https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

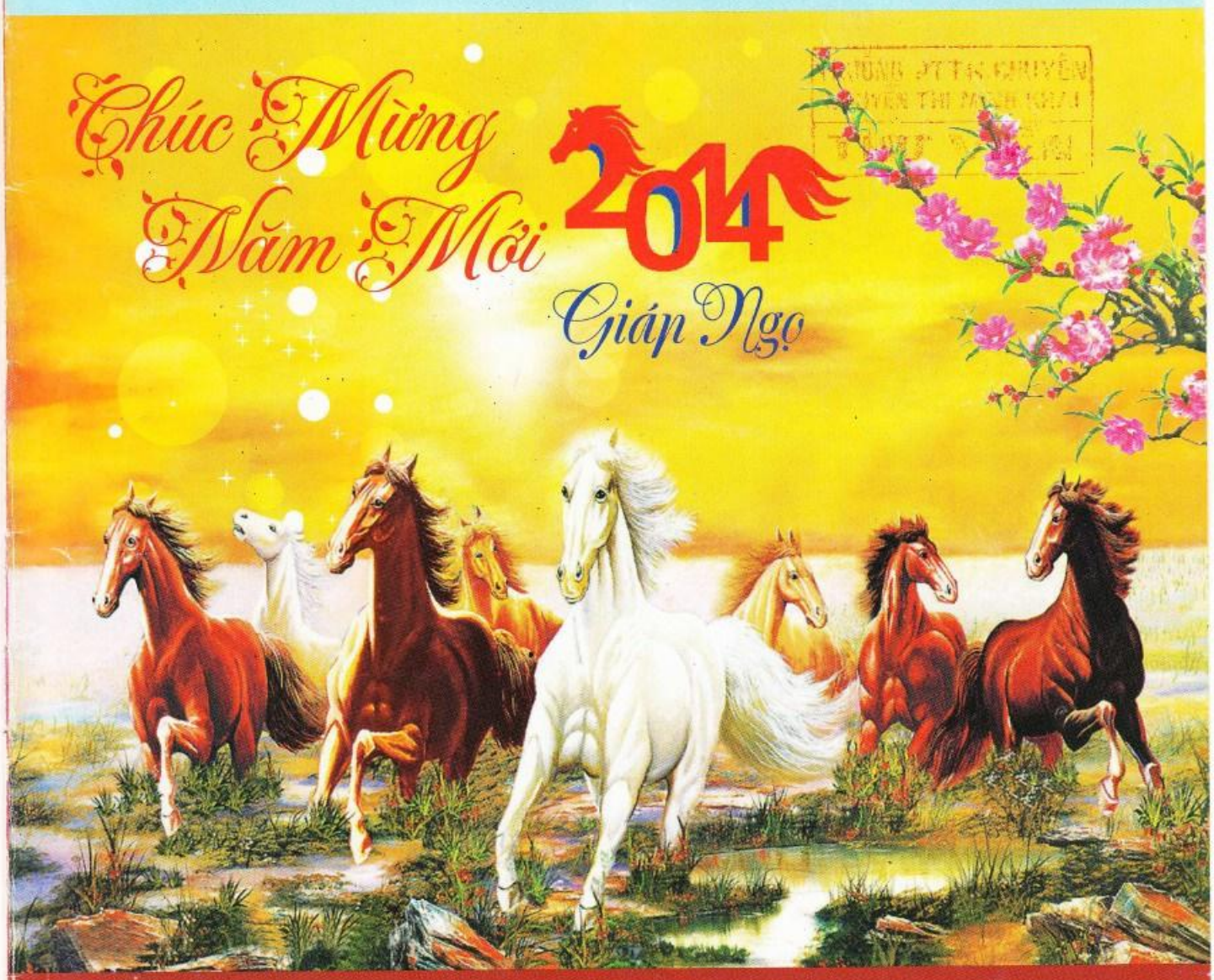
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

1 2014 Số 439

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 51
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



Mừng 50 năm Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ

HAI CUỘC THI CHÀO MỪNG TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Để chào mừng 50 năm thành lập Tạp chí TH&TT (1964-2014) và hỗ trợ tốt hơn cho phong trào dạy và học Toán ở các trường phổ thông, trong năm 2014 Tạp chí sẽ tổ chức hai cuộc thi:

1. Cuộc thi Giải toán chào mừng 50 năm Tạp chí TH&TT

- *Đối tượng dự thi*: Học sinh bậc THCS và THPT.

- *Thể lệ cuộc thi*: Cuộc thi gồm 5 vòng, đề thi từ Vòng 1 đến Vòng 5 lần lượt được đăng trên Tạp chí TH&TT từ tháng 2 (số 440) đến tháng 6 (số 444). Đề thi ở mỗi vòng gồm 2 bài toán dành cho học sinh THCS và 2 bài toán dành cho học sinh THPT. Học sinh THCS có thể làm bài THPT nhưng học sinh THPT làm bài THCS sẽ không được tính điểm. Đáp án của các đề thi sẽ lần lượt được đăng từ tháng 6 (số 444) đến tháng 10 (số 448). Kết quả cuộc thi sẽ được công bố trên Tạp chí TH&TT tháng 10 năm 2014.

- *Thời hạn gửi bài dự thi*: Muộn nhất là 2 tháng kể từ ngày cuối tháng ra số tạp chí có đăng đề thi.

- *Quy cách bài dự thi*: Mỗi bài giải của một bài toán phải viết trên một tờ giấy (hoặc một file) riêng. Phía trên mỗi bài phải ghi rõ: Họ tên, địa chỉ trường, lớp, xã (phường), huyện (quận), tỉnh (thành phố), số điện thoại (nếu có). Trên phong bì hoặc file ghi rõ: *Bài dự thi Giải toán chào mừng 50 năm Tạp chí TH&TT*.

2. Cuộc thi Viết chuyên đề Toán chào mừng 50 năm Tạp chí TH&TT

- *Đối tượng dự thi*: Giáo viên đã hoặc đang dạy ở THCS, THPT; giảng viên, sinh viên ở các trường ĐH, CĐ và bạn đọc yêu thích Toán.

- *Nội dung bài dự thi*: Là các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi Toán; các chuyên đề ôn tập, ôn thi cuối cấp; những tìm tòi, sáng tạo trong việc dạy, học Toán (bậc THCS, THPT).

- *Thể lệ cuộc thi*: Mỗi người tham gia cuộc thi được gửi không quá 3 bài dự thi khác nhau. Các bài dự thi có thể là các sáng kiến, kinh nghiệm đã đăng kí, hoặc đoạt giải ở Trường, Phòng, Sở, ... nhưng chưa từng được xuất bản thành sách, báo và cũng chưa tham gia cuộc thi nào khác.

Kết quả cuộc thi sẽ được công bố trên Tạp chí TH&TT tháng 11 năm 2014 (số 449). Các bài hay có thể được chọn đăng trên Tạp chí, hoặc in thành sách, các tác giả được hưởng nhuận bút theo quy định của Tạp chí. Bài viết tham dự cuộc thi thuộc bản quyền của Tạp chí TH&TT.

- *Thời hạn gửi bài dự thi*: Trước ngày 15/10/2014.

- *Quy cách bài dự thi*: Bài dự thi có thể viết trên giấy hoặc đánh máy vi tính bằng chương trình soạn thảo văn bản word. Mỗi bài dự thi phải viết trên giấy (hoặc có file) riêng, phía trên mỗi bài phải ghi rõ: Họ tên, địa chỉ trường, xã (phường), huyện (quận), tỉnh (thành phố), số điện thoại (nếu có). Bài dự thi không quá 15 trang viết tay hoặc 10 trang đánh máy. Trên phong bì hoặc file ghi rõ: *Bài dự thi Viết chuyên đề Toán chào mừng 50 năm Tạp chí TH&TT*.

• ***Cách gửi bài dự thi:*** Bài dự thi của hai cuộc thi trên gửi về Tạp chí TH&TT bằng cách:

+ Gửi file word theo địa chỉ email:
toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

+ hoặc gửi bài theo đường bưu điện. Phong bì *có dán tem*, gửi về địa chỉ:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội

+ hoặc đến Tòa soạn Tạp chí gửi trực tiếp.

• ***Giải thưởng:*** Gồm giải cá nhân và giải tập thể cho các trường và đơn vị có nhiều cá nhân tham gia. Những cá nhân và tập thể đoạt giải cao sẽ được mời dự và trao giải trong Lễ kỉ niệm 50 năm thành lập Tạp chí TH&TT tổ chức vào tháng 12/2014.

Rất mong các bạn nhiệt tình hưởng ứng hai cuộc thi trên !

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

SỬ DỤNG BÀI TOÁN QUEN THUỘC ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN MỚI

ĐINH XUÂN HÙNG
(THCS Gia Hanh, Can Lộc, Hà Tĩnh)

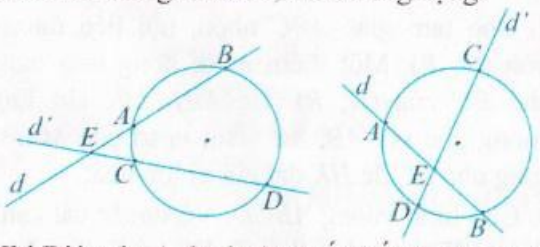
Trong tác phẩm nổi tiếng "Giải bài toán như thế nào?", tác giả Polya cho rằng: "Ví như dòng sông nào cũng bắt nguồn từ những con suối nhỏ, mỗi bài toán dù khó đến đâu cũng có nguồn gốc từ những bài toán đơn giản, có khi rất quen thuộc đối với chúng ta".

Hãy vận dụng quy luật này của dòng sông để học tốt môn Toán, để giải được nhiều bài toán khó. Hãy "*tích luỹ*" thật nhiều những "*bài toán nhỏ*", rèn kĩ năng vận dụng chúng trong việc giải toán.

Bài toán A sau đây là một bài toán như vậy.

Bài toán A. *Cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại E. Trên đường thẳng d lấy hai điểm A và B, trên đường thẳng d' lấy hai điểm C và D sao cho điểm E cùng hoặc không cùng nằm trên hai đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi EA.EB = EC.ED.*

Hướng dẫn. Việc chứng minh bài toán không khó. Ở cả hai chiều thuận và đảo, hãy chứng minh hai tam giác *EAD*, *ECB* đồng dạng.



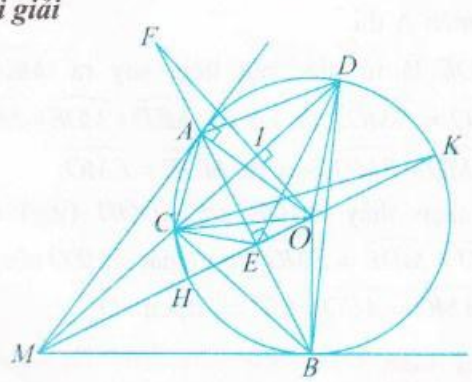
Khi Bài toán A đã thuộc "*vốn liếng*" của mình, các bạn có nghĩ rằng các bài toán sau là các bài toán khó không?

Bài toán 1. *Từ một điểm M nằm ngoài (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD không đi qua O. Gọi I là trung điểm CD; E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các đường thẳng OM, OI; H là giao điểm của đoạn thẳng OM và (O). Chứng minh rằng*

a) $\widehat{DEC} = 2\widehat{DBC}$, biết rằng $\widehat{CAD} < \widehat{CBD}$.

b) CH là tia phân giác của góc MCK.

Lời giải



a) Ta có $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g) vì có $\widehat{AMC}$ chung, $\widehat{MAC} = \widehat{ADC}$. Suy ra $MC.MD = MA^2$. Mặt khác, tam giác *MAO* vuông tại *A*, có đường cao *AE* nên $MA^2 = ME.MO$. Suy ra $MC.MD = ME.MO$.

Áp dụng Bài toán A ta có *CEOD* là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{DEC} = \widehat{DOC}$. Do $\widehat{CAD} < \widehat{CBD}$ nên ta lại có $\widehat{DOC} = 2\widehat{DBC}$, suy ra đpcm.

b) Kẻ đường kính *HK*. Ta có $\widehat{HCK} = 90^\circ$ (1)

Tứ giác *CEOD* là tứ giác nội tiếp, suy ra

$$\widehat{CEH} = \widehat{CDO} = \widehat{DCO} = \widehat{DCK} + \widehat{KCO}.$$

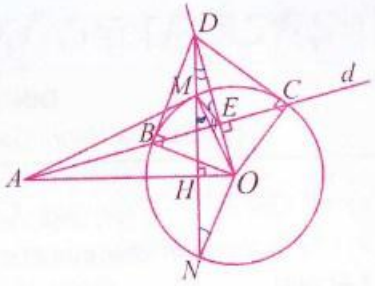
Ta lại có $\widehat{CEH} = \widehat{ECK} + \widehat{CKO} = \widehat{ECK} + \widehat{KCO}$.

Suy ra $\widehat{DCK} = \widehat{ECK}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm. □

Bài toán 2. *Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ A kẻ đường thẳng d không đi qua tâm O, cắt (O) tại B và C (B nằm giữa A và C). Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại D. Từ D kẻ DH vuông góc với AO (H nằm trên AO) cắt cung nhỏ BC tại M. Gọi E là giao điểm của DO và BC. Chứng minh rằng AM là tiếp tuyến của (O).*

Lời giải. Gọi N là giao điểm thứ hai của DH và (O). Với DMN là cát tuyến của (O) và tam giác DBO vuông tại B có đường cao BE, tương tự Bài toán 1a) ta có $DM.DN = DE.DO$ $(= DB^2)$. Theo Bài toán A thì



$MNOE$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{MED} = \widehat{MNO} = \widehat{NMO}$. Ta lại có $\widehat{MED} + \widehat{MDE} = \widehat{EMN} = \widehat{NMO} + \widehat{EMO}$, suy ra $\widehat{MDE} = \widehat{EMO}$.

Ta nhận thấy $\Delta AOE \backsim \Delta DOH$ (g.g) nên $\widehat{EAO} = \widehat{MDE} = \widehat{EMO} \Rightarrow$ tứ giác $AMEO$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{AEO} = 90^\circ \Rightarrow$ đpcm. □

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC không cân, ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với (O); I là giao điểm của MN và OC; K là giao điểm của PI và (O). Chứng minh rằng*

a) Tứ giác OMCN nội tiếp một đường tròn.

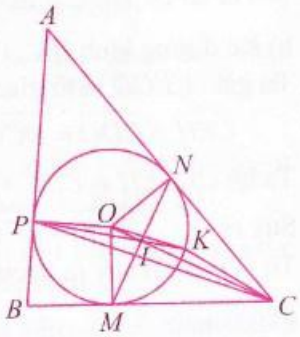
b) IP.IK = IM.IN = IO.IC.

c) CO là tia phân giác của góc PCK.

(Trích đề thi KSCL GV THCS tỉnh Hà Tĩnh 2012-2013)

Lời giải. a) Do $\widehat{OMC} = \widehat{ONC} = 90^\circ$ nên tứ giác $OMCN$ nội tiếp.

b) Ta có hai tứ giác nội tiếp là $MKNP$ và $OMCN$. Áp dụng Bài toán A suy ra đpcm.



c) Do $IO.IC = IP.IK$ theo Bài toán A ta có $CKOP$ là tứ giác nội tiếp, suy ra

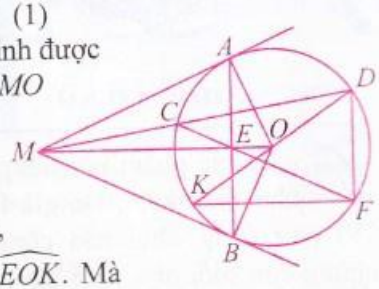
$$\widehat{OCK} = \widehat{OPK};\ \widehat{OCP} = \widehat{OKP},$$

mà $\widehat{OPK} = \widehat{OKP} \Rightarrow \widehat{OCK} = \widehat{OCP} \Rightarrow$ đpcm. □

Bài toán 4. *Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD không đi qua O. Gọi E là giao điểm của MO và AB; F là giao điểm của CE và (O). Chứng minh rằng AB // DF.*

Lời giải. Kẻ đường kính DK, ta có $KF \perp DF$ (1)

Ta dễ chứng minh được $MC.MD = ME.MO$ nên theo Bài toán A thì $CEOD$ là tứ giác nội tiếp,



suy ra $\widehat{DCF} = \widehat{EOK}$. Mà

$\widehat{DCF} = \widehat{DKF} \Rightarrow \widehat{DKF} = \widehat{EOK} \Rightarrow OE \,//\, KF$ (2)

Theo tính chất của tiếp tuyến, OM vuông góc với AB tại E hay $OE \perp AB$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $AB \,//\, DF$. □

Những "*bài toán nhỏ*" như Bài toán A còn rất nhiều. Các bạn hãy tìm tòi và phát huy kĩ năng vận dụng chúng trong việc giải toán nhé. Sau đây cũng là một bài toán như vậy.

Bài toán B. *Cho tam giác ABC có góc A nhọn, nội tiếp đường tròn (O; R). Vẽ đường kính BD của (O; R). Chứng minh rằng BC = BD.sinA, từ đó suy ra BC = 2RsinA.*

Đề nghị các bạn áp dụng Bài toán B để giải một số bài tập sau.

1. Cho tam giác ABC nhọn có điểm M di động trên cạnh BC. Từ M hạ MH, MK lần lượt vuông góc với AB, AC. Tìm vị trí của M trên cạnh BC để HK đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Một điểm M di động trên cung nhỏ BC của $(O; R)$. Hạ MH, MK lần lượt vuông góc với AB, AC. Tìm vị trí của M trên cung nhỏ BC để HK đạt giá trị lớn nhất.

