NGUYỄN CHÍN EM

TÀI LIỆU TỰ HỌC TOÁN 8

TỔNG ÔN KIẾN THỨC

GIẢI CHI TIẾT

ÔN LUYỆN THI MÔN TOÁN 8

TỦ SÁCH LUYỆN THI

NGUYỄN CHÍN EM

TÀI LIỆU TỰ HỌC TOÁN 8

MỤC LỤC

PHẦN I

ĐẠI SỐ

CHƯƠNG 1 PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA ĐA THỨC

BÀI 1 NHÂN ĐA THỨC

A LÝ THUYẾT

VÍ DỤ 1. Tính giá trị của biểu thức $A = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20$ tại $x = 16$.

✍ **LỜI GIẢI.**

— **Cách 1** Chú ý rằng $x = 16$ nên $x - 16 = 0$, do đó ta biến đổi để biểu thức chứa nhiều biểu thức dạng $x - 16$.

$$\begin{aligned} A &= x^4 - 16x^3 - x^3 + 16x^2 + x^2 - 16x - x + 16 + 4 \\ &= x^3(x-16) - x^2(x-16) + x(x-16) - (x-16) + 4 \\ &= 4. \end{aligned}$$

— **Cách 2** Trong biểu thức A, ta thay các số 17 bởi $x + 1$, còn 20 bởi $x + 4$.

$$\begin{aligned} A &= x^4 - x^3(x+1) + x^2(x+1) - x(x+1) + x + 4 \\ &= x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 4 \\ &= 4. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 2. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp, biết rằng nếu cộng ba tích của hai trong ba số ấy, ta được 242.

✍ **LỜI GIẢI.**

Coi $x - 1,\ x,\ x + 1$ là ba số tự nhiên liên tiếp. Ta có

$$x(x-1) + x(x+1) + (x-1)(x+1) = 242 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 242 \Leftrightarrow x^2 = 81.$$

Do x là số tự nhiên nên $x = 9$. Ba số tự nhiên cần tìm là $8;\ 9;\ 10$. □

B BÀI TẬP

1. Nhân đơn thức với đa thức

BÀI 1. Thực hiện phép tính

❶ $3x^n \cdot (6x^{n-3} + 1) - 2x^n \cdot (9x^{n-3} - 1)$.

❷ $5^{n+1} - 4.5^n$.

❸ $6^2 \cdot 6^4 - 4^3 \cdot (3^6 - 1)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $3x^n(6x^{n-3} + 1) - 2x^n(9x^{n-3} - 1) = 18x^{2n-3} + 3x^n - 18x^{2n-3} + 2x^n = 5x^n$.

❷ $5^{n+1} - 4.5^n = 5.5^n - 4.5^n = 5^n$.

❸ $6^2 \cdot 6^4 - 4^3(3^6 - 1) = (3.2)^6 - (2^2)^3(3^6 - 1) = 3^6 \cdot 2^6 - 2^6 \cdot 3^6 + 2^6 = 2^6$.

□

BÀI 2. Tìm x, biết

❶ $4(18 - 5x) - 12(3x - 7) = 15(2x - 16) - 6(x + 14)$.

❷ $5(3x + 5) - 4(2x - 3) = 5x + 3(2x + 12) + 1$.

❸ $2(5x - 8) - 3(4x - 5) = 4(3x - 4) + 11$.

❹ $5x - 3[4x - 2(4x - 3(5x - 2))] = 182$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

$$\begin{aligned}
4(18 - 5x) - 12(3x - 7) &= 15(2x - 16) - 6(x + 14)\\
72 - 20x - 36x + 84 &= 30x - 240 - 6x - 84\\
156 - 56x &= 24x - 324\\
156 + 324 &= 24x + 56x\\
80x &= 480\\
x &= 6.
\end{aligned}$$

❷

$$\begin{aligned}
5(3x + 5) - 4(2x - 3) &= 5x + 3(2x + 12) + 1\\
15x + 25 - 8x + 12 &= 5x + 6x + 36 + 1\\
7x + 37 &= 11x + 37\\
4x &= 0\\
x &= 0.
\end{aligned}$$

❸

$$\begin{aligned}
2(5x - 8) - 3(4x - 5) &= 4(3x - 4) + 11\\
10x - 16 - 12x + 15 &= 12x - 16 + 11\\
-2x - 1 &= 12x - 5\\
5 - 1 &= 12x + 2x\\
14x &= 4\\
x &= \frac{2}{7}.
\end{aligned}$$

❹

$$\begin{aligned}
5x-3[4x-2(4x-3(5x-2))] &= 182\\
5x-3[4x-2(4x-15x+6)] &= 182\\
5x-3[4x-2(-11x+6)] &= 182\\
5x-3[4x+22x-12] &= 182\\
5x-78x+36 &= 182\\
-73x &= 182-36\\
x &= -2.
\end{aligned}$$

□

BÀI 3. Tính giá trị của các biểu thức

❶ $A = x^3 - 30x^2 - 31x + 1$ tại $x = 31$.

❷ $B = x^5 - 15x^4 + 16x^3 - 29x^2 + 13x$ tại $x = 14$.

❸ $C = x^{14} - 10x^{13} + 10x^{12} - 10x^{11} + \cdots + 10x^2 - 10x + 10$ tại $x = 9$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Vì $x = 31$ nên $x - 31 = 0$ do đó ta biến đổi

$$\begin{aligned}
A &= x^3 - 30x^2 - 31x + 1\\
&= x^3 + x^2 - 31x^2 - 31x + 1\\
&= x^2(x-31) + x(x-31) + 1 = 1.
\end{aligned}$$

❷ Vì $x = 14$ nên $x - 14 = 0$ do đó ta biến đổi

$$\begin{aligned}
B &= x^5 - 15x^4 + 16x^3 - 29x^2 + 13x\\
&= x^5 - 14x^4 - x^4 + 14x^3 + 2x^3 - 28x^2 - x^2 + 14x - x\\
&= x^4(x-14) - x^3(14-x) + 2x^2(x-14) + x(14-x) - x\\
&= -x = -14.
\end{aligned}$$

❸ Trong biểu thức C, ta thay các số 10 bởi $x+1$.

$$\begin{aligned}
C &= x^{14} - (x+1)x^{13} + (x+1)x^{12} - (x+1)x^{11} + \cdots + (x+1)x^2 - (x+1)x + (x+1)\\
&= x^{14} - x^{14} - x^{13} + x^{13} + x^{12} - x^{12} - x^{11} + \cdots - x^2 - x + x + 1\\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

BÀI 4. Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách thay số bởi chữ một cách hợp lý

$$A = 2\frac{1}{315}\cdot\frac{1}{651} - \frac{1}{105}\cdot 3\frac{650}{651} - \frac{4}{315\cdot 651} + \frac{4}{105}$$

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned}A &= 2\frac{1}{315}\cdot\frac{1}{651}-\frac{1}{105}\cdot 3\frac{650}{651}-\frac{4}{315\cdot 651}+\frac{4}{105}\\ &= \frac{2.315+1}{315}\cdot\frac{1}{651}-\frac{3}{315}\cdot\frac{3.651+650}{651}-\frac{4}{315\cdot 651}+\frac{4.3}{315}\\ &= \left(2+\frac{1}{315}\right)\cdot\frac{1}{615}-3\frac{1}{315}\left(4-\frac{1}{651}\right)-4\cdot\frac{1}{315}\cdot\frac{1}{651}+12\cdot\frac{1}{315}\end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} a=\dfrac{1}{315} \\ b=\dfrac{1}{651}\end{cases}$.

Khi đó biểu thức có dạng

$$\begin{aligned}A &= (2+a)\,b-3a\,(4-b)-4ab+12a\\ &= 2b+ab-12a+3ab-4ab+12a\\ &= 2b=\frac{2}{651}.\end{aligned}$$

□

2. Nhân đa thức với đa thức

BÀI 5. Thực hiện phép tính

❶ $A=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$.

❷ $B=(x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned}A &= (x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\\ &= (x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)-(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\\ &= x^6-1.\end{aligned}$$

❷ Ta có

$$\begin{aligned}B &= (x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)\\ &= (x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x)+(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)\\ &= x^7+1.\end{aligned}$$

□

BÀI 6. Tìm x, biết

❶ $(x+2)(x+3)-(x-2)(x+5)=6$.

❷ $(3x+2)(2x+9)-(x+2)(6x+1)=(x+1)-(x-6)$.

❸ $3(2x-1)(3x-1)-(2x-3)(9x-1)=0$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

$$\begin{aligned}(x+2)(x+3)-(x-2)(x+5) &= 6\\ (x^2+5x+6)-(x^2+3x-10) &= 6\\ 2x+16 &= 6\\ 2x &= -10\\ x &= -5.\end{aligned}$$

❷

$$\begin{aligned}(3x+2)(2x+9)-(x+2)(6x+1) &= (x+1)-(x-6)\\ (6x^2+31x+18)-(6x^2+13x+2) &= 7\\ 18x+16 &= 7\\ 18x &= -9\\ x &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

❸

$$\begin{aligned}3(2x-1)(3x-1)-(2x-3)(9x-1) &= 0\\ 3(6x^2-5x+1)-(18x^2-29x-3) &= 0\\ (18x^2-15x+3)-(18x^2-29x-3) &= 0\\ 14x &= 0\\ x &= 0.\end{aligned}$$

□

BÀI 7. Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng $M=N=P$ với $M=a(a+b)(a+c)$; $N=b(b+c)(b+a)$; $P=c(c+a)(c+b)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì $a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a+c=-b\\ b+c=-a\\ a+b=-c.\end{cases}$

Do đó

$M=a(a+b)(a+c)=a(-c)(-b)=abc \qquad (1).$

$N=b(b+c)(b+a)=b(-a)(-c)=abc \qquad (2).$

$P=c(c+a)(c+b)=c(-b)(-a)=abc \qquad (3).$

Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra $M=N=P$. □

BÀI 8. Chứng minh rằng các hằng đẳng thức

❶ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

❷ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Thực hiện phép toán nhân đa thức biến đổi VT thành VP. □

BÀI 9. Cho $a+b+c=2p$. Chứng minh hứng hằng đẳng thức

$$2bc+b^2+c^2-a^2=4p(p-a).$$

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned}\text{Ta có } 4p(p-a) &= 2p\cdot(2p-2a)\\ &= (a+b+c)(a+b+c-2a)\\ &= (a+b+c)(b+c-a)\\ &= (b+c)^2-a^2\\ &= 2bc+b^2+c^2-a^2.\end{aligned}$$

□

BÀI 10. Xét các ví dụ $53\cdot 57 = 32021$, $72\cdot 78 = 5616$.
Hãy xây dựng quy tắc nhân nhẩm hai số có hai chữ số, trong đó các chữ số hàng chục bằng nhau, còn chữ số hàng đơn vị có tổng bằng 10.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta xét hai số $\overline{ab}$ và $\overline{ac}$ thỏa mãn $b+c=10$. Khi đó

$$\begin{aligned}(10a+b)(10a+c) &= 100a^2+10ac+10ab+bc\\ &= 100a^2+10a(b+c)+bc\\ &= 100a^2+100a+bc\\ &= 100a(a+1)+bc.\end{aligned}$$

Quy tắc: *Nhân chữ số hàng chục với chữ số hàng chục thêm 1 rồi viết vào sau tích đó tích của hai chữ số đơn vị (tích này viết bằng hai chữ số).* □

BÀI 11. Cho biểu thức $M=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+x^2$. Tính M theo a,b,c biết rằng $x=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}b+\dfrac{1}{2}c$.

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned}\text{Ta có } M &= (x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+x^2\\ &= (x^2-ax-bx+ab)+(x^2-bx-cx+bc)+(x^2-ax-cx+ac)+x^2\\ &= 4x^2-2x(a+b+c)+(ab+bc+ac)\qquad (1).\end{aligned}$$

Theo giả thiết $x=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}b+\dfrac{1}{2}c \Leftrightarrow 2x=a+b+c$.
Do đó thay vào (1) ta được $M=4x^2-4x^2+ab+bc+ac=ab+bc+ac$. □

BÀI 12. cho dãy số $1,3,6,10,15,\cdots,\dfrac{n(n+1)}{2},\cdots$. Chứng minh rằng tổng hai số hạng liên tiếp của dãy bao giờ cũng là số chính phương.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét dãy số có số hạng tổng quát $u_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
Theo giả thiết $u_{n-1}+u_n=\dfrac{(n-1)n}{2}+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n^2-n+n^2+n}{2}=n^2$.
Vậy tổng hai số hạng liên tiếp của dãy bao giờ cũng là số chính phương. □

BÀI 13. cho a gồm 31 số 1, số b gồm 38 số 1. Chứng minh rằng $ab-2$ chia hết cho 3.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì a gồm 31 số 1 nên số a chia cho 3 dư 1.
vì b gồm 38 số 1 nên số b chia cho 3 dư 2.

Đặt $\begin{cases} a = 3n + 1 \\ b = 3m + 2 \end{cases}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$$\begin{aligned} ab - 2 &= (3n + 1)(3m + 2) - 2 \\ &= 9mn + 6n + 3m + 2 - 2 \\ &= 3(mn + 2n + m)\vdots 3 \end{aligned}$$

□

BÀI 14. Số $3^{50} + 1$ có là tích của hai số tự nhiên liên tiếp không?

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì tích của hai số tự nhiên liên tiếp là một số chẵn và có số tận cùng là $0,\ 2,\ 6$.

Do đó phần dư của tích của hai số tự nhiên liên tiếp chia cho 3 là 0 hoặc 2. (1)

Mặt khác $3^{50} + 1$ chia cho 3 dư 1. (2)

Từ (1) và (2) suy ra số $3^{50} + 1$ không thể là tích của hai số tự nhiên liên tiếp. □

BÀI 15.

❶ Thực hiện phép tính $A = (2^9 + 2^7 + 1)(2^{23} - 2^{21} + 2^{19} - 2^{17} + 2^{14} - 2^{10} + 2^9 - 2^7 + 1)$.

❷ Số $2^{32} + 1$ có là số nguyên tố không?

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned} A &= (2^9 + 2^7 + 1)(2^{23} - 2^{21} + 2^{19} - 2^{17} + 2^{14} - 2^{10} + 2^9 - 2^7 + 1) \\ &= 2^{32} + \left(2^{23} + 2^{23} - 2^{24}\right) + \left(2^{18} - 2^{17} - 2^{17}\right) + \left(2^9 + 2^9 - 2^10\right) + 1 \\ &= 2^32 + \left(2.2^{23} - 2^{24}\right) + \left(2^{18} - 2.2^{17}\right) + \left(2.2^9 - 2^{10}\right) + 1 \\ &= 2^{32} + 1. \end{aligned}$$

❷ Vì $\begin{cases} \left(2^{32} + 1\right)\vdots(2^9 + 2^7 + 1) \\ \left(2^{32} + 1\right)\vdots(2^{23} - 2^{21} + 2^{19} - 2^{17} + 2^{14} - 2^{10} + 2^9 - 2^7 + 1). \end{cases}$

nên $(2^{32} + 1)$ không là số nguyên tố.

□

BÀI 2 CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

A LÝ THUYẾT

Thực hiện phép nhân đa thức, ta được các hằng đẳng thức đáng nhớ sau

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 + b63 - 3ab(a-b)$.
6. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - b^3$.
7. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + b^3$.

Ta cũng có

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

Tổng quát của các công thức 3 và 7, ta có hằng đẳng thức

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \text{ với mọi số lẻ } n.$$

Tổng quát của các hằng đẳng thức $1, 2, 4, 5$, ta có công thức newton. (xem chuyên đề *Tính chia hết đối với số nguyên*).

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng 3599 viết được dưới dạng tích của hai số tự nhiên khác 1.

LỜI GIẢI.

Ta có $3599 = 3600 - 1 = 60^2 - 1^2 = (60+1)(60-1) = 61.59$ □

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng biểu thức sau viết dưới dạng tổng các bình phương của hai biểu thức $x^2 + 2(x+1)^2 + 3(x+2)^2 + 4(x+3)^2$

LỜI GIẢI.

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 + 2(x+1)^2 + 3(x+2)^2 + 4(x+3)^2 &= x^2 + 2(x^2+2x+1) + 3(x^2+4x+4) + 4(x^2+6x+9) \\ &= x^2 + 2x^2 + 4x + 2 + 3x^2 + 12x + 12 + 4x^2 + 24x + 36 \\ &= 10x^2 + 40x + 50 \\ &= (x^2 + 10x + 25)(9x^2 + 30x + 25) \\ &= (x+5)^2 + (3x+5)^2. \end{aligned}$$ □

VÍ DỤ 3. Cho $x + y + z = 0$ và $xy + yz + zx = 0$. Chứng minh rằng $x = y = z$.

LỜI GIẢI.

Ta có $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \Leftrightarrow 0 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow x = y = z (= 0)$. □

VÍ DỤ 4.

❶ Tính $A = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \cdots - 99^2 + 100^2$.

❷ Tính $A = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \cdots + (-1)^n.n^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned} A &= -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \cdots - 99^2 + 100^2 \\ &= (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \cdots + (100^2 - 99^2) \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99 + 100 \\ &= \frac{100 \cdots 101}{2} = 5050. \end{aligned}$$

❷ Xét hai trường hợp

- Nếu n là chẵn thì $A = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \cdots + (100^2 - 99^2)$

$$\begin{aligned} &= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

- Nếu n là lẻ thì $A = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \cdots + (100^2 - 99^2)$

$$\begin{aligned} &= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) -^2 n \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - n^2 \\ &= -\frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

□

⚠ *Hai kết quả trên có thể viết chung trong một công thức* $(-1)^n \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$.

VÍ DỤ 5. Cho $x + y = a + b$ (1)

$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ (2)

Chứng minh rằng $x^3 + y^3 = a^3 + b^3$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ (3)

Từ (1) suy ra $(x+y)^2 = (a+b)^2$.

Tức là $x^2 + 2xy + y^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Do $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ nên $2xy = 2ab$, suy ra $xy = ab$. (4)

Thay các kết quả $(1), (2), (4)$ vào (3), ta được

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy) = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = a^3 + b^3$. □

VÍ DỤ 6. Cho $a + b = m$, $a - b = n$. Tính ab và $a^3 - b^3$ theo m và n.

✍ **LỜI GIẢI.**

Cách 1. Từ $a + b = m$, $a - b = n$, ta tính được $b = \dfrac{m-n}{2}$, $a = \dfrac{m+n}{2}$.

Do đó $ab = \dfrac{m+n}{2} \cdot \dfrac{m-n}{2} = \dfrac{m^2 - n^2}{4}$;

$a^3 - b^3 = \left(\dfrac{m+n}{2}\right)^3 - \left(\dfrac{m-n}{2}\right)^3 = \dfrac{(m+n)^3 - (m-n)^3}{8}$

Rút gọn biểu thức trên, ta được $\dfrac{3m^2n + n^3}{4}$.

Cách 2. Ta có

$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2 = m^2 - n^2 \text{ nên } ab = \frac{m^2 - n^2}{4}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)\left[(a+b)^2 - ab\right] \\ &= n\left(m^2 - \frac{m^2 - n^2}{4}\right) = \frac{n(3m^2 + n^2)}{4} = \frac{3m^2n + n^3}{4}. \end{aligned}$$

□

1. Bài tập

BÀI 16. Tính giá trị của các biểu thức.

a) $\dfrac{63^2 - 47^2}{215^2 - 105^2}$; b) $\dfrac{437^2 - 363^2}{537^2 - 463^2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $\dfrac{63^2 - 47^2}{215^2 - 105^2} = \dfrac{(63-47)(63+47)}{(215-105)(215+105)} = \dfrac{16 \cdot 110}{110 \cdot 320} = \dfrac{1}{20}$;

❷ $\dfrac{437^2 - 363^2}{537^2 - 463^2} = \dfrac{(437-363)(437+363)}{(537-463)(537+463)} = \dfrac{74 \cdot 800}{74 \cdot 1000} = \dfrac{4}{5}$.

□

BÀI 17. So sánh $A = 26^2 - 24^2$ và $B = 27^2 - 25^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

$A = (26-24)(26+24)$ và $B = (27-25)(27+25) = (26-24)(26+24+2) > A$. □

BÀI 18. Tìm x, biết

$$4(x+1)^2 + (2x-1)^2 - 8(x-1)(x+1) = 11.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $4(x^2 + 2x + 1) + (4x^2 - 4x + 1) - 8(x^2 - 1) - 11 = 0$.

Rút gọn ta được $4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$. □

BÀI 19. Rút gọn biểu thức:

❶ $2x(2x-1)^2 - 3x(x+3)(x-3) - 4x(x+1)^2$;

❷ $(a-b+c)^2 - (b-c)^2 + 2ab - 2ac$;

❸ $(3x+1)^2 - 2(3x+1)(3x+5) + (3x+5)^2$;

❹ $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$;

❺ $(a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 - 2(b-c)^2$;

❻ $(a+b+c)^2 + (a-b-c)^2 + (b-c-a)^2 + (c-a-b)^2$;

❼ $(a+b+c+d)^2 + (a+b-c-d)^2 + (a+c-b-d)^2 + (a+d-b-c)^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $2x(2x-1)^2-3x(x+3)(x-3)-4x(x+1)^2$
$=2x(4x^2-4x+1)-3x(x^2-9)-4x(x^2+2x+1)$
$=x^3-16x^2+25x;$

❷ $(a-b+c)^2-(b-c)^2+2ab-2ac=(a^2+b^2+c^2+2ac-2ab-2bc)-(b^2+c^2-2bc)+2ab-2ac=a^2;$

❸ Đặt $a=3x+5$, $b=3x+1$.
Biểu thức đã cho trở thành $b^2-2ba+a^2=(a-b)^2=4^2=16$.

❹ Nhân biểu thức đã cho với $3-1$, ta được $3^{64}-1$.
Giá trị của biểu thức là $\dfrac{1}{2}\left(3^{64}-1\right)$.

❺ $(a+b-c)^2+(a-b+c)^2-2(b-c)^2$
$=(a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc)+(a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc)-2(b^2+c^2-2bc)$
$=2a^2;$

❻ $(a+b+c)^2+(a-b-c)^2+(b-c-a)^2+(c-a-b)^2$
$=(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)+(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc)+(a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc)$
$=4(a^2+b^2+c^2);$

❼ $(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a+c-b-d)^2+(a+d-b-c)^2$
$=[(a+b)+(c+d)]^2+[(a+b)-(c+d)]^2+[(a+c)-(b+d)]^2+[(a+d)-(b+c)]^2$
$=2(a+b)^2+2(c+d)^2+(a+c)^2+(b+d)^2+(a+d)^2+(b+c)^2-2(ad+bc+ac+bd)$
$=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

□

BÀI 20. Cho $x+y=3$. Tính giá trị của biểu thức

$$A=x^2+2xy+y^2-4x-4y+1.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $A=(x+y)^2-4(x+y)+1=3^2-4\cdot 3+1=-2$. □

BÀI 21. Cho $a^2+b^2+c^2=m$. Tính giá trị của biểu thức sau theo m.

$$A=(2a+2b-c)^2+(2b+2c-a)^2+(2c+2a-b)^2.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $x=a+b+c$ thì

$$\begin{aligned}
A &= (2x-3c)^2+(2x-3b)^2+(2x-3a)^2\\
&= (4x^2-12xc+9c^2)+(4x^2-12xb+9b^2)+(4x^2-12xa+9a^2)\\
&= 12x^2-12(a+b+c)+9(a^2+b^2+c^2)\\
&= 12x^2-12x^2+9m\\
&= 9m.
\end{aligned}$$

□

BÀI 22. Hãy viết các số sau đây dưới dạng tích của hai số tự nhiên khác 1.

a) 899; b) 9991.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $899 = 900 - 1 = 30^2 - 1^2 = (30 - 1)(30 + 1) = 29 \cdot 31$;

❷ $9991 = 10\,000 - 9 = 100^2 - 3^2 = (100 - 3)(100 + 3) = 97 \cdot 103$.

□

BÀI 23. Chứng minh rằng hiệu sau đây là một số gồm toàn các chữ số như nhau.

$$7778^2 - 2223^2$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $7\,778^2 - 2\,223^2 = (7\,778 - 2\,223)(7\,778 + 2\,223) = 5\,555 \cdot 10\,001 = 55\,555\,555$. □

BÀI 24. Chứng minh các hằng đẳng thức:

❶ $(a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$;

❷ $x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $(a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) + (a^2 + b^2 + c^2)$.
$(a^2 + 2ab + b^2) + (b^2 + 2bc + c^2) + (c^2 + 2ca + a^2) = (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$;

❷ Ta có $x^4 + y^4 + (x + y)^4 = x^4 + y^4 + (x^2 + y^2 + 2xy)^2$
$= 2(x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^3y + x^2y^2 + 2xy^3) = 2(x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3) = 2(x^2 + xy + y^2)^2$.

□

BÀI 25. Cho $a^2 - b^2 = 4c^2$. Chứng minh hằng đẳng thức

$$(5a - 3b + 8c)(5a - 3b - 8c) = (3a - 5b)^2.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned}(3a - 5b)^2 &= 9a^2 + 25b^2 - 30ab = 25a^2 + 9b^2 - 30ab - 16(a^2 - b^2)\\ &= (5a)^2 + (3b)^2 - 2 \cdot (5a)(3b) - 16 \cdot 4c^2\\ &= (5a - 3b)^2 - (8c)^2 = (5a - 3b - 8c)(5a - 3b + 8c).\end{aligned}$$

□

BÀI 26. Chứng minh rằng nếu $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ với x, y khác 0 thì $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 &\Leftrightarrow a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy\\ &\Leftrightarrow a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = 0\\ &\Leftrightarrow (ay - bx)^2 = 0 \Leftrightarrow ay - bx = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \text{ với } x, y \neq 0.\end{aligned}$$

□

BÀI 27. Chứng minh rằng nếu $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$ với x, y, z khác 0 thì $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2\\&\Leftrightarrow (a^2y^2-2abxy+b^2x^2)+(a^2z^2-2acxz+c^2x^2)+(b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)=0\\&\Leftrightarrow (ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2=0\\&\Leftrightarrow ay-bx=0, az-cx=0, bz-cy=0\\&\Rightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}\text{ với } x,y,z\neq 0.\end{aligned}$$

□

BÀI 28. Cho $(a+b)^2=2(a^2+b^2)$. Chứng minh rằng $a=b$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}&(a+b)^2=2(a^2+b^2)\\&\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=2a^2+2b^2\\&\Leftrightarrow 0=a^2-2ab+b^2\\&\Leftrightarrow 0=(a-b)^2\\&\Leftrightarrow 0=a-b\\&\Leftrightarrow a=b\end{aligned}$$

□

BÀI 29. Chứng minh rằng $a=b=c$ nếu có một trong các điều kiện sau:

❶ $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$;

❷ $(a+b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2)$;

❸ $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$
$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ca$
$\Leftrightarrow (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$
$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$
$\Leftrightarrow a-b=0, b-c=0, c-a=0$
Suy ra $a=b=c$.

❷ $(a+b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2)$
$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=3a^2+3b^2+3c^2$
$\Leftrightarrow ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2$ theo câu a) suy ra $a=b=c$.

❸ theo câu b) $(a+b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2)=3(ab+bc+ca)$.
Suy ra $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$, theo câu a) $a=b=c$.

□

BÀI 30. Hãy viết các biểu thức sau dưới dạng tổng của ba bình phương:

❶ $(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2$;

❷ $2(a-b)(c-b)+2(b-a)(c-a)+2(b-c)(a-c)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2$
$=(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)+(a^2+b^2+c^2)$
$=(a^2+2ab+b^2)+(a^2+2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)$
$=(a+b)^2+(a+b)^2+(b+c)^2$;

❷ Đặt $x=a-b, y=b-c, x=c-a$ thì biểu thức trở thành
$-2xy-2xz-2yz=x^2+y^2+z^2-(x+y+z)^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.

□

BÀI 31. Tính giá trị của biểu thức $a^4+b^4+c^4$, biết rằng $a+b+c=0$ và:

a) $a^2+b^2+c^2=2$; b) $a^2+b^2+c^2=1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Theo công thức $a^4+b^4+c^4=\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2}$, ta có

a) $a^4+b^4+c^4=\dfrac{2^2}{2}=2$; b) $a^4+b^4+c^4=\dfrac{1^2}{2}=\dfrac{1}{2}$.

□

BÀI 32. Cho $a+b+c=0$. Chứng minh $a^4+b^4+c^4$ bằng mỗi biểu thức:

❶ $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$;

❷ $2(ab+bc+ca)^2$;

❸ $\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Bình phương hai vế của $a+b+c=0$, được
$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$ (1)
Bình phương hai vế của (1), được
$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$
$=4\left[a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\right]$
$=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$
Suy ra $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

❷ Bình phương hai vế của (1), được
$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=4(ab+bc+ca)^2$ (2)
Từ (2) suy ra $2(ab+bc+ca)^2=\dfrac{a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{2}$ (3)
Từ (3) và câu a) suy ra $a^4+b^4+c^4=2(ab+bc+ca)^2$.

❸ Bình phương hai vế của (1), chia cho 2, được
$\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2}=2(ab+bc+ca)^2=a^4+b^4+c^4$.

□

BÀI 33. Chứng minh rằng các biểu thức sau luôn luôn có giá trị dương với mọi giá trị của biến:

a) $9x^2 - 6x + 2$; b) $x^2 + x + 1$; c) $2x^2 + 2x + 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $9x^2 - 6x + 2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x + 1 + 1 = (3x - 1)^2 + 1 > 0$;

❷ $x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$;

❸ $2x^2 + 2x + 1 = x^2 + (x^2 + 2x + 1) = x^2 + (x + 1)^2 > 0$.

□

BÀI 34. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = x^2 - 3x + 5$; b) $B = (2x - 1)^2 + (x + 2)^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $A = x^2 - 3x + 5 = x^2 - 2 \cdot \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{4} + \dfrac{11}{4} = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{11}{4} \geqslant \dfrac{11}{4}$.

Giá trị nhỏ nhất của là $A = \dfrac{11}{4}$ khi $x = \dfrac{3}{2}$.

❷ $B = (2x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 5x^2 + 5 \geqslant 5$.

Giá trị nhỏ nhất của là $B = 5$ khi $x = 0$.

□

BÀI 35. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

a) $A = 4 - x^2 + 2x$; b) $B = 4x - x^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $A = 4 - x^2 + 2x = 5 - (x^2 - 2x + 1) = 5 - (x - 1)^2 \leqslant 5$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức là $A = 5$ khi $x = 1$.

❷ $B = 4x - x^2 = 4 - (x^2 - 2 \cdot 2x + 2) = 4 - (x - 2)^2 \leqslant 4$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức là $B = 4$ khi $x = 2$.

□

BÀI 36. Chứng minh rằng:

❶ Nếu p và $p^2 + 8$ là các số nguyên tố thì $p^2 + 2$ cũng là số nguyên tố.

❷ Nếu p và $8p^2 + 1$ là các số nguyên tố thì $2p + 1$ cũng là số nguyên tố.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xét $p = 3k + 1$, (k nguyên) thì $p^2 + 8 \,\vdots\, 3$, là hợp số.

Xét $p = 3k + 2$ thì $p^2 + 8 \,\vdots\, 3$, là hợp số.

Vậy $p = 3k$, mà p là số nguyên tố nên $p = 3$.

Khi đó $p^2 + 2 = 11$, là số nguyên tố.

❷ Xét $p = 3k + 1$, (k nguyên) thì $8p^2 + 1 \,\vdots\, 3$, là hợp số.

Xét $p = 3k + 2$ thì $8p^2 + 1 \,\vdots\, 3$, là hợp số.

Vậy $p = 3k$, mà p là số nguyên tố nên $p = 3$.

Khi đó $2p + 1 = 7$, là số nguyên tố.

□

BÀI 37. Chứng minh các số sau là hợp số

a) 999991.

b) 1000027.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $999991 = 1000000 - 9 = 1000^2 - 3^2 = 1003 \cdot 997$ nên là hợp số.

❷ Ta có $1000027 = 100^3 + 3^3 \vdots 100 + 3$ nên là hợp số.

$\square$

BÀI 38. Thực hiện phép tính:

❶ $(x-2)^3 - x(x+1)(x-1) + 6x(x-3)$.

❷ $(x-2)(x^2-2x+4)(x+2)(x^2+2x+4)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned} A &= (x-2)^3 - x(x+1)(x-1) + 6x(x-3) \\ &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + x + 6x^2 - 18x = -5x - 8. \end{aligned}$$

❷ Ta có

$$\begin{aligned} B &= (x-2)(x^2-2x+4)(x+2)(x^2+2x+4) = (x+2)(x^2-2x+4) \cdot (x-2)(x^2+2x+4) \\ &= (x^3+8)(x^3-8) = x^6 - 64. \end{aligned}$$

$\square$

BÀI 39. Tìm x biết:

❶ $(x-3)(x^2+3x+9) + x(x+2)(2-x) = 1$.

❷ $(x+1)^3 - (x-1)^3 - 6(x-1)^2 = -10$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned} & (x-3)(x^2+3x+9) + x(x+2)(2-x) = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x^3 - 3^3 + x(4-x^2) = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 7. \end{aligned}$$

❷ Ta có

$$\begin{aligned} & (x+1)^3 - (x-1)^3 - 6(x-1)^2 = -10 \\ \Leftrightarrow\quad & 6x^2 + 2 - 6(x^2 - 2x + 1) = -10 \\ \Leftrightarrow\quad & x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

BÀI 40. Rút gọn các biểu thức:

❶ $(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (a+c-b)^3 - (a+b-c)^3$.

❷ $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned}
& (a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(a+c-b)^3-(a+b-c)^3 \\
= \quad & [a+(b+c)]^3-[(b+c)-a]^3-[a-(b-c)]^3-[a-(b-c)]^3 \\
= \quad & 6(b+c)^2a+2a^3-2a^3-6a(b-c)^2 \\
= \quad & 24abc.
\end{aligned}$$

❷ Ta có

$$\begin{aligned}
& (a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3-3(a+b)(b+c)(c+a) \\
= \quad & 2a^3+2b^3+2c^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)-3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc) \\
= \quad & 2(a^3+b^3+c^3-3abc).
\end{aligned}$$

□

BÀI 41. Chứng minh các hằng đẳng thức:

❶ $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

❷ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned}
& (a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=[(a+b+c)^3-a^3]-[b^3+c^3] \\
= \quad & (b+c)[(a+b+c)^2+a(a+b+c)+a^2]-(b+c)(b^2-bc+c^2) \\
= \quad & (b+c)(3a^2+3ab+3ac+3bc)=3(a+b)(b+c)(c+a).
\end{aligned}$$

❷ Ta có

$$\begin{aligned}
& a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c) \\
= \quad & (a+b+c)[(a+b)^2-c(a+b)+c^2-3ab] \\
= \quad & (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).
\end{aligned}$$

□

BÀI 42. Cho $a+b+c=0$. Chứng minh $a^3+b^3+c^3=3abc$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ giả thiết $a+b+c=0 \Rightarrow c=-(a+b)$, thay vào đẳng thức cần chứng minh ta được

$$\begin{aligned}
& a^3+b^3-(a+b)^3=-3ab(a+b) \\
\Leftrightarrow \quad & -3ab^2-3a^2b=-3ab^2-3a^2b
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 43. Cho $x+y=a$ và $xy=b$. tính giá trị của các biểu thức sau theo a và b.

a) x^2+y^2. b) x^3+y^3. c) x^4+y^4. d) x^5+y^5.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2b$.

❷ Ta có $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=a^3-3ab$.

❸ Ta có $x^4+y^4=(x2+y^2)^2-2x^2y^2=(a^2-2b)^2-2b^2=a^4-4a^2b+2b^2$.

❹ Ta có

$$\begin{aligned}x^5+y^5 &= (x^3+y^3)(x^2+y^2)-x^2y^2(x+y)\\ &= (a^3-3ab)(a^2-2b)-b^2a=a^5-2a^3b-3a^3b+6ab^2-ab^2\\ &= a^5-5a^3b+5ab^2\end{aligned}$$

□

BÀI 44. ❶ Cho $x+y=1$. Tính giá trị của biểu thức x^3+y^3+3xy.

❷ Cho $x-y=1$. Tính giá trị của biểu thức x^3-y^3-3xy.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $x^3+y^3+3xy=(x+y)^3-3xy(x+y)+3xy=1-3xy+3xy=1$.

❷ Ta có $x^3-y^3-3xy=(x-y)^3+3xy(x-y)-3xy=1+3xy-3xy=1$.

□

BÀI 45. Cho $a+b=1$. Tính giá trị của biểu thức $M=a^3+b^3+3ab(a^2+b^2)+6a^2b^2(a+b)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}M= &\quad (a+b)^3-3ab(a+b)+3ab[(a+b)^2-2ab]+6a^2b^2(a+b)\\ = &\quad 1-3ab+3ab-6a^2b^2+6a^2b^2=1.\end{aligned}$$

□

BÀI 46.

❶ Cho $x+y=2$ và $x^2+y^2=10$. Tính giá trị của biểu thức x^3+y^3.

❷ Cho $x+y=a$ và $x^2+y^2=b$. Tính giá trị của biểu thức x^3+y^3 theo a, b.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Từ giả thiết ta có $x+y=2$và $(x+y)^2-2xy=10$ suy ra $xy=-3$ nên $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=26$.

❷ Từ giả thiết ta có $x+y=a$và $(x+y)^2-2xy=b$ suy ra $xy=\dfrac{a^2-b}{2}$ nên $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=\dfrac{3ab-a^3}{2}$.

□

BÀI 47.

❶ Nếu số n là tổng của hai số chính phương thì $2n$ cũng là tổng của hai số chính phương.

❷ Nếu số $2n$ là tổng của hai số chính phương thì n cũng là tổng của hai số chính phương.

❸ Nếu n là tổng của hai số chính phương thì n^2 cũng là tổng của hai số chính phương.

❹ Nếu mỗi số m và n đều là tổng của hai số chính phương thì tích mn cũng là tổng của hai số chính phương.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Giả sử $n = a^2 + b^2$ $(a, b \in \mathbb{N})$. Khi đó

$$2n = 2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2.$$

❷ Giả sử $2n = a^2 + b^2$ $(a, b \in \mathbb{N})$. Khi đó

$$n = \frac{a^2+b^2}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Vì $a^2 + b^2$ là số chẵn nên a và b cùng tính chẵn, lẻ. Do đó, $\dfrac{a+b}{2}$ và $\dfrac{a-b}{2}$ đều là số nguyên.

❸ Giả sử $n = a^2 + b^2$ $(a, b \in \mathbb{N})$. Khi đó

$$n^2 = (a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2.$$

❹ Giả sử $m = a^2 + b^2$, $n = c^2 + d^2$. Khi đó,

$$\begin{aligned} mn &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (ac+bd)^2 + (ac-bd)^2. \end{aligned}$$

□

BÀI 48. Mỗi số sau là bình phương của số tự nhiên nào?

a) $A = \underbrace{99\ldots9}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n}25$.

b) $B = \underbrace{99\ldots9}_{n}8\underbrace{00\ldots0}_{n}1$.

c) $C = \underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9$.

d) $D = \underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{n+1}5$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Đặt $a = \underbrace{99\ldots9}_{n}$ ta có $10^n = a + 1$. Do đó,

$$\begin{aligned} A &= (a \cdot 10^n) \cdot 100 + 25 = a(a+1) \cdot 100 + 25 \\ &= 100a^2 + 100a + 25 = (10a+5)^2 = (\underbrace{99\ldots9}_{n-1}5)^2. \end{aligned}$$

❷ Đặt $a = \underbrace{99\ldots9}_{n}$ ta có $10^n = a + 1$. Do đó,

$$\begin{aligned} B &= \underbrace{99\ldots9}_{n} \cdot 10^{n+2} + 8\underbrace{00\ldots0}_{n}1 = a(a+1) \cdot 100 + 80(a+1) + 1 \\ &= 100a^2 + 180a + 81 = (10a+9)^2 = (\underbrace{99\ldots9}_{n+1})^2. \end{aligned}$$

❸ Đặt $a = \underbrace{11\ldots1}_{n}$ ta có $10^n = 9a + 1$. Do đó,

$$\begin{aligned} C &= 4a \cdot 10^n + 8a + 1 = 4a(9a+1) + 8a + 1 \\ &= 36a^2 + 12a + 1 = (6a+1)^2 = (\underbrace{66\ldots6}_{n-1}7)^2. \end{aligned}$$

❹ Đặt $a = \underbrace{11\ldots1}_{n}$ ta có $10^n = 9a + 1$. Do đó,

$$\begin{aligned} D &= a\cdot 10^{n+2} + 20(10a+1) + 5 = a(900a+100) + 200a + 25 \\ &= 900a^2 + 300a + 25 = (30a+5)^2 = (\underbrace{33\ldots3}_{n}5)^2. \end{aligned}$$

□

BÀI 49. Chứng minh rằng các biểu thức sau là số chính phương:

a) $A = \underbrace{11\ldots1}_{2n} - \underbrace{22\ldots2}_{n}$.

b) $B = \underbrace{11\ldots1}_{2n} + \underbrace{44\ldots4}_{n} + 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $a = \underbrace{11\ldots1}_{n}$ ta có $10^n = 9a + 1$.

❶ $A = \underbrace{11\ldots1}_{2n} - \underbrace{22\ldots2}_{n} = \underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n} - 2\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} = a(9a+1) + a - 2a = (3a)^2$.

❷ $B = \underbrace{11\ldots1}_{2n} + \underbrace{44\ldots4}_{n} + 1 = a(9a+1) + a + 4a + 1 = (3a+1)^2$.

□

BÀI 50. ❶ Cho $a = \underbrace{11\ldots1}_{n}$, $b = 1\underbrace{00\ldots0}_{n-1}5$. Chứng minh rằng $ab+1$ là số chính phương.

❷ Cho một dãy số có số hạng đầu là 16, các số hạng sau là số tạo thành bằng cách viết chèn số 15 vào chính giữa số hạng liền trước:

$$16, 1156, 111556, \ldots$$

Chứng minh mọi số hạng của dãy đều là số chính phương.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $9a + 1 = 10^n$, $b = 10^n + 5 = 9a + 6$. Do đó

$$ab + 1 = a(9a+6) + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a+1)^2.$$

❷ Ta cần chứng minh mọi số có dạng $A = \underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{55\ldots5}_{n-1}6$ đều là số chính phương. Thật vậy, đặt $\underbrace{11\ldots1}_{n} = a$ thì $10^n = 9a + 1$nên

$$A = \underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot 10^n + \underbrace{55\ldots5}_{n-1}6 = a(9a+1) + 5a + 1 = (3a+1)^2.$$

□

BÀI 51. Chứng minh rằng $ab+1$ là số chính phương với $a = \underbrace{11\ldots1}_{n}2$, $b = 1\underbrace{11\ldots1}_{n}4$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta nhận thấy $b = a + 2$ nên $ab + 1 = a(a+2) + 1 = (a+1)^2$. □

BÀI 52. Chứng minh với mọi số tự nhiên a, tồn tại số tự nhiên b sao cho $ab + 4$ là số chính phương.

✍ **LỜI GIẢI.**

Với mọi số tự nhiên a, ta chọn $b = a + 4$ khi đó $ab + 4 = a(a+4) + 4 = (a+2)^2$. □

BÀI 53. Cho a là số gồm $2n$ chữ số 1, b là số gồm $n+1$ chữ số 1, c là số gồm n chữ số 6. Chứng minh $a+b+c+8$ là số chính phương.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $k = \underbrace{11\ldots1}_{n}$. Khi đó,

$$\begin{aligned} a &= \underbrace{11\ldots1}_{2n} = \underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n} + \underbrace{11\ldots1}_{n} = k(9k+1)+k = 9k^2+2k \\ b &= \underbrace{11\ldots1}_{n+1} = 10k+1; \\ c &= \underbrace{66\ldots6}_{n} = 6k. \end{aligned}$$

Suy ra $a+b+c+8 = 9k^2+2k+10k+1+6k = (3k+2)^2$. □

BÀI 54. Chứng minh rằng biểu thức sau không là lập phương của một số tự nhiên

$$10^{150} + 5\cdot 10^{50} + 1.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\left(10^{50}\right)^3 < 10^{150} + 5\cdot 10^{50} + 1 < 10^{150} + 3\cdot\left(10^{50}\right)^2 + 3\cdot 10^{50} + 1 = (10^{50}+1)^3.$$

Vậy $10^{150} + 5\cdot 10^{50} + 1$ không là lập phương của một số tự nhiên. □

BÀI 55. Chứng minh rằng tích ba số nguyên dương liên tiếp không là lập phương của một số tự nhiên.

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử ba số nguyên liên tiếp là $n-1$, n, $n+1$. Ta có

$$(n-1)^3 < (n-1)n(n+1) = n(n^2-1) = n^3 - n < n^3$$

Từ đó ta thấy $(n-1)n(n+1)$ không là lập phương của một số tự nhiên. □

BÀI 56. Chứng minh rằng số $A = \dfrac{1}{3}\left(\underbrace{11\ldots1}_{n} - \underbrace{33\ldots3}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n}\right)$ là lập phương của một số tự nhiên.

✍ **LỜI GIẢI.**

ĐỀ BÀI CÓ VẤN ĐỀ □

BÀI 57. Chia 27 quả cân có khối lượng 10, 20, 30, ..., 270 gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau.

✍ **LỜI GIẢI.**

Trước hết ta thấy

$$\begin{aligned} n + (n+5) + (n+7) &= 3n+12 = A; \\ (n+1)+(n+3)+(n+8) &= 3n+12 = A; \\ (n+2)+(n+4)+(n+6) &= n+12 = A. \end{aligned}$$

Áp dụng nhận xét trên vào chia chín quả cân 10, 20, 30, ..., 90 thành ba nhóm như trên, khối lượng các nhóm đều bằng nhau. Làm tương tự cho hai nhóm 100, 110, 120, ..., 1800 và 190, 200, 210, ..., 270. □

BÀI 58. Chia 18 quả cân có khối lượng 1^2, 2^2, 3^2, ..., 18^2 gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau.

✍ **LỜI GIẢI.**

Trước hết ta thấy

$$\begin{aligned}
&n^2+(n+5)^2=2n^2+10n+25=A+12;\\
&(n+1)^2+(n+4)^2=2n^2+10n+17=A+4;\\
&(n+2)^2+(n+3)^2=2n^2+10n+13=A.
\end{aligned}$$

Áp dụng các đẳng thức trên: Lần thứ nhất, chia sáu quả cân 1^2, 2^2, ..., 6^2 thành ba phần: $A+12$, $A+4$, A.

Lần thứ hai, chia sáu quả cân 7^2, 8^2, ..., 12^2 thành ba phần: B, $B+12$, $B+4$.

Lần thứ ba, chia chín quả cân 13^2, 14^2, ..., 18^2 thành ba phần: $C+4$, C, $C+12$.

Nhóm thứ nhất gồm các phần: $A+12$, B, $C+4$. Nhóm thứ hai gồm các phần: $A+4$, $B+12$, C. Nhóm thứ ba gồm các phần: A, $B+4$, $C+12$. Khối lượng mỗi nhóm đều bằng $A+B+C+16$. □

BÀI 59. Chia 27 quả cân có khối lượng 1^2, 2^2, 3^2, ..., 27^2 gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau.

✍ **LỜI GIẢI.**

Trước hết ta thấy

$$\begin{aligned}
&n^2+(n+5)^2+(n+7)^2=3n^2+24n+74=A+18;\\
&(n+1)^2+(n+3)^2+(n+8)^2=3n^2+24n+74=A+18;\\
&(n+2)^2+(n+4)^2+(n+6)^2=3n^2+24n+56=A.
\end{aligned}$$

Áp dụng các đẳng thức trên ta chia các quả cân thành ba nhóm như sau

Nhóm thứ nhất gồm các phần: A, $B+18$, $C+18$. Nhóm thứ hai gồm các phần: $A+18$, B, $C+18$. Nhóm thứ ba gồm các phần: $A+18$, $B+18$, C. Khối lượng mỗi nhóm đều bằng $A+B+C+36$. □

BÀI 3 PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Phương pháp

Để phân tích đa thức thành nhân tử, ta thường dùng các phương pháp

— Đặt nhân tử chung: $AB + AC = A(B + C)$.

— Dùng các hằng đẳng thức đáng nhớ.

— Nhóm hạng tử: việc nhóm các hạng tử một cách thích hợp nhằm làm xuất hiện dạng hằng đẳng thức hoặc xuất hiện nhân tử chung mới.

— Tách hạng tử.

— Thêm bớt hạng tử.

— Đặt ẩn phụ.

— Phối hợp nhiều phương pháp.

Trong phạm vi bài viết này sẽ trình bày ba phương pháp đầu. Bốn phương pháp còn lại sẽ trình bày ở nội dung sau.

B PHÂN LOẠI CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

VÍ DỤ 1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Cách 1:

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 &= x^4 + x^3 + x^2 + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 + 1). \end{aligned}$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) + (x^3 + x) \\ &= (x^2 + 1)^2 + x(x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 2. Cho $a + b + c = 0$. Rút gọn biểu thức

$$M = a^3 + b^3 + c(a^2 + b^2) - abc.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned}
M &= a^3+b^3+c(a^2+b^2)-abc\\
&= a^3+b^3+a^2c+b^2c-abc\\
&= (a^3+a^2c)+(b^3+b^2c)-abc\\
&= a^2(a+c)+b^2(b+c)-abc\\
&= a^2(-b)+b^2(-a)-abc\\
&= -ab(a+b+c)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vậy $M=0$. □

VÍ DỤ 3. ❶ Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$a^3+b^3+c^3-3abc.$$

❷ Phân tích đa thức sau thành nhân tử bằng cách áp dụng câu a)

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

$$\begin{aligned}
a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b)^3-3a^2b-3ab^2+c^3-3abc\\
&= \left[(a+b)^3+c^3\right]-3ab(a+b+c)\\
&= (a+b+c)\left[(a+b)^2-c(a+b)+c^2\right]-3ab(a+b+c)\\
&= (a+b+c)\left(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab\right)\\
&= (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right).
\end{aligned}$$

❷ Đặt $a=x-y$, $b=y-z$, $c=z-x$ thì $a+b+c=0$. Do đó theo kết quả của câu a) ta có

$$\begin{aligned}
& a^3+b^3+c^3-3abc=0\\
\Rightarrow\ & a^3+b^3+c^3=3abc\\
\Rightarrow\ & (x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x).
\end{aligned}$$

⚠ *Cần nhớ kết quả của câu a) để vận dụng vào giải toán để được kết quả nhanh nhất.*

□

VÍ DỤ 4. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

❶ $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$;

❷ $8(x+y+z)^3-(x+y)^3-(y+z)^3-(z+x)^3$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Áp dụng nhiều lần công thức $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, ta có

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3 &= [(a+b)+c]^3-a^3-b^3-c^3\\
&= (a+b)^3+c^3+3(a+b)c(a+b+c)-a^3-b^3-c^3\\
&= a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3+3(a+b)c(a+b+c)-a^3-b^3-c^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 3(a+b)(ab+ac+bc+c^2) \\ &= 3(a+b)[a(b+c)+c(b+c)] \\ &= 3(a+b)(b+c)(c+a). \end{aligned}$$

❷ Đặt $x+y=a$, $y+z=b$, $z+x=c$ thì $a+b+c=2(x+y+z)$. Đa thức đã cho có dạng

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3.$$

Áp dụng kết quả của câu a), ta được

$$8(x+y+z)^3-(x+y)^3-(y+z)^3-(z+x)^3=3(x+2y+z)(x+y+2z)(2x+y+z).$$

⚠ *Cần nhớ kết quả của câu a) để vận dụng vào giải toán để được kết quả nhanh nhất.*

□

VÍ DỤ 5. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$P=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y).$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Khai triển hai hạng tử cuối rồi dùng phương pháp nhóm các hạng tử để làm xuất hiện nhân tử chung $y-z$.

$$\begin{aligned} P &= x^2(y-z)+zy^2-xy^2+xz^2-yz^2 \\ &= x^2(y-z)+yz(y-z)-x(y^2-z^2) \\ &= x^2(y-z)+yz(y-z)-x(y-z)(y+z) \\ &= (y-z)(x^2+yz-xy-xz) \\ &= (y-z)[x(x-y)-z(x-y)] \\ &= (y-z)(x-y)(x-z). \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 6. Xét hằng đẳng thức $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$. Lần lượt cho x bằng $1, 2, 3, \ldots, n$ rồi cộng từng vế n đẳng thức trên để tính giá trị của biểu thức

$$S=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ hằng đẳng thức đã cho, ta có

$$\begin{aligned} 2^3 &= (1+1)^3=1^3+3\cdot 1^2+3\cdot 1+1 \\ 3^3 &= (2+1)^3=2^3+3\cdot 2^2+3\cdot 2+1 \\ 4^3 &= (3+1)^3=3^3+3\cdot 3^2+3\cdot 3+1 \\ &\ldots \\ &(n+1)^3=n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1 \end{aligned}$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên rồi rút gọn, ta được

$$(n+1)^3=1^3+3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+n.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) &= (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1)\\
3S &= (n+1)[(n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1]\\
3S &= (n+1)(n^2+\frac{n}{2})\\
3S &= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1).
\end{aligned}$$

Vậy $S = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. □

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Phân tích thành nhân tử

a) $(ab-1)^2+(a+b)^2$;

b) x^3+2x^2+2x+1;

c) $x^3-4x^2+12x-27$;

d) x^4-2x^3+2x-1;

e) $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

$$\begin{aligned}
(ab-1)^2+(a+b)^2 &= a^2b^2-2ab+1+a^2+2ab+b^2\\
&= (a^2b^2+a^2)+(b^2+1)\\
&= a^2(b^2+1)+(b^2+1)\\
&= (b^2+1)(a^2+1).
\end{aligned}$$

❷ $x^3+2x^2+2x+1 = (x^3+1)+(2x^2+2x) = (x+1)(x^2-x+1)+2x(x+1) = (x+1)(x^2+x+1)$.

❸

$$\begin{aligned}
x^3-4x^2+12x-27 &= (x^3-27)-(4x^2-12x)\\
&= (x-3)(x^2+3x+9)-4x(x-3)\\
&= (x-3)(x^2+3x+9-4x).\\
&= (x-3)(x^2-x+9).
\end{aligned}$$

❹

$$\begin{aligned}
x^4-2x^3+2x-1 &= (x^4-1)-(2x^3-2x)\\
&= (x^2-1)(x^2+1)-2x(x^2-1)\\
&= (x^2-1)(x^2+1-2x)\\
&= (x-1)(x+1)(x-1)^2\\
&= (x+1)(x-1)^3.
\end{aligned}$$

❺

$$\begin{aligned} x^4+2x^3+2x^2+2x+1 &= (x^4+2x^3+x^2)+(x^2+2x+1)\\ &= x^2(x^2+2x+1)+(x+1)^2\\ &= x^2(x+1)^2+(x+1)^2\\ &= (x+1)^2(x^2+1). \end{aligned}$$

□

BÀI 2. Phân tích thành nhân tử

a) $x^2-2x-4y^2-4y$;

b) x^4+2x^3-4x-4;

c) $x^2(1-x^2)-4-4x^2$;

d) $(1+2x)(1-2x)-x(x+2)(x-2)$;

e) $x^2+y^2-x^2y^2+xy-x-y$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $x^2-2x-4y^2-4y=(x^2-4y^2)-(2x+4y)=(x+2y)(x-2y)-2(x+2y)=(x+2y)(x-2y-2)$.

❷ $x^4+2x^3-4x-4=(x^4-4)+(2x^3-4x)=(x^2-2)(x^2+2)+2x(x^2-2)=(x^2-2)(x^2+2x+2)$.

❸ $x^2(1-x^2)-4-4x^2=x^2-x^4-4-4x^2=x^2-(x^2+2)^2=(x-x^2-2)(x+x^2+2)$.

❹

$$\begin{aligned} (1+2x)(1-2x)-x(x+2)(x-2) &= 1-4x^2-x(x^2-4)\\ &= 1-4x^2-x^3+4x\\ &= (1-x^3)-(4x^2-4x)\\ &= (1-x)(1+x+x^2)+4x(1-x)\\ &= (1-x)(x^2+5x+1). \end{aligned}$$

❺

$$\begin{aligned} x^2+y^2-x^2y^2+xy-x-y &= (x^2-x)+(y^2-x^2y^2)+(xy-y)\\ &= x(x-1)+y^2(1-x^2)+y(x-1)\\ &= x(x-1)-y^2(x-1)(x+1)+y(x-1)\\ &= (x-1)[x-y^2(x+1)+y]\\ &= (x-1)[(x-y^2x)-(y^2-y)]\\ &= (x-1)[x(1-y^2)-y(y-1)]\\ &= (x-1)[x(1-y)(1+y)+y(1-y)]\\ &= (x-1)(1-y)(x+xy+y). \end{aligned}$$

□

BÀI 3. Chứng minh rằng 199^3-199 chia hết cho 200.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $199^3-199=199\cdot(199^2-1)=199\cdot(199+1)\cdot(199-1)=198\cdot199\cdot200\,\vdots\,200$.

Vậy 199^3-199 chia hết cho 200. □

BÀI 4. Tính giá trị của biểu thức sau, biết $x^3 - x = 6$

$$A = x^6 - 2x^4 + x^3 + x^2 - x.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $A = x^6 - 2x^4 + x^3 + x^2 - x = (x^6 - 2x^4 + x^2) + (x^3 - x) = (x^3 - x)^2 + (x^3 - x) = 6^2 + 6 = 42.$ □

BÀI 5. Phân tích thành nhân tử

❶ $a(b^2 + c^2 + bc) + b(c^2 + a^2 + ac) + c(a^2 + b^2 + ab)$;

❷ $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$;

c*) $a(a + 2b)^3 - b(2a + b)^3$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

$$\begin{aligned}
& a(b^2 + c^2 + bc) + b(c^2 + a^2 + ac) + c(a^2 + b^2 + ab) \\
= {} & ab^2 + ac^2 + abc + bc^2 + ba^2 + abc + ca^2 + cb^2 + abc \\
= {} & (ab^2 + abc + ba^2) + (ac^2 + abc + ca^2) + (bc^2 + abc + cb^2) \\
= {} & ab(b + c + a) + ac(c + b + a) + bc(c + a + b) \\
= {} & (a + b + c)(ab + bc + ca).
\end{aligned}$$

❷

$$\begin{aligned}
(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc &= (a + b)(ab + bc + ca) + c(ab + bc + ca) - abc \\
&= (a + b)(ab + bc + ca) + abc + c(bc + ca) - abc \\
&= (a + b)(ab + bc + ca) + c^2(a + b) \\
&= (a + b)(ab + bc + ca + c^2) \\
&= (a + b)[(ab + ac) + (bc + c^2)] \\
&= (a + b)[a(b + c) + c(b + c)] \\
&= (a + b)(b + c)(c + a).
\end{aligned}$$

c*)

$$\begin{aligned}
& a(a + 2b)^3 - b(2a + b)^3 = a[(a + b) + b]^3 - b[a + (a + b)]^3 \\
= {} & a[(a + b)^3 + 3b(a + b)^2 + 3b^2(a + b) + b^3] - b[a^3 + 3a^2(a + b) + 3a(a + b)^2 + (a + b)^3] \\
= {} & a(a + b)^3 + 3ab(a + b)^2 + 3ab^2(a + b) + ab^3 - ba^3 - 3ba^2(a + b) - 3ab(a + b)^2 - b(a + b)^3 \\
= {} & (a - b)(a + b)^3 + 3ab(a + b)(b - a) + ab(b - a)(b + a) \\
= {} & (a - b)(a + b)[(a + b)^2 - 3ab - ab] \\
= {} & (a - b)(a + b)(a^2 - 2ab + b^2) \\
= {} & (a - b)(a + b)(a - b)^2 \\
= {} & (a + b)(a - b)^3.
\end{aligned}$$

□

BÀI 6. Phân tích thành nhân tử

❶ $ab(a+b)-bc(b+c)+ac(a-c)$;

❷ $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$;

❸ $(a+b)(a^2-b^2)+(b+c)(b^2-c^2)+(c+a)(c^2-a^2)$;

❹ $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

$$\begin{aligned} ab(a+b)-bc(b+c)+ac(a-c) &= ab(a+b)-b^2c-bc^2+a^2c-ac^2 \\ &= ab(a+b)+(a^2c-b^2c)-(ac^2+bc^2) \\ &= ab(a+b)+c(a^2-b^2)-c^2(a+b) \\ &= ab(a+b)+c(a-b)(a+b)-c^2(a+b) \\ &= (a+b)(ab+ac-bc-c^2) \\ &= (a+b)[(ab-bc)+(ac-c^2)] \\ &= (a+b)[b(a-c)+c(a-c)] \\ &= (a+b)(b+c)(a-c). \end{aligned}$$

❷

$$\begin{aligned} a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc &= ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+c(a^2+b^2+2ab) \\ &= (ab^2+a^2b)+(ac^2+bc^2)+c(a+b)^2 \\ &= ab(a+b)+c^2(a+b)+c(a+b)^2 \\ &= (a+b)(ab+c^2+ac+bc) \\ &= (a+b)[(ab+ac)+(bc+c^2)] \\ &= (a+b)[a(b+c)+c(b+c)] \\ &= (a+b)(b+c)(c+a). \end{aligned}$$

❸ Nhận thấy $b^2-c^2=-[(a^2-b^2)+(c^2-a^2)]$ nên

$$\begin{aligned} & (a+b)(a^2-b^2)+(b+c)(b^2-c^2)+(c+a)(c^2-a^2) \\ =\; & (a+b)(a^2-b^2)-(b+c)[(a^2-b^2)+(c^2-a^2)]+(c+a)(c^2-a^2) \\ =\; & (a+b)(a^2-b^2)-(b+c)(a^2-b^2)-(b+c)(c^2-a^2)+(c+a)(c^2-a^2) \\ =\; & (a-c)(a^2-b^2)+(a-b)(c^2-a^2) \\ =\; & (a-c)(a-b)(a+b)+(a-b)(c-a)(c+a) \\ =\; & (a-b)[(a-c)(a+b)-(a-c)(c+a)] \\ =\; & (a-b)(a-c)(b-c). \end{aligned}$$

❹ Nhận thấy $c-a=-[(b-c)+(a-b)]$ nên

$$\begin{aligned} & a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) \\ =\; & a^3(b-c)-b^3[(b-c)+(a-b)]+c^3(a-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^3(b-c)-b^3(b-c)-b^3(a-b)+c^3(a-b)\\
&= (b-c)(a^3-b^3)-(a-b)(b^3-c^3)\\
&= (b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2)-(a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2)\\
&= (b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2-b^2-bc-c^2)\\
&= (b-c)(a-b)[(a^2-c^2)+(ab-bc)]\\
&= (b-c)(a-b)[(a-c)(a+c)+b(a-c)]\\
&= (b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c).
\end{aligned}$$

□

BÀI 7. Phân tích thành nhân tử

❶ $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$;

❷ $abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Đặt $a+b-c=x$, $b+c-a=y$, $c+a-b=z$. Khi đó

$$x+y+z=a+b-c+b+c-a+c+a-b=a+b+c.$$

Áp dụng hằng đẳng thức $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x)$. Ta có

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3\\
=\;&3(a+b-c+b+c-a)(b+c-a+c+a-b)(c+a-b+a+b-c)\\
=\;&3\cdot 2b\cdot 2c\cdot 2a\\
=\;&24abc.
\end{aligned}$$

❷

$$\begin{aligned}
abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1 &= abc-ab-bc-ca+a+b+c-1\\
&= abc-bc-ab+b-ca+c+a-1\\
&= bc(a-1)-b(a-1)-c(a-1)+(a-1)\\
&= (a-1)(bc-b-c+1)\\
&= (a-1)[c(b-1)-(b-1)]\\
&= (a-1)(b-1)(c-1).
\end{aligned}$$

□

BÀI 8. Chứng minh rằng trong ba số a, b, c tồn tại hai số bằng nhau, nếu

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned}
a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) &= a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2(a-b)\\
&= (a^2b-ab^2)-(a^2c-b^2c)+c^2(a-b)\\
&= ab(a-b)-c(a-b)(a+b)+c^2(a-b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (a-b)\left[ab-ac-bc+c^2\right] \\ &= (a-b)\left[b(a-c)-c(a-c)\right] \\ &= (a-b)(a-c)(b-c). \end{aligned}$$

Theo giả thiết $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0$ nên

$$(a-b)(a-c)(b-c)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ a-c=0 \\ b-c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=c \\ b=c. \end{array}\right.$$

Vậy trong ba số a, b và c tồn tại hai số bằng nhau. □

BÀI 9. Chứng minh rằng nếu $a^2+b^2=2ab$ thì $a=b$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $a^2+b^2=2ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)^2=0 \Leftrightarrow a-b=0 \Leftrightarrow a=b$.
Vậy nếu $a^2+b^2=2ab$ thì $a=b$. □

BÀI 10. Chứng minh rằng nếu $m=a+b+c$ thì

$$(am+bc)(bm+ca)(cm+ab)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $am+bc=a(a+b+c)+bc=a(a+b)+ac+bc=a(a+b)+c(a+b)=(a+b)(a+c)$.
Tương tự $bm+ca=(b+c)(b+a)$ và $cm+ab=(c+a)(c+b)$. Khi đó

$$(am+bc)(bm+ca)(cm+ab)=(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$$

□

BÀI 11. Cho $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, $ac+bd=0$. Chứng minh rằng $ab+cd=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Do $a^2+b^2=1$ và $c^2+d^2=1$ nên

$$\begin{aligned} ab+cd &= ab\cdot 1+cd\cdot 1 \\ &= ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2) \\ &= abc^2+abd^2+cda^2+cdb^2 \\ &= (abc^2+cdb^2)+(abd^2+cda^2) \\ &= bc(ac+bd)+ad(bd+ac) \\ &= (ac+bd)(bc+ad) \\ &= 0 \text{ (do } ac+bd=0). \end{aligned}$$

□

BÀI 12. Xét hằng đẳng thức $(x+1)^2=x^2+2x+1$. Lần lượt cho $x=\overline{1,n}$ rồi cộng từng vế n đẳng thức trên để tính giá trị của biểu thức

$$S=1+2+3+\cdots+n.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ hằng đẳng thức đã cho, ta có

$$\begin{aligned} 2^2 &= (1+1)^2 = 1^2 + 2\cdot 1 + 1 \\ 3^2 &= (2+1)^2 = 2^2 + 2\cdot 2 + 1 \\ 4^2 &= (3+1)^2 = 3^2 + 2\cdot 3 + 1 \\ &\ \ \dots \\ &\ \ (n+1)^2 = n^2 + 2\cdot n + 1. \end{aligned}$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên rồi rút gọn, ta được

$$(n+1)^2 = 1^2 + 2(1+2+3+\cdots+n) + n.$$

Do đó

$$\begin{aligned} 2(1+2+3+\cdots+n) &= (n+1)^2 - (n+1) \\ 2S &= (n+1)[(n+1)-1] \\ 2S &= (n+1)n \\ S &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

BÀI 13. (*) Phân tích thành nhân tử

1. $a(b+c)^2(b-c) + b(c+a)^2(c-a) + c(a+b)^2(a-b)$;
2. $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$;
3. $a^2b^2(a-b) + b^2c^2(b-c) + c^2a^2(c-a)$;
4. $a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2) - 2abc - a^3 - b^3 - c^3$;
5. $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

1. Ta có $c - a = -[(b-c)+(a-b)]$. Khi đó

$$\begin{aligned} & a(b+c)^2(b-c) + b(c+a)^2(c-a) + c(a+b)^2(a-b) \\ =\ & a(b+c)^2(b-c) - b(c+a)^2\left[(b-c)+(a-b)\right] + c(a+b)^2(a-b) \\ =\ & a(b+c)^2(b-c) - b(c+a)^2(b-c) - b(c+a)^2(a-b) + c(a+b)^2(a-b) \\ =\ & (b-c)\left[a(b+c)^2 - b(c+a)^2\right] - (a-b)\left[b(c+a)^2 - c(a+b)^2\right] \\ =\ & (b-c)\left[a(b^2+2bc+c^2) - b(c^2+2ac+a^2)\right] - (a-b)\left[b(c^2+2ac+a^2) - c(a^2+2ab+b^2)\right] \\ =\ & (b-c)(ab^2+ac^2-bc^2-ba^2) - (a-b)(bc^2+ba^2-ca^2-cb^2) \\ =\ & (b-c)\left[c^2(a-b) - ab(a-b)\right] - (a-b)\left[a^2(b-c) - bc(b-c)\right] \\ =\ & (b-c)(a-b)(c^2-ab) - (a-b)(b-c)(a^2-bc) \\ =\ & (b-c)(a-b)(c^2-ab-a^2+bc) \\ =\ & (b-c)(a-b)\left[(c-a)(c+a)+b(c-a)\right] \\ =\ & (a-b)(b-c)(c-a)(c+b+c). \end{aligned}$$

❷ Ta có $c-a=-[(b-c)+(a-b)]$. Áp dụng công thức $(x+y)^3=x^3+3xy(x+y)+y^3$. Ta được

$$\begin{aligned}
&a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3\\
=\;&a(b-c)^3-b[(b-c)+(a-b)]^3+c(a-b)^3\\
=\;&a(b-c)^3-b\left[(b-c)^3+3(b-c)(a-b)(a-c)+(a-b)^3\right]+c(a-b)^3\\
=\;&(a-b)(b-c)^3-3b(b-c)(a-b)(a-c)-(b-c)(a-b)^3\\
=\;&(a-b)(b-c)\left[(b-c)^2-3b(a-c)-(a-b)^2\right]\\
=\;&(a-b)(b-c)\left[b^2-2bc+c^2-3ab+3bc-a^2+2ab-b^2\right]\\
=\;&(a-b)(b-c)\left[-2bc+c^2-3ab+3bc-a^2+2ab\right]\\
=\;&(a-b)(b-c)\left[(c^2-a^2)-(2bc-2ab)+(3bc-3ab)\right]\\
=\;&(a-b)(b-c)[(c-a)(c+a)-2b(c-a)+3b(c-a)]\\
=\;&(a-b)(b-c)(c-a)(c+a-2b+3b)\\
=\;&(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).
\end{aligned}$$

❸ Ta có $b-c=-[(a-b)+(c-a)]$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)\\
=\;&a^2b^2(a-b)-b^2c^2[(a-b)+(c-a)]+c^2a^2(c-a)\\
=\;&a^2b^2(a-b)-b^2c^2(a-b)-b^2c^2(c-a)+c^2a^2(c-a)\\
=\;&(a-b)b^2(a^2-c^2)-(c-a)c^2(b^2-a^2)\\
=\;&(a-b)b^2(a-c)(a+c)-(a-c)c^2(a-b)(a+b)\\
=\;&(a-b)(a-c)\left[b^2a+b^2c-c^2a-c^2b\right]\\
=\;&(a-b)(a-c)[a(b-c)(b+c)+bc(b-c)]\\
=\;&(a-b)(a-c)(b-c)(ab+ac+bc).
\end{aligned}$$

❹

$$\begin{aligned}
&a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-2abc-a^3-b^3-c^3\\
=\;&a(b^2+c^2-2bc-a^2)+b(c^2+a^2+2ac-b^2)+c(a^2+b^2-2ab-c^2)\\
=\;&a\left[(b-c)^2-a^2\right]+b\left[(c+a)^2-b^2\right]+c\left[(a-b)^2-c^2\right]\\
=\;&a(b-c-a)(b-c+a)+b(c+a-b)(c+a+b)+c(a-b-c)(a-b+c)\\
=\;&(a-b+c)[-a(b-c+a)+b(a+b+c)+c(a-b-c)]\\
=\;&(a-b+c)(-ab+ac-a^2+ab+b^2+bc+ac-bc-c^2)\\
=\;&(a-b+c)\left[(ac+bc-c^2)-(a^2+ab-ac)+(ab+b^2-bc)\right]\\
=\;&(a-b+c)[c(a+b-c)-a(a+b-c)+b(a+b-c)]\\
=\;&(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a).
\end{aligned}$$

❺ Ta có $c-a=-[(b-c)+(a-b)]$. Khi đó

$$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$$

$$\begin{aligned}
&= a^4(b-c) - b^4\left[(b-c)+(a-b)\right] + c^4(a-b)\\
&= a^4(b-c) - b^4(b-c) - b^4(a-b) + c^4(a-b)\\
&= (b-c)(a^4-b^4) - (a-b)(b^4-c^4)\\
&= (b-c)(a^2-b^2)(a^2+b^2) - (a-b)(b^2-c^2)(b^2+c^2)\\
&= (b-c)(a-b)(a+b)(a^2+b^2) - (a-b)(b-c)(b+c)(b^2+c^2)\\
&= (a-b)(b-c)\left[(a+b)(a^2+b^2) - (b+c)(b^2+c^2)\right]\\
&= (a-b)(b-c)\left[a^3+ab^2+ba^2-bc^2-cb^2-c^3\right]\\
&= (a-b)(b-c)\left[(a^3-c^3)+b^2(a-c)+b(a^2-c^2)\right]\\
&= (a-b)(b-c)\left[(a-c)(a^2+ac+c^2)+b^2(a-c)+b(a-c)(a+c)\right]\\
&= (a-b)(b-c)(a-c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc).
\end{aligned}$$

□

BÀI 14. (*) Chứng minh rằng nếu $a^3+b^3+c^3=3abc$ và a, b, c là các số dương thì $a=b=c$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Theo ví dụ 3 ở nội dung này. Ta có

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

Do đó nếu $a^3+b^3+c^3=3abc$ thì $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=0$ hay $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$ (do a, b, c là các số dương nên $a+b+c>0$).

$$\begin{aligned}
& a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0\\
\Leftrightarrow\ & 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0\\
\Leftrightarrow\ & (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a-b=0\\ b-c=0\\ c-a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b\\ b=c\\ c=a\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & a=b=c.
\end{aligned}$$

Vậy nếu $a^3+b^3+c^3=3abc$ và a, b, c là các số dương thì $a=b=c$. □

BÀI 15. (*) Chứng minh rằng nếu $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$ và a, b, c, d là các số dương thì $a=b=c=d$.

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned}
& a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd\\
\Leftrightarrow\ & a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0\\
\Leftrightarrow\ & a^4-2a^2b^2+b^4+c^4-2c^2d^2+d^4+2a^2b^2-4abcd+2c^2d^2=0\\
\Leftrightarrow\ & (a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a^2-b^2=0\\ c^2-d^2=0\\ ab-cd=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm b\\ c=\pm d\\ ab=cd\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = b = c = d \text{ (do } a,\ b,\ c \text{ và } d \text{ là các số dương).}$$

Vậy nếu $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$ và a, b, c, d là các số dương thì $a = b = c = d$. □

BÀI 16. (*) Bằng phương pháp tương tự ở ví dụ 6 và bài tập trên. Hãy tính giá trị của biểu thức

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ hằng đẳng thức $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, ta có

$$\begin{aligned}
2^4 &= (1+1)^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1\\
3^4 &= (2+1)^4 = 2^4 + 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1\\
4^4 &= (3+1)^4 = 3^4 + 4\cdot 3^3 + 6\cdot 3^2 + 4\cdot 3 + 1\\
& \ldots\\
& (n+1)^4 = n^4 + 4\cdot n^3 + 6\cdot n^2 + 4\cdot n + 1.
\end{aligned}$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên rồi rút gọn, ta được

$$\begin{aligned}
(n+1)^4 &= 1^4 + 4\cdot(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + 6\cdot(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 4(1 + 2 + \cdots + n) + n\\
&= 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n.
\end{aligned}$$

Ta đã biết $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $S_2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Do đó

$$\begin{aligned}
4S_3 &= (n+1)^4 - 1 - n - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)\\
4S_3 &= (n+1)[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n]\\
4S_3 &= (n+1)[(n+1)^3 - (2n+1)(n+1)]\\
4S_3 &= (n+1)^2(n^2 + 2n + 1 - 2n - 1)\\
S_3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Vậy $S_3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. □

BÀI 4 CHIA ĐA THỨC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Với $A(x)$, $B(x)$, $Q(x)$ và $R(x)$ là các đa thức. Ta có

— Đa thức $A(x)$ được gọi là chia hết cho đa thức $B(x)$ khác đa thức 0 nếu tồn tại đa thức $Q(x)$ sao cho
$$A(x) = B(x) \cdot Q(x).$$

— Người ta chứng minh được rằng: Với mọi cặp đa thức $A(x)$ và $B(x)$, trong đó $B(x) \neq 0$, tồn tại duy nhất cặp đa thức $Q(x)$ và $R(x)$ sao cho
$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x).$$
Trong đó $R(x) = 0$ hoặc bậc của $R(x)$ nhỏ hơn bậc của $B(x)$.

- Nếu $R(x) = 0$ thì $A(x)$ chia hết cho $B(x)$.
- Nếu $R(x) \neq 0$ thì $A(x)$ không chia hết cho $B(x)$. Khi đó $Q(x)$ là thương và $R(x)$ là dư của phép chia $A(x)$ cho $B(x)$.

B PHÂN LOẠI CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

VÍ DỤ 1. Cho hai đa thức $A = 3x^{n-1}y^6 - 5x^{n+1}y^4$ và đơn thức $B = 2x^3y^n$.

❶ Tìm số tự nhiên n để đa thức A chia hết cho đơn thức B.

❷ Tìm thương $A : B$ trong trường hợp đó.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Điều kiện để đa thức A chia hết cho đơn thức B là
$$\begin{cases} n-1 \geq 3 \\ n+1 \geq 3 \\ 6 \geq n \\ 4 \geq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 4 \\ n \geq 2 \\ 4 \geq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 4 \\ n \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow n = 4.$$
Vậy với $n = 4$ thì đa thức A chia hết cho đơn thức B.

❷ Với $n = 4$ thì $A = 3x^3y^6 - 5x^5y^4$ và $B = 2x^3y^4$. Khi đó
$$A : B = (3x^3y^6 - 5x^5y^4) : (2x^3y^4) = \frac{3}{2}y^2 - \frac{5}{2}x^2.$$
□

VÍ DỤ 2. Xác định các số hữu tỉ a và b để đa thức $x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức $x^2 + x - 2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Cách 1: Đặt tính chia

$$\begin{array}{rrr|l}
x^3 & +ax & +b & x^2+x-2 \\
\cline{4-4}
-x^3-x^2 & +2x & & x-1 \\
\cline{1-2}
-x^2+(2+1a)\,x & & +b & \\
x^2 & +x & -2 & \\
\cline{1-3}
 & (3+1a)\,x+(-2+1b) & &
\end{array}$$

Để chia hết thì đa thức dư phải bằng 0 với mọi giá trị của x nên

$$\begin{cases} a+3=0 \\ b-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2. \end{cases}$$

Vậy với $a=-3$, $b=2$ thì đa thức x^3+ax+b chia hết cho đa thức x^2+x-2, thương là $x-1$. ***Cách 2:*** (Phương pháp hệ số bất định)

Đa thức bị chia có bậc ba và đa thức chia có bậc hai nên thương là một đa thức bậc nhất, hạng tử bậc nhất là $x^3 : x^2 = x$.

Gọi thương của phép chia là $x+c$, ta có

$$\begin{aligned} x^3+ax+b &= (x^2+x-2)(x+c) \\ x^3+ax+b &= x^3+(c+1)x^2+(c-2)x-2c. \end{aligned}$$

Do hai đa thức trên bằng nhau nên

$$\begin{cases} c+1=0 \\ c-2=a \\ -2c=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-1 \\ a=-3 \\ b=2. \end{cases}$$

Vậy với $a=-3$, $b=2$ thì đa thức x^3+ax+b chia hết cho đa thức x^2+x-2, thương là $x-1$. ***Cách 3:***(Phương pháp xét giá trị riêng)

Gọi thương khi chia đa thức x^3+ax+b cho đa thức x^2+x-2 là $Q(x)$, ta có

$$x^3+ax+b=(x^2+x-2)Q(x)=(x-1)(x+2)Q(x).$$

Vì đẳng thức đúng với mọi x nên lần lượt cho $x=1$, $x=-2$, ta được

$$\begin{cases} 1+a+b=0 \\ -8-2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ -2a+b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2. \end{cases}$$

Vậy với $a=-3$, $b=2$ thì đa thức x^3+ax+b chia hết cho đa thức x^2+x-2, thương là $x-1$. □

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Chia đơn thức cho đơn thức

BÀI 1. Thực hiện phép tính

a) $8^{12} : 4^6$; b) $27^6 : 9^2$; c) $\dfrac{9^{15}\cdot 25^3\cdot 4^3}{3^{10}\cdot 50^6}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $8^{12} : 4^6 = (2^3)^{12} : (2^2)^6 = 2^{36} : 2^{12} = 2^{24}$.

❷ $27^6 : 9^2 = (3^3)^6 : (3^2)^2 = 3^{18} : 3^4 = 3^{14}$.

❸ $\dfrac{9^{15} \cdot 25^3 \cdot 4^3}{3^{10} \cdot 50^6} = \dfrac{(3^2)^{15} \cdot (5^2)^3 \cdot (2^2)^3}{3^{10} \cdot (2 \cdot 5^2)^6} = \dfrac{3^{30} \cdot 5^6 \cdot 2^6}{3^{10} \cdot 2^6 \cdot 5^{12}} = \dfrac{3^{20} \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 5^6} = \dfrac{3^{20}}{5^6}$.

□

BÀI 2. Chứng minh rằng biểu thức sau không âm với mọi giá trị của biến

$$A = (-15x^3y^6) : (-5xy^2).$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $A = (-15x^3y^6) : (-5xy^2) = 3x^2y^4$.

Vì $x^2 \geq 0$ với mọi số thực x và $y^4 \geq 0$ với mọi số thực y nên $3x^2y^3 \geq 0$ với mọi x, y.

Vậy biểu thức $A = (-15x^3y^6) : (-5xy^2)$ không âm với mọi giá trị của biến. □

BÀI 3. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến y ($x \neq 0$; $y \neq 0$)

$$B = \frac{2}{3}x^2y^3 : \left(-\frac{1}{3}xy\right) + 2x(y-1)(y+1).$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Với $x \neq 0$; $y \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{3}x^2y^3 : \left(-\frac{1}{3}xy\right) + 2x(y-1)(y+1) \\ &= -2xy^2 + 2x(y^2-1) \\ &= -2xy^2 + 2xy^2 - 2x \\ &= -2x. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức B không phụ thuộc vào giá trị của biến y. □

BÀI 4. Tìm số tự nhiên n để đơn thức $A = 4x^{n+1}y^2$ chia hết cho đơn thức $B = 3x^3y^{n-1}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Để đơn thức A chia hết cho đơn thức B thì

$$\begin{cases} n+1 \geq 3 \\ 2 \geq n-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 2 \\ n \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq n \leq 3.$$

Mà $n \in \mathbb{N}$ nên $n = 2$ hoặc $n = 3$.

Vậy với $n = 2$ hoặc $n = 3$ thì đơn thức A chia hết cho đơn thức B. □

Chia đa thức cho đơn thức

BÀI 5. Thực hiện phép tính

❶ $\left(\dfrac{1}{2}a^2x^4 + \dfrac{4}{3}ax^3 - \dfrac{2}{3}ax^2\right) : \left(-\dfrac{2}{3}ax^2\right)$;

❷ $4\left(\dfrac{3}{4}x - 1\right) + (12x^2 - 3x) : (-3x) - (2x+1)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $\left(\dfrac{1}{2}a^2x^4 + \dfrac{4}{3}ax^3 - \dfrac{2}{3}ax^2\right) : \left(-\dfrac{2}{3}ax^2\right) = \dfrac{-3}{4}ax^2 - 2x + 1$.

❷ $4\left(\dfrac{3}{4}x-1\right)+(12x^2-3x):(-3x)-(2x+1)=3x-4-4x+1-2x-1=-3x-4.$

□

BÀI 6. Thực hiện phép tính rồi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=(9xy^2-6x^2y):(-3xy)+(6x^2y+2x^4):(2x^2).$$

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned} A &= (9xy^2-6x^2y):(-3xy)+(6x^2y+2x^4):(2x^2)\\ &= -3y+2x+3y+x^2\\ &= x^2+2x\\ &= x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2\\ &= (x+1)^2-1. \end{aligned}$$

Vì $(x+1)^2\ge 0$ với mọi x nên $(x+1)^2-1\ge -1$ hay $A\ge -1$ với mọi x. Do đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng -1 khi $x=-1$. □

BÀI 7. Tìm số tự nhiên n để đa thức $A=7x^{n-1}y^5-5x^3y^4$ chia hết cho đơn thức $B=5x^2y^n$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét thương $A:B=\dfrac{7}{5}x^{n-1-2}y^{5-n}-xy^{4-n}=\dfrac{7}{5}x^{n-3}y^{5-n}-xy^{4-n}$.

Để đa thức A chia hết cho đơn thức B thì

$$\begin{cases} n-3\ge 0\\ 5-n\ge 0\\ 4-n\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\ge 3\\ n\le 5\\ n\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3\le n\le 4.$$

Do $n\in\mathbb{N}$ nên $n=3$ hoặc $n=4$.

Vậy với $n=3$ hoặc $n=4$ thì đa thức A chia hết cho đơn thức B. □

Chia đa thức cho đa thức

BÀI 8. Rút gọn biểu thức

$$[(x^3+y^3)-2(x^2-y^2)+3(x+y)^2]:(x+y).$$

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned} &[(x^3+y^3)-2(x^2-y^2)+3(x+y)^2]:(x+y)\\ =\ &[(x+y)(x^2-xy+y^2)-2(x+y)(x-y)+3(x+y)^2]:(x+y)\\ =\ &x^2-xy+y^2-2(x-y)+3(x+y)\\ =\ &x^2-xy+y^2-2x+2y+3x+3y\\ =\ &x^2-xy+y^2+x+5y. \end{aligned}$$

□

BÀI 9. Chia các đa thức

❶ $(3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x - 8) : (x^2 - 2)$;
❷ $(2x^3 - 26x - 24) : (x^2 + 4x + 3)$;
❸ $(x^3 - 7x + 6) : (x + 3)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶
$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -2x^3 & -2x^2 & +4x & -8 & x^2-2 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & & +6x^2 & & & 3x^2-2x+4 \\ \cline{1-3}
& -2x^3 & +4x^2 & +4x & & \\
& 2x^3 & & -4x & & \\ \cline{2-4}
& & 4x^2 & & -8 & \\
& & -4x^2 & & +8 & \\ \cline{3-5}
& & & & 0 &
\end{array}$$

Vậy $(3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x - 8) : (x^2 - 2) = 3x^2 - 2x + 4$.

❷
$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & & -26x & -24 & x^2+4x+3 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & -8x^2 & -6x & & 2x-8 \\ \cline{1-3}
& -8x^2 & -32x & -24 & \\
& 8x^2 & +32x & +24 & \\ \cline{2-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

Vậy $(2x^3 - 26x - 24) : (x^2 + 4x + 3) = 2x - 8$.

❸
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & -7x & +6 & x+3 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -3x^2 & & & x^2-3x+2 \\ \cline{1-2}
& -3x^2 & -7x & & \\
& 3x^2 & +9x & & \\ \cline{2-3}
& & 2x & +6 & \\
& & -2x & -6 & \\ \cline{3-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

Vậy $(x^3 - 7x + 6) : (x + 3) = x^2 - 3x + 2$.

□

BÀI 10. Xác định hằng số a sao cho

❶ $4x^2 - 6x + a$ chia hết cho $x - 3$;
❷ $2x^2 + x + a$ chia hết cho $x + 3$;
❸ $x^3 + ax^2 - 4$ chia hết cho $x^2 + 4x + 4$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xét phép chia

$$\begin{array}{rrr|l}
4x^2 & -6x & +a & x-3 \\ \cline{4-4}
-4x^2 & +12x & & 4x+6 \\ \cline{1-2}
& 6x & +a & \\
& -6x & +18 & \\ \cline{2-3}
& & (18+1a) &
\end{array}$$

Để $4x^2 - 6x + a$ chia hết cho $x - 3$ thì $a + 18 = 0 \Leftrightarrow a = -18$.

Vậy với $a = -18$ thì $4x^2 - 6x + a$ chia hết cho $x - 3$.

❷ Xét phép chia

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^2 & +x & +a & x+3 \\ \cline{4-4} -2x^2 & -6x & & 2x-5 \\ \cline{1-2} & -5x & +a & \\ & 5x & +15 & \\ \cline{2-3} & & (15+1a) & \end{array}$$

Để $2x^2+x+a$ chia hết cho $x+3$ thì $a+15=0 \Leftrightarrow a=-15$.

Vậy với $a=-15$ thì $2x^2+x+a$ chia hết cho $x+3$.

❸ Giải tương tự câu a), câu b) ta được $a=3$. .

□

BÀI 11. Xác định hằng số a sao cho

❶ $10x^2-7x+a$ chia hết cho $2x-3$;

❷ $2x^2+ax+1$ chia cho $x-3$ dư 4;

❸ ax^5+5x^4-9 chia hết cho $x-1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xét phép chia

$$\begin{array}{rrr|l} 10x^2 & -7x & +a & 2x-3 \\ \cline{4-4} -10x^2 & +15x & & 5x+4 \\ \cline{1-2} & 8x & +a & \\ & -8x & +12 & \\ \cline{2-3} & & (12+1a) & \end{array}$$

Để $10x^2-7x+a$ chia hết cho $2x-3$ thì $a+12=0 \Leftrightarrow a=-12$.

Vậy với $a=-12$ thì $10x^2-7x+a$ chia hết cho $2x-3$.

❷ Giải tương tự câu a) ta được $a=-5$.

❸ Giải tương tự câu a) ta được $a=4$.

□

BÀI 12. Xác định các hằng số a, b sao cho

❶ x^4+ax+b chia hết cho x^2-4;

❷ x^4+ax^3+bx-1 chia hết cho x^2-1;

❸ x^3+ax+b chia hết cho x^2+2x-2.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xét phép chia

$$\begin{array}{rrrr|l} x^4 & & +ax & +b & x^2-4 \\ \cline{5-5} -x^4 & +4x^2 & & & x^2+4 \\ \cline{1-2} & 4x^2 & +ax & +b & \\ & -4x^2 & & +16 & \\ \cline{2-4} & & ax & +(16+1b) & \end{array}$$

Để x^4+ax+b chia hết cho x^2-4 thì đa thức dư $ax+b+16$ phải đồng nhất 0. Do đó $a=0$, $b=-16$.

Vậy với $a=0$, $b=-16$ thì x^4+ax+b chia hết cho x^2-4.

❷ Giải tương tự câu a) ta được $a+b=0$ (tức là a tùy ý, $b=-a$).

❸ Giải tương tự câu a) ta được $a=-6$, $b=4$.

□

BÀI 13. Xác định các hằng số a, b sao cho

❶ x^4+ax^2+b chia hết cho x^2-x+1;

❷ $ax^3+bx^2+5x-50$ chia hết cho $x^2+3x-10$;

❸ ax^4+bx^3+1 chia hết cho x^2+ax+b;

❹ x^4+4 chia hết cho x^2+ax+b.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xét phép chia

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & +ax^2 & & +b & x^2-x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & x^2+x+a \\ \cline{1-3}
 & x^3 & +(-1+1a)\,x^2 & & & \\
 & -x^3 & +x^2 & -x & & \\ \cline{2-4}
 & & ax^2 & -x & +b & \\
 & & -ax^2 & +ax & -a & \\ \cline{3-5}
 & & & (-1+1a)\,x & +(-1a+1b) &
\end{array}$$

Để x^4+ax^2+b chia hết cho x^2-x+1 thì đa thức dư $(a-1)x+b-a$ đồng nhất đa thức 0 nên $a=1$ và $b=a=1$.

Vậy với $a=b=1$ thì x^4+ax^2+b chia hết cho x^2-x+1.

❷ Giải tương tự câu a) ta được $a=1$, $b=8$.

❸ Giải tương tự câu a) ta được $a=3$, $b=-4$.

❹ Ta có

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).$$

Do đó để x^4+4 chia hết cho x^2+ax+b thì $a=\pm 2$ và $b=2$.

□

BÀI 14. Tìm các hằng số a và b sao cho x^3+ax+b chia cho $x+1$ thì dư 7, chia cho $x-3$ thì dư -5.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì x^3+ax+b chia cho $x+1$ thì dư 7 nên $x^3+ax+b=(x+1)\cdot P(x)+7$.

Với $x=-1$ thì $-1-a+b=7$ hay $a=b-8$. (1)

Tương tự x^3+ax+b chia cho $x-3$ thì dư -5, tức là $x^3+ax+b=(x-3)\cdot Q(x)-5$.

Khi đó, với $x=3$ thì $27+3a+b=-5$ hay $3a+b=-32$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a=-10$, $b=-2$. □

BÀI 15. Tìm các hằng số a, b, c sao cho ax^3+bx^2+c chia hết cho $x+2$, chia cho x^2-1 thì dư $x+5$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có ax^3+bx^2+c chia hết cho $x+2$ nên $ax^3+bx^2+c=(x+2)\cdot A(x)$.

Khi đó, với $x=-2$ thì $-8a+4b+c=0$. (3)

Tương tự, ax^3+bx^2+c chia cho x^2-1 thì dư $x+5$, tức là

$$ax^3+bx^2+c=(x+1)(x-1)\cdot B(x)+x+5.$$

Lần lượt cho $x = 1$, $x = -14$ ta được $a + b + c = 6$ và $-a + b + c = 4$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $a = 1$, $b = 1$ và $c = 4$. □

CHƯƠNG 2 PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

BÀI 1 TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC, RÚT GỌN PHÂN THỨC.

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Phân thức đại số là một biểu thức có dạng $\dfrac{A}{B}$, trong đó A và B là các đa thức, $B \neq 0$.
Phân thức đại số có các tính chất cơ bản sau:
- Nếu nhân cả tử thức và mẫu thức của một phân thức với cùng một đa thức khác 0 thì được một phân thức bằng phân thức đã cho.
- Nếu chia cả tử thức và mẫu thức của một phân thức cho cùng một nhân tử chung của chúng thì được một phân thức bằng phân thức đã cho.

Muốn rút gọn một phân thức đại số, ta có thể:
- Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử;
- Chia cả tử thức và mẫu thức cho nhân tử chung.

B VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho phân thức

$$M = \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)^2 + \left(ab+bc+ca\right)^2}{(a+b+c)^2 - (ab+bc+ca)}.$$

1. Tìm các giá trị a, b, c để phân thức được xác định (tức là để mẫu khác 0).
2. Rút gọn phân thức M.

✍ **LỜI GIẢI.**

1. Ta có

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 - (ab+bc+ca) = 0 &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca = 0\\ &\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca = 0\\ &\Leftrightarrow (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow a+b = b+c = c+a = 0\\ &\Leftrightarrow a = b = c = 0.\end{aligned}$$

Với điều kiện để phân thức M được xác định là a, b, c không đồng thời bằng 0.

❷ Chú ý rằng $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$. Do đó, ta đặt $a^2+b^2+c^2 = x$, $ab+bc+ca = y$. Khi đó $(a+b+c)^2 = x+2y$. Ta có

$$\begin{aligned} M &= \frac{x(x+2)+y^2}{x+2y-y} = \frac{x^2+2xy+y^2}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{x+y} = x+y \\ &= a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 2. Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Phân tích mẫu thức thành nhân tử:

$$\begin{aligned} a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) &= a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2 \\ &= a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2) \\ &= (b-c)(a^2+bc-ab-ac) \\ &= (b-c)\left[a(a-b)-c(a-b)\right] \\ &= (b-c)(a-b)(a-c). \end{aligned}$$

Do đó $A = \dfrac{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$.

Ta có nhận xét: Nếu $x+y+z=0$ thì $x^3+y^3+z^3 = 3xyz$. Đặt $b-c=x$, $c-a=y$, $a-b=z$ thì $x+y+z=0$. Theo nhận xét trên

$$A = \frac{x^3+y^3+z^3}{-xyz} = \frac{3xyz}{-xyz} = -3.$$

□

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì phân số $\dfrac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ là phân số tối giản.

✍ **LỜI GIẢI.**

Để chứng minh phân số đã cho là tối giản, ta sẽ chứng tỏ rằng tử và mẫu chỉ có ước chung là ±1.

Gọi d là ước của n^3+2n và n^4+3n^2+1. Ta có:

$n^3+2n \,\vdots\, d \Rightarrow n\left(n^3+2n\right) \,\vdots\, d \Rightarrow n^4+2n^2 \,\vdots\, d,$ (1)

$n^4+3n^2+1-(n^4+2n^2) = n^2+1 \,\vdots\, d \Rightarrow \left(n^2+1\right)^2 = n^4+2n^2+1 \,\vdots\, d,$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\left(n^4+2n^2+1\right)-\left(n^4+2n^2\right) \,\vdots\, d \Rightarrow 1 \,\vdots\, d \Rightarrow d = \pm1.$$

Vậy $\dfrac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ là phân số tối giản. □

VÍ DỤ 4. Chứng minh rằng:

$$1+x+x^2+x^3+...+x^{31}=(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)\left(1+x^{16}\right). \quad (1)$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi vế trái của đẳng thức (1) là A, vế phải là B.

Ta có $(1-x)\cdot A=1-x^{32}$ theo hằng đẳng thức 8.

$(1-x)\cdot B=(1-x)(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)\left(1+x^16\right)=1-x^{32}$.

Nếu $x\neq 1$ thì A và B đều bằng phân thức $\dfrac{1-x^{32}}{1-x}$. Do đó $A=B$.

Nếu $x=1$ thì hai vế của (1) đều bằng 32. Do đó $A=B$.

Trong cả hai trường hợp, đẳng thức (1) đều đúng. □

BÀI 1. Tìm giá trị của x để các phân thức sau bằng 0:

a) $\dfrac{x^4+x^3+x+1}{x^4-x^3+2x^2-x+1}$;   b) $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-10x^2+9}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

1. Phân thức $\dfrac{x^4+x^3+x+1}{x^4-x^3+2x^2-x+1}$ bằng 0 khi tử thức bằng 0 và mẫu thức khác 0.
   Ta có

$$\begin{aligned}
x^4+x^3+x+1 &=0\\
x^3(x+1)+(x+1) &=0\\
(x+1)\left(x^3+1\right) &=0\\
x &=-1.
\end{aligned}$$

   Thay $x=-1$ vào mẫu thức ta được $(-1)^4-(-1)^3+2(-1)^2-(-1)+1\neq 0$.
   Vậy $x=-1$ thỏa yêu cầu bài.
2. Phân thức $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-10x^2+9}$ bằng 0 khi tử thức bằng 0 và mẫu thức khác 0. Ta có

$$\begin{aligned}
x^4-5x^2+4 &=0\\
\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right) &=0.
\end{aligned}$$

   Với $x^2=1$ thay vào mẫu thức, ta được $1-10+9=0$ nên loại.
   Với $x^2=4$ thay vào mẫu thức, ta được $(4)^2-10\cdot 4+9\neq 0$ nên $x=\pm 2$ thỏa yêu cầu bài.

□

BÀI 2. Rút gọn các phân thức:

a) $A=\dfrac{1235\cdot 2469-1234}{1234\cdot 2469}$;   b) $B=\dfrac{4002}{1000\cdot 1002-999\cdot 1001}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Đặt $x = 1234$. Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x+1)(2x+1)-x}{x(2x+1)+x+1} \\ &= \frac{2x^2+2x+1}{2x^2+2x+1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

❷ Đặt $x = 1000$. Ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{4x+2}{x(x+2)-(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2(2x+1)}{x^2+2x-(x^2-1)} \\ &= \frac{2(2x+1)}{2x+1} \\ &= 2. \end{aligned}$$

□

BÀI 3. Rút gọn các phân thức:

a) $\dfrac{3x^3-7x^2+5x-1}{2x^3-x^2-4x+3}$;

b) $\dfrac{(x-y)^3-3xy(x+y)+y^3}{x-6y}$;

c) $\dfrac{x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz}{x^2-2xy+y^2-z^2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $\dfrac{3x^3-7x^2+5x-1}{2x^3-x^2-4x+3} = \dfrac{(3x-1)(x-1)^2}{(2x+3)(x-1)^2} = \dfrac{3x-1}{2x+3}$;

❷

$$\begin{aligned} \frac{(x-y)^3-3xy(x+y)+y^3}{x-6y} &= \frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-3x^2y-3xy^2+y^3}{x-6y} \\ &= \frac{x^2\,(x-6y)}{x-6y} \\ &= x^2; \end{aligned}$$

❸ $\dfrac{x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz}{x^2-2xy+y^2-z^2} = \dfrac{(x-y+z)^2}{(x-y+z)(x-y-z)} = \dfrac{x-y+z}{x-y+z}$.

□

BÀI 4. Rút gọn các phân thức với n là số tự nhiên:

a) $\dfrac{(n+1)!}{n!(n+2)}$;

b) $\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$;

c) $\dfrac{(n+1)!-(n+2)!}{(n+1)!+(n+2)!}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $\dfrac{(n+1)!}{n!(n+2)} = \dfrac{n!(n+1)}{n!(n+2)} = \dfrac{n+1}{n+2}$;

❷ $\dfrac{n!}{(n+1)!-n!} = \dfrac{n!}{n!(n+1-1)} = \dfrac{1}{n}$;

❸ $\dfrac{(n+1)!-(n+2)!}{(n+1)!+(n+2)!} = \dfrac{(n+1)!-(n+1)!(n+2)}{(n+1)!+(n+1)!(n+2)} = \dfrac{(n+1)!(-n-1)}{(n+1)!(n+3)} = \dfrac{-n-1}{n+3}$.

□

BÀI 5. Rút gọn các phân thức:

a) $\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{ab^2-ac^2-b^3+bc^2}$;

b) $\dfrac{2x^3-7x^2-12x+45}{3x^3-19x^2+33x-9}$;

c) $\dfrac{x^3-y^3+z^3+3xyz}{(x+y)^2+(y+z)^2+(z-x)^2}$;

d) $\dfrac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{ab^2-ac^2-b^3+bc^2}=\dfrac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(b+c)}=\dfrac{a-c}{b+c}$;

❷ $\dfrac{2x^3-7x^2-12x+45}{3x^3-19x^2+33x-9}=\dfrac{(x-3)^2(2x+5)}{(x-3)^2(3x-1)}=\dfrac{2x+5}{3x-1}$;

❸ $\dfrac{x^3-y^3+z^3+3xyz}{(x+y)^2+(y+z)^2+(z-x)^2}=\dfrac{1}{2}(x-y+z)$;

❹ $\dfrac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}=\dfrac{1}{2}(x+y+z)$.

□

BÀI 6. Chứng minh rằng các phân số sau tối giản với mọi số tự nhiên n:

a) $\dfrac{3n+1}{5n+2}$;

b) $\dfrac{12n+1}{30n+2}$;

c) $\dfrac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$;

d) $\dfrac{2n+1}{2n^2-1}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Giả sử $(3n+1,5n+2)=d$.

Ta có $3(5n+2)-5(3n+1)\,\vdots\,d\Rightarrow 1\,\vdots\,d\Rightarrow d=\pm1$.

Vậy phân số $\dfrac{3n+1}{5n+2}$ là phân số tối giản.

❷ Giả sử $(12n+1,30n+2)=d$.

Ta có $5(12n+1)-3(30n+2)\,\vdots\,d\Rightarrow -1\,\vdots\,d\Rightarrow d=\pm1$.

Vậy phân số $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

❸ Giả sử $(n^4+3n^2+1,n^4+3n^2+1)=d$.

Ta có $(n^4+3n^2+1)-n\left(n^3+2n\right)=n^2+1\,\vdots\,d$.

Do đó $(n^4+3n^2+1)-\left(n^2+1\right)^2=n^2\,\vdots\,d$.

Suy ra $1\,\vdots\,d\Rightarrow d=\pm1$.

❹ Giả sử $d\in(C)\,(2n+1,2n^2-1)\Rightarrow n(2n+1)-(2n^2-1)=n+1\,\vdots\,d\Rightarrow 2n+2\,\vdots\,d$

$\Rightarrow(2n+2)-(2n+1)=1\,\vdots\,d\Rightarrow d=\pm1$.

□

BÀI 7. Chứng minh rằng phân số $\dfrac{n^7+n^2+1}{n^8+n+1}$ không tối giản với mọi số nguyên dương n.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $n^7+n^2+1=\left(n^2+n+1\right)\left(n^5-n^4+n^2-n+1\right)$, $n^8+n+1=\left(n^6-n^5+n^3-n^2+1\right)\left(n^2+n+1\right)$.

Tử và mẫu cùng chứa thừ số n^2+n+1 lớn hơn 1 n phân số $\dfrac{n^7+n^2+1}{n^8+n+1}$ không tối giản với mọi số nguyên dương n. □

BÀI 8. Viết gọn biểu thức dưới dạng một phân thức:

$$\left(x^2-x+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)\left(x^8-x^4+1\right)\left(x^{16}-x^8+1\right)\left(x^{32}-x^{16}+1\right).$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $A = (x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)(x^{32} - x^{16} + 1)$.

Nhân biểu thức A với $x^2 + x + 1$, ta được

$$\left(x^2 + x + 1\right) \cdot A = \left(x^{64} + x^{32} + 1\right).$$

Do $x^2 + x + 1 \neq 0$ nên $A = \dfrac{x^{64} + x^{32} + 1}{x^2 + x + 1}$. □

BÀI 9. Cho biết x, y, z khác 0 và $\dfrac{(ax + by + cz)^2}{x^2 + y^2 + z^2} = a^2 + b^2 + c^2$. Chứng minh $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{(ax + by + cz)^2}{x^2 + y^2 + z^2} &= a^2 + b^2 + c^2 \\
(ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2 + 2abxy + 2acxz + 2bcyz &= \left(a^2 + b^2 + c^2\right) \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \\
(ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Do đó ta được: $\begin{cases} ay - bx = 0 \\ az - cx = 0 \\ bz - cy = 0 \end{cases}$.

Suy ra $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$. □

BÀI 10. Cho biết $ax + by + cz = 0$. Rút gọn $A = \dfrac{bc(y - z)^2 + ca(x - z)^2 + ab(x - y)^2}{ax^2 + by^2 + cz^2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}
B &= bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + (bz - cy)^2 = 0 \\
&= bcy^2 + bcz^2 + cax^2 + abx^2 + aby^2 - 2(bcyz + acxz + abxy). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Từ giả thiết ta suy ra $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2(bcyz + acxz + abxy) = 0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned}
B &= ax^2(b + c) + by^2(a + c) + cz^2(a + b) + a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 \\
&= ax^2(a + b + c) + by^2(a + b + c) + cz^2(a + b + c) \\
&= (a + b + c)\left(ax^2 + by^2 + cz^2\right).
\end{aligned}$$

Do đó $A = \dfrac{B}{ax^2 + by^2 + cz^2} = a + b + c$. □

BÀI 11. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2}$, biết rằng $x + y + z = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}
x+y+z &= 0\\
x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz &= 0\\
x^2+y^2+z^2 &= -(2xy+2xz+2yz).
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
A &= \frac{x^2+y^2+z^2}{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}\\
&= \frac{x^2+y^2+z^2}{2x^2+2y^2+2z^2-(2xy-2xz-2yz)}\\
&= \frac{x^2+y^2+z^2}{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}\\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

□

BÀI 12. Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{x-y}{x+y}$, biết $x^2-2y^2=xy$ $(y\neq 0;\ x+y\neq 0)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}
x^2-xy-2y^2=0 &\Leftrightarrow x^2+xy-2xy-2y^2=0\\
&\Leftrightarrow x(x+y)-2y(x+y)=0\\
&\Leftrightarrow (x+y)(x-2y)=0.
\end{aligned}$$

Do $x+y\neq 0$ nên $x=2y$. Vậy $A=\dfrac{2y-y}{2y+y}=\dfrac{y}{3y}=\dfrac{1}{3}$. □

BÀI 13. Tính giá trị của phân thức $A=\dfrac{3x-2y}{3x+2y}$, biết rằng $9x^2+4y^2=20xy$ và $2y<3x<0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $A^2=\dfrac{9x^2+4y^2-12xy}{9x^2+4y^2+12xy}=\dfrac{20xy-12xy}{20xy+12xy}=\dfrac{8xy}{32xy}=\dfrac{1}{4}$.

Do $2y<3x<0\Rightarrow 3x-2y>0$, $3x+2y<0\Rightarrow A<0$. Vậy $A=-\dfrac{1}{2}$. □

BÀI 14. Cho $3x-y=3z$ và $2x+y=7z$. Tính giá trị của biểu thức $M=\dfrac{x^2-2xy}{x^2+y^2}$ $(x\neq 0, y\neq 0)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có hệ $\begin{cases}3x-y=3z\\2x+y=7z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2z\\y=3z\end{cases}$. Thay vào biểu thức M ta được:

$$M=\frac{4z^2-2\cdot 2z\cdot 3z}{4z^2+9z^2}=\frac{-8z^2}{13z^2}=-\frac{8}{13}.$$

□

BÀI 15. Tìm số nguyên x để phân thức sau có giá trị là số nguyên:

a) $\dfrac{3}{2x-1}$; b) $\dfrac{5}{x^2+1}$; c) $\dfrac{7}{x^2-x+1}$;

d) $\dfrac{x^2-59}{x+8}$; e) $\dfrac{x+2}{x^2+4}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Để $\dfrac{3}{2x-1}$ có giá trị là số nguyên thì $2x-1 \in \{-3;-1;1;3\}$. Do đó $x \in \{-1;0;1;2\}$.

❷ Để $\dfrac{5}{x^2+1}$ có giá trị là số nguyên thì $x^2+1 \in \{1;5\}$. Do đó $x \in \{-2;0;2\}$.

❸ Để $\dfrac{7}{x^2-x+1}$ có giá trị là số nguyên thì $x^2-x+1 \in \{-7;-1;1;7\}$. Do đó $x \in \{-2;0;1;3\}$.

❹ Để $\dfrac{x^2-59}{x+8}$ có giá trị là số nguyên thì $x^2-59 \,\vdots\, x+8 \Leftrightarrow x^2-64+ \,\vdots\, x+8 \Leftrightarrow 5 \,\vdots\, x+8$.
Do đó $x \in \{-13;-9;-7;-3\}$.

❺ Để $\dfrac{x+2}{x^+4}$ có giá trị là số nguyên thì

$$x+2 \,\vdots\, x^2+4 \Rightarrow (x+2)(x-2) \,\vdots\, x^2+4 \Rightarrow x^2+4-8 \,\vdots\, x^2+4 \Rightarrow 8 \,\vdots\, x^2+4.$$

- Xét $x^2+4=4 \Leftrightarrow x=0$ (không thỏa).
- Xét $x^2+4=8 \Leftrightarrow x=\pm 2$; thử lại ta thấy $x=-2$ thỏa yêu cầu bài toán.

□

BÀI 16. Tìm số hữu tỉ x để phân thức $\dfrac{10}{x^2+1}$ có giá trị là số nguyên.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $\dfrac{10}{x^2+1}=k \in \mathbb{Z}$, ta có $kx^2+k=10$ nên $x^2=\dfrac{10-k}{k}$.

Ta phải có $\dfrac{10-k}{k} \leq 0$ nên có $0<k<\leq 10$. Ta có bảng sau:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^2=\dfrac{10-k}{k}$	9	4	$\dfrac{7}{3}$	$\dfrac{3}{2}$	1	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{9}$	0
$x \in \mathbb{Q}$	± 3	± 2			± 1			$\pm\dfrac{1}{2}$	$\pm\dfrac{1}{3}$	0

Vậy $x=\pm 3,\ \pm 2,\ \pm 1,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{1}{3},\ 0$. □

BÀI 17. Chứng minh rằng nên các chữ số a, b, c khác 0 thỏa mãn điều kiện $\overline{ab} : c\overline{bc} = a : c$ thì $\overline{abbb} : \overline{bbbc} = a : c$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\overline{abbb} : \cdot c = (1000a+111b)c = 1000ac+111bc = ac+111c(9a+b)$. $a \cdot \overline{bbbc} = a(1110b+c) = ac+1110ab$.

Ta cần chứng minh $111c(9a+b)=111ab$, tức là $c(9z+b)=10ab$.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned}\overline{ab}\cdot c=\overline{bc}\cdot a\quad &\Rightarrow (10a+b)c=(10b+c)a\\ &\Rightarrow 10ac+bc=10ab+ac\\ &\Rightarrow 9ac+bc=10ab\\ &\Rightarrow c(9a+b)=10ab.\end{aligned}$$

□

BÀI 18. Điểm trung bình môn Toán của các học sinh nam và nữ hai lớp 8A và 8B được thống kê ở bảng sau

	Lớp 8A	Lớp 8B	Cả hai lớp $8A$ và 8B
Nam	$7,1$	$8,1$	$7,9$
Nữ	$7,6$	$9,0$	
Cả lớp	$7,4$	$8,4$	

Tính điểm trung bình môn Toán của các học sinh cả hai lớp 8A và 8B.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi số học sinh nam và nữ của hai lớp 8A theo thứ tự là a và b, số học sinh nam và nữ của lớp 8B theo thứ tự là c và d. Ta cần tìm $\dfrac{7,6b+9d}{b+d}$. Ta có:

$$\frac{7,1a+7,6b}{a+b}=7,4 \qquad (1)$$

$$\frac{8,1c+9d}{c+d}=8,4 \qquad (2)$$

$$\frac{7,1a+8,1c}{a+c}=7,9 \qquad (3)$$

Từ (1) suy ra $b=1,5a$. Từ (3) suy ra $c=4a$. Từ (2) suy ra $d=0,5c$, do đó $d=2a$. Ta được:

$$\frac{7,6b+9d}{b+d}=\frac{7,6\cdot 1,5a+9\cdot a}{1,5a+2a}=8,4.$$

Vậy điểm trung bình phải tìm là $8,4$. □

BÀI 2 CÁC PHÉP TÍNH VỀ PHÂN THỨC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Muốn cộng các phân thức, ta quy đồng mẫu thức, cộng các tử thức với nhau, giữ nguyên mẫu thức chung, rồi rút gọn phân thức vừa tìm được.

Muốn trừ đi một phân thức, ta lấy phân thức bị trừ cộng với phân thức đối của phân thức trừ.

Muốn nhân các phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau, rồi rút gọn phân thức vừa tìm được.

Muốn chia cho một phân thức khác 0, ta lấy phân thức bị chia nhân với phân thức nghịch đảo của phân thức chia.

B CÁC DẠNG TOÁN

VÍ DỤ 1. Cho $a+b+c=0$ và a, b, c đều khác 0. Rút gọn biểu thức

$$A=\frac{ab}{a^2+b^2-c^2}+\frac{bc}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ca}{c^2+a^2-b^2}.$$

LỜI GIẢI.

Từ $a+b+c=0$ suy ra $a+b=-c$.

Bình phương hai vế, ta được $a^2+b^2+2ab=c^2$ nên $a^2+b^2-c^2=-2ab$.

Tương tự, $b^2+c^2-a^2=-2bc$ và $c^2+a^2-b^2=-2ca$.

Do đó, $A=\dfrac{ab}{-2ab}+\dfrac{bc}{-2bc}+\dfrac{ca}{-2ca}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$. □

VÍ DỤ 2. Rút gọn biểu thức

$$A=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}.$$

LỜI GIẢI.

Do đặc điểm của bài toán, ta không quy đồng mẫu tất cả các phân thức mà cộng lần lượt từng phân thức.

$$\begin{aligned}A&=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}\\&=\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}=\frac{8}{1-x^8}+\frac{8}{1+x^8}=\frac{16}{1-x^{16}}.\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 3. Rút gọn biểu thức

$$B = \frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \cdots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Đương nhiên không thể quy đồng mẫu tất cả các phân thức. Ta tìm cách tách mỗi phân thức thành hiệu của hai phân thức rồi dùng phương pháp khử liên tiếp. Ta có

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 4. Xác định các số a, b, c sao cho

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1}. \quad (1)$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Thực hiện phép cộng ở vế phải của (1) ta được

$$\begin{aligned} \frac{(ax+b)(x-1)+c(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)} &= \frac{ax^2 - ax + bx - b + cx^2 + c}{(x^2+1)(x-1)} \\ &= \frac{(a+c)x^2 + (b-a)x + (c-b)}{(x^2+1)(x-1)}. \end{aligned}$$

Đồng nhất phân thức trên với phân thức $\dfrac{1}{(x^2+1)(x-1)}$, ta được

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b-a=0 \\ c-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c+b=0 \\ c-b=1 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}.$$

Do đó $a = -\dfrac{1}{2}$. Như vậy $\dfrac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \dfrac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x-1}$. □

VÍ DỤ 5. Cho $A = \dfrac{1}{(x+y)^3}\left(\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{y^4}\right)$,

$B = \dfrac{2}{(x+y)^4}\left(\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{y^3}\right)$,

$C = \dfrac{2}{(x+y)^5}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}\right)$.

Thực hiện phép tính $A + B + C$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}
A &= \frac{y^4 - x^4}{x^4y^4(x+y)^3} = \frac{(y^2+x^2)(y^2-x^2)}{x^4y^4(x+y)^3} = \frac{(y^2+x^2)(y-x)}{x^4y^4(x+y)^2}.\\
B + C &= \frac{2}{(x+y)^4}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} + \frac{1}{x+y}\cdot\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}\right)\\
&= \frac{2}{(x+y)^4}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} + \frac{y-x}{x^2y^2}\right) = \frac{2}{(x+y)^4}\cdot\frac{y^3 - x^3 + xy(y-x)}{x^3y^3}\\
&= \frac{2}{(x+y)^4}\cdot\frac{(y-x)(y^2+2yx+x^2)}{x^3y^3} = \frac{2(y-x)}{(x+y)^2x^3y^3}.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
A + B + C &= \frac{(y^2+x^2)(y-x)}{x^4y^4(x+y)^2} + \frac{2(y-x)}{(x+y)^2x^3y^3}\\
&= \frac{(y^2+x^2)(y-x) + 2xy(y-x)}{x^4y^4(x+y)^2}\\
&= \frac{(y-x)(y^2+x^2+2xy)}{x^4y^4(x+y)^2}\\
&= \frac{y-x}{x^4y^4}.
\end{aligned}$$

□

C BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 1. Thực hiện các phép tính

❶ $\dfrac{x+3}{x+1} - \dfrac{2x-1}{x-1} - \dfrac{x-3}{x^2-1}$;

❷ $\dfrac{1}{x(x+y)} + \dfrac{1}{y(x+y)} + \dfrac{1}{x(x-y)} + \dfrac{1}{y(y-x)}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $$\frac{x+3}{x+1}-\frac{2x-1}{x-1}-\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{(x+3)(x-1)-(2x-1)(x+1)-(x-3)}{x^2-1} = \frac{-x^2+1}{x^2-1}=-1.$$

❷ $$\frac{1}{x(x+y)}+\frac{1}{y(x+y)}+\frac{1}{x(x-y)}+\frac{1}{y(y-x)} = \frac{x+y}{xy(x+y)}+\frac{y-x}{xy(x-y)} = \frac{1}{xy}-\frac{1}{xy}=0.$$

□

BÀI 2. Thực hiện phép tính

❶ $A=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$;

❷ $B=\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$;

❸ $C=\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ac}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}$;

❹ $D=\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $A=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{c-b+a-c+b-a}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0.$

❷ Ta có

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}\\
&= \frac{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}\\
&= \frac{c(b^2-bc-a^2+ac)+ab(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}\\
&= \frac{c\left[(b-a)(b+a)-c(b-a)\right]+ab(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}\\
&= \frac{(a-b)(-cb-ca+c^2)+ab(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}\\
&= \frac{(a-b)(-cb-ac+c^2+ab)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}\\
&= \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{1}{abc}.
\end{aligned}$$

❸ Ta có

$$\begin{aligned}
C &= \frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}\\
&= \frac{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}\\
&= \frac{c(b^2-bc-a^2+ac)+ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{c\left[(b-a)(b+a)-c(b-a)\right]+ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}\\
&= \frac{(a-b)(-cb-ca+c^2)+ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}\\
&= \frac{(a-b)(-cb-ac+c^2+ab)}{(a-b)(b-c)(a-c)}\\
&= \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=1.
\end{aligned}
$$

❹ Ta có

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\\
&= \frac{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}\\
&= \frac{a^2(b-c)-b^2a+b^2c+c^2a-c^2b}{(a-b)(b-c)(a-c)}\\
&= \frac{a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}\\
&= \frac{(b-c)(a^2-ab-ac+cb)}{(a-b)(b-c)(a-c)}\\
&= \frac{(b-c)\left[a(a-b)-c(a-b)\right]}{(a-b)(b-c)(a-c)}\\
&= \frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=1.
\end{aligned}
$$

□

BÀI 3. Cho a, b, c là các số nguyên khác nhau đôi một. Chứng minh rằng biểu thức sau có giá trị là một số nguyên:

$$P=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}\\
&= \frac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}.
\end{aligned}
$$

Phân tích tử thành nhân tử

$$
\begin{aligned}
a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) &= a^3b-a^3c+b^3c-b^3a+c^3(a-b)\\
&= (a^3b-b^3a)-(a^3c-b^3c)+c^3(a-b)\\
&= ab(a-b)(a+b)-c(a-b)(a^2+ab+b^2)+c^3(a-b)\\
&= (a-b)(a^2b+ab^2-ca^2-cb^2-abc+c^3)\\
&= (a-b)\left[(c^3-cb^2)-(abc-ab^2)+(a^2b-ca^2)\right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= (a-b)(b-c)(-cb-c^2+ab+a^2)\\ &= (a-b)(b-c)\left[(ab-cb)+(a^2-c^2)\right]\\ &= (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c). \end{aligned}$$

Vậy $P = a+b+c$. □

BÀI 4. Cho $3y-x=6$. Tính giá trị biểu thức $A = \dfrac{x}{y-2} + \dfrac{2x-3y}{x-6}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

$A = \dfrac{x}{y-2} + \dfrac{2x-3y}{x-6} = \dfrac{3y-6}{y-2} + \dfrac{2x-x-6}{x-6} = 3+1 = 4.$ □

BÀI 5. Tìm x, y, z biết rằng $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z^2}{4} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{5}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z^2}{4} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{5}$ suy ra $\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2}{5}\right) + \left(\dfrac{y^2}{3} - \dfrac{y^2}{5}\right) + \left(\dfrac{z^2}{4} - \dfrac{z^2}{5}\right) = 0$.

Cho nên $\dfrac{3x^2}{10} + \dfrac{2y^2}{15} + \dfrac{z^2}{20} = 0$. Do đó, $x=y=z=0$. □

BÀI 6. Tìm x, y biết rằng $x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} = 4$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned} x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} = 4 \ &\Rightarrow\ \left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right) + \left(y^2-2+\frac{1}{y^2}\right) = 0\\ &\Rightarrow\ \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{y}\right)^2 = 0\\ &\Rightarrow\ \begin{cases} x-\dfrac{1}{x} = 0\\ y-\dfrac{1}{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1\\ y^2 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Có bốn đáp án như bảng sau

x	1	1	-1	-1
y	1	-1	1	-1

□

BÀI 7. Cho biết $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = 2, \qquad (1)$

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} = 2. \qquad (2)$

Chứng minh rằng $a+b+c = abc$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ (1) suy ra $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)=4$.

Do (2) nên $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=1$ suy ra $\dfrac{a+b+c}{abc}=1$.

Do đó $a+b+c=abc$. □

BÀI 8. Cho $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0, \quad (1)$

và $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=2. \quad (2)$

Tính giá trị biểu thức $\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}+\dfrac{c^2}{z^2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ (1) suy ra $bcx+acy+abz=0$.

Từ (2) suy ra $\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}+\dfrac{c^2}{z^2}+\left(\dfrac{ab}{xy}+\dfrac{bc}{yz}+\dfrac{ca}{zx}\right)=4$.

Do đó $\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}+\dfrac{c^2}{z^2}=4-2\dfrac{abz+acy+bcx}{xyz}=4$. □

BÀI 9. Cho $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$ và a, b, c khác 0. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ giả thiết suy ra $ab+bc+ca=0 \Rightarrow b+c=-\dfrac{bc}{a}$.

Do đó $\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=0$, tức là $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$. Suy ra

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}=-\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{a^3}=-\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3=-\frac{1}{b^3}-\frac{1}{c^3}-3\left(\frac{1}{b^2c}+\frac{1}{bc^2}\right)\\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=-\frac{3(b+c)}{b^2c^2}=\frac{3bc}{ab^2c^2}=\frac{3}{abc}.\end{aligned}$$

□

BÀI 10. Cho $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}$. Chứng minh rằng trong ba số a,b,c tồn tại hai số bằng nhau.

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ giả thiết suy ra

$$\begin{aligned}a^2c+b^2a+c^2b=b^2c+a^2b+c^2a \quad &\Rightarrow \quad a^2(c-b)-a(c^2-b^2)+bc(c-b)=0\\ &\Rightarrow \quad (c-b)(a^2-ac-ab+bc)=0\\ &\Rightarrow \quad (c-b)(a-c)(a-b)=0.\end{aligned}$$

Tồn tại một trong các thừa số $c-b, a-c, a-b$ bằng 0. Do đó, trong ba số a, b, c tồn tại hai số bằng nhau. □

BÀI 11. Tìm các giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị là số nguyên:

❶ $A=\dfrac{2x^3-6x^2+x-8}{x-3}$;

❷ $B = \dfrac{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 1}{x^2 - 2x + 1}$;

❸ $C = \dfrac{x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x - 2}{x^2 + 2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $A = \dfrac{2x^3 - 6x^2 + x - 8}{x - 3} = 2x^2 + 1 - \dfrac{5}{x - 3}$.

A nguyên khi x nguyên, $x - 3$ nguyên và nó là ước của 5.

Suy ra $x - 3 = 1$ hoặc $x - 3 = -1$ hoặc $x - 3 = 5$ hoặc $x - 3 = -5$.

Hay $x = 4$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = 8$ hoặc $x = -2$.

❷ $B = \dfrac{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 1}{x^2 - 2x + 1} = x^2 - 4 + \dfrac{3}{(x-1)^2}$.

B nguyên khi x nguyên, $(x-1)^2$ nguyên và nó là ước của 3.

Suy ra $(x-1)^2 = 1$ hoặc $(x-1)^2 = 3$.

Hay $x - 1 = -1$ hoặc $x - 1 = 1$ hay $x = 0$ hoặc $x = 2$.

❸ $C = \dfrac{x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x - 2}{x^2 + 2} = x^2 + 3x - \dfrac{2}{x^2 + 2}$.

C nguyên khi x nguyên, $x^2 + 2$ nguyên và nó là ước của 2.

Suy ra $x^2 + 2 = 2$ hay $x = 0$.

□

BÀI 12. Rút gọn biểu thức sau với $x = \dfrac{a}{3a+2}$

$$A = \frac{x + 3a}{2 - x} + \frac{x - 3a}{2 + x} - \frac{2a}{4 - x^2} + a.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

$A = \dfrac{x + 3a}{2 - x} + \dfrac{x - 3a}{2 + x} - \dfrac{2a}{4 - x^2} + a = \dfrac{6ax + 4x - 2a}{4 - x^2} + a = \dfrac{2x(3a+2) - 2a}{4 - x^2} + a = a.$ □

BÀI 13. Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a} + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $a - b = x, b - c = y, c - a = z$ thì $x + y + z = 0$.

Ta có $A = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{2}{z} + \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} = \dfrac{(x+y+z)^2}{xyz} = 0$. □

BÀI 14. Cho biết $\dfrac{a + b - c}{ab} - \dfrac{b + c - a}{bc} - \dfrac{c + a - b}{ca} = 0$. Chứng minh rằng trong ba phân thức ở vế trái, có ít nhất một phân thức bằng 0.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{a+b-c}{ab} - \frac{b+c-a}{bc} - \frac{c+a-b}{ca} = 0 &\Leftrightarrow c(a+b-c) - a(b+c-a) - b(c+a-b) = 0\\
&\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab - c^2 = 0\\
&\Leftrightarrow (a-b)^2 - c^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-b+c)(a-b-c)=0.$$

Vậy $a-b+c=0$ hoặc $a-b-c=0$. □

BÀI 15. Xác định các số a, b, c sao cho:

❶ $\dfrac{1}{x(x^2+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$;

❷ $\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}$;

❸ $\dfrac{1}{(x+1)^2(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{x+2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}=\dfrac{a(x^2+1)+(bx+c)x}{x(x^2+1)}=\dfrac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)}$.

Đồng nhất với phân thức $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$ ta được $\begin{cases}a+b=0\\ c=0\\ a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\\ c=0.\end{cases}$

❷ Ta xó $\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}=\dfrac{a(x+2)+b(x-2)}{x^2-4}=\dfrac{(a+b)x+2(a-b)}{x^2-4}$.

Đồng nhất với phân thức $\dfrac{1}{x^2-4}$ ta được $\begin{cases}a+b=0\\ a-b=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\ b=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

❸ Ta có
$$\begin{aligned}\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{x+2}&=\frac{a(x+1)(x+2)+b(x+2)+c(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)}\\&=\frac{(a+c)x^2+(3a+b+2c)x+a+2b+c}{(x+1)^2(x+2)}.\end{aligned}$$

Đồng nhất với phân thức $\dfrac{1}{(x+1)^2(x+2)}$ ta được $\begin{cases}a+c=0\\ 3a+b+2c=0\\ a+2b+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=1\\ c=1.\end{cases}$

□

BÀI 16. Rút gọn biểu thức

$$B=(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned}B&=(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\\&=(ab+bc+ca)\frac{bc+ca+ab}{abc}-abc\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}\\&=\frac{(bc+ca+ab)^2}{abc}-\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{abc}\\&=\frac{2abc(a+b+c)}{abc}=2(a+b+c).\end{aligned}$$

□

BÀI 17. Cho a, b, c khác nhau đôi một và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$. Rút gọn các biểu thức:

❶ $M=\dfrac{1}{a^2+2bc}+\dfrac{1}{b^2+2ac}+\dfrac{1}{c^2+2ab}$;

❷ $N=\dfrac{bc}{a^2+2bc}+\dfrac{ac}{b^2+2ac}+\dfrac{ab}{c^2+2ab}$;

❸ $P=\dfrac{a^2}{a^2+2bc}+\dfrac{b^2}{b^2+2ac}+\dfrac{c^2}{c^2+2ab}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ giả thiết suy ra $ab+bc+ac=0$ nên

$a^2+2bc=a^2+bc+(-ab-ac)=a(a-b)-c(a-b)=(a-b)(a-c)$.

Tương tự, $b^2+2ac=(b-a)(b-c)$ và $c^2+2ab=(c-a)(c-b)$.

❶
$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\\ &= \frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}\\ &= \frac{b-c+c-a+a-b}{(a-b)(b-c)(a-c)}=0. \end{aligned}$$

❷
$$\begin{aligned} N &= \frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ac}{b^2+2ac}+\frac{ab}{c^2+2ab}\\ &= \frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}\\ &= \frac{bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)+ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}\\ &= \frac{(a-b)(-ac-cb+c^2+ab)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{(a-b)\left[-c(a-c+b(a-c)\right]}{(a-b)(b-c)(a-c)}\\ &= \frac{(a-b)(b-c(a-c))}{(a-b)(b-c)(a-c)}=1. \end{aligned}$$

❸
$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\\ &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\\ &= \frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}\\ &= \frac{(a-b)(ab-ac-bc+c^2)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=1. \end{aligned}$$

□

BÀI 18. Cho các số a, b, c khác nhau đôi một và $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}$. Tính giá trị biểu thức

$$M=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right).$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b+b+c+c+a}{a+b+c}=\dfrac{2(a+b+c)}{a+b+c}$.

Nếu $a+b+c\neq 0$ thì tỉ số trên bằng 2. Suy ra $a+b=2c, b+c=2a$.

Do đó $a-c=2(c-a)$ nên $c=a$, trái với đề bài.

Vậy $a+b+c=0$. Ta có $M=\dfrac{a+b}{b}\cdot\dfrac{b+c}{c}\cdot\dfrac{c+a}{a}=\dfrac{-c}{b}\cdot\dfrac{-a}{c}\cdot\dfrac{-b}{a}=-1$. □

BÀI 19. Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $a+b+c\neq 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$N=\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

Do $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $a+b+c\neq 0$ nên đẳng thức trên trở thành $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$.

Lại có

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\\ &= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.\end{aligned}$$

Như vậy từ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ suy ra $a=b=c$.

Do đó, $N=\dfrac{3a^2}{(3a)^2}=\dfrac{3a^2}{9a^2}=\dfrac{1}{3}$. □

BÀI 20. Rút gọn biểu thức $A=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}A &= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots n}\cdot\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdots(n+1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

□

BÀI 21. Rút gọn biểu thức $B=\dfrac{1^2}{2^2-1}\cdot\dfrac{3^2}{4^2-1}\cdot\dfrac{5^2}{6^2-1}\cdots\dfrac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2-1}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}B &= \frac{1^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{4^2-1}\cdot\frac{5^2}{6^2-1}\cdots\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2-1}=\frac{1^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{5^2}{5\cdot 7}\cdots\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}\\ &= \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n+1)^2}{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n+1)^2\cdot(2n+3)}=\frac{1}{(2n+3)}.\end{aligned}$$

□

BÀI 22. Rút gọn biểu thức $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n} &= \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\\ &= 1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}.\end{aligned}$$

□

BÀI 23. Rút gọn biểu thức $\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 11}+\cdots+\dfrac{1}{(3n+2)(3n+5)}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\dfrac{1}{(3n+2)(3n+5)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n+2}-\dfrac{1}{3n+5}\right)$.

Do đó

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(3n+2)(3n+5)}\\ =\ &\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+5}\right)\\ =\ &\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+5}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3n+5-2}{2(3n+5)}=\frac{n+1}{2(3n+5)}.\end{aligned}$$

□

BÀI 24. Rút gọn biểu thức $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n(n+1)}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\dfrac{1}{(n-1)n(n+1)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(n-1)n}-\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

Do đó

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}\\ =\ &\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right]\\ =\ &\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)-2}{2n(n+1)}=\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}.\end{aligned}$$

□

BÀI 25. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq 1$, ta luôn có

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{2}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right).$$

Suy ra $A < \dfrac{1}{4}\left(1 + \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n}\right)$.

Lại có $1 + \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n} = 1 + \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{n} = 2 - \dfrac{1}{n}$.

Do đó $A < \dfrac{1}{4}\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)$, suy ra $A < \dfrac{1}{2}$. □

BÀI 26. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta luôn có

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$B = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2-1}.$$

Lại có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2-1}\\
=\ &\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 8} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+2)}\\
=\ &\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right)\\
=\ &\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}\right).
\end{aligned}$$

Do đó $B < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n+2}\right)$, suy ra $B < \dfrac{1}{4}$. □

BÀI 27. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta luôn có

$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Nhận xét, với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta luôn có $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{4}{4n^2-1} = 2\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$.

Khi đó

$$A < 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Lại có $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2n+1}$.

Do đó $A < 2\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$, suy ra $A < \dfrac{2}{3}$. □

BÀI 28. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$, ta luôn có

$$B = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}.$$

✍ LỜI GIẢI.

Với mọi số tự nhiên $n \geq 3$, ta luôn có

$$\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^3 - n} = \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)-(n-1)}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right].$$

Khi đó

$$B < \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right].$$

Lại có $\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{n(n+1)}$.

Do đó $B < \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{n(n+1)}\right]$, suy ra $B < \frac{1}{12}$. □

BÀI 29. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta luôn có

$$A = \left(1 + \frac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1 + \frac{1}{2\cdot 4}\right)\left(1 + \frac{1}{3\cdot 5}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) < 2.$$

✍ LỜI GIẢI.

Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có $1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^2}{1\cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2\cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3\cdot 5} \cdots \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \cdot \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots(n+1)}{3\cdot 4\cdot 5\cdots(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{1} \cdot \frac{2}{n+2} = 2 \cdot \frac{n+2-1}{n+2} = 2\left(1 - \frac{1}{n+2}\right). \end{aligned}$$

Do đó $A < 2$. □

BÀI 30. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta luôn có

$$B = \left(1 - \frac{2}{6}\right)\left(1 - \frac{2}{12}\right)\left(1 - \frac{2}{20}\right)\cdots\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) > \frac{1}{3}.$$

✍ LỜI GIẢI.

Với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có $1 - \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n(n+1)-2}{n(n+1)} = \frac{n^2+n-2}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} B &= \left(1 - \frac{2}{6}\right)\left(1 - \frac{2}{12}\right)\left(1 - \frac{2}{20}\right)\cdots\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3} \cdot \frac{2\cdot 5}{3\cdot 4} \cdot \frac{3\cdot 6}{4\cdot 5} \cdots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot n} \cdot \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdots(n+2)}{3\cdot 4\cdot 5\cdots(n+1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+2}{3} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right). \end{aligned}$$

Do đó $B > \frac{1}{3}$. □

BÀI 31. Rút gọn biểu thức $A = \frac{3^2-1}{5^2-1} \cdot \frac{7^2-1}{9^2-1} \cdot \frac{11^2-1}{13^2-1} \cdots \frac{43^2-1}{45^2-1}$.

✍ LỜI GIẢI.

Ta có

$$A = \frac{3^2-1}{5^2-1} \cdot \frac{7^2-1}{9^2-1} \cdot \frac{11^2-1}{13^2-1} \cdots \frac{43^2-1}{45^2-1} = \frac{2\cdot 4}{4\cdot 6} \cdot \frac{6\cdot 8}{8\cdot 10} \cdot \frac{10\cdot 12}{12\cdot 14} \cdots \frac{42\cdot 44}{44\cdot 46} = \frac{2}{46} = \frac{1}{23}.$$

□

BÀI 32. Chứng minh rằng $A = \dfrac{2^3+1}{2^3-1} \cdot \dfrac{3^3+1}{3^3-1} \cdot \dfrac{4^3+1}{4^3-1} \cdots \dfrac{9^3+1}{9^3-1} < \dfrac{3}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $\dfrac{n^3+1}{n^3-1} = \dfrac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n-1)(n^2+n+1)} = \dfrac{(n+1)\left[(n-0{,}5)^2+0{,}75\right]}{(n-1)\left[(n+0{,}5)^2+0{,}75\right]}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} A &= \dfrac{3(1{,}5^2+0{,}75)}{1(2{,}5^2+0{,}75)} \cdot \dfrac{4(2{,}5^2+0,75)}{2(3{,}5^2+0{,}75)} \cdot \dfrac{5(3{,}5^2+0{,}75)}{3(4{,}5^2+0{,}75)} \cdots \dfrac{10(8{,}5^2+0{,}75)}{8(9{,}5^2+0{,}75)} \\ &= \dfrac{3\cdot 4\cdot 5\cdots 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 8} \cdot \dfrac{1{,}5^2+0{,}75}{9{,}5^2+0{,}75} = \dfrac{9\cdot 10}{1\cdot 2}\cdot\dfrac{3}{91} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{90}{91}. \end{aligned}$$

Do đó $A < \dfrac{3}{2}$. □

BÀI 33. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 2$, luôn có

$$B = \dfrac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \dfrac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \dfrac{4^3-1}{4^3+1} \cdots \dfrac{n^3-1}{n^3+1} > \dfrac{2}{3}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Với mọi số tự nhiên $n \ge 2$, ta có $\dfrac{n^3-1}{n^3+1} = \dfrac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)} = \dfrac{(n-1)\left[(n+0{,}5)^2+0{,}75\right]}{(n+1)\left[(n-0{,}5)^2+0{,}75\right]}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} B &= \dfrac{1(2{,}5^2+0{,}75)}{3(1{,}5^2+0{,}75)} \cdot \dfrac{2(3{,}5^2+0{,}75)}{4(2{,}5^2+0,75)} \cdot \dfrac{3(4{,}5^2+0{,}75)}{5(3{,}5^2+0{,}75)} \cdots \dfrac{(n-1)\left[(n+0{,}5)^2+0{,}75\right]}{(n+1)\left[(n-0{,}5)^2+0{,}75\right]} \\ &= \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots (n-1)}{3\cdot 4\cdot 5\cdots (n+1)} \cdot \dfrac{(n+0{,}5)^2+0{,}75}{1{,}5^2+0{,}75} = \dfrac{1\cdot 2}{n\cdot(n+1)}\cdot\dfrac{n^2+n+1}{3} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}. \end{aligned}$$

Do đó $B > \dfrac{2}{3}$. □

BÀI 34. Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{(1^4+4)(5^4+4)(9^4+4)\cdots(21^4+4)}{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4)\cdots(23^4+4)}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$n^4+4 = (n^2+2)^2 - 4n^2 = (n^2-2n+2)(n^2+2n+2) = \left[(n-1)^2+1\right]\left[(n+1)^2+1\right].$$

Khi đó

$$\begin{aligned} P &= \dfrac{(0^2+1)(2^2+1)}{(2^2+1)(4^2+1)} \cdot \dfrac{(4^2+1)(6^2+1)}{(6^2+1)(8^2+1)} \cdot \dfrac{(8^2+1)(10^2+1)}{(10^2+1)(12^2+1)} \cdots \dfrac{(20^2+1)(22^2+1)}{(22^2+1)(24^2+1)} \\ &= \dfrac{0^2+1}{24^2+1} = \dfrac{1}{577}. \end{aligned}$$

□

BÀI 35. Rút gọn biểu thức

$$M = \dfrac{1}{a^2-5a+6} + \dfrac{1}{a^2-7a+12} + \dfrac{1}{a^2-9a+20} + \dfrac{1}{a^2-11a+30}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-4)}+\frac{1}{(a-4)(a-5)}+\frac{1}{(a-5)(a-6)} \\ &= \frac{1}{a-3}-\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a-4}-\frac{1}{a-3}+\frac{1}{a-5}-\frac{1}{a-4}+\frac{1}{a-6}-\frac{1}{a-5} \\ &= \frac{1}{a-6}-\frac{1}{a-2}=\frac{4}{(a-2)(a-6)}. \end{aligned}$$

□

BÀI 36. Rút gọn biểu thức

$$\left(\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\frac{n-3}{3}+\cdots+\frac{2}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\frac{n-3}{3}+\cdots+\frac{2}{n-2}+\frac{1}{n-1} \\ =\; & \frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\frac{n-3}{3}+\cdots+\frac{n-(n-2)}{n-2}+\frac{n-(n-1)}{n-1} \\ =\; & \frac{n}{1}+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\cdots+\frac{n}{n-2}+\frac{n}{n-1}-1-1-1-\cdots-1-1 \\ =\; & n+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\cdots+\frac{n}{n-1}-(n-1) \\ =\; & \frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+\cdots+\frac{n}{n-1}+\frac{n}{n} \\ =\; & n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Do đó

$$\left(\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\frac{n-3}{3}+\cdots+\frac{2}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=n.$$

□

BÀI 37. Rút gọn biểu thức

$$\frac{A}{B}=\frac{\dfrac{1}{1\cdot(2n-1)}+\dfrac{1}{3\cdot(2n-3)}+\dfrac{1}{5\cdot(2n-5)}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-3)\cdot 3}+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 1}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có nhận xét $\dfrac{1}{k(2n-k)}=\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{2n-k}\right)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2n}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2n}\cdot 2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{B}{n}. \end{aligned}$$

Do đó $\dfrac{A}{B}=\dfrac{1}{n}$. □

BÀI 38. Cho $abc = 1$ và $a + b + c = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. Chứng minh rằng trong ba số a, b, c tồn tại một số bằng 1.

LỜI GIẢI.

Từ đẳng thức $a + b + c = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ suy ra $a + b + c = \dfrac{ab + bc + ca}{abc}$.

Mà $abc = 1$ nên $a + b + c = ab + bc + ca$.

Để chứng minh trong ba số a, b, c tồn tại một số bằng 1, ta cần chứng minh

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) = 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) &= (ab - a - b + 1)(c - 1) = abc - ab - ac + a - bc + b + c - 1 \\ &= (abc - 1) + (a + b + c) - (ab + bc + ca).\end{aligned}$$

Vì $abc = 1$ và $a + b + c = ab + bc + ca$ nên biểu thức trên bằng 0.

Do đó, tồn tại một trong ba thừa số $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$ bằng 0.

Vậy tồn tại một trong ba số a, b, c bằng 1. □

BÀI 39. Chứng minh rằng nếu $x + y + z = a$ và $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a}$ thì tồn tại một trong ba số x, y, z bằng a.

LỜI GIẢI.

Từ giả thiết suy ra $a \neq 0$. Khi đó

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z} \text{ hay } \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{x + y + z}.$$

Suy ra $(xy + yz + zx)(x + y + z) - xyz = 0$. (1)

Ta có

$$\begin{aligned}(xy + yz + zx)(x + y + z) - xyz &= x^2y + xy^2 + xyz + xyz + y^2z + yz^2 + x^2z + xyz + xz^2 - xyz \\ &= x^2y + xy^2 + xyz + y^2z + xyz + yz^2 + x^2z + xz^2 \\ &= xy(x + y) + yz(x + y) + yz(x + z) + xz(x + z) \\ &= y(x + y)(x + z) + z(x + z)(x + y) \\ &= (x + y)(y + z)(z + x).\end{aligned}$$

Từ (1) suy ra $(x + y)(y + z)(z + x) = 0$. Do đó $x = -y$ hoặc $y = -z$ hoặc $z = -x$.

— Với $x = -y$ thì từ $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a}$ suy ra $z = a$.

— Với $y = -z$ thì từ $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a}$ suy ra $x = a$.

— Với $z = -x$ thì từ $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a}$ suy ra $y = a$.

Vậy tồn tại một trong ba số x, y, z bằng a. □

BÀI 40. Các biểu thức $x + y + z$ và $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ có thể cùng có giá trị bằng 0 được hay không?

LỜI GIẢI.

Giả sử $x+y+z=0$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$.
Ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}$. Mà $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$ nên $xy+yz+zx=0$.
Từ $x+y+z=0$ suy ra $(x+y+z)^2=0$ hay $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0$.
Vì $xy+yz+zx=0$ nên $x^2+y^2+z^2=0$, suy ra $x=y=z=0$. Điều này vô lí vì khi đó $\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}$ không xác định.
Vậy $x+y+z$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ không thể cùng có giá trị bằng 0. □

BÀI 41. Tính giá trị của biểu thức $M=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{1}{z+2}$, biết rằng

$$2a=by+cz;\ 2b=ax+cz;\ 2c=ax+by \text{ và } a+b+c\neq 0.$$

✍ **LỜI GIẢI.**
Cộng theo từng vế ba đẳng thức $2a=by+cz$; $2b=ax+cz$; $2c=ax+by$ ta được

$$a+b+c=ax+by+cz=ax+2a=a(x+2).$$

Suy ra $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{a}{a+b+c}$.
Tương tự, $\dfrac{1}{y+2}=\dfrac{b}{a+b+c}$, $\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{c}{a+b+c}$.
Do đó $M=\dfrac{a+b+c}{a+b+c}=1$. □

BÀI 42. Cho $abc=2$. Rút gọn biểu thức $M=\dfrac{a}{ab+a+2}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{2c}{ac+2c+2}$.
✍ **LỜI GIẢI.**
Với $abc=2$, ta có

$$\begin{aligned} M &= \frac{a}{ab+a+2}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{2c}{ac+2c+2}=\frac{a}{ab+a+2}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{2c}{ac+2c+abc} \\ &= \frac{a}{a+ab+2}+\frac{ab}{a+ab+2}+\frac{2}{a+ab+2}=\frac{a+ab+2}{a+ab+2}=1. \end{aligned}$$

□

BÀI 43. Cho $abc=1$. Rút gọn biểu thức $N=\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ac+c+1}$.
✍ **LỜI GIẢI.**
Với $abc=1$, ta có

$$\begin{aligned} N &= \frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}=\frac{a}{a+ab+1}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{c}{ac+c+abc} \\ &= \frac{a}{a+ab+1}+\frac{ab}{a+ab+1}+\frac{1}{a+ab+1}=\frac{a+ab+1}{a+ab+1}=1. \end{aligned}$$

□

BÀI 44. Cho $\dfrac{a}{c}=\dfrac{a-b}{b-c}$, $a\neq 0$, $c\neq 0$, $a-b\neq 0$, $b-c\neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a-b}=\frac{1}{b-c}-\frac{1}{c}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ giả thiết suy ra $a(b-c)=c(a-b)$. (1)

Ta có

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{a-b}=\frac{a-b+c}{c(a-b)}. \quad (2)$$
$$\frac{1}{b-c}-\frac{1}{a}=\frac{a-b+c}{a(b-c)}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra điều phải chứng minh. □

BÀI 45. Cho $a+b+c=0$ $(a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0)$. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}\\ &= \frac{3abc}{abc}=3. \end{aligned}$$

□

BÀI 46. Cho $a+b+c=0$ $(a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0)$. Rút gọn biểu thức

$$B=\frac{a^2}{a^2-b^2-c^2}+\frac{b^2}{b^2-c^2-a^2}+\frac{c^2}{c^2-a^2-b^2}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ $a+b+c=0$ suy ra $b+c=-a$. Khi đó $b^2+2bc+c^2=a^2$ hay $a^2-b^2-c^2=2bc$.

Tương tự, $b^2-c^2-a^2=2ca$, $c^2-a^2-b^2=2ab$.

Do đó

$$\begin{aligned} B &= \frac{a^2}{2bc}+\frac{b^2}{2ca}+\frac{c^2}{2ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{2abc}\\ &= \frac{3abc}{2abc}=\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 47. Cho biết $a+b+c=0$, hãy tính giá trị của biểu thức

$$A=\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right).$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $M=\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}$, ta có

$$\begin{aligned} M\cdot\frac{c}{a-b} &= 1+\frac{c}{a-b}\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}\\ &= 1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{(a-b)(c-a-b)}{ab}=1+\frac{2c^2}{ab}=1+\frac{2c^3}{abc}. \end{aligned}$$

Tương tự, $M \cdot \dfrac{a}{b-c} = 1 + \dfrac{2a^3}{abc}$, $M \cdot \dfrac{b}{c-a} = 1 + \dfrac{2b^3}{abc}$.
Do đó

$$\begin{aligned} A &= 3 + \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc} = 3 + \frac{2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+6abc}{abc} \\ &= 3 + \frac{6abc}{abc} = 3+6 = 9. \end{aligned}$$

□

BÀI 48. Chứng minh rằng, nếu $(a^2-bc)(b-abc) = (b^2-ac)(a-abc)$ và các số a, b, c, $a-b$ khác 0 thì $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = a+b+c$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ giả thiết suy ra

$$\begin{aligned} & a^2b - a^3bc - b^2c + ab^2c^2 = ab^2 - ab^3c - a^2c + a^2bc^2 \\ \Rightarrow\ & ab(a-b) + c(a^2-b^2) = abc^2(a-b) + abc(a^2-b^2) \\ \Rightarrow\ & (a-b)(ab+ac+bc) = abc(a-b)(a+b+c). \end{aligned}$$

Chia cả hai vế cho $abc(a-b) \neq 0$ ta được điều phải chứng minh. □

BÀI 49. Cho $a+b+c=0$, $x+y+z=0$, $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 0$. Chứng minh rằng

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ $x+y+z=0$ suy ra $x^2 = (y+z)^2$, $y^2 = (z+x)^2$, $z^2 = (x+y)^2$.
Do đó

$$\begin{aligned} ax^2+by^2+cz^2 &= a(y+z)^2 + b(z+x)^2 + c(x+y)^2 \\ &= a(y^2+2yz+z^2) + b(z^2+2zx+x^2) + c(x^2+2xy+y^2) \\ &= x^2(b+c) + y^2(a+c) + z^2(a+b) + 2(ayz+bzx+cxy). \qquad (1) \end{aligned}$$

Thay $b+c=-a$, $a+c=-b$, $a+b=-c$ (do $a+b+c=0$) và thay $ayz+bzx+cxy=0$ $\left(\text{do } \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 0\right)$ vào (1) ta được

$$ax^2+by^2+cz^2 = -ax^2-by^2-cz^2.$$

Cho nên $2ax^2+2by^2+2cz^2=0$ hay $ax^2+by^2+cz^2=0$. □

BÀI 50. Cho $\dfrac{xy+1}{y} = \dfrac{yz+1}{z} = \dfrac{zx+1}{x}$. Chứng minh rằng $x=y=z$ hoặc $x^2y^2z^2=1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ giả thiết suy ra $x + \dfrac{1}{y} = y + \dfrac{1}{z} = z + \dfrac{1}{x}$. Do đó

$$x-y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{y-z}{yz};\ y-z = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{z-x}{xz};\ z-x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}.$$

Suy ra $(x-y)(y-z)(z-x) = \dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^2y^2z^2}$.

