BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

10 (244)
1997
NĂM THỨ 34

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

- SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ NGHIỆM NGUYÊN CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2
- CUỘC THI OLEMPIC TOÁN CHÂU Á - THÁI BÌNH DƯƠNG
- ỨNG DỤNG TÍNH CHẤT TÂM TỈ CỰ
- BÀN VỀ MỘT SỰ MỞ RỘNG

Học sinh giỏi cấp Thành phố và thầy cô trường Nguyễn Du, Gò Vấp TPHCM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội ĐT : 8.220073
231 NGuyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT : 8.356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
LÊ THỐNG NHẤT
Trình bày : HOÀNG LÊ BÁCH

SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ NGHIỆM NGUYÊN CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

NGUYỄN NGỌC KHOA
(Quảng Ngãi)

Nhắc lại các định lí.

1) **Định lí 1 :** *Phương trình $x^2 + bx + c = 0$ ($c \neq 0$, $b, c \in Z$) có nghiệm nguyên x_o thì $c \vdots x_o$*

2) **Định lí 2 :** *Phương trình $x^2 + bx + c = 0$ có nghiệm nguyên khi và chỉ khi $\Delta = b^2 - 4c$ là số chính phương.* ($b, c \in \mathbb{Z}$)

Áp dụng hai định lí trên ta giải một số phương trình nguyên dạng $AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY + F = 0$.

Bài toán 1 : *Tìm $X \in \mathbb{N}$ sao cho $X^2 - 8$ là số chính phương.*

Giải : $X^2 - 8$ là số chính phương khi và chỉ khi phương trình $Z^2 + XZ + 2 = 0$ (1) có nghiệm nguyên

Theo định lí (1), nghiệm nguyên của (1) chỉ có thể là ± 1, ± 2.

Ta có $(\pm 1)^2 \pm X + 2 = 0 \Rightarrow X = \pm 3$

$(\pm 2)^2 \pm 2X + 2 = 0 \Rightarrow X = \pm 3$

Vậy $X = \pm 3$.

Bài toán 2 : *Giải phương trình nguyên $X^2 - Y^2 + 6 = 0$ (1)*

Giải : (1) $\Leftrightarrow X^2 + 6 = Y^2 \Leftrightarrow$ phương trình $Z^2 + 2XZ - 6 = 0$ (2) có nghiệm nguyên.

Nghiệm nguyên của (1) chỉ có thể là : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Ta có :

$$\left.\begin{array}{ll} (\pm 1)^2 \pm 2X - 6 = 0 & \text{(loại) } (*) \\ (\pm 3)^2 \pm 4X - 6 = 0 & \text{(loại)} \\ (\pm 3)^2 \pm 6X - 6 = 0 & \text{(loại)} \\ (\pm 6)^2 \pm 12X - 6 = 0 & \text{(loại) } (**) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Vậy phương trình ( ) không có nghiệm nguyên suy ra (1) không có nghiệm nguyên

Dễ thấy rằng (*) và (**) là tương đương nên ta lược bớt một phương trình .

Bài toán 3. *Giải phương trình nguyên : $X^2 + 3Y^2 + 4YX + 2X + 4Y - 9 = 0$ (1)*

Giải : (1) $\Leftrightarrow X^2 + 2(2Y + 1)X + 3D^2 + 4Y - 9 = 0$

(1) Có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \Delta' = (2Y + 1)^2 - (3Y^2 + 4Y - 9)$

$= 4Y^2 + 4Y + 1 - 3Y^2 - 4Y + 9$ là số chính phương

$= Y^2 + 10$

$\Leftrightarrow$ phương trình $Z^2 + 2YZ - 10 = 0$ (2) có nghiệm nguyên. Nghiệm nguyên của (2) chỉ có thể là : $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

Ta có : $1 \pm 2Y - 10 = 0$ (loại)

$4 \pm 4Y - 10 = 0$ (loại)

$25 \pm 10Y - 10 = 0$ (loại).

Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

Bài toán 4 : *Giải phương trình nguyên $X^2 - 2(3Y + 1)X + 8Y^2 + 6Y + 6 = 0$ (1)*

Giải : (1) Có nghiệm nguyên khi và chỉ khi $\Delta = (3Y + 1)^2 - 8Y^2 - 5Y - 6$

$= Y^2 - 5$ (*) là số chính phương

$\Leftrightarrow$ phương trình $Z^2 + 2YZ + 5 = 0$ (2) có nghiệm nguyên. Nghiệm nguyên của (2) chỉ có thể là $\pm 1, \pm 5$

Ta có $(\pm 1)^2 \pm 2Y + 5 = 0 \Leftrightarrow Y = \pm 3$

thế $Y = \pm 3$ vào (*) ta có $\Delta' = 2$

Giải (1) với $Y = \pm 3$ ta có

$$\left[\begin{array}{ll} X_1 = 10 + 2 = 12 & \\ X_2 = 10 - 2 = 8 & \text{(ứng với } Y = 3) \\ X_3 = -8 + 2 = -6 & \\ X_4 = -8 - 2 = -10 & \text{(ứng với } Y = -3) \end{array}\right.$$

Nghiệm nguyên của (1) viết theo thứ tự (X, Y) là $(12, 3)$, $(8, 3)$, $(-6, -3)$, $(-10, -3)$.

Để định hướng về mặt phương pháp. Vấn đề đặt ra là : với điều kiện nào, phương trình nguyên $AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY + F = 0$ (1)

Giải được bằng phương pháp trên ($A \neq 0$)

Ta có : $AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY + F = 0$

$\Leftrightarrow AX^2 + (CY + D)X + BY^2 + EY + F = 0$

(1) có nghiệm nguyên khi $\Delta = (CY + D)^2 - 4A(BY^2 + EY + F)$

$= (C^2 - 4AB)Y^2 + 2(CD - 2AE)Y + D^2 - 4AF$ là số chính phương.

Vậy (1) giải được bằng phương pháp Áp dụng định lí nghiệm nguyên của phương trình bậc hai khi $C^2 - 4AB$ là số chính phương và $(CD - 2AE) \vdots C^2 - 4AB$.

Ví dụ : *Giải phương trình nguyên $3X^2 + Y^2 + 4XY + 4X + 2Y + 5 = 0$ (1)*

Giải. Ta thấy

$C^2 - 4AB = 16 - 4.3.1 = 2^2$

$CD - 2AE = 4.4 - 2.3.2 = 4 \vdots C^2 - 4AB$

Ta có (1) $\Leftrightarrow 3X^2 + (4Y + 4)X + Y^2 + 2Y + 5 = 0$

$\Leftrightarrow 3X^2 + 2(2Y + 2)X + Y^2 + 2Y + 5 = 0$ (*)

(1) có nghiệm nguyên khi

$\Delta' = (2Y + 2)^2 - 3(Y^2 + 2Y + 5) = 4Y^2 + 8YD + 4 - 3Y^2 - 6Y - 15$

$= Y^2 + 2Y - 11 = (Y + 2)^2 - 12$ là số chính phương $\Leftrightarrow$ phương trình $Z^2 + (Y + 1)Z + 3 = 0$ có nghiệm nguyên (2)

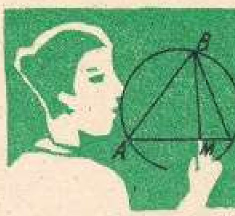
Nghiệm nguyên của (2) chỉ có thể là ± 1, ± 3. Ta có $1 \mp (Y + 1) + 3 = 0 \Leftrightarrow Y + 1 = \pm 4 \Leftrightarrow Y = 3$, $Y = -5$

i) $Y = 3 \Rightarrow \Delta' = 2$

(*) Có nghiệm $X_1 = \dfrac{-8 + 2}{3} = -2$

$X_2 = \dfrac{-8 - 2}{3}$ (loại)

(Xem tiếp trang 8)



GIẢI BÀI kì trước

Bài T1/240 *Cho trước a, b, c thuộc đoạn [n − 1, n + 1] sao cho a + b + c = 3n. Chứng minh rằng* $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3n^2 + 2$.

Khi nào thì xảy ra dấu bằng.

Lời giải : (của bạn *Nguyễn Xuân Đồng* 9A Chuyên Quỳnh Phụ, Thái Bình và bạn Hoàng Tùng, 9NK Tiên Sơn, Bắc Ninh).

Đặt $a_1 = a - n$, $b_1 = b - n$, $c_1 = c - n$

Ta có $a_1, b_1, c_1 \in [-1, 1]$ và

$a_1 + b_1 + c_1 = a + b + c - 3n = 0$.

Ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + a_1)^2 + (b + b_1)^2 + (c + c_1)^2 = 3n^2 + (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \quad (1)$$

Vì $(a_1 b_1)(b_1 c_1)(c_1 a_1) = (a_1 b_1 c_1)^2 \geq 0$ nên trong ba số a_1b_1, b_1c_1, c_1a_1 phải có một số ≥ 0, chẳng hạn a_1b_1.

Khi đó

$$2 \geq 2c_1^2 = c_1^2 + (-c_1)^2 = c_1^2 + (a_1 + b_1)^2$$
$$= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + 2a_1b_2 \geq a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$a^2 + b^2 + c^2 \leq 3n^2 + 2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} c_1^2 = 1 \\ a_1b_1 = 0 \end{cases} \leftrightarrow$$

$a_1 = 0$, $c_1 = \pm 1 \rightarrow b_1 = \mp 1$.

hoặc $b_1 = 0$, $c_1 = \pm 1 \rightarrow a_1 = \mp 1$

Tóm lại : Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi trong ba số *a, b, c* một số bằng *n*, một số bằng *n − 1* và một số bằng *n* + 1.

Nhận xét. Có rất đông các bạn tham gia giải bài này. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn : *Nguyễn Viết Tú* 9CT **Hà Tĩnh**, *Nguyễn Đăng Quý* 9A Thuận Thành **Bắc Ninh**, *Nguyễn Anh Tuấn* 9N Bỉm Sơn, **Thanh Hóa**, *Tô Minh Hoàng* 8T **Hải Dương**, *Nguyễn Thị Hằng* 9F Lam Sơn **Thanh Hóa**, *Phạm Ngọc Huy*, 9T Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Biên Hòa**, *Nguyễn Trung Lập* 9B Yên Lạc, **Vĩnh Phúc.** *Nguyễn Thị Hương* 9T Thanh Hà, **Hải Dương**, *Đỗ Quang Khánh* 6A Uông Bí **Quảng Ninh**, *Tống Thành Võ* 9B Tĩnh Gia **Thanh Hóa**, *Đàm Văn Thành* 8A Tuy Hòa, **Phú Yên** ; *Trần Ngọc Cường* 9T Nguyễn An Khương, Hóc Môn **TP Hồ Chí Minh3**, *Bùi Lê Na* 8C Amsterdam Hà Nội ; *Đinh Trung Hiếu* 8A Phú Bài **Thừa Thiên − Huế** ; *Hà Văn Đại* 9TA Phan Bội Châu, **Nghệ An**, *Đỗ Thị Thu Hà* 9A, Hữu Nghị **Hòa Bình**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/240 : *Giải phương trình nghiệm nguyên*

$$x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy.$$

Lời giải : của *Trần Đức Hiệu*, 8T, Hàn Thuyên, Nam Định.

$$x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy.$$

− Dễ thấy phương trình có nghiệm $x = y = 0$.

− Với $x, y \neq$ ta có :

$$(1) \Leftrightarrow y^2(x^2 - 7) = (x + y)^2 \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $x^2 - 7$ là bình phương của một số nguyên.

$$x^2 - 7 = a^2 \ (a \in \mathbf{Z}) \quad (3)$$

$(3) \Leftrightarrow x^2 - a^2 = 7$

$\Leftrightarrow (|x| - |a|)(|x| + |a|) = 7$

$\Rightarrow |x| + |a| = 7$, $|x| - |a| = 1$

$\Rightarrow |x| = 4$ hay $x = \pm 4$.

Thay $x = 4$ vào (2) ta được

$9y^2 = (y + 4)^2 \Rightarrow (y + 1)(y - 2) = 0$

$\Rightarrow y = 1, y = 2$

Thay $x = -4$ vào (2) ta được

$9y^2 = (y - 4)^2 \Rightarrow (y - 1)(y + 2) = 0 \Rightarrow$

$y = 1$, $y = -2$

Vậy phương trình (1) có các nghiệm nguyên sau :

$(x, y) = (0, 0)$; $(4, -1)$; $(4, 2)$; $(-4, 1)$; $(-4, -2)$.

Nhận xét : Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : *Nguyễn Xuân Hiếu*, 9A, Chuyên Mê Linh, *Kiều Viết Cường*, Yên Lạc, Vũ Trọng Khoát, 8A, Chuyên vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**. *Nguyễn Mạnh Thường 9A chuyên* **Thạch Thất**, *Nguyễn Thanh Huyền 9B, Chuyên* Ứng Hòa ; *Hoàng Văn Vững*, 9, Ngô Sĩ Liên, Chương Mĩ ; *Nguyễn Thị Lan*, 9B, Chuyên Quốc Oai, **Hà Tây**. *Nguyễn Thị Linh Giang*, 7T, Chuyên Lạc Sơn, **Hòa Bình**. *Đỗ Đăng Thủy*, 7A1, Hai Bà Trưng, *Trần Tấn Đạt*, 9A1 Chu Văn An, Tây Hồ ; *Lê Cường*, 9M, Marie-Curie ; *Vũ Nhật Linh*, 8C ; *Ngô Hoàng Quý3, 7C, Hà Nội − Amsterdam*, **Hà Nội**. *Nguyễn Lâm Hưng*, 6. Chuyên Hồng Bàng ; *Trần Văn Hà, 9D2*, Lạc Viên, **Hải Phòng**. *Nguyễn Cao Cường*, 8B, NK Thanh Hà, **Hải Dương.** *Bùi Nhật Minh*, *Trần Ngọc Đức*, 9A, NK Thị xã **Hưng Yên**. *Bùi Thế Vinh , 8T, NK Xuân Trường*, **Nam Định**. *Đỗ Mạnh Cường*, 7TN2. NK Bỉm Sơn ; *Nguyễn Tiến Dũng*, 9B, Diễn Biên, *Lê Kim Phương*, 9CT, NK Thành phố ; *Lê Ngọc Phú*, 9C, TTGDCLC, Thành phố. *Mai Như Ngọc, 9T, NK Nga Sơn ; Trần Thế Anh*, 9B, NK Tĩnh Gia ; *Đoàn Công Anh*, 9A, NK Hà Trung, **Thanh Hóa**. *Nguyễn Đình quân*, 9TA, Phan Bội Châu, **Nghệ An**. *Nguyễn Thị Thu Hiền, Nguyễn Tiến Thành, 9T NK Thị xã*, **Hà Tĩnh**. *Tạ Quốc Hưng, Ngô Quốc Anh*, 8T, Chuyên Nguyễn Du TP Buôn Ma Thuật ; **Đak Lak**. *Nguyễn Thị Phương Uyên*, 8. Chuyên Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**. *Đinh Thái Minh Tâm, 9/2, Cam Lộc, Cam Ranh*, **Khánh Hòa**. *Nguyễn Ninh Thuận* 81, Quang Trung. Tân Phú, **Đồng Nai**. *Trần Đình Học Hải*, THCS Phước Bình. TP **Hồ Chí Minh**. *Hoàng Khánh Minh*, 9A, Thủ khoa Nghĩa, Châu Đốc, **An Giang**.

