

# BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI NHIỆT ĐỘNG LỰC HỌC VÀ VẬT LÝ THỐNG KÊ

PROBLEMS AND  
SOLUTIONS ON  
**THERMODYNAMICS  
AND STATISTICAL  
MECHANICS**

Biên soạn:  
Trường Đại học Khoa học  
và Công nghệ Trung Hoa

Chủ biên:  
Yung-Kuo Lim



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

# BÀI TẬP & LỜI GIẢI

## NHỆT ĐỘNG LỰC HỌC VÀ VẬT LÝ THỐNG KÊ

(Tái bản lần thứ nhất)

*Người dịch:*

NGUYỄN ĐỨC BÍCH  
PHẠM VĂN THIỀU  
NGUYỄN PHÚC KỲ THỌ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

**Problems and Solutions on  
Thermodynamics and Statical Physics**

Compiled by  
The Physics Coaching Class  
University of Science and Technology of China

Edited by  
Yung-Kuo Lim  
National University of Singapore

© World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.  
New Jersey.London.Singapore.Hong Kong

First published 1990  
Reprinted 1996, 2001, 2005

*All rights reserved. This book, or parts thereof, may not be reproduced in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or any information storage and retrieval system now known or to be invented, without written permission from the Publisher. Vietnamese translation arranged with World Scientific Publishing Co. Pte Ltd., Singapore.*

Cuốn sách được xuất bản theo hợp đồng chuyển nhượng bản quyền giữa Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam và Nhà xuất bản World Scientific. Mọi hình thức sao chép một phần hay toàn bộ cuốn sách dưới dạng in ấn hoặc bản điện tử mà không có sự cho phép bằng văn bản của Công ty Cổ phần Sách dịch và Từ điển Giáo dục – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đều là vi phạm pháp luật.

Bản quyền tiếng Việt © Công ty Cổ phần Sách dịch và Từ điển Giáo dục

# LỜI NIỀM XUẤT BẢN

Bộ sách *Bài tập và lời giải Vật lý* gồm bảy cuốn:

1. Cơ học
2. Cơ học Lượng tử
3. Quang học
4. Nhiệt động lực học & Vật lý thống kê
5. Điện tử học
6. Vật lý Nguyên tử, Hạt nhân và Các hạt cơ bản
7. Vật lý chất rắn, Thuyết tương đối & Các vấn đề liên quan

Dưới đây là tuyển tập gồm 2550 bài tập được lựa chọn kỹ lưỡng từ 3100 đề thi vào đại học và thi tuyển nghiên cứu sinh chuyên ngành vật lý của 7 trường đại học nổi tiếng ở Mỹ (Đại học California ở Berkeley, Đại học Columbia, Đại học Chicago, Viện Công nghệ Massachusetts (MIT), Đại học Bang New York ở Buffalo, Đại học Princeton, Đại học Wisconsin). Trong số này còn có các đề thi trong chương trình CUSPEA và các đề thi do nhà vật lý đoạt giải Nobel người Mỹ gốc Trung Quốc C. C Ting (CCT) soạn để tuyển chọn sinh viên Trung Quốc đi du học ở Hoa Kỳ. Những đề thi này được xuất bản kèm theo lời giải của hơn 70 nhà vật lý có uy tín của Trung Quốc và 20 nhà vật lý nổi tiếng kiểm tra, hiệu đính. Tất cả các cuốn sách trên đã được tái bản, riêng cuốn Điện tử học đã được tái bản 6 lần.

Điểm đáng lưu ý về bộ sách này là nó bao quát được mọi vấn đề của vật lý học, từ cổ điển đến hiện đại. Bên cạnh những bài tập đơn giản nhằm khắc sâu những khái niệm cơ bản của Vật lý học, không cần những công cụ toán học phức tạp cũng giải được, bộ sách còn có những bài tập khó và hay, đòi hỏi phải có kiến thức và tư duy vật lý sâu sắc với các phương pháp và kỹ thuật toán học phức tạp hơn mới giải được. Có thể nói đây là một tài liệu bổ sung vô giá cho sách giáo khoa và giáo trình đại học ngành vật lý, phục vụ một phạm vi đối tượng rất rộng, từ các giáo viên vật lý phổ thông, giảng viên các trường đại học cho đến học sinh các lớp chuyên lý, sinh viên khoa vật lý và sinh viên các lớp tài năng của các trường đại học khoa học tự nhiên, đặc biệt là cho những ai muốn du học ở Mỹ.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trân trọng giới thiệu bộ sách tới độc giả.

**NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM**

## LỜI NÓI ĐẦU

*Làm bài tập là một việc rất yêu và quan trọng trong quá trình học Vật lý nhằm cung cấp lý thuyết đã học và trau dồi kỹ năng thực hành. Trong cuốn **Nhiệt động lực học và Vật lý thống kê** có 367 bài tập và lời giải: nhiệt động lực học (159 bài) và vật lý thống kê (208 bài). Hầu hết các bài chọn đưa vào cuốn sách này đều phù hợp với chương trình vật lý bậc đại học và sau đại học của chuyên ngành **Nhiệt động lực học** và **Vật lý thống kê**. Tuy nhiên, cuốn sách cũng giới thiệu một số bài tập đòi hỏi phải sử dụng kiến thức cũng như kỹ năng vẫn còn khá xa lạ với người học. Ngoài ra, một số kết quả nghiên cứu gần đây cũng được đưa vào cuốn sách này, nhằm giúp người học không chỉ nắm bắt lý thuyết cơ bản mà còn có thể vận dụng kiến thức cơ bản một cách sáng tạo vào việc học tập và nghiên cứu.*

## MỤC LỤC

Lời Nhà xuất bản	iii
Lời nói đầu	v
Mục lục	vii
<b>Phần I: Nhiệt động lực học</b>	<b>1</b>
1. Trạng thái nhiệt động lực học và nguyên lý thứ nhất (1001-1030)	3
2. Nguyên lý thứ hai và Entropy (1031-1072)	28
3. Các hàm nhiệt động và các điều kiện cân bằng (1073-1105)	70
4. Chuyển pha và cân bằng pha (1106-1147)	105
5. Nhiệt động lực học không cân bằng (1148-1159)	144
<b>Phần II: Vật lý thống kê</b>	<b>157</b>
1. Xác suất và Entropy thống kê (2001-2013)	159
2. Thống kê Maxwell-Boltzmann (2014-2062)	172
3. Các thống kê Bose-Einstein và Fermi-Dirac (2063-2115)	225
4. Tập hợp thống kê (2116-2148)	288
5. Thuýết động học chất khí (2149-2208)	334

## **PHẦN I**

# **NHIỆT ĐỘNG LỰC HỌC**

## 1. TRẠNG THÁI NHIỆT ĐỘNG LỰC HỌC VÀ NGUYÊN LÝ THỨ NHẤT (1001-1030)

### 1001

Mô tả tóm tắt nguyên lý cơ bản của những dụng cụ đo nhiệt độ sau đây và nêu ngắn gọn lợi ích đặc biệt của mỗi dụng cụ: nhiệt kế khí đẳng tích, nhiệt kế cǎp nhiệt điện và nhiệt kế tecmisto.

(Wisconsin)

#### Lời giải:

**Nhiệt kế khí đẳng tích:** Chế tạo dựa theo nguyên lý áp suất của chất khí thay đổi theo nhiệt độ của nó trong khi thể tích giữ không đổi. Một cách gần đúng nó có thể dùng như một nhiệt kế khí lý tưởng.

**Nhiệt kế cǎp nhiệt điện:** Chế tạo dựa theo nguyên lý suất nhiệt điện động thay đổi theo nhiệt độ. Mọi liên hệ giữa suất nhiệt điện động đó và nhiệt độ là

$$\varepsilon = a + bt + ct^2 + dt^3 .$$

ở đây  $\varepsilon$  là suất nhiệt điện động,  $t$  là hiệu nhiệt độ của hai môi női,  $a, b, c$  và  $d$  là những hằng số. Khoảng đo của cǎp nhiệt điện rất rộng từ  $-200^\circ\text{C}$  đến  $1600^\circ\text{C}$ . Trong thực tiễn, nó được dùng như một nhiệt kế tiêu chuẩn với khoảng đo từ  $630,74^\circ\text{C}$  đến  $1064,43^\circ\text{C}$ .

**Nhiệt kế tecmisto:** Chúng ta đo nhiệt độ bằng cách đo điện trở của kim loại. Tecmisto làm bằng platin nguyên chất có độ chính xác rất tốt, khoảng đo rất rộng và thường dùng như một nhiệt kế tiêu chuẩn trong khoảng từ  $13,81\text{ K}$  đến  $903,89\text{ K}$ .

### 1002

Mô tả tóm tắt ba dụng cụ đo nhiệt độ chính xác, nói sơ qua khoảng đo của chúng và nêu một ưu điểm quan trọng của mỗi dụng cụ. Phải nêu ít nhất một dụng cụ có khả năng đo nhiệt độ dưới  $1\text{ K}$ .

(Wisconsin)

#### Lời giải:

1. **Nhiệt kế từ:** Nguyên lý của nó dựa vào định luật Curie  $\chi = C/T$ , trong đó  $\chi$  là độ cảm của chất thuận từ được dùng,  $T$  là nhiệt độ tuyệt đối và  $C$  là

một hằng số. Nó có thể đo được nhiệt độ dưới 1 K.

**2. Hoả kế quang học:** Dựa trên nguyên lý là ta có thể tìm nhiệt độ của một vật nóng bằng cách đo năng lượng bức xạ từ chúng rồi dùng công thức bức xạ. Trong khi đo không được để dụng cụ này tiếp xúc trực tiếp với vật cần đo. Do đó nó thường dùng để đo nhiệt độ của các thiên thể.

**3. Nhiệt kế áp suất hơi:** Đây là loại nhiệt kế dùng để đo các nhiệt độ thấp. Nguyên lý như sau: Có một mối liên hệ xác định giữa áp suất hơi bao hoà của một chất tinh khiết (về mặt hoá học) với điểm sôi của nó. Nếu biết mối liên hệ này ta có thể xác định được nhiệt độ bằng cách đo áp suất hơi. Có thể đo nhiệt độ lớn hơn 14 K và nó là nhiệt kế thường dùng để đo nhiệt độ thấp.

### 1003

Một băng lưỡng kim có độ dày  $x$  ở nhiệt độ  $T$  là thẳng. Bán kính cong  $R$  của băng là bao nhiêu khi nung nóng đến nhiệt độ  $T + \Delta T$ ? Hệ số giãn nở dài của hai kim loại lần lượt là  $\alpha_1$  và  $\alpha_2$  với  $\alpha_2 > \alpha_1$ . Có thể giả thiết độ dày của mỗi kim loại là  $x/2$  và  $x \ll R$ .

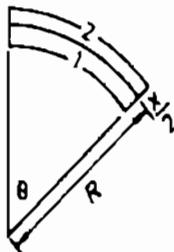
(Wisconsin)

**Lời giải:**

Giả sử chiều dài ban đầu là  $l_0$ . Sau khi nung nóng, chiều dài trung bình của hai băng kim loại lần lượt là

$$l_1 = l_0(1 + \alpha_1 \Delta T), \quad (1)$$

$$l_2 = l_0(1 + \alpha_2 \Delta T). \quad (2)$$



Hình 1.1

Giả thiết bán kính cong là  $R$ , góc ở tâm của băng là  $\theta$ , sự thay đổi về độ dày

là không đáng kể, ta có

$$\begin{aligned} l_2 &= \left( R + \frac{x}{4} \right) \theta, \quad l_1 = \left( R - \frac{x}{4} \right) \theta, \\ l_2 - l_1 &= \frac{x}{2} \theta = \frac{x}{2} \frac{l_1 + l_2}{2R} = \frac{x l_0}{4R} [2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta T]. \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (1) và (2) ta thu được

$$l_2 - l_1 = l_0 \Delta T (\alpha_2 - \alpha_1), \quad (4)$$

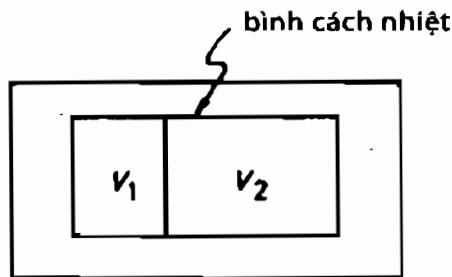
(3) và (4) cho ta

$$R = \frac{x}{4} \frac{[2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta T]}{(\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T}.$$

### 1004

Một khí lý tưởng lúc đầu được giữ ở thể tích  $V_1$  trong một bình cách nhiệt có thể tích  $V_1 + V_2$ . Phần còn lại của bình được rút chân không. Sau đó bỏ vách ngăn đi, và chất khí giãn nở chiếm thể tích toàn bình. Nếu nhiệt độ ban đầu của khí là  $T$ , thì nhiệt độ cuối cùng của nó là bao nhiêu?

(Wisconsin)



Hình 1.2

Lời giải:

Đây là quá trình giãn nở tự do đoạn nhiệt của khí lý tưởng. Nội năng không thay đổi do đó nhiệt độ cũng không thay đổi, vậy nhiệt độ cuối cùng vẫn là  $T$ .

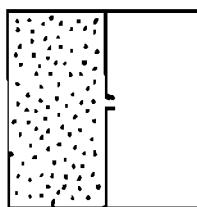
**1005**

Một buồng cách nhiệt chia thành hai nửa bằng nhau. Nửa trái chứa khí lý tưởng ở nhiệt độ  $T_0$ , nửa phải là chân không. Một lỗ nhỏ được mở giữa hai nửa để khí đi qua đó cho đến khi hệ cân bằng. Nhiệt không trao đổi với các vách buồng. Tìm nhiệt độ cuối cùng của hệ?

(Columbia)

**Lời giải:**

Khi lỗ mở khí, tràn liên tục qua nửa buồng phải cho đến khi cân bằng. Trong quá trình đó, nội năng  $E$  của hệ không thay đổi. Vì  $E$  phụ thuộc vào nhiệt độ  $T$  chỉ đối với khí lý tưởng cho nên nhiệt độ cân bằng vẫn là  $T_0$ .



Hình 1.3

**1006**

Định nghĩa nhiệt dung  $C_v$  và dựa vào nguyên lý I tính giá trị bằng số đối với một đồng xu bằng đồng trong túi của bạn, được phép dùng kiến thức vật lý phù hợp nhất hoặc ước tính các thông số cần thiết.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

$C_v = (dQ/dT)_v$ . Tử số của đồng là 64 và đồng xu nặng khoảng 32 g tức là 0,5 mol. Như vậy  $C_v = 0,5 \times 3R = 13 \text{ J/K}$ .

**1007**

Xác định nhiệt dung riêng của granite trong các giá trị sau: 0,02, 0,2, 20, 2000 cal/g·K.

(Columbia)

**Lời giải:**

Thành phần chính của granite là  $\text{CaCO}_3$ ; nguyên tử lượng là 100. Nhiệt dung riêng là  $C = 3R/100 = 0,25 \text{ cal/g}\cdot\text{K}$ . Như vậy câu trả lời đúng nhất là  $0,2 \text{ cal/g}\cdot\text{K}$ .

**1008**

Hình vẽ dưới đây mô tả thiết bị dùng để xác định tỉ số  $C_p/C_v$  đối với một chất khí theo phương pháp của Clement và Desormes. Một chai dung tích vừa phải (độ vài lít) gắn với khóa  $H$  và áp kế  $M$ . Độ chênh lệch giữa áp suất trong và ngoài chai có thể xác định bằng hiệu số độ cao của hai nhánh trong áp kế. Bơm chất khí cần nghiên cứu vào chai với áp suất hơi lớn hơn áp suất bên ngoài. Chai được để yên (khóa  $H$  đóng) cho đến khi nhiệt độ khí trong chai bằng nhiệt độ bên ngoài. Giả sử số chỉ của áp kế là  $h_i$ . Sau đó khóa  $H$  được mở trong thời gian rất ngắn đủ để áp suất bên trong bằng áp suất khí quyển (khi đó áp kế chỉ  $h = 0$ ). Với khóa  $H$  đóng, chai lại được để yên một lát cho đến khi nhiệt độ trong bằng nhiệt độ ngoài. Giả sử cuối cùng số chỉ của áp kế là  $h_f$ . Từ các giá trị  $h_i$  và  $h_f$  tính được  $C_p/C_v$ .

(a) Thiết lập một biểu thức đối với  $C_p/C_v$  theo  $h_i$  và  $h_f$  trong thí nghiệm trên.

(b) Giả thiết chất khí ở đây là ôxi, hãy tiên đoán về mặt lý thuyết đối với  $C_p/C_v$  ở  $20^\circ\text{C}$  trong khuôn khổ cơ học thống kê.

(UC, Berkeley)



Hình 1.4

**Lời giải:**

(a) Phương trình trạng thái khí lý tưởng là  $pV = nkT$ . Vì  $T, V$  đầu và cuối của khí trong chai là như nhau nên ta có  $p_f/p_i = n_f/n_i$ .

Trong đó  $n_f/n_i = V/V'$ , ở đây  $V'$  là thể tích khí ban đầu trong chai

giản nở đoạn nhiệt tới áp suất  $p_0$ . Do đó

$$\frac{V}{V'} = \left( \frac{p_0}{p_i} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \frac{p_f}{p_i} = \left( \frac{p_0}{p_i} \right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$\gamma = \frac{\ln \frac{p_i}{p_0}}{\ln \frac{p_f}{p_i}} = \frac{\ln \left( 1 + \frac{h_i}{h_0} \right)}{\ln \left( 1 + \frac{h_i}{h_0} \right) - \ln \left( 1 + \frac{h_f}{h_0} \right)}.$$

Vì  $h_i/h_0 \ll 1$  và  $h_f/h_0 \ll 1$ , ta có  $\gamma = h_i/(h_i - h_f)$ .

(b) Ôxi gồm những phân tử lưỡng nguyên tử. Khi  $t = 20^\circ\text{C}$ , chỉ có chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay của phân tử đóng góp vào nhiệt dung riêng. Do đó

$$C_v = \frac{5R}{2}, \quad C_p = \frac{7R}{2}, \quad \gamma = \frac{7}{5}.$$

### 1009

(a) Từ nguyên lý thứ nhất của nhiệt động lực học và những định nghĩa  $c_p$  và  $c_v$ , chứng minh rằng

$$c_p - c_v = \left[ p + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

ở đây  $c_p$  và  $c_v$  lần lượt là nhiệt dung riêng mol đẳng áp và đẳng tích;  $U$  và  $V$  là nội năng và thể tích của một mol.

(b) Dùng kết quả trên cùng với biểu thức

$$p + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

tìm được  $c_p - c_v$  đối với khí Van der Waals, tức là khí có phương trình trạng thái là

$$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT.$$

Dùng kết quả này chứng tỏ rằng khi  $V \rightarrow \infty$  tại  $p$  không đổi ta thu được biểu thức của  $c_p - c_v$  đối với khí lý tưởng.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**(a) Từ  $H = U + pV$  ta thu được

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

Giả sử  $U = U[T, V(T, p)]$ . Biểu thức trên đây trở thành

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

Từ đó suy ra

$$c_p - c_v = \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

(b) Đối với khí Van der Waals ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V &= \frac{R}{(V-b)} , \\ \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p &= R \Bigg/ \left[\frac{RT}{V-b} - \frac{2a(V-b)}{V^3}\right] . \end{aligned}$$

Từ đó

$$c_p - c_v = \frac{R}{1 - 2a(1-b/V)^2/VRT} .$$

Khi  $V \rightarrow \infty$ ,  $c_p - c_v \rightarrow R$  chính là kết quả của khí lý tưởng.**1010**

Một mol khí tuân theo phương trình trạng thái Van der Waals. Nếu nội năng một mol của nó cho bởi  $u = cT - a/V$  (trong đó  $V$  là thể tích mol,  $a$  là một trong những hằng số trong phương trình trạng thái, và  $c$  là một hằng số). Hãy tính nhiệt dung mol  $C_v$  và  $C_p$ .

(Wisconsin)

Thay vào (\*) ta tìm được

$$C_p - C_v = 3\alpha \frac{M}{\rho} p .$$

### 1012

Một mol khí lý tưởng đơn nguyên tử ban đầu ở nhiệt độ  $T_0$  giãn nở từ thể tích  $V_0$  đến  $2V_0$ , trong điều kiện (a) nhiệt độ không đổi, (b) áp suất không đổi.

Hãy tính công giãn nở và nhiệt lượng hấp thụ bởi chất khí trong mỗi trường hợp.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Trong điều kiện ở nhiệt độ không đổi  $T_0$ , công khí giãn nở là

$$W = \int_A^B pdV = RT_0 \int_{V_0}^{2V_0} dV/V = RT_0 \ln 2 .$$

Vì nội năng không biến thiên, tức độ biến thiên của nội năng bằng không, nên nhiệt lượng hấp thụ bởi chất khí là

$$Q = W = RT_0 \ln 2 .$$

(b) Trong điều kiện áp suất  $p$  không đổi, công khí giãn nở là

$$W = \int_{V_0}^{2V_0} pdV = pV_0 = RT_0 .$$

Độ tăng nội năng là

$$\Delta U = C_v \Delta T = \frac{3}{2} R \Delta T = \frac{3}{2} p \Delta V = \frac{3}{2} p V_0 = \frac{3}{2} RT_0 .$$

Như vậy nhiệt lượng hấp thụ bởi chất khí là

$$Q = \Delta U + W = \frac{5}{2} RT_0 .$$

## 1013

Đối với chất khí lý tưởng lưỡng nguyên tử ở gần nhiệt độ phòng thì phần của nhiệt lượng nhận được chuyển thành công là bao nhiêu nếu chất khí giãn nở trong điều kiện áp suất không đổi? Nhiệt độ không đổi?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Trong quá trình giãn nở ở áp suất không đổi  $p$ , giả thiết rằng thể tích tăng từ  $V_1$  đến  $V_2$  và nhiệt độ thay đổi từ  $T_1$  đến  $T_2$ , ta có

$$\begin{cases} pV_1 = nRT_1 \\ pV_2 = nRT_2 \end{cases}$$

Trong quá trình này công do hệ thực hiện đối với bên ngoài là  $W = p(V_2 - V_1) = nR\Delta T$  và độ tăng nội năng của hệ là

$$\Delta U = C_v\Delta T .$$

**Do đó**

$$\frac{W}{Q} = \frac{W}{\Delta U + W} = \frac{nR}{C_v + nR} = \frac{2}{7} .$$

Trong quá trình giãn nở ở nhiệt độ không đổi, nội năng không thay đổi. Từ đó

$$W/Q = 1 .$$

## 1014

Một máy nén được thiết kế để nén không khí nay dùng để nén hêli. Người ta thấy rằng máy nén quá nhiệt. Hãy giải thích hiệu ứng này, với giả thiết rằng máy nén là chuẩn đoạn nhiệt và áp suất ban đầu như nhau đối với cả hai loại khí.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Phương trình trạng thái khí lý tưởng là

$$pV = nRT .$$

Phương trình mô tả quá trình đoạn nhiệt là

$$p\left(\frac{V}{V_0}\right)^\gamma = p_0,$$

ở đây  $\gamma = c_p/c_v$ ,  $p_0$  và  $p$  tương ứng là áp suất ban đầu và cuối cùng,  $V_0$  và  $V$  là các thể tích. Vì  $V_0 > V$  và  $\gamma_{He} > \gamma_{KK}$  ( $\gamma_{He} = 7/5$ ,  $\gamma_{KK} = 5/3$ ), ta có

$$p_{He} > p_{KK} \quad \text{và} \quad T_{He} > T_{KK}.$$

### 1015

Hãy tính nhiệt độ sau khi nén đoạn nhiệt một chất khí từ điều kiện ban đầu 1 atm và 300 K tới áp suất 10 atm (a) đối với không khí, (b) đối với He (giả thiết cả hai khí là lý tưởng)

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Quá trình đoạn nhiệt của một khí lý tưởng tuân theo định luật

$$T_B = (p_B/p_A)^{(\gamma-1)/\gamma} T_A = 10^{(\gamma-1)/\gamma} \times 300 \text{ K}.$$

(a) Đối với không khí,  $\gamma = C_p/C_v = 1,4$ , do đó  $T_B = 5,8 \times 10^2 \text{ K}$ .

