và đều song song với hướng chiếu s) nên $\mathcal{P} // \mathcal{Q}$, từ đó ta có $a_1 // b_1$.



Hình 8

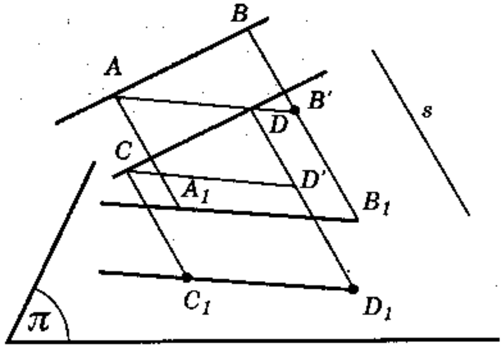
* *Tỷ số hình chiếu của hai đoạn thẳng song song bằng tỷ số hai đoạn thẳng đó.*

Thật vậy, giả sử ta có hai đoạn thẳng AB và CD song song với nhau AB // CD (hình 9). Gọi các hình chiếu song song của AB và CD tương ứng là A_1B_1 và C_1D_1, từ trên ta có $A_1B_1 // C_1D_1$, ta phải chứng minh $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}$

Qua A vẽ đường thẳng $AB' // A_1B_1$ (B' thuộc BB_1), và qua C vẽ đường thẳng $CD'//C_1D_1$ (D' thuộc DD_1).

Dễ thấy hai tam giác ABB' và CDD' đồng dạng (vì có ba cặp cạnh tương ứng đôi một song song), nên ta có :

$$\frac{AB'}{CD'} = \frac{AB}{CD} \qquad (7)$$



Hình 9

Vì các tứ giác $AB'B_1A_1$ và $CD'D_1C_1$ đều là các hình bình hành nên ta có :

$$AB' = A_1B_1 \text{ và } CD' = C_1D_1 \qquad (8)$$

Từ (7) và (8) ta có :

$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}$$

Đặc biệt, *nếu ta có ba điểm thẳng hàng, thì tỷ số đơn của ba điểm đó không thay đổi qua phép chiếu song song.*

Thật vậy, giả sử ta có ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Ta có thể coi đây là trường hợp đặc biệt của hai đoạn thẳng AC và BC song song với nhau (hình 10).

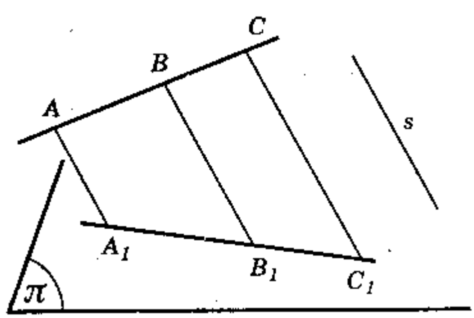
Như vậy từ tính chất trên ta có :

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{AC}{BC}$$

Viết gọn lại là : $(A_1B_1C_1) = (ABC)$.

Phép chiếu song song, nếu có hướng chiếu vuông góc với mặt phẳng hình chiếu thì ta có phép chiếu thẳng góc (hoặc chiếu vuông góc).

Như vậy, phép chiếu thẳng góc là trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song, nên nó có tất cả các tính chất của phép chiếu song song (tất nhiên nó còn có các tính chất khác nữa).



Hình 10

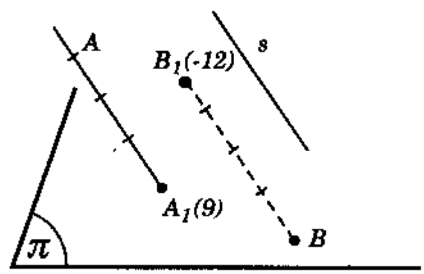
Sau này, chủ yếu ta dùng phép chiếu thẳng góc, nên để đơn giản ta thống nhất : nếu chỉ nói "*chiếu*" tức là chiếu thẳng góc. Còn chiếu xuyên tâm hoặc chiếu song song thì phải nói rõ là : chiếu xuyên tâm, hoặc chiếu song song.

5. ĐIỀU KIỆN PHẢN CHUYỂN CỦA BẢN VẼ

(Tương ứng 1–1 giữa hình biểu diễn và hình tương ứng trong không gian)

Ví dụ, trong phép chiếu song song nói trên, nếu có điểm A, thì ta dễ tìm được hình chiếu song song của nó là điểm A_1. Nhưng nếu có hình chiếu A_1, thì ta không thể tìm được điểm A *tương ứng duy nhất* trong không gian. Vì mọi điểm thuộc đường thẳng chiếu đi qua điểm A_1 (song song với hướng chiếu s), đều có thể coi là điểm A (hình 11).

Do đó, để có thể xác định điểm A tương ứng duy nhất trong không gian, cùng với hình chiếu A_1, ta phải thêm vào điều kiện khác nữa. Ví dụ, ta thêm vào A_1 một số để chỉ khoảng cách từ A_1 tới điểm A, với quy ước là : nếu điểm A ở phía trên mặt phẳng π thì số đó là dương, nếu điểm A ở phía dưới π thì số đó là âm.



Hình 11

Ví dụ : $A_1(9)$, là hình chiếu song song của điểm A, mà A ở phía trên mặt phẳng π và cách A_1 9 đơn vị theo hướng chiếu s. $B_1(-12)$, là hình chiếu song song của điểm B, mà B ở phía dưới mặt phẳng π và cách B_1 12 đơn vị theo hướng chiếu s.

Khi đó ta nói, các điểm A và B có *điều kiện phản chuyển.*

Ngày nay, để chế tạo một chiếc máy, hay xây dựng một công trình, người kỹ sư thiết kế phải vẽ các bản vẽ kỹ thuật của chiếc máy hay công trình đó. Sau đó các kỹ sư và công nhân (khác) sẽ dựa vào các bản vẽ đó để chế tạo nên chiếc máy hay xây dựng công trình đó đúng như ý định của các kỹ sư đã thiết kế chúng.

Muốn vậy, các bản vẽ đó phải có đủ *các điều kiện* để các kỹ sư và công nhân chế tạo và xây dựng chúng.

Người ta nói rằng, các bản vẽ kỹ thuật phải có *điều kiện phản chuyển.*

Vậy, *điều kiện phản chuyển của bản vẽ là điều kiện mà những thông tin cho trên bản vẽ phải đủ để có thể hiểu được hình dạng, kích thước cùng các yêu cầu kỹ thuật khác mà bản vẽ yêu cầu.*

Nghĩa là có thể xây dựng lại được hình tương ứng trong không gian.

Hình hoạ là môn học chuẩn bị những cơ sở cho môn học vẽ kỹ thuật, nên nó phải tạo những cơ sở quan trọng cho những điều kiện phản chuyển của các bản vẽ kỹ thuật sau này.

Để thoả mãn điều kiện phản chuyển của các bản vẽ, trong kỹ thuật người ta dùng các phương pháp sau :

* Phương pháp hình chiếu thẳng góc.
* Phương pháp hình chiếu phối cảnh.
* Phương pháp hình chiếu có số.
* Phương pháp hình chiếu trục đo.

Trong tài liệu này, ta sẽ khảo sát phương pháp hình chiếu thẳng góc và phương pháp hình chiếu trục đo.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Phát biểu : định nghĩa, điều kiện và tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng?

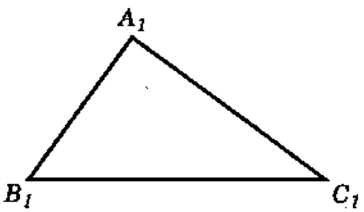
2. Phát biểu : điều kiện và tính chất của đường thẳng vuông góc với mặt phẳng?

3. Dựng đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.

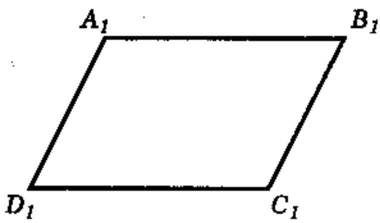
4. Hãy chứng minh tính chất thứ hai của phép chiếu song song, bằng cách coi phép chiếu song song là phép chiếu xuyên tâm, mà tâm chiếu là một điểm vô tận?

5. Cho tam giác $A_1B_1C_1$ là hình chiếu song song của một tam giác đều trong không gian. Vẽ hình chiếu song song của đường tròn nội tiếp tam giác đó (hình 12).

6. Cho hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$ là hình chiếu song song của một hình vuông trong không gian. Vẽ hình chiếu song song của đường tròn nội tiếp hình vuông đó (hình 13).



Hình 12



Hình 13

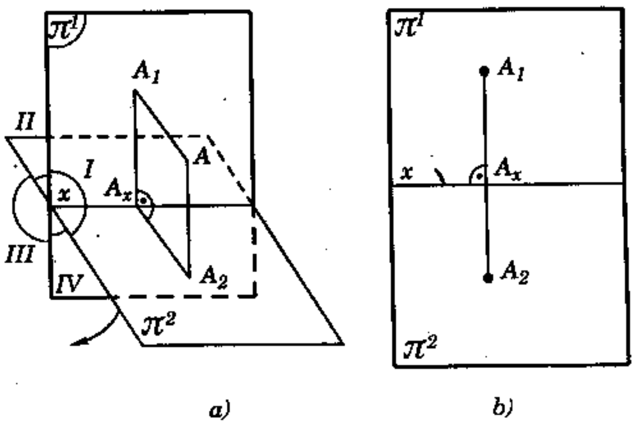
Phần một
PHƯƠNG PHÁP HÌNH CHIẾU THẲNG GÓC

A – ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Chương I. ĐIỂM

1.1. ĐỒ THỨC CỦA ĐIỂM TRÊN HAI MẶT PHẲNG HÌNH CHIẾU

1.1.1. CÁCH XÂY DỰNG : Ta lấy hai mặt phẳng π^1 và π^2 vuông góc với nhau. Nếu có một điểm A, ta chiếu A lên π^1 và π^2 tương ứng ta có các hình chiếu A_1 và A_2. Sau đó xoay π^2 quanh giao tuyến $x = \pi^1 \times \pi^2$ (theo chiều mũi tên) sao cho nửa phía trước của π^2 trùng với nửa phía dưới của π^1. Khi đó, trên mặt phẳng $\pi^1 \equiv \pi^2$ ta có *hai hình chiếu A_1 và A_2 gọi là đồ thức của điểm A trên hai mặt phẳng hình chiếu* (hình 1.1). Và viết là $A(A_1, A_2)$.



a) b)

Hình 1.1

1.1.2. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

- π^1 gọi là mặt phẳng hình chiếu đứng.
- π^2 gọi là mặt phẳng hình chiếu bằng.
- $x = \pi^1 \times \pi^2$ gọi là trục hình chiếu.
- A_1 gọi là hình chiếu đứng của điểm A.
- A_2 gọi là hình chiếu bằng của điểm A.

- Đường thẳng A_1A_2 gọi là đường dóng (thẳng đứng).

- Khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng π^1 gọi là độ xa của A; với quy ước, nó sẽ dương, âm hoặc bằng không, tuỳ thuộc điểm A ở phía trước, phía sau hoặc thuộc π^1.

- Khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng π^2 gọi là độ cao của A; với quy ước nó sẽ dương, âm hoặc bằng không, tuỳ thuộc A ở phía trên, phía dưới hoặc thuộc π^2.

- Hai mặt phẳng π^1 và π^2 chia không gian làm bốn phần, mỗi phần đó gọi là một góc tư : I, II, III, IV (đánh số như trên hình 1.1).

- Mặt phẳng phân giác của góc tư I và III, gọi là mặt phẳng phân giác thứ nhất.

- Mặt phẳng phân giác của góc tư II và IV, gọi là mặt phẳng phân giác thứ hai.

1.1.3. TÍNH CHẤT CỦA ĐỒ THỨC

- *Đường thẳng nối hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của một điểm bao giờ cũng vuông góc với trục hình chiếu,* $A_1A_2 \perp x$.

Bạn đọc tự chứng minh tính chất này.

- *Đồ thức của một điểm sẽ tương ứng với một điểm duy nhất trong không gian.*

Thật vậy, giả sử ta có đồ thức của điểm $A(A_1, A_2)$. Để tìm điểm A, ta xoay mặt phẳng π^2 quanh trục x tới vị trí $\pi^2 \perp \pi^1$. Qua A_1 ta vẽ đường thẳng a vuông góc với π^1, và qua A_2 ta vẽ đường thẳng b vuông góc với π^2. Như vậy, hai đường thẳng a và b cùng thuộc một mặt phẳng (a, b) $\perp$ x, nên chúng cắt nhau tại một điểm; điểm đó chính là điểm A. (Bạn đọc tự vẽ hình).

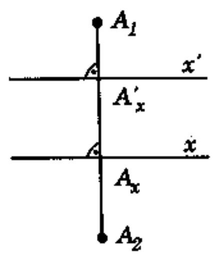
Vậy, ta nói : *đồ thức của một điểm có tính phản chuyển.*

1.1.4. KHÔNG VẼ TRỤC HÌNH CHIẾU

Giả sử cho đồ thức của điểm $A(A_1, A_2)$ (hình 1.2).

Ta dễ thấy, chiều dài các đoạn thẳng A_1A_x và A_2A_x lần lượt là khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng π^2 và π^1.

Nếu ta thay trục x bằng trục x' // x thì khi đó chiều dài các đoạn thẳng $A_1A_{x'}$ và $A_2A_{x'}$ lại lần lượt là khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng $\pi^{2'}$ và $\pi^{1'}$.



Hình 1.2

Như vậy, khi ta thay đổi khoảng cách từ một điểm tới các mặt phẳng hình chiếu thì các hình chiếu của nó không thay đổi.

Sau này, khi biểu diễn các hình, ta cần quan tâm tới các hình chiếu và hình tương ứng của chúng trong không gian như thế nào, chứ không cần quan tâm đến khoảng cách từ các hình đó tới các mặt phẳng hình chiếu.

Vì vậy, sau này khi không cần thiết ta sẽ không vẽ trục hình chiếu x (hình 1.3).

Hình 1.3

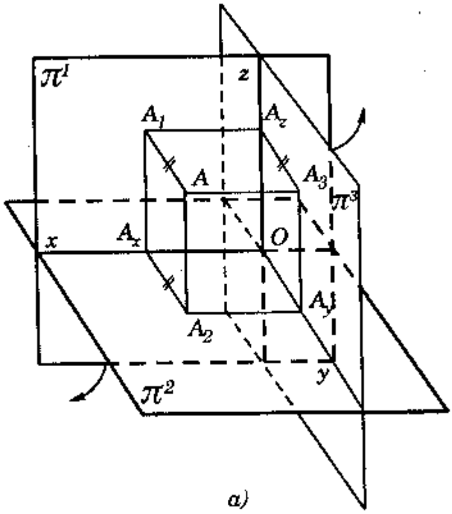
Cần nhớ rằng, tuy không vẽ trục hình chiếu x, nhưng hướng của nó bao giờ cũng là một đường thẳng vuông góc với đường thẳng nối các cặp hình chiếu tương ứng. Và khi cần, ta có thể vẽ ngay được trục hình chiếu đó.

1.2. ĐỒ THỨC CỦA ĐIỂM TRÊN BA MẶT PHẲNG HÌNH CHIẾU

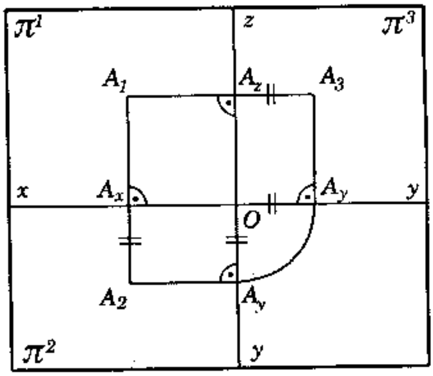
1.2.1. CÁCH XÂY DỰNG

Ta lấy ba mặt phẳng π^1, π^2 và π^3 đôi một vuông góc. Nếu có điểm A, ta chiếu A lên π^1, π^2 và π^3, tương ứng ta có các hình chiếu A_1, A_2 và A_3. Sau đó xoay π^2 cho trùng với π^1 (như phần trên), và xoay π^3 quanh trục $z = \pi^1 \times \pi^3$ (theo chiều mũi tên), sao cho nửa phía trước của π^3 trùng với nửa bên phải của π^1 (hình 1.4).

Khi đó trên ba mặt phẳng $\pi^1 \equiv \pi^2 \equiv \pi^3$ ta có *ba hình chiếu A_1, A_2 và A_3 gọi là đồ thức của điểm A trên ba mặt phẳng hình chiếu.* Và viết gọn lại là $A(A_1, A_2, A_3)$.



a)



b)

Hình 1.4

1.2.2. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

Ngoài một số yếu tố đã được định nghĩa, có thêm những yếu tố sau :

- π^3 gọi là mặt phẳng hình chiếu cạnh.

- A_3 gọi là hình chiếu cạnh của A.

- $y = \pi^2 \times \pi^3$ và $z = \pi^1 \times \pi^3$ cũng gọi là các trục hình chiếu.

- Khoảng cách từ A tới π^3 gọi là độ xa cạnh của A. Với quy ước, nó sẽ dương, âm hoặc bằng không, tuỳ thuộc điểm A ở bên trái, bên phải hoặc thuộc π^3.

1.2.3. SỰ LIÊN HỆ GIỮA BA HÌNH CHIẾU - CÁCH VẼ HÌNH CHIẾU THỨ BA

Như trên đã cho thấy, chỉ cần hai hình chiếu (A_1, A_2) của điểm A là điểm A đã được xác định duy nhất trong không gian. Vì vậy, có thêm hình chiếu cạnh A_3 là thừa; mà đã thừa thì giữa chúng phải có sự ràng buộc (liên hệ).

Ví dụ, như trên hình 1.4 cho thấy : $A_2A_x = A_3A_z$.

Nếu cho hai trong ba hình chiếu nói trên (của một điểm), bao giờ ta cũng tìm được hình chiếu (thứ ba) còn lại.

Ví dụ : Cho hai hình chiếu A_1 và A_2, vẽ hình chiếu A_3 của A?

Giải. Có nhiều cách vẽ A_3, ta nêu vài cách vẽ đó.

Cách 1 : Trình tự như sau (hình 1.5a):

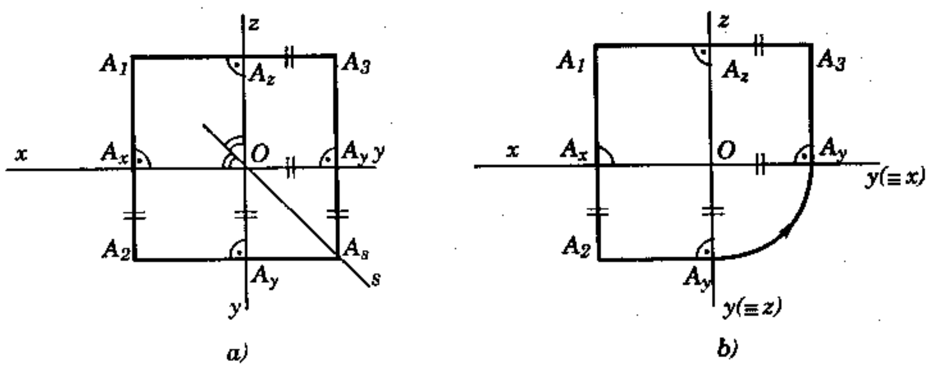
- Vẽ phân giác Os của góc tạo bởi hai nửa dương của hai trục Ox và Oz.

- Qua A_1 vẽ đường thẳng song song với trục x (*).

- Qua A_2 vẽ đường thẳng song song với trục x. Đường thẳng này cắt Os tại điểm A_s.

- Qua A_s vẽ đường thẳng song song với trục z. Đường thẳng này cắt đường thẳng(*) ở đâu, thì đó chính là điểm A_3 cần tìm.

Cách 2 : Trình tự như sau (hình 1.5b):



Hình 1.5

- Qua A_1 vẽ đường thẳng song song với trục x(*).

- Qua A_2 vẽ đường thẳng song song với trục x, tới cắt trục y tại A_y; Lấy gốc O làm tâm, quay đường tròn bán kính OAy *ngược chiều kim đồng hồ*, tới cắt trục y ≡(x) tại điểm A_y ; Qua A_y vẽ đường thẳng song song với trục z, tới cắt đường thẳng (*) ở đâu, thì đó chính là A_3.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

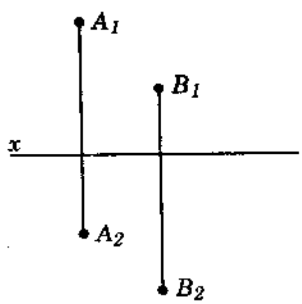
1. Vẽ đồ thức của điểm A thuộc góc tư thứ I; điểm B thuộc góc tư thứ II; điểm C thuộc góc tư thứ III; điểm D thuộc góc tư thứ IV; điểm E thuộc mặt phẳng phân giác I; điểm F thuộc mfpg II. Nhận xét gì về vị trí các hình chiếu của các điểm đó so với trục x (ở phía trên hay phía dưới trục x)?

2. Cho đồ thức của các điểm : A(A_1, A_2); B(B_1, B_2). Vẽ đồ thức của điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng π^1; điểm B' đối xứng với điểm B qua mặt phẳng π^2 ; (hình 1.6).

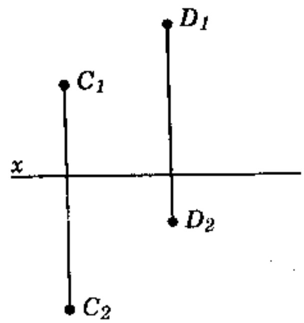
Nhận xét gì về đồ thức của những cặp điểm đối xứng đó.

3. Cho đồ thức của các điểm : C(C_1, C_2), D(D_1, D_2) (hình 1.7). Vẽ đồ thức của điểm C' đối xứng với C qua mffg I; điểm D' đối xứng với điểm D qua mffg II.

Nhận xét gì về đồ thức của những cặp điểm đối xứng đó?



Hình 1.6



Hình 1.7

4. Vẽ hình chiếu cạnh của các điểm A, B (trong bài 2), các điểm C, D (trong bài 3) (Bạn đọc tự vẽ trục z)

5. Vẽ một điểm có hình chiếu đứng và hình chiếu bằng trùng nhau. Điểm đó có vị trí đặc biệt gì không?

6. Vẽ một điểm có hình chiếu đứng và hình chiếu bằng đối xứng với nhau qua trục x. Điểm đó có vị trí đặc biệt gì không?

7. Có điểm nào mà cả ba hình chiếu của chúng trùng nhau không? Nếu có thì hãy vẽ một điểm như vậy.

Chương II. ĐƯỜNG THẲNG

2.1. ĐỒ THỨC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

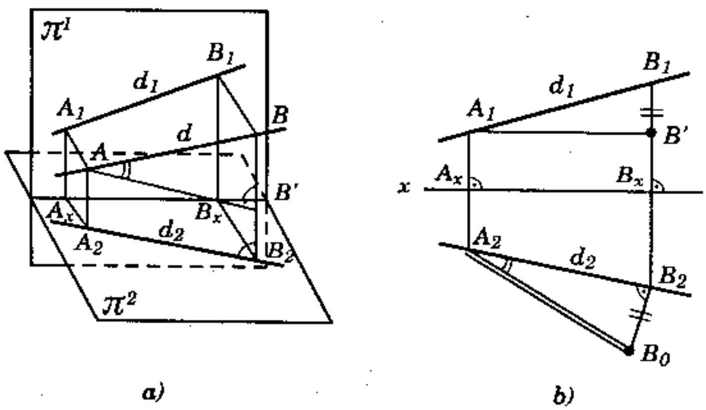
2.1.1. ĐỒ THỨC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Ta đã biết, trong không gian, một đường thẳng được xác định, khi biết hai điểm.

Trên đồ thức cũng vậy, đồ thức của một đường thẳng cũng được xác định khi biết đồ thức của hai điểm.

Trên hình 2.1, ta có đồ thức của đường thẳng AB (và cũng là đường thẳng d).

Đường thẳng như vậy gọi là *đường thẳng thường*. Tức là đường thẳng có vị trí bình thường (không song song và vuông góc) đối với các mặt phẳng hình chiếu.



Hình 2.1

2.1.2. CHIỀU DÀI CỦA ĐOẠN THẲNG VÀ GÓC NGHIÊNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT PHẲNG HÌNH CHIẾU

Trên hình 2.1a, qua điểm A ta vạch đường thẳng AB' // A_2B_2 (B' thuộc BB_2).

Xét tam giác vuông ABB' (vuông tại B') ta có :

Cạnh góc vuông thứ nhất : AB' = A_2B_2.

Cạnh góc vuông thứ hai : BB' = BB_2 – $B'B_2$.

Dễ thấy, tứ giác $AB'B_2A_2$ là hình chữ nhật nên ta có $B'B_2$ = AA_2.

Do đó ta có : $BB' = BB_2 - AA_2$.

Như vậy, *nếu ta dựng một tam giác vuông có : một cạnh góc vuông bằng chiều dài hình chiếu của đoạn thẳng, cạnh góc vuông thứ hai, bằng hiệu (đại số) khoảng cách từ hai điểm đầu mút của đoạn thẳng tới mặt phẳng hình chiếu tương ứng thì :*

- Cạnh huyền của tam giác đó bằng chiều dài (chiều dài thật) đoạn thẳng đó.

- Góc nhọn của tam giác kề với cạnh có chiều dài bằng hình chiếu của đoạn thẳng thì bằng góc của đường thẳng chứa đoạn thẳng đó với mặt phẳng hình chiếu tương ứng.

Ví dụ : Cho đồ thức của đoạn thẳng AB, tìm chiều dài và góc nghiêng của nó với mặt phẳng hình chiếu bằng?

Giải : Ứng dụng kết quả trên, ta vẽ một tam giác vuông có một cạnh góc vuông là hình chiếu bằng A_2B_2 của AB (Hình 2.1b); cạnh góc vuông thứ hai $B_2B_0 = B_1B_x - A_1A_x$.

Như vậy, hai tam giác vuông $A_2B_2B_0$ và ABB' bằng nhau nên các cạnh huyền của chúng bằng nhau : $A_2B_0 = AB$. Vậy, chiều dài đoạn thẳng A_2B_0 chính là chiều dài đoạn thẳng AB.

Còn góc nhọn $\widehat{B_2A_2B_0} = \widehat{BAB'}$. Trong đó $\widehat{BAB'}$ chính là góc của đường thẳng AB với mặt phẳng hình chiếu bằng π^2.

Tương tự, ta cũng có thể tìm được góc nghiêng của đường thẳng AB với mặt phẳng π^1.

2.2. CÁC ĐƯỜNG THẲNG CÓ VỊ TRÍ ĐẶC BIỆT

Như trên đã nói, đường thẳng AB trên hình 2.1 là đường thẳng thường (đối với các mặt phẳng hình chiếu). Còn ở đây, là các đường thẳng *có vị trí đặc biệt* đối với các mặt phẳng hình chiếu. Các đường thẳng thuộc loại này được chia làm hai loại :

2.2.1. CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG MỨC

1. Định nghĩa : *Đường thẳng đồng mức là đường thẳng song song với mặt phẳng hình chiếu :*

- Đường mặt là đường thẳng song song với mặt phẳng hình chiếu đứng π^1.

- Đường bằng là đường thẳng song song với mặt phẳng hình chiếu bằng π^2.

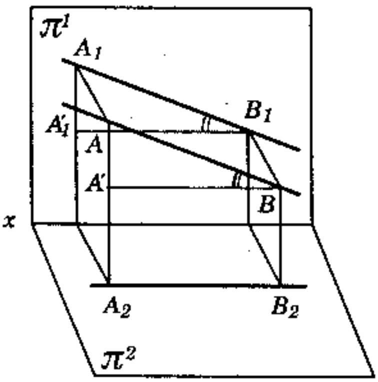
- *Đường cạnh là đường thẳng song song với mặt phẳng hình chiếu cạnh π^3.*

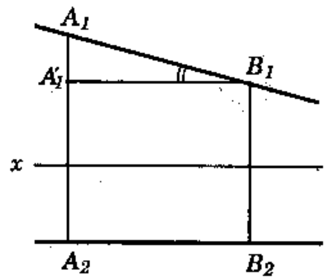
2. Tính chất

a) Đường mặt

- *Hình chiếu bằng của đường mặt là đường thẳng song song với trục x; và ngược lại (nghĩa là, bất kỳ đường thẳng nào có hình chiếu bằng là đường thẳng song song với trục x, thì nó là đường mặt)* (hình 2.2).

Ta dễ thấy sự hiển nhiên của tính chất này.





Hình 2.2

- *Nếu có một đoạn thẳng thuộc đường mặt thì hình chiếu đứng của nó có độ dài bằng chính nó.*

Thật vậy, trên hình 2.2a ta thấy tứ giác ABB_1A_1 là hình chữ nhật, nên ta có : $A_1B_1 = AB$.

- *Góc giữa hình chiếu đứng của đường mặt với trục x thì bằng góc của đường mặt đó với mặt phẳng hình chiếu bằng π^2.*

Cũng từ hình 2.2a, qua A ta vẽ đường thẳng BA' // A_2B_2 và qua B_1 vẽ đường thẳng $B_1A'_1$ // x, thì dễ thấy góc $\widehat{A_1B_1A'_1} = \widehat{ABA'}$. Mà góc $\widehat{ABA'}$ chính là góc giữa đường thẳng AB với mặt phẳng hình chiếu bằng π^2.

b) Đường bằng (hình 2.3).

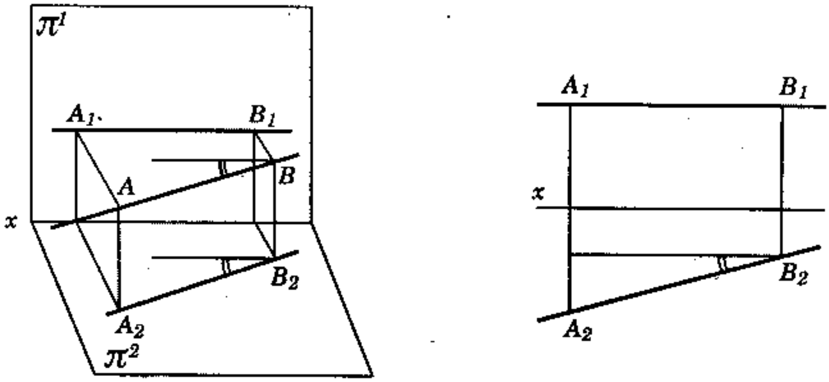
Tương tự đường mặt, ta cũng có các tính chất sau :

- *Hình chiếu đứng của đường bằng là một đường thẳng song song với trục x, và ngược lại, (tức là nếu có một đường thẳng mà hình chiếu đứng của nó là một đường thẳng song song với trục x thì nó là đường bằng).*

- Nếu có một đoạn thẳng thuộc đường bằng thì hình chiếu bằng của đoạn thẳng đó có độ dài bằng chính nó.

- Góc giữa hình chiếu bằng của đường bằng với trục x thì bằng góc của đường bằng đó với mặt phẳng hình chiếu đứng π^1.

Dựa vào cách chứng minh các tính chất của đường mặt, bạn đọc tự chứng minh các tính chất của đường bằng.



a) b)

Hình 2.3

c) Đường cạnh

• *Hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của đường cạnh là hai đường thẳng trùng nhau và vuông góc với trục x, và ngược lại.*

Thật vậy, vì đường cạnh d là đường thẳng song song với π^3, tức là vuông góc với trục x, nên khi chiếu đường cạnh d đó lên π^1, các tia chiếu đều thuộc một mặt phẳng $\mathcal{P}$ chứa đường cạnh đó và vuông góc với trục x, tức là cũng vuông góc với π^1. Nên giao tuyến của mặt phăng $\mathcal{P}$ đó với π^1 (cũng là hình chiếu đứng d_1 của đường cạnh đó) là đường thẳng vuông góc với trục x.

Tương tự, hình chiếu bằng d_2 của đường cạnh đó cũng là một đường thẳng vuông góc với trục x. Như vậy, hai hình chiếu đó trùng nhau, và cùng vuông góc với trục x (hình 2.4).

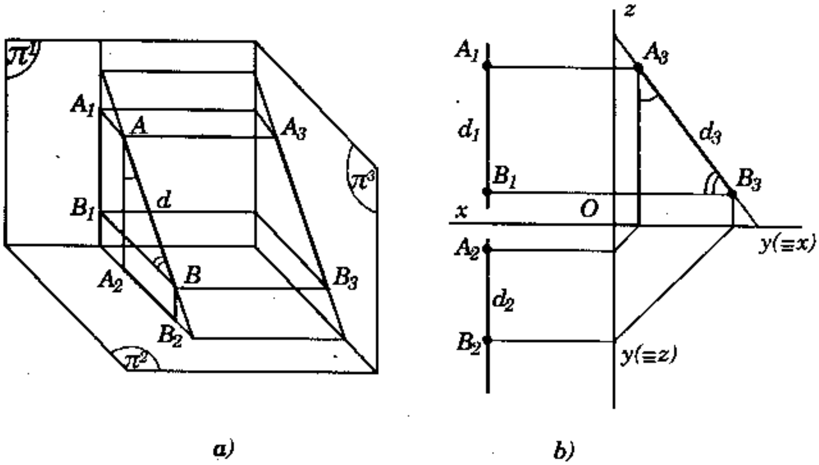
- Nếu có một đoạn thẳng thuộc đường cạnh, thì hình chiếu cạnh của nó có độ dài bằng chính nó.

Tính chất này chứng minh tương tự tính chất thứ hai của các đường mặt và đường bằng nói trên.

- Góc giữa hình chiếu cạnh của đường cạnh với trục z, bằng góc giữa

đường cạnh đó với π^1 ; còn góc giữa hình chiếu cạnh của đường cạnh với trục y (≡ x) thì bằng góc giữa đường cạnh đó với π^2.

Bạn đọc dễ thấy sự hiển nhiên của tính chất này trên hình 2.4.



Hình 2.4

2.2.2. ĐƯỜNG THẲNG CHIẾU

1. Định nghĩa

Đường thẳng chiếu là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu :

- *Đường thẳng chiếu đứng là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng π^1.*
- *Đường thẳng chiếu bằng là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng π^2.*
- *Đường thẳng chiếu cạnh là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng π^3.*

2. Tính chất

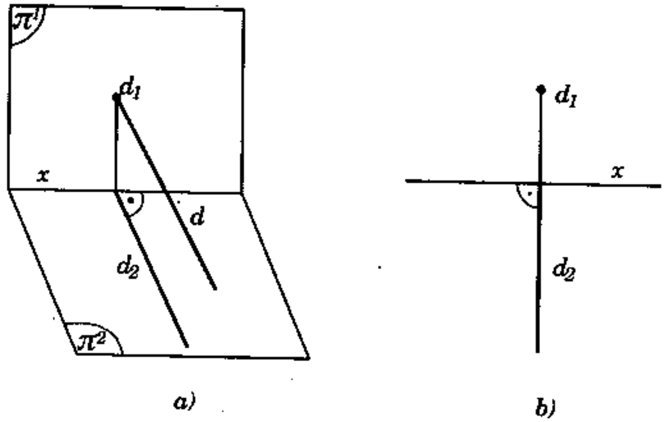
a) Đường thẳng chiếu đứng

** Hình chiếu đứng của đường thẳng chiếu đứng là một điểm, và ngược lại (tức là bất kỳ đường thẳng nào, có hình chiếu đứng là một điểm thì nó là đường thẳng chiếu đứng).*

- Đường thẳng chiếu đứng được hoàn toàn xác định khi biết hình chiếu đứng.

- Hình chiếu bằng của đường thẳng chiếu đứng là đường thẳng vuông góc với trục x.

- Đường thẳng chiếu đứng vừa là đường bằng, vừa là đường cạnh (hình 2.5). Vì nó vừa song song với mặt phẳng π^2 và cũng song song với mặt phẳng π^3 .



Hình 2.5

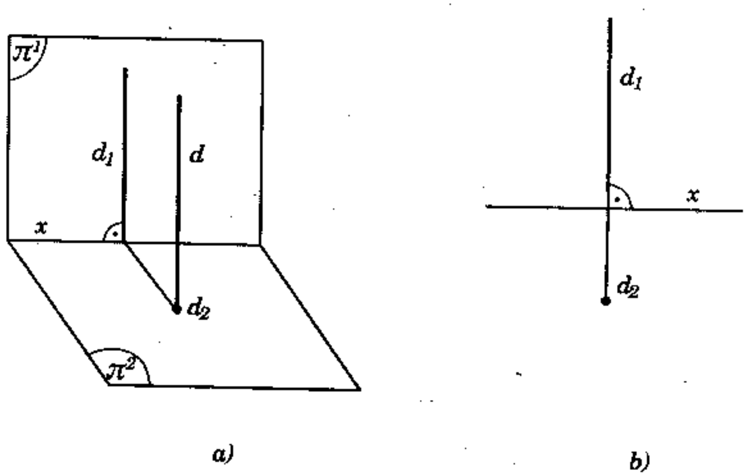
b) Đường thẳng chiếu bằng

- Hình chiếu bằng của đường thẳng chiếu bằng là một điểm, và ngược lại.

Đường thẳng chiếu bằng được hoàn toàn xác định khi biết hình chiếu bằng.

- Hình chiếu đứng của nó là đường thẳng vuông góc với trục x.

- Đường thẳng chiếu bằng vừa là đường mặt, vừa là đường cạnh (hình 2.6). Vì đường thẳng đó vừa song song với mặt phẳng π^1 vừa song song với mặt phẳng π^3.



Hình 2.6

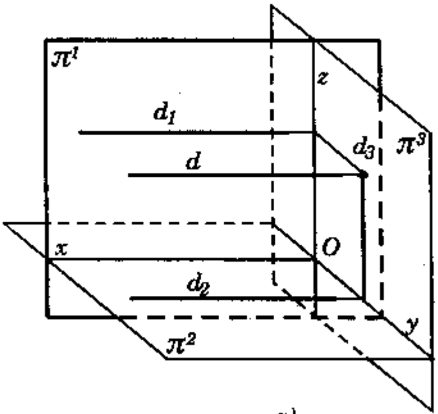
c) Đường thẳng chiếu cạnh (hình 2.7)

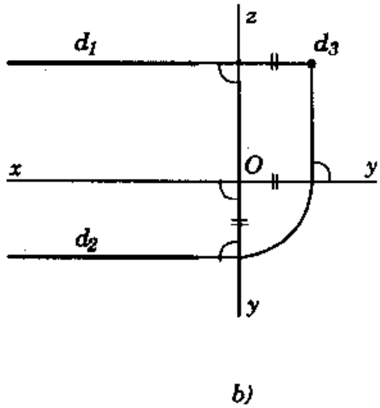
- Hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của đường thẳng chiếu cạnh đều là các đường thẳng song song với trục x, và ngược lại.

- Hình chiếu cạnh của nó là một điểm, và ngược lại.

Đường thẳng chiếu cạnh được hoàn toàn xác định khi biết hình chiếu cạnh.

- Đường thẳng chiếu cạnh vừa là đường mặt, vừa là đường bằng.



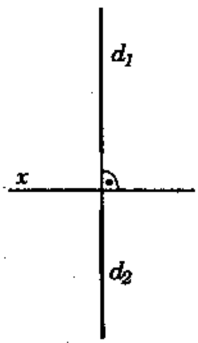


Hình 2.7

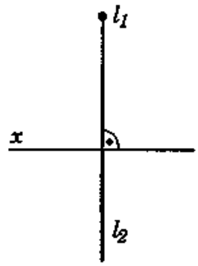
Chú ý :

- Với đường thẳng cạnh, nếu chỉ cho bằng hình chiếu đứng và hình chiếu bằng thì phải cho bằng hai điểm. Nếu không thì nó không xác định duy nhất.

Ví dụ : Cho đường thẳng cạnh $d(d_1, d_2)$ (hình 2.8), khi đó sẽ có vô số đường thẳng thuộc mặt phẳng (d_1, d_2) đi qua hình chiếu đứng d_1 và hình chiếu bằng d_2 của đường thẳng d, đều có hình chiếu đứng trùng với d_1, và hình chiếu bằng trùng với d_2 của đường thẳng d đó. Tức là nó không xác định duy nhất.



Hình 2.8



Hình 2.9

- Với các đường thẳng chiếu, chỉ cần cho một hình chiếu ***"là một điểm"*** *của nó là nó đã hoàn toàn xác định.*

Ví dụ: cho đường thẳng chiếu đứng l (l_1, l_2) (hình 2.9). Trong đó hình chiếu đứng l_1 là điểm l_1. Khi đó, đường thẳng l hoàn toàn xác định, vì từ hình chiếu đứng l_1 đó ta có thể vẽ ngay được hình chiếu bằng l_2. Vì l_2 là đường thẳng đi qua l_1 và vuông góc với trục x.

2.3. ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG

2.3.1. ĐƯỜNG THẲNG KHÔNG PHẢI ĐƯỜNG CẠNH

Điều kiện để một điểm thuộc một đường thẳng không phải đường cạnh là: các hình chiếu cùng tên của điểm thuộc các hình chiếu cùng tên của đường thẳng (tức là hình chiếu đứng của điểm thuộc hình chiếu đứng của đường thẳng, và hình chiếu bằng của điểm thuộc hình chiếu bằng của đường thẳng).

Thật vậy, giả sử ta có điểm A ∍ d. Như vậy, dễ thấy trên đồ thức ta có ngay: $A_1 \ni d_1$ và $A_2 \ni d_2$ (hình 2.10).

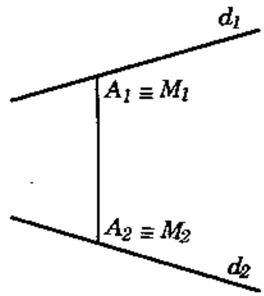
Ngược lại, trên đồ thức ta có : $A_1 \ni d_1$ và $A_2 \ni d_2$.

Ta phải chứng minh A ∍ d.

Ta lấy điểm M ∍ d, mà có hình chiếu $M_1 \equiv A_1$.

Vì M ∍ d nên theo trên ta có $M_2 \equiv A_2$ (mà $A_2 \ni d_2$).

Từ đó ta có M≡ A, tức là A ∍ d.



Hình 2.10

2.3.2. ĐƯỜNG THẲNG LÀ ĐƯỜNG CẠNH (hình 2.11)

Điều kiện để điểm M thuộc cạnh AB là $(A_1B_1M_1) = (A_2B_2M_2)$.

Thật vậy, nếu trong không gian ta có :

M ∍ AB tức là ba điểm A, B và M thẳng hàng.

Như vậy, theo tính chất của phép chiếu song song :

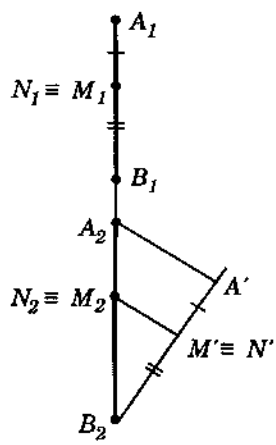
Khi chiếu lên mặt phẳng π^1 ta có : $(A_1B_1M_1) = (ABM)$ (a)

Khi chiếu lên mặt phẳng π^2 ta có : $(A_2B_2M_2) = (ABM)$ (b)

Từ (a) và (b) ta có : $(A_1B_1M_1) = (A_2B_2M_2)$ (c)

Ngược lại, trên đồ thức ta có : $(A_1B_1M_1) = (A_2B_2M_2)$.

Ta phải chứng minh M ∍ AB. Tức là ba điểm A, B, M thẳng hàng.



Hình 2.11

Ta cũng lấy điểm N ∍ AB mà có hình chiếu $N_1 \equiv M_1$.

Như vậy khi chiếu lên mặt phẳng π^1 ta có :

$(A_1B_1N_1) = (ABN) = (A_1B_1M_1)$ (d)

Khi chiếu lên mặt phẳng π^2 ta có : $(A_2B_2N_2) = (ABN)$(e)

Từ (c), (d) và (e) ta có : $N_2 \equiv M_2$, tức là $N \equiv M \ni AB$.

Nếu đường thẳng cạnh, nhưng cho cả hình chiếu cạnh thì vấn đề sẽ đơn giản. Bạn đọc có thể tự suy ra từ mục 2.3.1.

2.3.3. VẾT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Định nghĩa. *Vết của đường thẳng là giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng hình chiếu :*

- *Vết đứng của đường thẳng là giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng π^1.*

- *Vết bằng của đường thẳng là giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng π^2.*

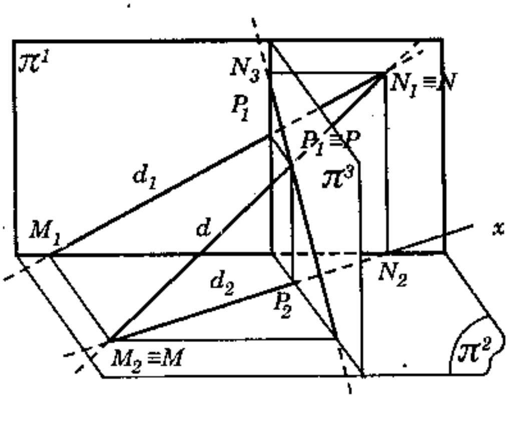
- *Vết cạnh của đường thẳng là giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng π^3.*

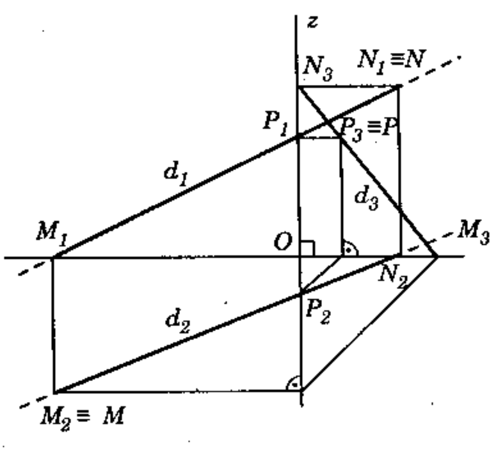
2. Tính chất (hình 2.12)

a) *Vết đứng của đường thẳng*

- *Hình chiếu bằng của vết đứng đường thẳng là giao điểm hình chiếu bằng của đường thẳng với trục x.*

Vì vết đứng của đường thẳng thuộc mặt phẳng hình chiếu đứng, nên nó có độ xa bằng không, do đó hình chiếu bằng của nó phải thuộc trục x; tức là giao điểm hình chiếu bằng của đường thẳng với trục x.





Hình 2.12

- *Hình chiếu đứng của vết đứng đường thẳng trùng với chính vết đứng đó.* Vì vết đứng của đường thẳng nằm ngay trên mặt phẳng hình chiếu đứng, nên hình chiếu đứng của nó trùng với chính nó.

b) Vết bằng của đường thẳng

- *Hình chiếu đứng của vết bằng đường thẳng là giao điểm hình chiếu đứng của đường thẳng với trục x.*

Tương tự trên, vì vết bằng của đường thẳng, thuộc mặt phẳng hình chiếu bằng nên nó có độ cao bằng không.

- *Hình chiếu bằng của vết bằng của đường thẳng trùng với chính vết bằng đó.*

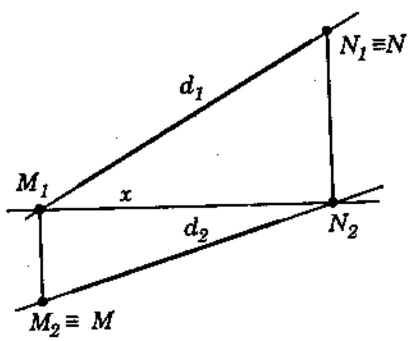
Vì vết bằng đó nằm ngay trên mặt phẳng hình chiếu bằng.

Ví dụ : Cho đường thẳng $d(d_1, d_2)$, tìm các vết của đường thẳng đó?

Giải : Từ các tính chất nêu trên ta có (hình 2.13):

Vết đứng : Hình chiếu bằng của vết đứng là giao điểm hình chiếu bằng d_2 với trục x : $N_2 = d_2 \times x$. Từ đó, dựa vào điều kiện điểm thuộc đường thẳng (mục 2.3.1) ta tìm được hình chiếu đứng N_1 thuộc d_1 và $N_1 \equiv N$.

Vết bằng : Hình chiếu đứng của vết bằng là giao điểm hình chiếu đứng d_1 với trục x : $M_1 = d_1 \times x$. Cũng từ đó ta tìm được hình chiếu bằng M_2 thuộc d_2 : $M_2 \equiv M$.



Hình 2.13

2.4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng trong không gian, có các trường hợp sau :

2.4.1. HAI ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

Ta đã biết, *hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng có một điểm chung.*

Dựa vào "điểm thuộc đường thẳng" (mục 2.3) ta dễ dàng nhận biết được các trường hợp đường thẳng cắt nhau sau đây :

- *Hai đường thẳng đều không phải đường cạnh.*

Trên hình 2.14, hai đường thẳng a, b cắt nhau tại điểm M.

Vì M ∋ a ($M_1 \ni a_1$ và $M_2 \ni a_2$), và M ∋ b ($M_1 \ni b_1$ và $M_2 \ni b_2$).

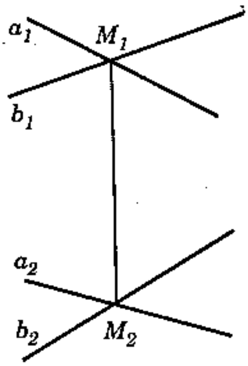
Ta có nhận xét trên đồ thức về trường hợp này như sau :

Điều kiện để hai đường thẳng (không phải đường cạnh) cắt nhau là giao điểm hai hình chiếu đứng và giao điểm hai hình chiếu bằng cùng nằm trên một đường dóng thẳng đứng.

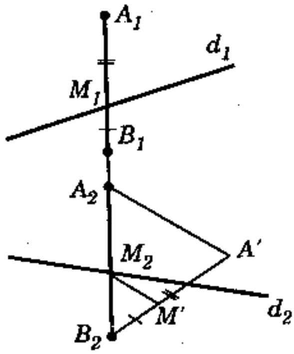
- *Một trong hai đường thẳng là đường cạnh.*

Trên hình 2.15, đường thẳng d và đường cạnh AB cũng cắt nhau tại điểm M.

Vì M ∋ d ($M_1 \ni d_1$ và $M_2 \ni d_2$), và M∋ AB vì ($A_1B_1M_1 = A_2B_2M_2$).



Hình 2.14



Hình 2.15

2.4.2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. Hai đường thẳng không phải đường cạnh

Điều kiện để hai đường thẳng (không phải đường cạnh) song song là các hình chiếu đứng của chúng song song và các hình chiếu bằng của chúng song song.

Thật vậy, giả sử trong không gian ta có hai đường thẳng a// b.

Như vậy, theo tính chất của phép chiếu song song (mục 4 Phần mở đầu).

Khi chiếu lên mặt phẳng hình chiếu đứng, ta có : $a_1 // b_1$.

Khi chiếu lên mặt phẳng hình chiếu bằng, ta có : $a_2 // b_2$.

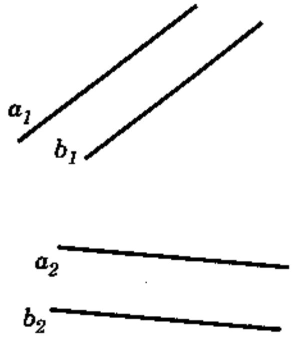
Ngược lại: nếu trên đồ thức ta có : $a_1 // b_1$ và $a_2 // b_2$. Ta phải chứng minh trong không gian a//b (hình 2.16).

Thật vậy, ta quay mặt phẳng π^2 quanh trục x tới vị trí $\pi^2 \perp \pi^1$. Ta gọi $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$ lần lượt là mặt phẳng chiếu đường thẳng a và b lên π^1, thì $\mathcal{P}$

chứa a_1 và vuông góc với π^1 ; $\mathcal{Q}$ chứa b_1 và vuông góc với π^1. Vì $a_1 // b_1$ nên $\mathcal{P} // \mathcal{Q}$.

Tương tự, gọi $\mathcal{P}'$ và $\mathcal{Q}'$ lần lượt là các mặt phẳng chiếu a và b lên π^2, thì $\mathcal{P}'$ chứa a_2 và vuông góc với π^2 ; và $\mathcal{Q}'$ chứa b_2 và vuông góc với π^2. Vì $a_2 // b_2$ nên $\mathcal{P}' // \mathcal{Q}'$.

Bốn mặt phẳng $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$,, $\mathcal{P}'$ và $\mathcal{Q}'$ cắt nhau theo bốn đường thẳng song song. Trong đó đường thẳng a chính là giao tuyến của $\mathcal{P}$ và $\mathcal{P}'$ ($a = \mathcal{P} \times \mathcal{P}'$), và b chính là giao tuyến của $\mathcal{Q}$ và $\mathcal{Q}'$ ($b = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}'$). Từ đó ta có : a // b.



Hình 2.16

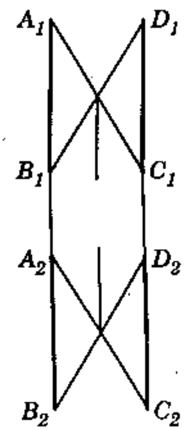
2. Hai đường thẳng là đường cạnh

Điều kiện để hai đường cạnh AB và CD song song là, hai đường thẳng AC và BD (hoặc AD và BC) cắt nhau, hoặc song song.

Thật vậy, dễ thấy, hai đường thẳng AB và CD không thể cắt nhau (vì hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của chúng đều song song), nên chúng chỉ có thể song song hoặc chéo nhau.

Vì vậy, nếu hai đường thẳng AC và BD (hoặc AD và BC) cắt nhau hoặc song song, tức là bốn điểm A, B, C và D đồng phẳng, từ đó hai đường thẳng AB và CD cũng đồng phẳng, khi đó ta có : AB // CD (hình 2.17).

Còn nếu, AC và BD (hoặc AD và BC) không cắt nhau hoặc song song, tức là bốn điểm A, B, C và D không đồng phẳng, suy ra AB và CD chéo nhau.



Hình 2.17

2.4.3. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Ta đã biết, vị trí tương đối giữa hai đường thẳng trong không gian (trừ trường hợp trùng nhau) thì chúng chỉ có thể thuộc một trong ba trường hợp là : cắt nhau, song song hoặc chéo nhau. Vì vậy, hai đường thẳng, nếu không cắt nhau và cũng không song song thì chúng phải chéo nhau. Vậy :

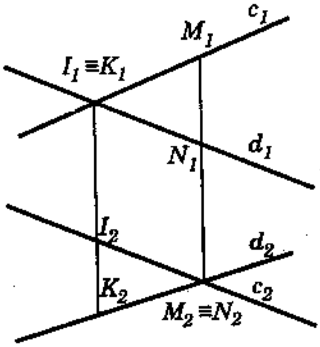
Hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng không cắt nhau, và không song song.

Hình 2.18 biểu diễn hai đường thẳng c, d chéo nhau. Vì hai đường thẳng này không có điểm nào chung. Trong đó, hai điểm I và K (I ∍ c và K ∍ d) là hai điểm cùng thuộc đường thẳng chiếu đứng; hai điểm M và N (M ∍ c và N ∍ d) là hai điểm cùng thuộc đường thẳng chiếu bằng. Hoặc gọi đó là các điểm đồng tia (cùng thuộc một tia chiếu).

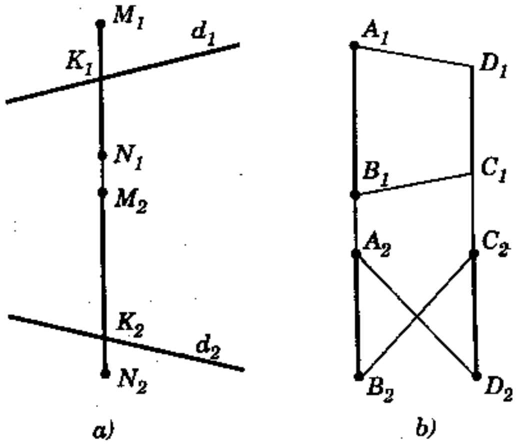
Hình 2.19a biểu diễn đường thẳng cạnh MN và đường thẳng d chéo nhau. Trong đó, điểm K thuộc đường thẳng d, nhưng không thuộc đường cạnh MN (Vì dễ thấy K_1 gần M_1 hơn N_1, còn K_2 lại gần N_2 hơn M_2).

Hình 2.19b hai đường cạnh AB và CD cũng chéo nhau. Vì hai đường thẳng AD và BC chéo nhau.

Cả ba trường hợp trên, hai đường thẳng đã cho đều không có điểm nào chung.



Hình 2.18



Hình 2.19

2.4.4. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, ngoài ba trường hợp trên đây, còn một trường hợp đặc biệt là hai đường thẳng vuông góc.

Dựa vào các điều kiện sau, để xét xem trên đồ thức hai đường thẳng có vuông góc hay không?

Nếu ta có hai đường thẳng mà mặt phẳng song song với chúng không vuông góc với mặt phẳng hình chiếu thì, trong ba điều kiện sau đây, nếu đã có hai điều kiện thì ta sẽ có điều kiện còn lại :

- *Hai đường thẳng trong không gian vuông góc (cắt nhau hoặc chéo nhau).*
- *Có ít nhất một trong hai đường thẳng đó song song với mặt phẳng hình chiếu.*
- *Hình chiếu tương ứng của hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.*

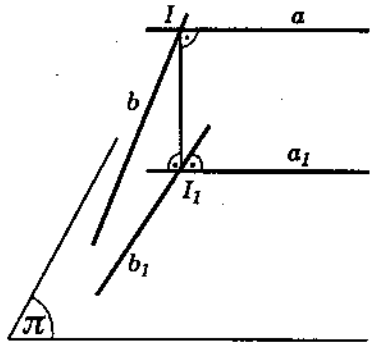
Từ ba điều kiện trên đây, tổ hợp lại ta sẽ có ba trường hợp.

Ta sẽ chứng minh một trường hợp. Hai trường hợp còn lại bạn đọc tự chứng minh.

Ví dụ : Ta có hai điều kiện thứ nhất và thứ hai trên đây. Ta phải chứng minh khi đó ta sẽ có điều kiện thứ ba.

Giả sử, trong không gian ta có hai đường thẳng a và b vuông góc, trong đó đường thẳng a song song với mặt phẳng hình chiếu π. Gọi a_1 và b_1 tương ứng là các hình chiếu của a và b lên mặt phẳng π.

Ta phải chứng minh a_1 vuông góc với b_1 (hình 2.20).



Hình 2.20

Trước hết, ta chứng minh với a và b cắt nhau và vuông góc.

Từ đó, dễ suy ra cho hai đường thẳng chéo nhau.

Theo giả thiết : a // π, nên ta có a // a_1.

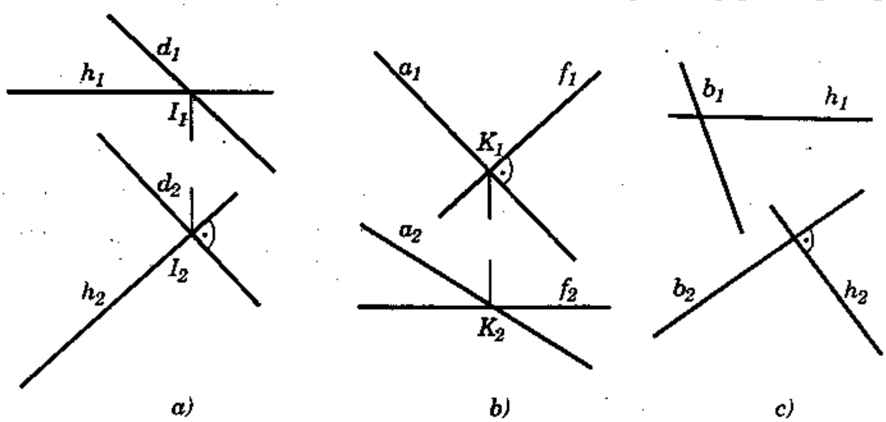
Vì đây là chiếu vuông góc nên ta có : $II_1 \perp a_1$, vì a // a_1 nên $II_1 \perp a$.

Như vậy, $a \perp (b, II_1)$. Vì mặt phẳng (b, II_1) cũng chính là mặt phẳng (b, b_1).

Mặt khác, vì a // a_1 nên ta có : $a_1 \perp (b, b_1)$. Từ đó ta có : $a_1 \perp b_1$.

Từ kết quả trên, ứng dụng vào đồ thức ta có :

Hình 2.21a là đồ thức của hai đường thẳng d, h cắt nhau và vuông góc. Vì trong đó h là đường bằng và hình chiếu bằng của chúng vuông góc ($d_2 \perp h_2$).



Hình 2.21

Hình 2.21b là đồ thức của hai đường thẳng a, f vuông góc. Vì trong đó f là đường mặt, và hình chiếu đứng $a_1 \perp f_1$.

Hình 2.21c, hai đường thẳng b và h chéo nhau và vuông góc. Vì h là đường bằng, và $b_2 \perp h_2$.

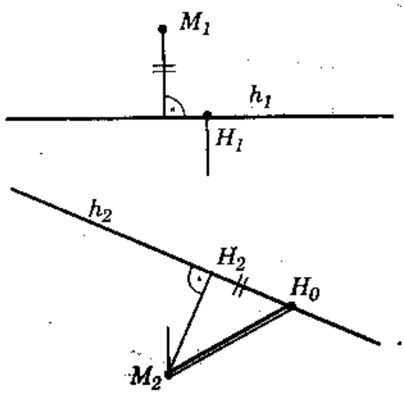
Ví dụ : Tìm khoảng cách từ điểm M tới đường bằng h.

Giải : Khoảng cách từ M tới đường bằng h, chính là chiều dài đoạn thẳng vuông góc hạ từ M tới h (hình 2.22).

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ M tới đường bằng h, ta có : Vì h là đường bằng, tức là h // π_2, mặt khác, trong không gian hai đường thẳng h và MH vuông góc. Như vậy áp dụng kết quả trên ta có hình chiếu bằng của chúng phải vuông góc với nhau, tức là $M_2H_2 \perp h_2$.

Do đó, từ M_2 ta vạch đường thẳng $M_2H_2 \perp h_2 (H_2 \ni h_2)$. Từ đó ta có $H_1 \ni h_1$.

Dùng phương pháp tam giác vuông để tìm chiều dài đoạn thẳng MH (mục 2.1.2) ta có cạnh huyền M_2H_0 của tam giác vuông $M_2H_2H_0$ chính là khoảng cách cần tìm. $M_2H_0 = MH$.



Hình 2.22

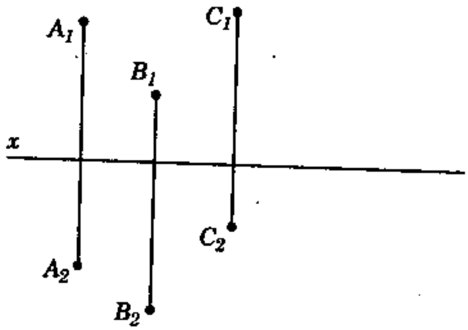
CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Cho đồ thức của các điểm A, B và C vẽ các đoạn thẳng sau (hình 2.23) :

- AA' song song với mặt phẳng hình chiếu đứng, nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc 30^0, và có chiều dài AA' cho trước (bạn đọc tự lấy chiều dài).

- BB' song song với mặt phẳng hình chiếu bằng, nghiêng với mặt phẳng hình chiếu đứng một góc 45^0, và cũng có chiều dài cho trước.

- CC' song song với mặt phẳng hình chiếu cạnh, nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc 30^0, và có chiều dài cho trước.

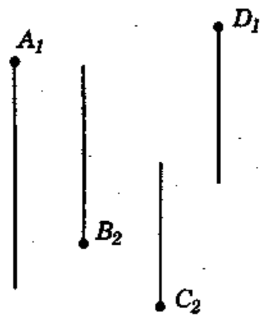


Hình 2.23

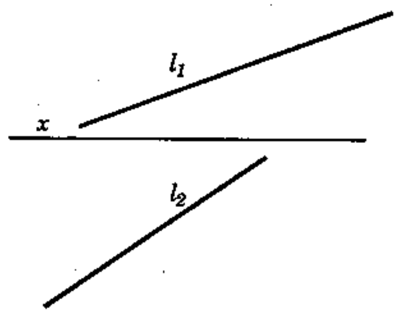
2. Vẽ hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của đường thẳng d. Biết rằng, bốn điểm A, B, C và D thuộc đường thẳng đó (hình 2.24).

3. Cho đường thẳng l (l_1, l_2). Tìm trên đường thẳng đó các điểm sau (hình 2.25):

- Điểm A, có hai hình chiếu đối xứng với nhau qua trục x.
- Điểm B, có hai hình chiếu trùng nhau.
- Điểm C, có độ cao gấp đôi độ xa.
- Tìm vết đứng và vết bằng của đường thẳng đó.



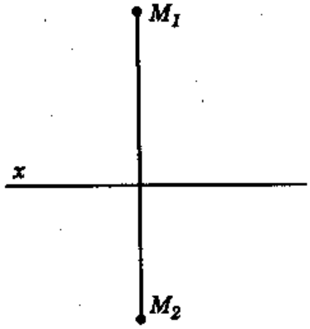
Hình 2.24



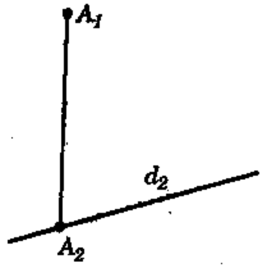
Hình 2.25

4. Vẽ đường thẳng đi qua điểm M, sao cho vết đứng và vết bằng của nó cách trục x những đoạn bằng nhau (hình 2.26).

5. Vẽ hình chiếu đứng của đường thẳng d, đi qua điểm A, và nghiêng với mặt phẳng hình chiếu đứng một góc 30^0 (hình 2.27).



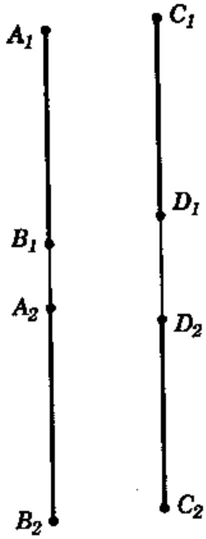
Hình 2.26



Hình 2.27

6. Qua điểm M, vẽ đường thẳng nghiêng với mặt phẳng hình chiếu đứng một góc 30^0, và nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc 45^0 (hình 2.26).

7. Cho hai đường cạnh AB và CD. Xét xem hai đường thẳng đó có song song với nhau không? (hình 2.28).



Hình 2.28

Chương III. MẶT PHẲNG

3.1. ĐỒ THỨC CỦA MẶT PHẲNG

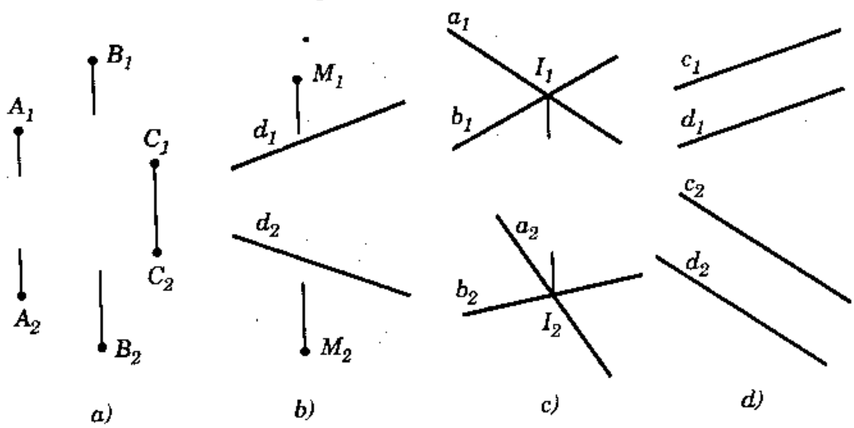
3.1.1. ĐỒ THỨC CỦA MẶT PHẲNG

Trong không gian, một mặt phẳng được xác định, khi biết một trong các trường hợp sau :

- Ba điểm không thẳng hàng.
- Một điểm và một đường thẳng không thuộc nhau.
- Hai đường thẳng cắt nhau.
- Hai đường thẳng song song.

Trên đồ thức cũng vậy, một mặt phẳng cũng được xác định, khi biết đồ thức của một trong các trường hợp sau :

- Đồ thức của ba điểm không thẳng hàng (hình 3.1a).
- Đồ thức của một điểm và một đường thẳng không thuộc nhau (hình 3.1b).
- Đồ thức của hai đường thẳng cắt nhau (hình 3.1c).
- Đồ thức của hai đường thẳng song song (hình 3.1d).



Hình 3.1

Các mặt phẳng cho trên hình 3.1, gọi là các mặt phẳng thường. Tức là chúng có vị trí bình thường (không song song và vuông góc) đối với các mặt phẳng hình chiếu.

3.1.2. VẾT CỦA MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa

Vết của mặt phẳng là giao tuyến của mặt phẳng với mặt phẳng hình chiếu :

- *Vết đứng của mặt phẳng là giao tuyến của mặt phẳng với π^1.*
- *Vết bằng của mặt phẳng là giao tuyến của mặt phẳng với π^2.*
- *Vết cạnh của mặt phẳng là giao tuyến của mặt phẳng với π^3.*

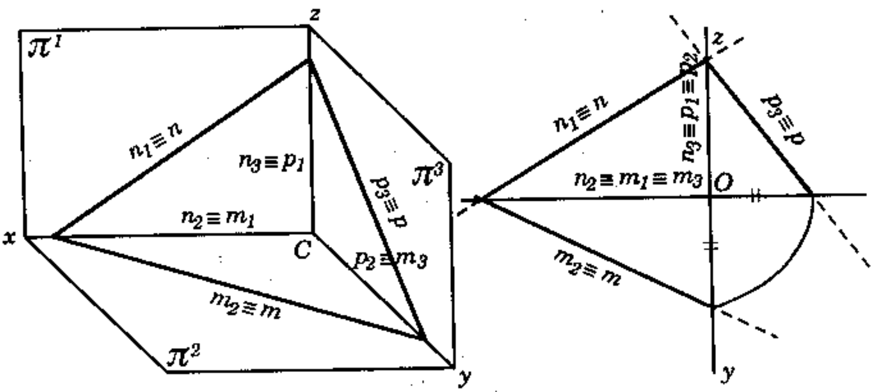
2. Tính chất

*** *Vết đứng của mặt phẳng*** (hình 3.2) :

- *Hình chiếu đứng của vết đứng mặt phẳng trùng với chính nó.*
- *Hình chiếu bằng của vết đứng mặt phẳng trùng với trục x.*

*** *Vết bằng của mặt phẳng :***

- *Hình chiếu bằng của vết bằng mặt phẳng trùng với chính nó.*
- *Hình chiếu đứng của vết bằng mặt phẳng trùng với trục x.*



a) b)

Hình 3.2

Như vậy, hình chiếu bằng của vết đứng n và hình chiếu đứng của vết bằng m của một mặt phẳng thì trùng nhau (vì chúng cùng thuộc trục x).

Vết đứng của mặt phẳng là tập hợp vết đứng của tất cả các đường thẳng thuộc mặt phẳng đó. Do đó, muốn tìm vết đứng của mặt phẳng, ta tìm vết đứng của hai đường thẳng thuộc mặt phẳng, rồi nối hai vết đứng đó lại, đó chính là vết đứng của mặt phẳng.

Tương tự, đối với vết bằng của mặt phẳng cũng vậy.

Cần lưu ý là, vết đứng và vết bằng của một mặt phẳng bao giờ cũng cắt nhau tại một điểm trên trục x. Giao điểm đó là điểm vừa thuộc vết đứng, vừa thuộc vết bằng của mặt phẳng.

Giao điểm đó có thể là điểm hữu hạn, hoặc điểm vô tận.

Nếu giao điểm đó là điểm vô tận, thì vết đứng và vết bằng của mặt phẳng song song với nhau (và cùng song song với trục x).

Ví dụ : Cho mặt phẳng (a, b), tìm các vết của mặt phẳng đó.

Giải : Tìm vết đứng N của đường thẳng a : Ta có : $N_2 = a_2 \times x$, từ đó suy ra $N_1 \ni a_1$ (hình 3.3).

Tương tự, tìm vết đứng N' của đường thẳng b : $N_2' = b_2 \times x$, từ đó suy ra $N_1' \ni b_1$.

Đường thẳng nối N_1 và N_1' chính là hình chiếu đứng n_1 của vết đứng n của mặt phẳng (a, b). Hình chiếu đứng n_1 đó cắt trục x tại điểm $I \equiv I_1 = n_1 \times x$.

Đó cũng là một điểm thuộc hình chiếu bằng m_2 của vết bằng m của mặt phẳng (a, b) :

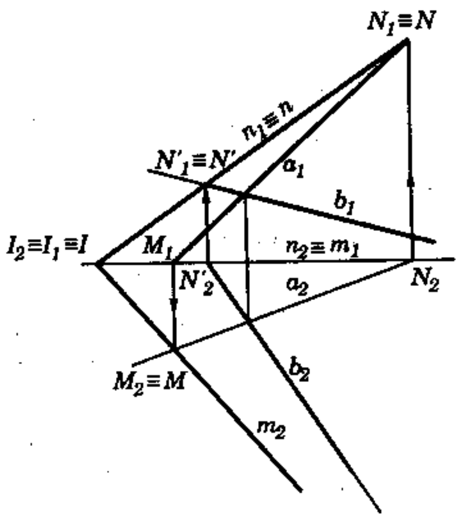
$I_1 \equiv I_2 = m_2 \times x$.

Ta chỉ cần tìm vết bằng M của một đường thẳng a (hoặc b) :

Ta có : $M_1 = a_1 \times x$, từ đó suy ra $M_2 \ni a_2$.

Đường thẳng nối $I \equiv I_1 \equiv I_2$ với M_2 chính là hình chiếu bằng m_2 của vết bằng m của mặt phẳng (a, b).

Nếu vết đứng n cắt trục x ở một điểm nằm ngoài phạm vi bản vẽ, thì ta phải tìm vết bằng của đường thẳng b nữa.



Hình 3.3

3.2. CÁC MẶT PHẲNG CÓ VỊ TRÍ ĐẶC BIỆT

Các mặt phẳng có vị trí đặc biệt, tức là các mặt phẳng có *vị trí đặc biệt đối với các mặt phẳng hình chiếu.*

3.2.1. MẶT PHẲNG CHIẾU

1. Định nghĩa : *Mặt phẳng chiếu là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu :*

- Mặt phẳng chiếu đứng là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu đứng π^1.

- Mặt phẳng chiếu bằng là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu bằng π^2.

- Mặt phẳng chiếu cạnh là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu cạnh π^3.

2. Tính chất

a) Mặt phẳng chiếu đứng (hình 3.4)

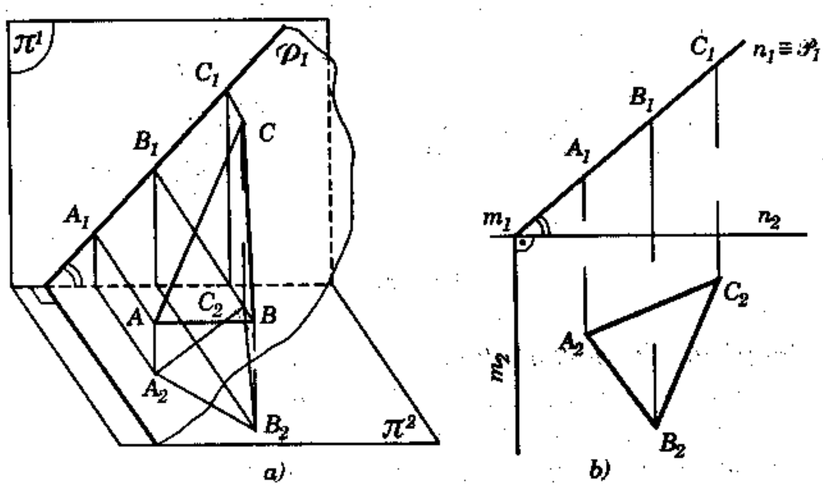
- Hình chiếu đứng của mặt phẳng chiếu đứng là một đường thẳng (trùng với vết đứng của mặt phẳng), và ngược lại. Tức là bất kỳ mặt phẳng nào có hình chiếu đứng là một đường thẳng thì nó là mặt phẳng chiếu đứng. Còn vết bằng của mặt phẳng đó là một đường thẳng vuông góc với trục x.

Mặt phẳng chiếu đứng được hoàn toàn xác định, khi biết hình chiếu đứng của nó.

- Góc giữa hình chiếu đứng của mặt phẳng đó với trục x, chính là góc giữa mặt phẳng đó với mặt phẳng hình chiếu bằng π^2.

Đây chính là một góc phẳng của góc nhị diện, xác định bởi mặt phẳng đó và mặt phẳng hình chiếu bằng π^2.

- Nếu có một hình thuộc mặt phẳng chiếu đứng, thì hình chiếu đứng của hình đó phải thuộc hình chiếu đứng của mặt phẳng đó.