3. Cho hình vuông $ABCD$. Vẽ tia Ax cắt cạnh BC tại H và tia Ay cắt cạnh DC tại K. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của B; P và Q lần lượt là hình chiếu của D trên Ax và Ay. Chứng minh rằng $EF = PQ$.

4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và có các đường chéo cắt nhau tại M. Từ M hạ các đường vuông góc MA', MB', MC', MD' lần lượt đến các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $A'B' + C'D' = A'D' + B'C'$.

(Vô địch Toán Canada 1990)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TP. HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2012 - 2013

(Đề thi đăng trên TH&TT số 438, tháng 12 năm 2013)

Bài 1.

1) Ta có $c=-(a+b)$. Do đó

$$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3$$
$$=-3ab(a+b)=3abc.$$

2) $$P=\frac{(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3}{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+abc}$$

$$=\frac{(-2c)^3+(-2a)^3+(-2b)^3}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-5abc}$$

$$=\frac{-8(a^3+b^3+c^3)}{-8abc}=\frac{-24abc}{-8abc}=3.$$

Bài 2. 1) $(x^2-x-1)(3x^2+x-3)=4x^2$

$$\Leftrightarrow (3x^2-3x-3)(3x^2+x-3)=12x^2$$
$$\Leftrightarrow (3x^2-x-3)^2-4x^2=12x^2$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x^2-x-3=4x\\3x^2-x-3=-4x.\end{array}\right.$$

Tập nghiệm của phương trình là

$$S=\left\{\frac{5+\sqrt{61}}{6};\frac{5-\sqrt{61}}{6};\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

2) Điều kiện: $x\ge 0$.

$$4x^2+\frac{3}{4}=2\sqrt{x}\Leftrightarrow 4x^2+4x+1=4x+2\sqrt{x}+\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow 2x+1=2\sqrt{x}+\frac{1}{2}\Leftrightarrow (2\sqrt{x}-1)^2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}.$$

Bài 3. Đặt $u=x-1$; $v=y-1$.

Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases}(u^2-1)(v^2-1)=45\\uv=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+v^2=20\\uv=8\end{cases}\ (*)$$

Giải hệ phương trình quen thuộc (*) ta được bốn nghiệm $(u;\ v)$ là (2; 4), (4; 2), (–2; –4), (–4; –2).

Từ đó phương trình đã cho có bốn nghiệm $(x;\ y)$ là (3; 5), (5; 3), (–1; –3), (–3; –1).

Bài 4.

1) Áp dụng bất đẳng thức $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ ta có

$$(3a+b)(2c+a+b)\le\left(\frac{3a+b+2c+a+b}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow (3a+b)(2c+a+b)\le(2a+b+c)^2.$$

2) Từ đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

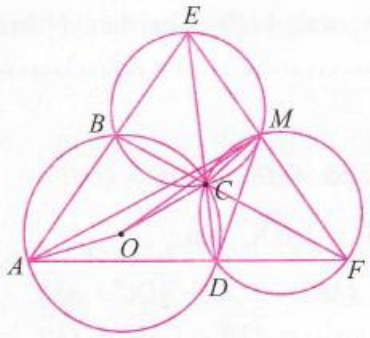
$$\frac{a^3b}{3a+b}+\frac{c^2ab}{2c+a+b}\ge 2\sqrt{\frac{a^4b^2c^2}{(3a+b)(2c+a+b)}}$$
$$\ge\frac{2a^2bc}{2a+b+c};$$

Tương tự $\frac{b^3c}{3b+c}+\frac{a^2bc}{2a+b+c}\ge\frac{2b^2ca}{2b+c+a}$;

$$\frac{c^3a}{3c+a}+\frac{b^2ca}{2b+c+a}\ge\frac{2c^2ab}{2c+a+b}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên suy ra đpcm.

Bài 5.



a) Ta có ba tứ giác nội tiếp là $ABCD$, $BCME$, $CDFM$. Do đó $\widehat{CME}=\widehat{ABC}=\widehat{CDF}$;

$\widehat{CMF}+\widehat{CDF}=180^o\Rightarrow\widehat{CME}+\widehat{CMF}=180^o$

hay ba điểm E, M, F thẳng hàng.

b) Ta cũng có $\widehat{DMF}=\widehat{DCF}=\widehat{EAD}$ nên tứ giác $ADME$ nội tiếp, suy ra đpcm.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH BÌNH ĐỊNH

NĂM HỌC 2012 - 2013

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Bài 1. (5 *điểm*)

a) Tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 11 \\ x + xy + y = 3 + 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

Bài 2. (4 *điểm*)

a) Chứng minh rằng trong 8 số tự nhiên bất kì có 3 chữ số, bao giờ cũng tìm được 2 số mà khi viết chúng liền nhau ta được một số có 6 chữ số chia hết cho 7.

b) Cho hai số thực x, y thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 - xy = 4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Bài 3. (4 *điểm*)

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - 1$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng với mọi m, đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Gọi hoành độ của hai giao điểm A, B lần lượt là x_1, x_2. Chứng minh rằng $|x_1 - x_2| \geq 2$.

Bài 4. (3 *điểm*)

Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của cạnh AB và E là trọng tâm của tam giác ACD. Chứng minh rằng OE vuông góc với CD.

Bài 5. (4 *điểm*)

Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB cố định và đường kính CD thay đổi (CD không trùng với AB). Vẽ đường thẳng (d) là tiếp tuyến của $(O; R)$ tại B. Các đường thẳng AC, AD lần lượt cắt (d) tại P, Q.

a) Chứng minh tứ giác $CPQD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CDP. Chứng minh rằng khi đường kính CD thay đổi thì E di động trên một đường thẳng cố định.

BÙI VĂN CHI

(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

---

c) Ta lại có $\widehat{AME} = \widehat{ADE} = \widehat{CMF}$ (1)

Vì $\widehat{AOC} = 2\widehat{ADC}$ nên

$$\widehat{AOC} + \widehat{AMC} = \widehat{ADC} + \widehat{ADC} + \widehat{AMC}$$
$$= \widehat{AME} + \widehat{CMF} + \widehat{AMC} = 180^\circ$$

suy ra $AOCM$ là tứ giác nội tiếp.

Mặt khác, $OA = OC$ nên $\widehat{AMO} = \widehat{OMC}$ (2)

Vì E, M, F thẳng hàng, từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Bài 6. Điều kiện: $0 \leq n \leq \frac{625}{4}$.

Đặt $x = \sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n}}$.

Ta tính được

$$x^2 = 25 + 2\sqrt{n} \leq 25 + 2.\frac{25}{2} = 50.$$

Hiển nhiên $x^2 \geq 25$ và là số chính phương nên $x^2 = 25 + 2\sqrt{n}$ nhận các giá trị 25; 36; 49.

Tương ứng, ta tính được các giá trị của n và xác định các giá trị cần tìm là $n = 0$ và $n = 144$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẬC HAI VÀ BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

LÊ XUÂN KHANG
(GV THPT An Nhơn 1, Bình Định)

Bài toán chứng minh bất đẳng thức (BĐT), tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hay giá trị nhỏ nhất (GTNN) là một trong những bài toán rất quen thuộc cho những thí sinh chuẩn bị thi vào các trường Đại học, Cao đẳng. Bài viết này, chúng tôi chỉ khai thác trọng tâm một số BĐT đồng bậc hai, từ đó sáng tác một số bài toán tìm GTLN hay GTNN có sử dụng đạo hàm. Từ đây, phối hợp với việc sử dụng một số phép biến đổi đơn giản chúng ta có thể tạo ra thêm một số bài toán khác phức tạp hơn.

Trước hết, chúng ta cần lưu ý một số BĐT đồng bậc hai thường dùng sau đây:

Với a, b, c là các số thực bất kì, ta có

1. $a^2+b^2 \overset{(1)}{\geq} \dfrac{(a+b)^2}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

2. $a^2+b^2+c^2 \overset{(2)}{\geq} \dfrac{(a+b+c)^2}{3} \overset{(3)}{\geq} ab+bc+ca$.

Đẳng thức ở (2) và (3) đồng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

3. $a^2+b^2+c^2 \overset{(4)}{\geq} \dfrac{(a+b)^2}{2}+c^2$

$$\overset{(5)}{\geq} \frac{\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}+c\right)^2}{2} \overset{(6)}{\geq} \frac{\left(\sqrt{2ab}+c\right)^2}{2}.$$

Đẳng thức ở (4) xảy ra khi và chỉ khi $a=b$ (c tùy ý); đẳng thức ở (5) xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}=c$; đẳng thức ở (6) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\dfrac{c}{\sqrt{2}}$, đây cũng là điều kiện để (4), (5) và (6) đồng thời xảy ra đẳng thức.

Việc chứng minh các BĐT trên khá đơn giản, xin dành cho bạn đọc. Sau đây, là một số thí dụ minh hoạ.

★**Thí dụ 1.** *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$M=\frac{4(a^4+b^4)}{a^2+b^2}-\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

trong đó a, b là hai số thực dương.

Lời giải. Ta có

$$M \geq \frac{4(a^2+b^2)^2}{2}.\frac{1}{a^2+b^2}-(a^2+b^2)+\frac{4}{a^2+b^2}$$

$$=a^2+b^2+\frac{4}{a^2+b^2}=t+\frac{4}{t}=f(t),$$

với $t=a^2+b^2$, $t\in(0;+\infty)$. Ta có

$$f'(t)=1-\frac{4}{t^2};\ f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\pm 2.$$

Lập bảng biến thiên hàm số $f(t)$ trên khoảng $(0;+\infty)$, tìm được $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(t)=4$, đạt được khi $t=2$. Từ đó tìm được GTNN của biểu thức M bằng 4, đạt được khi $a=b=1$. □

Nhận xét. 1) Đặt $a=x^2+y^2$, $b=2xy$, với x, y là các số thực dương cho trước. Ta có

Bài toán 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M_1=\frac{4\left((x^2+y^2)^4+16x^4y^4\right)}{(x^2+y^2)^2+4x^2y^2}-\frac{(x+y)^4}{2}+\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{1}{4x^2y^2},$$

trong đó x, y là các số thực dương.

2) Đặt $a=x+y$, $b=2z$, với x, y, z là các số thực dương cho trước. Ta có

Bài toán 2. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{4\left((x+y)^4+16z^4\right)}{(x+y)^2+4z^2}+\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{4z^2}$$
$$\geq 4+\frac{(x+y+2z)^2}{2}.$$

trong đó x, y, z là các số thực dương.

★**Thí dụ 2.** *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=2\ln(a+b)-\frac{1}{2}\ln 2(a^2+b^2)$$
$$-\frac{1}{4}\sqrt{2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}(a+b)^2,$$

trong đó a, b là các số thực dương thoả mãn $a^2+b^2\leq\frac{2}{9}$.

Lời giải. Ta có $a+b\leq\sqrt{2(a^2+b^2)}$

suy ra $\ln(a+b)\leq\ln\sqrt{2(a^2+b^2)}$

$$\Rightarrow -\ln(a+b)\geq -\ln\sqrt{2(a^2+b^2)}=-\frac{1}{2}\ln 2(a^2+b^2)$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq\sqrt{2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}\Rightarrow 4(a+b)\leq\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)^2.$$

$$\leq\sqrt{2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}(a+b)^2.$$

Do đó $P\geq\ln(a+b)-(a+b)=\ln t-t=f(t)$,

với $0<t=a+b\leq\sqrt{2(a^2+b^2)}\leq\frac{2}{3}$.

Lập bảng biến thiên hàm số $f(t)$ trên $\left(0;\frac{2}{3}\right]$,

tìm được $\max\limits_{t\in\left(0;\frac{2}{3}\right]} f(t)=\ln\frac{2}{3}-\frac{2}{3}$ đạt được khi

$t=\frac{2}{3}$. Từ đó tìm được GTLN của biểu thức P

bằng $\ln\frac{2}{3}-\frac{2}{3}$, đạt được khi $a=b=\frac{1}{3}$. □

Nhận xét. 1) Đặt $a=\sqrt{x^2+y^2}$, $b=\sqrt{2xy}$, với x, y là các số thực dương cho trước. Ta có

Bài toán 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P_1=2\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}\right)-\frac{1}{2}\ln 2(x+y)^2$$
$$-\frac{1}{4}\sqrt{2\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\right)}(x+y)^4$$

trong đó x, y là các số thực dương thoả mãn

$x+y\leq\frac{\sqrt{2}}{3}$.

3) Đặt $a=\sqrt{x+y}$, $b=\sqrt{2z}$, với x, y, z là các số dương cho trước. Ta có

Bài toán 4. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $x+y+2z\leq\frac{2}{9}$. Chứng minh rằng

$$2\ln\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{2z}\right)\geq\frac{1}{2}\ln 2(x+y+2z)$$
$$+\frac{1}{4}\sqrt{2\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{2z}\right)}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{2z}\right)^2+\ln\frac{2}{3}-\frac{2}{3}.$$

★**Thí dụ 3.** *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$N=-2(ab+bc+ca)^3+27a^2b^2c^2$$
$$-3(a^2+b^2+c^2)+6(ab+bc+ca)$$

trong đó a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=\sqrt{3}$.

Lời giải. Ta có

• $ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{ab.bc.ca}=3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

suy ra $27a^2b^2c^2\leq(ab+bc+ca)^3$;

• $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

suy ra $-3(a^2+b^2+c^2)\leq -3(ab+bc+ca)$.

Do đó $N\leq -(ab+bc+ca)^3+3(ab+bc+ca)$

$$=-t^3+3t=f(t),$$

với $0\leq t=ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}=1$.

Lập bảng biến thiên hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;1]$, tìm được $\max\limits_{t\in[0;1]} f(t)=2$, đạt được khi $t=1$. Từ đó GTLN của biểu thức P bằng 2, đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. □

Nhận xét. Ta có

$$a+b+c=\sqrt{3}\text{, suy ra } (a+b+c)^2=3$$

và $ab+bc+ca=\dfrac{3-(a^2+b^2+c^2)}{2}$.

Từ đó chúng ta có hai bài toán sau:

Bài toán 5. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$N_1=-4\left(3-(x^2+y^2+z^2)\right)^3+27x^2y^2z^2-6(x^2+y^2+z^2).$$

trong đó x, y, z là các số thực không âm thoả mãn $x+y+z=\sqrt{3}$.

Bài toán 6. Cho ba số thực không âm x, y, z thoả mãn $x+y+z=\sqrt{3}$. Chứng minh rằng

$$-6\sqrt{3}\left(\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right)^3+81\left(\frac{xyz}{x+y+x}\right)^2-6(x^2+y^2+z^2)\le 11.$$

★Thí dụ 4. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=5(a^2+b^2+c^2)-(a+b+\sqrt{2}c)^2-\sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}+c^2}.$$

trong đó a, b, c là ba số thực dương thoả mãn $(a+b)^2+2c^2\ge 2$.

Lời giải. Ta có $(a+b+\sqrt{2}c)^2\le 4(a^2+b^2+c^2)$

suy ra $-(a+b+\sqrt{2}c)^2\ge -4(a^2+b^2+c^2)$ (1)

$$\frac{(a+b)^2}{2}+c^2\le a^2+b^2+c^2$$

$$\Rightarrow -\sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}+c^2}\ge -\sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

$$P\ge a^2+b^2+c^2-\sqrt{a^2+b^2+c^2}=t-\sqrt{t}=f(t),$$

với $t=a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}+c^2\ge 1$ (gt).

Lập bảng biến thiên hàm số $f(t)$ trên $[1;+\infty)$, tìm được $\min\limits_{t\in[1;+\infty)} f(t)=0$ đạt được khi $t=1$.

Từ đó GTNN của biểu thức P bằng 0, đạt được khi $a=b=\dfrac{1}{2}$, $c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. □

Nhận xét. Với dãy bất đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2\overset{(4)}{\ge}\frac{(a+b)^2}{2}+c^2$$

$$\overset{(5)}{\ge}\frac{\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}+c\right)^2}{2}\overset{(6)}{\ge}\frac{\left(\sqrt{2ab}+c\right)^2}{2}\text{, ta có}$$

Bài toán 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P_1=5(x^2+y^2+z^2)-\frac{1}{2}(x+y+\sqrt{2}z)^2-(\sqrt{2xy}+z)^2-\sqrt{\frac{(x+y)^2}{2}+z^2}$$

trong đó x, y, z là các số không âm thoả mãn $\sqrt{2xy}+z\ge\sqrt{2}$.

Bài toán 8. Cho ba số thực không âm x, y, z thoả mãn $x+y+\sqrt{2}z\ge\sqrt{2}$. Chứng minh rằng

$$(x+y+\sqrt{2}z)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{(x+y)^2}{2}+z^2\right)+\frac{1}{4}\left(\sqrt{2xy}+z\right)^2+\sqrt{\frac{(x+y)^2}{2}+z^2}\le 5(x^2+y^2+z^2).$$

Hi vọng rằng với bốn thí dụ và tám bài toán phát triển thêm sẽ giúp cho các thí sinh thật sự quen thuộc và tự tin hơn khi gặp bài toán dạng này.

Để kết thúc bài viết, xin mời các bạn thử sức với hai bài toán sau:

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q=3(x^2+y^2+z^2)-(\sqrt{2xy}+z)^2-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(x+y)^2+z^2}{\frac{1}{2}z^2+xy+z\sqrt{2xy}}}$$

trong đó x, y, z là các số không âm thoả mãn $\sqrt{2xy}+z\ge\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

2. Cho ba số thực không âm x, y, z thoả mãn $x+y+\sqrt{2}.z\ge\dfrac{2}{3}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}\left(x+y+\sqrt{2}.z\right)^2+\frac{1}{2}(\sqrt{2xy}+z)^2+3\left(\frac{(x+y)^2}{2}+z^2\right)\le\frac{1}{4}+7(x^2+y^2+z^2).$$

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 5

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu 1 (2 *điểm*). Cho hàm số

$$y = \frac{x-5}{x-2} \ (C)$$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

2) Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại M cắt trục hoành tại A, cắt trục tung tại B thoả mãn $3OA = 4OB$.