Cho nên $(x-y)(y-z)(z-x)(x^2y^2z^2-1)=0$.

Vậy $x-y=0$; $y-z=0$; $z-x=0$; $x^2y^2z^2-1=0$ hay $x=y=z$; $x^2y^2z^2=1$.

□

BÀI 51. Cho $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Nhân cả hai vế của $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$ với $a+b+c$ ta được

$$\frac{a^2+a(b+c)}{b+c}+\frac{b^2+b(c+a)}{c+a}+\frac{c^2+c(a+b)}{a+b}=a+b+c.$$

Suy ra $\dfrac{a^2}{b+c}+a+\dfrac{b^2}{c+a}+b+\dfrac{c^2}{a+b}+c=a+b+c$ hay $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=0$. □

BÀI 52. Cho $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$ suy ra $\dfrac{a}{b-c}=\dfrac{b}{a-c}+\dfrac{c}{b-a}=\dfrac{b^2-ab+ac-c^2}{(a-b)(c-a)}$.

Nhân hai vế với $\dfrac{1}{b-c}$ ta được $\dfrac{a}{(b-c)^2}=\dfrac{b^2-ab+ac-c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

Tương tự, $\dfrac{b}{(c-a)^2}=\dfrac{c^2-bc+ba-a^2}{(b-c)(c-a)(a-b)}$; $\dfrac{c}{(a-b)^2}=\dfrac{a^2-ca+cb-b^2}{(c-a)(a-b)(b-c)}$.

Cộng từng vế ba đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh. □

BÀI 53. Cho $x+\dfrac{1}{x}=a$. Tính các biểu thức sau theo a

a) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$; b) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$; c) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$; d) $x^5+\dfrac{1}{x^5}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

1. Từ $x+\dfrac{1}{x}=a$, suy ra $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=a^2$ hay $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2-2$.
2. Ta có $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=a^3-3a$.
3. Ta có $x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}=(a^2-2)^2-2=a^4-4a^2+2$.
4. Ta có $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)=x^5+\dfrac{1}{x}+x+\dfrac{1}{x^5}$.

   Suy ra

$$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=(a^2-2)(a^3-3a)-a=a^5-5a^3+5a.$$

□

BÀI 54. Cho $\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=a$. Tính giá trị của biểu thức

$$M=\left(x^4-\dfrac{1}{x^4}\right):\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right) \text{ theo } a.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ giả thiết suy ra $a\neq 1$ và

$$\frac{x^4-1}{x^4+1}=a\Rightarrow x^4-1=ax^4+a\Rightarrow (1-a)x^4=a+1\Rightarrow x^4=\frac{a+1}{1-a}.$$

Thay vào M ta được

$$M=\left(\frac{a+1}{1-a}-\frac{1-a}{a+1}\right):\left(\frac{a+1}{1-a}+\frac{1-a}{a+1}\right)=\frac{(a+1)^2-(1-a)^2}{(a+1)^2+(1-a)^2}=\frac{4a}{2a^2+2}=\frac{2a}{a^2+1}.$$

□

BÀI 55. Cho $x^2-4x+1=0$. Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Cách 1. Ta có

$$x^2-4x+1=0\Rightarrow x^2-x+1=3x\Rightarrow \frac{x^2-x+1}{x}=3.$$

Mặt khác

$$A=\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=\frac{x^2-x+1}{x}\cdot\frac{x^2+x+1}{x}=3\cdot\frac{x^2+x+1}{x}.$$

Ta thấy $\dfrac{x^2+x+1}{x}=\dfrac{x^2-x+1}{x}+\dfrac{2x}{x}=3+2=5$.

Vậy $A=3\cdot 5=15$.

Cách 2. Ta có $A=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}=\dfrac{(x^2+1)^2-x}{x^2}=\dfrac{(4x)^2-x^2}{x^2}=15$. □

BÀI 56. Cho $\dfrac{x}{x^2-x+1}=a$. Tính $M=\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ theo a.

✍ **LỜI GIẢI.**

Trường hợp 1. Với $x=0$ thì $a=0$ và $M=0$.

Trường hợp 2. Với $x\neq 0$ thì $a\neq 0$. Ta có

$$M=\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{x}{x^2-x+1}\cdot\frac{x}{x^2+x+1}. \tag{1}$$

Lại có

$$\frac{x^2+x+1}{x}=\frac{x^2-x+1}{x}+\frac{2x}{x}=\frac{1}{a}+2=\frac{1+2a}{a}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $M=a\cdot\dfrac{a}{1+2a}=\dfrac{a^2}{1+2a}$.

Vậy $M=\dfrac{a^2}{1+2a}$. □

BÀI 57. Cho $x = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y = \dfrac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}$. Tính giá trị của biểu thức $x+y+xy$.

LỜI GIẢI.

Ta xét biểu thức $x+y+xy+1 = x(y+1)+(y+1) = (x+1)(y+1)$.

Từ giả thiết suy ra $x+1 = \dfrac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$; $y+1 = \dfrac{4bc}{(b+c)^2-a^2}$.

Do đó, $(x+1)(y+1) = 2$.

Vậy $x+y+xy+1 = 2$, suy ra $x+y+xy = 1$. □

BÀI 58. Tìm hai số tự nhiên a và b sao cho $a-b = \dfrac{a}{b}$.

LỜI GIẢI.

Đặt

$$a-b = n, \quad (1)$$
$$\frac{a}{b} = n, \quad (2)$$

trong đó $a, b, n \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$.

Từ (1), (2) ta có $bn - b = n$ nên $b(n-1) = n$.

— Nếu $n = 1$ thì $a = b$. Khi đó, theo (1) thì $n = 0$, loại.

— Với $n \neq 1$, ta có

$$b = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}. \quad (3)$$

Vì $b \in \mathbb{N}$ nên $n-1$ là ước của 1, suy ra $(n-1) \in \{-1; 1\}$.

- Với $n-1 = -1$ hay $n = 0$, từ (3) suy ra $b = 0$, loại.
- Với $n-1 = 1$ hay $n = 2$, từ (3), (2) suy ra $b = 2$, $a = 4$.

  Thử lại ta thấy $4 - 2 = \dfrac{4}{2}$.

Vậy $a = 4$, $b = 2$. □

BÀI 59. Tìm hai số tự nhiên a và b sao cho $a-b = \dfrac{a}{2b}$.

LỜI GIẢI.

Đặt

$$a-b = n, \quad (1)$$
$$\frac{a}{2b} = n, \quad (2)$$

trong đó $a, b, n \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$.

Từ (1), (2) ta có $2bn - b = n$ nên $b(2n-1) = n$, suy ra

$$b = \frac{n}{2n-1}. \quad (3)$$

— Với $n = 0$, từ (3) suy ra $b = 0$, loại.

— Với $n \geq 1$, ta thấy $n \leq n + n - 1 = 2n - 1$.

Vì $b \in \mathbb{N}$ nên $\dfrac{n}{2n-1} \in \mathbb{N}$, suy ra $n = 2n-1$ hay $n = 1$. Từ (3), (1) suy ra $b = 1$ và $a = 2$.

Thử lại ta thấy $2 - 1 = \dfrac{2}{2 \cdot 1}$.

Vậy $a=2$, $b=1$. □

BÀI 60. Cho hai số nguyên dương a và b, trong đó $a>b$. Tìm số nguyên dương c khác b sao cho

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+c^3}=\frac{a+b}{a+c}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Do $a+b\neq 0$, $a+c\neq 0$ nên từ $\dfrac{a^3+b^3}{a^3+c^3}=\dfrac{a+b}{a+c}$ suy ra

$$\begin{aligned}\frac{a^3+b^3}{a+b}=\frac{a^3+c^3}{a+c} &\Leftrightarrow a^2-ab+b^2=a^2-ac+c^2\\ &\Leftrightarrow b^2-c^2=ab-ac\\ &\Leftrightarrow (b+c)(b-c)=a(b-c).\end{aligned}$$

Do $b-c\neq 0$ nên $b+c=a$.

Vậy $c=a-b$. □

BÀI 61. Cho dãy số $a_1,a_2,a_3,\ldots$ sao cho

$$a_2=\frac{a_1-1}{a_1+1};a_3=\frac{a_2-1}{a_2+1};\ldots;a_n=\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+1}.$$

❶ Chứng minh rằng $a_1=a_5$.

❷ Xác định năm số đầu của dãy, biết rằng $a_{101}=3$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned}a_3&=\left(\frac{a_1-1}{a_1+1}-1\right):\left(\frac{a_1-1}{a_1+1}+1\right)=\frac{-2}{a_1+1}:\frac{2a_1}{a_1+1}=-\frac{1}{a_1}.\\ a_4&=\left(-\frac{1}{a_1}-1\right):\left(-\frac{1}{a_1}+1\right)=\frac{-1-a_1}{a_1}:\frac{a_1-1}{a_1}=\frac{1+a_1}{1-a_1}.\\ a_5&=\left(\frac{1+a_1}{1-a_1}-1\right):\left(\frac{1+a_1}{1-a_1}+1\right)=\frac{2a_1}{1-a_1}:\frac{2}{1-a_1}=\frac{2a_1}{2}=a_1.\end{aligned}$$

❷ Theo câu trên ta suy ra $a_1=a_5=a_9=\cdots=a_{1001}=3$.

Từ đó ta tính được $a_1=3$; $a_2=\dfrac{1}{2}$; $a_3=-\dfrac{1}{3}$; $a_4=-2$; $a_5=3$.

□

BÀI 62. Tìm phân số $\dfrac{m}{n}$ khác 0 và số tự nhiên k, biết rằng $\dfrac{m}{n}=\dfrac{m+k}{nk}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ giả thiết suy ra $mnk=mn+nk$. Chia hai vế cho n, ta được $mk=m+k$. Do đó $m=k(m-1)$.

Như vậy m chia hết cho $m-1$. Từ đó ta tìm được $m=0$ (loại) và $m=2$. Khi đó $k=2$.

Vậy phân số phải tìm có dạng $\dfrac{2}{n}$ và $k=2$. □

BÀI 63. Cho hai số tự nhiên a và b ($a<b$). Tìm tổng các phân số tối giản có mẫu bằng 7, mỗi phân số lớn hơn a nhưng nhỏ hơn b.

✍ **LỜI GIẢI.**

Tổng phải tìm bằng $A-B$, trong đó

$$\begin{aligned}
A &= \left(a+\frac{1}{7}\right)+\left(a+\frac{2}{7}\right)+\cdots+\left(b-\frac{2}{7}\right)+\left(b-\frac{1}{7}\right)\\
&= \frac{1}{7}\left[(7a+1)+(7a+2)+\cdots+(7b-2)+(7b-1)\right]\\
&= \frac{1}{14}\left[(7a+1)+(7b-1)\right]\left[(7b-1)-(7a+1)+1\right]\\
&= \frac{1}{2}(a+b)(7b-7a-1).\\
B &= (a+1)+(a+2)+\cdots+(b-2)+(b-1)\\
&= \frac{1}{2}\left[(a+1)+(b-1)\right]\left[(b-1)-(a+1)+1\right]\\
&= \frac{1}{2}(a+b)(b-a-1).
\end{aligned}$$

Tính hiệu $A-B$ ta được $3(b^2-a^2)$. □

BÀI 64. Mức sản xuất của một xí nghiệp năm 2001 tăng $a\%$ so với năm 2000, năm 2002 tăng $b\%$ so với năm 2001. Mức sản xuất của xí nghiệp đó năm 2002 tăng bao nhiêu phần trăm so với năm 2000?

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử mức sản xuất của xí nghiệp năm 2000 là 1 thì mức sản xuất năm 2001 là $1+\dfrac{a}{100}$, mức sản xuất năm 2002 là

$$\left(1+\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{b}{100}\right)=1+\frac{b}{100}+\frac{a}{100}+\frac{ab}{10000},$$

tăng so với năm 2000 là $\dfrac{a+b}{100}+\dfrac{ab}{10000}$ hay $\left(a+b+\dfrac{ab}{100}\right)\%$. □

BÀI 65. Một số a tăng $m\%$, sau đó lại giảm đi $n\%$ (a, m, n là các số dương) thì được số b. Tìm liên hệ giữa m và n để $b>a$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $b=a\left(1+\dfrac{m}{100}\right)\left(1-\dfrac{n}{100}\right)$ nên $b-a=a\left[\left(1+\dfrac{m}{100}\right)\left(1-\dfrac{n}{100}\right)-1\right]$.

Điều kiện để $b>a$ là $\left(1+\dfrac{m}{100}\right)\left(1-\dfrac{n}{100}\right)>1$.

Rút gọn điều kiện trên ta được $100(m-n)>mn$. □

BÀI 66. Chứng minh tổng sau không là số nguyên với mọi số tự nhiên $n\ge 2$

$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi k là số nguyên lớn nhất sao cho $2^k\le n$. Chọn mẫu chung là 2^kP trong đó P là tích các số lẻ không vượt quá n. Chỉ có duy nhất một thừa số phụ $\left(\text{của phân số } \dfrac{1}{2^k}\right)$ là số lẻ, còn mọi thừa số phụ khác đều chẵn.

Như vậy, sau khi quy đồng mẫu, mẫu là số chẵn, tử là số lẻ. Do đó A không là số nguyên. □

BÀI 67. Chứng minh tổng sau không là số nguyên với mọi số tự nhiên $n\ge 1$

$$B=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi k là số nguyên lớn nhất sao cho $3^k \leq 2n+1$. Chọn mẫu chung là $3^k P$ trong đó P là tích các thừa số nguyên tố lẻ không vượt quá $2n+1$. Chỉ có duy nhất một thừa số phụ $\left(\text{của phân số } \dfrac{1}{3^k}\right)$ không chia hết cho 3, còn mọi thừa số phụ khác đều chia hết cho 3.

Như vậy, sau khi quy đồng mẫu, mẫu là số chia hết cho 3, tử là số không chia hết cho 3. Do đó B không là số nguyên. □

BÀI 3 MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A PHƯƠNG PHÁP TÁCH MỘT HẠNG TỬ THÀNH NHIỀU HẠNG TỬ

VÍ DỤ 1. Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$3x^2 - 8x + 4.$$

LỜI GIẢI.

Đa thức trên không chứa nhân tử chung, không có dạng một hằng đẳng thức đáng nhớ nào, cũng không thể nhóm các hạng tử. Ta biến đổi đa thức ấy thành đa thức có nhiều hạng tử hơn.

Cách 1. (Tách hạng tử thứ hai)

$3x^2 - 8x + 4 = 3x^2 - 6x - 2x + 4 = 3x(x-2) - 2(x-2) = (x-2)(3x-2).$

Cách 2. (Tách hạng tử thứ nhất)

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8x + 4 &= 4x^2 - 8x + 4 - x^2 = (2x-2)^2 - x^2 \\ &= (2x-2+x)(2x-2-x) = (3x-2)(x-2). \end{aligned}$$

Nhận xét. *Trong cách 1, hạng tử $-8x$ được tách thành hai hạng tử $-6x$ và $-2x$. Trong đa thức $3x^2 - 6x - 2x + 4$, hệ số của các hạng tử là* 3, -6, -2, 4. *Các hệ số thứ hai và thứ tư đều gấp -2 lần hệ số liền trước, nhờ đó mà xuất hiện nhân tử chung $x-2$.*

Một cách tổng quát, để phân tích tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ thành nhân tử, ta tách hạng tử bx thành $b_1x + b_2x$ sao cho $\dfrac{b_1}{a} = \dfrac{c}{b_2}$, tức là $b_1b_2 = ac$.

Trong thực hành ta làm như sau:

Bước 1: Tính tích ac.

Bước 2: Phân tích ac ra tích của hai thừa số nguyên bằng mọi cách.

Bước 3: Chọn hai thừa số mà tổng bằng b.

Trong ví dụ trên, đa thức $3x^2 - 8x + 4$ có $a = 3$, $b = -8$, $c = 4$. Tích $ac = 3 \cdot 4 = 12$. Phân tích 12 ra tích của hai thừa số, hai thừa số này cùng dấu (vì tích của chúng bằng 12), và cùng âm (để tổng của chúng bằng -8) : $(-1)(-12)$, $(-2)(-6)$, $(-3)(-4)$. Chọn hai thừa số mà tổng bằng -8, đó là -2 và -6. □

VÍ DỤ 2. Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$4x^2 - 4x - 3.$$

LỜI GIẢI.

Cách 1. (Tách hạng tử thứ hai)

$4x^2 - 4x - 3 = 4x^2 + 2x - 6x - 3 = 2x(2x+1) - 3(2x+1) = (2x+1)(2x-3).$

Cách 2. (Tách hạng tử thứ ba)

$$4x^2 - 4x - 3 = 4x^2 - 4x + 1 - 4 = (2x-1)^2 - 2^2 = (2x+1)(2x-3)$$

Nhận xét. *Qua hai ví dụ trên, ta thấy việc tách một hạng tử thành nhiều hạng tử khác thường nhằm mục đích:*

— *Làm xuất hiện các hệ số tỉ lệ, nhờ đó mà xuất hiện nhân tử chung (cách 1);*

— *Làm xuất hiện hiệu của hai bình phương (cách 2).*

Với các đa thức có bậc từ bậc ba trở lên, để dễ dàng làm xuất hiện các hệ tỉ lệ, người ta thường dùng cách *tìm nghiệm của đa thức.*

Ta nhắc lại khái niệm nghiệm của đa thức: số a được gọi là nghiệm của đa thức $f(x)$ nếu $f(a) = 0$. Như vậy, nếu đa thức $f(x)$ có nghiệm $x = a$ thì nó chứa nhân tử $x - a$.

Ta chứng minh được rằng nghiệm của đa thức, nếu có, phải là ước của hệ số tự do.

Ta chứng minh được rằng nghiệm nguyên của đa thức, nếu có, phải là ước của hệ số tự do.

Thật vậy, giả sử đa thức $a_0x^n + a_1a^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ với các hệ số a_0, a_1, $\ldots$, a_n nguyên, có nghiệm $x = a(x \in \mathbb{Z})$. Thế thì

$$a_0x^n + a_1a^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = (x-a)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}).$$

trong đó b_0, b_1, $\ldots$, b_{n-1} nguyên. Hạng tử có bậc thấp nhất của tích ở vế phải bằng $-ab_{n-1}$, hạng tử có bậc thấp nhất của vế trái bằng a_n. Do đó $-ab_{n-1} = a_n$, tức a là ước của a_n. □

VÍ DỤ 3. Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 4.$$

✍ LỜI GIẢI.

Lần lượt kiểm tra với $x = \pm1, \pm2, \pm4$, ta thấy $f(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 0$. Đa thức có nghiệm $x = 2$, do đó chứa nhân tử $x - 2$.

Ta tách các hạng tử như sau:

Cách 1.

$$\begin{aligned} & x^3 - x^2 - 4 = x^2 - 2x^2 + x^2 - 2x + 2x - 4 \\ =& x^2(x-2) + x(x-2) + 2(x-2) = (x-2)(x^2+x+2). \end{aligned}$$

Cách 2.

$$\begin{aligned} & x^3 - x^2 - 4 = x^3 - 8 - x^2 + 4 \\ = \quad & (x-2)(x^2+2x+4) - (x+2)(x-2) \\ = \quad & (x-2)(x^2+2x+4-x-2) = (x-2)(x^2+x+2). \end{aligned}$$

□

Nhận xét. *Khi xét nghiệm nguyên của đa thức, nên nhớ hai định lí sau:*

1. *Nếu đa thức $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì 1 là nghiệm của đa thức, do đó đa thức chứa nhân tử $x - 1$.*

   Chẳng hạn, đa thức $x^2 - 5x^2 + 8x - 4$ có $1 - 5 + 8 - 4 = 0$ nên 1 là nghiệm của đa thức, đa thức chứa nhân tử $x - 1$.

❷ *Nếu đa thức $f(x)$ có tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ thì -1 là nghiệm của đa thức, đa thức chưa nhân tử $x+1$.*
Chẳng hạng, đa thức x^3-5x^2+3x+9 có $9-5=3+1$ nên -1 là nghiệm của đa thức, đa thức chứa nhân tử $x+1$.

Nhận xét. *Để nhanh chóng loại trừ các ước của hệ số tự do không là nghiệm của đa thức, có thể dùng nhận xét sau:*
Nếu x là nghiệm nguyên của đa thức $f(x)$ và $f(1)$, $f(-1)$ khác 0 thì $\dfrac{f(1)}{a-1}$ và $\dfrac{f(-1)}{a+1}$ đều là số nguyên.

✍ **LỜI GIẢI.**

Số a là nghiệm của $f(x)$ nên

$$f(x)=(x-a)\cdot Q(x). \tag{1}$$

Thay $x=1$ vào (1), ta có $f(1)=(1-a)Q(1)$.
Do $f(1)\neq 0$ nên $a\neq 1$, vì thế $Q(1)=\dfrac{f(1)}{1-a}$, tức là $\dfrac{f(1)}{a-1}$ là số nguyên. □

Lấy một ví dụ: $f(x)=4x^3-13x^2+9x-18$.
Các ước của 18 là ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18.

$$f(1)=4-13+9-18=-18, \qquad f(-1)=-4-13-9-18=-44.$$

Hiển nhiên ±1 không là nghiệm của $f(x)$. Ta thấy $\dfrac{-18}{-3-1}$, $\dfrac{-18}{\pm6-1}$, $\dfrac{-18}{\pm9-1}$, $\dfrac{-18}{\pm18-1}$ không nguyên nên -3, ±6, ±9, ±18 không là nghiệm của $f(x)$.
Ta thấy $\dfrac{-44}{2+1}$ không nguyên nên 2 không là nghiệm của $f(x)$. Chỉ còn -2 và 3. Kiểm tra thấy 3 là nghiệm của $f(x)$. Do đó, ta tách các hạng tử như sau:

$$\begin{aligned} & 4x^3-13x^2+9x-18=4x^3-12x^2-x^2+3x+6x-18 \\ = \; & 4x^2(x-3)-x(x-3)+6(x-3)=(x-3)(4x^2-x+6). \end{aligned}$$

VÍ DỤ 4 (Triệu Minh Hà, dự án EX-C2-L8). [8D1K9] Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$3x^2-7x^2+17x-5.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Các số $\pm1,\pm5$ không là nghiệm của đa thức. Như vậy, đa thức không có nghiệm nguyên. Tuy vậy, đa thức có thể có nghiệm hữu tỉ khác. Ta chứng minh được rằng trong đa thức có các hệ số nguyên, nghiệm hữu tỉ (nếu có) phải có dạng $\dfrac{p}{q}$ trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số cao nhất.
Xét các số $\pm\dfrac{1}{3}$, $\pm\dfrac{5}{3}$, ta thấy $\dfrac{1}{3}$ là nghiệm của đa thức, do đó đa thức chứa thừa số $3x-1$. Ta tách các hạng tử như sau:

$$\begin{aligned} & 3x^3-7x^2+17x-5=3x^2-x^2-6x^2+2x+15x-5 \\ = \; & x^2(3x-1)-2x(3x-1)+5(2x-1)=(3x-1)(x^2-2x+5). \end{aligned}$$

□

B PHƯƠNG PHÁP THÊM VÀ BỚT CÙNG MỘT HẠNG TỬ

1. Thêm và bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện hiệu của hai bình phương

VÍ DỤ 5. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$4x^4 + 81.$$

LỜI GIẢI.

Thêm và bớt $36x^2$:

$$\begin{aligned} 4x^4 + 81 &= 4x^4 + 36x^2 + 81 - 36x^2 \\ &= (2x^2 + 9)^2 - (6x)^2 = (2x^2 + 9 + 6x)(2x^2 + 9 - 6x). \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 6. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$64x^4 + y^4.$$

LỜI GIẢI.

Thêm và bớt $16x^2y^2$:

$$\begin{aligned} 64x^4 + y^4 &= 64x^4 + 16x^2y^2 + y^4 - 16x^2yy^2 = (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2 \\ &= (8x^2 + y^2 + 4xy)(8x^2 + y^2 - 4xy). \end{aligned}$$

□

2. Thêm và bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện nhân tử chung

VÍ DỤ 7. Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$x^5 + x - 1.$$

LỜI GIẢI.

Cách 1.

$$\begin{aligned} x^5 + x - 1 &= x^5 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x - 1 \\ &= x^3(x^2 - x + 1) + x^2(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1) \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Cách 2 Thêm và bớt x^2:

$$\begin{aligned} x^5 + x - 1 &= x^5 + x^2 - x^2 + x - 1 = x^2(x^3 + 1) - (x^2 - x + 1) \\ &= (x^2 - x + 1)[x^2(x + 1) - 1] = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1). \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 8. Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$x(x+4)(x+6)(x+10)+128.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $x^2+10x+12=y$, đa thức đã cho có dạng:

$$\begin{aligned} & (y-12)(y+12)+128 = y^2-16=(y+4)(y-4) \\ \Rightarrow\quad & x(x+4)(x+6)(x+10)+128=(x^2+10x+16)(x^2+10x+8)=(x+2)(x+8)(x^2+10x+8). \end{aligned}$$

□

Nhận xét. *Trong ví dụ trên, nhờ phương pháp đổi biến, ta đưa đa thức bậc bốn với x thành đa thức bậc hai đối với y.*

VÍ DỤ 9. Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$A=x^4+6x^3+7x^2-6x+1.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử $x\neq 0$. Ta viết đa thức dưới dạng:

$$A=x^2\left(x^2+6x+7-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x-\frac{1}{x}\right)+7\right]$$

Đặt $x-\dfrac{1}{x}=y$ thì $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2+2$. Do đó

$$\begin{aligned} A &= x^2(y^2+2+6y+7)=x^2(y+3)^2=(xy+3x)^2 \\ &= \left[x\left(x-\frac{1}{x}\right)+3x\right]^2=(x^2+3x-1)^2. \end{aligned}$$

□

C PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

VÍ DỤ 10. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$x^4-6x^3+12x^2-14x+3.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Các số ±1, ±3 không là nghiệm của đa thức, đa thức không có nghiệm nguyên, cũng không có nghiệm hữu tỉ. Như vậy nếu đa thức trên phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$. Phép nhân này cho kết quả $x^4+(a+c)x^3+(ac+b+d)x^2+(ad+bc)x+bd$. Đồng nhất đa thức này với đa thức đã cho, ta được hệ điều kiện:

$$\begin{cases} a+c=-6 \\ ac+b+d=12 \\ ad+bc=-14 \\ bd=3. \end{cases}$$

Xét $bd = 3$ với $b, d \in \mathbb{Z}$, $b \in \{\pm 1, \pm 3\}$. Với $b = 3$ thì $d = 1$, hệ điều kiện trên trở thành:

$$\begin{cases} a + c = -6 \\ ac = 8 \\ a + 3c = -14. \end{cases}$$

Suy ra $2c = -14 - (-6) = -8$. Do đó $c = -4$, $a = -2$.
Vậy đa thức đã cho phân tích thành $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 1)$. □

⚠ *Ta trình bày lời giải của ví dụ trên như sau:*

$$\begin{aligned} & x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 \\ = \; & x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x^2 + 8x^2 - 2x + 3x^2 - 12x + 3 \\ = \; & x^2(x^2 - 4x + 1) - 2x(x^2 - 4x + 1) + 3(x^2 - 4x + 1) \\ = \; & (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x + 3). \end{aligned}$$

D PHƯƠNG PHÁP XÉT GIÁ TRỊ RIÊNG

Trong phương pháp này, trước hết ta xác định các nhân tử chứa biến của đa thức, rồi gán cho các biến các giá trị cụ thể để xác định nhân tử còn lại.

VÍ DỤ 11. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$P = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$$

LỜI GIẢI.

Thử thay x bởi y thì $P = y^2(y - z) + z^2(z - y) = 0$. Như vậy P chia hết cho $x - y$.
Ta lại thấy nếu thay x bởi y, thay y bởi z, thay z với x thì P không đổi (ta nói đa thức P có thể hoán vị vòng quanh $x \to y \to z \to x$). Do đó, nếu P đã chia hết cho $x - y$ thì cũng chia hết cho $y - z$ và $z - x$. Vậy P có dạng

$$k(x - y)(y - z)(z - x).$$

Ta thấy k phải là hằng số (không chứa biến) vì P có bậc ba đối với tập hợp các biến x, y, z còn tích $(x - y)(y - z)(z - x)$ cũng có bậc ba đối với các biến x, y, z.
Vì đẳng thức $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) = k(x - y)(y - z)(z - x)$ đúng với mọi x, y, x nên ta gán cho các biến x, y, z các giá trị riêng, chẳng hạn $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$, ta được:

$$4 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 = k \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) \Leftrightarrow k = -1.$$

Vậy $P = -(x - y)(y - z)(z - x) = (x - y)(y - z)(x - z)$. □

E BÀI TẬP

Phân tích đa thức sau thành nhân tử

BÀI 1. ❶ $6x^2 - 11x + 3$.

❷ $2x^2 + 3x - 27$.

❸ $2x^2 - 5xy - 3y^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $(3x - 1)(2x - 3)$.

❷ $(2x + 9)(x - 3)$.

❸ $(x - 3y)(2x + y)$.

□

BÀI 2. ❶ $x^3 + 2x - 3$.

❷ $x^3 - 7x + 6$.

❸ $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$.

❹ $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$.

❺ $x^3 - x^2 - x - 2$.

❻ $x^3 + x^2 - x + 2$.

❼ $x^3 - 6x^2 - x + 30$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $(x - 1)(x^2 + x + 3)$.

❷ $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

❸ $(x + 1)(x + 2)^2$.

❹ $(x + 1)(x - 2)(x - 8)$.

❺ Viết đa thức dưới dạng $x^3 - 1 - (x^2 + x + 1) = (x - 2)(x^2 + x + 1)$.

❻ -2 là nghiệm. Đáp số: $(x + 2)(x^2 - x + 1)$.

❼ 2 là nghiệm. Đáp số: $(x + 2)(x - 3)(x - 5)$.

□

BÀI 3. $x^3 - 7x - 6$ bằng nhiều cách.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đáp số: $(x + 1)(x + 2)(x - 3)$.

❶ $x^3 - 7x - 6 = x^3 + 1 - 7x - 7$.

❷ $x^3 - 7x - 6 = x^3 - x - 6x - 6$.

❸ $x^3 - 7x - 6 = x^3 - x^2 + x^2 - x - 6x - 6$.

❹ $x^3 - 7x - 6 = 7x^3 - 7x - 6x^3 - 6$. Chú ý rằng -2 là một nghiệm, ta có các cách biến đổi:

❺ $x^3 - 7x - 6 = x^3 - 4x - 3x - 6$.

❻ $x^3 - 7x - 6 = x^3 + 8 - 7x - 14$.

❼ $x^3 - 7x - 6 = x^3 - 9x2x - 6$.

❽ $x^3 - 7x - 6 = x^3 - 27 - 7x + 21$.

□

BÀI 4. ❶ $27x^3 - 27x^2 + 18x - 4$.

❷ $2x^3 - x^2 + 5x + 3$.

❸ $(x^2 - 3)^2 + 16$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $\dfrac{1}{3}$ là một nghiệm. Biến đổi: $27x^3 - 1 - 27x^2 + 18x - 3 = (3x - 1)(9x^2 - 6x + 4)$.

❷ $\dfrac{-1}{2}$ là một nghiệm. Đáp số: $(2x+1)(x^2-x+3)$.

❸ $(x^2-3)^2+16 = x^4-6x^2+9+16 = (x^2+4x+5)(x^2-4x+5)$.

□

BÀI 5. ❶ $(x^2+2)^2-2(x^2+x)-15$.

❷ $x^2+2xy+y^2-x-y-12$.

❸ $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

❹ $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Đặt $x^2+x=y$. Đáp số: $(x^2+x-5)(x^2+x+3)$.

❷ Đặt $x+y=a$. Đáp số: $(x+y+3)(x+y-4)$.

❸ Đặt $x^2+x+1=y$. Đáp số: $(x^2+x+5)(x+2)(x-1)$.

❹ Biến đổi: $(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-24$.
Đặt $x^2+7x+11=y$. Đáp số: $(x^2+7x+16)(x+1)(x+6)$.

□

BÀI 6. ❶ $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$;

❷ $(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2$;

❸ $2(x^4+y^4+z^4)-(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(x+y+z)^4$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Đặt $x^2+5ax+5a^2=y$. Đáp số: $(x^2+5ax+5a^2)^2$.

❷ $A=(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2$.
Đặt $x^2+y^2+z^2=a$, $xy+yz+zx=b$,
$A=a(a+2b)+b^2=(a+b)^2=(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)^2$.

❸ $M=2(x^4+y^4+z^4)-(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(x+y+z)^4$.
Để ý rằng các biểu thức $x+y+z$, $x^2+y^2+z^2$ xuất hiện nhiều lần trong biểu thức M. Ta đặt $x^4+y^4+z^4=a$, $x^2+y^2+z^2=b$, $x+y+z=c$.
Ta có $M=2a-b^2-2bc^2+c^4=2a-2b^2+b^2-2bc^2+c^4=2(a-b^2)+(b-c^2)^2$.
Ta có $a-b^2=-2(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)$, $b-c^2=-2(xy+yz+zx)$. Do đó

$$\begin{aligned} M &= -4(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)+4(xy+xz+yz)^2 \\ &= 8x^2yz+8xy^2z+8xyz^2 = 8xyz(x+y+z). \end{aligned}$$

□

BÀI 7. $(a+b+c)^3-4(a^3+b^3+c^3)-12abc$ bằng cách đổi biến: đặt $a+b=m$, $a-b=n$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $a+b=m$, $a-b=n$ thì $4ab=m^2-n^2$,

$$a^3+b^3=(a+b)[(a-b)^2+ab]=m\left(n^2+\frac{m^2-n^2}{4}\right).$$

Ta có

$$\begin{aligned} A &= (m+c)^3-4\frac{m^3+3mn^2}{4}-4c^3-3c(m^2-n^2) \\ &= 3(-c^3+mc^2-mn^2+cn^2) \end{aligned}$$

Biến đổi dấu ngoặc thành $(m-c)(c+n)(c-n)$.

Vậy $A = 3(a+b-c)(c+a-b)(c+b-a)$.

□

BÀI 8. ❶ $4x^4 - 32x^2 + 1$.

❷ $x^6 + 27$.

❸ $3(x^4 + x^2 + 1) - (x^2 + x + 1)^2$.

❹ $(2x^2 - 4)^2 + 9$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $(2x^2 + 6x + 1)(2x^2 - 6x + 1)$.

❷ $(x^2 + 2)(x^2 + 3x + 3)(x^2 - 3x + 3)$.

❸ $2(x-1)^2(x^2 + x + 1)$.

❹ $(2x^2 + 6x + 5)(2x^2 - 6x + 5)$.

□

BÀI 9. ❶ $4x^4 + 1$.

❷ $4x^4 + y^4$.

❸ $x^4 + 324$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Thêm và bớt $4x^2$. Đáp số: $(2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)$.

❷ Thêm và bớt $4x^2y^2$. Đáp số: $(2x^2 + 2xy + y^2)(2x^2 - 2xy + y^2)$.

❸ Thêm và bớt $36x^2$. Đáp số: $(x^2 + 6x + 18)(x^2 - 6x + 18)$.

□

BÀI 10. ❶ $x^5 + x^4 + 1$.

❷ $x^5 + x + 1$.

❸ $x^8 + x^7 + 1$.

❹ $x^5 - x^4 - 1$.

❺ $x^7 + x^5 + 1$.

❻ $x^8 + x^4 + 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Thêm và bớt x^3.

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 + 1 &= x^5 + x^4 + x^3 - x^3 + 1 \\ &= x^3(x^2 + x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1). \end{aligned}$$

❷ Thêm và bớt x^2. Đáp số: $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$.

❸ Thêm và bớt $x^2 + x$. Đáp số: $(x^2 + x + 1)(x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

❹ Thêm và bớt $x^2 + x$. Đáp số: $(x^2 - x + 1)(x^3 - x - 1)$.

❺ Thêm và bớt $x^2 + x$. Đáp số: $(x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

❻ Thêm và bớt x^4. Đáp số: $(x^4 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

□

BÀI 11. ❶ $x^8 + 14x^4 + 1$.

❷ $x^8 + 98x^4 + 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Thêm và bớt $4x^2(x^4 + 1)$ được

$$\begin{aligned} A &= (x^4 + 2x^2 + 1)^2 - 4x^2(x^2 - 1)^2 \\ &= (x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1)(x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1). \end{aligned}$$

❷ $x^8 + 98x^4 + 1 = (x^4 + 1)^2 + 96x^4$

$= (x^4 + 1)^2 + 16x^2(x^4 + 1) + 64x^4 - 16x^2(x^4 + 1) + 32x^4$

$= (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - 16x^2(x^2 - 1)^2$

$= (x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 4x + 1)(x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x + 1)$.

□

BÀI 12. Dùng phương pháp xét giá trị riêng:

$$M = a(b + c - a)^2 + b(c + a - b)^2 + c(a + b - c)^2$$
$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b).$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Kiểm tra với $a = 0$ thì $M = 0$. Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên M có nhân tử abc, nhân tử còn lại là hằng số k.

Cho $a = b = c = 1$ được $k = 4$. Vậy $M = 4abc$. □

BÀI 13. Chứng minh rằng tích bốn số tự nhiên liên tiếp cộng thêm 1 là một số chính phương.

✍ **LỜI GIẢI.**

Biến đổi $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$. □

BÀI 14. Chứng minh rằng số $A = (n + 1)^4 + n^4 + 1$ chia hết cho một số chính phương khác 1 với mọi số n nguyên dương.

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned} A &= (n + 1)^4 + n^4 + 1 = (n^2 + 2n + 1)^2 - n^2 + (n^4 + n^2 + 1) \\ &= (n^2 + 3n + 1)(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) \\ &= (n^2 + n + 1)(2n^2 + 2n + 2) = 2(n^2 + n + 1)^2. \end{aligned}$$

□

BÀI 15. Cho $A = a^2 + b^2 + c^2$, trong đó a và b là hai số tự nhiên liên tiếp, $c = ab$. Chứng minh rằng $\sqrt{A}$ là một số tự nhiên lẻ.

✍ **LỜI GIẢI.**

$A = a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (a + 1)^2 + a^2(a + 1)^2 = 2a^2 + 2a + 1 + a^2(a + 1)^2$

$= a^2(a + 1)^2 + 2a(a + 1) + 1 = [a(a + 1) + 1]^2$.

Ta có $\sqrt{A} = a(a + 1) + 1$, là số lẻ. □

BÀI 4 TÍNH CHIA HẾT CỦA SỐ NGUYÊN

Tính chia hết đối với số nguyên đã được trình bày ở cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 6, Nâng cao và phát triển Toán 7*. Nhờ sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ và phân tích đa thức thành nhân tử ở lớp 8 ta có khả năng giải quyết nhiều bài toán về chia hết phức tạp hơn ở các lớp dưới.

A CHỨNG MINH QUAN HỆ CHIA HẾT

Gọi $A(n)$ là một biểu thức phụ thuộc vào n ($n \in \mathbb{N}$ hoặc $n \in \mathbb{Z}$).

⚠ *Để chứng minh biểu thức $A(n)$ chia hết cho một số m, ta thường phân tích biểu thức $A(n)$ thành thừa số, trong đó có một thừa số là m. Nếu m là hợp số, ta phân tích nó thành một tích các thừa số đôi một nguyên tố cùng nhau, rồi chứng minh $A(n)$ chia hết cho tất cả các số đó. Nên lưu ý nhận xét: Trong k số nguyên liên tiếp, bao giờ cũng tồn tại một bội số của k.*

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng $A = n^3\left(n^2-7\right)^2 - 36n$ chia hết cho 5040 với mọi số tự nhiên n.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Phân tích

$$\begin{aligned} A &= n\left[n^2\left(n^2-7\right)^2 - 36\right] = n\left[\left(n^3-7n\right)^2 - 6^2\right] \\ &= n\left(n^3-7n-6\right)\left(n^3-7n+6\right). \end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} n^3-7n-6 &= (n+1)(n+2)(n-3), \\ n^3-7n+6 &= (n-1)(n-2)(n+3). \end{aligned}$$

Do đó $A = (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Đây là tích của bảy số nguyên liên tiếp. Trong bảy số nguyên liên tiếp:

— Tồn tại một bội số của 5 (nên A chia hết cho 5);

— Tồn tại một bội số của 7 (nên A chia hết cho 7);

— Tồn tại một bội số của 3 (nên A chia hết cho 9);

— Tồn tại một bội số của 2, trong đó có một bội số của 4 (nên A chia hết cho 16).

A chia hết cho các số $5, 7, 9, 16$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên A chia hết cho $5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 16 = 5040$.

⚠ *Khi chứng minh $A(n)$ chia hết cho m, ta có thể xét mọi trường hợp về số dư khi chia n cho m.*

□

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì

a) $a^2 - a$ chia hết cho 2;

b) $a^3 - a$ chia hết cho 3;

c) $a^5 - a$ chia hết cho 5;

d) $a^7 - a$ chia hết cho 7.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $a^2 - a = a(a-1)$, chia hết cho 2.

❷ $a^3 - a = a\left(a^2-1\right) = (a-1)a(a+1)$, tích này chia hết cho 3 vì tồn tại một bội của 3.

❸ $A = a^5 - a = a\left(a^2+1\right)\left(a^2-1\right)$.

Nếu $a = 5k$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì a chia hết cho 5.

Nếu $a = 5k \pm 1$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì $a^2 - 1$ chia hết cho 5.

Nếu $a = 5k \pm 2$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì $a^2 + 1$ chia hết cho 5.

Trường hợp nào cũng có một thừa số của A chia hết cho 5.

Cách 2: Phân tích $a^5 - a$ thành một tổng của hai số hạng chia hết cho 5: Một số hạng là tích của năm số nguyên liên tiếp, một số hạng chứa thừa số 5.

$$\begin{aligned}
a^5 - a &= a\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)\\
&= a\left(a^2-1\right)\left(a^2-4+5\right)\\
&= a\left(a^2-1\right)\left(a^2-4\right) + 5a\left(a^2-1\right)\\
&= (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) + 5a\left(a^2-1\right).
\end{aligned}$$

Số hạng thứ nhất là tích của năm số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 5, số hạng thứ hai cũng chia hết cho 5. Do đó $a^5 - a$ chia hết cho 5.

Cách 3: Giải tương tự như cách 2: Xét hiệu giữa $a^5 - a$ và tích năm số nguyên liên tiếp $(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$, được $5a\left(a^2-1\right)$. Do đó $a^5 - a$ chia hết cho 5.

❹ $A = a^7 - a = a\left(a^3+1\right)\left(a^3-1\right)$.

Nếu $a = 7k$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì a chia hết cho 7.

Nếu $a = 7k + 1$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì $a^3 - 1$ chia hết cho 7.

Nếu $a = 7k - 1$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì $a^3 + 1$ chia hết cho 7.

Nếu $a = 7k + 2$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì $a^3 - 1$ chia hết cho 7.

Nếu $a = 7k - 2$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì $a^3 + 1$ chia hết cho 7.

Nếu $a = 7k + 3$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì $a^3 + 1$ chia hết cho 7.

Nếu $a = 7k - 3$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì $a^3 - 1$ chia hết cho 7.

Trường hợp nào cũng có một thừa số của A chia hết cho 7.

Vậy $a^7 - a$ chia hết cho 7.

□

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng một số chính phương chia cho 3 chỉ có thể có số dư bằng 0 hoặc 1.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi A là số chính phương $A = n^2$ $(n \in \mathbb{N})$. Xét các trường hợp

— $n = 3k$ $(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 9k^2$, chia hết cho 3.

— $n = 3k \pm 1$ $(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 9k^2 \pm 6k + 1$, chia cho 3 dư 1.

Vậy số chính phương chia cho 3 chỉ có thể có số dư bằng 0 hoặc 1. □

VÍ DỤ 4. Chứng minh rằng một số chính phương chia cho 4 chỉ có thể có số dư bằng 0 hoặc 1.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi A là số chính phương $A = n^2$ $(n \in \mathbb{N})$. Xét các trường hợp

— $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 4k^2$, chia hết cho 4.

— $n = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$, chia cho 4 dư 1.

Vậy số chính phương chia cho 4 chỉ có thể có số dư bằng 0 hoặc 1.

⚠ *Từ bài toán trên ta thấy*

— *Số chính phương chẵn thì chia hết cho 4.*

— *Số chính phương lẻ thì chia cho 4 dư 1 (hơn nữa, chia cho 8 cũng dư 1).*

□

VÍ DỤ 5. Các số sau có là số chính phương không?

$$\begin{aligned} M &= 1992^2 + 1993^2 + 1994^2; \\ N &= 1992^2 + 1993^2 + 1994^2 + 1995^2; \\ P &= 1 + 9^{100} + 94^{100} + 1994^{100} \end{aligned}$$

LỜI GIẢI.

Các số $1993^2, 1994^2$ là các số chính phương không chia hết cho 3 nên chia cho 3 dư 1, còn 1992^2 chia hết cho 3. Số M là số chia cho 3 dư 2, không là số chính phương.

Các số $1992^2, 1994^2$ là số chính phương chẵn nên chia hết cho 4. Các số $1993^2, 1995^2$ là các số chính phương lẻ nên chia cho 4 dư 1. Số N là số chia cho 4 dư 2, không là số chính phương.

Các số $94^{100}, 1994^{100}$ là số chính phương chẵn nên chia hết cho 4. Còn 9^{100} là số chính phương lẻ nên chia cho 4 dư 1. Số P là số chia cho 4 dư 2, không là số chính phương. □

VÍ DỤ 6. Trong dãy sau có tồn tại số nào là số chính phương không?

$$11, 111, 1111, 11111, \dots$$

LỜI GIẢI.

Mọi số của dãy đều tận cùng bởi 11 nên là số chia cho 4 dư 3. Mặt khác, số chính phương lẻ thì chia cho 4 dư 1.

Vậy không có số nào của dãy là số chính phương.

⚠ *Khi chứng minh về tính chất chia hết của các lũy thừa, ta còn sử dụng đến các hằng đẳng thức 8, 9 ở bài 2 và công thức Niu-tơn sau đây:*

$$(a + b)^n = a^n + c_1a^{n-1}b + c_2a^{n-2}b^2 + \cdots + c_{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Trong công thức trên, vế phải là một đa thức có $n+1$ hạng tử, bậc của mỗi hạng tử đối với tập hợp các biến a, b là n (phần biến số của mỗi hạng tử có dạng a^ib^k, trong đó $i+k = n$ với $0 \le i \le n, 0 \le k \le n$). Các hệ số $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ được xác định bởi tam giác Pa-xcan:

Trong hình 1, các số dọc theo một cạnh góc vuông bằng 1, các số dọc theo cạnh huyền bằng 1. Cộng mỗi số với số liền sau bên phải thì được số đứng ở hàng dưới của số liền sau ấy, chẳng hạn ở hình 2.

Áp dụng các hằng đẳng thức đó vào tính chia hết, ta có với mọi số nguyên a, b và số tự nhiên n:

$$a^n - b^n \text{ chia hết cho } a - b\ (a \neq b)$$
$$a^{2n+1} - b^{2n+1} \text{ chia hết cho } a + b\ (a \neq -b)$$
$$(a+b)^n = BSa + b^n (BSa \text{ là bội của } a).$$

Đặc biệt nên lưu ý đến:

$$(a+1)^n = BSa + 1;$$
$$(a-1)^{2n} = BSa + 1;$$
$$(a-1)^{2n+1} = BSa - 1.$$

□

VÍ DỤ 7. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, biểu thức $16^n - 1$ chia hết cho 17 khi và chỉ khi n là số chẵn.

✍ **LỜI GIẢI.**

Nếu n chẵn ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$) thì $A = 16^{2k} - 1 = \left(16^2\right)^k - 1$ chia hết cho $16^2 - 1$ theo hằng đẳng thức 8, mà $16^2 - 1 = 255$, chia hết cho 17. Vậy A chia hết cho 17.

Nếu n lẻ thì $A = 16^n + 1 - 2$, mà $16^n + 1$ chia hết cho 17 theo hằng đẳng thức 9, nên A không chia hết cho 17.

Vậy A chia hết cho 17 khi và chỉ khi n chẵn.

Cách 2: $A = 16^n - 1 = (17-1)^n - 1 = BS17 + (-1)^n - 1$ (theo công thức Niu-tơn).

Nếu n chẵn thì $A = BS17 + 1 - 1 = BS17$.

Nếu n lẻ thì $A = BS17 - 1 - 1$ không chia hết cho 17.

⚠ *Người ta còn dùng phương pháp phản chứng, nguyên lí Đi-rích-lê để chứng minh quan hệ chia hết.*

□

VÍ DỤ 8. Chứng minh rằng tồn tại một bội của 2003 có dạng

$$20042004\ldots2004.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét 2004 số:

$a_1 = 2004$

$a_2 = 20042004$

...

$a_{2004} = 20042004\ldots2004$ (nhóm 2004 có mặt 2004 lần).

Theo nguyên lí Đi-rích-lê, tồn tại hai số có cùng số dư khi phép chia cho 2003.

Gọi hai số đó là a_m và a_n ($1 \leq n < m \leq 2004$) thì $a_m - a_n \vdots 2003$. Ta có

$$a_m - a_n = 2004\ldots20040000\ldots0000 = \underbrace{2004\ldots2004}_{m-n \text{ nhóm } 2004} \cdot 10^{4n}.$$

Do 10^{4n} và 2003 nguyên tố cùng nhau nên $\underbrace{2004\ldots2004}_{m-n \text{ nhóm } 2004}$ chia hết cho 2003. $\square$

B TÌM SỐ DƯ

VÍ DỤ 9. Tìm số dư khi chia 2^{100}:

a) Cho 9; b) Cho 25; c) Cho 125.

LỜI GIẢI.

1. Lũy thừa của 2 sát với bội số của 9 là $2^3 = 8 = 9 - 1$.
   Ta có $2^{100} = 2\left(2^3\right)^{33} = 2\left(9-1\right)^{33} = 2\left(BS\ 9 - 1\right) = BS\ 9 - 2 = BS\ 9 + 7$.
   Số dư khi chia 2^{100} cho 9 là 7.
2. Lũy thừa của 2 sát với bội số của 25 là $2^{10} = 1024 = BS\ 25 - 1$.
   Ta có $2^{100} = \left(2^{10}\right)^{10} = \left(BS\ 25 - 1\right)^{10} = BS\ 25 + 1$.
   Số dư khi chia 2^{100} cho 25 là 1.
3. Dùng công thức Niu-tơn:

$$2^{100} = (5-1)^{50} = 5^{50} - 50 \cdot 5^{49} + \cdots + \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 5^2 - 50 \cdot 5 + 1.$$

Không kể phần hệ số của khai triển Niu-tơn thì 48 số hạng đầu đã chứa lũy thừa của 5 với số mũ lớn hơn hoặc bằng 3 nên chia hết cho 125. Hai số hạng tiếp theo cũng chia hết cho 125, số hạng cuối cùng là 1. Vậy $2^{100} = BS\ 125 + 1$.

⚠ *Tổng quát hơn, ta chứng minh được rằng nếu một số tự nhiên n không chia hết cho 5 thì chia n^{100} cho 125 ta được số dư là 1.*

Thật vậy, n có dạng $5k \pm 1$ hoặc $5k \pm 2$. Ta có

$$(5k \pm 1)^{100} = (5k)^{100} \pm \cdots + \frac{100 \cdot 99}{2}(5k)^2 \pm 100 \cdot 5k + 1 = BS\ 125 + 1.$$

$$(5k \pm 2)^{100} = (5k)^{100} \pm \cdots + \frac{100 \cdot 99}{2}(5k)^2 \cdot 2^{98} \pm 100 \cdot 5k \cdot 2^{99} + 2^{100} = BS\ 125 + 2^{100}.$$

Ta lại có $2^{100} = BS\ 125 + 1$ (câu c). Do đó $(5k \pm 2)^{100} = BS\ 125 + 1$.

$\square$

VÍ DỤ 10. Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100} khi viết trong hệ thập phân.

LỜI GIẢI.

Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100} là tìm số dư khi chia 2^{100} cho 1000. Trước hết tìm số dư khi chia 2^{100} cho 125. Theo ví dụ trên ta có $2^{100} = BS\ 125 + 1$, mà 2^{100} là số chẵn, nên ba chữ số tận cùng của nó chỉ có thể là $126, 376, 626$ hoặc 876.

Hiển nhiên 2^{100} chia hết cho 8 nên ba chữ số tận cùng của nó phải chia hết cho 8. Trong bốn số trên chỉ có 376 thỏa mãn điều kiện này.

Vậy ba chữ số tận cùng của 2^{100} là 376.

⚠ *Bạn đọc tự chứng minh rằng nếu n là số chẵn không chia hết cho 5 thì ba chữ số tận cùng của n^{100} là 376.*

□

VÍ DỤ 11. Tìm bốn chữ số tận cùng của 5^{1994} khi viết trong hệ thập phân.

LỜI GIẢI.

$5^4 = 625$. Ta thấy số tận cùng bằng 0625 nâng lên lũy thừa nguyên dương bất kì vẫn tận cùng bằng 0625 (chỉ cần kiểm tra: $\ldots 0625 \times \ldots 0625 = \ldots 0625$).

Do đó

$$5^{1994} = 5^{4k+2} = 25\left(5^4\right)^k = 25(0625)^k = 25(\ldots 0625) = \ldots 5625.$$

Cách khác: Tìm số dư khi chia 5^{1994} cho $10000 = 2^4 \cdot 5^4$.

Nhận xét: $5^{4k} - 1$ chia hết cho $5^4 - 1 = \left(5^2+1\right)\left(5^2-1\right)$ nên chia hết cho 16.

Ta có $5^{1994} = 5^6\left(5^{1988} - 1\right) + 5^6$.

Do 5^6 chia hết cho 5^4, còn $5^{1988} - 1$ chia heest cho 16 (theo nhận xét trên) nên $5^6\left(5^{1988}-1\right)$ chia hết cho 10000. Tính 5^6, ta được 15625. Vậy bốn chữ số tận cùng của 5^{1994} là 5625.

⚠ *Nếu viết $5^{1994} = 5^2\left(5^{1992} - 1\right) + 5^2$ thì ta có $5^{1992} - 1$ chia hết cho 16, nhưng 5^2 không chia hết cho 5^4.*

Như thế trong bài toán này, ta cần viết 5^{1994} dưới dạng $5^n\left(5^{1994-n} - 1\right) + 5^n$ sao cho $n \geq 4$ và $1994 - n$ chia hết cho 4.

□

C TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ CHIA HẾT

VÍ DỤ 12. Tìm số nguyên x để giá trị của biểu thức A chia hết cho giá trị của biểu thức B:

$$A = x^3 + 2x^2 - 3x + 2, \qquad B = x^2 - x.$$

LỜI GIẢI.

Đặt tính chia:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - 3x + 2 & x^2 - x \\ \cline{2-2} -\,x^3 \;\; + x^2 \qquad\qquad & x + 3 \\ \cline{1-1} 3x^2 - 3x \quad\; & \\ -\,3x^2 + 3x \quad\; & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Muốn chia hết, ta phải có 2 chia hết cho $n(n-1)$, do đó 2 chia hết cho n.

Ta có

n	1	-1	2	-2
$n-1$	0	-2	1	-3
$n(n-1)$	0	2	2	6
	loại			loại

Vậy $n=-1; n=2$.

⚠ *Chú ý:*

1. *Không thể nói đa thức A chia hết cho đa thức B. Ở đây chỉ tồn tại những giá trị nguyên của n để giá trị của biểu thức A chia hết cho giá trị của biểu thức B.*
2. *Có thể thay việc đặt phép chia bằng cách biến đổi:*

$$x^3+2x^2-3x+2=x\left(x^2-x\right)+3(x^2-x)+2$$

□

VÍ DỤ 13. Tìm số nguyên dương n để n^5+1 chia hết cho n^3+1.

LỜI GIẢI.

Biến đổi

$$\begin{aligned} n^5+1 \,\vdots\, n^3+1 &\Leftrightarrow n^2\left(n^3+1\right)-\left(n^2-1\right) \,\vdots\, n^3+1\\ &\Leftrightarrow (n+1)(n-1) \,\vdots\, (n+1)\left(n^2-n+1\right)\\ &\Leftrightarrow n-1 \,\vdots\, n^2-n+1 (\text{vì } n+1\neq 0). \end{aligned}$$

Nếu $n=1$ thì ta được 0 chia hết cho 1.

Nếu $n>1$ thì $n-1<n(n-1)+1=n^2-n+1$, do đó $n-1$ không thể chia hết cho n^2-n+1.

Vậy giá trị duy nhất của n tìm được là 1. □

VÍ DỤ 14. Tìm số nguyên n để n^5+1 chia hết cho n^3+1.

LỜI GIẢI.

Biến đổi

$$\begin{aligned} n^5+1 \,\vdots\, n^3+1 &\Leftrightarrow n^2\left(n^3+1\right)-\left(n^2-1\right) \,\vdots\, n^3+1\\ &\Leftrightarrow (n+1)(n-1) \,\vdots\, (n+1)\left(n^2-n+1\right)\\ &\Leftrightarrow n-1 \,\vdots\, n^2-n+1. \end{aligned}$$

$n-1 \,\vdots\, n^2-n+1 \Rightarrow n(n-1) \,\vdots\, n^2-n+1 \Rightarrow n^2-n \,\vdots\, n^2-n+1$

$\Rightarrow (n^2-n+1)-1 \,\vdots\, n^2-n+1 \Rightarrow 1 \,\vdots\, n^2-n+1$.

Có hai trường hợp:

— $n^2-n+1=1 \Leftrightarrow n(n-1)=0 \Leftrightarrow n=0; n=1$. Các giá trị thỏa mãn đề bài.

— $n^2-n+1=-1 \Leftrightarrow n^2-n+2=0$, vô nghiệm.

Vậy $n=0; n=1$ là hai số phải tìm.

⚠ *Từ $n-1 \vdots n^2-n+1$ suy ra $n(n-1) \vdots n^2-n+1$ là phép kéo theo chứ không là phép biến đổi tương đương. Do đó sau khi tìm được $n=0, n=1$, ta phải thử lại.*

□

VÍ DỤ 15. Tìm số tự nhiên n sao cho 2^n-1 chia hết cho 7.

LỜI GIẢI.

Nếu $n=3k$ $(k\in\mathbb{N})$ thì $2^n-1=2^{3k}-1=8^k-1$ chia hết cho 7.

Nếu $n=3k+1$ $(k\in\mathbb{N})$ thì $2^n-1=2^{3k+1}-1=2\left(2^{3k}-1\right)+1=BS\ 7+1$.

Nếu $n=3k+2$ $(k\in\mathbb{N})$ thì $2^n-1=2^{3k+2}-1=4\left(2^{3k}-1\right)+3=BS\ 7+3$.

Vậy 2^n-1 chia hết cho 7 $\Leftrightarrow n=3k$ $(k\in\mathbb{N})$. □

D BÀI TẬP

BÀI 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có:

1. n^3+3n^2+2n chia hết cho 6.
2. $\left(n^2+n-1\right)^2-1$ chia hết cho 24.

LỜI GIẢI.

1. Biến đổi $n^3+3n^2+2n=n(n+1)(n+2)$, đây là tích của ba số nguyên liên tiếp.
   Do đó n^3+3n^2+2n chia hết cho 6 với mọi nguyên n.
   Suy ra điều phải chứng minh.
2. Biến đổi: $\left(n^2+n-1\right)^2-1=(n-1)n(n+1)(n+2)$.
   Đây là tích của 4 số nguyên liên tiếp, do đó: $\left(n^2+n-1\right)^2-1$ chia hết cho 24.

□

BÀI 2. Chứng minh rằng:

1. n^3+6n^2+8n chia hết cho 48 với mọi số chẵn n.
2. n^4-10n^2+9 chia hết cho 384 với mọi số lẻ n.

LỜI GIẢI.

1. Biến đổi $n^3+6n^2+8n=n(n+2)(n+4)$.
   Vì n là số chẵn nên ta thay $n=2k$ với $k\in\mathbb{Z}$, ta có:
   $n^3+6n^2+8n=2k(2k+2)(2k+4)=8k(k+1)(k+2)$ chia hết cho 48.
   Suy ra điều phải chứng minh.
2. Đặt $A=n^4-10n^2+9$.
   $\Rightarrow A=n^4-10n^2+9=(n^2-1)(n^2-9)=(n-1)(n+1)(n-3)(n+3)$.

Vì n là số lẻ suy ra $n = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$, thay vào biểu thức ta có:

$$\begin{aligned} A &= (n-1)(n+1)(n-3)(n+3) = \\ &= (2k+1-1)(2k+1+1)(2k+1-3)(2k+1+3) \\ &= (2k-2)2k(2k+2)(2k+4) \\ &= 2(k-1)\cdot 2k \cdot 2(k+1)\cdot 2(k+2) \\ &= 8(k-1)k(k+1)(k+2) \end{aligned}$$

Vì $(k-1)k(k+1)(k+2)$ là tích của 4 số nguyên liên tiếp nên $(k-1)k(k+1)(k+2)$ chia hết cho 24

Suy ra A chia hết cho 384.

□

BÀI 3. Chứng minh rằng $n^6 + n^4 - 2n^2$ chia hết cho 72 với mọi số nguyên n.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $A = n^6 + n^4 - 2n^2$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= n^6 + n^4 - 2n^2 \\ &= n^2(n^4 + n^2 - 2) \\ &= n^2(n^2-1)(n^2+2) \\ &= n^2(n-1)(n+1)(n^2-4) + 6n^2(n-1)(n+1) \\ &= n\cdot n\cdot (n-1)(n+1)(n-2)(n+2) + 6n\cdot n(n-1)(n+1) \\ &= (n-2)(n-1)n\cdot n(n+1)(n+2) + 6n\cdot n(n-1)(n+1) \end{aligned}$$

$(n-2)(n-1)n$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp suy ra $(n-2)(n-1)n$ chia hết cho 3.

$n(n+1)(n+2)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp suy ra $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3.

$\Rightarrow (n-2)(n-1)n\cdot n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 9.

Mà trong 5 số tự nhiên liên tiếp có ít nhất 1 số chia hết cho 2 và 1 số chia hết cho 4 suy ra: $(n-2)(n-1)n\cdot n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 8.

Suy ra $(n-2)(n-1)n\cdot n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 72.

Dễ dàng chứng minh được $6n\cdot n(n-1)(n+1)$ chia hết cho 72.

Suy ra A chia hết cho 72. □

BÀI 4. Chứng minh rằng $3^{2n} - 9$ chia hết cho 72 với mọi số nguyên dương n.

✍ **LỜI GIẢI.**

Biến đổi $B = 3^{2n} - 9 = 9^n - 9$, nên $B \,\vdots\, 9$.

Đề chứng minh $B \,\vdots\, 8$ ta viết B dưới dạng:

$$B = (3^n)^2 - 1 - 8 = (3^n-1)(3^n+1) - 8$$

Vì $3^n - 1$ và $3^n + 1$ là 2 số chẵn liên tiếp nên $(3^n-1)(3^n+1)$ chia hết cho 8.

Suy ra: B chia hết cho 8.

Vậy $3^{2n} - 9$ chia hết cho 72 với mọi số nguyên dương n. □

BÀI 5. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên a và n thì:

❶ 7^n và 7^{n+4} có hai chữ số tận cùng như nhau.

❷ a và a^5 có chữ số tận cùng như nhau.

❸ a^n và a^{n+4} có chữ số tận cùng như nhau $(n \geq 1)$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xét hiệu $A = 7^{n+4} - 7^n$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= 7^{n+4} - 7^n \\ &= 7^n(7^4 - 1) \\ &= 7^n \cdot 2400 \\ \Rightarrow\quad & A \vdots 100 \end{aligned}$$

Vậy 2 số 7^n và 7^{n+4} có hai chữ số tận cùng như nhau.

❷ Xét hiệu $B = a^5 - a = a(a^2 + 1)(a^2 - 1)$.

Dễ dàng chứng minh $B \vdots 2$ và $B \vdots 5$ suy ra $B \vdots 10$.

Vậy a và a^5 có chữ số tận cùng như nhau.

❸ Xét hiệu $C = a^{n+4} - a^n = a^n(a^2 + 1)(a^2 - 1)$.

Dễ dàng chứng minh $C \vdots 2$ và $C \vdots 5$ suy ra $C \vdots 10$.

Vậy a^n và a^{n+4} có chữ số tận cùng như nhau.

□

BÀI 6. Tìm điều kiện của số tự nhiên a để $a^2 + 3a + 2$ chia hết cho 6.

✍ **LỜI GIẢI.**

$a^2 + 3a + 2 = (a + 1)(a + 2)$ luôn chia hết cho 2.

$a^2 + 3a + 2 \vdots 3 \Leftrightarrow a^2$ chia 3 dư 1 $\Leftrightarrow a$ không chia hết cho 3.

Vậy nếu a không chia hết cho 3 thì $a^2 + 3a + 2$ chia hết cho 6. □

BÀI 7. ❶ Cho a là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $a^2 - 1$ chia hết cho 24.

❷ Chứng minh rằng nếu a và b là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì $a^2 - b^2$ chia hết cho 24.

❸ Tìm điều kiện của số tự nhiên a để $a^4 - 1$ chia hết cho 240.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có a^2 là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1, a^2 là số chính phương không chia hết cho 3 nên chia cho 3 dư 1.

Suy ra $a^2 - 1$ chia hết cho 8, chia hết cho 3, do đó chia hết cho 24.

❷ Áp dụng ý a) ta có nếu a và b là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì:

$a^2 - 1$ chia hết cho 3 và $b^2 - 1$ chia hết cho 3.

$\Leftrightarrow (a^2 - 1) - (b^2 - 1) \vdots 3 \Leftrightarrow a^2 - b^2 \vdots 3$.

Suy ra điều phải chứng minh.

❸ Ta có: $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$.

Vì $A \vdots 240 \Rightarrow a^4 - 1 \vdots 2$ và $a^4 - 1 \vdots 3$; $a^4 - 1 \vdots 5$.

Dễ thấy $a^4 - 1 \vdots 2 \Leftrightarrow a$ là số lẻ.

Dễ thấy $a^4 - 1 \vdots 3 \Leftrightarrow a$ không chia hết cho 3.

Dễ thấy $a^4 - 1 \vdots 5 \Leftrightarrow a$ không chia hết cho 5.

Ta sẽ chứng minh nếu a không chia hết cho 2, 3 và 5 thì $a^4 - 1$ chia hết cho 240.

Thật vậy:

$$\begin{aligned} A &= a^4 - 1 = (a^2-1)(a^2+1) \\ &= (a-1)(a+1)(a^2+1) \end{aligned}$$

Nếu a lẻ thì $a = 2k+1$ với $(k \in \mathbb{N})$.
Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} A &= (a-1)(a+1)(a^2+1) \\ &= (2k+1-1)(2k+1+1)\cdot\left[(2k+1)^2+1\right] \\ &= 2k(2k+2)(4k^2+4k+2) \\ &= 8k(k+1)(2k^2+2k+1) \\ \Rightarrow\quad & A \vdots 16 \end{aligned}$$

Nếu a không chia hết cho 3 thì $a = 3k \pm 1$ với $(k \in \mathbb{N})$.
Khi đó ta có $a^2 - 1 \vdots 3 \Rightarrow A \vdots 3$.
Nếu a không chia hết cho 5 thì $a = 5k \pm 1$ hoặc $a = 5k \pm 2$ với $(k \in \mathbb{N})$.
Suy ra $a^2 - 1 \vdots 5$ hoặc $a^2 + 1 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$.
$\Rightarrow A \vdots 240$.
Vậy nếu a không chia hết cho 2, 3 và 5 thì $a^4 - 1$ chia hết cho 240.

□

BÀI 8. Tìm ba số nguyên tố liên tiếp a, b, c sao cho $a^2 + b^2 + c^2$ cũng là một số nguyên tố.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét 2 trường hợp:

1. Trong a, b, c có một số bằng 3.
   Khi đó: $2^2 + 3^2 + 5^2 = 38$, là hợp số, loại.
   Còn $3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$ là một số nguyên tố, thỏa mãn.
2. Cả a, b, c đều lớn hơn 3.
   Khi đó a^2, b^2, c^2 đều chia cho 3 dư 1 nên $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 3, là hợp số, loại.

Vậy ba số nguyên tố liên tiếp a, b, c là 3, 5, 7 thì $a^2 + b^2 + c^2$ cũng là một số nguyên tố. □

BÀI 9. Cho bốn số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Chứng minh rằng $a+b+c+d$ là hợp số.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(c^2 + d^2) \vdots 2$.
Xét:

$$\begin{aligned} A &= (a^2+b^2+c^2+d^2) - (a+b+c+d) \\ &= (a^2-a) + (b^2-b) + (c^2-c) + (d^2-d) \\ &= a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1) \end{aligned}$$

Vì $a(a-1) \vdots 2$; $b(b-1) \vdots 2$; $c(c-1) \vdots 2$; $d(d-1) \vdots 2$.
$\Rightarrow A \vdots 2 \Leftrightarrow a+b+c+d \vdots 2$.

Mà a, b, c, d là các số nguyên dương suy ra $a+b+c+d>2 \Rightarrow a+b+c+d$ là hợp số (điều phải chứng minh). □

BÀI 10. Cho bốn số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $ab=cd$. Chứng minh rằng $a^5+b^5+c^5+d^5$ là hợp số.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi ƯCLN$(a,c)=k$, ta có: $a=ka_1$, $c=kc_1$ và $(a_1,c_1)=1$.
Thay vào $ab=cd$ được $ka_1b=kc_1d$ nên: $a_1b=c_1d$ □

BÀI 11. Cho các số tự nhiên a và b. Chứng minh rằng:

❶ Nếu a^2+b^2 chia hết cho 3 thì a và b chia hết cho 3.
❷ Nếu a^2+b^2 chia hết cho 7 thì a và b chia hết cho 7.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Một số chính phương chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.
Xét các trường hợp tổng của 2 số dư: $0+0$; $0+1$; $1+1$ thì chỉ có $0+0$ là chia hết cho 3.
Do đó để a^2+b^2 chia hết cho 3 thì $a^2 \vdots 3$ và $b^2 \vdots 3$.
$\Rightarrow a \vdots 3$ và $b \vdots 3 \Rightarrow a+b \vdots 3$.
Suy ra điều phải chứng minh.

❷ **Nhận xét:** Một số chính phương khi chia cho 7 chỉ có thể dư là 0; 1; 2; 4.
Ta có: a^2+b^2 chia hết cho 7 nên chỉ có trường hợp 2 số dư là $0+0$ thỏa mãn.
$\Rightarrow a^2 \vdots 7$ và $b^2 \vdots 7 \Rightarrow a \vdots 7$ và $b \vdots 7$.
Suy ra điều phải chứng minh.

□

BÀI 12. Cho các số nguyên a, b, c. Chứng minh rằng:

❶ Nếu $a+b+c$ chia hết cho 6 thì $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 6.
❷ Nếu $a+b+c$ chia hết cho 30 thì $a^5+b^5+c^5$ chia hết cho 30.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xét hiệu:

$$\begin{aligned} A &= (a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)\\ &= (a^3-a)+(b^3-b)+(c^3-c)\\ &= (a-1)a(a+1)+(b-1)b(b+1)+(c-1)c(c+1)\\ \Rightarrow\ & A \vdots 6\\ \Rightarrow\ & a^3+b^3+c^3 \vdots 6 \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

❷ Xét hiệu:

$$\begin{aligned}
A &= (a^5+b^5+c^5)-(a+b+c)\\
&= (a^5-a)+(b^5-b)+(c^5-c)\\
&= a(a^4-1)+b(b^4-1)+c(c^4-1)\\
&= a(a^2-1)(a^2+1)+b(b^2-1)(b^2+1)+c(c^2-1)(c^2+1)\\
&= a(a-1)(a+1)(a^2+1)+b(b-1)(b+1)(b^2+1)+c(c-1)(c+1)(c^2+1)\\
&= a(a-1)(a+1)(a^2-4)+5a(a-1)(a+1)+b(b-1)(b+1)(b^2-4)+5b(b-1)(b+1)\\
&+c(c-1)(c+1)(c^2-4)+5c(c-1)(c+1)\\
&= a(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)+5a(a-1)(a+1)+b(b-1)(b+1)(b-2)(b+2)\\
&+5b(b-1)(b+1)+c(c-1)(c+1)(c-2)(c+2)+5c(c-1)(c+1)\\
&= (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5(a-1)a(a+1)+(b-2)(b-1)b(b+1)(b+2)\\
&+5(b-1)b(b+1)+(c-2)(c-1)c(c+1)(c+2)+5(c-1)c(c+1)
\end{aligned}$$

Nhận xét: $(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$ là tích của 5 số nguyên liên tiếp
$\Rightarrow (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) \vdots 30$.
Mà dễ thấy $5(a-1)a(a+1) \vdots 30 \Rightarrow (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5(a-1)a(a+1) \vdots 30$.
Tương tự ta có: $(b-2)(b-1)b(b+1)(b+2)+5(b-1)b(b+1) \vdots 30$
và $(c-2)(c-1)c(c+1)(c+2)+5(c-1)c(c+1) \vdots 30$. $\Rightarrow A \vdots 30$.
Mà $a+b+c$ chia hết cho 30 suy ra $a^5+b^5+c^5$ chia hết cho 30.
Suy ra điều phải chứng minh.

□

BÀI 13. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh rằng:

❶ $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho $3abc$;

❷ $a^5+b^5+c^5$ chia hết cho $5abc$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $a+b+c=0 \Rightarrow c=-(a+b)$.
Do đó: $a^3+b^3+c^3 = a^3+b^3+-(a+b)^3 = -3ab(a+b) = 3abc \vdots 3abc$.
Hay $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho $3abc$ (điều phải chứng minh).

❷ $a+b+c=0 \Rightarrow c=-(a+b)$.
Do đó:

$$\begin{aligned}
a^5+b^5+c^5 &= a^5+b^5-(a+b)^5\\
&= -5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4\\
&= -5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)\\
&= -5ab\left[(a^3+b^3)+(2a^2b+2ab^2)\right]\\
&= -5ab\left[(a+b)(a^2-ab+b^2)+2ab(a+b)\right]\\
&= -5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)\\
&= 5abc(a^2+ab+b^2)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow a^5+b^5+c^5 \vdots 5abc$, suy ra điều phải chứng minh.

□

BÀI 14. ❶ Viết số 1998 thành tổng của ba số tự nhiên tùy ý. Chứng minh rằng tổng các lập phương của ba số tự nhiên đó chia hết cho 6.

❷ Viết số 1995^{1995} thành tổng của nhiều số tự nhiên. Tổng các lập phương của ba số tự nhiên đó chia cho 6 dư bao nhiêu?

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Áp dụng câu a) bài 197 chú ý rằng 1998 chia hết cho 6.

❷ Đặt $1995^{1995} = a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
Gọi $S = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \cdots + (a_n^3 - a_n) + a$.
Mỗi dấu ngoặc đều chia hết cho 6, do đó số dư của a khi chia cho 6 chính là số dư của S khi chia cho 6.
Mà 1995 là số lẻ chia hết cho 3, suy ra 1995^{1995} chia 6 dư 3.
Suy ra S chia 6 dư 3.

□

BÀI 15. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a và b thì:

❶ $a^3b - ab^3$ chia hết cho 6.

❷ $a^5b - ab^5$ chia hết cho 30.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $a^3b - ab^3 = a^3b - ab - ab^3 + ab = b(a^3 - a) - a(b^3 - b)$.
Biểu thức trong mỗi dấu ngoặc chia hết cho 6.
Suy ra $a^3b - ab^3$ chia hết cho 6 (điều phải chứng minh).

❷ $a^5b - ab^5 = a^5b - ab + ab - ab^5 = b(a^5 - a) - a(b^5 - b)$.
Dễ thấy $a^5 - a$ và $b^5 - b$ chia hết cho 30, suy ra $b(a^5 - a) - a(b^5 - b)$.
Hay $a^5b - ab^5$ chia hết cho 30 (điều phải chứng minh).

□

BÀI 16. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng $b^3 + 6c$ trong đó b và c là các số nguyên.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi a là một số tự nhiên tùy ý, ta dễ dàng chứng minh được $a^3 - a$ chia hết cho 6.
$\Rightarrow a^3 - a = 6k \Rightarrow a = a^3 - 6k$ với $k \in \mathbb{Z}$.
Vậy mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng $b^3 + 6c$ trong đó b và c là các số nguyên. □

BÀI 17. Chứng minh rằng nếu các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 = c^2$ thì abc chia hết cho 60.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có:

$$\begin{aligned}
n &= 3k \pm 1 \quad \Rightarrow n^2 = 3m+1 \\
n &= 5k \pm 1 \quad \Rightarrow n^2 = 5m+1 \\
n &= 5k \pm 2 \quad \Rightarrow n^2 = 5m+4 = 5r-1 \\
n &= 4k \pm 1 \quad \Rightarrow n^2 = 8m+1 \\
n &= 4k \pm 2 \quad \Rightarrow n^2 = 8m+4
\end{aligned}$$

Nếu a, b cùng không chia hết cho 3 suy ra $a^2+b^2 = 3a_1+1+3b_1+1 = 3(a_1+b_1)+2$.
Mà c^2 có dạng $3c_1$ hoặc $3c_1+1 \Rightarrow a^2+b^2 \neq c^2$ (loại).
$\Rightarrow$ trong 2 số a, b phải có ít nhất 1 số chia hết cho 3 $\Rightarrow abc \,\vdots\, 3$.
Nếu a, b, c đều không chia hết cho 5 thì a^2, b^2, c^2 chia cho 5 dư 1 hoặc 4.
Khi đó a^2+b^2 chia 5 dư 0, 2, 3 còn c^2 chia cho 5 dư 1 hoặc 4 $\Rightarrow a^2+b^2 \neq c^2$ (loại).
$\Rightarrow$ trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 1 số chia hết cho 5 $\Rightarrow abc \,\vdots\, 5$. Nếu a, b, c đều không chia hết cho 4 thì a^2, b^2, c^2 chia cho 8 dư 1 hoặc 4.
Khi đó a^2+b^2 chia 8 dư 0, 2, 5 còn c^2 chia cho 8 dư 1 hoặc 4 $\Rightarrow a^2+b^2 \neq c^2$ (loại).
$\Rightarrow$ trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 1 số chia hết cho 4 $\Rightarrow abc \,\vdots\, 4$.
Vậy abc chia hết cho 3; 4; 5 $\Rightarrow abc \,\vdots\, 60$ □

BÀI 18. Chứng minh rằng tổng các lập phương của ba số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 9.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi ba số nguyên liên tiếp đó là $n-1$; n; $n+1$.
Ta có:

$$\begin{aligned}
(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 &= n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2+3n+1 \\
&= 3n^3+6n \\
&= 3(n^3-n)+9n
\end{aligned}$$

Có $3(n^3-n)+9n \,\vdots\, 9 \Rightarrow (n-1)^3+n^3+(n+1)^3 \,\vdots\, 9$.
Vậy tổng các lập phương của ba số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 9. □

BÀI 19. Chứng minh rằng nếu tổng lập phương của ba số nguyên chia hết cho 9 thì tồn tại một trong ba số đó là bội của 3.

✍ **LỜI GIẢI.**

Nhận xét: Lập phương của một số nguyên bất kì khi chia 9 có số dư là 0; 1 hoặc 8.
Xét 3 số nguyên a, b, c đều không chia hết cho 3. Khi đó $a^3+b^3+c^3$ chia cho 9 sẽ có 1 trong các số dư sau: $1+1+1=3 \not\vdots\, 9$; $1+1+8=10 \not\vdots\, 9$; $1+8+8=17 \not\vdots\, 9$; $8+8+8=24 \not\vdots\, 9$.
Trong các trường hợp trên $a^3+b^3+c^3$ đều không chia hết cho 9.
Suy ra để $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 9 thì ít nhất một trong ba số a, b, c phải chia hết cho 3.
Vậy nếu tổng lập phương của ba số nguyên chia hết cho 9 thì tồn tại một trong ba số đó là bội của 3 (điều phải chứng minh). □

BÀI 20. Cho dãy số 7, 13, 25, 43, ... , $3n(n-1)+7$. Chứng minh rằng:

❶ Trong năm số hạng liên tiếp của dãy bao giờ cũng tồn tại một bội số của 25.

❷ Không có số hạng nào của dãy là lập phương của một số nguyên.

LỜI GIẢI.

❶ Nhận xét: a_3 chia hết cho 5. Ta sẽ chứng minh các số a_{5k+3} chia hết cho 25.

Thật vậy:

$$\begin{aligned} a_{5k+3} &= 3(5k+3)(5k+2)+7 \\ &= 3(25k^2+25k+6)+7 \\ &= 3(25k^2+25k)+25 \\ \Rightarrow \quad & a_{5k+3} \vdots 25 \end{aligned}$$

Vậy trong năm số hạng liên tiếp của dãy bao giờ cũng tồn tại một bội số của 25 (điều phải chứng minh).

❷ $n(n-1)$ chia 3 dư 0 hoặc 2 $\Rightarrow 3n(n-1)$ chia cho 9 dư 0 hoặc 6.

$\Rightarrow 3n(n-1)+7$ chia cho 9 dư 7 hoặc 4.

Mà lập phương của một số nguyên chia cho 9 chỉ có thể dư là 0, 1, 8.

Vậy không có số hạng nào của dãy là lập phương của một số nguyên (điều phải chứng minh).

□

BÀI 21. ❶ Chứng minh rằng nếu số tự nhiên a không chia hết cho 7 thì a^6-1 chia hết cho 7.

❷ Chứng minh rằng nếu n là lập phương của một số tự nhiên thì $(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 504.

LỜI GIẢI.

❶ Bài toán là trường hợp đặc biệt của định lí nhỏ Phéc-ma: $a^{p-1}-1$ chia hết cho p với $p=7$.

Chứng minh trực tiếp: $a^6-1=(a^3+1)(a^3-1)$.

Nếu $a=7k\pm1$ với $k\in\mathbb{N}$ thì $a^3=\mathrm{BS}7\pm1$.

Nếu $a=7k\pm2$ với $k\in\mathbb{N}$ thì $a^3=\mathrm{BS}7\pm8$.

Nếu $a=7k\pm3$ với $k\in\mathbb{N}$ thì $a^3=\mathrm{BS}7\pm27$.

Vậy ta luôn có a^3+1 hoặc a^3-1 chia hết cho 7.

Do đó a^6-1 chia hết cho 7.

Vậy nếu số tự nhiên a không chia hết cho 7 thì a^6-1 chia hết cho 7 (điều phải chứng minh).

❷ Ta có: $504=3^2\cdot7\cdot8$. Đặt $n=a^3$, ta cần chứng minh: $A=(a^3-1)a^3(a^3+1)$ chia hết cho 504.

Nếu a chẵn thì a^3 chia hết cho 8.

Nếu a lẻ thì a^3-1 và a^3+1 là 2 số chẵn liên tiếp nên $(a^3-1)(a^3+1)$ chia hết cho 8.

Do đó $A \vdots 8$.

Nếu a chia hết cho 7 thì A chia hết cho 7.

Nếu a không chia hết cho 7 thì áp dụng câu a) ta chứng minh được $A \vdots 7$.

Suy ra $A \vdots 7$.

Nếu a chia hết cho 3 thì a^3 chia hết cho 9. Nếu $a=3k\pm1$ với $k\in\mathbb{N}$ thì $a^3\pm1=\mathrm{BS}9\pm1$.

Suy ra a^3+1 hoặc a^3-1 chia hết cho 9.

Suy ra $A \vdots 9$.

Vậy A chia hết cho 8, 7, 9 hay A chia hết cho 504.

Suy ra nếu n là lập phương của một số tự nhiên thì $(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 504 (điều phải chứng minh).

$\square$

BÀI 22. Chứng minh rằng nếu A chia hết cho B với:

❶ $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 99^3 + 100^3$,
$B = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$;

❷ $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 98^3 + 99^3$,
$B = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99$;

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có: $B = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = 100 \cdot 101 : 2 = 50 \cdot 101$.
Để chứng minh A chia hết cho 101 ta ghép cặp $1^3 + 100^3$; $2^3 + 99^3$; $\cdots$. Để chứng minh A chia hết cho 50 ta ghép cặp $50^3 + 100^3$; $1^3 + 99^3$; $2^3 + 98^3$; $\cdots$; $49^3 + 51^3$.

❷ Giải tương tự câu a).

$\square$

BÀI 23. Các số sau có chính phương hay không?

❶ $A = 22\cdots24$ (có 50 chữ số 2);

❷ $B = 44\cdots4$ (có 100 chữ số 4);

❸ $A = 1994^7 + 7$;

❹ $B = 144\cdots4$ (có 99 chữ số 4).

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Tổng các chữ số của A là $50 \cdot 2 + 4 = 104 \Rightarrow A$ chia 3 dư 2.
Mà 1 số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1 nên A không là số chính phương.

❷ $B = 44\cdots4$ (có 100 chữ số 4) $\Rightarrow B = 4 \cdot \underbrace{11\cdots1}_{100}$.
Để B là số chính phương thì $\underbrace{11\cdots1}_{100}$ phải là số chính phương.
Mà $\underbrace{11\cdots1}_{100}$ có tận cùng là 11 chia 4 dư 3, không phải là số chính phương.
Do đó, B không là số chính phương.

❸ $A = 1994^7 + 7$ chia 4 dư 3 nên không là số chính phương.

❹ $B = 144\cdots4$ (có 99 chữ số 4) $\Rightarrow B = 4 \cdot 36\underbrace{11\cdots1}_{97}$.
$36\underbrace{11\cdots1}_{97}$ chia 4 dư 3 nên $36\underbrace{11\cdots1}_{97}$ không phải là số chính phương.
Do đó, $\Rightarrow B = 4 \cdot 36\underbrace{11\cdots1}_{97}$ không phải là số chính phương.

$\square$

BÀI 24. Có thể dùng cả năm chữ số 2, 3, 4, 5, 6 lập thành số chính phương có năm chữ số được không?

✍ **LỜI GIẢI.**

Số có năm chữ số tạo bởi các chữ số 2, 3, 4, 5, 6 có tổng các chữ số là $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$ chia 3 dư 2 nên nó không phải là số chính phương.
Vậy không thể dùng cả năm chữ số 2, 3, 4, 5, 6 lập thành số chính phương có năm chữ số được. $\square$

BÀI 25. Chứng minh rằng tổng của hai số chính phương lẻ không là số chính phương.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mọi số lẻ đều chia cho 4 dư 1 nên tổng của chúng chia cho 4 dư 2 nên không là số chính phương. □

BÀI 26. Chứng minh rằng mọi số lẻ đều có thể viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

✍ **LỜI GIẢI.**

Mọi số lẻ đều có dạng $2k+1$ với $k \in \mathbb{N}$.

Ta có: $2k+1 = (k+1-k)(k+1+k) = (k+1)^2 - k^2$. □

BÀI 27. Chứng minh rằng:

❶ $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 100^2$ không là số chính phương.

❷ $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 56^2$ không là số chính phương.

❸ $C = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + n$ là số chính phương (n lẻ).

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 100^2$ gồm 50 số chính phương chẵn, 50 số chính phương lẻ.

Mỗi số chính phương chẵn đều chia hết cho 4 nên tổng của 50 số chính phương chẵn chia hết cho 4.

Mỗi số chính phương lẻ đều chia cho 4 dư 1 nên tổng của 50 số chính phương lẻ chia cho 4 dư 2.

Suy ra A chia 4 dư 2. Suy ra A không là số chính phương.

❷ $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 56^2$ có thể viết dưới dạng tổng của 57 số chính phương liên tiếp là $B = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 56^2$.

Xét tổng của 3 số chính phương liên tiếp $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 2$ chia 3 dư 2.

Suy ra tổng của 3 số chính phương liên tiếp chia 3 dư 2. Ta có:

$$\begin{aligned} B &= 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 56^2 \\ &= (0^2 + 1^2 + 2^2) + (3^2 + 4^2 + 5^2) + \cdots + (54^2 + 55^2 + 56^2) \\ &= 19 \cdot (\mathrm{BS}3 + 2) \\ &= \mathrm{BS}3 + 38 \\ &= \mathrm{BS}3 + 2 \end{aligned}$$

Một số chính phương chia 3 chỉ có dư là 0 hoặc 1 nên B không là số chính phương.

❸ Đặt $n = 2k-1$ với $k \in \mathbb{N}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) \\ &= \frac{1 + (2k-1)}{2} \cdot k \\ &= k^2 \\ \Rightarrow\ & C \text{ là số chính phương.} \end{aligned}$$

Vậy với n lẻ thì $C = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + n$ là số chính phương.

□

BÀI 5 TÍNH CHIA HẾT ĐỐI VỚI ĐA THỨC

A TÌM DƯ CỦA PHÉP CHIA MÀ KHÔNG THỰC HIỆN PHÉP CHIA

1. Đa thức chia có dạng $x - a$ (a là hằng)

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng số dư khi chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức $x - a$ bằng giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = a$.
Định lí Bê-du (*Bézout*, 1730-1783, nhà toán học Pháp).

✍ **LỜI GIẢI.**
Do đa thức chia $x - a$ có bậc nhất nên số dư khi chia $f(x)$ cho $x - a$ là hằng số r.
Ta có
$$f(x) = (x - a) \cdot Q(x) + r.$$
Đẳng thức trên đúng với mọi x nên với $x = a$, ta có
$$f(a) = 0 \cdot Q(x) + r \text{ hay } f(a) = r.$$

⚠ *Từ định lí Bê-du ta suy ra*
Đa thức $f(x)$ chia hết cho $x - a$ khi và chỉ khi $f(a) = 0$ (tức là khi a là nghiệm của đa thức).

□

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng nếu đa thức $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì đa thức ấy chia hết cho $x - 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**
Gọi $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$.
Theo giả thuyết, $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0$. (1)
Theo định lý Bê-du, số dư khi chia $f(x)$ cho $x - 1$ là
$$r = f(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n. \quad (2)$$
Từ (1) và (2), suy ra $r = 0$.
Vậy $f(x)$ chia hết cho $x - 1$. □

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng nếu đa thức $f(x)$ có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì đa thức ấy chia hết cho $x + 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**
Gọi $f(x) = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \ldots + a_{2n-2}x^2 + a_{2n-1}x + a_{2n}$, trong đó, a_0 có thể bằng 0. Theo giả thuyết, $a_0 + a_2 + .. + a_{2n} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}$ nên
$$(a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}) = 0. \quad (1)$$

Theo định lí Bê-du, số dư khi chia $f(x)$ cho $x+1$ bằng

$$\begin{aligned} r = f(-1) &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{2n-2} - a_{2n-a} + a_{2n} \\ &= (a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}) \qquad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra $r = 0$.
Vậy $f(x)$ chia hết cho $x+1$. □

2. Đa thức có bậc tử từ bậc hai trở lên

VÍ DỤ 4. Tìm dư khi chia

$$x^7 + x^5 + x^3 + 1 \text{ cho } x^2 - 1.$$

✍ **LỜI GIẢI.**
Để tìm dư trong trường hợp này, ta thường dùng các cách sau:
Cách 1. (Tách ra ở đa thức bị chia những đa thức chia hết cho đa thức chia).
Ta biết rằng $x^n - 1$ chia hết cho $x-1$ với mọi số tự nhiên n nên $x^{2n} - 1$ chia hết cho $x^2 - 1$.
Do đó $x^4 - 1$, $x^6 - 1$,... chia hết cho $x^2 - 1$.
Ta có

$$\begin{aligned} x^7 + x^5 + x^3 + 1 &= x^7 - x + x^5 - x + x^3 - x + 3x + 1 \\ &= x(x^6 - 1) + x(x^4 - 1) + x(x^2 - 1) + (3x + 1). \end{aligned}$$

Dư khi chia $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ cho $x^2 - 1$ là $3x + 1$.
Cách 2. (Xét giá trị riêng).
Gọi thương là $Q(x)$, dư là $ax + b$. Ta có

$$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x+1)(x-1) \cdot Q(x) + ax + b, \forall x.$$

Đẳng thức đúng với mọi x nên với $x = 1$, ta được $4 = a + b$. (1)
Với $x = -1$ ta được $-2 = -a + b$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $a = 3$, $b = 1$.
Dư phải tìm là $3x + 1$.
⚠ *Để tách ra các đa thức chia hết cho $x^2 - 1$ hoặc $x^2 + 1$, cần nhớ lại các hằng đẳng thức 8 và 9:*

$$a^n - b^n \text{ chia hết cho } a - b \ (a \neq b);$$
$$a^n + b^n \ (n \text{ lẻ}) \text{ chia hết cho } a + b \ (a \neq -b).$$

□

B SƠ ĐỒ HOÓC-NE

1. Ví dụ

VÍ DỤ 5. Chia các đa thức

a) $(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) : (x - 2)$; b) $(x^3 - 9x^2 + 6x + 10) : (x + 1)$;

c) $(x^3 - 7x + 6) : (x + 3)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt tính chia đa thức, ta được kết quả

❶ Thương là $x^2 - 3x + 2$.

❷ Thương là $x^2 - 10x + 16$, dư là -6.

❸ Thương là $x^2 - 3x + 2$.

□

2. Sơ đồ Hoóc-ne

Ta có thể tìm được kết quả khi chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức $x - a$ (a là hằng số) bằng một cách khác.

Trở lại câu a) ở ví dụ trên $(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) : (x - 2)$. Các hệ số của đa thức bị chia thứ tự là 1, -5, 8, -4; hằng số a trong ví dụ này bằng 2.

❶ Đặt các hệ số của đa thức bị chia theo thứ tự vào các cột của dòng trên.

	1	-5	8	-4
$a = 2$				

❷ Trong 4 cột để trống ở dòng dưới, ba cột đầu cho ta các hệ số của đa thức thương, cột cuối cùng cho ta số dư.

- Số ở cột thứ nhất của dòng dưới bằng số tương ứng ở dòng trên.

	1	-5	8	-4
$a = 2$	1			

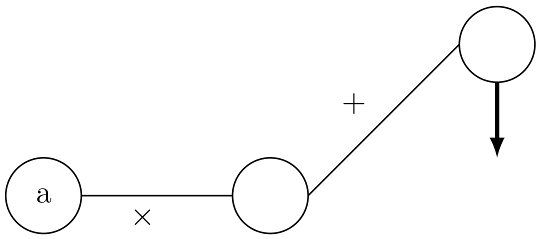
- Kể từ dòng thứ hai, mỗi số ở dòng dưới được xác định bằng cách lấy a nhân với số cùng dòng liền trước , rồi cộng với số cùng cột ở dòng trên.

	1	-5	8	-4
$a = 2$	1	$2 \cdot 1 + (-5) = -3$		

	1	-5	8	-4
$a=2$	1	$2\cdot 1+(-5)=-3$	$2\cdot(-3)+8=2$	

	1	-5	8	-4
$a=2$	1	$2\cdot 1+(-5)=-3$	$2\cdot(-3)+8=2$	$2\cdot 2+(-4)=0$

Sơ đồ



Ta có thương bằng x^2-3x+2, số dư bằng 0.

Sơ đồ của thuật toán trên được gọi là sơ đồ Hoóc-ne.

Bạn đọc hãy dùng sơ đồ trên để kiểm tra lại kết quả của các câu b) và c).

Như vậy nếu đa thức bị chia là $a_ox^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, đa thức chia là $x-a$, ta được thương $b_0x^2+b_1x+b_2$, dư r. Theo sơ đồ Hoóc-ne, ta có

	a_0	a_1	a_2	a_3
a	$b_0=a_0$	$b_1=ab_0+a_1$	$b_2=ab_1+a_2$	$r=ab_2+a_3$

3. Sơ đồ Hoóc-ne

Tổng quát với đa thức bị chia là $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, đa thức chia là $x-a$, thương là $b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$, dư r. Ta cần chứng minh rằng

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0\\
b_1 &= ab_0+a_1\\
b_2 &= ab_1+a_2\\
\ldots\\
b_{n-1} &= ab_{n-2}+a_{n-1}\\
r &= ab_{n-1}+a_n.
\end{aligned}$$

Thật vậy, thực hiện phép tính

$$(x-1)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1})+r$$

rồi rút gọn, ta được

$$b_0x^n+(b_1-ab_0)x^{n-1}+\ldots+(b_{n-1}-ab_{n-2})x-ab_{n-1}+r.$$

Đồng nhất đa thức này với đa thức bị chia, ta được

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0\\ b_1-ab_0 &= a_1\\ b_2-ab_1 &= a_2\\ \ldots\\ b_{n-1}-ab_{n-2} &= a_{n-1}\\ r-ab_{n-1} &= a_n. \end{aligned}$$

Từ đó, suy ra điều phải chứng minh.

4. Áp dụng sơ đồ Hoóc-ne để tính giá trị của đa thức $f(x)$ tại $4x=a$

Sơ đồ Ho óc-ne cho ta thương và dư khi chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức $x-a$. Chú ý rằng theo định lí Bê-du, số dư khi chia $f(x)$ cho $x-a$ bằng $f(a)$. Do đó, dùng sơ đồ Hoóc-ne ta cũng tính được giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x=a$.

VÍ DỤ 6. Tính giá trị của đa thức $f(x)=x^3+3x^2-4$ tại $x=37$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Theo định lý Bê-du, $f(37)$ là số dư khi chia $f(x)$ cho $x-37$. Ta lập sơ đồ Hoóc-ne

	1	3	0	-4
$a=37$	1	$37\cdot 1+3=40$	$37\cdot 40+0=1480$	$37\cdot 1480-4=54756$

Vậy $f(37)=54756$. □

C CHỨNG MINH MỘT ĐA THỨC CHIA HẾT CHO MỘT ĐA THỨC KHÁC

Ta chỉ xét các đa thức một biến, thường có các cách sau:

1. Cách 1.

Phân tích đa thức bị chia thành nhân tử, trong đó có một nhân tử là đa thức chia.

VÍ DỤ 7. Chứng minh rằng $x^{8n}+x^{4n}+1$ chia hết cho $x^{2n}+x^n+1$, với mọi số tự nhiên n.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}x^{8n}+x^{4n}+1 &= x^{8n}+2x^{4n}+1-x^{4n}=(x^{4n}+1)^2-\left(x^{2n}\right)^2\\ &= (x^{4n}+x^{2n}+1)(x^{4n}-x^{2n}+1).\end{aligned}$$

Tiếp tục phân tích

$$\begin{aligned}x^{4n}+x^{2n}+1 &= x^{4n}+2x^{2n}+1-x^{2n}=(x^{2n}+1)^2-(x^n)^2\\ &= (x^{2n}+x^n+1)(x^{2n}-x^n+1).\end{aligned}$$

Vậy $x^{8n}+x^{4n}+1$ chia hết cho $x^{2n}+x^n+1$, với mọi số tự nhiên n. □

2. Cách 2.

Biến đổi đa thức bị chia thành một tổng các đa thức chia.

VÍ DỤ 8. Chứng minh rằng $x^{3m+1}+x^{3n+2}+1$ chia hết cho x^2+x+1 với mọi số tự nhiên m, n.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}x^{3m+1}+x^{3n+2}+1 &= x^{3m+1}-x+x^{3n+2}-x^2+x^2+x+1\\ &= x(x^{3m}-1)+x^2(x^{3n}-1)+(x^2+x+1).\end{aligned}$$

Ta thấy $x^{3m}-1$ và $x^{3n}-1$ chia hết cho x^3-1, do đó chia hết cho x^2+x+1.
Vậy $x^{3m+1}+x^{3n+2}+1$ chia hết cho x^2+x+1 với mọi số tự nhiên m, n. □

VÍ DỤ 9. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m, n thì

$$x^{6m+4}+x^{6n+2}+1 \text{ chia hết cho } x^2-x+1.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned}x^{6m+4}+x^{6n+2}+1 &= x^{6m+4}-x^4+x^{6n+2}-x^2+x^4+x^2+1\\ &= x^4(x^{6m}-1)+x^2(x^{6n}-1)+(x^4+x^2+1).\end{aligned}$$

Do $x^{6m}-1 \vdots x^6-1$, $x^{6n}-1 \vdots x^6-1$ và

$$x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)\vdots x^2-x+1;$$
$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2 \vdots x^2-x+1.$$

Nên suy ra điều cần chứng minh. □

3. Cách 3.

Sử dụng các biến đổi tương đương, chẳng hạn để chứng minh $f(x) \vdots g(x)$, có thể chứng minh $f(x) + g(x) \vdots g(x)$ hoặc $f(x) - g(x) \vdots g(x)$.
Xem bài tập 268.

4. Cách 4.

Chứng tỏ rằng mọi nghiệm của đa thức chia đều là nghiệm của đa thức bị chia (ta công nhận rằng điều này dẫn đến đa thức bị chia chia hết cho đa thức chia).

VÍ DỤ 10. Cho $f(x) = (x^2 + x - 1)^{10} + (x^2 - x + 1)^{10} - 2$. Chứng minh rằng $f(x)$ chia hết cho $x^2 - x$.

✍ **LỜI GIẢI.**
Đa thức chia có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$. Ta sẽ chứng tỏ rằng $x = 0$ và $x = 1$ cũng là nghiệm của đa thức bị chia.
Ta có $f(0) = 1 + 1 - 2 = 0$ nên $f(x)$ chia hết cho x. Ta lại có $f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$ nên $f(x)$ chia hết cho $x - 1$. Các nhân tử x và $x - 1$ không chứa nhân tử chung.
Do đó $f(x)$ chia hết cho $x(x - 1)$. □

D BÀI TẬP

BÀI 1. Không đặt tính chia đa thức, hãy xét xem đa thức $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$ có hay không chia hết cho

a) $x + 1$;　　b) $x - 3$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Có;　　b) Không.

□

BÀI 2. Tìm dư khi chia các đa thức sau

a) $x^{41} : (x^2 + 1)$;　　b) $x^{43} : (x^2 + 1)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $x^{41} = x^{41} - x + x = x(x^{40} - 1) + x$. Ta thấy $x^{40} - 1 = (x^4)^{10} - 1$ nên chia hết cho $x^4 - 1$, do đó chia hết cho $x^2 + 1$.

❷ Dư $-x$.

□

BÀI 3. Tìm dư khi chia $x + x^3 + x^9 + x^{27}$ cho

a) $x - 1$;　　b) $x^2 + 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Dư 4; b) Dư $4x$.

□

BÀI 4. Tìm dư khi chia $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7$ cho

a) $x + 1$; b) $x^2 + 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $r = f(-1) = -1 - 1 - 1 + 7 = 3$. Dư 3.

❷ $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7 = x(x^{98} + 1) + x(x^{54} + 1) + x(x^{10} + 1) - 2x + 7$.
Chú ý rằng $(x^2)^{49} + 1$, $(x^2)^{27} + 1$, $(x^2)^{25} + 1$ chia hết cho $x^2 + 1$ (theo hằng đẳng thức 9). Như vậy dư cần tìm là $-2x + 7$.

□

BÀI 5. Tìm dư khi chia đa thức $f(x) = x^{50} + x^{49} + \ldots + x^2 + x + 1$ cho $x^2 - 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi thương khi chia $f(x)$ cho $x^2 - 1$ là $Q(x)$, dư là $ax + b$. Ta có

$$f(x) = (x^2 - 1) \cdot Q(x) + ax + b.$$

Đẳng thức trên đúng với mọi x. Lần lượt cho $x = 1$ và $x = -1$.
Đáp: Dư khi chia $f(x)$ cho $x^2 - 1$ là $25x + 26$. □

BÀI 6. Tìm đa thức $f(x)$, biết rằng $f(x)$ chia cho $x - 3$ thì dư 7, $f(x)$ chia cho $x - 2$ thì dư 5, $f(x)$ chia cho $(x - 2)(x - 3)$ thì được thương là $3x$ và còn dư.

✍ **LỜI GIẢI.**

Trước hết ta tìm dư khi chia $f(x)$ cho $(x - 2)(x - 3)$. Xét

$$f(x) = (x - 3) \cdot A(x) + 7, \quad (1)$$
$$f(x) = (x - 2) \cdot B(x) + 5. \quad (2)$$

Cách 1. Xét

$$f(x) = 3x(x - 2)(x - 3) + ax + b. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) bằng cách cho $x = 2$, $x = 3$ ta tìm được $a = 2$, $b = 1$. Dư của phép chia$f(x)$ cho $(x - 2)(x - 3)$ là $2x + 1$.
Do đó $f(x) = 3x(x - 2)(x - 3) + 2x + 1 = 3x^3 - 15x^2 + 20x + 1$.
Cách 2. Từ (1) suy ra

$$(x - 2)f(x) = (x - 2)(x - 3) \cdot A(x) + 7(x - 2).. \quad (4)$$

Từ (2) suy ra

$$(x - 3)f(x) = (x - 2)(x - 3) \cdot B(x) + 5(x - 3). \quad (5)$$

Lấy (4) trừ (5) được $f(x) = (x - 2)(x - 3)\left[A(x) - B(x)\right] + 2x + 1$.
Dư khi chia $f(x)$ cho $(x - 2)(x - 3)$ là $2x + 1$. Giải tiếp như cách 1. □

BÀI 7. Tìm đa thức $f(x)$, biết rằng $f(x)$ chia cho $x-3$ thì dư 2, $f(x)$ chia cho $x+4$ thì dư 9, còn $f(x)$ chia cho x^2+x-12 thì được thương là x^2+3 và còn dư.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đáp số: $x^4+x^3-9x^2+2x-31$. □

BÀI 8. Khi chia đơn thức x^8 cho $x+\dfrac{1}{2}$ thì được thương là $B(x)$ và dư là số r_1. Khi chia $B(x)$ cho $x+\dfrac{1}{2}$, ta được thương là $C(x)$ và dư là số r_2. Tính r_2.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $-\dfrac{1}{2}=a$, ta có $x^8=(x-a)\cdot B(x)+r_1$.

Cho $x=a$ thì $r_1=a^8$, do đó

$$x^8-a^8=(x-a)\cdot B(x)$$

nên

$$B(x)=\frac{x^8-a^8}{x-a}=(x^4+a^4)(x^2+a^2)(x+a).$$

Ta có

$$(x^4+a^4)(x^2+a^2)(x+a)=(x-a)\cdot C(x)+r_2.$$

Cho $x=a$, ta được $2a^4\cdot 2a^2\cdot 2a=r_2$ nên $r_2=8a^7$.

Thay $a=-\dfrac{1}{2}$, ta được $r_2=-\dfrac{1}{16}$. □

BÀI 9. Chứng minh rằng

❶ $x^{50}+x^{10}+1$ chia hết cho $x^{20}+x^{10}+1$;

❷ $x^2-x^9-x^{1945}$ chia hết cho x^2-x+1;

❸ $x^{10}-10x+9$ chia hết cho $(x-1)^2$;

❹ $8x^9-9x^8+1$ chia hết cho $(x-1)^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Thêm bớt x^{20} vào đa thức bị chia.

❷ Biến đổi $x^2-x^9-x^{1945}=(x^2-x+1)-(x^9+1)-(x^{1945}-x)$.

❸ $x^{10}-10x+9=(x^{10}-1)-10(x-1)=(x-1)(x^9+x^8+x^7+\ldots+x+1-10)$.
Biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai bằng $(x^9-1)+(x^8-1)+\ldots+(x-1)$, chia hết cho $x-1$.

❹ Ta có

$$\begin{aligned}8x^9-9x^8+1&=8(x^9-1)-9(x^8-1)\\&=(x-1)\left[8(x^8+x^7+\ldots+x+1)-9(x^7+x^6+\ldots+x+1)\right].\end{aligned}$$

Biểu thức trong dấu ngoặc vuông bằng

$$8x^8-x^7-x^6-x^5-x^4-x^3-x^2-x-1,$$

chia hết cho $x-1$ vì tổng các hệ số bằng 0.

□

BÀI 10. Chứng minh rằng $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ với

$$\begin{aligned}f(x)&=x^{99}+x^{88}+x^{77}+\ldots+x^{11}+1;\\g(x)&=x^9+x^8+x^7+\ldots+x+1.\end{aligned}$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Trước hết chứng minh rằng $f(x) - g(x)$ chia hết cho $g(x)$. Ta có

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^{99} - x^9 + x^{88} - x^8 + \ldots + x^{11} - x \\ &= x^9(x^{90} - 1) + x^8(x^{80} - 1) + \ldots + x(x^{10} - 1). \end{aligned}$$

Các biểu thức trong dấu ngoặc đều chia hết cho $x^{10} - 1$ mà $x^{10} - 1$ chia hết cho $g(x)$. □

BÀI 11. Chứng minh rằng đa thức $(x + y)^6 + (x - y)^6$ chia hết cho đa thức $x^2 + y^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

$(x + y)^6 + (x - y)^6 = \left[(x + y)^2\right]^3 + \left[(x - y)^2\right]^3$ chia hết cho $(x + y)^2 + (x - y)^2$, tức là chia hết cho $2(x^2 + y^2)$, do đó chia hết cho $x^2 + y^2$. □

BÀI 12. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n

❶ $(x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ chia hết cho $x(x + 1)(2x + 1)$;

❷ $x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$ chia hết cho $(x + 1)^2$;

❸ $(x + 1)^{4n+2} + (x - 1)^{4n+2}$ chia hết cho $x^2 + 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Chứng minh rằng mọi nghiệm của đa thức chia đều là nghiệm của đa thức bị chia.

❷ Đa thức chia bằng $(x^{2n+1} + 1)^2$, chia hết cho $(x + 1)^2$.

❸ $(x + 1)^{4n+2} + (x - 1)^{4n+2} = \left[(x + 1)^2\right]^{2n+1} + \left[(x - 1)^2\right]^{2n+1}$ chia hết cho $(x + 1)^2 + (x - 1)^2$, tức là chia hết cho $2(x^2 + 1)$.

□

BÀI 13. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$ chia hết cho $(x + 1)(x - 1)^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì n và $n + 1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên có một số chẵn và một số lẻ. Đa thức bị chia có dạng

$$\begin{aligned} (x^{2k} - 1)(x^{2k+1} - 1) &= (x^2 - 1) \cdot A(x) \cdot (x - 1) \cdot B(x) \\ &= (x + 1)(x - 1)^2 \cdot A(x) \cdot B(x). \end{aligned}$$

□

BÀI 14. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m, n thì $x^{6m+4} + x^{6n+2} + 1$ chia hết cho $x^4 + x^2 + 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Trước hết, ta chứng minh $x^{6m+4} + x^{6n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$. Giải tương tự như ví dụ 58.

Đa thức $x^{6m+4} + x^{6n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ và chia hết cho $x^2 + x + 1$, hai đa thức này không có nhân tử chung bậc nhất. Do đó $x^{6m+4} + x^{6n+2} + 1$ chia hết cho tích $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$, tức là chia hết cho $x^4 + x^2 + 1$. □

BÀI 15. Tìm số tự nhiên n sao cho $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét $n = 3k$, $n = 3k + 1$ và $n = 3k + 2$. Trong trường hợp đầu, số dư phép chia bằng 3. Trong hai trường hợp sau, số dư phép chia bằng 0. Vậy số cần tìm n không chia hết cho 3. □

BÀI 16. Xác định số k để đa thức $A = x^3 + y^3 + x^3 + kxyz$ chia hết cho đa thức $x + y + z$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi thương khi chia đa thức A cho $x + y + z$ là Q, ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = (x + y + z) \cdot Q.$$

Đẳng thức trên đúng với mọi x, y, z nên với $x = 1$, $y = 1$, $z = -2$ ta có

$$1 + 1 + (-2)^3 + k(-2) = (1 + 1 - 2) \cdot Q \Rightarrow -6 - 2k = 0 \Rightarrow k = -3.$$

Với $k = -3$, ta có $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ chia hết cho $x + y + z$ (thương bằng $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$). Vậy $k = -3$. □

BÀI 17. Cho đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên. Biết rằng $f(0)$, $f(1)$ là các số lẻ. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ không có nghiệm nguyên.

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử a là nghiệm nguyên của $f(x)$. Với mọi x, ta có $f(x) = (x - a) \cdot Q(x)$, trong đó $Q(x)$ là đa thức có hệ số nguyên, do đó

$$f(0) = -a \cdot Q(0);\ f(1) = (1 - a) \cdot Q(1).$$

Do $f(0)$ là số lẻ nên a là số lẻ, do $f(1)$ là số lẻ nên $1 - a$ là số lẻ, mâu thuẫn với nhau. □

CHƯƠNG 3 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

BÀI 1 KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG TRÌNH. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

❶ Ta gọi hệ thức dạng $A(x) = B(x)$ là phương trình với ẩn x. Giải phương trình $A(x) = B(x)$ là tìm mọi giá trị của x để các giá trị tương ứng của hai biểu thức $A(x)$ và $B(x)$ bằng nhau.
Tập hợp các giá trị đó gọi là tập nghiệm của phương trình đã cho, và thường được ký hiệu là S.

❷ Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập nghiệm.

❸ Khi giải một phương trình, ta có thể

- Chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.
- Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số khác 0.

Khi đó phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

❹ Phương trình bậc nhất là phương trình có dạng $ax + b = 0$ trong đó x là ẩn số, a và b là các số đã cho, $a \neq 0$.
Khi giải phương trình có hệ số chữ trong mục này, ta cũng xét các phương trình có dạng $ax + b = 0$ trong đó $a = 0$.

VÍ DỤ 1. Giải phương trình sau, với a là hằng số (ta còn gọi a là tham số)

$$a(ax + 1) = x(a + 2) + 2$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Biến đổi phương trình đã cho thành

$$\begin{aligned} & a^2x - ax - 2x = 2 - x \\ \Leftrightarrow & x(a^2 - s - 2) = 2 - a \\ \Leftrightarrow & (a + 1)(a - 2)x = 2 - a. \qquad (1) \end{aligned}$$

Ký hiệu S là tập nghiệm của phương trình đã cho, ta có
Nếu $a \neq -1$, $a \neq 2$ thì $S = \left\{-\dfrac{1}{a + 1}\right\}$.
Nếu $a = -1$ thì (1) có dạng $0x = 3$, vô nghiệm, $S = \varnothing$.
Nếu $a = 2$ thì (1) có dạng $0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x, $S = R$. □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình với a là tham số

$$\frac{x-a}{3}=\frac{a+3}{a}-2 \qquad (1)$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Điều kiện xác định của phương trình là $a\neq 0$.

Biến đổi phương trình

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow a(x-a)=3(x+3)-6a\\ &\Leftrightarrow ax-a^2=3x+9-6a\\ &\Leftrightarrow ax-3x=a^2-6a+9\\ &\Leftrightarrow (a-3)x=(a-3)^2 \qquad (2)\end{aligned}$$

Nếu $a\neq 3$, phương trình có nghiệm $x=a-3$.

Nếu $a=3$ thì (2) có dạng $0x=0$, suy ra với mọi x đều là nghiệm.

Kết luận

Nếu $a\neq 0$; $a\neq 3$ thì (1) có một nghiệm $x=a-3$.

Nếu $a=3$ thì (1) nghiệm đúng với mọi x.

Nếu $a=0$ thì (1) vô nghiệm. □

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng tồn tại các hằng số a,b,c để phương trình sau có vô số nghiệm

$$\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-ac}{a+c}+\frac{x-bc}{b+c}=a+b+c \qquad (1)$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Điều kiện xác định của phương trình

$$a+b\neq 0;\ a+c\neq 0;\ b+c\neq 0$$

Khi đó,

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \left(\frac{x-ab}{a+b}-c\right)+\left(\frac{x-ac}{a+c}-b\right)+\left(\frac{x-bc}{b+c}-a\right)=0\\ &\Leftrightarrow \frac{x-ab-ac-bc}{a+b}+\frac{x-ac-ab-bc}{a+c}+\frac{x-bc-ab-ac}{b+c}=0\\ &\Leftrightarrow (x-ab-ac-bc)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=0.\end{aligned}$$

(1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}=0.$ (2).

Chẳng hạn ta chọn $a=1$; $b=1$, để (2) xảy ra ta chọn c sao cho

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+c}=0\Leftrightarrow \frac{2}{1+c}=\frac{-1}{2}\Rightarrow c=-5.$$

Như vậy (-1) có vô số nghiệm, chẳng hạn khi $a=1;b=1;c=-5$. □

VÍ DỤ 4. Giải phương trình

$$\frac{x-a}{a+b}+\frac{x-b}{a-b}=\frac{2ab}{b^2-a^2}\quad (a, b \text{ hằng số}).$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Điều kiện xác định của phương trình là $a \neq \pm b$.

Biến đổi phương trình

$$\begin{aligned}&(x-a)(x-b)+(x-b)(a+b)=-2ab\\ \Leftrightarrow & ax-bx-a^2+ab+ax+bx-ab-b^2=-2ab\\ \Leftrightarrow & 2ax=a^2+b^2-2ab\\ \Leftrightarrow & 2ax=(a-b)^2.\end{aligned}$$

Nếu $a \neq 0$ thì $x=\dfrac{(a-b)^2}{2a}$.

Nếu $a=0$ thì (1) có dạng $0x=b^2$. Do $a \neq b$ nên $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

Kết luận

Nếu $a \neq 0$, $a \neq \pm b$ thì $S=\left\{\dfrac{(a-b)^2}{2a}\right\}$.

Còn lại, $S=\varnothing$. □

BÀI 1. Giải các phương trình

❶ $(x+2)^3-(x-2)^3=12x(x-1)-8$;

❷ $(x+5)(x+2)-3(4x-3)=(5-x)^2$;

❸ $(3x-1)^2-5(2x+1)^2+(6x-3)(2x+1)=(x-1)^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $(x+2)^3-(x-2)^3=12x(x-1)-8 \Leftrightarrow 12x^2+16=12x^2-12x-8 \Leftrightarrow x=-2$

❷ $(x+5)(x+2)-3(4x-3)=(5-x)^2 \Leftrightarrow x^2-5x+19=x^2-10x+25 \Leftrightarrow x=\dfrac{6}{5}$.

❸ $(3x-1)^2-5(2x+1)^2+(6x-3)(2x+1)=(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-26x-7=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$.

□

BÀI 2. Giải các phương trình

❶ $\dfrac{x-5}{100}+\dfrac{x-4}{101}+\dfrac{x-3}{102}=\dfrac{x-100}{5}+\dfrac{x-101}{4}+\dfrac{x-102}{3}$;

❷ $\dfrac{29-x}{21}+\dfrac{27-x}{23}+\dfrac{25-x}{25}+\dfrac{23-x}{27}+\dfrac{21-x}{29}=-5$;

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned}&\frac{x-5}{100}-1+\frac{x-4}{101}-1+\frac{x-3}{102}-1=\frac{x-100}{5}-1+\frac{x-101}{4}-1+\frac{x-102}{3}-1\\ \Leftrightarrow & \frac{x-105}{100}+\frac{x-105}{101}+\frac{x-105}{102}=\frac{x-105}{5}+\frac{x-105}{4}+\frac{x-105}{3}\\ \Leftrightarrow & (x-105)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=0\\ \Leftrightarrow & x=105.\end{aligned}$$

❷ Ta có

$$\begin{aligned}&\frac{29-x}{21}+1+\frac{27-x}{23}+1+\frac{25-x}{25}+1+\frac{23-x}{27}+1+\frac{21-x}{29}+1=-5+5\\ \Leftrightarrow&(50-x)\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}+\frac{1}{29}\right)=0\end{aligned}$$

Vậy $x=50$.

□

BÀI 3. Giải các phương trình với tham số a, b

a) $a(ax+b)=b^2(x-1)$;

b) $a^2x-ab=b^2(x-1)$;

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned}&a(ax+b)=b^2(x-1)\\ \Leftrightarrow&(a^2-b^2)x=-b(a+b).\end{aligned}$$

Nếu $a\neq\pm b$ thì $x=\dfrac{b}{b-a}$.

Nếu $a=b$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi x (nếu $b=0$) hoặc vô nghiệm (nếu $b\neq 0$).

Nếu $a\neq\pm b$ thì $x=\dfrac{b}{b-a}$.

Nếu $a=b$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi x.

❷ $a^2x-ab=b^2(x-1)$; Biến đổi phương trình thành $(a^2-b^2)x=b(a-b)$ rồi giải tương tự như câu a.

□

BÀI 4. Giải các phương trình với tham số a, b

❶ $\dfrac{x-a}{a+1}+\dfrac{x-1}{a-1}=\dfrac{2a}{1-a^2}$;

❷ $\dfrac{x+a-1}{a+2}+\dfrac{x-a}{a-2}+\dfrac{x-a}{4-a^2}=0$;

❸ $3x+\dfrac{x}{a}-\dfrac{3a}{a+1}=\dfrac{4ax}{(a+1)^2}+\dfrac{(2a+1)x}{a(a+1)^2}-\dfrac{3a^2}{(a+1)^3}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $\dfrac{x-a}{a+1}+\dfrac{x-1}{a-1}=\dfrac{2a}{1-a^2}$;

Điều kiện là $a\neq\pm1$. Biến đổi phương trình thành $2ax=(a-1)^2$.

Nếu $a\neq 0$ (và $a\neq\pm1$) thì $S=\left\{\dfrac{(a-1)^2}{2a}\right\}$.

Nếu $a=0$ thì $S=\varnothing$.

❷ $\dfrac{x+a-1}{a+2}+\dfrac{x-a}{a-2}+\dfrac{x-a}{4-a^2}=0$;

Điều kiện là $a\neq\pm2$. Biến đổi phương trình thành $(2a-1)x=2(2a-1)$. Nếu $a\neq\dfrac{1}{2}$ thì $x=2$.

Nếu $a=\dfrac{1}{2}$ thì $0x=0$, vô số nghiệm.

❸ $3x+\dfrac{x}{a}-\dfrac{3a}{a+1}=\dfrac{4ax}{(a+1)^2}+\dfrac{(2a+1)x}{a(a+1)^2}-\dfrac{3a^2}{(a+1)^3}$.

Điều kiện là $a\neq 0; a\neq -1$. Biến đổi phương trình thành

$$\frac{3a(a^2-a+1)}{a(a+1)^2}x=\frac{3a(a^2-a+1)}{(a+1)^3}$$

Do $a \neq 0$, $a \neq -1$, $a^2 - a + 1 \neq 0$ (chứng minh dễ dàng) nên $x = \dfrac{a}{a+1}$.

□

BÀI 5. Giải phương trình với các tham số a, b, c

❶ $\dfrac{x-a}{b+c} + \dfrac{x-b}{c+a} + \dfrac{x-c}{a+b} = 3$;

❷ $\dfrac{x-a}{b+c} + \dfrac{x-b}{c+a} + \dfrac{x-c}{a+b} = \dfrac{3x}{a+b+c}$;

❸ $\dfrac{a+b-x}{c} + \dfrac{a+c-x}{b} + \dfrac{b+c-x}{a} = 1 - \dfrac{4x}{a+b+c}$;

❹ $\dfrac{2a+b+c-3x}{a} + \dfrac{a+2b+c-3x}{b} + \dfrac{a+b+2c-3x}{c} = 6 - \dfrac{9x}{a+b+c}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{c+a} + \frac{x-c}{a+b} = 3\\
\Leftrightarrow &\frac{x-a}{b+c} - 1 + \frac{x-b}{c+a} - 1 + \frac{x-c}{a+b} - 1 = 0\\
\Leftrightarrow &(x-a-b-c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Nếu $\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{a+b} \neq 0$, phương trình có một nghiệm $x = a+b+c$.

Nếu $\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{a+b} = 0$, phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

❷ $\dfrac{x-a}{b+c} + \dfrac{x-b}{c+a} + \dfrac{x-c}{a+b} = \dfrac{3x}{a+b+c}$;

Tương tự câu a) ta có

$$(x-a-b-c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} - \frac{3}{a+b+c}\right) = 0.$$

Nếu $\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{a+b} - \dfrac{3}{a+b+c} \neq 0$, phương trình có một nghiệm $x = a+b+c$.

Nếu $\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{a+b} - \dfrac{3}{a+b+c} = 0$, phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

❸ $\dfrac{a+b-x}{c} + \dfrac{a+c-x}{b} + \dfrac{b+c-x}{a} = 1 - \dfrac{4x}{a+b+c}$;

Làm tương tự câu a), ta có

$$(a+b+c-x)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{4}{a+b+c}\right) = 0.$$

❹ $\dfrac{2a+b+c-3x}{a} + \dfrac{a+2b+c-3x}{b} + \dfrac{a+b+2c-3x}{c} = 6 - \dfrac{9x}{a+b+c}$.

Điều kiện $a; b; c; a+b+c \neq 0$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&\frac{2a+b+c-3x}{a} + \frac{a+2b+c-3x}{b} + \frac{a+b+2c-3x}{c} = 6 - \frac{9x}{a+b+c}\\
\Leftrightarrow &\frac{2a+b+c-3x}{a} - 1 + \frac{a+2b+c-3x}{b} - 1 + \frac{a+b+2c-3x}{c} - 1 = 6 - \frac{9x}{a+b+c} - 3\\
\Leftrightarrow &(a+b+c-3x)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{3}{a+b+c}\right) = 0
\end{aligned}$$

Nếu $\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{a+b+c}\neq 0$, phương trình có một nghiệm $x=\dfrac{a+b+c}{3}$.
Nếu $\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{a+b+c}=0$, phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

$\square$

BÀI 2 PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Phương trình tích (một ẩn) là phương trình dạng có dạng

$$A(x)B(x)\ldots = 0 \qquad (1)$$

trong đó $A(x), B(x), \ldots,$ là các đa thức.
Để giải (1), ta chỉ cần giải từng phương trình $A(x) = 0; B(x) = 0, \ldots$ rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.
Các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử chung có vai trò quan trọng trong việc đưa một phương trình về dạng tích rồi phân tích. Cách đặt ẩn phụ cũng thường được sử dụng để trình bày lời giải được gọn gàng.

VÍ DỤ 1. Giải phương trình

$$(x+3)^3 - (x+1)^3 = 56$$

✍ **LỜI GIẢI.**
Cách 1.

$$\begin{aligned} & (x+3)^3 - (x+1)^3 = 56 \\ \Leftrightarrow & x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 56 \\ \Leftrightarrow & 6x^2 + 24x + 26 = 56 \\ \Leftrightarrow & 6(x^2 + 4x - 5) = 0 \\ \Leftrightarrow & 6(x^2 - x + 5x - 5) = 0 \\ \Leftrightarrow & x(x-1) + 5(x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1)(x+5) = 0. \end{aligned}$$

Kết luận $S = \{1; -5\}$.
Cách 2. Chú ý rằng $x+2$ là trung bình cộng của $x+3$ và $x+1$, ta đặt $x+2 = y$, phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & (y+1)^3 - (y-1)^3 = 56 \\ \Leftrightarrow & y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 + 3y^2 - 3y + 1 = 56 \\ \Leftrightarrow & 6y^2 + 2 = 56 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3. \end{aligned}$$

Với $y = 3$ thì $x = 1$. Với $y = -3$ thì $x = -5$.
Kết luận $S = \{1; -5\}$. □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình

$$x^3 + (x-1)^3 = (2x-1)^3. \qquad (1)$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta thấy $x+(x-1)=2x-1$. Đặt $x-1=y$ thì (1) có dạng

$$\begin{aligned}
&x^3+y^3=(x+y)^3\\
\Leftrightarrow &x^3+y^3=x^3+y^3+3xy(x+y)\\
\Leftrightarrow &xy(x+y=0)\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l}x=0\\ y=0\\ x+y=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l}x=0\\ x-1=0\\ 2x-1=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. .
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ y=0\\ x+y=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x-1=0\\ 2x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. Kết luận $S=\left\{0;\dfrac{1}{1};1\right\}$ □

VÍ DỤ 3. Giải phương trình

$$(x+1)^2(x+2)+(x-1)^2(x-2)=12. \tag{3.1}$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Rút gọn vế trái của phương trình, ta được

$$\begin{aligned}
2x^3+10x=12 &\Leftrightarrow x^3+5x-6=0\\
&\Leftrightarrow (x^3-1)+5(x-1)=0\\
&\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+6)=0
\end{aligned}$$

Dễ dàng chứng minh được $x^2+x+6\neq 0$. Do đó $S=1$. □

VÍ DỤ 4. Giải phương trình

$$(x^2-1)(x^2+4x+3)=192. \tag{3.2}$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Biến đổi phương trình thành

$$(x^2-1)(x+1)(x+3)=192 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2(x+3)=192.$$

Đặt $x+1=y$, phương trình trở thành

$$(y-2)y^2(y+2)=192 \Leftrightarrow y^2(y^2-4)=192.$$

Đặt $y^2-2=z$ thì $z+2\geq 0$, phương trình trở thành

$$(z+2)(z-2)=192 \Leftrightarrow z^2=196 \Leftrightarrow z=\pm 14.$$

Loại $z=-14$ vì trái với điều kiện $z+2\geq 0$.
Với $z=14$ thì $y^2=16$, do đó $y=\pm 4$.
Với $y=4$ thì $x+1=4$ nên $x=3$.
Với $y-4$ thì $x+1=-4$ nên $x=-5$. Kết luận $S=\{3;-5\}$. □

VÍ DỤ 5. Giải phương trình

$$(x-6)^4+(x-8)^4=16. \tag{3.3}$$

LỜI GIẢI.
Đặt $x-7=y$, phương trình trở thành

$$(y+1)^2+(y-1)^4=16$$

Rút ngọn ta được

$$\begin{aligned} 2y^4+12y^2+2=16 &\Leftrightarrow y^4+6y^2+1=8\\ &\Leftrightarrow y^4+6y^2-7=0.\end{aligned}$$

Đặt $y^2=z\geq 0$, ta có $z^2+6z-7=0 \Leftrightarrow z_1=1; z_2=-7$ (loại).
Với $z=1$, ta có $y^2=1$ nên $y=\pm 1$.
Từ đó $x_1=8; x_2=6$. □

⚠ *Khi giải phương trình bậc 4 dạng $(x+a)^4+(x+b)^2=c$, ta thường đặt ẩn phụ $y=x+\dfrac{a+b}{2}$.*

VÍ DỤ 6. Giải các phương trình

1. $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0;$ (1).
2. $x^5-x^4+3x^3+3x62-x+1=0$ (2).

LỜI GIẢI.

1. $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$ (1).
Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình (1). Chia hai vế của (1) cho $x^2\neq 0$, ta được

$$\begin{aligned} x^2+3x+4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0\\ \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0.\end{aligned}$$

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=y$ thì $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$, ta được $y^2+3y+2=0$.
Do đó $y_1=-1$; $y_2=-2$.
Với $y=-1$, ta có $x+\dfrac{1}{x}=-1$ nên $x^2+x+1=0$, vô nghiệm.
Với $y=-2$, ta có $x+\dfrac{1}{x}=-2$ nên $(x+1)^2=0$, do đó $x=-1$. Kết luận $S=\{-1\}$.

⚠ *Cũng có thể giải phương trình (1) bằng cách biến đổi vế trái thành*

$$(x+1)^2(x^2+x+1).$$

❷ $x^5 - x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0 \qquad (2).$

Ta thấy $x = -1$ là một ngiệm của phương trình (2) vì tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ. Biến đổi phương trình (2) thành

$$(x+1)(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1) = 0.$$

Giải phương trình

$$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad (3)$$

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm không là nghiệm của (3). Chia 2 vế của (3) cho $x^2 \neq 0$, ta được

$$x^2 - 2x + 5 - \frac{2}{5} + \frac{1}{x^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x62 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0.$$

Đặt $x + \dfrac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$, ta được $y^2 - 2y + 3 = 0$, vô nghiệm. Kết luận $S = \{-1\}$.

⚠ *Ta gọi các phương trình* (1) *và* (2) *là phương trình đối xứng: các hệ số của đa thức ở* 2 *vế trái có tính chất đối xứng qua hạng tử đứng giữa.*
Phương trình (1) *là phương trình đối xứng bậc chẵn, phương trình* (2) *là phương trình đối xứng bậc lẻ.*
Phương trình đối xứng bậc lẻ bao giờ cũng nhận $x = -1$ *làm một nghiệm, do đó bằng cách chia hai vế cho* $x + 1$*, ta thu được phương trình đối xứng bậc chẵn* $2n$*.*
Phương trình đối xứng bậc chẵn $2n$ *đối với* x *đưa được về phương trình bậc* n *đối với* y *bằng cách đặt ẩn phụ* $y = x + \dfrac{1}{x}$*.*
Ta có nhận xét sau để kiểm tra lại nghiệm của phương trình đối xứng: Nếu a *là nghiệm phương trình thì* $\dfrac{1}{a}$ *cũng là nghiệm của phương trình.*

□

VÍ DỤ 7. Chứng minh rằng các phương trình sau vô nghiệm

❶ $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0; \qquad (1)$

❷ $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0; \qquad (2)$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0; \qquad (1)$

Biến đổi phương trình (1) thành

$$(x^2+1)^2 - x(x^2+1) = 0.$$

Cả hai nhân tử ở vế đều dương.
Kết luận $S = \varnothing$.

❷ $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0;$ (2)

Cách 1 Nhân hai vế của (2) với $x - 1$, ta được

$$(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0)$$
$$\Leftrightarrow x^5 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^5 = 1. \quad (3)$$

Phương trình (3) có nghiệm $x = 1$, nhưng giá trị này không thỏa mãn phương trình $(2^{(\star\star)})$. Kết luận $S = \varnothing$.

Cách 2 Chứng minh $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$.

⚠ *Các phương trình (1) và (2) cũng là phương trình đối xứng. Do đó cũng có thể giải chúng bằng cách đặt ẩn phụ* $y = x + \dfrac{1}{x}$.

□

BÀI 1. Giải các phương trình sau

a) $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$

b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

c) $x^3 - x^2 - 21x + 45$.

d) $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$.

e) $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$.

f) $(x^2 + 1)^2 = 4(2x - 1)$.

g) $(x-1)^3 + (2x+3)^3 = 27x^3 + 8$.

h) $6x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+1) = 0$. Nghiệm $x = -2$.

❷ $x^3 + 2x^2 - x - 2 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-1)$. Nghiệm $x = -2; -1; 1$.

❸ $x^3 - x^2 - 21x + 45 \Leftrightarrow (x-3)^2(x+5) = 0$. Nghiệm $x = -5; 3$.

❹ $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x=1)(x^2+2x+2) = 0$. Nghiệm $x = -1$.

❺ $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2 - x + 4) = 0$. Nghiệm $x = -2; 1$.

❻ $(x^2+1)^2 = 4(2x-1) \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2+2x+5) = 0$. Nghiệm $x = 1$.

❼ $(x-1)^3 + (2x+3)^3 = 27x^3 + 8$. Nghiệm $x = -\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{2}; 3$.

❽ $6x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(2x-1)(3x+1) = 0$. Nghiệm $x = -1; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}; 1$.

□

BÀI 2. Giải các phương trình sau

a) $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$.

b) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24$.

c) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$.

d) $(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 3) = 12$.

e) $x(x+1)(x^2 + x + 1) = 42$.

f) $(x^2 + x + 1)^2 = 3(x^4 + x^2 + 1)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0$.

Đặt $y=x^2-5x$. Ta được $y^2+10y+24=0$, từ đó $y_1=-6;\ y_2=-4$.

Với $y=-6$ ta được $x_1=2;\ x_2=3$.

Với $y=-4$ ta được $x_3=1;\ x_4=4$.

❷ $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)=24$.

Nghiệm $x=-6;-4;-1;1$.

❸ $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$.

Đặt $y=x^2+x+1$. Ta được $y^2+y-12=0$, từ đó $y_1=3;\ y_2=-4$.

Với $y=3$ ta được $x_1=1;\ x_2=-4$.

Với $y=-4$ Phương trình vô nghiệm.

❹ $(x^2+x-2)(x^2+x-3)=12$.

Nghiệm $x=-3;2$.

❺ $x(x+1)(x^2+x+1)=42$.

Nghiệm $x=-3;2$.

❻ $(x^2+x+1)^2=3(x^4+x^2+1)$.

Chú ý rằng $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

Phương trình có dạng $(x^2+x+1)(x^2-2x+1)=0$.

Nghiệm $x=1$.

□

BÀI 3. Giải các phương trình sau

a) $x(x+1)(x-1)(x+2)=24$.

b) $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$.

c) $(x+2)(x+3)(x-5)(x-6)=180$.

d) $2x(8x-1)^2(4x-1)=9$.

e) $(12x+7)^2(3x+2)(2x+1)=3$.

f) $(2x+1)(x+1)^2(2x+3)=18$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $x(x+1)(x-1)(x+2)=24$.

Nghiệm $x=-3;2$.

❷ $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$.

Nghiệm $x=-1;12$.

❸ Ta có

$$\begin{aligned}&(x+2)(x+3)(x-5)(x-6)=180\\ \Leftrightarrow&(x^2-3x-10)(x^2-3x-18)=180\end{aligned}$$

Đặt $y=x^2-3x-14$. Tìm được $y=\pm14$.

Với $y=14$ ta được $x_1=7;\ x_2=-4$.

Với $y=-14$ ta được $x_3=0;\ x_4=3$.

❹ $2x(8x-1)^2(4x-1)=9$.

Nhân 8 vào hai vế, ta được $8x(8x-1)^2(8x-2)=72$.

Đặt $y=8x-1$ ta được $(y+1)y^2(y-1)=72\Leftrightarrow(y^2-9)(y^2+8=0)\Leftrightarrow y^2=9$.

Trường hợp $y = 3$ suy ra $x = \dfrac{1}{2}$.

Trường hợp $y = -3$ suy ra $x = -\dfrac{1}{4}$.

❺ $(12x+7)^2(3x+2)(2x+1) = 3$. Nhân 24 vào hai vế, ta được $(12x+7)^2(12x+8)(12x+6) = 72$.
Đặt $y = 12x + 7$ ta được $x = -\dfrac{1}{3}; -\dfrac{5}{6}$.

❻ $(2x+1)(x+1)^2(2x+3) = 18$.
Nhân 24 vào hai vế, rồi đặt $y = 2x + 2$, ta được $x = \dfrac{1}{2}; -\dfrac{5}{2}$.

□

BÀI 4. Giải các phương trình sau

a) $(x^2 - 6x + 9)^2 - 15(x^2 - 6x + 10) = 1$.

b) $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x62 = 0$.

c) $(x^2 - 9)^2 = 12x + 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $(x^2 - 6x + 9)^2 - 15(x^2 - 6x + 10) = 1$.
Đặt $y = x^2 - 6x + 9 \geq 0$, ta được $y_1 = -1$ (loại); $y_2 = 16$..
Nghiệm $x = -1; 7$.

❷ $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x62 = 0$.
Đặt $y = x^2 + 1$ ta được $y^2 + 3xy + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow (y + x)(y + 2x) = 0$.
Nghiệm $x = -1$.

❸ $(x^2 - 9)^2 = 12x + 1$.
Thêm $+36x^2$ vào hai vế. Đáp số $x = -4; 2$.

□

BÀI 5. Giải các phương trình sau

a) $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.

b) $(x-2)^4 + (x-3)^4 = 1$.

c) $(x+1)^4 + (x-3)^4 = 82$.

d) $(x-2,5)^4 + (x-1,5)^4 = 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.
Đặt $y = x + 4$, khi đó phương trình tương đương $(y-1)^4 + (y+1)^4 = 16$, ta được $y = \pm 1$.
Với $y = 1$ thì $x = -3$.
Với $y = -1$ thì $x = -5$.

❷ $(x-2)^4 + (x-3)^4 = 1$.
Đặt $y = x - \dfrac{5}{2}$.
Nghiệm $x = 2; 3$.

❸ $(x+1)^4 + (x-3)^4 = 82$.
Nghiệm $x = 2; 0$.

❹ $(x-2,5)^4 + (x-1,5)^4 = 1$.
Nghiệm $x = \dfrac{5}{2}; \dfrac{3}{2}$.

□

BÀI 6. Giải các phương trình sau

a) $(4-x)^5+(x-2)^5=32$.

b) $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $(4-x)^5+(x-2)^5=32$.

Đặt $y=x-3$ rồi rút gọn được $y^4+2y^2-3=0$.

Nghiệm $x=2;4$.

❷ $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1)$.

Đặt $y=x+1$.

Nghiệm $x=-2;-1;0$.

□

BÀI 7. Giải các phương trình sau

a) $(x+1)^3+(x-2)^3=(2x-1)^3$.

b) $(x-7)^4+(x-8)^4=(15-2x)^4$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $(x+1)^3+(x-2)^3=(2x-1)^3 \Leftrightarrow (x+1)^3+(x-2)^3+(1-2x)^3=0$.

Đặt $a=x+1;\ b=x-2;\ c=1-2x$ thì $a+b+c=0$.

Do đó $a^3+b^3+c^3=3abc$. Vậy $abc=0$.

Nghiệm $x=-1;\dfrac{1}{2};2$.

❷ $(x-7)^4+(x-8)^4=(15-2x)^4$.

Đặt $a=x-7;\ b=x-8$ ta được

$$a^4+b^4-(a+b)^4=0 \Leftrightarrow 4ab\left(a^2+\frac{3}{2}ab+b^2\right)=0.$$

Xét $a^2+\dfrac{3}{2}ab+b^2=\left(a+\dfrac{3}{4}b\right)^2+\dfrac{7}{16}\geq 0$ nhưng dấu bằng không xảy ra.

Nghiệm $x=7;8$.

□

BÀI 8. Giải các phương trình sau

a) $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$.

b) $3x^4-13x^3+16x^2-13x+3=0$.

c) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6$.

d) $x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1=0$.

e) $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$.

f) $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$.

Đặt $y=x+\dfrac{1}{x}$, ta được $y^2-3y+2=0$.

Nghiệm $x=1$.

❷ $3x^4-13x^3+16x^2-13x+3=0$.

Đặt $y=x+\dfrac{1}{x}$, ta được $(y-1)(3y-10)=0$.

Nghiệm $x=\dfrac{1}{3};3$.

❸ $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6$.

Đặt $y=x+\dfrac{1}{x}$, ta được $y_1=\dfrac{5}{2}$; $y_2=-\dfrac{10}{3}$. Nghiệm $x=-3;-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2};2$.

❹ $x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1=0$.

Nghiệm $x=-1$.

❺ $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$.

Đặt $y=x-\dfrac{1}{x}$.

Nghiệm $x=-3;-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3};2$.

❻ $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$.

Chia hai vế cho x^2.

Nghiệm $x=1;\dfrac{1}{2};2$.

□

BÀI 9. Giải các phương trình sau $x^5=x^4+x^3+x^2+x+2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned}&x^5=x^4+x^3+x^2+x+2\\ \Leftrightarrow&(x^5-1)-(x^4+x^3+x^2+x+1)\\ \Leftrightarrow&(x-2)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0\\ \Leftrightarrow&x-2=0\end{aligned}$$

Vì phương trình $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm $x=2$. □

BÀI 10. Chứng minh các phương trình sau vô nghiệm

a) $x^4-2x^3+4x^2-3x+2=0$.

b) $x^6+x^5+x^3+x^2+x+1=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $x^4-2x^3+4x^2-3x+2=0$.

Đưa phương trình về dạng $(x^2-x+1)(x^2-x+2)=0$.

❷ $x^6+x^5+x^3+x^2+x+1=0$.

Đưa phương trình về dạng $x^7-1=0$.

□

BÀI 3 PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU THỨC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Các bước giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức:

— Tìm điều kiện xác định (ĐKXĐ) của phương trình.

— Quy đồng mẫu thức ở hai vế của phương trình rồi khử mẫu thức.

— Giải phương trình vừa nhận được.

— Nghiệm của phương trình là các giá trị tìm được của ẩn thỏa mãn điều kiện xác định.

B CÁC VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình:

$$\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+3}{x-4}=\frac{2}{(x-2)(4-x)}. \qquad (1)$$

LỜI GIẢI.

ĐKXĐ của phương trình là $x \neq 2$, $x \neq 4$.

Biến đổi phương trình (1):

$$(x-1)(x-4)+(x+3)(x-2)=-2.$$

Thu gọn phương trình, ta được

$$2x(x-2)=0. \qquad (2)$$

Nghiệm của (2) là $x_1=0$, $x_2=2$. Trong đó, $x_1=0$ thỏa mãn ĐKXĐ, $x_2=2$ không thỏa mãn ĐKXĐ.

Kết luận: $S=\{0\}$. □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình với các tham số a, b:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b+x}. \qquad (1)$$

LỜI GIẢI.

ĐKXĐ của phương trình là: $a \neq 0$, $b \neq 0$, $x \neq 0$, $x \neq -a-b$.

Biến đổi phương trình (1):

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{x}=\frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{-x(a+b+x)}=\frac{a+b}{ab}.$$

Nếu $a+b=0$ thì (1) có vô số nghiệm: x bất kỳ khác 0.

Nếu $a+b\neq 0$ thì

$$\begin{aligned}-x(a+b+x)=ab &\Leftrightarrow\ ab+ax+bx+x^2=0\\ &\Leftrightarrow (x+z)(x+b)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=-a\\&x=-b\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Để $-a$ thỏa mãn ĐKXĐ, ta phải có:

$$\begin{cases}-a\neq 0\\ -a\neq -a-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ b\neq 0\end{cases}.$$

Các điều kiện này đã có.
Để $-b$ thỏa mãn ĐKXĐ, tương tự ta phải có: $a\neq 0$, $b\neq 0$.
Kết luận:
Nếu $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a+b=0$ thì (1) có vô số nghiệm: x bất kỳ khác 0.
Nếu $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a+b\neq 0$ thì (1) có nghiệm: $x=-a$ và $x=-b$. □

VÍ DỤ 3. Giải phương trình:

$$\frac{x+a}{x+3}+\frac{x-3}{x-a}=2. \qquad (1)$$

trong đó a là hằng số.

LỜI GIẢI.
ĐKXĐ của phương trình là $x\neq -3$, $x\neq a$.
Biến đổi phương trình, ta được

$$2(a-3)x=(a-3)^2. \qquad (2)$$

— Nếu $a\neq 3$ thì $x=\dfrac{a-3}{2}$. Giá trị này là nghiệm của phương trình đã cho nếu

$$\begin{cases}\dfrac{a-3}{2}\neq -3 & (3)\\[2mm] \dfrac{a-3}{2}\neq a & (4)\end{cases}$$

Giải điều kiện (3), ta được $a\neq -3$. Giải điều kiện (4), ta cũng được $a\neq -3$.
Vậy nếu $a\neq -3$ thì $x=\dfrac{a-3}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

— Nếu $a=3$ thì (2) có dạng $0x=0$, nghiệm đúng với mọi x thỏa mãn điều kiện (1), tức là $x\neq -3$ và $x\neq a$ (do $a=3$ nên điều kiện này là $x\neq 3$).

Kết luận:
Nếu $a\neq \pm 3$ thì $S=\{\dfrac{a-3}{2}\}$.
Nếu $a=3$ thì $S=\{x|x\neq \pm 3\}$.
Nếu $a=-3$ thì $S=\emptyset$. □

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Giải các phương trình:

❶ $\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{3}{x^2-x-2}+1$;

❷ $\dfrac{x+6}{x-5}+\dfrac{x-5}{x+6}=\dfrac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30}$;

❸ $\dfrac{6}{x-5}+\dfrac{x+2}{x-8}=\dfrac{18}{(x-5)(8-x)}-1$;

❹ $\dfrac{x-4}{x-1}+\dfrac{x+4}{x+1}=2$;

❺ $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{9}{(x+1)(2-x)}$;

❻ $\dfrac{x^2-x}{x+3}-\dfrac{x^2}{x-3}=\dfrac{7x^2-3x}{9-x^2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ ĐKXĐ của phương trình là: $x\neq -1$, $x\neq 2$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}&(x+2)(x-2)+3(x+1)=3+(x+1)(x-2)\\ \Leftrightarrow\ &4x=2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

❷ ĐKXĐ của phương trình là: $x\neq -6$, $x\neq 5$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}&(x+6)^2+(x-5)^2=2x^2+23x+61\\ \Leftrightarrow\ &2x=23x\\ \Leftrightarrow\ &x=0.\end{aligned}$$

Vậy $S=\{0\}$.

❸ ĐKXĐ của phương trình là: $x\neq 8$, $x\neq 5$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}&6(x-8)+(x+2)(x-5)=-18-(x-5)(x-8)\\ \Leftrightarrow\ &2x^2-10x=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&x=0\\ &x=5\end{aligned}\right..\end{aligned}$$

Vì $x=5$ bị loại nên $S=\{0\}$.

❹ ĐKXĐ của phương trình là: $x\neq \pm 1$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}&(x-4)(x+1)+(x+4)(x-1)=2x^2-2\\ \Leftrightarrow\ &-2=0.\end{aligned}$$

Vậy $S=\emptyset$.

❺ ĐKXĐ của phương trình là: $x \neq -1$, $x \neq 2$.
Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}&3(x-2)-(x+1)=-9\\ \Leftrightarrow\ &2x=-2\\ \Leftrightarrow\ &x=-1.\end{aligned}$$

Vậy $S=\emptyset$.

❻ ĐKXĐ của phương trình là: $x \neq \pm 3$. Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}&(x^2-x)(x-3)-x^2(x+3)=-7x^2+3x\\ \Leftrightarrow\ &0=0.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác ± 3.

□

BÀI 2. Giải các phương trình sau:

❶ $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{x-1}{x^2-x+1}=\dfrac{3}{x(x^4+x^2+1)}$;

❷ $\dfrac{x+2}{x^2+2x+4}-\dfrac{x-2}{x^2-2x+4}=\dfrac{6}{x(x^4+4x^2+16)}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ ĐKXĐ của phương trình là $x \neq 0$.
Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}&(x+1)x(x^2-x+1)-(x-1)x(x^2+x+1)=3\\ \Leftrightarrow\ &2x=3\\ \Leftrightarrow\ &x=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

❷ ĐKXĐ của phương trình: $x \neq 0$.
Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}&x(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-2)(x^2+2x+4)=6\\ \Leftrightarrow\ &16x=6\\ \Leftrightarrow\ &x=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{3}{8}\right\}$.

□

BÀI 3. Giải phương trình sau:

$$\frac{1+a}{1-x}=1-a$$

trong đó a là hằng số.

✍ **LỜI GIẢI.**

ĐKXĐ của phương trình: $x \neq 1$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned} & 1 + a = (1 - a)(1 - x) \\ \Leftrightarrow\ & ax - x = 2a \\ \Leftrightarrow\ & x(a - 1) = 2a. \end{aligned}$$

Nếu $a = 1$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $a \neq 1$ thì $x = \dfrac{2a}{a-1}$.

Giá trị này là nghiệm của phương trình đã cho nếu:

$$\begin{aligned} & \frac{2a}{a-1} \neq 1 \\ \Leftrightarrow\ & 2a \neq a - 1 \\ \Leftrightarrow\ & a \neq -1. \end{aligned}$$

Kết luận:

Nếu $a = \pm 1$ thì $S = \emptyset$.