Hình 3.4

Trên hình 3.4, tam giác ABC thuộc mặt phẳng $\mathcal{P}$ nên hình chiếu đứng $A_1B_1C_1 \ni \mathcal{P}$,

b) *Mặt phẳng chiếu bằng* (hình 3.5)

- Hình chiếu bằng của mặt phẳng chiếu bằng là một đường thẳng (trùng với vết bằng của mặt phẳng đó), và ngược lại. Tức là bất kỳ mặt phẳng nào có hình chiếu bằng là một đường thẳng thì nó là mặt phẳng chiếu bằng. Còn vết đứng của mặt phẳng đó là một đường thẳng vuông góc với trục x.

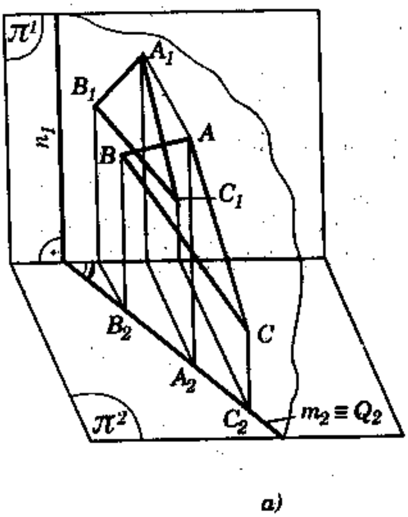
Mặt phẳng chiếu bằng được hoàn toàn xác định khi biết hình chiếu bằng của nó.

- Góc giữa hình chiếu bằng của mặt phẳng chiếu bằng với trục x, chính là góc giữa mặt phẳng đó với mặt phẳng hình chiếu đứng π^1.

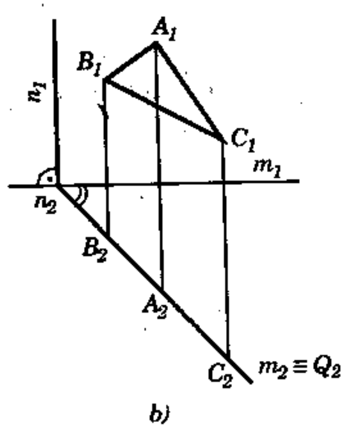
Đây chính là một góc phẳng của góc nhị diện, xác định bởi mặt phẳng đó và mặt phẳng hình chiếu đứng π^1.

- Nếu có một hình thuộc mặt phẳng chiếu bằng, thì hình chiếu bằng của hình đó phải thuộc hình chiếu bằng của mặt phẳng đó.

Trên hình 3.5, tam giác ABC thuộc mặt phẳng chiếu bằng.



a)



b)

Hình 3.5

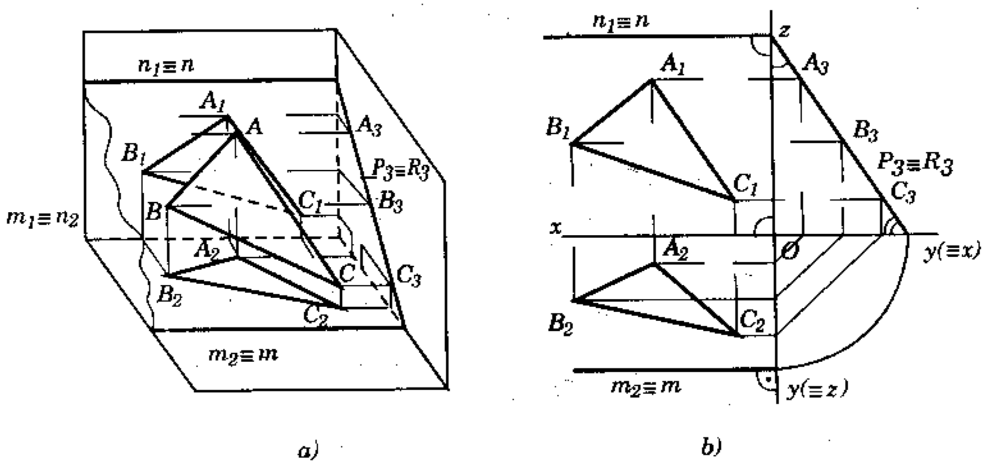
c) *Mặt phẳng chiếu cạnh* (hình 3.6).

- Vết đứng và vết bằng của mặt phẳng chiếu cạnh là các đường thẳng song song với trục x ; và ngược lại. Tức là bất kỳ mặt phẳng nào, có vết đứng và vết bằng song song với trục x thì nó là mặt phẳng chiếu cạnh. Còn hình chiếu cạnh của nó là một đường thẳng.

- Góc giữa hình chiếu cạnh của nó với trục z, chính là góc giữa mặt phẳng đó với mặt phẳng π^1, còn góc giữa hình chiếu cạnh của mặt phẳng đó với trục y (≡ x), chính là góc giữa mặt phẳng đó với π^2.

- Nếu có một hình thuộc mặt phẳng chiếu cạnh, thì hình chiếu cạnh của hình đó phải thuộc hình chiếu cạnh của mặt phẳng đó.

Trên hình 3.6, tam giác ABC thuộc mặt phẳng chiếu cạnh R.



Hình 3.6

3.2.2. MẶT PHẲNG ĐỒNG MỨC

1. Định nghĩa

Mặt phẳng đồng mức là mặt phẳng song song với mặt phẳng hình chiếu :

- Mặt phẳng mặt là mặt phẳng song song với mặt phẳng hình chiếu đứng π^1.

- Mặt phẳng bằng là mặt phẳng song song với mặt phẳng hình chiếu bằng π^2.

- Mặt phẳng cạnh là mặt phẳng song song với mặt phẳng hình chiếu cạnh π^3.

2. Tính chất

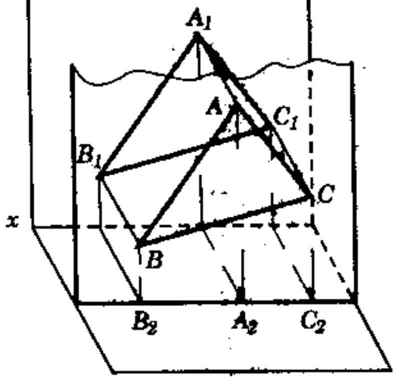
a) Mặt phẳng mặt *(hình 3.7)*

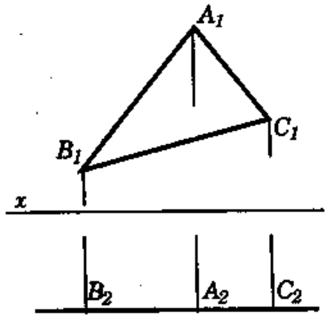
- Hình chiếu bằng của mặt phẳng mặt là một đường thẳng song song với trục x ; và ngược lại. Tức là, bất kỳ mặt phẳng nào, có hình chiếu bằng là một đường thẳng song song với trục x, thì nó là mặt phẳng mặt.

- *Nếu có một hình thuộc mặt phẳng mặt, thì hình chiếu đứng của nó bằng chính hình đó.* Trên hình 3.7, tam giác ABC thuộc mặt phẳng mặt, nên $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$.

- *Mặt phẳng mặt vừa là mặt phẳng chiếu bằng, vừa là mặt phẳng chiếu cạnh.*

Vì mặt phẳng mặt vừa vuông góc với mặt phẳng hình chiếu bằng π^2, vừa vuông góc với mặt phẳng hình chiếu cạnh π^3.

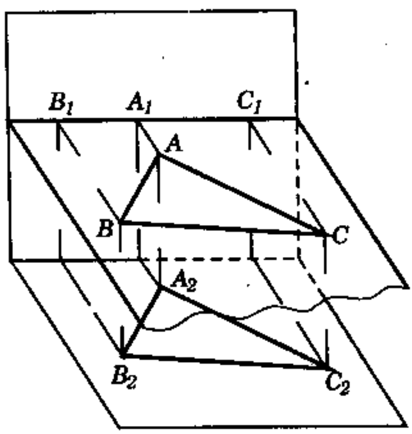


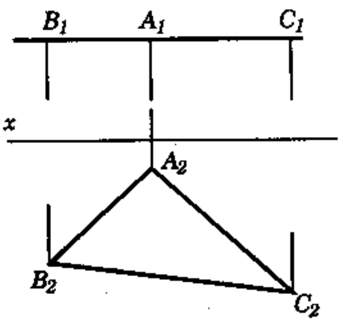


Hình 3.7

b) Mặt phẳng bằng *(hình* 3.8)

- *Hình chiếu đứng của mặt phẳng bằng là một đường thẳng song song với trục x, và ngược lại.*





Hình 3.8

- Nếu có một hình thuộc mặt phẳng bằng, thì hình chiếu bằng của nó bằng chính hình đó. Trên hình 3.8, ΔABC cũng thuộc mặt phẳng bằng nên $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta ABC$.

- Mặt phẳng bằng vừa là mặt phẳng chiếu đứng, vừa là mặt phẳng chiếu cạnh.

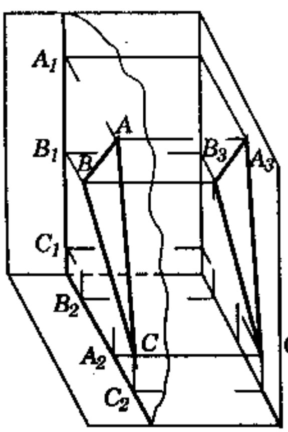
Vì mặt phẳng đó vừa vuông góc với mặt phẳng π^1 vừa vuông góc với mặt phẳng π^3.

c) Mặt phẳng cạnh (hình 3.9)

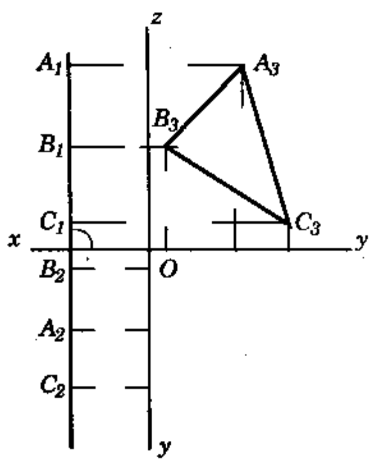
- Hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của mặt phẳng cạnh là hai đường thẳng trùng nhau và vuông góc với trục x, và ngược lại.

- Nếu có một hình thuộc mặt phẳng cạnh, thì hình chiếu cạnh của hình đó bằng chính hình đó. Trên hình 3.9 tam giác ABC thuộc mặt phẳng cạnh, nên $\Delta A_3B_3C_3 = \Delta ABC$.

- Mặt phẳng cạnh vừa là mặt phẳng chiếu đứng, vừa là mặt phẳng chiếu bằng.



a)



b)

Hình 3.9

3.3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐIỂM THUỘC MẶT PHẲNG

3.3.1. ĐƯỜNG THẲNG THUỘC MẶT PHẲNG

Một đường thẳng thuộc mặt phẳng là đường thẳng phải có hai điểm thuộc mặt phẳng.

Hai điểm đó có thể là hai điểm hữu hạn, hoặc một điểm hữu hạn và một điểm vô tận.

Ta có thể phát biểu điều kiện đó như sau :

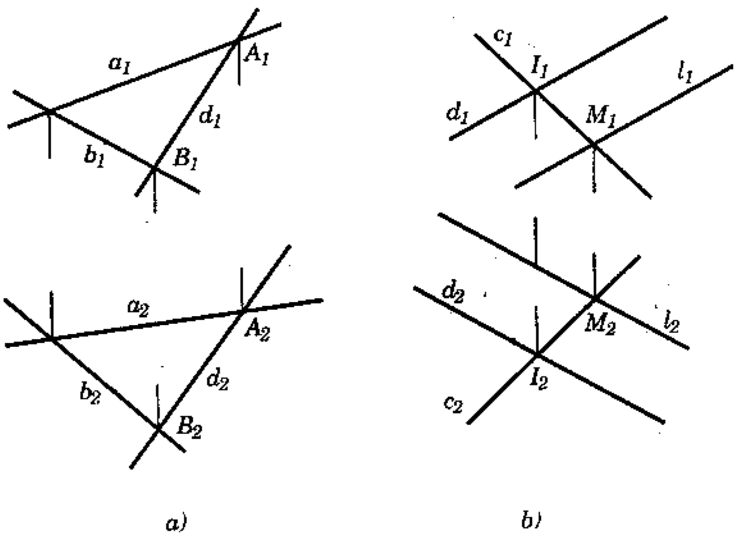
Điều kiện để một đường thẳng thuộc mặt phẳng là :

- *Đường thẳng phải có hai điểm thuộc mặt phẳng.*

Hoặc là : *Đường thẳng có một điểm thuộc mặt phẳng và song song với một đường thẳng khác của mặt phẳng đó.* Tức là đường thẳng có một điểm hữu hạn và một điểm vô tận thuộc mặt phẳng.

Ví dụ, hình 3.10a, đường thẳng d thuộc mặt phẳng $\mathcal{P}$(a, b) vì d có hai điểm A và B thuộc mặt phẳng $\mathcal{P}$(a, b). Trong đó A ∍ a và B ∍ b.

Hình 3.10b, đường thẳng l thuộc mặt phẳng $\mathcal{R}$(c, d) vì đường thẳng l có một điểm M thuộc mặt phẳng $\mathcal{R}$(c, d) và l // d. Trong đó M ∍ c.



Hình 3.10

Ví dụ : Tìm hình chiếu bằng của đường thẳng l. Biết hình chiếu đứng của l, và l thuộc mặt phẳng (a, b).

Giải. Vì đường thẳng l thuộc mặt phẳng (a, b) nên l cắt đường thẳng a tại điểm A, ($A_1 = a_1 \times l_1$) và l cũng cắt đường thẳng b tại điểm B ($B_1 = b_1 \times l_1$). Theo *điều kiện điểm thuộc đường thẳng* (mục 2.3.1) từ các hình chiếu đứng A_1 và B_1 ta tìm được các hình chiếu bằng A_2 và B_2. Đường thẳng A_2 B_2 chính là hình chiếu bằng l_2 của đường thẳng l (hình 3.11).

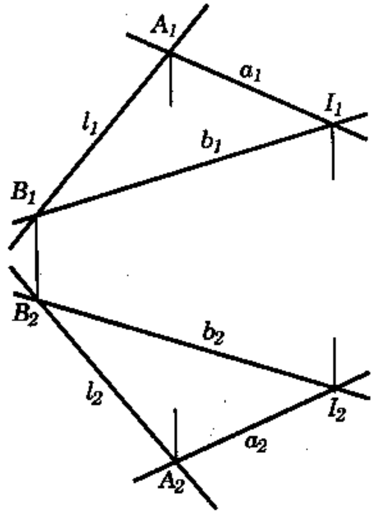
3.3.2. ĐIỂM THUỘC MẶT PHẲNG

Ta đã biết, *điều kiện để một điểm thuộc một đường thẳng* (mục 2.3.1), và *điều kiện để đường thẳng thuộc mặt phẳng* (mục 3.3.1).

Kết hợp cả hai trường hợp trên, ta có điều kiện để một điểm thuộc mặt phẳng như sau :

Điều kiện để một điểm thuộc một mặt phẳng là điểm đó phải thuộc một đường thẳng của mặt phẳng.

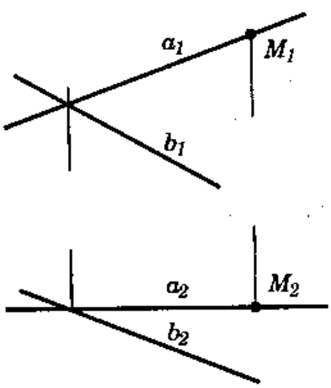
Trên hình 3.12, điểm M thuộc mặt phẳng (a, b) vì điểm M thuộc đường thẳng a của mặt phẳng đó.



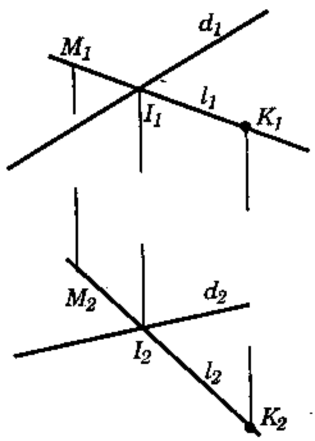
Hình 3.11

Ví dụ. Tìm hình chiếu đứng K_1 của điểm K. Biết rằng K thuộc mặt phẳng (M, d), và biết hình chiếu bằng K_2 của nó.

Giải. Qua điểm K thuộc mặt phẳng (M, d), ta vạch một đường thẳng bất kỳ, ví dụ đó là đường thẳng l đi qua điểm M. Như vậy, l_2 phải đi qua M_2. Đường thẳng l cắt đường thẳng d tại điểm I ($I_2 = d_2 \times l_2$) (hình 3.13).



Hình 3.12



Hình 3.13

Điểm K thuộc đường thẳng l, từ đó, theo điều kiện điểm thuộc đường thẳng, ta tìm được hình chiếu đứng K_1 ($K_1 \ni l_1$).

3.3.3. CÁC ĐƯỜNG THẲNG CÓ VỊ TRÍ ĐẶC BIỆT THUỘC MẶT PHẲNG

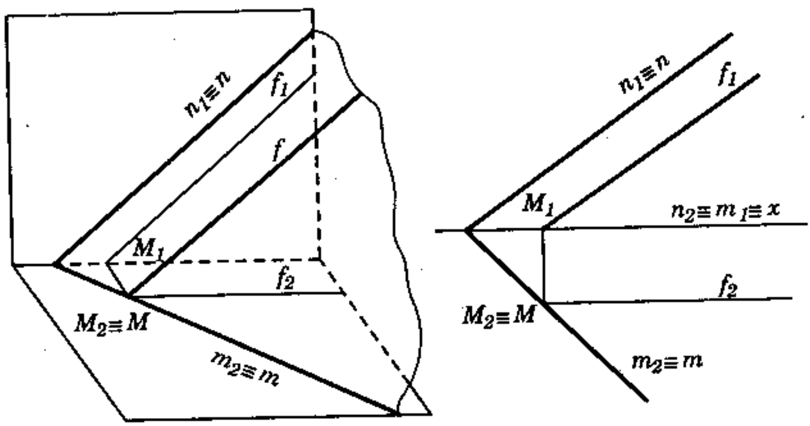
Trong mục 2.2, ta đã xét các đường thẳng có vị trí đặc biệt. Trong phần này, ta lại xét các đường thẳng có vị trí đặc biệt đó (có thêm vài đường khác), cái khác ở đây là các đường thẳng đặc biệt nhưng *thuộc một mặt phẳng*.

1. Đường mặt thuộc mặt phẳng

Đường mặt thuộc mặt phẳng là đường thẳng thuộc mặt phẳng và song song với mặt phẳng hình chiếu đứng π^1.

Tất nhiên nó có các tính chất của đường mặt ở mục 2.2.

Ngoài ra, cần lưu ý : trong mỗi mặt phẳng có vô số đường mặt; và tất cả các đường mặt đó đều song song với nhau, và song song với vết đứng của mặt phẳng đó. Chính vết đứng của mặt phẳng cũng là một đường mặt của mặt phẳng. Đường mặt này có độ xa bằng không, nên hình chiếu bằng của nó thuộc trục x. Ta có đường mặt f của mặt phẳng (m, n) (hình 3.14).



a) b)

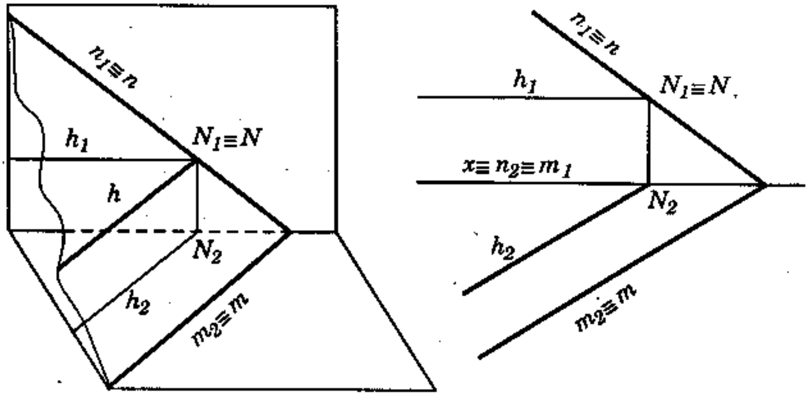
Hình 3.14

2. Đường bằng thuộc mặt phẳng

Đường bằng thuộc mặt phẳng là đường thẳng thuộc mặt phẳng và song song với mặt phẳng π^2.

Tương tự đường mặt thuộc mặt phẳng, trong mỗi mặt phẳng cũng có vô số đường bằng, và tất cả các đường bằng đó đều song song với nhau, và song song với vết bằng của mặt phẳng. Chính vết bằng của mặt phẳng cũng là một đường bằng, nhưng đường bằng này có độ cao bằng không, nên hình chiếu đứng của nó thuộc trục x. Trên hình 3.15 ta có đường bằng h thuộc mặt phẳng (m, n).

Tất nhiên cũng có đường cạnh thuộc mặt phẳng nữa. Bạn đọc tự xét lấy.



a) b)

Hình 3.15

3. Đường dốc nhất đối với mặt phẳng hình chiếu thuộc mặt phẳng

Trước hết, ta chứng minh một mệnh đề sau :

Hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$ có giao tuyến là đường thẳng g, thì trong tất cả các đường thẳng thuộc mặt phẳng $\mathcal{P}$, (hoặc $\mathcal{Q}$); thì đường thẳng vuông góc với giao tuyến g là đường thẳng có góc nghiêng lớn nhất đối với mặt phẳng $\mathcal{Q}$ (hoặc $\mathcal{P}$).

Thật vậy, giả sử ta có hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$, cắt nhau theo giao tuyến g (hình 3.16a).

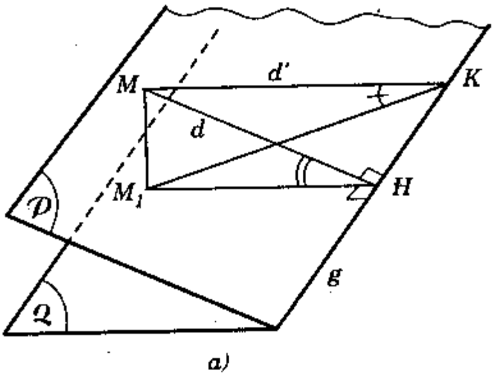
Qua điểm M thuộc mặt phẳng $\mathcal{P}$ ta vạch một đường thẳng d vuông góc với giao tuyến g, và d cắt g tại điểm H. Gọi M_1 là hình chiếu của M trên mặt phẳng $\mathcal{Q}$. Như vậy, đường thẳng M_1H là hình chiếu của đường thẳng d trên mặt phẳng $\mathcal{Q}$; và góc $\widehat{MHM_1}$ là góc nghiêng của đường thẳng d với mặt phẳng $\mathcal{Q}$. Ta phải chứng minh đó là góc nghiêng lớn nhất của tất cả các đường thẳng thuộc mặt phẳng $\mathcal{P}$ đối với mặt phẳng $\mathcal{Q}$.

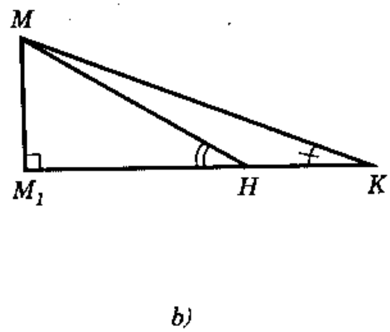
Qua điểm M thuộc mặt phẳng $\mathcal{P}$ ta vạch một đường thẳng d' bất kỳ, d' cắt giao tuyến g tại điểm K. Như vậy, đường thẳng M_1K là hình chiếu của đường thẳng d' trên mặt phẳng $\mathcal{Q}$ và góc $\widehat{MKM_1}$ là góc nghiêng của đường thẳng d' với mặt phẳng $\mathcal{Q}$.

Ta xoay tam giác MM_1K quanh đường thẳng MM_1 để cho đường thẳng$M_1K \equiv M_1H$. Vì M_1K dài hơn M_1H. Từ hình 3.16b ta có góc $\widehat{MHM_1}$ là góc ngoài của tam giác MKH, nên : $\widehat{MHM_1} = \widehat{MKM_1} + \widehat{HMK}$.

Điều đó chứng tỏ góc $\widehat{MHM_1} > \widehat{MKM_1}$. Đó là điều phải chứng minh.

Đường thẳng d có góc nghiêng lớn hơn đường thẳng d', thì độ dốc của đường thẳng d cũng lớn hơn độ dốc của đường thẳng d' đối với mặt phẳng *Q*. (Độ dốc của đường thẳng là tang của góc nghiêng của đường thẳng đó đối với một mặt phẳng).





Hình 3.16

a) Đường dốc nhất đối với mặt phẳng hình chiếu đứng thuộc mặt phẳng

*** Định nghĩa.** *Đường dốc nhất đối với mặt phẳng hình chiếu đứng thuộc mặt phẳng là đường thẳng thuộc mặt phẳng và có góc nghiêng (độ dốc) lớn nhất đối với mặt phẳng π^1.*

**** Tính chất :***

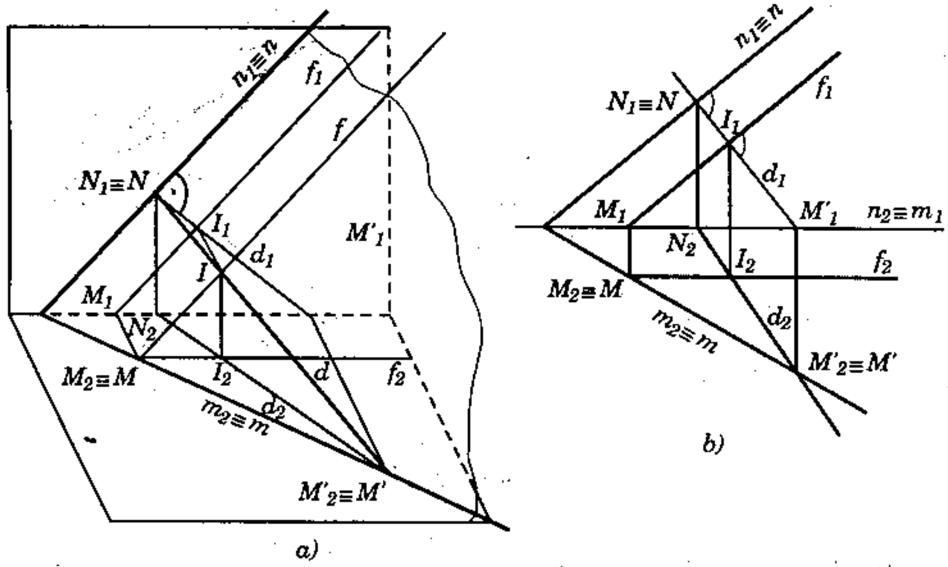
- Hình chiếu đứng của đdnđvmfhcđ thuộc mặt phẳng thì vuông góc với hình chiếu đứng của đường mặt (hoặc vết đứng) của mặt phẳng đó.

Thật vậy, gọi d là đdnđvmfhcđ. Từ mệnh đề trên, gọi d là đường thẳng thuộc mặt phẳng đã cho, vì d là đường thẳng thuộc mặt phẳng mà có góc nghiêng lớn nhất đối với mặt phẳng hình chiếu đứng, nên $d \perp n$ (n là vết đứng của mặt phẳng). Theo tính chất về hình chiếu của hai đường thẳng vuông góc (mục 2.4.4), ta có : $d_1 \perp n_1 \equiv n$ (hình 3.17).

- Góc của đdnđvmfhcđ với mặt phẳng π^1, bằng góc của mặt phẳng chứa nó (và nhận nó làm đdnđvmfhcđ) với mặt phẳng π^1.

Vì góc của đường dốc nhất đó với hình chiếu đứng của nó, chính là một góc phẳng của góc nhị diện, tạo bởi mặt phẳng chứa nó với mặt phẳng π^1. (Vì đường dốc nhất $d \perp n$, và $d_1 \perp n$).

Dựa vào tính chất này, ta có thể ứng dụng nó để tìm góc nghiêng của một mặt phẳng với mặt phẳng π^1.



Hình 3.17

b) Đường dốc nhất đối với mặt phẳng hình chiếu bằng thuộc mặt phẳng

** **Định nghĩa :** Ddnđvmfhcb thuộc mặt phẳng, là đường thẳng thuộc mặt phẳng và có góc nghiêng (độ dốc) lớn nhất đối với mặt phẳng hình chiếu bằng π^2.*

**** Tính chất :***

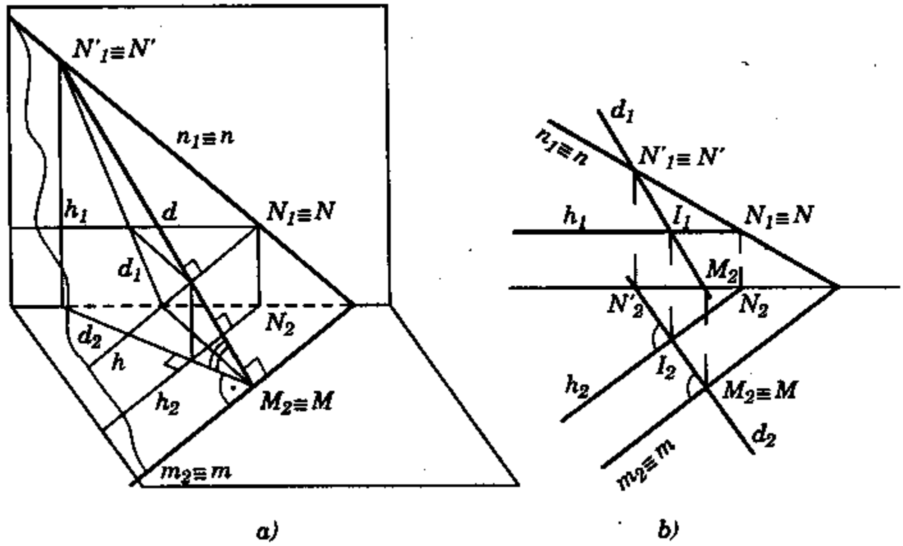
- Hình chiếu bằng của đdnddvmfhcb thuộc mặt phẳng là đường thẳng vuông góc với hình chiếu bằng của đường bằng (hoặc vết bằng) của mặt phẳng đó.

Chứng minh tương tự đdn đvmfhcđ.

- Góc của đdnđvmfhcb với mặt phẳng π^2 thì bằng góc của mặt phẳng chứa nó (và nhận nó làm đdnđvmfhcb) với mặt phẳng π^2.

Cách chứng minh các tính chất này tương tự đdnđvmfhcđ π^1.

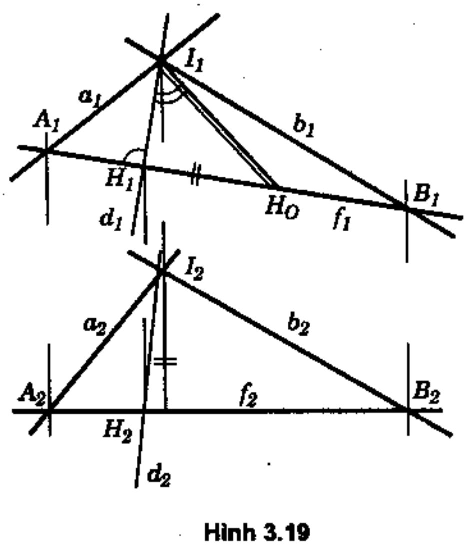
Trên hình 3.18, ta có d là đường dốc nhất đối với mặt phẳng hình chiếu bằng của mặt phẳng (m, n).



Hình 3.18

Ví dụ : Cho mặt phẳng $\mathcal{P}$(a, b). Tìm góc nghiêng của mặt phẳng đó đối với mặt phẳng hình chiếu đứng π^1.

Giải : Ta vẽ một đdnđvmfhcđ của mặt phẳng đó. Muốn vậy, trước hết ta vẽ một đường mặt AB của mặt phẳng đó, sau đó ta vẽ đdnđvmfhcđ là đường thẳng d thuộc mặt phẳng đó (hình 3.19).



Hình 3.19

Đường dốc nhất d đi qua giao điểm I và cắt đường mặt AB tại điểm H. (d có hình chiếu đứng $d_1 \perp f_1$). Sau đó, áp dụng phương pháp tam giác vuông (mục 2.1.2) để tìm góc nghiêng của đường thẳng IH (thuộc đường dốc nhất d đó) với mặt phẳng hình chiếu đứng. Góc của đường dốc nhất đó với mặt phẳng π^1 cũng là góc nghiêng cần tìm của mặt phẳng đã cho với π^1. Trên hình vẽ đó là góc $\widehat{H_1I_1H_0}$.

Ta cũng có thể ứng dụng tính chất của đdnđvmfhcb π^2 để tìm góc nghiêng của một mặt phẳng đối với mặt phẳng hình chiếu bằng π^2.

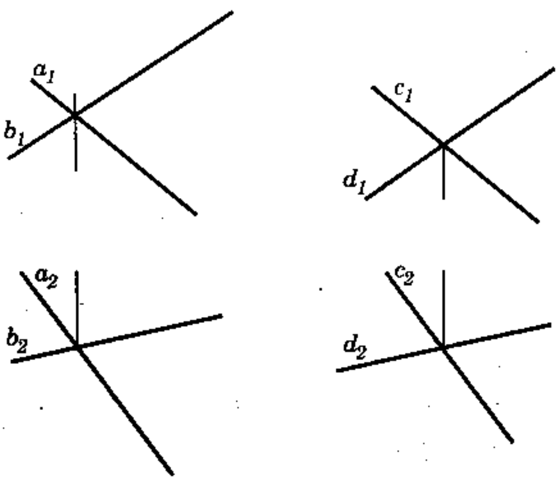
3.4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI HAI MẶT PHẲNG

3.4.1. Hai mặt phẳng song song

Trong không gian, *điều kiện để hai mặt phẳng song song là, trong mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau tương ứng đôi một song song với hai đường thẳng cắt nhau trong mặt phẳng kia.*

Trên đồ thức, điều kiện để hai mặt phẳng song song cũng như vậy.

Trên hình 3.20, hai mặt phẳng : $\mathcal{P}$(a, b) // $\mathcal{Q}$(c, d). Vì a // c (a_1 // c_1 và a_2 // c_2); và b // d(b_1 // d_1 và b_2 // d_2).



Hình 3.20

Ví dụ : Qua điểm I, dựng mặt phẳng song song với mặt phẳng $\mathcal{P}$(M, a).

Giải. Qua điểm M ta vạch đường thẳng MK (hoặc đường thẳng b) của mặt phẳng (M, a). Sau đó, qua điểm I ta vạch hai đường thẳng : d // a (d_1 // a_1 và d_2 // a_2) và c // b (c_1 //b_1 và c_2 // b_2). Như vậy, mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng c và d chính là mặt phẳng cần tìm (c, d) // $\mathcal{P}$(a, b) (hình 3.21).

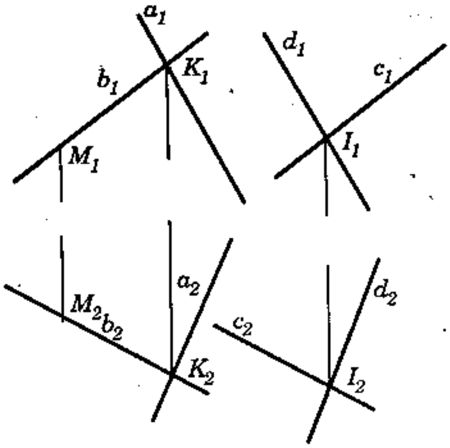
3.4.2. HAI MẶT PHẲNG CẮT NHAU

Nội dung chính của phần này là tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

Ta sẽ xét từng trường hợp, từ dễ đến khó.

1. Một trong hai mặt phẳng đã cho là mặt phẳng chiếu

Trường hợp cả hai mặt phẳng đều là mặt phẳng chiếu thì đơn giản hơn, nên bạn đọc tự tìm hiểu.



Hình 3.21

Nếu một trong hai mặt phẳng là mặt phẳng chiếu, thì ta dễ biết ngay một hình chiếu của giao tuyến, ứng dụng điều kiện đường thẳng thuộc mặt phẳng, để tìm hình chiếu còn lại của giao tuyến đó.

Ví dụ: Tìm giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{Q}$ với mặt phẳng $\mathcal{P}$(a, b).

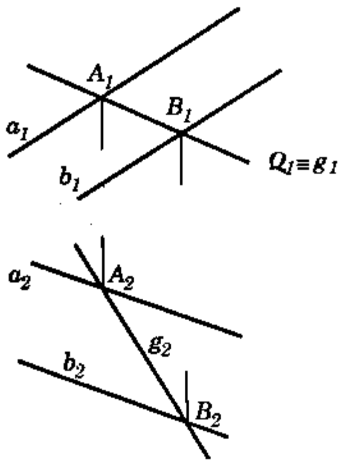
Giải. Gọi g là giao tuyến giữa hai mặt phẳng đã cho : g = $\mathcal{Q} \times \mathcal{P}$(a, b)

Như vậy, ta có : g ∍ $\mathcal{Q}$; và g ∍ $\mathcal{P}$(a, b)

Vì g ∍ $\mathcal{Q}$ nên ta có ngay $g_1 \equiv \mathcal{Q}_1$.

Cũng vì g ∍ $\mathcal{P}$(a, b) nên g cắt các đường thẳng a và b tương ứng tại các điểm A và B, từ đó ta tìm được hình chiếu bằng của g là g_2 (chính là đường thẳng A_2B_2) (hình 3.22).

Đường thẳng g đó chính là giao tuyến cần tìm của hai mặt phẳng đã cho.



Hình 3.22

Trường hợp này tuy đơn giản, nhưng là trường hợp ***rất cơ bản.*** Nó sẽ được ứng dụng cho các trường hợp phức tạp sau này.

2. Cả hai mặt phẳng đều không phải mặt phẳng chiếu

Để tìm giao tuyến giữa hai mặt phẳng trong trường hợp này, ta phải dùng *mặt phẳng cắt phụ trợ.*

Mặt phẳng cắt phụ trợ là một trong những nội dung rất quan trọng của môn hình học hoạ hình.

Nội dung của phương pháp đó như sau.

Phương pháp mặt phẳng cắt phụ trợ

Giả sử, ta cần tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$.

Ta phải dùng mặt phẳng cắt phụ trợ; các bước tiến hành như sau (hình 3.23) :

- Dựng một mặt phẳng σ (đọc là xích ma) bất kỳ (σ là mặt phẳng cắt phụ trợ), σ thường chọn là mặt phẳng chiếu.

- Tìm các giao tuyến của σ với $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$:

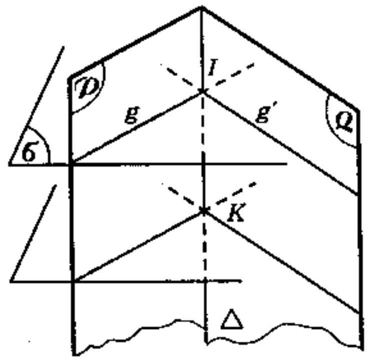
$g = \sigma \times \mathcal{P}$

$g' = \sigma \times \mathcal{Q}$.

- Tìm giao điểm của hai giao tuyến g và g' : $I = g \times g'$.

Như vậy, I là một điểm thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng đã cho.

Tương tự, dùng một mặt phẳng phụ trợ thứ hai, ta sẽ tìm được một điểm thứ hai K thuộc giao tuyến cần tìm. Và đường thẳng Δ nối các giao điểm I và K chính là giao tuyến của hai mặt phẳng đã cho.



Hình 3.23

Ví dụ 1 : Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $\mathcal{A}$ (a, b) và $\mathcal{B}$(c, d).

Giải : Ta dùng mặt phẳng cắt phụ trợ. Các bước tiến hành như sau :

- Dựng mặt phẳng phụ trợ σ . Ta chọn σ là mặt phẳng chiếu đứng (σ có hình chiếu đứng là σ_1).

- Tìm các giao tuyến của mặt phẳng σ với từng mặt phẳng $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$.

Vì một trong hai mặt phẳng là mặt phẳng chiếu, nên ta có :

$g = \sigma \times \mathcal{A}$

$g' = \sigma \times \mathcal{B}$

- Tìm giao điểm của g và g' : $I = g \times g'$.

Tương tự, dùng mặt phẳng phụ trợ thứ hai σ', cũng là mặt phẳng chiếu đứng.

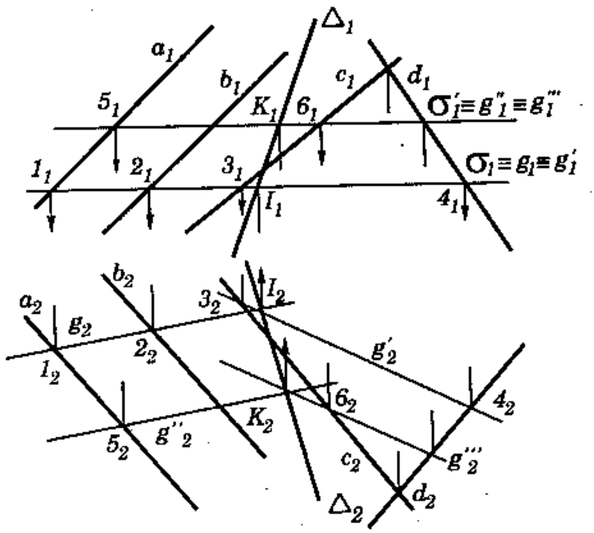
Để đơn giản khi vẽ, ta chọn σ' song song với σ . (Nên ta có : $\sigma'_1 // \sigma_1$).

Các bước tiến hành tương tự trên.

Cần lưu ý là, vì σ' // σ nên các giao tuyến phụ g'' // g, và g'''// g' (hình 3.24).

Và giao điểm của g" và g"' là $K = g'' \times g'''$.

Cuối cùng, đường thẳng Δ nối hai giao điểm I, K chính là giao tuyến của hai mặt phẳng đã cho.



Hình 3.24

Khi dựng các mặt phẳng phụ trợ, ta có thể chọn các mặt phẳng đó chứa các đường thẳng thuộc các mặt phẳng đã cho. Như vậy sẽ bớt được một số đường vẽ.

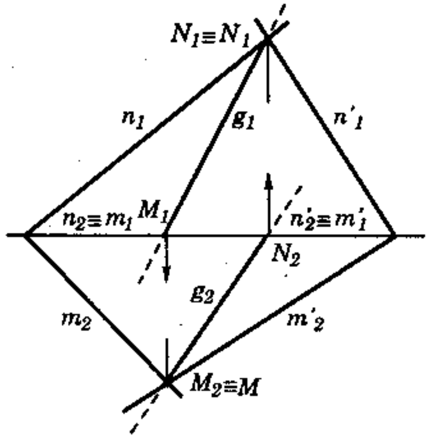
Trong trường hợp này, còn có trường hợp *cả hai mặt phẳng đều cho bằng vết, mà có các cặp vết cùng tên cắt nhau trong phạm vi bản vẽ.* Nên việc tìm giao tuyến hai mặt phẳng cũng khá đơn giản. Hai vết đứng cắt nhau (vì cùng thuộc mặt phẳng π^1), hai vết bằng cũng cắt nhau (vì cùng thuộc mặt phẳng π^2). Như vậy, giao tuyến hai mặt phẳng đó chính là đường thẳng nối hai giao điểm đó.

Ví dụ 2 : Tìm giao tuyến mặt phẳng (m, n) và mặt phẳng (m', n').

Giải : Vì hai vết đứng n và n' cùng thuộc mặt phẳng π^1, nên chúng cắt nhau tại điểm : $N = n \times n'$. ($N_1 \equiv N$, từ đó ta có $N_2 \ni x$).

Hai vết bằng m và m' cũng cùng thuộc mặt phẳng π^2, nên cũng cắt nhau tại điểm : $M = m \times m'$ ($M_2 \equiv M$, từ đó ta có $M_1 \ni x$).

Đường thẳng nối hai giao điểm M, N chính là giao tuyến hai mặt phẳng đã cho (hình 3. 25).



Hình 3.25

3.5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

3.5.1. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

Trong không gian, điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng là đường thẳng đó song song với (ít nhất) một đường thẳng của mặt phẳng đó.

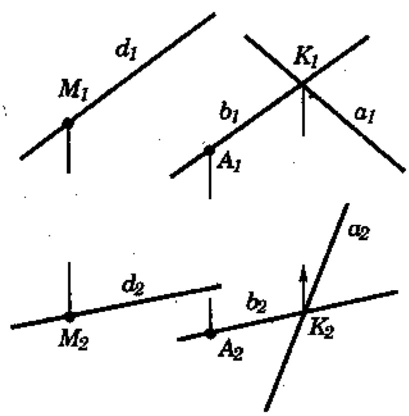
Ta vận dụng điều kiện đó vào đồ thức.

Ví dụ 1: Cho hình chiếu bằng d_2 của đường thẳng d đi qua điểm M. Vẽ hình chiếu đứng của đường thẳng đó. Biết rằng, đường thẳng d song song với mặt phẳng (A, a).

Giải : Đường thẳng d muốn song song với mặt phẳng (A, a) thì d phải song song với ít nhất một đường thẳng thuộc mặt phẳng (A, a). Ta vẽ một đường thẳng thuộc mặt phẳng (A, a) và song song với đường thẳng d. Đó là đường thẳng b // d; và b đi qua A.

Như vậy, b_2 phải đi qua A_2 và $b_2 // d_2$ (hình 3.26).

Đường thẳng b thuộc mặt phẳng (A, a), nên b cắt a tại điểm K, ta tìm được hình chiếu đứng b_1. Qua điểm M_1 vẽ đường thẳng $d_1 // b_1$.



Hình 3.26

Như vậy, đường thẳng d song song với đường thẳng b ($d_1 // b_1$ và $d_2 // b_2$) thuộc mặt phẳng (A, a) nên đường thẳng d song song với mặt phẳng (A, a).

Ví dụ 2 : Cho đường thẳng d và mặt phẳng (a, b). Hỏi đường thẳng d có song song với mặt phẳng (a, b) không?

Giải : Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (a, b), thì d phải song song với ít nhất một đường thẳng thuộc mặt phẳng (a, b).

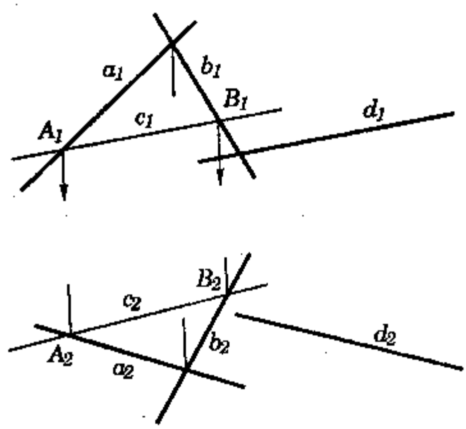
Ta vạch một đường thẳng c thuộc mặt phẳng (a, b), và đường thẳng c có hình chiếu đứng $c_1 // d_1$. Hai khả năng xảy ra :

– Nếu hình chiếu bằng $c_2 // d_2$ thì đường thẳng c//d. Khi đó, đường thẳng d song song với mặt phẳng (a, b).

– Nếu hình chiếu bằng c_2 không song song với d_2, tức là đường thẳng c không song song với đường thẳng d. Cũng tức là đường thẳng d không song song với mặt phẳng (a, b).

Trên hình 3.27, ta thấy c_2 và d_2 không song song. Vậy, đường thẳng d, không song song với mặt phẳng (a, b).

3.5.2. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG CẮT NHAU



Hình 3.27

Nội dung chính của phần này là tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.

Ta cũng xét các trường hợp từ dễ đến khó.

1. Đường thẳng đã cho là đường thẳng chiếu

Nếu đường thẳng đã cho là đường thẳng chiếu thì ta dễ biết ngay một hình chiếu của giao điểm, ứng dụng điều kiện điểm thuộc mặt phẳng (3.3.2), để tìm hình chiếu còn lại của giao điểm đó.

Ví dụ : Tìm giao điểm của đường thẳng chiếu đứng d với mặt phẳng (a, b).

Giải : Gọi K là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (a, b). Như vậy, vì K cũng là một điểm của đường thẳng d nên ta có $K_1 \equiv d_1$. Và K cũng là một điểm của mặt phẳng (a, b), nên ứng dụng điều kiện điểm thuộc mặt phẳng, ta tìm được hình chiếu bằng K_2 (hình 3.28).

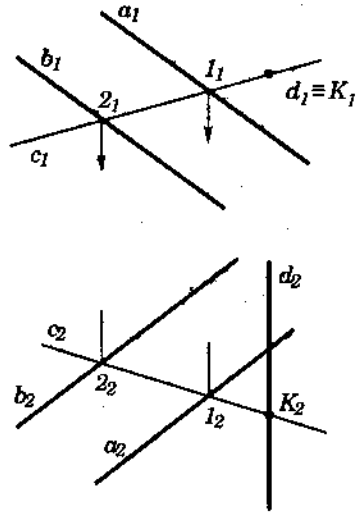
Muốn vậy, qua K thuộc mặt phẳng (a, b) ta vạch một đường thẳng c. Đường thẳng c cắt a tại điểm 1, và cắt b tại điểm 2. Vì K thuộc c nên có hình chiếu đứng $K_1 \in c_1$ ta tìm được hình chiếu bằng $K_2 \ni c_2$.

Còn hai trường hợp khác là :

- Đường thẳng là đường thẳng chiếu, và mặt phẳng cũng là mặt phẳng chiếu.

- Đường thẳng không phải đường thẳng chiếu, và mặt phẳng là mặt phẳng chiếu.

Hai trường hợp này đơn giản hơn, bạn đọc tự giải.



Hình 3.28

2. Trường hợp tổng quát

Trường hợp này, đường thẳng không phải đường thẳng chiếu, và mặt phẳng cũng không phải mặt phẳng chiếu.

Để tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng trong trường hợp này, ta phải dùng mặt phẳng phụ trợ.

Phương pháp mặt phẳng cắt phụ trợ :

Giả sử, ta cần tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng $\mathcal{P}$.

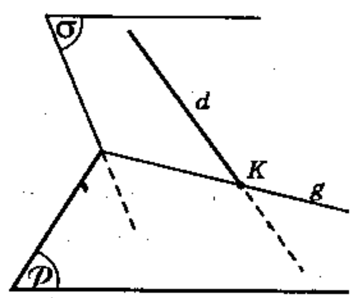
Các bước tiến hành như sau (hình 3.29) :

- Dựng mặt phẳng phụ trợ σ chứa đường thẳng d (thường chọn mặt phẳng σ là mặt phẳng chiếu).

- Tìm giao tuyến của mặt phẳng σ và mặt phẳng $\mathcal{P}$: $g = \sigma \times \mathcal{P}$.

- Tìm giao điểm của đường thẳng d và giao tuyến g : $K = d \times g$.

Điểm K đó chính là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng $\mathcal{P}$.



Hình 3.29

Ví dụ 1 : Tìm giao điểm đường thẳng d và mặt phẳng (m, n) cho bằng vết.

Giải : Ta dùng mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng chiếu bằng σ chứa đường thẳng d.

Như vậy, ta có : $\sigma_2 \equiv d_2$.

Gọi g là giao tuyến của σ và (m, n) thì ta có : $g_2 \equiv \sigma_2 \equiv d_2$.

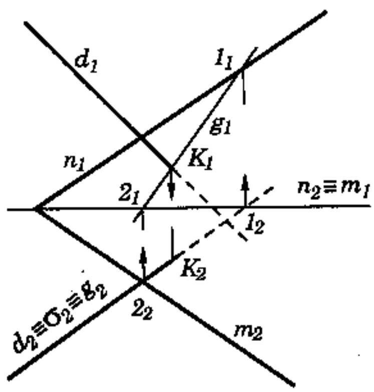
Vì g $\ni$ (m, n) nên g cắt vết đứng n ở điểm 1, và cắt vết bằng m ở điểm 2.

Hình chiếu đứng $1_1 2_1$ chính là g_1. Do đó, gọi K là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (m, n) thì : $K_1 = g_1 \times d_1$. Từ đó ta tìm được $K_2 \ni g_2$ (hình 3.30).

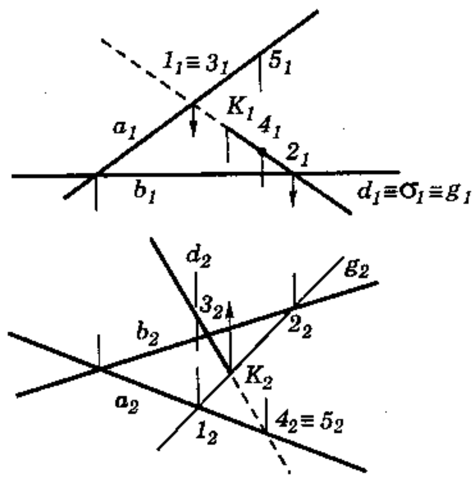
Ví dụ 2 : Tìm giao điểm đường thẳng d và mặt phẳng ***Q***(a, b).

Giải : Dựng mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng chiếu đứng σ chứa đường thẳng d. Như vậy, hình chiếu đứng của mặt phẳng σ là đường thẳng $\sigma_1 \equiv d_1$ (hình 3.31).

Gọi g là giao tuyến của σ và ***Q***(a, b) thì ta có : $g_1 \equiv \sigma_1 \equiv d_1$.



Hình 3.30



Hình 3.31

Như vậy, g cũng là đường thẳng thuộc mặt phẳng ***Q***(a, b), nên g cắt a tại điểm 1. ($1_1 = g_1 \times a_1$), từ đó ta có $1_2 \ni a_2$, g cắt b tại điểm 2 ($2_1 = g_1 \times b_1$), từ đó ta có $2_2 \ni b_2$.

Do vậy, ta tìm được hình chiếu bằng g_2 của đường thẳng g là đường thẳng $1_2 2_2$.

Giao điểm K của g và d chính là giao điểm cần tìm. Mà $K_2 = g_2 \times d_2$.

Từ K_2 ta dễ tìm được hình chiếu đứng $K_1 \ni d_1$.

3.5.3. XÉT THẤY VÀ KHUẤT TRÊN CÁC HÌNH CHIẾU

Để giúp việc tưởng tượng các hình tương ứng trong không gian được dễ dàng hơn, ta coi các mặt như những tấm kính mờ. Do đó, những mặt ở phía trước sẽ che khuất những hình ở phía sau nó.

Vì hướng chiếu (hướng nhìn) lên các mặt phẳng hình chiếu khác nhau, nên việc xét thấy và khuất trên các hình chiếu cũng khác nhau.

1. Xét thấy và khuất trên hình chiếu đứng

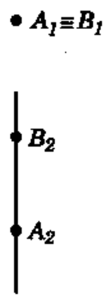
Nếu ta có hai điểm cùng thuộc một đường thẳng chiếu đứng, ta quy ước điểm nào có độ xa lớn hơn, thì hình chiếu đứng của nó sẽ thấy, và hình chiếu đứng của điểm còn lại sẽ khuất.

Trên hình 3.32, hai điểm A và B cùng thuộc đường thẳng chiếu đứng ($A_1 \equiv B_1$), nhưng vì điểm A có độ xa lớn hơn điểm B, nên hình chiếu đứng A_1 thấy, còn B_1 khuất.

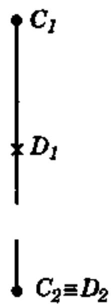
2. Xét thấy và khuất trên hình chiếu bằng

Nếu có hai điểm cùng thuộc một đường thẳng chiếu bằng, ta quy ước, điểm nào có độ cao lớn hơn, thì hình chiếu bằng của nó sẽ thấy, và hình chiếu bằng của điểm còn lại sẽ khuất.

Trên hình 3.33, hai điểm C và D cùng thuộc đường thẳng chiếu bằng ($C_2 \equiv D_2$), vì điểm C có độ cao lớn hơn điểm D, nên C_2 thấy, còn D_2 khuất.



Hình 3.32



Hình 3.33

Dựa vào quy ước trên, ta xét thấy và khuất cho đường thẳng d và mặt phẳng *Q*(a, b) trên hình 3.31.

Trước hết, ta có nhận xét sau : Mặt phẳng *Q*(a, b) cắt đường thẳng d tại điểm K. Như vậy, điểm K chia đường thẳng d làm hai nửa; trên mỗi hình chiếu, đường thẳng d sẽ có một nửa thấy và một nửa bị mặt phẳng *Q*(a, b) che khuất. Do đó, khi xét thấy và khuất trên mỗi hình chiếu, ta chỉ cần xét một trong hai nửa đó. Nếu nửa ta xét là thấy, thì đương nhiên, nửa còn lại sẽ khuất, và ngược lại. Trong mỗi nửa đó ta cũng chỉ cần lấy một điểm đại diện.

Nếu điểm đại diện đó thấy, thì cả nửa đường thẳng đó thấy; nếu điểm đại diện đó khuất, thì cả nửa đường thẳng đó khuất.

Trước hết ta xét thấy, khuất trên hình chiếu đứng : Ta lấy hai điểm 1 và 3 cùng thuộc đường thẳng chiếu đứng ($1_1 \equiv 3_1$), trong đó $1 \ni a$ và $3 \ni d$. Ta thấy 1 có độ xa lớn hơn 3, nên 1_1 thấy và 3_1 khuất. Vậy, hình chiếu đứng của nửa đường thẳng d chứa điểm 3 khuất, và đương nhiên nửa còn lại thấy.

Tương tự, ta xét trên hình chiếu bằng. Ta lấy hai điểm 4 và 5 cùng thuộc đường thẳng chiếu bằng ($4_2 \equiv 5_2$), trong đó $4 \ni d$ và $5 \ni a$. Ta thấy 5 có độ cao lớn hơn 4, nên 5_2 thấy, và 4_2 khuất. Và như vậy, hình chiếu bằng của nửa đường thẳng d có chứa điểm 4 khuất, và nửa còn lại sẽ thấy.

Tương tự, bạn đọc có thể xét cho hình 3.30, là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (m, n).

3.5.4. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Trong không gian, điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng là, đường thẳng đó phải vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng.

Từ điều kiện đó và điều kiện để hai đường thẳng vuông góc (mục 2.4.4), ta có điều kiện trên đồ thức để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng như sau :

Ta xét trường hợp mặt phẳng không phải mặt phẳng chiếu cạnh. Trường hợp mặt phẳng là mặt phẳng chiếu cạnh (mà lại không cho hình chiếu cạnh) có phức tạp hơn, bạn đọc tự nghiên cứu, hoặc sẽ đề cập đến trong bài tập).

Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (không phải mặt phẳng chiếu cạnh) là, hình chiếu đứng của đường thẳng vuông góc với hình chiếu đứng của đường mặt (hoặc vết đứng) của mặt phẳng, và hình chiếu bằng của đường thẳng vuông góc với hình chiếu bằng của đường bằng (hoặc vết bằng) của mặt phẳng.

Trên hình 3. 34, ta có đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (f, h).

Vì trong đó f là đường mặt, và h là đường bằng.

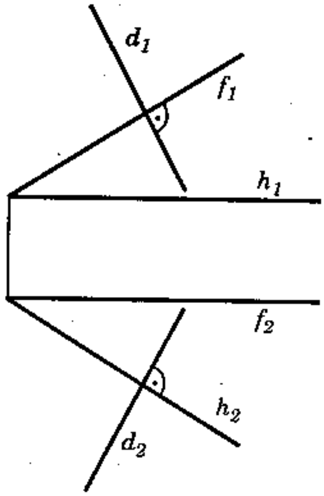
Mà $d_1 \perp f_1$ và $d_2 \perp h_2$, nên $d \perp f$ và $d \perp h$. Tức là d vuông góc với mặt phẳng (f, h).

Ví dụ 1 : Tìm khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (m, n).

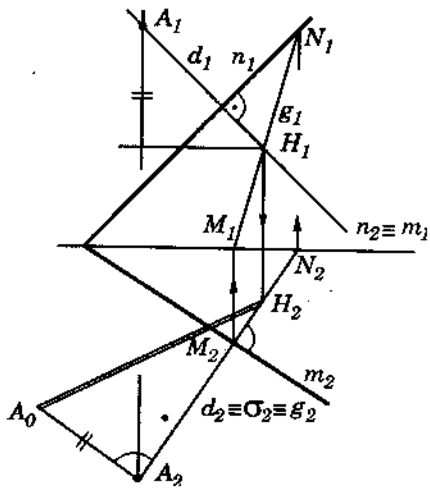
Giải : Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (m, n) là chiều dài đoạn thẳng vuông góc từ A tới mặt phẳng (m, n).

Trước hết, qua A dựng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (m, n).

Như vậy đường thẳng d có : $d_1 \perp n_1 \equiv n$, và $d_2 \perp m_2 \equiv m$ (hình 3.35).



Hình 3.34



Hình 3.35

Tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (m, n). Ta dựng mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng chiếu bằng σ chứa đường thẳng d :

Như vậy, ta có : $\sigma_2 \equiv d_2$.

Tìm giao tuyến của mặt phẳng σ và mặt phẳng (m, n) :

Gọi g là giao tuyến đó, ta có : $g_2 \equiv \sigma_2 \equiv d_2$. Vì g cũng là đường thẳng của mặt phẳng (m, n) nên g sẽ cắt m : tại điểm M; $M_2 = m_2 \times g_2$; và cắt n tại điểm N : $N_2 = n_2 \times g_2$.

Từ đó, ta tìm được $M_1 \ni m_1$ và $N_1 \ni n_1$.

Như vậy, g_1 chính là đường thẳng M_1N_1 và chân đường vuông góc $H_1 = d_1 \times g_1$, từ đó ta tìm được $H_2 \ni d_2$.

Dùng phương pháp tam giác vuông (mục 2.1.2) ta tìm được chiều dài đoạn $AH = A_0H_2$.

Đó chính là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (m, n).

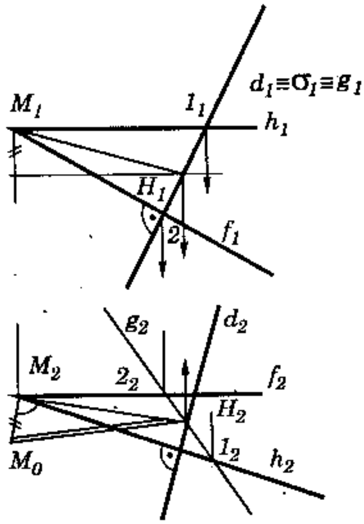
Ví dụ 2 : Tìm khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d.

Giải : Ta đã biết, khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d, là chiều dài đoạn thẳng vuông góc hạ từ M xuống d. Như vậy, ta phải tìm chân đường vuômg góc đó.

Vì d là đường thẳng bất kỳ, nên ta không thể trực tiếp hạ được đường vuông góc đó, mà ta phải tìm gián tiếp. Bằng cách, qua M dựng mặt phẳng $\mathcal{P}$(f, h) vuông góc với d (hình 3.36). Trong đó, f là đường mặt, d ⊥ f ($d_1 \perp f_1$) và h là đường bằng d ⊥ h ($d_2 \perp h_2$), rồi tìm giao điểm H của đường thẳng d với mặt phẳng $\mathcal{P}$(f, h).

Cách tìm giao điểm H như trên hình 3.36.

Tìm chiều dài của đoạn MH = M_0H_2 (ứng dụng phương pháp tam giác vuông, mục 2.1.2), đó chính là khoảng cách cần tìm.



Hình 3.36

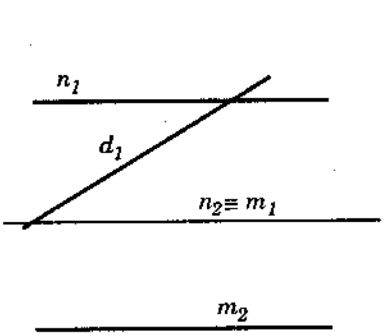
Tới đây, ta mới giải được bài toán tìm khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng bất kỳ. Còn ở mục 2.4.4 thì mới chỉ tìm được khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng đồng mức.

Tất nhiên, nếu bạn nào *nhanh trí* thì ngay ở phần đó cũng đã có thể giải được bài toán trên đây.

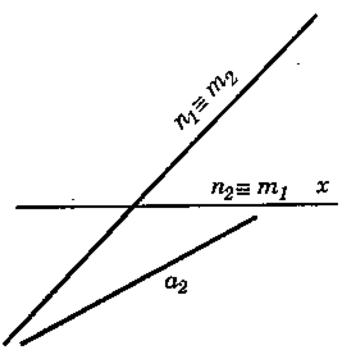
CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Cho mặt phẳng (m, n), và hình chiếu đứng d_1 của đường thẳng d, thuộc mặt phẳng đó. Tìm hình chiếu bằng của đường thẳng đó (hình 3.37).

2. Cho mặt phẳng (m, n), và hình chiếu bằng a_2 của đường thẳng a thuộc mặt phẳng đó. Tìm hình chiếu đứng của đường thẳng đó (hình 3.38).



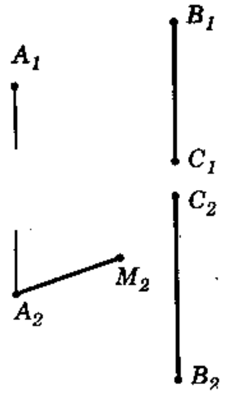
Hình 3.37



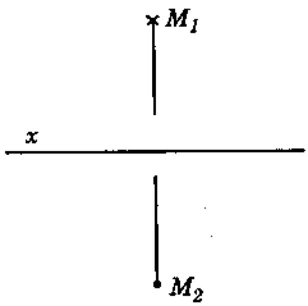
Hình 3.38

3. Vẽ hình chiếu đứng của đường thẳng AM, thuộc mặt phẳng (ABC). Cho biết hình chiếu bằng A_2M_2 (hình 3.39).

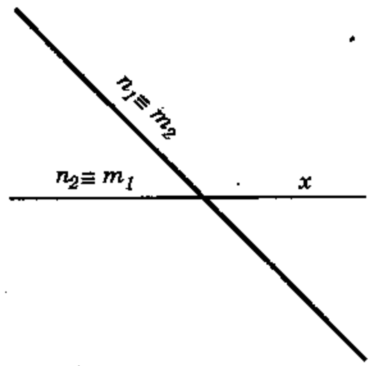
4. Qua điểm $M(M_1, M_2)$, dựng mặt phẳng, sao cho vết đứng của nó hợp với trục x một góc 30^0 và vết bằng của nó hợp với trục x một góc 45^0 (hình 3.40).



Hình 3.39



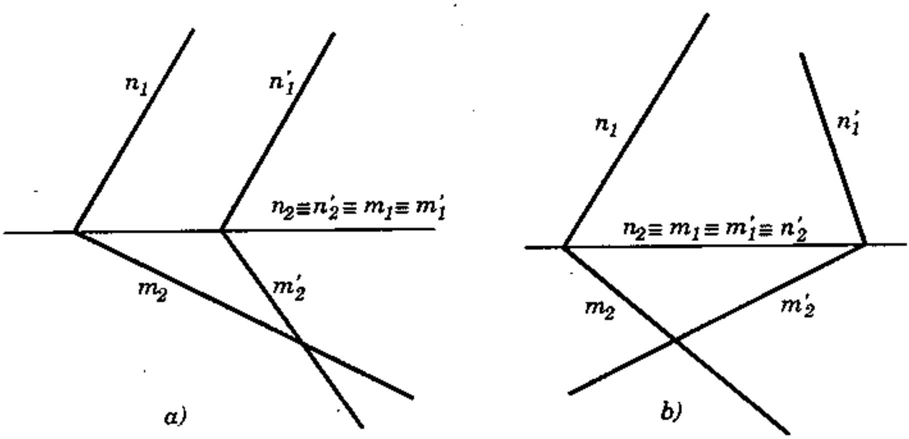
Hình 3.40



Hình 3.41

5. Chứng minh mặt phẳng có vết đứng và vết bằng trùng nhau là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng phân giác thứ hai (hình 3.41).

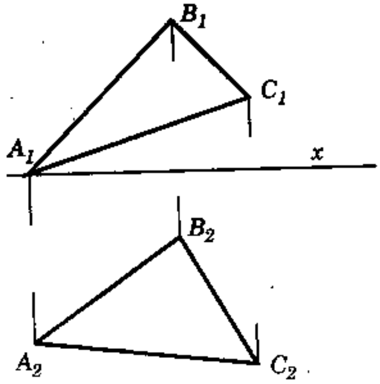
6. Vẽ giao tuyến hai mặt phẳng (m, n) và (m', n') (hình 3.42a, b).



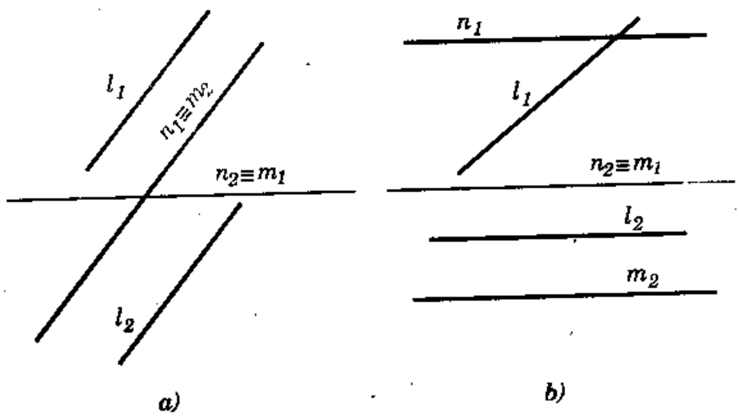
Hình 3.42

7. Vẽ giao tuyến giữa mặt phẳng (ABC) với mặt phẳng phân giác I (hình 3. 43).

8. Tìm giao điểm đường thẳng l với mặt phẳng (m, n) (hình 3.44a, b).

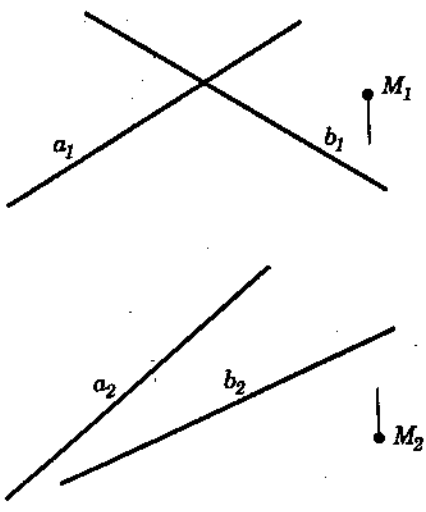


Hình 3.43



Hình 3.44

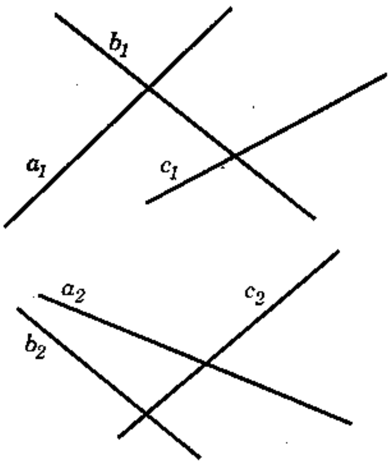
9. Qua điểm M, dựng đường thẳng cắt hai đường thẳng a và b (hình 3.45).



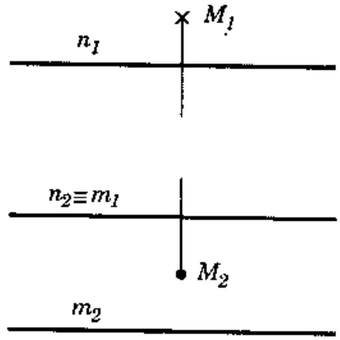
Hình 3.45

10. Cho ba đường thẳng a, b và c dựng đường thẳng cắt hai đường thẳng a, b và song song với đường thẳng c (hình 3.46).

11. Không dùng hình chiếu cạnh, tìm khoảng cách từ điểm M (M_1, M_2) tới mặt phẳng chiếu cạnh (m, n) (hình 3.47).



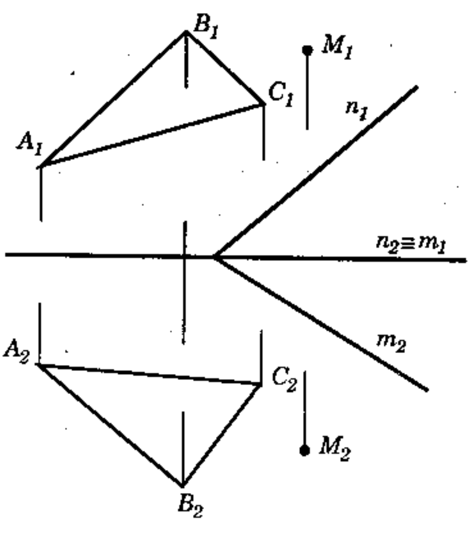
Hình 3.46



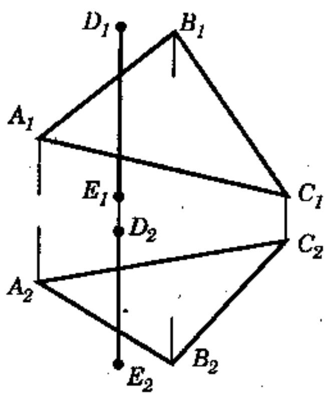
Hình 3.47

12. Qua điểm M(M_1, M_2) dựng mặt phẳng vuông góc với cả hai mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (m, n) (hình 3.48).

13. Tìm giao điểm của đường thẳng DE với mặt phẳng (ABC) (hình 3.49).



Hình 3.48



Hình 3.49

B – PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI HÌNH CHIẾU

Chương IV. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI HÌNH CHIẾU

4.1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Như trên ta đã thấy, nếu các hình đã cho ở vị trí đặc biệt, thì nhiều khi việc giải một số bài toán khá đơn giản. Vì vậy, nếu các hình đã cho ở vị trí bất kỳ, ta có thể dùng biến đổi hình chiếu để đưa các hình đó tới vị trí đặc biệt, để giải bài toán đã cho. Sau đó nếu cần sẽ đưa kết quả trở về hình chiếu ban đầu.

Biến đổi hình chiếu có nhiều loại, song có thể chia làm hai loại chính :

- *Thay mặt phẳng hình chiếu.* Trong phương pháp biến đổi này, ta *giữ nguyên vị trí các hình đã cho, và thay các mặt phẳng hình chiếu cũ bằng các mặt phẳng hình chiếu mới, để hình đã cho có vị trí đặc biệt đối với các mặt phẳng hình chiếu mới.*

- *Dời hình.* Trong phương pháp biến đổi này, ta *giữ nguyên các mặt phẳng hình chiếu, và thay đổi vị trí của các hình đã cho, để ở vị trí mới thì các hình đó có vị trí đặc biệt đối với các mặt phẳng hình chiếu.*

Cần lưu ý là, khi thay đổi vị trí của hình đã cho, *phải giữ nguyên vị trí tương đối giữa tất cả các yếu tố của hình đã cho.* Nghĩa là không được làm biến dạng hình đó.

4.2. PHƯƠNG PHÁP THAY MẶT PHẲNG HÌNH CHIẾU

4.2.1. THAY MẶT PHẲNG HÌNH CHIẾU ĐỨNG

1. Định nghĩa. *Thay mặt phẳng hình chiếu đứng là thay mặt phẳng hình chiếu π^1 bằng mặt phẳng hình chiếu $\pi^{1'}$ vuông góc với π^2. Sau đó chiếu hình đã cho lên $\pi^{1'}$, ta có hình chiếu đứng mới của hình đã cho* (hình 4.1).

2. Tính chất

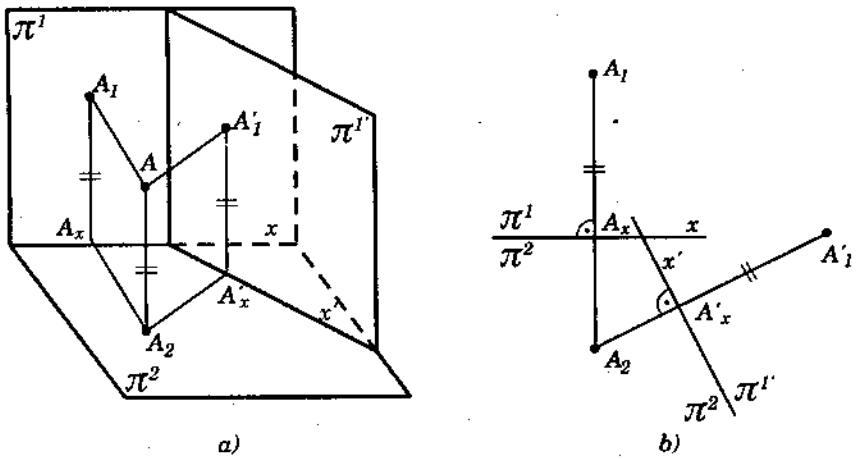
- *Hình chiếu bằng của hình giữ nguyên.*

Vì mặt phẳng hình chiếu bằng π^2 giữ nguyên, nên hình chiếu bằng của hình cũng giữ nguyên.

- *Độ cao của mỗi điểm của hình không thay đổi*

Vì mặt phẳng hình chiếu bằng π^2 giữ nguyên, nên khoảng cách từ mỗi điểm của hình tới mặt phẳng π^2 (độ cao) cũng không thay đổi.

Muốn tìm hình chiếu đứng mới A'_1 của A, ta vẽ đường thẳng $A_2A'_x \perp x'$, rồi lấy trên đó điểm A'_1 sao cho $A'_1A'_x = A_1A_x$ (chú ý dấu dương hoặc âm của độ cao mỗi điểm).