Câu 2 (1 *điểm*). Giải phương trình

$$2\cos^3 x - 3\cos x + 2\sin x\cos^2 x + \sin x = 0.$$

Câu 3 (1 *điểm*). Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2+3x+1} + \sqrt{1-3x} = 2\sqrt{x^2+1}.$$

Câu 4 (1 *điểm*). Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin x dx}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

Câu 5 (1 *điểm*). Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, góc giữa AC' và đáy (ABC) là 60°. Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC' theo a.

Câu 6 (1 *điểm*). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 4(a+b+c)^2 + 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

trong đó a, b, c là các số thực dương.

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7a (1 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy cho elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $I(1; 2)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm I và cắt elip (E) tại hai điểm A, B sao cho I là trung điểm AB.

Câu 8a (1 *điểm*). Cho hai điểm $A(0; 0; -3)$, $B(2; 0; -1)$ và mặt phẳng

$$(P): 3x - 8y + 7z - 1 = 0.$$

Tìm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho MAB là tam giác vuông cân tại M.

Câu 9a (1 *điểm*). Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, biết rằng $|z - 2 + i| = \sqrt{2}|z + 1 - i|$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7b (1 *điểm*). Viết phương trình các cạnh hình vuông $ABCD$ biết rằng AB, CD lần lượt đi qua các điểm $P(2; 1)$ và $Q(3; 5)$, còn BC và AD lần lượt đi qua các điểm $R(0; 1)$ và $S(-3; -1)$.

Câu 8b (1 *điểm*). Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho đường thẳng (d): $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt cầu (S): $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d) và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Câu 9b (1 *điểm*). Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, biết rằng $|z-2| + |z+2| = 6$.

ĐÀO VĂN CHÁNH

(GV THPT Trần Quốc Tuấn, Phú Yên)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 4

Câu 1. 2) PT tiếp tuyến (d) với (H) tại điểm $x_0 \neq 1$ là $y = -\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-1}$.

Trường hợp 1. (d) đi qua trung điểm $I(1;\ 1)$ của AB. Khi đó PT(d): $y = -\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.

Trường hợp 2. $(d)//\ AB$ hoặc $d \equiv AB$. Khi đó PT (d): $y=-x+1$ hoặc (d): $y=-x+5$.

Vậy PT các tiếp tuyến thoả mãn đề bài là

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4};\ \ y=-x+1;\ \ y=-x+5.$$

Câu 2. ĐK $x \neq k\pi$. PT đã cho tương đương với

$$3\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)^2-(2+3\sqrt{2})\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)+2\sqrt{2}=0.$$

Đáp số. $x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 3. PT thứ nhất của hệ có dạng

$$x^3+x=(2y-1)^3+(2y-1) \qquad (1)$$

Hàm số $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $(1) \Leftrightarrow f(x)=f(2y-1) \Leftrightarrow x=2y-1$.

Hệ có hai nghiệm $(x;\ y)$ là $(1;\ 1)$; $(11;\ 6)$.

Câu 4. Ta có $I=\int_0^1 \frac{5^x\,dx}{(5^x-9)\sqrt{6.5^x-5}}$.

Đặt $t=\sqrt{6.5^x-5}$, khi đó

$$I=\frac{2}{\ln 5}.\int_1^5 \frac{dt}{t^2-49}=\frac{1}{7\ln 5}.\int_1^5\left(\frac{1}{t-7}-\frac{1}{t+7}\right)dt$$

$$=\frac{1}{7}\log_5\frac{2}{9}.$$

Câu 5. Giả sử $MN\cap AB=E$; $MN\cap BC=F$; $PE\cap AA_1=S$; $PF\cap CC_1=R$. Thiết diện cần tìm là ngũ giác $SMNRP$. Kẻ $SI\perp ME$, thì $\widehat{SIA}=\alpha$ là góc giữa (MNP) và $(ABCD)$.

Khi đó $S_{SMNRP}=\frac{S_{AMNCB}}{\cos\alpha}=\frac{S_{ABCD}-S_{DMN}}{\cos\alpha}$

$$=\frac{11a^2\sqrt{373}}{192}\ \left(\text{với } \cos\alpha=\frac{IA}{SI}=\frac{16}{\sqrt{373}}\right).$$

Câu 6. Từ BĐT Cauchy ta có

$$P\geq 3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{(xyz)^2}}+\sqrt[3]{(xyz)^4}\right);$$

$$\sqrt[3]{xyz}\leq\frac{x+y+z}{3}\leq\frac{1}{2}.$$

Đặt $t=\sqrt[3]{xyz}$ $(0<t\leq\frac{1}{2})$ thì $P\geq 3\left(t^4+\frac{1}{t^2}\right)$.

Xét hàm số $f(t)=t^4+\frac{1}{t^2}$ trên $\left(0;\ \frac{1}{2}\right]$, ta thấy hàm này nghịch biến trên $\left(0;\ \frac{1}{2}\right]$.

Do đó $f(t)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{65}{16}$, suy ra

$$\min P=\frac{195}{16}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{2}.$$

Câu 7a. Ta có $r=\frac{S_{F_1MF_2}}{p}=\frac{MF_1.MF_2}{2p}=2$ (p là nửa chu vi tam giác F_1MF_2).

Câu 8a. Điểm $A_1(\sqrt{3};-1;\ 1)$ có hình chiếu xuống trục Oz là $I(0;\ 0;\ 1)$. Tìm được $A_1I=2$ $\Rightarrow AI=\sqrt{3}$. Xét tam giác vuông AIC, tính được $AC=BC=AB=2 \Rightarrow BI=CI=1$ $\Rightarrow C(0;\ 0;\ 2)$. Vì $BI=1$, nên $B(0;\ 0;\ 0)$.

Mặt phẳng (ABC) có PT dạng $ax+by=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$. Từ $d(A_1;\ (ABC))=1$, tìm được hai mặt phẳng thoả mãn đề bài có PT là $y=0$ và $\sqrt{3}.x+y=0$.

Câu 9a. Gọi số cần lập có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ và $A=\{0,1,2,3,4,5\}$. Từ giả thiết đề bài

$$a_1+a_2+a_3=a_4+a_5+a_6+3$$

$\Rightarrow 2(a_1+a_2+a_3)=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+3=18$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_9=9$. Xét các tập con

$A_1=\{0;\ 4;\ 5\}$, $A_2=\{1;\ 3;\ 5\}$, $A_3=\{2;\ 3;\ 4\}$.

• Xét các số thoả mãn bài toán có a_1, a_2, a_3 thuộc A_1 thì $\{a_4;\ a_5;\ a_6\}=\{1;\ 2;\ 3\}$.

(Xem tiếp trang 15)

DÃY SỐ VỚI SỐ CHÍNH PHƯƠNG

VŨ THỊ VÂN
(GV THPT chuyên Bắc Giang)

Dãy số là một nội dung quan trọng trong chương trình toán THPT chuyên và đặc biệt dãy số luôn có mặt trong đề thi chọn học sinh giỏi. Khi nghiên cứu về dãy số, chúng ta sẽ thấy, dãy số có rất nhiều điều thú vị. Bài viết này, xin được trình bày một khám phá nhỏ về dãy số, đó là cách xây dựng dãy số chính phương và xây dựng số chính phương trong dãy số từ một dãy số khởi đầu.

1. XÂY DỰNG DÃY SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Xét dãy số khởi đầu (x_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_0 = a; x_1 = b; \\ x_{n+2} = mx_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

trong đó a, b, m là các số nguyên dương cho trước.

• Trước hết, nhận thấy dãy số này có các tính chất sau:

1) $x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2 = x_{n+1}x_{n-1} - x_n^2 = ... = x_2x_0 - x_1^2$
$= abm - a^2 - b^2, \forall n \in \mathbb{N}.$

2) $mx_{n+1}x_n = x_{n+1}^2 + x_n^2 - a^2 - b^2 + abm, \forall n \in \mathbb{N}.$

Thật vậy, ta có

1) $x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2 = (mx_{n+1} - x_n)x_n - x_{n+1}^2$
$= mx_{n+1}x_n - x_{n+1}^2 - x_n^2 = x_{n+1}(mx_n - x_{n+1}) - x_n^2$
$= x_{n+1}x_{n-1} - x_n^2, \forall n \in \mathbb{N}.$

Tương tự có

$x_{n+1}x_{n-1} - x_n^2 = x_nx_{n-2} - x_{n-1}^2 = ...$
$= x_2x_0 - x_1^2 = (mx_1 - x_0)x_0 - x_1^2 = abm - a^2 - b^2.$

2) $x_{n+1}^2 + x_n^2 - mx_{n+1}x_n = x_{n+1}^2 + x_n(x_n - mx_{n+1})$
$= x_{n+1}^2 - x_nx_{n+2} = a^2 + b^2 - abm.$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

• Bây giờ, ta xây dựng dãy số với các số hạng là số chính phương.

Dựa vào công thức truy hồi của dãy số khởi đầu và áp dụng tính chất 2), ta có

$x_{n+2}^2 = (mx_{n+1} - x_n)^2$
$= m^2x_{n+1}^2 + x_n^2 - 2mx_{n+1}x_n$
$= m^2x_{n+1}^2 + x_n^2 - 2(x_{n+1}^2 + x_n^2 + abm - a^2 - b^2)$
$= (m^2 - 2)x_{n+1}^2 - x_n^2 + 2(a^2 + b^2 - abm).$

Đặt $a_n = x_n^2$, ta được dãy số (a_n) xác định bởi

$$\begin{cases} a_0 = a^2;\ a_1 = b^2, \\ a_{n+2} = (m^2 - 2)a_{n+1} - a_n + 2(a^2 + b^2 - abm), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (*)$$

Rõ ràng dãy số (a_n) có các số hạng đều là số chính phương (gọi là dãy số chính phương). Bằng cách cho a, b, m những giá trị cụ thể vào (*) ta có thể nhận được hàng loạt dãy số chính phương. Ta đưa ra một vài thí dụ minh hoạ sau đây.

★**Thí dụ 1.** *Cho dãy số (a_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} a_0 = 1; a_1 = 1 \\ a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng a_n là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Nhận xét. Trước hết ta thấy dãy số này có được từ công thức (*) khi cho $a = b = 1$, $m = 3$.

Theo cách xây dựng trên, ta biết $a_n = x_n^2$ với dãy (x_n) sao cho $\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 1 \\ x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Lời giải. Xét dãy số (x_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 1 \\ x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Hiển nhiên rằng $x_n \in \mathbb{N}$ với $\forall n \in \mathbb{N}$. Ta có

$$x_{n+1}^2 + x_n^2 - 3x_{n+1}x_n = x_{n+1}^2 + x_n(x_n - 3x_{n+1})$$
$$= x_{n+1}^2 - x_nx_{n+2}.$$

và $x_{n+1}^2 + x_n^2 - 3x_{n+1}x_n = x_{n+1}(x_{n+1} - 3x_n) + x_n^2$
$= x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1}$. Suy ra
$x_{n+1}^2 - x_n x_{n+2} = x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1} = ... = x_1^2 - x_2 x_0 = -1.$
Do đó $x_{n+1}^2 + x_n^2 - 3x_{n+1}x_n = -1, \forall n \in \mathbb{N}$ (1)

Ta sẽ chứng minh $a_n = x_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$ (2) bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy, rõ ràng với $n = 0$, $n = 1$ thì (2) đúng.

Giả sử (2) đúng đến $n = k+1$, $(k \in \mathbb{N})$, tức là $a_n = x_n^2, n = 1, 2, ..., k+1$.

Ta sẽ chứng minh (2) đúng với $n = k+2$, nghĩa là chứng minh $a_{k+2} = x_{k+2}^2$.

Thật vậy, ta có

$a_{k+2} = 7a_{k+1} - a_k - 2 = 7x_{k+1}^2 - x_k^2 - 2$
$= 7x_{k+1}^2 - x_k^2 + 2(x_{k+1}^2 + x_k^2 - 3x_{k+1}x_k)$
$= 9x_{k+1}^2 - 6x_{k+1}x_k + x_k^2 = (3x_{k+1} - x_k)^2 = x_{k+2}^2.$

Ta được điều phải chứng minh. Vậy a_n là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}$. □

Từ đây, tất cả những dãy số chính phương được xây dựng từ công thức (*), ta có thể trình bày lời giải như trên.

Ta lại tiếp tục có những thí dụ tiếp theo như sau và việc trình bày lời giải xin dành cho độc giả.

★Thí dụ 2. *Cho dãy số (a_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} a_0 = 1; a_1 = 1 \\ a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n - 4, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng a_n là số chính phương.

★Thí dụ 3. *Cho dãy số (a_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} a_0 = 1;\ a_1 = 16 \\ a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng a_n là số chính phương.

Độc giả có thể tự xây dựng được hàng loạt những dãy số chính phương bằng cách làm tương tự.

2. XÂY DỰNG SỐ CHÍNH PHƯƠNG TRONG DÃY SỐ

Cũng vẫn từ tính chất 2 của dãy số khởi đầu

$$mx_{n+1}x_n = x_{n+1}^2 + x_n^2 - a^2 - b^2 + abm.$$

Ta có thể biến đổi thành

$(m+2)x_{n+1}x_n = x_{n+1}^2 + x_n^2 + 2x_{n+1}x_n - a^2 - b^2 + abm$
$= (x_{n+1} + x_n)^2 - a^2 - b^2 + abm$
$\Rightarrow (m+2)x_{n+1}x_n + a^2 + b^2 - abm = (x_{n+1} + x_n)^2.$

Hoặc

$(m-2)x_{n+1}x_n = x_{n+1}^2 + x_n^2 - 2x_{n+1}x_n - a^2 - b^2 + abm$
$= (x_{n+1} - x_n)^2 - a^2 - b^2 + abm$
$\Rightarrow (m-2)x_{n+1}x_n + a^2 + b^2 - abm = (x_{n+1} - x_n)^2.$

Như vậy ta luôn có

$$(m+2)x_{n+1}x_n + a^2 + b^2 - abm$$

và $$(m-2)x_{n+1}x_n + a^2 + b^2 - abm$$

là các số chính phương.

Cho *a, b, m* những giá trị nguyên dương tuỳ ý, ta được các bài toán tương ứng về số chính phương trong dãy số. Chẳng hạn

• Với $a = 1$, $b = 1$, $m = 1$, ta có bài toán

★Thí dụ 4. *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 1 \\ x_{n+2} = x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $3x_{n+1}x_n + 1$, $-x_{n+1}x_n + 1$ là các số chính phương.

• Với $a = 1$, $b = 1$, $m = 3$, ta có bài toán

★Thí dụ 5. *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 1 \\ x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $5x_{n+1}x_n - 1$ là số chính phương.

• Với $a = 1$, $b = 1$, $m = 2013$, ta có bài toán

★Thí dụ 6. *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 1 \\ x_{n+2} = 2013x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $2015x_{n+1}x_n - 2011$, $2011x_{n+1}x_n - 2011$ là các số chính phương.

• Với $a = 1$, $b = 1$, $m = 5$, ta có bài toán

★Thí dụ 7. *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 1 \\ x_{n+2} = 5x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $7x_{n+1}x_n - 3$, $3x_{n+1}x_n - 3$ là các số chính phương.

• Với $a = 1, b = 1, m = 4$, ta có bài toán

★Thí dụ 8. *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 1 \\ x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $6x_{n+1}x_n - 2$, $2x_{n+1}x_n - 2$ là các số chính phương.

• Với $a = 1, b = 4, m = 4$, ta có bài toán

★Thí dụ 9. *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 4 \\ x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $6x_{n+1}x_n + 1$, $2x_{n+1}x_n + 1$ là các số chính phương.

• Với $a = 20, b = 30, m = 3$, ta có bài toán

★Thí dụ 10. *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 = 20; x_1 = 30 \\ x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $5x_{n+1}x_n - 500$, $x_{n+1}x_n - 500$ là các số chính phương.

Lời giải. Từ công thức truy hồi của (x_n) ta có

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1}^2 + x_n^2 - 3x_{n+1}x_n = x_{n+1}^2 + x_n(x_n - 3x_{n+1}) = x_{n+1}^2 - x_n x_{n+2}.$$

và $x_{n+1}^2 + x_n^2 - 3x_{n+1}x_n = x_{n+1}(x_{n+1} - 3x_n) + x_n^2 = x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1}$.

Suy ra $x_{n+1}^2 - x_n x_{n+2} = x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1} = ... = x_1^2 - x_0 x_2 = -500$

$\Rightarrow x_{n+1}^2 + x_n^2 - 3x_{n+1}x_n = -500$

$\Rightarrow 3x_{n+1}x_n - 500 = x_{n+1}^2 + x_n^2$

$\Rightarrow 5x_{n+1}x_n - 500 = (x_{n+1} + x_n)^2$

và $x_{n+1}x_n - 500 = (x_{n+1} - x_n)^2$.

Như vậy, ta được $5x_{n+1}x_n - 500$ và $x_{n+1}x_n - 500$ là các số chính phương. □

Lời giải các thí dụ 4, 5, 6, 7, 8, 9 trình bày tương tự như lời giải thí dụ 10.

Nhận xét. Từ thí dụ 10 ta có thể xây dựng bài toán như sau.

★Thí dụ 11. (Balkan MO năm 2002)

Cho dãy số (x_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} x_0 = 20; x_1 = 30 \\ x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Tìm n sao cho $5x_{n+1}x_n + 1$ là số chính phương.