Nếu $a \neq \pm 1$ thì $S = \left\{\dfrac{2a}{a-1}\right\}$. □

BÀI 4. Giải các phương trình sau:

1. $\dfrac{x}{2a+x} + \dfrac{2a+x}{2a-x} = \dfrac{8a^2}{x^2-4a^2}$;
2. $\dfrac{2a-3b}{x-2a} + \dfrac{3b-2a}{x-3b} = 0$.

   trong đó a, b là các hằng số.

✍ **LỜI GIẢI.**

1. ĐKXĐ của phương trình là: $x \neq \pm 2a$.

   Biến đổi phương trình, ta được

   $$\begin{aligned} & x(2a - x) + (2a + x)^2 = -8a^2 \\ \Leftrightarrow\ & 12a^2 + 6ax = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 6ax = -12a^2. \end{aligned}$$

   Nếu $a = 0$ thì phương tình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác 0.

   Nếu $a \neq 0$ thì $x = \dfrac{-12a^2}{6a} = -2a$ (loại). Suy ra phương trình vô nghiệm.
2. ĐKXĐ của phương trình là: $x \neq 2a$, $x \neq 3b$.

   Biến đổi phương trình, ta được

   $$\begin{aligned} & (2a - 3b)(x - 3b) - (2a - 3b)(x - 2a) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2a - 3b)(x - 3b) = (2a - 3b)(x - 2a). \end{aligned}$$

   Nếu $2a = 3b$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác $2a$.

   Nếu $2a \neq 3b$ thì $x - 3b = x - 2a \Leftrightarrow\ 3b = 2a$. Suy ra phương trình vô nghiệm.

□

BÀI 5. Giải các phương trình sau:

❶ $\dfrac{x-a+1}{x-a}-\dfrac{x-b+1}{x-b}=\dfrac{a}{(x-a)(x-b)}$;

❷ $\dfrac{a}{x+a}=\dfrac{a-1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$.

trong đó a, b là các hằng số.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ ĐKXĐ của phương trình là $x \neq a$, $x \neq b$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}&(x-a+1)(x-b)-(x-b+1)(x-a)=a\\ \Leftrightarrow\ &-b+a=a\\ \Leftrightarrow\ &b=0.\end{aligned}$$

Kết luận: Nếu $b=0$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác a và 0.

Nếu $b \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

❷ ĐKXĐ của phương trình là $x \neq -a$, $x \neq \pm 1$. Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}&a(x^2-1)=(a-1)(x+1)(x+a)+(x+a)(x-1)\\ \Leftrightarrow\ &a^2x+a^2-2x+ax-a=0\\ \Leftrightarrow\ &x(a-1)(a+2)=a(1-a)\\ \Leftrightarrow\ &x(a-1)(a+2)=(a-1)(-a).\end{aligned}$$

Nếu $a=1$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác ± 1.

Nếu $a=-2$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $a \neq 1$ và $a \neq -2$ thì $x(a+2)=-a \Leftrightarrow\ x=\dfrac{-a}{a+2}$.

Để $x=\dfrac{-a}{a+2}$ là nghiệm của phương trình thì

$$\begin{cases}\dfrac{-a}{a+2}\neq 1\\ \dfrac{-a}{a+2}\neq -1\\ \dfrac{-a}{a+2}\neq -a\end{cases}$$

Giải ra ta được $a \neq -1$, $a \neq 0$.

Kết luận: Nếu $a=1$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác ± 1.

Nếu $a=-2$, $a=-1$ hoặc $a=0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $a \neq 1, a \neq -2, a \neq -1, a \neq 0$ thì $S=\left\{\dfrac{-a}{a+2}\right\}$.

□

BÀI 6. Giải các phương trình sau:

❶ $\dfrac{1}{a+b-x}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{x}$;

❷ $\dfrac{2}{a(b-x)} - \dfrac{2}{b(b-x)} = \dfrac{1}{a(c-x)} - \dfrac{1}{b(c-x)}$.
trong đó a, b, c là các hằng số, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ ĐKXĐ của phương trình là $x \neq 0$, $x \neq a+b$. Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned} & abx = bx(a+b-x) + ax(a+b-x) - ab(a+b-x) \\ \Leftrightarrow\ & (-a-b)x^2 + (a^2+2ab+b^2)x = a^2b + ab^2 \\ \Leftrightarrow\ & (-a-b)x^2 + (-a-b)^2x = -ab(-a-b). \end{aligned}$$

Nếu $-a-b = 0 \Leftrightarrow a = -b$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác 0.
Nếu $-a-b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -b$ thì phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & x^2 + (-a-b)x = -ab \\ \Leftrightarrow\ & (x-a)(x-b) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = b \end{array}\right. \end{aligned}$$

Để $x = a$ là nghiệm của phương trình thì $a \neq 0$ và $b \neq 0$.
Tương tự, để $x = b$ là nghiệm của phương trình thì $a \neq 0$ và $b \neq 0$.
Kết luận: Nếu $a = -b$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác 0.
Nếu $a = 0$ hoặc $b = 0$ thì $S = \emptyset$.
Nếu $a \neq -b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ thì $S = \{a, b\}$.

❷ ĐKXĐ của phương trình là $x \neq b$, $x \neq c$. Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned} & 2b(c-x) - 2a(c-x) = b(b-x) - a(b-x) \\ \Leftrightarrow\ & 2(b-a)(c-x) = (b-a)(b-x) \end{aligned}$$

Nếu $b - a = 0 \Leftrightarrow a = b$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác b, c.
Nếu $b - a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b$ thì phương trình trở thành

$$2(c-x) = b - x \Leftrightarrow\ x = 2c - b.$$

Để $x = 2c - b$ là nghiệm của phương trình thì $\begin{cases} 2c - b \neq b \\ 2c - b \neq c \end{cases} \Leftrightarrow\ c \neq b$
Kết luận: Nếu $a = b$ thì phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác b, c.
Nếu $c = b$ thì $S = \emptyset$.
Nếu $a \neq b$ và $c \neq b$ thì $S = \{2c - b\}$.

□

BÀI 7. Giải phương trình sau:

$$\frac{1}{(x+a)^2 - 1} + \frac{1}{(x+1)^2 - a^2} = \frac{1}{x^2 - (a+1)^2} + \frac{1}{x^2 - (a-1)^2}$$

trong đó a là hằng số.

✍ **LỜI GIẢI.**

ĐKXĐ của phương trình là $x \neq \pm(a-1)$, $x \neq \pm(a+1)$.
Biến đổi phương trình, ta được

$$\frac{1}{(x+a+1)(x+a-1)} + \frac{1}{(x+1-a)(x+1+a)} = \frac{1}{(x+a+1)(x-a-1)} + \frac{1}{(x-a+1)(x+a-1)}$$
$\Rightarrow (x+1-a)(x-a-1)+(x+a-1)(x-a-1) = (x+a-1)(x-a+1)+(x+a+1)(x-a-1)$
$\Leftrightarrow -2ax-2x = -2a^2-2$
$\Leftrightarrow x(a+1) = a^2+1.$

Nếu $a=-1$ thì phương trình vô nghiệm.
Nếu $a \neq -1$ thì $x = \dfrac{a^2+1}{a+1}$.
Để $x = \dfrac{a^2+1}{a+1}$ là nghiệm của phương trình thì

$$\begin{cases} \dfrac{a^2+1}{a+1} \neq -a-1 \\ \dfrac{a^2+1}{a+1} \neq a+1 \\ \dfrac{a^2+1}{a+1} \neq -a+1 \\ \dfrac{a^2+1}{a+1} \neq a-1 \end{cases}$$

Giải ra ta được $a \neq 0$.
Kết luận: Nếu $a=-1$ hoặc $a=0$ thì phương trình vô nghiệm.
Nếu $a \neq -1$ và $a \neq 0$ thì $S = \left\{\dfrac{a^2+1}{a+1}\right\}$. □

BÀI 8. Chứng minh phương trình sau có ba nghiệm phân biệt:

$$\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}$$

trong đó a, b là hằng số, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a+b \neq 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

ĐKXĐ của phương trình là $x \neq a$, $x \neq b$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}
&\frac{x-a}{b}-\frac{b}{x-a}+\frac{x-b}{a}-\frac{a}{x-b}=0\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(x-a)^2-b^2}{bx-ba}+\frac{(x-b)^2-a^2}{ax-ab}=0\\
\Leftrightarrow\ &(x-a-b)\left(\frac{x-a+b}{bx-ab}+\frac{x-b+a}{ax-ab}\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=a+b\\(a+b)x^2-(a^2+b^2)x=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=a+b\\x=0\\x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\end{array}\right..
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm phân biệt là $S=\left\{a+b;\ 0;\ \dfrac{a^2+b^2}{a+b}\right\}$. □

BÀI 9. Giải phương trình sau:

$$\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=1.$$

trong đó a,b,c là các hằng số và khác nhau đôi một.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $x=c$ không phải là nghiệm của phương trình, do đó xét $x\neq c$.

$$\begin{aligned}
&\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=1\\
\Leftrightarrow\ &\frac{x-c}{b-a}\left(\frac{x-a}{b-c}-\frac{x-b}{a+c}\right)=1\\
\Leftrightarrow\ &\frac{x-a}{b-c}-\frac{x-b}{a-c}=\frac{b-a}{x-c}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(x-a)(a-c)-(x-b)(b-c)}{(b-c)(a-c)}=\frac{b-a}{x-c}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{x-(a+b)+c}{(b-c)(a-c)}=\frac{-1}{x-c}\\
\Rightarrow\ &(x-a-b+c)(x-c)=-(b-c)(a-c)\\
\Leftrightarrow\ &(x-a)(x-b)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=a\\x=b.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Kết luận: $S=\{a;\ b\}$. □

BÀI 4 GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Bước 1. Lập phương trình

— Chọn ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn.

— Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.

— Lập phương trình biểu thị sự tương quan của các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. Chọn kết quả thích hợp và trả lời.

VÍ DỤ 1. Vào thế kỷ thứ *III* trước công nguyên, vua xứ Xi-ra-cút giao cho Ac-si-met kiểm tra xem chiếc mũ bằng vàng của mình có pha thêm bạc hay không. Chiếc mũ có trọng lượng 5 niutơn (theo đơn vị hiện nay), khi nhúng ngập trong nước thì trọng lượng giảm đi 0,3 niutơn. Biết rằng khi cân trong nước, vàng giảm $\dfrac{1}{20}$ trọng lượng, bạc giảm $\dfrac{1}{10}$ trọng lượng. Hỏi chiếc mũ chứa bao nhiêu gam bạc? (vật có khối lượng 100 gam thì trọng lượng bằng 1 niutơn).

✍ LỜI GIẢI.

Gọi trọng lượng bạc trong mũ là x (niutơn) $(0 < x < 5)$. Trọng lượng vàng trong mũ là $5 - x$ (niutơn). Khi nhúng ngập trong nước, trọng lượng bạc giảm $\dfrac{x}{10}$ (niutơn), trọng lượng vàng giảm $\dfrac{5-x}{10}$ (niutơn). Ta có phương trình

$$\frac{x}{10} + \frac{5-x}{20} = 0{,}3$$
$$x = 1$$

Trọng lượng bạc trong mũ là 1 niutơn. Chiếc mũ chứa 100 gam bạc. □

⚠ *Khi giải toán bằng cách lập phương trình, ngoài ẩn đã chọn, đôi khi người ta còn biểu thị những đại lượng chưa biết khác bằng chữ. Điều lý thú là các chữ đó tuy tham gia vào quá trình giải bài toán nhưng chúng lại không có mặt trong đáp số của bài toán. Ta xét ví dụ dưới đây:*

VÍ DỤ 2. Một người đi một nửa quãng đường AB với vận tốc 20 km/h, và đi phần còn lại với vận tốc 30 km/h. Tính vận tốc trung bình của người đó trên toàn bộ quãng đường.

✍ LỜI GIẢI.

Gọi vận tốc trung bình phải tìm là x (km/h), $(x > 0)$. Ta biểu thị một nửa quãng đường AB là a km $(a > 0)$. Thời gian người đó đi nửa đầu của quãng đường là $\dfrac{a}{20}$ giờ, thời gian đi nửa quãng đường là $\dfrac{a}{30}$ giờ.

Ta có phương trình

$$\frac{a}{20} + \frac{a}{30} = \frac{2a}{x}.$$

Giải phương trình trên, ta được

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{2}{x}$$
$$x=24$$

Vận tốc trung bình là 24 km/h.

Lưu ý:

❶ Nếu vận tốc trên nửa đầu của quãng đường là a km/h, vận tốc trên nửa sau là b km/h thì vận tốc trung bình trên cả quãng đường bằng $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ km/h.

Đại lượng này được gọi là trung bình điều hòa của a và b.

❷ Trung bình điều hào của hai số dương a và b nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của hai số ấy. Thật vậy

$$\frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}\le\frac{a+b}{2} \text{ vì } 4ab\le(a+b)^2.$$

□

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Hỡi khách qua đường, cho hay Đi-ô-phăng thọ bao nhiêu tuổi?

Biết thời thơ ấu của ông chiếm $\frac{1}{6}$ cuộc đời.

$\frac{1}{12}$ cuộc đời tiếp theo là thời thanh niên sôi nổi.

Đến khi lập gia đình thì lại thêm $\frac{1}{7}$ cuộc đời.

5 năm nữa trôi qua, và một cậu con trai đã được sinh ra.

Nhưng số mệnh buộc con chỉ sống bằng nửa đời cha.

Ông đã từ trần 4 năm sau khi con mất.

Đi-ô-phăng thọ bao nhiêu hãy tính cho ra?

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi số tuổi của Đi-ô-phăng là x, $(x>0)$. Khi đó, ta có phương trình:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

Giải ra ta được $x=84$. vậy Đi-ô-phăng thọ 84 tuổi. □

BÀI 2. Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 1 vào đằng trước và một chữ số 1 vào đằng sau thì số đó tăng gấp 21 lần.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi số tự nhiên có bốn chữ số là $x=\overline{abcd}$, $(x>0)$. Sau khi thêm chữ số 1 vào đằng trước và chữ số 1 vào đằng sau thì số mới là: $\overline{1abcd1}$, có giá trị là $100001+10\cdot\overline{abcd}=100001+10x$.

Theo đề bài ta có phương trình

$$100001+10x=21x.$$

Giải ra ta được $x=9091$. Vậy số cần tìm là 9091. □

BÀI 3. Tìm một số tự nhiên có sáu chữ số, biết rằng chữ số tận cùng của nó bằng 4 và nếu chuyển chữ số 4 đó lên vị trí chữ số đầu tiên thì số phải tìm tăng gấp 4 lần.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi số tự nhiên có sáu chữ số cần tìm là $x = \overline{abcde4}$, $(x > 0)$. Sau khi chuyển chữ số 4 lên vị trí đầu tiên, ta được số mới là $\overline{4abcde}$ có giá trị là $\dfrac{\overline{abcde4} - 4}{10} + 400000 = \dfrac{x-4}{10} + 400000$.

Theo đề bài ta có phương trình

$$\frac{x-4}{10} + 400000 = 4x.$$

Giải ra ta được $x = 102564$. Vậy số tự nhiên cần tìm là 102564. □

BÀI 4. Tính tuổi của hai mẹ con hiện nay, biết rằng cách đây 4 năm thì tuổi mẹ gấp 5 lần tuổi con, sau đấy 2 năm thì tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi con.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi số tuổi của mẹ hiện nay là x, $(x > 0)$. Cách đây 4 năm, số tuổi của mẹ là $x - 4$.

Theo đề bài, ta có tuổi của con 4 năm trước là $\dfrac{x-4}{5}$. Số tuổi của con sau 2 năm nữa (đối với hiện tại) là $\dfrac{x-4}{5} + 4 + 2$ và số tuổi của mẹ sau 2 năm nữa (đối với hiện tại) là $x + 2$.

Theo đề bài, ta lại có

$$\frac{x-4}{5} + 4 + 2 = \frac{x+2}{3}$$

Giải ra ta được $x = 34$. Vậy tuổi của mẹ là 34 và tuổi của con là 10. □

BÀI 5. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 320 m. Nếu tăng chiều dài 10 m, tăng chiều rộng 20 m thì diện tích tăng 2700 m^2. Tính độ dài mỗi chiều.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m), $(160 > x > 0)$ từ đó suy ra chiều rộng là $\dfrac{320}{2} - x = 160 - x$.

Sau khi tăng chiều dài và chiều rộng, diện tích của hình chữ nhật mới là $(x + 10)(160 - x + 20)$.

Theo đề bài ta có

$$(x + 10)(160 - x + 20) = x(160 - x) + 2700.$$

Giải ra ta được $x = 90$. Vậy chiều dài hình chữ nhật là 90 m, chiều rộng hình chữ nhật là 70 m. □

BÀI 6. Một ca nô tuần tra đi xuôi khúc sông từ A đến B hết 1 giờ 10 phút và đi ngược dòng từ B về A hết 1 giờ 30 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết rằng vận tốc dòng nước là 2 km/h.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x(km/h),$(x > 0)$, suy ra vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $x + 2$, khi ngược dòng là $x - 2$.

Đổi đơn vị: 1 giờ 10 phút $= \dfrac{7}{6}$ giờ, 1 giờ 30 phút $= \dfrac{3}{2}$ giờ.

Vì quãng đường đi và về là như nhau nên ta có

$$\frac{7}{6}(x + 2) = \frac{3}{2}(x - 2).$$

Giải ra ta được $x = 16$. Vậy vận tốc riêng của ca nô là 16 km/h. □

BÀI 7. Một người đi từ A đến B với vận tốc 24 km/h rồi đi tiếp từ B đến C với vận tốc 32 km/h. Tính quãng đường AB và BC, biết rằng quãng đường AB dài hơn quãng đường BC là 6 km và vận tốc trung bình của người đó trên cả quãng đường AC là 27 km/h.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi quãng đường AB là x (km) $(x > 6)$.

Quãng đường BC là $x - 6$.

Thời gian người đó đi hết đoạn đường AB là $\dfrac{x}{24}$, thời gian đi hết đoạn đường BC là $\dfrac{x-6}{32}$, thời gian đi hết đoạn đường AC là $\dfrac{x+x-6}{27}$. Theo đề bài ta có phương trình

$$\frac{x+x-6}{27} = \frac{x}{24} + \frac{x-6}{32}.$$

Giải ra ta được $x = 30$. Vậy quãng đường AB dài 30 km, quãng đường BC dài 24 km. □

BÀI 8. Quãng đường từ A đến B gồm đoạn lên dốc AC, đoạn nằm ngang CD, đoạn xuống dốc DB, tổng cộng dài 30 km. Một người đi từ A đến B rồi từ B về A hết tất cả 4 giờ 25 phút. Tính quãng đường nằm ngang, biết rằng vận tốc lên dốc (cả lúc đi lẫn lúc về) là 10 km/h, vận tốc xuống dốc (cả lúc đi lẫn lúc về) là 20 km/h, vận tốc trên đường nằm ngang là 15 km/h.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi độ dài quãng đường AC, CD, DB lần lượt là a, x, b (km), $(a, x, b > 0)$.

Xét lúc đi từ A đến B, thời gian người đó đi lên dốc AC là $\dfrac{a}{10}$, đi trên đoạn nằm ngang CD là $\dfrac{x}{15}$, đi xuống dốc DB là $\dfrac{b}{20}$.

Xét lúc đi từ B về A thời gian người đó đi lên dốc DB là $\dfrac{b}{10}$, đi trên đoạn nằm ngang CD là $\dfrac{x}{15}$, đi xuống dốc AC là $\dfrac{a}{20}$.

Đổi đơn vị 4 giờ 25 phút $= \dfrac{53}{12}$.

Thời gian đi từ A đến B trở về A là

$$\begin{aligned} & \frac{a}{10} + \frac{x}{15} + \frac{b}{20} + \frac{b}{10} + \frac{x}{15} + \frac{a}{20} = \frac{53}{12} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a+b}{10} + \frac{a+b}{20} + \frac{2x}{15} = \frac{53}{12} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{30-x}{10} + \frac{30-x}{20} + \frac{2x}{15} = \frac{53}{12}. \end{aligned}$$

Giải ra ta được $x = 5$. Vậy độ dài quãng đường nằm ngang là 5 km. □

BÀI 9. Lúc 8 giờ, An rời nhà mình để đến nhà Bích với vận tốc 4 km/h. lúc 8 giờ 20 phút, Bích cũng rời nhà mình đến nhà An với vận tốc 3 km/h. An gặp Bích trên đường, rồi cả hai cùng đi về nhà Bích. Khi trở về đến nhà mình, An tính ra quãng đường mình đã đi dài gấp bốn lần quãng đường Bích đã đi. Tính khoảng cách An đến nhà Bích.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi quãng đường từ nhà An đến nhà Bích là x (km), $(x > 0)$.

Vì An đến nhà Bích, rồi quay trở về lại nhà mình, nên quãng đường An đã đi là $2x$. Suy ra quãng đường Bích đi là $\dfrac{x}{2}$ và quãng đường Bích đi từ nhà mình đến nơi hai người gặp nhau là $\dfrac{x}{4}$.

Do đó, quãng đường An đi từ nhà mình đến nơi hai người gặp nhau là $\dfrac{3x}{4}$.

Thời gian An đi từ nhà mình đến nơi hai người gặp nhau $\dfrac{\frac{3x}{4}}{4}$.

Thời gian Bích đi từ nhà mình đến nơi hai người gặp nhau $\dfrac{\frac{x}{4}}{3}$.
An đi sớm hơn Bích 20 phút $= \dfrac{1}{3}$ giờ nên ta có phương trình

$$\frac{\frac{3x}{4}}{4} = \frac{\frac{x}{4}}{3} + \frac{1}{3}$$

Giải ra ta được $x = 3{,}2$. Vậy quãng đường từ nhà An đến nhà Bích dài 3,2 km. □

BÀI 10. Một người đi xe đạp, một người đi xe máy và một người đi ô tô cùng đi từ A đến B, khởi hành lần lượt lúc 7 giờ, 8 giờ, 9 giờ với vận tốc theo thứ tự bằng 10 km/h, 30 km/h và 50 km/h. Đến mấy giờ thì ô tô ở vị trí cách đều xe đạp và xe máy.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi x là thời gian xe đạp đi, $(x > 2)$. Suy ra thời gian xe máy và ô tô đi lần lượt là $x - 1$ và $x - 2$.
Quãng đường xe đạp, xe máy, xe ô tô đi được lần lượt là $10x$, $30(x - 1)$, $50(x - 2)$.
Ta xét thời điểm mà xe ô tô cách đều xe đạp và xe máy, tức là:

$$|50(x-2) - 10x| = |50(x-2) - 30(x-1)|.$$

Trường hợp 1: $50(x-2) - 10x = 50(x-2) - 30(x-1)$. Giải ra ta được $x = 1{,}5$ (loại).
Trường hợp 2: $50(x-2) - 10x = -50(x-2) + 30(x-1)$. Giải ra ta được $x = \dfrac{17}{6}$.
Đổi đơn vị $\dfrac{17}{6}$ giờ $= 2$ giờ 50 phút.
Vậy vào lúc 9 giờ 50 phút, xe ô tô ở vị trí cách đều xe đạp và xe máy. □

BÀI 11. Người ta pha 3 kg nước nóng ở 90^o C với 2 kg nước lạnh ở 20^oC. Tính nhiệt độ sau cùng của nước (bỏ qua sự mất nhiệt).

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi nhiệt độ sau cùng của nước là x (độ), $(20 < x < 90)$, nhiệt dung riêng của nước là c.
Nhiệt lượng 3 kg nước nóng tỏa ra để giảm xuống còn x độ là: $Q_1 = 3c(90 - x)$.
Nhiệt lượng 2 kg nước lạnh thu vào để tăng lên x độ là: $Q_2 = 2c(x - 20)$.
Áp dụng định luật cân bằng nhiệt lượng, ta có

$$3c(90 - x) = 2c(x - 20)$$

Giải ra ta được $x = 62$. Vậy nhiệt độ sau cùng của nước là 62^o C. □

BÀI 12. Có hai loại dung dịch muối I và muối II. Người ta hòa tan 200 gam dung dịch muối I và 300 gam dung dịch muối II thì được một dung dịch có nồng độ muối là 33%. Tính nồng độ muối trong mỗi dung dịch I và II, biết rằng nồng độ muối trong dung dịch I lớn hơn nồng độ muối trong dung dịch II là 20%.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi nồng độ muối trong dung dịch I là x, $(x > 0)$, suy ra nồng độ muối của dung dịch II là $x - 20\%$.
Khối lượng chất tan trong dung dịch I và II lần lượt là $200x$ và $300(x - 20\%)$.
Nồng độ muối trong dung dịch sau khi hòa tan hai dung dịch trên là $\dfrac{200x + 300(x - 20\%)}{200 + 300} = 33\%$.
Giải ra ta được $x = 0{,}45 = 45\%$. Vậy nồng độ muối trong dung dịch I và II lần lượt là 45% và 25%.
□

BÀI 13. Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 24 giờ. Nếu đội thứ nhất làm 10 giờ, đội thứ hai làm 15 giờ thì cả hai đội làm được một nửa công việc. Tính thời gian mỗi đội làm một mình để xong công việc.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi số giờ đội I làm xong công việc là x (giờ), $(x > 0)$. Suy ra 1 giờ đội đó làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc.

Sau 24 giờ, đội I làm được $\dfrac{24}{x}$ công việc.

Sau 24 giờ, đội II làm được $1 - \dfrac{24}{x}$ công việc.

Trong 1 giờ, đội II làm được $\dfrac{1-\dfrac{24}{x}}{24}$ công việc.

Theo đề bài ta có

$$10 \cdot \frac{1}{x} + 15 \cdot \frac{1-\dfrac{24}{x}}{24} = \frac{1}{2}.$$

Giải ra ta được $x = 40$. Từ đó suy ra đội I hoàn thành công việc trong 40 giờ, đội II hoàn thành công việc trong 60 giờ. □

BÀI 14. Cho n số nguyên dương (không nhất thiết khác nhau) trong đó có số 68. Trung bình cộng của n số đó bằng 56. Khi bỏ số 68 đó đi thì trung bình cộng của $n - 1$ số còn lại bằng 55.

❶ Tìm n.

❷ Số lớn nhất trong n số đã cho có thể bằng bao nhiêu?

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Tổng của $n - 1$ số còn lại là $55(n - 1)$.
Trung bình cộng của cả n số là $\dfrac{55(n-1)+68}{n} = 56$.
Giải ra ta được $n = 13$.

❷ Có 13 số là a_1, a_2, a_3,..., a_{12}, 68.
Giả sử số lớn nhất là a_{12}, số này đạt lớn nhất có thể khi a_1,...,a_{11} đều đạt giá trị 1.
Ta có $1 + 1 + ... + 1 + a_{12} + 68 = 56 \cdot 13 = 728 \Leftrightarrow a_{12} = 728 - 11 - 68 = 649$.
Vậy số lớn nhất có thể là 649.

□

BÀI 15. Trong một buổi họp mặt giữa hai lớp 8A và 8B, có tất cả 50 học sinh tham gia. Các bạn lớp 8B tính số người quen ở lớp 8A và thấy rằng bạn Anh quen 11 bạn, ban Bắc quen 12 bạn, bạn Châu quen 13 bạn,... và cứ như vậy đến bạn cuối cùng là bạn Yến quen tất cả các bạn của lớp 8A. Tính số học sinh mỗi lớp tham gia họp mặt.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi số học sinh lớp 8B là x, $(x > 0)$. Số học sinh lớp 8A là $50 - x$.

Số người quen ở lớp 8A của các học sinh lớp 8B lần lượt là: 11, 12, 13,..., $50 - x$.

Lớp 8B có x học sinh, nên ta có phương trình

$$50 - x - 11 + 1 = x$$

Giải ra ta được $x = 20$.

Vậy lớp 8B có 20 học sinh, lớp 8A có 30 học sinh. □

BÀI 16. Một nông dân mang cam ra chợ, bán cho người khách thứ nhất $\frac{1}{2}$ số cam và thêm $\frac{1}{2}$ quả, bán cho người khách thứ hai $\frac{1}{2}$ số cam còn lại và thêm $\frac{1}{2}$ quả, bán cho người khách thứ ba $\frac{1}{2}$ số cam còn lại và thêm $\frac{1}{2}$ quả... Cứ tiếp tục như vậy cho đến khi người khách thứ sáu mua xong thì số cam vừa hết. Tính tổng số cam mà người nông dân đem bán.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi x là số cam ban đầu của người nông dân, $(x > 0)$.

Sau khi bán cho người thứ nhất, số cam còn lại là $x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{2}$.

Sau khi bán cho người thứ hai, số cam còn lại là $\frac{x-1}{2} - \frac{x-1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{x-3}{4}$.

Sau khi bán cho người thứ ba, số cam còn lại là $\frac{x-3}{4} - \frac{x-3}{8} - \frac{1}{2} = \frac{x-7}{8}$.

Sau khi bán cho người thứ tư, số cam còn lại là $\frac{x-7}{8} - \frac{x-7}{16} - \frac{1}{2} = \frac{x-15}{16}$.

Sau khi bán cho người thứ năm, số cam còn lại là $\frac{x-15}{16} - \frac{x-15}{32} - \frac{1}{2} = \frac{x-31}{32}$.

Sau khi bán cho người thứ sáu, số cam còn lại là $\frac{x-31}{32} - \frac{x-31}{64} - \frac{1}{2} = \frac{x-63}{64}$.

Sau khi bán cho người thứ sáu thì vừa hết số cam, có nghĩa là

$$\frac{x-63}{64} = 0 \Rightarrow \ x = 63.$$

Vậy số cam ban đầu người đó có là 63 quả. □

BÀI 17. Có ba cánh đồng cỏ như nhau, cỏ cũng luôn mọc đều như nhau trên toàn bộ mỗi cánh đồng. Biết rằng 9 con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm của cánh đồng I trong 2 tuần, 6 con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm của cánh đồng II trong 4 tuần.

— Tính xem trên mỗi cánh đồng, số cỏ mọc thêm trong một tuần bằng mấy phần của số cỏ có sẵn lúc đầu?

— Bao nhiêu con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm của cánh đồng III trong 6 tuần?

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Gọi lượng cỏ ba đầu là a, tỉ lệ cỏ mọc thêm trong một tuần so với lượng cỏ ba đầu là x, $(x > 0)$.
Lượng cỏ sau 2 tuần là $a + 2ax = a(1 + 2x)$.
Lượng cỏ 1 con bò ăn trong 1 tuần (dữ kiện 1) là $\frac{a(1+2x)}{18}$.
Lượng cỏ sau 4 tuần là $a + 4ax = a(1 + 4x)$.
Lượng cỏ 1 con bò ăn trong 1 tuần (dữ kiện 2) là $\frac{a(1+4x)}{24}$.
Ta có phương trình $\frac{a(1+2x)}{18} = \frac{a(1+4x)}{24} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.
Vậy tỉ lệ cỏ mọc thêm là $\frac{1}{4}$.

❷ Sau 6 tuần, lượng cỏ là $a(1 + 6x) = \frac{5}{2}a$.
Lượng cỏ 1 con bò ăn hết trong 6 tuần là $6 \cdot \frac{a}{24}(1 + 4 \cdot \frac{1}{4}) = \frac{a}{2}$.
Vậy số bò cần có để ăn hết lượng cỏ trên là $\frac{\frac{5}{2}a}{\frac{a}{2}} = 5$ (con).

□

BÀI 18. *Bài toán của Niu-tơn.* Một cánh đồng cỏ mọc dày như nhau, cỏ luôn mọc đều như nhau trên toàn bộ cánh đồng. Biết rằng 12 con bò ăn hết cỏ trên $\dfrac{10}{3}$ acrơ trong 4 tuần, 21 con bò ăn hết cỏ trên 10 acrơ trong 9 tuần. Hỏi bao nhiêu con bò ăn hết cỏ trên 24 acrơ trong 18 tuần (1 acrơ $= 4047\ m^2$).

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi tỉ lệ cỏ tăng so với lượng cỏ ban đầu là x, $(x > 0)$.

Sau 4 tuần, số cỏ trên $\dfrac{10}{3}$ acrơ là $\dfrac{10}{3} + \dfrac{10}{3}4x$.

Lượng cỏ 1 con ăn trong 1 tuần (dữ kiện 1) là $\dfrac{\dfrac{10}{3} + \dfrac{40}{3}x}{48}$.

Sau 9 tuần, số cỏ trên 10 acrơ là $10 + 90x$.

Lượng cỏ 1 con ăn trong 1 tuần (dữ kiện 2) là $\dfrac{10 + 90x}{21 \cdot 9}$.

Ta có phương trình $\dfrac{\dfrac{10}{3} + \dfrac{40}{3}x}{48} = \dfrac{10 + 90x}{21 \cdot 9} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{12}$.

Số cỏ trên 24 acrơ sau 18 tuần là $24 + 24 \cdot 18 \cdot \dfrac{1}{12} = 60$.

Lượng cỏ 1 con ăn trong 1 tuần là $\dfrac{5}{54}$ acrơ.

Lượng cỏ 1 con ăn trong 18 tuần là $18 \cdot \dfrac{5}{54} = \dfrac{5}{3}$ acrơ.

Số bò cần tìm là $\dfrac{60}{\dfrac{5}{3}} = 36$ (con). □

BÀI 19. Một khách du lịch đi từ A đến B nhận thấy cứ 15 phút lại gặp một xe buýt đi cùng chiều vượt qua, cứ 10 phút lại gặp một xe buýt chạy ngược lại. Biết rằng các xe buýt đều chạy với cùng một vận tốc, khởi hành sau những khoảng thời gian bằng nhau và không dừng lại trên đường (trên chiều từ A đến B cũng như trên chiều ngược lại). Hỏi cứ sau bao nhiêu phút thì các xe buýt lại lần lượt rời bến?

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi x là thời gian người đó đi từ A đến B, $(x > 0)$.

Số lần người đó gặp xe buýt cùng chiều và ngược chiều lần lượt là $\dfrac{x}{15}$, $\dfrac{x}{10}$.

Giả sử người đó đi từ A đến B rồi từ B trở về A, số xe buýt người đó gặp là $\dfrac{x}{15} + \dfrac{x}{10}$.

Thời gian người đó đi từ A đến B rồi từ B trở về A là $2x$.

Khoảng thời gian các xe buýt lần lượt rời bến là $\dfrac{2x}{\dfrac{x}{15} + \dfrac{x}{10}} = 12$ (phút). □

BÀI 20. Trên quãng đường AB của một thành phố, cứ 6 phút lại có một chiếc xe buýt theo chiều từ A đến B, và cũng cứ 6 phút lại có một chiếc xe buýt theo chiều ngược lại. Các xe này chuyển động đều với cùng vận tốc như nhau.

Một khách du lịch đi bộ từ A đến B nhận thấy cứ 5 phút lại gặp một xe đi về phía mình. Hỏi cứ bao nhiêu phút lại có một xe đi từ A vượt qua người đó?

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi x, y lần lượt là vận tốc của xe buýt và vị khách du lịch, $(x, y > 0)$.

Cứ 6 phút là có một chiếc xe buýt nên khoảng cách giữa hai chiếc xe là $6x$.

Vận tốc của xe đi từ A đến B đối với vị khách là $x - y$ và vận tốc của xe đi từ B về A đối với vị

khách là $x + y$.
Thời gian để xe đi từ B về A vượt qua vị khách là $\dfrac{6x}{x+y} = 5 \Leftrightarrow x = 5y$.
Thời gian để xe đi từ A đến B vượt qua vị khách là $\dfrac{6x}{x-y} = \dfrac{30y}{4y} = 7{,}5$ (phút). □

CHƯƠNG 4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

BÀI 1 LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG, PHÉP NHÂN

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Bất đẳng thức

Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ (hoặc $a < b$, $a \geq b$, $a \leq b$) là một bất đẳng thức.
Để chứng minh bất đẳng thức $a > b$, ta thường xét hiệu $a - b$ và chứng minh hiệu đó là số dương.
Các cách khác chứng minh bất đẳng thức được nêu trong chuyên đề *Bất đẳng thức*.

2. Một số tính chất

Tính chất 1. Tính bắc cầu:

$$a > b; b > c \Rightarrow a > c.$$

Tính chất 2. Cộng hai vế của bất đẳng thức với cùng một số:

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c.$$

Tính chất 3. Nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số:

$$a > b; c > 0 \Rightarrow ac > bc$$
$$a > b; c < 0 \Rightarrow ac < bc.$$

Các tính chất khác được nêu trong chuyên đề *Bất đẳng thức*.

B MỘT SỐ VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Chứng minh các bất đẳng thức:

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq 2xy.$$

✍ LỜI GIẢI.

— Xét hiệu

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{(x+y)^2}{2} &= \frac{2x^2 + 2y^2 - x^2 - 2xy - y^2}{2} \\ &= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{2} = \frac{(x-y)^2}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy $x^2+y^2 \geq \dfrac{(x+y)^2}{2}$. Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x=y$.

— Xét hiệu:

$$\frac{(x+y)^2}{2}-2xy=\frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{2}=\frac{(x-y)^2}{2}\geq 0.$$

Vậy $\dfrac{(x+y)^2}{2}\geq 2xy$. Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x=y$.

□

Nhận xét.

— *Bất đẳng thức* $x^2+y^2\geq \dfrac{(x+y)^2}{2}$ *cho liên hệ giữa tổng bình phương của hai số* x, y *và bình phương của tổng hai số đó.*

— *Bất đẳng thức* $\dfrac{(x+y)^2}{2}\geq 2xy$ *hay* $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2\geq xy$ *cho liên hệ giữa tổng hai số* x, y *và tích của hai số đó. Với* x, y *không âm, bất đẳng thức này được viết dưới dạng* $\dfrac{x+y}{2}\geq$ *(trung bình cộng hai số lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng), đó là bất đẳng thức Cô-si với hai số không âm.*

VÍ DỤ 2. Chứng minh các bất đẳng thức:

1. $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ với $x>0$;
2. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}$ với $a>0$, $b>0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

1. Xét hiệu:

$$x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{2}=\frac{(x-1)^2}{2}\geq 0,\ \text{vì } (x-1)^2\geq 0,\ x>0.$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x=1$.

2. Xét hiệu:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}&=\frac{b(a+b)+a(a+b)-4ab}{ab(a+b)}\\&=\frac{a^2-2ab+b^2}{ab(a+b)}\\&=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\geq 0,\ \text{vì } a,b>0.\end{aligned}$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b$.

Nhận xét.

— *Bất đẳng thức* $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ *(với* $x>0$*) cho liên hệ giữa một số dương với nghịch đảo của nó.*

— *Bất đẳng thức* $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}$ *với* $a>0$, $b>0$ *cho liên hệ giữa tổng các nghịch đảo của hai số dương và nghịch đảo của tổng hai số đó.*

□

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $4x^2+4x+5>0$; b) $x^2-x+1>0$; c) $x^2+ab+b^2\geq 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $4x^2+4x+5=(2x+1)^2+4>0$.

❷ $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$.

❸ $a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3b^2}{4}\geq 0$.

□

BÀI 2. Chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{x-x^2+1}{x-x^2-1}<1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét hiệu
$$\frac{x-x^2+1}{x-x^2-1}-1=\frac{-2}{x^2-x+1}<0,$$
(vì $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$). Do đó $\dfrac{x-x^2+1}{x-x^2-1}<1$. □

BÀI 3. Rút gọn rồi chứng minh rằng biểu thức sau không âm với mọi giá trị của x:
$$\frac{x^4+x^3+x+1}{x^4-x^3+2x^2-x+1}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có
$$\frac{x^4+x^3+x+1}{x^4-x^3+2x^2-x+1}=\frac{(x+1)^2(x^2-x+1)}{(x^2+1)(x^2-x+1)}=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\geq 0.$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=-1$. □

BÀI 4. Chứng minh các bất đẳng thức:

❶ $a^3+b^3\geq ab(a+b)$ với $a,b>0$;

❷ $a^4+b^4\geq ab\left(a^2+b^2\right)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xét hiệu
$$a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a-b)^2\geq 0 \text{ (do } a,b>0).$$
Do đó $a^3+b^3\geq ab(a+b)$ với $a,b>0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

❷ Xét hiệu
$$a^4+b^4-ab(a^2+b^2)=a^3(a-b)-b^3(a-b)=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)\geq 0.$$
Do đó $a^4+b^4\geq ab\left(a^2+b^2\right)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

□

BÀI 5. Chứng minh các bất đẳng thức:

❶ $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right) \geq (ax+by)^2$
(bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki với hai cặp số a, b và x, y).

❷ $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq (ax+by+cz)^2$
(bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki với hai bộ ba số số a, b, c và x, y, z).

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned}&\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)-(ax+by)^2\\=&\,a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2\\=&\,(ay-bx)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $ay = bx$.

❷ Ta có

$$\begin{aligned}&\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq (ax+by+cz)^2\\=&\,(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $ay = bx$, $az = cx$, $bz = cy$.

□

BÀI 6. Cho a và b cùng dấu. Chứng minh rằng

a) Nếu $a > b$ thì $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$;

b) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geq 2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<0$$

(vì $b-a<0$, $ab>0$). Do đó $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.

❷ Ta có

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$$

(vì $ab>0$). Do đó $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geq 2$ với $ab > 0$.

□

BÀI 7. Gọi $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ là trung bình điều hòa của a và b. Chứng minh rằng trung bình điều hòa của hai số dương a và b nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của hai số ấy.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\frac{a+b}{2}-\frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \geq 0$$

(vì $a, b > 0$). Do đó $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \leq \dfrac{a+b}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. □

BÀI 8. Chứng minh các bất đẳng thức:

❶ $2\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2$;

❷ $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có
$$2\left(a^2+b^2\right)-(a+b)^2 = a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \geq 0.$$
Do đó $2\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

❷ Ta có
$$\begin{aligned}
&3\left(a^2+b^2+c^2\right)-(a+b+c)^2\\
=&\,3\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)\\
=&\,(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0\\
\Rightarrow&\,3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq (a+b+c)^2. \qquad (1)
\end{aligned}$$
Ta có
$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\\
=&\,\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)-3(ab+bc+ca)\\
=&\,(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0\\
\Rightarrow&\,(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca). \qquad (2)
\end{aligned}$$
Từ (1) và (2) ta có $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

□

BÀI 9. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$;

b) $\dfrac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4$;

c) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có
$$\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{2(a^2+b^2)-(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0.$$
Do đó $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

❷ Áp dụng câu a) hai lần ta có
$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^4.$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

❸ Ta có

$$\begin{aligned}&\frac{a^2+b^2+c^2}{3}-\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\\=&\frac{3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2}{9}\\=&\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{9}\geq 0.\end{aligned}$$

Do đó $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

□

BÀI 2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Khái niệm về bất phương trình bậc nhất một ẩn

Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có dạng $ax+b>0$ (hoặc $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b\leq 0$), trong đó x là ẩn, a và b là các số đã cho, $a\neq 0$.

2. Hai bất phương trình tương đương

Hai bất phương trình được gọ là tương đương nếu chúng có cùng một tập nghiệm.

3. Một số chú ý khi giải một bất phương trình

Khi giải một bất phương trình, ta có thể:

— Chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.

— Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số dương.

— Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số âm và đổi chiều của bất phương trình.

B CÁC DẠNG TOÁN

VÍ DỤ 1. Giải bất phương trình với m là hằng:

$$mx+1\geq m^2+x.$$

LỜI GIẢI.

Biến đổi tương đương

$$mx+1\geq m^2+x\Leftrightarrow mx-x\geq m^2-1\Leftrightarrow (m-1)x\geq m^2-1. \tag{1}$$

— Nếu $m>1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x\geq m+1$.

— Nếu $m<1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x\leq m+1$.

— Nếu $m=1$ thì (1) có dạng $0x\geq 0$: nghiệm của bất phương trình là mọi x.

□

VÍ DỤ 2. Giải bất phương trình với a là hằng:

$$\frac{x+1}{a}+ax>\frac{x+2}{a}-2x.$$

LỜI GIẢI.

Điều kiện xác định của bất phương trình là $a \neq 0$. Biến đổi bất phương trình:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{a}+ax>\frac{x+2}{a}-2x &\Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{1}{a}+ax>\frac{x}{a}+\frac{2}{a}-2x\\ &\Leftrightarrow ax+2x>\frac{2}{a}-\frac{1}{a}\\ &\Leftrightarrow (a+2)x>\frac{1}{a}. \qquad (1)\end{aligned}$$

— Nếu $a>-2$, $a\neq 0$ thì nghiệm của bất phương trình là $x>\dfrac{1}{a(a+2)}$.

— Nếu $a<-2$ thì nghiệm của bất phương trình là $x<\dfrac{1}{a(a+2)}$.

— Nếu $a=-2$ thì (1) có dạng $0x>-\dfrac{1}{2}$, nghiệm đúng với mọi x.

□

VÍ DỤ 3. Kí hiệu $[a]$ (phần nguyên của a) là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Tìm x biết rằng

$$\left[\frac{3x-5}{7}\right]=x.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Theo đề bài, x là số nguyên lớn nhất không vượt quá $\dfrac{3x-5}{7}$. Do đó

$$\left[\frac{3x-5}{7}\right]=x \Leftrightarrow \begin{cases}0\leq \dfrac{3x-5}{7}-x<1, & (1)\\ x\in\mathbb{Z}. & (2)\end{cases}$$

Giải bất phương trình (1):

$$\begin{aligned}0\leq \frac{3x-5}{7}-x\leq 1 &\Leftrightarrow 0\leq\frac{-4x-5}{7}<1\Leftrightarrow 0\leq -4x-5<7\\ &\Leftrightarrow 5\leq -4x<12\Leftrightarrow -\frac{5}{4}\geq x>-3.\end{aligned}$$

Theo (2), $x\in\mathbb{Z}$, do đó $x=-2$. □

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Tìm giá trị của x thỏa mãn cả hai bất phương trình:

$$\frac{2x}{5}+\frac{3-2x}{3}\geq\frac{3x+2}{2} \text{ và } \frac{x}{2}+\frac{3-2x}{5}\geq\frac{3x-5}{6}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\frac{2x}{5}+\frac{3-2x}{3}\geq\frac{3x+2}{2}\Leftrightarrow 12x+10(3-2x)\geq 15(3x+2)\Leftrightarrow x\leq 0. \qquad (1)$$

Mặt khác

$$\frac{x}{2}+\frac{3-2x}{5}\geq\frac{3x-5}{6}\Leftrightarrow 15x+6(3-2x)\geq 5(3x-5)\Leftrightarrow x\leq\frac{43}{12}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $x\leq 0$. □

BÀI 2. Tìm số nguyên x thỏa mãn cả hai bất phương trình:

$$\frac{3x-2}{5} \geq \frac{x}{2} + 0{,}8 \text{ và } 1 - \frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\frac{3x-2}{5} \geq \frac{x}{2} + 0{,}8 \Leftrightarrow 2(3x-2) \geq 5x+8 \Leftrightarrow x \geq 12. \quad (1)$$

Mặt khác

$$1 - \frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4} \Leftrightarrow 12 - 2(2x-5) > 3(3-x) \Leftrightarrow x < 13. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $-12 \leq x < 13$. Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 12$. □

BÀI 3. Tìm số nguyên x thỏa mãn cả hai bất phương trình:

$$2(3x-4) < 3(4x-3) + 16 \text{ và } 4(1+x) < 3x+5.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$2(3x-4) < 3(4x-3) + 16 \Leftrightarrow 6x - 8 < 12x + 7 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}. \quad (1)$$

Mặt khác

$$4(1+x) < 3x+5 \Leftrightarrow 4x+4 < 3x+5 \Leftrightarrow x < 1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $-\frac{5}{2} < x < 1$. Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-2; -1; 0\}$. □

BÀI 4. Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2}\right) : \frac{1-2x}{x^2-1}.$$

❶ Rút gọn biểu thức A.

❷ Tìm x để $A > 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2}\right) : \frac{1-2x}{x^2-1} \\ &= \frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^2}{2x-1} \\ &= \frac{-2}{2x-1}, \end{aligned}$$

với $x \neq \frac{1}{2}$ và $x \neq \pm 1$.

❷ $A > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2}{2x-1} > 0 \\ x \neq \dfrac{1}{2}; x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \neq x < \frac{1}{2}.$

□

BÀI 5. Cho biểu thức
$$B=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{x^2-3x}\right):\left(\frac{x^2}{27-3x^2}+\frac{1}{x+3}\right).$$

❶ Rút gọn biểu thức B.

❷ Tìm x để $B<-1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned}B&=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{x^2-3x}\right):\left(\frac{x^2}{27-3x^2}+\frac{1}{x+3}\right)\\&=\left(\frac{x^2-3x+9}{3(x^2-3x)}\right):\left(\frac{x^2}{3(3-x)(3+x)}+\frac{3(3-x)}{3(3-x)(3+x)}\right)\\&=\frac{x^2-3x+9}{3x(x-3)}\cdot\frac{3(3-x)(3+x)}{x^2-3x+9}\\&=-\frac{x+3}{x},\end{aligned}$$

với $x\neq 0; x\neq \pm 3$.

❷ $B<-1 \Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{x+3}{x}>-1\\ x\neq 0; x\neq\pm 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{-3}{x}<0\\ x\neq\pm 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x>0,\\ x\neq 3.\end{cases}$

□

BÀI 6. Giải bất phương trình

$$\frac{x+2}{89}+\frac{x+5}{86}>\frac{x+8}{83}+\frac{x+11}{80}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{89}+\frac{x+5}{86}>\frac{x+8}{83}+\frac{x+11}{80}&\Leftrightarrow\left(\frac{x+2}{89}+1\right)+\left(\frac{x+5}{86}+1\right)>\left(\frac{x+8}{83}+1\right)+\left(\frac{x+11}{80}+1\right)\\&\Leftrightarrow(x+91)\left(\frac{1}{89}+\frac{1}{86}-\frac{1}{83}-\frac{1}{80}\right)>0\\&\Leftrightarrow x<-91.\end{aligned}$$

□

BÀI 7. Giải các bất phương trình với a là hằng:

❶ $2(x+2)<a(a+x)$;

❷ $a(x-a)\leq x-1$;

❸ $\dfrac{2x}{a^2-a+1}-\dfrac{1}{2a+2}<\dfrac{4x-1}{2a^2-2a+2}+\dfrac{a-2ax}{1+a^3}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$2(x+2)<a(a+x)\Leftrightarrow(a+2)x<a^2-4.$$

— Nếu $a>-2$ thì $x<a-2$.

— Nếu $a<-2$ thì $x>a-2$.

— Nếu $a=-2$: Vô nghiệm.

❷ Ta có

$$a(x-a) \leq x-1 \Leftrightarrow (a-1)x \leq a^2-1.$$

— Nếu $a>1$ thì $x \leq a+1$.
— Nếu $a<1$ thì $x \geq a+1$.
— Nếu $a=1$ thì $0x \leq 0$, nghiệm đúng với mọi x.

❸ Điều kiện: $a \neq -1$. Ta có

$$\begin{aligned}&\frac{2x}{a^2-a+1}-\frac{1}{2a+2}<\frac{4x-1}{2a^2-2a+2}+\frac{a-2ax}{1+a^3}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{a}{2(1+a^3)}(4x-a)<0 \Leftrightarrow \frac{a}{a+1}(4x-a)<0.\end{aligned}$$

— Nếu $a=0$ thì bất phương trình vô nghiệm.
— Nếu $\frac{a}{a+1}>0$ (tức là $a<-1$ hoặc $a>0$) thì $x<\frac{a}{4}$.
— Nếu $\frac{a}{a+1}<0$ (tức là $-1<a<0$) thì $x>\frac{a}{4}$.

□

BÀI 8. Tìm giá trị của m để nghiệm của phương trình sau là số dương:

$$\frac{m+1}{x-1}=1-m.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Điều kiện xác định: $x \neq 1$. Đưa phương trình về dạng $(1-m)x=2$.

Nếu $m=1$, phương trình vô nghiệm.

Nếu $m \neq 1$ thì $x=\frac{2}{1-m}$. Giải điều kiện $x \neq 1$ ta được $m \neq -1$.

Nghiệm của phương trình là $x=\frac{2}{1-m}$ với $m \neq \pm 1$.

Phương trình có nghiệm là số dương $\Leftrightarrow \begin{cases} m<1, \\ m \neq -1.\end{cases}$ □

BÀI 9. Tìm giá trị của m để nghiệm của phương trình $4mx>x+1$ là

a) $x>9$; b) $x<-5$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$4mx>x+1 \Leftrightarrow (4m-1)x>1. \quad (1)$$

Nếu $m=\frac{1}{4}$ thì (1) vô nghiệm.

Nếu $m>\frac{1}{4}$ thì nghiệm của (1) là $x>\frac{1}{4m-1}$.

Nếu $m<\frac{1}{4}$ thì nghiệm của (1) là $x<\frac{1}{4m-1}$.

❶ Để nghiệm của (1) là $x>9$, cần và đủ là:

$$\begin{cases} m>\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4m-1}=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\frac{1}{4} \\ m=\frac{5}{18}\end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{5}{18}.$$

❷ Để nghiệm của (1) là $x < -5$, cần và đủ là:

$$\begin{cases} m < \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4m-1} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{4} \\ m = \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{5}.$$

□

BÀI 10. Có bao nhiêu số tự nhiên n nằm giữa 1 và 2000 sao cho phân số $\dfrac{n^2+7}{n+4}$ không phải là phân số tối giản?

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$A = \frac{n^2+7}{n+4} = \frac{(n+4)(n-4)+23}{n+4} = n-4+\frac{23}{n+4}.$$

A rút gọn được $\Leftrightarrow$ 23 và $n+4$ có ước chung khác $\pm 1 \Leftrightarrow n+4 \,\vdots\, 23$, hay nói cách khác $n = 23k-4$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $1 < n < 2000 \Leftrightarrow 1 < 23k-4 < 2000 \Leftrightarrow \dfrac{5}{23} < k < 87\dfrac{3}{23}$. Do $k \in \mathbb{N}^*$ nên k nhận 87 giá trị (là $1, 2, 3, \ldots, 87$). Vậy có 87 số tự nhiên n phải tìm. □

BÀI 11. Cho một dãy số tự nhiên bắt đầu từ 1. Người ta xóa đi một số thì trung bình cộng của các số còn lại bằng $35\dfrac{7}{17}$. Tìm số bị xóa.

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử ta có n số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n.

Nếu xóa số 1 thì trung bình cộng của các số còn lại là

$$\frac{2+3+\cdots+n}{n-1} = \frac{(2+n)(n-1)}{2(n-1)} = \frac{2+n}{2}.$$

Nếu xóa số n thì trung bình cộng của các số còn lại là

$$\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n-1} = \frac{n(n-1)}{2(n-1)} = \frac{n}{2}.$$

Ta có

$$\frac{n}{2} \le 35\frac{7}{17} \le \frac{n+2}{2} \Leftrightarrow n \le 70\frac{14}{17} \le n+2 \Leftrightarrow 68\frac{14}{17} \le n \le 70\frac{14}{17}.$$

Do $n \in \mathbb{N}$ nên $n = 69$ hoặc $n = 70$.

— Với $n = 70$, tổng của 69 số còn lại là: $35\dfrac{7}{17} \cdot 69 \notin \mathbb{N}$, loại.

— Với tổng của 69 số còn lại là: $35\dfrac{7}{17} \cdot 68 = 2408$.

Số bị xóa là số: $(1+2+\cdots+69) - 2048 = 2415 - 2408 = 7$. □

BÀI 12. Tìm các số nguyên a và b sao cho: $a^2 - 2ab + 2b^2 - 4a + 7 < 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Do a và b nguyên, ta cộng 1 vào vế trái của bất phương trình đã cho và được:

$$\begin{aligned}
& a^2 - 2ab + 2b^2 - 4a + 8 \le 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2a^2 - 4ab + 4b^2 - 8a + 16 \le 0 \\
\Leftrightarrow\ & (a-2b)^2 + (a-4)^2 \le 0 \\
\Leftrightarrow\ & a = 4, b = 2.
\end{aligned}$$

Cách khác. Biến đổi thành: $(a-b-2)^2+(b-2)^2<1$. □

BÀI 13. Tìm x biết rằng $\left[\dfrac{34x+19}{11}\right]=2x+1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\left[\frac{34x+19}{11}\right]=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le \dfrac{34x+19}{11}-(2x+1)<1, & (1)\\ 2x+1\in\mathbb{Z}. & (2)\end{cases}$$

Giải bất phương trình (1):

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 0\le 12x+8<11 \Leftrightarrow -8\le 12x<3\\ &\Leftrightarrow -\frac{4}{3}\le 2x<\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le 2x+1<\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Theo (2), $2x+1\in\mathbb{Z}$, do đó $2x+1=0$ hoặc $2x+1=1$. Vậy $x\in\left\{-\dfrac{1}{2};0\right\}$. □

BÀI 3 PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để giải các phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối, cần khử dấu giá trị tuyệt đối. Ta nhớ lại: Giá trị tuyệt đối của một biểu thức bằng chính nó nếu biểu thức không âm, bằng số đối của nó nếu biểu thức âm:

$$|A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A \leq 0 \end{cases}$$

Do đó, để khử dấu giá trị tuyêt đối, cần xét giá trị của biến làm cho biểu thức không âm hay âm. Nếu biểu thức nằm trong dấu giá trị tuyệt đối là nhị thức bậc nhất, ta cần nhớ định lí sau:

Định lí 1. *Định lí về dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b (a \neq 0)$*
Nhị thức $ax + b (a \neq 0)$

— *Cùng dấu với a với các giá trị của x lớn hơn nghiệm của nhị thức;*
— *Trái dấu với a với các giá trị của x nhỏ hơn nghiệm của nhị thức.*

Chứng minh. Gọi x_0 là nghiệm của nhị thức $ax + b (a \neq 0)$ thì $x_0 = -\dfrac{b}{a}$. Xét

$$\frac{ax+b}{a} = x + \frac{b}{a} = x - x_0.$$

Nếu $x > x_0$ thì $x - x_0 > 0 \Rightarrow \dfrac{ax+b}{a} > 0 \Rightarrow ax + b$ cùng dấu với a.
Nếu $x < x_0$ thì $x - x_0 < 0 \Rightarrow \dfrac{ax+b}{a} < 0 \Rightarrow ax + b$ trái dấu với a.

Chẳng hạn: Xét dấu của nhị thức $-2x + 1$ và $x + 5$ rồi viết kết quả vào một bảng, ta có:

x		-5		$\frac{1}{2}$	
$-2x+1$	$+$		$+$	0	$-$
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$

VÍ DỤ 1. Giải phương trình:

$$|x - 5| + |x + 3| = 3x - 1. \qquad (1)$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Lập bảng xét dấu các nhị thức $x - 5$ và $x + 3$:

x		-3		5	
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$

Xét ba khoảng giá trị của biến x:

❶ $x < -3$: phương trình (1) có dạng:

$$(5-x)-(x+3)=3x-1,$$

tìm được $x=\dfrac{3}{5}$, loại vì giá trị này không thuộc khoảng đang xét.

❷ $-3 \leq x < 5$: phương trình (1) có dạng:

$$(5-x)+(x+3)=3x-1 \Leftrightarrow -3x=-9$$

tìm được $x=3$ thuộc khoảng đang xét.

❸ $5 < x$: phương trình (1) có dạng:

$$(x-5)+(x+3)=3x-1 \Leftrightarrow -x=1$$

tìm được $x=-1$, không thuộc khoảng đang xét.

Kết luận: $S=\{3\}$.

□

VÍ DỤ 2. Giải phương trình:

$$|2x-1|+|2x-5|=4. \tag{1}$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Cách 1.

❶ Xét khoảng $x < \dfrac{1}{2}$. (1) có dạng:

$$1-2x+5-2x=4,$$

tìm được $x=\dfrac{1}{2}$, không thuộc khoảng đang xét.

❷ Xét khoảng $\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{5}{2}$, (1) có dạng:

$$1-2x+5-2x=4 \Leftrightarrow 0x=0.$$

Phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng đang xét, tức là

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}.$$

❸ Xét khoảng $x > \dfrac{5}{2}$, (1) có dạng:

$$2x-1+2x+5=4,$$

tìm được $x=\dfrac{5}{2}$, không thuộc khoảng đang xét.

Kết luận: $S=\left\{x \,\middle|\, \dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{5}{2}\right\}$.

Cách 2:
Áp dụng hai lần bất đẳng thức $|A| \geq A$ (xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $A \geq 0$), ta có:

$$|2x-1| + ||5-2x| \geq (2x-1) + (5-2x) = 4$$

Theo đề bài, phải xảy ra đẳng thức, do đó

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 5-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x \leq \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}.$$

□

VÍ DỤ 3. Giải phương trình

$$||x|-3| = x+1 \qquad (1)$$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xét khoảng $X \geq 0$, (1) có dạng

$$|x-3| = x+1 \qquad (2)$$

Lại xét hai trường hợp:
Với $x \geq 3$, (2) có dạng $x-3 = x-1$, vô nghiệm.
Với $0 \leq x < 3$, (2) có dạng $3-x = x-1 \Leftrightarrow x = 1$, thuộc khoảng đang xét.

❷ Xét khoảng $x < 0$, (1) có dạng $|-x-3| = x+1$ tức là

$$|x-3| = x+1. \qquad (3)$$

Lại xét hai trường hợp:
Với $-3 \leq x < 0$, (3) có dạng $x+3 = x+1$, vô nghiệm.
Với $x < -3$, (3) có dạng $-x-3 = x+1 \Leftrightarrow x = -2$, không thuộc khoảng đang xét.
Kết luận: $S = \{1\}$

□

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Giải các phương trình

a) $2|x-3| + (5x+1) = 0$;

b) $|x-1| = |x-5|$;

c) $|x-1| = |3x-5|$;

d) $2|x| - |x+1| = 2$;

e) $|x-4| + |x+1| = 9$;

f) $|x-3| + |x-5| = 2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xét $x \geq 3$ ta được $x = 1$, loại.
Xét $x < 3$ ta được $x = -\dfrac{5}{3}$.
Đáp số: $x = \dfrac{-5}{3}$.

❷ *Cách 1.* Chia hai trường hợp

$$\begin{aligned} |x-1| &= |x-5| \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x-1=x-5 \\ &x-1=5-x \end{aligned}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &0x=4 \\ &2x=6 \end{aligned}\right. \\ &\Leftrightarrow x=3. \end{aligned}$$

Cách 2. Bình phương hai vế:

$$\begin{aligned} |x-1|=|x-5| &\Leftrightarrow x^2-2x+1=x^2-10x+25 \\ &\Leftrightarrow 8x=24 \\ &\Leftrightarrow x=3. \end{aligned}$$

❸ 2 và $\dfrac{3}{2}$;

❹ -1 và 3;

❺ Xét $x<-1$ ta được $x=-3$. Xét $-1 \le x \le 4$, phương trình vô nghiệm.
Xét $x>4$ ta được $x=6$. $S=\{-3;\ 6\}$,

❻ $3 \le x \le 5$.

□

BÀI 2. Giải các phương trình

a) $|x|-2|x-1|+3|x-3|=4$;

b) $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$;

c) $|x|-|x-1|+3|x-2|=4$;

d) $|x+1|+|x+2|+|x+3|=4x$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $\dfrac{9}{4}$ và $\dfrac{9}{2}$;

❷ -2,

❸ $x=4$; $0 \le x \le 1$.

❹ Không nên máy móc xét các khoảng giá trị của x. Chú ý vế trước phương trình không âm nên vế phải không âm, do đó $x \ge 0$. Phương trình trở thành $x+1+x+2+x+3=4x$. Từ đó $x=6$.

Tập nghiệm $S=\{1;-2\}$. □

BÀI 3. Giải các phương trình

a) $|x||x+3| - |x^2+x+1| = 1$; b) $|x|^3 - 3|x| + 2 = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Chú ý rằng $x^2+x+1>0$. Đáp số: $x=1$,

❷ Đặt $y=|x|>0$. Đáp số $x=\pm1$. Tập nghiệm $S=\{1;-2\}$.

□

BÀI 4. Giải phương trình sau $||x|-1| = x+1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Khử dấu giá trị tuyệt đối trừ trong ra ngoài: trước hết xét $x\ge 0$, $x<0$.

Đáp số: $-1\le x\le 0$ □

BÀI 5.

a) $|x-4|-x=2a$ (a là hằng số); b) $|x-3|+|5-x|=2a$ (a là hằng số).

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Nếu $x\ge 4$ thì $x-4-x=2a \Leftrightarrow 0x=a+2$.

— Nếu $a\ne -2$: vô nghiệm.

— Nếu $a=-2$: vô số nghiệm ($x\ge 4$).

Nếu $x<4$ thì $4-x-x=2a \Leftrightarrow x=2-a$,

ta phải có $2-a<4 \Leftrightarrow a>-2$

Kết luận: Nếu $a>-2$ thi $x=2-a$; nếu $a=-2$: vô số nghiệm $x\ge 4$; nếu $a<-2$: vô nghiệm.

❷ — Nếu $a=1$ thì $3\le x\le 5$.

— Nếu $a>1$ thì $x_1=4-a$, $x_2=4+a$,

— Nếu $a<1$ thì vô nghiệm.

□

BÀI 6. Giải phương trình sau:

$$2|x+a| - |x-2a| = 3a \; (a \text{ là hằng số}).$$

✍ **LỜI GIẢI.**

— Nếu $a>0$ thì $-a<2a$. Xét các trường hợp $x<-a$, $-a\le x\le 2a$, $x>2a$ ta được các nghiệm: $x=-7a$, $x=a$.

— Nếu $a\le 0$ thì $2a\le -a$. Xét các trường hợp $x<2a$, $2a\le x\le -a$, $x>-a$ ta được nghiệm: $x=-a$.

□

BÀI 4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để giải bất phương trình loại này, ta cũng khử dấu giá trị tuyệt đối như với phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối.

VÍ DỤ 1. Giải bất phương trình

$$|x| - x + 2 \leq 2\,|x - 4|\,. \qquad (1)$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Lập bảng xét dấu các biểu thức x và $x - 4$.

x		0		4	
x	$-$	0	$+$	⋮	$+$
$x-4$	$-$	⋮	$-$	0	$+$

❶ Xét khoảng $x < 0$, (1) có dạng:

$$-x - x + 2 \leq 2\,(4 - x) \Leftrightarrow 0x \leq 6,$$

nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng đang xét $x < 0$.

❷ Xét khoảng $0 \leq x < 4$, (1) có dạng:

$$x - x + 2 \leq 8 - 2x \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Nghiệm của bất phương trình (1) thuộc khoảng đang xét $0 \leq x \leq 3$.

❸ Xét khoảng $x \geq 4$, (1) có dạng:

$$x - x + 2 \leq 2x - 8 \Leftrightarrow x \geq 5,$$

thỏa mãn điều kiện $x \geq 4$.

Kết luận: Nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \leq 3$; $x \geq 5$.

□

Nhận xét. *Trong cách giải trên, ta khử dấu giá trị tuyệt đối bằng cách xét từng khoảng giá trị của biến. Trong một số trường hợp, có thể giải nhanh hơn cách phương pháp chung nói trên bởi các biến đổi tương đương sau:*

Dạng 1:

❶ Với a dương, ta có: $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$.

❷ $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$.

Dạng 2:

❶ Với a là số dương ta có:

$$|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < -a \\ f(x) > a \end{array}\right.$$

❷ Đối với hàm $g(x)$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x). \end{array}\right.$$

Dạng 3

$$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow |f(x)|^2 > |g(x)|^2 .$$

VÍ DỤ 2. Giải bất phương trình

$$3\,|2x-1| < 2x+1 \tag{1}$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Cách 1:

❶ Xét khoảng $x < \dfrac{1}{2}$, (1) có dạng:

$$\begin{aligned} 3(1-2x) < 2x+1 \quad &\Leftrightarrow 3-6x < 2x+1; \\ &\Leftrightarrow -8x < -2 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Nghiệm của bất phương trình thuộc khoảng này là $\dfrac{1}{4} < x < \dfrac{1}{2}$.

❷ Xét khoảng $x \geq \dfrac{1}{2}$, (1) có dạng:

$$\begin{aligned} 3(2x-1) < 2x+1 \quad &\Leftrightarrow 6x-3 < 2x+1; \\ &\Leftrightarrow 4x < 4 \\ &\Leftrightarrow x < 1. \end{aligned}$$

Nghiệm của bất phương trình thuộc khoảng này $\dfrac{1}{2} \leq x < 1$.

Kết luận: Nghiệm của bất phương trình đã cho là $\dfrac{1}{4} < x < 1$.

Cách 2: Biến đổi thành bất phương trình tương đương theo dạng 1b)

$$
\begin{aligned}
3|1-2x| < 2x+1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3(2x-1) > -(2x+1) \\ 3(2x-1) < 2x+1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-3 > -2x-1 \\ 6x-3 < 2x+1. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 8x > 2 \\ 4x < 4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{4} \\ x < 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < 1.
\end{aligned}
$$

□

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $|3x-2| < 4$;

b) $|3-2x| < x+1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) $-\dfrac{2}{3} < x < 2$;

b) $\dfrac{2}{3} < x < 4$

□

BÀI 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $|3x-1| > 5$;

b) $|x^3+1| \geq x+1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) $x < \dfrac{-4}{3}$; $x > 2$;

b) $x \leq 0$; $x \geq 1$.

□

BÀI 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $|x+1| > |x-2|$;

b) $|x-1| > |x+2| - 3$.

c) $|x-3| + |x+1| < 8$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) $x > \dfrac{1}{2}$;

b) $x < 1$.

□

BÀI 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $|x-1|+|x-5|>8$;

b) $|x-3|+|x+1|<8$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) $x<-1$; $x>7$;

b) $-3<x<5$.

□

BÀI 5 BẤT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH. BẤT PHƯƠNG TRÌNH THƯƠNG

VÍ DỤ 1. Giải bất phương trình
$$x^2 - 2x + 1 < 9$$

LỜI GIẢI.

Cách 1:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 < 9 &\Leftrightarrow (x-1)^2 < 9 \\ &\Leftrightarrow |x-1| < 3 \\ &\Leftrightarrow -3 < x - 1 < 3 \\ &\Leftrightarrow -2 < x < 4. \end{aligned}$$

Cách 2:

Biến đổi thành bất phương trình dạng tích:

$$x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) < 0.$$

Lập bảng xét dấu các nhị thức $x+2$ và $x-4$:

x		-2		4	
$x+2$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$
$x-4$	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$

Nghiệm của bất phương trình đã cho là: $-2 < x < 4$

□

VÍ DỤ 2. Giải bất phương trình
$$\frac{1-5x}{x-1} \geq 1$$

LỜI GIẢI.

Điều kiện xác định: $x \neq 1$.

$$\frac{1-5x}{x-1} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \frac{1-5x}{x-1} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-5x-x+1}{x-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-6x}{x-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-3x}{x-1} \geq 0.$$

Lập bảng xét dấu:

x		$\frac{1}{3}$		1	
$1-3x$	$+$	0	$-$	$\vdots$	$-$
$x-1$	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$
$\frac{1-3x}{x-1}$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $\frac{1}{3} \leq x < 1$. □

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $4x^2 - 4x + 1 > 9$;

b) $(x^3-27)(x^3-1)(2x+3-x^2) \geq 0$;

c) $\dfrac{x^3-4x^2+5x-20}{x^3-x^2-10x-8} > 0$;

d) $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1} > \dfrac{x^2+4x+5}{x+2} - 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ *Cách 1.* Biến đổi bất phương trình tích

$$4(x+1)(x-2) > 0.$$

Cách 2. Đưa bất phương trình về dạng

$$|2x-1| > 3.$$

Đáp số: $x > 2$; $x < -1$.

❷ Hai nghiệm -1, 3.
❸ $x < -2$; $-1 < x < 4$; $x > 4$.
❹ $x < 2$; $x > -1$.

□

BÀI 2. Tìm điều kiện của x để biểu thức sau có giá trị âm:

$$A = \left(\frac{1-x}{x+3} - \frac{x+3}{x-1}\right) : \left(\frac{x+3}{x-1} - \frac{x-1}{x+3}\right).$$

✍ **LỜI GIẢI.**
$A = -\dfrac{x^2+2x+5}{4(x+1)}$;
$A < 0 \Leftrightarrow x > -1$ đồng thời $x \neq 1$. □

BÀI 3. Tìm điều kiện của x và y để biểu thức sau có giá trị dương:

$$A = \left(\frac{x^2-xy}{y^2+xy} + \frac{x^2-y^2}{x^2+xy}\right) : \left(\frac{y^2}{x^3-xy^2} + \frac{1}{x-y}\right).$$

✍ **LỜI GIẢI.**
$A = \dfrac{(x-y)^2}{y}$;
$A > 0 \Leftrightarrow y > 0$; $x \neq 0$, $x \neq y$. □

BÀI 4. Tìm điều kiện của x và y để biểu thức sau lớn hơn 1:

$$A = \left(\frac{x}{y^2+xy} + \frac{x-y}{x^2+xy}\right) : \left(\frac{y^2}{x^3-xy^2} + \frac{1}{x-y}\right) : \frac{x}{y}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**
$A = \dfrac{x-y}{x} = 1 - \dfrac{y}{x}$;
$A > 1 \Leftrightarrow xy < 0$; $x + y \neq 0$. □

BÀI 5. Tìm điều kiện của x để biểu thức sau lớn hơn 1:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-3}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**
$2 < x < 3$. □

BÀI 6. Tìm giá trị của m để phương trình sau có nghiệm âm

$$\frac{2}{x-1} = 4 - m.$$

✍ **LỜI GIẢI.**
Nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{6-m}{4-m}$ với $m \neq 4$.
Phương trình có nghiệm âm, vậy $4 < m < 6$. □

BÀI 6 CHUYÊN ĐỀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

A CÁC TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

Ngoài các tính chất của bất đẳng thức được nêu ở §11, ta còn sử dụng các tính chất sau:

1. Cộng từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều, được bất đẳng thức mới cùng chiều với các bất đẳng thức đã cho:

$$a > b,\, c > d \Rightarrow a + c > b + d.$$

⚠ *Không được trừ từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều.*

2. Trừ từng vế của hai bất đẳng thức ngược chiều được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức bị trừ:

$$a > b,\, c < d \Rightarrow a - c > b - d.$$

3. Tính chất đơn điệu của phép nhân

❶ Nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số dương:

$$a > b,\, c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c.$$

❷ Nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số âm và đổi chiều của bất đẳng thức:

$$a > b,\, c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$$

4. Nhân hai vế của bất đẳng thức cùng chiều mà hai vế không âm

$$a > b \geq 0,\, c > d \geq 0 \Rightarrow ac > bd.$$

5. Nâng lên lũy thừa bậc nguyên dương hai vế của bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} a > b > 0 &\Rightarrow a^n > b^n; \\ a > b &\Leftrightarrow a^n > b^n \text{ với } n \text{ lẻ}; \\ |a| > |b| &\Leftrightarrow a^n > b^n \text{ với } n \text{ chẵn}. \end{aligned}$$

6. So sánh hai lũy thừa cùng cơ số với số mũ nguyên dương:

Nếu $m > n > 0$ thì $a > 1 \Rightarrow a^m > a^n$;

$a = 1 \Rightarrow a^m = a^n$;

$0 < a < 1 \Rightarrow a^m < a^n$.

7. Lấy nghịch đảo hai vế và đổi chiều của bất đẳng thức nếu hai vế cùng dấu:

$$a > b,\ a \cdot b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \text{ (xem bài 325}a\text{).}$$

⚠ *Ngoài các bất đẳng thức chặt, chẳng hạn $a > b$, ta còn gặp các bất đẳng thức không chặt, chẳng hạn $a \geq b$ (tức là $a > b$ hoặc $a = b$). Trong các tính chất trên, nhiều dấu $>$ (hoặc $<$) có thể thay bởi dấu $\geq$ (hoặc $\leq$).*

B CÁC HẰNG BẤT ĐẲNG THỨC

1. Ngoài các hằng bất đẳng thức $a^2 \geq 0$; $-a^2 \leq 0$, cần nhớ các hằng bất đẳng thức liên qua đến giá trị tuyệt đối:

$|a| \geq 0$. Xãy ra đẳng thức khi $a = 0$;
$|a| \geq a$. Xãy ra đẳng thức khi $a \geq 0$;
$|a+b| \leq |a| + |b|$. Xãy ra đẳng thức khi $ab \geq 0$;
$|a-b| \geq |a| - |b|$. Xãy ra đẳng thức khi $ab > 0$ và $|a| > |b|$
(các điều kiện này còn có thể diễn đạt là $a \geq b \geq 0$ hoặc $a \leq b \leq b \leq 0$),
Chứng minh bất đẳng thức $|a+b| \leq |a| + |b|$ như sau:
$|a+b| \leq |a| + |b|$ (1)
$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2\,|ab| + b^2$ (vì hai vế của (1) không âm) Bất đẳng thức (2) đúng, vậy (1) là
$\Leftrightarrow ab \leq |ab|$ (2)
đúng.
Chứng minh bất đẳng thức $|a-b| \geq |a| - |b|$ (3) như sau:
Nếu $|a| < |b|$ thì (3) hiển nhiên đúng.
Nếu $|a| \geq |b|$ thì (3) tương đương với:
$|a-b|^2 \geq (|a| - |b|)^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow |ab| \geq ab$ (4)
Bất đẳng thức (4) đúng, vậy (3) đúng.

2. Cũng cần nhớ thêm một số hằng bất đẳng thức khác để khi giải toán có thể sử dụng chúng như một bổ đề, chẳng hạn:

$a^2 + b^2 \geq 2ab$;
$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ hay $(a+b)^2 \geq 4ab$ (bất đẳng thức Cô - si);
$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}$ với $a,\ b > 0$ (ví dụ 77);
$\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ với $a, b < 0$ (bài 325).
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$ (bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, xem bài 324).

C CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1. Dùng định nghĩa

Để chứng minh $A > B$, ta xét hiệu $A - B$ và chứng minh rằng $A - B$ là số dương.

VÍ DỤ 88. Chứng minh rằng

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \geq -1.$$

✍ LỜI GIẢI.

Xét hiệu $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - (-1) = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) + 1$.
Đặt $x^2 - 5x + 5 = y$, biểu thức trên bằng $(y-1)(y+1) + 1 = y^2 \geq 0$.
Vậy $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \geq -1$. □

2. Dùng các phép biến đổi tương đương

VÍ DỤ 89. Cho các số dương a và b thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Chứng minh rằng $\left(1 + \dfrac{1}{a}\right)\left(1 + \dfrac{1}{b}\right) \geq 9$.

✍ LỜI GIẢI.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9 \qquad (1)\\
\Leftrightarrow\ & \frac{a+1}{a} \cdot \frac{b+1}{b} \geq 9 \Leftrightarrow ab + a + b + 1 \geq 9ab \text{ (vì } ab > 0)\\
\Leftrightarrow\ & a + b + 1 \geq 8ab \Leftrightarrow 2 \geq 8ab \text{ (vì } a + b = 1)\\
\Leftrightarrow\ & 1 \geq 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \text{ (vì } a + b = 1)\\
\Leftrightarrow\ & (a-b)^2 \geq 0. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức (2) đúng, mà các phép biến đổi trên tương đương, vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$. *Cách giải khác*
$\left(1 + \dfrac{1}{a}\right)\left(1 + \dfrac{1}{b}\right) = \left(1 + \dfrac{a+b}{a}\right)\left(1 + \dfrac{a+b}{b}\right) = \left(2 + \dfrac{b}{a}\right)(2 + \dfrac{a}{b})$.
Thực hiện phép nhân và chú ý rằng $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ do $a > 0$, $b > 0$.
□

⚠ *Khi sử dụng phép biến đổi tương đương, cần chú ý các biến đổi tương đương có điều kiện, chẳng hạn:*
$a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$ *với* a, $b > 0$;
$m > n \Leftrightarrow a^m > a^n$ *với* m, n *nguyên dương,* $a > 1$.
Cần chỉ rõ các điều kiện ấy khi biến đổi tương đương.

3. Dùng các tính chất của bất đẳng thức

VÍ DỤ 90. Cho $a+b>1$. Chứng minh rằng $a^4+b^4>\frac{1}{8}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$a+b>1>0. \qquad (1)$$

Bình phương hai vế :

$$(a+b)^2>1 \Rightarrow a^2+2ab+b^2>1 \qquad (2)$$

Mặt khác

$$(a-b)^2\geq 0 \Rightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0. \qquad (3)$$

Cộng từng vế của (2) và (3):

$$2(a^2+b^2)>1 \Rightarrow a^2+b^2>\frac{1}{2} \qquad (4)$$

Bình phương hai vế của (4):

$$a^4+2a^2b^2+b^4>\frac{1}{4} \qquad (5)$$

Mặt khác

$$\left(a^2-b^2\right)^2\geq 0 \Rightarrow a^4-2a^2b^2+b^4\geq 0 \qquad (6)$$

Cộng từng vế của (5) và (6):

$$2\left(a^4+b^4\right)>\frac{1}{4} \Rightarrow a^4+b^4>\frac{1}{8}.$$

□

VÍ DỤ 91. Chứng miinh bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq \frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2\geq 2xy$ (xảy ra đẳng thức khi $x=y$), ta có:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\geq 2\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=2\cdot\frac{a}{c}.$$

Tương tự $\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq 2\cdot\frac{a}{a}$

$\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\geq 2\cdot\frac{c}{b}$

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức trên :

$$2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\geq 2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right) \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}.$$

□

VÍ DỤ 92. Chứng minh các bất đẳng thức với a, b, c là các số dương:

a) $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \geq 9$; b) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geq 1{,}5$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned} A &= (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1 \\ &= 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \end{aligned}$$

Để chứng minh $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \geq 2$ với x, y dương (bài 325).

Do đó $A \geq 3+2+2+2=9$. Vậy $A \geq 9$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c$.

❷ Áp dụng bất đẳng thức ở câu a:

$(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) \geq 9$ trong đó x, y, $z>0$.

Với $x=b+c$, $y=a+c$, $z=a+b$ ta được:

$$\begin{aligned} & 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right) \geq 9 \\ \Rightarrow\ & (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right) \geq 4{,}5 \\ \Rightarrow\ & \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b} \geq 4{,}5 \\ \Rightarrow\ & \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq 1{,}5. \end{aligned}$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c$.

□

VÍ DỤ 93. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}$ và chú ý rằng các mẫu đều dương, áp dụng bất thức $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$ với x, $y>0$ (ví dụ 77), ta được:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a} \geq \frac{4}{2b}=\frac{2}{b}.$$

Tương tự $\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b} \geq \dfrac{2}{c}$.

$\dfrac{1}{c+a-b}+\dfrac{1}{a+b-c} \geq \dfrac{2}{a}$.

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên rồi chia cho 2 ta được điều phải chứng minh.

Xảy ra đẳng thức khi $a=b=c$. □

VÍ DỤ 94. Cho $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz. \qquad (1)$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Hai vế của (1) đều không âm nên để chứng minh (1), ta sẽ chứng minh rằng

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geq 64x^2y^2z^2.$$

Ta có

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &\geq 4xy\\(y+z)^2 &\geq 4yz\\(z+x)^2 &\geq 4zx.\end{aligned}$$

Hai vế của ba bất đẳng thức trên đều không âm, nhân từng vế ta được:

$$\begin{aligned}&(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geq 64x^2y^2z^2\\ \Rightarrow\ &[(x+y)(y+z)(z+x)]^2 \geq [8xyz]^2.\end{aligned}$$

Các biểu thức trong dấu ngoặc vuông không âm nên

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz.$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x = y = z$. □

4. Dùng phương pháp phản chứng

VÍ DỤ 95. Cho $a^2 + b^2 \leq 2$. Chứng minh rằng $a + b \leq 2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử $a + b > 2$, bình phương hai vế (hi vế đều dương), ta được:

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4. \qquad (1)$$

Mặt khác ta có

$$2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \leq 2\left(a^2 + b^2\right)$$

mà $2(a^2 + b^2) \leq 4$ (giả thiết), do đó

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq 4 \qquad (2)$$

mâu thuẫn với (1).

Vậy phải có $a + b \leq 2$.

Cách giải khác. Ta có

$$a^2 + b^2 \leq 2 \qquad (1)$$

Mặt khác $2ab \leq a^2 + b^2$ nên
$$2ab \leq a^2 + b^2 \leq 2 \tag{2}$$
Cộng (1) với (2):
$$a^2 + 2ab + b^2 \leq 4 \Rightarrow (a+b)^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq a + b \leq 2.$$
□

D BẤT ĐẲNG THỨC VỚI SỐ TỰ NHIÊN

VÍ DỤ 96. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta có
$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi A là vế trái của bất đẳng thức trên. Ta sử dụng tính chất bắc cầu của bất đẳng thức dưới dạng *phương pháp làm trội*: để chứng minh $A < B$, ta làm trội A thành C $(A < C)$ rồi chứng minh rằng $C \leq B$ (biểu thức C đóng vai trò trung gian để so sánh A và B).

Làm trội mỗi phân số ở A bằng cách làm giảm các mẫu, ta có:
$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{k\left(k^2 - 1\right)} = \frac{1}{(k-1)\,k\,(k+1)}.$$
Do đó:
$$A < \frac{1}{2^3 - 2} + \frac{1}{3^3 - 3} + \cdots + \frac{1}{n^3 - n} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)}.$$
Đặt $C = \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n(n+1)}$, nhận xét rằng :
$$\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2}{(n-1)n(n+1)}.$$
nên
$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{1}{4}. \end{aligned}$$
Vậy $\dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^3} < \dfrac{1}{4}$. □

⚠ *Khi làm trội một biểu thức, có trường hợp ta phải chia biểu thức thành nhiều nhóm rồi làm trội trong từng nhóm. Xét ví dụ sau*

VÍ DỤ 97. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi vế trái của bất đẳng thức trên là A, ta có:

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{15}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1}\right).$$

Ở mỗi nhóm ta làm trội bằng cách thay các phân số bởi phân số lớn nhất trong nhóm, ta được:

$$A < 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2^2} \cdot 4 + \frac{1}{2^3} \cdot 8 + \cdots \frac{1}{2^{n-1}} \cdot 2^{n-1} = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

□

E VÀI ĐIỂM CHÚ Ý KHI CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Chú ý 1. Khi chứng minh bất đẳng thức,, nhiều khi ta cần đổi biến

VÍ DỤ 98. Cho $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $a = \frac{1}{3} + x$, $b = \frac{1}{3} + y$, $c = \frac{1}{3} + z$. Do $a + b + c = 1$ nên $x + y + z = 0$. Ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= \left(\frac{1}{3} + x\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + y\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + z\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + x^2\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}y + y^2\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}z + z^2\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3} + x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow x = y = z = 0 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$. □

VÍ DỤ 99. Chứng minh bất đẳng thức

$$abc \geq (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)$$

với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

✍ **LỜI GIẢI.**

Cách 1. Đặt $b + c - a = x$, $a + c - b = y$, $a + b - c = z$ thì x, y, $z > 0$. Theo bất đẳng thức $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$ (ví dụ 94) ta có:

$$\begin{aligned} & 2a \cdot 2b \cdot 2c \geq 8(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) \\ \Rightarrow\ & abc \geq (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c). \end{aligned}$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2. Ta có

$$\begin{aligned}(b+c-a)(b+a-c) &= b^2 - (c-a)^2 \leq b^2\\(c+a-b)(c+b-a) &= c^2 - (a-b)^2 \leq c^2\\(a+b-c)(a+c-b) &= a^2 - (b-c)^2 \leq a^2.\end{aligned}$$

Nhân từng vế của ba bất đẳng thức trên ta được

$$[(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)]^2 \leq [abc]^2.$$

Các biểu thức trong dấu ngoặc vuông đều dương nên

$$(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \leq abc.$$

Xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Chú ý 2. Với các bất đẳng thức mà các biến có vai trò như nhau, ta có thể sắp thứ tự các biến.

VÍ DỤ 100. Chứng minh bất đẳng thức được nêu ở ví dụ 99:

$$abc \geq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \qquad (1)$$

trong đó điều kiện a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác được thay bởi a, b, c là các số dương.

✍ **LỜI GIẢI.**

Cách 1: Do vai trò của a, b, c ngang nhau, ta giả sử rằng $a \geq b \geq c$. Xét hai trường hợp:

a) $b + c \leq a$. Khi đó vế trái của (1) là số dương, còn vế phải không dương. Bất đẳng thức được chứng minh.

b) $b + c > a$. Khi đó hai vế của (1) đều dương. Giải tiếp như ví dụ 99.

Cách 2: Trong ba số $b + c - a$, $a + c - b$, $a + b - c$, không có quá một số âm. Thật vậy, chẳng hạn nếu $b + c - a < 0$, $a + c - b < 0$ thì $2c < 0$, trái với giả thiết.

Nếu đúng một số âm thì vế phải của (1) là số âm, bất đẳng thức (1) hiển nhiên đúng.

Nếu không có số nào âm thì vế phải của (1) là số dương. Giải tiếp như ví dụ 99.

□

Chú ý 3. Khi chứng minh bất đẳng thức, trong nhiều trường hợp ta cần xét từng khoảng giá trị của biến.

VÍ DỤ 101. Chứng minh rằng

$$x^8 - x^7 + x^2 - x + 1 > 0$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi A là vế trái của bất đẳng thức.

Cách 1: Nếu $x \geq 0$ thì ta viết A dưới dạng $x^7(x-1) + x(x-1) + 1$. Do $x \geq 0$ nên $A > 0$.

Nếu $x < 1$ thì ta viết A dưới dạng $x^8 + x^2(1 - x^5) + (1 - x)$. Do $x < 1$ nên $a - x^5 > 0$, do đó $A > 0$.

Cách 2:

$$A = x^7(x-1) - (x-1) + x^2 = (x-1)(x^7-1) + x^2$$

Nếu $x \geq 1$ thì $x^7 \geq 1$, do đó $(x-1)(x^7-1) \geq 0$, còn $x^2 > 0$ nên $A > 0$.

Nếu $x < 1$ thì $x^7 < 1$, do đó $(x-1)(x^7-1) > 0$, còn $x^2 \geq 0$ nên $A > 0$. □

D ÁP DỤNG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Có nhiều trường hợp để giải phương trình $f(x, y\ldots) = 0$, ta lại chứng minh bất đẳng thức $f(x, y\ldots) \geq 0$ hoặc $f(x, y\ldots) \leq 0$ và chỉ ra điều kiện cần và đủ để xảy ra đẳng thức.

VÍ DỤ 102. Giải phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = x(y+z)$$

LỜI GIẢI.

Trước hết, ta chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz \tag{1}$$

Bất đẳng thức (1) tương đương với:

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (x-y)^2 + (x-z)^2 + y^2 + z^2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Xảy ra đẳng thức ở (2), tức là ở (1), khi và chỉ khi $x = y = z = 0$. Đó là nghiệm của phương trình.

⚠ *Chú ý: Cũng có thể biến đổi phương trình đã cho thành:*

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x-y)^2 + (x-z)^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x = y = z = 0. \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP

Chứng minh bất đẳng thức

Chứng minh các bất đẳng thức (từ bài 358 đến bài 371):

BÀI 358.

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$; b) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.

LỜI GIẢI.

a) Ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ca$. Cộng từng vế các bất đẳng thức trên.

b) Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$, ta có:

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2; \quad c^4 + d^4 \geq 2c^2d^2.$$

Do đó: $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 2[(ab)^2 + (cd)^2] \geq 2 \cdot 2abcd = 4abcd$.

□

BÀI 359.

a) $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$; b) $a^8+b^8+c^8 \geq a^2b^2c^2(ab+bc+ca)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Áp dụng $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (câu a) (1)

Ta có:
$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

Lại áp dụng (1), ta có:
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq ab^2c+bc^2a+a^2bc = abc(a+b+c).$$

b) Giải tương tự câu a)

□

BÀI 360.

a) $a^2+b^2 \geq ab$; b) $x^2+xy+y^2 \geq 0$;

c) $a(a+b)(a+c)(a+b+c)+b^2c^2 \geq 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) *Cách 1*: $a^2+b^2-ab = \left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3b^2}{4} \geq 0$.

Cách 2: $a^2+b^2-ab \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2+2b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2+a^2+b^2 \geq 0$.

Cách 3: Ta có: $a^2+b^2 \geq 2ab$, $a^2+b^2 \geq 0$. Cộng từng vế hai bất đẳng thức trên rồi chia cho 2.

b) Giải tương tự câu a).

c)
$$\begin{aligned} A &= a(a+b)(a+c)(a+b+c)+b^2c^2 \\ &= (a^2+ab+ac)(a^2+ab+ac+bc)+b^2c^2. \end{aligned}$$

Đặt $a^2+ab+ac=m$, $bc=n$ thì $A=m(m+n)=m^2+mn+n^2 \geq 0$.

□

BÀI 361.

a) $(a^2+b^2)(a^4+b^4) \geq (a^3+b^3)^2$; b) $(a+b)(a^3+b^3) \leq 2(a^4+b^4)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Biến đổi tương đương thành $a^2b^2(a-b)^2 \geq 0$.

b) Biến đổi tương đương thành $0 \leq (a-b)^2(a^2+ab+b^2)$.

□

BÀI 362.

a) $2(a^3+b^3) \geq (a+b)(a^2+b^2)$ với $a,b>0$; b) $4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3$ với $a,b>0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Chia hai vế cho số dương $a+b$. Biến đổi tương đương thành

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

b) Hiệu:

$$\begin{aligned} 4(a^3+b^3)-(a+b)^3 &= (a+b)[4(a^2-ab+b^2)-(a+b)] \\ &= 3(a+b)(a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

□

BÀI 363. $a^3+b^3+abc \geq ab(a+b+c)$ với $a,b,c>0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Hiệu: $a^3+b^3+abc-ab(a+b+c)=(a+b)(a-b)^2 \geq 0$. □

BÀI 364.

a) $8(a^4+b^4) \geq (a+b)^4$;

b) $(a^2+b^2)^2 \geq ab(a+b)^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Từ $a^4+b^4 \geq 2a^2b^2$, cộng a^4+b^4 vào hai vế được:

$$a^4+b^4 \geq \frac{1}{2}(a^2+b^2)^2$$

Tương tự $a^2+b^2 \geq \dfrac{1}{2}(a+b)^2$. Từ đó suy ra $a^4+b^4 \geq \dfrac{1}{8}(a+b)^4$.

b) Xét hiệu $(a^2+b^2)^2-ab(a+b)^2$ được

$$a^4-a^3b+b^4-ab^3=a^3(a-b)-b^3(a-b)=(a-b)^2(a^2+ab+b^2) \geq 0.$$

□

BÀI 365.

a) $a^2+b^2+c^2 \geq a(b+c)$;

b) $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq a(b+c+d)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a)

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 \geq a(b+c) &\Leftrightarrow 2a/62+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2ac \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+b^2+c^2 \geq 0. \end{aligned}$$

b) $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq ab+ac+ad$

$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+4c^2+4d^2 \geq 4ab+4ac+4ad$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+a^2 \geq 0$.

□

BÀI 366.

a) $x^4 - 4x + 5 > 0$;

b) $x^4 - x + \dfrac{1}{2} > 0$.

✍ LỜI GIẢI.

a) $x^4 - 4x + 5 = x^4 - 4x^2 + 4 + 4x^2 - 4x + 1 = (x^2 - 2)^2 + (2x - 1)^2 \geq 0$.
Không xảy ra đẳng thức. Do đó $x^2 - 4x + 5 > 0$.

b) $x^4 - x + \dfrac{1}{2} = x^4 - x^2 + \dfrac{1}{4} = \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$.
Không xảy ra đẳng thức. Do đó $x^4 - x + \dfrac{1}{2} > 0$.

□

BÀI 367.

a) $a^2 + b^2 + c^2 + \dfrac{3}{4} \geq a + b + c$;

b) $a^4 + b^4 + 2 \geq 4ab$.

✍ LỜI GIẢI.

a) $\left(a^2 + b^2 + c^2 + \dfrac{3}{4}\right) - (a + b +)$
$= \left(a^2 - a + \dfrac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \dfrac{1}{4}\right) + \left(c^2 - c + \dfrac{1}{4}\right)$
$= \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$.

b)

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + 2 - 4ab &= a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + 2a^2b^2 - 4ab + 2 \\ &= (a^2 - b^2)^2 + 2(ab - 1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

□

BÀI 368. $x^3 + 4x + 1 > 3x^2$ với $x \geq 0$.

✍ LỜI GIẢI.

$x^3 + 4x + 1 - 3x^2 = x(x - 2)^2 + x^2 + 1 > 0$ (vì $x \geq 0$). □

BÀI 369.

a) $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 9 \geq 0$;

b) $a^2 + 4b^2 + 4c^2 \geq 4ab - 4ac + 8bc$.

✍ LỜI GIẢI.

a) $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 9 = (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) + 9$.
Đặt $x^2 - 7x + 9 = a$, biểu thức trên bằng:

$$(a - 3)(a + 3) + 9 = a^2 \geq 0.$$

b) $(a^2 + 4b^2 + 4c^2) - (4ab - 4ac + 8bc) =$
$= (a^2 - 4ab + 4b^2) + 4c^2 + (4ac - 8bc)$
$= (a - 2b)^2 + 4c^2 + 4c(a - 2b)$
$= (a - 2b + 2c)^2 \geq 0$.

□

BÀI 370. $\left(\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{c+d}{2}\right)^2 \geq (a+c)(b+d)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \geq 4xy$ ta được:

$$\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)^2 = \frac{[(a+c)+(b+d)]^2}{4} \geq (a+c)(b+d).$$

□

BÀI 371.

a) $8(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3$ với $a,b,c>0$.

b) $(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc$ với $a,b,c \geq 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) áp dụng bất đẳng thức $4x^3+4y^3 \geq (x+y)^3$ với $x,y>0$ (bài 363b), ta được: $4a^3+4b^3 \geq (a+b)^3$, $4b^3+4c^3 \geq (b+c)^3$, $4c^3+4a^3 \geq (c+a)^3$.
Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên.

b) $(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc$
$\Leftrightarrow (a+b)(ab+bc+ca+c^2) \geq 8abc$ (bạn đọc tự biến đổi)
$\Leftrightarrow a^2b+a^2c+ac^2+ab^2+b^2c+bc^2-6abc \geq 0$ (bạn đọc tự biến đổi)
$\Leftrightarrow (a^2c+bc^2-2abc)+(a^2c+b^2-2abc)+(ac^2+ab^2-2abc) \geq 0$.
$\Leftrightarrow b(a-c)^2+c(a-b)^2+a(b-c)^2 \geq 0$.

□

BÀI 372. Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng $ab+bc+ca \leq 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

$a+b+c=0 \Rightarrow (a+b+c)^2=0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$
$\Rightarrow ab+bc+ca \leq 0$. □

BÀI 373. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

a) $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$;

b) $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{a+c-b}+\dfrac{c}{a+b-c} \geq 3$;

c) $\dfrac{1}{a+b}, \dfrac{a}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}$ cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Nhân hai vế của $a<b+c$ với số dương a, ta được $a^2<ab+ac$.
Tương tự $b^2<ba+bc$; $c^2<ca+cb$. Cộng từng vế các bất đẳng thức trên.

b) Đặt $b+c-a=x$, $c+a-b=y$, $a+b-c=z$ thì $2a=y+z$, $2b=x+z$, $2c=x+y$. Ta có:

$$\frac{2a}{b+c-a}+\frac{2b}{a+c-b}+\frac{2c}{a+b-c}=\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right) \geq 6$$

Suy ra điều phải chứng minh.

c) Ta có $a+b>c$, $b+c>a$, $a+c>b$.
Xét

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b+c+a} = \frac{2}{a+b+c} > \frac{2}{a+b+a+b} = \frac{1}{a+b}$$

Tương tự $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c} > \dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} > \dfrac{1}{a+c}$.

□

BÀI 374. a) Cho các số dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8.$$

b) Cho các số a và b không âm. Chứng minh rằng

$$(a+b)(ab+1) \geq 4ab.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Nhân từng vế các bất đẳng thức $(a+1)^2 \geq 4a$, $(b+1)^2 \geq 4b$, $(c+1)^2 \geq 4c$.

b) Nhân từng vế các bất đẳng thức $(a+b)^2 \geq 4ab$, $(ab+1)^2 \geq 4ab$.

□

BÀI 375. Cho các số dương a, b, c, d có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \geq 6.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \geq 2ab + 2cd + ab + cd = 3(ab + cd)$.

Ta lại có $ab + cd = ab + \dfrac{1}{ab} \geq 2$.

Suy ra điều phải chứng minh. □

BÀI 376. Cho các số dương a và b thỏa mãn $a^3 + b^3 = a - b$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + ab < 1$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Theo đề bài: $a - b = a^3 + b^3$, mà $a^3 + b^3 > a^3 - b^3$ (do $b > 0$) nên $a - b > a^3 - b^3$. Chia hai vế cho $a - b$ (chú ý rằng $a - b > 0$ vì $a - b = a^3 + b^3 > 0$). □

BÀI 377. Chứng minh các bất đẳng thức sau bằng cách xét từng khoảng giá trị của biến:

❶ $A = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$;

❷ $C = x^8 - x^7 + x^4 - x + 1 > 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) *Cách 1*: $A(x-1) = x^5 - 1$. Ta biết rằng nếu $x > 1$ thì $x^5 > 1$, nếu $x < 1$ thì $x^5 < 1$. Do đó:

— Nếu $x > 1$ thì $\dfrac{x^5 - 1}{x - 1} > 0 \Rightarrow A > 0$.

— Nếu $x < 1$ thì $\dfrac{x^5 - 1}{x - 1} > 0 \Rightarrow A > 0$.

— Nếu $x = 1$ thì hiển nhiên $A > 0$.

Cách 2:

$$\begin{aligned} A &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^3(x+1) + (x+1) + x^2 \\ &= (x+1)(x^3+1) + x^2 = (x+1)^2(x^2 - x + 1) + x^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dấu "=" không xảy ra.

b) Giải tương tự ví dụ 101. Xét $x \geq 1$ và $x < 1$.

□

Giải cac bài từ 378 đến 384 bằng phương pháp phản chứng:

BÀI 378. Chứng minh rằng nếu $a+b+c>0$, $abc>0$, $ab+bc+ca>0$ thì $a>0$, $b>0$, $c>0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử $a \leq 0$:

Nếu $a=0$ thì trái với $abc>0$.

Nếu $a<0$: Do $a+b+c>0$ nên $b+c>0$. Do $abc>0$ nên $bc<0$.

Suy ra $a(b+c)+bc<0$, mâu thuẫn với $ab+bc+ca>0$.

Vậy $a>0$. Tương tự, $b>0$, $c>0$. □

BÀI 379. Chứng minh rằng nếu $a \geq 3$, $b \geq 3$, $a^2+b^2 \geq 25$ thì $a+b \geq 7$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $a=3+x$, $b=3+y$ thì $x \geq 0$, $y \geq 0$. Ta có $a+b=6+(x+y)$. Ta sẽ chứng minh $x+y \geq 1$.

Giả sử $0 \leq c+y<1$ thì $x^2+2xy+y^2<1$ nên $x^2+y^2<1$ (do $2xy \geq 0$).

Khi đó $a^2+b^2=(3+x)^2+(3+y)^2=18+6(x+y)+(x^2+y^2)<18+6+1=25$.

Trái với giả thiết $a^2+b^2 \geq 25$.

Vậy $x+y \geq 1$, suy ra $a+b \geq 7$. □

BÀI 380. Cho ba số a, b, c khác nhau đôi một. Chứng minh rằng tồn tại một trong các số $9ab$, $9bc$, $9ca$ nhỏ hơn $(a+b+c)^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử $9ab \geq (a+b+c)^2$, $9bc \geq (a+b+c)^2$, $9ca \geq (a+b+c)^2$.

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên rồi chia cho 3 ta được:

$$3(ab+bc+ca) \geq (a+b+c)^2 \Rightarrow ab+bc+ca \geq a^2+b^2+c^2 \qquad (1)$$

Mặt khác dễ dàng chứng minh được $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$ với a,b,c khác nhau đôi một, mâu thuẫn với (1). □

BÀI 381. Chứng minh rằng không có ba số dương a, b, c nào thỏa mãn cả ba bất đẳng thức: $a+\dfrac{1}{b}<2$; $b+\dfrac{1}{c}<2$; $a+\dfrac{1}{a}<2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử tồn tại các số dương a,b,c mà $a+\dfrac{1}{b}<2$, $b+\dfrac{1}{c}<2$, $c+\dfrac{1}{a}<2$ thì $a+\dfrac{1}{b}+b+\dfrac{1}{c}+c+\dfrac{1}{a}<6$.

Hãy chứng minh điều vô lý. □

BÀI 382. Chứng minh rằng không có các số a, b, c nào thỏa mãn cả ba bất đẳng thức: $|b-c|>|a|$, $|c-a|>|b|$, $|a-b|>|c|$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử $|b-c|>|a|$, $|c-a|>|b|$, $|a-b|>|c|$ thì $(b-c)^2>a^2$, $(c-a)^2>b^2$, $(a-b)^2>c^2$. Do đó: $(b-c+a)(b-c-a)>0$, $(c-a+b)(c-a+b)(c-a-b)>0$, $(a-b+c)(a-b-c)>0$.

Nhân từng vế ba bất đẳng thức trên sẽ dẫn đến điều vô lí. □

BÀI 383. Chứng minh rằng không có các số dương a, b, c nào thỏa mãn các bất đẳng thức $4a(1-b)>1$, $4b(1-c)>1$, $4c(1-a)>1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử $4a(1-b)>1$, $4b(1-c)>1$, $4c(1-a)>1$ thì nhân từng vế ta được

$$64abc(1-a)(1-b)(1-c)>1 \tag{1}$$

Mặt khác, ta lại có:

$$4a(1-a)=4a-4a^2\le 1 \tag{2}$$

(vì $1+4a^2+4a=(2a+1)^2\ge 0$. Tương tự

$$4a(1-b)\le 1 \tag{3}$$

$$4c(1-c)\le 1 \tag{4}$$

Từ giả thiết phản chứng và từ a,b,c dương suy ra $1-a$, $1-b$, $1-c$ cũng dương. Do đó ta nhân từng vế các bất đẳng thức (2), (3), (4) và được:

$$64abc(1-a)(1-b)(1-c)$$

Mâu thuẫn với (1). □

BÀI 384. Cho $a^3+b^3=2$. Chứng minh rằng $a+b\le 2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Cách 1: Giả sử $a+b>2$. Đặt $a=x+y$, $b=x-y$, ta có:

$$a+b=2x>2\Rightarrow x>1 \tag{1}$$

Ta có: $a^3+b^3=(x+y)^3+(x-y)^3=2x^3+6xy^2$.

Do (1) nên $2x^3>2$; $6xy^2\ge 0$. Vậy $a^3+b^3>2$, trái với giải thiết.

Cách 2: Giả sử $a+b>2$. Ta có:

$(a+b)^3>8\Rightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)>8\Rightarrow 2+3ab(a+b)>8$

$\Rightarrow ab(a+b)>2\Rightarrow ab(a+b)>a^3+b^3$ (vì $a^3+b^3=2$).

$\Rightarrow ab>a^2-ab+b^2$ (chia hai vế cho số dương $a+b$)

$\Rightarrow 0>(a-b)^2$, vô lí. □

Giải các bài từ 385 đến 389 trong đó sắp thứ tự các biến:

BÀI 385. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}<2$;

b) $a^3+b^3+c^3+3abc>ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Giả sử $a\ge b\ge c>0$ thì $a+b\ge a+c\ge b+c$.

Ta có $\dfrac{c}{a+b}\le\dfrac{c}{b+c}$, $\dfrac{b}{c+a}\le\dfrac{b}{b+c}$, $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{a}{b+c}$.

Cộng từng vế:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{a}{b+c}+1<1+1=2.$$

Chú ý: Ta cũng chứng minh được: Nếu $a,b,c>0$ thì $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$ (xem ví dụ 92b).

b) Sắp xếp $a \geq b \geq b \geq c > 0 \Rightarrow c(a-c)(b-c) \geq 0 \Rightarrow c^3 + abc \geq ac^2 + bc^2$.
Ta cần phải chứng minh
$$a^3 + b^3 + 2abc \geq ab(a+b) + b^2c + a^2c.$$
Bất đẳng thức này tương đương với $(a-b)^2(a+b-c) \geq 0$.

□

BÀI 386. Chứng minh bất đẳng thức:
a) $2(a^8 + b^8) \geq (a^3 + b^3)(a^5 + b^5)$;
b) $3(a^8 + b^8 + c^8) \geq (a^3 + b^3 + c^3)(a^5 + b^5 + c^5)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Hiệu $2(a^8 + b^8) - (a^3 + b^3)(a^5 + b^5)$ bằng $(a^3 - b^3)(a^5 - b^5)$.
Giả sử $a \geq b$ thì $a^3 - b^3 \geq 0$ và $a^5 - b^5 \geq 0$.

b) Theo câu a) ta có:
$$2(a^8 + b^8) \geq (a^3 + b^3)(a^5 + b^5)$$
$$2(b^8 + c^8) \geq (b^3 + c^3)(b^5 + c^5)$$
$$2(c^8 + a^8) \geq (c^3 + a^3)(c^5 + a^5)$$
Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên, ta được:
$$4(a^8 + b^8 + c^8) \geq (a^8 + b^8 + c^8) + a^3(a^5 + b^5 + c^5) + b^3(a^5 + b^5 + c^5) + c^3(a^5 + b^5 + c^5)$$
$$\Rightarrow 3(a^8 + b^8 + c^8) \geq (a^3 + b^3 + c^3)(a^5 + b^5 + c^5)$$

□

BÀI 387. Cho $a + b = 2$. Chứng minh rằng $a^8 + b^8 \geq a^7 + b^7$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Chú ý rằng $a + b = 2$, ta xét hiệu
$$2(a^8 + b^8) - 2(a^7 + b^7) = 2(a^8 + b^8) - (a+b)(a^7 + b^7)$$
Biến đổi hiệu này thành $(a-b)(a^7 - b^7)$.
Giả sử $a \geq b$ thì $a - b \geq 0$ và $a^7 - b^7 \geq 0$. □

BÀI 388. Chứng minh bất đẳng thức sau với $a, b, c \geq 0$:
a) $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$;
b) $a^6 + b^6 + c^6 \geq a^5b + b^5c + c^5a$ $(a, b, c \geq 0)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Sắp xếp $a \geq b \geq c \geq 0$.
$$\begin{aligned} & a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \\ = \ & a(a-b)[(a-b) + (b-c)] - b(a-b)(b-c) + c(a-c)(b-c) \\ = \ & a(a-b)^2 + a(a-b)(b-c) - b(a-b)(b-c) + c(a-c)(b-c) \\ = \ & a(a-b)^2 + (b-c)(a-b)^2 + c(a-c)(b-c) \geq 0 \end{aligned}$$

b) Không mất tính tổng quát, giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c. Xét hiệu:

$$\begin{aligned} & a^6+b^6+c^6-a^5b-b^5c-c^5a = a^5(a-b)+b^5(b-c)+c^5(c-a) \\ = \ & a^5(a-b)-b^5[(a-b)+(c-a)]+c^5(c-a) \\ = \ & (a-b)(a^5-b^5)+(c-a)(c^5-b^5). \end{aligned}$$

Do $c \leq a$, $c \leq b$ nên $c-a<0$, $c^5-b^5 \leq 0$, do đó $(c-a)(c^5-b^5) \geq 0$.
Còn $(a-b)(a^5-b^5)$ cũng không âm (thật vậy nếu $a-b \geq 0$ thì $a^5-b^5 \geq 0$, nếu $a-b<0$ thì $a^5-b^5<0$.)

□

BÀI 389. Chứng minh rằng tồn tại một trong các số $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-a)^2$ không lớn hơn $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi m là số nhỏ nhất trong các hiệu $a-b$, $b-c$, $a-c$.
Giả sử $a \geq b \geq c$ thì $m \geq 0$. Ta có:

$$a-b \geq m \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq m^2$$

$$b-c \geq m \geq 0 \Rightarrow (b-c)^2 \geq m^2$$

$$a-c \geq 2m \geq 0 \Rightarrow (a-c)^2 \geq 4m^2$$

Cộng từng vế:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2 \geq 6m^2$$
$$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 \geq 6m^2$$
$$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \geq 6m^2 \Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \geq m^2.$$

□

BÀI 390. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2.
a) So sánh a, b, c với 1;
b) Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+2abc<2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có

$$a<b+c \Rightarrow 2a<a+b+c=2 \Rightarrow a<1 \Rightarrow b<1,\ c<1.$$

b) Từ câu a) suy ra: $(1-a)(1-b)(1-c)>0$. Rút gọn ta được:

$$ab+bc+ca>1+abc \tag{1}$$

Ta lại có:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+a)$$
$$\Rightarrow 4 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} 4 > a^2+b^2+c^2+2(a+abc) & \Rightarrow 4>a^2+b^2+c^2+2+2abc \\ & \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2abc<2. \end{aligned}$$

□

BÀI 391. Cho $|x| \geq 2$, $|y| \geq 2$. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{x+y}{xy} \leq 1$;

b) Phương trình $\dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{2003}{2004}$ vô nghiệm.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) $\dfrac{x+y}{xy} \leq \left|\dfrac{x+y}{xy}\right| = \left|\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right| \leq \dfrac{1}{|x|} + \dfrac{1}{|y|} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$ (vì $|x| \geq 2$, $|y| \geq 2$).

b) Suy ra từ câu a).

□

BÀI 392. a) Cho $a+b+c=6$ và $ab+bc+ca=9$. Chứng minh rằng $0 \leq a \leq 4$, $0 \leq b \leq 4$ và $0 \leq c \leq 4$.

b) Cho $a+b+c=2$ và $a^2+b^2+c^2=2$. Chứng minh rằng $a \leq a \leq \dfrac{4}{3}$, $0 \leq b \leq \dfrac{4}{3}$ và $0 \leq\leq \dfrac{4}{3}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Ta có $b+c = 6-a$, $bc = 9 - a(b+c) = 9 - a(6-a) = 9 - 6a + a^2$.
Áp dụng bất đẳng thức $(b+c)^2 \geq 4bc$, ta được

$$(6-a)^2 \geq 4(9-6a+a^2) \Rightarrow 3a^2 - 12a \leq 0 \Rightarrow a(a-4) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq a \leq 4.$$

Tương tự $0 \leq b \leq 4$, $0 \leq c \leq 4$.

b) Giải tương tự câu a). Có thể áp dụng bất đẳng thức $(b+c)^2 \geq 4bc$ hoặc áp dụng bất đẳng thức $2(b^2+c^2) \geq (b+c)^2$, ta được $3a^2 - 4a \leq 0$, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

□

BÀI 393. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì

$$\left|\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right)\right| < 1.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\left|\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right)\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{a-c}{b} + \frac{b-a}{c} + \frac{c-b}{a}\right| < 1$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{(a-c)ac + (b-a)ab + (c-b)bc}{abc}\right| < 1 \qquad (1)$$

Mặt khác a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên

$$\frac{|a-c|}{b} < 1,\ \frac{|b-a|}{c} < 1,\ \frac{|c-b|}{a} < 1$$

Suy ra

$$\frac{|(a-c)(b-a)(c-b)|}{abc} < 1 \qquad (2)$$

Biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối của (2) và (1) đối nhau (bạn đọc tự kiểm tra), do đó từ (2) suy ra (1). □

BÀI 394. Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thì:

a) $\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ac}{b} + \dfrac{ab}{c} \geq a+b+c$;

b) $\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ca}{c+a} \leq \dfrac{a+b+c}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}=c\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)\geq 2c$ (do $a,b,c>0$).

Tương tự: $\dfrac{ac}{b}+\dfrac{ab}{c}\geq 2a$, $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}\geq 2b$. Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên.

b) áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{x+y}{xy}\geq\dfrac{4}{x+y}$ với $a,y>0$ (ví dụ 77b), ta có:

$$\frac{ab}{a+b}\leq\frac{a+b}{4},\ \frac{bc}{b+c}\leq\frac{b+c}{4},\ \frac{ca}{c+a}\leq\frac{c+a}{4}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên.

□

BÀI 395. Chứng minh rằng với $a,b,c>0$ thì $1<\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Do a, b, c dương nên:

$$\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{a+b}<\frac{a+c}{a+b+c}$$
$$\frac{b}{b+c+a}<\frac{b}{b+c}<\frac{b+a}{a+b+c}$$
$$\frac{c}{c+a+b}<\frac{c}{c+a}<\frac{c+b}{a+b+c}.$$

Cộng từng vế:

$$1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2.$$

□

BÀI 396. Chứng minh rằng với $a,b,c>0$ thì:

a) $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\geq\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$;

b) $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\geq a+b+c$;

c) $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\geq\dfrac{a+b+c}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) $A=\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)=\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)-2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)$.

Do $a,b,c>0$ nên

$$A\geq\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2=\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+\left(\frac{b}{a}-1\right)^2\geq 0.$$

b) Xét $\dfrac{a^2}{b}+b=\dfrac{a^2+b^2}{b}\geq\dfrac{2ab}{b}=2a$ (do $a,b>0$).

Tương tự $\dfrac{b^2}{c}+c\geq 2b$, $\dfrac{c^2}{a}+a\geq 2c$.

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên.

c) Xét $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b+c}{4}=\dfrac{(2a)^2+(b+c)^2}{4(b+c)}\geq\dfrac{4a(b+c)}{4(b+c)}=a$ (do $b,c>0$).

Tương tự $\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c+a}{4}\geq b$, $\dfrac{c^2}{a+b}+\dfrac{a+b}{4}\geq c$.

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên.

□

BÀI 397. Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thì

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}-\frac{a}{b+c}=\frac{a(ab+ac-b^2-c^2)}{(b^2+c^2)(b+c)}=\frac{ab(a-b)+ac(a-c)}{(b^2+c^2)(b+c)} \quad (1)$$

Tương tự:

$$\frac{b^2}{c^2+a^2}-\frac{b}{c+a}=\frac{ca(c-a)+cb(c-b)}{(a^2+b^2)(a+b)} \quad (2)$$

$$\frac{c^2}{a^2+b^2}-\frac{c}{a+b}=\frac{ca(c-a)+cb(c-b)}{(a^2+b^2)(a+b)} \quad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2) và (3) ta được:

$$\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)-\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

$$=ab(a-b)\left[\frac{1}{(b^2+c^2)(b+c)}-\frac{1}{(a^2+b^{)}(a+b)}\right]+ac(a-c)\left[\frac{1}{(b^2+c^2)(b+c)}-\frac{1}{(a^2+b^2)(a+b)}\right]+$$

$$+bc(b-c)\left[\frac{1}{(a^2+c^2)(a+c)}-\frac{1}{(a^2+b^2)(a+b)}\right]$$

Giả sử $a \geq b \geq c > 0$ thì các dấu ngoặc tròn và ngoặc vuông của biểu thức trên đều không âm. Suy ra điều phải chứng minh. □

BÀI 398. Chứng minh rằng khi viết dưới dạng số thập phân vô hạn, số $\left(\frac{2}{225}\right)^{100}$ có 2000 chữ số thập phân đầu tiên sau dấu phẩy bằng 0.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có:

$$\left(\frac{2}{225}\right)^{1000}<\left(\frac{2}{200}\right)^{1000}=\left(\frac{1}{10^2}\right)^{1000}=\frac{1}{10^{2000}}=0.\underbrace{00\ldots0}_{1999}1.$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

BÀI 399. Cho 101 số a_1, a_2,…,a_{101} trong đó $a_1=5$, $a_2=a_1+\frac{1}{a_1}$,…,$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng:

a) $a_{51}>11$;

b) $15<a_{101}<15,1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Theo giả thiết, $a_{n+1}^2=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2$. Do đó:

$$a_1^2=25$$

$$a_2^2=a_1^2+\frac{1}{a_1^2}+2$$

$$\dots$$

$$a_{51}^2 = a_{50}^2 + \frac{1}{a_{50}^2} + 2.$$

Cộng từng vế: $a_{51}^2 = \left(\dfrac{1}{a_1^2 + \ldots + \dfrac{1}{a_{50}^2}}\right) + 125 > 11^2 \Rightarrow a_{51} > 11.$

b) Tương tự như câu a)

$$a_{101}^2 = \left(\frac{1}{a_1^2} + \cdots + \frac{1}{a_{100}^2}\right) + 225 > 15^2 \Rightarrow a_{101} > 15.$$

Để chứng minh $a_{101} < 15,1$, chú ý rằng $15,1^2 = 228,01$ ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_{100}^2} < 3,01.$$

Ta có:

$$\frac{1}{a_1^2} + \cdots + \frac{1}{a_{100}^2} = \left(\frac{1}{a_1}^2 + \cdots + \frac{1}{a_{50}^2}\right) + \left(\frac{1}{a_{51}^2} + \cdots + \frac{1}{a_{100}^2}\right) <$$
$$< 50 \cdot \frac{1}{a_1^2} + 50 \cdot \frac{1}{a_{51}^2} < 50 \cdot \frac{1}{25} + 50 \cdot \frac{1}{11^2} < 1 + \frac{1}{2} < 3,01.$$

□

BÀI 400. Cho sáu đoạn thẳng có độ dài trong khoảng từ 10 cm đến 75 cm. Chứng minh rằng bao giờ cũng chọn được ba đoạn thẳng làm thành ba cạnh của một tam giác.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi độ dài các đoạn thẳng đã cho là a_1, a_2, ..., a_6. Giả sử

$$10 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_6 \leq 75.$$

Nếu bất kì ba đoạn thẳng nào cũng không thể lập thành một tam giác thì:

$$a_3 \geq a_1 + a_2 \geq 10 + 10 = 20$$

$$a_4 \geq a_2 + a_3 \geq 10 + 20 = 30$$

$$a_5 \geq a_3 + a_4 \geq 20 + 30 = 50$$

$$a_6 \geq a_4 + a_5 \geq 30 + 50 = 80, \text{ vô lí.}$$

□

BÀI 401. *Đố vui: Ai nói đúng?* Một đơn vị công an hằng ngày dùng thuyền máy đi xuôi khúc sông từ A đến B rồi quay trở lại A. Hôm ấy, dòng nước chảy nhanh hơn hôm trước. Chiến sĩ Tâm vui vẻ nói: "Hôm nay nước chảy nhanh hơn, thuyền xuôi nhanh hơn nên ta sẽ về sớm hơn".

Chiến sĩ Hòa không tán thành: "Đi nhanh được bao nhiêu thì lại về chậm bấy nhiêu! Như vậy thuyền vẫn đi với thời gian như hôm trước".

Ai đúng? Ai sai? Biết rằng vận tốc riêng của thuyền máy không đổi trong cả hai ngày.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi khoảng cách AB là s (km), vận tốc riêng của thuyền máy là a (km/h), vận tốc dòng nước ngày hôm trước là b (km/h), vận tốc dòng nước ngày hôm sau là c (km/h) trong đó $s > 0$, $a > 0$, $0 < b < c$. Ngày hôm trước, vận tốc thuyền lúc xuôi là $a + b$ (km/h) lúc ngược là $a - b$ (km/h), thời gian đi khứ hồi (đi từ A đến B rồi trở về A) là:

$$x = \frac{s}{a+b} + \frac{s}{a-b} = \frac{2as}{a^2 - b^2} \text{ (giờ)}.$$

Tương tự, thời gian đi khứ hồi trong ngày hôm sau là

$$y = \frac{s}{a+c} + \frac{s}{a-c} = \frac{2as}{a^2 - c^2} \text{ (giờ)}.$$

Do $0 < b < c$ nên $a^2 - b^2 > a^2 - c^2 \Rightarrow \dfrac{2as}{a^2 - b^2} < \dfrac{2as}{a^2 - c^2} \Rightarrow x < y$.
Như vậy là cả Tâm lẫn Hòa đều sai: thời gian thuyền đi hôm sau lâu hơn hôm trước. □

Bất đẳng thức với số tự nhiên

BÀI 402. Cho $A = \dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{6}{5} \cdots \dfrac{200}{199}$. Chứng minh rằng $14 < A < 20$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Để chứng minh $A < 20$, ta làm trội mỗi phân số của A bằng cách dùng bất đẳng thức $\dfrac{n+1}{n} < \dfrac{n}{n-1}$.
Ta có:

$$A = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{200}{199}$$

$$A < \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{199}{198}.$$

Suy ra $A^2 < \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 200}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 199} \cdot \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 199}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdots 198} = \dfrac{200}{1} \cdot \dfrac{2}{1} = 400 \Rightarrow A < 20$.
Để chứng minh $A > 14$, ta làm giảm mỗi phân số của A bằng cách dùng bất đẳng thức $\dfrac{n+1}{n} > \dfrac{n+2}{n+1}$.
□

Chứng minh các bất đẳng thức (từ bài 403 đến 410):

BÀI 403. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{208}{210} < \frac{1}{25}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi A là vế trái của bất đẳng thức. Ta là trội A để được một biểu thức C dễ rút gọn hơn. Muốn vậy biểu thức C phải có nhiều thừa số giống nhau ở tử và ở mẫu.
Nhận xét hai phân số cạnh nhau, chẳng hạn $\dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{4}{6}$, ta thấy 4 hơn 3 là 1, còn 6 hơn 4 là 2. Ta làm trội: $\dfrac{n}{n+2} < \dfrac{n-1}{n}$ (vì $n^2 < n^2 + n - 2$ với mọi $n > 2$). Do đó:

$$A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{208}{201}.$$

$$A < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdots \frac{207}{208} (= C)$$

Suy ra

$$A^2 < \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdots 208}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdots 210}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 6\cdot 9\cdots 207}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdots 208} = \frac{1}{210}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{630} < \frac{1}{625} = \left(\frac{1}{25}\right)^2.$$

Do đó $A < \dfrac{1}{25}$. □

BÀI 404. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $A = \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{36} + \dfrac{7}{144} + \cdots + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} < 1$ (n nguyên dương);

b) $B = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \cdots + \dfrac{n-1}{n!} < 1$ ($n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$).

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Viết $\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ thành $\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

$$A = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1.$$

b) Viết $\dfrac{n-1}{n!}$ thành $\dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!}$.

□

BÀI 405. Chứng minh bất đẳng thức: $C = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{5}{3!} + \dfrac{11}{4!} + \ldots + \dfrac{n^2+n-1}{(n+1)!} < 2$ (n nguyên dương).

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\frac{n^2+n-1}{(n+1)!} = \frac{n(n+1)}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2!} + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\right]\\
=&\frac{1}{2!} + \left[\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}\right] - \left[\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}\right]\\
=&\frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 2 - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} < 2.
\end{aligned}$$

□

BÀI 406. Chứng minh bất đẳng thức: $A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \dfrac{4}{2^4} + \cdots + \dfrac{100}{2^{100}} < 2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

$$2A = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots + \frac{100}{2^{99}} \quad (1)$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{99}{2^{99}} + \frac{100}{2^{100}} \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{99}}\right) - \frac{100}{2^{100}}$$

Hãy chứng minh biểu thức trong dấu ngoặc nhỏ hơn 2. □

BÀI 407. Chứng minh bất đẳng thức: $B = \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{4^3} + \dfrac{1}{5^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^3} < \dfrac{1}{12}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$).

✍ **LỜI GIẢI.**

Giải tương tự ví dụ 96. □

BÀI 408. Chứng minh bất đẳng thức: $C = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

$$3C = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \cdots + \frac{99}{3^{98}} + \frac{100}{3^{99}}$$

$$C = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{99}{3^{99}} + \frac{100}{3^{100}}$$

Suy ra: $2C = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{99}}\right) - \frac{100}{3^{100}}$.

Hãy chứng minh biểu thức trong dấu ngoặc nhỏ hơn $\frac{3}{2}$.

□

BÀI 409. Chứng minh bất đẳng thức: $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n+1} < 2$ (n nguyên dương).

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi $A = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1}$.

Tổng A có $2n+1$ số, ghép thành n cặp các phân số cách đều hai đầu, còn lại một phân số ở giữa là $\frac{1}{2n+1}$.

Mỗi cặp bằng:

$$\frac{1}{2n+1-k} + \frac{1}{2n+1+k} = \frac{4n+2}{(2n+1)^2 - k^2} > \frac{4n+2}{(2n+1)^2} = \frac{2}{(2n+1)}.$$

Vậy $A > \frac{2}{2n+1} \cdot n + \frac{1}{2n+1} = 1$.

Để chứng minh $A < 2$, làm trội A bằng cách thay mỗi phân số của A bởi phân số lớn nhất. □

BÀI 410. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{3}{5} < \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} + \cdots + \frac{1}{4006} < \frac{3}{4}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi $A = \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} + \cdots + \frac{1}{4006}$.

— Chứng minh $A > \frac{3}{5}$: Tổng A có 2003 số, ghép thành 1001 cặp phân số cách đều hai đầu, còn lại một phân số ở giữa là $\frac{1}{3005}$.

  Mỗi cặp bằng: $\frac{1}{3005-k} + \frac{1}{3005+k} > \frac{6010}{3005^2} = \frac{2}{3005}$.

  Do đó $A > \frac{2}{3005} \cdot 1001 = \frac{2002}{3005} > \frac{3}{5}$.

— Chứng minh $A < \frac{3}{4}$: Đặt $2004 = n$, ta có:

$$A = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n(n-2)}.$$

$$A = \frac{1}{n+(n-2)} + \frac{1}{n+(n-3)} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

  Cộng lại: $2A = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n-2}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n-3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-2} + \frac{1}{n}\right)$.

  Ta sẽ chứng minh nhóm đầu và nhóm cuối có giá trị lớn hơn các nhóm khác bằng cách chứng minh:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{2n-2}>\frac{1}{n+k}+\frac{1}{2n-2-k} \text{ với } 0<k<n-2 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}(1) \quad &\Leftrightarrow \frac{3n-2}{n(2n-2)}>\frac{3n-2}{(n+k)(2n-2-k)}\\ &\Leftrightarrow n(2n-2)<(n+k)(2n-2-k)\\ &\Leftrightarrow 2n^2-2n<2n^2-2n-kn+2kn-2k-k^2\\ &\Leftrightarrow k^2<kn-2k \Leftrightarrow k<n-2: \text{ đúng.}\end{aligned}$$

Vậy $2A<\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n-2}\right)\cdot(n-1)=\frac{3n-2}{n(2n-2)}\cdot(n-1)=\frac{3n-2}{2n}<\frac{3}{2}$.

Do đó $A<\frac{3}{4}$.

□

BÀI 411. a) Chứng minh bất đẳng thức:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2} \quad (n \text{ nguyên dương}).$$

b) Chứng minh rằng với mọi số dương A, ta luôn tìm được số tự nhiên n để

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>A$$

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Gọi $A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}$. Ở ví dụ 97, ta đã chứng minh rằng $A<n$. Bây giờ ta chứng minh $A>\frac{n}{2}$. Ta có:

$$\begin{aligned}A &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\frac{1}{2^n-1}\\ &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2+1}+\cdots+\frac{1}{2^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Thay mỗi phân số trong dấu ngoặc bởi phân số nhỏ nhất trong dấu ngoặc đó:

$$\begin{aligned}A &> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\cdot 2+\frac{1}{2^3}\cdot 2^2+\cdots+\frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1}-\frac{1}{2^n}\\ &=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}=1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2^n}>\frac{n}{2}.\end{aligned}$$

b) áp dụng câu a): $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}$, nếu ta chọn $k=26n-1$ thì

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{n}{2}.$$

Như vậy nếu chọn $k=2^{2A}-1$ thì $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2A}{2}=A$.

□

BÀI 412. Cho bốn số nguyên dương a, b, c, d, trong đó tổng ba số bất kì chia cho số còn lại đều có thương là một số nguyên khác 1. Chứng minh rằng trong bốn số a, b, c, d tồn tại hai số bằng nhau.

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử $a > b > c > d$. Đặt $\dfrac{b+c+d}{a} = m$, $\dfrac{a+c+d}{b} = n$, $\dfrac{a+b+d}{c} = p$.

Theo giả thiết thì $m > 1$; ta lại có $d < c < b < a$ nên $b + c + d < 3a$, do đó $m < 3$; vậy $m = 2$.

Dễ thấy

$$m = \frac{b+c+d}{a} < \frac{b+c+d}{b} < \frac{a++d}{b} = n$$
$$n = \frac{a+c+d}{b} < \frac{a+c+d}{c} < \frac{a+b+d}{c} = p$$

Suy ra $n \geq 3$, $p \geq 4$.

Ta có $b + c + d = 2a$, $a + c + d \geq 3b$, $a + b + d \geq 4c$.

Cộng từng vế ta được:

$$2a + 2b + 2c + 3d \geq 2a + 3b + 4c \Rightarrow 3d \geq b + 2c > d + 2d = 3d, \text{ vô lí.}$$

□

BÀI 413. Tìm các số tự nhiên x và y sao cho x^x có y chữ số, còn y^y có x chữ số.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có x^x có y chữ số $\Rightarrow 1o^{y-1} \leq x^x < 10^y$,

y^y có x chữ số $\Rightarrow 10^{x-1} \leq y^y < 10^x$.

Giả sử $x \geq y$. Ta có $x^x < 10^y \leq 10^x \Rightarrow x < 10$.

Ta chọn các số x^x sao cho $x < 10$ và $x^x \geq 10^{y-1}$ với mọi $y - 1$ nhỏ hơn x.

Các số 2^2, 3^3, $\dots$, 7^7 không thỏa mãn (chẳng hạn $2^2 < 10$, $3^3 < 10^2$,...). Xét các số 1^1, 8^8, 9^9, ta thấy $10^0 < 1^1 < 10^1$, $10^7 < 8^8 < 10^10^8$, $10^8 < 9^9 < 10^9$.

Đáp số: $x = y = 1$; $x = y = 8$; $x = y = 9$. □

BÀI 414. Chứng minh bất đẳng thức $(n!)^2 > n^2$ với mọi số tự nhiên $n \geq 3$.

✍ **LỜI GIẢI.**

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times k \times \ldots \times n$.

$n! = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\ldots 1$.

Suy ra $(n!)^2 = (1 \cdot n) \cdot [2(n-1)] \cdot [3(n-2)] \cdots [k(n-k+1)] \cdots (n \cdot 1)$. Ta sẽ chứng minh rằng biểu thức trong mỗi dấu ngoặc vuông đều lớn hơn n.

Thật vậy

$$\begin{aligned} k(n-k+1) - n &= kn - n - k^2 + k = n(k-1) - k(k-1) \\ &= (n-k)(k-1) > 0 \text{ vì } n > k > 1. \end{aligned}$$

□

BÀI 415. Kí hiệu $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Chứng minh rằng $[x] + [y] \leq [x + y]$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có: $[x] \leq x$, $[y] \leq y$ nên $[x] + [y] \leq x + y$, tức là $[x] + [y]$ là các số nguyên không vượt quá

$$x + y \tag{1}$$

Mặt khác, theo định nghĩa phần nguyên, $[x+y]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá

$$x+y \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $[x]+[y] \le [x+y]$. □

Bất đẳng thức và phương trình

BÀI 416. Dùng phương pháp bất đẳng thức để giải các phương trình:

a) $(x+y)^2 = (x+1)(y-1)$;

b) $x^2+y^2+z^2+t^2 = x(y+z+t)$;

c) $(x^2+1)(y^2+4)(z^2+9) = 48xyz$ $(x,y,z>0)$;

d) $(x+1)(y+1)(x+y) = 8xy$ $(x,y \ge 0)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Đặt $x+1=a$, $y-1=b$. Phương trình trở thành $(a+b)^2 = ab$. Dễ dàng tính được $a=b=0$. Đáp số: $x=-1$, $y=1$.

b) Biến đổi: $x=1$, $y=2$, $z=3$.

c) Đáp số: $x=1$, $y=2$, $z=3$.

d) Sử dụng bất đẳng thức $(x+1)(y+1)(x+y) \ge 8xy$ (xem ví dụ 94).

□

BÀI 417. Kí hiệu $S(n)$ là tổng các chữ số của n. Tìm số nguyên dương n sao cho:

a) $n+S(n) = 2018$;

b) $S(n) = n^2 - 2005n + 7$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Ta có

$$n+S(n) = 2018 \tag{1}$$

nên

$$n < 2018 \tag{2}$$

$$S(n) \le 1 + 9 \times 3 = 28.$$

$$n \ge 2018 - 28 = 1990 \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra $n = \overline{199a}$ hoặc $n = \overline{20bc}$.

Thay $n = \overline{199a}$ vào (1) được $2a = 9$, loại.

Thay $n = \overline{20bc}$ vào (1) được $a=0$, $b=8$. Đáp số: 2008.

b) $S(n) = n^2 - 2005n + 7$ (1)

— Xét $n = 2005$ thì $S(n) = 7$ và (1) đúng.

— Xét $n > 2005$. Ta có $S(n) = n^2 - 2005n + 7 > n(n-2005) > n$, tức là $S(n) > n$, vô lí.

— Xét $1 \le n \le 2004$. Ta có $n-1 \ge 0$, $n-2004 \le 0$ nên

$$n(n-1)(n-2004) \le 0 \Rightarrow n^2 - 2005n + 2004 \le 0$$

$$\Rightarrow n^2 - 2005n + 7 \le -1997 \Rightarrow S(n) < 0, \text{ vô lí.}$$

Đáp số: $n = 2005$.

□

BÀI 7 TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

A GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

1. Cho biểu thức $f(x, y\ldots)$
   Ta nói M là giá trị lớn nhất(GTLN) của biểu thức $f(x, y\ldots)$, kí hiệu $\max f = M$ nếu hai điều kiện sau thỏa mãn:
   - Với mọi $x, y, \ldots$ để $f(x, y\ldots)$ xác định thì
   $$f(x, y\ldots) \leq M\,(M \text{ là hằng số}) \qquad (1)$$
   - Tồn tại $x_0, y_0, \ldots$ sao cho
   $$f(x_0, y_0\ldots) = M \qquad (2)$$
2. Cho biểu thức $f(x, y\ldots)$
   Ta nói m là giá trị nhỏ nhất(GTNN) của biểu thức $f(x, y\ldots)$, kí hiệu $\min f = m$ nếu hai điều kiện sau thỏa mãn:
   - Với mọi $x, y, \ldots$ để $f(x, y\ldots)$ xác định thì
   $$f(x, y\ldots) \geq m\,(m \text{ là hằng số}) \qquad (1')$$
   - Tồn tại $x_0, y_0, \ldots$ sao cho
   $$f(x_0, y_0\ldots) = m \qquad (2')$$
3. Chú ý rằng nếu chỉ có điều kiện (1) hay (1') thì chưa thể nói gì về cực trị của một biểu thức. Chẳng hạn, xét biểu thức
   $$A = (x-1)^2 + (x-3)^2.$$
   Mặc dù ta có $A \geq 0$, nhưng chưa thể kết luận được $\min A = 0$ vì không tồn tại giá trị nào của x để $A = 0$.

VÍ DỤ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$A = (x-1)^2 + (x-3)^2.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có
$$\begin{aligned} A &= x^2 - 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 = 2(x^2 - 4x + 5) \\ &= 2(x-2)^2 + 2 \geq 2. \end{aligned}$$

$A = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
Vậy $\min A = 2$ khi và chỉ khi $x = 2$. □

B TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC CHỨA MỘT BIẾN

1. Tam thức bậc hai

VÍ DỤ 2. ❶ Tìm GTNN của $A = 2x^2 - 8x + 1$.

❷ Tìm GTLN của $B = -5x^2 - 4x + 1$.

❸ Cho tam thức bậc hai $P = ax^2 + bx + c$.

Tìm GTNN của P nếu $a > 0$.

Tìm GTLN của P nếu $a < 0$.

LỜI GIẢI.

❶ $A = 2x^2 - 8x + 1 = 2(x^2 - 4x + 4) - 7 = 2(x-2)^2 - 7 \geq -7$.

$\min A = -7$ khi và chỉ khi $x = 2$.

❷ $B = -5x^2 - 4x + 1 = -5\left(x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}\right) + \frac{9}{5} = -5\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \leq \frac{9}{5}$.

$\max B = \frac{9}{5}$ khi và chỉ khi $x = -\frac{2}{5}$.

❸ $P = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$.

Đặt $c - \frac{b^2}{4a} = k$. Do $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ nên

— Nếu $a > 0$ thì $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, do đó $P \geq k$;

$\min P = k$ khi và chỉ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

— Nếu $a < 0$ thì $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$, do đó $P \leq k$;

$\max P = k$ khi và chỉ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

□

2. Đa thức bậc cao hơn hai

VÍ DỤ 3. Tìm GTNN của

$$A = x(x-3)(x-4)(x-7).$$

LỜI GIẢI.

$$A = (x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12).$$

Đặt $x^2 - 7x + 6 = y$ thì

$$A = (y-6)(y+6) = y^2 - 36 \geq -36.$$

$\min A = -36 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 6. \end{array}\right.$ □

3. Phân thức có tử là hằng số, mẫu là tam thức bậc hai

VÍ DỤ 4. Tìm GTNN của
$$A = \frac{2}{6x - 5 - 9x^2}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**
$$A = \frac{-2}{9x^2 - 6x + 5} = \frac{-2}{(3x-1)^2 + 4}.$$
Ta thấy $(3x-1)^2 \geq 0$ nên $(3x-1)^2 + 4 \geq 4$.
Để ý tính chất $a \geq b$ thì $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ với a và b cùng dấu. Từ đó ta có
$$\frac{1}{(3x-1)^2+4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-2}{(3x-1)^2+4} \geq \frac{-2}{4} \Rightarrow A \geq -\frac{1}{2}.$$
$\min A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. □

4. Phân thức có mẫu là bình phương của một nhị thức

VÍ DỤ 5. Tìm GTNN của
$$A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**
Cách 1. Đặt $x - 1 = y$ thì $x = y + 1$. Ta có
$$A = \frac{3(y+1)^2 - 8(y+1) + 6}{y^2} = \frac{3y^2 - 2y + 1}{y^2} = 3 - \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2}.$$
Lại đặt $\frac{1}{y} = z$ thì
$$A = 3 - 2z + z^2 = (z-1)^2 + 2 \geq 2.$$
$\min A = 2 \Leftrightarrow z = 1 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.
Cách 2. Viết A dưới dạng tổng của 2 với một biểu thức không âm
$$A = \frac{(2x^2 - 4x + 2) + (x^2 - 4x + 4)}{x^2 - 2x + 1} = 2 + \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} \geq 2.$$
$\min A = 2$ khi và chỉ khi $x = 2$.

□

5. Các phân thức dạng khác

VÍ DỤ 6. Tìm GTNN và GTLN của

$$A = \frac{3-4x}{x^2+1}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Để tìm GTNN, viết A dưới dạng

$$A = \frac{x^2-4x+4-x^2-1}{x^2+1} = \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 1 \geq -1.$$

$\min A = -1$ khi và chỉ khi $x = 2$.

Để tìm GTLN, viết A dưới dạng

$$A = \frac{4x^2+4-4x^2-4x-1}{x^2+1} = 4 - \frac{(2x+1)^2}{x^2+1} \leq 4.$$

$\max A = 4$ khi và chỉ khi $x = -\dfrac{1}{2}$. □

C TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC CÓ QUAN HỆ RÀNG BUỘC GIỮA CÁC BIẾN

VÍ DỤ 7. Tìm GTNN của $A = x^3 + y^3 + xy$ biết rằng $x + y = 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Sử dụng điều kiện đã cho để rút gọn biểu thức A:

$$A = (x+y)(x^2-xy+y^2) + xy = x^2 - xy + y^2 + xy = x^2 + y^2.$$

Đến đây có nhiều cách giải

Cách 1. Biểu thị y theo x rồi đưa về tam thức bậc hai theo x.

Thay $y = 1 - x$ vào biểu thức A

$$A = x^2 + (1-x)^2 = 2(x^2-x) + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

$\min A = \dfrac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{1}{2}$.

Cách 2. Sử dụng điều kiện đã cho làm xuất hiện một biểu thức mới có chứa A

$$x + y = 1 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 1 \qquad (1)$$

Mặt khác

$$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2), ta được

$$2(x^2+y^2) \geq 1 \Rightarrow x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}.$$

$\min A = \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Cách 3. Sử dụng điều kiện đã cho để đưa vào một biến mới.

Đặt $x = \frac{1}{2} + a$ thì $y = \frac{1}{2} - a$. Biểu thị x^2+y^2 theo a, ta được

$$x^2+y^2 = \left(\frac{1}{2}+a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-a\right)^2 = \frac{1}{2} + 2a^2 \geq \frac{1}{2}.$$

$\min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

□

VÍ DỤ 8. Cho $x+y+z=3$.

1. Tìm GTNN của $A = x^2+y^2+z^2$.
2. Tìm GTLN của $B = xy+yz+zx$.
3. Tìm GTNN của $A+B$.

LỜI GIẢI.

Bình phương hai vế của đẳng thức $x+y+z=3$, ta được

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = 9 \qquad (1)$$

tức là $A+2B=9$.

Dễ dàng chứng minh được

$$A \geq B \qquad (2)$$

xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x=y=z$.

1. Từ (1) và (2) suy ra $3A \geq A+2B = 9$, nên $A \geq 3$.
   Do đó $\min A = 3$ khi và chỉ khi $x=y=z=1$.
   ⚠ *Có thể giải câu a bằng cách đổi biến $x = 1+a$, $y = 1+b$, $z = 1+c$ rồi xét $x^2+y^2+z^2$.*
2. Từ (1) và (2) suy ra $3B \leq A+2B = 9$, nên $B \leq 3$. Do đó $\max B = 3$ khi và chỉ khi $x=y=z=1$.
   ⚠ *Có thể giải câu b dựa vào câu a: Vì $A+2B=9$ nên B lớn nhất khi và chỉ khi A nhỏ nhất.*
3. Ta có $A+2B=9$ mà $B \leq 3$ (câu b) nên $A+B \geq 6$.
   Do đó $\min(A+B) = 6$ khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

□

VÍ DỤ 9. Tìm GTNN và GTLN của

1. Biểu thức A, biết rằng $A(A-1) \leq 2$;
2. Biểu thức $A = 2-x-y-z$, biết rằng

$$(2-x-y-z)^2 = 4-x^2-y^2-z^2.$$

LỜI GIẢI.

❶ Ta sử dụng phương pháp xét dấu để tìm GTNN, GTLN của A. Ta biến đổi

$$A(A-1) \leq 2 \Leftrightarrow A^2 - A - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (A+1)(A-2) \leq 0.$$

Lập bảng xét dấu

A		-1		2	
$A+1$	$-$	0	$+$	|	$+$
$A-2$	$-$	|	$-$	0	$+$
$(A+1)(A-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Do đó $-1 \leq A \leq 2$ nên $\min A = -1$ và $\max A = 2$.

❷ Từ giả thiết ta có

$$x + y + z = 2 - A \tag{1}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 - A^2 \tag{2}$$

Ta đưa ra một bất đẳng thức trong đó chứa $x + y + z$ và $x^2 + y^2 + z^2$.
Ta có

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz). \tag{3}$$

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được

$$xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2. \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$; xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x = y = z$. Thay các biểu thức (1), (2) vào bất đẳng thức trên, ta có

$$(2 - A)^2 \leq 3(4 - A^2) \Leftrightarrow A^2 - A - 2 \leq 0.$$

Giải tiếp như câu a ta được

— $\min A = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$

— $\max A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$

□

D CÁC CHÚ Ý KHI TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

⚠ *Khi tìm cực trị(GTNN hay GTLN) của một biểu thức, ta có thể đổi biến.*
Chẳng hạn, ở ví dụ 1 ta có thể đặt $x - 2 = y$, khi đó

$$A = (y+1)^2 + (y-1)^2 = 2y^2 + 2 \geq 2.$$

Suy ra $\min A = 2$ *khi* $y = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

⚠ *Khi tìm cực trị của biểu thức, nhiều khi ta thay điều kiện để biểu thức đạt cực trị bởi điều kiện tương đương là biểu thức khác đạt cực trị.*
Chẳng hạn:
— $-A$ *lớn nhất* $\Leftrightarrow A$ *nhỏ nhất.*
— $\dfrac{1}{B}$ *lớn nhất* $\Leftrightarrow B$ *nhỏ nhất với* $B > 0$.
— C *lớn nhất* $\Leftrightarrow C^2$ *lớn nhất với* $C > 0$.

VÍ DỤ 10. Tìm GTNN của $A = \dfrac{x^4+1}{(x^2+1)^2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**
Chú ý rằng $A > 0$ nên A lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{1}{A}$ nhỏ nhất và A nhỏ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{1}{A}$ lớn nhất. Ta có

$$\frac{1}{A} = \frac{(x^2+1)^2}{x^4+1} = \frac{x^4+2x^2+1}{x^4+1} = 1 + \frac{2x^2}{x^4+1}.$$

Tìm GTLN của A: Ta có $2x^2 \geq 0$, $x^4+1 > 0$ nên $\dfrac{2x^2}{x^4+1} \geq 0$. Suy ra $\dfrac{1}{A} \geq 1 + 0 = 1$.
$\min \dfrac{1}{A} = 1$ khi và chỉ khi $x = 0$. Do đó $\max A = 1$ khi và chỉ khi $x = 0$.
Tìm GTNN của A: Ta có $2x^2 \leq x^4 + 1$ (dễ chứng minh, dấu "$=$"xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 1$) mà $x^4+1 > 0$ nên $\dfrac{2x^2}{x^4+1} \leq 1$. Suy ra $\dfrac{1}{A} \leq 1 + 1 = 2$.
$\max \dfrac{1}{A} = 2$ khi và chỉ khi $x^2 = 1$. Do đó $\min A = \dfrac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = \pm 1$.

⚠ *1. Cách khác tìm GTLN của A*

$$A = \frac{(x^2+1)^2 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = 1 - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} \leq 1.$$

$\max A = 1$ *khi và chỉ khi* $x = 0$.

2. Cách khác tìm GTNN của A

Cách 1. *Đặt* $\dfrac{1}{x^2+1} = y$ *như* **Ví dụ 5**.

Cách 2.

$$A = \frac{2x^4+2}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)+(x^2-1)^2}{2(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{(x^2-1)^2}{2(x^2+1)^2} \geq \frac{1}{2}.$$

$\min A = \dfrac{1}{2}$ *khi và chỉ khi* $x = \pm 1$.

□

⚠ *Khi giải toán cực trị, nhiều khi ta cần xét nhiều khoảng giá trị của biến, sau đó so sánh các giá trị của biểu thức trong các khoảng ấy để tìm GTNN, GTLN.*

VÍ DỤ 11. Tìm GTLN và GTNN của

$$A = (3x-1)^2 - 4|3x-1| + 5.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $|3x-1| = y$ thì
$$A = y^2 - 4y + 5 = (y-2)^2 + 1 \geq 1.$$
$\min A = 1 \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow |3x-1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

□

VÍ DỤ 12. Tìm GTNN của
$$B = |x-2| + |x-3|.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Cách 1.
- Xét khoảng $x < 2$ thì $B = 2 - x + 3 - x = 5 - 2x$.
  Do $x < 2$ nên $-2x > -4$, do đó $B > 1$ (1)
- Xét $2 \leq x \leq 3$ thì $B = x - 2 + 3 - x = 1$ (2)
- Xét $x > 3$ thì $B = x - 2 + x - 3 = 2x - 5$.
  Do $x > 3$ nên $2x > 6$, do đó $B > 1$ (3)

So sánh (1), (2) và (3) ta được $\min B = 1$ khi và chỉ khi $2 \leq x \leq 3$.

Cách 2. Do giá trị tuyệt đối của một số lớn hơn hoặc bằng số đó nên
$$B = |x-2| + |x-3| = |x-2| + |3-x| \geq (x-2) + (3-x) = 1.$$
Do đó $\min B = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3.$

□

VÍ DỤ 13. Tìm GTNN của
$$A = |x-1| + |x-7| + |x-9|.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Do giá trị tuyệt đối của một số lớn hơn hoặc bằng số đó nên
$$|x-1| + |x-9| = |x-1| + |9-x| \geq x - 1 + 9 - x = 8. \quad (1)$$
Ta lại có $|x-7| \geq 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A \geq 8$.