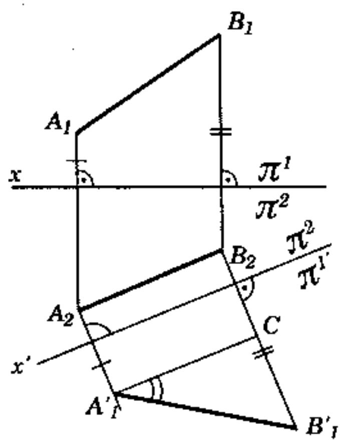


Hình 4.1

Ví dụ : Bằng cách thay mặt phẳng hình chiếu đứng, tìm chiều dài đoạn thẳng AB, và góc của nó với π^2.

Giải : Ta biết, nếu có một đoạn thẳng thuộc đường mặt, thì hình chiếu đứng của nó có chiều dài bằng chính nó. Vì vậy, ta có thể thay mặt phẳng hình chiếu đứng để đường thẳng AB trở thành đường mặt. Muốn vậy, ta chọn trục hình chiếu $x' // A_2B_2$, rồi dựa vào tính chất trên, tức là độ cao của các điểm A và B không đổi, ta tìm hình chiếu đứng mới $A'_1B'_1$.

Trong hệ thống mới, AB đã là đường mặt, nên hình chiếu đứng mới $A'_1B'_1 = AB$.



Hình 4.2

Vì góc giữa hình chiếu đứng của AB với trục x' thì bằng góc của đường thẳng AB với mặt phẳng hình chiếu bằng π^2. Qua A'_1 ta vạch đường thẳng $A'_1C // x'$ thì góc $\widehat{B'_1A'_1C}$ chính là góc cần tìm (hình 4.2).

4.2.2. THAY MẶT PHẲNG HÌNH CHIẾU BẰNG

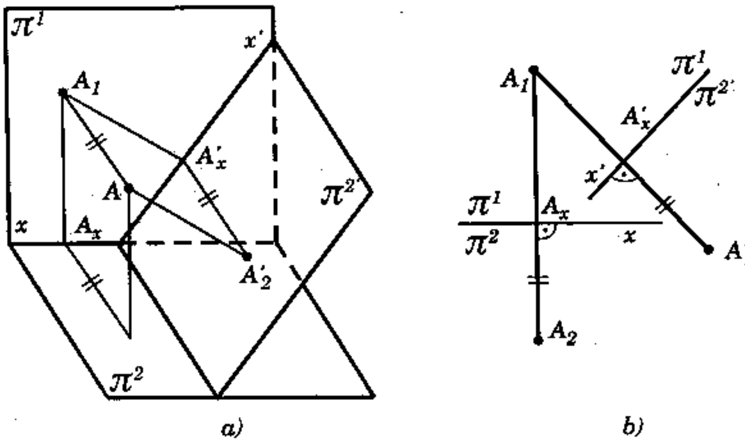
1. Định nghĩa. *Thay mặt phẳng hình chiếu bằng, là thay mặt phẳng π^2 bằng mặt phẳng $\pi^{2'}$ vuông góc với mặt phẳng π^1. Sau đó chiếu hình đã cho lên mặt phẳng $\pi^{2'}$ ta có hình chiếu bằng mới của hình đó.*

2. Tính chất

- *Hình chiếu đứng của hình giữ nguyên.* Vì mặt phẳng π^1 giữ nguyên.

- *Độ xa của mỗi điểm của hình không thay đổi.* Vì mặt phẳng π^1 giữ nguyên, nên khoảng cách từ mỗi điểm của hình đến π^1 (độ xa) cũng không thay đổi (hình 4.3).

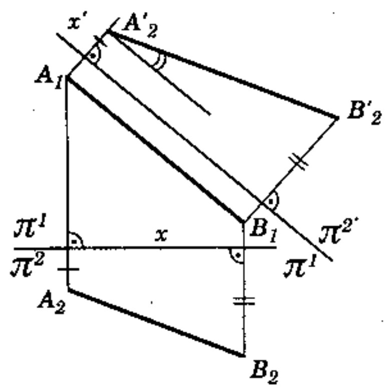
Tương tự trên, ta tìm được hình chiếu bằng mới của hình đã cho.



Hình 4.3

Ví dụ 1 : Bằng cách thay mặt phẳng hình chiếu bằng, tìm góc nghiêng của đường thẳng AB đối với mặt phẳng hình chiếu đứng.

Giải : Ta biết, nếu AB là đường bằng, thì góc nghiêng của hình chiếu bằng của AB với trục hình chiếu sẽ bằng góc nghiêng của đường thẳng AB với mặt phẳng hình chiếu đứng. Vì vậy, để tìm góc nghiêng của đường thẳng AB với mặt phẳng hình chiếu đứng, ta thay mặt phẳng hình chiếu bằng π^2 để đường thẳng AB trở thành đường bằng. Muốn vậy, ta chọn trục hình chiếu mới x' // A_1B_1. Tương tự trên, ta tìm được hình chiếu bằng mới của đường thẳng AB là $A_2'B_2'$.



Hình 4.4

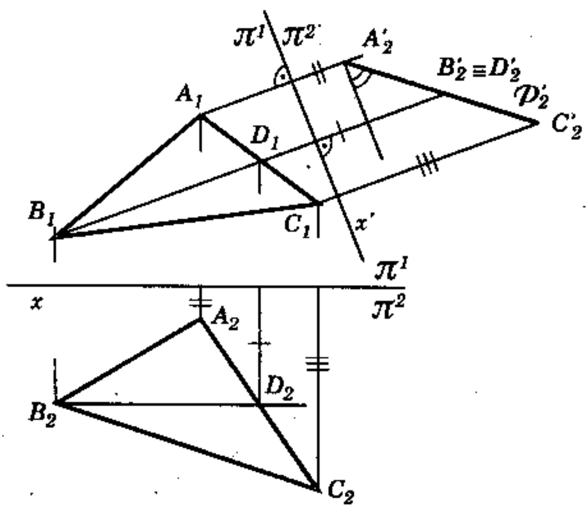
Khi đó, góc giữa đường thẳng $A_2'B_2'$ với trục x' sẽ bằng góc của AB với mặt phẳng hình chiếu đứng π^1 (hình 4.4).

Ví dụ 2: Bằng cách thay mặt phẳng hình chiếu bằng π^2, tìm góc nghiêng của mặt phẳng $\mathcal{P}$(ABC) với mặt phẳng hình chiếu đứng π^1.

Giải : Để tìm góc nghiêng của một mặt phẳng đối với mặt phẳng hình chiếu đứng π^1, ta phải đưa mặt phẳng đó trở thành mặt phẳng chiếu bằng. Muốn vậy, ta đưa một đường mặt của mặt phẳng đó trở thành đường thẳng chiếu bằng.

Trước hết, ta vẽ một đường mặt BD của mặt phẳng đó. Để thay mặt phẳng hình chiếu bằng π^2, ta chọn trục hình chiếu x' ⊥ B_1D_1. Dựa vào các tính chất trên, độ xa của các điểm không đổi, ta tìm được hình chiếu bằng mới của đường mặt đó là một điểm $B'_2 \equiv D'_2$. Khi đó, mặt phẳng $\mathcal{P}$(ABC) trở thành mặt phẳng chiếu bằng trong hệ thống mới, và hình chiếu bằng mới của nó là một đường thẳng $\mathcal{P}'_2(A'_2B'_2C'_2)$ (hình 4.5).

Góc giữa $\mathcal{P}'_2(A'_2B'_2C'_2)$ với trục x' chính là góc cần tìm.



Hình 4.5

Nếu chỉ bằng *một lần thay mặt phẳng hình chiếu*, thì ta chỉ có thể giải được các bài toán sau :

- Đưa một đường thẳng bất kỳ trở thành đường thẳng đồng mức, hoặc đưa một mặt phẳng chiếu trở thành mặt phẳng đồng mức.

- Đưa một đường thẳng đồng mức trở thành đường thẳng chiếu, hoặc đưa một mặt phẳng bất kỳ trở thành mặt phẳng chiếu.

Vì vậy, để có thể giải được những bài toán phức tạp hơn, ta phải thay cả hai mặt phẳng hình chiếu.

4.2.3. THAY LIÊN TIẾP CẢ HAI MẶT PHẲNG HÌNH CHIẾU

Ta sẽ thay từng mặt phẳng hình chiếu một. Tuỳ từng bài toán cụ thể mà ta sẽ thay mặt phẳng hình chiếu nào trước, mặt phẳng hình chiếu nào sau.

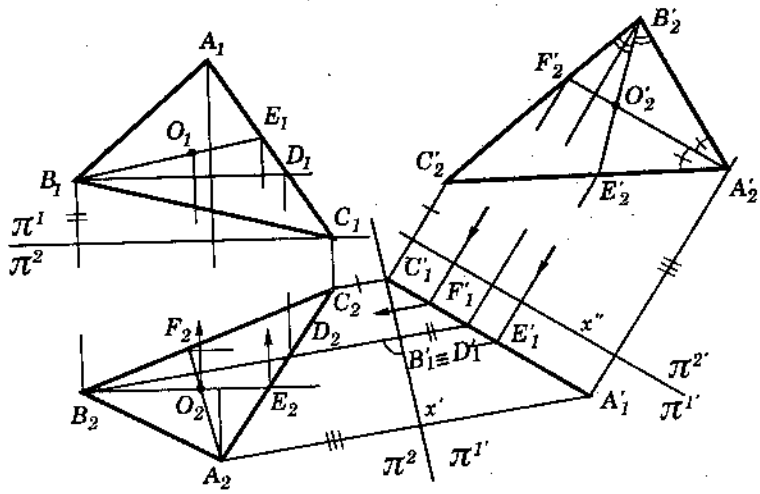
Ví dụ 1 : Bằng cách thay các mặt phẳng hình chiếu, tìm tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Giải : Tâm đường tròn nội tiếp tam giác, là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác đó. Để vẽ các đường phân giác đó, ta phải thay mặt phẳng hình chiếu để tìm được hình thật của tam giac đó. Muốn thế ta phải thay mặt phẳng hình chiếu hai lần :

- Lần thứ nhất, thay mặt phẳng hình chiếu đứng, đưa mặt phẳng chứa tam giác đó trở thành mặt phẳng chiếu đứng. Muốn vậy, ta vẽ đường bằng BD, rồi đưa đường bằng đó trở thành đường thẳng chiếu đứng ($B'_1 \equiv D'_1$). Vì mặt phẳng (ABC) có một đường thẳng BD là đường thẳng chiếu đứng, nên mặt phẳng đó phải là mặt phẳng chiếu đứng. Khi đó, hình chiếu đứng mới của nó là đường thẳng $A'_1B'_1C'_1$.

- Lần thứ hai, đưa mặt phẳng chiếu đó trở thành mặt phẳng bằng. Muốn vậy, ta vẽ trục hình chiếu x" song song với đường thẳng $A'_1B'_1C'_1$.

Khi đó, hình chiếu bằng mới của tam giác ABC là tam giác $A'_2B'_2C'_2$ sẽ bằng chính tam giác đó (hình 4.6).



Hình 4.6

Trên hình chiếu bằng mới này, ta vẽ các đường phân giác trong của hai góc A và B, giao điểm các đường phân giác đó là O'_2, đó là hình chiếu bằng mới của tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Để đưa tâm O đó trở về các hình chiếu ban đầu, ta gắn O vào hai đường phân giác AF và BE.

Ví dụ 2 : Bằng cách thay các mặt phẳng hình chiếu, tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

Giải : Ta biết, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là chiều dài đoạn thẳng vuông góc chung của chúng,

Vì vậy, trước hết ta phải tìm đường vuông góc chung đó.

Muốn vậy, ta phải thay mặt phẳng hình chiếu hai lần :

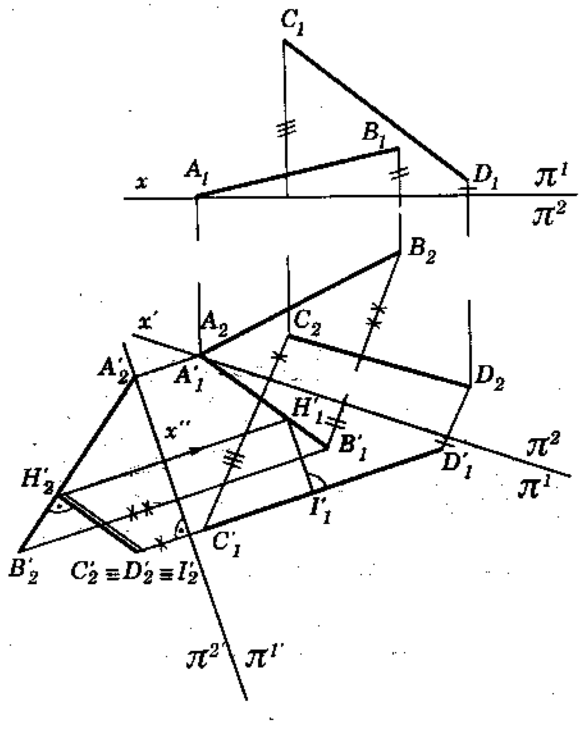
- *Lần một* : Thay mặt phẳng hình chiếu đứng, để đường thẳng CD trở thành đường mặt. Muốn vậy, ta chọn trục hình chiếu x' // C_2D_2.

Dựa vào tính chất trên, tức là độ cao của các điểm A, B, C và D không đổi, ta tìm được các hình chiếu đứng mới của A, B, C và D.

- *Lần hai* : thay mặt phẳng hình chiếu bằng, để đường thẳng CD trở thành đường thẳng chiếu bằng. Muốn vậy, ta chọn trục hình chiếu x" ⊥ $C'_1D'_1$. Dựa vào tính chất độ xa của các điểm không đổi, ta tìm được các hình chiếu bằng mới của các điểm A, B, C và D.

Khi đó : $C'_2 \equiv D'_2$ (hình 4.7).

Gọi IH là đường vuông góc chung cần tìm, vì CD đã là đường thẳng chiếu bằng, nên IH phải là đường bằng. Mà AB ⊥ IH, nên theo tính chất hai đường thẳng vuông góc (mục 2.4.4), qua điểm $C'_2 \equiv D'_2$ ta vẽ đường thẳng $I'_2H'_2 \perp A'_2B'_2$ ($H'_2 \ni A'_2B'_2$ và $I'_2 \ni C'_2D'_2$).



Hình 4.7

Vì IH là đường bằng, nên $I'_2H'_2$ = IH. Đó chính là khoảng cách cần tìm giữa hai đường thẳng AB và CD.

Ta có ngay kết quả ở vị trí cuối, nên không phải đưa về các hình chiếu ban đầu.

4.3. PHƯƠNG PHÁP DỜI HÌNH

4.3.1. DỜI HÌNH SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG HÌNH CHIẾU

1. Dời hình song song với mặt phẳng hình chiếu đứng

a) Định nghĩa

Dời hình song song với mặt phẳng hình chiếu đứng là một phép dời mà đường thẳng nối từng cặp điểm tương ứng là một đường mặt, (đường thẳng song song mặt phẳng π^1).

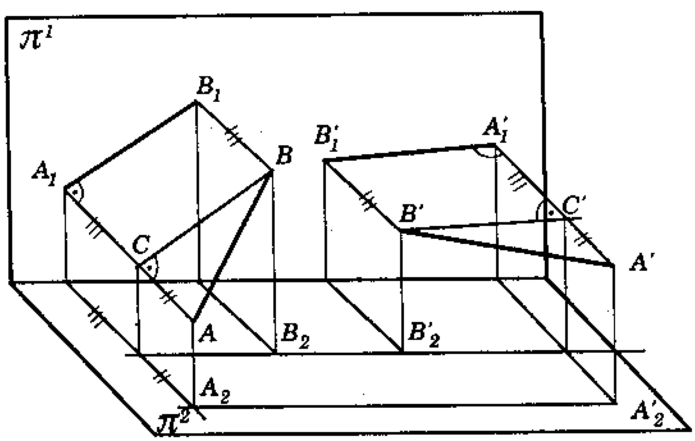
b) Tính chất

- *Đường thẳng nối hình chiếu bằng của mỗi cặp điểm tương ứng là một đường thẳng song song với trục x.* Dễ thấy, vì các đường thẳng này là các đường mặt.

* *Hình chiếu đứng mới, bằng hình chiếu đứng ban đầu.*

Thật vậy, dựa vào yêu cầu của phép dời hình là vị trí tương đối giữa tất cả các điểm của hình không thay đổi (không biến dạng) trong quá trình dời.

Để chứng minh tính chất này, ta chỉ cần chứng minh khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ, không thay đổi trong khi dời. Chẳng hạn, chứng minh với một đoạn thẳng AB bất kỳ (hình 4.8).



Hình 4.8

Ta chứng minh với trường hợp dời hình song song với mặt phẳng hình chiếu đứng. (Khi dời hình song song với mặt phẳng hình chiếu bằng cũng tương tự).

Giả sử ta có hai điểm $A(A_1, A_2)$ và $B(B_1, B_2)$. Sau khi dời song song với mặt phẳng hình chiếu đứng, A tới A' và B tới B'.

Theo tính chất thứ nhất ta có : đường thẳng $A_2A'_2 // x$, và đường thẳng $B_2B'_2 // x$.

Tức là hiệu độ xa của A và B không thay đổi trong khi dời.

Ta phải chứng minh : $A'_1B_1 = A_1B_1$.

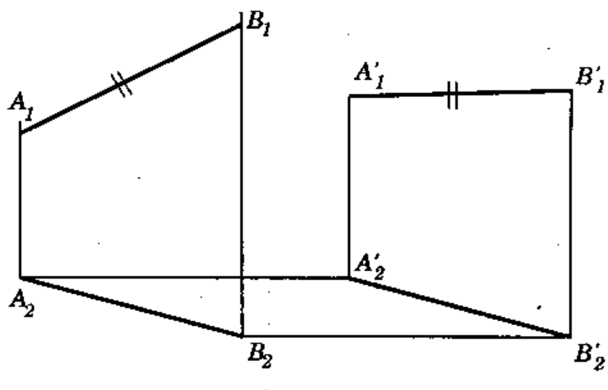
Qua B vẽ đường thẳng $BC // B_1A_1$ (C thuộc AA_1), qua B' vẽ đường thẳng $B'C' // B'_1A'_1$(C' thuộc $A'A'_1$).

Xét hai tam giác vuông ABC và A'B'C', (vì là chiếu vuông góc) có :

$AB = A'B'$, và $AC = A'C'$ (Vì $AC = AA_1 - BB_1$ và $A'C' = A'A'_1 - B'B'_1$ mà hiệu độ xa của A và B không đổi trong khi dời). Như vậy, hai tam giác đó bằng nhau, nên : $BC = B'C'$. Mà $BC = B_1A_1$, và $B'C' = B'_1A'_1$. Vậy $A'_1B'_1 = A_1B_1$. (Cũng có thể dựa vào cách tìm chiều dài của đoạn thẳng bằng phương pháp tam giác vuông (mục 2.1.2), vì chiều dài của AB không đổi, và hiệu độ xa giữa A và B không đổi, nên chiều dài hình chiếu đứng của AB cũng không đổi. Tức là $A'_1B'_1 = A_1B_1$).

Ví dụ : Bằng cách dời hình song song với mặt phẳng hình chiếu đứng, tìm chiều dài đoạn thẳng AB.

Giải : Ta biết, nếu AB là đường bằng thì, hình chiếu bằng của nó sẽ có chiều dài bằng chính nó. Vì vậy, ta dời AB song song với mặt phẳng hình chiếu đứng để đưa AB tới vị trí đường bằng. Muốn vậy, ta dời hình chiếu đứng A_1B_1 tới vị trí $A'_1B'_1 // x$ (hình 4.9).



Hình 4.9

Từ hình chiếu đứng mới đó (và dựa vào tính chất trên là, hình chiếu bằng của các điểm của hình di chuyển trên các đường thẳng song song với trục x) ta tìm được hình chiếu bằng mới A'_2B_2'. Vì ở vị trí sau khi dời, đường thẳng AB đã là đường bằng, nên ta có : $A'_2B'_2 = AB$.

2. Dời hình song song với mặt phẳng hình chiếu bằng

a) Định nghĩa

Dời hình song song với mặt phẳng hình chiếu bằng là một phép dời, mà đường thẳng nối từng cặp điểm tương ứng là các đường bằng.

b) Tính chất

- Đường thẳng nối hình chiếu đứng của mỗi cặp điểm tương ứng là một đường thẳng song song với trục x.

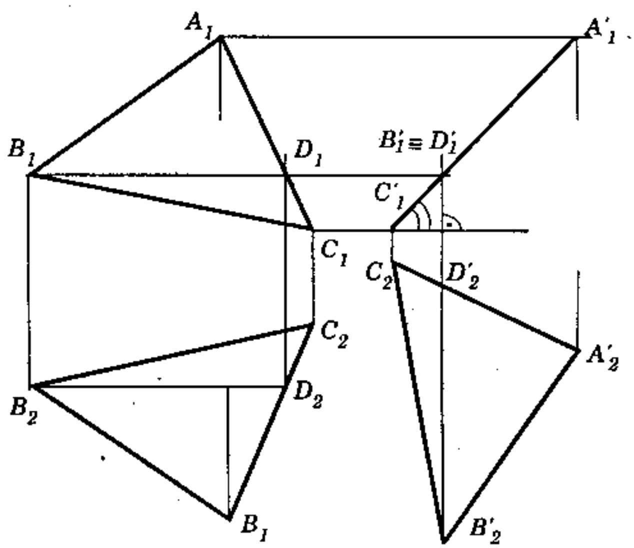
- Hình chiếu bằng mới của hình, bằng hình chiếu bằng ban đầu.

Chứng minh tương tự phép dời hình song song với mặt phẳng hình chiếu đứng.

Ví dụ : Bằng cách dời hình song song với mặt phẳng hình chiếu bằng, tìm góc nghiêng của mặt phẳng (ABC) với mặt phẳng hình chiếu bằng.

Giải : Ta biết, nếu mặt phẳng (ABC) là mặt phẳng chiếu đứng thì ta có ngay góc nghiêng của mặt phẳng đó với mặt phẳng hình chiếu bằng.

Vì vậy, để tìm góc nghiêng của mặt phẳng (ABC) với mặt phẳng hình chiếu bằng, ta dời mặt phẳng đó song song với mặt phẳng hình chiếu bằng, để mặt phẳng (ABC) trở thành mặt phẳng hình chiếu đứng (hình 4.10).



Hình 4.10

Muốn vậy, ta vẽ đường bằng BD của mặt phẳng (ABC). Sau đó ta dời mặt phẳng đó song song với mặt phẳng hình chiếu bằng, để đường bằng BD trở thành đường thẳng chiếu đứng (khi đó $B'_1 \equiv D'_1$). Mà BD đã trở thành đường thẳng chiếu đứng, thì mặt phẳng (ABC) cũng trở thành mặt phẳng chiếu đứng. Tức là, hình chiếu đứng của mặt phẳng đó là một đường thẳng $A'_1B'_1C'_1$. Khi đó, góc nghiêng của đường thẳng $A'_1B'_1C'_1$ với trục x chính là góc của mặt phẳng (ABC) với mặt phẳng hình chiếu bằng.

Cũng tương tự trường hợp thay mặt phẳng hình chiếu, nếu chỉ bằng một lần dời hình song song với mặt phẳng hình chiếu thì ta chỉ giải được một số bài toán sau :

- *Đưa một đường thẳng bất kỳ trở thành đường thẳng đồng mức; hoặc một mặt phẳng chiếu trở thành mặt phẳng đồng mức.*

- *Đưa một đường thẳng đồng mức trở thành đường thẳng chiếu; hoặc một mặt phẳng bất kỳ trở thành mặt phẳng chiếu.*

Vì vậy, để có thể giải được những bài toán phức tạp hơn, ta sẽ liên tiếp dời hình song song với các mặt phẳng hình chiếu. Tức là sau khi dời hình song song với mặt phẳng hình chiếu đứng, ta lại dời hình song song với mặt phẳng hình chiếu bằng (hoặc ngược lại).

3. Liên tiếp dời hình song song với các mặt phẳng hình chiếu

Ta lấy lại ví dụ 1 trong mục 4.2.3, nhưng giải bằng dời hình.

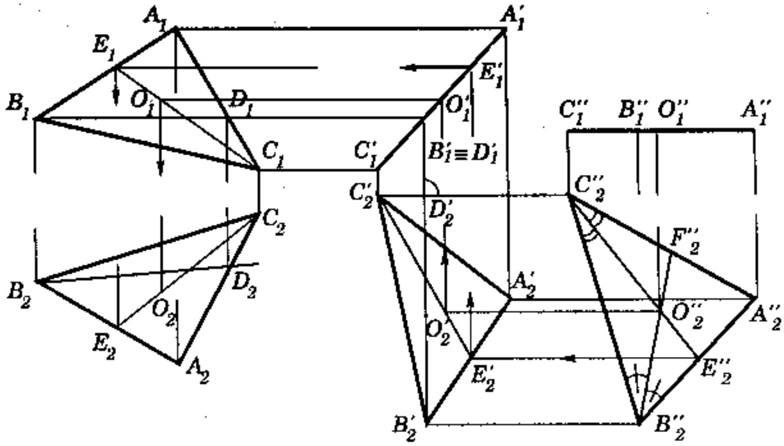
Ví dụ 1 : Bằng cách dời hình song song với các mặt phẳng hình chiếu, tìm tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Giải : Bằng hai lần dời hình liên tiếp, ta đưa mặt phẳng (ABC) trở thành mặt phẳng đồng mức.

Trước hết, ta dời hình song song với mặt phẳng hình chiếu bằng để mặt phẳng (ABC) trở thành mặt phẳng chiếu đứng (như ví dụ ở mục trên). Khi đó, mặt phẳng (ABC) đã trở thành mặt phẳng chiếu đứng, mà hình chiếu đứng của nó là đường thẳng $A'_1B'_1C'_1$ (hình 4.11).

Sau đó ta dời hình song song với mặt phẳng hình chiếu đứng để đưa mặt phẳng (ABC) đó trở thành mặt phẳng bằng. Muốn vậy, ta dời đường thẳng $A'_1B'_1C'_1$ tới vị trí $A''_1B''_1C''_1$ song song với trục x. Từ các tính chất trên, ta tìm được hình chiếu bằng $A''_1B''_1C''_1$. Trên hình chiếu bằng này, ta tìm được hình chiếu bằng của tâm đường tròn nội tiếp tam giác là O''_2 (giao điểm của hai đường phân giác trong của hai góc B và C). Từ đó ta tìm được hình chiếu đứng O''_1.

Để đưa tâm O về các hình chiếu ban đầu, ta gắn tâm O đó vào đường phân giác CE.



Hình 4.11

Ví dụ 2 : Cho hai đường thẳng a và b song song. Bằng cách dời hình song song với các mặt phẳng hình chiếu, tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

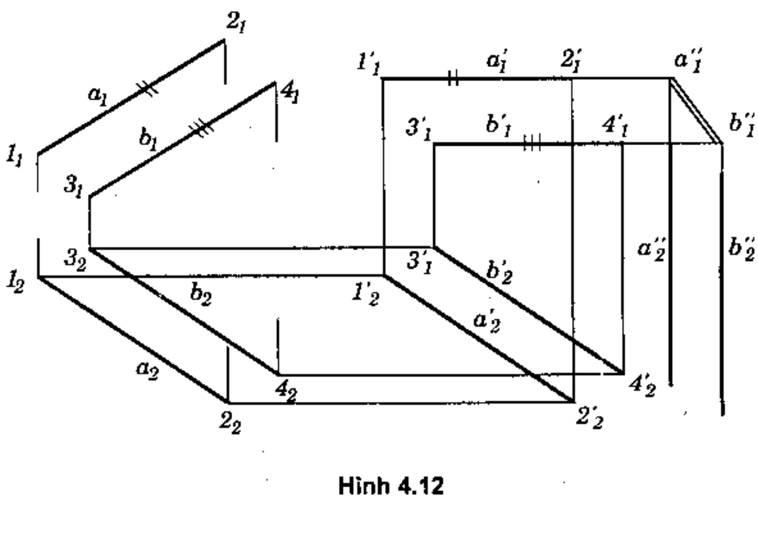
Giải : Để tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b, ta phải đưa hai đường thẳng đó trở thành các đường thẳng chiếu. Muốn vậy, ta phải dời hình hai lần :

- Đầu tiên, ta lấy trên đường thẳng a hai điểm 1, 2; và trên đường thẳng b hai điểm 3, 4.

- Dời hình song song với mặt phẳng hình chiếu đứng để đưa a và b trở thành các đường bằng :

Hình chiếu đứng mới của chúng là : $a'_1 // b'_1 // x$ (hình 4.12).

Từ hình chiếu đứng đó ta tìm được hình chiếu bằng mới là a'_2 và b'_2.



Hình 4.12

- Dời song song với mặt phẳng hình chiếu bằng, để a và b trở thành đường thẳng chiếu đứng : Và hình chiếu bằng mới tới vị trí a''_2 và b''_2 vuông góc với trục x. Khi đó a và b đã là đường thẳng chiếu đứng. Cũng từ đó ta tìm được các hình chiếu đứng mới của a và b là các "điểm" a''_1 và b''_1.

Khoảng cách giữa hai "điểm" a''_1 và b''_1 cũng là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b cần tìm.

4.3.2. XOAY QUANH ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG MỨC

Trong phần này, ta chỉ đề cập đến việc xoay các hình phẳng. Sau này, bạn đọc có thể vận dụng nó để xoay các hình không gian.

Ta nhắc lại định nghĩa, xoay một điểm quanh một đường thẳng :

Xoay một điểm quanh một đường thẳng (trục xoay) thì điểm đó sẽ di chuyển trên một đường tròn, nằm trên mặt phẳng đi qua điểm đó và vuông góc với trục xoay. Tâm của đường tròn đó là giao điểm của mặt phẳng đó với trục xoay, bán kính của đường tròn là khoảng cách từ điểm đó đến trục xoay.

1. Xoay quanh đường mặt

a) Định nghĩa

Xoay một điểm quanh đường mặt, là xoay điểm đó tới vị trí có độ xa bằng độ xa của đường mặt đó.

b) Tính chất

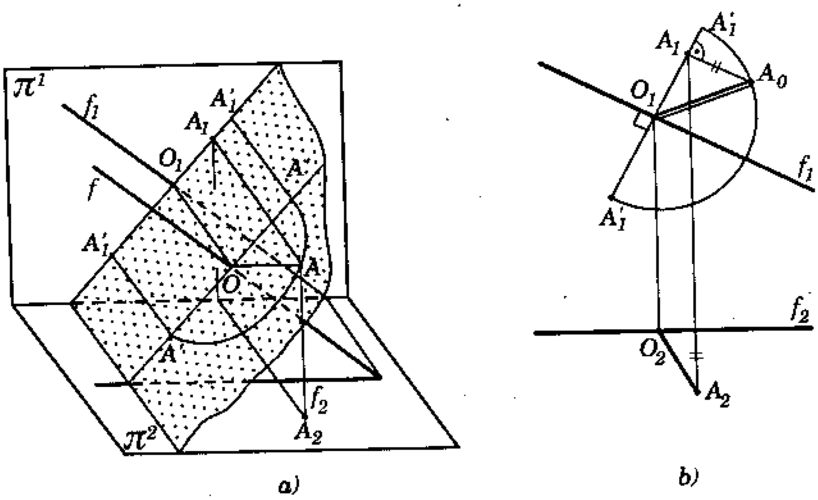
Hình chiếu đứng của điểm đó di chuyển trên đường thẳng vuông góc với hình chiếu đứng của đường mặt, tới vị trí mà khoảng cách từ đó đến hình chiếu đứng của đường mặt thì bằng khoảng cách từ điểm đó đến đường mặt (trong không gian).

Thật vậy, giả sử ta xoay điểm A quanh đường mặt f. Như vậy, A di chuyển trên đường tròn thuộc mặt phẳng chiếu đứng vuông góc với đường mặt f; nên hình chiếu đứng của điểm A di chuyển trên đường thẳng vuông góc với hình chiếu đứng f_1 của đường mặt. Theo định nghĩa, ta xoay A đến vị trí có độ xa bằng độ xa của đường mặt f. Khi đó mặt phẳng (A', f) là mặt phẳng mặt, nên khoảng cách từ hình chiếu đứng A'_1 của điểm A' tới hình chiếu đứng f_1 của đường mặt f, thì bằng khoảng cách từ điểm A tới đường mặt f.

Vì vậy, để tìm A'_1, (gọi O là chân đường vuông góc hạ từ A tới f), ta tìm khoảng cách từ A tới f (bằng phương pháp tam giác vuông ở mục

2.1.2). Ta có $O_1A_0 = OA$. Trên đường thẳng A_1O_1 ($\perp f_1$), ta lấy điểm A'_1, sao cho $O_1A'_1 = O_1A_0$ (hình 4.13).

Tất nhiên còn hình chiếu bằng A'_2 của điểm A' sẽ di chuyển đến vị trí thuộc hình chiếu bằng f_2 của đường mặt f. Nhưng ta không cần quan tâm đến hình chiếu bằng đó.



Hình 4.13

Ví dụ : Bằng cách xoay quanh đường mặt, vẽ đường phân giác của góc $\widehat{aOb}$.

Giải : Muốn vẽ đường phân giác của góc $\widehat{aOb}$, ta phải đưa mặt phẳng (a, b) tới vị trí mặt phẳng mặt.

Muốn vậy, ta lấy trên Oa điểm 1, trên Ob điểm 2; vẽ đường mặt O3 của mặt phẳng (a, b) (hình 4.14).

Để xoay mặt phẳng (a, b) quanh đường mặt O3, ta chỉ cần xoay điểm 1 ∍ a.

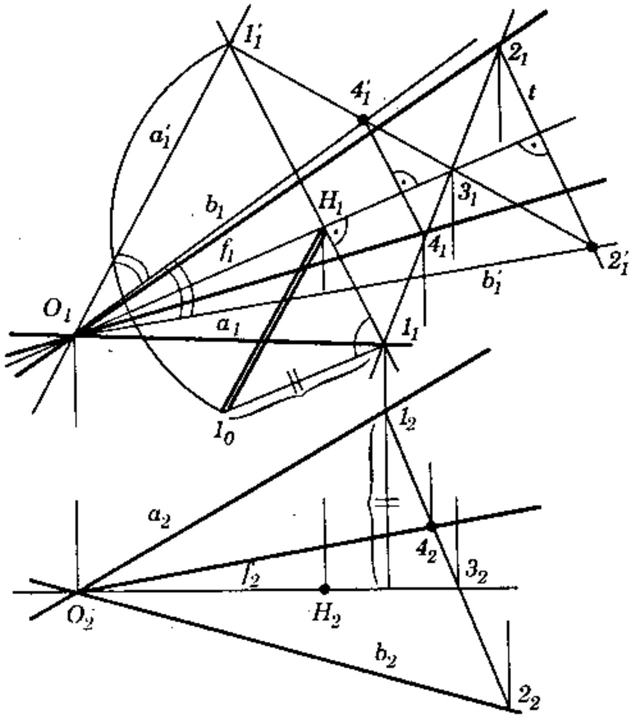
Ta vẽ đường thẳng $1H \perp O3$ ($1_1H_1 \perp O_13_1$), (trong đó H ∍ O3).

Tìm chiều dài $1H = 1_0H_1$. Trên đường thẳng 1_1H_1 lấy điểm $1'_1$ sao cho $1'_1H_1 = 1_0H_1$.

Để tìm điểm $2'_1$ ∍ b'_1 ta thấy đường thẳng 12 cũng chính là đường thẳng 13. Vì vậy, điểm $2'_1$ phải thuộc đường thẳng $1'_13_1$ (Vì 3_1 thuộc trục xoay O3 nên cố định khi xoay). Mặt khác, khi ta xoay điểm 1 tức là ta đã xoay cả mặt phẳng (a, b). Vì vậy, điểm 2_1 cũng di chuyển trên đường thẳng t vuông góc với $O_1 3_1$. Do đó, điểm $2'_1$ chính là giao điểm của đường thẳng t và đường thẳng $1'_1 3_1$.

Bây giờ, góc $\widehat{1'_1 O_1 2'_1}$ bằng góc $\widehat{aOb}$. Nên ta vẽ đường phân giác $O4'(O_1 4'_1)$.

Gắn điểm 4' thuộc đường phân giác đó vào đường thẳng 1'2' để đưa về các hình chiếu ban đầu.



Hình 4.14

2. Gập mặt phẳng quanh vết đứng của nó

Gập mặt phẳng quanh vết đứng của nó, chính là xoay mặt phẳng đó quanh một đường mặt của nó, để đưa mặt phẳng đó tới trùng với mặt phẳng hình chiếu đứng π^1. Nhưng đây là một đường mặt có độ xa bằng không. Do đó, các tính chất (và ta có thể thực hiện) hoàn toàn giống xoay quanh đường mặt. Có khác là, lợi dụng vị trí đặc biệt của một vài yếu tố so với trường hợp trên, nên ta có thể làm đơn giản hơn.

Ta lấy một ví dụ minh hoạ.

Ví dụ : Vẽ tam giác đều ABC thuộc mặt phẳng (m, n). Cho biết một cạnh AB của nó.

Giải : Như vậy, ta chỉ cần tìm đỉnh C. Muốn vẽ tam giác đều ABC, ta phải xoay mặt phẳng (m, n) quanh vết đứng n để mặt phẳng (m, n) tới trùng với mặt phẳng hình chiếu đứng (hình 4.15).

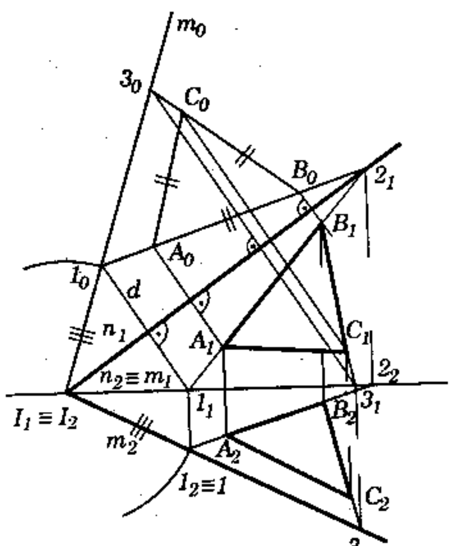
Đường thẳng AB cắt vết bằng m tại điểm $1(1_1 . 1_2)$ và cắt vết đứng n tại điểm $2(2_1, 2_2)$. Khi xoay mặt phẳng (m, n) quanh vết đứng n thì hình chiếu đứng 1_1 di chuyển trên đường thẳng d vuông góc với vết đứng $n \equiv n_1$.

Gọi I ($I_1 \equiv I_2$) là giao điểm của mặt phẳng (m, n) với trục x thì, chiều dài đoạn thẳng $I_2 1_2 = I1$.

Khi gập mặt phẳng (m, n) quanh vết đứng, tới trùng với mặt phẳng hình chiếu đứng thì đoạn thẳng $I_1 1_0 = I_2 1_2$. Như vậy, điểm 1_0 chính là giao điểm của đường thẳng d với đường tròn tâm I_1, bán kính I1. Và đường thẳng $I_1 1_0$ chính là vết bằng m_0 của mặt phẳng (m, n) sau khi gập. Bây giờ, vì mặt phẳng (m, n) đã trùng với π^1, nên ta dễ tìm được cạnh A_0B_0 từ đó vẽ tam giác đều $A_0B_0C_0$.

Để đưa tam giác đó về các hình chiếu ban đầu (thật ra là chỉ đưa một đỉnh C). Ta gắn các đỉnh đó vào các đường thẳng của mặt phẳng (m, n). Ví dụ, gắn C vào đường thẳng B3.

Tất nhiên, bài toán có hai nghiệm. Trên hình vẽ ta mới vẽ một nghiệm. Bạn đọc vẽ tiếp nghiệm còn lại.



Hình 4.15

3. Xoay quanh đường bằng

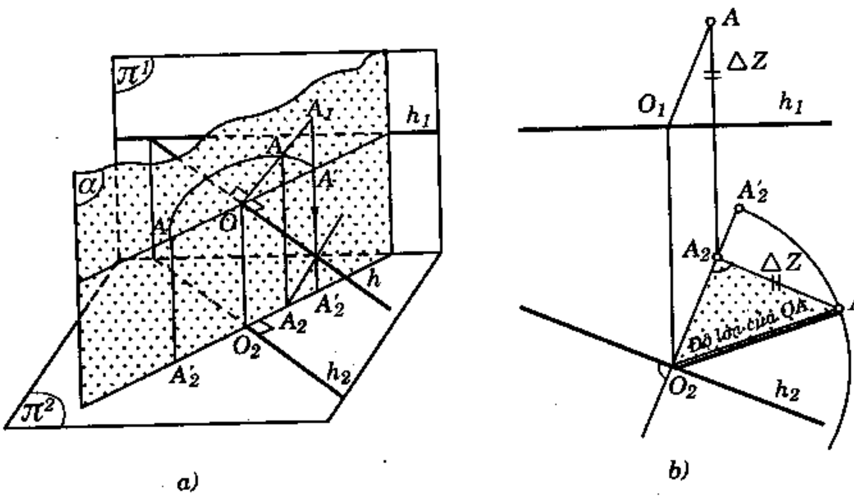
a) Định nghĩa

Xoay một điểm quanh đường bằng là xoay điểm đó đến vị trí có độ cao bằng độ cao của đường bằng.

b) Tính chất

Hình chiếu bằng của điểm đó di chuyển trên đường thẳng vuông góc với hình chiếu bằng của đường bằng, tới vị trí mà sao cho khoảng cách từ đó đến hình chiếu bằng của đường bằng, thì bằng khoảng cách từ điểm đó đến đường bằng (ở trong không gian) (hình 4.16a).

Ví dụ. Xoay điểm A(A_1, A_2) quanh đường bằng h (h_1, h_2). Vì điểm A di chuyển trên mặt phẳng chiếu bằng α vuông góc với đường bằng h, nên hình chiếu bằng A_2 di chuyển trên đường thẳng $A_2O_2 \perp h_2$. Vì A di chuyển đến vị trí A' có độ cao bằng độ cao của đường bằng h. Tức là mặt phẳng (A', h) là mặt phẳng bằng, nên hình chiếu bằng của OA' có chiều dài bằng chính nó. Để tìm vị trí của A'_2, ta tìm chiều dài của AO, (bằng phương pháp tam giác vuông). Ta có O_2A_0 = OA. Lấy O_2 làm tâm quay vòng tròn bán kính O_2A_0, tới cắt O_2A_3 ở đâu, thì đó chính là A'_2 (hình 4.16b).



Hình 4.16

4. Gập mặt phẳng quanh vết bằng của nó

Tương tự trên, gập mặt phẳng quanh vết bằng của nó là xoay mặt phẳng đó quanh một đường bằng của nó, để đưa mặt phẳng đó tới vị trí trùng với mặt phẳng hình chiếu bằng π^2.

Cũng dựa vào vị trí đặc biệt của một vài yếu tố, nên ta có thể làm đơn giản hơn.

Nếu không, bạn đọc có thể thực hiện như xoay quanh đường bằng thông thường.

Ví dụ : Bằng cách gập quanh vết đứng, vẽ hình vuông ABCD thuộc mặt phẳng (m, n). Cho biết một cạnh AB của hình vuông đó.

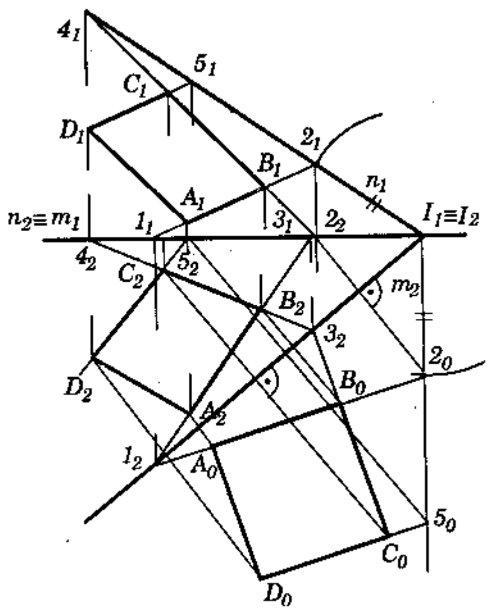
Giải : Đường thẳng AB cắt vết bằng m tại điểm 1, và cắt vết đứng n tại điểm 2.

Gọi I là giao điểm của mặt phẳng (m, n) với trục x. Như vậy, đoạn thẳng $I_1 2_1$ chính là đoạn thẳng đó (vì nó nằm ngay trên mặt phẳng hình chiếu đứng).

Khi gập mặt phẳng (m, n) tới trùng với mặt phẳng hình chiếu bằng, thì điểm 2 tới vị trí 2_0 (hình 4.17). Điểm 1 thuộc vết bằng (trục xoay) nên cố định. Từ đó, ta tìm được cạnh AB sau khi gập là A_0B_0.

Trên hình gập này, ta vẽ hình vuông $A_0B_0C_0D_0$.

Để đưa hình vuông đó trở về các hình chiếu ban đầu, ta gắn các đỉnh của hình vuông đó vào các đường thẳng của mặt phẳng (m, n). Ví dụ, đỉnh C gắn vào đường thẳng 34 (≡ 3B) của mặt phẳng (m, n).



Hình 4.17

4.4. PHƯƠNG PHÁP CHIẾU PHỤ

Phương pháp chiếu phụ là phép chiếu theo một hướng chiếu ***khéo chọn,*** nói chung không trùng với hướng chiếu chính; và mặt phẳng hình chiếu tự chọn, để thích hợp với từng bài toán cụ thể.

Mặt phẳng hình chiếu trong phép chiếu này, thường được chọn là :

- Mặt phẳng hình chiếu đứng π^1.
- Mặt phẳng hình chiếu bằng π^2.
- Mặt phẳng phân giác thứ hai.
- Mặt phẳng tự chọn.

Hình 4.18a, là phép chiếu phụ, mà hướng chiếu là đường thẳng s, và mặt phẳng hình chiếu là mặt phẳng hình chiếu đứng π^1.

Hình 4.18b, là phép chiếu phụ, mà hướng chiếu là đường thẳng s, và mặt phẳng hình chiếu là mặt phẳng hình chiếu bằng π^2.

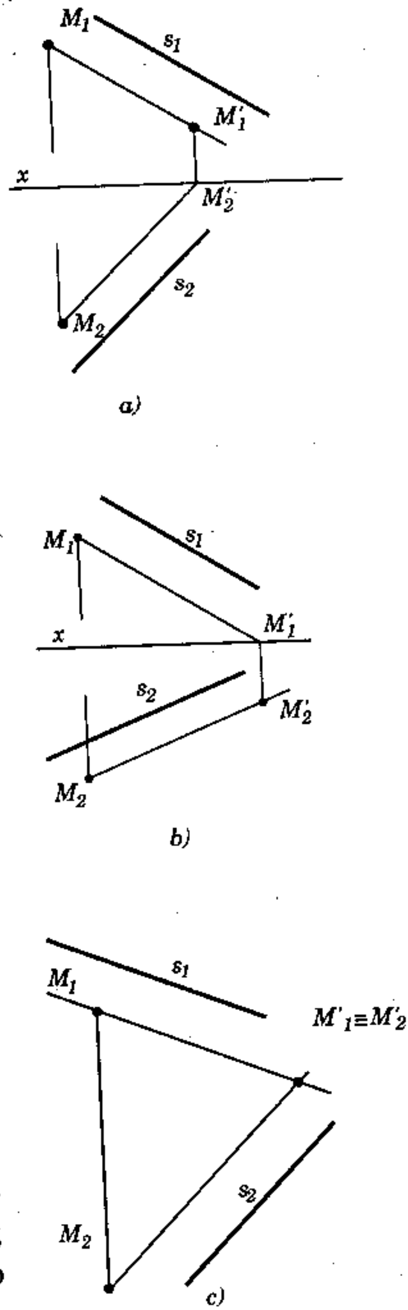
Hình 4.18c, là phép chiếu phụ, mà hướng chiếu là đường thẳng s, mặt phẳng hình chiếu là mặt phẳng phân giác II.

Phép chiếu phụ, không được dùng phổ biến, nhưng nó cũng tỏ ra hữu hiệu trong một số trường hợp nhất định.

Ta lấy vài ví dụ, ứng dụng các phép chiếu phụ nói trên.

Ví dụ 1 : Tìm giao điểm đường cạnh AB với mặt phẳng $\mathcal{P}$(m, n).

Giải. Trường hợp này, vì đường thẳng AB là đường cạnh, nên ta không thể dùng mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng chiếu. Vì vậy việc giải theo phương pháp thông thường cũng không đơn giản.

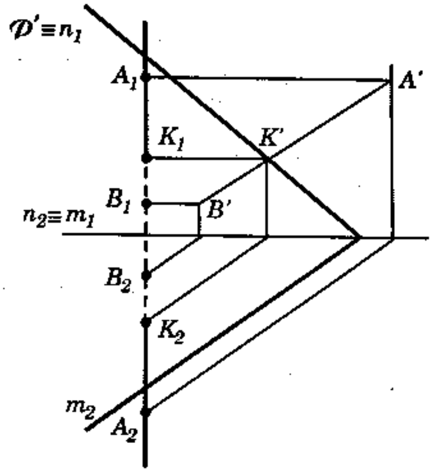


Hình 4.18

Ta dùng phép chiếu phụ, có hướng chiếu song song với đường bằng (vết bằng m) của mặt phẳng $\mathcal{P}$(m, n), mặt phẳng hình chiếu là mặt phẳng hình chiếu đứng π^1 (hình 4.19).

Như vậy, hình chiếu phụ $\mathcal{P}'$ của mặt phẳng $\mathcal{P}$(m, n) sẽ trùng với vết đứng n của mặt phẳng $\mathcal{P}$. Còn đường cạnh AB có hình chiếu phụ là A'B'.

Trên hình chiếu phụ ta có giao điểm $K' = \mathcal{P}' \times A'B'$.



Hình 4.19

Đưa giao điểm K trở về các hình chiếu ban đầu ta có K_1 và K_2. Đó là giao điểm của đường cạnh AB với mặt phẳng đã cho.

Ví dụ 2 : Cho hai đường thẳng a và b. Dựng đường bằng AB, trong đó A ∍ a, và B ∍ b. Và đoạn thẳng AB có chiều dài cho trước.

Giải : Đây cũng là bài toán, nếu dựng theo phương pháp thông thường cũng không đơn giản. Ta hãy dùng phép chiếu phụ.

Giả sử ta đã dựng được đường bằng AB thoả mãn điều kiện đầu bài. Nếu ta chiếu song song tất cả hình đã cho lên mặt phẳng hình chiếu bằng π^2, thì chiều dài hình chiếu phụ của đoạn thẳng AB là A'B' sẽ bằng chính nó, tức là : A'B' = AB.

Vì vậy, ta chiếu song song hai đường thẳng a và b lên mặt phẳng hình chiếu bằng π^2 theo hướng chiếu là đường thẳng b (hoặc a). Như vậy, đường thẳng b có hình chiếu phụ là "điểm" b'_2, (Đó cũng chính là vết bằng của đường thẳng b) còn đường thẳng a có hình chiếu phụ là đường thẳng a'_2. Khi đó, hình chiếu phụ của đường bằng AB là A'B' và A'B' có chiều dài bằng AB. Vì vậy, ta lấy điểm b'_2 làm tâm, vẽ đường tròn có bán kính bằng chiều dài của đoạn thẳng AB. Đường tròn này, cắt đường thẳng a'_2 ở đâu, thì đó chính là điểm A'(hình chiếu phụ của A).

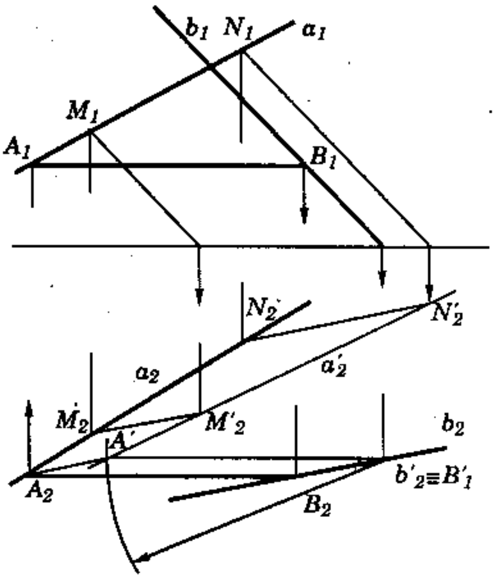
Dóng các điểm đó trở về ta có A_2 và A_1. Qua A_1 ta vẽ được hình chiếu đứng A_1B_1 // x, từ đó ta có hình chiếu bằng A_2B_2 của đường bằng AB (hình 4.20).

Ví dụ 3 : Tìm giao tuyến hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ (a, b) và **Q** (ABC).

Giải : Tất nhiên, bài này có thể giải theo phương pháp thông thường mà ta đã biết.

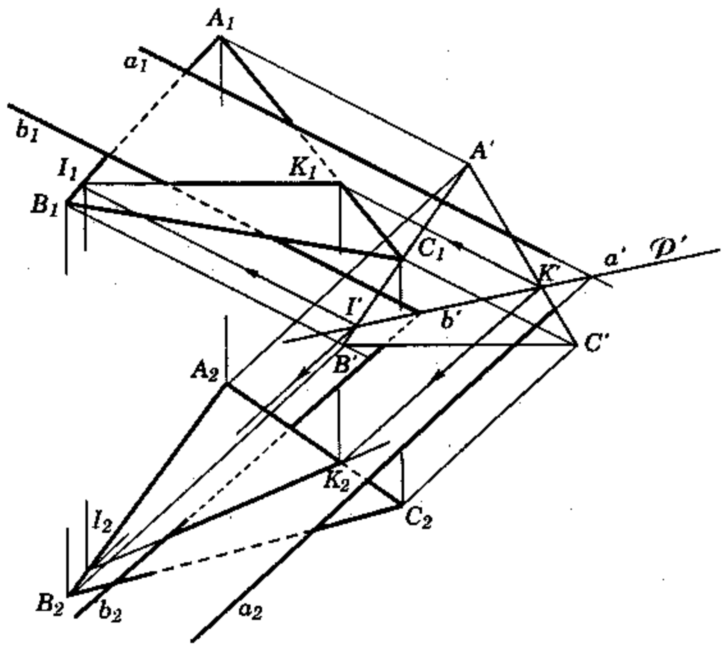
Ta giải bằng phương pháp chiếu phụ.

Hai đường thẳng a và b song song. Ta chiếu cả hai mặt phẳng đã cho lên mặt phẳng phân giác II, theo hướng chiếu a (song song với mặt phẳng $\mathcal{P}$(a, b)). Như vậy, hình chiếu phụ của mặt phẳng $\mathcal{P}$ (a, b) sẽ là một đường thẳng $\mathcal{P}'$ nối hai điểm a' và b'. Còn ba điểm A, B và C của mặt phẳng **Q** (ABC) có hình chiếu phụ tương ứng là A', B' và C'. Trên hình chiếu phụ, đường thẳng $\mathcal{P}'$ cắt các cạnh của tam giác A'B'C' tại hai điểm I', K'. Đưa đường thẳng IK trở về các hình chiếu ban đầu, ta có giao tuyến IK (I_1K_1, I_2K_2). Đó chính là giao tuyến của hai mặt phẳng đã cho (hình 4.21).



Hình 4.20

Phép chiếu phụ còn được ứng dụng trong phần tìm giao điểm đường thẳng với các mặt, và giao tuyến mặt phẳng với các mặt sau này.

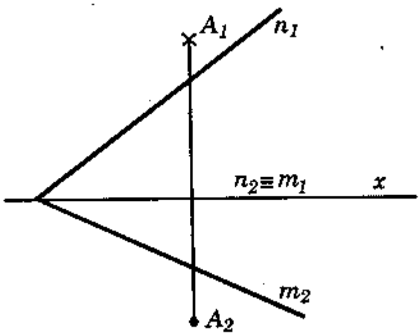


Hình 4.21

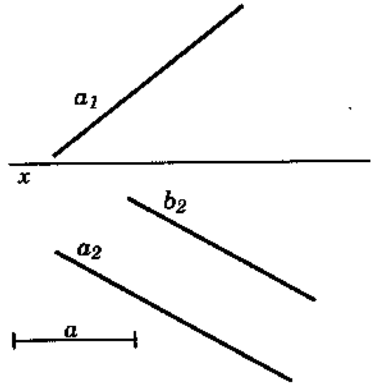
CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Bằng cách thay mặt phẳng hình chiếu tìm khoảng cách từ điểm $A(A_1, A_2)$, tới mặt phẳng (m, n) (hình 4.22).

2. Bằng cách thay mặt phẳng hình chiếu, tìm hình chiếu đứng của đường thẳng b. Biết rằng b // a và cách a một đoạn cho trước (hình 4.23).



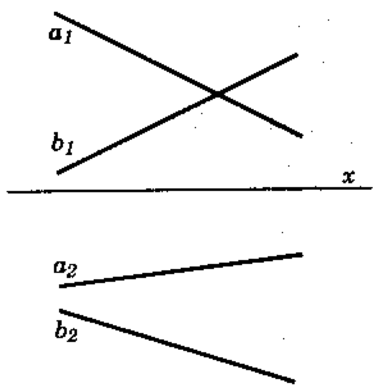
Hình 4.22



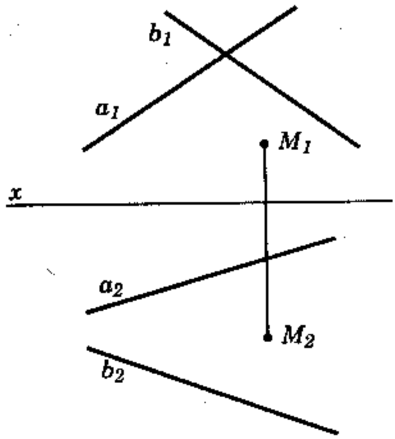
Hình 4.23

3. Bằng một lần thay mặt phẳng hình chiếu, tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b chéo nhau (hình 4.24).

4. Cho điểm M và hai đường thẳng a, b. Bằng cách thay mặt phẳng hình chiếu, vẽ đường thẳng đi qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng a và b (hình 4.25).



Hình 4.24



Hình 4.25

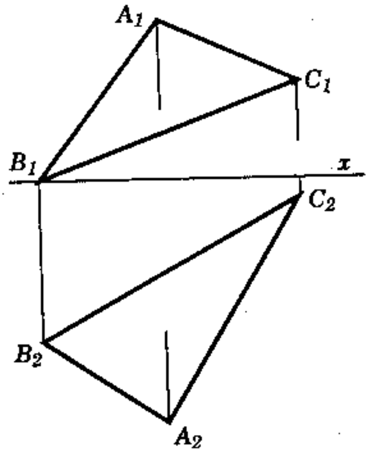
5. Cho ba đường thẳng a, b và c (chéo nhau). Bằng cách thay mặt phẳng hình chiếu, vẽ đường thẳng cắt hai đường thẳng a, b và song song với đường thẳng c (hình 3.46).

6. Bằng cách thay mặt phẳng hình chiếu, để một hình chiếu của tam giác ABC là tam giác vuông. Đỉnh góc vuông là B (hình 4.26).

7. Bằng cách dời hình song song với các mặt phẳng hình chiếu, giải các bài 1, 2, 4 và 6 trên đây.

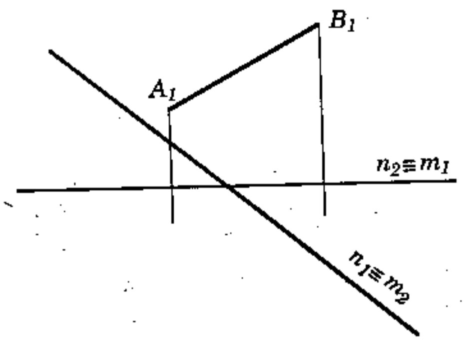
8. Bằng cách xoay quanh đường bằng (hoặc đường mặt), tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng a // b (hình 4.12).

9. Bằng cách gập quanh vết của mặt phẳng (m, n), vẽ tam giác vuông cân ABC (vuông ở A), cho biết một cạnh AB (hình 4.27).

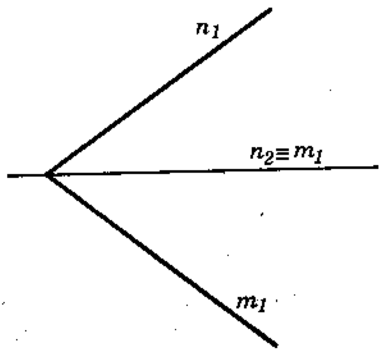


Hình 4.26

10. Bằng cách gập quanh vết của mặt phẳng (m, n), vẽ đường phân giác của góc tạo bởi hai vết m và n của mặt phẳng đó (hình 4.28).



Hình 4.27



Hình 4.28

C – ĐƯỜNG VÀ MẶT

Chương V. ĐA DIỆN

5.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ BIỂU DIỄN ĐA DIỆN

5.1.1. ĐỊNH NGHĨA

Đa diện là một mặt tạo thành từ các đa giác phẳng. Các cạnh và các đỉnh của các đa giác đó cũng là các cạnh và các đỉnh của đa diện. Các đa giác phẳng đó gọi là các mặt bên của đa diện.

Cần lưu ý là, trong tài liệu này, ta chỉ khảo sát các đa diện lồi.

Đa diện lồi là đa diện mà, nếu ta mở rộng bất kỳ mặt bên nào của đa diện đó thì đa diện đó nằm hoàn toàn về một phía của mặt phẳng đó.

Một điểm nữa cũng cần lưu ý là, trong hình hoạ, các đa diện cũng như các mặt cong sau này, ta chỉ khảo sát mặt của chúng. (Phần “bên trong” các mặt đó là khoảng không).

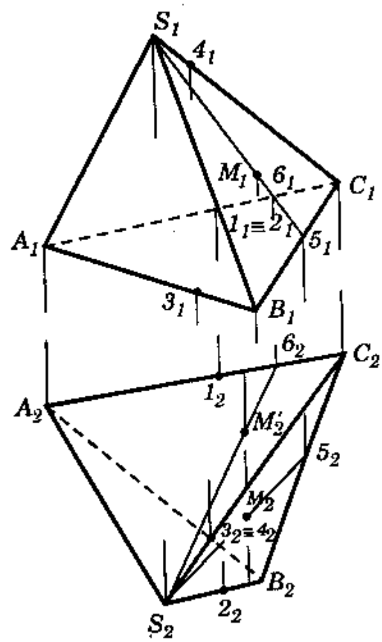
5.1.2. BIỂU DIỄN ĐA DIỆN

Biểu diễn đa diện là ta biểu diễn các cạnh và các mặt bên của chúng. Có chú ý đến việc xét thấy và khuất của các cạnh và các mặt bên của nó.

Hình 5.1 biểu diễn mặt tứ diện SABC (còn gọi là mặt chóp hoặc mặt tháp đỉnh S).

Trên hình chiếu đứng : hai mặt $S_1A_1B_1$ và $S_1B_1C_1$ thấy, còn mặt $S_1A_1C_1$, đáy $A_1B_1C_1$ và cạnh A_1C_1 bị hai mặt kia che khuất. Trên hình chiếu bằng, các mặt $S_2A_2C_2$ và $S_2B_2C_2$ thấy, mặt $S_2A_2B_2$, đáy $A_2B_2C_2$ và cạnh A_2B_2 khuất. Việc xét thấy, khuất theo mục 3.5.3.

Ví dụ, trên hình chiếu đứng : xét hai cạnh S_1B_1 và A_1C_1, ta lấy hai điểm 1 và 2 cùng thuộc đường thẳng chiếu đứng; trong đó 1 thuộc cạnh AC, 2 thuộc SB, nhưng điểm 2 có độ xa lớn hơn, nên hình chiếu đứng 2_1 thấy, và 1_1 khuất, suy ra S_1B_1 thấy, và A_1C_1 khuất. Từ đó, hai mặt



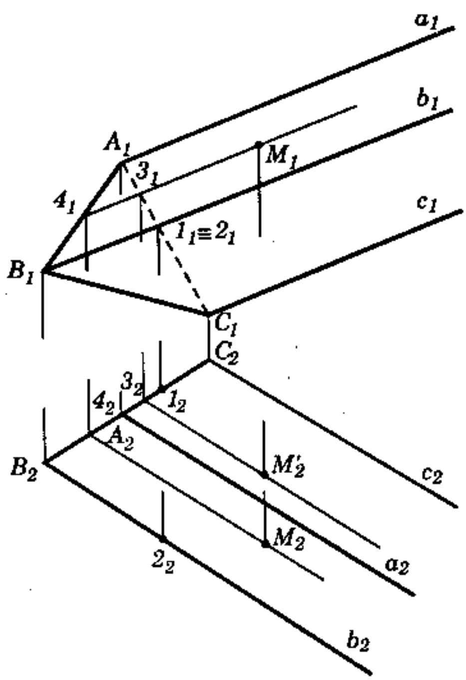
Hình 5.1

$(S_1A_1C_1)$ và $(A_1B_1C_1)$ khuất. Tương tự trên hình chiếu bằng ta cũng xét hai cạnh S_2C_2 và A_2B_2 : Ta cũng lấy hai điểm 3 và 4 cùng thuộc đường thẳng chiếu bằng, trong đó 3 thuộc AB, 4 thuộc SC. Điểm 4 có độ cao lớn hơn nên cạnh S_2C_2 thấy, còn cạnh A_2B_2 khuất. Từ đó, hai mặt $(S_2A_2B_2)$ và $(A_2B_2C_2)$ khuất

Hình 5.2 biểu diễn mặt lăng trụ tam giác. Đáy ABC thuộc mặt phẳng chiếu bằng, ba cạnh bên là a, b và c.

Trên hình chiếu đứng : ta xét hai cạnh A_1C_1 và b_1, lấy hai điểm 1 và 2 (1 thuộc AC, 2 thuộc b). Điểm 2 có độ xa lớn hơn, nên hình chiếu đứng của nó thấy, do đó b_1 thấy, A_1C_1 khuất. Suy ra : hai mặt (a_1, b_1) và (b_1, c_1) thấy; còn mặt (a_1, c_1) và đáy $A_1B_1C_1$ khuất.

Trên hình chiếu bằng : (a_2, b_2) và (a_2, c_2) thấy, còn mặt (b_2, c_2) khuất.



Hình 5.2

Hình 5.3 biểu diễn lăng trụ tứ giác thẳng đứng. Lăng trụ như vậy còn gọi là lăng trụ chiếu bằng. Vì các cạnh bên a, b, c và d là các đường thẳng chiếu bằng, các mặt bên cũng là các mặt phẳng chiếu bằng .

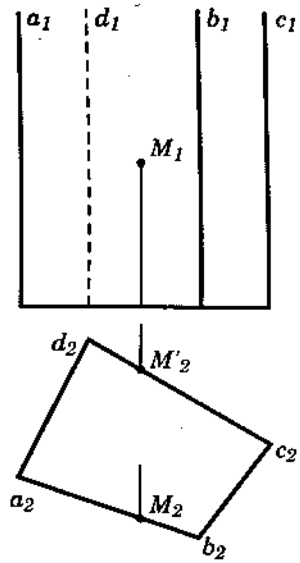
Trên hình chiếu đứng hai mặt (a_1, b_1) và (b_1, c_1) thấy, hai mặt còn lại khuất.

Nội dung quan trọng của phần biểu diễn các mặt là, *cách lấy một điểm thuộc các mặt.*

Nếu bạn đọc nắm được vấn đề này thì ở các phần tìm giao điểm đường thẳng với đa diện, giao của mặt phẳng với đa diện và giao hai đa diện sẽ tương đối đơn giản.

Vì các đa diện tạo thành từ các đa giác phẳng, nên *việc lấy một điểm thuộc đa diện, giống như cách lấy một điểm thuộc mặt phẳng*. Tức là, khi cho trước một hình chiếu của một điểm thuộc đa diện, ta vạch một đường thẳng qua điểm đó, rồi gắn điểm cần tìm vào đường thẳng đó để tìm hình chiếu còn lại.

Ví dụ 1 : Cho hình chiếu đứng M_1 của điểm M thuộc mặt tứ diện (hình 5.1). Tìm hình chiếu bằng M_2?



Hình 5.3

Giải : Để tìm hình chiếu bằng M_2 của M, ta vạch qua M một đường thẳng thuộc đa diện. Ví dụ, ta vạch đường thẳng SM. Nếu cho biết hình chiếu đứng M_1 là thấy (hoặc khuất) thì ta sẽ chỉ có một hình chiếu bằng M_2.

Nhưng vì, không cho biết hình chiếu đứng M_1 thấy hay khuất, nên ta phải trả lời hai trường hợp :

Nếu M_1 thấy, nghĩa là M thuộc mặt bên SBC, nên đường thẳng SM cắt cạnh đáy BC tại điểm 5; Từ đó ta tìm được hình chiếu bằng là S_25_2, và ta tìm được hình chiếu bằng $M_2 \ni S_25_2$.

Nếu M_1 khuất, tức là M thuộc mặt bên SAC, nên đường thẳng SM cắt cạnh đáy AC tại điểm 6. Cũng từ đó ta tìm được hình chiếu bằng $S_2\,6_2$, và ta tìm được $M'_2 \ni S_26_2$.

Ví dụ 2 : Cho hình chiếu đứng M_1 của điểm M thuộc mặt lăng trụ (hình 5.2). Tìm hình chiếu bằng M_2?

Giải : Ta gắn M vào đường thẳng song song với cạnh bên của lăng trụ. Vì không cho biết M_1 thấy hay khuất, nên ta phải trả lời hai trường hợp :

Nếu M_1 thấy, tức là M thuộc mặt (a.b), nên đường thẳng trên cắt cạnh AB tại điểm 4, và ta tìm được hình chiếu bằng M_2.

Nếu M_1 khuất, tức là M thuộc mặt (a, c); nên đường thẳng trên cắt cạnh AC tại điểm 3, và ta tìm được hình chiếu bằng M'_2.

Trên hình 5.3, cho hình chiếu đứng M_1 của điểm M thuộc mặt lăng trụ tứ giác thẳng đứng, có các cạnh bên là a, b, c và d. Tìm hình chiếu bằng của M?

Cũng vì không cho biết M_1 thấy hay khuất, nên ta phải trả lời hai trường hợp :

Nếu M_1 thấy, tức là M thuộc mặt (a, b), nên ta có hình chiếu bằng là M_2.

Nếu M_1 khuất, tức là M thuộc mặt (c, d), nên ta có hình chiếu bằng là M'_2.

5.2. GIAO TUYẾN MẶT PHẲNG VỚI ĐA DIỆN

Giao tuyến mặt phẳng với đa diện là một đa giác, có các đỉnh là giao điểm các cạnh của đa diện với mặt phẳng, và các cạnh là giao tuyến các mặt bên của đa diện với mặt phẳng đó.

Ta chia làm các trường hợp từ dễ đến khó.

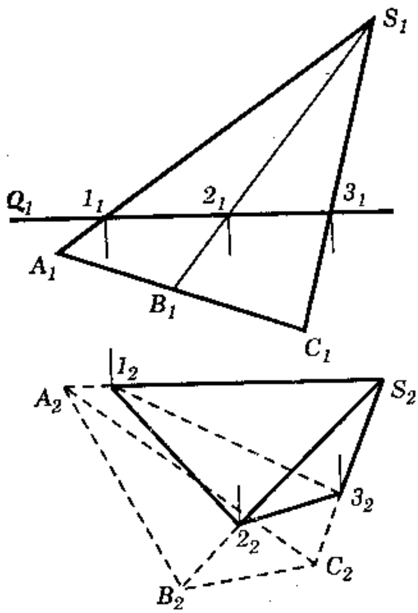
5.2.1. MẶT PHẲNG LÀ MẶT PHẲNG CHIẾU

Trường hợp này, ta dễ biết ngay một hình chiếu của giao tuyến, gắn giao tuyến đó vào các mặt bên của đa diện để tìm hình chiếu còn lại của nó.

Ví dụ : Tìm giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng ***Q*** với mặt chóp SABC.

Giải : Vì ***Q*** là mặt phẳng chiếu đứng nên ta dễ biết ngay hình chiếu đứng của giao tuyến là đoạn thẳng $1_1\, 2_1\, 3_1$, (thuộc phần chung giữa hình chiếu đứng ***Q***, của mặt phẳng ***Q*** và hình chiếu đứng của hình chóp) (hình 5.4).

Giao tuyến đó cũng thuộc các mặt bên của hình chóp. Các đỉnh của đa giác giao tuyến là các giao điểm 1, 2 và 3 các cạnh của đa giác là giao điểm của hình chóp với mặt phẳng ***Q***. Sau đó, xét thấy và khuất trên hình chiếu bằng.



Hình 5.4

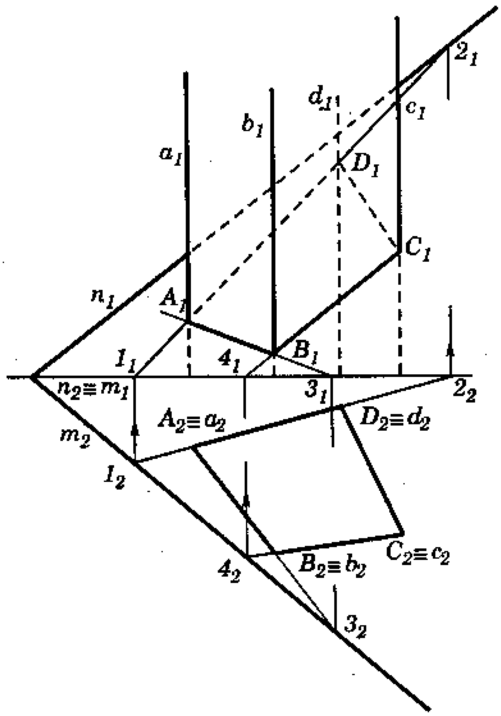
5.2.2. MẶT PHẲNG KHÔNG PHẢI MẶT PHẲNG CHIẾU, NHƯNG ĐA DIỆN LÀ LĂNG TRỤ CHIẾU

Trường hợp này, ta cũng dễ biết ngay một hình chiếu của giao tuyến (trùng với hình chiếu các mặt bên của lăng trụ), ứng dụng cách tìm điểm và đường thẳng thuộc mặt phẳng để tìm hình chiếu còn lại.

Ví dụ : Tìm giao tuyến của lăng trụ tứ giác thẳng đứng với mặt phẳng (m, n).

Giải : Trường hợp này, ta có ngay hình chiếu bằng của giao tuyến trùng với hình chiếu bằng các mặt bên của mặt lăng trụ thẳng đứng. Gọi các cạnh bên của lăng trụ là a, b, c và d, thì các cạnh đó cắt mặt phẳng (m, n) tương ứng tại các điểm A, B, C và D, mà hình chiếu bằng là tứ giác $A_2B_2C_2D_2$.

Gắn tứ giác đó vào mặt phẳng (m, n) để tìm hình chiếu đứng của giao tuyến là $A_1B_1C_1D_1$. Ví dụ kéo dài cạnh AD, cắt m tại điểm 1, và cắt n tại điểm 2, ta tìm được hình chiếu đứng A_1D_1. Từ đó, khi đã có đỉnh A_1, kéo dài cạnh AB, cắt vết bằng m tại điểm 3, tìm được hình chiếu đứng A_1B_1. Khi đã có đỉnh B_1, ta lại kéo dài cạnh BC, cắt vết bằng m tại điểm 4, ta tìm được hình chiếu đứng C_1 (hình 5.5). Sau đó, xét thấy và khuất trên hình chiếu đứng.



Hình 5.5

5.2.3. TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

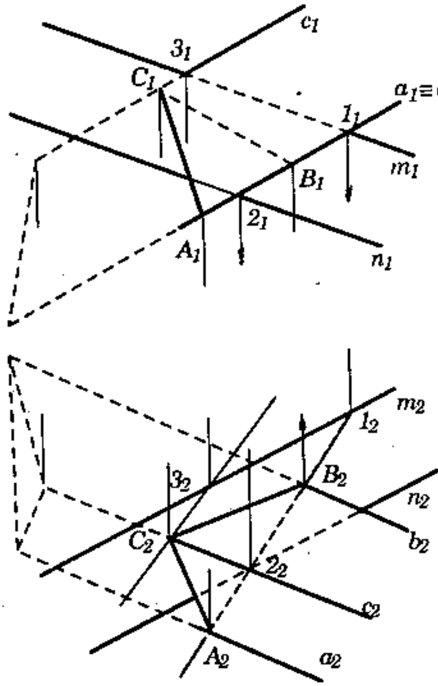
Để tìm giao tuyến, trường hợp này, ta phải dùng mặt phẳng phụ trợ, để tìm giao điểm các cạnh của đa giác với mặt phẳng đã cho. Tức là giải nhiều bài toán tìm giao điểm đường thẳng với mặt phẳng ngay trên một hình.

Ví dụ : Tìm giao tuyến của mặt phẳng (m, n) với lăng trụ xiên tam giác có các cạnh là a, b và c.

Giải : Ta dùng các mặt phẳng phụ trợ, để tìm giao điểm các cạnh của lăng trụ với mặt phẳng (m, n).

