# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

4 2009
Số 382

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 46
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35144272, (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

## CUỘC THI GIẢI TOÁN KỈ NIỆM 45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

## PHẢI BIẾT GIẢI TOÁN BẰNG NHIỀU CÁCH

# KÌ THI TOÀN QUỐC LẦN THỨ IX
# GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CẦM TAY
## NĂM HỌC 2008 - 2009

**K**ì thi toàn quốc giải toán trên máy tính cầm tay lần thứ IX dành cho các môn Toán, Lí, Hóa, Sinh do Bộ GD&ĐT tổ chức vào ngày 13 & 14/3/2009 vừa qua tại 4 hội đồng thi khu vực: Bắc Giang, Hải Phòng, Đà Nẵng và Cần Thơ với sự tham gia của 1489 học sinh của 63 tỉnh, thành phố trên cả nước.

Công ty CP XNK Bình Tây là đơn vị tài trợ cả về chi phí tổ chức và giải thưởng cho riêng bộ môn Toán với giá trị giải thưởng bằng tiền mặt là 149400000 đồng và tài trợ cho 4 hội đồng khu vực thi là 259400000 đồng.

Ngoài phần hỗ trợ bằng tiền mặt, Công ty còn tài trợ các tặng phẩm cho ban tổ chức, các đoàn và học sinh tham dự như : Huy chương, Kỉ niệm chương, Cờ toàn đoàn, máy tính... với tổng trị giá là 151200000 đồng.

Mỗi thí sinh đoạt giải Nhất, Nhì, Ba ngoài giải thưởng bằng tiền mặt còn được Bộ GD&ĐT trao Huy chương Vàng, Bạc, Đồng và cấp Giấy chứng nhận. Bên cạnh đó, Công ty CP XNK Bình Tây còn tặng thưởng cho giáo viên có học sinh dự thi môn Toán đoạt giải Nhất và trợ cấp học bổng 2 triệu đồng cho mỗi thí sinh dự thi môn Toán đoạt giải Nhất nếu trúng tuyển đại học trong kì thi tuyển sinh năm 2009.

Kết quả kì thi như sau:

| | **HĐ thi KV BẮC GIANG** | **HĐ thi KV HẢI PHÒNG** | **HĐ thi KV ĐÀ NẴNG** | **HĐ thi KV CẦN THƠ** |
|---|---|---|---|---|
| ***Nhất toàn đoàn*** | Hòa Bình | Thanh Hóa | Đà Nẵng | TP. Hồ Chí Minh |
| ***Nhì toàn đoàn*** | Bắc Giang | Nam Định | Thừa Thiên – Huế | Đồng Nai |
| ***Ba toàn đoàn*** | Ninh Bình | Hải Phòng | Khánh Hòa | Lâm Đồng |

Điều đặc biệt ở kì thi năm nay là có đến 5 em thí sinh đạt điểm tuyệt đối (50/50) môn Toán THCS gồm: *Lương Minh Thu*, THCS Yên Dũng, **Bắc Giang;** *Nguyễn Văn Thắng*, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Hà Vũ Thùy Linh* và *Lữ An Gia Bảo*,THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Lê Quốc Khánh*, THCS Trần Đại Nghĩa, **TP. Hồ Chí Minh.**

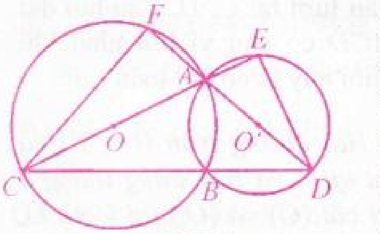

# ĐI TÌM NHỮNG BÀI TOÁN THÚ VỊ từ một bài toán quen thuộc

HOÀNG VĂN CHUNG
(GV THCS Cẩm Vũ, Cẩm Giàng, Hải Dương)

Khi giải xong mỗi bài toán các bạn học sinh thường làm gì? Đa số các bạn thường bằng lòng với những gì mình đã làm được. Thực ra học như thế là chưa hiệu quả. Bài viết này tập trung *Đi tìm những bài toán thú vị từ một bài toán quen thuộc*. Thiết nghĩ đó là cách học vô cùng hiệu quả. Ta bắt đầu từ một bài toán sau.

✪ **Bài toán 1.** *Hai đường tròn $(O\ ;\ R)$ và $(O';\ R')$ cắt nhau tại $A$ và $B$. Lần lượt kẻ các đường kính $AC$, $AD$ của $(O)$ và $(O')$. Chứng minh rằng ba điểm $C$, $B$, $D$ thẳng hàng.*

***Lời giải.*** (h. 1) Do $AC$ là đường kính của đường tròn $(O)$ nên $\widehat{ABC} = 90°$. Tương tự do $AD$ là đường kính của đường tròn $(O')$ nên có $\widehat{ABD} = 90°$. Do đó $\widehat{CBD} = \widehat{CBA} + \widehat{ABD} = 180°$ hay ba điểm $C$, $B$, $D$ thẳng hàng. ❐



Hình 1

• Tiếp tục khai thác bài toán trên. Giả sử $CA$ cắt $(O')$ tại $E$, $DA$ cắt $(O)$ tại $F$ (h. 1). Khi đó $CE$, $DF$ là các đường cao của tam giác $ACD$. Mặt khác, từ Bài toán 1 suy ra $AB$ là đường cao từ $A$ của tam giác $ACD$. Vậy ba đường thẳng $CF$, $BA$, $DE$ đồng quy. Ta có bài toán sau (các bài toán ở dưới đều giữ các giả thiết của Bài toán 1).

✪ **Bài toán 1.1.** *Giả sử $CA$ cắt đường tròn $(O')$ tại $E$, $DA$ cắt đường tròn $(O)$ tại $F$. Chứng minh ba đường thẳng $CF$, $BA$, $DE$ đồng quy.*

• Ta có $\widehat{CFD} = \widehat{CED} = 90°$ nên tứ giác $CDEF$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{FCA} = \widehat{FDE}$ (1)

Theo tính chất của góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung có

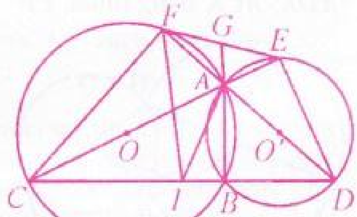
$$\widehat{FOA} = 2.\widehat{FCA} = 2.\widehat{FBA} \quad (2)$$

$$\widehat{EO'A} = 2.\widehat{EDA} = 2.\widehat{EBA} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{EOF} = \widehat{EBF} = \widehat{EO'F}$. Vậy các điểm $F$, $O$, $B$, $O'$, $E$ cùng thuộc một đường tròn. Ta có bài toán sau.

✪ **Bài toán 1.2.** *Với giả thiết như ở Bài toán 1.1, chứng minh rằng các điểm $F$, $O$, $B$, $O'$, $E$ cùng thuộc một đường tròn.*

• Theo trên có $\widehat{CFD} = 90°$, $\widehat{CED} = 90°$, suy ra $C$, $F$, $E$, $D$ cùng thuộc một đường tròn. Do đó $\Delta AFE \backsim \Delta ACD$. Gọi $G$, $I$ lần lượt là trung điểm của $FE$, $CD$ (h. 2) ta có



Hình 2

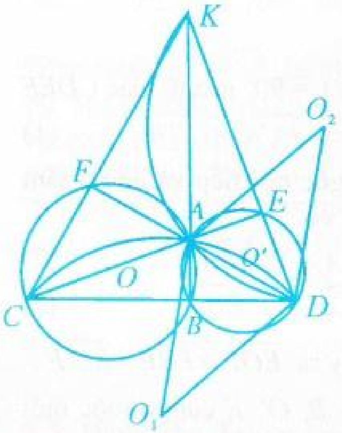
$$\frac{FA}{AC} = \frac{FE}{CD} = \frac{2FG}{2CI} = \frac{FG}{CI}.$$

Suy ra $\Delta AFG \backsim \Delta ACI$. Từ đó ta chứng minh được bài toán sau (lưu ý $FI = CI$).

✪ **Bài toán 1.3.** *Gọi $G$, $I$ lần lượt là trung điểm $FE$, $CD$. Chứng minh rằng $FG.AI = FI.AG$.*

• Theo Bài toán 1.1, ba đường thẳng $CF$, $BA$, $DE$ đồng quy tại một điểm $K$. Xét các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác $ACD$, $ADK$, $ACK$ ta nhận được bài toán sau.

✪**Bài toán 1.4.** *Giả sử $CA$ cắt đường tròn $(O')$ tại $E$, $DA$ cắt đường tròn $(O)$ tại $F$. Gọi $K$ là giao điểm của $CF$ và $DE$. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $ACD$, $ADK$, $ACK$ bằng nhau.*

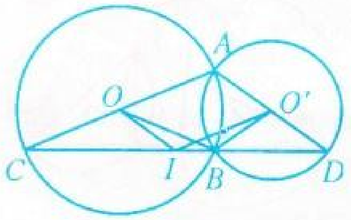


Hình 3

***Lời giải.*** (h. 3) Gọi $O_1$, $O_2$, $O_3$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $ACD$, $ADK$, $ACK$. Ta có $\widehat{AO_2D} = 2.\widehat{AKD}$, $\widehat{AO_1D} = 2.\widehat{ACD}$.

Lại có $\widehat{AKD} = \widehat{ACD}$ (Cùng phụ với $\widehat{CDK}$), do đó $\widehat{AO_1D} = \widehat{AO_2D}$, suy ra $\Delta AO_1D = \Delta AO_2D$ (g.c.g), dẫn đến $O_1A = O_2A$.

Tương tự ta được $O_3A = O_1A = O_2A$. Vậy các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $ACD$, $ADK$, $ACK$ bằng nhau. ❐



Hình 4

• Với $I$ là trung điểm của cạnh $CD$, ta có tứ giác $AOIO'$ là hình bình hành (h. 4), suy ra $\widehat{OAO'} = \widehat{OIO'}$.

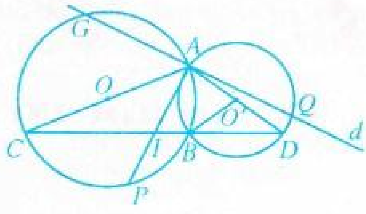
Lại có $\widehat{OAO'} = \widehat{OBO'}$, dẫn đến $\widehat{OIO'} = \widehat{OBO'}$, suy ra tứ giác $OIBO'$ nội tiếp trong một đường tròn. Ta có bài toán sau.

✪**Bài toán 1.5.** *Gọi $I$ là trung điểm của $CD$. Chứng minh rằng tứ giác $OIBO'$ nội tiếp trong một đường tròn.*

• Kéo dài $AI$ cắt đường tròn $(O)$ tại $P$. Giả sử đường thẳng qua $A$ vuông góc với $AI$ cắt $(O')$ tại điểm thứ hai $Q$. Ta có bài toán sau.

✪**Bài toán 1.6.** *Gọi $P$ là giao điểm của tia $AI$ với đường tròn $(O)$. Đường thẳng $d$ qua $A$ vuông góc với $AI$ cắt đường tròn $(O')$ tại $Q$. Chứng minh rằng $CP = AQ$.*

***Lời giải.*** Giả sử $d$ cắt $(O)$ tại điểm thứ hai $G$ (h. 5). Do $\widehat{GAP} = \widehat{CPA} = \widehat{CGA} = 90°$ nên tứ giác $CPAG$ là hình chữ nhật, suy ra $CP = GA$ (4)



Hình 5

Mặt khác, tứ giác $CGQD$ là hình thang vuông và có $IA \parallel CG \parallel QD$. Do $I$ là trung điểm của $CD$, suy ra $A$ là trung điểm của cạnh $GQ$ hay $AG = AQ$ (5)

Từ (4) và (5) ta có điều phải chứng minh. ❐

• Bây giờ ta xét bài toán đảo của Bài toán 1.

✪**Bài toán 1.7.** *Hai đường tròn $(O\,;R)$ và $(O'\,;R')$ cắt nhau tại $A$ và $B$. Đường thẳng $d$ qua $B$ và vuông góc với $AB$ cắt $(O)$ và $(O')$ lần lượt tại $C$, $D$. Chứng minh rằng ba điểm $A$, $C$, $O$ thẳng hàng.*

Bạn đọc tự chứng minh bài toán này.

• Giả sử $d$ là đường thẳng luôn đi qua điểm $B$ và cắt $(O)$, $(O')$ lần lượt tại $C$, $D$. Câu hỏi đặt ra là tam giác $ACD$ có chu vi lớn nhất khi nào? Trả lời câu hỏi này ta có bài toán sau.

✪**Bài toán 1.8.** *Hai đường tròn $(O\,;R)$ và $(O'\,;R')$ cắt nhau tại $A$ và $B$. Đường thẳng $d$ đi qua $B$ lần lượt cắt $(O)$ và $(O')$ tại $C$ và $D$. Xác định vị trí $d$ để chu vi tam giác $ACD$ là lớn nhất.*

***Lời giải.*** Do $d$ luôn đi qua điểm $B$ nên $\Delta ACD$ có $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ và $\widehat{ADC} = \frac{1}{2}\widehat{AO'B}$ (không đổi). Tam giác $ACD$ cón các góc không đổi nên chu vi lớn nhất khi và chỉ khi $AC$ lớn nhất. Lúc đó $AC$ là đường kính của đường tròn $(O)$ và $d \perp AB$. ❐

*(Xem tiếp trang 5)*

# ĐỀ THI VÀO LỚP 10
# KHỐI THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH, NGHỆ AN
## NĂM HỌC 2008 - 2009
**(Thời gian làm bài: 150 phút)**

## VÒNG 1

**Câu 1.** Tính giá trị của biểu thức

$$A=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\frac{2y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

với $x=\frac{5+\sqrt{21}}{4}$, $y=\frac{5-\sqrt{21}}{4}$.

**Câu 2.** Giải phương trình

$$(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12.$$

**Câu 3.** Tìm $m$ để phương trình

$$x^2-2mx+2m-2=0.$$

có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thoả mãn điều kiện

$$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=10.$$

**Câu 4.** Cho $a$, $b$ là hai số thực dương. Chứng minh rằng $\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{a^2}}\ge 2\sqrt{2}$.

Khi nào đẳng thức xảy ra?

**Câu 5.** Cho tam giác $ABC$ và đường tròn $(O)$ nội tiếp trong tam giác đó. Gọi $M_0$, $N_0$, $P_0$ lần lượt là tiếp điểm của các cạnh $AB$, $AC$ và $BC$ với $(O)$. Trên cạnh $AB$, $AC$ lần lượt lấy các điểm $M$ và $N$ sao cho $BM + CN = BC$.

a) Chứng minh rằng $\widehat{P_0M_0N_0}=\frac{1}{2}\left(\widehat{BAC}+\widehat{ABC}\right)$.

b) Chứng minh rằng tam giác $OMN$ là tam giác cân.

c) Xác định vị trí của $M$ trên $AB$ sao cho đoạn $MN$ ngắn nhất.

## VÒNG 2

**Câu 6.** Giải các phương trình

a) $x^2-4x+\frac{10}{x^2-4x+5}=2$ ;

b) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{3x-1}=\sqrt[3]{5x+1}$.

**Câu 7.** Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-18x+1=0$. Đặt $S_n=x_1^n+x_2^n$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Chứng minh rằng $S_{n+2}=18S_{n+1}-S_n$ với mọi $n\in\mathbb{N}$ ;

b) Chứng minh rằng $S_n$ là số nguyên dương và không chia hết cho 17 với mọi $n\in\mathbb{N}$.

**Câu 8.** Cho các số $a$, $b$, $c$, $d$ đều thuộc đoạn $[0 ; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt[3]{abcd}+\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)}.$$

**Câu 9.** Cho $(O)$ là đường tròn có bán kính $R$ và $A$, $B$ là hai điểm thuộc $(O)$ sao cho $AB = 2a$ không đổi, với $0 < a < R$. Giả sử $M$, $N$ là hai điểm thuộc cung lớn $AB$ sao cho $AM \perp BN$.

a) Tính khoảng cách từ $O$ đến trung điểm $I$ của $MN$ theo $a$.

b) Xác định vị trí của $M$ sao cho độ dài $MA + MB$ đạt giá trị lớn nhất.

**Câu 10.** Cần dùng ít nhất bao nhiêu tấm bìa hình tròn có bán kính bằng 1 để phủ kín một tam giác đều có cạnh bằng 3, với giả thiết không được cắt các tấm bìa?

LÊ QUỐC HÁN
*(GV trường ĐH Vinh)* giới thiệu

# LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN
# TRƯỜNG THPT CHUYÊN HƯNG YÊN
## NĂM HỌC 2008 - 2009

*(Đề thi đã đăng trên THTT số 381, tháng 3 năm 2009)*

**Câu 1.** Ta có $a_k = \dfrac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

Từ đó suy ra

$$S_{2008} = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2008^2} - \frac{1}{2009^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2009^2} = \frac{2009^2 - 1}{2009^2} = \frac{4036080}{4036081}.$$

**Câu 2.** 1) Đặt $y = x^2 - 4$, ta có HPT $\begin{cases} x^2 - y = 4 \\ y^2 + x = 4 \end{cases}$

Trừ theo vế hai PT của hệ trên ta được
$(x^2 - y^2) - (x + y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - y - 1) = 0.$

• Nếu $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$, thay vào PT thứ nhất của hệ giải được $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

• Nếu $x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = x - 1$, thay vào PT thứ nhất của hệ giải được $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của PT là $\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}; \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$.

2) Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (3x-1)(3y-1) = 10 \\ (3y-1)(3z-1) = 40 \\ (3z-1)(3x-1) = 16 \end{cases} \quad (1)$$

Nhân theo vế ba PT của HPT (1) ta được

$$(3x-1)^2(3y-1)^2(3z-1)^2 = 6400$$
$$\Leftrightarrow |(3x-1)(3y-1)(3z-1)| = 80.$$

• Nếu $(3x - 1)(3y - 1)(3z - 1) = 80$, kết hợp với (1) tìm được $(x ; y ; z) = (1 ; 2 ; 3)$.

• Nếu $(3x - 1)(3y - 1)(3z - 1) = -80$, kết hợp với (1) tìm được $(x ; y ; z) = \left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{4}{3}; -\dfrac{7}{3}\right)$.

Vậy HPT đã cho có hai nghiệm $(x ; y ; z)$ là $(1 ; 2 ; 3)$ và $\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{4}{3}; -\dfrac{7}{3}\right)$.

**Câu 3.** Giả sử đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0;\ a, b, c, d \in \mathbb{Z})$ nhận $3 - \sqrt{2}$ là nghiệm, ta có $a(3-\sqrt{2})^3 + b(3-\sqrt{2})^2 + c(3-\sqrt{2}) + d = 0$
$\Leftrightarrow 45a + 11b + 3c + d = (29a + 6b + c)\sqrt{2}$.