Do đó $\min A = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 9 - x \geq 0 \\ x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$ □

⚠ *Khi tìm cực trị của một biểu thức,người ta thường sử dụng các bất đẳng thức đã biết. Xem mục các hằng đẳng thức trong chuyên đề Chứng minh bất đẳng thức.*

VÍ DỤ 14. Cho $x^2 + y^2 = 52$. Tìm GTLN của $A = 2x + 3y$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta nhận thấy $2x+3y$ và x^2+y^2 đều là các thành phần của bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$ với $a=2$, $b=3$.
Theo bất đẳng thức trên, ta có

$$(2x+3y)^2 \leq (2^2+3^2)(x^2+y^2) = 13 \cdot 52 = 13 \cdot 13 \cdot 4.$$

Suy ra $|2x+3y| \leq 26$, do đó $2x+3y \leq 26$.
$\max A = 26$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} & (1) \\ 2x+3y \geq 0 & (2) \end{cases}$

Thay $y = \dfrac{3x}{2}$ vào $x^2+y^2 = 52$ ta được $x^2 + \dfrac{9x^2}{4} = 52 \Leftrightarrow x = \pm 4$.
— Với $x = 4$ thì $y = 6$, thỏa mãn (2).
— Với $x = -4$ thì $y = -6$, không thỏa mãn (2).

Vậy $\max A = 26$ khi và chỉ khi $x = 4$ và $y = 6$. □

⚠ *Trong các hằng đẳng thức, cần chú ý đến hai mệnh đề sau, cho ta GTLN của tích, GTNN của tổng:*
— *Nếu hai số có tổng không đổi thì tích của chúng có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.*
— *Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.*

Để chứng minh hai mệnh đề trên, ta dùng bất đẳng thức $(a+b)^2 \geq 4ab$*:*
— *Nếu hai số a và b có* $a+b=k$ *(hằng số) thì từ* $(a+b)^2 \geq 4ab$ *ta có* $ab \leq \dfrac{k^2}{4}$, *do đó* $\max(ab) = \dfrac{k^2}{4}$ *khi và chỉ khi* $a=b$.
— *Nếu hai số dương a và b có* $ab = p$ *(hằng số) thì* $a+b$ *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow (a+b)^2$ *nhỏ nhất, do đó* $\min(a+b)^2 = 4p$ *khi và chỉ khi* $a=b$.

VÍ DỤ 15. Tìm GTLN của

$$A = (x^2-3x+1)(21+3x-x^2).$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Các biểu thức x^2-3x+1 và $21+3x-x^2$ có tổng không đổi (bằng 22) nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi

$$x^2-3x+1 = 21+3x-x^2 \Leftrightarrow x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow (x-5)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Khi đó $A = 11 \cdot 11 = 121$.
Vậy $\max A = 121$ khi và chỉ khi $x=5$ hoặc $x=-2$. □

VÍ DỤ 16. Tìm GTLN của

$$A = \frac{16x^2+4x+1}{2x} \text{ với } x > 0.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Viết B dưới dạng $8x+2+\dfrac{1}{2x}$. Hai số $8x$ và $\dfrac{1}{2x}$ là hai số dương có tích không đổi và bằng 4 nên tổng của chúng khỉ nhất khi và chỉ khi

$$8x=\frac{1}{2x}\Leftrightarrow 16x^2=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\,(\text{chú ý rằng } x>0).$$

Vậy $\min B=\dfrac{1+1+1}{\dfrac{1}{2}}=6$ khi và chỉ khi $x=\dfrac{1}{4}$. □

⚠ *Trong các ví dụ trên, ta chỉ ra tất cả các giá trị của biến để xảy ra đẳng thức. Tuy nhiên, yêu cầu của bài toán tìm GTNN, GTLN không đòi hỏi như vậy, chỉ cần chứng tỏ rằng tồn tại giá trị của biến để xảy ra đẳng thức.*

VÍ DỤ 17. Tìm GTLN của $A=ab+bc+cd$, biết rằng a, b, c, d là các số không âm có tổng bằng 1.

LỜI GIẢI.

Cách 1. Giả sử $a\ge b\ge c\ge d\ge 0$. Ta có

$$\begin{aligned}A&=ab+bc+cd\le ab+ac+ad=a(b+c+d)\\&=a(1-a)=a-a^2=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Không cần tìm điều kiện cần và đủ để $A=\dfrac{1}{4}$, tức là không cần giải tất cả điều kiện $bc=ac$, $cd=ad$, $a=\dfrac{1}{2}$, $b+c+d=\dfrac{1}{2}$ và b, c, $d\ge 0$. Ta chỉ cần chỉ ra $A=\dfrac{1}{4}$ khi, chẳng hạn $a=b=\dfrac{1}{2}$, $c=d=0$.

Vậy $\max A=\dfrac{1}{4}$ khi, chẳng hạn $a=b=\dfrac{1}{2}$, $c=d=0$.

Cách 2.

$$A=ab+bc+cd\le ab+ad+bc+cd=(a+c)(b+d).$$

Áp dụng bất đẳng thức $xy\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$. Ta có

$$A\le(a+c)(b+d)\le\left(\frac{a+c+b+d}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

$$A=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}a+c=\dfrac{1}{2}\\ b+d=\dfrac{1}{2}\\ ad=0\\ a,\ b,\ c,\ d\ge 0.\end{cases}$$

Vậy $\max A=\dfrac{1}{4}$ khi, chẳng hạn $a=b=\dfrac{1}{2}$, $c=d=0$.

□

E BÀI TOÁN CỰC TRỊ VỚI SỐ TỰ NHIÊN

VÍ DỤ 18. Tìm GTLN của biểu thức

$$A = \frac{y}{5-(x+y)} \text{ với } x,\ y \text{ là các số tự nhiên.}$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $x + y \neq 5$.

Xét $x + y \leq 4$:

— Nếu $y = 0$ thì $A = 0$.

— Nếu $1 \leq y \leq 3$ thì $A = \dfrac{y}{5-(x+y)} \leq 3$.

— Nếu $y = 4$ thì $x = 1$ và $A = 4$.

Xét $x + y \geq 6$ thì $A = \dfrac{y}{5-(x+y)} \leq 0$.

So sánh các giá trị trên của A, ta thấy $\max A = 4$ khi và chỉ khi $x = 0$, $y = 4$. □

VÍ DỤ 19. Tìm GTNN và GTLN của tích xy, biết rằng x và y là các số nguyên dương thỏa mãn $x + y = 2005$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2 = 2005^2 - (x-y)^2.$$

Giả sử $x > y$ (không thể xảy ra $x = y$). Ta có

xy lớn nhất $\Leftrightarrow$ $x - y$ nhỏ nhất; xy nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $x - y$ lớn nhất.

Do $1 \leq y < x \leq 2004$ nên $1 \leq x - y \leq 2003$. Ta có

— $\min(x - y) = 1$ khi và chỉ khi $x = 1003$, $y = 1002$.

— $\max(x - y) = 2003$ khi và chỉ khi $x = 2004$, $y = 1$.

Do đó

— $\max(xy) = 1005006$ khi và chỉ khi $x = 1003$, $y = 1002$.

— $\min(xy) = 2004$ khi và chỉ khi $x = 2004$, $y = 1$.

□

VÍ DỤ 20. Tìm GTNN của biểu thức

$$A = |11^m - 5^n| \text{ với } m, n \text{ là các số nguyên dương.}$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta thấy 11^m tận cùng bằng 1, còn 5^n tận cùng bằng 5.

Nếu $11^m > 5^n$ thì A tận cùng bằng 6, nếu $11^m < 5^n$ thì A tận cùng bằng 4.

Ta chỉ ra một trường hợp $A = 4$: với $m = 2$, $n = 3$ thì $A = |121 - 125| = 4$.

Như vậy $\min A = 4$ khi, chẳng hạn $m = 2$, $n = 3$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1.

a) Tìm GTNN của $A = x^2 - 5x + 1$

b) Tìm GTLN của $B = 1 - x^2 + 3x$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned} A = x^2 - 5x + 1 &= \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) - \frac{21}{4} \\ &= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} \\ &\geq -\frac{21}{4}. \end{aligned}$$

Vậy $\min A = -\dfrac{21}{4}$ đạt tại $x = \dfrac{5}{2}$.

❷ Ta có

$$\begin{aligned} A = 1 - x^2 + 3x &= -\left(x^2 - 3x\right) + 1 \\ &= -\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4} + 1 \\ &= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{13}{4} \\ &\leq \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

Vậy $\max A = \dfrac{13}{4}$ đạt tại $x = \dfrac{3}{2}$.

□

BÀI 2. Tìm GTNN của các biểu thức

a) $A = (x+8)^4 + (x+6)^4$

b) $B = (0{,}5x^2 + x)^2 - 3 \cdot |0{,}5x^2 + x|$

c) $C = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

d) $D = (x^2 + x - 6)(x^2 + x + 2)$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Đặt $y = x + 7$, ta được

$$\begin{aligned} A &= (y+1)^4 + (y-1)^4 = [(y+1)^2 + (y-1)^2]^2 - 2(y+1)^2(y-1)^2 \\ &= (2y^2+2)^2 - 2(y^2-1)^2 = 4y^4 + 8y^2 + 4 - 2y^4 + 4y^2 - 2 \\ &= 2y^4 + 12y^2 + 2 \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $y = 0 \Leftrightarrow x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -7$.

Vậy $\min A = 2$ đạt tại $x = -7$.

❷ Đặt $t = |0,5x^2 + x|$, $t \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} B &= t^2 - 3t = \left(t^2 - 3t + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} \\ &= \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \\ &\geq -\frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{aligned} t = \frac{3}{2} &\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}x^2 + x\right| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}x^2 + x = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}x^2 + x = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \text{ (VN)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $\min B = -\dfrac{9}{4}$ đạt tại $x = -1$, $x = -3$.

❸ Ta có

$$C = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x^2 - x + 1)^2 = \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad C \geq \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x - \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\min C = \dfrac{9}{16}$ đạt tại $x = \dfrac{1}{2}$.

❹ Đặt $t = x^2 + x$, ta có

$$D = (t-6)(t+2) = t^2 - 4t - 12 = t^2 - 4t + 4 - 16 = (t-2)^2 - 16 \geq -16$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$t - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 2 \Leftrightarrow x^2 + x = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Vậy $\min D = -16$ đạt tại $x = -1$; $x = -2$.

□

BÀI 3. Tìm GTNN của các biểu thức

a) $A = |x-3| + |x-7|$

b) $B = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2|$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$A = |x-3| + |7-x| \geq |x-3+7-x| = 4$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq 7. \end{array}\right.$

Vậy $\min A = 4$ đạt khi $3 \leq x \leq 7$.

❷ Ta có $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ với mọi x nên

$$B = x^2 - x + 1 + |2 + x - x^2| \geq x^2 - x + 1 + 2 + x - x^2 = 3.$$

Dấu bằng xảy ra khi $2 + x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(2-x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$.

Vậy $\min B = 3$ đạt khi $-1 \leq x \leq 2$.

□

BÀI 4. Cho $x + 2y = 1$. Tìm GTNN của $x^2 + 2y^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Thay $x = 1 - 2y$ vào $A = x^2 + 2y^2$, ta được

$$\begin{aligned} A &= 6y^2 - 4y + 1 = 6\left(y^2 - \frac{2}{3}y\right) + 1 = 6\left(y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) - \frac{2}{3} + 1 \\ &= 6\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \\ &\geq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $y = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = 1 - 2y = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $\min A = \dfrac{1}{3}$ đạt tại $x = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{1}{3}$. □

BÀI 5. Cho $4x - 3y = 7$. Tìm GTNN của $2x^2 + 5y^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Thay $y = \dfrac{4x-7}{3}$ vào $B = 2x^2 + 5y^2$ ta được

$$9B = 98x^2 - 280x + 245 = 2(7x-10)^2 + 45 \geq 45.$$

Dấu bằng xảy ra khi $7x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{10}{7}$, $y = -\dfrac{3}{7}$

Vậy $\min B = 5$ đạt tại $x = \dfrac{10}{7}$, $y = -\dfrac{3}{7}$. □

BÀI 6. Cho $a + b = 1$. Tìm GTNN của $a^4 + b^4$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}
&(a-b)^2 &&\geq 0\\
\Leftrightarrow\ &a^2+b^2 &&\geq 2ab\\
\Leftrightarrow\ &2(a^2+b^2) &&\geq a^2+b^2+2ab\\
\Leftrightarrow\ &2(a^2+b^2) &&\geq (a+b)^2\\
\Leftrightarrow\ &(a^2+b^2) &&\geq \frac{(a+b)^2}{2} \quad (1)
\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta cũng có $2(a^4+b^4) \geq (a^2+b^2)^2$ (2)
Bình phương hai vế của (1) ta được

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2)^2 \geq \frac{(a+b)^4}{4}\\
\Rightarrow\ &2(a^4+b^4) \geq \frac{(a+b)^4}{4} \quad \text{do (2)}\\
\Leftrightarrow\ &a^4+b^4 \geq \frac{(a+b)^4}{8} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b$, và vì $a+b=1$ nên suy ra $a=b=\dfrac{1}{2}$.
Vậy $\min A = \dfrac{1}{8}$ đạt khi $a=b=\dfrac{1}{2}$. □

BÀI 7. Cho $a+b=1$. Tìm GTNN của a^3+b^3.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $ab \leq \dfrac{(a+b)^2}{4} = \dfrac{1}{4}$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
&a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)\\
\Rightarrow\ &a^3+b^3 = 1-3ab \geq 1-3\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=\dfrac{1}{2}$.
Vậy $\min A = \dfrac{1}{4}$ đạt khi $a=b=\dfrac{1}{2}$. □

BÀI 8. Tìm GTNN của các biểu thức

a) $A = 2x^2+y^2-2xy-2x+3$

b) $B = x^2-2xy+2y^2+2x-10y+17$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $A = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + 2 = (x-y)(x-1)^2 + 2 \geq 2$.
Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Vậy $\min A = 2$ đạt khi $x = y = 1$.

❷ Ta có

$$\begin{aligned} B &= x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 + y^2 - 8y + 16 \\ &= (x-y)^2 + 2(x-y) + 1 + (y-4)^2 \\ &= (x-y+1)^2 + (y-4)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4. \end{cases}$$

Vậy $\min B = 0$ đạt khi $x = 3;\ y = 4$.

□

BÀI 9. ❶ Tìm GTLN của biểu thức $A = \dfrac{3x^2 - 6x + 17}{x^2 - 2x + 5}$

❷ Tìm GTNN của biểu thức $B = \dfrac{2x^2 - 16x + 41}{x^2 - 8x + 22}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Thực hiện phép chia đa thức ta được $A = 3 + \dfrac{2}{x^2 - 2x + 5}$
Mặt khác $x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 4 \geq 4$. Suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x^2 - 2x + 5} \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 3 + \frac{2}{x^2 - 2x + 5} \leq 3 + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & A \leq \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy $\max A = \dfrac{7}{2}$ đạt tại $x = 1$.

❷ Thực hiện phép chia đa thức ta được $B = 2 - \dfrac{3}{x^2 - 8x + 22}$.
Mặt khác $x^2 - 8x + 22 = x^2 - 8x + 16 + 6 = (x-4)^2 + 6 \geq 6$. Suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{3}{x^2 - 8x + 22} \leq \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{3}{x^2 - 8x + 22} \geq -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 2 - \frac{3}{x^2 - 8x + 22} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$

Vậy $\min B = \dfrac{3}{2}$ đạt tại $x=4$.

□

BÀI 10. Tìm GTLN của các biểu thức

a) $A = \dfrac{x}{(x+10)^2}$

b) $B = \dfrac{x}{(x+100)^2}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Đặt $y = x+10$, ta được $A = \dfrac{1}{y} - \dfrac{10}{y^2}$. Đặt $\dfrac{1}{y} = z$, ta được

$$\begin{aligned} A &= -10z^2 + z = -10\left(z^2 - \frac{1}{10}z\right) \\ &= -10\left(z^2 - \frac{1}{10}z + \frac{1}{400}\right) + \frac{1}{40} \\ &= -10\left(z - \frac{1}{20}\right)^2 + \frac{1}{40} \\ &\le \frac{1}{40}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$z = \frac{1}{20} \Leftrightarrow y = \frac{1}{z} = 20 \Leftrightarrow x = y - 10 = 10.$$

Vậy $\max A = \dfrac{1}{40}$ đạt tại $x = 10$.

❷ Đặt $y = x+100$, ta được $A = \dfrac{1}{y} - \dfrac{100}{y^2}$. Đặt $\dfrac{1}{y} = z$, ta được

$$\begin{aligned} A &= -100z^2 + z = -100\left(z^2 - \frac{1}{100}z\right) \\ &= -100\left(z^2 - \frac{1}{100}z + \frac{1}{40000}\right) + \frac{1}{400} \\ &= -100\left(z - \frac{1}{200}\right)^2 + \frac{1}{400} \\ &\le \frac{1}{400}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$z = \frac{1}{200} \Leftrightarrow y = \frac{1}{z} = 200 \Leftrightarrow x = y - 100 = 100.$$

Vậy $\max A = \dfrac{1}{400}$ đạt tại $x = 100$.

□

BÀI 11. Tìm GTNN và GTLN của các biểu thức

a) $A = \dfrac{27-12x}{x^2+9}$

b) $B = \dfrac{8x+3}{4x^2+1}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{27-12x}{x^2+9} \\ &= \frac{(x^2-12x+36)-(x^2+9)}{x^2+9} \\ &= \frac{(x-6)^2}{x^2+9}-1 \\ &\geq -1. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x-6=0 \Leftrightarrow x=6$.

Vậy $\min A=-1$ đạt tại $x=6$.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{27-12x}{x^2+9} \\ &= \frac{(4x^2+36)-(4x^2+12x+9)}{x^2+9} \\ &= 4-\frac{(2x+3)^2}{x^2+9} \\ &\leq 4. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $2x+3=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$.

Vậy $\max A=4$ đạt tại $x=-\dfrac{2}{3}$.

❷ Ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{8x+3}{4x^2+1}=\frac{4x^2+8x+4-4x^2-1}{4x^2+1} \\ &= \frac{4(x+1)^2}{4x^2+1}-1. \\ &\geq -1 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy $\min B=-1$ đạt tại $x=-1$.

Ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{16x^2+4-16x^2+8x-1}{4x^2+1} \\ &= \frac{4(4x^2+1)-(4x-1)^2}{4x^2+1} \\ &= 4-\frac{(4x-1)^2}{4x^2+1} \\ &\leq 4. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $4x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $\max B=4$ đạt tại $x=\dfrac{1}{4}$.

□

BÀI 12. ❶ Tìm GTNN của biểu thức $A=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+2xy+y^2}$

❷ Tìm GTLN của biểu thức $B = \dfrac{x^2}{x^4+1}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$A = \frac{x^2+y^2}{x^2+2xy+y^2} = \frac{(x+y)^2-2xy}{(x+y)^2} = 1 - \frac{2xy}{(x+y)^2}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} & (x-y)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+y^2 \geq 2xy \\ \Leftrightarrow\ & x^2+y^2+2xy \geq 4xy \\ \Leftrightarrow\ & (x+y)^2 \geq 4xy \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $A \geq 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $x = y$.

Vậy $\min A = \dfrac{1}{2}$ đạt được khi $x = y$.

❷ Với $x = 0$ thì $B = \dfrac{x^2}{x^4+1} = 0$.

Với $x \neq 0$ thì ta có

$$\begin{aligned} & (x^2-1)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^4-2x^2+1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^4+1 \geq 2x^2 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x^2}{x^4+1} \leq \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$.

Vậy $\max B = \dfrac{1}{2}$ đạt tại $x = \pm 1$.

□

BÀI 13. Tìm GTNN của các biểu thức

a) $A = \dfrac{(x+4)(x+9)}{x}$ với $x > 0$

b) $B = \dfrac{(x+100)^2}{x}$ với $x > 0$

c) $C = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x-2}$ với $x > 2$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$A = \frac{x^2+13x+36}{x} = x + \frac{36}{x} + 13$$

Các số dương x và $\dfrac{36}{x}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$x = \frac{36}{x} \Rightarrow x = 6 \Rightarrow A = 6 + \frac{36}{6} + 13 = 25.$$

Vậy $\min A = 25$ đạt tại $x = 6$.

❷ Ta có

$$B=\frac{x^2+200x+100000}{x}=\left(x+\frac{10000}{x}\right)+200$$

Các số dương x và $\frac{10000}{x}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$x=\frac{10000}{x}\Rightarrow x=100\Rightarrow A=100+\frac{10000}{100}+200=400.$$

Vậy $\min A=400$ đạt tại $x=100$.

□

BÀI 14. Cho $x+y=1$, $x>0$, $y>0$. Tìm GTNN của các biểu thức

❶ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

❷ $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}$ (a và b là hằng số dương đã cho)

❸ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $a=\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{xy}$. Do x, $y>0$ nên $\frac{1}{xy}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow xy$ lớn nhất. Mặt khác

$$\begin{aligned}&2xy\le x^2+y^2\Leftrightarrow 4xy\le(x+y)^2=1\Leftrightarrow xy\le\frac{1}{4}\\&\Rightarrow A\ge 4.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$ (do $x+y=1$)

Vậy $\min A=4$ đạt khi $x=y=\frac{1}{2}$.

❷ Ta có

$$\begin{aligned}B&=\frac{a^2.1}{x}+\frac{b^2.1}{y}=\frac{a^2(x+y)}{x}+\frac{b^2(x+y)}{y}\\&=a^2+\frac{a^2y}{x}+\frac{b^2x}{y}+b^2\\&=\left(\frac{a^2y}{x}+\frac{b^2x}{y}\right)+a^2+b^2.\end{aligned}$$

Các số dương $\frac{a^2y}{x}$ và $\frac{b^2x}{y}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$\frac{a^2y}{x}=\frac{b^2x}{y}\Leftrightarrow a^2y^2=b^2x^2\Leftrightarrow ay=bx\Leftrightarrow a(1-x)=bx\Leftrightarrow x=\frac{a}{a+b}.$$

Khi $x=\frac{a}{a+b}$ ta tính được $y=\frac{b}{a+b}$ và $B=(a+b)^2$.

Vậy $\min B=(a+b)^2$ đạt khi $x=\frac{a}{a+b}$, $y=\frac{b}{a+b}$.

□

BÀI 15. Cho các số dương x và y thỏa mãn $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}$. Tìm GTNN của các biểu thức

a) $A = xy$. b) $B = x + y$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Áp dụng $a^2 + b^2 \geq 2ab$, ta có

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{2}{xy} \Rightarrow xy \geq 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = y$. Vì x, $y > 0$ nên ta có $xy = 4 \Leftrightarrow x = y = 2$.

Vậy $\min A = 4$ đạt tại $x = y = 2$.

❷ Từ kết quả câu a) ta có

$$\begin{aligned} & (x+y)^2 \geq 4xy \geq 16 \\ \Leftrightarrow \quad & x + y \geq 4 \text{ do } x + y \geq 0. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $xy = 4 \Leftrightarrow x = y = 2$.

Vậy $\min B = 4$ đạt tại $x = y = 2$.

□

BÀI 16. Tìm GTNN của các biểu thức

❶ $A = (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ với a, $b > 0$.

❷ $B = (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ với a, b, $c > 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $A = 2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$.

Các số dương $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Khi đó $A = 2 + 1 + 1 = 4$.

Vậy $\min A = 4$ đạt tại $a = b$.

❷ Áp dụng tính chất: "Nếu hai số dương không đổi thì tổng của của chúng nhỏ nhất khi hai số dương đó bằng nhau" ta có

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \text{dấu bằng xảy ra khi } a = b. \\ & \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2, \text{dấu bằng xảy ra khi } a = c. \\ & \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2, \text{dấu bằng xảy ra khi } b = c. \\ \Rightarrow \quad & B = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 9. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Vậy $\min B = 9$ đạt tại $a = b = c$.

□

BÀI 17. Cho các số dương x, y, z có tổng bằng 1. Tìm GTNN của $A = \dfrac{x+y}{xyz}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ giả thiết suy ra $1 = ((x+y)+z)^2$. Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \geq 4ab$, ta có

$$1 = ((x+y)+z)^2 \geq 4(x+y)z$$

Nhân hai vế với số dương $\dfrac{x+y}{xyz}$ ta được

$$\frac{x+y}{xyz} \geq \frac{4z(x+y)^2}{xyz} \geq \frac{4z \cdot 4xy}{xyz} = 16.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x+y=z \\ x=y \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{4},\ z = \dfrac{1}{2}.$

Vậy $\min A = 16$ đạt tại $x = y = \dfrac{1}{4}$, $z = \dfrac{1}{2}$. □

BÀI 18. Tìm GTLN của tích xy với x, y là các số dương, $x < 60$, $y \geq 60$ và $x + y = 100$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Cách 1. Ta có $x < 60$, $y \geq 60$ nên

$$\begin{aligned}(60-x)(60-y) \leq 0 &\Rightarrow 3600 - 60(x+y) + xy \leq 0 \\ &\Rightarrow 3600 - 6000 + xy \leq 0 \\ &\Rightarrow xy \leq 2400.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $60 - y = 0 \Leftrightarrow y = 60 \Rightarrow x = 40$.

Vậy $\max(xy) = 2400$ đạt tại $x = 40$, $y = 60$.

Cách 1. Đặt $y = 60 + t$ tới $t \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned}xy &= (100-y)y = (100-60-t)(60+t) = (40-t)(60+t) \\ &= 2400 - 20t - t^2 \leq 2400.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $t = 0 \Leftrightarrow y = 60 \Rightarrow x = 40$ Vậy $\max(xy) = 2400$ đạt tại $x = 40$, $y = 60$. □

BÀI 19. Tìm GTLN của các biểu thức

❶ $A = (x+z)(y+t)$ biết rằng $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$.

❷ $B = (x+z)(y+t)$ biết rằng $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 = 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $A = xy + xt + yz + zt$. Ta có

$$\begin{cases} 2xy \leq x^2 + y^2 \\ 2xt \leq x^2 + t^2 \\ 2yz \leq y^2 + z^2 \\ 2zt \leq z^2 + t^2 \end{cases} \Rightarrow 2A \leq 2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = t \Rightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\max A = 1$ đạt tại $x = y = z = t = \pm\dfrac{1}{2}$.

❷ $B = xy + xt + yz + zt$. Ta có

$$\begin{cases} 2xy \le x^2 + y^2 \\ 2xt \le x^2 + t^2 \\ 2zt \le z^2 + t^2 \\ 0 \le (y-2z)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4xy \le 2x^2 + 2y^2 \\ 4xt \le 2x^2 + 2t^2 \\ 4zt \le 2z^2 + 2t^2 \\ 4yz \le y^2 + z^2 \end{cases} \Rightarrow 4B \le 3(x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2) = 3.$$

Vậy $\max B = \dfrac{3}{4}$ đạt được khi $x = y$, $y = z$, $z = t$, $x = 2t$ và $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ z = t = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = y = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \\ z = t = \dfrac{-1}{2\sqrt{3}}. \end{cases}$$

□

BÀI 20. Tìm GTNN của các biểu thức

❶ $A = |x-2| + |x-3| + |x-4|$.

❷ $B = |x-1| + |x+2| + |x-3| + |x-4|$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $A = |x-2| + |4-x| + |x-3|$. Ta có

$$\begin{cases} |x-2| + |4-x| \ge x - 2 + 4 - x = 2 \\ |x-3| \ge 0 \end{cases} \Rightarrow A \ge 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ 4 - x \ge 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy $\min A = 2$ đạt tại $a = 3$.

❷

❸ $A = |x-1| + |3-x| + |x-2| + |4-x|$. Ta có

$$\begin{cases} |x-1| + |3-x| \ge x - 1 + 3 - x = 2 \\ |x-2| + |4-x| \ge x - 2 + 4 - x = 2 \end{cases} \Rightarrow A \ge 2 + 2 = 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ 3 - x \ge 0 \\ x - 2 = 0 \\ 4 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ 2 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le 3.$$

Vậy $\min B = 4$ đạt được khi $2 \le x \le 3$.

□

BÀI 21. Tìm GTLN của $A = \dfrac{x}{x+y} + \dfrac{y}{8-(x+y)}$ với x, $y \in \mathbb{N}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta xét hai trường hợp

❶ $x + y < 8$. Ta có 3 trường hợp nhỏ

— Nếu $y = 0$ thì $A = 1$.

— Nếu $1 \leq y \leq 6$ thì $\dfrac{x}{x+y} < 1$, $\dfrac{y}{8-(x+y)} < 6 \Rightarrow A < 7$.

— Nếu $y = 7$ thì $x = 0$ và $A = 7$

❷ $x+ = y > 8$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} \dfrac{y}{8-(x+y)} \leq 0 \\ \dfrac{x}{x+y} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow A \leq 1.$$

So sánh các giá trị trên của A, ta có $\max A = 7$ đạt tại $x = 0$, $y = 7$.

□

BÀI 22. Tìm GTNN của $A = |36^m - 5^n|$ vói m, n là các số nguyên dương.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có 36^m tận cùng bằng 6, còn 5^n tận cùng bằng 5. Do đó

— Nếu $36^m > 5^n$ thì $6^m - 5^n$ tận cùng bằng 1.

— Nếu $36^m < 5^n$ thì $6^m - 5^n$ tận cùng bằng 9.

Ta xét các khả năng sau

— Khả năng $A = 1$. Ta có$36^m - 5^n = 1 \Leftrightarrow 36^m - 1 = 5^n$. Đẳng thức này không xảy ra vì vế trái chia hết cho 35 nên chia hết cho 7, còn vế phải không chia hết cho 7.

— Khả năng $A = 9$. Ta có $5^n - 36^m = 9 \Rightarrow 5^n$ chia hết cho 9, vô lí.

— Khả năng $A = 11$. Xảy ra được khả năng này, chẳng hạn với $m = 1$, $n = 2$ thì $A = |36 - 5^2| = 11$.

Vậy $\min A = 11$. □

BÀI 23. Tìm GTNN của biểu thức $A = x^2 + 4y$ biết rằng x, y là các số tự nhiên và A không phải là số chính phương.

✍ **LỜI GIẢI.**

Số tự nhiên A không phải là số chính phương nên $A > 1$.

— Xét $A = 2$, ta có $2 = x^2 + 4y$ nên x là số chẵn. Khi đó vế phải chia hết cho 4, vế trái không chia hết cho 4, loại.

— Xét $A = 3$, ta có $3 = x^2 + 4y$ nên x là số lẻ. Khi đó vế phải chia cho 4 dư 1 còn vế trái chia cho 4 dư 3, loại.

— Xét $A = 5$, ta có $5 = x^2 + 4y$. Khi đó $x = y = 1$.

Vậy $\min A = 5$. □

BÀI 24. Cho $A = \dfrac{x^4 + y^4}{15}$ trong đó x, y và A là các số nguyên dương

❶ Chứng minh rằng x và y đều chia hết cho 3.

❷ Chứng minh rằng x và y đều chia hết cho 5.

❸ Tìm GTNN của A.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Dễ thấy nếu số nguyên a không chia hết cho 3 thì a^4 chia 3 dư 1. Do A là số tự nhiên nên $x^4 + y^4 \vdots 15$, do đó

$$x^4 + y^4 \vdots 3 \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh $x \vdots 3$.

Giả sử x không chia hết cho 3. Thế thì x^4 không chia hết chho 3, y^4 không chia hết cho 3, y không chia hết cho 3. Do x và y không chia hết cho 3 nên x^4 và y^4 chia 3 dư 1, suy ra $x^4 + y^4$ chia 3 dư 2, trái với (1). Vậy $x \vdots 3$.

Chứng minh tương tự, ta được $y \vdots 3$.

❷ Dễ thấy nếu a không chia hết cho 5 thì a^4 chia cho 5 dư 1. Do A là số tự nhiên nên $x^4 + y^4 \vdots 15$, do đó

$$x^4 + y^4 \vdots 5 \quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh $x \vdots 5$.

Giả sử x không chia hết cho 5. Thế thì x^4 không chia hết chho 5, y^4 không chia hết cho 5, y không chia hết cho 5. Do x và y không chia hết cho 5 nên x^4 và y^4 chia 5 dư 1, suy ra $x^4 + y^4$ chia 5 dư 2, trái với (2). Vậy $x \vdots 5$.

Chứng minh tương tự, ta được $y \vdots 5$.

❸ Từ câu a) và câu b) suy ra x và y chia hết cho 15. Do x, y nguyên dương nên $x \geq 15$, $y \geq 15$, do đó $x^4 + y^4 \geq 15^4 + 15^4$. Suy ra

$$A = \frac{x^4 + y^4}{15} \geq \frac{15^4 + 15^4}{15} = 6750.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 15$.

Vậy $\min A = 6750$ đạt tại $x = y = 15$.

□

BÀI 25. Tìm số chính phương lớn nhất biết rằng nếu xóa hai chữ số tận cùng của nó (hai chữ số này không cùng bằng 0), ta lại được một số chính phương.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi số chính phương phải tìm là n^2, ta có $n^2 = 100A + b$, (A là số trăm, $1 \leq b \leq 99$). Theo đề bài, $100A$ là số chính phương nên A là số chính phương.

Đặt $A = a^2$, ($a \in \mathbb{N}$). Ta cần tìm giá trị lớn nhất của a. Ta có

$$\begin{aligned} & n^2 > 100a^2 \Rightarrow n > 10a \Rightarrow n \geq 10a + 1 \\ \Rightarrow \quad & n^2 \geq (10a + 1)^2 \Rightarrow 100a^2 + b \geq 100a^2 + 20a + 1 \Rightarrow b \geq 20a + 1. \end{aligned}$$

Do $b \leq 99$ nên $20a + 1 \geq 99 \Rightarrow a \leq 4$.

Ta có $n^2 = 100a^2 + b \leq 1600 + 99 = 1699$. Kiểm tra $42^2 = 1764$, $41^2 = 1681$. Số chính phương lớn nhất phải tìm là $1681 = 41^2$. □

PHẦN

II

HÌNH HỌC

CHƯƠNG 1 TỨ GIÁC

BÀI 1 TỨ GIÁC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa 1. Tứ giác $ABCD$ là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

⚠ *Các tứ giác được nghiên cứu trong chương là tứ giác lồi, đó là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác. Khi nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi.*

Tính chất 1. Tổng bốn góc của một tứ giác bằng 360°.

B CÁC DẠNG TOÁN

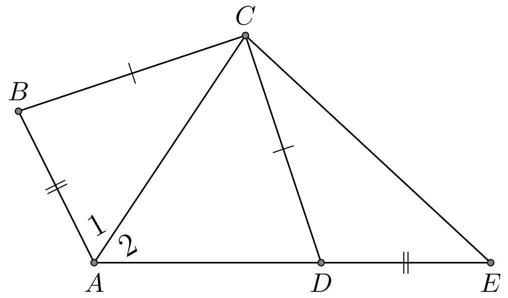
VÍ DỤ 1. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B}+\widehat{D}=180^\circ$, $CB=CD$. Chứng minh rằng AC là tia phân giác của góc A.

✍ **LỜI GIẢI.**

Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE=AB$. Ta có $\widehat{B}+\widehat{ADC}=180^\circ$, $\widehat{EDC}+\widehat{ADC}=180^\circ$ nên $\widehat{B}=\widehat{EDC}$.

Ta có $\triangle ABC=\triangle EDC$ (c.g.c). Suy ra $\begin{cases}\widehat{A}_1=\widehat{E} & (1)\\ AC=EC.\end{cases}$

Tam giác ACE có $AC=EC$ nên là tam giác cân, do đó $\widehat{A}_2=\widehat{E}$ (2).



Từ (1) và (2) suy ra AC là tia phân giác của góc A. □

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc, $AB=8$ cm, $BC=7$ cm, $AD=4$ cm. Tính độ dài CD.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi O là giao đểm của AC và BD.

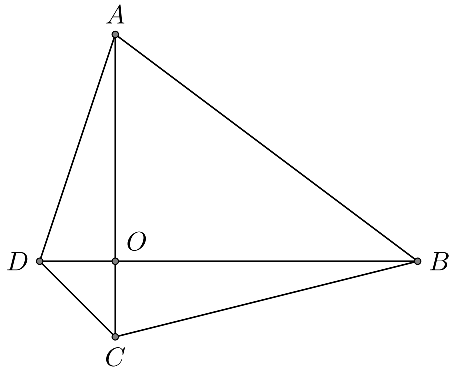
Ta có

$$\begin{aligned} OC^2 + OD^2 + OB^2 + OA^2 &= BC^2 + AD^2 \\ &= 7^2 + 4^2 = 65. \end{aligned}$$

và $OA^2 + OB^2 = AB^2 = 64$.

Suy ra $OC^2 + OD^2 = 1$ hay $CD^2 = 1$.

Vậy $CD = 1$.



□

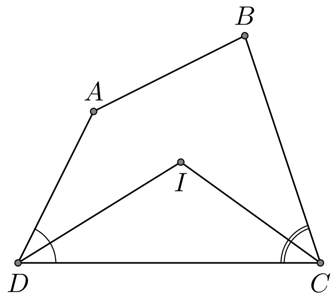
BÀI 2. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} - \widehat{B} = 50°$. Các tia phân giác của góc C và D cắt nhau tại I và $\widehat{CDI} = 115°$. Tính các góc A và B.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta tính được $\widehat{C} + \widehat{D} = 130°$, do đó $\widehat{A} + \widehat{B} = 230°$.

Ta lại có $\widehat{A} - \widehat{B} = 50°$.

Từ đó $\widehat{A} = 140°$, $\widehat{B} = 90°$.



□

BÀI 3. Cho tứ giác $ABCD$, E là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, F là giao điểm của các đường thẳng BC và AD. Các tia phân giác của các góc E và F cắt nhau ở I. Chứng minh rằng

❶ Nếu $\widehat{BAD} = 130°$, $\widehat{BCD} = 50°$ thì IE vuông góc với IF.

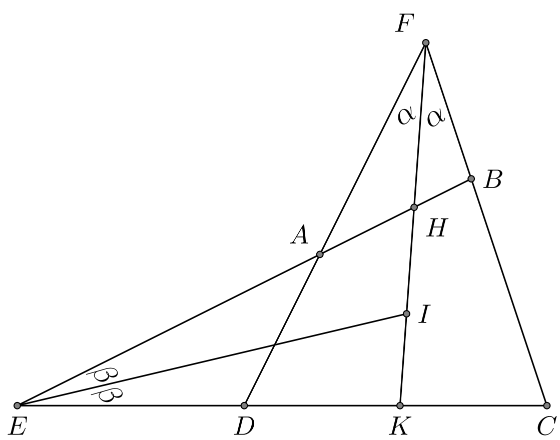
❷ Góc EIF bằng nửa tổng của một trong hai cặp góc đối đỉnh của tứ giác $ABCD$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Cách giải tổng quát được áp dụng ở câu b.

❷

Giả sử E và F có vị trí như trên hình bên, các tia phân giác của góc E và F cắt nhau tại I. Trước hết ta chứng minh $\widehat{BAD} + \widehat{C} = 2\widehat{EIF}$. Thật vậy, gọi H và K là giao điểm của FI với AB và CD.



Theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có $\widehat{BAD} = \widehat{H}_1 + \alpha$, $\widehat{C} = \widehat{K}_1 - \alpha$ nên

$$\begin{aligned} \widehat{BAD} + \widehat{C} &= \widehat{H}_1 + \widehat{K}_1 \\ &= (\widehat{EIF} + \beta) + (\widehat{EIF} - \beta) = 2\widehat{EIF}. \end{aligned}$$

Do đó $\widehat{EIF} = (\widehat{BAD} + \widehat{C}) : 2$.

□

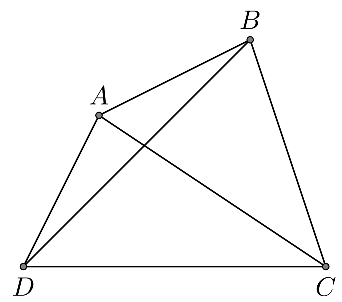
BÀI 4. Chứng minh rằng nếu M là giao điểm các đường chéo của tứ giác $ABCD$ thì $MA + MB + MC + MD$ nhỏ hơn chu vi nhưng lớn hơn nửa chu vi tứ giác.

BÀI 5. So sánh độ dài cạnh AB và đường chéo AC của tứ giác $ABCD$ biết rằng chu vi tam giác ABD nhỏ hơn hoặc bằng chu vi tam giác ACD.

✍ **LỜI GIẢI.**

Cộng từng vế $\begin{cases} AB + CD < AC + BD \\ AB + BD \le AC + CD \end{cases}$

Suy ra $2AB < 2AC \Rightarrow AB < AC$.



□

BÀI 6. Tứ giác $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo, $AB = 6$, $OA = 8$, $OB = 4$, $OD = 6$. Tính độ dài AD.

✍ **LỜI GIẢI.**

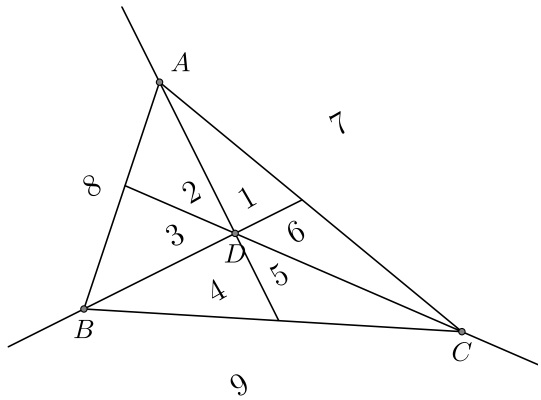
Kẻ $AH \perp OB$. Đặt $BH = x$, $AH = y$. Ta có hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ (x+4)^2 + y^2 = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y^2 = \dfrac{135}{4}. \end{cases}$

Do đó $AD^2 = HD^2 + AH^2 = 11{,}5^2 + \dfrac{135}{4} = 166$.

Vậy $AD = \sqrt{166}$. □

BÀI 7. Cho năm điểm trên mặt phẳng trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng bao giờ cũng có thể chọn ra được bốn điểm là đỉnh của một tứ giác lồi.

✍ **LỜI GIẢI.**



Xét bốn điểm A, B, C, D. Nếu bốn điểm đó là đỉnh của một tứ giác lồi thì bài toán được chứng minh xong. Nếu bố điểm đó không là đỉnh của một tứ giác lồi thì tồn tại một điểm (giả sử điểm D) nằm trong tam giác có đỉnh là ba điểm còn lại (hình bên). Chia mặt phẳng thành chín miền như hình vẽ, điểm thứ năm E nằm bên trong một miền (vì trong năm điểm không có ba điểm thẳng hàng).

Nếu E thuộc các miền 1, 4, 8, ta chọn bốn điểm là A, D, B. Nếu E thuộc các miền 2, 5, 7 ta chọn E và A, D, C. Nếu E thuộc các miền 3, 6, 9 ta chọn E, B, D, C.

□

BÀI 2 HÌNH THANG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa 1. Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song

Định nghĩa 2. Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

Tính chất 1. Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau, hai đường chéo bằng nhau.

⚠ *Để chứng minh một hình thang là hình thang cân, ta chứng minh hình thang đó có hai góc kề một đáy bằng nhau, hoặc có hai đường chéo bằng nhau.*

Định nghĩa 3. Đoạn thẳng nối chung điểm hai cạnh bên của hình thang là đường trung bình của hình thang.

Tính chất 2.
- Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.
- Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai và là đường trung bình của hình thang.

B CÁC DẠNG TOÁN

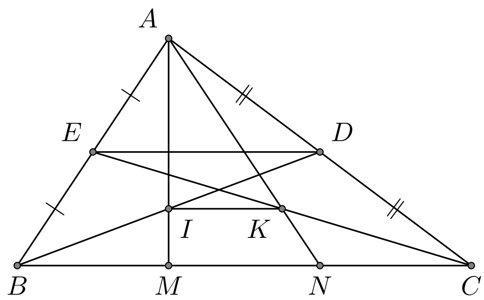
VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC có $BC = a$, các đường trung tuyến BD, CE. Lấy các điểm M, N trên cạnh BC sao cho $BM = MN = NC$. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của AN và CE. Tính độ dài IK.

LỜI GIẢI.

Dễ thấy DN là đường trung bình của $\triangle ACM$ nên $DN \parallel AN$.

Trong $\triangle BND$ có $\begin{cases} BM = MN \\ MI \parallel ND \end{cases}$ nên I là trung điểm của BD. Tương tự K là trung điểm của CE.

Hình thang $BEDC$ có I và K là trung điểm của hai đường chéo nên dễ dàng chứng minh được



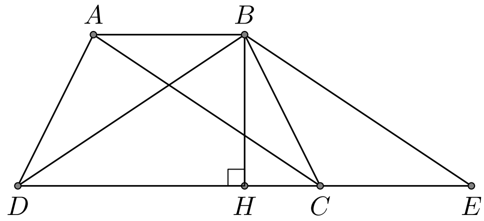
$$IK = \frac{BC - DE}{2} = \frac{a - \frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{4}.$$

□

VÍ DỤ 2. Một hình thang cân có đường cao bằng nửa tổng hai đáy. Tính góc tạo bởi hai đường chéo của hình thang.

LỜI GIẢI.

Xét hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$), đường cao BH và
$$BH = \frac{AB + CD}{2} \quad (1).$$
Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở E.



Ta có $\begin{cases} BE = AC \\ AC = BD \end{cases}$ nên $BE = BD$.

Tam giác BDE cân tại B, đường cao BH nên $DH = HE = \dfrac{DE}{2}$ (2).

Ta có $AB = CE$ nên $AB + CD = CE + CD = DE$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $BH = DH = HE$.

Các tam giác BHD, BHE vuông cân tại H nên $\widehat{DBE} = 90^\circ$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp BE \\ AC \parallel BE \end{cases}$ nên $DB \perp AC$. □

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Cho một hình thang có hai đáy không bằng nhau. Chứng minh rằng

1. Tổng hai góc kề đáy nhỏ lớn hơn tổng hai góc kề đáy lớn.
2. Tổng hai cạnh bên lớn hơn hiệu hai đáy.

✍ **LỜI GIẢI.**

Qua một đỉnh của đáy nhỏ, kẻ đường thẳng song song với cạnh bên của hình thang. □

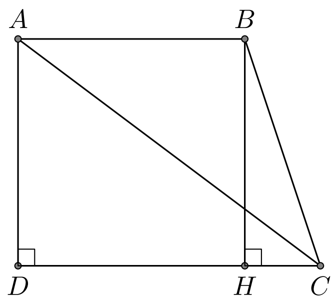
BÀI 2. Hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, đáy nhỏ $AB = 11$ cm, $AD = 12$ cm, $BC = 13$ cm. Tính độ dài AC.

✍ **LỜI GIẢI.**

Kẻ $BH \perp CD$.

Ta tính được $CH = 5$ cm, $CD = 16$ cm.

Từ đó $AC = 20$ cm.

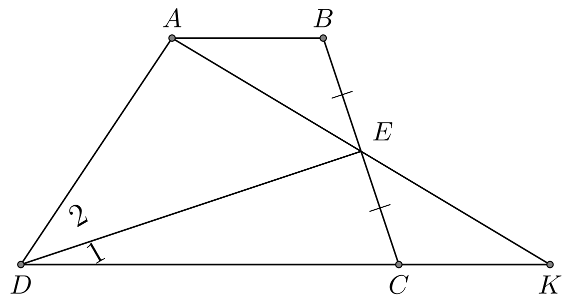


□

BÀI 3. Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có E là trung điểm của BC, $\widehat{AED} = 90^\circ$. Chứng minh rằng DE là tia phân giác của góc D.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi K là giao điểm của AE và DC.
Khi đó $\triangle ABE = \triangle KCE$ (g.c.g).
Suy ra $AE = EK$. Vậy $\triangle ADK$ cân.
Từ đó DE là phân giác của góc D.

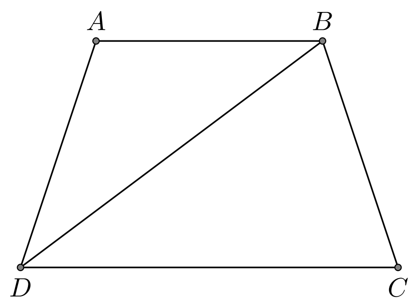


□

BÀI 4. Hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có đường chéo BD chia hình thang thành hai tam giác cân ABD cân tại A và tam giác BCD cân tại D. Tính các góc của hình thang cân đó.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $\widehat{ADB} = x$. Ta tìm được $x = 36^\circ$.
Các góc của hình thang bằng 72°, 72°, 108°, 108°.

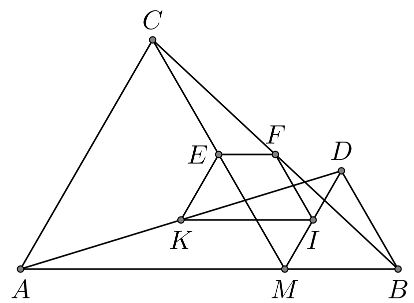


□

BÀI 5. Trên đoạn thẳng AB lấy một điểm M ($MA > MB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ AB, vẽ tam giác đều AMC, BMD. Gọi E, F, I, K theo thứ tự là trung điểm của CM, CB, DM, DA. Chứng minh rằng $EFIK$ là hình thang cân và $KF = \dfrac{1}{2}CD$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Chứng minh $EF \parallel KI$, $\widehat{EKI} = \widehat{FIK} = 60^\circ$.
Suy ra $KF = EI = \dfrac{CD}{2}$.

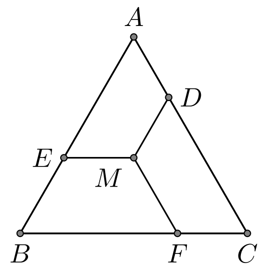


□

BÀI 6. Cho điểm M nằm bên trong tam giác đều ABC. Chứng minh rằng trong ba đoạn thẳng MA, MB, MC đoạn lớn nhất nhỏ hơn tổng hai đoạn kia.

✍ **LỜI GIẢI.**

Qua M vẽ $MD \parallel AB$, vẽ $ME \parallel BC$, vẽ $MF \parallel AC$, được ba hình thang cân, do đó $MA = DE$, $MB = EF$, $MC = DF$, các đoạn thẳng MA, MB, MC là độ dài của các cạnh của $\triangle DEF$ nên đoạn lớn nhất nhỏ hơn tổng của hai đoạn kia.



□

BÀI 7. Cho tam giác ABC, trọng tâm G.

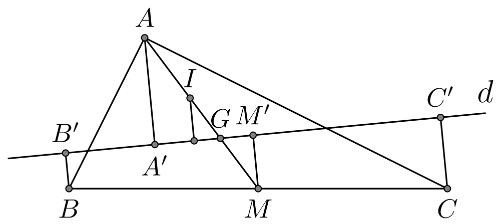
❶ Vẽ đường thẳng d đi qua G, cắt các đoạn thẳng AB, AC. Gọi A', B', C' là hình chiếu của A, B, C trên d. Tìm mối liên hệ giữa các độ dài AA', BB', CC'.

❷ Nếu đường thẳng d nằm ngoài tam giác ABC và G' là hình chiếu của G trên d thì các độ dài AA', BB', CC', GG' có liên hệ gì?

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Lấy điểm I trên đường trung tuyến AM sao cho I là trung điểm của AG. Kẻ AA', BB', CC', II', MM' vuông góc với d. Khi đó $AA' = BB' + CC'$.



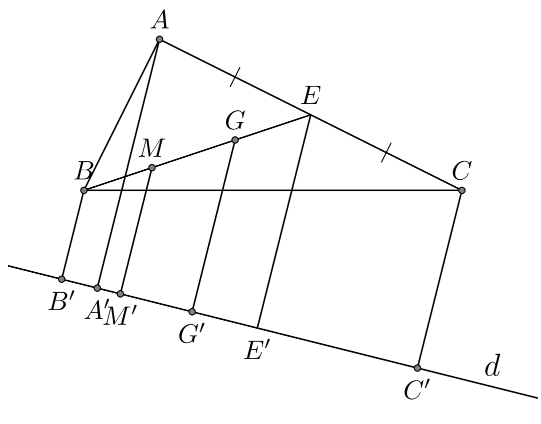
❷

Gọi BE là đường trung tuyến của $\triangle ABC$, M là trung điểm của BG.

Vẽ AA', BB', CC', EE', GG', MM' vuông góc với D.

Ta có

$$\begin{aligned}
& MM' + EE' = 2GG' \\
\Rightarrow\ & 2MM' + 2EE' = 4GG' \\
\Rightarrow\ & BB' + GG' + AA' + CC' = 4GG' \\
\Rightarrow\ & AA' + BB' + CC' = 3GG'.
\end{aligned}$$

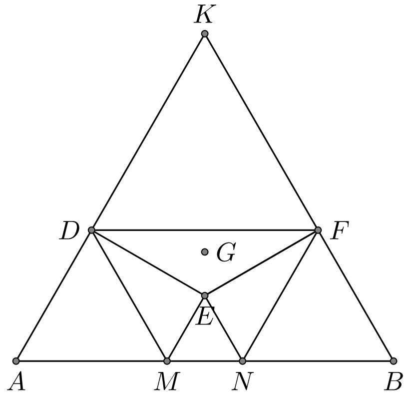


□

BÀI 8. Trên đoạn thẳng AB lấy các điểm M và N (M nằm giữa A và N). Vẽ về một phía của AB các tam giác đều AMD, MNE, BNF. Gọi G là trọng tâm của tam giác DEF. Chứng minh rằng khoảng cách từ G đến AB không phụ thuộc vào vị trí của điểm M, N trên đoạn AB.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi K là giao điểm của AD, BF thì $\triangle ABK$ đều.
Trước hết chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ D, E, F đến AB bằng đường cao $KH = h$ của $\triangle KAB$ (h không đổi).
Do đó khoảng cách từ G đến AB bằng $\dfrac{h}{3}$.



□

BÀI 9. Tứ giác $ABCD$ có E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, BC.

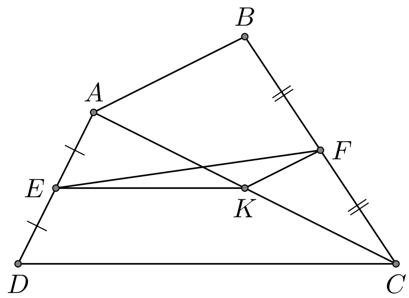
❶ Chứng minh rằng $EF \leq \dfrac{AB+CD}{2}$.

❷ Tứ giác $ABCD$ có điều kiện gì thì $EF = \dfrac{AB+CD}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Gọi K là trung điểm AC.
Ta có $EF \leq KF + KE$, từ đó $2EF \leq AB + CD$ nên $EF \leq \dfrac{AB+CD}{2}$.



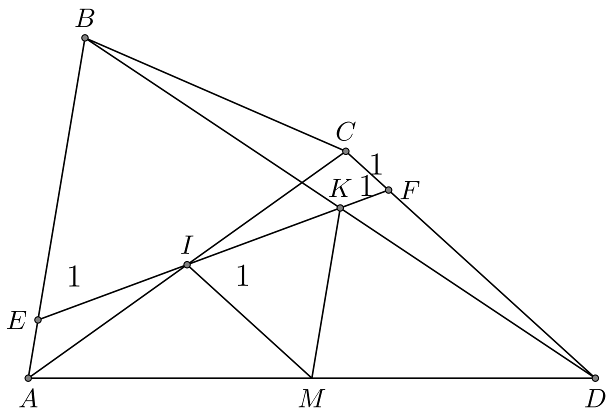
❷ Ta có $EF = \dfrac{AB+CD}{2} \Leftrightarrow E, K, F$ thẳng hàng $\Leftrightarrow AB \parallel CD$.

□

BÀI 10. Tứ giác $ABCD$ có $AB = CD$. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trung điểm của hai đường chéo tạo với AB và CD các góc bằng nhau.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi M là trung điểm của AD, I, K là trung điểm của AC, BD.
Đường thẳng IK cắt AB, CD ở E, F.
Tam giác MIK cân nên $\widehat{K_1} = \widehat{I_1}$.
Ta lại có $\widehat{K_1} = \widehat{E_1}$ (so le trong, $AB \parallel KM$).
Lại có $\widehat{I_1} = \widehat{F_1}$ (so le trong, $IM \parallel CD$).
Vậy $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$.

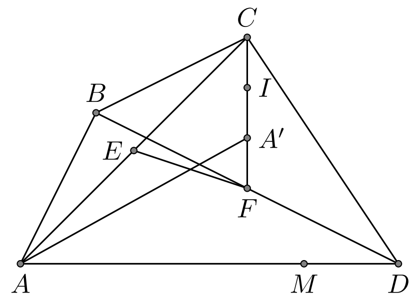


□

BÀI 11. Trong tứ giác $ABCD$, gọi A', B', C', D' thứ tự là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh rằng bốn đường thẳng AA', BB', CC', DD' đồng quy.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi E, F là trung điểm của AC và BD.
Điểm I là trung điểm của $A'C$.
Ta có $EI \parallel AA'$, so đó AA' đi qua trung điểm M của EF.
Tương tự BB', CC', DD' cũng đi qua M.



□

BÀI 12. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H, M là trung điểm BC. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM cắt AB và AC theo thứ tự ở E và F.

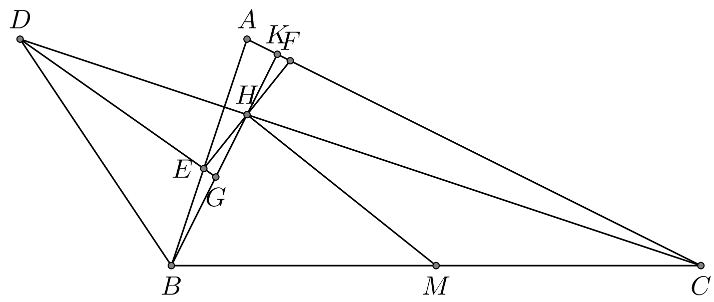
❶ Trên tia đối của tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HC$. Chứng minh rằng E là trực tâm của tam giác DBH.

❷ Chứng minh rằng $HE = HF$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Vì MH là đường trung bình của $\triangle CBD$ nên $MH \parallel BD$.
Do $MH \perp EF$ nên $BD \perp EF$.
Ta có $BA \perp HD$, do đó E là trực tâm của $\triangle BDH$.

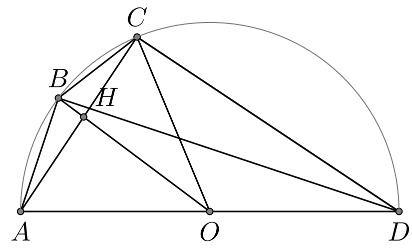


❷ Gọi G là giao điểm của DE và BH, K là giao điểm của BH và AC.
Khi đó $\triangle DHG = \triangle CHK$ (cạnh huyền - góc nhọn).
Suy ra $HG = HK \Rightarrow \triangle HGE = \triangle HKF$ (g.c.g).
Vậy $HE = HF$.

□

BÀI 13. Tứ giác $ABCD$ có B và C nằm trên đường tròn có đường kính là AD. Tính độ dài CD biết rằng $AD = 8$, $AB = BC = 2$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi O là tâm của đường tròn, H là giao điểm của OB và AC.

Ta có $\begin{cases} BA = BC \\ OA = OC \end{cases}$ nên OB là đường trung trực của AC, do đó $OB \perp AC$ và $AH = HC$.

OH là đường trung bình của $\triangle ACD$.

Đặt $CD = x$ thì $OH = \dfrac{x}{2}$ nên $BH = 4 - \dfrac{x}{2}$.

Ta có $AB^2 - BH^2 = OA^2 - OH^2$ (cùng bằng AH^2)

Nên $4 - \left(4 - \dfrac{x}{2}\right)^2 = 16 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow CD = 7$.

□

BÀI 3 DỰNG HÌNH BẰNG THƯỚC VÀ COMPA

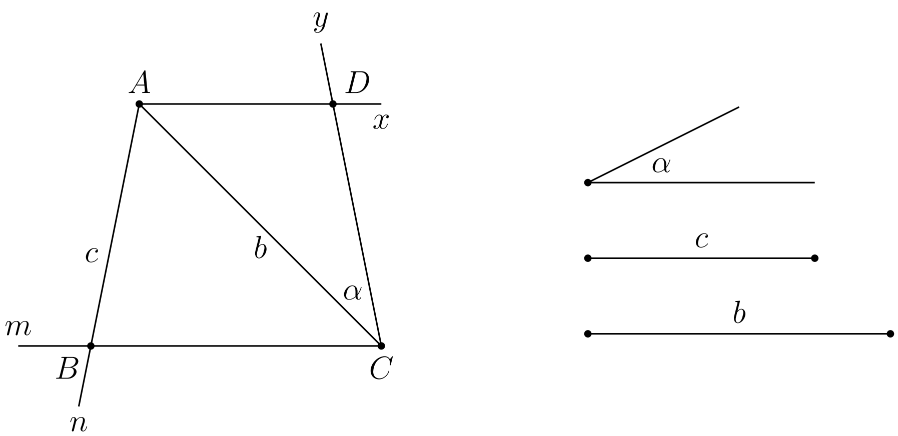
Giải bài toán dựng hình (bằng thước và compa) là chỉ ra một số hữu hạn lần các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản rồi chứng tỏ hình dựng được có đủ các điều kiện mà bài toán đòi hỏi.

Lời giải đầy đủ của một bài toán dựng hình gồm bốn phần:

1. *Phân tích.* Giả sử đã có một hình thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Có thể vẽ thêm hình mới làm xuất hiện những yếu tố nêu trong đề bài hoặc làm xuất hiện những hình có thể dựng được ngay. Đưa việc dựng các yếu tố còn lại của hình phải dựng về các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản đã biết.
2. *Cách dựng.* Nêu thứ tự từng bước dựng hình dựa vào các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản, đồng thời thể hiện các bước dựng đó trên hình vẽ.
3. *Chứng minh.* Dùng lập luận chứng tỏ rằng với cách dựng như trên, hình đã dựng thỏa mãn các điều kiện của bài toán.
4. *Biện luận.* Chỉ rõ trong trường hợp nào bài toán dựng được và dựng được bao nhiêu hình thỏa mãn đề bài (hình thỏa mãn đề bài gọi là nghiệm hình).

VÍ DỤ 1. Dựng tam giác ABC, biết $AC = b$, $AB = c$, $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$.

LỜI GIẢI.



1. *Phân tích*

   Giả sử đã dựng được $\triangle ABC$ có $AC = b$, $AB = c$, $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$.

   Kẻ $Ax \parallel BC$, kẻ tia Cy sao $\widehat{BCy} = \widehat{B}$ (Cy và A cùng phía đối với BC). $ABCD$ là hình thang nên

   $$CD = AB = c, \qquad \widehat{ACD} = \widehat{BCD} - \widehat{BCA} = \widehat{B} - \widehat{BCA} = \alpha.$$

   Tam giác ACD dựng được (biết hai cạnh và góc xen giữa).

   Điểm B thỏa mãn hai điều kiện: nằm trên đường thẳng qua C song song với AD và $\widehat{DAB} = \widehat{ADC}$.

2. *Cách dựng*

— Dựng $\triangle ACD$ có $AC = b$, $CD = c$, $\widehat{ACD} = \alpha$.
— Qua C dựng đường thẳng $Cm \parallel AD$.
— Dựng tia An sao cho $\widehat{DAn} = \widehat{ADC}$, cắt Cm ở B.

❸ *Chứng minh*

Tứ giác $ABCD$ có $AD \parallel BC$, $\widehat{DAB} = \widehat{ADC}$ nên là hình thang cân, do đó $AB = CD = c$, $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$.

Ta có $\widehat{ABC} - \widehat{ACB} = \widehat{DCB} - \widehat{ACB} = \widehat{ACD} = \alpha$.

❹ *Biện luận*

Bài toán có một nghiệm hình nếu $b > c$ và $\alpha < 180°$.

Chú ý: Điểm B được dựng ở ví dụ là giao điểm của hai tia Cm và An. Điểm B đã được dựng là giao điểm của hai đường thẳng, hay tổng quát là giao của hai tập hợp (quỹ tích).

□

Phương pháp lấy giaO của hai quỹ tích gọi là phương pháp quỹ tích tương giao. Nội dung của phương pháp là: Để dựng một điểm, ta phân tích điểm đó thỏa mãn hai điều kiện, do điều kiện thức nhất điểm thuộc một quỹ tích, do điều kiện thứ hai điểm thuộc một quỹ tích khác, giao điểm của hai quỹ tích ấy cho ta điểm phải dựng.

Khi phân tích một điểm thuộc đường nào, cần nhớ các kiến thức sau:

— Điểm cách đều hai đầu của đoạn thẳng AB thì nằm trên đường trung trực của AB.
— Điểm cách đều điểm O một khoảng r thì nằm trên đường tròn $(O; r)$.
— Điểm nằm trong góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc ấy.

Cũng cần chú ý đến số giao điểm của hai đường. Hai đường thẳng có thể có 0, 1 hoặc vô số giao điểm tùy theo chúng song song, cắt nhau hay trùng nhau. Đường thẳng và đường tròn $(O; r)$ có thể có 0, 1 hoặc 2 giao điểm tùy theo $r < h$, $r = h$ hoặc $r > h$ (h là khoảng cách từ O đến đường thẳng). Hai đường tròn có thể có O, 1, 2 hoặc vô số giao điểm.

Dựa vào số giao điểm ấy mà ta biện luận bài toán.

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng tồn tại một hình thang có độ dài bốn cạnh bằng độ dài bốn cạnh của một tứ giác cho trước.

✍ **LỜI GIẢI.**

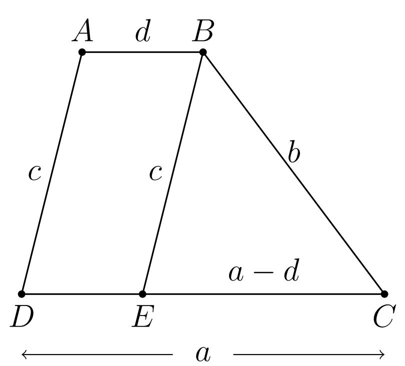
Gọi a, b, c, d là độ dài bốn cạnh của tứ giác ($a \geq b \geq c \geq d$).

Cần chứng minh tồn tại hình thang có bốn cạnh như trên: Chọn đáy lớn bằng a, đáy nhỏ bằng d.

Ta dựng $\triangle BEC$ rồi dưng D và A.

Để chứng minh tồn tại hình thang $ABCD$, ta sẽ chứng tỏ tồn tại $\triangle BEC$ (tam giác này có thể suy biến thành đoạn thẳng).

Thật vậy, ta có



$$b + c > a - d \text{ (vì } d + b + c > a \text{ do } a,\ b,\ c,\ d \text{ là bốn cạnh của tứ giác)},$$

$$a - d + b \geq c \text{ (vì } a \geq c,\ c \geq d),\ a - d + c \geq b \text{ (vì } a \geq b,\ c \geq d).$$

□

A BÀI TẬP

BÀI 1. Dựng hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), biết:

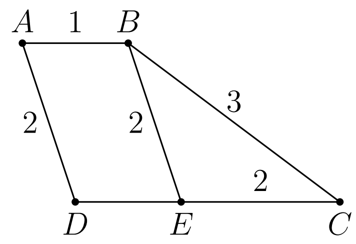
❶ $AB = 1$ cm, $AD = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 3$ cm.

❷ $AB = a$, $CD = b$, $AC = c$, $BD = d$.

✍ LỜI GIẢI.

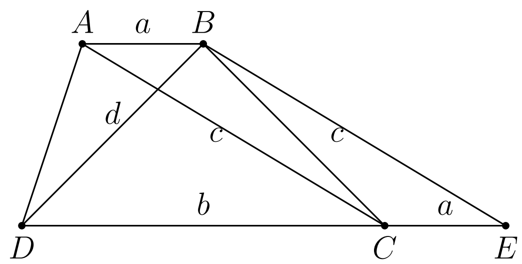
❶

Trước hết dựng $\triangle BEC$ biết ba cạnh $BC = 3$ cm, $BE = CD = 2$ cm. Sau đó dựng điểm D và điểm A.



❷

Trước hết dựng $\triangle BDE$, biết ba cạnh $DE = a + b$, $BE = c$, $BD = d$. Sau đó dựng điểm A.

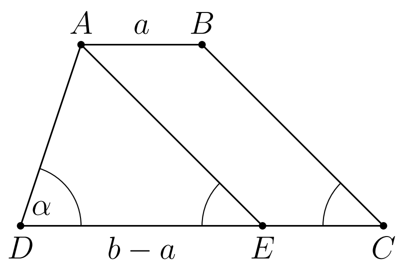


□

BÀI 2. Dựng hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$), biết $AB = a$, $CD = b$, $\widehat{D} = \alpha$.

✍ LỜI GIẢI.

Trước hết dựng tam giác $\triangle ADE$ có $DE = b - a$, $\widehat{D} = \widehat{AED} = \alpha$. Sau đó dựng các điểm C và B.



□

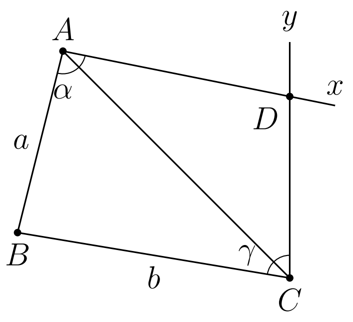
BÀI 3. Dựng tứ giác $ABCD$, biết ba góc và

a) Hai cạnh kề nhau;

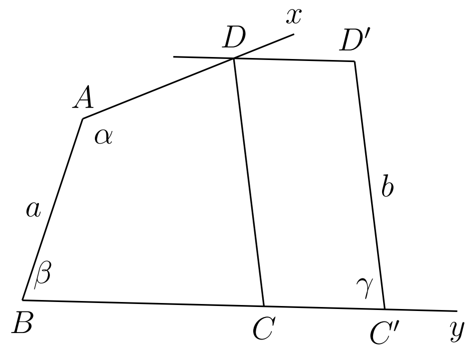
b) Hai cạnh đối nhau.

✍ LỜI GIẢI.

a) Cách dựng thể hiện trên hình.



b) Cách dựng thể hiện trên hình.



□

BÀI 4. Dựng tam giác ABC, biết $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \alpha$, $BC - AB = d$.

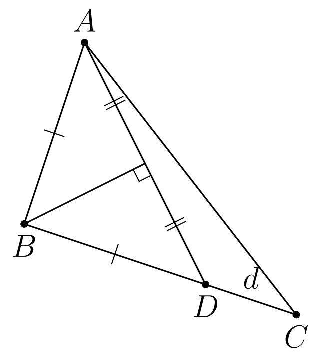
✍ **LỜI GIẢI.**

❶ *Phân tích.* Giả sử đã dựng được $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \alpha$, $BC - AB = d$. Trên BC lấy điểm D sao cho $BD = AB$ thì $DC = BC - BD = BC - AB = d$.

Ta có $\triangle ABD$ cân nên $\widehat{ADC} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{B}}{2} = 90^\circ + \dfrac{\beta}{2}$ (góc này dựng được bằng thước và compa).

— $\triangle ADC$ xác định ngay vì biết một cạnh và hai góc kề với nó.

— Điểm B thuộc tia đối của tia DC. Mặt khác do $BA = BD$ nên B thuộc đường trung trực của AD.



❷ *Cách dựng.*

— Dựng $\triangle ADC$ có $\widehat{D} = 90^\circ + \dfrac{\beta}{2}$, $DC = d$, $\widehat{C} = \alpha$.

— Dựng đường trung trực của AD, cắt tia đối của tia DC ở B. Nối AB.

❸ *Chứng minh.* B thuộc đường trung trực của AD nên $AB = BD$. Do đó

$$BC - AB = BC - BD = DC = d.$$

$\triangle ABD$ cân mà $\widehat{ADC} = 90^\circ + \dfrac{\beta}{2}$ nên $\widehat{ADB} = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$, do đó $\widehat{B} = \beta$, còn $\widehat{C} = \alpha$.

❹ *Biện luận.* Bài toán có một nghiệm hình nếu dựng được $\triangle ADC$, tức là nếu $90^\circ + \dfrac{\beta}{2} + \alpha < 180^\circ \Leftrightarrow \alpha < 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$.

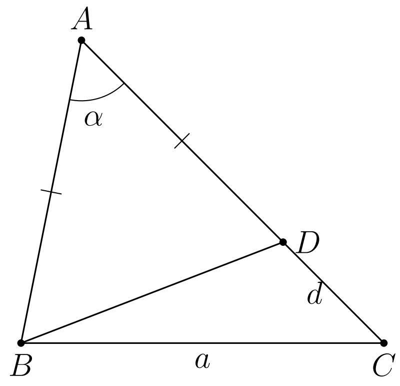
□

BÀI 5. Dựng tam giác ABC, biết:

❶ $\widehat{A} = \alpha$, $BC = a$, $AC - AB = d$;

❷ $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$, $BC = a$, $AC - AB = d$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Trên AC lấn điểm D sao cho $AD = AB$ thì $DC = d$, $\widehat{BDC} = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$. Dựng $\triangle DBC$, rồi dựng điểm A.

❷ Trên AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$ thì $DC = AC - AB = d$. Tính

$$\begin{aligned}\widehat{DBC} &= \widehat{ADB} - \widehat{C} = \left(90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}\right) - \widehat{C}\\ &= \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} - \widehat{C} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Dựng $\triangle BDC$, rồi dựng điểm A. Chú ý rằng có thể dựng được hai điểm D nhưng chỉ chọn D sao cho $\widehat{BDC} > 90^\circ$.

□

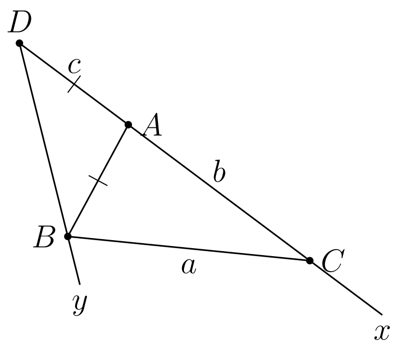
BÀI 6. Dựng tam giác ABC, biết:

❶ $\widehat{A} = \alpha$, $BC = a$, $AC + AB = s$;

❷ $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$, $BC = a$, $AC + AB = s$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶



Phân tích. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$ thì $\triangle ABD$ cân nên $\widehat{D} = \dfrac{\alpha}{2}$. Dựng $\triangle BDC$, rồi dựng A.

Cách dựng.

— Dựng $\widehat{xDy} = \dfrac{\alpha}{2}$.

— Trên tia Dx lấy $DC = s$.

— Dựng đường tròn $(C; a)$ cắt tia Dy ở B.

— Dựng đường trung trực của BD cắt cạnh DC ở A.

Biện luận. Gọi h là khoảng cách từ C đến Dy. Điều kiện để bài toán có nghiệm hình là $h \le a < s$.

❷ Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Tính

$$\widehat{DBC} = \widehat{B} + \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{B} + \left(90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{C}}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2},$$

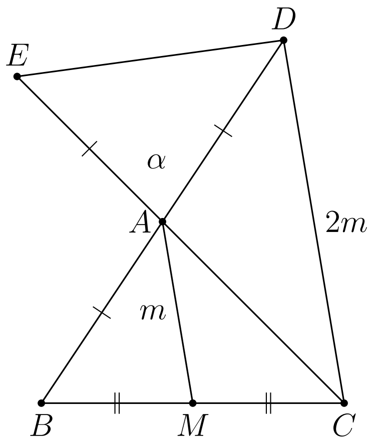
góc này dựng được bằng thước và compa. Dựng $\triangle BDC$, rồi dựng điểm A.

□

BÀI 7. Dựng tam giác ABC, biết $\widehat{A} = \alpha$, $AB + AC = s$, đường trung tuyến $AM = m$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Trên tia đối của tia AB lấy D, trên tia đối của tia AC lấy E sao cho $AD = AE = AB$.
Ta có $EC = s$, $DC = 2m$, $\widehat{DEC} = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$.
Dựng $\triangle EDC$ rồi dựng A, sau đó dựng B.



□

BÀI 8. Dựng tam giác ABC, biết $BC = a$, đường cao $AH = h$, đường trung tuyến $BM = m$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vẽ MK vuông góc với BC thì $MK = \dfrac{h}{2}$. Dựng $\triangle BMK$, rồi dựng điểm C, sau đó dựng điểm A. □

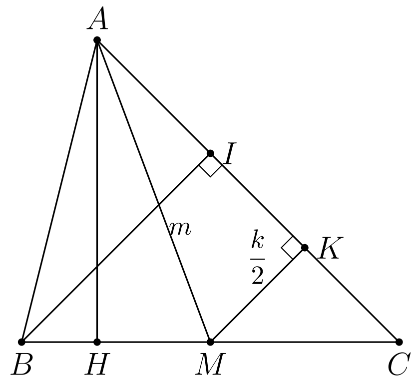
BÀI 9. Dựng tam giác ABC, biết đường cao $AH = h$, đường cao $BI = k$, đường trung tuyến $AM = m$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Tam giác vuông AHM dựng được. Vẽ $MK \perp AC$ thì

$$MK = \frac{BI}{2} = \frac{k}{2}.$$

Dựng tiếp tam giác vuông AMK.
Điều kiện để có nghiệm hình: $\dfrac{k}{2} < m$, $h \le m$.



□

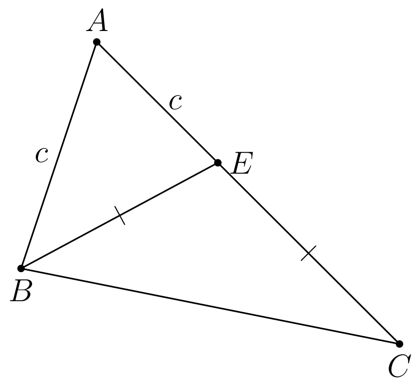
BÀI 10. Dựng tam giác ABC có $\widehat{B} = 3\widehat{C}$ biết $AB = c$, $AC = b$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Lấy E trên AC sao cho $\widehat{CBE} = \widehat{C}$ thì

$$\widehat{ABE} = 2\widehat{C}, \widehat{AEB} = 2\widehat{C}.$$

Do đó $\triangle ABE$ cân.
Suy ra $EC = b - c$, $BE = b - c$.
Dựng $\triangle ABE$ biết độ dài ba cạnh c, c, $b - c$.
Sau đó dựng điểm C.



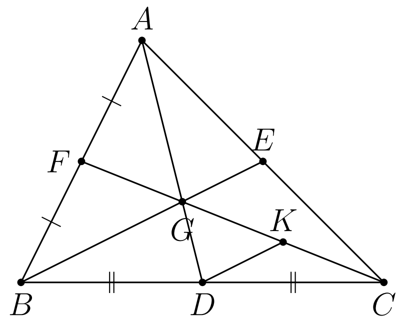
□

BÀI 11. Dựng tam giác, biết độ dài ba đường trung tuyến.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi K là trung điểm của CG. $\triangle GDK$ có các cạnh bên bằng $\dfrac{1}{3}$ độ dài các đường trung tuyến của $\triangle ABC$. Dựng $\triangle GDK$, rồi dựng F, C. Sau đó dựng B, A.

Điều kiện để có nghiệm hình là $|m-n| < p < m+n$ với m, n, p là độ dài ba đường trung tuyến đã cho.

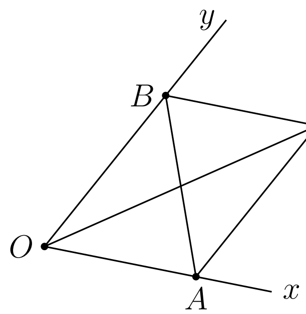


□

BÀI 12. Cho góc xOy và điểm G ở trong góc. Dựng tam giác OAB nhận G làm trọng tâm, có A thuộc Ox, B thuộc Oy.

✍ **LỜI GIẢI.**

Trên tia OG lấy C sao cho $OC = 3OG$. Qua C vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của góc.



□

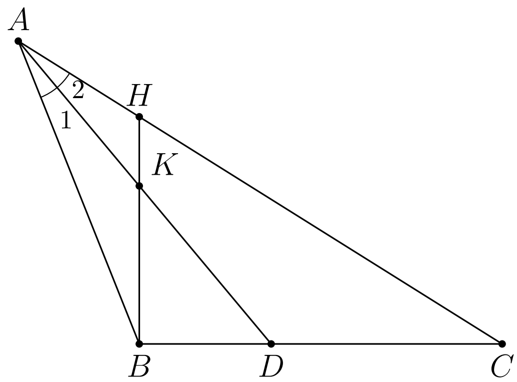
BÀI 13. Dựng tam giác ABC có $\widehat{B} - \widehat{C} = 90°$, biết đường phân giác $AD = d$, $DC = m$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vẽ đường vuông góc với BC tại B, cắt AD ở K, cắt AC ở H.

Ta có $\widehat{ABH} = \widehat{C}$, $\widehat{ADB} = \widehat{A}_2 + \widehat{C}$, $\widehat{BKD} = \widehat{A}_1 + \widehat{ABH}$ nên $\widehat{ADB} = \widehat{BKD}$, do đó $\widehat{ADB} = 45°$, $\widehat{ADC} = 135°$.

Dựng $\triangle ADC$ (c.g.c) rồi dựng B.



□

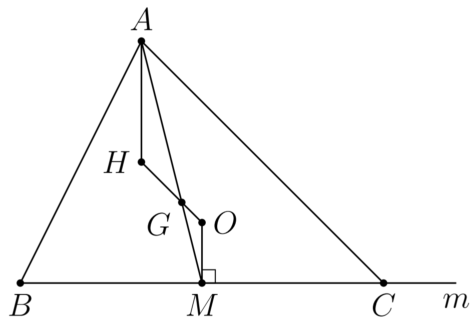
BÀI 14. Cho đường thẳng m và hai điểm H, G thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ m. Dựng tam giác ABC có B và C thuộc m, nhận H làm trực tâm, G làm trọng tâm.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ABC$ thì G nằm giữa H và O, đồng thời $HG = 2GO$.

Do đó biết vị trí H, G thì dựng được O. Sau đó dựng $OM \perp m$. Trên tia MG lấy $MA = 3MG$. Dựng $(O; OA)$ cắt m ở B và C.

Bài toán luôn có một nghiệm hình vì đường tròn $(O; OA)$ luôn cắt m.

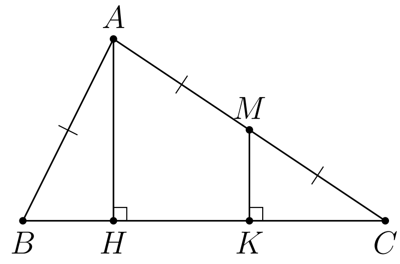


□

BÀI 15. Dựng tam giác ABC vuông tại A có $AC = 2AB$, biết $BC = 5$ cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi M là trung điểm của AC. Vẽ AH, $MK \perp BC$. $\triangle ABH = \triangle CMK$ (cạnh huyền - góc nhọn) nên $BH = MK$, $AH = CK$. Ta lại có $MK = \dfrac{AH}{2}$. Suy ra $BH = \dfrac{CK}{2}$. Mà $CK = HK$ nên $BH = \dfrac{1}{5}BC = 1$ cm, $AH = 2$ cm.
Dựng được $\triangle ABH$, rồi dựng C.

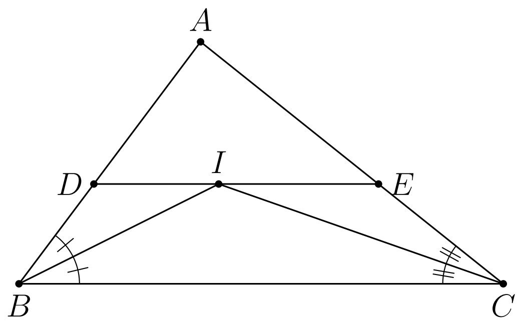


□

BÀI 16. Cho tam giác ABC. Dựng đường thẳng DE song song với BC (D thuộc AB, E thuộc AC) sao cho $DE = DB + CE$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Dựng tia phân giác của các góc B và C, chúng cắt nhau ở I. Qua I dựng $DE \parallel BC$.

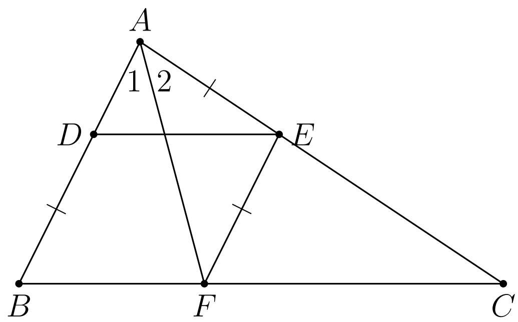


□

BÀI 17. Cho tam giác ABC. Dựng đường thẳng DE song song với BC (D thuộc AB, E thuộc AC) sao cho $AE = BD$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Qua E vẽ đường thẳng song song với AB cắt BC ở F.
Chứng minh rằng AF là tia phân giác của góc A.
Trước hết dựng F, rồi dựng E.

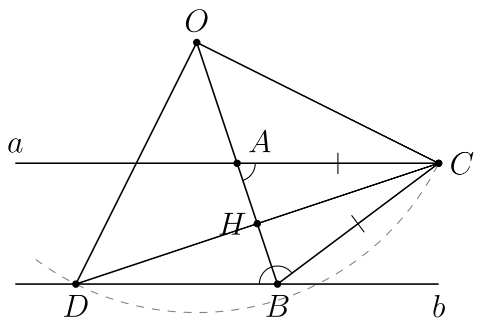


□

BÀI 18. Cho hai đường thẳng song song a và b, điểm C thuộc a, điểm O thuộc nửa mặt phẳng không chứa b có bờ a. Qua O dựng đường thẳng m cắt a, b theo thứ tự ở A, B sao cho $CA = CB$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phân tích: Qua C vẽ $CH \perp AB$, cắt b ở D. $\triangle ACB$ cân nên $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$, mà $\widehat{CAB} = \widehat{ABD}$.
Do đó $\widehat{CBA} = \widehat{DBA}$, suy ra $OD = OC$.
Cách dựng: Dựng $(O; OC)$ cắt b ở D.
Qua O dựng đường vuông góc với CD cắt a, b ở A, B.
Biện luận: Gọi h là khoảng cách từ O đến b.
Tùy theo $OC > h$, $OC = h$, $OC < h$ mà bài toán có 2, 1, 0 nghiệm hình.



□

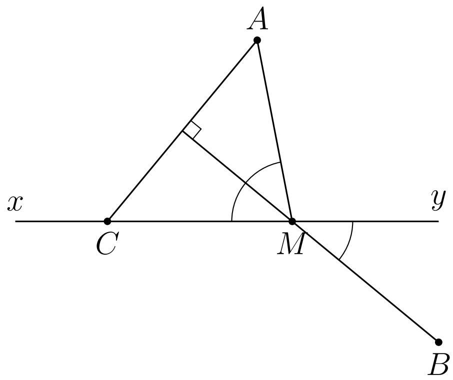
BÀI 19. ❶ Cho đường thẳng xy và hai điểm A, B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ xy. Dựng điểm M thuộc xy sao cho $\widehat{AMx} = 2\widehat{BMy}$.

❷ Giải bài toán trên trong trường hợp A và B thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ xy.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ *Phân tích:* Qua A vẽ đường vuông góc với BM, cắt xy ở C. Ta chứng minh được $BA = BC$, vì thế xác định được C, do đó xác định được M.

❷ Dựng B' sao cho xy là đường trung trực của BB'. Đưa về ý trên.

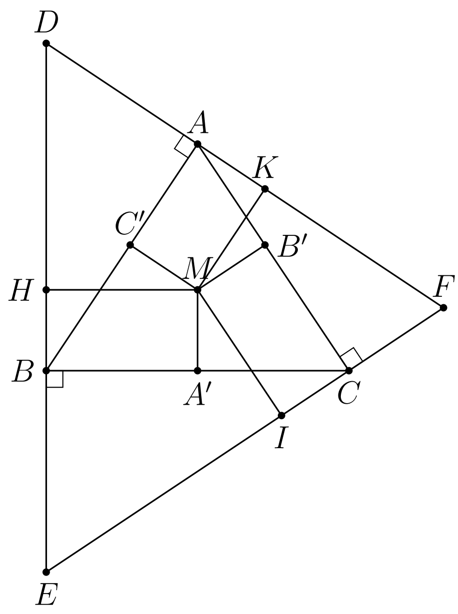


□

BÀI 20. Cho tam giác ABC. Dựng điểm M sao cho nếu vẽ $MA' \perp BC$, $MB' \perp Ac$, $MC' \perp AB$ thì $A'B' = B'C = C'A$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Để cho ba đoạn thẳng bằng nhau $A'B$, $B'C$, $C'A$ có liên hệ với nhau, ta "dịch" chúng đến M: Vẽ đường thẳng qua M song song với $A'B$ và đường thẳng qua B song song với $A'M$, chúng cắt nhau ở H. Vẽ đường thẳng qua M song song với $B'C$ và đường thẳng qua C song song với $B'M$, chúng cắt nhau ở I. Vẽ đường thẳng qua M song song với $C'A$ và đường thẳng qua A song song với $C'M$, chúng cắt nhau ở K.
Các đường thẳng AK, BH, CI cắt nhau ở D, E, F. $\triangle DEF$ xác định được vì có các cạnh theo thứ tự vuông góc với AB ở A, với BC ở B, với CA ở C. Còn M là điểm cách đều ba cạnh của $\triangle DEF$ nên giao điểm của các đường phân giác (trong hoặc ngoài) của tam giác. Bài toán có bốn nghiệm hình.



□

BÀI 4 ĐỐI XỨNG TRỤC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa 1. Hai điểm gọi là đối xứng nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó. Khi một điểm nằm trên đường thẳng d thì điểm đối xứng với nó qua đường thẳng d chính là điểm đó.

Định lí 1. *Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau.*

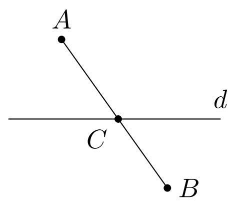
Định lí 2. *Hình thang cân nhận đường thẳng đi qua hai trung điểm hai đáy làm trục đối xứng.*

B CÁC DẠNG TOÁN

VÍ DỤ 1. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm cùng phía với đường thẳng D. Dựng điểm C thuộc d sao cho $CA + CB$ có độ dài ngắn nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

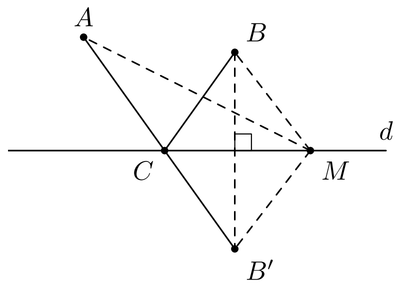
Hướng suy nghĩ. Bài toán trở nên đơn giản nếu cho A, B nằm khác phía đối với d. Khi đó C là giao điểm của d với đoạn thẳng AB (Hình 10a). Trong trường hợp A, B nằm cùng phía với d, ta có thể tạo ra điểm B' nằm khác phía với A đối với d mà độ dài CB' luôn luôn bằng CB khi C thay đổi vị trí trên đường thẳng d. Điểm B' chính là điểm đối xứng với B qua d.



Phân tích: Vẽ B' đối xứng với B qua d. Gọi M là điểm bất kì thuộc d. Ta có $MB' = MB$. Do đó

$$AM + MB = AM + MB' \geq AB' \text{ (hằng số).}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM + MB$ bằng AB' khi M thuộc đoạn AB'.



Cách dựng. Dựng B' đối xứng với B qua d. Nối A với B', cắt d ở C.

Chứng minh. Gọi M là điểm bất kì thuộc d. Ta có

$$AM + MB = AM + MB' \geq AB',$$
$$AC + CB = AC + CB' = AB'.$$

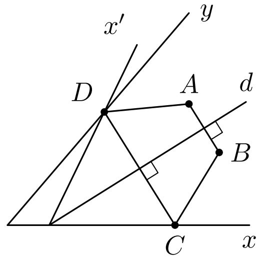
Vậy $AC + CB \leq AM + MB$.

Biện luận. Bài toán có một nghiệm hình. □

VÍ DỤ 2. Cho hai đường thẳng x, y và hai điểm A, B. Dựng điểm C thuộc x và điểm d thuộc y sao cho A, B, C, D là các đỉnh của hình thang cân có AB là một cạnh đáy.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phân tích. Giả sử đã dựng được hình thang cân thỏa mãn yêu cầu đề bài. Gọi d là đường trung trực của AB. Dựng đường thẳng x' qua D và giao điểm của d và x (nếu $d \parallel x$ thì x' là đường thẳng đi qua D và song song với x). Khi đó, x' đối xứng với x qua d. Điểm D thỏa mãn hai điều kiện: thuộc x' và thuộc y. Từ đó dựng được điểm C.



Cách dựng

— Dựng đường trung trực d của AB.

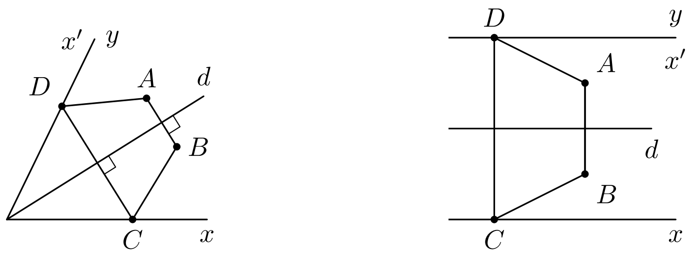
— Dựng đường thẳng x' đối xứng với x qua d.

— Gọi D là giao điểm của x' và y. Dựng C đối xứng với D qua d.

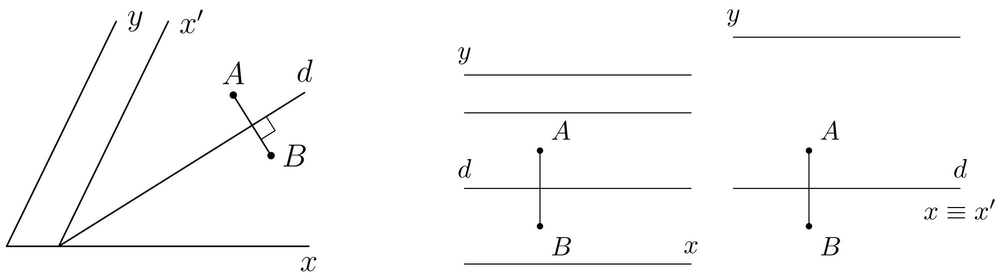
Chứng minh. Theo cách dựng thì $AB \parallel CD$ do cùng vuông góc với d. Mặt khác AC đối xứng với BD qua d nên $AC = BD$. Vậy tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

Biện luận.

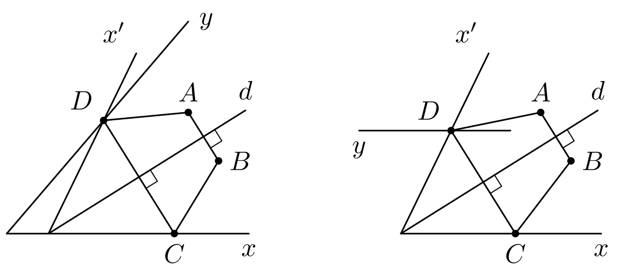
— Nếu x' trùng y thì bài toán có vô số nghiệm hình (Hình 12). Khi đó x và x' đối xứng nhau qua d; nói cách khác d trùng với phân giác của góc tạo bởi x và y (Hình 12a) hoặc d là đường thẳng song song cách đều x và y. (Hình 12b).



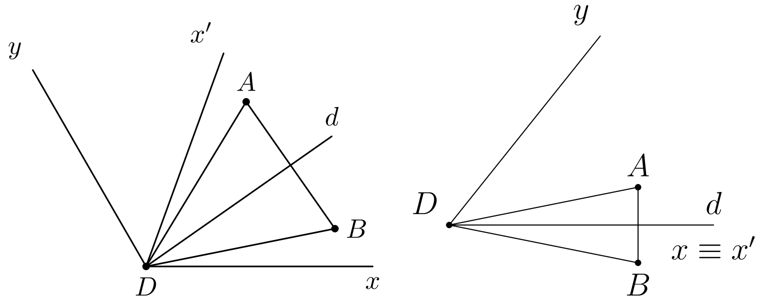
— Nếu $x' \parallel y$ thì bài toán không có nghiệm hình (Hình 13). Khi đó d song song với một tia phân giác của góc tạo bởi x và y. (Hình 13b,c).



— Nếu x' cắt y thì bài toán có một nghiệm hình (Hình 14). Khi đó d cắt cả hai đường thẳng chứa tia phân giác của góc tạo bởi x và y (Hình 14a) hoặc d cắt đường thẳng song song cách đều x và y (Hình 14b).



Riêng nếu x' cắt y tại điểm D thuộc d, bài toán không có nghiệm hình (hình thang cân suy biến thành tam giác cân, Hình 15a,b); nếu x' cắt y tại điểm D thẳng hàng với AB, bài toán không có nghiệm hình (hình thang cân suy biến thành đoạn thẳng).



Chú ý:

1. Trong cách dựng trên, do chú ý đến tính đối xứng trục, ta đã dựng d là đường trung trực của AB, khi đó đường thẳng d xác định, các điểm C và D đối xứng nhau qua d. Ta thấy: *D đối xứng với C qua d, mà C thuộc đường thẳng x thì D thuộc đường thẳng x' đối xứng với x qua d.* Giao điểm của x' và y cho ta điểm D.
2. Cũng có thể phân tích: C đối xứng với D qua d, mà D thuộc y nên C thuộc đường thẳng y' đối xứng với y qua d. Giao điểm của x và y' cho ta điểm C.

□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

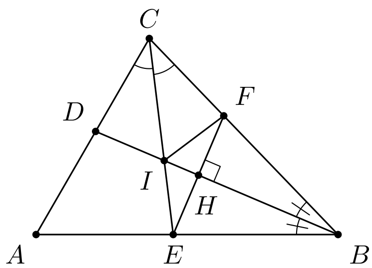
BÀI 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, các đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BD, cắt BC ở F. Chứng minh rằng

❶ E và F đối xứng với nhau qua BD.

❷ IF là tia phân giác của góc BIC.

❸ D và F đối xứng nhau qua IC.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Gọi H là giao điểm của EF và BD. Dễ thấy $\triangle BHE = \triangle BHF$ (cạnh góc vuông - góc nhọn). Do đó $HE = HF$ hay H là trung điểm của EF. Vậy E và F đối xứng qua BD.

❷ Theo ý a), góc $\widehat{BIE}$ và góc $\widehat{BIF}$ đối xứng qua BD nên $\widehat{BIE} = \widehat{BIF}$. Mặt khác

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = 120^\circ$$

nên

$$\widehat{BIF} = \widehat{BIE} = 180^\circ - \widehat{BIC} = 60^\circ.$$

Suy ra $\widehat{CIF} = \widehat{BIF} = 60^\circ$. Vậy IF là tia phân giác góc $\widehat{BIC}$.

❸ Theo chứng minh trên ta có $\widehat{CID} = \widehat{BIE} = \widehat{CIF}$, do đó $\triangle CDI = \triangle CFI$ (g.c.g). Suy ra $CD = CF$ và $ID = IF$, hay CI là đường trung trực của DF.

Vậy D và F đối xứng nhau qua CI.

□

BÀI 2. Cho ba điểm O, D, E. Dựng tam giác ABC sao cho O là giao điểm của các đường phân giác BD và CE.

✍ **LỜI GIẢI.**

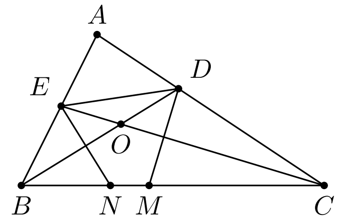
Phân tích. Giả sử đã dựng được tam giác ABC thỏa mãn đề bài. Gọi M, N lần lượt là các điểm đối xứng với D qua OE, đối xứng với E qua OD. Chú ý rằng BC đối xứng với BA qua OD và CB đối xứng với CA qua OE nên M, N thuộc BC. Từ đó B là giao điểm của MN và OD, C là giao điểm của MN và OE.

Cách dựng.

— Dựng M đối xứng với D qua OE, N đối xứng với E qua OD.

— Dựng điểm B, C lần lượt là giao điểm của MN với OD và OE.

— Dựng điểm A là giao điểm của BE và CD.



Chứng minh. Do D và M đối xứng qua OC nên $\widehat{MCO} = \widehat{DCO}$ hay CO là tia phân giác góc $\widehat{BCA}$. Tương tự BO là tia phân giác góc $\widehat{CBA}$. Ta có điều phải chứng minh.

Biện luận.

— Nếu $\widehat{DOE} \leq 90^\circ$ hoặc O, D, E thẳng hàng thì không có nghiệm hình.

— Nếu tam giác ODE cân tại O và $\widehat{DOE} = 120^\circ$ thì M trùng N, bài toán có vô số nghiệm hình.

— Các trường hợp còn lại, bài toán có một nghiệm hình.

□

BÀI 3. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm khác phía đối với d. Dựng điểm C thuộc d sao cho tia phân giác của góc ACB nằm trên d.

✍ **LỜI GIẢI.**

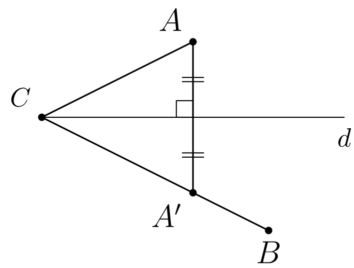
Phân tích. Giả sử đã dựng được hình vẽ thỏa mãn bài toán. Khi đó hai đường thẳng CA và CB đối xứng nhau qua d. Do đó điểm A' đối xứng với A qua d thuộc đường thẳng CB. Khi đó C là giao điểm của BA' và d.

Cách dựng.

— Dựng điểm A' đối xứng với A qua d.

— Dựng điểm C là giao điểm của BA' và d.

Chứng minh. Theo các dựng thì CA và CB là hai đường thẳng đối xứng với nhau qua d nên d là đường phân giác của góc $\widehat{ACB}$. Ta có điều phải chứng minh.



Biện luận.

— Nếu khoảng cách từ A và B đến d bằng nhau thì bài toán không có nghiệm hình.

— Nếu Khoảng cách từ A và B đến d khác nhau thì bài toán có một nghiệm hình.

□

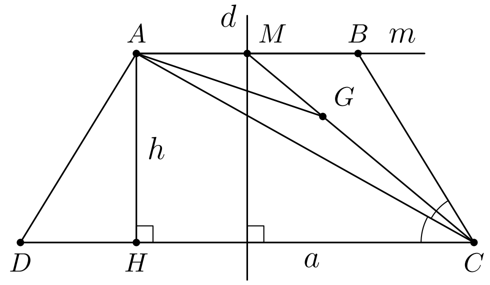
BÀI 4. Dựng hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{D} = 2\widehat{ACD}$, biết $CD = a$, đường cao $AH = h$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phân tích. Giả sử đã dựng được hình thang $ABCD$ thỏa mãn bài toán. Khi đó $\widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 2\widehat{ACD}$ nên CA là tia phân giác góc $\widehat{CBD}$. Lại có $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ nên $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$ hay tam giác BAC cân tại

B. Gọi M là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác BAC. Do tam giác BAC cân nên $GA = GC$.

Cách dựng.



— Dựng đoạn thẳng CD. Dựng đường thẳng m song song với CD và cách CD một đoạn bằng h.

— Dựng đường trung trực d của CD, cắt m tại M.

— Dựng điểm G trên đoạn CM sao cho $GC = 2GM$ (dựng tam giác CXY bất kì có M là trung điểm XY, G là trọng tâm tam giác CXY).

— Dựng điểm A là giao điểm đường tròn $(G; GC)$ với đường thẳng m sao cho A và C khác phía đối với d (chú ý $GC = 2GM > GM > x$ với x là khoảng cách từ G đến m nên luôn dựng được điểm A).

— Dựng điểm B đối xứng với A qua d.

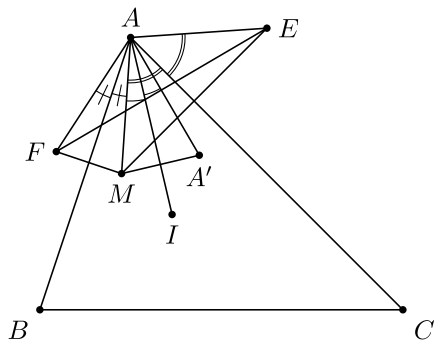
Chứng minh. Theo cách dựng, G là trọng tâm tam giác ABC, hơn nữa do $GA = GC$ nên G nằm trên đường trung trực của AC, do đó BG là trung trực của AC. Suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{BAC} = \widehat{ACD}$.

Hiển nhiên theo cách dựng thì $ABCD$ là hình thang cân. Do đó $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 2\widehat{ACD}$.

Biện luận. Bài toán có hai nghiệm hình. □

BÀI 5. Cho điểm M nằm bên trong tam giác ABC, A' đối xứng với M qua đường phân giác của góc A, B' đối xứng với M qua đường phân giác của góc B, C' đối xứng với M qua đường phân giác của góc C. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy hoặc song song từng đôi một.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng với M qua BC, CA, AB. Ta sẽ chứng minh AA' là đường trung trực của đoạn thẳng EF.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Do các dựng các điểm A', E, F nên ta có

$$\widehat{MAI} = \widehat{A'AI} = \alpha, \quad \widehat{FAB} = \widehat{MAB} = \beta, \quad \widehat{EAC} = \widehat{MAC} = \gamma.$$

Suy ra

$$\widehat{FAA'} = 2\beta + 2\alpha, \quad \widehat{EAA'} = 2\gamma - 2\alpha. \qquad (1)$$

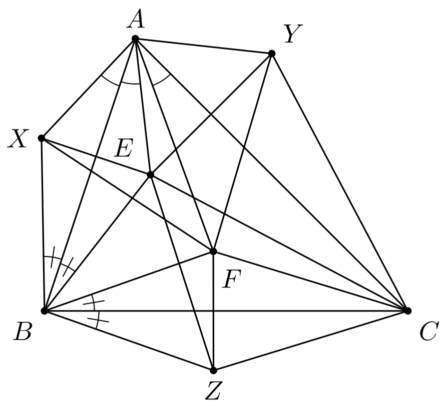
Để ý rằng $\alpha + \beta = \gamma - \alpha = \dfrac{\widehat{A}}{2}$, nên từ (1) ta có $\widehat{FAA'} = \widehat{EAA'}$, tức AA' là đường phân giác góc $\widehat{EAF}$. Hơn nữa do tính đối xứng nên

$$AF = AM = AA' = AE,$$

hay tam giác EAF cân tại A, suy ra AA' là đường trung trực của đoạn EF.
Hoàn toàn tương tự, BB', CC' lần lượt là đường trung trực của các đoạn thẳng DE, FD. Vậy AA', BB', CC' đôi một song song hoặc đồng quy. □

BÀI 6. Cho tam giác ABC. Vẽ các tia Ax, Ay trong góc A sao cho $\widehat{BAx} = \widehat{CAy}$, vẽ các tia Bz, Bt trong góc B sao cho $\widehat{ABz} = \widehat{CBt}$. Gọi E là giao điểm của Ax và Bz, gọi F là giao điểm của Ay và Bt. Chứng minh $\widehat{ACE} = \widehat{BCF}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Dựng các điểm X, Y lần lượt đối xứng với E qua AB, AC, dựng điểm Z đối xứng với F qua BC. Khi đó ta có

$$\begin{cases} \widehat{XAY} = 2\left(\widehat{EAB} + \widehat{EAC}\right) = 2\widehat{BAC} \\ \widehat{XAF} = \widehat{XAB} + \widehat{BAF} = \widehat{BAF} + \widehat{FAC} = \widehat{BAC}. \end{cases}$$

Suy ra AF là tia phân giác góc $\widehat{XAY}$, hơn nữa $AX = AY (= AE)$ nên AF là đường trung trực của XY, suy ra $FX = FY$.
Xét hai tam giác XBF và EBZ, ta có $XB = EB$, $FB = ZB$ và $\widehat{XBF} = \widehat{EBZ}$ (tương tự chứng minh trên) nên $\triangle XBF = \triangle EBZ$. Suy ra $FX = EZ$, hay $EZ = YF$. Do đó $\triangle ECZ = \triangle YCF$, từ đó $\widehat{ECZ} = \widehat{YCF}$. Vậy

$$\widehat{ACE} = \frac{\widehat{ECY}}{2} = \frac{\widehat{YCF} - \widehat{ECF}}{2} = \frac{\widehat{ECZ} - \widehat{ECF}}{2} = \frac{\widehat{FCZ}}{2} = \widehat{BFC}.$$

□

BÀI 5 HÌNH BÌNH HÀNH

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa 1. Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.

Định lí 1. *Trong hình bình hành: các cạnh đối bằng nhau, các góc đối bằng nhau, các đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.*

Định lí 2. *Một tứ giác là hình bình hành nếu có một một trong các dấu hiệu sau:*

— *Các cạnh đối song song.*

— *Các cạnh đối bằng nhau.*

— *Hai cạnh đối song song và bằng nhau.*

— *Các góc đối bằng nhau.*

— *Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mối đường.*

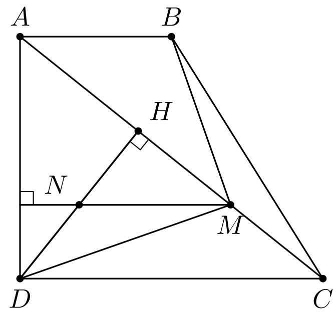
B CÁC DẠNG TOÁN

VÍ DỤ 1. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), ta có $AB = \dfrac{1}{2}CD$. Gọi H là hình chiếu của D trên AC, M là trung điểm của HC. Chứng minh rằng $\widehat{BMD} = 90^\circ$.

LỜI GIẢI.

Gọi N là trung điểm của DH. (Hình 16). Ta có MN là đường trung bình của ΔHDC nên $MN \parallel DC$, $MN = \dfrac{1}{2}DC$. Ta lại có $AB \parallel DC$, $AB = \dfrac{1}{2}DC$, do đó $AB \parallel MN$, $AB = MN$. Vậy $ABMN$ là hình bình hành, suy ra

$$AN \parallel BM. \quad (1)$$



ΔADM có $DH \perp AM$, $MN \perp AD$, suy ra

$$AN \perp DM. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BMD} = 90^\circ$. □

VÍ DỤ 2. Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm.

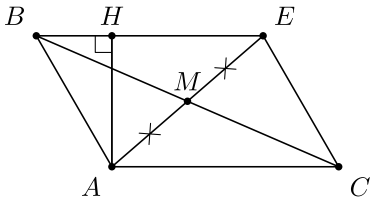
LỜI GIẢI.

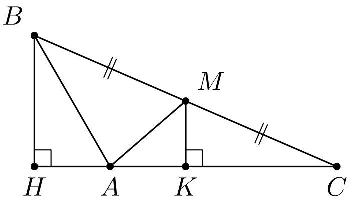
Cách 1. (Hình 17). Vẽ điểm E sao cho M là trung điểm của AE. Tứ giác $ABEC$ là hình bình hành, $\widehat{ABE} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Kẻ $AH \perp BE$. Tam giác vuông ABH có $\widehat{B} = 60^\circ$ nên $BH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ cm. Suy ra $HE = BE = BH = 6 - 2 = 4$ cm.

Trong tam giác vuông ABH ta có $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 16 - 4 = 12$.

Trong tam giác vuông AHE ta có $AE^2 = AH^2 + HE^2 = 12 + 16 = 18$.
Do đó $AE = 2\sqrt{7}$ cm. Suy ra $AM = \sqrt{7}$ cm.





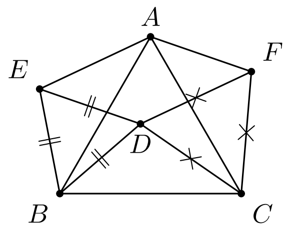
Cách 2. (Hình 18). Kẻ $BH \perp AC$, $MK \perp AC$. Lần lượt tính được $AH = 2$ cm, $HB = 2\sqrt{3}$ cm, $MK = \sqrt{3}$ cm, $HK = \dfrac{HC}{2} = 4$ cm, $AK = 2$ cm. Từ đó tính được $AM = \sqrt{7}$ cm. □

C BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 1. Cho điểm D nằm bên trong tam giác đều ABC. Vẽ các tam giác đều BDE, CDF (E, F, D nằm cùng phía với BC). Chứng minh rằng $AEDF$ là hình bình hành.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét hai tam giác $\triangle DBC = \triangle EBA$ có



$$\begin{aligned} & BC = AB \\ & \widehat{DBC} = \widehat{ABE} (= 60^\circ - \widehat{ABD}) \\ & BD = BE \end{aligned}$$

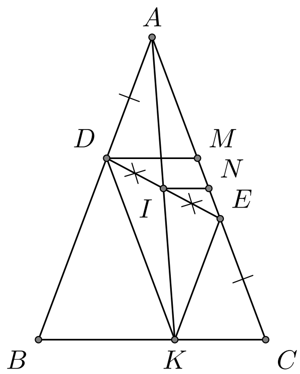
Suy ra $\triangle DBC = \triangle EBA$ (c.g.c) nên $DC = EA$. Do đó $DF = EA$. (1)

Chứng minh tương tự có $DE = FA$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AEDF$ là hình bình hành. □

BÀI 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh AC sao cho $AD = CE$. Gọi I là trung điểm của DE, K là giao điểm của AI và BC. Chứng minh rằng $ADKE$ là hình bình hành.

✍ **LỜI GIẢI.**



Kẻ DM và IN song song với BC (M, N thuộc AC).

Xét $\triangle EMD$ có $IN \parallel DM$, I là trung điểm của DE nên suy ra N là trung điểm của ME hay $ME = NE$. (1)

Vì $DM \parallel BC$ nên $\widehat{ADM} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{AMD}$, do đó tam giác $\triangle ADM$ cân tại A, hay $AD = AM$. (2)

Lại có $AD = EC$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra N là trung điểm của AC.

Xét $\triangle AKC$ có N là trung điểm của AC, $IN \parallel BC$ nên I là trung điểm của AK.

Tứ giác $ADKE$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên $ADKE$ là hình bình hành. □

BÀI 3. ❶ Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm hai đường chéo và các đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối của tứ giác gặp nhau tại một điểm. (*Bài toán của Giéc-gôn (Gergonme, nhà toán học Pháp,1771-1859)*)

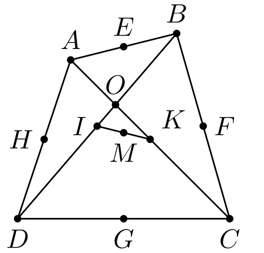
❷ Dùng định lí trên chứng tỏ rằng nếu một tứ giác các đường thẳng nối trung điểm các cạnh đối đi qua giao điểm hai đường chéo thì tứ giác đó là hình bình hành.

LỜI GIẢI.

❶

Gọi E, F, G, H là trung điểm của AB, BC, CD, DA; I, K là trung điểm của BD, AC.

Tứ giác $EFGH$ có $EF \parallel GH (\parallel AC)$, $EF = GH (= \dfrac{1}{2}AC)$ nên $EFGH$ là hình bình hành. Chứng minh tương tự $EIGK$ là hình bình hành, do đó FH và IK cùng đi qua trung điểm cùng EG.



❷ Gọi O là giao điểm của hai đường chéo và M là trung điểm của IK. Nếu EG, FH cắt nhau tại O thì theo câu a), M trùng với O, do đó I và K trùng O. Tứ giác $ABCD$ có O là trung điểm của hai đường chéo nên là hình bình hành.

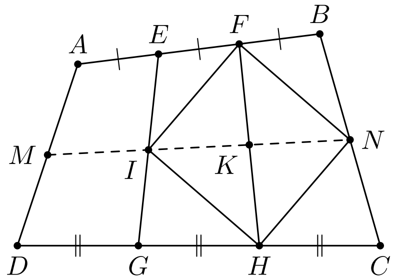
□

BÀI 4. Cho tứ giác $ABCD$. Trên cạnh AB lấy các điểm E, F sao cho $AE = AF = FB$. Trên cạnh CD lấy điểm G, H sao cho $DG = GH = HC$. Gọi M, I, K, N theo thứ tự là trung điểm của AD, EG, FH, BC. Chứng minh rằng bốn điểm M, I, K, N thẳng hàng và $MI = IK = KN$.

LỜI GIẢI.

Ta có IF và HN song song và bằng nhau vì cùng song song và bằng một nửa BG. Do đó tứ giác $IFNH$ là hình bình hành. Ta lại có K là trung điểm của FH nên I, K, N thẳng hàng và K là trung điểm của IN.

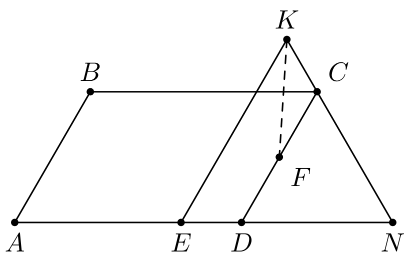
Chứng minh tương tự, M, I, K thẳng hàng và I là trung điểm của MK. Vậy M, I, K, N thẳng hàng và $MI = IK = KN$.



□

BÀI 5. Hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Lấy các điểm E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AD, CD sao cho $DE = CF$. Gọi K là điểm đối xứng với F qua BC. Chứng minh rằng EK song song với AB.

LỜI GIẢI.

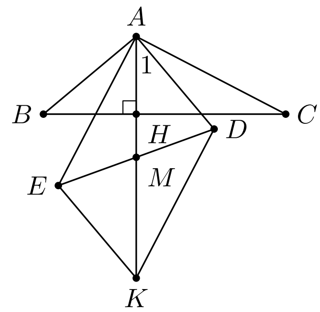


Gọi N là giao điểm của ED và KC, khi đó tam giác NCD đều mà $CK = DE$ (cùng bằn CF) nên tam giác NKE đều. Vậy $EK \parallel AB$. □

BÀI 6. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > 90^\circ$. Trong góc A vẽ các đoạn thẳng AD, AE sao cho AD vuông góc và bằng AB, AE vuông góc và bằng AC. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng AM vuông góc với BC.

LỜI GIẢI.

Vẽ hình bình hành $ADKE$, khi đó $\triangle ADK = \triangle BAC$ (c.g.c) (chú ý rằng $\widehat{ADK} = \widehat{BAC}$ vì cùng bù với góc DAE) nên $\widehat{A_1} = \widehat{B}$. Gọi H là giao điểm của AM và BC. Ta có



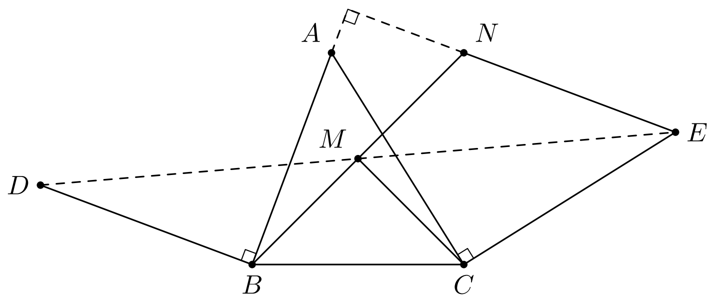
$$\widehat{B} + \widehat{BAH} = \widehat{A_1} + \widehat{BAH} = 90^\circ$$

nên $AH \perp BC$.

□

BÀI 7. Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác ABD vuông cân tại B, ACE vuông cân tại C. Gọi M là trung điểm của DE. Hãy xác định dạng của tam giác BMC.

✍ **LỜI GIẢI.**

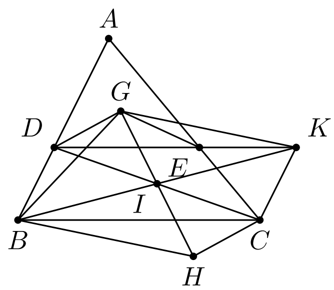


Trên tia đối của tia MB lấy $MN = MB$, khi đó tứ giác $BDNE$ là hình bình hành, suy ra $EN \perp AB$ và $EN = AB$. Ta lại có $EC \perp AC$, $EC = AC$. Từ đó ta có $\triangle ENC = \triangle ABC$ (c.g.c). Suy ra $NC = BC$ và $NC \perp BC$.
Do đó tam giác BCN vuông cân, suy ra tam giác BMC vuông cân tại M. □

BÀI 8. Cho tam giác đều ABC, một đường thẳng song song với BC cắt AB, AC ở D và E. Gọi G là trọng tâm của tam giác ADE, I là trung điểm của CD. Tính số đo các góc của tam giác GIB.

✍ **LỜI GIẢI.**

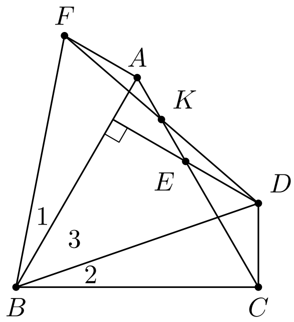
Cách 1. Qua C vẽ đường thẳng song song với BD, cắt DE ở K. Ta có $BDKC$ là hình bình hành nên B, I, K thẳng hàng.
$\triangle GDB = \triangle GEK$ (c.g.c) nên $GB = GK$. Suy ra $\triangle GBK$ cân tại G có $\widehat{KBG} = 120^\circ$. Do đó các góc của tam giác GIB bằng $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$.
Cách 2. Vẽ H sao cho I là trung điểm của GH. Ta chứng minh được $\triangle GBH$ đều.



□

BÀI 9. Cho điểm E thuộc cạnh AC của tam giác đều ABC. Đường vuông góc với AB kẻ từ E cắt đường vuông góc với BC kẻ từ C tại điểm D. Gọi K là trung điểm của AE. Tính $\widehat{KBD}$.

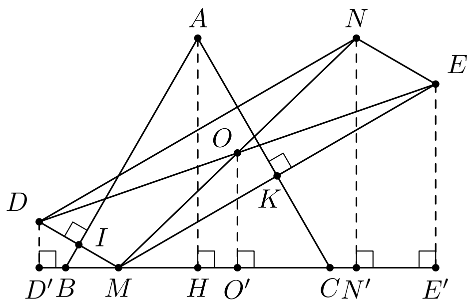
✍ **LỜI GIẢI.**



Vẽ F sao cho K là trung điểm của DF thì $AF \parallel DE$, $AF = DE$.
$\triangle DEC$ có $\widehat{E} = \widehat{C} = 30^\circ$ nên $DE = DC$, suy ra $AF = DC$.
$\triangle BAF = \triangle BCD$ (c.g.c) nên $BF = BD$, $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$.
Ta lại có $\widehat{B_1} + \widehat{B_3} = \widehat{B_2} + \widehat{B_3} = 60^\circ$, do đó $\triangle DBF$ đều, $\widehat{KBD} = 30^\circ$. □

BÀI 10. Cho tam giác đều ABC, điểm M thuộc cạnh BC. Gọi D là điểm đối xứng với M qua AB, E là điểm đối xứng với M qua AC. Vẽ hình bình hành $MDNE$. Chứng minh rằng AN song song với BC.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi O là giao điểm của DE và MN. Kẻ DD', OO', AH, NN', EE' vuông góc với BC. Ta sẽ chứng minh $AH = NN'$.

Ta có OO' là đường trung bình của tam giác MNN' nên $NN' = 2 \cdot OO'$. (1)

Gọi I là giao điểm của MD và AB, K là giao điểm của ME và AC, dễ chứng minh $AH = MI + MK$. (2)

Vì OO' là đường trung bình của hình thang $DEE'D'$ nên $DD' + EE' = 2 \cdot OO'$. (3)

Ta có $\widehat{EME'} = 30^\circ$ nên $EE' = \dfrac{ME}{2} = MK$.
Tương tự, $DD' = MI$, suy ra $DD' + EE' = MI + MK$. (4)

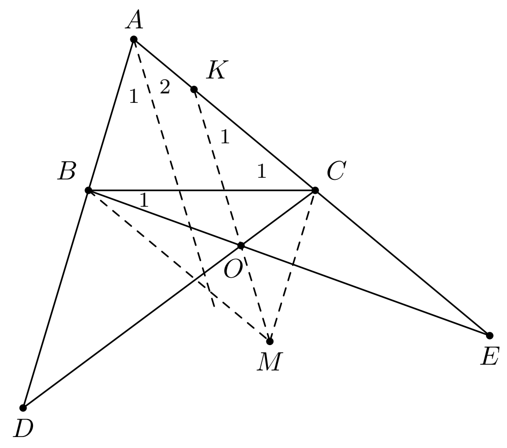
Từ $(1), (2), (3), (4)$ suy ra $AH = 2OO'$. (5)

Từ $(1), (5)$ suy ta $AH = NN'$. Từ đó chứng minh được $AN \parallel HN'$, tức là $AN \parallel BC$. □

BÀI 11. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc các tia đối của các tia BA, CA sao cho $BD = CE = BC$. Gọi O là giao điểm của BE và CD. Qua O vẽ đường thẳng song song với tia phân giác của góc A, đường thẳng này cắt AC ở K. Chứng minh rằng $AB = CK$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vẽ hình bình hành $ABMC$ thì $AB = CM$. Ta chứng minh rằng $CM = CK$.



Trước hết ta chứng minh M, O, K thẳng hàng. Thật vậy, $\widehat{B_1} = \dfrac{1}{2}\widehat{C_1} = \dfrac{1}{2}\widehat{CBM}$ nên BO là tian phân giác của $\widehat{BCM}$. Tương tự, CD là tia phân giác của $\widehat{BCM}$. Do đó MO là tia phân giác của $\widehat{BCM}$. Suy ra OM song song với tia phân giác của $\widehat{A}$,vạy K, O, M thẳng hàng.

Ta có $\widehat{M_1} = \dfrac{1}{2}\widehat{BCM} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{K_1}$ nên $\triangle CKM$ cân. Suy ra $CK = CM = AB$.

□

BÀI 6 ĐỐI XỨNG TÂM

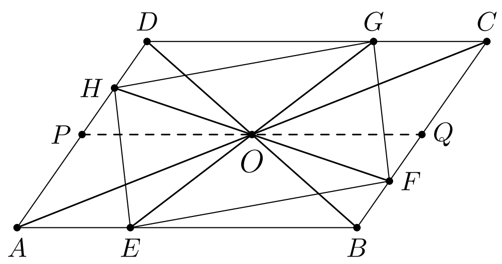
A LÝ THUYẾT

Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó.
Điểm đối xứng của điểm O qua điểm O chính là điểm O.
Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng nhau qua một điểm thì chúng bằng nhau.
Hình bình hành nhận giao điểm của hai đường chéo làm tâm đối xứng.

VÍ DỤ 1. Một hình bình hành có bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của một hình bình hành khác. Chứng minh rằng các tâm của hai hình bình hành đó là trùng nhau.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi $EFGH$ là hình bình hành có bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của hình bình hành $ABCD$ (như hình vẽ bên). Gọi O là tâm của hình bình hành $EFGH$, ta sẽ chứng minh O cũng là tâm của hình bình hành $ABCD$. Thật vậy
Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC.
Ta có OP là đường trung bình của hình thang $AEGD$ nên $OP \parallel DG$. (1)

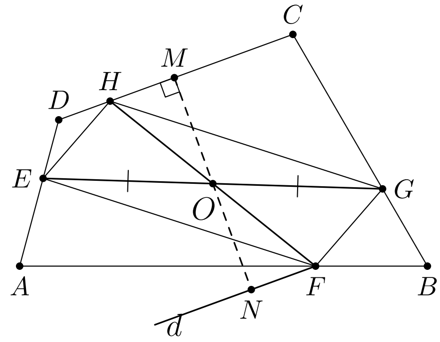


Tương tự ta có
OQ là đường trung bình của hình thang $CGEB$ nên $OQ \parallel GC$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra O, P, Q thẳng hàng.
Vì $EFGH$ là hình bình hành nên $GF \parallel EH$, $GF = EH$ và $\widehat{GFC} = \widehat{EHA}$, $\widehat{FFC} = \widehat{HEA}$ (do $AD \parallel BC$). Từ đó suy ra $\triangle AEH = \triangle CGF$ (g-c-g), do vậy $CG = AE$.
Mà $OQ = \dfrac{CG + BE}{2} = \dfrac{AE + EB}{2} = \dfrac{AB}{2}$.
Lại có $AB = PQ$ nên $OP = \dfrac{PQ}{2}$, do vậy O là trung điểm của PQ.
Vì PQ là đường trung bình của hình bình hành $ABCD$ nên O cũng là trung điểm của AC, BD. Do vậy O là tâm của hình bình hành $ABCD$. □

VÍ DỤ 2. Cho tứ giác $ABCD$, điểm E thuộc đoạn AD và điểm G thuộc đoạn BC. Dựng điểm F thuộc đoạn AB và điểm H thuộc đoạn CD sao cho $EFGH$ là hình bình hành.

✍ **LỜI GIẢI.**



+) *Phân tích:* Gọi O là trung điểm EG thì O là điểm xác định và O là trung điểm của FH.

Vì F thuộc cạnh CD nên H sẽ nằm trên đường thẳng d là ảnh của đường thẳng CD qua phép đối xứng tâm O, do đó F là giao điểm của d và AB.

+) *Cách dựng:*

Dựng trung điểm O của đoạn EG.

Hạ $OM \perp CD$ tại M. Lấy đối xứng của M qua O ta được điểm N. Qua N kẻ đường thẳng d song song với CD, cắt AB tại F. Nối FO cắt CD tại H.

Vậy $EFGH$ là hình cần dựng.

+) *Chứng minh:*

Vì $\triangle OMH = \triangle ONF$ (g-c-g) nên $OH = OF$.

Tứ giác $EFGH$ có $OE = OG$, $OH = OF$ nên $EFGH$ là hình bình hành.

+) *Biện luận:*

Nếu d trùng với AB: khi đó $AB \parallel CD$, O cách đều AB và CD thì bài toán có vô số nghiệm hình.

Nếu d song song với AB: khi đó $AB \parallel CD$, O không cách đều AB và CD thì bài toán không có nghiệm hình.

Nếu d cắt AB: khi đó AB không song song với CD thì bài toán có một nghiệm hình.

□

B BÀI TẬP

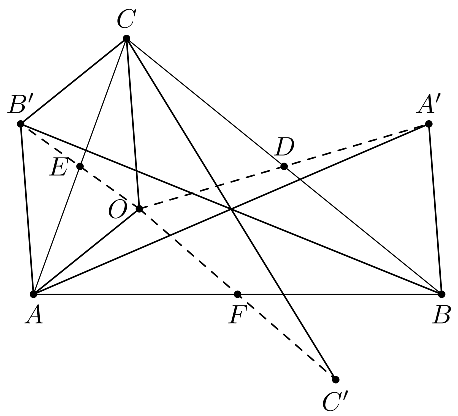
BÀI 1. Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB và O là điểm tùy ý. Lấy A' là điểm đối xứng với O qua D, B' là điểm đối xứng với O qua E, C' là điểm đối xứng với O qua F. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì AB' song song và bằng $A'B$ (do cùng song song và bằng OC) nên $ABA'B'$ là hình bình hành, do đó AA' cắt BB' tại trung điểm mỗi đường. (1)

Tương tự, $BCB'C'$ là hình bình hành, do đó BB' cắt CC' tại trung điểm mỗi đường. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy (tại trung điểm mỗi đường).



□

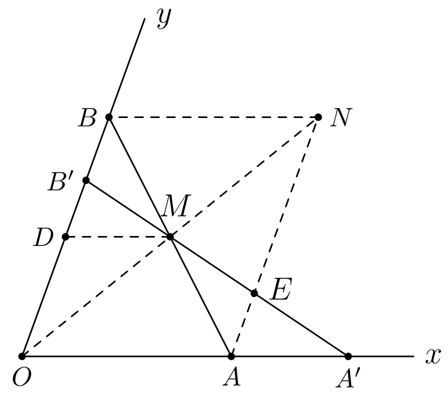
BÀI 2. Cho góc $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt và M là điểm thuộc miền trong của góc.

❶ Qua M dựng đường thẳng cắt các tia Ox, Oy theo thứ tự ở A và B sao cho M là trung điểm của AB.

❷ Chứng minh rằng tam giác OAB nhận được trong cách dựng trên có diện tích nhỏ nhất trong tất cả các tam giác tạo bởi tia Ox, Oy và một đường thẳng bất kỳ đi qua M.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có hai cách dựng như sau:
Cách 1. Qua M dựng đường thẳng song song với Ox, cắt Oy ở D. Dựng B đối xứng với O qua D, đường thẳng BM cắt Ox tại A.
Cách 2. Dựng N đối xứng với O qua M. Qua N dựng các đường thẳng song song với Oy, Ox và lần lượt cắt Ox, Oy tại A, B.



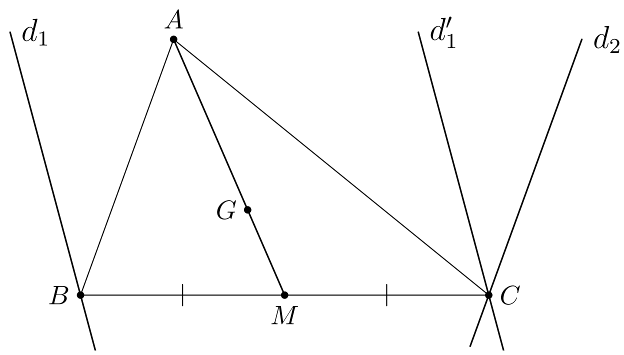
b) Qua M, vẽ đường thẳng bất kỳ (không trùng với AB), cắt Ox, Oy lần lượt tại A', B'. Ta sẽ chứng minh $S_{\triangle OAB} < S_{\triangle OA'B'}$. Thật vậy,
Có duy nhất một đường thẳng đi qua M và cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho M là trung điểm AB nên MA', MB' không bằng nhau (giả sử $MA' > MB'$).
Trên tia MA' ta lấy điểm E sao cho $MB' = ME$, khi đó $S_{\triangle MBB'} = S_{\triangle MAE} < S_{\triangle MAA'}$.

□

BÀI 3. Dựng tam giác biết một đỉnh, trọng tâm và hai đường thẳng đi qua hai đỉnh còn lại.

✍ **LỜI GIẢI.**

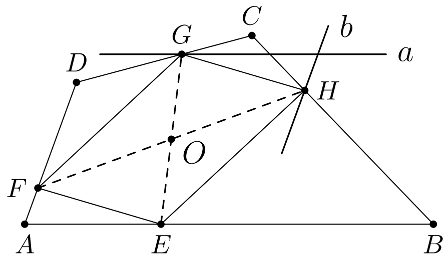
Giả sử cần dựng tam giác ABC, ta biết đỉnh A, trọng tâm G và hai đỉnh B, C lần lượt nằm trên hai đường thẳng d_1, d_2. Lấy điểm B bất kỳ trên d_1.
Do A, G xác định nên trung điểm M của BC xác định. Vì B, C đối xứng nhau qua M nên C nằm trên đường thẳng d_1' là ảnh của d_1 qua phép đối xứng tâm M. Do vậy C là giao điểm của d_1' và d_2.



□

BÀI 4. Cho tứ giác $ABCD$ và một điểm O nằm bên trong tứ giác. Dựng hình bình hành $EFGH$ nhận O làm tâm đối xứng, có bốn đỉnh nằm trên bốn đường thẳng chứa cạnh của tứ giác $ABCD$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Giả sử cần dựng hình bình hành $EFGH$ có tâm O, $E \in AB$, $F \in AD$, $G \in CD$, $H \in BC$ (như hình vẽ bên). Gọi a, b lần lượt là ảnh của AB, AD qua phép đối xứng tâm O. Khi đó ta thấy G là giao điểm của a và CD, H là giao điểm của b và BC.

Biện luận:

+) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì bài toán có vô số nghiệm hình (khi O là tâm của $ABCD$) hoặc không có nghiệm hình (khi O không là tâm của $ABCD$).

+) Nếu $ABCD$ là hình thang mà không là hình bình hành thì bài toán có vô số nghiệm hình (khi O cách đều hai đáy) hoặc không có nghiệm hình (khi O không cách đều hai đáy).

+) Các trường hợp còn lại thì bài toán có một nghiệm hình.

□

BÀI 7 HÌNH CHỮ NHẬT

A LÝ THUYẾT

Hình chữ nhật là một tứ giác có bốn góc vuông.

Hình chữ nhật có đầy đủ tính chất của hình thang cân và hình bình hành, trong đó đặc biệt chú ý đến tính chất: "Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường".

Để chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật, ta chứng minh tứ giác đó có ba góc vuông hoặc chứng minh tứ giác đó là hình bình hành có một trong các tính chất

a) Có một góc vuông;

b) Có hai đường chéo bằng nhau.

Áp dụng vào tam giác, ta có

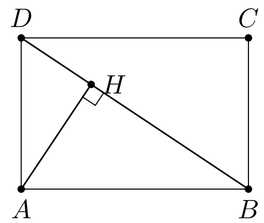
❶ Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền;

❷ Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác đó vuông.

VÍ DỤ 1. Tính các cạnh AB, AD của hình chữ nhật $ABCD$ biết rằng đường vuông góc AH kẻ từ A đến BD chia thành hai đoạn $HD = 9$ cm, $HB = 16$ cm.

LỜI GIẢI.

Ta có $BD = BH + HD = 16 + 9 = 25$ cm.



Xét tam giác ABD vuông tại A có

$$AB^2 + AD^2 = 25^2 = 625. \quad (1)$$

Xét tam giác AHD vuông tại H có

$$AH^2 + HD^2 = AD^2 \Leftrightarrow AD^2 = AH^2 + 9^2. \quad (2)$$

Xét tam giác AHB vuông tại H có

$$AH^2 + HB^2 = AB^2 \Leftrightarrow AB^2 = AH^2 + 16^2. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có

$$AB^2 - AD^2 = 16^2 - 9^2 = 175. \quad (4)$$

Từ (1) và (4) ta được

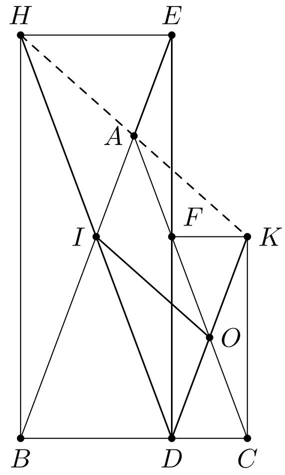
$AB^2 = (625 + 175) : 2 = 400 \Rightarrow AB = 20$ cm.

$AD^2 = (625 - 175) : 2 = 225 \Rightarrow AD = 15$ cm.

□

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Từ một điểm D trên đáy BC, ta vẽ đường thẳng vuông góc với BC, cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F. Vẽ các hình chữ nhật $BDEH$, $CDFK$. Chứng minh rằng A là trung điểm của HK.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi I, O lần lượt là tâm của hình chữ nhật $BDEH$, $CDFK$.
Ta có $\widehat{IBD} = \widehat{IDB}$, $\widehat{OCD} = \widehat{ODC}$ (tính chất hình chữ nhật).
Mà $\widehat{IBD} = \widehat{OCD}$ (do tam giác ABC cân tại A) nên

$$\widehat{IBD} = \widehat{IDB} = \widehat{OCD} = \widehat{ODC}.$$

Do đó $BE \parallel DK$, $DH \parallel CA$, suy ra $AIDO$ là hình bình hành $\Rightarrow AO = ID$. Mà $HI = ID$ nên $AO = HI$.
Lại có $AO \parallel HI$ nên $AOIH$ là hình bình hành, do đó

$$AH \parallel IO,\ AH = IO. \qquad (1)$$

Chứng minh tương tự ta được $AIOK$ là hình bình hành nên

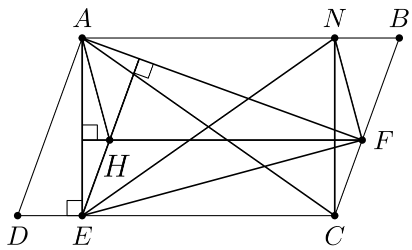
$$AK \parallel IO,\ AK = IO. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra A, H, K thẳng hàng và $AH = AK$.
Vậy A là trung điểm của HK.

□

VÍ DỤ 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có các đường cao AE, AF. Tính khoảng cách từ A đến trực tâm H của tam giác AEF biết $AC = 25$ cm, $EF = 24$ cm.

✍ **LỜI GIẢI.**



Kẻ $CN \perp AB$ tại $N \Rightarrow AECN$ là hình chữ nhật nên $AN = EC$.
Xét tứ giác $EHFC$ có $EH \parallel CF$, $HF \parallel EC$ nên $EHFC$ là hình bình hành, do vậy $EC = HF \Rightarrow AN = HF$.
Xét tứ giác $ANFH$ có $AN \parallel FH$, $AN = FH$ nên $ANFH$ là hình bình hành, do đó $AH = NF$ và $AH \parallel NF$.
Lại có $AH \perp EF$ nên $FN \perp EF$.

Xét tam giác ENF vuông tại F có $EF = 24$ cm, $NE = AC = 25$ cm nên

$$NF^2 = NE^2 - EF^2 = 25^2 - 24^2 = 49 \Rightarrow NF = 7 \text{ cm}.$$

Vậy $AH = 7$ cm. □

Ⓑ BÀI TẬP

BÀI 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên AB, AC và M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $AM \perp IK$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi O, N lần lượt là giao điểm của AH, AM với IK.

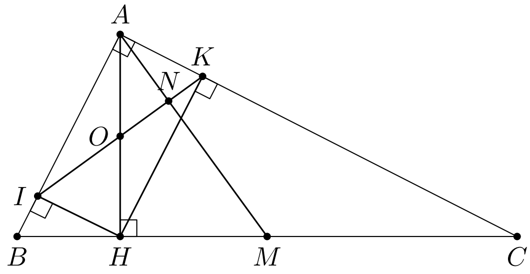
Ta có

$$\widehat{MAK} = \widehat{MCK},\ \widehat{OKA} = \widehat{OAK}$$

nên

$$\widehat{MAK} + \widehat{OKA} = \widehat{MCK} + \widehat{OAK} = 90^\circ.$$

Do đó $AM \perp IK$.



□

BÀI 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo, H là hình chiếu vuông góc của A lên OD. Biết $\widehat{DAH} = \widehat{HAO} = \widehat{OAB}$, chứng minh rằng $ABCD$ là hình chữ nhật.

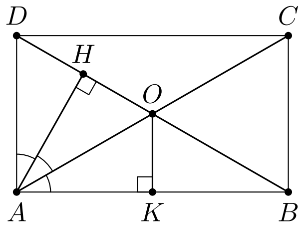
✍ **LỜI GIẢI.**

Kẻ $OK \perp AB$ tại K. Ta sẽ chứng minh $\widehat{BAD} = 90^\circ$.

Thật vậy, ta có

$\widehat{AOK} = 90^\circ - \widehat{OAK} = 90^\circ - \widehat{OAH} = \widehat{AOH}$. Do đó $\triangle AOH = \triangle AOK$ (g-c-g), suy ra $OK = OH$.

Vì $OH \perp OD$, $\widehat{DAH} = \widehat{OAH}$ nên $\triangle ADO$ cân tại A, do đó $OH = \dfrac{1}{2}OD$.



Mà $ABCD$ là hình bình hành nên $OB = OD$, do vậy $OK = OH = \dfrac{1}{2}OB$.

Xét tam giác OKB vuông tại K có $OK = \dfrac{1}{2}OB$ nên $\widehat{OBK} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{OAB} = 30^\circ$.

Do đó $\widehat{BAH} = 60^\circ$, $\widehat{BAD} = 90^\circ$. Vậy $ABCD$ là hình chữ nhật. □

BÀI 3. Cho tam giác ABC có trực tâm H và I là giao điểm của các đường trung trực. Gọi E là điểm đối xứng của A qua I. Chứng minh rằng $BHCE$ là hình bình hành.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì I là giao điểm của các đường trung trực của $\triangle ABC$ nên $IA = IB = IC$.

Mà $IA = IE$ nên $IA = IB = IC = IE$.

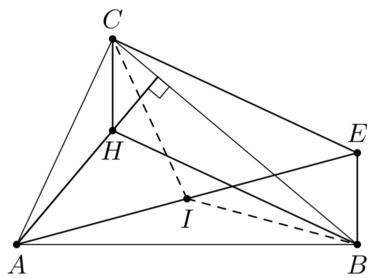
Xét tam giác AEC có I là trung điểm AE, $CI = \dfrac{1}{2}AE$ nên $\triangle ACE$ vuông tại $C \Rightarrow CE \perp AC$.

Mà $BH \perp AC$ nên $BH \parallel CE$. (1)

Xét tam giác AEB có I là trung điểm AE, $BI = \dfrac{1}{2}AE$ nên $\triangle ABE$ vuông tại $B \Rightarrow BE \perp AB$.

Mà $CH \perp AB$ nên $CH \parallel BE$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $BHCE$ là hình bình hành.

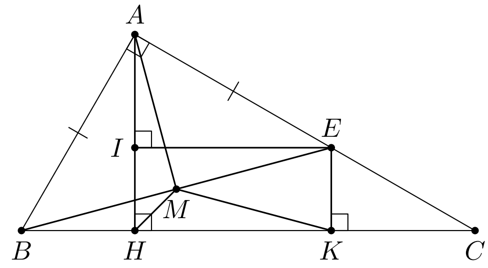


□

BÀI 4. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có đường cao AH. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Gọi M là trung điểm của BE. Chứng minh rằng HM là tia phân giác của góc $\widehat{AHC}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Kẻ $EK \perp BC$ tại K, $EI \perp AH$ tại $I \Rightarrow IHKE$ là hình chữ nhật, do đó $IE = HK$.
Mà $\widehat{EAI} + \widehat{HAB} = 90^\circ = \widehat{HAB} + \widehat{HBA}$ nên $\widehat{HBA} = \widehat{EAI}$.
Lại có $AB = AE$ nên $\triangle AHB = \triangle EIA$
$\Rightarrow AH = IE = HK$.
Vì các tam giác BAE, BKE lần lượt vuông tại A, K và M là trung điểm BE nên $AM = KM = \dfrac{1}{2}BE$. Do vậy $\triangle AHM = \triangle KHM$ (c-c-c)
$\Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{KHM}$, suy ra HM là tia phân giác của góc $\widehat{AHC}$.

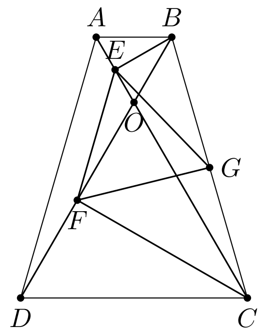


□

BÀI 5. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $\widehat{ACD} = 60^\circ$ và O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của OA, OD, BC. Tam giác EFG là tam giác gì? Vì sao?

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $\triangle ACD = \triangle BDC$ (c.g.c). Mà $\widehat{ACD} = 60^\circ$ nên $\widehat{BDC} = 60^\circ$. Khi đó các tam giác OAB, OCD là các tam giác đều.
Vì E, F lần lượt là trung điểm của OA, OD nên
$BE \perp OA$, $CF \perp OD$ và $EF = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}BC$. (1)
Xét các tam giác BEC, BFC lần lượt vuông tại E, F có G là trung điểm của BC nên $EG = FG = \dfrac{1}{2}BC$. (2)
Từ (1) và (2) ta suy ra $\triangle EFG$ là tam giác đều.



□

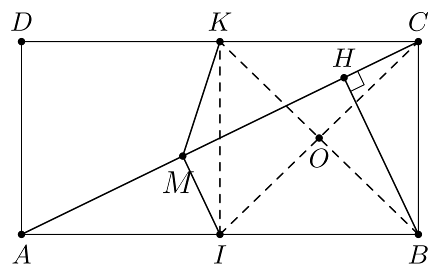
BÀI 6. Gọi H là hình chiếu vuông góc của đỉnh B lên đường chéo AC của hình chữ nhật $ABCD$ và M, K lần lượt là trung điểm của AH, CD.

❶ Gọi I, O lần lượt là trung điểm của AB, IC. Chứng minh rằng $MO = \dfrac{1}{2}IC$.

❷ Tính số đo góc $\widehat{BMK}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Vì $ABCD$ là hình chữ nhật và I, K lần lượt là trung điểm của AB, CD nên $BIKC$ là hình chữ nhật. Do đó O là trung điểm của CI, BK.
Xét tam giác IMC vuông tại M có
$MO = \dfrac{1}{2}IC$.



b) Xét tam giác MBK có $MO = \dfrac{1}{2}IC = \dfrac{1}{2}BK$ nên $\widehat{BMK} = 90^\circ$.

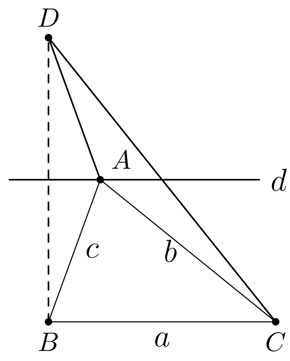
□

BÀI 7. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh bằng a, b, c, chu vi bằng $2p$ và các đường cao tương ứng lần lượt là h, m, n. Chứng minh rằng

a) $(b+c)^2 \geq a^2 + 4h^2$. b) $h^2 \leq p(p-a)$. c) $h^2 + m^2 + n^2 \leq p^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Qua A kẻ đường thẳng d song song với BC và gọi D là điểm đối xứng của B qua d.



❶ Ta có $BD = 2h$. Xét tam giác BCD vuông tại B có

$$BD^2 + BC^2 = CD^2 \leq (AD + AC)^2 \Rightarrow 4h^2 + a^2 = (b + c)^2. \qquad (1)$$

❷ Từ (1) suy ra

$$4h^2 \leq (b + c)^2 - a^2 = (b + c + a)(b + c - a) = 4p(p - a).$$

Do đó

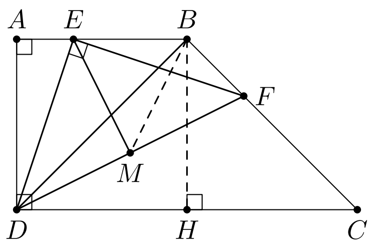
$$h^2 \leq p(p - a).$$

c) Tương tự câu b) ta có $m^2 \leq p(p - b)$ và $n^2 \leq p(p - c)$.
Cộng các kết quả trên ta được $h^2 + m^2 + n^2 \leq p(p - a + p - b + p - c) = p^2$.

□

BÀI 8. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = AD = \dfrac{CD}{2}$. Qua điểm E thuộc cạnh AB, kẻ đường thẳng vuông góc với DE, cắt BC tại F. Chứng minh rằng $ED = EF$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Kẻ $BH \perp CD$ tại $H \Rightarrow ABHD$ là hình vuông, do đó $BH = a$ và $DH = a \Rightarrow CH = a$.
Ta có $BH = HD = CH = a \Rightarrow \triangle BCD$ vuông tại B.
Gọi M là trung điểm của DF,
ta có $EM = BM = \dfrac{DF}{2} \Rightarrow$ các tam giác $MEB,\ MFB$ cân tại M.
Vì $ABHD$ là hình vuông nên $\widehat{DBH} = 45^\circ$
$\Rightarrow \widehat{ABC} = 135^\circ$.