TÔ NGUYÊN

Bài T3/240 : *Chứng minh bất đẳng thức :*

$$(1 + 2^2)(1 + 2^{2^2})(1 + 2^{2^3}) \times \ldots \times (1 + 2^{2^n}) < \frac{1}{3} \cdot 2^{2^{n+1}}$$

Lời giải : (của bạn *Trần Tuấn Anh*, 9 Toán, Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**)

Gọi vế trái là F_n. Ta chứng minh :

$$F_n = \frac{1}{3}(2^{2^{n+1}} - 1) \ (*)$$

bằng phương pháp quy nạp toán học.

Với $n = 1$ thì

$$F_1 = 1 + 2^{2^1} = 5 = \frac{1}{3}(2^{2^2} - 1)$$ nên

công thức đúng.

Giả sử công thức đúng với $n = k$, tức là $F_k = \frac{1}{3}(2^{2^{k+1}} - 1)$. Ta chứng minh công thức đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy : $F_{k+1} = (1 + 2^{2^{k+1}})F_k =$

$$= (1 + 2^{2^{k+1}}) \cdot \frac{1}{3}(2^{2^{k+1}} - 1 = \frac{1}{3}(2^{2^{k+2}} - 1).$$

Chứng tỏ công thức (*) đúng với mọi $n \in \mathbf{N}^*$. Từ đó suy ra :

$$F_n = \frac{1}{3}(2^{2^{n+1}} - 1) < \frac{1}{3} \cdot 2^{2^{n+1}}$$

Nhận xét :

1) Hầu hết các bạn đều nhận ra khi nhân vế trái với $3 = 2^2 - 1$ thì liên tiếp sử dụng hằng đẳng thức $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ ta được kết quả là $2^{2^{n+1}} - 1$. Tuy nhiên chỉ có các bạn sau đây chứng minh chặt chẽ bằng phép qui nạp toán học : *Nguyễn Thị Quyên, Lê Tiến Trung*, 9T, Lam Sơn ; *Mai Thị Thu Sánh D, 8A, Nga Hải, Nga Sơn ; Lương Ngọc Giáp*, 7A, NK Hoằng Hóa ; *Lê Văn Mạnh*, Hoằng Phú, Hoằng Hóa **(Thanh Hóa)** ; *Trần Tấn Đạt, Nguyễn Đức Tiến*, 9A1, Chu Văn An ; *Phạm Thế Hùng*, 8CT, Từ Liêm **(Hà Nội)** ; *Nguyễn Công Thành*, 8TT và *Lưu Anh Tú*, 8 Chuyên Lí, NK Vinh ; *Hồ Quang Lợi*, 6A, Chuyên Văn Toán Đô Lương ; *Chu Việt Tuấn*, 9 Toán A, Phan Bội Châu **(Nghệ An)** ; *Hoàng Khánh Minh*, 9A1, Thủ khoa Nghĩa, Châu Đốc **(An Giang)** ; *Nguyễn Phương Thảo*, 8T, Nguyễn Trãi, Hải Dương **(Hải Dương)** ; *Trần Lê Quốc Sơn*, 8T và *Ngô Minh Trí*, 7A, Chuyên Lê Khiết **(Quảng Ngãi)** ; *Lê Trung Kiên*, 9[1], Nguyễn Tri Phương **(Thừa Thiên Huế)** ; *Hoàng Minh Hoàng*, 9[II], Chuyên Ứng Hòa **(Hà Tây)** ; *Nguyễn Hiệp*, 9A, Chuyên Phú Thọ **(Phú Thọ)** ; *Phạm Việt San*, 7A và *Phạm Thị Vân Giang*, 9a, Chuyên Bạc Liêu **(Bạc Liêu)** ; *Thái Văn Việt*, 9A6, Trần Phú **(Hải Phòng)** ; *Vũ Quý Lộc*, Lê Quý Đôn **(Đà Nẵng)** ; *Nguyễn Thị Lan*, 9B, Chuyên Quốc Oai **(Hà Tây)** ; *Đinh Văn Trung*, 9 Lý, Chuyên Nguyễn Du **(Đắk Lắk)** ; *Nguyễn Việt Phương*, 9B, Chuyên Tam Thanh **(Phú Thọ)**, *Võ Bá Thi*, 9A, Bến Tre **(Bến Tre)** ; *Trần Đình Nguyên*, 92, Colette **(TP Hồ Chí Minh)** ;... Riêng bạn *Nguyễn Thị Kim Ngân*, 9T1, Hùng Vương **(Bình Dương)** dùng phép qui nạp lùi cũng cho lời giải tốt.

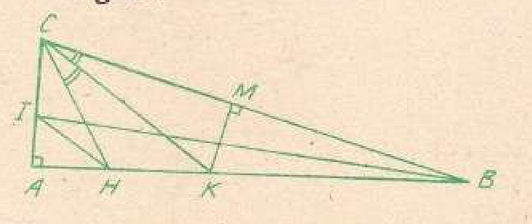
2) Các bạn : *Nguyễn Văn Tiến*, 9A, Phổ Quang, Đức Phổ **(Quảng Ngãi)** ; *Nguyễn Xuân Đức*, 8TL2, Năng khiếu Vinh và *Nguyễn Hồ Xuân Minh Đức*, 8A, Hưng Dũng, Vinh **(Nghệ An)** ; *Cao Văn Duẩn, chất lượng cao Giao Thủy* **(Nam Định)** ; *Chu Mạnh Dũng*, 8T, NK Bắc Giang **(Bắc Giang)** và một số bạn đọc khác đã tổng quát hóa bài toán với phép chứng minh tương tự.

3) Bạn *Nguyễn Ngô Lâm*, 8CT, Tô Hoàng, Hai Bà Trưng **(Hà Nội)** đã "bình luận" đúng : "thực ra, đây chỉ là một bài toán về tính giá trị của biểu thức".

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/240 : *Cho Δ ABC vuông góc tại A, có $\hat{B} = 20^o$. Kẻ phân giác trong BI. Vẽ góc $\widehat{ACH} = 30^o$ về phía trong tam giác. Tính góc CHI.*

Lời giải :



Ta có $\widehat{ACB} = 90^o - \widehat{CBA} = 70^o$.

$\Rightarrow \widehat{HCB} = 40^o$.

Kẻ CK là tia phân giác của $\widehat{HCB}$, ta có $\widehat{HCK} = \widehat{KCB} = 20^o$

Δ ACH có $\widehat{ACH} = 30^o$ nên $AH = \dfrac{CH}{2}$.

Do đó $\dfrac{AH}{HK} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{CH}{HK} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{CB}{BK}$.

Kẻ $KM \perp CB$ tại M. Tam giác CKB cân nên $CB = 2CM$.

$$\Rightarrow \frac{AH}{HK} = \frac{BM}{BK} = \frac{BA}{BC} \qquad (1)$$

(Do Δ $BMK \backsim \Delta ABC$)

Mặt khác do BI là phân giác nên :

$$\frac{AI}{IC} = \frac{BA}{BC} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $\dfrac{AH}{HK} = \dfrac{AI}{IC}$

Suy ra $IH \parallel CK$.

Do vậy $\widehat{CHI} = \widehat{HCK} = 20^o$.

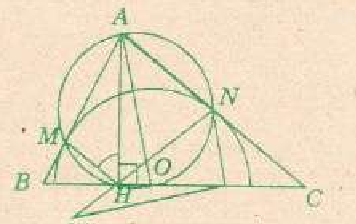
Nhận xét :

Bài này được các bạn giải theo nhiều cách. Giải tốt bài này có các bạn : **Thái Nguyên** : *Mai Nguyên Dũng*, 8 NK thành phố, **Phú Thọ** : *Nguyễn Việt Phương, 9B Chuyên Tam Thanh*, **Vĩnh Phúc :** *Tạ Văn Chương*, 8A THCS Xuân Hòa, *Nguyễn Trung Lập, Nguyễn Đức Hải*, 9B Chuyên Yên Lạc, **Bắc Giang** : *Đào Ngọc Minh*, 9T NK Yên Dũng, **Nguyễn Thu Nga** 343, Lê Lợi, **Bắc Ninh** : *Phùng Văn Thủy, 9MK Gia Lương, Hoàng Tùng*, 9 NK Tiên Sơn, *Trần Trung* 9NK Bắc Ninh ; **Quảng Ninh** : *Nguyễn Thị Thu Hà*, 9A TĐ Cẩm Phả, *Đỗ Quang Khánh*, 6A2 TĐ Uông Bí, **Hưng Yên** : *Đào Hoàng Bách 9A Long Hưng, Văn Giang* ; **Hải Phòng :** *Lương Việt Cường*, 9A1 Hồng Bàng, *Trần Trung Hiếu*, 9D2 Lạc Viên, Ngô Quyền, *Vũ Ngọc Minh*, 8T, Chu Văn An, **Hà Tây**; *Đỗ Thanh Hiền*, 8A Toán, Thường Tín ; *Thành Khiêm*, 7A Chuyên Thạch Thất, *Nguyễn Thùy Dương*, 8B Chuyên Ứng Hòa ; **Hà Nội** ; *Đoàn Thanh Tùng*, 8A2 Nguyễn Trường Tộ, *Lê Cường*, 9M, Marie Curie, *Vương Gia Vũ*, 7CT Trưng Vương, *Ngô Hoàng Quý 7C Hà Nội – Amsterdam* ; **Nam Định** : *Trần Hoài Sơn*, 9B TĐ Hải Hậu, *Nguyễn Công Tuấn*, 8T Trần Đăng Ninh, *Trần Quang Vinh*, 9T, NK Ý Yên, *Nguyễn Thị Nhung*, V9 NK Xuân Trường ; **Thanh Hóa** : *Đào Phan Thoại* 8T, NK Triệu Sơn ; **Nghệ An** : *Nguyễn Minh Quốc*, 7A NK Quỳnh Lưu, *Nguyễn Huy Vũ*, 9T Phan Bội Châu, *Nguyễn Hồ Xuân Minh Đức*, 8A Hưng Dũng, Vinh ; **Thừa Thiên - Huế** : *Trần Đình Khiêm*, 8T Nguyễn Tri Phương ; **Đà Nẵng** : *Nguyễn Quang Thiện*, 7 Nguyễn Khuyến ; **Quảng Ngãi** : *Nguyễn Tăng Vũ*, 7 Toán, Nguyễn Nghiêm, **Phạm Tuấn Anh**, 8T Chuyên Lê Khiết, *Nguyễn Thị Phương Uyên*, 8 Chuyên Nghĩa Hành ; **Bình Định** : *Phan Văn Nghiệp*, 8C Hòa Thắng, Tuy Phước ; **Khánh Hòa** : *Trần Tuấn Anh*, 9T Lê Quý Đôn ; **Đồng Nai** : *Phạm Ngọc Huy*, 9T Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa ; **HCM :** *Phan Minh Trí* : 9T, Nguyễn Du, Gò Vấp, *Trần Đình Học Hải*, 9A1 Phước Bình, Q9, *Trần Ngọc Cường*, 9T1 Nguyễn An Khương, Hóc Môn ; **Bến Tre** : *Bồ Bá Hải*, 9A PTTH Bến Tre.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/240. *Cho tam giác ABC trong đó BC là cạnh lớn nhất. Một đường tròn (O) tiếp xúc với AB, AC tại các điểm tương ứng M, N và có tâm O nằm giữa B, C. Hạ đường cao AH. Chứng minh rằng trong các tam giác có hai đỉnh là M, N và đỉnh thứ ba thuộc BC thì tam giác HMN có chu vi bé nhất.*

Lời giải :



Do BC là cạnh lớn nhất nên các góc B, C đều nhọn. Mà OM, ON tương ứng vuông góc với AB, AC (t/c tiếp điểm) nên M, N đều nằm trên các cạnh tương ứng AB, AC, tức là chúng nằm cùng phía đối với BC (1). Do cùng nhìn AO dưới một góc vuông nên M, N, H thuộc đường tròn đường kính AO. Trong đường tròn này, ta có OM = ON (vì OM = ON) nên sđ $\overset{\frown}{AM}$ = 180° – sđ $\overset{\frown}{OM}$ = 180° – sđ $\overset{\frown}{ON}$ = sđ $\overset{\frown}{AN}$. Và ta có $\widehat{AHM}$ = 1/2 sđ $\overset{\frown}{AM}$ = 1/2 sđ $\overset{\frown}{AN}$ = $\widehat{AHN}$, suy ra $\widehat{BHM} = \widehat{CHN}$.

Lấy điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng BC

(2), Ta có $\widehat{BHM'} = \widehat{BHM} = \widehat{CHN}$. Mặt khác, kết hợp (1) với (2) ta có HM' nằm khác phía đối với BC, nên suy ra M', H, N thẳng hàng. Do đó chu vi $\Delta\, HMN = MN + M'M$, trong khi đó, với điểm D (khác H) trên BC, ta có $M'D + DN > M'M$, nên chu vi $\Delta\, DMN$ lớn hơn chu vi $\Delta\, HMN$, suy ra đpcm.

