LÊ HỒNG ĐỨC - LÊ BÍCH NGỌC

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Tích phân

GỒM 27 CHỦ ĐỀ CHO 64 DẠNG TOÁN VỚI 287 VÍ DỤ, 160 BÀI TOÁN CHỌN LỌC VÀ 198 BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ KÉP

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \underset{a>0}{\overset{x=a\sin t}{=}} \int \frac{a\cos t dt}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}} = \int dt = t + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} \overset{x=atgt}{=} \int \frac{\frac{adt}{\cos^2 t}}{a^2tg^2t + a^2} = \frac{1}{a}\int dt = \frac{1}{a}t + C$$

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HỒNG ĐỨC - LÊ BÍCH NGỌC

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
TÍCH PHÂN

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \underset{a>0}{\overset{x=a\sin t}{=}} \int \frac{a\cos t\,dt}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}} = \int dt = t + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} \overset{x=a\,tg\,t}{=} \int \frac{\frac{a\,dt}{\cos^2 t}}{a^2 tg^2 t + a^2} = \frac{1}{a}\int dt = \frac{1}{a}t + C.$$

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập – Chế bản: (04) 39714896
Hành chính: (04) 39714899 Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: TRUNG NGHĨA-PHẠM QUỐC TUẤNN

Trình bày bìa: ĐẠI THẮNG

Đối tác liên kết xuất bản:

CTY TNHH SÁCH VÀ VĂN HOÁ PHẨM QUẢNG LỢI

SÁCH LIÊN KẾT

Phương pháp giải toán tích phân

Mã số: 1L-95ĐH2010
In 2.000 cuốn, khổ 16x24 cm in tại Công ty CP in và Thương mại HTC
Số xuất bản: 119 - 2010/CXB/30 - 10/ĐHQGHN, ngày 26/01/2010.
Quyết định xuất bản số: 95LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu Quý I năm 2010.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TÍCH PHÂN

BIÊN SOẠN THEO CHƯƠNG TRÌNH CHỈNH LÝ HỢP NHẤT
HIỆN HÀNH CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

Hưởng ứng lời kêu gọi đổi mới phương pháp dạy và học
LẤY HỌC TRÒ LÀM TRUNG TÂM

(*Chỉnh lí – Tái bản lần thứ 6*)

GIỚI THIỆU CHUNG

(Lời tái bản)

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ tài liệu:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH LUYỆN THI ĐẠI HỌC

do Thạc sĩ Toán học Lê Hồng Đức chủ biên. Bộ tài liệu gồm 10 tập:

Tập 1. Phương pháp giải Toán Lượng giác.
Tập 2. Phương pháp giải Toán Hình học Giải tích trong Mặt phẳng.
Tập 3. Phương pháp giải Toán Hình học Giải tích trong Không gian.
Tập 4. Phương pháp giải Toán Hình học Không gian.
Tập 5. Phương pháp giải Toán Véctơ.
Tập 6. Phương pháp giải Toán Đại số.
Tập 7. Phương pháp giải Toán Hàm số.
Tập 8. Phương pháp giải Toán Tích phân.
Tập 9. Phương pháp giải Toán Tổ hợp.
Tập 10. Ôn tập Toán thi Tốt nghiệp Trung học phổ thông.

Với mục đích giúp các Thầy, Cô giáo giảng dạy có hiệu quả hơn và các em có được cái nhìn tổng quan, hiểu được bản chất của mỗi vấn đề đặt ra, từ đó đưa ra phương pháp giải mạch lạc phù hợp với những đòi hỏi của một bài thi, nên mỗi trong mỗi tập tài liệu chúng tôi sắp xếp, hệ thống các kiến thức được đề cập trong chương trình Toán Trung học Phổ thông thành các Chủ đề. Mỗi Chủ đề được chia thành ba mục:

I. **Kiến thức cơ bản**: *Trình bày toán tắt lí thuyết cần nhớ hoặc là những lời giới thiệu mở đầu.*

II. **Phương pháp giải các dạng toán thường gặp**: *được trình bày dưới dạng các bài toán và các ví dụ về giải toán.*

III. **Bài tập đề nghị**

Như vậy ở mỗi chủ đề:

1. *Với việc trình bày dưới dạng các bài toán cơ bản, cũng ví dụ minh hoạ ngay sau đó, sẽ giúp tăng chất lượng bài giảng cho các Thầy, Cô giáo và với các em học sinh sẽ hiểu và biết cách trình bày bài.*
2. *Với các bài toán chọn lọc được lấy ra từ các đề thi vào các trường Đại học, sẽ giúp các Thầy, Cô giáo dẫn dắt các em học sinh tiếp cận nhanh chóng với những đòi hỏi của thực tế.*
3. *Đặc biệt là nội dung của các chú ý sau một vài ví dụ hoặc bài toán sẽ giúp các Thầy, Cô giáo củng cố những hiểu biết chưa thật thấu đáo, cùng với cách nhìn nhận vấn đề đặt ra cho các em học sinh, để trả lời một cách thoả đáng câu hỏi " Tại sao lại nghĩ và làm như vậy ? ".*
4. *Ngoài ra có rất nhiều bài toán được giải bằng nhiều cách khác nhau sẽ giúp các học sinh trở lên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.*

Bộ tài liệu được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, giải quyết tương đối triệt để các vấn đề của toán học sơ cấp. Bộ tài liệu này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các Thầy, Cô giáo đến các em Học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn Toán Tốt nghiệp PTTH hoặc vào các Trường Đại học.

Cuốn **PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TÍCH PHÂN** *được chia thành ba phần:*

Phần I. Các phương pháp xác định nguyên hàm
Phần II. Các phương pháp tính tích phân
Phần III. Các ứng dụng của tích phân

bao gồm 27 chủ đề, miêu tả chi tiết phương pháp giải cho 60 dạng toán tích phân thường gặp. Và để giúp bạn đọc tiện tra cứu, chúng tôi mạnh dạn thay đổi cách trình bày phần mục lục so với lề thói cũ bằng việc liệt kê các bài toán thay cho đầu mục.

Chúng tôi cũng xin bày tỏ tại đây lòng biết ơn sâu sắc tới sự giúp đỡ động viên tinh thần của GS.TS Trần Mạnh Tuấn nguyên Phó Giám đốc Trung Tâm KHTN & CNQG, PGS.TSKH Đinh Quang Lưu, GS.TSKH Nguyễn Văn Thu và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải nguyên Hiệu trưởng Trường PTTH Hà Nội - Amsterdam.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng bằng việc tham khảo một lượng rất lớn các tài liệu hiện nay để vừa viết, vừa mang đi giảng dạy ngay cho các học sinh của mình từ đó kiểm nghiệm và bổ xung thiếu sót, cùng với việc tiếp thu có chọn lọc ý kiến của các bạn đồng nghiệp để dần hoàn thiện bộ tài liệu này, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Mọi ý kiến xin liên hệ trực tiếp hoặc gửi về theo địa chỉ:

Nhóm tác giả Cự Môn
Số 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội
Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0983046689
E-mail: cumon@hn.vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com

Hà nội, ngày 24 tháng 12 năm 2006

LÊ HỒNG ĐỨC

MỤC LỤC

PHẦN I
NGUYÊN HÀM

PHẦN II
TÍCH PHÂN

PHẦN III
CÁC ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

PHẦN IV
PHỤ LỤC

PHẦN I
NGUYÊN HÀM
MỞ ĐẦU

I. NHẮC LẠI KHÁI NIỆM VI PHÂN

Định nghĩa

Cho hàm số y=f(x) xác định trên khoảng (a, b) và có đạo hàm tại $x\in(a, b)$. Cho số gia Δx tại x sao cho $x+\Delta x\in(a, b)$.

Ta gọi tích $f'(x)\Delta x$ (hoặc $y'\Delta x$) là vi phân của hàm số y=f(x) tại x ứng với số gia Δx và ký hiệu là dy hoặc df(x).

Như vậy, ta có:

$$dy=y'\Delta x, \quad (1)$$

hoặc $$df(x)=f'(x)\Delta x. \quad (1')$$

Mặt khác, với y=x, ta được:

$$dy=dx=(x)'\Delta x \Leftrightarrow dx=\Delta x. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) hoặc (1'), ta được:

$$dy=y'dx, \quad (3)$$

hoặc $$df(x)=f'(x)dx. \quad (3')$$

II. ĐỊNH NGHĨA NGUYÊN HÀM

1. ĐỊNH NGHĨA

a. F(x) là nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng (a, b) nếu với $\forall x\in(a, b)$, ta có:

$$F'(x)=f(x).$$

b. Nếu thay khoảng (a, b) bằng đoạn [a, b] thì ta phải có thêm điều kiện:

$$F'(a^+)=f(a) \text{ và } F'(b^-)=f(b).$$

Ví dụ 1:

1. $F(x)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2$ trên R, vì:

$$(F(x))'=(x^3)'=3x^2=f(x).$$

Nhận xét thêm $F(x)=x^3+C$ với C là hằng số tuỳ ý cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2$ trên R.

Từ đó có thể tổng quát hoá:

- Hàm $F(x)=x^k+C$ với $k\neq0$, C=const là một họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=kx^{k-1}$ trên R.
- Ngược lại hàm số $f(x)=x^\alpha$, $\alpha\neq-1$ có họ nguyên hàm là $F(x)=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

2. $F(x)=\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=-\sin x$ trên R, vì:

$$(F(x))'=(\cos x)'=-\sin x=f(x).$$

Nhận xét thêm $F(x)=\cos x+C$ với C là hằng số tuỳ ý cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=-\sin x$ trên R.

Từ đó có thể tổng quát hoá:

- Hàm $F(x)=\cos(ax+b)+C$ với $a\neq 0$, C=const là một họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=-a\sin(ax+b)$ trên R.
- Ngược lại hàm số $f(x)=\sin(ax+b)$, $a\neq 0$ có họ nguyên hàm là $F(x)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$ trên R.

3. $F(x)=e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x$ trên R, vì:

$$(F(x))'=(e^x)'=e^x=f(x).$$

Nhận xét thêm $F(x)=e^x+C$ với C là hằng số tuỳ ý cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x$ trên R.

Từ đó có thể tổng quát hoá:

- Hàm $F(x)=e^x+C$ với C=const là một họ nguyên hàm của hàm $f(x)=e^x$ trên R.
- Ngược lại hàm số $f(x)=e^{ax+b}$, $a\neq 0$ có họ nguyên hàm là $F(x)=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$ trên R.

Định lý: Nếu F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng (a, b) thì:

a. Với mọi hằng số C, F(x)+C cũng là một nguyên hàm của f(x) trên khoảng đó.

b. Ngược lại mọi nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng (a, b) đều có thể viết dưới dạng F(x)+C với C là hằng số.

Ký hiệu họ tất cả các nguyên hàm của hàm số f(x) là $\int f(x)dx$ đọc là tích phân bất định của f(x) hay họ các nguyên hàm của f(x). Vậy:

$$\int f(x)dx=F(x)+C. \qquad (1)$$

Từ (1) ta có:

- $f(x)=F'(x)$.
- Dấu $\int$ được gọi là dấu tích phân.
- Biểu thức f(x)dx gọi là biểu thức dưới dấu tích phân và đó là vi phân của mọi nguyên hàm của f(x).

Ví dụ 2: Từ ví dụ 1 ta được:

1. $\int 3x^2dx=x^3+C$,

$\int kx^{k-1}dx=x^k+C$,

$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

2. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,

$\int -a\sin(ax+b)dx = \cos(ax+b)+C$,

$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$.

3. $\int e^x dx = e^x + C$,

$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+C$.

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA NGUYÊN HÀM

Tính chất 1. Ta có:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Tính chất 2. Ta có:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx \quad (a \neq 0).$$

Tính chất 3. Ta có:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Từ hai tính chất 2, 3 ta suy ra:

" Nếu $F_1(x), \dots, F_n(x)$ là các nguyên hàm tương ứng của các hàm số $f_1(x), \dots, f_n(x)$ và $k_1, \dots, k_n$ là những số thực tuỳ ý, thì:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)]dx = F_1(x) \pm F_2(x) \pm \dots \pm F_n(x) + C. \quad "$$

Tính chất 4. Ta có:

$$\int f(t)dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u(x)).u'(x)dx = F(u(x)) + C.$$

Từ đó: $\int f(t)dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C$.

Ví dụ 3: Lập bảng biến thiên của hàm số:

$$y = x + \int (4x^2 + e^x)dx.$$

Giải.

Viết lại hàm số dưới dạng:

$y = x + 4\int x^2 dx + \int e^x dx$.

Miền xác định D=R.

Đạo hàm:

$y' = 1 + 4x^2 + e^x > 0, \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Ví dụ 4: Tính:

a. $\int\left[x^2+\frac{3}{x}+e^{3x+1}\right]dx$.

b. $\int\left(\sin 2x+\cos 3x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$.

Giải.

a. Ta có:

$$\int\left[x^2+\frac{3}{x}+e^{3x+1}\right]dx=\int x^2dx+3\int\frac{1}{x}dx+\int e^{3x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3+3\ln|x|+\frac{1}{3}e^{3x+1}+C.$$

b. Ta có:

$$\int\left(\sin 2x+\cos 3x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\int\sin 2xdx+\int\cos 3xdx+\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\text{tg}x+C.$$

3. SỰ TỒN TẠI CỦA NGUYÊN HÀM

Định lí. Mọi hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a, b] đều có nguyên hàm trên đoạn đó.

Nhận xét. Khi bắt đầu học tích phân các em học sinh thường tỏ ra rất lúng túng và hay bị nhầm với kết quả đạo hàm. Để tránh tình trạng như vậy các em cần thường nhắc nhở chính mình rằng " *Để tính* $\int f(x)dx$ *ta cần tìm một hàm số sao cho đạo hàm của nó bằng f(x)* ".

CHỦ ĐỀ 1
XÁC ĐỊNH NGUYÊN HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Chúng ta cần nhớ định nghĩa: F(x) là nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng (a, b) nếu với $\forall x \in (a, b)$, ta có:

$$F'(x) = f(x).$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1 : Chứng minh rằng F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a, b).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định F'(x) trên (a, b).

Bước 2: Chứng tỏ rằng $F'(x) = f(x)$ với $\forall x \in (a, b)$.

Chú ý: Nếu thay (a, b) bằng [a, b] thì phải thực hiện chi tiết hơn, như sau:

Bước 1: Xác định F'(x) trên (a, b).
Xác định $F'(a^+)$.
Xác định $F'(b^-)$.

Bước 2: Chứng tỏ rằng:

$$\begin{cases} F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b) \\ F'(a^+) = f(a) \\ F'(b^-) = f(b) \end{cases}$$

Ví dụ 1: Chứng minh rằng hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x), biết:

$$F(x) = \ln\frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \text{ và } f(x) = \frac{2\sqrt{2}(x^2 - 1)}{x^4 + 1}.$$

Giải

Ta có:

$$F'(x) = [\ln\frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}]' = \frac{1}{\dfrac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}}\left(\frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\right)'$$

$$= \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{(2x - \sqrt{2})(x^2 + x\sqrt{2} + 1) - (2x + \sqrt{2})(x^2 - x\sqrt{2} + 1)}{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}(x^2 - 1)}{(x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)} = \frac{2\sqrt{2}(x^2 - 1)}{x^4 + 1} = f(x).$$

Vậy F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên **R**.

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp "***Lấy học trò làm trung tâm***"
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x), bioiết:

$$F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a}) \text{ với } a > 0 \text{ và } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Giải

Ta có:

$$F'(x) = [\ln(x + \sqrt{x^2 + a})]' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + a})'}{x + \sqrt{x^2 + a}} = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + a}}}{x + \sqrt{x^2 + a}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}(x + \sqrt{x^2 + a})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} = f(x).$$

Vậy F(x) với a > 0 là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên R.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x), biéiết:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \text{ và } f(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0\,0 \\ 0 & \text{khi } x = 0\,0 \end{cases}.$$

Giải

Để tính đạo hàm của hàm số F(x) ta đi xét hai trường hợp:

a. Với x ≠ 0, ta có $F'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} = f(x)$.

b. Với x = 0, ta có :

$$F'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x}.$$

Ta có:

1. Với mọi x ≠ 0 thuộc lân cận của điểm 0 luôn có:

$$|x\sin\frac{1}{x}| \le |x| \Leftrightarrow -|x| \le x\sin\frac{1}{x} \le |x|.$$

2. Mặt khác $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$.

Suy ra: $\lim\limits_{x\to 0} x.\sin\dfrac{1}{x} = 0$.

Vậy, ta được F'(0) = 0 = f(0).

Tóm lại:

$$F'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} = f(x).$$

Vậy F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên R.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x), biết:

$$F(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \text{ và } f(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Giải

Để tính đạo hàm của hàm số F(x) ta đi xét hai trường hợp:

a. Với $x \neq 0$, ta có

$$F'(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

b. Với $x = 0$, ta có :

- *Đạo hàm bên trái* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$F'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + x + 1 - e^0}{x} = 1.$$

- *Đạo hàm bên phải* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$F'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - e^0}{x} = 1.$$

Nhận xét rằng $F'(0^-) = F'(0^+) = 1 \Rightarrow F'(0) = 1$.

Tóm lại:

$$F'(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases} = f(x).$$

Vậy F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên R.

Bài toán 2 : Xác định các giá trị của tham số để F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a, b).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định F'(x) trên (a, b).

Bước 2: Để F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a, b), điều kiện là:

$$F'(x) = f(x) \text{ với } \forall x \in (a, b) \Rightarrow \text{giá trị của tham số.}$$

Chú ý: Nếu thay (a, b) bằng [a, b] thì phải thực hiện chi tiết hơn, như sau:

Bước 1: Xác định F'(x) trên (a, b).
Xác định $F'(a^+)$.
Xác định $F'(b^-)$.

Bước 2: Để F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a, b), điều kiện là:

$$\begin{cases} F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b) \\ F'(a^+) = f(a) \\ F'(b^-) = f(b) \end{cases} \Rightarrow \text{giá trị của tham số.}$$

Ví dụ 5: Xác định a, b, c để hàm số:

$$F(x) = (a + 1)\sin x + \frac{b}{2}\sin 2x + \frac{c}{3}\sin 3x$$

là một nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \cos x \text{ trên } \mathbb{R}.$$

Giải

Ta có:

$$F'(x) = (a + 1).\cos x + b.\cos 2x + c.\cos 3x.$$

Vậy để F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) điều kiện là:

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \Leftrightarrow a.\cos x + b.\cos 2x + c.\cos 3x = 0,\ \forall x \quad (1)$$

Ta đi xác định a, b, c bằng phương pháp điều kiện cần và đủ, như sau:

Điều kiện cần: Giả sử (1) đúng với mọi x, suy ra đúng với

- $x = \frac{\pi}{2}$, ta được: $b = 0$. (2)
- $x = \frac{\pi}{6}$, ta được: $\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow a = 0$. (3)
- $x = 0$, ta được: $a + b + c = 0 \Rightarrow c = 0$. (4)

Vậy điều kiện cần là $a = b = c = 0$.

Điều kiện đủ: Với $a = b = c = 0$, ta được:

$$F(x) = \sin x \Rightarrow F'(x) = \cos x = f(x)$$

Tóm lại với $a = b = c = 0$ thì F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

Ví dụ 6: Xác định a, b để hàm số:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \le 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \le 1 \\ 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases} \text{ trên } \mathbb{R}.$$

Giải

Để tính đạo hàm của hàm số F(x) ta đi xét hai trường hợp:

a. Với $x \ne 1$, ta có

$$F'(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}.$$

b. Với x = 1, ta có :

Để hàm số F(x) có đạo hàm tại điểm x = 1, trước hết F(x) phải liên tục tại x = 1, do đó:

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^+} F(x) = f(1) \Leftrightarrow a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a \qquad (1)$$

- *Đạo hàm bên trái* của hàm số y = F(x) tại điểm x = 1.

$$F'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

- *Đạo hàm bên phải* của hàm số y = f(x) tại điểm $x_0 = 0$.

$$F'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax + b - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax + 1 - a - 1}{x - 1} = a.$$

Hàm số y = F(x) có đạo hàm tại điểm x = 1

$$\Leftrightarrow F'(1^-) = F'(1^+) \Leftrightarrow a = 2. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được b = −1.

Vậy hàm số y = F(x) có đạo hàm tại điểm x = 1, nếu và chỉ nếu a = 2, b = −1.

Khi đó:

$$F'(1) = 2 = f(1)$$

Tóm lại với a = 2, b = −1 thì F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

Ví dụ 7: Xác định a, b để hàm số:

$$F(x) = \begin{cases} (x + a)e^{-bx} & \text{khi } x < 0 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{khi } x \ge 0 \end{cases}$$

là một nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x}{2\sqrt{e^x}} & \text{khi } x < 0 \\ 2x + \dfrac{1}{2} & \text{khi } x \ge 0 \end{cases} \quad \text{trên R.}$$

Giải

Để tính đạo hàm của hàm số F(x) ta đi xét hai trường hợp:

a. Với x ≠ 0, ta có

$$F'(x) = \begin{cases} (1 - bx - ab)e^{-bx} & \text{khi } x < 0 \\ 2ax + b & \text{khi } x > 0 \end{cases}.$$

b. Với x = 0, ta có:

Để hàm số có đạo hàm tại x = 0, trước hết F(x) phải liên tục tại x = 0, do đó:

$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0) \Leftrightarrow a = 1 \qquad (1)$$

- *Đạo hàm bên trái* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$f'(0^-) = \lim_{x\to0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-}\frac{(x+1)e^{-bx}-1}{x} = \lim_{x\to0^-}(e^{-bx} - \frac{e^{-bx}-1}{-bx}.b)$$
$$= 1 - b.$$

- *Đạo hàm bên phải* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$f'(0^+) = \lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^2+bx+1-1}{x} = \lim_{x\to0^+}(x+b) = b.$$

Hàm số y = F(x) có đạo hàm tại điểm x = 0, nếu và chỉ nếu:

$$F'(0^-) = F'(0^+) \Leftrightarrow 1 - b = b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}.$$

Vậy hàm số y = F(x) có đạo hàm tại điểm x = 0, nếu và chỉ nếu $a = 1, b = \frac{1}{2}$.

Khi đó:

$$F'(0) = \frac{1}{2} = f(1)$$

Tóm lại, với $a = 1, b = \frac{1}{2}$ thì F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

Bài toán 3 : Nguyên hàm của hàm số dạng $[f(x) + f'(x)]e^x$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét hàm số $F(x) = f(x)e^x$.

Nhận xét rằng:

$$F'(x) = f'(x)e^x + f(x).e^x = [f(x) + f'(x)]e^x.$$

Bước 2: Vậy $F(x) = f(x)e^x + C$ là họ nguyên hàm của hàm số đã cho.

Chú ý: Phương pháp trên cũng được áp dụng cho các hàm số dạng:

1. Hàm số $[f'(x) - f(x)]e^{-x}$ có họ nguyên hàm là $F(x) = f(x)e^{-x}$.
2. Hàm số $[f'(x) + af(x)]e^{ax+b}$ có họ nguyên hàm là $F(x) = f(x)e^{ax+b}$.
3. Hàm số $[f'(x) + \alpha'(x)f(x)]e^{\alpha(x)}$ có họ nguyên hàm là $F(x) = f(x)e^{\alpha(x)}$.

Ví dụ 8: Xác định họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^x$.

b. $f(x) = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}).e^{-x}$.

c. $f(x) = \frac{(x^2+x+1)e^x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Giải

a. Ta biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x) = [(2x + 1) + (x^2 + x + 1)]e^x = [(x^2 + x + 1)' + (x^2 + x + 1)]e^x$$

Xét hàm số $F(x) = (x^2 + x + 1)e^x$.

Nhận xét rằng:

$$F'(x) = (2x + 1)e^x + (x^2 + x + 1)e^x = (x^2 + 3x + 2)e^x = f(x).$$

Vậy $F(x) = (x^2 + x + 1)e^x + C$ là họ nguyên hàm của hàm số đã cho.

b. Ta biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x) = (\cos x - \sin x)e^{-x} = [\cos x + (-1)\sin x]e^{-x}.$$

Xét hàm số $F(x) = \sin x e^{-x}$.

Nhận xét rằng:

$$F'(x) = \cos x e^{-x} - \sin x e^{-x} = (\cos x - \sin x)e^{x} = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}).e^{-x} = f(x).$$

Vậy $F(x) = \sin x.e^{-x} + C$ là họ nguyên hàm của hàm số đã cho.

c. Ta biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x)=\frac{[x+(x^2+1)]e^x}{\sqrt{x^2+1}}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\sqrt{x^2+1}\right)e^x=[(\sqrt{x^2+1})'+\sqrt{x^2+1}]e^x$$

Xét hàm số $F(x) = \sqrt{x^2+1}.e^x$.

Nhận xét rằng:

$$F'(x) = \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+\sqrt{x^2+1}\right)e^x = \frac{(x^2+x+1)e^x}{\sqrt{x^2+1}} = f(x).$$

Vậy $F(x) = \sqrt{x^2+1}.e^x + C$ là họ nguyên hàm của hàm số đã cho.

Bài toán 4 : Nguyên hàm của hàm số dạng u'v + v'u.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét hàm số F(x) = uv.

Nhận xét rằng:

$$F'(x) = u'v + v'u.$$

Bước 2: Vậy F(x) = uv + C là họ nguyên hàm của hàm số đã cho.

Ví dụ 9: Xác định họ nguyên hàm của các hàm số sau:

$$f(x) = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}.$$

Giải

Ta biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x)=\frac{2(4-x)-x}{2\sqrt{4-x}}=\sqrt{4-x}+\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}.x=(x)'.\sqrt{4-x}+(\sqrt{4-x})'.x.$$

Xét hàm số $F(x) = x\sqrt{4-x}$, ta có:

$$F'(x) = x\sqrt{4-x} + \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} = f(x).$$

Vậy $F(x) = x\sqrt{4-x} + C$ là họ nguyên hàm của hàm số đã cho.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.

a. Tính đạo hàm của hàm số $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

b. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Bài 2.

a. Tính đạo hàm của hàm số $g(x) = x\sqrt{x^2 + a}$, $a \neq 0$.

b. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + a}$, $a \neq 0$.

c. Tìm nguyên hàm hàm số: $h(x) = (x + 2)\sqrt{x^2 + a}$, $a \neq 0$.

Bài 3. Chứng minh rằng hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x), biết:

$$F(x) = |x| - \ln(1 + |x|) \text{ và } f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

Bài 4. Chứng minh rằng hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x), biết:

$$F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|, \text{ với } a \neq 0$$

và $f(x) = \sqrt{x^2 + a}$.

Bài 5. Chứng minh rằng hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x), biết:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x\ln x - 1)}{4} & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad \text{và } f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{khi } x >> 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

Bài 6. Tính đạo hàm của hàm số $F(x) = (x^2 - 1)\ln|x + 1| - x^2\ln|x|$.

Từ đó suy ra họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$.

Bài 7. Xác định a, b, c để hàm số

$$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$

Bài 8. Xác định a, b, c để hàm số

$$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x - 3} \text{ với } x > \frac{3}{2}$$

là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x - 3}}$.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1.

a. Ta có $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$.

b. $F(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + C$.

Bài 2.

a. $g'(x) = 2\sqrt{x^2 + a} - \dfrac{a}{\sqrt{x^2 + a}}$.

b. $F(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \dfrac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$

c. $H(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2 + a)^3} + \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \dfrac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$.

CHỦ ĐỀ 2
XÁC ĐỊNH NGUYÊN HÀM BẰNG VIỆC SỬ DỤNG BẢNG CÁC NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. BẢNG CÁC NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

BẢNG 1

Hàm số	Nguyên hàm
1	$x + C$
$x^{\alpha}, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$a^x, 0 < a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg}x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg}x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}, a \neq 0$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2+a}\rvert + C$

Bảng trên chỉ bao gồm các nguyên hàm cơ bản, tuy nhiên chúng đều đã được biết tới các công thức tính đạo hàm của hàm số hợp, do vậy ta cần mở rộng các công thức trên cho các hàm hợp. Trước hết ta đi chứng minh định lý (được miêu tả bằng bài toán) sau:

Định lí: Chứng minh rằng nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \text{ với } a \neq 0.$$

Ví dụ 1: Tính các tích phân bất định sau:

a. $\int (2x+3)^3 dx$.

b. $\int \cos^4 x.\sin x dx$.

c. $\int \frac{2e^x}{e^x+1}dx$.

d. $\int \frac{(2\ln x+1)^2}{x}dx$.

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp "*Lấy học trò làm trung tâm*"
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

Giải

a. Ta có:

$$\int(2x+3)^3dx = \frac{1}{2}\int(2x+3)^3d(2x+3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+3)^4}{4} + C = \frac{(2x+3)^4}{8} + C$$

b. Ta có:

$$\int\cos^4 x.\sin x dx = -\int\cos^4 x d(\cos x) = -\frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

c. Ta có:

$$\int\frac{2e^x}{e^x+1}dx = 2\int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = 2\ln(e^x+1) + C.$$

d. Ta có:

$$\int\frac{(2\ln x+1)^2}{x}dx = \frac{1}{2}\int(2\ln x+1)^2d(2\ln x+1) = \frac{1}{2}(2\ln x+1)^3 + C.$$

Nhận xét: Thông qua ví dụ trên ta nhận thấy rằng cần có bảng công thức ı mở rộng từ bảng 1.

2. BẢNG CÁC NGUYÊNHÀM MỞ RỘNG

BẢNG 2

Hàm số	Nguyên hàm
$u^\alpha.u'$, $\alpha \neq -1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + C$
$\frac{1}{ax+b}$, $a \neq 0$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
e^{ax+b}, $a \neq 0$	$\frac{1}{a}.e^{ax+b} + C$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a}tg(ax+b) + C$
$\frac{1}{\sin^2(ax+b)}$	$-\frac{1}{a}cotg(ax+b) + C$
$\frac{1}{x^2-a^2}$, $a \neq 0$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Trong mục này chúng ta sẽ lần lượt thực hiện các ví dụ để tính các tích phân bất định và thông qua mỗi ví dụ sẽ giúp các em học sinh dần hình thành tư duy cho phương pháp giải toán tính phân.

Ví dụ 2: Tính các tích phân bất định sau:

a. $\int(x^2 - 3x + \frac{1}{x})dx$.

b. $\int\frac{2x^4 + 3}{x^2}dx$.

c. $\int\frac{x-1}{x^2}dx$.

d. $\int\frac{(x^4+4)^2}{x^2}dx$.

Giải

a. Ta có:

$$\int(x^2 - 3x + \frac{1}{x})dx = \frac{1}{3}x^3 - 3.\frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + C = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C.$$

b. Ta có:

$$\int\frac{2x^4+3}{x^2}dx = \int(2x^2 + 3.\frac{1}{x^2})dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{x} + C.$$

c. Ta có:

$$\int\frac{x-1}{x^2}dx = \int(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})dx = \ln|x| + \frac{1}{x} + C.$$

d. Ta có:

$$\int\frac{(x^4+4)^2}{x^2}dx = \int\frac{x^8+8x^4+16}{x^2}dx = \int(x^6+8x^2+\frac{16}{x^2})dx = \frac{1}{7}x^7 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{16}{x} + C$$

Nhận xét: Trong ví dụ trên:

1. Câu a) chúng ta đã sử dụng các tính chất 2 và 3 của nguyên hàm.
2. Câu b), c), d) chúng ta tách biểu thức ban đầu thành các toán tử nhỏ mà có thể xác định được nguyên hàm của chúng dựa vào bảng 1.
3. Từ câu c), d) chúng ta dần làm tắt các bước trung gian.

Ví dụ 3: Tính các tích phân bất định sau:

a. $\int(\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x})dx$.

b. $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$.

c. $\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Giải

a. Ta có:

$$\int(\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x})dx = \int(x^{1/2} + 2x^{1/3} - 4x^{1/4})dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{4/3} - \frac{16}{5}x^{5/4} + C.$$

b. Ta có:

$$\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx=\int\frac{x-2\sqrt{x}-1}{x}dx=\int(1-4.\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x})dx$$
$$=x-4\sqrt{x}-\ln|x|+C.$$

c. Ta có:

$$\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx=\int(x^{2/3}-x^{-1/3})dx=\frac{3}{5}x^{5/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}+C.$$

Nhận xét: Trong ví dụ trên:

1. Câu a) chúng ta đã sử dụng kết quả: $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$.
2. Câu b) ngoài việc sử dụng kết quả trên ta còn tận dụng kết quả: $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
3. Câu c) chúng ta đã sử dụng kết quả: $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}=x^{-\frac{m}{n}}$.

Ví dụ 4: Tính các tích phân bất định sau:

a. $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$.

b. $\int \cot g^2 x dx$.

c. $\int tgx dx$.

d. $\int\frac{tgx}{\cos^3 x}dx$.

Giải

a. Ta có:

$$\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx=\int(1-\cos x)dx=x-\sin x+C.$$

b. Ta có:

$$\int \cot g^2 x dx=\int(\frac{1}{\sin^2 x}-1)dx=-\cot gx-x+C.$$

c. Ta có:

$$\int tgx dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$$

d. Ta có:

$$\int\frac{tgx}{\cos^3 x}dx=\int\frac{\sin x}{\cos^4 x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^4 x}=-\frac{1}{3}\cos^{-3}x+C=-\frac{1}{3\cos^3 x}+C.$$

Nhận xét: Trong ví dụ trên chúng ta đã lựa chọn các phép biến đổi lượng giác phù hợp cho mỗi biểu thức dưới dấu tích phân, cụ thể:

1. Câu a) chúng ta đã sử dụng công thức hạ bậc để đưa về hàm lượng giác bậc thấp.
2. Câu b) chúng ta không sử dụng công thức hạ bậc mà tận dụng hằng đẳng thức $\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot g^2 x$ bởi $\frac{1}{\sin^2 x}$ thuộc nguyên hàm cơ bản.

3. Câu c) bản thân hàm tgx không có trong bảng nguyên hàm, xong ta đã sử dung phép biến đổi thông thường $\text{tgx} = \frac{\sin x}{\cos x}$ để xuất hiện dạng $\frac{u'}{u}$.
4. Câu d) là mở rộng tự nhiên kết quả của câu c).

Phương pháp chung để tính nguyên hàm cho các hàm lượng giác chúng ta sẽ được thấy cụ thể trong chủ đề 8.

Ví dụ 5: Tính các tích phân bất định sau:

a. $\int e^x(1 - e^{-x})dx$.   b. $\int \sqrt{e^x + e^{-x} + 2}\,dx$.

Giải

a. Ta có:

$$\int e^x(1 - e^{-x})dx = \int (e^x - 1)dx = e^x - x + C.$$

b. Ta có:

$$\int \sqrt{e^x + e^{-x} + 2}\,dx = \int \sqrt{(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})^2}\,dx = \int (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})dx = 2(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) + C.$$

Nhận xét: Trong ví dụ trên khẳng định thêm tầm quan trọng của hàm e^x bởi tính bất biến của nó đối với phép toán vi phân.

1. Câu a) bằng phép khai triển biểu thức dưới dấu tích phân ta nhận được các toán tử có nguyên hàm trong bảng.
2. Câu b) ta khử căn thức bằng việc biến đổi nó về dạng: $\sqrt{A^2} = A$ vì $A > 0$.

Ví dụ 6: Tính các tích phân bất định sau:

a. $\int \frac{x}{1 + x^2}dx$.   b. $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2}dx$.

Giải

a. Ta có:

$$\int \frac{x}{1 + x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2} = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C.$$

b. Ta có:

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2}dx = \int \frac{1}{(x - 1)(x - 2)}dx = \int \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 1}\right)dx$$

$$= \ln|x - 2| - \ln|x - 1| + C = \ln\left|\frac{x - 2}{x - 1}\right| + C.$$

Nhận xét: Trong ví dụ trên chúng ta bắt đầu làm quen với việc xác định nguyên hàn của các hàm hữu tỉ, cụ thể:

1. Câu a) chúng ta đã sử dụng phép biến đổi để xuất hiện dạng $\frac{u'}{u}$.
2. Câu b) chúng ta thực hiện phép tách đa thức $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 1}$.

Phương pháp chung để tính nguyên hàm cho các hàm hữu tỉ chúng ta sẽ được thấy cụ thể trong chủ đề 6.

Ví dụ 7: Tính tích phân bất định: $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[4]{\sin x - \cos x}}dx$.

Giải

Ta có:

$(\sin x + \cos x)dx = d(\sin x - \cos x)$.

Khi đó, với $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$ ta được:

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[4]{\sin x - \cos x}}dx = \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt[4]{\sin x - \cos x}} = \int (\sin x - \cos x)^{-1/4}.d(\sin x - \cos x)$$

$$= \frac{4}{3}(\sin x - \cos x)^{3/4} + C = \frac{4}{3\sqrt[4]{(\sin x - \cos x)^3}} + C$$

Chú ý: Có nhiều hàm số mà việc xác định nguyên hàm phụ thuộc vào khoảng đang xét trên miền xác định, để minh hoạ chúng ta cùng xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 8: Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}$.

Giải

Từ điều kiện tồn tại của hàm số f(x) là:

$$x(1 + x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -1 \end{array}\right.$$

ta đi xét hai trường hợp:

- Với $x > 0$, ta được:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1+x}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{(\sqrt{x})^2 + 1}} = 2\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) + C.$$

- Với $x < -1$, ta được:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{-x}.\sqrt{-1-x}} = -2\int \frac{d(\sqrt{-x-1})}{\sqrt{-x}} = -2\int \frac{d(\sqrt{-x-1})}{\sqrt{(\sqrt{-x-1})^2 + 1}}$$

$$= 2\ln(\sqrt{-x-1} + \sqrt{-x}) + C.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (ĐHQG HN – 96): Tìm một nguyên hàm F(x) của hàm số:

$$f(x) = 2\sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5},$$

sao cho đồ thị F(x) cắt f(x) tại một điểm thuộc Oy.

Bài 2. Tính các tích phân bất định sau:

a. $\int \frac{dx}{3x^2-4}$.

b. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$.

Bài 3. Tính các tích phân bất định sau:

a. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

b. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

c. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}}$.

d. $\int \frac{dx}{x\ln x.\ln(\ln x)}$.

Bài 4. Tính các tích phân bất định sau:

a. $\int(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx$.

b. $\int(\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x})(x - \sqrt{x} + \sqrt[4]{x})dx$.

c. $\int \frac{x+4}{x^2-2x+1}dx$.

d. $\int(\frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2})dx$.

e. $\int \frac{dx}{2-3x^2}dx$.

Bài 5. Tính các tích phân bất định sau:

a. $\int \sin^2 x.\cos x dx$.

b. $\int \cot g x dx$.

c. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

d. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

e. $\int \frac{(\sin x+\cos x)dx}{\sqrt[5]{\sin x-\cos x}}$.

Bài 6. Tính các tích phân bất định sau:

a. $\int(2a^x + \frac{3}{\sin^2 x})dx$.

b. $\int(ae^x+b)^m e^x dx$, $a \neq 0$.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. Ta có:

$$F(x) = \int\left(2\sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5}\right)dx = \int\left(2\sin 5x + x^{1/2} + \frac{3}{5}\right)dx$$

$$= -\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5}x + C.$$

Khi đó đồ thị F(x) cắt f(x) tại một điểm thuộc Oy $\Leftrightarrow F(0) = f(0) \Leftrightarrow C = 1$.
Vậy nguyên hàm cần tìm là:

$$F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5}x + 1.$$

Bài 2.

a. Ta có:

$$\int \frac{dx}{3x^2-4} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(x\sqrt{3})}{(x\sqrt{3})^2-2^2} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}-2}{x\sqrt{3}+2}\right| + C.$$

b. Chia tử số và mẫu số của biểu thức dưới dấu tích phân cho x^2, ta được:

$$\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|+C.$$

Bài 3.

a. Ta có:

$$\int\frac{dx}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}=-2\int\frac{d(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}=-tg(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})+C,$$

với $x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$.

b. Ta có:

$$\frac{dx}{\sin x}=\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{dx}{2tg\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{d(tg\frac{x}{2})}{tg\frac{x}{2}}=d(\ln|tg\frac{x}{2}|).$$

Khi đó:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int d(\ln|tg\frac{x}{2}|)=\ln|tg\frac{x}{2}|+C,\ \text{với } x\neq k\pi,\ k\in Z.$$

c. Ta có:

$$\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos2x}}=-\int\frac{d(\sqrt{2}\cos x)}{\sqrt{2\cos^2x-1}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{2\cos^2x-1}|+C$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos2x}|+C.$$

d. Ta có:

$$\frac{dx}{x\ln x}=d[\ln(\ln x)],\ \text{với } v>1.$$

Khi đó:

$$\int\frac{dx}{x\ln x.\ln(\ln x)}=\int\frac{d[\ln(\ln x)]}{\ln(\ln x)}=\ln|\ln(\ln x)|+C.$$

CHỦ ĐỀ 3
XÁC ĐỊNH NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Phương pháp phân tích thực chất là việc sử dụng các *đồng nhất thức* để biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân thành tổng các nhân tử mà nguyên hàm của mỗi nhân tử đó có thể nhận được từ bảng nguyên hàm hoặc chỉ bằng các phép biến đổi đơn giản đã biết.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Bài toán: Xác định nguyên hàm của hàm số f(x) bằng phương pháp phân tích.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x),$$

với $f_i(x)$ có nguyên hàm trong bảng công thức và α_i là các hằng số.

Bước 2: Khi đó:

$$\int f(x)dx = \int \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \int f_i(x)dx.$$

Chú ý quan trọng: Điểm mấu chốt là phép phân tích trong bước 1, các em học sinh có thể rút ra ý tưởng cho riêng mình từ một vài minh hoạ sau:

- Với $f(x) = (x^3 - 2)^2$ thì viết lại $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$.
- Với $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ thì viết lại $f(x) = x - 3 + \dfrac{2}{x - 1}$.
- Với $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ thì viết lại $f(x) = \dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{1}{x - 2}$.
- Với $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x}}$ thì viết lại $f(x) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3-2x} - \sqrt{2x+1})$.
- Với $f(x) = (2^x - 3^x)^2$ thì viết lại $f(x) = 4^x - 2.6^x + 9^x$.
- Với $f(x) = 8\cos^3x.\sin x$ thì viết lại

$$f(x) = 2(\cos 3x + 3\cos x).\sin x = 2\cos 3x.\sin x + 6\cos x.\sin x$$
$$= \sin 4x - \sin 2x + 3\sin 2x = \sin 4x + 2\sin 2x$$

Đó chỉ là một vài minh hoạ mang tính điển hình.

Ví dụ 1: Tính tích phân bất định: $I = \int x(1-x)^{2002}dx$.

Giải

Sử dụng đồng nhất thức:

$$x = 1 - (1 - x)$$

ta được:

$$x(1-x)^{2002} = [1-(1-x)](1-x)^{2002} = (1-x)^{2002} - (1-x)^{2003}.$$

Khi đó:

$$I = \int(1-x)^{2002}dx - \int(1-x)^{2003}dx = -\int(1-x)^{2002}d(1-x) + \int(1-x)^{2003}d(1-x)$$

$$= -\frac{(1-x)^{2003}}{2003} + \frac{(1-x)^{2004}}{2004} + C.$$

Tổng quát: Tính tích phân bất định:

$$I = \int x(ax+b)^{\alpha}dx, \text{ với } a \neq 0.$$

Sử dụng đồng nhất thức:

$$x = \frac{1}{a}.ax = \frac{1}{a}[(ax+b)-b]$$

ta được:

$$x(ax+b)^{\alpha} = \frac{1}{a}[(ax+b)-b](ax+b)^{\alpha} = \frac{1}{a}[(ax+b)^{\alpha+1} - (ax+b)^{\alpha}].$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{a}[\int(ax+b)^{\alpha+1}dx - \int(ax+b)^{\alpha}dx]$$

$$= \frac{1}{a^2}[\int(ax+b)^{\alpha+1}d(ax+b) - \int(ax+b)^{\alpha}d(ax+b)]$$

Ta xét ba trường hợp:

- Với $\alpha = -2$, ta được:

$$I = \frac{1}{a^2}[\int(ax+b)^{-1}d(ax+b) - \int(ax+b)^{-2}d(ax+b)]$$

$$= \frac{1}{a^2}[\ln|ax+b| + \frac{1}{ax+b}] + C.$$

- Với $\alpha = -1$, ta được:

$$I = \frac{1}{a^2}[\int d(ax+b) - \int(ax+b)^{-1}d(ax+b)]$$

$$= \frac{1}{a^2}[ax+b-\ln|ax+b|] + C.$$

- Với $\alpha \in R\backslash\{-2, -1\}$, ta được:

$$I = \frac{1}{a^2}[\frac{(ax+b)^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}] + C.$$

Ví dụ 2: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$.

Giải

Ta có:

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{2}.\frac{(x-1)-(x-3)}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{2}.(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}).$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}.(\int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-1}) = \frac{1}{2}[\int \frac{d(x-3)}{x-3} - \int \frac{d(x-1)}{x-1}]$$

$$= \frac{1}{2}.(\ln|x-3| - \ln|x-1|) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + C.$$

Chú ý: Phương pháp được áp dụng để tính tích phân bất định trên là một trong số các phương pháp cơ bản để tính tích phân hàm số hữu tỉ. Chúng ta sẽ đi xem xét kỹ hơn trong Chủ đề 7: Nguyên hàm hàm số hữu tỉ.

Ví dụ 3: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3}}$.

Giải

Khử tính vô tỉ ở mẫu số bằng cách trục căn thức, ta được:

$$I = \frac{1}{5}\int(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3})dx = \frac{1}{5}[\int(x+2)^{1/2}d(x+2) + \int(x-3)^{1/2}d(x-3)]$$

$$= \frac{2}{15}[\sqrt{(x+2)^3} + \sqrt{(x-3)^3}] + C$$

Chú ý: Phương pháp được áp dụng để tính tích phân bất định trên là một trong số các phương pháp để tính tích phân hàm số vô tỉ. Chúng ta sẽ đi xem xét kỹ hơn trong Chủ đề 9: Nguyên hàm hàm số vô tỉ.

Ví dụ 4: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{1+e^x}$.

Giải

Sử dụng đồng nhất thức

$$1 = (1 + e^x) - e^x$$

Ta được:

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Suy ra:

$$I = \int(1 - \frac{e^x}{1+e^x})dx = \int dx - \int\frac{d(1+e^x)}{1+e^x} = x - \ln|1 + e^x| + C.$$

Ví dụ 5: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{\sin x.\cos^2 x}$.

Giải

Sử dụng đồng nhất thức

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Ta được:

$$\frac{1}{\sin x.\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x.\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}.\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}.$$

Suy ra:

$$I = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}.\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} + \int \frac{d(\mathrm{tg}\frac{x}{2})}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Ví dụ 6: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin x}$.

Giải

Ta có:

$$\frac{\cos^3 x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x.\cos x}{\sin x} = \frac{(1-\sin^2 x).\cos x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \sin x.\cos x.$$

Suy ra:

$$I = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx - \int \sin x.\cos x dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} - \int \sin x d(\cos x) = \ln|\sin x| - \frac{1}{2}\sin^2 xx + C.$$

Ví dụ 7: Tính tích phân bất định: $I = \int \sin^4 x dx$.

Giải

Ta sử dụng phép biến đổi:

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Ta được:

$$I = \int \frac{3}{8}dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Ví dụ 8: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

Giải

Sử dụng kết quả:

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx)$$

Ta được:

$$I = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + tg^2x)\, d(tgx) = \int d(tgx) + \int tg^2x d(tgx)$$

$$= tgx + \frac{1}{3} tg^3x + C.$$

Ví dụ 9: Tính tích phân bất định: $I = \int tg^2xdx$.

Giải

Sử dụng kết quả:

$$tg^2x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Ta được:

$$I = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx = tgx - x + C.$$

Ví dụ 10: (ĐHLN – 97) Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \cos^3x$.

Giải

Ta có:

$$F(x) = \int \cos^3xdx = \frac{1}{4}\int (\cos 3x + 3\cos x)dx = \frac{1}{4}(\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x) + C$$

$$= \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C.$$

Nhận xét: Như vậy nếu f(x) là một đa thức lượng giác thì để xác định nguyên hàm của f(x) ta sử dụng hai phép biến đổi cơ bản:

1. Biến đổi tích thành tổng.
2. Hạ bậc.

Khi đó ta nhận được một đa thức gồm các hàm số lượng giác bậc nhất và việc xác định nguyên hàm của nó không phải khó khăn.

Ví dụ 11: Tính tích phân bất định: $I = \int tg^3xdx$.

Giải

Sử dụng đồng nhất thức:

$$tg^3x = tg^2x.tgx = (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)tgx = tgx.\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Ta được:

$$I = \int tgx.\frac{1}{\cos^2 x}dx - \int\frac{\sin x}{\cos x}dx = \int tgx d(tgx) + \int\frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{2}tg^2x + \ln|\cos x| + C.$$

Tổng quát: Tính tích phân bất định:

$$I_n = \int tg^n dx,\ \text{với } n \geq 2.$$

Sử dụng đồng nhất thức:

$$tg^n x = tg^2x.tg^{n-2}x = (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)tg^{n-2}x = tg^{n-2}x.\frac{1}{\cos^2 x} - tg^{n-2}x..$$

Khi đó:

$$I_n = \frac{1}{n-1}tg^{n-1}x - \int tg^{n-2}dx \Leftrightarrow I_n = \frac{1}{n-1}tg^{n-1}x - I_{n-2}.$$

Đó là công thức truy hồi mà chúng ta sẽ còn gặp lại trong Phần II – Chủ đề 10: Tích phân truy hồi

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}$.

b. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3}}$.

c. $f(x) = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$.

Bài 2. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = (3^{2x} + 2^x)^2$.

b. $f(x) = 2^{2x}.3^{3x}.4^x$.

c. $f(x) = e^{3x-2}$.

d. $f(x) = \dfrac{e^{2-5x}+1}{e^x}$.

e. $f(x) = \dfrac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}$.

Bài 3. Tính tích phân bất định sau:

a. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{(1-x)^{100}}$.

b. $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}dx$.

Bài 4. (ĐHQG HN Khối D – 95): Cho hàm số $y = \dfrac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}$.

a. Xác định các hằng số a, b, c để: $y = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x-2}$.

b. Tìm họ nguyên hàm của y.

Bài 5. Cho hàm số $y = \dfrac{4\sin x + 3\cos x}{\sin x + 2\cos x}$.

a. Xác định các hằng số a, b để:

$$4\sin x + 3\cos x = a(\sin x + 2\cos x) + b(\cos x - 2\sin x).$$

b. Tìm họ nguyên hàm của y.

CHỦ ĐỀ 4

XÁC ĐỊNH NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Phương pháp đổi biến số được sử dụng khá phổ biến trong việc tính các tích phân bất định. Phương pháp đổi biến số để xác định nguyên hàm có hai dạng dựa trên định lý sau:

Định lý:

a. Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ va $u = \varphi(x)$ là hàm số có đạo hàm thì

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

b. Nếu hàm số f(x) liên tục thì khi đặt $x = \varphi(t)$ trong đó $\varphi(t)$ cùng với đạo hàm của nó $\varphi'(t)$ là những hàm số liên tục, ta sẽ được

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt.$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Trong phần này ta trình bày hai bài toán về phương pháp đổi biến.

Bài toán 1: Sử dụng phương pháp đổi biến số ***dạng I*** tính tích phân bất định $I = \int f(x)dx$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn cho thích hợp.

Bước 2: Lấy vi phân $dx = \varphi'(t)dt$.

Bước 3: Biểu thị f(x)dx theo t và dt. Giả sử rằng $f(x)dx = g(t)dt$.

Bước 4: Khi đó: $I = \int g(t)dt$.

Lưu ý: Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là:

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = \lvert a \rvert \sin t \text{ với } -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \\ x = \lvert a \rvert \cos t \text{ với } 0 \le t \le \pi \end{array}\right.$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\lvert a \rvert}{\sin t} \text{ với } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ x = \frac{\lvert a \rvert}{\cos t} \text{ với } t \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \end{array}\right.$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = \lvert a \rvert \operatorname{tg} t \text{ với } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ x = \lvert a \rvert \operatorname{cotg} t \text{ với } 0 < t < \pi \end{array}\right.$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a\cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b - a)\sin^2 t$

Ví dụ 1: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

Giải

Đặt: $x = \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

suy ra: $dx = \cos t dt$ và $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \frac{dt}{\cos^2 t} = d(tgt)$.

Khi đó:

$$I = \int d(tgt) = tgt + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Chú ý: Trong ví dụ trên sở dĩ ta có:

$$\sqrt{(1-x^2)^3} = \cos^3 t \text{ và } tgt = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

là bởi:

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\cos^2 t} = \cos t \\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

Ví dụ 2: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Giải

Vì điều kiện $|x| > 1$, ta xét hai trường hợp:

a. Với $x > 1$, đặt $x = \frac{1}{\sin 2t}, 0 < t < \frac{\pi}{4}$

suy ra:

$$dx = -\frac{2\cos 2t dt}{\sin^2 2t},$$

$$\frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}} = -\frac{2dt}{\sin^3 2t} = -\frac{2(\cos^2 t + \sin^2 t)^2 dt}{8\sin^3 t\cos^3 t}$$

$$= -\frac{1}{4}(\text{cotgt}.\frac{1}{\sin^2 t} + tgt.\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2}{\sin t\cos t})dt$$

$$= -\frac{1}{4}(\text{cotgt}.\frac{1}{\sin^2 t} + tgt.\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2}{tgt}\frac{1}{\cos^2 t})$$

$$= -\frac{1}{4}[-\text{cotgt}.d(\text{cotgt}) + tgt.d(tgt) + 2\frac{d(tgt)}{tgt}].$$

Khi đó:

$$I = -\frac{1}{4}\left[-\int \text{cotgt}.d(\text{cotgt}) + \int \text{tgt}.d(\text{tgt}) + 2\int \frac{d(\text{tgt})}{\text{tgt}}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\text{cotg}^2 t + \frac{1}{2}\text{tg}^2 t + 2\ln|\text{tgt}|\right) + C = \frac{1}{8}(\text{cotg}^2 t - \text{tg}^2 t) - \frac{1}{2}\ln|\text{tgt}| + C$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x - \sqrt{x^2-1}| + C.$$

b. Với $x < -1$ – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Chú ý: Trong ví dụ trên sở dĩ ta có:

$$\text{cotg}^2 t - \text{tg}^2 t = 4x\sqrt{x^2-1} \quad \text{và } \text{tgt} = x - \sqrt{x^2-1}$$

là bởi:

$$\text{cotg}^2 t - \text{tg}^2 t = \frac{\cos^4 t - \sin^4 t}{\cos^2 t.\sin^2 t} = \frac{4\cos 2t}{\sin^2 2t} = \frac{4\sqrt{1-\sin^2 2t}}{\sin^2 2t}$$

$$= \frac{4}{\sin 2t}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 2t} - 1} = 4x\sqrt{x^2-1}.$$

$$\text{tgt} = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin^2 t}{\sin t\cos t} = \frac{1-\cos 2t}{\sin 2t} = \frac{1-\sqrt{1-\sin^2 2t}}{\sin 2t}$$

$$= \frac{1}{\sin 2t} - \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2t} - 1} = x - \sqrt{x^2-1}$$

Ví dụ 3: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Giải

Đặt: $x = \text{tgt}, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \text{ và } \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{\cos^3 t dt}{\cos^2 t} = \text{costdt}.$$

Khi đó:

$$I = \int \text{costdt} = \text{sint} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Chú ý:

1. Trong ví dụ trên sở dĩ ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \text{cost} \text{ và } \text{sint} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

là bởi:

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\cos^2 t} = \cos t \\ \sin t = \operatorname{tg}t.\cos t = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}.$$

2. Phương pháp trên được áp dụng để giải bài toán tổng quát:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^{2k+1}}}, \text{ với } k \in Z.$$

Bài toán 2: Sử dụng phương pháp đổi biến số ***dạng 2*** tính tích phân bất định $I = \int f(x)dx$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn $t = \varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn cho thích hợp, rồi xác định $x = \psi(t)$ (nếu có thể).

Bước 2: Xác định vi phân $dx = \varphi'(t)dt$.

Bước 3: Biểu thị $f(x)dx$ theo t và dt. Giả sử rằng $f(x)dx = g(t)dt$.

Bước 4: Khi đó: $I = \int g(t)dt$.

Lưu ý: Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là:

Dấu hiệu	Có thể chọn
Hàm có mẫu số	t là mẫu số
Hàm $f(x, \sqrt{\varphi(x)})$	$t = \sqrt{\varphi(x)}$
Hàm $f(x) = \dfrac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x + e}$	$t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ (với $\cos\dfrac{x}{2} \neq 0$)
Hàm $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	• Với $x + a > 0$ và $x + b > 0$, đặt: $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$ • Với $x + a < 0$ và $x + b < 0$, đặt: $t = \sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}$

Ví dụ 4: Tính tích phân bất định sau: $I = \int x^3(2 - 3x^2)^8dx$.

Giải

Đặt: $t = 2 - 3x^2$ suy ra:

$dt = -6xdx$

$$x^3(2-3x^2)^8dx = x^2(2-3x^2)^8\,xdx = \frac{2-t}{3}.t^8.(-\frac{1}{6}dt) = \frac{1}{18}(t^9 - 2t^8)dt.$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{18}\int(t^9 - 2t^8)dt = \frac{1}{18}(\frac{1}{10}t^{10} - \frac{2}{9}t^9) + C = \frac{1}{180}t^{10} - \frac{1}{81}t^9 + C.$$

Ví dụ 5: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x}}$.

Giải

Đặt: $t = \sqrt{1-x} \Rightarrow x = 1 - t^2$ suy ra:

$$dx = -2tdt \text{ và } \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{(1-t^2)^2(-2tdt)}{t} = -2(t^4 - 2t^2 + 1)dt.$$

Khi đó:

$$I = -2\int(t^4 - 2t^2 + 1)dt = -2\left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t\right) + C = -\frac{2}{15}(3t^4 - 10t^2 + 15)t + C$$

$$= -\frac{2}{15}[3(1-x)^2 - 10(1-x) + 15]\sqrt{1-x} + C = -\frac{2}{15}(3x^2 + 4x + 8)\sqrt{1-x} + C$$

Ví dụ 6: Tính tích phân bất định: $I = \int x^5\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}\,dx$.

Giải

Đặt: $t = \sqrt[3]{1-2x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{1-t^3}{2}$ suy ra:

$$2xdx = -\frac{3}{2}t^2dt,$$

$$x^5\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}\,dx = x^2\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}\,xdx = \frac{1-t^3}{2}.t^2\left(-\frac{3}{4}t^2dt\right) = \frac{3}{8}(t^7 - t^4)dt.$$

Khi đó:

$$I = \frac{3}{8}\int(t^7 - t^4)dt = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}t^8 - \frac{1}{5}t^5\right) + C = \frac{3}{320}(5t^6 - 8t^3)t^2 + C$$

$$= \frac{3}{320}[5(1-2x^2)^2 - 8(1-2x^2)]\sqrt[3]{(1-2x^2)^2} + C$$

$$= \frac{3}{320}(20x^4 - 4x^2 - 3)\sqrt[3]{(1-2x^2)^2} + C.$$

Ví dụ 7: Tính tích phân bất định: $I = \int \sin^3x\sqrt{\cos x}\,dx$.

Giải

Đặt: $t = \sqrt{\cos x} \Rightarrow t^2 = \cos x$ suy ra:

$$2tdt = -\sin xdx,$$

$$\sin^3x\sqrt{\cos x}\,dx = \sin^2x\sqrt{\cos x}\,\sin xdx = (1-\cos^2x)\sqrt{\cos x}\,\sin xdx$$
$$= (1-t^4).t.(-2tdt) = 2(t^6 - t^2)dt.$$

Khi đó:

$$I = 2\int(t^6 - t^2)dt = 2\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{3}t^3\right) + C = \frac{2}{21}(3t^6 - 7t^2)t + C$$

$$= \frac{2}{21}(\cos^3x - 7\cos x)\sqrt{\cos x} + C.$$

Ví dụ 8: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^8 x}$.

Giải

Đặt t = cotgx suy ra:

$$dt = -\frac{1}{\sin^2 x}dx,$$

$$\frac{\cos^2 x dx}{\sin^8 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\frac{dx}{\sin^2 x} = \text{cotg}^2x\frac{1}{\sin^4 x}\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= \text{cotg}^2x.(1+\text{cotg}^2x)^2\frac{dx}{\sin^2 x} = t^2.(1+t^2)^2dt.$$

Khi đó:

$$I = \int t^2.(1+t^2)^2dt = \int(t^6+2t^4+t^2)dt = (\frac{1}{7}t^7+\frac{2}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3)+C$$

$$= \frac{1}{105}(15\text{cotg}^7x + 42\text{cotg}^5x + 35\text{cotg}^3x) + C.$$

Ví dụ 9: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{e^x - e^{x/2}}$.

Giải

Đặt: $t = e^{-x/2}$ suy ra:

$$dt = -\frac{1}{2}e^{-x/2}dx \Leftrightarrow -2dt = \frac{dx}{e^{x/2}},$$

$$\frac{dx}{e^x - e^{x/2}} = \frac{dx}{e^x(1-e^{-x/2})} = \frac{e^{-x/2}dx}{e^{x/2}(1-e^{-x/2})} = \frac{-2tdt}{1-t} = 2(1+\frac{1}{t-1})dt$$

Khi đó:

$$I = 2\int(1+\frac{1}{t-1})dt = 2(e^{-x/2} + \ln|e^{-x/2}+1|) + C.$$

Chú ý: Bài toán trên đã dùng tới kinh nghiệm để lựa chọn phép đổi biến $t = e^{-x/2}$, tuy nhiên với cách đặt $t = e^{x/2}$ chúng ta cũng có thể thực hiện được bài toán.

Ví dụ 10: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$, với $a \neq 0$.

Giải

Đặt: $t = x + \sqrt{x^2+a}$ suy ra:

$$dt = (1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}})dx = \frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}dx \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{dt}{t}.$$

Khi đó:

$$I = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C$$

Ví dụ 11: Tính tích phân bất định: $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$.

Giải

Ta xét hai trường hợp:

- Với

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1.$$

Đặt: $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$ suy ra:

$$dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)dx = \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})dx}{2\sqrt{(x+1)(x+2)}} \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} = \frac{2dt}{t}$$

Khi đó:

$$I = 2\int \frac{dt}{t} = 2\ln|t| + C = 2\ln|\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}| + C$$

- Với

$$\begin{cases} x+1<0 \\ x+2<0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2.$$

Đặt: $t = \sqrt{-(x+1)} + \sqrt{-(x+2)}$ suy ra:

$$dt = \left[-\frac{1}{2\sqrt{-(x+1)}} - \frac{1}{2\sqrt{-(x+2)}}\right]dx = -\frac{[\sqrt{-(x+1)}+\sqrt{-(x+2)}]dx}{2\sqrt{(x+1)(x+2)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} = -\frac{2dt}{t}$$

Khi đó:

$$I = -2\int \frac{dt}{t} = -2\ln|t| + C = -2\ln|\sqrt{-(x+1)} + \sqrt{-(x+2)}| + C.$$

Ví dụ 12: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2x}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

Giải

Cách 1: (Sử dụng phương pháp đổi biến số): Đặt: $t = x + \sqrt{x^2-1}$ suy ra:

$$t - x = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2t} \text{ và } dx = \frac{t^2-1}{2t^2}dt,$$

Khi đó:

$$F(x) = \int \frac{2xdx}{x+\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{2.\frac{t^2+1}{2t}.\frac{t^2-1}{2t^2}dt}{t} = \int \frac{(t^4-1)dt}{2t^4} = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t^4}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{3t^3}\right) + C = \frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{6(x+\sqrt{x^2-1})^3} + C$$

Cách 2: (Sử dụng phương pháp biến đổi): Ta có:

$$F(x) = \int \frac{2x}{x+\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{2x(x-\sqrt{x^2-1})}{x^2-x^2+1}dx$$

$$= \int 2x^2dx - \int 2x\sqrt{x^2-1}dx = \frac{2}{3}x^3 - \int \sqrt{x^2-1}d(x^2-1) + C$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính các tích phân bất định sau:

a. $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$.

b. $I = \int \sqrt{1+x^2}\,dx$.

c. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

d. $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}[\sqrt[3]{(x+1)^2}+1]}$

e. $I = \int \frac{dx}{2x\sqrt{2x+1}}$

f. $I = \int \frac{xdx}{2x^2-1+3\sqrt{x^2-1}}$.

g. $I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$.

h. $I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

i. $I = \int \frac{(6x^3+8x+1)dx}{(3x^2+4)\sqrt{x^2+1}}$.

j. $I = \int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2-1}dx$.