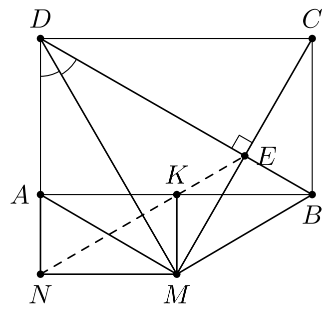
Lại có $\widehat{MEB} + \widehat{MFB} = \widehat{MBE} + \widehat{MBF} = \widehat{EBF} = 135^\circ$, do đó $\widehat{EMF} = 360^\circ - 2 \cdot 135^\circ = 90^\circ$.
Xét tam giác DEF có EM là trung tuyến, đồng thời là đường cao nên $\triangle DEF$ cân tại E nên $ED = EF$. □

BÀI 9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $\widehat{BDC} = 30^\circ$. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với BD tại E và cắt tia phân giác của góc $\widehat{ADB}$ tại M. Gọi $N,\ K$ lần lượt là hình chiếu của M lên $AD,\ AB$.

❶ Chứng minh rằng $AMBD$ là hình thang cân.

❷ Chứng minh rằng ba điểm $N,\ K,\ E$ thẳng hàng.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Vì N, K lần lượt là hình chiếu của M lên AD, AB nên $ANMK$ hình chữ nhật.
Vì $\widehat{BDC} = 30^\circ$ nên $\widehat{ADB} = 60^\circ$
$\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{MDB} = \widehat{BDC} = 30^\circ$ (do DM là tia phân giác $\widehat{BDC}$).
Vì DE là phân giác $\widehat{MDC}$ và $DE \perp MC$ nên $\triangle DMC$ là tam giác cân tại $D \Rightarrow DE$ là đường trung trực của $MC \Rightarrow BM = BC$.
Vì $\widehat{BDC} = 30^\circ$ nên $\widehat{DBC} = 60^\circ$. Mà $\widehat{CEB} = 90^\circ$ nên $\widehat{BCE} = 30^\circ$.
Do đó $\widehat{CBM} = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ \Rightarrow \widehat{MBA} = 30^\circ$.
Vì $\widehat{MCB} = \widehat{MDA} = 30^\circ$ nên $\widehat{MCD} = \widehat{MDC} = 60^\circ$, do vậy $\triangle MCD$ cân tại $M \Rightarrow MK$ là đường trung trực của CD (vì $MD \perp AB$ nên $MD \perp CD$).
Từ đó ta có MK là trục đối xứng của hình chữ nhật $ABCD \Rightarrow MK$ là đường trung trực của AB, vì vậy $MA = MB$. Do đó $MA = MB = BC = AD$. (1)
Lại có $\widehat{AMD} = \widehat{ADM} = \widehat{MDB} = 30^\circ$ nên $AM \parallel BD$. (2)
Từ (1) và (2) ta suy ra $AMBD$ là hình thang cân.

b) Vì M nằm trên tia phân giác góc $\widehat{NDE}$ nên $MN = ME$. Mà $\triangle NME$ cân tại M có $\widehat{NME} = 120^\circ$ nên $\widehat{MNE} = 30^\circ$. (3)
Lại có $MNAK$ là hình chữ nhật nên $\widehat{MNK} = \widehat{MAK} = \widehat{ABD} = 30^\circ$ (4)
Từ (3) và (4) ta suy ra N, K, E thẳng hàng.

□

BÀI 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$.

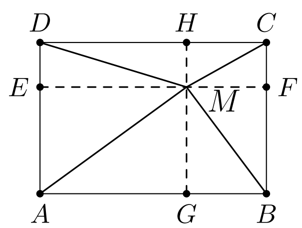
❶ Chứng minh rằng nếu M là điểm bất kỳ nằm trong $ABCD$ thì

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

❷ Kết quả trên có thay đổi không nếu điểm M nằm ngoài hình chữ nhật?

✍ LỜI GIẢI.

❶



Kẻ các đường $ME \perp AD$, $MG \perp AB$, $MF \perp BC$, $MH \perp CD$ (như hình vẽ bên).
Ta có

$$MA^2 + MC^2 = ME^2 + MG^2 + MF^2 + MH^2. \quad (1)$$
$$MB^2 + MD^2 = MF^2 + MG^2 + ME^2 + MH^2. \quad (2)$$

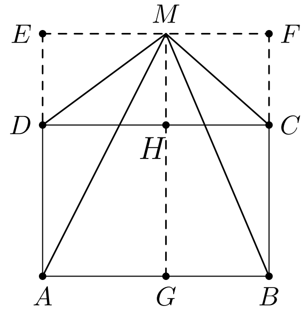
Từ (1) và (2) suy ra $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

❷

Trường hợp M nằm ngoài hình chữ nhật $ABCD$ ta có hình vẽ bên. Khi đó

$$MA^2 + MC^2 = ME^2 + EA^2 + MF^2 + FC^2. \quad (3)$$
$$MB^2 + MD^2 = MF^2 + FB^2 + ME^2 + ED^2. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.
Vậy nếu M nằm ngoài hình chữ nhật $ABCD$ thì kết quả không thay đổi.



□

BÀI 11. Cho tam giác ABC. Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC các hình chữ nhật $ABDE$, $ACFG$, $BCHK$. Chứng minh rằng các đường trung trực của EG, FH, KD đồng quy.

✍ **LỜI GIẢI.**

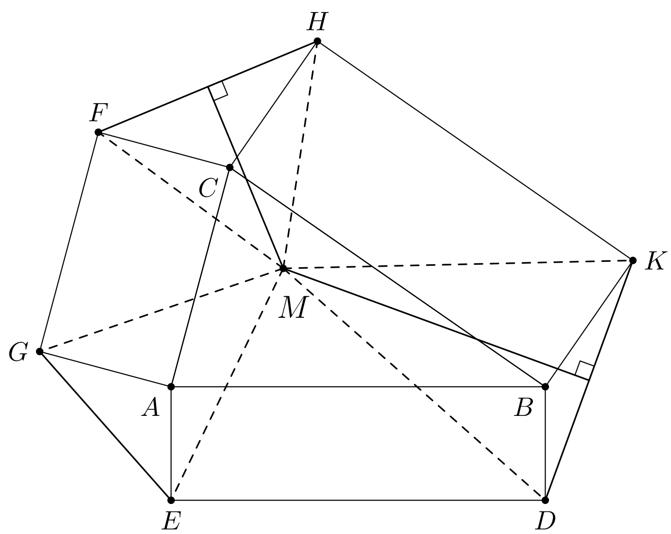
Gọi M là giao điểm của các đường trung trực của các đoạn thẳng FH, DK. Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MD^2 &= ME^2 + MB^2; \\ MB^2 + MH^2 &= MK^2 + MC^2; \\ MC^2 + MG^2 &= MF^2 + MA^2. \end{aligned}$$

Cộng các kết quả trên ta được

$$MD^2 + MH^2 + MG^2 = ME^2 + MK^2 + MF^2.$$

Vì $MD = MK$, $MH = MF$ nên $MG = ME$. Do đó, M nằm trên đường trung trực của đoạn GE.
Vậy các đường trung trực của EG, FH, KD đồng quy.



□

BÀI 8 HÌNH THOI

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa 1. Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Định lí 1. *Trong hình thoi*

1. *Hai đường chéo vuông góc với nhau.*
2. *Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.*

Hệ quả 1. Dấu hiệu nhận biết

1. Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hinh thoi.
2. Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
3. Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.
4. Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

B CÁC DẠNG TOÁN

VÍ DỤ 1. Cho tứ giác $ABCD$ có $A = 40^\circ$, $D = 80^\circ$, $AD = BC$. Gọi E và F là trung điểm của AB và CD. Tính $\widehat{EFD}$, $\widehat{EFC}$.

LỜI GIẢI.

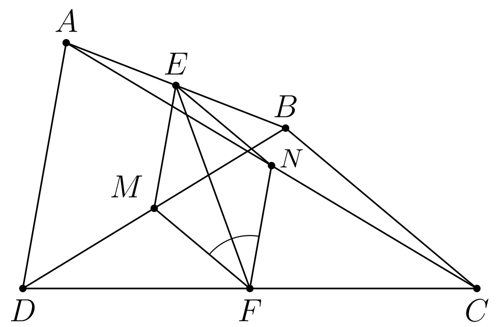
Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BD, AC. Ta có NF là đường trung bình của $\triangle ADC$ nên $\widehat{NFC} = \widehat{ADC} = 80^\circ$, MF là đường trung bình của $\triangle BDC$ nên $\widehat{MFD} = \widehat{BCD} = 40^\circ$. Suy ra

$$\widehat{MFN} = 180^\circ - (80^\circ + 40^\circ) = 60^\circ.$$

Tứ giác $EMFN$ có bốn cạnh bằng nhau nên là hình thoi. Do đó

$$F_1 = F_2 = 60^\circ : 2 = 30^\circ.$$

Vậy $\widehat{EFD} = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$, $\widehat{EFC} = 30^\circ + 80^\circ = 110^\circ$.



$\square$

1. Bài tập tự luyện

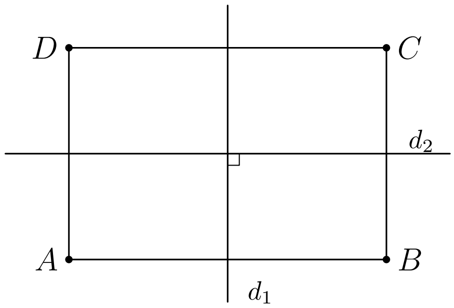
BÀI 1. Xác định dạng của một tứ giác, biết rằng

1. Tứ giác đó có hai trục đối xứng vuông góc với nhau và không đi qua đỉnh của tứ giác.
2. Tứ giác có hai trục đối xứng là hai đường chéo của nó.

LỜI GIẢI.

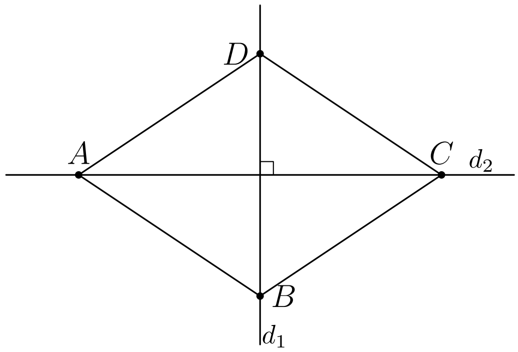
1.

Giả sử tứ giác $ABCD$ có hai trục đối xứng vuông góc d_1 và d_2 như hình vẽ.
Khi đó
− d_1 là đường trung trực của AB và CD, nên $AB \parallel CD$.
− d_2 là đường trung trực của AD và BC, nên $AD \parallel BC$.
− Lại có $d_1 \perp d_2 \Rightarrow AB \perp BC$.
Vậy $ABCD$ là hình chữ nhật.



❷

− Do BD là trục đối xứng nên BD là đường trung trực của AC nên $DA = DC$, $BA = BC$ và $AC \perp BD$.
− Do AC là trục đối xứng nên AC là đường trung trực của BD nên $AD = AB$. Vậy $ABCD$ là hình thoi.



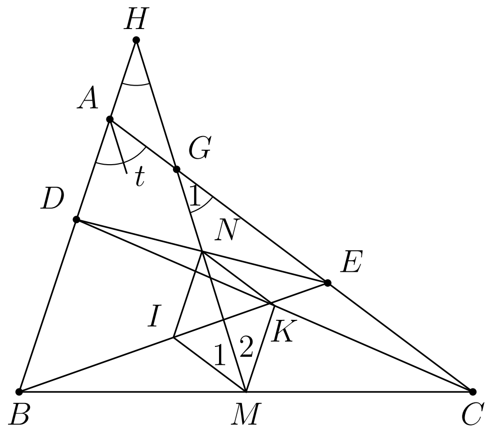
□

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$. Điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC sao cho $BD = CE$. Gọi I, K, M, N theo thứ tự là trung điểm của BE, CD, BC, DE.

❶ Tứ giác $MINK$ là hình gì? Vì sao?

❷ Chứng minh rằng IK vuông góc với tia phân giác At của góc A.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Có

+ MK là đường trung bình của $\triangle CBD$. (1)

+ NI là đường trung bình của $\triangle EBD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$MK = IN = \dfrac{1}{2}BD$ và $MK \parallel NI \parallel BD$, nên $MINK$ là hình bình hành. (3)

Lại có NK là đường trung bình của $\triangle DEC$ và $EC = BD$, suy ra $NK = IN$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra $MINK$ là hình thoi.

❷ Gọi G, H theo thứ tự là giao điểm của MN với AC, BD.

+ $MI \parallel CE \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{G_1}$ (hai góc so le trong). (1)

+ $MK \parallel BD \Rightarrow \widehat{M_2} = \widehat{H}$ (hai góc so le trong). (2)

+ Mà $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (tính chất hình thoi). (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\triangle AHG$ cân tại A. Mà At là phân giác trong $\widehat{BAC}$

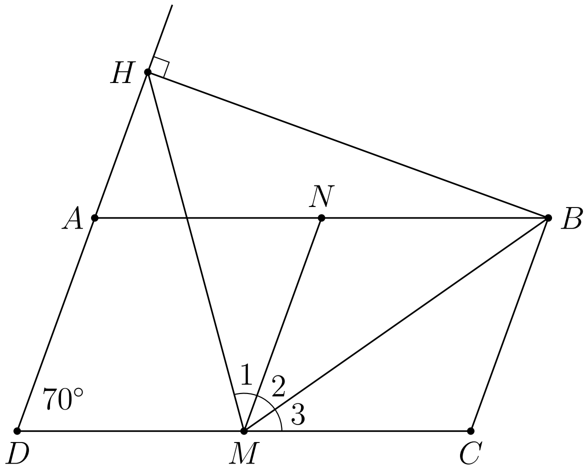
$\Rightarrow \widehat{BAt} = \widehat{AHG} \Rightarrow At \parallel HG$ (do hai góc bằng nhau ở vị trí đồng vị).

Lại có $HG \perp IK \Rightarrow IK \perp At$.

□

BÀI 3. Cho hình bình hành $ABCD$, $AB = 2AD$, $D = 70°$. Gọi H là hình chiếu của B trên AD, M là trung điểm của CD. Tính số đo góc HMC.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi N là trung điểm AB, có $\begin{cases} MN \parallel DA \\ DA \perp BH \end{cases}$

$\Rightarrow MN \perp BH$ và MN đi qua trung điểm của $BH \Rightarrow MN$ là đường trung trực của $BH \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M_2}$.

Lại có $\widehat{M_2} = \widehat{M_3}$ và $\widehat{NMC} = \widehat{ADM} = 70°$. Vậy $\widehat{HMC} = 3 \cdot 35° = 150°$.

□

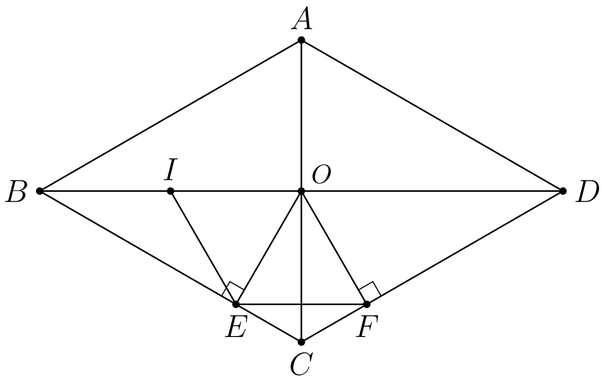
BÀI 4. Gọi O là giao điểm của các đường chéo hình thoi $ABCD$, E và F theo thứ tự là hình chiếu của O trên BC và CD. Tính các góc của hình thoi biết rằng EF bằng một phần tư đường chéo của hình thoi.

✍ **LỜI GIẢI.**

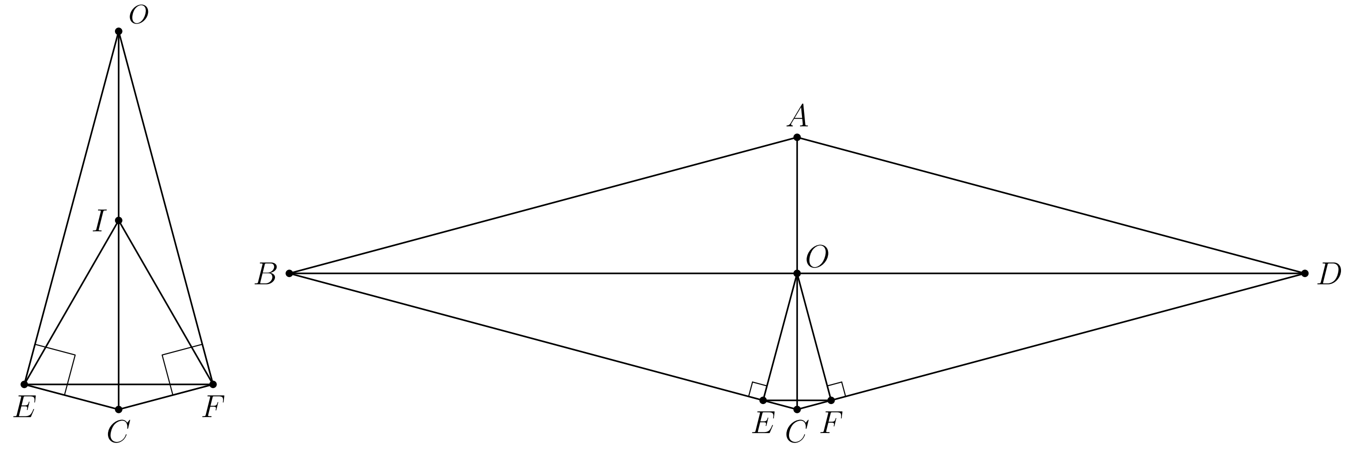
• Xét trường hợp $EF = \dfrac{1}{4}BD$.

Gọi I là trung điểm OB. $\triangle EOB$ vuông tại E nên $EI = \dfrac{1}{2}BO = EF \Rightarrow EFOI$ là hình thoi, suy ra $\triangle OEF$ cân tại F, lại có $OE = OF$ nên $\triangle OEF$ đều $\Rightarrow \widehat{EOF} = 60° \Rightarrow \widehat{ECF} = 120° \Rightarrow \widehat{ABC} = 60°$.

Vậy khi $EF = \dfrac{1}{4}BD$ thì $\widehat{C} = \widehat{A} = 120°$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 60°$.



• Xét trường hợp $EF = \dfrac{1}{4}AC$.



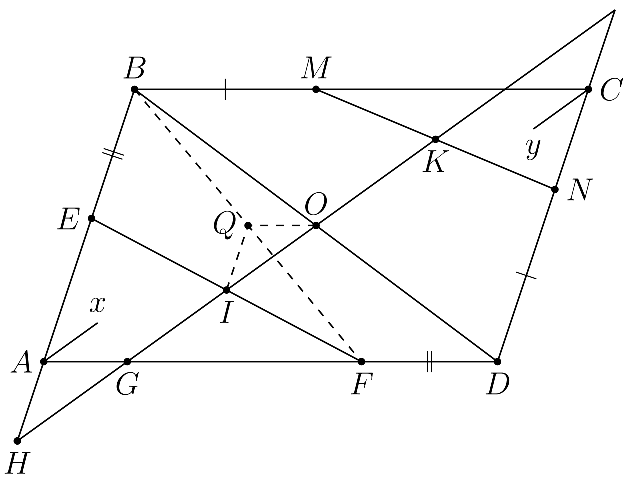
Gọi I là trung điểm $OC \Rightarrow EF = EI = IF \Rightarrow IEF$ đều $\triangle\widehat{CIF} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CIF} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{IOF} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{ODF} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 30^\circ = \widehat{B}$ và $\widehat{A} = \widehat{C} = 150^\circ$. □

BÀI 5. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình bình hành $ABCD$, lấy theo thứ tự các điểm E, M, N, F sao cho $BM = DN$, $BE = DF$. Gọi I, O, K theo thứ tự là trung điểm của EF, BD, MN.

❶ Chứng minh rằng ba điểm I, O, K thẳng hàng.

❷ Trong trường hợp nào thì cả năm điểm A, I, O, K, C thẳng hàng?

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Trước hết, ta chứng minh rằng đường thẳng OI tạo với AB và AD các góc bằng nhau.

Thậy vậy, gọi Q là trung điểm của BF ta có

+ IQ là đường trung bình của $\triangle FBE \Rightarrow IQ = \dfrac{1}{2}BE$.

+ OQ là đường trung bình của $\triangle BFD \Rightarrow OQ = \dfrac{1}{2}FD$.

Mà $BE = FD \Rightarrow QI = QO$.

• Nếu $ABCD$ là hình thoi thì I, O, A thẳng hàng. Tương tự K, O, C thẳng hàng. Do đó năm điểm A, I, O, K, C thẳng hàng.

• Nếu $ABCD$ không là hình thoi, ta có $\triangle QIO$ cân. Gọi G, H là giao điểm của OI với AD, AB. Ta có $\widehat{O} = \widehat{I}$, $\widehat{QIO} = \widehat{H}$ (góc đồng vị) và $\widehat{QOI} = \widehat{OGF}$ (góc so le trong)

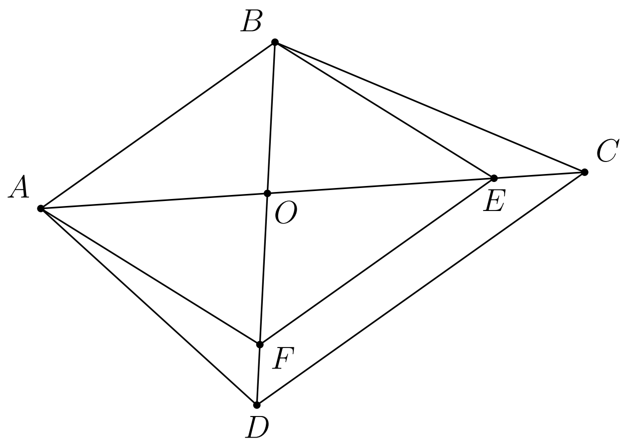
nên $\widehat{G} = \widehat{H}$ do đó HG song song với tia phân giác Ax của góc A.

Tương tự, OK song song với phân giác Cy của góc C. Nhưng $Ax \parallel Cy$, do đó I, O, K thẳng hàng.

□

BÀI 6. Tứ giác $ABCD$ có các đường chéo cắt nhau tại O và chu vi các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA bằng nhau. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thoi.

✍ **LỜI GIẢI.**



Giả sử $OC \geq OA$, $OD \geq OB$. Trên đoạn thẳng OC lấy điểm E, trên đoạn thẳng OD lấy điểm F sao cho $OE = OA$, $OF = OB$. Tứ giác $ABEF$ là hình bình hành, chu vi $\triangle OAB$ bằng chu vi $\triangle OEF$.

Theo đề bài, chu vi $\triangle OAB$ bằng chu vi $\triangle OCD$ nên chu vi các tam giác OEF và OCD bằng nhau, tức là $EF = EC + CD + DF$. Điều này chỉ sảy ra khi C trùng E và D trùng F. Vậy $ABCD$ là hình bình hành. Theo điề bài, chu vi $\triangle OAB$ bằng chu vi $\triangle OBC$, tức là $OA + AB + BO = OB + BC + CO$, mà $OA = CO$ nên $AB = BC$, vậy $ABCD$ là hình thoi.

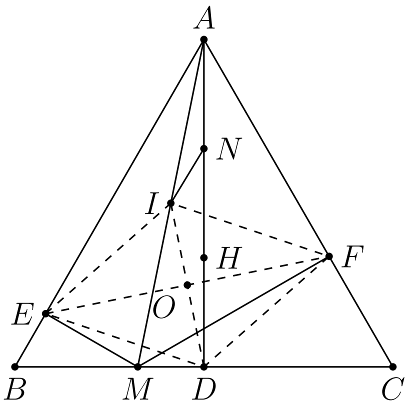
□

BÀI 7. Gọi H là trực tâm của tam giác đều ABC, đường cao AD. Lấy điểm M bất kì thuộc cạnh BC. Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB, AC. Gọi I là trung điểm của AM.

❶ Xác định dạng của tứ giác $DEIF$.

❷ Chứng minh rằng các đường thẳng MH, ID, EF đồng quy.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ $\triangle DAM$ vuông tại D, có DI là đường trung tuyến nên $DI = \dfrac{1}{2}AM$ (1).

$\triangle EAM$ vuông tại E, có EI là đường trung tuyến nên $EI = \dfrac{1}{2}AM$ (2).

Lại có

$\widehat{MIE} = \widehat{IAE} + \widehat{IEA} = 2\widehat{IAE}$.

$\widehat{MID} = \widehat{IAD} + \widehat{IDA} = 2\widehat{IAD}$

nên $\widehat{DIE} = \widehat{DIM} + \widehat{MIE} = 2\left(\widehat{IAD} + \widehat{IAE}\right) = 2\widehat{DAE} = 60^\circ$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\triangle DIE$ đều (4).

Chứng minh tương tự $\triangle DIF$ đều (5).

Từ (4) và (5), suy ra $DEIF$ là hình thoi.

b) Gọi O là giao điểm của ID và EF. Cần chứng minh M, O, H thẳng hàng.

Gọi N là trung điểm của AH, ta có

OH là đường trung bình của $\triangle DIN \Rightarrow OH \parallel IN$.

IN là đường trung bình của $\triangle AMH \Rightarrow MH \parallel IN$.

Suy ra OH và MH cùng song song với IN hay H, O, M thẳng hàng. Vậy HM, ID, EF đồng quy.

□

BÀI 9 HÌNH VUÔNG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa 1. Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.

Nhận xét. *Từ định nghĩa hình vuông, ta suy ra*

— *Hình vuông là hình chữ nhật có bốn cạnh bằng nhau.*
— *Hình vuông là hình thoi có bốn góc vuông.*

⚠ *Hình vuông vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi.*

Tính chất 1. Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

Hệ quả 1. Dấu hiệu nhận biết

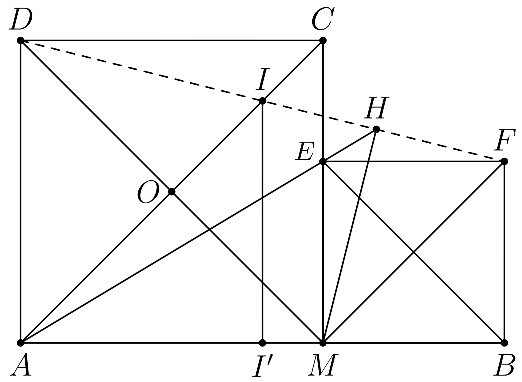
1. Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
2. Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
3. Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc vuông là hình vuông.
4. Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
5. Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

B CÁC DẠNG TOÁN

VÍ DỤ 1. VD16-tr96
Gọi M là điểm bất kì trên đoạn thẳng AB. Vẽ về một phía của AB các hình vuông $AMCD$, $BMEF$.

1. Chứng minh rằng $AE \perp BC$.
2. Gọi H là giao điểm của AE và BC. Chứng minh rằng ba điểm D, H, F thẳng hàng.
3. Chứng minh rằng đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M chuyển động trên đoạn thẳng AB cố định.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Xét $\triangle CAB$, ta có $CM \perp AB$, $BE \perp AC$ (vì $BE \perp MF$, $MF \parallel AC$). Suy ra $AE \perp BC$.

❷ Gọi O là giao điểm của AC và DM. Do $\widehat{AHC} = 90^\circ$ nên $OH = \dfrac{AC}{2}$, do đó $OH = \dfrac{DM}{2}$. Tam giác MHD có đường trung tuyến HO bằng nửa DM nên

$$\widehat{MHD} = 90^\circ. \quad (1)$$

Chứng minh tương tự

$$\widehat{MHF} = 90^\circ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra D, H, F thẳng hàng.

c) Gọi I là giao điểm của DF và AC; $\triangle DMF$ có $DO = OM$, $OI \parallel MF$ nên I là trung điểm của DF.

Lẻ $II' \perp AB$ thì I' là trung điểm của AB và

$$II' = \frac{AD + BF}{2} = \frac{AM + MB}{2} = \frac{AB}{2}.$$

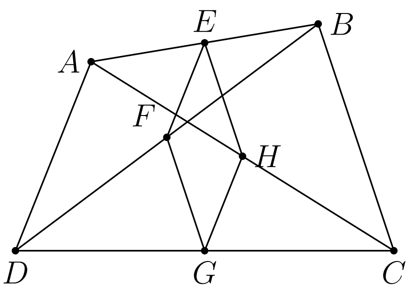
Do đó I là điểm cố định: I nằm trên đường trung trực của AB và cách AB một khoảng bằng $\dfrac{AB}{2}$.

□

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Tứ giác $ABCD$ có E, F, G, F theo thứ tự là trung điểm của AB, BD, DC, CA. Tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để $EFGH$ là hình vuông.

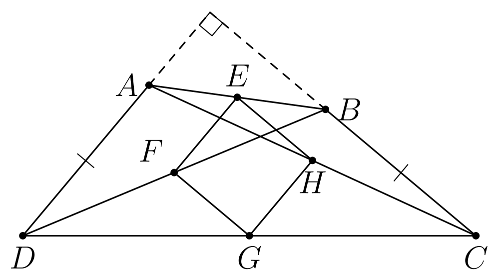
✍ **LỜI GIẢI.**



+ EF là đường trung bình của $\triangle BAD \Rightarrow EF = \dfrac{1}{2}AD$ và $EF \parallel AD$.

+ GH là đường trung bình của $\triangle CAD \Rightarrow GH = \dfrac{1}{2}AD$ và $GH \parallel AD$.

Suy ra $EFGH$ là hình bình hành. Tứ giác $EFGH$ có $EF \parallel GH$.



+ Ta cũng có $EH \parallel FG \parallel BC$ $EH = FG = \dfrac{BC}{2}$.

Điều kiện để hình bình hành $EFGH$ trở thành hình vuông là $EF \parallel EH$ và $EF = EH \Leftrightarrow AD \perp BC$ và $AD = BC$ (hình vẽ bên).

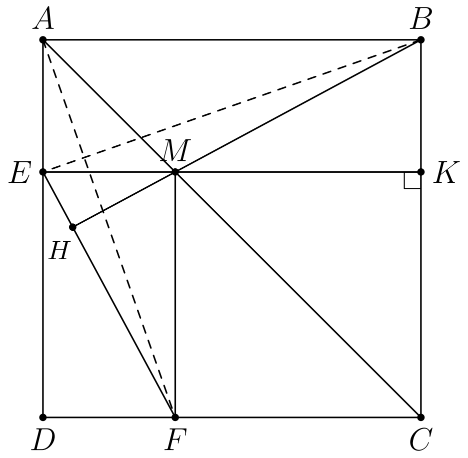
□

BÀI 2. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M nằm trên đường chéo AC. Gọi E, F theo thứ tự là các hình chiếu của M trên AD, CD. Chứng minh rằng

❶ BM vuông góc với EF.

❷ Các đường thẳng BM, AF, CE đồng quy.

LỜI GIẢI.



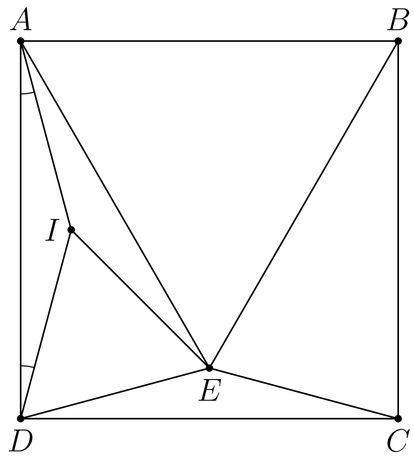
❶ Gọi K là giao điểm của EM và BC. Vì M nằm trên đường chéo AC của hình vuông nên
+ $\triangle EAM$ vuông cân tại E, suy ra $EM = EA = BK$.
+ $MFCK$ là hình vuông, suy ra $MF = MK$.
Vậy $\triangle EMF = \triangle BKM$ (c.g.c) nên $\widehat{MFE} = \widehat{KMB}$.
Gọi H là giao điểm của BM và EF, ta có $\widehat{EMH} = \widehat{BMK}$, suy ra $\widehat{EMH} = \widehat{MFH}$. Mà $\widehat{EMH}+\widehat{HMF} = 90^\circ$ nên $\widehat{MFH} + \widehat{HMF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MHF} = 90^\circ$ hay $BH \perp EF$. Vậy $MB \perp EF$.

b) $\triangle ADF = \triangle BAE$ (c.g.c), suy ra $\widehat{DAF} = \widehat{ABE}$, mà $\widehat{EAF} + \widehat{FAB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FAB} + \widehat{ABE} = 90^\circ$ suy ra $AF \perp EB$.
Tương tự, $CE \perp BF$. Vậy BM, AF, CE là các đường cao của $\triangle BEF$ nên chúng đồng quy.

□

BÀI 3. Cho hình vuông $ABCD$. Điểm E nằm trong hình vuông sao cho tam giác ECD cân có góc đáy bằng 15°. Chứng minh rằng $\triangle ABE$ là tam giác đều.

LỜI GIẢI.



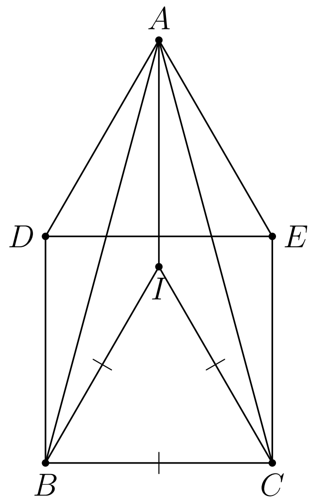
Vẽ điểm I trong hình vuông sao cho $\triangle IAD$ cân tại I có góc ở đáy bằng 15°.
$\triangle IAD = \triangle EDC$ (g.c.g) $\Rightarrow ID = ED$.
$\widehat{IDE} = \widehat{ADC} - \left(\widehat{ADI} + \widehat{EDC}\right) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.
Vậy $\triangle DIE$ đều.
$\widehat{AIE} = 360^\circ - (\widehat{AID} + \widehat{DIE}) = 360^\circ - (150^\circ + 60^\circ) = 150^\circ = \widehat{AID}$.
Suy ra $\triangle IAE = \triangle IAD$ (c.g.c) nên $EA = AD$.
Chứng minh tương tự $\triangle ECB = \triangle EDA \Rightarrow BE = BC$.
Vậy $BE = AE = BC$.

□

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, góc đáy 75° và hình vuông $BDEC$ (các điểm A, D, E nằm cuàng phía đối với BC). Hãy xác định dạng của $\triangle ADE$.

LỜI GIẢI.

Vẽ tam giác đều BIC vào trong hình vuông.
$\widehat{ABI} = \widehat{ABC} - \widehat{IBC} = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$.
$\widehat{ABD} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 15^\circ$. Suy ra $\triangle BDA = \triangle BIA$ (c.g.c), suy ra $DA = AI$ và $\widehat{DAB} = \widehat{IAB}$.
Chứng minh tương tự $\triangle CAI = \triangle CAE \Rightarrow AE = AI$ và $\widehat{IAC} = \widehat{CAE}$. Suy ra $AD = AE = AI$ và $\widehat{DAE} = 2\widehat{BAI} + 2\widehat{CAI} = 2\widehat{BAC} = 60^\circ$.
Vậy $\triangle ADE$ đều.

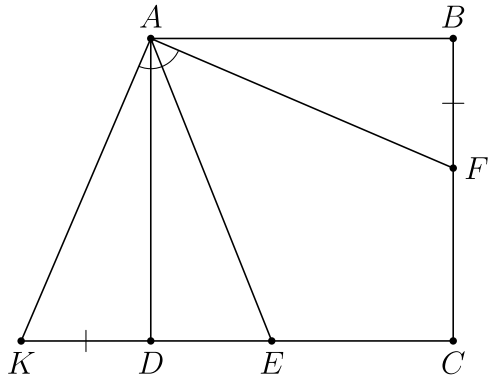


□

BÀI 5. Cho hình vuông $ABCD$, điểm E thuộc cạnh CD, điểm F thuộc cạnh BC. Chứng minh rằng chu vi $\triangle CEF$ bằng nửa chu vi hình vuông khi và chỉ khi $\widehat{EAF} = 45^\circ$

✍ **LỜI GIẢI.**

Trên tia đối của tia DC lấy $DK = BF$, $\triangle ADK = \triangle ABF$ (c.g.c) nên $AK = AF$, $\widehat{KAF} = 90^\circ$.



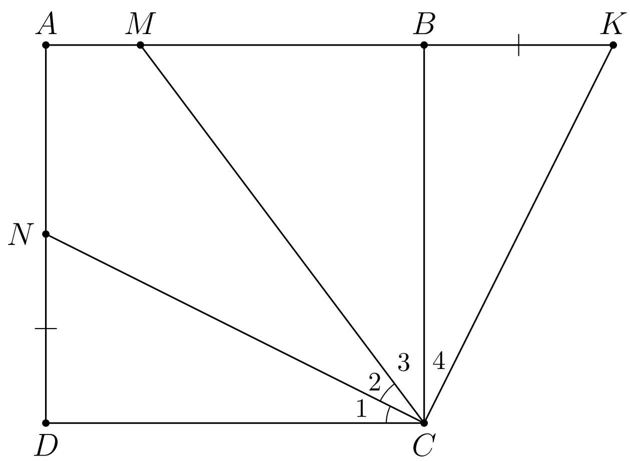
• Ta chứng minh mênh đề "$\widehat{EAF} = 45^\circ$ thì chu vi CEF bằng nửa chu vi hình vuông".
$\widehat{EAF} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{EAK} = 45^\circ \Rightarrow \triangle EAK = \triangle EAF$ (c.g.c) $\Rightarrow EK = EF$.
Do đó chu vi CEF bằng $CE + CF + EF = CE + CF + EK = CE + CF + ED + DK = CE + CF + ED + FB$ (bằng nửa chu vi hình vuông).

• Ta chứng minh mệnh đề "Chu vi CEF bằng nửa chu vi hình vuông thì $\widehat{EAF} = 45^\circ$"
$CE + CF + EF = CB + CD \Rightarrow EF = ED + BF \Rightarrow EF = ED + DK = EK$.
$\triangle EAK = \triangle EAF$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{EAK} = \widehat{EAF} \Rightarrow \widehat{EAF} = 45^\circ$. □

BÀI 6. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M thuộc cạnh AB. Tia phân giác của góc MCD cắt cạnh AD ở N. Cho biết $BM = m$, $DN = n$. Tính độ dài CM theo m và n.

✍ **LỜI GIẢI.**

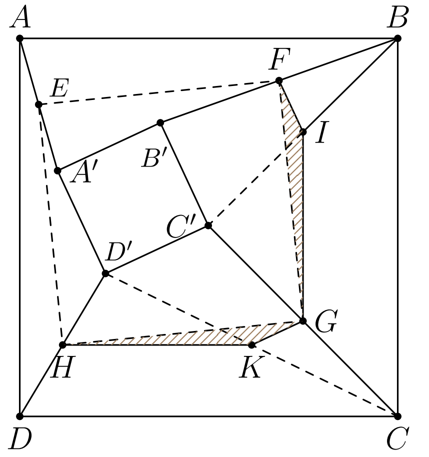
Trên tia đối của tia BA lấy điểm K sao cho $BK = DN = n$.
$\triangle DCN = \triangle BCK \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_4$ và $\widehat{DNC} = \widehat{BKC}$ (1).
Mà $\widehat{DNC} = \widehat{NCB}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{NDC} = \widehat{C}_2 + \widehat{C}_3 = \widehat{C}_4 + \widehat{C}_3 = \widehat{MCK}$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $\triangle MCK$ cân tại M, vậy $CM = MK = m + n$.



□

BÀI 7. Cho hình vuông $A'B'C'D'$ nằm trong hình vuông $ABCD$ sao cho thứ tự các đỉnh theo cùng một chiều như nhau (tức là nếu vẽ hai đường tròn, mỗi đường tròn đi qua các đỉnh của một hình vuông, thì chiều đi trên đường tròn từ A lần lượt B, C, D và từ A' lần lượt qua B', C', D' là như nhau). Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' là đỉnh của một hình vuông.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi E, F, G, H thứ tự là trung điểm của AA', BB', CC' DD'. Gọi I, K là trung điểm BC', CD'.

- FI là đường trung bình của $\triangle BB'C'$ nên $FI \parallel B'C'$ và $FI = \dfrac{1}{2}B'C'$. (1)
- GK là đường trung bình của $\triangle CC'D'$ nên $GK \parallel C'D'$ và $GK = \dfrac{1}{2}C'D'$. (2)
- Lại có $B'C' = C'D'$ và $B'C' \perp C'D'$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\begin{cases} FI = GK \\ FI \perp KG. \end{cases}$ (4)

Chứng minh tương tự ta có $\begin{cases} GI = HK \\ GI \perp HK. \end{cases}$ (5)

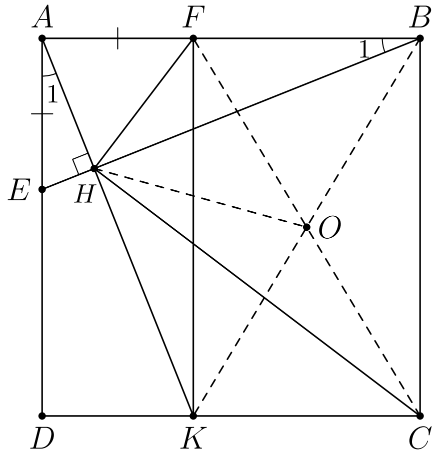
Từ (4) và (5) ta có $\begin{cases} FI = GK \\ \widehat{FIG} = \widehat{GKH} \\ IG = KH \end{cases} \Rightarrow \triangle FIG = \triangle GKH \Rightarrow FG = GK$ và $GF \perp GH$ (tính chất hai góc bằng nhau có cặp cạnh tương ứng vuông góc).

Chứng minh tương tự ta được $GH = HE = EF = FG$, từ đó suy ra $EFGH$ là hình vuông.

□

BÀI 8. Cho hình vuông $ABCD$. Lấy các điểm E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AD, AB sao cho $AE = AF$. Gọi H là hình chiếu của A trên BE. Tính $\widehat{CHF}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi K là giao điểm của AK và DC

$\begin{cases} \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 \\ AD = BA \\ \widehat{ADK} = \widehat{EAB} \end{cases} \Rightarrow \triangle ADK = \triangle BAE$

$\Rightarrow DK = AE = AF \Rightarrow BFKC$ là hình chữ nhật.

Gọi O là tâm hình chữ nhật $BFKC$.

Xét $\triangle HKB$ vuông tại H nên $HO = \dfrac{1}{2}KB = \dfrac{1}{2}FC \Rightarrow \triangle HCF$ vuông tại H. Vậy $\widehat{CHF} = 90^\circ$.

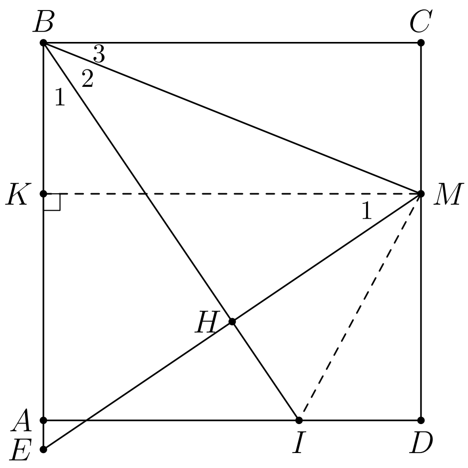
□

BÀI 9. Cho điểm M thuộc cạnh CD của hình vuông $ABCD$. Tia phân giác của góc ABM cắt AD ở I. Chứng minh $BI \leq 2MI$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vẽ $MH \perp BI$, MH cắt AB tại E.Do BI là phân giác $\widehat{ABM}$ nên E đối xứng với M qua BI. Ta có

$$ME = 2MH \leq 2MI. \quad (1)$$



Kẻ $MK \perp AB$, xét $\triangle MKE$ và $\triangle BAI$ có
$\begin{cases} \widehat{B_1} = \widehat{M_1} \text{ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)} \\ MK = BA \\ \widehat{K} = \widehat{A} = 90^\circ \end{cases}$
$\Rightarrow \triangle MKE = \triangle BAI \Rightarrow ME = BI. \quad (2)$
Từ (1) và (2) suy ra $BI \leq 2MI$.

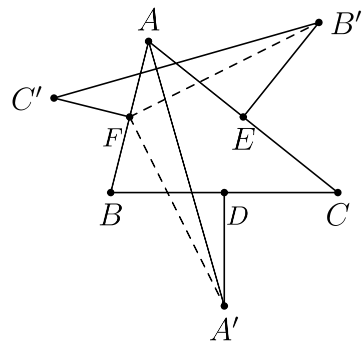
□

BÀI 10. Vẽ ra phía ngoài của một tam giác các hình vuông cạnh là cạnh của tam giác. Chứng minh rằng

❶ Các đoạn thẳng nối trung điểm một cạnh của tam giác với tâm các hình vuông dựng trên hai cạnh kia bằng nhau và vuông góc với nhau.

❷ Đoạn thẳng nối tâm hai hình vuông bằng và vuông góc với đoạn thẳng nối tâm hình vuông thứ ba với đỉnh chung của hai hình vuông trước.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Vì A' là tâm hình vuông cạnh BC nên $A'D = \dfrac{1}{2}BC$.

Vì EF là đường trung bình $\triangle ABC$ nên $EF = \dfrac{1}{2}BC$

Vậy $A'D = EF$. (1)

Chứng minh tương tự: $FD = EB'$. (2)

Có $A'D \perp BC \Rightarrow A'D \perp FE$. (3)

Lại có $\begin{cases} FD \parallel AC \\ AC \perp EB' \end{cases} \Rightarrow FD \perp EB'$. (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow \widehat{B'EF} = \widehat{FDA'}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc). (5)

Từ (1), (2) và (5) suy ra $\triangle A'DF = \triangle FEB'$ (c.g.c)
$\Rightarrow FA' = FB'$ và $\widehat{FB'E} = \widehat{A'FD}$, mà $EB' \perp FD \Rightarrow FB' \perp FA'$.

b) Xét $\triangle AFA'$ và $\triangle C'FB'$ có
$\begin{cases} AF = C'F \text{ (do } C' \text{ là tâm hình vuông cạnh } AB) \\ FB' = FA' \text{ (cmt)} \\ \widehat{AFA'} = \widehat{B'FC'} \text{ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)} \end{cases}$
$\Rightarrow \triangle AFA' = \triangle C'FB' \Rightarrow B'C' = AA'$ và $B'C' \perp AA'$ (cạnh tương ứng vuông góc của hai góc bằng nhau).

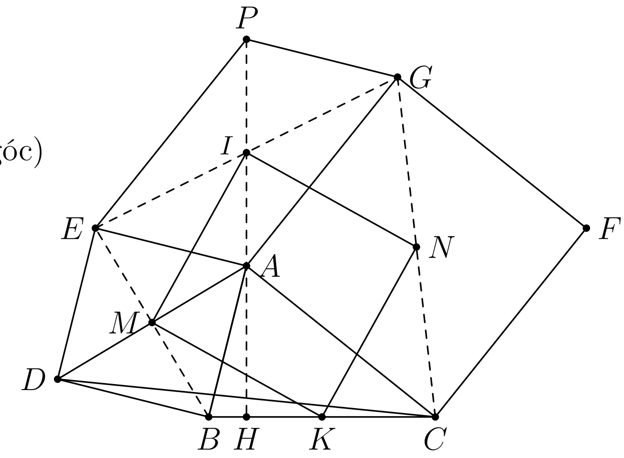
□

BÀI 11. Cho tam giác ABC. Vẽ về phía ngoài tam giác các hình vuông $ABDE$, $ACFG$ có tâm theo tứ tự M, N. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của EG, BC.

❶ Chứng minh rằng $KMIN$ là hình vuông.

❷ Nếu tam giác ABC có BC cố định và đường cao tương ứng bằng h không đổi thì I chuyển động trên đường tròn nào?

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Xét $\triangle AEC$ và $\triangle ABG$ có

$$\begin{cases} AE = AB \\ \widehat{EAC} = \widehat{BAG} \text{ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)} \\ AC = AG \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle AEC = \triangle ABG \Rightarrow EC = BG$ và $EC \perp BG$ (cạnh tương ứng vuông góc).

Lại có

+ MK là đường trung bình $\triangle BCE$ nên $MK = \dfrac{1}{2}CE$ và $MK \parallel CE$.

+ NK là đường trung bình $\triangle CGB$ nên $NK = \dfrac{1}{2}BG$ và $NK \parallel BG$.

Do đó $MK = KN$ và $MK \perp KN$. Tứ giác $KMIN$ có $MK = KN$ và $MK \perp KN$ nên là hình vuông.

b) Do $EA \perp AB$ và $EA \parallel PG$ nên $PG \perp AB$.

Do $\begin{cases} PG \perp AB \\ GA \perp AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{PGA} = \widehat{BAC}$.

Xét $\triangle PGA$ và $\triangle BAC$ có

$$\begin{cases} PG = BA (= EA) \\ \widehat{PGA} = \widehat{BAC} \\ AG = AC \end{cases} \Rightarrow \triangle PGA = \triangle BAC$$

$\Rightarrow PA = BC$ và $PA \perp BC$ (cạnh tương ứng vuông góc của hai góc bằng nhau).

Suy ra I chuyển động trên đường thẳng song song với BC, cách BC một khoảng $h + \dfrac{1}{2}BC$.

□

BÀI 12. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, H theo thứ tự là tâm các hình vuông có cạnh AB, BC, CD, DA dựng phía ngoài tứ giác. Chứng minh rằng

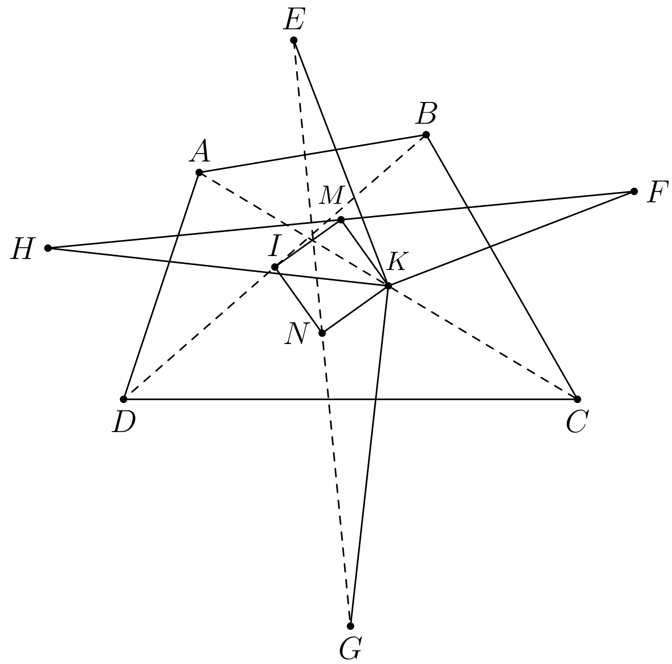
❶ Tứ giác $EFGH$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau.

❷ Trung điểm các đường chéo của các tứ giác $ABCD$, $EFGH$ là đỉnh của một hình vuông.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Gọi K là trung điểm của AC, theo bài 10 phần a), ta có $KE = KF$, $KE \perp KF$, $KH = KG$, $KH \perp KG$, suy ra $\triangle FKH = \triangle EKG$ (c.g.c). Suy ra $FH = EG$ và $FH \perp EG$.

❷ Gọi M, N thứ tự là trung điểm của HF, EG thì KM, KN là các đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác trên, do đó $KM = KN$, $KM \perp KN$. Vậy $\triangle MKN$ vuông cân tại K.
Gọi I là trung điểm của BD, chứng minh tương tự, $\triangle IMN$ vuông cân tại I. Do đó $IMKN$ là hình vuông.

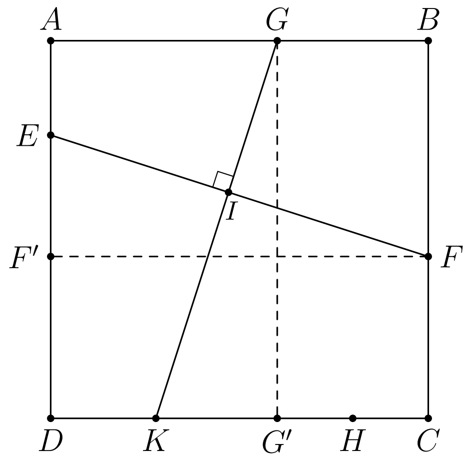


□

BÀI 13. Cho bốn điểm E, G, F, H. Dựng hình vuông $ABCD$ có bốn đường thẳng chứa cạnh đi qua bốn điểm E, G, F, H

✍ **LỜI GIẢI.**

Phân tích. Qua G, vẽ $GI \perp EF$, cắt CD ở K.
Ta có $\triangle GG'K = \triangle FF'E$ nên $GK = EF$. Ta dựng được HK là đường thẳng chứa cạnh hình vuông.
Cách dựng
– Dựng đường thẳng GI vuông góc với EF tại I.
– Dựng điểm K trên GI sao cho $GK = EF$.
– Dựng đường thẳng AD, BC lần lượt qua E, F vuông góc với HK tại D, C.
– Dựng đường thẳng qua G vuông góc với AD, BC tại A, B.
Biện luận. Qua G, có thể vẽ $GI \perp EF$, hoặc $GI \perp EH$, hoặc $GI \perp HF$. Với mỗi cách trong ba cách trên, có hai cách chọn K (chẳng hạn trên đường thẳng $GI \perp EF$, có hai điểm K và K' sao cho $GK = GK' = EF$).
Do đó bài toán có $3 \times 2 = 6$ (nghiệm hình). Riêng trường hợp một trong hai điểm K hoặc K' trùng với điểm thứ tư, bài toán có vô số nghiệm hình.



□

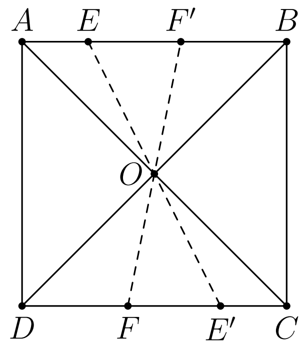
BÀI 14. Cho ba điểm E, O, F. Dựng hình vuông $ABCD$ nhận O là giao điểm hai đường chéo, E và F thứ tự thuộc

❶ Các đường thẳng AB và CD;

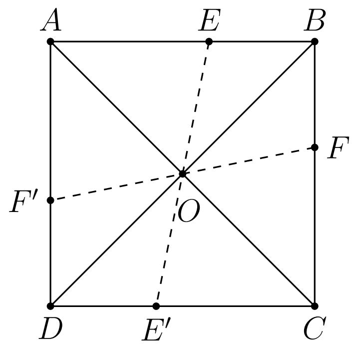
❷ Các đường thẳng AB và BC.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Dựng E' đối xứng với E qua O, dựng F' đối xứng với F qua O. Ta xác định được các đường thẳng AB và CD lần lượt đi qua E, F' và D, E'.
– Dựng các điểm M, N là hình chiếu của O lên AB và DC.
– Dựng các đỉnh A, B, C, D của hình vuông.



b) Dựng điểm E' đối xứng với E qua O, dựng F' đối xứng với F qua O. Đưa bài toán về dựng hình vuông biết bốn điểm thuộc bốn đường thẳng chứa cạnh hình vuông (bài 13).



□

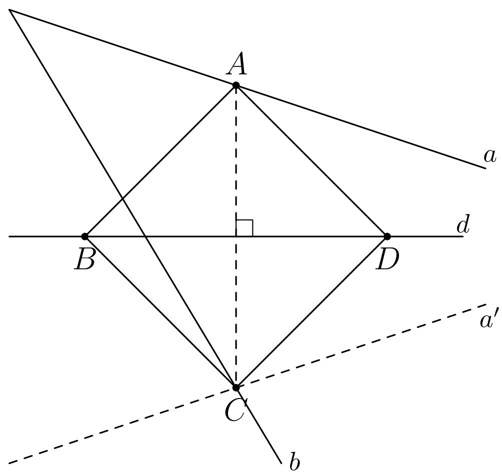
BÀI 15. Cho ba đường thẳng a, b, c. Dựng hình vuông $ABCD$ có A thuộc a, C thuộc b còn B và D thuộc d.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phân tích. Gọi C đối xứng với A qua d, mà A thuộc a nên C thuộc a' đối xứng với a qua d. Mặt khác C thuộc b.

Cách dựng.
– Dựng đường thẳng a' đối xứng với a qua d, a' cắt b tại C.
– Dựng A đối xứng với C qua d, sau đó dựng B, D.

Biện luận.
– Nếu d cắt các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng a và b, hoặc đường thẳng song song cách đều a và b, bài toán có một nghiệm hình.
– Nếu d song song (hoặc trùng) với một đường phân giác của các gocs tạo bởi hai đường thẳng a và b hoặc đường thẳng song song cách đều a và b, bìa toán không có nghiệm hình (hoặc vô số nghiệm hình).



□

CHƯƠNG 2 ĐA GIÁC. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

BÀI 1 ĐA GIÁC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Đa giác $A_1A_2A_3\dots A_n$ là hình gồm n đoạn thẳng $(n \geq 3)$, trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào có điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

Đa giác lồi là đa giác nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.

Khi nói đến đa giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là đa giác lồi.

Tổng số đo các góc của đa giác n cạnh là $(n-2)\cdot 180^\circ$.

Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

VÍ DỤ 1. Tổng các góc của một đa giác n cạnh trừ đi góc A của nó bằng 570°. Tính n và $\widehat{A}$.

LỜI GIẢI.

Ta có $(n-2)\cdot 180^\circ - \widehat{A} = 570^\circ$ nên $\widehat{A} = (n-2)\cdot 180^\circ - 570^\circ$.

Do $0^\circ < \widehat{A} < 180^\circ$ nên $0 < (n-2)\cdot 180^\circ - 570^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow 0 < n-2-\dfrac{570}{180} < 1 \Leftrightarrow 5\dfrac{1}{6} < n < 6\dfrac{1}{6}$.

Do n là số tự nhiên nên $n = 6$ và $\widehat{A} = (6-2)\cdot 180^\circ - 570^\circ = 150^\circ$. □

VÍ DỤ 2. Ngũ giác đều $ABCDE$ có các đường chéo AC và BE cắt nhau ở K. Chứng minh rằng $CKED$ là hình thoi.

LỜI GIẢI.

Góc của ngũ giác đều bằng $\dfrac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$.

Tam giác ABC cân tại B có $\widehat{ABC} = 108^\circ$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{C_1} = 36^\circ$.

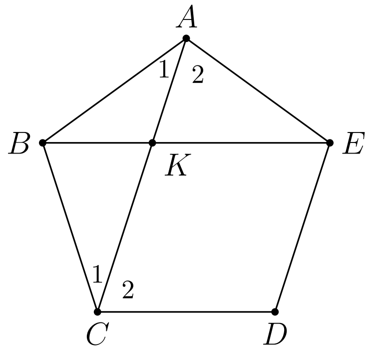
Do đó $\widehat{A_2} = \widehat{C_2} = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$.

Ta có $\widehat{C_2} + \widehat{D} = 72^\circ + 108^\circ = 180^\circ$ nên $AC \parallel DE$.

Chứng minh tương tự, $BE \parallel CD$.

Do đó $CKED$ là hình bình hành.

Ta lại có $CD = DE$ nên $CKED$ là hình thoi.



□

B BÀI TẬP

1. Đa giác

BÀI 1. Tính số cạnh của một đa giác, biết rằng đa giác đó có:

❶ Tổng các góc trong bằng tổng các góc ngoài (tại mỗi đỉnh của đa giác chỉ kể một góc ngoài);

❷ Số đường chéo gấp đôi số cạnh;

❸ Tổng các góc trong trừ đi một góc của đa giác bằng $2570°$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi số cạnh của đa giác là n.

❶ Ta có $(n-2)\cdot 180° = 2\cdot 180°$. Ta tìm được $n=4$.

❷ Ta có $\dfrac{n(n-3)}{2} = 2n$. Ta tìm được $n=7$.

❸ Ta có $(n-2)\cdot 180° - \widehat{A} = 2570°$ nên $\widehat{A} = (n-2)\cdot 180° - 2570°$.

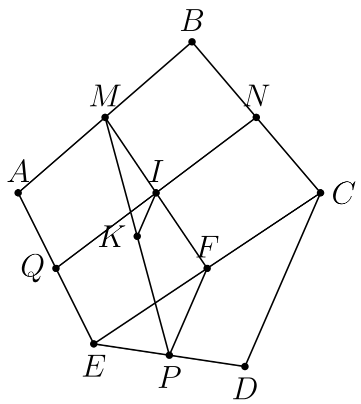
Do $0° < \widehat{A} < 180°$ nên $0 < (n-2)\cdot 180 - 2570 < 180 \Leftrightarrow 16\dfrac{5}{18} < n < 17\dfrac{5}{18}$.

Do n là số tự nhiên nên $n = 17$.

□

BÀI 2. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, DE, AE; gọi I là trung điểm của NQ, K là trung điểm của MP. Chứng minh rằng $IK \parallel CD$, $IK = \dfrac{1}{4}CD$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi F là trung điểm của CE.

Khi đó ta có PF, KI lần lượt là đường trung bình của $\triangle EDC$ và $\triangle MPF$.

Do đó $IK \parallel PF$ và $PF \parallel CD$.

$\Rightarrow IK \parallel CD$.

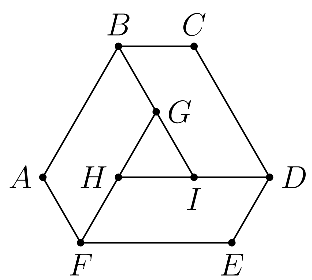
Lại có $IK = \dfrac{1}{2}PF$ và $PF = \dfrac{1}{2}CD$

$\Rightarrow IK = \dfrac{1}{4}CD$.

□

BÀI 3. Chứng minh rằng nếu một lục giác có các góc bằng nhau thì hiệu các cạnh đối diện bằng nhau.

✍ **LỜI GIẢI.**



Kẻ các tia phân giác của góc B, D, F, chúng cắt nhau tạo thành $\triangle GHI$ như hình vẽ.

Tổng số đo các góc trong hình lục giác là $(6-2)\cdot 180° = 720°$.

Mà các góc bằng nhau nên số đo mỗi góc là $720° : 6 = 120°$.

Khi đó ta có $\widehat{BCD} + \widehat{CDI} = 180° \Rightarrow BC \parallel DI$.

$\Rightarrow BCDI$ là hình thang.

Mà $\widehat{CBI} = \widehat{CDI}$ nên $BCDI$ là hình bình hành.

Tương tự ta có $HDEF$, $ABGF$ là hình bình hành.

$\Rightarrow FE = HD$, $ID = BC$, $AB = FG$, $HF = DE$, $CD = BI$, $BG = AF$.

$\Rightarrow AB - DE = FG - HF = HG$, $FE - BC = HI$, $CD - AF = BG$.

Mà các góc của $\triangle HGI$ bằng $60°$ nên $\triangle HGI$ là tam giác đều.

$\Rightarrow HG = GI = HI \Rightarrow AB - DE = FE - BC = CD - AF$.

□

BÀI 4. Lục giác $ABCDEF$ có số đo các góc (tính theo độ) là một số nguyên và $\widehat{A}-\widehat{B}=\widehat{B}-\widehat{C}=\widehat{C}-\widehat{D}=\widehat{D}-\widehat{E}=\widehat{E}-\widehat{F}$. Giá trị lớn nhất của $\widehat{A}$ có thể bằng bao nhiêu?

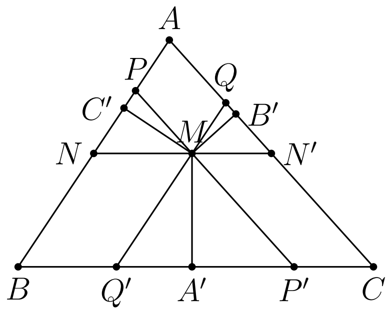
✍ **LỜI GIẢI.**

Tổng các góc trong lục giác bằng $(6-2)\cdot 180^\circ = 720^\circ$.
Đặt $\widehat{A}-\widehat{B}=\widehat{B}-\widehat{C}=\widehat{C}-\widehat{D}=\widehat{D}-\widehat{E}=\widehat{E}-\widehat{F}=\alpha$, ta có
$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}+\widehat{E}+\widehat{F}=720^\circ$
$\Rightarrow \widehat{A}+\left(\widehat{A}-\alpha\right)+\left(\widehat{A}-2\alpha\right)+\left(\widehat{A}-3\alpha\right)+\left(\widehat{A}-4\alpha\right)+\left(\widehat{A}-5\alpha\right)=720^\circ$
$\Rightarrow 6\widehat{A}-15\alpha=720^\circ \Rightarrow 2\widehat{A}=5\alpha+240^\circ$.
Do $\widehat{A}$ là số nguyên và chia hết cho 5 nên $\widehat{A}\le 175^\circ$.
Giá trị lớn nhất của $\widehat{A}$ là 175° khi $\alpha=22^\circ$. □

2. Đa giác đều

BÀI 5. Gọi M là điểm bất kì trong tam giác đều ABC. Các điểm A', B', C' là hình chiếu của M trên các cạnh BC, AC, AB. Tính tỉ số $\dfrac{MA'+MB'+MC'}{AB'+BC'+CA'}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Qua M vẽ các đường thẳng song song với với các cạnh của $\triangle ABC$, chúng cắt mỗi cạnh thành ba đoạn thẳng NP, $N'Q$, $P'Q'$ như hình vẽ.
Đặt $P'Q'=x$, $N'Q=y$, $NP=z$, ta có

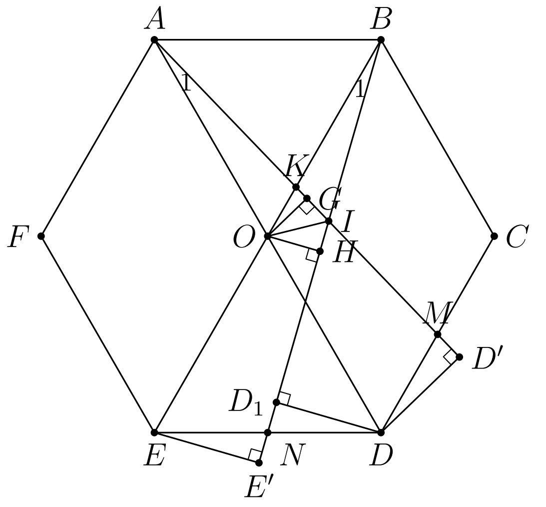
$$\begin{aligned} MA'+MB'+MC' &= \frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y\sqrt{3}}{2}+\frac{z\sqrt{3}}{2} \\ &= (x+y+z)\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1). \end{aligned}$$

$AB'+BC'+CA'=\left(z+\dfrac{y}{2}\right)+\left(x+\dfrac{z}{2}\right)+\left(y+\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{3}{2}(x+y+z) \quad (2).$
Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{MA'+MB'+MC'}{AB'+BC'+CA'}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. □

BÀI 6. Cho lục giác đều $ABCDEF$, M và N theo thứ tự là trung điểm của CD, DE. Gọi I là giao điểm của AM, BN.

❶ Tính $\widehat{AIB}$.
❷ Tính $\widehat{OID}$ (O là tâm của lục giác đều).
Hướng dẫn: Chứng minh rằng IO, ID là các tia phân giác của hai góc kề bù.

✍ **LỜI GIẢI.**



a) $\triangle ADM = \triangle BEN$ (c.g.c) nên $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$.
Gọi O là giao điểm của AD và BE, K là giao điểm của AM và BE. Ta có $\widehat{BIK} = \widehat{AOK} = 60°$. Vậy $\widehat{AIB} = 60°$.

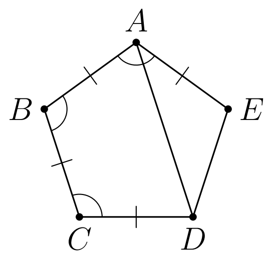
b) Vẽ $OG \perp AM$, $OH \perp BN$. Ta có $\triangle OGA = \triangle OHB$ (cạnh huyền - góc nhọn) nên $OG = OH$.
$\Rightarrow IO$ là tia phân giác của góc AIN (1).
Vẽ $EE' \perp BN$, $DD' \perp AM$, $DD_1 \perp BN$.
Ta có $EE' = DD'$ (bằng hai lần các đoạn thẳng bằng nhau OH, OG).
Mà $EE' = DD_1$ nên $DD_1 = DD'$.
$\Rightarrow ID$ là tia phân giác của góc MIN (2).
Từ (1), (2) suy ra $\widehat{OID} = 90°$.

□

BÀI 7. Chứng minh rằng ngũ giác có năm cạnh bằng nhau và ba góc liên tiếp bằng nhau là ngũ giác đều.

✍ **LỜI GIẢI.**

Trước hết, xét tứ giác $ABCD$, ta có $\widehat{B} = \widehat{C}$, $AB = CD$ nên $ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CDA}$. Do đó $\widehat{BAE} = \widehat{CDE}$.
Chứng minh tương tự đối với tứ giác $ABCE$ ta được $\widehat{C} = \widehat{E}$.
Vậy $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E}$ hay $ABCDE$ là ngũ giác đều.

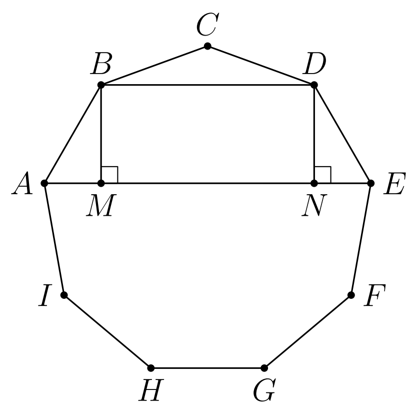


□

BÀI 8. Chứng minh rằng trong đa giác đều 9 cạnh, hiệu giữa đường chéo lớn nhất và đường chéo nhỏ nhất bằng cạnh của nó.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi $ABCDEFGHI$ là đa giác đều 9 cạnh, AE là đường chéo lớn nhất, BD là đường chéo nhỏ nhất, $ABDE$ là hình thang cân.
Vẽ $BM \perp AE$, $DN \perp AE$, $\widehat{ABC} = 140°$ nên $\widehat{ABM} = 30°$.
Ta có $AM = \dfrac{AB}{2}$ nên $AE - BD = AB$.



□

BÀI 9. ❶ Tìm số n sao cho mặt phẳng có thể được phủ kín bởi các đa giác đều bằng nhau có n cạnh.

❷ Có tồn tại các ngũ giác bằng nhau (không yêu cầu đều) để phủ kín mặt phẳng không?

❸ Số đo các góc của đa giác đều n cạnh là số tự nhiên. Có bao nhiêu giá trị của n thỏa mãn bài toán?

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Theo đề bài ta có $360 \vdots \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \Leftrightarrow n \in \{3;4;6\}$.

❷ Có. Chẳng hạn ngũ giác là nửa của lục giác đều.

❸ Ta có $\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow 180 - \dfrac{360}{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow 360 \vdots n$.

Phân tích 360 ra thừa số nguyên tố ta được $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Số 360 có 24 ước tự nhiên. Do $n \geq 3$ nên ta loại các số 1 và 2.

Vậy có 22 giá trị của n thỏa mãn bài toán.

□

BÀI 2 DIỆN TÍCH CỦA ĐA GIÁC

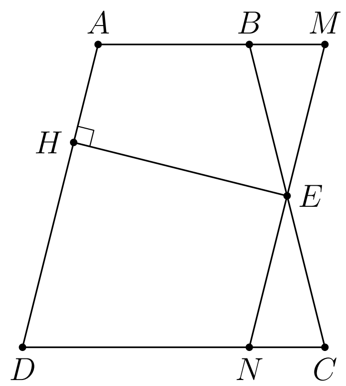
A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Diện tích hình chữ nhật: $S = a \cdot b$ (a là chiều dài, b là chiều rộng).
Diện tích hình vuông: $S = a^2$ (a là cạnh).
Diện tích tam giác: $S = \dfrac{1}{2}ah$ (a là cạnh, h là chiều cao tương ứng).
Diện tích tam giác đều: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (a là cạnh).
Diện tích hình thang: $S = \dfrac{1}{2}(a+b) \cdot h$ (a và b là hai đáy, h là chiều cao).
Diện tích hình bình hành: $S = a \cdot h$ (a là cạnh, h là chiều cao tương ứng).
Diện tích hình thoi, diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S = \dfrac{1}{2}d_1d_2$ (d_1 và d_2 là hai đường chéo).

VÍ DỤ 1. Tính diện tích hình thang $ABCD$ có cạnh bên $AD = a$, khoảng cách từ trung điểm E của BC đến AD bằng h.

✍ **LỜI GIẢI.**

Qua E, kẻ đường thẳng song song với AD, cắt AB và CD theo thứ tự tại M và N.
Xét $\triangle ENC$ và $\triangle EMB$ có
$\widehat{MBE} = \widehat{ECN}$ (so le trong).
$EB = EC$(E là trung điểm của BC).
$\widehat{BEM} = \widehat{NEC}$ (đối đỉnh).
Do đó $\triangle ENC = \triangle EMB$ (g.c.g) $\Rightarrow S_{\triangle ENC} = S_{\triangle EMB}$.
Cộng S_{ABEND} vào 2 vế ta được
$S_{ABCE} = S_{AMND}$.
$AMND$ là hình bình hành nên $S_{AMND} = AD \cdot EH = ah$.
Vậy $S_{ABCD} = ah$ (đơn vị diện tích).



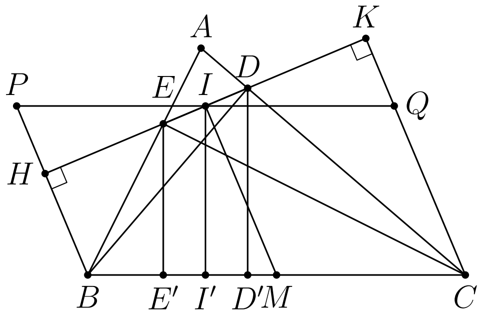
□

VÍ DỤ 2. Tam giác ABC có ba góc nhọn, vẽ các đường cao BD, CE. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của B, C trên đường thẳng ED. Chứng minh rằng:

1. $EH = DK$;
2. $S_{\triangle BEC} + S_{\triangle BDC} = S_{BHKC}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Gọi M, I theo thứ tự là trung điểm của BC và ED.
$\triangle MDE$ có $MD = ME$ (cùng bằng $\frac{1}{2}BC$) nên là tam giác cân. Do đó $MI \perp ED$.
Hình thang $BHKC$ có $BM = MC$, $MI \parallel BH \parallel CK$ nên I là trung điểm của HK.
Ta có $IH = IK$, $IE = ID$ nên $EH = DK$.



b) Vẽ EE', II', DD' vuông góc với BC.
Ta có II' là đường trung bình của hình thang $EE'D'D$ nên $II' = \frac{1}{2}(EE' + DD')$. Do đó
$S_{\triangle BEC} + S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2}BC \cdot EE' + \frac{1}{2}BC \cdot DD' = \frac{1}{2}BC(EE' + DD') = BC \cdot II' \quad (1).$
Qua I, vẽ đường thẳng song song với BC, cắt BH và CK ở P và Q. Ta có

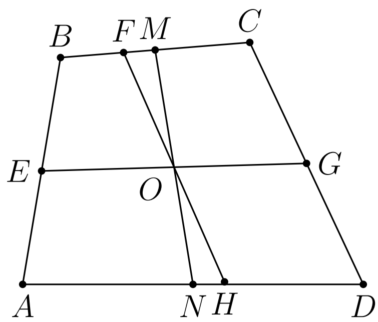
$$BC \cdot II' = S_{BPQC} \quad (2).$$

Ta lại có $\triangle PIH = \triangle QIK$ (g.c.g) nên $S_{\triangle PIH} = S_{\triangle QIK}$, do đó $S_{BPQC} = S_{BHKC} \quad (3)$.
Từ $(1), (2), (3)$ suy ra $S_{\triangle BEC} + S_{\triangle BDC} = S_{BHKC}$. □

VÍ DỤ 3. Cho hình bình hành có bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của một tứ giác, trong đó hai đỉnh của hình bình hành là trung điểm hai cạnh đối của tứ giác. Chứng minh rằng diện tích hình bình hành bằng nửa diện tích tứ giác.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét tứ giác $ABCD$ và hình bình hành $EFGH$ có E, G là trung điểm của AB, CD. Gọi O là tâm của hình bình hành $EFGH$, M và N là trung điểm của BC và AD. Do $EMGH$ cũng là hình bình hành nên O cũng là trung điểm của MN. Xét hai trường hợp:
a) Nếu F không trùng M thì $FMHN$ là hình bình hành.
Khi đó $FM \parallel NH$ nên $BC \parallel AD$.
Suy ra $ABCD$ là hình thang.
Dễ thấy $S_{EFGH} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

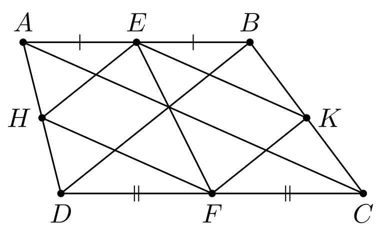


b) Nếu F trùng M thì H trùng N. Khi đó $S_{EFGH} = S_{EMGN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. □

VÍ DỤ 4. Tính diện tích hình thang có hai đường chéo dài 6 m và 10 m, đoạn thẳng nối trung điểm hai đáy bằng 4 m.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$, $BD = 6$ m, $AC = 10$ m.
Gọi E, F, K theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, BC. Khi đó
+ EK là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $EK = \frac{AC}{2} = 5$ m.
+ FK là đường trung bình của $\triangle BDC$ nên $FK = \frac{BD}{2} = 3$ m.



Ta có $EF^2 + FK^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = EK^2$ nên theo định lí Pytago đảo suy ra $\widehat{EFK} = 90°$.
Gọi H là trung điểm của AD.

Dễ dàng chứng minh được $EHFK$ là hình bình hành nên $S_{EHFK} = 2 \cdot S_{\triangle EFK} = EF \cdot FK = 12\ \text{m}^2$.
Dễ dàng chứng minh được $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{EHFK}$.
Vậy $S_{ABCD} = 24\ \text{m}^2$. □

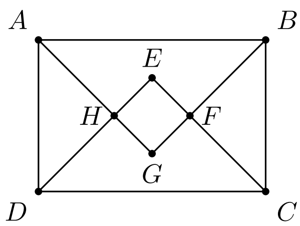
⚠ *Các đoạn thẳng EF, AC, BD đồng quy vì trong hình thang trung điểm của hai đáy và giao điểm của hai đường chéo là ba điểm thẳng hàng, xem Bổ đề hình thang ở Nâng cao và phát triển Toán 8 tập hai.*

B BÀI TẬP

1. Diện tích hình chữ nhật, hình vuông, hình tam giác

BÀI 1. Cho một hình chữ nhật có các kích thước là a và b (a và b có cùng đơn vị đo). Các tia phân giác các góc của hình chữ nhật cắt nhau tạo thành một tứ giác. Xác định dạng tứ giác đó và tính diện tích của nó.

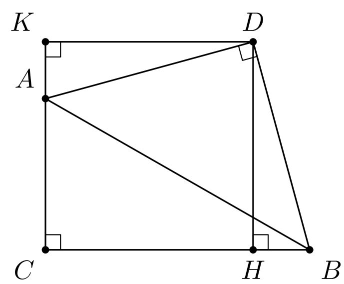
✍ **LỜI GIẢI.**



Xét $\triangle ABG$ ta có $\widehat{GAB} = \widehat{GBA} = 45^\circ$. Suy ra $\widehat{AGB} = 90^\circ$.
Tương tự ta chứng minh được $EFGH$ là hình chữ nhật.
Mặt khác ta có $\triangle AGB$ cân tại G suy ra $AG = BG$.
Ta cũng có $\triangle AHD = \triangle BFC$ (g.c.g).
$\Rightarrow AH = BF$.
Vậy ta thu được $HG = GF$. Khi đó $EFGH$ là hình vuông.
Do $\triangle AGB$ vuông cân tại G suy ra $AG = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$.
Tương tự $\triangle AHD$ vuông cân tại H suy ra $AH = \dfrac{AD}{\sqrt{2}}$.
Ta tính được $HG = \dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}$.
Vậy $S_{EFGH} = \dfrac{(a-b)^2}{2}$. □

BÀI 2. Tam giác ABC vuông tại C có $BC = a, AC = b$, Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ tam giác DAB vuông cân tại D. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của D trên CB, CA, Tính diện tích của tứ giác $DHCK$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Ta chứng minh được $\triangle AKD = \triangle BHD$ (cạnh huyền - góc nhọn).
Suy ra $KD = KH$. Dễ thấy $DHCK$ là hình chữ nhật.
Vậy $DHCK$ là hình vuông.
Ta có

$$\begin{aligned} CK + CH &= CA + AK + CB - BH \\ &= AC + CB \\ &= a + b \text{ (vì } AK = CH). \end{aligned}$$

Suy ra $CK = \dfrac{a+b}{2}$.
Vậy diện tích hình vuông là $\dfrac{(a+b)^2}{4}$.

□

BÀI 3. Tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a, AC = b, AB = c$, diện tích S. Chứng minh rằng $4S = (a+b+c)(b+c-a)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

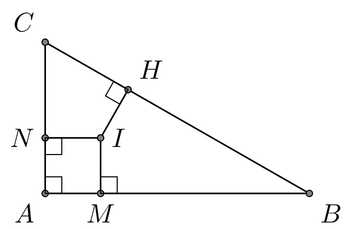
Ta có

$$(a+b+c)(b+c-a) = (b+c+a)(b+c-a) = (b+c)^2 - a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - a^2 = 2bc \text{ (vì } b^2 + c^2 = a^2\text{)}.$$

Mà $S = \dfrac{1}{2}bc$.
Vậy $(a+b+c)(b+c-a) = 4bc$. □

BÀI 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, các đường phân giác của các góc B và C cắt nhau ở I. Biết hình chiếu của IB, IC trên BC có độ dài lần lượt là m, n. Tính diện tích của tam giác ABC.

✍ **LỜI GIẢI.**



Ta có I là giao điểm của ba đường phân giác nên cách đều ba cạnh.
Gọi H, M, N theo thứ tự là hình chiếu của I trên BC, AB, AC.
Đặt $IH = IM = IN = x$. Khi đó

$$AM = AN = x, BM = BH = m, CN = CH = n.$$

Theo định lý Pytago, ta có

$$(x+m)^2 + (x+n)^2 = (m+n)^2 \Rightarrow x^2 + xm + xn = mn.$$

Mặt khác

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2}(x+m)(x+n) = \frac{1}{2}(x^2 + xm + xn + mn) = mn.$$

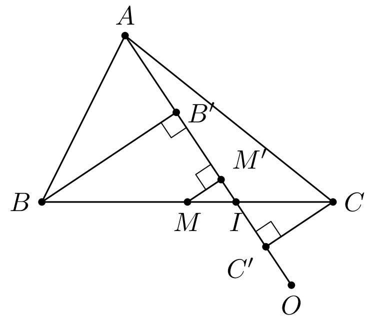
□

BÀI 5. Cho tam giác ABC. M là trung điểm của BC. Gọi O là một điểm bất kì. Tìm liên hệ giữa diện tích các tam giác OAM, OAB, OAC.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vẽ MM', BB', CC' vuông góc với OA. Ta xét hai trường hợp:
Trường hợp 1: B, C nằm khác phía so với OA.

❶



Nếu $BB' \geq CC'$. Gọi I là giao điểm của AO và BC. Khi đó

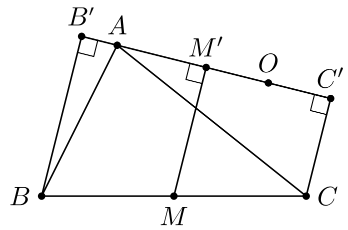
$$MM' \parallel BB' \Rightarrow \frac{BB'}{MM'} = \frac{IB}{IM}.$$

Tương tự $MM' \parallel CC' \Rightarrow \dfrac{CC'}{MM'} = \dfrac{IC}{IM}$.

$$\Rightarrow \frac{BB'}{MM'} - \frac{CC'}{MM'} = \frac{IB - IC}{IM} = \frac{IM + MB - MC + IM}{IM} = \frac{2 \cdot IM}{IM} = 2$$

Như vậy $\dfrac{BB' - CC'}{MM'} = 2$ hay $BB' - CC' = 2 \cdot MM'$.
Suy ra $\dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot BB' - \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot CC' = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot MM'$.
Do đó $S_{OAB} - S_{OAC} = 2 \cdot S_{OAM}$.

❷ Nếu $BB' < CC'$. Tương tự ta được $S_{OAC} - S_{OAB} = 2 \cdot S_{OAM}$.



Trường hợp 2: B, C nằm cùng phía so với OA.
Dễ chứng minh MM' là đường trung bình hình thang $BB'C'C$.
Suy ra $BB' + CC' = 2 \cdot MM'$.
Vậy $\dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot BB' + \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot CC' = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot MM'$.
Do đó $S_{OAB} + S_{OAC} = 2 \cdot S_{OAM}$.

□

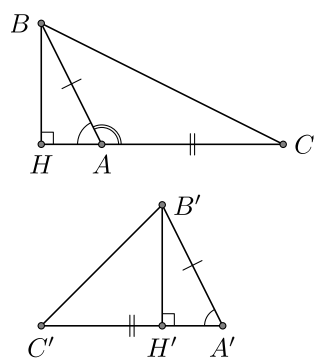
BÀI 6. Cho O là một điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi D, E, F theo thứ tự là các hình chiếu của O trên BC, AC, AB. Trên các tia OD, OE, OF lấy lần lượt các điểm A', B', C' sao cho $OA' = BC, OB' = AC, OC' = AB$.

❶ Chứng minh rằng diện tích tam giác $A'B'C'$ không phụ thuộc vào vị trí điểm O trong tam giác.

❷ Điểm O có vị trí gì đối với tam giác $A'B'C'$?

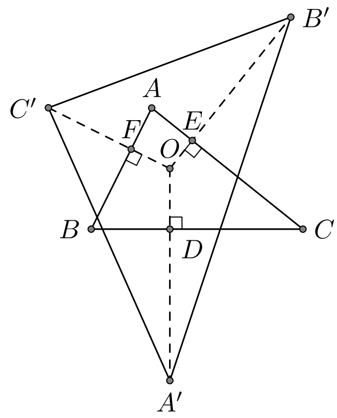
✍ **LỜI GIẢI.**

❶



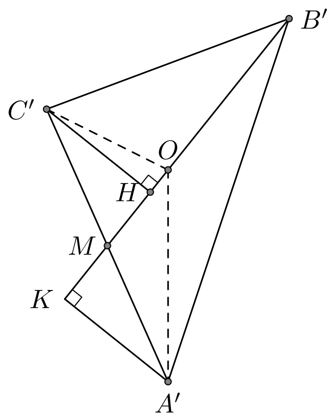
Ta chứng minh bài toán phụ: *Nếu hai tam giác có cặp cạnh bằng nhau và cặp góc xen giữa bù nhau thì diện tích của chúng bằng nhau.*
Xét $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ và $\widehat{BAC} + \widehat{B'A'C'} = 180^\circ$.
Kẻ đường cao BH và $B'H'$ của hai tam giác, khi đó $\triangle BAH = \triangle B'A'H'$ (ch.gn), suy ra $BH = B'H'$.
Từ đó $\dfrac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot B'H' \cdot A'C'$ hay $S_{ABC} = S_{A'B'C'}$.

Áp dụng. Từ giả thiết ta có $\triangle A'OB'$ và $\triangle ABC$ có $OA' = BC$, $OB' = AC$ và $\widehat{A'OB'} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên $S_{A'OB'} = S_{ABC}$.
Tương tự ta được $S_{A'OC'} = S_{ABC}$, $S_{B'OC'} = S_{ABC}$.
Điểm O nằm trong $\triangle ABC$ nên cũng nằm trong $\triangle A'B'C'$.
Do đó $S_{A'B'C'} = S_{A'OB'} + S_{A'OC'} + S_{B'OC'} = 3 \cdot S_{ABC}$.
Vậy diện tích tam giác $A'B'C'$ không phụ thuộc vào vị trí điểm O trong tam giác.



❷

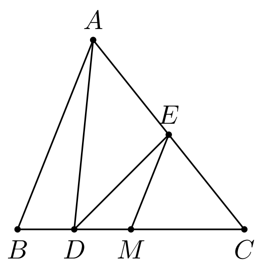
Vẽ đường cao $C'H$ và $A'K$ của tam giác $B'OC'$ và tam giác $A'OB'$. Gọi M là giao điểm của $B'O$ và $A'C'$.
Do $S_{B'OC'} = S = A'OB'$ và hai tam giác này chung đáy $B'O$ nên $C'H = A'K$, suy ra $\triangle MHC' = \triangle MKA'$(g.c.g) nên $MC' = MA'$ hay M là trung điểm của $A'C'$.
Do đó $B'O$ là trung tuyến của $\triangle A'B'C'$, chứng minh tương tự ta cũng được $A'O$, $C'O$ là trung tuyến.
Vậy O là trọng tâm của $\triangle A'B'C'$.



□

BÀI 7. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi D là điểm nằm giữa B và M. Qua M kẻ đường thẳng song song với DA, cắt AC ở E. So sánh diện tích $\triangle DEC$ và diện tích $\triangle ABC$

✍ **LỜI GIẢI.**



Ta có

$$S_{DEC} = S_{DEM} + S_{EMC} = S_{AEM} + S_{EMC} = S_{AMC} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

□

BÀI 8. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CA sao cho $AD = \frac{1}{3}AB$, $BE = \frac{1}{3}BC$, $CF = \frac{1}{3}CA$. Các đoạn thẳng AE, BF, CD cắt nhau tạo thành một tam giác. Chứng minh rằng diện tích tam giác này bằng $\frac{1}{7}$ diện tích tam giác ABC.

✍ **LỜI GIẢI.**

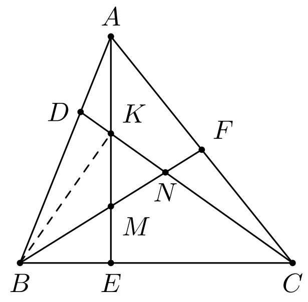
Gọi tam giác tạo thành là MNK như hình vẽ.

Đặt $S_{AKD} = a$ thì $S_{AKB} = 3a, S_{AKC} = 2S_{AKB} = 6a$. (1)

(Vì $S_{AEC} = 2S_{AEB}, S_{KEC} = 2S_{KEB}$)

Suy ra $S_{ACD} = 7a, S_{ABC} = 21a$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra



$$S_{AKC} = \frac{6}{21}S_{ABC} = \frac{2}{7}S_{ABC}.$$

Tương tự

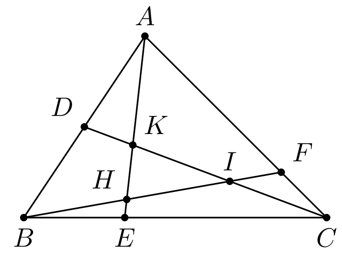
$$S_{BMA} = S_{CNB} = \frac{2}{7}S_{ABC}.$$

Do đó $S_{AKC} + S_{BMA} + S_{CNB} = \frac{6}{7}S_{ABC} \Rightarrow S_{MNK} = \frac{1}{7}S_{ABC}$. □

BÀI 9. Cho tam giác ABC có diện tích S. Các điểm D, E, F theo thứ tự nằm trên các cạnh AB, BC, CA sao cho $AD = DB$, $BE = \frac{1}{2}EC$, $CF = \frac{1}{3}FA$. Các đoạn thẳng AE, BF, CD cắt nhau tạo thành một tam giác. Tính diện tích tam giác đó.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi I, K, H lần lượt là giao điểm của BF và CD; AE và CD; AE và BF.



Ta có:

$\frac{S_{ADK}}{S_{ABK}} = \frac{1}{2}$ (hai tam giác có chung đường cao kẻ từ K, $AD = \frac{1}{2}AB$).

$\frac{S_{ABK}}{S_{ACK}} = \frac{1}{2}$ (hai tam giác có chung đáy AK, đường cao kẻ từ C gấp đôi đường cao kẻ từ B).

Suy ra $\frac{S_{ADK}}{S_{AKC}} = \frac{S_{ADK}}{S_{ABK}} \cdot \frac{S_{ABK}}{S_{ACK}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{AKC} = \frac{4}{5}S_{ADC} = \frac{2}{5}S_{ABC}$.

Tương tự:

$\frac{S_{BHE}}{S_{BHA}} = \frac{S_{BHE}}{S_{BHC}} \cdot \frac{S_{BHC}}{S_{BHA}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{BHA} = \frac{9}{10}S_{ABE} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{3}{10}S_{ABC}$.

$\frac{S_{CIF}}{S_{CIB}} = \frac{S_{CIF}}{S_{CIA}} \cdot \frac{S_{CIA}}{S_{CIB}} = \frac{1}{5} \Rightarrow S_{BIC} = \frac{4}{5}S_{CBF} = \frac{4}{5}.\frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{5}S_{ABC}$.

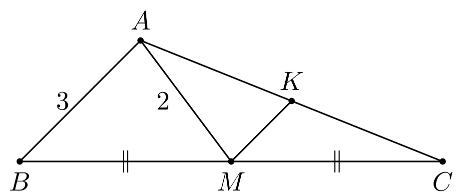
Khi đó:

$S_{IHK} = S_{ABC} - S_{AKC} - S_{BHA} - S_{CIB} = \frac{1}{10}S_{ABC}$. □

BÀI 10. Tính diện tích tam giác ABC, biết $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm, đường trung tuyến $AM = 2$ cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi K là trung điểm của AC.



Tam giác ABC có $\begin{cases} M \text{ là trung điểm } BC. \\ K \text{ là trung điểm } AC. \end{cases}$

$\Rightarrow MK$ là đường trung bình của $\triangle ABC$.

$\Rightarrow MK = \frac{1}{2}AB = 1{,}5$ cm.

Tam giác AMK có $\begin{cases} AM^2 + MK^2 = 2^2 + 1,5^2 = 6{,}25 \\ AK^2 = 2,5^2 = 6{,}25 \end{cases}$

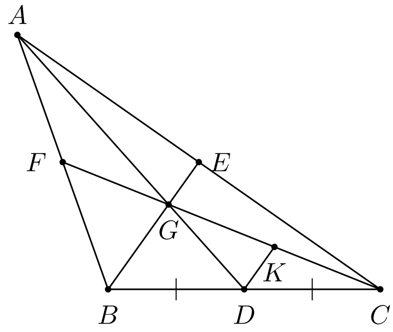
$\Rightarrow \triangle AMK$ vuông tại M.

Khi đó $S_{ABC} = 2S_{AMC} = 4S_{AMK} = 6$ cm^2. □

BÀI 11. Tính diện tích tam giác, biết độ dài ba đường trung tuyến của nó bằng 15 cm, 36 cm, 39 cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử $\triangle ABC$ có trọng tâm G và độ dài AD, BE, CF lần lượt là 36 cm, 15 cm, 39 cm.



Lấy K là trung điểm GC thì

$$GK = \frac{1}{2}GC = \frac{1}{3}CF = 13 \text{ cm}.$$

$$GD = \frac{1}{3}AD = 12 \text{ cm}.$$

$$DK = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{3}BE = 5 \text{ cm}.$$

Tam giác DKG có $\begin{cases} DG^2 + DK^2 = 12^2 + 5^2 = 169. \\ GK^2 = 13^2 = 169. \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle DKG$ vuông tại D.

$\Rightarrow S_{ABC} = 3S_{BGC} = 3 \cdot 2 \cdot S_{DGC} = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot S_{DGK} = 360$ cm^2. □

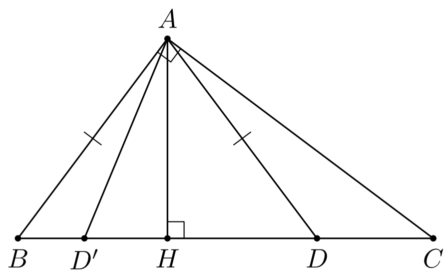
BÀI 12. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC = 20$ cm, $AB = 15$ cm.

❶ Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $AD = AB$. Tính độ dài BD.

❷ Lấy điểm D' trên cạnh BC sao cho $BD' = 4$ cm. Tính độ dài AD'.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vẽ đường cao AH.



Ta có $AH \cdot BC = AB \cdot AC\ (= 2S_{ABC})$

$\Rightarrow AH = 12$ cm.

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác ABH ta có

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 9 \text{ cm}.$$

❶ Tam giác ABD cân tại A có đường cao AH nên H là trung điểm BD.
Nghĩa là: $BD = 2BH = 18$ cm.

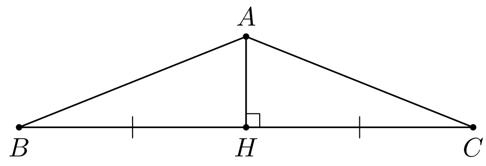
❷ Ta có $D'H = BH - BD' = 5$ cm.
Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác AHD' ta được $AD' = \sqrt{AH^2 + D'H^2} = 13$ cm.

□

BÀI 13. Có tam giác nào mà độ dài các đường cao đều nhỏ hơn 1 cm nhưng diện tích bằng 2000 cm^2 không?

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét tam giác ABC cân tại A có đáy $BC = 8000$ cm, đường cao $AH = \dfrac{1}{2}$ cm.



Khi đó diện tích tam giác bằng

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8000 = 2000 \text{ cm}^2.$$

Hơn nữa, $AB = AC > HC = 4000$ cm nên $h_b = h_c = \dfrac{2S}{AB} < \dfrac{2S}{4000} = 1$ cm.

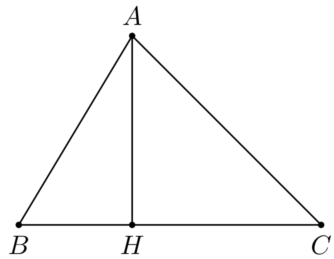
Vậy tồn tại tam giác thỏa yêu cầu bài toán. □

BÀI 14. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh bằng a, b, c, diện tích tam giác bằng S. Chứng minh rằng

$$6S \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Vẽ đường cao AH cho tam giác ABC. Ta có



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC \leq \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \text{ (vì } AH \leq AB).$$

$\Rightarrow 2S \leq AB \cdot BC = ac.$

Tương tự, ta có thể chứng minh $2S \leq bc, 2S \leq ab$.

Khi đó $6S \leq ab + ac + bc$.

Mà $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$.

Nên $6S \leq a^2 + b^2 + c^2$.

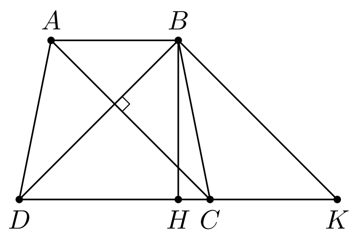
□

2. Diện tích hình thang, hình bình hành, hình thoi

BÀI 15. Tính diện tích hình thang cân có đường cao bằng h, biết rằng hai đường chéo của hình thang vuông góc với nhau.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD, AC \perp BD$.



Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở K.

Từ đó, ta được $ABKC$ là hình bình hành.

Do đó $AB = CK, BK = AC$.

Do $ABCD$ là hình thang cân và $AC \perp BD$ nên $AC = BD$ và $BK \perp BD$.

Mà $AC = BK$ nên $BD = BK$.

Từ đó, ta được tam giác BDK là tam giác vuông cân.

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông BDK, ta được

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BK^2} + \frac{1}{BD^2} \Rightarrow BD = BK = BH\sqrt{2} = h\sqrt{2}.$$

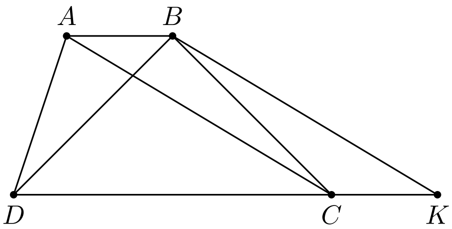
Khi đó

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD)BH = \frac{1}{2}DC \cdot BH = S_{BDK} = h^2.$$

□

BÀI 16. Tính diện tích của hình thang có hai đường chéo dài 9 cm và 12 cm, tổng hai đáy bằng 15 cm.

✍ **LỜI GIẢI.**



Xét hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD, BD = 9$ cm, $AC = 12$ cm, $AB + CD = 15$ cm.
Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở K.
Khi đó, $ABKC$ là hình bình hành nên $BK = AC, CK = AB$.

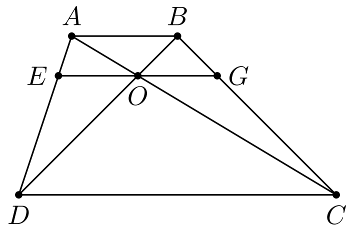
Trong tam giác BDK có $BD^2 + BK^2 = 9^2 + 12^2 = 15^2 = DK^2$ nên tam giác BDK vuông tại B. Khi đó

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h = \frac{1}{2}DK \cdot h = S_{BDK} = 54 \text{ cm}^2.$$

□

BÀI 17. Qua giao điểm O của các đường chéo của một hình thang, vẽ đường thẳng song song với hai đáy, cắt các cạnh bên ở E và G. Chứng minh rằng $OE = OG$.

✍ **LỜI GIẢI.**

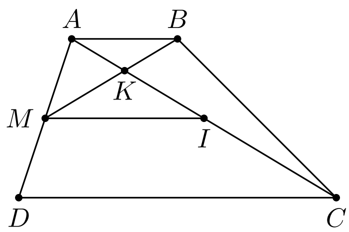


Do có cùng cạnh đáy AB và chiều cao nên $S_{DAB} = S_{CAB}$.
Suy ra $S_{DOA} = S_{COB}$.
Do đó $\frac{1}{2}OE \cdot h = \frac{1}{2}OG \cdot h$.
Suy ra $OE = OG$.

□

BÀI 18. Hình thang $ABCD$ có diện tích S, đáy DC gấp đôi đáy AB. Gọi M là trung điểm AD, K là giao điểm của BM và AC. Tính diện tích tam giác ABK.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi I là trung điểm của AC. Ta có

$$MI = \frac{1}{2}DC = AB.$$

$$S_{ABK} = \frac{1}{2}S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{AMI} = \frac{1}{8}S_{ADC}.$$

Mà $S_{ADC} = 2 \cdot S_{ABC}$ nên $S_{ADC} = \frac{2}{3}S$.
Suy ra $S_{ABK} = \frac{1}{12}S$. □

BÀI 19. Điểm O là giao điểm của các đường chéo của hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Biết diện tích các tam giác AOB, COD theo thứ tự là a^2, b^2. Tính diện tích hình thang ($a, b > 0$).

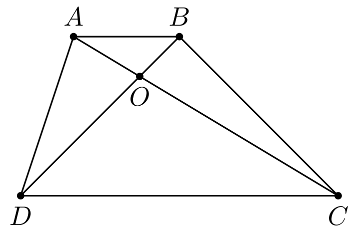
✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi $S_{AOD} = S_{BOC} = m$.

Khi đó

$$OA : OC = S_{AOB} : S_{COB} = a^2 : m$$

$$OA : OC = S_{AOD} : S_{COD} = m : b^2$$



Từ đó suy ra $\dfrac{a^2}{m} = \dfrac{m}{b^2}$ hay $m = ab$.

Vậy $S_{ABCD} = a^2 + b^2 + 2m = (a+b)^2$.

□

BÀI 20. Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích S. Gọi M, N, I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của KB với AI và MC. Gọi H, G lần lượt là giao điểm của DN với AI và MC.

❶ Chứng minh rằng $EFGH$ là hình bình hành.

❷ Tính diện tích hình bình hành $EFGH$ theo S.

✍ **LỜI GIẢI.**

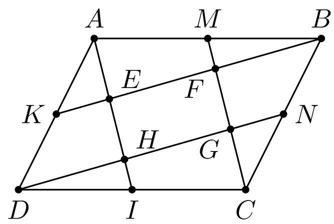
❶

Do $AM \parallel IC$ và $AM = IC$ nên $AMIC$ là hình bình hành.

Do đó $AI \parallel MC$.

Tương tự ta có $BK \parallel DN$.

Vậy $EFGH$ là hình bình hành.



❷ Đặt $HI = a$, áp dụng định lí thalet với tam giác DGC ta được $GC = 2a$, với tam giác CFB ta được $FG = 2a$.

Do $EFGH$ là hình bình hành nên suy ra $EH = FG = 2a$.

Áp dụng định lí thalet với tam giác ADH ta được $AE = 2a$. Từ đó suy ra $EH = \dfrac{2}{5}AI$.

Do $EH = \dfrac{2}{5}AI$ nên $FG = \dfrac{2}{5}MC$.

Suy ra $S_{EFGH} = \dfrac{2}{5}S_{AIMC}$ mà $S_{AIMC} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$ nên $S_{EFGH} = \dfrac{1}{5}S_{ABCD}$.

□

BÀI 21. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a. Lấy điểm M trên cạnh AD, điểm N trên cạnh CD sao cho $DM = CN$. Tính diện tích hình thoi $ABCD$, biết rằng tam giác BMN đều.

✍ **LỜI GIẢI.**

Kẻ $ME \parallel NF \parallel BD$.

Do $\triangle BEF = \triangle DMN$ (c-g-c) nên $EF = MN$.

Do tam giác BMN đều và $EF = MN$ nên $BN = EF$.

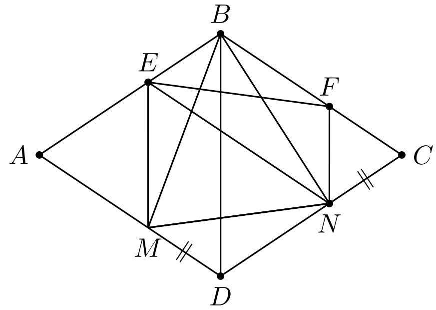
Mà $EN \parallel BC$ nên $BFNE$ là hình thang có hai đường chéo bằng nhau.

Từ đó suy ra $BE = FN$.

Khi đó, $FN = BE = MD = CN$ mà tam giác CFN cân tại C nên tam giác CFN đều.

Do đó, tam giác CBD đều.

Vậy $S_{ABCD} = 2S_{CBD} = 2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

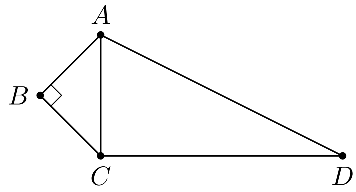


□

BÀI 22. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = 90^\circ$, $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 12$ cm, $AD = 13$ cm. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Áp dụng định lí Pitago ta chứng minh được tam giác ACD vuông tại C. Khi đó, $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 36$ cm^2.

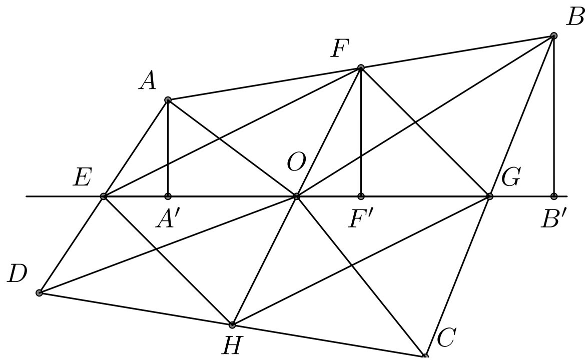


□

BÀI 23. Tứ giác $ABCD$ có O là giao điểm của hai đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối. Chứng minh rằng

$$S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, AB, BC, CD. Ta dễ dàng chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình bình hành. Do O là giao điểm của EG và FH nên O là trung điểm của hai đoạn thẳng EG và FH.

Đầu tiên ta chứng minh

$$S_{AOD} + S_{BOC} = S_{EFGH}$$

Lần lượt vẽ AA', BB', FF' vuông góc với EG.

$$S_{OAE} + S_{OBG} = \frac{1}{2} \cdot OE \cdot AA' + \frac{1}{2} \cdot OG \cdot BB' = \frac{EG}{2} \cdot \frac{AA' + BB'}{2} = \frac{EG}{2} \cdot FF' = S_{EFG}$$

Tương tự, ta chứng minh được $S_{ODE} + S_{OCG} = S_{EHG}$

Từ hai ý trên, ta suy ra $S_{AOD} + S_{BOC} = S_{EFGH}$

Tiếp theo, ta chứng minh

$$S_{EFGH} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

Kẻ AH vuông góc với BD tại H, cắt EF tại K. Khi đó

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} AK \cdot EF = \frac{1}{8} AH \cdot BD = \frac{1}{4} S_{ABD}$$

Tương tự $S_{BFG} = \frac{1}{4} S_{ABC}$, $S_{CHG} = \frac{1}{4} S_{BCD}$, $S_{DEH} = \frac{1}{4} S_{ACD}$

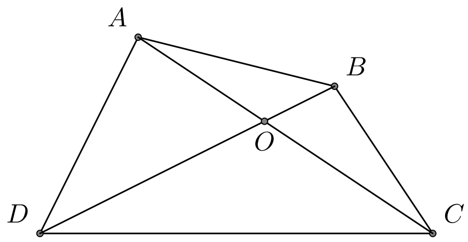
Suy ra

$$S_{AEF} + S_{BFG} + S_{CHG} + S_{DEH} = \frac{1}{4} \cdot 2 S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

Nên $S_{EFGH} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$. Vậy $S_{AOD} + S_{BOC} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$. □

BÀI 24. Các đường chéo của một tứ giác chia tứ giác đó thành bốn tam giác trong đó ba tam giác có diện tích 30 cm^2, 60 cm^2, 90 cm^2. Tính diện tích tứ giác đó.

✍ **LỜI GIẢI.**



Xét tứ giác $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo.

Trường hợp 1: Giả sử $S_{AOB} = 30$, $S_{AOD} = 60$, $S_{COD} = 90$.

Khi đó kẻ $AH \perp BD$, $CK \perp BD$, ta có

$$\frac{1}{2}AH \cdot OB = 30$$
$$\frac{1}{2}AH \cdot OD = 60$$

Chia vế theo vế hai đẳng thức trên, ta có $OD = 2OB$.

Ta lại có $S_{COD} = \dfrac{1}{2}CK \cdot OD = 90 \Rightarrow \dfrac{1}{2}CK \cdot OB = 45$ hay $S_{COB} = 45$.

Vậy diện tích tứ giác là $S = 30 + 60 + 90 + 45 = 225$ cm^2.

Trường hợp 2: Giả sử $S_{AOB} = 30$, $S_{COD} = 60$, $S_{AOD} = 90$.

Khi đó kẻ $AH \perp BD$, $CK \perp BD$, ta có

$$\frac{1}{2}AH \cdot OD = 90$$
$$\frac{1}{2}AH \cdot OB = 30$$

Chia vế theo vế hai đẳng thức trên, ta có $OD = 3OB$.

Ta lại có $S_{COD} = \dfrac{1}{2}CK \cdot OD = 60 \Rightarrow \dfrac{1}{2}CK \cdot OB = 20$ hay $S_{COB} = 20$.

Vậy diện tích tứ giác là $S = 30 + 60 + 90 + 20 = 200$ cm^2.

Trường hợp 3: Giả sử $S_{AOB} = 60$, $S_{COD} = 90$, $S_{AOD} = 30$.

Khi đó kẻ $AH \perp BD$, $CK \perp BD$, ta có

$$\frac{1}{2}AH \cdot OD = 30$$
$$\frac{1}{2}AH \cdot OB = 60$$

Chia vế theo vế hai đẳng thức trên, ta có $OD = \dfrac{1}{2}OB$.

Ta lại có $S_{COD} = \dfrac{1}{2}CK \cdot OD = 90 \Rightarrow \dfrac{1}{2}CK \cdot OB = 180$ hay $S_{COB} = 180$.

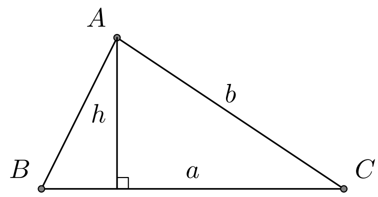
Vậy diện tích tứ giác là $S = 30 + 60 + 90 + 180 = 360$ cm^2. □

BÀI 25. Chứng minh rằng

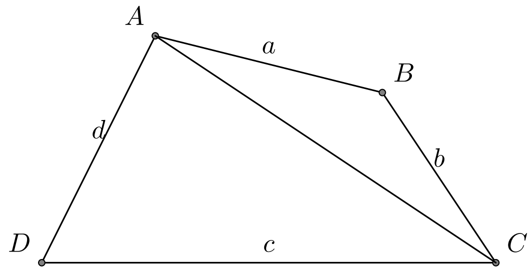
❶ $S \leq \dfrac{a^2+b^2}{4}$ với S là diện tích của tam giác có độ dài hai cạnh bằng a, b.

❷ $S \leq \dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$ với S là diện tích của tứ giác có độ dài bốn cạnh bằng a, b, c, d.

LỜI GIẢI.



❶ Gọi h là chiều cao ứng với cạnh a, khi đó $S = \dfrac{1}{2}ah$.
Suy ra $4S = 2ah \leq 2ab \leq a^2+b^2$.
Vậy $S \leq \dfrac{a^2+b^2}{4}$.
Dấu "$=$" xảy ra khi $h = a = b$ hay tam giác đã cho là tam giác cân.



b) Theo câu a, ta có
— $S_{ABC} \leq \dfrac{a^2+b^2}{4}$
— $S_{ACD} \leq \dfrac{c^2+d^2}{4}$
Suy ra $S = S_{ABC} + S_{ACD} \leq \dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$.

□

BÀI 26. Gọi a, b, c, d là độ dài bốn cạnh liên tiếp của một tứ giác có diện tích S. Chứng minh các bất đẳng thức sau và chỉ rõ khi nào xảy ra đẳng thức

❶ $4S \leq (a+c)(b+d)$

❷ $16S \leq (a+b+c+d)^2$

LỜI GIẢI.

❶ Ta có $S_{ABC} \leq \dfrac{ab}{2}$, $S_{ACD} \leq \dfrac{cd}{2}$.
Suy ra $S = S_{ABC} + S_{ACD} \leq \dfrac{ab+cd}{2} \Rightarrow 2S \leq ab+cd$ (dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\hat{B} = \hat{D} = 90^o$)
Tương tự, ta cũng có $2S \leq ad+bc$ (dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\hat{A} = \hat{C} = 90^o$)
Cộng vế theo vế hai bất đẳng thức trên, ta có

$$4S \leq ab+cd+ad+bc \Leftrightarrow 4S \leq (a+c)(b+d)$$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^o$ hay tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

❷ Ta sẽ chứng minh

$$(a+b+c+d)^2 \geq 4(a+c)(b+d)(*)$$

Thật vậy, đặt $x = a+c, y = b+d$, khi đó $(*) \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (luôn đúng).
Vậy

$$(a+b+c+d)^2 \geq 4(a+c)(b+d) \geq 16S$$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ hay $a+c = b+d$ hay tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

□

BÀI 27. Gọi a, b, c, d là độ dài bốn cạnh (không nhất thiết liên tiếp) của một tứ giác có diện tích S. Chứng minh rằng $2S \leq ab+cd$. Khi nào xảy ra đẳng thức?

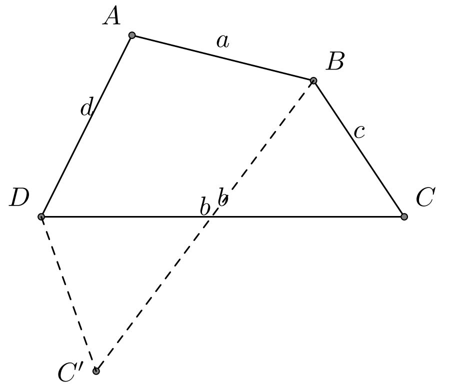
LỜI GIẢI.

— **Trường hợp 1:** a và b là hai cạnh kề.
Ta có $S_{ABC} \le \dfrac{ab}{2}$, $S_{ACD} \le \dfrac{cd}{2}$.
Suy ra $S = S_{ABC} + S_{ACD} \le \dfrac{ab+cd}{2} \Rightarrow 2S \le ab + cd$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\hat{B} = \hat{D} = 90^o$)

— **Trường hợp 2:** a và b là hai cạnh đối.
Gọi C' là điểm đối xứng với C qua trung trực của BD. Khi đó ta có

$$S_{ABCD} = S_{ABC'D}$$

Theo câu a, ta có $S_{ABC'D} \le \dfrac{ab+cd}{2}$ nên suy ra $S_{ABCD} \le \dfrac{ab+cd}{2}$ hay $2S \le ab + cd$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\widehat{ABC'} = \widehat{ADC'} = 90°$.



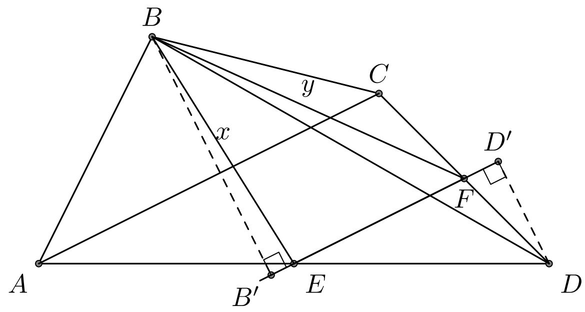
□

BÀI 28. Cho tứ giác $ABCD$, E và F theo thứ tự là trung điểm của AD và CD. Biết $BE + BF = a$. Chứng minh rằng

$$S_{ABCD} < \frac{a^2}{2}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Vẽ BB', DD' vuông góc với EF.
Do $BB' > DD'$ nên $S_{BEDF} < 2S_{BEF}$.
Đặt $BE = x, BF = y$. Khi đó $S_{BEF} \le xy$.
Mà $xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4} = \dfrac{a^2}{4}$.
Suy ra $2S_{BEF} \le \dfrac{a^2}{4}$.
Vậy $S_{BEDF} < \dfrac{a^2}{4}$. (1)



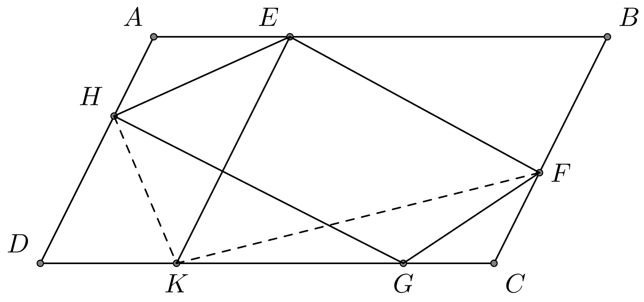
Mặt khác, do E và F lần lượt là trung điểm của AD và CD nên $S_{BED} = \dfrac{1}{2}S_{ABD}$ và $S_{BFD} = \dfrac{1}{2}S_{BCD}$. Suy ra

$$S_{BEDF} = \frac{1}{2}S_{ABCD}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ABCD} < \dfrac{a^2}{2}$. □

BÀI 29. Cho hình bình hành $ABCD$. Các điểm E, F, G, H theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho EG không song song với AD. Cho biết diện tích tứ giác $EFGH$ bằng nửa diện tích hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng HF song song với CD?

✍ **LỜI GIẢI.**



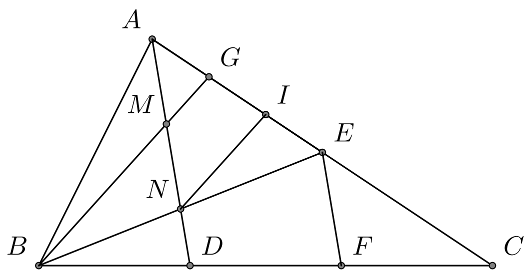
Vẽ EK song song với AD, ta có

$$S_{EFKH} = S_{EKH} + S_{EKF} = \frac{1}{2}S_{AEKD} + \frac{1}{2}S_{EBCK} = \frac{1}{2}(S_{AEKD} + S_{EBCK}) = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{EFGH}.$$

Suy ra $S_{HKF} = S_{HGF}$ nên HF song song với KG hay HF song song với CD. □

BÀI 30. Cho tam giác ABC, E là trung điểm của AC. Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $BD = \frac{1}{3}BC$, lấy điểm G trên cạnh AE sao cho $AG = \frac{1}{3}AE$. Đoạn thẳng AD cắt BG, BE theo thứ tự ở M, N. Tính diện tích tứ giác $MNEG$ theo diện tích tam giác ABC?

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi F là trung điểm của CD.
Xét tam giác ACD có EF là đường trung bình nên $EF \parallel AD$.
Xét tam giác BEF có $EF \parallel AD$ và D là trung điểm BF nên N là trung điểm BE.
Gọi I là trung điểm GE thì NI là đường trung bình của tam giác EBG nên $NI \parallel MG$.
Xét tam giác ANI có $NI \parallel MG$ và G là trung điểm AI nên M là trung điểm AN.
Khi đó

$$S_{AMG} = \frac{1}{2}S_{ANG} = \frac{1}{6}S_{ANE}.$$

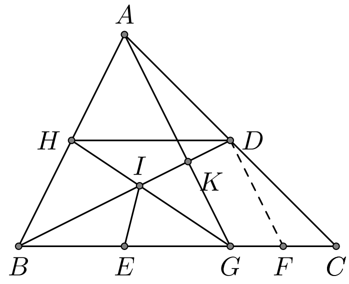
Suy ra

$$S_{MNEG} = \frac{5}{6}S_{ANE} = \frac{5}{12}S_{ABE} = \frac{5}{24}S_{ABC}.$$

□

BÀI 31. Cho tam giác ABC diện tích S. Lấy các điểm E, G trên BC sao cho $BE = EG = GC$. Gọi D, H theo thứ tự là trung điểm của AC, AB; I là giao điểm của GH và BD; K là giao điểm của AG và BD. Tính diện tích tứ giác $EIKG$.

✍ **LỜI GIẢI.**

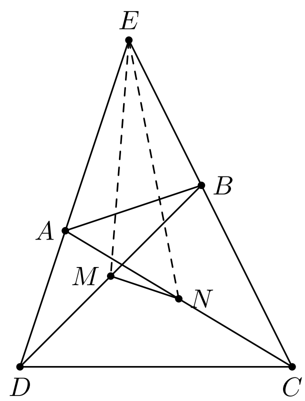


Gọi F là trung điểm của GC.
Ta có
$$KG \parallel DF, BG = \frac{4}{5}BF$$
nên chứng minh được
$$KG = \frac{4}{5}DF = \frac{2}{5}AG, BK = \frac{4}{5}BD.$$

Lại có $HD \parallel BC$ nên
$$\frac{ID}{IB} = \frac{HD}{BC} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{2}{3}BG} = \frac{3}{4} \Rightarrow ID = \frac{3}{4}IB.$$
Suy ra
$$ID = \frac{3}{7}BD, IB = \frac{4}{7}BD, IK = \frac{8}{35}BD.$$
Đặt
$$S_{IKG} = a. \tag{2.1}$$
thì
$$S_{AIG} = \frac{5}{2}a, S_{BIG} = \frac{5}{2}a, S_{IEG} = \frac{5}{4}a. \tag{2.2}$$
Từ (1), (2) suy ra
$$S_{EIKG} = \frac{5}{4}a + a = \frac{9}{4}a. \tag{2.3}$$
Lại có $S_{BKG} = \frac{5}{2}a + a = \frac{7}{4}a$ nên
$$S_{ABG} = \frac{7}{2}a \cdot \frac{5}{2} = \frac{35}{4}a, S_{ABC} = \frac{35}{4}a \cdot \frac{3}{2} = \frac{105}{8}a. \tag{2.4}$$
Từ (3), (4) suy ra $S_{EIKG} : S_{ABC} = \frac{9}{4} : \frac{105}{8} = \frac{6}{35}$ hay $S_{EIKG} = \frac{6}{35}S_{ABC}$. □

BÀI 32. Chứng minh rằng tam giác có một đỉnh là giao điểm hai cạnh đối của một tứ giác, hai đỉnh kia là trung điểm hai đường chéo của tứ giác đó có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tứ giác.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi M, N là trung điểm các đường chéo BD, AC của tứ giác $ABCD$, E là giao điểm của AD, BC. Ta có
$$\begin{aligned} S_{EMN} &= S_{EDC} - S_{EMD} - S_{ENC} - S_{DMC} - S_{MNC} \\ &= S_{EDC} - \frac{1}{2}S_{EBD} - \frac{1}{2}S_{EAC} - \frac{1}{2}S_{DBC} - \frac{1}{2}S_{AMC} \\ &= \frac{1}{2}(S_{EDC} - S_{EBD} - S_{DBC}) + \frac{1}{2}(S_{EDC} - S_{EAC} - S_{AMC}) \\ &= 0 + \frac{1}{2}(S_{ADM} + S_{CDM}) = \frac{1}{4}S_{ABCD}. \end{aligned}$$

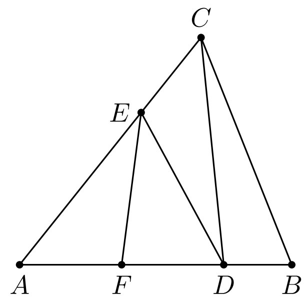
⚠ *Nếu tứ giác $ABCD$ có F là giao điểm của AB và CD thì từ bài toán trên ta cũng có $S_{FMN} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Suy ra E và F cách đều đường thẳng MN. Do đó đường thẳng MN đi qua trung điểm của EF. Đường thẳng đi qua M, N và trung điểm của EF gọi là đường thẳng Gau-xơ.*

□

3. Dựng hình

BÀI 33. Cho tam giác ABC. Dựng các điểm D và F nằm trên cạnh AB, E nằm trên cạnh AC sao cho đường gấp khúc $CDEF$ chia tam giác ABC ra bốn phần có diện tích bằng nhau.

✍ **LỜI GIẢI.**



Lấy điểm D trên AB sao cho $BD = \frac{1}{4}BA$. Suy ra

$$S_{BCD} = \frac{1}{4}S_{ABC}.$$

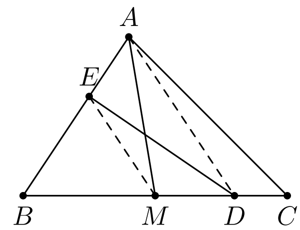
Lấy điểm E trên AC sao cho $CE = \frac{1}{3}AC$. Suy ra

$$S_{CDE} = \frac{1}{3}S_{CDA} = \frac{1}{4}S_{ABC}.$$

Lấy điểm F trên AD sao cho $AF = \frac{1}{2}AD$. Suy ra $S_{DEF} = S_{EFA} = \frac{1}{2}S_{DEA} = \frac{1}{3}S_{CDA} = \frac{1}{4}S_{ABC}$.
Vậy với cách lấy các điểm D, E, F như trên thỏa được yêu cầu bài toán. □

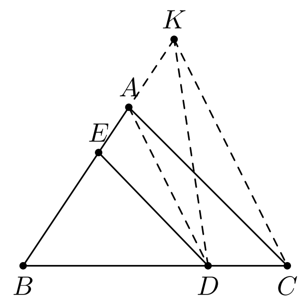
BÀI 34. Một mảnh vườn hình tam giác ABC có một cái giếng D nằm trên cạnh BC. Hãy chia mãnh vườn thành hai phần có diện tích bằng nhau bởi một đường thẳng đi qua D.

✍ **LỜI GIẢI.**



Cách 1. Nếu D là trung điểm BC thì DA là đường thẳng phải dựng.
Nếu D không là trung điểm của BC, qua trung điểm M của BC kẻ đường thẳng song song với DA cắt AB tại E. DE là đường thẳng cần dựng.
Thật vậy, do $EM \parallel AD$ nên

$$S_{ADE} = S_{ADM} \Rightarrow S_{BDE} = S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$



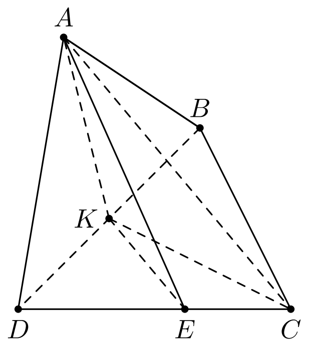
Cách 2. Giả sử $BD \geqslant CD$.
Qua C vẽ đường thẳng song song với DA cắt AB tại K. Như vậy, $\triangle ABC$ được biến đổi thành $\triangle BDK$ có cùng diện tích. Để chia $\triangle BDK$ thành hai phẩn có diện tích bằng nhau, ta chỉ cần dựng đường trung tuyến DE của nó.

□

BÀI 35. Cho tứ giác $ABCD$. Dựng đường thẳng đi qua A chia tứ giác ra hai phần có diện tích bằng nhau.

✍ **LỜI GIẢI.**

Qua trung điểm K của BD, vẽ đường thẳng song song với AC cắt CD tại E. AE là đoạn thẳng cần dựng.



Thật vậy, do $KE \parallel AC$ nên

$$S_{KAC} = S_{EAC}.$$

Suy ra

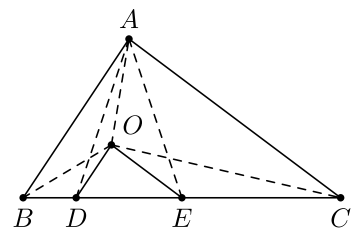
$$S_{ABCE} = S_{ABCK} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

□

BÀI 36. Cho tam giác ABC. Dựng điểm O nằm bên trong tam giác sao cho diện tích các tam giác AOB, BOC, COA tỉ lệ với $1 : 2 : 3$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Dựng D, E trên BC sao cho $BD : DE : EC = 1 : 2 : 3$. Qua D vẽ đường thẳng song song với AB, qua E vẽ đường thẳng song song với AC, chúng cắt nhau tại điểm O phải dựng.



Thật vậy, do $OD \parallel AB$ nên

$$S_{OAB} = S_{DAB} = \frac{1}{6} S_{ABC}.$$

Do $OE \parallel AC$ nên

$$S_{OAC} = S_{EAC} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

Suy ra

$$S_{OBC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.$$

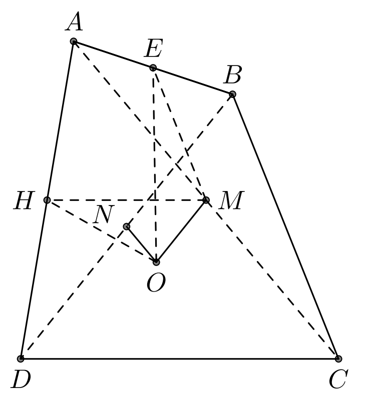
□

BÀI 37. Cho tứ giác $ABCD$. Dựng điểm O nằm bên trong tứ giác sao cho nếu nối O với trung điểm các cạnh của tứ giác thì tứ giác được chia ra bốn phần có diện tích bằng nhau.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi E, H là trung điểm của AB và AD. Ta có

$$S_{OHAE} = \frac{1}{4} S_{ABCD}. \tag{2.1}$$



Gọi M là trung điểm của AC, ta cũng có

$$S_{MHAE} = \frac{1}{4} S_{ABCD}. \tag{2.2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$S_{OHAE} = S_{MHAE} \Rightarrow S_{OHE} = S_{MHE}.$$

Do đó

$$OM \parallel HE \Rightarrow OM \parallel BD. \tag{2.3}$$

Tương tự, gọi N là trung điểm của BD thì

$$ON \parallel AC. \tag{2.4}$$

Hai điều kiện (3) và (4) xác định được điểm O. □

CHƯƠNG 3 CHUYÊN ĐỀ

BÀI 1 TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Bài toán tìm tập hợp điểm (còn gọi là quỹ tích) được chính thức giới thiệu ở lớp 9. Tuy nhiên, học sinh khá và giỏi có thể làm quen với dạng toán này ngay từ lớp 8 với các kiến thức thuộc chương trình Hình học lớp 7 và lớp 8.

A HAI TẬP HỢP BẰNG NHAU

Định nghĩa 1. Tập hợp các điểm cách một đường thẳng xy cố định một khoảng bằng h không đổi (gọi là tập hợp A) là hai đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng bằng h (gọi là tập hợp B).
Hai tập hợp A và B nói trên được gọi là hai tập hợp bằng nhau. Nghĩa là

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \in B \\ \forall x \in B \Rightarrow x \in A. \end{cases}$$

Do đó muốn chứng tỏ hai tập hợp điểm A và B bằng nhau, ta phải chứng minh hai điều:

— Nếu M là một điểm bất kì thuộc A thì M cũng thuộc B. (1)

— Nếu M là một điểm bất kì thuộc B thì M cũng thuộc A. (2)

Điều (1) chứng tỏ rằng tập hợp B chứa tập hợp A, điều (2) chứng tỏ rằng tập hợp A chứa tập hợp B. Phải chứng minh cả hhai điều trên mới kết luận được A và B là hai tập hợp bằng nhau.
Do đó bài toán "Tìm tập hợp các điểm có chung một tính chất α nào đó" được trình bày theo ba phần:

Phần 1. Chứng minh rằng nếu điểm M có tính chất α thì điểm M thuộc hình $\mathscr{H}$ nào đó.

Phần 2. Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc hình $\mathscr{H}$ thì điểm M có tính chất α.

Phần 3. Kết luận rằng tập hợp các điểm M có tính chất α là hình $\mathscr{H}$.

⚠ *Chú ý:*

— *Phần 2 là phần đảo của phần 1, do đó nếu gọi phần 1 là phần thuận thì phần 2 là phần đảo.*

— *Theo phần thuận, hình $\mathscr{H}$ chứa mọi điểm có tính chất α, không chứa thiếu điểm nào. Theo phần đảo, hình $\mathscr{H}$ chỉ chứa những điểm có tính chất α, không chứa thừa những điểm nào khác. Như vậy, hình $\mathscr{H}$ gồm và chỉ gồm tất cả những điểm có tính chất α.*

B CÁC TẬP HỢP ĐIỂM ĐÃ HỌC

Khi giải bài toán về tập hợp điểm, cần nhớ lại ba tập hợp điểm đã học ở lớp 7 và một tập hợp điểm đã học ở lớp 8.

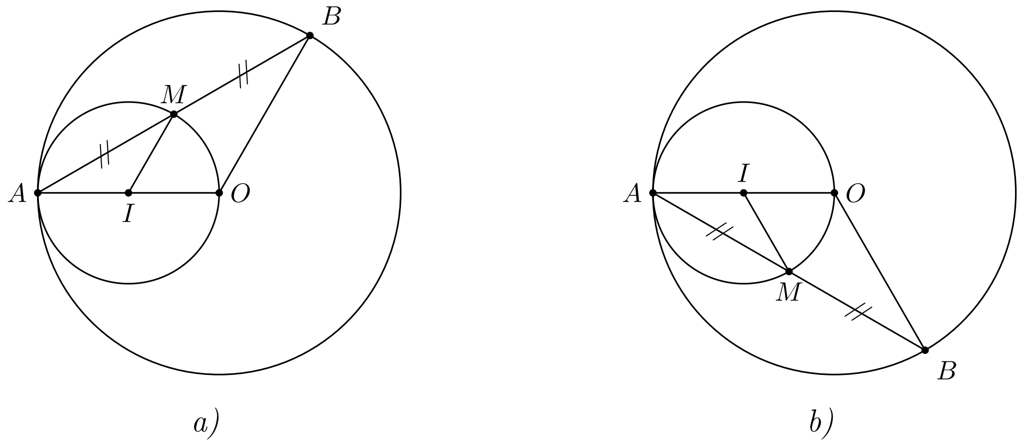
— Tập hợp các điểm cách một điểm O cố định một khoảng R không đổi là đường tròn tâm O, bán kính R.
— Tập hợp các điểm cách đều hai đầu của một đoạn thẳng cố định là đường trung trực của đoạn thẳng ấy.
— Tập hợp các điểm thuộc miền trong một góc cố định và cách đều hai cạnh của nó là tia phân giác của góc ấy.
— Tập hợp các điểm cách một đường thẳng xy cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng bằng h.

C VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho đường tròn tâm O cố định, bán kính 4 cm, điểm A cố định trên đường tròn, điểm B chuyển động trên đường tròn. Tìm tập hợp các trung điểm M của AB.

LỜI GIẢI.

Phần thuận. (h.31a) Gọi I là trung điểm AO thì I là điểm cố định. IM là đường trung bình của tam giác AOB nên $IM = \dfrac{OB}{2} = 2$ cm. Điểm M luôn cách điểm I cố định 2 cm nên M thuộc đường tròn tâm I bán kính 2 cm.



Hình 31

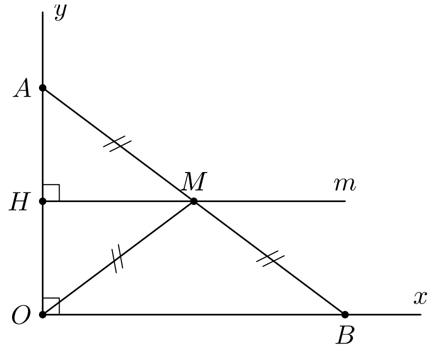
Phần đảo. (h.31b) Lấy điểm M bất kì thuộc đường tròn $(I, 2$ cm$)$, M khác A. Ta sẽ chứng minh rằng M là trung điểm của một đoạn thẳng nào đó có một đầu là A và một đầu thuộc đường tròn (O).
Thật vậy, gọi B là giao điểm của AM và (O), tam giác IAM cân nên $\widehat{IAM} = \widehat{IMA}$, $\triangle OAB$ cân nên $\widehat{OAB} = \widehat{B}$, suy ra $\widehat{IMA} = \widehat{B}$, do đó $IM \parallel OB$. Tam giác OAB có $OI = IA$, $IM \parallel OB$ nên $AM = MB$.
Kết luận. Khi điểm B chuyển động trên (O), tập hợp các trung điểm M của AB là đường tròn $(I, 2$ cm$)$, trừ điểm A. □

VÍ DỤ 2. Cho góc vuông xOy cố định, điểm A cố định trên tia Oy, điểm B chuyển động trên tia Ox. Tìm tập hợp các trung điểm M của AB.

LỜI GIẢI.

Cách 1. (h.32)

Phần thuận. OM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông OAB nên $OM = \dfrac{AB}{2}$ mà $MA = \dfrac{AB}{2}$, suy ra $MA = MO$. Điểm M cách đều hai điểm O và A cố định nên M thuộc đường trung trực của OA.



Hình 32

Giới hạn. Vì đoạn thẳng AB chỉ thuộc miền trong góc vuông xOy nên điểm M nằm trên tia Hm thuộc đường trung trực của OA và thuộc miền trong góc xOy.

Phần đảo. Lấy điểm M bất kì thuộc tia Hm thì

$$MO = MA \tag{1}$$

$$\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MOA} \tag{2}$$

Gọi B là giao điểm của AM và Ox. Ta có

$$\widehat{MBO} + \widehat{MAO} = 90^\circ, \widehat{MOB} + \widehat{MOA} = 90^\circ \tag{3}$$

nên từ (2) và (3) suy ra $\widehat{MBO} = \widehat{MOB}$. Do đó

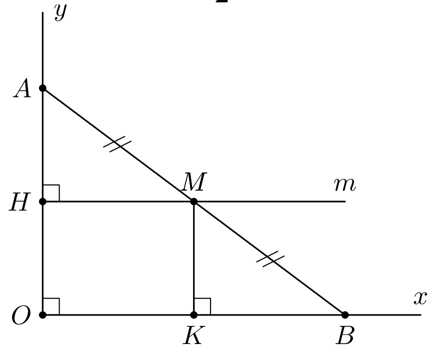
$$MO = MB \tag{4}$$

Từ (1), (4) suy ra $MA = MB$, do đó M là trung điểm của AB.

Kết luận. Khi điểm B chuyển động trên tia Ox thì tập hợp các trung điểm M của AB là tia Hm thuộc đường trung trực của OA và thuộc miền trong góc xOy.

Cách 2. (h.33)

Phần thuận. Đặt $OA = h$ (không đổi). Vẽ $MK \perp Ox$. Tam giác AOB có $AM = MB$, $MK \parallel AO$ nên $MK = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{h}{2}$. Điểm M cách Ox cố định một khoảng không đổi $\dfrac{h}{2}$ nên M thuộc đường thẳng song song với Ox, cách Ox một khoảng $\dfrac{h}{2}$.



Hình 33

Giới hạn. Vì M chỉ thuộc miền trong góc vuông xOy nên M nằm trên tia Hm thuộc đường thẳng song song nói trên.

Phần đảo. Lấy điểm M bất kì thuộc tia Hm. Gọi B là giao điểm của AM và Ox. Tam giác AOB có $AH = HO = \dfrac{h}{2}$, $HM \parallel OB$ nên M là trung điểm AB.

Kết luận. Khi điểm B chuyển động trên tia Ox, tập hợp các trung điểm M của AB là tia Hm thuộc đường thẳng song song với tia Ox, cách tia Ox một khoảng $\dfrac{h}{2}$ và thuộc miền trong góc xOy.

□

D THỨ TỰ NGHIÊN CỨU VÀ TRÌNH BÀY LỜI GIẢI BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

1. Tìm hiểu đề bài

Phân biệt các yếu tố cố định yếu tố không đổi, quan hệ không đổi, yếu tố chuyển động (bao gồm điểm chuyển động đã biết vị trí và điểm chuyển động phải xác định vị trí).

⚠ *Chẳng hạn trong ví dụ 24 thì:*

- Yếu tố cố định: góc vuông xOy, điểm A.

- Yếu tố không đổi: độ dài $AO = h$.

- Quan hệ không đổi: $MA = MB$

- Yếu tố chuyển động: Điểm B chuyển động trên tia Ox, điểm M đang cần xác định vị trí.

2. Dự đoán tập hợp điểm

Để dự đoán tập hợp điểm phải tìm, ta thường vẽ chính xác vài vị trí của điểm đó (ít nhất là ba vị trí) rồi bằng trực giác đoán nhận điểm đó chuyển động trên hình nào.

⚠ *Khi dự đoán tập hợp điểm, nên chú ý đến:*

- Điểm đặc biệt: Trong ví dụ 23, khi B ở vị trí đối xứng với A qua O thì M ở vị trí O vậy O là một điểm của tập hợp phải tìm.

- Trong ví dụ 24, khi B ở vị trí O thì M ở vị trí H, trung điểm của AO, điểm H là một điểm của tập hợp phải tìm.

- Vị trí giới hạn: Trong ví dụ 23, khi B tiến đến A thì M tiến đến A, điểm A là vị trí giới hạn của tập hợp phải tìm.

- Điểm vô tận: Trong ví dụ 24, khi B chuyển động xa điểm O vô tận trên tia Ox thì M cũng chuyển động xa vô tận. Như vậy, M không thể chuyển động trên đường tròn.

- Tính đối xứng: Trong ví dụ 23, chuyển động của điểm M có tính đối xứng qua đường thẳng cố định AO nên tập hợp điểm phải tìm nhận OA làm trục đối xứng.

3. Phần thuận

- Phát hiện quan hệ giữa điểm M cần xác định vị trí với các điểm cố định, các đường thẳng cố định.
- Nếu dự đoán điểm cần xác định vị trí thuộc đường tròn, ta chứng tỏ nó cách một điểm cố định một

khoảng không đổi.
- Nếu dự đoán điểm cần xác định vị trí thuộc đường thẳng, ta chứng tỏ nó cách đều hai điểm cố định, hoặc cách một đường thẳng cố định một khoảng không đổi.

⚠ *Để phát hiện ra các quan hệ ấy, có thể phải vẽ thêm đường phụ (điểm I trong ví dụ 23, đoạn MK trong cách 2 của ví dụ 24).*
- Dựa vào các tập hợp điểm cơ bản đã học, chỉ ra điểm M cần xác định vị trí thuộc một hình nào đó, chẳng hạn hình H.
- Giới hạn hình H nếu điểm M không thuộc toàn bộ hình H mà chỉ thuộc hình H', một bộ phận của hình H (tia Hm trong ví dụ 24).

4. Phần đảo

❶ Lấy điểm M bất kì trên hình H', bằng vẽ hình, tạo ra các điểm chuyển động khác được nêu trong bài toán (điểm B trong ví dụ 23 và ví dụ 24).

❷ Chứng tỏ rằng điểm M có tính chất mà đề bài nêu lên (M là trung điểm của AB trong ví dụ 23 và ví dụ 24)

5. Kết luận

Tập hợp các điểm M phải tìm là hình H'.
⚠ *Hầu hết các bài toán trong cuốn sách này được hỏi dưới dạng:*
Nếu điểm M có tính chất α thì điểm M nằm trên đường nào?
Do đó trong lời của bài chỉ trình bày nội dung của phần thuận. Chi tiết hơn về phần đảo và cách chứng minh phần đảo trong bài toán tìm tập hợp điểm, xem Nâng cao và phát triển Toán 9 tập hai.

E PHÂN CHIA CÁC TRƯỜNG HỢP TRONG BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Trong một số bài toán, ta cần phân chia các trường hợp khi kết luận "Tập hợp các điểm M có tính chất α là hình H".

1. Xét điểm M thuộc từng miền

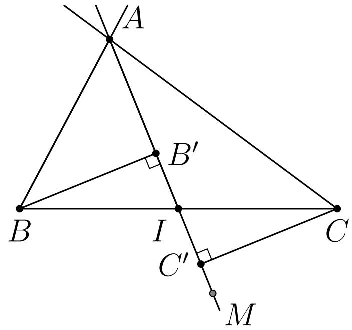
Nếu một khẳng định là đúng khi điểm M ở vị trí này nhưng lại không đúng khi M ở vị trí khác thì ta cần xét điểm M thuộc từng miền rồi lấy hợp các tập hợp điểm tìm được.

VÍ DỤ 3. 25(12). Cho tam giác ABC cố định. Các điểm M sao cho các tam giác MAB và MAC có diện tích bằng nhau nằm trên đường nào?

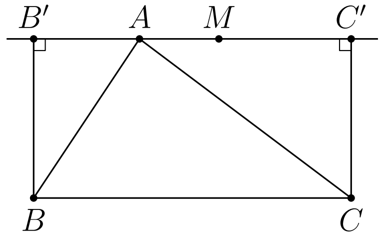
✍ **LỜI GIẢI.**
$S_{MAB} = S_{MAC} \Rightarrow BB' = CC'$ (BB', CC' là các đường vuông góc kẻ từ B và từ C đến MA). Xét hai trường hợp:

❶ Trường hợp 1: Điểm M thuộc miền trong góc BAC hoặc góc đối đỉnh với nó ($h.34$).
Khi đó B và C nằm khác phía đối với AM. Khi đó đường thẳng AM cắt đoạn thẳng BC ở I.

Do $BB' = CC'$, $BB' \parallel CC'$ nên $BB'CC'$ là hình bình hành, I là trung điểm của BC. Điểm M thuộc đường thẳng AI.



Hình 34



Hình 35

❷ Trường hợp 2: Điểm M thuộc miền trong góc kề bù với góc BAC (h.35), Tức là B và C nằm cùng phía đối với AM.

Do $BB' = CC'$, $BB' \parallel CC'$ nên $BB'CC'$ là hình bình hành, $AM \parallel BC$. Điểm M thuộc đường thẳng qua A và song song với BC.

Kết luận chung: Các điểm M phải tìm gồm đường thẳng chứa đường trung tuyến AI của tam giác ABC và đường thẳng qua A song song với BC, trừ điểm A. □

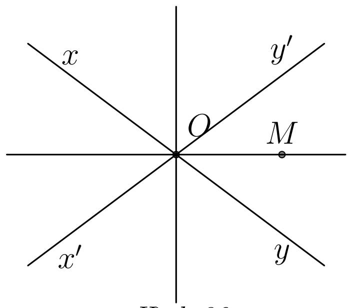
2. Xét từng vị trí của hình đã cho

Nếu các hình đã cho có những vị trí khác nhau làm cho hình dạng của hình H thay đổi thì ta xần xét từng vị trí của hình đã cho.

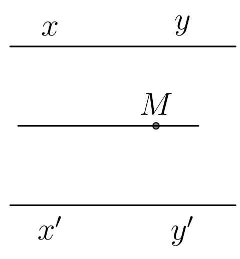
VÍ DỤ 4. 26(8). Các điểm M cách đều hai đường thẳng cố định xy, $x'y'$ nằm trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

Trường hợp 1: xy cắt $x'y'$ ở O, điểm M nằm trên bốn tia phân giác của bốn góc tạo bởi hai đường thẳng (bốn tia này làm thành hai đường thẳng vuông góc với nhau tại O, xem hình 36).



Hình 36



Hình 37

Trường hợp 2: $xy \parallel x'y'$, điểm M nằm trên đường thẳng song song cách đều xy và $x'y'$ (h.37). □

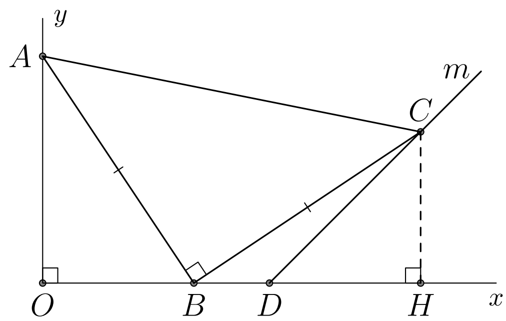
3. Xét từng trường hợp của tính chất α đã cho

Nếu tính chất α có những trường hợp khác nhau làm cho hình dạng của hình H thay đổi thì ta cần xét riêng từng trường hợp của tính chất α.

VÍ DỤ 5. 27(8). Cho góc vuông xOy cố định, điểm A cố định trên tia Ay, điểm B chuyển động trên tia Ox. Đỉnh C các tam giác ABC vuông cân tại B nằm trên đường nào?
Phân tích: Dự đoán tập hợp điểm (khi C và O nằm khác phía đối với AB).
Khi B trùng O thì C trùng D (D thuộc tia Ox sao cho $OD = OA$), đó là điểm cố định.
Chú ý rằng khi B chạy xa vô tận trên tia Ox thì C cũng chạy xa vô tận.
Từ các nhận xét trên, ta dự đoán các đỉnh C nằm trên một tia gốc D.

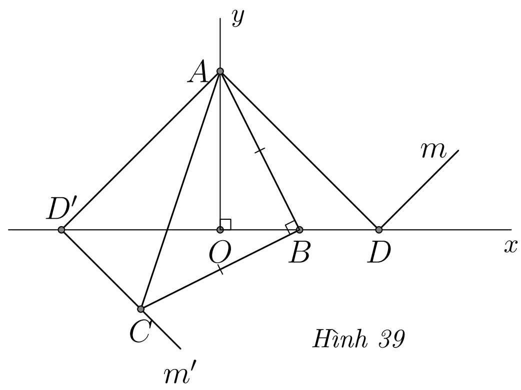
✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Trường hợp C và O nằm khác phía đối với AB (h.38)
Trên tia Ox lấy điểm D sao cho $OD = OA$, D là điểm cố định. Kẻ $CH \perp Ox$.
Dễ dàng chứng minh được $\triangle AOB = \triangle BHC$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra.
$OB = CH \quad (1)$
$OA = BH \quad (2)$
Ta lại có $OA = OD$ nên từ (2) suy ra $BH = OD$, do đó $OB = DH \quad (3)$
Từ (1) và (3) suy ra $CH = DH$. Vậy $\widehat{CDH} = 45^\circ$. Điểm C chuyển động trên tia Dm tạo với Dx góc 45° và thuộc miền trong góc xOy.



Hình 38

❷ Trường hợp C và O nằm cùng phía đối với AB (h.39).
Bạn đọc tự giải được C chuyển động trên tia $D'm'$, chính là tia Dm quay quanh A góc 90° cùng chiều quay của kim đồng hồ.



Hình 39

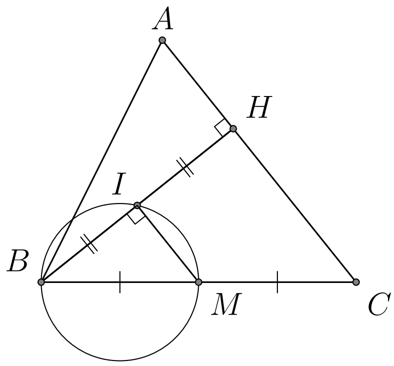
□

F BÀI TẬP

BÀI 1. Tam giác ABC có BC cố định, I là trung điểm của đường cao BH. Các điểm I nằm trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

(h.182). Gọi M là trung điểm của BC.
Ta có MI là đường trung bình của $\triangle BCH$ suy ra $MI \parallel CH$ mà $CH \perp BH$ nên $MI \perp BI$ suy ra $\widehat{BIM} = 90^\circ$.
Các điểm I nằm trên đường kính BM, trừ điểm B (M là trung điểm của BC).