Nhận xét : Có 132 bài giải tất cả đều giải đúng, duy có điều là phần lớn đều cho dương nhiên *HM, HM'* nằm khác phía đối với *BC mà không nêu lí do tại sao. Lời giải tốt gồm có :* **Nam Định** : *Trần Đức Hiếu* (8 Toán Hàn Thuyên) ; *Nguyễn Trung Dũng* (9 li Trần Đăng Ninh). **Bắc Giang :** *Nguyễn Tiến Mạnh* (12 A PTTHNK Ngô Sĩ Liên). **Hải Phòng :** *Lương Việt Cường, Nguyễn Phong Thiên (9A*1 THCS Hồng Bàng). **Đồng Nai :** *Phạm Ngọc Huy* (9T Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa). **TP Hồ Chí Minh :** *Đặng Trần Trí* (9^{A1} Hưng Phú A Q.8) ; *Trần Ngọc Cường* (9T1 Nguyễn An Khương, Hóc Môn). **Thừa Thiên - Huế :** *Đinh Trung Hiếu* (8A THCS PT Phú Bài Hương Thủy). **Khánh Hòa :** *Đinh Thái Minh Tâm* (9/2 THCS Cam Lộc, Cam Ranh) ; *Trần Tuấn Anh* (9 Toán Lê Quý Đôn). **Hòa Bình :** *Đỗ Thị Thu Hà* (9A THCS Hữu Nghị).

ĐẶNG VIỄN

Bài T6/240 : *Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{C_{1997}^{1}} + \frac{1}{C_{1998}^{2}} + \ldots + \frac{1}{C_{1997+n}^{n+1}} < \frac{1}{1995}$$

Lời giải . Của bạn *Trần Đức Thuận* 11CT, PTNK Quảng Bình)

Ta có $\dfrac{1}{C_{1997+h}^{k+1}} = \dfrac{1996\,(k+)!}{(1997+k)!}$

$$= \frac{1996\,(k+)!}{1995(1997+k)!}(1997+k-(k+2))$$

$$= \frac{1996}{1995}\left[\frac{1995\,!(k+)\,!}{(1996+k)!} - \frac{1995\,(k+2)!}{(1997+k)!}\right]$$

$$= \frac{1996}{1995}\left[\frac{1}{C_{1996+k}^{k+1}} - \frac{1}{C_{1997+k}^{k+2}}\right]$$

Lấy tổng

$$\sum_{k=0} \frac{1}{C_{1997+k}^{k+1}} = \frac{1996}{1995}\left(\frac{1}{C_{1996}^{1}} - \frac{1}{C_{1997+n}^{n+2}}\right)$$

$$< \frac{1996}{1995} \cdot \frac{1}{C_{1996}^{1}} = \frac{1}{1995}.$$

Nhận xét : Bài này có khá đông bạn tham gia giải và có nhiều cách giải bài toán này. Cách giải trên của bạn thuận là ngắn gọn và tự nhiên nhất. Các bạn có lời giải tốt : *Lê Quang Nâm* 12CT **TP Hồ Chí Minh**, *Lê Anh Dũng* 12CT Nguyễn Du **Đắc lắc**, *Lê Đình Bình*, 12T Buôn Mê Thuột **Đắc lắc**, *Lê Xuân Đại*, 11A Mỹ Đức **Hà Tây** *Hoàng Trung Tuyến*, 12A Hà Trung **Thanh Hóa**, *Nguyễn Minh Phương* 12A Hùng Vương **Phú Thọ**, *Nguyễn Nhật Nam* 12A **Bến tre**, *Nguyễn Hoàng Khâm* 10T Lê Quý Đôn Nha Trang **Khánh Hòa**, *Phạm Hồng Thái* 12T **Quảng Bình**, *Hà Duy Hưng* 12 Trần Phú, **Hải Phòng**, *Vũ Đức Nghĩa* 8A Đông Cương **Thanh Hóa**, *Nguyễn Thái Phú*, 10A Minh Khai **Hà Tĩnh**, *Phạm Tuấn Anh* 8T Lê Khiết, **Quảng Ngãi** *Đinh Sỹ Thạc Chí*, 10A DHSP Vinh, *Nguyễn Tiến Mạnh* 12A Ngô Sỹ Liên **Bắc Giang**, *Nguyễn Mạnh Thắng* 8A Thạch Thất **Hà Tây**.

Nhiều bạn có nhận xét đúng rằng có thể thay số 1997 bởi một số m bất kỳ ($m > 2$) và ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{C_{m}^{1}} + \frac{1}{C_{m+1}^{2}} + \ldots + \frac{1}{C_{m+n}^{n+1}} < \frac{1}{m-2}$$

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/240 : *Xét dãy số thực* $\{a_n\}$ *thỏa mãn :*

$a_{n+1} = 3a_n^2 - 2 \;\forall\, n \geq 1.$

Tìm tất cả các số hữu tỉ a_1 *mà tồn tại* $m \neq n$ *sao cho* $a_m = a_n$

Lời giải : Với mỗi $n \geq 1$ đặt $b_n = 3a_n$. Khi đó, từ dãy $\{a_n\}$ ta có dãy $\{b_n\}$ được xác định bởi :

$$b_{n+1} = b_n^2 - 6 \;\forall n \geq 1 \qquad (1)$$

Và bài đã ra trở thành : Tìm tất cả $b_1 \in$ Q mà $\exists\, m \neq n$ sao cho $b_m = b_n$.

Từ (1) ta có : $b_{n+1} - b_n = (b_n - 3)(b_n + 2)$ $\forall$ n $\geq$ 1. Suy ra, nếu $|b_1| > 3$ thì $|b_1| < b_2 < b_3 < \ldots < b_n < b_{n+1} < \ldots$ Do đó, nếu $|b_1| > 3$ thì không tồn tại $m \neq n$ sao cho $b_m = b_n$.

Xét $|b_1| \leq 3$. Nếu $b_1 \in$ Q thì từ (1) dễ thấy $b_n \in$ Q $\forall$n $\geq$ 1. Với mỗi $n \geq 1$, viết b_n dưới dạng $b_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, trong đó : $p_n, q_n \in$ **Z** , $q_n \geq 1$ và $(p_n, q_n) = 1$. . Khi đó , nếu $\exists\, m \neq n$ sao cho $b_m = b_n$ thì phải có $q_m = q_n$ (*). Mặt khác, từ (1) ta có :

$$b_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n^2 - 6q_n^2}{q_n^2} \;\forall\, n \geq 1 \;(2)$$

Vì $(p_n, q_n) = 1$ nên $(p_n^2 - 6q_n^2, q_n^2) = 1$. Kết hợp với (2) và $(p_{n+1}, q_{n+1}) = 1$. Suy ra $q_{n+1} = q_n^2 \;\forall$n $\geq$ 1 . Dẫn tới $q_n = q_n^{2^{n+1}}$ $\forall$n $\geq$ 1.

Do đó : (*) $\Leftrightarrow q_1^{2^{m-1}} = q_1^{2^{n-1}} \Leftrightarrow q_1 = 1$ (vì $m \neq n$). Như vậy nếu $\exists\, m \neq n$ sao cho $b_m = b_n$ thì $b_1 \in$ **Z**. Suy ra : $b_1 \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$.

+ Với $b_1 = 0$ thì $b_2 = -6 \Rightarrow b_3 = 30 > 3 \Rightarrow b_3 < b_4 < \ldots < b_k < b_{k+1} < \ldots \Rightarrow \not\exists m \neq n$ sao cho $b_m = b_n$.

+ Với $b_1 = \pm 1$ thì $b_2 = -5 \Rightarrow b_3 = 19 > 3 \Rightarrow b_3 < b_4 < \ldots < b_k < b_{k+1} < \ldots \Rightarrow \not\exists m \neq n$ sao cho cho $b_m = b_n$.

+ Với $b_1 = \pm 2$ thì $b_2 = -2 \Rightarrow b_3 = -2 = b_2$.

+ Với $b_1 = \pm 3$ thì $b_2 = 3 \Rightarrow b_3 = 3 = b_2$.

Vậy, tóm lại, tất cả $b_1 \in$ Q cần tìm là $b_1 = \pm 2, \pm 3$. Và do đó, tất cả các giá trị $a_1 \in$ Q cần tìm là : $\pm \dfrac{2}{3}, \pm 1$.

Nhận xét : 1) Đa số các bạn cho Lời giải rườm rà, dài dòng. Không ít bạn cho Lời giải thiếu chính xác vì chưa xét hết các trường hợp có thể xảy ra.

2) Danh sách các bạn đã gửi lời giải cho Bài toán. **Bắc Giang** : *Vũ Duy Tuấn, Nguyễn Tiến Mạnh* (12A PTTH Ngô Sĩ Liên) ; **Vĩnh Phúc** : *Cao Thế Thụ, Lê Thế Thành* (10B, 11B PTTH Vĩnh Tường) ; **Hải Phòng** : *Hà Duy Hưng* (12 Chuyên Tin PTTH Trần Phú) ; **Thái Bình** : *Nguyễn Hoàng Đức Trịnh* (11A1 PTTH Bắc Kiến Xương) ; **Hà Nội :** *Đỗ Ngọc Đức* (7H THCS Trưng Vương), *Nguyễn Đức Mạnh* (12 A PTTH Cổ Loa - Đông Anh) ;**Hà Tây** : *Nguyễn Mạnh Thắng* (8A THCS Thạch Thất) ; **Thanh Hóa** : *Nguyễn Văn Quang, Lê Xuân Trung, Viên Ngọc Quang* (10T. 11T PTTH Lam Sơn), *Trương Cao Dũng* (12 A1 PTTH Bỉm Sơn) **Nghệ An :** *Trần Nam Dũng* (11 CT PTTH Phan Bội Châu) **Quảng Bình :** *Dương Lê Nam* (11 T1 PTTH Đồng Hới). *Đỗ Hải Phú* (11 A2 THCB Lệ Thủy). *Trần Đức Thuận* (11 CT PTNK Tỉnh) **Bình Định** : *Bùi Văn Hiếu* (11 A1 Quốc học Quy Nhơn) :

Vĩnh Long : *Ninh Hồng Phúc* (11 T PTTH Nguyễn Bỉnh Khiêm) ; **Đăklăk** : *Lê Anh Dũng* (12 CT PTTH Nguyễn Du) ; **ĐHQG Hà Nội** : Nguyễn Mạnh Hà (11 A Khối PTCT – Tin ĐHKHTN) ; **ĐHSP Vinh** : *Ngô Anh Tuấn, Lê Hồng Hà, Nguyễn Thành Trung* (10A, 11A PTCT).

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/240. *Cho hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{với } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{với } x = 0 \end{cases}$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{17}{18} < \int_0^1 f(x)\,dx < \frac{1703}{1800}.$$

Lời giải (của đa số các bạn)

Vì $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ nên f(x) là hàm số liên tục trong đoạn [0, 1]. Xét hàm số

$$g(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}.$$

Khi đó $g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$ và

$$g''(x) = -\left(x - \frac{x^3}{6}\right).$$

Ta chứng minh bất đẳng thức kép sau trong (0, 1] :

$$-g''(x) < \sin x < g(x) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = \sin x - g(x)$

Khi đó : $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}$

$$f''(x) = -\sin x + x - \frac{x^3}{6} = -\sin x - g''(x).$$

$$f'''(x) = -\cos x + 1 - \frac{x^2}{2}\ ;\ f'''(0) = 0$$

$f^{(4)}(x) = \sin x - x$; $f^{(4)}(0) = 0$.

$f^{(5)}(x) = \cos x - 1 < 0\ \forall x \in (0, 1]$.

Do đó $f^{(4)}(x) > f^{(4)}(0) = 0\ \forall x \in (0, 1] \Rightarrow$

$\Rightarrow f'''(x) > f'''(0) = 0\ \forall x \in (0, 1] \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x) > f''(0) = 0$

(Bất đẳng thức phía trái của (*) được chứng minh).

Tiếp theo : $f'(x) > f'(0) = 0\ \forall x \in (0, 1]$. Do vậy $f(x) > f(0) = 0\ \forall x\ (0, 1)$ (Bất đẳng thức phía phải của (*) được chứng minh).

Từ (*) suy ra

$$\int_0^1 \frac{x - \frac{x^3}{6}}{x}\,dx < \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx < \int_0^1 \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}}{x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) dx < \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx <$$

$$< \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{18} < \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{1703}{1800}.$$

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải đúng

Hà Nội : *Nguyễn Đức Mạnh* (12A Cổ Loa, Đông Anh), **Nam Định** : *Nguyễn Trường Giang*, **Hưng Yên** : *Dương Mạnh Hùng* (12A Văn Lâm), **Lâm Đồng** : *Trương Anh Tuấn* (12T Thăng Long, Đà Lạt), **Hà Tây** : *Lê Xuân Đại* (11A1 Mỹ Đức A), **Bà Rịa – Vũng Tàu** : *Nguyễn Anh Tuấn*, **Bắc Giang** : *Vũ Duy Tuấn* (12A Ngô Sỹ Liên), **Hải Phòng** : *Hà Duy Hưng, Đoàn Mạnh Hà*, **TP HCM** : *Lê Quang Nẫm, Nguyễn Lê Lực, Trịnh Lê Tuấn*, **Đà Nẵng** : *Nguyễn Ngọc Hải, Hồ Lê Viết Trung*, **Đồng Tháp** : *Nguyễn Đăng Triển*, **Nghệ An** : *Nguyễn Văn Tăng, Ngô Anh Tuấn, Trần Nam Dũng, Đặng Đức Hạnh*, **Thanh Hóa** : *Nguyễn Văn Quang, Hoàng Trung Tuyến*, **Hải Dương** : *Lê Huy Triển, Phùng Đức Tuấn*, **Quảng Bình** : *Trần Đức Thuận, Đỗ Hải Phú, Nguyễn Trung Kiên.*

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/240. *Gọi r và R lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp một tam giác ABC có độ dài các cạnh a, b và c. Chứng minh rằng :*

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2\ ; \qquad (*)$$

Lời giải. Bài toán này có nhiều cách giải và được nhiều bạn tham gia, gửi lời giải đến tòa soạn. Có bạn sử dụng vectơ, nhưng đại đa số đã sử dụng phương pháp lượng giác. Sau đây xin giới thiệu lời giải lượng giác của *Trần Nam Dũng*, 11T Phan Bội Châu, **Nghệ An** ; *Nguyễn Quốc Duy* 11T, PTTH Thăng Long, **Lâm Đồng**, *Phạm Đăng Thái* 10T Phan Bội Châu, **Nghệ An** ; *Phạm Dương Hiếu* 11T, Trần Phú **Hải Phòng** ; *Phùng Đức Tuấn*, 12T, PTTH chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương** và nhiều bạn khác.