Bài 2. Tính các tích phân bất định sau:

a. $I = \int \frac{2dx}{2\sin x - \cos x + 1}$.

b. $I = \int \frac{\cos x + \sin x.\cos x}{2+\sin x}dx$.

c. $I = \int \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}$.

d. $I = \int \frac{dx}{\sin x.\cos^3 x}$.

e. $I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x.\cos^5 x}}$.

f. $I = \int \frac{\sin xdx}{\cos x\sqrt{\sin^2 x+1}}$.

Bài 3. Tính các tích phân bất định sau:

a. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

b. $\int x^2\sqrt{a+x}\,dx$.

c. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

Bài 4. Tính các tích phân bất định sau:

a. $\int \frac{\sin x.\cos^3 xdx}{1+\cos^2 x}$.

b. $\int \frac{\sin^2 xdx}{\cos^6 x}$.

c. $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx$.

d. $\int \frac{dx}{e^x+e^{x/2}}$.

CHỦ ĐỀ 5

XÁC ĐỊNH NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ta có:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Sử dụng công thức tích phân từng phần xác định $I = \int f(x)dx$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi tích phân ban đầu về dạng:

$$I = \int f(x)dx = \int f_1(x).f_2(x)dx.$$

Bước 2: Đặt:

$$\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du \\ v \end{cases}.$$

Bước 3: Khi đó:

$$I = uv - \int v du.$$

Chú ý: Khi sử dụng phương pháp tích phân từng phần để tính nguyên hàm chúng ta cần tuân thủ các nguyên tắc sau:

1. Lựa chọn phép đặt dv sao cho v được xác định một cách dễ dàng.
2. Tích phân bất định $\int v du$ được xác định một cách dễ dàng hơn so với I.

Ví dụ 1: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

Giải

Viết lại I dưới dạng:

$$I = \int \ln(x+\sqrt{x^2+1})\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \\ dv = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}dx = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \\ v = \sqrt{x^2+1} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int dx = \sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - x + C.$$

Ví dụ 2: Tính tích phân bất định: $I = \int \cos(\ln x)dx$.

Giải

Đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{1}{x}\sin(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx. \quad (1)$$

Xét $J = \int \sin(\ln x)dx$, đặt:

$$\begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}\cos(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = x.\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = x.\sin(\ln x) - I. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = x.\cos(\ln x) + x.\sin(\ln x) - I \Leftrightarrow I = \frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C$$

Chú ý: Nếu bài toán yêu cầu tính giá trị của một cặp tích phân:

$$I_1 = \int \sin(\ln x)dx \text{ và } I_2 = \int \cos(\ln x)dx$$

ta nên lựa chọn cách trình bày sau:

- Sử dụng tích phân từng phần cho I_1, như sau: Đặt:

$$\begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}\cos(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_1 = x.\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = x.\sin(\ln x) - I_2. \quad (3)$$

- Sử dụng tích phân từng phần cho I_2, như sau: Đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{1}{x}\sin(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_2 = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + I_1. \quad (4)$$

- Từ hệ tạo bởi (3) và (4) ta nhận được:

$$I_1 = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C \text{ và } I_2 = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C.$$

Ví dụ 3: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$.

Giải

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(\cos x) \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{\sin x}{\cos x}dx \\ v = \text{tg}x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \ln(\cos x).\text{tg}x + \int \text{tg}^2 x dx = \ln(\cos x).\text{tg}x + \int(\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx$$

$$= \ln(\cos x).\text{tg}x + \text{tg}x - x + C.$$

Bài toán 2: Tính $I = \int P(x)\sin\alpha x dx$ (hoặc $\int P(x)\cos\alpha x dx$) với P là một đa thức thuộc R[X] và $\alpha \in R^*$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng tích phân từng phần*) Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin\alpha x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = -\dfrac{1}{\alpha}\cos\alpha x \end{cases}.$$

Bước 2: Khi đó:

$$I = -\frac{1}{\alpha}P(x)\cos\alpha x + \frac{1}{\alpha}\int P'(x).\cos\alpha x.dx.$$

Bước 3: Tiếp tục thủ tục trên ta sẽ " khử " được đa thức.

Cách 2: (*Sử dụng phương pháp hằng số bất định*) Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Ta có:

$$I = \int P(x)\cos\alpha x dx = A(x)\sin\alpha x + B(x)\cos\alpha x + C. \quad (1)$$

trong đó A(x) và B(x) là các đa thức cùng bậc với P(x).

Bước 2: Lấy đạo hàm hai vế của (1), ta được:

$$P(x).\cos\alpha x = [A'(x) + B(x)].\sin\alpha x + [A(x) + B'(x)].\cos\alpha x. \quad (2)$$

Sử dụng phương pháp hệ số bất định ta xác định được các đa thức A(x) và B(x).

Bước 3: Kết luận.

Nhận xét: Nếu bậc của đa thức P(x) lớn hơn hoặc bằng 3 ta thấy ngay cách 1 tỏ ra quá cồng kềnh, vì khi đó ta cần thực hiện thủ tục lấy tích phân từng phần nhiều hơn ba lần. Do đó ta đi tới nhận định chung sau:

- Nếu bậc của P(x) nhỏ hơn hoặc bằng 2, ta lựa chọn cách 1.
- Nếu bậc của P(x) lớn hơn 2, ta lựa chọn cách 2.

Ví dụ 4: (ĐHL – 94): Tính: $I = \int x.\sin^2 x dx$.

Giải

Biến đổi I về dạng cơ bản:

$$I = \int x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int x dx - \frac{1}{2}\int x\cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\int x\cos 2x dx. \quad (1)$$

Xét $J = \int x\cos 2x dx$, đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

Khi đó:

$$J = \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$I = \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C.$$

Ví dụ 5: Tính: $I = \int(x^3 - x^2 + 2x - 3)\sin x dx$.

Giải

Ta có:

$$I = \int(x^3 - x^2 + 2x - 3)\sin x dx$$
$$= (a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1)\cos x + (a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2)\sin x + C. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1), ta được:

$$(x^3 - x^2 + 2x - 3)\sin x = [a_2x^3 + (3a_1 + b_2)x^2 + (2b_1 + c_2)x + c_1 + d_2].\cos x -$$
$$- [a_1x^3 - (3a_2 - b_1)x^2 - (2b_2 - c_1)x + c_2 - d_1].\sin x. \quad (2)$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ 3a_1 + b_2 = 0 \\ 2b_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + d_2 = 0 \end{cases} \quad (I) \quad \text{và} \quad \begin{cases} -a_1 = 1 \\ 3a_2 - b_1 = -1 \\ 2b_2 - c_1 = 2 \\ -c_2 + d_1 = -3 \end{cases} \quad (II)$$

Giải hệ (I) và (II), ta được:

$$a_1 = -1,\ b_1 = 1,\ c_1 = 4,\ d_1 = 1,\ a_2 = 0,\ b_2 = 3,\ c_2 = -2,\ d_2 = -4.$$

Khi đó:

$$I = (-x^3 + x^2 + 4x + 1)\cos x + (3x^2 - 2x - 4)\sin x + C.$$

Bài toán 3: Tính $I = \int e^{ax}\cos(bx)dx$ (hoặc $\int e^{ax}\sin(bx)dx$) với a, b ≠ 0.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Sử dụng tích phân từng phần) Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(bx) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -b\sin(bx)dx \\ v = \dfrac{1}{a}e^{ax} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)dx. \qquad (1)$$

Bước 2: Xét $J = \int e^{ax}\sin(bx)dx$, đặt:

$$\begin{cases} u = \sin(bx) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = b\cos(bx)dx \\ v = \dfrac{1}{a}e^{ax} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)dx$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}I. \qquad (2)$$

Bước 3: Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}I\right]$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{[a.\cos(bx) + b.\sin(bx)]e^{ax}}{a^2 + b^2} + C$$

Cách 2: (Sử dụng phương pháp hằng số bất định) Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Ta có:

$$I = \int e^{ax}\cos(bx)dx = [A\cos(bx) + B\sin(bx)]e^{ax} + C. \qquad (3)$$

trong đó A, B là các hằng số.

Bước 2: Lấy đạo hàm hai vế của (3), ta được:

$$e^{ax}.\cos(bx) = b[-A\sin(bx) + B\cos(bx)]e^{ax} + a[A\cos(bx) + B\sin(bx)]e^{ax}$$

$$= [(Aa + Bb).\cos(bx) + (Ba - Ab)\sin(bx)]e^{ax}.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} Aa + Bb = 1 \\ Ba - Ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{a}{a^2 + b^2} \\ B = \dfrac{b}{a^2 + b^2} \end{cases}.$$

Bước 3: Vậy, ta được $I = \dfrac{[a.\cos(bx) + b.\sin(bx)]e^{ax}}{a^2 + b^2} + C$.

Chú ý:

1. Nếu bài toán yêu cầu tính giá trị của một cặp tích phân:

$$I_1 = \int e^{ax}\cos(bx)dx \text{ và } I_2 = \int e^{ax}\sin(bx)dx$$

ta nên lựa chọn cách trình bày sau:

- Sử dụng tích phân từng phần cho I_1, đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(bx) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -b\sin(bx)dx \\ v = \dfrac{1}{a}e^{ax} \end{cases}$$

Khi đó:

$$I_1 = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}I_2. \quad (3)$$

- Sử dụng tích phân từng phần cho I_1, đặt:

$$\begin{cases} u = \sin(bx) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = b\cos(bx)dx \\ v = \dfrac{1}{a}e^{ax} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_2 = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}I_1. \quad (4)$$

- Từ hệ tạo bởi (3) và (4) ta nhận được:

$$I_1 = \frac{[a.\cos(bx) + b.\sin(bx)]e^{ax}}{a^2 + b^2} + C \text{ và } I_2 = \frac{[a.\sin(bx) - b.\cos(bx)]e^{ax}}{a^2 + b^2} + C.$$

2. Phương pháp trên cũng được áp dụng cho các tích phân:

$$J_1 = \int e^{ax}\sin^2(bx)dx \text{ và } J_2 = \int e^{ax}\cos^2(bx)dx.$$

Ví dụ 6: Tính tích phân bất định: $I = \int e^x.\cos^2xdx$.

Giải

Cách 1: Viết lại I dưới dạng:

$$I = \frac{1}{2}\int e^x.(1 + \cos2x)dx = \frac{1}{2}(\int e^xdx + \int e^x.\cos2xdx)$$

$$= \frac{1}{2}(e^x + \int e^x.\cos2xdx). \quad (1)$$

- Xét $J = \int e^x.\cos2xdx$, đặt:

$$\begin{cases} u = \cos2x \\ dv = e^xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2\sin2xdx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = e^x\cos2x + 2\int e^x\sin2xdx. \qquad (2)$$

- Xét $K = \int e^x\sin2xdx$, đặt:

$$\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\cos 2xdx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$K = e^x\sin2x - 2\int e^x\cos2xdx = e^x\sin2x - 2J. \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được:

$$J = e^x\cos2x + 2(e^x\sin2x - 2J) \Leftrightarrow J = \frac{1}{5}(\cos2x + 2\sin2x)e^x + C. \qquad (4)$$

Thay (4) vào (1), ta được:

$$I = \frac{1}{2}[e^x + \frac{1}{5}(\cos2x + 2\sin2x)e^x] + C = \frac{1}{10}(5 + \cos2x + 2\sin2x)e^x + C$$

Cách 2: Viết lại I dưới dạng:

$$I = \frac{1}{2}\int e^x.(1 + \cos2x)dx = (a + b.\cos2x + c.\sin2x)e^x + C. \qquad (5)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (5), ta được:

$$\frac{1}{2}e^x.(1 + \cos2x) = (-2b.\sin2x + 2c.\cos2x)e^x + (a + b.\cos2x + c.\sin2x)e^x$$

$$= [a + (2c + b)\cos2x + (c - 2b)\sin2x]e^x. \qquad (6)$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2(2c + b) = 1 \\ 2(c - 2b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 1/10. \\ c = 1/5 \end{cases}$$

Vậy, ta được:

$$I = \frac{1}{10}(5 + \cos2x + 2\sin2x)e^x + C.$$

Bài toán 4: Tính $I = \int P(x)e^{\alpha x}dx$ với P là một đa thức thuộc R[X] và $\alpha \in R^*$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng tích phân từng phần*) Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{\alpha x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} \end{cases}.$$

Bước 2: Khi đó:

$$I = \frac{1}{\alpha}P(x)e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int P'(x).e^{\alpha x}.dx.$$

Bước 3: Tiếp tục thủ tục trên ta sẽ " khử " được đa thức.

Cách 2: (*Sử dụng phương pháp hằng số bất định*) Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Ta có:

$$I = \int P(x).e^{\alpha x}.dx = A(x)e^{\alpha x} + C. \qquad (1)$$

trong đó A(x) là đa thức cùng bậc với P(x).

Bước 2: Lấy đạo hàm hai vế của (1), ta được:

$$P(x).e^{\alpha x} = [A'(x) + \alpha A(x)].e^{\alpha x}. \qquad (2)$$

Sử dụng phương pháp hệ số bất định ta xác định được A(x).

Bước 3: Kết luận.

Nhận xét: Nếu bậc của đa thức P(x) lớn hơn hoặc bằng 3 ta thấy ngay cách 1 tỏ ra quá cồng kềnh, vì khi đó ta cần thực hiện thủ tục lấy tích phân từng phần nhiều hơn ba lần. Do đó ta đi tới nhận định chung sau:

- Nếu bậc của P(x) nhỏ hơn hoặc bằng 2, ta lựa chọn cách 1.
- Nếu bậc của P(x) lớn hơn 2, ta lựa chọn cách 2.

Ví dụ 7: Tính: $I = \int xe^{3x}dx$.

Giải

Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{3x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}.dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C.$$

Ví dụ 8: Tính: $I = \int(2x^3 + 5x^2 - 2x + 4)e^{2x}dx$.

Giải

Ta có:

$$I = \int(2x^3 + 5x^2 - 2x + 4)e^{2x}\,dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x} + C. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1), ta được:

$$(2x^3 + 5x^2 - 2x + 4)e^{2x} = [2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + (2b + 2c)x + c + 2d]e^{2x}. \quad (2)$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + 2b = 5 \\ 2b + 2c = -2 \\ c + 2d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = (x^3 + x^2 - 2x + 3)e^{2x} + C.$$

Bài toán 5: Tính $I = \int x^{\alpha}.\ln x dx$, với $\alpha \in R \setminus \{-1\}$.

BÀI GIẢI

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^{\alpha} dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x} dx \\ v = \dfrac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} \end{cases}$$

Khi đó:

$$I = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \int \frac{x^{\alpha}}{\alpha+1}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C.$$

Ví dụ 9: Tính: $I = \int x^2 \ln 2x dx$.

Giải

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln 2x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

Khi đó:

$$I = \frac{x^3}{3}\ln 2x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln 2x - \frac{x^3}{9} + C.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (ĐHTCKT HN – 98): Tính $I = \int x.\sin x.\cos x dx$.

Bài 2. (ĐHPĐ – 2000):Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = (x^2 + 2)\sin 2x$.

Bài 3. (ĐHMĐC – 98): Tính $I = \int x.\sin\sqrt{x}\, dx$

Bài 4. (HVQY – 99): Tính: $I = \int x^3 \ln x dx$.

Bài 5. Tìm nnguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \ln x$.

b. $f(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$.

c. $f(x) = x^2\sin 2x$.

d. $f(x) = (x + 1)^2\cos^2 x$.

e. $f(x) = (x^2 + 1)e^{2x+1}$.

f. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.

g. $f(x) = e^{2x}.\sin x$.

h. $f(x) = e^{-2x}.\cos 3x$.

i. $f(x) = (\cot g^2 x + \cot g x + 1)e^{-x}$.

Bài 6. Tính các tích phân bất định sau:

a. $I = \int x\cos\sqrt{x}\,dx$.

b. $I = \int e^{ax}\sin(bx)dx$.

c. $I = \int e^{2x}\cos^2 x dx$.

d. $I = \int x^n \ln x dx$.

e. $I = \int x^2 e^{3x} dx$.

f. $I = \int x^2 \sin 3x dx$.

g. $I = \int \frac{x^2 e^x dx}{(x+2)^2}$.

h. $I = \int x^2 \cos 2x dx$.

i. $I = \int \sin(\ln x)dx$.

j. $I = \int e^{2x}\sin^2 x dx$.

k. $I = \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$.

l. $I = \int \frac{(1+\sin x)e^x dx}{1+\cos x}$.

m. $I = \int (x^3 + 4x^2 - 2x + 7)e^{2x}dx$.

Bài 7. Tính các tích phân bất định sau:

a. $I = \int \sqrt{x^2 + a}\,dx$.

b. $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

c. $I = \int \frac{x}{\cos^2 x}dx$

d. $I = \int x\ln\frac{1-x}{1+x}dx$.

e. $I = \int x^2\sqrt{x^2 + a}\,dx$.

f. $I = \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^3 x}$

g. $I = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx$.

h. $I = \int \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})dx$.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $I = -\frac{1}{4}x.\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$.

Bài 2. $I = -\frac{1}{2}(x^2 + 2)\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

Bài 3. $I = -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6x\sin\sqrt{x} + 12\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 12\sin\sqrt{x} + C$.

Bài 4. $I = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$.

CHỦ ĐỀ 6
XÁC ĐỊNH NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP DÙNG NGUYÊN HÀM PHỤ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ý tưởng chủ đạo của *phương pháp xác định nguyên hàm của f(x) bằng kỹ thuật dùng hàm phụ* là tìm kiếm một hàm g(x) sao cho nguyên hàm của các hàm số $f(x)\pm g(x)$ dễ xác định hơn so với hàm f(x), từ đó suy ra nguyên hàm F(x) của hàm số f(x).

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Bài toán: Xác định nguyên hàm của hàm số f(x) bằng phương pháp dùng hàm phụ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm kiếm hàm số g(x).

Bước 2: Xác định các nguyên hàm của các hàm số $f(x)\pm g(x)$, tức là:

$$\begin{cases} F(x)+G(x)=A(x)+C_1 \\ F(x)-G(x)=B(x)+C_2 \end{cases}. \qquad (I)$$

Bước 3: Từ hệ (I), ta nhận được:

$$F(x)=\frac{1}{2}[A(x)+B(x)]+C$$

là họ nguyên hàm của hàm số f(x).

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm hàm số: $f(x)=\dfrac{\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

Giải

Chọn hàm số phụ: $g(x)=\dfrac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

Gọi F(x) và G(x) theo thứ tự là nguyên hàm của các hàm số f(x), g(x). Ta có:

$$f(x)+g(x)=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=1 \Rightarrow F(x)+G(x)=\int dx=x+C_1.$$

$$f(x)-g(x)=\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\frac{\cos 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}$$

$$\Rightarrow F(x)-G(x)=\int\frac{2\cos 2x}{2-\sin^2 2x}dx=-\int\frac{d(\sin 2x)}{\sin^2 2x-2}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sin 2x-\sqrt{2}}{\sin 2x+\sqrt{2}}\right|+C_2.$$

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp "*Lấy học trò làm trung tâm*"
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

Ta được:

$$\begin{cases} F(x)+G(x)=x+C_1 \\ F(x)-G(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}+C_2 \end{cases} \Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right)+C$$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm hàm số: $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-e^{-x}}$.

Giải

Chọn hàm số phụ: $g(x)=\dfrac{e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

Gọi F(x) và G(x) theo thứ tự là nguyên hàm của các hàm số f(x), g(x). Ta có:

$$f(x)+g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \Rightarrow F(x)-G(x)=\int\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx=\ln|e^x-e^{-x}|+C_1.$$

$$f(x)-g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=1 \Rightarrow F(x)+G(x)=\int dx=x+C_2.$$

Ta được:

$$\begin{cases} F(x)+G(x)=\ln|e^x-e^{-x}|+C_1 \\ F(x)-G(x)=x+C_2 \end{cases} \Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\left(\ln|e^x-e^{-x}|+x\right)+C.$$

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm hàm số: $f(x)=2\sin^2x.\sin 2x$.

Giải

Chọn hàm số phụ: $g(x)=2\cos^2x.\sin 2x$.

Gọi F(x) và G(x) theo thứ tự là nguyên hàm của các hàm số f(x), g(x). Ta có:

$$f(x)+g(x)=2(\sin^2x+\cos^2x).\sin 2x=2\sin 2x$$

$$\Rightarrow F(x)+G(x)=2\int\sin 2x\,dx=-\cos 2x+C_1.$$

$$f(x)-g(x)=2(\sin^2x-\cos^2x).\sin 2x=-2\cos 2x.\sin 2x=-\sin 4x$$

$$\Rightarrow F(x)-G(x)=-\int\sin 4x\,dx=\frac{1}{4}\cos 4x+C_2.$$

Ta được:

$$\begin{cases} F(x)+G(x)=-\cos 2x+C_1 \\ F(x)-G(x)=\dfrac{1}{4}\cos 4x+C_2 \end{cases} \Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\left(-\cos 2x+\frac{1}{4}\cos 4x\right)+C.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tìm nguyên hàm của các hàm số:

a. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$.

b. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x-\cos x}$.

Bài 2. Tìm nguyên hàm của các hàm số:

a. $f(x)=\sin^2x.\cos 2x$.

b. $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+e^{-x}}$.

CHỦ ĐỀ 7
NGUYÊN HÀM CÁC HÀM SỐ HỮU TỈ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để xác định nguyên hàm các hàm số hữu tỉ ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Phương pháp tam thức bậc hai.
2. Phương pháp phân tích.
3. Phương pháp đổi biến.
4. Phương pháp tích phân từng phần .
5. Sử dụng các phương pháp khác nhau.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Xác định nguyên hàm các hàm hữu tỉ dựa trên tam thức bậc hai

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trên cơ sở đưa tam thức bậc hai về dạng chính tắc và dùng các công thức sau:

1. $\int \frac{xdx}{x^2 \pm a} = \frac{1}{2}\ln|x^2 \pm a| + C,$ (1)

2. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, với , $a \neq 0,$ (2)

ta có thể xác định được nguyên hàm của một lớp các hàm hữu tỉ.

Ví dụ 1: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{xdx}{x^4 - 2x^2 - 2}$.

Giải

Ta có:

$$\int \frac{xdx}{x^4 - 2x^2 - 2} = \int \frac{xdx}{(x^2-1)^2 - 3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)^2 - 3}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2-1-\sqrt{3}}{x^2-1+\sqrt{3}}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2-1-\sqrt{3}}{x^2-1+\sqrt{3}}\right| + C.$$

Chú ý: Cũng có thể trình bày bài toán tường minh hơn bằng việc đổi biến số trước khi áp dụng các công thức (1), (2). Cụ thể:

Biến đổi tích phân ban đầu về dạng:

$$\int \frac{xdx}{x^4 - 2x^2 - 2} = \int \frac{xdx}{(x^2-1)^2 - 3}$$

Đặt $t = x^2 - 1$, suy ra:

$$dt = 2xdx \text{ và } \frac{xdx}{(x^2-1)^2-3} = \frac{1}{2}.\frac{dt}{t^2-3}.$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-3} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2-1-\sqrt{3}}{x^2-1+\sqrt{3}}\right| + C.$$

Ví dụ 2: Tính tích phân bất định: $I = \int\frac{dx}{4x^2-4x-3}$.

Giải

Ta có:

$$I = \int\frac{dx}{(2x-1)^2-4} = \frac{1}{2}\int\frac{d(2x-1)}{(2x-1)^2-4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1-2}{2x-1+2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+1}\right| + C.$$

Ví dụ 3: Tính tích phân bất định: $I = \int\frac{xdx}{x^2-4x-5}$.

Giải

Ta có:

$$I = \int\frac{xdx}{(x-2)^2-9}dx = \int\frac{(x-2)+2}{(x-2)^2-9}dx = \int\frac{(x-2)dx}{(x-2)^2-9} + 2\int\frac{dx}{(x-2)^2-9}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|(x-2)^2-9| + 2.\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-2-3}{x-2+3}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x-5| + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right| + C.$$

Chú ý: Nhiều bài toán cần thông qua một vài phép biến đổi mới xác định được dạng của tích phân. Ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 4: Tính tích phân bất định: $I = \int\frac{x^3dx}{x^4-x^2-2}$.

Giải

Ta có:

$$I = \int\frac{x^3dx}{(x^2-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}} = \frac{1}{2}\int\frac{(x^2-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{(x^2-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}}d(x^2-\frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-\frac{1}{2})d(x^2-\frac{1}{2})}{(x^2-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}} + \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2-\frac{1}{2})}{(x^2-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\ln\left|(x^2-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}\right| + \frac{1}{4}.\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x^2-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\right| + C.$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x^4-x^2-2| + \frac{1}{12}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2+1}\right| + C.$$

Bài toán 2: Xác định nguyên hàm các hàm hữu tỉ bằng phương pháp phân tích

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta đã được làm quen với phương pháp phân tích để xác định nguyên hàm nói chung. Bây giờ đi xem xét chi tiết hơn về việc sử dụng phương pháp này để xác định nguyên hàm của các hàm số hữu tỉ. Cần hiểu rằng thực chất nó là một dạng của phương pháp hệ số bất định, nhưng ở đây để phân tích $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ta sử dụng các đồng nhất thức quen thuộc. Và trong mục này chúng ta cũng sẽ đi xem xét đường nối chung để giải một vài dạng tổng quát.

__Dạng 1__: Tính tích phân bất định : $I = \int \frac{x^2}{(ax+b)^\alpha}dx$, với $a \neq 0$.

PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng đồng nhất thức:

$$x^2 = \frac{1}{a^2}.a^2x^2 = \frac{1}{a^2}[(ax+b)-b]^2 = \frac{1}{a^2}[(ax+b)^2 - 2b(ax+b) + b^2]$$

ta được:

$$\frac{x^2}{(ax+b)^\alpha} = \frac{1}{a^2}.\frac{(ax+b)^2-2b(ax+b)+b^2}{(ax+b)^\alpha}$$

$$= \frac{1}{a^2}.[\frac{1}{(ax+b)^{\alpha-2}} - \frac{2b}{(ax+b)^{\alpha-1}} + \frac{b^2}{(ax+b)^\alpha}].$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{a^2}.[\int\frac{dx}{(ax+b)^{\alpha-2}} - \int\frac{2bdx}{(ax+b)^{\alpha-1}} + \int\frac{b^2dx}{(ax+b)^\alpha}]$$

$$= \frac{1}{a^3}.[\int\frac{d(ax+b)}{(ax+b)^{\alpha-2}} - \int\frac{2bd(ax+b)}{(ax+b)^{\alpha-1}} + \int\frac{b^2d(ax+b)}{(ax+b)^\alpha}]$$

Ta xét bốn trường hợp:

- Với $\alpha = 1$, ta được:

$$I = \frac{1}{a^3}.[\int(ax+b)d(ax+b) - 2b\int d(ax+b) + b^2\int\frac{d(ax+b)}{ax+b}]$$

$$= \frac{1}{a^3}.[\frac{(ax+b)^2}{2} - 2b(ax+b) + b^2\ln|ax+b|] + C.$$

- Với $\alpha = 2$, ta được:

$$I = \frac{1}{a^3}.[\int d(ax+b) - 2b\int\frac{d(ax+b)}{ax+b} + b^2\int\frac{d(ax+b)}{(ax+b)^2}]$$

$$= \frac{1}{a^3}.[ax+b - 2b\ln|ax+b| - \frac{b^2}{ax+b}] + C.$$

- Với $\alpha = 3$, ta được:

$$I = \frac{1}{a^3}.[\int\frac{d(ax+b)}{ax+b} - 2b\int\frac{d(ax+b)}{(ax+b)^2} + b^2\int\frac{d(ax+b)}{(ax+b)^3}]$$

$$= \frac{1}{a^3}.[\ln|ax+b| - \frac{2b}{ax+b} - \frac{b^2}{4(ax+b)^4}] + C.$$

- Với $\alpha \in R\setminus\{1, 2, 3\}$, ta được:

$$I = \frac{1}{a^3}.[\frac{(ax+b)^{3-\alpha}}{3-\alpha} - \frac{2b(ax+b)^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{b^2(ax+b)^{1-\alpha}}{1-\alpha}] + C.$$

Ví dụ 5: Tính tích phân bất định: $I = \int\frac{x^2}{(1-x)^{39}}dx$.

Giải

Sử dụng đồng nhất thức:

$$x^2 = (1-x)^2 - 2(1-x) + 1$$

ta được:

$$\frac{x^2}{(1-x)^{39}} = \frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{(1-x)^{39}} = \frac{1}{(1-x)^{37}} - \frac{2}{(1-x)^{38}} + \frac{1}{(1-x)^{39}}.$$

Khi đó:

$$I = \int\frac{dx}{(1-x)^{37}} - \int\frac{2dx}{(1-x)^{38}} + \int\frac{dx}{(1-x)^{39}}$$

$$= \frac{1}{36(1-x)^{36}} - \frac{2}{37(1-x)^{37}} + \frac{1}{38(1-x)^{38}} + C.$$

Chú ý: Mở rộng tự nhiên của phương pháp giải trên ta đi xét ví dụ sau.

Ví dụ 6: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{x^3}{(x-1)^{10}}dx$.

Giải

Sử dụng đồng nhất thức (công thức Taylo):

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$

ta được:

$$\frac{x^3}{(x-1)^{10}} = \frac{1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3}{(x-1)^{10}}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^{10}} + \frac{3}{(x-1)^9} + \frac{3}{(x-1)^8} + \frac{1}{(x-1)^7}.$$

Khi đó:

$$I = \int\left[\frac{1}{(x-1)^{10}} + \frac{3}{(x-1)^9} + \frac{3}{(x-1)^8} + \frac{1}{(x-1)^7}\right]dx$$

$$= -\frac{1}{9(x-1)^9} - \frac{3}{8(x-1)^8} - \frac{3}{7(x-1)^7} - \frac{1}{6(x-1)^6} + C.$$

Dạng 2: Tính tích phân bất định:

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}, \text{ với } a \neq 0 \text{ và n nguyên dương.}$$

PHƯƠNG PHÁP

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu n = 1, ta xét ba khả năng của $\Delta = b^2 - 4ac$.

Khả năng 1: Nếu $\Delta > 0$, khi đó:

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\cdot\frac{(x-x_2)-(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$= \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right).$$

Do đó:

$$I_1 = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\int\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{a(x_1-x_2)}[\ln|x-x_1| - \ln|x-x_2|] + C = \frac{1}{a(x_1-x_2)}.\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right| + C$$

Khả năng 2: Nếu $\Delta = 0$, khi đó:

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_0)^2}.$$

Do đó:

$$I = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x-x_0)^2} = -\frac{1}{a(x-x_0)} + C.$$

Khả năng 3: Nếu $\Delta < 0$, khi đó thực hiện phép đổi biến $x = \mathrm{tg}t$ với $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Trường hợp 2: Nếu $n > 1$ thì bằng phép đổi biến $t = x + \frac{b}{2a}$, ta được:

$$I_n = \frac{1}{a^n}\int\frac{dt}{(t^2+k)^n}$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần với phép đặt:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{(t^2+k)^n} \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{2ntdt}{(t^2+k)^{n+1}} \\ v = t \end{cases}$$

Khi đó:

$$I_n = \frac{1}{a^n}\left[\frac{t}{(t^2+k)^n} + 2n\int\frac{t^2dt}{(t^2+k)^{n+1}}\right] = \frac{1}{a^n}\left\{\frac{t}{(t^2+k)^n} + 2n\int\frac{[(t^2+k)-k]dt}{(t^2+k)^{n+1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{a^n}\left\{\frac{t}{(t^2+k)^n} + 2n\left[\int\frac{dt}{(t^2+k)^n} - k\int\frac{dt}{(t^2+k)^{n+1}}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{a^n}\left[\frac{t}{(t^2+k)^n} + 2n(I_n - kI_{n+1})\right] \Leftrightarrow 2nkI_{n+1} = \frac{t}{(t^2+k)^n} + (2n - a^n)I_n$$

$$\Leftrightarrow 2(n-1)kI_n = \frac{t}{(t^2+k)^{n-1}} + (2n-2-a^{n-1})I_{n-1}. \qquad (1)$$

Chú ý: Vì công thức (1) không được trình bày trong phạm vi sách giáo khoa 12, do đó các em học khi làm bài thì không được phép sử dụng nó, hoặc nếu trong trường hợp được sử dụng thì đó là một công thức quá cồng kềnh rất khó có thể nhớ được một cách chính xác, do vậy trong trường hợp $n > 1$ tốt nhất các em nên trình bày bài theo các bước sau:

Bước 1: Xác định I_1.

Bước 2: Xác định I_n theo I_{n-1} (*Chứng minh lại (1)*).

Bước 3: Biểu diễn truy hồi I_n theo I_1 ta được kết quả cần tìm.

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^2-(m+2)x+2m}$.

Tính tích phân bất định $I = \int f(x)dx$ biết:

a. $m = 1$.

b. $m = 2$.

Giải

a. Với $m = 1$, ta có:

$$I = \int f(x)dx = \int\frac{dx}{x^2-3x+2} = \int\frac{dx}{x-2} - \int\frac{dx}{x-1} = \int\frac{d(x-2)}{x-2} - \int\frac{d(x-1)}{x-1}$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x-1| + C = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C.$$

b. Với m = 2, ta có:

$$I = \int f(x)dx = \int \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2} + C.$$

Ví dụ 8: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{(x^2+4x+3)^3}$.

Giải

Xét tích phân $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+4x+3)^n}$, ta lần lượt có:

- Với n = 1 thì:

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \int \frac{dx}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + C$$

- Với n > 1 thì bằng phép đổi biến t = x + 2, ta được: $J_n = \int \frac{dt}{(t^2-1)^n}$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần với phép đặt:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{(t^2-1)^n} \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{2ntdt}{(t^2-1)^{n+1}} \\ v = t \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J_n = \frac{t}{(t^2-1)^n} + 2n\int \frac{t^2dt}{(t^2-1)^{n+1}} = \frac{t}{(t^2-1)^n} + 2n\int \frac{[(t^2-1)+1]dt}{(t^2-1)^{n+1}}$$

$$= \frac{t}{(t^2-1)^n} + 2n[\int \frac{dt}{(t^2-1)^n} + \int \frac{dt}{(t^2-1)^{n+1}}] = \frac{t}{(t^2-1)^n} + 2n(J_n + J_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow 2nJ_{n+1} = -\frac{t}{(t^2-1)^n} - (2n-1)J_n$$

$$\Leftrightarrow 2(n-1)J_n = -\frac{t}{(t^2-1)^{n-1}} - (2n-3)J_{n-1}.$$

$$\Leftrightarrow J_n = -\frac{1}{2(n-1)}[\frac{t}{(t^2-1)^{n-1}} + (2n-3)J_{n-1}]$$

Do đó:

$$J_2 = -\frac{1}{2}(\frac{t}{t^2-1} + J_1).$$

$$I = J_3 = -\frac{1}{4}[\frac{t}{(t^2-1)^2} + 3J_2] = -\frac{1}{4}\{\frac{t}{(t^2-1)^2} + 3[-\frac{1}{2}(\frac{t}{t^2-1} + J_1)$$

$$= -\frac{x+2}{4(x^2+4x+3)^2} + \frac{3(x+2)}{8(x^2+4x+3)} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + C.$$

Dạng 3: Tính tích phân bất định: $I_n = \int \frac{(\lambda x + \mu)dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$, với $a \neq 0$ và n nguyên dương.

PHƯƠNG PHÁP

Phân tích:

$$\lambda x + \mu = \frac{\lambda}{2a}(2ax + b) + \mu - \frac{\lambda b}{2a}$$

Khi đó:

$$I_n = \frac{\lambda}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^n} + (\mu - \frac{\lambda b}{2a})\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

a. Với $J_n = \frac{\lambda}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ thì:

- Nếu n = 1, ta được:

$$J_1 = \frac{\lambda}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} = \frac{\lambda}{2a}\ln|ax^2 + bx + c| + C.$$

- Nếu n > 1, ta được:

$$J_n = \frac{\lambda}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^n} = -\frac{\lambda}{2a(n-1)}\cdot\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + C.$$

b. Với $K_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ ta đã biết cách xác định trong dạng 2.

Tổng quát hẹp: Trong phạm vi phổ thông chúng thường gặp tích phân bất định sau:

$$I = \int \frac{P(x)dx}{ax^2+bx+c}, \text{ với } a \neq 0 \text{ và bậc của } P(x) \text{ lớn hơn } 1.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thực hiện phép chia đa thức P(x) cho $ax^2 + bx + c$ ta được:

$$\frac{P(x)}{ax^2+bx+c} = Q(x) + \frac{\lambda x + \mu}{ax^2+bx+c}$$

$$= Q(x) + \frac{\lambda}{2a}\cdot\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + (\mu - \frac{\lambda b}{2a})\cdot\frac{1}{ax^2+bx+c}$$

Bước 2: Khi đó:

$$I = \int Q(x)dx + \frac{\lambda}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} + (\mu - \frac{\lambda b}{2a})\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Chú ý: Tuy nhiên trong trường hợp $ax^2 + bx + c$ có $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ (ta được hai nghiệm x_1, x_2), chúng ta thực hiện phép phân tích:

$$\frac{\lambda x + \mu}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}).$$

Ví dụ 9: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{(2x^3 - 10x^2 + 16x - 1)dx}{x^2 - 5x + 6}$.

Giải

Biến đổi:

$$\frac{2x^3 - 10x^2 + 16x - 1}{x^2 - 5x + 6} = 2x + \frac{4x - 1}{x^2 - 5x + 6} = 2x + \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2}$$

Ta được hằng đẳng thức:

$$4x - 1 = A(x - 2) + B(x - 3). \qquad (1)$$

Để xác định A, B trong (1) ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Phương pháp đồng nhất hệ số): Khai triển vế phải của (1) và sắp xếp đa thức theo thứ tự bậc lùi dần, ta có:

$$4x - 1 = (A + B)x + \; - 2A - 3B.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A + B = 4 \\ -2A - 3B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 11 \\ B = -7 \end{cases}.$$

Cách 2: (Phương pháp trị số riêng): Lần lượt thay x = 2, x = 3 vào hai vế của (1) ta được hệ:

$$\begin{cases} A = 11 \\ B = -7 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{2x^3 - 10x^2 + 16x - 1}{x^2 - 5x + 6} = 2x + \frac{11}{x - 3} - \frac{7}{x - 2}.$$

Do đó:

$$I = \int [2x + \frac{11}{x - 3} - \frac{7}{x - 2}]dx = x^2 + 11\ln|x - 3| - 7\ln|x - 2| + C.$$

Nhận xét: Trong ví dụ trên việc xác định các hệ số A, B bằng hai cách có độ phức tạp gần giống nhau, tuy nhiên với bài toán cần phân tích thành nhiều nhân tử thì cách 2 thường tỏ ra đơn giản hơn.

Ví dụ 10: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{(4x - 3)dx}{(x^2 - 2x - 3)^3}$.

Giải

Phân tích:

$$I = \int \frac{[2(2x - 2) + 1]dx}{(x^2 - 2x - 3)^3} = 2\int \frac{(2x - 2)dx}{(x^2 - 2x - 3)^3} + \int \frac{dx}{(x^2 - 2x - 3)^3}$$

$$= -\frac{1}{(x^2 - 2x - 3)^2} + \int \frac{dx}{(x^2 - 2x - 3)^3}.$$

Xét tích phân $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 - 2x - 3)^n}$, ta lần lượt có:

- Với n = 1 thì:

$$J_1=\int\frac{dx}{x^2-2x-3}=\int\frac{dx}{(x+1)(x-3)}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C$$

- Với n > 1 thì bằng phép đổi biến t = x − 1, ta được:

$$J_n=\int\frac{dt}{(t^2-4)^n}.$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần với phép đặt:

$$\begin{cases}u=\dfrac{1}{(t^2-4)^n}\\ dv=dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\dfrac{2ntdt}{(t^2-4)^{n+1}}\\ v=t\end{cases}.$$

Khi đó:

$$J_n=\frac{t}{(t^2-4)^n}+2n\int\frac{t^2dt}{(t^2-4)^{n+1}}=\frac{t}{(t^2-4)^n}+2n\int\frac{[(t^2-4)+4]dt}{(t^2-1)^{n+1}}$$

$$=\frac{t}{(t^2-4)^n}+2n[\int\frac{dt}{(t^2-4)^n}-4\int\frac{dt}{(t^2-4)^{n+1}}]$$

$$=\frac{t}{(t^2-4)^n}+2n(J_n-4J_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow 8nJ_{n+1}=\frac{t}{(t^2-1)^n}+(2n-1)J_n$$

$$\Leftrightarrow 8(n-1)J_n=\frac{t}{(t^2-1)^{n-1}}+(2n-3)J_{n-1}.$$

$$\Leftrightarrow J_n=\frac{1}{8(n-1)}[\frac{t}{(t^2-4)^{n-1}}+(2n-3)J_{n-1}]$$

Do đó:

$$J_2=\frac{1}{8}(\frac{t}{t^2-4}+J_1).$$

Từ đó, suy ra:

$$I=J_3=\frac{1}{16}[\frac{t}{(t^2-4)^2}+3J_2]=\frac{1}{16}[\frac{t}{(t^2-4)^2}+\frac{3}{8}(\frac{t}{t^2-4}+J_1)]$$

$$=\frac{t}{16(t^2-4)^2}+\frac{3t}{8(t^2-4)}+\frac{3}{32}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C.$$

Dạng 4: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{(a_1x^2 + b_1x + c_1)dx}{(x-\alpha)(ax^2 + bx + c)}$, với $a \neq 0$.

PHƯƠNG PHÁP

Ta xét ba khả năng của $\Delta = b^2 - 4ac$.

Khả năng 1: Nếu $\Delta > 0$, khi đó: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Khi đó phân tích:

$$\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{(x-\alpha)(ax^2 + bx + c)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-x_1} + \frac{C}{x-x_2}.$$

Do đó:

$$I = \int\left(\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-x_1} + \frac{C}{x-x_2}\right)dx = A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-x_1| + C\ln|x-x_2| + C$$

Khả năng 2: Nếu $\Delta = 0$, khi đó:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

Khi đó phân tích:

$$\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{(x-\alpha)(ax^2 + bx + c)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-x_0} + \frac{C}{(x-x_0)^2}.$$

Do đó:

$$I = \int\left[\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-x_0} + \frac{C}{(x-x_0)^2}\right]dx$$

$$= A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-x_0| - \frac{C}{x-x_0} + C.$$

Khả năng 3: Nếu $\Delta < 0$, khi đó phân tích:

$$\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{(x-\alpha)(ax^2 + bx + c)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B(2ax+b)}{ax^2 + bx + c} + \frac{C}{ax^2 + bx + c}.$$

Do đó:

$$I = \int\left[\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B(2ax+b)}{ax^2 + bx + c} + \frac{C}{ax^2 + bx + c}\right]dx$$

$$= A\ln|x-\alpha| + B\ln|ax^2 + bx + c| + C\int\frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Trong đó tích phân $J = \int\frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ được xác định bằng phép đổi biến $x = \operatorname{tg}t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Tổng quát: Tính tích phân bất định:

$$I = \int \frac{P(x)dx}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}, \text{ với } a \neq 0 \text{ và bậc của } P(x) \text{ lớn hơn } 2.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thực hiện phép chia đa thức P(x) cho $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$ ta được:

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)} = Q(x) + \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}$$

Bước 2: Khi đó:

$$I = \int Q(x)dx + \int \frac{(a_1x^2+b_1x+c_1)dx}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}.$$

Ví dụ 11: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{(x^2+2x-2)dx}{x^3+1}$.

Giải

Biến đổi:

$$\frac{x^2+2x-2}{x^3+1} = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{C}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{(A+2B)x^2-(A-B-C)x+A-B+C}{x^3+1}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A+2B=1 \\ -A+B+C=2 \\ A-B+C=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=0 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{x^2+2x-2}{x^3+1} = -\frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

Do đó:

$$I = \int\left(-\frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)dx = -\ln|x+1| + \ln|x^2-x+1| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x^2-x+1}{x+1}\right| + C$$

Dạng 5: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$, với $a \neq b$.

PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng đồng nhất thức:

$$\left[\frac{(x+a)-(x+b)}{a-b}\right]^2 = 1,$$

$$\frac{1}{(x+a)^2(x+b)^2} = \left[\frac{(x+a)-(x+b)}{(a-b)(x+a)(x+b)}\right]^2 = \frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a}\right]^2$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{(x+a)(x+b)} + \frac{1}{(x+a)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{a-b}\cdot\frac{(x+a)-(x+b)}{(x+b)(x+a)} + \frac{1}{(x+a)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{a-b}\left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a}\right) + \frac{1}{(x+a)^2}\right]$$

ta được:

$$I = \frac{1}{(a-b)^2}\left[\int\frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{a-b}\left(\int\frac{1}{x+b} - \int\frac{1}{x+a}\right) + \int\frac{1}{(x+a)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2}\left[-\frac{1}{x+a} - \frac{2}{a-b}(\ln|x+b| - \ln|x+a|) - \frac{1}{x+a}\right] + C$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{2}{a-b}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| - \frac{2x+a+b}{(x+b)(x+a)}\right] + C.$$

Ví dụ 12: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{(x+3)^2(x+1)^2}$.

Giải

Sử dụng đồng nhất thức:

$$\left[\frac{(x+3)-(x+1)}{2}\right]^2 = 1,$$

$$\frac{1}{(x+3)^2(x+1)^2} = \left[\frac{(x+3)-(x+1)}{2(x+3)(x+1)}\right]^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right]^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{(x+3)-(x+1)}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{(x+3)^2}\right].$$

ta được:

$$I = \frac{1}{4}\left[\int\frac{dx}{(x+1)^2} - \int\frac{dx}{x+1} + \int\frac{dx}{x+3} + \int\frac{dx}{(x+3)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + \ln|x+3| - \frac{1}{x+3}\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x+3}{x+1}\right| - \frac{2x+4}{(x+1)(x+3)}\right] + C.$$

Dạng 6: Tính tích phân $I = \int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

PHƯƠNG PHÁP

Giả sử cần xác định:

$$I = \int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

bằng phương pháp hệ số bất định.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Phân tích Q(x) thành các đa thức bất khả quy, giả sử là:

$$Q(x) = A^n(x).B^m(x).C^k(x), \text{ với } n, m, k \in N.$$

trong đó A(x), B(x), C(x) là đa thức bậc hai hoặc bậc nhất.

Bước 2: Khi đó ta phân tích:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{E(x)}{A^n(x).B^m(x).C^k(x)}$$

$$= D(x) + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_1^i.A'(x)}{A^i(x)} + \frac{a_2^i}{A^i(x)}\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{b_1^j.B'(x)}{B^j(x)} + \frac{b_2^j}{B^j(x)}\right] + \sum_{t=1}^{k}\left[\frac{c_1^t.C'(x)}{C^t(x)} + \frac{c_2^t}{C^t(x)}\right]$$

Xác định được các hệ số a_1^i, $a_2^i, b_1^j, b_2^j, c_1^t, c_2^t$ bằng phương pháp hệ số bất định..

Bước 3: Xác định:

$$I = \int D(x)dx + \sum_{i=1}^{n}\int\left[\frac{a_1^i.A'(x)}{A^i(x)} + \frac{a_2^i}{A^i(x)}\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}\int\left[\frac{b_1^j.B'(x)}{B^j(x)} + \frac{b_2^j}{B^j(x)}\right] + \sum_{t=1}^{k}\int\left[\frac{c_1^t.C'(x)}{C^t(x)} + \frac{c_2^t}{C^t(x)}\right]$$

Ví dụ 13: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{x^3 - 3x^2 + x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x}dx$.

Giải

Ta có:

$$\frac{x^3 - 3x^2 + x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{2x^2 - 5x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{2x^2 - 5x + 6}{x(x-2)(x-3)}$$

$$= 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}.$$

Ta được hằng đẳng thức

$$2x^2 - 5x + 6 = a(x-3)(x-2) + bx(x-3) + cx(x-2). \quad (1)$$

Để xác định a, b, c trong (1) ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Phương pháp đồng nhất hệ số): Khai triển vế phải của (1) và sắp xếp đa thức theo thứ tự bậc lùi dần, ta có:

$$2x^2 - 5x + 6 = (a + b + c)x^2 - (5a + 3b + 2c)x + 6a.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 5a + 3b + 2c = 5 \\ 6a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Cách 2: (Phương pháp trị số riêng): Lần lượt thay x = 0, x = 2, x = 3 vào hai vế của (1) ta được hệ:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{x^3 - 3x^2 + x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}.$$

Do đó:

$$I = \int\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}\right)dx = x + \ln|x| - 2\ln|x-2| + 3\ln|x+3| + C.$$

Ví dụ 14: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{7x - 4}{x^3 - 3x + 2}dx$.

Giải

Ta có:

$$\frac{7x-4}{x^3 - 3x + 2} = \frac{7x-4}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}$$

$$= \frac{(b+c)x^2 + (a+b-2c)x + 2a - 2b + c}{(x+2)(x-1)^2}$$

Ta được hằng đẳng thức:

$$7x - 4 = a(x + 2) + b(x - 1)(x + 2) + c(x - 1)^2. \qquad (1)$$

Để xác định a, b, c trong (1) ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Phương pháp đồng nhất hệ số): Khai triển vế phải của (1) và sắp xếp đa thức theo thứ tự bậc lùi dần, ta có:

$$7x - 4 = (b + c)x^2 + (a + b - 2c)x + 2a - 2b + c.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a + b - 2c = 7 \\ 2a - 2b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -2 \end{cases}.$$

Cách 2: (Phương pháp trị số riêng): Lần lượt thay x = 0, x = 2, x = 3 vào hai vế của (1) ta được hệ:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{7x - 4}{x^3 - 3x + 2} = \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{2}{x - 1} - \frac{2}{x + 2}.$$

Do đó:

$$I = \int\left[\frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{2}{x - 1} - \frac{2}{x + 2}\right]dx = -\frac{1}{x - 1} + 2\ln|x - 1| - 2\ln|x + 2| + C.$$

Ví dụ 15: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{x^3 - x^2 - 4x - 1}{x^4 + x^3}dx$.

Giải

Ta có:

$$\frac{x^3 - x^2 - 4x - 1}{x^4 + x^3} = \frac{x^3 - x^2 - 4x - 1}{x^3(x + 1)} = \frac{a}{x^3} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x + 1}$$

$$= \frac{(c + d)x^3 + (b + c)x^2 + (a + b)x + a}{x^3(x + 1)}.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} c + d = 1 \\ b + c = -1 \\ a + b = -4 \\ a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \\ c = 2 \\ d = -1 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{x^3 - x^2 - 4x - 1}{x^4 + x^3} = -\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x + 1}.$$

Do đó:

$$I = \int\left(-\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x} + 2\ln|x| - \ln|x+1| + C.$$

Bài toán 3: Xác định nguyên hàm các hàm hữu tỉ bằng phương pháp đổi biến

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Nếu tích phân cần xác định có dạng:

$$I = \int\frac{x^{k-1}.P(x^k)dx}{Q(x^k)}.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt $t = x^k$, suy ra: $dt = kx^{k-1}dx$, khi đó:

$$I = \frac{1}{k}\int\frac{P_1(t)dt}{Q_1(t)}. \qquad (1)$$

trong đó $P_1(x)$, $Q_1(x)$ là đa thức có bậc nhỏ hơn $P(x)$ và $Q(x)$.

Bước 2: Tính tích phân trong (1).

Chú ý: Ta nhận thấy sự mở rộng tự nhiên với dạng:

$$I = \int\frac{\varphi'(x).P[\varphi(x)]dx}{Q[\varphi(x)]}$$

trong đó $\varphi(x)$ là một đa thức bậc k của x.

Khi đó, đặt $t = \varphi(x)$.

Ví dụ 16: Tính tích phân bất định: $I = \int\frac{x^3dx}{(x^8-4)^2}$.

Giải

Đặt $t = x^4$, suy ra $dt = 4x^3dx$ và $\frac{x^3dx}{(x^8-4)^2} = \frac{1}{4}.\frac{dt}{(t^2-4)^2}$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t^2-4)^2}$$

Sử dụng đồng nhất thức: $1 = \frac{1}{16}[(t+2)-(t-2)]^2$

Ta được:

$$I = \frac{1}{64}\int\frac{[(t+2)-(t-2)]^2}{(t^2-4)^2}dt = \frac{1}{64}\int\left[\frac{1}{(t-2)^2} - \frac{2}{t^2-4} + \frac{1}{(t+2)^2}\right]dt$$

$$= \frac{1}{64}\left[-\frac{1}{t-2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| - \frac{1}{t+2}\right] + C$$

$$= -\frac{1}{64}\left(\frac{2t}{t^2-4} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right) + C = -\frac{1}{64}\left(\frac{2x^4}{x^8-4} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^4-2}{x^4+2}\right|\right) + C.$$

Ví dụ 17: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{(2x+1)dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3}$.

Giải

Biến đổi I vềdạng:

$$I = \int \frac{(2x+1)dx}{(x^2 + x + 1)^2 - 4}$$

Đặt $t = x^2 + x + 1$, suy ra:

$$dt = (2x + 1)dx \text{ và } \frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)^2 - 4} = \frac{dt}{t^2 - 4}.$$

Khi đó:

$$I = \int \frac{dt}{t^2 - 4} = \ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \ln\left|\frac{x^2+x-1}{x^2+x+3}\right| + C.$$

Ví dụ 18: Tính tích phân bất định : $I = \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}dx$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + x^2}dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2}dx.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, suy ra:

$$dt = (1 - \frac{1}{x^2})dx \text{ và } \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2} = \frac{dt}{t^2 - 2}.$$

Khi đó:

$$I = \int \frac{dt}{t^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\right| + C.$$

Bài toán 4: Xác định nguyên hàm các hàm hữu tỉ bằng phương pháp tích phân từng phần.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Nếu tích phân cần xác định có dạng:

$$I = \int \frac{P(x)Q'(x)dx}{Q^n(x)}.$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \dfrac{Q'(x)dx}{Q^n(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du \\ v \end{cases}.$$

Bước 2: Khi đó:

$$I = uv - \int v du.$$

Ví dụ 19: Tính tích phân bất định: $I = \int \dfrac{x^4 dx}{(x^2-1)^3}$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int \frac{x^3.xdx}{(x^2-1)^3}.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = x^3 \\ dv = \dfrac{xdx}{(x^2-1)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3x^2dx \\ v = -\dfrac{1}{4(x^2-1)^2} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = -\frac{x^3}{4(x^2-1)^3} + \frac{3}{4}\int \frac{x^2dx}{(x^2-1)^2}. \quad (1)$$

Xét tích phân

$$J = \int \frac{x^2dx}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{[(x+1)+(x-1)]^2dx}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{x+1}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}\right) + C \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = -\frac{x^3}{4(x^2-1)^3} + \frac{3}{16}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}\right) + C.$$

Chú ý: Để xác định tích phân J chúng ta cũng có thể tiếp tục sử dụng tích phân từng phần, như sau:

Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{xdx}{(x^2-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{1}{2(x^2-1)} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = -\frac{x}{2(x^2-1)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-1} = -\frac{x}{2(x^2-1)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

III. TÍNH TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ HỮU TỈ SỬ DỤNG CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC NHAU

Trong phần này chúng sẽ đi xem xét một vài bài toán được giải bằng các phương pháp khác nhau và mục đích quan trọng nhất là các em học sinh cần học được phương pháp suy luận qua mỗi ví dụ.

Ví dụ 20: Tính tích phân bất định: $I = \int\dfrac{x^2-3}{x(x^4+3x^2+2)}dx.$

Giải

Đặt $t = x^2$, suy ra:

$$dt = 2xdx \text{ và } x^3(2-3x^2)^8dx = \frac{t-3}{t(t+1)(t+2)}dt.$$

Khi đó:

$$I = \int\frac{t-3}{t(t+1)(t+2)}dt$$

Ta có:

$$\frac{t-3}{t(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t+2} = \frac{(a+b+c)t^2+(3a+2b+c)t+2a}{t(t+1)(t+2)}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=1 \\ 2a=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3/2 \\ b=4 \\ c=-5/2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{t-3}{t(t+1)(t+2)} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t} + \frac{4}{t+1} - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{t+2}.$$

Do đó:

$$I = \int\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t} + \frac{4}{t+1} - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{t+2}\right)dt = -\frac{3}{2}\ln|t| + 4\ln|t+1| - \frac{5}{2}\ln|t+2| + C$$

$$= -\frac{3}{2}\ln(x^2) + 4\ln(x^2+1) - \frac{5}{2}\ln(x^2+2) + C$$

Ví dụ 21: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{x^2-1}{x^4+2x^3-x^2+2x+1}dx$.

Giải

Chia cả tử và mẫu của biểu thức dưới dấu tích phân cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$I = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2+2(x+\frac{1}{x})-3} = \int \frac{d(x+\frac{1}{x}+1)}{(x+\frac{1}{x}+1)^2-4}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}+1-2}{x+\frac{1}{x}+1+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+3x+1}\right| + C.$$

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (ĐHTM – 94): Cho hàm số: $f(x) = \frac{2x^2+2x+5}{x^3-3x+2}$

a. Tìm m, n, p để $f(x) = \frac{m}{(x-1)^2} + \frac{n}{x-1} + \frac{p}{x+2}$.

b. Tìm họ nguyên hàm của f(x).

Bài 2. (ĐHNT HN – 98): Tìm họ nguyên hàm của các hàm số:

a. $f(x) = \frac{x^4-2}{x^3-x}$.　　b. $f(x) = \frac{1}{x^3-x}$.

Bài 3. (ĐHQG HN Khối D – 99): Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$.

Bài 4. (ĐHQG HN Khối D – 95): Cho hàm số $y = \frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}$

a. Xác định các hằng số a, b, c để: $y = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$.

b. Tìm họ nguyên hàm của y.

Bài 5. (ĐHQG HN – 2000): Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \frac{x^{2001}}{(x^2+1)^{1002}}$.

Bài 6. Xác định nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 2x - 1}$.

b. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 2}$.

c. $f(x) = \dfrac{7x - 13}{x^2 - 4x - 5}$.

d. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$.

e. $f(x) = \dfrac{1}{(3x^2 - 2x - 1)^2}$.

f. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 2x - 2)^3}$.

g. $f(x) = \dfrac{7x - 13}{(x^2 - 4x - 5)^3}$.

h. $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

Bài 7. Tính các tích phân bất định sau:

a. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4 - 2x^2 - 1}$.

b. $\displaystyle\int \frac{x}{x^3 - 3x + 2}dx$.

c. $\displaystyle\int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2}$.

d. $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x^{10} - 10)^2}dx$.

Bài 8. Tính các tích phân bất định sau:

a. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}dx$.

b. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx$.

c. $\displaystyle\int \frac{x^3 - x}{x^6 + 4x^4 + 4x^2 + 1}dx$.

d. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}dx$.

e. $\displaystyle\int \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^2 + 2)}dx$.

f. $\displaystyle\int \frac{(x^4 - 1)dx}{x(x^4 - 5)(x^5 - 5x + 1)}$.

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $m = 3$, $n = p = 1$. và $F(x) = \ln|(x-1)(x+2)| - \dfrac{3}{x-1} + C$.

Bài 2.

a. $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + C$.

b. $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{|x^2 - 1|}{x^2} + C$.

Bài 3. $F(x) = \ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right| + \dfrac{1}{x+1} + C$.

Bài 4. $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$. và $F(x) = -\dfrac{3}{x-1} + 2\ln|x-1| + \ln|x+2| + C$.

Bài 5. $F(x) = \dfrac{1}{2002}\cdot\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{1001} + C$.

CHỦ ĐỀ 8
NGUYÊN HÀM CÁC HÀM LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Việc xác định nguyên hàm của các hàm số lượng giác rất phổ biến trong các đề thi tuyển sinh vào các trường đại học và trung học chuyên nghiệp. Để xác định nguyên hàm các hàm lượng giác ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản.
2. Sử dụng các phép biến đổi lượng giác đưa về các nguyên hàm cơ bản
3. Phương pháp đổi biến.
4. Phương pháp tích phân từng phần.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Xác định nguyên hàm các hàm lượng giác bằng bằng việc sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta đã được làm quen với phương pháp phân tích để tính xác định nguyên hàm nói chung. Bây giờ đi đi xem xét chi tiết hơn về việc sử dụng phương pháp này để xác định nguyên hàm của các hàm số lượng giác. Và trong mục này chúng ta cũng sẽ đi xem xét đường nối chung để giải một vài dạng tổng quát.

Dạng 1: Tính tích phân bất định : $I = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Sử dụng đồng nhất thức:

$$1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(a-b)}.$$

Bước 2: Ta được:

$$I = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx = \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(x+a).\cos(x+b)-\cos(x+a).\sin(x+b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\left[\int \frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}dx - \int \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}[\ln|\sin(x+b)| - \ln|\sin(x+a)|] + C$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right| + C.$$

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp "*Lấy học trò làm trung tâm*"
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

Chú ý: Phương pháp trên cũng được được áp dụng cho các dạng tích phân sau:

1. $I = \int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$, sử dụng đồng nhất thức $1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)}$.
2. $I = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$, sử dụng đồng nhất thức $1 = \frac{\cos(a-b)}{\cos(a-b)}$.

Ví dụ 1: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x.\cos(x+\frac{\pi}{4})}$.

Giải

Cách 1: (Sử dụng phương pháp trong dạng toán cơ bản): Sử dụng đồng nhất thức:

$$1 = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos[(x+\frac{\pi}{4})-x]}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\cos[(x+\frac{\pi}{4})-x].$$

Ta được:

$$F(x) = \sqrt{2}\int \frac{\cos[(x+\frac{\pi}{4})-x]}{\sin x.\cos(x+\frac{\pi}{4})}dx = \sqrt{2}\int \frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos x + \sin(x+\frac{\pi}{4})\sin x}{\sin x.\cos(x+\frac{\pi}{4})}dx$$

$$= \sqrt{2}\,[\int \frac{\cos x}{\sin x}dx + \int \frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{.\cos(x+\frac{\pi}{4})}dx] = \sqrt{2}\,[\ln|\sin x| - \ln|\cos(x+\frac{\pi}{4})|] + C$$

Cách 2: (Dựa trên đặc thù của hàm f(x)): Ta có:

$$F(x) = \sqrt{2}\int \frac{dx}{\sin x.(\cos x - \sin x)} = \sqrt{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x.(\cot gx - 1)}$$

$$= -\sqrt{2}\int \frac{d(\cot gx)}{\cot gx - 1} = -\sqrt{2}\int \frac{d(\cot gx - 1)}{\cot gx - 1} = -\sqrt{2}\ln|\cot gx - 1| + C.$$

Dạng 2: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{\sin x + \sin\alpha}$.

PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi I về dạng:

$$I = \int \frac{dx}{\sin x + \sin\alpha} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin\frac{x+\alpha}{2}.\cos\frac{x-\alpha}{2}}. \quad (1)$$

Bước 2: Áp dụng bài toán 1 để giải (1).

Chú ý: Phương pháp trên cũng đượ được áp dụng cho các dạng tích phân sau:

1. $I = \int \frac{dx}{\sin x + m}$, với $|m| \le 1$.