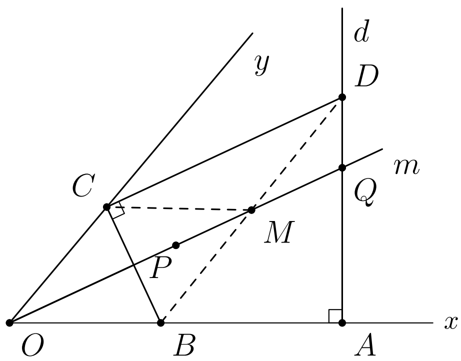
Hình 182

□

BÀI 2. Cho góc xOy cố định, đường thẳng d cố định vuông góc với Ox tại A, điểm B chuyển động trên đoạn thẳng OA. Trên tia Oy lấy điểm C sao cho $OC = OB$. Đường vuông góc với BC tại C cắt đường thẳng d ở D. Các trung điểm M của BD nằm trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

(h.183). Dễ chứng minh được $\triangle OCM = \triangle OBM$(c.c.c) $\Rightarrow \widehat{MOC} = \widehat{MOB}$ suy ra OM là tia phân giác của $\widehat{BOC}$ nên điểm M thuộc tia phân giác Om của góc xOy.
Giới hạn: Khi B trùng với A thì M trùng với Q (Q là giao điểm của Om và d).
Khi B tiến đến O thì D tiến đến Q, M tiến đến P (P là trung điểm của OQ). M nằm trên đoạn thẳng PQ thuộc tia phân giác Om, trừ điểm P.



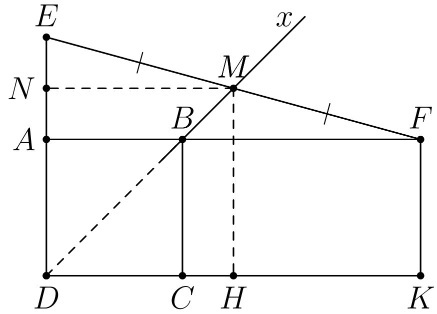
Hình 183

□

BÀI 3. Cho hình vuông $ABCD$ cố định. Điểm E chuyển động trên tia đối của tia AD, điểm F chuyển động trên tia đối của tia BA sao cho $BF = DE$. Các trung điểm M của EF nằm trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

(h.184). Vẽ $MN \perp DA$; vẽ $MH \perp DC$.
Ta có MN là đường trung bình của $\triangle AEF$ suy ra
$MN = \dfrac{1}{2}AF \Rightarrow 2MN = AF \quad (1)$.
Áp dụng tính chất đường trung bình của hình thang $DEFK$ ta có $MH = \dfrac{1}{2}(FK + DE) \Rightarrow 2MH = FK + DE \quad (2)$.
Suy ra $AF = AB + BF = BC + BF = FK + DE \quad (3)$.
Từ (1), 2 và (3) suy ra $MN = MH$.
Vậy tập hợp các điểm M nằm trên tia Bx, tia đối của tia BD.



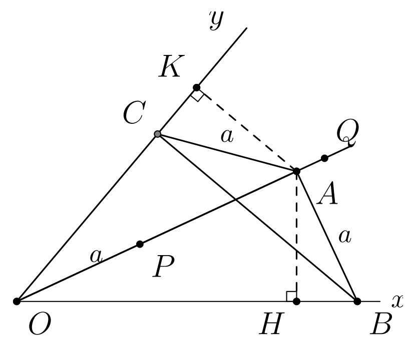
Hình 184

□

BÀI 4. Cho góc xOy cố định có số đo bằng $\alpha < 180^\circ$. Một tam giác ABC cân tại A có cạnh bên bằng a không đổi, góc đáy bằng $\dfrac{\alpha}{2}$, tam giác đó thay đổi vị trí sao cho B thuộc tia Ox, C thuộc tia Oy, A và O khác phía đối với BC. Các điểm A nằm trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

(h.185). Vẽ $AH \perp Ox$, $AK \perp Oy$.
Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{HAK}$ (cùng bù với $\widehat{xOy}$) nên $\widehat{KAC} = \widehat{HAB}$.
Do đó $\triangle KAC = \triangle HAB$ (cạnh huyền - góc nhọn)
$\Rightarrow AK = AH$. Do đó A thuộc tia phân giác của góc xOy.
Giới hạn: Khi C trùng với O hoặc B trùng O thì A trùng P ($OP = a$).
Khi $AB \perp Ox$, (lúc đó $AC \perp Oy$) thì A trùng Q (Q cách Ox và Oy một khoảng bằng a).



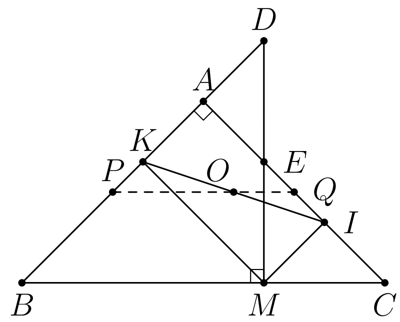
Hình 185

□

BÀI 5. Cho tam giác vuông cân ABC cố định. Điểm M chuyển động trên cạnh huyền BC. Đường thẳng qua M và vuông góc với BC cắt các đường thẳng BA, CA theo thứ tự ở D, E. Gọi I là trung điểm của CE, K là trung điểm của BD. Các trung điểm O của IK nằm trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

(h.186). Xét $\triangle BMD$ có $\widehat{BMD} = 90°$, $\widehat{MBD} = 45°$ suy ra $\widehat{MDB} = 45°$ nên $\triangle BMD$ là tam giác vuông cân tại M. Chứng minh tương tự suy ra $\triangle CME$ vuông cân ở M.
Nên MK, MI là đường trung tuyến đồng thời là đường cao của hai tam giác trên suy ra $MK \perp AB$, $MI \perp AC$.
Xét tứ giác $AKMI$ có $\widehat{MKA} = \widehat{KAI} = \widehat{MIA} = 90°$ suy ra tứ giác $AKMI$ là hình chữ nhật.
Gọi O là trung điểm của KI nên O cũng là trung điểm của AM.
Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và AC. Suy ra PQ là đường trung bình của $\triangle ABC$ suy ra điểm O thuộc đoạn thẳng PQ.
Vậy các điểm O nằn trên đường trung bình PQ của $\triangle ABC$ ($PQ \parallel BC$).



Hình 186

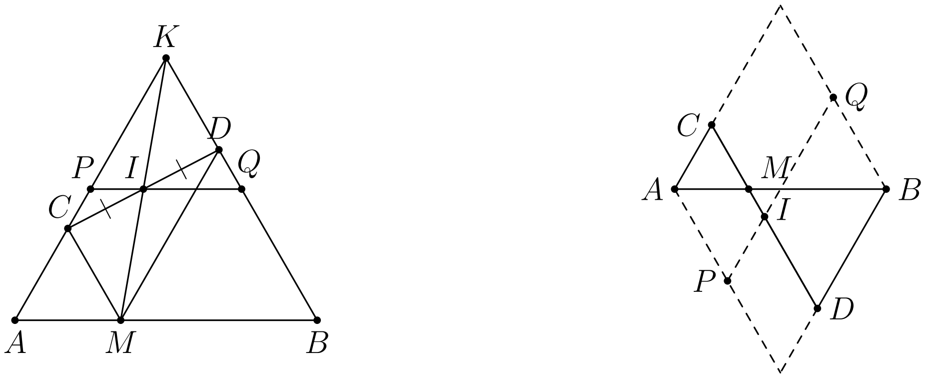
□

BÀI 6. ❶ Cho đoạn thẳng AB cố định, điểm M chuyển động trên đoạn thẳng đó. Vẽ trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB các tam giác đều AMC, BMD. Các trung điểm I của CD nằm trên đường nào?

❷ Cũng câu hỏi như câu a), trong đó các tam giác đều vẽ trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ (h. 187 a). Gọi $AC \cap BD = K$.
Xét $\triangle ABK$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{AKB} = 60° \Rightarrow \triangle ABK$ là tam giác đều.
Tứ giác $CMDK$ có $MC \parallel KD$, $MD \parallel KC$ nên tứ giác $CMDK$ là hình bình hành.
Khi đó I là trung điểm của CD nên I cũng là trung điểm của KM.
Từ đó ta suy ra I cách AB một khoảng không đổi. Nên I nằm trên đường trung bình PQ của $\triangle KAB$, trừ P và Q ($\triangle KAB$ là tam giác đều).



a) b)

Hình 187

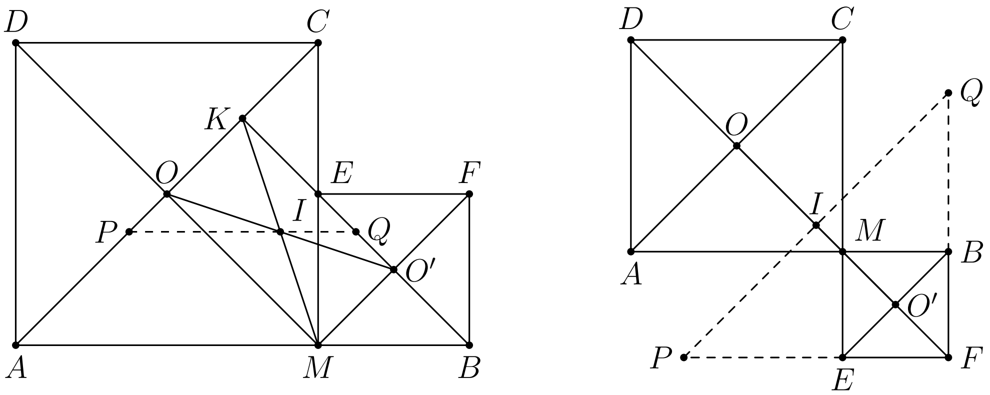
❷ (h.187 b). Các đường thẳng AC và BD cố định, I nằm trên đoạn thẳng PQ và cách đều hai đường thẳng đó, trừ P và Q.

□

BÀI 7. Cho đoạn thẳng AB cố định, điểm M chuyển động trên đoạn thẳng đó. Các trung điểm đoạn nối tâm các hình vuông có cạnh theo thứ tự là MA và MB nằm trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Trường hợp 1: (h. 188a). Hai hình vuông tạo bởi MA, MB cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB.
Gọi hình vuông tạo bởi cạnh MA là $AMDC$ có tâm là O.
Hình vuông tạo bởi cạnh MB là $MBFE$ có tâm là O'.
Gọi K là giao điểm của BE và AC.
Xét tứ giác $MOKO'$ có $\widehat{MOK} = \widehat{OMO'} = \widehat{MO'K} = 90^\circ$ suy ra tứ giác $MOKO'$ là hình chữ nhật.
Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng OO'. Khi đó I cũng là trung điểm của đoạn thẳng KM.
Suy ra I nằm trên đường trung bình PQ của $\triangle KAB$ vuông cân, trừ P và Q ($PQ \parallel AB$).



Hình

a) b)

188

❷ Trường hợp 2: (h. 188b). Hai hình vuông tạo bởi MA, MB thuộc hai nửa mặt phẳng bó AB.
Ta chứng minh được I nằm trên đoạn thẳng PQ song song cách đều AC và BE, trừ P và Q.

□

BÀI 8. Cho góc vuông xOy cố định, điểm A cố định trên tia Oy, điểm B chuyển động trên tia Ox. Vẽ tam giác đều ABC (C và O khác phía đối với AB).

❶ Các điểm C nằm trên đường nào?

❷ Các trung điểm H của AC nằm trên đường nào?

❸ Các trung điểm K của BC nằm trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ (h.189). Vẽ $\triangle AOD$ đều (D nằm trong góc xOy) khi đó $OA = OD$ không đổi, mà $\widehat{AOB} = 60^\circ$ không đổi nên D là điểm cố định thuộc tập hợp điểm phải tìm.

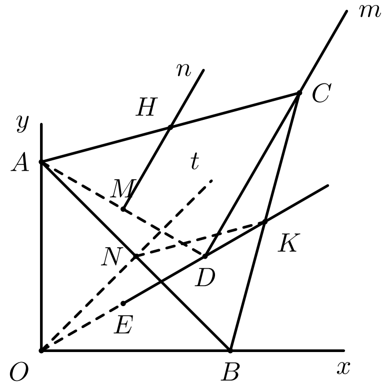
Xét $\triangle AOB$ và $\triangle ADC$ có

$$\begin{cases} AO = AD \\ \widehat{OAB} = \widehat{DAC} = 60^\circ - \widehat{BAD} \\ AB = AC \end{cases}.$$

Suy ra $\triangle AOB = \triangle ADC$(c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{ADC} = 90^\circ$

$\Rightarrow CD \perp AD$.

Các điểm C nằm trên tia $Dm \perp AD$ tại D và thuộc miền trong góc xOy.



Hình 189

❷ Gọi M là trung điểm của AD. Vì A và D là hai điểm cố định nên M là điểm cố định.

Xét $\triangle ACD$ có $MA = MD$, $HA = HC$, nên MH là đường trung bình của $\triangle ACD \Rightarrow MH \parallel CD$.

Vậy các điểm H nằm trên tia $Mn \parallel Dm$.

❸ Ta sẽ chứng minh rằng $\widehat{KOx} = 30^\circ$.

Gọi N là trung điểm của AB thì $NK = NA = NB = NO$, các tam giác BBO, KNO, KNA cân.

Gọi Nt là tia đối của tia NO, ta có $\widehat{KOx} = \widehat{BON} - \widehat{KON} = \frac{1}{2}(\widehat{BNt} - \widehat{KNt}) = \frac{1}{2}\widehat{BNK} = 30^\circ$.

Các điểm K nằm trên tia ED (E là trung điểm của OD).

□

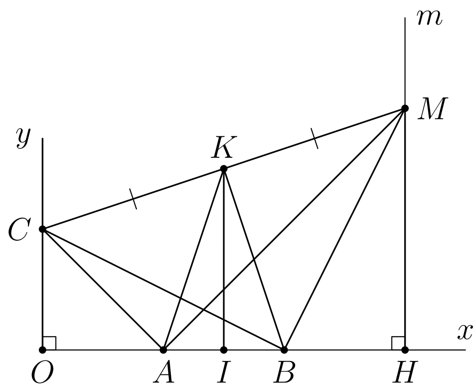
BÀI 9. Cho góc xOy cố định, các điểm A, B cố định thuộc tia Ox, điểm C chuyển động trên tia Oy. Đường vuông góc với CA tại A và đường vuông góc với CB tại B cắt nhau ở M. Các điểm M nằm trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

(h.190). Gọi K là trung điểm của CM.

Vẽ KI, $MH \perp Ox$ thì $OI = IH$. ta lại có $KA = KB$ (cùng bằng $\frac{CM}{2}$) $\Rightarrow IA = IB \Rightarrow I$ là trung điểm của AB và là điểm cố định.

Do đó H là điểm cố định ($OH = 2OI$). Các điểm M nằm trên tia $Hm \perp Ox$ tại H và thuộc miền trong góc xOy, trừ điểm H.



Hình 190

□

BÀI 10. Cho góc xOy cố định khác góc bẹt và một độ dài h.

❶ Các điểm M thuộc miền trong của của các góc có tổng các khoảng cách từ M đến Ox và đến Oy bằng h nằm trên đường nào?

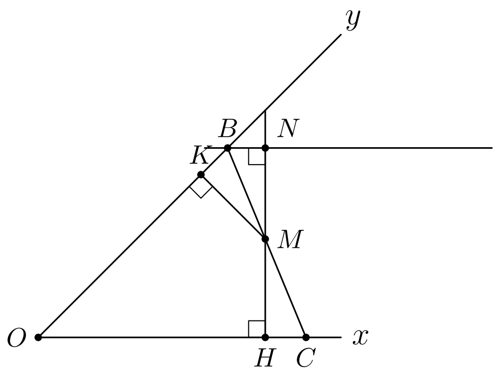
❷ Cũng hỏi như câu a) trong đó thay tổng bằng hiệu.

✍ **LỜI GIẢI.**

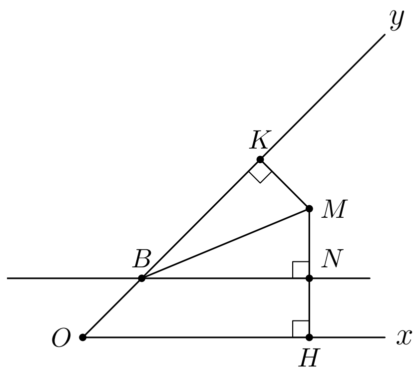
❶ (h.191). Gọi MH, MK thứ tự là khoảng cách từ M đến Ox, Oy. Để làm xuất hiện tổng $MH + MK$, trên tia đối của tia MH lấy N sao cho $MN = MK$ thì $HN = HM + MN = MH + MK = h$.

Qua N vẽ đường thẳng song song với Ox, cắt Oy ở B. Như vậy, BN là đường thẳng cố định. M cách đều hai cạnh của góc OBN cố định nên M thuộc tia phân giác của góc đó.

Giới hạn. M nằm trên đoạn thẳng BC.



Hình 191



Hình 192

❷ (h.192) Vẽ $Mh \perp Ox$, $MK \perp Oy$. Xét $MH > MK$. Trên tia MH lấy N sao cho $MN = MK$ thì $NH = h$. Qua N vẽ đường thẳng song song với Ox, cắt Oy ở B. Ta có đường thẳng BN cố định. M thuộc tia BM, tia phân giác của góc NBy.

Tương tự, với $MK > MH$, M thuộc tia Cn (các tia Bm, Cn vuông góc với BC).

□

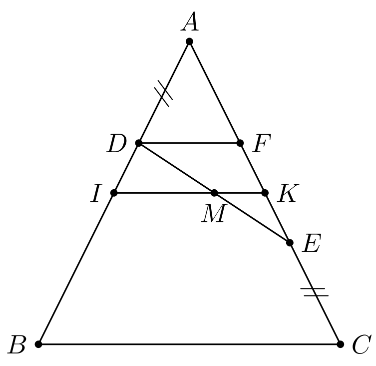
BÀI 11. Cho tam giác cân ABC cố định ($AB = AC$). Hai điểm D, E theo thứ tự chuyển động trên các cạnh bên AB, AC sao cho $AD = CE$. Các trung điểm M của DE nằm trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

(h.193) Qua M kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AB và AC ở I và K. Kẻ $DF \parallel BC$.

Dễ dàng chứng minh được $AF = AD = CE$, $FK = KE$ nên K là trung điểm cạnh AC. Tương tự, I là trung điểm cạnh AB.

Điểm M nằm trên đoạn thẳng IK nối các trung điểm của AB và AC.



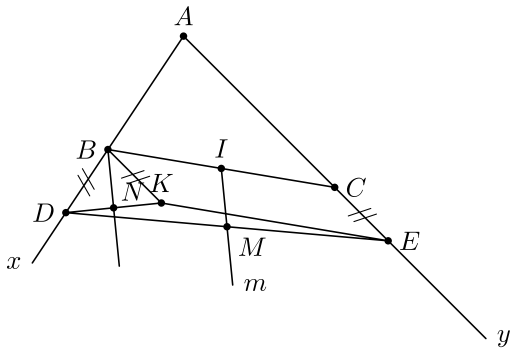
Hình 193

□

BÀI 12. Cho tam giác ABC cố định. Gọi Bx, Cy theo thứ tự là tia đối của các tia BA và CA. Các điểm D, E theo thứ tự chuyển động trên các tia Bx, Cy sao cho $BD = CE$. Các trung điểm M của DE nằm trên đường nào?

✍ LỜI GIẢI.

(h.194) *Dự đoán.* Trung điểm I của BC là một điểm của đường phải tìm, đường phải tìm có điểm vô tận. Ta dự đoán đường phải tìm là tia Im vẽ hình bình hành $ECBK$. Gọi N là trung điểm KD. Trước hết, ta thấy các điểm K nằm trên tia $BK \parallel Ay$.



Hình 194

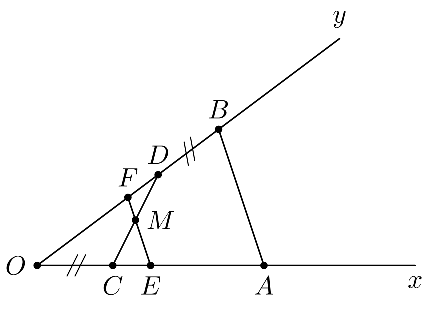
Tam giác BDK cân tại B, có BN là trung tuyến nên BN là tia phân giác của góc KBx. Điểm N nằm trên tia phân giác của góc KBx nên điểm M nằm trên tia $Im \parallel BN$. □

BÀI 13. ❶ Cho góc xOy khác góc bẹt. Điểm C chuyển động trên Ox, điểm D chuyển động trên Oy sao cho $OC + OD = a$. Các trung điểm M của CD nằm trên đường nào?

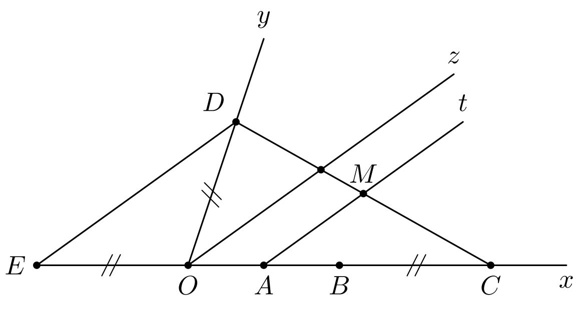
❷ Cũng hỏi như câu a), trong đó thay $OC + OD = a$ bởi $OC - OD = a$.

✍ LỜI GIẢI.

❶ (h.195) Khi D trùng với O thì C trùng A ($OA = a$), khi đó M trùng với E, trung điểm của OA. Khi C trùng với O thì D trùng B ($OB = a$), khi đó M trùng với F, trung điểm của OB. Như vậy $\triangle OAB$ cân cố định và $OC = BD$. Giải như bài 151, các điểm M nằm trên đoạn EF.



Hình 195



Hình 196

❷ (h.196) Khi D trùng với O thì C trùng B ($OB = a$), M ở vị trí A, trung điểm của OB. Khi D chạy xa vô tận trên Oy thì C chạy xa vô tận trên Ox, M cũng chạy xa vô tận. Ta dự đoán M chạy trên một tia gốc A.

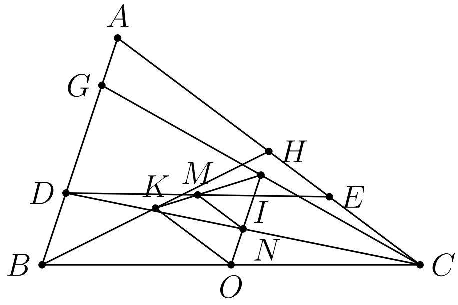
Ta có $OC - OD = a$, $OC - OB = a$ suy ra $OD = BC$. Trên tia đối của tia Ox lấy điểm E sao cho A là trung điểm của CE thì AM là đường trung bình của $\triangle CDE$, do đó $AM \parallel DE$. Chú ý rằng $\triangle ODE$ cân tại O nên nếu vẽ Oz là tia phân giác của góc xOy thì $DE \parallel Oz$, do đó $AM \parallel Oz$.

Các điểm M nằm trên tia At song song với tia phân giác của góc xOy (A thuộc Ox, $OA = \dfrac{a}{2}$). □

BÀI 14. Cho tam giác ABC cố định ($AB < AC$). Hai điểm D, E theo thứ tự chuyển động trên các cạnh BA, CA sao cho $BD + CE = a < AB$. Các trung điểm M của DE nằm trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

(h.197) Khi E trùng C thì D trùng G ($BG = a$), M ở vị trí I, trung điểm của CG. Khi D trùng B thì E trùng H ($CH = a$), M ở vị trí K, trung điểm của BH. Ta sẽ chứng minh rằng K, M, I thẳng hàng.



Hình 197

Thật vậy, gọi O là trung điểm của BC, N là trung điểm của CD. Ta có O, N, I thẳng hàng. Ta có $2OK = CH$, $2OI = BG$, $CH = BG = a$ nên $\triangle IOK$ cân. Ta có $2NM = CE$, $2NI = DG$, $CE = DG$ nên $\triangle INM$ cân.

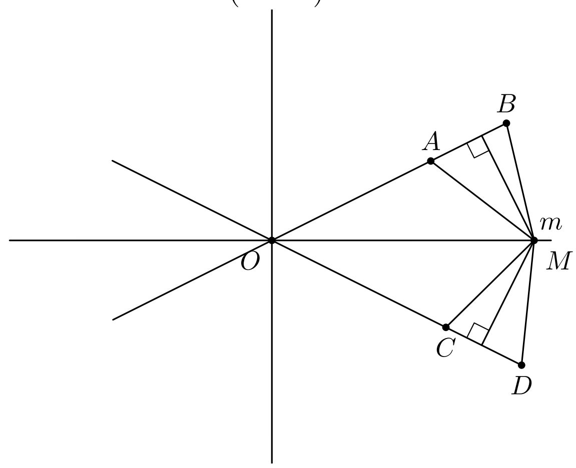
Các tam giác cân IOK, INM có góc ở đỉnh bằng nhau nên $\widehat{NIM} = \widehat{OIK}$, do đó I, M, K thẳng hàng. Các điểm M nằm trên đoạn thẳng KI. □

BÀI 15. Cho hai đoạn thẳng AB và CD cố định có độ dài bằng nhau. Các điểm M sao cho các tam giác MAB và MCD có diện tích bằng nhau nằm trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét ba trường hợp:

❶ Các đường thẳng AB và CD cắt nhau ở O (h.198)



Hình 198

Các điểm M nằm trên hai đường thẳng chứa các tia phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng, trừ giao điểm O của chúng.

❷ $AB \parallel CD$

Các điểm M nằm trên đường thẳng song song cách đều AB và CD.

❸ AB, CD thuộc cùng một đường thẳng a.

Các điểm M nằm trên toàn mặt phẳng, trừ đường thẳng a.

□

BÀI 16. Cho tứ giác $ABCD$, E là giao điểm của AB và CD, F là giao điểm của AD và BC, I và K theo thứ tự là trung điểm của BD và AC.

❶ Các điểm M thuộc miền trong của tứ giác và có tính chất

$$S_{\triangle MAB}+S_{\triangle MCD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

nằm trên đường nào?

❷ Gọi N là trung điểm của EF. Chứng minh rằng các điểm I, K, N thẳng hàng.

✍ **LỜI GIẢI.**

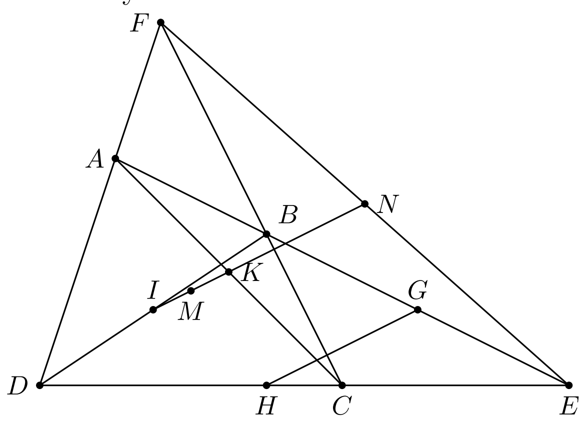
(h.199)

❶ Các điểm I, K thuộc đường phải tìm vì

$$S_{\triangle IAB}+S_{\triangle ICD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}+\frac{1}{2}S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

cũng vậy đối với K.

Ta sẽ chứng minh rằng M thuộc đoạn thẳng IK. "Dồn" các đoạn thẳng AB, CD về E. Trên tia EA lấy $EG=AB$, trên tia ED lấy $EH=CD$.



Hình 199

Ta có

$$S_{\triangle IHG}+S_{\triangle EHG}=S_{\triangle IHEG}=S_{\triangle IHE}+S_{\triangle IGE}=S_{\triangle ICD}+S_{\triangle IAB}=\frac{1}{2}S_{ABCD} \quad (1)$$

$$S_{\triangle KHG}+S_{\triangle EHG}=S_{KHEG}=S_{\triangle KHE}+S_{\triangle KGE}=S_{\triangle KCD}+S_{\triangle KAB}=\frac{1}{2}S_{ABCD} \quad (2)$$

$$S_{\triangle MHG}+S_{\triangle EHG}=S_{MHGE}=S_{\triangle MHE}+S_{\triangle MGE}=S_{\triangle MCD}+S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}S_{ABCD} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $S_{\triangle IGH}=S_{\triangle KGH}=S_{\triangle MGH}$. Do đó khoảng cách từ I, K, M đến HG như nhau nên I, K, M thuộc cùng một đường thẳng song song với HG. Các điểm M nằm trên phần đường thẳng IK thuộc miền tứ giác $ABCD$.

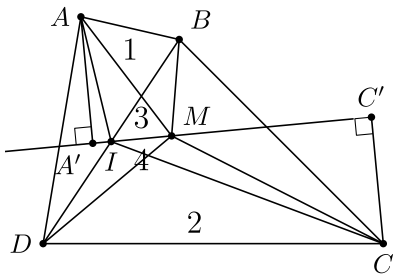
❷ Để chứng minh rằng N thẳng hàng với IK, ta sẽ chứng minh

$$S_{\triangle NHG}+S_{\triangle EHG}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

Thật vậy,

$$S_{\triangle NHG}+S_{\triangle EHG}=S_{\triangle NHE}-S_{\triangle NGE}=S_{\triangle NCD}-S_{\triangle NAB}=\frac{1}{2}\left(S_{\triangle FCD}-S_{\triangle FAB}\right)=\frac{1}{2}S_{ABCD}\quad(4)$$

Chú ý: Cách khác giải câu a) (h.200).



Hình 200

Ta thấy, trung điểm I của BD cũng là một điểm thuộc đường phải tìm. Ta có,

$$S_{\triangle AMB}+S_{\triangle CMD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

mà

$$S_{\triangle AIB}+S_{\triangle CID}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

nên

$$S_{\triangle AMB}+S_{CMD}=S_{\triangle AIB}+S_{\triangle CID}$$

Trừ đi S_1+S_2, ta được

$$S_{\triangle PBM}+S_{\triangle CQM}=S_{\triangle API}+S_{D\triangle DQI}$$

(P là giao điểm của AM và BD, Q là giao điểm của DM và CI).

Cộng thêm S_3+S_4, ta được

$$S_{\triangle BIM}+S_{\triangle CIM}=S_{\triangle AIM}+S_{\triangle DIM}$$

Ta lại có $S_{\triangle BIM}=S_{\triangle DIM}$ nên $S_{\triangle CIM}=S_{\triangle AIM}$. Suy ra đường cao CC' bằng đường cao AA'.

Như vậy, $AA'CC'$ là hình bình hành. Do đó $A'C'$ đi qua trung điểm của AC, tức là IM đi qua trung điểm của AC.

Vậy M nằm trên đường thẳng đi qua trung điểm của hai đường chéo tứ giác $ABCD$ (phần thuộc miền tứ giác).

□

BÀI 17. Cho hình chữ nhật $ABCD$ cố định. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$.

b) $MA+MC=MB+MD$.

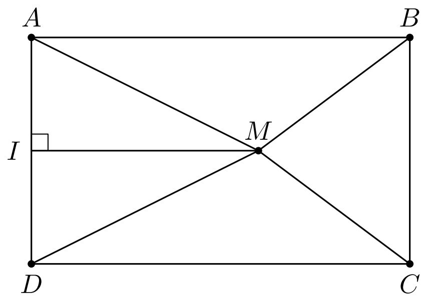
✍ **LỜI GIẢI.**

(h.201)

❶ Đẳng thức

$$MA^2+MC^2=MB^2+MD^2\quad(1)$$

luôn luôn đúng. Tập hợp phải tìm là toàn mặt phẳng.



Hình 201

❷

$$\begin{aligned} MA + MC &= MB + MD & (2)\\ \Rightarrow (MA+MC)^2 &= (MB+MD)^2 \\ \Rightarrow MA^2 + MC^2 + 2MA\cdot MC &= MB^2 + MD^2 + 2MB\cdot MD \\ \Rightarrow 2MA\cdot MC &= 2MB\cdot MD \\ \Rightarrow MA\cdot MC &= MB\cdot MD & (3)\end{aligned}$$

Từ (1), (3) suy ra $(MA - MC)^2 = (MB - MD)^2$.
Do đó

$$MA - MC = MB - MD \qquad (4)$$

hoặc

$$MA - MC = MD - MB \qquad (5)$$

Từ (4) và (2) suy ra $MA = MB$, do đó M thuộc đường trung trực của AB.
Từ (5) và (2) suy ra $MA = MD$, do đó M thuộc đường trung trực của AD.
Vậy tập hợp các điểm M phải tìm là hai trục đối xứng của hình chữ nhật.

□

BÀI 2 SỬ DỤNG CÔNG THỨC DIỆN TÍCH ĐỂ THIẾT LẬP QUAN HỆ VỀ ĐỘ DÀI CỦA CÁC ĐOẠN THẲNG

Các công thức diện tích cho ta các quan hệ về độ dài của các đoạn thẳng, chúng rất có ích để giải nhiều bài toán.

A CÁC VÍ DỤ

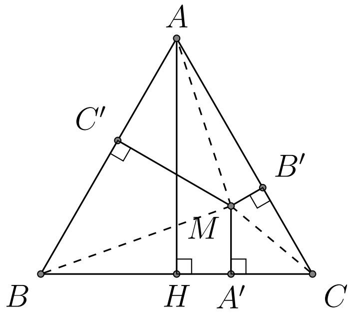
VÍ DỤ 1. Cho tam giác đều ABC.

1. Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc miền trong của tam giác ABC thì tổng các khoảng cách từ M đến ba cạnh của tam giác bằng chiều cao của tam giác.
2. Quan hệ trên thay đổi như thế nào nếu điểm M thuộc miền ngoài của tam giác?

✍ **LỜI GIẢI.**

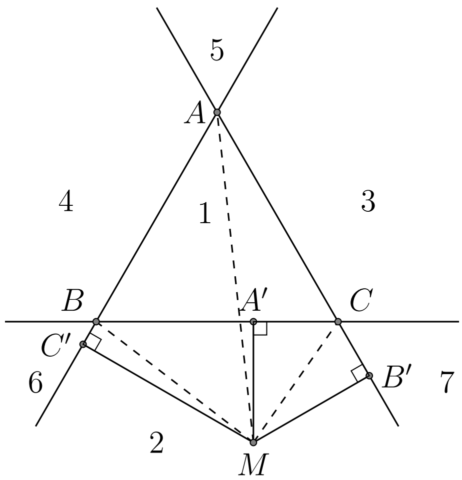
Gọi a và h lần lượt là cạnh và chiều cao của tam giác ABC, MA', MB', MC' là các khoảng cách từ M đến BC, AC, AB.

1. Nếu M thuộc miền trong tam giác thì



$$\begin{aligned}
&S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = S_{ABC}\\
\Rightarrow\ &\frac{1}{2}BC \cdot MA' + \frac{1}{2}AC \cdot MB' + \frac{1}{2}AB \cdot MC' = \frac{1}{2}BC \cdot AH\\
\Rightarrow\ &\frac{a}{2}(MA' + MB' + MC') = \frac{a}{2} \cdot h\\
\Rightarrow\ &MA' + MB' + MC' = h.
\end{aligned}$$

b) Nếu M thuộc miền ngoài tam giác ABC và thuộc miền trong góc A (miền 2) thì



$$\begin{aligned}
&S_{MAC} + S_{MAB} - S_{MBC} = S_{ABC}\\
\Rightarrow\ &\frac{a}{2} \cdot MB' + \frac{a}{2} \cdot MC' - \frac{a}{2} \cdot MA' = \frac{a}{2} \cdot h\\
\Rightarrow\ &MB' + MC' - MA' = h.
\end{aligned}$$

Tương tự

— Nếu M thuộc miền ngoài tam giác ABC và thuộc miền trong góc B (miền 3) thì

$$MA' + MC' - MB' = h.$$

— Nếu M thuộc miền ngoài tam giác ABC và thuộc miền trong góc C (miền 4) thì

$$MA' + MB' - MC' = h.$$

— Nếu M thuộc miền trong góc đối đỉnh với góc A (miền 5) thì

$$MA' - MB' - MC' = h.$$

— Nếu M thuộc miền trong góc đối đỉnh với góc B (miền 6) thì

$$MB' - MA' - MC' = h.$$

— Nếu M thuộc miền trong góc đối đỉnh với góc C (miền 7) thì

$$MC' - MA' - MB' = h.$$

□

VÍ DỤ 2. Các điểm E, F nằm trên các cạnh AB, BC của hình bình hành $ABCD$ sao cho $AF = CE$. Gọi I là giao điểm của AF, CE. Chứng minh rằng ID là tia phân giác của góc AIC.

✍ **LỜI GIẢI.**

Kẻ $DH \perp IA$ tại H, $DK \perp IC$ tại K.

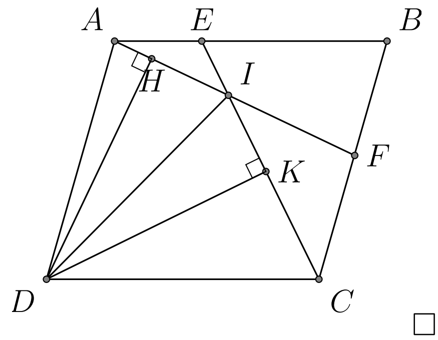
Ta có $S_{AFD} = S_{CED} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}DH \cdot AF = \dfrac{1}{2}DK \cdot CE$

$\Rightarrow DH = DK$ (Vì $AF = CE$).

$\Rightarrow D$ thuộc tia phân giác của góc AIC.

Vậy ID là tia phân giác của góc AIC.



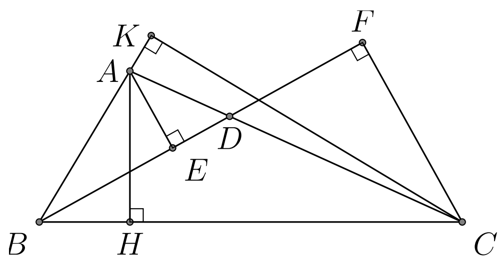
□

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} \geq 90^\circ$, D là điểm nằm giữa A và C. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ A và từ C đến BD lớn hơn đường cao kẻ từ A và nhỏ hơn đường cao kẻ từ C của tam giác ABC.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi AH, CK là các đường cao của tam giác ABC. Kẻ AE và CF vuông góc với BD. Đặt $S_{ABC} = S$. Ta có $AE = \dfrac{2S_{ABD}}{BD}$, $CF = \dfrac{2S_{CBD}}{BD}$ nên

$$AE + CF = \frac{2S}{BD}.$$



Ta lại có $AH = \dfrac{2S}{BC}$, $CK = \dfrac{2S}{BA}$.

Do $\widehat{A} \geq 90^\circ$ nên $BA < BD < BC$, do đó $AH < AE + CF < CK$. □

B BÀI TẬP

BÀI 1. Có tam giác nào mà độ dài ba đường cao bằng 3 cm, 4 cm, 7 cm không?

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử tồn tại tam giác có độ dài ba cạnh lần lượt là a, b, c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Khi đó, ta có $3a = 4b = 7c$ (cùng bằng hai lần diện tích tam giác).

Ta có $3a = 4b = 7c \Leftrightarrow \dfrac{a}{\frac{1}{3}} = \dfrac{b}{\frac{1}{4}} = \dfrac{c}{\frac{1}{7}} = \dfrac{a+b+c}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}} = \dfrac{84P}{61}$.
Suy ra $a = \dfrac{28P}{61}$, $b = \dfrac{21P}{61}$, $c = \dfrac{12P}{61}$.
Do đó, ta có $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$ hay a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.
Vậy tồn tại tam giác mà độ dài ba đường cao bằng 3 cm, 4 cm, 7 cm. □

BÀI 2. Độ dài hai cạnh của một tam giác bằng 6 cm và 4 cm, nửa tổng các chiều cao ứng với hai cạnh ấy bằng chiều cao ứng với cạnh thứ ba. Tính độ dài cạnh thứ ba.

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử tam giác có độ dài ba cạnh lần lượt là a, $b = 6$ cm, $c = 4$ cm và h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài ba đường cao tương ứng của tam giác. Khi đó, ta có

$$ah_a = bh_b = ch_c \Rightarrow \frac{a(h_b + h_c)}{2} = 6h_b = 4h_c \Rightarrow \frac{h_b + h_c}{\frac{2}{a}} = \frac{h_b}{\frac{1}{6}} = \frac{h_c}{\frac{1}{4}}.$$

Theo tích chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có $\dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4} \Rightarrow a = 4{,}8$ cm.
Vậy độ dài cạnh thứ ba của tam giác bằng 4,8 cm. □

BÀI 3. Chứng minh rằng một tam giác là tam giác vuông nếu các chiều cao h_a, h_b, h_c của nó thỏa mãn điều kiện $\left(\dfrac{h_a}{h_b}\right)^2 + \left(\dfrac{h_a}{h_c}\right)^2 = 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi S là diện tích của tam giác, ta có

$$\left(\frac{h_a}{h_b}\right)^2 + \left(\frac{h_a}{h_c}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{\frac{2S}{a}}{\frac{2S}{b}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{2S}{a}}{\frac{2S}{c}}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Suy ra tam giác đã cho là tam giác vuông. □

BÀI 4. Tính các cạnh của một tam giác có ba đường cao bằng 12 cm, 15 cm, 20 cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử tam giác ABC có độ dài ba đường cao là $h_a = 12$ cm, $h_b = 15$ cm, $h_c = 20$ cm tương ứng với ba cạnh a, b, c. Khi đó, ta có

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \left(\frac{h_a}{h_b}\right)^2 + \left(\frac{h_a}{h_c}\right)^2 = \left(\frac{12}{15}\right)^2 + \left(\frac{12}{20}\right)^2 = 1.$$

$\Rightarrow b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại A.
Do đó, ta có $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm và $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$ cm. □

BÀI 5. Gọi h_a, h_b, h_c là ba đường cao của một tam giác, chứng minh rằng $\dfrac{1}{h_a} < \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi a, b, c là ba cạnh tương ứng với các đường cao h_a, h_b, h_c và S là diện tích tam giác. Ta có

$$a < b + c \Rightarrow \frac{2S}{h_a} < \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c} \Rightarrow \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

□

BÀI 6. Tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c, các chiều cao tương ứng là h_a, h_b, h_c. Biết rằng $a + h_a = b + h_b = c + h_c$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét $a + h_a = b + h_b$, ta có

$$\begin{aligned} & a - b = h_b - h_a = \frac{2S}{b} - \frac{2S}{a} = 2S\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = 2S \cdot \frac{a-b}{ab} \\ \Rightarrow\ & (a-b)\left(1 - \frac{2S}{ab}\right) = 0 \\ \Rightarrow\ & a = b \text{ hoặc } S = \frac{1}{2}ab. \end{aligned}$$

Suy ra tam giác ABC cân tại C hoặc vuông tại C. (1)

Tương tự, tam giác ABC cân tại B hoặc vuông tại B. (2)

tam giác ABC cân tại A hoặc vuông tại A. (3)

Xảy ra cả (1), (2) & (3) khi và chỉ khi tam giác ABC đều. □

BÀI 7. Cho điểm O thuộc miền trong tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh của tam giác ABC theo thứ tự ở A', B', C'. Chứng minh rằng:

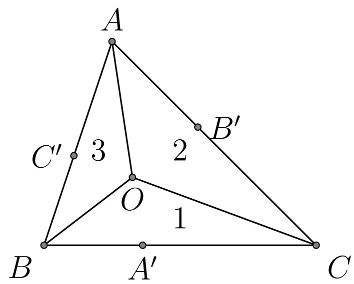
❶ $\dfrac{OA'}{AA'} + \dfrac{OB'}{BB'} + \dfrac{OC'}{CC'} = 1$;

❷ $\dfrac{OA}{AA'} + \dfrac{OB}{BB'} + \dfrac{OC}{CC'} = 1$ (bài toán của Giec-gôn, nhà toán học Pháp);

❸ $M = \dfrac{OA}{OA'} + \dfrac{OB}{OB'} + \dfrac{OC}{OC'} \geq 6$. Tìm vị trí của O để tổng M có giá trị nhỏ nhất;

❹ $N = \dfrac{OA}{OA'} \cdot \dfrac{OB}{OB'} \cdot \dfrac{OC}{OC'} \geq 8$. Tìm vị trí của O để tích N có giá trị nhỏ nhất

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi S là diện tích tam giác ABC, kí hiệu S_1, S_2, S_3 như hình vẽ. Ta có

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{S_2}{S_{OA'C}} = \frac{S_3}{S_{OA'B}} = \frac{S_2 + S_3}{S_1}, \quad (1)$$

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{S_{OA'C}}{S_{AA'C}} = \frac{S_{OA'B}}{S_{AA'B}} = \frac{S_{OA'C} + S_{OA'B}}{S_{AA'C} + S_{AA'B}} = \frac{S_1}{S}. \quad (2)$$

Từ (1) & (2) suy ra $\dfrac{OA'}{AA'} = \dfrac{S_2 + S_3}{S}$.

❶ Ta có $\dfrac{OA'}{AA'} + \dfrac{OB'}{BB'} + \dfrac{OC'}{CC'} = \dfrac{S_1}{S} + \dfrac{S_2}{S} + \dfrac{S_3}{S} = 1$.

❷ Ta có $\dfrac{OA}{AA'} + \dfrac{OB}{BB'} + \dfrac{OC}{CC'} = \dfrac{S_2 + S_3}{S} + \dfrac{S_3 + S_1}{S} + \dfrac{S_1 + S_2}{S} = 2$.

❸ Ta có
$$\begin{aligned} M &= \frac{OA}{OA'} + \frac{OB}{OB'} + \frac{OC}{OC'} \\ &= \frac{S_2 + S_3}{S_1} + \frac{S_3 + S_1}{S_2} + \frac{S_1 + S_2}{S_3} \\ &= \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}\right) + \left(\frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2}\right) + \left(\frac{S_3}{S_1} + \frac{S_1}{S_3}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi O là trọng tâm tam giác ABC.

❹ Ta có
$$\begin{aligned} N &= \frac{OA}{OA'} \cdot \frac{OB}{OB'} \cdot \frac{OC}{OC'} \\ &= \frac{(S_2 + S_3)(S_3 + S_1)(S_1 + S_2)}{S_1 S_2 S_3} \\ \Rightarrow N^2 &= \frac{(S_2 + S_3)^2(S_3 + S_1)^2(S_1 + S_2)^2}{(S_1 S_2 S_3)^2} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{4S_2S_3 \cdot 4S_1S_3 \cdot 4S_1S_2}{(S_1S_2S_3)^2} = 64.$$

Suy ra $N \geq 8$.

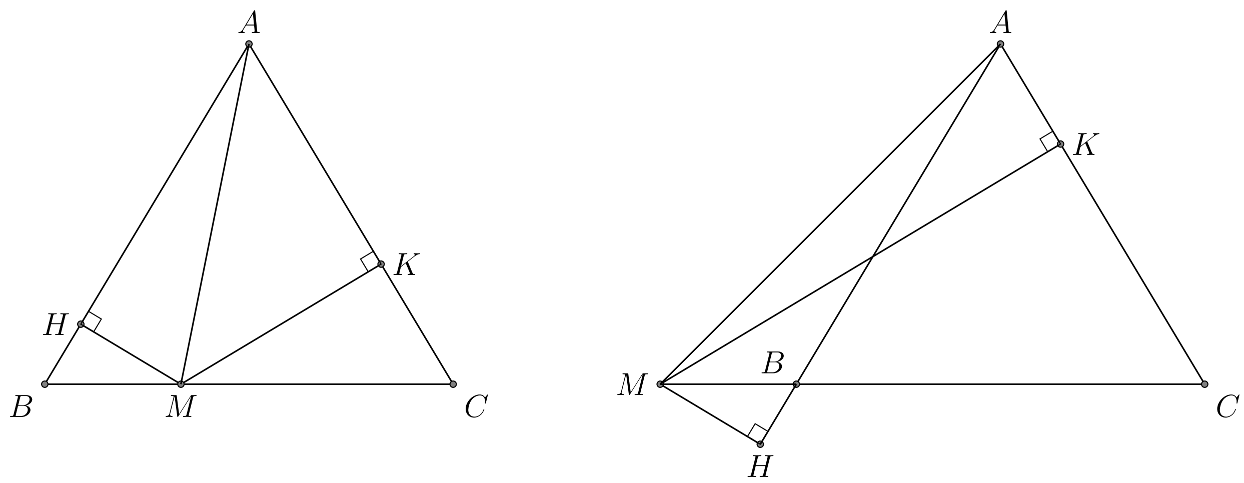
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi O là trọng tâm tam giác ABC.

□

BÀI 8. ❶ Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ điểm M nằm trên đáy một tam giác cân đến hai cạnh bên không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên cạnh đáy;

❷ Kết quả trên có gì thay đổi nếu điểm M thuộc đường thẳng chứa cạnh đáy nhưng không thuộc cạnh đáy?

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi a là độ dài cạnh bên và h là độ dài đường cao ứng với cạnh bên của tam giác ABC cân tại A. Kẻ $MH \perp AB$ tại H, $MK \perp AC$ tại K.

❶ Khi M nằm trong đoạn BC, ta có

$$S_{AMB} + S_{AMC} = S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}a \cdot MH + \frac{1}{2}a \cdot MK = \frac{1}{2}ah \Leftrightarrow MH + MK = h.$$

Vậy tổng các khoảng cách từ M đến hai cạnh bên luôn bằng chiều cao ứng với cạnh bên.

❷ Khi M nằm ngoài đoạn BC, ta có

$$S_{AMC} - S_{AMB} = S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}a \cdot MK - \frac{1}{2}a \cdot MH = \frac{1}{2}ah \Leftrightarrow MK - MH = h.$$

Vậy hiệu các khoảng cách từ M đến hai cạnh bên luôn bằng chiều cao ứng với cạnh bên.

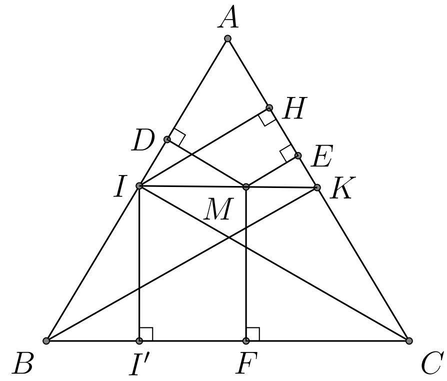
□

BÀI 9. Cho tam giác ABC cân tại A. Tìm tập hợp các điểm M thuộc miền trong tam giác hoặc nằm trên cạnh của tam giác, sao cho khoảng cách từ điểm M đến BC bằng tổng các khoảng cách từ điểm M đến hai cạnh kia.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi MD, ME, MF là khoảng cách từ điểm M đến AB, AC, BC. Theo đề bài

$$MD + ME = MF. \quad (1)$$



Qua M vẽ $IK \parallel BC$. Vẽ $IH \perp AC$, $II' \perp BC$. Ta có

$$MD + ME = IH, \quad (2)$$
$$MF = II'. \quad (3)$$

Từ (1), (2) & (3) suy ra $IH = II' \Rightarrow CI$ là đường phân giác của tam giác ABC. Tương tự đối với BK.

Vậy tập hợp các điểm M là đoạn thẳng IK nối chân hai đường phân giác BK, CI. □

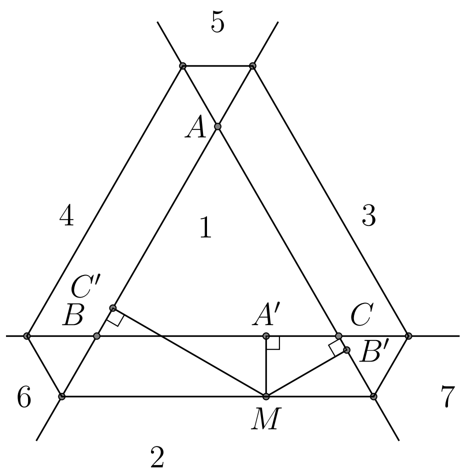
BÀI 10. Cho tam giác đều ABC cố định có chiều cao h. Tìm tập hợp các điểm M có tổng các khoảng cách đến ba cạnh của tam giác bằng độ dài m không đổi ($m > h$).

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét điểm M thuộc từng miền như ở ví dụ 1, tập hợp phải tìm là các cạnh của một lục giác (như hình vẽ).

Chẳng hạn với M thuộc miền 2, kẻ $MA' \perp BC$, $MB' \perp AB$, $MC' \perp AC$, ta có

$$\begin{aligned} & MA' + MB' + MC' = m \\ \Rightarrow\ & MB' + MC' - MA' + 2MA' = m \\ \Rightarrow\ & h + 2MA' = m \text{ (do } MB' + MC' - MA' = h) \\ \Rightarrow\ & MA' = \frac{m-h}{2}. \end{aligned}$$



□

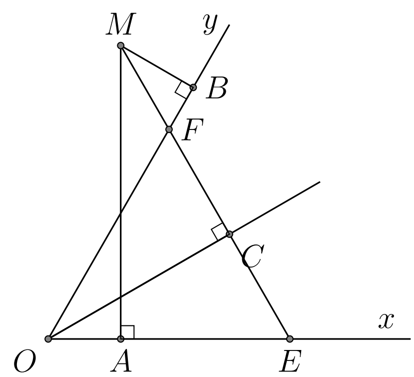
BÀI 11. C là một điểm thuộc tia phân giác của góc xOy có số đo bằng 60°, M là điểm bất kì nằm trên đường vuông góc với OC tại C và thuộc miền ngoài của góc xOy. Gọi MA, MB theo thứ tự là khoảng cách từ M đến Ox, Oy. Tính độ dài OC theo MA, MB.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng MC với các tia Ox, Oy (hình vẽ). Khi đó, tam giác OEF đều.

Gọi a là độ dài các cạnh của tam giác OEF. Ta có

$$\begin{aligned} & S_{OEF} = S_{OME} - S_{OMF} \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{2}a \cdot OC = \frac{1}{2}a \cdot MA - \frac{1}{2}a \cdot MB \\ \Rightarrow\ & OC = MA - MB. \end{aligned}$$



Vậy $OC = |MA - MB|$.

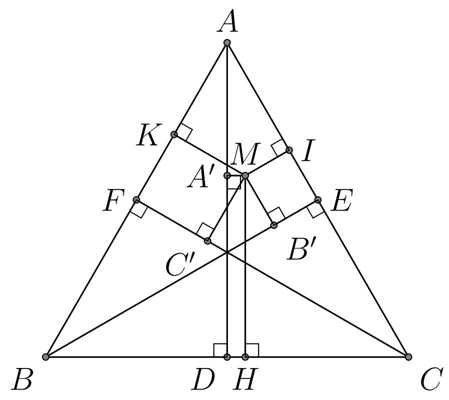
□

BÀI 12. Cho tam giác đều ABC, các đường cao AD, BE, CF. Gọi A', B', C' là hình chiếu của điểm M (nằm bên trong tam giác ABC) trên AD, BE, CF. Chứng minh rằng khi điểm M thay đổi vị trí trong tam giác ABC thì:

a) Tổng $A'D + B'E + C'F$ không đổi;

b) Tổng $AA' + BB' + CC'$ không đổi.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Kẻ $MH \perp BC$, $MI \perp AC$, $MK \perp AB$. Khi đó, ta có $MH = A'D$, $MI = B'E$, $MK = C'F$.
Gọi h là độ dài đường cao của tam giác đều ABC. Theo ví dụ 1, ta có

$$\begin{aligned} & MH + MI + MK = h \\ \Rightarrow\ & A'D + B'E + C'F = h. \end{aligned}$$

Vậy tổng $A'D + B'E + C'F$ không đổi.

❷ Theo kết quả câu a), ta có

$$\begin{aligned} AA' + BB' + CC' &= AD - A'D + BE - B'E + CF - C'F \\ &= (AD + BE + CF) - (A'D + B'E + C'F) \\ &= 3h - h = 2h. \end{aligned}$$

Vậy tổng $AA' + BB' + CC'$ không đổi.

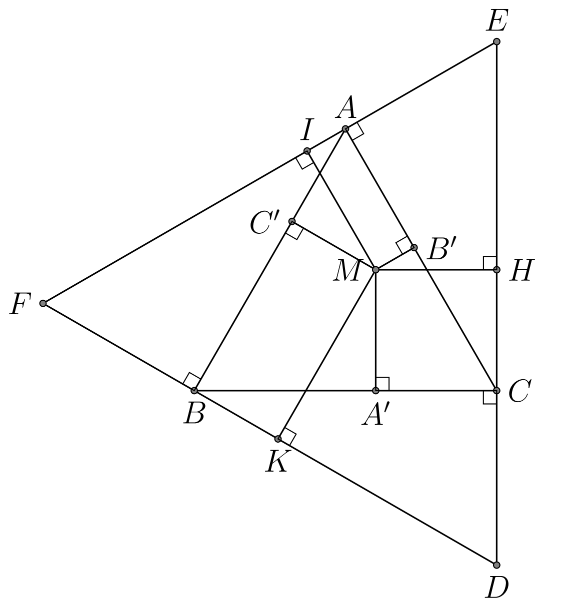
□

BÀI 13. Cho tam giác đều ABC, A', B', C' theo thứ tự là hình chiếu của điểm M (nằm bên trong tam giác ABC) trên BC, AC, AB. Các đường thẳng vuông góc với AB tại B, vuông góc với BC tại C, vuông góc với CA tại A cắt nhau ở D, E, F. Chứng minh rằng:

❶ Tam giác DEF là tam giác đều;

❷ Tổng $AB' + BC' + CA'$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trong tam giác ABC.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Ta có

$$\begin{aligned} &\widehat{FAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 180^\circ \\ \Rightarrow\ &\widehat{FAB} + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ \\ \Rightarrow\ &\widehat{FAB} = 30^\circ \\ \Rightarrow\ &\widehat{AFB} = 60^\circ. \end{aligned}$$

Tương tự, ta có $\widehat{AEC} = \widehat{CDB} = 60^\circ$.

$\Rightarrow$ Tam giác DEF là tam giác đều.

❷ Kẻ $MH \perp DE$, $MI \perp EF$, $MK \perp FD$. Khi đó, ta có $MH = CA'$, $MI = AB'$, $MK = BC'$.

Gọi h là độ dài đường cao của tam giác đều DEF.

Theo ví dụ 1, ta có

$$\begin{aligned} &MH + MI + MK = h \\ \Rightarrow\ &AB' + BC' + CA' = h. \end{aligned}$$

Vậy tổng $AB' + BC' + CA'$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trong tam giác ABC.

□

CHƯƠNG 4

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

BÀI 1 ĐỊNH LÝ TA-LÉT

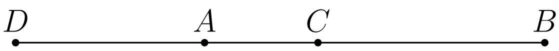
A LÍ THUYẾT

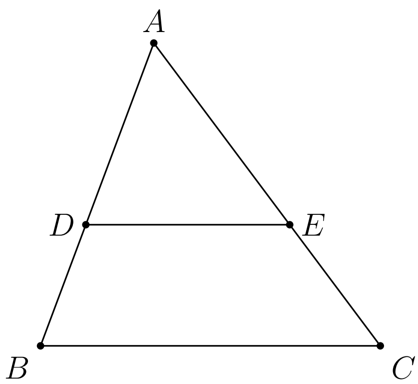
Chương III bắt đầu bằng việc nghiên cứu *tỉ số của hai đoạn thẳng*, đó là tỉ số các độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

Cho đoạn thẳng AB và một tỉ số $\dfrac{m}{n} > 0$, tồn tại duy nhất một điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{m}{n}$. Điểm C gọi là *điểm chia trong* đoạn thẳng AB theo tỉ số $\dfrac{m}{n}$ (khi đó điểm C chia đoạn thẳng BA theo tỉ số $\dfrac{n}{m}$).

Cho đoạn thẳng AB và một tỉ số $\dfrac{m}{n}$, $\left(\dfrac{m}{n} > 0, \dfrac{m}{n} \neq 1\right)$, tồn tại duy nhất một điểm D thuộc đường thẳng AB nhưng nằm ngoài đoạn thẳng AB sao cho $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{m}{n}$. Điểm D gọi là *điểm chia ngoài* đoạn thẳng AB theo tỉ số $\dfrac{m}{n}$ (khi đó điểm D chia ngoài đoạn thẳng BA theo tỉ số $\dfrac{n}{m}$).

Trên hình 1, điểm C chia trong đoạn thẳng AB theo tỉ số $1 : 2$, điểm D chia ngoài AB theo tỉ số $1 : 2$.





Nếu $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$ thì ta có các *cặp đoạn thẳng tỉ lệ* : cặp đoạn thẳng AB và CD tỉ lệ với cặp đoạn thẳng $A'B'$ và $C'D'$. *Định lí Ta-lét* cho ta các cặp đoạn thẳng tỉ lệ: Đường thẳng song song với một cạnh của tam giác thì định ra trên hai đường thẳng chứa hai cạnh kia các cặp đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ (do đó tạo với các đường thẳng chứa hai cạnh kia một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác ban đầu).

$$DE \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$$

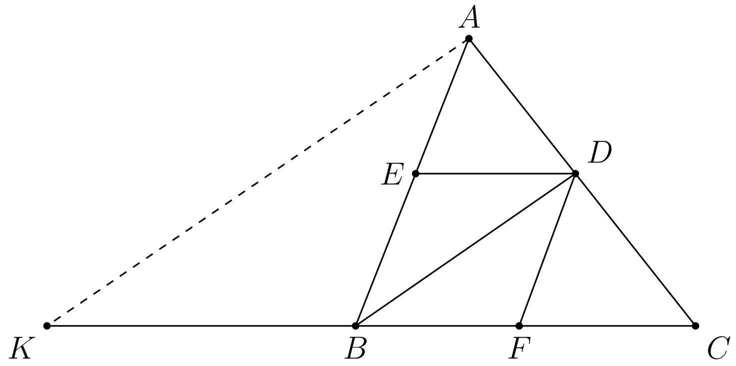
VÍ DỤ 1. Cho hình thoi $BEDF$ nội tiếp tam giác ABC (E thuộc AB, D thuộc AC, F thuộc BC).

❶ Tính cạnh hình thoi biết $AB = 4$cm, $BC = 6$cm. Tổng quát với $AB = c$, $BC = a$.

❷ Chứng minh rằng $BD < \dfrac{2ac}{a+c}$ với $AB = c$, $BC = a$.

> ❸ Tính độ dài AB, BC, biết $AD = m$, $DC = n$, cạnh hình thoi bằng d.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Gọi cạnh hình thoi là x. Áp dụng định lí Ta-lét vào $\triangle ABC$ với $ED \parallel BC$, ta có:

$$\frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{4-x}{4} \Rightarrow x = 2,4\text{cm}.$$

Tổng quát, $x = \dfrac{ac}{a+c}$.

❷ Trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho $BK = BA$. Ta có $\triangle ABK$ cân, từ đó $BD \parallel KA$. Áp dụng định lí Ta-lét vào $\triangle CAK$ với $BD \parallel KA$ ta có:

$$\frac{BD}{AK} = \frac{CB}{CK} \Rightarrow \frac{BD}{AK} = \frac{a}{a+c}. \quad (1)$$

Trong $\triangle ABK$, ta có:

$$AK < AB + BK = c + c = 2c \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$BD < \frac{a}{a+c} \cdot 2c = \frac{2ac}{a+c}.$$

❸ Áp dụng định lí Ta-lét vào $\triangle ABC$ với $ED \parallel BC$ ta có:

$$\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{d}{BC} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow BC = \frac{d(m+n)}{m}.$$

Tương tự $AB = \dfrac{d(m+n)}{n}$.

⚠ *Chú ý: Từ kết quả của câu b, ta có:*

$$\frac{1}{BD} > \frac{a+c}{2ac} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right).$$

Do đó, nếu gọi AM, CN là các đường phân giác của $\triangle ABC$ và $AC = b$ thì

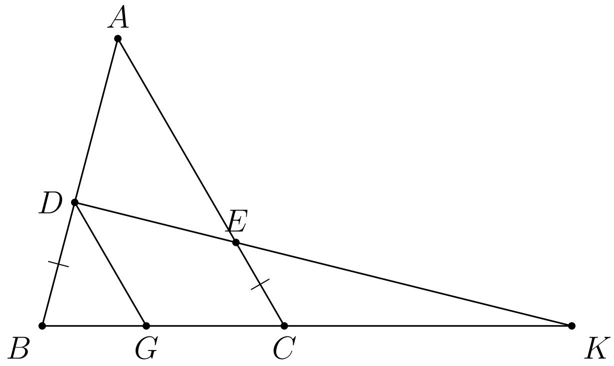
$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{BD} + \frac{1}{CN} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

□

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC ($AC > AB$). Lấy các điểm D, E tùy ý theo thứ tự nằm trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = CE$. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng DE, BC. Chứng minh rằng tỉ số $\dfrac{KE}{KD}$ không phụ thuộc vào cách chọn các điểm D và E.

✍ **LỜI GIẢI.**

Cách 1:



Để làm xuất hiện một tỉ số bằng $\dfrac{KE}{KD}$, ta vẽ qua D đường thẳng $DG \parallel AC$. Theo định lí Ta-lét, ta có:

$$\frac{KE}{KD} = \frac{KC}{KG}, \frac{KE}{KD} = \frac{EC}{DG}.$$

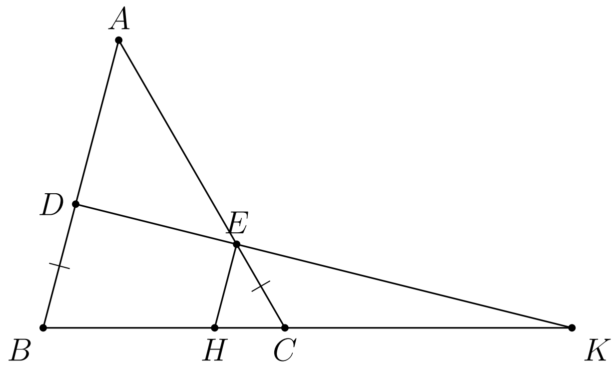
Trong hai tỉ số trên, ta chú ý đến tỉ số sau, vì độ dài EC được nêu trong giả thiết ($EC = BD$).

Ta thay $\dfrac{EC}{DG}$ bằng $\dfrac{BD}{DG}$ và tỉ số này bằng $\dfrac{BA}{AC}$ (vì $DG \parallel AC$).

Cách 2:

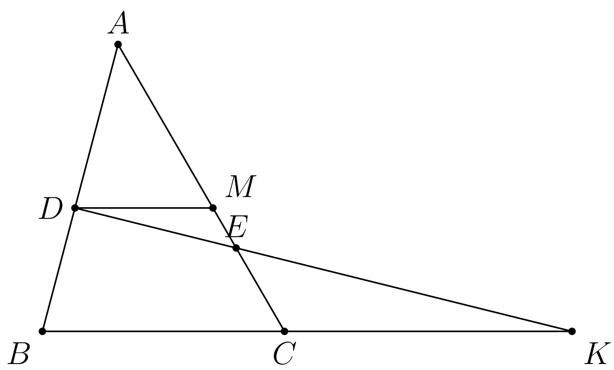
Vẽ $EH \parallel AB$ ta có:

$$\frac{KE}{KD} = \frac{EH}{BD} = \frac{EH}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$



Cách 3: Vẽ $DM \parallel BC$. Ta có:

$$\frac{KE}{KD} = \frac{CE}{CM} = \frac{BD}{CM} = \frac{AD}{AM} = \frac{AB}{AC}.$$



□

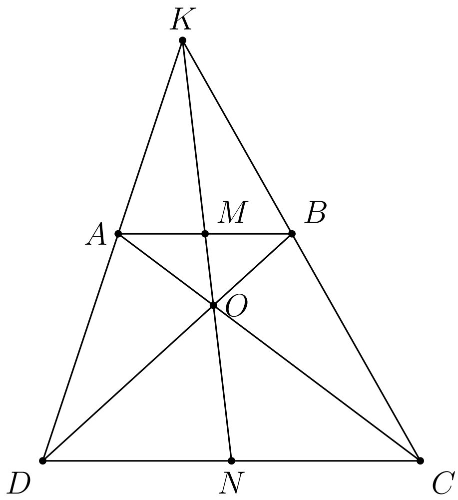
Nhận xét: Trong các bài tập vận dụng định lí Ta-lét, nhiều khi ta cần vẽ thêm một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.

Đây là một cách vẽ được phụ hay dùng, vì nhờ đó mà tạo thêm được các cặp đoạn thẳng tỉ lệ.

VÍ DỤ 3. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $AB < CD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo, K là giao điểm của AD và BC. Đường thẳng KO cắt AB, CD theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{MA}{ND} = \dfrac{MB}{NC}$;	b) $\dfrac{MA}{NC} = \dfrac{MB}{ND}$;	c) $MA = MB; NC = ND$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Áp dụng định lí Ta-lét vào các tam giác KDN, KNC với $AB \parallel CD$, ta có:

$$\frac{MA}{ND} = \frac{KM}{KN}, \frac{MB}{NC} = \frac{KM}{KN}, \text{ suy ra } \frac{MA}{ND} = \frac{MB}{NC} \quad (1).$$

❷ Áp dụng định lí Ta-lét vào các tam giác ONC, OND với $AB \parallel CD$, ta có:

$$\frac{MA}{NC} = \frac{OM}{ON}, \frac{MB}{ND} = \frac{OM}{ON}, \text{ suy ra } \frac{MA}{NC} = \frac{MB}{ND} \quad (2).$$

❸ Nhân từng vế (1) với (2) ta được:

$$\frac{MA^2}{ND \cdot NC} = \frac{MB^2}{NC \cdot ND}, \text{ suy ra } MA^2 = MB^2 \text{ tức là } MA = MB.$$

Từ đó $NC = ND$.

□

Nhận xét: Từ ví dụ trên, ta suy ra:

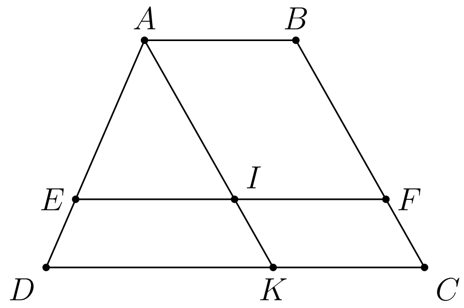
Trong hình thang có hai cạnh đáy không bằng nhau, đường thẳng đi qua giao điểm của các đường chéo và đi qua giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên thì đi qua trung điểm của hai cạnh đáy.

Tính chất này có nhiều ứng dụng quan trọng, được gọi là *bổ đề hình thang.*

B BÀI TẬP

BÀI 1. Trong hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB = 28$cm, $CD = 70$cm, $AD = 35$cm, vẽ một đường thẳng song song với hai cạnh đáy, cắt AD, BC theo thứ tự ở E và F. Tính độ dài EF biết rằng $DE = 10$cm.

✍ **LỜI GIẢI.**



Theo giả thiết, vì $DE = 10\text{cm}$ nên $AE = 25\text{cm}$.
Gọi I là giao của AC và EF. Áp dụng định lí Ta-lét cho $\triangle ACD$ nên ta có:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EI}{DC} = \frac{AI}{AC} \Rightarrow \frac{25}{35} = \frac{EI}{70} \Rightarrow EI = 50$$

Vì $\dfrac{AI}{AC} = \dfrac{5}{7} \Rightarrow \dfrac{IC}{AC} = \dfrac{2}{7}$.
Áp dụng định lí Ta-lét cho tam giác ABC ta có:

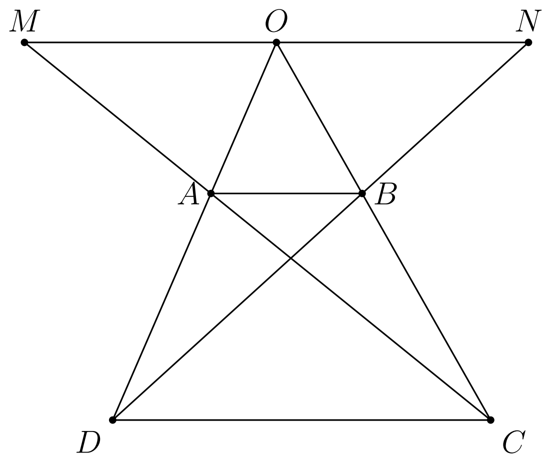
$$\frac{IC}{CA} = \frac{IF}{AB} \Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{IF}{28} \Rightarrow IF = 8.$$

Vậy $EF = 58\text{cm}$.

□

BÀI 2. Gọi O là giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên AD, BC của hình thang $ABCD$. Đường thẳng đi qua O và song song với AB cắt các đường thẳng AC, BD theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng $OM = ON$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Vì $MN \parallel CD$ nên ta có

$$\frac{OM}{CD} = \frac{OA}{AD}; \ \frac{ON}{CD} = \frac{OB}{BC} \quad (1)$$

Áp dụng định lí Ta-lét cho tam giác OCD ta có

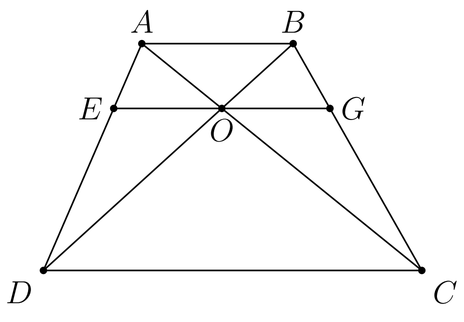
$$\frac{OA}{AD} = \frac{OB}{BC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{OM}{CD} = \dfrac{ON}{CD} \Rightarrow OM = ON$.

□

BÀI 3. Cho hình thang $ABCD$ có các cạnh đáy $AB = a$, $CD = b$. Qua giao điểm O của hai đường chéo, kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AD và BC theo thứ tự ở E và G. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{OE} = \dfrac{1}{OG} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Áp dụng định lí Ta-lét cho tam giác ACD, ta có

$$\frac{OE}{DC} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow \frac{1}{OE} = \frac{AC}{AO} \cdot \frac{1}{DC} = \left(1 + \frac{CO}{AO}\right) \cdot \frac{1}{DC} = \left(1 + \frac{DC}{AB}\right) \cdot \frac{1}{DC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}.$$

Áp dụng định lí Ta-lét cho tam giác ABC, ta có

$$\frac{OG}{AB}=\frac{OC}{AC}\Rightarrow\frac{1}{OG}=\frac{AC}{OC}\cdot\frac{1}{AB}=\left(1+\frac{AO}{CO}\right)\cdot\frac{1}{AB}=\left(1+\frac{AB}{DC}\right)\cdot\frac{1}{AB}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}.$$

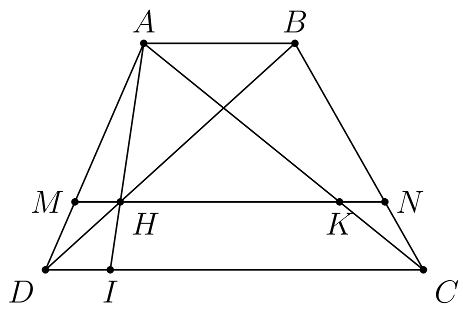
Vậy $\dfrac{1}{OE}=\dfrac{1}{OG}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$. □

BÀI 4. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Một đường thẳng d song song với hai cạnh đáy cắt hai cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M, N và cắt hai đường chéo BD, AC theo thứ tự ở H, K.

❶ Chứng minh rằng $MH = KN$.

❷ Hãy nêu cách dựng đường thẳng d sao cho $MH = KH = KN$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Vì $MN \parallel AB, MN \parallel CD$ nên áp dụng định lý Ta-lét ta có

$$\frac{MH}{AB}=\frac{MD}{AD}=\frac{CN}{CB}=\frac{KN}{AB}$$

Suy ra $MH = KN$.

❷ Gọi I là giao điểm của AH và CD. Khi đó

$$\frac{MH}{DI}=\frac{AH}{AI}=\frac{HK}{IC}.$$

Suy ra $MH = HK \Leftrightarrow DI = IC$.

Vậy ta dựng đường thẳng d như sau: Lấy I là trung điểm của CD. Gọi H là giao của AI và BD. Kẻ đường thẳng d đi qua H và song song với AB ta được đường thẳng cần tìm. □

BÀI 5. Tam giác ABC có $AC > AB$, $AC = 45$cm. Hình chiếu của AC và AB trên BC theo thứ tự là 27cm và 15cm. Đường trung trực của BC cắt AC ở N. Tính độ dài CN.

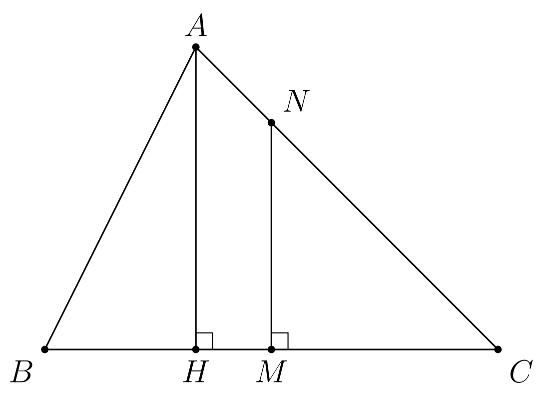
✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi M là trung điểm của BC, $AH \perp BC$. Ta xét hai trường hợp sau

— $\widehat{B} < 90^\circ$. Khi đó, H nằm giữa B và C nên $BC = 42$cm, suy ra $CM = BM = 21$cm.

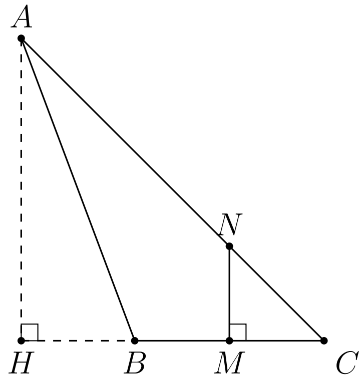
Áp dụng định lí Ta-lét cho tam giác AHC ta có

$$\frac{CI}{CH}=\frac{CN}{AC}\Rightarrow CN = 35\text{cm}.$$



— $\widehat{B} > 90^\circ$. Khi đó, B nằm giữa H và C nên $BC = 12$cm, suy ra $CM = BM = 6$cm.
Áp dụng định lí Ta-lét cho tam giác AHC ta có

$$\frac{CI}{CH} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow CN = 10\text{cm}.$$



□

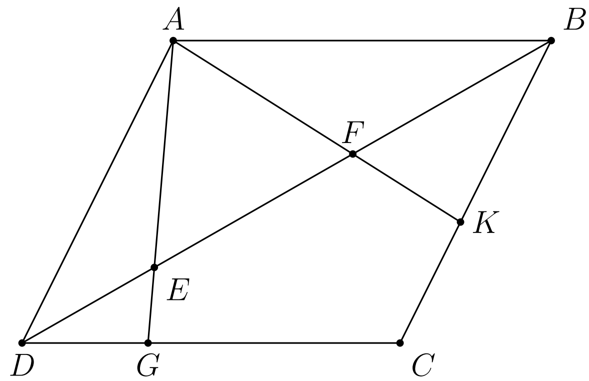
BÀI 6. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm G chia trong cạnh DC theo tỉ số $1 : 2$, điểm K chia trong cạnh BC theo tỉ số $3 : 2$. Tính độ dài ba đoạn thẳng do AG, AK định ra trên BD, biết rằng $BD = 16$cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi E, F là giao điểm của AG, AK với BD. Ta có

$$\frac{DE}{EB} = \frac{DG}{AB} = \frac{DG}{DC} = \frac{1}{3}$$

nên $DE = \frac{1}{3}EB = \frac{1}{4} = 4$cm.
Tương tự, $BF = \frac{3}{8}BD = 6$cm. Vậy $EF = 6$cm.



□

Vẽ đường thẳng song song trong các bài tập sau để tạo thành các cặp đoạn thẳng tỉ lệ.

BÀI 7. ❶ Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, $AB = 3$cm, $AC = 6$cm. Tính độ dài đường phân giác AD.

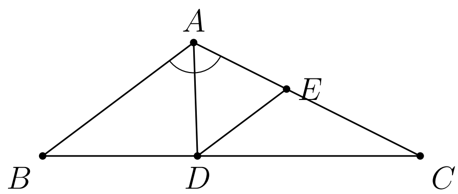
❷ Cho tam giác ABC với đường phân giác AD thỏa mãn $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$. Tính số đo góc BAC.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Kẻ $DE \parallel AB$, $\triangle ADE$ đều. Đặt $AD = DE = EA = x$. Ta có

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{6-x}{6}.$$

Từ đó $x = 2$. Vậy $AD = 2$cm.



❷ Kẻ $DE \parallel AB$. Đặt $DE = EA = x$. Ta có

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{x}{AB} = \frac{AC - x}{AC} = 1 - \frac{x}{AC}$$

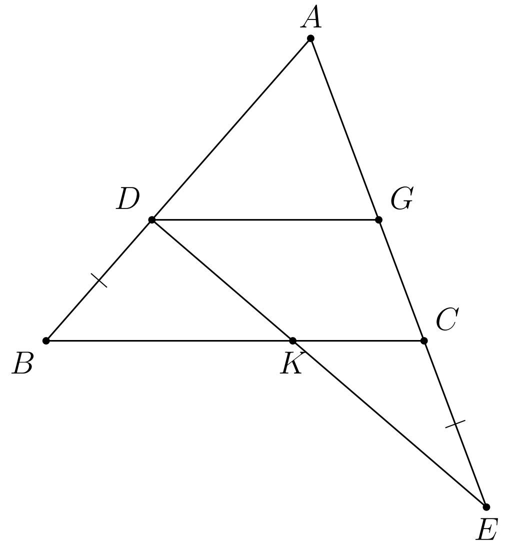
$$\Rightarrow \frac{x}{AB} + \frac{x}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{x}. \quad (1)$$

Theo đề bài $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} = \dfrac{1}{AD}$. Suy ra $AD = x$, $\triangle ADE$ đều, $\widehat{BAC} = 120^\circ$.

□

BÀI 8. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng cắt cạnh AB ở D, cắt cạnh BC ở K và cắt tia đối của tia CA ở E sao cho $BD = CE$ thì tỉ số $\dfrac{KE}{KD}$ không đổi.

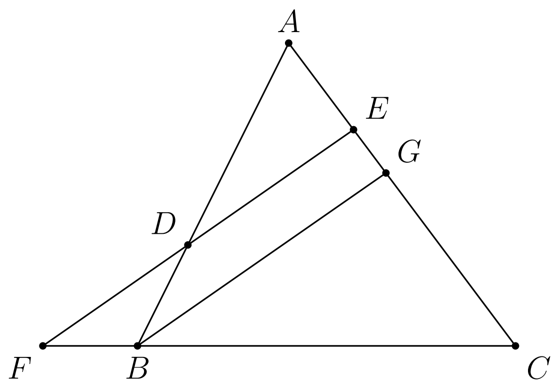
✍ **LỜI GIẢI.**



Kẻ $DG \parallel BC$. Ta có $\dfrac{KE}{KD} = \dfrac{CE}{CG} = \dfrac{BD}{CG} = \dfrac{BA}{CA}$. □

BÀI 9. Cho tam giác ABC, điểm D chia trong cạnh BA theo tỉ số $1:2$, điểm E chia trong cạnh AC theo tỉ số $2:5$. Gọi F là giao điểm của các đường thẳng ED và BC. Tính tỉ số $FB:FC$.

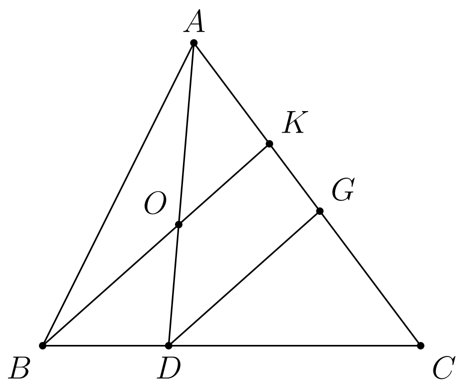
✍ **LỜI GIẢI.**



Kẻ $BG \parallel DE$. Ta có $\dfrac{FB}{FC} = \dfrac{EG}{EC} = \dfrac{EG}{EA} \cdot \dfrac{EA}{EC} = \dfrac{DB}{DA} \cdot \dfrac{EA}{EC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{5}$. □

BÀI 10. Cho tam giác ABC, điểm D chia trong cạnh BC theo tỉ số $1:2$, điểm O chia trong AD theo tỉ số $3:2$. Gọi K là giao điểm của BO và AC. Tính tỉ số $AK:KC$.

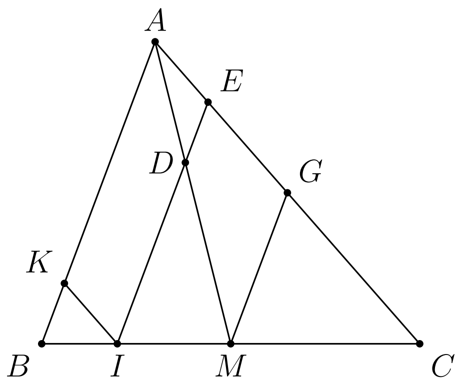
✍ **LỜI GIẢI.**



Kẻ $DG \parallel BK$. Ta có $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{AK}{KG} \cdot \dfrac{KG}{KC} = \dfrac{AO}{OD} \cdot \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}$. □

BÀI 11. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi I là điểm bất kì trên cạnh BC. Đường thẳng đi qua I và song song với AC cắt AB ở K, đường thẳng đi qua I và song song với AB cắt AM, AC theo thứ tự ở D, E. Chứng minh rằng $DE = BK$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Kẻ $MG \parallel IE$. Ta có

$$\frac{BK}{KI} = \frac{BA}{AC};\ \frac{DE}{AE} = \frac{MG}{AG} = \frac{MG}{GC} = \frac{BA}{AC}$$

Suy ra $\dfrac{BK}{KI} = \dfrac{DE}{AE}$, mà $KI = AE$ nên $BK = DE$. □

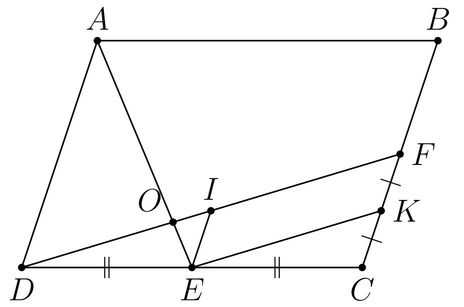
BÀI 12. Tứ giác $ABCD$ có E, F theo thức tự là trung điểm của CD, CB, O là giao điểm của AE, DF; $OA = 4OE, OD = \dfrac{2}{3}OF$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình bình hành.

✍ **LỜI GIẢI.**

Kẻ $EI \parallel DA$, lấy K là trung điểm của CF.

Đặt $OD = 2a$, $OF = 3a$. Ta tính được $OI = 0.5a$; $IF = 2.5a$; $EK = 2.5a$. Từ đó $EIFK$ là hình bình hành nên $FK \parallel IE \parallel AD$. Suy ra $BC \parallel AD$.

Ta lại có $BC = AD$ (cùng bằng $4EI$). Vậy $ABCD$ là hình bình hành.

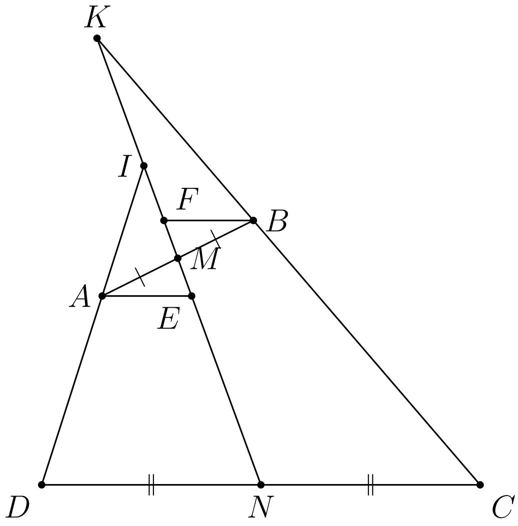


□

BÀI 13. Đường thẳng đi qua trung điểm các cạnh đối AB, CD của tứ giác $ABCD$ cắt các đường thẳng AD và BC theo thứ tự ở I và K. Chứng minh rằng:

$$IA : ID = KB : KC.$$

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi M, N là trung điểm của AB, CD. Vẽ $AE, BF \parallel DC$. Ta có

$$\frac{IA}{ID} = \frac{AE}{DN} = \frac{BF}{NC} = \frac{KB}{KC}$$

□

BÀI 14. ❶ Qua điểm M thuộc cạnh BC của tam giác ABC, vẽ các đường thẳng song song với hai cạnh kia, chúng cắt AB, AC theo thứ tự ở H, K. Chứng minh rằng tổng $\dfrac{AH}{AB} + \dfrac{AK}{AC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên cạnh BC.

❷ Xét trường hợp tương tự khi điểm M chạy trên đường thẳng BC nhưng không thuộc đoạn thẳng BC.

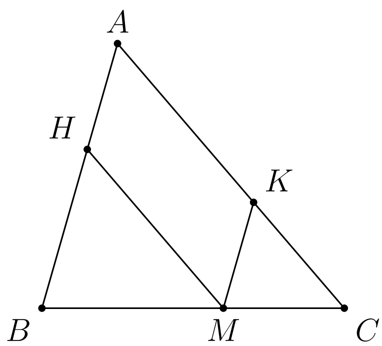
✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Do $MH \parallel AC$, theo định lí Ta-lét, ta có: $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{CM}{CB}$.

Tương tự ta được $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{BM}{CB}$.

Do đó $\dfrac{AH}{AB} + \dfrac{AK}{AC} = \dfrac{CM}{CB} + \dfrac{BM}{CB} = \dfrac{BC}{BC} = 1$.

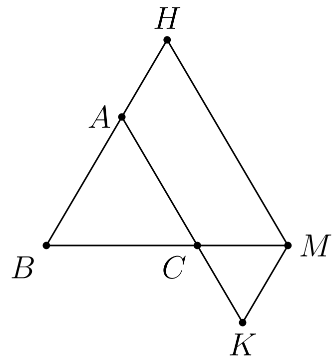


❷

— Nếu M thuộc tia đối của tia CB thì

$$\frac{AK}{AC}-\frac{AH}{AB}=1+\frac{CK}{AC}-\frac{AH}{AB}=1+\frac{MC}{BC}-\frac{CM}{BC}=1.$$

— Tương tự nếu điểm M thuộc tia đối của BC thì $\dfrac{AH}{AB}-\dfrac{AK}{AC}=1.$



□

BÀI 15. ❶ Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Qua điểm O của AM, vẽ đường thẳng cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở B', C'. Chứng minh rằng khi đường thẳng thay đổi vị trí mà vẫn đi qua O thì tổng $\dfrac{AB}{AB'}+\dfrac{AC}{AC'}$ không đổi.

❷ Tổng quát hóa bài toán trên khi O là một điểm cố định trên đoạn thẳng AM.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Kẻ $BI \parallel B'C'$, $CK \parallel B'C'$ $(I, K \in AM)$.

Khi đó $\widehat{IBM}=\widehat{MCK}$ (hai góc so le trong).

Xét ΔBIM và ΔCKM có:

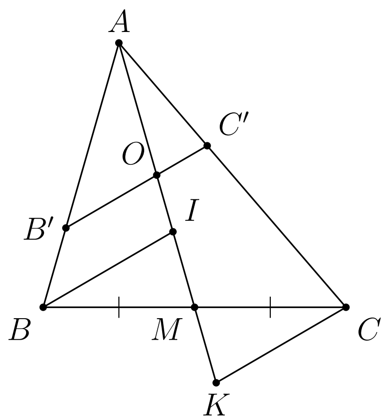
$$\widehat{IBM}=\widehat{MCK}; BM=CM(gt); \widehat{IMB}=\widehat{CMK}(\text{đối đỉnh})$$

Suy ra $\Delta BIM=\Delta CKM$ (g.c.g) $\Rightarrow IM=MK$.

Do $OB' \parallel IB$, theo định lí Ta-lét có $\dfrac{AB}{AB'}=\dfrac{AI}{AO}$

Tương tự, ta được $\dfrac{AC}{AC'}=\dfrac{AK}{AO}$.

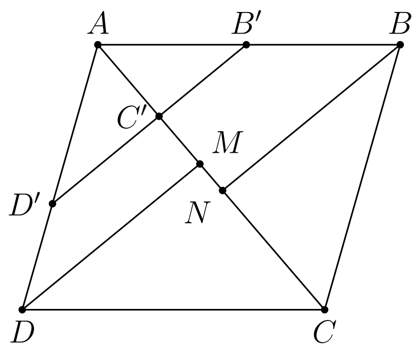
Suy ra



$$\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}=\frac{AI}{AO}+\frac{AK}{AO}=\frac{AI+AK}{AO}=\frac{(AM-MI)+(AM+MK)}{AO}=\frac{2\cdot AM}{AO}=4.$$

❷ Chỉ cần O là một điểm cố định thuộc đoạn thẳng AM, không đòi hỏi O là trung điểm của AM. Giá trị không đổi của tổng bằng $2AM : AO$.

Có thể diễn đạt bài toán này dưới dạng: Cho hình bình hành $ABCD$, điểm C' nằm trên đường chéo AC $\left(AC'<\dfrac{1}{2}AC\right)$. Qua C' vẽ đường thẳng d cắt các cạnh AB, AD ở B', D'. Chứng minh rằng $\dfrac{AB}{AB'}+\dfrac{AD}{AD'}=\dfrac{AC}{AC'}$.



□

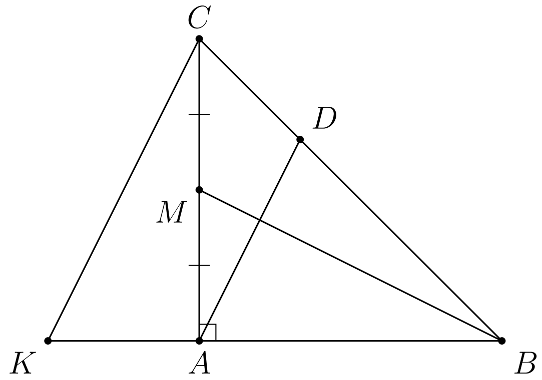
BÀI 16. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường trung tuyến BM. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 2DC$. Chứng minh rằng BM vuông góc với AD.

✍ **LỜI GIẢI.**

Kẻ $CK \parallel AD$ ($K \in AB$)

Khi đó theo định lí Ta-lét ta có

$$\frac{AB}{AK} = \frac{BD}{CD} = 2 \Rightarrow AB = 2 \cdot AK.$$



Lại có: $AB = AC = 2 \cdot AM$.

Suy ra $AK = AM$.

Xét ΔCAK và ΔBAM có:

$$AK = AM(\text{cmt}); \widehat{CAK} = \widehat{BAM} = 90^\circ; AC = AB$$

Suy ra $\Delta CAK = \Delta BAM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ACK} = \widehat{ABM}$

Mà $\widehat{CKA} = \widehat{BAD}$ (hai góc đồng vị)

Suy ra $\widehat{ACK} + \widehat{CKA} = \widehat{ABM} + \widehat{BAD}$

Hay $\widehat{ABM} + \widehat{BAD} = 90^\circ$.

Vậy $BM \perp AD$.

□

BÀI 17. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các điểm D, E thuộc cạnh BC sao cho $BD = DE = EC$. Biết $AD = 10\text{cm}$, $AE = 15\text{cm}$. Tính độ dài BC.

✍ **LỜI GIẢI.**

Kẻ $DH \parallel AC$; $EK \parallel AB$ ($K \in AC$; $H \in AB$.

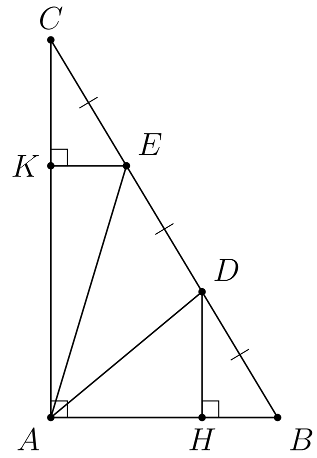
Đặt $DH = x$; $EK = y$.

Do $DH \parallel AC$, theo hệ quả định lý Ta-lét ta có

$$\frac{DH}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow AC = 3 \cdot DH = 3x.$$

Do $EK \parallel AB$, theo định lý Ta-lét ta có

$$\frac{AK}{AC} = \frac{EB}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow AH = 2x.$$



Tương tự ta được $AB = 3y$; $AH = 2y$. Suy ra $BH = y$.
Xét ΔADH vuông tại H, theo định lý Pitago ta có

$$AH^2 + DH^2 = AD^2 \text{ hay } 4y^2 + x^2 = 100. \quad (1)$$

Tương tự ta được $y^2 + 4x^2 = 225$. (2)
Cộng vế theo vế của (1) và (2): $5(x^2 + y^2) = 325 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 65$.
Mà $BH = y$ nên $x^2 + y^2 = DH^2 + BH^2 = BD^2$ hay $BD = \sqrt{65}$.
Vậy $BC = 3\sqrt{65}$.

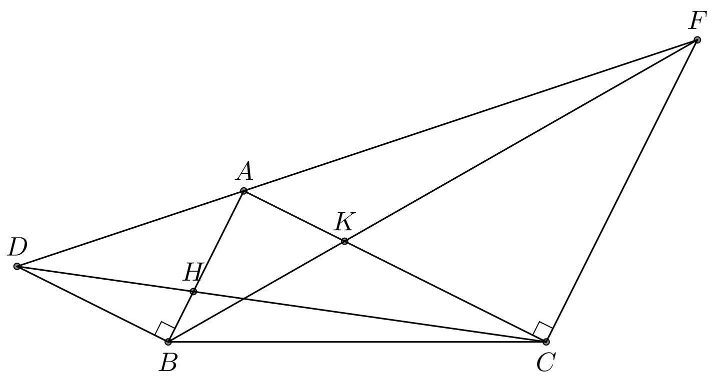
□

BÀI 18. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABD vuông cân tại B, ACF vuông cân tại C. Gọi H là giao điểm của AB và CD, K là giao điểm của AC và BF. Chứng minh rằng

❶ $AH = AK$.

❷ $AH^2 = BH \cdot CK$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Đặt $AB = c$, $AC = b$.
Ta có $DB \parallel AC$ suy ra $\dfrac{HA}{HB} = \dfrac{AC}{DB} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{c}{b}$, suy ra

$$\frac{HA}{b} = \frac{HB}{c} = \frac{HA + HB}{b + c} = \frac{c}{b + c} \Rightarrow AH = \frac{bc}{b + c}.$$

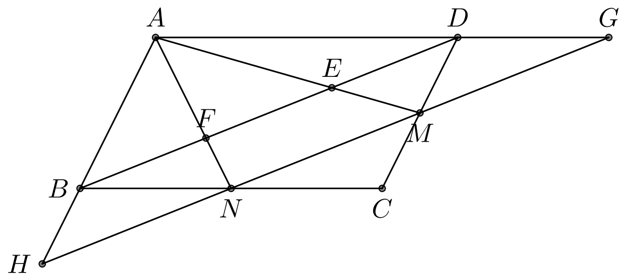
Tương tự, ta được $\dfrac{KA}{KC} = \dfrac{c}{b}$ và $AK = \dfrac{bc}{b + c}$. Do đó $AH = AK$.

❷ Ta có $\dfrac{HA}{HB} = \dfrac{b}{c}$; $\dfrac{KA}{KC} = \dfrac{c}{b}$.
Do đó $\dfrac{HA}{HB} = \dfrac{KC}{KA}$ suy ra $HA \cdot AK = BH \cdot CK$.
Lại có $AH = AK$ suy ra $HA^2 = BH \cdot CK$.

□

BÀI 19. Cho tứ giác $ABCD$ có M là trung điểm của CD, N là trung điểm của CB. Biết rằng AM và AN cắt đường chéo BD thành ba đoạn bằng nhau. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình bình hành.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi E, F là giao điểm của AM, AN với BD; gọi G, H là giao điểm của của MN với AD, AB.
Ta có

— $BF \parallel HN \Rightarrow \dfrac{AB}{AH} = \dfrac{BF}{HN} = \dfrac{AF}{AN}$. (1)

— $EF \parallel MN \Rightarrow \dfrac{AF}{AN} = \dfrac{EF}{MN}$. (2)

Mặt khác, MN là đường trung bình tam giác CBD suy ra $MN = \dfrac{1}{2}BD$, lại có $EF = \dfrac{1}{3}BD$

Thay vào (2), ta được $\dfrac{AF}{AN} = \dfrac{EF}{MN} = \dfrac{2}{3}$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra $\dfrac{AB}{AH} = \dfrac{BF}{HN} = \dfrac{2}{3}$. (4)

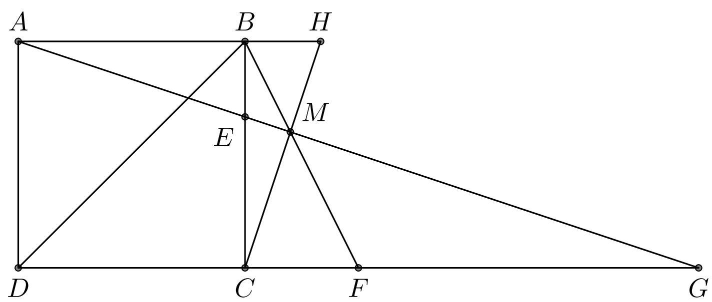
Chứng minh tương tự, ta được $\dfrac{AD}{AG} = \dfrac{DE}{MG} = \dfrac{2}{3}$ (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra $HN = \dfrac{3}{2}EF$, $MN = \dfrac{3}{2}EF$, $MG = \dfrac{3}{2}DE$. Do đó $HN = MN = MG$.

Do đó, ta có $\dfrac{GN}{HN} = \dfrac{2}{3}$, kết hợp với (4) suy ra BC song song AD. Chứng minh tương tự ta được AB song song CD và do đó $ABCD$ là hình bình hành. □

BÀI 20. Trên cạnh BC của hình vuông $ABCD$ cạnh 6, lấy điểm E sao cho $BE = 2$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho $CF = 3$. Gọi M là giao điểm của AE và BF. Tính $\widehat{AMC}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi H là giao điểm của CM và AB, G là giao điểm của AM và DF. Ta có

— $AB \parallel CG$ suy ra $\dfrac{AB}{CG} = \dfrac{BE}{CE} \Rightarrow \dfrac{6}{CG} = \dfrac{2}{4} \Rightarrow CG = 12$, $FG = CG - CF = 9$.

— $AH \parallel DG$ suy ra $\dfrac{HB}{CF} = \dfrac{MB}{MF} = \dfrac{AB}{FG}$, do đó $\dfrac{BH}{AB} = \dfrac{CF}{FG}$ nên $\dfrac{BH}{6} = \dfrac{3}{9}$, $BH = 2$.

Xét $\triangle BAE$ và $\triangle BCH$, ta có

— $AB = BC$;

— $\widehat{ABE} = \widehat{CBH}$;

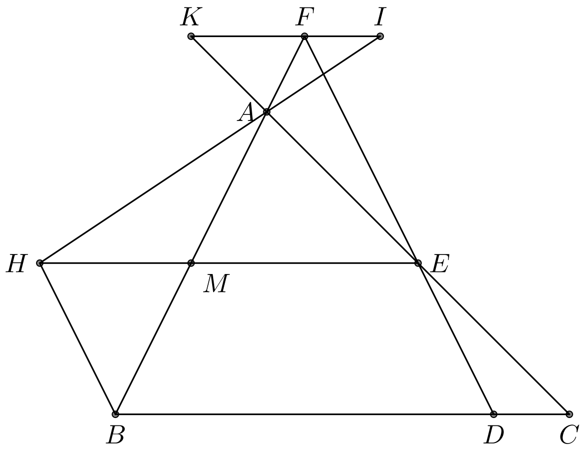
— $BH = BE = 2$

$\Rightarrow \triangle BAE = \triangle BCH \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{AEB} = \widehat{MEC}$.

Ta có $\widehat{MEC} + \widehat{ECM} = \widehat{BHC} + \widehat{ECM} = 90^\circ$ do đó $\widehat{AMC} = 90^\circ$. □

BÀI 21. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng cắt các cạnh BC, CA theo thứ tự ở D, E và cắt đường thẳng BA ở F. Vẽ hình bình hành $BDEF$. Đường thẳng đi qua F và song song với BC cắt HA ở I. Chứng minh rằng $FI = DC$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi K là giao điểm của AC và FI, M là giao điểm của AB và EH. Ta có $KI \parallel HE$ suy ra $\dfrac{FI}{FK} = \dfrac{MH}{ME}$. (1)

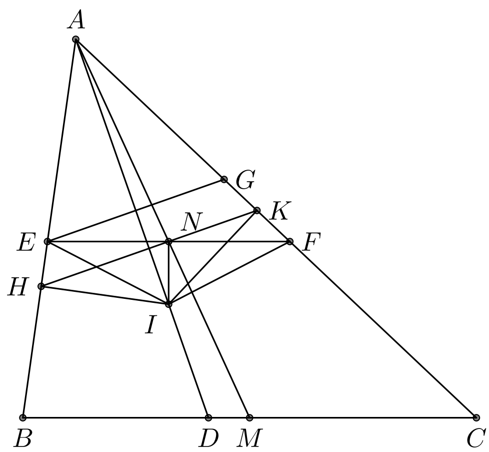
Ta có $KI \parallel BC$ suy ra $\dfrac{DC}{FK} = \dfrac{DE}{FE}$. (2)

Ta có $ME \parallel BC$ suy ra $\dfrac{BD}{ME} = \dfrac{FD}{FE} \Rightarrow \dfrac{BD - ME}{ME} = \dfrac{FD - FE}{FE} \Rightarrow \dfrac{MH}{ME} = \dfrac{DE}{FE}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{FI}{FK} = \dfrac{DC}{FK}$ nên $FI = DC$. □

BÀI 22. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD, đường trung tuyến AM. Qua điểm I thuộc đoạn thẳng AD, kẻ IH vuông góc với AB, IK vuông góc với AC. Gọi N là giao điểm của HK và AM. Chứng minh rằng NI vuông góc với BC.

✍ **LỜI GIẢI.**



Qua N kẻ đường $EF \parallel BC$, do M là trung điểm BC nên $NE = NF$.

Kẻ $EG \parallel HK$, do N là trung điểm EF nên $GK = KF$. (1)

Ta có

— I thuộc phân giác AD,

— $IH \perp AB$,

— $IK \perp AC$.

$\Rightarrow AH = AK$.

Tam giác AHK cân, $EG \parallel HK$ suy ra $AE = AG$, nên $EH = GK$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EH = KF$.

Xét tam giác IHE và IKF có

— $IH = IK$,

— $HE = KF$,

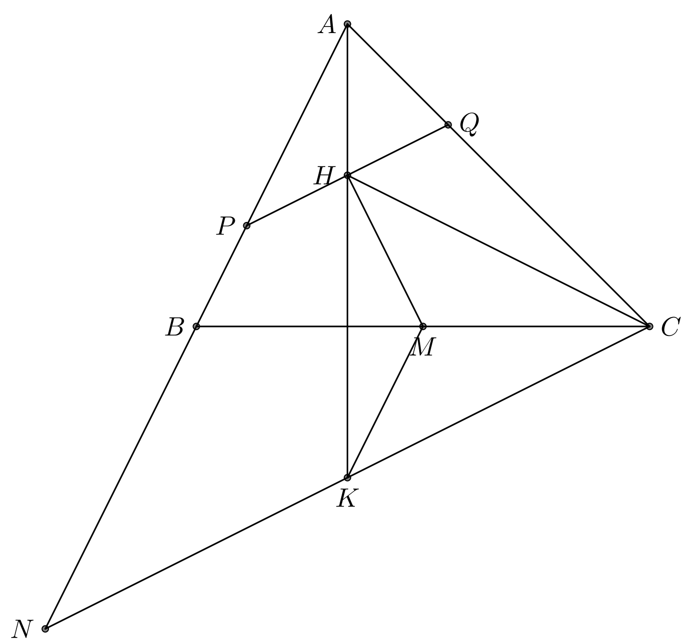
— $\widehat{EHI} = \widehat{FKI} (= 90^\circ)$

$\Rightarrow \triangle IHE = \triangle IKF$ (c-g-c) $\Rightarrow IE = IF$.

$\triangle IEF$ cân tại I, IN là đường trung tuyến nên $IN \perp EF$. Do đó $IN \perp BC$. □

BÀI 23. Cho tam giác có ba góc nhọn, trực tâm H. Một đường thẳng đi qua H cắt AB, AC theo thứ tự ở P, Q sao cho $HP = HQ$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng HM vuông góc với PQ.

✍ **LỜI GIẢI.**



Qua C kẻ đường thẳng song song với PQ cắt AB ở N, cắt AH ở K.

Ta có $PQ \parallel NC$ suy ra $\dfrac{PH}{NK} = \dfrac{QH}{KC} \left(= \dfrac{AH}{AK} \right)$. Do $HP = HQ$ nên $KN = KC$.

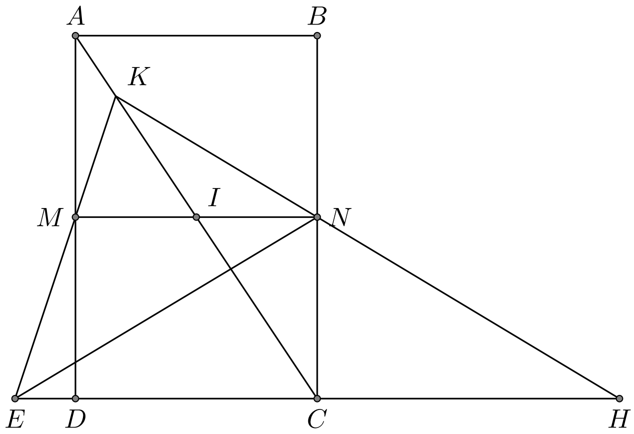
Ta có $MB = MC$, $KN + KC$ suy ra KM là đường trung bình của $\triangle CBN$, $KM \parallel AB$.

Mà $CH \perp AB$ nên $KM \perp CH$.

Lại có $BC \perp AH$, $KM \perp CH$ suy ra M là trực tâm của $\triangle CHK$ nên $HM \perp NC$. Lại có $PQ \parallel NC$ suy ra $HM \perp PQ$. □

BÀI 24. Hình chữ nhật $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của AD, BC. Gọi E là một điểm bất kì thuộc tia đối của tia DC, K là giao điểm của EM và AC. Chứng minh rằng NM là tia phân giác của góc KNE.

✍ **LỜI GIẢI.**



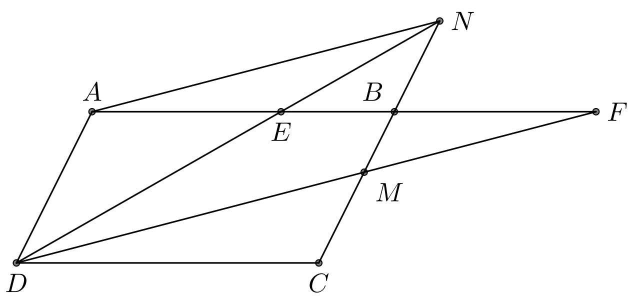
Gọi I là giao điểm của AC và MN, H là giao điểm KN và DC.
Xét tứ giác $NMCD$ có

— $DM \parallel CN$ ($AD \parallel BC$, $M \in AD$, $N \in BC$),
— $DM = CN$ ($DM = \dfrac{1}{2}$, $AD = \dfrac{1}{2}BC$, $AD = BC$).

$\Rightarrow$ Tứ giác $MNCD$ là hình bình hành $\Rightarrow MN \parallel CD$.
Xét $\triangle ADC$ có M là trung điểm AD, $MI \parallel DC$ ($MN \parallel CD$, $I \in MN$), $I \in AC \Rightarrow I$ là trung điểm $MN \Rightarrow IM = IN$.
Xét $\triangle KEC$ có $MI \parallel EC$ ($MN \parallel CD$, $I \in MN$, $E \in CD$)
$\Rightarrow \dfrac{IM}{EC} = \dfrac{KI}{KC}$ (hệ quả của định lí Talét) (1)
Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{IN}{HC} = \dfrac{KI}{KC}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{IM}{EC} = \dfrac{IN}{HC} \Leftrightarrow \dfrac{EC}{HC} = \dfrac{IM}{IN} = 1 \Rightarrow C$ là trung điểm EH.
Xét $\triangle ENH$ có NC vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên $\triangle ENH$ cân tại N. (3)
Ta có $\widehat{KNE}$ là góc ngoài của $\triangle NEH$. (4)
Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{KNE} = 2\widehat{NHE}$. (5)
Ta lại có $\widehat{KNM} = \widehat{NHE}$ ($MN \parallel EH$, hai góc so le trong) (6)
Từ (5) và (6)$\Rightarrow \widehat{KNE} = 2\widehat{KNM} \Leftrightarrow NM$ là tia phân giác của góc $\widehat{KNE}$. □

BÀI 25. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thuộc cạnh BC, điểm N thuộc tia đối của tia BC sao cho $BN = CM$. Các đường thẳng DN, DM cắt AB theo thứ tự ở E, F. Chứng minh rằng $AE^2 = EB \cdot EF$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Ta có $MN = BN + BM = CM + BM = BC = AD$ ($BN = CM$).
Xét tứ giác $AMND$ có

— $AD \parallel MN$ ($AD \parallel MN$, $N \in BC$),

— $AD = MN$ (cmt).

$\Rightarrow$ Tứ giác $ANMD$ là hình bình hành (tứ giác có 1 cặp cạnh vừa song song vừa bằng nhau) $\Rightarrow AN \parallel DF$.

Xét $\triangle DEF$ có $AN \parallel DF \Rightarrow \dfrac{EA}{EF} = \dfrac{EN}{ED}$ (hệ quả của định lí Talét). (1)

Xét $\triangle AED$ có $AD \parallel BN \Rightarrow \dfrac{EN}{ED} = \dfrac{EB}{EA}$ (hệ quả của định lí Talét). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{EA}{EF} = \dfrac{EB}{EA} \Leftrightarrow EA^2 = EB \cdot EF$. □

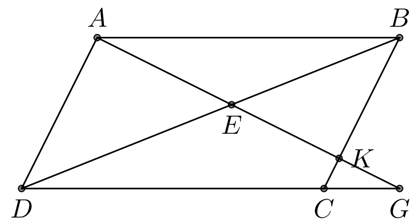
BÀI 26. Một đường thẳng đi qua đỉnh A của hình bình hành $ABCD$ cắt BD, BC, DC theo thứ tự ở E, K, G. Chứng minh rằng:

❶ $AE^2 = EK \cdot EG$;

❷ $\dfrac{1}{AE} = \dfrac{1}{AK} + \dfrac{1}{AG}$;

❸ Khi đường thẳng thay đổi vị trí nhưng vẫn đi qua A thì tích $BK \cdot DG$ có giá trị không đổi.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Xét $\triangle AEB$ có $AB \parallel DG$ ($AB \parallel DC$, $G \in DC$) $\Rightarrow \dfrac{EA}{EG} = \dfrac{EB}{ED}$. (1)

Xét $\triangle AED$ có $AD \parallel BK$ ($AD \parallel BC$, $K \in BC$) $\Rightarrow \dfrac{EB}{ED} = \dfrac{EK}{EA}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{EA}{EG} = \dfrac{EK}{EA} \Leftrightarrow EA^2 = EK \cdot EG$.

❷ Ta có $\dfrac{1}{AE} = \dfrac{1}{AK} + \dfrac{1}{AG} \Leftrightarrow \dfrac{AE}{AK} + \dfrac{AE}{AG} = 1$.

Xét $\triangle AEB$ có $AB \parallel DG$ ($AB \parallel DC$, $G \in DC$) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AG} = \dfrac{BE}{BD}$. (3)

Xét $\triangle AED$ có $AD \parallel BK$ ($AD \parallel BC$, $K \in BC$) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AK} = \dfrac{DE}{DB}$. (4)

Từ (3) và (4) ta được $\dfrac{AE}{AK} + \dfrac{AE}{AG} = \dfrac{DE}{DB} + \dfrac{BE}{BD} = \dfrac{BD}{BD} = 1$.

❸ Xét $\triangle ABK$ có $AB \parallel CG$ ($AB \parallel DC$, $G \in DC$) $\Rightarrow \dfrac{KB}{KC} = \dfrac{AB}{CG}$. (5)

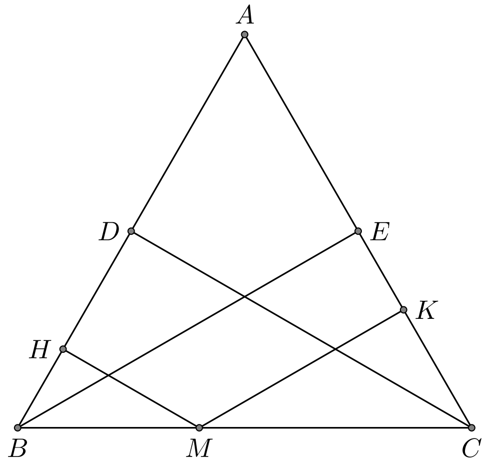
Xét $\triangle AGD$ có $AD \parallel KC$ ($AD \parallel BC$, $K \in BC$) $\Rightarrow \dfrac{KC}{AD} = \dfrac{CG}{AD}$. (4)

Nhân từng vế (5) và (6) ta được $\dfrac{KB}{AD} = \dfrac{AB}{AD} \Leftrightarrow KB \cdot DG = AB \cdot AD$, mà AB, AD cố định nên $BK \cdot DG$ có giá trị không đổi.

□

BÀI 27. Cho tam giác đều ABC. Các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $AD = CE$. Gọi M là một điểm bất kì thuộc cạnh BC. Vẽ MH song song với CD (H thuộc AB), vẽ MK song song với BE (K thuộc AC). Chứng minh rằng khi điểm M chuyển động trên cạnh BC thì tổng $MH + MK$ có giá trị không đổi.

✍ **LỜI GIẢI.**



Xét $\triangle ADC$ và $\triangle CEB$ có

— $AD = CE$ (giả thiết),

— $\widehat{A} = \widehat{C} = 60^\circ$ ($\triangle ABC$ đều),

— $AC = BC$ ($\triangle ABC$ đều).

$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle CEB$ (c-g-c) $\Rightarrow DC = BE$ (2 cạnh tương ứng).

Xét $\triangle BDC$ có $MH \parallel DC$ (giả thiết) $\Rightarrow \dfrac{MH}{DC} = \dfrac{MB}{BC}$ (hệ quả của định lí Talét). (1)

Xét $\triangle BCE$ có $MK \parallel BE$ (giả thiết) $\Rightarrow \dfrac{MK}{BE} = \dfrac{MC}{BC}$ (hệ quả của định lí Talét). (2)

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{MH}{DC} + \dfrac{MK}{BE} = \dfrac{MB}{BC} + \dfrac{MC}{BC} = \dfrac{BC}{BC} = 1$, mà $DC = BE$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \dfrac{MH}{DC} + \dfrac{MK}{DC} = 1 \Rightarrow MH + MK = CD$.

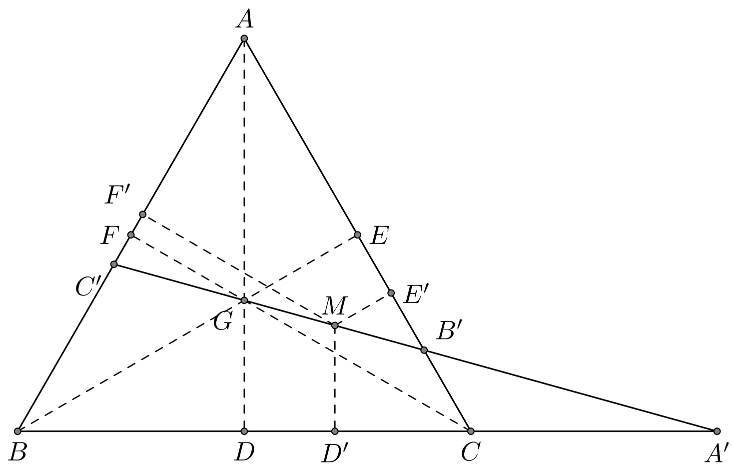
Ta có C, D cố định nên $MH + MK$ có giá trị không đổi.

□

BÀI 28. Cho tam giác đều ABC, trọng tâm G, M là một điểm bất kì nằm bên trong tam giác. Đường thẳng MG cắt các đường thẳng BC, AC, AB theo thứ tự ở A', B', C'. Chứng minh rằng

$$\frac{A'M}{A'G} + \frac{B'M}{B'G} + \frac{C'M}{C'G} = 3.$$

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi 3 đường trung tuyến của $\triangle ABC$ lần lượt là AD, BE, CF, mà $\triangle ABC$ đều nên $GD = GE = GF$.
Vẽ D', E', F' lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB.
Vì $\triangle ABC$ đều, AD là đường trung tuyến nên AD cũng là đường cao, suy ra $AD \perp BC$, mà $MD' \perp$ (D' là hình chiếu của M trên BC). Vậy $AD \parallel MD'$.
Xét $\triangle A'GD$ có $AD \parallel MD'$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \dfrac{A'M}{A'G} = \dfrac{MD'}{GD}$ (hệ quả của định lí Talét).
Chứng minh tương tự ta có

$$\frac{B'M}{B'G} = \frac{ME'}{GE}\ \frac{C'M}{C'G} = \frac{MF'}{GF}.$$

Vậy $\dfrac{A'M}{A'G} + \dfrac{B'M}{B'G} + \dfrac{C'M}{C'G} = \dfrac{MD'}{GD} + \dfrac{ME'}{GE} + \dfrac{MF'}{GF} = \dfrac{MD' + ME' + MF'}{GD}$ (vì $GD = GE = GF$).
Mặt khác $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMB} + S_{\triangle AMC} + S_{\triangle BMC} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \cdot AD \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot MF' + \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot ME' + \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot MD' \Leftrightarrow AD = MF' + ME' + MD'$.
Vậy $\dfrac{A'M}{A'G} + \dfrac{B'M}{B'G} + \dfrac{C'M}{C'G} = \dfrac{AD}{GD} = 3$.

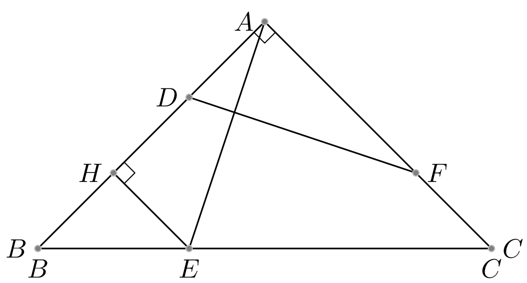
□

BÀI 29. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E, F theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CA theo cùng một tỉ số. Chứng minh rằng

❶ $AE = DF$,

❷ AE vuông góc với DF.

✍ **LỜI GIẢI.**



Theo giả thiết, ta có $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{BE}{BC}$. (1)

Vẽ $EH \perp AB$, ($H \in AB$). Ta có $HE \parallel AC$ suy ra $\dfrac{HE}{AC} = \dfrac{BE}{BC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{HE}{AC} = \dfrac{AD}{AB}$, lại có $AB = AC$ suy ra $HE = AD$.
Mặt khác tam giác BHE vuông có $\widehat{HBE} = 45^\circ$ suy ra $\triangle HBE$ cân $\Rightarrow HB = HE$. Vậy $AD = EH = BH$.
Theo giả thiết ta có $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{CF}{AC}$ suy ra $AD = CF$.
Do đó ta có $AH = AF$.
Xét $\triangle AHE$ và $\triangle FAD$

— $AH = AF$ (cmt),

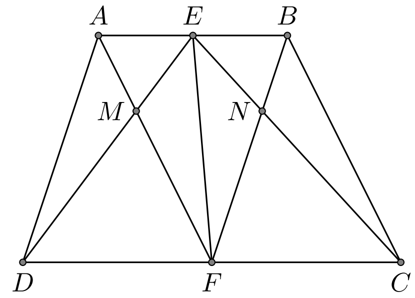
— $HE = AD$ (cmt),

— $\widehat{AHE} = \widehat{DAE} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \triangle AHE = \triangle FAD$ (c - g - c) $\Rightarrow AE = DF$, $\widehat{AFD} = \widehat{HAE}$.
Ta có $\widehat{HAE} + \widehat{ADF} = \widehat{AFD} + \widehat{ADF} = 90^\circ \Rightarrow AE \perp DF$. □

BÀI 30. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có diện tích S. $AB = \dfrac{2}{3}CD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE. N là giao điểm của BF và CE. Tính diện tích tứ giác $EMFN$ theo S.

✍ **LỜI GIẢI.**



Đặt $S_{AEM} = x$.

Ta có $AB \parallel CD$, suy ra $\dfrac{MF}{MA} = \dfrac{MD}{ME} = \dfrac{DF}{AE} = \dfrac{3}{2}$. (1)

Do đó $\dfrac{S_{EMF}}{S_{AME}} = \dfrac{MF}{ME} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow S_{EMF} = \dfrac{3}{2}x$.

Tương tự, ta có $S_{AMD} = \dfrac{3}{2}S_{AME} = \dfrac{3}{2}x$, $SDMF = \dfrac{3}{2}S_{AMD} = \dfrac{9}{4}x$.

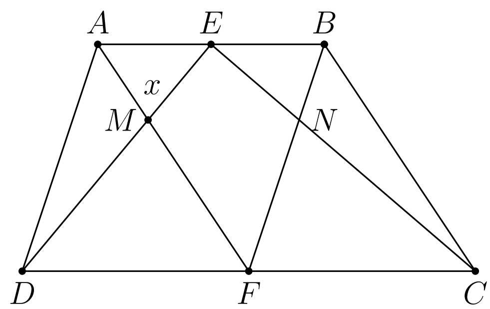
Từ đó, ta có $S_{AEFD} = \dfrac{25}{4}x$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $S_{EMF} = \dfrac{6}{25}S_{AEFD}$.

Tương tự $S_{ENF} = \dfrac{6}{25}S_{BEFC}$. Suy ra $S_{EMFN} = \dfrac{6}{25}S_{ABCD} = \dfrac{6}{25}S$. □

BÀI 31. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có diện tích S. $AB = \dfrac{2}{3}CD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE. N là giao điểm của BF và CE. Tính diện tích tứ giác $EMFN$ theo S.

✍ **LỜI GIẢI.**



Đặt $S_{AEM} = x$.

Do $\dfrac{MF}{MA} = \dfrac{MD}{ME} = \dfrac{DF}{AE} = \dfrac{3}{2}$ nên $S_{EMF} = \dfrac{3}{2}x$ (1)

Vì $S_{AMD} = S_{EMF}$ và $S_{DMF} = \dfrac{3}{2}S_{AMD}$ nên $S_{DMF} = \dfrac{3}{2}S_{AMD} = \dfrac{9}{4}x$.

Từ đó $S_{AEFD} = \dfrac{25}{4}x$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{EMF} = \dfrac{6}{25}S_{AEFD}$.

Tương tự $S_{ENF} = \dfrac{6}{25}S_{BEFC}$.

Suy ra $S_{EMFN} = \dfrac{6}{25}S_{ABCD} = \dfrac{6}{25}S$

□

BÀI 32.

a. Cho hình bình hành $ABCD$, M là trung điểm của BC. Điểm N trên cạnh CD sao cho $\dfrac{CN}{ND} = 2$. Gọi giao điểm của AM, AN với BD là P, Q. Chứng minh rằng $S_{APQ} = \dfrac{1}{2}S_{AMN}$.

b. Chứng minh rằng kết luận ở câu a vẫn đúng nếu thay điều kiện "M là trung điểm của BC, N trên cạnh CD sao cho $\dfrac{CN}{ND} = 2$" bởi điều kiện tổng quát hơn "M trên cạnh BC. N trên cạnh CD sao cho $\dfrac{CN}{ND} = 2\dfrac{BM}{MC}$".

✍ **LỜI GIẢI.**

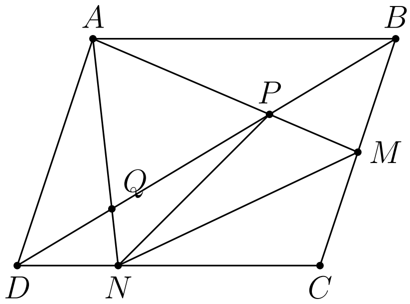
Trước hết ta có $\dfrac{S_{APQ}}{S_{AMN}} = \dfrac{S_{APQ}}{S_{APN}} \cdot \dfrac{S_{APN}}{S_{AMN}} = \dfrac{AQ}{AN} \cdot \dfrac{AP}{AM}$. Ta cần tính toán tỉ số $\dfrac{AQ}{AN} \cdot \dfrac{AP}{AM}$.

❶ Ta có $\dfrac{AQ}{QN} = \dfrac{AB}{DN} = 3 \Rightarrow \dfrac{AQ}{AQ+QN} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{AQ}{AN} = \dfrac{3}{4}$.

Và $\dfrac{AP}{PM} = \dfrac{AD}{BM} = 2 \Rightarrow \dfrac{AP}{AP+PM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{2}{3}$.

Do đó $\dfrac{AQ}{AN} \cdot \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $S_{APQ} = \dfrac{1}{2} S_{AMN}$.



❷ Ta có $\dfrac{CN}{ND} = 2\dfrac{BM}{MC}$. Đặt $\dfrac{BM}{MC} = k$ thì $\dfrac{CN}{ND} = 2k$.

Đặt $MC = x$ thì $BM = kx$. Đặt $ND = y$ thì $CN = 2ky$.

Ta có $\dfrac{AP}{PM} = \dfrac{AD}{BM} = \dfrac{x+kx}{kx} = \dfrac{k+1}{k} \Rightarrow \dfrac{AP}{AP+PM} = \dfrac{k+1}{2k+1} \Rightarrow \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{k+1}{2k+1}$ (1)

Mặt khác $\dfrac{AQ}{QN} = \dfrac{AB}{DN} = \dfrac{y+2ky}{y} = \dfrac{2k+1}{1} \Rightarrow \dfrac{AQ}{AQ+QN} = \dfrac{2k+1}{2k+2} \Rightarrow \dfrac{AQ}{AN} = \dfrac{2k+1}{2k+2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AP}{AM} = \dfrac{AQ}{AN} = \dfrac{k+1}{2k+1} \cdot \dfrac{2k+1}{2k+2} = \dfrac{1}{2}$.

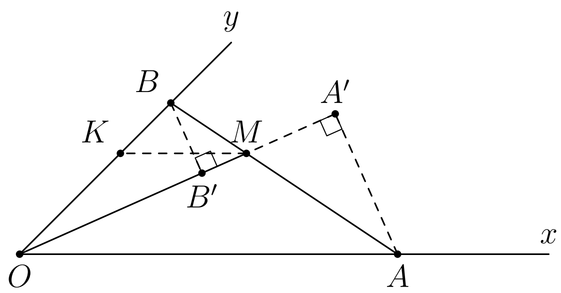
Vậy $S_{APQ} = \dfrac{1}{2} S_{AMN}$.

□

BÀI 33. Cho góc xOy và điểm M cố định thuộc miền trong của góc. Một đường thẳng thay đổi vị trí nhưng luôn đi qua M cắt các tia Ox, Oy theo thứ tự ở A, B. Gọi S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các tam giác MOA, MOB. Chứng minh rằng tổng $\dfrac{1}{S_1} + \dfrac{1}{S_2}$ có giá trị không đổi.

Hướng dẫn: Xét vị trí giới hạn của đường thẳng khi nó song song với Ox để dự đoán giá trị không đổi.

✍ **LỜI GIẢI.**



Vẽ $MK \parallel OA$, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{OK}{OB} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{S_{MOK}}{S_{MOB}} = \frac{S_{MOA}}{S_{AOB}}\\
\Rightarrow\ &\frac{S_{MOK}}{S_2} = \frac{S_1}{S_1+S_2} \Rightarrow \frac{S_1+S_2}{S_1S_2} = \frac{1}{S_{MOK}}\\
\Rightarrow\ &\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{1}{S_{MOK}} \text{ (không đổi)}
\end{aligned}$$

Chú ý: Nếu vẽ thêm $AA' \perp OM$, $BB' \perp OM$ thì từ $\dfrac{1}{S_1} + \dfrac{1}{s_2}$ không đổi, ta có $\dfrac{1}{\frac{1}{2}\cdot OM \cdot AA'} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}\cdot OM \cdot BB'}$ không đổi, suy ra $\dfrac{1}{AA'} + \dfrac{1}{BB'}$ không đổi. Ta lại có $MA \geq AA'$, $MB \geq BB'$ nên $\dfrac{1}{MA} + \dfrac{1}{MB} \leq \dfrac{1}{AA'} + \dfrac{1}{BB'}$ là hằng số.

Từ đó ta có bài toán: Cho góc xOy và một điểm M nằm trong góc ấy. Qua M hãy dựng một đường thẳng cắt hai cạnh của góc ở A và B sao cho $\dfrac{1}{MA} + \dfrac{1}{MB}$ lớn nhất.

Đường thẳng phải dựng là đường vuông góc với OM tại M.

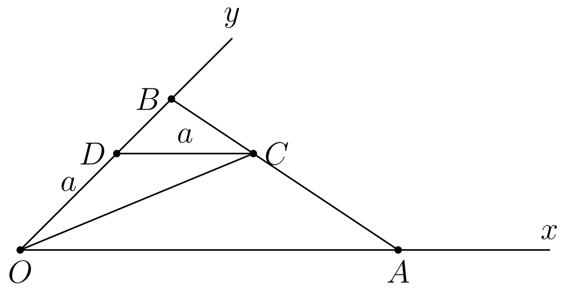
Dự đoán điểm cố định: Nếu lấy A' thuộc Oy, B' thuộc Ox sao cho $OA' = OA$, $OB' = OB$ thì $\dfrac{1}{OA'} + \dfrac{1}{OB'} = \dfrac{1}{k}$. Điểm cố định nếu có phải là giao điểm của AB và $A'B'$. Gọi giao điểm đó là C, rõ ràng C phải thuộc tia phân giác của góc xOy.

Chứng minh: Vẽ tia phân giác của góc xOy, cắt AB ở C. Vẽ $CD \parallel Ox$ thì $OD = OC = a$.

Ta có $\dfrac{DC}{OA} = \dfrac{BD}{BO} \Rightarrow \dfrac{a}{OA} + \dfrac{a}{OB} = 1\dfrac{1}{OA} + \dfrac{1}{OB} = \dfrac{1}{a}$. Mặt khác, theo giả thiết $1\dfrac{1}{OA} + \dfrac{1}{OB} = \dfrac{1}{k}$. Vậy $DC = k$, C là điểm cố định. □

BÀI 34. Cho góc xOy. Các điểm A và B theo thứ tự chuyển động trên các tia Ox và Oy sao cho $\dfrac{1}{OA} + \dfrac{1}{OB} = \dfrac{1}{k}$ (k là hằng số). Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn luôn đi qua một điểm cố định.

✍ **LỜI GIẢI.**

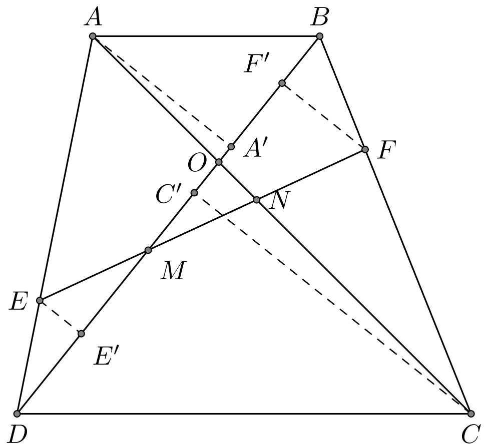


Dự đoán điểm cố định: Nếu lấy A' thuộc Oy, B' thuộc Ox sao cho $OA' = OA$, $OB' = OB$ thì $\dfrac{1}{OA'} + \dfrac{1}{OB'} = \dfrac{1}{k}$. Điểm cố định nếu có phải là giao điểm của AB và $A'B'$. Gọi giao điểm đó là C, rõ ràng C phải thuộc tia phân giác của góc xOy.

Chứng minh: Vẽ tia phân giác của góc xOy, cắt AB ở C. Vẽ $CD \parallel Ox$ thì $OD = OC = a$. Ta có $\dfrac{DC}{OA} = \dfrac{BD}{BO} \Rightarrow \dfrac{a}{OA} = \dfrac{OB-a}{OB} \Rightarrow \dfrac{a}{OA} + \dfrac{a}{OB} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{OA} + \dfrac{1}{OB} = \dfrac{1}{a}$. Mặt khác, theo giả thiết $1\dfrac{1}{OA} + \dfrac{1}{OB} = \dfrac{1}{k}$. Vậy $DC = k$, C là điểm cố định. □

BÀI 35. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Điểm E thuộc cạnh AD, điểm F thuộc cạnh BC sao cho $\dfrac{DE}{DA} = \dfrac{BF}{BC} = \dfrac{1}{3}$. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của EF với BD, AC. Chứng minh rằng $EM = NF$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Kẻ AA', CC', EE', FF' vuông góc với BD. Gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra $EE' \parallel CC' \parallel AA' \parallel FF'$.

Vì $EE' \parallel AA'$ (cách dựng) $\Rightarrow \dfrac{EE'}{AA'} = \dfrac{DE}{DA} = \dfrac{1}{3}$ (hệ quả của định lí Ta-let).

Vì $EE' \parallel FF'$ (cách dựng) $\Rightarrow \dfrac{ME}{MF} = \dfrac{EE'}{FF'} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot AA'}{\frac{1}{3} \cdot CC'} = \dfrac{AA'}{CC'}$ (hệ quả của định lí Ta-let). (1)

Vì $AA' \parallel CC'$ (cách dựng) $\Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{AA'}{CC"}$ (hệ quả của định lí Ta-let). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{ME}{MF} = \dfrac{OA}{OC}$. (3)

Chứng minh tương tự $\dfrac{NF}{NE} = \dfrac{OB}{OC}$. (4)

Ta lại có $AB \parallel CD \Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$ (định lí Talet). (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra

$$\frac{ME}{MF} = \frac{NF}{NE} \Rightarrow \frac{EM}{ME+MF} = \frac{NF}{NE+NF} \Rightarrow \frac{ME}{EF} = \frac{NF}{EF} \Rightarrow ME = MF.$$

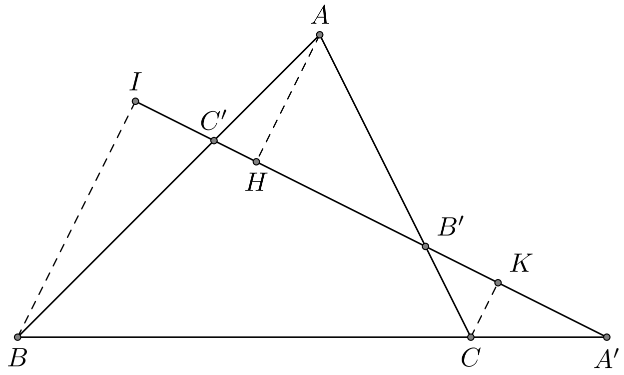
□

BÀI 36.

❶ Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm A' sao cho $\dfrac{BA'}{A'C} = 3$. Trên cạnh CA lấy điểm B' sao cho $\dfrac{CB'}{B'A} = \dfrac{1}{3}$. Gọi C' là giao điểm của $A'B'$ và AB. Chứng minh rằng C' là trung điểm của AB.

❷ Chứng minh bài toán tổng quát: Nếu một đường thẳng không đi qua các đỉnh của tam giác ABC và cắt các đường thẳng BC, CA, AB theo thứ tự ở A', B', C' thì $\dfrac{AB'}{B'C'} \cdot \dfrac{CA'}{A'B'} \cdot \dfrac{BC'}{C'A} = 1$ (định lí Mê-nê-la-uýt).

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Kẻ AH, BI, CK vuông góc với $A'C'$ suy ra $AH \parallel BI \parallel CCK$.

Vì $AH \parallel CK$ (cách dựng) $\Rightarrow \dfrac{AH}{CK} = \dfrac{B'A}{B'C} = 3$ (hệ quả của định lí Ta-let). (1)

Vì $BI \parallel CK$ (cách dựng) $\Rightarrow \dfrac{BI}{CK} = \dfrac{BA'}{A'C} = 3$ (hệ quả của định lí Ta-let). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AH}{BI} = 1$.

Vì $AH \parallel BI$ (cách dựng) $\Rightarrow \dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{AH}{BI} = 1$. Vậy C' là trung điểm AB.

❷ Theo câu a ta có:

— $\dfrac{AB'}{B'C} = \dfrac{AH}{CK}$. (3)

— $\dfrac{CA'}{A'B} = \dfrac{CK}{BI}$. (4)

— $\dfrac{BC'}{C'A} = \dfrac{BI}{AH}$. (5)

Nhân (3), (4), (5) ta được

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = \frac{AH}{CK} \cdot \frac{CK}{BI} \cdot \frac{BI}{AH} = 1.$$

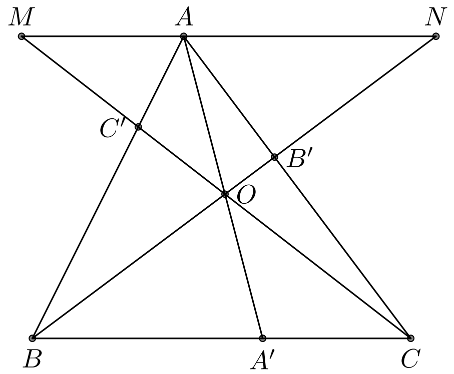
□

BÀI 37.

❶ Chứng minh rằng nếu trên các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C của tam giác ABC, ta lấy các điểm tương ứng A', B', C' sao cho AA', BB', CC' đồng quy thì $\dfrac{AB'}{B'C'} \cdot \dfrac{CA'}{A'B'} \cdot \dfrac{BC'}{C'A} = 1$ (định lí Xê-va).

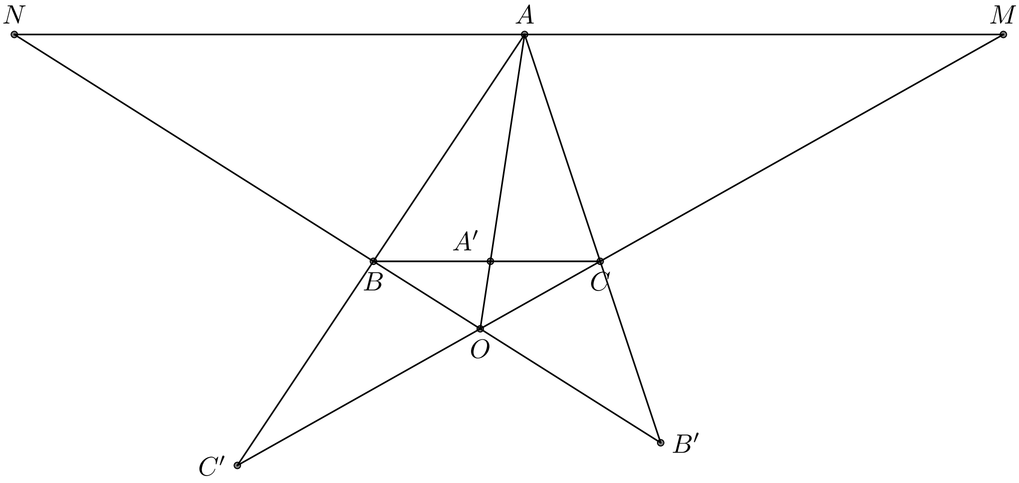
❷ Chứng minh rằng kết luận trên vẫn đúng nếu các điểm A', B', C' thuộc các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác, trong đó có đúng hai điểm nằm ngoài tam giác.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BB', CC' ở N, M.
Ta có $MN \parallel BC$ suy ra $\dfrac{AB'}{B'C} = \dfrac{AN}{CB}$, $\dfrac{BC'}{C'A} = \dfrac{BC}{AM}$, $\dfrac{CA'}{A'B} = \dfrac{MA}{AN}$.
Nhân các các đẳng thức trên theo từng vế, ta được điều phải chứng minh.

❷ Chứng minh tương tự câu a).



□

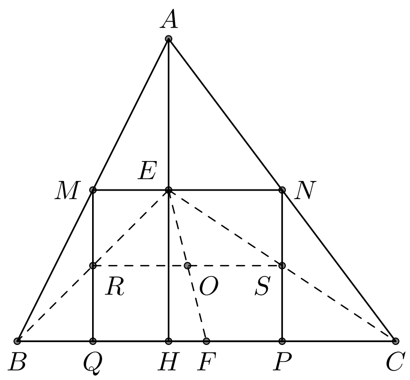
⚠ *Các hệ thức viết ở định lý Mê-nê-la-uýt và định lí Xê-va như nhau. Chỗ khác nhau là vị trí các điểm A', B', C'.*

— *Ở định lí Mê-nê-la-uýt: có đúng một điểm, hoặc cả ba điểm nằm ngoài tam giác.*

— *Ở định lí Xê-va: không có điểm nào, hoặc có đúng hai điểm nằm ngoài tam giác.*

BÀI 38. Cho tam giác ABC. Tâm O của các hình chữ nhật $MNPQ$ thay đổi nhưng luôn có M thuộc AB, N thuộc AC, P và Q thuộc BC, chuyển động trên đường nào?

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi R là trung điểm của MQ, BR cắt MQ tại E.
Ta có $MQ \parallel AH$ suy ra $\dfrac{MR}{AE} = \dfrac{BR}{BE} = \dfrac{QR}{EH}$.
Lại có $MR = QR$ suy ra $AE = HE$. Vậy QR cắt AH tại trung điểm E của AH.
Tương tự gọi S là trung điểm của NP, ta cũng có CS đi qua trung điểm E của AH.
Tứ giác $MRPS$ là hình bình hành (do $MR \parallel NP$ và $MR = NP$) lại có O là trung điểm MP (tính chất hình chữ nhật) nên O là trung điểm RS.
Do $RS \parallel BC$, chứng minh tương tự trên ta có EO cắt BC tại trung điểm F của BC.
Ta có $O \in EF$, mặt khác do E, F là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BC cố định nên EF cố

định.

Vậy O luôn thuộc EF cố định. □

BÀI 2 ĐỊNH LÝ TA-LÉT ĐẢO

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định lí 1 (Định lý Ta-lét đảo). *Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và định ra trên hai cạnh ấy những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.*

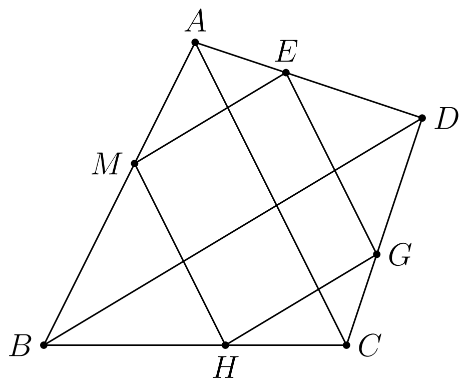
⚠ *Định lý trên vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng cắt phần kéo dài của hai cạnh của tam giác.*

VÍ DỤ 1. Cho tứ giác $ABCD$, điểm M thuộc cạnh AB. Lần lượt vẽ ME song song BD ($E \in AD$), EG song song AC ($G \in CD$), GH song song BD ($H \in BC$).

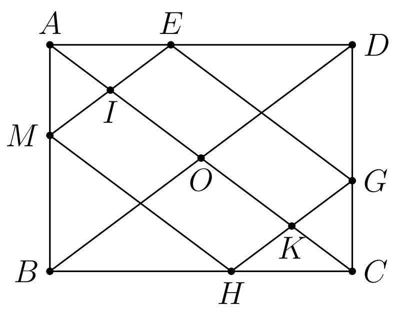
❶ Chứng minh $MEGH$ là hình bình hành.

❷ Tính chu vi tứ giác $MEGH$, nếu $ABCD$ là hình chữ nhật có đường chéo bằng m.

✍ **LỜI GIẢI.**



Hình câu (a)



Hình câu (b)

❶ Ta có

— $ME \parallel BD \Rightarrow \dfrac{ME}{BD} = \dfrac{AE}{AD}$.

— $EG \parallel AC \Rightarrow \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{CG}{CD}$.

— $GH \parallel BD \Rightarrow \dfrac{CG}{CD} = \dfrac{HG}{BD}$.

— Từ ba điều trên suy ra $\dfrac{ME}{BD} = \dfrac{HG}{BD} \Rightarrow ME = HG$.

Vậy ta có $\begin{cases} ME \parallel HG \\ ME = HG \end{cases} \Rightarrow MEGH$ là hình bình hành.

❷ Gọi I là giao điểm của ME, AC và O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\dfrac{IM}{OB} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{IE}{OD}$ mà $OB = OD$ nên $IM = IE$.

Khi đó ta có $ME = 2AI$ vì $\triangle AME$ vuông tại A.

Gọi K là giao điểm của HG và AC, tương tự ta có $HG = 2CK$.

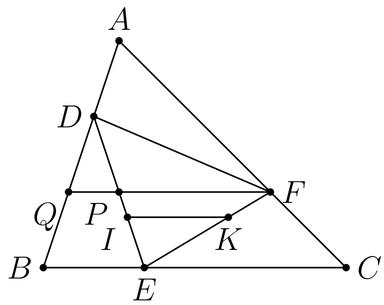
Mặt khác $MH = EG = IK$, vậy chu vi tứ giác $MEGH$ bằng

$$ME + HG + MH + EG = 2(AI + CK + IK) = 2m.$$

□

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, F theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CA theo tỉ số $1 : 2$. Các điểm I, K theo thứ tự chia trong các đoạn ED, FE theo tỉ số $1 : 2$. Chứng minh $IK \parallel BC$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Kẻ đường thẳng đi qua F và song song BC cắt ED, AB lần lượt tại P, Q. Khi đó ta có $\dfrac{AF}{FC} = \dfrac{AQ}{QB} = 2$, do đó Q là trung điểm của BD, suy ra P là trung điểm của DE.

Ta có $EI = \dfrac{1}{3}ED = \dfrac{2}{3}EP = 2IP$, mặt khác $EK = 2KF$ do đó $IK \parallel PF$, mà $PF \parallel BC$ nên $IK \parallel BC$.

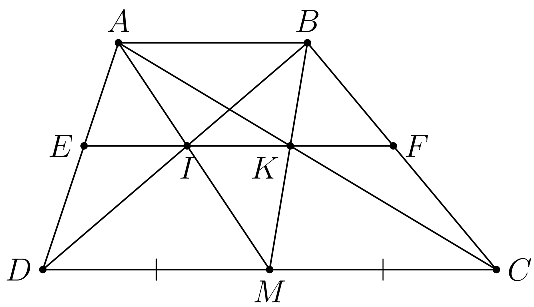
□

B BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), M trung điểm của CD. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của BM và AC.

1. Chứng minh $IK \parallel AB$.
2. Đường thẳng IK cắt AD, BC theo thứ tự tại E, F. Chứng minh $EI = IK = KF$.

✍ **LỜI GIẢI.**



1. Vì $AB \parallel CD$ nên theo định lý Ta-lét ta có

$$\begin{cases} \dfrac{IM}{IA} = \dfrac{MD}{AB} \\ \dfrac{KM}{KB} = \dfrac{MC}{AB} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{IM}{IA} = \dfrac{KM}{KB} \text{ (vì } MC = MD).$$

Do đó theo định lý Ta-lét đảo ta có $IK \parallel AB$.

b) Vì $IK \parallel AB \parallel CD$ nên theo định lý Ta-lét ta có

$$\frac{IE}{DM} = \frac{AI}{AM} = \frac{BI}{BD} = \frac{IK}{DM} \Rightarrow EI = IK.$$

Tương tự ta có $FK = IK$. Vậy $EI = IK = KF$.