Trong tam giác ABC ta có :

$a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C$

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A\cos B\cos C)$

và $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. Thay vào (*), ta thấy B.Đ.T (*) cần chứng minh tương đương với B.Đ.T sau :

$$\cos A\cos B\cos C \leq 8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} =$$

$$= (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C)\ ;\ (**)$$

– Nếu tam giác ABC vuông hoặc tù thì (**) hiển nhiên đúng.

– Nếu tam giác ABC nhọn thì $\cos A\cos B\cos C > 0$.

Đặt $x = tg\frac{A}{2}$, $y = tg\frac{B}{2}$, $z = tg\frac{C}{2}$ $(x, y, z > 0)$, thế thì :

$$\cos A = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},\ \cos B = \frac{1 - y^2}{1 + y^2},$$

$$\cos C = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \text{ và do đó :}$$

$$(**) \Leftrightarrow \frac{2x}{1 - x^2}\cdot\frac{2y}{1 - y^2}\cdot\frac{2z}{1 - z^2} \geq \frac{1}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow tgA\,tgB\,tgC \geq cotg\frac{A}{2}\,cotg\frac{B}{2}\,cotg\frac{C}{2}\ ;\ (***)$$

Thật vậy, chúng ta đã biết, trong tam giá ABC ta có các hệ thức sau :

$$tgA\,tgB\,tgC = tgA + tgB + tgC\ ; \qquad (1)$$

và : $cotg\frac{A}{2}\,cotg\frac{B}{2}\,cotg\frac{C}{2} =$

$= cotg\dfrac{A}{2} + cotg\dfrac{B}{2} + cotg\dfrac{C}{2}$; (2)

Mặt khác, ta có :

$$tgA + tgB = \frac{2sin(A+b)}{2cosA\,cosB} =$$

$$= \frac{2sinC}{cos(A-B)+cos(A+B)} \geq \frac{2sinC}{1-cosC}$$

$$= 2cotg\frac{C}{2}\ ; \qquad (3)$$

và hai BĐT tương tự. Cộng vế đối vế các B.Đ.T. (3) lại, ta được :

$$tg\,A + tg\,B + tg\,C \geq cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2} + cotg\frac{C}{2}\ ; \qquad (4)$$

Từ (1), (2) và (4) ta thu được (***) và do đó được (*), đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\cos(A-B) = \cos(B-C) = \cos(C-A) = 1$$

$\Leftrightarrow \triangle ABC$ là đều.

Nhận xét : 1°) Bạn *Nguyễn Đức Mạnh*, 12A, PTTH Cổ Loa, Đông Anh, **Hà Nội** và một số bạn khác đã sử dụng kết quả bài toán T9/224 :

$$\frac{r}{R} + \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{16R^2} \leq \frac{1}{2}\ ; \qquad (i)$$

và chứng minh hệ thức sau :

$$2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2) = 4(r^2+4Rr)\ ; \qquad (ii)$$

(Chẳng hạn, có thể sử dụng công thức $S = pr = \dfrac{abc}{4R}$ và công thức Hêrông :

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = p[p(bc+ca+ab) - p^3 - abc]$$

sẽ thu được (ii)).

Từ (i), ta được :

$$16Rr + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leq 8R^2,$$

hay là :

$$16Rr + 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \leq 8R^2\ ;\ (i')$$

Từ (i') và (ii) ta thu được B.Đ.T (*) cần tìm ; đpcm

2°) Bạn *Nguyễn Trung Kiên, 12A2, THCB Lệ Thủy*, **Quảng Bình** đưa ra lời giải độc đáo, ngắn gọn (kết hợp cả hai phương pháp vectơ và lượng giác) sau đây : Với mọi điểm O, ta có :

$$\vec{BC}^2 + \vec{CA}^2 + \vec{AB}^2 = (\vec{OB}-\vec{OC})^2 + (\vec{OC}-\vec{OA})^2 + (\vec{OA}-\vec{OB})^2.$$

Nếu lấy O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì ta được hệ thức sau :

$$a^2+b^2+c^2 = 2(OA^2+OB^2+OC^2) - 2(\vec{OA}\,\vec{OB} + \vec{OB}\,\vec{OC} + \vec{OC}\,\vec{OA}) =$$

$$= 6R^2 - 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) =$$

$$= 8R^2 - 2R^2(1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)\ ;$$

Vì vậy, BĐT (*) cần chứng minh tương đương với :

$$(*) \Leftrightarrow R^2(1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) + 2r^2 \geq 0\ ; \qquad (iii)$$

Mặt khác, từ các B.Đ.T quen thuộc :

$$R \geq 2r \text{ và } \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$$

ta thu được (iii).

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/240. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (ε) có phương trình :*

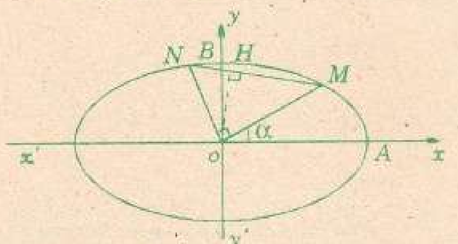
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b > 0)$$

Một dây cung MN của elip thay đổi sao cho $\widehat{MON} = 90°$.

1°) Tìm các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của diện tích tam giác OMN.

2°) Tìm quỹ tích hình chiếu vuông góc H của điểm O trên dây cung MN.

Lời giải. (*Lê Minh Đức*, 11A1, PTTH chuyên **Yên Bái**, *Nguyễn Võ Huyền Dương* 10A3, PTTH chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** và một số bạn khác).



1°) Đặt $(Ox, OM) = \alpha$, thế thì $(Ox, ON) = \alpha + \dfrac{\pi}{2}$ $(0 \leq \alpha \leq 2\pi)$ và $tg\alpha = k$ $(-\infty \leq k \leq +\infty)$

Trong hệ tọa độ Oxy (vuông góc), ta được : $y = kx$ và $y = -\dfrac{1}{k}x$ là phương trình của các đường thẳng OM và ON. Vì M và N thuộc (ε) nên ta được :

$$OM^2 = x_M^2 + y_M^2 = \frac{(1+k^2)a^2b^2}{k^2a^2+b^2},$$

$$ON^2 = \frac{(1+k^2)a^2b^2}{k^2b^2+a^2}.$$

Từ đó ta được :

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \text{ (không đổi)}(*)$$

và :

$$\frac{1}{OM^2.ON^2} = \frac{1}{a^2b^2} + \frac{k^2}{(1+k^2)^2} \times \frac{(a^2-b^2)^2}{a^4b^4}\ ; \qquad (1)$$

Đặt $f(k) = \dfrac{k^2}{(1+k^2)^2}$, dễ thấy rằng :

$$0 \leq f(k) \leq \frac{1}{4}\ ; \qquad (2)$$

(suy từ $(1-k)^2 = 1 + k^2 - 2k \geq 0$)

Từ đó suy ra :

$$\frac{1}{a^2b^2} \leq \frac{1}{OM^2.ON^2} \leq \left(\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}\right)^2$$

Và do đó :

$$\frac{1}{2}ab \geq s(\overset{\Delta}{OMN}) = \frac{1}{2}OM \,.\, ON \geq \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\,; \quad (3)$$

Như vậy :

$s(\overset{\Delta}{OMN})$ đạt max $= \dfrac{ab}{2} \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow OM$ và ON là các bán trục lớn và nhỏ của (ε)

$s(\overset{\Delta}{OMN})$ đạt min $= \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2} \Leftrightarrow k = \pm 1 \Leftrightarrow$ OM và ON là phân giác của các góc vuông tạo bởi các trục tọa độ $x'Ox$ và $y'Oy$, cũng tức là dây cung MN là một cạnh của hình vuông nội tiếp elip (ε).

2°) Vì OH là đường cao hạ xuống cạnh huyền MN của tam giác vuông OMN nên ta có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \text{không đổi}.$$

Do đó :

$$OH = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Suy ra $H \in$ đường tròn (ω) có tâm O, bán kính $\rho = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và dây cung MN luôn tiếp xúc với đường tròn (ω) nói trên. Có thể dễ dàng chứng minh rằng nếu một dây cung MN nào đó của elip (ε) mà tiếp xúc với đường tròn $\omega(O, \rho)$ thì $OM \perp ON$ (hãy chứng minh điều đó). Ta đi đến kết luận :

$\{H = OH \perp MN,\ M$ và $N \in (\varepsilon)\} =$
$=$ Đường tròn $\omega(O, \rho)$.

Nhận xét :

1°) Từ hệ thức (*)

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

suy ra : $OM^2\,ON^2 = \min(\max) \Leftrightarrow$

$$OM^2 + ON^2 = MN^2 = \min(\max)$$

cũng tức là :

$s(\overset{\Delta}{OMN}) = \dfrac{1}{2}OM \,.\, ON = \max(\min) \Leftrightarrow MN = \max(\min)$

Tuy nhiên, việc tính $MN^2 = OM^2 + ON^2$ cho biểu thức phức tạp, cồng kềnh hơn biểu thức $OM^2 \,.\, ON^2$.

2°), Bạn Phan Đăng Thái, 10T, Phan Bội Châu, Nghệ An và một số bạn khác tìm cách tính $s(\overset{\Delta}{OMN})$ theo a, b và góc $\alpha = (Ox, OM)$ hoặc $\beta = (Ox, ON) = \alpha + \dfrac{\pi}{2}$. Bằng cách tính này, ta được

$$OM^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 - c^2\cos^2\alpha},$$

$$ON^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 - c^2\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$$

(trong đó $c^2 = a^2 - b^2$)

và do đó :

$$4s^2(\overset{\Delta}{OMN}) = \frac{4a^4b^4}{4a^2b^2 + (a^2-b^2)^2\sin^2\alpha}$$

$4s^2(\overset{\Delta}{OMN}) = \max(min) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin^2 2\alpha = \min(\max)$
$\Leftrightarrow \sin^2 2\alpha = 0$ (hoặc1)
$\Leftrightarrow \alpha = 0$ hoặc π (tương ứng :

$$\alpha = \pm\frac{\pi}{4} \text{ hoặc } \pm\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$$

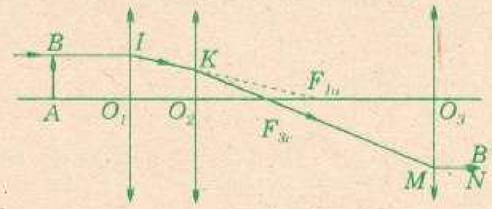
Cuối cùng cũng đi đến kết quả như trên.

3°) Một số bạn biểu thị $s(\overset{\Delta}{OMN}) = F(k)$ là một hàm của $k = \text{tg}\alpha$ rồi sử dụng phương pháp khảo sát hàm số để tìm cực đại và cực tiểu của $F(k)$. Nhiều bạn tính toán quá phức tạp và cồng kềnh ; đa số quên chứng minh phần đảo của bài toán quỹ tích.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/240

Vật AB đặt trước một hệ ba thấu kính mỏng, O_1, O_2, O_3 đồng trục. Số phóng đại k của ảnh của AB qua hệ không phụ thuộc vào vị trí của vật AB trước kính O_1. Cho biết tiêu cự các kính O_1, O_2 và O_3 lần lượt là $f_1 = 30\,cm$; $f_2 = 20\,cm$ và $f_3 = 40\,cm$, khoảng cách O_1O_3 là 60cm. Hãy xác định khoảng cách O_1O_2 và giá trị của k.



Hướng dẫn giải : Phần lớn các em đều giải bằng phương pháp thông thường : nêu sơ đồ tạo ảnh, tính k (qua hệ) theo d_1 (vị trí AB đối với O_1) và l (khoảng cách O_1O_2 ; dựa vào biểu thức tìm được của k tìm điều kiện để k không phụ thuộc d_1, từ đó rút ra giá trị của l và sau đó tính k. Để cho lời giải được gọn (và không phải thực hiện các phép tính phức tạp (và dễ nhầm lẫn)), để tìm l có thể tiến hành lập luận như sau. Nếu từ đỉnh B của vật ta vẽ tia BI song song với trục chính tới kính O_1, tia này bị khúc xạ thành tia IK đi tới kính O_2 ; tia IK bị khúc xạ qua O_2 thành tia KM đi tới kính O_3 và qua O_3 ta có tia ló MN đi qua ảnh B' của B tạo bởi hệ. Vì vậy muốn ảnh $A'B'$ của AB qua hệ có độ cao và chiều không phụ thuộc vào vị trí của AB trước O_1 thì tia ló MN phải song song với trục chính, nghĩa là hệ ba thấu kính đó phải là hệ vô tiêu. Khi đó tia BI song song với trục chính có thể coi là được phát ra từ điểm sáng S ở xa vô cực trên trục chính, và tia ló MN song song với trục chính có thể coi là đi tới ảnh S' của

S qua hệ nằm ở vô cực. Gọi l là khoảng cách O_1O_2, thì khoảng cách O_2O_3 là $60 - l$, với điều kiện $0 < l < 60$cm, ta có : $d_1 = \infty \to 1$ $d'_1 = f_1 = 30$ cm $\to d_2 = l - 30$; $d'_3 = \infty \to$ $d_3 = f_3 = 40$cm $\to d'_2 = (60 - l) - 40$

Từ đó

$$f_2 = \frac{d_2 d'_2}{d_2 + d'_2} = 20 = \frac{(l-30)(20-l)}{-10}.$$

giải ra ta được $l_1 = 10$cm và $_2 = 40$cm. Cả 2 nghiệm đều chấp nhận được. Với $l_1 = 10$cm, ta có hình vẽ như trên dựa vào hình vẽ thấy ngay ảnh ngược chiều với vật, và, có độ cao

$$\overline{D_3M} = 4 . \overline{O_2K} = 4 . \frac{2}{3}\overline{O_1I}, \text{ suy ra } k = -8/3.$$

Tương tự, với $l_2 = 40$cm, vẽ hình như trên (bây giờ tia IK qua F_{1a}, tia KM có đường kéo dài qua F_{3v}), ta thu được ảnh ngược chiều với vật và $k = -2/3$.