Lời giải. Theo thí dụ 10 ta có $5x_{n+1}x_n - 500$ là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giả sử n là số thoả mãn $5x_{n+1}x_n + 1$ là số chính phương.

Đặt $5x_{n+1}x_n + 1 = a^2$, $5x_{n+1}x_n - 500 = b^2$, với $a, b \in \mathbb{N}, a > b$. Ta có

$a^2 - b^2 = 501 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 1.501 = 3.167$

Tìm được $\begin{cases} a = 251 \\ b = 250 \end{cases}$; $\begin{cases} a = 85 \\ b = 82. \end{cases}$

• Với $a = 251; b = 250$ thì $x_n x_{n+1} = 12600 \Rightarrow n = 2$.

($x_2 = 70, x_3 = 180, x_2x_3 = 12600, 5x_2x_3 + 1 = 251^2$)

• Với $a = 85; b = 82$ thì $x_n x_{n+1} = \dfrac{7224}{5}$ (loại).

Độc giả có thể tự sáng tác ra nhiều bài toán tương tự như trên.

BÀI TẬP

1. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 5 \\ a_{n+2} = 98a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\dfrac{a_n + 1}{6}$ là số chính phương.

2. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = -1 \\ a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n + 16, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $2a_n + 3$ là số chính phương.

3. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 2004 \\ a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 3978, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\dfrac{a_n + 10}{2014}$ là số chính phương.

4. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} a_0 = 1; a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_{n+2}a_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

a) a_n là số tự nhiên với mọi số tự nhiên n.

b) $2a_n a_{n+1} + 1$ là số chính phương với mọi số tự nhiên n.

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

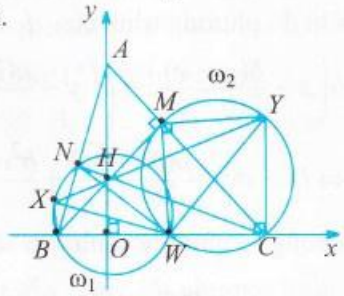
Trong kì thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO) năm 2013 tại Colombia có bài toán hình học phẳng với nội dung như sau:

Bài toán 1. *Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm H. Cho W là một điểm tùy ý trên cạnh BC, khác với các điểm B và C. Các điểm M và N tương ứng là chân các đường cao hạ từ B và C. Kí hiệu ω_1 là đường tròn ngoại tiếp tam giác BWN và gọi X là điểm trên ω_1 sao cho WX là đường kính của ω_1. Tương tự, kí hiệu ω_2 là đường tròn ngoại tiếp tam giác CWM và gọi Y là điểm trên ω_2 sao cho WY là đường kính của ω_2.*

Chứng minh rằng các điểm X, Y và H thẳng hàng.

Có nhiều lời giải cho bài toán này. Sau đây là phương án sử dụng phương pháp toạ độ để giải quyết bài toán đó.

Lời giải. Gọi O là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A. Chọn hệ trục toạ độ Oxy có điểm gốc là O; điểm A thuộc tia Oy; điểm C thuộc tia Ox và điểm B thuộc tia đối của tia Ox (h.1).



Hình 1

Giả sử $A(0;a), B(b;0), C(c;0)$, $W(m;0)$ $(a>0, c>0, b<0, b<m<c)$. Ta có $\overrightarrow{AC}=(c;-a)$ là VTCP của AC. Suy ra $\vec{n}=(a;c)$ là VTPT của AC.

Do đó PT AC: $a(x-c)+cy=0$, hay

$$AC:\ ax+cy-ac=0.$$

Vì $\overrightarrow{AC}$ là VTPT của đường thẳng BM nên PT $BM: c(x-b)-ay=0$ hay BM: $cx-ay-bc=0$. Từ đó ta thấy

$$H\left(0;-\frac{bc}{a}\right) \text{ và } M\left(\frac{a^2c+bc^2}{a^2+c^2};\frac{ac^2-abc}{a^2+c^2}\right).$$

Giả sử $Y(x_1;\ y_1)$, vì WY là đường kính của ω_2 nên $\widehat{WCY}=90°$ và $\widehat{YMW}=90°$. Suy ra $CY\perp WC$ và $MY\perp MW \Rightarrow x_1=c$. Ta có

$$\overrightarrow{MY}=\left(\frac{c^3-bc^2}{a^2+c^2};\frac{y_1(a^2+c^2)-ac^2+abc}{a^2+c^2}\right);$$

$$\overrightarrow{MW}=\left(\frac{m(a^2+c^2)-a^2c-bc^2}{a^2+c^2};\frac{abc-ac^2}{a^2+c^2}\right).$$

Từ $\overrightarrow{MY}.\overrightarrow{MW}=0$, suy ra

$$(c^3-bc^2)\left(m(a^2+c^2)-a^2c-bc^2\right)$$
$$+(abc-ac^2)\left(y_1(a^2+c^2)-ac^2+abc\right)=0.$$

Suy ra

$$y_1(a^2+c^2)a(b-c)=(b-c)(mc-bc)(a^2+c^2)$$

$\Rightarrow y_1=\dfrac{mc-bc}{a}$. Vậy $Y\left(c;\dfrac{mc-bc}{a}\right)$.

Tương tự có $X\left(b;\dfrac{mb-bc}{a}\right)$. Suy ra

$$\overrightarrow{HY}=\left(c;\frac{mc}{a}\right),\overrightarrow{HX}=\left(b;\frac{mb}{a}\right)\Rightarrow\overrightarrow{HY}=\frac{c}{b}\overrightarrow{HX}.$$

Nghĩa là các điểm X, Y và H thẳng hàng. □

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và AB < AC. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Gọi E, F lần lượt là chân các đường cao của tam giác ABC kẻ từ B và C. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng EF và BC. Chứng minh rằng HK vuông góc với AM.*

Lời giải. Gọi O là chân đường vuông góc hạ từ A đến đường thẳng BC. Chọn hệ trục toạ độ Oxy có điểm gốc là O sao cho điểm A thuộc tia Oy, điểm C thuộc tia Ox và điểm B thuộc tia đối của tia Ox (h.2). Giả sử

$A(0;a), B(b;0), C(c;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (c;-a)$

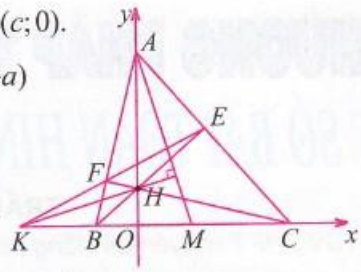
nên $\vec{n} = (a;c)$

là VTPT của đường thẳng AC.

Suy ra

$AC: a(x-c)+cy=0$

nên $ax+cy-ac=0$.



Hình 2

Ta có $\overrightarrow{AC} = (c;-a)$ là VTPT của đường thẳng BE.

Khi đó $BE: c(x-b)-ay=0 \Leftrightarrow cx-ay-bc=0$.

Từ đó $E\left(\dfrac{a^2c+bc^2}{a^2+c^2}; \dfrac{ac^2-abc}{a^2+c^2}\right)$. Tương tự

$F\left(\dfrac{a^2b+cb^2}{a^2+b^2}; \dfrac{ab^2-abc}{a^2+b^2}\right)$. Ta có $H\left(0; -\dfrac{bc}{a}\right)$

và $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} \dfrac{(a^2-bc)(a^2+bc)(b-c)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}; \\ \dfrac{a(a^2+bc)(b-c)(b+c)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} \end{pmatrix}$

Suy ra $\vec{n_1} = (ab+ac; bc-a^2)$ là VTPT của EF.

Từ đó phương trình EF có dạng

$$EF: (ab+ac)\left(x-\frac{a^2c+bc^2}{a^2+c^2}\right)$$

$$+(bc-a^2)\left(y-\frac{ac^2-abc}{a^2+c^2}\right)=0, \text{ hay}$$

$$EF: (ab+ac)(a^2+c^2)x+(bc-a^2)(a^2+c^2)y$$
$$-(ab+ac)(a^2c+bc^2)-(ac^2-abc)(bc-a^2)=0.$$

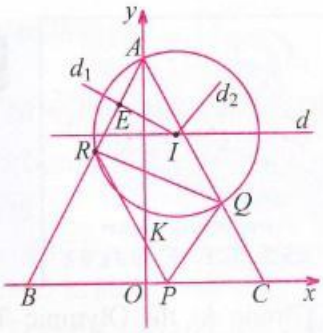
Từ đó $K\left(\dfrac{2bc}{b+c};0\right) \Rightarrow \overrightarrow{HK} = \left(\dfrac{2bc}{b+c}; \dfrac{bc}{a}\right)$.

Mặt khác $\overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{b+c}{2}; -a\right)$, nên $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{AM}=0$.

Vậy $HK \perp AM$. □

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC cân tại A. Điểm P di động trên cạnh BC (P khác B và C). Đường thẳng đi qua P song song với AC cắt AB tại R. Đường thẳng đi qua P song song với AB cắt AC tại Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ARQ luôn đi qua một điểm cố định khác A.*

Lời giải. Gọi O là chân đường vuông góc hạ từ A đến đường thẳng BC. Chọn hệ trục toạ độ Oxy có điểm gốc là O sao cho điểm A thuộc tia Oy, điểm C thuộc tia Ox và điểm B thuộc tia đối của tia Ox (h.3). Giả sử $A(0;a), C(c;0), B(b;0), P(p;0)$ $(a>0, c>0, b<0, b<p<c)$.



Hình 3

Khi đó $b=-c$. Từ $\overrightarrow{AB} = (b;-a) \Rightarrow \vec{n_1} = (a;b)$ là VTPT của đường thẳng AB. Suy ra

$AB: a(x-b)+by=0$ hay $AB: ax+by=ab$.

Tương tự $\vec{n_2} = (a;c)$ là VTPT của đường thẳng $AC \Rightarrow \vec{n_2} = (a;c)$ là VTPT của đường thẳng PR.

Suy ra $PR: a(x-p)+cy=0 \Leftrightarrow ax+cy=ap$.

Từ đó $R\left(\dfrac{b(p-c)}{b-c}; \dfrac{a(b-p)}{b-c}\right)$. Gọi E là trung điểm của AR, ta có $E\left(\dfrac{b(p-c)}{2(b-c)}; \dfrac{a(2b-p-c)}{2(b-c)}\right)$.

Gọi d_1 là đường trung trực của đoạn thẳng AR và d_2 là đường trung trực của đoạn thẳng AQ.

Khi đó phương trình của d_1 là

$$b\left(x-\frac{b(p-c)}{2(b-c)}\right)-a\left(y-\frac{a(2b-p-c)}{2(b-c)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow bx-ay-\frac{p(a^2+b^2)}{2(b-c)}+\frac{b^2c+a^2(2b-c)}{2(b-c)}=0.$$

Tương tự phương trình của d_2 là

$$cx-ay-\frac{p(a^2+c^2)}{2(c-b)}+\frac{c^2b+a^2(2c-b)}{2(c-b)}=0.$$

Gọi I là giao điểm của d_1 và d_2. Khi đó $I\left(\dfrac{p(a^2+c^2)}{4c^2}; \dfrac{3a}{4}-\dfrac{c^2}{4a}\right)$ và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ARQ. Suy ra I thuộc đường thẳng d cố định có PT $y=\dfrac{3a}{4}-\dfrac{c^2}{4a}$.

Hiển nhiên $A \notin d$. Gọi K là điểm đối xứng

với điểm A qua đường thẳng d. Khi đó điểm K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ARQ và K là điểm cố định ($K \in Oy$). Mặt khác $K \neq A$ (vì $A \notin d$). Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ARQ luôn đi qua một điểm cố định khác A. □

BÀI TẬP

1. (VMO - 2008) Cho tam giác ABC. Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Cho đường thẳng d vuông góc với AD. Xét điểm M nằm trên d. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của MB và MC. Đường thẳng đi qua E và vuông góc với d cắt đường thẳng AB tại P. Đường thẳng đi qua F và vuông góc với d cắt đường thẳng AC tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đường thẳng d.

2. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là giao điểm của AC và BD. Một đường thẳng đi qua A cắt cạnh BC tại M (M khác B và C) và cắt đường thẳng CD tại N. Gọi K là giao điểm của EM và BN. Chứng minh rằng CK vuông góc với BN.

3. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là trung điểm của cạnh BC. Điểm M di động trên cạnh AB. Gọi N, P lần lượt là giao điểm của MD, MC với AE. Gọi H là giao điểm của NC và DP. Chứng minh rằng điểm H luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Điểm M di động trên đường thẳng BC (M khác B và C) Đường trung trực của đoạn thẳng MB cắt đường thẳng AB tại E. Đường trung trực của đoạn thẳng MC cắt đường thẳng AC tại F. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M vuông góc với đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

HƯỚNG DẪN GIẢI... *(Tiếp trang 9)*

Có 1 cách chọn $a_6 = 2$; có 2 cách chọn $a_1 \in \{4; 5\}$; có 2! cách chọn a_2, a_3 từ hai phần tử thuộc tập $A_1 \setminus \{a_1\}$; có 2! cách chọn a_4, a_5 từ hai phần tử của tập $\{1; 3\}$. Trường hợp này có 1.2.2!.2! = 8 (số).

• Xét các số thoả mãn đề bài có a_1, a_2, a_3 thuộc A_2 thì $\{a_4; a_5; a_6\} = \{0; 2; 4\}$.

Có 3! cách lập $\overline{a_1a_2a_3}$; có 3! cách lập $\overline{a_4a_5a_6}$, trường hợp này có 3!.3! = 36 (số).

• Xét các số thoả mãn đề bài có a_1, a_2, a_3 thuộc A_3 thì $\{a_4; a_5; a_6\} = \{0; 1; 5\}$. Có 3! cách lập $\overline{a_1a_2a_3}$; có 1 cách chọn $a_6 = 0$; có 2! cách chọn a_4; a_5 từ 2 phần tử của tập $\{1; 5\}$. Trường hợp này có 3!.2! = 12 (số). Vậy số các số lập được là 8 + 36 + 12 = 56 (số).

Câu 7b. PT các đường thẳng chứa các cạnh hình vuông là

$$7x + y + 30 = 0;\ x - 7y - 10 = 0;$$
$$x - 7y + 40 = 0;\ 7x + y - 20 = 0.$$

Câu 8b. Chú ý rằng $AB \parallel (P)$. Với $M \in (P)$, kẻ $MH \perp AB$, $HI \perp (P)$ ($I \in P$) thì $HI = d(A, (P))$. Vậy $MH \geq d(A, (P))$.

Vì $S_{MAB} = \frac{1}{2}MH.AB$, nên S_{MAB} nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MH nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv I$, hay $M \in (Q)$, với (Q) chứa AB và $(Q) \perp (P)$. Mà $M \in (P)$ nên $M \in (\Delta)$, với $\Delta = (P) \cap (Q)$ cố định. PT tham số của đường thẳng (Δ) là

$$\begin{cases} x = \dfrac{43}{9} + t \\ y = \dfrac{8}{9} \\ z = -\dfrac{7}{9} + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 9b. Từ giả thiết có $\overrightarrow{CA}(3; -\sqrt{3})$; $\overrightarrow{CB}(1; -\sqrt{3})$; $\overrightarrow{DA}(1; -2-\sqrt{3})$; $\overrightarrow{DB}(-1; -2-\sqrt{3})$.

Ta có $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{CA.CB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{ACB} = 30^\circ$;

$\cos\widehat{ADB} = \dfrac{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}}{DA.DB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{ADB} = 30^\circ$.

Lại có $y_A = y_B = -3 - \sqrt{3} \Rightarrow AB // (Ox)$.

Vì $y_A = y_B < y_C < y_D$ nên C, D nằm cùng phía của AB. Vậy tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/439 (Lớp 6). Cho số $\overline{155*710*4*16}$. Hỏi có thể thay ba dấu * bởi ba chữ số phân biệt nào trong các chữ số từ 1 đến 9 để số đó luôn chia hết cho 396?

TRƯƠNG QUANG AN
(GV THCS Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài T2/439 (Lớp 7). Về phía ngoài của tam giác ABC, dựng tam giác XBC cân tại X có góc BXC bằng 120° và các tam giác YCA, ZAB đều. Chứng minh XA vuông góc với YZ.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài T3/439. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn điều kiện $(x^2-9y^2)^2=33y+16$.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc)

Bài T4/439. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 6(1-x)^2=\dfrac{1}{y} \\ 6(1-y)^2=\dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

VŨ VĂN LIÊM
(GV THPT Hồng Đức, Mỹ Hào, Hưng Yên)

Bài T5/439. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và một điểm C nằm trên nửa đường tròn đó. Kẻ CH vuông góc với AB (H khác O). Hai điểm E, F thay đổi trên nửa đường tròn sao cho $\widehat{CHE}=\widehat{CHF}$. Chứng minh đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

THÂN VĂN CHƯƠNG
(GV THCS Võ Như Hưng, Điện Bàn, Quảng Nam)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/439. Giải phương trình

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}=\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}}}.$$

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du 1, Tiên Du, Bắc Ninh)

Bài T7/439. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x^2=(\sqrt{x^2+1}+1)(x^2-y^3+3y-2) \\ (x^2+y^2)^2+1=x^2+2y. \end{cases}$$

PHẠM KIM CHUNG
(GV THPT Đặng Thúc Hứa, Thanh Chương, Nghệ An)

Bài T8/439. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; R và r lần lượt là bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi S là diện tích tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{R}{r}\ge\max\left\{\frac{1}{2};\sqrt{\frac{ab^3+bc^3+ca^3}{4S^2}};\sqrt{\frac{a^3b+b^3c+c^3a}{4S^2}}\right\}.$$

LÝ VĂN CÔNG
(GV THPT BC Thanh Hà, Hải Dương)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/439. Tìm tất cả các số nguyên dương lẻ n sao cho $15^n + 1$ chia hết cho n.