2. $I = \int \frac{dx}{\cos x + \cos\alpha}$ và $I = \int \frac{dx}{\cos x + m}$, với $|m| \le 1$.

Ví dụ 2: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sin x + 1}$.

Giải

Biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x) = \frac{1}{2(\sin x + \frac{1}{2})} = \frac{1}{2}.\frac{1}{\sin x + \sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4}.\frac{1}{\sin\frac{6x+\pi}{12}.\cos\frac{6x-\pi}{12}}.$$

Sử dụng đồng nhất thức:

$$1 = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos(\frac{6x+\pi}{12} - \frac{6x-\pi}{12})}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\frac{6x+\pi}{12} - \frac{6x-\pi}{12}).$$

Ta được:

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\cos(\frac{6x+\pi}{12} - \frac{6x-\pi}{12})}{\sin\frac{6x+\pi}{12}.\cos\frac{6x-\pi}{12}}dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\cos\frac{6x+\pi}{12}.\cos\frac{6x-\pi}{12} + \sin\frac{6x+\pi}{12}.\sin\frac{6x-\pi}{12}}{\sin\frac{6x+\pi}{12}.\cos\frac{6x-\pi}{12}}dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\int \frac{\cos\frac{6x+\pi}{12}}{\sin\frac{6x+\pi}{12}}dx + \int \frac{\sin\frac{6x-\pi}{12}}{\cos\frac{6x-\pi}{12}}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\ln\left|\sin\frac{6x+\pi}{12}\right| - \ln\left|\cos\frac{6x-\pi}{12}\right|\right] + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sin\frac{6x+\pi}{12}}{\cos\frac{6x-\pi}{12}}\right| + C$$

Dạng 3: Tính tích phân bất định: $I = \int tgx.tg(x+\alpha)dx$.

PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi I về dạng:

$$I = \int tgx.tg(x+\alpha)dx = \int \frac{\sin x.\sin(x+\alpha)}{\cos x.\cos(x+\alpha)}dx$$

$$= \int\left(\frac{\cos x.\cos(x+\alpha)+\sin x.\sin(x+\alpha)}{\cos x.\cos(x+\alpha)} - 1\right)dx$$

$$= \int \frac{\cos\alpha dx}{\cos x.\cos(x+\alpha)} - \int dx = \cos\alpha\int \frac{dx}{\cos x.\cos(x+\alpha)} - x. \ (1)$$

Bước 2: Áp dụng bài toán 1 để giải (1)

Chú ý: Phương pháp trên cũng được được áp dụng cho các dạng tích phân sau:

1. $I = \int tg(x+\alpha).cotg(x+\beta)dx.$
2. $I = \int cotg(x+\alpha).cotg(x+\beta)dx.$

Ví dụ 3: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = tgx.tg(x + \pi/4)$.

Giải

Biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x) = \frac{\sin x.\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos x.\cos(x+\frac{\pi}{4})} = \frac{\cos x.\cos(x+\frac{\pi}{4})+\sin x.\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos x.\cos(x+\frac{\pi}{4})} - 1$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos x.\cos(x+\frac{\pi}{4})} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{\cos x.\cos(x+\frac{\pi}{4})} - 1.$$

Khi đó:

$$F(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{\cos x.\cos(x+\frac{\pi}{4})} - \int dx = -x + \frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{\cos x.\cos(x+\frac{\pi}{4})}.$$

Để đi xác định:

$$J = \int\frac{dx}{\cos x.\cos(x+\pi/4)}$$ – ĐHQG HN Khối D/2000

ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Sử dụng phương pháp trong dạng toán cơ bản): Sử dụng đồng nhất thức:

$$1 = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin[(x+\frac{\pi}{4})-x]}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\sin[(x+\frac{\pi}{4})-x].$$

Ta được:

$$J = \sqrt{2}\int \frac{\sin[(x+\frac{\pi}{4})-x]}{\cos x.\cos(x+\frac{\pi}{4})}dx = \sqrt{2}\int \frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos x - \cos(x+\frac{\pi}{4})\sin x}{\cos x.\cos(x+\frac{\pi}{4})}dx$$

$$= \sqrt{2}\,[\int \frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{.\cos(x+\frac{\pi}{4})}dx - \int \frac{\sin x}{.\cos x}dx] = \sqrt{2}\,[-\ln|\cos(x+\frac{\pi}{4})| + \ln|\cos x|] + C$$

$$= \sqrt{2}\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}\right| + C = -\sqrt{2}\ln|1-\mathrm{tg}x| + C.$$

Cách 2: (Dựa trên đặc thù của hàm dưới dấu tích phân): Ta có:

$$J = \sqrt{2}\int \frac{dx}{\cos x.(\cos x - \sin x)} = \sqrt{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x.(1-\mathrm{tg}x)}$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{d(\mathrm{tg}x)}{1-\mathrm{tg}x} = -\sqrt{2}\int \frac{d(1-\mathrm{tg}x)}{1-\mathrm{tg}x} = -\sqrt{2}\ln|1-\mathrm{tg}x| + C.$$

Vậy, ta được:

$F(x) = -x - \ln|1-\mathrm{tg}x| + C.$

Dạng 4: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$.

PHƯƠNG PHÁP

Ta có thể lựa chọn hai cách biến đổi:

Cách 1: Ta có:

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dx}{\sin(x+\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dx}{2\sin\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x+\alpha}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dx}{2\mathrm{tg}\frac{x+\alpha}{2}\cos^2\frac{x+\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{d(\mathrm{tg}\frac{x+\alpha}{2})}{\mathrm{tg}\frac{x+\alpha}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x+\alpha}{2}\right| + C.$$

Cách 2: Ta có:

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dx}{\sin(x+\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{\sin(x+\alpha).dx}{\sin^2(x+\alpha)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{.d[\cos(x+\alpha)]}{\cos^2(x+\alpha)-1} = -\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{\cos(x+\alpha)-1}{\cos(x+\alpha)+1}\right| + C.$$

Chú ý: Chúng ta cũng có thể thực hiện: bằng phương pháp đại số hoá với việc đổi biến: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Ví dụ 4: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3}\sin x + \cos x}$.

Giải

Ta có:

$$F(x) = \int \frac{2dx}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{6})} = \int \frac{dx}{2\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})}$$

$$= \int \frac{dx}{2\operatorname{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})\cos^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})} = \int \frac{d[\operatorname{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})]}{\operatorname{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})} = \ln\left|\operatorname{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})\right| + C.$$

Dạng 5: Tính tích phân bất định : $I = \int \dfrac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a_2\sin x + b_2\cos x}dx$.

PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi:

$a_1\sin x + b_1\cos x = A(a_2\sin x + b_2\cos x) + B(a_2\cos x - b_2\sin x)$

Bước 2: Khi đó:

$$I = \int \frac{A(a_2\sin x + b_2\cos x) + B(a_2\cos x - b_2\sin x)}{a_2\sin x + b_2\cos x}dx$$

$$= A\int dx + B\int \frac{a_2\cos x - b_2\sin x}{a_2\sin x + b_2\cos x}dx = Ax + B\ln|a_2\sin x + b_2\cos x| + C.$$

Ví dụ 5: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{4\sin x + 3\cos x}{\sin x + 2\cos x}$.

Giải

Biến đổi:

$4\sin x + 3\cos x = a(\sin x + 2\cos x) + b(\cos x - 2\sin x)$

$= (a - 2b)\sin x + (2a + b)\cos x$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a - 2b = 4 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Khi đó:

$$f(x) = \frac{2(\sin x + 2\cos x) - (\cos x - 2\sin x)}{\sin x + 2\cos x} = 2 - \frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}.$$

Do đó:

$$F(x) = \int\left(2 - \frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}\right)dx = 2\int dx - \int\frac{d(\sin x + 2\cos x)}{\sin x + 2\cos x}$$

$$= 2x - \ln|\sin x + 2\cos x| + C.$$

Dạng 6: Tính tích phân bất định: $I = \int\frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{(a_2\sin x + b_2\cos x)^2}dx$.

PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi:

$$a_1\sin x + b_1\cos x = A(a_2\sin x + b_2\cos x) + B(a_2\cos x - b_2\sin x)$$

Bước 2: Khi đó:

$$I = \int\frac{A(a_2\sin x + b_2\cos x) + B(a_2\cos x - b_2\sin x)}{(a_2\sin x + b_2\cos x)^2}dx$$

$$= A\int\frac{dx}{a_2\sin x + b_2\cos x} + B\int\frac{a_2\cos x - b_2\sin x}{(a_2\sin x + b_2\cos x)^2}dx$$

$$= \frac{A}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\int\frac{dx}{\sin(x+\alpha)} - \frac{B}{a_2\sin x + b_2\cos x}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\alpha}{2}\right| - \frac{B}{a_2\sin x + b_2\cos x} + C.$$

trong đó $\sin\alpha = \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$ và $\cos\alpha = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

Ví dụ 6: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{8\cos x}{2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x}$.

Giải

Biến đổi:

$$f(x) = \frac{8\cos x}{3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x} = \frac{8\cos x}{(\sqrt{3}\sin x + \cos x)^2}.$$

Giả sử:

$$8\cos x = a(\sqrt{3}\sin x + \cos x) + b(\sqrt{3}\cos x - \sin x) = (a\sqrt{3} - b)\sin x + (a + b\sqrt{3})\cos x$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a\sqrt{3} - b = 0 \\ a + b\sqrt{3} = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{3} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} - \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}\cos x - \sin x)}{(\sqrt{3}\sin x + \cos x)^2}.$$

Do đó:

$$F(x) = \int \frac{2dx}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} - 2\sqrt{3}\int \frac{d(\sqrt{3}\sin x + \cos x)}{(\sqrt{3}\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\right| - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} + C.$$

Chú ý: Trong lời giải trên ta đã tận dụng kết quả trong ví dụ 4 là:

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\right| + C.$$

Dạng 7: Tính tích phân bất định $I = \int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$.

PHƯƠNG PHÁP

Ta xét 3 khả năng sau:

1. Nếu $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ thì ta thực hiện phép biến đổi:

$$\frac{1}{a\sin x + b\cos x + c} = \frac{1}{c[1 + \cos(x - \alpha)]} = \frac{1}{2c}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x-\alpha}{2}},$$

trong đó $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ và $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2c}\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x-\alpha}{2}} = \frac{1}{c}\int \frac{d\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{x-\alpha}{2}} = \frac{1}{c}tg\frac{x-\alpha}{2} + C.$$

2. Nếu $c = -\sqrt{a^2 + b^2}$ thì ta thực hiện phép biến đổi:

$$\frac{1}{a\sin x + b\cos x + c} = \frac{1}{c[1 - \cos(x - \alpha)]} = \frac{1}{2c}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{x-\alpha}{2}},$$

trong đó $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ và $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2c}\int \frac{dx}{\sin^2\frac{x-\alpha}{2}} = \frac{1}{c}\int \frac{d\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}{\sin^2\frac{x-\alpha}{2}} = \frac{1}{c}cotg\frac{x-\alpha}{2} + C.$$

3. Nếu $c^2 \neq a^2 + b^2$ thì ta thực hiện phép đổi biến $t = tg\frac{x}{2}$. Khi đó:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ và } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ví dụ 7: Tính tích phân bất định $I = \int \frac{2dx}{2\sin x - \cos x + 1}$.

Giải

Đặt $t = tg\frac{x}{2}$, ta được:

$$dt = \frac{1}{2}.\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}.(1 + tg^2\frac{x}{2})dx = \frac{1}{2}.(1+t^2)dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Khi đó:

$$I = \int \frac{\frac{4dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \int \frac{2dt}{t^2+2t} = 2\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{tg\frac{x}{2} - 1}{tg\frac{x}{2} + 1}\right| + C = \ln\left|tg(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})\right| + C.$$

Dạng 8: Tính tích phân bất định : $I = \int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}dx$.

PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi:

$$a_1\sin x + b_1\cos x + c_1 = A(a_2\sin x + b_2\cos x + c_2) + B(a_2\cos x - b_2\sin x) + C$$

Bước 2: Khi đó:

$$I = \int \frac{A(a_2\sin x + b_2\cos x + c_2) + B(a_2\cos x - b_2\sin x) + C}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}dx$$

$$= A\int dx + B\int \frac{a_2\cos x - b_2\sin x}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}dx + C\int \frac{dx}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}$$

$$= Ax + B\ln|a_2\sin x + b_2\cos x + c_2| + C\int \frac{dx}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}.$$

trong đó $\int \frac{dx}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}$ được xác định nhờ dạng 4.

Ví dụ 8: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{5\sin x}{2\sin x - \cos x + 1}$.

Giải

Giả sử:

$$5\sin x = a(2\sin x - \cos x + 1) + b(2\cos x + \sin x) + c$$
$$= (2a + b)\sin x + (2b - a)\cos x + a + c.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ 2b - a = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$f(x) = \frac{2(2\sin x - \cos x + 1) + (2\cos x + \sin x) - 2}{2\sin x - \cos x + 1}$$
$$= 2 + \frac{2\cos x + \sin x}{2\sin x - \cos x + 1} - \frac{2}{2\sin x - \cos x + 1}.$$

Do đó:

$$F(x) = \int 2dx + \int \frac{2\cos x + \sin x}{2\sin x - \cos x + 1}dx - \int \frac{2}{2\sin x - \cos x + 1}dx$$
$$= 2\int dx + \int \frac{d(2\sin x - \cos x + 1)}{2\sin x - \cos x + 1} - \int \frac{2dx}{2\sin x - \cos x + 1}$$
$$= 2x + \ln|2\sin x - \cos x + 1| - \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Chú ý: Trong lời giải trên ta đã tận dụng kết quả trong ví dụ 7 là:

$$\int \frac{2dx}{2\sin x - \cos x + 1} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Dạng 9: Tính tích phân bất định: $I = \displaystyle\int \frac{a_1\sin^2 x + b_1 \sin x\cos x + c_1\cos^2 x}{a_2\sin x + b_2\cos x}dx$.

PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi:

$$a_1\sin^2 x + b_1\sin x.\cos x + c_1\cos^2 x$$
$$= (A\sin x + B\cos x)(a_2\sin x + b_2\cos x) + C(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

Bước 2: Khi đó:

$$I = \int \frac{(A\sin x + B\cos x)(a_2\sin x + b_2\cos x) + C}{a_2\sin x + b_2\cos x}dx$$
$$= \int (A\sin x + B\cos x)dx + C\int \frac{dx}{a_2\sin x + b_2\cos x}$$

$$= -A\cos x + B\sin x + \frac{C}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\int \frac{dx}{\sin(x+\alpha)}$$

$$= -A\cos x + B\sin x + \frac{C}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\alpha}{2}\right| + C.$$

trong đó $\sin\alpha = \dfrac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$ và $\cos\alpha = \dfrac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

Ví dụ 9: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{4\sin^2 x + 1}{\sqrt{3}\sin x + \cos x}$.

Giải

Giả sử:

$$4\sin^2 x + 1 = 5\sin^2 x + \cos^2 x = (a\sin x + b\cos x)(\sqrt{3}\sin x + \cos x) + c(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$= (a\sqrt{3} + c)\sin^2 x + (a + b\sqrt{3})\sin x.\cos x + (b + c)\cos^2 x$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a\sqrt{3} + c = 5 \\ a + b\sqrt{3} = 0 \\ b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{3}\sin x - \cos x)(\sqrt{3}\sin x + \cos x) + 2}{\sqrt{3}\sin x + \cos x}$$
$$= \sqrt{3}\sin x - \cos x + \frac{2}{\sqrt{3}\sin x + \cos x}.$$

Do đó:

$$F(x) = \int(\sqrt{3}\sin x - \cos x)dx - \int\frac{2dx}{\sqrt{3}\sin x + \cos x}$$
$$= -\sqrt{3}\cos x - \sin x - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\right| + C.$$

Chú ý: Trong lời giải trên ta đã tận dụng kết quả trong ví dụ 4 là:

$$\int\frac{2dx}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\right| + C.$$

Dạng 10: Tính tích phân bất định : $I = \displaystyle\int\frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x}$.

PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi I về dạng:

$$I = \int\frac{dx}{(a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg}x + c)\cos^2 x}$$

Bước 2: Thực hiện phép đổi biến t = tgx suy ra:

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx \text{ và } \frac{dx}{(atg^2x + btgx + c)\cos^2 x} = \frac{dt}{at^2 + bt + c}$$

Khi đó:

$$I = \int \frac{dt}{at^2 + bt + c}.$$

Ví dụ 10: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x}$.

Giải

Sử dụng đẳng thức $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx)$.

Ta có:

$$I = \int \frac{dx}{(3tg^2x - 2tgx - 1)\cos^2 x} = \frac{1}{3}\int \frac{d(tgx)}{(tgx - \frac{1}{3})^2 - \frac{4}{9}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(tgx - \frac{1}{3})}{(tgx - \frac{1}{3})^2 - \frac{4}{9}}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{tgx - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}}{tgx - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{tgx - 1}{3tgx + 1}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x - \cos x}{3\sin x + \cos x}\right| + C.$$

Dạng 11: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{\sin x.\cos xdx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^\alpha}$.

PHƯƠNG PHÁP

Nhận xét rằng:

$$\sin x.\cos x.dx = \frac{1}{2(a^2 - b^2)}.d(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x).$$

Ta đi xét hai trường hợp:

a. Với $\alpha = 1$, ta được:

$$\int \frac{\sin x.\cos sxdx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{1}{2(a^2 - b^2)}\int \frac{d(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)}\ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x) + C.$$

b. Với $\alpha \neq 1$, ta được:

$$I = \frac{1}{2(a^2 - b^2)}\int \frac{d(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^\alpha}$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)(1 - \alpha)}(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^{-\alpha + 1} + C.$$

Bài toán 2: Xác định nguyên hàm các hàm số lượng giác sử dụng các phép biến đổi lượng giác

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các phép biến đổi lượng giác đưa biểu thức dưới dấu tích phân về dạng quen thuộc. Các phép biến đổi thường dùng bao gồm:

- Phép biến đổi tích thành tổng (chúng ta đã thấy trong phương pháp phân tích).
- Hạ bậc.
- Các kỹ thuật biến đổi khác.

Dạng 1: Sử dụng phép biến đổi tích thành tổng.

PHƯƠNG PHÁP

Ở đây chúng ta nhớ lại các công thức sau:

a. $\cos x.\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$.

b. $\sin x.\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$.

c. $\sin x.\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$.

d. $\cos x.\sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$.

Ví dụ 11 (ĐHAN – 97): Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x.\cos 5x$.

Giải

Sử dụng các phép biến đổi tích thành tổng, ta được:

$$f(x) = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x)$$

Khi đó:

$$F(x) = \frac{1}{2}\int(\cos 8x + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{8}\sin 8x + \frac{1}{2}\sin 2x) + C.$$

Chú ý: Nếu hàm f(x) là tích của nhiều hơn 2 hàm số lượng giác ta thực hiện phép biến đổi dần, cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 12: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x.\sin 2x.\cos 3x$.

Giải

Sử dụng các phép biến đổi tích thành tổng, ta được:

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)\cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 3x.\cos 3x + \cos 3x.\sin x)$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\sin 6x + \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)] = \frac{1}{4}(\sin 6x + \sin 4x + \sin 2x)$$

Khi đó:

$$F(x) = \frac{1}{4}\int(\sin 6x + \sin 4x + \sin 2x)dx = \frac{1}{4}(-\frac{1}{6}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x) + C$$

$$= -\frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Ví dụ 13: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \operatorname{tg}x.\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} - x)\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} + x)$.

Giải

Ta có:

$$f(x) = \frac{\sin x.\sin(\frac{\pi}{3} - x).\sin(\frac{\pi}{3} + x)}{\cos x.\cos(\frac{\pi}{3} - x).\cos(\frac{\pi}{3} + x)}. \quad (1)$$

Sử dụng các phép biến đổi tích thành tổng, ta được:

$$\sin x.\sin(\frac{\pi}{3} - x).\sin(\frac{\pi}{3} + x) = \frac{1}{2}\sin x(\cos 2x - \cos\frac{2\pi}{3})$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x.\sin x + \frac{1}{4}\sin x = \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) + \frac{1}{4}\sin x = \frac{1}{4}\sin 3x.$$

$$\cos x.\cos(\frac{\pi}{3} - x).\cos(\frac{\pi}{3} + x) = \frac{1}{2}\cos x(\cos\frac{2\pi}{3} + \cos 2x)$$

$$= -\frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x.\cos x = -\frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) = \frac{1}{4}\cos 3x.$$

Suy ra:

$$f(x) = \operatorname{tg}3x.$$

Khi đó:

$$F(x) = \frac{1}{4}\int \operatorname{tg}3x dx = \frac{1}{4}\int\frac{\sin 3x}{\cos 3x}dx = -\frac{1}{12}\int\frac{d(\cos 3x)}{\cos 3x} = -\frac{1}{12}\ln|\cos 3x| + C.$$

<u>Dang 2</u>: Sử dụng phép hạ bậc.

PHƯƠNG PHÁP

Ở đây chúng ta nhớ lại các công thức sau:

a. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

b. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

c. $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$.

d. $\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$.

được sử dụng trong các phép hạ bậc mang tính cục bộ, còn hằng đẳng thức:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

được sử dụng trong các phép hạ bậc mang tính toàn cục cho các biểu thức, ví dụ như:

$$\sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x.\cos^2x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos4x) = \frac{1}{4}\cos4x + \frac{3}{4}.$$

$$\sin^6x + \cos^6x = (\sin^2x + \cos^2x)^3 - 3\sin^2x.\cos^2x(\sin^2x + \cos^2x)$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos4x) = \frac{3}{8}\cos4x + \frac{5}{8}.$$

Ví dụ 14: Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \sin^4 2x$.

Giải

Biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x) = \left(\frac{1-\cos4x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos4x + \cos^2 4x)$$

$$= \frac{1}{4}[1 - 2\cos4x + \frac{1}{2}(1 + \cos8x)] = \frac{1}{8}(3 - 4\cos4x + \cos8x).$$

Khi đó:

$$F(x) = \frac{1}{8}\int(3 - 4\cos4x + \cos8x)dx = \frac{1}{8}(3x - \sin4x + \frac{1}{8}\sin8x) + C.$$

Ví dụ 15: Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \sin^8x + \cos^8x$.

Giải

Biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x) = (\sin^4x + \cos^4x)^2 - 2\sin^4x.\cos^4x = (\frac{1}{4}\cos4x + \frac{3}{4})^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x$$

$$= \frac{1}{16}\cos^2 4x + \frac{3}{8}\cos4x + \frac{9}{16} - \frac{1}{8}\left(\frac{1-\cos4x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16}.\frac{1+\cos8x}{2} + \frac{3}{8}\cos4x + \frac{9}{16} - \frac{1}{32}(1 - 2\cos4x + \cos^2 4x)^2$$

$$= \frac{1+\cos8x}{32} + \frac{3}{8}\cos4x + \frac{9}{16} - \frac{1}{32}(1 - 2\cos4x + \frac{1+\cos8x}{2})^2$$

$$= \frac{1}{64}\cos8x + \frac{7}{16}\cos4x + \frac{35}{64}.$$

Khi đó:

$$F(x) = \frac{1}{64}\int\cos8xdx + \frac{7}{16}\int\cos4xdx + \frac{35}{64}\int dx$$

$$= \frac{1}{512}\sin8x + \frac{7}{64}\sin4x + \frac{35}{64} + C.$$

Chú ý: Nhiều bài toán cần vận dụng đồng thời hai kỹ thuật biến đổi tổng thành tích và hạ bậc.

Ví dụ 16 (HVQHQT – 98): Tìm họ nguyên hàm của hàm số

a. $f(x) = \sin^3x.\sin3x$.

b. $f(x) = \sin^3x.\cos3x + \cos^3x.\sin3x$.

Giải

a. Biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x) = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}.\sin3x = \frac{3}{4}\sin3x.\sin x - \frac{1}{4}\sin^2 3x$$

$$= \frac{3}{8}(\cos2x - \cos4)x - \frac{1}{8}(1 - \cos6x) = \frac{1}{8}(3\cos2x - 3\cos4 + \cos6x - 1).$$

Khi đó:

$$F(x) = \frac{1}{8}\int(3\cos2x - 3\cos4x + \cos6x - 1)dx$$

$$= \frac{1}{8}(\frac{3}{2}\sin2x - \frac{3}{4}\sin4x + \frac{1}{6}\sin6x - x) + C.$$

b. Biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x) = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}.\cos3x + \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}.\sin3x$$

$$= \frac{3}{4}(\cos3x.\sin x + \sin3x.\cos x) = \frac{3}{4}\sin4x.$$

Khi đó:

$$F(x) = \frac{3}{4}\int \sin4x dx = -\frac{3}{16}\cos4x + C.$$

Dạng 3: *Sử dụng các phép biến đổi lượng giác khác nhau.*

PHƯƠNG PHÁP

Ở đây ngoài việc vận dụng một cách linh hoạt các công thức biến đổi lượng giác các em học sinh còn cần thiết biết cách định hướng trong phép biến đổi.

Ví dụ 17 (ĐHNT TPHCM – 99): Tìm họ nguyên hàm của hàm số

a. $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.   b. $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$.

Giải

a. Ta có:

$$F(x) = \int\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}dx = -\int\frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = -\ln(\sin x + \cos x) + C.$$

b. Ta có:

$$F(x) = \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x}dx$$
$$= \int(\cos x - \sin x)dx = \sin x + \cos x + C.$$

Ví dụ 18 (ĐHNT HN – 97): Tính tích phân bất định $I = \int \frac{\sin 3x.\sin 4x}{tgx + \cot g2x}dx$.

Giải

Biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân về dạng:

$$\frac{\sin 3x.\sin 4x}{tgx + \cot g2x} = \frac{\sin 3x.\sin 4x}{\frac{\cos x}{\cos x.\sin 2x}} = \sin 4x.\sin 3x.\sin 2x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 7x)\sin 2x$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 2x.\cos x - \cos 7x.\sin 2x) = \frac{1}{4}(\sin 3x + \sin x - \sin 9x + \sin 5x)$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{4}\int(\sin x + \sin 3x + \sin 5x - \sin 9x)dx$$
$$= -\frac{1}{4}(\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{9}\cos 9x) + C$$

Tổng quát: Các tích phân dạng:

$$\int \sin^m x.\cos^n x dx$$

với m, n là những số nguyên được tính nhờ các phép biến đổi hoặc dùng công thức hạ bậc.

Bài toán 3: Tính tích phân các hàm lượng giác bằng phương pháp đổi biến

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Tính tích phân bất định sau:

$$I = \int R(\sin x, \cos x)dx$$

trong đó R là hàm hữu tỉ.

Ta lựa chọn một trong các hướng sau:

Hướng 1: Nếu

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

thì sử dụng phép đổi biến tương ứng là t = cosx.

Hướng 2: Nếu

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

thì sử dụng phép đổi biến tương ứng là t = sinx.

Hướng 3: Nếu

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

thì sử dụng phép đổi biến t = tgx (đôi khi có thể là t = cotgx).

Do đó với các tích phân dạng:

1. $I = \int tg^n x dx$, với $n \in Z$ được xác định nhờ phép đổi biến $t = tgx$.
2. $I = \int cotg^n x dx$, với $n \in Z$ được xác định nhờ phép đổi biến $t = cotgx$.

Hướng 4: Mọi trường hợp đều có thể đưa về tích phân các hàm hữu tỉ bằng phép đổi biến $t = tg\dfrac{x}{2}$.

Ví dụ 19: Tính tích phân bất định $I = \int \dfrac{\cos x + \sin x.\cos x}{2 + \sin x}dx$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int \frac{(1 + \sin x)\cos x}{2 + \sin x}dx.$$

Đặt t = sinx suy ra

$$dt = \cos x dx \text{ và } \frac{(1 + \sin x)\cos x}{2 + \sin x}dx = \frac{1 + t}{2 + t}dt$$

Khi đó:

$$I = \int \frac{1 + t}{2 + t}dt = \int \left(1 - \frac{1}{2 + t}\right)dt = t - \ln|2 + t| + C = \sin x - \ln|2 + \sin x| + C$$

Nhận xét: Trong bài toán trên sở dĩ ta định hướng được phép biến đổi như vậy là bởi nhận xét rằng:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

do đó sử dụng phép đổi biến tương ứng là $t = \sin x$.

Ví dụ 20: Tính tích phân bất định $I = \int \dfrac{dx}{\sin x.\cos^3 x}$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int \frac{dx}{tgx.\cos^4 x}.$$

Đặt t = tgx suy ra

$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ và } \frac{dx}{tgx.\cos^4 x} = \frac{1}{tgx}(1 + tg^2 x)\frac{dx}{.\cos^2 x} = \frac{(1 + t^2)dt}{t} = (\frac{1}{t} + t)dt$$

Khi đó:

$$I = \int (\frac{1}{t} + t)dt = \ln|t| + \frac{1}{2}t^2 + C = \ln|tgx| + \frac{1}{2}tg^2 x + C.$$

Nhận xét:

1. Trong bài toán trên sở dĩ ta định hướng được phép biến đổi như vậy là bởi nhận xét rằng:
$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$
do đó sử dụng phép đổi biến tương ứng là $t = \mathrm{tg}x$.
2. Việc đánh giá hàm số dưới dấu tích phân như trên để lựa chọn phép đặt ẩn phụ thích hợp luôn tỏ ra rất hiệu quả đối với bài toán xác định nguyên hàm của các hàm lượng giác chứa căn. Ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 21 (ĐH TCKT HN – 96): Tính tích phân bất định $I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x.\cos^5 x}}$.

Giải

Biến đổi I về dạng:
$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\mathrm{tg}^3 x.\cos^8 x}} = \int \frac{dx}{\cos^2 x.\sqrt[4]{\mathrm{tg}^3 x}}.$$
Đặt $t = \mathrm{tg}x$ suy ra
$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ và } \frac{dx}{\cos^2 x.\sqrt[4]{\mathrm{tg}^3 x}} = \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}}.$$
Khi đó:
$$I = \int \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}} = 4\sqrt[4]{t} + C = 4\sqrt[4]{\mathrm{tg}x} + C$$

Chú ý: Như chúng ta đã thấy trong chủ đề 8 là $\sqrt{\frac{1}{t^2}} = \frac{1}{|t|}$ điều này rất quan trọng, bởi khi đó ta phải xét hai trường hợp $t > 0$ và $t < 0$.

Ví dụ 22: Tính tích phân bất định $I = \int \frac{\sin x dx}{\cos x\sqrt{\sin^2 x + 1}}$

Giải

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ do đó:
$$I = -\int \frac{dt}{t\sqrt{2 - t^2}}$$
Ta cần xét hai trường hợp $t > 0$ và $t < 0$. Cụ thể:

- Với $t > 0$, ta được:
$$I = -\int \frac{dt}{t^2\sqrt{\frac{2}{t^2} - 1}} = \int \frac{d(\frac{1}{t})}{\sqrt{\frac{2}{t^2} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{t} + \sqrt{\frac{2}{t^2} - 1}\right| + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 - t^2}}{t}\right| + C.$$

- Với x < 0, ta được:

$$I = \int \frac{dt}{t^2\sqrt{\frac{2}{t^2}-1}} = -\int \frac{d(\frac{1}{t})}{\sqrt{\frac{2}{t^2}-1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{t} + \sqrt{\frac{2}{t^2}-1}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-t^2}}{t}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-t^2}}{t}\right| + C$$

Tóm lại, ta được:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-t^2}}{t}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{\cos x}\right| + C.$$

Bài toán 4: Xác định nguyên hàm các hàm lượng giác bằng phương pháp tích phân từng phần.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta đã được biết trong Chủ đề: *Xác định nguyên hàm bằng phương pháp tích phân từng phần*, đối với các dạng nguyên hàm:

Dạng 1: Tính

$$\int P(x)\sin\alpha x dx \text{ hoặc } \int P(x)\cos\alpha x dx$$

với P là một đa thức thuộc R[X] và $\alpha \in R^*$.

Khi đó, ta đặt:

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin\alpha x dx \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos\alpha x dx \end{cases}.$$

Dạng 2: Tính

$$\int e^{ax}\cos(bx) \text{ (hoặc } \int e^{ax}\sin(bx) \text{ với a, } b \neq 0.$$

Khi đó ta đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(bx) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = \sin(bx) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases}.$$

Ví dụ 23: Tính tích phân bất định $I = \int \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

Giải

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = tgx \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = x.tgx - \int tgxdx = x.tgx - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = x.tgx + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = x.tgx + \ln|\cos x| + C.$$

Ví dụ 24: Tính tích phân bất định $I = \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^3 x}$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int \frac{\cos x . d(\sin x)}{\sin^3 x}.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \cos x \\ dv = \dfrac{d(\sin x)}{\sin^3 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int d(\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C.$$

Chú ý: Bài toán trên cũng có thể giải được bằng phương pháp đổi biến số, bằng cách nhận xét rằng:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

ta sử dụng phép đổi biến tương ứng là t = cosx.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos x . \cos(x + \frac{\pi}{4})}$.

Bài 2. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2} + \sin x - \cos x}$.

Bài 3. (HVNH HN – 99): Tính tích phân $I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3}\cos x} dx$.

Bài 4. (HVNH – 2000):Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin 2x}$.

Bài 5. (ĐHBK – 99): Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \sin x . \sin 2x . \cos 5x$.

Bài 6. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^6 x + \cos^6 x)$.

Bài 7. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})(2 + \sin 2x)$.

Bài 8. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin^3 x}{3\sin 4x - \sin 6x - 3\sin 2x}$.

Bài 9. (ĐHNT TPHCM Khối A – 2000): Tính các tích phân bất định sau:

a. $I = \int \cos 5x \operatorname{tg} x dx$.

b. $K = \int \cos 3x \operatorname{tg} x dx$.

Bài 10. (ĐHHH 99): Tính tích phân bất định $I = \int \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}$.

Bài 11. (HVQY – 98): Tính tích phân bất định $I = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx$.

Bài 12. Tính tích phân bất định $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Bài 13. Tìm họ nguyên hàm của hàm số:

a. $f(x) = tg^5x$.

b. $f(x) = cotg^6x$.

c. $f(x) = cos^3x.sin^2x$.

d. (Đề 74): $f(x) = cos^3x.sin8x$.

e. (Đề 71): $f(x) = cosx.cos2x.sin4x$

f. $f(x) = cosx.cos2x.cos3x$

Bài 14. (ĐHNT TPHCM Khối A.D – 2000): Tính:

a. $J = \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x}dx$.

b. $H = \int \frac{1}{1 + \sin 2x}dx$.

Bài 15. (ĐHNT TPHCM – 98): Tìm họ nguyên hàm của hàm số:

a. $f(x) = cos^3x.cos3x$.

b. $f(x) = cos^2x.cos2x$.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $F(x) = -\sqrt{2}\ln|1 - tgx| + C$.

Bài 2. $F(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}cotg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}) + C$.

Bài 3. $I = \frac{1}{2}\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{8}\ln|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})| + C$.

Bài 4. $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8})| + \frac{1}{2(\sin x + \cos x)} + C$.

Bài 5. $F(x) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{8}\sin 8x) + C$.

Bài 6. $F(x) = \frac{1}{64}(33x + 7\sin 4x + \frac{3}{8}\sin 8x) + C$.

Bài 7. $F(x) = \frac{1}{2}[-4\cos(x - \frac{\pi}{4}) + \sin(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{3}\sin(3x - \frac{\pi}{4}) + C$.

Bài 8. $F(x) = -\frac{1}{48}\ln\left|\frac{\sin 3x - 1}{\sin 3x + 1}\right| + C$.

Bài 9

a. $I = -2\cos x + \frac{2}{3}\cos 3x - \frac{1}{5}\cos 5x + C$.

b. $K = -\frac{1}{3}\cos 3x + 2\cos x + C$.

Bài 10. $I = \frac{1}{8}(\frac{2}{1 - \cos x} + \ln\left|\frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}\right|) + C$.

Bài 11. $I = -x.cotgx + \ln|\sin x| + C$.

Bài 12. $I = \frac{1}{2}(\ln|tg\frac{x}{2}| - \frac{\cos x}{\sin^2 x}) + C$.

CHỦ ĐỀ 9

NGUYÊN HÀM CÁC HÀM SỐ VÔ TỈ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để xác định nguyên hàm của các hàm số vô tỉ ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản.
2. Phương pháp đổi biến.
3. Phương pháp tích phân từng phần.
4. Sử dụng các phép biến đổi.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Xác định nguyên hàm các hàm vô tỉ dựa trên tam thức bậc hai

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trên cơ sở đưa tam thức bậc hai về dạng chính tắc và dùng các công thức:

1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \sqrt{x^2 \pm a} + C.$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$

3. $\int \sqrt{x^2 \pm a}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a} \pm \frac{a}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$

Ví dụ 1: Tính tích phân bất định $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{9x^2 - 6x}}$

Giải

Ta có:

$$I = \frac{1}{9}\int \frac{[(3x-1)+1]d(3x-1)}{\sqrt{(3x-1)^2-1}} = \frac{1}{9}[\int \frac{(3x-1)d(3x-1)}{\sqrt{(3x-1)^2-1}} + \int \frac{d(3x-1)}{\sqrt{(3x-1)^2-1}}]$$

$$= \frac{1}{9}[\sqrt{(3x-1)^2-1} + \ln|(3x-1) + \sqrt{(3x-1)^2-1}| + C$$

$$= \frac{1}{9}[\sqrt{9x^2-6x} + \ln|3x-1+\sqrt{9x^2-6x}| + C.$$

Ví dụ 2: Tính tích phân bất định $I = \int \frac{x^2+1}{|x|\sqrt{x^4+1}}dx.$

Giải

Ta có:

$$I = \int \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+2}}$$

$$= \ln|(x-\frac{1}{x}) + \sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+2}| + C.$$

Chú ý: Nếu bài toán yêu cầu tính tích phân bất định

$$I = \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$$

chúng ta cần xét hai trường hợp x > 0 và x < 0. Cụ thể:

- Với x > 0, ta được:

$$I = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+2}} = \ln|(x-\frac{1}{x}) + \sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+2}\,| + C$$

$$= \ln|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}| + C.$$

- Với x < 0, ta được:

$$I = -\int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+2}} = -\ln|(x-\frac{1}{x}) + \sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+2}\,| + C$$

$$= -\ln|\frac{x^2-1-\sqrt{x^4+1}}{x}| + C.$$

Ví dụ 3: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

Giải

Ta sử dụng công thức:

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = d(\sqrt{1+x^2}) = d(1+\sqrt{1+x^2}).$$

Khi đó:

$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = 2\int \frac{d(1+\sqrt{1+x^2})}{2.\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Chú ý:

1. Nếu các em học sinh thấy khó hình dung một cách cặn kẽ cách biến đổi để đưa về dạng cơ bản trong ví dụ trên thì thực hiện theo các bước sau:

   Bước 1: Biến đổi I về dạng:

$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}.$$

Bước 2: Thực hiện phép đổi biến $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1$. Khi đó:

$$2tdt = 2xdx \text{ và } \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = \frac{tdt}{t\sqrt{1+t}} = \frac{dt}{\sqrt{1+t}}.$$

Khi đó:

$$I = \int\frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2\int\frac{dt}{2\sqrt{1+t}} = 2\sqrt{1+t} + C = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

2. Với các bài toán chứa tham số chúng ta cần hết sức thận trọng bởi ví dụ:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

chỉ đúng với $\alpha \neq -1$, còn khi $\alpha = -1$, ta có: $\int\frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.

Để minh chứng cho nhận xét trên chúng ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 4: Tính tích phân bất định: $\int\frac{x^{\frac{n}{2}}dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}$.

Giải

a. Với $n = -2$, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{x}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x| + C.$$

b. Với $n \neq -2$, ta được:

$$\int\frac{x^{\frac{n}{2}}dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}} = \frac{2}{n+2}\int\frac{d(x^{\frac{n+2}{2}})}{\sqrt{1+(x^{\frac{n+2}{2}})^2}} = \frac{2}{n+2}\ln|x^{\frac{n+2}{2}} + \sqrt{1+x^{n+2}}| + C.$$

Bài toán 2: Xác định nguyên hàm các hàm vô tỉ bằng bằng phương pháp đổi biến.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta đã được làm quen với phương pháp đổi biến để xác định nguyên hàm nói chung. Bây giờ đi đi xem xét chi tiết hơn về việc sử dụng phương pháp này để xác định nguyên hàm của các hàm số vô tỉ. Và trong mục này chúng ta cũng sẽ đi xem xét đường nối chung để giải một vài dạng tổng quát.

Dạng 1: Tính tích phân bất định các hàm hữu tỉ đối với x và $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ có dạng:

$$I = \int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx, \text{ với } ad - bc \neq 0.$$

PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thực hiện phép đổi biến:

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a}$$

Bước 2: Bài toán được chuyển về:

$$I = \int S(t)dt.$$

Chú ý:

1. Với hai dạng đặc biệt: $I = \int R(x, \sqrt{\frac{a+x}{a-x}})dx$ hoặc $I = \int R(x, \sqrt{\frac{a-x}{a+x}})dx$ chúng ta đã biết với phép đổi biến:

$x = a\cos 2t$.

Trường hợp đặc biệt, với $I = \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$, ta có thể xác định bằng cách:

Vì $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ có nghĩa khi $-a \le x < a$ nên $x + a > 0$, do đó $\sqrt{(a+x)^2} = a + x$.

Khi đó:

$$I = \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = a\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Trong đó:

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ được xác định bằng phép đổi biến $x = a\sin t$.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

2. **Tổng quát**

$$I = \int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{a_1}{b_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{a_k}{b_k}})dx,$$

với a_i, b_i ($i = \overline{1,k}$) là các số nguyên dương và a, b, c, d là các hằng số.

Ta thực hiện phép đổi biến:

$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$, với m là bội số chung nhỏ nhất của các b_i, $i = \overline{1,k}$.

Ví dụ 5: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}[\sqrt[3]{(x+1)^2}+1]}$.

Giải

Đặt $t = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow t^3 = x + 1$ suy ra:

$$3t^2dt = dx \text{ và } \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}[\sqrt[3]{(x+1)^2}+1]} = \frac{3t^2dt}{t(t^2+1)} = \frac{3tdt}{t^2+1}.$$

Khi đó:

$$I = \int \frac{3tdt}{t^2+1} = \frac{3}{2}\int \frac{d(t^2)}{t^2+1} = \ln(t^2+1) + C = \ln[\sqrt[3]{(x+1)^2}+1] + C.$$

Ví dụ 6: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{2x\sqrt{2x+1}}$.

Giải

Đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x + 1$ suy ra:

$$2tdt = 2dx \text{ và } \frac{dx}{2x\sqrt{2x+1}} = \frac{tdt}{(t^2-1)t} = \frac{dt}{t^2-1}.$$

Khi đó:

$$I = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right| + C.$$

Ví dụ 7: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$.

Giải

Ta nhận xét $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ và $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$, từ đó 12 là bội số chung nhỏ nhất của các mẫu số, do đó đặt: $x = t^{12}$, suy ra:

$$dx = 12t^{11}dt \text{ và } \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \frac{12t^{17}dt}{t^8 - t^3} = \frac{12t^{14}dt}{t^5-1} = 12(t^9 + t^4 + \frac{t^4}{t^5-1})dt$$

Khi đó:

$$I = 12\int(t^9 + t^4 + \frac{t^4}{t^5-1})dt = 12(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\ln|t^5 - 1|) + C.$$

<u>**Dạng 2**</u>: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

PHƯƠNG PHÁP

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với

$$\begin{cases} x + a > 0 \\ x + b > 0 \end{cases}$$

Đặt: $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$ suy ra:

$$dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+a}} + \frac{1}{2\sqrt{x+b}}\right)dx = \frac{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})dx}{2\sqrt{(x+a)(x+b)}} \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = \frac{2dt}{t}$$

Khi đó:

$$I = 2\int\frac{dt}{t} = 2\ln|t| + C = 2\ln|\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}| + C.$$

Trường hợp 2: Với

$$\begin{cases} x+a<0 \\ x+b<0 \end{cases}$$

Đặt: $t = \sqrt{-(x+a)} + \sqrt{-(x+b)}$ suy ra:

$$dt = \left[-\frac{1}{2\sqrt{-(x+a)}} - \frac{1}{2\sqrt{-(x+b)}}\right]dx = -\frac{[\sqrt{-(x+a)}+\sqrt{-(x+b)}]dx}{2\sqrt{(x+a)(x+b)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = -\frac{2dt}{t}$$

Khi đó:

$$I = -2\int\frac{dt}{t} = -2\ln|t| + C = -2\ln\left|\sqrt{-(x+a)} + \sqrt{-(x+b)}\right| + C.$$

Ví dụ 8: Tính tích phân bất định: $I = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}}.$$

Ta xét hai trường hợp:

- Với

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>3.$$

Đặt: $t = \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}$ suy ra:

$$dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{x-2}} + \frac{1}{2\sqrt{x-3}}\right)dx = \frac{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3})dx}{2\sqrt{(x-2)(x-3)}} \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = \frac{2dt}{t}$$

Khi đó:

$$I = 2\int\frac{dt}{t} = 2\ln|t| + C = 2\ln\left|\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}\right| + C.$$

- Với

$$\begin{cases} x-2<0 \\ x-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow x<2.$$

Đặt: $t = \sqrt{2-x} + \sqrt{3-x}$ suy ra:

$$dt = \left[-\frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}\right]dx = -\frac{[\sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}]dx}{2\sqrt{(x-2)(x-3)}} \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = -\frac{2dt}{t}$$

Khi đó:

$$I = -2\int\frac{dt}{t} = -2\ln|t| + C = -2\ln\left|\sqrt{2-x} + \sqrt{3-x}\right| + C.$$

Dạng 3: Tính tích phân bất định các hàm hữu tỉ đối với x và $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ có dạng:

$$I = \int R(x, \sqrt{(x-a)(b-x)})dx.$$

PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thực hiện phép đổi biến $x = a + (b-a)\sin^2 t$.

Bước 2: Bài toán được chuyển về:

$$I = \int S(\sin t, \cos t)dt.$$

Ví dụ 9: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{[(x-a)(b-x)]^3}}$, với a < b.

Giải

Đặt $x = a + (b-a)\sin^2 t$, với $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = 2(b-a)\sin t.\cos t.dt = (b-a)\sin 2t.dt$$

$$\frac{dx}{\sqrt{[(x-a)(b-x)]^3}} = \frac{(b-a)\sin 2t.dt}{\sqrt{[(b-a)\sin^2 t.(b-a)\cos^2 t]^3}}$$

$$= \frac{(b-a)\sin 2t.dt}{(b-a)^3\sin^3 2t} = \frac{1}{(b-a)^2}.\frac{dt}{\sin^2 2t}.$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{(b-a)^2}\int\frac{dt}{\sin^2 2t} = -\frac{\cot g2t}{(b-a)^2} + C = -\frac{a+b-2x}{2\sqrt{(x-a)(b-x)}} + C.$$

Dạng 4: Tính tích phân bất định các hàm hữu tỉ đối với x và $\sqrt{a^2-x^2}$ có dạng:

$$I = \int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx, \text{ với } a > 0.$$

PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thực hiện phép đổi biến:

$$\left[\begin{array}{l} x = |a|\sin t \text{ với } -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \\ x = |a|\cos t \text{ với } 0 \le t \le \pi \end{array}\right. \text{(hoặc có thể } t = x + \sqrt{a^2-x^2}\text{)}$$

Bước 2: Bài toán được chuyển về:

$$I = \int S(\sin t, \cos t)dt.$$

Ví dụ 10: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Giải

Cách 1: Đặt x = sint, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = \cos tdt \text{ và } \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin^3 t.\cos tdt}{\cos t} = \sin^3 tdt = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t)dt.$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{4}\int(3\sin t - \sin 3t)dt = tgt + C = -\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{12}\cos 3t + C$$

$$= -\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{12}(4\cos^3 t - 3\cos t) + C = \frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t + C$$

$$= (\frac{1}{3}\cos^2 t - 1)\cos t + C = [\frac{1}{3}(1-\sin^2 t) - 1]\cos t + C$$

$$= [\frac{1}{3}(1-x^2) - 1]\sqrt{1-x^2} + C = -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C.$$

Chú ý: Trong cách giải trên sở dĩ ta có:

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\cos^2 t} = \cos t \\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

Cách 2: Đặt $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 = 1 - t^2$ suy ra:

$$2xdx = -2tdt \text{ và } \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2.xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-t^2)(-tdt)}{t} = (t^2-1)dt.$$

Khi đó:

$$I = \int(t^2-1)dt = \frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{1}{3}(t^2-3)t + C = -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$$

<u>**Dang 5**</u>: Tính tích phân bất định các hàm hữu tỉ đối với x và $\sqrt{a^2+x^2}$ có dạng:

$$I = \int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx, \text{ với } a > 0.$$

PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thực hiện phép đổi biến:

$$\left[\begin{array}{l} x = |a|tgt \text{ với } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ x = |a|\cot gt \text{ với } 0 < t < \pi \end{array}\right. \text{ (hoặc có thể } t = x + \sqrt{a^2+x^2}\text{)}$$

Bước 2: Bài toán được chuyển về:

$$I = \int S(\sin t, \cos t)dt.$$

Ví dụ 11: Tính tích phân bất định: $I = \int \sqrt{1+x^2}\,dx$.

Giải

Cách 1: Đặt $x = \operatorname{tg}t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \text{ và } \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{dt}{\cos^3 t}.$$

Khi đó:

$$I = \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^4 t} = \int \frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)^2}.$$

Đặt u = sint suy ra:

$$du = \cos t dt \text{ và } \frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)^2} = \frac{du}{(u+1)^2(u-1)^2}.$$

Khi đó:

$$I = \int \frac{du}{(u+1)^2(u-1)^2} = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \frac{2u}{(u+1)(u-1)}\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right| - \frac{2\sin t}{(\sin t+1)(\sin t-1)}\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1}\right| - \frac{2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1\right)\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right)}\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right| + 2x\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + 2x\sqrt{1+x^2}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + x\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

Cách 2: Đặt:

$$t = x + \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t - x = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow (t-x)^2 = 1 + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}$$

suy ra:

$$dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{2t^2}{t^2+1}dx \Leftrightarrow dx = \frac{t^2+1}{2t^2}dt$$

$$\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{t^2+1}{2t}.\frac{t^2+1}{2t^2}dt = \frac{1}{4}\frac{(t^2+1)^2}{t^3}dt = \frac{1}{4}\left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right)dt$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{4}\int\left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right)dt = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}t^2 + 2\ln|t| - \frac{1}{2t^2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) + 4\ln|t|\right] + C = \frac{1}{8}\left[4x\sqrt{1+x^2} + 4\ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + x\sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

Cách 3: (Sử dụng phương pháp tích phân từng phần): Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2+1} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = x\sqrt{x^2+1} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}. \qquad (1)$$

Với

$$J = \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int\frac{[(x^2+1)-1]dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int\sqrt{x^2+1}\,dx - \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= I - \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$I = x\sqrt{x^2+1} - \left(I - \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C\right) \Leftrightarrow 2I = x\sqrt{x^2+1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C.$$

Chú ý:

1. Trong cách giải thứ nhất sở dĩ ta có:

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}\cos t \quad \text{và} \quad \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

là bởi:

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\cos^2 t} = \cos t \\ \sin t = \operatorname{tg}t.\cos t = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}.$$

2. Cả ba phương pháp trên (tốt nhất là phương pháp 2) được áp dụng để giải bài toán tổng quát:

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + C.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

3. Với tích phân bất định sau tốt nhất là sử dụng phương pháp 1:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^{2k+1}}}, \text{ với } k \in Z.$$

4. Với tích phân bất định: $I = \int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx$ ta có thể thực hiện như sau:

Đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$ và $A = -\frac{(b-a)^2}{4}$ suy ra:

$$dt = dx \text{ và } \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx = \sqrt{t^2+A}\,dt.$$

Khi đó:

$$I = \int \sqrt{t^2+A}\,dt = \frac{A}{2}\ln|t + \sqrt{t^2+A}\,| + \frac{t}{2}\sqrt{t^2+A} + C.$$

$$= -\frac{(b-a)^2}{8}\ln|x + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x+a)(x+b)}\,| + \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} + C.$$

Ví dụ 12: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{1+2x\sqrt{x^2+1}+2x^2}{1+x+\sqrt{x^2+1}}dx$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int \frac{1+2x\sqrt{x^2+1}+2x^2}{1+x+\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{1+x+\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Đặt: $t = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow (t-x)^2 = x^2+1 \Leftrightarrow t^2 - 2tx = 1 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t}$.

suy ra:

$$dx = \frac{t^2+1}{2t^2}dt,$$

$$\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{1+x+\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{t^2(t^2+1)}{2t^2(t+1)}dt = \frac{1}{2}.\frac{t^2+1}{t+1}dt = \frac{1}{2}.(t - 1 + \frac{2}{t+1})dt$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}\int(t - 1 + \frac{2}{t+1})dt = \frac{1}{2}(t^2 - t + 2\ln|t+1|) + C$$

$$= \frac{1}{2}[(x + \sqrt{x^2+1})^2 - (x + \sqrt{x^2+1}) + 2\ln|x + \sqrt{x^2+1} + 1|) + C$$

$$= \frac{1}{2}[(x + \sqrt{x^2+1})(x - 1 + \sqrt{x^2+1}) + 2\ln|x + \sqrt{x^2+1} + 1|) + C.$$

Dạng 6: Tính tích phân bất định các hàm hữu tỉ đối với x và $\sqrt{x^2 - a^2}$ có dạng:

$$I = \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx, \text{ với } a > 0.$$

PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thực hiện phép đổi biến:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{|a|}{\sin t} \text{ với } t \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ x = \dfrac{|a|}{\cos t} \text{ với } t \in [0, \pi] \setminus \{\dfrac{\pi}{2}\} \end{array}\right. \quad (\text{hoặc có thể } t = \sqrt{x^2 - a^2})$$

Bước 2: Bài toán được chuyển về:

$$I = \int S(\sin t, \cos t)dt.$$

Ví dụ 13: Tính tích phân bất định: $I = \int \dfrac{xdx}{2x^2 - 1 + 3\sqrt{x^2 - 1}}$.

Giải

Cách 1: Đặt $t = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow t^2 = x^2 - 1$ suy ra:

$$2tdt = 2xdx \text{ và } \frac{xdx}{2x^2 - 1 + 3\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{xdx}{2(x^2 - 1) + 3\sqrt{x^2 - 1} + 1} = \frac{tdt}{2t^2 + 3t + 1}$$

Khi đó:

$$I = \int \frac{tdt}{2t^2 + 3t + 1}.$$

Ta có:

$$\frac{t}{2t^2 + 3t + 1} = \frac{t}{(2t+1)(t+1)} = \frac{a}{2t+1} + \frac{b}{t+1} = \frac{(a+2b)t + a + b}{(2t+1)(t+1)}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{t}{2t^2 + 3t + 1} = -\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{t+1}.$$

Do đó:

$$I = \int(-\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{t+1})dt = -\frac{1}{2}\ln|2t+1| + \ln|t+1| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(t+1)^2}{|2t+1|} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{x^2-1}+1)^2}{2\sqrt{x^2-1}+1} + C.$$

Cách 2: Vì điều kiện $|x| > 1$, ta xét hai trường hợp:

- Với $x > 1$ đặt $x = \frac{1}{\cos t}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2})$ suy ra:

$$dx = \frac{\sin t dt}{\cos^2 t},$$

$$\frac{xdx}{2x^2 - 1 + 3\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\frac{1}{\cos t}.\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt}{\frac{2}{\cos^2 t} - 1 + 3tgt} = \frac{(1 + tg^2 t)tgt.dt}{2(1 + tg^2 t) - 1 + 3tgt}$$

$$= \frac{(1 + tg^2 t)tgt.dt}{2tg^2 t + 3tgt + 1}.$$

Khi đó:

$$I = \int \frac{(1 + tg^2 t)tgt.dt}{2tg^2 t + 3tgt + 1}.$$

Đặt $u = tgt$ suy ra:

$$du = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + tg^2 t)dt \text{ và } \frac{(1 + tg^2 t)tgt.dt}{2tg^2 t + 3tgt + 1} = \frac{u.du}{2u^2 + 3u + 1}.$$

Khi đó:

$$I = \int(-\frac{1}{2u + 1} + \frac{1}{u + 1})dt = -\frac{1}{2}\ln|2u + 1| + \ln|u + 1| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(u + 1)^2}{|2u + 1|} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{(tgt + 1)^2}{|2tgt + 1|} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{x^2 - 1} + 1)^2}{2\sqrt{x^2 - 1} + 1} + C.$$

- Với $x < -1$ – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Nhận xét: Như vậy cho dù trên phương diện lý thuyết cách giải 2 rất tường minh xong trên thực tế lại khá cồng kềnh cho dù nó tuỳ thuộc nhiều vào đặc thù của hàm số dưới dấu tích phân, điều đó chỉ nhằm mục đích để các em học sinh luôn định hướng một cách đúng đắn lựa chọn của mình.

Dạng 7: Tính tích phân bất định các hàm hữu tỉ đối với x và $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ có dạng:

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx.$$

PHƯƠNG PHÁP

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đưa I về các dạng nguyên hàm cơ bản đã biết.

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $a > 0$ và $\Delta < 0$.

Bước 1: Ta có:

$$ax^2 + bx + c = -\frac{\Delta}{4a}\left[1 + \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right].$$

Bước 2: Thực hiện phép đổi biến: $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$.

Bước 3: Bài toán được chuyển về: $I = \int S(t, \sqrt{1+t^2})dt$.

Trường hợp 2: Nếu $a < 0$ và $\Delta > 0$.

Bước 1: Ta có:

$$ax^2 + bx + c = -\frac{\Delta}{4a}\left[1 - \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2\right].$$

Bước 2: Thực hiện phép đổi biến: $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}$.

Bước 3: Bài toán được chuyển về: $I = \int S(t, \sqrt{1-t^2})dt$.

Trường hợp 3: Nếu $a > 0$ và $\Delta > 0$.

Bước 1: Ta có:

$$ax^2 + bx + c = \frac{\Delta}{4a}\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 - 1\right].$$

Bước 2: Thực hiện phép đổi biến: $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}$.

Bước 3: Bài toán được chuyển về: $I = \int S(t, \sqrt{t^2-1})dt$.

Cách 2: (Sử dụng phép thế Euler): Ta xét các trường hợp sau:

1. Nếu $a > 0$, đặt $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}$ hoặc $t + x\sqrt{a}$.
2. Nếu $c > 0$, đặt $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$ hoặc $tx - \sqrt{c}$.
3. Nếu tam thức $ax^2 + bx + c$ có biệt số $\Delta > 0$ thì $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Khi đó đặt: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1)$.

Ví dụ 14: Tính tích phân bất định: $I = \int\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$.

Giải

Cách 1: Sử dụng phép đổi biến:

$t = x + 1 \Rightarrow dt = dx$.

Khi đó:

$I = \int\sqrt{t^2+1}\,dt$.

Tích phân trên chúng ta đã biết cách xác định trong ví dụ 11.

Cách 2: Sử dụng phép đổi biến:

$$\sqrt{x^2+2x+2} = t - x \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = (t-x)^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{t^2-2}{2(t+1)} \Rightarrow dx = \frac{(t^2+2t+2)dt}{2(t+1)^2}.$$

Khi đó:

$$I = \int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx = \int\left[t - \frac{t^2-2}{2(t+1)}\right].\frac{(t^2+2t+2)dt}{2(t+1)^2} = \frac{1}{4}\int\frac{(t^4+4)dt}{(t+1)^3}.$$

Sử dụng đồng nhất thức:

$$t^4 + 4 = [(t+1)-1]^4 + 4 = (t+1)^4 - 4(t+1)^3 + 6(t+1)^2 - 4(t+1) + 5$$

Do đó:

$$I = \frac{1}{4}\int\left[t+1-4+\frac{6}{t+1}-\frac{4}{(t+1)^2}\right]dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2} - 3t + 6\ln|t+1| + \frac{4}{t+1}\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{(\sqrt{x^2+2x+2}+x)^2}{2} - 3(\sqrt{x^2+2x+2}+x) + \right.$$

$$\left. + 6\ln|\sqrt{x^2+2x+2}+x+1| + \frac{4}{\sqrt{x^2+2x+2}+x+1}\right] + C.$$

Ví dụ 15: Tính tích phân bất định: $I = \int\frac{(x-1)dx}{2x^2-4x+1+3\sqrt{x^2-2x}}$.

Giải

Sử dụng phép đổi biến: $t = x - 1 \Rightarrow dt = dx$.

Khi đó:

$$I = \int\frac{tdt}{2t^2-1+3\sqrt{t^2-1}}$$

Tích phân trên chúng ta đã biết cách xác định trong ví dụ 13.

Nhận xét: Do tính đặc thù của biểu thức dưới dấu tích phân và các phương pháp được trình bày trong ví dụ 13 nên bài toán trên có thể được giải bằng cách đặt $t = \sqrt{x^2-2x}$. Khi đó ta sẽ có được lời giải mạch lạc hơn.

<u>**Dạng 8**</u>: Tính tích phân bất định $I = \int\frac{dx}{(\lambda x+\mu)\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thực hiện phép đổi biến: $t = \frac{1}{\lambda x+\mu}$.

Bước 2: Bài toán được chuyển về: $I = \int\frac{dt}{\sqrt{\alpha t^2+\beta t+\gamma}}$.

Chú ý: Phương pháp trên có thể được áp dụng cho dạng tổng quát hơn là:

$$I = \int\frac{(Ax+B)dx}{(\lambda x+\mu)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Ví dụ 16: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Giải

Đặt $t = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x = \frac{1}{t} - 1$ suy ra:

$$dx = -\frac{1}{t^2}dt,$$

$$\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{t(-\frac{1}{t^2})dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = -\frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = \begin{cases} -\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} & \text{khi } t > 0 \\ \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} & \text{khi } t < 0 \end{cases}$$

Khi đó:

- Với $t > 0$, ta được:

$$I = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln|t + \sqrt{1+t^2}| + C = -\ln|\frac{1}{x+1} + \sqrt{1+\frac{1}{(x+1)^2}}| + C$$

$$= -\ln|\frac{1+\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}| + C = \ln|\frac{x+1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}| + C$$

$$= \ln|\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}| + C.$$

- Với $t < 0$, ta được:

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln|t + \sqrt{1+t^2}| + C = \ln|\frac{1}{x+1} + \sqrt{1+\frac{1}{(x+1)^2}}| + C$$

$$= \ln|\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}| + C.$$

Tóm lại với $t \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ ta luôn có:

$$I = \ln|\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}| + C.$$

Chú ý: Như đã đặt vấn đề ở đầu mục, ngoài các phép đổi biến cơ bản còn có những lựa chọn khác, chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 17: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

Giải

Đặt: $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$

$$\Rightarrow t^2 = 2x + 1 + 2\sqrt{x(x+1)} \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x+1)} = t^2 - (2x+1)$$

$$\Rightarrow 4x(x+1) = [t^2 - (2x+1)]^2 \Rightarrow x = \left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2.$$

suy ra:

$$dx = 2.\frac{t^2-1}{2t}.\frac{2t^2+2}{4t^2}dt = \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{2t^3}dt,$$

$$\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{2t^3(t+1)}dt = \frac{t^3-t^2+t-1}{2t^3}dt = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3})dt$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3})dt = \frac{1}{2}(t-\ln|t|-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2})+C$$

$$= \frac{1}{2}[\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\ln|\sqrt{x}+\sqrt{x+1}|-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})^2}]+C$$

$$= \frac{1}{2}[\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\ln|\sqrt{x}+\sqrt{x+1}|-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+\frac{1}{2}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^2]+C$$

$$= \frac{1}{2}[x+2\sqrt{x}-\sqrt{x(x+1)}-\ln|\sqrt{x}+\sqrt{x+1}|+\frac{1}{2}]+C.$$

Bài toán 3: Tính tích phân các hàm vô tỉ bằng phương pháp tích phân từng phần.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với các hàm vô tỉ, trong phạm vi phổ thông phương pháp tích phân từng phần ít được sử dụng, tuy nhiên chúng ta cũng cần xem xét một vài ví dụ sau:

Ví dụ 18: Tính tích phân bất định: $I = \int\sqrt{x^2+a}\,dx$.