(b) Đối với He,  $\gamma = C_p/C_v = 5/3$ , do đó  $T_B = 7,5 \times 10^2 \text{ K}$ .

### 1016

(a) Cho một mol khí lý tưởng ở  $t = 0^\circ\text{C}$ , tính công thực hiện trong quá trình giãn nở đẳng nhiệt từ thể tích  $V_0$  đến  $10V_0$ .

(b) Cho một chất khí lý tưởng ở nhiệt độ ban đầu  $t_i = 0^\circ\text{C}$ , tìm nhiệt độ cuối  $t_f$  khi thể tích giãn nở thuận nghịch và đoạn nhiệt tới  $10V_0$ .

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

$$(a) W = \int_{V_0}^{10V_0} pdV = \int_{V_0}^{10V_0} \frac{RT}{V} dV = RT \ln 10 = 5,2 \times 10^3 \text{ J}.$$

(b) Kết hợp phương trình mô tả quá trình đoạn nhiệt  $pV^\gamma = \text{const}$  và phương trình trạng thái  $pV = RT$ , ta nhận được  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ . Do đó

$$T_f = T_i \left( \frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1}.$$

Nếu phân tử khí lý tưởng là đơn nguyên tử, thì  $\gamma = 5/3$  và do đó  $t_f = 59$  K hay  $-214^\circ\text{C}$ .

## 1017

- (a) Tính nhiệt lượng cần thiết để nâng nhiệt độ của 1000 g khí nitơ từ  $-20^\circ\text{C}$  đến  $100^\circ\text{C}$  khi áp suất không đổi?  
 (b) Tính độ tăng nội năng của khí nitơ?  
 (c) Tính công ngoại lực đã thực hiện?  
 (d) Cần một nhiệt lượng là bao nhiêu nếu giữ thể tích không đổi?

Cho nhiệt dung riêng đẳng tích  $c_v = 5 \text{ cal/mol} \cdot {}^\circ\text{C}$  và  $R = 2 \text{ cal/mol} \cdot {}^\circ\text{C}$ .

(Wisconsin)

**Lời giải:**

- (a) Ta xem nitơ là một khí lý tưởng. Nhiệt lượng cần thiết là

$$Q = n(c_v + R)\Delta T = \frac{1000}{28}(5 + 2) \times 120 = 30 \times 10^3 \text{ cal}.$$

- (b) Độ tăng nội năng là

$$\begin{aligned}\Delta U &= nc_v\Delta T = \frac{100}{28} \times 5 \times 120 \\ &= 21 \times 10^3 \text{ cal}.\end{aligned}$$

- (c) Công ngoại lực là

$$W = Q - \Delta U = 8,6 \times 10^3 \text{ cal}.$$

- (d) Nếu quá trình là đẳng tích thì nhiệt lượng cần thiết là

$$Q = nc_v\Delta T = 21 \times 10^3 \text{ cal}.$$

## 1018

10 lít khí ở áp suất khí quyển được nén đẳng nhiệt tới thể tích 1 lít và sau đó cho giãn đoạn nhiệt đến 10 lít.

- (a) Vẽ đồ thị quá trình trong hệ toạ độ  $pV$  với khí đơn nguyên tử?  
 (b) Vẽ đồ thị tương tự đối với khí lưỡng nguyên tử?  
 (c) Tính công toàn phần mà hệ đã nhận hoặc đã thực hiện?  
 (d) Công này tăng hay giảm đối với khí lưỡng nguyên tử?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Theo đề bài  $V_A = 10 \text{ l}, V_B = 1 \text{ l}, V_C = 10 \text{ l}$  và  $p_A = 1 \text{ atm}$ .

$A \rightarrow B$  là một quá trình đẳng nhiệt, nên ta có

$$pV = \text{const.} \text{ hay } p_A V_A = p_B V_B ,$$

Suy ra

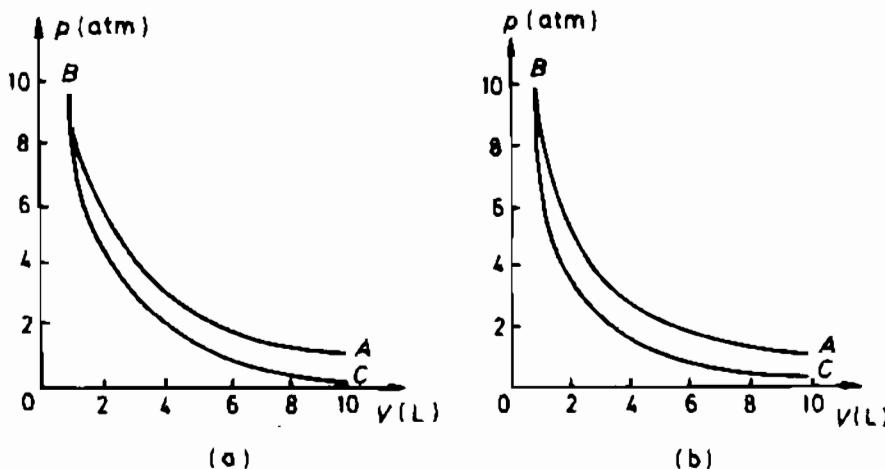
$$p_B = \frac{V_A}{V_B} p_A = 10 \text{ atm} .$$

(Đường cong  $AB$  của hai loại khí giống nhau.)

$B \rightarrow C$  là quá trình đoạn nhiệt, nên ta có

$$pV^\gamma = \text{const, hoặc } p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma ,$$

$$p_C = \left( \frac{V_B}{V_C} \right)^\gamma p_B = 10^{1-\gamma} \text{ atm} .$$



Hình 1.5

(a) Đối với khí đơn nguyên tử ta có

$$\gamma = 5/3, p_C = 10^{-2/3} = 0,215 \text{ atm} .$$

(b) Đối với khí lưỡng nguyên tử ta có

$$\gamma = 7/5, p_C = 10^{-2/5} = 0,398 \text{ atm} .$$

Đồ thị biểu diễn hai quá trình này được cho trên hình 1.5 (Đường cong BC của khí đơn nguyên tử (a) ở dưới đường cong của khí lưỡng nguyên tử (b)).

(c) Trong mỗi trường hợp, đường cong AB đối với quá trình nén đều ở cao hơn đường cong BC của quá trình giãn nén ở dây hệ nhận công. Vì  $p_C$  (khí đơn nguyên tử)  $< p_C$  (khí lưỡng nguyên tử) nên công thực hiện trên khí đơn nguyên tử lớn hơn công của khí lưỡng nguyên tử.

### 1019

Một khí lý tưởng chứa trong chai lớn thể tích  $V$ . Một ống thuỷ tinh tiết diện ngang  $A$  trong chứa một viên bi lắp vừa khít với chai. Áp suất cân bằng trong chai hơi cao hơn áp suất khí quyển  $p_0$  do có trọng lượng của viên bi. Nếu viên bi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng một khoảng nhỏ thì nó sẽ dao động điều hoà (bỏ qua ma sát). Nếu các trạng thái của chất khí biểu diễn một quá trình đoạn nhiệt chuẩn tinh và  $\gamma$  là tỉ số các nhiệt dung riêng thì hãy tìm mối liên hệ giữa tần số dao động  $f$  và các biến số của bài toán.

(UC, Berkeley)



Hình 1.6

**Lời giải:**

Giả thiết áp suất trong chai là  $p$ . Vì quá trình là **đoạn nhiệt** ta có

$$pV^\gamma = \text{const} ,$$

Suy ra

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 .$$

Điều này có thể viết lại như sau:  $F = Adp = -kx$ , ở đây  $F$  là lực tác dụng lên

viên bi,  $x = dV/A$  và  $k = \gamma A^2 p/V$ . Nhớ rằng  $p = p_0 + mg/A$ , ta có

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma A^2 (p_0 + \frac{mg}{A})}{Vm}} .$$

### 1020

Vận tốc của sóng dọc với biên độ nhỏ trong chất khí lý tưởng là

$$C = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

ở đây  $p$  là áp suất khí bao quanh và  $\rho$  là mật độ khí tương ứng. Hãy thiết lập biểu thức đối với:

- (a) Vận tốc của âm trong chất khí được nén hoặc giãn (làm loãng) đẳng nhiệt.
- (b) Vận tốc của âm trong chất khí được nén hoặc giãn (làm loãng) đoạn nhiệt.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Quá trình đẳng nhiệt của một khí lý tưởng tuân theo phương trình  $pV = \text{const}$ ; và quá trình đoạn nhiệt của khí lý tưởng tuân theo phương trình  $pV^\gamma = \text{const}$ . Do đó, ta có thể xét chung cho cả hai quá trình bằng cách dùng phương trình  $pV^t = \text{const}$ . Phương trình vi phân của quá trình này là

$$\frac{dp}{p} + t \frac{dV}{V} = 0 .$$

Như vậy

$$\left( \frac{dp}{dV} \right) = -t \frac{p}{V} .$$

Với  $\rho = M/V$ , ta có

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{dp}{dV} \left( \frac{dV}{d\rho} \right) = \left( -t \frac{p}{V} \right) \left( -\frac{M}{\rho^2} \right) = t \frac{RT}{M} .$$

Do đó

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{tRT}{M}} .$$

(a) Đối với quá trình đẳng nhiệt:  $t = 1$ , do đó  $c = \sqrt{RT/M}$ .

(b) Đối với quá trình đoạn nhiệt:  $t = \gamma$ , do đó  $c = \sqrt{\gamma RT/M}$ .

### 1021

Hai hệ có nhiệt dung tương ứng là  $C_1$  và  $C_2$  tiếp xúc nhiệt và có nhiệt độ chung  $T_f$ . Nếu nhiệt độ ban đầu của hệ 1 là  $T_1$  thì nhiệt độ ban đầu của hệ 2 là bao nhiêu? (Giả thiết rằng năng lượng tổng cộng của hai hệ giữ không đổi.)  
(Wisconsin)

**Lời giải:**

Giả thiết rằng nhiệt độ ban đầu của hệ 2 là  $T_2$ . Theo định luật bảo toàn năng lượng thì nhiệt lượng tỏa ra từ hệ 1 phải bằng nhiệt lượng hấp thụ bởi hệ 2, tức là

$$C_1(T_f - T_1) = C_2(T_2 - T_f).$$

Suy ra

$$T_2 = \frac{C_1}{C_2}(T_f - T_1) + T_f.$$

### 1022

Một ống dây (xôlênhôit) lớn dùng trong một thí nghiệm vật lý được tạo bởi một lớp dây dẫn tiết diện  $4\text{ cm} \times 2\text{ cm}$  có lỗ làm lạnh bằng nước tiết diện  $2\text{ cm} \times 1\text{ cm}$  bên trong dây dẫn. Ống gồm 100 vòng, dài 4m, đường kính 3m (bề dày lớp cách điện có thể bỏ qua). Hai đầu ống là những tấm thép tròn để tạo ra một trường đều và làm cho từ thông đi qua cấu trúc hình trụ bằng thép ở ngoài ống quay trở lại ống, như được chỉ rõ trên sơ đồ. Từ trường được tạo ra có cảm ứng từ  $0,25\text{ T}$  và dây dẫn làm bằng nhôm.

(a) Tính công suất cần phải cung cấp để tạo ra trường trên, và điện áp cung cấp?

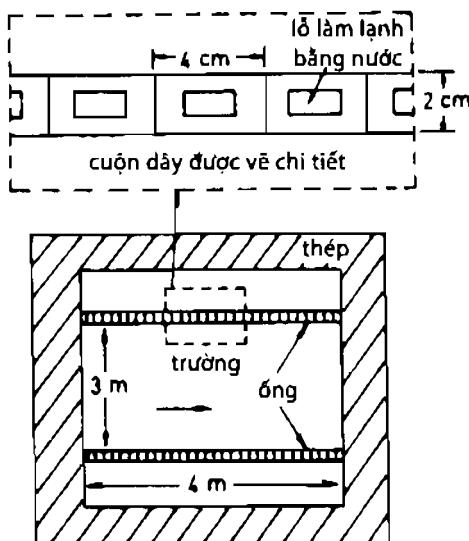
(b) Tính lưu lượng nước (lit/giây) cần cung cấp để giữ độ tăng nhiệt độ của nước là  $40^\circ\text{C}$ ? Bỏ qua tất cả sự mất nhiệt từ ống trừ nhiệt mất theo nước.

(c) Tính áp suất tác dụng lên ống hướng ra bên ngoài do từ lực?

(d) Nếu ống được cung cấp năng lượng bằng cách nối với một điện áp được thiết kế và tính toán ở câu (a) thì phải cần một thời gian bao lâu để tăng

dòng từ 0 đến 99% giá trị thiết kế? Bỏ qua công suất cung cấp cho cảm kháng và điện trở. Điện trở suất của nhôm là  $3 \times 10^{-8}$  ôm-mét. Giả sử thép ở dưới xa giới hạn bão hòa.

(CUSPEA)



Hình 1.7

### Lời giải:

(a) Cảm ứng từ trong cuộn dây được tính theo công thức  $B = \mu_0 NI/L$ , trong đó  $N$  là số vòng dây,  $L$  là chiều dài của ống dây. Do đó cường độ dòng điện trong ống dây là

$$I = \frac{BL}{\mu_0 N} = \frac{0,25 \times 4}{4\pi \times 10^{-7} \times 100} = 7960 \text{ A} .$$

là chiều dài của ống dây. Do đó cường độ dòng điện trong ống dây là  $R = \rho L/A$ . Do đó điện trở, điện áp và công suất tương ứng là

$$R = \frac{(3 \times 10^{-8})(100 \times 2\pi \times 1,5)}{(4 \times 2 - 2 \times 1) \times 10^{-4}} = 0,0471 \Omega$$

$$V = RI = 375 \text{ V}$$

$$P = VI = 2,99 \times 10^3 \text{ kW} .$$

(b) Gọi lưu lượng nước làm lạnh là  $W$ . Khi đó  $\rho W C \Delta T = P$ , ở đây  $\rho$  là khối lượng riêng của nước,  $C$  là nhiệt dung và  $\Delta T$  là độ tăng nhiệt độ của

nước. Từ đó ta có

$$W = \frac{p}{\rho C \Delta T} = \frac{2,99 \times 10^3 \times 10^3}{1 \times 4190 \times 40} = 17,8 \text{ l/s}.$$

(c) Áp suất từ là

$$\rho = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(0,25)^2}{2(4\pi \times 10^{-7})} = 2,49 \times 10^4 \text{ N/m}^2.$$

(d) Hằng số thời gian của mạch điện là

$$\tau = L/R, \quad \text{với} \quad L = N\Phi/I,$$

ở đây  $L$  là độ tự cảm,  $R$  là điện trở,  $N$  là số vòng dây,  $I$  là cường độ dòng điện và  $\Phi$  là từ thông. Do đó ta có

$$L = 100 \times 0,25\pi \times (1,5)^2 / 7960 = 0,0222 \text{ H}$$

Và

$$\tau = 0,0222 / 0,0471 = 0,471 \text{ s}.$$

Độ biến thiên của cường độ dòng điện trước khi ổn định được cho bởi biểu thức

$$I(t) = I_{\max}[1 - \exp(-t/\tau)].$$

Khi  $I(t)/I_{\max} = 99\%$ , ta có

$$t = \tau \ln 100 = 4,6\tau \approx 2,17 \text{ s}.$$

### 1023

Khảo sát một hình cầu đèn bán kính  $R$  ở nhiệt độ  $T$ , phát xạ đến các vật đèn ở xa xung quanh có nhiệt độ  $T = 0 \text{ K}$ .

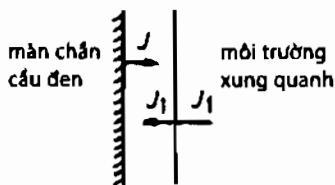
(a) Xung quanh hình cầu có một màn chắn nhiệt có dạng vỏ đèn đặt gần hình cầu, nhiệt độ của nó được xác định bởi sự cân bằng nhiệt. Hỏi nhiệt độ của vỏ là bao nhiêu và ảnh hưởng của vỏ lên công suất bức xạ tổng cộng ra xung quanh là bao nhiêu?

(b) Công suất bức xạ toàn phần ảnh hưởng bởi các màn chắn nhiệt phụ như thế nào? (Chú thích: đây là một mô hình sơ lược của một ngôi sao có đám mây bụi bao quanh.)

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

- (a) Tại trạng thái cân bằng bức xạ  $J = J_1 = J_2$  hay  $J_1 = J/2$ . Do đó  $T_1^4 = T^4/2$ , hay  $T_1 = \sqrt[4]{\frac{T^4}{2}} = \frac{T}{\sqrt[4]{2}}$ .



Hình 1.8

- (b) Màn chắn nhiệt làm giảm công suất bức xạ tổng cộng còn một nửa giá trị ban đầu. Đó là vì nó đã bức xạ một phần năng lượng đã hấp thụ trả lại cho quả cầu đen.

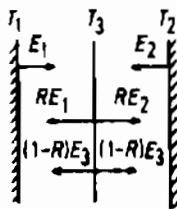
1024

Trong một bình chân không, hai lớp làm lạnh, cách nhiệt (bình Dewars), nguồn chủ yếu truyền nhiệt vào bình bên trong là do bức xạ qua lớp vỏ chân không. Một cách để giảm điều này là đặt một màn chắn nhiệt trong khoảng chân không giữa bình trong và bình ngoài. Lý tưởng hóa tình trạng này bằng cách khảo sát hai tấm mỏng rất rộng có độ phát xạ bằng 1 phân cách nhau bằng một khoảng chân không. Nhiệt độ các tấm mỏng là  $T_1$  và  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ). Hãy tính năng thông (ở điều kiện cân bằng) giữa hai tấm này. Khảo sát một tấm thứ ba (màn chắn nhiệt) đặt giữa hai tấm trên có hệ số phản xạ  $R$ . Tìm nhiệt độ cân bằng của tấm này. Tính năng thông từ tấm 2 sang tấm 1 khi đã đặt màn chắn nhiệt.

Gọi  $T_2$  là nhiệt độ phòng,  $T_1$  là nhiệt độ He lỏng (4,2K), tìm nhiệt độ của màn chắn nhiệt có hệ số phản xạ 95%. So sánh năng thông khi có và không có màn chắn nhiệt.

$$(\sigma = 0,55 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2\text{K})$$

(UC, Berkeley)



Hình 1.9

**Lời giải:**

Khi không có màn chắn, nhiệt năng thông là

$$J = E_2 - E_1 = \sigma(T_2^4 - T_1^4)$$

Khi có màn chắn nhiệt

$$J^* = E_2 - RE_2 - (1 - R)E_3,$$

$$J^* = (1 - R)E_3 + RE_1 - E_1$$

Từ hai phương trình trên suy ra  $E_3 = (E_1 + E_2)/2$ , hay  $T_3 = [(T_2^4 + T_1^4)/2]^{1/4}$ .  
Từ đó

$$J^* = (1 - R)(E_2 - E_1)/2 = (1 - R)J/2$$

Với  $T_1 = 4,2$  K,  $T_2 = 300$  K và  $R = 0,95$ , ta có

$$T_3 = 252$$
 K và  $J^*/J = 0,025$ .

**1025**

Hai tấm phẳng song song đặt trong chân không cách nhau một khoảng nhỏ so với kích thước dài của chúng, có nhiệt độ là  $T_1$  và  $T_2$  tương ứng ( $T_1 > T_2$ ).

(a) Nếu hai tấm không cho bức xạ truyền qua và có công suất phát xạ lần lượt là  $e_1$  và  $e_2$  thì hãy chứng minh rằng năng lượng toàn phần  $W$  truyền qua một đơn vị diện tích trong một giây là

$$W = \frac{E_1 - E_2}{\frac{E_1}{e_1} + \frac{E_2}{e_2} - 1},$$

ở đây  $E_1$  và  $E_2$  là công suất phát xạ của các vật đen có nhiệt độ  $T_1$  và  $T_2$  tương ứng.

(b) Suy ra giá trị của  $W$  nếu  $T_1 = 300$  K và  $T_2 = 4,2$  K, coi hai tấm là các vật đen.

(c)  $W$  sẽ là bao nhiêu nếu có thêm  $n$  vật đen phẳng giống hệt nhau đặt xen giữa hai tấm nói trong câu (b)?

( $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ ).

(SUNY Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Gọi  $f_1$  và  $f_2$  lần lượt là công suất phát xạ toàn phần (bức xạ cộng thêm phản xạ nhiệt) của hai tấm phẳng. Ta có

$$f_1 = e_1 + \left(1 - \frac{e_1}{E_1}\right) f_2, \quad f_2 = e_2 + \left(1 - \frac{e_2}{E_2}\right) f_1.$$

Giải ra ta được

$$f_1 = \frac{\frac{E_1 E_2}{e_1 e_2} (e_1 + e_2) - E_2}{\frac{E_1}{e_1} + \frac{E_2}{e_2} - 1},$$

$$f_2 = \frac{\frac{E_1 E_2}{e_1 e_2} (e_1 + e_2) - E_1}{\frac{E_1}{e_1} + \frac{E_2}{e_2} - 1}.$$

Suy ra

$$W = f_1 - f_2 = \frac{E_1 - E_2}{\frac{E_1}{e_1} + \frac{E_2}{e_2} - 1}.$$

(b) Đối với vật đen,  $W = E_1 - E_2 = \sigma(T_1^4 - T_2^4) = 460 \text{ W/m}^2$ .

(c) Giả sử  $n$  tấm phẳng đặt xen vào hai tấm ban đầu là những vật đen có nhiệt độ  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Khi đạt tới trạng thái cân bằng, ta có

$$T_1^4 - t_1^4 = t_1^4 - T_2^4, \quad \text{với } n = 1,$$

hay

$$t_1^4 = \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}, \quad W = \sigma(T_1^4 - t_1^4) = \frac{\sigma}{2}(T_1^4 - T_2^4).$$

$$T_1^4 - t_1^4 = t_1^4 - t_2^4 = t_2^4 - T_2^4, \quad \text{đối với } n = 2,$$

hay

$$t_1^4 = \frac{4}{3} \left( \frac{T_1^4}{2} + \frac{T_2^4}{4} \right) , \quad W = \frac{\sigma}{3} (T_1^4 - T_2^4) .$$

Tổng quát ta có

$$T_1^4 - t_1^4 = t_1^4 - t_2^4 = \dots = t_n^4 - T_2^4 .$$

hay

$$\begin{aligned} t_1^4 &= \frac{n}{n+1} T_1^4 - \frac{1}{n+1} T_2^4 , \\ W &= \sigma (T_1^4 - T_2^4) = \frac{\sigma}{n+1} (T_1^4 - T_2^4) . \end{aligned}$$

### 1026

Một vật đen hình cầu bán kính  $r$  ở nhiệt độ tuyệt đối  $T$  được bao quanh bằng một vỏ cầu mỏng đồng tâm, đen cả hai phía. Chứng minh rằng màn chắn bức xạ này làm giảm tốc độ lạnh đi của vật bằng một hệ số cho bởi hệ thức:  $aR^2/(R^2 + br^2)$ , và hãy tìm giá trị bằng số của các hệ số  $a$  và  $b$ .