TRẦN NAM DŨNG
(GV ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T10/439. Tìm tất cả các cặp hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y\in\mathbb{R}$ ta có $f(x+g(y))=x.f(y)-y.g(x)+g(x)$.

NGUYỄN PHÚ SƠN
(GV THPT Yên Lạc 1, Vĩnh Phúc)

Bài T11/439. Có n học sinh ($n\ge 2$) đứng thành hàng dọc. Cứ mỗi lần thầy giáo thổi còi thì có đúng hai học sinh đổi chỗ cho nhau. Hỏi sau một số lẻ lần thầy giáo thổi còi, ta có thể thấy tất cả các học sinh đều đứng trở lại đúng vị trí ban đầu của mình hay không?

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Bài T12/439. Cho tam giác nhọn ABC và đường cao AH ($H\in BC$). Một điểm P di chuyển trên đoạn AH. Các điểm E, F lần lượt là hình chiếu của P trên AB, AC.

a) Chứng minh bốn điểm B, E, F, C cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi O' là tâm của đường tròn đi qua B, E, F, C. Chứng minh rằng PO' luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển trên đoạn AH.

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/439. Một thanh đồng chất thiết diện đều có chiều dài l, có khối lượng riêng ρ_0, nổi thẳng đứng trong hai chất lỏng khác nhau không trộn lẫn, có khối lượng riêng ρ_1 và ρ_2 ($\rho_1 < \rho_0 < \rho_2$). Một phần thanh nằm trong chất lỏng có khối lượng riêng ρ_1, đầu trên của thanh ngang mặt thoáng của chất lỏng đó; phần còn lại nằm trong chất lỏng kia.

a) Tính công cần thực hiện để nhấn chìm thanh vào trong chất lỏng thứ hai (ρ_2).

b) Xác định chu kì dao động nhỏ của thanh theo phương thẳng đứng.

TRẦN KHÁNH HẢI
(GV THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế)

Bài L2/439. Treo bốn quả cầu nhỏ giống hệt nhau vào một điểm O bằng bốn sợi dây mảnh, cách điện, có chiều dài l. Mỗi quả cầu có khối lượng m và điện tích q. Khi cân bằng, bốn điện tích nằm tại bốn đỉnh của hình vuông $ABCD$ có cạnh dài l.

a) Tính lực điện do ba điện tích đặt tại A, B, D tác dụng lên điện tích đặt tại C theo q, l và hằng số điện k.

b) Tính khối lượng m của mỗi quả cầu theo q, l và gia tốc trọng trường g.

Áp dụng bằng số:

$q = 3.10^{-7}$C; $l = 20$cm;

$g = 10$ m/s^2; $k = 9.10^9$ Nm^2/C^2.

HOÀNG CÔNG MINH
(GV THPT Khoái Châu, Hưng Yên)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/439 (For 6th grade). Find all possible ways of inserting three distinct digits into the positions represented by a star in $\overline{155*710*4*16}$ so that the resulting number is divisible by 396.

T2/439 (For 7th grade). The triangles XBC, YCA and ZAB are constructed externally on the sides of a triangle ABC such that triangle XBC is isosceles with angle BXC equals 120° and YCA, ZAB are both equilateral. Prove that XA is perpendicular to YZ.

T3/439. Find all positive integer solutions x, y of the equation $(x^2 - 9y^2)^2 = 33y + 16$.

T4/439. Solve the following system of equations

$$\begin{cases} 6(1-x)^2 = \dfrac{1}{y} \\ 6(1-y)^2 = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

T5/439. Point C lies on a half-circle (O) with diameter $AB = 2R$, CH is the altitude from C to AB (H differs from O). The points E, F move on the half-circle such that $\widehat{CHE} = \widehat{CHF}$. Prove that the line EF always passes through a fixed point.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/439. Solve for x

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}} = \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}}}.$$

T7/439. Solve the following system of equations

$$\begin{cases} 4x^2 = (\sqrt{x^2+1}+1)(x^2 - y^3 + 3y - 2) \\ (x^2+y^2)^2 + 1 = x^2 + 2y. \end{cases}$$

T8/439. Let $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ be the side lengths of a triangle ABC; R and r denote its circumradius and inradius respectively. If S is the area of triangle ABC, prove that

$$\frac{R}{r} \geq \max\left\{\frac{1}{2}; \sqrt{\frac{ab^3+bc^3+ca^3}{4S^2}}; \sqrt{\frac{a^3b+b^3c+c^3a}{4S^2}}\right\}.$$

(Xem tiếp trang 27)

★Bài T1/435. (Lớp 6) *Số $s=\overline{3...3}^2+\overline{5...54...4}^2$ viết trong hệ thập phân có n chữ số 3, $n-1$ chữ số 5 và n chữ số 4. Biết rằng $s=r^2$, hãy tìm cách viết của số r.*

Lời giải. Đặt $a=\underbrace{\overline{3...3}}_{n}$, $b=\underbrace{\overline{5...5}}_{n-1}\underbrace{\overline{4...4}}_{n}$. Ta có

$$a^2=\underbrace{\overline{3...3}}_{n}^2=9.\underbrace{\overline{1...1}}_{n}^2=\underbrace{\overline{9...9}}_{n}.\underbrace{\overline{1...1}}_{n}=(10^n-1)\underbrace{\overline{1...1}}_{n}$$

$$=\underbrace{\overline{1...1}}_{n}\underbrace{\overline{0...0}}_{n}-\underbrace{\overline{1...1}}_{n}=\underbrace{\overline{1...1}}_{n-1}0\underbrace{\overline{8...8}}_{n-1}9=2b+1$$

$$s=a^2+b^2=b^2+2b+1=(b+1)^2=r^2.$$

Vậy $r=b+1=\underbrace{\overline{5...5}}_{n-1}\underbrace{\overline{4...4}}_{n}+1=\underbrace{\overline{5...5}}_{n-1}\underbrace{\overline{4...4}}_{n-1}5$. □

➢**Nhận xét.** 1) Đề bài in nhầm là "$n+1$ chữ số 3", lúc đó số $s=a^2+b^2$ không là số chính phương. Xin sửa lại là "n chữ số 3".

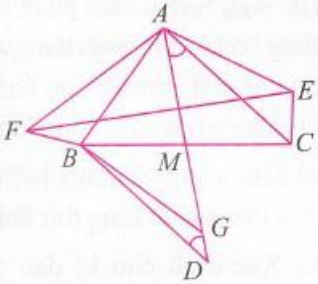
2) Tuyên dương các bạn, trong đó lần này có cả các bạn lớp 7 đã sửa điều sai và có lời giải đúng :

Quảng Ngãi: *Ngô Ngọc Huấn*, 6A, *Đỗ Thị Mỹ Lan*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, *Nguyễn Thị Hạ Vy*, *Vũ Thi Thi*, 7A, THCS Hành Phước, *Nguyễn Đại Dương*, 7B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; *Võ Thị Hồng Kiều*, 7A, *Trần Phương Duyên*, 7B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

VIỆT HẢI

★Bài T2/435. (Lớp 7) *Cho tam giác ABC với trung tuyến AM. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB kẻ đoạn thẳng AE vuông góc với AB sao cho AB = AE. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC kẻ đoạn thẳng AF vuông góc với AC sao cho AF = AC. Chứng minh rằng $EF=2AM$ và $EF\perp AM$.*

Lời giải. Trường hợp $\widehat{BAC}=90^o$, kết quả là hiển nhiên.



Ta chứng minh cho trường hợp $\widehat{BAC}<90^o$. Trường hợp $\widehat{BAC}>90^o$, cách chứng minh hoàn toàn tương tự.

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MA=MD$. Nối B với D. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt AD tại G. Xét hai tam giác AMC và DMB có $AM=MD$; $\widehat{AMC}=\widehat{DMB}$; $BM=MC$ nên $\Delta AMC=\Delta DMB$ (c.g.c) suy ra $\widehat{CAM}=\widehat{BDM}$ (1) và $BD=AC$.

Ta có $AE\perp AB$; $BG\perp AB$ nên $BG//AE$ suy ra

$\widehat{EAM}=\widehat{BGA}$ (so le trong) (2)

Mà $\widehat{BGA}=\widehat{GBD}+\widehat{BDM}$

và $\widehat{EAM}=\widehat{EAC}+\widehat{CAM}$ (3)

nên từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{EAC}=\widehat{GBD}$.

Ta có $AE=AB$; $\widehat{EAF}=\widehat{ABD}=180^o-\widehat{BAC}$; $BD=AF(=AC)$. Do đó $\Delta EAF=\Delta ABD$ (c.g.c), suy ra $EF=AD$, mà $AD=2AM$ (cách vẽ) nên $EF=2AM$.

Do $\Delta EAF=\Delta ABD$ nên $\widehat{AEF}=\widehat{BAD}$; mà $\widehat{BAD}+\widehat{DAE}=90^o$ nên $\widehat{AEF}+\widehat{DAE}=90^o$, suy ra $AM\perp EF$ (đpcm). □

➢**Nhận xét.** Tất cả các bạn tham gia giải bài đều cho cách chứng minh đúng, tuy nhiên các bạn chỉ vẽ hình và

CÔNG TY RUNSYSTEM, BCĐ PHONG TRÀO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Phối hợp tổ chức trao thưởng thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

chứng minh bài toán trong một trường hợp ($\widehat{BAC}$ nhọn hoặc tù). Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn, đề cập đến các trường hợp khác nhau, vẽ hình chính xác hoặc có nhiều cách giải:

Phú Thọ: *Nguyễn Dương Hoàng Anh, Vũ Hoàng Nam, Trần Minh Hiếu,* 7C, THCS Văn Lang, Việt Trì; *Nguyễn Hải Dương, Tạ Ngọc Anh,* 7A3, THCS Lâm Thao; *Nguyễn Kiên Chung,* 7A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Hà Nội:** *Tạ Lê Ngọc Sáng,* 7E, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam; **Thanh Hoá:** *Nhữ Thị Thương,* 6B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; *Nguyễn Khải Hưng,* 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá, *Kiều Xuân Bách,* 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Quảng Trị:** *Trần Thị Lan Anh,* 7B, THCS Triệu Thuận, Triệu Phong; **Bình Định:** *Hoàng Thanh Hải,* 7A3, THCS TT Phù Mỹ, *Nguyễn Bảo Trân,* 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn, *Trần Cả Bảo,* 7A1, THCS Phước Lộc, Tuy Phước.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/435. *Xét n ($n > 1$) số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn $a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1a_2...a_n$.*

1) Chứng minh rằng với mọi n cho trước thì phương trình trên luôn có nghiệm.

2) Hãy tìm tất cả các số n để phương trình đã cho có nghiệm với $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

Lời giải. Xét phương trình nghiệm nguyên dương

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1a_2...a_n. \ (*) \ (n > 1)$$

1) Với $n = 2$, ta có $a_1 + a_2 = a_1a_2$

$\Leftrightarrow (a_1 - 1)(a_2 - 1) = 1 \Leftrightarrow a_1 - 1 = a_2 - 1 = 1$

$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = 2$. Như vậy (*) có nghiệm (2; 2).

Với $n > 2$, (*) nhận $(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{n-2 \text{ số } 1}, 2, n)$ là một nghiệm. Thật vậy, khi đó

$$a_1a_2...a_n = 2n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Như vậy, với mọi n cho trước thì phương trình (*) luôn có nghiệm.

2) Vì $a_1 < a_2 < ... < a_n$ nên

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < n.a_n$$

$$\Rightarrow \quad a_1a_2 \ldots a_n < n.a_n$$

$$\Rightarrow \quad a_1a_2 \ldots a_{n-1} < n. \qquad (1)$$

Mặt khác, cùng với $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên dương nên $a_1 \geq 1$; $a_2 \geq 2$; ...; $a_n \geq n$, suy ra $\quad a_1a_2...a_{n-1} \geq (n-1)!$

Như vậy $\quad (n-1)! < n. \qquad (2)$

• Với $n \geq 4$ ta có $(n-1)! \geq (n-2)(n-1) > n$ (do $n^2 - 4n + 2 = n(n-4) + 2 > 0$) nên trong trường hợp này, phương trình (*) vô nghiệm.

• Với $n = 3$ thì (2) được thoả mãn và từ (1) suy ra $a_1a_2 < 3$. Mặt khác, $0 < a_1 < a_2 < a_3$ suy ra $a_1 = 1$; $a_2 = 2$. Suy ra $a_3 = 3$.

Bộ số (1; 2; 3) thoả mãn điều kiện đặt ra.

• Với $n = 2$, theo phần 1), (*) chỉ có nghiệm $a_1 = a_2 = 2$ không thoả mãn $a_1 < a_2$.

Vậy giá trị cần tìm duy nhất là $n = 3$. □

➢ **Nhận xét.** 1) Ở phần 1), đa số các bạn không xét trường hợp $n = 2$.

2) Với $a_1 < a_2 < ... < a_n$, một số bạn đã dùng phương pháp quy nạp để chứng minh khi $n \geq 4$ thì phương trình (*) vô nghiệm.

3) Khá nhiều bạn đã tham gia giải bài này, tuy nhiên tất cả các lời giải đều chưa hoàn thiện, nhiều bài còn mắc những sai sót giống nhau. Sau đây là một số bạn có lời giải tốt hơn cả:

Quảng Nam: *Lê Phước Định,* 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Thị Minh Anh,* 9A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận,* 9A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** *Chu Thị Linh,* 8C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hiếu,* 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ.

NGUYỄN ANH QUÂN

★Bài T4/435. *Cho các số a, b, c thoả mãn*

$$ab + bc + ca = 2013abc$$

và $\quad 2013(a + b + c) = 1.$

Tính $A = a^{2013} + b^{2013} + c^{2013}$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn) Từ giả thiết ta có

$$(ab + bc + ca).2013(a + b + c) = 2013abc$$

$\Leftrightarrow (ab + bc + ca)(a + b + c) = abc$

$\Leftrightarrow a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 2abc = 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ c + a = 0. \end{array}\right.$$

Nếu $a + b = 0$, hay $a = -b$, thì $c = \dfrac{1}{2013}$.

Do đó $A = (-b)^{2013} + b^{2013} + \left(\dfrac{1}{2013}\right)^{2013} = \dfrac{1}{2013^{2013}}$.

Tương tự, nếu $b + c = 0$ hoặc $c + a = 0$ thì ta cũng tính được $A = \frac{1}{2013^{2013}}$.

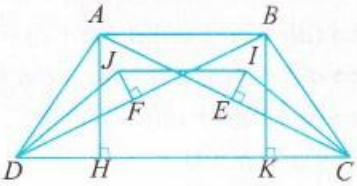
Vậy $A = \frac{1}{2013^{2013}}$. ❐

➢**Nhận xét.** Rất đông các bạn tham gia giải bài này, chỉ có 5 bạn giải sai. Các bạn có lời giải ngắn gọn là: **Hà Nội:** *Vương Tiến Đạt, Phạm Thị Thắm*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Hiên*, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nam:** *Ngô Trung Kiên*, 9A2, THCS Trần Phú, Phủ Lý; *Đỗ Đăng Dương*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Thị Thu Phương*, 8A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Quang Hào*, 7A2, *Hoàng Thị Hồng Ngọc*, 7A3, THCS Lâm Thao; *Trần Minh Hiếu, Nguyễn Dương Hoàng Anh*, 7C, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thị Hồng*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; *Nguyễn Hữu Hoàng*, 9B, THCS Trần Phú; *Vũ Thị Thượng Hải*, 9D, THCS Bắc Sơn, TX. Sầm Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Quỳnh Trang*, 6A, *Võ Phương Tâm*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; *Trần Lê Hiệp*, 7A, *Nguyễn Thị Hằng, Dương Xuân Long*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Cao Hữu Đạt*, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Trần Nguyễn Đức Thọ*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** *Phạm Thiên Trang*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, *Vũ Thi Thi*, 8A, *Nguyễn Thị Hạ Vy*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Quảng Nam:** *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An; **Quảng Trị:** *Hoàng Quang Hiếu*, 9D, THCS Nguyễn Trãi, TP. Đông Hà; **Bình Định:** *Nguyễn Bảo Trân*, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn.

TRẦN HỮU NAM

★**Bài T5/435.** *Cho hình thang ABCD (AB//CD). Chứng minh rằng nếu AC + CB = AD + DB thì ABCD là hình thang cân.*

Lời giải



Cách 1. Gọi I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và ABD. E và F là hình chiếu của I, J tương ứng trên AC, BD.

Vì $AB//CD$ nên $S_{ABC} = S_{ABD}$, ta có

$IE(AB + BC + CA) = JF(AB + BD + DA)$ (1)

Vì $AC + BC = AD + BD$ nên

$AB + BC + CA = AB + BD + DA$.

Kết hợp với (1) suy ra $IE = JF$.

Mặt khác,

$2CE = AC + BC - AB = AD + BD - AB = 2DF$.

Suy ra $\Delta IEC = \Delta JFD$, nên $\widehat{ICE} = \widehat{JDF}$,

hay $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

Do đó hình thang $ABCD$ nội tiếp được một đường tròn, nên $ABCD$ là hình thang cân.

Cách 2. Hạ $AH \perp CD$ và $BK \perp CD$ ($H, K \in CD$).

• Với $BD > AC$ (1)

Áp dụng định lí Pythagore cho các tam giác vuông AHC và BKD ta có

$DK^2 = BD^2 - BK^2$, $CH^2 = AC^2 - AH^2$.

Suy ra $DK > CH$, hay $DH > KC$.

Áp dụng định lí Pythagore cho các tam giác AHD và BKC ta có

$AD^2 = AH^2 + HD^2$, $BC^2 = BK^2 + CK^2$.