Giải

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2+a} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+a}} \\ v = x \end{cases}$$

Khi đó:

$$I = x\sqrt{x^2+a} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}. \quad (1)$$

Với

$$J = \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int\frac{[(x^2+a)-a]dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int\sqrt{x^2+a}\,dx - a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$$

$$= I - a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$I = x\sqrt{x^2+a} - (I - a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C)$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C.$$

Chú ý: Chúng ta đã biết tính tích phân bất định $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$, với $a \neq 0$ trong chủ đề 4 bằng phương pháp đổi biến số.

Mở rộng bài toán trên ta tính được tích phân bất định: $I = \int x^2\sqrt{x^2+a}\,dx$. bằng cách thực hiện lần lượt theo các bước:

Viết lại I dưới dạng:

$$I = \int x.x\sqrt{x^2+a}\,dx.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = x\sqrt{x^2+a}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a)^3} = \frac{1}{3}(x^2+a)\sqrt{x^2+a} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{3}x\sqrt{(x^2+a)^3} - \frac{1}{3}\int (x^2+a)\sqrt{x^2+a}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x\sqrt{(x^2+a)^3} - \frac{1}{3}\int x^2\sqrt{x^2+a}\,dx - \frac{1}{3}a\int\sqrt{x^2+a}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x\sqrt{(x^2+a)^3} - \frac{1}{3}I - \frac{1}{3}a\int\sqrt{x^2+a}\,dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{4}x\sqrt{(x^2+a)^3} - \frac{1}{4}a\int\sqrt{x^2+a}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x\sqrt{(x^2+a)^3} - \frac{1}{4}a\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}x\sqrt{(x^2+a)^3} - \frac{ax}{8}\sqrt{x^2+a} + \frac{a^2}{8}\ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C.$$

Bài toán 4: Tính tích phân các hàm vô tỉ bằng việc sử dụng các phép biến đổi

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để khử căn thức ở mẫu của hàm số dưới dấu tích phân một phương pháp thường được sử dụng là phép trục căn thức. Sau đây ta đi xem xét một vài dạng kinh điển.

<u>**Dạng 1**</u>: Tính tích phân bất định $I = \int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx$, với $a > 0$.

PHƯƠNG PHÁP

Vì điều kiện:

$$\left[\begin{array}{l} x \geq a \\ x < -a \end{array}\right.,$$

ta xét hai trường hợp:

- Với $x \geq a$ thì

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = \int\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int\frac{2xdx}{2\sqrt{x^2-a^2}} - a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \sqrt{x^2-a^2} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

- Với $x < -a$ thì

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = \int\frac{a-x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} - \int\frac{2xdx}{2\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \sqrt{x^2-a^2} + C.$$

Ví dụ 19: Tính tích phân bất định: $I = \int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

Giải

Vì điều kiện

$$\left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x < -1 \end{array}\right.,$$

ta xét hai trường hợp:

- Với $x \geq 1$, ta có:

$$I = \int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int\frac{2xdx}{2\sqrt{x^2-1}} - \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$$

- Với $x < -1$, ta có:

$$I = \int\frac{1-x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} - \int\frac{2xdx}{2\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| - \sqrt{x^2-1} + C$$

Dạng 2: Tính tích phân bất định $I = \int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}}$, với $a \neq 0$ và $b - c \neq 0$.

PHƯƠNG PHÁP

Khử tính vô tỉ ở mẫu số bằng cách trục căn thức, ta được:

$$I = \frac{1}{b-c}\int(\sqrt{ax+b} + \sqrt{ax+c})dx$$

$$= \frac{1}{a(b-c)}\left[\int(ax+b)^{1/2}d(ax+b) + \int(ax+c)^{1/2}d(ax+c)\right]$$

$$= \frac{2}{3a(b-c)}\left[\sqrt{(ax+b)^3} + \sqrt{(ax+c)^3}\right] + C.$$

Ví dụ 20: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$.

Giải

Khử tính vô tỉ ở mẫu số bằng cách trục căn thức, ta được:

$$I = \frac{1}{2}\int(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})dx = \frac{1}{2}[\int(x+1)^{1/2}d(x+1) + \int(x-1)^{1/2}d(x-1)]$$

$$= \frac{1}{3}[\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{(x-1)^3}] + C.$$

Chú ý: Một phép biến đổi rất phổ biến đối với các hàm số vô tỉ là phương pháp phân tích, chúng ta sẽ đi xem xét các dạng cơ bản sau:

Dạng 3: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{v(x)dx}{\sqrt{u^2(x) \pm \alpha}}$.

PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phân tích:

$$\frac{v(x)}{\sqrt{u^2(x)+\alpha}} = \frac{a[u^2(x)+\alpha]}{\sqrt{u^2(x)+\alpha}} + \frac{bu(x)}{\sqrt{u^2(x)+\alpha}} + \frac{c}{\sqrt{u^2(x)+\alpha}}.$$

Sử dụng phương pháp hằng số bất định ta xác định được a, b, c.

Bước 2: Áp dụng các công thức:

1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \sqrt{x^2 \pm a} + C.$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$
3. $\int \sqrt{x^2 \pm a}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a} \pm \frac{a}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$

Ví dụ 21: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{(2x^2+1)dx}{\sqrt{x^2+2x}}$.

Giải

Ta có:

$$\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+2x}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{(x+1)^2-1}} = \frac{a[(x+1)^2-1]}{\sqrt{(x+1)^2-1}} + \frac{b(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2-1}} + \frac{c}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$$

$$= \frac{ax^2 + (2a+b)x + b + c}{\sqrt{x^2+2x}}.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+2x}} = 2\sqrt{(x+1)^2-1} - \frac{4(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2-1}} + \frac{5}{\sqrt{(x+1)^2-1}}.$$

Do đó:

$$I = \int\left[2\sqrt{(x+1)^2-1} - \frac{4(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2-1}} + \frac{5}{\sqrt{(x+1)^2-1}}\right]dx$$

$$= (x+1)\sqrt{x^2+2x} - \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}| - 4\sqrt{x^2+2x} + 5\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}| + C$$

$$= (x+1)\sqrt{x^2+2x} + 4\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}| - 4\sqrt{x^2+2x} + C.$$

Dạng 4: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\frac{dx}{y}$, với $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$.

PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phân tích hàm hữu tỉ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ thành các phân số tối giản.

Bước 2: Lựa chọn các phương pháp phù hợp cho mỗi tích phân mới.

Ví dụ 22: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{(6x^3+8x+1)dx}{(3x^2+4)\sqrt{x^2+1}}$.

Giải

Ta có:

$$\frac{6x^3+8x+1}{3x^2+4} = 2x + \frac{1}{3x^2+4}.$$

Do đó:

$$I = \int\left(2x + \frac{1}{3x^2+4}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} + \int\frac{dx}{(3x^2+4)\sqrt{x^2+1}}. \quad (1)$$

- Với: $I_1 = \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + C.$ (2)
- Với: $I_2 = \int\frac{dx}{(3x^2+4)\sqrt{x^2+1}}$

Đặt $t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow x^2 = \frac{t^2}{1-t^2}$ suy ra:

$$dt = \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}},$$

$$\frac{dx}{(3x^2+4)\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}dt}{(3x^2+4)\sqrt{x^2+1}} = \frac{(\frac{t^2}{1-t^2}+1)dt}{\frac{3t^2}{1-t^2}+4} = \frac{dt}{4-t^2} = -\frac{dt}{t^2-4}.$$

Khi đó:

$$I_2 = -\int\frac{dt}{t^2-4} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2\sqrt{x^2+1}}{x-2\sqrt{x^2+1}}\right| + C. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được:

$$I = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2\sqrt{x^2+1}}{x-2\sqrt{x^2+1}}\right| + C.$$

Chú ý: Trong ví dụ trên ta thấy $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ đều là các tam thức bậc hai dạng chính tắc, với các trường hợp khác tốt nhất ta hãy sử dụng phép đổi biến để chuyển $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ về dạng chính tắc trước khi áp dụng phương pháp trên.

Ví dụ 24: Tính tích phân bất định: $I = \int\frac{(8x^3+24x^2+15x)dx}{(8x^2+16x-1)\sqrt{x^2+2x}}$.

Giải

Chuyển $\sqrt{x^2-2x}$ về dạng chính tắc bằng cách đặt u = x + 1 suy ra:

$du = dx$,

$$\frac{(8x^3+24x^2+15x)dx}{(8x^2+16x-1)\sqrt{x^2+2x}} = \frac{[8(u-1)^3+24(u-1)^2+15(u-1)]du}{[8(u-1)^2+16(u-1)-1]\sqrt{(u-1)^2+2(u-1)}}$$

$$= \frac{(8u^3-9u+1)du}{(8u^2-9)\sqrt{u^2-1}} = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2-1}} + \frac{1}{(8u^2-9)\sqrt{u^2-1}}\right)du.$$

Do đó:

$$I = \int\frac{udu}{\sqrt{u^2-1}} + \int\frac{du}{(8u^2-9)\sqrt{u^2-1}}. \quad (1)$$

- Với: $I_1 = \int\frac{udu}{\sqrt{u^2-1}} = \sqrt{u^2-1} + C. \quad (2)$

- Với: $I_2 = \int \frac{du}{(8u^2-9)\sqrt{u^2-1}}$ bằng cách đặt $t = \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} \Rightarrow u^2 = \frac{t^2}{t^2-1}$ suy ra:

  $dt = -\frac{du}{(u^2-1)\sqrt{u^2-1}}$,

$$\frac{du}{(8u^2-9)\sqrt{u^2-1}} = -\frac{(u^2-1)\sqrt{u^2-1}du}{(8u^2-9)\sqrt{u^2-1}} = -\frac{(\frac{t^2}{t^2-1}-1)dt}{\frac{8t^2}{t^2-1}-9} = \frac{dt}{t^2-9}.$$

Khi đó:

$$I_2 = -\int\frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3\sqrt{u^2-1}}{u+3\sqrt{u^2-1}}\right| + C. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được:

$$I = \sqrt{u^2-1} + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3\sqrt{u^2-1}}{u+3\sqrt{u^2-1}}\right| + C$$

$$= \sqrt{x^2-2x} + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+1-3\sqrt{x^2-2x}}{x+1+3\sqrt{x^2-2x}}\right| + C.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (ĐHY HN – 99): Biết rằng $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} = \ln(x + \sqrt{x^2+3}) + C$. Tìm nguyên hàm $F(x) = \int\sqrt{x^2+3}dx$.

Bài 2. (Đề 71): Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

Bài 3. (HV BCVT TPHCM – 99): Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt[10]{x+1}}$.

Bài 4. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = tgx + \frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}$.

Bài 5. (ĐHY Thái Bình – 2000): Tính tích phân $I = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$.

Bài 6. Tính tích phân bất định $I = \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Bài 7. Tính các tích phân bất định sau:

a. $\int\sqrt{x^3+x^4}\,dx$. b. $\int\sqrt{x^2-4x+8}\,dx$.

Bài 8. Tính các tích phân bất định sau:

a. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$.

b. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 8}}$.

c. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}}$.

d. $I = \int \frac{(4x + 5)dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 1}}$.

Bài 9. Tính các tích phân bất định sau:

a. $I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

b. $I = \int \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x + \sqrt{x^2 + x + 1} + 1} dx$.

Bài 10. Tính các tích phân bất định sau:

a. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 16)^2}}$.

b. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$.

Bài 11. Tính các tích phân bất định sau:

a. $I = \int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{1 - x^2}}$.

b. $I = \int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{3 + 2x - x^2}}$.

Bài 12. Tính các tích phân bất định sau:

a. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x + 1} + \sqrt{2x - 3}}$.

b. $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x + 1)^2} - \sqrt{2x + 1}}$.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $F(x) = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + 3} + \frac{3}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 3}) + C$.

Bài 2. $F(x) = \frac{2}{3} x^3 - \frac{2}{3} \sqrt{(x^2 - 1)^3} + C$.

Bài 3. $F(x) = \frac{10}{19} (x + 1)^{19/10} - \frac{10}{9} (x + 1)^{9/10} + C$.

Bài 4. $F(x) = -\ln|\cos x| + \frac{1}{3}\left((2x + 1)^{3/2} - (2x - 1)^{3/2}\right) + C$.

Bài 5. $I = \ln\left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x - 1} \right| + C$.

Bài 6. $I = \frac{2x - 3}{4} . \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{8} \ln\left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C$.

CHỦ ĐỀ 10

NGUYÊN HÀM CÁC HÀM SỐ SIÊU VIỆT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để xác định nguyên hàm của các hàm số siêu việt ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản.
2. Phương pháp phân tích
3. Phương pháp đổi biến.
4. Phương pháp tích phân từng phần.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Xác định nguyên hàm các hàm siêu việt dựa trên các dạng nguyên hàm cơ bản.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bằng các phép biến đổi đại số, ta biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân về các dạng nguyên hàm cơ bản đã biết.

Ví dụ 1: Tính các tích phân bất định sau:

a. $I = \int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$.   b. $J = \int \frac{2^{2x}.3^x}{16^x - 9^x}dx$.

Giải

a. Ta có:

$$I = \int \frac{d(e^x)}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + C.$$

b. Chia tử số và mẫu số của biểu thức dưới dấu tích phân cho 4^x, ta được:

$$J = \int \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 1}dx = \frac{1}{\ln\frac{4}{3}}\int \frac{d\left[\left(\frac{4}{3}\right)^x\right]}{\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 1}dx = \frac{1}{\ln\frac{4}{3}}.\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x - 1}{\left(\frac{4}{3}\right)^x + 1}\right| + C.$$

$$= \frac{1}{2(\ln 4 - \ln 3)}.\ln\left|\frac{4^x - 3^x}{4^x + 3^x}\right| + C.$$

Bài toán 2: Xác định nguyên hàm hàm siêu việt bằng phương pháp phân tích.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta đã được làm quen với phương pháp phân tích để tính các xác định nguyên hàm nói chung. Bây giờ đi đi xem xét chi tiết hơn về việc sử dụng phương pháp này để xác định nguyên hàm của các hàm số siêu việt. Cần hiểu rằng thực chất nó là một dạng của phương pháp hệ số bất định, nhưng ở đây ta sử dụng các đồng nhất thức quen thuộc.

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp "*Lấy học trò làm trung tâm*"
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

Ví dụ 2: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{1-e^x}$.

Giải

Sử dụng đồng nhất thức:

$$1 = (1 - e^x) + e^x$$

Ta được:

$$\frac{1}{1-e^x} = \frac{(1-e^x)+e^x}{1-e^x} = 1 + \frac{e^x}{1-e^x}.$$

Suy ra:

$$I = \int\left(1 + \frac{e^x}{1-e^x}\right)dx = \int dx - \int \frac{d(1-e^x)}{1-e^x} = x - \ln|1 - e^x| + C.$$

Bài toán 3: Xác định nguyên hàm các hàm siêu việt bằng phương pháp đổi biến.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp đổi biến được sử dụng cho các hàm số siêu việt với mục đích chủ đạo để chuyển biểu thức dưới dấu tích phân về các dạng hữu tỉ hoặc vô tỉ, tuy nhiên trong nhiều trường hợp cần tiếp thu những kinh nghiệm nhỏ đã được minh hoạ bằng các chú ý trong Chủ đề 4.

Ví dụ 3: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

Giải

Cách 1: Đặt: $t = \sqrt{1+e^{2x}} \Leftrightarrow t^2 = 1 + e^{2x}$ suy ra:

$$2tdt = 2e^{2x}dx \Leftrightarrow dx = \frac{tdt}{t^2-1} \text{ và } \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{tdt}{t(t^2-1)} = \frac{dt}{t^2-1}.$$

Khi đó:

$$I = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right| + C.$$

Cách 2: Đặt: $t = e^{-x}$ suy ra:

$$dt = -e^{-x}dx \Leftrightarrow -dt = \frac{dx}{e^x},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}(e^{-2x}+1)}} = \frac{dx}{e^x\sqrt{e^{-2x}+1}} = \frac{-dt}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Khi đó:

$$I = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\ln|t + \sqrt{t^2+1}| + C = -\ln|e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}| + C.$$

Ví dụ 4: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{e^x - e^{x/2}}$.

Giải

Đặt $t = e^{-x/2}$ suy ra:

$$dt = -\frac{1}{2}e^{-x/2}dx \Leftrightarrow -2dt = \frac{dx}{e^{x/2}},$$

$$\frac{dx}{e^x - e^{x/2}} = \frac{dx}{e^x(1-e^{-x/2})} = \frac{e^{-x/2}dx}{e^{x/2}(1-e^{-x/2})} = \frac{-2tdt}{1-t} = 2(1+\frac{1}{t-1})dt$$

Khi đó:

$$I = 2\int(1+\frac{1}{t-1})dt = 2(e^{-x/2} + \ln|e^{-x/2}+1|) + C.$$

Bài toán 4: Tìm nguyên hàm các hàm lượng giác bằng phương pháp tích phân từng phần.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta đã được biết trong Chủ đề: *Xác định nguyên hàm bằng phương pháp tích phân từng phần*, đối với các dạng nguyên hàm:

Dạng 1: Tính

$$\int e^{ax}\cos(bx) \text{ (hoặc } \int e^{ax}\sin(bx) \text{ với } a, b \neq 0.$$

Khi đó ta đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(bx) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = \sin(bx) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases}.$$

Ngoài ra cũng có thể sử dụng phương pháp hằng số bất định (xem chủ đề 5 – Phần I).

Dạng 2: Tính

$$\int P(x)e^{\alpha x}dx \text{ với } \alpha \in R^*.$$

Khi đó ta đặt:

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases}.$$

Ngoài ra cũng có thể sử dụng phương pháp hằng số bất định (xem chủ đề 5 – Phần I).

Ví dụ 5: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (tg^2x + tgx + 1)e^x$.

Giải

Ta có:

$$F(x) = \int(tg^2x + tgx + 1)e^x = \int(tg^2x + 1)e^x + \int e^x tgxdx. \quad (1)$$

Xét tích phân $J = \int e^x tgxdx$.

Đặt:

$$\begin{cases} u = tgx \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1+tg^2x)dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = e^x tgx - \int (tg^2x + 1)e^x. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$F(x) = e^x tgx + C.$$

III. SỬ DỤNG CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC NHAU

Ví dụ 6: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

Giải

Ta có:

$$\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{dx}{e^x\sqrt{e^{-2x}+1}} = \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = -\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{e^{-2x}+1}}.$$

Khi đó:

$$I = -\int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = -\ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}) + C.$$

Chú ý: Ta có thể sử dụng phương pháp đổi biến để làm tường minh lời giải, bằng cách:

Đặt $t = e^x$ suy ra:

$$dt = e^x dx \text{ và } \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$$

Khi đó:

$$I = \int \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = -\int \frac{d(\frac{1}{t})}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = -\ln\left|\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2}+1}\right| + C$$

$$= -\ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}) + C.$$

Đương nhiên cũng có thể đặt $t = e^{-x}$ ta sẽ thu được lời giải giống như trên, xong sẽ thật khó giải thích với các em học sinh câu hỏi " *Tại sao lại nghĩ ra cách đặt ẩn phụ như vậy ?* ".

Ví dụ 7: Tính tích phân bất định sau: $I = \int e^x\sqrt{e^{2x} - 2e^x + 2}\,dx$.

Giải

Ta có:

$$I = \int e^x\sqrt{(e^x-1)^2+1}\,dx = \int \sqrt{(e^x-1)^2+1}\,d(e^x-1)$$

$$= \frac{e^x-1}{2}\sqrt{(e^x-1)^2+1} + \frac{1}{2}\ln|(e^x-1) + \sqrt{(e^x-1)^2+1}| + C$$

$$= \frac{e^x-1}{2}\sqrt{e^{2x}-2e^x+2} + \frac{1}{2}\ln|e^x - 1 + \sqrt{e^{2x}-2e^x+2}| + C.$$

Chú ý: Nếu các em học sinh thấy khó hình dùng một cách cặn kẽ cách biến đổi để đưa về dạng cơ bản trong bài toán trên thì thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1: Thực hiện phép đổi biến bằng cách đặt $t = e^x$ suy ra:

$$dt = e^x dx \text{ và } e^x\sqrt{e^{2x} - 2e^x + 2}\,dx = \sqrt{t^2 - 2t + 2}\,dt = \sqrt{(t-1)^2 + 1}\,dt$$

Khi đó:

$$I = \int \sqrt{(t-1)^2 + 1}\,dt.$$

Bước 2: Thực hiện phép đổi biến bằng cách đặt $u = t - 1$ suy ra:

$$du = dt \text{ và } \sqrt{(t-1)^2 + 1}\,dt = \sqrt{u^2 + 1}\,du.$$

Khi đó:

$$I = \int \sqrt{u^2+1}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+1} + \frac{1}{2}\ln|u + \sqrt{u^2+1}| + C$$

$$= \frac{t-1}{2}\sqrt{(t-1)^2+1} + \frac{1}{2}\ln|t - 1 + \sqrt{(t-1)^2+1}| + C$$

$$= \frac{e^x - 1}{2}\sqrt{e^{2x} - 2e^x + 2} + \frac{1}{2}\ln|e^x - 1 + \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 2}| + C.$$

Ví dụ 8: Tìm nguyên hàm hàm số: $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + e^{-x}}$.

Giải

Chọn hàm số phụ: $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Gọi F(x) và G(x) theo thứ tự là nguyên hàm của các hàm số f(x), g(x). Ta có:

$$f(x) - g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\Rightarrow F(x) - G(x) = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx = \int \frac{d(e^x + e^{-x})}{e^x + e^{-x}} = \ln|e^x + e^{-x}| + C_1.$$

$$f(x) + g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 \Rightarrow F(x) + G(x) = \int dx = x + C_2.$$

Ta được:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \ln|e^x + e^{-x}| + C_1 \\ F(x) - G(x) = x + C_2 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}(\ln|e^x + e^{-x}| + x) + C.$$

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (HVNH HN Khối A – 2000): Tìm họ nguyên hàm của hàn số $f(x) = \dfrac{1}{1 + 8^x}$.

Bài 2. (HV QHQT – 96):Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\ln(ex)}{3 + x\ln x}$.

Bài 3. (ĐHQG HN Khối D – 99): Tính $I = \int \frac{dx}{e^x - 4e^{-x}}$.

Bài 4. (ĐHHH 98): Tính $I = \int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx$.

Bài 5. Xác định họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^x$.

b. $f(x) = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}).e^{-x}$.

c. $f(x) = (3^{2x} + 2^x)^2$.

d. $f(x) = 2^{2x}.3^{3x}.4^x$

e. $f(x) = e^{3x-2}$.

f. $f(x) = \frac{e^x}{e^x - e^{-x}}$.

g. $f(x) = \frac{e^{2-5x} + 1}{e^x}$.

h. $f(x) = \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}$.

i. $f(x) = \frac{(x^2 + x + 1)e^x}{\sqrt{x^2+1}}$.

j. $f(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$.

Bài 6. Tính các tích phân bất định sau:

a. $I = \int e^{ax}\sin(bx)dx$.

b. $I = \int e^{2x}\sin^2 x dx$.

c. $I = \int x^n \ln x dx$.

d. $I = \int x^2 e^{3x} dx$.

e. $I = \int \sin(\ln x)dx$.

f. $I = \int x^2 \ln(2x + 1)dx$.

g. $I = \int (2x^3 + 5x^2 - 2x + 4)e^{2x}dx$.

h. $\int \frac{x^2 e^x dx}{(x+2)^2}$.

i. $\int \frac{2e^x}{e^x + 1} dx$.

j. $I = \int \frac{(1 + \sin x)e^x dx}{1 + \cos x}$.

k. $I = \int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx$.

l. $I = \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

Bài 7. Tính các tích phân bất định sau:

a. $\int \sqrt{e^x + e^{-x} + 2}\, dx$.

b. $I = \int \frac{x\ln(x + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

c. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

d. $I = \int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$.

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $F(x) = x - \frac{\ln(1+8^x)}{\ln 8} + C$.

Bài 2. $F(x) = \ln|3 + x\ln x| + C$.

Bài 3. $I = \ln\left|\frac{e^x - 2}{e^x + 2}\right| + C$.

Bài 4. $I = \frac{1}{2}x^2 \ln\frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2}x + C$.

PHẦN II

TÍCH PHÂN

MỞ ĐẦU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN

Ta có công thức Niutơn - Laipnit:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Chú ý: Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ chỉ phụ thuộc vào f, a, b mà không phụ thuộc vào cách ký hiệu biến số tích phân. Vì vậy ta có thể viết:

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \ldots$$

2. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

Nếu hàm số f(x) liên tục và không âm trên [a, b] thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của hàm số y=f(x, trục Ox) và hai đường thẳng x=a và x=b

3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Giả sử các hàm số f(x), g(x) lliên tục trên khoảng K và a, b, c là ba điểm của K, dựa vào định nghĩa tích phân ta có các tính chất sau:

Tính chất 1. Ta có: $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Tính chất 2. Ta có: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Tính chất 3. Ta có: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, với $k \in R$.

Tính chất 4. Ta có: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Tính chất 5. Ta có: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Tính chất 6. Nếu $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Tính chất 7. Nếu $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Tính chất 8. Nếu $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Tính chất 9. Cho t biến thiên trên đoạn [a, b] thì $G(t) = \int_a^t f(x)dx$ là nguyên hàm của f(t) và G(a)=0.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau:

a. $I=\int_1^2 \frac{x^2-2x}{x^3}dx$ b. $J=\int_0^4 (3x-e^{\frac{x}{4}})dx$

Giải

a. Ta có:

$$I=\int_1^2 \left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx=\left(\ln|x|+\frac{2}{x}\right)\Big|_1^2=(\ln2+1)-(\ln1+2)=\ln2-1.$$

b. Ta có:

$$J=\left(\frac{3}{2}x^2-4e^{\frac{x}{4}}\right)\Big|_0^4=(24-4e)-(0-4)=28-4e.$$

Ví dụ 2: Tính các tích phân sau:

a. $I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin7x.\sin2x\,dx$ b. $J=\int_0^{\pi/4}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$

Giải

a. Ta có:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos5x-\cos9x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin5x-\frac{1}{9}\sin9x\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{90}(9\sin5x-5\sin9x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{1}{90}[(9-5)-(-9+5)]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{4}{45}.$$

b. Ta có:

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1-\sin2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\cos2x\right)\Big|_0^{\pi/4}=\frac{1}{4}(2x+\cos2x)\Big|_0^{\pi/4}=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{\pi-2}{8}.$$

Chú ý: Trong hai ví dụ trên ta đã sử dụng định nghĩa cùng các tính chất 1, 3 và 4 để tính tích phân. Ví dụ sau đây sẽ sử dụng tính chất 5 để tính tích phân của hàm chứa dấu trị tuyệt đối. Trong chủ đề này ta chỉ đi xem xét ví dụ mang tính minh hoạ, còn phương pháp chung để giải các lớp bài toán kiểu này được trình bày cụ thể trong Chủ đề 9: Tích phân hàm chứa dấu trị tuyệt đối.

Ví dụ 3: Tính các tích phân sau:

a. $I=\int_{-2}^2|x^2-1|dx$ b. $J=\int_{-1}^1|e^x-1|dx$

Giải

a. Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2		-1		1		2	$+\infty$
y'	//////		+	0	-	0	+	//////	

Do đó:

$$I=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_{-2}^{-1}+\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_{1}^{2}$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_{-2}^{-1}+\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_{1}^{2}=4.$$

b. Xét dấu của hàm số $y=e^x-1$.

Ta có:

$y=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0.$

Nhận xét rằng :

$x>0 \Rightarrow e^x>1 \Rightarrow y>0.$

$x<0 \Rightarrow e^x<1 \Rightarrow y<0.$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
y'	//////		-	0	+	//////	

Do đó: $J=\int_{-1}^{0}(1-e^x)dx+\int_{0}^{1}(e^x-1)dx=(x-e^x)\Big|_{-1}^{0}+(e^x-x)\Big|_{0}^{1}=e+\frac{1}{e}-2.$

Chú ý: Nếu hàm dưới dấu tích phân là hàm cực trị như Min(f, g,...) hoặc Max(f, g,...) khi đó cần thực hiện phép xét dấu hiệu các hàm. Trong chủ đề này ta chỉ đi xem xét ví dụ mang tính minh hoạ, còn phương pháp chung để giải các lớp bài toán kiểu này được trình bày cụ thể trong Chủ đề: Tích phân của hàm Min, Max.

Ví dụ 4: Tính tích phân: $I=\int_{0}^{2}\max(f(x),g(x))dx$

trong đó: $f(x)=x^2$; $g(x)=3x-2$.

Giải

Xét hiệu: $f(x)-g(x)=x^2-3x+2\le 0 \Leftrightarrow 1\le x\le 2.$

Do đó:

$$I=\int_{0}^{2}\max(f(x),g(x))dx=\int_{0}^{1}\max(f(x),g(x))dx+\int_{1}^{2}\max(f(x),g(x))dx$$

$$=\int_{0}^{1}x^2dx+\int_{1}^{2}(3x-2)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1}+\left(\frac{3x^2}{2}-2x\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{17}{6}.$$

Chú ý: Sử dụng tính chất 6, 7, 8 ta sẽ đi chứng minh được các bất đẳng thức tích phân. Trong chủ đề này ta chỉ đi xem xét ví dụ mang tính minh hoạ, còn phương pháp chung để giải các lớp bài toán kiểu này được trình bày cụ thể trong Phần III - Chủ đề 5: Bất đẳng thức tích phân.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng:

a. $\frac{\pi}{4}\le\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{dx}{3-2\sin^2x}\le\frac{\pi}{2}$ b. $\int_{0}^{\pi/2}\sin 2x dx\le 2\int_{0}^{\pi/2}\sin x dx$

Giải

a. Trên đoạn $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ ta có:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin x\le 1\Rightarrow\frac{1}{2}\le\sin^2x\le 1\Leftrightarrow 1\le 3-2\sin^2x\le 2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le\frac{1}{3-2\sin^2x}\le 1.$$

Do đó:

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{1}{2}dx \le \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{dx}{3-2\sin^2 x} \le \int_{\pi/4}^{3\pi/4}dx. \qquad (1)$$

trong đó:

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{\pi}{4} \quad \& \quad \int_{\pi/4}^{3\pi/4}dx = x\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\frac{\pi}{4} \le \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{dx}{3-2\sin^2 x} \le \frac{\pi}{2} \text{ (đpcm).}$$

b. Trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$ ta có:

$0 \le \cos x, \sin x \le 1 \Rightarrow \sin 2x = 2\sin x.\cos x \le 2\sin x$.

Do đó: $\int_0^{\pi/2}\sin 2x dx \le \int_0^{\pi/2}2\sin x dx = 2\int_0^{\pi/2}\sin x dx$ (đpcm).

Chú ý: Việc sử dụng đúng đắn các công thức cho phép ta xác định được chính xác các tích phân chứa tham số, ví dụ:

Ví dụ 6 (ĐHXD HN - 93): Tính tích phân: $I = \int_0^a (1+x)^n dx$ với $n \in Z^*$

Giải

Ta có: $I = \int_0^a (1+x)^n d(x+1) = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^a = \frac{(a+1)^{n+1}-1}{n+1}$.

Chú ý: Với hàm số f(x) được cho bởi các khoảng, khi đó để tính $\int_a^b f(x)dx$ trước hết cần khẳng định hàm số liên tục trên [a, b] rồi sử dụng tính chất 5 để tính tích phân.

Ví dụ 7: Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{khi } x \ge 0 \end{cases}.$$

a. Xét tính liên tục của hàm số đã cho tại điểm $x_0=0$.

b. Với a để hàm số liên tục tại x=0, hãy xác định $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

Giải

a. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2+1) = 1$ và $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x+a) = a$.

$f(0)=1$.

Vậy:

- Nếu a=1 thì $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1 \Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x_0=0$.
- Nếu a≠1 thì $\lim_{x\to 0^+} f(x) \ne \lim_{x\to 0^-} f(x) \Leftrightarrow$ hàm số gián đoạn tại $x_0=0$.

b. Ta có:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(x+1)dx + \int_{0}^{1}(x^2+1)dx = \frac{11}{6}.$$

Chú ý: Nếu biết biết cách tận dụng ý nghĩa hình học của tích phân, trong nhiều trường hợp chúng ta có ngay được đáp số của một tích phân tương đối phức tạp. Chúng ta có thể thấy ở ví dụ sau:

Ví dụ 8: Tính tích phân: I= $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$ với a>0.

Giải

Hàm số y= $\sqrt{a^2-x^2}$ là một hàm số không âm liên tục trên [-a, a] và có đồ thị là nửa đường tròn tâm O bán kính a (gọi là (C)) trên mặt phẳng toạ độ, do đó tích phân trên là diện tích của nửa đường tròn (C). Vậy: I= $\frac{1}{2}\pi a^2$.

Chú ý: Như vậy chúng ta sử dụng hầu hết các tính chất để giải các ví dụ về tích phân, duy còn tính chất thứ 9 ở đó có một dạng toán mà các em học sinh cần quan tâm là " *Đạo hàm của hàm số xác định bởi tích phân* ". Ta có các dạng sau:

Dạng 1. Với F(x)= $\int_{a}^{x}f(t)dt \Rightarrow F'(x)=f(x)$.

Với F(x)= $\int_{x}^{a}f(t)dt$ thì viết lại F(x)= $-\int_{a}^{x}f(t)dt \Rightarrow F'(x)=-f(x)$.

Dạng 2. Với F(x)= $\int_{a}^{u(x)}f(t)dt \Rightarrow F'(x)=u'(x)f[u(x)]$.

Dạng 3. Với F(x)= $\int_{v(x)}^{u(x)}f(t)dt$ thì viết lại:

$$F(x)=\int_{a}^{u(x)}f(t)dt-\int_{a}^{v(x)}f(t)dt \Rightarrow F'(x)=u'(x)f[u(x)]-v'(x)f[v(x)]$$

Ví dụ 9: Tính đạo hàm của các hàm số

a. F(x)= $\int_{a}^{x}(e^t+\cos t^2)dt$

b. G(x)= $\int_{x^2}^{a}(t^2+\sqrt{t^2+1})dt$

c. H(x)= $\int_{2x}^{x^2}(t^3+\sin t)dt$

Giải

a. Ta có:

$$F'(x)=[\int_{a}^{x}(e^t+\cos t^2)dt]'=e^x+\cos x^2.$$

b. Ta có:

$$G'(x)=[\int_{x^2}^{a}(t^2+\sqrt{t^2+1})dt]'=[-\int_{a}^{x^2}(t^2+\sqrt{t^2+1})dt]'=(u)'.(u^2+\sqrt{u^2+1}).$$

trong đó u=x², do đó:

$$G'(x)=(x^2)'.(x^4+\sqrt{x^4+1})=2x(x^4+\sqrt{x^4+1}).$$

c. Ta có:

$$H'(x)=[\int_{2x}^{x^2}(t^3+\sin t)dt]'=[\int_{a}^{x^2}(t^3+\sin t)dt-\int_{a}^{2x}(t^3+\sin t)dt]'$$

$$=(u)'.(u^3+\sin u)+(v)'.(v^3+\sin v).$$

trong đó $u=x^2$ và $v=2x$, do đó:

$$H'(x)=(x^2)'.(x^6+\sin x^2)+(2x)'.(8x^3+\sin 2x)=2x(x^6+\sin x^2)+2(8x^3+\sin 2x).$$

III. TỔNG KẾT CHUNG

Các em học sinh cần nhớ rằng để tính tích phân xác định ngoài các phương pháp cơ bản mà chúng ta đã biết để xác định nguyên hàm, cụ thể có:

1. Phương pháp sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản
2. Phương pháp phân tích.
3. Phương pháp đổi biến
4. Phương pháp tích phân từng phần
5. Sử dụng các phép biến đổi

còn có thêm một vài phương pháp khác ví dụ như phương pháp cho lớp tích phân đặc biệt ... Do đó ngoài việc nắm chắc các kiến thức trong phần I của cuốn tài liệu này chúng ta cũng nên chuẩn bị tinh thần để tiếp thu thêm một vài kiến thức mới.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (ĐHGT HN - 98): Tính tích phân: $I=\int_{-2}^{2}\left(10^{\frac{x}{4}}-\sin\pi x\right)dx$.

Bài 2. (ĐHQG HN Khối D - 97): Tính các tích phân sau:

a. $I=\int_0^1\frac{x^2}{4-x^2}dx$. b. $J=\int_0^1\frac{x}{4-x^2}dx$.

Bài 3. (ĐHTS - 98): Tính tích phân: $I=\int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx$ với $n\in Z^+$.

Bài 4. Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}.$$

a. Tìm a để f(x) liên tục trái tại điểm x=1.

b. Với kết quả đó hãy xác định $I=\int_0^1 f(x)dx$.

Bài 5. Tính các tích phân sau:

a. $I=\int_{-1}^{3}(x^3+1)dx$.

b. $I=\int_{-1}^{2}\frac{xdx}{x^2+2}$.

c. $\int_0^2 f(x)dx$ biết $f(x)=\begin{cases}2-x & \text{khi } x>1\\ x^2 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$.

d. $J=\int_1^{e^2}\frac{7x-2\sqrt{x}-5}{x}dx$.

e. $I=\int_2^5\frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$.

f. $I=\int_1^2\frac{(x+1dx}{x^2+x\ln x}$.

Bài 6. Tính các tích phân sau:

a. $I=\int_{-\pi/4}^{\pi/2}\cos 5x.\sin 3x dx$.

b. $J=\int_0^{\pi/2}\sin x.\cos^2(x-\frac{\pi}{4})dx$.

Bài 7. Tính các tích phân sau:

a. $I=\int_{-3}^{3}|x-2|\,dx$. b. $J=\int_{-1}^{4}|x^2-3x+2|\,dx$.

Bài 8. Chứng minh rằng:

a. $\frac{\pi}{2}\le\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{3+2\sin^2 x}\le\frac{\pi\sqrt{5}}{4}$. b. $1\le\int_0^1\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}dx\le\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Bài 9. (ĐHQG HN Khối B - 98): Tìm các hằng số A,B để

$f(x) = A.\sin\pi x + B$ thoả mãn $f(1)=2$ và $\int_0^1 f(x)dx=4$..

Bài 10. Cho $f(x)=a\sin 2x-b\cos 2x$. Xác định a,b biết $f'(\frac{\pi}{2})=-2$ và $\int_a^{2b}a\,dx=1$.

Bài 11. (ĐHSP Vinh Khối G - 99): Chứng minh rằng $\log_2\left(\int_0^4\frac{x^2-3x-10}{x-5}dx\right)=\int_0^4 dx$.

Bài 12. (ĐHBK HN - 94): Tìm a,b để $f(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+2$ thoả mãn

$f'(x)=-4$; $\int_{1/2}^{1}f(x)dx=2-3\ln 2$.

Bài 13. Cho $f(x) = A\sin 2x + B$. Tìm A,B để $f'(0)=4$; $\int_0^{2\pi}f(x)dx=3$.

Bài 14. (Đề 30): Cho a, c là hằng số. Giả sử f(x) là một hàm số xác định trên R, và

$\begin{cases}af(x)=f'(x)\\ f(0)=c\end{cases}$ với mọi $x\in R$.

a. Chứng minh rằng $f(x)=c.e^{ax}$.

b. Từ kết quả đó hãy tìm hàm g(x) nếu biết $\int_0^x g(x)dx=g(x)$ với $x\in R$..

Bài 15. Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2} & \text{khi } |x|\le 1\\ |x-1| & \text{khi } |x|>1\end{cases}.$$

a. Xét tính liên tục của hàm số trên toàn trục số.

b. Với kết quả từ a) hãy xác định $\int_{-2}^{3}f(x)dx$.

Bài 16. Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{khi } |x|\le\frac{\pi}{2}\\ ax+b & \text{khi } |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

a. Xác định a, b để hàm số liên tục trên toàn trục số.

b. Với kết quả từ a) hãy xác định $\int_0^{2\pi/3}f(x)dx$.

Bài 17. Giả sử f là một hàm số có đạo hàm trên khoảng I và g(x)=xf(x) với $\forall x \in$ I.

a. Tính g'(x).

b. Tính tích phân $I=\int_{2e}^{e^2}(\sqrt{\ln x}+\frac{1}{2\sqrt{\ln x}})dx$.

Bài 18. Tính đạo hàm của các hàm số :

a. $F(x)=\int_{2x}^{x^2}\frac{t^2dt}{\sqrt{t^2+1}}$.

b. $G(x)=\int_{\sin^2 x}^{\sin x^2}(\sin t^2+\cos 2t)dt$.

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $I=\frac{36}{\sqrt{10}.\ln 10}$.

Bài 2. a). $I=\ln 3-1$.

b). $J=-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}$.

Bài 3. $I=\frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$.

Bài 4. a). $a=1$.

b). $I=\frac{3}{2}$.

CHỦ ĐỀ 1
TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bằng việc sử dụng các đồng nhất thức để biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân thành các nhân tử mà nguyên hàm của mỗi nhân tử đó có thể nhận được từ bảng nguyên hàm hoặc chỉ bằng các phép biến đổi đơn giản đã biết, từ đó ta xác định được giá trị của tích phân. Phương pháp này được áp dụng trong hầu hết các dạng tích phân, bao gồm:

- Tích phân các hàm số hữu tỉ.
- Tích phân các hàm số lượng giác.
- Tích phân các hàm số vô tỉ.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1 (HVKTQS – 95): Tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^2}$.

Giải

Sử dụng đồng nhất thức: x = x + 1 – 1.

Ta được :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = [\ln|x+1| + \frac{1}{x+1}]\Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2 (ĐHTM HN – 95): Tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{x^5}{x^2+1}dx$.

Giải

Sử dụng đồng nhất thức:

$$x^5 = x^5 + x^3 - x^3 - x + x = x^3(x^2+1) - x(x^2+1) + x.$$

Ta được :

$$I = \int_0^1 \left(x^3 - x + \frac{x}{x^2+1}\right)dx = [\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}.$$

Lưu ý: Cũng có thể trình bày bài toán theo phương pháp đổi biến như sau:

Đặt $t = x^2 \Leftrightarrow dt = 2xdx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$.
- Với $x = 1 \Rightarrow t = 1$.

Khi đó:

$$I = \int_0^1 \frac{t^2}{2(t+1)}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[t - 1 + \frac{1}{t+1}\right]dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2 - t + \ln|t+1|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 3: (CĐKS 2000): Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$.

Giải

Ta có:

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3x + 3\cos x)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 4 (ĐHTM HN – 95): Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^4 x}$.

Giải

Ta có:

$$I = \int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\pi/4}(1 + tg^2x)\, d(tgx) = (tgx + \frac{1}{3}tg^3x)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{4}{3}.$$

Lưu ý: Cũng có thể trình bày bài toán theo phương pháp đổi biến như sau:

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^4 x} = \int_0^{\pi/4}(1 + tg^2x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

Đặt $t = tgx \Leftrightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$.
- Với $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$.

Khi đó:

$$I = \int_0^1 (t^2 + 1)dt = \left(\frac{1}{3}t^3 + t\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Ví dụ 5 (Đề 91): Cho $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$.

a. Tìm hai số A, B sao cho $f(x) = A + B\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$.

b. Tính $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$.

Giải

a. Ta có:

$$\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = A + B\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right) = \frac{(A+B)\cos x + (A-B)\sin x}{\cos x + \sin x}.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = -\frac{1}{2}.$$

b. Với kết quả ở câu a) ta được:

$$\int_0^{\pi/2} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} [-\frac{1}{2} - \frac{\cos x - \sin x}{2(\cos x + \sin x)}]dx = [-\frac{1}{2}x - \ln(\cos x + \sin x)]\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Chú ý: Thông thường các đề thi không đưa ra câu gợi ý a) như trên, khi đó với các tích phân dạng:

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} dx.$$

các em học sinh cần hiểu rằng ta phải thực hiện phép phân tích:

$$a_1\sin x + b_1\cos x + c_1 = A(a_2\sin x + b_2\cos x + c_2) + B(a_2\cos x - b_2\sin x) + C.$$

ở đó A, B, C được xác định bằng phương pháp hệ số bất định.

Để minh hoạ cụ thể ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 6: Xác định các hằng số A, B, C . Sao cho:

$$\sin x - \cos x + 1 = A(\sin x + 2\cos x + 3) + B(\cos x - 2\sin x) + C.$$

Dựa vào kết quả đó tính tích phân:

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + 2\cos x + 3} dx$$

Giải

Ta có:

$$3\sin x + \cos x + 3 = A(\sin x + 2\cos x + 3) + B(\cos x - 2\sin x) + C$$
$$= (A - 2B)\sin x + (2A + B)\cos x + 3A + C.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A - 2B = 3 \\ 2A + B = 1 \\ 3A + C = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \int_0^\pi \left(1 - \frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x + 3}\right)dx = [x - \ln|\sin x + 2\cos x + 3|]\Big|_0^\pi = \pi - \ln 5.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (ĐHTM – 99): Tính tích phân : $I = \int_1^4 \frac{1}{x^2(x+1)} dx$.

Bài 2. (ĐHY HN – 2000): Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^2}{x^2 - 7x + 12} dx$

Bài 3. (CĐHQ TPHCM 2000): Tính tích phân : $I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$.

Bài 4. (CĐSP HN Khối A – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + 2\cos x}{3\sin x + \cos x} dx$.

Bài 5. (ĐH TCKT HN – 99): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + 7\cos x + 6}{4\sin x + 3\cos x + 5} dx$.

Bài 6. Tính các tích phân sau:

a. (Đề 18): $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx$.

b. (ĐHBK HN – 98): $I = \int_0^{\pi/2} \cos 2x(\cos^4 x + \sin^4 x)dx$.

c. (ĐH TCKT HN – 96): $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + 7\cos x + 6}{4\sin x + 3\cos x + 5}dx$.

d. $I = \int_0^{\pi} x\cos^3 x.\cos 5x dx$.

e. (ĐHQG TPHCM Khối A – 98): $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x.\sin^2 x dx$.

f. (ĐHQG TPHCM Khối A – 2000): $I = \int_0^{\pi/4} \sin^4 x dx$.

Bài 7. (ĐHSP TPHCM – 95): Cho $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

a. Tìm A,B sao cho $f(x) = A + B\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$.

b. Tính $I = \int_0^{\pi/3} f(x)dx$.

Bài 8. (ĐHBK HN – 99): Cho hàm số $h(x) = \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2}$.

a. Tìm A, B để $h(x) = \frac{A\cos x}{(2 + \sin x)^2} + \frac{B\cos x}{2 + \sin x}$.

b. Tính $I = \int_{\pi/2}^{0} h(x)dx$.

Bài 9. (ĐHXD HN – 97): Cho hàm số

$f(x) = 4\cos x + 3\sin x$; $g(x) = \cos x + 2\sin x$:

a. Tìm A,B để $g(x) = A.f(x) + B.f(x)$.

b. Tính $I = \int_0^{\pi/4} \frac{g(x)}{f(x)}dx$.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $I = \ln\frac{5}{8} + \frac{3}{4}$.

Bài 2. $I = 1 + 25\ln 2 - 16\ln 3$.

Bài 3. $I = \frac{2}{3}$.

Bài 4. $I = \frac{1}{2}(\ln 4 + \frac{\pi}{4})$.

Bài 5. $I = \frac{\pi}{2} + \ln 3 + \frac{1}{6}$.

CHỦ ĐỀ 2

TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Phương pháp đổi biến số để tính tích phân xác định có hai dạng cơ bản (ngoài ra còn dạng 3) dựa trên định lý sau:

Định lý:

a. Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ và $u = \varphi(x)$ là hàm số có đạo hàm trong [a, b] thì

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = F(u)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}.$$

b. Nếu hàm số f(x) xác định và liên tục trên đoạn [a, b], hàm số $x = \varphi(t)$ xác định và liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$ và thoả mãn các điều kiện sau:

(i). Tồn tại đạo hàm $\varphi'(t)$ liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$.

(ii). $\varphi(\alpha) = a$ và $\varphi(\beta) = b$.

(iii). Khi t biến đổi từ α đến β thì x biến thiên trong đoạn [a, b]

Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1 Sử dụng phương pháp đổi biến số ***dạng 1*** tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn cho thích hợp.

Bước 2: Lấy vi phân $dx = \varphi'(t)dt$.

Bước 3: Tính các cận α và β tương ứng theo a và b.

Bước 4: Biểu thị f(x)dx theo t và dt. Giả sử rằng $f(x)dx = g(t)dt$.

Bước 5: Khi đó: $I = \int_\alpha^\beta g(t)dt$.

Lưu ý: Chúng ta cần nhớ lại các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là:

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = \lvert a\rvert \sin t \text{ với } -\pi/2 \le t \le \pi/2 \\ x = \lvert a\rvert \cos t \text{ với } 0 \le t \le \pi \end{array}\right.$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\lvert a\rvert}{\sin t} \text{ với } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ x = \dfrac{\lvert a\rvert}{\cos t} \text{ với } t \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \end{array}\right.$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = \lvert a\rvert \operatorname{tgt} \text{ với } -\pi/2 < t < \pi/2 \\ x = \lvert a\rvert \operatorname{cotgt} \text{ với } 0 < t < \pi \end{array}\right.$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a\cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a)\sin^2 t$

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp "*Lấy học trò làm trung tâm*"
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau:

a. (ĐH TCKT – 97): $I = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$. b. $I = \int_1^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Giải

a. Đặt x = sint, khi đó: dx = costdt

Đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow t = 0$

với $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Ta có:

$$\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin^2 t.\cos tdt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{\sin^2 t.\cos tdt}{|\cos t|} = \frac{\sin^2 t.\cos tdt}{\cos t} = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1-\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}.$$

b. Đặt x = 2sint, khi đó: dx = 2costdt

Đổi cận: với $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

với $x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Ta có:

$$x^2\sqrt{4-x^2}dx = 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos tdt = \sin^2 2tdt = \frac{1}{2}(1-\cos 4t)dt$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$

Ví dụ 2: Tính tích phân:

$$I = \int_1^{2/\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Giải

Đặt $x = \frac{1}{\sin t}$, khi đó: $dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$

Đổi cận: với $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

với $x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$.

Khi đó:

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{-\frac{1}{\sin^2 t}\cos tdt}{\frac{1}{\sin t}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}} = \int_{\pi/3}^{\pi/2} dt = t\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{\pi}{6}.$$

Chú ý: Cũng có thể sử dụng phép biến đổi:

$$I = \int_{2}^{2/\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.$$

Từ đó sử dụng phép đổi biến $t = \frac{1}{x}$, ta sẽ nhận được: $I = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Rồi tiếp tục sử dụng phép đổi biến t = sinu, ta được: $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} du = u\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{6}$.

Đó chính là lời giải có bổ sung (để phù hợp với hạn chế chương trình của Bộ GD và ĐT) trong hầu hết các tài liệu tham khảo trước đây.

Ví dụ 3: Tính tích phân:

$$I = \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{9+3x^2}dx}{x^2}$$

Giải

Đặt $x\sqrt{3} = 3\text{tgt} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}\,\text{tgt}$, khi đó:

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt.$$

Đổi cận: với $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

với $x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Ta có:

$$\frac{\sqrt{9+3x^2}dx}{x^2} = \frac{\sqrt{9+9\text{tg}^2x}}{\text{tg}^2x}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt = \frac{\sqrt{3}}{\cos t.\sin^2 t}dt = \frac{\sqrt{3}\cos t}{(1-\sin^2 t).\sin^2 t}dt$$

Khi đó:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sqrt{3}\cos t}{(1-\sin^2 t).\sin^2 t}dt.$$

Đặt v = sint, khi đó:

dv = costdt

Đổi cận: với $t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow v = \frac{1}{2}$

với $t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có:

$$\frac{\sqrt{3}\cos t}{(1-\sin^2 t).\sin^2 t}dt = \frac{\sqrt{3}dv}{(1-v^2).v^2} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^2-1}\right)dv.$$

Khi đó:

$$I = \sqrt{3}\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^2-1}\right)dv = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{v} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|\right)\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{2}/2}$$

$$= \sqrt{3}\left[2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+2}{3(2-\sqrt{2})}\right].$$

Ví dụ 4: Tính tích phân:

$$I = \int_{-a}^{0}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx \text{ , } (a > 0).$$

Giải

Đặt $x = a.\cos 2t$, khi đó:

$dx = -2a.\sin 2t.dt.$

Đổi cận: với $x = -a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

với $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Ta có:

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = \sqrt{\frac{a+a.\cos 2t}{a-a.\cos 2t}}(-2a.\sin 2tdt) = |\cot gt|(-2a.\sin 2tdt)$$

$$= -4a.\cos^2 t.dt = -2a(1+\cos 2t)dt$$

Khi đó:

$$I = -2a\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = -2a\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = a\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Ví dụ 5: Tính tích phân:

$$I = \int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}\sqrt{(x-a)(b-x)}dx \text{ với } 0 < a < b.$$

Giải

Đặt $x = a + (b-a)\sin^2 t$, khi đó: $dx = (b-a).\sin 2t.dt$.

Đổi cận: với $x = \frac{3a+b}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

với $x = \frac{a+b}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Ta có:

$$\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx = \frac{(b-a)^2}{4}\sin^2 2t dt = \frac{(b-a)^2}{8}(1-\cos 4t)dt.$$

Khi đó:

$$I = \frac{(b-a)^2}{8}\int_{\pi/6}^{\pi/4}(1-\cos 4t)dt = \frac{(b-a)^2}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/4}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$

Bài toán 2 Sử dụng phương pháp đổi biến số ***dạng 2*** tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn $t = \varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn cho thích hợp, rồi xác định $x = \psi(t)$ (nếu có thể).

Bước 2: Xác định vi phân $dx = \varphi'(t)dt$.

Bước 3: Tính các cận α và β tương ứng theo a và b.

Bước 4: Biểu thị f(x)dx theo t và dt. Giả sử rằng f(x)dx = g(t)dt.

Bước 5: Khi đó: $I = \int_\alpha^\beta g(t)dt$.

Lưu ý: Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là:

Dấu hiệu	Có thể chọn
Hàm có mẫu số	t là mẫu số
Hàm $f(x, \sqrt{\varphi(x)})$	$t = \sqrt{\varphi(x)}$
Hàm $f(x) = \frac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x + e}$	$t = tg\frac{x}{2}$ (với $\cos\frac{x}{2} \neq 0$)
Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	• Với $x + a > 0$ và $x + b > 0$, đặt: $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$ • Với $x + a < 0$ và $x + b < 0$, đặt: $t = \sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}$

Ví dụ 6: Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}$.   b. $I = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x dx}{\cos x + 2}$.

Giải

a. Đặt t = sinx, khi đó:

$dt = \cos x dx$.

Đổi cận: với $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

với $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta có:

$$\frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} = \frac{dt}{t^2 - 5t + 6} = \frac{dt}{(t-2)(t-3)}$$

$$= \left(\frac{A}{t-3} + \frac{B}{t-2}\right)dt = \frac{[(A+B)t - 2A - 3B]dt}{(t-2)(t-3)}$$

từ đó:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - 3B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}.$$

Suy ra:

$$\frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} = \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}\right)dt.$$

Khi đó:

$$I = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}\right)dt = \ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \ln\frac{3(6-\sqrt{3})}{5(4-\sqrt{3})}.$$

b. Đặt t = cosx, khi đó:

$dt = -\sin x dx$.

Đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow t = 1$

với $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

Ta có:

$$\frac{\sin^3 x dx}{\cos x + 2} = \frac{\sin^2 x . \sin x dx}{\cos x + 2} = \frac{(1 - \cos^2 x)\sin x dx}{\cos x + 2}$$

$$= \frac{(t^2 - 1)dt}{t + 2} = (t - 2 + \frac{3}{t+2})dt$$

Khi đó:

$$I = \int_1^{1/2} (t - 2 + \frac{3}{t+2})dt = \left(\frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2|\right)\Bigg|_1^{1/2} = \frac{5}{2} + 3\ln\frac{5}{6}.$$

Ví dụ 7: Tính tích phân:

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin 2x.dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x}.$$

Giải

Đặt $t = 2\sin^2x + \cos^2x$, khi đó: $dt = \sin2xdx$

Đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow t = 1$

với $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{5}{4}$.

Ta có:

$$\frac{\sin 2x.dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{dt}{t}.$$

Khi đó:

$$I = \int_1^{5/4} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^{5/4} = \ln\frac{5}{4}.$$

Ví dụ 8: Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$. b. $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

Giải

a. Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1$, khi đó:

$$tdt = xdx \Rightarrow dx = \frac{tdt}{x}.$$

Đổi cận: với $x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 2$

với $x = \sqrt{8} \Rightarrow t = 3$.

Ta có:

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{tdt}{x^2t} = \frac{dt}{t^2-1}.$$

Khi đó:

$$I = \int_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

b. Đặt $t = \sqrt[3]{x^2+1} \Rightarrow t^3 = x^2 + 1$, khi đó:

$$3t^2dt = 2xdx \Rightarrow dx = \frac{3t^2dt}{2x}.$$

Đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow t = 1$

với $x = \sqrt{7} \Rightarrow t = 2$.

Ta có:

$$\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \frac{x^3.3t^2dt}{2xt} = 3t(t^3 - 1)dt = 3(t^4 - t)dt.$$

Khi đó:

$$I = 3\int_1^2 (t^4 - t)dt = 3\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{141}{10}.$$

Ví dụ 9: Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_1^e \frac{1+\ln^2 x}{x}dx$.   b. $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x+2}}$.

Giải.

a. Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 0$,

$x = e \Rightarrow t = 1$.

Khi đó:

$$I = \int_0^1 (t^2+1)dt = \left(\frac{1}{3}t^3 + t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

b. Đặt $t = \sqrt{e^x+2} \Rightarrow t^2 = e^x + 2$, khi đó:

$$2tdt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{t^2-2}.$$

Đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{3}$

với $x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó:

$$I = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{dt}{t^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_{\sqrt{3}}^2.$$

Bài toán 3 Sử dụng phương pháp đổi biến số dạng 3 tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Dựa vào việc đánh giá cận của tích phân và tính chất của hàm số dưới dấu tích phân ta có thể lựa chọn phép đặt ẩn phụ, thông thường:

- Với $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ có thể lựa chọn việc đặt $x = -t$.
- Với $I = \int_0^{\pi/2} f(x)dx$ có thể lựa chọn việc đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$.
- Với $I = \int_0^{\pi} f(x)dx$ có thể lựa chọn việc đặt $t = \pi - x$.
- Với $I = \int_0^{2\pi} f(x)dx$ có thể lựa chọn việc đặt $t = 2\pi - x$.
- Với $I = \int_a^b xf(x)dx$ có thể lựa chọn việc đặt $x = a + b - t$.

Chú ý: Trong chủ đề này chúng ta sẽ chỉ đưa ra ví dụ để minh hoạ cho bài toán 3 còn nội dung thực sự của lớp tích phân dạng đó sẽ được trình bày chi tiết trong Chủ đề 4: *Lớp các tích phân đặc biệt.*

Ví dụ 10: Tính tích phân:

$$I = \int_{-1}^{1} x^{2004} \sin x dx.$$

Giải.

Viết lại I dưới dạng :

$$I = \int_{-1}^{0} x^{2004} \sin x dx + \int_{0}^{1} x^{2004} \sin x dx. \quad (1)$$

Xét tính phân $J = \int_{-1}^{0} x^{2004} \sin x dx$.

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

Đối cận: $x = -1 \Rightarrow t = 1$,

$x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$I = -\int_{1}^{0} (-t)^{2004} \sin(-t) dt = -\int_{0}^{1} x^{2004} \sin x dx. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được I = 0.

Nhận xét: Với bài toán trên các em học sinh chưa có kinh nghiệm thường suy nghĩ theo hai hướng sau:

Hướng 1: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, bởi nó có dạng: $\int P(x) \sin \alpha x dx$ xong khi đó ta cần thực hiện 2004 lần tích phân từng phần và đó đương nhiên không thực tế.

Hướng 2: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần cho công thức tổng quát $\int_{-1}^{1} x^n \sin x dx$, từ đó bằng phương pháp truy hồi nhận được kết quả của $\int_{-1}^{1} x^{2004} \sin x dx$, tuy nhiên đó hẳn chưa phải là một cách giải đơn giản và ngắn gọn..

Từ đó có thể thấy tính ưu việt của phương pháp đổi biến trong bài toán 3. cho dù không phải bao giờ nó cũng được như vậy. Chúng ta sẽ tiếp tục với ví dụ sau:

Ví dụ 11 (ĐHGT TPHCM – 99): Tính tích phân:

$$I = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx.$$

Giải

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$,

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$I = \int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos^4(\frac{\pi}{2} - t)(-dt)}{\cos^4(\frac{\pi}{2} - t) + \sin^4(\frac{\pi}{2} - t)} = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^4 t dt}{\cos^4 t + \sin^4 t} = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx.$$

Do đó:

$$2I = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \int_{0}^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (ĐHKT HN – 97): Tính $I = \int_0^1 x^5(1 - x^3)^6 dx$.

Bài 2. (ĐH TCKT HN – 2000): Tính $I = \int_0^1 \frac{xdx}{x^4 + x^2 + 1}$.

Bài 3. (ĐHGT HN – 96): Tính $I = \int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1 + x^2} dx$.

Bài 4. (HV BCVT HN – 98): Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x . \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$.

Bài 5. (CĐSP TPHCM – 97): Tính $I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{6 - 5\sin x + \sin^2 x} dx$.

Bài 6. (CĐHQ TPHCM – 99): Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{7 + \cos 2x}} dx$.

Bài 7. Tính tích phân: $I = \int_{-1}^{1} \frac{\cos x dx}{e^x + 1}$.

Bài 8. (HVNH HN – 98): Tính $I = \int_0^{\pi} x . \sin x . \cos^2 x dx$.

Bài 9. Tính các tích phân sau:

a. (ĐHNNI HN – 99): $I = \int_0^1 x(1 - x)^{19} dx$.

b. (ĐHSP Quy Nhơn – 99): $I = \int_0^1 (1 + 3x)(1 + 2x + 3x^2)^{10} dx$.

c. (ĐHTM – 95): $I = \int_0^1 \frac{x^5}{x^2 + 1} dx$.

d. $I = \int_0^a \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$.

Bài 10. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$.

b. $I = \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

c. $I = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2}$.

d. $I = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

e. (ĐHTM – 95): $I = \int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$.

f. (ĐHY HN – 98): $I = \int_{-1/2}^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

g. $I = \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}dx$.

h. (HVQY – 98): $I = \int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Bài 11. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}dx$.

b. $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{tg^4x.dx}{\cos 2x}$.

c. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$.

d. $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{tgx.dx}{\cos^2 x - \sin x.\cos x}$.

e. (ĐHQG TPHCM Khối A – 98): $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}dx$.

f. (CĐHQ TPHCM – 99): $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{11 - 7\sin x - \cos^2 x}dx$.

g. (ĐHQG TPHCM Khối A – 98): $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}dx$.

h. (HVKTQS – 96): $I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x}\cot gxdx$.

i. (ĐH Y Dược TPHCM – 95): $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{9+4\cos^2 x}dx$.

Bài 12. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_1^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{2x}dx$.

b. $I = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2}.\ln\frac{2+x}{2-x}dx$.

c. $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

d. $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}+e^x}$.

e. (ĐH DLNNvàTH TPHCM – 98): $I = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$.

f. (CĐSP TPHCM – 97): $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+3e^x+3}dx$.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $I = \frac{1}{168}$.

Bài 2. $I = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Bài 3. $I = \frac{848}{105}$.

Bài 4. $I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$.

Bài 5. $I = \ln\frac{10}{9}$.