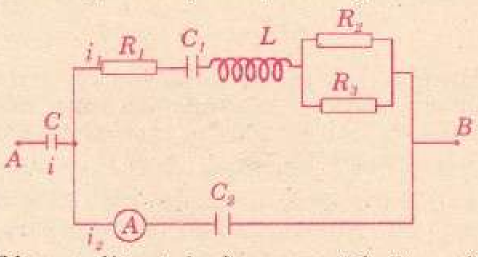
Nhận xét : Các em có lời giải đúng và gọn : *Đào Anh Đức* 9TB, PTTH Phan Bội Châu, **Nghệ An** ; *Lục Văn Hào* 9₂, trường Hồng Bàng, Q5, **TP Hồ Chí Minh** ; *Huỳnh Dũng* 11A2, trường Lê Quý Đôn, **TP Đà Nẵng** ; *Lê Hoài An*, 11 Lí, trường chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên** ; *Hoàng Trường Sơn*, 11A2, trường Lê Quý Đôn **TP Đà Nẵng** ; *Đinh Thị Cẩm Tú*, 11A3, trường Phan Châu Trinh, **TP Đà Nẵng** ; *Đoàn Mạnh Thắng*, 12A chuyên ban Huỳnh Thúc Kháng, Vinh, **Nghệ An** ; *Ông Quang Thái*, 11A1, trường Lê Quý Đôn, **Long An** ; *Ninh Hồng Phúc* 11T, Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long** ; *Đặng Thành Nam*, 12A, trường chuyên **Vĩnh Phúc** ; *Nguyễn Nam Hà*, 12A1, PTTH Lê Quý Đôn, **Thái Bình** ; *Nguyễn Thanh Vũ*, 12A, trường chuyên Phan Ngọc Hiển, **Cà Mau**.

MAI ANH

Bài L2/240. *Xét một mạch điện như hình vẽ trong đó*

$$C = C_1 = 2C_2 = \frac{100}{\pi}\ \mu F\ ;$$

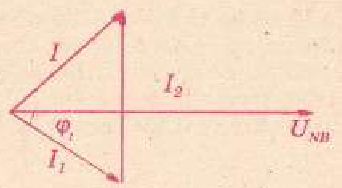
$$L = \frac{2}{\pi}\ H,\ R_1 = R_2 = 2R_3.$$



Bỏ qua điện trở của ampe kế, dây nối và cuộn dây. Đặt vào hai đầu AB một hiệu điện thế $u = U_o \sin 100\pi t$ (V) thì ampe kế chỉ 0,5A và độ lệch pha giữa u và dòng điện qua tụ C là $\pi/3$. Viết biểu thức của cường độ dòng điện qua tụ C và hiệu điện thế hai đầu AB theo thời gian.

Hướng dẫn giải. Ta có $Z_{c2} = 200\Omega$; $Z_c = Z_{c1} = 100\ \Omega$; $Z_l = 200\ \Omega$. Gọi Z_1 là tổng trở nhánh NC_1B và φ_1 là độ lệch pha giữa i_1 và u_{NB} : $Z_1 = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_{c1})^2}$ với R là điện trở tương đương của R_1, R_2, R_3 ; $\sin\varphi_1 = \dfrac{Z_L - Z_{c1}}{Z_1}$;

Ta lại có :



$$I_1 = \frac{U_{NB}}{Z_1},\ I_2 = \frac{U_{NB}}{Z_{c2}} \quad (1)$$

$$\to U_{NB} = I_2 Z_{c2} = 100\ V \quad (2)$$

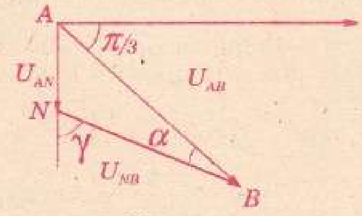
Vẽ giản đồ véc tơ cho đoạn mạch NB.

$$\vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_2} \to I^2$$

$= I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2\sin\varphi_1$(3) Thế (1) vào (3) và lưu ý rằng $2(Z_L - Z_{c1}) = Z_{c2}$, suy ra

$$I^2 = \frac{U_{NB}^2}{Z_{c2}^2} \to I = \frac{U_{NB}}{Z_{c2}} = 0{,}5A.$$

Vẽ giản đồ véctơ cho đoạn mạch AB.



Ta có $\sin\alpha = \dfrac{U_{AN}}{U_{NB}}\sin\left(\pi/2 - \pi/3\right)$

$\to \sin\alpha = \dfrac{1}{4}$ và $\sin\gamma = \sin(\alpha + 30^o) = 0{,}7$

Mặt khác $U_{AB} = U_{NB}\dfrac{\sin\gamma}{\sin 30^o} \simeq 140$ V

Từ đó
$i_c = 0{,}5\sqrt{2}\sin(100\pi t + \pi/3)$(A)
và $u = 140\sqrt{2}\sin 100\pi t$(V)

Lưu ý rằng giả thiết $R_1 = R_2 = 2R_3$ là *giả thiết giả*, không cần sử dụng đến. Ngoài ra có thể kiểm tra được rằng i_c sớm pha so với u.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn : *Trần Mai Sơn Hà*, 12CL, PTTH Năng khiếu **Quảng Bình** ; *Đặng Thành Nam*, 12A, chuyên **Vĩnh Phúc** ; *Hoàng Trường Sơn* 12A2, trường Lê Quý Đôn, **TP Đà Nẵng** ; *Nguyễn Hiệp Đồng*, 11A, PTTH Quỳnh Thọ, Quỳnh Phụ, **Thái Bình**

MAI ANH

SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ ...

(Tiếp theo trang 1)

ii) $Y = -5 \Rightarrow \Delta' = 2$

(*) Có nghiệm $X_1 = \dfrac{8+2}{3}$ (loại)

$X_2 = \dfrac{8-2}{3} = 2.$

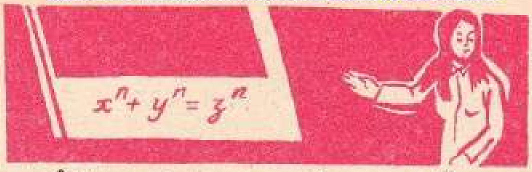
Vậy nghiệm nguyên của (1) viết theo thứ tự (X, Y) là : (−2, 3) (2, −5).

Bài tập áp dụng :

1) Tìm $X \in \mathbf{Z}$ sao cho $X^2 \pm p$ là số chính phương

2) Giải phương trình nguyên
$X^2 - Y^2 = \mathcal{P}^k$ = ($\mathcal{P}$: số nguyên tố, $k \in \mathbf{N}^*$)

3) Giải các phương trình nguyên
a) $X^2 + 3Y^2 + 4YX - 2X - 6Y - 24 = 0$
b) $X^2 + 8Y^2 + 6YX + 4X + 8Y - 17 = 0$



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/244 : Xét dãy số

$$x_1,\ x_2 = \frac{1+x_1}{1-x_1},\ x_3 = \frac{1+x_2}{1-x_2},\ \ldots,$$

$$x_n = \frac{1+x_{n-1}}{1-x_{n-1}} \text{ trong đó } x_1 \neq 0 \text{ và } x_1 \neq \pm 1.$$

Chứng minh rằng $x_{1997} = x_1$

NGUYỄN TRỌNG BÁ
(Hà Nội)

Bài T2/244 : Cho 3 số dương a, b, c tùy ý không lớn hơn 1. Chứng minh :

$$\frac{1}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{3} + (1-a)(1-b)(1-c)$$

NGÔ VĂN THÁI
(Thái Bình)

Bài T3/244 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2+y^2) + \dfrac{3}{(x+y)^2} = \dfrac{85}{3} \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{13}{3} \end{cases}$$

NGUYỄN VŨ LƯƠNG
(Hà Nội)

Bài T4/244 : Cho tam giác ABC, điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh AC. Trên đoạn DE lấy các điểm M, N sao cho $DM = MN = NE$. Gọi P, Q là các giao điểm tương ứng của các tia AM, AN với cạnh BC. Chứng minh rằng nếu $BP < PQ$ thì $PQ < QC$.

THÁI VIẾT THẢO
(Nghệ An)

Bài T5/244 : Cho tam giác ABC với các trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1. Lấy các điểm M (nằm giữa A, B_1) ; N (nằm giữa C, A_1) ; P (nằm giữa B, C_1). Tìm giá trị bé nhất của diện tích phần chung của hai tam giác $A_1B_1C_1$ và MNP. Biết rằng diện tích tam giác ABC bằng 1.

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

CÁC LỚP PTTH

Bài T6/244 : Cho số dương a. Xét các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện :

$$xy + yz + zx + \frac{2}{a}xyz = a^2$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x+y+z}{xy+yz+zx}$$

TRẦN CHÍ HÒA
(Quảng Bình)

Bài T7/244 : Cho dãy số $\{P(n)\}$ được xác định như sau :

$P(1) = 1$

$P(n) = 1.P(n-1) + 2.P(n-2) + \ldots + (n-1)P(1)$

với mọi $n \geqslant 2$

Xác định $P(n)$ theo $n \in N^*$

ĐÀM VĂN NHỈ
(Thái Bình)

Bài T8/244 : Cho hệ phương trình hai ẩn x, y

$$\begin{cases} k\left(x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1\right) = yx \\ k\left(\sqrt[3]{x^8} + x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1\right) + \\ \quad + (k-1)\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases}$$

1. Xác định k để hệ phương trình có nghiệm.
2. Giải hệ phương trình với k = 16.

ĐOÀN THẾ PHIỆT
(Nam Định)

Bài T9/244 : Trong một tam giác dựng ba đường tròn, mỗi đường tròn này tiếp xúc với hai cạnh của tam giác và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác đó. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác theo các bán kính r_1, r_2 và r_3 của ba đường tròn nói trên.

NGUYỄN ĐỄ
(Hải Phòng)

Bài T10/244 : Gọi l và R lần lượt là tổng độ dài các cạnh và bán kính mặt cầu ngoại tiếp một tứ diện. Hỏi trong số các tứ diện, tứ diện nào đạt giá trị lớn nhất của tỉ số $\dfrac{l}{R}$? Và tính giá trị lớn nhất đó.

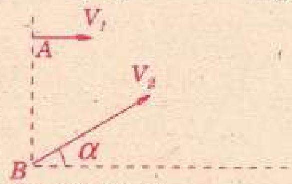
ĐÀO AN NINH
(Hà Tây)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/244 : A đi về hướng Đông với vận tốc không đổi $V_1 = 15$km/giờ. B ở phía Nam cách A 6 km đồng thời chuyển động đều có vận tốc $V_2 = 26$km/giờ, theo hướng tạo với phương chuyển động của A một góc α. Khoảng cách nhỏ nhất giữa chúng là 3km.

1) Xác định hướng đi cụ thể của B (góc α) ?

2) Tính thời gian chuyển động khi A và B cách nhau một khoảng nhỏ nhất.



NGUYỄN CKÔNG MỸ
(Hà Tĩnh)

(Xem tiếp trang 16)

problems in this issue

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/244. *Consider the sequence of numbers*

$$x_1, x_2 = \frac{1+x_1}{1-x_1},\ x_3 = \frac{1+x_2}{1-x_2},\ \dots,$$

$$x_n = \frac{1+x_{n-1}}{1-x_{n-1}},\ \textit{where } x_1 \neq 0 \textit{ and } x_1 \neq \pm 1.$$

Prove that $x_{1997} = x_1$.

T2/244. *a, b, c are three arbitrary positive numbers not exceeding 1. Prove that*

$$\frac{1}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{3} + (1-a)(1-b)(1-c).$$

T3/244. *Solve the system of equations :*

$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2+y^2) + \dfrac{3}{(x+y)^2} = \dfrac{85}{3} \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{13}{5}. \end{cases}$$

T4/244. *Let be given a point D on the side AB and a point E on the side AC of a triangle ABC. Take the points M, N on the segment DE such that $DM = MN = NE$. Let P, Q be respectively the points of intersection of the rays AM, AN with the side BC. Prove that if $BP < PQ$ then $PQ < QC$.*

T5/244. *Let be given a triangle with its medians AA_1, BB_1, CC_1. M, N, P are arbitrary points, M is between A and B_1, N is between C and A_1, P is between B and C_1. Find the least value of the area of the common part of the triangles $A_1B_1C_1$ and MNP, knowing that the area of the triangle ABC is 1.*

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/244. *Let be given a positive number a ; x, y, z are arbitrary positive numbers satisfying the condition*

$$xy + yz + zx + \frac{2}{a}xyz = a^2.$$

Find the least value of the expression

$$P = \frac{x+y+z}{xy+yz+zx}.$$

T7/244. *The sequence of numbers $\{p(n)\}$ is defined by :*

$p(1) = 1,$

$p(n) = 1.p(n-1) + 2p(n-2) + \dots + (n-1)p(1),$

for every $n \geqslant 2$.

Determine $p(n)$ for all $n \in N^*$.

T8/244. *Let be given the following system of equations of two unknowns x, y :*

$$k(x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1) = yx$$

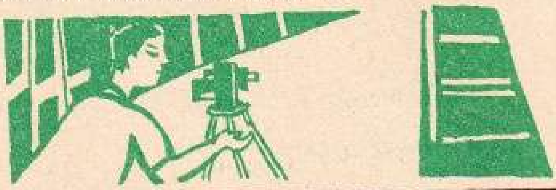
$$k(\sqrt[3]{x^8} + x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (k-1)\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4}.$$

1) Determine k so that the system has solutions.

2) Solve the system for $k = 16$.