Trước hết, ta thấy, mặt (a, b) là mặt phẳng chiếu đứng, nên dễ thấy, mặt phẳng này cắt mặt phẳng (m, n) theo đường thẳng 12 (cắt m tại điểm 1 và cắt n tại điểm 2). Từ đó ta tìm được giao tuyến của mặt phẳng (m, n) với mặt (a, b) là đoạn AB. Để tìm giao điểm cạnh c, ta dùng mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng chiếu đứng. Mặt phẳng này cắt đường thẳng m tại điểm 3; vì mặt phẳng phụ trợ này song song với mặt phẳng (a, b), nên giao tuyến này song song với giao tuyến 12, và ta tìm được giao điểm C. Như vậy giao tuyến của mặt phẳng (m, n) với lăng trụ là tam giác ABC (hình 5.6).

Sau đó phải xét thấy, khuất trên các hình chiếu.



Hình 5.6

5.3. GIAO ĐIỂM ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐA DIỆN

Ta cũng lần lượt xét các trường hợp từ dễ đến khó.

5.3.1. ĐƯỜNG THẲNG LÀ ĐƯỜNG THẲNG CHIẾU

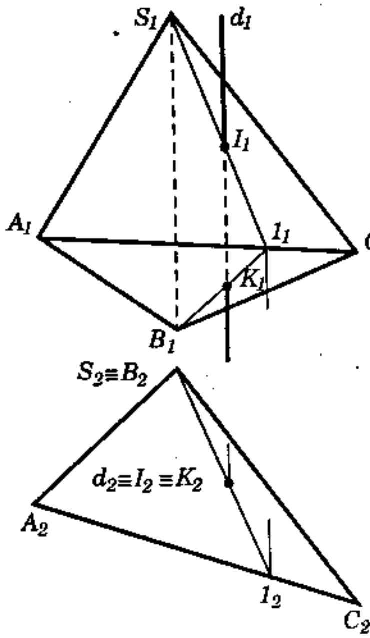
Trường hợp này ta dễ biết ngay một hình chiếu của giao điểm, ứng dụng cách tìm các điểm thuộc đa diện, để tìm hình chiếu còn lại của giao điểm.

Ví dụ : Tìm giao điểm của đường thẳng chiếu bằng d với hình chóp SABC.

Giải : Gọi I và K là các giao điểm của đường thẳng d với hình chóp, thì ta có ngay hình chiếu bằng $I_2 \equiv K_2 \equiv d_2$.

Vì I và K cũng là các điểm thuộc hình chóp, nên đã có I_2 và K_2, để tìm hình chiếu đứng I_1 và K_1, ta gắn I và K vào các đường thẳng SI và BK. Hai đường thẳng này cắt cạnh AC tại điểm 1. Từ đó ta tìm được hình chiếu đứng I_1 và K_1 (hình 5.7).

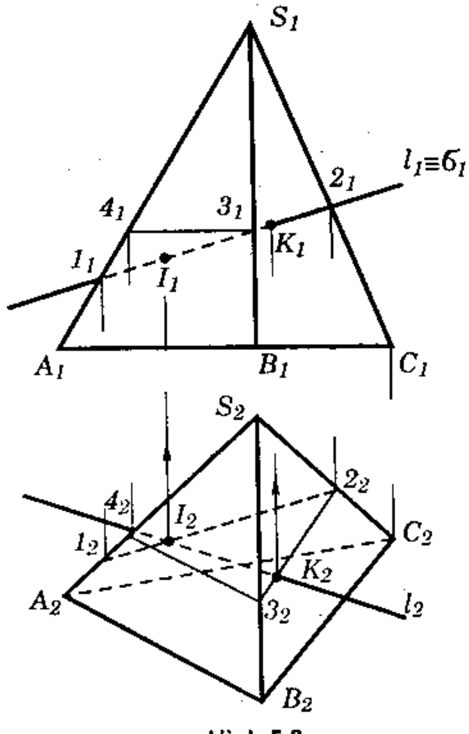
Còn trường hợp đường thẳng không phải đường thẳng chiếu, nhưng đa diện là lăng trụ chiếu cũng tương đối đơn giản, bạn đọc tự nghiên cứu.



Hình 5.7

5.3.2. TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

Trường hợp này ta phải dùng mặt phẳng phụ trợ, chứa đường thẳng đã cho. Sau đó tìm giao tuyến g (là một đa giác phẳng) của mặt phẳng phụ trợ với đa diện. Cuối cùng, tìm các giao điểm của đường thẳng đã cho với giao tuyến g. Đó chính là các giao điểm cần tìm.



Hình 5.8

Mặt phẳng phụ trợ thường chọn là mặt phẳng chiếu.

Ví dụ 1 : Tìm giao điểm của đường thẳng l và hình chóp SABC.

Giải : Ta dựng mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng chiếu đứng σ chứa đường thẳng l.

Như vậy, ta có : $\sigma_1 \equiv l_1$. Ta dễ tìm được giao tuyến của mặt phẳng σ với hình chóp SABC là tam giác 123; mà hình chiếu đứng của nó là đoạn thẳng $1_1 3_1 2_1$.

Từ hình chiếu đứng $1_1 2_1 3_1$, ta tìm được hình chiếu bằng $1_2 2_2 3_2$ cắt l_2 tại I_2 và K_2.

Từ các hình chiếu bằng đó ta tìm được hình chiếu đứng I_1 và K_1 (hình 5.8)

Khi tìm các điểm trên, hai điểm 1 và 2 thì đơn giản, ta lưu ý điểm 3. Vì điểm 3 thuộc đường cạnh SB, nên để tìm hình chiếu bằng, ta phải gắn nó vào đường thẳng 34 song song với cạnh đáy AB.

Sau đó, ta xét thấy và khuất trên các hình chiếu.

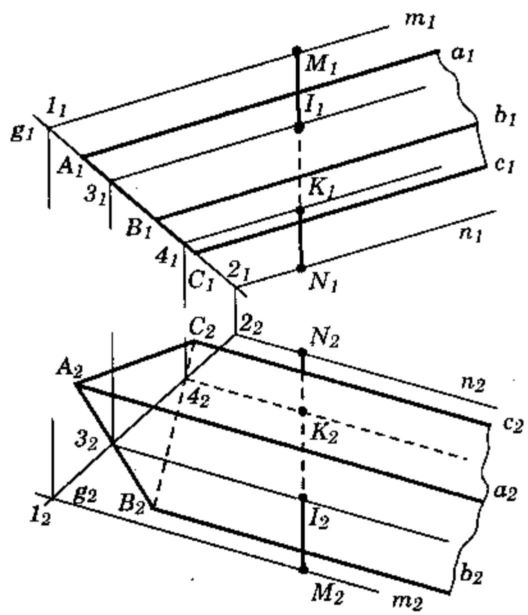
Trên hình chiếu đứng : Đoạn $I_1 K_1$ dễ thấy nó khuất; còn đoạn $I_1 1_1$, vì điểm I thuộc mặt (SAC) khuất, nên điểm I_1 khuất, do đó đoạn $I_1 1_1$ khuất. Đoạn $K_1 2_1$: điểm K thuộc mặt (SBC) thấy, nên K_1 thấy, do đó đoạn $K_1 2_1$ thấy.

Tương tự, trên hình chiếu bằng : dễ thấy đoạn I_2K_2 khuất. Đoạn K_2 đến cạnh B_2C_2 : Vì K thuộc mặt (SBC) thấy, nên K_2 thấy, do đó đoạn $K_2 - B_2C_2$ cũng thấy. Đoạn từ I_2 đến cạnh S_2A_2 : Vì I thuộc mặt (SAC) khuất, nên I_2 khuất, do đó đoạn từ I_2 đến cạnh S_2A_2 khuất.

Ví dụ 2 : Tìm giao điểm của đường cạnh MN với lăng trụ xiên tam giác, có ba cạnh bên là a, b, c.

Giải : Bài này có nhiều cách giải, ta nêu một vài cách :

Cách 1 : Ta chọn mặt phẳng phụ trợ không phải mặt phẳng chiếu, mà đó là mặt phẳng (m, n), trong đó đường thẳng m đi qua điểm M, và đường thẳng n đi qua điểm N; m, n đều song song với cạnh bên của lăng trụ. Như vậy, mặt phẳng (m, n) sẽ cắt lăng trụ theo các đường thẳng song song với cạnh bên của lăng trụ.



Hình 5.9

Để tìm giao tuyến của mặt phẳng phụ trợ đó với các mặt bên của lăng trụ, ta phải tìm giao tuyến g của mặt phẳng phụ trợ với mặt phẳng đáy (ABC) của lăng trụ (hình 5.9). Đó là đường thẳng nối giao điểm 1 thuộc m với mặt phẳng (ABC) và giao điểm 2 của đường thẳng n với mặt phẳng (ABC).

Giao tuyến g cắt tam giác

ABC tại các điểm 3 và 4. Qua 3, 4 vạch các đường thẳng song song với cạnh bên của lăng trụ, các đường thẳng đó cắt đường thẳng MN tại I và K. Đó chính là các giao điểm cần tìm.

Sau đó ta cũng xét thấy, khuất.

Cách 2. Ta cũng giải bài toán đó bằng phương pháp chiếu phụ.

Ta chọn mặt phẳng hình chiếu là mặt phẳng (ABC), đáy của lăng trụ. Hướng chiếu là các đường thẳng m, n.

Khi đó, hình chiếu các mặt bên của lăng trụ là các cạnh của tam giác ABC; hình chiếu của đường thẳng MN là đường thẳng 1 2. Như vậy, các cạnh của tam giác ABC cắt đường thẳng 1 2 tại hai điểm 3 và 4. Đưa các điểm 3 và 4 trở về các hình chiếu ban đầu ta có hai giao điểm I, K.

Như vậy, vẫn với hình 5.9, nhưng ta đã giải thích cách tìm các giao điểm I và K đó bằng một cách khác.

Ví dụ 3 : Tìm giao điểm đường cạnh MN với lăng trụ xiên.

Giải : Bài này cũng tương tự bài trên (tuy hình có hơi khác), nhưng ta nêu một cách giải nữa.

Ta dựng mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng chiếu đứng, tức là mặt phẳng cạnh σ.

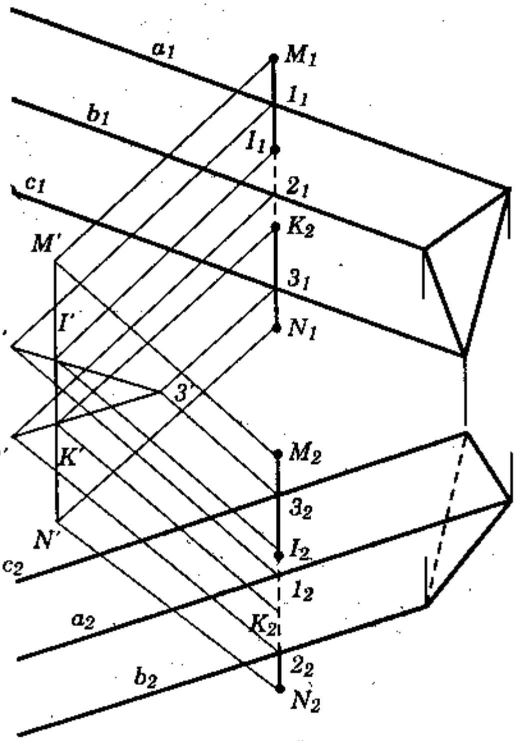
Nếu giải theo phương pháp thông thường, thì dùng mặt phẳng phụ trợ như vậy, việc giải sẽ phức tạp. Trường hợp này, ta cũng giải bằng phương pháp chiếu phụ, nhưng mặt phẳng hình chiếu và hướng chiếu khác cách giải trên.

Mặt phẳng σ cắt lăng trụ theo tam giác 123 (cắt các cạnh a, b, c tương ứng tại các điểm 1, 2, 3) (hình 5.10).

Ta dùng phép chiếu phụ, mặt phẳng hình chiếu là mặt phẳng phân giác thứ hai, chiếu đường thẳng MN và tam giác 123 lên mặt phẳng hình chiếu đó. Đường thẳng MN có hình chiếu phụ là đường thẳng M'N'; tam giác 123 có hình chiếu phụ là 1'2'3'. Đường thẳng M'N' cắt các cạnh của tam giác 1'2'3' tại hai điểm I' và K'.

Đưa các điểm I' và K' trở về các hình chiếu ban đầu ta có các giao điểm I (I_1, I_2), K(K_1, K_2) cần tìm.

Qua mấy ví dụ vừa nêu, cho thấy phép chiếu phụ trong một số trường hợp cũng tỏ ra hữu hiệu.



Hình 5.10

5.4. GIAO TUYẾN HAI ĐA DIỆN

Giao tuyến hai đa diện sẽ là một hoặc hai đa giác phẳng hoặc ghềnh.

Muốn tìm giao tuyến đó, ta tìm giao điểm các cạnh của đa diện thứ nhất với đa diện thứ hai; rồi lại tìm giao điểm các cạnh của đa diện thứ hai với đa diện thứ nhất. Sau đó nối chúng lại, ta sẽ có giao tuyến.

Ta cũng xét các trường hợp từ dễ đến khó.

5.4.1. MỘT TRONG HAI ĐA DIỆN LÀ LĂNG TRỤ CHIẾU

Trường hợp này ta dễ biết ngay một hình chiếu của giao tuyến (trùng với hình chiếu các mặt bên của lăng trụ chiếu) gắn giao tuyến đó vào đa diện kia, để tìm hình chiếu còn lại.

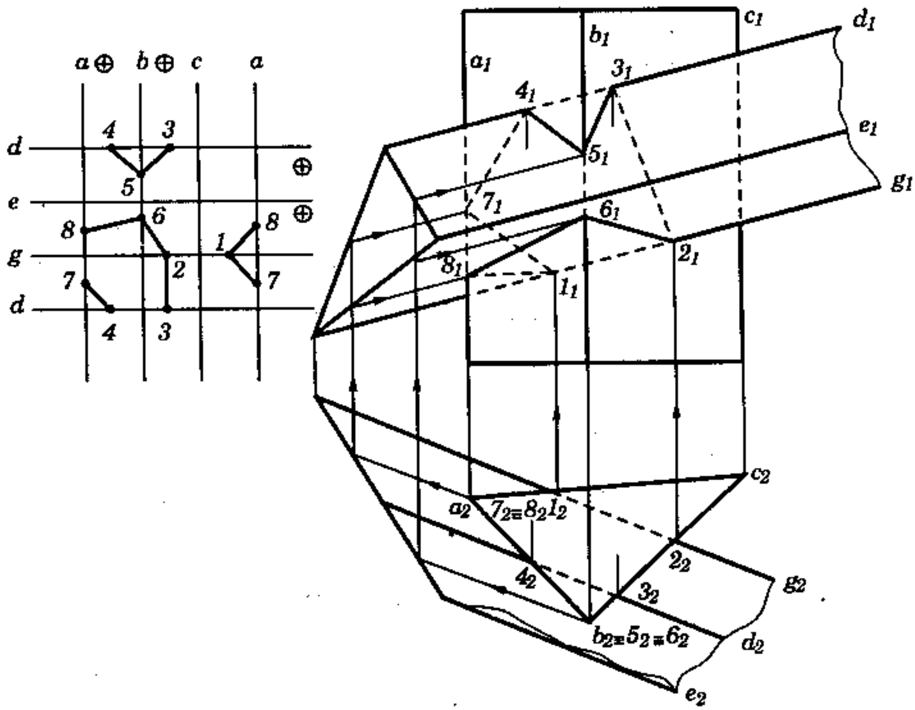
Ví dụ 1 : Tìm giao tuyến của lăng trụ chiếu bằng, có các cạnh bên là a, b, c với lăng trụ xiên, có các cạnh bên là d, e, g.

Giải : Ta dễ biết ngay hình chiếu bằng của giao tuyến là phần chung của hai lăng trụ.

Ta tìm các đỉnh của đa giác giao tuyến .

Trước khi tìm các giao điểm đó, ta lập một *sơ đồ nối* (nó rất có ích cho việc nối giao tuyến sau này). Cắt mỗi lăng trụ theo một cạnh bên, rồi rải các mặt đó lên một mặt phẳng.

Ví dụ lăng trụ thẳng đứng cắt theo cạnh a rồi rải ra, lăng trụ có ba cạnh, nên khi rải ra ta sẽ có bốn đường thẳng song song là a, b, c và a. Vì cắt theo cạnh a, nên cạnh a sẽ có vị trí đầu và cuối. Tương tự, với lăng trụ xiên, ta cắt theo cạnh d rồi rải ra, ta sẽ có bốn đường thẳng song song là d, e, g, và d (hình 5.11).



Hình 5.11

- Trước hết, ta tìm giao điểm các cạnh của lăng trụ xiên với lăng trụ thẳng đứng :

Cạnh g có hai giao điểm 1 và 2. Từ hình chiếu bằng 1_2, 2_2 ta có hình chiếu đứng 1_1, 2_1. Ta ghi hai điểm 1 và 2 lên sơ đồ : Điểm 1 thuộc cạnh g của lăng trụ xiên, nhưng nó thuộc mặt (a, c) của lăng trụ thẳng đứng, nên ta ghi điểm 1 vào cạnh g và thuộc đoạn thẳng nằm giữa hai cạnh a và c. Tương tự, điểm 2 thuộc mặt (b, c), nên được ghi vào đoạn thẳng nằm giữa hai cạnh b và c.

Cạnh d có hai giao điểm 3, 4. Ta lại ghi 3 và 4 lên sơ đồ như trên. Điểm 3 thuộc mặt (b, c), điểm 4 thuộc mặt (a, b). Vì trên sơ đồ cạnh d có hai vị trí (đầu và cuối), nên khi ghi các điểm 3 và 4 cũng phải ghi cả hai vị trí đó.

Cạnh e không có giao điểm.

Ta tìm giao điểm các cạnh của lăng trụ thẳng đứng với lăng trụ xiên.

Cạnh b có hai giao điểm 5 và 6, mà hình chiếu bằng là $5_2 \equiv 6_2 \equiv b_2$. Từ hình vẽ ta có điểm 5 thuộc mặt (d, e). Từ hình chiếu bằng 5_2 ta gắn vào đường thẳng song song với cạnh bên của lăng trụ, ta tìm được hình chiếu đứng là 5_1. Tương tự, ta tìm được điểm 6 thuộc mặt (e, g). Ta lại ghi 5 và 6 lên sơ đồ, theo đúng vị trí của nó.

Tương tự, cạnh a có hai giao điểm 7, 8. Điểm 7 thuộc mặt (d, g), điểm 8 thuộc mặt (e, g).

Cạnh c không có giao điểm.

Như vậy, ta đã tìm xong giao điểm các cạnh của cả hai đa diện.

Bây giờ ta nối các giao điểm đó. Nếu không có sơ đồ trên, thì việc này không đơn giản.

Nguyên tắc nối các giao điểm đó như sau :

- Ta chỉ có thể nối hai giao điểm, nếu hai giao điểm đó cùng thuộc một mặt bên của đa diện thứ nhất, và cũng cùng thuộc một mặt bên của đa diện thứ hai.

- Một cạnh của giao tuyến là thấy trên một hình chiếu nào đó, nếu cạnh đó cùng thuộc hai mặt bên đều thấy của hai đa diện trên hình chiếu đó.

Vận dụng nguyên tắc đó vào sơ đồ trên như sau :

- Ta chỉ có thể nối hai giao điểm, nếu hai giao điểm đó cùng thuộc một ô.

Ta xem trên hình chiếu đang xét, mặt nào của đa diện thấy, thì trên sơ đồ ta ghi dấu cộng (+), mặt nào khuất, không ghi gì (ghi dấu cộng là đánh dấu, không ghi gì, cũng là đánh dấu).

Sau đó, kết hợp việc xét thấy, khuất của cả hai mặt, ô nào thuộc cả hai mặt đều thấy thì nó thấy, còn ô nào thuộc ít nhất một trong hai mặt bị khuất là nó khuất.

Từ đó, *cạnh nào nằm trong ô thấy là nó thấy, cạnh nào nằm trong ô khuất thì nó khuất.*

Vận dụng các nguyên tắc trên vào hình 5.11 :

Trước hết, xét thấy, khuất của các mặt. Trường hợp này chỉ có một hình chiếu đứng.

(Nếu có hai hình chiếu thì phải dùng mỗi hình chiếu một kí hiệu riêng).

Với lăng trụ đứng : hai mặt (a, b) và (b, c) thấy.

Với lăng trụ xiên : hai mặt (d, e) và (e, g) thấy.

Kết hợp lại ta có bốn ô thấy, còn lại là khuất.

Bây giờ nối các giao điểm :

Ví dụ, bắt đầu từ 4.5.3.2.6.8.1.7.4.

Như vậy, giao tuyến sẽ là một đa giác. Vì như trên, tất cả các điểm đã được nối. Nếu sau khi nối, vẫn còn một số điểm nữa, thì ta lại nối các điểm còn lại như trên. Khi đó giao tuyến sẽ là hai đa giác.

Trong các cạnh của giao tuyến, các cạnh 4.5.3 và 2.6.8 nằm trong các ô thấy, nên trên hình chiếu đứng các cạnh đó cũng thấy; các cạnh còn lại là khuất.

Bây giờ, cứ theo thứ tự đó mà nối trên hình chiếu.

Đó là xét thấy, khuất của giao tuyến. Để đầy đủ hơn, ta còn phải xét thấy và khuất các cạnh của hai đa diện. Nếu biết dựa vào sự thấy, khuất của giao tuyến đó, thì việc này sẽ rất nhanh.

Ví dụ cạnh a, đoạn giữa hai giao điểm 7 và 8 là khuất. Vì đoạn này ở phía trong lăng trụ xiên. Ta chỉ còn xét hai đoạn : từ 7_1 đến d_1 và từ 8_1 đến g_1.

Đoạn $7_1 - d_1$: Vì đoạn giao tuyến $4_1 - 7_1$ khuất, → điểm 7_1 khuất → đoạn 7_1 - d_1 khuất.

Đoạn $8_1 - g_1$: Vì đoạn giao tuyến $6_1 - 8_1$ thấy → điểm 8_1 thấy → đoạn $8_1 - g_1$ thấy.

Các cạnh khác cũng xét tương tự như vậy.

Ví dụ 2 : Tìm giao tuyến của hình chóp SABC và lăng trụ chiếu đứng có các cạnh bên là a, b và c.

Giải : Trường hợp này ta cũng biết ngay hình chiếu đứng của giao tuyến, ta chỉ còn tìm hình chiếu bằng (hình 5.12).

Trước hết, ta cũng vẽ sơ đồ nối. Tìm được điểm nào ta ghi ngay lên sơ đồ.

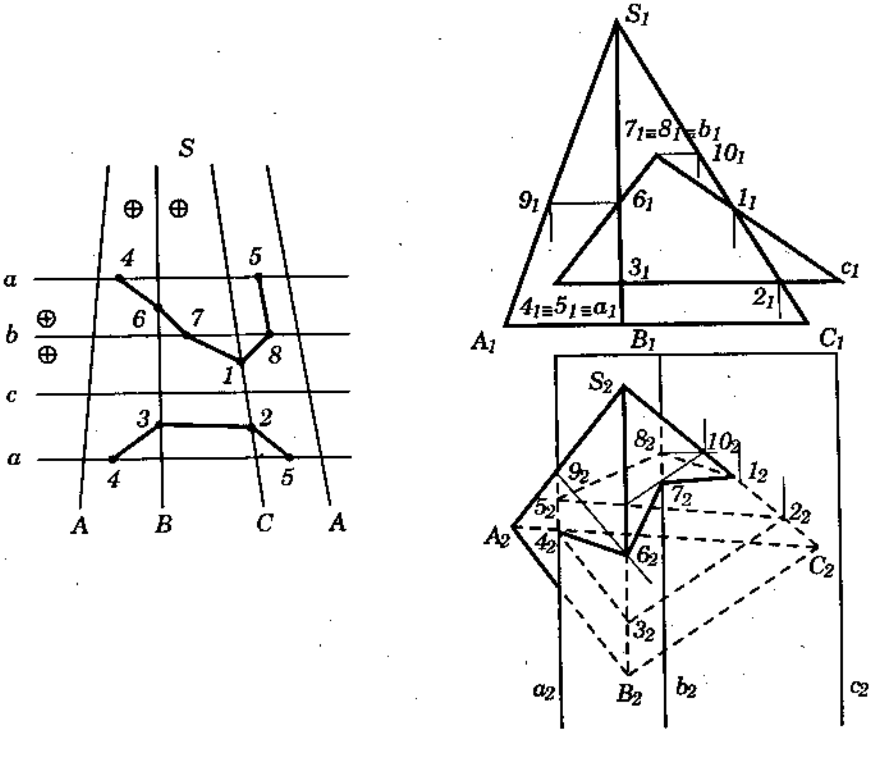
Giao điểm các cạnh của hình chóp với lăng trụ : Cạnh SC có hai giao điểm 1, 2. Trong đó 1 thuộc mặt (b, c), 2 thuộc mặt (a, c). Vì mặt (a, c) song song với mặt phẳng đáy (ABC) của hình chóp, nên nó cắt các mặt bên của hình chóp theo các đường thẳng song song với các cạng đáy ABC. Từ đó tìm được các giao điểm 3, 4 và 5. Trong đó 3 thuộc cạnh SB, còn 4, 5 thuộc cạnh a. Cạnh SB còn một giao điểm nữa là điểm 6. Vì SB là đường cạnh, nên để tìm hình chiếu bằng 6_2 ta phải gắn điểm 6 đó vào đường thẳng 6 9 song song với cạnh AB thuộc mặt bên SAB. Cạnh b cắt hình chóp tại hai điểm 7, 8. Để tìm hình chiếu bằng của 7 và 8, ta vạch qua nó các đường thẳng 7 10 và 8 10 song song với các cạnh đáy AC và BC.

Như vậy, hai điểm 3 và 6 thuộc cạnh SB. Trong đó 3 thuộc mặt (a, c), 6 thuộc mặt (a, b).

Hai điểm 4, 5 thuộc cạnh a. Điểm 4 thuộc mặt (SAB); điểm 5 thuộc mặt (SAC).

Hai điểm 7, 8 thuộc cạnh b. Trong đó, 7 thuộc mặt (SBC), điểm 8 thuộc mặt (SAC).

Sau đó, ta nối các điểm theo thứ tự sau : 4.6.7.1.8.5.2.3.4.



Hình 5.12

Ta cũng xét thấy và khuất (hình chiếu bằng). Hai mặt bên của hình chóp SAB và SBC thấy; lăng trụ có hai mặt thấy là (a, b) và (b, c).

Kết hợp lại, ta có các cạnh 4.6 ; 6.7 ; 7.1 thấy, còn lại là khuất.

Giao tuyến là một đa giác ghềnh.

5.4.2. TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

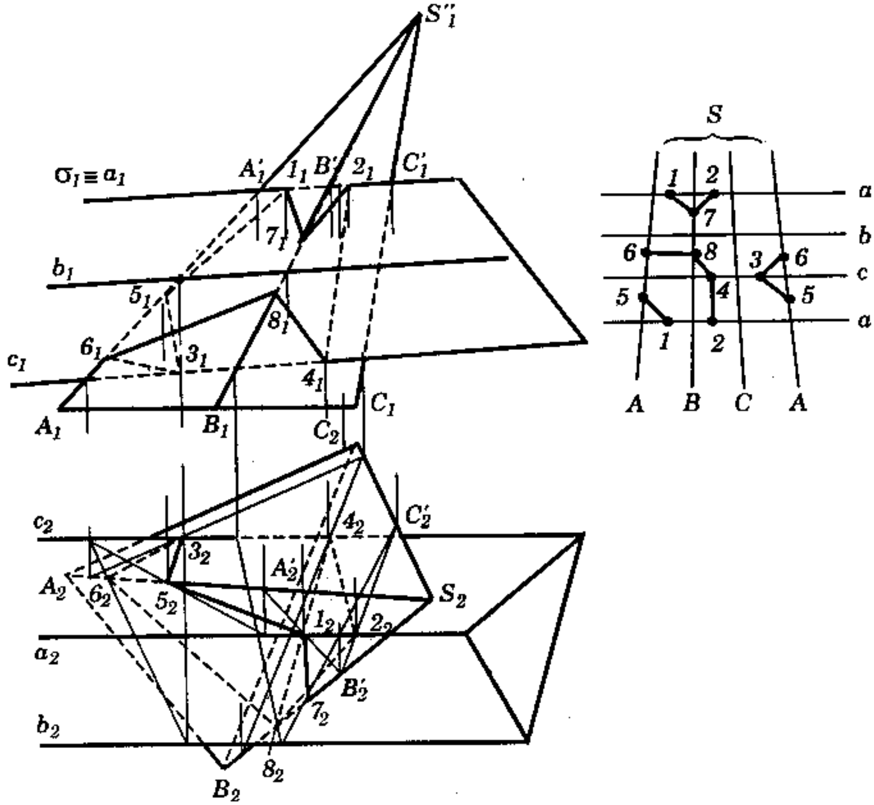
Trường hợp này ta chưa biết hình chiếu nào của giao tuyến nên phức tạp hơn.

Ta cũng tìm giao điểm các cạnh của đa diện thứ nhất với đa diện thứ hai; và lại tìm giao điểm các cạnh của đa diện thứ hai với đa diện thứ nhất. Sau đó nối các điểm đó lại.

Có điều khác là, việc tìm các giao điểm đó sẽ phức tạp hơn.

Ví dụ : Tìm giao tuyến của hình chóp SABC với lăng trụ tam giác, có các cạnh là a, b, c.

Giải : Trường hợp này, ta phải dùng mặt phẳng phụ trợ để tìm giao điểm các cạnh của lăng trụ với hình chóp, sau đó lại tìm giao điểm các cạnh của hình chóp với lăng trụ (hình 5.13).



Hình 5.13

- Trước hết, ta cũng vẽ sơ đồ nối. Tìm được giao điểm nào ta ghi ngay lên sơ đồ đó.

Ví dụ, để tìm giao điểm cạnh a của lăng trụ với hình chóp, ta dùng mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng chiếu đứng σ, (mà hình chiếu đứng là $\sigma_1 \equiv a_1$, mặt phẳng này cắt SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' ta tìm được hai giao điểm là của a với hình chóp là 1 và 2.

Ta ghi hai điểm đó lên sơ đồ : 1 và 2 thuộc đường thẳng a, và 1 thuộc mặt (SAB), 2 thuộc mặt (SBC). Muốn biết các giao điểm đó thuộc mặt bên nào của hình chóp, ta phải xem giao điểm đó nằm trên giao tuyến phụ thuộc mặt bên nào. Ví dụ, giao điểm 1, nằm trên giao tuyến phụ A'B' thuộc mặt (SAB) điểm 2 thuộc B'C', thuộc mặt (SBC). Cạnh b không có giao điểm. Cạnh c có hai giao điểm 3 và 4, trong đó điểm 3 thuộc mặt (SAC), điểm 4 thuộc mặt (ABC).

- Giao điểm các cạnh của hình chóp với lăng trụ : Cạnh SA có hai giao điểm 5 và 6. Trong đó, 5 thuộc mặt (a, c), còn 6 thuộc mặt (b, c). Cạnh SB có hai giao điểm 7 và 8. Trong đó 7 thuộc mặt (a, b) và 8 thuộc mặt (b, c). Cạnh SC không có giao điểm.

Ta nối các điểm đó theo nguyên tắc nêu trên :

Trước hết, ta nối trên sơ đồ, sau đó theo thứ tự trên sơ đồ, để nối trên đồ thức.

Thứ tự nối như sau : 1.7.2.4.8.6.3.5.1.

Như vậy, giao tuyến là một đa giác ghềnh.

Sau đó xét thấy và khuất của giao tuyến trên từng hình chiếu, rồi xét thấy và khuất các cạnh của lăng trụ và hình chóp, trên mỗi hình chiếu.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Trình bày cách xét thấy, khuất các cạnh chéo nhau của đa diện. Xét ví dụ hình 5.15 và 5.17.

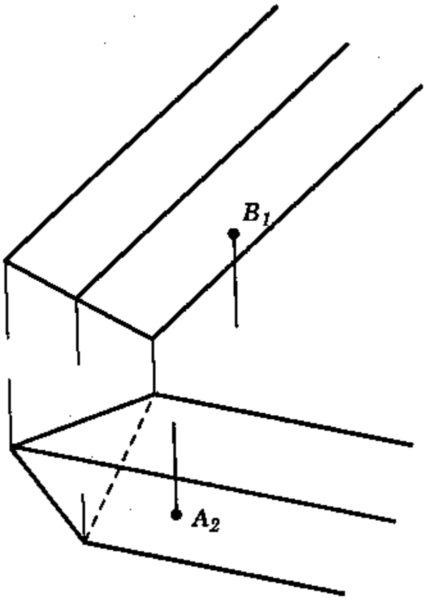
2. Cách lấy một điểm thuộc đa diện.

Tìm các hình chiếu còn lại của các điểm A và B thuộc lăng trụ tam giác (hình 5.14).

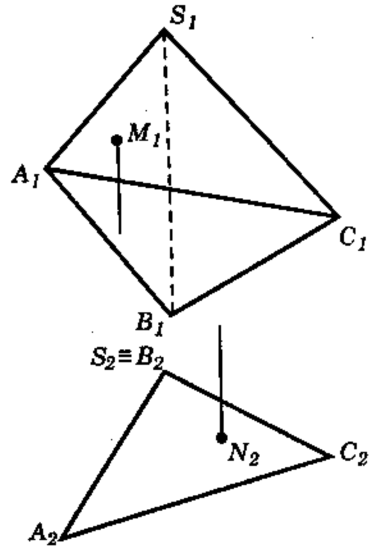
Tìm các hình chiếu còn lại của các điểm M, N thuộc mặt tháp SABC (hình 5.15).

3. Vẽ giao tuyến của mặt phẳng (m, n) với lăng trụ (hình 5.16).

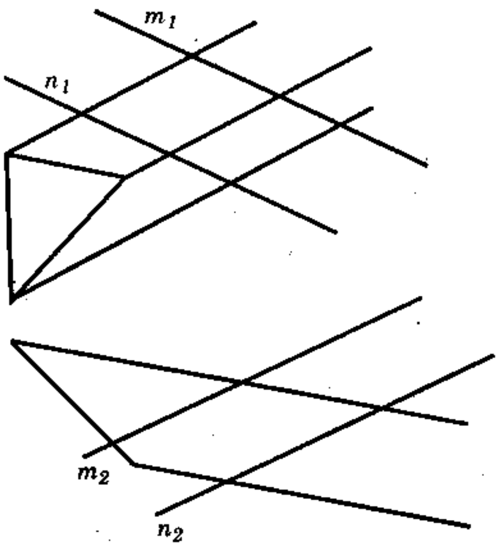
4. Vẽ giao tuyến của hình chóp SABC với mặt phẳng đi qua đỉnh C và thẳng góc với cạnh SA (hình 5.17).



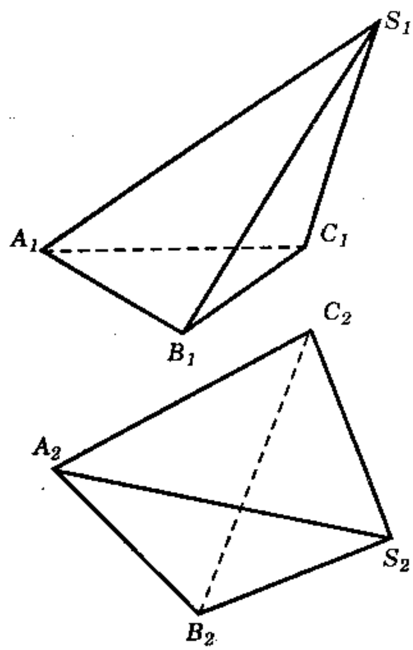
Hình 5.14



Hình 5.15



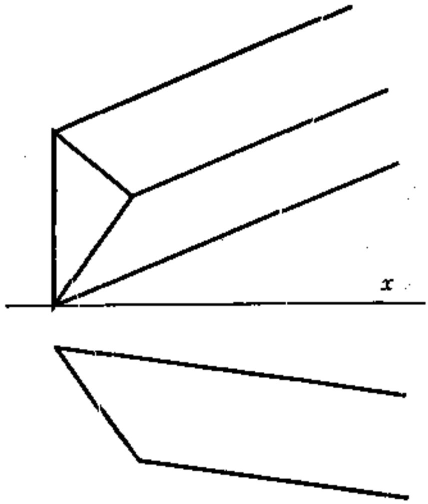
Hình 5.16



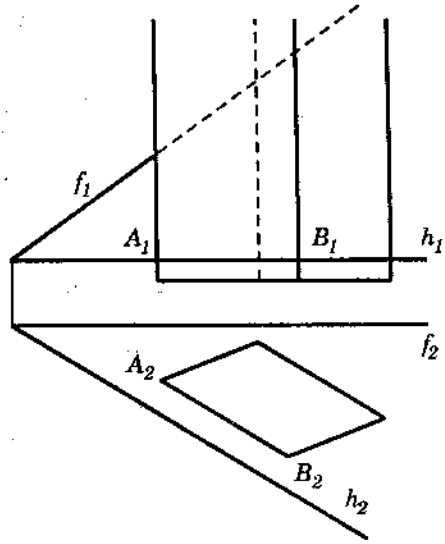
Hình 5.17

5. Vẽ giao tuyến của lăng trụ tam giác với mặt phẳng phân giác thứ nhất (hình 5.18).

6. Cho lăng trụ tứ giác thẳng đứng. Dựng mặt phẳng đi qua cạnh AB, và cắt lăng trụ theo một hình thoi. Biết hình chiếu bằng của lăng trụ là một hình bình hành và AB//h (hình 5.19).



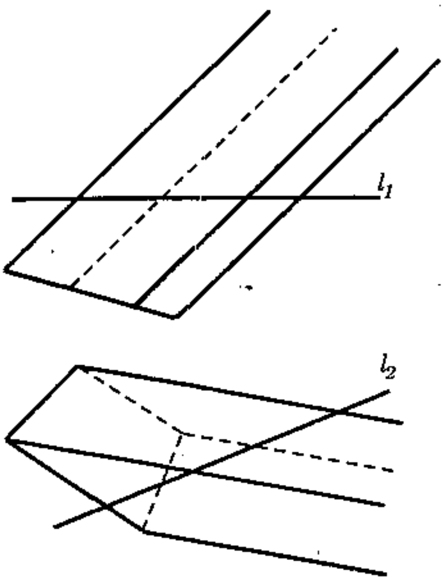
Hình 5.18



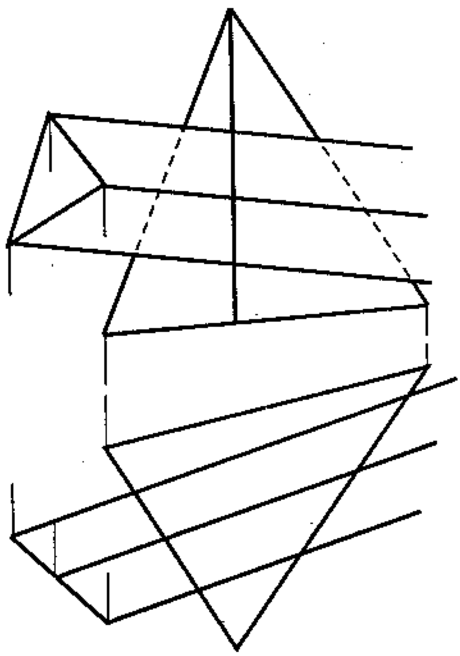
Hình 5.19

7. Tìm giao điểm đường thẳng l với lăng trụ (hình 5.20).

8. Vẽ giao tuyến lăng trụ và hình chóp. Xét thấy và khuất (hình 5.21).

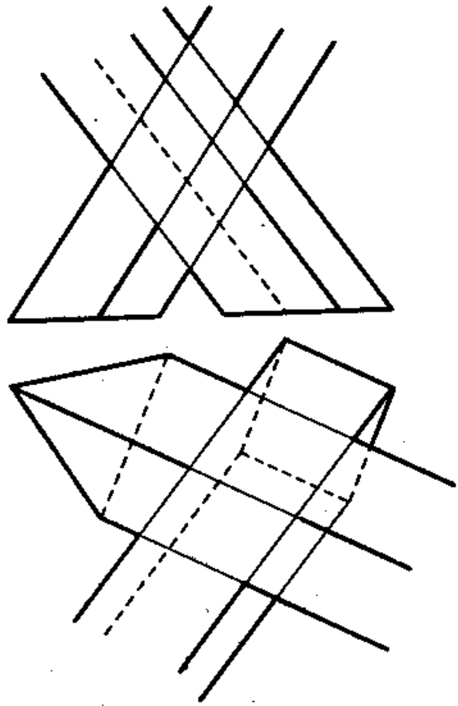


Hình 5.20



Hình 5.21

9. Vẽ giao tuyến hai lăng trụ. Xét thấy, khuất (hình 5.22).



Hình 5.22

Chương VI. ĐƯỜNG VÀ MẶT CONG

6.1. ĐƯỜNG CONG

6.1.1. KHÁI NIỆM

*** *Định nghĩa :*** *Đường cong có thể coi là quỹ tích của một điểm chuyển động theo một quy luật nào đó.* Ví dụ, đường tròn, có thể coi là quỹ tích của một điểm chuyển động trên một mặt phẳng, và luôn cách một điểm cố định, một khoảng cách không đổi; hoặc đường xoắn ốc trụ, có thể coi là quỹ tích của một điểm chuyển động đều trên một đường thẳng d, đồng thời đường thẳng d đó lại quay tròn đều quanh một đường thẳng t // d.

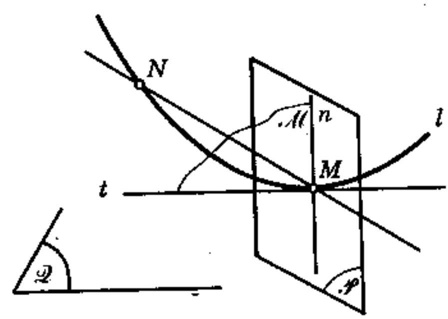
Hoặc, *đường cong cũng có thể coi là giao tuyến của hai mặt.* Mỗi mặt được xác định bằng một phương trình f(x, y, z) = 0 và g(x, y, z) = 0. Trong đó, f(x, y, z) là một đa thức bậc m, và g(x, y, z) là một đa thức bậc n, thì đường cong sẽ có bậc bằng m.n (hai đa thức f(x, y, z) và g(x, y, z) phải độc lập với nhau).

*** *Phân loại :*** Có nhiều cách phân loại đường cong, sau đây cũng là một cách phân loại :

- *Đường cong phẳng là đường cong mà tất cả các điểm của nó cùng thuộc một mặt phẳng.* Ví dụ : các đường bậc hai như đường tròn, ellip, parabôn, hypecbôn, ...

- *Đường cong ghềnh là đường cong mà tất cả các điểm của nó không cùng thuộc một mặt phẳng.* Ví dụ : đường xoắn ốc trụ, đường xoắn ốc nón, ...

Tiếp tuyến của đường cong. Giả sử ta có đường cong l, trên đó ta lấy hai điểm M và N (hình 6.1). Cho điểm N tiến dần tới điểm M. *Nếu cát tuyến MN có vị trí giới hạn là Mt, thì Mt gọi là tiếp tuyến của đường cong l, tại điểm M.* Còn *điểm M đó gọi là tiếp điểm* (hoặc điểm tiếp xúc) của tiếp tuyến Mt.



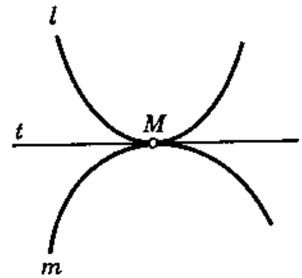
Hình 6.1

*** *Mặt phẳng tiếp xúc của đường cong.*** Nếu ta có đường cong l và tiếp tuyến Mt của đường cong l tại một điểm M, thì *mọi mặt phẳng chứa tiếp tuyến Mt, gọi là mặt phẳng tiếp xúc của đường cong l tại điểm M.*

*** *Mặt phẳng mật tiếp của đường cong.*** Trên đường cong l nói trên, ta lấy điểm N. Khi cho điểm N tiến dần tới điểm M, nếu mặt phẳng (N, Mt) có vị trí giới hạn là mặt phẳng $\mathcal{M}$, thì mặt phẳng $\mathcal{M}$ đó gọi là *mặt phẳng mật tiếp của đường cong* l tại điểm M.

**** Pháp tuyến và mặt phẳng pháp của đường cong**. Mọi đường thẳng đi qua M và vuông góc với tiếp tuyến Mt của đường cong, thì gọi là pháp tuyến của đường cong l tại điểm M*. Như vậy, có vô số pháp tuyến của đường cong l tại điểm M, các pháp tuyến đó tạo thành một mặt phẳng, gọi là *mặt phẳng pháp của đường cong l tại điểm M*. Trong đó, *pháp tuyến nằm trong mặt phẳng mật tiếp $\mathcal{M}$, thì gọi là pháp tuyến chính.*

- ***Hai đường cong tiếp xúc**. Hai đường cong l và m, nếu có chung một tiếp tuyến Mt tại một điểm M, thì hai đường cong đó gọi là tiếp xúc với nhau tại điểm M* (hình 6.2).



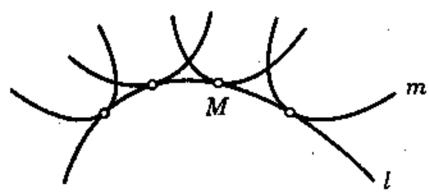
Hình 6.2

- ***Đường bao***. Giả sử ta có một đường cong phẳng l và một họ đường cong phẳng m. Nếu :

+ Tại mỗi điểm của đường cong l có ít nhất một đường cong m tiếp xúc với nó.

+ Mỗi đường cong m, phải tiếp xúc với đường cong l ở ít nhất một điểm.

Thì *đường cong l gọi là đường bao của họ các đường cong m* (hình 6.3).

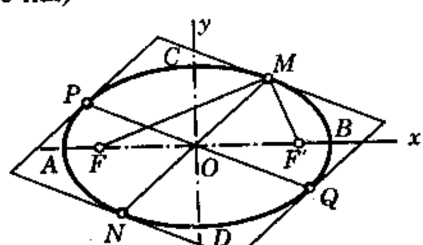


Hình 6.3

6.1.2. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ ĐƯỜNG CONG

1. Đường cong phẳng (đường cong bậc hai)

• ***Đường ellip.** Đường ellip có thể coi là quỹ tích các điểm M thuộc một mặt phẳng, có tổng khoảng cách tới hai điểm cố định F và F' (cũng thuộc mặt phẳng đó) là một hằng số.*



Hình 6.4

Hai điểm F và F' gọi là hai *tiêu điểm* của ellip (hình 6.4).

Gọi hằng số nói trên là 2a, thì ứng với mỗi điểm M thuộc ellip ta có :

$$MF + MF' = 2a. \qquad (*)$$

Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng FF'. Lấy O làm gốc của hệ trục toạ độ Đề các vuông góc Oxy; lấy đường thẳng FF' làm trục x; Đặt OF = OF' = c.

Ta có phương trình của đường ellip như sau :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{với } b^2 = a^2 - c^2.$$

Như vậy, a – c > 0. Nếu c = 0, tức là OF = OF' = 0. Khi đó, ellip sẽ là đường tròn.

Dễ thấy rằng : *Tâm O là tâm đối xứng của ellip.*

Hai trục toạ độ x và y cũng là hai trục đối xứng của ellip.

Gọi A, B là các giao điểm của trục x với ellip; và C, D là các giao điểm của trục y với ellip, thì ta có :

AB = 2a, và CD = 2b.

Vì a > b, nên AB gọi là trục dài, còn CD gọi là trục ngắn của ellip.

Mọi dây cung đi qua tâm O gọi là đường kính của ellip (trong đó, trục dài là đường kính dài nhất, còn trục ngắn là đường kính ngắn nhất của ellip).

Hai đường kính gọi là liên hiệp với nhau, nếu đường kính này chia đôi mọi dây cung song song với đường kính kia.

Từ đó suy ra : *Tiếp tuyến của ellip tại một điểm M sẽ song song với đường kính liên hiệp với đường kính đi qua tiếp điểm M đó.*

Mỗi đường kính của ellip bao giờ cũng có một đường kính duy nhất liên hiệp với nó.

Trục dài và trục ngắn của ellip, là một cặp đường kính liên hiệp duy nhất, vuông góc với nhau.

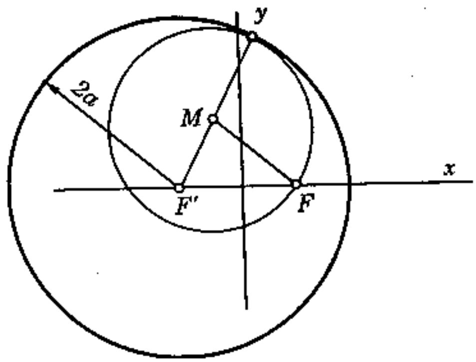
Người ta chứng minh được rằng, biết một cặp đường kính liên hiệp của một ellip, thì ellip đó hoàn toàn được xác định.

Từ công thức (*), suy ra : Ta có thể coi, *ellip là quỹ tích các tâm M của các đường tròn, luôn luôn đi qua một điểm cố định F, và tiếp xúc trong với một đường tròn cố định, có tâm là điểm F'* (bán kính bằng 2a).

Hai điểm F và F', chính là hai tiêu điểm của ellip (hình 6.5).

Đường tròn tâm F' và bán kính 2a đó gọi là *đường tròn chuẩn*.

Đường tròn có tâm là tâm của ellip, bán kính bằng a, gọi là *đường tròn chính của ellip.*



Hình 6.5

• ***Đường hypecbôn.*** *Đường hypecbôn có thể coi là quỹ tích các điểm M thuộc một mặt phẳng, có hiệu khoảng cách tới hai điểm cố định F và F' (thuộc mặt phẳng đó) là một hằng số.*

Hai điểm F và F' gọi là các tiêu điểm của hypecbôn.

Gọi hằng số trên là 2a, thì ứng với mỗi điểm M thuộc hypecbôn ta có :

/ MF - MF'/ = 2a. (**)

Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng FF'. Lấy O làm gốc của một hệ trục toạ độ Đêcác vuông góc, đường thẳng FF' làm trục x. Đặt OF = OF' = c.

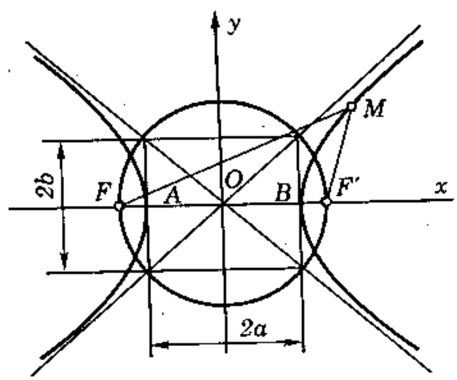
Ta có phương trình của đường hypecbôn là :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } a^2 = b^2 + c^2$$

Như vậy, a > c.

Dễ thấy rằng, *tâm O là tâm đối xứng của hypecbôn, hai trục x và y cũng là hai trục đối xứng của hypecbôn.*

Trục x chứa hai tiêu điểm F và F' gọi là *trục tiêu điểm thực* (hoặc trục thực) của hypecbôn (hình 6.6).



Hình 6.6

Hypecbôn cắt trục x tại hai điểm A và B.

Ta vẽ một hình chữ nhật (đi qua A và B), có chiều dài bằng 2a, chiều rộng bằng 2b.

Người ta chứng minh được rằng, hai đường thẳng : $y = \frac{b}{a}x$ và $y = -\frac{b}{a}x$ là hai tiệm cận của hypecbôn.

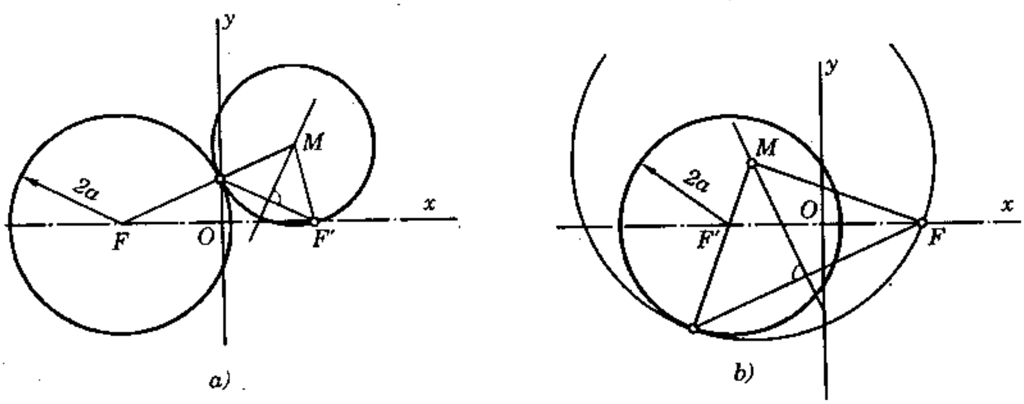
Hai tiệm cận này, chính là hai đường chéo của hình chữ nhật nói trên.

Từ công thức (**), suy ra : *Đường hypecbôn cũng có thể coi là quỹ tích tâm M của các đường tròn, luôn luôn đi qua một điểm F cố định, và tiếp xúc với một đường tròn cố định, có tâm là điểm F'* (bán kính 2a).

Các điểm F và F' đó chính là các tiêu điểm của hypecbôn (hình 6.7a, b).

Đường tròn có bán kính bằng 2a, nói trên, gọi là *đường tròn chuẩn* của hypecbôn.

Đường tròn có bán kính bằng a, có tâm là tâm của hypecbôn, gọi là *đường tròn chính* của hypecbôn.



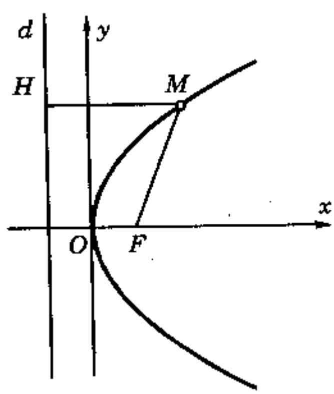
Hình 6.7

• ***Đường parabôn.*** *Đường parabôn là quỹ tích các điểm, cách đều một điểm F cố định và một đường thẳng d cố định trên cùng một mặt phẳng.*

Điểm F đó gọi là *tiêu điểm,* còn đường thẳng d đó gọi là *đường chuẩn* của parabôn.

Ta vẽ một hệ trục toạ độ Đêcác vuông góc, mà trục x là đường thẳng qua điểm F, và vuông góc với đường thẳng d (hình 6.8). Gốc toạ độ O là điểm thuộc trục x, và cách đều điểm F và đường d, thì ta có phương trình của đường parabôn như sau :

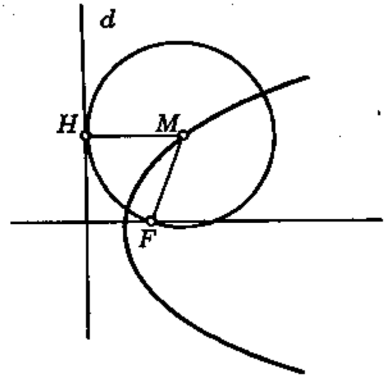
$Y^2 = 2px$, p là khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường chuẩn d.



Hình 6.8

Dễ thấy, *trục x là trục đối xứng* của parabôn, *gốc O là đỉnh của parabôn.*

Từ định nghĩa trên, ta thấy : *Đường parabôn còn có thể coi là quỹ tích tâm M của các đường tròn, luôn luôn đi qua một điểm F cố định, và tiếp xúc với một đường thẳng d cố định* (hình 6.9). Điểm F đó gọi là tiêu điểm, đường thẳng d gọi là đường chuẩn của parabôn.



Hình 6.9

Tóm lại, ta có một định nghĩa chung về các đường bậc hai như sau :

Ta có thể coi *đường bậc hai là quỹ tích tâm M của các đường tròn, luôn luôn đi qua một điểm F cố định, và tiếp xúc với một đường tròn cố định có tâm là điểm F'.*

Các điểm F và F' gọi là các *tiêu điểm* của đường bậc hai.

Đường tròn tâm F' gọi là *đường tròn chuẩn* của đường bậc hai.

Nếu tiêu điểm F' là điểm hữu hạn :

- Các đường tròn tâm M tiếp xúc trong với đường tròn chuẩn (tâm F'), thì ta có ellip.

- Các đường tròn tâm M tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong với đường tròn chuẩn (tâm F'), thì ta có hypecbôn.

Nếu tiêu điểm F' là điểm vô tận, (đường tròn chuẩn là đường thẳng), thì ta có parabôn.

2. Đường cong ghềnh

Ví dụ, đường xoắn ốc trụ, đường xoắn ốc nón là những đường cong ghềnh.

Đường xoắn ốc trụ, *có thể coi là quỹ tích của một điểm M chuyển động đều theo một đường thẳng d, đồng thời đường thẳng d lại quay tròn đều quanh một đường thẳng l song song với đường thẳng d.*

Đường thẳng d gọi là đường sinh, còn đường thẳng l gọi là trục của đường xoắn.

- *Vòng xoắn* là phần đường xoắn (điểm M đi được) khi đường thẳng d quay một vòng quanh trục l (hình 6.10).

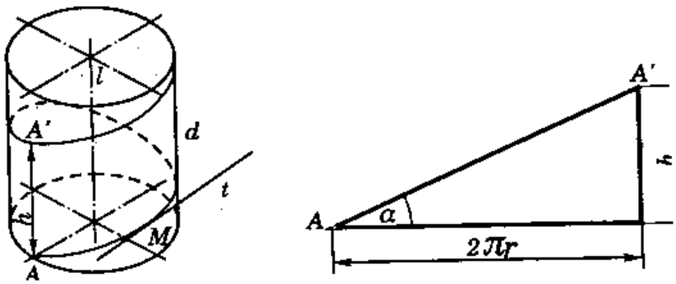
- *Bước xoắn*, là đoạn đường AA' = h (đo theo hướng đường thẳng l) mà điểm M đi được, khi đường thẳng d quay được một vòng quanh trục l.

Khoảng cách từ đường thẳng d đến trục xoay l là r.

Người ta chứng minh được rằng, góc nghiêng của tiếp tuyến Mt tại một điểm M bất kỳ của đường xoắn với mặt phẳng vuông góc với trục l là một hằng số α.

Ta có :

$$tg\ \alpha = h/2\pi.r$$; α gọi là góc nâng của đường xoắn.



Hình 6.10

6.1.3. HÌNH CHIẾU CỦA ĐƯỜNG CONG

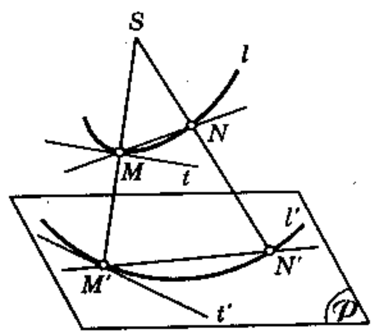
Nói chung, hình chiếu của một đường cong, cũng là một đường cong.

Tính chất :

1- Hình chiếu (song song hoặc xuyên tâm) của một tiếp tuyến Mt của một đường cong l, nói chung, cũng là tiếp tuyến M't' của hình chiếu l' của đường cong tại hình chiếu M' của tiếp điểm.

Thật vậy, giả sử ta có đường cong l, cát tuyến MN và tiếp tuyến Mt (hình 6.11).

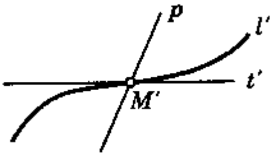
Gọi l', M'N' và M't' tương ứng là hình chiếu (song song hoặc xuyên tâm) của đường cong l, cát tuyến MN và tiếp tuyến Mt. Khi điểm N tiến dần tới điểm M thuộc đường cong l, thì điểm N' cũng tiến dần tới điểm M' thuộc đường cong l'. Do đó, khi cát tuyến MN có giới hạn là tiếp tuyến Mt của đường cong l, tại điểm M, thì cát tuyến M'N' cũng có giới hạn là tiếp tuyến M't' của đường cong l', tại điểm M'.



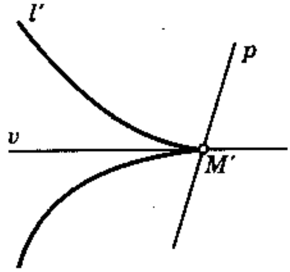
Hình 6.11

Chú ý :

- Khi chiếu đường cong l, nếu tâm chiếu S nằm trong mặt phẳng mật tiếp $\mathcal{M}$, nhưng không nằm trên tiếp tuyến Mt, thì nói chung, hình chiếu l' ở hai phía của tiếp tuyến M't', và cũng ở hai phía của bất cứ đường thẳng nào thuộc mặt phẳng hình chiếu π, mà đi qua tiếp điểm M'.



Hình 6.12

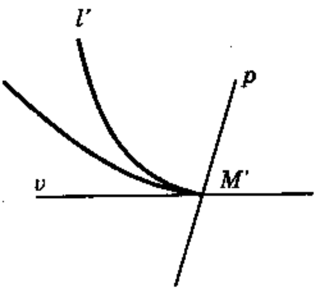


Hình 6.13

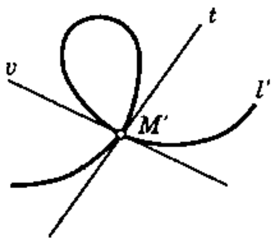
Khi đó, *điểm M' gọi là điểm uốn của đường cong l'* (hình 6.12).

- Nếu tâm chiếu S, thuộc tiếp tuyến Mt, thì tiếp tuyến Mt là đường thẳng chiếu, nên hình chiếu xuyên tâm của nó sẽ là một điểm. Khi đó hình chiếu l' có thể sẽ có *điểm lùi loại một* (hình 6.13), hoặc *điểm lùi loại hai* (hình 6.14).

- Khi chiếu đường cong ghềnh l, nếu có tia chiếu cắt đường cong l tại hai điểm, thì hình chiếu l' sẽ có *điểm kép* (hoặc điểm tự cắt) (hình 6.15).



Hình 6.14



Hình 6.15

2 - Hình chiếu của một đường cong đại số bậc n, nói chung cũng là một đường cong đại số bậc n.

Cần lưu ý là :

- Nếu đường cong đại số là phẳng, thì số bậc của nó bằng số giao điểm (cả thực và ảo) của một đường thẳng thuộc mặt phẳng đó với đường cong đó.

- Nếu đường cong đại số là ghềnh, thì số bậc của nó bằng số giao điểm của một mặt phẳng với đường cong đó.

a) Hình chiếu của một đường tròn

Hình chiếu của một đường tròn, nói chung là một ellip có :

- Hình chiếu của tâm đường tròn, là tâm của ellip.

- Hình chiếu của hai đường kính vuông góc của đường tròn, là một cặp đường kính liên hiệp của ellip.

- Hình chiếu của đường kính đường tròn song song với mặt phẳng hình chiếu, sẽ là trục dài của ellip; hình chiếu của đường kính đường tròn là đường dốc nhất đối với mặt phẳng hình chiếu, sẽ là trục ngắn của ellip (chiếu trên mặt phẳng đó).

Ví dụ : Vẽ các hình chiếu của đường tròn, tâm $O(O_1, O_2)$, bán kính R, thuộc mặt phẳng (f, h).

Giải. Dựa vào những nhận xét trên, ta vẽ qua tâm O đường bằng h', và đường mặt f'.

Trên đường bằng h' ta lấy hai điểm A, B sao cho OA = OB = R (bán kính đường tròn).

Dựa vào tính chất của đường bằng, ta có : $O_2A_2 = O_2B_2 = R$. Từ đó, ta có A_1 và B_1.

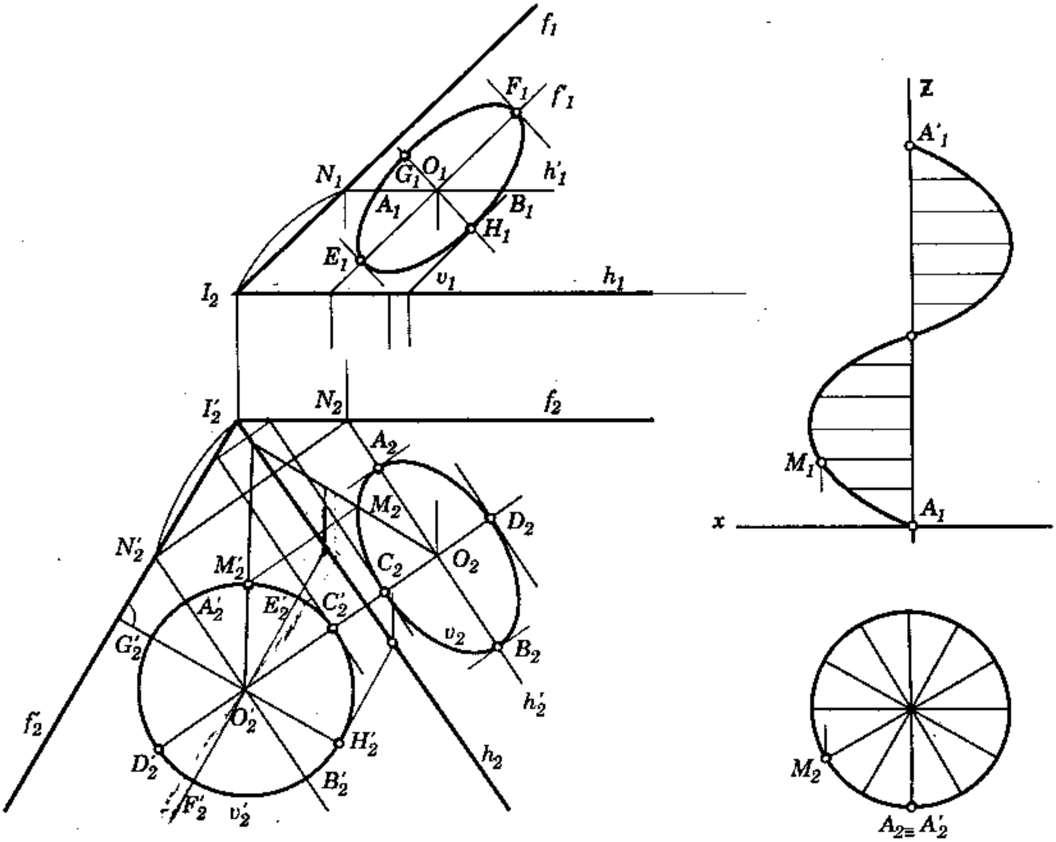
Để tìm trục ngắn của ellip đó, qua O ta vẽ một đường dốc nhất đối với mặt phẳng hình chiếu bằng. Trên đó, ta lấy hai điểm C, D sao cho OC = OD = R. Dùng phương pháp xoay quanh đường bằng h, ta vẽ được đường tròn tâm O. Từ đó, ta tìm được C_2, D_2 và C_1, D_1 (hình 6.16a).

Như vậy, A_2B_2 là trục dài, và C_2D_2 là trục ngắn của ellip trên hình chiếu bằng. Còn A_1B_1 và C_1D_1 là một cặp đường kính liên hiệp của ellip trên hình chiếu đứng.

Tương tự, vẽ đường mặt f' qua tâm O, ta cũng tìm được trục dài E_1F_1 trên hình chiếu đứng.

Tương tự trên, để tìm trục ngắn của ellip trên hình chiếu đứng, ta cũng vẽ qua tâm O một đường dốc nhất đối với mặt phẳng hình chiếu đứng, ta cũng tìm được trục ngắn G_1H_1 của ellip trên hình chiếu đứng.

Sau đó, nối các điểm đó lại, ta có các hình chiếu của đường tròn đã cho.



a) b)

Hình 6.16

b) Hình chiếu của đường xoắn ốc trụ

Nếu ta có đường xoắn ốc trụ, có trục là đường thẳng chiếu bằng, thì : hình chiếu đứng của đường xoắn ốc đó là một đường hình sin; hình chiếu bằng của nó là một đường tròn (hình 6.16b).

6.2. MẶT CONG

6.2.1. KHÁI NIỆM

* *Mặt cong cũng có thể coi là quỹ tích của một đường l chuyển động theo một quy luật nào đó*. Đường l đó, gọi là *đường sinh* của mặt cong.

Trong quá trình chuyển động, đường sinh l có thể biến dạng hay không biến dạng.

Ví dụ, mặt nón là mặt được tạo thành bởi một đường thẳng luôn luôn đi qua một điểm S cố định và tựa trên một đường l cố định.

Mặt cầu là mặt được tạo thành do một đường tròn quay quanh một đường kính của nó, …

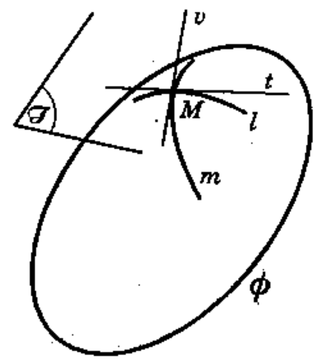
Trên một mặt, nói chung có nhiều họ đường sinh khác nhau.

Ví dụ một mặt nón, có một họ đường sinh thẳng; một họ đường sinh tròn; và nhiều họ đường sinh ellip; v.v, …

*** Phân loại mặt cong.** Có nhiều cách phân loại mặt cong. Ta có thể phân làm *mặt kẻ*, và *mặt không kẻ*. Mặt kẻ là mặt, trên đó có tồn tại những họ đường sinh thẳng. Ví dụ mặt nón, mặt trụ, mặt hypecbôlôit tròn xoay (hoặc elliptic) một tầng, …

*** Tiếp tuyến của mặt cong.** Giả sử ta có mặt cong Φ, qua điểm M thuộc Φ, ta vạch một đường cong l, tiếp tuyến Mt của l, cũng là *tiếp tuyến của mặt cong* Φ tại M (hình 6.17).

*** Mặt phẳng tiếp xúc.** Qua điểm M thuộc Φ, có thể có vô số đường cong, nên cũng có thể có vô số tiếp tuyến tại M của Φ. Nếu tất cả các tiếp tuyến đó cùng thuộc một mặt phẳng $\mathcal{T}$, thì $\mathcal{T}$ gọi là *mặt phẳng tiếp xúc của mặt cong* Φ tại M.



Hình 6.17

*** Pháp tuyến của mặt cong.** Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng tiếp xúc $\mathcal{T}$ tại điểm M gọi là *pháp tuyến của mặt cong* Φ tại M.

*** Hai mặt cong tiếp xúc.** Giả sử ta có hai mặt cong Φ và Σ , nếu hai mặt đó có một điểm M chung, và tại điểm M đó, hai mặt lại có một mặt phẳng tiếp xúc chung, thì gọi là hai mặt Φ và Σ tiếp xúc với nhau tại M.

Nếu hai mặt Φ và Σ có một đường l chung, mà hai mặt đó lại tiếp xúc với nhau tại mọi điểm của l, thì gọi là hai mặt đó tiếp xúc với nhau theo đường l.

*** Hình bao.** Giả sử ta có một mặt Φ, và một họ mặt Σ, nếu :

- Mỗi mặt Σ đều tiếp xúc với Φ ở ít nhất một điểm.
- Tại mỗi điểm của Φ, đều tồn tại một mặt Σ tiếp xúc với nó.

Thì mặt *Φ gọi là hình bao (hoặc mặt bao) của họ các mặt Σ.*

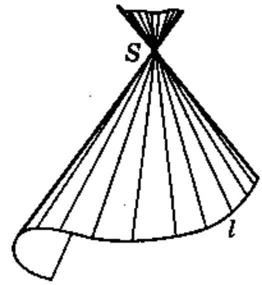
6.2.2. MỘT VÀI VÍ DỤ VỀ MẶT CONG

1. Mặt kẻ

Mặt kẻ là mặt trên đó có tồn tại ít nhất một họ đường sinh thẳng.

Mặt kẻ lại chia làm mặt kẻ khả triển (mặt có thể khai triển được), và mặt kẻ không khả triển (không khai triển được).

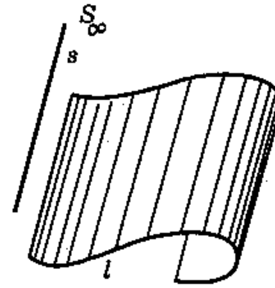
Các mặt khả triển :



Hình 6.18

* ***Mặt nón :*** *là mặt được tạo thành do một đường thẳng chuyển động, và luôn đi qua một điểm S cố định, và tựa trên một đường l cố định (hình* 6.18).

Điểm S đó gọi là đỉnh nón; đường l gọi là đường chuẩn của mặt nón.



Hình 6.19

* ***Mặt trụ :*** *là mặt được tạo thành, do một đường thẳng chuyển động, luôn song song với một đường thẳng s cố định, và tựa lên một đường l cố định.*

Đường thẳng s, là hướng của đường sinh; còn đường l là đường chuẩn của mặt trụ.

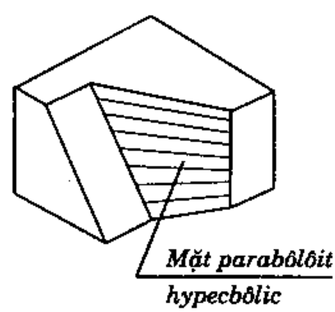
Như vậy, *mặt trụ có thể coi là mặt nón, mà đỉnh là một điểm vô tận* (hình 6.19).

* ***Mặt hypecbôlôit một tầng*** *: là mặt được tạo thành do một đường thẳng chuyển động, luôn tựa trên ba đường thẳng (đôi một chéo nhau và không cùng song song với một mặt phẳng).*

Ba đường thẳng chéo nhau đó gọi là ba đường thẳng chuẩn.

Người ta chứng minh được rằng, *mặt hypecbôlôit một tầng, có hai họ đường sinh thẳng*. Mỗi đường sinh thuộc họ này, đều cắt tất cả các đường sinh thuộc họ kia; Hai đường sinh của cùng một họ thì không cắt nhau.

Ba đường thẳng chuẩn nói trên, chính là ba đường sinh thuộc một họ.



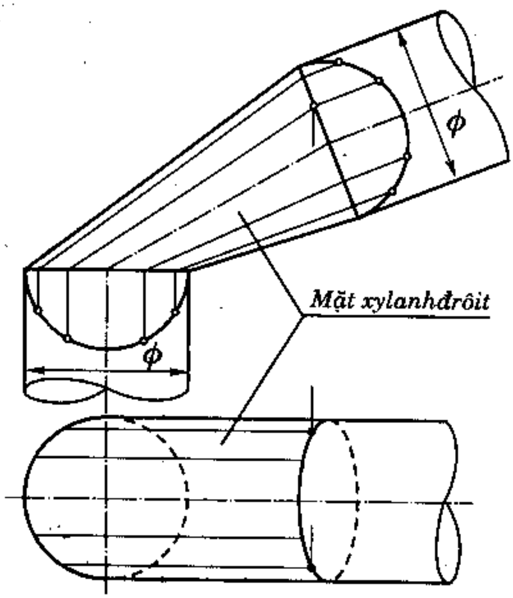
Hình 6.20

* ***Mặt parabôlôit hypecbônic:*** *là mặt được tạo thành, do một đường thẳng chuyển động, luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định, và tựa lên hai đường thẳng chéo nhau.*

Mặt phẳng cố định và hai đường thẳng chéo nhau đó gọi là mặt phẳng chuẩn và đường thẳng chuẩn (hình 6.20).

Như vậy, mặt *parabôlit hypecbônic, có thể coi là mặt hypecbôloit một tầng, mà một trong ba đường thẳng chuẩn là đường thẳng vô tận (xác định bởi mặt phẳng chuẩn đó).*

Hai đường cong và mặt phẳng cố định đó gọi là hai đường chuẩn, và mặt phẳng chuẩn.



Hình 6.24

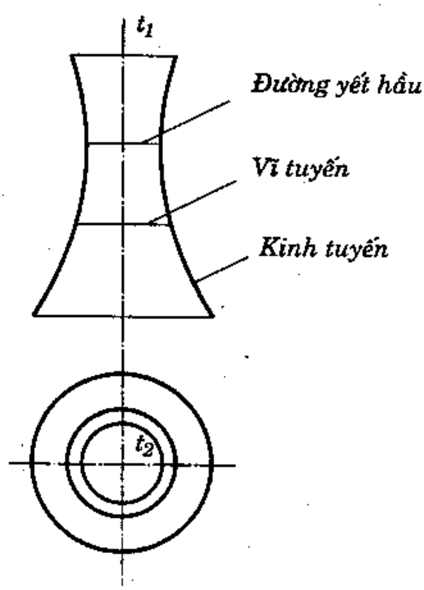
2. Mặt xyclic: *là mặt có ít nhất một họ đường sinh là các đường tròn*

Các đường tròn sinh đó có thể có kích thước không đổi hoặc thay đổi. Nếu mặt phẳng các đường tròn sinh (có kích thước không đổi) luôn vuông góc với đường quỹ tích tâm các đường tròn sinh đó, thì mặt đó gọi là *mặt ống*.

3. Mặt tròn xoay : *là mặt được tạo thành do một đường l quay quanh một đường thẳng cố định t.*

Đường l đó gọi là *đường sinh*, đường thẳng t gọi là *trục xoay* (hình 6.25).