Bài 6. $I = \frac{\pi}{6\sqrt{2}}$.

Bài 7. $I = \sin 1$.

Bài 8. $I = \frac{\pi}{3}$.

CHỦ ĐỀ 3
TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ta có:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du. \qquad (1)$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Bài toán: Sử dụng công thức tích phân từng phần xác định $I = \int_a^b f(x)dx$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi tích phân ban đầu về dạng:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x).f_2(x)dx.$$

Bước 2: Đặt:

$$\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du \\ v \end{cases}.$$

Bước 3: Khi đó:

$$I = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Chú ý: Khi sử dụng phương pháp tích phân từng phần để tính tích phân chúng ta cần tuân thủ các nguyên tắc sau:

1. Lựa chọn phép đặt dv sao cho v được xác định một cách dễ dàng.
2. Tích phân $\int_a^b v du$ được xác định một cách dễ dàng hơn so với I.
3. Chúng ta cần nhớ lại các dạng cơ bản sau:

Dạng 1: $I = \int P(x)\sin\alpha x dx$ (hoặc $\int P(x)\cos\alpha x dx$) với P là một đa thức thuộc R[X] và $\alpha \in R^*$ khi đó đặt $u = P(x)$.

Dạng 2: $I = \int e^{ax}\cos(bx)$ (hoặc $\int e^{ax}\sin(bx)$) với a, b≠0 khi đó đặt u = cos(bx) (hoặc u = sin(bx)).

Dạng 3: $I = \int P(x)e^{\alpha x}dx$ (hoặc $I = \int P(x)e^{\alpha x}dx$) với P là một đa thức thuộc R[X] và $\alpha \in R^*$ khi đó đặt u = P(x).

Dạng 4: $I = \int x^\alpha.\ln x dx$, với $\alpha \in R\backslash\{-1\}$ khi đó đặt u = lnx.

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp "*Lấy học trò làm trung tâm*"
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

Ví dụ 1: Tính tích phân : $I = \int_0^{\pi/2}(x^2+1)\sin xdx$.

Giải

Đặt:

$$\begin{cases} u = (x^2+1) \\ dv = \sin xdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = -\cos x \end{cases},$$

Khi đó:

$$I = -(x^2+1)\cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} x\cos xdx = 1 + 2\int_0^{\pi/2} x\cos xdx. \qquad (1)$$

Xét tích phân $J = \int_0^{\pi/2} x\cos xdx$, ta đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos xdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases},$$

Khi đó:

$$J = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin xdx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1. \qquad (2)$$

Thay (2) vài (1), ta được:

$$I = 1 + 2(\frac{\pi}{2} - 1) = \pi - 1.$$

Chú ý: Như đã giới thiệu trong Phần I – Chủ đề 5, bài toán trên còn có thể giải bằng phương pháp hệ số bất định – *Đề nghị bạn đọc tự giải*.

Ví dụ 2 (Đề 37): Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi} e^{2x}\sin^2 xdx$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2x}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}(\int_0^{\pi} e^{2x}dx - \int_0^{\pi} e^{2x}\cos 2xdx). \qquad (1)$$

- Xét tích phân:

$$I_1 = \int_0^{\pi} e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^{\pi} = \frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

- Xét tích phân $I_2 = \int_0^{\pi} e^{2x}\cos 2xdx$, ta đặt:

$$\begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -2\sin 2xdx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_2 = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{2x}\sin 2xdx = \frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2} + \int_0^{\pi} e^{2x}\sin 2xdx. \quad (3)$$

- Xét tích phân:

$$I_{2,1} = \int_0^{\pi} e^{2x}\sin 2x dx$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2\cos 2x dx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_{2,1} = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x\Big|_0^{\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 2x dx}_{I_2} = -I_2. \qquad (4)$$

Thay (4) vào (3), ta được:

$$I_2 = \frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2} - I_2 \Leftrightarrow I_2 = \frac{e^{2\pi}}{4} - \frac{1}{4}. \qquad (5)$$

Thay (2), (5) vào (1), ta được:

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2} - \left(\frac{e^{2\pi}}{4} - \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{8}(e^{2\pi} - 1).$$

Ví dụ 3 (ĐHHH TPHCM – 2000): Tính tích phân: $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$.

Giải

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x}dx \\ v = -1/x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = -\frac{1}{x}\ln(x+1)\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx = -\frac{1}{2}\ln 3 + \ln 2 + \int_1^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 3 + \ln 2 + \left(\ln|x| - \ln(x+1)\right)\Big|_1^2 = -\frac{3}{2}\ln 3 + 3\ln 2.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (ĐH TC HN – 98): Tính $I = \int_0^{\pi/4} x(2\cos^2 x - 1)dx$.

Bài 2. (ĐHNN I HN – 98): Tính $I = \int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin 3x dx$.

Bài 3. (ĐHNH CHPĐ – 98): Tính $I = \int_0^1 (x+1)^2 e^{2x}dx$.

Bài 4. (PVBCTT – 98): Tính $I = \int_1^e (x.\ln x)^2 dx$.

Bài 5. (HVNH TPHCM Khối D – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^1 x\ln(x^2+1)dx$.

Bài 6. (HV KTQS – 99): Tính $I = \int_0^{\pi/2} \cos x.\ln(1+\cos x)dx$

Bài 7. (ĐHNN HN – 97): Tính $I = \int_{1/e}^{e} \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$.

Bài 8. (ĐHGT HN – 97): Tính tich phân

$$I = \int_0^{1/9}\left(5^{3x} + \frac{x}{\sin^2(2x+1)} + \frac{1}{\sqrt[3]{4x-1}}\right)dx.$$

Bài 9. (ĐHBK TPHCM – 95): Tính $I = \int_0^{\pi/2} x.\cos^2 xdx$.

Bài 10. (ĐHQG TPHCM Khối A – 2000): Tính $A = \int_0^1 e^x \sin^2(\pi x)dx$.

Bài 11. (CĐKS – 2000): Tính $I = \int_1^e (2x+2).\ln xdx$.

Bài 12. (ĐHSP II HN – 97): Tính $I = \int_0^{\pi/4} 5e^x \sin 2xdx$.

Bài 13. (ĐHTL – 96): Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/2} e^x \cos^2 xdx$.

Bài 14. (ĐHAN – 99): Tính $I = \int_0^{\pi} x^2 \sin xdx$.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $I = \frac{\pi-2}{8}$.

Bài 2. $I = \frac{3-2e^{\pi}}{13}$.

Bài 3. $I = \frac{5e^2}{4} - \frac{1}{4}$.

Bài 4. $I = \frac{7e^3}{27} - \frac{1}{27}$.

Bài 5. $I = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

Bài 6. $I = \frac{\pi}{2} - 1$.

Bài 7. $I = \frac{2e}{e+1}$.

Bài 8. $I = \frac{5^{1/3}-1}{3\ln 5} - \frac{1}{18}\operatorname{cotg}\frac{11}{9} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin 11/9}{\sin 1}\right| + \frac{5}{36}$.

CHỦ ĐỀ 4
LỚP CÁC TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trong chủ đề này chúng ta cùng nhau đi chứng minh rồi áp dụng một số tính chất cho những lớp tích phân đặc biệt.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Tính chất 1: Nếu f(x) liên tục và là hàm lẻ trên [−a, a] thì : $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

CHỨNG MINH

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx. \quad (1)$$

Xét tính phân $J = \int_{-a}^{0} f(x)dx$.

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = -a \Rightarrow t = a$,

$x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Mặt khác vì f(x) là hàm lẻ $\Rightarrow f(-t) = -f(t)$.

Khi đó:

$$J = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(x)dx. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được I = 0 đpcm.

Áp dụng:

Ví dụ 1: Tính tích phân: $I = \int_{-1/2}^{1/2} \cos x.\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)dx$.

Giải.

Nhận xét rằng: hàm số $f(x) = \cos x.\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ có:

- Liên tục trên $[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$.
- Ta có nhận xét:

$$f(x) + f(-x) = \cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \cos(-x).\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= \left[\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]\cos x = \ln 1.\cos x = 0$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

Vậy, f(x) là hàm lẻ trên $[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$, do đó theo tính chất 1 ta được I = 0.

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp "***Lấy học trò làm trung tâm***"
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

***Chú ý quan trọng*:**

1. Khi gặp dạng tích phân trên thông thường học sinh nghĩ ngay tới phương pháp tích phân từng phần, xong đó lại không phải ý kiến hay. Điều đó cho thấy việc nhìn nhận tính chất cận và đặc tính của hàm số dưới dấu tích phân để từ đó định hướng việc lựa chọn phương pháp giải là rất quan trọng.
2. Tuy nhiên với một bài thi thì vì tính chất 1 không được trình bày trong phạm vi kiến thức của sách giáo khoa do đó các em học sinh lên trình bày như sau:

$$I = \int_{-1/2}^{0} \cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx + \int_{0}^{1/2} \cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx. \qquad (1)$$

Xét tính phân $J = \int_{-1/2}^{0} \cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$.

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$,

$x = 0 \Rightarrow t = 0.$

Khi đó:

$$I = -\int_{1/2}^{0} \cos(-t).\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)dt = -\int_{0}^{1/2} \cos t.\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)dt$$

$$= -\int_{0}^{1/2} \cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được I = 0.

3. Vậy kể từ đây trở đi chúng ta sẽ đi áp dụng ý tưởng trong phương pháp chứng minh tính chất để giải ví dụ trong mục áp dụng.

> **Tính chất 2:** Nếu f(x) liên tục và là hàm chẵn trên đoạn [– a, a] thì :
>
> $$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

CHỨNG MINH

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx. \qquad (1)$$

Xét tính phân $J = \int_{-a}^{0} f(x)dx$.

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = -a \Rightarrow t = a$,

$x = 0 \Rightarrow t = 0.$

Mặt khác vì f(x) là hàm chẵn $\Rightarrow f(-t) = f(t)$.

Khi đó:

$$J = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được $I = 2\int_0^a f(x)dx$ đpcm.

Chú ý quan trọng:

1. Trong phạm vi phổ thông tính chất trên không mang nhiều ý nghĩa ứng dụng, do đó khi gặp các bài toán kiểu này chúng ta tốt nhất cứ đi xác định

$$I = \int_{-a}^a f(x)dx$$

bằng cách thông thường, thí dụ với tích phân :

$$I = \int_{-1}^1 x^2 dx.$$

Ta không lên sử dụng phép biến đổi:

$$I = 2\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

bởi khi đó ta nhất thiết cần đi chứng minh lại tính chất 2, điều này khiến bài toán trở lên cồng kềnh hơn nhiều so với cách làm thông thường, cụ thể:

$$I = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^1 = \frac{2}{3}.$$

2. Tuy nhiên không thể phủ nhận sự tiện lợi của nó trong một vài trường hợp rất đặc biệt.

Tính chất 3: Nếu f(x) liên tục và chẵn trên R thì

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)dx}{a^x+1} = \int_0^{\alpha} f(x)dx \text{ với } \forall\alpha\in R^+ \text{ và } a>0.$$

CHỨNG MINH

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)dx}{a^x+1} = \int_{-\alpha}^{0} \frac{f(x)dx}{a^x+1} + \int_0^{\alpha} \frac{f(x)dx}{a^x+1}.$$

Xét tính phân $I_1 = \int_{-\alpha}^{0} \frac{f(x)dx}{a^x+1}$.

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = -\alpha \Rightarrow t = \alpha$,

$x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Mặt khác vì f(x) là hàm chẵn $\Rightarrow f(-t) = f(t)$.

Khi đó:

$$I_1 = -\int_a^0 \frac{f(-t)dt}{a^{-t}+1} = \int_0^a \frac{a^t f(t)dt}{a^t+1} = \int_0^a \frac{a^t f(t)dt}{a^t+1}.$$

Vậy:

$$I = \int_0^a \frac{a^t f(t)dt}{a^t+1} + \int_0^a \frac{f(x)dx}{a^x+1} = \int_0^a \frac{(a^x+1)f(x)dx}{a^x+1} = \int_0^a f(x)dx.$$

Áp dụng:

Ví dụ 2: Tính tích phân: $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4dx}{2^x+1}$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{x^4dx}{2^x+1} + \int_0^1 \frac{x^4dx}{2^x+1}. \qquad (1)$$

Xét tích phân $J = \int_{-1}^{0} \frac{x^4dx}{2^x+1}$.

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = 1$,

$x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$J = -\int_1^0 \frac{(-t)^4dt}{2^{-t}+1} = \int_0^1 \frac{t^4.2^t.dt}{2^t+1} = \int_0^1 \frac{x^4.2^x.dx}{2^x+1} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được :

$$I = \int_0^1 \frac{x^4.2^x.dx}{2^x+1} + \int_0^1 \frac{x^4dx}{2^x+1} = \int_0^1 \frac{x^4(2^x+1)dx}{2^x+1} = \int_0^1 x^4dx = \frac{1}{5}.$$

Tính chất 4: Nếu f(x) liên tục trên $[0, \frac{\pi}{2}]$ thì $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$.

CHỨNG MINH

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$,

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

Khi đó:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = -\int_{\pi/2}^{0} f(\sin(\frac{\pi}{2}-t))dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos t)dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx \text{ đpcm.}$$

Chú ý quan trọng: Như vậy việc áp dụng tính chất 4 để tính tích phân

$$I = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx \quad (\text{hoặc } I = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx)$$

thường được thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Bằng phép đổi biến $t = \frac{\pi}{2} - x$ như trong phần chứng minh tính chất, ta thu được:

$$I = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx.$$

Bước 2: Đi xác định kI (nó được phân tích $kI = \alpha\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx + \beta\int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$)), thường là:

$$2I = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx + \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx = \int_0^{\pi/2}[f(\sin x) + f(\cos x)]dx.$$

Từ đó suy ra giá trị của I.

Áp dụng:

Ví dụ 3: Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n xdx}{\cos^n x + \sin^n x}$.

Giải

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$,

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$I = \int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos^n(\frac{\pi}{2} - t)(-dt)}{\cos^n(\frac{\pi}{2} - t) + \sin^n(\frac{\pi}{2} - t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n tdt}{\cos^n t + \sin^n t} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x}dx.$$

Do đó:

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x + \sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x}dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}.$$

Tính chất 5: Nếu f(x) liên tục và $f(a + b - x) = f(x)$ thì

$$I = \int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

CHỨNG MINH

Đặt $x = a + b - t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = b$,

$x = b \Rightarrow t = a$.

Khi đó:

$$I = \int_b^a (a+b-t)f(a+b-t)(-dt) = \int_a^b (a+b-t)f(t)dt$$

$$= \int_a^b (a+b)f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt = (a+b)\int_a^b f(t)dt - \int_a^b xf(x)dx$$

$$= (a+b)\int_a^b f(t)dt - I$$

$$\Leftrightarrow 2I = (a+b)\int_a^b f(t)dt \Leftrightarrow I = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

Hệ quả 1: Nếu f(x) liên tục trên [0, 1] thì:

$$I = \int_\alpha^{\pi-\alpha} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_\alpha^{\pi-\alpha} f(\sin x)dx.$$

Hướng dẫn chứng minh

Đặt $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt$

Áp dụng:

Ví dụ 4: Tính tích phân: $I = \int_0^\pi \frac{x\sin xdx}{4-\cos^2 x}$.

Giải

Biến đổi I về dạng

$$I = \int_0^\pi \frac{x\sin xdx}{4-(1-\sin^2 x)} = \int_0^\pi \frac{x\sin xdx}{3+\sin^2 x} = \int_0^\pi xf(\sin x)dx.$$

Đặt $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = \pi \Rightarrow t = 0$,

$x = 0 \Rightarrow t = \pi$.

Khi đó:

$$I = -\int_\pi^0 \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)dt}{4-\cos^2(\pi-t)} = \int_0^\pi \frac{(\pi-t)\sin tdt}{4-\cos^2 t} = \int_0^\pi \frac{\pi\sin tdt}{4-\cos^2 t} - \int_0^\pi \frac{t\sin tdt}{4-\cos^2 t}$$

$$= -\pi\int_0^\pi \frac{d(\cos t)}{4-\cos^2 t} - I \Leftrightarrow 2I = -\pi\int_0^\pi \frac{d(\cos t)}{4-\cos^2 t} = \pi\int_0^\pi \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t-4}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t-4} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos t-2}{\cos t+2}\right|\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi\ln 9}{8}.$$

Hệ quả 2: Nếu f(x) liên tục trên [0, 1] thì: $I = \int_\alpha^{2\pi-\alpha} xf(\cos x)dx = \pi\int_\alpha^{2\pi-\alpha} f(\cos x)dx$.

Hướng dẫn chứng minh

Đặt $x = 2\pi - t \Rightarrow dx = -dt$.

Áp dụng:

Ví dụ 5: Tính tích phân: $I = \int_0^{2\pi} x.\cos^3 xdx$.

Giải

Đặt $x = 2\pi - t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = 2\pi \Rightarrow t = 0$,

$x = 0 \Rightarrow t = 2\pi$.

Khi đó:

$$I = \int_{2\pi}^{0}(2\pi - t).\cos^3(2\pi - t)(-dt) = \int_0^{2\pi}(2\pi - t).\cos^3 tdt$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}\cos^3 tdt - \int_0^{2\pi}t\cos^3 tdt = \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}(\cos 3t + 3\cos t)dt - I$$

$$\Leftrightarrow 2I = \frac{\pi}{2}(\frac{1}{3}\sin 3t + 3\sin t)\Big|_0^{2\pi} = 0 \Leftrightarrow I = 0.$$

Tính chất 6: Nếu f(x) liên tục và $f(a + b - x) = -f(x)$ thì $I = \int_a^b f(x)dx = 0$.

CHỨNG MINH

Đặt $x = a + b - t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = b$,

$x = b \Rightarrow t = a$.

Khi đó:

$$I = \int_b^a f(a + b - t)(-dt) = -\int_a^b f(t)dt = -\int_a^b f(x)dx = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0.$$

Áp dụng:

Ví dụ 6: (CĐSPKT – 2000): Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}\right)dx$.

Giải

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$,

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$I = \int_{\pi/2}^{0} \ln\left(\frac{1+\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-t)}\right)(-dt) = \int_{0}^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\cos t}{1+\sin t}\right)dt = -\int_{0}^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\sin t}{1+\cos t}\right)dt$$

$$= -\int_{0}^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0.$$

Chú ý: Nếu ta phát biểu lại tính chất 6 dưới dạng:

" *Giả sử f(x) liên tục trên [a, b] , khi đó:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-x)dx \text{ ".}$$

Điều đó sẽ giúp chúng ta có được một phương pháp đổi biến mới, cụ thể ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 7: Tính tích phân : $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\text{tg}x)dx$.

Giải

Đặt $t = \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0$

Khi đó:

$$I = -\int_{\pi/4}^{0} \ln[1+\text{tg}(\frac{\pi}{4}-t)]dt = \int_{0}^{\pi/4} \ln(1+\frac{1-\text{tg}t}{1+\text{tg}t})dt = \int_{0}^{\pi/4} \ln\frac{2}{1+\text{tg}t}dt$$

$$= \int_{0}^{\pi/4} [\ln 2 - \ln(1+\text{tg}t)]dt = \ln 2\int_{0}^{\pi/4} dt - \int_{0}^{\pi/4} \ln(1+\text{tg}t)dt = \ln 2.t\Big|_0^{\pi/4} - I$$

$$\Leftrightarrow 2I = \frac{\pi\ln 2}{4} \Leftrightarrow I = \frac{\pi\ln 2}{8}.$$

Tính chất 7: Nếu f(x) liên tục trên đoạn [0, 2a] với a > 0 thì

$$\int_a^{2a} f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(2a-x)]dx.$$

CHỨNG MINH

Ta có:

$$\int_a^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx. \quad (1)$$

Xét tích phân $I_2 = \int_a^{2a} f(x)dx$ bằng cách đặt $x = 2a - t \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = a$,

$x = 2a \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$I_2 = -\int_a^0 f(2a-t)dt = \int_0^a f(2a-t)dt = \int_0^a f(2a-x)dx. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)dx = \int_0^a [f(x)+f(2a-x)]dx. \text{ (đpcm)}$$

Áp dụng:

Ví dụ 8: Tính tích phân : $I = \int_0^{3\pi} \sin x.\sin 2x.\sin 3x.\cos 5x dx$

Giải

Viết lại I dưới dạng :

$$I = \int_0^{3\pi/2} \sin x.\sin 2x.\sin 3x.\cos 5x dx + \int_{3\pi/2}^{3\pi} \sin x.\sin 2x.\sin 3x.\cos 5x dx. \quad (1)$$

Xét tích phân $J = \int_{3\pi/2}^{3\pi} \sin x.\sin 2x.\sin 3x.\cos 5x dx$.

Đặt $x = 3\pi - t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2}$

$x = 3\pi \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$J = -\int_{3\pi/2}^{0} \sin(3\pi-t).\sin 2(3\pi-t).\sin 3(3\pi-t).\cos 5(3\pi-t)dt$$

$$= -\int_0^{3\pi/2} \sin t.\sin 2t.\sin 3t.\cos 5t dt$$

$$= -\int_0^{3\pi/2} \sin x.\sin 2x.\sin 3x.\cos 5x dx. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được: I = 0.

Tính chất 8: Nếu f(x) liên tục trên R và tuần hoàn với chu kỳ T thì $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

CHỨNG MINH

Ta có :

$$\int_0^T f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{a+T} f(x)dx + \int_{a+T}^T f(x)dx. \quad (1)$$

Xét tích phân $I_3 = \int_{a+T}^T f(x)dx$ bằng cách đặt $t = x - T \Rightarrow dx = dt$.

Đổi cận: $x = a + T \Rightarrow t = a$,

$x = T \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$I_3 = \int_a^0 f(t+T)dt = -\int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(x)dx. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx. \text{ (đpcm)}$$

Áp dụng:

Ví dụ 9: Tính tích phân : $I = \int_0^{2004\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$.

Giải

Viết lại I dưới dạng:

$$I = \sqrt{2}\int_0^{2004\pi} |\sin x|\,dx$$

$$= \sqrt{2}\left(\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx + \int_{2\pi}^{4\pi} |\sin x|\,dx + \ldots + \int_{2002\pi}^{2004\pi} |\sin x|\,dx\right). \qquad (1)$$

Theo tính chất 8, ta được:

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = \int_{2\pi}^{4\pi} |\sin x|\,dx = \ldots = \int_{2002\pi}^{2004\pi} |\sin x|\,dx.$$

Vậy:

$$(1) \Leftrightarrow I = 1002\sqrt{2}\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = 1002\left(\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx - \int_0^{\pi} \sin x\,dx\right)$$

$$= 1002\sqrt{2}\left(-\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = 4008\sqrt{2}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (ĐHPCCC – 2000): Tính $I = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx$.

Bài 2. (ĐHGT – 2000): Tính $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x+\cos x}{4-\sin^2 x}dx$.

Bài 3. (ĐHRH HN – 94): Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi} x\sin^3 x\,dx$.

Bài 4. (ĐHNT TPHCM – 94): Tính $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx$.

Bài 5. (ĐHD HN – 96): Tính $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2.|\sin x|}{1+2^x}dx$.

Bài 6. (ĐHLN – 99): Tính tích phân $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4+\sin x}{x^2+1}dx$.

Bài 7. (ĐHSP HN II – 98): Cho f(x) liên tục trên R và thoả mãn:

$$f(x) + f(-x) = \sqrt{2-2\cos 2x} \quad \forall x \in R.$$

Tính tích phân : $I = \int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} f(x)dx$

Bài 8. Tính tích phân: $I = \int_{-1}^{1} (e^{x^2} \sin x + e^2.x^2)dx$.

Bài 9. Cho hàm số f(x) thoả mãn :

a. Liên tục trên R .

b. $\forall x \in R$ luôn có: $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x}$.

Hãy xác định $I = \int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} f(x)dx$.

Bài 10. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos 2x dx$.

b. $I = \int_{-1}^{1} x^3 e^{x^2} dx$

c. $I = \int_{-1/2}^{1/2} x^2.\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)dx$.

d. $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{\sin^3 x dx}{\sqrt{1+\cos x}}$.

Bài 11. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{0}^{\pi/2} \dfrac{\sin 2x dx}{1+\sin^4 x}$.

b. $I = \int_{0}^{\pi/2} \dfrac{\cos^{2004} x}{\cos^{2004} x + \sin^{2004} x}dx$.

Bài 12. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{0}^{\pi} \dfrac{x.\sin x dx}{3+\cos^2 x}$.

b. $I = \int_{0}^{\pi} \dfrac{x.\sin x dx}{1+\cos^2 x}$.

Bài 13. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\sin^2 x dx}{3^x+1}$.

b. $I = \int_{-1}^{1} \dfrac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.

Bài 14. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{0}^{3\pi} \sin x.\sin 2x.\sin 3x.\sin 4x dx$.

b. $\int_{0}^{\pi} x.\sin^3 x dx$

c. $\int_{0}^{2\pi} \sin(\sin x + nx)dx$

d. $I = \int_{0}^{2004\pi} \sqrt{1+\cos 2x}dx$.

e. $I = \int_{-1/2}^{1/2} x^2.\sin^9 x dx$.

f. $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \dfrac{(x^7 - x^5 + x^3 - x + 1)dx}{\cos^4 x}$.

Bài 15. (ĐHGT TPHCM – 99): Cho tích phân $I = \int_{0}^{\pi/2} \dfrac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x}dx$.

a. Chứng minh rằng $I = \int_{0}^{\pi/2} \dfrac{\sin^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x}dx$.

b. Tính I.

Bài 16. Tính $I = \int_{-1}^{1} \dfrac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.

Bài 17. (HVBCVT HN – 99): Tính $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4}{1+2^x}dx$.

Bài 18. (ĐHKTQD HN – 95): Tính $I = \int_{-2}^{2} \left[\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]^5 dx$.

Bài 19. (Đề 93): Tính $I = \int_{-1}^{1} \ln(x + \sqrt{x^2+1})dx$.

Bài 20. (ĐH Huế – 97): Cho hàm số:

$$g(x) = \begin{cases} f(tgx) \text{ neu } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ f(0) \quad \text{neu } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng g(x) liên tục trên $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b. Chứng minh rằng $\int_0^{\pi/4} g(x)dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} g(x)dx$.

Bài 21. Cho tích phân $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+tgx)dx$.

a. Chứng minh rằng $I = \int_0^{\pi/4} \ln\frac{2}{1+tgx}dx$.

b. Tính I.

Bài 22. (ĐHBK HN – 99): Cho hàm số g(x) = sinx.sin2x.cos5x.

a. Tìm họ nguyên hàm của g(x).

b. Tính $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{g(x)}{e^x+1}dx$.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $I = \frac{\pi}{4}$.

Bài 2. $I = \frac{\ln 9}{2}$.

Bài 3. $I = \frac{3\pi}{4}$.

Bài 4. $I = \frac{\pi}{2}$.

Bài 5. $I = \pi + 2$.

Bài 6. $I = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$.

Bài 7. $I = 6$.

Bài 8. $I = \frac{2e^2}{3}$.

Bài 9. $I = 6$.

CHỦ ĐỀ 5
TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ HỮU TỈ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để xác định tích phân các hàm số hữu tỉ ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Phương pháp tam thức bậc hai.
2. Phương pháp đổi biến.
3. Phương pháp phân tích
4. Sử dụng các phương pháp khác nhau.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1 : Phương pháp tam thức bậc hai.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trong Chủ đề 7: Nguyên hàm của hàm số hữu tỉ, ta đã biết các công thức sau:

1. $\int \frac{xdx}{x^2 \pm a} = \frac{1}{2}\ln|x^2 \pm a| + C.$

2. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, với $a \neq 0$.

Ví dụ 1: Tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{xdx}{x^4 + 4x^2 + 3}$.

Giải

Ta có:

$$I = \int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+2)^2 - 1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2+2)}{(x^2+2)^2 - 1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+2-1}{x^2+2+1}\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}.$$

Bài toán 2 : Phương pháp đổi biến.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Dựa trên các phương pháp đổi biến đã biết để tìm nguyên hàm đối với các hàm số hữu tỉ trong Phần I – Chủ đề 7, ta có thể tính được các tích phân xác định và trong trường hợp này ta cần thực hiện thêm phép đổi cận cho biến mới.

Ví dụ 2: Tính tích phân $I = \int_{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}}^{1} \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}dx = \int_{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}}^{1} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{(x-\frac{1}{x})^2+2}dx.$$

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp "*Lấy học trò làm trung tâm*"
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do ThS. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$ suy ra:

$$dt = (1 + \frac{1}{x^2})dx \text{ và } \frac{1+\frac{1}{x^2}}{(x-\frac{1}{x})^2+2} = \frac{dt}{t^2+2}.$$

Đổi cận:

- Với $x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}$ thì $t = \sqrt{6}$,
- Với $x = 1$ thì $t = 0$

Khi đó:

$$I = \int_{\sqrt{6}}^{0}\frac{dt}{t^2+2}.$$

Đặt: $t = \sqrt{2}\,\text{tg}u,\ -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dt = \frac{\sqrt{2}du}{\cos^2 u} = \sqrt{2}(1+\text{tg}^2u)du \text{ và } \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1+\text{tg}^2u)du}{\text{tg}^2u+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}du.$$

Đổi cận:

- Với $t = 0$ thì $u = 0$,
- Với $t = \sqrt{6}$ thì $u = \frac{\pi}{3}$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\pi/3}^{0}du = \frac{1}{\sqrt{2}}u\Big|_{\pi/3}^{0} = -\frac{\pi}{3\sqrt{2}}.$$

Bài toán 3 : Phương pháp phân tích.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Dựa trên các phương pháp phân tích đã biết để tìm nguyên hàm đối với các hàm số hữu tỉ trong Phần I – Chủ đề 7, ta có thể tính được các tích phân xác định. Ta nhắc lại các dạng quen thuộc sau:

Dạng 1: Tính tích phân:

$$\int\frac{x^2}{(ax+b)^\alpha}dx, \text{ với } a \neq 0.$$

Dạng 2: Tính tích phân:

$$I = \int\frac{dx}{ax^2+bx+c}, \text{ với } a \neq 0.$$

Dạng 3: Tính tích phân:

$$I = \int\frac{(\lambda x+\mu)dx}{ax^2+bx+c}, \text{ với } a \neq 0.$$

Dạng 4: Tính tích phân:

$$I = \int \frac{(a_1x^2 + b_1x + c_1)dx}{(x-\alpha)(ax^2 + bx + c)}, \text{ với } a \neq 0.$$

Dạng 5: Tính tích phân:

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}, \text{ với } a \neq b.$$

Dạng 6: Tính tích phân:

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Ví dụ 3: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x - 2}$.

Giải

Biến đổi:

$$\frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{3}(\ln|x-2| - \ln|x+1|)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ln\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 4: Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1}dx$

Giải

Biến đổi:

$$\frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} = x - 2 + \frac{3x+2}{x^2 + 2x + 1} = x - 2 + \frac{3(x+1) - 1}{(x+1)^2}$$

$$= x - 2 + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

Khi đó:

$$I = \int_0^3 \left[x - 2 + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\ln|x+1| + \frac{1}{x+1}\right)\Big|_0^3$$

$$= 3\ln 4 - \frac{9}{4}.$$

Ví dụ 5(ĐHNT HN – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2 + 3x + 10}{x^2 + 2x + 9}dx$

Giải

Biến đổi:

$$\frac{x^2 + 3x + 10}{x^2 + 2x + 9} = 1 + \frac{x+1}{x^2 + 2x + 9} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2 + 2x + 9}.$$

Khi đó:

$$I = \int_0^1 (1 + \frac{1}{2}.\frac{2x+2}{x^2+2x+9})dx = (x + \frac{1}{2}\ln|x^2 + 2x + 9|)\Big|_0^1 = x + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}.$$

Ví dụ 6: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x}{(1+3x)^3}dx$.

Giải

Sử dụng đồng nhất thức:

$$x = \frac{1}{3}(1 + 3x - 1).$$

ta được:

$$\frac{x}{(1+3x)^3} = \frac{1}{3}[\frac{1}{(1+3x)^2} - \frac{1}{(1+3x)^3}]$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{3}\int_0^1 [\frac{1}{(1+3x)^2} - \frac{1}{(1+3x)^3}]dx = \frac{1}{3}[-\frac{1}{3(1+3x)} + \frac{1}{6(1+3x)^2}]\Big|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

Bài toán 4 : Sử dụng các phương pháp khác nhau.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trong phần này chúng sẽ đi xem xét một vài bài toán được giải bằng các phương pháp khác nhau và mục đích quan trọng nhất là các em học sinh cần học được phương pháp suy luận qua mỗi ví dụ.

Ví dụ 7 (ĐHMĐC – 95/ Đề 85): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 4x^2 + 3}$.

Giải

Biến đổi:

$$\frac{1}{x^4 + 4x^2 + 3} = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{1}{2}.(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+3}).$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}.(\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} - \int_0^1 \frac{dx}{x^2+3}). \quad (1)$$

- Ta đi xác định tích phân: $I_1 = \int_0^1 .\frac{dx}{x^2+1}$ bằng cách đặt: $x = \text{tg}t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

suy ra:

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + \text{tg}^2 t)dt \text{ và } \frac{dx}{x^2+1} = \frac{(1+\text{tg}^2 t)dt}{\text{tg}^2 t + 1} = dt.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} dt = t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}. \qquad (2)$$

- Với tích phân: $I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+3}$ bằng cách đặt: $x = \sqrt{3}\,\text{tg}t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = \frac{\sqrt{3}dt}{\cos^2 t} = \sqrt{3}(1+\text{tg}^2 t)dt \Rightarrow \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{(1+\text{tg}^2 t)dt}{\text{tg}^2 t+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}dt.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{6}$

Khi đó:

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi/6} dt = \frac{1}{\sqrt{3}}t\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được $I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right)$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (ĐHKT TPHCM – 94): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x}{(1+2x)^3}dx$.

Bài 2. (ĐHNT HN – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3+2x^2+10x+1}{x^2+2x+9}dx$.

Bài 3. (ĐHSP TPHCM Khối A – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx$.

Bài 4. (ĐHXD HN – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{3}{1+x^3}dx$.

Bài 5. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6}dx$.

Bài 6. (Đề 40): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2-1}{1+x^4}dx$.

Bài 7. Tính các tích phân sau:

a. $\int_2^3 \frac{x^2dx}{(1-x)^9}$.

b. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2-3x+2}$

c. $\int_1^2 \frac{(x^2+2x-2)dx}{x^3+1}$.

d. $\int_2^4 \frac{x^3dx}{(x-1)^{10}}$.

e. $\int_{-1}^1 \frac{(2x^3-10x^2+16x-1)dx}{x^2-5x+6}$.

f. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)^2(x+1)^2}$.

Bài 8. Tính các tích phân sau:

a. $\int_2^3 \frac{(x^3 - 3x^2 + x + 6)dx}{x^3 - 5x^2 + 6x}$.

b. $\int_1^2 \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + x}$

c. $\int_1^2 \frac{x^3 - x^2 - 4x - 1}{x^4 + x^3}$.

d. $\int_0^{1/2} \frac{(2x+1)dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3}$.

e. $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^6 + 1)^2}$.

f. $\int_2^4 \frac{(x^3 - 1)dx}{x(x^3 - 4)(x^4 - 4x + 1)}$.

g. $\int_{-1}^0 \frac{7x - 4}{x^3 - 3x + 2}$.

h. $\int_1^3 \frac{dx}{x^4 + 4x^2 + 3}$

i. $\int_0^1 \frac{x^3dx}{(x^8 - 4)^2}$.

j. $\int_1^3 \frac{(x^2 - 3)dx}{x(x^4 + 3x^2 + 2)}$.

k. $\int_1^3 \frac{(1 - x^4)dx}{x(1 + x^4)}$.

l. $\int_1^2 \frac{(x^2 - 1)dx}{x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1}$.

Bài 9. Tính các tích phân sau:

a. (CĐSP HN Khối A – 2000): $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1}dx$.

b. (ĐHNL TPHCM 95): $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}$

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $I = \frac{1}{18}$.

Bài 2. $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.

Bài 3. $I = \ln\frac{9}{2}$.

Bài 4. $I = \ln 2 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Bài 5. $I = \frac{\pi}{3}$.

Bài 6. $I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

CHỦ ĐỀ 6

TÍCH PHÂN CÁC HÀM LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Việc xác định tích phân của các hàm số lượng giác dựa trên các phương pháp đã biết để xác định nguyên hàm của hàm lượng giác, ta đã biết tới các phương pháp sau:

1. Sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản.
2. Các hàm phân thức hữu tỉ đối với các hàm lượng giác
3. Sử dụng các phép biến đổi lượng giác đưa về các nguyên hàm cơ bản
4. Phương pháp đổi biến.
5. Phương pháp tích phân từng phần.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1 : Sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trong Phần I – Chủ đề 8: Nguyên hàm của hàm số lượng giác, ta đã biết cách xác định nguyên hàm dạng:

Dạng 1: Bao gồm:

1. $I = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

2. $I = \int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$.

3. $I = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$.

Dạng 2: Bao gồm:

1. $I = \int \frac{dx}{\sin x + \sin\alpha}$ và $I = \int \frac{dx}{\sin x + m}$, với $|m| \le 1$.

2. $I = \int \frac{dx}{\cos x + \cos\alpha}$ và $I = \int \frac{dx}{\cos x + m}$, với $|m| \le 1$.

Dạng 3: Bao gồm:

1. $I = \int tgx.tg(x+\alpha)dx$.
2. $I = \int tg(x+\alpha).cotg(x+\beta)dx$.
3. $I = \int cotg(x+\alpha).cotg(x+\beta)dx$.

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp "*Lấy học trò làm trung tâm*"
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

Ví dụ 1: Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x.\sin(x+\frac{\pi}{4})}$.

Giải

Cách 1: (Sử dụng phương pháp trong dạng toán cơ bản): Sử dụng đồng nhất thức:

$$1 = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos[(x+\frac{\pi}{4})-x]}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\cos[(x+\frac{\pi}{4})-x].$$

Ta được:

$$\frac{1}{\cos x.\sin(x+\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}\cos[(x+\frac{\pi}{4})-x]}{\cos x.\sin(x+\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}[\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos x+\sin(x+\frac{\pi}{4})\sin x]}{\cos x.\sin(x+\frac{\pi}{4})}$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})} + \frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

Khi đó:

$$I = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\left[\frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})} + \frac{\sin x}{\cos x}\right]dx = \sqrt{2}\left[\ln\left|\sin(x+\frac{\pi}{4})\right| - \ln|\cos x|\right]\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \sqrt{2}\ln\left|\frac{\sin(x+\pi/4)}{\cos x}\right|\Bigg|_0^{\pi/4} = \sqrt{2}\ln 2.$$

Cách 2: (Dựa trên đặc thù của hàm dưới dấu tích phân): Ta có:

$$I = \int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x.\sin(x+\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x.(\sin x+\cos x)} = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x.(tgx+1)}$$

$$= -\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{d(tgx)}{tgx+1} = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{d(tgx+1)}{tgx+1} = \sqrt{2}\ln|tgx+1|\Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2}\ln 2.$$

Bài toán 2 : Các hàm phân thức hữu tỉ đặc biệt đối với các hàm lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trong Phần I – Chủ đề 8: Nguyên hàm của hàm số lượng giác , ta đã biết cách xác định nguyên hàm dạng:

Dạng 1: Tính tích phân:

$$I = \int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}.$$

Dạng 2: Tính tích phân:

$$I = \int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a_2\sin x+b_2\cos x}dx.$$

Dạng 3: Tính tích phân:

$$I = \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a_2 \sin x + b_2 \cos x)^2} dx.$$

Dạng 4: Tính tích phân:

$$I = \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}.$$

Dạng 5: Tính tích phân:

$$I = \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} dx.$$

Dạng 6: Tính tích phân:

$$I = \int \frac{a_1 \sin^2 x + b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a_2 \sin x + b_2 \cos x} dx.$$

Dạng 7: Tính tích phân:

$$I = \int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x}.$$

Dạng 8: Tính tích phân:

$$I = \int \frac{\sin x . \cos x dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^\alpha}.$$

Ví dụ 2: Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \text{tg}x}$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}.$$

Giả sử:

$$\cos x = a(\sin x + \cos x) + b(\cos x - \sin x) = (a - b)\sin x + (a + b)\cos x$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}.$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (1 + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}) dx = \frac{1}{2}(x + \ln|\sin x + \cos x|)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2.$$

Ví dụ 3: (ĐHXD HN – 97): Cho hàm số

$$f(x) = 4\cos x + 3\sin x \text{ và } g(x) = \cos x + 2\sin x.$$

a. Tìm A,B để $g(x) = A.f(x) + B.f'(x)$.

b. Tính $I = \int_0^{\pi/4} \frac{g(x)}{f(x)}dx$.

Giải

a. Ta có:

$$\cos x + 2\sin x = A(4\cos x + 3\sin x) + B(-4\sin x + 3\cos x)$$
$$= (4A + 3B)\cos x + (3A - 4B)\sin x.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} 4A + 3B = 1 \\ 3A - 4B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2/5 \\ B = -1/5 \end{cases}$$

b. Ta có:

$$I = \int_0^{\pi/4}\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\frac{-4\sin x + 3\cos x}{4\cos x + 3\sin x}\right)dx = \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\ln|4\cos x + 3\sin x|\right)\Big|_0^{\pi/4}$$
$$= \frac{\pi}{10} + \frac{1}{5}\ln\frac{7}{4\sqrt{2}}$$

Bài toán 3 : Sử dụng các phép biến đổi lượng giác đưa về các nguyên hàm cơ bản.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các phép biến đổi lượng giác đưa biểu thức dưới dấu tích phân về dạng quen thuộc, các phép biến đổi thường dùng bao gồm:

- Phép biến đổi tích thành tổng (chúng ta đã thấy trong phương pháp phân tích).
- Hạ bậc.
- Chia khoảng
- Các kỹ thuật biến đổi khác.

Chúng ta sẽ lần lượt xem xét các ví dụ mẫu.

Ví dụ 4: Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi}\cos^3 x.\cos 5x dx$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(\cos 3x + 3\cos x).\cos 5x dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(\cos 5x.\cos 3x + 3\cos 5x.\cos x)dx$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}[\frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) + \frac{3}{2}(\cos 6x + \cos 4x]dx$$
$$= \frac{1}{4}[\frac{1}{2}(\frac{1}{8}\sin 8x + \frac{1}{2}\sin 2x) + \frac{3}{2}(\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 4x]\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Ví dụ 5 (ĐHNN I HN Khối A – 98): Tính tích phân: $I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1+\sin 2x + \cos 2x}{\sin x + \cos x}dx$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1+\sin 2x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}\right)dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\sin x + \cos x + \cos x - \sin x)dx$$

$$= 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx = 2\sin x\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = 1.$$

Ví dụ 6 (ĐHGT TPHCM – 2000): Tính tích phân: $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} tg^2 x.\frac{1}{\cos^4 x}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} tg^2 x.\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} tg^2 x(tg^2 x + 1)d(tgx)$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} (tg^4 x + tg^2 x)d(tgx) = \left(\frac{1}{5}tg^5 x + \frac{1}{3}tg^3 x\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{42\sqrt{3}-8}{15}.$$

Ví dụ 7: Tính các tích phân:

a. (ĐHY HN – 99): $I = \int_{\pi}^{4\pi/3} \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}}$. b. (HVQY – 99): $J = \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+\cos x}$.

Giải

a. Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{\pi}^{4\pi/3} \frac{dx}{2\sin\frac{x}{4}.\cos\frac{x}{4}} = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{4\pi/3} \frac{dx}{tg\frac{x}{4}.\cos^2\frac{x}{4}} = 2\int_{\pi}^{4\pi/3} \frac{d(tg\frac{x}{4})}{tg\frac{x}{4}} = 2\ln\left|tg\frac{x}{4}\right|\Big|_{\pi}^{4\pi/3}$$

$$= \ln 3.$$

b. Biến đổi J về dạng:

$$J = \int_0^{1/2} \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = tg\frac{x}{2}\Big|_0^{1/2} = tg\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 8: (ĐHNT HN – 94): Tính tích phân: $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}dx$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2}dx = \int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right|dx = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

$$= \sqrt{2}\,[\int_0^{3\pi/2}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})dx - \int_{3\pi/2}^{2\pi}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})dx\,]$$

$$= \sqrt{2}\,[-2\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\Big|_0^{3\pi/2} + 2\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}\,] = 4\sqrt{2}.$$

Bài toán 4 : Phương pháp đổi biến.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta đã được biết trong Phần I – Chủ đề 8: Nguyên hàm các hàm số lượng giác , đối với các dạng nguyên hàm:

$$I = \int R(\sin x, \cos x)dx$$

Ta lựa chọn một trong các hướng sau:

- *Hướng 1*: Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$
  thì sử dụng phép đổi biến tương ứng là $t = \cos x$.
- *Hướng 2*: Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$
  thì sử dụng phép đổi biến tương ứng là $t = \sin x$.
- *Hướng 3*: Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$
  thì sử dụng phép đổi biến $t = \text{tg}x$ (đôi khi có thể là $t = \text{cotg}x$).
  Do đó với các tích phân dạng:
  1. $I = \int \text{tg}^n x dx$, với $n \in Z$ được xác định nhờ phép đổi biến $t = \text{tg}x$
  2. $I = \int \text{cotg}^n x dx$, với $n \in Z$ được xác định nhờ phép đổi biến $t = \text{cotg}x$.
- *Hướng 4*: Mọi trường hợp đều có thể đưa về tích phân các hàm hữu tỉ bằng phép đổi biến $t = \text{tg}\frac{x}{2}$.

Khi sử dụng phương pháp này cho các bài toán tích phân chúng ta chỉ cần trình bày thêm bước đổi cận.

Ví dụ 9 (ĐHQG TPHCM Khối A – 98): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2}\cos^3 x.\sin^2 x dx$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 x).\sin^2 x.\cos x dx = \int_0^{\pi/2}(\sin^2 x - \sin^4 x).\cos x dx.$$

Đặt $t = \sin x$, khi đó: $dt = \cos x dx$

Đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow t = 0$

với $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Khi đó:

$$I = \int_0^1 (t^2 - t^4)dt = (\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5)\Big|_0^1 = \frac{2}{15}.$$

Nhận xét: Trong bài toán trên sở dĩ ta định hướng được phép biến đổi như vậy là bởi nhận xét rằng:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

do đó sử dụng phép đổi biến tương ứng là $t = \sin x$.

Ngoài ra bài toán trên còn có thể được giải bằng việc biến đổi biểu thức: $\cos^3 x.\sin^2 x$ về dạng tổng của các hàm lượng giác, cụ thể:

$$\cos^3 x.\sin^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x.\cos x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x).\cos x = \frac{1}{8}(\cos x - \cos 4x.\cos x)$$

$$= \frac{1}{8}\left[\cos x - \frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 3x)\right] = \frac{1}{16}(2\cos x - \cos 5x - \cos 3x).$$

Ví dụ 10 (HVNH TPHCM Khối D – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x}dx$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin 2x.\cos 2x}{1 + \frac{1 + \cos 2x}{2}}dx = \int_0^{\pi/4} \frac{4\sin 2x.\cos 2x}{3 + \cos 2x}dx$$

Đặt $t = \cos 2x$, khi đó: $dt = -2\sin 2x dx$

Đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow t = 1$

với $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$I = \int_1^0 \frac{-2tdt}{3 + t} = -2\int_1^0 \frac{tdt}{t + 3} = -2\int_1^0 \frac{(t + 3) - 3}{t + 3}dt = -2\int_1^0 \left(1 - \frac{3}{t + 3}\right)dt$$

$$= -2(t - 3\ln|t + 3|)\Big|_1^0 = \frac{2}{15}.2 + 6\ln\frac{3}{4}.$$

Nhận xét:

1. Trong bài toán trên sở dĩ ta định hướng được phép biến đổi như vậy là bởi nhận xét rằng:

$$R(-\sin 2x, \cos 2x) = -R[\sin(-2x), \cos(-2x)]$$

do đó sử dụng phép đổi biến tương ứng là $t = \cos 2x$.

2. Việc lựa chọn ẩn phụ ở một vài bài toán cần được định hướng sau một vài phép biến đổi. Cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 11: Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{3 + \sin 2x}}dx$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{4 - (\sin x - \cos x)^2}}dx.$$

Đặt t = sinx − cosx, khi đó: dt = (cosx + sinx)dx

Đổi cận: với $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0$

với $x = 0 \Rightarrow t = -1$.

Khi đó:

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$$

Đặt t = 2sinu, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dt = 2\cos u du \text{ và } \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{2\cos u du}{2|\cos u|} = du.$$

Đổi cận:

- Với t = 0 thì u = 0,
- Với t = −1 thì $u = -\frac{\pi}{6}$.

Khi đó:

$$I = \int_{-\pi/6}^{0} du = u\Big|_{-\pi/6}^{0} = \frac{\pi}{6}.$$

Ví dụ 12: (ĐHLN − 2000): Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$.

Giải

Đặt $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ta được:

$$dt = \frac{1}{2}.\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}.(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2})dx = \frac{1}{2}.(1+t^2)dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

Đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow t = 0$

với $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Khi đó:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+2t+3} = -\frac{1}{t+2}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Ví dụ 13: Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x.dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}$

Giải

a. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu a = b, ta được:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x.dx}{|a|} = \frac{1}{2|a|}\cos 2x\Big|_0^{\pi/3} = -\frac{1}{4|a|}.$$

Trường hợp 2. Nếu $a \neq b$.

Đặt $t = \sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} \Rightarrow t^2 = a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x$, khi đó:

$$2tdt = (a^2 - b^2)\sin 2xdx \Rightarrow \sin 2xdx = \frac{2tdt}{a^2 - b^2}.$$

Đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow t = |b|$

với $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = |a|$.

Ta có:

$$\frac{\sin 2x.dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}} = \frac{2dt}{a^2 - b^2}.$$

Khi đó:

$$I = \frac{2}{a^2 - b^2}\int_{|b|}^{|a|} dt = \frac{2}{a^2 - b^2}t\Big|_{|b|}^{|a|} = \frac{2(|a| - |b|)}{a^2 - b^2}$$

Bài toán 5 : Phương pháp tích phân từng phần.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta đã được biết trong Phần I – Chủ đề 5: Xác định nguyên hàm bằng phương pháp tích phân từng phần , đối với các dạng nguyên hàm:

Dạng 1: Tính tích phân:

$$\int P(x)\sin\alpha x dx \text{ hoặc } \int P(x)\cos\alpha x dx$$

với P là một đa thức thuộc R[X] và $\alpha \in R^*$.

Khi đó ta đặt:

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin\alpha x dx \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos\alpha x dx \end{cases}.$$

Dạng 2: Tính tích phân:

$$\int e^{ax}\cos(bx) \text{ (hoặc } \int e^{ax}\sin(bx) \text{) với } a, b \neq 0.$$

Khi đó ta đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(bx) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = \sin(bx) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases}.$$

Ví dụ 14: (HVKTMM – 2000): Tính tích phân: $I = \int_0^1 x\,tg^2 x dx$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^1 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int_0^1 \frac{xdx}{\cos^2 x} - \int_0^1 xdx. \quad (1)$$

Xác định $I_1 = \int_0^1 \frac{xdx}{\cos^2 x}$ bằng phương pháp tích phân từng phần, như sau:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = tgx \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_1 = xtgx\Big|_0^1 - \int_0^1 tgxdx = (xtgx + \ln|\cos x|)\Big|_0^1 = tg1 + \ln(\cos 1). \quad (2)$$

Ngoài ra:

$$I_2 = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được:

$$I = tg1 + \ln(\cos 1) - \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 15: Cho $I_t = \int_0^t (x.\sin x)^2 dx$.

a. Tính tích phân khi $t = \pi$.

b. Chứng minh rằng $I_{(t)} + I_{(-t)} = 0 \quad (\forall t \in R)$.

Giải

a. Với $t = \pi$, ta được:

$$I = \int_0^\pi \frac{x^2}{2}(1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_2^\pi \frac{x^2}{2}dx - \int_0^\pi x^2\cos 2xdx\right). \quad (1)$$

- Xét tích phân:

$$I_1 = \int_2^\pi x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}. \quad (2)$$

- Xét tích phân $I_2 = \int_0^\pi x^2\cos 2xdx$ bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2sdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_2 = \frac{x^2}{2}\sin 2x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi x.\sin 2xdx = -\int_0^\pi x.\sin 2xdx.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2sdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos s2x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_2 = -(-\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2xdx) = -(-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Thay (2,), (3) vào (1), ta được:

$$I = \frac{1}{2}(\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2}).$$

Bài toán 6 : Sử dụng nguyên hàm phụ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta đã biết tới phương pháp tìm nguyên hàm bằng việc sử dụng nguyên hàm phụ, bây giờ ta áp dụng phương pháp đó để tính một vài tích phân đặc biệt, cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 16: Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/2}\cos^2 x.\cos^2 2xdx$.

Giải

Xét tích phân:

$$J = \int_0^{\pi/2}\sin^2 x.\cos^2 2xdx.$$

Ta có nhận xét:

$$I + J = \int_0^{\pi/2}\cos^2 2xdx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1 + \cos 4x)dx = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{4}\sin 4x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$I - J = \int_0^{\pi/2}\cos^3 2xdx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(\cos 6x + 3\cos 2x)dx = \frac{1}{4}(\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{3}{2}\sin 2x)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= 0.$$

Suy ra $I = \frac{\pi}{8}$.

Nhận xét:

1. Ta hoàn toàn có thể xác định tích phân đã cho bằng phương pháp biến đổi lượng giác thông thường, cụ thể:

$$\cos^2 x.\cos^2 2x = \frac{1}{4}(1 + \cos 2x)(1 + \cos 4x) = \frac{1}{4}(1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 4x.\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{4}[1 + \cos 2x + \cos 4x + \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x] = \frac{1}{8}(2 + 3\cos 2x + 2\cos 4x + \cos 6x)$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}(2 + 3\cos 2x + 2\cos 4x + \cos 6x)dx = \frac{\pi}{8}.$$

2. Ngoài ra bằng việc sử dụng phương pháp đổi biến, ta có thể nhìn nhận được nguyên hàm phụ (như trong chủ đề 6). Ta nhắc lại hai phép đổi biến rất phổ biến là:

- Với $I = \int_0^{\pi/2} f dx$ có thể đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$.
- Với $I = \int_0^{\pi} f dx$ có thể đặt $t = \pi - x$.

Với bài toán trên ta thực hiện như sau:

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$, khi đó: $dt = -dx$

Đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

với $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x.\cos^2 2x dx = \int_{\pi/2}^{0} \cos^2(\frac{\pi}{2} - t).\cos^2 2(\frac{\pi}{2} - t)(-dt)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t.\cos^2 2t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x.\cos^2 2x dx = J.$$

Ta có:

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \cos^2 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1 + \cos 4x)dx = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{4}\sin 4x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Suy ra $I = \frac{\pi}{8}$.

Ví dụ 17: Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$.

Giải

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$, khi đó: $dt = -dx$

Đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

với $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx = \int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin^6(\frac{\pi}{2} - t)(-dt)}{\sin^6(\frac{\pi}{2} - t) + \cos^6(\frac{\pi}{2} - t)}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^6 t}{\sin^6 t + \cos^6 t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^6 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx = J.$$

Mặt khác ta có:

$$I + J = \int_0^{\pi/2} dx = x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Suy ra $I = \dfrac{\pi}{4}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (ĐHMĐC – 2000): Tính $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin x.\sin(x + \frac{\pi}{6})}$.

Bài 2. (ĐHBK HN – 99): Cho hàm số $h(x) = \dfrac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}$.

a. Tìm A, B để $h(x) = \dfrac{A\cos x}{(2+\sin x)^2} + \dfrac{B\cos x}{2+\sin x}$.

b. Tính $I = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} h(x)dx$.

Bài 3. (ĐHTS – 99): Tính tích phân : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin 2x(1+\sin^2 x)^3 dx$.

Bài 4. (ĐHBK HN – 98): Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos 2x(\cos^4 x + \sin^4 x)dx$

Bài 5. (ĐHQG TPHCM – 99): Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos px.\cos qx dx$ khi $\begin{cases} p = q \\ p \neq q \end{cases}$.

Bài 6. (ĐHTM HN – 2000): Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{4\sin x}{(\sin x + \cos x)^3}dx$.

Bài 7. (HVKTMM – 99): Tính tích phân: $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^4 x \cos x}$.

Bài 8. (ĐH TCKT HN – 96): Tính tích phân sau: $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + 7\cos x + 6}{4\sin x + 3\cos x + 5}dx$.

Bài 9. (ĐH TCKT HN – 95): Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x.\cos x}{\sqrt{b^2\cos^2 x + c^2\sin^2 x}}dx$.

Bài 10. (ĐHTL – 2000): Tính tích phân: $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{3\sin x + 4\cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx$.

Bài 11. (ĐHBK HN – 94): Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos^2 x dx$.

Bài 12. (ĐHCĐ – 99): Tính $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (2x-1).\cos^2 x dx$.

Bài 13. (HVNH TPHCM Khối A – 2000): Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{x + \sin x}{\cos^2 x}dx$.

Bài 14. (ĐH TCKT HN – 99): Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi} x.\cos^4 x.\sin^3 x dx$.

Bài 15. Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$.

Bài 16. (ĐHMĐC – 2000): Tính tích phân : $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{tg^2 x + \cot g^2 x - 2} dx$.

Bài 17. (ĐHXD HN – 2000): Chứng minh rằng với m,n khác nhau thuộc N:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx.\cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx.\sin mx dx = 0.$$

Bài 18. (ĐH Thái Nguyên Khối A,B – 2000): Chứng minh rằng:

$$\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx = 0.$$

Bài 19. (ĐHQG TPHCM Khối A – 98):

a. Tính các tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x dx}{1+\sin^4 x}$ và $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x dx}{1+\cos^4 x}$.

b. Chứng minh rằng $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x.\sin x}{(1+\sin^4 x)(1+\cos^4 x)} dx > \frac{\pi}{12}$.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $I = 2\ln\frac{3}{2}$.

Bài 2.

a. $A = -4$ và $B = 2$.

b. $I = \ln 2 - 2$.

Bài 3. $I = \frac{15}{4}$.

Bài 4. $I = 0$.

Bài 5. $I = \begin{cases} \pi & \text{Nếu } p = q \\ 0 & \text{Nếu } p \neq q \end{cases}$.

Bài 6. $I = 2$.

Bài 7. $I = \ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{14}{3} - \frac{26}{9\sqrt{3}}$.

Bài 8. $I = \frac{\pi}{2} + \ln\frac{9}{8} + \frac{1}{6}$.

Bài 9. $I = \begin{cases} \frac{1}{2|b|} & \text{khi } b = \pm c \\ \frac{1}{|c|+|b|} & \text{khi } b \neq \pm c \end{cases}$.

Bài 10. $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \ln 3$.

Bài 11. $I = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Bài 12. $I = \frac{1}{8}(\pi^2 - 2\pi) - \frac{1}{4}$.

Bài 13. $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln\frac{1}{2} + 1$.

Bài 14. $I = \frac{2\pi}{35}$.

Bài 15. $I = \frac{\pi}{4}$.

Bài 16. $I = \ln\frac{4}{3}$.

Bài 17. Chúng đều bằng 0.

Bài 18. $I = 0$.

CHỦ ĐỀ 7
TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ VÔ TỈ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để xác định tích phân của các hàm số vô tỉ ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản.
2. Phương pháp đổi biến.
3. Phương pháp tích phân từng phần.
4. Sử dụng các phép biến đổi.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1 : Sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trong Chủ đề 9: Nguyên hàm của hàm số vô tỉ – Phần I, ta đã biết các công thức sau:

1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \sqrt{x^2 \pm a} + C.$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$
3. $\int \sqrt{x^2 \pm a}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a} \pm \frac{a}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$

trong chủ đề này ta đi sử dụng chúng để tính tích phân xác định.

Ví dụ 1 Tính tích phân: $I = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$

Giải

Cách 1: Đặt: $x = \text{tgt}, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$,

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$

Khi đó:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^3 t} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos tdt}{\cos^4 t} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos tdt}{(1-\sin^2 t)^2}.$$

Đặt $u = \sin t \Rightarrow du = \cos tdt$.

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp "*Lấy học trò làm trung tâm*"
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

Đổi cận:

- Với t = 0 thì u = 0,
- Với $t = \frac{\pi}{4}$ thì $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Khi đó:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{du}{(u+1)^2(u-1)^2} = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \frac{2u}{(u+1)(u-1)}\right]_0^{\sqrt{2}/2}$$

$$= \frac{1}{2}[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$$

Cách 2: Đặt: $t = x + \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t - x = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow (t-x)^2 = 1 + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t}$

suy ra:

$$\sqrt{1+x^2} = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t} \text{ và } dx = \frac{t^2+1}{2t^2}dt.$$

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 1,
- Với x = 1 thì $t = 1 + \sqrt{2}$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{4}\int_1^{1+\sqrt{2}} (t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3})dt = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}t^2 + 2\ln|t| - \frac{1}{2t^2})\Big|_1^{1+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)].$$

Cách 3: (Sử dụng phương pháp tích phân từng phần): Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2+1} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = x\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}. \qquad (1)$$

Với

$$J = \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_0^1 \frac{[(x^2+1)-1]dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx\,dx - \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= I - \ln|1 + \sqrt{2}. \qquad |(2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$I = \frac{1}{2}[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)].$$

Bài toán 2 : Phương pháp đổi biến.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Dựa trên các phương pháp đổi biến đã biết để tìm nguyên hàm đối với các hàm số vô tỉ trong Phần I – Chủ đề 9, ta có thể tính được các tích phân xác định và trong trường hợp này ta cần thực hiện thêm phép đổi cận cho biến mới. . Ta cần nhớ lại các dạng quen thuộc sau:

Dạng 1: $I = \int R(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}})dx$, với ad – bước ≠ 0.

Dạng 2: $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

Dạng 3: $I = \int R(x, \sqrt{(x-a)(b-x)})dx$, với ad – bc ≠ 0.

Dạng 4: $I = \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, với ad – bc ≠ 0.

Dạng 5: $I = \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$, với ad – bc ≠ 0.

Dạng 6: $I = \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$, với ad – bc ≠ 0.

Dạng 7: $I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$, với ad – bc ≠ 0.

Dạng 8: $I = \int \dfrac{dx}{(\lambda x + \mu)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$.

Ví dụ 2 (ĐHGT HN – 98): Tính tích phân $I = \int_0^{7/3} \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách đặt ẩn phụ sau:

Cách 1: Đặt $t = 3x + 1$ suy ra: $dt = 3dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$,
- Với $x = \dfrac{7}{3}$ thì $t = 8$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{9}.\int_1^8 \frac{(t+2)dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{9}\int_1^8 (t^{2/3} + 2t^{-1/3})dt = \frac{1}{9}(\frac{3}{5}t^{5/3} + 2.\frac{3}{2}.t^{2/3})\Big|_1^8 = \frac{46}{15}.$$

Cách 2: Đặt $t = \sqrt[3]{3x+1} \Rightarrow t^3 = 3x + 1$ suy ra: $3t^2dt = 3dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$,
- Với $x = \dfrac{7}{3}$ thì $t = 2$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{3}.\int_1^2 \frac{(t^3+2)t^2dt}{t} = \frac{1}{3}\int_1^2 (t^4 + 2t)dt = \frac{1}{3}(\frac{1}{5}t^5 + t^2)\Big|_1^2 = \frac{46}{15}.$$

Ví dụ 3: Tính tích phân $I = \int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}dx$.

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong ba cách đặt ẩn phụ sau:

Cách 1: Đặt $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx$.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 0,
- Với x = 2 thì t = 8.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{3}\int_0^8 (t+1)^{1/2}dt = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}(t+1)^{3/2}\Big|_0^8 = \frac{52}{9}.$$

Cách 2: Đặt $t = x^3 + 1$ suy ra: $dt = 3x^2dx$

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 1,
- Với x = 2 thì t = 9.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{3}\int_1^9 t^{1/2}dt = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}.t^{3/2}\Big|_1^9 = \frac{52}{9}.$$

Cách 3: Đặt $t = \sqrt{x^3+1} \Rightarrow t^2 = x^3 + 1$ suy ra:

$$dt = \frac{3x^2dx}{2\sqrt{x^3+1}} \Rightarrow x^2dx = \frac{2}{3}tdt.$$

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 1,
- Với x = 2 thì t = 3.