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

Gọi nhiệt độ môi trường là  $T_0$ . Tốc độ tổn hao năng lượng của vật đen trước khi bị bao quanh bởi vỏ cầu là

$$Q = 4\pi r^2 \sigma (T^4 - T_0^4) .$$

Năng lượng tổn hao trong đơn vị thời gian của vật đen sau khi bị bao quanh bởi vỏ cầu mỏng là

$$Q' = 4\pi r^2 \sigma (T^4 - T_1^4), \text{ với } T_1 \text{ là nhiệt độ của vỏ.}$$

Năng lượng tổn hao trong một đơn vị thời gian của vỏ cầu là

$$Q'' = 4\pi R^2 \sigma (T_1^4 - T_0^4) .$$

vì  $Q'' = Q'$ , ta thu được

$$T_1^4 = (r^2 T^4 + R^2 T_0^4)/(R^2 + r^2) .$$

Từ đó suy ra  $Q'/Q = R^2/(R^2 + r^2)$ , tức là  $a = 1$  và  $b = 1$ .

## 1027

Hàng số mặt trời (thông lượng bức xạ tại bề mặt trái đất) vào khoảng  $0,1 \text{ W/cm}^2$ . Hãy tìm nhiệt độ của Mặt Trời khi xem nó là một vật đen.  
(MIT)

**Lời giải:**

Mật độ thông lượng bức xạ của Mặt Trời là

$J = \sigma T^4$ , ở đây  $\sigma = 5,7 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ . Từ đó suy ra  $\sigma T^4 (r_S/r_{SE})^2 = 0,1$ , trong đó bán kính của Mặt Trời  $r_S = 7,0 \times 10^5 \text{ km}$ , khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trời là  $r_{SE} = 1,5 \times 10^8 \text{ km}$ . Do đó

$$T = \left[ \frac{0,1}{\sigma} \left( \frac{r_{SE}}{r_S} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}} \approx 5 \times 10^3 \text{ K}.$$

## 1028

(a) Hãy ước lượng nhiệt độ bề mặt mặt trời theo góc trông  $\theta$  nhìn từ Trái Đất và nhiệt độ  $T_0$  của bề mặt trái đất. (Giả thiết rằng nhiệt độ bề mặt trái đất là đồng đều và tỉ phần bức xạ mặt trời bị mặt đất phản xạ là  $\varepsilon$ ). Dùng kết quả vừa thu được đánh giá thô nhiệt độ bề mặt mặt trời bằng cách cho các thông số những giá trị hợp lý.

(b) Tại sao bên trong một nhà kính không sưởi nóng trên mặt đất thường có nhiệt độ lớn hơn  $T_0$ . Về nguyên tắc có thể nói gì về giá trị cực đại của nhiệt độ này?

(Columbia)

**Lời giải:**

(a) Trái Đất bức xạ nhiệt đồng thời hấp thụ nhiệt từ bức xạ mặt trời. Giả thiết Mặt Trời là một vật đen. Do hiện tượng phản xạ, Trái Đất là một vật xám có độ phát xạ  $1 - \varepsilon$ . Điều kiện cân bằng là

$$(1 - \varepsilon) J_S 4\pi R_S^2 \cdot \pi R_E^2 / 4\pi r_{S-E}^2 = J_E \cdot 4\pi R_E^2,$$

ở đây  $J_S$  và  $J_E$  là mật độ năng lượng bức xạ tương ứng trên bề mặt mặt trời và trái đất,  $R_S$ ,  $R_E$  và  $r_{S-E}$  lần lượt là bán kính mặt trời, trái đất, và khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trời. Hiển nhiên  $R_S/r_{S-E} = \tan(\theta/2)$ . Từ định luật Stefan-Boltzman ta có

đối với Mặt Trời  $J_S = \sigma T_S^4$  ;

**Lời giải:**

(a) Bức xạ mà Trái Đất nhận được từ Mặt Trời trong một giây gần đúng là

$$q_{SE} = 4\pi R_S^2 (\sigma T_S^4) \frac{\pi R_E^2}{4\pi d^2} .$$

Bức xạ từ chính Trái Đất trong một giây là

$$q_E = 4\pi R_E^2 \cdot (\sigma T_E^4) .$$

Bỏ qua những nguồn nhiệt riêng của Trái Đất, theo định luật bảo toàn năng lượng ta có  $q_E = q_{SE}$ , suy ra

$$T_E^4 = \frac{R_S^2}{4d^2} T_S^4 ,$$

tức nhiệt độ của Trái Đất là

$$T_E = \sqrt{R_S/2d} \cdot T_S = 290 \text{ K} = 17^\circ\text{C} .$$

(b) Những góc nhìn Mặt Trời từ Trái Đất và góc nhìn Trái Đất từ Mặt Trời đều rất nhỏ, nên lực do bức xạ tác dụng lên Trái Đất là

$$F_E = \frac{q_E}{c} = \frac{1}{c} \frac{R_S^2}{d^2} \cdot \pi R_E^2 \cdot (\sigma T_S^4) = 6 \times 10^8 \text{ N} .$$

(c) Vì  $R_E \rightarrow R$ ,  $T = T_E = 17^\circ\text{C}$ ,

$$F = (R/R_E)^2 F_E = 1,7 \times 10^{-11} \text{ N} .$$

**1030**

Bằng giả thiết hợp lý, hãy ước tính nhiệt độ bề mặt của Hải Vương Tinh. Bỏ qua mọi nguồn nhiệt riêng của hành tinh này. Anh (chị) có tiên đoán gì về bề mặt hoặc khí quyển của hành tinh này?

Những số liệu thiên văn như sau: bán kính mặt trời =  $7 \times 10^5$  km; bán kính hải vương tinh =  $2,2 \times 10^4$  km; khoảng cách trung bình Trái Đất – Mặt Trời =  $1,5 \times 10^8$  km; khoảng cách trung bình Mặt Trời - Hải Vương Tinh =  $4,5 \times 10^9$  km;  $T_S = 6000$  K; năng suất bức xạ mặt trời khi tới Trái Đất =  $1,4 \text{ kW/m}^2$ ; hằng số Stefan – Boltzmann =  $5,7 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ .

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Giả thiết rằng bề mặt của Hải Vương Tinh và nhiệt động lực khí quyển của nó tương tự như của Trái Đất. Thông lượng bức xạ trên mặt trái đất là

$$J_E = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 / 4\pi R_{SE}^2 .$$

Điều kiện cân bằng trên bề mặt hải vương tinh cho ta

$$4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 \cdot \pi R_N^2 / 4\pi R_{SN}^2 = \sigma T_N^4 \cdot 4\pi R_N^2 .$$

Từ đó suy ra

$$R_{SE}^2 J_E / R_{SN}^2 = 4\sigma T_N^4 ,$$

hay

$$\begin{aligned} T_N &= (R_{SE}^2 J_E / 4\sigma R_{SN}^2)^{1/4} \\ &= \left[ \frac{(1,5 \times 10^8)^2}{(5,7 \times 10^9)^2} \cdot \frac{1,4 \times 10^3}{4 \times 5,7 \times 10^{-8}} \right]^{1/4} \\ &= 52 \text{ K} . \end{aligned}$$

## 2. NGUYÊN LÝ THÚ HAI VÀ ENTROPY (1031–1072)

### 1031

Một tuabin hơi nước làm việc với nguồn nóng nhiệt độ  $400^\circ\text{C}$  và nguồn lạnh nhiệt độ  $150^\circ\text{C}$ . Xác định công cực đại mà tuabin có thể thực hiện khi nhận vào một nhiệt lượng  $Q$ ? Công cực đại đó đạt được với điều kiện nào?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Từ công thức Clausius

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 ,$$

ta tìm được công tuabin thực hiện là

$$W = Q_1 - Q_2 \leq \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) Q_1 .$$

Thay  $Q_1 = Q$ ,  $T_1 = 673 \text{ K}$  và  $T_2 = 423 \text{ K}$  vào công thức trên ta có

$$W_{\max} = \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) Q = 0,37Q .$$

Vì dấu bằng trong công thức Clausius có giá trị khi và chỉ khi chu trình là thuận nghịch nên khi và chỉ khi tuabin hơi nước là động cơ thuận nghịch thì nó sinh công cực đại.

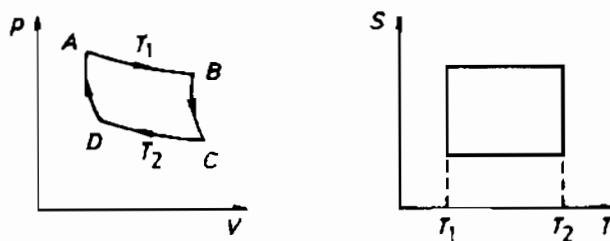
## 1032

Chu trình Carnot là gì? Vẽ đồ thị minh họa trên hệ toạ độ pV và sơ đồ ST. Tính hiệu suất của một động cơ dùng chu trình Carnot.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Chu trình Carnot là chu trình gồm hai đường đẳng nhiệt và hai đường đoạn nhiệt (như trên hình 1.10 (a)).



Hình 1.10

Ta hãy tính hiệu suất của động cơ Carnot. Đầu tiên giả thiết chu trình là thuận nghịch và tác nhân là một mol khí lý tưởng. Vì  $A \rightarrow B$  là quá trình giãn đẳng nhiệt nên nhiệt lượng chất khí hấp thụ từ nguồn nóng là

$$Q_1 = RT_1 \ln(V_B/V_A).$$

Vì  $C \rightarrow D$  là quá trình nén đẳng nhiệt nên nhiệt lượng chất khí nhả ra là

$$Q_2 = RT_2 \ln(V_C/V_D).$$

Hệ trở ngược lại trạng thái ban đầu bằng chu trình  $ABCDA$ . Trong những trạng thái này, hệ thức liên hệ các thông số trạng thái là

$$\begin{aligned} p_A V_A &= p_B V_B, & p_B V_B^\gamma &= p_C V_C^\gamma, \\ p_C V_C &= p_D V_D, & p_D V_D^\gamma &= p_A V_A^\gamma. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

Từ đó tìm được hiệu suất của động cơ là

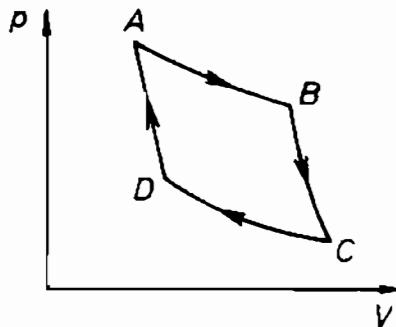
$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Nếu động cơ (hoặc chu trình) không thuận nghịch thì hiệu suất của nó là

$$\eta' < \eta = 1 - T_2/T_1$$

### 1033

Một động cơ Carnot hoạt động theo chu trình như hình vẽ



Hình 1.11

(a) Những đường  $AD$  và  $BC$ ;  $AB$  và  $CD$  là những quá trình nhiệt động nào?

(b) Công nhận vào và thực hiện ở đâu?

(c) Cho động cơ nói trên là động cơ hơi nước với  $T_{in} = 450$  K và hoạt động ở nhiệt độ phòng, hãy tính hiệu suất của nó.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a)  $DA$  và  $BC$  là những quá trình đoạn nhiệt,  $AB$  và  $CD$  là những quá trình đẳng nhiệt.

(b) Công nhận vào ở những quá trình  $CD$  và  $DA$ ; và công thực hiện trong các quá trình  $AB$  và  $BC$ .

(c) Hiệu suất là

$$\eta = \frac{1 - T_{\text{out}}}{T_{\text{in}}} = 1 - \frac{300}{450} = \frac{1}{3}.$$

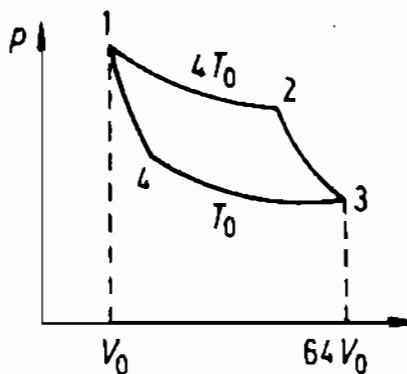
1034

Một động cơ Carnot hoạt động theo chu trình như trên hình 1.12. Nếu  $W$  và  $W'$  tương ứng là công thực hiện bởi một mol khí đơn nguyên tử và lưỡng nguyên tử hãy tính  $W'/W$ .

(Columbia)

Lời giải:

Đối với động cơ Carnot dùng khí đơn nguyên tử ta có



Hình 1.12

$$W = R(T_1 - T_2) \ln(V_2/V_1),$$

ở đây  $T_1 = 4T_0$ , và  $T_2 = T_0$  là nhiệt độ của các nguồn tương ứng,  $V_1 = V_0$ , và  $V_2$  là thể tích ở trạng thái 2. Ta còn có  $V_3 = 64 V_0$ . Với động cơ dùng tác nhân là khí lưỡng nguyên tử, tương tự ta có  $W' = R(T_1 - T_2) \ln\left(\frac{V'_2}{V_1}\right)$ . Từ hai phương trình trên suy ra

$$\frac{W'}{W} = \frac{\ln(V'_2/V_1)}{\ln(V_2/V_1)}.$$

Sau đó dùng phương trình đoạn nhiệt  $4T_0 V_2^{\gamma-1} = T_0 V_3^{\gamma-1}$ , và  $4T_0 V_2'^{\gamma'-1} = T_0 V_3'^{\gamma'-1}$ , ta thu được

$$\frac{W'}{W} = \frac{3 + (1 - \gamma')^{-1}}{3 + (1 - \gamma)^{-1}}.$$

Đối với khí đơn nguyên tử  $\gamma = 5/3$ ; và đối với khí lưỡng nguyên tử  $\gamma' = 7/5$ , do đó

$$\frac{W'}{W} = \frac{1}{3}.$$

### 1035

Hai vật giống hệt nhau có nội năng  $U = NCT$ , với  $C$  là một hằng số. Những giá trị của  $N$  và  $C$  là như nhau đối với cả hai vật. Nhiệt độ ban đầu của các vật là  $T_1$  và  $T_2$ , và chúng được dùng như nguồn sinh công bằng cách kết nối chúng với một động cơ nhiệt Carnot và đưa chúng tới nhiệt độ chung cuối cùng là  $T_f$ .

- (a) Xác định giá trị của  $T_f$ ?
- (b) Công sinh ra là bao nhiêu?

(CUSPEA)

**Lời giải:**

(a) Nội năng là  $U = NCT$ . Như vậy  $dQ_1 = NCdT_1$  và  $dQ_2 = NCdT_2$ . Đối với động cơ Carnot ta có  $\frac{dQ_1}{T_1} = -\frac{dQ_2}{T_2}$ . Suy ra

$$\frac{dT_1}{T_1} = -\frac{dT_2}{T_2}.$$

Do đó  $\int_{T_1}^{T_f} \frac{dT_1}{T_1} = - \int_{T_2}^{T_f} \frac{dT_2}{T_2}$ , hay  $\ln \frac{T_f}{T_1} = - \ln \frac{T_f}{T_2}$ .

Do đó  $T_f = \sqrt{T_1 T_2}$ .

- (b) Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$\begin{aligned} W &= (U_1 - U) - (U - U_2) = U_1 + U_2 - 2U \\ &= NC(T_1 + T_2 - 2T_f). \end{aligned}$$

### 1036

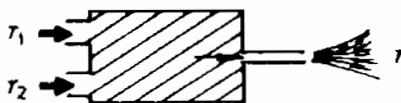
Máy thuỷ lực. Máy tự duy trì chỉ nhận vào hai dòng nước nóng và lạnh ổn định bằng nhau có nhiệt độ  $T_1$  và  $T_2$  tương ứng. Lối ra chung của hai dòng nước này là một tia nước có tốc độ cao. Nhiệt dung đối với một đơn vị khối

lượng nước là  $C$  có thể xem là không phụ thuộc nhiệt độ. Máy ở trạng thái ổn định và bỏ qua động năng của hai dòng nước đi vào.

(a) Tính tốc độ của tia nước qua  $T_1, T_2$  và  $T$ , ở đây  $T$  là nhiệt độ của tia nước ở đầu ra?

(b) Tính tốc độ tối đa của tia nước?

(MIT)



Hình 1.13

Lời giải:

(a) Nhiệt lượng lấy vào, đổi với mỗi đơn vị khối lượng nước là

$$\Delta Q = [C(T_1 - T) - C(T - T_2)]/2 .$$

Vì máy hoạt động ở trạng thái ổn định, nên  $v^2/2 = \Delta Q$ . Do đó

$$v = \sqrt{C(T_1 + T_2 - 2T)} .$$

(b) Từ điều kiện độ tăng entropy luôn dương, tức là

$$\Delta S = \frac{1}{2}C \left[ \ln \frac{T}{T_1} + \ln \frac{T}{T_2} \right] \geq 0 ,$$

ta có

$$T \geq \sqrt{T_1 T_2} .$$

Như vậy  $v \leq v_{\max} = \sqrt{C(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2})}$ .

1037

Hiệu nhiệt độ giữa bể mặt và đáy của nước ở một đập cao 110 m có thể là 10°C. Hãy so sánh năng lượng có thể nhận được từ nhiệt năng của một gam nước với năng lượng sinh ra khi cho nước chảy từ trên đập qua một tuabin theo cách thông thường.

(Columbia)

**Lời giải:**

Hiệu suất của một động cơ lý tưởng là

$$\eta = 1 - \frac{T_{\text{thấp}}}{T_{\text{cao}}} .$$

Năng lượng nhận được từ một gam nước là

$$W = \eta Q = \left(1 - \frac{T_{\text{thấp}}}{T_{\text{cao}}}\right) \cdot C_v(T_{\text{cao}} - T_{\text{thấp}}) ,$$

ở đây  $Q$  là nhiệt lượng rút ra từ một gam nước,  $C_v$  là nhiệt dung riêng của một gam nước. Do đó

$$W = C_v(T_{\text{cao}} - T_{\text{thấp}})^2 / T_{\text{cao}} .$$

Nếu  $T_{\text{cao}}$  có thể lấy như nhiệt độ phòng thì khi đó

$$W = 1 \times 10^2 / 300 = 0,3 \text{ cal} .$$

Năng lượng phát ra bởi dòng chảy từ trên đập xuống là

$$\begin{aligned} W' &= mgh = 1 \times 980 \times 100 \times 10^2 \\ &= 10^7 \text{ erg} = 0,24 \text{ cal} . \end{aligned}$$

Ta có thể thấy rằng ở những điều kiện không lý tưởng  $W' < W$ . Tuy nhiên, hiệu suất của động cơ thực nhỏ hơn nhiều so với động cơ lý tưởng. Do đó, cách dùng năng lượng phát ra khi nước chảy từ trên cao xuống vẫn có hiệu suất cao hơn.

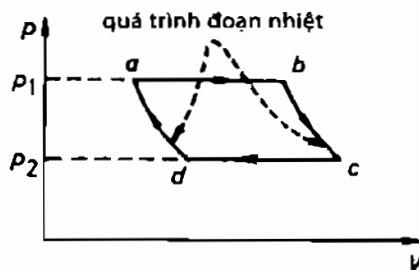
**1038**

Khảo sát một động cơ hoạt động theo chu trình lý tưởng dùng chất khí lý tưởng có nhiệt dung  $c_p$  không đổi làm tác nhân. Chu trình gồm hai quá trình đẳng áp nối với nhau bằng hai quá trình đoạn nhiệt.

(a) Tìm hiệu suất của động cơ này theo  $p_1, p_2$ .

(b) Đâu là nhiệt độ cao nhất, thấp nhất trong các nhiệt độ  $T_a, T_b, T_c, T_d$ ?

(c) Chứng minh rằng một động cơ Carnot dùng chính tác nhân trên làm việc giữa hai nguồn nhiệt cao nhất, thấp nhất nói trên sẽ có hiệu suất cao hơn động cơ này.



Hình 1.14

(Columbia)

**Lời giải:**

(a) Trong một chu trình, năng lượng mà tác nhân nhận từ nguồn có nhiệt độ cao là

$$Q_{\text{ht}} = c_p(T_b - T_a) .$$

Năng lượng nhả cho nguồn có nhiệt độ thấp là  $Q_{\text{nh}} = c_p(T_c - T_d)$ . Do đó

$$\eta = 1 - Q_{\text{nh}}/Q_{\text{ht}} = 1 - \frac{T_c - T_d}{T_b - T_a} .$$

Từ phương trình trạng thái  $pV = nRT$  và phương trình đoạn nhiệt

$$p_2 V_d^\gamma = p_1 V_a^\gamma , \quad p_2 V_c^\gamma = p_1 V_b^\gamma ,$$

ta có

$$\eta = 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} .$$

(b) Từ phương trình trạng thái ta biết  $T_b > T_a, T_c > T_d$ ; từ phương trình đoạn nhiệt ta biết  $T_b > T_c, T_a > T_d$ ; như vậy

$$T_b = \max(T_a, T_b, T_c, T_d) ,$$

$$T_d = \min(T_a, T_b, T_c, T_d) .$$

$$(c) \eta_c = 1 - \frac{T_d}{T_b} > 1 - \frac{T_d}{T_a} = 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \eta .$$

**1039**

Một toà nhà ở nhiệt độ tuyệt đối  $T$  được sưởi ấm nhờ một bơm nhiệt dùng dòng nước có nhiệt độ  $T_0$  làm nguồn nhiệt. Bơm này có hiệu suất lý tưởng và tiêu thụ công suất  $W$ . Toà nhà mất nhiệt theo tốc độ  $\alpha(T - T_0)$  với  $\alpha$  là một hằng số.

(a) Chứng minh rằng nhiệt độ cân bằng của toà nhà cho bởi

$$T_e = T_0 + \frac{W}{2\alpha} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{4\alpha T_0}{W} \right)^{\frac{1}{2}} \right] .$$

(b) Giả thiết rằng bơm nhiệt này được thay bằng một bếp lò đơn giản tiêu thụ cùng công suất  $W$  và chuyển thành nhiệt với hiệu suất 100%. Hãy giải thích tại sao người ta lại ít muốn dùng cách này hơn dùng bơm nhiệt. (Columbia)

**Lời giải:**

(a) Tốc độ cung cấp nhiệt bằng bơm nhiệt là

$$Q = \frac{W}{\eta} = \frac{W}{1 - (T_0/T)} .$$

Khi cân bằng  $T = T_e$  và  $Q = Q_e = \alpha(T_e - T_0)$ , do đó

$$T_e = T_0 + \frac{W}{2\alpha} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{4\alpha T_0}{W} \right)^{1/2} \right] .$$

(b) Trong trường hợp này, điều kiện cân bằng là

$$W = \alpha(T'_e - T_0) .$$

Do đó

$$T'_e = T_0 + \frac{W}{\alpha} < T_e .$$

Vì vậy cách sưởi ấm này ít được dùng hơn so với bơm nhiệt.