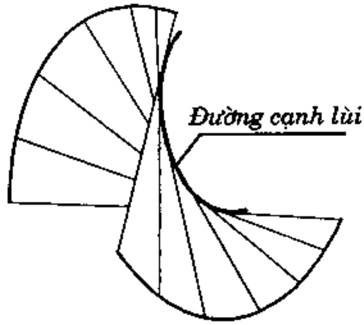
Nếu đường sinh l là đường thẳng, thì mặt tròn xoay đó là *mặt kẻ tròn xoay*.



Hình 6.25

Vì vậy, người ta cũng chứng minh được rằng, *mặt parabôlôit hypecbôic có hai họ đường sinh thẳng*. Mỗi đường sinh thuộc họ này đều cắt tất cả các đường sinh thuộc họ kia.

* ***Mặt có cạnh lùi*** *: là mặt được tạo thành do một đường thẳng chuyển động và luôn tiếp xúc với một đường cong ghềnh l.*



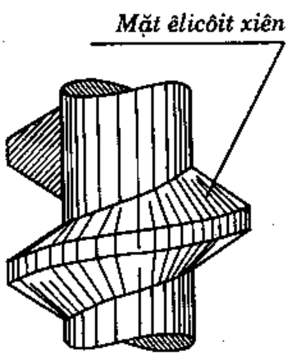
Hình 6.21

Đường cong l gọi là đường cạnh lùi (hình 6.21).

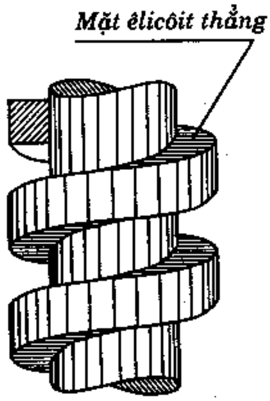
* ***Mặt êlicôit***, là mặt cạnh lùi, mà đường cạnh lùi là đường xoắn ốc. Mặt êlicôit lại có :

-Mặt êlicôit xiên là mặt được tạo thành do một đường thẳng chuyển động và luôn tựa lên hai đường : một đường là đường xoắn ốc trụ, một đường là đường thẳng (trục của đường xoắn ốc trụ) và luôn luôn tạo với trục của đường xoắn ốc trụ một góc φ không đổi (hình 6. 22).

- Mặt êlicôit thẳng là mặt êlicôit xiên, mà góc $\varphi = 90^0$ (là mặt được tạo thành do một đường thẳng chuyển động và luôn tựa trên hai đường : một đường là đường xoắn ốc trụ, một đường là trục của đường xoắn ốc trụ đó; và luôn luôn vuông góc với trục của đường xoắn ốc trụ đó) (hình 6.23).



Hình 6.22



Hình 6.23

* ***Mặt xylanhđrôit*** *: là mặt được tạo thành do một đường thẳng chuyển động, tựa trên hai đường cong và luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định* (hình 6.24).

Mỗi điểm của đường sinh vạch lên một đường tròn, gọi là *vĩ tuyến*.

Vĩ tuyến có *đường kính lớn nhất gọi là xích đạo.*

Vĩ tuyến có *đường kính nhỏ nhất gọi là yết hầu.*

Giao tuyến của mặt phẳng chứa trục xoay, với mặt tròn xoay, gọi là *kinh tuyến.*

Trong một mặt tròn xoay, tất cả *các kinh tuyến đều bằng nhau.*

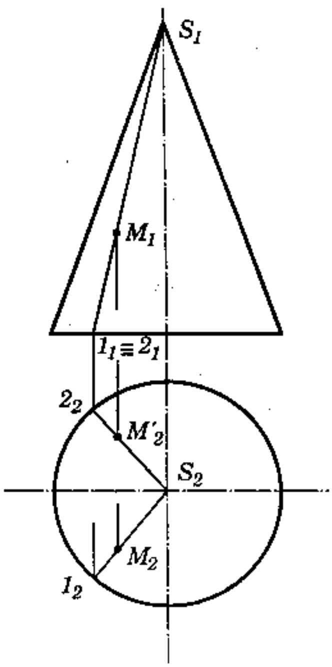
Các kinh tuyến nằm trên mặt phẳng song song với mặt phẳng hình chiếu, gọi là *kinh tuyến chính.*

Mặt tròn xoay bậc hai

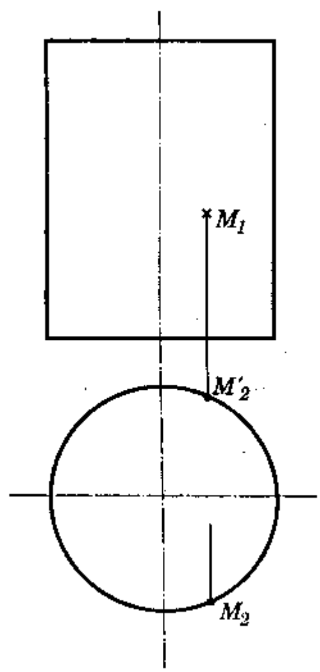
* ***Mặt nón tròn xoay*** *: là mặt được tạo thành do một đường thẳng l quay quanh một đường thẳng t cố định, và đường thẳng l cắt đường thẳng t ở một điểm S cố định.*

Đường thẳng t gọi là trục mặt nón, điểm S gọi là đỉnh nón, đường thẳng l là đường sinh mặt nón (hình 6.26). Trên hình cũng chỉ cách tìm hình chiếu bằng của điểm M thuộc mặt nón khi biết hình chiếu đứng M_1.

* ***Mặt trụ tròn xoay*** *: là mặt được tạo thành do một đường thẳng l quay quanh một đường thẳng t cố định, trong đó đường thẳng t song song với đường thẳng l* (hình 6.27).



Hình 6.26



Hình 6.27

Đường thẳng t, gọi là trục mặt trụ, còn đường thẳng l gọi là đường sinh của mặt trụ.

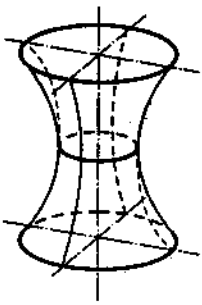
Như vậy, mặt trụ tròn xoay, có thể coi là mặt nón tròn xoay, mà đỉnh nón là một điểm vô tận. Trên hình cũng chỉ cách tìm hình chiếu bằng của điểm M thuộc mặt trụ khi biết hình chiếu đứng M_1.

• ***Mặt hypecbôlôit tròn xoay một tầng*** *: là mặt được tạo thành do một đường hypecbôn quay quanh trục tiêu ảo của nó (hình* 6.28).

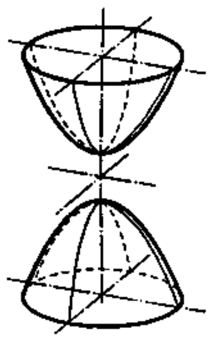
Khi đường hypecbôn quay quanh trục tiêu ảo để tạo thành mặt hypecbôlôit tròn xoay, thì hai tiệm cận của nó sẽ tạo thành một mặt nón tròn xoay. Mặt nón đó cũng gọi là *nón tiệm cận của mặt hypecbôlôit* đó.

Hoặc *: mặt hypecbôlôit tròn xoay một tầng, cũng được tạo thành do một đường thẳng l quay quanh một đường thẳng t, trong đó hai đường thẳng l và t là chéo nhau.*

* ***Mặt hypecbôlôit tròn xoay hai tầng*** *: là mặt được tạo thành do một đường hypecbôn quay quanh trục tiêu thực của nó (hình* 6.29).



Hình 6.28

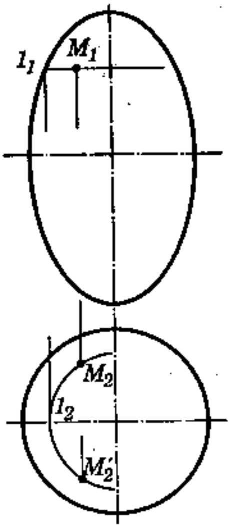


Hình 6.29

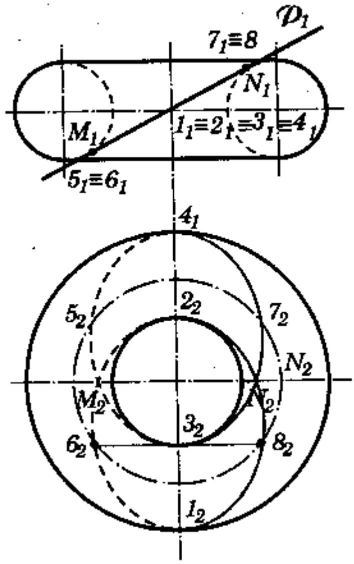
• ***Mặt ellipxôit tròn xoay*** *: là mặt được tạo thành do một đường ellip quay quanh một trục của ellip đó. Nếu ellip quay quanh trục ngắn của ellip, thì mặt ellipxôit đó gọi là ellipxôit dẹt*. Trên hình cũng chỉ cách tìm một điểm M thuộc mặt đó, bằng cách vạch một vĩ tuyến đi qua điểm đó (hình 6.30).

* ***Mặt cầu*** *: là mặt được tạo thành do một đường tròn, quay quanh một đường kính của nó.*

Như vậy mặt cầu cũng có thể coi là mặt ellipxôit tròn xoay, mà đường ellip sinh có hai trục bằng nhau.



Hình 6.30



Hình 6.31

Các mặt tròn xoay nói trên đều là các *mặt tròn xoay bậc hai*. Sau đây, cũng là một mặt tròn xoay, không phải bậc hai (bậc bốn), nhưng nó được dùng nhiều trong thực tế, đó là *mặt xuyến*.

* ***Mặt xuyến*** *: là mặt được tạo thành do một đường tròn quay quanh một đường thẳng cùng nằm trong mặt phẳng của đường tròn đó* (hình 6.31).

Mặt xuyến đóng (không có lỗ thủng) thì có hai họ đường tròn sinh : Một họ là các đường tròn kinh tuyến; Một họ là các đường tròn vĩ tuyến.

Mặt xuyến mở (có lỗ thủng), thì có bốn họ đường tròn sinh :

Hai họ đường tròn như mặt xuyến đóng; và hai họ đường tròn Vilacxô-Manhem. Hai họ đường tròn này, là giao tuyến của mặt phẳng lưỡng tiếp mặt xuyến với mặt xuyến.

6.2.3. BIỂU DIỄN MỘT SỐ MẶT CONG THƯỜNG GẶP

Biểu diễn một mặt cong là biểu diễn *các yếu tố đủ để xác định mặt đó.* Tức là, *biểu diễn các yếu tố, đủ để có thể xác định được một điểm bất kỳ thuộc mặt đó.*

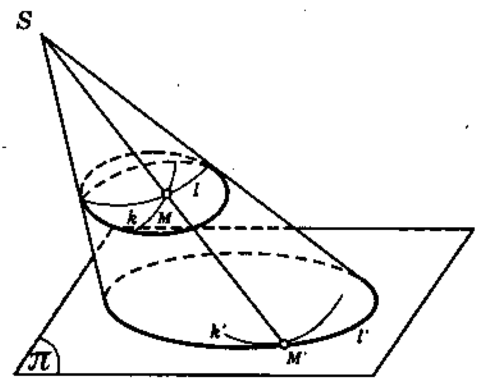
Nhưng, khi biểu diễn các mặt, người ta thường biểu diễn cả *đường bao quanh* (trên mỗi hình chiếu) của mặt đó.

1. Đường bao quanh trên hình chiếu của mặt cong

Giả sử có một mặt Φ, ta chiếu mặt đó lên một mặt phẳng hình chiếu π.

Khi đó, các tia chiếu tiếp xúc với mặt Φ, sẽ tạo thành một mặt nón (hoặc mặt trụ, tuỳ theo chiếu xuyên tâm hay chiếu song song), tiếp xúc với mặt Φ theo một đường cong l, thì đường cong l đó gọi là *đường thấy ngoài* của Φ theo hướng chiếu đó.

Hình chiếu xuyên tâm (hoặc song song) của đường cong l là đường cong l' thì l' gọi là *đường bao quanh (hoặc đường thấy ngoài) trên hình chiếu của mặt Φ* (hình 6.32).



Hình 6.32

Trên mặt cong Φ, nếu có đường cong k cắt đường thấy ngoài l ở điểm M, thì nói chung hình chiếu k_1 của k sẽ tiếp xúc với đường bao quanh hình chiếu l_1 ở điểm M', là hình chiếu của điểm M. Vậy :

- Đường bao quanh hình chiếu của mặt Φ, nói chung là đường bao các hình chiếu của các đường thuộc mặt Φ mà cắt đường thấy ngoài của Φ.

- Nếu mặt Φ là hình bao của một họ các mặt Σ, thì nói chung đường bao quanh hình chiếu của Φ là đường bao của các đường bao quanh hình chiếu của các mặt Σ.

2. Biểu diễn một số mặt cong thường dùng

**** Mặt nón***

Để biểu diễn mặt nón, ta chỉ cần biểu diễn đỉnh nón và đường chuẩn. Song để dễ hình dung, người ta thường biểu diễn cả đường bao trên các hình chiếu của mặt nón.

Hình 6.33a, biểu diễn một mặt nón xiên, đường chuẩn (đáy) là một đường tròn thuộc mặt phẳng bằng. Hai đường sinh SA và SB là hai đường thấy ngoài trên hình chiếu đứng.

Hai đường sinh đó cũng là *hai đường phân cách giữa phần thấy và phần khuất trên hình chiếu đứng của mặt nón*. Nghĩa là, phần mặt nón từ đường sinh SA, vòng về phía trước tới đường sinh SB thì thấy trên hình chiếu đứng. Phần mặt nón còn lại (từ đường sinh SA vòng về phía sau tới đường sinh SB) thì khuất trên hình chiếu đứng.

Còn hai đường sinh SC và SD là hai đường thấy ngoài trên hình chiếu bằng. Đó cũng là hai đường phân cách giữa phần thấy và phần khuất trên hình chiếu bằng của mặt nón.

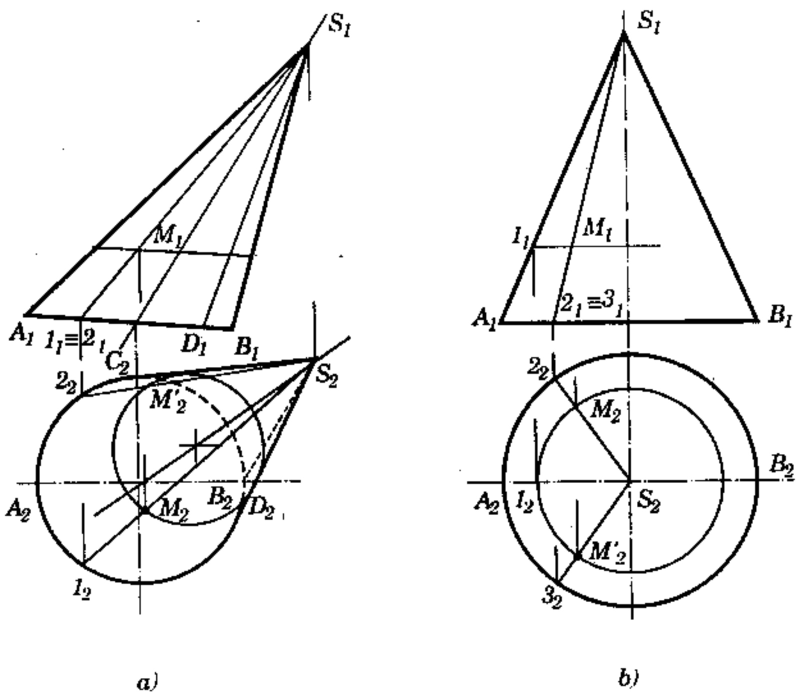
Cho điểm M thuộc mặt nón, biết hình chiếu đứng M_1, tìm hình chiếu bằng M_2 của nó.

Trước khi tìm hình chiếu bằng M_2, ta cần lưu ý : Nếu cho biết M_1 là thấy hoặc khuất thì ta sẽ chỉ có một hình chiếu bằng M_2 duy nhất. Vì khi đó đã cho biết điểm M ở nửa phía trước, hoặc nửa phía sau của mặt nón. Còn nếu không cho biết M_1 là thấy, hoặc khuất, thì ta phải trả lời cả hai trường hợp.

Để tìm hình chiếu bằng M_2 của M, ta có hai cách :

- *Cách thứ nhất* : vạch một đường sinh SM của mặt nón. Nếu M_1 thấy, thì đường sinh SM cắt đáy nón ở điểm 1. Như vậy, điểm M thuộc đường sinh S1, nên ta tìm được hình chiếu bằng M_2.

Nếu M_1 khuất, thì đường sinh SM cắt đáy nón tại điểm 2 và khi đó điểm M thuộc đường sinh S2, nên ta cũng tìm được hình chiếu bằng M'_2.



Hình 6.33

- *Cách thứ hai* : Vì hình chiếu bằng của đáy nón trong trường hợp này là đường tròn, nên để tìm hình chiếu bằng M_2, ta vạch qua điểm M một đường tròn thuộc mặt nón và nằm trên mặt phẳng bằng (song song với mặt phẳng đáy nón). Như vậy, hình chiếu bằng của đường tròn đó cũng là đường tròn. Điểm M thuộc đường tròn đó, nên nếu M_1 thấy, thì M ở nửa phía trước của đường tròn, và ta có hình chiếu bằng M_2 ; nếu M_1 khuất, thì M ở nửa phía sau của đường tròn, và ta tìm được M'_2.

Hình 6.33b biểu diễn mặt nón tròn xoay đỉnh S. Hai đường sinh biên trên hình chiếu đứng là SA và SB. Hai đường sinh đó là ranh giới giữa phần thấy và khuất trên hình chiếu đứng của mặt nón. Phần mặt nón ở nửa phía trước thì hình chiếu đứng thấy; phần nửa mặt nón phía sau, thì hình chiếu đứng khuất.

Trên đó cũng chỉ hai cách vẽ một điểm M bất kỳ thuộc mặt nón đó. Một cách là vẽ đường sinh thẳng đi qua M; Một cách là vẽ một vĩ tuyến đi qua M. (Tuỳ theo hình chiếu đứng của điểm M là thấy hay khuất, mà có hai vị trí hình chiếu bằng của điểm M).

* ***Mặt trụ.*** Ta có thể coi, mặt trụ là một mặt nón có đỉnh là một điểm vô tận. Nên để biểu diễn mặt trụ ta cũng chỉ cần biểu diễn một đường thẳng chỉ hướng của đường sinh (điểm vô tận), và một đường chuẩn (đáy) mặt trụ. Nhưng cũng để dễ hình dung, nên người ta thường biểu diễn cả đường thấy ngoài trên các hình chiếu mặt trụ.

Hình 6.34a, biểu diễn một mặt trụ xiên. Đường chuẩn (đáy) cũng thuộc mặt phẳng bằng. Hai đường sinh a và b là hai đường thấy ngoài trên hình chiếu đứng. Hai đường này cắt đáy tại hai điểm lần lượt là A và B. Hai đường sinh c và d là hai đường thấy ngoài trên hình chiếu bằng của mặt nón. Hai đường này cũng cắt đáy lần lượt tại C và D.

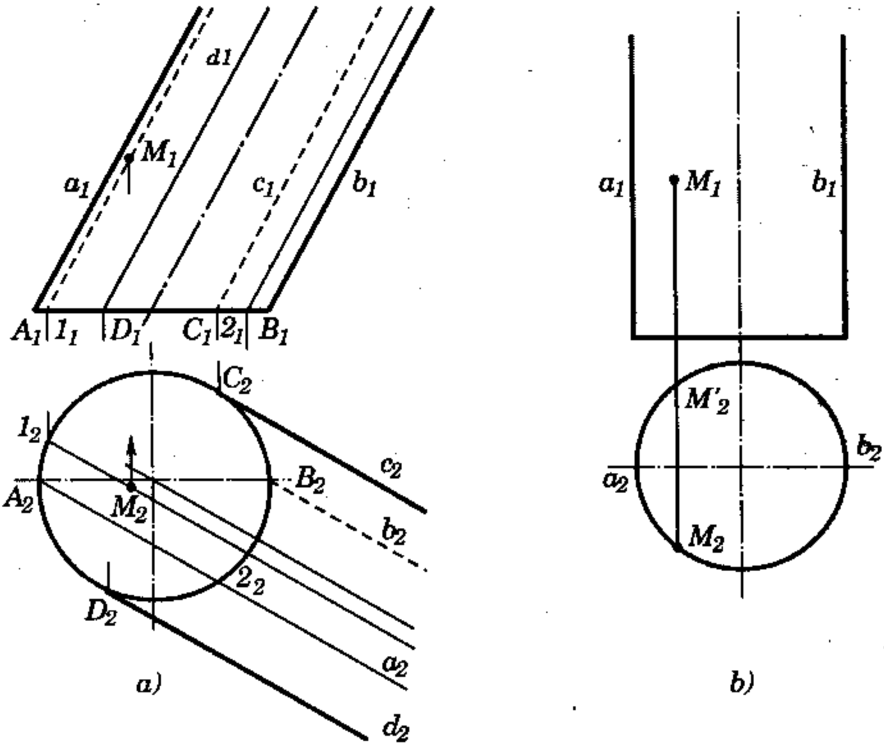
Tương tự mặt nón, các đường thấy ngoài trên các hình chiếu đó, cũng là những đường phân cách giữa phần thấy và phần khuất trên mỗi hình chiếu của mặt trụ.

Cũng cho điểm M thuộc mặt trụ, biết hình chiếu bằng M_2, tìm hình chiếu đứng M_1?

Cách tìm tương tự mặt nón. Vì cũng không cho biết M_2 thấy hay khuất, nên ta cũng phải trả lời hai trường hợp. Ta cũng tìm được hai hình chiếu đứng M_1 và M'_1 (điểm M'_1 thuộc đường sinh đi qua điểm 2).

Hình 6.34b biểu diễn mặt trụ tròn xoay. Hai đường sinh biên trên hình chiếu đứng là a và b. Hai đường sinh đó là ranh giới giữa phần thấy và khuất trên hình chiếu đứng của mặt trụ.

Trên đó, cũng chỉ cách vẽ một điểm M bất kỳ thuộc mặt trụ đó. (Tuỳ theo hình chiếu đứng của M thấy hay khuất mà có hai vị trí hình chiếu bằng của M).



Hình 6.34

* ***Mặt cầu.*** Mặt cầu là một mặt tròn xoay, mà mọi đường kính của nó đều có thể coi là trục xoay.

Để biểu diễn mặt cầu, cũng chỉ cần biểu diễn tâm và bán kính (hoặc đường kính) của nó là đủ. Song, để dễ hình dung, người ta cũng thường biểu diễn các đường thấy ngoài trên các hình chiếu của mặt cầu.

Các đường thấy ngoài trên các hình chiếu của mặt cầu đều là đường tròn.

Hình 6.35 biểu diễn một mặt cầu. Đường tròn a là đường thấy ngoài trên hình chiếu đứng của mặt cầu. Đường tròn đó thuộc mặt phẳng mặt mà hình chiếu bằng a_2 của nó là đường kính của đường tròn thấy ngoài trên hình chiếu bằng của mặt cầu.

Còn đường tròn b là đường tròn thấy ngoài trên hình chiếu bằng, nó thuộc mặt phẳng bằng, mà hình chiếu đứng b_1 của nó là đường kính của đường tròn thấy ngoài trên hình chiếu đứng.

Các đường thấy ngoài đó cũng là đường phân cách giữa phần thấy và phần khuất trên mỗi hình chiếu của mặt cầu.

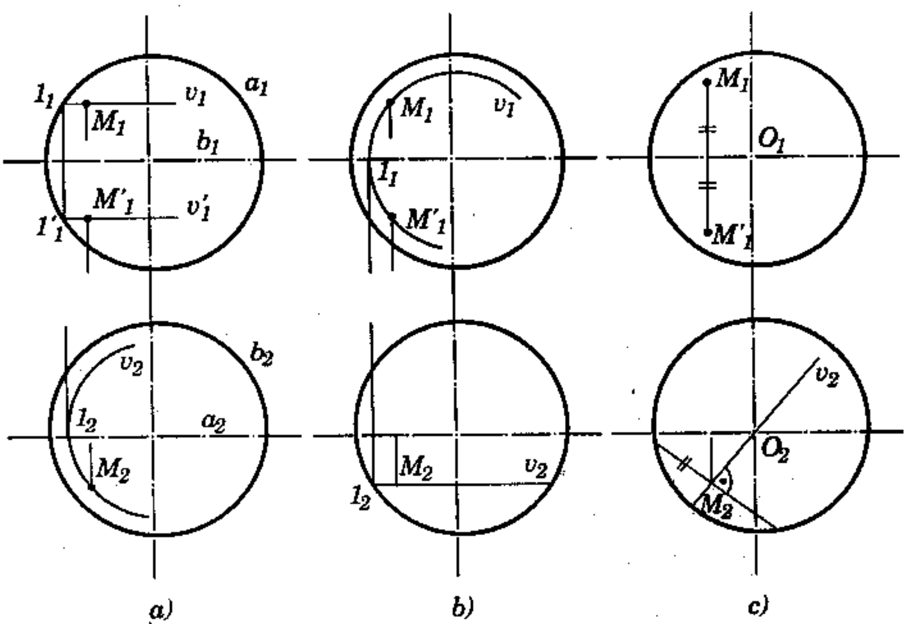
Cho một điểm M thuộc mặt cầu. Biết hình chiếu bằng M_2, tìm hình chiếu đứng M_1 của nó.

Để tìm hình chiếu đứng M_1, ta có ba cách (vạch qua M một đường tròn v) :

- Thuộc mặt phẳng bằng. Khi đó, hình chiếu bằng của đường tròn đó là một đường tròn v_2 đi qua M_2, còn hình chiếu đứng của đường tròn đó là đoạn thẳng v_1. Hình chiếu đứng M_1 thuộc đoạn thẳng v_1 đó (hình 6.35a).

- Thuộc mặt phẳng mặt. Khi đó, hình chiếu bằng của đường tròn đó là một đoạn thẳng v_2, còn hình chiếu đứng của đường tròn đó là một đường tròn v_1. Hình chiếu đứng M_1 thuộc đường tròn đó (hình 6.35b).

- Thuộc mặt phẳng chiếu bằng qua tâm cầu. Khi đó hình chiếu bằng của đường tròn đó là một đoạn thẳng, để tìm hình chiếu đứng của M, ta vạch qua M một đường tròn thứ hai, thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đường tròn trên. Dễ thấy là bán kính của đường tròn này bằng hiệu độ cao giữa điểm M và tâm cầu. Từ đó ta tìm được hình chiếu đứng M_1 (hình 6.35c).



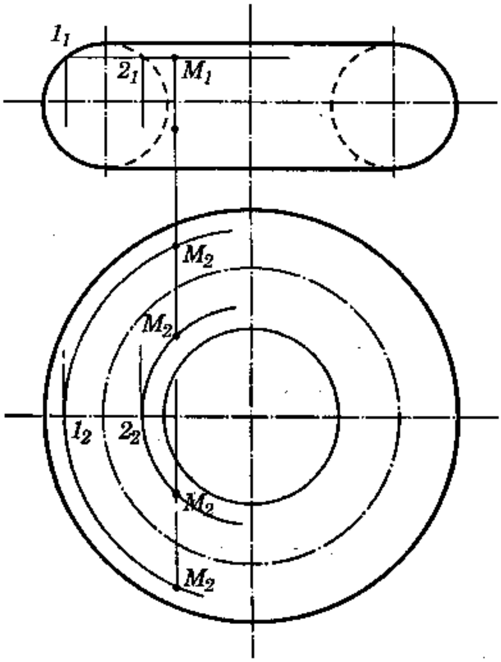
Hình 6.35

* ***Mặt tròn xoay.*** Vì mặt cầu cũng là một mặt tròn xoay, nên cách tìm một điểm thuộc mặt tròn xoay, ta có thể áp dụng cách tìm một điểm thuộc mặt cầu.

Ví dụ : Cho điểm M thuộc mặt xuyến. Biết hình chiếu đứng M_1, tìm hình chiếu bằng M_2?

Giải : Vì mặt xuyến cũng là mặt tròn xoay, nên ta vẽ các vĩ tuyến qua M thuộc mặt phẳng bằng. Khi đó, hình chiếu bằng của các vĩ tuyến đó cũng là các đường tròn (hình 6.36).

Trường hợp này, vì mặt xuyến là mặt bậc bốn, nên có thể có bốn hình chiếu bằng M_2.



Hình 6.36

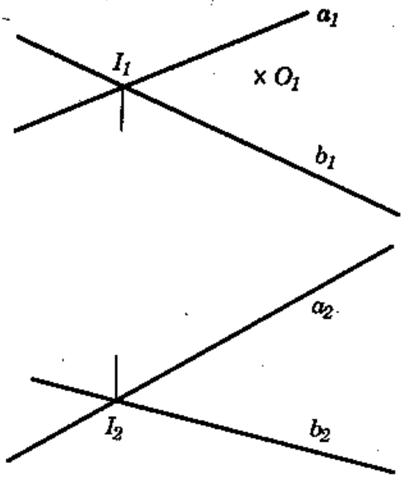
CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Trình bày cách biểu diễn một mặt. Khi biểu diễn một mặt, cần chú ý vấn đề gì? Cho ví dụ.

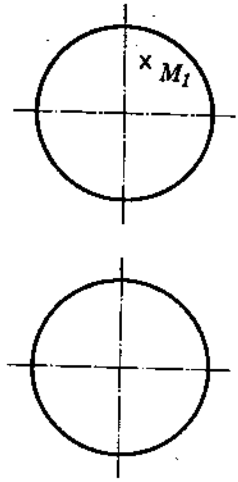
2. Cách lấy một điểm thuộc mặt nón, mặt trụ và mặt tròn xoay. Cho ví dụ.

3. Vẽ hai hình chiếu của một đường tròn tâm $O(O_1, O_2)$ bán kính R, thuộc mặt phẳng (a, b) (hình 6.37).

4. Cho một điểm M thuộc mặt cầu. Biết hình chiếu đứng M_1, có mấy cách tìm hình chiếu bằng M_2 của điểm M đó? (hình 6.38).



Hình 6.37



Hình 6.38

6.3. MẶT PHẲNG TIẾP XÚC VỚI MẶT CONG

Ta đã biết, mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong Φ tại một điểm M, là mặt phẳng chứa tất cả các tiếp tuyến của mặt cong Φ tại điểm M.

Trong hình hoạ có những bài toán dẫn đến việc dựng mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong.

Ví dụ, việc xác định điểm cao nhất và điểm thấp nhất; điểm xa nhất và điểm gần nhất thuộc giao tuyến của mặt phẳng với mặt cong; vẽ đường thấy ngoài trên các hình chiếu; việc vẽ bóng trong kiến trúc, ...

Một số bài toán thường gặp về mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong như sau :

- Vẽ mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong tại một điểm cho trước thuộc mặt cong.

-Vẽ mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong, và (mặt phẳng đó) đi qua một điểm cho trước không thuộc mặt cong (hoặc song song với một đường thẳng cho trước).

- Vẽ mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong và đi qua một đường thẳng cho trước (hoặc song song với một mặt phẳng cho trước).

6.3.1. MẶT PHẲNG TIẾP XÚC VỚI MẶT KẺ

Trước hết, ta có một số nhận xét sau :

** Một mặt phẳng tiếp xúc với mặt kẻ tại một điểm, thì sẽ tiếp xúc với mặt kẻ đó theo đường thẳng (đường sinh) đi qua điểm đó.*

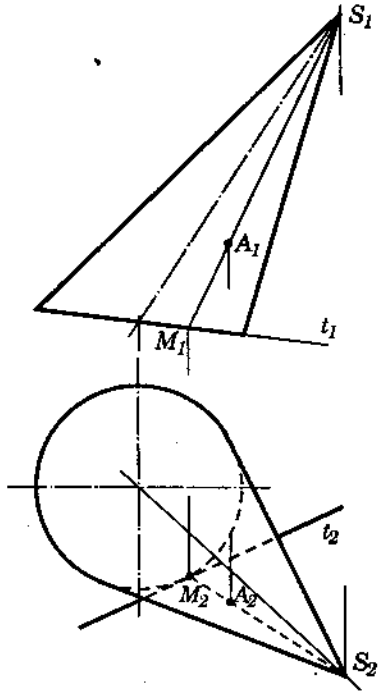
** Tất cả các mặt phẳng tiếp xúc với một mặt kẻ khả triển, tại các điểm khác nhau trên cùng một đường sinh thẳng, thì trùng nhau.*

Ví dụ 1 : Cho mặt nón xiên, đỉnh S. Qua điểm A thuộc mặt nón, dựng mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón đó.

Giải. Theo nhận xét trên đây, thì mặt phẳng tiếp xúc cần dựng phải chứa đường sinh thẳng SA của mặt nón.

Đường sinh SA cắt đáy nón tại điểm M. Qua M, ta vẽ tiếp tuyến Mt với đường tròn đáy nón.

Như vậy, mặt phẳng (A, Mt) chính là mặt phẳng cần dựng (hình 6.39).

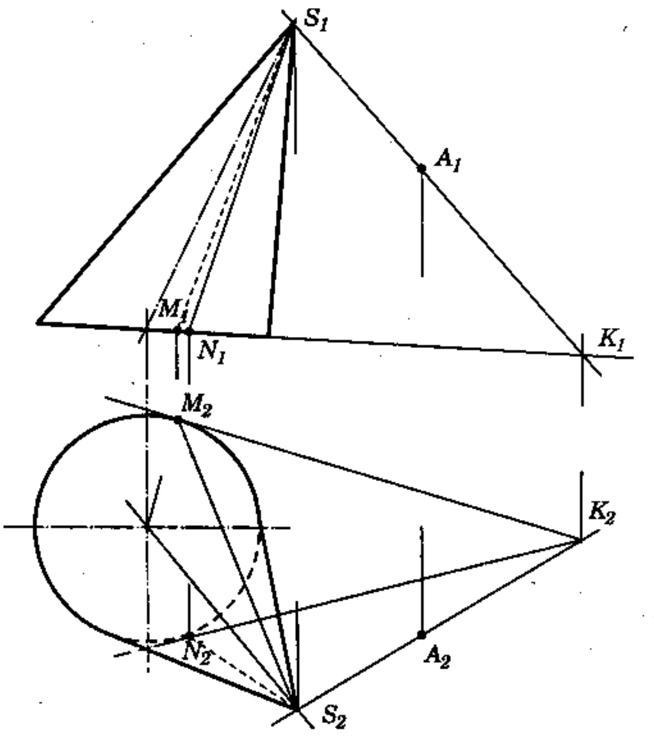


Hình 6.39

Ví dụ 2 : Cho mặt nón xiên, đỉnh S. Qua điểm A, không thuộc mặt nón, dựng mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón đó.

Giải. Mặt phẳng tiếp xúc cần dựng phải tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh thẳng; Vì vậy, mặt phẳng đó phải chứa đỉnh nón S; tức là mặt phẳng đó phải chứa đường thẳng SA. Gọi K là giao điểm của đường thẳng SA với mặt phẳng đáy (đường chuẩn) nón. Qua K vẽ tiếp tuyến KM với đường cong đáy nón (M là tiếp điểm).

Như vậy, mặt phẳng (MSA) chính là mặt phẳng cần dựng (hình 6.40).



Hình 6.40

Vì qua K có hai tiếp tuyến với đáy nón (KM và KN), nên ta cũng có hai mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón là (MSA) và (NSA).

Nếu giao điểm K nằm bên trong đường tròn đáy nón, (nghĩa là điểm A ở "bên trong" mặt nón) thì qua K không vẽ được tiếp tuyến với đường cong đáy nón. Khi đó, bài toán vô nghiệm.

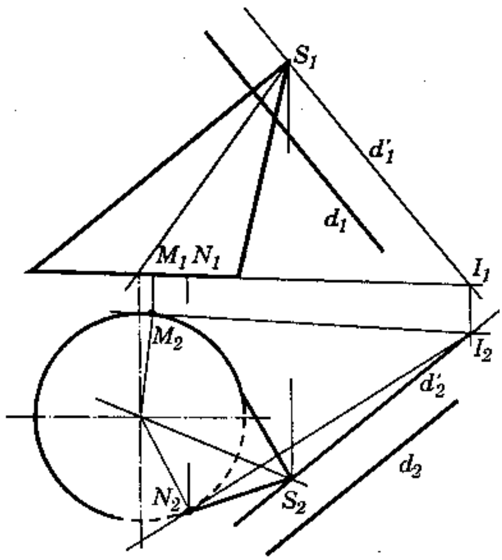
Nếu K thuộc đường cong đáy nón (nghĩa là điểm A thuộc mặt nón) thì bài toán có một nghiệm. Đó chính là bài toán của ví dụ 1.

Ví dụ 3 : Cho mặt nón xiên, đỉnh S. Dựng mặt phẳng song song với đường thẳng d và tiếp xúc với mặt nón đó.

Giải. Mặt phẳng tiếp xúc cần dựng, phải tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh; tức là, mặt phẳng đó phải đi qua đỉnh nón, mà lại song song với đường thẳng d. Như vậy mặt phẳng đó phải chứa đường thẳng d' đi qua đỉnh nón S, và song song với d (d'// d). Gọi I là giao điểm của d' với mặt phẳng đáy (đường chuẩn) nón.

Qua I, vẽ tiếp tuyến IM với đường cong đáy nón (M là tiếp điểm).Như vậy, mặt phẳng (d', M) chính là mặt phẳng cần dựng (hình 6.41).

Phần biện luận tương tự ví dụ 2 trên đây.



Hình 6.41

Ví dụ 4 : Cho mặt trụ xiên. Vẽ mặt phẳng song song với đường thẳng d, và tiếp xúc với mặt trụ đó.

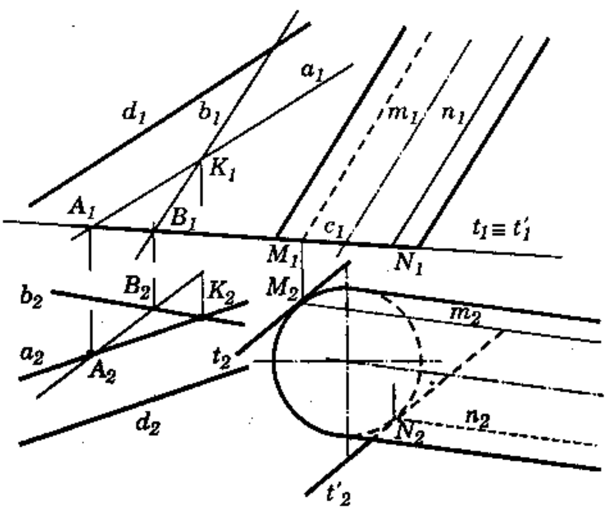
Giải : Mặt phẳng cần dựng phải tiếp xúc với mặt trụ theo một đường sinh, tức là nó phải chứa một đường sinh của mặt trụ. Như vậy, mặt phẳng đó phải chứa ít nhất một đường thẳng song song với đường sinh của mặt trụ.

Mặt khác, mặt phẳng cần dựng phải song song với đường thẳng d. Như vậy mặt phẳng cần dựng vừa song song với đường sinh mặt trụ, vừa song song với đường thẳng d. Trước hết, ta tìm hướng của mặt phẳng cần dựng, từ đó xác định tiếp tuyến thuộc mặt phẳng cần dựng với đường cong đáy trụ.

Muốn vậy, qua điểm K bất kỳ, ta dựng một đường thẳng a // d và một đường thẳng b song song với đường sinh mặt trụ. Mặt phẳng (a, b) cắt mặt phẳng đáy trụ theo giao tuyến AB. Như vậy, đường thẳng AB chính là hướng của tiếp tuyến cần tìm với đường cong đáy mặt trụ.

Ta vẽ tiếp tuyến Mt với đường cong đáy trụ : Mt // AB. Qua tiếp điểm M vẽ đường sinh m của mặt trụ. Mặt phẳng (m, Mt) chính là mặt phẳng tiếp xúc cần dựng.

Tất nhiên, có hai tiếp tuyến với đường cong đáy trụ và song song với AB, nên cũng có hai mặt phẳng tiếp xúc cần dựng. Đó là mặt phẳng (m, Mt) và n, Nt') (hình 6.42).



Hình 6.42

Ví dụ 5 : Cho mặt trụ xiên, xác định bởi đường chuẩn thuộc mặt phẳng bằng và hướng l của đường sinh, và mặt phẳng (m, n). Tìm điểm gần nhất và điểm xa nhất thuộc giao tuyến giữa mặt phẳng (m, n) với mặt trụ.

Giải : Giả sử ta đã tìm được điểm I là điểm xa nhất (hoặc gần nhất) thuộc giao tuyến giữa mặt phẳng (m, n) với mặt trụ. Nếu qua I, ta dựng một mặt phẳng tiếp xúc với mặt trụ, thì mặt phẳng tiếp xúc đó sẽ cắt mặt phẳng (m, n) theo một đường mặt. Như vậy, mặt phẳng tiếp xúc đó song song với đường mặt của mặt phẳng (m, n) và song song với đường sinh của mặt trụ.

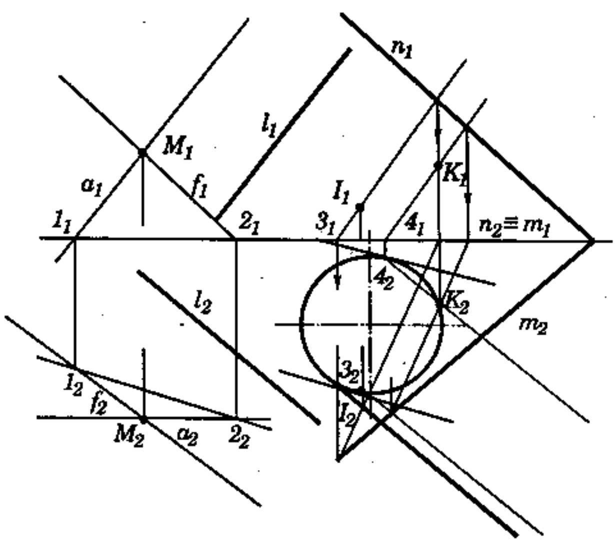
Từ đó ta suy ra cách tìm điểm xa nhất và điểm gần nhất thuộc giao tuyến như sau :

Trước hết, ta tìm hướng của mặt phẳng tiếp xúc nói trên :

Qua một điểm $M(M_1, M_2)$ bất kỳ, ta dựng một đường mặt f song song với vết đứng (hoặc đường mặt) của mặt phẳng (m, n) và một đường thẳng a song song với đường sinh của mặt trụ. Mặt phẳng (f, a) cắt mặt phẳng đường chuẩn (đáy) của mặt trụ theo đường thẳng 12. Vẽ tiếp tuyến với đáy mặt trụ và song song với đường thẳng 12 (vết bằng) đó. Các tiếp điểm 3 và 4 của các tiếp tuyến với đường cong đáy trụ, chính là chân các đường sinh của mặt trụ chứa điểm xa nhất, hoặc điểm gần nhất thuộc giao tuyến.

Qua 3 và 4 vẽ các đường sinh mặt trụ. Tìm các giao điểm I và K của các đường sinh đó với mặt phẳng (m, n), cho ta điểm xa nhất (và gần nhất) thuộc giao tuyến.

Như trên hình 6.43, thì I là điểm xa nhất và K là điểm gần nhất thuộc giao tuyến.



Hình 6.43

6.3.2. MẶT PHẲNG TIẾP XÚC VỚI MẶT TRÒN XOAY

Ta có một số nhận xét về mặt phẳng tiếp xúc với mặt tròn xoay như sau :

** Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu, thì tiếp xúc ở một điểm; và mặt phẳng tiếp xúc đó vuông góc với đường kính của mặt cầu đi qua tiếp điểm.*

Ta dễ dàng thấy sự đúng đắn của tính chất này.

** Mặt phẳng tiếp xúc với mặt tròn xoay tại một điểm M thuộc mặt tròn xoay, thì vuông góc với mặt phẳng kinh tuyến của mặt tròn xoay đi qua M.*

Thật vậy, giả sử ta có mặt phẳng $\mathcal{P}$ tiếp xúc với mặt tròn xoay Φ tại một điểm M. Như vậy, mặt phẳng $\mathcal{P}$ phải chứa tiếp tuyến Mt của kinh tuyến k đi qua M, đồng thời $\mathcal{P}$ cũng phải chứa tiếp tuyến Mv của vĩ tuyến u đi qua M (hình 6.44).

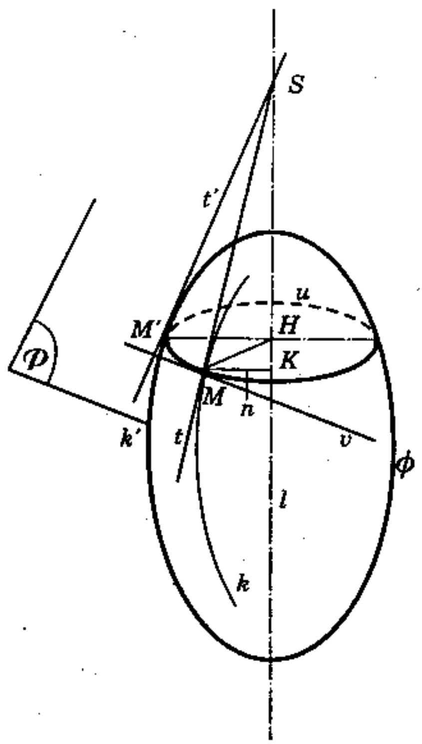
Gọi n là pháp tuyến đi qua M của Φ. Như vậy, tiếp tuyến Mt phải vuông góc với pháp tuyến n; mặt khác, tiếp tuyến Mt cũng vuông góc với trục l của mặt tròn xoay Φ. Do đó, mặt phẳng kinh tuyến (n, Mt) đi qua M, phải chứa pháp tuyến n và trục l, nên tiếp tuyến Mt vuông góc với mặt phẳng kinh tuyến (n, Mt). Vậy, mặt phẳng tiếp xúc $\mathcal{P}$ (vì chứa tiếp tuyến Mt) phải vuông góc với mặt phẳng kinh tuyến (M, l) của Φ.

** Các mặt phẳng tiếp xúc với một mặt tròn xoay, và cùng cắt trục xoay ở một điểm S thì tiếp xúc với mặt tròn xoay đó theo một vĩ tuyến.*

Thật vậy, giả sử ta có mặt phẳng $\mathcal{P}$ tiếp xúc với mặt tròn xoay Φ tại một điểm M (thuộc Φ) và mặt phẳng $\mathcal{P}$ cắt trục xoay l tại điểm S. Như vậy, mặt phẳng $\mathcal{P}$ phải chứa tiếp tuyến Mt của kinh tuyến k thuộc Φ. Khi kinh tuyến k quay quanh trục l để tạo thành mặt tròn xoay Φ, thì tiếp điểm M sẽ vạch nên một vĩ tuyến u thuộc Φ. Và tại mỗi vị trí của điểm M mặt phẳng tiếp xúc $\mathcal{P}$ vẫn luôn luôn cắt trục l tại điểm S, và vẫn tiếp xúc với mặt Φ tại mỗi điểm thuộc vĩ tuyến u (hình 6.44).

Từ tính chất trên, ta suy ra tính chất sau :

** Các mặt phẳng tiếp xúc với một mặt tròn xoay, và cùng cắt trục xoay ở một điểm S, thì tiếp xúc với một mặt nón tròn xoay; mặt nón này có đỉnh là điểm S, và tiếp xúc với mặt tròn xoay theo một vĩ tuyến.*



Hình 6.44

** Các pháp tuyến của một mặt tròn xoay, có chân trên cùng một vĩ tuyến u, thì cắt nhau tại một điểm K trên trục xoay. Các pháp tuyến này là các đường sinh của một mặt nón tròn xoay có đỉnh là điểm K và đường chuẩn là vĩ tuyến u.*

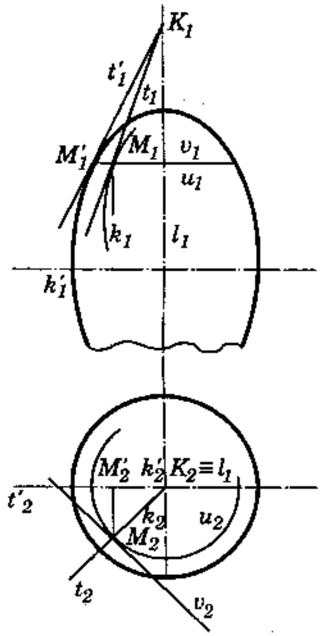
Thật vậy, giả sử ta có mặt tròn xoay Φ, M là một điểm thuộc Φ, và Mn là pháp tuyến tại M của mặt Φ. Pháp tuyến Mn cắt trục l tại điểm K. Như vậy pháp tuyến Mn phải vuông góc với tiếp tuyến Mt của kinh tuyến k đi qua M thuộc mặt Φ. Khi kinh tuyến k quay quanh trục l để tạo thành mặt Φ, thì tiếp điểm M sẽ vạch nên một vĩ tuyến u, và pháp tuyến Mn tạo thành một mặt nón tròn xoay, có đỉnh là điểm K đó, và đường chuẩn là vĩ tuyến u thuộc Φ (hình 6.44).

Ví dụ 1 : Vẽ mặt phẳng tiếp xúc với mặt tròn xoay tại một điểm M thuộc mặt đó.

Giải : Mặt phẳng tiếp xúc với mặt tròn xoay tại điểm M, thì nó phải chứa ít nhất hai tiếp tuyến với mặt tròn xoay tại điểm đó. Để đơn giản, ta vẽ một tiếp tuyến với một kinh tuyến qua M, và một tiếp tuyến với một vĩ tuyến qua M.

Trường hợp này, vĩ tuyến qua M là một đường tròn u thuộc mặt phẳng bằng, nên tiếp tuyến với nó là một đường bằng Mv (hình 6.45).

Còn tiếp tuyến với kinh tuyến k qua M ta làm như sau : quay kinh tuyến k quanh trục l của mặt tròn xoay, tới vị trí k', là kinh tuyến chính của mặt tròn xoay. Tại đây, ta vẽ được tiếp tuyến M't' của k'. Tiếp tuyến này cắt trục l tại điểm K. Sau đó quay tiếp tuyến M't' trở lại vị trí ban đầu, ta có Mt. Mặt phẳng cần dựng chính là mặt phẳng xác định bởi hai tiếp tuyến : Mv và Mt.(Mv, Mt).



Hình 6.45

Ví dụ 2 : Dựng mặt phẳng qua đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu tâm O.

Giải : Bài này có nhiều cách giải :

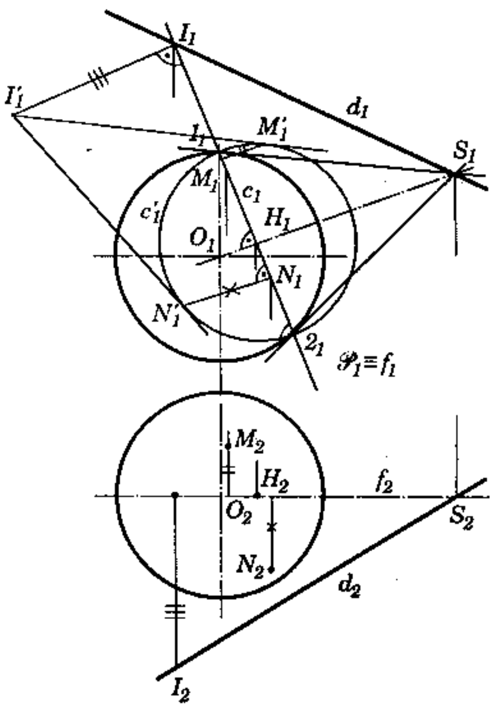
\- Cách thứ nhất : Ta đã biết, mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu, thì tiếp xúc tại một điểm. Việc giải bài này, là việc tìm điểm tiếp xúc đó. Ta có thể thay mặt phẳng hình chiếu, để đường thẳng d trở thành đường thẳng chiếu, và mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại đó cũng là mặt phẳng chiếu. Khi đó việc tìm điểm tiếp xúc cũng như việc dựng mặt phẳng tiếp xúc sẽ đơn giản. Sau đó đưa mặt phẳng trở về hình chiếu ban đầu. (Thực ra chỉ là đưa điểm tiếp xúc trở về hình chiếu ban đầu).

- Cách thứ hai : Qua tâm O của mặt cầu, dựng mặt phẳng (f, h) vuông góc với đường thẳng d. Tìm giao điểm I của đường thẳng d với mặt phẳng (f, h). Mặt phẳng (f, h) vì qua tâm cầu, nên sẽ cắt mặt cầu theo một đường tròn lớn v (đường tròn có bán kính bằng bán kính mặt cầu). Rồi dùng phương pháp xoay quanh đường bằng (hoặc đường mặt), để vẽ tiếp tuyến I'M' với đường tròn v' đó, và ta tìm được tiếp điểm M' với đường tròn v'. Bằng cách quay trở lại vị trí ban đầu, ta sẽ có mặt phẳng cần dựng xác định bởi đường thẳng d và tiếp điểm M : (d, M).

Còn ở đây, ta nêu thêm một cách giải :

Ta thấy rằng nếu ta dựng một mặt nón tròn xoay, có đỉnh là một điểm bất kỳ trên đường thẳng d và ngoại tiếp mặt cầu tâm O, thì mặt phẳng qua đường thẳng d và tiếp xúc với mặt nón tròn xoay vừa dựng, cũng chính là mặt phẳng đi qua đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu.

Trước hết, ta dựng mặt nón tròn xoay có đỉnh S thuộc đường thẳng d và ngoại tiếp mặt cầu. Để đơn giản, ta chọn đỉnh S của nón sao cho đường thẳng SO là đường mặt (hoặc đường bằng). Hai đường sinh ngoài cùng trên hình chiếu đứng của nón là S1 và S2 (hình 6.46).



Hình 6.46

Khi đó, đường tròn tiếp xúc giữa mặt nón và mặt cầu là đường tròn c thuộc mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{D}$. Đường tròn c đó coi là đáy của mặt nón tròn xoay đỉnh S nói trên.

Mặt phẳng $\mathcal{D}$ cắt đường thẳng d tại điểm I. Qua I vẽ tiếp tuyến với đường tròn c.

Muốn vậy, ta xoay mặt phẳng $\mathcal{D}$ quanh đường mặt f đi qua tâm H của đường tròn c, để đưa mặt phẳng $\mathcal{D}$ tới vị trí song song với mặt phẳng hình chiếu đứng. Khi đó, đường tròn c có hình chiếu đứng mới là đường tròn c'_1, điểm I có hình chiếu đứng mới là I'_1. Qua điểm I'_1 vẽ tiếp tuyến $I'_1M'_1$ với đường tròn c'_1.

Bằng cách xoay trở về hình chiếu ban đầu, ta có tiếp điểm $M(M_1, M_2)$.

Mặt phẳng cần dựng chính là mặt phẳng (d, M) xác định bởi đường thẳng d và tiếp điểm M.

Vì qua điểm I'_1 có hai tiếp tuyến với đường tròn v'_1 ($I'_1M'_1$ và $I'_1N'_1$), nên cũng có hai tiếp điểm (M và N), do đó cũng có hai mặt phẳng qua đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu.

Đó là hai mặt phẳng : (d, M) và (d, N).

Lưu ý khi tìm hình chiếu bằng của M và N : Điểm N và I ở cùng phía đối với đường mặt f, còn điểm M và I ở khác phía đối với đường mặt f.

6.3.3. MỘT VÀI VÍ DỤ

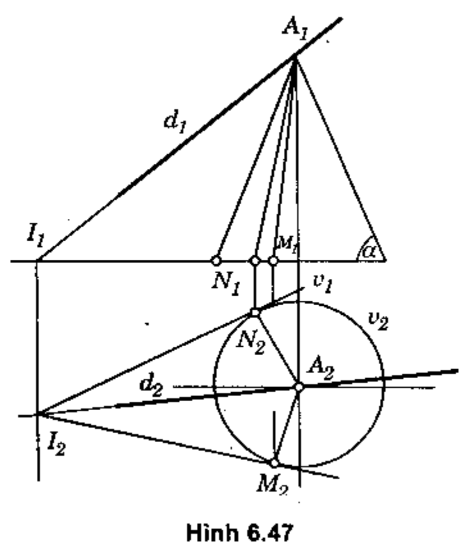
Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong có nhiều ứng dụng. Sau đây, ta lấy vài ví dụ ứng dụng các trường hợp nêu trên.

Ví dụ 1 : Dựng mặt phẳng qua đường thẳng d và nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc α cho trước.

Giải : Mặt phẳng cần dựng phải có một đường dốc nhất đối mặt phẳng hình chiếu bằng, mà đường dốc nhất này có góc nghiêng đối với mặt phẳng hình chiếu bằng, bằng góc α cho trước.

Đường dốc nhất cần tìm là đường sinh của một mặt nón tròn xoay, có đỉnh là một điểm A bất kỳ thuộc đường thẳng d, và các đường sinh của mặt nón đó, nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc α cho trước.

Ta dựng một mặt nón tròn xoay như vậy, đỉnh là điểm A thuộc d, đáy là đường tròn v thuộc mặt phẳng bằng (hình 6.47).



Hình 6.47

Bài toán đã cho, dẫn tới bài toán mới là : Qua đường thẳng d, dựng mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón tròn xoay vừa dựng.

Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng đáy của nón. Qua I vẽ tiếp tuyến IM với đường tròn v. Như vậy, đường sinh AM của mặt nón chính là đường dốc nhất của mặt phẳng cần tìm. Vậy mặt phẳng (d, M) là mặt phẳng cần dựng.

Vì qua điểm I có hai tiếp tuyến với đường tròn v (là IM và IN), nên ta cũng dựng được hai mặt phẳng qua d và nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc cho trước là (d, M) và (d, N).

Ví dụ 2 : Vẽ đường thấy ngoài trên các hình chiếu của mặt trụ tròn xoay, biết tâm I và bán kính R của một tiết diện tròn cho trước; hướng đường sinh của mặt trụ là đường thẳng l cho trước.

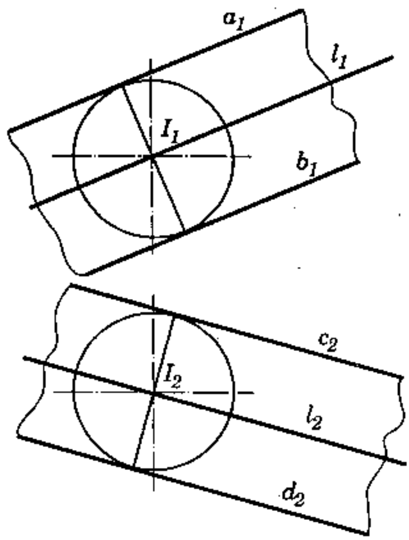
Giải : Dễ thấy là, các đường thấy ngoài trên hình chiếu đứng của mặt trụ là hình chiếu đứng của hai mặt phẳng chiếu đứng tiếp xúc với mặt trụ cần dựng. Mà các mặt phẳng chiếu đứng tiếp xúc với mặt trụ đó, cũng là các mặt phẳng chiếu đứng tiếp xúc với mặt cầu tâm I, bán kính R.

Tương tự, các đường thấy ngoài của trụ trên hình chiếu bằng cũng là các hình chiếu bằng của các mặt phẳng chiếu bằng tiếp xúc với mặt cầu tâm I, bán kính R.

Vậy trước hết, ta vẽ mặt cầu tâm I, bán kính R (hình 6.48).

Sau đó, ta vẽ hai đường thẳng a_1 và b_1 // l_1 và tiếp xúc với đường tròn thấy ngoài trên hình chiếu đứng của mặt cầu. Đó là các đường thấy ngoài trên hình chiếu đứng của mặt trụ.

Tương tự, trên hình chiếu bằng cũng vậy. Hai đường thấy ngoài là hai đường thẳng c_2 và d_2 song song với l_2 và tiếp xúc với đường tròn thấy ngoài trên hình chiếu bằng của mặt cầu.



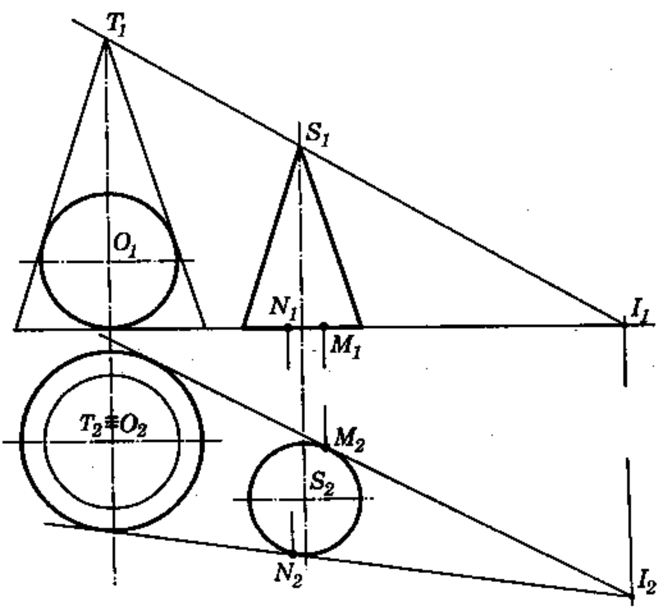
Hình 6.48

Ví dụ 3 : Dựng mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón tròn xoay đỉnh S, và tiếp xúc với mặt cầu tâm O.

Giải : Nếu dựng một mặt nón đỉnh T, ngoại tiếp mặt cầu tâm O và đồng dạng (vị tự) với mặt nón đỉnh S (trục hai mặt nón song song với nhau), thì mặt phẳng tiếp xúc với hai mặt nón đỉnh S và đỉnh T, cũng chính là mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón đỉnh S, và tiếp xúc với mặt cầu tâm O.

Vì vậy, trước hết ta dựng mặt nón đỉnh T, ngoại tiếp mặt cầu tâm O và đồng dạng với mặt nón đỉnh S. Muốn vậy, ta vẽ hai tiếp tuyến với mặt cầu tâm O, mỗi tiếp tuyến này song song với một đường sinh biên trên hình chiếu đứng của mặt nón đỉnh S. Hai đường sinh này cắt nhau tại điểm T. Đó chính là đỉnh của mặt nón đỉnh T.

Mặt phẳng tiếp xúc với hai mặt nón đỉnh S và đỉnh T, phải chứa đường thẳng ST. Sau đó ta dựng mặt phẳng qua đường thẳng ST và tiếp xúc với mặt nón đỉnh S (hoặc mặt nón đỉnh T). Cách giải bài này, xem ví dụ 1, trên đây. Như vậy, ta có hai mặt phẳng cần dựng là mặt phẳng (SIM) và mặt phẳng (SIN) (hình 6.49).

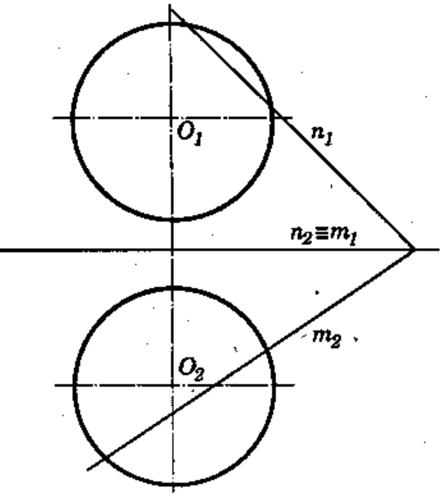


Hình 6.49

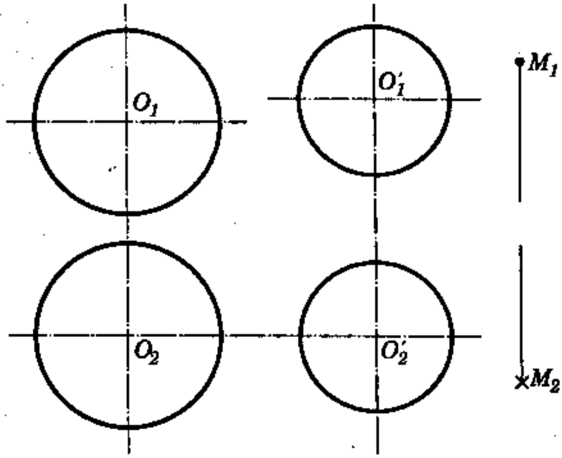
CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Vẽ mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu, tâm $O(O_1, O_2)$, bán kính R cho trước, và song song với mặt phẳng (m, n) (hình 6.50).

2. Vẽ mặt phẳng đi qua điểm $M(M_1, M_2)$ và tiếp xúc với hai mặt cầu tâm $O(O_1, O_2)$ và tâm $O'(O'_1, O'_2)$ (hình 6.51).



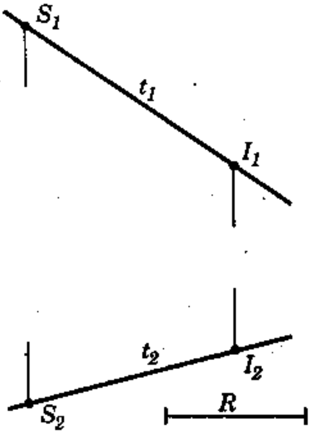
Hình 6.50



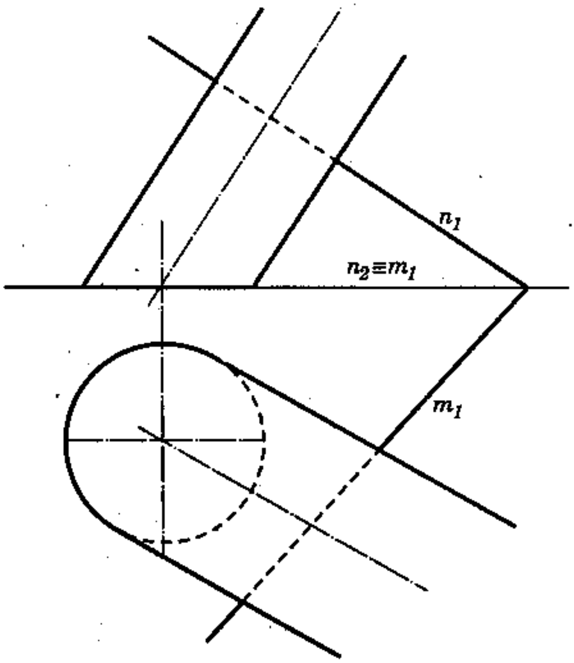
Hình 6.51

3. Vẽ các đường sinh biên của một mặt nón tròn xoay, có đỉnh là điểm S, trục là đường thẳng $t(t_1, t_2)$. Bán kính của tiết diện tròn tâm $I(I_1, I_2)$ là R cho trước (hình 6.52).

4. Tìm điểm cao nhất và điểm thấp nhất của giao tuyến giữa mặt phẳng (m, n) và mặt trụ xiên (hình 6.53).



Hình 6.52



Hình 6.53

Chương VII
MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ VỊ TRÍ GIỮA ĐƯỜNG VÀ MẶT

7.1. GIAO TUYẾN MẶT PHẲNG VỚI MẶT CONG

7.1.1. DẠNG CỦA GIAO TUYẾN

Các mặt cong ta khảo sát ở đây, nói chung đều là các mặt bậc hai. Vì vậy giao tuyến của mặt phẳng với mặt bậc hai, thường là các đường bậc hai. Nhưng ở đây, ta chỉ ra trong mỗi trường hợp, đường bậc hai ấy là đường gì; tức là ellip, parabôn, hypecbôn hoặc các đường thẳng.

Khi ta biết trước giao tuyến có dạng là đường gì, thì việc tìm các điểm và khi nối giao tuyến đó cũng thuận lợi và dễ chính xác hơn.

Nếu không biết giao tuyến là đường gì, thì mặc dù đã tìm được nhiều điểm thuộc giao tuyến, nhưng khi nối vẫn rất dễ sai. Đặc biệt là lại cộng thêm sự không chính xác do khi vẽ dẫn đến (đây là điều khó tránh).

Nhưng nếu biết trước dạng của giao tuyến, thì những sai sót do vẽ không chính xác sẽ được *"điều chỉnh"* khi nối các điểm.

Đặc biệt, trong phần mặt phẳng cắt phụ trợ. Ta cần biết, trong mỗi trường hợp, phải chọn mặt phẳng phụ trợ như thế nào cho hợp lý. Vì nếu không chọn được mặt phẳng phụ trợ hợp lý, thì bài toán có thể không giải được hoặc giải sẽ rất khó khăn và phức tạp.

1. Mặt trụ

- Mặt phẳng *cắt tất cả các đường sinh* của mặt trụ (tức là mặt phẳng không song song với đường sinh của trụ), thì *giao tuyến là một đường ellip.*
- Mặt phẳng *song song với đường sinh* của mặt trụ, thì *giao tuyến là các đường thẳng* (đường sinh của trụ).

2. Mặt nón

- Mặt phẳng *cắt tất cả các đường sinh* của mặt nón, thì *giao tuyến là một đường ellip.*
- Mặt phẳng *song song với một đường sinh* của mặt nón, thì *giao tuyến là một đường parabôn.*
- Mặt phẳng *song song với hai đường sinh* của mặt nón, thì *giao tuyến là một đường hypecbôn.*
- Mặt phẳng *đi qua đỉnh nón*, thì *giao tuyến là một hoặc hai đường thẳng* (mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón thì giao tuyến là một đường sinh (hai đường sinh trùng nhau)).

3. Mặt cầu

Mọi mặt phẳng đều cắt mặt cầu theo đường tròn.

- Mặt phẳng *không qua tâm cầu,* thì *giao tuyến là đường tròn nhỏ* (đường tròn có bán kính nhỏ hơn bán kính mặt cầu).

- Mặt phẳng *qua tâm cầu,* thì *giao tuyến là đường tròn lớn* (đường tròn có bán kính bằng bán kính mặt cầu).

4. Mặt tròn xoay

Mặt phẳng *vuông góc với trục xoay,* thì *giao tuyến là đường tròn* (vĩ tuyến của mặt tròn xoay).

Mặt phẳng *chứa trục xoay,* thì *giao tuyến là kinh tuyến.*

Sau đây, ta xét các trường hợp từ dễ đến khó.

7.1.2. MẶT PHẲNG ĐÃ CHO LÀ MẶT PHẲNG CHIẾU

Trường hợp này, ta dễ biết ngay một hình chiếu của giao tuyến, ứng dụng cách tìm điểm thuộc mặt cong để tìm hình chiếu còn lại của giao tuyến.

Ví dụ 1 : Tìm giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{P}$ với mặt cầu.

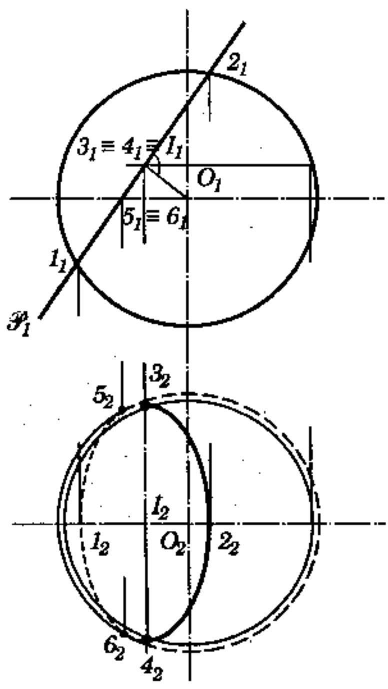
Giải : Vì mặt phẳng $\mathcal{P}$ là mặt phẳng chiếu đứng, nên ta có ngay hình chiếu đứng của giao tuyến là đoạn thẳng 1_12_1, phần chung giữa hình chiếu đứng $\mathcal{P}_1$ và hình chiếu đứng của mặt cầu.

Ta biết, mọi mặt phẳng đều cắt mặt cầu theo đường tròn. Trường hợp này cũng vậy, nhưng mặt phẳng $\mathcal{P}$ không phải mặt phẳng bằng, nên hình chiếu bằng của giao tuyến sẽ là một ellip.

Trục ngắn của ellip đó là đoạn 1_22_2. Muốn tìm trục dài của ellip, ta lấy trung điểm I của đoạn 1_12_1 là điểm $3_1 \equiv 4_1 \equiv I_1$. Hình chiếu bằng của hai điểm 3 và 4 cho ta trục dài của ellip là đoạn 3_24_2.

Tìm các điểm phân cách giữa phần thấy và khuất của giao tuyến : đó là các điểm 5_2 và 6_2, thuộc đường thấy ngoài trên hình chiếu bằng của mặt cầu, mà hình chiếu đứng là $5_1 \equiv 6_1$.

Như vậy, hình chiếu bằng của giao tuyến là một ellip, trong đó cung $5_21_26_2$ khuất, vì cung đó thuộc nửa phía dưới mặt cầu (hình 7.1).



Hình 7.1

Sau đó ta xét thấy và khuất cho mặt cầu. Phần mặt cầu ở phía dưới mặt phẳng $\mathcal{P}$ thì hình chiếu bằng khuất. Trên hình vẽ, thì cung tròn bên phải khuất, còn lại là thấy.

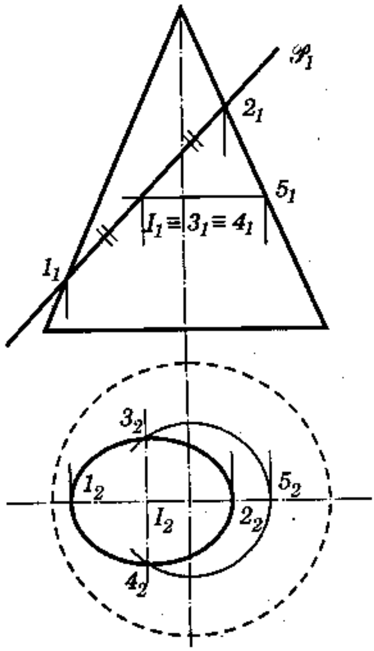
Ví dụ 2 : Vẽ giao tuyến mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{P}$ với mặt nón tròn xoay, có trục là đường thẳng chiếu bằng.

Giải : Ta cũng dễ thấy ngay hình chiếu đứng của giao tuyến là đoạn thẳng 1_12_1 thuộc phần chung giữa mặt phẳng $\mathcal{P}$ và mặt nón.

Vì mặt phẳng $\mathcal{P}$ cắt tất cả các đường sinh của mặt nón, nên giao tuyến sẽ là một đường ellip, mà hình chiếu bằng của ellip đó cũng là một ellip. Trục dài của ellip đó là 1_22_2. Muốn tìm trục ngắn của ellip đó, ta lấy trung điểm I của đoạn 1 2, mà hình chiếu đứng là $3_1 \equiv 4_1 \equiv I_1$. Đoạn 3_24_2 là trục ngắn của ellip trên hình chiếu bằng.

Tất cả hình chiếu bằng của ellip đều thấy (vì hình chiếu bằng của tất cả mặt nón đều thấy).

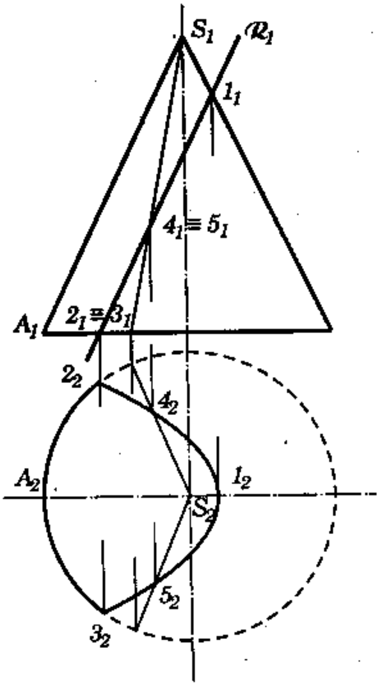
Sau đó, ta xét thấy, khuất cho mặt nón. Hình chiếu bằng của phần mặt nón nằm ở phía dưới mặt phẳng $\mathcal{P}$ thì khuất (hình 7.2).



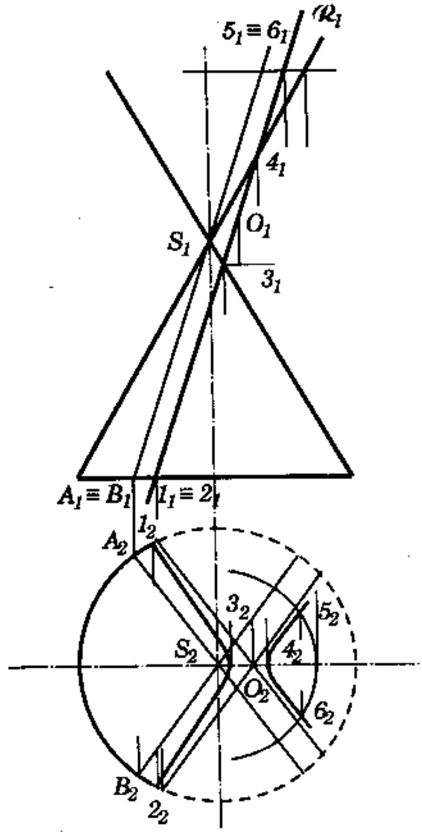
Hình 7.2

Hình 7.3 là giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$ với mặt nón tròn xoay. Vì mặt phẳng $\mathcal{R}$ song song với một đường sinh SA của mặt nón, nên giao tuyến là một đường parabon đỉnh là điểm 1.