T9/244. *Construct inside a given triangle three circles, each of which is tangent to two sides of the triangle and tangent to its incircle. Calculate the radius of the incircle in terms of the radii r_1, r_2, r_3 of the constructed circles.*

T10/244. *Let R and l denote respectively the radius of the circums cribed sphere and the sum of the sides of a tetrahedron. For which tetrahedron, the ratio $\frac{l}{R}$ attains its greatest value ? Calculate this value.*



ỐNG KÍNH CẢI CÁCH DẠY VÀ HỌC TOÁN

Một bài toán nên xem lại

Trong SGK Hình học 12 của Nguyễn Gia Cốc (NXB Giáo dục 1992), trang 42-43 có một phần in chữ nhỏ như sau :

"Bài toán : *Cho hai đường thẳng cắt nhau (d) và (d') có phương trình lần lượt là $Ax + By + C = 0$ và $A'x + B'y + C' = 0$. Mọi đường thẳng qua giao điểm của (d) và (d') có phương trình dạng $Ax + By + C = \lambda(A'x + B'y + C')$ với $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Giải :

a) $Ax + By + C = \lambda(A'x + B'y + C') \Leftrightarrow (A - \lambda A')x + (B - \lambda B')y + C - \lambda C' = 0$ (D). Vì $A/A' \neq B/B'$ nên $A - \lambda A'$ và $B - \lambda B'$ không đồng thời bằng 0. Phương trình (D) là phương trình của đường thẳng.

b) Gọi $I(x_0, y_0)$ là giao điểm của (d) và (d'), rõ ràng là $Ax_0 + By_0 + C = 0$ và $A'x_0 + B'y_0 + C' = 0$.

Từ đó suy ra

$Ax_0 + By_0 + C - \lambda(A'x_0 + B'y_0 + C') = 0$

nghĩa là $I(x_0, y_0) \in (D)$."

Chúng tôi xin được góp ý như sau :

1) Trong cách phát biểu bài toán có điểm không chính xác. Cụ thể là đường thẳng (d') cũng là một đường thẳng đi qua giao điểm của (d) và (d'), nhưng phương trình của nó không thể có dạng $Ax + By + C = \lambda(A'x + B'y + C')$ (với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$).

2) Phần lời giải cũng chưa thỏa đáng, bởi lẽ chưa đáp ứng được yêu cầu của báo toán. Cụ thể là mới chỉ chứng minh được (D) là phương trình của đường thẳng đi qua giao điểm I của (d) và (d') mà chưa chứng minh được mọi đường thẳng qua I đều có phương trình dạng (D).

Theo ý chúng tôi, phần bài toán nên sửa câu "mọi đường thẳng qua giao điểm ..." thành "mọi đường thẳng khác (d') và đi qua giao điểm..." ; và phần lời giải nên sửa lại hoàn toàn. Chúng tôi xin nêu một lời giải như sau để các bạn tham khảo và cho ý kiến thêm :

Gọi (Δ) là một đường thẳng tùy ý khác (d') và đi qua giao điểm $I(x_0, y_0)$ của (d) và (d'), $J(x_1, y_1)$ là một điểm thuộc (Δ), khác I. Ta để ý phương trình sau :

$(A'x_1 + B'y_1 + C')(Ax + By + C) =$

$= (Ax_1 + By_1 + C)(A'x = B'y + C)$(1)

Trước hết, từ cách chọn điểm J, ta suy ra $J \notin (d')$. Do đó $A'x_1 + B'y_1 + C' \neq 0$. Ta dễ dàng đưa phương trình (1) về dạng $Ax + By + C = \lambda(A'x + B'y + C')$ bằng cách chia cả hai vế của (1) cho $A'x_1 + B'y_1 + C'$ và đặt $\lambda = \dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{A'x_1 + B'y_1 + C'}$. Mặt khác, do (d) cắt (d^*) nên $AB' \neq A'B$, suy ra $(A - \lambda A')$ và $(B - \lambda B')$ không đồng thời bằng 0. Từ đó dễ thấy (1) là phương trình của một đường thẳng. Cuối cùng, dễ kiểm tra lại rằng đường thẳng ấy đi qua I và J, nghĩa là trùng với (Δ) và ta có dpcm.

DOÃN MAI
(Hà Nội)

PHƯƠNG PHÁP CHỌN PHẦN TỬ LỚN NHẤT

VŨ ĐỨC CẢNH
(Hà Nội)

Đối với một số bài toán về các số có vai trò bình đẳng ngang nhau hoặc gần bình đẳng và các bài toán về hàm số trên một đoạn mà nó có giá trị lớn nhất thì việc chọn phần tử lớn nhất, hiểu là số lớn nhất trong các số đó hoặc giá trị lớn nhất của hàm số, có thể làm cho giả thiết của bài toán được sáng tỏ thêm hay như được "cho thêm giả thiết". Từ đó ta có thể thu được một lời giải đơn giản, rõ ràng.

Sau đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1 : *Cho a, b, c là 3 số thực thỏa mãn các điều kiện : $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$ và $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng :* $ab + bc + ca \geqslant 2abc + \frac{20}{27}$.

Giải : Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Khi đó $2 = a + b + c \leqslant 3a$, suy ra $\frac{2}{3} \leqslant a \leqslant 1$. Do đó, ta có :

$ab + bc + ca - 2abc = a(b + c) + bc(1 - 2a) \geqslant a(2 - a) + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2(1 - 2a)$

hay $ab + bc + ca - 2abc \geqslant a(2 - a) + \left(\frac{2-a}{2}\right)^2(1 - 2a) = \frac{20}{27} + \frac{(3a-2)^2(7-6a)}{108} \geqslant \frac{20}{27}$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2 : *Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $0 \leqslant a, b, c \leqslant 2$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng : $a^3 + b^3 + c^3 \leqslant 9$.*

Giải : Vai trò của a, b, c là như nhau trong bài toán nên ta có thể coi $a = \max\{a, b, c\}$. Khi đó $3 = a + b + c \leqslant 3a$, suy ra $1 \leqslant a \leqslant 2$. Do đó, ta có :

$a^3 + b^3 + c^3 \leqslant a^3 + [b^3 + c^3 + 3bc(b + c)] = a^3 + (b + c)^3 = a^3 + (3 - a)^3$, suy ra

$a^3 + b^3 + c^3 \leqslant 9a^2 - 27a + 27 = 9 + 9(a - 1)(a - 2) \leqslant 9$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3 : Cho a, b, c là 3 số tùy ý thuộc đoạn $[1 ; 3]$ thỏa mãn $a + b + c = 0$.

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 14$.

Giải : Vai trò của a, b, c là như nhau nên ta có thể giả sử $a = \max\{a, b, c\}$

Khi đó $6 = a + b + c \leqslant 3a$, suy ra $2 \leqslant a \leqslant 3$. Do đó, ta có :

$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2(b - 1)(c - 1) = a^2 + (b + c)^2 + 2[1 - (b + c)] = a^2 + (6 - a)^2 + 2[1 - (6 - a)]$. Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 2a^2 - 10a + 26 = 14 + 2(a - 2)(a - 3) \leqslant 14$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 4 : *Cho x, y là 2 số thực dương. Chứng minh rằng luôn tồn tại 1 trong 3 số x, y, $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{y}$ có giá trị không nhỏ hơn 2.*

Giải : Gọi M là giá trị lớn nhất trong 3 số x, y, $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{y}$

Giả sử $M < 2$, thì $0 < x \leqslant M < 2$ và $0 < y \leqslant M < 2$. Từ đó suy ra

$$M \geqslant \frac{2}{x^2} + \frac{3}{y} > \frac{2}{4} + \frac{3}{2} = 2, \text{ nên } M > 2.$$

Điều mâu thuẫn ở trên chứng tỏ điều mà ta vừa giả sử là sai

Vậy $M \geqslant 2$ và ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 5 (đề số 100) : *Cho $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong số các bất đẳng thức sau đây là sai :*

$a(1 - b) > \frac{1}{4}$; $b(1 - c) > \frac{1}{4}$; $c(1 - a) > \frac{1}{4}$.

Giải : Giả sử $a = \max\{a, b, c\}$, suy ra $0 \leqslant c \leqslant a$ nên

$$c(1 - a) \leqslant c(1 - c) = \frac{1}{4} - \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4},$$

điều này có nghĩa là bất đẳng thức $c(1 - a) > \frac{1}{4}$ là sai. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 6 (đề số 137) : *Tìm a, b, c để $|4x^3 + ax^2 + bx + c| \leqslant 1$ với mọi $x \in [-1 ; 1]$.*

Giải : Giả sử tồn tại a, b, c thỏa mãn điều kiện bài toán.

Đặt $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$ và $M = \max\limits_{x \in [-1;1]} |f(x)|$. Khi đó, ta có :

$$6M \geqslant |f(1)| + |f(-1)| + 2\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| + 2\left|f\left(-\frac{1}{2}\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|f(1) - f(-1) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = 6.$$

Suy ra $M \geqslant 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} |f(1)| = |f(-1)| = \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|f\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = M = 1 \\ f(1),\ -f(-1),\ -f\left(\frac{1}{2}\right),\ f\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

từng đôi một có tích không âm.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = -f(-1) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f(1) = -f(-1) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 0 \\ b = -3 \end{cases}$$

Mặt khác, từ giả thiết suy ra M $\leq$ 1. Do đó, phải có $M = 1$ và phải xảy ra dấu đẳng thức trong dãy bất đẳng thức trên, tức là $a = c = 0$ và $b = -3$. Với $a = c = 0$ và $b = -3$ thì với mọi $x \in [-1\ ;\ 1]$ ta có thể đặt $x = \cos\alpha$. Khi đó $|4x^3 + ax^2 + bx + c| = |4x^3 - 3x| = |4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha| = |\cos 3\alpha| \leq 1$.

Vậy các giá trị cần tìm là $a = c = 0$ và $b = -3$.

Ví dụ 7 *(đề số 141) : Xác định tham số a để giá trị lớn nhất của hàm số* $y = |3x^2 - 6x + 2a - 1|$ *với* $-2 \leq x \leq 3$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Giải : Đặt $f(x) = 3x^2 - 6x + 2a - 1$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ với $-2 \leq x \leq 3$.

Ta có : $2M \geq |f(-2)| + |f(1)| \geq |f(-2) - f(1)| = 27$.

Suy ra $M \geq \frac{27}{2}$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} |f(-2)| = |f(1)| = M = \frac{27}{2} \\ f(-2).[-f(1)] \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} f(-2) = -f(1) = \frac{27}{2} \\ f(-2) = -f(1) = -\frac{27}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow a = -\frac{19}{4}.$$

Khi $a = -\frac{19}{4}$ thì $M = \max\{|f(-2)|, |f(1)|, |f(3)|\}\ \} = \frac{27}{2}$.

Vậy giá trị của a cần tìm là $a = -\frac{19}{4}$.

Ví dụ 8 (Đại học Ngoại thương Hà Nội - 1996). *Tìm a, b sao cho* $|8x^4 + ax^2 + b| \leq 1$ *với mọi* $x \in [-1\ ;\ 1]$

Giải :

Xét hàm số $f(x) = 8x^4 + ax^2 + b$. Dễ thấy rằng tồn tại $\max\limits_{x\in[-1;1]} |f(x)| = M$ và theo giả thiết thì $M \leq 1$.

Do $M = \max\limits_{x\in[-1;1]} |f(x)|$ nên $M \geq |f(0)|$,

$M \geq |f(1)|$

và $M \geq \left|f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|$.

Do đó, ta có :

$$4 \geq 4M \geq |f(1)| + |f(0)| + \left|-2f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| \geq \left|f(1) + f(0) - 2f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = 4$$

Suy ra phải xảy ra dấu đẳng thức trong dãy bất đẳng thức trên

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |f(1)| = |f(0)| = \left|f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = 1 \\ f(1),\ f(0) \text{ và } -f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ cùng dấu} \end{cases}$$

(quy ước số 0 có thể mang dấu + hoặc dấu -).

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = f(0) = -f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \\ f(1) = f(0) = -f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 1 \end{cases}$$

Với $a = -8$, $b = 1$ thì $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$. Với mỗi $x \in [-1\ ;\ 1]$, đặt $\alpha = \arccos x$, ta cos $x = \cos\alpha$.

Và $|f(x)| = |8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1| = |\cos 4\alpha| \leq 1$

Vậy giá trị cần tìm là $a = -8$, $b = 1$.

Cuối cùng, xin gửi các bạn một số bài toán để luyện tập phương pháp đã nêu.

Bài 1. Cho 3 số a, b, c thỏa mãn điều kiện $1 \leq a, b, c \leq 3$ và $a + b + c = 6$.

Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 \leq 36$.

Bài 2. Cho $0 \leq a, b, c \leq 1$. Chứng minh rằng ít nhất có một trong số các bất đẳng thức sau đây là sai : $a(1 - b)^2 > \frac{4}{27}$; $b(1 - c)^2 > \frac{4}{27}$; $c(1 - a)^2 > \frac{4}{27}$

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi a, b luôn tồn tại $c \in [-1\ ;\ 1]$ sao cho $|2c^2 + ac + b| \geq 1$

Bài 4. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + m|$ với $x \in [1\ ;\ 4]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

ỨNG DỤNG TÍNH CHẤT ...

(Tiếp theo bìa 4)

Tâm tỉ cự của hệ điểm có ứng dụng khá nhiều trong việc giải các bài toán hình học. Nếu các bạn chịu khó đầu tư suy nghĩ về việc áp dụng này sẽ giúp các bạn thành công khi tìm các lời giải bài toán mà nhiều khi phương pháp tổng hợp tỏ ra ít có hiệu quả. Chúc các bạn thành công :

(*) Với bộ $K_1, K_2, ..., K_n$: $\sum\limits_{i=1}^{n} K_i \neq 0$. Điểm O tồn tại duy nhất được gọi là tâm tỷ cự của hệ điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ ứng với hệ số tỷ cự $K_1, K_2, ..., K_n$.

CUỘC THI OLEMPIC TOÁN CHÂU Á - THÁI BÌNH DƯƠNG (APMO) NĂM 1997

NGUYỄN VIỆT HẢI

Cuộc thi Olympic Toán châu Á – Thái Bình Dương (tiếng Anh là The Asian Pacific Mathematics Olympiad, viết tắt là APMO) được tổ chức lần đầu tiên vào năm 1989 do sáng kiến của Giáo sư toán học người Ôxtralia Peter O'Halloran, với sự tham gia của 4 đội : Ôxtralia, Canađa, Hồng Công, Singapo. Đến năm 1990 có 9 đội tham dự và năm 1995 có 13 đội. Cuộc thi APMO lần thứ tám (1996) có 14 đội, trong đó đội Việt Nam tham gia thi lần đầu đã đạt số giải tối đa dành cho mỗi đội là 1 huy chương vàng, 2 huy chương bạc, 4 huy chương đồng và 3 bằng khen danh dự.