**1040**

Một căn phòng có nhiệt độ  $T_2$  mất nhiệt ra ngoài nơi có nhiệt độ  $T_1$  với tốc độ  $A(T_2 - T_1)$ . Phòng được sưởi ấm bằng một bơm nhiệt hoạt động như một

chu trình Carnot giữa hai nguồn nhiệt  $T_1$  và  $T_2$ . Công suất cung cấp bởi bơm nhiệt là  $dW/dT$ .

(a) Tính tốc độ cung cấp nhiệt cực đại cho phòng  $dQ_m/dt$  bởi bơm nhiệt. Xác định hệ số tăng ích  $dQ_m/dW$ ? Tính hệ số đó đối với  $t_1 = 2^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 27^\circ\text{C}$ .

(b) Hãy tìm biểu thức đối với nhiệt độ cân bằng  $T_2$  của phòng theo  $T_1$ ,  $A$  và  $dW/dt$ .

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Từ  $dQ_m \cdot (T_2 - T_1)/T_2 = dW$ , ta được

$$\frac{dQ_m}{dt} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} \frac{dW}{dt}.$$

Với  $T_1 = 275\text{ K}$ ,  $T_2 = 300\text{ K}$ , ta có  $dQ_m/dW = 12$ .

(b) Khi cân bằng được thiết lập, ta có

$$A(T_2 - T_1) = \frac{T_2}{T_2 - T_1} \frac{dW}{dt},$$

Suy ra

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2A} \left( \frac{dW}{dt} \right) + \frac{1}{2A} \sqrt{\left( \frac{dW}{dt} \right)^2 + 4AT_1 \left( \frac{dW}{dt} \right)}.$$

### 1041

Một toà nhà ở nhiệt độ  $T$  được sưởi ấm nhờ một bơm nhiệt lý tưởng dùng khí quyển ở nhiệt độ  $T_0(\text{K})$  làm nguồn nhiệt. Máy bơm tiêu thụ công suất  $W$  và toà nhà mất nhiệt với tốc độ  $\alpha(T - T_0)$ . Xác định nhiệt độ cân bằng của toà nhà?

(MIT)

**Lời giải:**

Gọi  $T_e$  là nhiệt độ cân bằng. Nhiệt do máy bơm cung cấp theo tốc độ  $Q_1 = W/\eta$ , ở đây  $\eta = 1 - T_0/T_e$ . Lúc cân bằng  $Q_1 = \alpha(T_e - T_0)$ , do đó

$$W = \frac{\alpha}{T_e} (T_e - T_0)^2,$$

Từ đó suy ra

$$T_e = T_0 + \frac{W}{2\alpha} + \sqrt{T_0 \frac{W}{\alpha} + \left( \frac{W}{2\alpha} \right)^2}.$$

### 1042

Gọi  $M$  là khối lượng than đá mà ta giả thiết là cung cấp được 100 J nhiệt lượng khi cháy tại nhà máy điện ở nhiệt độ  $1000^{\circ}\text{C}$ . Giả thiết nhà máy là lý tưởng (tức không có hao phí trong tuabin hay trong các máy phát điện) giải phóng nhiệt của nó ở  $30^{\circ}\text{C}$  cho một dòng chảy. Khối lượng  $M$  này, khi bị đốt cháy ở nhà máy điện, sẽ cung cấp cho ngôi nhà bao nhiêu nhiệt, nếu điện năng đó được:

- (a) cung cấp cho các lò sưởi trong nhà hoạt động dựa vào nguyên tắc làm nóng điện trở?
- (b) cung cấp cho máy bơm nhiệt trong nhà (cũng giả thiết là lý tưởng) lấy nhiệt từ một nguồn rất lớn ở nhiệt độ  $0^{\circ}\text{C}$  đưa vào hệ không khí nóng ở  $30^{\circ}\text{C}$ ?  
(Wisconsin)

**Lời giải:**

Khi  $M$  được đốt cháy trong nhà máy điện, công do nó cung cấp là

$$W = Q_1\eta = Q_1 \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = 100 \left( 1 - \frac{273 + 30}{273 + 1000} \right) = 76,2 \text{ J}.$$

Công này được cung cấp dưới dạng điện năng.

(a) Khi điện năng này cung cấp cho các lò sưởi đốt nóng nhờ điện trở thì nó sẽ chuyển hóa hoàn toàn thành nhiệt:  $Q' = W = 76,2 \text{ J}$ .

(b) Khi điện năng này được cung cấp cho một máy bơm nhiệt trong nhà, thì nhiệt lượng sẽ truyền từ nguồn có nhiệt độ thấp tới hệ thống có nhiệt độ cao và hiệu suất hoạt động sẽ là

$$\varepsilon = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = 273/30 = 9,1.$$

Suy ra nhiệt lượng cung cấp cho ngôi nhà là

$$Q' = (1 + \varepsilon)W = 770 \text{ J}.$$

## 1043

Máy điều hoà nhiệt độ là một dụng cụ dùng để làm mát bên trong nhà. Chủ yếu nó là một máy lạnh thực hiện một công cơ học để truyền nhiệt lượng từ bên trong (lạnh) ra bên ngoài (nóng).

Một máy điều hoà gia đình thực hiện theo một chu trình Carnot thuận nghịch giữa bên trong nhiệt độ tuyệt đối  $T_2$ , và bên ngoài nhiệt độ tuyệt đối  $T_1 > T_2$ , tiêu thụ  $P$  (J/s) từ đường tải điện năng khi nó làm việc liên tục.

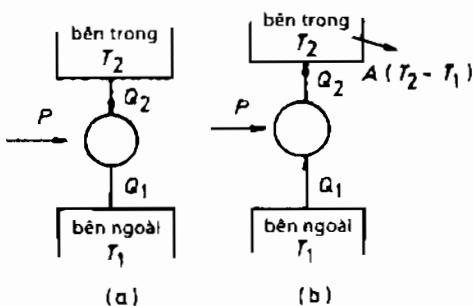
(a) Trong mỗi giây máy điều hoà hấp thụ  $Q_2$  Jun từ trong nhà và thải  $Q_1$  Jun ra bên ngoài. Hãy thiết lập biểu thức tính tỉ số  $Q_2/P$  theo  $T_1$  và  $T_2$ .

(b) Nhiệt lượng lọt vào nhà tuân theo định luật Newton  $Q = A(T_1 - T_2)$ . Hãy thiết lập biểu thức để tính  $T_2$  theo  $T_1$ ,  $P$ , và  $A$  khi máy điều hoà hoạt động liên tục dưới nhiệt độ bên ngoài  $T_1$  không đổi và nhiệt độ không gian bên trong  $T_2$  đồng đều (trong không gian).

(c) Máy điều hoà được kiểm soát bởi một bộ điều nhiệt mở - tắt thông thường để khi bộ điều nhiệt đặt ở  $20^\circ\text{C}$  và nhiệt độ bên ngoài ở  $30^\circ\text{C}$  thì nó chỉ làm việc 30% thời gian. Hãy tìm nhiệt độ bên ngoài cao nhất theo  $^\circ\text{C}$ , để nó có thể duy trì nhiệt độ bên trong là  $20^\circ\text{C}$  (lấy  $0\text{K}$  là  $-273^\circ\text{C}$ ).

(d) Về mùa đông chu trình hoạt động theo chiều nghịch và máy trở thành một bơm nhiệt hấp thụ nhiệt lượng từ bên ngoài và thả vào trong nhà. Hãy tìm nhiệt độ bên ngoài thấp nhất theo  $^\circ\text{C}$  để nó có thể duy trì nhiệt độ  $20^\circ\text{C}$  ở trong nhà.

(CUSPEA)



Hình 1.15

**Lời giải:**

(a) Từ nguyên lý thứ nhất và thứ hai nhiệt động lực học, ta có

$$Q_1 = P + Q_2, \quad Q_2/T_2 = Q_1/T_1.$$

Suy ra

$$\frac{Q_2}{P} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

(b) Ở điều kiện cân bằng, nhiệt lượng lọt vào nhà đúng bằng nhiệt lượng truyền từ nhà ra ngoài, tức là  $Q_2 = A(T_1 - T_2)$ . Dùng kết quả ở phần (a) ta thu được

$$\frac{T_2 P}{T_1 - T_2} = A(T_1 - T_2).$$

Suy ra

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{P}{A} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{A}\right)^2 + 4T_1 \frac{P}{A}} \right).$$

Lưu ý  $T_2 < T_1$ , ta chọn nghiệm

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{P}{A} - \sqrt{\left(\frac{P}{A}\right)^2 + 4T_1 \frac{P}{A}} \right).$$

(c) Khi máy điều hòa làm việc 30% thời gian, từ (b) ta biết rằng

$$P_{30\%} = A \cdot \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_2} = A \cdot \frac{10^2}{293} = A \cdot \frac{100}{293}.$$

Khi nó làm việc liên tục

$$P = P_{30\%} \cdot \frac{100}{30} = A \cdot \frac{100}{30} \cdot \frac{100}{239} \approx 1,1377A.$$

Với  $T_2 = 20^\circ\text{C} = 293\text{ K}$ , ta có

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 + \sqrt{T_2 \frac{P}{A}} - 293 + \sqrt{\frac{100^2}{30}} \\ &= 293 + 18,26\text{ K} = 38,26^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

(d) Khi chu trình hoạt động theo chiều nghịch trong mùa đông, ta có  $Q_2 = P + Q_1$  và  $\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$ . Ở điều kiện cân bằng,  $Q_2 = A(T_2 - T_1)$  nên

$$T_2 - T_1 = \sqrt{T_2 \frac{P}{A}}.$$

Do đó,  $T_1 = T_2 - \sqrt{\frac{P}{A}T_2} = 293 - (1,14 \times 293)^{1/2} = 275$  K = 2°C.

**1044**

Hãy tính độ biến thiên entropy khi nung nóng một nguyên tử gam bạc từ 0°C đến 30°C trong điều kiện thể tích không đổi. Giá trị của  $C_v$  trong khoảng nhiệt độ này có thể lấy là hằng số và bằng 5,85 cal/K·mol.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Độ biến thiên entropy là

$$\begin{aligned}\Delta S &= n \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_v dT}{T} = n C_v \ln \frac{T_2}{T_1} = 5,85 \ln \frac{30+273}{273} \\ &= 0,61 \text{ cal/K}.\end{aligned}$$

**1045**

Một vật có nhiệt dung  $C_p$  không đổi và nhiệt độ  $T_i$  đặt tiếp xúc với nguồn nhiệt có nhiệt độ  $T_f$ . Sự cân bằng giữa vật và nguồn được thiết lập ở điều kiện áp suất không đổi. Hãy xác định độ biến thiên entropy toàn phần và chứng minh rằng nó dương với cả hai dấu của  $(T_f - T_i)/T_f$ . Có thể coi  $|T_f - T_i|/T_f < 1$ .

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Ta giả thiết  $T_i \neq T_f$  (độ biến thiên entropy bằng 0 khi  $T_i = T_f$ ). Độ biến thiên entropy của vật là

$$\Delta S_1 = \int_{T_i}^{T_f} \frac{C_p dT}{T} = C_p \ln \frac{T_f}{T_i}.$$

Độ biến thiên entropy của nguồn nhiệt là

$$\Delta S_2 = \frac{\Delta Q}{T_f} = \frac{C_p(T_f - T_i)}{T_f}.$$

Do đó độ biến thiên entropy toàn phần là

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C_p \left( \frac{T_i}{T_f} - 1 + \ln \frac{T_f}{T_i} \right).$$

Khi  $x > 0$  và  $x \neq 1$ , thì hàm số  $f(x) = x - 1 - \ln x > 0$ . Do đó

$$\Delta S = C_p f\left(\frac{T_i}{T_f}\right) > 0 .$$

### 1046

Một kilôgam  $H_2O$  ở  $0^\circ C$  tiếp xúc với nguồn nhiệt ở  $100^\circ C$ . Khi nước đạt tới nhiệt độ  $100^\circ C$ ,

(a) thì độ biến thiên entropy của nước là bao nhiêu?

(b) thì độ biến thiên entropy toàn phần là bao nhiêu?

(c) Ta có thể làm như thế nào để nước nóng đến  $100^\circ C$  mà độ biến thiên entropy của vũ trụ bằng 0?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Quá trình là không thuận nghịch. Để tính độ biến thiên entropy của nước và của toàn hệ ta có thể xây dựng một quá trình thuận nghịch có cùng trạng thái đầu và cuối như của quá trình nói trong bài toán này.

(a) Giả thiết rằng quá trình là thuận nghịch với áp suất không đổi. Độ biến thiên netropy của nước là

$$\Delta S_{H_2O} = \int_{273}^{373} mC_{H_2O} dT/T = mC_{H_2O} \ln(373/273) .$$

Ta thay  $m = 1\text{kg}$ , và  $C_{H_2O} = 4,18 \text{ J/g}$  vào biểu thức trên và tìm được

$$\Delta S_{H_2O} = 1305 \text{ J/K} .$$

(b) Độ biến thiên entropy của nguồn nhiệt là

$$\begin{aligned} \Delta S_{hs} &= -|Q|/T = -1000 \times 4,18 \times 100/373 \\ &= -11121 \text{ J/K} . \end{aligned}$$

Do đó độ biến thiên entropy của toàn hệ là

$$\Delta S = \Delta S_{H_2O} + \Delta S_{ng.nh} = 184 \text{ J/K} .$$

(c) Ta có thể tưởng tượng một số vô hạn các nguồn nhiệt mà nhiệt độ của hai nguồn lân cận khác nhau vô cùng bé. Nước chảy tới tiếp xúc với vô số các

nguồn nhiệt theo thứ tự nhiệt độ tăng dần. Như vậy quá trình này cho phép nhiệt độ của nước tăng từ  $0^{\circ}\text{C}$  đến  $100^{\circ}\text{C}$  thuận nghịch, do đó  $\Delta S = 0$ .

### 1047

Hãy tính hiệu số entropy giữa 1 g khí Nitơ ở  $20^{\circ}\text{C}$  và 1 atm với 1g nitơ lỏng ở nhiệt độ  $-196^{\circ}\text{C}$ , đó cũng là điểm sôi của nitơ ở áp suất 1 atm. Ẩn nhiệt hoá hơi của nitơ là 47,6 cal/gm. Xem nitơ là khí lý tưởng với phân tử lượng 28 và với nhiệt dung mol đẳng áp không phụ thuộc nhiệt độ và bằng 7,0 cal/mol·K.  
(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Số mol của 1 g nitơ là

$$n = 1/28 = 3,57 \times 10^{-2} \text{ mol.}$$

Hiệu số entropy của khí lý tưởng ở  $20^{\circ}\text{C}$  và  $-196^{\circ}\text{C}$  là

$$\Delta S' = nC_p \ln(T_1/T_2) \approx 0,33 \text{ cal/K} ,$$

và độ biến thiên entropy khi chuyển pha là

$$\Delta S'' = nL/T_2 = 0,64 \text{ cal/K} .$$

Do đó  $\Delta S = \Delta S' + \Delta S'' = 0,97 \text{ cal/K}$ .

### 1048

Một động cơ Carnot được chế tạo để hoạt động như một máy lạnh. Hãy giải thích chi tiết tất cả những quá trình xảy ra trong một chu trình và vẽ đồ thị biểu diễn chu trình đó trong (a) hệ toạ độ áp suất – thể tích và (b) hệ toạ độ entanpi – entropy.

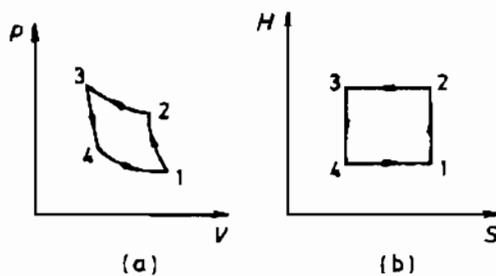
Máy làm lạnh này làm đông nước ở  $0^{\circ}\text{C}$  và nhiệt từ tác nhân được truyền vào một bể chứa nước duy trì ở  $20^{\circ}\text{C}$ . Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của công làm đông 3kg nước.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Như biểu diễn trên hình 1.16(a),

1-2: nén đoạn nhiệt,



Hình 1.16

2-3: nén đẳng nhiệt,

3-4: giãn đoạn nhiệt,

4-1: giãn đẳng nhiệt.

(b) Như biểu diễn trên hình 1.16(b):

1-2: nén đoạn nhiệt. Entropy bảo toàn.

2-3: nén đẳng nhiệt. Nếu tác nhân là khí lý tưởng thì entanpi bảo toàn.

3-4: giãn đoạn nhiệt. Entropy bảo toàn.

4-1: giãn đẳng nhiệt. Entanpi bảo toàn.

Hiệu suất làm lạnh là

$$\eta = \frac{Q_2}{W} = \frac{T_2}{(T_1 - T_2)} .$$

Suy ra

$$W = Q_2 \frac{T_1 - T_2}{T_2} .$$

$Q_2 = ML$  là ẩn nhiệt đổi với  $M = 3$  kg nước tại  $T = 0^\circ\text{C}$  trở thành nước đá.  
Vì

$$L = 3,35 \times 10^5 \text{ J/kg} ,$$

ta tìm được  $W = 73,4 \times 10^3 \text{ J}$ .

## 1049

Cho  $n = 0,081 \text{ kmol}$  khí He lúc đầu ở  $27^\circ\text{C}$  và áp suất  $= 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  thực hiện biến thiên theo các quá trình  $A \rightarrow B \rightarrow C$ . Đối với He cho

$$C_v = 3R/2, \quad C_p = 5R/2.$$

Giả thiết khí He ở đây là khí lý tưởng.

- (a) Tính công mà khí thực hiện trong quá trình giãn nở ở áp suất không đổi từ  $A \rightarrow B$ ?
- (b) Tính độ biến thiên nội năng của He khi biến thiên từ  $A \rightarrow B$ ?
- (c) Tính nhiệt lượng mà khí nhận được trong quá trình  $A \rightarrow B$ ?
- (d) Nếu  $B \rightarrow C$  là quá trình đoạn nhiệt thì độ biến thiên entropy và áp suất cuối cùng là bao nhiêu?

(Wisconsin)

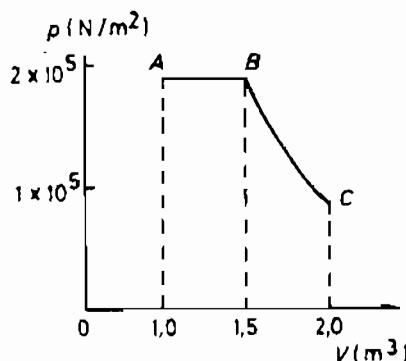
**Lời giải:**

- (a) Trong quá trình  $A \rightarrow B$ , công mà khí thực hiện là

$$W = p_A(V_B - V_A) = 1,0 \times 10^5 \text{ J}.$$

- (b) Trong quá trình  $A \rightarrow B$ , độ tăng nội năng là

$$\Delta U = nC_v\Delta T = C_v p_A(V_B - V_A)/R = 3W/2 = 1,5 \times 10^5 \text{ J}.$$



Hình 1.17

(c) Theo nguyên lý thứ nhất nhiệt động lực học thì nhiệt lượng mà khói khí nhận được trong quá trình  $A \rightarrow B$  là  $W + \Delta U = 2,5 \times 10^5$  J.

(d) Đối với quá trình  $B \rightarrow C$ , đây là quá trình đoạn nhiệt của khí đơn nguyên tử thoả mãn phương trình

$$pV^\gamma = \text{const.}, \quad \text{với } \gamma = C_p/C_v = 5/3.$$

Do đó, ta có  $p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma$  và  $p_C = (V_B/V_C)^\gamma p_B = 1,24 \times 10^5$  N/m<sup>2</sup>.

Trong quá trình giãn đoạn nhiệt thuận nghịch, độ biến thiên entropy  $\Delta S = 0$ . Điều này được chứng minh bằng phép tính chi tiết sau

$$\begin{aligned} \Delta S &= nC_v \ln \frac{T_C}{T_B} + nR \ln \frac{V_C}{V_B} \\ &= nC_v \ln \frac{T_C V_C^{\gamma-1}}{T_B V_B^{\gamma-1}} = 0. \end{aligned}$$

### 1050

Một mol khí lý tưởng thực hiện quá trình giãn nở đẳng nhiệt thuận nghịch từ thể tích  $V_1$  đến  $2V_1$ .

(a) Tính độ biến thiên entropy của khí trong quá trình đó.

(b) Tính độ biến thiên entropy của vũ trụ.

Giả thiết quá trình giãn nở nói trên được thay bằng một quá trình giãn tự do:

(a) Tính độ biến thiên entropy của chất khí trong quá trình đó?

(b) Tính độ biến thiên entropy của vũ trụ?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Trong quá trình giãn đẳng nhiệt, hệ thực hiện một công là

$$W = \int_{V_1}^{2V_1} pdV = RT \int_{V_1}^{2V_1} \frac{dV}{V} = RT \ln 2.$$

Vì nội năng không thay đổi trong quá trình này nên công mà hệ thực hiện đúng bằng nhiệt mà hệ nhận được. Vậy độ tăng entropy của chất khí trong quá trình này là

$$\Delta S_1 = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{W}{T} = R \ln 2.$$

(b) Độ biến thiên entropy của nguồn nhiệt  $\Delta S_2 = -\Delta S_1$ , vì vậy độ biến thiên entropy toàn phần của hệ là

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 0.$$

Nếu đây là quá trình giãn tự do thì nội năng của hệ cũng không đổi. Vì những trạng thái cuối cùng của quá trình này cũng giống như trạng thái cuối trong quá trình đẳng nhiệt, nên độ biến thiên entropy của hệ cũng như thế. Trong trường hợp này trạng thái của nguồn nhiệt không đổi nên cũng không làm thay đổi entropy của nó. Do đó độ biến thiên entropy của vũ trụ là  $\Delta S = R \ln 2$ .

### 1051

*N* nguyên tử khí lý tưởng chứa trong một xilanh có thành cách nhiệt và nắp kín một đầu bằng một pittông. Thể tích và nhiệt độ ban đầu lần lượt là  $V_1, T_1$ .

(a) Tìm độ biến thiên nhiệt độ, áp suất, và entropy có thể xảy ra nếu thể tích dột nhiên tăng tới  $V_2$  bằng cách kéo pittông ra.

(b) Pittông phải được kéo nhanh đến mức nào để các biểu thức trên vẫn còn đúng?

(MIT)



Hình 1.18

Lời giải:

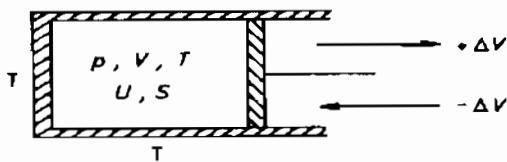
(a) Chất khí không sinh công khi pittông được kéo nhanh ra. Vì các thành và pittông đều cách nhiệt nên nội năng của khí không thay đổi, tức là  $dU = 0$ . Bởi vì nội năng của khí chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ  $T$ , cho nên độ biến thiên nhiệt độ cũng bằng không, tức là  $T_2 = T_1$ . Còn đối với áp suất,  $p_2/p_1 = V_1/V_2$ . Độ tăng entropy là

$$S_2 - S_1 = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p}{T} dV = Nk \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

(b) Tốc độ kéo pittông cần phải rất lớn hơn vận tốc trung bình của phân tử khí, tức là  $v \gg \bar{v} = (8kT_1/\pi m)^{1/2}$ .