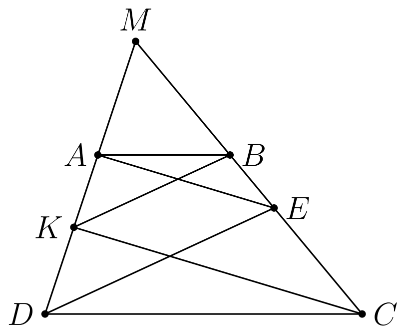
□

BÀI 2. Điểm E thuộc cạnh bên BC của hình thang $ABCD$. Vẽ đường thẳng đi qua C và song song với AE, cắt AD ở K. Chứng minh BK song song DE.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi M là giao điểm của AD và BC. Theo định lý Ta-lét ta có

$$\begin{cases}\dfrac{MA}{MD}=\dfrac{MB}{MC}\\ \dfrac{MA}{MK}=\dfrac{ME}{MC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}MB\cdot MD=MA\cdot MC\\ ME\cdot MK=MA\cdot MC.\end{cases}$$



Do đó $MB\cdot MD=ME\cdot MK\Rightarrow\dfrac{MB}{ME}=\dfrac{MK}{MD}$.

Vậy theo định lý Ta-lét đảo ta có $BK\parallel DE$.

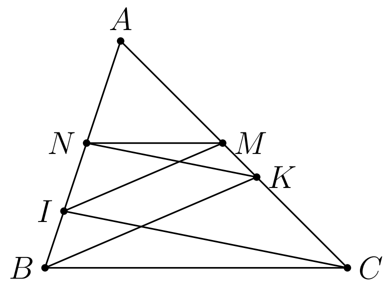
□

BÀI 3. Cho tam giác ABC, điểm I thuộc cạnh AB, điểm K thuộc cạnh AC. Vẽ $IM\parallel BK$ ($M\in AC$), vẽ $KN\parallel CI$ ($N\in AB$). Chứng minh $MN\parallel BC$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Theo định lý Ta-lét ta có

$$\begin{cases}\dfrac{AN}{AI}=\dfrac{AK}{AC}\\ \dfrac{AI}{AB}=\dfrac{AM}{AK}\end{cases}\Rightarrow AN\cdot AC=AI\cdot AK=AB\cdot AM.$$



Suy ra $\dfrac{AN}{AB}=\dfrac{AM}{AC}$.

Do đó theo định lý Ta-lét đảo ta có $MN\parallel BC$.

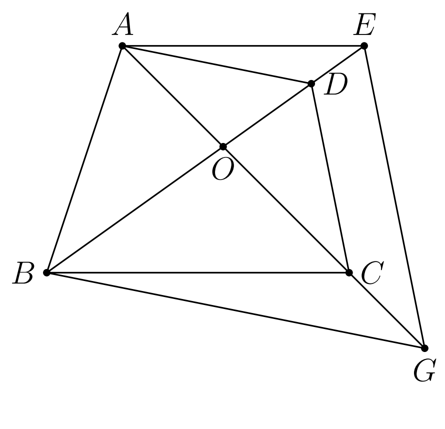
□

BÀI 4. Cho tứ giác $ABCD$. Đường thẳng đi qua A song song với BC cắt BD tại E. Đường thẳng đi qua B song song với AD cắt AC tại G.

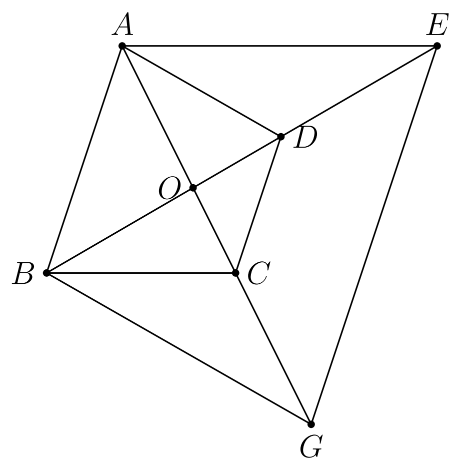
❶ Chứng minh $EG\parallel DC$.

❷ Giả sử $AB\parallel CD$. Chứng minh $AB^2=EG\cdot DC$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Hình câu (a)



Hình câu (b)

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

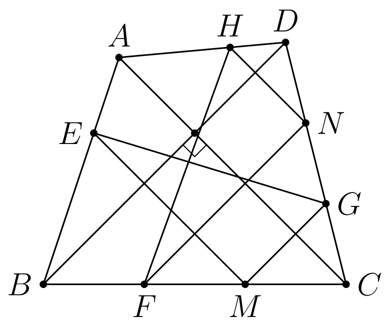
❶ Ta có $\begin{cases} AE \parallel BC \\ BG \parallel AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{OA}{OC} \\ \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{OG}{OA} \end{cases} \xrightarrow{\text{nhân vế theo vế}} \dfrac{OE}{OD} = \dfrac{OG}{OC} \Rightarrow CD \parallel EG.$

❷ Ta có $\begin{cases} EG \parallel AB \\ BG \parallel AD \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB}{EG} = \dfrac{OA}{OG} = \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{DC}{AB} \Rightarrow AB^2 = EG \cdot DC.$

□

BÀI 5. Tứ giác $ABCD$ có AC vuông góc và bằng BD. Các điểm E, F, G, H theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CD, DA theo tỉ số $1 : 2$. Chứng minh rằng $EG = FH$ và EG vuông góc FH.

✍ **LỜI GIẢI.**

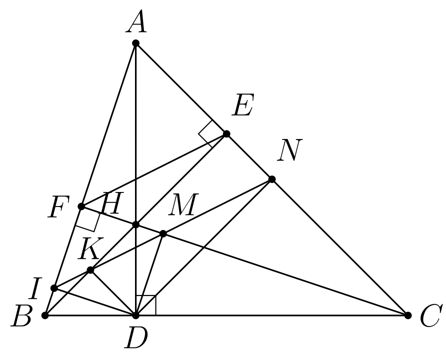


Gọi M là trung điểm của CF, N là trung điểm của DG.
Khi đó ta có $ME \parallel AC$ và $ME = \dfrac{2}{3}AC$.
Đồng thời $NF \parallel BD$ và $NF = \dfrac{2}{3}BD$.
Mặt khác $AC \perp BD, AC = BD$ nên $NF \perp ME$ và $NF = ME$.
Tương tự ta có $NH = MG$. Khi đó $\widehat{EMG} = \widehat{KNH} = 90^\circ$.
Vậy $\triangle EMG = \triangle FNH$ (c-g-c).
Từ đó ta có $EG = FH$ và $EG \perp FH$.

□

BÀI 6. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF. Gọi I, K, M, N theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến BA, BE, CF, CA. Chứng minh rằng bốn điểm I, K, M, N thẳng hàng.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$.
Ta có $\begin{cases} DI \parallel FC \\ DK \parallel EC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{BI}{IF} = \dfrac{BD}{DC} \\ \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BK}{KE}. \end{cases}$
Suy ra $\dfrac{BI}{IF} = \dfrac{BK}{KE} \Rightarrow IK \parallel FE$.
Tương tự ta có $MN \parallel FE$.
Ta lại có $\dfrac{IF}{FA} = \dfrac{DH}{HA} = \dfrac{NE}{EA} \Rightarrow IN \parallel FE$.
Vậy $IK \parallel MN \parallel IN \Rightarrow I, K, M, N$ thẳng hàng.

□

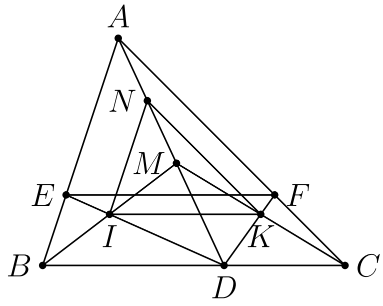
BÀI 7. Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC, điểm M nằm giữa A và D. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của MB, MC. Gọi E là giao điểm của DI và AB, gọi F là giao điểm của DK và AC. Chứng minh $EF \parallel IK$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi N là trung điểm của AM.

Ta có $\begin{cases} IN \parallel AE \\ KN \parallel AF \end{cases} \Rightarrow \dfrac{EI}{ID} = \dfrac{FK}{KD} = \dfrac{AN}{ND}$.

Vậy $EF \parallel IK$ (theo định lý Ta-lét đảo).



□

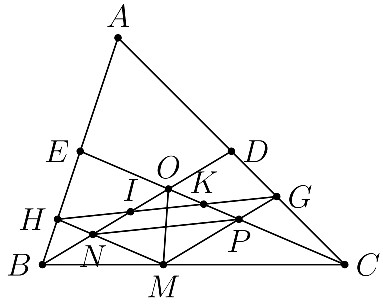
BÀI 8. Cho tam giác ABC, có đường trung tuyến BD, CE. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC. Vẽ MG song song BD ($G \in AC$), vẽ MH song song CE ($H \in AB$).

❶ Chứng minh BD và CE chia HG thành ba phần bằng nhau.

❷ Chứng minh OM đi qua trung điểm HG (O là trọng tâm $\triangle ABC$).

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi I, K lần lượt là giao điểm của HG với BD, CE. Gọi N là giao điểm của HM với BD, P là giao điểm của MG với CE và O là trọng tâm $\triangle ABC$.



❶ Theo định lý Ta-lét ta có $\dfrac{HI}{HG} = \dfrac{HN}{HM} = \dfrac{EO}{EC} = \dfrac{1}{3}$.

Tương tự ta có $\dfrac{GK}{HG} = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $HI = IK = KG$.

b) Ta có $\dfrac{HN}{HM} = \dfrac{GP}{GM} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow NP \parallel IK$.

Mặt khác ta thấy $ONMP$ là hình bình hành nên OM đi qua trung điểm NP do đó OM cũng đi qua trung điểm của IK. Mà $IH = KG$ nên OM đi qua trung điểm của HG.

□

BÀI 9. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Các điểm M, N thuộc cạnh AD, BC sao cho $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{CN}{NB}$. Gọi các giao điểm của MN với BD, AC theo thứ tự là E, F. Qua M kẻ đường thẳng song song AC cắt DC ở H.

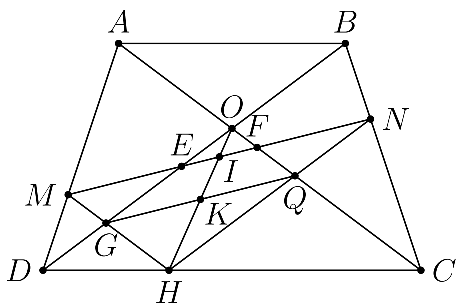
❶ Chứng minh rằng $HN \parallel BD$.

❷ Gọi I là giao điểm của HO và MN. Chứng minh rằng $IE = IF, ME = NF$ (O là giao điểm hai đường chéo AC và BD).

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $\begin{cases} MH \parallel AC \\ NH \parallel BD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{DH}{HC} = \dfrac{DM}{MA} \\ \dfrac{DM}{MA} = \dfrac{BN}{NC} \end{cases}$.

Do đó $\dfrac{DH}{HC} = \dfrac{BN}{NC} \Rightarrow HN \parallel BD$.



b) Gọi G là giao điểm của HM và BD, Q là giao điểm của HN và AC. Ta có

$$\frac{MG}{GH} = \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{NQ}{QH} \Rightarrow GQ \parallel MN.$$

Ta thấy $OGHQ$ là hình bình hành nên OH và GQ cắt nhau tại trung điểm K của mỗi đoạn thẳng. Do đó $IE = IF$ và $IM = IN$ nên $ME = NF$.

□

BÀI 10. Cho tam giác ABC cân tại A, đường trung tuyến BM. Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC, E là trọng tâm của tam giác ABM. Chứng minh EO vuông góc với BM.

✍ **LỜI GIẢI.**

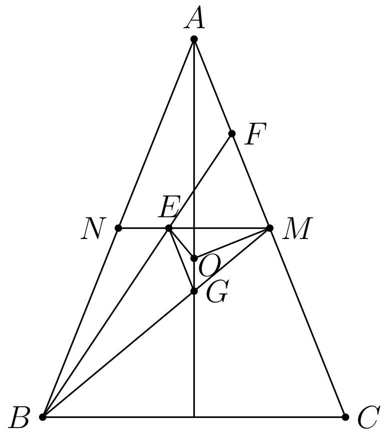
Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$.

Gọi MN, BF là các đường trung tuyến của $\triangle ABM$.

Ta có $\begin{cases} GO \perp BC \\ BC \parallel MN \end{cases} \Rightarrow GO \perp MN$.

Ta cũng có $\begin{cases} MO \perp AC \\ EG \parallel BC \end{cases} \Rightarrow MO \perp EG$.

Vậy O là trực tâm $\triangle MEG$ nên $EO \perp BM$.



□

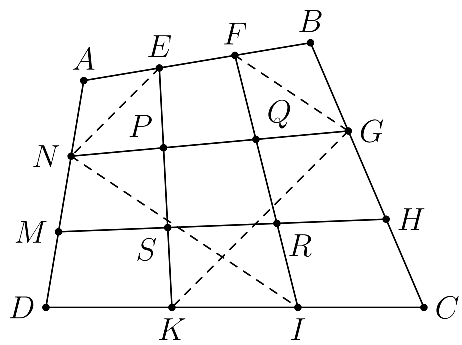
BÀI 11. Chia mỗi cạnh của tứ giác thành ba phần bằng nhau rồi nối các điểm chia tương ứng trên các cạnh đối diện, ta được bốn đoạn thẳng (hai đoạn thẳng nối các điểm chia tương ứng trên một cặp cạnh đối thì không cắt nhau). Chứng minh rằng

❶ Mỗi đoạn thẳng trong bốn đoạn thẳng ấy đều bị chia thành ba phần bằng nhau.

❷ Diện tích tứ giác ở giữa bằng $\dfrac{1}{9}$ diện tích tứ giác ban đầu.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt tên các điểm như hình vẽ.



❶ Ta có $\dfrac{AN}{AD} = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow NE \parallel BD \Rightarrow NE = \dfrac{1}{3}BD$.

Tương tự ta có $KG \parallel BD$ và $KG = \dfrac{2}{3}BD$.

Do đó $NE \parallel KG$ và $NE = \dfrac{1}{2}KG$.

Dẫn đến $NP = \dfrac{1}{3}NG$.

Tương tự ta có $QG = \dfrac{1}{3}NG$. Vậy $NP = QG = PQ$.

Chứng minh tương tự cho các đoạn thẳng còn lại.

b) Ta có

— $\begin{cases} S_{\triangle EIK} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle EID} \\ S_{\triangle IEF} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle IEB} \end{cases} \Rightarrow S_{EFIK} = \dfrac{1}{2}S_{EBDI}$.

— $\begin{cases} S_{\triangle BDI} = \dfrac{2}{3}S_{\triangle BDC} \\ S_{\triangle BDE} = \dfrac{2}{3}S_{\triangle DAB} \end{cases} \Rightarrow S_{EBID} = \dfrac{2}{3}S_{ABCD}$.

Do đó $S_{EFIK} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}$, tương tự ta có $S_{PQRS} = \dfrac{1}{3}S_{EFIK}$.
Vậy $S_{PQRS} = \dfrac{1}{9}S_{ABCD}$.

□

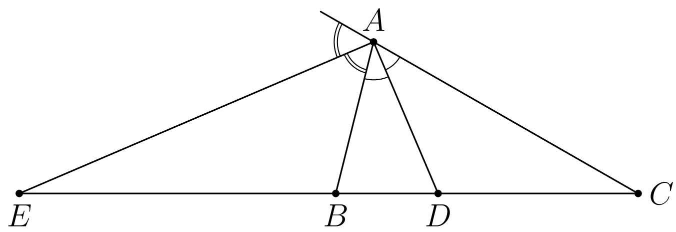
BÀI 3 TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định lí 1. *Đường phân giác của một tam giác chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn thẳng ấy.*

— AD là đường phân giác trong của góc A nên $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

— AE là đường phân giác ngoài của góc A nên $\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB}{AC}$.

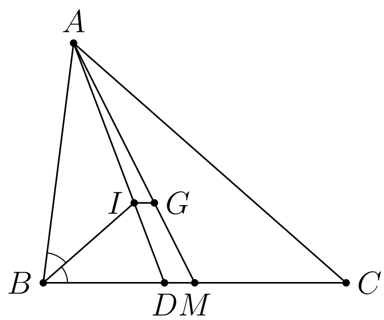


Ta có thể nói: Nếu tam giác ABC có $\dfrac{AB}{AC} = k$ thì đường phân giác trong của góc A chia đoạn thẳng BC theo tỉ số k, và nếu $k \neq 1$ thì đường phân giác ngoài của góc A cũng chia ngoài đoạn thẳng BC theo tỉ số k.

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b, AB = c$, đường phân giác AD.

1. Tính độ dài BD, DC.
2. Tia phân giác của góc B cắt AD tại I. Tính tỉ số $AI : ID$.
3. Cho BC bằng trung bình cộng của AB và AC, gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh IG song song BC.

LỜI GIẢI.



1. Vì AD là đường phân giác của $\triangle ABC$ nên

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{DB + DC}{AB + AC} = \frac{a}{b + c}.$$

Vậy $DB = \dfrac{ac}{b+c}$ và $DC = \dfrac{ab}{b+c}$.

b) Vì BI là đường phân giác của $\triangle ABD$ nên $\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{AB}{BD} = c : \dfrac{ac}{b+c} = \dfrac{b+c}{a}$.

c) Ta có $a = \dfrac{b+c}{2}$ khi đó $\dfrac{AI}{ID} = 2$.

Mặt khác $\dfrac{AG}{GM} = 2$, do đó $IG \parallel BC$.

□

B BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 219. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BD. Biết $AD = 3$ cm, $DC = 5$ cm. Tính độ dài AB, BC.

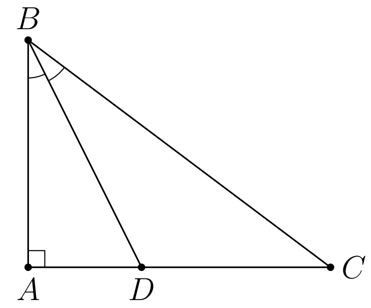
✍ **LỜI GIẢI.**

Áp dụng định lý Py-ta-go ta có $BC^2 - AB^2 = AC^2 = 64$.

Vì BD là tia phân giác nên $\dfrac{CB}{CD} = \dfrac{AB}{AD}$ suy ra

$$\frac{CB^2}{CD^2} = \frac{AB^2}{AD^2} = \frac{CB^2 - AB^2}{CD^2 - AD^2} = \frac{64}{16}.$$

Vậy $CB = \dfrac{8 \cdot 5}{4} = 10$ cm và $AB = \dfrac{8 \cdot 3}{4} = 6$ cm.



□

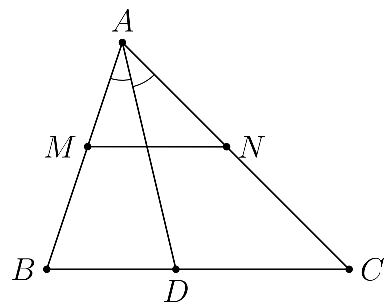
BÀI 220. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Điểm M thuộc cạnh AB, điểm N thuộc cạnh AC sao cho $BM = BD$, $CN = CD$. Chứng minh rằng MN song song với BC.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì AD là tia phân giác nên $\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$.

Mặt khác $AM = \dfrac{1}{2}AB$ và $AN = \dfrac{1}{2}AC$ nên

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow MN \parallel BC.$$



□

BÀI 221. Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, đường phân giác AD. Điểm O chia trong AD theo tỉ số $2 : 1$. Gọi K là giao điểm của BO và AC. Tính tỉ số $AK : KC$.

✍ **LỜI GIẢI.**

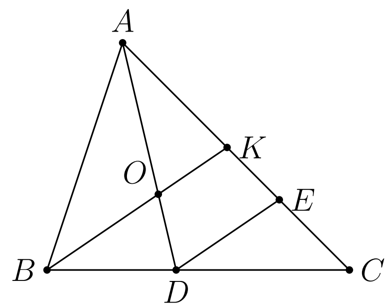
Kẻ $DE \parallel BK$ ($E \in AC$). Ta có $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{AK}{KE} \cdot \dfrac{KE}{KC}$.

Mặt khác

— $\dfrac{AK}{KE} = \dfrac{AO}{OD} = 2$.

— $\dfrac{KE}{EC} = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{KE}{KC} = \dfrac{2}{5}$.

Vậy $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{4}{5}$.



□

BÀI 222. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Các tia phân giác của các góc AMB, AMC cắt AB và AC theo thứ tự ở D, E. Gọi I là giao điểm của AM và DE.

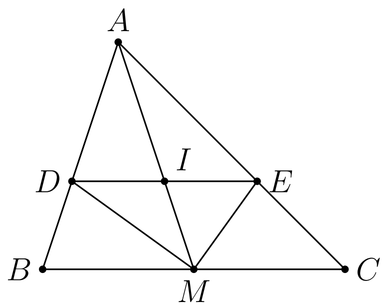
❶ Chứng minh rằng DE song song với BC.

❷ Cho $BC = a$, $AM = m$. Tính độ dài DE.

❸ Điểm I chuyển động trên đường nào nếu tam giác ABC có BC cố định, đường trung tuyến AM bằng m không đổi?

❹ Tam giác ABC có điều kiện gì để DE là đường trung bình của tam giác đó?

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Ta có $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$.

❷ Ta có $\widehat{AMD} + \widehat{AME} = \dfrac{1}{2}\widehat{AMB} + \dfrac{1}{2}\widehat{AMC} = 90°$.

Đồng thời $\dfrac{ID}{BM} = \dfrac{AI}{AM} = \dfrac{IE}{MC}$ nên $ID = IE$.

Do đó $\triangle MDE$ vuông tại M nên $MI = \dfrac{1}{2}DE$.

Mặt khác $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AI}{AM}$. Đặt $DE = x$ thì

$$\frac{x}{a} = \frac{m - \frac{x}{2}}{m} \Rightarrow DE = x = \frac{2am}{a+2m}.$$

c) Ta có $MI = \dfrac{1}{2}DE = \dfrac{am}{a+2m}$ do đó I nằm trên đường tròn tâm M bán kính $\dfrac{am}{a+2m}$.

d) DE là đường trung bình của $\triangle ABC \Leftrightarrow AD = DB \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow \triangle ABC$ vuông tại A.

□

BÀI 223. Trong tam giác ABC, đường phân giác AD chia cạnh đối diện thành các đoạn thẳng $BD = 2$ cm, $DC = 4$ cm. Đường trung trung trực của AD cắt đường thẳng BC ở K. Tính độ dài KD.

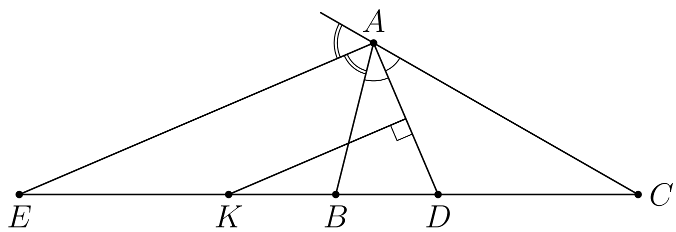
✍ **LỜI GIẢI.**

Vẽ đường phân giác ngoài của góc A cắt BC tại E. Ta có

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $EB = BC = 6$ cm, $ED = 8$ cm.

Vậy $KD = \dfrac{ED}{2} = 4$ cm.



□

BÀI 224. Cho tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 12$ cm,$BC = 10$ cm. Gọi I là giao điểm của các đường phân giác, G là trọng tâm của tam giác ABC.

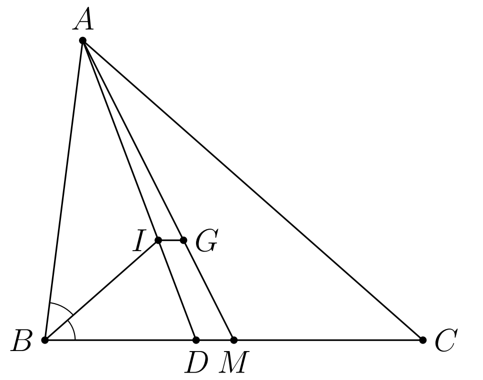
❶ Chứng minh rằng $IG \parallel BC$.

❷ Tính độ dài IG.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $\dfrac{DB}{AB}=\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{DB+DC}{AB+AC}=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$.
Đồng thời $\dfrac{IA}{ID}=\dfrac{AB}{BD}=2$ và $\dfrac{GA}{GM}=2$.
Do đó $IG\parallel BC$.

❷ Ta có $BD=\dfrac{1}{2}AB=4$ cm và $BM=\dfrac{1}{2}BC=5$ cm suy ra $DM=1$ cm.
Vậy $IG=\dfrac{2}{3}$ cm.

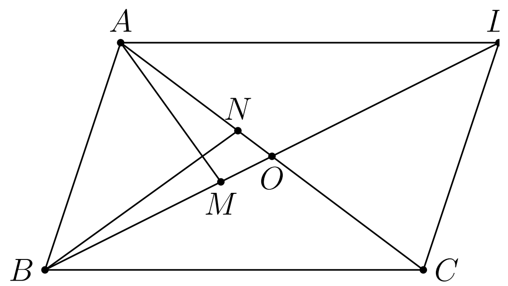


□

BÀI 225. Cho hình bình hành $ABCD$. Tia phân giác của góc BAD cắt BD ở M, tia phân giác của góc ABC cắt AC ở N. Chứng minh rằng $MN\parallel CD$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Đặt $AB=a, AD=b$.
Ta có $\dfrac{DM}{MB}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{DM}{DM+MB}=\dfrac{b}{b+a}$.
$\Rightarrow \dfrac{DM}{2DO}=\dfrac{b}{b+a}\Rightarrow\dfrac{DM}{DO}=\dfrac{2b}{b+a}$.
Tương tự ta có $\dfrac{CN}{CO}=\dfrac{2b}{b+a}$.
Vậy $\dfrac{DM}{DO}=\dfrac{CN}{CO}\Rightarrow MN\parallel BC$.



□

BÀI 226. Cho tam giác ABC có các đường phân giác BE, CF cắt nhau ở O và $\dfrac{BO}{BE}\cdot\dfrac{CO}{CF}=\dfrac{1}{2}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

✍ **LỜI GIẢI.**

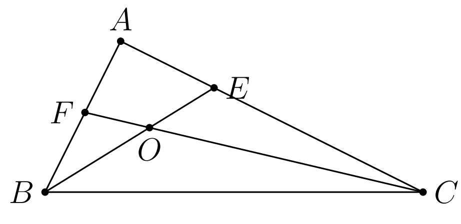
Đặt $BC=a, AC=b, AB=c$. Ta tính được

$$CE=\frac{ab}{a+c},\frac{BO}{OE}=\frac{a+c}{b},\frac{BO}{BE}=\frac{a+c}{a+b+c}.$$

Tương tự $\dfrac{CO}{CF}=\dfrac{a+b}{a+b+c}$. Suy ra

$$\frac{(a+c)(a+b)}{a+b+c}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2.$$

Do đó $\triangle ABC$ vuông tại A.

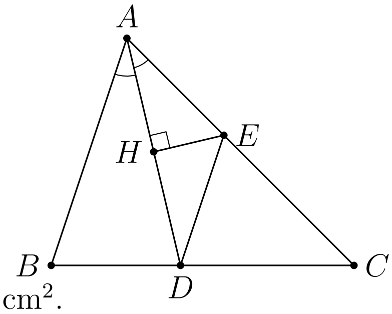


□

BÀI 227. Tính diện tích tam giác ABC, biết rằng $AB=14$ cm, $AC=35$ cm, đường phân giác AD bằng 12 cm.
Hướng dẫn: Vẽ $DE\parallel AB$ và tính diện tích tam giác ADE.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vẽ $DE \parallel AB$ ($E \in AC$) và H là hình chiếu của E trên AD.



Ta có $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{EA}{35 - EC} = \dfrac{14}{35} \Rightarrow EA = 10$ cm.

Mặt khác $\dfrac{ED}{AB} = \dfrac{EC}{AC} \Rightarrow ED = 10$ cm.

Do đó $\triangle AED$ cân tại $E \Rightarrow AH = \dfrac{1}{2}AD = 6$ cm.

Theo định lý Py-ta-go ta có $EH = \sqrt{AE^2 - AH^2} = 8$ cm.

Ta có

— $S_{\triangle ADE} = \dfrac{1}{2}EH \cdot AD = 48\text{ cm}^2 \Rightarrow S_{\triangle ADC} = \dfrac{AC}{AE}S_{\triangle ADE} = 168\text{ cm}^2$.

— $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{14}{35} \Rightarrow \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{49}{35}$.

Vậy $S_{\triangle ABC} = \dfrac{BC}{DC}S_{\triangle ADC} = 235{,}2\text{ cm}^2$. □

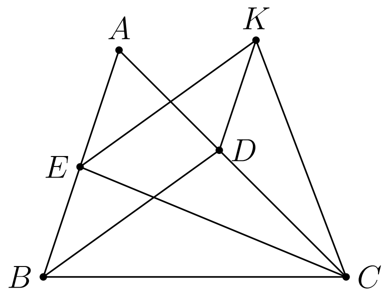
BÀI 228. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ($b > c$), các đường phân giác BD, CE.

❶ Tính các độ dài CD, BE rồi suy ra $CD > BE$.

❷ Vẽ hình bình hành $BEKD$. Chứng minh rằng $CE > EK$.

❸ Chứng minh rằng $CE > BD$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Tương tự ví dụ đầu bài, ta chứng minh được

$$CD = \frac{ab}{a+c}, BE = \frac{ac}{a+b}.$$

Mà $b > c$ nên

$$\frac{ab}{a+c} > \frac{ac}{a+c} > \frac{ac}{a+b} \Rightarrow CD > BE.$$

b) Ta có $CD > BE$ và $BE = DK$ nên $CD > DK \Rightarrow \widehat{CKD} > \widehat{KCD}$.
Ta lại có $b > c \Rightarrow \widehat{ABD} > \widehat{ACE}$ mà $\widehat{ABD} = \widehat{EKD}$ nên $\widehat{EKD} > \widehat{ACE}$.
Vậy ta có $\widehat{CKD} + \widehat{EKD} > \widehat{KCD} + \widehat{ACE} \Rightarrow \widehat{EKC} > \widehat{KCE} \Rightarrow EC > EK$.

c) Ta có $EC > CK$ mà $EK = BD$ nên $CE > BD$.

□

BÀI 4 CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định lí 1. *Hai tam giác đồng dạng với nhau nếu*

— *Ba cạnh của tam giác này tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia (trường hợp cạnh - cạnh - cạnh).*

— *Hai cạnh của tam giác này tương ứng tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và các góc xen giữa hai cạnh ấy bằng nhau (trường hợp cạnh - góc - cạnh).*

— *Hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia (trường hợp góc - góc).*

B CÁC DẠNG TOÁN

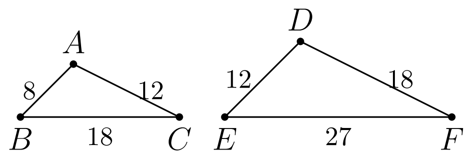
DẠNG 1. Trường hợp cạnh - cạnh - cạnh

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Hai tam giác sau có đồng dạng không nếu độ dài các cạnh của chúng bằng 8 cm, 12 cm, 18 cm và 27 cm, 18 cm, 12 cm?

LỜI GIẢI.

Gọi hai tam giác có độ dài các cạnh theo yêu cầu đề bài là $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$.



Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$ ta có
$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{2}{3}$.
$\Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle DEF$ (c-c-c).

□

VÍ DỤ 2. Có thể khẳng định rằng hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau và ba cặp góc bằng nhau thì hai tam giác ấy bằng nhau hay không?

LỜI GIẢI.

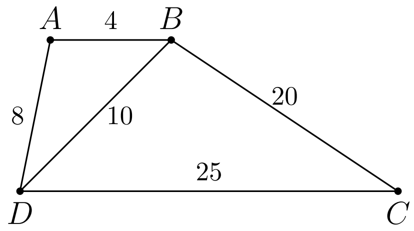
Không thể khẳng định như vậy. Hai tam giác ở Ví dụ 1 có hai cặp cạnh bằng nhau và ba cặp góc bằng nhau (vì hai tam giác đồng dạng) nhưng không phải là hai tam giác bằng nhau. □

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Tứ giác $ABCD$ có $AB = 4$ cm, $BC = 20$ cm, $CD = 25$ cm, $AD = 8$ cm, $BD = 10$ cm. Hãy xác định dạng của tứ giác.

LỜI GIẢI.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle BDC$ ta có
$\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{2}{5}$.
$\Rightarrow \triangle ABD \backsim \triangle BDC$ (c-c-c).
$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BDC}$.
Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AB \parallel CD$.
$\Rightarrow ABCD$ là hình thang.

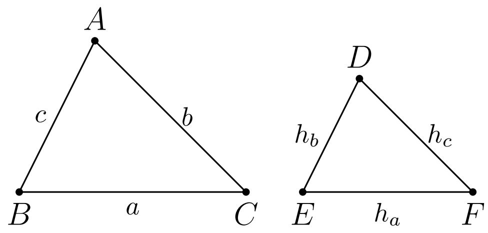


□

BÀI 2. Tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và $a^2 = bc$. Chứng minh rằng tam giác ABC đồng dạng với tam giác có độ dài các cạnh bằng độ dài ba đường cao của tam giác ABC.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi độ dài ba đường cao kẻ từ A, B, C của $\triangle ABC$ lần lượt là h_a, h_b, h_c.
Gọi tam giác $\triangle DEF$ là tam giác có độ dài các cạnh bằng độ dài ba đường cao của $\triangle ABC$.
Ta có $\dfrac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \dfrac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ (cùng là diện tích $\triangle ABC$).



$\Rightarrow a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$.
$\Rightarrow \dfrac{a \cdot h_a}{bc} = \dfrac{b \cdot h_b}{bc} = \dfrac{c \cdot h_c}{bc}$.
Mà $bc = a^2$ (giả thiết) nên $\dfrac{a \cdot h_a}{a^2} = \dfrac{h_b}{c} = \dfrac{h_c}{b}$.
$\Rightarrow \dfrac{h_a}{a} = \dfrac{h_b}{c} = \dfrac{h_c}{b}$.
Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$ ta có
$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ (vì $\dfrac{h_a}{a} = \dfrac{h_b}{c} = \dfrac{h_c}{b}$).
$\Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle DEF$ (c-c-c).
Vậy tam giác ABC đồng dạng với tam giác có độ dài các cạnh bằng độ dài ba đường cao của tam giác ABC. □

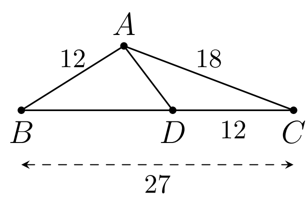
🗀 DẠNG 2. Trường hợp cạnh - góc - cạnh

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 3. Tam giác ABC có $AB = 12$ cm, $AC = 18$ cm, $BC = 27$ cm, điểm D thuộc cạnh BC sao cho $CD = 12$ cm. Tính độ dài AD.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét $\triangle CAD$ và $\triangle CBA$ ta có
$\widehat{C}$ là góc chung,
$\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{2}{3}$.
$\Rightarrow \triangle CAD \backsim \triangle CBA$ (c-g-c).
$\Rightarrow \dfrac{AD}{BA} = \dfrac{CD}{CA}$.
$\Rightarrow AD = 8$ (cm).

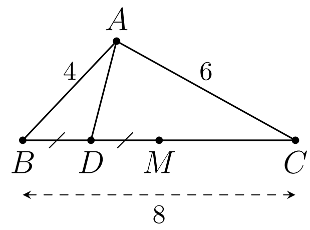


□

2. Bài tập tự luyện

BÀI 3. Tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $BC = 8$ cm, M là trung điểm của BC, D là trung điểm của BM. Tính độ dài AD.

✍ **LỜI GIẢI.**



M là trung điểm của BC nên $BM = \dfrac{BC}{2} = 4$.

D là trung điểm của BM nên $BD = \dfrac{BM}{2} = 2$.

Xét $\triangle BAD$ và $\triangle BCA$ ta có

$\widehat{B}$ là góc chung,

$\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{1}{2}$.

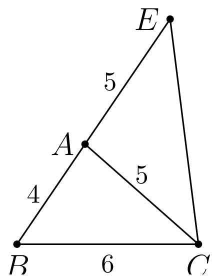
$\Rightarrow \triangle BAD \backsim \triangle BCA$ (c-g-c).

$\Rightarrow \dfrac{AD}{CA} = \dfrac{BA}{BC}$.

$\Rightarrow AD = 3$ (cm). □

BÀI 4. Tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm. Chứng minh rằng $\widehat{A} = 2\widehat{C}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Ta có $BE = BA + AE = 9$ (cm).

Xét $\triangle BAC$ và $\triangle BCE$ ta có

$\widehat{B}$ là góc chung,

$\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{2}{3}$.

$\Rightarrow \triangle BAC \backsim \triangle BCE$ (c-g-c).

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{E}$. (1)

Ta có $AE = AC = 5$ cm $\Rightarrow \triangle ACE$ cân tại A.

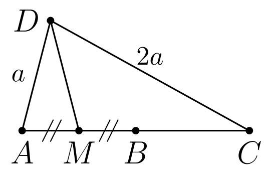
$\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{E}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{ACB} + \widehat{ACE} = \widehat{E} + \widehat{E} \Rightarrow \widehat{BCE} = 2 \cdot \widehat{E}$.

Mặt khác $\widehat{ACB} = \widehat{E}$, $\widehat{BAC} = \widehat{BCE}$ (vì $\triangle BAC \backsim \triangle BCE$) nên $\widehat{BAC} = 2 \cdot \widehat{ACB}$. □

BÀI 5. Cho đoạn thẳng $AB = a$. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B. Vẽ điểm D sao cho $DA = a$, $DC = 2a$. Gọi M là trung điểm của AB. Tính độ dài DM.

✍ **LỜI GIẢI.**



Vì C đối xứng với A qua B nên $AC = 2AB = 2a$.

Vì M là trung điểm của AB nên $AM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Xét $\triangle MAD$ và $\triangle DAC$ ta có

$\widehat{A}$ là góc chung,

$\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow \triangle MAD \backsim \triangle DAC$ (c-g-c).

$\Rightarrow \dfrac{MD}{CD} = \dfrac{AD}{AC}$.

$\Rightarrow MD = a$. □

BÀI 6. Chỉ bằng compa, hãy dựng trung điểm M của đoạn thẳng AB cho trước, cho biết tia Bx là tia đối của tia BA.

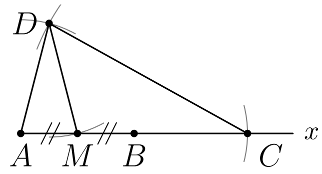
✍ **LỜI GIẢI.**

Dựng đường tròn $(B; BA)$ cắt tia Bx ở C.

Dựng hai đường tròn $(A; AB)$ và $(C; CA)$ cắt nhau tại D.

Dựng đường tròn $(D; DA)$ cắt AB ở M.

Vậy ta đã dựng được M là trung điểm của AB.



□

DẠNG 3. Trường hợp góc - góc

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Giả sử $AC = b$, $AB = c$, $DB = m$, $DC = n$. Kẻ tia Cx sao cho $\widehat{DCx} = \widehat{BAD}$ (tia Cx khác phía với A đối với BC).

1. Chứng minh rằng $AD \cdot DI = mn$.
2. Chứng minh rằng $AD^2 = bc - mn$.

LỜI GIẢI.

1. Chứng minh rằng $AD \cdot DI = mn$.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CID$ ta có

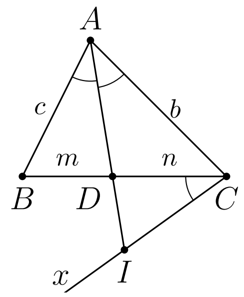
$\widehat{BAD} = \widehat{ICD}$ (giả thiết),

$\widehat{BDA} = \widehat{IDC}$ (đối đỉnh).

$\Rightarrow \triangle ABD \backsim \triangle CID$ (g-g).

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{I}$ và $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{CD}{ID}$.

$\Rightarrow AD \cdot DI = DB \cdot DC = mn.\qquad (1)$



2. Chứng minh rằng $AD^2 = bc - mn$.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AIC$ ta có

$\widehat{BAD} = \widehat{IAC}$ (giả thiết),

$\widehat{B} = \widehat{I}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \triangle ABD \backsim \triangle AIC$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AI} = \dfrac{AD}{AC}$.

$\Rightarrow AD \cdot AI = AC \cdot AB = bc.\qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AD \cdot AI - AD \cdot DI = bc - mn$.

$\Rightarrow AD(AI - DI) = bc - mn \Rightarrow AD^2 = bc - mn$.

□

3. Bài tập tự luyện

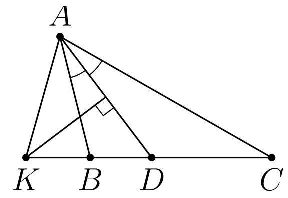
BÀI 7. Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ đường phân giác AD. Đường trung trực của AD cắt BC ở K.

1. Chứng minh rằng $\triangle KAB \backsim \triangle KCA$.
2. Tính độ dài KD biết rằng $BD = 2$ cm, $DC = 4$ cm.

LỜI GIẢI.

1. Chứng minh rằng $\triangle KAB \backsim \triangle KCA$.

Do K thuộc đường trung trực của AD nên $KA = KD$.



$\Rightarrow \triangle KAD$ cân tại K.

$\Rightarrow \widehat{KDA} = \widehat{KAD}$.

$\Rightarrow \widehat{DAC} + \widehat{DCA} = \widehat{KAB} + \widehat{BAD}$ ($\widehat{KDA}$ là góc ngoài tại đỉnh D của $\triangle DAC$).

Mà $\widehat{DAC} = \widehat{BAD}$ (AD là phân giác của $\triangle ABC$) nên $\widehat{DCA} = \widehat{KAB}$.

Xét $\triangle KAB$ và $\triangle KCA$ ta có

$\widehat{AKC}$ là góc chung,

$\widehat{KAB} = \widehat{KCA}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \triangle KAB \backsim \triangle KCA$ (g-g).

❷ Tính độ dài KD biết rằng $BD = 2$ cm, $DC = 4$ cm.

Ta có

$\dfrac{KB}{KA} = \dfrac{AB}{AC}$ (vì $\triangle KAB \backsim \triangle KCA$),

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CD}$ (AD là phân giác của $\triangle ABC$).

Suy ra $\dfrac{KB}{KA} = \dfrac{1}{2}$.

Mà $KA = KD$ (chứng minh trên) nên $KD = 2KB$.

$\Rightarrow KD = 2BD = 4$ (cm).

□

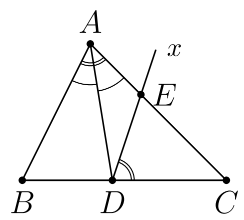
BÀI 8. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có đường phân giác AD. Vẽ tia Dx sao cho $\widehat{CDx} = \widehat{BAC}$ (tia Dx và A cùng phía đối với BC), tia Dx cắt AC ở E. Chứng minh rằng

❶ $\triangle ABC \backsim \triangle DEC$.

❷ $DE = DB$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Chứng minh $\triangle ABC \backsim \triangle DEC$.



Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DEC$ ta có

$\widehat{ACB}$ là góc chung,

$\widehat{CAB} = \widehat{CDE}$ (giả thiết).

$\Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle DEC$ (g-g).

❷ Chứng minh $DE = DB$.

Ta có $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DC}$ (vì $\triangle ABC \backsim \triangle DEC$).

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DE}{DC}$.

Mà $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$ (vì AD là phân giác của $\triangle ABC$) nên $DE = DB$.

□

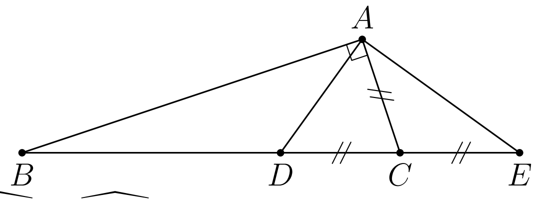
BÀI 9. Trên cạnh huyền CB của tam giác vuông ABC, lấy điểm D sao cho $CD = CA$. Gọi E là điểm đối xứng với D qua C.

❶ Chứng minh rằng các tam giác ABD và EBA đồng dạng.

❷ Gọi $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. So sánh a^2 với $b^2 + c^2$ mà không dùng định lí Py-ta-go.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Chứng minh rằng các tam giác ABD và EBA đồng dạng.



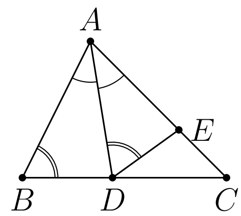
$\triangle ADE$ có AC là đường trung tuyến (E đối xứng với D qua C) và $AC = \frac{1}{2}DE$ (cùng bằng CD).
$\Rightarrow \triangle ADE$ vuông tại A.
$\Rightarrow \widehat{DAC} + \widehat{CAE} = 90^\circ$.
Mà $\widehat{DAC} + \widehat{BAD} = 90^\circ$ ($\triangle ABC$ vuông tại A) nên $\widehat{CAE} = \widehat{BAD}$.
$\triangle ACE$ có $AC = CE$ (cùng bằng CD).
$\Rightarrow ACE$ cân tại C.
$\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{CEA}$.
Xét $\triangle ABD$ và $\triangle EBA$ ta có
$\widehat{ABE}$ là góc chung,
$\widehat{BAD} = \widehat{BEA}$ (cùng bằng $\widehat{CAE}$).
$\Rightarrow \triangle ABD \backsim \triangle EBA$ (g-g).

2 Gọi $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. So sánh a^2 với $b^2 + c^2$ mà không dùng định lí Py-ta-go.
Ta có $\triangle ABD \backsim \triangle EBA$ (chứng minh trên).
$\Rightarrow \dfrac{AB}{BE} = \dfrac{BD}{BA} \Rightarrow \dfrac{c}{a+b} = \dfrac{a-b}{c} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

□

BÀI 10. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Chứng minh rằng $AD^2 < AB \cdot AC$.

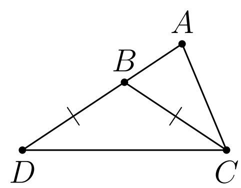
✍ **LỜI GIẢI.**



Lấy E trên AC sao cho $\widehat{ADE} = \widehat{B}$.
Xét $\triangle ADE$ và $\triangle ABD$ ta có
$\widehat{ADE} = \widehat{ABD}$ (giả thiết),
$\widehat{DAE} = \widehat{BAD}$ (AD là phân giác của $\triangle ABC$).
$\Rightarrow \triangle ADE \backsim \triangle ABD$ (g-g).
$\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB \cdot AE < AB \cdot AC$. □

BÀI 11. Tam giác ABC có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$, $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm. Tính độ dài AC.

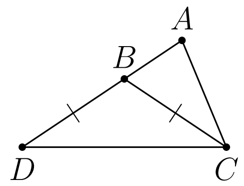
✍ **LỜI GIẢI.**



Trên tia đối của tia BA lấy $BD = BC$.
$\Rightarrow \triangle BCD$ cân tại B.
$\Rightarrow \widehat{ABC} = 2\widehat{BDC}$ ($\widehat{ABC}$ là góc ngoài tại đỉnh B).
Xét $\triangle ACD$ và $\triangle ABC$ ta có
$\widehat{BAC}$ là góc chung,
$\widehat{ADC} = \widehat{ACB}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}\widehat{ABC}$).
$\Rightarrow \triangle ACD \backsim \triangle ABC$ (g-g).
$\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow AC = 6$ (cm). □

BÀI 12. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ biết rằng số đo các cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp.

✍ **LỜI GIẢI.**



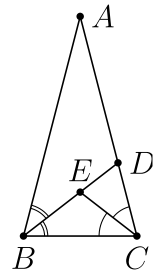
Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ là ba số tự nhiên liên tiếp.
Trên tia đối của tia BA lấy $BD = BC$.
$\Rightarrow \triangle BCD$ cân tại B.
$\Rightarrow \widehat{ABC} = 2\widehat{BDC}$ ($\widehat{ABC}$ là góc ngoài tại đỉnh B).
Xét $\triangle ACD$ và $\triangle ABC$ ta có
$\widehat{BAC}$ là góc chung,
$\widehat{ADC} = \widehat{ACB}$ (cùng bằng $\dfrac{1}{2}\widehat{ABC}$).
$\Rightarrow \triangle ACD \backsim \triangle ABC$ (g-g).
$\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD = AB(AB + BD) \Rightarrow b^2 = c^2 + ac.$ (1)
Ta có $b > c$ nên chỉ có hai khả năng là $b = c + 1$ hoặc $b = c + 2$.

— Nếu $b = c + 1$ thì từ (1) suy ra $(c + 1)^2 = c^2 + ac \Rightarrow 2c + 1 = ac \Rightarrow c(a - 2) = 1$, loại vì $c = 1$, $a = 3$, $b = 2$ không là các cạnh của một tam giác.
— Nếu $b = c + 2$ thì từ (1) suy ra $(c + 2)^2 = c^2 + ac \Rightarrow 4c + 4 = ac \Rightarrow c(a - 4) = 4$. Xét c lần lượt bằng 1, 2, 4 thì chỉ có $c = 4$, $a = 5$, $b = 6$ thỏa mãn bài toán.

□

BÀI 13. Cho tam giác ABC cân tại A, đường phân giác BD. Tính độ dài BD biết rằng $BC = 5$ cm, $AC = 20$ cm.

✍ **LỜI GIẢI.**



Ta có BD là phân giác của $\triangle ABC$ nên $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} = 4 \Rightarrow DA = 4DC$.
Mà $DA + DC = 20$ nên $5DC = 20 \Rightarrow DC = 4$ (cm).
Cách 1. Làm tiếp như Bài 9.
Cách 2. Tính BD theo công thức tổng quát $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$ nêu ở Ví dụ 4.
Cách 3. Vẽ đường phân giác CE của $\triangle CBD$ (E thuộc BD).
Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{CBD} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABC}$ (BD là phân giác của $\widehat{ABC}$),
$\widehat{DCE} = \widehat{ECB} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACB}$ (CE là phân giác của $\widehat{ACB}$),
$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ ($\triangle ABC$ cân tại A).
$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CBD} = \widehat{DCE} = \widehat{ECB}$.
$\Rightarrow \triangle EBC$ cân tại E.
Đặt $DE = x$, $EB = y$, ta có $CE = y$.
Xét $\triangle CED$ và $\triangle BCD$ ta có
$\widehat{BDC}$ là góc chung,
$\widehat{DCE} = \widehat{DBC}$ (chứng minh trên).
$\Rightarrow \triangle CED \backsim \triangle BCD$ (g-g).
$\Rightarrow \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{ED}{CD} = \dfrac{EC}{BC}$.
$\Rightarrow \dfrac{4}{BD} = \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{x+y}{9} = \dfrac{BD}{9}$ (tính chất dãy tỉ số bằng nhau).
$\Rightarrow BD^2 = 36 \Rightarrow BD = 6$ (cm). □

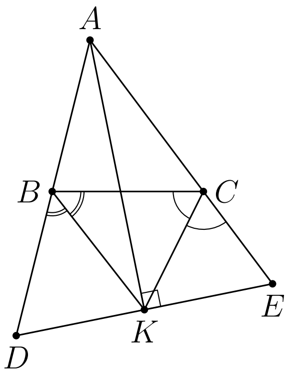
BÀI 14. Các đường phân giác các góc ngoài tại các đỉnh B và C của $\triangle ABC$ cắt nhau ở K. Đường thẳng vuông góc với AK tại K cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự ở D, E. Chứng minh rằng

❶ Các tam giác DBK và EKC đồng dạng.

❷ $DE^2 = 4BD \cdot CE$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Chứng minh các tam giác DBK và EKC đồng dạng.



Vì các đường phân giác các góc ngoài tại các đỉnh B và C của $\triangle ABC$ cắt nhau ở K nên K cách đều AB, AC và BC. Suy ra AK là phân giác của $\widehat{BAC}$.

$\triangle ADE$ có AK vừa là phân giác vừa là đường cao nên $\triangle ADE$ cân tại A.

Đặt $\widehat{ADE} = \widehat{AED} = \alpha$, $\widehat{CBK} = \widehat{KBD} = \beta$, $\widehat{BCK} = \widehat{KCE} = \gamma$.

Tứ giác $BCED$ có $\widehat{DBC} + \widehat{BCE} + \widehat{CED} + \widehat{EDB} = 360^\circ$.

$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Mặt khác $\widehat{CKE} + \alpha + \gamma = 180^\circ$ (tổng ba góc trong $\triangle CKE$) nên $\widehat{CKE} = \beta$.

Xét $\triangle DBK$ và $\triangle EKC$ ta có

$\widehat{DBK} = \widehat{ECK} = \beta$,

$\widehat{BDK} = \widehat{CEK} = \alpha$.

$\Rightarrow \triangle DBK \backsim \triangle EKC$ (g-g).

❷ Chứng minh $DE^2 = 4BD \cdot CE$.

$\triangle ADE$ cân tại A có AK là đường cao nên AK cũng là trung tuyến.

Vì $\triangle DBK \backsim \triangle EKC$ (chứng minh trên) nên $\dfrac{DK}{CE} = \dfrac{BD}{KE}$.

$\Rightarrow DK \cdot KE = BD \cdot CE$.

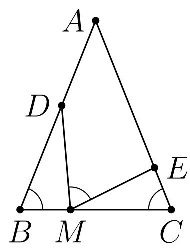
$\Rightarrow \dfrac{1}{4}DE^2 = BD \cdot CE$ (vì K là trung điểm của DE).

$\Rightarrow DE^2 = 4BD \cdot CE$.

□

BÀI 15. Cho tam giác ABC cân tại A, góc đáy α. Các điểm D, M, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CA sao cho $\widehat{DME} = \alpha$. Chứng minh rằng các tam giác BDM và CME đồng dạng.

✍ **LỜI GIẢI.**



Ta có $\widehat{B} + \widehat{BMD} + \widehat{BDM} = 180^\circ$ (tổng ba góc trong $\triangle BDM$),

$\widehat{DME} + \widehat{BMD} + \widehat{CME} = 180^\circ$ (B, M, C thẳng hàng),

$\widehat{B} = \widehat{DME} = \alpha$.

$\Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{CME}$.

Xét $\triangle BDM$ và $\triangle CME$ ta có

$\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$,

$\widehat{BDM} = \widehat{CME}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \triangle BDM \backsim \triangle CME$ (g-g). □

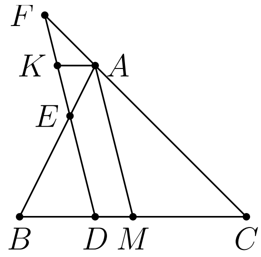
BÀI 16. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Qua điểm D thuộc cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AM, cắt AB và AC theo thứ tự ở E và F.

❶ Chứng minh rằng khi điểm D chuyển động trên cạnh BC thì tổng $DE + DF$ có giá trị không đổi.

❷ Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt EF ở K. Chứng minh rằng K là trung điểm của EF.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Chứng minh rằng khi D chuyển động trên cạnh BC thì tổng $DE + DF$ có giá trị không đổi.



Ta có $\dfrac{DE}{AM} = \dfrac{BD}{BM}$ (hệ quả định lý Ta-lét, $DE \parallel AM$),

$\dfrac{DF}{AM} = \dfrac{CD}{CM}$ (hệ quả định lý Ta-lét, $AM \parallel DF$).

$\Rightarrow \dfrac{DE}{AM} + \dfrac{DF}{AM} = \dfrac{BD}{BM} + \dfrac{CD}{CM} = \dfrac{BC}{BM} = 2.$

Vậy $DE + DF = 2AM$ không đổi khi D chuyển động trên cạnh BC.

❷ Chứng minh rằng K là trung điểm của EF.

Xét $\triangle FAK$ và $\triangle ACM$ ta có

$\widehat{FAK} = \widehat{ACM}$ (đồng vị, $AK \parallel BC$),

$\widehat{AFK} = \widehat{CAM}$ (đồng vị, $AM \parallel DF$).

$\Rightarrow \triangle FAK \backsim \triangle ACM$ (g-g).

Xét $\triangle AEK$ và $\triangle BAM$ ta có

$\widehat{AEK} = \widehat{BAM}$ (so le trong, $DF \parallel AM$),

$\widehat{EAK} = \widehat{ABM}$ (so le trong, $AK \parallel BC$).

$\Rightarrow \triangle AEK \backsim \triangle BAM$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{EK}{AM} = \dfrac{AK}{BM} = \dfrac{AK}{CM}$ (M là trung điểm của BC).

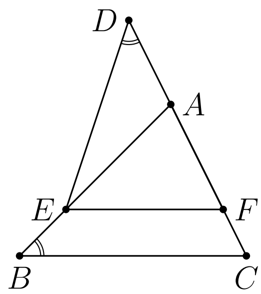
Mặt khác $\dfrac{FK}{AM} = \dfrac{AK}{CM}$ (vì $\triangle FAK \backsim \triangle ACM$) nên $EK = FK$.

Suy ra K là trung điểm của EF.

□

BÀI 17. Cho các tam giác ABC và $A'B'C'$ có $\widehat{A} + \widehat{A'} = 180^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Gọi $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $B'C' = a'$, $A'C' = b'$, $A'B' = c'$. Chứng minh rằng $aa' = bb' + cc'$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Vẽ $\triangle ADE$ bằng $\triangle A'B'C'$ như hình bên. Kẻ $EF \parallel BC$.

Do $EF \parallel BC$ nên $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ (định lý Ta-lét).

$\Rightarrow \dfrac{b'}{c} = \dfrac{AF}{b} \Rightarrow bb' = c \cdot AF.$ (1)

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle EDF$ ta có

$\widehat{ACB} = \widehat{EFD}$ (đồng vị, $EF \parallel BC$),

$\widehat{B} = \widehat{D}$ (cùng bằng $\widehat{B'}$).

$\Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle EDF$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{BC}{DF} = \dfrac{AB}{ED} \Rightarrow \dfrac{a}{AF + c'} = \dfrac{c}{a'} \Rightarrow aa' = c \cdot AF + cc'.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $aa' = bb' + cc'$. □

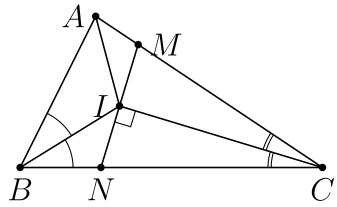
BÀI 18. Cho tam giác ABC, I là giao điểm của ba đường phân giác. Đường thẳng vuông góc với CI tại I cắt AC, BC theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng

❶ Tam giác AIM đồng dạng với tam giác ABI.

❷ $\dfrac{AM}{BN} = \left(\dfrac{AI}{BI}\right)^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Chứng minh tam giác AIM đồng dạng với tam giác ABI.



Ta có $\widehat{CMI} = 90^\circ - \widehat{MCI}$ ($\triangle CMI$ vuông tại I).
$\Rightarrow \widehat{CMI} = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\widehat{ACB}$ (CI là phân giác của $\widehat{ACB}$).
$\Rightarrow \widehat{CMI} = \dfrac{180^\circ - \widehat{ACB}}{2}$.
$\Rightarrow \widehat{CMI} = \dfrac{\widehat{ABC} + \widehat{BAC}}{2}$ (tổng ba góc trong $\triangle ABC$).
$\Rightarrow \widehat{CMI} = \widehat{MAI} + \widehat{ABI}$ (AI, BI là phân giác của $\triangle ABC$).
Mà $\widehat{CMI} = \widehat{MAI} + \widehat{MIA}$ (góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle AIM$) nên $\widehat{ABI} = \widehat{MIA}$.
Xét $\triangle AIM$ và $\triangle ABI$ ta có
$\widehat{MIA} = \widehat{ABI}$ (chứng minh trên),
$\widehat{MAI} = \widehat{IAB}$ (AI là phân giác của $\widehat{BAC}$).
$\Rightarrow \triangle AIM \backsim \triangle ABI$ (g-g).

❷ Chứng minh $\dfrac{AM}{BN} = \left(\dfrac{AI}{BI}\right)^2$.
Ta có $\dfrac{AM}{AI} = \dfrac{AI}{AB} \Rightarrow AI^2 = AM \cdot AB$.
Chứng minh tương tự ở trên ta có $BI^2 = BN \cdot AB$.
Vậy $\dfrac{AI^2}{BI^2} = \dfrac{AM \cdot AB}{BN \cdot AB} = \dfrac{AM}{BN}$.

□

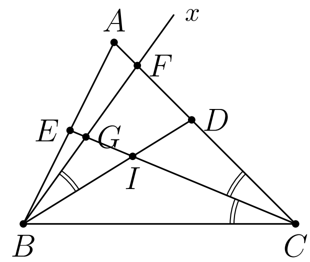
BÀI 19. Tam giác ABC có $AB < AC$, các đường phân giác BD và CE. Kẻ tia Bx sao cho $\widehat{DBx} = \widehat{DCE}$ (tia Bx và A nằm cùng phía đối với BD), Bx cắt DA ở F, cắt CE ở G. Chứng minh rằng

❶ $CG < CE$.

❷ $BD < CE$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Chứng minh $CG < CE$.



$\triangle ABC$ có $AB < AC$ (giả thiết) nên $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ (quan hệ cạnh và góc đối diện).
$\Rightarrow \widehat{DBE} > \widehat{DCE}$ (BD và CE là phân giác của $\triangle ABC$).
Mà $\widehat{DCE} = \widehat{DBG}$ (giả thiết) nên $\widehat{DBE} > \widehat{DBG}$.
Gọi I là giao điểm của BD và CE thì G nằm giữa I và E, suy ra $CG < CE$.

❷ Chứng minh $BD < CE$.
Ta có $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ (chứng minh trên).
$\Rightarrow \widehat{DBC} > \widehat{ECB}$ (BD, CE là phân giác của $\triangle ABC$).
Mà $\widehat{DBF} = \widehat{FCE}$ (giả thiết) nên $\widehat{DBC} + \widehat{DBF} > \widehat{ECB} + \widehat{FCE}$.
$\Rightarrow \widehat{FBC} > \widehat{FCB}$.
$\Rightarrow CF > BF$. (quan hệ cạnh và góc đối diện trong $\triangle FBC$).
Xét $\triangle FBD$ và $\triangle FCG$ ta có
$\widehat{BFD}$ là góc chung,
$\widehat{FBD} = \widehat{FCG}$ (giả thiết).
$\Rightarrow \triangle FBD \backsim \triangle FCG$ (g-g).
$\Rightarrow \dfrac{BD}{CG} = \dfrac{BF}{CF}$.

Mà $CF > BF$ (chứng minh trên) nên $CG > BD$.

Mặt khác $CG < CE$ (chứng minh câu a) nên $BD < CE$.

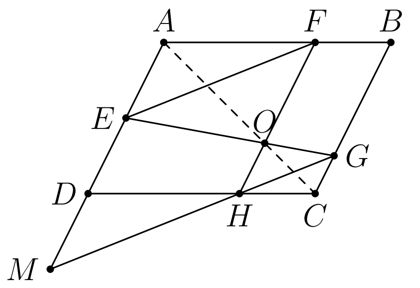
□

DẠNG 4. Phối hợp các trường hợp cạnh - góc - cạnh và góc - góc

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 5. Một hình thang có bốn đỉnh thuộc bốn cạnh của một hình bình hành. Chứng minh rằng tồn tại một đường chéo của hình bình hành đi qua giao điểm hai đường chéo của hình thang.

LỜI GIẢI.



Gọi O là giao điểm của các đường chéo EG và FH của hình thang $EFGH$ nội tiếp hình bình hành $ABCD$.

Gọi M là giao điểm của CH và AD.

Xét $\triangle OEF$ và $\triangle OGH$ ta có

$\widehat{OEF} = \widehat{OGH}$ (so le trong, $EF \parallel GH$),

$\widehat{OFE} = \widehat{OHG}$ (so le trong, $EF \parallel GH$).

$\Rightarrow \triangle OEF \backsim \triangle OGH$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{OE}{OG} = \dfrac{EF}{GH}$. (1)

Xét $\triangle AEF$ và $\triangle CGH$ ta có

$\widehat{A} = \widehat{C}$ ($ABCD$ là hình bình hành),

$\widehat{AEF} = \widehat{CGH}$ (cùng bằng $\widehat{M}$).

$\Rightarrow \triangle AEF \backsim \triangle CGH$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{AE}{CG} = \dfrac{EF}{GH}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AE}{CG} = \dfrac{OE}{OG}$.

Xét $\triangle AOE$ và $\triangle COG$ ta có

$\dfrac{AE}{CG} = \dfrac{OE}{OG}$ (chứng minh trên),

$\widehat{AEO} = \widehat{CGO}$ (so le trong, $AD \parallel BC$).

$\Rightarrow \triangle AOE \backsim \triangle COG$ (c-g-c).

$\Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{COG}$.

Mà $\widehat{AOE} + \widehat{AOG} = 180^\circ$ nên $\widehat{COG} + \widehat{AOG} = 180^\circ$.

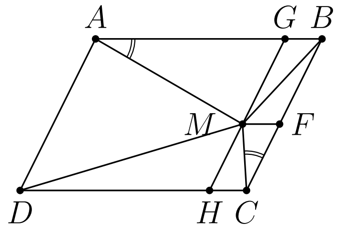
Suy ra A, O, C thẳng hàng.

Vậy đường chéo AC của hình bình hành $ABCD$ đi qua giao điểm hai đường chéo của hình thang $EFGH$. □

BÀI 20. Cho điểm M nằm trong hình bình hành $ABCD$ sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$. Qua M vẽ đường thẳng song song với BC, cắt AB và CD theo thứ tự ở G và H. Qua M vẽ đường thẳng song song với AB, cắt BC ở F. Chứng minh rằng

1. Tam giác AGM đồng dạng với tam giác CFM.
2. $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Chứng minh tam giác AGM đồng dạng với tam giác CFM.

Ta có $\widehat{AGM}=\widehat{ABC}$ (đồng vị, $GM \parallel BC$),

$\widehat{CFM}=\widehat{ABC}$ (đồng vị, $MF \parallel AB$).

$\Rightarrow \widehat{AGM}=\widehat{CFM}$.

Xét $\triangle AGM$ và $\triangle CFM$ ta có

$\widehat{AGM}=\widehat{CFM}$ (chứng minh trên),

$\widehat{MAG}=\widehat{MCF}$ (giả thiết).

$\Rightarrow \triangle AGM \backsim \triangle CFM$ (g-g).

❷ Chứng minh $\widehat{MBC}=\widehat{MDC}$.

Tứ giác $ADHG$ có

$AD \parallel GB$ (cùng song song với BC),

$AG \parallel DH$ ($ABDC$ là hình bình hành).

$\Rightarrow ADHG$ là hình bình hành.

Chứng minh tương tự ta cũng có $MFBG$, $MHCF$ là hình bình hành.

Ta có $\dfrac{AG}{CF}=\dfrac{MG}{MF}$ (vì $\triangle AGM \backsim \triangle CFM$),

$AG=DH$ ($ADHG$ là hình bình hành),

$CF=MH$ ($MHCF$ là hình bình hành),

$MG=BF$ ($MFBG$ là hình bình hành).

$\Rightarrow \dfrac{DH}{MH}=\dfrac{BF}{MF}$.

$\Rightarrow \dfrac{DH}{BF}=\dfrac{MH}{MF}$.

Ta có $\widehat{DHM}=\widehat{BCD}$ (đồng vị, $HM \parallel BC$),

$\widehat{BFM}=\widehat{BCD}$ (đồng vị, $MF \parallel AB \parallel CD$).

$\Rightarrow \widehat{DHM}=\widehat{BFM}$.

Xét $\triangle DHM$ và $\triangle BFM$ ta có

$\dfrac{DH}{BF}=\dfrac{MH}{MF}$ (chứng minh trên),

$\widehat{DHM}=\widehat{BFM}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \triangle DHM \backsim \triangle BFM$ (c-g-c).

$\Rightarrow \widehat{MDC}=\widehat{MBC}$.

□

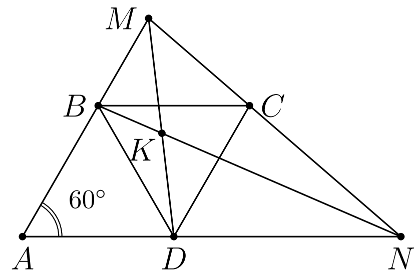
BÀI 21. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a có $\widehat{A}=60^\circ$. Một đường thẳng bất kì đi qua C cắt tia đối của các tia BA và DA theo thứ tự tại M và N.

❶ Chứng minh rằng tích $BM \cdot DN$ có giá trị không đổi.

❷ Gọi K là giao điểm của BN và DM. Tính $\widehat{BKD}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Chứng minh rằng tích $BM \cdot DN$ có giá trị không đổi.



Xét $\triangle MBC$ và $\triangle CDN$ ta có
$\widehat{BMC} = \widehat{DCN}$ (đồng vị, $AM \parallel CD$),
$\widehat{BCM} = \widehat{DNC}$ (đồng vị, $BC \parallel AN$).
$\Rightarrow \triangle MBC \backsim \triangle CDN$ (g-g). $\Rightarrow \dfrac{BM}{CD} = \dfrac{BC}{DN}$.
$\Rightarrow BM \cdot DN = a^2$.

❷ Gọi K là giao điểm của BN và DM. Tính $\widehat{BKD}$.
$\triangle ABD$ có $AB = AD = a$ và $\widehat{A} = 60^\circ$ nên $\triangle ABD$ đều $\Rightarrow BD = a$.
Mà $BM \cdot DN = a^2$ (câu a) nên $BM \cdot DN = BD^2$.
Vì $\widehat{DBM}$ kề bù với $\widehat{DBA}$ nên $\widehat{DBM} = 120^\circ$.
Vì $\widehat{BDN}$ kề bù với $\widehat{BDA}$ nên $\widehat{BDN} = 120^\circ$.
Xét $\triangle BDM$ và $\triangle DNB$ ta có
$\widehat{DBM} = \widehat{BDN} = 120^\circ$,
$\dfrac{BM}{BD} = \dfrac{BD}{DN}$ (vì $BM \cdot DN = BD^2$).
$\Rightarrow \triangle BDM \backsim \triangle DNB$ (c-g-c).
$\Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{DBN}$.
Xét $\triangle DBM$ và $\triangle DKB$ ta có
$\widehat{BDK}$ là góc chung,
$\widehat{BMD} = \widehat{DBK}$ (chứng minh trên).
$\Rightarrow \triangle DBM \backsim \triangle DKB$ (g-g).
$\Rightarrow \widehat{DBM} = \widehat{BKD}$.
$\Rightarrow \widehat{BKD} = 120^\circ$.

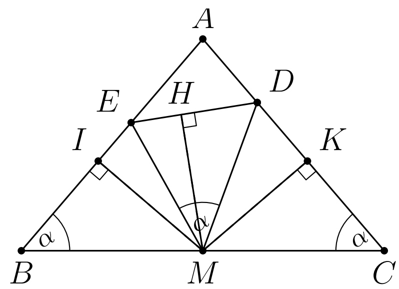
□

BÀI 22. Cho tam giác ABC cân tại A có $BC = 2a$, M là trung điểm của BC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{B}$.

❶ Chứng minh rằng tích $BC \cdot CE$ không đổi.
❷ Chứng minh rằng DM là tia phân giác của góc BDE.
❸ Tính chu vi $\triangle AED$ nếu tam giác ABC là tam giác đều.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶



Ta có $\widehat{DMC} = \widehat{DME} + \widehat{CME}$, mặt khác $\widehat{DMC} = \widehat{B} + \widehat{BDM}$, mà $\widehat{DME} = \widehat{B}$ nên $\widehat{CME} = \widehat{BDM}$.
Do đó $\triangle BDM$ và $\triangle CME$ đồng dạng (g.g)
$\Rightarrow \dfrac{BD}{CM} = \dfrac{BM}{CE}$
$\Rightarrow BD \cdot CE = CM \cdot BM = a^2$.

❷ $\triangle BDM$ và $\triangle CME$ đồng dạng còn suy ra $\dfrac{DM}{ME} = \dfrac{BD}{CM} \Rightarrow \dfrac{DM}{ME} = \dfrac{BD}{BM}$.
(vì $CM = BM$). Do đó $\triangle DME$ và $\triangle DBM$ đồng dạng (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{BDM}$.

❸ Từ câu b) suy ra DM là tia phân giác của góc BDE, EM là tia phân giác của góc CED. Kẻ $MH \perp DE$, $MI \perp AB$, $MK \perp AC$.
Ta có $DH = DI$, $EH = EK$, do đó chu vi $\triangle ADE = AI + AK = 2AK$.

Ta lại có $CK = \dfrac{MC}{2} = \dfrac{a}{2}$, $AC = 2a$ nên $AK = 1,5a$.
Vậy chu vi tam giác ADE bằng $3a$.

□

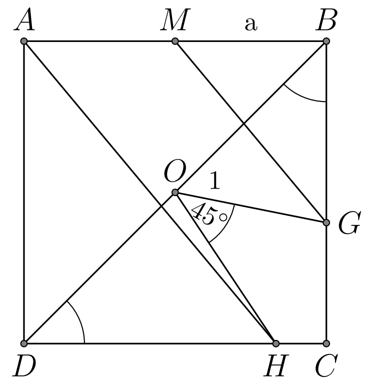
BÀI 23. Cho hình vuông $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo. Lấy điểm G thuộc cạnh BC, điểm H thuộc cạnh CD sao cho $\widehat{GOH} = 45^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng:

❶ Tam giác HOD đồng dạng với tam giác OGB.

❷ MG song song với AH.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có
$\widehat{HOD} + \widehat{O_1} = 135^\circ$, $\widehat{OGB} + \widehat{O_1} = 135^\circ$ nên $\widehat{HOD} = \widehat{OGB}$.
$\triangle HOD$ và $\triangle OGB$ đồng dạng (g.g).



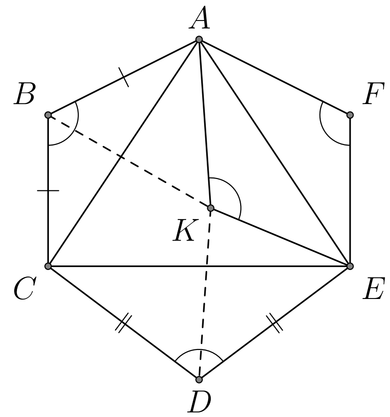
❷ Từ câu $a)$ suy ra $\dfrac{HD}{OB} = \dfrac{DO}{BG}$.
Đặt $BM = a$ thì $AD = 2a$, $OB = OD = a\sqrt{2}$.
Ta có $HD \cdot BG = OB \cdot OD = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 2a \cdot a = AD \cdot BM$
$\Rightarrow \dfrac{HD}{AD} = \dfrac{BM}{BG}$.
$\triangle AHD$ và $\triangle GMB$ đồng dạng (c.g.c) suy ra $\widehat{AHD} = \widehat{GMB}$.
Do đó $\widehat{HAB} = \widehat{GMB}$.
Vậy $MG \parallel AH$.

□

BÀI 24. Lục giác $ABCDEF$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = \widehat{F}$, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Gọi K là điểm đối xứng với F qua AE. Chứng minh rằng $BCDK$ là hình bình hành.

✍ **LỜI GIẢI.**

$\triangle ABC$ và $\triangle AKE$ đồng dạng (g.g)
$\Rightarrow \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AB}{AK}$, do đó $\triangle BAK$ và $\triangle CAE$ đồng dạng (c.g.c).
Tương tự $\triangle DKE$ và $\triangle CAE$ đồng dạng. Suy ra $\triangle BAK$ và $\triangle DKE$ đồng dạng.
Tỉ số đồng dạng bằng $\dfrac{AK}{KE} = 1$ nên $\triangle BAK = \triangle DKE \Rightarrow BC = DK$.
Tương tự $CD = BK$.
Vậy $BCDK$ là hình bình hành.



□

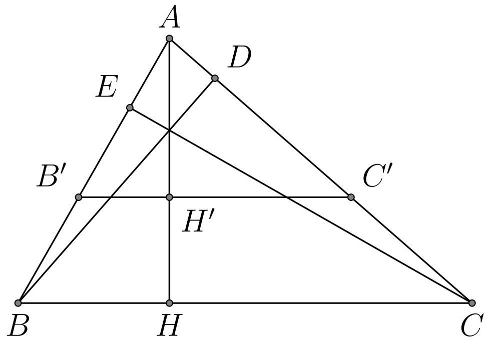
🗀 DẠNG 5. Dựng hình

Phương pháp giải:

BÀI 25. Dựng tam giác ABC, biết độ dài ba đường cao của nó bằng h_a, h_b, h_c cho trước.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phân tích. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của $\triangle ABC$ phải dựng. Ta có $ah_a = bh_b = ch_c$.
Chia cho $h_a h_b$ được $\dfrac{a}{h_b} = \dfrac{b}{h_a} = \dfrac{c}{\dfrac{h_a h_b}{h_c}}$.
Do đó ba cạnh a, b, c tỉ lệ với h_a, h_b, $\dfrac{h_a h_b}{h_c}$.
Biết h_a, h_b, h_c ta dựng được $k = \dfrac{h_a h_b}{h_c}$ (dựng đoạn tỉ lệ thứ tư).
Do đó ta dựng được một tam giác đồng dạng với tam giác phải dựng.



Cách dựng. Dựng $AB'C'$ có $AB' = k$, $AC' = h_a$, $B'C' = h_b$.
Dựng đường cao AH'. Trên tia AH' đặt $AH = h_a$. Qua H dựng đường thẳng song song $B'C'$, cắt AB', AC' ở B, C, ta được $\triangle ABC$ cần dựng.
Chứng minh. Gọi BD, CE là các đường cao của $\triangle ABC$. Ta sẽ chứng minh rằng $BD = h_b$, $CE = h_c$.
Tỉ số hai đường cao bằng tỉ số nghịch đảo của hai cạnh tương ứng nên

$$\frac{AH}{BD} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{h_a}{BD} = \frac{AC}{BC} \qquad (1)$$

Ta lại có

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AC'}{B'C'} = \frac{h_a}{h_b} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{h_a}{BD} = \dfrac{h_a}{h_b}$ nên $BD = h_b$.
Tương tự ta có

$$\frac{AH}{CE} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{h_a}{CE} = \frac{AB}{BC} \qquad (3)$$

Ta lại có

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'} = \frac{h_a h_b : h_c}{h_b} = \frac{h_a}{h_c} \qquad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra $\dfrac{h_a}{CE} = \dfrac{h_a}{h_c}$ nên $CE = h_c$.
Biện luận. Bài toán có một nghiệm hình $\Leftrightarrow$ dựng được $\triangle AB'C'$

$$\Leftrightarrow |h_a - h_b| < \frac{h_a h_b}{h_c} < h_a + h_b \Leftrightarrow \left|\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_a}\right| < \frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_a}.$$

Chú ý: Sẽ không chính xác nếu dựng $\triangle A'B'C'$ như sau:
- *Dựng tam giác có độ dài ba cạnh bằng h_a, h_b, h_c.*
- *Dựng $\triangle A'B'C'$ có độ dài ba cạnh là chiều cao của tam giác trên.*
- *$\triangle A'B'C'$ đồng dạng với tam giác phải dựng.*

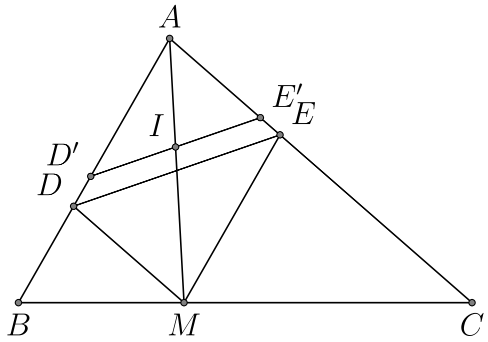
Sai lầm của cách dựng này là ngay trong bước dựng thứ nhất đã đòi hỏi trong ba đoạn thẳng h_a, h_b, h_c, mỗi đoạn phải nhỏ hơn tổng của hai đoạn kia, trong khi điều kiện đó không nhất thiết phải có. Chẳng hạn, một tam giác cân có cạnh đáy a, cạnh bên b trong đó $a : b = 1 : 5$ thì $h_a : h_b = 5 : 1$ do đó $h_a : h_b : h_c = 5 : 1 : 1$, tam giác này có $h_a > h_b + h_c$.

□

BÀI 26. Cho tam giác ABC. Dựng hình bình hành $AEMD$ có D, M, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CA sao cho các tam giác MDE và ABC đồng dạng.

✍ **LỜI GIẢI.**

Chú ý rằng $\triangle MDE = \triangle AED$ nên cần dựng $\triangle AED$ đồng dạng với $\triangle ABC$.
Dựng E' bất kì thuộc AC.
Dựng D' thuộc AB sao cho $\widehat{AE'D'} = \widehat{B}$.
Gọi I là trung điểm của $D'E'$, giao điểm của AI và BC cho ta điểm M.

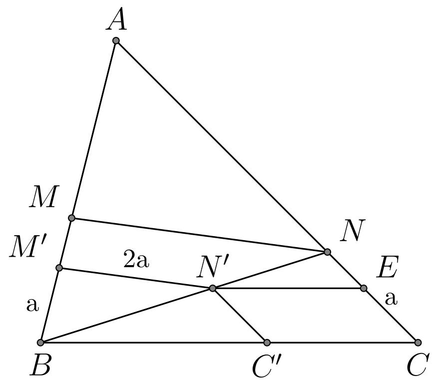


□

BÀI 27. Cho tam giác ABC. Dựng điểm M thuộc cạnh AB, điểm N thuộc cạnh AC sao cho $BM = CN = \dfrac{1}{2}MN$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Lấy N' bất kì thuộc BN, kẻ $N'M' \parallel NM$, $N'C' \parallel NC$.
Ta có:
$\dfrac{BM'}{BM} = \dfrac{M'N'}{MN} = \dfrac{BN'}{BN} = \dfrac{N'C'}{NC}$
$\Rightarrow BM' : M'N' : N'C' = BM : MN : NC = 1 : 2 : 1$.
Từ đó suy ra cách dựng: trước hết dựng tứ giác $BM'N'C'$ biết ba cạnh và hai góc kề với cạnh thứ tư: $BM' = a$, $M'N' = 2a$, $N'C' = a$ (a là một độ dài tùy ý), $\widehat{M'BC'} = \widehat{ABC}$, $\widehat{N'C'B} = \widehat{ACB}$, cách dựng được thể hiện trên hình 146. BN' cắt AC ở N. Dựng $NM \parallel N'M'$.

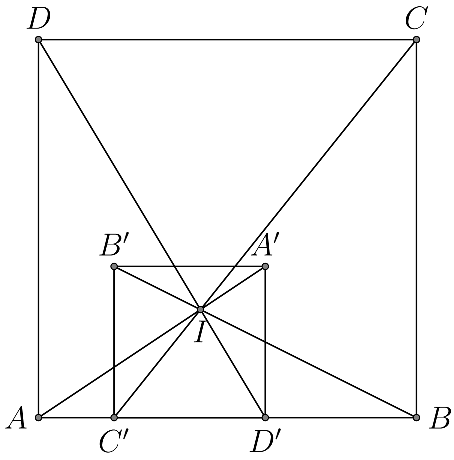


Hình 146

□

BÀI 28. Cho bốn điểm A, C', D', B thẳng hàng theo thứ tự ấy. Vẽ về một phía của AB các hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC', DD' đồng quy.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi O là giao điểm của AA' và BB'. Ta sẽ chứng minh rằng các đường thẳng CC', DD' cũng đi qua O. Thật vậy:

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Do đó $\triangle OB'C'$ và $\triangle OBC$ đồng dạng (c.g.c)
$\Rightarrow \widehat{B'OC'} = \widehat{BOC}$.
Từ đó C, O, C' thẳng hàng. Tương tự D, O, D' thẳng hàng. $\square$

BÀI 5 CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG

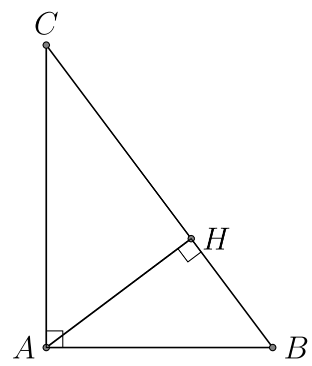
A CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Hai tam giác vuông đồng dạng

Phương pháp giải: Hai tam giác vuông đồng dạng với nhau nếu:
- Hai cạnh góc vuông của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác kia (trường hợp cạnh - góc - cạnh).
- Một góc nhọn của tam giác này bằng một góc nhọn của tam giác kia (trường hợp góc - góc).
- Cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác này tỉ lệ với cạnh huyện và cạnh góc vuông của tam giác kia (trường hợp cạnh huyền - cạnh góc vuông).

VÍ DỤ 1. Tính chu vi của tam giác ABC vuông tại A, biết rằng đường cao AH chia tam giác đó thành hai tam giác AHB và AHC có chu vi theo thứ tự bằng 18 cm và 24 cm.

LỜI GIẢI.



Xét $\triangle AHB$ và $\triangle CHA$, ta có
- $\widehat{AHB} = \widehat{CAB} = 90^\circ$,
- $\widehat{ABH} = \widehat{CAH}$ (cùng phụ với góc HAB).

Do đó $\triangle AHB$ và $\triangle CHA$ đồng dạng (g.g), suy ra

$$\frac{AH}{CH} = \frac{AB}{CA} = \frac{HB}{HA} = \frac{AH+AB+HB}{CH+CA+HA} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle CAB$, có:
- $\widehat{AHB} = \widehat{CAB} = 90^\circ$,
- $\widehat{B}$ là góc chung.

Do đó $\triangle AHB$ và $\triangle CAB$ đồng dạng (g.g), suy ra

$$\frac{AH}{CA} = \frac{AB}{CB} = \frac{HB}{AB} = \frac{AH+AB+HB}{CH+CB+AB} = \frac{18}{CH+CB+AB} \quad (2)$$

Từ (1), ta đặt $AB = 3k$, $CA = 4k$. Xét $\triangle ABC$ vuông tại A:

$$CB^2 = AB^2 + CA^2 = (3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$$

nên $CB = 5k$. Do đó $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{3}{5}$.

Từ (2) suy ra $\dfrac{3}{5} = \dfrac{18}{\text{chu vi } \triangle ABC}$.

Vậy chu vi $\triangle ABC$ bằng $18 \cdot \dfrac{5}{3} = 30$ (cm). □

VÍ DỤ 2. Tam giác ABH vuông tại H có $AB = 20$ cm, $BH = 12$ cm. Trên tia đối của tia HB lấy điểm C sao cho $AC = \dfrac{5}{3}AH$.

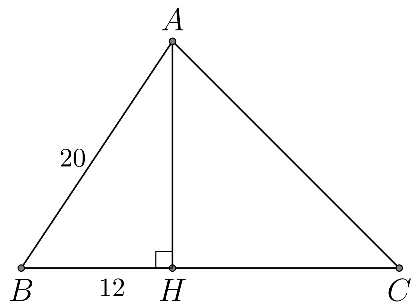
❶ Chứng minh rằng các tam giác ABH và CAH đồng dạng.

❷ Tính $\widehat{BAC}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Ta có
$$\frac{AB}{BH} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} = \frac{AC}{AH}.$$



Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAH$, ta có:

— $\widehat{AHB} = \widehat{CHA} = 90°$,

— $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BH}{AH}$ (chứng minh trên).

Do đó $\triangle ABH$ và $\triangle CAH$ đồng dạng (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

❷ Từ câu a) suy ra $\widehat{CAH} = \widehat{ABH}$.

Ta lại có $\widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90°$ nên $\widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90°$.

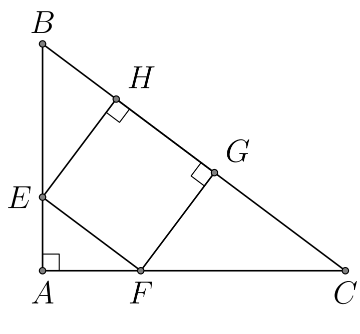
Do đó $\widehat{BAC} = 90°$.

□

1. Bài tập tự luyện

BÀI 257. Cho tam giác ABC vuông tại A, hình vuông $EFGH$ nội tiếp tam giác sao cho E thuộc AB, F thuộc AC, H và G thuộc BC. Tính độ dài của cạnh hình vuông biết rằng $BH = 2$ cm, $GC = 8$ cm.

✍ **LỜI GIẢI.**



$\triangle EHB$ và $\triangle CGF$ đồng dạng (g.g).

Suy ra $\dfrac{EH}{CG} = \dfrac{BH}{FG} \Rightarrow EH^2 = BH \cdot CG = 16 \Rightarrow EH = 4$ (cm).

Vậy cạnh của hình vuông $EFGH$ bằng 4 cm.

□

BÀI 258. Cho hình bình hành $ABCD$, các đường cao CE, CF. Kẻ DH, BK vuông góc với AC. Chứng minh rằng $AC^2 = AD \cdot DF + AB \cdot AE$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ $\triangle ADH$ và $\triangle ACF$ đồng dạng (g.g) suy ra được

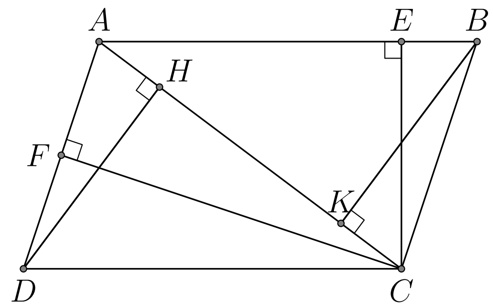
$$AD \cdot AF = AC \cdot AH \quad (1)$$

Từ $\triangle ACE$ và $\triangle ABK$ đồng dạng (g.g) suy ra được

$$AB \cdot AE = AC \cdot AK \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$AD \cdot AF + AB \cdot AE = AC \cdot (AH + AK) = AC^2.$$



□

BÀI 259. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Chứng minh rằng $BC^2 = BH \cdot BD + CH \cdot CE$.

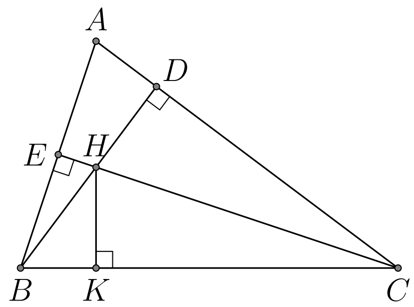
✍ **LỜI GIẢI.**

Kẻ $HK \perp BC$. Từ các tam giác đồng dạng, ta chứng minh được

— $BH \cdot BD = BK \cdot BC$ (1)

— $CH \cdot CE = CK \cdot CB$ (2)

Cộng (1) và (2) ta được đẳng thức cần phải chứng minh.



□

BÀI 260. Cho tam giác ABC ($AB \neq AC$). Gọi E và F theo thứ tự là các hình chiếu của B và C trên tia phân giác của góc A. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng FB và CE. Chứng minh rằng AK là tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC.

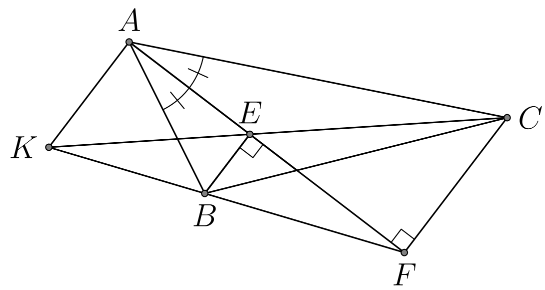
✍ **LỜI GIẢI.**

$\triangle ABE$ và $\triangle ACF$ đồng dạng, $\triangle KBE$ và $\triangle KFC$ đồng dạng, ta có:

$$\frac{KB}{KF} = \frac{BE}{CF} = \frac{AE}{AF}$$

$\Rightarrow AK \parallel BE \Rightarrow AK \perp AE$.

Vậy AK là tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh A của $\triangle ABC$.



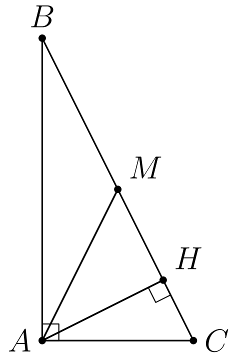
□

BÀI 261. Tính tỉ số hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông biết rằng đường cao và đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác tỉ lệ 12 : 13.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $AH = 12k$, $AM = 13k$ thì $HM = 5k$, $CH = 18k$ (giả sử $AB < AC$).
Ta có $\triangle AHB$ và $\triangle CHA$ đồng dạng nên

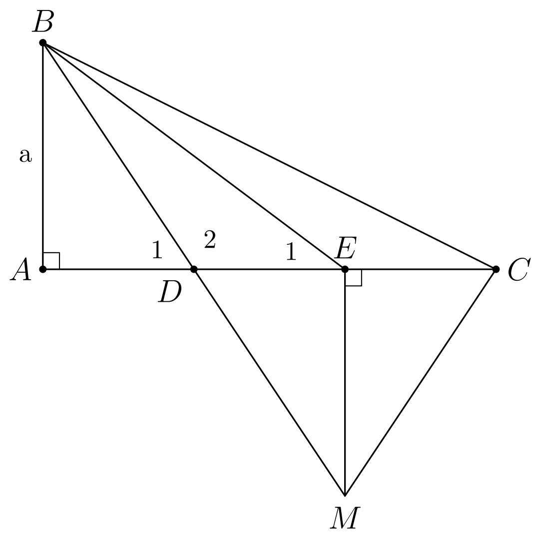
$$\frac{AB}{CA} = \frac{HA}{HC} = \frac{12k}{18k} = \frac{2}{3}.$$



□

BÀI 262. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC = 3AB$. Lấy các điểm D, E thuộc AC sao cho $AD = DE = EC$. Chứng minh rằng $\widehat{AEB} + \widehat{ACB} = 45°$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Cách 1. Vẽ M đối xứng với B qua D, $\triangle EAB$ và $\triangle BMC$ đồng dạng (c.g.c)
$\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{MBC}$.
Do đó $\widehat{E_1} + \widehat{C} = \widehat{MBC} + \widehat{C} = \widehat{D_1} = 45°$.
Cách 2. Đặt $AB = AD = DE = EC = a$ thì

$$BD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = 2a \cdot a = CD \cdot ED \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{BD}{ED}.$$

$\triangle CDB$ và $\triangle BDE$ đồng dạng (c.g.c) $\widehat{C} = \widehat{DBE}$.
Do đó $\widehat{E_1} + \widehat{C} = \widehat{E_1} + \widehat{DBE} = \widehat{D_1} = 45°$. □

BÀI 263. Hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$, $AB = 4$ cm, $DC = 9$ cm, $BC = 13$ cm. Tính khoảng cách từ trung điểm M của AD đến BC.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vẽ $BH \perp CD$, $MK \perp BC$.

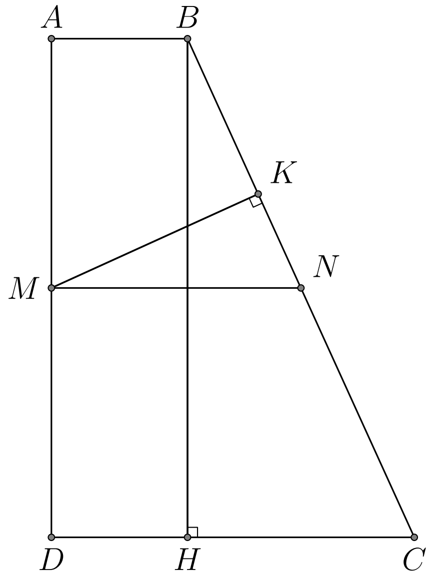
$\triangle MKN$ và $\triangle BHC$ đồng dạng (g.g)

$\dfrac{MK}{BH} = \dfrac{MN}{BC} \Rightarrow MK = \dfrac{MN \cdot BH}{BC}$

Ta có $MN = DH + \dfrac{HC}{2} = AB + \dfrac{HC}{2} = 4 + 2,5 = 6,5$ (cm);

$BH = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (cm);

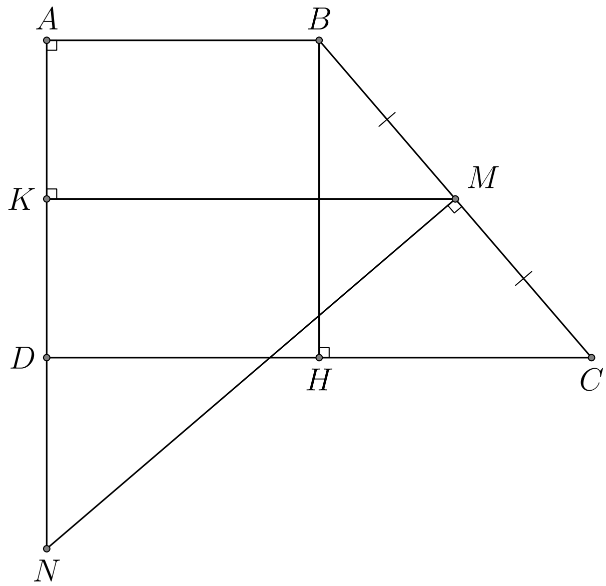
Vậy $MK = \dfrac{6,5 \cdot 12}{13} = 6$ (cm).



□

BÀI 264. Hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = 7$ cm, $DC = 13$ cm, $BC = 10$ cm. Đường trung trực của BC cắt đường thẳng AD ở N. Tính độ dài MN (M là trung điểm BC).

✍ **LỜI GIẢI.**



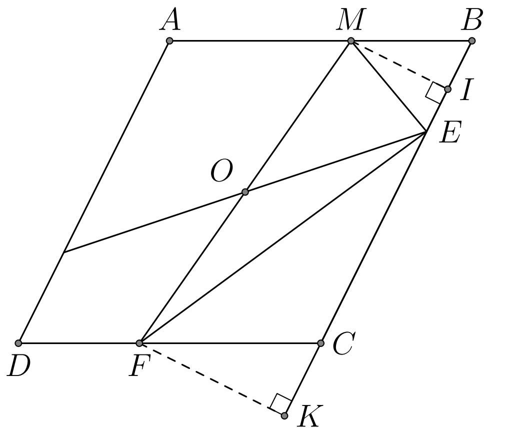
Vẽ $BH \perp CD$, $MK \perp AD$, $\triangle MKN$ và $\triangle BHC$ đồng dạng (g.g) nên tính được

$$MN = \frac{BC \cdot MK}{BH} = \frac{10 \cdot 10}{8} = 12,5 \text{ (cm)}.$$

□

BÀI 265. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai đường thẳng đi qua tâm của hình bình hành chia nó ra bốn tứ giác có diện tích bằng nhau. Đường thẳng thứ nhất cắt BC ở E, đường thẳng thứ hai cắt CD ở F. Chứng minh rằng điểm E chia cạnh BC và điểm F chia cạnh CD theo cùng một tỉ số.

✍ **LỜI GIẢI.**

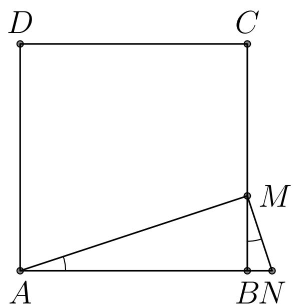


Gọi M là giao điểm của FO và AB (O là tâm của hình bình hành).
Ta có $S_{OMBE} = S_{OFCE}$ mà $S_{MOE} = S_{FOE}$ nên $S_{MBE} = S_{FCE}$.
Do đó $EB \cdot MI = EC \cdot FK \ \ (MI, FK \perp BC)$.
Vậy $\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{FK}{MI} = \dfrac{FC}{MB} = \dfrac{FC}{FD}$. □

BÀI 266. Cho hai điểm A, M. Dựng hình vuông $ABCD$ sao cho điểm M chia cạnh BC theo tỉ số $1:2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Qua M vẽ đường vuông góc với AM, cắt AB tại N.
$\triangle ABM$ và $\triangle MBN$ đồng dạng nên $\dfrac{MN}{AM} = \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{1}{3}$, do đó ta dựng được điểm N.
Có hai cách lấy điểm N về hai phía của AM nên bài toán có hai nghiệm hình.



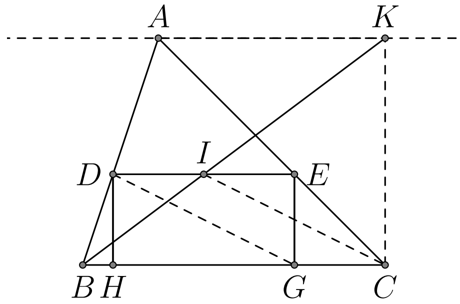
□

BÀI 267. Cho tam giác ABC. Hình chữ nhật $DEGH$ có D thuộc AB, E thuộc AC, G và H thuộc BC.

❶ Vẽ Ax song song với BC, vẽ CK vuông góc với Ax (K thuộc Ax). Gọi I là giao điểm của BK và DE. Chứng minh rằng $GC = DI$.

❷ Suy ra cách dựng hình chữ nhật nói trên biết tam giác ABC và độ dài đường chéo của hình chữ nhật.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ $\triangle EGC$ và $\triangle CKA$ đồng dạng (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{GC}{AK} = \dfrac{EC}{AC} = \dfrac{DB}{AB} = \dfrac{DI}{AK} \Rightarrow GC = DI.$

❷ Suy ra $DICG$ là hình bình hành $\Rightarrow CI = DG = m$.

Dựng K rồi vẽ đường tròn $(C; m)$, cắt BK ở I.

Tùy theo số giao điểm của đường tròn với BK mà bài toán có $0, 1, 2$ nghiệm hình.

□

B TỈ SỐ CÁC ĐƯỜNG CAO, TỈ SỐ DIỆN TÍCH CỦA HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

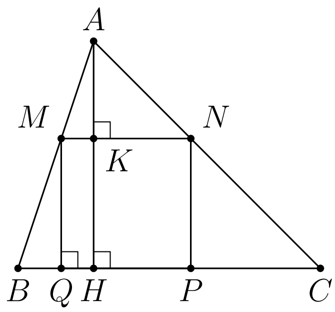
Nếu hai tam giác đồng dạng thì:

– Tỉ số các đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.

– Tỉ số các diện tích bằng bình phương của tỉ số đồng dạng.

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC có các góc B và C nhọn, $BC = a$, đường cao $AH = h$. Tính cạnh của hình vuông $MNPQ$ có M thuộc AB, N thuộc AC, P, Q thuộc BC.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi giao điểm của AH và MN là K. Do $MN \parallel BC$ nên $AK \perp MN$.

Ta có $MN \parallel BC$ nên ΔAMN và ΔABC đồng dạng, do đó tỉ số hai đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng:

$$\frac{AK}{AH} = \frac{MN}{BC}.$$

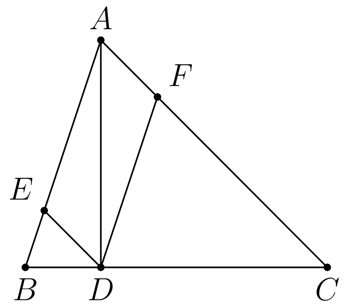
Đặt $MN = KH = x$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{h-x}{h} &= \frac{x}{a} \Rightarrow xh = ah - ax \\ \Rightarrow\ & x(h+a) = ah \\ \Rightarrow\ & x = \frac{ah}{a+h}. \end{aligned}$$

Cạnh của hình vuông $MNPQ$ bằng $\dfrac{ah}{a+h}$. □

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC và hình bình hành $AEDF$ với E thuộc AB, D thuộc BC, F thuộc AC. Tính diện tích hình bình hành, biết rằng $S_{EBD} = 3\text{ cm}^2$, $S_{FDC} = 12\text{ cm}^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**



ΔEBD và ΔFDC đồng dạng (g.g) nên

$$\frac{S_{EBD}}{S_{FDC}} = \left(\frac{BE}{DF}\right)^2 = \left(\frac{ED}{FC}\right)^2.$$

Ta có $S_{EBD} : S_{FDC} = 3 : 12 = 1 : 4 = \frac{1}{4}$.
Do đó $\frac{BE}{DF} = \frac{ED}{FC} = \frac{1}{2}$. Suy ra $AE = DF = 2BE$; $AF = ED = \frac{1}{2}FC$.
Vậy

$$S_{ADE} = 2S_{BED} = 2 \cdot 3 = 6 \text{ (cm}^2\text{)}$$
$$S_{ADF} = \frac{1}{2}S_{FDC} = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ (cm}^2\text{)}$$
$$S_{AEDF} = S_{ADE} + S_{ADF} = 6 + 6 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

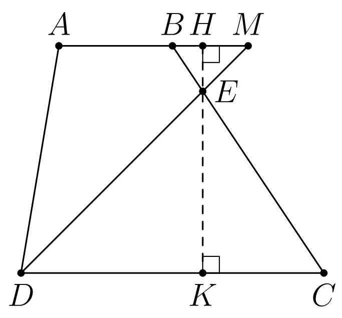
Chú ý: Tổng quát, nếu $S_{EBD} = m \cdot S_{FDC} = n$ thì $S_{AEDF} = 2\sqrt{mn}$. □

BÀI TẬP

Tỉ số các đường cao

BÀI 268. Hình thang $ABCD$ có cạnh đáy AB dài 8 cm, cạnh đáy CD dài 12 cm. Điểm M nằm trên đường thẳng AB sao cho đường thẳng DM chia hình thang thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính độ dài BM.

✍ **LỜI GIẢI.**



Chú ý rằng

$$S_{ABD} : S_{ABCD} = \frac{8}{20} < \frac{1}{2}$$

nên M thuộc tia đối của tia BA. Gọi E là giao điểm của DM và BC, đặt $EH = h_1$, $EK = h_2$, $HK = h$ (EH là đường cao của ΔBEM, HK là đường cao của hình thang).

$$S_{DEC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow \frac{12h_2}{20h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h_2}{h} = \frac{5}{6}.$$

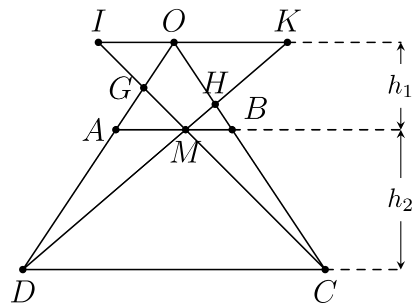
$\Delta BEM \backsim \Delta CED$

$$\Rightarrow \frac{BM}{CD} = \frac{EH}{EK} \Rightarrow \frac{BM}{12} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{5}.$$

Vậy $BM = 2{,}4$ cm. □

BÀI 269. Điểm M chuyển động trên đáy nhỏ AB của hình thang $ABCD$. Gọi O là giao điểm của các đường thẳng chứa các cạnh bên của hình thang, G là giao điểm của OA và CM, H là giao điểm của OB và DM. Chứng minh rằng khi điểm M chuyển động trên cạnh AB thì tổng $\dfrac{OG}{GD} + \dfrac{OH}{HC}$ không đổi.

✍ **LỜI GIẢI.**



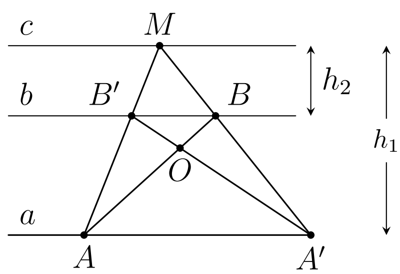
Qua O vẽ đường thẳng song song với AB, cắt CM, DM thứ tự tại I, K. CI cắt OD tại G, DK cắt OC tại H. Ta có

$$\frac{OG}{GD} + \frac{OH}{HC} = \frac{OI}{CD} + \frac{OK}{CD} = \frac{IK}{CD}.$$

Tổng không đổi bằng $h_1 : h_2$ (h_1 là khoảng cách từ O đến AB, h_2 là chiều cao hình thang). □

BÀI 270. Cho ba đường thẳng song song a, b, c theo thứ tự ấy, điểm A thuộc a, điểm B thuộc b. Gọi M là một điểm bất kì thuộc c. MA cắt b tại B', MB cắt a tại A'. Chứng minh rằng khi điểm M chuyển động trên c thì đường thẳng $A'B'$ luôn đi qua một điểm cố định.

✍ **LỜI GIẢI.**

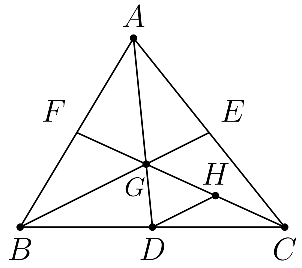


Gọi giao điểm của $A'B'$ với AB là O. Hãy chứng minh rằng O là điểm cố định (O chia trong đoạn thẳng AB theo tỉ số $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{h_1}{h_2}$) □

Tỉ số diện tích

BÀI 271. Cho tam giác ABC có diện tích S, các đường trung tuyến AD, BE, CF. Gọi S' là diện tích tam giác có độ dài ba cạnh bằng AD, BE, CF. Chứng minh rằng $S' = \dfrac{3}{4}S$.

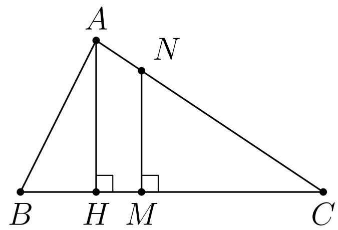
✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, H là trung điểm của CG. Lấy S_{GDH} làm trung gian: $S' = 9S_{GDH}$ và $S = 12S_{GDH}$. □

BÀI 272. Đường cao của một tam giác dài 16 cm, nó chia cạnh đáy thành hai đoạn thẳng tỉ lệ $1 : 8$. Tính độ dài đoạn thẳng song song với đường cao ấy và chia tam giác đã cho ra hai phần có diện tích bằng nhau.

✍ **LỜI GIẢI.**



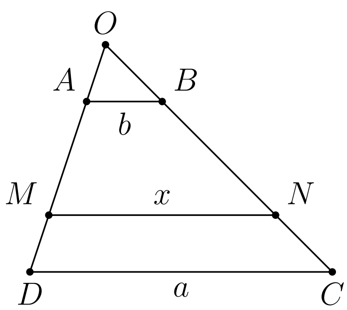
Kí hiệu như hình 163, $S_{NMC} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$, $S_{AHC} = \dfrac{8}{9}S_{ABC}$. Suy ra

$$\frac{S_{NMC}}{S_{AHC}} = \left(\frac{NM}{AH}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow NM = 12 \text{ cm}.$$

□

BÀI 273. Hình thang $ABCD$ có các đáy $AB = b$, $CD = a$ $(a > b)$. Đoạn thẳng MN song song với đáy, có hai đầu thuộc hai cạnh bên chia hình thang ra hai phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng $MN^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi O là giao điểm của AD và BC. Đặt $S_{ABNM} = S_{MNCD} = S$ và $MN = x$.

$$\Delta OAB \backsim \Delta OMN \Rightarrow \frac{S_{OAB}}{S_{OMN}} = \left(\frac{b}{x}\right)^2.$$
$$\Delta ODC \backsim \Delta OMN \Rightarrow \frac{S_{ODC}}{S_{OMN}} = \left(\frac{a}{x}\right)^2.$$

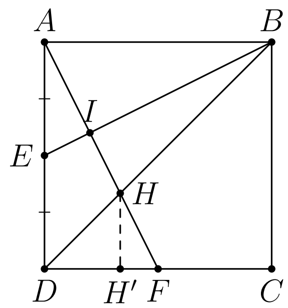
Do đó

$$\frac{a^2+b^2}{x^2} = \frac{S_{OCD}+S_{OAB}}{S_{OMN}} = \frac{(S_{OMN}+S)+(S_{OMN}-S)}{S_{OMN}} = 2.$$

Vậy $MN^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2}$. □

BÀI 274. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 2 cm. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, DC. Gọi I, H theo thứ tự là giao điểm của AF với BE, BD. Tính diện tích tứ giác $EIHD$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Trước hết ta tính diện tích các tam giác AIE, DHF.

Dễ dàng chứng minh được $AF \perp BE$. $\Delta AIE \backsim \Delta ADF$ nên

$$\frac{S_{AIE}}{S_{ADF}} = \frac{AE^2}{AF^2} = \frac{1}{5}.$$

Ta có $S_{ADF} = 1$ cm^2 nên $S_{AIE} = \dfrac{1}{5}$ cm^2.

ΔDHF và ΔBHA đồng dạng theo tỉ số $\dfrac{1}{2}$ nên ta tính được đường cao HH' của ΔDHF bằng $\dfrac{2}{5}$ cm.

Do đó $S_{DHF} = \dfrac{1}{3}$ cm^2. Từ đó ta tính được $S_{EIHD} = \dfrac{7}{15}$ cm^2. □

BÀI 275. Cho hai tam giác đồng dạng có tỉ số đồng dạng là một số tự nhiên. Một cạnh của tam giác nhỏ bằng 3 cm, diện tích của tam giác nhỏ này cũng là một số tự nhiên (đơn vị cm^2). Tính diện tích của mỗi tam giác, biết hiệu diện tích của chúng bằng 18 cm^2.

✍ **LỜI GIẢI.**

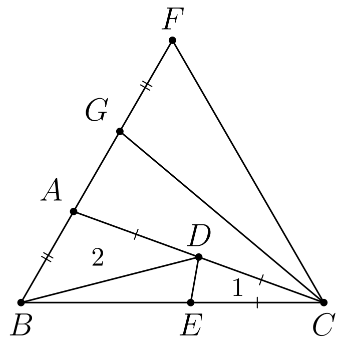
Gọi diện tích của tam giác nhỏ là x, tỉ số đồng dạng của hai tam giác là k, $(x, k \in \mathbb{N})$.

Ta có $\dfrac{x+18}{x} = k^2$ nên $\dfrac{18}{x} = k^2 - 1$ và $k^2 - 1$ là ước của 18. Từ đó tìm được $k = 2$, $x = 6$.

Diện tích của hai tam giác là 6 cm^2 và 24 cm^2. □

BÀI 276. Tam giác ABC có $B = 60°$, $C = 20°$, $BC = 4$ cm. Gọi D là trung điểm của AC. Trên cạnh CB lấy điểm E sao cho $CE = CD$. Tính tổng diện tích các tam giác ECD và ABD.

✍ **LỜI GIẢI.**



Vẽ tam giác đều BCF (F và A cùng phía đối với BC). Trên cạnh FB lấy điểm G sao cho $FG = AB$.
Ta có ΔACG cân có góc ở đỉnh bằng 20°, $\Delta ABC = \Delta GFC$ (c.g.c).
Đặt $S_{ECD} = S_1$, $S_{ABD} = S_2$. Ta có ΔECD và ΔACG đồng dạng (g.g)

$$S_1 = \frac{1}{2} S_{ACG} \quad (1)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{4}(S_{ABC} + S_{GFC}) \quad (2)$$

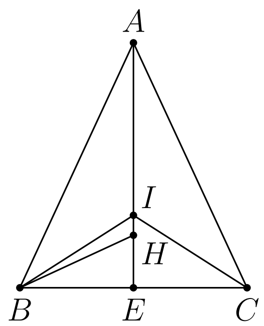
Từ (1) và (2) suy ra

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{4}(S_{ACG} + S_{ABC} + S_{GFC})$$
$$= \frac{1}{2} S_{BFC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

□

BÀI 277. Cho tam giác ABC cân tại A, trực tâm H chia đường cao AE theo tỉ số $7 : 1$. Giao điểm I các đường phân giác của tam giác chia AE theo tỉ số nào?

✍ **LỜI GIẢI.**



Theo tính chất đường phân giác

$$\frac{AI}{IE} = \frac{AB}{BE} \Rightarrow \left(\frac{AI}{IE}\right)^2 = \frac{AB^2}{BE^2} = \frac{AE^2 + BE^2}{BE^2} = \left(\frac{AE}{BE}\right)^2 + 1 \quad (1)$$

ΔAEB và ΔBEH đồng dạng (g.g) suy ra

$$\left(\frac{AE}{BE}\right)^2 = \frac{S_{AEB}}{S_{BEH}} = \frac{AE}{HE} = 8. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\left(\frac{AI}{IE}\right)^2 = 8 + 1 = 9 \Rightarrow \frac{AI}{IE} = 3.$$

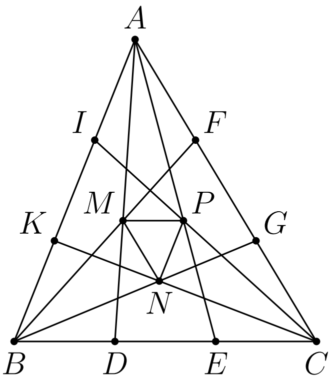
□

BÀI 278. Cho tam giác ABC.Trên cạnh AB lấy điểm I và K sao cho $AI = IK = KB$, trên cạnh BC lấy các điểm D và E sao cho $BD = DE = EC$, trên cạnh AC lấy các điểm F và G sao cho $AF = FG = GC$. Gọi M là giao điểm của AD và BF, N là giao điểm của BG và CK, P là giao điểm của AE và CI.

a) Chứng minh rằng các cạnh của tam giác MNP song song với các cạnh của tam giác ABC.

b) Tính diện tích tam giác MNP theo diện tích tam giác ABC.

✍ **LỜI GIẢI.**



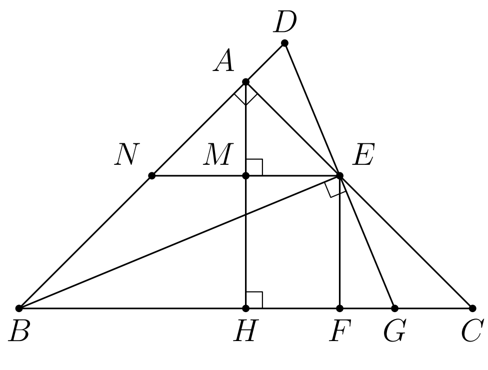
a) Ta có $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{AG}{AC} = \dfrac{2}{3}$ nên $KG \parallel BC$ và $KG = \dfrac{2}{3}BC$. Do đó $NK = \dfrac{2}{3}NC$, suy ra $CN = \dfrac{3}{5}CK$.
Chứng minh tương tự, $CP = \dfrac{3}{5}CI$. Suy ra $NP \parallel IK$ và $NP = \dfrac{3}{4}IK$.
Chứng minh tương tự, $MP \parallel BC$, $MN \parallel AC$.

b) $NP = \dfrac{3}{5}IK = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{3}AB = \dfrac{1}{5}AB$. Do đó $S_{MNP} = \dfrac{1}{25}S_{ABC}$.

□

BÀI 279. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường cao AH và đường phân giác BE. Đường vuông góc với BE tại E cắt cạnh BC tại G, cắt tia đối của tia AB tại D. Kẻ EF vuông góc với BC. Cho biết $AD = 15$ cm, $HF = 20$ cm, tính diện tích tam giác ABC.

✍ **LỜI GIẢI.**



Kẻ $EN \parallel BC$, cắt AH tại M, cắt AB tại N. Ta thấy ΔABC và ΔANE đồng dạng.

Trước hết ta tính S_{ANE}.

ΔBDG cân tại B. Do $NE \parallel BG$ nên ΔNDE cân tại N. Ta dễ dàng tính được

$$EN = 2EM = 2 \cdot 20 = 40 \text{ (cm)}$$

Suy ra $NE = 40$ cm, $NA = 25$ cm.

Ta có $AM^2 = AN^2 - NM^2 = 25^2 - 20^2 = 225$ nên $AM = 15$ cm.

$$S_{ANE} = \frac{1}{2}\cdot NE \cdot AM = \frac{1}{2}\cdot 40 \cdot 15 = 300 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bây giờ ta tính tỉ số đồng dạng $\dfrac{AB}{AN}$ của ΔABC và ΔANE.
ΔBDG có $DE = EG$, $EN \parallel BC$ nên $BN = ND = 40$ cm, do đó

$$AB = 25 + 40 = 65 \text{ (cm)}, \frac{AB}{AN} = \frac{65}{25} = \frac{13}{5}.$$
$$S_{ABC} = S_{ANE} \cdot \left(\frac{13}{5}\right)^2 = 300 \cdot \frac{169}{25} = 2028 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

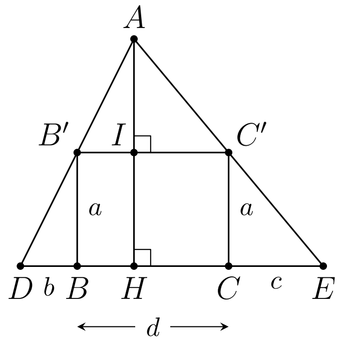
□

C ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Nhờ các tam giác đồng dạng, ta có thể xác định được các chiều cao, các khoảng cách . . . mà không cần đo trực tiếp.

VÍ DỤ 5. Một ngọn đèn đặt trên cao ở vị trí A, hình chiếu vuông góc của nó trên mặt đất là H. Người ta đặt một chiếc cọc dài 1,6 m thẳng đứng ở hai vị trí B và C thẳng hàng với H, khi đó bóng của chiếc cọc dài 0,4 m và 0,6 m. Biết $BC = 1{,}4$ m, tính độ cao AH.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi BD, CE là bóng của cọc và B', C' là vị trí ngang tương ứng của đỉnh cọc. Đặt $BB' = CC' = a$, $BD = b$, $CE = a$, $BC = d$, $AH = x$. Gọi I là giao điểm của AH và $B'C'$.
$\Delta AB'C'$ và ΔABC đồng dạng

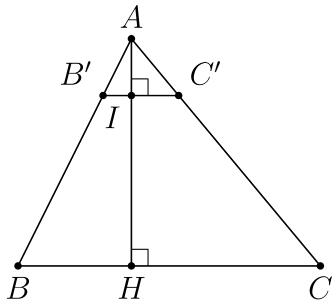
$$\Rightarrow \frac{AI}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$$
$$\Rightarrow \frac{x-a}{x} = \frac{d}{b+d+c}$$
$$\Rightarrow xb + xd + xc - ab - ad - ac = xd$$
$$\Rightarrow x = \frac{ab + ac - ad}{b+c}$$
$$\Rightarrow x = a\left(1 + \frac{d}{b+c}\right)$$

Áp dụng thay số: $AH = 1{,}6\left(1 + \dfrac{1{,}4}{0{,}4 + 0{,}6}\right) = 3{,}84$ (m). □

BÀI TẬP

BÀI 280. Một người đứng cách một ngôi nhà 200 m, đặt một que dài 5 m, cách mắt 40 m theo phương thẳng đứng thì vừa vặn che lấp chiều cao của ngôi nhà. Tính chiều cao của ngôi nhà.

✍ **LỜI GIẢI.**



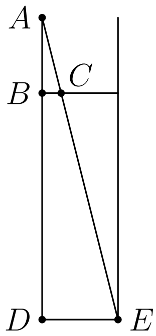
Gọi vị trí mắt là A, BC là chiều cao của ngôi nhà, $B'C'$ là chiều dài của chiếc que.

$\Delta AB'C' \backsim \Delta ABC$ suy ra

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{AI}{AH} \Rightarrow BC = \frac{AH \cdot B'C'}{AI} = \frac{200 \cdot 5}{40} = 25 \text{ (m)}.$$

□

BÀI 281. Một giếng nước có đường kính $DE = 0{,}8$ m. Để xác định độ sâu BD của giếng, người ta đặt một chiếc gậy ở vị trí AC, A chạm miệng giếng, AC nhìn thẳng tới vị trí E ở góc của đáy giếng. Biết $AB = 0{,}9$ m, $BC = 0{,}2$ m. Tính độ sâu của giếng.



✍ **LỜI GIẢI.**

$\Delta ABC \backsim \Delta ADE$ suy ra

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot DE}{BC} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}8}{0{,}2} = 3{,}6 \text{ (m)}.$$

Vậy độ sâu của giếng là $BD = AD - AB = 3{,}6 - 0{,}9 = 2{,}7$ (m). □

CHƯƠNG 5

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH CHÓP ĐỀU

BÀI 1 HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa 1. Hình hộp chữ nhật có 6 mặt, các mặt là những hình chữ nhật.

Định nghĩa 2. Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có các mặt là những hình vuông.

Định nghĩa 3. Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài a, chiều rộng b, chiều cao c.

— Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật tính bởi công thức

$$S_{\text{xq}} = 2(a+b)c.$$

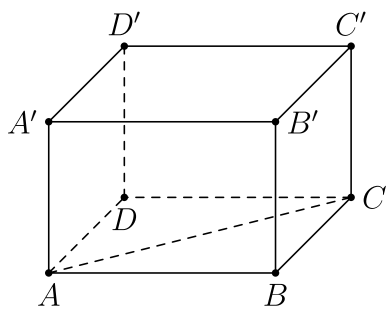
— Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật tính bởi công thức

$$S_{\text{tp}} = 2(a+b)c + 2ab = 2(ab+bc+ca).$$

— Thể tích của hình hộp chữ nhật tính bởi công thức

$$V = abc.$$

Tính chất 1. Mô hình của hình hộp chữ nhật cho ta hình ảnh các quan hệ không gian sau



— Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung, chẳng hạn $AB \parallel A'B'$.

— Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau, chẳng hạn $AB \parallel D'C'$ vì chúng cùng song song với $A'B'$.

— Đường thẳng $A'B'$ không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ và song song với đường thẳng AB của mặt phẳng $(ABCD)$, ta có $A'B' \parallel \text{mp}(ABCD)$.

— Mặt phẳng $(A'B'C'D')$ chứa hai đường thẳng cắt nhau $A'B'$, $B'C'$ cùng song song với mặt phẳng $(ABCD)$, ta có $\text{mp}(A'B'C'D') \parallel (ABCD)$.

— Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung A thì chúng có chung một đường thẳng đi qua A, gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng. Chẳng hạn AB là giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ABB'A')$.

— Đường thẳng $A'A$ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AB, AD của mặt phẳng $(ABCD)$, ta có $A'A \perp \text{mp}(ABCD)$.

— Khi $A'A \perp \text{mp}(ABCD)$ thì $A'A$ vuông góc với mọi đường thẳng đi qua A và nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$, chẳng hạn $A'A \perp AC$.

— Mặt phẳng $(A'B'BA)$ chứa đường thẳng $A'A$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ta có $\text{mp}(A'B'BA) \perp \text{mp}(ABCD)$.

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Hình hộp chữ nhật

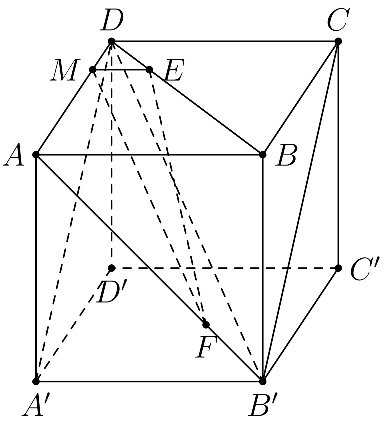
Phương pháp giải: Sử dụng các tính chất của hình hộp chữ nhật.

VÍ DỤ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Điểm E chia DB theo tỉ số $1:3$, điểm F chia $B'A$ theo tỉ số $1:3$.

1. Chứng minh rằng $A'B'CD$ là hình chữ nhật. Tính diện tích hình chữ nhật đó nếu cạnh hình lập phương bằng a.
2. Gọi M là điểm chia DA theo tỉ số $1:3$. Chứng minh rằng mặt phẳng (EMF) song song với mặt phẳng $(A'B'CD)$.
3. Chứng minh rằng EF song song với mặt phẳng $(A'B'CD)$.
4. Chứng minh EF song song với mặt phẳng $(A'B'CD)$ mà không sử dụng kết quả của câu b.

LỜI GIẢI.

1. Chứng minh rằng $A'B'CD$ là hình chữ nhật. Tính diện tích hình chữ nhật đó nếu cạnh hình lập phương bằng a.



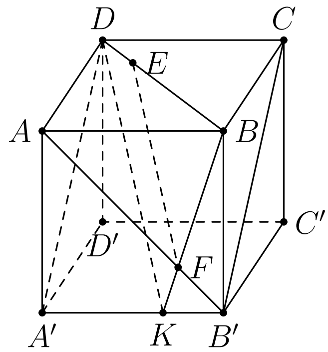
Xét tứ giác $A'B'CD$ ta có
$A'B' \parallel CD$ (vì cùng song song với AB),
$A'B' = CD$ (vì cùng bằng AB).
Suy ra tứ giác $A'B'CD$ là hình bình hành.
Ta có $DC \perp CC'$ và $DC \perp CB$ nên $DC \perp \text{mp}(BCC'B')$, suy ra $DC \perp CB'$.
Hình bình hành $A'B'CD$ có $\widehat{DCB'} = 90^\circ$ nên $A'B'CD$ là hình chữ nhật.
Xét $\triangle B'C'C$ vuông tại C' ta có
$B'C^2 = B'C'^2 + C'C^2$ (định lí Py-ta-go).
$\Rightarrow B'C = a\sqrt{2}$.
Diện tích hình chữ nhật $A'B'CD$ là $S_{A'B'CD} = A'B' \cdot B'C = a^2\sqrt{2}$.

2. Gọi M là điểm chia DA theo tỉ số $1:3$. Chứng minh rằng mặt phẳng (EMF) song song với mặt phẳng $(A'B'CD)$.

$\triangle DAB$ có $\dfrac{DM}{MA} = \dfrac{DE}{EB} = \dfrac{1}{3}$ nên $ME \parallel AB$ (định lí Ta-lét đảo).
Mà $AB \parallel A'B'$ nên $ME \parallel A'B'$.
Suy ra $ME \parallel \text{mp}(A'B'CD)$.
$\triangle AB'D$ có $\dfrac{DM}{MA} = \dfrac{B'F}{FA} = \dfrac{1}{3}$ nên $MF \parallel B'D$ (định lí Ta-lét đảo).
Suy ra $MF \parallel \text{mp}(A'B'CD)$.
Mặt phẳng (MEF) chứa hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với $\text{mp}(A'B'CD)$ nên $\text{mp}(MEF) \parallel \text{mp}(A'B'CD)$.

❸ Chứng minh rằng EF song song với mặt phẳng $(A'B'CD)$.
Vì $\text{mp}(MEF) \parallel \text{mp}(A'B'CD)$ nên $EF \parallel \text{mp}(A'B'CD)$.

❹ Chứng minh EF song song với mặt phẳng $(A'B'CD)$ mà không sử dụng kết quả của câu b.
Trong $\text{mp}(ABB'A')$, gọi K là giao điểm của BF và $A'B'$.
Ta có $AB \parallel A'B'$ nên $\dfrac{KF}{FB} = \dfrac{B'F}{FA}$ (định lí Ta-lét).
$\Rightarrow \dfrac{KF}{FB} = \dfrac{1}{3}$.
$\triangle BDK$ có $\dfrac{KF}{FB} = \dfrac{DE}{EB} = \dfrac{1}{3}$ nên $EF \parallel DK$ (định lí Ta-lét đảo).
Mà DK nằm trong $\text{mp}(A'B'CD)$ nên $EF \parallel \text{mp}(A'B'CD)$.

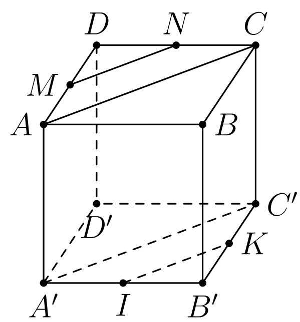


□

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AD, DC. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của $B'A'$, $B'C'$. Chứng minh rằng MN song song với IK.

✍ **LỜI GIẢI.**



$\triangle ACD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AD và CD nên MN là đường trung bình.
$\Rightarrow MN \parallel AC$. (1)
$\triangle A'B'C'$ có I, K lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và $B'C'$ nên IK là đường trung bình.
$\Rightarrow IK \parallel A'C'$. (2)
Xét tứ giác $ACC'A'$ ta có
$AA' \parallel CC'$ (vì cùng song song với BB'),
$AA' = CC'$ (vì cùng bằng BB').
Suy ra tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành.
Ta có $AA' \perp A'D'$ và $AA' \perp A'B'$ nên $AA' \perp \text{mp}(A'B'C'D')$, suy ra $AA' \perp A'C'$.
Hình bình hành $ACC'A'$ có $\widehat{AA'C'} = 90^\circ$ nên $ACC'A'$ là hình chữ nhật. (3)
Từ (1), (2), (3) suy ra $MN \parallel IK$. □

🗀 DẠNG 2. Diện tích

Phương pháp giải: Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật tính bởi công thức

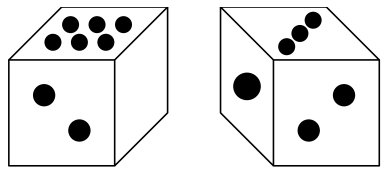
$$S_{\text{xq}} = 2(a+b)c.$$

Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật tính bởi công thức

$$S_{\text{tp}} = 2(a+b)c + 2ab = 2(ab+bc+ca).$$

Trong đó a là chiều dài, b là chiều rộng và c là chiều cao.

VÍ DỤ 2.
Hãy điền dấu chấm vào mặt để trống của viên súc sắc hình lập phương ở hình a sao cho viên súc sắc thỏa mãn hình b (chú ý rằng ở viên súc sắc, tổng hai số ở hai mặt đối nhau bao giờ cũng bằng 7).



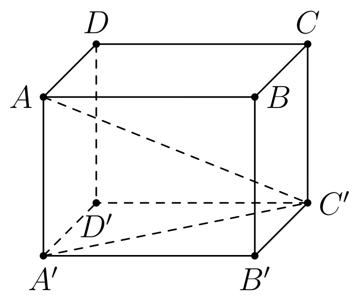
Hình a Hình b

✍ **LỜI GIẢI.**
Quan sát hình b ta thấy, khi nhìn thẳng vào mặt chứa số 2 sao cho mặt chứa số 6 ở trên thì mặt chứa số 3 sẽ ở bên trái. Áp dụng nhận xét này vào hình a thì mặt đối diện với mặt để trống là mặt có số 3. Do đó mặt để trống phải chứa số 4. □

2. Bài tập tự luyện

BÀI 2. Tính diện tích toàn phần của một hình hộp chữ nhật có chiều dài 4 cm, chiều rộng 3 cm, đường chéo của hình hộp bằng 13 cm.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi hình hộp chữ nhật đó là $ABCD.A'B'C'D'$.
Theo đề bài ta có $A'B' = 4$ cm, $B'C' = 3$ cm, $AC' = 13$ cm.
$\triangle A'B'C'$ vuông tại B' có $A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2$ (định lí Py-ta-go).
$\Rightarrow A'C' = 5$ (cm).
$\triangle AA'C'$ vuông tại A' có $AC'^2 = AA'^2 + A'C'^2$ (định lí Py-ta-go).
$\Rightarrow AA' = 12$ (cm).
Diện tích toàn phần là
$S_{\text{tp}} = 2(A'B' \cdot B'C' + B'C' \cdot AA' + AA' \cdot A'B') = 192$ (cm^2).

□

BÀI 3. Một hình hộp chữ nhật có tổng độ dài các cạnh bằng 140 cm, khoảng cách từ một đỉnh đến đỉnh xa nhất bằng 21 cm. Tính diện tích toàn phần.

✍ **LỜI GIẢI.**
Gọi a, b, c là các kích thước của hình hộp chữ nhật, ta có

$$\begin{cases} 4(a+b+c) = 140 \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 21. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 35 \\ a^2+b^2+c^2 = 441. \end{cases}$$

Diện tích toàn phần bằng

$$\begin{aligned} S_{\text{tp}} = 2(ab+bc+ca) &= (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \\ &= 35^2 - 441 = 784 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

□

BÀI 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của CC'.

❶ Xác định giao tuyến của các mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(B'C'M)$.

❷ Xác định giao điểm của đường thẳng DM và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

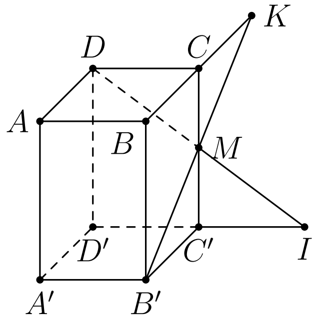
❸ Xác định giao điểm của đường thẳng $B'M$ và mặt phẳng $(ABCD)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xác định giao tuyến của các mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(B'C'M)$.
Mặt phẳng $(B'C'M)$ cũng là mặt phẳng $(BCC'B')$.
Giao tuyến cần tìm là BB'.

❷ Xác định giao điểm của đường thẳng DM và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.
Trong mp$(CDD'C')$, gọi I là giao điểm của DM và $D'C'$.
Vậy I là giao điểm cần tìm.

❸ Xác định giao điểm của đường thẳng $B'M$ và mặt phẳng $(ABCD)$.



Trong mp$(BCC'B')$, gọi K là giao điểm của BC và $B'M$.
Vậy K là giao điểm cần tìm.

□

BÀI 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, I theo thứ tự là trung điểm của AA', CC'. Chứng minh rằng các mặt phẳng (ADI) và $(B'C'M)$ song song với nhau.

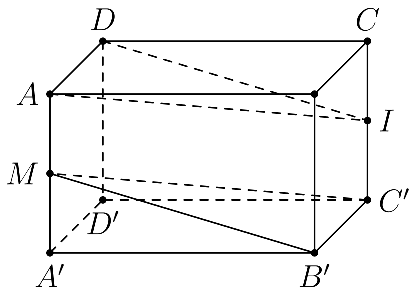
✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

— $AD \parallel B'C'$ (vì cùng song song với BC) nên $AD \parallel$ mp$(B'C'M)$.

— $AMC'I$ là hình bình hành nên $AI \parallel MC'$, do đó $AI \parallel$ mp$(B'C'M)$.

Vậy mp$(ADI) \parallel$ mp$(MB'C')$.



□

BÀI 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi H, I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AA', $C'D'$. Chứng minh rằng mặt phẳng (HIK) song song với mặt phẳng (ACD').

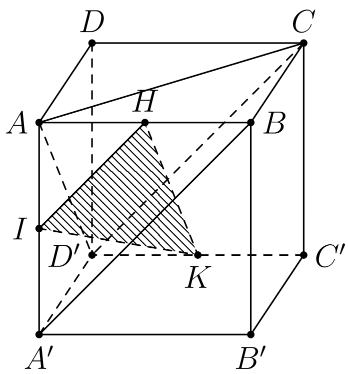
✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

— $HI \parallel BA' \parallel CD'$ nên $HI \parallel$ mp(ACD').

— $HK \parallel AD'$ nên $HK \parallel$ mp(ACD').

Vậy mp$(HIK) \parallel$ mp(ACD').

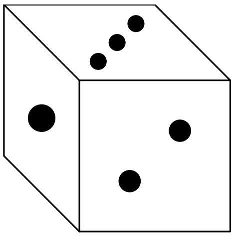


□

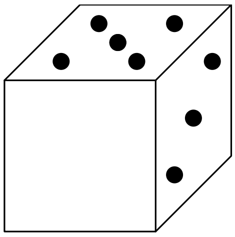
BÀI 7. Cho một viên súc sắc thỏa mãn hình a.

❶ Hãy điền các dấu chấm vào mặt để trống ở hình b.

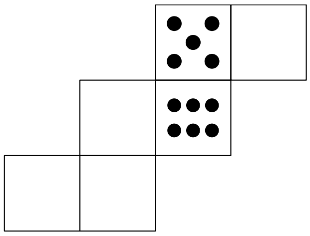
❷ Hãy điền các dấu chấm vào các hình khai triển (hình c và d).



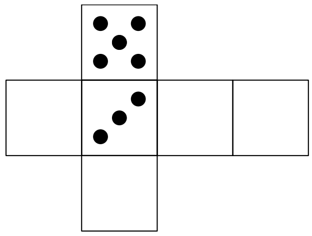
Hình a.



Hình b.

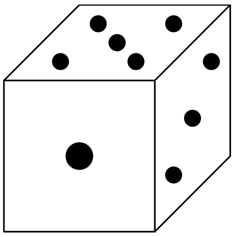


Hình c.

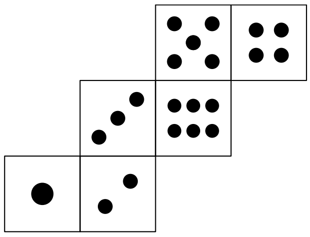


Hình d.

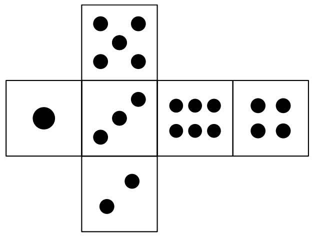
✍ **LỜI GIẢI.**



Hình b.



Hình c.

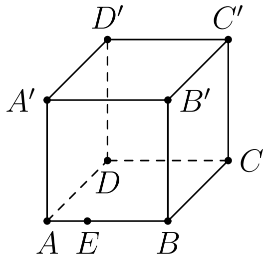


Hình d.

□

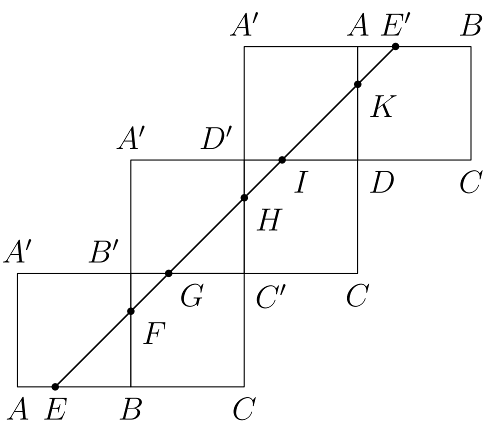
BÀI 8.

Một con nhện đang ở vị trí E trong một gian phòng hình lập phương. E nằm trên AB và $AE = \dfrac{1}{3}AB$. Con nhện muốn bò qua cả sáu mặt của gian phòng rồi trở về E. Tìm đường đi ngắn nhất của con nhện.

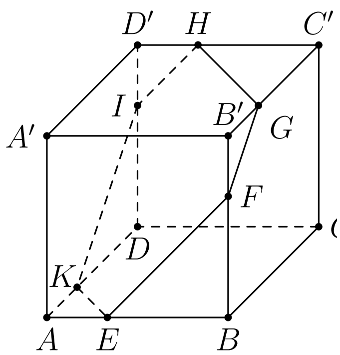


✍ **LỜI GIẢI.**

Trải sáu mặt của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ như trên hình a. E thuộc cạnh AB của mặt $ABB'A'$ và $AE = \dfrac{1}{3}AB$, E' thuộc cạnh AB của mặt $ABCD$. Để đi theo đường ngắn nhất từ E đến E' trên mặt khai triển, con nhện phải đi theo đoạn thẳng EE'. Đường đi của con nhện trong phòng là đường $EFGHIKE$ trên hình b.



Hình a.



Hình b.

□

DẠNG 3. Thể tích

Phương pháp giải: Thể tích của hình hộp chữ nhật tính bởi công thức

$$V = abc.$$

Trong đó a là chiều dài, b là chiều rộng và c là chiều cao.

VÍ DỤ 3. Trong các hình hộp chữ nhật có các kích thước là số nguyên a, b, c mà $a+b+c=9$, hình nào có thể tích lớn nhất?

LỜI GIẢI.

Xét tất cả các trường hợp hình hộp chữ nhật có các kích thước nguyên và tổng bằng 9.

a) $V_1 = 1\cdot 1\cdot 7 = 7$.

b) $V_2 = 1\cdot 2\cdot 6 = 12$.

c) $V_3 = 1\cdot 3\cdot 5 = 15$.

d) $V_4 = 1\cdot 4\cdot 4 = 16$.

e) $V_5 = 2\cdot 2\cdot 5 = 20$.

f) $V_6 = 2\cdot 3\cdot 4 = 24$.

g) $V_7 = 3\cdot 3\cdot 3 = 27$.

Ta thấy hình hộp chữ nhật có các kích thước 3, 3, 3 (hình lập phương) có thể tích lớn nhất.

⚠ *Tổng quát, ta chứng minh được: Trong các hình hộp chữ nhật có các kích thước a, b, c mà $a+b+c=m$ với m là hằng số thì hình lập phương có thể tích lớn nhất.*
Để chứng mính điều này, ta dùng bất đẳng thức Cô-si với ba số dương a, b, c.

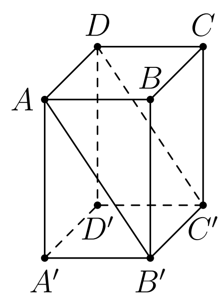
□

3. Bài tập tự luyện

BÀI 9. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và diện tích hình chữ nhật $ADC'B'$ bằng $2a^2$.

LỜI GIẢI.

Ta có $S_{ADC'B'} = AB'\cdot B'C' \Rightarrow AB' = 2a$.
$\triangle AA'B'$ vuông tại A' có $AB'^2 = AA'^2 + A'B'^2$ (định lí Py-ta-go).
$\Rightarrow AA' = a\sqrt{3}$.
Diện tích xung quanh là $S_{\text{xq}} = 2(A'B'\cdot B'C')AA' = 4a^2\sqrt{3}$.
Thể tích là $V = A'B'\cdot B'C'\cdot AA' = a^3\sqrt{3}$.



□

BÀI 10. Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, diện tích mặt chéo $(BDD'B')$ bằng 80 cm^2. M và N theo thứ tự là trung điểm của AA' và CC', $MN = 8$ cm. Tính thể tích hình hộp chữ nhật.

LỜI GIẢI.

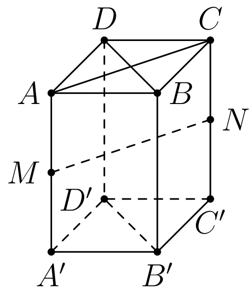
Do $AC = MN$ nên $AC = 8$ cm.

Do $BD = AC$ (vì $ABCD$ là hình vuông) nên $BD = 8$ cm.

$S_{BDD'B'} = BB' \cdot BD \Rightarrow BB' = 10$ cm.

$S_{ABCD} = \dfrac{AC \cdot BD}{2} = 32 \text{ cm}^2$.

Thể tích hình hộp chữ nhật là $V = BB' \cdot S_{ABCD} = 320 \text{ cm}^3$.



□

BÀI 11. Một cái hòm hình hộp chữ nhật có chiều dài 36 cm, chiều rộng 15 cm, chiều cao 16 cm. Số hình lập phương cạnh 3 cm nhiều nhất chứa trong hòm đó là bao nhiêu?

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta thấy $36 : 3 = 12$; $15 : 3 = 5$; $16 : 3 = 5\frac{1}{3}$.

Số hình lập phương cạnh 3 cm nhiều chất chứa trong hòm là $12 \cdot 5 \cdot 5 = 300$ (hình). □

BÀI 12. Một hình hộp chữ nhật được ghép bởi 42 hình lập phương cạnh 1 cm. Biết chu vi đáy của hình hộp chữ nhật là 18 cm. Tính các cạnh của hình hộp chữ nhật.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi chiều dài là a, chiều rộng là b, chiều cao là c.

Ta có $a + b = 9$ và $abc = 42$ nên a, b là ước của 42 và nhỏ hơn 9.

Các ước của 42 mà nhỏ hơn 9 là 1, 2, 3, 6, 7.

Nếu các cạnh đáy là 6 và 3 thì $c = \dfrac{42}{6 \cdot 3}$ không là số tự nhiên.

Nếu các cạnh đáy là 7 và 2 thì $c = \dfrac{42}{7 \cdot 2} = 3$. Vậy các cạnh của hình hộp chữ nhật là 7 cm, 2 cm và 3 cm. □

DẠNG 4. Các dạng khác

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 4. Một hình lập phương lớn cạnh 4 được ghép lại từ 64 hình lập phương nhỏ cạnh 1. Người ta sơn tất cả sáu mặt của hình lập phương lớn. Tính số hình lập phương nhỏ cạnh 1 mà

a) có đúng một mặt được sơn;

b) có đúng hai mặt được sơn;

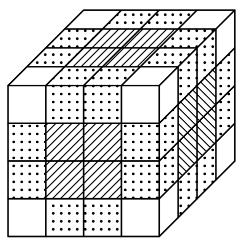
c) có đúng ba mặt được sơn;

d) không có mặt nào được sơn.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Có đúng một mặt được sơn.

Ở mỗi mặt, có 4 hình lập phương nhỏ được sơn một mặt (các hình được gạch sọc). Ở sáu mặt có $4 \cdot 6 = 24$ (hình).



❷ Có đúng hai mặt được sơn.

Ở mỗi cạnh, có 2 hình lập phương được sơn hai mặt (các hình được chấm bi). Ở 12 cạnh có $2 \cdot 12 = 24$ (hình).

❸ Có đúng ba mặt được sơn.

Ở mỗi đỉnh, có một hình lập phương được sơn ba mặt. Ở 8 đỉnh có 8 (hình).

❹ Không có mặt nào được sơn.
Các hình lập phương nhỏ không có mặt nào được sơn là các hình lập phương nhỏ "ở bên trong", chúng tạo thành một hình lập phương có cạnh 2, gồm $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (hình).

□

4. Bài tập tự luyện

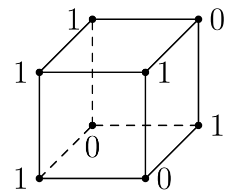
BÀI 13. Cho hình lập phương. Có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai mút của nó là hai đỉnh của hình lập phương?

✍ **LỜI GIẢI.**

Hình lập phương có 8 đỉnh.
Số đoạn thẳng có hai mút là hai điểm trong 8 đỉnh đó là $\dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$. □

BÀI 14.

Người ta ghi vào các đỉnh của một hình lập phương các số 0 hoặc 1 như hình bên. Cứ mỗi bước, ta cộng thêm 1 đơn vị vào mỗi số thuộc cùng một cạnh của hình lập phương. Sau một số bước, có thể xảy ra tám số bằng nhau ở tám đỉnh của hình lập phương được không?



✍ **LỜI GIẢI.**

Lúc đầu, tổng tám số ở các đỉnh của hình lập phương là 5. Sau mỗi bước, tổng tăng thêm 2 đơn vị nên tổng các số ở tám đỉnh luôn luôn là số lẻ, không thể chia hết cho 8. Do đó, không thể xảy ra tám số bằng nhau. □

BÀI 15. Người ta viết vào sáu mặt của một hình lập phương sáu số có tổng bằng 21. Sau đó ở mỗi đỉnh của hình lập phương, ta ghi một số bằng tổng các số ở các mặt chứa đỉnh đó. Tính tổng các số ở các đỉnh.

✍ **LỜI GIẢI.**

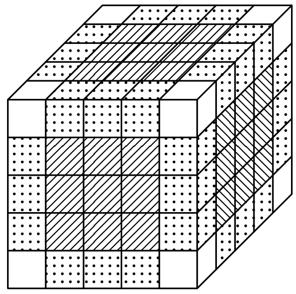
Gọi sáu số ghi trên các mặt của hình lập phương là a, b, c, d, e, g ta có $a+b+c+d+e+g = 21$.
Gọi x là tổng phải tìm.
Do hình lập phương có 8 đỉnh, mỗi đỉnh là tổng của ba số (trong sáu số trên) nên x là tổng của 24 số.
Các số a, b, c, d, e, g có số lần xuất hiện như nhau trong tổng x nên mỗi số có mặt $24 : 6 = 4$ (lần).
Vậy $x = 4(a+b+c+d+e+g) = 4 \cdot 21 = 84$. □

BÀI 16. Mỗi hình lập phương cạnh 5 được ghép bởi 125 hình lập phương nhỏ cạnh 1. Tính số hình lập phương nhỏ giáp với

❶ 6 mặt của các hình lập phương nhỏ khác.
❷ 5 mặt của các hình lập phương nhỏ khác.
❸ 4 mặt của các hình lập phương nhỏ khác.
❹ 3 mặt của các hình lập phương nhỏ khác.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ 6 mặt của các hình lập phương nhỏ khác.