Cuộc thi APMO lần thứ 9 tổ chức vào tuần thứ hai của tháng 3 năm 1997 có 20 đội tham dự, trong đó có những nước ở ngoài khu vực châu Á – Thái Bình Dương như Achentina (bên bờ Đại Tây Dương) Nam Phi, Trinidat Tôbagô (châu Phi).

Học sinh phải làm 5 bài toán trong 4 giờ. Số điểm tối đa của mỗi học sinh là : 7 điểm × 5 bài = 35 điểm. Ở mỗi nước có khoảng trên dưới 40 học sinh dự thi. Ban Giám khảo của mỗi nước khi nhận bài của Ban tổ chức APMO quốc tế sẽ dịch bài ra tiếng nước mình gửi cho thí sinh và chấm bài của học sinh nước mình theo đáp án của Ban tổ chức APMO quốc tế, sau đó chọn ra 10 bài có điểm cao nhất để báo cáo cho Ban tổ chức APMO quốc tế theo thứ tự xếp hạng từ 1 đến 10, đồng thời gửi kèm bản photocopy các bài xếp hạng 1, 3, 7. Ban tổ chức APMO quốc tế căn cứ vào các điểm số của tất cả các đội để tính điểm trung bình (M) và từ đó tính điểm tối thiểu đối với mỗi loại huy chương. Các học sinh không được huy chương trong 10 học sinh cao điểm nhất của mỗi đội, nhưng có số điểm cao, hoặc giải trọn vẹn ít nhất 1 bài thì được tặng bằng khen danh dự.

Kết quả cuộc thi APMO lần thứ 9 (năm 1997) như sau :

– Số học sinh gửi bài cho Ban tổ chức APMO quốc tế (n = 195)

– Số đội dự thi : 20.

– Điểm số trung bình m = 10,70.

– Điểm tối thiểu đạt huy chương vàng (V) : 17,25

– Điểm tối thiếu đạt huy chương bạc (B) : 12,88

TT	Tên đội	n	m	V	B	Đ	BK
1	Achentina	10	9,9	1	2	1	2
2	Ôxtraylia	10	13,1	1	2	4	2
3	Canađa	10	13,8	1	2	4	1
4	Chilê	10	4,5	0	0	0	0
5	Côlômbia	10	7,7	0	2	4	0
6	Hồng Công	10	14,9	1	2	4	3
7	Inđônêxia	7	5,6	0	0	0	2
8	Mêhicô	10	5,5	0	0	1	2
9	Niu Dilân	10	7,5	0	0	4	0
10	Pêru	10	8,1	0	0	4	4
11	Philippin	10	5,5	0	0	2	2
12	Đài Loan	10	21,0	1	2	4	3
13	Hàn Quốc	10	15,1	1	2	4	2
14	Singapo	10	14,0	1	2	4	1
15	Nam Phi	10	6,5	0	0	3	0
16	Sri Lanca	8	3,3	0	0	0	0
17	Thái Lan	10	8,9	0	3	1	3
18	Trinidat Tôbagô	10	5,3	1	0	1	2
19	Hoa Kì	10	21,1	1	2	4	3
20	Việt Nam	10	19,3	1	2	4	3

– Điểm tối thiểu đạt huy chương đồng (Đ) : 8,51.

Kết quả của các đội như bảng trên (trong đó m là điểm trung bình của đội, BK là bằng khen)

Cuộc thi APMO năm 1997 ở Việt Nam có sự tham gia của 27 đội gồm 52 thí sinh (mỗi đội ở bảng A trong kì thi học sinh giỏi quốc gia được cử không quá 2 học sinh).

Danh sách và kết quả của các học sinh Việt Nam dự thi Olympic Toán châu Á – Thái Bình Dương :

(Xếp theo thứ tự điểm).

TT	Họ và tên	Lớp	Đơn vị	Điểm	Giải
1	Lê Quang Nẫm	11	ĐHQG tp Hồ Chí Minh	24	HC Vàng
2	Vũ Hải Sâm	12	Nam Định	22	HC Bạc
3	Nguyễn Trí Dũng	12	ĐHSP Vinh	20	HC Bạc
4	Nguyễn Đăng Trúc	12	Phú Thọ	20	HC Đồng
5	Phạm Lê Hùng	12	ĐH KHTN ĐHQG Hà Nội	19	HC Đồng
6	Trần Minh Anh	12	Hà Nội	18	HC Đồng
7	Nguyễn Ngọc Hưng	12	Thanh Hóa	18	HC Đồng
8	Nguyễn Hữu Hội	11	Quảng Ngãi	18	Bằng khen
9	Phạm Huy Tùng	11	ĐH KHTN ĐHQG Hà Nội	17	Bằng khen
10	Trịnh Hữu Trung	12	Thanh Hóa	17	Bằng khen

Sau đây là đề thi của cuộc thi Olympic toán châu Á – Thái Bình Dương, lần thứ 9, năm 1997 :

Bài 1 : Cho

$$S = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{1993006}},$$

trong đó mẫu số của số hạng thứ n của tổng ở vế phải đẳng thức trên là tổng các số nghịch đảo của các "số tam giác" $T_1, T_2, \dots, T_n$. ("Số tam giác" T_k là tổng tất cả các số tự nhiên từ 1 đến k). Chứng minh rằng $S > 1001$.

Bài 2 : Tìm số nguyên n, với $100 \le n \le 1997$, sao cho $\frac{2^n+2}{n}$ cũng là số nguyên.

Bài 3 : Cho tam giác ABC nội tiếp một đường tròn và đặt :

$$l_a = \frac{m_a}{M_a}, l_b = \frac{m_b}{M_b}, l_c = \frac{m_c}{M_c},$$

trong đó m_a, m_b, m_c là độ dài các đoạn phân giác trong kẻ từ đỉnh đến cạnh đối diện của tam giác, còn M_a, M_b, M_c là độ dài các đoạn phân giác trong kẻ từ đỉnh đến giao điểm của đường phân giác đó với đường tròn nói trên. Chứng minh rằng :

$$\frac{l_a}{\sin^2 A} + \frac{l_b}{\sin^2 B} + \frac{l_c}{\sin^2 C} \ge 3$$

và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Bài 4 : Tam giác $A_1A_2A_3$ vuông tại A_3. Dựng các điểm A_{n+1} $(n \ge 3)$ bằng quy nạp như sau : A_{n+1} là chân đường vuông góc hạ từ A_n xuống đường thẳng $A_{n-2}A_{n-1}$.

a) Chứng minh rằng nếu quá trình đó được tiếp tục mãi thì có một và chỉ một điểm P nằm bên trong mọi tam giác $A_{n-2}A_{n-1}A_n$ $(n \ge 3)$.

b) Giữ A_1 và A_3 cố định, tìm quỹ tích các điểm P khi A_2 lấy mọi vị trí có thể được trong mặt phẳng.

Bài 5 : Giả sử có n em học sinh $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n \ge 3)$ ngồi quanh bàn tròn và em A_i có a_i viên bi sao cho

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = nN$, trong đó N là một số nguyên dương.

Để cho cuối cùng các em có số bi bằng nhau, mỗi em A_i có thể đưa cho hoặc nhận từ mỗi em A_{i-1} và A_{i+1} ngồi kề bên một số viên bi, trong đó A_{n+1} coi là A_1 và A_o coi là A_n.

Hỏi có thể thực hiện cách chuyển bi như thế nào để tổng số các viên bi được chuyển, tính với số lần chuyển chúng, là tối thiểu ?

bàn về một sự mở rộng

NGUYỄN KHẮC MINH
(Hà Nội)

Ấy là tôi muốn nói về bài : "Mở rộng bài thi toán Quốc tế 1992" của học sinh Nguyễn Tuấn Hải, đã được đăng trên Tạp chí TH & TT số 7(241)/1997. Trong bài báo đó, xuất phát từ :

Bài toán 1 : Cho 9 điểm trong không gian, trong đó không có 4 điểm nào nằm trong cùng một mặt phẳng. Tất cả những điểm này đều được nối với nhau từng cặp bằng đoạn thẳng. Mỗi đoạn thẳng hoặc được tô màu xanh, hoặc màu đỏ, hoặc không được tô màu. Tìm số k nhỏ nhất sao cho với mọi cách tô màu k đoạn thẳng tùy ý, ta đều tìm được một tam giác có các cạnh cùng màu. (*Bài 3 – Đề thi IMO 1992*).

N.T.Hải đã đề xuất và giải quyết :

Bài toán 2 : Cho n điểm trong không gian ($n \geq 6$), trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Tất cả những điểm này đều được nối với nhau từng cặp bằng đoạn thẳng. Mỗi đoạn thẳng hoặc được tô bởi một trong hai màu xanh, đỏ hoặc không được tô màu. Tìm số k nhỏ nhất sao cho với mọi cách tô màu k đoạn thẳng tùy ý, ta đều tìm được một tam giác có các cạnh cùng màu.

Bài toán 3 : Cho $m, n \in N^*$. Cho m màu và cho n điểm trong không gian, mà không có 4 điểm nào đồng phẳng. Tất cả những điểm này đều được nối với nhau từng cặp bằng đoạn thẳng. Mỗi đoạn thẳng hoặc được tô bởi một trong m màu đã cho, hoặc không được tô màu. Tìm số k nhỏ nhất sao cho với mọi cách tô màu k đoạn thẳng tùy ý, ta đều tìm được một tam giác có các cạnh cùng màu.

Việc giải quyết Bài toán 2 được N.T.Hải thực hiện bằng cách chứng minh hai mệnh đề (M.Đ.) sau :

M.Đ.1 : Với mọi cách tô màu $f(n) = \dfrac{n^2 - 3n + 12}{2}$ đoạn thẳng tùy ý, ta đều tìm được một tam giác có 3 cạnh cùng màu.

M.Đ.2 : Tồn tại một cách tô màu $f(n) - 1$ đoạn thẳng sao cho không có tam giác nào có 3 cạnh cùng màu.

Có thể thấy, nếu đi theo hướng trên thì M.Đ.2 là một "cửa ải" trong quá trình công phá Bài toán 2. Một phương pháp vượt qua "cửa ải" này trong các trường hợp riêng, khi $n = 6, 7, 8, 9, 10$, đã được G.S. Hoàng Chúng trình bày trong bài báo "Nhân một bài thi học sinh giỏi" (xem TH & TT số 6(192)/1993, trang 1-3). Và, N.T.Hải đã sử dụng chính phương pháp đó để vượt qua "cửa ải" nói trên trong trường hợp tổng quát. Cụ thể, sau khi khẳng định tính đúng đắn của M.Đ.2 trong các trường hợp $n = 6, 7$ (bằng các kết quả mà G.S. Hoàng Chúng đã chỉ ra), N.T.Hải viết tiếp (*xin trích nguyên văn*) : "*Với khẳng định dụng được với n điểm, ta xây dựng cách tô màu cho (n + 1) điểm như sau : Chọn điểm A_i nào đó ($i \in \{1, 2, ..., n\}$) mà nó nối với n − 1 điểm khác trong hệ n điểm A_j. Ta không tô màu $A_{n+1}A_i$ còn $A_{n+1}A_j$ ($j \neq i$) được tô cùng màu với A_iA_j.* Khi đó trong hệ (n + 1) điểm số đoạn thẳng được tô màu là :

$$\frac{n(n-1)}{2} - (n-5) + (n-1) = f(n+1) - 1$$

mà không có tam giác mà có 3 cạnh cùng màu".

Thiết nghĩ, chúng ta cần phải hiểu thuật toán tô màu, mà N.T.Hải đã mô tả ở trên, một cách rõ ràng hơn như thế này : "Giả sử, với hệ gồm n điểm ($n \geq 6$) ta đã có điều cần chứng minh (tức M.Đ.2). Xét hệ gồm $n + 1$ điểm $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}$ và tất cả các đoạn thẳng A_iA_j, mà $1 \leq i < j \leq n + 1$. Dựa vào giả thiết quy nạp, ta tô màu $f(n) - 1$ đoạn thẳng, mà cả 2 đầu mút của mỗi đoạn đều thuộc tập điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, sao cho không có tam giác nào có 3 cạnh cùng màu. Chọn điểm A_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, mà tất cả các đoạn thẳng A_iA_j, $j = \overline{1, n}$ và $j \neq i$, đều đã được tô màu. (Ta sẽ gọi một điểm A_i như thế là *điểm đặc biệt.*). Tiếp theo, *không tô màu đoạn*

$A_{n+1}A_i$ và tô mỗi đoạn $A_{n+1}A_j$, $j = \overline{1, n}$ và $j \neq i$ bởi màu của đoạn A_iA_j". Từ cách hiểu này (mà theo tôi, đó là cách hiểu đúng duy nhất), dễ thấy : *Cách chứng minh M.Đ.2 của N.T.Hải chỉ đúng, khi $\forall n \geq 6$ trong hệ gồm n điểm luôn tồn tại điểm đặc biệt.* Và, về các điểm đặc biệt, chúng ta có :

1) *Số điểm đặc biệt của hệ gồm 6 điểm bằng 4.* (Điều này được suy ra từ tính đúng đắn của M.Đ.2 trong trường hợp $n = 6$).