## 1052

Một xilanh chứa khí lý tưởng ở trạng thái cân bằng nhiệt động có  $p, V, T, U$  (nội năng) và  $S$  (entropy). Xilanh được bao quanh bởi một bình điều nhiệt rất lớn có cùng nhiệt độ. Các thành của xilanh và pittông có thể là dẫn nhiệt lý tưởng hoặc cách nhiệt lý tưởng. Pittông chuyển động tạo ra một độ biến thiên thể tích nhỏ  $\pm \Delta V$ . Thể tích biến thiên “chậm” hay “nhanh” có nghĩa là tốc độ chuyển động của pittông nhỏ hơn rất nhiều hoặc lớn hơn rất nhiều vận tốc của phân tử ở nhiệt độ  $T$ . Đối với mỗi một trong năm quá trình sau đây (trong phiếu trả lời) hãy lựa chọn độ biến thiên của các đại lượng khác là dương, âm, hay bằng không (sau khi trạng thái cân bằng đã thiết lập).



Hình 1.19

1.  $(+\Delta V)$  (chậm) (dẫn nhiệt)
2.  $(+\Delta V)$  (chậm) (cách nhiệt)
3.  $(+\Delta V)$  (nhanh) (cách nhiệt)
4.  $(+\Delta V)$  (nhanh) (dẫn nhiệt)
5.  $(-\Delta V)$  (nhanh) (dẫn nhiệt)

$\Delta T$	$\Delta U$	$\Delta S$	$\Delta p$

(Wisconsin)

**Lời giải:**

- (1) Đối với quá trình giãn đẳng nhiệt,  $\Delta T = 0, \Delta U = 0$ , và

$$\Delta S = R \frac{\Delta V}{V} > 0, \quad \Delta p = \frac{-p}{V} \Delta V < 0.$$

(2) Đối với quá trình giãn đoạn nhiệt,  $\Delta Q = 0$ . Vì quá trình tiến rất chậm nên có thể xem là quá trình thuận nghịch của những trạng thái chuẩn dừng, khi đó  $\Delta S = 0$ . Quá trình đoạn nhiệt thỏa mãn phương trình  $pV^\gamma = \text{const}$ . Trong khi  $V$  tăng thì  $p$  giảm tức là  $\Delta p < 0$ ; và nội năng của hệ giảm vì nó đã sinh công ra ngoài, như vậy  $\Delta U < 0$ , hoặc  $\Delta T < 0$ .

- (3) Quá trình tương tự như quá trình giãn tự do đoạn nhiệt một khí lý

tưởng, nên  $\Delta S > 0$ ,  $\Delta U = 0$ ,  $\Delta T = 0$ ,  $\Delta p < 0$ .

(4) Kết quả giống như đối với quá trình giãn tự do đẳng nhiệt, tức là  $\Delta T = 0$ ,  $\Delta U = 0$ ,  $\Delta S > 0$ ,  $\Delta p < 0$ .

(5) Kết quả cũng như đối với quá trình nén tự do đẳng nhiệt, tức là  $\Delta T = 0$ ,  $\Delta U = 0$ ,  $\Delta p > 0$ ,  $\Delta S < 0$ .

Những kết quả trên được tổng kết trong bảng sau

	$\Delta T$	$\Delta U$	$\Delta S$	$\Delta p$
1	0	0	+	-
2	-	-	0	-
3	0	0	+	-
4	0	0	+	-
5	0	0		+

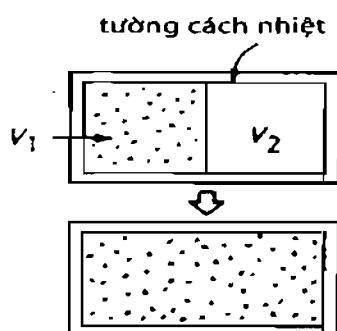
### 1053

Một hộp cách nhiệt được chia thành hai phần (thể tích  $V_1$  và  $V_2$ ) bằng vách ngăn. Trong một phần chứa khí lý tưởng ở nhiệt độ  $T$ ; phần kia là chân không. Vách ngăn rút đi tức thời và khí lắp đầy cả hai phần rồi tiến tới trạng thái cân bằng.

(a) Tính nhiệt độ cuối cùng của khí?

(b) Chứng minh rằng quá trình giãn khí trên là không thuận nghịch.

(MIT)



Hình 1.20

**Lời giải:**

(a) Khí giãn tự do thì không sinh công và không hấp thụ nhiệt. Như vậy nội năng không thay đổi, tức là  $dU = 0$ . Nội năng của khí lý tưởng chỉ là hàm số của nhiệt độ; vì thế nhiệt độ cũng không thay đổi trong quá trình đó, tức  $T_f = T$ .

(b) Thừa nhận quá trình giãn đẳng nhiệt là chuẩn dùng ta có thể tính được độ biến thiên entropy do quá trình giãn tự do. Trong quá trình này ta có  $dS = pdV/T$ ,  $pV = NkT$ . Từ đó suy ra

$$S_f - S = \int dS = \int_{V_1}^{V_1+V_2} \frac{p}{T} dV = Nk \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} > 0 .$$

Như vậy quá trình giãn tự do của chất khí là thuận nghịch.

### 1054

Một thanh đồng chất tiết diện đều dãn nhiệt  $L$ , tiết diện ngang  $A$ , khối lượng riêng  $\rho$  và nhiệt dung đẳng áp  $c_p$  được làm cho phân bố nhiệt độ không đều bằng cách cho một đầu của nó tiếp xúc với nguồn nóng có nhiệt độ  $T_H$  và đầu kia tiếp xúc với nguồn lạnh có nhiệt độ  $T_c$ . Thanh được rút ra khỏi các nguồn và giữ cách nhiệt ở áp suất không đổi. Chứng minh rằng độ biến thiên entropy của thanh là

$$\Delta S = C_p \left( 1 + \ln T_f + \frac{T_c}{T_H - T_c} \ln T_c - \frac{T_H}{T_H - T_c} \ln T_H \right) ,$$

ở đây  $C_p = c_p \rho A L$ ,  $T_f = (T_H + T_c)/2$ .

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

Vì gradient nhiệt trên thanh là  $(T_H - T_c)/L$ , nên nhiệt độ tại tiết diện cách đầu thanh có nhiệt độ  $T_c$  một khoảng  $x$  có thể biểu diễn dưới dạng  $T_x = T_c + (T_H - T_c)x/L$ . Vì thanh đưa ra khỏi hai nguồn một cách đoạn nhiệt nên ta có

$$\int_0^L \rho c_p [T(x) - T_f] dx = 0 ,$$

từ đó ta thu được  $T_f = (T_H + T_c)/2$ .

Nhưng  $c_p = T(\partial S/\partial T)_p$  nên

$$\Delta S = c_p \rho A \int_0^L dx \int_{T(x)}^{(T_H+T_c)/2} \frac{dT}{T} = C_p \left[ 1 + \ln T_f + \frac{T_c}{T_H - T_c} \ln T_c - \frac{T_H}{T_H - T_c} \ln T_H \right],$$

ở đây  $C_p = c_p \rho A L$ .

### 1055

Một hỗn hợp gồm 0,1 mol He ( $\gamma_1 = C_p/C_v = 5/3$ ) và 0,2 mol nitơ ( $\gamma_2 = 7/5$ ), được khảo sát như một hỗn hợp lý tưởng của hai khí lý tưởng, ban đầu ở 300 K và chiếm thể tích 4 lít. Hãy chứng minh rằng độ biến thiên nhiệt độ và áp suất xảy ra khi chất khí bị nén chậm đoạn nhiệt có thể được biểu diễn theo một giá trị trung gian nào đó của  $\gamma$ . Tính độ lớn của sự biến thiên này khi thể tích giảm đi 1%.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Độ biến thiên entropy đối với khí lý tưởng là

$$\Delta S = nC_v \ln(T_f/T_i) + nR \ln(V_f/V_i),$$

ở đây  $n$  là số mol,  $i$  và  $f$  chỉ thị trạng thái đầu và cuối tương ứng. Vì quá trình là đoạn nhiệt nên độ biến thiên entropy toàn phần trong hỗn hợp khí nitơ và He phải bằng 0, do đó  $\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$ . Khi ấy biểu thức đối với  $\Delta S$  cho ta

$$T_f = T_i \left( \frac{V_i}{V_f} \right)^g,$$

ở đây

$$g = \frac{(n_1 + n_2)R}{n_1 C_{v1} + n_2 C_{v2}}.$$

Kết hợp với phương trình trạng thái đối với khí lý tưởng ta được

$$p_f = p_i \left( \frac{V_i}{V_f} \right)^\gamma,$$

trong đó

$$\gamma = \frac{n_1 C_{p1} + n_2 C_{p2}}{n_1 C_{v1} + n_2 C_{v2}}.$$

Vì He là khí đơn nguyên tử cho nên  $C_{v1} = 3R/2$ ,  $C_{p1} = 5R/2$ ; còn khí nitơ là khí lưỡng nguyên nên  $C_{v2} = 5R/2$ ,  $C_{p2} = 7/2$ . Do đó  $\gamma = 1.46$ .

Khi  $V_f = 0.99V_i$ , ta có

$$T_f = 1.006T_i = 302 \text{ K},$$

$$p_f = 1.016p_i = 1.016nRT/V = 2.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2.$$

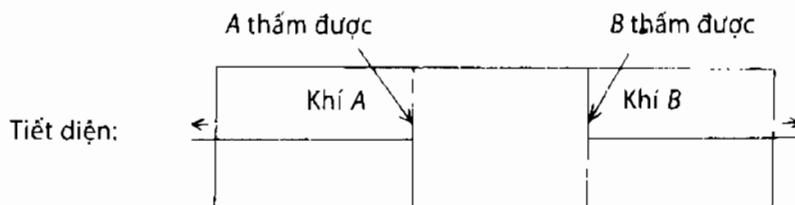
### 1056

Xét hai cách trộn hai khí lý tưởng. Cách thứ nhất: một buồng có lập đoạn nhiệt chia thành hai phần, bên trái chứa khí A nguyên chất, bên phải chứa khí B nguyên chất. Quá trình trộn được thực hiện bằng cách mở một lỗ trên vách ngăn.

Tiết diện:		
	Khí A	Khí B
	$n_A$ mol	$n_B$ mol
	Thể tích = $V_A$	Thể tích = $V_B$

Hình 1.21 (a)

Cách thứ hai : buồng được phân chia bởi hai màng cứng có tính chọn lọc lý tưởng, màng bên trái chỉ cho khí A thẩm qua mà không cho khí B thẩm qua. Màng bên phải thì ngược lại. Cả hai màng ngăn được nới ra ngoài bằng tay kéo và toàn buồng thì nối với nguồn nhiệt ở nhiệt độ  $T$ . Trong trường hợp này



Hình 1.21 (b)

có thể trộn bằng cách kéo màng bên trái về phía trái và kéo màng bên phải về phía phải.

- (a) Hãy tìm độ biến thiên entropy của bình chứa và của hỗn hợp khí ở trong đó đối với quá trình thứ hai.
- (b) Hãy tìm độ biến thiên entropy của bình chứa và của hỗn hợp khí ở trong đó đối với quá trình thứ nhất.
- (c) Độ biến thiên entropy của nguồn nhiệt đối với phần (a) là bao nhiêu?  
(CUSPEA)

**Lời giải:**

- (a) Vì quá trình là thuận nghịch ta có

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \left( \int_{V_A}^{V_A + V_B} p_A dV + \int_{V_A}^{V_A + V_B} p_B dV \right) \\ &= R \left( n_A \ln \frac{V_A + V_B}{V_A} + n_B \ln \frac{V_A + V_B}{V_B} \right)\end{aligned}$$

ở đây ta đã dùng phương trình trạng thái  $pV = nRT$ .

(b) Vì năng lượng được bảo toàn và nội năng của khí lý tưởng chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ của nó nên nhiệt độ của trạng thái đầu và cuối là như nhau. Trạng thái đầu và cuối của chất khí trong trường hợp này đồng nhất với trạng thái đầu và cuối của trường hợp (a). Vì entropy là hàm của trạng thái, nên  $\Delta S$  thu được cũng giống như trường hợp (a).

- (c)  $\Delta S_{\text{ng.nh}} = -\Delta S$ , ở đây  $\Delta S$  đã cho trong phần (a).

### 1057

Xét một xilanh có pittông không ma sát tạo bởi một màng bán thẩm chỉ cho nước đi qua. Pittông phân cách một thể tích  $V$  của  $N$  mol nước nguyên chất với thể tích  $V'$  của một dung dịch muối loãng (NaCl). Có  $N'$  mol nước và  $n$  mol muối trong dung dịch. Hệ thống tiếp xúc với một nguồn nhiệt có nhiệt độ  $T$ .

- (a) Hãy tìm biểu thức đối với độ biến thiên của entropy trong quá trình trộn trong dung dịch muối.
- (b) Nếu pittông chuyển động sao cho lượng nước trong dung dịch muối tăng gấp đôi thì cần thực hiện một công là bao nhiêu?
- (c) Hãy tìm biểu thức đối với áp suất thẩm  $\pi$  qua màng như là một hàm số của thể tích dung dịch muối.

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Entropy của quá trình trộn tức là độ tăng entropy xảy ra khi trộn đẳng nhiệt và đẳng áp là

$$\Delta S = -N'R \ln \frac{N'}{N' + n} - nR \ln \frac{n}{N' + n}$$

(b) Áp suất thẩm thấu của dung dịch loãng là

$$\pi V' = nRT \quad (\text{Định luật Van't Hoff})$$

Khi lượng nước trong dung dịch muối tăng gấp đôi thì công thực hiện là

$$W = \int_{V'}^{2V'} \pi dV = \int_{V'}^{2V'} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln 2$$

(c)  $\pi = nRT/V'$ . Áp suất thẩm thấu - hiệu áp suất qua màng - là áp suất toàn phần và hiệu dụng trên màng.

### 1058

(a) Trong lý thuyết Big Bang về vũ trụ, năng lượng bức xạ lúc đầu bị giam trong một miền nhỏ được giãn đoạn nhiệt theo cách đổi xứng cầu. Bức xạ lạnh đi vì nó giãn nở. Hãy tìm mối liên hệ giữa nhiệt độ  $T$  và bán kính  $R$  của thể tích cầu của bức xạ dựa thuần túy trên các khảo sát nhiệt động lực học.

(b) Hãy tìm entropy toàn phần của khí photon như là một hàm số của nhiệt độ  $T$ , thể tích  $V$ , và những hằng số  $k, h, c$ .

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Sự giãn nở có thể xem như một quá trình chuẩn dừng. Khi đó ta có  $dU = TdS - pdV$ . Dùng điều kiện đoạn nhiệt  $dS = 0$  và biểu thức của áp suất bức xạ  $p = U/3V$ , ta được  $dU/U = -dV/3V$ ; suy ra  $U \propto V^{-1/3}$ . Mật độ năng lượng bức xạ của vật đen là  $u = U/V = aT^4$ ,  $a$  với là hằng số. Từ những hệ thức trên suy ra  $T^4 \propto V^{-4/3} \propto R^{-4}$ , tức là  $T \propto R^{-1}$ , hay  $RT = \text{constant}$ .

(b)  $dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV = \frac{V}{T} du + \frac{4}{3} \frac{u}{T} dV = d\left(\frac{4}{3}aT^3V\right)$ , từ đó ta thu được  $S = \frac{4}{3}aT^3V$ . Bằng cách phân tích thứ nguyên ta tìm được  $a \sim k^4/(\hbar c)^3$ . Thật vậy,  $a = \frac{\pi^2}{15} \frac{k^4}{(\hbar c)^3}$ , do đó

$$S = \frac{4\pi^2}{45} \frac{k^4}{(\hbar c)^3} T^3 V$$

## 1059

(a) Một hệ giữ thể tích không đổi, cho tiếp xúc với một nguồn nhiệt ở nhiệt độ  $T_f$ . Nếu nhiệt độ ban đầu của hệ là  $T_i$ , hãy tính độ biến thiên entropy toàn phần  $\Delta S$  của hệ + nguồn. Có thể giả thiết thêm nhiệt dung riêng của hệ  $c_v$  là không phụ thuộc vào nhiệt độ.

(b) Sự biến thiên nhiệt độ của hệ bấy giờ được thực hiện bằng cách cho hệ tiếp xúc lần lượt với  $N$  nguồn ở nhiệt độ  $T_i + \Delta T, T_i + 2\Delta T, \dots, T_f - \Delta T, T_f$ , với  $N\Delta T = T_f - T_i$  cố định. Chứng minh rằng khi  $N \rightarrow \infty, \Delta T \rightarrow 0$  với  $N\Delta T = T_f - T_i$  cố định thì độ biến thiên entropy của hệ + nguồn là bằng 0.

(c) Hãy dùng nguyên lý thứ hai của nhiệt động lực học để làm rõ sự khác nhau giữa (a) và (b).

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Độ biến thiên entropy của hệ là

$$\Delta S_1 = \int_{T_i}^{T_f} \frac{Mc_v dT}{T} = Mc_v \ln \frac{T_f}{T_i} .$$

Độ biến thiên entropy của nguồn nhiệt là

$$\Delta S_2 = -\frac{|Q|}{T_f} = Mc_v \frac{T_i - T_f}{T_f} .$$

Độ biến thiên entropy toàn phần là

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = Mc_v \left( \ln \frac{T_f}{T_i} + \frac{T_i - T_f}{T_f} \right) .$$

(b)

$$\Delta S = \lim_{\substack{\Delta T \downarrow 0 \\ \Delta N \rightarrow \infty}} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta S_n ,$$

với

$$\Delta S_n = Mc_v \left( \ln \frac{T_i + (n+1)\Delta T}{T_i + n\Delta T} - \frac{\Delta T}{T_i + (n+1)\Delta T} \right)$$

là độ biến thiên entropy của lần tiếp xúc thứ  $(n+1)$ . Do đó,

$$\Delta S = Mc_v \left( \ln \frac{T_f}{T_i} - \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} \right) = 0 .$$

- (c) Hàm số  $f(x) = x - \ln x - 1 > 0$  nếu  $x > 0$  và  $x \neq 1$ . Như vậy ở trong (a)  $\Delta S = Mc_v f(T_i/T_f) > 0$ , và vì thế entropy là tăng. Theo nguyên lý thứ hai nhiệt động lực học thì quá trình này là không thuận nghịch. Trong (b)  $\Delta S = 0$  quá trình là thuận nghịch.

### 1060

Một vật được đưa từ nhiệt độ  $T_i$  tới  $T_f$  bằng cách cho tiếp xúc với một chuỗi các nguồn nhiệt có nhiệt độ  $T_i + \Delta T, T_i + 2\Delta T, \dots, T_i + N\Delta T = T_f$ . Giả thiết rằng nhiệt dung của vật là  $C$ , không phụ thuộc vào nhiệt độ, hãy tính độ biến thiên entropy của toàn hệ gồm vật và tất cả các nguồn. Độ biến thiên entropy khi  $N \rightarrow \infty$  với  $T_f - T_i$  cố định là bao nhiêu?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Xét một vật ở nhiệt độ  $T_i + t\Delta T$  tiếp xúc với nguồn nhiệt có nhiệt độ  $T_i + (t+1)\Delta T$ . Khi chúng tiến tới trạng thái cân bằng thì độ biến thiên entropy của vật là

$$\Delta S_1 = \int_{T_i+t\Delta T}^{T_i+(t+1)\Delta T} \frac{CdT}{T} = C \ln \frac{T_i + (t+1)\Delta T}{T_i + t\Delta T}.$$

Độ biến thiên entropy của nguồn nhiệt là

$$\Delta S_2 = -\frac{C\Delta T}{T_i + (t+1)\Delta T}.$$

Độ biến thiên entropy toàn phần là

$$\begin{aligned} \Delta S_t = \Delta S_1 + \Delta S_2 &= C \left( \ln \frac{T_i + (t+1)\Delta T}{T_i + t\Delta T} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta T}{T_i + (t+1)\Delta T} \right). \end{aligned}$$

Do đó sau khi vật có nhiệt độ ban đầu  $T_i$  đã tiếp xúc với một chuỗi nguồn nhiệt thì độ biến thiên entropy của toàn hệ là

$$\Delta S = \sum_{t=0}^{N-1} \Delta S_t = C \left( \ln \frac{T_f}{T_i} - \sum_{t=0}^{N-1} \frac{\Delta T}{T_i + (t+1)\Delta T} \right).$$

Khi  $N \rightarrow \infty$ , hoặc  $\Delta T \rightarrow 0$ , thì tổng trên có thể viết là tích phân, nên ta có

$$\Delta S = C \left( \ln \frac{T_f}{T_i} - \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} \right) = C \left( \ln \frac{T_f}{T_i} - \ln \frac{T_f}{T_i} \right) = 0.$$

## 1061

Nhiệt dung của nước lấy bằng 1 cal/g.K, không phụ thuộc vào nhiệt độ, với 1 cal = 4,18 J.

(a) Hãy xác định nhiệt dung riêng đẳng áp của một vật theo các đại lượng  $Q$  (nhiệt lượng),  $S$  (entropy), và  $T$  (nhiệt độ).

(b) Một kilôgam nước ở 0°C cho tiếp xúc đột ngột với một nguồn nhiệt rất lớn ở 100°C. Khi nước có nhiệt độ 100°C thì độ biến thiên entropy của nước là bao nhiêu? Của nguồn là bao nhiêu? Của cả hệ gồm nước và nguồn nhiệt là bao nhiêu?

(c) Nếu nước được đun nóng từ 0°C đến 100°C bằng cách đầu tiên cho tiếp xúc với nguồn nhiệt 50°C, sau đó với nguồn khác 100°C, thì độ biến thiên entropy của cả hệ là bao nhiêu?

(d) Hãy chỉ rõ cách làm cho nước nóng từ 0°C đến 100°C mà không làm thay đổi entropy của cả hệ.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

$$(a) c_p = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p.$$

(b) Độ biến thiên entropy của nước là

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_p}{T} dT = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} = 0,312 \text{ cal/g}\cdot\text{K},$$

và độ biến thiên entropy của nguồn là

$$\Delta S_2 = -c_p \frac{T_2 - T_1}{T_2} = -0,268 \text{ cal/g}\cdot\text{K}.$$

Vậy  $\Delta S = 0,044 \text{ cal/g}\cdot\text{K}$ .

(c) Trong quá trình này độ biến thiên entropy của nước vẫn là  $\Delta S'_1 = 0,312 \text{ cal/g}\cdot\text{K}$ , còn của nguồn là

$$\begin{aligned} \Delta S'_2 &= -\frac{1 \times (50 - 1)}{273 + 50} - \frac{1 \times (100 - 50)}{273 + 100} \\ &= -0,289 \text{ cal/g}\cdot\text{K}. \end{aligned}$$

Vậy  $\Delta S' = \Delta S'_1 + \Delta S'_2 = 0,023 \text{ cal/g}\cdot\text{K}$ .

(d) Phân chia khoảng nhiệt độ 0°C – 100°C thành  $N$  phần bằng nhau với  $N \gg 1$ .

Tại mọi nhiệt độ đều có một nguồn nhiệt rất lớn. Cho nước tiếp xúc lần lượt với các nguồn nhiệt có nhiệt độ từ thấp lên cao tạo thành một quá trình tiếp xúc nhiệt chuẩn dừng. Khi đó  $\Delta S = 0$  tại mọi bước tiến hành và kết quả đối với cả quá trình đều như nhau.

### 1062

Hai vật rắn hữu hạn giống hệt nhau có nhiệt dung  $C$  không đổi đối với mỗi vật và được dùng làm nguồn nhiệt để chạy một động cơ nhiệt. Nhiệt độ ban đầu của hai vật là  $T_1$  và  $T_2$ . Hãy tìm công cực đại có thể nhận được từ hệ.