Hình 7.4 là giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$ với mặt nón tròn xoay. Vì mặt phẳng $\mathcal{R}$ song song với hai đường sinh SA và SB của mặt nón, nên giao tuyến là một đường hypecbôn. Hypecbôn này có hai tiệm cận là hai đường thẳng 01, 02 đi qua trung điểm O của đoạn 34 và song song với hai đường sinh SA và SB.



Hình 7.3

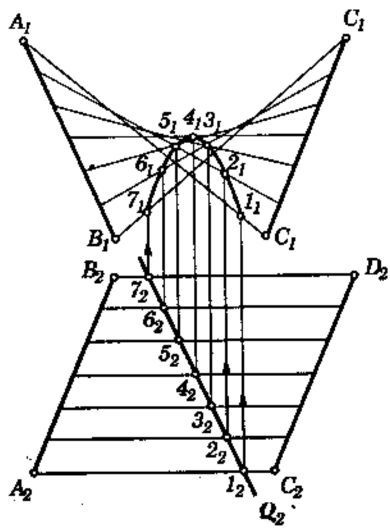


Hình 7.4

Ví dụ 3. Tìm giao tuyến giữa mặt phẳng chiếu bằng Q và mặt parabôlôit hypecbônic, có hai đường thẳng chuẩn là AB và CD, mặt phẳng chuẩn là mặt phẳng hình chiếu đứng.

Giải. Trường hợp này, hình chiếu bằng của giao tuyến là đường thẳng, trùng với hình chiếu bằng của mặt phẳng Q là Q_2.

Muốn tìm hình chiếu đứng của giao tuyến, ta gắn giao tuyến đó vào mặt parabôlôit hypecbônic. Cụ thể ở đây ta gắn vào các đường sinh thẳng (là các đường mặt) và ta tìm được bẩy điểm là 1, 2, 3, ..., 6, 7. Nối các điểm đó lại, ta có một đường parabôn (hình 7.5).



Hình 7.5

7.1.3. MẶT PHẲNG KHÔNG PHẢI MẶT PHẲNG CHIẾU, MẶT CONG LÀ MẶT TRỤ CHIẾU

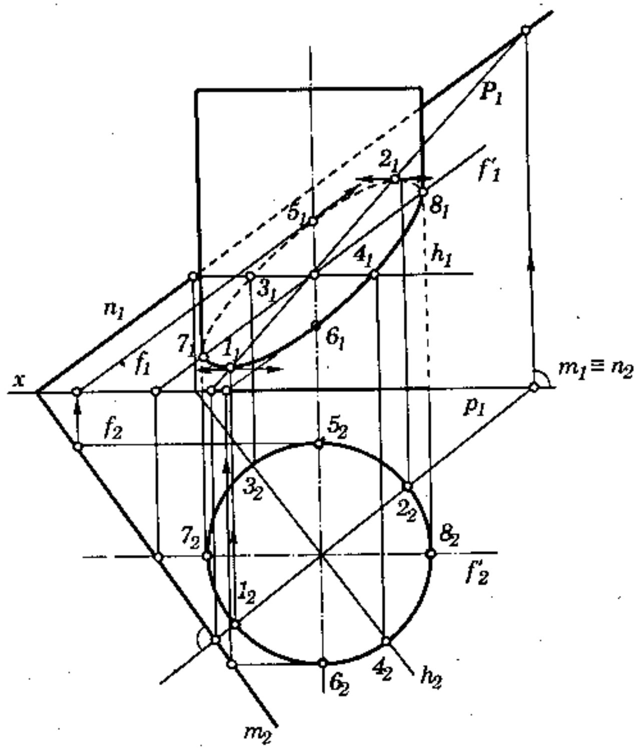
Trường hợp này, ta cũng dễ biết ngay một hình chiếu của giao tuyến; ứng dụng cách tìm điểm thuộc mặt phẳng để tìm hình chiếu còn lại của giao tuyến.

Ví dụ : Vẽ giao tuyến giữa mặt phẳng (m, n) và mặt trụ chiếu bằng.

Giải : Trường hợp này, ta dễ thấy hình chiếu bằng của giao tuyến là đường tròn, trùng với hình chiếu bằng của mặt trụ. Giao tuyến đó cũng thuộc mặt phẳng (m, n), nên ta gắn giao tuyến đó vào mặt phẳng (m, n) để tìm hình chiếu đứng.

Vì mặt phẳng (m, n) không song song với đường sinh của mặt trụ, nên giao tuyến sẽ là một đường ellip. Mà hình chiếu đứng của giao tuyến cũng là một ellip.

Ellip trên hình chiếu đứng có hai cặp đường kính liên hiệp, đó là : $1_1 2_1$ và $3_1 4_1$; $5_1 6_1$ và $7_1 8_1$. Trong đó $7_1 8_1$ là trục dài của êllip đó. Hai điểm 7_1 và 8_1 cũng là hai điểm phân cách giữa phần thấy và khuất trên hình chiếu đứng của giao tuyến (hình 7.6).



Hình 7.6

7.1.4. TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

Trường hợp này, ta chưa biết ngay hình chiếu nào của giao tuyến. Để tìm giao tuyến đó ta phải dùng mặt phẳng cắt phụ trợ.

Phương pháp mặt phẳng cắt phụ trợ :

Giả sử cho mặt cong Φ và mặt phẳng $\mathcal{P}$. Tìm giao tuyến của Φ và $\mathcal{P}$.

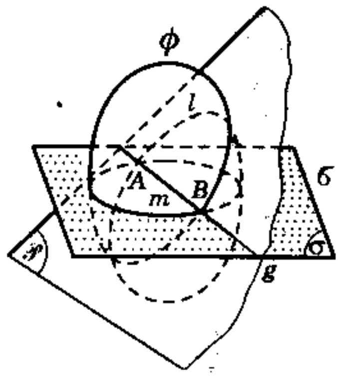
Các bước tiến hành như sau (hình 7.7) :

- Dựng mặt phẳng phụ trợ σ ; σ thường chọn là mặt phẳng chiếu.

- Tìm giao tuyến g của mặt phẳng σ với mặt phẳng $\mathcal{P}$: $g = \sigma \times \mathcal{P}$

- Tìm giao tuyến m của mặt phẳng σ với mặt cong Φ : $m = \sigma \times \Phi$

- Tìm giao điểm A, B của g và m : $A, B = g \times m$. (Vì m thường là đường bậc hai, nên có hai giao điểm với giao tuyến g là đường thẳng).



Hình 7.7

Các điểm A và B đó là những điểm thuộc giao tuyến giữa mặt phẳng $\mathcal{P}$ và mặt cong Φ.

Dùng nhiều mặt phẳng phụ trợ như vậy ta sẽ có nhiều điểm thuộc giao tuyến cần tìm.

Sau đó nối các điểm đó lại ta sẽ có giao tuyến.

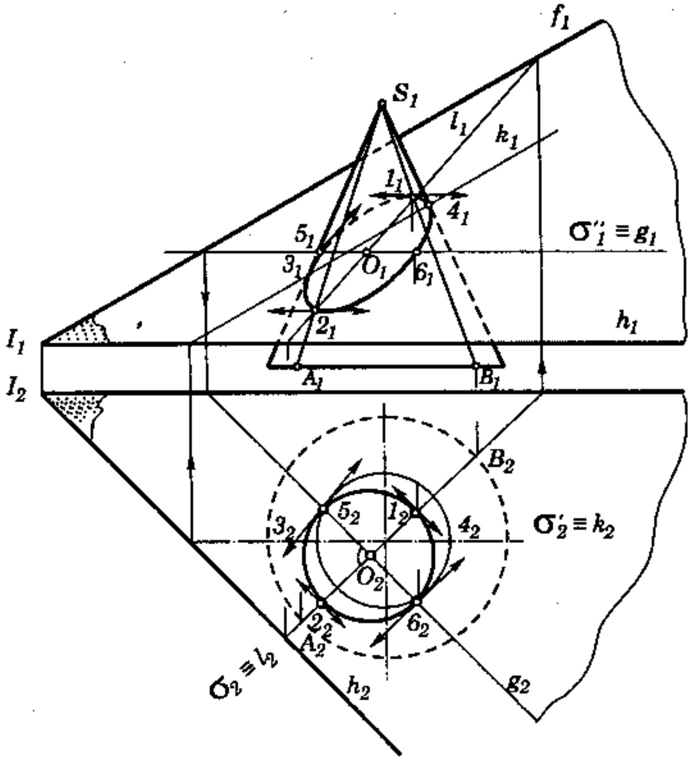
Ví dụ 1 : Tìm giao tuyến của mặt phẳng (f, h) với mặt nón tròn xoay.

Giải : Vì mặt phẳng (f, h) không song song với đường sinh nào của mặt nón, nên giao tuyến sẽ là một ellip.

Trước hết ta tìm các điểm cao nhất và thấp nhất của giao tuyến. Muốn vậy, ta dùng mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng chiếu bằng σ chứa trục của mặt nón. Mặt phẳng này cắt mặt nón theo hai đường sinh SA và SB và cắt mặt phẳng (f, h) theo đường thẳng l là đường dnđvmfhcb. Ta có hai giao điểm 1 và 2.

Để tìm giao điểm của hai đường sinh biên trên hình chiếu đứng của mặt nón, ta dùng mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng mặt σ' chứa hai đường sinh đó. Mặt phẳng này cắt mặt phẳng (f, h) theo đường mặt k. Ta có hai giao điểm 3 và 4.

Đoạn $1_2 2_2$ trên hình chiếu bằng là trục dài của ellip trên hình chiếu bằng. Để tìm trục ngắn của ellip đó, ta dùng mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng bằng σ" đi qua trung điểm O của đoạn 12 đó. Mặt phẳng này cắt



Hình 7.8

mặt phẳng (f, h) theo đường bằng g, và cắt mặt nón theo đường tròn ta được hai điểm 5 và 6 (hình 7.8).

Sau đó, nối các điểm thuộc giao tuyến lại.

Xét thấy và khuất giao tuyến : Hình chiếu bằng của giao tuyến đều thấy; Hình chiếu đứng thì cung $3_1 2_1 6_1 4_1$ thấy, và cung còn lại khuất.

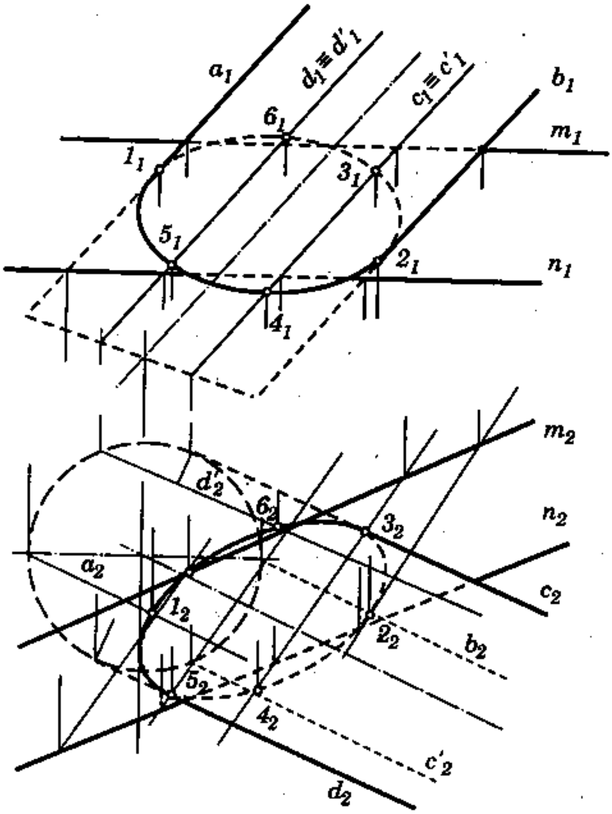
Xét thấy, khuất cho mặt nón : Hình chiếu bằng, phần mặt nón ở phía dưới mặt phẳng (f, h) khuất; Hình chiếu đứng phần mặt nón ở phía sau miếng phẳng (f, h) khuất.

Ví dụ 2 : Vẽ giao tuyến của mặt phẳng (m, n) và mặt trụ xiên.

Giải. Trường hợp này, ta phải dùng các mặt phẳng phụ trợ song song với đường sinh của mặt trụ (để nó cắt mặt trụ theo các đường sinh thẳng).

Trước hết, tìm giao điểm các đường sinh ngoài cùng a, b trên hình chiếu đứng với mặt phẳng (m, n), (mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng chiếu đứng qua các đường sinh đó), ta tìm được các điểm 1 và 2.

Hai điểm 1_1 và 2_1 là ranh giới giữa phần thấy và khuất của giao tuyến trên hình chiếu đứng.



Hình 7.9

Để tìm giao điểm hai đường sinh ngoài cùng trên hình chiếu bằng là c, d với mặt phẳng (m, n) ta cũng dùng các mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng chiếu đứng (ta có thể dùng mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng chiếu bằng).

Trước hết, ta tìm hình chiếu đứng của các đường sinh đó.

Như vậy, ngoài giao điểm của các đường sinh c, d đó, ta còn tìm được giao điểm của hai đường sinh c' và d' nữa. Đó là hai đường sinh có hình chiếu đứng trùng với hình chiếu đứng của hai đường sinh c, d. Các giao điểm tìm thêm được đó gọi là các "điểm ăn theo".

Ví dụ, tìm giao điểm 3 của đường sinh c, thì được thêm "điểm ăn theo" 4 của đường sinh c'; Rồi giao điểm 5 của đường sinh d, thì được thêm "điểm ăn theo" 6 của đường sinh d'.

Hai điểm 3_2 và 5_2 là ranh giới giữa phần thấy và khuất trên hình chiếu bằng của giao tuyến.

Muốn tìm thêm các điểm khác nữa, ta dùng mặt phẳng phụ trợ là các mặt phẳng chiếu đứng (hoặc chiếu bằng).

Sau đó nối các điểm đó lại, nhớ là cả hai hình chiếu giao tuyến đều là ellip.

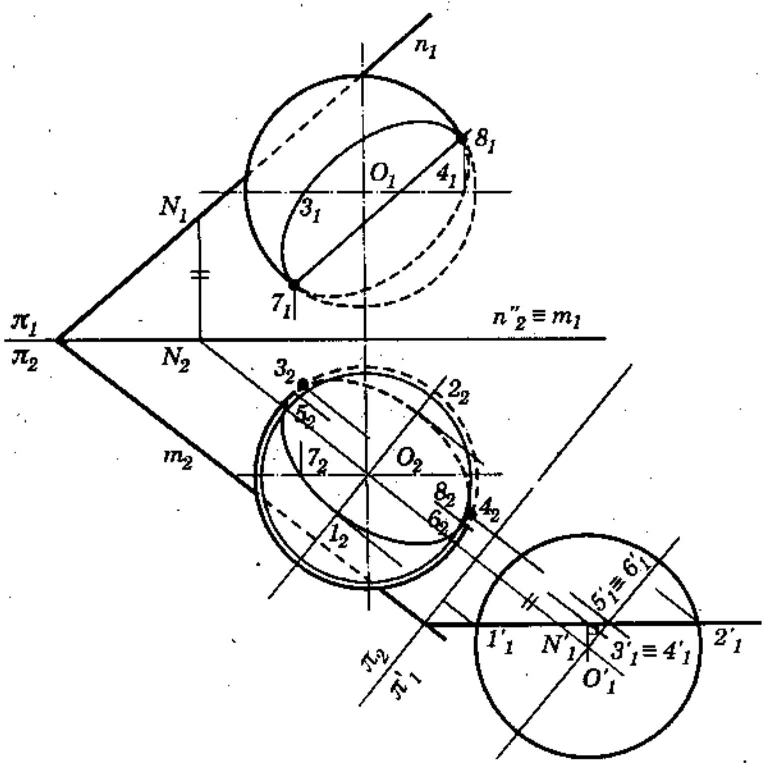
Và cũng chú ý xét thấy và khuất trên các hình chiếu (hình 7.9).

Trong hai ví dụ trên, ta cũng có thể dùng phương pháp thay mặt phẳng hình chiếu, để đưa mặt phẳng đã cho trở thành mặt phẳng chiếu, khi đó ứng dụng trường hợp mặt phẳng chiếu của mục 7.1.2, để tìm giao tuyến. Sau đó đưa kết quả trở về các hình chiếu ban đầu.

Ví dụ 3 : Tìm giao tuyến của mặt phẳng (m, n) với mặt cầu.

Giải : Trường hợp này, ta có thể dùng các mặt phẳng phụ trợ là các mặt phẳng bằng (hoặc mặt phẳng mặt) để tìm giao tuyến.

Còn ở đây, ta thay mặt phẳng hình chiếu đứng để đưa mặt phẳng (m, n) trở thành mặt phẳng chiếu đứng. Dựa vào cách tìm giao tuyến trong mục 7.1.2, ta tìm được giao tuyến trên hình chiếu bằng. Sau đó đưa về hình chiếu đứng (hình 7.10).

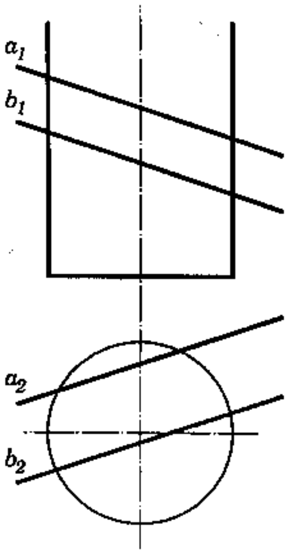


Hình 7.10

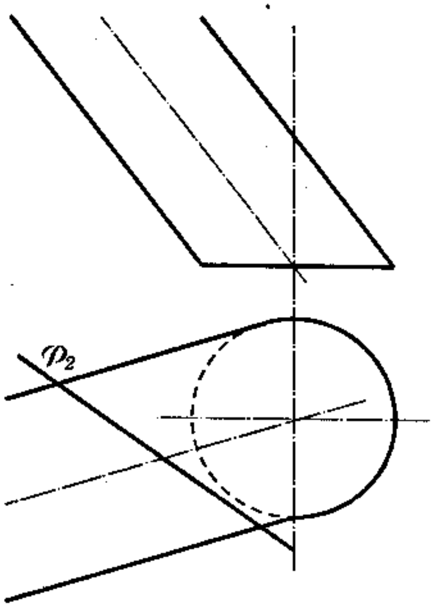
CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Vẽ giao tuyến mặt phẳng (a, b) với mặt trụ chiếu bằng (hình 7.11).

2. Vẽ giao tuyến mặt phẳng chiếu bằng $\mathcal{P}$ với mặt trụ xiên (hình 7.12).



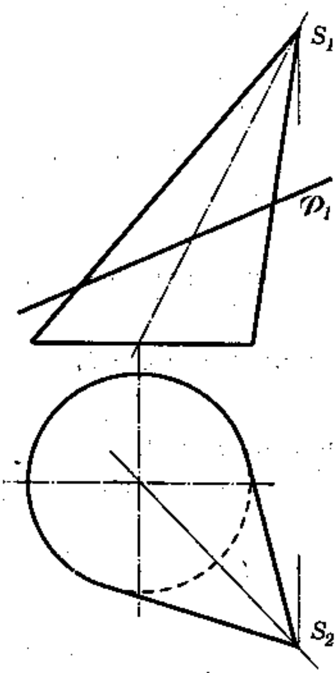
Hình 7.11



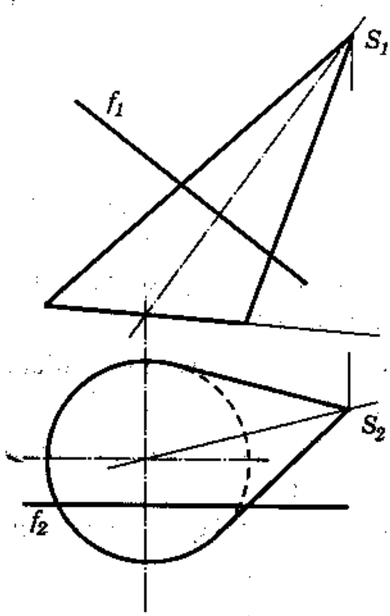
Hình 7.12

3. Vẽ giao tuyến mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{P}$ với mặt nón. Giao tuyến là đường gì ? (hình 7.13).

4. Qua đường mặt $f(f_1, f_2)$ dựng mặt phẳng để nó cắt mặt nón xiên theo một parabôn. Hãy vẽ giao tuyến đó (hình 7.14).

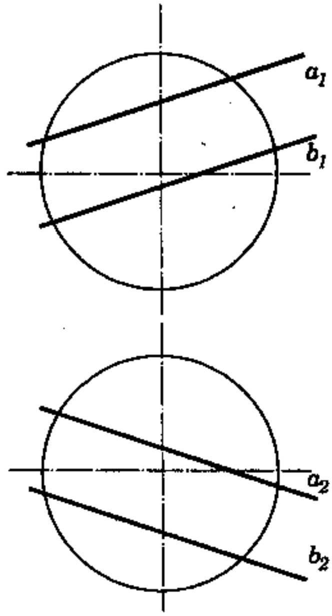


Hình 7.13



Hình 7.14

5. Vẽ giao tuyến mặt phẳng (a, b) với mặt cầu (hình 7.15).



Hình 7.15

7.2. GIAO ĐIỂM ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT CONG

Ta xét các trường hợp từ dễ đến khó.

7.2.1. ĐƯỜNG THẲNG LÀ ĐƯỜNG THẲNG CHIẾU

Trường hợp này, ta dễ biết ngay một hình chiếu của giao điểm, ứng dụng cách tìm các điểm thuộc mặt cong, để tìm hình chiếu còn lại của giao điểm.

Ví dụ 1 : Tìm giao điểm đường thẳng chiếu đứng d với mặt nón xiên, có đỉnh là điểm S.

Giải : Gọi I và K là giao điểm của đường thẳng d với mặt nón, thì ta có $I_1 \equiv K_1 \equiv d_1$.

Vì I và K cũng là các điểm thuộc mặt nón, nên để tìm hình chiếu bằng của I và K, ta vạch các đường sinh SI và SK. Hình chiếu đứng của đường sinh SI là S_1I_1 cắt đáy nón tại điểm 1_1.

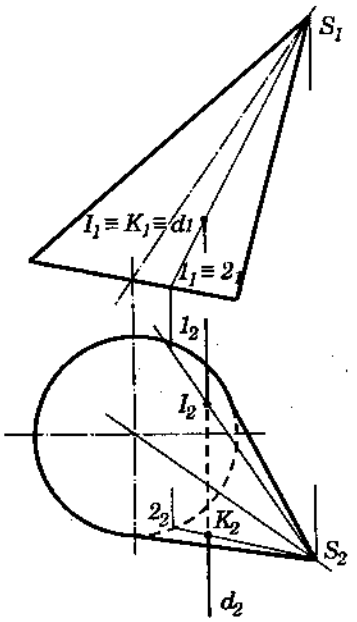
Từ đó, ta tìm được hình chiếu bằng S_21_2. Nên hình chiếu bằng I_2 thuộc S_21_2.

Tương tự, đường sinh SK cắt đáy nón tại điểm 2, ta cũng tìm được K_2 thuộc S_22_2.

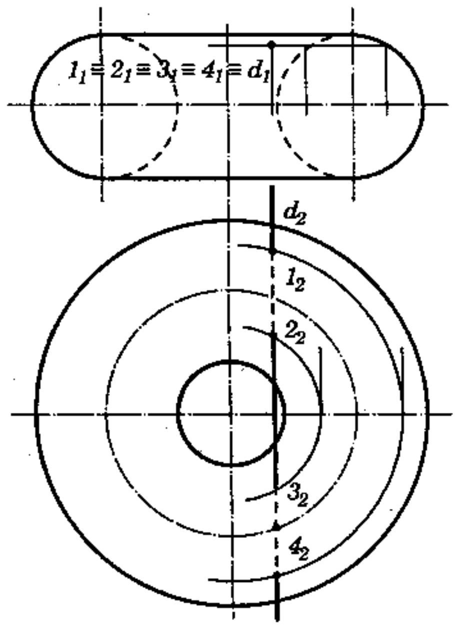
Cuối cùng xét thấy, khuất hình chiếu bằng của đường thẳng d, đoạn từ I_2 đến đường sinh ngoài cùng phía dưới khuất, còn lại là thấy (hình 7.16).

Ví dụ 2 : Tìm giao điểm đường thẳng chiếu đứng d và mặt xuyến, có trục xoay là đường thẳng chiếu bằng.

Giải : Gọi các giao điểm của đường thẳng d với mặt xuyến là 1, 2, 3 và 4 thì vì d là đường thẳng chiếu đứng, nên ta có ngay $1_1 \equiv 2_1 \equiv 3_1 \equiv 4_1 \equiv d_1$. Gắn các điểm đó vào mặt xuyến, bằng cách vẽ các vĩ tuyến đi qua các điểm đó, ta sẽ tìm được hình chiếu bằng của chúng (hình 7.17).



Hình 7.16



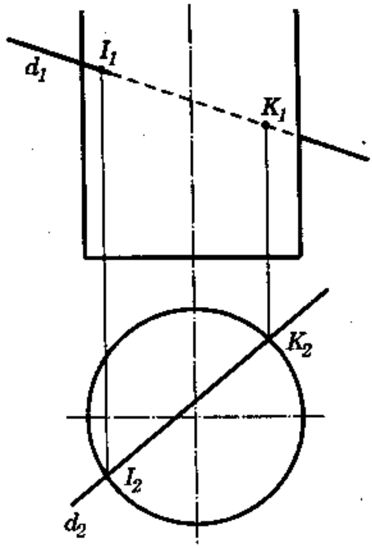
Hình 7.17

Sau đó xét thấy và khuất : Trên hình chiếu bằng, chỉ có hai đoạn $1_2 2_2$ và $3_2 4_2$ khuất, còn lại là thấy.

Còn trường hợp nữa cũng đơn giản là, đường thẳng đã cho không phải đường thẳng chiếu, nhưng mặt cong là mặt trụ chiếu, ta cũng dễ tìm được giao điểm của đường thẳng và mặt trụ.

Ví dụ hình 7.18, đường thẳng d và mặt trụ chiếu bằng cắt nhau tại hai điểm I và K. Ta có ngay hình chiếu bằng của giao điểm là I_2 và K_2. Vì I và K cũng thuộc đường thẳng d, nên ta tìm được hình chiếu đứng I_1 và K_1. Trên hình chiếu đứng, đường thẳng d đoạn từ I_1 đến đường sinh ngoài cùng bên phải là khuất, còn lại đều thấy.

Ta chuyển sang xét trường hợp tổng quát.



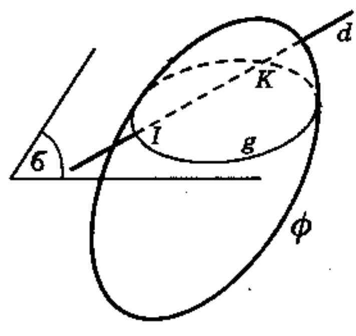
Hình 7.18

7.2.2. TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

Trường hợp này, ta chưa biết ngay hình chiếu nào của giao điểm, ta phải dùng mặt phẳng cắt phụ trợ. Nội dung của nó như sau :

1. Phương pháp mặt phẳng cắt phụ trợ

Giả sử cần tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt cong Φ. Các bước tiến hành như sau :



Hình 7.19

- Dựng mặt phẳng phụ trợ σ, chứa đường thẳng d, σ thường chọn là mặt phẳng chiếu (hình 7.19).

- Tìm giao tuyến g của mặt phẳng σ với mặt cong Φ : $g = \sigma \times \Phi$.

Nếu Φ là mặt bậc hai thì giao tuyến g nói chung cũng là đường bậc hai.

- Tìm các giao điểm I, K của đường thẳng d và giao tuyến g : $I, K = d \times g$.

Các giao điểm I, K đó, chính là giao điểm của đường thẳng d và mặt cong Φ.

2. Cách chọn mặt phẳng cắt phụ trợ

Mặt phẳng phụ trợ cần chọn sao cho giao tuyến giữa mặt phẳng phụ trợ với mặt cong là đường đơn giản, dễ vẽ. Vì vậy, dựa vào dạng của giao tuyến giữa mặt phẳng và mặt cong (mục 7.1.1) ta cần biết với mỗi mặt cong, mặt phẳng phụ trợ phải chọn như thế nào cho thích hợp :

- ***Mặt trụ.*** Mặt phẳng phụ trợ chọn *song song với đường sinh của mặt trụ* để nó cắt mặt trụ theo các đường sinh thẳng.

- ***Mặt nón.*** Mặt phẳng phụ trợ chọn *đi qua đỉnh nón,* để nó cắt mặt nón theo các đường sinh thẳng.

- ***Mặt cầu.*** Mặt phẳng phụ trợ chọn là các *mặt phẳng đồng mức* (mặt phẳng bằng hoặc mặt phẳng mặt) để nó cắt mặt cầu theo đường tròn, và một hình chiếu của nó cũng là đường tròn.

Cũng có thể chọn mặt phẳng phụ trợ qua tâm cầu, để nó cắt mặt cầu theo đường tròn lớn. Sau đó dùng phương pháp xoay quanh đường bằng hoặc đường mặt, để đưa mặt phẳng phụ trợ đó trở thành mặt phẳng đồng mức để tìm giao điểm.

- ***Mặt tròn xoay.*** Mặt phẳng phụ trợ chọn *vuông góc với trục xoay,* để nó cắt mặt tròn xoay theo các đường tròn.

Ví dụ 1 : Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt nón xiên, có đỉnh là điểm S.

Giải : Theo cách chọn mặt phẳng phụ trợ nói trên, ta chọn mặt phẳng phụ trợ đi qua đỉnh S và đường thẳng d : (S, d).

Mặt phẳng phụ trợ như vậy sẽ cắt mặt nón theo các đường sinh thẳng. Trước hết ta tìm chân của các đường sinh đó : nằm trên giao tuyến của mặt phẳng phụ trợ với mặt phẳng đường chuẩn (đáy) của nón. Đường thẳng d cắt mặt phẳng đáy nón ở N. Vẽ đường thẳng SA thuộc mặt phẳng (S, d). SA cắt mặt phẳng đáy nón ở điểm M. Giao tuyến MN cắt đường cong đáy (đường chuẩn) nón tại hai điểm 1 và 2. Hai đường sinh S1 và S2 cắt đường thẳng d tại hai điểm H và K. Đó chính là các giao điểm của đường thẳng d với mặt nón.

Sau đó, xét thấy, khuất trên các hình chiếu.

Ta xét kỹ trường hợp này. Các trường hợp sau, bạn đọc tự xét lấy.

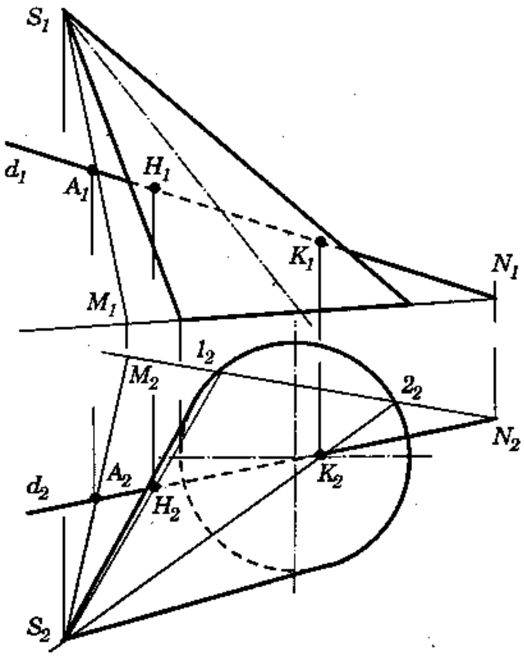
Trên hình chiếu đứng : Dễ thấy đoạn H_1 K_1 khuất, vì đoạn này nằm bên trong mặt nón. Ta xét các đoạn từ điểm H_1 tới đường sinh biên, và từ K_1 tới đường sinh biên.

Đoạn từ điểm H_1 tới đường sinh biên : Ta lấy một điểm đại diện cho đoạn này là điểm H_1. Điểm H_1 thuộc đường sinh $S_1 1_1$, mà đường sinh S1 (thuộc nửa sau mặt nón) khuất, nên điểm H_1 khuất.

Suy ra, đoạn từ điểm H_1 tới đường sinh biên cũng khuất.

Tương tự, đoạn từ điểm K_1 tới đường sinh biên : Điểm K_1 thuộc đường sinh S_12_1, mà đường sinh S2 (cũng thuộc nửa sau mặt nón), nên S_12_1 khuất, do đó điểm K_1 khuất. Suy ra, đoạn từ điểm K_1 tới đường sinh biên cũng khuất.

Cách xét tương tự vậy, trên hình chiếu bằng. Vì H_2 thuộc đường sinh S_21_2 thấy, nên từ H_2 tới đường sinh biên thấy ; K_2 thuộc đường sinh S_22_2 thấy, nên từ K_2 tới đường cong đáy cũng thấy (hình 7.20).



Hình 7.20

Ví dụ 2 : Tìm giao điểm đường thẳng l và mặt trụ xiên.

Giải : Ta dựng mặt phẳng phụ trợ chứa đường thẳng l và song song với đường sinh của mặt trụ. Muốn vậy, qua điểm A thuộc đường thẳng l, ta vạch đường thẳng k song song với đường sinh mặt trụ. Như vậy, mặt phẳng phụ trợ là (l, k).

Mặt phẳng như vậy sẽ cắt mặt trụ theo các đường sinh thẳng.

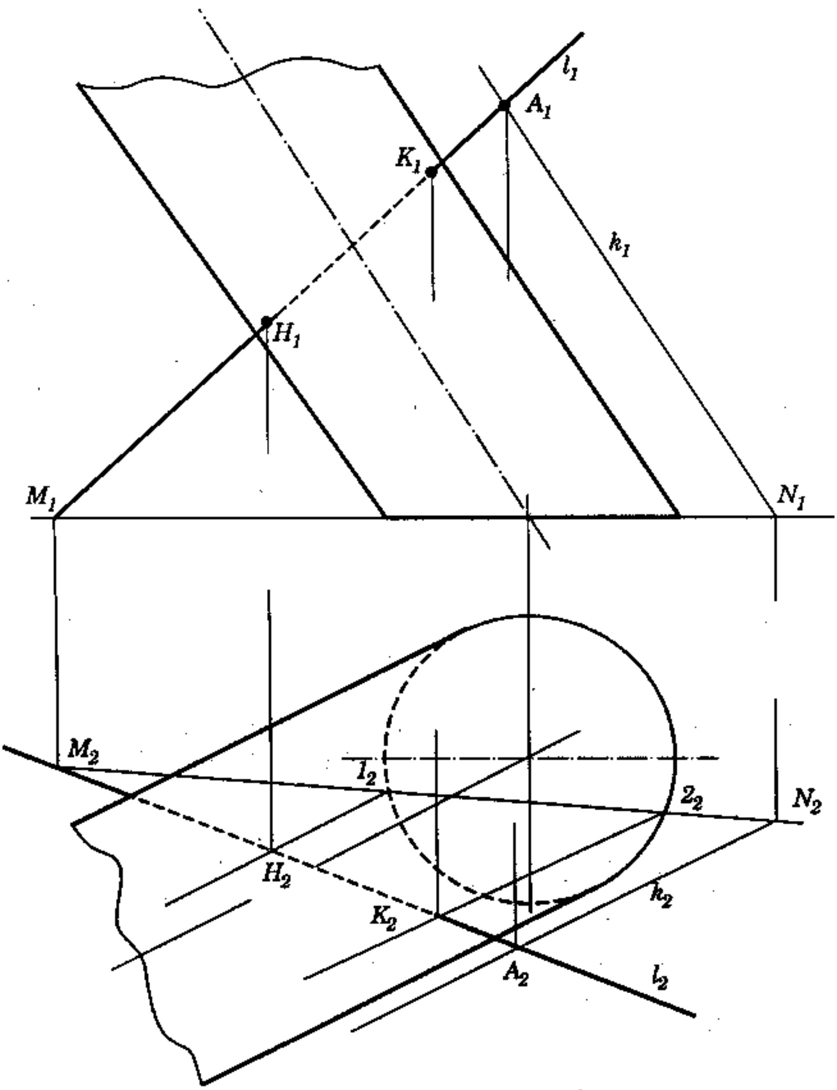
Ta cũng tìm giao tuyến của mặt phẳng phụ trợ đó với mặt phẳng đáy trụ. Giao tuyến đó là đường thẳng MN. Giao tuyến MN cắt đường cong đáy tại hai điểm 1 và 2. Từ các điểm 1 và 2 đó vạch các đường sinh của mặt trụ. Các đường sinh này cắt đường thẳng l, cho ta hai giao điểm H và K. Đó chính là các giao điểm cần tìm (hình 7.21).

Tương tự trên, ta cũng xét thấy, khuất trên các hình chiếu.

Cũng vẫn hình 7.21 đó nhưng ta giải thích kết quả tìm được bằng một cách khác.

Ta dùng phép chiếu phụ : Hướng chiếu song song với đường sinh mặt trụ, mặt phẳng hình chiếu là mặt phẳng đáy (hoặc mặt phẳng đường chuẩn mặt trụ).

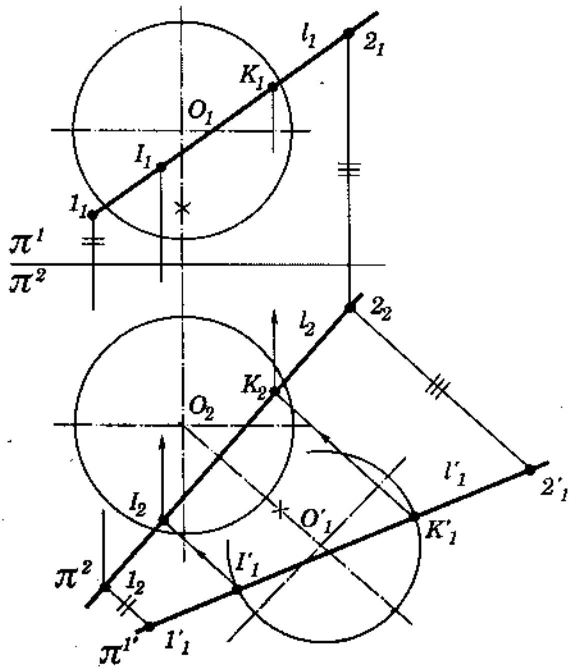
Sau khi chiếu như vậy, mặt trụ sẽ có hình chiếu là đường cong đáy; đường thẳng l sẽ có hình chiếu là đường thẳng MN. Đường thẳng MN cắt đường cong đáy tai hai điểm 1 và 2. Từ đó dóng trở về ta có các giao điểm H, K.



Hình 7.21

Ví dụ 3 : Cho điểm O và đường thẳng l. Tìm trên đường thẳng l những điểm cách điểm O một đoạn bằng R cho trước.

Giải : Ta thấy, các điểm cần tìm thuộc mặt cầu tâm O, bán kính R. Do đó, từ bài toán đã cho dẫn tới một bài toán mới là : Tìm giao điểm của đường thẳng l với mặt cầu tâm O, bán kính R (hình 7.22).



Hình 7.22

Ta giải bài này bằng cách thay mặt phẳng hình chiếu đứng, để đường thẳng l trở thành đường mặt. Khi đó, mặt phẳng phụ trợ chứa đường thẳng l cũng là mặt phẳng mặt. Giao tuyến mặt phẳng phụ trợ với mặt cầu là đường tròn, và hình chiếu đứng (mới) của nó cũng là đường tròn. Các giao điểm của đường tròn giao tuyến đó với đường thẳng l, cho ta các điểm I, K cần tìm.

Tất nhiên, bài này không cần xét thấy, khuất.

Bài này cũng có thể giải bằng cách, dựng mặt phẳng phụ trợ chứa đường thẳng l và tâm O của mặt cầu. Sau đó, dùng cách xoay quanh đường bằng (hoặc đường mặt) để tìm giao điểm của đường thẳng l và mặt cầu.

Ví dụ 4 : Cho đường thẳng d và điểm M. Dựng đường thẳng đi qua điểm M, cắt đường thẳng d và nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc α cho trước.

Giải : Đường thẳng cần dựng, chính là đường sinh của một mặt nón tròn xoay có đỉnh là điểm M, các đường sinh thẳng nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc α cho trước.

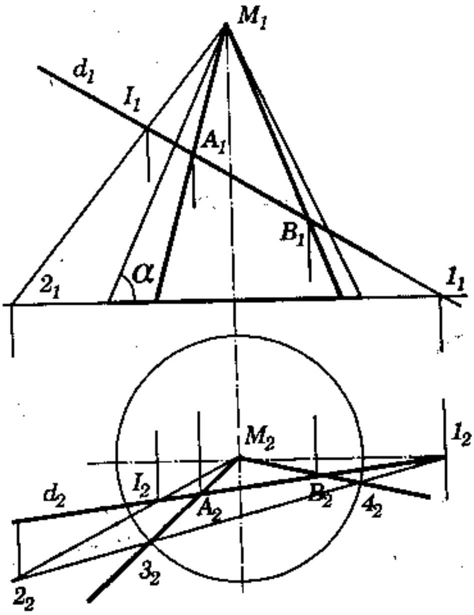
Vì vậy, từ bài toán đã cho, dẫn tới một bài toán mới là : Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt nón tròn xoay, có đỉnh là điểm M và các đường sinh thẳng nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc α cho trước.

Giải bài này tương tự bài trong ví dụ 1 (hình7.20) trên đây.

Ta cũng dựng mặt phẳng phụ trợ chứa đường thẳng d và đỉnh nón M : (d, M).

Các bước giải như ví dụ 1 trên đây.

Cuối cùng ta dựng được hai đường thẳng là MA và MB (hình 7.23).

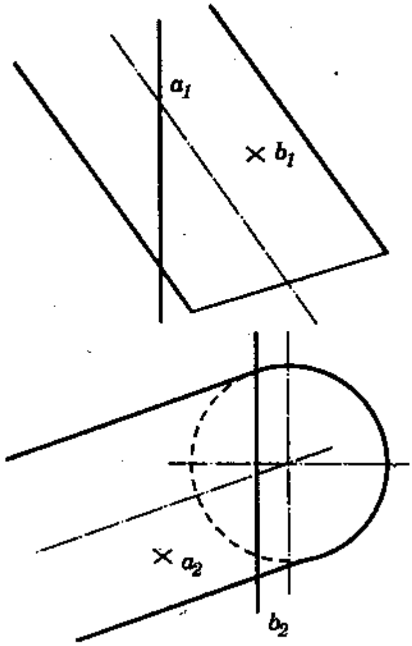


Hình 7.23

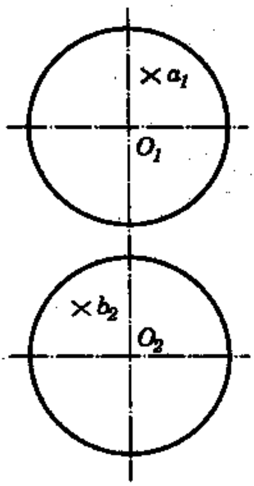
CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Tìm giao điểm đường thẳng chiếu bằng a và đường thẳng chiếu đứng b với mặt trụ xiên (hình 7.24).

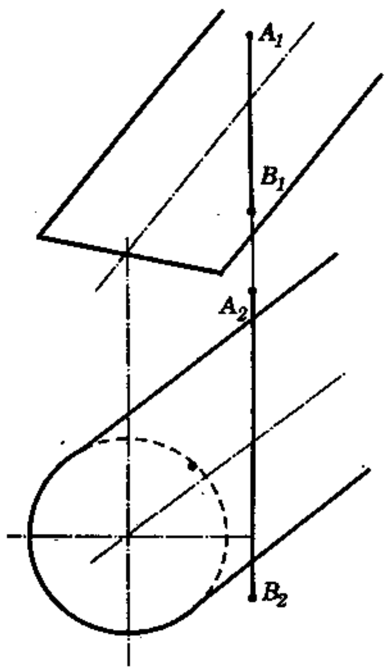
2. Tìm giao điểm đường thẳng chiếu đứng a và đường thẳng chiếu bằng b với mặt cầu (hình 7.25).



Hình 7.24



Hình 7.25



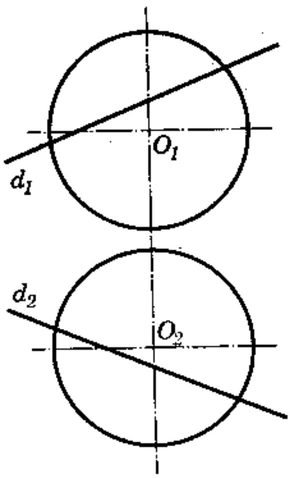
Hình 7.26

3. Tìm giao điểm đường thẳng cạnh AB với mặt trụ xiên (hình 7.26).

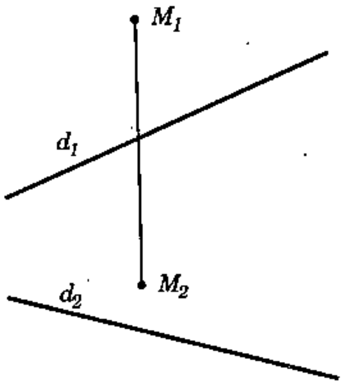
4. Tìm giao điểm đường thẳng d với mặt cầu tâm O (hình 7.27).

5. Qua điểm M vẽ đường thẳng cắt đường thẳng d và nghiêng với mặt phẳng hình chiếu đứng một góc 45^0 (hình 7.28).

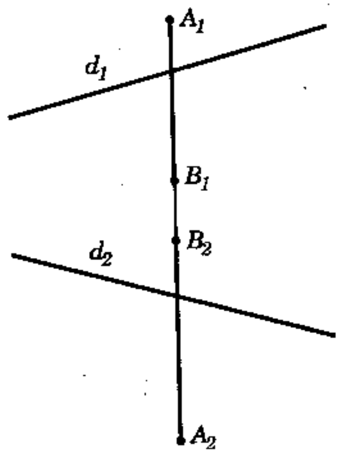
6. Vẽ tam giác vuông, AB là cạnh huyền, đỉnh góc vuông thuộc đường thẳng d (hình 7.29).



Hình 7.27



Hình 7.28



Hình 7.29

7.3. GIAO TUYẾN HAI MẶT

Nếu một mặt là đa diện và một mặt là mặt cong thì, *giao tuyến là những đoạn đường cong, đó là giao tuyến các mặt bên của đa diện với mặt cong* (có thể gọi là đa giác cong). Các điểm gãy (các đỉnh) là giao điểm các cạnh của đa diện với mặt cong.

Thực chất của phần này là tìm giao tuyến của mặt phẳng với mặt cong. Nhưng mỗi mặt phẳng đó, chỉ lấy một miếng phẳng. Mỗi miếng phẳng đó chính là các mặt bên của đa diện.

Nếu hai mặt đều là mặt cong thì, *giao tuyến là một đường cong ghềnh bậc bốn* (vì hai mặt cong đều là mặt bậc hai).

Sau đây, ta xét giao tuyến của các mặt : lăng trụ, mặt chóp (tháp), mặt trụ và mặt nón,

Ta cũng xét các trường hợp, từ đơn giản đến phức tạp.

7.3.1. MỘT TRONG HAI MẶT LÀ LĂNG TRỤ CHIẾU HOẶC MẶT TRỤ CHIẾU.

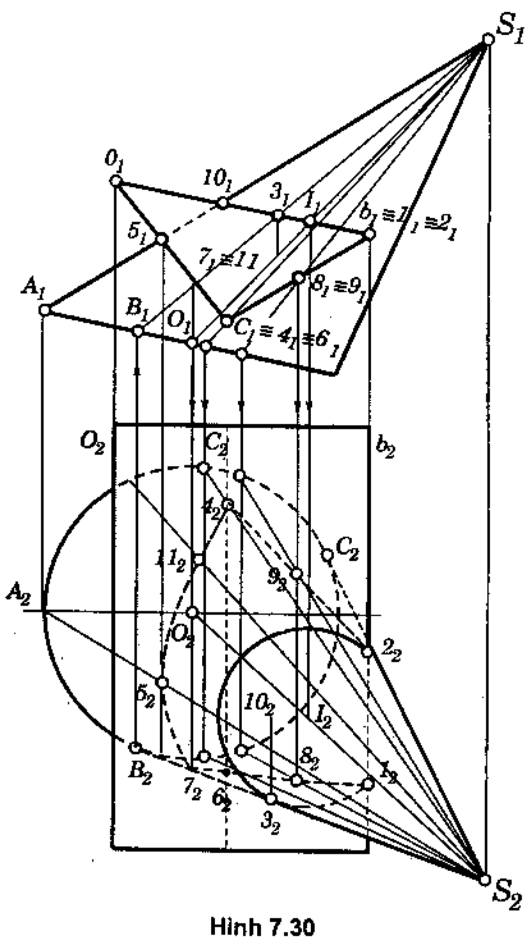
Trường hợp này, ta dễ biết ngay một hình chiếu của giao tuyến; ứng dụng cách tìm các điểm thuộc đa diện hoặc mặt cong để tìm hình chiếu còn lại của giao tuyến.

1. Đa diện và mặt cong

Ví dụ 1 : Tìm giao tuyến của lăng trụ chiếu đứng với mặt nón xiên.

Giải : Từ hình đã cho, ta có nhận xét sau : Vì các mặt bên của lăng trụ đều là các mặt chiếu đứng, nên ta có ngay hình chiếu đứng của giao tuyến là ba đoạn thẳng gãy khúc (phần chung giữa mặt lăng trụ và mặt nón).

Ta tìm hình chiếu bằng của giao tuyến : Mặt nón có mặt phẳng đường chuẩn (đáy) là mặt phẳng hình chiếu đứng; Vì hình chiếu bằng của đường chuẩn đó là đường tròn; Mà ta thấy mặt bên (a, b) của lăng trụ lại song song với mặt phẳng đường chuẩn. Do đó mặt phẳng này cắt mặt nón theo một ellip (có hình chiếu đứng là một đoạn thẳng), nhưng hình chiếu bằng của ellip đó là một đường tròn. Trên hình chiếu bằng là một cung 1_2 3_2 10_2 2_2 của đường tròn đó. Trong đó, hai điểm 1, 2 là giao điểm cạnh b của lăng trụ với mặt nón; điểm 3 là giao điểm đường sinh biên SB (ngoài cùng trên hình chiếu bằng) của mặt nón với lăng trụ. Điểm 3_2 sẽ là ranh giới giữa phần thấy và khuất của cung giao tuyến đó trên hình chiếu bằng (hình 7.30).



Hình 7.30

Mặt bên (b, c) của lăng trụ, song song với một đường sinh SA của mặt nón, nên nó cắt mặt nón theo một parabôn. Hình chiếu đứng là một đoạn thẳng, nhưng hình chiếu bằng là hai cung của một parabôn là $2_2 9_2 4_2$ và $1_2 8_2 6_2$. Cạnh c của lăng trụ cắt mặt nón tại hai điểm 4 và 6.

Mặt bên (a, c) vì cắt tất cả các đường sinh của mặt nón, nên nó cắt mặt nón theo một ellip. Hình chiếu đứng của nó cũng là một đoạn thẳng, nhưng hình chiếu bằng là một cung của ellip là $4_2 11_2 5_2 7_2 6_2$.

Xét thấy và khuất của giao tuyến : Hình chiếu bằng của giao tuyến, chỉ có cung $2_2 10_2 3_2$ là thấy, còn lại đều khuất.

Ví dụ 2 : Vẽ giao tuyến giữa mặt lăng trụ tam giác (cạnh là a, b và c) chiếu bằng và mặt cầu.

Giải : Vì mặt lăng trụ chiếu bằng, nên ta có ngay hình chiếu bằng của giao tuyến là đường gãy khúc, trùng với phần chung giữa hình chiếu bằng của mặt lăng trụ và mặt cầu. Ta gắn đường gãy khúc đó vào mặt cầu để tìm hình chiếu đứng của giao tuyến.

Ta tìm giao tuyến từng mặt bên của lăng trụ với mặt cầu (trong không gian đều là các cung tròn) :

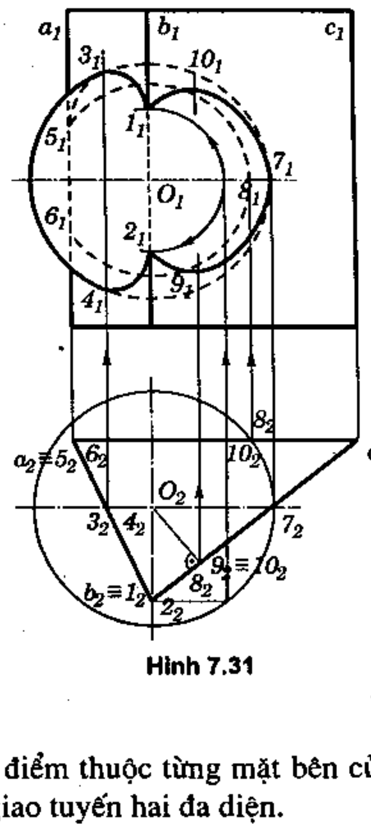
Cạnh b của lăng trụ cắt mặt cầu ở hai điểm 1 và 2. Đường tròn biên trên hình chiếu đứng của mặt cầu cắt mặt lăng trụ ở hai điểm 3 và 4.

Cạnh a của mặt lăng trụ cắt mặt cầu ở hai điểm 5 và 6. Đường tròn biên trên hình chiếu bằng của mặt cầu cắt lăng trụ ở hai điểm 7 và 8.

Mặt (a, c) vì là mặt phẳng mặt, nên hình chiếu đứng của giao tuyến mặt này với cầu là một cung tròn $5_1 8_1 6_1$.

Mặt (a, b) cắt mặt cầu theo hai cung tròn, nhưng hình chiếu đứng của giao tuyến là hai cung $1_1 3_1 5_1$ và $6_1 4_1 2_1$ của một ellip.

Mặt (b, c) cắt mặt cầu theo một cung tròn, nhưng hình chiếu đứng của giao tuyến cũng là một cung $1_1 10_1 7_1 9_1 2_1$. Cung ellip này có $9_1 10_1$ là trục dài của ellip đó (hình 7.31).



Hình 7.31

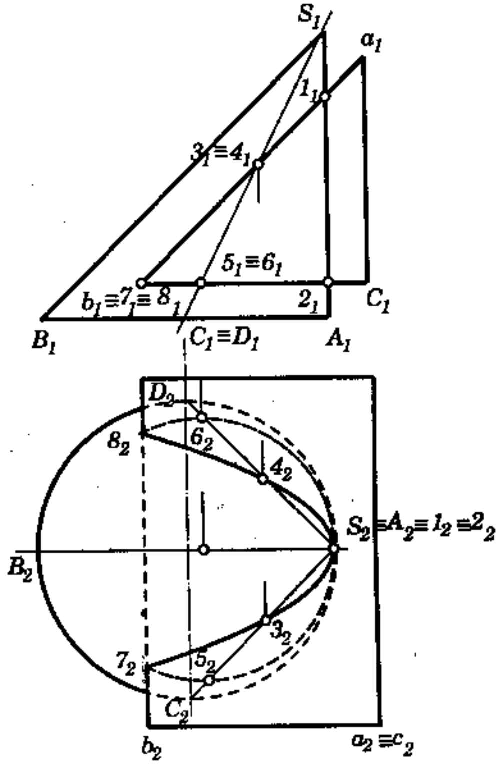
Cuối cùng, nối các điểm đó : Ta nối các điểm thuộc từng mặt bên của lăng trụ. Việc xét thấy, khuất tương tự phần giao tuyến hai đa diện.

Ví dụ 3 : Vẽ giao tuyến mặt nón xiên và mặt lăng trụ chiếu đứng.

Giải : Ta cũng có ngay hình chiếu đứng của giao tuyến là phần chung giữa lăng trụ và mặt nón : đó là hai đoạn thẳng. Như vậy, mặt (a, c) của lăng trụ không cắt mặt nón.

Mặt (a, b) của lăng trụ song song với một đường sinh SB của mặt nón, nên giao tuyến của mặt này với mặt nón là một parabôn.

Mặt (b, c) song song với đáy nón, nên giao tuyến cũng là đường đồng dạng với đáy nón, tức là đường tròn. Mà giao tuyến ở đây là một cung tròn (hình 7.32).



Hình 7.32

Để tìm thêm các điểm trung gian của các đường cong trên, ta vạch các đường sinh của mặt nón : Ví dụ : đường sinh SC cho ta hai điểm 3, 5; đường sinh SD cho ta hai điểm 4, 6.

Vì đường sinh SA của nón là đường thẳng chiếu bằng, nên hình chiếu bằng của cung parabôn và cung tròn nói trên tiếp xúc nhau tại hình chiếu bằng của đường sinh SA : $S_2 \equiv A_2$.

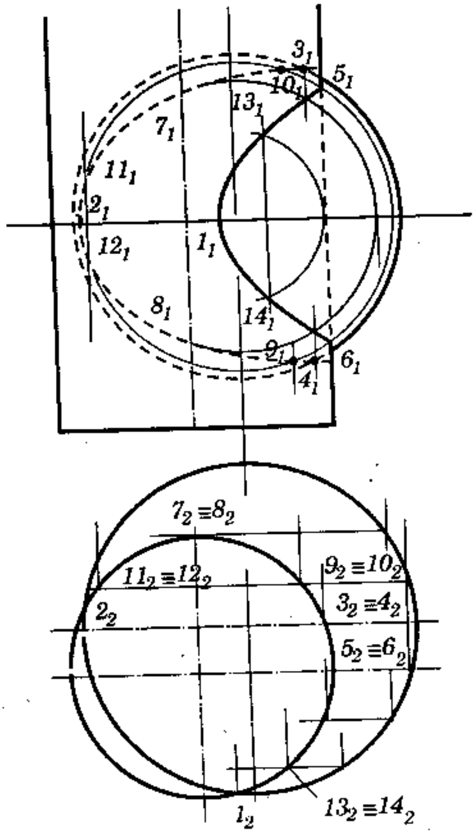
2. Hai mặt cong

Ví dụ 1 : Vẽ giao tuyến giữa mặt cầu và mặt trụ chiếu bằng (mặt trụ thẳng đứng).

Giải : Từ hình 7.33 ta thấy, vì mặt trụ là mặt trụ chiếu bằng, nên ta dễ biết ngay hình chiếu bằng của giao tuyến là cung tròn, thuộc hình chiếu bằng của mặt trụ chiếu bằng.

Gắn cung tròn đó vào mặt cầu để tìm hình chiếu đứng của giao tuyến.

Đường thấy ngoài trên hình chiếu bằng (xích đạo của mặt cầu) cắt mặt trụ thẳng đứng tại hai điểm 1 và 2. Đường tròn thấy ngoài trên hình chiếu đứng của mặt cầu cắt trụ tại hai điểm 3 và 4. Đường sinh biên trên hình chiếu đứng của mặt trụ, cắt mặt cầu tại hai điểm 5 và 6. Đường sinh giới hạn của trụ cắt mặt cầu tại hai điểm 7 và 8.



Hình 7.33

Dùng các mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng mặt, ta tìm thêm được các điểm 9, 10, 11, 12, 13 và 14.

Hai giao điểm 5_1 và 6_1 của đường sinh biên trên hình chiếu đứng của mặt trụ là ranh giới giữa phần thấy và phần khuất của giao tuyến trên hình chiếu đứng.

Cuối cùng, nối các điểm đó lại theo nguyên tắc là : ta chỉ có thể nối hai giao điểm với nhau, nếu hai điểm đó phải thuộc hai *đường sinh "lân cận" (liền kề) của mặt trụ thứ nhất, và cũng thuộc hai đường sinh "lân cận" (liền kề) thuộc mặt trụ thứ hai*.

Hai đường sinh "lân cận" (liền kề) là hai đường sinh có chứa giao điểm "cạnh nhau", mà không có đường sinh thứ ba có chứa giao điểm xen giữa chúng.

Ví dụ 2 : Vẽ giao tuyến giữa mặt nón xiên và mặt trụ chiếu đứng.

Giải : Trường hợp này, ta biết ngay hình chiếu đứng của giao tuyến là cung tròn (phần chung của mặt trụ và mặt nón). Gắn cung tròn đó vào mặt nón để tìm hình chiếu bằng.

Đường sinh biên SA, trên hình chiếu đứng của mặt nón cắt mặt trụ tại hai điểm 1 và 2.

Đường sinh biên bên trái, trên hình chiếu bằng của mặt trụ cắt mặt nón tại hai điểm 3 và 4.

Hình chiếu bằng của hai điểm này là các điểm phân cách giữa phần thấy và phần khuất trên hình chiếu bằng của giao tuyến.

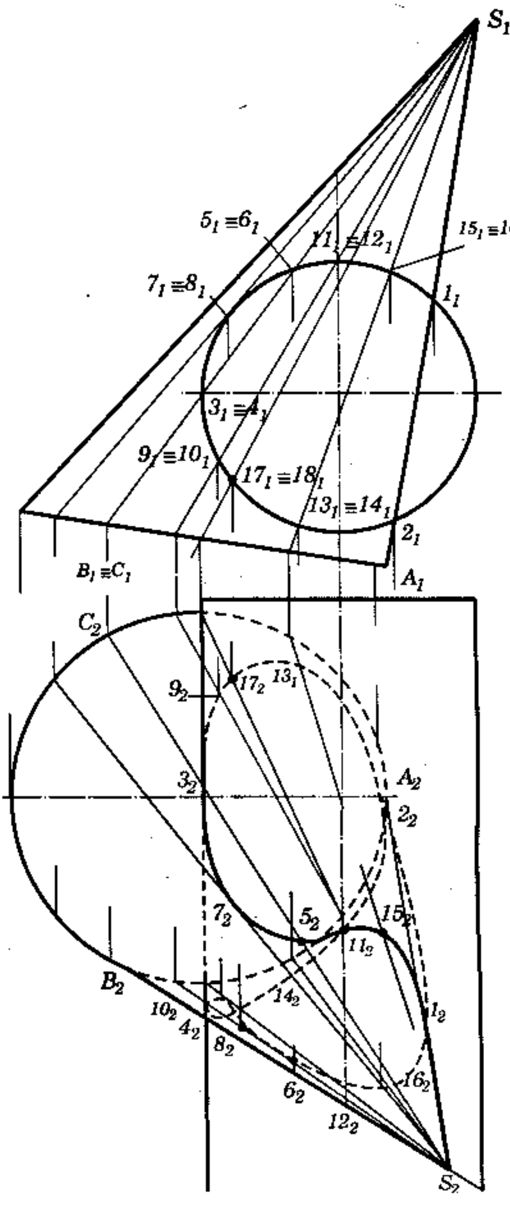
Khi tìm hai điểm 3, 4 ta tìm thêm được hai "điểm ăn theo" 5, 6.

Tìm hai điểm giới hạn 7, 8 : bằng cách vẽ hai đường sinh của mặt nón tiếp xúc với mặt trụ.

Tìm giao điểm đường sinh cao nhất của mặt trụ với mặt nón : ta được hai điểm 11 và 12.

Khi tìm hai điểm này, ta được hai "điểm ăn theo" 9 và 10.

Tìm một số điểm trung gian tại vùng còn "thưa điểm", ta được các điểm 13, 14, 15 và 16.



Hình 7.34

Việc nối các điểm đó, cũng không đơn giản. Phải tuân theo nguyên tắc nêu trên (hình 7.34).

Ta bắt đầu từ một điểm nào đó, và theo nguyên tắc trên ta có thứ tự nối các điểm như sau : Ví dụ bắt đầu từ điểm 1.16. 12. 6.8. 4.10-14.2.13.9.3.7.5.11.15.1.

Nối theo thứ tự đó, và uốn để cho ta một đường cong đều. Đồng thời chú ý xét thấy và khuất.

Ta dễ thấy chỉ có đoạn 3.7.5.11.15.1 là thấy; các phần còn lại đều khuất.

Giao tuyến là một đường cong ghềnh bậc bốn.

7.3.2. CẢ HAI MẶT ĐỀU KHÔNG PHẢI MẶT LĂNG TRỤ CHIẾU HOẶC MẶT TRỤ CHIẾU

Trường hợp này ta chưa biết ngay hình chiếu nào của giao tuyến. Để tìm giao tuyến giữa hai mặt đó, ta phải dùng mặt cắt phụ trợ. Nội dung phương pháp đó như sau :

1. Phương pháp mặt cắt phụ trợ

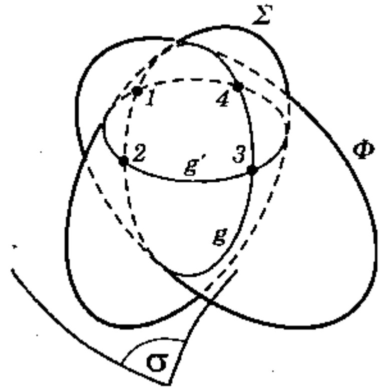
Giả sử cần tìm giao tuyến hai mặt Φ và Σ. Các bước tiến hành như sau :

- Dựng mặt phụ trợ σ (hình 7.35).

- Tìm giao tuyến g của mặt σ với mặt Φ : $g = \sigma \times \Phi$.

- Tìm giao tuyến g' của mặt σ với mặt Σ : $g' = \sigma \times \Sigma$.

- Tìm các giao điểm 1, 2, 3 và 4 của g và g' : $1, 2, 3, 4 = g \times g'$.



Hình 7.35

(Vì g và g' là những đường bậc hai, nên chúng có thể cắt nhau ở bốn điểm).

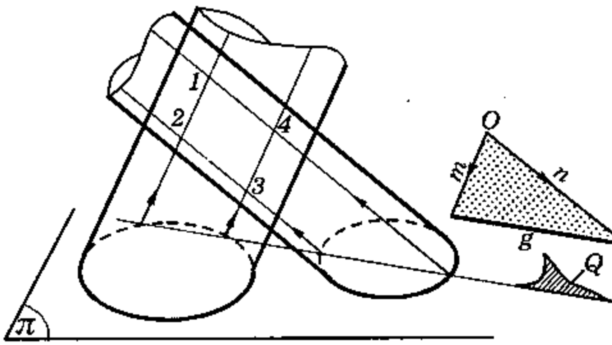
Các điểm 1, 2, 3, và 4 đó thuộc giao tuyến giữa hai mặt đã cho. Dùng nhiều mặt phụ trợ như vậy, ta sẽ tìm được nhiều điểm thuộc giao tuyến. Cuối cùng, nối chúng lại, ta sẽ có giao tuyến cần tìm.

2. Cách chọn mặt phụ trợ

Nói chung, các mặt phụ trợ cần chọn sao cho các giao tuyến phụ là những đường đơn giản, dễ vẽ, mà các đường đơn giản nhất chỉ có thể là đường thẳng và đường tròn.

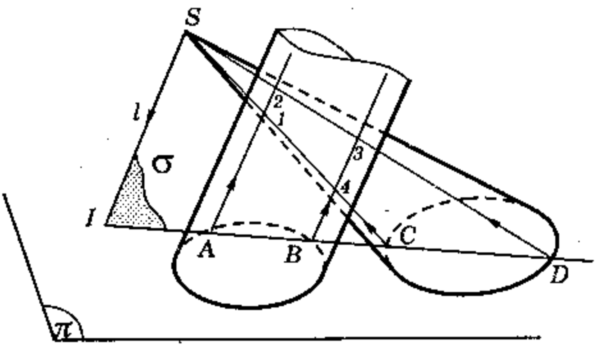
Trong những phần giao tuyến mặt phẳng với các mặt, ta đã nói đến cách chọn mặt phẳng phụ trợ. Trong phần này giao tuyến (của hai mặt) sẽ phức tạp hơn, nên việc chọn mặt phụ trợ (ta nói : mặt phụ trợ, mặt đó có thể là mặt phẳng, mà cũng có thể là mặt cong), lại càng là vấn đề không đơn giản.

- ***Hai mặt trụ :*** *Mặt phẳng phụ trợ chọn song song với đường sinh của cả hai mặt trụ*; để nó cắt cả hai mặt trụ đều theo các đường sinh thẳng. Trước hết, ta phải xác định hướng của các mặt phẳng phụ trợ đó, bằng cách qua một điểm bất kỳ, dựng hai đường thẳng m, n tương ứng song song với đường sinh của hai mặt trụ (hình 7.36). Mỗi mặt phẳng phụ trợ có thể cho ta bốn giao điểm : 1, 2. 3 và 4.



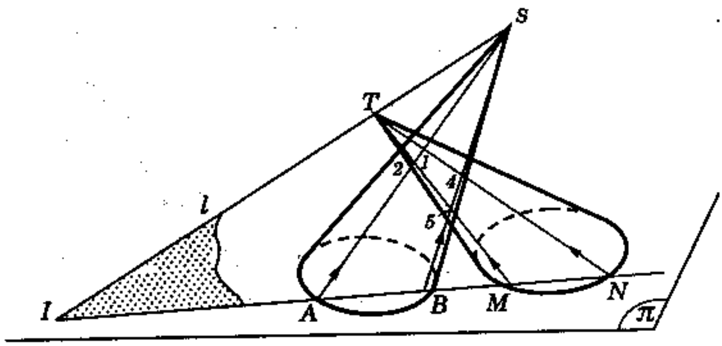
Hình 7.36

- ***Một mặt nón và một mặt trụ :*** *Mặt phẳng phụ trợ chọn đi qua đỉnh mặt nón và song song với đường sinh mặt trụ,* để nó cắt mặt nón và mặt trụ đều theo các đường sinh thẳng. Như vậy các mặt phẳng phụ trợ phải chứa một đường thẳng l đi qua đỉnh S mặt nón và song song với đường sinh của mặt trụ (hình 7.37). Mỗi mặt phẳng phụ trợ cũng có thể cho ta bốn giao điểm : 1, 2, 3 và 4.



Hình 7.37

- ***Hai mặt nón :*** *Mặt phẳng phụ đi qua hai đỉnh nón, để nó cắt cả hai mặt nón theo các đường sinh thẳng.* Như vậy, các mặt phẳng phụ trợ cũng phải chứa đường thẳng l đi qua hai đỉnh S và T của hai mặt nón (hình 7.38). Mỗi mặt phẳng phụ trợ cũng có thể cho ta bốn giao điểm : 1, 2, 3 và 4.



Hình 7.38

Ngoài ra, còn mặt cầu và mặt tròn xoay. Do đó, tuỳ từng trường hợp cụ thể, chọn mặt cắt phụ trợ sao cho hợp lý.

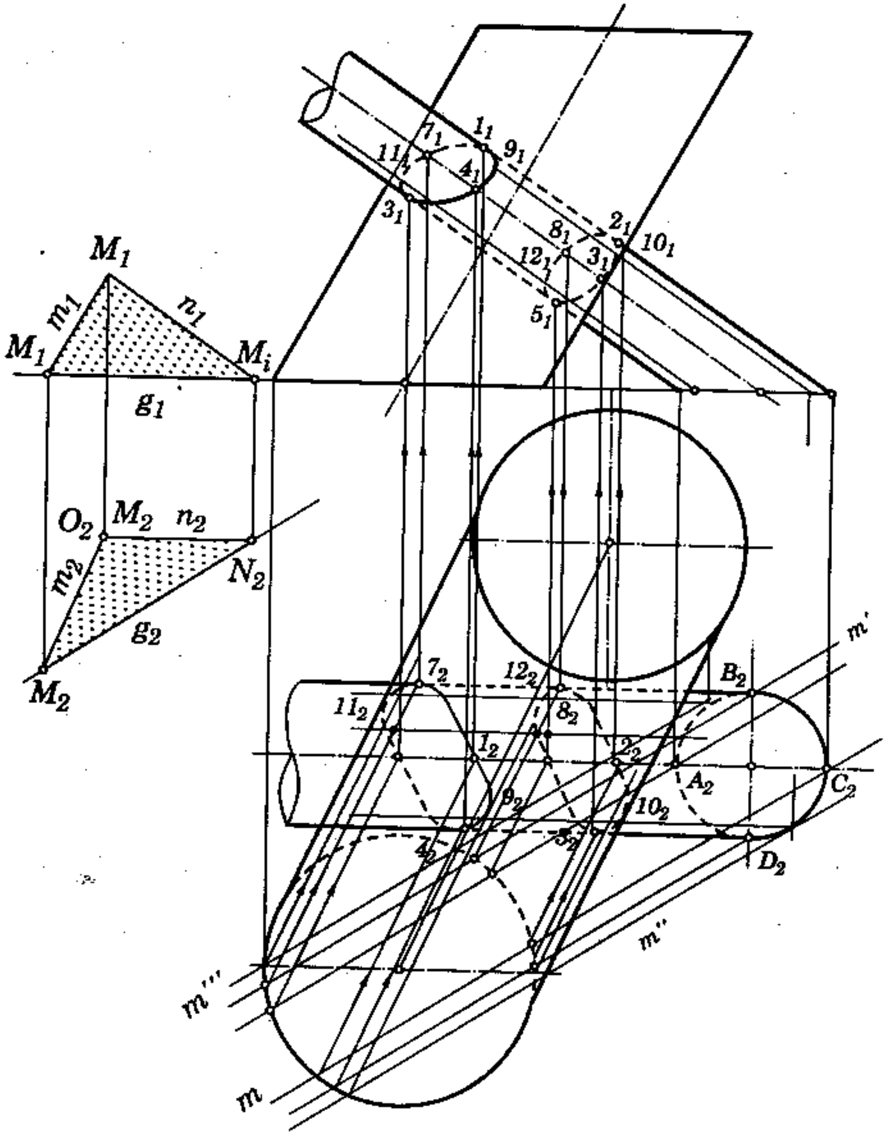
Trong phần giao tuyến mặt phẳng với mặt cong, ta có nói "dạng của giao tuyến". Trong phần này, giao tuyến nói chung là một đường cong ghềnh bậc bốn, nên không có những *"dạng" rõ ràng* biết trước. Vì vậy, sau khi tìm được các điểm thuộc giao tuyến, việc nối chúng cũng phức tạp hơn. Song, việc quan trọng đầu tiên là *"thứ tự nối"* các điểm. Ta nêu một *nguyên tắc sơ bộ* để thực hiện yêu cầu đó :

Nguyên tắc nối giao tuyến : *Ta chỉ có thể nối hai giao điểm với nhau, nếu hai giao điểm đó là những điểm thuộc hai đường sinh "liền kề" của mặt cong thứ nhất và cũng là hai điểm thuộc hai đường sinh "liền kề" của mặt cong thứ hai.* (Các đường sinh "liền kề" có chứa giao điểm mà không có đường sinh có chứa giao điểm nào khác xen giữa chúng).

Tất nhiên, đó mới chỉ là *"thứ tự nối"* các điểm. Nếu chỉ nối như vậy, thì giao tuyến sẽ là một đường *gãy khúc*, như vậy chưa chính xác. Nên phải tuỳ vị trí giữa các điểm đó mà *"uốn" giao tuyến* sao cho hợp lý.

Ví dụ 1 : Vẽ giao tuyến hai mặt trụ xiên có đáy cùng thuộc mặt phẳng hình chiếu bằng.

Giải : Trước hết, dựa vào cách chọn mặt phẳng phụ trợ nói trên, ta xác định hướng của các mặt phẳng phụ trợ đó. Các mặt phẳng phụ trợ trong trường hợp này phải song song với đường sinh của hai mặt trụ : Qua điểm M bất kỳ, vạch hai đường thẳng m và n, tương ứng song song với đường sinh của hai trụ. Mặt phẳng (m, n) cắt mặt phẳng đáy của hai trụ theo đường thẳng MN. Từ đó, các mặt phẳng phụ trợ sẽ chọn cũng cắt mặt phẳng đáy hai trụ theo các đường thẳng song song với đường thẳng MN đó (hình 7.39).



Hình 7.39

Trước hết, tìm giao điểm hai đường sinh biên trên hình chiếu đứng của một mặt trụ với mặt trụ kia (mặt phẳng phụ trợ có viết bằng là m), ta được bốn giao điểm 1, 2 và 3, 4. Tìm giao điểm của hai đường sinh biên dưới hình chiếu bằng của mặt trụ nhỏ (có hình chiếu đứng trùng với đường tâm của mặt trụ đó) (mặt phẳng phụ trợ có viết bằng là m'), ta được bốn giao điểm là 5, 6 và 7, 8.

Tìm điểm giới hạn : Dựng một tiếp tuyến với đáy mặt trụ nhỏ. Với mặt phẳng này (có viết bằng là m"), ta được hai giao điểm 9 và 10. Tương tự, với mặt phẳng tiếp xúc thứ hai (có viết bằng là m"), ta được hai giao điểm nữa là 11 và 12.

Trường hợp này, hai trụ cắt nhau hoàn toàn, nên giao tuyến là hai đường cong (hai phần của một đường bậc bốn ghềnh).

Khi nối giao tuyến, kết hợp xét thấy và khuất trên các hình chiếu.

Ví dụ 2 : Vẽ giao tuyến của một mặt trụ xiên và một mặt nón xiên, có đỉnh là S.

Giải : Cũng dựa vào cách chọn mặt phẳng phụ trợ nói trên; trường hợp này, các mặt phẳng phụ trợ phải đi qua đỉnh S của mặt nón và song song với đường sinh của trụ. Tức là, các mặt phẳng đó phải chứa đường thẳng l, đi qua đỉnh S và song song với đường sinh của trụ.

Đường thẳng l cắt mặt phẳng đáy trụ và nón tại điểm I. Từ đó, các mặt phẳng phụ trợ phải cắt mặt phẳng đáy của mặt trụ và mặt nón theo các đường thẳng đi qua điểm I đó.