Do $\sqrt{2}$ là số vô tỉ, suy ra
$45a + 11b + 3c + d = 29a + 6b + c = 0.$

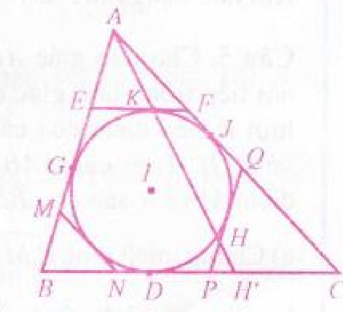
Từ đó ta có

$$f(3+\sqrt{2}) = a(3+\sqrt{2})^3 + b(3+\sqrt{2})^2 + c(3+\sqrt{2}) + d$$
$$= (45a + 11b + 3c + d) + (29a + 6b + c)\sqrt{2} = 0.$$

Vậy $3 + \sqrt{2}$ cũng là một nghiệm của $f(x)$.

**Câu 4.** 1) Gọi $G$, $J$ thứ tự là tiếp điểm của đường tròn $(I)$ với các cạnh $AB$ và $AC$ (hình vẽ). Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $a + b + c = 2p$. Theo tính chất tiếp tuyến, ta có

$AG = AJ = p - a$,
$BG = BD = p - b$,
$CD = CJ = p - c$ và
$EK = EG$, $FK = FJ$.




Gọi $H'$ là giao điểm của $AK$ với $BC$. Vì $EF \parallel BC$ nên

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EK}{BH'} = \frac{KF}{CH'} = \frac{AF}{AC}.$$

Theo tính chất tỉ lệ thức ta có

$$\frac{AG}{AB + BH'} = \frac{AE + EK}{AB + BH'} = \frac{AF + KF}{AC + CH'} = \frac{AJ}{AC + CH'}.$$

Mặt khác, $AJ = AG$, suy ra $AB + BH' = AC + CH'$
$\Rightarrow AB + BC = AC + 2CH' \Rightarrow CH' = p - b = BD$.

Do đó $H' \equiv H$ hay $A$, $K$, $H$ thẳng hàng.

2) Do $EF // BC$ nên theo định lí Thalès ta có

$$\frac{EF}{BC}=\frac{KF}{CH}=\frac{AF}{AC}=\frac{AJ}{AC+CH}.$$

Suy ra $EF=\dfrac{BC.AJ}{AC+CH}=\dfrac{a(p-a)}{p}$.

Tương tự có $MN=\dfrac{b(p-b)}{p}$, $PQ=\dfrac{c(p-c)}{p}$.

Cộng theo vế ba đẳng thức trên ta được

$$EF+MN+PQ=2p-\frac{a^2+b^2+c^2}{p}.$$

Sử dụng BĐT quen thuộc

$$a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{4}{3}p^2$$

suy ra $EF+MN+PQ\le 2p-\dfrac{4p}{3}=\dfrac{2p}{3}$.

Vậy $EF+MN+PQ$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{2p}{3}$ khi và chỉ khi $ABC$ là tam giác đều.

**Bài 5.** 1) Với hai số thực dương bất kì $x$, $y$ ta có $(x+y)^2\ge 4xy$, suy ra

$$\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2} \text{ và } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$$

Từ đó ta có $\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{ab}\ge\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{(a+b)^2}=2$ (1)

$\dfrac{3}{2ab}+\dfrac{3}{a^2+b^2}\ge 3.\dfrac{4}{2ab+a^2+b^2}=12$ (2)

Cộng theo vế hai BĐT (1) và (2) ta có điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\dfrac{1}{2}$.

2) Nhận thấy sau mỗi lần thực hiện theo yêu cầu của bài toán thì số dấu trên bảng giảm đi 1 và số dấu trừ hoặc giữ nguyên hoặc giảm đi 2. Hơn nữa, do ban đầu trên bảng có 2009 dấu trừ nên số dấu trừ trên bảng luôn lẻ.

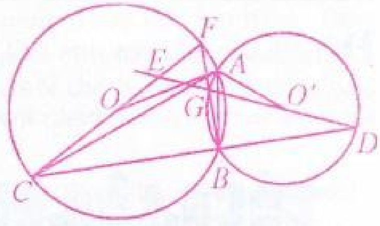
Mặt khác, trên bảng có 2008 + 2009 = 4017 dấu nên sau 4016 lần thực hiện như trên thì số dấu còn lại trên bảng là 1. Do đó dấu còn lại trên bảng phải là dấu trừ.

NGUYỄN THANH GIANG
(*GV THPT chuyên Hưng Yên*) giới thiệu

## ĐI TÌM... *(Tiếp trang 2)*

**✪Bài toán 1.9.** *Hai đường tròn $(O\ ;\ R)$ và $(O'\ ;\ R')$ cắt nhau tại A và B. Đường thẳng d qua B cắt (O) và (O') lần lượt tại C, D. Tia CO cắt tia DO' tại E. Chứng minh rằng các điểm O, E, A, O' cùng thuộc một đường tròn.*

***Lời giải***



*Hình 6*

Kẻ đường kính $CF$ của đường tròn $(O)$, kẻ đường kính $DG$ của đường tròn $(O')$ (h. 6). Ta có $\widehat{CBF}=\widehat{GBD}=90°\Rightarrow FB\perp CD, GB\perp CD$, suy ra ba điểm $F, G, B$ thẳng hàng.

Mặt khác ta có

$\widehat{FOA}=2.\widehat{FCA}=2.\widehat{FBA}$, $\widehat{GO'A}=2.\widehat{FBA}$.

Suy ra $\widehat{EOA}=\widehat{EO'A}$. Do đó bốn điểm $E, O, O', A$ cùng thuộc một đường tròn. □

• Kết hợp các bài toán trên ta có bài toán mới.

**✪Bài toán 1.10.** *Cho hai đường tròn $(O\ ;\ R)$ và $(O'\ ;\ R')$ cắt nhau tại A và B. Kẻ đường kính AC, AD lần lượt của (O) và (O'). Giả sử CA cắt (O') tại E, DA cắt (O) tại F, CF cắt DE tại K. Các điểm I, M, N, P lần lượt là trung điểm của CD, KD, KC, KA.*

*1) Chứng minh rằng các điểm B, I, O, N, F, P, M, E, O' cùng thuộc một đường tròn.*

*2) Giả sử $AB=R.\sqrt{2}$ và $O_1$, $O_2$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK, ACD. Chứng minh rằng tứ giác $AODO_2$ là hình vuông.*

*3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF cắt CE tại P, đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE cắt DF tại Q. Chứng minh rằng tam giác KPQ là tam giác cân.*

Chứng minh bài toán trên xin dành cho bạn đọc. Cứ tiếp tục như vậy ta sẽ tìm thấy *"Những bài toán thú vị từ một bài toán quen thuộc"* phải không các bạn. Chúc các bạn thành công.


**Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học**

Để lập được phương trình (PT) đường thẳng trong không gian, ta cần nắm được các yếu tố xác định đường thẳng như điểm, vectơ chỉ phương hoặc cặp mặt phẳng chứa nó. Các điều kiện này thường được ẩn dưới nhiều hình thức khác nhau đòi hỏi học sinh phải biết phát hiện và sử dụng chúng một cách khéo léo trong khi giải toán. Bài viết này sẽ giúp các bạn hệ thống lại một số dạng toán viết PT tổng quát của đường thẳng trong không gian.

Ta biết rằng PT tổng quát của đường thẳng có dạng

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0. \end{cases}$$

Với $A^2+B^2+C^2 \neq 0$, $A'^2+B'^2+C'^2 \neq 0$,

$A:B:C \neq A':B':C'$.

Do đó bài toán viết PT tổng quát của đường thẳng quy về viết PT tổng quát của các mặt phẳng.

# CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG trong không gian

TRẦN VĂN XUÂN
*(GV trường Đại học Bạc Liêu)*

## I. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng $ax+by+cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2 \neq 0)$ thực chất là xác định các hệ số $a$, $b$, $c$ và $d$ trong PT. Ta có thể tiến hành như sau:

***Hướng 1.*** *Coi a, b, c, d là ẩn số để tạo ra một hệ PT nếu các điều kiện của bài toán cho phép chúng ta làm được điều đó.*

Các bạn cần lưu ý rằng: Ta chỉ có thể tạo ra được một hệ 3 phương trình, bởi vì ta đã có một điều kiện ràng buộc là $a^2+b^2+c^2 \neq 0$. Vì vậy các hệ số $a, b, c, d$ thường được tìm như sau:

*) Xác định được một ẩn khác 0 rồi gán cho nó giá trị bằng 1.

*) Xác định được ẩn khác 0 biểu thị các ẩn còn lại qua nó.

★**Thí dụ 1.** *Viết phương trình mặt phẳng cách đều bốn điểm* $A(3\,;5\,;-1)$, $B(7\,;5;3)$, $C(9\,;-1\,;5)$, $D(5\,;3;-3)$.

***Lời giải.*** Với các điều kiện đã cho ta thiết lập được hệ PT

$$\begin{cases} |3a+5b-c+d| = |7a+5b+3c+d| \\ |7a+5b+3c+d| = |9a-b+5c+d| \\ |9a-b+5c+d| = |3a+5b-c+d| \\ a^2+b^2+c^2 \neq 0 \end{cases}$$

Khử trị tuyệt đối ta được tám hệ, chẳng hạn

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b=0 \\ d \text{ tùy ý} \\ a^2+b^2+c^2 \neq 0. \end{cases}$$

Suy ra $a=-c \neq 0$, $b=0$, $d$ tùy ý và PT mặt phẳng cần tìm là: $x-z+m=0$, $m \in \mathbb{R}$. □

★**Thí dụ 2.** *Trong không gian với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc cho* $A(0\,;0;1)$, $B(1\,;1\,;0)$. *Viết phương trình mặt phẳng* $(\alpha)$ *chứa AB và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc* $\varphi$ *sao cho* $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

***Lời giải.*** Giả sử mặt phẳng $(\alpha)$ có PT: $ax+by+cz+d=0$. Sử dụng các điều kiện đã cho, ta lập được hệ PT

$$\begin{cases} c+d=0 \\ a+b+d=0 \\ \sqrt{6}\,|c| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ a^2+b^2+c^2 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-d \neq 0 \\ a=-2d \\ b=d. \end{cases}$$

PT mặt phẳng cần tìm là $-2x+y-z+1=0$. □

***Hướng 2.*** *Bộ ba (a ; b ; c) là tọa độ của một vectơ pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng* $(\alpha)$ *và tìm cách xác định vectơ này.*

Nếu mặt phẳng cần tìm vuông góc với một đường thẳng đã cho hoặc song song với một mặt phẳng cho trước thì việc xác định VTPT là đơn giản.

Các trường hợp phức tạp hơn ta thường xác định VTPT bằng cách lấy tích có hướng hai vectơ chỉ phương (VTCP) của mặt phẳng. Do đó khi giải toán ta cần xem xét kĩ giả thiết để phát hiện ra cặp vectơ chỉ phương. Các tình huống thường gặp là:

*) Mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua hai điểm $A$, $B$ thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP của mặt phẳng $(\alpha)$.

*) Mặt phẳng $(\alpha)$ chứa hay song song với đường thẳng $\Delta$ thì VTCP của $\Delta$ cũng là một VTCP của $(\alpha)$.

*) Mặt phẳng $(\alpha)$ vuông góc với mặt phẳng $(\beta)$ thì VTPT của $(\beta)$ cũng là một VTCP của $(\alpha)$.

*Ngoài ra ta còn có thể xác định PT mặt phẳng thông qua các bài toán quỹ tích.*

• Tập hợp các điểm cách mặt phẳng $(\alpha)$ cho trước một khoảng bằng $h$ là các mặt phẳng song song với $(\alpha)$ và cách $(\alpha)$ một khoảng $h$.

• Tập hợp các đường thẳng đi qua điểm $A$ cho trước và song song với mặt phẳng $(\alpha)$ cho trước là mặt phẳng $(\beta)$ qua $A$ và song song với $(\alpha)$.

• Tập hợp các đường thẳng đi qua điểm $A$ cho trước và vuông góc với đường thẳng $\Delta$ cho trước là mặt phẳng $(\beta)$ qua $A$ và vuông góc với $\Delta$.

## II. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Để xác định được PT cặp mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$ giao nhau theo đường thẳng $d$ thì cần phải tách dữ kiện của bài toán thành hai điều kiện, mỗi điều kiện sẽ ứng với một mặt phẳng cần xác định. Có hai dạng toán chủ yếu sau.

***Dạng 1. Phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ đã cho, chỉ cần xác định phương trình mặt phẳng $(\beta)$***

✪**Bài toán 1.** *Cho phương trình đường thẳng $\Delta$ và phương trình mặt phẳng $(P)$, hãy viết phương trình hình chiếu vuông góc của $\Delta$ trên $(P)$.*

***Cách giải.*** Gọi $d$ là hình chiếu của $\Delta$ trên $(P)$ thì $d$ là giao tuyến của $(P)$ và $(Q)$ trong đó $(Q)$ là mặt phẳng chứa $d$ và vuông góc với $(P)$.

Mặt phẳng $(Q)$ là xác định bởi vì $(Q)$ đi qua $M$ thuộc $\Delta$ và có cặp VTCP là VTCP của $\Delta$ và VTPT của $(P)$.

✪**Bài toán 2.** *Viết phương trình đường thẳng $d$ đi qua $A$ cho trước, vuông góc với đường thẳng $\Delta$ cho trước và nằm trong mặt phẳng $(P)$ cho trước.*

***Cách giải.*** Nếu gọi $(Q)$ là mặt phẳng chứa $A$ và vuông góc với $\Delta$ thì $d$ là giao tuyến của $(P)$ và $(Q)$.

***Dạng 2. Cả hai mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$ đều cần phải xác định phương trình***

Để cho gọn trong mục này ta sẽ giả thiết là đường thẳng $d_i$ $(i = 1, 2, ...)$ đi qua điểm $M_i$ và có VTCP $\vec{u}_i$, đồng thời mặt phẳng $(\alpha_i)$ $(i = 1, 2, ...)$ có VTPT là $\vec{n}_i$ $(i = 1, 2, ...)$.

✪**Bài toán 3.** *Cho điểm $A$ và các đường thẳng $d_1$, $d_2$. Hãy viết phương trình $d$ đi qua $A$, cắt cả $d_1$ và $d_2$.*

***Cách giải.*** Vì $d$ cắt $d_1$ nên $d$ và $d_1$ xác định mặt phẳng $(P)$, tương tự $d$ và $d_2$ xác định mặt phẳng $(Q)$.

Ta có thể lập được PT $(P)$, vì $(P)$ đi qua $A$ và có một cặp VTCP là $\vec{u}_1$ và $\overrightarrow{AM_1}$. Tương tự, $(Q)$ đi qua $A$ và có một cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2$ và $\overrightarrow{AM_2}$.

✪**Bài toán 4.** *Cho điểm $A$ và các đường thẳng $d_1$, $d_2$. Viết phương trình đường thẳng $d$ đi qua $A$, cắt $d_1$ và song song với $d_2$.*

***Cách giải.*** Xác định $(P)$ như bài toán 3. Mặt phẳng $(Q)$ chứa hai đường thẳng song song $d$ và $d_2$ có cặp VTCP là $\vec{u}_2$ và $\overrightarrow{AM_2}$.

✪**Bài toán 5.** *Cho điểm $A$ và các đường thẳng $d_1$, $d_2$, . Viết phương trình đường thẳng $d$ đi qua $A$ cắt $d_1$ và vuông góc với $d_2$.*

***Cách giải.*** Xác định $(P)$ như bài toán 3. Mặt phẳng $(Q)$ đi qua $A$, vuông góc với $d_2$ nên có VTPT là $\vec{u}_2$.

✪**Bài toán 6.** *Cho ba đường thẳng $d_1$, $d_2$, $d_3$. Viết phương trình đường thẳng $d$ song song với $d_1$, cắt $d_2$ và cắt $d_3$.*

***Cách giải.*** Vì $d$ cắt $d_2$ nên $d$ và $d_2$ xác định mặt phẳng $(P)$. Tương tự, $d$ và $d_3$ xác định mặt phẳng $(Q)$. Ta có thể lập được PT mặt phẳng $(P)$, bởi vì $(P)$ đi qua $M_2$ ($M_2 \in d_2$) và có cặp VTCP là $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$. Tương tự, $(Q)$ đi qua $M_3$ ($M_3 \in d_3$) có cặp VTCP là $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_3}$.

**✪Bài toán 7.** *Cho điểm A, đường thẳng $d_1$, mặt phẳng $(\alpha)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A, cắt $d_1$ và song song với $(\alpha)$.*

***Cách giải.*** Ta thấy $d$ là giao tuyến của $(P)$ và $(Q)$, trong đó $(P)$ được xác định bởi $A$ và $d_1$. $(Q)$ là mặt phẳng qua $A$ và song song với $(\alpha)$.

**★Thí dụ 3.** *Cho hai đường thẳng $d_1$, $d_2$ có phương trình lần lượt là*

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+4}{-5};\quad \frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-4}{-1}.$$

*Viết phương trình đường vuông góc chung của $d_1$ và $d_2$.*

***Lời giải.*** Ta có $d_1$ đi qua $M_1(2;3;-4)$ có VTCP $\vec{u}_1(2;3;-5)$; $d_2$ đi qua $M_2(-1;4;4)$ có VTCP $\vec{u}_2(3;-2;-1)$. Gọi $d$ là đường vuông góc chung của $d_1$ và $d_2$. Vì $d$ cắt $d_1$ nên $d$ và $d_1$ xác định mặt phẳng $(\alpha)$. Tương tự $d$ và $d_2$ xác định mặt phẳng $(\beta)$.

Mặt khác, vì $d$ vuông góc với $d_1$ và $d_2$ nên $[\vec{u}_1, \vec{u}_2]=(-13;-13;-13)$ là một VTCP của $d$, do đó mặt phẳng $(\alpha)$ có cặp VTCP là $\vec{u}(1;1;1)$ và $\vec{u}_1 \Rightarrow \vec{n}=[\vec{u},\vec{u}_1]=(8;-7;-1)$ là một VTPT của $(\alpha)$.

Mặt phẳng $(\alpha)$ chứa $d_1$ nên chứa $M_1$, suy ra PT mặt phẳng $(\alpha)$ là: $8x-7y-z+9=0$.