Suy ra $AD > BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AD + BD > AC + BC$, trái giả thiết.

• Với $BD < AC$, lập luận tương tự như trên ta suy ra $AD + BD < AC + BC$, trái giả thiết.

Vậy $BD = AC$, suy ra hình thang $ABCD$ là hình thang cân. ❐

➢**Nhận xét.** Có khá nhiều bạn tham gia giải bài toán này, sau đây là một số bạn có lời giải gọn và tốt.

Phú Thọ: *Nguyễn Dương Hoàng Anh*, 7C, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Thanh Hoá:** *Nguyễn Hữu Hoàng*, 9B, THCS Trần Phú, Nông Cống; **Nghệ An:** *Võ Việt Anh, Hoàng Thị Hà Giang*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Võ Thị Hồng Liệu, Lê Thị Thu Uyên, Nguyễn Thị Thảo Nguyên*, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Hạ Vy*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

NGUYỄN THANH HỒNG

★**Bài T6/435.** *Giải bất phương trình sau trên* $\mathbb{R}$

$$\left(\sqrt{13} - \sqrt{2x^2 - 2x + 5} - \sqrt{2x^2 - 4x + 4}\right).\left(x^6 - x^3 + x^2 - x + 1\right) \geq 0.$$

Lời giải. Nhận thấy

$$x^6 - x^3 + x^2 - x + 1 = \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$$

nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{13}-\sqrt{2x^2-2x+5}-\sqrt{2x^2-4x+4}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+5}+\sqrt{2x^2-4x+4}\le\sqrt{13} \quad (1)$$

Ta chứng minh rằng với các số thực a,b,c,d bất kì, có bất đẳng thức sau

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \quad (2)$$

Thật vậy, bình phương hai vế ta có

$$(2)\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$
$$\ge a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)$$
$$\Rightarrow \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\ge ac+bd \quad (3)$$

Nếu $ac+bd<0$ thì BĐT (3) đúng.

Nếu $ac+bd\ge 0$ thì

BĐT (3) $\Leftrightarrow (a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$

$$\Leftrightarrow a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\ge a^2c^2+b^2d^2+2acbd$$

$\Leftrightarrow (ad-bc)^2\ge 0$. BĐT đúng.

BĐT (2) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad=bc$.

Áp dụng BĐT (2), ta có

$$\sqrt{2x^2-2x+5}+\sqrt{2x^2-4x+4}$$
$$=\sqrt{2}\left(\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{(1-x)^2+1^2}\right)$$
$$\ge\sqrt{2}.\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

hay $\sqrt{2x^2-2x+5}+\sqrt{2x^2-4x+4}\ge\sqrt{13}$ (4)

Do đó BPT (1) thoả mãn khi và chỉ khi dấu đẳng thức trong (4) xảy ra.

Nghĩa là $\left(x-\frac{1}{2}\right).1=\frac{3}{2}.(1-x)\Leftrightarrow x=\frac{4}{5}$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x=\frac{4}{5}$. □

➢**Nhận xét.** 1) Đây là bài toán không khó nên có nhiều bạn tham gia gửi bài giải và hầu hết làm theo cách trên.

Bất đẳng thức (2) có dạng tổng quát như sau

Với các số thực $a_1,b_1,a_2,b_2,...,a_n,b_n$ có

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+...+\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$
$$\ge\sqrt{(a_1+a_2+...+a_n)^2+(b_1+b_2+...+b_n)^2},$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\exists t: a_i=tb_i\ (i=\overline{1,n})$.

Các bạn tự chứng minh nhé.

2) Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Yên Bái: *Phạm Ngọc Sơn*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Quảng Trị**: *Hồ Sỹ Hoàng*, 11B1, THPT Đakrông; **Quảng Ngãi**: *Huỳnh Tiên Phát*, 10A7, THPT số 1 Đức Phổ; **Vĩnh Long**: *Trần Duy Quân*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Long An**: *Nguyễn Minh Từ, Lê Thành Nghĩa, Phạm Minh Hậu, Đặng Đức Trọng*,11T1, THPT chuyên Long An; **Phú Yên**: *Nguyễn Thu Ánh Tuyền*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP Tuy Hòa; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Văn Thế*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bến Tre**: *Lê Hoàng Anh Mỹ*, 10 Toán – Tin, THPT chuyên Bến Tre; **Bình Định**: *Võ Thế Duy*, 11A1, THPT Số 1 Phù Mỹ, Phù Mỹ; **Sóc Trăng**: *Lâm Bửu Hưng*, 10A1T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

NGUYỄN ANH DŨNG

★**Bài T7/435.** *Cho tam giác nhọn ABC có ba góc thoả mãn điều kiện* $A>\frac{\pi}{4}, B>\frac{\pi}{4}, C>\frac{\pi}{4}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{\tan A-2}{\tan^2 C}+\frac{\tan B-2}{\tan^2 A}+\frac{\tan C-2}{\tan^2 B}.$$

Lời giải. Nhận thấy rằng

$$\tan A=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$$

$\Leftrightarrow \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

Do $\frac{\pi}{4}<A<\frac{\pi}{2}$ nên $\tan A>1$.

Tương tự có $\tan B>1$, $\tan C>1$.

Đặt $x=\tan A$, $y=\tan B$, $z=\tan C$, ta có

$T=\frac{x-2}{z^2}+\frac{y-2}{x^2}+\frac{z-2}{y^2}$ với $x>1, y>1$,

$z>1$ và $x+y+z=xyz\Leftrightarrow\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$T=\frac{(x-1)+(z-1)}{z^2}+\frac{(y-1)+(x-1)}{x^2}$$
$$+\frac{(z-1)+(y-1)}{y^2}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$= (x-1)\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}\right)+(y-1)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$$

$$+(z-1)\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$\geq (x-1).\frac{2}{zx}+(y-1).\frac{2}{xy}+(z-1).\frac{2}{yz}$$

$$-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-2.$$

Áp dụng BĐT $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ac)$

ta có $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)=3.$

Suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \sqrt{3}$. Do đó $T \geq \sqrt{3}-2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{3}$, hay $A=B=C=\frac{\pi}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\sqrt{3}-2$, khi tam giác ABC đều. □

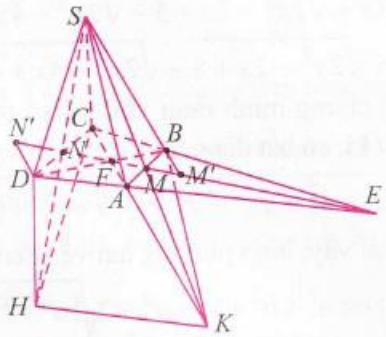
➢**Nhận xét.** Các bạn tham gia giải bài đều cho đáp số đúng. Tuy nhiên nhiều bạn biến đổi còn dài. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Bắc Giang: *Thân Thị Quỳnh, Nguyễn Thị Huyền, Ngô Khánh Linh, Nguyễn Thị Trang*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Hưng Yên:** *Lê Thị Tú Anh*, 11A1, *Nguyễn Xuân Tùng*, 12A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Nghệ An:** *Tăng Trung Hiếu*, 11A1, THPT Thái Hòa, *Hồ Xuân Hùng*, 10T1, THPT Đô Lương I; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thị Phương Hoài*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, *Hồ Sĩ Hoàng*, 11B1, THPT Đakrong; **Quảng Nam:** *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, TP. Hội An; **Gia Lai:** *Trần Nguyên Try*, 12C3A, THPT chuyên Hùng Vương; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Hồng Quốc, Võ Thành Đạt*, 10CT, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★**Bài T8/435.** *Cho hình chóp S.ABCD nội tiếp trong mặt cầu tâm O, AB = a, CD = b. Dựng các hình bình hành SAKB và SDHC. Tính tỉ số $\frac{HK}{EF}$ theo a và b, trong đó E là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC, F là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.*

Lời giải.



Từ giả thiết đề bài, ta thấy tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của AB, CD, thì M, N lần lượt là trung điểm của SK và SH.

Từ đó $HK = 2MN$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a < b$. Gọi M', N' theo thứ tự là các điểm đối xứng của F qua M, N. Lúc đó $AFBM'$, $DFCN'$ là các hình bình hành. Mặt khác, ta thấy

$\widehat{M'BE} = \widehat{FCE} = \widehat{FDE}$ và $\frac{BM'}{BE} = \frac{AF}{BE} = \frac{DF}{DE}$

$\left(\text{vì } \frac{AF}{DF} = \frac{AB}{CD} = \frac{EB}{ED}\right)$.

Suy ra $\Delta M'BE \backsim \Delta FDE$ (c.g.c). Tương tự có $\Delta N'CE \backsim \Delta FAE$. Vậy có $\widehat{N'EC} = \widehat{M'ED}$, dẫn đến ba điểm E, M', N' thẳng hàng.

Tiếp theo, ta có $\frac{EN'}{EF} = \frac{EC}{EB} = \frac{ED}{EA} = \frac{EF}{EM'}$ (1)

Do đó $EF^2 = EM'.EN'$ (2)

Từ (1) có $\frac{EN'}{EM'} = \frac{EC.ED}{EA.EB} = \frac{b^2}{a^2}$, kết hợp với $EN' - EM' = 2MN$, suy ra

$$EN' = \frac{2b^2.MN}{b^2-a^2} \text{ và } EM' = \frac{2a^2.MN}{b^2-a^2}.$$

Vậy nên $EM'.EN' = 4MN^2.\frac{a^2b^2}{(b^2-a^2)^2}$ (3)

Từ (2) và (3) ta thấy

$$\frac{EF}{2MN} = \frac{ab}{b^2-a^2} \Rightarrow \frac{HK}{EF} = \frac{b^2-a^2}{ab}.$$

Tóm lại, ta có $\frac{HK}{EF} = \frac{|a^2-b^2|}{ab}$. □

➢**Nhận xét.** 1) Nguồn gốc của bài **T8/435** là bài toán sau: *Cho tứ giác ABCD nội tiếp. Gọi F và E lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (AC, BD) và (AD, BC); M và N thứ tự là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng* $\frac{MN}{EF} = \frac{1}{2}\left|\frac{AB}{CD} - \frac{CD}{AB}\right|$.

(*Bài toán 2 trong Kì thi Olympic Bulgarian, Vòng 3, năm 1997*).

2) Số lời giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Ba bạn sau có lời giải đúng:

Hưng Yên: *Nguyễn Trung Hiếu*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** *Phan Xuân Đức*, C4K47, THPT Nam Đàn II; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phạm Tuấn Huy*, 12 Toán, PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

HỒ QUANG VINH

★**Bài T9/435.** *Có bao nhiêu số nguyên dương n sao cho n biểu diễn trong hệ thập phân có 2013 chữ số và* $\frac{n}{7}$ *là số nguyên dương có 2013 chữ số lẻ.*

Lời giải. (Theo bạn *Phạm Tuấn Huy*, 12 Toán, PTNK ĐHQG **TP. Hồ Chí Minh** và bạn *Phạm Đăng Nam*, 10A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**).

Do n có 2013 chữ số nên $n < 10^{2013} \Rightarrow \frac{n}{7} < \frac{10^{2013}}{7}$.

Ta có $\frac{10^{2013}}{7} < 15.10^{2011}$. Do đó hai chữ số đầu tiên (kể từ bên trái của $\frac{n}{7}$) là 11 hoặc 13.

Vậy $\frac{n}{7} = \overline{a_1a_2...a_{2013}}$ ở đó $a_1 = 1$, $a_2 \in \{1; 3\}$ và $a_i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $(3 \le i \le 2013)$.

Do đó có 2.5^{2011} số n thoả mãn điều kiện đầu bài. ❐

➢**Nhận xét.** 1) Ta có kết quả tổng quát: *Nếu số nguyên dương n biểu diễn trong hệ thập phân có k chữ số và* $\frac{n}{7}$ *là số nguyên dương có k chữ số lẻ* $(k \ge 2)$ thì có tất cả 2.5^{k-2} số nguyên dương *n được thoả mãn.*

2) Có nhiều bạn tham gia giải bài toán này và chỉ có duy nhất 1 bạn giải sai. Các bạn có lời giải tốt bao gồm: **Nghệ An:** *Phan Xuân Đức*, C4K47, THPT Nam Đàn II; **Hà Nam:** *Lê Anh Tuấn*, 11, THPT chuyên ban Hà Nam; **Phú Thọ:** *Quản Đức Bình*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hữu Huy*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Bình Định:** *Trương Minh Nhật Quang*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thanh Hóa:** *Lê Hùng Cường*, 11A7, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Thế*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 12 Toán, THPT chuyên Hưng Yên.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★**Bài T10/435.** *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau*

1) $f(x) - 2g(x) = g(y) + 4y$, *với mọi* $x, y \in \mathbb{R}$;

2) $f(x)g(x) \le 33x^2$, *với mọi* $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Cách 1. Cho $y = x$ vào 1) ta được

$$f(x) - 2g(x) = g(x) + 4x \Leftrightarrow f(x) = 3g(x) + 4x.$$

Thay vào 1) ta được

$$3g(x) + 4x - 2g(x) = g(y) + 4y$$

$$\Leftrightarrow \quad g(x) + 4x = g(y) + 4y \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $g(x) + 4x = b$ $(b \in \mathbb{R})$.

Vậy nên $g(x) = -4x + b$; $f(x) = -8x + 3b$.

Thay các kết quả này vào 2) ta được

$$(-8x + 3b)(-4x + b) \le 33x^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad -x^2 - 20bx + 3b^2 \le 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $\Delta' = 103b^2 \le 0 \Leftrightarrow b = 0$.

suy ra $f(x) = -8x$, $g(x) = -4x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại. Ta có

$f(x) - 2g(x) = -8x + 2.4x = 0$;

$g(y) + 4y = -4y + 4y = 0$;

$f(x)g(x) = (-8x).(-4x) = 32x^2 \le 33x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $f(x) = -8x$, $g(x) = -4x, \forall x \in \mathbb{R}$ thoả mãn hai điều kiện đã cho. ❐

Cách 2. Thay $x = y = 0$ vào 1) ta được $f(0) = 3g(0)$.

Thay $x = 0$ và 2) ta được $f(0)g(0) \le 0$.

Suy ra $3g^2(0) \le 0 \Rightarrow g(0) = 0, f(0) = 0.$

Thay $x = 0$ vào 1) được

$$g(y) + 4y = f(0) - 2g(0) = 0, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $g(x) = -4x, \forall x \in \mathbb{R}.$

Thay $y = 0$ vào 1) được $f(x) - 2g(x) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = 2g(x) = -8x.$$

Thử lại thấy $f(x) = -8x,\ g(x) = -4x, \forall x \in \mathbb{R}$ thoả mãn hai điều kiện đã cho. ❐

➢**Nhận xét.** Bài này được đông đảo các bạn tham gia. Tuy nhiên, một số bạn sau khi tìm ra kết quả lại quên thử lại. Bạn *Nguyễn Hữu Hoàng*, 9B, THCS Trần Phú, Văn Hoà, **Thanh Hoá** đã nêu ra nhận xét có thể thay số 33 ở điều kiện 2) bởi số m với $m \ge 32$. Ngoài bạn *Hoàng*, các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nam Định: *Nguyễn Tuấn Hưng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nam:** *Bách Xuân Đạo*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hoà; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bắc Giang:** *Chu Thuỳ Nhung, Dương Văn Thắng, Nguyễn Thị Phương Lan*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Thanh Hoá:** *Trịnh Hà Hằng*, 12T, THPT chuyên Lam Sơn; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Thế*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Ngô Hoàng Thanh Quang*, 11 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Long An:** *Nguyễn Minh Trí*, 11T1, *Chu Thị Thu Hiền*, 12T, THPT chuyên Long An; **Vĩnh Long:** *Trần Duy Quân*, 11T1, *Châu Hoà Nhân*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Gia Lai:** *Trần Nguyên Try*, 12C3A, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Pleiku; **Tiền Giang:** *Châu Hoàng Long*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Tuấn Hiệp*, 11T2, THPT Ngô Gia Tự, Eakar; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Thái Ngọc Anh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN MẬU

★**Bài T11/435.** *Tìm tất cả các đa thức $T(x, y)$ sao cho $T(x, y).T(z, t) = T(xz + yt, xt + yz)$ với mọi x, y, z, t thuộc $\mathbb{R}$.*

Lời giải. (Theo bạn *Chu Thị Hiền*, 12T, THPT chuyên **Long An**).

• Xét trường hợp $T(x, y) \ne 0$. Nhận xét

$$(xz + yt) + (xt + yz) = (x + y)(z + t),$$

$$(xz + yt) - (xt + yz) = (x - y)(z - t).$$

Do đó nếu ta đặt

$$T(x, y) = (x + y)^m (x - y)^n . Q(x, y),$$

trong đó $m, n \in \mathbb{N}$ và đa thức $Q(x, y)$ không chia hết cho $x + y, x - y$ (1)

thì $T(x, y).T(z, t) = T(xz + yt, xt + yz)$

$\Leftrightarrow (x + y)^m.(x - y)^n.Q(x, y).(z + t)^m.(z - t)^n.Q(z, t)$

$= (x + y)^m (z + t)^m.(x - y)^n.(z - t)^n.Q(xz + yt, xt + yz)$

$\Leftrightarrow Q(x, y).Q(z, t) = Q(xz + yt, xt + yz)$ (2)

Cho $z = t = 0$ thì $Q(x, y).Q(0, 0) = Q(0, 0)$.

Ta chứng minh $Q(0, 0) \ne 0$ (suy ra $Q(x, y) \equiv 1$).

Thật vậy, giả sử $Q(0, 0) = 0$. Lấy $y = -x$, $t = z$.

Từ (2) ta có $Q(x, -x).Q(z, z) = Q(0, 0) = 0$.