Các hình lập phương nhỏ giáp với 6 mặt của các hình lập phương nhỏ khác là các hình lập phương nhỏ "ở bên trong", chúng tạo thành một hình lập phương có cạnh 3, gồm $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ (hình).

❷ 5 mặt của các hình lập phương nhỏ khác.
Ở mỗi mặt, có 9 hình lập phương nhỏ giáp với 5 mặt của các hình lập phương nhỏ khác (các hình được gạch sọc). Ở sáu mặt có $9 \cdot 6 = 54$ (hình).

❸ 4 mặt của các hình lập phương nhỏ khác.
Ở mỗi cạnh, có 3 hình lập phương nhỏ giáp với 4 mặt của các hình lập phương nhỏ khác (các hình được chấm bi). Ở 12 cạnh có $3 \cdot 12 = 36$ (hình).

❹ 3 mặt của các hình lập phương nhỏ khác.
Ở mỗi đỉnh, có một hình lập phương nhỏ giáp với 3 mặt của các hình lập phương nhỏ khác. Ở 8 đỉnh có 8 (hình).

□

BÀI 17. Có 125 hình lập phương đơn vị ghép lại thành một hình lập phương lớn cạnh 5. Người ta sơn sáu mặt của hình lập phương lớn. Tính số hình lập phương đơn vị có ít nhất một mặt được sơn.

✍ **LỜI GIẢI.**

Nếu ta lấy ra các hình lập phương đơn vị được sơn thì còn lại hình lập phương cạnh 3 chứa $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ hình lập phương đơn vị không được sơn.
Số hình lập phương đơn vị có ít nhất một mặt được sơn là $125 - 27 = 98$ (hình). □

BÀI 18. Để sơn một hình lập phương sao cho hai mặt kề nhau có màu khác nhau, số màu ít nhất cần dùng là bao nhiêu?

✍ **LỜI GIẢI.**

Ba mặt chung đỉnh phải sơn bởi ba màu khác nhau. Vậy số màu không thể ít hơn 3. Số màu là 3 khi ba mặt còn lại sơn cùng màu với mặt đối diện với nó.
Vậy số màu ít nhất cần dùng là 3. □

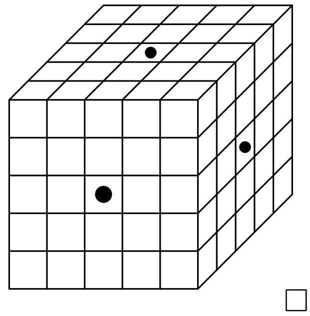
BÀI 19. Một hình lập phương cạnh 10 được tạo thành bởi 1000 hình lập phương đơn vị. Ta có thể nhìn thấy nhiều nhất bao nhiêu hình lập phương đơn vị?

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử ta bỏ đi các hình lập phương đơn vị được nhìn thấy, nghĩa là bỏ các hình lập phương đơn vị ở lớp ngoài cùng. Ta còn lại một hình lập phương cạnh 9, gồm $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ hình lập phương đơn vị. Các hình lập phương đơn vị này không thể nhìn thấy.
Vậy số hình lập phương đơn vị nhiều nhất có thể được nhìn thấy là $1000 - 729 = 271$ hình. □

BÀI 20. Một hình lập phương cạnh 5 gồm 125 hình lập phương đơn vị. Người ta khoan thủng hình lập phương lớn theo ba đường khoan từ mỗi mặt đến mặt đối diện, mũi khoan lọt vào hình lập phương đơn vị chính giữa. Có bao nhiêu hình lập phương đơn vị bị xuyên thủng?

✍ **LỜI GIẢI.**

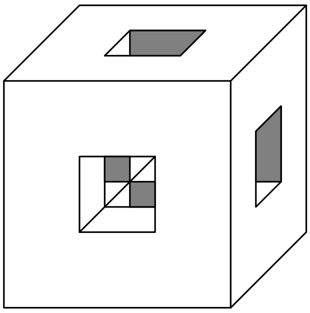


Trong lần khoan thứ nhất có 5 hình lập phương đơn vị bị xuyên. Trong lần khoan thứ hai có thêm 4 hình lập phương đơn vị bị xuyên. Trong lần khoan thứ ba có thêm 4 hình lập phương đơn vị bị xuyên.
Vậy có tất cả 13 hình lập phương đơn vị bị xuyên.
⚠ *Hình lập phương đơn vị nằm ở tâm của hình lập phương lớn bị xuyên ba lần.* □

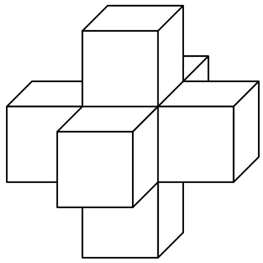
BÀI 21. Một khối gỗ hình lập phương có cạnh 3 dm. Ở chính giữa mỗi mặt của hình lập phương, người ta đục một lỗ vuông có cạnh 1 dm thông sang mặt đối diện, tâm của lỗ vuông là tâm của mặt hình lập phương, các cạnh của lỗ vuông song song với cạnh của hình lập phương. Sau khi đã đục ba lỗ thông, diện tích toàn phần của khối còn lại bằng bao nhiêu?

✍ **LỜI GIẢI.**

Tổng cộng phải đục bảy khối lập phương đơn vị (cạnh 1 dm), gồm sáu khối ở sáu mặt và một khối ở chính giữa bên trong (xem hình b).



Hình a.



Hình b.

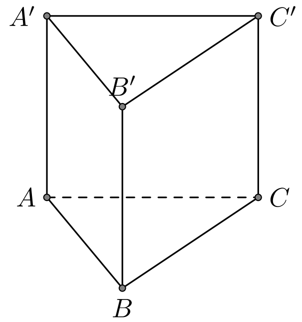
Diện tích toàn phần của khối gỗ lúc đầu là $3 \cdot 3 \cdot 6 = 54$ (dm^2).
Sau khi đục một khối lập phương đơn vị ở mỗi mặt, mặt ngoài của khối gỗ giảm đi 1 dm^2, nhưng bên trong tăng thêm 5 dm^2. Do đó sau khi đục sáu khối ở sáu mặt thì diện tích của khối gỗ là $54 + (5 - 1)6 = 78$ (dm^2).
Khi đục nốt khối lập phương đơn vị ở chính giữa, diện tích khối gỗ giảm đi 6 dm^2 (là diện tích toàn của của khối lập phương đơn vị ấy).
Vậy diện tích toàn phần của khối gỗ còn lại là $78 - 6 = 72$ (dm^2). □

CHƯƠNG 6 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

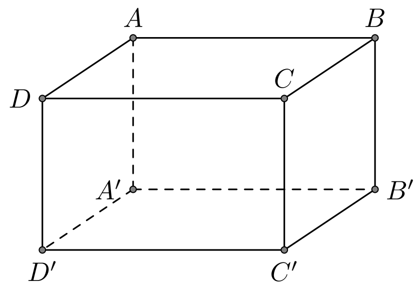
BÀI 1 HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Hình lăng trụ đứng có hai đáy là hai đa giác, các mặt bên là những hình chữ nhật.



Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp đứng.



Diện tích xung quanh hình lăng trụ đứng bằng: Chu vi đáy $\times$ chiều cao.

$$S_{xq} = 2ph$$

Thể tích hình lăng trụ đứng bằng: Diện tích đáy $\times$ chiều cao.

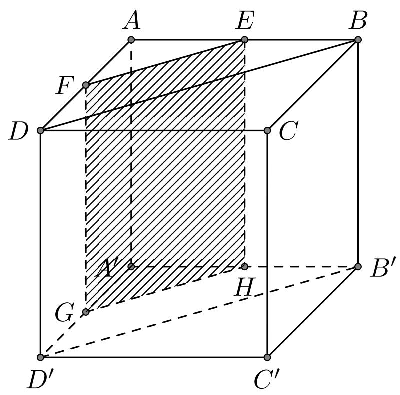
$$V = Sh$$

VÍ DỤ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm AB, AD. Người ta cắt hình lập phương theo mặt phẳng chứa EF và song song với mặt chéo $(BDD'B')$ thì hình lập phương đó chia thành hai hình lăng trụ. Tính số mặt, số đỉnh, số cạnh của mỗi hình lăng trụ.

✍ **LỜI GIẢI.**

Hình lăng trụ nhỏ có 5 mặt, 6 đỉnh, 9 cạnh.
Hình lăng trụ lớn có 7 mặt, 10 đỉnh, 15 cạnh.

⚠ *Nếu gọi M là số mặt, $Đ$ là số đỉnh, C là số cạnh thì ở hai hình lăng trụ trên, ta thấy: $M + Đ - C = 2$*



□

B BÀI TẬP

BÀI 1.

❶ Tính số mặt, số cạnh, số đỉnh của một hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác 100 cạnh; n cạnh ($n \geq 3$).

❷ Chứng minh công thức đối M + Đ − C = 2 của hình lăng trụ đứng với M là số mặt, Đ là số đỉnh, C là số cạnh.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Với đa giác đáy có 100 cạnh, hình lăng trụ có 102 mặt, 200 đỉnh, 300 cạnh. Với đa giác đáy có n cạnh, hình lăng trụ có $n + 2$ mặt, $2n$ đỉnh, $3n$ cạnh ($n \geq 3$).

❷ Suy ra từ câu a).

□

BÀI 2.

❶ Trong các số sau 36, 25, 18, 17, 11, 6, 4 số nào không thể là số đỉnh của một hình lăng trụ đứng?

❷ Trong các số sau 12, 20, 9, 15, 32, 6 số nào không thể là số cạnh của một hình lăng trụ đứng?

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Gọi n là số cạnh của đa giác đáy. Số đỉnh của hình lăng trụ là $2n$ (với $n \geq 3$) nên không thể là 25, 17, 11, 4.

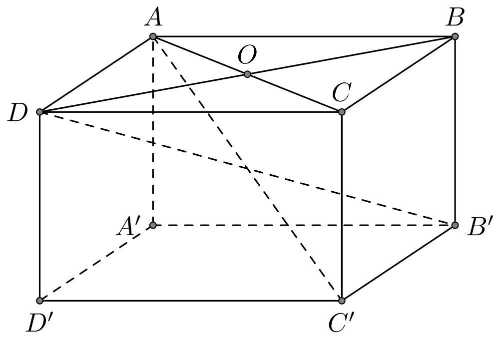
❷ Gọi n là số cạnh của đa giác đáy. Số cạnh của hình lăng trụ là $3n$ (với $n \geq 3$) nên không thể là 20, 32, 6.

□

BÀI 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Biết đường cao $AA' = 5$ cm, các đường chéo $AC' = 15$ cm, $DB' = 9$ cm. Tính cạnh AB của đáy.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Ta lần lượt tính được $AC^2 = 200$, $OA^2 = 50$, $BD^2 = 56$, $OB^2 = 14$, $AB^2 = 64$, $AB = 8$ cm.



□

BÀI 4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều, M là trung điểm cạnh BC, $AA' = AM = a$.

❶ Tính cạnh đáy của hình lăng trụ.

❷ Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình lăng trụ.

✍ **LỜI GIẢI.**

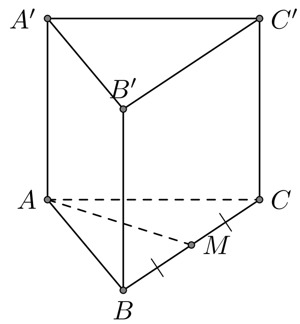
❶ Trong tam giác đều ABC: $AB = \dfrac{2AM}{\sqrt{3}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

❷ Diện tích tam giác ABC: $S = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{3}$.

Chu vi tam giác ABC: $C = 3 \cdot AB = \dfrac{6a}{\sqrt{3}}$.

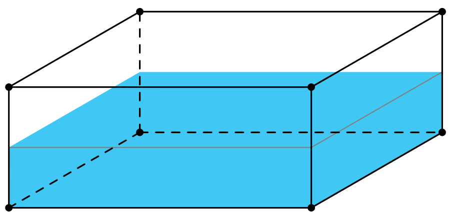
Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2C \cdot AA' = 2\sqrt{3}a^2$.

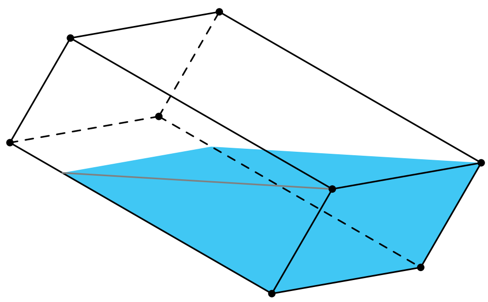
Thể tích $V = AA' \cdot S = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.



□

BÀI 5. Một thùng hình hộp chữ nhật có chiều rộng 10 dm, chiều cao 8 dm, trong thùng đựng 1 phần nước. Khi nghiêng thùng cho nước trong thùng vừa vặn phủ kín mặt bên 10 dm × 8 dm thì nước còn phủ đầy $\dfrac{3}{4}$ của thùng. Tính chiều cao của mực nước khi thùng đặt nằm ngang.





✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi a là chiều dài của đáy chậu và x là chiều cao của mực nước phải tìm (đơn vị dm). Khi thùng nước đặt nằm ngang thì khối nước là một hình hộp chữ nhật có thể tích $10ax$ $\left(\text{dm}^3\right)$.

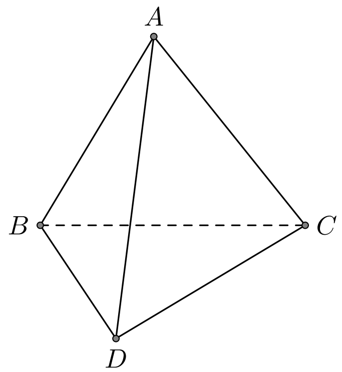
Khi thùng nước đặt nghiêng thì khối nước là một hình lăng trụ đứng, có chiều cao 10 dm, đáy là một tam gác vuông có cạnh góc vuông là 8 dm và $\dfrac{3}{4}a$, thể tích bằng $\dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot \dfrac{3}{4}a \cdot 10 = 30a$ $\left(\text{dm}^3\right)$.

Từ $10ax = 30a$, ta tính được $x = 3$ dm. □

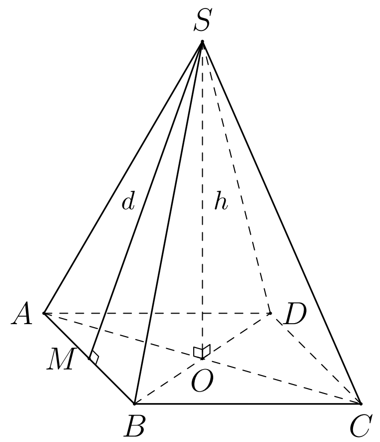
BÀI 2 HÌNH CHÓP ĐỀU. HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

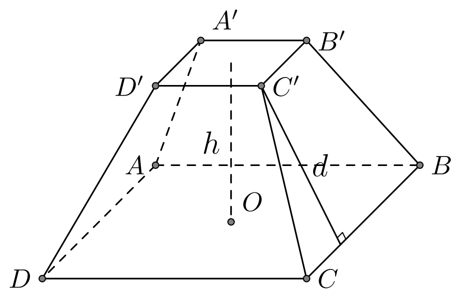
Hình chóp có đáy là một đa giác, các mặt bên là những tam giác có chung một đỉnh, là đỉnh của hình chóp.



Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều, các mặt bên là những tam giác cân.



Khi cắt hình chóp đều bởi một mặt phẳng song song với đáy, phần hình chóp nằm giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng đáy là một hình chóp cụt đều. Hình chóp cụt đều có các mặt bên là những hình thang cân.



Diện tích xung quanh của hình chóp đều bằng: Nửa chu vi đáy × Trung đoạn

$$S_{xq} = pd$$

Diện tích xung quanh của hình chóp cụt đều bằng: Nửa tổng chu vi đáy × Trung đoạn

$$S_{xq} = (p + p')\, d$$

Thể tích của hình chóp bằng: $\dfrac{1}{3}$ diện tích đáy × Chiều cao.

$$V = \frac{1}{3} Sh$$

VÍ DỤ 1. Một hình chóp và một hình lăng trụ đứng có diện tích đáy bằng nhau. Chiều cao của hình chóp gấp đôi chiều cao của hình lăng trụ. Tỉ số các thể tích của khối chóp và hình lăng trụ bằng

a) $\dfrac{1}{3}$; b) $\dfrac{2}{3}$; c) 1; d) $\dfrac{3}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi S và h theo thứ tự là diện tích đáy và chiều cao của hình lăng trụ. Khi đó hình chóp có diện tích đáy S và chiều cao $2h$.

Thể tích hình chóp: $V_1 = \dfrac{1}{3} S \cdot 2h = \dfrac{2}{3} Sh$.

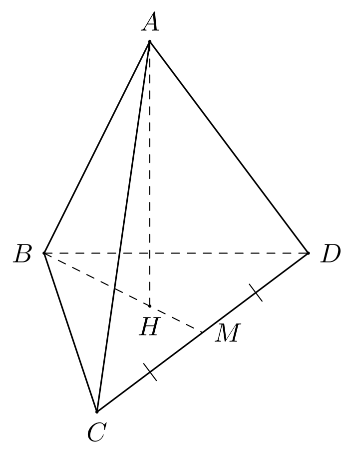
Thể tích hình lăng trụ: $V_2 = Sh$.

Tỉ số các thể tích của khối chóp và hình lăng trụ bằng $\dfrac{2}{3}$. Vậy câu b) là câu trả lời đúng. □

VÍ DỤ 2. Tính thể tích hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $\sqrt{2}$ và cạnh bên bằng 1.

✍ **LỜI GIẢI.**

Cách 1.



Kí hiệu như trên hình vẽ. Xét tam giác CBM vuông tại M:

$BM^2 = BC^2 - CM^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow BM = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

$BH = \dfrac{2}{3} BM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Xét tam giác ΔAHB vuông tại H:

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow AH = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$S_{BCD} = \dfrac{1}{2} \cdot CD \cdot BM = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot AH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{6}$.

Cách 2. Xét tam giác ΔCAD

— $CD^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

— $AC^2 + AD^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$\Rightarrow CD^2 = AC^2 + AD^2 \Rightarrow \widehat{CAD} = 90^\circ$.

Tương tự $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 90°$.

Xét hình chóp đáy là tam giác vuông CAD, đường cao BA, thể tích hình chóp bằng:

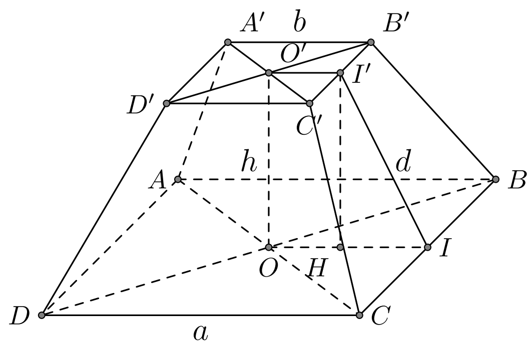
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{CAD} \cdot BA = \frac{1}{6}.$$

□

VÍ DỤ 3. Một hình chóp cụt đều có đáy là hình vuông, các cạnh đáy bằng a và b. Tính chiều cao của hình chóp cụt đều, biết rằng diện tích xung quanh bằng tổng diện tích hai đáy.

✍ **LỜI GIẢI.**

Kí hiệu như hình vẽ.



Diện tích xung quanh hình chóp cụt đều bằng tổng diện tích hai đáy nên $(2a + 2b)\, d = a^2 + b^2$.

Do đó $d = \dfrac{a^2 + b^2}{2\,(a + b)}$.

Gọi I, I' theo thứ tự là trung điểm của BC, $B'C'$. Ta có $O'I' \parallel A'B' \parallel AB \parallel OI$. $O'I'$ và OI xác định mặt phẳng $(O'I'IO)$. Trên mặt phẳng đó kẻ $I'H \perp OI$.

Đặt $I'I = d$, $I'H = OO' = h$.

Ta có: $HI = OI - OH = \dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2}$

$h^2 = I'I^2 - HI^2 = d^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra:

$h^2 = \dfrac{(a^2+b^2)^2}{4(a+b)^2} - \dfrac{(a-b)^2}{4} = \dfrac{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2}{4(a+b)^2} = \dfrac{4a^2b^2}{4(a+b)^2} = \dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2}$.

Do đó $h = \dfrac{ab}{a+b}$. □

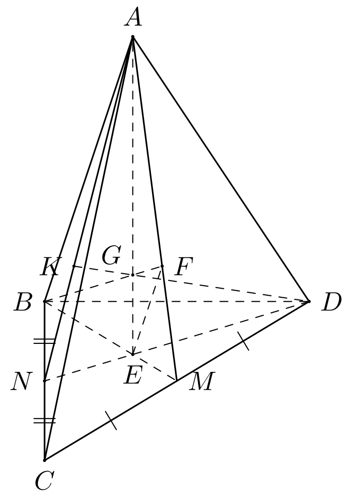
VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $A.BCD$ có đáy BCD. Gọi E, F theo thứ tự là trọng tâm các tam giác BCD, ACD.

❶ Chứng minh $EF \parallel AB$.

❷ Gọi K là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng AE, BF, DK đồng qui.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶



Gọi M là trung điểm của CD. Theo tính chất đường trung tuyến ta có

— $E \in BM$, $ME = \dfrac{1}{3}MB$.

— $F \in AM$, $MF = \dfrac{1}{3}MA$.

Ta có: $\dfrac{ME}{MB} = \dfrac{MF}{MA} = \dfrac{1}{3}$ nên $EF \parallel AB$ (định lý Ta-lét đảo).

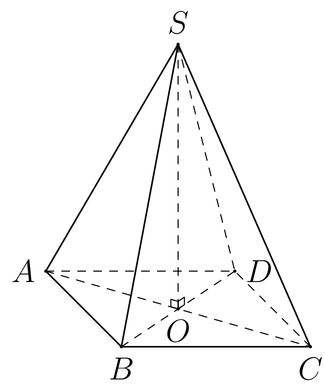
❷ AE cắt BF tại G. Ta có $EF \parallel AB$ nên $\dfrac{GE}{GA} = \dfrac{EF}{AB}$.
Ta lại có $\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{MF}{MA} = \dfrac{1}{3}$. Do đó G chia trong EA theo tỉ số $1:3$.
Chứng minh tương tự, DK cắt AE tại điểm G', cũng chia trong EA theo tỉ số $1:3$ suy ra $G \equiv G'$. Vậy AE, BF, DK đồng quy.

□

B BÀI TẬP

BÀI 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy 20 cm, chiều cao 10 cm. Tính độ dài cạnh bên.

✍ **LỜI GIẢI.**



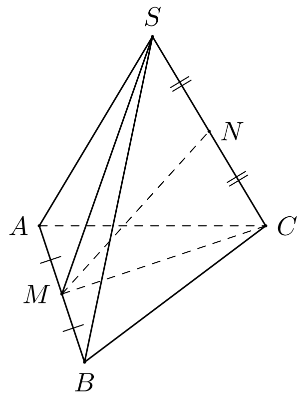
Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Khi đó $SO = 10$ cm.
Ta có $AC = AB\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$ cm, $OA = \dfrac{1}{2} \cdot AC = 10\sqrt{2}$.
Trong tam giác vuông SOA:
$SA^2 = SO^2 + AC^2 = 300 \Rightarrow SA = \sqrt{300}$.

□

BÀI 2. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng 2 dm. Tính độ dài đoạn thẳng MN nối trung điểm hai cạnh đối AB và SC.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi M, N là trung điểm AB và SC.
Ta có $CM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ dm.
Tam giác MNC vuông tại N.
Ta tính được $MN^2 = MC^2 - NC^2 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow MN = \sqrt{2}$ dm.

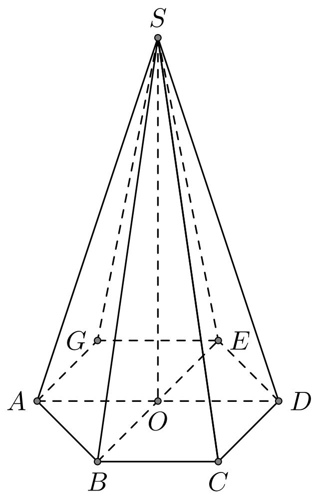


□

BÀI 3. Tính thể tích hình chóp lục giác đều có cạnh đáy 5 cm, cạnh bên 13 cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi O là tâm của lục giác đều $ABCDEG$.
Ta tính được $S = \dfrac{3\sqrt{3}AB^2}{2} = \dfrac{75\sqrt{3}}{2}$ cm^2.
Tam giác SAO vuông tại O:
$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = 12$ cm.
Thể tích hình chóp $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot h = 150\sqrt{3}$ cm^3.



□

BÀI 4. Cho một khối gỗ hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 4. Tại đỉnh A người ta cưa lấy ra một hình chóp có đỉnh là A, ba đỉnh còn lại nằm trên ba cạnh xuất phát từ A và cách A là 1. Tại các đỉnh khác của hình lập phương ta cũng làm như vậy. Số cạnh của phần gỗ còn lại là

a) 24; b) 12; c) 16; d) 36; e) 30.

✍ **LỜI GIẢI.**

Hình lập phương có 12 cạnh. Sau mỗi lần cưa, số cạnh tăng thêm 3 nên sau 8 lần cưa số cạnh tăng thêm $3 \cdot 8 = 24$. Số cạnh của phần gỗ còn lại là $12 + 14 = 36$. Do đó d) là câu trả lời đúng.

□

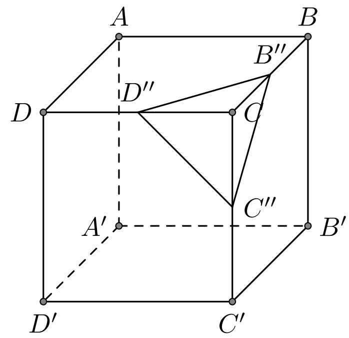
BÀI 5. Cho một khối gỗ hình lập phương. Người ta cưa khối gỗ theo một mặt phẳng đi qua trung điểm của 3 cạnh xuất phát từ 1 đỉnh của hình lập phương.

❶ Tính thể tích của phần gỗ nhỏ bị cưa rời ra, biết cạnh của hình lập phương là 2.
❷ Phần gỗ còn lại có bao nhiêu mặt, đỉnh, cạnh?

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Gọi B'', C'', D'' lần lượt là trung điểm của CB, CC', CD. Khi cắt khối gỗ theo mặt phẳng qua B'', C'', D'' ta được một hình chóp tam giác đều $C.B''C''D''$ có cạnh đáy là $\sqrt{2}$ và các cạnh bên là 1. Tính được $V = \dfrac{1}{6}$.

❷ Hình lập phương có 6 mặt, 8 đỉnh, 12 cạnh. Sau khi bị cưa, số mặt tăng 1, số đỉnh tăng 2, số cạnh tăng 3. Do đó phần gỗ còn lại có 7 mặt, 10 đỉnh, 15 cạnh.



□

BÀI 6. Cho một khối gỗ hình lập phương. Tại mỗi đỉnh của hình lập phương, người ta cưa khối gỗ theo một mặt phẳng đi qua trung điểm của 3 cạnh xuất phát từ đỉnh ấy.

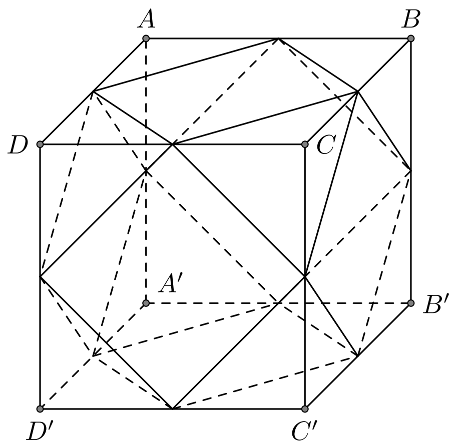
❶ Phần gỗ còn lại có bao nhiêu mặt, đỉnh, cạnh?

❷ Tính tỉ số các thể tích của phần gỗ còn lại so với khối gỗ ban đầu.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Phần gỗ còn lại có 14 mặt: 6 mặt là hình vuông, 8 mặt là tam giác đều. Số đỉnh của phần gỗ còn lại là số đỉnh của 6 hình vuông, trong đó mỗi đỉnh được tính 2 lần nên số đỉnh là $\dfrac{4 \cdot 6}{2} = 12$.
Số cạnh của phần gỗ còn lại là số cạnh của 6 hình vuông, nên số cạnh là $4 \cdot 6 = 24$.

❷ Gọi cạnh của hình lập phương là $2a$, thể tích hình lập phương là $8a^3$. Mỗi hình chóp ở mỗi góc có thể tích $\dfrac{a^3}{6}$.
Phần gỗ còn lại có thể tích: $8a^3 - 8 \cdot \dfrac{a^3}{6} = \dfrac{20a^3}{3}$.
Tỉ số phải tìm là $\dfrac{20a^3}{3} : (8a^3) = \dfrac{5}{6}$.



□

BÀI 7. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các mặt là tam giác đều. Gọi O là trung điểm của đường cao SH của hình chóp. Chứng minh rằng $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 90^\circ$

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi a là cạnh của hình chóp, M là trung điểm của AB. Lần lượt tính được

$CH = \dfrac{2}{3}CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

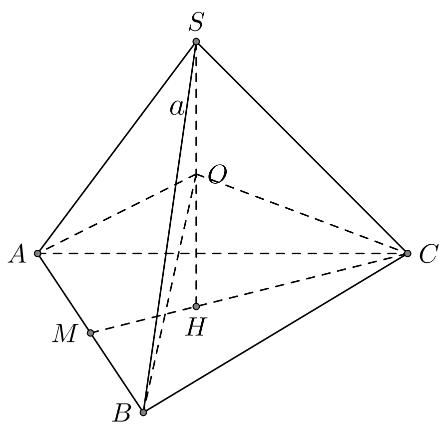
$OC^2 = CH^2 + OH^2 = \dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{6} = \dfrac{a^2}{2}$.

Tương tự $OB^2 = OA^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

Trong tam giác BOC ta có:

$OB^2 + OC^2 = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{2} = a^2 = BC^2 \Rightarrow \widehat{BOC} = 90^\circ$.

Tương tự $\widehat{AOB} = \widehat{COA} = 90^\circ$.



□

BÀI 8. Cho hình chóp cụt đều có hai đáy là các hình vuông cạnh a và $2a$, cạnh bên bằng a. Tính:

❶ Trung đoạn;
❷ Diện tích xung quanh;
❸ Đường cao.

✍ **LỜI GIẢI.**

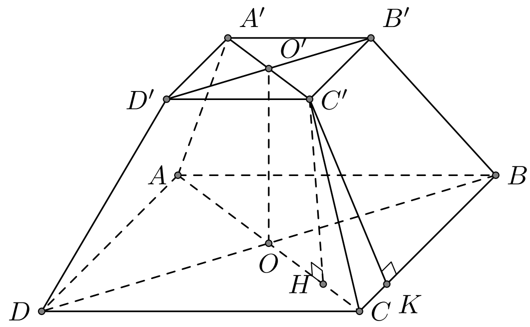
❶ Ta tính được $CK = \dfrac{2a-a}{2} = \dfrac{a}{2}$, $C'K = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

❷ $S_{xq} = (4a+2a)\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}a^2$.

❸ $OC = \dfrac{2a}{\sqrt{2}}$, $O'C' = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $HC = OC - O'C' = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

$C'H^2 = C'C^2 - HC^2 = a^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2}$

$\Rightarrow C'H = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow O'O = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



□

BÀI 9. Cho hình chóp cụt đều có hai đáy là các hình vuông cạnh a và $2a$, trung đoạn bằng a. Tính:

❶ Diện tích xung quanh;
❷ Cạnh bên;
❸ Đường cao.

✍ **LỜI GIẢI.**

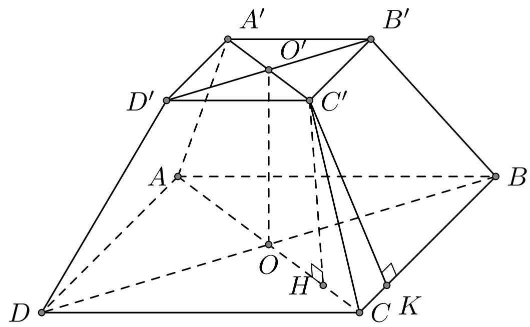
❶ $S_{xq} = (4a+2a)a = 6a^2$.

❷ $CK = \dfrac{a}{2}$, $CC'^2 = C'K^2 + KC^2 = a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow$ $C'C = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

❸ $OC = \dfrac{2a}{\sqrt{2}}$, $O'C' = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $HC = OC - O'C' = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

$C'H^2 = C'C^2 - HC^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 =$

$\Rightarrow C'H^2 = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow C'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow O'O = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



□

BÀI 10. Chứng minh công thức M + Đ − C = 2 đối với hình chóp (M, Đ, C theo thứ tự là số mặt, số đỉnh, số cạnh).

✍ **LỜI GIẢI.**

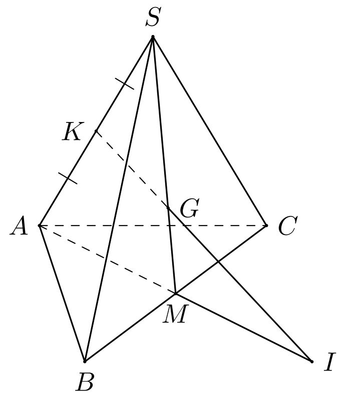
Gọi n là số cạnh của đa giác đáy hình chóp. Số mặt của hình chóp là $n+1$, số đỉnh là $n+1$, số cạnh là $2n$, do đó:

M + Đ − C $= (n+1) + (n+1) - 2n = 2$ □

BÀI 11. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$, điểm G là trọng tâm tam giác SBC. Gọi K là trung điểm của SA. Hãy xác định giao điểm của đường thẳng KG và mặt phẳng (ABC).

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi M là trung điểm của BC, I là giao điểm của KG và AM. Đó là giao điểm của đường thẳng KG và mặt phẳng (ABC).



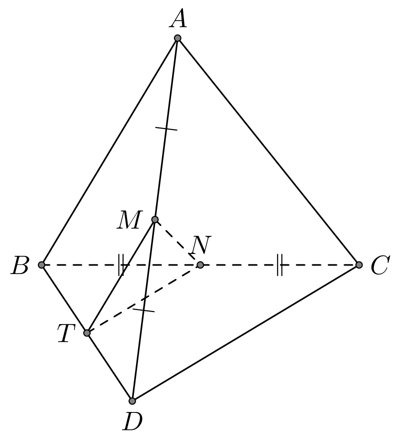
□

BÀI 12. Hình chóp $A.BCD$ có $AB = a$, $CD = b$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AD, BC. Chứng minh rằng $MN < \dfrac{a+b}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi T là trung điểm của BD. Xét ΔMTN:

$MN \leq MT + TN = \dfrac{a+b}{2}$. Dấu bằng không xảy ra.

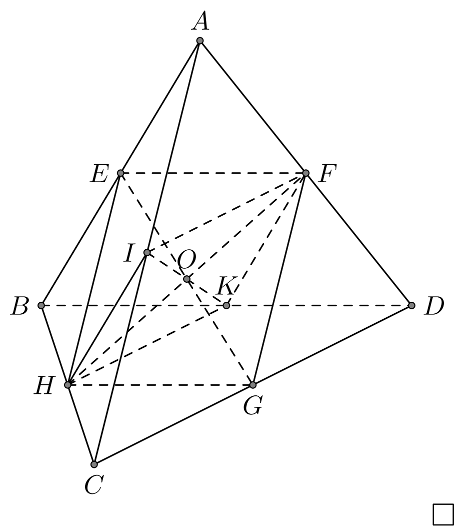


□

BÀI 13. Cho hình chóp $A.BCD$. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối của hình chóp gặp nhau tại một điểm (AB và CD là một cặp cạnh đối của hình chóp).

✍ **LỜI GIẢI.**

Kí hiệu như hình vẽ. Dễ dàng chứng minh $EFGH$ là hình bình hành, gọi giao điểm hai đường chéo EG và FH là O. Ta thấy $IFKH$ cũng là hình bình hành nên O cũng là trung điểm của IK.

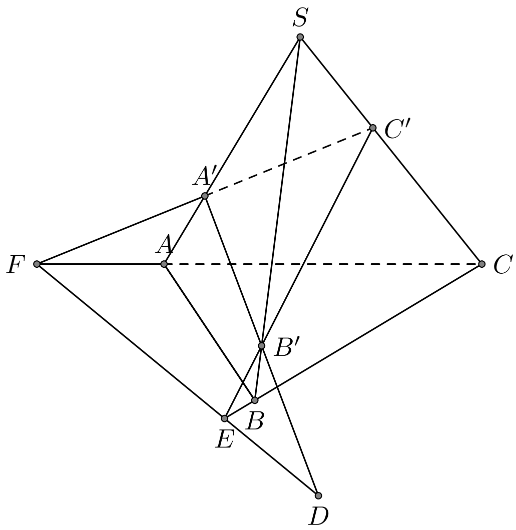


□

BÀI 14. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên SA, SB, SC theo thứ tự lấy các điểm A', B', C' sao cho các đường thẳng $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ theo thứ tự không song song với AB, BC, CA. Gọi D là giao điểm của $A'B'$ và AB, E là giao điểm của $B'C'$ và BC, F là giao điểm của $C'A'$ và CA. Chứng minh rằng 3 điểm D, E, F thẳng hàng.

✍ **LỜI GIẢI.**

Điểm $D \in AB$ mà AB nằm trong mp(ABC) nên $D \in (ABC)$ (1).
Điểm $D \in A'B'$ mà $A'B'$ nằm trong mp$(A'B'C')$ nên $D \in (A'B'C')$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra D thuộc giao tuyến của mp(ABC) và mp$(A'B'C')$.
Chứng minh tương tự E, F cũng thuộc giao tuyến của mp(ABC) và mp$(A'B'C')$. Vậy D, E, F thẳng hàng.

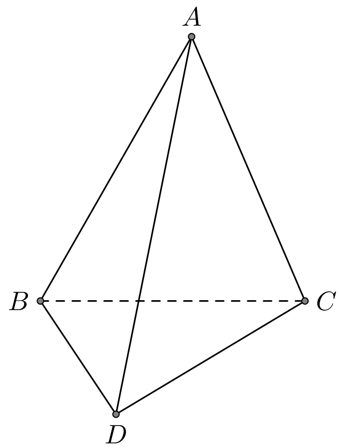


□

BÀI 15. Chứng minh rằng trong một hình chóp tam giác bất kì, tồn tại ba cạnh xuất phát từ một đỉnh mà một cạnh lớn hơn tổng của hai cạnh kia.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi AB là cạnh lớn nhất của hình chóp. Ta sẽ chứng minh rằng hoặc ba cạnh xuất phát từ A hoặc ba cạnh xuất phát từ B thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.
Xét hai tam giác nhận AB làm cạnh:
$\Delta ABC : AC + BC > AB$
$\Delta ABD : AD + BD > AB$. Suy ra $(AC + AD) + (BC + BD) > 2AB$.
Tồn tại một trong hai tổng: $AC + AD$ hoặc $BC + BD$ lớn hơn AB.

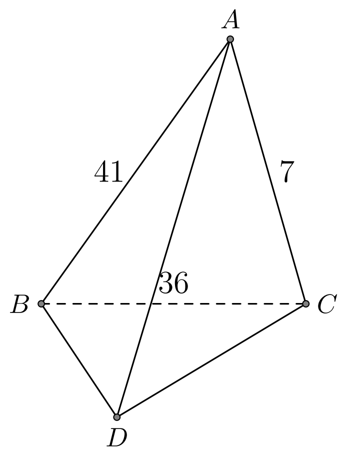


□

BÀI 16. Hình chóp $A.BCD$ có độ dại sáu cạnh là 7, 13, 18, 27, 36, 41. Cạnh nào đối diện với cạnh có độ dài 41.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét cạnh có độ dài nhỏ nhất là 7. Hai cạnh ở cùng một mặt với cạnh đó phải có hiệu nhỏ hơn 7, chỉ có thể là: 13 và 18, hoặc 36 và 41. Giả sử $AB = 41$, $BC = 36$, $AC = 7$.
Khi đó CD, AD nhận các giá trị $\{13; 18\}$.
Xét $CD = 18$. Khi đó $AD = 13$, $BD = 27$, ΔABD có $AD + BD < AB$, loại.
Xét $CD = 13$, $AD = 18$. Do đó cạnh đối diện với cạnh AB (có độ dài 41) là cạnh CD (có độ dài 13).



□

C TÍNH CÁC ĐẠI LƯỢNG HÌNH HỌC BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Phương trình đại số là công cụ giúp chúng ta giải quyết nhiều bài toán hình học, nhất là bài toán về tính toán.

VÍ DỤ 5. Tính diện tích của tam giác có độ dài ba cạnh bằng 10 cm, 17 cm, 21 cm.

LỜI GIẢI.

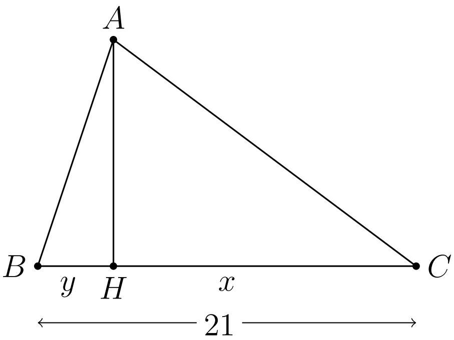
Xét $\triangle ABC$ có $AB = 10$ cm, $AC = 17$ cm, $BC = 21$ cm. Gọi AH là đường cao của tam giác. Vì BC là cạnh lớn nhất của tam giác nên $\widehat{B},\ \widehat{C} < 90^\circ$, do đó H nằm trong đoạn BC. Đặt $HC = x,\ HB = y$ ta có

$$x + y = 21. \quad (1)$$

Mặt khác $AH^2 = 10^2 - y^2$, $AH^2 = 17^2 - x^2$ nên

$$x^2 - y^2 = 17^2 - 10^2 = 189. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $x + y = 21$ và $x - y = 9$. Do đó $x = 15,\ y = 6$. Ta có $AH = 10^2 - 6^2 = 64$, nên $AH = 8$ cm. Vậy $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AH \cdot BC = 84$ cm^2.



Hình 38

□

⚠ *Trong ví dụ 53 ta tính được diện tích khi biết độ dài các cạnh. Ví dụ 54 dưới đây cho ta công thức tổng quát tính diện tích tam giác theo ba cạnh.*

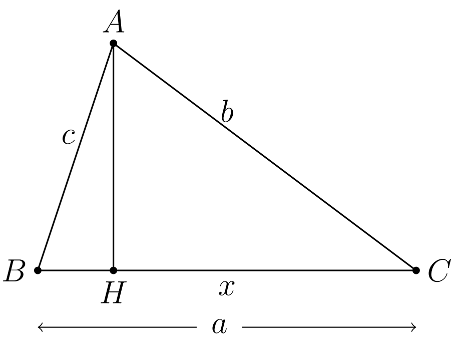
VÍ DỤ 6. Cho tam giác ABC có $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$, diện tích S. Chứng minh rằng $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với p là nửa chu vi của tam giác (công thức Hê-rông).

LỜI GIẢI.

Giả sử $a \geq b \geq c$. Vẽ đường cao AH. Do a là cạnh lớn nhất của tam giác nên B và C là các góc nhọn, do đó H nằm giữa B và C (chú ý nếu không sắp xếp $a \geq b \geq c$ thì phải xét hai trường hợp: H thuộc hoặc không thuộc đoạn BC, phức tạp hơn).

Trước hết ta tính CH theo $a,\ b,\ c$. Đặt $CH = x$, ta có $AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2$ (cùng bằng AH^2), do đó:

$$c^2 - (a-x)^2 = b^2 - x^2 \Rightarrow 2ax = a^2 + b^2 + c^2$$
$$\Rightarrow x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$



Hình 39

Trong tam giác AHC ta có:

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2$$
$$= \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}.$$

Suy ra

$$S^2 = \left(\frac{1}{2}AH \cdot BC\right)^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}{16}.$$

Mà

$$\begin{aligned} 4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2 &= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\ &= \left[(a+b)^2 - c^2\right]\left[c^2 - (a-b)^2\right] \\ &= (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a) \\ &= 16p(p-a)(p-b)(p-c). \end{aligned}$$

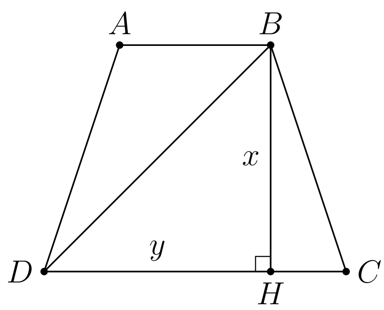
Vậy $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. □

VÍ DỤ 7. Tính chiều cao của một hình thang cân có diện tích bằng 12 cm^2, đường chéo bằng 5 cm.

✍ LỜI GIẢI.

Gọi BH là đường cao của hình thang cân $ABCD$ (h.40). Dễ thấy $DH = \dfrac{AB + CD}{2}$. Do đó đặt $BH = x,\ DH = y$, ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$. Suy ra

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 25 + 24 \\ x^2 + y^2 - 2xy = 25 - 24 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 49 \\ (x-y)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = \pm 1. \end{cases}$$



Hình 40

Do đó $x = 4;\ y = 3$ hoặc $x = 3;\ y = 4$.
Đường cao của hình thang cân bằng 4 cm hoặc 3 cm. □

VÍ DỤ 8. Điểm M nằm trên cạnh huyền của một tam giác vuông có diện tích bằng 100 cm^2 và có khoảng cách đến hai cạnh góc vuông bằng 4 cm và 8 cm. Tính độ dài các cạnh góc vuông.

✍ LỜI GIẢI.

(h.41)

Vẽ $MH \perp AB$, $MK \perp AC$. Đặt $BH = x$, $CK = y$. Ta có $\triangle BHM \backsim \triangle MKC$ nên $\dfrac{x}{8} = \dfrac{4}{y}$, hay $xy = 32$. (1)

Mặt khác $AB \cdot AC = 2S_{ABC}$ nên

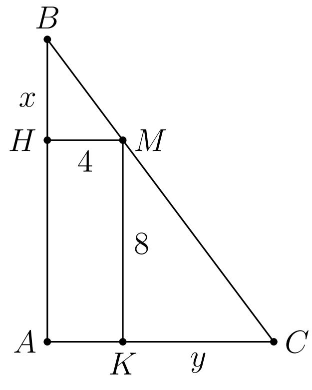
$$(x+8)(y+4) = 200. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $y^2 - 17y + 16 = 0$ hay $(y-1)(y-16) = 0$.

Từ đây ta có $y = 1$ hoặc $y = 16$.

Với $y = 1$ thì $x = 32$ nên $AC = 1 + 4 = 5$ cm, $AB = 32 + 8 = 40$ cm.

Với $y = 1$ thì $x = 2$ nên $AC = 16 + 4 = 20$ cm, $AB = 2 + 8 = 10$ cm.



Hình 41

□

VÍ DỤ 9. Cho tam giác ABC. Qua điểm D thuộc cạnh BC, vẽ các đường thẳng song song với AB, AC tạo thành một hình bình hành có diện tích bằng $\dfrac{3}{8}$ diện tích tam giác ABC. Tính tỉ số $\dfrac{BD}{BC}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

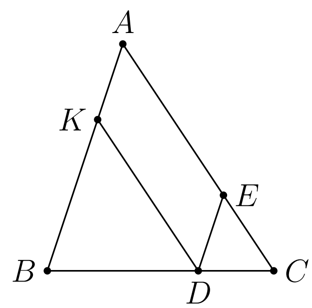
(h.42)

Đặt $\dfrac{BD}{BC} = x$ thì $\dfrac{DC}{BC} = 1 - x$. Ta có

$$S_{AKDE} = \frac{3}{8} S_{ABC}$$

nên

$$\frac{S_{KBD} + S_{EDC}}{S_{ABC}} = \frac{5}{8}. \qquad (1)$$



Hình 42

Mặt khác $\triangle KBD \backsim \triangle ABC$ nên

$$\frac{S_{KBD}}{S_{ABC}} = \left(\frac{BD}{BC}\right)^2 = x^2.$$

$\triangle EDC \backsim \triangle ABC$ nên

$$\frac{S_{EDC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{DC}{BC}\right)^2 = (1-x)^2.$$

Suy ra

$$\frac{S_{KBD} + S_{EDC}}{S_{ABC}} = x^2 + (1-x)^2. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$x^2 + (1-x)^2 = \frac{5}{8} \Leftrightarrow (4x-3)(4x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{4},\ x_2 = \frac{1}{4}.$$

Vậy tỉ số $\dfrac{BD}{BC}$ bằng $\dfrac{3}{4}$ hoặc $\dfrac{1}{4}$.

□

1. Bài tập tự luyện

BÀI 17. Đường phân giác của các góc tù ở một cạnh đáy của một hình thang cắt nhau tại một điểm thuộc cạnh đáy kia. Tính các cạnh của hình thang, biết chiều cao bằng 12 cm, các đường phân giác nói trên dài 15 cm và 13 cm.

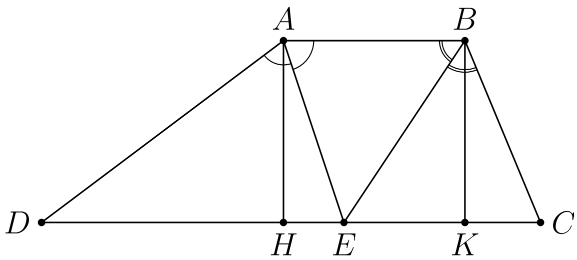
✍ **LỜI GIẢI.**

(h.197)

AE, BE là các phân giác của các góc tù ($E \in DC$). Giả sử $AE = 13$ cm, $BE = 15$ cm. Vẽ $AH \perp CD$, $BK \perp CD$. Dễ dàng tính được $EH = 5$ cm, $EK = 9$ cm. Chú ý $\triangle DAE$ cân tại D, đặt $DA = DE = x$ thì $DH = x - 5$.

Giải phương trình

$(x-5)^2 + 12^2 = x^2$ ta được $x = 16,9$ cm.



Hình 197

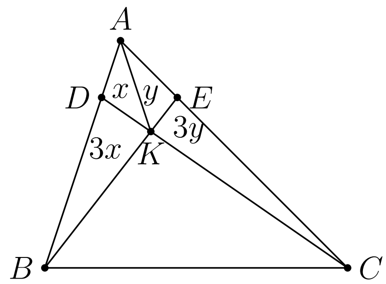
Tương tự ta tính được $BC = 12,5$ cm, $AB = 14$ cm, $CD = 29,4$ cm. □

BÀI 18. Trên các cạnh AB, AC của tam giác ABC diện tích S, lấy điểm D, E sao cho $AD = \dfrac{1}{4}AB$, $AE = \dfrac{1}{4}AC$. Gọi K là giao điểm của BE và CD. Tính diện tích tứ giác $ADKE$.

✍ **LỜI GIẢI.**

(h.198)

Đặt $S_{KAD} = x$, $S_{KAE} = y$. Ta có $4x + y = \dfrac{1}{4}S$ và $x + 4y = \dfrac{1}{4}S$. Từ đây ta tính được $x + y = \dfrac{1}{10}S$.



Hình 198

□

BÀI 19. Trên các cạnh AB, BC của tam giác ABC diện tích S, lấy điểm D, E sao cho $AD = \dfrac{1}{3}AB$, $BE = \dfrac{1}{3}BC$. Gọi K là giao điểm của AE và CD. Tính diện tích tam giác BKC.

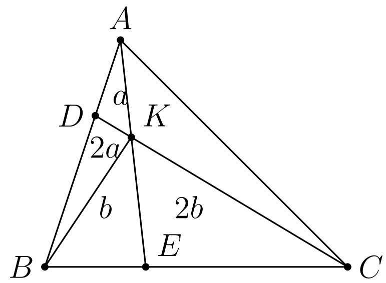
✍ **LỜI GIẢI.**

(h.199)

Đặt $S_{KAD} = a$, $S_{KBE} = b$. Ta có

$$3a + b = \frac{1}{3}S,\ 2a + 3b = \frac{2}{3}S.$$

Từ đó ta tính được $b = \dfrac{4}{21}S$. Do đó $S_{BKC} = \dfrac{4}{7}S$.



Hình 199

□

BÀI 20. Tính diện tích của tam giác cân có chiều cao ứng với cạnh đáy bằng 10 cm, chiều cao ứng với cạnh bên bằng 12 cm.

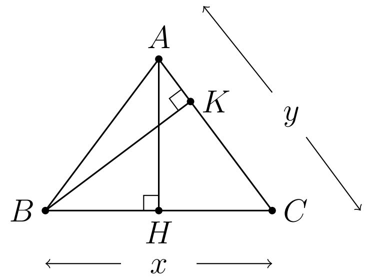
✍ **LỜI GIẢI.**

(h.120)

Gọi độ dài cạnh đáy của tam giác là x (cm), độ dài cạnh bên là y (cm). Ta có

$$10x = 12y \text{ và } \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 10^2 = y^2.$$

Ta tìm được $x = 15$. Diện tích tam giác bằng 75 cm^2.



Hình 200

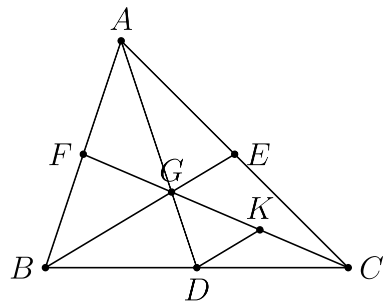
□

BÀI 21. Tính diện tích một tam giác có ba đường trung tuyến bằng 30 cm, 51 cm, 63 cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

(h.201)

Xét tam giác ABC có trọng tâm G, đường trung tuyến AD. Gọi K là trung điểm CG. Tam giác GDK có ba cạnh bằng 10, 17, 21 (đơn vị: cm). Ta tính được $S_{GDK} =$ 84 cm^2 (giải như ví dụ 53). $S_{ABC} = 1008$ cm^2.



Hình 201

□

BÀI 22. Hình vuông $EFGH$ nội tiếp hình vuông $ABCD$ sao cho $E,\ F,\ G,\ H$ chia các cạnh của hình vuông $ABCD$ theo tỉ số k. Tính k, biết rằng $S_{EFGH} = \dfrac{5}{9}S_{ABCD}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

(h.202)

Đặt $BE = CF = DG = AH = x$ thì

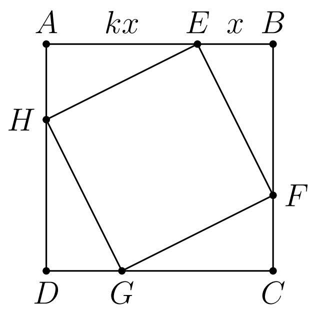
$$AE = BF = CG = DH = kx.$$

Ta có

$$AE^2 + AH^2 = EH^2 \Rightarrow (kx)^2 + x^2 = EH^2.$$

Mặt khác

$$\frac{EH^2}{AB^2} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{(kx)^2 + x^2}{(x + kx)^2} = \frac{5}{9}.$$



Hình 202

Biến đổi phương trình ta được

$$\frac{k^2 + 1}{(1 + k)^2} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Leftrightarrow (2k - 1)(k - 2) = 0.$$

Vậy $k_1 = 2;\ k_2 = \dfrac{1}{2}$.

□

BÀI 23. Một tứ giác có mỗi đường chéo bằng a, tổng các đường trung bình của tứ giác bằng b. Tính diện tích tứ giác theo $a,\ b$.

✍ **LỜI GIẢI.**

(h.203)

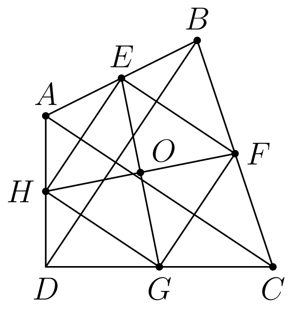
Ta tính diện tích hình thoi $EFGH$ có $EF = \dfrac{a}{2}$, tổng hai đường chéo bằng b. Đặt $OE = x,\ OF = y$. Ta có

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4},\ x + y = \frac{b}{2}.$$

Ta tính được

$$2xy = \frac{b^2 - a^2}{4}.$$

Vậy $S_{ABCD} = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$.



Hình 203

□

BÀI 24. Tính diện tích tứ giác $ABCD$, biết rằng AB vuông góc với CD, $AB = 6$ cm, $BC = 15$ cm, $CD = 8$ cm, $DA = 5$ cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

(h.204)

Cách 1. Kí hiệu như trên hình vẽ.

Xét các tam giác vuông OAD và OBC:

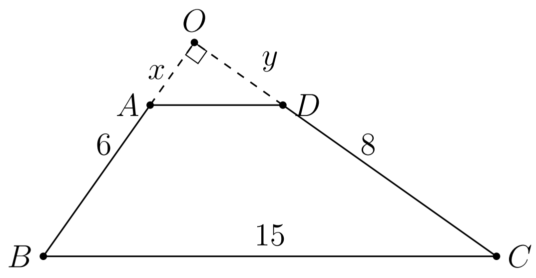
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & (1) \\ (x+6)^2 + (y+8)^2 = 225. & (2) \end{cases}$$

Rút gọn (2) và chú ý $x^2 + y^2 = 25$, ta được

$$6x + 8y = 50. \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) ta có

$$x^2 - 6x + y^2 - 8y + 25 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3,\ y = 4.$$



Hình 204

Đáp số: 48 cm^2.

Cách 2. Vẽ hình bình hành $ADCK$. Chứng minh rằng $BK + KC = BC$, suy ra K nằm giữa B và C, $ABCD$ là hình thang.

Đáp số 48 cm^2.

□

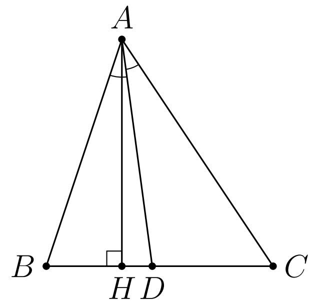
BÀI 25. Tính độ dài đường phân giác AD của tam giác ABC biết rằng $AB = 12$ cm, $AC = 15$ cm, $BC = 18$ cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

(h.205)

Cách 1. Kẻ $AH \perp BC$, ta tính được $BD = 8$ cm, $BH = 6,75$ cm, $HD = 1,25$ cm. Ta có

$$\begin{aligned} AD^2 &= AH^2 + HD^2 = AH^2 + 1,25^2 \quad (1)\\ AH^2 &= AB^2 - BH^2 = 12^2 - 6,75^2. \quad (2)\end{aligned}$$



Hình 205

Từ (1) và (2) suy ra

$$AD^2 = 12^2 - 6,75^2 + 1,25^2 = 100 \Rightarrow AD = 10 \text{ cm}.$$

Cách 2. Theo tính chất đường phân giác ta tính được $BD = 8$ cm.

Chú ý $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{BA}{BC}$ nên $\triangle ABC \backsim \triangle DBA$ $(c.g.c)$. Suy ra

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DA} \Rightarrow DA = 10 \text{ cm}.$$

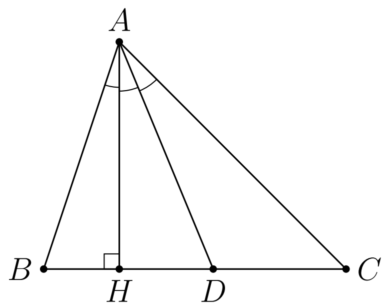
□

BÀI 26. Tính diện tích tam giác ABC có đường cao $AH = 6$ cm, biết rằng AH chia góc A theo tỉ số $1 : 2$ và chia cạnh BC thành hai đoạn mà đoạn nhỏ bằng 3 cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử $HB < HC$ (h.206). Gọi AD là phân giác của $\triangle HAC$. Ta có

$$\frac{DH}{DC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{3}{DC} = \frac{6}{AC}.$$



Hình 206

Đặt $DC = x$ thì $AC = 2x$. Ta có $AH^2 + HC^2 = AC^2$ nên

$$\begin{aligned} 6^2 + (3+x)^2 = (2x)^2 &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0\\ &\Leftrightarrow x_1 = -3 \text{ (loại)},\ x_2 = 5.\end{aligned}$$

Đáp số: 33 cm^2.

□

BÀI 27. Cho tam giác ABC nhọn, $AC > AB$, trực tâm H. Gọi M là trung điểm của BC, O là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC. Biết OH song song với BC, $OH = 11$ cm, $OM = 5$ cm. Tính độ dài BC.

✍ **LỜI GIẢI.**

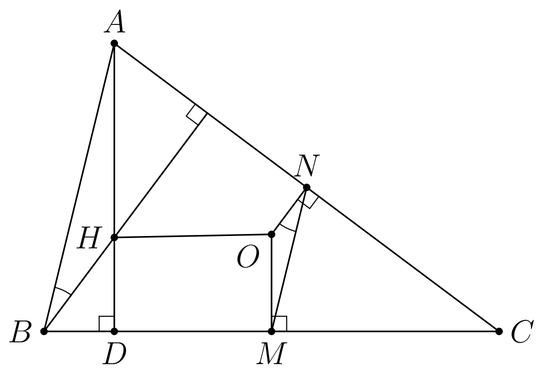
(h.207)

Ta có $\triangle OMN \backsim \triangle HAB$ $(g.g)$, suy ra

$$\frac{OM}{HA} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AH = 2OM = 10.$$

Đặt $DC = x$, $BD = y$. Do $\triangle BDH \backsim \triangle ADC$ $(g.g)$ nên

$$\frac{BD}{AD} = \frac{DH}{DC} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{5}{x} \Rightarrow xy = 75.$$



Hình 207

Ta có
$$x - y = (DM + MC) - (BM - DM) = 2DM = 22.$$
Do đó
$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy = 22^2 + 4 \cdot 75 = 784.$$
Suy ra $x + y = 28$. Vậy $BC = 28$ cm. □

BÀI 3 TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC

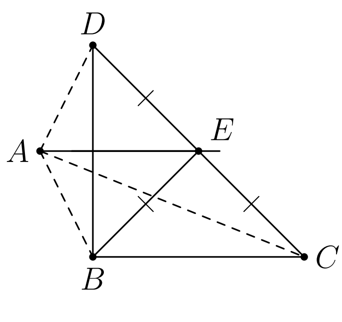
A BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Các bài toán cực trị trong hình học có dạng chung như sau: Trong tất cả các hình có chung một tính chất, tìm những hình sao cho một đại lượng nào đó (như độ dài đoạn thẳng, số đo góc, số đo diện tích...) có giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất.
Bài toán cực trị thường được trình bày theo hai cách:
Cách 1: Trong các hình có tính chất của đề bài, chỉ ra một hình, rồi chứng minh rằng mọi hình khác đều có giá trị (của đại lượng phải tìm cực trị) lớn hơn (hoặc nhỏ hơn) giá trị của đại lượng đó ở hình đã chỉ ra.
Cách 1: Thay điều kiện một đại lượng đạt cực trị (lớn nhất hoặc nhỏ nhất) bằng các điều kiện tương đương, cuối cùng dẫn đến một điều kiện mà ta xác định được vị trí của các điểm để đạt cực trị.
Lời giải trình bày theo cách 2 tự nhiên hơn vì nó mang tính chất tìm kiếm. Dưới đây là một số ví dụ giải theo hai cách trên.

VÍ DỤ 1. Trong các tam giác ABC có cùng cạnh BC và cùng diện tích, hãy tìm tam giác có chu vi nhỏ nhất.

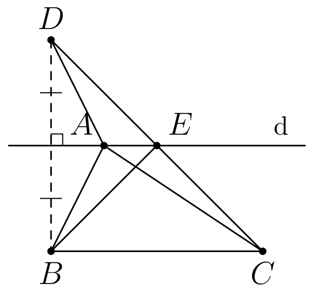
✍ **LỜI GIẢI.**

Cách 1. Xét $\triangle EBC$ cân tại E và $\triangle ABC$ bất kì có cùng diện tích. (A và E nằm cùng phía đối với BC, A khác E), ta có $AE \parallel BC$. Ta sẽ chứng minh rằng chu vi $\triangle EBC$ nhỏ hơn chu vi $\triangle ABC$, bằng cách chứng minh $BE + EC < BA + AC$. Gọi D là điểm đối xứng với C qua E, ta có



$$BE + EC = DC \qquad (1).$$

$\triangle BCD$ có $DE = EC$, $EA \parallel BC$ nên EA đi qua trung điểm của BD. Ta lại có $DB \perp BC$ (vì tam giác BCD có đường trung tuyến BE bằng nửa CD) nên $EA \perp BD$. Suy ra EA là đường trung trực của BD, nên $AB = AD$. Do đó $BA + AC = DA + AC$. (2)
$\triangle ACD$ có $DC < DA + AC$. (3)
Từ $(1), (2), (3)$ suy ra $BE + EC < BA + AC$. Vậy trong các tam giác ABC có cùng cạnh BC và cùng diện tích, tam giác cân đáy BC có chu vi nhỏ nhất.



Cách 2. Xét các $\triangle ABC$ có cạnh đáy BC không đổi và có cùng diện tích. Do chiều cao ứng với BC không đổi nên A chuyển động trên đường thẳng $d \parallel BC$.
Gọi D là điểm đối xứng với B qua d, ta có $AB = AD$.
Chu vi $\triangle ABC$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB + AC$ nhỏ nhất.
Ta có

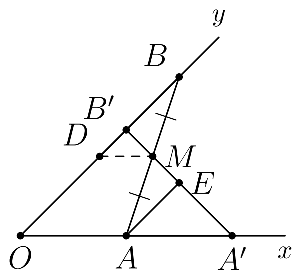
$$AB + AC = DA + AC \geq DC \text{ (không đổi) ;}$$

$$AB + AC = DC \Leftrightarrow D, A, C \text{ thẳng hàng.}$$

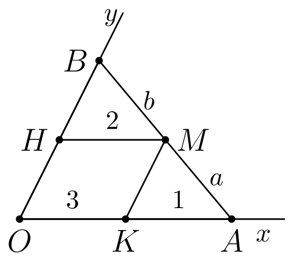
Khi đó A ở vị trí giao điểm E của DC và d, $\triangle EBC$ cân tại E.
Vậy trong các tam giác ABC có cùng cạnh BC và cùng diện tích, tam giác cân với cạnh đáy BC có chu vi nhỏ nhất. □

VÍ DỤ 2. Cho góc xOy khác góc bẹt và một điểm M thuộc miền trong của góc. Dựng đường thẳng đi qua M và cắt hai cạnh của góc thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

✍ LỜI GIẢI.



Cách 1. Qua M đường thẳng song song với Ox, cắt Oy ở D. Dựng B đối xứng với O qua D; BM cắt Ox ở A. Ta sẽ chứng minh rằng $\triangle OAB$ có diện tích nhỏ nhất. Qua M vẽ đường thẳng bất kì (không trùng với AB), cắt Ox, Oy theo thứ tự ở A', B'. Ta sẽ chứng minh rằng $S_{OAB} < S_{OA'B'}$. Thật vậy, có duy nhất một đường thẳng qua M cắt Ox, Oy ở A, B sao cho M là trung điểm của AB nên MA', MB' không bằng nhau. Giả sử $MA' > MB'$. Trên tia MA' ta lấy $ME = MB'$ thì $S_{MBB'} = S_{MAE} < S_{MAA'}$. Do đó $S_{OAB} < S_{OA'B'}$.



Cách 2. Vẽ $MH \parallel OH$, $MK \parallel OB$ thì S_{OHMK} không đổi. Đặt $S_{OHMK} = S_3$, $S_{AMK} = S_1$, $S_{MBH} = S_2$, $S_{ABC} = S$.
Đặt $MA = a$, $MB = b$. Ta có

$$S_3 = S - (S_1 + S_2)$$

nên

$$\frac{S_3}{S} = S - \frac{S_1 + S_2}{S}.$$

Các tam giác AKM, MHB, AOB đồng dạng nên

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \frac{S_2}{S} = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2.$$

$$\Rightarrow \frac{S_3}{S} = 1 - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} = \frac{2ab}{(a+b)^2} \Rightarrow \frac{S}{S_3} = \frac{(a+b)^2}{2ab} \geq 2.$$

(áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \geq 4ab$, xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$).
Vậy $S \geq 2S_3$, do đó diện tích OAB nhỏ nhất khi và chỉ khi $a = b$, khi đó M là trung điểm của AB.
□

B CÁC BẤT ĐẲNG THỨC THƯỜNG DÙNG ĐỂ GIẢI TOÁN CỰC TRỊ

1. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

Quan hệ này thường được sử dụng dưới dạng:

— Trong các tam giác vuông (có thể suy biến thành đoạn thẳng) có các cạnh góc vuông AH và cạnh huyền AB thì $AB \geq AH$, xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi B trùng H.

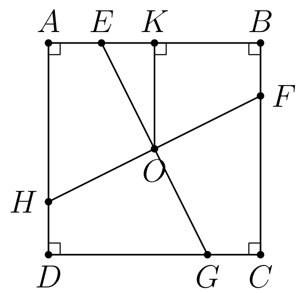
— Trong các đoạn thẳng nối từ một điểm đến các điểm thuộc một đường thẳng, đoạn thẳng vuông góc với đường thẳng có độ dài nhỏ nhất.

— Trong các đoạn thẳng nối hai điểm nằm trên hai đường thẳng song song, đoạn thẳng vuông góc với hai đường thẳng song song có độ dài nhỏ nhất.

VÍ DỤ 3. Cho hình vuông $ABCD$. Hãy nội tiếp trong hình vuông đó một hình vuông có diện tích nhỏ nhất.

LỜI GIẢI.

Gọi $EFGH$ là hình vuông nội tiếp trong hình vuông $ABCD$. Tâm cả hai hình vuông này phải trùng nhau tại một điểm O.



Ta có

$$S_{EFGH} = \frac{EG \cdot FH}{2} = \frac{2OE \cdot 2OE}{2} = 2OE^2.$$

Như vậy S nhỏ nhất $\Leftrightarrow OE$ nhỏ nhất. Gọi K là trung điểm của AB, ta có $OE \geq OK$ (hằng số); $OE = OK \Leftrightarrow E$ trùng K.

Vậy diện tích $EFGH$ nhỏ nhất khi các đỉnh E, F, G, H là trung điểm các cạnh của hình vuông $ABCD$.

□

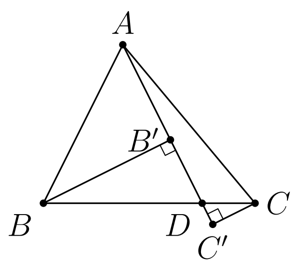
2. Quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu

Trong hai đường xiên cùng kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng lên đường thẳng đó, đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC. Qua A dựng đường thẳng d cắt cạnh BC của tam giác sao cho tổng các khoảng cách từ B và C đến d có giá trị nhỏ nhất.

LỜI GIẢI.

Gọi D là giao điểm của d và cạnh BC. Vẽ BB', CC' vuông góc với d. Với mọi vị trí của D trên cạnh BC ta có



$$S_{ABD} + S_{CAD} = S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AD \cdot BB' + \frac{1}{2}AD \cdot CC' = S \Rightarrow BB' + CC' = \frac{2S}{AD}.$$

Do đó $BB' + CC'$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{2S}{AD}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AD$ lớn nhất.

Giả sử $AC \geq AB$ thì trong hai đường xiên AD, AC, đường xiên AD có hình chiếu nhỏ hơn, do đó $AD \leq AC$ (hằng số); $AD = AC \Leftrightarrow D$ trùng C.

Vậy đường thẳng d phải dựng là đường thẳng chứa cạnh lớn nhất trong hai cạnh AB, AC.
□

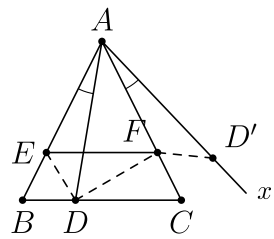
⚠ *Bỏ điều kiện đường thẳng d cắt cạnh BC, xem bài 369.*

3. Bất đẳng thức tam giác

Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $AC + CB \geq AB$; $AC + CB = AB \Leftrightarrow C$ thuộc đoạn thẳng AB.
Để sử dụng bất đẳng thức tam giác, đôi khi ta phải thay đổi phía của một đoạn thẳng đối với một đường thẳng.

VÍ DỤ 5. Cho tam giác ABC cân tại A và điểm D cố định thuộc cạnh đáy BC. Hãy dựng một đường thẳng song song với BC, cắt hai cạnh bên ở E và F sao cho $DE + DF$ có giá trị nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**



Phân tích cách giải: Ta đổi phía của đoạn thẳng DE với đường thẳng AC bằng cách tạo ra một đoạn thẳng $D'E'$ sao cho $D'E' = DE$, E' trùng F và D' cố định. Muốn vậy ta quay D quanh A một góc bằng góc BAC (trên nửa mặt phẳng không chứa D, có bờ AC, dựng tia Ax sao cho $\widehat{CAx} = \widehat{BAD}$, trên tia Ax lấy D' sao cho $AD' = AD$). Như vậy D' là điểm cố định và $D'F = DE$ (vì $\triangle D'AF = \triangle DAE$ theo trường hợp cạnh - góc - cạnh).
Ta có $DF + DE = DF + FD' \geq DD'$ (hằng số).
Do đó $DF + DE$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow DF + FD'$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow F$ là giao điểm của DD' và AC. □

4. Các bất đẳng thức đại số

Các bất đẳng thức thường được sử dụng là:

— Bất đẳng thức về lũy thừa bậc chẵn:

$$x^2 \geq 0. \qquad (1)$$

$$-x^2 \leq 0. \qquad (2)$$

— Bất đẳng thức Cô-si: $(x+y)^2 \geq 4xy$ hay $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ (3) với x, y không âm, xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x = y$.

Chú ý rằng từ bất đẳng thức (3), ta còn suy ra với hai số không âm x, y :

— Nếu $x + y$ là hằng số thì $xy_{\max} \Leftrightarrow x = y$;

— Nếu xy là hằng số thì $(x+y)_{\min} \Leftrightarrow x = y$.

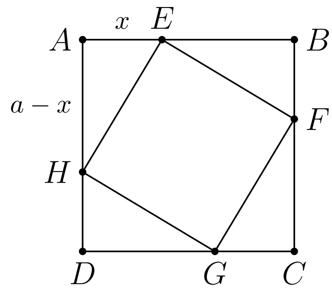
Để sử dụng các bất đẳng thức đại số, ta thường đặt một độ dài thay đổi bằng x, biểu thị đại lượng cần tìm cực trị bằng một biểu thức của x, rồi tìm điều kiện để biểu thức có cực trị.

VÍ DỤ 6. Cho hình vuông $ABCD$. Hãy nội tiếp trong hình vuông đó một hình vuông có diện tích nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét hình vuông $EFGH$ nội tiếp hình vuông $ABCD$, ta có $AE = BF = CG = DH$. Gọi $AB = a$, $AE = x$ thì
$$EB = FC = DG = HA = a - x.$$

Cách 1. Gọi diện tích hình vuông $EFGH$ là S, ta có:



$$\begin{aligned} S &= a^2 - 4\cdot\frac{x(a-x)}{2} = \\ &= a^2 - 2ax + 2x^2 = \\ &= 2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2}; \end{aligned}$$

$\min S = \dfrac{a^2}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow E$ là trung điểm của AB.

Lưu ý: Ta kí hiệu $\min S$ là giá trị nhỏ nhất của S, $\max S$ là giá trị lớn nhất của S.

Cách 2. S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow 4S_{AEH}$ lớn nhất $\Leftrightarrow 4\cdot\dfrac{x(a-x)}{2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow x(a-x)$ lớn nhất.

Chú ý rằng x và $a-x$ là hai số dương có tổng không đổi (bằng a) nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số ấy bằng nhau. Khi đó
$$x = a - x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow E \text{ là trung điểm của } AB.$$

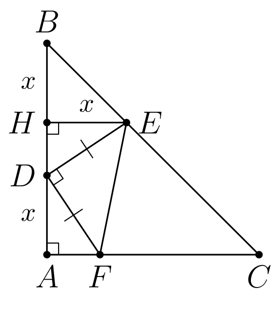
□

VÍ DỤ 7. Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = 10$ cm. Tam giác DEF vuông cân ở D nội tiếp tam giác ABC (D thuộc AB, F thuộc AC, E thuộc BC). Xác định vị trí của điểm D để diện tích tam giác DEF nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có, tam giác $\triangle DEF$ vuông cân ở D nên

$$\begin{aligned} S_{DEF} &= \frac{1}{2}DE\cdot DF = \frac{1}{2}DE^2 = \\ &= \frac{1}{2}\left(EH^2 + DH^2\right) = \frac{1}{2}\left[x^2 + (10-2x)^2\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left(5x^2 - 40x + 100\right) = \frac{5}{2}\left(x^2 - 8x + 20\right) = \\ &= \frac{5}{2}(x-4)^2 + 10 \geq 10. \end{aligned}$$



Hình 51

$\min S_{DEF} = 10\ (\text{cm}^2) \Leftrightarrow x = 4$.

Do đó $AD = 4$ cm.

⚠ *Tổng quát,* $\min S_{DEF} = \dfrac{1}{5}S_{ABC}$.

□

VÍ DỤ 8. Các đường chéo của tứ giác $ABCD$ cắt nhau ở O. Tính diện tích nhỏ nhất của tứ giác, biết $S_{AOB} = 4\text{ cm}^2$, $S_{COD} = 9\text{ cm}^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Kí hiệu như hình 52. Ta có:

$$\frac{S_4}{S_2} = \frac{OA}{OC} = \frac{S_1}{S_3} \Rightarrow S_1S_2 = S_3S_4. \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si:

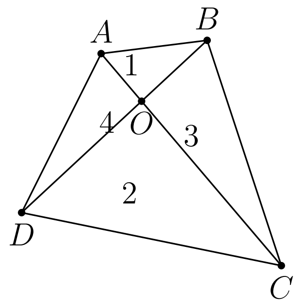
$$S_3 + S_4 \geq 2\sqrt{S_3S_4} = 2\sqrt{4 \cdot 9} = 12.$$

$\max S = 25$ (cm^2) khi và chỉ khi:

$$S_3 = S_4 \Leftrightarrow S_{ADC} = S_{BCD} \Leftrightarrow AB \parallel CD.$$

Ta có

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \geq 4 + 9 + 12 = 25.$$



Hình 52

Chú ý: Tổng quát, thay 4 và 9 bởi a và b, ta có $\max S = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$. □

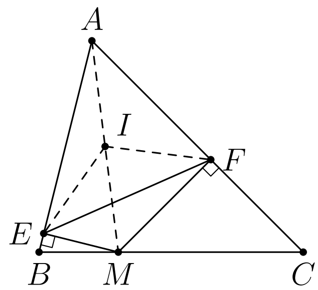
C CÁC CHÚ Ý KHI GIẢI TOÁN CỰC TRỊ

⚠ *Khi giải các bài toán cực trị, nhiều khi ta cần biến đổi tương đương điều kiện cực trị của đại lượng này thành điều kiện cực trị của đại lượng khác.*

VÍ DỤ 9. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, M là một điểm bất kì nằm trên cạnh BC. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của M lên AB, AC. Tìm vị trí của M để EF có độ dài nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

Chú ý đến hai tam giác vuông chung cạnh huyền là AEM, AFM, ta gọi I là trung điểm của AM, ta có $IA = IE = IM = IF$. Như vậy EF là cạnh đáy của tam giác cân IEF. Dễ thấy $\widehat{EIF} = 2\widehat{EAF}$, mà $\widehat{EAF}$ không đổi nên $\widehat{EIF}$ không đổi. Tam giác cân EIF có số đo góc ở đỉnh không đổi nên cạnh đáy nhỏ nhất khi và chỉ khi cạnh bên nhỏ nhất. Do đó EF nhỏ nhất $\Leftrightarrow IE$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM$ nhỏ nhất. Khi đó M là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC.



Hình 53

□

⚠ *Nhiều bài toán cực trị có liên quan đến bài toán tìm tập hợp điểm: Trong tập hợp các hình có chung một tính chất, khi ta cố định một yếu tố không đổi của hình, các điểm còn lại có thể chuyển động trên một đường nhất định, việc theo dõi vị trí của chúng giúp ta tìm được cực trị của bài toán.*

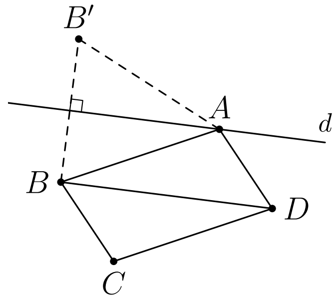
VÍ DỤ 10. Trong các hình bình hành có diện tích và một đường chéo không đổi, hình nào có chu vi nhỏ nhất?

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét các hình bình hành $ABCD$ có BD cố định. Diện tích hình bình hành không đổi nên diện tích tam gác ABD không đổi, do đó A chuyển động trên đường thẳng $d \parallel BD$.

Cần xác định vị trí của A trên d để $BA + AD$ nhỏ nhất. Ta đổi phía của BA đối với d bằng cách lấy B' đối xứng với B qua d. Khi đó B' cố định,

$$BA + AD = B'A + AD \geq B'D \text{ (hằng số)}.$$



$BA + AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow B'A + AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A$ là giao điểm của d và đoạn $B'D$. Khi đó $AB = AD$.

Vậy hình bình hành có chu vi nhỏ nhất khi nó là hình thoi. □

Khi giải các bài toán cực trị, có khi ta phải tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trong từng trường hợp, rồi so sánh các giá trị ấy với nhau để tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của cả bài toán.

VÍ DỤ 11. Cho tam giác ABC. Dựng đường thẳng d đi qua A sao cho tổng các khoảng cách từ B và C đến d có giá trị lớn nhất.

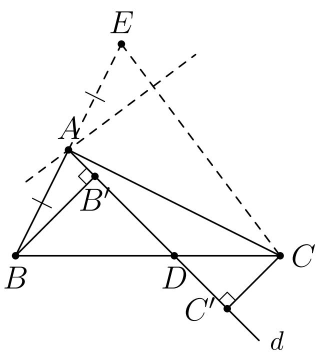
LỜI GIẢI.

Gọi BB', CC' là khoảng cách từ B và C đến d. Xét hai trường hợp:

❶ Đường thẳng d cắt cạnh BC tại D (hình 55):

$$BB' + CC' \leq BD + CD = BC.$$

(Chú ý rằng nếu $\widehat{B}$ hoặc $\widehat{C}$ lớn hơn 90° thì dấu bằng không đạt được, nhưng điều đó không ảnh hưởng đến bài toán).

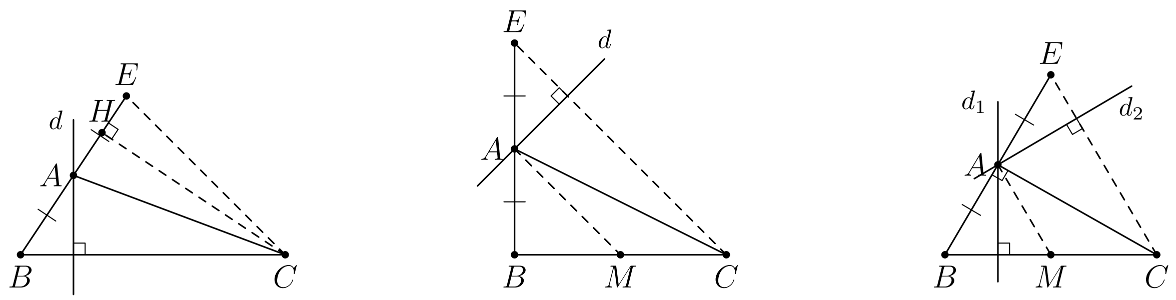


❷ Đường thẳng d không cắt cạnh BC. Khi đó d cắt cạnh CE với E là điểm đối xứng với B qua A.

Giải như trường hợp 1, ta được $BB' + CC' \leq CE$.

Bây giờ ta so sánh BC và CE:

a) b) c)



Hình 56

❶ Trường hợp $\widehat{BAC} > 90^\circ$ (Hình 56.a). Nếu kẻ $CH \perp BE$ thì H thuộc tia đối của tia AB nên $HB > HE$, do đó $BC > CE$. Ta có

$$\max\left(BB' + CC'\right) = BC \Leftrightarrow d \perp BC.$$

❷ Trường hợp $\widehat{BAC} < 90^\circ$ (Hình 56.b). Nếu kẻ $CH \perp BE$ thì H thuộc tia đối của tia AE nên $HE > HB$, do đó $CE > CB$. Ta có

$$\max(BB' + CC') = CE \Leftrightarrow d \perp CE.$$

❸ Trường hợp $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (Hình 56.c). Ta có $CE = CB$. Do đó

$$\max(BB' + CC') = CE = BC \Leftrightarrow d \perp BC \text{ hoặc } d \perp CE.$$

□

⚠ ❶ *Nếu gọi M là trung điểm của BC thì $CE \parallel AM$, $CE = 2AM$ nên kết luận của bài toán được diễn đạt như sau:*

— *Nếu $\widehat{BAC} > 90^\circ$ thì $\max(BB' + CC') = BC \Leftrightarrow d \perp BC$.*

— *Nếu $\widehat{BAC} < 90^\circ$ thì $\max(BB' + CC') = 2AM \Leftrightarrow d \perp AM$.*

— *Nếu $\widehat{BAC} = 90^\circ$ thì $\max(BB' + CC') = BC = 2AM \Leftrightarrow d \perp BC$ hoặc $d \perp AM$.*

❷ *Đặc biệt hóa ví dụ trên khi tam giác ABC vuông cân tại A, ta có bài toán: Cho hình vuông $ABCD$. Dựng đường thẳng d đi qua tâm của hình vuông sao cho tổng khoảng cách từ bốn đỉnh của hình vuông đến đường thẳng đó có giá trị lớn nhất.*

Trả lời: Các đường thẳng phải dựng gồm hai đường thẳng chứa đường trung bình của hình vuông.

1. Bài tập

BÀI 1. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác $ABCD$, biết $AB = AD = a$ và $BC = CD = b$.

✍ **LỜI GIẢI.**

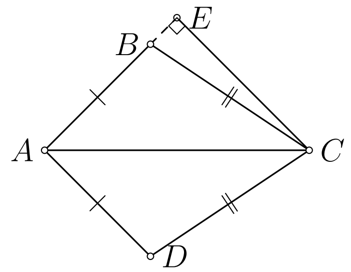
Ta có $\triangle ABC = \triangle ADC$ $(c - c - c)$ nên $S_{ABC} = S_{ADC}$.

Do đó: $S_{ABCD} = 2S_{ABC}$. Kẻ $CE \perp AB$ với $E \in AB$.

Khi đó $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = AB \cdot CE \leq AB \cdot BC = ab$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow AB \perp BC$, hay $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.

Vậy $\max S_{ABCD} = ab \Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.



□

BÀI 2. Trong các hình chữ nhật có đường chéo bằng d không đổi, hình nào có diện tích lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật thứ tự là a và b $(0 < b \leq a)$.

Khi đó: $a^2 + b^2 = d^2$ và $S_{\text{hcn}} = a.b \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2} = \dfrac{d^2}{2}$ không đổi.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ hay đó là hình vuông. Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có độ dài dường chéo d không đổi là $\dfrac{d^2}{2}$, xảy ra khi nó là hình vuông. □

BÀI 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm M nằm giữa B và C. Gọi D, E thứ tự là hình chiếu của M lên AC, AB. Tìm vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

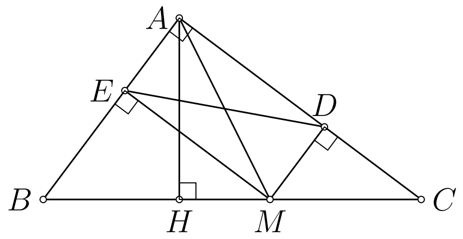
Xét tứ giác $ADME$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$ nên ta có tứ giác $ADME$ là hình chữ nhật, do đó $DE = AM$.

Khi đó DE min $\Leftrightarrow$ AM min.

Kẻ $AH \perp BC$ với $H \in BC$, ta được $AM \geq AH$.

Suy ra AM min $\Leftrightarrow AM = AH \Leftrightarrow M \equiv H \Leftrightarrow AM \perp BC$.

Vậy DE min $\Leftrightarrow AM \perp BC$.



□

BÀI 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E thứ tự thuộc các cạnh AC, AB sao cho $\widehat{DHE} = 90^\circ$. Tìm vị trí của D, E để DE có độ dài nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

Do $\widehat{DHE} = \widehat{AHB} = 90^\circ$ nên $\widehat{EHB} = \widehat{DHA}$.

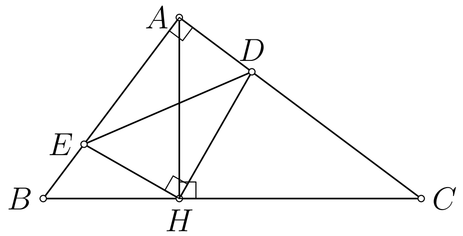
Do $\widehat{BAC} = \widehat{AHB} = 90^\circ$ nên $\widehat{EBH} = \widehat{DAH}$.

Từ 2 điều trên ta được $\triangle EBH \backsim \triangle DAH$.

Do đó $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{HB}{HE}$ hay $DE = \dfrac{HB}{AB} \cdot HE$.

Suy ra DE min $\Leftrightarrow$ HE min $\Leftrightarrow$ $HE \perp AB$, khi đó tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật hay $HD \perp BC$.

Vậy DE min $\Leftrightarrow HD \perp BC$ và $HE \perp BC$.



□

BÀI 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, $BC = 2a$. Một đường thẳng d bất kì đi qua A và không cắt cạnh BC. Gọi I và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B và C lên đường thẳng d, gọi H là trung điểm BC. Tính diện tích lớn nhất của tam giác HIK.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét hai tam giác BIA và AKC có $\widehat{I} = \widehat{K} = 90^\circ$, $AB = AC$ và $\widehat{BAI} = \widehat{ACK}$ ($= 90^\circ - \widehat{KAC}$) nên $\triangle BIA = \triangle AKC$.

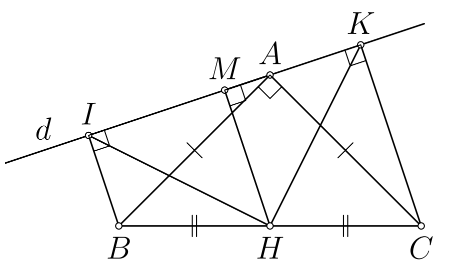
Khi đó: $BI = AK$ và $AI = KC$ hay $IK = BI + CK$.

Kẻ $HM \perp IK$ ($M \in IK$).

Theo tính chất đường trung bình trong hình thang $BIKC$ với H là trung điểm BC và $BI \parallel MH \parallel CK$ thì M là trung điểm IK và $MH = \dfrac{IB + CK}{2} = \dfrac{IK}{2}$.

Suy ra $S_{HIK} = \dfrac{MH \cdot IK}{2} = MH^2 \leq MA^2 = a^2$.

Vậy $\max S_{HIK} = a^2 \Leftrightarrow d \perp AH \Leftrightarrow d \parallel BC$.



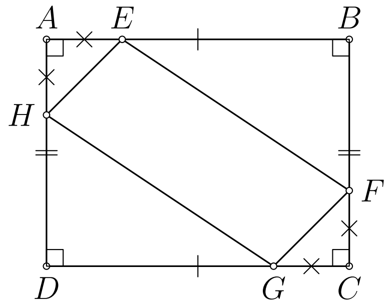
□

BÀI 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho $AE = AH = CF = CG$. Xác định vị trí các điểm E, F, G, H để tứ giác $EFGH$ có diện tích lớn nhất, nếu:

❶ $AB = 40$ cm, $BC = 20$ cm.

❷ $AB = a$, $BC = b$ ($b < a < 3a$).

✍ **LỜI GIẢI.**



Ta thấy câu (a) là trường hợp đặc biệt của câu (b) do đó ta chỉ cần giải quyết câu (b) là đủ.
Đặt $AE = AH = CF = CG = x$ $(0 \le x \le b)$. Khi đó

$$\begin{aligned} S_{EFGH} &= S_{ABCD} - S_{AEH} - S_{BEF} - S_{CFG} - S_{DHG} \\ &= ab - \frac{1}{2}[x^2 + (a-x)(b-x) + x^2 + (b-x)(a-x)] \\ &= (a+b)x - 2x^2 \\ &= \frac{(a+b)^2}{8} - 2\left(x - \frac{a+b}{4}\right)^2 \le \frac{(a+b)^2}{8}. \end{aligned}$$

Suy ra $\max S_{EFGH} = \dfrac{(a+b)^2}{8} \Leftrightarrow x = \dfrac{a+b}{4}$, giá trị x thỏa mãn $0 \le x \le b$ do $b < a < 3b$.

Vậy S_{EFGH} lớn nhất khi E, F, G, H thỏa mãn $AE = AH = CF = CG = \dfrac{a+b}{4}$. □

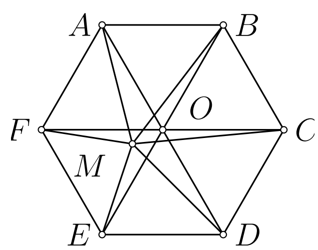
BÀI 7. Người ta dùng một đoạn dây căng thành 3 đoạn thẳng tạo với một bức tường làm thành một hình chữ nhật. Hãy chỉ ra cách căng dây để hình chữ nhật đó có diện tích lớn nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

Do có một cạnh của hình chữ nhật bức tường nên trong hai chiều của hình chữ nhật thì một chiều có độ dài a $(a > 0)$ bao gồm 1 đoạn dây và 1 đoạn tường còn một chiều có độ dài b $(b > 0)$ bao gồm 2 đoạn dây. Khi đó diện tích hình chữ nhật là $S = a.b$.
Gọi độ dài đoạn dây là l không đổi thì ta được $a + 2b = l$.
Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $l = a + 2b \ge 2\sqrt{2ab} = 2\sqrt{2S}$ hay $S \le \dfrac{l^2}{8}$.
Suy ra diện tích hình chữ nhật lớn nhất là $\dfrac{l^2}{8}$ xảy ra khi $a = 2b \Leftrightarrow a = \dfrac{l}{2}$ và $b = \dfrac{l}{4}$.
Vậy ta có cách căng dây là: chia đoạn dây thành 4 phần bằng nhau; tính từ 2 đầu mút lấy vào mỗi đầu $\frac{1}{4}$ đoạn dây để làm 2 chiều rộng, $\frac{1}{2}$ phần dây còn lại cùng với bức tường làm thành 2 chiều dài.
□

BÀI 8. Tìm điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M đến các đỉnh của một lục giác đều cho trước là nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**



Xét lục giác đều $ABCDEF$ có AD, BE, CF đồng quy tại O hay O là tâm của lục giác đều.
Ta có: $MA + MB + MC + MD + ME + MF \ge AD + BE + CF$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M cùng thuộc các đoạn thẳng AD, BE, CF hay $M \equiv O$.
Vậy vị trí điểm M cần tìm là tâm của lục giác đều.
□

BÀI 9. Chứng minh rằng trong các tam giác có cùng cạnh đáy và cùng chu vi, tam giác cân có diện tích lớn nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét tam giác có độ dài các cạnh là a, b, c với $a, b, c > 0$; a không đổi và chu vi $2p = a + b + c$ không đổi. Khi đó: $b + c = 2p - a$ không đổi.

Theo công thức Hê-rông về diện tích ta có:

$$\begin{aligned} S_\triangle &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{p(p-a)}\sqrt{(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $p-b$, $p-c$ ta có:

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} \le \frac{p-b+p-c}{2} = \frac{a}{2}.$$

Do đó $S_\triangle \le \dfrac{a\sqrt{p(p-a)}}{2}$ không đổi.
Dấu bằng có khi và chỉ khi $p-b = p-c$ hay $b = c$ và khi đó tam giác này là tam giác cân. □

BÀI 10. ❶ Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình nào có diện tích lớn nhất?
❷ Trong các hình chữ nhật có cùng diện tích, hình nào có chu vi nhỏ nhất?

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có: $(x-y)^2 \ge 0\, \forall x, y \in \mathbb{R}$ nên $4xy \le (x+y)^2\, \forall x, y \in \mathbb{R}\, (*)$. Dấu bằng có $\Leftrightarrow x = y$.
Gọi a, b thứ tự là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

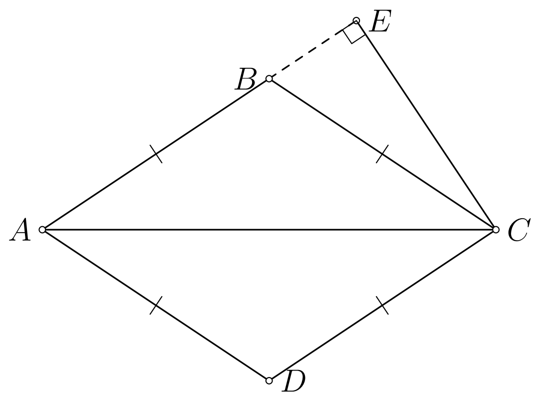
❶ Hình chữ nhật có chu vi không đổi $\Leftrightarrow a + b = p$ không đổi.
Theo $(*)$, diện tích hình chữ nhật là $S = ab$ lớn nhất bằng $\dfrac{p^2}{4} \Leftrightarrow a = b$.
Khi đó, hình chữ nhật trở thành hình vuông.
Vậy trong các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất.

❷ Hình chữ nhật có diện tích không đổi $\Leftrightarrow ab = S$ không đổi.
Theo $(*)$, chu vi hình chữ nhật là $P = 2(a+b)$ nhỏ nhất bằng $4\sqrt{S} \Leftrightarrow a = b$.
Khi đó, hình chữ nhật trở thành hình vuông.
Vậy trong các hình chữ nhật có cùng diện tích, hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

□

BÀI 11. Trong các hình thoi có cùng chu vi, tìm hình có diện tích lớn nhất?

✍ **LỜI GIẢI.**



Xét hình thoi $ABCD$ có chu vi là $4a$ không đổi.
Suy ra $AB = BC = CD = DA = a$ không đổi và $S_{ABCD} = 2S_{ABC}$.
Kẻ $CE \perp AB\, (E \in AB)$, ta có

$$S_{ABC} = \frac{CE \cdot AB}{2} \le \frac{CA \cdot AB}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Do đó $S_{ABCD} \le a^2$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \widehat{B} = 90^\circ$ hay $ABCD$ là hình vuông.
Vậy trong các hình thoi có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

□

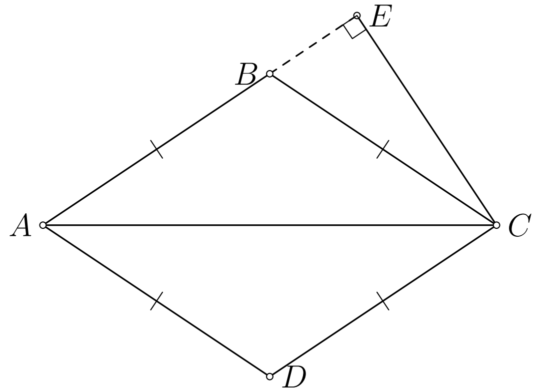
BÀI 12. Trong các hình thoi có cùng diện tích, hình nào có chu vi nhỏ nhất?

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét hình thoi $ABCD$ có diện tích là S không đổi và chu vi là P, hiển nhiên $S_{ABCD} = 2S_{ABCD}$.
Kẻ $CE \perp AB\,(E \in AB)$, ta có

$$S_{ABC} = \frac{CE \cdot AB}{2} \leq \frac{CA \cdot AB}{2} = \frac{P^2}{32}.$$

Do đó $P \geq 4\sqrt{S}$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \widehat{B} = 90^\circ$ hay $ABCD$ là hình vuông.
Vậy trong các hình thoi có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi nhỏ nhất.



□

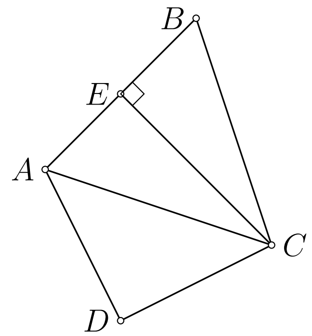
BÀI 13. Chứng minh rằng:

❶ Trong các tứ giác có cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất.

❷ Trong các tứ giác có cùng diện tích, hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

Với mọi số thực dương a, b, c, d ta có: $4(ab + bc + cd + da) = 4(a + c)(b + d) \leq (a + b + c + d)^2\,(*)$.
Xét tứ giác $ABCD$ có diện tích S, chu vi P và độ dài các cạnh $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$.
Kẻ $CE \perp AB\,(E \in AB)$, ta có $2S_{ABC} = AB \cdot CE \leq AB \cdot BC = ab$.
Tương tự $2S_{BCD} \leq bc$, $2S_{CDA} \leq cd$ và $2S_{DAB} \leq da$.
Do đó $4S = 2(S_{ABC} + S_{CDA} + S_{BCD} + S_{DAB}) \leq ab + cd + bc + da$.
Theo $(*)$ ta được $16S \leq P^2$.
Dấu "="có $\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ a + c = b + d \end{cases} \Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông.



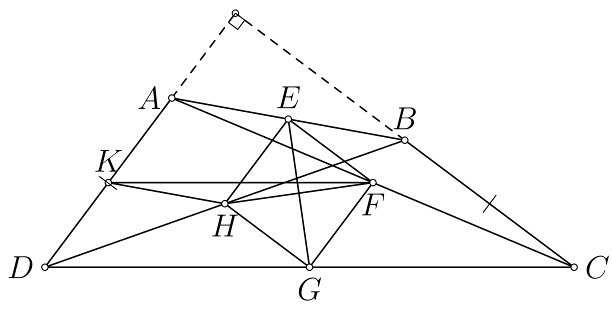
Áp dụng vào bài toán ta có:
a) Trong các tứ giác có cùng chu vi P không đổi thì hình vuông có diện tích lớn nhất là $\dfrac{P^2}{16}$.
b) Trong các tứ giác có diện tích S không đổi thì hình vuông có chu vi nhỏ nhất là $4\sqrt{S}$. □

BÀI 14. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$, $AD = BC$, $AB = b$, $CD = a$ $(a > b)$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, CD, DB. Tính diện tích nhỏ nhất của tứ giác $EFGH$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Do EH là đường trung bình của tam giác ABD nên $EH \parallel AD$ và $EH = \dfrac{AD}{2}$.
Tương tự với chú ý $AD = BC$ ta được:

$$\begin{cases} HE = EF = FG = GH = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{BC}{2} \\ EH \parallel AD \text{ và } EF \parallel BC \end{cases}.$$



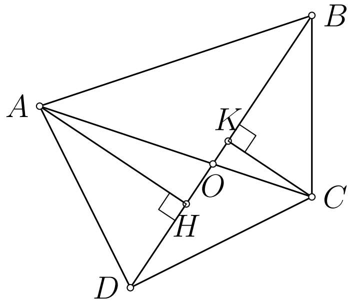
Do $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$ nên $AD \perp BC$, suy ra $EH \perp EF$.
Kết hợp với $HE = EF = FG = GH$ ta được $EFGH$ là hình vuông hay $S_{EFGH} = \dfrac{HF^2}{2}$.
Gọi K là trung điểm AD, ta có $KH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{b}{2}$ và $KF = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Khi đó $HF \geq |KF - KH| = \dfrac{a-b}{2}$ hay $S_{EFGH} \geq \dfrac{(a-b)^2}{8}$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi K, H, F thẳng hàng hay $ABCD$ là hình thang.
Vậy $\min S_{EFGH} = \dfrac{(a-b)^2}{8}$. □

BÀI 15. Trong các tứ giác có tổng hai đường chéo bằng s. Tứ giác nào có diện tích lớn nhất?

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét tứ giác $ABCD$ có $AC + BD = s$ không đổi.
Kẻ $AH \perp BD$, $CK \perp BD\,(H, K \in BD)$.
Ta có $2S_{ABCD} = 2(S_{ABD} + S_{CBD}) = BD(AH + CK) \leq BD(AO + CO) = BD \cdot AC \leq \dfrac{(AC+BD)^2}{4} = \dfrac{s^2}{4}$. Dấu bằng có $\Leftrightarrow \begin{cases} AC \perp BD \\ AC = BD. \end{cases}$
Vậy trong các tứ giác có tổng hai đường chéo bằng s thì tứ giác có hai đường chéo bằng và vuông góc với nhau là tứ giác có diện tích lớn nhất.



□

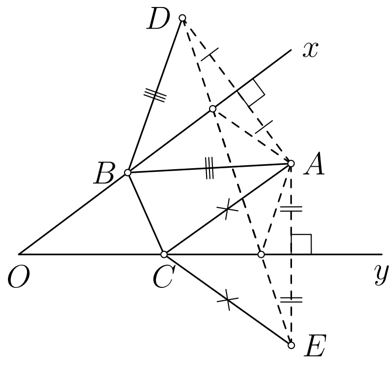
BÀI 16. Cho góc nhọn xOy và điểm A thuộc miền trong của góc. Dựng điểm B thuộc tia Ox, điểm C thuộc tia Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi D và E thứ tự là điểm đối xứng của A qua Ox và Oy.
Khi đó $AB = DB$ và $AC = EC$, do đó

$$P_{ABC} = AB + BC + CA = DB + BC + CE \geq DE.$$

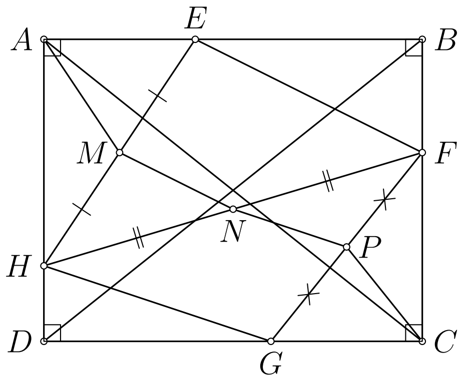
Dấu bằng có $\Leftrightarrow D, B, C, E$ thẳng hàng theo đúng thứ tự..
Do đó ta có cách dựng B, C như sau: Lấy hai điểm đối xứng với A qua Ox và Oy; đoạn thẳng nối hai điểm này cắt Ox tại B và Oy tại C.



□

BÀI 17. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Tìm tứ giác có bốn đỉnh thuộc bốn cạnh của hình chữ nhật sao cho chu vi tứ giác có giá trị nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**



Xét bốn điểm E, F, G, H theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA của hình chữ nhật $ABCD$.

Gọi M, N, P thứ tự là trung điểm EH, FH, FG.

Khi đó do hai tam giác AHE, CFG theo thứ tự vuông tại A và C nên $EH = 2MA$ và $FG = 2CP$.

Lại có theo tính chất đường trung bình trong hai tam giác EHF và GFH ta được $EF = 2MN$ và $HG = 2PN$.

Do đó $P_{EFGH} = 2(AM + MN + NP + PC) \geq 2AC$.

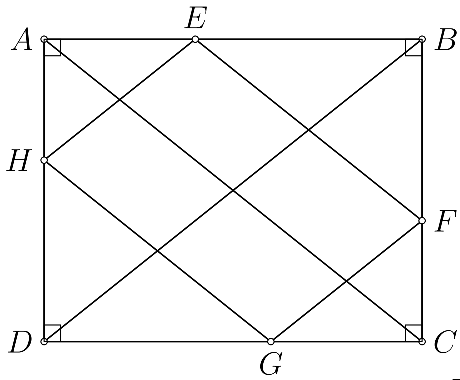
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A, M, N, P, C$ thẳng hàng theo thứ tự đó

$\Leftrightarrow \begin{cases} EF \parallel AC \parallel HG \\ HE \parallel BD \parallel FG \end{cases}$

hay $EFGH$ là hình bình hành có cạnh song song với đường chéo hình chữ nhật. □

BÀI 18. Cho điểm E nằm trên cạnh AB của hình chữ nhật $ABCD$. Dựng các điểm F, G, H theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CD, DA sao cho tứ giác $EFGH$ có chu vi nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**



Theo bài 352 ta chỉ ra rằng: Hình bình hành có các cạnh song song với đường chéo của hình chữ nhật là tứ giác có chu vi nhỏ nhất với các đỉnh thứ tự thuộc bốn cạnh của hình chữ nhật. Do đó ta có cách dựng như sau:

— Dựng đường thẳng qua E song song với AC cắt BC tại F.

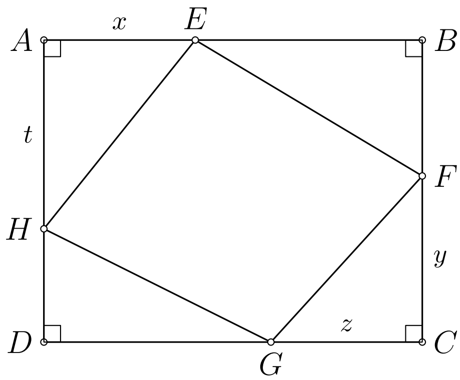
— Dựng đường thẳng qua F song song với BD cắt CD tại G.

— Dựng đường thẳng qua G song song với AC cắt DA tại H.

□

BÀI 19. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích S. Tìm diện tích nhỏ nhất của các tứ giác $EFGH$ có bốn đỉnh lần lượt thuộc bốn cạnh AB, BC, CD, DA của hình chữ nhật và $AE + CG \leq AB$, $AH + CF \geq AD$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Đặt $AE = x$, $CF = y$, $CG = z$, $AH = t$, $AB = a$ và $AD = b$.

Khi đó: $x, y, z, t, a, b > 0$ và $x + z \leq a$, $y + t \geq b$.

Ta có

$$\begin{aligned} 2S_{EFGH} &= 2(S_{ABCD} - S_{AEH} - S_{BEF} - S_{CFG} - S_{DGH}) \\ &= 2ab - xt - (a - x)(b - y) - yz - (a - z)(b - t) \\ &= -(xt + xy + yz + zt) + a(y + t) + b(z + x) \\ &= ab + (a - x - z)(y + t - b) \geq ab = S. \end{aligned}$$

Do đó $\min S_{EFGH} = \dfrac{S}{2}$, dấu bằng có $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + z = a \\ y + t = b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} EG \parallel AD \\ HF \parallel AB. \end{array}\right.$ □

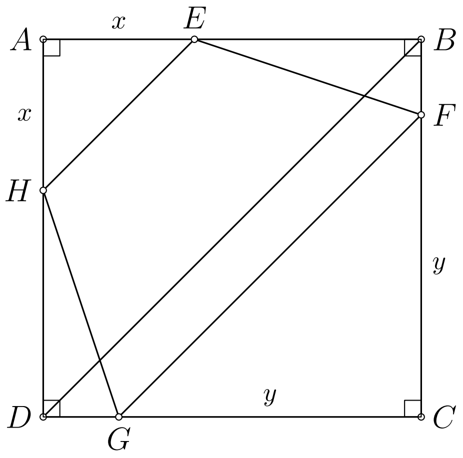
BÀI 20. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tìm diện tích lớn nhất của các hình thang có bốn đỉnh thuộc bốn cạnh của hình vuông và hai cạnh đáy song song với một đường chéo của hình vuông.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét hình thang $EFGH$ có $EH \parallel BD \parallel FG$, khi đó hai tam giác AEH và CFG thứ tự vuông cân tại A và C.
Đặt $AE = AH = x$ và $CF = CG = y$ $(0 < x, y < a)$. Ta có

$$\begin{aligned}
2S_{EFGH} &= 2(S_{ABCD} - S_{AEH} - S_{BEF} - S_{CFG} - S_{DGH})\\
&= 2a^2 - x^2 - (a-x)(a-y) - y^2 - (a-x)(a-y)\\
&= 2a(x+y) - (x+y)^2\\
&= a^2 - [a-(x+y)]^2 \le a^2.
\end{aligned}$$

Vậy $\max S_{EFGH} = \dfrac{a^2}{2}$, dấu "="có $\Leftrightarrow x + y = a \Leftrightarrow EG \parallel AD$.



□

BÀI 21. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 6 cm. Điểm E thuộc cạnh AB sao cho $AE = 2$ cm, điểm F thuộc cạnh BC sao cho $BF = 3$ cm. Dựng các điểm G, H theo thứ tự thuộc các cạnh CD, AD sao cho $EFGH$ là hình thang:

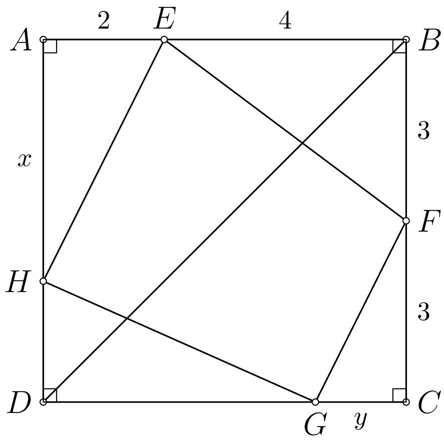
❶ có đáy EH, FG và có diện tích nhỏ nhất.
❷ có đáy EF, GH và có diện tích lớn nhất.

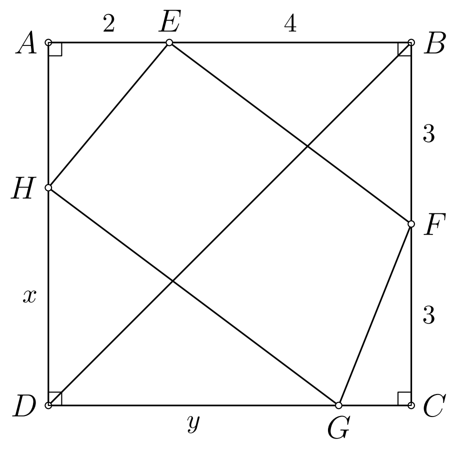
✍ **LỜI GIẢI.**

a) Do $EH \parallel FG$ nên $\widehat{AEH} = \widehat{CGF}$.
Suy ra $\triangle AEH \backsim \triangle CGF$, từ đó $AH \cdot CG = AE \cdot CF = 6$.
Đặt $AH = x$, $CG = y$ $(0 < x, y < 6)$, ta có $xy = 6$ và

$$\begin{aligned}
2S_{EFGH} &= 2(S_{ABCD} - S_{AEH} - S_{BEF} - S_{CFG} - S_{DGH})\\
&= 2\cdot 36 - 2x - 4\cdot 3 - 3y - (6-x)(6-y)\\
&= 18 + 4x + 3y \ge 18 + 2\sqrt{4x\cdot 3y} = 18 + 12\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Dấu "="có $\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6 \\ 4x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = 2\sqrt{2}. \end{cases}$





b) Do $EF \parallel HG$ nên $\widehat{BEF} = \widehat{DGH}$.

Suy ra $\triangle BEF \backsim \triangle DGH$, từ đó $\dfrac{DH}{3} = \dfrac{DG}{4}$.

Đặt $DH = x$, $DG = y$ $(0 < x, y < 6)$, ta có $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4}$ và

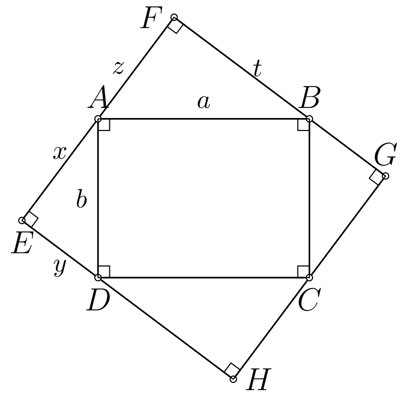
$$\begin{aligned}2S_{EFGH} &= 2(S_{ABCD} - S_{AEH} - S_{BEF} - S_{CFG} - S_{DGH})\\ &= 2\cdot 36 - 2(6-x) - 12 - 3(6-y) - xy\\ &= 2x + 3y - xy + 30\\ &= -\frac{4}{3}x^2 + 6x + 30\\ &= -\frac{4}{3}\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{147}{4} \le \frac{147}{4}.\end{aligned}$$

Dấu "="có $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4}\\ x = \dfrac{9}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{9}{4}\\ y = 3.\end{cases}$

□

BÀI 22. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có các kích thước là a và b. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $EFGH$ ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ (mỗi đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ nằm trên một cạnh của hình chữ nhật $EFGH$).

✍ **LỜI GIẢI.**



Dễ thấy $\triangle FAB = \triangle HCD$ và $\triangle GCB = \triangle EAD$.

Gọi độ dài các đoạn như hình vẽ. Khi đó

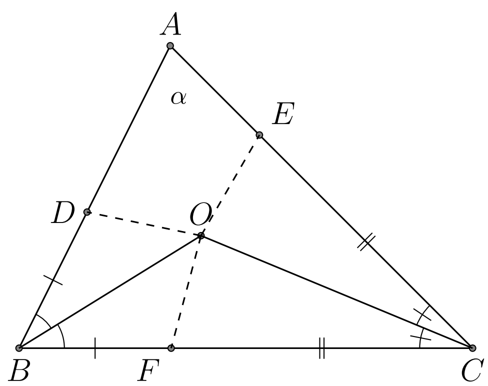
$$\begin{aligned}S_{EFGH} &= S_{ABCD} + 2S_{EAD} + 2S_{FAB}\\ &= ab + xy + zt\\ &\le ab + \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{z^2+t^2}{2}\\ &= ab + \frac{a^2+b^2}{2}.\end{aligned}$$

(Do theo định lí Py-ta-go ta có $x^2 + y^2 = b^2$ và $z^2 + t^2 = a^2$)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y$ và $z = t \Leftrightarrow EFGH$ là hình vuông. □

BÀI 23. Cho tam giác ABC. Xác định vị trí các điểm D, E trên các cạnh AB, AC sao cho $BD + CE = BC$ và DE có độ dài nhỏ nhất.

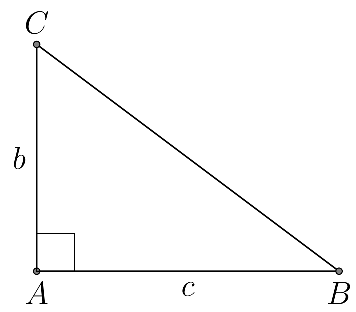
✍ **LỜI GIẢI.**



Trên BC lấy F sao cho $BD = BF$, mà $BD + CE = BC$ suy ra $CF = CE$.
Gọi O là giao điểm của tia phân giác góc B và góc C.
Ta có $\triangle OCE = \triangle OCF$ (c.g.c); $\triangle OBD = \triangle OBF$ (c.g.c) suy ra $OE = OF = OD$ hay $\triangle EOD$ cân tại O.
Đặt $\widehat{A} = \alpha \Rightarrow \widehat{BOC} = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$ nên $\widehat{DOE} = 360^\circ - 2\left(90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right) = 180^\circ - \alpha$.
Xét $\triangle DOE$ có $\widehat{DOE}$ là góc không đổi, $DO = EO$ nên DE nhỏ nhất khi và chỉ khi OD nhỏ nhất $\Leftrightarrow OF$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OF \perp BC \Rightarrow OD \perp AB, OE \perp AC$.
Vậy D, E là hình chiếu của O trên AB, AC. □

BÀI 24. Trong các tam giác vuông có tổng hai cạnh góc vuông không đổi, tam giác nào có chu vi nhỏ nhất?

✍ **LỜI GIẢI.**



Để thuận tiện, ta gọi tam giác vuông là ABC, gọi b, c là cạnh góc vuông của tam giác vuông ABC, ta có $b + c = 2m$ không đổi $\Rightarrow$ chu vi tam giác vuông ABC nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ cạnh huyền BC nhỏ nhất $\Leftrightarrow b^2 + c^2$ nhỏ nhất.
Đặt $b = m + x$ thì $c = m - x$. Khi đó

$$b^2 + c^2 = (m + x)^2 + (m - x)^2 = 2m^2 + 2x^2 \geq 2m^2.$$

Vậy $b^2 + c^2$ nhỏ nhất bằng $2m^2$ khi và chỉ khi $b = c$ hay tam giác vuông cân có chu vi nhỏ nhất.

□

BÀI 25. Chứng minh rằng trong các tam giác vuông có cạnh huyền không đổi, tam giác vuông cân có chu vi lớn nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

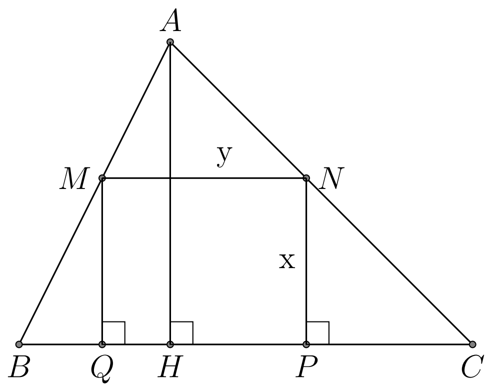
Vì cạnh huyền của tam giác vuông có độ dài không đổi nên chu vi tam giác lớn nhất khi tổng độ dài hai cạnh góc vuông lớn nhất.
Gọi độ dài cạnh huyền là a, gọi b, c là độ dài hai cạnh góc vuông. Ta có

$$(b + c)^2 \leq 2(b^2 + c^2) \Rightarrow b + c \leq a\sqrt{2}.$$

Giá trị lớn nhất của $b + c = a\sqrt{2}$ xảy ra khi $b = c$.
Vậy chu vi tam giác vuông lớn nhất bằng $\left(\sqrt{2} + 1\right) a$ khi và chỉ khi tam giác đó vuông cân. □

BÀI 26. Cho $\triangle ABC$ có các góc B và C nhọn, $BC = a$, đường cao $AH = h$. Xét hình chữ nhật $MNPQ$ nội tiếp tam giác có M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, P và Q thuộc cạnh BC. Hình chữ nhật $MNPQ$ ở vị trí nào thì diện tích của nó có giá trị lớn nhất?

✍ **LỜI GIẢI.**



Đặt $NP = x, MN = y$. Ta có

$$\begin{aligned} & S_{AMN} + S_{BMNC} = S_{ABC} \\ \Rightarrow \quad & y(h-x) + x(a+y) = ah \\ \Rightarrow \quad & hy + ax = ah \Rightarrow y = \frac{a}{h}(h-x). \end{aligned}$$

Gọi diện tích tứ giác $MNPQ$ là S. Ta có $S = xy = x \cdot \dfrac{a}{h} \cdot (h-x) \le \dfrac{a}{4h}(x+h-x)^2 = \dfrac{a \cdot h}{4}$.
Vậy S lớn nhất bằng $\dfrac{a \cdot h}{4}$ khi $x = \dfrac{h}{2}$. Khi đó MN là đường trung bình của $\triangle ABC$. $\square$

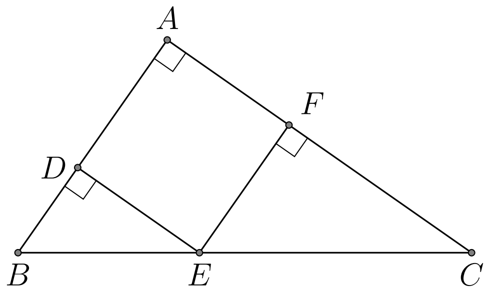
BÀI 27. Từ một tấm kim loại hình tam giác vuông, cắt ra một hình vuông theo hai cách:

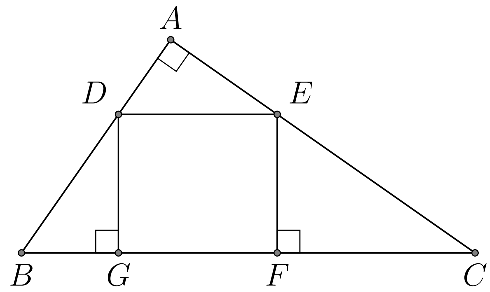
Cách 1: Một góc của hình vuông trùng với góc vuông của tam giác, đỉnh đối diện thuộc cạnh huyền của tam giác.

Cách 2: Một cạnh của hình vuông nằm trên cạnh huyền của tam giác, hai đỉnh kia thuộc hai cạnh góc vuông của tam giác.

Cách cắt nào cho hình vuông có diện tích lớn hơn?

✍ **LỜI GIẢI.**

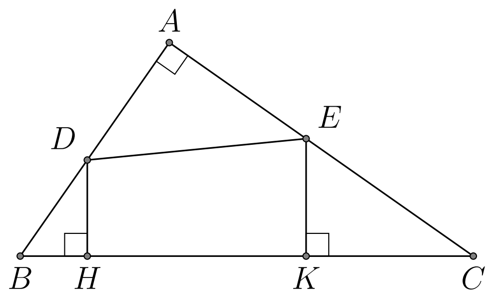




Gọi b, c là độ dài cạnh góc vuông, a là độ dài cạnh huyền.
Trong cách cắt thứ nhất ta có cạnh hình vuông bằng $\dfrac{bc}{b+c}$ (ví dụ 31a).
Trong cách cắt thứ hai, cạnh hình vuông bằng $\dfrac{ah}{a+h}$ (ví dụ 41).
Vì $b \cdot c = a \cdot h$ ta chứng minh được $\dfrac{bc}{b+c} > \dfrac{ah}{a+h}$. □

BÀI 28. Cho tam giác ABC vuông cân có cạnh huyền $BC = a$. Các điểm D, E theo thứ tự chuyển động trên các cạnh AB, AC. Gọi H và K theo thứ tự là hình chiếu của D, E trên BC. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác $DEKH$.

✍ **LỜI GIẢI.**



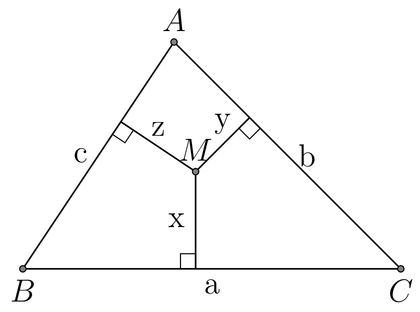
Ta có

$$S_{DHKE} = (DH + EK) \cdot \frac{HK}{2} = (BH + KC) \cdot \frac{HK}{2}.$$

Vì $(BH + KC) + HK = a$ không đổi nên tích $(BH + KC)HK$ lớn nhất khi và chỉ khi $BH + KC = KH = \dfrac{a}{2}$. Khi đó diện tích lớn nhất $DEKH$ lớn nhất bằng $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2}$ khi và chỉ khi $HK = \dfrac{a}{2}$.
Có vô số tứ giác thỏa mãn tính chất trên. □

BÀI 29. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thuộc miền trong hoặc nằm trên cạnh của tam giác sao cho tổng các khoảng cách từ M đến ba cạnh của tam giác có giá trị nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**



Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, khoảng cách từ M đến các cạnh theo thứ tự là x, y, z đường cao tương ứng với BC là h.
Ta có

$$\begin{aligned} & S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = S_{ABC} \\ \Rightarrow \quad & \frac{a}{2} \cdot x + \frac{b}{2} \cdot y + \frac{c}{2} \cdot z = \frac{a}{2} \cdot h \\ \Rightarrow \quad & ax + by + cz = ah. \end{aligned}$$

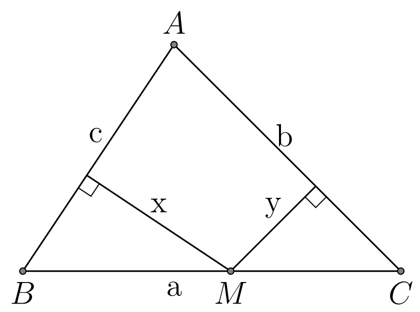
Giả sử $a \geq b \geq c$ thì

$$\begin{aligned} & ax + ay + az \geq ax + by + cz = ah \\ \Rightarrow \quad & x + y + z \geq h. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $ay + az = by + cz \Rightarrow y(a - b) + z(a - c) = 0$
$\Leftrightarrow y = z = 0$ hoặc $a = b, z = 0$ hoặc $a = b = c$.
Nếu $y = z = 0$ thì M trùng A, nếu $a = b, z = 0$ thì $\triangle ABC$ cân tại C (góc C là góc nhỏ nhất) và M thuộc đáy AB; nếu $a = b = c$ thì $\triangle ABC$ đều, M bất kì.
Vậy tổng các khoảng cách từ M đến ba cạnh của tam giác có giá trị nhỏ nhất bằng đường cao ứng với cạnh lớn nhất. nếu tam giác đều thì M là điểm bất kfi nằm bên trong hoặc nằm trên cạnh của tam giác. nếu tam giác cân có cạnh bên lớn hơn cạnh đáy thì M thuộc cạnh đáy.
Các trường còn lại, M trùng với đỉnh của góc lớn nhất trong tam giác. □

BÀI 30. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thuộc cạnh BC sao cho tổng các khoảng cách từ M đến AB và đến AC có giá trị nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**



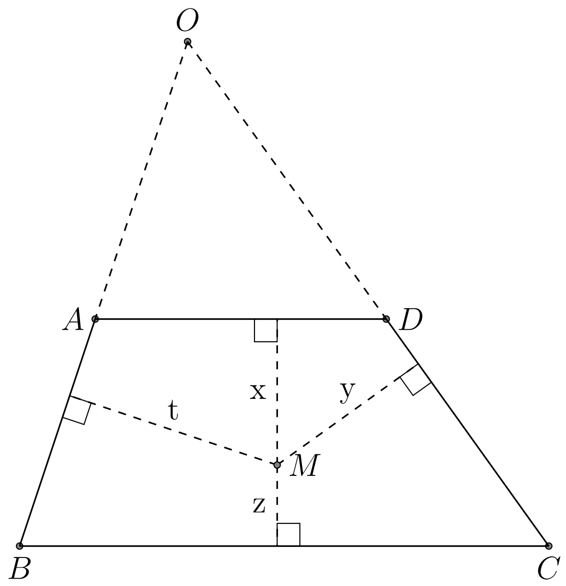
Đặt $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$, gọi khoảng cách từ M đến cạnh $AB = x$, khoảng các từ M đến cạnh AC là y, gọi h_a; h_b; h_c lần lượt là độ dài đường cao tương ứng với các cạnh BC; AC; AB.

Nếu a lớn nhất, ta có $S_{MAB} + S_{MAC} = S_{ABC} \Rightarrow cx + by = ah_a \Rightarrow ax + ay \geq cx + by = ah_a \Rightarrow x + y \geq h_a$.

Chứng minh tương tự nếu b (hoặc c) lớn nhất suy ra $x + y \geq h_b$ (hoặc $x + y \geq h_c$).
Vậy tổng khoảng cách từ M đến AB và AC lớn nhất bằng độ dài đường cao tương ướng với cạnh lớn nhất.
Vậy nếu $b = c$ thì điểm M bất kì trên cạnh đáy BC. Nếu $b \neq c$ thì M trùng với đỉnh đối diện với cạnh lớn nhất trong hai cạnh AB và AC. □

BÀI 31. Cho hình thang $ABCD$. Tìm điểm M nằm trong hoặc trên cạnh của hình thang sao cho tổng khoảng cách từ M đến các cạnh của hình thang có giá trị nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

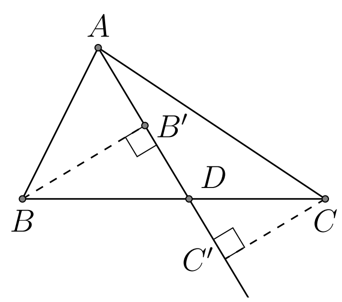


Đặt khoảng cách từ M đến AD; DC; CB; AB lần lượt là x, y, z, t.
Vì $y + z$ không đổi suy ra khoảng cách từ M đến các cạnh của hình thang nhỏ nhất khi $y + z$ nhỏ nhất.
Gọi O là giao điểm của hai cạnh bên AB và CD. Khi đó bài toán quay trở về tìm vị trí của điểm M nằm rên cạnh AD sao cho $t + y$ nhỏ nhất.
Khi đó có hai khả năng.
Nếu $ABCD$ là hình thang cân thì M là điểm bất kì nằm trên đáy nhỏ.
Nếu $ABCD$ không là hình thang cân thì M trùng với đỉnh cảu góc lớn hơn trong hai góc kề đáy nhỏ.
□

BÀI 32. Cho tam giác ABC. Qua A dựng đường thẳng d sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến d là nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

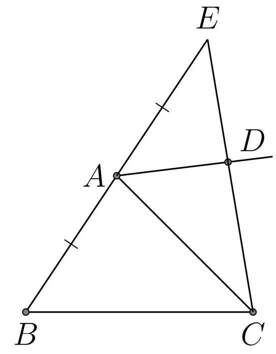
Trường hợp 1: Nếu d cắt BC. Khi đó đường thẳng d phải dựng là đường thẳng chứa cạnh lớn nhất trong hai cạnh AB và AC.



Trường hợp 2: Nếu d không cắt BC.

Ta lấy E đối xứng với B qua A, khi đó đường thẳng d cắt đoạn CE.

Trong cả hai trường hợp, đường thẳng d phải dựng chứa cạnh lớn nhất trong hai cạnh AC, AB.



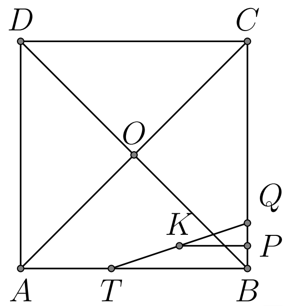
□

BÀI 33. Cho hình vuông $ABCD$ và điểm K nằm bên trong không trùng với tâm hình vuông. Dựng qua K một đường thẳng sao cho nó cắt hình vuông thành hai phần có hiệu các diện tích lớn nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

Không mất tính tổng quát ta giả sử K nằm trong tam giác AOB. Qua K dựng đường thẳng song song với AB cắt BC tại P, Gọi Q là điểm đối xứng của B qua P, KQ cắt AB tại T khi đó ta chứng minh được diện tích tam giác BQT nhỏ nhất.

Vậy đường thẳng TQ chia hình vuông thành hai phần có hiệu diện tích lớn nhất.



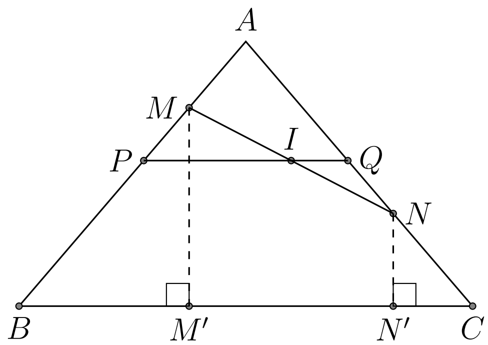
□

BÀI 34. Cho tam giác ABC cân tại A. Các điểm M, N theo thứ tự chuyển động trên cách cạnh AB, CA sao cho $AM = CN$. Xác định vị trí M, N để

❶ MN có giá trị nhỏ nhất.

❷ Diện tích tam giác AMN có giá trị lớn nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**



a) Vẽ MM' và NN' vuông góc với BC. Ta có $MN \geq M'N' = \dfrac{BC}{2}$. Do đó MN nhỏ nhất bằng $\dfrac{BC}{2}$ khhi và chỉ khi $MN \parallel M'N' \Leftrightarrow M, N$ là trung điểm của AB, AC.

b) Gọi I là trung điểm của MN. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AB, AC. Ta luôn có $S_{AMN} \leq S_{APQ}$ (tương tự ví dụ 59) nên $S_{AMN} \leq \dfrac{1}{4} S_{ABC}$. Dấu bằng xảy ra khi MN là đường trung bình của PQ.

□

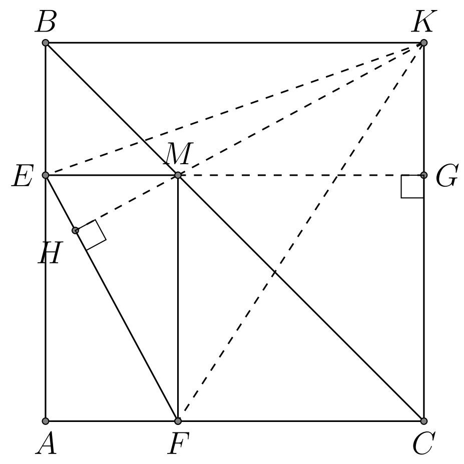
BÀI 35. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm M thuộc cạnh BC, gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB và AC. Chứng minh rằng khi M chuyển động trên cạnh BC thì:

❶ Chu vi tứ giác $MEAF$ không đổi.

❷ Đường thẳng đi qua M và vuông góc với EF luôn luôn đi qua một điểm K cố định.

❸ Tam giác KEF có diện tích nhỏ nhất khi M là trung điểm của BC.

✍ **LỜI GIẢI.**



a) Vì $\triangle ABC$ vuông cân suy ra $\widehat{ABC} = 45^\circ \Rightarrow \triangle EBM$ vuông cân $\Rightarrow EB = EM$.
Chứng minh tương tự ta được $\triangle EFC$ vuông cân suy ra $MF = FC$.
Chu vi hình chữ nhật $MEAF$ bằng $2(AE + AF) = 2AB$.

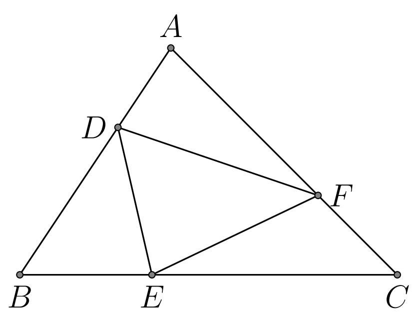
b) Gọi K là giao điểm của HM và đường thẳng vuông góc với AC tại C suy ra $CK = CA$ suy ra K là điểm cố định thỏa mãn đề bài.
Thật vậy, kéo dài tia EM cắt CK tại G, ta chứng minh được $CG = EA$ (do tứ giác $EGCA$ là hình chữ nhật). Tam giác KGM bằng tam giác EMF suy ra $KG = EM = EB$. Vậy $Ck = EA + EB = AB = AC$.

c) Ta có $S_{KEM} = S_{BEM}$, $S_{KMF} = S_{CMF} \Rightarrow S_{KEF} = S_{BEFC}$. Do đó S_{KEF} nhỏ nhất khi và chỉ khi S_{KEF} lớn nhất khi $AE.AF$ lớn nhất $\Leftrightarrow AB = AF$ (chú ý $AE + AF$ không đổi). Khi đó M là trung điểm của BC.

□

BÀI 36. Cho tam giác ABC có diện tích S. Các điểm D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CA sao cho $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{CF}{CA} = k$. Với giá trị nào của k thì diện tích tam giác DEF có giá trị nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**



Dùng S_{BDC} làm trung gian, ta có $S_{BDE} = k \cdot S_{BDC}$, $S_{BDC} = (1-k)S$ nên

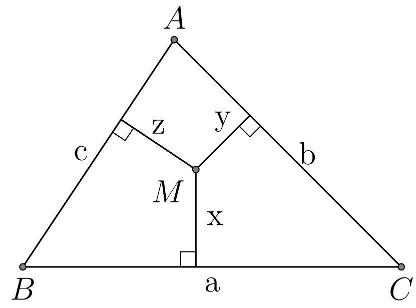
$$S_{BDE} = k(k-1)S.$$

Tương tự đối với S_{ADF}, S_{CEF}.
Đặt $S_1 = S_{\triangle ADE}$; $S_2 = S_{\triangle BDE}$; $S_3 = S_{\triangle CEF}$.
suy ra $S_1 + S_2 + S_3 = 3k(1-k)S$.

Ta thấy S_{DEF} nhỏ nhất khi và chỉ khi $S_1 + S_2 + S_3$ lớn nhất khi $k(1-k)$. Do k và $1-k$ có tổng không đổi nên tích $k(1-k)$ lớn nhất khi và chỉ khi $k = 1-k$, tức là $k = \dfrac{1}{2}$. □

BÀI 37. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Tìm điểm M nằm trong tam giác sao cho $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ có giá trị nhỏ nhất, trong đó x, y, x theo thứ tự là khoảng cách từ điểm M đến các cạnh BC, AC, AB.

✍ **LỜI GIẢI.**



Ta nghĩ đến biểu thức $ax + by + cz$ có giá trị không đổi bằng $2S$. Ta chứng minh bất đẳng thức

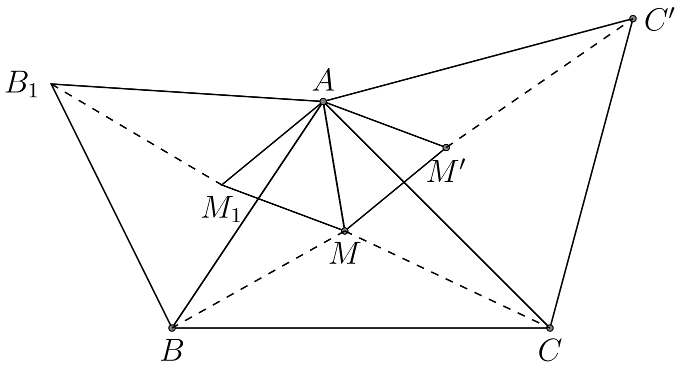
$$(ax + by + cz)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \geq (a + b + c)^2$$

suy ra $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{(a + b + c)^2}{2S}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$, tức là M là giao điểm các đường phân giác của tam giác.

□

BÀI 38. Cho tam giác ABC có các góc nhỏ hơn $120°$. Tìm điểm M nằm bên trong tam giác sao cho tổng $MA + MB + MC$ có giá trị nhỏ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**



Ở phía ngoài tam giác ABC vẽ các tam giác đều ACC' và ABB_1. Vẽ các tam giác đều AMM' và AMM_1. Ta có $\triangle AM'C' = \triangle AMC$ (c-g-c). Khi đó $MA = MM'$, $MC = M'C' \Rightarrow BM + MA + MC = BM + MM' + M'C' \geq BC$. Vì thế M thuộc đoạn BC'.

Lập luận tương tự như trên, M phải thuộc đoạn thẳng CB_1. Như vậy M là giao điểm của hai đoạn thẳng BC' và CB_1. Chú ý rằng

$$\widehat{BAC} + \widehat{CAC'} < 120° + 60° = 180°,$$

$$\widehat{BCA} + \widehat{ACC'} < 120° + 60° = 180°$$

nên đoạn thẳng BC' cắt cạnh AC tại một điểm nằm giữa A và C. Tương tự, đoạn thẳng CB_1 cắt cạnh AB tại một điểm nằm giữa A và B. Do đó tồn tại giao điểm M của đoạn thẳng BC', CB_1 và điểm M nằm bên trong tam giác ABC. □

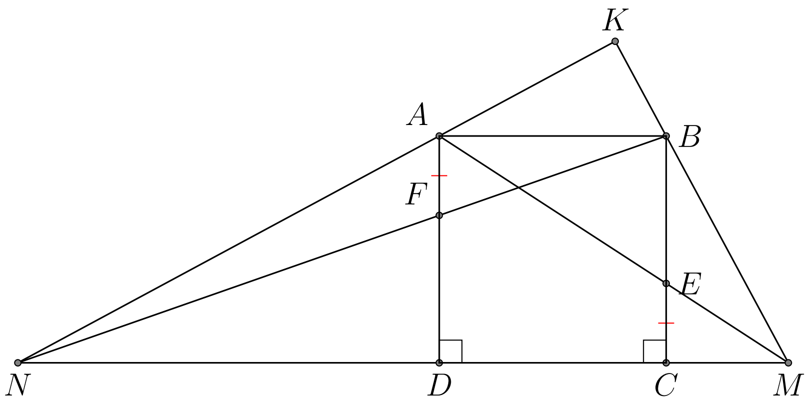
BÀI 39. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, điểm E thuộc cạnh BC, điểm F thuộc cạnh AD sao cho $CE = AF$. Các đường thẳng AE, BF cắt đường thẳng CD theo thứ tự ở M và N.

❶ Chứng minh $CM \cdot DN = a^2$.

❷ Gọi K là giao điểm của NA và MB. Chứng minh $\widehat{MKN} = 90°$.

❸ Các điểm E và F có vị trí như thế nào thì MN có độ dài nhỏ nhất?

✍ **LỜI GIẢI.**



a) Vì $AB \parallel MN \Rightarrow \dfrac{CM}{BA} = \dfrac{CE}{BE} = \dfrac{AF}{FD} = \dfrac{BA}{DN} \Rightarrow CM.DN = AB^2 = a^2$.

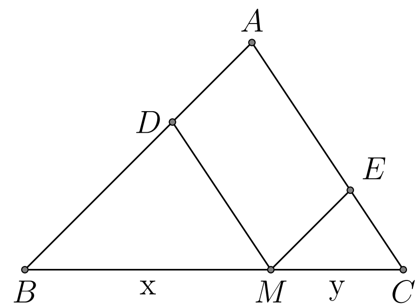
b) Theo câu a) ta có $\dfrac{CM}{AB} = \dfrac{AB}{DN}$ nên $\dfrac{CM}{CB} = \dfrac{AD}{DN}$.
Do đó $\triangle CMB$ và $\triangle DAN$ đồng dạng (c.g.c) nên $\widehat{CMB} = \widehat{DAN}$. Suy ra $\widehat{CMB} + \widehat{DNA} = 90°$. Vậy $\widehat{MKN} = 90°$.

c) MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $CM + DN$ nhỏ nhất. Các độ dài Cm, DN có tích không đổi (câu a)) nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi $CM = DN$.

□

BÀI 40. Cho tam giác ABC. Qua một điểm bất kì thuộc cạnh BC, vẽ các đường thẳng song song với hai cạnh kia tạo với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí của điểm M để hình bình hành có diện tích lớn nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**



Kí hiệu như hình trên. Đặt $S_{ABC} = S$, $S_{DBM} = S_1$, $S_{EMC} = S_2$, $S_{ADME} = S_3$. Đặt $BM = x$, $MC = y$, $BC = a$, ta có $x + y = a$.
Do $S_3 = S - (S_1 + S_2)$ nên $\dfrac{S_3}{S} = 1 - \dfrac{S_1 + S_2}{S}$. Các tam giác DBM, EMC, ABC đồng dạng nên

$$\frac{S_1}{S} = \frac{x^2}{a^2};\ \frac{S_2}{S} = \frac{y^2}{a^2}.$$

Do đó

$$\frac{S_3}{S} = 1 - \frac{x^2+y^2}{a^2} = \frac{a^2-(x^2+y^2)}{a^2} = \frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{a^2} = \frac{2xy}{a^2}.$$

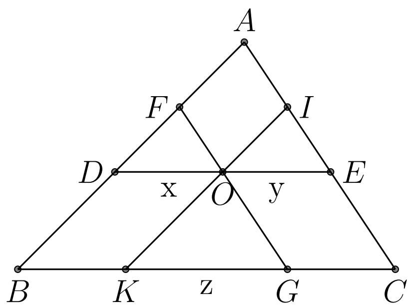
S_3 lớn nhất khi xy lớn nhất. Các số xy có tổng bằng a không đổi nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ chi $x = y$. Khi đó M là trung điểm của cạnh BC, và diện tích hình bình hành $ADME$ bằng nửa diện tích của tam giác ABC. □

BÀI 41. Cho tam giác ABC. Qua điểm O nằm bên trong tam giác, vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác, chia tam giác thành ba hình bình hành và ba tam giác nhỏ.

❶ Biết diện tích tam giác ABC bằng 81 cm^2, hai trong ba tam giác nhỏ có diện tích bằng 4 cm^2 và 16 cm^2. Tính diện tích tam giác còn lại.

❷ Chứng minh rằng tổng diện tích của ba tam giác nhỏ nhỏ lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{3}$ diện tích tam giác $ABBC$. Điểm O ở vị trí nào thì xảy ra dấu bằng?

✍ **LỜI GIẢI.**



a) Đặt $BC = a$; đặt $x = DO, y = OE, z = KG$; $S_1 = S_{\triangle DOF}$; $S_2 = S_{\triangle OIE}$; $S_3 = S_{\triangle OKG}$, S là diện tích của tam giác ABC. Các tam giác nhỏ đồng dạng với tam giác ABC nên:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{S_1}{S} = \frac{4}{81} = \left(\frac{2}{9}\right)^2 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{2}{9}.$$

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 = \frac{S_2}{S} = \frac{16}{81} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 \Rightarrow \frac{y}{a} = \frac{4}{9}.$$

Chú ý rằng $x + y + z = a$ nên $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ suy ra $\frac{z}{a} = \frac{1}{3}$.

Do đó

$$\frac{S_3}{S} = \left(\frac{z}{a}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S_3 = 9 \text{ cm}^2.$$

b) Ta có

$$\frac{S_1+S_2+S_3}{S} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}. \qquad (1)$$

Vì $x + y + z = a$ suy ra $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = a^2$.

Mặt khác $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ nên

$$(x^2 + y^2 + z^2) \geq a^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{1}{3} S_{ABC}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $OD = OE, OF = OG$, $OI = OK \Leftrightarrow O$ là trọng tâm của tam giác ABC.

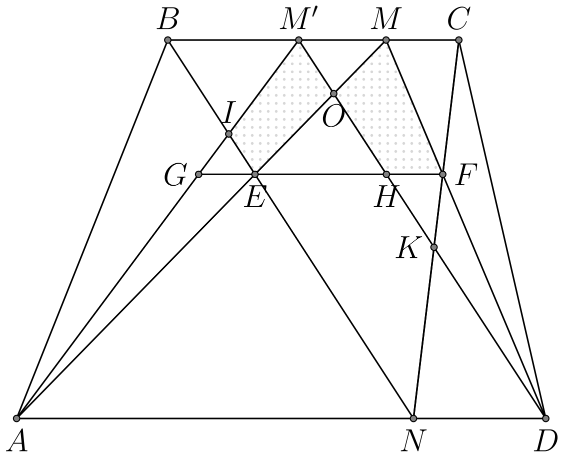
□

BÀI 42.

❶ Cho hình thang $ABCD$ và một điểm N thuộc cạnh đáy AD. Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc cạnh đáy BC sao cho $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{NA}{ND}$ thì phần chung của hai tam giác AMD, BNC có diện tích lớn nhất.

❷ Cho hình thang $ABCD$. Dựng các điểm M, N theo thứ tự thuộc cạnh đáy BC, AD sao cho phần chung của hai tam giác AMD, BNC có diện tích lớn nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Gọi E là giao điểm của AM và BN, F là giao điểm của DM và CN. Trước hết ta thấy $EF \parallel AD$. Thật vậy

$$\frac{ME}{EA} = \frac{BM}{AN} = \frac{MC}{ND} = \frac{MF}{FD} \Rightarrow EF \parallel AD.$$

Gọi M' là điểm bất kì khác M thuộc đáy BC, giả sử M' nằm giữa B và M. Gọi I là giao điểm của AM' và BN, gọi K là giao điểm của DM' và CN. Với điều giả sử trên, I nằm giữa B và E, K nằm giữa N và F. Ta sẽ chứng minh rằng $S_{MENF} > S_{M'INK}$. Muốn vậy chỉ cần chứng minh $S_{MOKF} > S_{M'OEI}$ (O là giao điểm của AM và DM').

Gọi giao điểm của EF với $M'A$ và $M'D$ là G và H. Ta sẽ chứng minh $GE = HF$. Thật vậy, do $EF \parallel BC \parallel AD$ nên

$$\frac{GE}{M'M} = \frac{AE}{AM} = \frac{DF}{DM} = \frac{HF}{M'M} \Rightarrow GE = HF.$$

Do đó $S_{AGE} = S_{DHF}$ suy ra $S_{MM'GE} = S_{MM'HF}$ (vì $SAMM' = S_{DMM'}$) $\Rightarrow S_{M'OEG} = S_{MOHF}$. Ta có $S_{MOKF} > S_{MOHF} = S_{M'OEG} > S_{M'OEI}$. Suy ra điều phải chứng minh.

❷