Tương tự, PT mp$(\beta)$ là: $x+4y-5z+5=0$.
Vậy PT đường thẳng $d$ là

$$\begin{cases}8x-7y-z+9=0\\ x+4y-5z+5=0.\ \square\end{cases}$$

**★Thí dụ 4.** *Cho mặt cầu (S) có phương trình*

$$(x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=\frac{16}{9}.$$

*Viết phương trình tiếp tuyến của (S), biết tiếp tuyến này đi qua $A\left(0;0;\frac{1}{3}\right)$ và vuông góc với trục Oz.*

***Lời giải.*** Mặt cầu $(S)$ có tâm là $I(-1;1;-1)$ và bán kính $R=\frac{4}{3}$. Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng đi qua $A$, vuông góc với $Oz$, suy ra $\vec{k}(0;0;1)$ là VTPT của $(\alpha)$. Từ đó PT của $(\alpha)$ là $3z-1=0$.

Mặt khác, vì khoảng cách từ $I$ đến $(\alpha)$ là $\frac{|3(-1)-1|}{3}=\frac{4}{3}=R$, nên $(\alpha)$ tiếp xúc với $(S)$ tại $M$.

Do đó, tiếp tuyến cần tìm $d$ là đường thẳng $AM$, lại vì $IM \perp (\alpha)$ tại $M$ nên $IM$ và $d$ xác định mặt phẳng $(\beta)$, mặt phẳng $(\beta)$ đi qua $A$, $I$ và vuông góc với $(\alpha)$ nên có cặp VTCP là $\overrightarrow{AI}\left(-1;1-\frac{4}{3}\right)$ và VTPT $\vec{n}_\alpha(0;0;3)$ của $(\alpha)$, suy ra vectơ $\vec{n}=[\overrightarrow{AI},\vec{n}_\alpha]=(3;3;0)$ là VTPT của $(\beta)$.

Vậy PT mặt phẳng $(\beta)$ là: $x+y=0$ và PT đường thẳng $d$ là $\begin{cases}3z-1=0\\ x+y=0.\ \square\end{cases}$

Để kết thúc xin giới thiệu một số bài tập để các bạn luyện tập.

**1.** Viết phương trình đường thẳng $d$ đi qua $A(3;2;1)$ cắt và vuông góc với đường thẳng $d: \frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z+3}{1}$.

**2.** Viết phương trình đường thẳng $d$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)$: $2x-y-2z+1=0$, đồng thời cắt hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1};\quad d_2: \begin{cases}x+y-z+2=0\\ x+1=0.\end{cases}$$

**3.** Cho mặt cầu $(S)$: $x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z+2=0$. Viết phương trình tiếp tuyến với $(S)$ đi qua điểm $A(1;1;-2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha)$: $x+2y-2z+1=0$.

# Thử sức TRƯỚC KÌ THI

## ĐỀ SỐ 4

(*Thời gian làm bài: 180 phút*)

## I. PHẦN CHUNG

**Câu 1** (*2 điểm*)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số
$$y = x^3 - x.$$

2) Dựa vào đồ thị, biện luận theo $m$ số nghiệm của phương trình $x^3 - x = m^3 - m$.

**Câu 2** (*2 điểm*)

1) Giải phương trình
$$\cos^2 x + \cos x + \sin^3 x = 0.$$

2) Giải phương trình
$$(3+2\sqrt{2})^x - 2(\sqrt{2}-1)^x - 3 = 0.$$

**Câu 3** (*1 điểm*)

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A$ và $D$. Biết $AB = AD = a$, $CD = 2a$, cạnh bên $SD$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SD = a$. Tính thể tích tứ diện $ASBC$ theo $a$.

**Câu 4** (*1 điểm*)

Cho $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{2.e^{3x} + e^{2x} - 1}{e^{3x} + e^{2x} - e^x + 1}\,dx$. Tính $e^I$.

**Câu 5** (*1 điểm*)

Cho tam giác $ABC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{\left(1+\tan^2\frac{A}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{B}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{C}{2}}} + \sqrt{\frac{\left(1+\tan^2\frac{B}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{C}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{A}{2}}} + \sqrt{\frac{\left(1+\tan^2\frac{C}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{A}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{B}{2}}}.$$

## II. PHẦN RIÊNG (*Thí sinh chỉ làm một trong hai phần*)

### THEO CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN

**Câu 6a** (*2 điểm*)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ cho đường tròn $(C)$: $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$. Hãy viết phương trình đường tròn $(C')$ đối xứng với đường tròn $(C)$ qua điểm $M\left(\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right)$.

2) Viết phương trình tham số của đường thẳng $d$ đi qua điểm $I(1 ; 5; 0)$ và cắt hai đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \text{ và } \Delta_2: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-3}.$$

**Câu 7a** (*1 điểm*)

Cho tập hợp $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 13x^2 + 36 \le 0\}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x$ trên $D$.

### THEO CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO

**Câu 6b** (*2 điểm*)

1) Biết elip $(E_1): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ và elip $(E_2): \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ có tiêu điểm chung $F_1$ và $F_2$, cùng đi qua điểm $M$ nằm trên đường thẳng $x - y + 6 = 0$. Tìm vị trí điểm $M$ để trục lớn của $(E_1)$ là nhỏ nhất.

2) Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 3 - 7t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}.$$

**Câu 7b** (*1 điểm*). Giải phương trình
$$z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = 0$$
biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo.

TRẦN VĂN HẠNH

(*GV trường ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi*)

# HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

*(Đề thi đã đăng trên THTT số 379, tháng 1/2009)*

**Câu 1**. 1) Bạn đọc tự giải.

*Đáp số.* $\min AB = 2\sqrt{2}$, đạt được khi và chỉ khi $m = 2$.

**Câu 2.** 1) lôgarit cơ số 3 hai vế của PT và biến đổi về dạng $(x-1)(2x^2+x-1-\log_3 2)=0$.

Từ đó tìm được $x=1$; $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{9+8\log_3 2}}{4}$.

2) ĐK $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\neq 0$.

Có $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$ nên PT đưa về

$\sin 3x+\sin x+\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x+1)=0$.

Tìm được $x=\dfrac{k\pi}{2};\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

**Câu 3**. Trên $SA$, $SB$, $SC$ lấy các điểm $A'$, $B'$, $C'$ theo thứ tự sao cho $SA'=SB'=SC'=1$. Tam giác $A'B'C'$ vuông tại $B$; chân đường cao $H$ là trung điểm $AC$. Vì thế $S_{A'B'C'}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}; SH=\dfrac{1}{2}$

suy ra $V_{S.A'B'C'}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$; $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}}=abc$, do đó

$V_{S.ABC}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}abc.$

**Câu 4.** Ta có $\sin x+\sqrt{3}.\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$;

$$\sin x=\sin\left(\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó

$$I=\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}-\frac{\sqrt{3}}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx}{\sin^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

**Câu 5**. Áp dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\sqrt{a_3^2+b_3^2}\geq\sqrt{(a_1+a_2+a_3)^2+(b_1+b_2+b_3)^2}$$

ta được $P=\sqrt{\log_2^2 x+1}+\sqrt{\log_2^2 y+1}+\sqrt{\log_2^2 z+4}$

$\geq\sqrt{\log_2^2(xyz)+4^2}=5$.

Từ đó $\min P=5$, đạt được khi và chỉ khi

$$\frac{\log_2 x}{1}=\frac{\log_2 y}{1}=\frac{\log_2 z}{2}=\frac{\log_2(xyz)}{4}=\frac{3}{4}$$

$\Leftrightarrow x=y=\sqrt[4]{8};\ z=2\sqrt{2}$.

**Câu 6a**. 1) Do sơ suất, đề bài in nhầm $M(1\,;1)$. Xin sửa lại là $M(1\,;-1)$.

Từ điều kiện $2.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ tìm được $A(1;-2)$, $B(1;1)$, suy ra PT đường thẳng phải tìm là $x=1$.

2) Gọi $(Q)$ là mặt phẳng qua $A$, $B$ và vuông góc với mp$(P)$.

$\overrightarrow{AB}=(3\,;-5\,;1), \overrightarrow{n_P}=(1\,;2\,;-2)$

$\Rightarrow\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(8\,;7\,;11)$.

PTmp $(Q)$: $8x+7y+11z-46=0$.

PT $d$: $\begin{cases}8x+7y+11z-46=0\\x+2y-2z+1=0.\end{cases}$

**Câu 7a.** Giải PT, ta được

$x_1=\dfrac{1-i}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{x_1^2}=2i;\ x_2=\dfrac{1+i}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{x_2^2}=-2i$.

**Câu 6b**. 1) Giả sử $F\left(\sqrt{13};0\right)$ là một tiêu điểm của $(H)$.

PT tiếp tuyến $(d)$: $Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq 0)$.

Khi đó $9A^2-4B^2=C^2$ (1)

*(Xem tiếp trang 30)*

# Hướng dẫn ôn tập môn Vật lí
# THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2009

## Các chủ đề: DAO ĐỘNG VÀ SÓNG ĐIỆN TỪ SÓNG ÁNH SÁNG

NGUYỄN VĂN THUẬN
*(GV trường ĐHSP Hà Nội)*

Theo nội dung cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2009 của Bộ Giáo dục và Đào tạo, trong phần chung cho tất cả thí sinh, chủ đề **Dao động và sóng điện từ** có 4 câu trắc nghiệm, chủ đề **Sóng ánh sáng** có 5 câu trắc nghiệm.

Chủ đề **Dao động và sóng điện từ** gồm các nội dung kiến thức: Dao động điện từ; Mạch dao động LC; Điện từ trường; Sóng điện từ; Truyền thông (thông tin liên lạc) bằng sóng điện từ.

Chủ đề **Sóng ánh sáng** gồm các nội dung kiến thức: Tán sắc ánh sáng; Nhiễu xạ và giao thoa ánh sáng; Bước sóng và màu sắc ánh sáng; Các loại Quang phổ; Tia hồng ngoại, Tia tử ngoại, Tia X; Thang sóng điện từ.

Dưới đây là một số câu trắc nghiệm thuộc nội dung hai chủ đề này.

★**Thí dụ 1.** *Phát biểu nào **sai** khi nói về sóng điện từ?*

**A.** *Sóng điện từ là sự lan truyền trong không gian của điện từ trường biến thiên theo thời gian.*

**B.** *Trong sóng điện từ, điện trường và từ trường biến thiên theo thời gian với cùng chu kì.*

**C.** *Sóng điện từ dùng trong thông tin vô tuyến điện gọi là sóng vô tuyến.*

**D.** *Trong sóng điện từ, điện trường và từ trường luôn dao động lệch pha nhau $\frac{\pi}{2}$.*

***Hướng dẫn.*** Sóng điện từ là trường điện từ biến thiên theo thời gian truyền trong không gian dưới dạng sóng với vận tốc $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Vậy các đáp án **A**, **B**, **C** đúng.

Trong miền sóng điện từ, ở tại mỗi điểm trong không gian, điện trường và từ trường dao động đồng pha với nhau. Đáp án **D** sai.

**Chọn D.** ☐

★**Thí dụ 2.** *Một mạch dao động điện từ gồm một tụ điện có điện dung 0,125μF và một cuộn cảm có độ tự cảm 50μH. Điện trở thuần của mạch không đáng kể. Hiệu điện thế cực đại giữa hai bản tụ điện là 3V. Cường độ dòng điện cực đại trong mạch là*

**A.** 15mA. **B.** 0,15A. **C.** 1,5A. **D.** 1,5mA.

***Hướng dẫn.*** Năng lượng điện từ của mạch $W = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2$.

Suy ra $I_0 = U_0\sqrt{\frac{C}{L}} = 3.\sqrt{\frac{0,125}{50}} = 0,15\text{A}$.

Đáp án **B** đúng.

**Chọn B.** ☐

★**Thí dụ 3.** *Trong thí nghiệm Y-âng về giao thoa của ánh sáng đơn sắc, hai khe hẹp cách nhau 1mm, mặt phẳng chứa hai khe cách màn quan sát 1,5m. Khoảng cách giữa 5 vân sáng liên tiếp là 3,6mm. Bước sóng của ánh sáng dùng trong thí nghiệm này bằng*

**A.** 0,50μm. **B.** 0,55μm.
**C.** 0,60μm. **D.** 0,65μm.

***Hướng dẫn.*** Ta có $4i = 3,6\text{mm}$, suy ra $i = \frac{3,6}{4} = 0,9\text{mm}$.

Vậy $\lambda = \frac{ia}{D} = \frac{0,9.10^{-3}.10^{-3}}{1,5} = 0,60.10^{-6}\text{m} = 0,60\mu\text{m}$.

Đáp án **C** đúng.

**Chọn C.** ☐

★**Thí dụ 4.** *Trong thí nghiệm Y-âng về giao thoa ánh sáng, hai khe hẹp cách nhau một khoảng a = 0,5mm. Khoảng cách từ mặt phẳng chứa hai khe đến màn quan sát D = 1,5m. Hai khe được chiếu bằng bức xạ có bước sóng*

$\lambda = 0,60\mu m$. *Trên màn thu được hình ảnh giao thoa. Hỏi tại điểm M trên màn cách vân sáng trung tâm một khoảng 5,4mm có vân sáng thứ (bậc) mấy?*

**A.** Thứ 3. **B.** Thứ 5. **C.** Thứ 2. **D.** Thứ 4.

***Hướng dẫn.*** Khoảng vân

$$i = \frac{\lambda D}{a} = \frac{0,6.10^{-6}.1,5}{0,5.10^{-3}} = 1,8.10^{-3}\,m = 1,8mm.$$

Vậy $k = \frac{x_M}{i} = \frac{5,4}{1,8} = 3$. Đáp án **A** đúng.

**Chọn A.** ❐

**★Thí dụ 5.** *Chiếu một tia sáng đơn sắc từ không khí (chiết suất bằng 1) vào mặt phẳng của một khối thuỷ tinh với góc tới bằng $60^0$. Nếu tia phản xạ và tia khúc xạ vuông góc với nhau thì chiết suất của loại thuỷ tinh này bằng bao nhiêu?*

**A.** $n = 3$. **B.** $n = \sqrt{3}$.

**C.** $n = \frac{2}{\sqrt{3}}$. **D.** $n = \sqrt{2}$.

***Hướng dẫn***

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin i}{\sin(90^0 - i)} = \frac{\sin i}{\cos i}$$

$= \tan i = \tan 60^0 = \sqrt{3}$. Đáp án **B** đúng.

**Chọn B.** ❐

*Sau đây là một số câu trắc nghiệm thuộc nội dung hai chủ đề trên, các bạn tự làm.*

**Câu 1.** Một mạch dao động LC có điện trở thuần không đáng kể . Dao động điện từ tự do (dao động riêng) của mạch có chu kì là $2.10^{-4}$s. Năng lượng điện trường trong mạch biến đổi điều hoà với chu kì là

**A.** $2.10^{-4}$s. **B.** $1.10^{-4}$s.

**C.** $4.10^{-4}$s. **D.** $3.10^{-4}$s.

**Câu 2.** Trong mạch dao động LC có dao động điện từ tự do với tần số góc $10^4$rad/s. Điện tích cực đại trên tụ điện là $10^{-9}$C. Khi cường độ dòng điện trong mạch bằng $6.10^{-6}$A thì điện tích trên tụ điện là

**A.** $8.10^{-10}$C. **B.** $2.10^{-10}$C.

**C.** $5.10^{-10}$C. **D.** $7.10^{-10}$C.

**Câu 3.** Trong thí nghiệm giao thoa ánh sáng với khe Y-âng, khoảng cách giữa hai khe là 2mm, khoảng cách từ mặt phẳng chứa hai khe đến màn quan sát là 1,2m. Chiếu sáng hai khe bằng ánh sáng hỗn hợp gồm hai ánh sáng đơn sắc có bước sóng 500nm và 660nm thì thu được hệ vân giao thoa trên màn. Biết vân sáng chính giữa (trung tâm) ứng với hai bức xạ trên trùng nhau. Khoảng cách từ vân chính giữa đến vân gần nhất cùng màu với vân chính giữa là

**A.** 3,3mm. **B.** 16,5mm.

**C.**23,1mm. **D.** 9.9mm.

**Câu 4.** Trong thí nghiệm Y-âng về giao thoa ánh sáng với ánh sáng đơn sắc có bước sóng $\lambda_1 = 540$nm thì thu được hệ vân giao thoa trên màn quan sát có khoảng vân $i_1 = 0,36$mm. Khi thay ánh sáng trên bằng ánh sáng đơn sắc có bước sóng $\lambda_2 = 600$nm thì thu được hệ vân giao thoa trên màn quan sát có khoảng vân

**A.** $i_2 = 0,55$mm. **B.** $i_2 = 0,35$mm.

**C.** $i_2 = 0,40$mm. **D.** $i_2 = 0,50$mm.

**Câu 5.** Hiện tượng đảo sắc của vạch quang phổ (đảo vạch quang phổ) cho phép kết luận rằng

**A.** Trong cùng một điều kiện, một chất chỉ hấp thụ hoặc chỉ bức xạ ánh sáng.

**B.** Trong cùng một điều kiện về nhiệt độ và áp suất, mọi chất đều hấp thụ và bức xạ các ánh sáng có cùng bước sóng.

**C.** Các vạch tối xuất hiện trên nền quang phổ liên tục là do giao thoa ánh sáng.

**D.** Ở nhiệt độ xác định, một chất chỉ hấp thụ những bức xạ nào mà nó có khả năng phát xạ và ngược lại, nó chỉ phát những bức xạ mà nó có khả năng hấp thụ.

*Đáp án kì trước (THTT số 381, tháng 3 năm 2009)*

**Câu 1: chọn B; Câu 2: chọn D; Câu 3: chọn A; Câu 4: chọn C; Câu 5: chọn B.**

PHƯƠNG PHÁP
GIẢI TOÁN

# Sử dụng tính lồi, lõm của đồ thị hàm số vào chứng minh bất đẳng thức

LÊ VĂN LỤC
(GV THPT Đoàn Thượng, Gia Lộc, Hải Dương)

Bất đẳng thức (BĐT) là một dạng toán hay và khó, thường gặp trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng và các kì thi chọn học sinh giỏi. Khi gặp bài toán chứng minh BĐT, học sinh thường lúng túng trong việc lựa chọn phương pháp. Bài viết này đưa ra một kĩ thuật đơn giản nhưng có hiệu quả khi giải quyết một lớp bài toán chứng minh BĐT hay tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một biểu thức. Đó là sử dụng tính lồi, lõm của đồ thị hàm số.

## I. CƠ SỞ LÍ THUYẾT

Nếu đồ thị hàm số $y = f(x)$ lồi trên khoảng $(a;b)$ và $y = f'(c)(x-c)+f(c)$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(c;f(c))$ với $c \in (a;b)$ thì

$$f(x) \le f'(c)(x-c)+f(c),\ \forall x \in (a;b) \quad (1)$$

Đối với đồ thị hàm số lõm ta có BĐT với dấu ngược lại.

BĐT (1) cho phép ta đánh giá biểu thức $f(x)$ thông qua một biểu thức bậc nhất. Hơn nữa có thể chọn được $c$ sao cho đẳng thức xảy ra theo đúng yêu cầu của bài toán.