Khi đó:

$$I = \frac{2}{3}\int_1^3 t^2dt = \frac{2}{3}.\frac{1}{3}t^3\Big|_1^3 = \frac{52}{9}.$$

Ví dụ 4: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}dx}{\sqrt{(1+x)^5}}$.

Giải

Viết lại I dưới dạng:

$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{(1+x)^2}.$$

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách đặt ẩn phụ sau:

Cách 1:

Đặt $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2}$

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 1,
- Với x = 1 thì t = 0

Khi đó:

$$I = \int_1^0 t\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^2 \cdot \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2} = -\int_1^0 t^2dt = -\frac{1}{3}t^3\Big|_1^0 = \frac{1}{3}.$$

Cách 2:

Đặt $x = \cos 2t \Rightarrow dx = -2\sin 2t dt$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{4}$,
- Với $x = 1$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$I = -2\int_{\pi/4}^0 \sqrt{\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}}\,\frac{\sin 2tdt}{(1+\cos 2t)^2} = \int_0^{\pi/4}\frac{tg^2 tdt}{\cos^2 t} = \int_0^{\pi/4} tg^2 t\,d(tgt)$$

$$= \frac{1}{3}tg^3t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 5: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+8)}}$.

Giải

Đặt: $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+8}$ suy ra:

$$dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+8}}\right)dx = \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+8})dx}{2\sqrt{(x+1)(x+8)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+8)}} = \frac{2dt}{t}.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1 + 2\sqrt{2}$,
- Với $x = 1$ thì $t = 3 + \sqrt{2}$.

Khi đó:

$$I = 2\int_{1+2\sqrt{2}}^{3+\sqrt{2}}\frac{dt}{t} = 2\ln|t|\Big|_{1+2\sqrt{2}}^{3+\sqrt{2}} = 2\ln\frac{3+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 6: Tính tích phân: $I = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(-4+5x-x^2)^3}}$.

Giải

Viết lại I dưới dạng:

$$I = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{[(x-1)(4-x)]^3}}.$$

Ta đi xác định nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{dx}{\sqrt{[(x-a)(b-x)]^3}}$, với $a < b$.

Đặt: $x = a + (b - a)\sin^2 t$, với $0 \le < t \le \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = 2(b - a)\sin t.\cos t.dt = (b - a)\sin 2t.dt$$

$$\frac{dx}{\sqrt{[(x-a)(b-x)]^3}} = \frac{(b-a)\sin 2t.dt}{\sqrt{[(b-a)\sin^2 t.(b-a)\cos^2 t]^3}}$$

$$= \frac{(b-a)\sin 2t.dt}{(b-a)^3\sin^3 2t} = \frac{1}{(b-a)^2}.\frac{dt}{\sin^2 2t}$$

Khi đó:

$$F(x) = \frac{1}{(b-a)^2}\int\frac{dt}{\sin^2 2t} = -\frac{\cot g2t}{(b-a)^2} + C = -\frac{a+b-2x}{2\sqrt{(x-a)(b-x)}} + C.$$

Từ đó:

$$I = F(x)\Big|_2^3 = \frac{1+4-2x}{2\sqrt{(x-1)(4-x)}}\Big|_2^3 = \frac{5-2x}{2\sqrt{(x-1)(4-x)}}\Big|_2^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Chú ý: Trong lời giải trên sở dĩ chúng ta lựa chọn hướng tìm nguyên hàm là bởi phép đổi cận bị lẻ.

Ví dụ 7: Tính tích phân: $I = \int_0^{1/2}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Giải

Đặt: $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = \cos t dt \text{ và } \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin^2 t.\cos tdt}{\cos t} = \sin^2 tdt = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = \frac{1}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{6}$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1-\cos 2t)dt = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{\pi-2}{8}.$$

Ví dụ 8: Tính tích phân: $I = \int_0^{a\sqrt{3}}\frac{x.dx}{\sqrt{a^2+x^2+\sqrt{(a^2+x^2)^3}}}$.

Giải.

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^{a\sqrt{3}}\frac{x.dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(1+\sqrt{a^2+x^2})}} = \int_0^{a\sqrt{3}}\frac{x.dx}{\sqrt{a^2+x^2}.\sqrt{1+\sqrt{a^2+x^2}}}.$$

Đặt $t = 1 + \sqrt{a^2 + x^2}$, khi đó:

$$dt = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}dx \Rightarrow xdx = (t - 1)dt$$

Đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow t = a + 1$

với $x = a\sqrt{8} \Rightarrow t = 2a + 1$.

Ta có:

$$\frac{x.dx}{\sqrt{a^2 + x^2}.\sqrt{1 + \sqrt{a^2 + x^2}}} = \frac{(t-1)dt}{(t-1)\sqrt{t}} = \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Khi đó:

$$I = \int_{a+1}^{2a+1}\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_{a+1}^{2a+1} = 2(\sqrt{2a+1} - \sqrt{a+1}).$$

Bài toán 3 : Phương pháp tích phân từng phần.

Ví dụ 9: Tính tích phân: $I = \int_0^{\sqrt{3}}\frac{x\ln(x + \sqrt{x^2+1})dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Giải

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\ dv = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}}dx = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \\ v = \sqrt{x^2+1} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \sqrt{x^2+1}\ln(x + \sqrt{x^2+1})\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}}dx = 2\ln 3 - \sqrt{3}.$$

Bài toán 4 : Sử dụng các phép biến đổi.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để khử căn thức ở mẫu của hàm số dưới dấu tích phân một phương pháp thường được sử dụng là phép trục căn thức. Các em học sinh cần xem lại các dạng sau:

Dạng 1: $I = \int\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}dx$, với $a > 0$.

Dạng 2: $\int\dfrac{dx}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{ax+c}}$, với $a \neq 0$ và $b - c \neq 0$.

Dạng 3: $I = \int\dfrac{v(x)dx}{\sqrt{u^2(x) \pm \alpha}}$.

Dạng 4: $I = \int\dfrac{P(x)}{Q(x)}\dfrac{dx}{y}$, với $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Ví dụ 10 (ĐHQG HN Khối B – 97): Tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^1 (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx = \frac{2}{3}[(x+1)^{3/2} - x^{3/2}]\Big|_0^1 = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1).$$

Ví dụ 11: Tính tích phân: $I = \int_2^6 \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}dx$.

Giải

Ta có:

$$I = \int_2^6 \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-4}} = \int_2^6 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}} - 2\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= (\sqrt{x^2-4} - 2\ln|x+\sqrt{x^2-4}|)\Big|_2^6 = 4\sqrt{2} - 2\ln(3+2\sqrt{2}).$$

Bài toán 5 : Sử dụng các phương pháp khác nhau.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trong phần này chúng ta sẽ đi xem xét một vài bài toán được giải bằng các phương pháp khác nhau và mục đích quan trọng nhất là các em học sinh cần học được phương pháp suy luận qua mỗi ví dụ.

Ví dụ 12: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Giải

Cách 1: Ta biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^1 \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{x^2+1+x-1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x^2+1} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}})dx$$

$$= (\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+1}| + \sqrt{x^2+1} - \ln|x+\sqrt{x^2+1}|)\Big|_0^1$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln|1+\sqrt{2}| - 1.$$

Cách 2: Ta biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^1 \frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Khi đó, sử dụng phương pháp tích phân từng phần với việc đặt:

$$\begin{cases} u = x + 1 \\ dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sqrt{x^2+1} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = (x+1)\sqrt{x^2+1}\,\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$$

$$= 2\sqrt{2} - 1 - \left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+1}|\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln|1 + \sqrt{2}| - 1.$$

Ví dụ 13: Tính tích phân: $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Giải

Cách 1: Sử dụng tích phân từng phần bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \sqrt{x^2+1} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = x^2\sqrt{x^2+1}\,\Big|_{-1}^1 - 2\int_{-1}^{1} x\sqrt{x^2+1}dx = -\int_{-1}^{1}(x^2+1)^{1/2}d(x^2+1)$$

$$= -\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}\Big|_{-1}^1 = 0.$$

Cách 2: Ta biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{-1}^{1}\frac{x^2.xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{[(x^2+1)-1]d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[(x^2+1)^{1/2} - (x^2+1)^{-1/2}]d(x^2+1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + 2(x^2+1)^{1/2}\right]\Big|_{-1}^1 = 0.$$

Cách 3: Thực hiện phép đổi biến, bằng cách đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: với $x = -1 \Rightarrow t = 1$

với $x = 1 \Rightarrow t = -1$.

Khi đó:

$$I = -\int_{1}^{-1}\frac{(-t)^3dt}{\sqrt{(-t)^2+1}} = -\int_{-1}^{1}\frac{t^3dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\int_{-1}^{1}\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}} = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (HVNH TPHCM Khối A – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x+\sqrt{x^2+1}}dx$

Bài 2. (ĐHBK HN – 95): Tính tích phân $I = \int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Bài 3. (HVKTQS – 98): Tính tích phân $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$.

Bài 4. (ĐHAN – 96): Tính tích phân $I = \int_0^a x^2\sqrt{x^2+a^2}dx \quad (a > 0)$.

Bài 5. (ĐHAN Khối A – 99): Tính tích phân $I = \int_{\sqrt{7}}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$.

Bài 6. (ĐHQG HN Khối B – 98): Tính tích phân $I = \int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx$.

Bài 7. (ĐHSP II HN Khối A – 2000): Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$.

Bài 8. (ĐHSP Quy Nhơn – 99): Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}dx$.

Bài 9. (ĐH Thái Nguyên – 2000): Tính tích phân: $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}}$.

Bài 10. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^1 \frac{x^2-1}{\sqrt{x}+1}dx$. b. $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx$. c. $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5+2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $I = \frac{2\sqrt{2}-1}{15}$.

Bài 2. $I = \frac{\pi}{12}$.

Bài 3. $I = 1$.

Bài 4. $I = \frac{a^4}{8}[3\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})]$.

Bài 5. $I = \frac{1}{6}\ln\frac{7}{4}$.

Bài 6. $I = \frac{2}{15}(\sqrt{2}+1)$.

Bài 7. $I = \frac{1}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

Bài 8. $I = \frac{1}{10}(28 - 3\sqrt[3]{4})$.

Bài 9. $I_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

CHỦ ĐỀ 8
TÍCH PHÂN CÁC HÀM SIÊU VIỆT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để xác định tích phân của các hàm số siêu việt ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản.
2. Phương pháp phân tích
3. Phương pháp đổi biến.
4. Phương pháp tích phân từng phần.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1 : Sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trong Phần I – Chủ đề 10: Nguyên hàm của hàm số vô tỉ, ta đã biết cách sử dụng các phép biến đổi đại số biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân chứa các hàm số siêu việt về các dạng nguyên hàm cơ bản đã biết. Trong mục này chúng ta sử dụng nó để đi xác định tích phân.

Ví dụ 1: (ĐHCĐ – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}+3}$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\right)dx = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+3|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\ln\frac{4}{e^2+3}.$$

Ví dụ 2: (ĐHY HN – 98): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}+e^x}$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x(e^x+1)} = \int_0^1 \frac{[(e^x+1)-e^x]dx}{e^x(e^x+1)} = \int_0^1 \left[\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x+1}\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{e^x} - \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}\right]dx = \int_0^1 \left[e^{-x} - 1 + \frac{e^x}{e^x+1}\right]dx$$

$$= (-e^{-x} - x + \ln|e^x+1|)\Big|_0^1 = \ln\frac{e-1}{2} - e^{-1}.$$

Ví dụ 3: Đặt $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$. Tính $S = I_n + I_{n-1}$.

Giải

Ta có:

$$S = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{e^{-(n-1)x}(e^{x}+1)}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 e^{-(n-1)x}dx$$

$$= \frac{e^{(1-n)x}}{1-n}\Big|_0^1 = \frac{e^{1-n}-1}{1-n}.$$

Bài toán 2 : Phương pháp đổi biến.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng phương pháp đổi biến để chuyển biểu thức dưới dấu tích phân chứa các hàm số siêu việt về các dạng hữu tỉ hoặc vô tỉ.

Ví dụ 4: Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{2x}dx$.

Giải

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$.

Đổi cận:

- Với $x = 1$ thì $t = 0$,
- Với $x = e$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{2+t}}{2}dt = \frac{1}{3}(2+t)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3}.$$

Ví dụ 5: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2}.\ln\frac{2+x}{2-x}dx$.

Giải

Đặt $t = \ln\frac{2+x}{2-x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{4-x^2}$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = 1$ thì $t = \ln 3$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\ln 3} t\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^{\ln 3} = \frac{\ln^2 3}{2}.$$

Ví dụ 6: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{(1+e^x)^2}{e^x}dx$.

Giải

Đặt $t = e^x \Rightarrow e^x dx = dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$,
- Với $x = 1$ thì $t = e$.

Khi đó:

$$I = \int_1^e \frac{(1+t)^2}{t^2}dt = \int_1^e \left(\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} + 1\right)dt = \left(-\frac{1}{t} + 2\ln|t| + t\right)\Big|_1^e = e - \frac{1}{e} + 2.$$

Ví dụ 7: (HVQY – 97): Tính tích phân $I = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

Giải

Cách 1: Đặt: $t = \sqrt{1+e^x} \Leftrightarrow t^2 = 1 + e^x$ suy ra:

$$2tdt = e^x dx \Leftrightarrow dx = \frac{2tdt}{t^2-1} \text{ và } \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{2tdt}{t(t^2-1)} = \frac{2dt}{t^2-1}.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = \sqrt{2}$,
- Với $x = \ln 3$ thì $t = 2$.

Khi đó:

$$I = 2\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_{\sqrt{2}}^{2} = -\ln 3(3-2\sqrt{2}).$$

Cách 2: Đặt: $t = e^{-x/2}$ suy ra:

$$dt = -\frac{1}{2}e^{-x/2}dx \Leftrightarrow -2dt = \frac{dx}{e^{x/2}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{dx}{\sqrt{e^x(e^{-x}+1)}} = \frac{dx}{e^{x/2}\sqrt{e^{-x}+1}} = \frac{-2dt}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$,
- Với $x = \ln 3$ thì $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Khi đó:

$$\int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = -2\int_1^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -2\ln|t + \sqrt{t^2+1}|\Big|_1^{1/\sqrt{3}} = -\ln 3(3-2\sqrt{2}).$$

Bài toán 3 : Phương pháp tích phân từng phần.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta đã được biết trong Phần I – Chủ đề 5: Xác định nguyên hàm bằng phương pháp tích phân từng phần , đối với các dạng nguyên hàm:

Dạng 1: Tính tích phân:

$\int P(x)e^{\alpha x}dx$ với P là một đa thức thuộc R[X] và $\alpha \in R^*$.

Khi đó ta đặt:

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{\alpha x}dx \end{cases}.$$

Dạng 2: Tính tích phân:

$\int e^{ax}\cos(bx)$ (hoặc $\int e^{ax}\sin(bx)$ với a, b≠0.

Khi đó ta đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(bx) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = \sin(bx) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases}.$$

Dạng 3: Tính tích phân:

$I = \int x^{\alpha}.\ln x dx$, với $\alpha \in R \setminus \{-1\}$

Khi đó ta đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^{\alpha}dx \end{cases}.$$

Ví dụ 8: (ĐHAN Khối G – 98): Tính tích phân $I = \int_0^2 x.e^{2x}dx$.

Giải:

Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 .e^{2x}dx = e^4 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^2 = \frac{7e^4}{4} + \frac{1}{4}.$$

Chú ý: Như đã giới thiệu trong Phần I – Chủ đề 5, bài toán trên còn có thể giải bằng *phương pháp hệ số bất định*. Tuy nhiên nó chỉ tỏ ra hiệu quả khi P(x) là đa thức có bậc lớn hơn 1. Để minh họa chúng ta sẽ đi giải ví dụ sau bằng cả hai cách.

Ví dụ 9: Tính tích phân $I = \int_0^1 x^2e^{-x}dx$.

Giải:

Cách 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = -e^{-x} \end{cases},$$

Khi đó:

$$I = -x^2e^{-x}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 xe^{-x}dx = -\frac{1}{e} + 2\int_0^1 xe^{-x}dx. \quad (1)$$

Xét tích phân $J = \int_0^1 xe^{-x}dx$ bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x}dx \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -\frac{1}{e} - e^{-x}\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được: $I = 2 - \frac{5}{e}$.

Cách 2: Ta đi xác định nguyên hàm của hàm số: $f(x) = x^2e^{-x}$, giả sử:

$$F(x) = \int x^2e^{-x} = \int x^2e^{-x}dx = (ax^2 + bx + c)e^{-x} + C. \quad (3)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (3), ta được:

$$x^2e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}. \quad (4)$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a = -1 \\ 2a - b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -2 \end{cases}$$

Khi đó:

$$F(x) = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x} + C.$$

Do đó:

$$I = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x}\Big|_0^1 = 2 - \frac{5}{e}.$$

Ví dụ 10: Tính tích phân $I = \int_0^1 x\ln(1 + x^2)dx$.

Giải:

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(1 + x^2) \\ dv = xdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2xdx}{1 + x^2} \\ v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}x^2\ln(1 + x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3dx}{1 + x^2} = \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 \frac{[x(x^2 + 1) - x]dx}{1 + x^2}$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 \left(x - \frac{x}{1 + x^2}\right)dx = \frac{\ln 2}{2} - \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)\right]\Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Bài toán 4: Sử dụng tính chất.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Việc sử dụng các tính chất mở rộng để tính tích phân các lớp hàm đặc biệt chúng ta đã thấy trong Phần II – Chủ đề 4: Lớp các tích phân đặc biệt. Bây giờ chúng ta vận dụng lại những hiểu biết đó để xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 11: Tính tích phân $I = \int_{-2}^{2} \ln(x + \sqrt{x^2+1})dx$.

Giải:

Biến đổi I về dạng :

$$I = \int_{-2}^{0} \ln(x + \sqrt{x^2+1})dx + \int_{0}^{2} \ln(x + \sqrt{x^2+1})dx. \quad (1)$$

Xét tính phân $J = \int_{-2}^{0} \ln(x + \sqrt{x^2+1})dx$ bằng cách đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận: $x = -2 \Rightarrow t = 2$.

$x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$I = -\int_{2}^{0} \ln(-t + \sqrt{t^2+1})dt = -\int_{0}^{2} \ln(t + \sqrt{t^2+1})dt = -\int_{0}^{2} \ln(x + \sqrt{x^2+1})dx. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được $I = 0$.

Bài toán 5 : Sử dụng các phương pháp khác nhau.

Ví dụ 12: (ĐHKT HN – 99): Tính tích phân $I = \int_{0}^{\pi/2} e^{\sin^2 x}.\sin x.\cos^3 xdx$.

Giải:

Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2\cos x\sin xdx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t(1-t)dt = \frac{1}{2}(\int_0^1 e^t dt - \int_0^1 te^t dt) = \frac{1}{2}(e^t\Big|_0^1 - \int_0^1 te^t dt)$$

$$= \frac{1}{2}(e - \int_0^1 te^t dt). \quad (1)$$

- Ta đi xác định tích phân: $I_1 = \int_0^1 te^t dt$ bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_1 = te^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - e^t\Big|_0^1 = 1. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được: $I = \frac{1}{2}(e-1)$.

Ví dụ 13: Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}{x}dx$.

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \frac{1}{3}\int_1^e \frac{\ln(1+\ln^2 x)}{x}dx$$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$.

Đổi cận:

- Với x = 1 thì t = 0,
- Với x = e thì t = 1

Khi đó:

$$I = \frac{1}{3}\int_0^1 \ln(1+t^2)dt .$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(1+t^2) \\ dv = dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{2tdt}{1+t^2} \\ v = t \end{cases}$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{3}[t.\ln(1+t^2)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2dt}{1+t^2}] = \frac{\ln 3}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{(t^2+1-1)dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{\ln 3}{3} - \frac{2}{3}(\int_0^1 dt + \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}) = \frac{\ln 3}{3} - \frac{2}{3}t\Big|_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{\ln 3 - 2}{3} + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}. \qquad (1)$$

- Ta đi xác định tích phân $I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ bằng cách đặt: $t = \text{tg}u, -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$

suy ra:

$$dt = \frac{du}{\cos^2 u} = (1+\text{tg}^2u)du \text{ và } \frac{dt}{t^2+1} = \frac{(1+\text{tg}^2u)du}{\text{tg}^2u+1} = du.$$

Đổi cận:

- Với t = 0 thì u = 0,
- Với t = 1 thì $u = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} du = u\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = \frac{\ln 3 - 2}{3} + \frac{\pi}{6}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (ĐHQG TPHCM Khối A – 96): Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$.

Bài 2. (ĐHBK HN Khối A – 2000): Tính tích phân $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

Bài 3. Tính tích phân $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$.

Bài 4. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$.

Bài 5. Tính tích phân $I = \int_0^1 e^{x+e^x} dx$.

Bài 6. (ĐHBK HN – 99): Cho hàm số g(x) = sinx.sin2x.cos5x.

a. Tìm họ nguyên hàm của g(x).

b. Tính $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{g(x)dx}{e^x+1}$.

Bài 7. Tính các tp sau:

a. $I = \int_0^1 \frac{(1+e^x)^2}{e^x}dx$.

b. $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$.

c. $I = \int_1^e \frac{\ln x.\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x}dx$.

d. $I = \int_0^e \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}$.

e. $I = \int_0^{\ln 2} \frac{5}{5+e^x}dx$.

f. $I = \int_0^2 x.e^{-\frac{x}{2}}dx$.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $I = \ln\frac{2e}{1+e}$.

Bài 2. $I = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Bài 3. $I = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Bài 4. $I = \frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1)$.

Bài 5. $I = e^{e+1} - e^e$.

Bài 6.

a. $G(x) = \frac{1}{32}(4\sin 2x + 2\sin 4x - \sin 8x) + C$

b. $I = 0$.

CHỦ ĐỀ 9
TÍNH TÍCH PHÂN CÁC HÀM CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để tính được tích phân các hàm số chứa dấu trị tuyệt đối ta thường lựa chọn phương pháp chia khoảng để khử dấu trị tuyệt đối.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán : Tính tích phân : $I = \int_a^b |f(x, m)|dx$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét dấu biểu thức f(x, m) trên [a, b].

Từ đó phân được đoạn [a, b] thành các đoạn nhỏ, giả sử:

$$[a, b] = [a, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup \ldots \cup [c_k, b].$$

mà trên mỗi đoạn f(x, m) có một dấu.

Bước 2: Khi đó:

$$I = \int_a^{c_1} |f(x, m)|dx + \int_{c_1}^{c_2} |f(x, m)|dx + \ldots + \int_{c_k}^{b} |f(x, m)|dx.$$

Chú ý Phương pháp trên được mở rộng tự nhiên cho bài toán tổng quát:

$$I = \int_a^b [|f_1| \pm |f_2| \pm \ldots \pm |f_n|]dx.$$

Ví dụ 1: Tính tích phân:

$$I = \int_{-1}^{4} |x^2 - 3x + 2|dx$$

Giải

Ta đi xét dấu hàm số $f(x) = x^2 - 3x + 2$ trên [−1, 4], được:

x	−1		1		2		4
f(x)		+	0	−	0	+	

Khi đó:

$$I = \int_{-1}^{1}(x^2 - 3x + 2)dx - \int_{1}^{2}(x^2 - 3x + 2)dx + \int_{2}^{4}(x^2 - 3x + 2)dx$$

$$= (\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x)\Big|_{-1}^{1} - (\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x)\Big|_{1}^{2} + (\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x)\Big|_{2}^{4}$$

$$= \frac{19}{2}.$$

Ví dụ 2 (ĐHQG TPHCM Khối D – 99): Cho các hàm số

$$f(x) = 3x^3 - x^2 - 4x + 1 \text{ và } g(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 1$$

a. Giải bất phương trình: $f(x) \geq g(x)$.

b. Tính $I = \int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)| dx$.

Giải

a. Ta có:

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow 3x^3 - x^2 - 4x + 1 \geq 2x^3 + x^2 - 3x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x \geq 1$.

b. Ta có:

$$I = \int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^{2} |x^3 - 2x^2 - x + 2| dx$$
$$= -\int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - x + 2)dx + \int_{1}^{2} (x^3 - 2x^2 - x + 2)dx$$
$$= -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-1}^{1} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{1}^{2} = \frac{27}{12}.$$

Ví dụ 3: Tính tích phân:

$$I = \int_{-3}^{5} (|x + 2| - |x - 2|)dx$$

Giải

Ta đi xét dấu $x + 2$ và $x - 2$ trên $[-3, 5]$, được:

x	−3		−2		2		5
x + 2		−	0	+		+	
x − 2		−		−	0	+	

Khi đó:

$$I = -\int_{-3}^{-2} 4dx + \int_{-2}^{2} 2xdx + \int_{2}^{5} 4dx = -4x\Big|_{-3}^{-2} + x^2\Big|_{-2}^{2} + 4x\Big|_{2}^{5} = 8.$$

Chú ý: Với các bài toán chứa tham số cần chỉ ra được các trường hợp riêng biệt của tham số để khéo léo chia được khoảng cho tích phân, ta xét hai dạng thường gặp trong phạm vi phổ thông sau:

Dạng 1: Với tích phân

$$I = \int_{a}^{b} |x - \alpha| dx.$$

PHƯƠNG PHÁP

Khi đó với $x \in [a, b]$ cần xét các trường hợp

Trường hợp 1: Nếu $\alpha \geq b$ thì:

$$I = \int_{a}^{b} (\alpha - x)dx = \left(\alpha x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{a}^{b} = \frac{1}{2}(a - b)(a + b - 2\alpha).$$

Trường hợp 2: Nếu a < α < b thì:

$$I = \int_a^{\alpha}(\alpha - x)dx + \int_{\alpha}^{b}(x - \alpha)dx = (\alpha x - \frac{x^2}{2})\Big|_a^{\alpha} + (\frac{x^2}{2} - \alpha x)\Big|_{\alpha}^{b}$$

$$= \alpha^2 + (a + b)\,\alpha + \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Trường hợp 3: Nếu $\alpha \le a$ thì:

$$I = \int_a^b (x - \alpha)dx = (\frac{x^2}{2} - \alpha x)\Big|_a^b = \frac{1}{2}(a - b)(2\alpha - a - b).$$

Dạng 2: Với tích phân

$$I = \int_a^b |x^2 + \alpha x + \beta| dx.$$

PHƯƠNG PHÁP

Khi đó với $x \in [a, b]$ cần xét các trường hợp

Trường hợp 1: Nếu $\Delta = \alpha^2 - 4\beta \le 0$ thì:

$$I = \int_a^b (x^2 + \alpha x + \beta)dx.$$

Trường hợp 2: Nếu $\Delta > 0$ thì $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.

- Nếu $x_1 < x_2 \le a$ hoặc $b \le x_1 < x_2$ thì:

$$I = \int_a^b (x^2 + \alpha x + \beta)dx.$$

- Nếu $x_1 \le a < b \le x_2$ thì:

$$I = -\int_a^b (x^2 + \alpha x + \beta)dx.$$

- Nếu $x_1 \le a < x_2 < b$ thì:

$$I = -\int_a^{x_2} (x^2 + \alpha x + \beta)dx + \int_{x_2}^{b} (x^2 + \alpha x + \beta)dx.$$

- Nếu $a \le x_1 < b \le x_2$ thì:

$$I = \int_a^{x_1} (x^2 + \alpha x + \beta)dx - \int_{x_1}^{b} (x^2 + \alpha x + \beta)dx.$$

- Nếu $a \le x_1 < x_2 \le b$ thì:

$$I = \int_a^{x_1} (x^2 + \alpha x + \beta)dx - \int_{x_1}^{x_2} (x^2 + \alpha x + \beta)dx + \int_{x_2}^{b} (x^2 + \alpha x + \beta)dx.$$

Chú ý: Với bài toán cụ thể thường thì các nghiệm x_1, x_2 có thể được so sánh tự nhiên với các cận a, b để giảm bớt các trường hợp cần xét và đây là điều các em học sinh cần lưu tâm.

Ví dụ 4 (ĐHYD TPHCM – 96): Tính tích phân:

$$I = \int_0^1 x.|x - a|dx \quad (a > 0).$$

Giải

Ta đi xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $a \geq 1$ thì:

$$I = -\int_0^1 x.(x-a)dx = -\int_0^1 (x^2 - ax)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}.$$

Trường hợp 2: Nếu $0 < a < 1$ thì:

$$I = -\int_0^a x.(x-a)dx + \int_a^1 x.(x-a)dx = -\int_0^a (x^2 - ax)dx + \int_a^1 (x^2 - ax)dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right)\Big|_0^a + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right)\Big|_a^1 = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 5 (HVNH HN – 99): Tính tích phân (a cho trước):

$$I = \int_1^2 |x^2 - (a+1)x + a|dx.$$

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_1^2 |(x-1)(x-a)|dx = \int_1^2 (x-1)|x-a|dx$$

Ta đi xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $a \geq 2$ thì:

$$I = -\int_1^2 (x-1)(x-a)dx = -\int_1^2 [x^2 - (a+1)x + a]dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{(a+1)x^2}{2} + ax\right]\Big|_1^2 = \frac{3a-5}{6}.$$

Trường hợp 2: Nếu $1 < a < 2$ thì:

$$I = -\int_1^a (x-1)(x-a)dx + \int_a^2 (x-1)(x-a)dx$$

$$= -\int_1^a [x^2 - (a+1)x + a]dx + \int_a^2 [x^2 - (a+1)x + a]dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{(a+1)x^2}{2} + ax\right]\Big|_1^a + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{(a+1)x^2}{2} + ax\right]\Big|_a^2$$

$$= \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{3a-5}{6}.$$

Trường hợp 3: Nếu $a \le 1$ thì:

$$I = \int_1^2 (x-1)(x-a)dx = \int_1^2 [x^2 - (a+1)x + a]dx$$

$$= [\frac{x^3}{3} - \frac{(a+1)x^2}{2} + ax]\Big|_1^2 = \frac{5-3a}{6}.$$

Ví dụ 6: (ĐH Đà Lạt Khối A – 2000): Cho $I(t) = \int_0^1 |e^x - t|dx$, với $t \in R$.

a. Tính I(t).
b. Tìm min I(t).

Giải

a. Với $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 1 \le e^x \le e$, do đó bằng phép so sánh t với 1 và e ta có:

Trường hợp 1: Nếu $t \ge e$ thì:

$$I(t) = -\int_0^1 (e^x - t)dx = -(e^x - tx)\Big|_0^1 = (t+1) - e.$$

Trường hợp 2: Nếu $1 < t < e$ thì:

$$I(t) = -\int_0^{\ln t} (e^x - t)dx + \int_{\ln t}^1 (e^x - t)dx = -(e^x\text{-}tx)\Big|_0^{\ln 1} + (e^x\text{-}tx)\Big|_{\ln 1}^1$$

$$= 2t\ln t - 3t + e + 1.$$

Trường hợp 3: Nếu $t \le 1$ thì:

$$I(t) = \int_0^1 (e^x - t)dx = (e^x - tx)\Big|_0^1 = e - (t+1).$$

Tóm lại, ta được:

$$I(t) = \begin{cases} (t+1) - e & \text{nếu } t \ge e \\ 2t\ln t - 3t + e + 1 & \text{nếu } 1 < a < e. \\ e - (t+1) & \text{nếu } t \le 1 \end{cases}$$

b. Xét hàm số I(t), ta có:

$$I'(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t > e \\ 2\ln t - 1 & \text{nếu } 0 < a < 1 \\ -1 & \text{nếu } t < 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		1		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
I'		-		-	0	+		+	
I	$+\infty$	↘			$I(\sqrt{e})$	↗			$+\infty$

Vậy $\text{Min}I(t) = I(\sqrt{e}) = (\sqrt{e} - 1)^2$ đạt được khi $t = \sqrt{e}$.

Chú ý: Với bài toán mà hàm số dưới dấu tích phân là các hàm lượng giác các em học sinh cần nhớ lại dấu của các hàm số lượng giác cơ bản, cụ thể:

Hàm số lượng giác \ Phần tư	I	II	III	IV
cos x	+	–	–	+
sin x	+	+	–	–
tg x	+	–	+	–
cotgx	+	–	+	–

ngoài ra là các phép biến đổi lượng giác để đưa biểu thức dưới dấu tích phân về các hàm đơn giản. Cụ thể ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 7: Tính tích phân

$$I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx$$

Giải

Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^{\pi} \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\,dx = \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x|\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi} |\sin(x - \frac{\pi}{4})|\,dx$$

Vì $0 \le x \le \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \le x - \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4}$, do đó cần chia thành hai khoảng:

- Với $-\frac{\pi}{4} \le x - \frac{\pi}{4} \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, khi đó $\sin(x - \frac{\pi}{4}) \le 0$.
- Với $0 \le x - \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \le x \le \pi$, khi đó $\sin(x - \frac{\pi}{4}) \ge 0$.

Từ đó:

$$I = \sqrt{2}\,[-\int_0^{\pi/4} \sin(x - \frac{\pi}{4})dx + \int_{\pi/4}^{\pi} \sin(x - \frac{\pi}{4})dx]$$

$$= \sqrt{2}\,[\cos(x - \frac{\pi}{4})\Big|_0^{\pi/4} - \cos(x - \frac{\pi}{4})\Big|_{\pi/4}^{\pi}] = 2\sqrt{2}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (ĐHTL – 2000): Tính tích phân: $I = \int_0^3 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}\,dx$.

Bài 2. (Đề 103): Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x}\,dx$.

Bài 3. (Đề 33): Tính tích phân:

$$I(a) = \int_0^1 x|x-a|dx \quad \text{với } a \text{ là tham số.}$$

Sau đó vẽ đồ thị của hàm I(a) của đối số a.

Bài 4. (Đề 22): Tính tích phân:

$$I(m) = \int_0^1 |x^2 - 2x + m|dx$$

Bài 5. Tính các tích phân:

a. $I = \int_0^2 |x-1|dx$.

b. $I = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3|\,dx$.

c. $I = \int_{-1}^1 (|2x-1| - |x|)^2 dx$.

d. $I = \int_{-5}^5 \left(\dfrac{3}{|x-4|-1} - |x+3|\right)dx$.

e. $I = \int_0^5 (|x^2-4x+3| + |x^2-4x|)dx$.

Bài 6. Tính các tích phân:

a. $I = \int_{1/2}^2 \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2}\,dx$.

b. $I = \int_0^3 \sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}\,dx$.

Bài 7. Tính các tích phân:

a. $I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} |\cot gx - tgx|\,dx$.

b. $I = \int_{\pi/12}^{\pi/4} |\cot gx - \cot g2x|\,dx$.

c. $I = \int_0^{\pi} |\cos 3x.\sin^3 x + \sin 3x.\cos^3 x|\,dx$.

d. $I = \int_{\pi/4}^{\pi} |\cos 3x.\cos^3 x + \sin 3x.\sin^3 x|\,dx$.

e. $I = \int_{-\pi/12}^{2\pi/3} |\sin x.\sin(\dfrac{\pi}{3} - x).\sin(\dfrac{\pi}{3} + x)|\,dx$.

f. $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/12} |\cos x.\cos(\dfrac{\pi}{3} - x).\cos(\dfrac{\pi}{3} + x)|\,dx$.

g. $I = \int_{-\pi/12}^{\pi/12} |tgx.tg(\dfrac{\pi}{3} - x).tg(\dfrac{\pi}{3} + x)|\,dx$.

Bài 8. Tính các tích phân

a. (ĐHL – 95): $I(m) = \int_0^2 x|m-x|dx$.

b. $I = \int_1^2 |x^2 - (m+2)x + 2m|dx$.

c. $I = \int_0^2 |x^2 - 4x + 4m|dx$.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $I = \dfrac{24\sqrt{3}+8}{15}$.

Bài 2. $I = 4\sqrt{2}$.

Bài 3. Ta được:

$$I(a) = \begin{cases} \dfrac{3a-2}{6} & \text{nếu } a \geq 1 \\ \dfrac{a^3}{3} - \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{3} & \text{nếu } 0 < a < 1. \\ \dfrac{2-3a}{6} & \text{nếu } a \leq 0 \end{cases}$$

Bài 4. Ta được:

$$I(m) = \begin{cases} m - \dfrac{2}{3} & \text{nếu } m \geq 1 \\ \dfrac{4\sqrt{(1-m)^3} + 3m - 2}{3} & \text{nếu } 0 < a < 1. \\ \dfrac{2}{3} - m & \text{nếu } m \leq 0 \end{cases}$$

CHỦ ĐỀ 10
TÍCH PHÂN TRUY HỒI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán thường được đặt ra là tìm mối liên hệ giữa I_n với các I_{n-k}.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Xác định công thức tích phân truy hồi bằng phương pháp phân tích.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta đã từng biết nội dung *Phương pháp phân tích* trong Phần I – Chủ đề 3 và Phần II – Chủ đề 1 để xác định nguyên hàm và tính tích phân, bây giờ chúng ta sử dụng nó để thiết lập công thức tích phân truy hồi.

Ví dụ 1: Cho: $I_n = \int_0^{\pi/4} tg^{2n}x dx$.

a. Chứng minh rằng $I_n > I_{n+1}$.

b. (Đề 27): Thiết lập hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-1}.

c. Chứng minh rằng $\frac{1}{2(2n+1)} < I_n < \frac{1}{2(2n-1)}$.

Giải

a. Với $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ta có:

$$0 \le tgx \le 1 \Rightarrow tg^{2(n+1)} \le tg^{2n}x \Rightarrow \int_0^{\pi/4} tg^{2(n+1)}xdx < \int_0^{\pi/4} tg^{2n}xdx$$

$\Leftrightarrow I_{n+1} < I_n$ với $\forall n$.

b. Viết lại I_n dưới dạng:

$$I_n = \int_0^{\pi/4} tg^{2n-2}x.tg^2xdx = \int_0^{\pi/4} tg^{2n-2}x.(\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} tg^{2n-2}x.d(tgx) - \int_0^{\pi/4} tg^{2n-2}xdx = \left.\frac{tg^{2n-1}x}{2n-1}\right|_0^{\pi/4} - I_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}.$$

c. Kết quả ở câu a) chứng tỏ dãy số I_n giảm. Do đó:

- $2I_n = I_n + I_n < I_n + I_{n-1} = \frac{1}{2n-1} \Leftrightarrow I_n < \frac{1}{2(2n-1)}$.
- $2I_n = I_n + I_n > I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1} \Leftrightarrow I_n > \frac{1}{2(2n+1)}$.

Tóm lại ta được:

$$\frac{1}{2(2n+1)} < I_n < \frac{1}{2(2n-1)}.$$

Bài toán 2: Xác định công thức tích phân truy hồi bằng phương pháp đổi biến.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta đã từng biết nội dung *Phương pháp đổi* trong Phần I – Chủ đề 4 và Phần II – Chủ đề 2 để xác định nguyên hàm và tính tích phân, bây giờ chúng ta sử dụng nó để thiết lập công thức tích phân truy hồi.

Ví dụ 2: Cho $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ với $n \in Z^+$.

a. (ĐH TCKT TPHCM – 95): Thiết lập hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-1}.

b. Tính I_n.

Giải

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: (Sử dụng phương pháp đổi biến): Vì $x \in [0, 1]$, đặt $x = \sin t$ với $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = \cos t dt.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$.
- Với $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^n \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t.\cos t dt.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \cos^{2n} t \\ dv = \cos t dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -2n\cos^{2n-1} t.\sin t dt \\ v = \sin t \end{cases}$$

Khi đó:

$$I_n = \sin t.\cos^{2n} t\Big|_0^{\pi/2} + 2n\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} t.\sin^2 t dt = 2n\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} t.(1-\cos^2 t)dt$$

$$= 2n[\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t.\cos t.dt - \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \cos t dt] = 2n(I_{n-1} - I_n)$$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1}.I_{n-1}.$$

Cách 2: (Sử dụng phương pháp tích phân từng phần): Đặt:

$$\begin{cases} u = (1-x^2)^n \\ dv = dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -2nx(1-x^2)^{n-1} dx \\ v = x \end{cases}$$

Khi đó:

$$I_n = x(1-x^2)^n\Big|_0^1 + 2n\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}.x^2dx = -2n\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}.[(1-x^2)-1]dx$$

$$= -2n[\int_0^1 (1-x^2)^n dx - \int_0^1 (1-x^2)^{n-1}dx] = -2n(I_n - I_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1}.I_{n-1}. \quad (1)$$

b. Từ (1) ta được:

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}.\frac{2(n-1)}{2n-1}.....\frac{2}{3}I_0 = \frac{2^n.n!}{3.5...(2n+1)}.\int_0^1 dx = \frac{2^n.n!}{3.5...(2n+1)}.$$

Bài toán 3: Xác định công thức tích phân truy hồi bằng phương pháp tích phân từng phần.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta đã từng biết nội dung *Phương pháp tích phân từng phần* trong Phần I – Chủ đề 5 và Phần II – Chủ đề 3 để xác định nguyên hàm và tính tích phân, bây giờ chúng ta sử dụng nó để thiết lập công thức tích phân truy hồi.

Ví dụ 3: Cho: $I_n = \int_0^1 x^n.e^x dx$.

a. Chứng minh rằng $I_n > I_{n+1}$.

b. Thiết lập hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-1} và tính I_n.

Giải

a. Với $x \in [0, 1]$ ta có:

$$0 \le x^{n+1} \le x^n \Rightarrow \int_0^1 x^{n+1}.e^x dx < \int_0^1 x^n.e^x dx \Leftrightarrow I_{n+1} < I_n \text{ với } \forall n.$$

b. Đặt:

$$\begin{cases} u = x^n \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = n.x^{n-1} \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_n = e^x.x^n\Big|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1}.e^x dx = e - nI_{n-1}. \quad (1)$$

Từ (1) ta được:

$$I_n = e - n[e-(n-1)I_{n-2}] = e[1-n+n(n-1)-...+(-1)^n.n!]+(-1)^{n+1}.n!I_0$$

$$= e[1-n+n(n-1)-...+(-1)^n.n!]+(-1)^{n+1}.n!.\int_0^1 .e^x dx$$

$$= e[1-n+n(n-1)-...+(-1)^{n+1}.n!].$$

Ví dụ 4: Cho $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$.

a. (ĐHKT HN – 95): Thiết lập hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-1}.
b. Tính I_n.

Giải

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = x^n \\ dv = \sqrt{1-x}\,dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1}dx \\ v = -\dfrac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_n = -\frac{2}{3}x\sqrt{(1-x)^3}\Big|_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}dx$$

$$= \frac{2n}{3}\left[\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx\right] = \frac{2n}{3}(I_{n-1} - I_n)$$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+3}.I_{n-1}. \quad (1)$$

b. Từ (1) ta được:

$$I_n = \frac{2n}{2n+3}.\frac{2(n-1)}{2n+1}.\frac{2(n-2)}{2n-1}\cdots\frac{2}{5}I_0 = \frac{2^n.n!}{5.7...(2n+3)}.\int_0^1\sqrt{1-x}dx$$

$$= -\frac{2^n.n!}{5.7...(2n+3)}.\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2^{n+1}.n!}{3.5.7...(2n+3)}.$$

Ví dụ 5: Cho: $I = \int_0^{\pi}\cos^n x.\cos nxdx$.

a. (ĐHNL TPHCM – 95): Thiết lập hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-1}.
b. Tính I_n.

Giải

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = \cos^n x \\ dv = \cos nxdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -n\cos^{n-1}x.\sin xdx \\ v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_n = \frac{1}{n}\sin nx.\cos^n x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos^{n-1}x.\sin x.\sin nxdx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x.[\cos(n-1)x - \cos(n+1)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x.\cos(n-1)xdx - \int_0^{\pi}\cos^{n-1}x.\cos(n+1)xdx\right]$$

$$= \frac{I_{n-1}}{2}. \quad (1)$$

b. Từ (1) ta được:

$$I_n = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}...\frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{2^n}\int_0^{\pi}dx = \frac{\pi}{2^n}.$$

Bài toán 4: Phương pháp khác.

Ví dụ 6: Cho: $I_n = \int_0^{\pi}\sin^n xdx$.

a. (HVQHQT Khối A – 95): Thiết lập hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-2}.

b. Tính I_n. Áp dụng $I_{11} = \int_0^{\pi}\sin^{11}xdx$.

Giải

a. Viết lại I_n dưới dạng:

$$I_n = \int_0^{\pi}\sin^{n-1}x.\sin xdx.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sin^{n-1}x \\ dv = \sin xdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = (n-1)\sin^{n-2}x.\cos xdx \\ v = -\cos x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_n = -\cos x.\sin^{n-1}x\Big|_0^{\pi} + (n-1)\int_0^{\pi}\sin^{n-2}x.\cos^2 xdx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi}\sin^{n-2}x.(1-\sin^2 x)dx$$

$$= (n-1)\left(\int_0^{\pi}\sin^{n-2}x.dx - \int_0^{\pi}\sin^n x.dx\right) = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{n-1}{n}.I_{n-2}. \quad (1)$$

b. Từ (1) ta cần xét hai trường hợp

- Nếu n là số chẵn:

$$I_n = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}....\frac{1}{2}.I_0 = \frac{(n-1)(n-3)...1}{n(n-2)...2}\int_0^{\pi}dx$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)...1}{n(n-2)...2}.\pi.$$

- Nếu n là số lẻ:

$$I_n = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}....\frac{2}{3}.I_1 = \frac{(n-1)(n-3)...2}{n(n-2)...3}\int_0^{\pi}\sin xdx$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)...2}{n(n-2)...3}.2.$$

Áp dụng $I_{11} = \frac{512}{693}$.

Chú ý: Trong một vài tài liệu tham khảo, còn khai thác thêm một kết quả của tích phân trên với câu hỏi: " *Chứng minh rằng hàm số*

$$f: N \to R \text{ với } f(n) = (n+1)I_nI_{n+1}$$

là hàm hằng. Tính f(n)". Khi đó ta thực hiện như sau:

$$f(n) = (n+1)I_nI_{n+1} = (n+1)I_n.\frac{n}{n+1}.I_{n-1} = nI_{n-1}I_n = f(n-1) \text{ với } \forall n \in N$$

Vậy f(n) là hàm hằng. Khi đó:

$$f(n) = f(0) = I_0.I_1 = 2\pi \text{ với } \forall n \in N$$

Ví dụ 7: Cho $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}dx}{1+e^x} \quad (n \in N)$

Với $n > 1$, hãy tìm công thức biểu diễn I_n qua I_{n-1}.

Giải

Ta xét:

$$I_n + I_{n-1} = \int_0^1 \frac{[e^{nx} + e^{(n-1)x}]dx}{1+e^x} = \int_0^1 e^{(n-1)x}dx = \frac{1}{n-1}e^{(n-1)x}\Big|_0^1 = \frac{e^{n-1}-1}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{e^{n-1}-1}{n-1} - I_{n-1}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (Đề 36): Tính tích phân: $I_n = \int_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1}dx$.

Bài 2. (ĐH Cần Thơ Khối A – 2000): Cho:

$$I_n = \int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx \text{ và } J_n = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx$$

a. Tính J_n và chứng minh rằng: $I_n \le \frac{1}{2(n+1)}$, $n = 0,1,2,...$

b. Tính I_{n+1} theo I_n và tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$.

Bài 3. (ĐHGT HN – 94): Cho $I(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$.

Chứng minh rằng $m.I(m,n) = (n-1).I(m+1,n-1)$ với $2 \le m,n \in Z$.

Bài 4. Tính các tích phân sau:

a. $I_n = \int_1^e x^n \ln^m x dx$.

b. $I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nx)dx}{5-4\cos x}$, với $n \ge 3$.

c. $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}}$.

d. $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \cos x dx$.

e. $I_n = \int_0^{\pi/4} tg^{2n+1}x dx$.

f. $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1+x}}$.

g. (ĐHBK HN – 97): $I_n = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx$ với $n \in Z^+$

h. (ĐHQG TPHCM – 97): $I = \int_0^1 (1+x^2)^n dx$ với $n \in Z^+$.

Bài 5. **Tính các tích phân sau:**

$$I_n = \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx \text{ và } J_n = \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x.\sin(n+1)x dx$$

Bài 6. Cho $I(m, n) = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$.

a. Chứng minh rằng:

$$I(m,n) = \frac{n-1}{m+1} I(m+2, n-2) = \frac{n-1}{m+n} I(m, n-2) = \frac{n-1}{m+1} I(m-2, n)$$

b. Tính I(m, n).

Bài 7. (ĐHQG TPHCM Khối A – 97): Cho $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

a. Tìm hệ thức liên hệ I_{n+1} và I_n. Tính I_1, I_2.

b. Chứng minh rằng $I_{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$ và tính $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Bài 8. (ĐHQG TPHCM Khối A – 99): Cho $I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x} dx$ $(n \in R)$

a. Chứng minh rằng $I_{n+1} \le I_n$. Tính I_{n+1} theo I_n.

b. Chứng minh rằng $0 \le I_n \le \frac{1}{(n-1)e^2}$ với $n \ge 2$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Bài 9. (Đề 35): Cho $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx} dx}{1+e^{-x}}$ $(n \in N)$. Với n > 1, hãy tìm công thức biểu diễn I_n qua I_{n-1}. Từ đó tính $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Bài 10. Cho $I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n (1+e^{-x}) dx$.

a. Tìm hệ thức liên hệ I_{n+1} và I_n.

b. Chứng minh rằng $I_{n+1} \le I_n$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Bài 11. Cho hàm số:

$$f(x, n) = \begin{cases} n & \text{khi } x = 0 \\ \dfrac{\sin(nx)}{\sin x} & \text{khi } 0 < x < \pi. \\ (-1)^{n+1}.n & \text{khi } x = \pi \end{cases}$$

a. Chứng minh rằng hàm số f(x, n) liên tục trên đoạn [0, π].

b. Chứng minh rằng $I_{n+2} = I_n$.

c. Tính I_n.

Bài 12. Cho hàm số:

$$f(x,n)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 nx}{\sin n} & \text{khi } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng tồn tại tích phân $I_n=\int_0^{\pi/2} f_n(x)x\,dx$.

b. Tính I_n.

Bài 13. Chứng minh rằng $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$ với $m, n\in Z^+$.

Bài 14. (ĐHQG TPHCM Khối A – 99): Cho $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx \quad (n\in R)$

a. Chứng minh rằng $I_{n+1}\le I_n$.

b. Chứng minh rằng $0\le I_n\le \dfrac{1}{(n+1)e}$ với $n\ge 2$.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $I_n=\dfrac{1}{2n}-I_{n-1}$.

Bài 2.

a. Ta có:

$$J_n=-\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)^n d(1-x^2) = -\frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Nhận xét rằng với $x\in[0,1]$, ta có:

$$x^2(1-x^2)^n\le x(1-x^2)^n \Rightarrow \int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx\le\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{1}{2(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow I_n\le\frac{1}{2(n+1)},\ n=0,1,2,\ldots$$

b. Ta có $I_{n+1}=\dfrac{2(n+1)}{2n+5}.I_n$.

Như vậy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+5}=1.$$

Bài 3. Đặt:

$$\begin{cases}u=(1-x)^{n-1}\\ dv=x^{m-1}dx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=-(n-1)(1-x)^{n-2}dx\\ v=\dfrac{x^m}{m}\end{cases}$$

Khi đó:

$$I(m,n)=\frac{x^m(1-x)^{n-1}}{m}\Big|_0^1+\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}dx=\frac{n-1}{m}I(m+1,n-1)$$

$\Leftrightarrow mI(m,n)=(n-1)I(m+1,n-1)$ đpcm.

PHẦN III

CÁC ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

CHỦ ĐỀ 1

DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Tính diện tích của hình phẳng là một trong các ứng dụng quan trọng của tích phân xác định.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số y = f(x) (liên tục trên đoạn [a, b]), hai đường thẳng x = a, x = b và trục Ox .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (1)$$

Bước 2: Xét dấu biểu thức f(x) trên [a, b].

Từ đó phân được đoạn [a, b] thành các đoạn nhỏ, giả sử:

$$[a, b] = [a, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup \ldots \cup [c_k, b].$$

mà trên mỗi đoạn f(x) có một dấu.

Bước 3: Khi đó:

$$S = \int_a^{c_1} |f(x)|dx + \int_{c_1}^{c_2} |f(x)|dx + \ldots + \int_{c_k}^{b} |f(x)|dx. \qquad (2)$$

Chú ý: Nếu bài toán phát biểu dưới dạng " *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số x = f(y) (liên tục trên đoạn [a, b]), hai đường thẳng y = a, y = b và trục Oy* ", Khi đó công thức tính diện tích là:

$$S = \int_a^b |f(y)|\,dy.$$

Ví dụ 1 (ĐHTM – 99): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$x = -1\ ;\ x = 2\ ;\ y = 0\ ;\ y = x^2 - 2x.$$

Giải

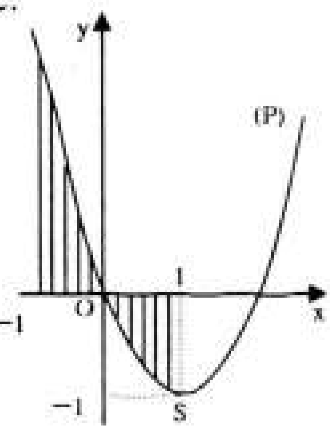
Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_{-1}^{2} |x^2 - 2x|\,dx.$$

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp " *Lấy học trò làm trung tâm* "
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

Ta đi xét dấu hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ trên $[-1, 2]$, được:

x	-1		0		2
y'		$+$	0	$-$	0



Khi đó:

$$S = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx + \int_{0}^{2}(2x - x^2)dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{2} = \frac{8}{3}\text{(đvdt)}$$

Ví dụ 2(ĐH Huế – 99): Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi:

$$x = 1;\ x = e;\ y = 0;\ y = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}.$$

Giải

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_{1}^{e}\left|\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right|dx. \qquad (1)$$

Bởi $x \in [1, e] \Rightarrow \ln x \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right| = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, do đó:

$$S = \int_{1}^{e}\frac{\ln x dx}{2\sqrt{x}}. \qquad (2)$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \sqrt{x} \end{cases}$$

Khi đó:

$$S = \sqrt{x}\ln x\Big|_{1}^{e} - \int_{1}^{e}\frac{\sqrt{x}}{x}dx = (\sqrt{x}\ln x - 2\sqrt{x})\Big|_{1}^{e} = 2 - \sqrt{e}\quad \text{(đvdt)}.$$

Bài toán 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ (liên tục trên đoạn $[a, b]$), hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_{a}^{b}|f(x) - g(x)|dx. \qquad (1)$$

Bước 2: Xét dấu biểu thức f(x) − g(x) trên [a, b].

Từ đó phân được đoạn [a, b] thành các đoạn nhỏ, giả sử:

$$[a, b] = [a, c_1]\cup[c_1, c_2] \cup\ldots\cup[c_k, b].$$

mà trên mỗi đoạn f(x) − g(x) có một dấu.

Bước 3: Khi đó:

$$S = \int_a^{c_1}|f(x)-g(x)|dx + \int_{c_1}^{c_2}|f(x)-g(x)|dx + \ldots +$$

$$+ \int_{c_k}^{b}|f(x)-g(x)|dx. \qquad (2)$$

Ví dụ 3 (HVKTQS − 2000): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = \frac{1}{\sin^2 x};\ y = \frac{1}{\cos^2 x};\ x = \frac{\pi}{6};\ x = \frac{\pi}{3}.$$

Giải

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\left|\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right|dx$$

Ta biết rằng:

- Với $\frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \sin x < \cos x \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$
- Với $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow 0 < \cos x < \sin x \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} < 0.$

Do đó:

$$S = \int_{\pi/6}^{\pi/4}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$= (-\text{cotg}x - \text{tg}x)\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} + (\text{cotg}x + \text{tg}x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{8}{\sqrt{3}} - 4 \text{ (đvdt)}.$$

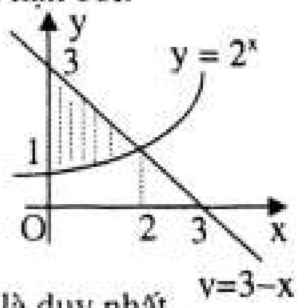
Chú ý: Nhiều bài toán thuộc dạng trên được phát biểu: " Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$y = f(x)$, $y = g(x)$ và $x = a$."

Khi đó cận còn lại được tìm thấy từ việc giải phương trình f(x) − g(x) = 0. Cụ thể ta xem xét các ví dụ sau:

Ví dụ 4 (HVBCVT − 99): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = 2^x\ ;\ y = 3 - x\ ;\ x = 0.$$



Giải

Hoành độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình:

$2^x = 3 - x.$

- Vế phải của phương trình là một hàm nghịch biến.
- Vế trái của phương trình là một hàm nghịch biến.
- Do vậy, nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

- Nhận xét rằng x = 1 là nghiệm của phương trình vì $2^1 = 3 - 1$.

Vậy x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_0^1 (3 - x - 2^x)dx = \left(3x - \frac{1}{2}x - \frac{2^x}{\ln 2}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{2} - \frac{2}{\ln 2} \text{ (đvdt).}$$

Chú ý: Trong bài toán trên sở dĩ ta có ngay $S = \int_0^1 (3 - x - 2^x)dx$ là bởi đồ thị của $y = 3 - x$ ở phía trên đồ thị của $y = 2^x$ trên đoạn [0, 2].

Như vậy trong nhiều bài toán nếu mô tả được hình vẽ ta có thể xác định ngay được dấu.

Bài toán 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số hàm số y = f(x) , y = g(x).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét phương trình:

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \text{nghiệm } x_1 < x_2 < \dots < x_k.$$

Bước 2: Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_{x_1}^{x_k} | f(x) - g(x) | dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)|dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)|dx + \dots + \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - g(x)|dx.$$

Ví dụ 5(ĐHHH TPHCM – 99): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

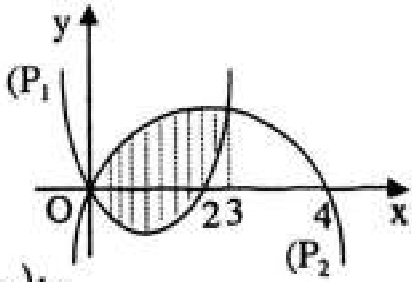
$$y = x^2 - 2x \ ; \ y = -x^2 + 4x.$$

Giải

Hoành độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình:

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$



Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_0^3 (-x^2 + 4x - x^2 + 2x)dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x)dx$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2\right)\Big|_0^3 = 9 \text{ (đvdt).}$$

Chú ý: Nếu các em học sinh thấy khó khăn trong việc vẽ hình thì chỉ còn cách xét dấu biểu thức dưới dấu tích phân, tuy nhiên trong nhiều trường hợp đó là vấn đề rất đơn giản.

Ngoài ra như đã chú ý sau bài toán 1, đôi khi ta cần tính tích phân theo dy.

Ví dụ 6 (ĐHXD HN – 95): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y^2 - 2y + x = 0 \quad \text{và} \quad x + y = 0.$$

Giải:

Tung độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình

$$y^2 - 2y = y \Leftrightarrow y^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_0^3 |-y^2 + 2y + y|dy = \int_0^3 |-y^2 + 3y|dx = \int_0^3 (-y^2 + 3y)dx$$

$$= \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{2}y^2\right)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Ví dụ 7 (ĐHTL – 99): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{và } y = |x|.$$

Giải

Hoành độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình:

$$x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = |x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0 \\ 2x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 + 5x - 3 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_{-3}^{1} \left||x| - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\right|dx$$

$$= \int_{-3}^{0} \left|-x - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\right|dx + \int_0^1 \left|x - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\right|dx$$

$$= \int_{-3}^{0} \left|x^2 + \frac{5x}{2} - \frac{3}{2}\right|dx + \int_0^1 \left|x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right|dx$$

$$= \int_{-3}^{0} \left(x^2 + \frac{5x}{2} - \frac{3}{2}\right)dx - \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{5x^2}{4} - \frac{3x}{2}\right)\Big|_{-3}^{0} - \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{5x^2}{4} - \frac{3x}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{23}{3} \text{ (đvdt)}.$$

Chú ý: Nhiều bài toán thuộc dạng trên được phát biểu: " Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = f(x)\ ,\ y = g(x) \text{ và } y = h(x)\ ."$$

Khi đó cận được tìm thấy từ việc giải phương trình $f(x) - g(x) = 0$ và $f(x) - h(x) = 0$ hoặc $g(x) - h(x) = 0$. Cụ thể ta xem xét ví dụ sau:

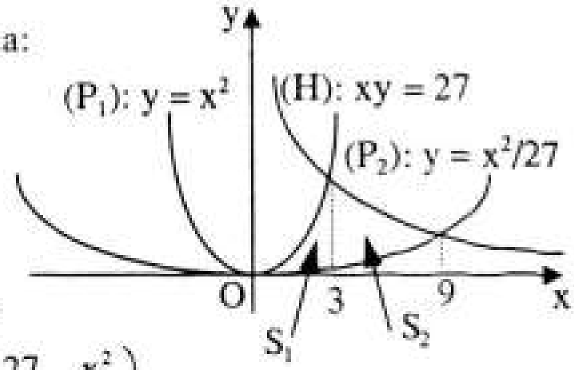
Ví dụ 8(ĐHMĐC – 98): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = x^2 \ ; \ y = \frac{x^2}{27} ; \ y = \frac{27}{x}.$$

Giải:

Hoành độ các giao điểm là nghiệm của:

- $x^2 = \frac{x^2}{27} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$
- $\frac{x^2}{27} = \frac{27}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 9 \end{cases}.$



Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{27} \right) dx + \int_3^9 \left(\frac{27}{x} - \frac{x^2}{27} \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{81}x^3 \right)\Big|_0^3 + \left(27\ln x - \frac{1}{81}x^3 \right)\Big|_3^9 = 27\ln 3 \text{ (đvdt)}.$$

Chú ý: Với bài toán trên việc có được đồ thị các hàm số là rất cần thiết, bởi chỉ có như vậy chúng ta mới có thể xác định được một cách chính xác hình phẳng cần tính diện tích.

Bài toán 4: Tính diện tích của hình tròn.

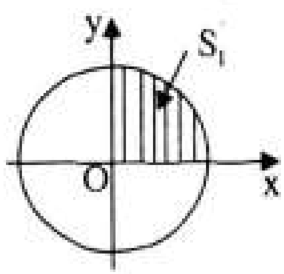
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = R^2$

Suy ra phương trình của (C) trong góc phần tư thứ I là $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = 4S_1 = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx. \qquad (1)$$



Để tính (1) ta thực hiện phép đổi biến, đặt:

$$x = R\sin t, \text{ với } -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = R\cos t.dt.$$

Đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow t = 0$

với $x = R \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó:

$$S = 4R\int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}.\cos t dt = 4R^2\int_0^{\pi/2} |\cos t|.\cos t dt = 4R^2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$$

$$= 2R^2\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = 2R^2(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} = \pi R^2.$$

Ví dụ 9: Tính tỉ số diện tích mà Parbol (P): $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ chia đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 8p^2$.