Xét $Q(z, z) \ne 0 \Rightarrow Q(x, -x) = 0$.

Khi đó $Q(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$

$$= \sum_{i,j} a_{ij}(x^i - (-y)^i) y^j + \sum_{i,j} a_{ij}(-y)^i . y^j$$

$$Q(x, -x) = 0 \Rightarrow \sum_{i,j} a_{ij} x^i (-x)^j = 0.$$

Suy ra $Q(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij}(x^i - (-y)^i) y^j \vdots (x + y)$.

Tương tự nếu $Q(z, z) = 0, \forall z \in \mathbb{R}$ thì ta suy ra $Q(x, y) \vdots (x - y)$.

Điều này mâu thuẫn với (1).

Như vậy, $Q(x, y) \equiv 1$. Ta có hoặc $T(x, y) \equiv 0$, hoặc $T(x, y) = (x + y)^m (x - y)^n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ là tất cả các đa thức thoả mãn bài toán. ❐

➢**Nhận xét.** Đây là bài toán đa thức hay, khó. Ngoài bạn *Hiền*, các bạn sau đây cũng có lời giải đúng:

Hưng Yên: *Nguyễn Trung Hiếu*, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Thị Quỳnh Anh*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Vũ Đức Tài*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Trị:** *Trần Trọng Tiến*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phạm Tuấn Huy*, 12 Toán, PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

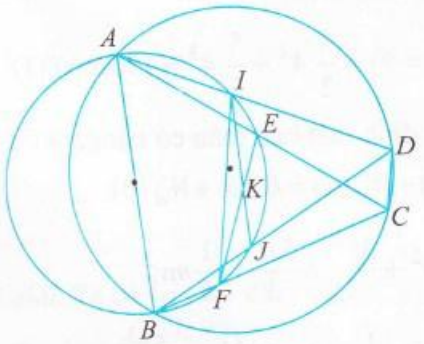
NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T12/435. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn. Đường tròn đường kính AB cắt các đường thẳng CA, CB, DA và DB theo thứ tự tại E, F, I và J (khác A và B). Chứng minh rằng có một đường phân giác của một trong các góc tạo bởi hai đường thẳng EF và IJ vuông góc với đường thẳng CD.*

Lời giải. Gọi K là giao điểm của EF và IJ (hình vẽ). Ta thấy

$$\begin{aligned}(CD,FI) &\equiv (CD,CB)+(FB,FI)\,(\text{mod}\,\pi)\\ &\quad (\text{vì } CB\equiv FB)\\ &\equiv (AD,AB)+(AB,AI)\,(\text{mod}\,\pi)\\ &\quad (\text{vì } A\in(CDB);\ A\in(FBI))\\ &\equiv (AD,AI)\,(\text{mod}\,\pi)\\ &\equiv 0\,(\text{mod}\,\pi)\,(\text{vì } AD\equiv AI).\end{aligned}$$

Do đó $CD \,//\, FI$ (1)



Ta lại thấy

$$\begin{aligned}&(KI,FI)\equiv(JI,FI)\,(\text{mod}\,\pi)\ (\text{vì } KI\equiv JI)\\ &\equiv(JB,FB)\,(\text{mod}\,\pi)\ (\text{vì } B\in(IJF))\\ &\equiv(DB,CB)\,(\text{mod}\,\pi)\ (\text{vì } JB\equiv DB;FB\equiv CB)\\ &\equiv(DA,CA)\,(\text{mod}\,\pi)\ (\text{vì } A\in(DBC))\\ &\equiv(IA,EA)\,(\text{mod}\,\pi)\ (\text{vì } DA\equiv IA;\ CA\equiv EA)\\ &\equiv(IF,EF)\,(\text{mod}\,\pi)\ (\text{vì } F\in(AIE))\\ &\equiv(IF,KF)\,(\text{mod}\,\pi)\,(\text{vì } EF\equiv KF).\end{aligned}$$

Do đó tam giác KIF cân tại K.

Vậy trong hai phân giác của các góc tại bởi EF và IJ có một phân giác vuông góc với FI (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm. ❐

➢**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn tham gia giải, nhưng vẫn có bạn giải sai, phần lớn các bạn không biết sử dụng góc định hướng để tránh tình *trạng phép chứng minh phụ thuộc hình vẽ.*

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt:

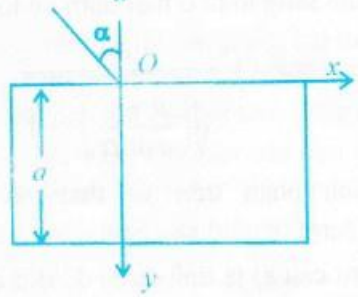
Bắc Giang: *Dương Văn Thắng, Trần Thị Quỳnh, Dương Thị Hạnh*, 10T, THPT chuyên Bắc Giang; **Nam Định:** *Nguyễn Tuấn Hưng*, 10T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Hồ Xuân Hùng, Nguyễn Doãn Hiếu*, 10A1, THPT Đô Lương; *Phạm Hồng Quân*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Phú Yên:** *Lê Bảo Đại*, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP .Tuy Hoà; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Đức Duy*, 10 Toán, PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh; **Long An**: *Chu Thị Thu Hiền*, 12T, THPT chuyên Long An, TP. Long An; **Vĩnh Long:** *Trần Duy Quân*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long;

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài L1/435. *Chiếu một tia sáng đơn sắc lên bản mặt song song có bề dày a = 2cm dưới góc tới $\alpha = 30^o$ (hình vẽ). Xác định góc ló và độ dịch chuyển ngang của tia sáng sau khi qua bản mặt nếu*

a) *Chiết suất của bản mặt không đổi n = 1,5.*

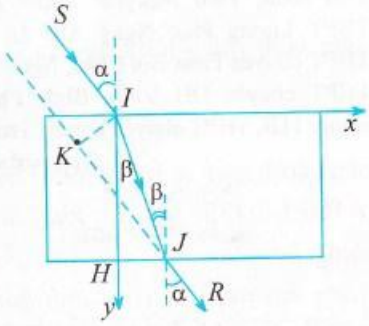
b) *Chiết suất thay đổi theo hướng pháp tuyến với quy luật $n = 1+\frac{y}{a}$.*



Lời giải

a) Tia sáng sau khi khúc xạ qua bản mặt song song có phương JR song song với tia tới SI.

Theo nguyên lí thuận nghịch thì góc khúc xạ tại I bằng góc tới tại J (và bằng β).



Độ dịch chuyển ngang của tia sáng là

$$IK = IJ\sin(\alpha-\beta) = \frac{IH}{\cos\beta}\sin(\alpha-\beta) \quad (1)$$

Góc β xác định từ định luật khúc xạ

$$\sin\alpha = n\sin\beta \qquad (2)$$

Thay số $\alpha = 30^o, IH = a = 2\text{cm}, n = 1,5$ vào (2) và (1) ta tính được $\beta \approx 19,47^o$ và $IK \approx 0,39\text{cm}$.

b) Chia bản thành rất nhiều bản mỏng bằng các mặt phẳng vuông góc với trục Oy sao cho mỗi bản mỏng có chiết suất không đổi.

Áp dụng định luật khúc xạ cho các bản mỏng liên tiếp

$$\sin\alpha = n_1\sin\alpha_1 = ... = n_i\sin\alpha_i.$$

Suy ra $\quad \sin\alpha_i = \dfrac{\sin\alpha}{n_i} = \dfrac{a\sin\alpha}{a+y} \qquad (3)$

Mặt khác $\quad \tan\alpha_i = \dfrac{dx}{dy} \qquad (4)$

Từ (3) và (4) ta có

$$dx = dy.\tan\alpha_i = \frac{dy}{\sqrt{\left(\dfrac{a+y}{a\sin\alpha}\right)^2 - 1}} \qquad (5)$$

Điểm ánh sáng ló ra ở mặt dưới có toạ độ x_0 là

$$x_0 = \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{\left(\dfrac{a+y}{a\sin\alpha}\right)^2 - 1}}.$$

Tính tích phân trên và thay số ta được $x_0 \approx 0,75\text{cm}$.

Tương tự câu a) ta tính được độ dời ngang của tia sáng bằng 0,35cm.

➢**Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng:

Thái Bình: *Vũ Văn Dũng*, 11 Toán 2, THPT chuyên Thái Bình; **Thái Nguyên:** *Phạm Thanh Bình*, 12A1, THPT Lương Phú; **Nghệ An:** *Lê Xuân Bảo*, 12A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Nguyễn Viết Tuấn*, 12A5, THPT chuyên ĐH Vinh; **Bình Phước:** *Nguyễn Văn Hùng*, 11B, THPT chuyên Quang Trung.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★**Bài L2/435.** *Một vật khối lượng 10kg bị tác dụng bởi lực $F = -3x - 5x^2$, trong đó F tính bằng newton (N) và x tính bằng mét (m). Khi vật chuyển động thì coi cơ năng của vật được bảo toàn. Giả thiết là thế năng U của vật bằng không tại x = 0.*

a) Tìm thế năng của vật tại x = 4m.

b) Nếu vật có vận tốc 5m/s và hướng theo chiều âm khi ở toạ độ x = 6m thì tốc độ của nó là bao nhiêu khi đi qua gốc?

c) Lại giả thiết rằng thế năng của vật là –10J tại x = 0, hãy trả lời lại các câu a) và b).

Lời giải

a) Ta có $U(x) - U(0) = -\int_0^x F dx$

$$= -\int_0^x (3x + 5x^2)dx = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3.$$

Suy ra $U(x) = U(0) + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{5}{3}x^3$.

Theo giả thiết $U(0) = 0$ nên

$$U(x=4) = \frac{3}{2}.4^2 + \frac{5}{3}.4^3 \approx 130,667\,(\text{J}) \quad (1)$$

b) Theo định luật bảo toàn cơ năng, ta có

$$U(x) + W_d(x) = U(0) + W_d(0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3x^2}{2} + \frac{5x^3}{3} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{3x^2}{2} - \frac{5x^3}{3} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow v_0 \approx 10,38\,\text{m/s}.$$

c) Tương tự câu a) ta có: Với $x = 4$ thì

$$U(x=4) = \frac{3}{2}.4^2 + \frac{5}{3}.4^3 - 10 \approx 120,67\,(\text{J}).$$

Nhận xét. Độ lớn của v_0 không thay đổi vì trong biểu thức (1) và (2) không có mặt $U(0)$.

➢**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Thái Bình: *Vũ Văn Dũng*, 11 Toán 2, THPT chuyên Thái Bình; **Bình Phước:** *Nguyễn Văn Hùng*, 11B, THPT chuyên Quang Trung.

Một số bạn khác có phương pháp và hướng giải đúng, tuy nhiên khi tính toán và thay số bị nhầm lẫn nên không có kết quả đúng.

ĐẶNG THANH HẢI

HỘI NGHỊ HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM 2013

Ngày 10/12/2013, tại Hội trường B NXBGD tại TP. Hà Nội đã diễn ra Hội nghị Hội đồng Biên tập Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Tới dự Hội nghị có GS. TSKH *Trần Văn Nhung*, Tổng Thư kí Hội đồng Chức danh Giáo sư Nhà nước; GS. *Đoàn Quỳnh*, Ban Cố vấn Khoa học Tạp chí; GS. TS. *Vũ Văn Hùng*, Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXBGD Việt Nam; PGS. TS *Phan Doãn Thoại*, Viện trưởng Viện Nghiên cứu sách và Học liệu Giáo dục cùng các Uỷ viên Hội đồng Biên tập Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, các cộng tác viên thân thiết và các Cán bộ của Toà soạn.

Sau báo cáo tổng kết hoạt động biên tập, xuất bản, phát hành năm 2013 của TS. *Phạm Thị Bạch Ngọc* và định hướng hoạt động của Tạp chí năm 2014 của TS. *Trần Hữu Nam*, Hội nghị đã lắng nghe các ý kiến chỉ đạo về hướng phát hành của GS. TS *Vũ Văn Hùng*, PGS. TS *Phan Doãn Thoại* cùng các ý kiến đóng góp xây dựng nội dung tờ tạp chí của GS. TSKH *Trần Văn Nhung*, GS. *Đoàn Quỳnh*, PGS. *Nguyễn Đăng Phất*, PGS. TS *Tạ Duy Phương*, ThS. *Nguyễn Thế Thạch*, TS. *Nguyễn Minh Đức*, TS. *Nguyễn Minh Hà*, *ThS. Nguyễn Anh Dũng*,... nhằm hướng tới *Lễ kỉ niệm 50 năm ngày ra số báo Toán học và Tuổi trẻ đầu tiên* (1964 – 2014).

LÊ MAI

PROBLEMS... (*Tiếp trang 17*)

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPAD

T9/439. Find all odd positive integers n such that $15^n + 1$ is divisible by n.

T10/439. Determine all possible pairs of functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for any $x, y \in \mathbb{R}$, the following identity holds

$$f(x + g(y)) = x.f(y) - y.g(x) + g(x).$$

T11/439. n students ($n \geq 2$) are standing in a straight line. Each time the teacher blow a whistle, exactly two students exchange their positions. Can it be possible that after an odd number of such whistles, all students returned to their original positions?

T12/439. Let AH ($H \in BC$) be the altitude of an acute triangle ABC. Point P moves on the segment AH. Let E, F denote the feet of the perpendicular from P to AB, AC respectively.

a) Prove that the points B, E, F, C are concyclic.

b) Let O' denote the center of the circle containing B, E, F, C. Prove that PO' always passes through a fix point, independent of the position of point P chosen on AH.

Translated by LE MINH HA

Toán học và Âm nhạc

TRẦN ĐÌNH VIỆN
(Hà Nội)

Nhà giáo ưu tú *Hoàng Trọng Thái* (1940 – 2008), người nhiều năm giảng dạy Hình học ở khoa Toán Trường ĐHSP Vinh rất yêu âm nhạc, thích tìm tòi, nghiên cứu vận dụng toán học vào âm nhạc. Nhân kỉ niệm 5 năm ngày "ra đi" của anh, tôi viết bài này có sử dụng một phần tư liệu từ bài báo có nhan đề "GAM ĐƠN GIẢN" của nhà toán học *G.E. Shilov* do anh *Thái* dịch từ tiếng Nga sang tiếng Việt làm tài liệu tham khảo.

I. XÂY DỰNG THANG NHẠC

1. Vài nét về âm thanh

Cơ sở toàn bộ âm nhạc là các âm, được xác định bởi độ cao. Về phương diện Vật lí, âm thanh là sóng đàn hồi lan truyền trong không khí (hoặc là quá trình rung trong không khí) với một tần số nào đó. Đơn vị đo tần số là Héc (Hz): *Số chu kì dao động trong một giây*. Tần số càng lớn thì âm càng cao. Tần số bé thì âm thấp.

Âm trầm nhất mà tai người có thể nghe được có tần số 16Hz do đại phong cầm phát ra. Âm có tần số 27Hz nghe rất rõ nhưng cũng ít khi dùng – Đó là nốt nhạc đầu tiên phía trái đàn piano. Âm 44 Hz là kỉ lục âm trầm nhất của ca sĩ giọng nam *Caxpa Fexe* ở thế kỉ XVIII. Âm 80Hz là âm trầm mà một ca sĩ bình thường hát được.

Âm thanh mẫu phổ biến do âm thoa bình thường phát ra nằm trong âm vực này, đó là nốt La^1 (435Hz).

Các âm cao 1000Hz, 1200Hz vẫn thuộc phạm vi các nốt nhạc quen thuộc. Những nhạc cụ khác vượt quá phạm vi này gồm violon, sáo, đại phong cầm, piano. Nữ ca sĩ *Lucrexia Aghiari* hát nổi nốt Do^4 (2018Hz), nữ ca sĩ Pháp *Mado - Robanh* có thể hát thoải mái nốt Re^4 (2300Hz).

Các âm thanh có tần số từ 16000Hz tới 20000Hz là siêu âm, tai người không nghe thấy, người ta dùng vào các việc khác như khoan đá, thăm dò đáy biển hoặc chụp ảnh các bộ phận trong y học,...

2. Xây dựng thang nhạc

Xây dựng thang nhạc không đơn giản như xây dựng thang nhiệt độ. Đối với một nhiệt kế thủy ngân ta lấy vạch ứng với độ đóng băng làm 0° và vạch ứng với nhiệt độ khi nước sôi là 100°. Chia khoảng cách giữa hai vạch đó ra 100 phần bằng nhau, đánh dấu từ 0 đến 100 ta được thang nhiệt độ bách phân. Hoặc như cách chia 1m thành 100 phần bằng nhau, mỗi phần có chiều dài 1cm. Thang nhạc khác, nếu ta chia một quãng tám từ một âm có tần số f_0 đến âm có tần số $2f_0$ thành các quãng nhỏ bằng nhau như kiểu một nhiệt kế thì các âm thanh tạo nên sẽ rất chói tai, người nghe không thể chịu nổi. Do đó phải làm theo cách khác. Xây dựng thang nhạc phải thoả mãn hai tiêu chuẩn:

a) ***Số âm trong thang không lớn lắm***: Trừ một số ít nhạc cụ như violon, violonxel, người chơi có thể bấm vào bất kì chỗ nào trên cần để tạo ra những âm thanh tuỳ ý, không có khoảng nhảy. Với những nhạc cụ khác, các phím đàn ứng với một số không lớn âm cố định. Nếu nhiều quá, sẽ gây khó khăn cho người sử dụng.

b) ***Hoà âm***: Các âm phát ra đồng thời trong thang phải hoà quyện với nhau, nghe êm dịu, không có cảm giác chói tai.