## II. ÁP DỤNG

**Bài toán 1 (BĐT Cauchy).** *Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số không âm. Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}.$$

***Lời giải.*** Nếu có một số $a_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) thì BĐT đúng. Xét trường hợp $a_i > 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Chia cả hai vế cho $a_1+a_2+\dots+a_n$ ta được BĐT tương đương:

$$\frac{1}{n} \ge \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+a_2+\dots+a_n}.\frac{a_2}{a_1+a_2+\dots+a_n}\dots\frac{a_n}{a_1+a_2+\dots+a_n}}.$$

Đặt $x_i = \dfrac{a_i}{a_1+a_2+\dots+a_n}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ thì $x_i > 0$ và $x_1+x_2+\dots+x_n = 1$. BĐT cần chứng minh trở thành $\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n} \le \dfrac{1}{n}$, hay

$$\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n \le n\ln\frac{1}{n} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = \ln x$, với $x > 0$. Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, với $\forall x > 0$, suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ lồi trên khoảng $(0;+\infty)$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $\left(\dfrac{1}{n};\ln\dfrac{1}{n}\right)$ có PT là $y = nx - 1 + \ln\dfrac{1}{n}$, suy ra

$$\ln x \le nx - 1 + \ln\frac{1}{n},\ \forall x \in (0;+\infty) \quad (1)$$

Áp dụng BĐT (1) cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ và cộng theo vế lại ta được

$$\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n \le n(x_1+x_2+\dots+x_n) - n + n\ln\frac{1}{n}.$$

Kết hợp với $x_1+x_2+\dots+x_n = 1$ ta thấy BĐT (*) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{1}{n}$ hay $a_1 = a_2 = ... = a_n$. □

**Bài toán 2 (BĐT Jensen).** *Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a ; b)$.*

*a) Nếu $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a ; b)$ thì $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in (a ; b)$ và $\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0;1]$ thoả mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ ta có*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n) \quad (1)$$

*b) Nếu $f''(x) < 0, \forall x \in (a;b)$ thì ta có bất đẳng thức với dấu ngược lại.*

***Lời giải.*** a) Đặt $\bar{x} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ thì $\bar{x} \in (a;b)$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(\bar{x}; f(\bar{x}))$ có PT là $y = f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + f(\bar{x})$.

Do $f''(x) > 0, \forall x \in (a;b)$ nên đồ thị hàm số lõm trên khoảng $(a;b)$. Bởi vậy tại điểm $(\bar{x}; f(\bar{x}))$ tiếp tuyến nằm dưới đồ thị hàm số. Từ đó $f(x) \ge f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + f(\bar{x}), \forall x \in (a;b)$.

Thay $x = x_i$ ta được $f(x_i) \ge f'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + f(\bar{x})$. Nhân cả hai vế của BĐT trên với $\alpha_i \ge 0$, ta được $\alpha_i f(x_i) \ge \alpha_i f'(\bar{x}).x_i - \alpha_i f'(\bar{x}).\bar{x} + \alpha_i f(\bar{x})$, $\forall i = 1, 2, ..., n$. Cộng theo vế $n$ BĐT đó ta được

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \ge f'(\bar{x}) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - f'(\bar{x})\bar{x} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + f(\bar{x}) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Bởi vì $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ và $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ nên ta có

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \ge f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)$ đó là đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

b) Chứng minh tương tự.

***Trường hợp đặc biệt.*** Nếu $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ thì BĐT (1) trở thành

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \ge f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right). \square$$

**Bài toán 3 (BĐT Bernoulli).** *Cho $x > -1$ và số thực $\alpha$. Chứng minh rằng*

*a) $(1+x)^\alpha \ge 1 + \alpha x$, $\forall \alpha \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$;*

*b) $(1+x)^\alpha \le 1 + \alpha x$, $\forall \alpha \in (0;1)$.*

***Lời giải.*** Xét hàm số $f(x) = (1+x)^\alpha$.

Ta có $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $(0 ; 1)$ có PT là $y = \alpha x + 1$.

a) Nếu $\alpha \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$ thì $f''(x) > 0, \forall x > -1$, do đó đồ thị hàm số lõm trên khoảng $(-1;+\infty)$. Suy ra $(1+x)^\alpha \ge \alpha x + 1, \forall x > -1$.

b) Nếu $0 < \alpha < 1$ thì $f''(x) < 0, \forall x > -1$, do đó đồ thị hàm số lồi trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Suy ra $(1+x)^\alpha \le \alpha x + 1, \forall x > -1$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$ hoặc $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$. □

**Bài toán 4 (T7/374).** *Cho các số dương $a, b, c$ thoả mãn $4(a+b+c) - 9 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$S = \left(a + \sqrt{a^2+1}\right)^b \left(b + \sqrt{b^2+1}\right)^c \left(c + \sqrt{c^2+1}\right)^a$$

***Lời giải.*** Ta có

$$\ln S = b\ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right) + c\ln\left(b + \sqrt{b^2+1}\right) + a\ln\left(c + \sqrt{c^2+1}\right).$$

Xét hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ với $x > 0$ (1)

Dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi $a = b = c = \frac{3}{4}$. Vì vậy ta sẽ so sánh vị trí của đồ thị hàm số trên với tiếp tuyến của nó tại điểm $\left(\frac{3}{4}; \ln 2\right)$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ nên $f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{5}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại điểm $\left(\frac{3}{4}; \ln 2\right)$ có PT $y = \frac{4}{5}x + \ln 2 - \frac{3}{5}$.

Lại vì $f''(x) = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0, \forall x > 0$, nên đồ thị hàm số (1) lồi trên khoảng $(0;+\infty)$.

Từ đó ta có

$$\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \le \frac{4}{5}x + \ln 2 - \frac{3}{5},\ \forall x > 0.$$

Áp dụng BĐT này cho số dương $a$, ta được

$$\ln(a+\sqrt{a^2+1}) \le \frac{4}{5}a + \ln 2 - \frac{3}{5}.$$

Nhân hai vế với $b > 0$, suy ra

$$b\ln(a+\sqrt{a^2+1}) \le \frac{4}{5}ab + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)b.$$

Tương tự

$$c\ln(b+\sqrt{b^2+1}) \le \frac{4}{5}bc + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)c;$$

$$a\ln(c+\sqrt{c^2+1}) \le \frac{4}{5}ca + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)a.$$

Cộng theo vế ba BĐT này ta được

$$\ln S \le \frac{4}{5}(ab+bc+ca) + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)(a+b+c).$$

Sử dụng BĐT $ab+bc+ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2$ và giả thiết $a+b+c=\frac{9}{4}$, rút gọn ta thu được

$$\ln S \le \frac{9}{4}\ln 2.$$

Từ đó $S \le 4\sqrt[4]{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{3}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $S$ là $4\sqrt[4]{2}$. □

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn $ABC$ ta có bất đẳng thức

$$2(\sin A+\sin B+\sin C)+(\tan A+\tan B+\tan C) \ge 6\sqrt{3}.$$

**2.** Cho $x, y, z$ là các số dương thoả mãn

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ x\ge 5;\ x+y\ge 8. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $xyz \le 15$.

**3. (JMO 1997)** Cho $a, b, c$ là những số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \ge \frac{3}{5}.$$

**4.** Chứng minh rằng với mọi tam giác $ABC$ và số $a \ge 2$ ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{\sin A}{a+\cos A}+\frac{\sin B}{a+\cos B}+\frac{\sin C}{a+\cos C} \le \frac{3\sqrt{3}}{2a+1}.$$

**5. (USAMO 2003).** Cho $a, b, c$ là các số dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8.$$

## Lễ phát động cuộc thi truyện ngắn, bút kí, phóng sự về ngành Giáo dục

Chiều ngày 24/3/2009 vừa qua, tại Hội trường lớn Bộ Giáo dục và Đào tạo đã diễn ra buổi lễ phát động cuộc thi truyện ngắn, bút kí, phóng sự về ngành Giáo dục do Bộ Giáo dục và đào tạo, Hội Nhà văn Việt Nam, Hội Nhà báo Việt Nam, Công đoàn Giáo dục Việt Nam và Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đồng tổ chức. Tham dự buổi lễ có Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo Phạm Vũ Luận, Tổng biên tập báo điện tử Đảng Cộng sản Việt Nam Đào Duy Quát, Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam Ngô Trần Ái và đông đảo các nhà báo, nhà giáo, nhà văn trên cả nước. Nội dung của Cuộc thi viết về sự nghiệp đổi mới của ngành Giáo dục mà nhân vật trung tâm là nhà giáo, nhà trường, học sinh, sinh viên ; biểu dương kịp thời những điển hình tốt trong phong trào thi đua Hai tốt (Dạy tốt - Học tốt), trong cuộc vận động "Mỗi thầy cô giáo là một tấm gương đạo đức, tự học và sáng tạo" đồng thời phản ánh những mặt còn tồn tại với ý thức xây dựng và nêu hướng giải quyết. Đây là một trong những sự kiện lớn về văn hóa và xã hội được nhiều người trong và ngoài ngành Giáo dục quan tâm.

**PV**


## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/382. (Lớp 6)** Hãy so sánh tổng gồm 2010 số hạng

$$\frac{1}{2009}+\frac{2}{2009^2}+\frac{3}{2009^3}+...+\frac{2009}{2009^{2009}}+\frac{2010}{2009^{2010}}$$

với $\frac{2009}{2008^2}$.

VŨ ANH NAM
*(GV THCS Từ Liêm, Lâm Hà, Lâm Đồng)*

**Bài T2/382. (Lớp 7)** Tìm một nghiệm của đa thức $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Biết rằng đa thức đó có nghiệm và $a+2b+4c=-\frac{1}{2}$.

PHAN MẠNH HÀ
*(GV THPT Phan Thúc Trực, Yên Thành, Nghệ An)*

**Bài T3/382.** Xét các số thực không âm thay đổi $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9$ có tổng bằng 1. Đặt $S_k=a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}$ $(k=1,2,...,6)$. Gọi $M=\max\{S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6\}$. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của $M$.

DƯƠNG CHÂU DINH
*(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)*

**Bài T4/382.** Cho $m$, $n$, $a$, $b$, $c$ là các số thực thỏa mãn các đẳng thức

$$m^{1000}+n^{1000}=a\,;\ m^{2000}+n^{2000}=\frac{2b}{3};$$

$$m^{5000}+n^{5000}=\frac{c}{36}.$$

Tìm hệ thức giữa $a$, $b$, $c$ không phụ thuộc vào $m$, $n$.

LƯƠNG VĂN BÁ
*(GV THCS Nghĩa Phương, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)*

**Bài T5/382.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ với đường cao $AH$. Trên nửa mặt phẳng bờ $BC$ có chứa điểm $A$ lấy điểm $D$ sao cho $DB=DC$ $=\frac{AB}{\sqrt{2}}$. Chứng minh rằng $BD$, $DH$ và $HA$ là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

THÁI NHẬT PHƯỢNG
*(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)*

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/382.** Tìm giá trị lớn nhất của $x^2+y^2$ trong đó $x$, $y$ là hai số nguyên thuộc $[-2009\,;\,2009]$ và thỏa mãn điều kiện

$$(x^2-2xy-y^2)^2=4.$$

NGUYỄN NGỌC TIẾN
*(Sở GD-ĐT Bình Thuận)*

**Bài T7/382.** Cho đa thức với hệ số thực $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ và $Q(x)=x^2+x+2009$.

Biết rằng đa thức $P(x)$ có $n$ nghiệm thực phân biệt và đa thức $P(Q(x))$ không có nghiệm thực. Chứng minh rằng $P(2009)>\frac{1}{4^n}$.

LÊ XUÂN ĐẠI
*(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)*

**Bài T8/382.** Cho lục giác đều $ABCDEF$. Gọi $G$ là trung điểm của $BF$. Lấy điểm $I$ trên cạnh $BC$ sao cho $BI=BG$, điểm $H$ trên đoạn $IG$ sao cho $\widehat{CDH}=45^\circ$, điểm $K$ trên cạnh $EF$ sao cho $\widehat{DKE}=45^\circ$. Chứng minh rằng tam giác $DHK$ là tam giác đều.

PHẠM HUY THÔNG
*(Hà Nội)*

## CÁC ĐỀ VẬT LÍ

**Bài L1/382.** Một đoạn mạch xoay chiều $ABC$ chứa hai linh kiện: tụ điện $C$ và cuộn cảm có độ tự cảm $L$, điện trở thuần $r$.


Cho dòng điện xoay chiều tần số $f=1000$Hz đi qua thì đo được $U_{AB}=2$V, $U_{BC}=\sqrt{3}$V,

*(Xem tiếp trang 27)*

# CUỘC THI GIẢI TOÁN

# KỈ NIỆM 45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

## THE M&Y 45th ANNIVERSARY CONTEST

**Bài T3/THCS.** Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{x^3}{3-4x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}.$$

PHẠM XUÂN THI
*(Trường Sĩ quan Lục quân 2, Long Thành, Đồng Nai)*

**Bài T4/THCS.** Cho hai đường tròn $(O_1)$ và $(O_2)$ cắt nhau tại $M$, $N$. Giả sử $AB$ là tiếp tuyến chung của $(O_1)$ và $(O_2)$ gần điểm $M$ với $A \in (O_1)$, $B \in (O_2)$. Lấy điểm $C$ nằm trên $(O_1)$ và nằm trong $(O_2)$, điểm $D$ nằm trên $(O_2)$ và nằm trong $(O_1)$. $AC$ và $BD$ cắt nhau tại $K$. Chứng minh rằng

Nếu $CD//AB$ thì $\widehat{KMC}=\widehat{KMD}$.

NGUYỄN THỌ TÙNG
*(Hà Nội)*

**Bài T3/THPT.** Cho tam giác $ABC$ có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác đó; $G_1$, $G_2$, $G_3$ theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của $G$ lên $BC$, $CA$, $AB$; $R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Chứng minh hệ thức

$$\frac{S_{G_1G_2G_3}}{S_{ABC}}=\frac{a^2+b^2+c^2}{36R^2}.$$

HỒ QUANG VINH
*(Hà Nội)*

**Bài T4/THPT.** Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy)f(yz)f(zx)f(x+y)f(y+z)f(z+x)=2009$$

với mọi $x$, $y$, $z$ dương.

TẠ HOÀNG THÔNG
*(GV THPT Thăng Long, TP. Hồ Chí Minh)*

**T3/Junior.** Solve for $x$

$$\sqrt{\frac{x^3}{3-4x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}.$$

**T4/Junior.** Two circles $(O_1)$ and $(O_2)$ intersect at $M$ and $N$. $AB$ is the common tangent to $(O_1)$ and $(O_2)$ which is closer to $M$ than $N$, and with $A\in(O_1)$, $B\in(O_2)$. Choose a point $C$ on $(O_1)$ which lies inside $(O_2)$, choose $D$ on $(O_2)$ which lies inside $(O_1)$. $AC$ and $BD$ intersects at $K$. Prove that if $CD//AB$ then $\widehat{KMC}=\widehat{KMD}$.

**T3/Senior.** In a triangle $ABC$, let $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Let $G$ be its centroid, $R$ is its circumradius and $G_1$, $G_2$, and $G_3$ are the feet of the altitudes from $G$ onto $BC$, $CA$ and $AB$ respectively. Prove the identity

$$\frac{S_{G_1G_2G_3}}{S_{ABC}}=\frac{a^2+b^2+c^2}{36R^2}.$$

**T4/Senior.** Determine all functions $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ such that

$$f(xy)f(yz)f(zx)f(x+y)f(y+z)f(z+x)=2009$$

for all positive numbers $x$, $y$, $z$.

Translated by LE MINH HA


**★Bài T1/378.** *Tìm số tự nhiên a sao cho a + 593 và a – 159 đều là số chính phương.*

***Lời giải.*** Giả sử $a + 593 = m^2$ và $a - 159 = n^2$, trong đó $m$, $n$ đều là số tự nhiên và $m > n$.

Từ đó $m^2 - n^2 = 752$ hay
$(m - n)(m + n) = 1.752 = 2.376 = 4.188$
$= 8.94 = 16.47$ (*)

Do $(m - n) + (m + n) = 2m$ là số chẵn nên hai số $m - n$ và $m + n$ có cùng tính chẵn lẻ; vì vậy xét (*) thì chỉ có ba trường hợp sau xảy ra.

1) $m - n = 2$, $m + n = 376$, suy ra $m = 189$, $n = 187$, lúc đó $a + 593 = 189^2$ và $a - 159 = 187^2$, với $a = 35128$.

2) $m - n = 4$, $m + n = 188$, suy ra $m = 96$, $n = 92$, lúc đó $a + 593 = 96^2$ và $a - 159 = 92^2$ với $a = 8623$.

3) $m - n = 8$, $m + n = 43$, suy ra $m = 51$, $n = 43$, lúc đó $a + 593 = 51^2$ và $a - 159 = 43^2$ với $a = 2008$.

Bài toán có ba nghiệm $a$ là 35128; 8623; 2008. ❐

**Nhận xét.** 1) Một số bạn không xét tính chẵn lẻ của $m - n$ và $m + n$ nên bài giải dài hơn.

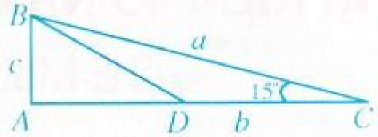
2) Các bạn có lời giải tốt là:
**Phú Thọ:** *Hoàng Hải Đăng, Bùi Minh Phương, Lê Thị Việt Hà, Đinh Xuân Việt, Phạm Thị Hồng Duyên,* 6A1, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên, *Phạm Thị Vân Anh, Nguyễn Thành Công,* 6A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Phượng,* 6A, THCS Yên Phong, *Khúc Thị Vân,* 6B, THCS Đào Viên, Quế Võ; **Hà Nội:** *Nguyễn Thị Ngọc Hà,* 6A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức; **Hòa Bình:** *Nguyễn Thị Phương Thảo,* 57 Hữu Nghị, TP. Hòa Bình; **Nghệ An:** *Đặng Quang Minh Triết,* 6C, *Phan Hoàng Thanh Tùng,* 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Dương Hoài Nam,* 6/1, THCS Mỹ Châu, Lộc Hà.

VIỆT HẢI

**★Bài T2/378.** *Cho tam giác ABC vuông tại A với* $\widehat{ACB} = 15°$. *Đặt* $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. *Chứng minh rằng* $a^2 = 4bc$.

***Lời giải***

*Cách 1.* Trên cạnh $AC$ lấy điểm $D$ sao cho $\widehat{CBD} = 15°$ (h. 1). Khi đó $\widehat{ABD} = 60°$. Tam giác $ABD$ vuông tại $A$ và có $\widehat{ABD} = 60°$ nên $BD = 2AB = 2c$.