Giải:

Hoành độ các giao điểm là nghiệm của:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 2px = 8p^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2p \Rightarrow y = \pm 2p.$$

- Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và (C), ta được:

$$S_1 = 2\int_0^{2p}\left(\sqrt{8p^2 - y^2} - \frac{y^2}{2p}\right)dy = 2\left(\int_0^{2p}\sqrt{8p^2 - y^2}\,dy - \int_0^{2p}\frac{y^2dy}{2p}\right). \quad (1)$$

Xét tích phân $I_1 = \int_0^{2p}\sqrt{8p^2 - y^2}\,dy$, ta sử dụng phép đổi biến:

$$y = 2p\sqrt{2}\,\text{sint} \Rightarrow dy = 2p\sqrt{2}\,\text{cost.dt}$$

Đổi cận: với $y = 0 \Rightarrow t = 0$

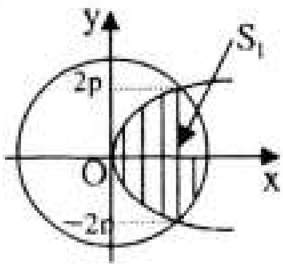
với $y = 2p \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I_1 = 2p\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\sqrt{8p^2 - 8p^2\sin^2 t}.\cos tdt = 8p^2\int_0^{\pi/4}|\cos t|.\cos tdt$$

$$= 8p^2\int_0^{\pi/4}\cos^2 tdt = 4p^2\int_0^{\pi/4}(1 + \cos 2t)dt = 4p^2(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= p^2(\pi + 2). \quad (2)$$



Mặt khác:

$$I_2 = \int_0^{2p}\frac{y^2dy}{2p} = \frac{y^3}{6p}\Big|_0^{2p} = \frac{4p^2}{3}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$S_1 = 2[p^2(\pi + 2) - \frac{4p^2}{3}] = 2p^2(\pi + \frac{2}{3}).$$

- Phần còn lại của hình tròn có diện tích $S_2 = 8p^2\pi - S_1 = 2p^2(3\pi - \frac{2}{3})$.

- Do đó ta được tỉ số diện tích của hai phần là:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}.$$

Bài toán 5: Tính diện tích của hình Elíp.

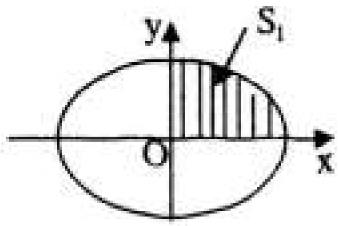
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho Elíp (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Suy ra phương trình của (E) trong góc phần tư thứ I là $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = 4S_1 = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx. \qquad (1)$$



Để tính (1) ta thực hiện phép đổi biến, đặt:

$x = a\sin t$, với $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = a\cos t.dt$.

Đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow t = 0$

với $x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó:

$$S = 4ab\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}.\cos t dt = 4ab\int_0^{\pi/2} |\cos t|.\cos t dt$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt = 2ab\int_0^{\pi/2}(1 + \cos 2t)dt = 2ab(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

Nhận xét: Qua hai bài toán 4, 5 chúng ta có được ý tưởng chung để tính diện tích một hình giới hạn bởi một đường cong kín nhận O làm tâm đối xứng và các trục toạ độ làm trục đối xứng, các em học sinh hãy thử áp dụng nó cho bài toán *tính diện tích giới hạn bởi đường cong (C): $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.*

Ví dụ 10: Chứng minh rằng tổng diện tích của hai Elíp (E_1): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($E_2$): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a-b)^2} = 1$ ($a > b$) bằng diện tích của đường tròn (C) bán kính bằng a.

Giải:

Gọi S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích của (C), (E_1), (E_2), ta có:

$S = \pi a^2$, $S_1 = \pi ab$, $S_2 = \pi a(a - b)$.

Suy ra:

$S = S_1 + S_2$ (đpcm).

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (ĐHBK HN – 2000): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = \sin^2 x\cos^3 x\ ;\ y = 0 \text{ và } x = 0\ ;\ x = \frac{\pi}{2}.$$

Bài 2. (ĐHBK HN – 93): Cho hàm số: $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ (C).

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b. Tìm b sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và các đường thẳng $y = 1$, $x = 0$, $x = b$ bằng $\pi/4$.

Bài 3. (ĐHTCKT – 2000): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = e^x;\ y = e^{-x};\ x = 1.$$

Bài 4. (HVBCVT – 2000): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = \left|1 - 2\sin^2\frac{3x}{2}\right|;\ y = 1 + \frac{12x}{\pi};\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}.$$

Bài 5. (HVBCVT – 97): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = -x^2 + 2x\ ;\ y = -3x.$$

Bài 6. (ĐHTM – 96): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = x^2;\ x = -y^2.$$

Bài 7. (ĐHKT – 94): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = |x^2 - 4x + 3| \text{ và } y = 3 + x.$$

Bài 8. (ĐHCĐ – 99): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = x^2;\ y = \frac{x^2}{8};\ y = \frac{8}{x}.$$

Bài 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a. (ĐHSP I HN – 2000): $y = |x^2 - 1|$; $y = |x| + 5$.

b. (ĐHKTQD – 96): Hình phía dưới (P) : $y = ax^2$ $(a > 0)$ và trên $y = ax + 2a$.

c. (P): $y = -x^2 + 4x - 3$ và hai tiếp tuyến tại các điểm A(0, – 3) và B(3, 0).

d. (ĐH Huế – 99): $y = (x + 1)^5$; $y = e^x$; $x = 1$.

e. (P): $y^2 = 2px$ và (C): $27py^2 = 8(x - p)^3$.

f. (ĐH Hồng Đức – 99): $y = -x^2 + x$; $y = x^2$; $y = x^2 + mx - 2$.

g. $y = \sin^3x$, $y = \cos^3x$ và trục Oy với $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$.

h. $y = \sin^3x + \cos^3x$ và trục Ox giữa hai giao điểm liên tiếp.

i. Hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ và đường thẳng $x = 2a$.

j. Cissoide (C): $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ và đường thẳng $x = 2a$.

k. (T): $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ và đường tiệm cận.

l. (HVQY – 97): $y = 0$; (C): $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$; và tiếp tuyến với đường cong (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$.

Bài 10. Tính tỉ số diện tích mà Parbol (P): $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ chia

a. Đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 24p^2$.

b. Elíp (E): $\frac{x^2}{2p^2} + \frac{y^2}{p^2} = 1$.

Bài 11. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a. $y = \frac{1}{x^2 + a^2}$, $y = 0$, $x = \pm t$. Từ đó tìm $S = \lim\limits_{t \to +\infty} S(t)$.

b. $y = \frac{R^3}{x^2 + R^2}$, $y = 0$, $x = \pm t$. Từ đó tìm $S = \lim\limits_{t \to +\infty} S(t)$.

c. $y = \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$ $(a, b > 0)$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = t$. Từ đó tìm $S = \lim\limits_{t \to +\infty} S(t)$.

Bài 12. Tính diện tích phần chung của hai Elíp

$$(E_1): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ và } (E_2): \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Bài 13. (ĐHLN – 98): Cho hàm số: $y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + m}$ (C)

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với $m = 1$.

b. Với $m = 1$, tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $x = 0$; $x = 1$, $y = 0$ và (C).

Bài 14. (ĐHKT – 2000): Cho hàm số: $y = f(x) = \frac{4x}{x^4 + 1}$ (C)

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), Ox và hai đường thẳng $x = \pm 1$.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $S = \frac{7}{15}$ (đvdt).

Bài 2. $b = \pm 1$.

Bài 3. $S = e + \frac{1}{e}$ (đvdt).

Bài 4. $S = 2\pi - 1$ (đvdt).

Bài 5. $S = \frac{125}{6}$ (đvdt).

Bài 6. $S = \frac{1}{3}$ (đvdt).

Bài 7. $S = \frac{13}{6}$ (đvdt).

Bài 8. $S = 8\ln 2$.

CHỦ ĐỀ 2

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Tìm diện tích lớn nhất và nhỏ nhất của hình phẳng S.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thiết lập công thức tính S theo một hoặc nhiều tham số của giả thiết (giả sử là m), tức là ta có:

$$S = g(m).$$

Bước 2: Tìm gtln, gtnn của g(m) bằng một trong các phương pháp:

- Tam thức bậc hai.
- Bất đẳng thức.
- Sử dụng đạo hàm.

Lưu ý: Trong nhiều trường hợp từ giả thiết ta có được biểu thức điều kiện cho m là K. Khi đó dựa vào K để tìm gtln, gtnn cho g(m).

Ví dụ 1: (Đề 2) : Cho Parabol (P): $y = x^2$ và hai điểm A, B di động trên (P) sao cho AB = 2.

a. Tìm quĩ tích trung điểm đoạn AB.

b. Xác định vị trí của A, B sao cho diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi cát tuyến AB và (P) đạt giá trị lớn nhất.

Giải

a. Ta lần lượt có:

Phương trình đường thẳng (AB): $y = kx + m$

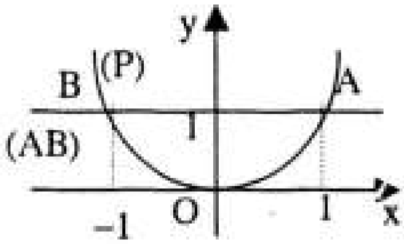
Hoành độ của A, B là nghiệm phương trình

$$x^2 = kx + m \Leftrightarrow x^2 - kx - m = 0. \quad (1)$$

Ta có:

$$\Delta = k^2 + 4m > 0\ ,\ \forall k \Leftrightarrow m > 0.$$

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$) thoả:



$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1x_2 = m \\ x_2 - x_1 = \sqrt{\Delta} \end{cases}$$

Với giả thiết AB = 2

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2[1 + (x_1 + x_2)^2] = 4 \Leftrightarrow (k^2 + 4m)(k^2 + 1) = 4. \qquad (2)$$

Gọi I(x, y) là trung điểm AB, thì

$$I: \begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow I: \begin{cases} x = \dfrac{k}{2} \\ y = \dfrac{k^2 + 2m}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2x \\ m = y - 2x^2 \end{cases}. \qquad (3)$$

- Quĩ tích trung điểm I

Thay (3) vào (2), ta được : $y = x^2 + \dfrac{1}{1+4x^2}$.

Đó là phương trình quĩ tích của I.

b. Diện tích lớn nhất.

- Diện tích hình phẳng được tính bởi:

$$S = \int_{x_1}^{x_2}(kx + m - x^2)dx = \left[\frac{k}{2}x^2 + mx - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{1}{6}(x_2 - x_1)[3k^2 + 6m - 2(k^2 + m)] = \frac{1}{6}(k^2 + 4m)\sqrt{k^2 + 4m}.$$

- Diện tích S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow k^2 + 4m$ lớn nhất

Theo (2), ta được:

$$k^2 + 4m \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow k^2 + 1 \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, diện tích MaxS = $\dfrac{4}{3}$ tại A(− 1, 1) và B(1, 1).

Chú ý:

1. Trong lời giải trên để tìm giá trị lớn nhất của S chúng ta đã tận dụng biểu thức điều kiện của giả thiết.
2. Bây giờ ta đi phát biểu và chứng minh bài toán tổng quát của dạng toán trên, như sau:

Cho Parabol (P): $y = ax^2 + bx + c = f(x)$ có đỉnh $S(x_S, y_S)$. Một đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm A, B có hoành độ lần lượt là α, β(α < β).

a. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi (P) và (d) theo α, β.

b. Giả sử AB = 2l không đổi. Chứng minh rằng $\lim\limits_{\alpha \to \pm\infty} S = 0$.

- S đạt giá trị lớn nhất khi $\alpha = x_S - l$, $\beta = x_S + l$.
- (P) tiệm cận với quĩ tích trung điểm I của đoạn AB.

Giải

a. Không mất tính tổng quát ta giả sử a > 0.

Theo giả thiết (d) cắt (P) tại hai điển A, B có hoành độ là α, β, ta được phương trình hoành độ giao điểm:

$$0 = f(x) - g(x) = a(x-\alpha)(x-\beta) = a[(x - \frac{\alpha+\beta}{2})^2 - \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2].$$

Khi đó:

$$S = \int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx = -a\int_\alpha^\beta\left[\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2\right]dx$$

$$= -a\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3-\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 x\right]_\alpha^\beta = \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3 \text{ (đvdt)}$$

b. Từ giả thiết:

$$AB = 2l \Leftrightarrow 4l^2 = AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$
$$= (\beta-\alpha)^2\{1 + [a(\beta+\alpha) + b]^2\}. \qquad (1)$$

- Khi $\alpha \to \pm\infty$ thì $\beta + \alpha \to \pm\infty$, do đó từ (1) ta suy ra $\beta + \alpha \to 0$, vậy:
$$\lim_{\alpha\to\pm\infty} S = 0.$$
- Từ (1) ta suy ra
$$4l^2 \ge (\beta-\alpha)^2 \Leftrightarrow (\beta-\alpha)^3 \le 8l^3 \Rightarrow S \le \frac{4al^3}{3}.$$

Vậy $S_{Max} = \frac{4al^3}{3}$, đạt được khi $\beta + \alpha = -\frac{b}{a} = 2x_S$, khi đó:

$y_B - y_A = 0 \Leftrightarrow \alpha = x_S - 1, \beta = x_S + 1.$

- Với I là trung điểm AB thì:

$$I: \begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ y = \dfrac{1}{2}a(\alpha^2+\beta^2) + \dfrac{1}{2}b(\alpha+\beta) + c \end{cases}$$

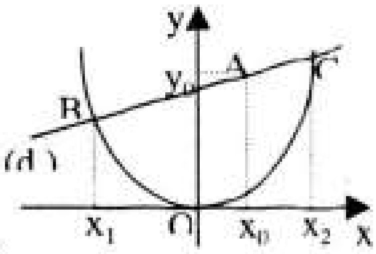
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ y = a\left[\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)^2\right] + \dfrac{b(\alpha+\beta)}{2} + c \end{cases} \qquad (2)$$

Kết hợp (2) và (1) ta được: $y = ax^2 + bx + x + \dfrac{al^2}{1+(2ax+b)^2}$ (C).

Vậy quĩ tích trung điểm I của AB thuộc đường cong (C) và đường cong đó tiệm cận với (P).

Ví dụ 2: (Đề 30 – Va): Xét hình bị chặn dưới bởi Parabol (P): $y = x^2$, bị chặn trên bởi đường thẳng đi qua điểm $A(x_0, y_0)$ ($y_0 > x_0^2$) và có kệ số góc k. Xác định k để hình nói trên có diện tích nhỏ nhất.

Giải



- Tính diện tích hình phẳng

  Gọi (d) là đường thẳng đi qua $A(x_0, y_0)$ ($y_0 > x_0^2$) và có kệ số góc k, ta có:

  $$(d): y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d): y = kx - kx_0 + y_0.$$

  Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình :

  $$x^2 = kx - kx_0 + y_0 \Leftrightarrow x^2 - kx + kx_0 - y_0 = 0. \quad (1)$$

  Ta có :

  $$\Delta = k^2 - 4(kx_0 - y_0) = (k - 2x_0)^2 + (y_0 - x_0^2)$$

  Do $y_0 > x_0^2$ nên $\Delta > 0$, $\forall k \Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$) theo thứ tự là hoành độ giao điểm B, C của (d) và (P).

- Diện tích hình phẳng được tính bởi:

  $$S = \int_{x_1}^{x_2}(kx - kx_0 + y_0 - x^2)dx = \left[\frac{k}{2}x^2 - (kx_0 - y_0)x - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2}$$

  $$= \frac{1}{6}(x_2 - x_1)(k^2 - 4kx_0 + 4y_0). \quad (2)$$

  Mặt khác

  $$x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \sqrt{k^2 - 4kx_0 + 4y_0},$$

thay vào (2), ta được: $S = \frac{1}{6}(k^2 - 4kx_0 + 4y_0)\sqrt{k^2 - 4kx_0 + 4y_0}$.

- Xác định k để hình nói trên có diện tích nhỏ nhất

  $S_{min} \Leftrightarrow k = 2x_0$ (nghiệm kép của phương trình $k^2 - 4kx_0 + 4y_0 = 0$).

  Khi đó $S_{min} = 4(y_0 - x_0^2)$.

Chú ý:

1. Trong lời giải trên để tìm giá trị nhỏ nhất của S chúng ta đã sử dụng phương pháp tam thức bậc hai.
2. Bây giờ ta đi phát biểu và chứng minh bài toán tổng quát của dạng toán trên, như sau:

   Cho Parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$. Một đường thẳng (d) đi qua điểm cố định $A(x_0, y_0)$ ($y_0 > a x_0^2 + bx_0 + c$) và có kệ số góc k cắt (P) tại hai điển B, C.

   a. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi (P) và (d).

   b. Chứng minh rằng S đạt giá trị nhỏ nhất khi A là trung điểm của BC và khi đó $k = y'(x_0) = 2ax_0 + b$ (nghĩa là khi (d) liên hợp với đường kính của (P) qua A)

Giải

a. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a > 0$.

Phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$(d): y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d): y = kx - kx_0 + y_0.$

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình :

$$ax^2 + bx + c = kx - kx_0 + y_0 \Leftrightarrow ax^2 - (k - b)x + kx_0 - y_0 + c = 0. \quad (1)$$

Ta có :

$$\Delta = (k - b)^2 - 4a(kx_0 - y_0 + c) = (k - 2ax_0 + b)^2 + 4a(y_0 - ax_0^2 - bx_0 - c)$$

Do $y_0 > ax_0^2 + bx_0 + c$ nên $\Delta > 0, \forall k \Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$) theo thứ tự là hoành độ giao điểm B, C của (d) và (P).

Diện tích hình phẳng được tính bởi:

$$S = \int_{x_1}^{x_2}(kx - kx_0 + y_0 - ax^2 - bx - c)dx$$

$$= \left[\frac{k-b}{2}x^2 - (kx_0 - y_0 + c)x - \frac{ax^3}{3}\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{\Delta^{3/2}}{6a^2}.$$

b. Xác định k để hình nói trên có diện tích nhỏ nhất

$$S_{min} \Leftrightarrow \Delta_{Min} \Leftrightarrow k = 2ax_0 + b = y'(x_0)$$

và khi đó:

$$x_1 + x_2 = \frac{k-b}{a} = x_0 \Leftrightarrow \text{A là trung điểm BC.}$$

Khi đó $S_{min} = \dfrac{4}{3\sqrt{a}}.(y_0 - ax_0^2 - bx_0 - c)^{3/2}$.

Ví dụ 3: Cho Parabol (P): $y = x^2 + 2$. Xét hình bị chặn dưới bởi một tiếp tuyến bất kỳ của (P) và các đường $x = 0, x = 1, y = 0$. Tìm các tiếp tuyến để hình nói trên có diện tích lớn nhất.

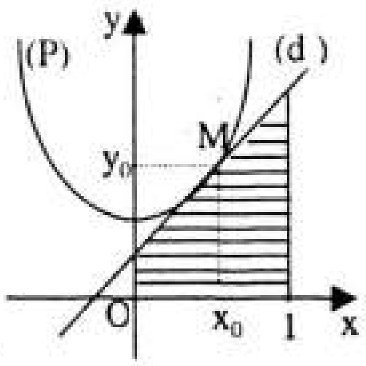
Giải

- Tính diện tích hình phẳng

Lấy $M(x_0, x_0^2 + 2) \in (P)$, tiếp tuyến tại M có phương trình:

$$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + x_0^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow (d): y = 2x_0x - x_0^2 + 2$$



Diện tích hình phẳng được tính bởi:

$$S = \int_0^1(2x_0x - x_0^2 + 2)dx = -x_0^2 + x_0 + 2.$$

Ta có :

$$-x_0^2 + x_0 + 2 = \frac{9}{4} - (x_0 - \frac{1}{2})^2 \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow S \le \frac{9}{4}.$$

Suy ra $S_{Max} = \dfrac{9}{4}$, đạt được khi $x_0 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M(\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{4}) \Rightarrow (d): y = x + \dfrac{3}{4}$.

Chú ý:

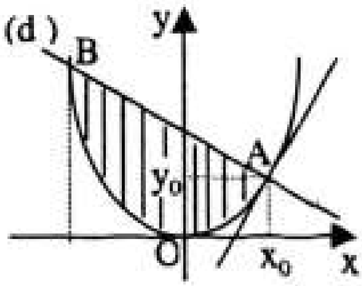
1. Trong lời giải trên để tìm giá trị nhỏ nhất của S chúng ta đã sử dụng phương pháp tam thức bậc hai.

2. Bây giờ ta đi phát biểu bài toán tổng quát của dạng toán trên (*việc thực hiện xin dành cho bạn đọc*), như sau:

" Cho Parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$. Xét hình bị chặn dưới bởi một tiếp tuyến bất kỳ của (P) và các đường $x = \alpha$, $x = \beta$, $y = 0$. Tìm các tiếp tuyến để hình nói trên có diện tích lớn nhất. "

Ví dụ 4: Xét hình bị chặn dưới bởi Parabol (P): $y = x^2$, bị chặn trên bởi đường thẳng đi qua điểm $A(x_0, x_0^2) \neq O$ và vuông góc với tiếp tuyến tại A của (P). Tìm các điểm A để hình nói trên có diện tích nhỏ nhất.

Giải



- Tính diện tích hình phẳng

Vì (P) nhận Oy làm trục đối xứng nên không mất tính tổng quát ta chỉ cần xét với $x_0 > 0$

Gọi (d) là đường thẳng đi qua $A(x_0, y_0)$ $(y_0 > x_0^2)$ và có vuông góc với tiếp tuyến tại A, ta có:

$$(d): y = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) + x_0^2 \Leftrightarrow (d): y = -\frac{x}{2x_0} + x_0^2 + \frac{1}{2}$$

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình :

$$x^2 = -\frac{x}{2x_0} + x_0^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + \frac{x}{2x_0} - x_0^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = x_0 \\ x_B = -x_0 - \dfrac{1}{2x_0} \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng được tính bởi:

$$S = \int_{-x_0-\frac{1}{2x_0}}^{x_0} \left(-x^2 - \frac{x}{2x_0} + x_0^2 + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{6}\left(2x_0 + \frac{1}{2x_0}\right)^3. \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được:

$$2x_0 + \frac{1}{2x_0} \geq 2 \Leftrightarrow S \geq \frac{4}{3}.$$

Suy ra $S_{Min} = \frac{4}{3}$, đạt được khi :

$$2x_0 = \frac{1}{2x_0} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Vậy tồn tại hai điểm $A_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ và $A_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ để $S_{Min} = \frac{4}{3}$.

Chú ý:

1. Trong lời giải trên để tìm giá trị nhỏ nhất của S chúng ta đã sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

2. Bây giờ ta đi phát biểu bài toán tổng quát của dạng toán trên (*việc thực hiện xin dành cho bạn đọc*), như sau:
" Cho Parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$. Một đường thẳng (d) đi qua điểm $A \in (P)$ (A khác đỉnh S của (P)) và vuông góc với tiếp tuyến tại A của (P).
 a. *Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi (P) và (d).*
 b. *Tìm các điểm A để hình nói trên có diện tích nhỏ nhất "*

Bài toán 2: Các bài toán khác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Các bài toán liên quan tới diện tích hình phẳng khá phong phú, để giải được các bài toán dạng này trước hết các em học sinh cần nắm vững các phương pháp tính diện tích hình phẳng, sau đó cần phân tích được một cách đúng đắn điều kiện còn lại của giả thiết. Chúng ta sẽ cùng đi xem xét một vài ví dụ.

Ví dụ 5: Xét hình (H) giới hạn bởi các đường (P): $y = (x - 3a)^2$ với $a > 0$, $y = 0$, $x = 0$. Lập phương trình các đường thẳng đi qua điểm $A(0, 9a^2)$ chia (H) thành 3 phần có diện tích bằng nhau.

Giải

- Diện tích hình (H) được cho bởi:

$$S = \int_0^{3a} (x-3a)^2\,dx = \frac{1}{3}(x-3a)^3\Big|_0^{3a} = 9a^3.$$

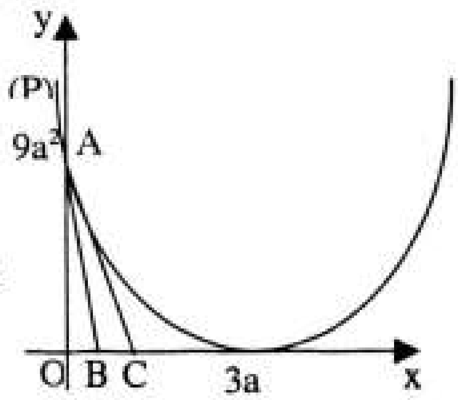
Các đường thẳng AB, AC chia (H) thành 3 phần với diện tích mỗi phần bằng $3a^3$. Nhận xét rằng $x_B, x_C > 0$. Ta có:

$$S_{\Delta OAB} = 3a^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB = 3a^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.9a^2.x_B = 3a^3 \Leftrightarrow x_B = \frac{2a}{3} \Rightarrow B(\frac{2a}{3}, 0).$$

$$S_{\Delta OAC} = 6a^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OC = 6a^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.9a^2.x_C = 6a^3 \Leftrightarrow x_C = \frac{4a}{3} \Rightarrow C(\frac{4a}{3}, 0).$$

Khi đó:

- Phương trình đường thẳng (AB) cho bởi:



$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(0, 9a^2) \\ \text{qua } B(\frac{2a}{3}, 0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (AB): $27ax + 2y - 18a^2 = 0$.

- Phương trình đường thẳng (AC) cho bởi:

$$(AC): \begin{cases} \text{qua } A(0, 9a^2) \\ \text{qua } C(\frac{4a}{3}, 0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (AC): $27ax + 4y - 36a^2 = 0$.

Ví dụ 6: Xét hình H giới hạn bởi các đường Parabol (P), y = 0, x = – 1, x = 2. Lập phương trình Parabol (P) biết rằng (P) có đỉnh S(1, 2) và diện tích hình (H) bằng 15.

Giải

Parabol (P) có đỉnh S(1, 2) có phương trình cho bởi:

(P): $y = a(x - 1)^2 + 2$.

Khi đó diện tích hình (H) được cho bởi:

$$S_H = 15 \Leftrightarrow \int_{-1}^{2}[a(x-1)^2 + 2]dx = 15 \Leftrightarrow a = 3.$$

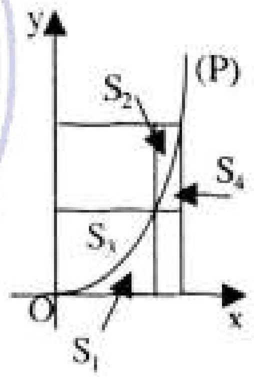
Vậy phương trình của (P): $y = 3x^2 - 6x + 5$.

II. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (Đề 23 – Va/ ĐHYD tpHCM – 93): Xét hình bị chặn dưới bởi Parabol (P): $y = x^2$, bị chặn trên bởi đường thẳng đi qua điểm A(1, 4) và có kệ số góc k. Xác định k để hình nói trên có diện tích nhỏ nhất.

Bài 2. (Đề 44 – Va): Cho A là điểm tuỳ ý trên Parabol (P): $y = px^2$ ($p > 0$), (D) là đường thẳng song song với tiếp tuyến của (P) tại A. (D) cắt (P) tại M và N. Hãy so sánh diện tích ΔAMN và diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và (D).

Bài 3. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $x = m$, $y = m^2$ ($0 \le m \le 1$) xác định các miền như trong hình vẽ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = S_1 + S_2$ và $T = T_1 + T_2$..



Bài 4. (ĐHNT HN – 2000): Cho Parabol (P): $y = x^2 + 1$ và đường thẳng (d): mx + 2. CMR khi m thay đổi, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Tìm m sao cho diện tích giới hạn bởi (d) và (P) là nhỏ nhất.

Bài 5. Xét hình bị chặn dưới bởi Parabol (P): $y = x^2 + 1$, bị chặn trên bởi đường thẳng đi qua điểm $A(x_0, y_0)$ ($y_0 > x_0^2 + 1$) và có kệ số góc k. Xác định k để hình nói trên có diện tích nhỏ nhất.

Bài 6. Xét hình bị chặn dưới bởi Parabol (P): $y = x^2 + 1$, bị chặn trên bởi đường thẳng đi qua điểm A(1, 2) và có kệ số góc k. Xác định k để hình nói trên có diện tích nhỏ nhất.

Bài 7. Xét hình bị chặn dưới bởi Parabol (P): $y = (1 + m^2)^2x^2 + p$ ($p < 0$) và trục Ox. Xác định p để hình nói trên có diện tích lớn nhất.

Bài 8. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(\frac{1}{2}, 1)$ sao cho (d) tạo với các bán trục dương của Ox, Oy một tam giác có diện tích nhỏ nhất và tính giá trị đó.

Bài 9. Cho Parabol (P): $y = x^2 + 1$ và hai điểm A, B di động trên (P) sao cho AB = 2.

a. Tìm quĩ tích trung điểm đoạn AB.

b. Xác định vị trí của A, B sao cho diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi cát tuyến AB và (P) đạt giá trị lớn nhất.

Bài 10. Xét hình (H) giới hạn bởi các đường $y = \left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$, $y = 0$ và $x = -1$. Lập phương trình các đường thẳng qua O và chia (H) thành 3 phần có diện tích bằng nhau.

Bài 11. Xét hình bị chặn dưới bởi Parabol (P): $y = x^2 - 2x + 2$, bị chặn trên bởi đường thẳng đi qua điểm A thuộc (P) (A khác đỉnh S của (P)) và vuông góc với tiếp tuyến tại A của (P). Tìm các điểm A để hình nói trên có diện tích nhỏ nhất.

Bài 12. Cho Parabol (P): $y = x^2 + 2x + 4$. Xét hình bị chặn dưới bởi một tiếp tuyến bất kỳ của (P) và các đường $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$. Tìm các tiếp tuyến để hình nói trên có diện tích lớn nhất.

Bài 13. Xác định a > 0 sao cho diện tích S giới hạn bởi hai Parabol

$$(P_1): y = \frac{4a^2 - 2ax - x^2}{1 + a^4} \text{ và } (P_2): y = \frac{x^2}{1 + a^4}.$$

có giá trị lớn nhất và tính giá trị đó.

Bài 14. Cho Parabol $y = ax^2$.

a. Tìm quĩ tích trung điểm các dây cung của (P) có độ dài 2l cho trước.

b. Tìm quĩ tích trung điểm các dây cung của (P) có hệ số góc k cho trước.

c. Tìm quĩ tích trung điểm các dây cung chắn trên (P) một viên phân có diện tích S cho trước.

d. Tính tỉ số lớn nhất của diện tích một tam giác nội tiếp với diện tích của viên phân Parabol ngoại tiếp.

e. Hãy xác định một đường thẳng đi qua một điểm $M(x_0, y_0)$ bên trong (P) và chắn trên (P) một viên phân có diện tích nhỏ nhất

Bài 15. Cho Elíp (E): $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi (E) và hai đường thẳng đứng cách nhau một đoạn bằng 4.

a. Tính diện tích của (H)

b. Xác định phương trình hai đường thẳng trên để (H) có diện tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

c. Xác định phương trình hai đường thẳng trên để (H) có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 16. Cho Parabol (P): $y = x^2 + 1$. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi (E) và hai đường thẳng đứng cách nhau một đoạn bằng 2.

a. Tính diện tích của (H)

b. Xác định phương trình hai đường hthẳng trên để (H) có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Chú ý: Hai bài tập 12 và 13 thực chất được rút ra từ định lý sau:

" *Cho đường cong (C): $y = f(x)$ luôn dương và một hằng số h. Chứng minh rằng diện tích* $S = \int_t^{t+h} f(x)dx$ *giới hạn bởi (C), trục Ox và hai đường thẳng đứng cách nhau một đoạn bằng h (có phương trình $x = t$ và $x = t + h$) sẽ:*

a. *Lớn nhất khi và chỉ khi $f(t + h) = f(t)$ và $f'(t + h) < f'(t)$.*

b. *Nhỏ nhất khi và chỉ khi $f(t + h) = f(t)$ và $f'(t + h) > f'(t)$.*"

III. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. Với k = 2 ta được $S_{min} = 24\sqrt{3}$.

Bài 2. $S_2 = \frac{4}{3} S_1$.

CHỦ ĐỀ 3

THỂ TÍCH CÁC VẬT THỂ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Tính thể tích của vật thể là một trong các ứng dụng quan trọng của tích phân xác định.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

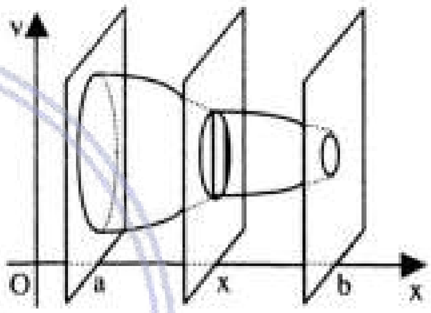
Bài toán 1: Tính thể tích vật thể T.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giả sử vật thể T được giới hạn bởi 2 mặt phẳng song song (α), (β). Ta chọn trục Ox sao cho:

$$\begin{cases} Ox \perp (\alpha) \text{ \& giả sử } Ox \cap (\alpha) = a \\ Ox \perp (\beta) \text{ \& giả sử } Ox \cap (\beta) = b \end{cases}$$



Bước 2: Giả sử mặt phẳng $(\gamma) \perp Ox$ và $(\gamma) \cap Ox = x$ $(a \le x \le b)$ cắt T theo một thiết diện có diện tích S(x) (là hàm số liên tục theo biến x). Khi đó:

$$V_T = \int_a^b S(x)dx.$$

Chú ý:

1. Nếu ta chọn trục là Oy hoặc Oz thì V_T được tính theo dy hoặc dz.
2. Diện tích S(x) của thiết diện thường được xác định thông qua diện tích đáy bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

Hệ quả:

1. Tính thể tích khối nón – khối chóp: Với hình nón (hình chóp) có chiều cao h và đáy có diện tích bằng B, thì thể tích của nó được cho bởi:

$$V = \frac{1}{3}Bh.$$

2. Tính thể tích khối nón cụt – khối chóp cụt: Với hình nón cụt (hình chóp cụt) có chiều cao h và 2 đáy có diện tích bằng B_1, B_2, thì thể tích của nó được cho bởi:

$$V = \frac{1}{3}h(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1B_2}).$$

Ví dụ 1: Tính thể tích vật thể đỉnh S, đáy là một Elíp có nửa độ dài hai trục bằng a, b, chiều cao h.

Giải

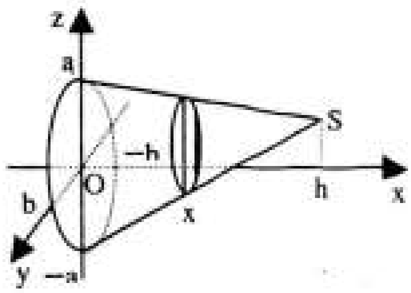
Chọn hệ trục toạ độ sao cho Elíp đáy ở trong mặt phẳng Oyz nhận O làm tâm đối xứng.

Khi đó:

- Diện tích đáy được cho bởi:

$$B = \pi ab$$

- Diện tích thiết diện được cho bởi:



$$\frac{S(x)}{B} = \left(\frac{h - x}{h}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow S(x) = \frac{\pi ab}{h^2}(h - x)^2.$$

- Thể tích vật thể được cho bởi:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \frac{\pi ab}{h^2}\int_0^h (h - x)^2 dx = \frac{\pi ab}{3h^2}(h - x)^3\Big|_0^h = \frac{\pi abh}{3}.$$

Nhận xét: Như vậy trong bài toán trên bằng việc chọn hệ trục toạ độ thích hợp ta tận dụng được công thức tính diện tích đáy là một Elíp, từ đó suy ra diện tích của thiết diện S(x), điều này là mấu trốt của lời giải. Ta đi xem xét thêm một vài ví dụ.

Ví dụ 2: Tính thể tích vật thể đỉnh S, chiều cao h, đáy là một viên phân Parabol có đáy bằng chiều cao và bằng 2a.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ sao cho viên phân Parabol đáy ở trong mặt phẳng Oyz nhận Oz làm trục đối xứng và đáy của viên phân thuộc trục Oy, khi đó:

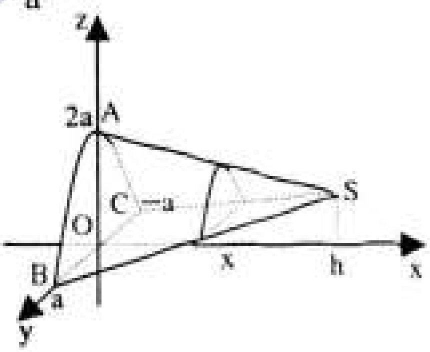
- Phương trình Parabol đáy (ABC) được cho bởi:

$$z = my^2 + 2a$$

Mặt khác: $z(\pm a) = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{2}{a}$.

Vậy phương trình Parabol đáy (ABC): $z = -\dfrac{2}{a}y^2 + 2a$

- Diện tích đáy được cho bởi:



$$B = \int_{-a}^{a}\left(-\frac{2}{a}y^2 + 2a\right)dy$$

$$= \left(-\frac{2}{3a}y^3 + 2ay\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{8a^2}{3}.$$

- Diện tích thiết diện được cho bởi:

$$\frac{S(x)}{B} = \left(\frac{h - x}{h}\right)^2 \Leftrightarrow S(x) = \frac{8a^2}{3h^2}.(h - x)^2.$$

- Thể tích vật thể được cho bởi:

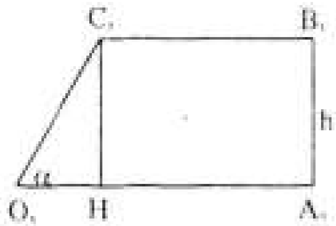
$$V = \int_0^h S(x)dx = \frac{8a^2}{3h^2}\int_0^h (h - x)^2 dx = \frac{8a^2}{9h^2}(h - x)^3\Big|_0^h = \frac{8a^2h}{9}.$$

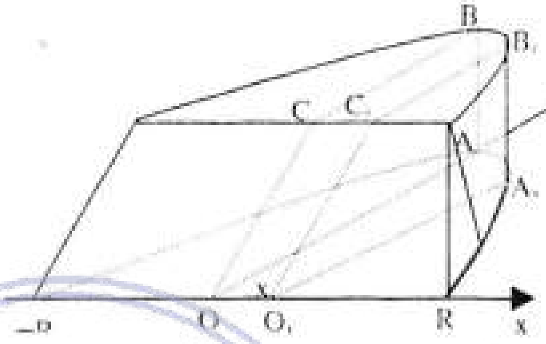
Ví dụ 3: Tính thể tích phần hình trụ bán kính đáy R, giới hạn bởi đáy với phần phía dưới của hai mặt phẳng (P) và (Q), biết:

- Mặt phẳng (P) đi qua một đường kính của đáy hợp với đáy một góc α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$.
- Mặt phẳng (Q) cắt hình trụ, song song và cách đáy một khoảng bằng $h < R\text{tg}\alpha$.

Giải:

Chọn hệ trục toạ độ sao cho Ox là đường kính giao tuyến của đáy hình trụ với mặt phẳng (P), Oy là đường kính vuông góc với Ox của đáy, khi đó:





- Thiết diện tại hoành độ x là hình thang vuông $O_1A_1B_1C_1$ có $\widehat{A_1O_1C_1} = \alpha$ và diện tích được cho bởi:

$$S(x) = \frac{1}{2}A_1B_1(O_1A_1 + B_1C_1). \qquad (1)$$

trong đó:

$$A_1B_1 = h,$$
$$O_1A_1 = \sqrt{R^2 - x^2},$$
$$B_1C_1 = O_1A_1 - O_1H = \sqrt{R^2 - x^2} - h.\text{tg}\alpha.$$

Do đó:

$$S(x) = \frac{1}{2}h(2\sqrt{R^2 - x^2} - h\text{tg}\alpha).$$

- Thể tích vật thể được cho bởi:

$$V = \int_{-R}^{R} S(x)dx = \frac{1}{2}h\int_{-R}^{R}(2\sqrt{R^2 - x^2} - h\text{tg}\alpha)dx$$

$$= h\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx - \frac{1}{2}xh^2\text{tg}\alpha\Big|_{-R}^{R}$$

$$= hR\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{R^2(1 - \sin^2 t)}\cos t\,dt - Rh^2\text{tg}\alpha$$

$$= \frac{hR^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1 + \cos 2t)dt - Rh^2\text{tg}\alpha$$

$$= \frac{hR^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - Rh^2\text{tg}\alpha = \frac{hR^2}{2}(\pi - 2\text{tg}\alpha).$$

Bài toán 2: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ quay quanh trục Ox

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Áp dụng công thức:

$$V = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Ví dụ 4 (ĐHNN I – 97): Cho hình phẳng giới hạn bởi:

$$D = \{y = \text{tg}x; x = 0; x = \frac{\pi}{3}; y = 0\}.$$

a. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi D.

b. Tính thể tích vật tròn xoay khi D quay quanh Ox

Giải:

a. ĐS: $S = \ln 2$ (đvdt).

b. Thể tích vật tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{tg}^2x dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \pi(\text{tg}x - x)\Big|_0^{\pi/3} = \pi\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (đvtt)}$$

Ví dụ 5: Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh Ox của hình giới hạn bởi trục Ox và Parabol (P) $y = x^2 - ax$ $(a > 0)$.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox là:

$$x^2 - ax = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \end{array}\right.$$

Khi đó thể tích cần xác định được cho bởi:

$$V = \pi\int_0^a (x^2 - ax)^2dx = \pi\int_0^a (x^4 - 2ax^3 + a^2x^2)dx = \frac{\pi a^5}{30}.$$

Ví dụ 6 (ĐHXD – 97): Tính thể tích vật tròn xoay do hình phẳng

$S = \{y = x\ln x; y = 0; x = 1; x = e\}$ quay quanh Ox.

Giải

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi\int_1^e (x\ln x)^2dx.$$

Để tính tích phân trên ta sử dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt:

$$\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x^2dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2}{x}\ln x dx \\ v = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

Khi đó:

$$V = \pi\left(\frac{1}{3}x^3\ln^2 x\right)\Big|_1^e - \frac{2\pi}{3}\int_1^e x^2\ln x dx = \frac{\pi e^3}{3} - \frac{2\pi}{3}\int_1^e x^2\ln x dx. \quad (1)$$

Xét tích phân $I = \int_1^e x^2\ln x dx$, đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{3}x^3\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}x^3\Big|_1^e = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$V = \frac{\pi}{27}(5e^3 - 3) \text{ (đvtt)}.$$

Bài toán 3: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi $x = f(y)$, $y = a$, $y = b$, $x = 0$, quay quanh trục Oy.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Áp dụng công thức:

$$V = \pi\int_a^b x^2 dy = \pi\int_a^b f^2(y)dy.$$

Ví dụ 7: Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh Oy của hình giới hạn bởi Parabol (P): $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2$, $y = 4$ và trục Oy.

Giải:

Ta có:

$$V = \pi\int_2^4 2y dy = 12\pi.$$

Ví dụ 8 (ĐHY – 99): Tính thể tích hình Elipxoit tròn xoay sinh ra bởi

(E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ khi nó quay quanh trục Ox.

Giải:

Elipxoit tròn xoay sinh ra do quay Elíp (E) quanh Ox, do vậy:

$$V = \pi\int_{-a}^{a} y^2 dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Chú ý: Áp dụng cho hình cầu bán kính R, ta được a = b = R, do đó:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Bài toán 4: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi một đường (C) kín.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Khi quay quanh Ox, ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1: Phân đường cong kín (C) thành hai cung (C_1): $y = f_1(x) = y_1$ và (C_2): $y = f_2(x) = y_2$ với $a \le x \le b$ và $f_1(x)$, $f_2(x)$ cùng dấu.

Bước 2: Thể tích cần xác định được cho bởi:

$$V = \pi\int_a^b | y_1^2 - y_2^2 | dx.$$

Trường hợp 2: Khi quay quanh Oy, ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1: Phân đường cong kín (C) thành hai cung (C_1): $x = f_1(y) = x_1$ và (C_2): $x = f_2(y) = x_2$ với $a \le y \le b$ và $f_1(y)$, $f_2(y)$ cùng dấu.

Bước 2: Thể tích cần xác định được cho bởi:

$$V = \pi\int_a^b | x_1^2 - x_2^2 | dy.$$

Ví dụ 9 (ĐHQG HN – 99): Tính thể tích khi S quay quanh Ox

$$S = \{y = x^2 - 4x + 6, y = -x^2 - 2x + 6\}.$$

Giải:

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 4x + 6 = -x^2 - 2x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Thể tích vật tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi\int_0^1 \left|\left(x^2 - 4x + 6\right)^2 - \left(-x^2 - 2x + 6\right)^2\right| dx = \pi\int_0^1 \left(12x^3 - 36x^2 + 24x\right) dx$$

$$= \pi\left(3x^4 - 12x^3 + 12x^2\right)\Big|_0^1 = 3\pi \text{ (đvtt)}.$$

Ví dụ 10. (ĐHXD – 94):Tính thể tích hình xuyến do quay hình tròn (C) có phương trình : $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ khi quanh trục Ox.

Giải

Xét (C): $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ có tâm I(0,2), bán kính R = 1.

Vậy:

- Nửa (C) ở trên ứng với $2 \le y \le 4$ có phương trình:
$$y = f_1(x) = 2 + \sqrt{1 - x^2} \quad \text{với } x \in [-1, 1]$$
- Nửa (C) ở dưới ứng với $0 \le y \le 2$ có phương trình:
$$y = f_2(x) = 2 - \sqrt{1 - x^2} \quad \text{với } x \in [-1, 1].$$

Khi đó thể tích vật thể tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi\int_{-1}^1 \left[\left(2 + \sqrt{1 - x^2}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{1 - x^2}\right)^2\right] dx = 8\pi\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Thực hiện phép đổi biến $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$.
Đổi cận:

- Với $x = -1$ thì $t = -\frac{\pi}{2}$.
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó:

$$V = 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt = 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)dt$$

$$= 4\pi(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi^2.$$

Bài toán 5: Tìm thể tích lớn nhất và nhỏ nhất của vật thể T.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thiết lập công thức tính thể tích của T theo một hoặc nhiều tham số của giả thiết (giả sử là m), tức là ta có:

$$V = g(m).$$

Bước 2: Tìm gtln, gtnn của g(m) bằng một trong các phương pháp đã biết, thông thường là sử dụng đạo hàm.

Lưu ý: Trong nhiều trường hợp từ giả thiết ta có được biểu thức điều kiện cho m là K. Khi đó dựa vào K để tìm gtln, gtnn cho g(m).

Ví dụ 11: Gọi (d) là đường thẳng qua M(1, 1) với hệ số góc $k < 0$. Giả sử (d) cắt Ox, Oy tại A và b.

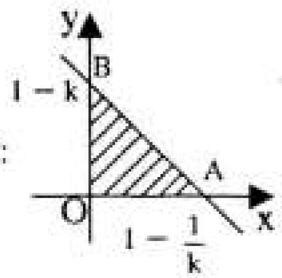
a. Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi ΔOAB khi quanh trục Ox. Xác định k để khối tròn xoay đó có thể tích nhỏ nhất.

b. Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi ΔOAB khi quanh trục Oy. Xác định k để khối tròn xoay đó có thể tích nhỏ nhất.

Giải

Phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

(d): $y = k(x - 1) + 1$.



Vì $(d) \cap Ox = \{A\}$, toạ độ A là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = k(x-1)+1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(\frac{k-1}{k}, 0).$$

Vì $(d) \cap Oy = \{B\}$, toạ độ B là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = k(x-1)+1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0, 1 - k).$$

a. Gọi V_{Ox} là thể tích sinh bởi ΔOAB khi quanh trục Ox, để xác định V_{Ox} ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng hệ quả của bài toán 1, ta được:

$$V_{Ox} = \frac{1}{3}\pi(1-k)^2.\frac{k-1}{k} = \frac{\pi}{3}(k^2 - 3k + 3 - \frac{1}{k}).$$

Cách 2: Sử dụng bài toán 2, ta được:

$$V_{Ox} = \pi\int_0^{\frac{k-1}{k}} y^2dx = \int_0^{\frac{k-1}{k}} [k(x-1)+1]^2dx = \frac{\pi}{3}(k^2 - 3k + 3 - \frac{1}{k}).$$

- Xác định $\text{Min}V_{Ox}$: Xét hàm số $f(k) = k^2 - 3k + 3 - \frac{1}{k}$ với $k < 0$.

  Đạo hàm:

  $$f'(k) = 2k - 3 + \frac{1}{k^2}$$

  $$f'(k) = 0 \Leftrightarrow 2k - 3 + \frac{1}{k^2} = 0 \overset{k<0}{\Leftrightarrow} k = -\frac{1}{2}.$$

  Bảng biến thiên

k	0		− 1/2		+ ∞
f'(k)	0	−	0	+	
f(k)	+∞	↘	27/4	↗	+ ∞

  Vậy $\text{Min}V_{Ox} = \frac{9\pi}{4}$, đạt được khi $k = -\frac{1}{2}$.

b. Gọi V_{Oy} là thể tích sinh bởi ΔOAB khi quanh trục Oy, để xác định V_{Oy} ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng hệ quả của bài toán 1, ta được:

$$V_{Oy} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{k-1}{k}\right)^2.(1-k) = \frac{\pi}{3}(\frac{1}{k^2} - \frac{3}{k} - k + 3).$$

Cách 2: Sử dụng bài toán 2, ta được:

$$V_{Ox} = \pi\int_0^{1-k} x^2dy = \int_0^{\frac{k-1}{k}} [\frac{1}{k}(y-1)+1]^2dy = \frac{\pi}{3}(\frac{1}{k^2} - \frac{3}{k} - k + 3).$$

- Xác định $\text{Min}V_{Oy}$: Xét hàm số $g(k) = \frac{1}{k^2} - \frac{3}{k} - k + 3$ với $k < 0$.

  Đạo hàm:

  $$g'(k) = -\frac{2}{k^3} + \frac{3}{k^2} - 1$$

  $$g'(k) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{k^3} + \frac{3}{k^2} - 1 = 0 \overset{k<0}{\Leftrightarrow} k = -2.$$

Bảng biến thiên

k	0		−2		+∞
g'(k)	0	−	0	+	
g(k)	+∞	↘	27/4	↗	+∞

Vậy $\text{Min}V_{Oy} = \dfrac{9\pi}{4}$, đạt được khi $k = -\dfrac{1}{2}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (ĐHTS TPHCM – 2000): Cho hình phẳng G giới hạn bởi $y = 4 - x^2$; $y = x^2 + 2$. Quay hình phẳng (G) quanh Ox ta được một vật thể. Tính thể tích vật thể này.

Bài 2. (HVQY – 97):Cho hình phẳng giới hạn bởi $D = \{y = x^2; y = \sqrt{x}\}$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi D quay quanh trục Ox.

Bài 3. (HVKTQS – 95):Tính thể tích do D quay quanh trục Ox

$$D = \{y = 0; y = \sqrt{1 + \cos^4 x + \sin^4 x}\,; x = \frac{\pi}{2}; x = \pi\}.$$

Bài 4. (Đề 42): Tính thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi ta quay quanh trục Ox hình phẳng S giới hạn bởi các đường: $y = xe^x$, $x = 1$, $y = 0$ $(0 \le x \le 1)$.

Bài 5. (ĐHXD – 98):Tính thể tích vật thể tạo bởi hình (E): $\dfrac{(x-4)^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} \le 1$ quay quanh trục Oy.

Bài 6. (ĐHNN I – 99): Cho hình phẳng giới hạn bởi $D = \{y = \dfrac{1}{x^2+1}; y = \dfrac{x^2}{2}\}$.

Tính thể tích vật tròn xoay khi D quay quanh Ox.

Bài 7. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi ta quay hình H quanh trục Ox, với:

a. (Đề 55): $H = \{y = 0; y = \sqrt{\cos^6 x + \sin^6 x}\,; x = 0; x = \dfrac{\pi}{2}\}$.

b. $H = \{y = 0; y = \sqrt{\cos^6 x + \sin^6 x}\,; x = 0, x = \dfrac{\pi}{2}\}$.

c. $H = \{y = 3ax - x^2\ (a > 0), y = 0\}$.

d. (ĐHL – 96): $H = \{y = 2x^2; y = 2x + 4\}$.

Bài 8. (Đề 58): Cho hình tròn tâm I(2,0), bán kính R = 1, quay quanh trục Oy. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo nên.

Bài 9. Tính thể tích phần hình trụ bán kính đáy R, giới hạn bởi đáy với một mặt phẳng đi qua một đường kính của đáy hợp với đáy một góc α.

Bài 10. Tính thể tích của Parabolloide tròn xoay có đáy B và chiều cao h.

Bài 11. Cho miền (H) giới hạn bởi đường cong $y = \sin x$ và đoạn $0 \le x \le \pi$ của trục Ox. Tính diện tích (H) khi quay quanh:

a. Trục Ox.

b. Trục Oy.

Bài 12. (ĐHKT – 96): cho hình phẳng D giới hạn bởi hai đường cong

$$y^2 = (4 - x)^3 \text{ và } y^2 = 4x.$$

a. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi miền D.

b. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi D quay quanh trục Ox.

Bài 13. (ĐHPCCC – 2000): Cho hàm số (C): $y = x(x - 1)^2$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b. Viết phương trình tiếp tuyến kẻ từ O(0,0) đến (C).

c. Tính thể tích giới hạn bởi (C) khi (C) quay quanh Ox.

Bài 14. (ĐHBK HN – 92):Trong các hình nón xoay có diện tích toàn phần là $\pi\,(cm^2)$, hình nào có thể tích lớn nhất.

Bài 15. (Đề 27): Tính thể tích của khối tròn xoay tạo nên bởi hình tròn $x^2 + (y - b)^2 \le a^2$ ($0 < a \le b$) khi quay quanh Ox.

Bài 16. Cho miền D giới hạn bởi đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 8$ và Parabol (P): $y^2 = 2x$.

a. Tính diện tích S của miền D.

b. Tính thể tích V sinh bởi D khi quay quanh Ox.

Bài 17. Gọi (d) là đường thẳng qua M(2, 1) với hệ số góc $k < 0$. Giả sử (d) cắt Ox, Oy tại A và b.

a. Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi ΔOAB khi quanh trục Ox. Xác định k để khối tròn xoay đó có thể tích nhỏ nhất.

b. Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi ΔOAB khi quanh trục Oy. Xác định k để khối tròn xoay đó có thể tích nhỏ nhất.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $V = 16\pi$.

Bài 2. $V = \dfrac{3\pi}{10}$.

Bài 3. $V = \dfrac{7\pi^2}{8}$.

Bài 4. $V = \dfrac{\pi(e - 1)}{2}$.

Bài 5. $V = 64\pi^2$.

Bài 6. $V = \dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{3\pi}{10}$.

CHỦ ĐỀ 4

ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Chứng minh đẳng thức tích phân.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp được sử dụng nhiều nhất để chứng minh các đẳng thức tích phân là phương pháp đổi biến, việc lựa chọn phép đặt ẩn phụ phụ thuộc vào cận a, b và tính chất của hàm số f(x) dưới dấu tích phân. Ngoài ra còn sử dụng

- Phương pháp phân tích
- Phương pháp tích phân từng phần.
- Phương pháp quy nạp toán học
- Sử dụng tích phân truy hồi.

Trong Chủ đề 4: Lớp các tích phân đặc biệt – Phần II chúng ta đã đi chứng minh được các đẳng thức tích phân quan trọng cùng với ứng dụng to lớn của nó trong việc tính tích phân xác định, trong mục này chúng ta đi điểm lại chúng (*Đối với các em học sinh tốt nhất hãy chứng minh lại một lần*):

Đẳng thức 1: Nếu f(x) liên tục và là hàm lẻ trên $[-a, a]$ thì :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Đẳng thức 2: Nếu f(x) liên tục và là hàm chẵn trên đoạn $[-a, a]$ thì :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Đẳng thức 3: Nếu f(x) liên tục và chẵn trên R thì :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)dx}{a^x+1} = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx \text{ với } \forall\alpha\in R^+ \text{ và } a>0.$$

Đẳng thức 4: Nếu f(x) liên tục trên $[0, \frac{\pi}{2}]$ thì :

$$\int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_{0}^{\pi/2} f(\cos x)dx.$$

Đẳng thức 5: Nếu f(x) liên tục và $f(a+b-x) = f(x)$ thì

$$\int_{a}^{b} xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Hệ quả 1: Nếu f(x) liên tục trên [0, 1] thì:

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} f(\sin x)dx.$$

Hệ quả 2: Nếu f(x) liên tục trên [0, 1] thì:

$$\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} xf(\cos x)dx = \pi\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} f(\cos x)dx.$$

Đẳng thức 6: Nếu f(x) liên tục và $f(a + b - x) = -f(x)$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Đẳng thức 7: Nếu f(x) liên tục trên đoạn [0, 2a] với a > 0. thì

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(2a - x)]dx.$$

Đẳng thức 8: Nếu f(x) liên tục trên R và tuần hoàn với chu kỳ T thì

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x}dx$.

Giải

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$,

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$VT = \int_{\pi/2}^0 \frac{\cos^4(\frac{\pi}{2} - t)(-dt)}{\cos^4(\frac{\pi}{2} - t) + \sin^4(\frac{\pi}{2} - t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 tdt}{\cos^4 t + \sin^4 t} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 xdx}{\cos^4 x + \sin^4 x}.$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + tgx)dx = \int_0^{\pi/4} \ln\frac{2}{1 + tgx}dx$.

Giải

Đặt $t = \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$,

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$VT = -\int_{\pi/4}^0 \ln[1 + tg(\frac{\pi}{4} - t)]dt = \int_0^{\pi/4} \ln[1 + \frac{1 - tgt}{1 + tgt}]dt = \int_0^{\pi/4} \ln\frac{2}{1 + tgt}dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ln\frac{2}{1 + tgx}dx \text{ đpcm.}$$

Chú ý: Ý nghĩa cơ bản của bài toán trên là ta sẽ đi xác định được giá trị của $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\mathrm{tg}x)dx$, thật vậy:

$$2I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\mathrm{tg}x)dx + \int_0^{\pi/4} \ln\frac{2}{1+\mathrm{tg}x}dx = \int_0^{\pi/4} \ln 2dx = \ln 2.x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi\ln 2}{4}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \int_0^t \frac{(t-x)^n}{n!}e^x dx$.

Giải

Cách 1: Ta đi chứng minh đẳng thức trên bằng phương pháp quy nạp

- Với n = 1, ta có:

$$e^t = 1 + t + \int_0^t (t-x)e^x dx. \qquad (1)$$

Xét tích phân $I_1 = \int_0^t (t-x)e^x dx$, sử dụng tích phân từng phần đặt:

$$\begin{cases} u = t - x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Khi đó:

$$I_1 = (t-x)e^x\Big|_0^t + \int_0^t e^x dx = -t + e^x\Big|_0^t = -t - 1 + e^t \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$e^t = 1 + t - t - 1 + e^t \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ luôn đúng.}$$

- Giả sử đẳng thức đúng với n = k, tức là ta có:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k}{k!} + \int_0^t \frac{(t-x)^k}{k!}e^x dx. \qquad (3)$$

- Ta đi chứng minh đẳng thức đúng với n = k + 1, tức là chứng minh :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + \int_0^t \frac{(t-x)^{k+1}}{(k+1)!}e^x dx. \qquad (4)$$

Xét tích phân $I_{k+1} = \int_0^t \frac{(t-x)^{k+1}}{(k+1)!}e^x dx$, sử dụng tích phân từng phần đặt:

$$\begin{cases} u = (t-x)^{k+1} \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -(k+1)(t-x)^k dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Khi đó:

$$I_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}\left[(t-x)^{k+1}e^x\Big|_0^t + (k+1)\int_0^t (t-x)^k e^x dx\right]$$

$$= -\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + \int_0^t \frac{(t-x)^k}{k!}e^x dx. \quad (5)$$

Thay (5) vào (4), ta được:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k}{k!} + \int_0^t \frac{(t-x)^k}{k!}e^x dx$$. luôn đúng.do (3).

Cách 2: Dựa trên tư tương của tích phân truy hồi

Xét $I_n = \int_0^t \frac{(t-x)^n}{n!}e^x dx = \frac{1}{n!}\int_0^t (t-x)^n e^x dx$.

Đặt:

$$\begin{cases} u = (t-x)^n \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -n(t-x)^{n-1}dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Khi đó:

$$I_n = \frac{1}{n!}\left[(t-x)^n e^x\Big|_0^t + n\int_0^t (t-x)^{n-1}e^x dx\right] = -\frac{t^n}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}I_{n-1}.$$

Từ đó:

$$I_n = -\frac{t^n}{n!} - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \ldots - t + I_0 = -\frac{t^n}{n!} - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \ldots - t + \int_0^t e^x dx$$

$$= -\frac{t^n}{n!} - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \ldots - t + e^x\Big|_0^t = -\frac{t^n}{n!} - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \ldots - t - 1 + e^t$$

$$\Leftrightarrow e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \int_0^t \frac{(t-x)^n}{n!}e^x dx$$ đpcm.

Bài toán 2: Sử dụng tích phân chứng minh A = B.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lựa chọn một đẳng thức luôn đúng, thông thường là dạng đặc biệt của nhị thức Nưutơn.

Bước 2: Lấy tích phân hai vế của đẳng thức trên từ a đến b (thông thường là từ 0 tới x).

Bước 3: Lựa chọn giá trị thích hợp cho x ta sẽ nhận được đẳng thức cần chứng minh.

Chú ý: Nhắc lại:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với n nguyên, dương:

a. $C_n^0 + \dfrac{C_n^1}{1+1} + \dfrac{C_n^2}{1+2} + \ldots + \dfrac{C_n^k}{1+k} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{1+n} = \dfrac{2^{n+1}-1}{1+n}$.

b. $C_n^0 - \dfrac{C_n^1}{1+1} + \dfrac{C_n^2}{1+2} - \ldots + (-1)^n.\dfrac{C_n^n}{1+n} = \dfrac{1}{1+n}$.

Giải.

Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \quad (1)$$

Lấy tích phân theo x hai vế của (1), ta được:

$$\int_0^t (1+x)^n dx = \int_0^t \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^t = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^t$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+t)^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{t^{k+1}}{k+1}. \quad (2)$$

a. Thay t = 1 vào (2), ta được kết quả câu a).

b. Thay t = –1 vào (2), ta được kết quả câu b).

II. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (ĐH Huế – 97): Cho hàm số f(x) liên tục trên [0, + ∞) thoả mãn $f(t) := f(\frac{1}{t})$, với $\forall t > 0$ và hàm số

$$g(x) = \begin{cases} f(tgx) & \text{neu } 0 \le x \le \pi/2 \\ f(0) & \text{neu } x = \pi/2 \end{cases}$$

a. Chứng minh rằng g(x) liên tục trên [0, π/2].

b. Chứng minh rằng $\int_0^{\pi/4} g(x)dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} g(x)dx$.

Bài 2. Chứng minh rằng $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$ với $m, n \in Z^+$.

Bài 3. Chứng minh rằng $\int_{1/e}^{tg\alpha} \dfrac{xdx}{x^2+1} + \int_{1/e}^{cotg\alpha} \dfrac{dx}{x(x^2+1)} = 1$ (tgα > 0).

Bài 4. Chứng minh rằng:

a. $\int_{-1/2}^{1/2} \cos x.\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)dx = 0$

b. $\int_{-1}^{1} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx = \dfrac{\pi}{4}$.

c. $\int_{-1}^{1} (e^{x^2}\sin x + e^2.x^2)dx = \dfrac{2e^2}{3}$.

d. $\int_{-1}^{1} \dfrac{x^4dx}{2^x+1} = \dfrac{1}{5}$.

e. $\int_{-1}^{1} \dfrac{x^4+\sin x}{x^2+1}dx = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{3}$.

f. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{x+\cos x}{4-\sin^2 x}dx = \dfrac{\ln 9}{2}$.

Bài 5. Chứng minh rằng:

a. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx = \frac{\pi}{2}$

b. $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^n xdx}{\cos^n x+\sin^n x} = \frac{\pi}{4}$

c. $\int_0^{\pi} x\sin^3 xdx = \frac{3\pi}{4}$.

d. $\int_0^{2004\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx = 4008\sqrt{2}$

e. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{x^2.|\sin x|}{1+2^x}dx = \pi + 2$.

f. $\int_0^{\pi}\frac{x\sin xdx}{4-\cos^2 x} = \frac{\pi\ln 9}{8}$.

g. $\int_0^{2\pi} x.\cos^3 xdx = 0$.

h. $\int_0^{3\pi}\sin x.\sin 2x.\sin 3x.\cos 5xdx = 0$.

III. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1.

a. Ta chỉ cần chứng minh g(x) liên tục tại $x = \frac{\pi}{2}$, thật vậy:

$$\lim_{x\to\pi/2} g(x) = \lim_{x\to\pi/2} f(tgx) = \lim_{x\to\pi/2} f(\cot gx) = f(0) = g(\frac{\pi}{2}).$$

b. Xét tích phân $I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} g(x)dx$, thực hiện phép đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$.

Bài 2. Gọi $I(m, n) = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$, sử dụng tích phân từng phần, đặt:

$$\begin{cases} u = (1-x)^n \\ dv = x^m dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -n(1-x)^{n-1}dx \\ v = \frac{x^{m+1}}{m+1} \end{cases}$$

Khi đó:

$$I(m, n) = \frac{(1-x)^n x^{m+1}}{m+1}\Big|_0^1 + \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx$$

$$= \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)$$

Do đó:

$$I(m, n) = \frac{n(n-1)...1}{(m+1)(m+2)...(m+n)} I(m+n-1, 1) = \frac{m!\,n!}{(m+n)!}\int_0^1 x^{m+n}dx$$

$$= \frac{m!\,n!}{(m+n)!}.\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\Big|_0^1 = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} \text{ đpcm.}$$

Bài 3. Xét tích phân $J = \int_{1/e}^{\cot g\,a}\frac{dx}{x(x^2+1)}$ bằng cách đặt $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$.

CHỦ ĐỀ 5

BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để chứng minh một bất đẳng thức tích phân, ta thường sử dụng dụng lại ba tính chất 6, 7, 8 của tích phân xác định, cụ thể: với hàm số f(x), g(x) liên tục trên [a, b] ta có:

Tính chất 6: Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Tính chất 7: Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $f(x) = g(x), \forall x \in [a, b]$.

Tính chất 8: Nếu $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ thì:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Ngoài ra một tính chất rất đơn giản cũng thường được sử dụng trong phép tính tích phân là:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Chứng minh rằng $\int_a^b f(x)dx \leq A$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định một hàm số g(x) thoả mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \ \forall x \in [a,b] \\ \int_a^b g(x)dx = A \end{cases}$$

Bước 2: Khi đó từ:

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx = A.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $f(x) = g(x)$.

Chú ý: Để thực hiện được bước 1 trong bài toán trên (tìm ra hàm g(x)) ta thường lựa chọn một trong các hướng sau:

Hướng 1. Đánh giá từ hàm số f(x) theo các cận a, b.

Hướng 2. Sử dụng đạo hàm xét tính đơn điệu của hàm số f(x) trên [a, b].

Hướng 3. Sử dụng các bất đẳng thức.

Ngoài ra cũng có thể sử dụng định lý về dấu của tam thức để chứng minh một bất đẳng thức tích phân.

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp "*Lấy học trò làm trung tâm*"
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

Trước hết chúng ta đi chứng minh các *bất đẳng thức tích phân cơ bản* (được minh hoạ dưới dạng bất đẳng thức 1, 2,...) sau:

Bất đẳng thức 1: (Đề 102): Cho hai hàm số liên tục

$$f:[0,1]\to[0,1];\quad g:[0,1]\to[0,1].$$

Chứng minh rằng:

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx.$$

CHỨNG MINH

Với $x\in[0,1]$, ta được:

$$\begin{cases}0\le f(x)\le 1\\0\le g(x)\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le f(x)g(x)\le g(x)\\0\le f(x)g(x)\le f(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le\int_0^1 f(x)g(x)dx\le\int_0^1 g(x)dx\\0\le\int_0^1 f(x)g(x)dx\le\int_0^1 f(x)dx\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx\ \text{(đpcm)}.$$

Bất đẳng thức 2: (*Bất đẳng thức Bunhiakôpxki*): Chứng minh rằng nếu f(x), g(x) là hai hàm số liên tục, xác định trên đoạn $[a,b]$, thì ta có

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx.\qquad(1)$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi: f(x) = kg(x).

CHỨNG MINH

Với $x\in[a,b]$, xét tam thức bậc hai:

$$0\le[t.f(x)+g(x)]^2=t^2.f^2(x)+2t.f(x)g(x)+g^2(x),\ \forall t\in R$$

$$\Rightarrow 0\le t^2\int_a^b f^2(x)dx+2t\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx,\ \forall t\in R.\qquad(2)$$

Xét hai trường hợp:

a. Nếu $f^2(x)\equiv 0$, $\forall x\in[a,b]$ thì:

$f(x)\equiv 0\Rightarrow$ (1) đúng.

b. Trái lại ta sẽ có $\int_a^b f^2(x)dx>0$

Khi đó từ việc (2) đúng với $\forall t\in R$, ta phải có:

$$\Delta'_t\le 0\Leftrightarrow\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2-\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx\ \text{(đpcm)}.$$

Nhận xét: Phương pháp sử dụng để chứng minh trong bài toán trên chính là ý tưởng *sử dụng định lý về dấu của tam thức*.

Bất đẳng thức 3: (*Bất đẳng thức Tsêbưsepi*): Cho f(x), g(x) là hai hàm số liên tục, xác định trên đoạn $[a, b]$, thì ta có

a. Nếu f(x), g(x) đều đồng biến hoặc nghịch biến trên [a, b] thì:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \ge \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx. \quad (1)$$

b. Nếu một hàm đồng biến còn hàm kia nghịch biến trên [a, b] thì:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx. \quad (2)$$

CHỨNG MINH

Ta chỉ chứng minh cho trường hợp f(x), g(x) đều đồng biến trên [a, b], các trường hợp còn lại xin dành cho bạn đọc.

Từ điều kiện f(x) đồng biến trên [a, b], suy ra:

$$f(a) \le f(x) \le f(b) \Rightarrow f(a)\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le f(b)\int_a^b dx$$

$$\Leftrightarrow f(a) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le f(b).$$

Theo định lý giá trị trung gian của một hàm số liên tục, suy ra tồn tại $x_0 \in [a, b]$ sao cho:

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \quad (3)$$

Vì f(x), g(x) đều đồng biến trên [a, b], suy ra:

$$0 \le [f(x) - f(x_0)].[g(x) - g(x_0)], \text{ với } \forall x \in [a, b]$$

$$\Leftrightarrow 0 \le f(x).g(x) - f(x_0).g(x) - g(x_0).f(x) + f(x_0).g(x_0)$$

$$\Rightarrow 0 \le \int_a^b f(x)g(x)dx - f(x_0)\int_a^b g(x)dx - g(x_0)\int_a^b f(x)dx + f(x_0).g(x_0)\int_a^b dx. \quad (4)$$

Thay (3) vào (4), ta được:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \ge f(x_0)\int_a^b g(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \ge \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx \text{ (đpcm).}$$

Lưu ý: Với những hàm số f(x) dưới dấu tích phân, thoả mãn điều kiện chặt hơn (đạo hàm f'(x) liên tục trên [a, b]) chúng ta sẽ có được các bất đẳng thức sau:

1. Nếu hàm số f(x) có đạo hàm f'(x) liên tục trên [0, 1] thì

$$\int_0^1 |f(x)|dx \le \text{Max}\left\{\left|\int_0^1 f(x)dx\right|, \int_0^1 |f'(x)|dx\right\}.$$

2. Nếu hàm số f(x) có đạo hàm f'(x) liên tục trên [a, b] thì

$$\int_a^b f^2(x)dx \ge \frac{\left(\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|\right)^2}{b-a}.$$

3. Nếu hàm số f(x) có đạo hàm f'(x) liên tục trên [a, b] thì

$$\int_a^b [f'(x)]^2dx \ge \frac{[f(b)-f(a)]^2}{b-a}.$$

Bài toán 2: Phương pháp đánh giá từ hàm số f(x) theo các cận a, b.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ở phương pháp này, từ $x\in[a, b]$ sau một vài **phép đánh giá nhỏ ta thu được** $f(x) \le g(x)$.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $1 < \int_{-1}^{1} 2^{x^3}dx < 4$.

Giải

Với $x\in[-1, 1]$, ta được:

$$-1 \le x^3 \le 1 \Rightarrow 2^{-1} \le 2^{x^3} \le 2,$$

dấu đẳng thức ở vế phải chỉ xảy ra tại x = 1 còn vế trái tại x = 1, do đó:

$$\int_{-1}^{1} 2^{-1}dx < \int_{-1}^{1} 2^{x^3}dx < \int_{-1}^{1} 2dx \Leftrightarrow 1 < \int_{-1}^{1} 2^{x^3}dx < 4 \text{ (đpcm)}$$

Chú ý: Hãy nhìn lại biểu thức A, bởi giá trị biểu diễn của A cho phép ta lựa chọn phép đánh giá thích hợp. Chúng ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 2 (ĐHQG HN Khối A – 96): Chứng minh rằng $\int_0^1 \frac{dx}{2+x+x^2} < \frac{\pi}{8}$. (*)

Giải

Với $x\in[0, 1]$, ta được:

$$x \ge x^2 \Rightarrow 2 + x + x^2 \ge 2 + 2x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2+x+x^2} \le \frac{1}{2(1+x^2)},$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại x = 0 hoặc x = 1, do đó:

$$\int_0^1 \frac{dx}{2+x+x^2} < \int_0^1 \frac{dx}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}. \quad (1)$$

Xét tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ bằng phép đổi biến $x = tgt, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + tg^2t)dt \text{ và } \frac{dx}{x^2+1} = \frac{(1+tg^2t)dt}{tg^2t+1} = dt.$$

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 0,
- Với x = 1 thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\pi/4} dt = t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\int_0^1 \frac{dx}{2 + x + x^2} < \frac{\pi}{8} \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét: Trong lời giải ở ví dụ trên, sở dĩ chúng ta đi đánh giá hàm số

$$f(x) = \frac{1}{2 + x + x^2} \le \frac{1}{2(1 + x^2)}, \qquad (3)$$

mà không lựa chọn việc đánh giá

$$f(x) = \frac{1}{2 + x + x^2} \le \frac{1}{2 + x} \qquad (4)$$

cho dù việc lấy tích phân ở (4) đơn giản hơn rất nhiều so với (3), điều căn bản là hãy nhìn lại vế trái của (*) đó là một biểu thức chứa π và kết quả đó chỉ có được ở tích phân trên khi nguyên hàm là một hàm lượng giác ngược. Hãy nhớ lại:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{t}{a} + C, \text{ trong đó } x = a.\text{tgt}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = t + C, \text{ trong đó } x = a.\sin t.$$

Bây giờ ta lấy đúng ý tưởng đó cho ví dụ tiếp theo.

Ví dụ 3 (HVQY – 96): Chứng minh rằng $\frac{\pi}{6} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - x^3}} < \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

Giải

a. Với $x \in [0, \frac{1}{2}]$, ta được:

$$1 - x^2 - x^3 \le 1 - x^2 \Rightarrow \sqrt{1 - x^2 - x^3} \le \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - x^3}} \ge \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại x = 0, do đó:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - x^3}} > \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (1)$$

Xét tích phân $I_1 = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ bằng phép đổi biến $x = \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = \cos t dt \text{ và } \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = \frac{1}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{6}$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\pi/6} dt = t\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{6}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2-x^3}} > \frac{\pi}{6}. \quad (3)$$

b. Với $x \in [0, \frac{1}{2}]$, ta được:

$$1-x^2-x^3 \geq 1-2x^2 \Rightarrow \sqrt{1-x^2-x^3} \geq \sqrt{1-2x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2-x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}},$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại $x = 1$ hoặc $x = 0$, do đó:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2-x^3}} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}} \quad (4)$$

Xét tích phân $I_2 = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$ bằng phép đổi biến $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t dt \text{ và } \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}} = dt.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = \frac{1}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4} dt = \frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}. \quad (5)$$

Thay (5) vào (4), ta được:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2-x^3}} < \frac{\pi\sqrt{2}}{8}. \quad (6)$$

Kết hợp (3) và (4) ta được điều cần chứng minh.

Chú ý: Nếu hàm f(x) dưới dấu tích phân là một hàm phức hợp thì trong nhiều trường hợp cần đánh giá đồng thời các hàm đơn lẻ trong đó. Chúng ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 4: Chứng minh rằng $\int_0^1 \frac{e^{2x}\cos x dx}{1+x^2} < \frac{\pi e^2}{4}$.

Giải

Với $x \in [0, 1]$, ta được:

$$\begin{cases} 1 < e^{2x} < e^2 \\ 0 < \cos x < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < e^{2x}\cos x < e^2 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}\cos x}{1+x^2} < \frac{e^2}{1+x^2}.$$

Do đó:

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}\cos x dx}{1+x^2} < \int_0^1 \frac{e^2 dx}{1+x^2} = e^2.t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi e^2}{4} \text{ (đpcm).}$$

Bài toán 3: Phương pháp sử dụng đạo hàm tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số f(x) trên đoạn [a, b].

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bằng việc xét hàm số f(x) trên đoạn [a, b] ta tìm được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số, tức là: $m \le f(x) \le M$.

Ví dụ 5 (ĐHNN I – 98): Chứng minh rằng $\frac{2}{e^2} < \int_0^2 e^{x-x^2} dx < 2\sqrt[4]{e}$.

Giải

Xét hàm số $y = x - x^2$ trên miền $D = [0, 2]$.

Đạo hàm:

$$y' = 1 - 2x \text{ suy ra } y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên

x	0		1/2		2
y'		+	0	–	0
y	0	↗	1/4	↘	– 2

Từ đó suy ra:

$$-2 \le y \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{-2} \le e^{x-x^2} \le e^{1/4}$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = 2$, do đó:

$$\int_0^2 e^{-2}dx < \int_0^2 e^{x-x^2}dx < \int_0^2 e^{1/4}dx \Leftrightarrow \frac{2}{e^2} < \int_0^2 e^{x-x^2}dx < 2\sqrt[4]{e} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 6 (HVKTMM – 2000): Chứng minh rằng $\int_0^1 x\sin^2 x dx < \frac{1}{4}$.

Giải

Xét hàm số y = sinx – x trên miền D = [0, 1].

Đạo hàm:

$y' = \cos x - 1 < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên D.

Từ đó suy ra:

$0 < \sin x \le x \Rightarrow x\sin^2 x \le x^3$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại x = 0, do đó:

$$\int_0^1 x\sin^2 x dx < \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4} \text{ (đpcm).}$$

Chú ý: Trong lời giải ở ví dụ trên, chúng ta đi xét hàm số y = sinx – x mà thực chất là sử dụng kết quả quen thuộc trong phần hàm số là sinx < x với ∀x > 0. Ngoài kết quả đó chúng ta cũng cần nhớ tới tgx > x với ∀x > 0.

Ví dụ 7 (ĐHYD TPHCM – 98): Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1}{2}$.

Giải

Xét hàm số $y = \frac{\sin x}{x}$ trên miền $D = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{(x - tgx)\cos x}{x^2} < 0, \forall x \in D$$

suy ra hàm số nghịch biến trên D.

Từ đó suy ra:

$$y(\frac{\pi}{3}) \le \frac{\sin x}{x} \le y(\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{3}{\pi}$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra ở vế phải tại $x = \frac{\pi}{6}$ và vế trái $x = \frac{\pi}{3}$, do đó:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/3} dx < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{3}{\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/3} dx \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1}{2} \text{ (đpcm).}$$

Bài toán 4: Phương pháp sử dụng bất đẳng thức.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trong mục này thay vì đi giải các ví dụ cụ thể, chúng ta cùng nhau xem xét ví dụ gần tổng quát với mục đích để các em học sinh có được cái nhìn tổng quan, từ đó rút ra cho mình được phương pháp giải một lớp bài toán dạng đó.

Ví dụ 8: Cho hàm số f(x) liên tục trên đoạn [0, 1] và thoả mãn các điều kiện:

a. $1 \le f(x) \le 3$ với $\forall x \in [0, 1]$.

b. $\int_0^1 f(x)dx = 2$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} < \frac{2}{3}$. (1)

Giải

Nhận xét rằng nếu chỉ sử dụng điều kiện a), ta sẽ có:

$$\frac{1}{3} \le \frac{1}{f(x)} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \le \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \le 1. \quad (*)$$

Đương nhiên kết quả trong (*) không chặt so với (1), điều đó cho thấy để có được kết quả thật sự cần biết cách vận dụng linh hoạt các điều kiện của giả thiết cùng với các bất đẳng thức. Bây giờ chúng ta đi chứng minh bài toán.

- Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakôpxki, ta có:

$$1 = \left(\int_0^1 dx\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}.\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2 \le \int_0^1 f(x)dx.\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} = 2\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \ge \frac{1}{2}. \quad (2)$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi: $\sqrt{f(x)} = \frac{k}{\sqrt{f(x)}} \Rightarrow k = f(x) \overset{b)}{\Rightarrow} k = 2$.

- Từ điều kiện a), ta có:

$$0 \le [3 - f(x)][f(x) - 1] = -f^2(x) + 4f(x) - 3 \Leftrightarrow f^2(x) + 3 \le 4f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) + \frac{3}{f(x)} \le 4$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = 3 \\ f(x) = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \int_0^1 f(x)dx = 3 \\ \int_0^1 f(x)dx = 1 \end{array}\right.$$, điều này mâu thuẫn với b).

do đó:

$$\int_0^1 f(x)dx + 3\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} < 4\int_0^1 dx \Leftrightarrow 2 + 3\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} < 4 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} < \frac{2}{3}. \quad (3)$$

Kết hợp (2), (3) ta được điều cần chứng minh.

Nhận xét:

1. Qua ví dụ trên chúng ta đã thấy được phần nào về tính linh hoạt trong các phép tính tích phân khi sử dụng các bất đẳng thức và việc chứng minh bất đẳng thức ngặt nhiều khi rất tinh vi.

2. Đối với các em thi học sinh giỏi có thể vận dụng ngay phương pháp đã minh hoạ trong ví dụ còn với các em dự thi tuyển sinh vào các trường đại học thì tốt nhất hãy khéo léo nhúng phương pháp chứng minh bất đẳng thức Bunhiakôpxki trong bài toán 3 vào, bởi bất đẳng thức Bunhiakôpxki (ở dạng tích phân) không được trình bày trong sách giáo khoa. Để dễ hình dung phương pháp nhúng chúng ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 9: Chứng minh rằng $\frac{1}{e} \le \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)e^x} < \frac{1+e}{2e}$.

Giải

Xét hàm số $f(x) = (x + 1)e^x$ trên miền $D = [0, 1]$, ta có:

Đạo hàm: $f'(x) = (x + 2)e^x > 0, \forall x \in D$

suy ra hàm số đồng biến trên D.

Từ đó suy ra:

$$f(0) \le f(x) \le f(1) \Leftrightarrow 1 \le f(x) \le 2e. \qquad (1)$$

Mặt khác:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x+1)e^x dx \overset{tptp}{=} e. \qquad (2)$$

- Xét tam thức:

$$0 \le [t\sqrt{f(x)} + \frac{1}{\sqrt{f(x)}}]^2 = t^2.f(x) + 2t + \frac{1}{f(x)}, \forall t \in R$$

$$\Rightarrow 0 \le t^2\int_a^b f(x)dx + 2t + \int_a^b \frac{dx}{f(x)}, \forall t \in R \qquad (3)$$

Khi đó, từ việc (3) đúng với $\forall t \in R$, ta phải có:

$$\Delta'_t \le 0 \Leftrightarrow 1 - \int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)e^x} \ge \frac{1}{e}. \qquad (4)$$

- Ta có:

$$0 \le [2e - f(x)][f(x) - 1] = -f^2(x) + (2e + 1)f(x) - 2e$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) + 2e \le (2e + 1)f(x) \Leftrightarrow f(x) + \frac{2e}{f(x)} \le 2e + 1,$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = 2e \\ f(x) = 1 \end{array}\right., \text{ điều này mâu thuẫn}$$

do đó:

$$\int_0^1 f(x)dx + 2e\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} < (2e + 1)\int_0^1 dx \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} < \frac{1+e}{2e}. \qquad (5)$$

Kết hợp (4), (5) ta được điều cần chứng minh.

Bài toán 5: Sử dụng các phương pháp khác nhau.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trong mục này chúng ta cùng nhau đi chứng minh một mệnh đề nhỏ và đối với các em thi học sinh giỏi thì đây là phần kiến thức bổ ích còn với các em dự thi tuyển sinh vào các trường đại học thì có thể xem nó như phần tham khảo.

Ví dụ 10: Cho hàm số f(x) liên tục trên đoạn [0, 1] và thoả mãn các điều kiện:

a. $0 \le f(x) \le 1$ với $\forall x \in [0, 1]$.

b. f(x) không đồng nhất bằng 0 hoặc bằng 1 trên [0, 1].

Chứng minh rằng nếu $\int_0^1 f(x)dx = C$ thì $\dfrac{C^2}{2} < \int_0^1 xf(x)dx < C - \dfrac{C^2}{2}$. (1)

Giải

1. Đặt $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, thì F(x) là một nguyên hàm của hàm f(x) và thoả mãn

$F(0) = 0,\ F(1) = C$ với $0 < C < 1$ (có được từ giả thiết)

Vì $f(x) \ge 0 \Rightarrow F(x)$ là hàm đồng biến $\Rightarrow F(x) \le F(1) = C$. (2)

Vì $f(x) \le 1 \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)dt \le \int_0^x dt = x$. (3)

Từ (2), (3), suy ra:

$$F(x) \le \mathrm{Min}\{x, C\} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x) \le x \text{ nếu } 0 \le x \le C \\ F(x) \le C \text{ nếu } C \le x \le 1 \end{cases}$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi

$$F(x) = \mathrm{Min}\{x, C\} = \begin{cases} x \text{ nếu } 0 \le x \le C \\ C \text{ nếu } C \le x \le 1 \end{cases}, \text{ điều này mâu thuẫn },$$

do đó:

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^C F(x)dx + \int_C^1 F(x)dx < \int_0^C xdx + \int_C^1 Cdx$$

$$= \frac{C^2}{2} + C(1 - C) = C - \frac{C^2}{2}. \quad (4)$$

Mặt khác, bằng phép lấy tích phân từng phần, ta được:

$$\int_0^1 F(x)dx = xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf(x)dx = C - \int_0^1 xf(x)dx. \quad (5)$$

Từ (4), (5), suy ra:

$$C - \int_0^1 xf(x)dx < C - \frac{C^2}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 xf(x)dx > \frac{C^2}{2}. \quad (6)$$

2. Bằng việc thay hàm f(x) bởi hàm 1 – f(x) cho đúng lập luận trên ta sẽ được:

$$\int_0^1 x[1 - f(x)]dx > \frac{(1-C)^2}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 xf(x)dx < C - \frac{C^2}{2}. \quad (7)$$

Từ (6) và (7) ta được điều cần chứng minh.

Bài toán 6: Sử dụng tích phân chứng minh bất đẳng thức.

Ví dụ 11: Cho hàm số f(x) có đạo hàm f'(x) liên tục trên đoạn [a, b] và thoả mãn các điều kiện:

a. $f(a) = 0$.

b. $|f'(x)| \le M$ với $\forall x \in [a, b]$.

Chứng minh rằng $f(x) \le M(x - a)$ với $\forall x \in [a, b]$. (1)

Giải

Ta có: $f(x) = \int_a^x f'(t)dt$ với $\forall x \in [a, b]$

do đó:

$$|f(x)| = \left|\int_a^x f'(t)dt\right| \le \int_a^x |f'(t)|dt \le \int_a^x Mdt = Mt\Big|_a^x = M(x-a) \text{ đpcm.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Chứng minh rằng $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3} < \displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x + \cos x + 1}} < \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

Bài 2. Cho $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx$; $J_n = \displaystyle\int_0^1 x(1-x^2)^n dx$.

a. Tính J_n và Chứng minh rằng $I_n \le \dfrac{1}{2(n+1)}$, n = 0, 1, 2,...

b. Tính I_{n+1} theo I_n và tìm $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$.

Bài 3. (Đề 43): Chứng minh rằng $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{\pi}{6}$ (n = 2, 3, 4,...).

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$. Chứng minh rằng $\dfrac{5}{2} < \displaystyle\int_2^3 f(x)dx < \frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Bài 5. (ĐHXD HN – 96): Chứng minh rằng $\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{1}{1+x^2}}dx > \frac{4+\pi}{4}$.

Bài 6. (ĐHQG TPHCM Khối A – 98):

a. Tính các tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2xdx}{1+\sin^4 x}$ và $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2xdx}{1+\cos^4 x}$.

b. Chứng minh rằng $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x.\sin x}{(1+\sin^4 x)(1+\cos^4 x)}dx > \frac{\pi}{12}$.

Bài 7. Chứng minh rằng:

a. $\dfrac{\sqrt{3}}{12} < \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\cot gx}{x}dx < \frac{1}{3}$.

b. $\dfrac{2}{5} < \displaystyle\int_1^2\frac{xdx}{x^2+1} < \frac{1}{2}$.

Bài 8. Chứng minh rằng:

a. $\dfrac{\pi}{6} < \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} < \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

b. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^{2000}}} \le \dfrac{\pi}{4}$.

c. $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin x}{x}dx > \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \dfrac{\sin x}{x}dx$.

d. $\pi < \int\limits_0^{\pi} \dfrac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} < 2\pi$.

e. $\dfrac{1}{26\sqrt[3]{2}} < \int\limits_0^1 \dfrac{x^{25}}{\sqrt[3]{1 + x^{10}}}dx < \dfrac{1}{26}$.

f. $\int\limits_0^1 \sqrt{3 + e^{-x}}\,dx \le 2$.

g. $\int\limits_{100\pi}^{200\pi} \dfrac{\cos x dx}{x} < \dfrac{1}{200\pi}$.

Bài 9. Chứng minh rằng:

a. $\left|\int\limits_1^{\sqrt{3}} \dfrac{e^{-x}\sin x dx}{x^2 + 1}\right| < \dfrac{\pi}{12e}$.

b. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,(2 + 3\sqrt{\sin x})(7 - 4\sqrt{\sin x})dx < \dfrac{27\pi}{2}$.

c. $\dfrac{\pi}{6} < \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} < \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

d. $\dfrac{(\sin 1)^{n+1}}{n+1} < \int\limits_0^1 \sin^n x dx < \dfrac{1}{n+1}$ với $n \in Z^+$.

e. $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} < \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx < \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ với $n \in Z^+$.

Bài 10. (ĐHBK HN – 97): Cho $I_n = \int\limits_0^{\pi/4} x.\text{tg}^n x dx$.

a. Tính I_n với $n = 2$.

b. Chứng minh rằng $I_n > \dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{n+1}$

Bài 11. Cho hàm số f(x) liên tục trên [0, 1] và thoả mãn các điều kiện:

a. $1 \le f(x) \le 2$ với $\forall x \in [0, 1]$.

b. $\int\limits_0^1 f(x)dx = \dfrac{3}{2}$.

Chứng minh rằng $\dfrac{2}{3} \le \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{f(x)} < \dfrac{3}{4}$.

Bài 12. Cho hàm số f(x) liên tục trên [0, 1] và thoả mãn các điều kiện:

a. $\alpha \le f(x) \le \beta$ với $\forall x \in [0, 1]$.

b. $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$.

Chứng minh rằng $\int\limits_0^1 f^2(x)dx \le -\alpha\beta$.

Bài 13. Cho hàm số f(x) liên tục trên [0, 1] và thoả mãn:

$$\int_1^x f(t)dt \le \frac{1}{2}(x^2-1) \text{ với } \forall x\in[0,1].$$

Gọi F là một nguyên hàm của hàm số f trên [0, 1]

a. Chứng minh rằng $F(1) = \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 F(x)dx$.

b. Từ đó suy ra $\int_0^1 xf(x)dx \ge \frac{1}{3}$ và $\int_0^1 f^2(t)dt \ge \frac{1}{3}$.

Bài 14. Cho hàm số f(x) liên tục trên [1, 2] và thoả mãn:

$$\int_1^x f^2(t)dt \le \frac{1}{3}(x^3-1) \text{ với } \forall x\in[1,2].$$

Chứng minh rằng $\int_1^2 f(t)dt \le \frac{3}{2}$.

Bài 15. Cho hàm số f(x) liên tục trên [0, 1]. Chứng minh rằng với $\forall\alpha\in(0,1)$

$$\int_0^1 f^2(t)dt > \alpha\int_0^1 f(x)dx.$$

Bài 16. Cho hàm số f(x) có đạo hàm cấp 2 $f''(x) > 0$ với $\forall x\in[a,b]$. Chứng minh rằng với $\forall c\in[a,b]$ ta đều có:

$$\int_a^b f(x)dx \ge (b-a)[f(c) + (\frac{a+b}{2} - c)f'(c)].$$

Bài 17. Cho hai hàm số f(x), g(x) liên tục trên [a, b] và $f(x)\ne 0$, $\forall x\in[a,b]$ và thoả mãn:

$$m \le \frac{f(x)}{g(x)} \le M \text{ với } \forall x\in[a,b].$$

Chứng minh rằng $\int_a^b g^2(x)dx + mM\int_a^b f^2(x)dx \le (m+M)\int_a^b f(x)g(x)dx$.

Bài 18. Cho hàm số f(x) xác định trên R, có đạo hàm cấp 2 f''(x) liên tục trên R. Giả sử tồn tại đoạn [a, b] sao cho:

a. $f(a) = f(b) = 0$.

b. $f(x) > 0$ với $\forall x\in(a,b)$.

Chứng minh rằng $\int_a^b \frac{f''(x)dx}{f(x)} \ge \frac{4}{b-a}$.

Bài 19. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thoả mãn $|f(x)|\le 1$ với $\forall x\in[-1,1]$. Chứng minh rằng $|f'(x)|\le 4$ với $\forall x\in[-1,1]$.

Bài 20. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thoả mãn $|f(x)|\le 1$ với $\forall x\in[-1,1]$. Chứng minh rằng $|f'(x)|\le 9$ với $\forall x\in[-1,1]$.

CHỦ ĐỀ 6
PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ta có thể định nghĩa một cách vắn tắt rằng phương trình, bất phương trình tích phân là phương trình, bất phương trình có chứa một hay nhiều biểu thức tích phân.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1. Giải phương trình, bất phương trình tích phân.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để giải phương trình, bất phương trình tích phân thông thường trước tiên ta cần đi xác định tích phân trong phương trình, bất phương trình đó sau đó sẽ thu được một phương trình, bất phương trình đại số quen thuộc. Như vậy các em học sinh cần:

- Nắm vững các phương pháp tính tích phân.
- Bổ sung thêm kiến thức về đại số.

Với mục đích để các em học sinh vừa ôn tập được các phương pháp tính tích phân vừa ôn tập được một phần nhỏ kiến thức về đại số, các ví dụ và bài tập sẽ được phát triển từ các ví dụ và bài tập chọn lọc trong cuốn *Phương pháp giải phương trình, bất phương trình và hệ đại số của Lê Hồng Đức*.

Ví dụ 1: Giải và biện luận phương trình sau với ẩn x:

$$2\int_0^x (mt - m + 2)dt = 3 - m. \qquad (1)$$

Giải

Trước hết ta đi xác định:

$$2\int_0^x (mt - m + 2)dt = [mt^2 - 2(m-2)t]\Big|_0^x = mx^2 - 2(m-2)x. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0. \qquad (3)$$

Xét hai trường hợp của m.

Trường hợp 1. Nếu m = 0 phương trình có dạng:

$$4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Trường hợp 2. Nếu $m \neq 0$ ta đi tính biệt thức $\Delta' = 4 - m$.

a. Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 4 - m < 0 \Leftrightarrow m > 4$. Phương trình (3) vô nghiệm.

b. Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 4$. Phương trình (3) có nghiệm kép $x_0 = \frac{1}{2}$.

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp "*Lấy học trò làm trung tâm*"
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

c. Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \dfrac{m-2\pm\sqrt{4-m}}{m}$.

Kết luận:

- Với $m = 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3}{4}$.
- Với $m = 4$, phương trình (1) có nghiệm kép $x_0 = \dfrac{1}{2}$.
- Với $m > 4$, phương trình (1) vô nghiệm.
- Với $0 \neq m < 4$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \dfrac{m-2\pm\sqrt{4-m}}{m}$.

Nhận xét: Thông qua ví dụ trên với việc nhúng một biểu thức tích phân ta được bài toán giải và biện luận một phương trình bậc 2 tổng quát.

Ví dụ 2: Giải phương trình ẩn x:

$$\int_0^x \frac{dt}{4-t^2} = 0. \qquad (1)$$

Giải

Trước hết ta đi xác định:

$$\int_0^x \frac{dt}{4-t^2} = -\frac{1}{4}\int_0^x \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t-2}\right)dt = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|\Bigg|_0^x = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ |x+2| = |x-2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x+2 = x-2 \\ x+2 = -x+2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 0.$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Ví dụ 3: Giải phương trình ẩn x:

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{x} \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+\sqrt{1-t^2}}} = \sqrt{6} - 2x(1+2\sqrt{1-x^2}). \qquad (1)$$

Giải

Trước hết ta đi xác định:

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{x} \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+\sqrt{1-t^2}}} = -2\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{x} \frac{\frac{-2tdt}{2\sqrt{1-t^2}}}{2\sqrt{1+\sqrt{1-t^2}}} = -2\sqrt{1+\sqrt{1-t^2}}\Big|_{\sqrt{3}/2}^{x}$$

$$= -2\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \sqrt{6} - 2\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x(1+2\sqrt{1-x^2}). \qquad (3)$$

Điều kiện $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$ (4)

Đặt $x = \sin u$ với $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2 u}} = \sin u(1+2\sqrt{1-\sin^2 u}) \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos u} = \sin u(1+2\cos u)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{u}{2} = \sin u + \sin 2u \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{u}{2} = 2\sin\frac{3u}{2}\cos\frac{u}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{u}{2}(1-\sqrt{2}\sin\frac{3u}{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{u}{2} = 0 \ (l)\\ \sin\frac{3u}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u = \frac{\pi}{6}\\ u = \frac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 4: Giải phương trình ẩn x:

$$\int_0^x (2^{t-1}.\ln 2 - 2t + 2)dt = 2^{x^2-x} + \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Giải

Trước hết ta đi xác định:

$$\int_0^x (2^{x-1}.\ln 2 - 2x + 2)dx = (2^{t-1} - t^2 + 2t)\Big|_0^x = (2^{x-1} - x^2 + 2x) - \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$2^{x-1} + x - 1 = 2^{x^2-x} + x^2 - x.$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ đồng biến trên R.

Vậy, phương trình được viết dưới dạng:

$$f(x-1) = f(x^2 - x) \Leftrightarrow x - 1 = x^2 - x \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 1.

Ví dụ 5: (Đề 70): Giải phương trình:

$$\int_0^x (4\sin^4 t - \frac{3}{2})dt = 0. \qquad (1)$$

Giải

Trước hết ta đi xác định:

$$\int_0^x (4\sin^4 t - \frac{3}{2})dt = \int_0^x (\frac{1}{2}\cos 4t - 2\cos 2t)dt = (\frac{1}{8}\sin 4t - \sin 2t)\Big|_0^x$$

$$= \frac{1}{8}\sin 4x - \sin 2x. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\frac{1}{8}\sin 4x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow (\frac{1}{4}\cos 2x - 1)\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Ví dụ 6: Tìm nghiệm x≥1 thoả mãn phương trình:

$$\int_1^x 7^{t-1}\ln 7dt = 6\log_7(6x-5).$$

Giải

Điều kiện $6x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{6}$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$7^{t-1}\Big|_1^x = 6\log_7(6x-5) \Leftrightarrow 7^{x-1} - 1 = 6\log_7(6x-5)$$

$$\Leftrightarrow 7^{x-1} - 1 = 6\log_7(6x-5) + 1. \qquad (*)$$

Đặt $y - 1 = \log_7(6x - 5)$ khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} 7^{x-1} = 6(y-1)+1 \\ y-1 = \log_7(6x-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^{x-1} = 6y-5 & (1) \\ 7^{y-1} = 6x-5 & (2) \end{cases} \qquad (I)$$

Trừ theo vế hai phương trình của (I), ta được:

$$7^{x-1} + 6x = 7^{y-1} + 6y. \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = 7^{t-1} + 6t$ là hàm đơn điệu trên R.

Khi đó (3) được viết lại dưới dạng:

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$

Khi đó (2) có dạng: $7^{x-1} - 6x + 5 = 0$

Xét hàm số $g(x) = 7^{x-1} - 6x + 5$.

- Miền xác định: $D = (\frac{5}{6}, +\infty)$.
- Đạo hàm:

  $g'(x) = 7^{x-1}.\ln 7 - 6$

  $g''(x) = 7^{x-1}.\ln^2 7 > 0, \forall x \in D \Rightarrow g'(x)$ là hàm đồng biến trên D.

Vậy theo định lý Rôn phương trình g(x) = 0 có không quá 2 nghiệm trên D.

Nhận xét rằng g(1) = g(2) = 0.

Vậy phương trình có hai nghiệm x = 1 và x = 2.

Chú ý: Dạng phương trình (*) là hoàn toàn mới mẻ ngay cả trong các cuốn sách tham khảo về đại số và phương pháp được minh hoạ trong ví dụ trên cũng chính là phương pháp để giải dạng tổng quát của nó. Nếu bạn đọc thực sự quan tâm có thể tham khảo *Chủ đề 1: Các phương pháp giải phương trình logarit – Phần VII của cuốn Đại số sơ cấp của Lê Hồng Đức chủ biên đã được Nhà xuất bản Hà nội ấn hành năm 2002.*

Bài toán 2. Sử dụng tích phân chứng minh phương trình có nghiệm

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh phương trình f(x) = 0 có nghiệm trên (a, b) với f(x) là hàm số liên tục trên [a, b], ta có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$.

Bước 2: Nếu I = 0 thì kết luận phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm trong (a, b).

Lưu ý: Ta cũng biết nhiều bài toán yêu cầu " *Chứng minh rằng phương trình có nghiệm với mọi tham số* ", khi đó ta cần lựa chọn [a, b] thích hợp để I = 0.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng phương trình:

acosx + bcos2x + c.cos3x = 0 có nghiệm với mọi a, b, c.

Giải

Xét hàm số f(x) = acosx + bcos2x + c.cos3x, ta có :

$$I = \int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi (a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x)dx$$

$$= (a\sin x + \frac{b}{2}\sin 2x + \frac{c}{3}\sin 3x)\Big|_0^\pi = 0$$

⇔ phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm trong (0, π) với mọi a, b, c.

Mở rộng:

1. Phương trình $\sum_{i=1}^n a_i \cos(ix) = 0$ luôn có nghiệm với mọi $a_i \in R$, $i = \overline{1,n}$ bởi:

$$\int_0^\pi \sum_{i=1}^n a_i \cos(ix)dx = \sum_{i=1}^n \int_0^\pi a_i \cos(ix)dx = \left[\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i}\sin(ix)\right]\Big|_0^\pi = 0.$$

2. Phương trình $\sum_{i=1}^n a_i \sin(ix) = 0$ luôn có nghiệm với mọi $a_i \in R$, $i = \overline{1,n}$ bởi:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^n a_i \sin(ix)dx = \sum_{i=1}^n \int_0^{2\pi} a_i \sin(ix)dx = \left[\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i}\cos(ix)\right]\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Ví dụ 8: Giả sử $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$. Chứng minh rằng phương trình:

$ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thuộc khoảng (0, 1).

Giải

Xét hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, ta có :

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)dx = (\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx)\Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$$

⇔ phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm trong (0, 1).

Mở rộng: Nếu $\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{m+i+1} = 0$ với $\forall m > 0$ thì phương trình $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$ luôn có nghiệm trong (0, 1) bởi:

Xét hàm số $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{i+m}$, ta có:

$$I = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} a_i x^{i+m}dx = \sum_{i=0}^{n}\int_0^1 a_i x^{i+m}dx = \left[\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i x^{i+m+1}}{m+i+1}\right]\Bigg|_0^1$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{m+i+1} = 0$$

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{i+m} = 0$ có ít nhất một nghiệm trong (0, 1)

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^m \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$ có ít nhất một nghiệm trong (0, 1)

$\Leftrightarrow$ phương trình $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$ có ít nhất một nghiệm trong (0, 1).

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho phương trình:

$$x^3 + \int_1^x [3t^2 + 4(6m-1)t - 3(2m-1)]dt = 1.$$

Tìm m để (1) có 3 nghiệm phân biệt có tổng bình phương bằng 27.

Bài 2. Biện luận theo m số nghiệm dương của phương trình:

$$\int_1^x (t - \frac{1}{t})dt = m - \frac{1}{2}.$$

Bài 3. (Đề 126): Tìm tất cả các nghiệm của phương trình:

$$\int_0^x \cos(t - x^2)dt = \sin x.$$

Bài 4. (ĐHBK HN – 96): Cho $I(x) = \int_0^x (e^{2t} + e^{-2t})dt$

a. Tính I(x) khi x = ln2.
b. Giải và biện luận phương trình: I(x) = m.

Bài 5. Tìm nghiệm $x \in [0, 1)$ của phương trình $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)^3}} = \text{tg}x$

Bài 6. Tìm các nghiệm dương của phương trình

a. $\int_{1/e}^{x} \frac{(1+\ln t)dt}{t}$. b. $\int_0^x \sqrt{e^t - 1}dt$.

Bài 7. (ĐHQG HN Khối G – 97): Tìm a để:

$$\int_1^2 \left[a^2 + (4-4a)x + 4x^3\right]dx = 12.$$

Bài 8. Giải và biện luận phương trình:

a. $2\int_{-1}^{x}\frac{(m+1)t^2-2m(t+1)}{(t^2+2t)(t^2-2mt-2m)}=0.$

b. $|x-1|=\int_{0}^{x}\frac{(t-1)dt}{\sqrt{t^2-2t+m^2}}.$

c. $3\int_{1}^{x}t^2dt=3\sqrt[3]{3x-2}+1.$

d. $|x+1|+m|x-1|=(m+1)\left(\int_{\sqrt{2}}^{x}\frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}+1\right).$

Bài 9. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$|2x^2-3x-2|=5m-4\int_{0}^{x}(t+2)dt.$$

Bài 10. Tìm m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt

$$m^2\int_{0}^{x}(t-1)dt\le 2mx-m(m+2).$$

Bài 11. Tìm nghiệm $x\in[2,3]$ của phương trình $\int_{0}^{x}\cos(t+x^2)dt=\sin x.$

Bài 12. Giải các bất phương trình

a. $x-\int_{\sqrt{5}}^{x}\frac{8dt}{\sqrt{(t^2-4)^3}}>5\sqrt{5}.$

b. $\frac{1}{2^{\cos^2x}}+\frac{1}{2^{\sin^2x}}\le\int_{0}^{x}(\cos t-\sin t)dt+1.$

c. $\ln 3\int_{x}^{\sqrt{2(x-1)}+1}3^t\,dt\le x^2-4x+3.$

Bài 13. Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với $x\in[0,1]$

$$2\int_{0}^{x}(3t^2+1)dt-6m\int_{m}^{x}tdt=3m^3+m-2x.$$

Bài 14. Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x

$$2\ln 3.\int_{0}^{x}(3^{2t}-3^t)dt>2m(3^x+1)+3.$$

Bài 15. Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với $x\in[-1,1]$

$$\int_{x}^{0}(t^3-mt^2-t-m)dt\le\frac{1}{4}.$$

Bài 16. (ĐHMĐC – 99): Giải bất phương trình:

$$\int_{\ln x}^{2+\ln x}\frac{dt}{2\sqrt{t}}<\int_{e^{-3/4}}^{x}\frac{dt}{t}.$$

Bài 17. Với mỗi số nguyên dương k đặt $I_k=\int_{1}^{e}\ln\frac{k}{x}dx$. Xác định k để $I_k<e-2$.

Bài 18. (ĐHMĐC – 99): Cho f(x) liên tục, xác định trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ có $f(0) > 0$ và $\int_0^{\pi/2} f(x)dx < 1$. Chứng minh rằng phương trình

$$f(x) = \sin x \text{ có nghiệm thuộc } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Bài 19. Tìm nghiệm $x \in [0, +\infty)$ của phương trình

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)^3}} = \sin x.$$

Bài 20. Giả sử $\frac{a}{2003} + \frac{b}{2002} + \frac{c}{2001} = 0$. Chứng minh rằng phương trình:

$ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thuộc khoảng (0, 1).

Bài 21. Chứng minh rằng phương trình

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cos\left[i\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = 0 \text{ luôn có nghiệm với mọi } a_i \in R,\ i = \overline{1, n}.$$

CHỦ ĐỀ 7
GIỚI HẠN CỦA TÍCH PHÂN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Chứng minh rằng tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

Hướng 1. Chứng minh rằng dãy I_n đơn điệu tăng và bị chặn trên.

Hướng 2. Chứng minh rằng dãy I_n đơn điệu giảm và bị chặn dưới.

Ví dụ 1: Cho dãy số I_n xác định bởi: $I_n = \int\limits_{n-1}^{n} \frac{(x^{n-1}+1)dx}{x^n+1}$. Chứng minh rằng tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Giải

Ta đi chứng minh dãy số I_n đơn điệu giảm và bị chặn dưới.

- Ta có:

$$\frac{x^{n-1}+1}{x^n+1} > 0 \text{ với } \forall x\in[n-1, n] \Rightarrow I_n = \int\limits_{n-1}^{n} \frac{(x^{n-1}+1)dx}{x^n+1} > 0.$$

$\Leftrightarrow$ dãy I_n bị chặn dưới bởi 0. (*)

- Xét hiệu:

$$I_{n-1} - I_n = \int\limits_{n-2}^{n-1} \frac{(x^{n-2}+1)dx}{x^{n-1}+1} - \int\limits_{n-1}^{n} \frac{(x^{n-1}+1)dx}{x^n+1}. \quad (1)$$

Thực hiện phép đổi biến $t = x + 1$ cho I_{n-1}, ta được:

$$dx = dt \text{ và } \frac{(x^{n-2}+1)dx}{x^{n-1}+1} = \frac{[(t-1)^{n-2}+1]dt}{(t-1)^{n-1}+1}$$

Đổi cận: với $x = n - 1 \Rightarrow t = n$

với $x = n - 2 \Rightarrow t = n - 1$.

Khi đó:

$$I_{n-1} = \int\limits_{n-1}^{n} \frac{[(t-1)^{n-2}+1]dt}{(t-1)^{n-1}+1} = \int\limits_{n-1}^{n} \frac{[(x-1)^{n-2}+1]dx}{(x-1)^{n-1}+1}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$I_{n-1} - I_n = \int\limits_{n-1}^{n} \frac{[(x-1)^{n-2}+1]dx}{(x-1)^{n-1}+1} - \int\limits_{n-1}^{n} \frac{(x^{n-1}+1)dx}{x^n+1}$$

$$= \int\limits_{n-1}^{n} \left[\frac{(x-1)^{n-2}+1}{(x-1)^{n-1}+1} - \frac{x^{n-1}+1}{x^n+1}\right]dx.$$

Các Em học sinh hãy tham gia học tập theo phương pháp "*Lấy học trò làm trung tâm*"
Dưới sự hỗ trợ của Nhóm Cự Môn do Ths. Lê Hồng Đức và Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải phụ trách.

Ta có:

$$\frac{(x-1)^{n-2}+1}{(x-1)^{n-1}+1}-\frac{x^{n-1}+1}{x^{n}+1}=\frac{(x-1)^{n-2}(x^{n-1}-x+2)+x^{n-1}(x-1)}{[(x-1)^{n-1}+1](x^{n}+1)}\geq 0$$

với $\forall x\in[n-1, n]$, từ đó suy ra:

$$\int_{n-1}^{n}\left[\frac{(x-1)^{n-2}+1}{(x-1)^{n-1}+1}-\frac{x^{n-1}+1}{x^{n}+1}\right]dx\geq 0 \Leftrightarrow I_{n-1}-I_{n}\geq 0$$

$\Leftrightarrow$ dãy I_n đơn điệu giảm. (**)

Từ (*) và (**) suy ra tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Bài toán 2 : Tính giới hạn của tích phân bằng việc xác định công thức tích phân truy hồi.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Khi đó ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Tính tích phân, dựa vào kết quả đó tìm giới hạn của tích phân.

Ví dụ 2: Cho: $I_m(x)=\int_x^{e^m} t(m-\ln t)dt$, với m là tham số và x > 0.

a. Tính $I_m(x)$.

b. Tìm $L=\lim\limits_{x\to 0^+} I_m(x)$, từ đó xác định m để L = 4.

Giải

a. Đặt:

$$\begin{cases}u=m-\ln t\\ dv=tdt\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=-\dfrac{dt}{t}\\ v=\dfrac{1}{2}t^2\end{cases}$$

Khi đó:

$$I_m(x)=\frac{1}{2}t^2.(m-\ln t)\Big|_x^{e^m}+\frac{1}{2}\int_x^{e^m}tdt=-\frac{1}{2}x^2(m-\ln x)+\frac{1}{4}t^2\Big|_x^{e^m}$$

$$=-\frac{1}{2}x^2(m-\ln x)+\frac{1}{4}(e^{2m}-x^2)=\frac{1}{4}[e^{2m}+2x^2\ln x-(2m+1)x^2].$$

b. Ta được:

$$L=\lim_{x\to 0^+}I_m(x)=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}[e^{2m}+2x^2\ln x-(2m+1)x^2]=\frac{e^{2m}}{4}.$$

Do đó:

$$L=2\Leftrightarrow\frac{e^{2m}}{4}=4\Leftrightarrow m=\ln 4.$$

Ví dụ 3: Cho: $I(x) = \int_0^x (t^2 + 2t)e^t dt$.

a. Tính I(x).
b. Tìm $\lim_{x \to -\infty} I(x)$.

Giải

a. Để tính I(x), ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Sử dụng phương pháp tích phân từng phần): Đặt:

$$\begin{cases} u = t^2 + 2t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = (2t + 2)dt \\ v = e^t \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I(x) = (t^2 + 2t)e^t\Big|_0^x - 2\int_0^x (t + 2)e^t dt = (x^2 + 2x)e^x - 2\int_0^x (t + 1)e^t dt. \quad (1)$$

Xét tích phân $J(x) = \int_0^x (t + 2)e^t dt$ bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = t + 1 \\ dv = e^t dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J(x) = (t + 1)e^t\Big|_0^x - \int_0^x e^t dt = (x + 1)e^x - e^t\Big|_0^x = (x + 1)e^x - e^x + 1 = xe^x + 1. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$I(x) = x^2e^x$.

Cách 2: (Sử dụng phương pháp hằng số bất định): Ta có:

$$\int (t^2 + 2t)e^t dt = (at^2 + bt + c)e^t + C. \quad (3)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1), ta được:

$$(t^2 + 2t)e^t = [at^2 + (2a + b)t + b + c]e^t. \quad (4)$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 2 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Khi đó:

$I(x) = t^2e^t\Big|_0^x = x^2e^x$.

b. Ta có:

$$\lim_{x \to -\infty} I(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}. \quad (5)$$

Áp dụng quy tắc L'Hospital cho dạng $\frac{\infty}{\infty}$ ở (5), ta được:

$$\lim_{x \to -\infty} I(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$$

Bài toán 3 : Tính giới hạn của tích phân bằng nguyên lý kẹp giữa

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng nguyên lý kẹp giữa, cụ thể:

Cho ba hàm số f(x, n), g(x, n), h(x, n) được xác định tại mọi x:

1. Với mọi x có $f(x) \le g(x) \le h(x)$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x, n) = \lim\limits_{n\to\infty} h(x, n) = L$.

thì $\lim\limits_{n\to\infty} g(x, n) = L$.

Ví dụ 4: (Đề 5): Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = 0$.

Giải

Với $x \in [0, 1]$, ta được:

$$0 \le \frac{x^n}{1+x} \le x^n \Rightarrow 0 \le \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} \le \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Nhận xét rằng:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

do đó

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n.\sin(\pi x)dx = 0 \text{ theo nguyên lý kẹp giữa.}$$

Ví dụ 5: (ĐHQG TPHCM Khối A – 97): Cho $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

a. Tìm hệ thức liên hệ I_{n+1} và I_n. Tính I_1, I_2.

b. Chứng minh rằng $I_{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$ và tính $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Giải

a. Ta có:

$$I_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = (\ln x)^{n+1} \\ dv = dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{(n+1)(\ln x)x^n dx}{x} \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_{n+1} = x.(\ln x)^{n+1}\Big|_1^e - (n+1)\int_1^e (\ln x)^n dx = e - (n+1)I_n.$$

Từ đó:

$$I_1 = e - I_0 = e - \int_1^e dx = 1 \text{ và } I_2 = e - 2I_1 = e - 2.$$

b. Với $x \in [1, e]$, ta được:

$$0 \le \ln x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le (\ln x)^{n+1} \le (\ln x)^n \Rightarrow 0 \le \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx \le \int_1^e (\ln x)^n dx \Leftrightarrow I_{n+1} \le I_n$$

Mặt khác từ a), ta được:

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n \ge 0 \Rightarrow I_n \le \frac{e}{n+1}.$$

Tóm lại ta được: $I_{n+1} \le I_n \le \dfrac{e}{n+1}$.

Nhận xét rằng:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$$

do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

II. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (Đề 78): Cho hàm số: $f(x) = \dfrac{4x-2}{(x+2)(x^2+1)}$.

a. Tìm hai số a, b sao cho $f(x) = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{bx}{x^2+1}$.

b. Tính $F(t) = \int_0^t f(x)dx$, với $t > 0$. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)$.

Bài 2. (ĐHNT HN – 95): Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n.\sin(\pi x)dx$.

Bài 3. (Đề 138): Cho a, b là hai số cố định. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b e^{x^2} \sin(nx)dx = 0.$$

Bài 4. (ĐHQG TPHCM Khối A – 99): Cho $I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x} dx \quad (n \in R)$

a. Chứng minh rằng $I_{n+1} \le I_n$. Tính I_{n+1} theo I_n.

b. Chứng minh rằng $0 \le I_n \le \dfrac{1}{(n-1)e^2}$ với $n \ge 2$. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Bài 5. (Đề 35): Cho $I_n = \int_0^1 \dfrac{e^{-nx} dx}{1+e^{-x}} \quad (n \in N)$

a. Tính I_1.

b. Với $n > 1$, hãy tìm công thức biểu diễn I_n qua I_{n-1}. Từ đó tính $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Bài 6. Tính giới hạn:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n.\cos(\pi x)dx = 0.$$

Bài 7. Tính các giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}dt$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{dt}{(t^2+1)^2}$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{1/2}^{1} (1-x^n)[x+\sin(\pi x)]dx$.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b e^{x^2}\cos(nx)dx$.

e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t(t+1)}$, với $x > 1$.

f. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n e^x dx$ $(n \geq 0)$.

Bài 8. (ĐH Cần Thơ Khối A – 2000): Cho

$$I_n = \int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx \; ; \; J_n = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx.$$

a. Tính J_n và Chứng minh rằng $I_n \leq \frac{1}{2(n+1)}$, $n = 0,1,2,\ldots$

b. Tính I_{n+1} theo I_n và tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$

Bài 9. Cho $I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n(1+e^{-x})dx$.

a. Tìm hệ thức liên hệ I_{n+1} và I_n.

b. Chứng minh rằng $I_{n+1} \leq I_n$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

PHẦN IV
PHỤ LỤC

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN CỦA SÁCH GIÁO KHOA

1. ĐỊNH NGHĨA 1

Sách giáo khoa Giải tích 12 (*Chỉnh lí hợp nhất năm 2000*) - Giáo sư Ngô Thúc Lanh chủ biên

Giả sử f(x) là một hàm số liên tục trên khoảng K, a và b là hai phần tử bất kỳ của K, F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên K. Hiệu số F(b)-F(a) được gọi là tích phân từ a đến b của f(x) và được ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$. Ta cũng ký hiệu $F(x)\Big|_a^b$ để chỉ hiệu số F(b)-F(a).

Vậy theo định nghĩa ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

2. ĐỊNH NGHĨA 2

Sách giáo khoa Giải tích 12 - Giáo sư Ngô Thúc Lanh chủ biên

Cho hàm số f(x) xác định trên đoạn [a, b] (a<b). Ta lần lượt thực hiện các bước sau:

1. Chia đoạn [a, b] thành những đoạn nhỏ không nhất thiết bằng nhau, bởi các điểm:

$$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$$

Đặt $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(1\le i\le n)$. Số lớn nhất trong các hiệu đó được ký hiệu là $Max\Delta x_i$.

2. Trong mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ chọn một điểm tuỳ ý ξ_i,

$$x_{i-1}\le \xi_i \le x_i\ (1\le i\le n) \text{ và tính } f(\xi_i).$$

3. Lập tích $f(\xi_i).\Delta x_i$ trên mỗi đoạn chia.
4. Lập tổng các tích đó:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1).\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n).\Delta x_n.$$

Tổng S_n được gọi là tổng tích phân của hàm số f(x) trên đoạn [a, b].

5. Thực hiện phép chia đoạn [a, b] thành những đoạn ngày càng nhỏ, sao cho $Max\Delta x_i$ dần đến 0. Nếu tồn tại giới hạn:

$$\lim_{Max\Delta x_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

và giới hạn này không phụ thuộc vào cách chia đoạn [a, b] và cách chọn điểm ξ_i trên đoạn $[x_{i-1}, x_i]$, thì giới hạn đó được gọi là tích phân của hàm số f(x) lấy trên đoạn [a, b] và được ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Vậy theo định nghĩa ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{Max\Delta x_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

3. ĐỊNH NGHĨA 3

Sách giáo khoa Giải tích 12 - Giáo sư Ngô Thúc Lanh chủ biên

Cho hàm số f(x) xác định trên đoạn [a, b] (a<b). Ta lần lượt thực hiện các bước sau:

1. Chia đoạn [a, b] thành n phần bằng nhau bởi các điểm:

$$a=x_0<x_1<...<x_n=b \text{ và đặt } \Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n} \text{ với } i=\overline{1,n}.$$

2. Khi đó, tích phân của hàm số f(x) lấy trên đoạn [a, b] và được ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$ là giới hạn của tổng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ khi $n\to+\infty$.

Vậy theo định nghĩa ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i .$$

Nhận xét rằng: Các định nghĩa trên là tương đương.

II. GIỚI HẠN CỦA TỔNG

Sử dụng định nghĩa này ta có thể tìm được giới hạn của $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, bằng cách thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chỉ ra được một hàm số f(x) *thích hợp* liên tục trên [a, b] *nào đó*.

Bước 2: Xây dựng tổng tích phân của hàm số f(x) trên [a, b] sao cho tổng đó giống hệt tổng cần tìm giới hạn.

Bước 3: Khi đó:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

Bạn đọc có thể áp dụng lược đồ trên để thực hiện các bài toán sau:

Bài tập 1 (ĐHQG HN Khối D - 95): Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

biết $S_n = \frac{1}{n}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+...+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

Bài tập 2 (ĐHXD HN - 91): Cho hàm số $u_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^n}$

a. Chứng minh rằng với mỗi $n \in Z^+$ hàm $u_n(x)$ nghịch biến trong khảng (0,1).

b. Chứng minh rằng 0<a<1, số liệt $\{u_n(a)\}$ trong đó $u_n(a) = \frac{1-a^n}{1+a^n}$ là số liệt trên.

c. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(a)$

Bài tập 3 (HVKTMM - 99): Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+...+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

Bài tập 4 (Đề 9): Cho $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n.\sin\pi x dx = 0$. Đặt $S_n = I_0 + I_1 + ... + I_n$.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$

Bài tập 5 (Đề 24): Với mỗi số nguyên dương n, đặt $S_n = \dfrac{1^5 + 2^5 + ... + n^5}{n^6}$.

Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Bài tập 6 (Đề 56): Cho $S_n = \left(\dfrac{1}{1+n} + \dfrac{1}{2+n} + ... + \dfrac{1}{n+n}\right)$. Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Bài tập 7 (Đề 59): Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$. Biết

$$S_n = \frac{1}{n}\left(1 + \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + ... + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

Bài tập 8 (Đề 143): Với n là một số nguyên dương.

Đặt $U_n = \left(\dfrac{1^2}{2^3 + n^3} + \dfrac{1^2}{4^3 + n^3} + ... + \dfrac{1^2}{(2k)^3 + n^3} + ... + \dfrac{n^2}{(2n)^3 + n^3}\right)$. Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} U_n$

Bài tập 9 (HVKTQS - 99): Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$, biết $S_n = \dfrac{\ln \sqrt[n]{\dfrac{(4n)!}{(3n)!}}}{n}$.

Bài tập 10 (ĐHQG HN Khối B - 95): Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ biết

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1 + \sin\frac{\pi}{2n}} + \frac{1}{1 + \sin\frac{2\pi}{2n}} + ... + \frac{1}{1 + \sin\frac{n\pi}{2n}}\right).$$

III. ĐỘ DÀI CUNG

Ta chia làm hai trường hợp của đường cong (C).

Trường hợp 1: Nếu (C) được cho bởi:

(C): $y=f(x)$ khả vi

thì độ dài cung AB (với $x_A=a$, $x_B=b$ và $a<b$) được cho bởi:

$$L=\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Trường hợp 2: Nếu (C) được cho bởi:

$$(C): \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases} \text{ khả vi}$$

thì độ dài cung AB (với $x_A=a$, $x_B=b$ và $a<b \Leftrightarrow \alpha \le t \le \beta$) được cho bởi:

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t)}dt.$$

Bài tập 1 Tính độ dài cung của Parabol (P): $y^2=2px$, $0 \le x \le a$.

Bài tập 2 Tính chu vi của Elíp (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ngô Thúc Lanh (chủ biên) - Sách giáo khoa Giải tích 12 - Nhà xuất bản Giáo dục.
2. G.KORN-T.KORN - Sổ tay Toán học (Phan Văn Hạp và Nguyễn Trọng Bá dịch) - Nhà xuất bản đại học và trung học chuyên nghiệpgiáo dục-1977.
3. MICHAEL SULLIVAN - College Algebra. Dellen Publíhing Company, San Francisco, Caliornia 1990
4. Văn Như Cương - Tài liệu chuẩn kiến thức Toán 12 - Nhà xuất bản giáo dục-1994.
5. Phan Đức Chính, Vũ Dương Thụy, Tạ Mân, Đào Tam, Lê Thống Nhất. - Các bài giảng luyện thi môn toán-Tập3 - Nhà xuất bản giáo dục-1996.
6. Phan Đức Chính - Đề thi tuyển sinh môn toán vào các trường đại học, cao đẳng và trung học chuyên nghiệp - Nhà xuất bản giáo dục-1996.
7. Trần Văn Hạo (chủ biên) - Chuyên đề luyện thi vào Đại học Giải tích và Đại số tổ hợp - Nhà xuất bản Giáo dục - 2001.
8. Trần Thành Minh (chủ biên) - Giải toán tích phân & Giải tích tổ hợp - Nhà xuất bản Giáo dục - 2001.
9. Phan Huy Khải - Toán nâng cao Giải tích 12 - Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội - 2000.
10. Nguyễn Phụ Hy (chủ biên) - Giảng dạy tích phân trong chương trình toán 12 - Nhà xuất bản Giáo dục - 2001.
11. Nguyễn Xuân Liêm - Hoàng Chính Bảo - Toán nâng cao Đại số và Giải tích 12 - Nhà xuất bản Giáo dục - 2002.
12. Tạp chí Toán học tuổi trẻ - Nhà xuất bản Giáo dục.

LỜI CUỐI

Nhóm Cự Môn luôn sẵn lòng giải đáp mọi thắc mắc của các em học sinh và độc giả về nội dung của cuốn tài liệu này.

Mọi chi tiết xin liên hệ trực tiếp tới:

Nhóm tác giả Cự Môn
Số 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội
Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0983046689
E-mail: cumon@hn.vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com
Website: www.toanpt.cumon.edu