(MIT)

**Lời giải:**

Vì năng lượng là bảo toàn nên công nhận được là  $W = C(T_1 + T_2 - 2T_f)$ , ở đây  $T_f$  là nhiệt độ cuối của hệ. Từ nguyên lý thứ hai nhiệt động lực học ta có

$$\Delta S = C \ln \frac{T_f}{T_1} + C \ln \frac{T_f}{T_2} \geq 0, \quad \text{do vậy} \quad T_f \geq \sqrt{T_1 T_2}.$$

Suy ra  $W_{\max} = C(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2})$ .

### 1063

Một hộp cứng chứa một mol không khí ở nhiệt độ  $T_0$  (độ K) đầu tiên tiếp xúc nhiệt với một nguồn nhiệt dung vô hạn có cùng nhiệt độ  $T_0$ . Hộp được ngắt khỏi nguồn và một động cơ hoàn hảo được dùng để lấy nhiệt từ nguồn truyền tới không khí trong hộp. Lượng công tối thiểu thực hiện từ  $T_0$  đến  $T_1$  là bao nhiêu? Biểu diễn  $W$  theo  $T_0$ ,  $T_1$ , hằng số khí  $R$  và những đơn vị trạng thái. Bỏ qua bậc tự do dao động của phân tử khí và nhiệt dung của bình chứa. Nếu kể đến bậc dao động tự do thì sẽ làm tăng hay giảm giá trị của  $W$ ?

(Columbia)

**Lời giải:**

Vì  $\Delta Q + W = C_v(T_1 - T_0)$ , ở đây  $\Delta Q$  là nhiệt lượng nhận từ nguồn nhiệt dung vô hạn, suy ra

$$0 \leq \Delta S = \Delta S_{\text{ng.nh}} + \Delta S_{\text{kk}} = -\Delta Q/T_0 + C_v \ln(T_1/T_0).$$

Từ đó

$$W \geq C_v(T_1 - T_0) - C_v T_0 \ln(T_1/T_0) = W_{\min}.$$

Nếu kể đến bậc dao động tự do thì  $W_{\min}$  sẽ tăng vì  $C_v$  tăng.

### 1064

Một động cơ nhiệt thuận nghịch làm việc giữa hai nguồn  $T_1$  và  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ). Nguồn  $T_1$  có thể xem là có khối lượng vô hạn tức là  $T_1$  giữ không đổi. Tuy nhiên, nguồn nóng  $T_2$  là một khối lượng khí hữu hạn có thể tích không đổi ( $\mu$  mol với nhiệt dung riêng  $C_v$ ).

Sau khi động cơ hoạt động một thời gian dài thì nhiệt độ  $T_2$  sẽ thấp hơn  $T_1$ .

- (a) Tính nhiệt lượng lấy từ nguồn nóng trong thời gian này?
- (b) Tính độ biến thiên entropy của nguồn nóng trong thời gian này?
- (c) Tính công mà động cơ thực hiện trong thời gian này?

(Columbia)

**Lời giải:**

$$(a) Q_{ht} = \mu C_v (T_2 - T_1).$$

$$(b) Vì dS = \frac{dQ}{T} = \frac{\mu C_v dT}{T}, \quad \Delta S = \mu C_v \ln \frac{T_1}{T_2}.$$

$$(c) \frac{dW}{dQ} = 1 - \frac{T_1}{T}, \quad dQ = -\mu C_v dT, \text{ do đó công thực hiện bởi động cơ là}$$

$$W = \int dW = - \int_{T_2}^{T_1} \left( 1 - \frac{T_1}{T} \right) \mu C_v dT = \mu C_v (T_2 - T_1) - \mu C_v T_1 \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right).$$

### 1065

Cho hai nguồn nhiệt lớn ở nhiệt độ 900 K (kí hiệu là  $H$ ) và 300 K (kí hiệu là  $C$ ).

- (a) Lấy 100 cal cal từ nguồn  $H$  truyền cho nguồn  $C$ . Độ biến thiên entropy của toàn hệ là bao nhiêu?
- (b) Một động cơ nhiệt làm việc giữa  $H$  và  $C$ . Hồi đổi với mỗi 100 cal lấy từ nguồn  $H$  thì sinh được bao nhiêu công và truyền cho nguồn  $C$  bao nhiêu nhiệt lượng?
- (c) Độ biến thiên entropy của toàn hệ trong quá trình nói ở phần (b) là bao nhiêu?
- (d) Một động cơ nhiệt thực hoạt động như một bơm nhiệt lấy nhiệt từ

nguồn  $C$  và truyền cho nguồn  $H$ . Ta có thể nói gì về độ biến thiên entropy trong toàn hệ gây bởi máy bơm nhiệt này?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Độ biến thiên entropy của toàn hệ là

$$\Delta S = Q \left( \frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_H} \right) = 100 \left( \frac{1}{300} - \frac{1}{900} \right) = \frac{2}{9} \text{ cal/K} .$$

(b) Công mà động cơ sinh ra đổi với mỗi 100 cal nhiệt lượng là

$$W = \eta Q_1 = \left( 1 - \frac{T_C}{T_H} \right) Q_1 = \left( 1 - \frac{300}{900} \right) \times 100 = \frac{200}{3} \text{ cal} .$$

Nhiệt lượng hấp thụ bởi nguồn  $C$  là

$$Q_2 = Q_1 - W = \frac{100}{3} \text{ cal} .$$

(c) Độ biến thiên entropy của toàn hệ là

$$\Delta S = -\frac{Q_1}{T_H} + \frac{Q_2}{T_C} = -\frac{100}{900} + \frac{100/3}{300} = 0 .$$

(d) Độ biến thiên entropy là

$$\Delta S = -\frac{Q_2}{T_C} + \frac{Q_1}{T_H} ,$$

ở đây  $Q_2$  là nhiệt lượng nhả cho nguồn có nhiệt độ thấp,  $Q_1$  là nhiệt lượng hấp thụ bởi nguồn có nhiệt độ cao. Vì  $\frac{Q_2}{T_C} - \frac{Q_1}{T_H} \leq 0$ ,  $\Delta S \geq 0$ .

### 1066

Xét một động cơ nhiệt bất kỳ làm việc giữa hai nguồn nhiệt, mỗi nguồn có nhiệt dung  $c$  hữu hạn không phụ thuộc nhiệt độ. Hai nguồn nhiệt này có nhiệt độ ban đầu là  $T_1$  và  $T_2$ , ở đây  $T_2 > T_1$ , và động cơ làm việc cho đến khi cả hai nguồn nhiệt có cùng nhiệt độ cuối cùng  $T_3$ .

(a) Hãy chứng minh rằng  $T_3 > \sqrt{T_1 T_2}$ .

(b) Giá trị công cực đại mà động cơ sinh ra là bao nhiêu?

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Độ tăng entropy của toàn hệ là

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_3} \frac{cdT}{T} + \int_{T_2}^{T_3} \frac{cdT}{T} = c \ln \frac{T_3^2}{T_1 T_2} \geq 0 .$$

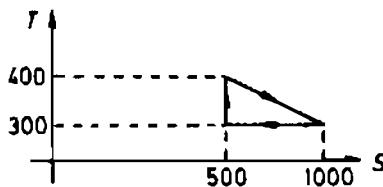
Do đó  $T_3^2 \geq T_1 T_2$ , hay  $T_3 \geq \sqrt{T_1 T_2}$ .

(b) Giá trị công cực đại có thể thu được khi dùng động cơ thuận nghịch, khi đó  $\Delta S = 0$ .

$$W_{\max} = c(T_1 + T_2 - 2T_{3\min}) = c(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}) = c(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2 .$$

### 1067

(a) Hiệu suất của một động cơ thuận nghịch làm việc theo một chu trình như hình dưới đây là bao nhiêu? Ở đây  $T$  là nhiệt độ đo bằng độ K,  $S$  là entropy do bằng J/K.



Hình 1.22

(b) Một khối lượng  $M$  chất lỏng ở nhiệt độ  $T_1$  trộn lẫn với một khối lượng tương đương của cùng chất lỏng ấy ở nhiệt độ  $T_2$ . Hệ được cách nhiệt. Gọi  $c_p$  là nhiệt dung riêng của chất lỏng, hãy tìm độ biến thiên entropy toàn phần. Chứng minh rằng kết quả này luôn dương.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Trong chu trình, nhiệt lượng do động cơ hấp thụ là

$$Q = (1000 - 500) \frac{400 + 300}{2} = 1,75 \times 10^5 \text{ J} ,$$

và công sinh ra là

$$W = (1000 - 500) \frac{400 - 300}{2} = 2,5 \times 10^4 \text{ J} .$$

như vậy hiệu suất là  $\eta = W/Q = 14,3\%$ .

(b) Dễ dàng thấy nhiệt độ cân bằng là  $T_3 = (T_1 + T_2)/2$ . Do đó

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_3} \frac{c_p dT}{T} = c_p \ln \frac{T_3}{T_1} ,$$

và

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_3} \frac{c_p dT}{T} = c_p \ln \frac{T_3}{T_2} ,$$

Do đó

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = c_p \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} .$$

Vì  $(T_1 + T_2)^2 \geq 4T_1 T_2$ , nên  $\Delta S \geq 0$ .

### 1068

(a) Một mol khí lý tưởng biến thiên từ nhiệt độ  $T_1$  và thể tích mol  $V_1$  đến  $T_2, V_2$ . Chứng minh rằng độ biến thiên entropy là

$$\Delta S = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} .$$

(b) Một chất khí lý tưởng giãn nở đoạn nhiệt từ  $(p_1, V_1)$  đến  $(p_2, V_2)$ . Sau đó nó được nén đẳng áp đến  $(p_2, V_1)$ . Cuối cùng áp suất tăng tới  $p_1$  ở thể tích không đổi  $V_1$ . Chứng minh rằng hiệu suất của chu trình là

$$\eta = 1 - \gamma(V_2/V_1 - 1)/(p_1/p_2 - 1) ,$$

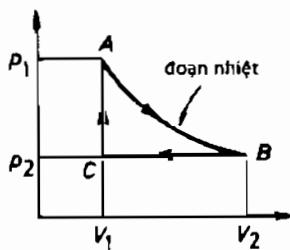
với  $\gamma = C_p/C_v$ .

(Columbia)

**Lời giải:**

(a) Từ  $dS = \frac{1}{T}(dU + pdV) = \frac{1}{T}(C_v dT + pdV)$  và

$$pV = RT ,$$



Hình 1.23

ta thu được

$$\Delta S = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} .$$

(b) Chu trình được chỉ ra trên hình 1.23.

Công hệ thực hiện trong chu trình là

$$W = \oint pdV = \int_{AB} pdV + p_2(V_1 - V_2) .$$

Vì AB là quá trình đoạn nhiệt và một chất khí lý tưởng có phương trình  $pV = nkT$  với  $C_p = C_v + R$ , ta có

$$\begin{aligned} \int_{AB} pdV &= - \int_{AB} C_v dT = -C_v(T_2 - T_1) \\ &= \frac{1}{1-\gamma}(p_2 V_2 - p_1 V_1) . \end{aligned}$$

Trong phần CA của chu trình chất khí hấp thụ nhiệt lượng

$$\begin{aligned} Q &= \int_{CA} T dS = \int_{CA} C_v dT = C_v(T_1 - T_2) \\ &= \frac{1}{1-\gamma} V_1(p_2 - p_1) . \end{aligned}$$

Từ đó hiệu suất của động cơ là

$$\eta = \frac{W}{Q} = 1 - \gamma \frac{\frac{V_2}{V_1} - 1}{\frac{p_1}{p_2} - 1} .$$

## 1069

(1) Giả sử anh (chị) được cho trước hệ thức sau đây giữa các đại lượng: entropy  $S$ , thể tích  $V$ , nội năng  $U$ , số hạt  $N$  của một hệ nhiệt động lực học là:  $S = A[NVU]^{1/3}$ , ở đây  $A$  là một hằng số. Hãy tìm mối liên hệ giữa các đại lượng:

- (a)  $U, N, V$  và  $T$ ;
- (b) Áp suất  $p, N, V$ , và  $T$ .
- (c) Tính nhiệt dung riêng đẳng tích  $c_v$ ?

(2) Giả sử có hai vật giống hệt nhau chỉ gồm một loại vật liệu tuân theo phương trình trạng thái đã tìm được trong câu (1).  $N$  và  $V$  có giá trị như nhau đối với cả hai và chúng có nhiệt độ ban đầu tương ứng là  $T_1$  và  $T_2$ . Dùng hai vật này làm nguồn sinh công bằng cách đưa chúng tới nhiệt độ chung cuối cùng  $T_f$ . Quá trình này được thực hiện bằng cách lấy một nhiệt lượng từ nguồn nóng truyền một phần cho nguồn lạnh, phần còn lại thì sinh công.

- (a) Xác định khoảng nhiệt độ cuối cùng khả dĩ?
- (b) Ở nhiệt độ  $T_f$  nào thì công sinh ra là lớn nhất? Giá trị lớn nhất của công này là bao nhiêu?

(Có thể khảo sát cả hai loại quá trình thuận nghịch và không thuận nghịch để giải bài toán này.)

(Princeton)

**Lời giải:**

$$(1) \quad U = \frac{S^3}{A^3 NV} ,$$

$$T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,N} = \frac{3S^2}{A^3 NV} = \frac{3U^{2/3}}{A(NV)^{1/3}} ,$$

$$p = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,N} = \frac{S^2}{A^3 NV^2} = \frac{U}{V} = \frac{1}{V} \sqrt{NV} \cdot \left( \frac{AT}{3} \right)^{3/2}$$

$$c_v = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A^3 NV}{3}} \cdot \sqrt{T} \equiv \lambda \sqrt{T} .$$

(2) Khi không sinh công,  $T_f$  sẽ cực đại. Khi đó

$$Q_1 = \int_{T_1}^{T_f} c_v dT = \int_{T_1}^{T_f} \lambda \sqrt{T} dT = \frac{2}{3} \lambda (T_f^{3/2} - T_1^{3/2}) ,$$

$$Q_2 = \int_{T_2}^{T_f} c_v dT = \frac{2}{3} \lambda (T_f^{3/2} - T_2^{3/2}) .$$

Từ  $Q_1 + Q_2 = 0$ , suy ra

$$T_{f\max} = \left[ \frac{T_1^{3/2} + T_2^{3/2}}{2} \right]^{2/3} .$$

Giá trị cực tiểu của  $T$  tương ứng với quá trình thuận nghịch, khi đó độ biến thiên entropy bằng 0. Vì

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_f} c_v dT/T = 2\lambda(T_f^{1/2} - T_1^{1/2}),$$

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_f} c_v dT/T = 2\lambda(T_f^{1/2} - T_2^{1/2}),$$

và  $\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$ , ta có

$$T_{f\min} = \left( \frac{T_1^{1/2} + T_2^{1/2}}{2} \right)^2.$$

Từ đó

$$T_{f\min} \leq T_f \leq T_{f\max}$$

$\bar{W}_{\max}$  tương ứng với  $T_{f\min}$ , tức là động cơ nhiệt thuận nghịch sinh công cực đại

$$\bar{W}_{\max} = -(Q_1 + Q_2) = \frac{2\lambda}{3} \left[ T_1^{3/2} + T_2^{3/2} - 2 \left( \frac{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}}{2} \right)^3 \right],$$

với  $\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A^3 NV}{3}}$ .

## 1070

Một kilôgam nước được đun nóng bằng điện trở từ 20°C đến 99°C (trong không khí). Hãy xác định:

- (a) Độ biến thiên nội năng của nước.
- (b) Độ biến thiên entropy của nước.
- (c) Số lần tăng số trạng thái lượng tử khả dụng của nước.
- (d) Công cơ học cực đại đạt được khi dùng nước này làm nguồn nhiệt chạy một động cơ có nguồn lạnh là 20°C.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

- (a) Độ biến thiên nội năng của nước là

$$\Delta U = Mc\Delta T = 1000 \times 1 \times 79 = 7,9 \times 10^4 \text{ cal.}$$

- (b) Độ biến thiên entropy là

$$\Delta S = \int \frac{Mc}{T} dT = Mc \ln \frac{T_2}{T_1} = 239 \text{ cal/K.}$$

(c) Từ hệ thức Boltzmann  $S = k \ln \Omega$ , suy ra

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \exp \left( \frac{\Delta S}{k} \right) = \exp(7 \times 10^{25}).$$

(d) Công cơ học cực đại là

$$W_{\max} = \int_{T_1}^{T_2} \left( 1 - \frac{T_1}{T} \right) Mc dT = Mc(T_2 - T_1) - T_1 Mc \ln \frac{T_2}{T_1} \\ = 9 \times 10^3 \text{ cal.}$$

1071

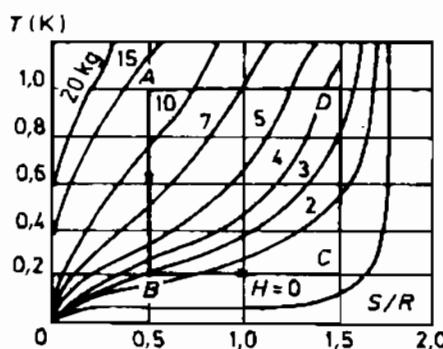
Một mol chất thuận từ mà đồ thị của nó trong hệ toạ độ  $T - S$  của nó vẽ dưới đây được dùng làm tác nhân trong một máy làm lạnh Carnot làm việc giữa một mẫu ở 0,2 K và nguồn ở 1 K:

(a) Hãy chỉ ra một chu trình Carnot khả thi trên hệ toạ độ  $T - S$  và mô tả chi tiết chu trình đó thực hiện như thế nào.

(b) Đối với chu trình đã được chọn thì nhiệt lượng thu từ mẫu trong một chu trình là bao nhiêu?

(c) Công thực hiện bởi vật thuận từ trong một chu trình là bao nhiêu?

(Columbia)



Hình 1.24

**Lời giải:**

(a) Chu trình Carnot được vẽ trên hình 1.24 (hình chữ nhật  $ABCD$ ):

$A \rightarrow B$ , giảm đoạn nhiệt từ trường;

$B \rightarrow C$ , từ trường giảm đắng nhiệt;

$C \rightarrow D$ , từ trường tăng đoạn nhiệt;

$D \rightarrow A$ , từ trường tăng đắng nhiệt;

$$\begin{aligned}(b) Q_{\text{ht}} &= T_{\text{thấp}} \Delta S_{B \rightarrow C} = 0,2 \times (1,5 - 0,5)R \\ &= 1,7 \times 10^7 \text{ ergs/mol.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c) Q_{\text{tr}} &= T_{\text{cao}} \Delta S_{D \rightarrow A} = 1 \times (1,5 - 0,5)R \\ &= 8,3 \times 10^7 \text{ ergs/mol.}\end{aligned}$$

Công thực hiện là

$$W = Q_{\text{tr}} - Q_{\text{ht}} = 6,6 \times 10^7 \text{ ergs/mol.}$$

1072

Một tụ điện có điện dung rất nhạy với nhiệt độ thực hiện chu trình sau đây:

(1) Tụ điện đặt trong bình có nhiệt độ  $T_1$  không đổi, được nạp điện chậm (không có tiêu tán do thuần trở nào) tới điện tích  $q$  và điện thế  $V_1$ . Nhiệt lượng  $Q_1$  được truyền cho tụ điện trong quá trình nạp này.

(2) Bây giờ tụ điện được lấy ra khỏi bình nhưng quá trình nạp vẫn tiếp tục cho đến khi đạt điện thế  $V_2$  và nhiệt độ  $T_2$ .

(3) Tụ điện được giữ ở nhiệt độ  $T_2$  và phóng điện chậm.

(4) Tụ vẫn tách khỏi bình và giữ ở nhiệt độ  $T_2$  và phóng điện hoàn toàn cho đến khi trở về trạng thái không tích điện ban đầu tại nhiệt độ  $T_1$ .

(a) Tính công thực sự thực hiện trong quá trình nạp và phóng của tụ điện.

(b) Nhiệt lượng truyền vào tụ điện trong bước (3) là bao nhiêu?

(c) Đối với điện tích  $q$  cố định của tụ điện hãy tính  $dV/dT$ .

Gợi ý : khảo sát  $V_2 = V_1 + dV$

(Columbia)

Lời giải:

(a) Toàn bộ chu trình có thể xem là một chu trình Carnot thuận nghịch. (1) và (3) là quá trình đẳng nhiệt; (2) và (4) là quá trình đoạn nhiệt.

Trong một chu trình công sinh ra là

$$W = Q_{\text{tr}} - Q_{\text{ht}} = T_2|\Delta S_2| - T_1|\Delta S_1| .$$

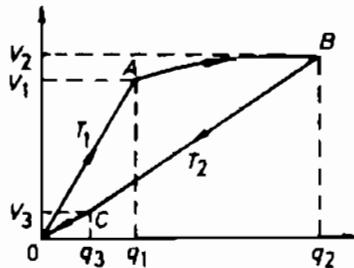
Độ biến thiên entropy toàn phần trong một chu trình bằng 0. Do đó

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0 , \text{ tức là } |\Delta S_1| = |\Delta S_2| .$$

Vì  $T_1|\Delta S_1| = Q_{\text{ht}}$ , suy ra

$$W = \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) Q_{\text{ht}}$$

$$(b) Q_{\text{tr}} = T_2|\Delta S_2| = T_2 Q_{\text{ht}}/T_1 .$$



Hình 1.25

(c) Ta dựng đồ thị của chu trình trên trong hệ tọa độ  $V$ (diện thế)- $q$ (diện tích) như trên hình 1.25. Ta có

$$W = \oint V dq .$$

Giả sử  $V_2 = V_1 + dV$ , ở đây  $dV$  là độ biến thiên diện thế vô cùng nhỏ, và gọi điện dung của tụ điện là  $C(T)$ . Khi đó ta có

$$O \rightarrow A : V = q/C(T_1) , \quad B \rightarrow C : V = q/C(T_2) .$$

Công thực hiện trong mỗi quá trình trên là

$$\begin{aligned} W_{O \rightarrow A} &= \frac{1}{2}q_1 V_1 = \frac{1}{2}C(T_1)V_1^2, \\ W_{A \rightarrow B} &\approx V_1[C(T_2)V_2 - C(T_1)V_1], \\ W_{B \rightarrow C} &= -\frac{1}{2}(V_2 + V_3)(q_2 - q_3) = -\frac{1}{2}(V_2^2 - V_3^2)C(T_2) \\ W_{C \rightarrow O} &\approx -V_3 q_3 = -C(T_2)V_3^2. \end{aligned}$$

Hiện nhiên đường đoạn nhiệt  $B \rightarrow C$  đi qua  $O$ . Như vậy, nếu  $dV$  là một lượng nhỏ thì  $V_3$  cũng là một lượng nhỏ. Khi đó ở gần đúng bậc nhất, ta có

$$W_{C \rightarrow O} \approx 0, \quad W_{B \rightarrow C} \approx -V_2^2 C(T_2)/2.$$

Do đó

$$\begin{aligned} W &= \sum_i W_i \approx \frac{1}{2}C(T_1)V_1^2 - \frac{1}{2}C(T_2)V_2^2 + V_1[C(T_2)V_2 - C(T_1)V_1] \\ &\approx -d\left(\frac{1}{2}C(T)V^2\right) + Vd(C(T)V) \\ &= \frac{1}{2}V^2 \frac{dC(T)}{dT} \cdot dT. \end{aligned}$$

Mặt khác, từ (a) ta có

$$W = \frac{Q_1}{T_1}(T_2 - T_1) = \frac{Q}{T}dT.$$

Do đó

$$\frac{1}{2}V^2 \frac{dC(T)}{dT} = \frac{Q}{T}$$

hay

$$\frac{dC(T)}{dT} = \frac{2Q}{TV^2}.$$

Cuối cùng ta được

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV}{dT}\right)_q &= \left[\frac{d}{dT} \cdot \frac{q}{C(T)}\right]_q = q \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{C(T)}\right) \\ &= -2Q/Tq, \end{aligned}$$

Hay

$$\left[\frac{\partial V(T, q)}{\partial T}\right]_q = -\frac{2Q(T, q)}{Tq},$$

trong đó  $Q(T, q)$  là nhiệt lượng mà tụ điện hấp thụ khi nó được nạp điện từ 0 đến  $q$  trong khi tiếp xúc với nguồn nhiệt có nhiệt độ không đổi  $T$ .