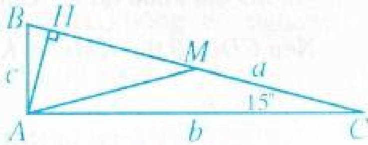

*Hình 1*

Sử dụng định lí Pythagore trong tam giác $ABD$ tính được $AD = c\sqrt{3}$. Từ đó
$AC = DC + AD \Rightarrow b = 2c + c\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})c$

Sử dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông $ABC$ ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 c^2 + c^2$$
$$= 4\left(2+\sqrt{3}\right)c^2 = 4bc \text{ (đpcm).}$$

*Cách 2.* Kẻ đường cao $AH$ của tam giác $ABC$ ($AH = h$). Gọi $M$ là trung điểm của $BC$ (h .2).




*Hình 2*

Theo tính chất của tam giác vuông ta có $\Delta AMC$ cân tại $M$ nên $\widehat{MAC} = \widehat{MCA} = 15°$ và $\widehat{AMH} = 2.\widehat{ACM} = 30°$.

Tam giác $AHM$ vuông tại $H$ và có $\widehat{AMH} = 30°$ suy ra $AH = h = \dfrac{1}{2}AM = \dfrac{1}{2}MC = \dfrac{a}{4}$

$\Rightarrow a^2 = 4ah$ (1)

Mặt khác, ta có $2S_{ABC} = bc = ah$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^2 = 4bc$. ❐

**Nhận xét.** Đa số các bạn tham gia gửi bài về toà soạn đều giải theo hai cách trên. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Quách Minh Hằng,* 6A, THCS Gia Cẩm, Việt Trì; *Vũ Tuấn Linh,* 7A1, THCS Lâm Thao; **Hải Dương:** *Nguyễn Văn Giang,* 7C, THCS Ngũ Phúc, Kim Thành; **Hà Nội:** *Nguyễn Hoàng Nam,* 7C, THCS Thạch Thất; **Bắc Ninh:** *Hoàng Minh Nguyệt,* 7C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Nam Định:** *Nguyễn Xuân Trường,* 7A, THCS Lý Tự Trọng; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Công Thịnh*, 7A, THCS Hồng Lộc, Lộc Hà; *Trần Thị Như Quỳnh*, 7C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Nghệ An:** *Nguyễn Hoàng Tâm*, 7B, THCS Diễn Xuân, Diễn Châu; *Nguyễn Lê Quỳnh Trâm*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Vũ Văn Tuệ, Hoàng Danh Thắng*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Quảng Trị:** *Dương Như Bảo Lộc*, 7C, THCS Trần Hưng Đạo, TX Đông Hà; *Nguyễn Kim, Nguyễn Anh Thư*, 7A, THCS Phan Đình Phùng; **Quảng Ngãi:** *Huỳnh Thị Thanh Lan, Nguyễn Bảo Trâm*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

NGUYỄN THANH HỒNG

**★Bài T3/378.** *Tìm tất cả các số nguyên x, y, z, t thỏa mãn điều kiện*

$$x^{2008}+y^{2008}+z^{2008}=2007t^{2008} \qquad (1)$$

*Lời giải*

*Nhận xét.* 1) Nếu $n$ là số nguyên chẵn thì $n^4 \vdots 8$.

2) Nếu $n$ là số nguyên lẻ thì $n = 2k + 1$, $k\in\mathbb{Z}$, nên $n^2 = 4k(k + 1) + 1$ sẽ chia cho 8 dư 1. Suy ra $n^4$ chia cho 8 dư 1.

Giả sử (1) có nghiệm nguyên $(x_0;y_0;z_0;t_0)$. Khi đó ta có

$$x_0^{2008}+y_0^{2008}+z_0^{2008}+t_0^{2008}=2008.t_0^{2008} \qquad (2)$$

Vì $2008t_0^{2008}$ là số chẵn nên trong bốn số $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ không thể có một hoặc ba số lẻ. Còn nếu trong chúng có hai hoặc bốn số lẻ thì VT(2) chia 8 dư 2 hoặc 4, trong khi VP(2) chia hết cho 8. Trường hợp này cũng không xảy ra. Vậy cả bốn số $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ đều là số chẵn.

Đặt $x_0=2x_1$, $y_0=2y_1$, $z_0=2z_1$, $t_0=2t_1$ với $x_1$, $y_1$, $z_1$, $t_1$ là các số nguyên. Thay vào (2) và chia cả hai vế cho $2^{2008}$, ta được

$$x_1^{2008}+y_1^{2008}+z_1^{2008}+t_1^{2008}=2008t_1^{2008}.$$

Do đó $(x_1;y_1;z_1;t_1)$ cũng là nghiệm của (1).

Bằng quy nạp, ta dễ chứng minh được $\left(\frac{x_0}{2^n};\frac{y_0}{2^n};\frac{z_0}{2^n};\frac{t_0}{2^n}\right)$ là nghiệm của (1) với mọi $n\in\mathbb{N}$. Điều này chỉ xảy ra khi $(x_0;y_0;z_0;t_0) = (0;0;0;0)$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $(x;y;z;t)$ là $(0;0;0;0)$. ❒

**Nhận xét.** Đa số các bạn đều giải theo cách trên (mặc dù cách thể hiện có khác nhau). Các bạn có lời giải tốt là:

**Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Dũng*, 7A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Phú Thọ:** *Vũ Thị Mai*, 6A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Lê Văn Tú, Phạm Mỹ Linh*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Thắng, Nguyễn Văn Hoàng*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Ánh*, 9I, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị.

TRẦN HỮU NAM

**★Bài T4/378.** *Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{4}{a^2+b^2}+1\right)\left(\frac{4}{b^2+c^2}+1\right)\left(\frac{4}{c^2+a^2}+1\right)\ge 3(a+b+c)^2 \ (*)$$

*trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.*

*Lời giải*

BĐT (*) $\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3-a^2}+1\right)\left(\frac{4}{3-b^2}+1\right)\left(\frac{4}{3-c^2}+1\right)$ $\ge 3(a+b+c)^2$.

Từ điều kiện đã cho suy ra $0<a^2<3$, $0<b^2<3$, $0<c^2<3$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có $\frac{4}{3-a^2}+(3-a^2)\ge 2\sqrt{\frac{4}{3-a^2}.(3-a^2)}=4$, nên $\frac{4}{3-a^2}+1\ge 2+a^2$.

Tương tự có $\frac{4}{3-b^2}\ge 2+b^2$; $\frac{4}{3-c^2}\ge 2+c^2$.

Do đó $\left(\frac{4}{a^2+b^2}+1\right)\left(\frac{4}{b^2+c^2}+1\right)\left(\frac{4}{c^2+a^2}+1\right)$

$\ge (a^2+2)(b^2+c)(c^2+2)$ (1)

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có

$$(a^2+2)(b^2+2)=(a^2+1)(b^2+1)+a^2+b^2+3$$

$$\ge (a+b)^2+\frac{1}{2}(a+b)^2+3=\frac{3}{2}((a+b)^2+2).$$

Suy ra

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge \frac{3}{2}((a+b)^2+2)(2+c^2)$$

$$\ge \frac{3}{2}\left(\sqrt{2}(a+b)+\sqrt{2}c\right)^2=3(a+b+c)^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra BĐT (*) đúng.

Đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2=1,\ b^2=1,\ c^2=1 \\ a,b,c>0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1. \ ❒$$

**Nhận xét.** 1) Hầu hết các bạn đều sử dụng BĐT Cauchy cho ba số dương để chứng tỏ vế trái của (*) không nhỏ hơn 27, còn vế phải của (*) không lớn hơn 27.

2) Một số bạn đã đưa ra nhận xét giả thiết bài toán không cần điều kiện $a$, $b$, $c$ là các số dương. Khi đó đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = c = -1$. Riêng bạn *Vũ Ngọc Cương*, $8^6$, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa** đã nêu bài toán tổng quát:

*"Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{4k}{3(a^2+b^2)}+1\right)\left(\frac{4k}{3(b^2+c^2)}+1\right)\left(\frac{4k}{3(c^2+a^2)}+1\right) \geq \frac{9}{k}(a+b+c)^2$$

*trong đó a, b, c thỏa mãn điều kiện* $a^2+b^2+c^2=k$ $(k>0)$"

3) Ngoài bạn *Cương*, các bạn sau đây có lời giải tốt:

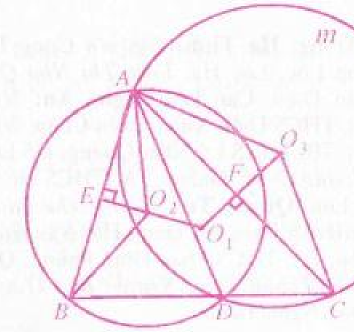
**Hà Nội:** *Doãn Minh Phúc*, 8A5, THCS Giảng Võ, *Lê Anh Vũ*, 9A, trường Hà Nội – Amsterdam, *Trần Quang Toàn*, 7A0, trường Lương Thế Vinh, *Lý Phụng Hoàng*, 9A1, THPT DL Nguyễn Siêu; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Dũng*, 7A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; *Trần Thị Ngọc*, 9B, THCS Từ Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Công Huân*, 9A1, THCS Yên Lạc, *Dương Thị Hạnh*, 8C, THCS Lập Thạch; **Nghệ An:** *Võ Duy Văn*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Ngọc Anh*, 7H, THCS Tam Hợp, Quỳnh Hợp, *Cao Xuân Bang*, *Vũ Hồng Ái*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Nguyễn Văn Hoàng*, *Nguyễn Văn Thắng*, 9B THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hóa:** *Lê Thiệu Giáp*, 9C, THCS Trần Mai Ninh; **Hà Tĩnh:** *Lê Thị Mến*, 8A, THCS Nguyễn Hằng Chi, Lộc Hà; **Nam Định:** *Nguyễn Xuân Trường*, 7A1, THCS Lý Tự Trọng, TP. Nam Định; **Thái Bình:** *Bùi Công Tiến*, 9C, THCS Việt Thuận, Vũ Thư; **Phú Thọ:** *Đặng Duy Linh*, 9B, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Bình Định:** *Nguyễn Danh Nhân*, 9A2, THCS Mỹ Cát, Phù Mỹ, *Lê Như Ngọc*, 9A1, THCS TTr. Bình Định, An Nhơn; **Đồng Nai:** *Trần Quang Sang*, 9/4, THCS Nguyễn Văn Trỗi, TX. Biên Hòa; **Bình Phước:** *Dương Tuấn Anh*, 8A3, THCS Tân Xuân; **Đà Nẵng:** *Đỗ Trần Tuấn Anh*, 9/5, THCS Nguyễn Khuyến; **Đăk Lăk:** *Phạm Trung Hiếu*, 9D1, THCS Trần Phú.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

**★Bài T5/378.** *Trên cạnh BC của tam giác nhọn ABC lấy điểm D khác các điểm B và C. Chứng minh rằng điểm A và tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD, ABC cùng nằm trên một đường tròn.*

***Lời giải.*** (xem hình vẽ) Gọi $O_1$, $O_2$, $O_3$ lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $ABC$, $ABD$ và $ACD$.

• Nếu $\widehat{ADB}=90^\circ$ thì $O_2$, $O_3$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $AC$. Khi đó $\widehat{AO_2O_1}=\widehat{AO_3O_1}=90^\circ$, suy ra tứ giác $AO_2O_1O_3$ nội tiếp.




• Bây giờ giả sử $\widehat{ADB}<90^\circ$. Trong trường hợp này ta có $D$ và $O_2$ nằm cùng phía đối với dây cung $AB$ (trong đường tròn $(O_2)$); $D$ và $O_3$ nằm khác phía đối với dây cung $AC$ (trong đường tròn $(O_3)$). Gọi $E$ là giao điểm của $AB$ và $O_1O_2$; $F$ là giao điểm của $AC$ và $O_1O_3$. Ta có $O_1O_2$ là trung trực của đoạn $AB$ nên

$$\widehat{AO_2E}=\frac{1}{2}\widehat{AO_2B}=\widehat{ADB} \quad (1)$$

Còn $\widehat{AO_3O_1}=\frac{1}{2}\widehat{AO_3C}=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{ADC}$

$$=\frac{1}{2}(360^\circ-\text{sđ}\,\overset{\frown}{AmC})=180^\circ-\widehat{ADC}=\widehat{ADB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AO_2E}=\widehat{AO_3O_1}$, dẫn đến tứ giác $AO_2O_1O_3$ nội tiếp. Vậy bốn điểm $A$, $O_2$, $O_3$, $O_1$ cùng nằm trên một đường tròn. □

**Nhận xét.** 1) Bạn *Đặng Duy Hiển*, 9B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm, **Hà Nam** còn đề xuất bài toán: *Tìm vị trí của D trên BC để bán kính đường tròn* $(AO_2O_1O_3)$ *nhỏ nhất* (khi $\widehat{ADB}=90^\circ$). Một số bạn phát hiện được bài toán vẫn đúng khi $\Delta ABC$ vuông hoặc tù.

2) Ngoài bạn *Hiển*, các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Thái Nguyên:** *Phan Trần Minh Khuê*, 8D, THCS Nguyễn Du, TP. Thái Nguyên; **Vĩnh Phúc:** *Kim Văn Cương*, 9C, THCS Vĩnh Tường, *Phan Mỹ Linh*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Khúc Hữu Huy*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, *Vũ Phương Thu*, 7A, THCS Từ Sơn; **Hà Nội:** *Lý Phụng Hoàng*, 9A1, THPT DL Nguyễn Siêu, Cầu Giấy; **Hà Nam:** *Nguyễn Chí Linh*, 9A, THCS Liêm Chính, TP. Phủ Lý; **Thái Bình:** *Bùi Công Tiến*, 9C, THCS Việt Thuận, Vũ Thư; **Thanh Hóa:** *Tào Lê Minh*, 70 Tống Duy Tân, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Trần Đại Dương*, 9A, THCS Diễn Hùng, Diễn Châu, *Hoàng Danh Thắng*, 7A, *Đặng Trung Anh*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Đăk Lăk:** *Phạm Trung Hiếu*, 9D1, THCS Trần Phú; **Quảng Ngãi:** *Văn Thị Hoàng Duyên*, *Hồ Tấn Vũ*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Phú Yên:** *Thái Bảo Lộc*, 6E, THCS Nguyễn Tất Thành, Tây Hòa; **Khánh Hòa:** *Vũ Ngọc Cương*, $8^6$, THCS Nguyễn Văn Trỗi; **Quảng Trị:** *Nguyễn Kim*, 7A, THCS Phan Đình Phùng, Đông Hà;

**Bình Định:** *Nguyễn Danh Nhân*, 9A2, THCS Mỹ Cát, Phù Mỹ.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

**★Bài T6/378.** *Tìm hệ số của $x^2$ sau khi khai triển biểu thức*

$$((...((x-2)^2-2)^2-...-2)^2-2)^2$$

*biết rằng trong biểu thức trên có 1004 số 2 và 2008 dấu ngoặc.*

***Lời giải.*** Với mỗi số $k$ nguyên dương, ta kí hiệu $Q_k(x)=((...((x-2)^2-2)^2-...-2)^2-2)^2$ trong đó có $k$ số 2 và $2k$ dấu ngoặc.

Dễ dàng thấy rằng $Q_k(0)=4$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$ và giả sử sau khi khai triển, ta được

$$Q_k(x)=P_k(x)+A_kx^2+B_kx+4 \quad (1)$$

trong đó $P_k(x)$ là đa thức gồm các số hạng có bậc lớn hơn 2. Với $k>1$, ta có

$$Q_k(x)=\left(Q_{k-1}(x)-2\right)^2=\left(P_{k-1}(x)+A_{k-1}x^2+B_{k-1}x+2\right)^2$$
$$=P_k(x)+\left(4A_{k-1}+B_{k-1}^2\right)x^2+4B_{k-1}x+4 \quad (2)$$

So sánh các vế phải của (1) và (2), ta thấy

$$\begin{cases}A_k=B_{k-1}^2+4A_{k-1}\\ B_k=4B_{k-1}.\end{cases}$$

Mặt khác

$$Q_1(x)=(x-2)^2=x^2-4x+4\Rightarrow\begin{cases}A_1=1\\ B_1=-4.\end{cases}$$

Do đó $B_2=-4^2; B_3=-4^3;...;B_{k-1}=-4^{k-1}$.

Ta có

$$A_k=B_{k-1}^2+4A_{k-1}=B_{k-1}^2+4\left(4A_{k-2}+B_{k-2}^2\right)$$
$$=B_{k-1}^2+4B_{k-2}^2+4^2\left(4A_{k-3}+B_{k-3}^2\right)=...$$
$$=B_{k-1}^2+4B_{k-2}^2+...+4^{k-2}B_1^2+4^{k-1}A_1$$

Thay $A_1=1$, $B_1^2=4^2$, $B_2^2=4^4$, ..., $B_{k-1}^2=4^{2(k-1)}$, ta được

$$A_k=4^{2k-2}+4^{2k-3}+...+4^k+4^{k-1}=\frac{4^{2k-1}-4^{k-1}}{3}.$$

Thay $k=1004$, ta được hệ số của $x^2$ phải tìm là $A_{1004}=\dfrac{4^{2007}-4^{1003}}{3}$. □

**Nhận xét.** 1) Điều mấu chốt của bài toán là đưa ra được công thức truy hồi để tính $A_k$. Tuy nhiên có rất nhiều bạn đã nhầm khi thay $k=2008$ trong bài toán trên.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

**Phú Thọ:** *Hoàng Tuấn Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân, Nguyễn Ngọc Trung*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Tạ Minh Hoằng*, 10A1, THPT Khoái Châu; **Thanh Hoá:** *La Hồng Quân*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Quang Tài Anh Phú, Nguyễn Văn Minh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** *Phạm Hồng Lĩnh*: 10A1, THPT Mai Thúc Loan, Lộc Hà; **Quảng Ngãi:** *Lê Nguyên Khánh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** *Nguyễn Đồng Tiến, Trần Việt Nghi*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Quy Nhơn; **Phú Yên:** *Lê Cao Thăng*, 10A1, THPT Phan Chu Trinh, Sông Cầu; **Bến Tre:** *Lê Phúc Lữ*, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Hậu Giang:** *Phan Thanh Bình*, 11 Lý Hoá, THPT chuyên Vị Thanh, TX Vị Thanh; **Cà Mau:** *Nguyễn Phạm Tuấn Anh*, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

NGUYỄN ANH DŨNG

**★Bài T7/378.** *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{\sqrt{a_1+2008}+\sqrt{a_2+2008}+...+\sqrt{a_n+2008}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}}$$

*trong đó $n$ là số nguyên dương cho trước và $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a_1+a_2+...+a_n=n$.*

***Lời giải.*** Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có

$$(\underbrace{1+1+...+1}_{2009\text{ số }1})(a_i+\underbrace{1+1+...+1}_{2008\text{ số }1})$$
$$\geq(\sqrt{a_i}+\underbrace{1+1+...+1}_{2008\text{ số }1})^2,\text{ với mọi } i=1,2,...,n.$$

Do đó $2009.(a_i+2008)\geq(\sqrt{a_i}+2008)^2$.