2) *Số điểm đặc biệt (nếu có) của hệ gồm n điểm nhiều hơn số điểm đặc biệt của hệ gồm $n + 1$ điểm đúng 1.* (Điều này được suy ra từ việc đọc chậm thuật toán tô màu của N.T.Hải, mà tôi vừa trình bày lại ở trên !). Hai nhận xét đơn giản trên đây cho thấy : *nếu $n \geq 10$ thì trong hệ gồm n điểm không có điểm đặc biệt.* Và vì thế, *đối với Bài toán 2, ngoài các kết quả mà G.S. Hoàng Chúng đã chỉ ra, N.T.Hải mới chỉ đưa ra thêm được một kết quả nhỏ : M.Đ.1.*

Ta chuyển sang bàn về Bài toán 3. Đối với bài toán này, N.T.Hải đã cho kết quả sau : "*Nếu $n < u_m$ thì Bài toán không có lời giải, nếu $n \geq u_m$ thì $k = f(n, m)$* ; trong đó : $f(n,m) = \frac{1}{2} . (n^2 - 3n + 2u_m)$ *và u_m là số điểm ít nhất sao cho với mọi cách dùng m màu để tô tất cả các đoạn thẳng nối 2 điểm trong các điểm đó luôn tồn tại một tam giác có 3 cạnh cùng màu*". Và, N.T.Hải đã chứng minh kết quả trên bằng phương pháp, hoàn toàn tương tự phương pháp giải Bài toán 2. Bởi thế, *không thể nói, rằng N.T.Hải đã giải được Bài toán 3.* Tuy nhiên, đúng như N.T.Hải đã nhận xét, trong trường hợp riêng, khi $n = u_m$ thì $k = f(u_m, m)$. Do đó, khi phân tích lời giải Bài toán 3 bằng cách tương tự như cách phân tích lời giải Bài toán 2 ở trên, ta sẽ thấy : nếu $u_m \leq n \leq 2(u_m - 1)$ thì $k = f(n, m)$ là kết quả đúng. Vì vậy, phải khẳng định, rằng *N.T.Hải đã giải được Bài toán 3 trong các trường hợp riêng, khi $n \leq 2(u_m - 1)$.*

Để kết thúc bài viết này, tôi xin nói đôi điều về một đóng góp quan trọng hơn cả của N.T.Hải cho việc săn lùng lời giải các Bài toán 2, 3. Đóng góp ấy nằm ở lời đề nghị trong phần cuối bài báo của N.T.Hải : "Các bạn hãy thử chứng minh rằng trong trường hợp $m = 1$ thì $k = \left[\frac{n^2}{4}\right] + 1$". (Thay cho "$k$", trong nguyên bản là "$f(n)$" – N.K.M.). Kết quả mà N.T.Hải nêu ra trong lời đề nghị trên là một kết quả quen biết, đã được nhà toán học P.Turan chứng minh và công bố vào năm 1941. Bởi thế, tôi đồng ý với N.T.Hải, ở đây bạn đọc nên thử chứng minh sự trùng hợp, khi m = 1, giữa kết quả của N.T.Hải và kết quả của P. Turan – một kết quả đã được công nhận. Nói một cách khác, "*bạn đọc hãy thử chứng minh rằng :* $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2u_1) = \left[\frac{n^2}{4}\right] + 1 \ \forall n \geq u_1 = 3$".

Các bạn học sinh thân mến, xin chúc các bạn thu được nhiều điều bổ ích và lí thú qua lời đề nghị, tưởng như bé nhỏ, trên đây.

ĐỀ RA KÌ NÀY ...

(Tiếp theo trang 9)

Bài L2/244 : Có một nguồn điện U dao động trong khoảng 240 V ÷ 120 V, 1 ngắt K và 5 đèn : 2 đèn R_1, R_2 ghi (120 V – 120 W), 2 đèn R_3, R_4 ghi (120 V – 60 W), 1 đèn R_5. Yêu cầu không đèn nào được sáng quá định mức. Hãy :

1) Mắc một mạch sao cho

– Khi $U = 240$ V, và mở K, chỉ có R_1R_2 sáng đúng mức.

– Khi $U = 220$ V, đóng K, chỉ có R_1 sáng đúng mức

– Từ đó tính R_5.

2) Mắc một mạch sao cho :

– Khi $U = 210$ V, đóng K, chỉ có R_3, R_4, R_5 sáng đúng mức.

– Khi $U = 180$ V, mở K, chỉ có R_3R_4 sáng đúng mức.

– Từ đó tính hiệu điện thế định mức và công suất định mức của R_5.

3) Mắc mạch điện có thêm biến trở R sao cho khi U thay đổi từ 240 V đến 120 V, sử dụng R vẫn luôn luôn có R_1, R_2, R_3, R_4 sáng đúng mức

– Tính giá trị lớn nhất của R

– Tìm điều kiện để cả R_5 cũng sáng đúng mức

TRẦN VĂN MINH
(Hà Nội)

ỨNG DỤNG TÍNH CHẤT TÂM TỈ CỰ

QUÁCH GIANG
(Ninh Bình)

Bài viết này nêu việc ứng dụng một tính chất Tâm tỉ cự của hệ điểm để giải một số bài toán hình học phẳng cũng như không gian.

1. Mệnh đề :

Giả sử A_i ($i = 1, 2 ..., n$) là hệ n điểm trong không gian có tính chất sau : tồn tại một điểm O và n số thực dương $k_1, k_2, ..., k_n$ sao cho

a. $\sum_{i=1}^{n} k_i . \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{0}$ (*)

b. $OA_i = R$ ($i = 1, 2, ..., n$)

Thì ta có : $\sum_{i=1}^{n} k_i . MA_i \geq [\sum_{i=1}^{n} k_i] . R$,(1)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M = O$.

Chứng minh :

Vì $OA_i = R$ và $k_i > 0$ nên ta có

$k_i . MA_i = 1/R . k_i . |\overrightarrow{MA_i}| . |\overrightarrow{OA_i}| \geq$

$\geq 1/R . k_i . \overrightarrow{MA_i} . \overrightarrow{OA_i} =$

$= 1/R . \overrightarrow{MO} . k_i . \overrightarrow{OA_i} + R$

$= 1/R . k_i . (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}) . \overrightarrow{OA_i} =, (i = 1, 2.)(2)$

Từ (2) ta có

$$\sum_{i=1}^{n} k_i . MA_i \geq 1/R (\sum_{i=1}^{n} k_i . \overrightarrow{OA_i}) + nR ; \quad (3)$$

Từ tính chất a và (3) ⇒ (1) đúng. Dấu = trong (1) xảy ra khi và chỉ khi MA_i song song cùng chiều với $\overrightarrow{OA_i}$ với mọi $i = 1, 2 .. n \Leftrightarrow M = O$ (đpcm).

2. Áp dụng : Từ mệnh đề trên ta giải được một lớp các bài toán hình học mà việc sử dụng phương pháp tổng hợp để giải các bài toán này nhiều khi hết sức khó khăn. Sau đây là một số ví dụ.

Ví dụ 1 : Cho tứ diện gần đều $ABCD$. Gọi a, b, c là độ dài các cặp cạnh đối diện.

Chứng minh rằng :

$$MA + MB + MC + MD \geq \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Vì $ABCD$ là tứ diện gần đều nên trọng tâm của tứ diện trùng tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện nghĩa là ta có :

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$

$OA = OB = OC = OD = R$

nên áp dụng mệnh đề trên ta có $MA + MB + MC + MD \geq 4 . R$,(4)

Dấu = xảy ra ⇔ $M = O$. Dễ dàng tính được : $R = 1/2 \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)/2}$

Từ (4) và (5) ta có đpcm.

Bài toán này nếu dùng phương pháp tổng hợp để giải sẽ rất vất vả.

Ví dụ 2 : Trong mặt phẳng cho đa giác $A_1A_2 .. A_n$ ngoại tiếp đường tròn tâm O bán kính r, A_iA_{i+1} tiếp xúc với đường tròn tại B_i ($i = 1, 2 .. n$, $A_{n+1} = A_1$).

Chứng minh rằng :

$$\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1} . MB \geq 2.n.r^2.tg\, \pi/n$$ với mọi điểm M trong không gian.

Giải : Đặt $V = \sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1} . \overrightarrow{OB_i}$. Gọi Q_o là phép quay tâm O với góc quay -90^o. Dễ dàng thấy rằng $Q_o (A_iA_{i+1} . \overrightarrow{OB_i}) = r . \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ ($i = 1, 2 .. n$) nên ta có

$$Q_o(\overrightarrow{V}) = \sum_{i=1}^{n} Q_o (A_iA_{i+1} . \overrightarrow{OB_i}) =$$

$$r . \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = \overrightarrow{0}.$$

Do đó $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Mà theo giả thiết ta có $OB_i = r$ ($i = 1, 2 .. n$) nên áp dụng mệnh đề trên ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1} . MB_i \geq r . \sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1} \quad (6)$$

Đặt $\widehat{B_iOB_{i+1}} = 2X_i$ ($i = 1, 2..n$; $B_{n+1} = B_1$). Dễ dàng thấy rằng $0 < X_i < \pi/2$ và $A_iA_{i+1} = r . (tgx_i + tgx_{i+1})$. Do vậy từ (6) ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1} . MB_i \geq 2.r^2\ tgx_i \geq 2.n.r.tg\,(\pi/n)$$

(theo bđt Jensen).

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $M = 0$ và $X_i = \pi/n \Leftrightarrow M$ trùng O và $A_1A_2 .. A_n$ là đa giác đều (đpcm)

Ví dụ 3 : Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ ngoại tiếp mặt cầu tâm O bán kính r. Gọi S_1, A_1, B_1, C_1 là điểm tiếp xúc của mặt cầu với mặt đối diện với các đỉnh S, A, B, C. Gọi Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 là diện tích các mặt của hình chóp đối diện với đỉnh S, A, B, C.

Chứng minh rằng :

$$Q_1 . MS_1 + Q_2 . MA_1 + Q_3 . MB_1 + + Q_4 . MC_1 \geq 24.\sqrt{3} . r^3$$

Giải : Theo định lí con nhím cho tứ diện ta có :

$$Q_1 . \overrightarrow{OS}_1 + Q_2 . \overrightarrow{OA}_1 + Q_3 . \overrightarrow{OB}_1 + Q_4 . \overrightarrow{OC}_1 = \overrightarrow{0}$$

Mặt khác ta có

$$OS_1 = OA_1 = OB_1 = OC_1 = r$$

nên theo mệnh đề trên ta có

$$Q_1 . MS_1 + Q_2 . MA_1 + Q_3 . MB_1 + + Q_4 . MC_1 \geq (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4).r \quad (7)$$

Gọi u là góc tạo bởi mặt bên và đáy hình chóp ta dễ dàng chứng minh được rằng :

$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = Q_1 . (1 + 1/\cos u)$ và $Q_1 = 3 . \sqrt{3} . r^2 . cotg(u/2)$.

Do vậy từ (7) ta có :

$$Q_1 . MS_1 + Q_2 . MA_1 + Q_3 . MB_1 + + Q_4 MC_1 \geq 3.\sqrt{3} . r^3 . cotg\, u/2\, (1 + 1/\cos u);(8)$$

Đặt $x = tg\, u/2$ vì $0 < u < 90^0$ nên $0 < x < 1$ ta có

$$cotg\, u/2\, (1 + 1/\cos u) = 2/x.(1 - x) \geq 8 \;;(9)$$

Từ (8) và (9) suy ra đpcm.

Do khuôn khổ bài báo nên tôi chỉ đưa ra một số ví dụ áp dụng mệnh đề trên là một tính chất của một hệ điểm có tâm tỉ cự cách đều hệ điểm đã cho và hệ số tỉ cự dương. Các bài toán trên nếu sử dụng phương pháp tổng hợp để giải ta sẽ gặp khó khăn không nhỏ. Sau đây là một số bài tập mà lời giải sẽ rất gọn nếu sử dụng mệnh đề 1

Bài 1 : Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Hãy tìm giá trị bé nhất của đại lượng sau :

$$S = tg\, A/2 . (MB + MC) + tg\, B/2 . (MC + MA) + + tg\, C/2 . (MA + MB)$$

khi điểm M thay đổi trong không gian và tam giác ABC thay đổi sao cho nó luôn nhọn và luôn nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R cố định.

Hãy mở rộng bài toán trên cho trường hợp n - giác nội tiếp.

Bài 2 : Cho x thuộc R hãy tìm giá trị bé nhất của

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{x^2 + g^2(x) - 2.[x.\cos(a + 2k\pi/n) + + g(x) . \sin(a + 2k\pi/n)] + 1}$$

Trong đó $g(x)$ là một hàm số mà đồ thị của nó qua gốc tọa độ. a là số thực tùy ý.

(Xem tiếp trang 12)

Giải đáp bài

HỎI AI, CÂU GÌ ĐỂ ĐƯỢC TỰ DO

Công chúa biết rằng :

Mỗi tên lính gác **đều biết** cửa nào là *cửa tự do*, cửa nào là *cửa chết* và biết rõ bạn mình là người nói thật hay nói dối. Công chúa đi đến một cửa bất kỳ (cửa nào cũng được) và hỏi tên lính gác cửa này câu hỏi sau : *"Nếu ta ra theo cửa này thì tên lính gác cửa kia vui hay buồn ?"*

Nếu câu trả lời là : *"Anh ta buồn"* thì cửa mà công chúa đến là *cửa tự do*. Vì nếu công chúa gặp tên luôn nói thật thì tên lính gác cửa bên kia là tên luôn nói dối và nó *buồn* khi công chúa ra được cửa tự do. Nếu công chúa gặp tên luôn nói dối thì tên lính gác cửa bên kia là luôn nói thực và *vui* khi công chúa ra được cửa tự do.

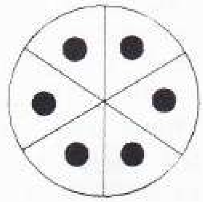
Nếu câu trả lời là : *"Anh ta vui"* thì cửa mà công chúa đến là *cửa chết*. (Lập luận một cách tương tự).

(theo *Cao Thế Thu*, 11A, Chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc)

Các bạn sau đây cũng có giải đáp đúng : *Hoàng Cường*, 8T, NK Bắc Giang ; *Nguyễn Bích Vân*, 10A$_3$, NK Tỉnh, Sơn La, *Đỗ Hồng Thạch* , 18C, CĐSP Thường Tín, Hà Tây ; *Nguyễn Phương Thảo*, 9T, Nguyễn Trãi, Tx Hải Dương.

BÌNH PHƯƠNG

THU GOM CÁC ĐỒNG TIỀN



Một vòng tròn được chia làm sáu ô, mỗi ô có chứa một đồng tiền kim loại như hình vẽ. Mỗi lần di chuyển chỉ được gạt một đồng tiền ở một ô bất kỳ sang một trong hai ô bên cạnh

Hỏi có thể thu gom được tất cả các đồng tiền vào một ô sau một *số chẵn* các lần di chuyển không ?

NGUYỄN CÔNG SỨ

ISSN : 0866 - 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT45M7

Sắp chữ tại TTCBĐH NXBGD
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10/1997

Giá 2.000đ
Hai nghìn đồng