Trước hết, ta tìm giao điểm đường sinh biên bên trái trên hình chiếu đứng của mặt trụ với mặt nón. Dựng mặt phẳng phụ trợ qua đường sinh đó (có viết bằng là m). Mặt phẳng đó cắt nón theo hai đường sinh SE và SF. Hai đường sinh này cắt đường sinh biên ở hai điểm 1 và 2.

Tìm giao điểm đường sinh biên b dưới hình chiếu bằng của mặt trụ với mặt nón. Dựng mặt phẳng phụ trợ qua nó, (có viết bằng là m') ta tìm được hai điểm 3 và 4. Khi tìm các điểm 3, 4 ta tìm thêm được hai "điểm ăn theo" 11, 12.

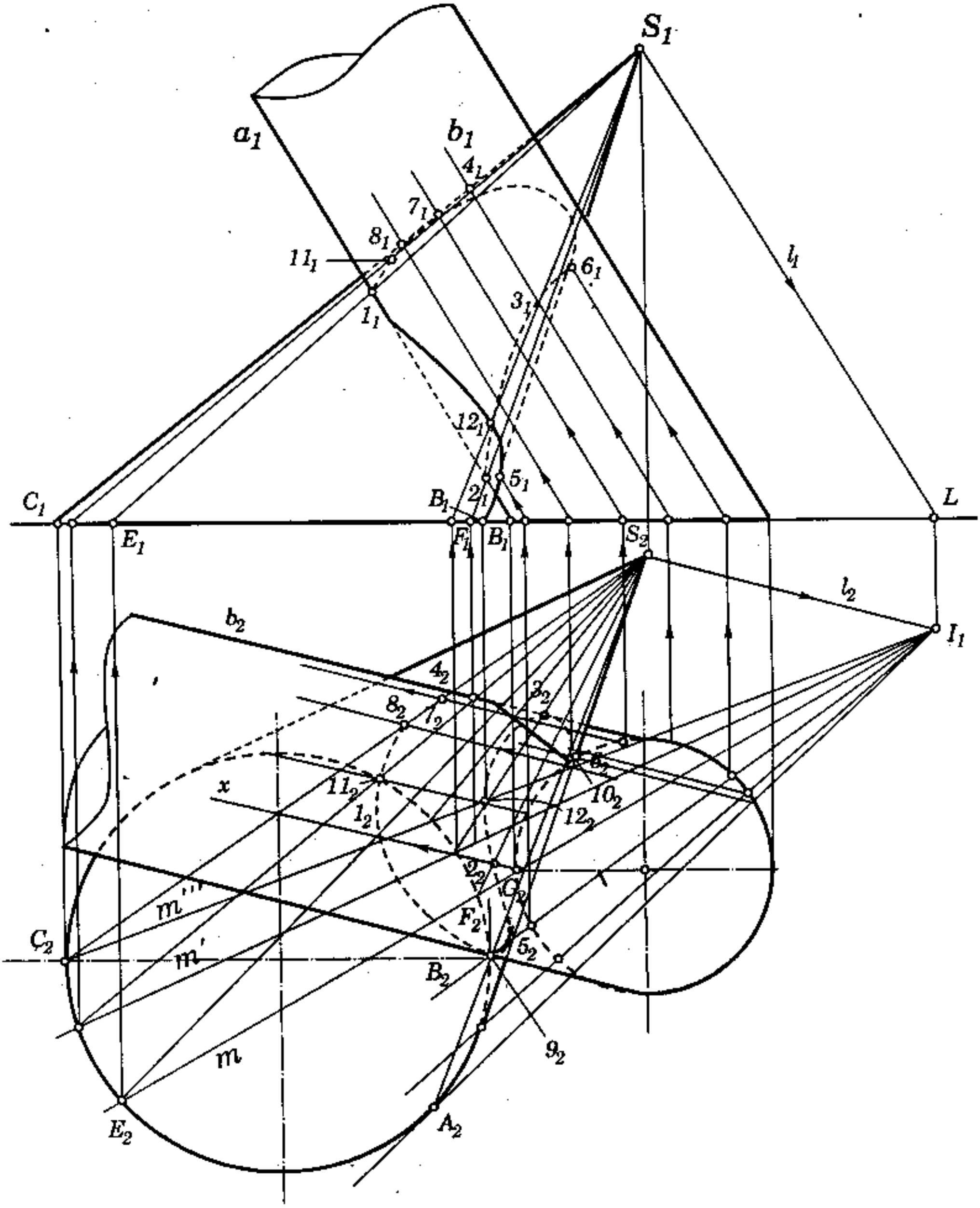
Tìm giao điểm các đường sinh biên trên hình chiếu đứng của mặt nón, đường SB (mặt phẳng có viết bằng là m") ta có hai giao điểm 5, 6; đường SC (mặt phẳng có vết bằng là m"') ta có hai giao điểm 7, 8.

Tìm các điểm giới hạn : Tìm giao điểm đường sinh SA của mặt nón với mặt trụ (vạch đường thẳng đi qua điểm I_2, tiếp xúc với một đường cong đáy nón tại điểm A), cho hai giao điểm 9 và 10.

Các mặt phẳng phụ trợ khác, nói chung sẽ cắt mặt trụ theo hai đường sinh, và cũng cắt mặt nón theo hai đường sinh, nên với mỗi mặt phẳng phụ trợ sẽ tìm được bốn giao điểm.

Tương tự, dùng các mặt phẳng phụ trợ như vậy, ta sẽ tìm được nhiều điểm thuộc giao tuyến. Cuối cùng, nối chúng lại, ta sẽ có giao tuyến. Khi nối cũng kết hợp xét thấy và khuất.

Trường hợp này, hai mặt cắt nhau không hoàn toàn, nên giao tuyến là một đường cong ghềnh (hình 7.40).



Hình 7.40

Ví dụ 3 : Vẽ giao tuyến hai mặt nón xiên, có đỉnh là S và T.

Giải : Trường hợp này, các mặt phẳng cắt phụ trợ phải đi qua hai đỉnh S và T của hai mặt nón; tức là các mặt phẳng đó phải chứa đường thẳng ST.

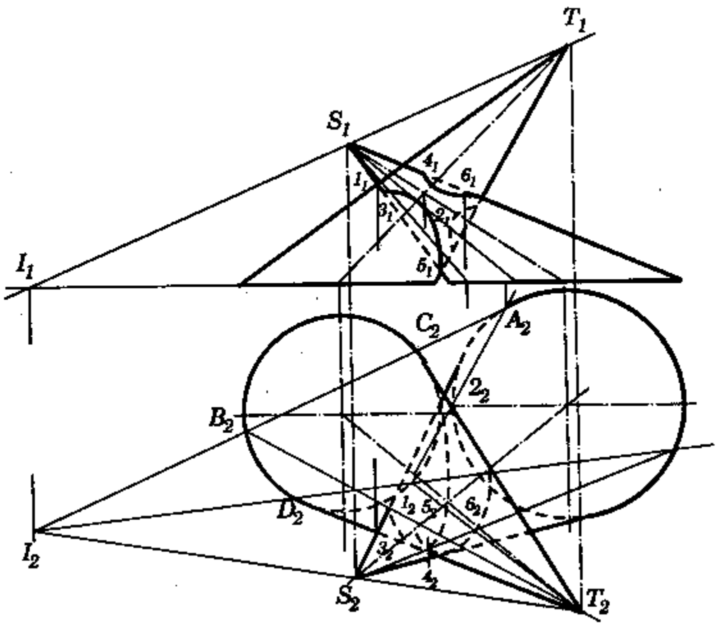
Đường thẳng ST cắt mặt phẳng các đường chuẩn (đáy) của hai mặt nón tại điểm I.

Như vậy, các mặt phẳng phụ trợ phải cắt mặt phẳng đáy hai nón theo các đường thẳng đi qua I.

Tìm giao điểm đường sinh SA (dựng mặt phẳng tiếp xúc với đáy mặt nón đỉnh S), cho ta hai giao điểm 1 và 2. Tìm giao điểm của đường sinh biên TD, cho ta hai giao điểm 3, 4, và ta được hai "điểm ăn theo" 5 và 6.

Tương tự, với các mặt phẳng phụ trợ như vậy, ta sẽ tìm được nhiều điểm thuộc giao tuyến.

Trường hợp này, hai mặt nón cắt nhau không hoàn toàn, nên giao tuyến là một đường cong ghềnh (bậc bốn) (hình 7.41).



Hình 7.41

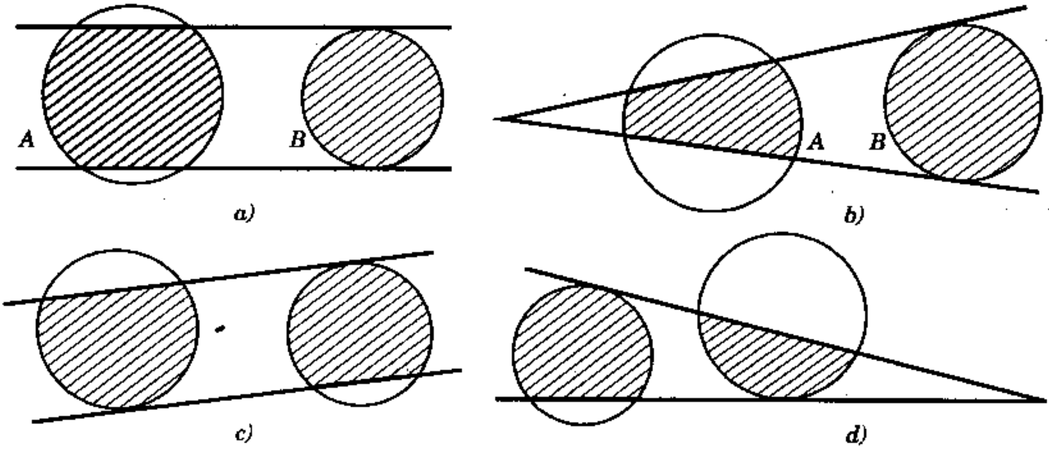
Chú ý : Khi vẽ giao tuyến hai mặt trụ và nón, muốn biết hai mặt cắt nhau hoàn toàn hay không hoàn toàn, ta dựa vào vị trí giới hạn của các giao tuyến (vết) của các mặt phẳng phụ trợ trên mặt phẳng hai đáy mặt trụ và mặt nón với hai đường cong của hai đáy đó.

Cắt nhau hoàn toàn là, ít nhất một trong hai mặt trụ (hoặc mặt nón) có tất cả các đường sinh đều bị mặt kia cắt.

Cắt nhau không hoàn toàn là, trong cả hai mặt (trụ hoặc nón) không có mặt nào có tất cả các đường sinh bị mặt kia cắt.

Trên hình 7.42, ta có các trường hợp sau :

Hình 7.42a và 7.42c là giao tuyến hai mặt trụ. Trường hợp này, vì các mặt phẳng phụ trợ song song với nhau (song song với đường sinh của hai mặt trụ), nên chúng cắt mặt phẳng đáy của hai mặt trụ theo các đường thẳng song song với nhau. Ví dụ, hình 7.39.



Hình 7.42

Hình 7.42b và 7.42d là giao tuyến hai mặt, trong đó có ít nhất một mặt nón, vì các mặt phẳng phụ trợ phải chứa một đường thẳng đi qua đỉnh mặt nón, tức là các mặt phẳng phụ trợ đó không song song với nhau, nên các giao tuyến (vết) của các mặt phẳng phụ trợ đó với mặt phẳng đáy của hai mặt đã cho cũng không song song, mà đồng quy. Ví dụ, hình 7.40 và 7.41.

Hình 7.42a, và 7.42b là hai mặt *cắt nhau hoàn toàn. Giao tuyến là hai đường cong*. Cả hai trường hợp này, mặt có đáy B bị mặt có đáy A cắt hoàn toàn. Tức là mặt có đáy B, tất cả các đường sinh đều bị cắt. Ví dụ, hình 7.39.

Hình 7.42c, và 7.42d là hai mặt *cắt nhau không hoàn toàn. Giao tuyến là một đường cong*. Trường hợp này, cả hai mặt, không có mặt nào bị cắt hoàn toàn. Ví dụ, hình 7.40 và 7.41.

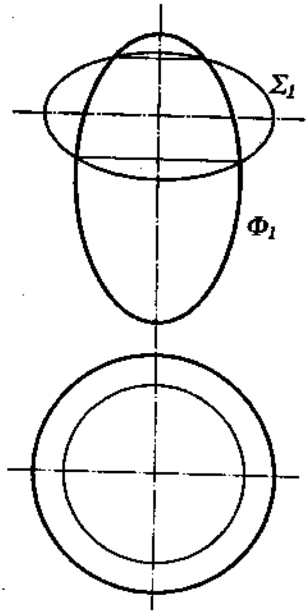
7.3.3. GIAO TUYẾN HAI MẶT TRÒN XOAY

1. Hai mặt tròn xoay có hai trục trùng nhau

Nếu hai mặt tròn xoay có trục trùng nhau, thì dễ thấy giao tuyến của chúng là các đường tròn (các vĩ tuyến).

Hình 7.43, hai mặt tròn xoay Φ và Σ có trục xoay trùng nhau, nên chúng cắt nhau theo hai vĩ tuyến (đường tròn) đều thuộc mặt phẳng bằng.

Trường hợp này, được ứng dụng để chọn mặt cầu làm mặt cắt phụ trợ, để tìm giao tuyến hai mặt tròn xoay sau này.



Hình 7.43

2. Hai mặt tròn xoay có hai trục song song

Để tìm giao tuyến giữa hai mặt tròn xoay có hai trục song song, ta chọn các mặt phẳng phụ trợ vuông góc với hai trục xoay đó. Các mặt phẳng phụ trợ như vậy, sẽ cắt các mặt tròn xoay theo các đường tròn (vĩ tuyến).

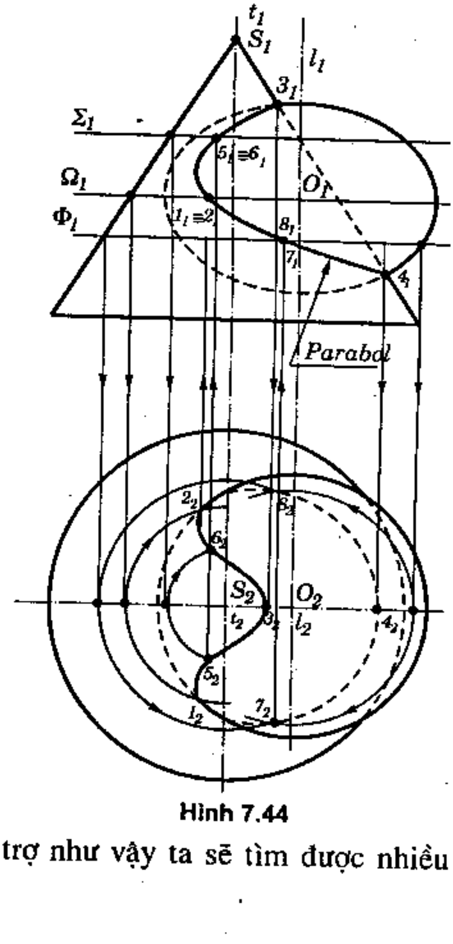
Ví dụ : Tìm giao tuyến giữa mặt nón tròn xoay và mặt ellipxôit tròn xoay.

Giải : Hai trục xoay đều là đường thẳng chiếu bằng, nên ta chọn các mặt phẳng phụ trợ là các mặt phẳng bằng. Các mặt phẳng phụ trợ như vậy, sẽ cắt hai mặt tròn xoay theo các đường tròn, mà hình chiếu bằng của các đường tròn đó cũng là các đường tròn.

Mặt phẳng phụ trợ Ω (có hình chiếu đứng là đường thẳng Ω_1) chứa xích đạo của mặt ellipxôit, cho ta hai giao điểm 1 và 2.

Hai hình chiếu bằng 1_2, 2_2 là ranh giới giữa phần thấy và phần khuất của giao tuyến trên hình chiếu bằng (hình 7.44).

Đường sinh biên trên hình chiếu đứng của mặt nón cắt ellipxôit tại hai điểm 3, 4.



Hình 7.44

Tương tự, dùng các mặt phẳng phụ trợ như vậy ta sẽ tìm được nhiều điểm thuộc giao tuyến.

Cuối cùng nối chúng lại, ta cũng có giao tuyến là một đường cong ghềnh bậc bốn.

Hình chiếu đứng của giao tuyến là một parabôn (đúng hơn là hai parabôn trùng nhau). Điều này sẽ được giải thích trong một định lý ở mục 7.3.5 (hai mặt bậc hai có chung mặt phẳng đối xứng).

3. Hai mặt tròn xoay có hai trục cắt nhau - Mặt cầu phụ trợ

Ta đã biết, nếu hai mặt tròn xoay có hai trục trùng nhau, thì giao tuyến của chúng là những đường tròn (vĩ tuyến), nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục xoay.

Mặt khác, mặt cầu lại là một mặt tròn xoay, mà mọi đường kính của nó đều có thể coi là trục xoay. Vì vậy, nếu một mặt cầu có tâm trên một mặt tròn xoay, thì mặt cầu và mặt tròn xoay đó sẽ cắt nhau theo các đường tròn (vĩ tuyến).

Dựa vào nhận xét đó, nếu ta có hai mặt tròn xoay có hai trục cắt nhau, thì ta có thể dùng mặt cầu, có tâm là giao điểm của hai trục xoay đó, làm mặt cắt phụ trợ để tìm giao tuyến hai mặt tròn xoay đó. Khi đó, mặt cầu sẽ cắt cả hai mặt tròn xoay đó theo những đường tròn (vĩ tuyến của mỗi mặt tròn xoay đó).

Ví dụ 1 : Vẽ giao tuyến của mặt tròn xoay trục t, với mặt nón tròn xoay trục l. Hai mặt tròn xoay đó có hai trục t và l cắt nhau tại điểm O.

Giải : Ta lấy một nửa của mặt tròn xoay trục t.

Trước hết ta thấy, các kinh tuyến chính của hai mặt tròn xoay, cùng thuộc một mặt phẳng, nên chúng cắt nhau, cho ta hai giao điểm 1 và 2.

Dùng các mặt cầu phụ trợ, có tâm là giao điểm O của trục hai mặt tròn xoay đó.

Vì hai trục t và l của hai mặt tròn xoay đều song song với mặt phẳng hình chiếu đứng, nên các đường tròn giao tuyến của các mặt cầu phụ trợ với cả hai mặt tròn xoay đều thuộc các mặt phẳng chiếu đứng. Tức là, các đường tròn đó đều có hình chiếu đứng là các đoạn thẳng.

Ví dụ, mặt cầu có bán kính R_1 cắt mặt nón tròn xoay trục l theo đường tròn, có hình chiếu đứng là đoạn thẳng A_1B_1 ; và cắt mặt tròn xoay trục t theo đường tròn, có bán kính là đoạn thẳng E_1F_1. Hai đoạn thẳng đó cắt nhau tại hai điểm trùng nhau : $3_1 \equiv 4_1$ (hình 7.45).

Tiếp tục dùng các mặt cầu phụ trợ như vậy, ta sẽ tìm được nhiều điểm thuộc giao tuyến.

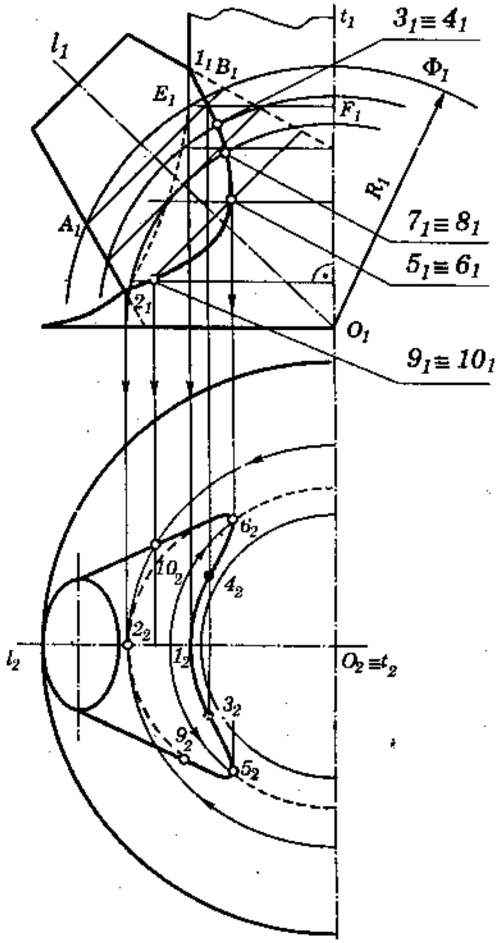
Cuối cùng, nối chúng lại, ta sẽ có giao tuyến.

Để tìm hình chiếu bằng của giao tuyến, ta gắn các điểm thuộc giao tuyến vào các đường tròn (vĩ tuyến) thuộc mặt tròn xoay trục t. Vì hình chiếu bằng của các đường tròn này cũng là các đường tròn.

Trường hợp này, giao tuyến cũng là một đường cong ghềnh.

Ví dụ 2 : Vẽ giao tuyến giữa mặt nón tròn xoay, có đỉnh là S trục là đường thẳng t, và mặt trụ tròn xoay trục là đường thẳng l (l và t đều là đường mặt).

Giải : Trước hết ta cũng thấy, các đường sinh biên trên hình chiếu đứng của mặt nón và trụ cùng thuộc một mặt phẳng, nên chúng cắt nhau tại bốn điểm 1, 2, 3 và 4 thuộc giao tuyến.

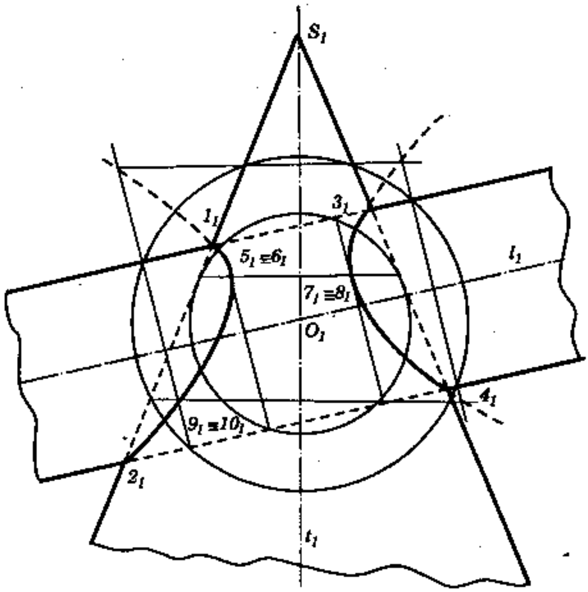


Hình 7.45

Mặt nón và mặt trụ đều có trục xoay là đường thẳng song song với mặt phẳng hình chiếu đứng, nên các đường tròn giao tuyến của các mặt cầu (tâm O) phụ trợ với mặt nón và mặt trụ đều thuộc mặt phẳng chiếu đứng. Nghĩa là hình chiếu đứng của các đường tròn đó sẽ là các đoạn thẳng.

Để tìm các điểm khác, ta dùng các mặt cầu phụ trợ có tâm là giao điểm O của hai trục mặt nón và mặt trụ.

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất là mặt cầu nội tiếp mặt nón và cắt mặt trụ theo hai đường tròn. Với mặt cầu phụ trợ này, ta tìm được hai giao điểm trên hình chiếu đứng của giao tuyến (trong không gian là bốn điểm mà hình chiếu đứng là đôi một trùng nhau) : $5_1 \equiv 6_1$ và $7_1 \equiv 8_1$.



Hình 7.46

Tương tự, dùng các mặt cầu phụ trợ khác, ta sẽ tìm được các điểm khác nữa thuộc giao tuyến (hình 7.46).

Cuối cùng nối các điểm đó lại, ta sẽ có hình chiếu đứng của giao tuyến là một đường hypecbôn (thực ra là hai đường hypecbôn trùng nhau : một đường thấy và một đường khuất).

Ta có thể tìm thêm các điểm tuy không thuộc giao tuyến của mặt nón và trụ, nhưng nó thuộc đường hypecbôn (của giao tuyến).

Sau khi có hình chiếu đứng của giao tuyến, ta gắn giao tuyến đó vào các đường sinh hoặc các vĩ tuyến của mặt nón, để tìm hình chiếu bằng (Trên hình này không vẽ hình chiếu bằng).

4. Giao tuyến của mặt tròn xoay với một vài mặt có họ đường sinh tròn

Các trường hợp tìm giao tuyến hai mặt tròn xoay với mặt cầu phụ trợ trên đây, các giao tuyến phụ đều là các vĩ tuyến chung của hai mặt tròn xoay. Còn trường hợp này, các giao tuyến phụ không hoàn toàn là các vĩ tuyến của hai mặt tròn xoay.

Các trường hợp trên, các mặt cầu phụ trợ đều có tâm cố định, đó là giao điểm hai trục xoay của hai mặt đó. Còn ở đây, tâm các mặt cầu phụ trợ không cố định và đương nhiên không phải là giao điểm hai trục xoay.

Ví dụ : Tìm giao tuyến giữa mặt nón tròn xoay với mặt xuyến. Trục của mặt nón thuộc mặt phẳng đường tròn quỹ tích tâm các đường tròn sinh của mặt xuyến.

Giải : Trước hết ta cũng thấy, hai đường sinh biên trên hình chiếu đứng của mặt nón, và đường tròn biên trên hình chiếu đứng của mặt xuyến, vì cùng thuộc một mặt phẳng, nên chúng cắt nhau tại hai điểm 1_1 và 2_1. Đó là những điểm thuộc giao tuyến.

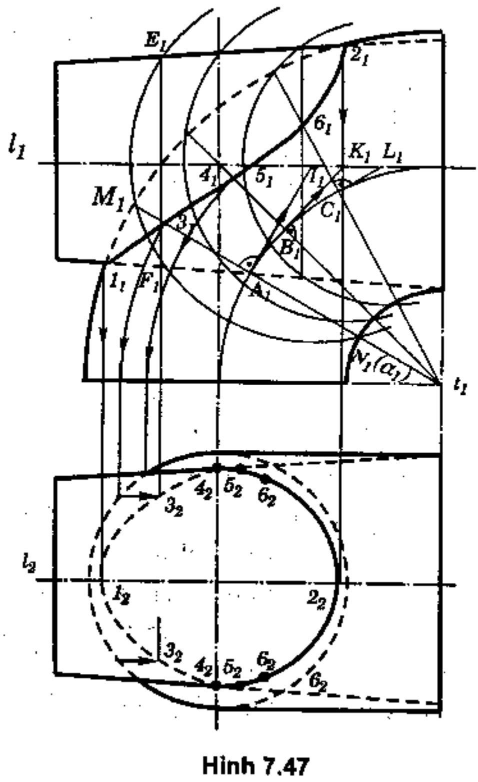
Mặt khác, ta thấy mặt xuyến có một họ các đường tròn sinh, đó là các kinh tuyến của mặt xuyến.

Nếu ta dựng một mặt cầu, chứa một (đường tròn) kinh tuyến k của mặt xuyến và mặt cầu đó lại có tâm trên trục mặt nón, thì mặt cầu này sẽ cắt mặt nón theo một vĩ tuyến v. Như vậy, vĩ tuyến v và kinh tuyến k, vì cùng thuộc một mặt cầu nên chúng cắt nhau. Các giao điểm đó đương nhiên thuộc giao tuyến của mặt nón và mặt xuyến đã cho.

Ví dụ ta lấy một kinh tuyến của mặt xuyến mà hình chiếu đứng là đoạn thẳng M_1N_1. Qua trung điểm A_1 của M_1N_1 (mà trong không gian là tâm A của đường tròn đường kính MN) ta dựng đường thẳng trung trực của đoạn $M_1N_1A_1I_1 \perp M_1N_1$ (I thuộc trục mặt nón).

Ta dựng mặt cầu tâm I, bán kính IM. Mặt cầu này cắt mặt nón theo đường tròn, mà hình chiếu đứng là đoạn thẳng E_1F_1. Hai đường thẳng M_1N_1 và E_1F_1 cắt nhau tại điểm (trong không gian là hai điểm) $3_1 \equiv 4_1$ (hình 7.47).

Tương tự, dùng các mặt cầu khác, ta sẽ tìm được nhiều điểm thuộc giao tuyến.



Hình 7.47

Cuối cùng nối chúng lại, ta có giao tuyến là một đường cong ghềnh bậc tám, mà hình chiếu đứng của nó là một nhánh của đường cong đó (nhánh còn lại thuộc phần còn lại của mặt nón và mặt xuyến).

Khi đã có hình chiếu đứng của giao tuyến, ta gắn giao tuyến đó vào mặt xuyến để tìm hình chiếu bằng.

Ngoài ra, nếu dùng mặt cắt phụ trợ kết hợp với phép chiếu phụ, ta có thể tìm giao tuyến một số mặt, mà nếu dùng các phương pháp khác thì cũng không đơn giản.

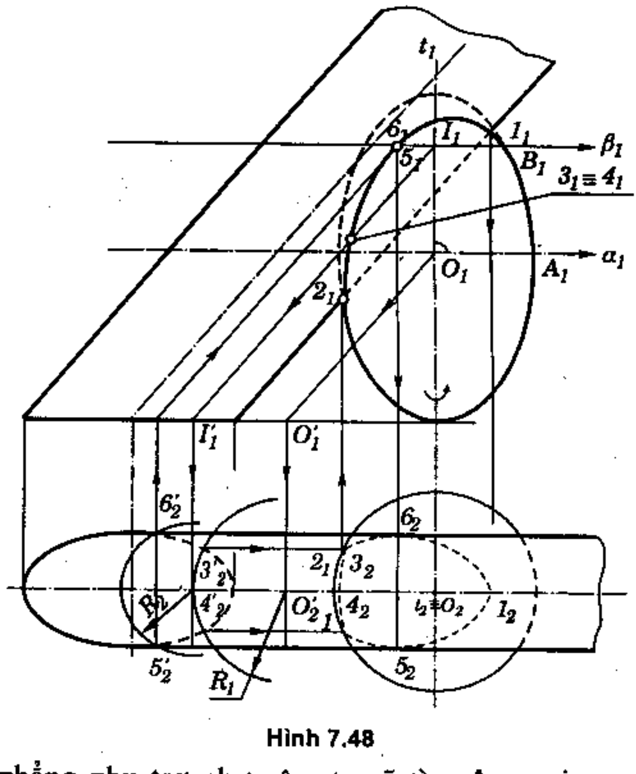
Ví dụ : Tìm giao tuyến mặt trụ xiên có đường chuẩn là một ellip với một mặt ellipxôit tròn xoay, có trục là đường thẳng chiếu bằng.

Giải : Trước hết ta thấy, các đường bao ngoài trên hình chiếu đứng của hai mặt cùng thuộc một mặt phẳng, nên chúng cắt nhau cho ta hai giao điểm 1 và 2.

Dùng mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng bằng α chứa đường xích đạo của ellipxôit. Mặt phẳng này cắt ellipxôit theo đường xích đạo, có hình chiếu bằng là đường thấy ngoài trên hình chiếu bằng; và cắt mặt trụ theo một ellip bằng ellip đáy. Ta chiếu cả hai giao tuyến phụ đó theo hướng đường sinh mặt trụ và mặt phẳng hình chiếu là mặt phẳng đáy trụ. Tại đây, ta tìm được hai giao điểm là $3'_2$ và $4'_2$. Đưa trở về vị trí ban đầu, ta có hai giao điểm 3 và 4.

Tương tự, dùng mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng bằng β. Mặt phẳng đó cắt mặt trụ theo một ellip e bằng ellip chuẩn và cắt mặt ellipxôit theo một đường tròn v.

Ta lại chiếu hai giao tuyến phụ đó theo hướng đường sinh mặt trụ, mặt phẳng hình chiếu là mặt phẳng đáy trụ thì : ellip e có hình chiếu phụ là ellip đáy trụ e'_1 và đường tròn v có hình chiếu phụ là v'_1, e'_1 và v'_1 cắt nhau tại hai điểm $5'_2$ và $6'_2$. Đưa trở lại vị trí ban đầu ta có hai giao điểm 5_1 và 6_1 (hình 7.48).



Hình 7.48

Tiếp tục dùng các mặt phẳng phụ trợ như vậy, ta sẽ tìm được giao tuyến của hai mặt đã cho.

7.3.4. MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT VỀ GIAO TUYẾN HAI MẶT BẬC HAI

Nói chung hai mặt bậc hai cắt nhau theo một đường bậc bốn (đường trùng phương ghềnh). Trong một số trường hợp đặc biệt chúng cắt nhau theo hai đường bậc hai.

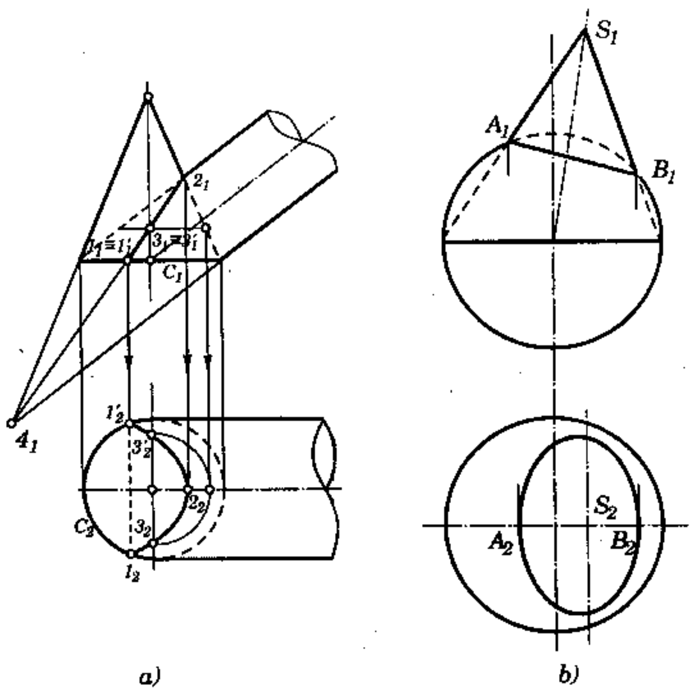
Cũng như trong đại số, một phương trình bậc bốn, trong một số trường hợp đặc biệt, có thể phân tích thành hai phương trình bậc hai. Những phương trình như vậy, cũng gọi là phương trình trùng phương.

Sau đây là một số trường hợp đó, được nêu trong một vài định lý. Ta thừa nhận và không chứng minh.

Định lý 1. *Nếu hai mặt bậc hai đã cắt nhau theo một đường bậc hai, thì chúng còn cắt nhau theo một đường bậc hai nữa.*

Ta dễ thấy điều này, vì hai mặt bậc hai cắt nhau theo một đường bậc bốn. Nếu đã có giao tuyến là một đường bâc hai, thì còn phải có một đường bậc hai nữa, (để thành một đường bậc bốn).

Ví dụ : hình 7.49a, mặt nón và mặt trụ đã có chung một đường tròn đáy là một đường bậc hai c, thì theo định lý trên, chúng còn cắt nhau theo một đường bậc hai nữa là một ellip có hình chiếu đứng là đoạn thẳng $2_1 4_1$.



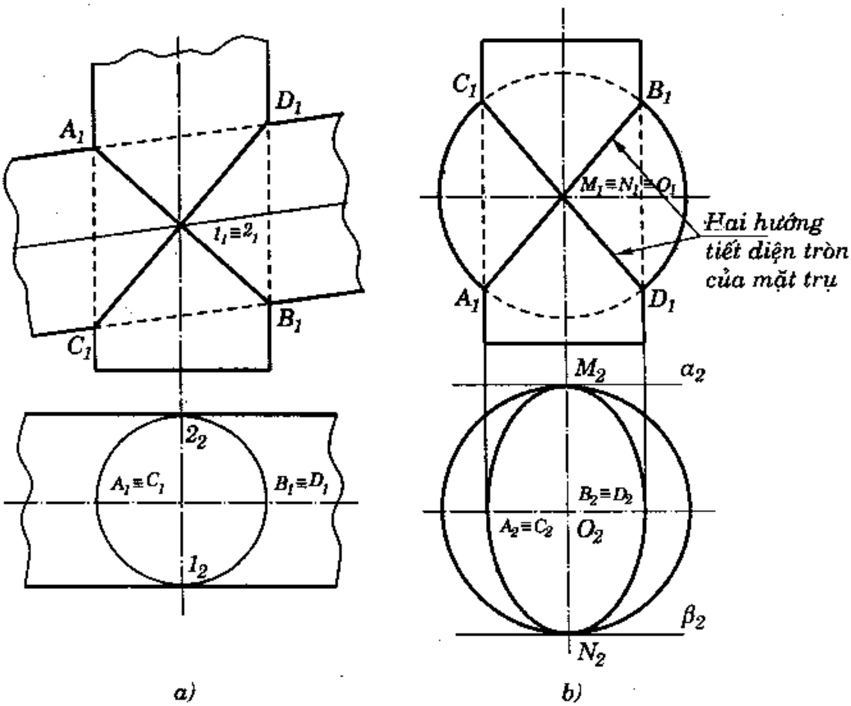
Hình 7.49

Hình 7.49b, mặt nón và mặt cầu đã có chung một đường tròn xích đạo của mặt cầu là một đường bậc hai, thì theo định lý trên, chúng còn cắt nhau theo một đường bậc hai nữa, là đường tròn mà hình chiếu đứng là đoạn thẳng A_1B_1.

Định lý 2. *Nếu hai mặt bậc hai tiếp xúc với nhau ở hai điểm (mà hai mặt phẳng tiếp xúc chung tại hai điểm đó không trùng nhau) thì chúng sẽ cắt nhau theo hai đường bậc hai, đi qua hai điểm tiếp xúc chung đó.*

Hình 7.50a, hai mặt trụ tiếp xúc với nhau ở hai điểm 1 và 2. Mặt phẳng tiếp xúc chung tại hai điểm đó không trùng nhau, nên theo định lý trên, hai mặt đó cắt nhau theo hai đường bậc hai (là hai đường ellip) đi qua hai điểm 1 và 2 đó, mà hình chiếu đứng của hai ellip đó là A_1B_1 và C_1D_1.

Hình 7.50b, mặt trụ elliptic và mặt cầu tiếp xúc với nhau ở hai điểm M và N, nên theo định lý trên, hai mặt đó cũng cắt nhau theo hai đường bâc hai (hai đường tròn) đi qua hai điểm M và N đó. Mà hình chiếu đứng của hai đường tròn đó là A_1B_1 và C_1D_1 (Đó là hai hướng tiết diện tròn của mặt trụ).



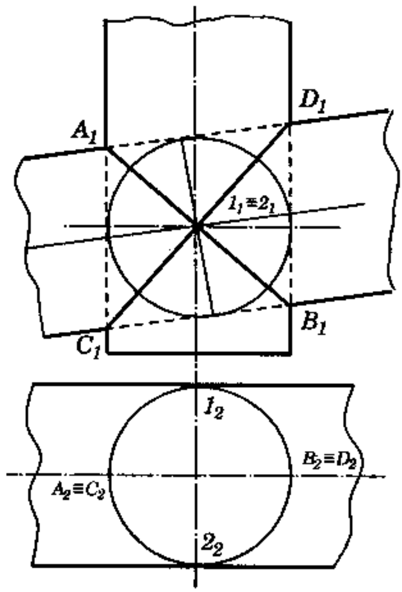
Hình 7.50

Định lý 3. *Nếu hai mặt bậc hai tiếp xúc với nhau ở ba điểm (mà các mặt phẳng tiếp xúc chung tại ba điểm đó không trùng nhau), thì chúng sẽ tiếp xúc với nhau theo một đường bậc hai đi qua ba điểm đó.*

Từ định lý này ta dễ thấy, hình chiếu song song (hoặc xuyên tâm) của một mặt bậc hai lên một mặt phẳng hình chiếu đều có đường bao là một đường bậc hai.

Định lý 4. *Nếu hai mặt bậc hai cùng nội tiếp (hoặc cùng ngoại tiếp) một mặt bậc hai thứ ba, thì chúng sẽ cắt nhau theo hai đường bậc hai, đi qua hai giao điểm của hai đường tiếp xúc.*

Hình 7.51, hai mặt trụ cùng ngoại tiếp một mặt cầu; Hai đường tiếp xúc chung của chúng cắt nhau tại hai điểm 1, 2; nên theo định lý trên, chúng cắt nhau theo hai đường bậc hai (hai ellip) đi qua hai giao điểm 1 và 2 của hai đường tiếp xúc giữa mặt cầu với mỗi mặt trụ.



Hình 7.51

7.3.5. GIAO TUYẾN HAI MẶT BẬC HAI CÓ CHUNG MẶT PHẲNG ĐỐI XỨNG

Ta đã biết, hai mặt bậc hai nói chung cắt nhau theo một đường bậc bốn ghềnh.

Nếu hai mặt bậc hai lại có chung một mặt phẳng đối xứng, thì đương nhiên giao tuyến của chúng cũng có chung mặt phẳng đối xứng đó.

Do đó, khi chiếu giao tuyến đó lên mặt phẳng đối xứng chung (hoặc mặt phẳng song song với mặt phẳng đối xứng chung), ta sẽ được ***"một đường kép"***. Vì mỗi điểm thuộc giao tuyến đó đều là các "điểm kép" : một điểm thấy trùng với một điểm khuất.

Vì vậy ta có định lý về trường hợp này như sau.

Định lý. *Nếu hai mặt bậc hai có mặt phẳng đối xứng chung, thì hình chiếu của giao tuyến giữa chúng lên mặt phẳng đối xứng chung (hoặc mặt* *phẳng song song với mặt phẳng đối xứng chung) đó là một đường bậc hai (thật ra là hai đường bậc hai trùng nhau : một đường thấy, và một đường khuất).*

Nếu hai mặt bậc hai đó có :

- Một họ tiết diện đồng dạng, thì hình chiếu của giao tuyến đó sẽ là một đường parabôn.

- Hai họ tiết diện đồng dạng, thì hình chiếu của giao tuyến đó sẽ là một đường hypecbôn.

- Không có họ tiết diện đồng dạng nào, thì hình chiếu của giao tuyến đó sẽ là một đường ellip.

Từ định lý trên ta thấy, các mặt trong các hình 7.44; 7.45; 7.46; 7.47; 7.48; 7.49; 7.50 và 7.51 đều có một mặt phẳng đối xứng chung, là mặt phẳng song song với mặt phẳng hình chiếu đứng :

Trong đó các mặt bậc hai trên hình 7.44 có một họ tiết diện đồng dạng, nên hình chiếu của giao tuyến giữa chúng lên mặt phẳng song song với mặt phẳng đối xứng đó là một đường parabôn.

Các mặt trên hình 7.46 có hai họ tiết diện đồng dạng, nên hình chiếu của giao tuyến giữa chúng là một đường hypecbôn.

Các mặt trên các hình 7.49, 7.50 và 7.51 cũng có hai họ tiết diện đồng dạng, nên hình chiếu của giao tuyến giữa chúng lên mặt phẳng song song với mặt phẳng đối xứng là hai đường thẳng (hai đường thẳng cắt nhau là trường hợp giới hạn của đường hypecbôn).

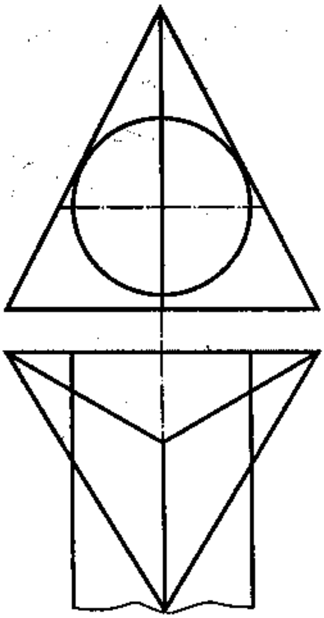
Các mặt trên hình 7.48, không có họ tiết diện đồng dạng nào, nên hình chiếu của giao tuyến giữa chúng lên mặt phẳng song song với mặt phẳng đối xứng là một đường ellip.

Cũng từ định lý này, ta có cơ sở để khẳng định hình chiếu đứng của giao tuyến một số mặt trong các hình 7.49a, b, 7.50a, b và 7.51 là hai đường thẳng (cũng là một đường bậc hai).

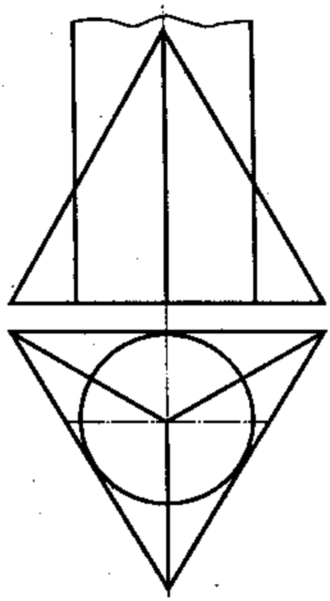
CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Vẽ giao tuyến của mặt chóp tam giác và mặt trụ chiếu đứng (hình 7.52).

2. Vẽ giao tuyến của mặt chóp tam giác và mặt trụ chiếu bằng (hình 7.53).



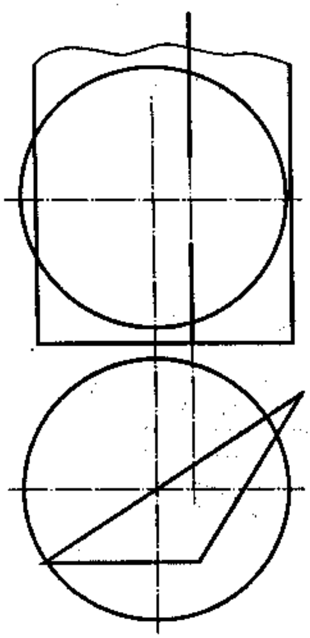
Hình 7.52



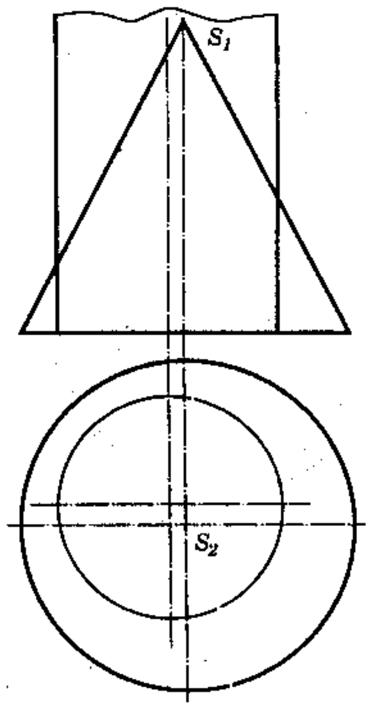
Hình 7.53

3. Vẽ giao tuyến của mặt lăng trụ chiếu bằng và mặt cầu (hình 7.54).

4. Vẽ giao tuyến của mặt trụ chiếu bằng và mặt nón tròn xoay (hình 7.55).



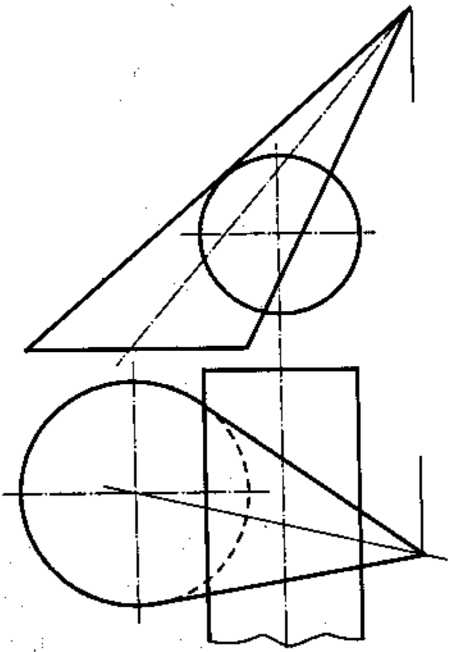
Hình 7.54



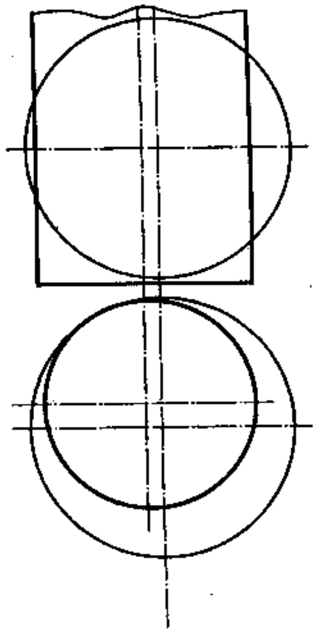
Hình 7.55

5. Vẽ giao tuyến của mặt trụ chiếu đứng và mặt nón xiên (hình 7.56).

6. Vẽ giao tuyến của mặt trụ chiếu bằng và mặt cầu (hình 7.57).



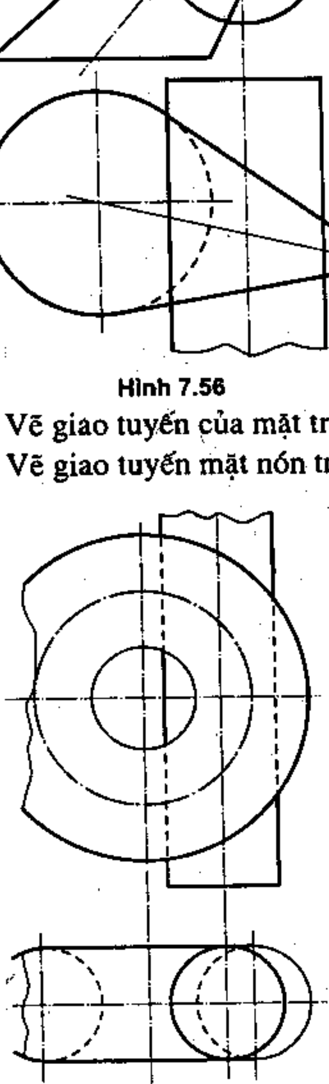
Hình 7.56



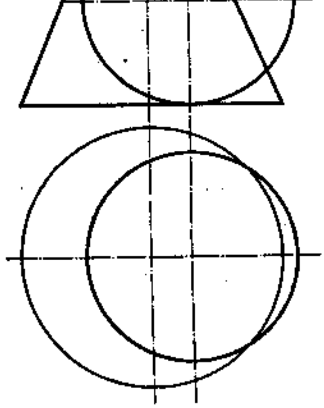
Hình 7.57

7. Vẽ giao tuyến của mặt trụ chiếu bằng và mặt xuyến (hình 7.58).

8. Vẽ giao tuyến mặt nón tròn xoay và mặt cầu (hình 7.59).



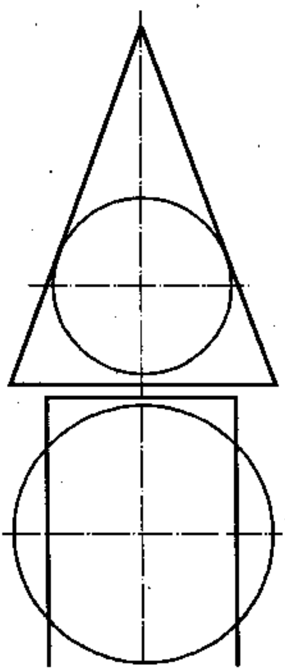
Hình 7.58



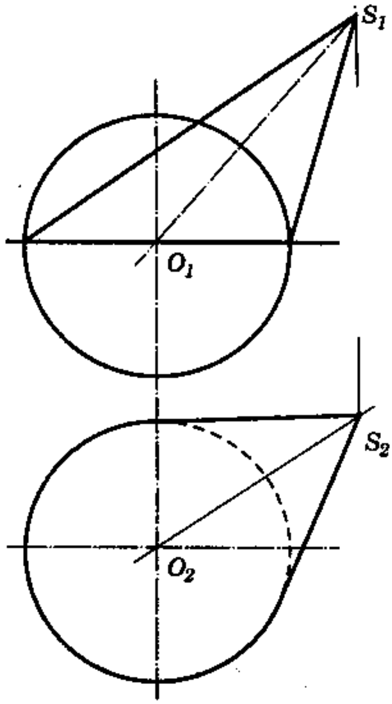
Hình 7.59

9. Vẽ giao tuyến của mặt nón và mặt trụ tròn xoay (hình 7.60).

10. Vẽ giao tuyến mặt nón và mặt cầu (hình 7.61).



Hình 7.60



Hình 7.61

D – KHAI TRIỂN CÁC MẶT

Chương VIII. KHAI TRIỂN CÁC MẶT

8.1. KHÁI NIỆM

Khai triển một mặt là rải (trải) mặt đó lên một mặt phẳng, sao cho không bị co, giãn hoặc rách (cũng có thể giải lên một mặt cong, khi đó người ta gọi là "áp").

Giữa hình khai triển và hình chưa khai triển phải bảo đảm yêu cầu là : *"khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trên hình chưa khai triển, phải bằng khoảng cách giữa hai điểm tương ứng trên hình khai triển."*

Những mặt có thể khai triển được, gọi là những mặt khả triển.

Những mặt không khai triển được, gọi là những mặt không khả triển.

Những mặt khả triển như : các mặt đa diện, mặt nón, mặt trụ, mặt êlicôit (mặt cố cạnh lùi).

Những mặt không khai triển được, người ta có thể khai triển gần đúng.

Ví dụ : để khai triển một mặt không khai triển được Φ, người ta thay mặt Φ bằng một mặt khai triển được Φ', có hình dạng gần đúng với mặt Φ. Hình khai triển của mặt Φ', coi là hình khai triển gần đúng của mặt Φ.

Trong thực tế có nhiều vấn đề cần đến việc khai triển các mặt.

8.2. KHAI TRIỂN MẶT ĐA DIỆN

Để khai triển một mặt đa diện, ta *rải các mặt bên của đa diện lên một mặt phẳng.*

Muốn vậy phải *biết chiều dài các cạnh bên của đa diện (khi cần phải biết độ lớn các góc hoặc đường chéo của các mặt bên).*

8.2.1. KHAI TRIỂN HÌNH CHÓP

Ví dụ : Vẽ hình khai triển của mặt tứ diện SABC.

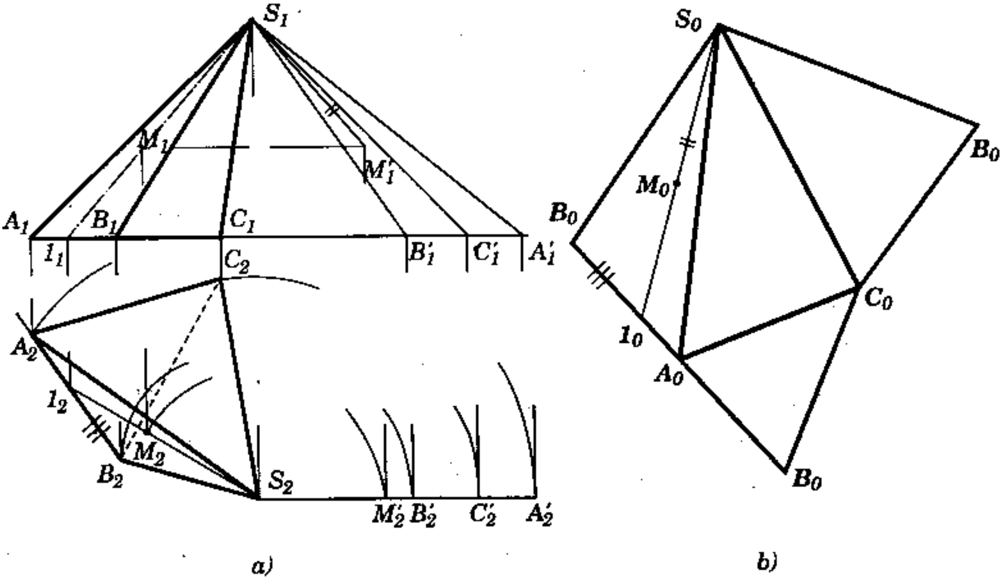
Giải : Từ hình vẽ 8.1 ta cho thấy : Tứ diện SABC có một tam giác đáy ABC thuộc mặt phẳng bằng, nên hình chiếu bằng $A_2B_2C_2$ bằng chính tam giác đó.

Ba mặt bên, đều là các tam giác : SAB, SBC và SCA, nên ta chỉ cần tìm chiều dài các cạnh là đủ (Không cần tìm các góc). Mỗi mặt bên, đã biết các cạnh đáy : AB, BC và CA.

Ta cần tìm chiều dài các cạnh bên. Bằng cách dời hình, để đưa các cạnh bên trở thành các đường mặt. Khi đó, các hình chiếu đứng $S_1A'_1$, $S_1B'_1$ và $S_1C'_1$ có chiều dài bằng các cạnh tương ứng SA, SB và SC của chúng.

Như vậy, chiều dài các cạnh bên đã biết. Việc vẽ các mặt bên là các tam giác, đã biết chiều dài các cạnh là vấn đề đơn giản.

Trên hình cũng chỉ cách lấy một điểm M thuộc mặt bên SAB, bằng cách gắn M vào đường thẳng S1.



Hình 8.1

8.2.2. KHAI TRIỂN LĂNG TRỤ

Ví dụ : Vẽ hình khai triển của mặt lăng trụ tam giác, có hai đáy đều thuộc các mặt phẳng bằng; các cạnh bên đều là các đường mặt.

Giải : Từ hình 8.2 cho thấy : Hai mặt đáy là các tam giác đều thuộc mặt phẳng bằng, nên các hình chiếu bằng $A_2B_2C_2$ và $D_2E_2F_2$ bằng chính nó.

Các mặt bên, đã biết tất cả các cạnh, nhưng chúng là các hình bình hành, nên chưa vẽ được.

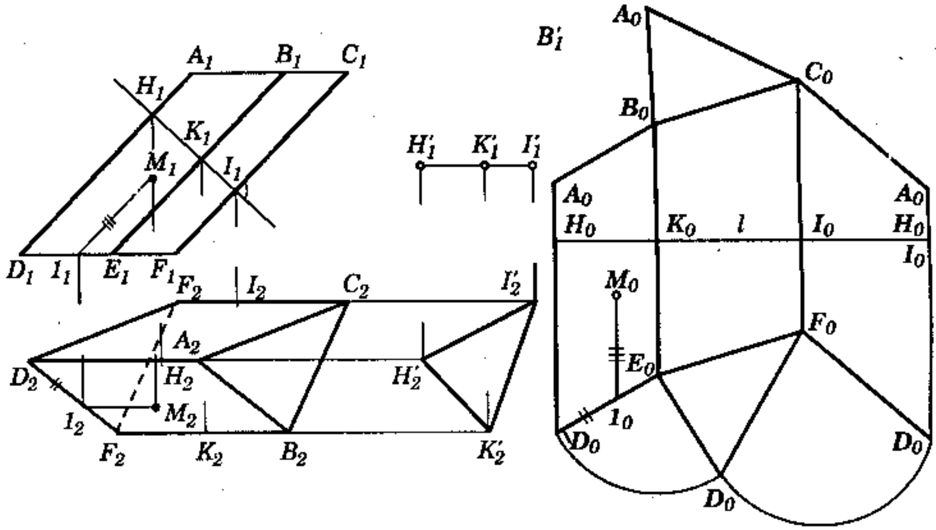
Ta có hai cách khai triển các mặt bên của lăng trụ này :

Cách 1. Cắt mặt lăng trụ bằng một mặt phẳng $\mathcal{K}$ vuông góc với các cạnh bên. Mặt phẳng này cắt lăng trụ theo tam giác HIK. Vì các cạnh bên của lăng trụ là các đường mặt, nên mặt phẳng $\mathcal{K}$ là mặt phẳng chiếu đứng. Bằng cách dời hình song song với mặt phẳng hình chiếu đứng, đưa mặt phẳng (HIK) trở thành mặt phẳng bằng. Khi đó ta có chiều dài các cạnh của tam giác HIK.

Trên một đường thẳng l nằm ngang, ta đặt liên tiếp chiều dài các cạnh của tam giác HIK : $H_0I_0 = HI$, $I_0K_0 = IK$ và $K_0H_0 = KH$. Qua các điểm H_0, I_0 và K_0 ta vạch các đường thẳng vuông góc với đường thẳng l. Trên đó ta đặt các đoạn tương ứng : $H_0A_0 = H_1A_1$, $H_0D_0 = H_1D_1$.

$I_0C_0 = I_1C_1$, $I_0F_0 = I_1F_1$, ... Cuối cùng, nối các điểm A_0, B_0, C_0 với nhau; và các điểm D_0, E_0 và F_0 với nhau. Đó là hình khai triển của các mặt bên của lăng trụ. Ta có thể ghép hai đáy ABC và DEF liền vào hình khai triển các mặt bên đó.

Trên hình khai triển cũng chỉ cách lấy một điểm M thuộc mặt bên ABED, bằng cách gắn điểm M vào đường thẳng M1.



Hình 8.2

Cách 2. Ta thấy các cạnh bên của mặt lăng trụ là các đường mặt, nên ta có thể khai triển các mặt bên của lăng trụ, bằng cách xoay từng mặt bên của lăng trụ quanh các đường mặt (cạnh bên) đó.

Trước hết ta xoay mặt ABED : Điểm E_1 sẽ di chuyển trên đường thẳng vuông góc với A_1D_1,

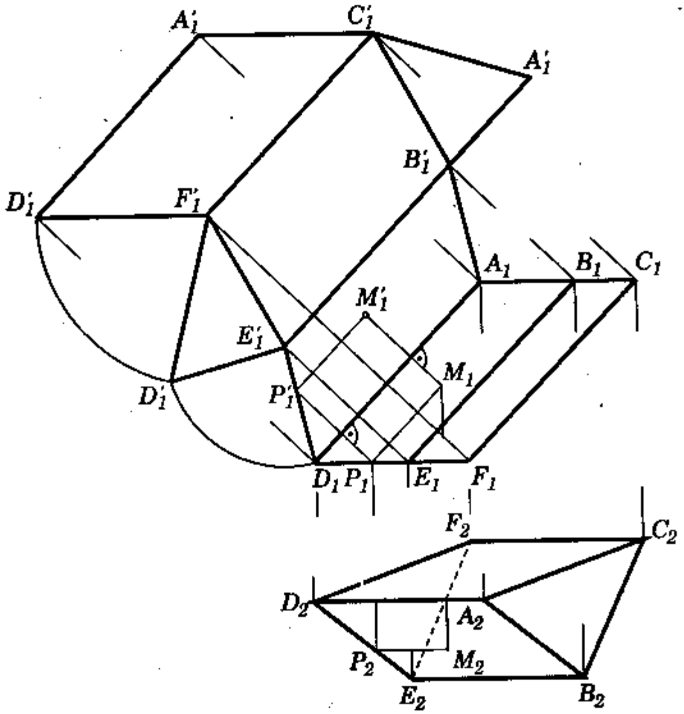
Mặt khác, E_1 lại cách điểm D_1 một đoạn bằng chiều dài cạnh DE. Từ đó, ta tìm được điểm E'_1.

Qua E'_1 vạch đường thẳng $E'_1B'_1 // D_1A_1$, qua B_1 cũng vạch đường thẳng vuông góc với A_1D_1, đường này tới cắt $E'_1B'_1$ ở đâu, thì đó là điểm B'_1.

Tương tự, các cạnh khác cũng xoay như vậy, cuối cùng ta sẽ có hình khai triển các mặt bên của mặt lăng trụ. Ta cũng có thể vẽ hình khai triển của hai đáy liền kề với hình khai triển của các mặt bên của nó (hình 8.3).

Trên hình cũng chỉ cách lấy một điểm M thuộc mặt bên ABED.

Chú ý : Nếu lăng trụ thẳng đứng, thì việc khai triển sẽ đơn giản hơn nhiều.



Hình 8.3

8.3. KHAI TRIỂN MẶT NÓN VÀ MẶT TRỤ

8.3.1. KHAI TRIỂN MẶT NÓN VÀ MẶT TRỤ TRÒN XOAY

1. Mặt trụ

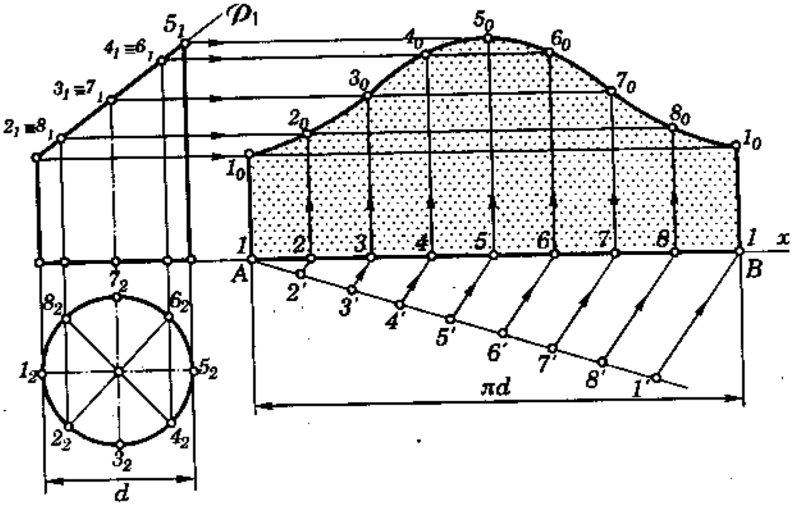
Ví dụ : Vẽ hình khai triển của một mặt trụ tròn xoay thẳng đứng. Có một đáy là đường tròn, đường kính d, thuộc mặt phẳng bằng; một đáy thuộc mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{P}$.

Giải : Hình khai triển của mặt trụ tròn xoay thẳng đứng, nếu hai đáy đều thuộc mặt phẳng bằng thì sẽ là một hình chữ nhật, có một cạnh bằng chiều dài đường tròn đáy (chu vi đáy). Đường kính đường tròn đáy là d, thì chu vi đáy sẽ là πd. Còn một cạnh bằng chiều cao h của mặt trụ.

Nhưng mặt trụ của ta có một đáy vát, nên ta phải chia đáy trụ ra làm nhiều phần bằng nhau (ở đây chia làm tám phần), rồi đặt chiều dài mỗi đường sinh vào mỗi điểm chia tương ứng.

Cuối cùng nối các điểm đầu mút của các đường sinh đó bằng một đường cong đều. Ta có hình khai triển của mặt trụ (hình 8.4).

Nếu mặt trụ có đáy, thì một đáy là hình tròn, một đáy là hình ellip.

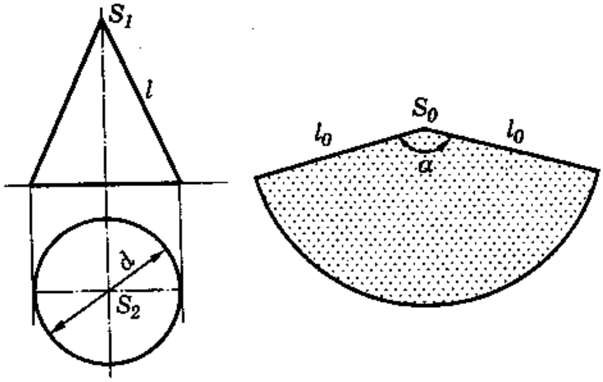


Hình 8.4

2. Mặt nón

Ví dụ : Vẽ hình khai triển của một mặt nón tròn xoay. Chiều dài đường sinh là l, đường kính đường tròn đáy là d.

Giải : Hình khai triển của mặt nón tròn xoay đó sẽ là một hình quạt tròn, có bán kính bằng chiều dài l của đường sinh mặt nón. Góc ở tâm hình quạt là : $\alpha = 180.\ d/l$ (hình 8.5).



Hình 8.5

8.3.2. KHAI TRIỂN MẶT TRỤ VÀ MẶT NÓN XIÊN

1. Mặt trụ. Để khai triển một mặt trụ xiên, ta cho nội tiếp (hoặc ngoại tiếp) mặt trụ đó một mặt lăng trụ đa giác đều. Ta khai triển mặt lăng trụ đó, coi là hình khai triển của mặt trụ xiên (số cạnh của đa giác nội tiếp hoặc ngoại tiếp đáy mặt trụ càng nhiều, thì hình khai triển được càng chính xác).

Ví dụ : Vẽ hình khai triển của mặt trụ xiên, có hai đáy là hình tròn, thuộc mặt phẳng bằng. Các đường sinh mặt trụ đều là đường mặt.

Giải : Cho nội tiếp mặt trụ một mặt lăng trụ đa giác đều (ở đây là lăng trụ bát giác đều).

Ta khai triển mặt lăng trụ đó (theo mục 8.2.2).

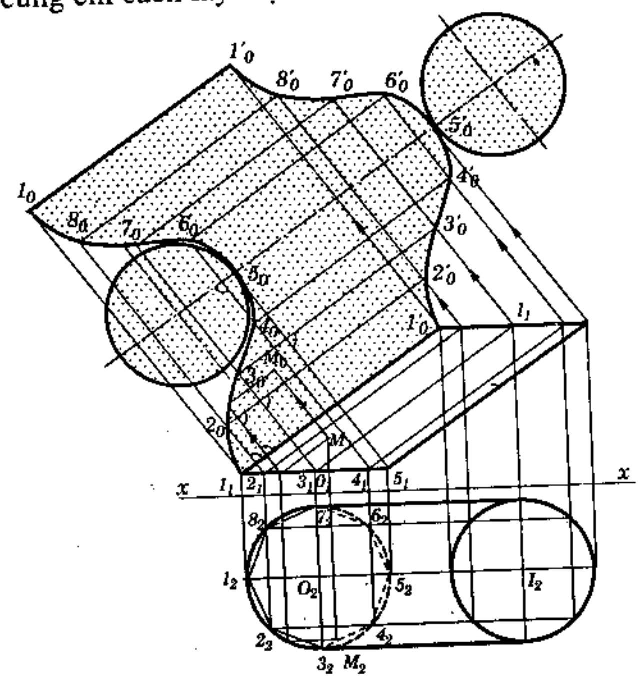
Mặt trụ cũng có các đường sinh là đường mặt, nên ta dùng cách xoay từng mặt bên quanh các đường mặt đó (theo cách 2, ví dụ, mục 8.2.2 hình 8.3).

Vì mặt trụ có một mặt phẳng đối xứng là mặt phẳng chiếu bằng chứa trục mặt trụ nên ta chỉ cần khai triển một nửa mặt trụ, rồi lấy đối xứng.

Sau đó nối các điểm đầu mút của các cạnh bên lăng trụ bằng một đường cong đều.

Nếu mặt trụ có đáy, thì hai đáy là hai hình tròn (hình 8.6).

Trên hình cũng chỉ cách lấy một điểm M thuộc mặt trụ.



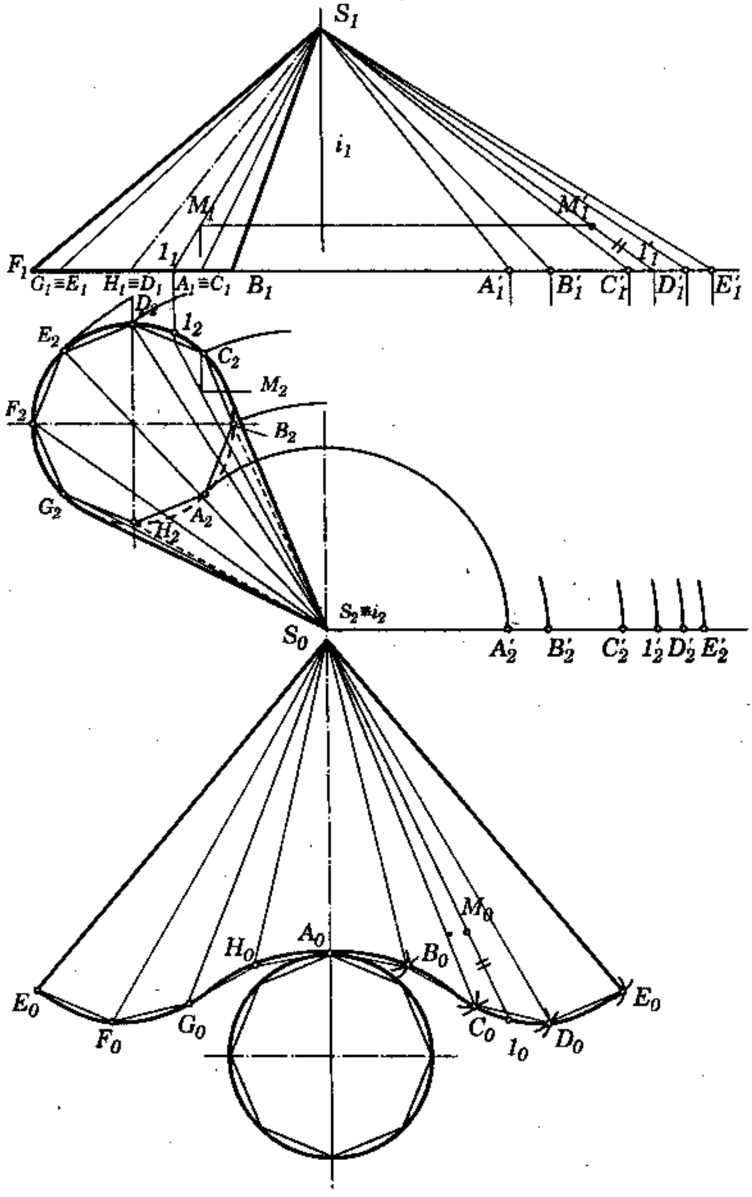
Hình 8.6

2. *Mặt nón.* Để khai triển mặt nón xiên, ta cũng cho nội tiếp (hoặc ngoại tiếp) mặt nón đó một mặt tháp đa giác đều (số cạnh của đa giác càng nhiều, thì hình khai triển được càng chính xác). Ta khai triển mặt tháp đó, coi là hình khai triển của mặt nón xiên.

Ví dụ : Khai triển mặt nón xiên. Có đáy là một hình tròn, thuộc mặt phẳng bằng.

Giải : Để khai triển mặt nón, ta cho nội tiếp mặt nón một mặt tháp đa giác đều. Trên hình này, ta cho nội tiếp mặt nón một mặt tháp bát giác đều (tức là đáy tháp là một đa giác đều tám cạnh). Vì mặt nón có một mặt phẳng đối xứng là mặt phẳng chiếu bằng chứa trục mặt nón. Nên ta chỉ cần khai triển một nửa của mặt nón, sau đó lấy đối xứng.

Ta phải tìm chiều dài các cạnh bên của hình tháp, bằng cách đưa các cạnh đó trở thành đường mặt.



Hình 8.7

Ta khai triển một nửa mặt tháp (mục 7.2.1).

Sau khi khai triển mặt tháp, ta nối các đầu mút các cạnh bên của mặt tháp bằng một đường cong đều, ta sẽ có hình khai triển của mặt nón xiên hình 8.7.

Trên hình vẽ cũng chỉ ra cách tìm một điểm M, thuộc mặt nón.

8.4. KHAI TRIỂN MẶT TRÒN XOAY

Để đại diện cho việc khai triển mặt tròn xoay, ta khai triển một mặt cầu.

Nói chung, mặt tròn xoay, cụ thể ở đây là mặt cầu, là mặt không khai triển được, nên phải khai triển gần đúng.

Ta trình bày vài phương pháp khai triển một mặt tròn xoay (mặt cầu).

8.4.1. PHƯƠNG PHÁP MẶT TRỤ

Nội dung của phương pháp này là : thay từng phần của mặt cầu bằng một phần của mặt trụ. Hình khai triển của phần mặt trụ đó, coi là hình khai triển của phần mặt cầu đó.

Số phần chia mặt cầu càng nhiều, thì hình khai triển nhận được càng chính xác.

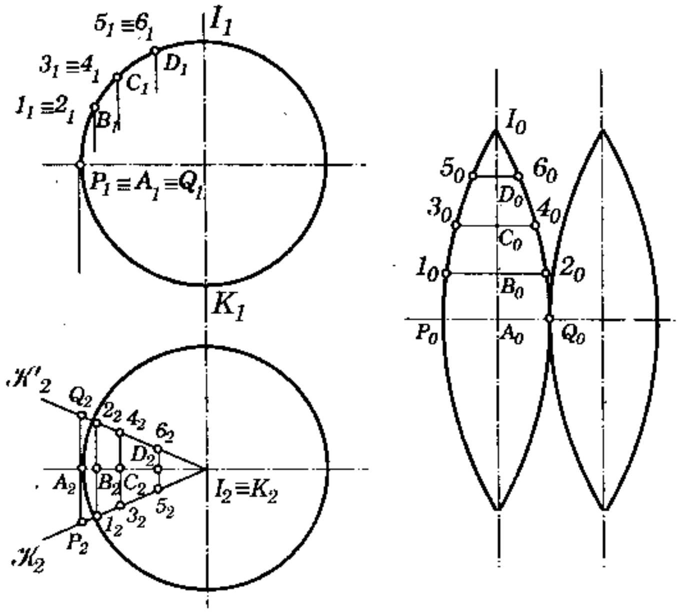
Cho ngoại tiếp mặt cầu bằng một mặt trụ chiếu đứng. Sau đó, chia mặt cầu làm nhiều phần bằng nhau, bằng những mặt phẳng chiếu bằng chứa các kinh tuyến. Vì các múi cầu được chia đều bằng nhau, nên ta chỉ cần khai triển một múi.