Qua thực nghiệm, trước hết ta nhận thấy rằng âm có tần số f_0 (nói gọn là âm f_0) và âm $2f_0$ hoà với nhau tốt nhất. Vì thế, *thang nhạc có âm f_0 thì phải có âm $2f_0$*, khoảng cách giữa chúng gọi là một octa (một quãng tám). Đặc trưng của quãng giữa hai âm là tỉ số tần số của chúng. Quãng tám có tỉ số là 2.

Ví dụ âm Do^1 có tần số là 262Hz, Do^2 (Do^1 lên một octa) có tần số là 523Hz, 523: 262 ≈ 2. Âm có tần số bội 3 ($3f_0$), bội 4, bội 5 cũng tham gia vào hoà âm, mặc dầu rất yếu.

Như vậy, ngoài chủ âm (âm đầu tiên của thang nhạc) f_0, các âm sau đây cũng nằm trong thang nhạc:

$$f_1 = \frac{9}{8}f_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}f_0;\ f_2 = \frac{5}{4}f_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}.5f_0;$$

$$f_3 = \frac{4}{3}f_0 = \frac{3}{2}.2f_0;\ f_4 = \frac{3}{2}f_0 = \frac{1}{2}.3f_0;$$

$$f_5 = \frac{5}{3}f_0 = \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}f_0;\ f_6 = \frac{15}{8}f_0 = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}f_0;\ f_7 = 2f_0.$$

Các âm $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 = 2f_0$ là âm cơ bản trong thang nhạc bậc bảy.

Các âm thanh khác sử dụng trong âm nhạc đều do các âm cơ bản trong thang nhạc bảy bậc nâng cao lên hoặc hạ xuống một quãng tám (tần số dao động của âm sai khác một bội số của 2 hoặc $\frac{1}{2}$).

Nhận xét. Thang nhạc bảy bậc không đều, nếu cứ để nguyên không bổ sung thêm một số âm nữa thì việc sử dụng sẽ gặp khó khăn, bởi vì khi chuyển giai điệu lên cao hoặc xuống thấp một quãng tuỳ ý thì giai điệu bị méo. Ví dụ giai điệu bài *Ngày đầu tiên đi học* của *Nguyễn Ngọc Thiện*: ***sol sol do sol mi, fa la fa la re***... Nếu ta nâng giai điệu lên một ton (giọng) là: ***la la re la fa, sol si sol si mi***..., sẽ bị méo ở nốt ***fa***. Để khắc phục khi nâng cao lên hoặc hạ thấp thì giai điệu không bị méo, ta phải xây dựng thang nhạc đều (nghĩa là tỉ số các âm liên tiếp liền nhau phải không đổi).

3. Nói qua vài nét về quá trình dẫn đến một thang nhạc đều 12 bậc

Người Hy Lạp cổ xưa đã có công chia âm giai thành các quãng tám (quãng tám là khoảng cách giữa các nốt có liên quan gần gũi nhất) và chia mỗi quãng tám thành 12 bậc.

Nhà toán học *Pythagore* cũng phát hiện thêm một quãng năm và nhận thấy rằng điểm cuối của quãng năm thứ 12 gần trùng với quãng tám thứ 7. Điều này cho phép ông và những người kế tục ông tạo nên một thang nhạc dựa trên quãng tám và quãng năm, gọi là *thang nhạc Pythagore*.

Thang nhạc Pythagore tồn tại khá lâu, nhưng không đáp ứng được giới âm nhạc. Nhược điểm chính của nó là các quãng tám và quãng năm không cùng một đơn vị đo, 12 lần quãng năm dài hơn 7 lần quãng tám là $(3/2)^{12} - (2)^7$ gần bằng 1,6, gần bằng $\frac{1}{9}$ quãng giữa Re và Do, nên gây khó khăn cho việc lên dây đàn. Các nhạc sĩ và các nhà bác học (như nhà thiên văn học *Keple*, nhà toán học *Ole*) đã có nhiều cố gắng nghiên cứu cải tiến nhưng không có kết quả. Phải đến năm 1700, nhà toán học kiêm nhạc sĩ người Đức *Ăngdrê - Vecmâyơ* đã đưa ra một cải tiến đơn giản. Ông không dùng quãng năm đúng mà lấy gần đúng tới mức có thể chấp nhận được. Quãng $\frac{1}{2}$ cung xuất hiện (bằng khoảng giữa nốt Mi - Fa (349 – 330 = 19) "một centimét âm nhạc", nhưng, trong khi cm là một đơn vị đo tuỳ ý thì quãng $\frac{1}{2}$ cung lại rất thích hợp với các yêu cầu của âm học và thính giác của con người. Quãng $\frac{1}{2}$ cung tương đương với $\frac{1}{12}$ quãng tám. Thang nhạc 12 bậc đều này gọi là sự điều hoà ngang bằng hoặc gọi là âm giai ôn hoà. Ngày nay là cơ sở cho toàn bộ nền âm nhạc châu Âu.

4. Xây dựng thang nhạc đều 12 bậc

Giả sử trong phạm vi một quãng tám có những âm $f_0, f_1, f_2, ..., f_m$ với

$$f_0 < f_1 < f_2 < ... < f_{m-1} < f_m = 2f_0$$

Dãy những âm đó cũng làm thành một giai điệu đơn giản. Bây giờ ta nâng giai điệu đó lên một bậc: $f_1, f_2, f_3, ..., f_m, f_{m+1} = 2f_1$. Để giai điệu này không bị méo so với giai điệu xuất phát, cần có điều kiện $\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = ... = \frac{f_m}{f_{m-1}} = \frac{f_{m+1}}{f_m}$ với điều kiện $f_m = 2f_0$.

Ta thấy dãy $f_0, f_1, ..., f_{m-1}, f_m$ (1) là một cấp số nhân có công bội q, với $q^m = 2$. Để thuận tiện, ta chuyển (1) thành dãy $\log_2 f_0, \log_2 f_1, ..., \log_2 f_m$ (2)

Dãy (2) là một cấp số cộng có công sai $d = \frac{1}{m}$.

Sau khi đặt $\log_2 f_0 = A$. Dãy (2) trở thành

$$A,\ A+\frac{1}{m},\ A+\frac{2}{m},\ldots,\ A+1 \qquad (3)$$

Vấn đề đặt ra là chọn số m như thế nào? Bằng các thí nghiệm trên dây đàn, người ta thấy rằng: Ngoài tần số f_0 (âm có tần số dao động f_0) ra, các dao động có tần số $2f_0$, $3f_0$, $4f_0$ đều tham gia, $5f_0$ thì nghe rất yếu.

Xét điều kiện: Cùng với âm f_0 trong thang nhạc phải có âm $3f_0$. Cũng có nghĩa là cần có âm $\frac{3}{2}f_0$, trong khoảng $(f_0; 2f_0)$. Ngoài số m ra, ta phải tìm được số k $(k < m)$ sao cho $f_k = \frac{3}{2}f_0$.

Đặt $A = \log_2 f_0$ ta có $\log_2 f_k = \log_2\frac{3}{2} + A$.

Suy ra phải tìm các số nguyên m và k sao cho

$$\log_2\frac{3}{2} = \frac{k}{m} \qquad (4)$$

Điều kiện (4) tương đương $2^{\frac{k}{m}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^{k+m} = 3^m$.

Điều kiện này không thể thoả mãn vì vế trái chẵn, vế phải lẻ. Như vậy không thể tìm được hai số nguyên k và m thoả mãn (4). Trong thang log không có âm $\frac{3}{2}f_0$. Quãng $(f; \frac{3}{2}f_0)$ gọi là quãng năm hoàn toàn (hoặc quãng năm đúng). Nhưng cần phải giữ lại tính "đều" của thang nhạc để khi chuyển giai điệu không bị méo, còn âm "hoàn toàn" có tần số đúng $\frac{3}{2}f_0$ thì được thay bằng một âm có tần số dao động gần nhất chấp nhận được với âm hoàn toàn (đó chính là ý tưởng "cải tiến" của *Angdrê Vecmâyơ*). Nghĩa là tìm số hữu tỉ $\frac{k}{m}$ gần đúng với số vô tỉ $\log_2\frac{3}{2}$ sao cho sai số tần số tương ứng nhỏ hơn 1Hz để tai ta không nhận thấy được. Nhận thấy $\frac{7}{12} \approx 0,583$ gần đúng $\log_2\frac{3}{2}$ đạt độ chính xác 0,002 (1Hz ứng với 0.004 trên thang $\log_2$). Lấy $m = 12$, ta được thang nhạc đều 12 âm, âm thứ bảy rất gần với quãng năm hoàn toàn $\frac{3}{2}f_0$. Ta có bảng sau:

i	0	1	2	3	4	5	6
$\log_2 f_i - \log_2 f_0$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$

i	7	8	9	10	11	12	
$\log_2 f_i - \log_2 f_0$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	1	

Thang nhạc 12 bậc đáp ứng tốt các yêu cầu của chúng ta đề ra. Logarit tỉ số tần số của hai âm liền nhau $\log_2\frac{f_{i+1}}{f_i}$ luôn bằng số không đổi $\frac{1}{12}$. Tỉ số tần số dao động của hai âm liền nhau trong thang nhạc luôn bằng một số không đổi $2^{\frac{1}{12}}$ gần đúng với số hữu tỉ 1,059. Khoảng cách giữa hai âm ấy là $\frac{1}{2}$ cung, khoảng hai nửa cung gọi là một cung.

Nhận xét. Thang nhạc đều 12 bậc này, chứa thang nhạc bảy bậc (1). Lấy chủ âm Do^1 có tần số 262Hz và quãng tám Do^2 có tần số 523Hz. Ta có bảng sau:

Âm	Do^1		Re^1		Mi^1	Fa^1	
Tần số f_i	$f_0 =$ 262	$f_1 =$ 276	$f_2 =$ 294	$f_3 =$ 309	$f_4 =$ 330	$f_5 =$ 349	$f_6 =$ 366,5
$\log_2 f_i$	8,033	8,114	8,198	8,217	8,365	8,448	8,531
$\log_2 f_i - \log_2 f_0$	0	0,083	0,167	0,250	0,334	0,417	0,500

Âm	Sol^1		La^1		Si^1	Do^2
Tần số f_i	$f_7 =$ 392	$f_8 =$ 411,6	$f_9 =$ 440	$f_{10} =$ 462	$f_{11} =$ 494	$f_{12} =$ 523
$\log_2 f_i$	8,615	8,691	8,781	8,864	8,948	9,031
$\log_2 f_i - \log_2 f_0$	0,583	0,667	0,750	0,833	0,917	1,000

$(i = 0, 1, 2, \ldots, 11, 12)$

Ngoài 7 âm cơ bản trong quãng tám ($Do^1 - Do^2$), ta còn 5 âm phụ trong tập hợp vừa đủ 12 bậc của thang. Chúng được kí hiệu bằng cách thêm vào dấu thăng (#) hoặc dấu giáng (b) bên cạnh các âm cơ bản. Ví dụ $f_1 = Do^{1\#}$ hoặc $f_3 = Mi^{1b}$ ...

Từ thang nhạc 7 bậc không đều, sau khi bổ sung thêm 5 âm phụ ta có thang nhạc 12 bậc đều: (Do, $Do^\#$, Re, $Re^\#$, Mi, Fa, $Fa^\#$, Son, $Son^\#$, La, $La^\#$, Si, Do), hoặc (Do, Re^b, Re, Mi^b, Mi, Fa, Son^b, Son, La^b, La. Si^b. Si, Do).

(Kì sau đăng tiếp)

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Mừng xuân Giáp Ngọ

Mã đáo công thành Tết mới sang
Vững tin năm Ngọ sẽ đàng hoàng
Tre ngà óng ánh hồn Phù Đổng
Áo giáp lung linh nét sử vàng
Trấn biển tàu ngầm thêm hiện đại
Canh trời Ngựa Sắt vẫn thời trang
Tri ân Thánh Gióng luôn hoài niệm
Giá trị con người, nghiệp vẻ vang.

ĐÀO TAM (Đại học Vinh)

Vịnh Con Ngựa 2014

Khơi nhiều cảm xúc, nếu đem bì,
Chẳng gì sánh được cảnh Ngựa phi:
Bốn vó sải dài, đường ngắn lại,
Dải bờm tung mạnh, gió êm đi.
Xông pha chiến trận, không hề sợ,
Rong ruổi bụi trần, có xá chi.
Tình nghĩa Ngựa - Người, bao chuyện kể
Đông - Tây, kim - cổ, rất li kì.

LÝ VĂN TOÁN (Hà Nội)

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 439 (1.2014)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN
GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam
NGƯT. NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam
GS. TS. VŨ VĂN HÙNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Phụ trách Toà soạn : TS.* TRẦN HỮU NAM** ***Thư kí Tòa soạn : ThS.* HỒ QUANG VINH**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở - For Lower Secondary School**
Đinh Xuân Hùng - Sử dụng bài toán quen thuộc để giải các bài toán mới.

3 Hướng dẫn giải Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán lớp 9 TP. Hồ Chí Minh năm học 2012 - 2013.

4 Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán lớp 9 tỉnh Bình Định năm học 2012 - 2013.

5 **Chuẩn bị thi vào đại học - University Entrance Preparation**
Lê Xuân Khang - Một số bất đẳng thức đồng bậc hai và bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

8 **Thử sức trước kì thi - Đề số 5**

9 **Hướng dẫn giải Đề số 4**

10 **Bạn đọc tìm tòi**
Vũ Thị Vân - Dãy số với số chính phương.

13 **Phương pháp giải Toán**
Trần Xuân Đáng - Sử dụng phương pháp toạ độ để giải một số bài toán hình học.

16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/439, ..., T12/439, L1/439, L2/439.

18 **Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của Số 435

27 Hội nghị Hội đồng biên tập Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ năm 2013.

28 **Toán học và đời sống**
Trần Đình Viện - Toán học và Âm nhạc.

31 Trang thơ mừng Xuân Giáp Ngọ.

Trưởng ban biên tập: NGUYỄN ANH QUÂN
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: KIM THANH

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI HÀ NỘI

Chúc Mừng Năm Mới

2014

Giáp Ngọ

Hạnh Phúc
An Khang
Thịnh Vượng

TRƯỜNG THPH TỨ KỲ - HẢI DƯƠNG

50 năm XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN

Địa chỉ: Đường 391, thị trấn Tứ Kỳ, huyện Tứ Kỳ, tỉnh Hải Dương
Điện thoại: 03203747122

Cô giáo Vũ Thị Hồng Hạnh
Hiệu trưởng nhà trường

Trường THPT Tứ Kỳ được thành lập năm 1963. Năm học đầu tiên trường có 14 giáo viên, 5 lớp với 290 học sinh.

Năm học 2013 - 2014 nhà trường có 36 lớp với tổng số 1512 học sinh; trong tổng số 95 cán bộ, giáo viên, nhân viên có 16 thạc sĩ và nhiều giáo viên có trình độ sau đại học.

Được sự quan tâm của Tỉnh ủy, HĐND tỉnh, UBND tỉnh, của các cấp, các ngành, các tổ chức xã hội và đặc biệt là sự quan tâm chỉ đạo trực tiếp của Sở GD&ĐT Hải Dương, nhà trường đã cơ bản xây dựng đủ các điều kiện cho hoạt động giảng dạy, học tập phục vụ công tác đào tạo tại vị trí đẹp và thuận lợi nhất của thị trấn, với diện tích gần 4 héc ta. Có được quang cảnh như hôm nay cần phải kể đến công sức của lãnh đạo, giáo viên và học sinh nhà trường. Không đợi hoàn thiện xây dựng cơ bản, ngay từ khi chưa khởi công xây dựng, nhà trường đã chủ động trồng cây, quy hoạch tiểu cảnh, sắp xếp sân chơi, bãi tập. Nhờ đó, ngay lúc này, khi dự án vẫn đang tiếp tục thì cảnh quan nhà trường đã sống động bởi cây lá tốt tươi, hoa thơm khắp chốn.

Trải qua 50 năm xây dựng và trưởng thành, nhà trường đã khẳng định được vị thế của mình. Cùng với giáo dục đạo đức, kĩ năng sống, nhà trường nổi bật là một điểm son giáo dục văn hoá. Năm năm liền, trường luôn ở tốp đầu tỉnh về kết quả thi học sinh giỏi, nhiều năm xếp thứ nhất, thứ nhì. Tính từ năm 1993 tới nay có 142 em đoạt giải Nhất, Nhì học sinh giỏi cấp tỉnh, có 5 em đoạt giải cấp Quốc gia. Về thi đại học, điểm bình quân các môn thi luôn xếp ở tốp 100 trường trong tổng số gần 4000 trường THPT trên cả nước và là trường dẫn đầu của tỉnh. Hàng năm, nhiều lớp trên 90% học sinh đỗ đại học nguyện vọng 1, đến nay có 8 học sinh đạt Thủ khoa, Á khoa các trường đại học. Nhiều cựu học sinh của trường là cán bộ cao cấp trong quân đội, cán bộ chủ chốt của nhiều ngành, nhiều lĩnh vực từ trung ương đến địa phương, là nhà khoa học, doanh nhân, người lao động giỏi, tích cực tham gia xây dựng quê hương, đất nước.

Với những thành tích giáo dục toàn diện, nhất là giáo dục văn hoá, Trường THPT Tứ Kỳ liên tục là trường tiên tiến xuất sắc, được UBND tỉnh, Chính phủ tặng nhiều Bằng khen, tháng 11/2013 nhà trường vinh dự được Chủ tịch nước tặng Huân chương Lao động hạng nhất. Trong tình cảm tràn đầy của ngày gặp mặt 29/12/2013, dưới sắc đỏ của Huân chương Lao động hạng nhất, mùa xuân dường như đã sớm trở về với Trường THPT Tứ Kỳ.

Tập thể giáo viên của nhà trường

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT01M4

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2014

Giá: 8000 đồng
Tám nghìn đồng