### 3. CÁC HÀM NHIỆT ĐỘNG VÀ CÁC ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG (1073–1105)

1073

Đối với mỗi điều kiện nhiệt động sau đây hãy mô tả một hệ hoặc một lớp các hệ (các thành phần hay phạm vi các thành phần, nhiệt độ, ...) thoả mãn điều kiện đó. Chỉ giới hạn trong phạm vi các hệ hoá học, cổ điển, một thành phần và có khối lượng không đổi.  $U$  là nội năng,  $S$  là entropy của hệ.

$$(a) \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 , \quad (b) \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p < 0 ,$$

$$(c) \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p = 0 , \quad (d) \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = 0 ,$$

$$(e) \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = - \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V .$$

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Khí lý tưởng cổ điển.

$$(b) \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p = \frac{\partial(S,p)}{\partial(V,p)} = \frac{\partial(S,p)}{\partial(T,p)} \left/ \frac{\partial(V,p)}{\partial(T,p)} \right. = \frac{C_p}{\partial TV} < 0 .$$

Điều này đòi hỏi  $\alpha < 0$ , tức là hệ có hệ số giãn nở đẳng áp âm.

$$(c) \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P = \frac{T}{C_p} = 0. \text{ Điều này đòi hỏi } C_p = \infty. \text{ Hệ có hai pha cùng tồn tại.}$$

$$(d) \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = 0. \text{ Điều này đòi hỏi } \beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = 0.$$

Đó là một hệ có hệ số áp suất đẳng tích bằng 0.

(e) Tất cả các hệ một thành phần và khối lượng không đổi thoả mãn hệ thức Maxwell này.

## 1074

Xét một chất khí lý tưởng mà entropy của nó được cho bởi

$$S = \frac{n}{2} \left[ \sigma + 5R \ln \frac{U}{n} + 2R \ln \frac{V}{n} \right] ,$$

ở đây  $n$  = số mol,  $R$  = hằng số khí,  $U$  = nội năng,  $V$  = thể tích và  $\sigma$  là hằng số.

(a) Tính nhiệt dung đẳng áp  $c_p$  và đẳng tích  $c_v$ .

(b) Một ngôi nhà cũ bỏ hoang lúc đầu cân bằng với môi trường xung quanh ở  $32^{\circ}\text{F}$ . Sau khi đốt lò sưởi 3 giờ ngôi nhà trở nên áp suất  $70^{\circ}\text{F}$ . Giả sử rằng không khí trong nhà được mô tả bằng phương trình nói trên, hãy so sánh mật độ năng lượng (năng lượng/thể tích) của không khí trong nhà ở hai nhiệt độ đó.

(Columbia)

**Lời giải:**

(a) Nhiệt độ  $T$  được xác định bởi phương trình sau

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_V = \frac{n}{2} R \frac{1}{U} . \quad \text{hoặc} \quad U = \frac{5}{2} n R T .$$

Do đó nhiệt dung đẳng tích là

$$c_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{5}{2} n R .$$

Nhiệt dung đẳng áp là

$$c_p = c_v + nR = \frac{7}{2} n R .$$

$$(b) \frac{U}{V} = \frac{5}{2} R \left( \frac{n}{V} \right) T .$$

Dùng phương trình trạng thái khí lý tưởng  $pV = nRT$ , ta có

$$\frac{U}{V} = \frac{5}{2} p .$$

Vì trong bài toán này áp suất khí quyển không thay đổi ở hai nhiệt độ nên mật độ năng lượng cũng không thay đổi.

**1075**

Khí lý tưởng là một chất khí có phương trình trạng thái  $pV = NkT$  và nội năng của nó là hàm số chỉ của nhiệt độ. Đối với khí lý tưởng hãy chứng minh rằng

(a)  $c_p = c_v + k$ , ở đây  $c_p$  và  $c_v$  lần lượt là nhiệt dung (phân tử) đẳng áp và đẳng tích.

(b) đại lượng  $pV^\gamma$  là hằng số trong quá trình giãn đoạn nhiệt. (Giả sử  $\gamma = c_p/c_v$  là hằng số).

(MIT)

**Lời giải:**

Gọi  $C_p$  và  $C_v$  là các nhiệt dung phân tử.

(a) Từ  $pV = NkT$  và  $TdS = dU + pdV$ , ta tìm được

$$C_p - C_v = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p - T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = Nk .$$

Từ đó  $C_p - C_v = k$ .

(b) Đối với quá trình đoạn nhiệt,  $TdS = 0$  và từ đó  $C_v dT = -pdV$ . Từ  $pV = NkT$ , ta có

$$pdV + Vdp = NkdT = (C_p - C_v)dT .$$

Suy ra  $\gamma pdV + Vdp = 0$ , tức là

$$pV^\gamma = \text{const.}$$

**1076**

Hiệu số giữa nhiệt dung đẳng áp và nhiệt dung đẳng tích là gần như nhau đối với mọi chất khí đơn giản. Hỏi giá trị gần đúng của  $c_p - c_v$  là bao nhiêu? Sự khác nhau giữa  $c_p$  và  $c_v$  do những nguyên nhân vật lý nào? Tính hiệu số đó đối với khí lý tưởng.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

$$c_p - c_v = \frac{1}{m} \left[ T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p - T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \right]$$

ở đây  $m$  là khối lượng khí. Từ mối liên hệ hàm số

$$S(T, p) = S(T, V(T, p)) ,$$

ta tìm được

$$\left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V + \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p .$$

Dùng hệ thức Maxwell  $\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$ , công thức trên trở thành

$$c_p - c_v = \frac{T}{m} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{VT\alpha^2}{mK} , \quad (*)$$

ở đây  $\alpha$  là hệ số giãn nở nhiệt,  $K$  là hệ số nén. Đối với khí lý tưởng  $\alpha = \frac{1}{T}$  và  $K = \frac{1}{p}$ , như vậy  $c_p - c_v = nR/m = R/M$ . ( $M$  là khối lượng mol).

Công thức (\*) liên hệ hiệu số của hai nhiệt dung với phương trình trạng thái. Đối với một số chất, nhiệt dung đẳng áp hoặc đẳng tích không dễ dàng đo được trong các thí nghiệm thì có thể xác định nhờ công thức (\*) bằng cách đo  $K$  và  $\alpha$ . Đối với khí đơn giản giá trị của  $\alpha$  và  $K$  gần với các giá trị của chúng đối với khí lý tưởng. Như vậy, hiệu số giữa hai nhiệt dung gần đúng là  $R/M$ . Nguyên nhân để  $c_p > c_v$  là vì chất khí giãn nở đẳng áp cần phải sinh công khiếu cho nó phải nhận nhiệt lượng nhiều hơn cho mục đích đó.

1077

Một hệ thuận từ trong một từ trường đều  $H$  được cách nhiệt với xung quanh. Nó có độ từ hoá cảm ứng  $M = aH/T$  và nhiệt dung  $c_H = b/T^2$   $\alpha = a + bH$  khi  $H$  không đổi, ở đây  $a$  và  $b$  là những hằng số còn  $T$  là nhiệt độ. Nhiệt độ của hệ sẽ thay đổi như thế nào khi  $H$  giảm chuẩn dừng tới 0? Để nhiệt độ cuối cùng bằng nửa nhiệt độ ban đầu thì  $H$  ban đầu phải bằng bao nhiêu?

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Từ hệ thức  $dU = TdS + HdM$ , ta có  $\left( \frac{\partial T}{\partial M} \right)_S = \left( \frac{\partial H}{\partial S} \right)_M$ . Suy ra

$$\frac{\partial(T, S)}{\partial(H, M)} = -1 .$$

Do đó

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S &= \frac{\partial(T, S)}{\partial(H, S)} = \frac{\partial(H, T)}{\partial(H, S)} \cdot \frac{\partial(H, M)}{\partial(H, T)} \cdot \frac{\partial(T, S)}{\partial(H, M)} \\ &= -\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_H \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H = -\frac{T}{c_H} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H,\end{aligned}$$

và  $T_i = (1 + bH^2/a)^{a/2b}T_f$ . Điều này chứng tỏ nhiệt độ của hệ sẽ giảm khi  $H$  giảm tới 0.

Nếu  $T_f = T_i/2$ , thì  $H = \sqrt{\frac{a}{b}(2^{2b/a} - 1)}$ .

### 1078

Tính chất nhiệt động lực học của một hệ thuận từ cổ điển được diễn tả bởi các biến số: độ từ hoá  $M$ , từ trường  $B$ , và nhiệt độ tuyệt đối  $T$ .

Phương trình trạng thái là

$$M = CB/T, \quad \text{ở đây } C \text{ là hằng số Curie}$$

Nội năng của hệ là

$$U = -MB.$$

Số gia của công do hệ thực hiện đối với môi trường bên ngoài là  $dW = MdB$ .

(a) Viết biểu thức đối với nhiệt lượng  $dQ$  mà hệ nhận được theo các biến số nhiệt động  $M$  và  $B$

$$dQ = (\quad) dM + (\quad) dB.$$

(b) Tìm một hệ thức đối với vi phân entropy của hệ

$$dS = (\quad) dM + (\quad) dB.$$

(c) Tìm một biểu thức đối với entropy  $S = \dots$

(Wisconsin)

**Lời giải:**

$$(a) dQ = dU + dW = -d(MB) + MdB = -BdM.$$

$$(b) dS = \frac{dQ}{T} = -\frac{B}{T}dM = -\frac{M}{C}dM.$$

$$(c) S = S_0 - \frac{M^2}{2C}.$$

(Ghi chú: Nội năng và công sinh ra trong bài toán đã được cho những định nghĩa mới).

### 1079

Phương trình trạng thái của một chất mới là

$$p = AT^3/V,$$

trong đó  $p, V$  và  $T$  lần lượt là áp suất, thể tích và nhiệt độ,  $A$  là một hằng số. Nội năng của chất đó là

$$U = BT^n \ln(V/V_0) + f(T),$$

ở đây  $B, n$  và  $V_0$  là những hằng số,  $f(T)$  chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ. Tìm  $B$  và  $n$ .

(CUSPEA)

**Lời giải:**

Từ nguyên lý thứ nhất nhiệt động lực học, ta có

$$dS = \frac{dU + pdV}{T} = \left[ \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{p}{T} \right] dV + \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT.$$

Thay biểu thức của nội năng  $U$  và áp suất  $p$  vào biểu thức trên, ta được

$$dS = \frac{BT^{n-1} + AT^2}{V} dV + \left[ \frac{f'(T)}{T} + nBT^{n-2} \ln \frac{V}{V_0} \right] dT.$$

Từ điều kiện vi phân toàn chỉnh ta có

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{BT^{n-1} + AT^2}{V} \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left[ \frac{f'(T)}{T} + nBT^{n-2} \ln \frac{V}{V_0} \right],$$

hay  $2AT - BT^{n-2} = 0$ . Do đó  $n = 3, B = 2A$ .

**1080**

Những phép đo sau đây có thể thực hiện trên một băng đàn hồi

(a) Sự thay đổi nhiệt độ khi băng đàn hồi được căng ra. (Trong trường hợp anh (chị) không tin, hãy cầm chắc băng bằng hai tay, lấy môi để kiểm tra nhiệt độ, hãy kéo dãn băng rồi kiểm tra nhiệt độ; sau đó thả lỏng băng, rồi lại kiểm tra nhiệt độ lần nữa).

(b) Một đầu băng giữ cố định, đầu kia gắn với một tải trọng  $W$  và đo tần số  $\mu$  của các dao động nhỏ.

(c) Khi tải trọng đứng yên, người ta cấp cho hệ nhiệt lượng  $\sigma Q$  và thấy chiều dài cân bằng  $L$  thay đổi một lượng là  $\delta L$ .

Hãy tìm một phương trình giúp ta tìm thấy kết quả của phép đo sau cùng từ kết quả của hai phép đo đầu tiên.

(Princeton)

**Lời giải:**

Hệ số đàn hồi của băng là  $k = W(2\pi\nu)^2/g$ .

Khi nhiệt lượng  $\delta Q$  được thêm vào tải trọng đứng yên, tức là sự căng giữ không đổi, ta có  $\delta S = \delta Q/T$ . Do đó

$$\begin{aligned}\delta L &= \left(\frac{\partial L}{\partial S}\right)_W \delta S = \frac{\partial(L, W)}{\partial(T, W)} \cdot \frac{\partial(T, W)}{\partial(S, W)} \cdot \frac{\delta Q}{T} \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_W \cdot \frac{\delta Q}{C_W}.\end{aligned}$$

Vì  $L - L_0 = W/k$ , suy ra

$$\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_W = \frac{dL_0}{dT} - \frac{W}{k^2} \frac{dk}{dT}.$$

Do đó

$$\delta L = \left(\frac{dL_0}{dT} - \frac{W}{k^2} \frac{dk}{dT}\right) \frac{\delta Q}{C_W},$$

trong đó

$$k = \frac{4\pi^2 W}{g} \nu^2.$$

## 1081

Sức căng  $F$  trong một vật hình trụ đàn hồi lý tưởng được cho bởi phương trình trạng thái

$$F = aT \left( \frac{L}{L_0(T)} - \frac{L_0^2(T)}{L^2} \right) ,$$

trong đó  $a$  là hằng số,  $L_0$  là chiều dài khi sức căng bằng 0, và  $L(T)$  là hàm số chỉ của nhiệt độ  $T$ .

(a) Hình trụ được kéo giãn thuận nghịch và đẳng nhiệt  $L = L_0$  tới  $L = 2L_0$ . Tìm nhiệt lượng  $Q$  truyền cho hình trụ theo  $a, T, L_0$  và  $\alpha_0$  - hệ số giãn nở nhiệt khi sức căng bằng không là

$$\alpha_0 = \frac{1}{L_0(T)} \frac{dL_0(T)}{dT} .$$

(b) Khi chiều dài biến đổi đoạn nhiệt thì nhiệt độ của hình trụ thay đổi. Hãy tìm một biểu thức đổi với hệ số nhiệt đàn hồi  $(\partial T / \partial L)_S$  với  $S$  là entropy, theo  $a, T, L, L_0, \alpha_0$ , và  $C_L$ , là nhiệt dung khi chiều dài không đổi.

(c) Hãy xác định xem  $C_L$  có phải là hàm số chỉ của  $T$  hay  $C_L(T)$  còn phụ thuộc vào chiều dài,  $C_L(T, L)$ , đổi với hệ này.

(MIT)

**Lời giải:**

Gọi  $\Phi$  là năng lượng tự do. Từ  $d\Phi = -SdT + FdL$ , ta có

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial L} \right)_T = F = aT \left( \frac{L}{L_0(T)} - \frac{L_0^2(T)}{L^2} \right) .$$

Do đó

$$\phi(T, L) = aT \left( \frac{L^2}{2L_0} + \frac{L_0^2}{L} - \frac{3}{2}L_0 \right) + \phi(T, L_0) ,$$

và

$$\begin{aligned} S &= - \left( \frac{\partial \phi}{\partial T} \right)_L = a \left( \frac{3L_0}{2} - \frac{L_0^2}{L} - \frac{L^2}{2L_0} \right) \\ &\quad - aT L_0 \left( \frac{3}{2} - \frac{2L_0}{L} + \frac{L^2}{2L_0^2} \right) \alpha_0 + S_0 . \end{aligned}$$



Hình 1.26

$$(a) Q = T[S(T, 2L_0) - S_0] = -aTL_0 \left(1 + \frac{5}{2}T\alpha_0\right).$$

$$(b) \left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S = \frac{\partial(T, S)}{\partial(L, S)} = -\frac{T \left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T}{C_L}$$

$$= \frac{aTL_0^2}{C_L L^2} \left[ -1 + \frac{L^3}{L_0^3} + T \left(2 + \frac{L^3}{L_0^3}\right) \alpha_0 \right].$$

$$(c) \left(\frac{\partial C_L}{\partial L}\right)_T = T \frac{\partial^2 S}{\partial L \partial T}$$

$$= -aT \left\{ \frac{\partial}{\partial T} \left[ -\frac{L_0^2}{L^2} + \frac{L}{L_0} + T \left(2 \frac{L_0^2}{L^2} + \frac{L}{L_0}\right) \alpha_0 \right] \right\}_L \neq 0.$$

Do đó  $C_L = C_L(T, L)$ .

### 1082

Cho biết: khi một băng cao su bị kéo giãn đoạn nhiệt, nhiệt độ của nó tăng dần.

(a) Nếu băng cao su được kéo giãn đẳng nhiệt thì entropy của nó tăng, giảm, hay giữ nguyên không đổi?

(b) Nếu băng cao su được kéo giãn đoạn nhiệt thì nội năng của nó tăng, giảm, hay giữ nguyên không đổi?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Giả thiết khi băng cao su căng một đoạn  $dx$  thì công thực hiện là

$$dW = kx dx,$$

ở đây  $k$  là hệ số đàn hồi, lớn hơn 0. Từ công thức  $dF = -SdT + kxdx$ , ta thu được hệ thức Maxwell

$$\left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_T = - \left( k \frac{\partial x}{\partial T} \right)_x = 0.$$

Do đó entropy của băng cao su giữ nguyên khi nó bị kéo giãn đẳng nhiệt.

(b) Theo công thức  $dU = TdS + kxdx$ , ta có  $\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_S = kx > 0$ , điều này chứng tỏ nội năng của nó tăng khi giãn đoạn nhiệt.

### 1083

Sức căng của một băng cao su khi cân bằng cho bởi công thức

$$t = AT \left( \frac{x}{l_0} - \frac{l_0^2}{x^2} \right),$$

trong đó  $t$  = là sức căng,  $T$  = là nhiệt độ tuyệt đối,  $x$  = chiều dài của băng,  $l_0$  = chiều dài của băng khi  $t = 0$ ,  $A$  = hằng số.

Khi  $x$  là chiều dài  $l_0$  không đổi, nhiệt dung  $c_x(x, T)$  xem là hằng số  $K$ .

(a) Hãy tìm những đại lượng sau đây như là hàm số của  $T$  và  $x$ :

(1)  $\left( \frac{\partial E}{\partial x} \right)_T$  với  $E$  = nội năng; (2)  $\left( \frac{\partial c_x}{\partial x} \right)_T$ ; (3)  $c_x(x, T)$ ; (4)  $E(x, T)$ ; (5)  $S(x, T)$  với  $S$  = entropy.

(b) Băng được kéo giãn đoạn nhiệt từ  $x = l_0$  tới  $x = 1,5l_0$ . Nhiệt độ ban đầu của băng là  $T_0$ . Hỏi nhiệt độ cuối cùng của nó là bao nhiêu?

(CUSPEA)

Lời giải:

(a) Từ nhiệt động lực học ta biết rằng  $dE = TdS + tdx$ .

Khi đó vì

$$c_x = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_x,$$

ta có

$$c_x = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_x.$$

Tổng quát,  $E = E(x, T)$ , ta có

$$dE = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_x dT + \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right)_T dx.$$

tức là  $dE = c_x dT + \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_T dx$ .

Mặt khác,

$$dS = \frac{1}{T}(dE - tdx) = \frac{c_x}{T}dT + \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right)_T - t \right] dx .$$

Từ  $\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial T} = \frac{\partial^2 E}{\partial T \partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial x}$  ta thu được

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} c_x = \frac{\partial^2 E}{\partial T \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{c_x}{T} = \frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right)_T - t \right]. \end{cases}$$

Do đó  $(\partial E / \partial x)_T = t - T(\partial t / \partial T)_x$ .

Thay biểu thức của  $t$  vào ta có  $(\partial E / \partial x)_T = 0$ . Suy ra  $(\partial c_x / \partial x)_T = 0$ . Lấy tích phân, ta được

$$\begin{aligned} c_x(x, T) &= c_x(l_0, T) + \int_{l_0}^x \frac{\partial c_x(x, T) dx}{\partial x} \\ &= c_x(l_0, T) + 0 = c_x(l_0, T) = K . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(x, T) &= E(T) = \int_{T_0}^T dE + E(T_0) = \int_{T_0}^T \frac{dE}{dT} dT + E(T_0) \\ &= \int_{T_0}^T K dT + E(T_0) = K(T - T_0) + E(T_0) . \end{aligned}$$

Từ

$$\begin{aligned} dS &= \frac{c_x}{T} dT + \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right)_T - t \right] dx \\ &= \frac{K}{T} dT - A \left( \frac{x}{l_0} - \frac{l_0^2}{x^2} \right) dx , \end{aligned}$$

Sau khi tích phân ta tìm được

$$S(x, T) = K \ln T - A \left( \frac{x^2}{2l_0} + \frac{l_0^2}{x} \right) + \text{const.}$$

(b) Đổi với quá trình đoạn nhiệt  $dS = 0$

$$\frac{K}{T} dT - A \left( \frac{x}{l_0} - \frac{l_0^2}{x^2} \right) dx = 0 .$$

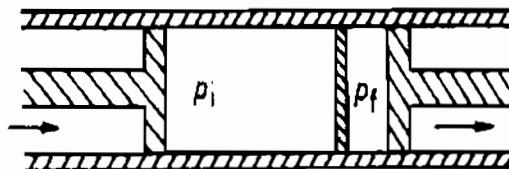
Sau khi tích phân ta có

$$\begin{aligned} K \ln \frac{T_f}{T_0} &= A \left[ \frac{(1.5l_0)^2}{2l_0} + \frac{l_0^2}{1.5l_0} - \frac{l_0^2}{2l_0} - \frac{l_0^2}{l_0} \right] \\ &= 0,292Al_0 . \end{aligned}$$

Từ đó  $T_f = T_0 \exp(0,292Al_0/K)$ .

### 1084

Xét một chất khí bị giãn đoạn nhiệt (gọi là quá trình tiết lưu) từ miền có áp suất  $p_i$ , không đổi và thể tích  $V_i$  tới miền có áp suất không đổi  $p_f$  và thể tích cuối cùng  $V_f$  (thể tích ban đầu 0).



Hình 1.27

(a) Bằng cách khảo sát công chất khí sinh ra trong quá trình đó, hãy chứng minh rằng nhiệt độ đầu và cuối của chất khí là bằng nhau.

(b) Có thể nói gì về những trạng thái trung gian của hệ?

(c) Hãy chứng minh rằng với hiệu áp suất  $\Delta p = p_f - p_i$  nhỏ thì hiệu nhiệt độ giữa hai miền cho bởi hệ thức  $\Delta T = \frac{V}{c_p}(T\alpha - 1)\Delta p$ , với  $\alpha = \frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial T})_p$  và  $c_p = (\frac{\partial U}{\partial T})_p$ .