Ta khai triển múi, có hình chiếu bằng là hình quạt $I_2 1_2 A_2 2_2$. Múi mặt cầu đó, được thay bằng phần mặt trụ, có hình chiếu bằng là tam giác $I_2P_2Q_2$, còn hình chiếu đứng là cung tròn $I_1A_1K_1$. Hình khai triển của phần mặt trụ đó, coi là hình khai triển của múi mặt cầu nói trên.

Phần mặt trụ này, cũng có hai nửa bằng nhau, chúng đối xứng với nhau qua đường sinh PQ. Vì vậy, ta cũng chỉ cần vẽ hình khai triển một nửa của nó. Sau đó lấy đối xứng.

Ta chia phần mặt trụ đó bằng những đường sinh cách đều nhau : 12; 34; 56. Các đường sinh đó cắt kinh tuyến IAK của mặt cầu tương ứng tại các điểm B, C, D.

Qua một điểm A_0 thuộc đường thẳng 1 vạch đường thẳng A_0I_0 vuông góc với 1. Trên đó đặt các đoạn thẳng A_0B_0, B_0C_0, C_0D_0, D_0I_0 bằng nhau, và bằng chiều dài các cung tròn AB, BC, CD và DI (hình 8.8).



Hình 8.8

Qua các điểm B_0, C_0, D_0 vạch các đường thẳng song song với đường thẳng l. Trên các đường thẳng đó, và lấy các điểm A_0, B_0, C_0 và D_0 làm trung điểm, ta đặt chiều dài các đoạn đường sinh PQ, 12, 34, 56 vào mỗi đường tương ứng. Khi đó, ta có các đoạn thẳng tương ứng là P_0Q_0, 1_02_0, 3_04_0, 5_06_0.

Sau đó, ta nối các điểm P_0, 1_0, 3_0, 5_0, I_0, ... bằng một đường cong đều.

Đó là hình khai triển gần đúng của một nửa múi cầu. Vẽ đối xứng qua đường thẳng l, ta sẽ có hình khai triển gần đúng của một múi mặt cầu.

Nếu mặt cầu được chia làm bao nhiêu múi, thì hình khai triển của mặt cầu sẽ là bấy nhiêu hình nói trên.

8.4.2. PHƯƠNG PHÁP MẶT NÓN

Nội dung của phương pháp này là : Thay thế từng phần của mặt cầu bằng từng phần mặt nón tròn xoay. Ta khai triển phần mặt nón tròn xoay đó, coi là hình khai triển gần đúng của phần mặt cầu nói trên.

Số phần chia mặt cầu càng nhiều, thì hình khai triển nhận được càng chính xác.

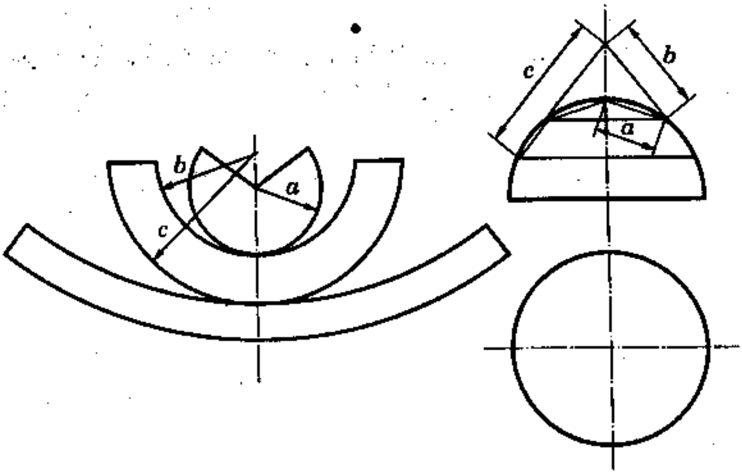
Chia mặt cầu bằng những vĩ tuyến : Ta chia làm ba phần.

Phần chỏm cầu, thay bằng một phần mặt nón tròn xoay nội tiếp (hoặc ngoại tiếp) nó.

Các phần đới cầu, thay bằng các phần của các mặt nón cụt nội tiếp chúng.

Vì mặt cầu có hai nửa bằng nhau, nên ta chỉ cần khai triển một nửa mặt cầu (hình 8.9).

Cách khai triển mặt nón tròn xoay, xem mục 8.3.1.

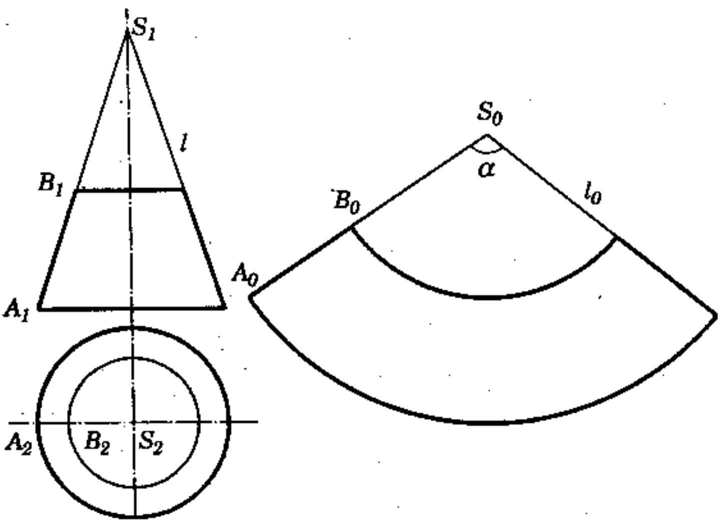


Hình 8.9

Cần lưu ý, khi khai triển các mặt nón cụt.

Ví dụ : Khai triển mặt nón cụt có : đường kính đáy nhỏ là d; đường kính đáy lớn là D; chiều dài đường sinh là AB (hình 8.10).

Kéo dài các đường sinh AB của mặt nón cụt, cắt nhau tại S (tức là, mặt nón cụt đã cho, là một phần của mặt nón đỉnh S).



Hình 8.10

Để khai triển mặt nón cụt đã cho ta làm như sau :

- Khai triển mặt nón đỉnh S, đường kính đáy là D. Chiều dài đường sinh là SA (1)

- Khai triển mặt nón đỉnh S, đường kính đáy là d. Chiều dài đường sinh là SA (2)

Lấy hình khai triển của (1) trừ đi hình khai triển của (2), ta sẽ có hình khai triển của mặt nón cụt, đường kính đáy nhỏ là d, và đường kính đáy lớn là D.

Như vậy, hình khai triển của hình nón cụt là hiệu hình khai triển của hai hình nón.

8.4.3. PHƯƠNG PHÁP MẶT NÓN VÀ MẶT TRỤ TIẾP XÚC

Nội dung của phương pháp này là : Cũng chia mặt cầu làm nhiều phần bằng nhau, bằng các kinh tuyến. Ta có các múi cầu bằng nhau, ta chỉ cần khai triển một nửa múi đó.

Sau đó lại chia mặt cầu bằng các vĩ tuyến. Các cung của các vĩ tuyến đó thuộc múi cần khai triển có hình chiếu bằng lần lượt là : $1_2A_22_2$ (cung này thuộc xích đạo); $3_2B_24_2$; $5_2C_26_2$.

Ta cho mặt trụ ngoại tiếp mặt cầu theo xích đạo. Trên hình khai triển, ta rải cung 1A2 ra ta có đoạn thẳng $1_0A_02_0$.

Cho mặt nón đỉnh S tiếp xúc với mặt cầu theo vĩ tuyến chứa cung tròn 3B4. Khai triển mặt nón đỉnh S đó, ta có cung $3_0B_04_0$ bằng chiều dài cung tròn 3B4.

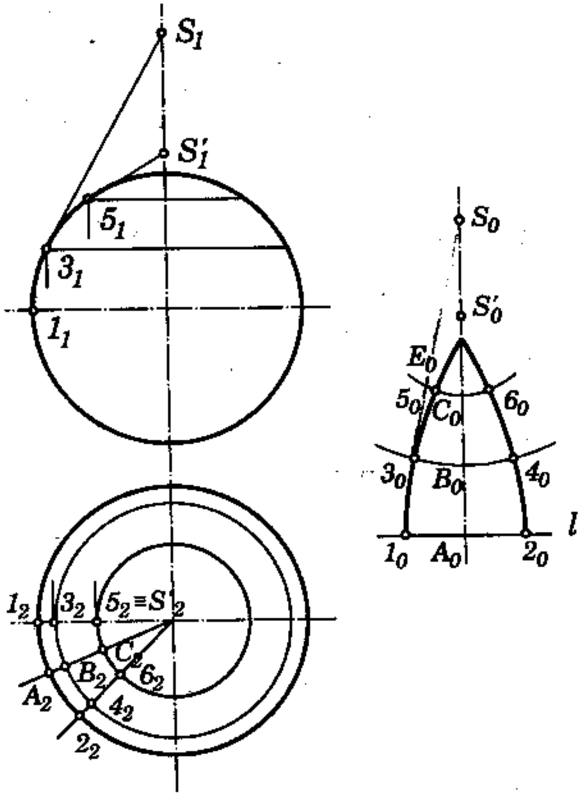
Tương tự, cho mặt nón đỉnh S', tiếp xúc với mặt cầu theo vĩ tuyến chứa cung tròn 5C6. Khi khai triển mặt nón đỉnh S' đó, ta có cung tròn $5_0C_06_0$ bằng chiều dài cung tròn 5C6.

Cụ thể vẽ như sau :

Trên một đường thẳng l : Đặt đoạn $1_0A_02_0$ bằng chiều dài cung 1A2 (xích đạo). Qua điểm Ao vạch đường thẳng A_0I_0 vuông góc với đường thẳng l. Trên đó lấy các điểm B_0, C_0 và I_0 sao cho : $A_0B_0 = \overset{\frown}{AB}$; $B_0C_0 = \overset{\frown}{BC}$; $C_0I_0 = \overset{\frown}{CI}$.

Qua B_0 đặt cung tròn $\overset{\frown}{3_0B_04_0}$ nói trên (vạch cung tròn, bán kính bằng đoạn S_13_1. Trên đó lấy cung $\overset{\frown}{3_0B_04_0}$ bằng cung $\overset{\frown}{3B4}$ của vĩ tuyến đó) (hình 8.11).

Tương tự, tại điểm C_0 đặt cung tròn $\overset{\frown}{5_0C_06_0}$ nói trên. Cuối cùng nối các điểm đầu mút lại, ta sẽ có hình khai triển của một nửa múi cầu. Vẽ đối xứng qua đường thẳng l, ta có hình khai triển của cả múi cầu.



Hình 8.11

Khi chia mặt cầu làm bao nhiêu múi, thì hình khai triển của mặt cầu sẽ là bấy nhiêu hình khai triển trên.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Thế nào là khai triển một mặt ?

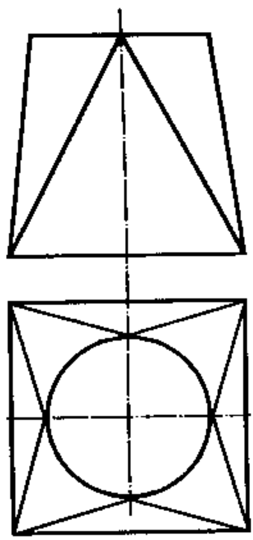
2. Cách khai triển một đa diện.

3. Cách khai triển một mặt nón tròn xoay và một mặt trụ tròn xoay.

4. Cách khai triển một mặt nón cụt.

5. Cách khai triển một mặt nón xiên và một mặt trụ xiên?

6. Vẽ hình khai triển các mặt bên của hình 8.12.



Hình 8.12

Phần hai
PHƯƠNG PHÁP HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO

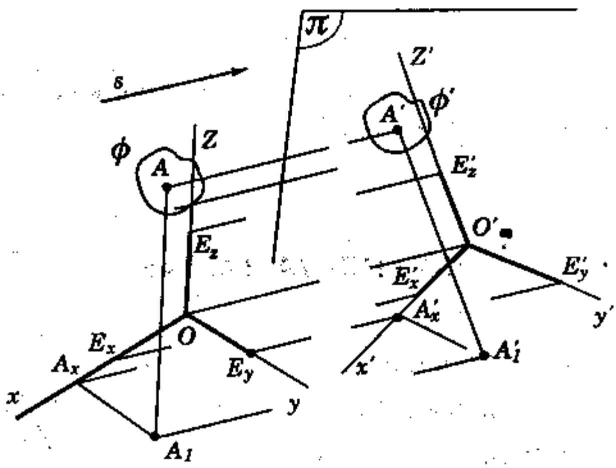
Chương IX. PHƯƠNG PHÁP HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO

9.1. ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

9.1.1. CÁCH XÂY DỰNG HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO CỦA ĐIỂM

Giả sử ta có một hình Φ, ta gắn vào nó một hệ trục toạ độ Đêcác vuông góc Oxyz. Trên mỗi trục toạ độ lấy một đơn vị đo : OE_x, OE_y, OE_z. Gọi là các *đơn vị đo tự nhiên*. Tứ diện $OE_xE_yE_z$ gọi là *tứ diện đơn vị*.

Nếu có điểm A thuộc Φ, qua A vạch đường thẳng song song với trục Oz, tới cắt mặt phẳng Oxy tại điểm A_1 thì điểm A_1 gọi là *hình chiếu thứ hai* của điểm A. Mặt phẳng qua điểm A và song song với mặt phẳng Oyz cắt trục Ox tại điểm A_x. Đường gãy khúc OA_xA_1A gọi là *đường gãy khúc toạ độ tự nhiên* của A (hình 9.1).



Hình 9.1

Các tỷ số : $x_A = OA_x/OE_x$, $y_A = A_xA_1/OE_y$, $z_A = A_1A/OE_z$ gọi là *các toạ độ tự nhiên* của A.

Với mỗi điểm A trong không gian, ta có các toạ độ x_A, y_A, z_A và viết là $A(x_A, y_A, z_A)$.

Ngược lại, với mỗi bộ ba số xếp thứ tự (x_A, y_A, z_A) thì ứng với một điểm A duy nhất trong không gian.

Chiếu song song tất cả các hình đó lên một mặt phẳng hình chiếu π, theo hướng chiếu s tương ứng ta có :

Hệ trục Oxyz có hình chiếu là O'x'y'z' gọi là *hệ trục toạ độ trục đo.*

Các đơn vị : OE_x, OE_y, OE_z có hình chiếu là $O'E_x'$, $O'E'_y$, $O'E'_z$.

Tứ diện đơn vị : $OE_xE_yE_z$ có hình chiếu là $O'E'_xE'_yE'_z$ gọi là *tứ giác đơn vị trục đo.*

Hình Φ có hình chiếu là Φ' gọi là hình chiếu trục đo của hình Φ.

Đường gãy khúc OA_xA_1A có hình chiếu là $O'A'_XA'_1A'$ gọi là *đường gãy khúc toạ độ trục đo.*

Cặp điểm A A_1 có hình chiếu là $A'A'_1$.

Cặp điểm $A'A'_1$ (cùng với tứ giác đơn vị trục đo) gọi là *hình chiếu trục đo của A.*

Riêng điểm A' cũng gọi là hình chiếu trục đo của A.

Ta đặt : $p = O'E'_X/OE_X$; $q = O'E'_Y/OE_Y$; $r = O'E'_Z/OE_Z$.

Ba tỷ số : p, q và r tương ứng là các *hệ số biến dạng theo các trục toạ độ* Ox, Oy và Oz.

Như vậy, nếu có điểm A và một hệ trục toạ độ Đềcác vuông góc với các đơn vị tự nhiên, khi chiếu lên một mặt phẳng, thì ta có hình chiếu trục đo của điểm A.

Ngược lại, cặp điểm $A'A'_1$ cùng với tứ giác đơn vị trục đo $O'E'_XE'_YE'_Z$ (trong đó $A'A'_1 // O'E_Z'$), có thể coi là hình chiếu trục đo của một điểm A duy nhất trong không gian không?

Định lý Pônke-Svác (Pônke và Svác là hai nhà toán học đã tìm ra định lý này) sau đây, sẽ trả lời câu hỏi đó.

9.1.2. ĐỊNH LÝ PÔNKE-SVÁC

Mọi tứ giác đủ, không suy biến, bao giờ cũng có thể coi là hình chiếu song song của một tứ diện, đồng dạng với một tứ diện cho trước, (tứ giác đủ, không suy biến là tứ giác mà, trong bốn đỉnh của nó cùng thuộc một mặt phẳng, thì không có ba đỉnh nào thẳng hàng).

Để chứng minh định lý này, ta phải dựa vào bổ đề sau :

Bổ đề : *Cho hai tam giác, bao giờ cũng có thể coi một trong hai tam giác đó, là hình chiếu thẳng góc của một tam giác, đồng dạng với tam giác kia.*

Ta thừa nhận, không chứng minh định lý và bổ đề trên.

Từ định lý Pônke-Svác, ta có mệnh đề sau : *Mọi tứ giác đủ, không suy biến, đều có thể coi là hình chiếu song song của một tứ diện, đồng dạng với tứ diện đơn vị.*

Từ đó, ta lại suy ra rằng : *Ba đường thẳng đồng quy bất kỳ, trên một mặt phẳng, bao giờ cũng có thể coi là hình chiếu song song của một hệ trục toạ độ Đêcác vuông góc trong không gian.*

Từ đây, ta có thể lấy ba đường thẳng đồng quy bất kỳ trên một mặt phẳng, làm ba trục của một hệ trục toạ độ trục đo.

Như vậy, định lý Pônke-Svác đã trả lời câu hỏi trên đây. Tức là : Một cặp điểm A', A'_1 cùng với tứ giác đơn vị trục đo $O'E'_X E'_Y E'_Z$ trên một mặt phẳng (trong đó $A'A'_1 // O'E'_Z$) có thể coi là hình chiếu trục đo của một điểm A duy nhất trong không gian.

9.1.3. CÔNG THỨC LIÊN HỆ GIỮA CÁC HỆ SỐ BIẾN DẠNG VÀ GÓC CHIẾU φ

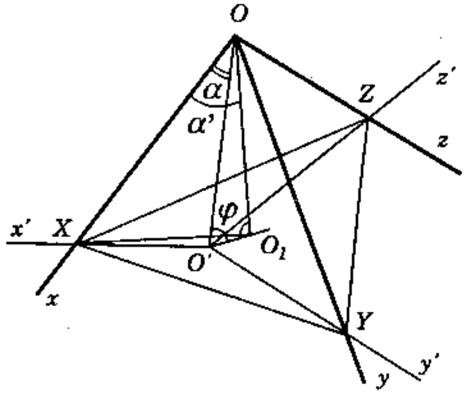
Giả sử ta có một hệ trục toạ độ Đêcác vuông góc Oxyz. Ta chiếu song song hệ trục đó lên một mặt phẳng hình chiếu π, theo hướng chiếu s. Hướng chiếu s tạo với mặt phẳng hình chiếu π một góc φ, gọi là *góc chiếu.*

Các hệ số biến dạng p, q, r và góc chiếu φ liên hệ với nhau bởi công thức sau:

$$P^2 + q^2 + r^2 = 2 + \cot g^2\varphi.$$

Chứng minh :

Giả sử ta có một hệ trục toạ độ Đềcác vuông góc Oxyz. Ta chiếu hệ trục đó theo hướng chiếu s lên mặt phẳng hình chiếu π. Gọi giao điểm của các trục toạ độ x, y và z với mặt phẳng hình chiếu π lần lượt là các điểm X, Y và Z . Hướng chiếu s (s//OO') tạo với mặt phẳng hình chiếu π một góc φ. Tam giác XYZ, gọi là *tam giác vết (hình* 9.2).



Hình 9.2

Gọi O' là hình chiếu song song của O lên mặt phẳng hình chiếu π và O_1 là hình chiếu thẳng góc của O lên mặt phẳng π, thì ta có góc $\widehat{OO'O_1} = \varphi$.

Gọi α , β và γ là các góc giữa OO' lần lượt với các trục x, y và z.

α', β' và γ' là các góc giữa OO_1 lần lượt với các trục x, y và z.

Xét tam giác OO'X ta có :

$O'X^2 = OO'^2 + OX^2 - 2OO'.OX.\cos\alpha$ (1)

Xét tam giác vuông OO_1O', ta có : $OO_1 = OO'.\sin\varphi$. (2)

Xét tam giác vuông $O\,O_1X$, ta có : $OO_1 = OX.\cos\alpha'$ (3)

Từ (2) và (3) ta có : $OO' = OX.\cos\alpha'/\sin\varphi$ (4)

Thay (4) vào (1) ta có :

$O'X^2 = OX^2.\cos^2\alpha'/\sin^2\varphi + OX^2 - 2OX^2.\cos\alpha'.\cos\alpha/\sin\varphi$.

Chia cả hai vế cho OX^2 và thay $O'X/OX = p$, ta có :

$p^2 = \cos^2\alpha'/\sin^2\varphi + 1 - 2.\cos\alpha'.\cos\alpha/\sin\varphi$ (5)

Tương tự, ta cũng có :

$q^2 = \cos^2\beta'/\sin^2\varphi + 1 - 2\cos\beta'.\cos.\beta/\sin\varphi$. (6)

$r^2 = \cos^2\gamma'/\sin^2\varphi + 1 - 2\cos\gamma'\cos\gamma/\sin\varphi$. (7)

Vì ba trục Ox, Oy và Oz đôi một vuông góc, nên ta có :

$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$.

Nếu trên tia OO' ta lấy một vectơ đơn vị $\boldsymbol{u}$ thì các toạ độ của vectơ đó là :

$\boldsymbol{u}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

Trên tia OO_1 ta lấy một vectơ đơn vị $\boldsymbol{u_1}$, thì các toạ độ của vectơ đó là :

$\boldsymbol{u_1}(\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$

Lấy tích vô hướng hai vectơ đó, ta có : (Góc $\widehat{OO'O_1} = \varphi$).

$\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u_1} = \cos(\pi/2 - \varphi) = \sin\varphi = \cos\alpha.\cos\alpha' + \cos\beta.\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$. (8)

Từ (5), (6), (7) và (8) ta có :

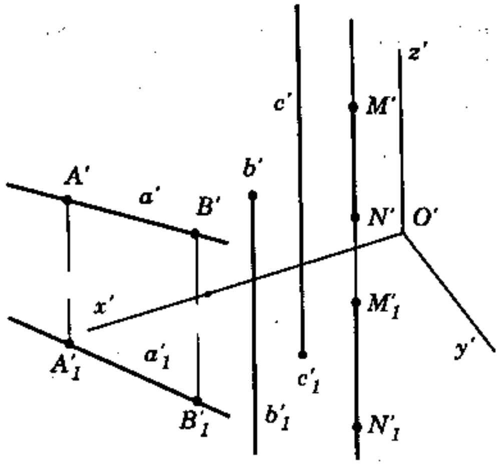
$$p^2 + q^2 + r^2 = 1 + 1/\sin^2\varphi$$
$$= 2 + \cot g^2\varphi \quad (9)$$

9.1.4. HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1. Đường thẳng

Trong không gian, một đường thẳng được xác định khi biết hai điểm.

Trên hình chiếu trục đo cũng vậy, một đường thẳng cũng được xác định khi biết hình chiếu trục đo của hai điểm.



Hình 9.3

Hình 9.3 là hình chiếu trục đo của các đường thẳng :

Đường thẳng AB (hoặc a) là đường thẳng thường (đường thẳng có vị trí bình thường).

Còn lại, là các đường thẳng có vị trí đặc biệt :

Đường thẳng MN là *đường thẳng cạnh.*

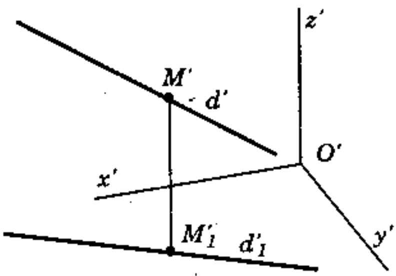
Đường thẳng b là *đường thẳng chiếu trục đo.*

Đường thẳng c là *đường thẳng chiếu bằng.*

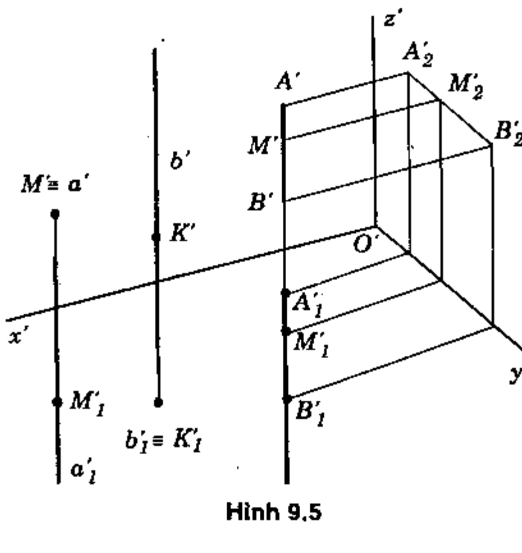
Hình chiếu trục đo cũng được xây dựng từ phép chiếu song song, nên nó bảo toàn được các tính chất như trên đồ thức.

Hình 9.4 là hình chiếu trục đo của điểm M, thuộc đường thẳng thường d.

Hình 9.5 là hình chiếu trục đo của điểm M, thuộc đường cạnh AB.



Hình 9.4



Hình 9.5

Điểm M, thuộc đường thẳng hình chiếu trục đo a;

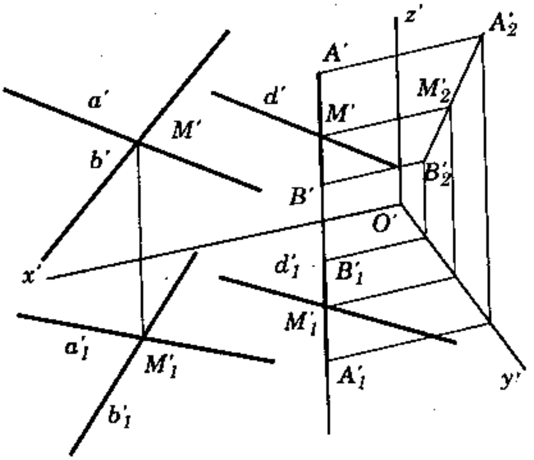
Điểm K thuộc đường thẳng chiếu bằng b.

Vì vậy, vị trí tương đối của các đường thẳng, cũng tương tự như trên đồ thức.

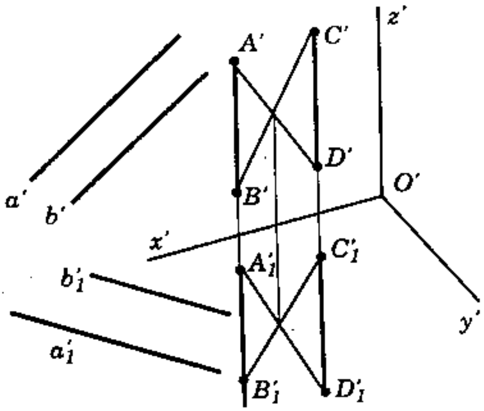
Hình 9.6 là hình chiếu trục đo của :

Hai đường thẳng thường a và b cắt nhau tại điểm M.

Đường thẳng thường d và đường thẳng cạnh AB cắt nhau tại điểm M.



Hình 9.6



Hình 9.7

Hình 9.7 là hình chiếu trục đo của :

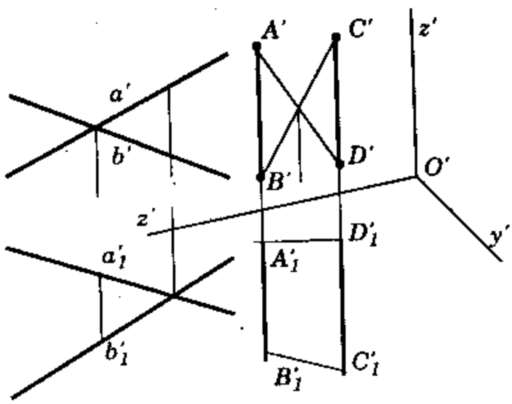
– Hai đường thẳng thường a và b song song.

– Hai đường thẳng cạnh AB và CD song song.

Hình 9.8 là hình chiếu trục đo của :

– Hai đường thẳng thường a và b chéo nhau.

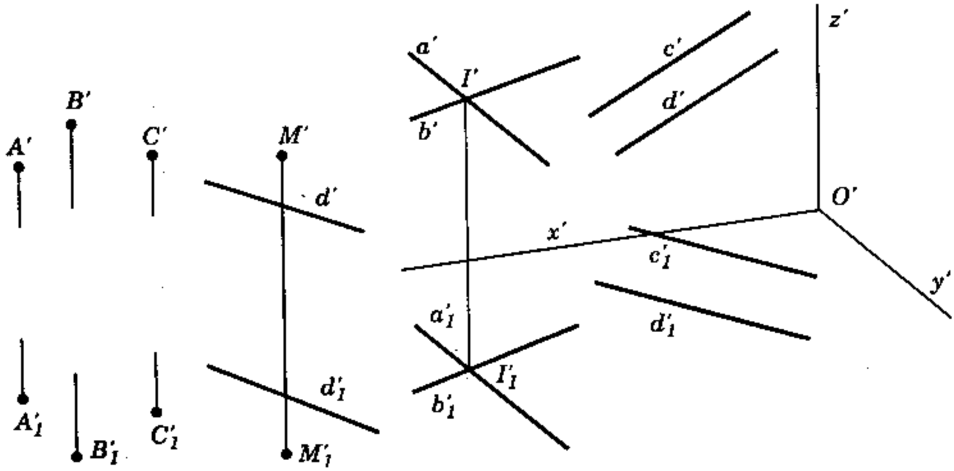
– Hai đường cạnh AB và CD cũng chéo nhau.



Hình 9.8

2. *Mặt phẳng.* Cũng như trong không gian, trên hình chiếu trục đo, một mặt phẳng được xác định khi biết, một trong các trường hợp sau (hình 9.9) :

- Hình chiếu trục đo của ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
- Hình chiếu trục đo của điểm M và đường thẳng d không thuộc nhau.
- Hình chiếu trục đo của hai đường thẳng a, b cắt nhau.
- Hình chiếu trục đo của hai đường thẳng c, d song song.



Hình 9.9

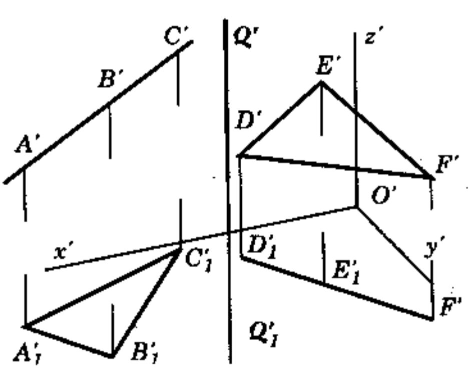
Các mặt phẳng trên hình 9.9 là các mặt phẳng thường.

Hình 9.10 là hình chiếu trục đo của các mặt phẳng có vị trí đặc biệt :

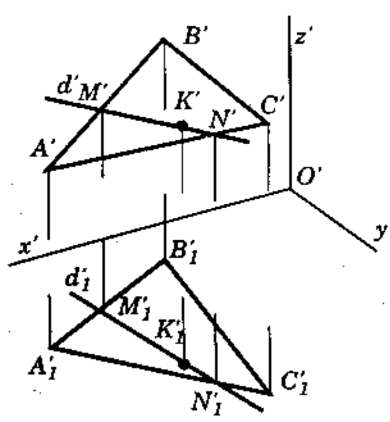
Mặt phẳng (ABC) là *mặt phẳng chiếu trục đo*.

Mặt phẳng (DEF) là *mặt phẳng chiếu bằng*.

Mặt phẳng *Q* là *mặt phẳng cạnh*.



Hình 9.10



Hình 9.11

Hình 9.11 là đường thẳng d thuộc mặt phẳng (ABC). Vì đường thẳng d có hai điểm M và N thuộc mặt phẳng (ABC).

Trong đó, điểm K cũng thuộc mặt phẳng (ABC), vì điểm K thuộc đường thẳng d.

9.2. CÁC LOẠI HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO THƯỜNG DÙNG TRONG KỸ THUẬT

Dựa vào các hệ số biến dạng p, q, r và góc chiếu φ, trong kỹ thuật, người ta dùng các loại hình chiếu trục đọ sau :

- Hình chiếu trục đo thẳng góc (vuông góc) đều : $\varphi = 90^0$, $p = q = r$.
- Hình chiếu trục đo thẳng góc cân : $\varphi = 90^0$, $p = r = 2q$.
- Hình chiếu trục đo xiên góc cân : $\varphi \neq 90^0$, $p = r = 2q$.
- Hình chiếu trục đo xiên góc đều : $\varphi \neq 90^0$, $p = q = r$.

9.2.1. HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO THẲNG GÓC

Hình chiếu trục đo thẳng góc thường được dùng nhiều trong thực tế, vì nó cho hình giống thật. Mặt khác, chỉ có hình chiếu trục đo thẳng góc, thì hình cầu mới có hình chiếu là hình tròn. (Còn hình chiếu trục đo xiên góc, thì hình cầu có hình chiếu là hình ellip).

Ta xét một số tính chất của hình chiếu trục đo thẳng góc :

Tính chất 1 : *Trong hình chiếu trục đo thẳng góc, tổng bình phương của các hệ số biến dạng bằng 2 : ($p^2 + q^2 + r^2 = 2$).*

Thật vậy, từ công thức (9) (mục 9.1.3), với $\varphi = 90^0$ ta có :

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2. \qquad (10)$$

Tính chất 2 : *Trong hình chiếu trục đo thẳng góc, gốc toạ độ trục đo, là trực tâm của tam giác vết.*

Thật vậy, giả sử ta có một hệ trục toạ Đềcác vuông góc Oxyz. Các trục x, y và z cắt mặt phẳng hình chiếu π tương ứng tại các điểm X, Y và Z. Tam giác XYZ, gọi là *tam giác vết.*

Từ O hạ đường thẳng OO' vuông góc với mặt phẳng hình chiếu π (hình 9.12).

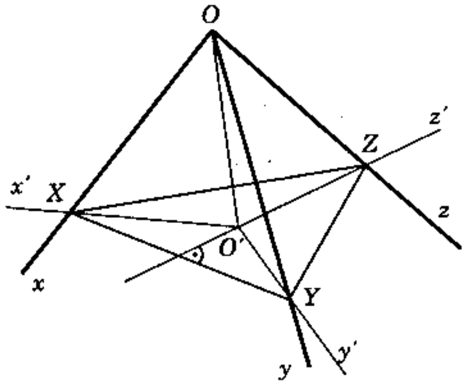
Như vậy, OO' ⊥ (XYZ) nên XY ⊥ OO'.

Mặt khác OZ ⊥ (OXY) nên XY ⊥ OZ. Từ đó ta có : XY ⊥ (O'OZ). Suy ra : XY ⊥ O'Z.

Vậy : gốc O' thuộc đường cao ZO' đi qua đỉnh Z của tam giác vết XYZ.

Tương tự, ta cũng chứng minh được gốc O' thuộc đường cao đi qua các đỉnh X và đỉnh Y. Tức là O' là trực tâm của tam giác XYZ.

Đó là điều phải chứng minh.



Hình 9.12

Tính chất 3. *Hình chiếu trục đo thẳng góc của đường tròn thuộc một mặt phẳng toạ độ (hoặc mặt phẳng song song với mặt phẳng toạ độ) sẽ là một ellip, có trục dài vuông góc với hình chiếu trục đo của trục toạ độ còn lại (không thuộc mặt phẳng toạ độ đó).*

Thật vậy, giả sử ta có một đường tròn tâm I, đường kính d thuộc mặt phẳng toạ độ (OXY).

AB là một đường kính của đường tròn, song song với vết XY, nên có hình chiếu trục đo là A'B' = AB = d và A'B' // XY (hình 9.13).

Theo tính chất 2, XY $\perp$O'Z, nên A'B' $\perp$ O'Z. Mà O'Z chính là trục toạ độ trục đo O'z (đpcm).

Đường kính CD của đường tròn, vuông góc với AB thì, hình chiếu trục đo C'D'$\perp$ A'B'.

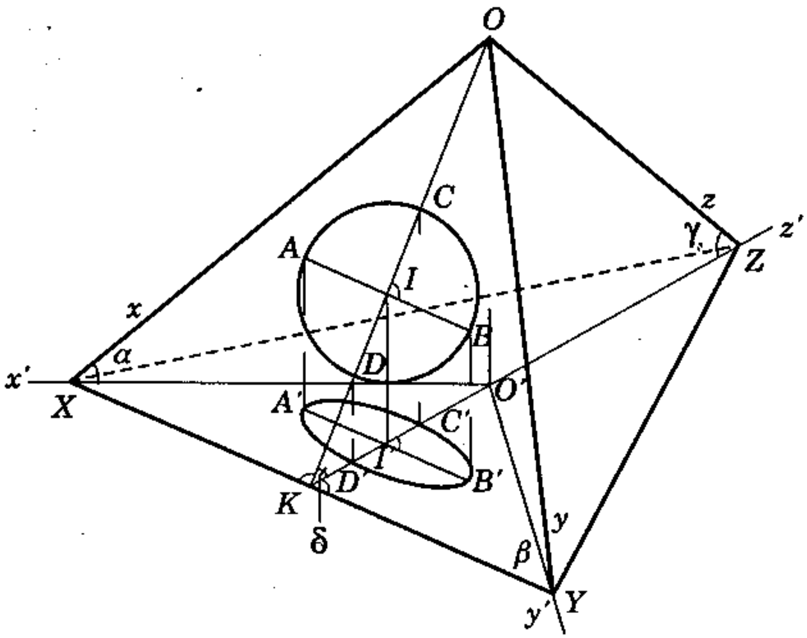
Gọi δ là góc nghiêng của CD với mặt phẳng π (cũng là góc nghiêng của mặt phẳng (OXY) với mặt phẳng π), thì C'D' = CD $\cos\delta$ = CD.$\sin\gamma_1$ (γ_1 là góc nghiêng của trục OZ với mặt phẳng π).

Hệ số biến dạng $r = \cos\gamma_1 = \dfrac{O'Z}{OZ}$.

Từ đó ta có : $C'D' = CD.\sin\gamma = CD.\sqrt{1-\cos^2\gamma_1} = CD\sqrt{1 - r^2}$

Như vậy, trục ngắn của ellip bằng $d\sqrt{1-r^2}$ (r là hệ số biến dạng theo trục Oz).

Nếu đường tròn thuộc các mặt phẳng toạ độ khác, ta cũng chứng minh tương tự.



Hình 9.13

Sau đây, ta khảo sát hai loại hình chiếu trục đo, được dùng trong kỹ thuật.

Mỗi loại hình chiếu trục đo, ta sẽ khảo sát các nội dung sau :

- Góc giữa các trục toạ độ trục đo, (tức là các trục trục đo tạo với nhau những góc bao nhiêu độ, để có thể vẽ chính xác được).

- Các hệ số biến dạng, cụ thể mỗi hệ số đó bằng bao nhiêu.

- Hình chiếu trục đo của các đường tròn, thuộc các mặt phẳng toạ độ (hoặc song song với các mặt phẳng toạ độ), nó là các ellip. Nhưng hướng của các trục và độ lớn của các trục đó.

1. Hình chiếu trục đo thẳng góc đều

**** Các hệ số biến dạng*** **:** Từ công thức (10) (tính chất 1, mục 9.2.1) và p = q = r, nên ta có :

$$P^2 + q^2 + r^2 = 3p^2 = 3q^2 = 3r^2 = 2.$$

Từ đó, ta có : $p = q = r = \sqrt{2/3} \approx 0,82$.

Sau này, trong thực hành, để thuận tiện cho việc vẽ người ta thường lấy các hệ số biến dạng quy ước là : p = q = r = 1.

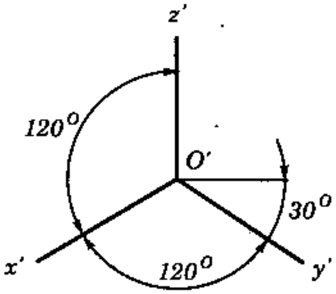
Như vậy, hình chiếu trục đo vẽ theo các hệ số biến dạng quy ước đó, sẽ lớn hơn hình thật một hệ số : $k = 1 : 0,82 \approx 1,22$ lần.

Điều đó không quan trọng, vì hình chiếu trục đo chủ yếu cho biết hình dạng của hình cần vẽ. Còn nó lớn hơn, hay nhỏ hơn hình thật một tỷ lệ nào đó cũng không sao.

• ***Góc giữa các trục toạ độ :*** Từ các tính chất thứ nhất và thứ hai trên, suy ra ta có :

Góc giữa các trục toạ độ trục đo, tao với nhau các góc bằng nhau.

Nửa dương của các trục tạo với nhau một góc 120^0 (hình 9.14).



Hình 9.14

• ***Hình chiếu trục đo của các đường tròn thuộc (hoặc song song với) các mặt phẳng toạ độ.***

Như tính chất 3 trên đây, ta có : Hình chiếu trục đo của các đường tròn đó là một ellip có :

- Hướng của trục dài, vuông góc với trục trục đo không thuộc mặt phẳng toạ độ chứa đường tròn đó. Ví dụ : Đường tròn thuộc mặt phẳng toạ độ (Oxy), thì trục dài của êllip (là hình chiếu trục đo của đường tròn đó) vuông góc với trục trục đo O'z. (Tất nhiên, còn hướng của trục ngắn sẽ vuông góc với trục dài).

- Độ lớn của trục dài của ellip bằng đường kính d của đường tròn.

- Độ lớn của trục ngắn của ellip : Theo tính chất 3, trên đây ta có :

Trục ngắn của ellip bằng : $d\sqrt{1-\frac{2}{3}} = d\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}58.d$ (d là đường kính đường tròn).

Nếu hình chiếu trục đo, vẽ theo các hệ số biến dạng quy ước ($p = q = r = 1$) thì : Trục dài của ellip là : 1, 22d và trục ngắn là : 0, 7d.

2. Hình chiếu trục đo thẳng góc cân

• ***Các hệ số biến dạng :***

Từ công thức (10) và $p = r = 2q$, nên ta có :

$P^2 + q^2 + r^2 = 4q^2 + q^2 + 4q^2 = 9q^2 = 2.$

Từ đó ta có : $q = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}47$. Và $p = r = 2q = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}94$.

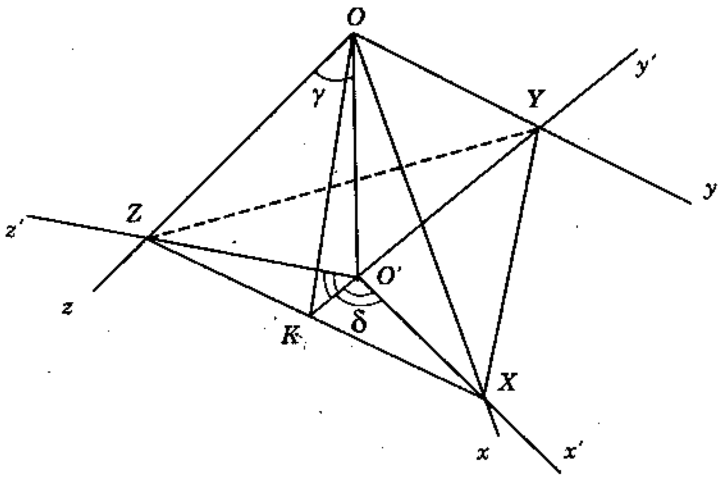
Sau này, trong thực hành, để cho thuận tiện cho việc vẽ, người ta cũng lấy các hệ số biến dạng quy ước là : $p = r = 1$ và $q = 0,5$.

Như vậy, hình chiếu trục đo vẽ theo các hệ số biến dạng đó sẽ lớn hơn hình thật một hệ số : $k = 1 : 0,94 \approx 1,06$ lần, điều đó cũng không quan trọng.

- ***Góc giữa các trục toạ độ trục đo***

Vì hai hệ số biến dạng $p = r$, tức là hệ số biến dạng theo trục Ox và trục Oz bằng nhau.

Suy ra : hai góc $\alpha = \gamma$. Từ đó ta có : Tam giác vết XYZ là tam giác cân ở Y, và trục đo O'y là phân giác của góc tạo bởi hai trục O'x và O'z (hình 9.15).



Hình 9.15

Gọi góc $\widehat{XO'Z} = 2\delta$, ta có :

$$\sin\delta = KZ/O'Z = \frac{OZ\sqrt{2}}{2} : O'Z = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{O'Z}{OZ} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sin\gamma$$

Nhưng $\sin\gamma = r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Do đó : $\sin\delta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} : \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{3}{4}$.

Tra bảng ta có : $\delta \approx 48^0\ 35'$. Do đó góc $\widehat{XO'Z} = 2\delta \approx 97^0\ 10'$.

Và hai góc : $\widehat{XO'Y} = \widehat{YO'Z} \approx (360^0 - 97^0\ 10') : 2 \approx 135^0\ 25'$.

Nếu để các trục trục đo tạo với nhau các góc tính bằng độ như vậy, thì trong thực hành sau này sẽ không tiện.

Do đó, người ta thấy rằng : tg $7^0\ 10' \approx 1 : 8$; và tg $41^0\ 25' \approx 7 : 8$.

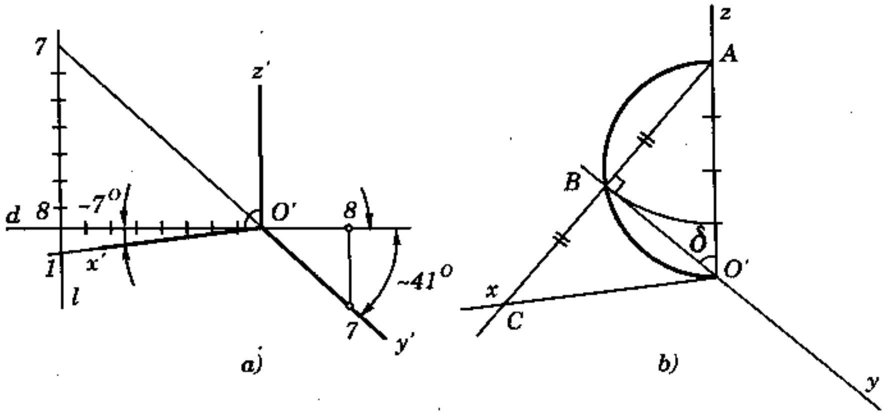
Từ đó, ta vẽ các trục toạ độ trục đo loại này được vẽ như hình 9.16a.

Qua gốc toạ độ O', ta vẽ một đường thẳng d vuông góc với trục O'z. Trên đó, tính từ gốc O' ta lấy 8 đơn vị, tại điểm cuối đó, vẽ một đường thẳng l song song với trục O'z. Trên đó :

Lấy về phía dưới đường thẳng d một đơn vị, nối điểm này với gốc O', ta có trục toạ độ O'x.

Lấy về phía trên đường thẳng d bảy đơn vị, nối điểm này với gốc O', ta có trục toạ độ O'y.

Ta cũng có thể vẽ các trục toạ độ trục đo loại này theo $\sin\delta = \frac{3}{4}$ (hình 9.16b).



Hình 9.16

(Trong đó góc giữa hai nửa dương của truc O'x và trục O'z là 2δ)

Trên trục O'z lấy một điểm A sao cho O'A = 4 đơn vị.

Vẽ đường tròn, đường kính O'A. Lấy A làm tâm, quay cung tròn, bán kính bằng ba đơn vị.

Cung tròn này, cắt đường tròn vừa vẽ ở điểm B.

Khi đó, đường thẳng O'B là trục O'y.

Lấy điểm C, đối xứng với A qua điểm B. Đường thẳng O'C, chính là trục O'x.

**** Hình chiếu trục đo của các đường tròn thuộc (hoặc song song) với các mặt phẳng toạ độ.***

Hình chiếu trục đo của các đường tròn đó là các ellip :

Hướng của trục dài và trục ngắn, tương tự trường hợp hình chiếu trục đo thẳng góc đều.

Độ lớn các trục của ellip như sau :

- Nếu đường tròn thuộc mặt phẳng (xOy) hoặc (yOz) thì :

+ Trục dài của ellip bằng đường kính d của đường tròn.

+ Trục ngắn của ellip bằng $d\sqrt{1-r^2} = d\sqrt{1-p^2} = d\sqrt{1-\frac{8}{9}} = d/3$

- Nếu đường tròn thuộc mặt phẳng (xOz) thì :

+ Trục dài của ellip bằng đường kính d của đường tròn.

+ Trục ngắn của ellip bằng $d\sqrt{1-q^2} = d\sqrt{1-\frac{2}{9}} = d\sqrt{7}/3 \approx 0{,}88d$.

Nếu hình chiếu trục đo vẽ theo các hệ số biến dạng quy ước ($p = r = 1$ và $q = 0,5$) thì :

- Nếu đường tròn thuộc mặt phẳng toạ độ (xOy) và (yOz) thì :

+ Trục dài của ellip bằng 1,06d.

+ Trục ngắn của ellip bằng 0,35d.

- Nếu đường tròn thuộc mặt phẳng (xOz) thì :

+ Trục dài của ellip bằng 1,06d.

+ Trục ngắn của ellip bằng 0,93d (d là đường kính đường tròn).

9.2.2. HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO XIÊN GÓC

Hình chiếu trục đo thẳng góc, cho ta hình giống thật hơn, song việc vẽ cũng phức tạp hơn. Vì mặt phẳng hình chiếu trục đo có thể chọn tuỳ ý, nên ta có thể chọn mặt phẳng đó, song song với một mặt phẳng toạ độ của hệ trục toạ độ Đêcác vuông góc trong không gian.

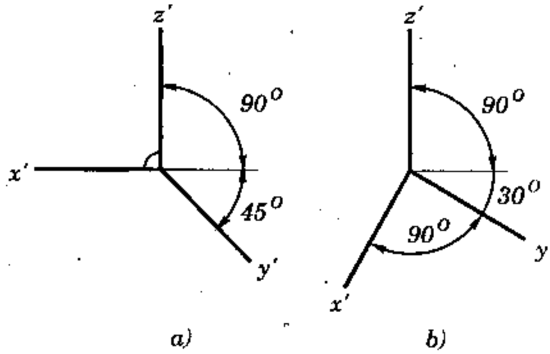
Ví dụ, ta chọn mặt phẳng hình chiếu song song với mặt phẳng (xOy). Khi đó, các hình thuộc các mặt phẳng song song với mặt phẳng đó sẽ không bị biến dạng. Tức là, hai trục toạ độ trục đo O'x và O'z vẫn vuông góc với nhau; và các hệ số biến dạng theo hai trục đó cũng bằng nhau và bằng $p = r = 1$.

Còn hướng của trục O'y, thì tuỳ thuộc hướng chiếu.

Thực tế người ta lấy góc giữa trục O'y với O'z bằng 135^0 hoặc 120^0 (hình 9.17).

Hệ số biến dạng theo trục Oy, người ta cũng lấy với :

- Hình chiếu trục đo xiên góc đều, thì : $p = q = r = 1$.
- Hình chiếu trục đo xiên góc cân, thì : $p = r = 1$, còn $q = 0,5$.



Hình 9.17

Hình chiếu trục đo của các đường tròn thuộc (hoặc song song) với các mặt phẳng toạ độ :

- Hình chiếu trục đo xiên góc cân : (góc giữa trục O'y và O'z bằng 135^0).

Đường tròn thuộc mặt phẳng (xOz) có hình chiếu là đường tròn, đường kính d.

Đường tròn thuộc mặt phẳng (xOy) và (yOz) thì có hình chiếu là ellip :

Trục dài bằng 1,06d và trục ngắn bằng 0,35d. Hướng của các trục dài này nghiêng với trục O'x (hoặc O'z, tuỳ theo đường tròn thuộc mặt phẳng toạ độ (xOy) hoặc (yOz)) một góc $7^0 10'$ (hình 9.18a).

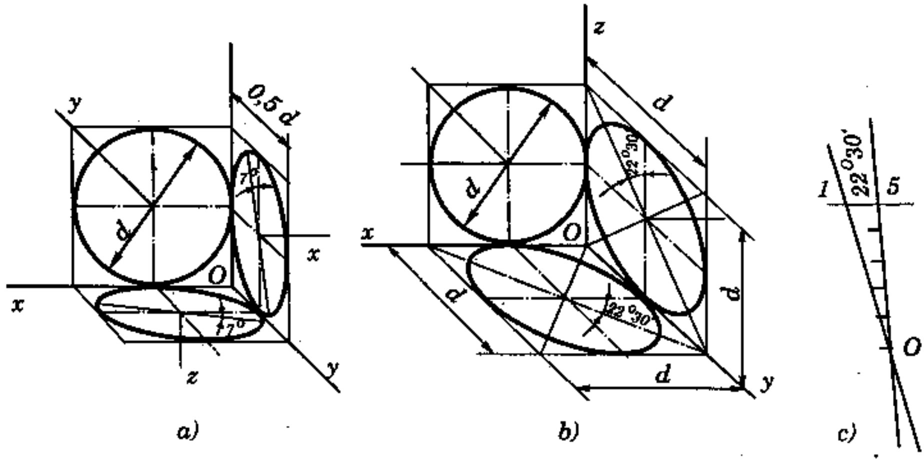
- Hình chiếu trục đo xiên góc đều (góc giữa trục O'y với O'z bằng 135^0) :

Đường tròn thuộc mặt phẳng (xOz) có hình chiếu là đường tròn đường kính d.

Đường tròn thuộc mặt phẳng (xOy) và (yOz) có hình chiếu là ellip có : Trục dài bằng 1,3d; trục ngắn bằng 0,54d. Hướng của trục dài này nghiêng với trục O'y (hoặc O'x, tuỳ theo đường tròn thuộc mặt phẳng (xOy) hoặc (yOz)) một góc $22^0 30'$ (hình 9.18b).

Để vẽ đường thẳng nghiêng một góc $22^0 30'$ đối với trục O'x và O'y (trục dài của ellip), ta dựa vào tg $22^0 30' \approx 1/5$. Cách vẽ như hình 9.18c.

Loại hình chiếu trục đo này, tuy hình không đẹp, song nó thường được dùng để vẽ nhanh những hình có nhiều đường tròn thuộc các mặt phẳng song song.



Hình 9.18

Trên đây ta chỉ nói cách vẽ hình chiếu trục đo của các đường tròn thuộc (hoặc song song) với các mặt phẳng toạ độ. Vì đa số các hình ta gặp sau này, đều có các đường tròn thuộc (hoặc song song) với các mặt phẳng toạ độ.

Nếu gặp đường tròn (hoặc ellip) ở các vị trí khác, thì cách vẽ nói chung là : chuyển một cặp đường kính liên hiệp của nó (hai đường kính vuông góc bất kỳ của một đường tròn là một cặp đường kính liên hiệp) từ hình chiếu thẳng góc sang hình chiếu trục đo. Đó cũng là một cặp đường kính liên hiệp của ellip trên hình chiếu trục đo.

9.3. CÁCH VẼ HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO

(Chuyển từ hình chiếu thẳng góc sang hình chiếu trục đo)

9.3.1. HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO CỦA MỘT ĐIỂM

Giả sử ta có hình chiếu thẳng góc (đồ thức) của điểm $A(A_1, A_2)$. Ta chuyển điểm A đó sang hình chiếu trục đo.

Nếu ta lấy trục Oz nữa thì đồ thức của điểm A sẽ được xác định bằng ba toạ độ :

$x_{A} = OA_X$; $y_A = A_XA_2$ và $z_A = A_X A_1$.

Ta vẽ một hệ trục toạ độ trục đo, ví dụ hệ trục toạ độ thẳng góc đều (hình 9.19).

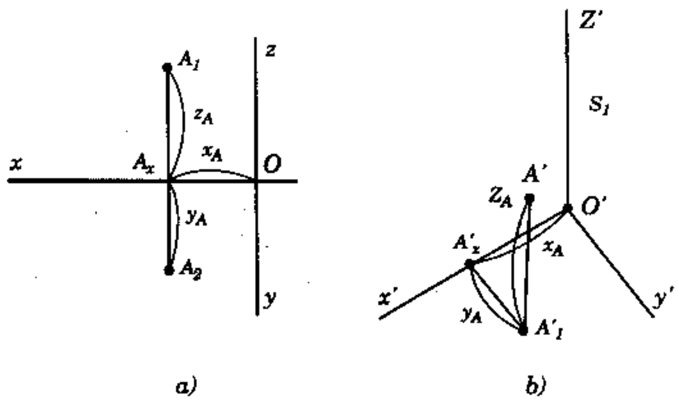
Loại hình chiếu trục đo này, nếu lấy các hệ số biến dạng quy ước thì, tất cả đều bằng 1 ($p = q = r = 1$).

Vì vậy, việc vẽ sẽ đơn giản nhiều (khi lấy các điểm trên hình chiếu trục đo, chú ý dấu dương và âm của các toạ độ).

Trên trục O'x', ta lấy điểm A'_X sao cho $O'A'_X = OA_X$. Qua điểm A'_X vạch đường thẳng song song với trục O'y', trên đó lấy điểm A'_1 sao cho $A_x'A'_1 = A_XA_2$, Qua điểm A'_1 vạch đường thẳng song song với trục O'z', trên đó lại lấy điểm A' sao cho $A'_1A' = A_XA_1$.

Như vậy, điểm A' là hình chiếu trục đo của điểm A.

Đó là ta vẽ hình chiếu trục đo thẳng góc đều. Khi chuyển một toạ độ nào đó, từ đồ thức sang hình chiếu trục đo, ta phải nhân mỗi toạ độ của đồ thức (hình chiếu thẳng góc) đó với hệ số biến dạng tương ứng của nó, rồi mới đặt lên hình chiếu trục đo. Nhưng vì loại hình chiếu trục đo ta vừa vẽ, tất cả các hệ số biến dạng đều bằng 1, nên việc nhân với 1 thì cũng như không nhân. Do đó, ta không thấy vai trò của các hệ số biến dạng.



Hình 9.19

Qua đó, bạn đọc thấy sự tiện lợi của các hệ số biến dạng quy ước như thế nào.

Nếu vẽ hình chiếu trục đo thẳng góc cân hoặc xiên góc cân, thì chú ý là, hệ số biến dạng theo trục Oy bằng 0,5. Nên là mỗi toạ độ theo trục Oy, chỉ lấy một nửa của toạ độ trên đồ thức (vì nhân với 0,5) đặt vào hình chiếu trục đo.

9.3.2. HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Một đường thẳng được xác định khi biết hai điểm. Hình chiếu trục đo của đường thẳng cũng được xác định, khi biết hình chiếu trục đo của hai điểm.

Do đó để chuyển một đường thẳng từ đồ thức sang hình chiếu trục đo, ta cũng chuyển hai điểm của đường thẳng đó.

Từ đó, ta có thể chuyển một đa giác hoặc một đa diện, từ đồ thức sang hình chiếu trục đo. Tức là, ta chuyển các đỉnh của đa giác hoặc đa diện đó, sau đó nối các đỉnh tương ứng với nhau.

9.3.3. HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO CỦA ĐA DIỆN

Để vẽ hình chiếu trục đo của một đa diện, ta vẽ các đỉnh và các cạnh của đa diện đó.

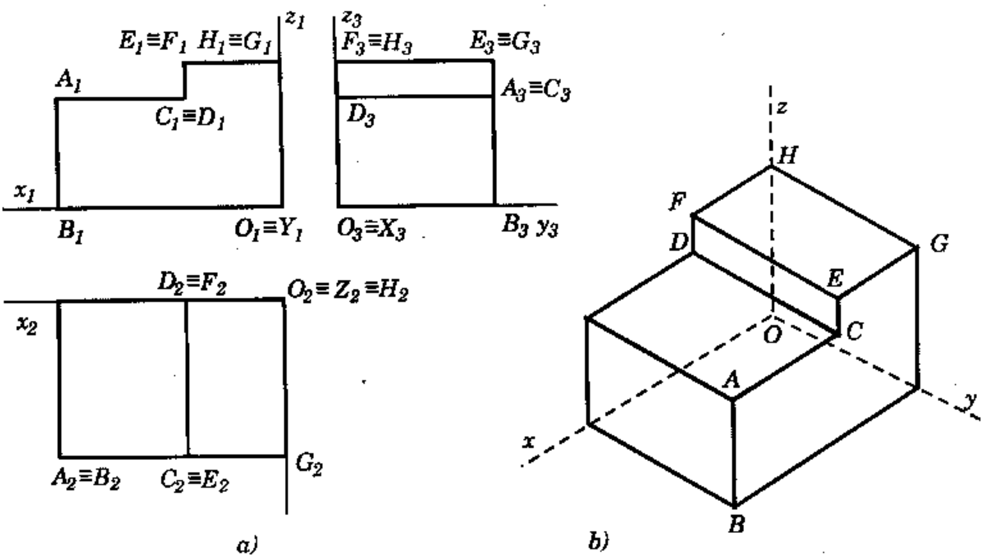
Ví dụ : Vẽ hình chiếu trục đo của một hình, gồm hai hình hộp chữ nhật chồng lên nhau.

Giải : Trước hết ta chọn loại hình chiếu trục đo, chọn hệ trục toạ độ trục đo.

Ta chọn loại hình chiếu trục đo thẳng góc đều (hình 9.20).

Ta gắn vào hình hộp chữ nhật một hệ trục toạ độ Đềcác vuông góc Oxyz. Ta chọn gốc toạ độ là một đỉnh của hình hộp.

Vì các cạnh của hình hộp, đều tương ứng song song với các trục toạ độ, nên khi chuyển từ hình chiếu thẳng góc sang hình chiếu trục đo, ta lưu ý điều đó.



Hình 9.20

Ví dụ, đáy dưới của hình hộp là hình chữ nhật, có các cạnh tương ứng song song với các trục Ox và Oy. Khi chuyển sang hình chiếu trục đo, các cạnh đó vẫn song song với các trục toạ độ tương ứng và ta có một hình bình hành. Đó là hình chiếu trục đo của đáy hình hộp.

Lên độ cao bằng chiều cao AB hình hộp, lại có một hình chữ nhật bằng đáy hình hộp, trừ đi một hình chữ nhật nhỏ hơn. Ta tịnh tiến hình bình hành vừa vẽ lên độ cao AB đó, và thêm một đường CD song song với trục Oy. Lên một độ cao nhỏ CE nữa, ta lại có một hình chữ nhật EFHG nhỏ hơn.

Cuối cùng, vẽ các cạnh bên của hình hộp. Các cạnh khuất, có thể không vẽ hoặc vẽ bằng nét đứt.

Bạn đọc có thể vẽ loại hình chiếu trục đo thẳng góc cân.

9.3.4. HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO CỦA MẶT CONG

Ví dụ 1 : Cho đồ thức của một mặt trụ tròn xoay. Vẽ hình chiếu trục đo của nó.

Giải : Mặt trụ đã cho có hai đáy là hai đường tròn, thuộc mặt phẳng bằng.

Ta gắn vào mặt trụ đó một hệ trục toạ độ Đềcác vuông góc Oxyz. (Tất nhiên, ta chọn hệ trục toạ độ ở đâu cũng được. Nhưng nếu chọn được vị trí hợp lý, thì khi chuyển từ đồ thức sang hình chiếu trục đo, sẽ bớt được những động tác đo phụ không cần thiết).

Chọn tâm của đường tròn đáy dưới của mặt trụ làm gốc toạ độ. Ta chọn hình chiếu trục đo thẳng góc đều. Các trục toạ độ như hình vẽ.

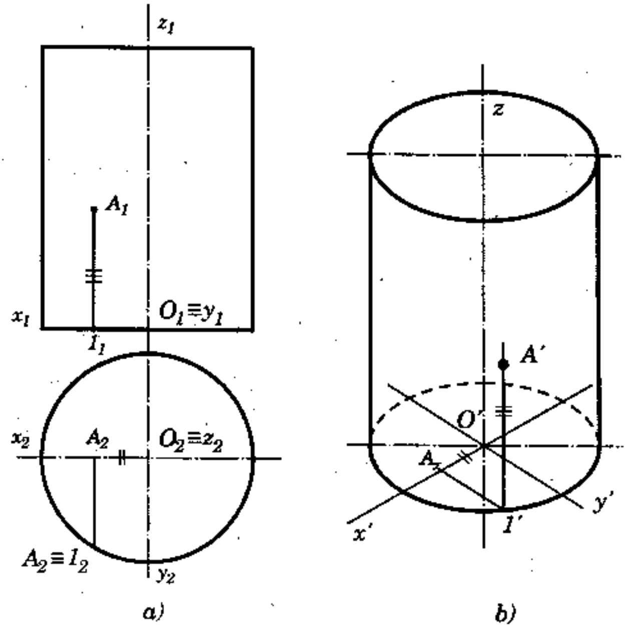
Như vậy, đường tròn của đáy dưới thuộc mặt phẳng (xOy), nên hình chiếu trục đo của nó là một ellip, có trục dài vuông góc với trục O'z'. Chiều dài của nó bằng 1,22d (d là đường kính đường tròn), trục ngắn bằng 0,7d. Như vậy, ta vẽ được ellip đó.

Lên độ cao z bằng chiều cao mặt trụ, cũng có một đường tròn, bằng đường tròn ở đáy dưới. Nó cũng thuộc mặt phẳng bằng, nên ta chỉ việc tịnh tiến ellip vừa vẽ lên một đoạn bằng chiều cao mặt trụ, sẽ có ellip biểu diễn đáy trên (hình 9.21).

Vẽ hai tiếp tuyến (thẳng đứng) với hai ellip đó. Đó là hai đường bao ngoài của mặt trụ.

Ta cũng có thể vẽ hình chiếu trục đo thẳng góc cân mặt trụ đó.

Trên hình đó cũng chỉ cách vẽ một điểm A bất kỳ thuộc mặt trụ.



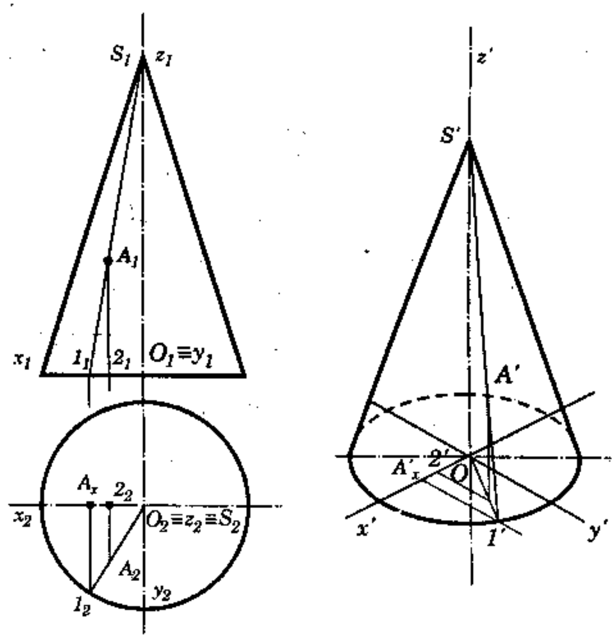
Hình 9.21

Ví dụ 2 : Cho hai hình chiếu của một mặt nón tròn xoay. Vẽ hình chiếu trục đo của mặt nón đó.

Giải : Ta cũng chọn gốc toạ độ là tâm của đường tròn đáy nón.

Tương tự trên, hình chiếu trục đo của đường tròn đáy là một ellip. Từ gốc toạ độ lấy lên một độ cao bằng chiều cao mặt nón. Đó chính là đỉnh S của mặt nón. Từ đỉnh S đó, vẽ hai tiếp tuyến với ellip đáy. Đó chính là hai đường sinh biên của mặt nón (hình 9.22).

Trên đó cũng chỉ cách vẽ một điểm A bất kỳ thuộc mặt nón đó.



Hình 9.22

9.3.5. HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO CỦA MỘT HÌNH

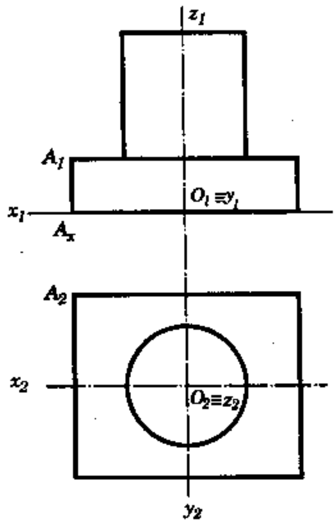
Bây giờ ta vẽ hình chiếu trục đo của một hình, trong đó có cả đa diện và cả mặt cong.

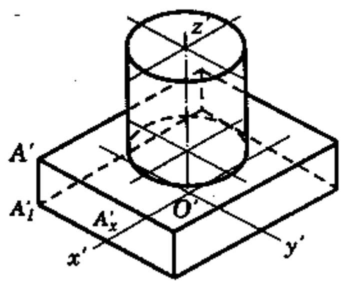
Ví dụ : Cho hai hình chiếu thẳng góc của một hình. Vẽ hình chiếu trục đo của hình đó.

Giải : Trước hết ta chọn loại hình chiếu trục đo : hệ trục toạ độ trục đo của loại hình chiếu trục đo định vẽ (hình 9.23).

Chọn tâm của hình chữ nhật dưới cùng làm gốc toạ độ.

Ta thấy : ở đáy dưới cùng có một hình chữ nhật, các cạnh song song với trục Ox và Oy. Chuyển sang hình chiếu trục đo, là một hình bình hành có các cạnh song song với các trục O'x' và O'y'.





Hình 9.23

Lên độ cao bằng chiều dầy tấm đế, cũng có một hình chữ nhật, bằng hình chữ nhật ở dưới. Vì vậy, ta chỉ việc tịnh tiến hình bình hành vừa vẽ lên một đoạn bằng chiều cao của đế. Trên mặt này, còn có một đường tròn, có tâm thuộc trục Oz. Chuyển sang hình chiếu trục đo, là một ellip, có trục dài vuông góc với trục O'z'.

Từ đây lên một độ cao bằng chiều cao phần hình trụ, có một đường tròn, bằng đường tròn vừa vẽ. Ta tịnh tiến ellip vừa vẽ lên một độ cao bằng chiều cao hình trụ.

Như vậy, những phần chính đã vẽ xong. Ta vẽ hai đường bao ngoài của phần hình trụ và nối các cạnh của hình hộp chữ nhật.

Khi nối, chú ý các dường khuất : có thể không vẽ, hoặc vẽ bằng nét đứt, tuỳ theo yêu cầu của bài.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Hãy nêu các loại hình chiếu trục đo thường dùng. Trong mỗi loại hãy nêu : Các hệ số biến dạng, góc giữa các trục toạ độ trục đo; hình chiếu trục đo của các đường tròn thuộc các mặt phẳng toạ độ (Nêu hướng của các trục và độ lớn của mỗi trục của các ellip đó với các hệ số biến dạng tính toán và các hệ số biến dạng quy ước).

2. Các hệ số biến dạng quy ước là thế nào? Tại sao lại phải lấy hệ số biến dạng quy ước?

3. Bạn hiểu định lý Pônke-Svac như thế nào? Tại sao trong hình chiếu trục đo lại cần đến định lý đó.

4. Cách chuyển một điểm từ đồ thức sang hình chiếu trục đo? (tự vẽ hình).

5. Khi chuyển một điểm từ đồ thức sang hình chiếu trục đo, thì giữa hình chiếu trục đo thẳng góc đều và thẳng góc cân cần chú ý vấn đề gì?

6. Theo bạn, sự khác nhau giữa hình chiếu trục đo thẳng góc và hình chiếu trục đo xiên góc là gì?

7. Hình chiếu trục đo xiên góc có đặc điểm gì mà ta có thể lợi dụng khi vẽ các hình có nhiều đường tròn thuộc các mặt phẳng song song?

8. Vẽ hình chiếu trục đo thẳng góc cân của hình 9.23.

PHỤ LỤC

MỘT VÀI MỆNH ĐỀ VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG VÀ VUÔNG GÓC (CỦA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN)

1. Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng là đường thẳng đó phải song song với (ít nhất) một đường thẳng thuộc mặt phẳng đó.

2. Một đường thẳng đã song song với một mặt phẳng, thì đường thẳng đó sẽ song song với vô số đường thẳng thuộc mặt phẳng đó.

3. Nếu có một đường thẳng đã song song với một mặt phẳng, thì mọi mặt phẳng đi qua đường thẳng đó, đều cắt mặt phẳng đã cho theo một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho đó. Ví dụ, ta có đường thẳng d song song với mặt phẳng $\mathcal{D}$ thì bất kỳ mặt phẳng nào chứa đường thẳng d đều cắt mặt phẳng $\mathcal{D}$ theo một đường thẳng song song với đường thẳng d.

4. Điều kiện để hai mặt phẳng song song với nhau là trong mặt phẳng này có (ít nhất) hai đường thẳng cắt nhau song song với mặt phẳng kia.

5. Nếu hai mặt phẳng đã song song với nhau, thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này, đều song song với mặt phẳng kia.

6. Nếu có hai đường thẳng song song với nhau, thì bất cứ hai mặt phẳng nào chứa hai đường thẳng đó, đều có giao tuyến là một đường thẳng song song với hai đường thẳng đó.

7. Điều kiện để một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng là, đường thẳng đó phải vuông góc với (ít nhất) hai đường thẳng cắt nhau trong mặt phẳng đó. Ví dụ. đường thẳng d muốn vuông góc với mặt phẳng $\mathcal{D}$, thì đường thẳng d phải vuông góc với hai đường thẳng a và b cắt nhau thuộc mặt phẳng $\mathcal{D}$.

8. Nếu một đường thẳng đã vuông góc với một mặt phẳng, thì đường thẳng đó vuông góc với mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng đó.

9. Nếu một đường thẳng đã vuông góc với một mặt phẳng, thì mọi mặt phẳng chứa đường thẳng đó đều vuông góc với mặt phẳng đã cho. Ví dụ, đường thẳng d đã vuông góc với mặt phẳng $\mathcal{D}$, thì bất kỳ mặt phẳng nào chứa đường thẳng d, đều vuông góc với mặt phẳng $\mathcal{D}$.

10. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là, trong mặt phẳng này, có (ít nhất) một đường thẩmg vuông góc với mặt phẳng kia.

11. Nếu hai mặt phẳng đã vuông góc với nhau, thì đường thẳng thuộc mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng đó, sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. HÌNH HỌC HOẠ HÌNH.

Nguyễn Đình Điện và Đỗ Mạnh Môn, NXB Giáo Dục - 1993.

2. GIÁO TRÌNH HÌNH HỌC HOẠ HÌNH.

Nguyễn Đình Điện - Hoàng Văn Thân (Biên dịch),
NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp - 1988.

3. BÀI TẬP HÌNH HỌC HOẠ HÌNH.

Nguyễn Quang Cự - Nguyễn Mạnh Dũng - Vũ Hoàng Thái,
NXB Giáo Dục - 2004.

4. BÀI TẬP HÌNH HỌC HOẠ HÌNH.

Bộ môn Hình hoạ-Vẽ kỹ thuật Trường Đại học Bách khoa Hà Nội - 1998.

5. MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC HOẠ HÌNH.

Đoàn Hiền, NXB Giáo dục - 1998.

6. НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

КОЛОТОД С.М. КИЕВ-1961

7. СБОРНИК ЗАДАЧ ПОКУРСУ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ГОРДОН Б.О. ИВАНОВ Ю.Б. СОЛНЦЕВА Т.Е, МОСКВА -1969

MỤC LỤC

C– ĐƯỜNG VÀ MẶT

D– KHAI TRIỂN CÁC MẶT

Phần hai. PHƯƠNG PHÁP HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THỤY

Biên tập nội dung và sửa bản in :
TRẦN VĂN THẮNG

Trình bày bìa :
MẠNH HÙNG

Chế bản :
TRỊNH THỤC KIM DUNG

HÌNH HỌC HOẠ HÌNH
Mã số : 7B 606 M5–DAI

In 1500 bản, khổ 16x24 cm tại Nhà in ĐHQG Hà Nội.
Số XB: 89/89 - 05.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2005.

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
Địa chỉ : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội

TÌM ĐỌC SÁCH THAM KHẢO KĨ THUẬT

CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

1. **Hình học hoạ hình**	Vũ Hoàng Thái
2. **Vẽ kĩ thuật cơ khí tập một**	Trần Hữu Quế
3. **Vẽ kĩ thuật cơ khí tập hai**	Trần Hữu Quế (Chủ biên)
4. **Bài tập vẽ kĩ thuật cơ khí tập một**	Trần Hữu Quế
5. **Bài tập vẽ kĩ thuật cơ khí tập hai**	Trần Hữu Quế
6. **Công nghệ chế tạo máy**	Phí Trọng Hảo Nguyễn Thanh Mai
7. **Sổ tay dung sai và lắp ghép**	Ninh Đức Tốn
8. **Kĩ thuật nguội**	Phí Trọng Hảo Nguyễn Thanh Mai
9. **Kĩ thuật sửa chữa máy công cụ**	Lưu Văn Nhang
10. **Nguyên lí động cơ đốt trong**	Nguyễn Tất Tiến
11. **Lí thuyết động cơ điêzen**	Lê Viết Lượng
12. **Thực hành động cơ đốt trong**	Hoàng Minh Tác

Bạn đọc có thể tìm mua tại các Công ti Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục :
Tại Hà nội : ***25 Hàn Thuyên, 81 Trần Hưng Đạo,***
187 Giảng Võ, 23 Tràng Tiền.
Tại Đà Nẵng : ***15 Nguyễn Chí Thanh.***
Tại Thành phố Hồ Chí Minh : ***104 Mai Thị Lựu, Quận 1.***

8934980534014

Giá: 28.000đ