Suy ra $\sqrt{a_i+2008}\geq\dfrac{1}{\sqrt{2009}}.(\sqrt{a_i}+2008)$.

Bởi vậy

$$\sqrt{a_1+2008}+\sqrt{a_2+2008}+...+\sqrt{a_n+2008}$$
$$\geq\frac{1}{\sqrt{2009}}.(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}+2008.n) \quad (1)$$

Lại theo BĐT Bunyakovsky

$$(\underbrace{1+1+...+1}_{n\text{ số }1})(a_1+a_2+...+a_n)$$
$$\geq(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n})^2.$$

Suy ra $n^2\geq(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n})^2$.

Bởi vậy $n\geq\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$\sqrt{a_1+2008}+\sqrt{a_2+2008}+...+\sqrt{a_n+2008}$$
$$\geq\frac{2009.(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n})}{\sqrt{2009}}$$
$$=\sqrt{2009}(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}).$$

Do đó

$$P = \frac{\sqrt{a_1 + 2008} + \sqrt{a_2 + 2008} + ... + \sqrt{a_n + 2008}}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_n}}$$

$\geq \sqrt{2009}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P$ bằng $\sqrt{2009}$. ❐

**Nhận xét.** Các bạn học sinh THCS sau có lời giải tốt:

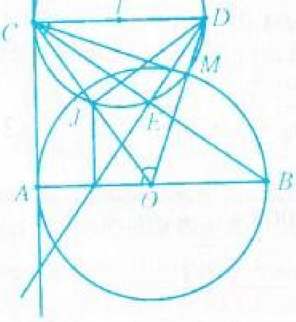
**Phú Thọ:** *Đặng Duy Linh*, 9E, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Hà Nội:** *Phạm Huy Hoàng*, 8A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Vĩnh Phúc:** *Hà Quang Nhận*, 8B, THCS Như Thụy, Lập Thạch, *Lê Văn Tú*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Cao Xuân Bang, Hoàng Trọng Đường*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Hoàng Danh Thắng*, 7A, *Hồ Khánh Duy, Võ Duy Văn*, 8A, *Phạm Văn Quân*, 9C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Văn Hoàng, Nguyễn Văn Thắng*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Ánh*, 9I, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị; **Bình Định:** *Nguyễn Danh Nhân*, 9A2, THCS Mỹ Cát, Phù Mỹ; **TP. Hồ Chí Minh:** *Trương Diệu Toàn*, 9/2, THCS Chu Văn An, Q.11.

NGUYỄN MINH ĐỨC

**★Bài T8/378.** *Cho đường tròn (O) tâm O có đường kính AB cố định. Một đường thẳng Δ tiếp xúc với (O) tại A. Gọi M là điểm thuộc đường tròn (O) và M khác với các điểm A, B. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M cắt đường thẳng Δ tại C. Xét đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại C. Giả sử CD là đường kính của đường tròn (I). Chứng minh rằng:*

*1) Tam giác DOC là tam giác cân;*

*2) Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường tròn (O).*




***Lời giải.*** 1) Vì $CM$ là tiếp tuyến của $(O)$ và $M \in (I)$ nên $\widehat{CMD} = \widehat{CMO} = 90^0$, do đó $D, M, O$ thẳng hàng.

Vì $CA$ và $CM$ là tiếp tuyến của $(O)$ nên $\widehat{MOC} = \widehat{AOC}$ mà $\widehat{AOC} = \widehat{DCO}$ (do $AB // CD$), suy ra $\widehat{DOC} = \widehat{DCO}$ hay tam giác $DOC$ cân tại $D$.

2) *Cách 1.* (Theo bạn *Nguyễn Thông Thắng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**).

Gọi $F$ là trung điểm của $AO$, còn $E$ là giao điểm của $DF$ và $BC$. Ta sẽ chứng minh $DF \perp BC$.

Gọi $J$ là trung điểm của $CO$ thì $DJ \perp CO$ và $JF \perp AO$, suy ra $\widehat{DJF} = \widehat{COB}$ (1)

Mặt khác, dễ thấy $\Delta DJO \backsim \Delta JFO$ (g.g), suy ra

$$\frac{DJ}{JF} = \frac{JO}{FO} = \frac{CO}{AO} = \frac{CO}{OB} \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta có $\Delta DJF \backsim \Delta COB$. Từ đó $\widehat{JDE} = \widehat{JCE}$ suy ra tứ giác $CDEJ$ nội tiếp đường tròn $(I)$ nên $\widehat{CED} = 90^o$ hay $DF \perp BC$.

Vậy khi $M$ di động, đường thẳng qua $D$ vuông góc với $BC$ luôn đi qua điểm $F$ cố định, $F$ là trung điểm của $OA$.

**Trường hợp đặc biệt:* Nếu $M$ là điểm chính giữa của cung $\overparen{AB}$, khi đó $D \equiv M$ và ta cũng suy ra các kết quả trên.

*Cách 2.* (theo bạn *Tạ Minh Hoàng*, 10A1, THPT Khoái Châu, **Hưng Yên**)

Với $F$ là trung điểm của $AO$ và $AB = 2R$ thì

$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{CB} = \left(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OF}\right)\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)$

$= \overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OF}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DO}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OF}.\overrightarrow{AB}$

$= CA^2 + 2\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OA} - R^2$

$= CA^2 - R^2 + \left(OD^2 + OA^2 - AD^2\right)$

$= CA^2 - R^2 + OD^2 + R^2 - AC^2 - CD^2$

$= OD^2 - CD^2 = 0$ (vì tam giác $DOC$ cân).

Vậy $DF \perp BC$ hay đường thẳng qua $D$ vuông góc với $BC$ luôn đi qua điểm cố định $F$. ❐

**Nhận xét.** 1) Ngoài hai cách giải trên, bài toán còn có nhiều cách giải khác : sử dụng các đường phụ, điểm phụ, phối hợp giữa phương pháp vectơ và phương pháp tọa độ, phương pháp vectơ và phương pháp hình học thông thường. Đặc biệt có một lời giải khá ngắn gọn là lấy điểm $G$ đối xứng với $O$ qua $D$ và chứng minh $GD \perp BC$ (lưu ý lúc này $\Delta GCO$ vuông tại $O$).

2) Các bạn có lời giải tốt hơn cả là:

**Đăk Lăk:** *Phạm Trung Hiếu*, 9D1, THCS Trần Phú; **Yên Bái:** *Bùi Bích Phượng*, 10 Toán, THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bắc Ninh:** *Trần Anh Tuấn*, 11A1, THPT Thuận Thành, *Nguyễn Tuấn Linh*, 11 Toán, THPT Chuyên Bắc Ninh; **Bắc Giang:** *Nguyễn Hoàng Hiệp*, 12T, THPT Chuyên Bắc Giang; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân*, 10A1, THPT Chuyên Vĩnh Phúc, *Tạ Hữu Công*, 10A1, THPT Ngô Gia Tự. **Hà Nội:** *Trần Minh Vương*, 10A2 Toán, THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; *Nguyễn Quý Minh*, 10T1, Khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hà Nam:** *Nguyễn Đức Vinh*, 11 Toán, THPT Chuyên Hà Nam; **Hải Phòng:** *Phan Đức Minh*, 10A7, THPT Thái Phiên; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thị Thu Hiền, Ngọ Văn Dũng*, 10T, THPT Lam Sơn; **Nghệ An:** *Doãn Văn Hùng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; *Nguyễn Văn Hoàng, Nguyễn Văn Thắng*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Thế Anh*, 10A1, THPT Chuyên ĐH Vinh; **Hà Tĩnh:** *Phạm Hồng Lĩnh*, 10A1, THPT Mai Thúc Loan, *Hồ Phạm Thiều*, THPT Lê Hữu Trào 1, Hương Sơn; **Phú Yên:** *Võ Văn Huy*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong; *Lê Cao Thăng*, 10T, THPT Phan Chu Trinh; **Quảng Ngãi:** *Lê Nguyên Khánh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Khiết, *Đặng Đình Đường*, 9A, *Văn Thị Hoàng Duyên*, 8A, THCS Hành Phước; **Hậu Giang:** *Phan Thanh Bình*, 11LH, THPT Chuyên Vị Thanh. **Đà Nẵng:** *Nguyễn Tăng Thành*, THPT Chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** *Vũ Hữu Bình*, 10/4, THPT Nguyễn Đình Chiểu.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

**★Bài T9/378.** *Hỏi có tồn tại hay không dãy hữu hạn các số nguyên dương:*
$a_{2003} > a_{2002} > \ldots > a_2 > a_1$ *với* $a_1 = 2003$ *và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

*1) Bất kì số nguyên nào thuộc khoảng* $(2003; a_{2003})$ *và không thuộc dãy trên thì đều là hợp số.*

*2)* $A = \dfrac{2004}{a_1} + \dfrac{2004}{a_2} + \ldots + \dfrac{2004}{a_{2003}}$ *là số nguyên?*

***Lời giải.*** Giả sử tồn tại một dãy như vậy. Gọi $S = \{a_i,\ 1 \le i \le 2003\ /\ a_i$ là số nguyên tố$\}$. Vì $a_1 = 2003$ là số nguyên tố nên $S \ne \phi$. Giả sử $a_m$ là phần tử lớn nhất của $S$.

Ta chứng minh $a_k$ không chia hết cho $a_m$, với mọi $k = 1, 2, \ldots, 2003$, $k \ne m$ (1)

Thật vậy với $k < m$ thì $a_k < a_m$ nên khẳng định trên đúng.

Giả sử có số $a_k$ $(k > m)$ sao cho $a_k \vdots a_m$, khi đó $a_k \ge 2a_m$.

Theo *định lí Chebyshev* tồn tại số nguyên tố $q$ sao cho $a_m < q < 2a_m$. Vì $a_m$ là số nguyên tố lớn nhất của dãy nên $q$ không thuộc dãy. Lại có $a_1 < q < 2a_m \le a_k$ nên theo giả thiết của bài toán, $q$ là hợp số, ta có mâu thuẫn. Vậy khẳng định (1) được chứng minh.

Trở lại bài toán ta có

$$A - \frac{2004}{a_m} = \sum_{k \ne m} \frac{2004}{a_i} \Leftrightarrow \frac{Aa_m - 2004}{a_m} = \frac{M}{\prod\limits_{k \ne m} a_i}$$

(trong đó $M$ là số nguyên).

Vì $(Aa_m - 2004, a_m) = 1$, nên suy ra $\prod\limits_{k \ne m} a_i \vdots a_m$.

Vì $a_m$ là số nguyên tố nên tồn tại $k$ để $a_k \vdots a_m$. Mâu thuẫn với khẳng định (1). Thành thử không tồn tại dãy như vậy. ❐

**∢Nhận xét.** 1) Tất cả các bạn có lời giải đúng đều cần phải dùng tới định lí Chebyshev *"Giữa hai số nguyên dương n và 2n luôn có ít nhất một số nguyên tố"*. Định lí này có thể chứng minh được bằng phương pháp sơ cấp (tuy khá dài).

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Hà Nội:** *La Văn Thiện*, 11A1 Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** *Lê Văn Huỳnh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nghệ An:** *Quang Tài Anh Phú*, 10A1 K37, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Bắc Ninh:** *Trần Anh Tuấn*, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Bắc Giang:** *Nguyễn Hoàng Hiệp*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Đà Nẵng:** *Hoàng Bùi Khánh*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên – Huế:** *Lê Chí Tâm*, 11 Toán, THPT Quốc học Huế; **Bến Tre:** *Lê Phúc Lữ*, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Thanh Hóa:** *La Hồng Quân*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

**★Bài T10/378.** *Tìm tất cả các hàm số f, g, h liên tục và xác định trên* $\mathbb{R}$ *mà thỏa mãn* $f(x+y) = g(x) + h(y)$ *(1) với mọi số thực x, y.*

***Lời giải.*** (*Theo đa số các bạn*).

Trong (1) lần lượt cho $y=0$ và $x=0$ ta thu được

$$g(x) = f(x) - a, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ với } a = h(0) \quad (2)$$
$$h(y) = f(y) - b, \forall y \in \mathbb{R}, \text{ với } b = g(0) \quad (3)$$

Thay các giá trị từ (2) và (3) vào (1), ta được

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - (a+b)$$

với mọi số thực $x, y$ hay

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

với $\varphi(t) = f(t) - (a+b)$, (4)

Đây là phương trình hàm Cauchy đối với hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên (4) có nghiệm $\varphi(x) = cx$. Suy ra nghiệm của (1) có dạng

$$\begin{cases} f(x) = cx + a + b \\ g(x) = cx + b \\ h(x) = cx + a, \end{cases} \quad (5)$$

trong đó $a, b, c$ tùy ý.

Thử lại, ta thấy các hàm trong (5) thỏa mãn bài ra. ❐

**∢Nhận xét.** Đây là bài toán về phương trình hàm Pexider quen biết đã có trong cuốn sách của Christopher G.Small *"Functional Equations and How to Solve them"*, Springer 2007 (trang 39). Có rất nhiều các bạn giải bài này theo cách đã trình bày (cũng là cách giải trong cuốn sách kể trên) và đều có lời giải đúng.

NGUYỄN VĂN MẬU

★**Bài T11/378.** *Cho tam giác ABC với trực tâm H và đường tròn ngoại tiếp tâm O bán kính R. Chứng minh rằng*

$$3R-2OH \le HA+HB+HC \le 3R+OH.$$

***Lời giải.*** Gọi $O$, $G$, $H$ theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm và trực tâm của tam giác $ABC$.

Ta có kết quả quen thuộc $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}$ (1)

Từ (1) suy ra

• $OH=3OG<3R$ (vì $G$ nằm trong $(O)$) (2)

• $HA^2+HB^2+HC^2$

$=(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB})^2+(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC})^2$

$=3HO^2+OA^2+OB^2+OC^2+2\overrightarrow{HO}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$=3HO^2+3R^2+2\overrightarrow{HO}.3\overrightarrow{OG}$

$=3HO^2+3R^2+2\overrightarrow{HO}.\overrightarrow{OH}=HO^2+3R^2$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra

$(3R+OH)^2=9R^2+6R.OH+OH^2$

$\ge 9R^2+2OH^2+OH^2$

$=3(3R^2+OH^2)\ge 3(HA^2+HB^2+HC^2)$

$\ge (HA+HB+HC)^2$.

Suy ra $HA+HB+HC\le 3R+OH$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác $ABC$ đều.

Từ (2) suy ra trong ba số $HA$, $HB$, $HC$ có một số không nhỏ hơn $R$. Không mất tính tổng quát, giả sử $HA\ge R$.

Mặt khác $HB>OB-OH=R-OH$;

$HC>OC-OH=R-OH$.

Suy ra $HA+HB+HC\ge 3R-2OH$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác $ABC$ đều. Bài toán đã được chứng minh. □

**Nhận xét.** 1) Có khá nhiều bạn tham gia giải bài toán này, tuy nhiên không ít bạn giải sai. Sai lầm cơ bản của các bạn này là sử dụng đẳng thức sau (chỉ đúng với các tam giác nhọn):

$HA+HB+HC=2R(\cos A+\cos B+\cos C)$.

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

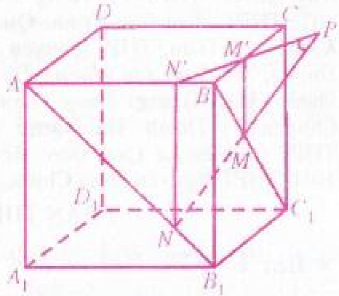
**Hà Nội:** *Đào Trọng Anh*, 11A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, Gia Lâm; **Thái Bình:** *Tạ Bá Trung*, 10A1, THPT Đông Thuỵ Anh, Thái Thuỵ; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Vĩnh Sang*, 12A1, THPT Sa Đéc, TX Sa Đéc; **Hậu Giang:** *Phan Thanh Bình*, 11 Lí Hoá, THPT chuyên Vị Thanh, TX Vị Thanh. **Vĩnh Long:** *Hồ Diên Anh Tuấn*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN MINH HÀ

★**Bài T12/378.** *Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Lấy điểm N trên đoạn thẳng $AB_1$ và điểm M trên đoạn thẳng $BC_1$ sao cho đường thẳng MN tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc $60^o$. Chứng minh rằng $MN\ge 2a(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

***Lời giải***

(Theo bạn *Nguyễn Hữu Tú*, 12 Toán 1, khối THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội**).




Giả sử $M'$ và $N'$ theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của $M$ và $N$ trên mặt phẳng $(ABCD)$, $P$ là giao điểm của các đường thẳng $MN$ và $M'N'$. Dễ thấy điểm $M'$ thuộc cạnh $BC$, điểm $N'$ thuộc cạnh $AB$. Từ giả thiết ta có $\widehat{MPM'}=60^o$.

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $MM'<NN'$. Ta có $MM'=BM'$, $NN'=AN'=a-BN'$. Khi đó

$MN.\sin 60^o=(PN-PM)\sin 60^o=NN'-MM'$

$=a-(BM'+BN')$ (1)

$MN.\cos 60^o=(PN-PM).\cos 60^o=PN'-PM'$

$=M'N'=\sqrt{BM'^2+BN'^2}$ (2)

Từ (1) và (2), áp dụng *bất đẳng thức Bunyakovsky* ta thu được

$MN(\sqrt{2}.\cos 60^o+\sin 60^o)$

$=\sqrt{2(BM'^2+BN'^2)}+a-(BM'+BN')$

$\ge (BM'+BN')+a-(BM'+BN')=a$.

Do đó $MN\ge 2a(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $BM'=BN'\Leftrightarrow BM=B_1N=BM'\sqrt{2}$, lúc này $MN.\cos 60^o=BN'\sqrt{2}$ và $MN.\sin 60^o=a-2BN'$, suy ra

$$BM'=BN'=\frac{a(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=\frac{a}{2+\sqrt{6}}.$$

Tóm lại dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$BM=B_1N=\frac{a}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.\ \square$$

**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn khái quát hóa bài toán T12/378 bằng cách thay giả thiết: *MN tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc α*, sau đó chứng minh bất đẳng thức $MN \geq \frac{a}{\sqrt{2}\cos\alpha+\sin\alpha}$ với cách giải tương tự như trên.

2) Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Ngoài bạn *Tú*, các bạn sau cũng có lời giải tốt, ngắn gọn:

**Hà Nội:** *Trần Nhật Tân*, 12A1 Toán, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, *Đào Trọng Anh*, 11A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, Long Biên, *Nguyễn Sơn Tùng*, 12A2, THPT Ngô Quyền, Châu Sơn, Ba Vì; **Vĩnh Phúc:** *Kim Đình Sơn*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** *Ninh Văn Quý*, 11A, THPT Kim Thành, *Lê Văn Huỳnh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP. Hải Dương; **Hà Nam:** *Trần Trung Kiên*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam; **Nghệ An:** *Nguyễn Bá Hữu Đức*, 11A1, khối THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn An Tịnh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Thừa Thiên – Huế:** *Lê Thanh Phúc*, 11 Toán, THPT Quốc học Huế, TP. Huế; **Đắk Lắk:** *Lê Quang Hiếu*, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **An Giang:** *Trần Thanh Phố*, 11A1, THPT Tân Châu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Bùi Văn Minh*, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

**★Bài L1/378.** *Một quả bóng đàn hồi rơi từ độ cao h = 2,0m so với mặt sàn nằm ngang. Sau mỗi va chạm với sàn bóng mất 19% cơ năng. Sau thời gian bao lâu thì bóng dừng lại? Trong thời gian đó bóng đã đi được quãng đường bằng bao nhiêu mét ?*

***Lời giải.*** (*Theo lời giải của một số bạn*).

Cơ năng ban đầu của quả bóng là $E_0 = mgh$. Theo đề bài, sau mỗi lần va chạm bóng mất 19% cơ năng, nghĩa là nó chỉ còn 81% cơ năng so với lúc ngay trước va chạm. Nếu gọi $E_i$ và $h_i$ là cơ năng và độ cao bóng đạt được sau lần va chạm thứ $i$, ta có $E_i = k^i.E_0$ ; $h_i = k^i.h$; (ở đây $k = 81\%$, $i \in \mathbb{N}$).

Thời gian bóng bay ngay từ sau va chạm thứ $i$ đến va chạm tiếp theo là $t_i = 2\sqrt{\frac{2h_i}{g}} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\sqrt{k^i}$.

Thời gian để bóng dừng là $t = t_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i$, trong đó $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ là thời gian bóng bắt đầu rơi đến va chạm lần thứ nhất với sàn, $n$ là số lần va chạm. Ta có

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{k^i}$$

$$= -\sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1+\sqrt{k}+\sqrt{k^2}+\ldots+\sqrt{k^n}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}}.\left(\frac{1-\sqrt{k^{n+1}}}{1-\sqrt{k}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1+\sqrt{k}-2\sqrt{k^{n+1}}}{1-\sqrt{k}}\right).$$

Do $\sqrt{k} < 1$ nên khi $n \to +\infty$ thì $\sqrt{k^{n+1}} \to 0$.

Suy ra $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right) \approx 12s$.

Quãng đường bóng đi được là

$$S = h + 2\sum_{i=1}^{n} h_i = h + 2h\sum_{i=1}^{n} k^i$$

$$= h + 2h\left(k + k^2 + \ldots + k^n\right)$$

$$= -h + 2h\left(1 + k + k^2 + \ldots + k^n\right)$$

$$= -h + 2h\left(\frac{1-k^{n+1}}{1-k}\right) = h\left(\frac{1+k-2k^{n+1}}{1-k}\right).$$

Do $\sqrt{k} < 1$ nên khi $n \to +\infty$ thì $k^{n+1} \to 0$.

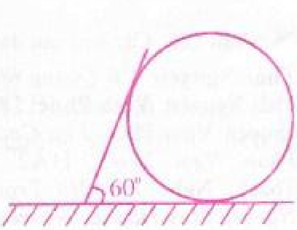
Suy ra $S = h\left(\frac{1+k}{1-k}\right) \approx 19,1m$. □

**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Thanh Hoá:** *Lê Thanh Minh*, 12C12, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hoá, *Mai Chí Đạt*, 11E, THPT Hà Trung; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Đông*, 11Lí, *Nguyễn Ngọc Duy*, 12Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Bắc Giang:** *Nguyễn Hoàng Hiệp*, 12Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Bắc Kạn:** *Ngô Việt Hùng*, 12Toán, THPT chuyên Bắc Kạn; **Vĩnh Phúc:** *Lê Đức Điệp*, 12A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nghệ An:** *Nguyễn Duy Mạnh*, 10A1, THPT Quỳnh Lưu I, *Nguyễn Bá Hữu Đức*, 11A1, Khối THPT chuyên, ĐH Vinh, *Nguyễn Văn Linh*, 12A3K35, *Hồ Trọng Hùng*, *Vũ Đình Hải*, 10A3 K37, THPT chuyên Phan Bội Châu.

NGUYỄN VĂN THUẬN

**★Bài L2/378.** *Một khối trụ đặt trên một mặt bàn ráp nằm ngang. Một tấm ván đặt tựa vào khối trụ và nghiêng so với mặt phẳng ngang một góc 60° (xem hình 1). Biết khối lượng và chiều dài của tấm*



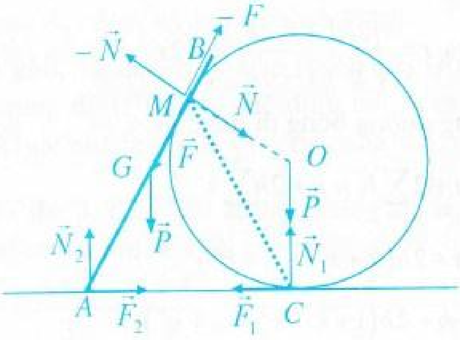
*Hình 1*

*ván lần lượt bằng khối lượng và đường kính của khối trụ. Coi hệ số ma sát tại ba điểm tiếp xúc là như nhau.*

*a) Chứng tỏ rằng lực ma sát ở ba điểm tiếp xúc bằng nhau.*

*b) Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hệ số ma sát để đảm bảo sự cân bằng của hệ.*

**Lời giải.** a) Các lực tác dụng lên mỗi vật như hình 2.




*Hình 2*

$M$ là điểm tiếp xúc giữa thanh với trụ. Theo bài ra ta thấy tam giác $AMC$ đều. Xét cả hệ ta thấy $F_1$ và $F_2$ là các ngoại lực theo phương ngang do đó chúng phải có độ lớn bằng nhau.

Xét cân bằng mômen của trụ đối với trục quay đi qua O ta được $F = F_1$.

Như vậy $F = F_1 = F_2$.

b) Cũng nhận thấy rằng phản lực vuông góc $N$ nhỏ hơn $N_1$ và $N_2$, do đó để hệ cân bằng chỉ cần hệ số ma sát phải cho thoả mãn $\mu \geq \frac{F}{N}$.

Xét cân bằng của thanh theo phương ngang

$$F\cos 60^0 + F_2 = N\cos 30^0 \Rightarrow F = \frac{N}{\sqrt{3}}.$$

Do vậy $\mu \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$. □

**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Thái Nguyên:** *Vũ Quang Minh*, 10 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên; **Vĩnh Phúc:** *Lê Đức Điệp*, 12 A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Lưu Cao Cường, Nguyễn Văn Tú, Phạm Ngọc Xuyên*, 11A2 THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Nghệ An:** *Hồ Trọng Hùng, Hồ Phúc Đạt, Nguyễn Huy Hoàng, Nguyễn Trung Hưng, Mai Trọng Đạt, Nguyễn Bá Dũng*, 10A3 THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Đông*, 11 Lí, *Nguyễn Ngọc Duy*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN XUÂN QUANG

**KÌ THI...** *(Tiếp trang 31)*

## SENIOR SECTION

*Sunday, 29 March 2009. 08h45 – 11h45*

**The problems from Q1 to Q4 are the same as these in the Junior Section.**

**Q5**. Suppose that $a = 2^b + 19$, where $b = 2^{10n+1}$. Prove that $a$ is divisible by 23 for any positive integer $n$.

**Q6**. Determine all positive integral pairs $(u\,;\,v)$ for which $5u^2 + 6uv + 7v^2 = 2009$.

**Q7**. Prove that for every positive integer $n$ there exists a positive integer $m$ such that the last $n$ digists in decimal representation of $m^3$ are equal to 8.

**Q8**. Give an example of a triangle whose all sides and altitudes are positive integers.

**Q9**. Given a triangle $ABC$ with $BC = 5$, $CA = 4$, $AB = 3$ and the points $E, F, G$ lie on the sides $BC, CA, AB$, respectively, so that $EF$ is parallel to $AB$ and area $(\Delta EFG) = 1$. Find the minimum value of the perimeter of triangle $EFG$.

**Q10**. Find all integers $x, y, z$ satisfying the system

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$$

**Q11**. Let be given three positive numbers $\alpha, \beta$ and $\gamma$. Suppose that four real numbers $a, b, c, d$ satisfy the conditions $\begin{cases} a^2 + b^2 = \alpha \\ c^2 + d^2 = \beta \\ ac + bd = \gamma. \end{cases}$

Find the set of all possible values the number $M = ab + cd$ can take.

**Q12**. Let $a$, $b$, $c$, $d$ be positive integers such that $a + b + c + d = 99$. Find the smallest and the greatest values of the following product $P = abcd$.

**Q13**. Given an acute-angled triangle $ABC$ with area $S$, let points $A'$, $B'$, $C'$ be located as follows: $A'$ is the point where altitude from $A$ on $BC$ meets the outwards facing semicirle drawn on $BC$ as diameter. Points $B'$, $C'$ are located similarly. Evaluate the sum

$$T = (\text{area } \Delta BCA')^2 + (\text{area } \Delta CAB')^2 + (\text{area } \Delta ABC')^2.$$

**Q14**. Find all the pairs of the positive integers such that the product of the numbers of any pair plus the half of one of the numbers plus one third of the other number is 7 times less than 2009.

**ĐỀ RA...** *(Tiếp trang 16)*

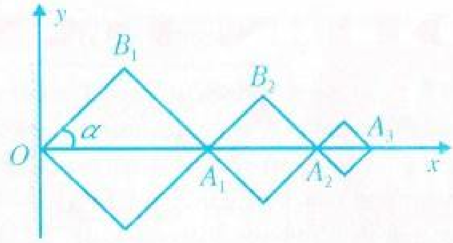
$U_{AC}$ = 1V và $I$ = 1mA. Cho biết, nếu giữ cho $U_{AC}$ luôn luôn bằng 1V, tăng tần số dòng điện lên quá 1000Hz thì thấy dòng điện trong mạch giảm. Hỏi

1) Đoạn mạch $AB$ chứa linh kiện gì? Đoạn mạch $BC$ chứa linh kiện gì ?

2) Tính $L$ và $C$.

NGUYỄN QUANG HẬU
*(Hà Nội)*

**Bài L2/382.** Một hệ thống các bản lề nối các đỉnh của ba hình thoi có tỉ lệ độ dài các cạnh là 3 : 2 : 1 (như hình vẽ).




Cho đỉnh $A_3$ chuyển động với vận tốc $v$ theo phương ngang. Tìm vận tốc của các đỉnh $A_1$, $A_2$, $B_1$ và $B_2$ tại thời điểm các cạnh của hình thoi vuông góc với nhau.

ĐỖ TUẤN
*(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)*

# PROBLEMS IN THIS ISSUE

## FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

**T1/382. (For 6th grade)** Compare the sum (consisting of 2010 terms)

$$\frac{1}{2009}+\frac{2}{2009^2}+\frac{3}{2009^3}+...+\frac{2009}{2009^{2009}}+\frac{2010}{2009^{2010}}$$

with $\frac{2009}{2008^2}$.

**T2/382. (For 7th grade)** Find a root of the polynomial $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ given that it has at least one root and $a+2b+4c=-\frac{1}{2}$.

**T3/382.** Let $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9$ be non negative real numbers whose sum equals 1. Put $S_k=a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}$ $(k=1,2,...,6)$. Determine the smallest possible value of $M=\max\{S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6\}$.

**T4/382.** Let $m$, $n$, $a$, $b$, and $c$ be real numbers such that the following conditions hold:

$$m^{1000}+n^{1000}=a;\ m^{2000}+n^{2000}=\frac{2b}{3};$$

$$m^{5000}+n^{5000}=\frac{c}{36}.$$

Find a formula relating $a$, $b$ and $c$ which does not involve $m$, $n$.

**T5/382.** Let $AH$ be the altitude from $A$ of a triangle $ABC$. Choose a point $D$ on the half-plane created by $BC$ which contains $A$ such that $DB=DC=\frac{AB}{\sqrt{2}}$. Prove that the lengths of the line segments $BD$, $DH$ and $HA$ are the side lengths of a right triangle.

## FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

**T6/382.** Determine the maximum possible value of $x^2+y^2$ where $x$ and $y$ are two integers chosen arbitrarily within the interval [−2009; 2009] such that

$$\left(x^2-2xy-y^2\right)^2=4.$$

**T7/382.** Consider two polynomials with real coefficients:

$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ and

$Q(x)=x^2+x+2009$.

Given that $P(x)$ has $n$ distinct real roots but $P(Q(x))$ does not have any real solution. Prove that $P(2009)>\frac{1}{4^n}$.

**T8/382** Let $ABCDEF$ be a regular hexagon and let $G$ be the midpoint of $BF$. Choose a point $I$ on $BC$ such that $BI=BG$. Let $H$ be a point on $IG$ such that $\widehat{CDH}=45^\circ$, and $K$ is a point on $EF$ such that $\widehat{DKE}=45^\circ$. Prove that $DHK$ is an equilateral triangle.

Translated by LE MINH HA

# DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN


# PHẢI BIẾT GIẢI BÀI TOÁN bằng nhiều cách

NGUYỄN NGỌC KHOA
*(GV THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi)*

Đối với mỗi dạng toán, mỗi câu hỏi khác nhau, mỗi bài toán, ta cần phải chọn lọc từng cách giải thích hợp. Muốn có kĩ năng này, người làm toán cần phải suy nghĩ tìm tòi nhiều phương pháp giải hay, nhiều bài toán mới. Sau đây là một số bài toán minh họa.

Cho $x$, $y$, $z$ là các số thực tùy ý thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ (*)

**Bài toán 1.** *Với điều kiện (*), hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau*

1) $P = x^2 + y^2 + z^2$;

2) $Q = (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$.

***Lời giải.***

1) • *Cách 1*

a) Vai trò $x$, $y$, $z$ như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử $x \ge y \ge z$ suy ra $1 \le x \le 2$.

$$P = (x+y+z)^2 - 2(y+z)x - 2yz$$
$$= 9 - 2(3-x)x - 2yz \le 2x^2 - 6x + 9 = f(x).$$

Khảo sát hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1\ ;\ 2]$ ta dễ dàng tính được $\max\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = f(2) = 5$.

Do đó $P \le 5$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$. Vậy max$P = 5$.

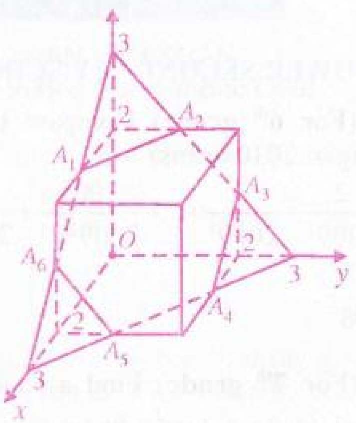
b) $P = 2x^2 - 6x + 9 - 2yz \ge 2x^2 - 6x + 9 - \dfrac{(y+z)^2}{2}$

$= 2x^2 - 6x + 9 - \dfrac{(3-x)^2}{2} = \dfrac{1}{2}(3x^2 - 6x + 9) = g(x)$.

Khảo sát hàm số $g(x)$ trên $[1\ ;\ 2]$, ta có $\min\limits_{[1;2]} g(x) = g(1) = 3$. Do đó $P \ge 3$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$. Vậy min$P = 3$.

*Nhận xét.* Câu b) có thể giải gọn hơn bằng cách sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky $P = x^2 + y^2 + z^2 \ge \dfrac{1}{3}(x+y+z)^2 = 3$.

• *Cách 2* (Sử dụng phương pháp hình học)




Trong không gian $Oxyz$ lấy điểm $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ thỏa mãn (*). Khi đó $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Tập các điểm $M$ là thiết diện của khối lập phương cạnh bằng 2 với mặt phẳng $(K)$: $x + y + z = 3$ (hình vẽ) thiết diện này là hình lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (kể cả những điểm thuộc miền trong), kí hiệu là $(H)$ với $A_1(1;0;2)$, $A_2(0;1;2)$, $A_3(0;2;1)$, $A_4(1;2;0)$, $A_5(2;1;0)$, $A_6(2;0;1)$.

Bài toán quy về tìm vị trí $M$ trên $(H)$ sao cho $OM^2$ lớn nhất, bé nhất.

a) $OM^2$ đạt giá trị lớn nhất khi $M$ trùng với $A_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Ta có $OA_i = 5$. Vậy max$P = 5$.

b) Gọi $T(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ là hình chiếu vuông góc của $O$ lên mặt phẳng $(K)$. Ta có

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{1} = \dfrac{y_0}{1} = \dfrac{z_0}{1} \\ x_0 + y_0 + z_0 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = z_0 = 1$$

suy ra $T(1\,;\,1;\,1) \in (H)$.

Vậy $\min P = 3$.

2) Với câu 2 này, tính đối xứng của $x$, $y$, $z$ không còn, vì vậy ta không thể giải như cách 1 trong câu 1 để tìm $\max Q$. Sử dụng phương pháp "hình học" ở cách 2 ta tìm được $\max Q$ không có gì thay đổi.

$$\max Q = \max\{AA_1^2, ..., AA_6^2\} = 17,$$

với $A(4\,;\,1\,;\,1)$.

$Q = 17$ tại $(x\,;\,y\,;\,z) = (0\,;\,1\,;\,2)$ hoặc $(0\,;\,2;\,1)$.

Nhưng việc tìm $\min Q$ đã khác! Vì hình chiếu vuông góc của $A(4\,;\,1\,;\,1)$ lên mặt phẳng $(K)$ không thuộc $(H)$ (bạn đọc hãy kiểm tra lại). Nhận xét rằng bài toán đối xứng đối $y$, $z$, vì vậy ta có thể sử dụng cách 1 của Bài toán 1 để tìm $\min Q$ như sau.

$$\begin{aligned} Q &= (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \\ &= (x+y+z-6)^2 - 2(y+z-2)(x-4) \\ &\quad - 2(y-1)(z-1) \\ &= 9 - 2(1-x)(x-4) - 2(y-1)(z-1) \\ &\geq 9 - 2(1-x)(x-4) - \frac{(y+z-2)^2}{2} \\ &= 9 - 2(1-x)(x-4) - \frac{(1-x)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(3x^2 - 18x + 33) = h(x). \end{aligned}$$

Khảo sát hàm số $h(x)$ trên $[0\,;\,2]$, ta có $\min\limits_{[0;2]} h(x) = h(2) = \dfrac{9}{2}$ nên $Q \geq \dfrac{9}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 2$, $y = z = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\min Q = \dfrac{9}{2}$.

*Nhận xét.* Cùng một hướng giải nhưng có thể trình bày gọn hơn bằng cách sử dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq \dfrac{(a+b)^2}{2}$ như sau:

$$\begin{aligned} &(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \\ &\geq (x-4)^2 + \frac{(y+z-2)^2}{2} \\ &= (x-4)^2 + \frac{(1-x)^2}{2} = t(x). \end{aligned}$$

Khảo sát hàm $t(x)$ trên $[0\,;\,2]$ ta có kết quả.

**✪Bài toán 2.** *Với điều kiện (*)*

*1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$A = (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z-4)^2.$$

*2) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$F = (x-1)^2 + 2y^2 + 3(z-4)^2.$$

***Lời giải***

1) • *Cách 1.* Rõ ràng bài toán không còn đối xứng với $x$, $y$ (hoặc $y$, $z$ hoặc $z$, $x$) nên không thể áp dụng trực tiếp cách giải câu 2 của *Bài toán* 1 vào bài toán này.

Để ý rằng $x - 1 = x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}$. Vì vậy nếu đặt $t = x - \dfrac{1}{2}$ thì điều kiện (*) trở thành

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leq t \leq \dfrac{3}{2},\ 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 2 \\ t + y + z = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

và $E = \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 + (z-4)^2$.

Với việc đặt biến phụ trên, biểu thức $E$ đối xứng đối với $t$, $y$. Vì vậy có thể áp dụng cách giải trong câu 2 của Bài toán 1 và ta sẽ có một lời giải đẹp.

• *Cách 2.* Có thể giải bằng phương pháp "*đạo hàm theo từng biến*" như sau:

Từ $z = 3 - x - y$ và do $0 \leq z \leq 2$ nên $0 \leq 3 - x - y \leq 2 \Leftrightarrow 1 - y \leq x \leq 3 - y$

và $E = (x-1)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 + (1 + x + y)^2$.

Xem $y$ là tham số với $0 \le y \le 2$, xét hàm

$$f(x) = (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (1+x+y)^2$$

với $1 - y \le x \le 3 - y$.

$f'(x) = 2(x-1) + 2(1+x+y) = 4x + 2y$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-y}{2} \le 1 - y$ (do $0 \le y \le 2$).

Vì $f(x)$ đồng biến trên $(1 - y\,;\, 3 - y)$ nên

$$\min_{[1-y;3-y]} f(x) = f(1-y) = y^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 4 = g(y)$$

$$g'(y) = 2y + 2\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4} \in (0;2).$$

Lại do $g'(y)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $y = \dfrac{1}{4}$ nên $\min\limits_{[0;1]} g(y) = g\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{33}{8}$. Vậy $\min E = \dfrac{33}{8}$ đạt tại $x = \dfrac{3}{4}$, $y = \dfrac{1}{4}$, $z = 2$.

*Nhận xét.* Dễ nhận thấy rằng, đối với câu 1 của Bài toán 2 này thì cách 2 vừa nêu trên không hay và có phần dài dòng. Nhưng đến câu 2 vai trò $x$, $y$, $z$ không như nhau, thì các phương pháp giải ở Bài toán 1 đã không còn hiệu lực, lúc này cách 2 vừa nêu trên mới phát huy tác dụng.

Trở lại kết quả câu 2 Bài toán 1, $\min Q = \dfrac{9}{2}$ đạt tại $x = 2$, $y = z = \dfrac{1}{2}$. Điểm $M\left(2\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ là hình chiếu của $A(4\,;\,1\,;\,1)$ lên cạnh $A_6A_5$.

Trong câu 1 Bài toán 2, $\min E = \dfrac{33}{8}$ đạt tại $x = \dfrac{3}{4}$, $y = \dfrac{1}{4}$, $z = 2$. Điểm $H\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4};2\right)$ là hình chiếu vuông góc của điểm $S\left(1;\dfrac{1}{2}\,;\,4\right)$ lên cạnh $A_1A_2$ của lục giác $A_1A_2...A_6$. Các bạn hãy suy nghĩ xem, các nhận xét trên có ý nghĩa hình học gì không?!

Thay cho bài tập, các bạn hãy tìm thêm nhiều cách giải khác cho các bài toán trong bài viết này và hoàn thành câu 1 và câu 2 của Bài toán 2. Chúc các bạn thành công.

**HƯỚNG DẪN GIẢI...** *(Tiếp trang 10)*

PT đường thẳng qua $F$ và vuông góc với $d$ là $d_1: -B\left(x - \sqrt{13}\right) + Ay = 0, M = d \cap d_1$.

Toạ độ $M$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} Ax + By = -C \\ -Bx + Ay = -\sqrt{13}B. \end{cases}$$

Bình phương hai vế của từng PT rồi cộng lại theo vế, kết hợp với (1), suy ra $x^2 + y^2 = 9$.

2) Gọi $H$ là trực tâm tam giác $ABC$, chứng minh $OH$ vuông góc với mp($ABC$). PT mp($ABC$) là $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

PT đường thẳng $OH$: $\begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 2t \end{cases}$

Suy ra $H\left(\dfrac{36}{49};\dfrac{18}{49};\dfrac{12}{49}\right)$.

**Câu 7b.** Gọi $A$ là biến cố "*Ngọc, Thảo có phần thưởng giống nhau*".

Nhận thấy có 2 học sinh nhận sách (Toán, Lí); 3 học sinh nhận sách (Toán, Hóa) và 4 học sinh nhận sách (Lí, Hóa).

Số phần tử của không gian mẫu là

$$n(\Omega) = C_9^2 C_7^3 C_4^4 = 1260.$$

*TH1.* Ngọc, Thảo nhận sách (Toán, Lí), số khả năng là $C_7^3 C_4^4 = 35$.

*TH2.* Ngọc, Thảo nhận sách (Toán, Hoá), số khả năng là $7C_6^2 C_4^4 = 105$.

*TH3.* Ngọc, Thảo nhận sách (Lí, Hoá), số khả năng là $C_7^2 C_5^3 C_2^2 = 210$.

Suy ra $n(A) = 35 + 105 + 210 = 350$.

Do đó $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{18}$.

NGUYỄN ANH DŨNG
*(Hà Nội)*

# Kì thi Olympic Toán học Hà Nội mở rộng năm 2009

NGUYỄN VĂN MẬU
(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

*Ngày 29.3.2009 tại Giảng đường lớn tầng 7 nhà T5, Trường Đại Học Khoa học Tự nhiên Hà Nội, Hội Toán học Hà Nội đã tổ chức Kì thi Olympic Toán học Hà Nội mở rộng (HOMO) lần thứ IV với sự tham gia của 50 em học sinh lớp 8 (Junior level, sinh sau ngày 01.01.1995) và 70 em học sinh lớp 10 (Senior level, sinh sau ngày 01.01.1993) từ các trường THCS và THPT thuộc Hà Nội, Hải Dương, Quảng Ninh, Bắc Giang, Bắc Ninh, Hòa Bình, Lào Cai, Yên Bái, Phú Thọ, Vĩnh Phúc, Thái Bình, Thái Nguyên.*

*Sau Kì thi này, Ban Tổ chức sẽ chọn ra 20 em bậc THCS và 20 em bậc THPT tham dự Kì thi Olympic Singapore mở rộng vào cuối tháng 5 năm 2009. Sau đây là đề bài của Kì thi HOMO:*

**Important:**
*Answer all 14 questions.*
*Enter your answers on the answer sheet provided.*
*No calculators are allowed.*

## JUNIOR SECTION

*Sunday, 29 March 2009.* *08h45 – 11h45*

**Q1**. What is the last two digits of the number $1000.1001+1001.1002+1002.1003+\cdots+2008.2009$?

(A) 25; (B) 41; (C) 36; (D) 54;
(E) None of the above.

**Q2**. Which is largest positive integer $n$ satisfying the inequality

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}<\frac{6}{7}?$$

(A) 3; (B) 4; (C) 5; (D) 6;
(E) None of the above.

**Q3**. How many integral roots of the inequality $-1<\dfrac{x-1}{x+1}<2$ are there in $(-10;\ 10)$ ?

(A) 15; (B) 16; (C) 17; (D) 18;
(E) None of the above.

**Q4**. How many triples $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ where $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ and $a<b<c$ such that the number $abc+(7-a)(7-b)(7-c)$ is divisible by 7?

(A) 15; (B) 17; (C) 19; (D) 21;
(E) None of the above.

**Q5**. Show that there is a natural number $n$ such that the number $a=n!$ ends exacly in 2009 zeros.

**Q6**. Let $a$, $b$, $c$ be positive integers with no common factor and satisfy the condition $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$. Prove that $a+b$ is a square.

**Q7**. Suppose that $a=2^b+19$, where $b=2^{10n+1}$. Prove that $a$ is divisible by 23 for any positive integer $n$.

**Q8**. Prove that $m^7-m$ is divisible by 42 for any positive integer $m$.

**Q9**. Suppose that four real numbers $a,b,c,d$ satisfy the conditions

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2+d^2=4 \\ ac+bd=2. \end{cases}$$

Find the set of all possible values the number $M=ab+cd$ can take.

**Q10**. Let $a$, $b$ be positive integers such that $a+b=99$. Find the smallest and the greatest values of the following product $P=ab$.

**Q11.** Find all integers $x,y$ such that

$$x^2+y^2=(2xy+1)^2.$$

**Q12**. Find all the pairs of the positive integers such that the product of the numbers of any pair plus the half of one of the numbers plus one third of the other number is three times less than 15.

**Q13**. Let be given $\Delta ABC$ with area $(\Delta ABC)=60\text{cm}^2$. Let $R$, $S$ lie in $BC$ such that $BR=RS=SC$ and $P$, $Q$ be midpoints of $AB$ and $AC$, respectively. Suppose that $PS$ intersects $QR$ at $T$. Evaluate area$(\Delta PQT)$.

**Q14**. Let $ABC$ be an acute-angled triangle with $AB=4$ and $CD$ be the altitude through $C$ with $CD=3$. Find the distance between the midpoints of $AD$ and $BC$.

*(Xem tiếp trang 26)*

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

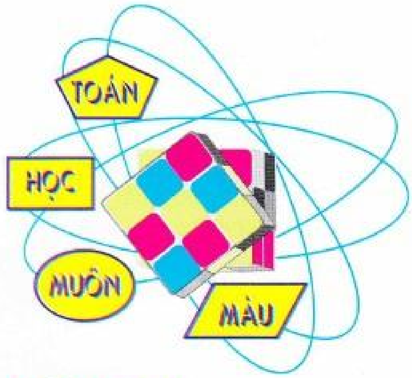
XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 382(4.2009)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35144272, 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn



# TRONG SỐ NÀY



*Biên tập* : NGUYỄN THANH HỒNG, HỒ QUANG VINH.
*Trị sự, phát hành* : HOÀNG THÀNH ĐỨC, VŨ ANH THƯ
*Mĩ thuật* : MINH THƠ
*Chế bản* : NGUYỄN THỊ OANH




## Giải đáp:

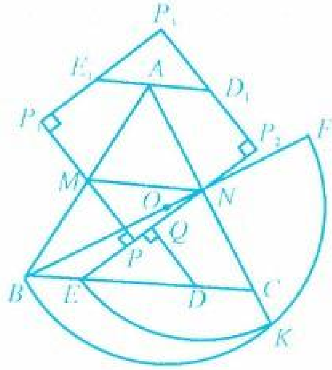
# PHÂN CHIA TAM GIÁC ĐỀU, GHÉP THÀNH HÌNH VUÔNG

*(Đề đăng trên THTT số 377, tháng 11. 2008)*

Diện tích tam giác đều $ABC$ cạnh $BC = 2a$ là $S_{ABC} = \sqrt{3}a^2$ và $MN = a$.

1) Theo cách dựng của bạn *Toán* thì $MP_1 = MP$ nên $PP_1 = 2MP = \sqrt{2}\,a$. Giả sử $PP_1P_3P_2$ là hình vuông thì $S_{PP_1P_3P_2} = PP_1^2 = 2a^2$, không bằng $S_{ABC} = \sqrt{3}a^2$, nên bạn *Toán* làm chưa chuẩn xác. Cách khác: chỉ ra theo cách của bạn *Toán* thì $E_1D_1 > ED$.

2) Cách phân chia và ghép hình đúng như sau (h. 1). Trên tia $BN$ lấy điểm $F$ sao cho $BF > BN$ và $NF = AN = a$. Đường tròn tâm $O$ đường kính $BF$ cắt tia $AC$ tại $K$. Lúc đó $NK^2 = NF.NB = \sqrt{3}a^2$ nên $NK = \sqrt[4]{3}a$ Đường tròn tâm $N$ bán kính $NK$ cắt đoạn $BC$ tại $E$ thì $NE = NK = \sqrt[4]{3}a$. Trên tia $EC$ lấy điểm $D$ sao cho $ED = a$. Gọi hình chiếu của $M$, $D$ trên $NE$ tương ứng là $P$, $Q$.




*Hình 1*

Đặt tứ giác $MPEB$ vào vị trí $MP_1E_1A$, đặt tứ giác $NQDC$ vào vị trí $NP_2D_1A$, đặt tam giác vuông $QED$ vào vị trí $P_3E_1D_1$. Xét các góc dễ thấy các bộ ba điểm sau thẳng hàng: $P_1$, $E_1$ và $P_3$; $P_2$, $D_1$ và $P_3$; $E_1$, $A$ và $D_1$. Ta có $E_1D_1 = BE + DC = a = ED$.

Do $\Delta QED = \Delta PNM$ ($\widehat{EQD} = \widehat{NPM} = 90^\circ$, $ED = NM$, $\widehat{QED} = \widehat{PNM}$) nên $QD = MP$, $QE = PN$.

Từ đó có $EP = QN$ và $P_1P_3 = P_1E_1 + E_1P_3 = PE + EQ = QN + EQ = EN = \sqrt[4]{3}a$.

Từ $MP.\sqrt[4]{3}a = 2S_{MNE} = MN.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}$ có $PP_1 = 2MP = \sqrt[4]{3}a$. Vậy tứ giác $PP_1P_3P_2$ là hình vuông có cạnh bằng $\sqrt[4]{3}a$, do đó $S_{PP_1P_3P_2} = S_{ABC}$.

Nhiều bạn đã phân tích cách làm của bạn *Toán* là chưa chuẩn xác. Chỉ có bạn *Lê Nguyên Khánh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** đã trình bày cách phân chia và ghép hình đúng.

PHI PHI

---


Dùng một tờ giấy hình chữ nhật có thể tạo thành một tứ diện, để đựng sữa hoặc chứa tặng phẩm,...


*Hình 2*

## Dành cho bạn đọc

1) Hãy trình bày cách dán phần viền với nhau (màu sẫm như ở hình 2) của một hình chữ nhật để tạo thành một tứ diện gần đều (tức là các cặp cạnh đối đều bằng nhau).

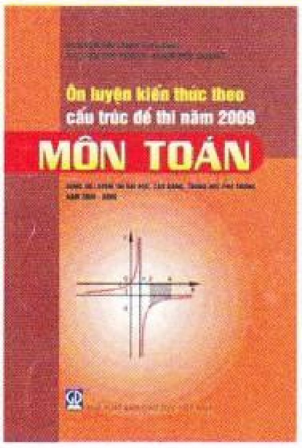
2) Tính thể tích của khối tứ diện gần đều được tạo thành từ hình chữ nhật $ABCD$ với $AD = 32$(cm), $AB = 13$(cm) (không kể phần viền) mà các mặt đều là tam giác cân với đáy bằng 16(cm).

ĐAN QUỲNH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

trân trọng giới thiệu bộ sách :

# ÔN LUYỆN KIẾN THỨC THEO CẤU TRÚC ĐỀ THI NĂM 2009



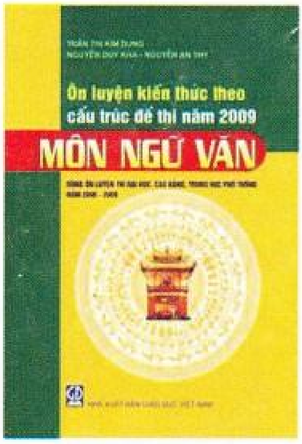

TỰ GIẢI CÁC ĐỀ

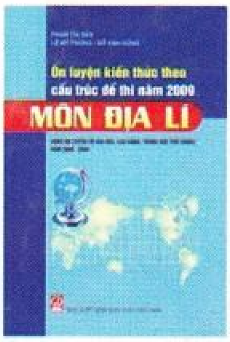
ĐỐI CHIẾU HƯỚNG DẪN

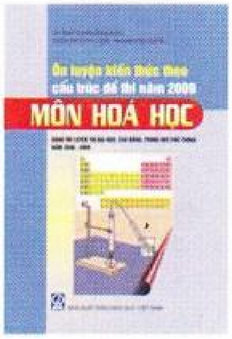
Cơ hội tốt củng cố kiến thức, rèn kỹ năng để

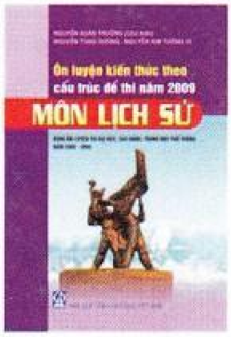
thi tốt nghiệp THPT và

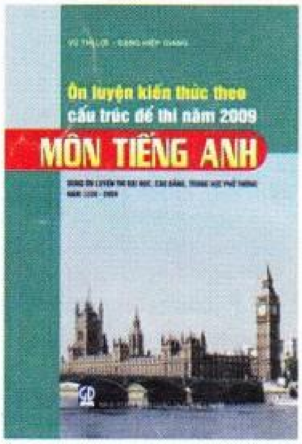
Đại học - Cao đẳng

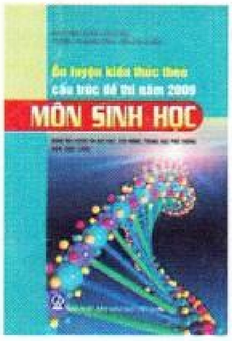


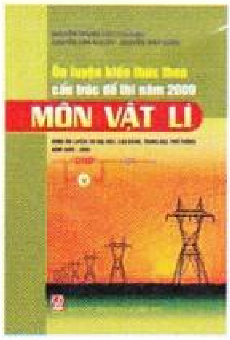




Mọi chi tiết xin liên hệ :

- Công ty CP sách Đại học - Dạy nghề - 25 Hàn Thuyên, Hà Nội. Tel : (04) 39726137.
- Công ty CP sách Giáo dục tại TP. Đà Nẵng - số 78 Pasteur, Đà Nẵng. Tel : (0511) 33889327.
- Công ty CP Học liệu - 240 Trần Bình Trọng, Q5, TP HCM. Tel : (08) 38300472.

ISSN : 0866 - 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT04M9

Giấy phép XB số67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2009

Giá : 6000 đồng
Sáu nghìn đồng.