(d) Sử dụng kết quả trên, hãy thảo luận về khả năng dùng quá trình này làm lạnh một khí lý tưởng hoặc một khí thực hơn có phương trình trạng thái  $p = RT/(V - b)$ . Giải thích kết quả của anh (chị).

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Công thức hiện bởi chất khí trong quá trình tiết lưu là  $p_fV_f - p_iV_i$ , và bằng độ giảm nội năng

$$U_i - U_f = p_fV_f - p_iV_i .$$

Do đó  $U_i + p_i V_i = U_f + p_f V_f$ , tức là  $H_i = H_f$ .

(b) Vì quá trình là chuẩn tinh nên những trạng thái đầu và cuối có thể là bất kỳ hai trạng thái trung gian nào. Như vậy kết luận này vẫn có giá trị đối với các trạng thái trung gian.

(c) Từ  $dH = TdS + Vdp = 0$  và

$$dS = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp = \frac{c_p}{T} dT - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dp ,$$

ta thu được

$$dT = \frac{1}{c_p} \left[ T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V \right] dp = \frac{V}{c_p} (T\alpha - 1) dp .$$

vậy đối với một hiệu áp suất  $\Delta p$  nhỏ ta có gần đúng

$$\Delta T = \frac{V}{c_p} (T\alpha - 1) \Delta p .$$

(d) Đối với khí lý tưởng, ta có  $pV = NRT$  và  $\alpha = 1/T$ . Suy ra

$$\Delta T = V(T\alpha - 1) \Delta p / c_v = 0 .$$

Vì  $\Delta T = 0$  quá trình này không thể dùng để làm lạnh khí lý tưởng. Đối với khí thực hơn mà  $p = RT/(V - b)$ ,  $\alpha = R/Vp$  và  $V(\alpha T - 1) = -b$ . Từ đó  $\Delta T = -b \Delta p / c_p$ . Vì  $\Delta p < 0$  đối với quá trình tiết lưu,  $\Delta T > 0$ , vì thế chất khí cũng không thể bị làm lạnh bởi quá trình này.

### 1085

(a) Dùng phương trình trạng thái  $pV = NRT$  và nhiệt dung riêng mol đối với khí lý tưởng đơn nguyên tử để tìm năng lượng tự do Helmholtz  $F$  như là hàm số của  $N$ , thể tích  $V$ , và nhiệt độ  $T$ .

(b) Khảo sát một xilanh được chia thành hai phần nhờ một pittông đoạn nhiệt và không thấm thấu. Mỗi bên  $a$  và  $b$  của xilanh chứa một mol khí lý tưởng đơn nguyên tử có thể thích ban đầu là  $V_{ai} = 10$  lít và  $V_{bi} = 1$  lít. Xilanh, chỉ cho nhiệt truyền qua các thành, được nhúng trong một bể rộng ở  $0^\circ\text{C}$ . Nay giờ pittông chuyển động nghịch để thể tích cuối cùng là  $V_{af} = 6$  và  $V_{bf} = 5$  lít. Tính công mà hệ sinh ra?

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Đổi với khí lý tưởng, ta có  $dU = NC_v dT$  và  $U = NC_v T + U_0$ , ở đây  $U_0$  là nội năng của hệ khi  $T = 0$ . Vì

$$dS = \frac{NC_v}{T} dT + \frac{p}{T} dV ,$$

$$S = \frac{3NR}{2} \ln T + NR \ln V + S'_0 ,$$

ở đây  $S'_0$  là một hằng số. Giả thiết rằng entropy của hệ là  $S_0$  khi  $T = T_0$ ,  $V = V_0$ , ta có

$$S = \frac{3NR}{2} \ln \frac{T}{T_0} + NR \ln \frac{V}{V_0} + S_0 ,$$

$$F = U - TS = \frac{3NRT}{2} - \left( \frac{3NRT}{2} \ln \frac{T}{T_0} - NRT \ln \frac{V}{V_0} \right) + F_0 .$$

ở đây  $F_0 = U_0 - T_0 S_0$ .

(b) Quá trình mô tả là đẳng nhiệt. Khi đó  $dT = 0$ ,  $dF = -pdV$ . Công sinh ra bởi hệ là

$$W = \int dW_a + \int dW_b = - \int dF_a - \int dF_b$$

$$= \left( N_a \ln \frac{V_{af}}{V_{ai}} + N_b \ln \frac{V_{bf}}{V_{bi}} \right) RT = 2,6 \times 10^3 J .$$

### 1086

Một chất khí Van der Waals có phương trình trạng thái

$$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT .$$

(a) Hãy biện luận về nguồn gốc vật lý của các thông số  $a$  và  $b$ . Tại sao phần hiệu chỉnh của áp suất  $p$  lại tỉ lệ nghịch với  $V^2$ ?

(b) Chất khí giãn nở đẳng nhiệt từ thể tích  $V_1$  đến thể tích  $V_2$ . Hãy tính độ biến thiên năng lượng tự do Helmholtz.

(c) Từ dữ liệu trên đây hãy tính độ biến thiên nội năng? Giải thích.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Trên cơ sở phương trình trạng thái của khí lý tưởng, ta đưa vào hằng số  $b$  để xét thể tích của khí thực có tính đến thể tích của các phân tử và hằng số  $a$  để đặc trưng cho lực hút tương hỗ giữa các phân tử khí. Nay giờ ta lý giải tại sao số hạng hiệu chỉnh áp suất lại tỉ lệ nghịch với  $V^2$ .

Mỗi phân tử khí có một phạm vi tương tác nhất định. Đối với phân tử ở gần tâm của thể tích, các lực tác dụng lên nó là đồng hướng do sự phân bố đồng đều của các phân tử quanh nó. Đối với các phân tử ở gần thành bình (khoảng cách tới nó nhỏ hơn khoảng cách tương tác của các phân tử), chúng chịu lực hút hướng vào phía trong do sự phân bố không đồng đều của các phân tử. Cho nên áp suất lên thành bình có số hiệu chỉnh  $\Delta p$ . Gọi  $\Delta k$  là độ giảm xung lượng phân tử hướng vuông góc với thành bình do lực hút hướng vào phía trong gây ra thì  $\Delta p = (\text{Số phân tử va chạm vào một đơn vị diện tích thành bình trong đơn vị thời gian}) \times 2\Delta k$ .

Vì  $k$  rõ ràng tỉ lệ với lực hút, mà lực hút lại tỉ lệ với số phân tử  $n$  trong đơn vị thể tích, tức là  $\Delta k \propto n$ , và số phân tử va chạm vào đơn vị diện tích thành bình trong đơn vị thời gian cũng tỉ lệ với  $n$ , ta có

$$\Delta p \propto n^2 \propto 1/V^2.$$

(b) Phương trình trạng thái có thể viết lại như sau

$$p = \frac{kT}{V - b} - \frac{a}{V^2}.$$

Trong quá trình đẳng nhiệt, độ biến thiên năng lượng tự do Helmholtz là

$$\begin{aligned}\Delta F &= - \int_{V_1}^{V_2} pdV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{kT}{V - b} - \frac{a}{V^2} dV \\ &= - kT \ln \left( \frac{V_2 - b}{V_1 - b} \right) + a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).\end{aligned}$$

(c) Ta có thể tính độ biến thiên nội năng theo  $T$  và  $V$ :

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV.$$

Đối với quá trình đẳng nhiệt ta có

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV.$$

Theo lý thuyết nhiệt động lực học

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p .$$

Dùng phương trình trạng thái ta có

$$dU = \frac{a}{V^2} dV .$$

Tích phân ta tìm được

$$\Delta U = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V^2} dV = a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) .$$

### 1087

Điện trở 100 ôm được giữ ở nhiệt độ không đổi 300 K. Dòng điện 10 A đi qua điện trở này trong 300 giây.

- (a) Tính độ biến thiên entropy của điện trở đó?
- (b) Tính độ biến thiên entropy của vũ trụ?
- (c) Tính độ biến thiên nội năng của vũ trụ?
- (d) Tính độ biến thiên năng lượng tự do Helmholtz của vũ trụ?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Vì nhiệt độ của điện trở là không đổi, nên trạng thái của nó không thay đổi. Vì Entropy là một hàm của trạng thái, nên độ biến thiên entropy của điện trở bằng 0:  $\Delta S_1 = 0$ .

(b) Nhiệt lượng truyền từ điện trở ra môi trường ngoài (nguồn nhiệt có nhiệt độ không đổi) là

$$I^2 R t = 3 \times 10^6 \text{ J} .$$

Độ tăng entropy của nguồn nhiệt là  $\Delta S_2 = 3 \times 10^6 / 300 = 10^4 \text{ J/K}$ . Do đó, độ biến thiên entropy toàn phần là  $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 10^4 \text{ J/K}$ .

- (c) Độ tăng nội năng của vũ trụ là

$$\Delta U = 3 \times 10^6 \text{ J} .$$

- (d) Độ tăng năng lượng tự do của vũ trụ là

$$\Delta F = \Delta U - T \Delta S = 0 .$$

## 1088

Phát xạ vật đen.

(a) Tìm hệ thức Maxwell

$$(\partial S / \partial V)_T = (\partial p / \partial T)_V .$$

(b) Từ lý thuyết điện từ của mình Maxwell đã tìm được áp suất  $p$  của một trường bức xạ đẳng hướng bằng  $\frac{1}{3}$  mật độ năng lượng  $u(T)$ :  $p = \frac{1}{3}u(T) = \frac{U(T)}{3V}$ , ở đây  $V$  là thể tích của hốc. Dùng nguyên lý thứ nhất và thứ hai của nhiệt động lực học cùng với kết quả thu được trong phần (a) chứng minh rằng  $u$  tuân theo phương trình

$$u = \frac{1}{3}T \frac{du}{dT} - \frac{1}{3}u .$$

(c) Giải phương trình này và thu được định luật Stefan liên hệ  $u$  và  $T$ .  
(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Từ phương trình nhiệt động lực học  $dF = -SdT - pdV$ , ta có

$$\left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = -S , \quad \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = -p .$$

Chú ý rằng  $\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V}$ , ta được  $\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$ .

(b) Năng lượng toàn phần của trường bức xạ là  $U(T, V) = u(T)V$ . Thay nó vào định luật thứ hai nhiệt động lực học

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T - p = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p ,$$

ta tìm được  $u = \frac{T}{3} \frac{du}{dT} - \frac{1}{3}u$ .

(c) Công thức trên có thể viết lại là  $T \frac{du}{dT} = 4u$ , nghiệm của nó có dạng  $u = aT^4$ , trong đó  $a$  là hằng số tích phân. Đây chính là định luật Stefan nổi tiếng về bức xạ của vật đen.

## 1089

Hệ từ của spin ở trạng thái cân bằng nhiệt động lực học tại nhiệt độ  $T$ . Gọi  $\mu$  là mômen từ của mỗi spin; và  $M$  là độ từ hoá trung bình trên spin, tức  $-\mu < M < \mu$ . Năng lượng tự do trên spin, đối với độ từ hoá riêng  $M$ , là  $F(M)$ .

(1) Tính độ từ hoá  $M$  như là một hàm số của cường độ từ trường ngoài  $B$ , cho biết

$$F(M) = \lambda \begin{cases} 0, & |M/\mu| \leq 1/2 \\ (|M/\mu| - 1/2)^2, & 1 \geq |M/\mu| \geq 1/2 \end{cases},$$

ở đây  $\lambda$  là một hằng số.

(2) Giả sử nếu có ai đó đưa cho bạn công thức

$$F(M) = \lambda[(M/\mu)^4 - (M/\mu)^2],$$

bạn có thể trả lời ngay là biểu thức này không thể chấp nhận được vì nó vi phạm nguyên lý lối cơ bản của nhiệt động lực học. (a) Phát biểu nguyên lý này. (b) Kiểm tra lại nguyên lý này đối với biểu thức trên. (c) Biện luận bằng cách cho ít nhất một ví dụ để nếu nguyên lý này không được thỏa mãn thì sẽ dẫn đến điều gì sai sót với lý thuyết nhiệt động lực học.

(Princeton)

**Lời giải:**

(1) Từ  $dF = -SdT + HdM$ , ta có

$$H = \left( \frac{\partial F}{\partial M} \right)_T = \begin{cases} 0, & \left| \frac{M}{\mu} \right| \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{\mu} \left( \frac{M}{\mu} - \frac{1}{2} \right), & \frac{1}{2} \leq \frac{M}{\mu} \leq 1, \\ \frac{2}{\mu} \left( \frac{M}{\mu} + \frac{1}{2} \right), & -1 \leq \frac{M}{\mu} \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Từ đó

$$B = H + M = \begin{cases} M, & \left| \frac{M}{\mu} \right| \leq \frac{1}{2}, \\ M + \frac{2}{\mu} \left( \frac{M}{\mu} - \frac{1}{2} \right), & \frac{1}{2} \leq \frac{M}{\mu} \leq 1, \\ M + \frac{2}{\mu} \left( \frac{M}{\mu} + \frac{1}{2} \right), & -1 \leq \frac{M}{\mu} \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

(2) (a) Nguyên lý lỗi của năng lượng tự do nói rằng năng lượng tự do là

một hàm lõi của  $T$ , trong khi đó nó lại là hàm lõi của  $M$ , và nếu  $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial M^2}\right)_T > 0$  tại thì  $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial M^2}\right)_T \geq 0$ .

(b) Giả sử  $F(M) = \lambda \left[ \left(\frac{M}{\mu}\right)^4 - \left(\frac{M}{\mu}\right)^2 \right]$ , ta có

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial M^2}\right)_T = \frac{2\lambda}{\mu^2} \left( \frac{6M^2}{\mu^2} - 1 \right).$$

Khi  $|\frac{M}{\mu}| < \sqrt{\frac{1}{6}}$ ,  $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial M^2}\right)_T < 0$ , tức là  $F$  không phải là hàm lõi.

(c) Nếu nguyên lý lõi không được thoả mãn, chẳng hạn nếu

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial M^2}\right)_T = 1/\chi_T < 0,$$

tức là  $\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T < 0$ , khi đó entropy của trạng thái cân bằng là cực tiểu và trạng thái cân bằng sẽ không bền.

## 1090

Một hệ nào đó có năng lượng tự do Gibbs được cho bởi

$$G(p, T) = RT \ln \left[ \frac{ap}{(RT)^{5/2}} \right]$$

trong đó  $a$  và  $R$  là những hằng số. Hãy tìm nhiệt dung riêng đẳng áp  $C_p$ .  
(MIT)

**Lời giải:**

Entropy cho bởi

$$S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = \frac{5}{2}R - R \ln \left[ \frac{ap}{(RT)^{5/2}} \right].$$

Nhiệt dung riêng đẳng áp là

$$C_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = \frac{5}{2}R.$$

## 1091

Khảo sát một chất được giữ ở áp suất  $p$  và nhiệt độ  $T$ . Chứng minh rằng  $(\partial Q/\partial p)_T = T(\partial V/\partial T)_p$  trong đó  $Q$  là nhiệt phát xạ.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Từ hệ thức Maxwell

$$\frac{\partial S}{\partial p} \Big|_T = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p ,$$

Ta tìm được

$$- \left( T \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p ,$$

tức là  $\left( \frac{\partial(Q)}{\partial p} \right)_T = T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ .

## 1092

Một loại pin sản xuất điện năng bằng cách cho tương tác giữa O<sub>2</sub> được đưa vào một điện cực này và H<sub>2</sub> được đưa vào một điện cực khác. Các khí đưa vào ở áp suất 1 atm và 298 K phản ứng đẳng nhiệt và đoạn nhiệt tạo thành nước. Giả thiết phản ứng thực hiện thuận nghịch và bỏ qua điện trở trong của pin. Hãy tính suất điện động của pin.

Cho biết : 1 F = 96,500 coulombs/g·mol.

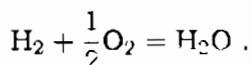
Entanpi ( tính theo J/g.mol ) tại 1 atm và 298 K đối với ôxi, hidrô và nước lần lượt là 17,200; 8,100 và -269,300.

Entropy ( tính theo J/mol.K ) tại 1 atm và 298 K đối với ôxi, hidrô và nước lần lượt là 201, 128, và 66,7.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Phương trình hóa học là



Trong quá trình thuận nghịch tại nhiệt độ và áp suất không đổi, độ giảm của hàm Gibbs của hệ bằng hiệu số giữa công toàn phần do bên ngoài hệ thực hiện và công do hệ thực hiện do thể tích biến đổi. Như vậy

$$-\Delta g = \varepsilon \Delta q .$$

Hay

$$-\sum_i (\Delta h_i - T \Delta S_i) = \varepsilon \Delta q .$$

Nếu có một 1 mol nước tạo thành cần phải có một điện lượng  $2F$  đi qua mạch, tức là  $\Delta g = 2F$ . Như vậy suất điện động là

$$\varepsilon = \frac{1}{2F} \left[ TS_W - h_W - T \left( S_H + \frac{1}{2} S_0 \right) + \left( h_H + \frac{1}{2} h_0 \right) \right] .$$

Vì đã cho  $S_0 = 201 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ ,  $S_H = 128 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ ,

$$S_W = 66,7 \text{ J/mol}\cdot\text{K}, h_0 = 17200 \text{ J/mol}$$

$$h_H = 8100 \text{ J/mol}, h_W = -269300 \text{ J/mol}, \text{ và } T = 298 \text{ K},$$

Ta có  $\varepsilon = 1,23 \text{ V}$ .

### 1093

Người ta phát hiện ra rằng rằng đối với một hệ từ đơn giản nếu nhiệt độ  $T$  giữ không đổi và từ trường  $H$  thay đổi đến  $H + \Delta H$  thì entropy thay đổi một lượng là  $\Delta S$ ,

$$\Delta S = -\frac{CH\Delta H}{T^2}$$

với  $C$  là một hằng số đặc trưng của hệ. Từ thông tin này hãy xác định sự phụ thuộc của độ tử hoả  $M$  vào nhiệt độ và vê phác đồ thị của  $M$  theo  $T$  đối với  $H$ .

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Theo đề bài

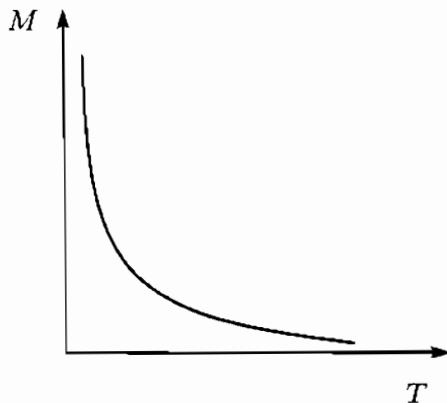
$$\left( \frac{\partial S}{\partial H} \right)_T = -\frac{CH}{T^2} .$$

Từ  $dG = -SdT - MdH$ , ta có

$$\left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_H = \left( \frac{\partial S}{\partial H} \right)_T .$$

Do đó  $\left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_H = -\frac{CH}{T^2}$ , suy ra  $M = \frac{CH}{T}$ .

Đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của  $M$  vào  $T$  cho trên hình 1.28



Hình 1.28

## 1094

Một muối từ nào đó tuân theo định luật Curie và có nhiệt dung đổi với một đơn vị thể tích (khi từ trường không đổi) tỉ lệ nghịch với bình phương nhiệt độ tuyệt đối, tức là  $\chi = b/T$ ,  $c_H = \alpha V/T^2$ , với  $\alpha = b + aH^2$ ,  $a$  và  $b$  là hằng số và  $\chi$  là độ cảm. Một mẫu muối này ở nhiệt độ  $T_i$  đặt trong từ trường cường độ  $H$ . Mẫu này được khử từ đoạn nhiệt bằng cách giảm chậm cường độ từ trường tới 0. Xác định nhiệt độ cuối cùng  $T$  của mẫu muối đó?

(Columbia)

**Lời giải:**

Quá trình này có thể xem là thuận nghịch đoạn nhiệt. Khi đó

$$dS = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_H dT + \left( \frac{\partial S}{\partial H} \right)_T dH = 0.$$

Vì  $c_H = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_H$  và  $dG = -SdT - \mu_0 MVdH$ , ta có thể viết

$$\left( \frac{\partial S}{\partial H} \right)_T = \mu_0 V \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_H.$$

Vì  $M = \chi H$ , ta có  $\left( \frac{\partial S}{\partial H} \right)_T = \mu_0 VH \left( \frac{\partial \chi}{\partial T} \right)_H = \mu_0 VH \frac{d\chi}{dT}$ . Do đó đổi với quá trình đoạn nhiệt trên đây, ta có

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dH} &= - \left( \frac{\partial S}{\partial H} \right)_T \Bigg/ \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_H \\ &= - \frac{\mu_0 VH T}{c_H} \frac{d\chi}{dT}. \end{aligned}$$

Sau khi lấy tích phân, ta thu được nhiệt độ cuối cùng là

$$T_f = \left[ \frac{b}{b + aH^2} \right]^{\frac{\mu_0 b}{2a}} T_i .$$

### 1095

Giải thích nguyên tắc của quá trình làm lạnh bằng cách khử từ đoạn nhiệt. Những nhân tố nào giới hạn nhiệt độ thu được bằng cách này.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Phương trình cơ bản của nhiệt động lực học của từ môi là  $dU = TdS + HdM$ . Hàm Gibbs là  $G = U - TS - HM$ , cho  $dG = -SdT - MdH$ . Từ điều kiện vi phân toàn phần

$$\left( \frac{\partial S}{\partial H} \right)_T = \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_H$$

và

$$\left( \frac{\partial S}{\partial H} \right)_T = - \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_H \left( \frac{\partial T}{\partial H} \right)_S ,$$

và định nghĩa nhiệt dung,  $C_H = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_H$ , ta được

$$\left( \frac{\partial T}{\partial H} \right)_S = - \frac{T}{C_H} \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_H .$$

Nếu giả thiết từ môi thoả mãn định luật Curie

$$M = \frac{CV}{T} H ,$$

Thì thay nó vào công thức trên, ta có

$$\left( \frac{\partial T}{\partial H} \right)_S = \frac{CV}{C_H T} H .$$

Như vậy, ta có thể xem rằng nếu từ trường giảm đoạn nhiệt, thì nhiệt độ của từ môi cũng sẽ giảm theo. Đây chính là nguyên tắc làm lạnh bằng phương pháp khử từ đoạn nhiệt.

Phương pháp khử từ đoạn nhiệt có thể tạo ra nhiệt độ thấp vào khoảng từ 1 K đến  $10^{-3}$  K; nhưng khi nhiệt độ vào cõi  $10^{-3}$  K, thì sự tương tác giữa các

ion thuận từ là không thể bỏ qua được. Những tương tác này tương đương với một từ trường. Chính điều này hạn chế việc làm thấp nhiệt độ thu được bằng phương pháp khử từ.

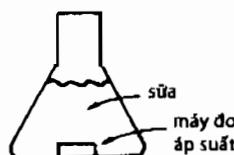
### 1096

Một bình dạng hình nón (xem hình vẽ) chứa sữa tươi. Áp suất được đo ở mặt trong của đáy bình. Sau một thời gian đủ dài, lớp kem dâng lên mặt còn sữa lắng xuống đáy bình. (Có thể giả thiết thể tích tổng cộng của chất lỏng không thay đổi). Hỏi áp suất tăng, giảm, hay giữ nguyên không đổi? Giải thích.

(MIT)

Lời giải:

Gọi thể tích phần kem là  $V_1$ , có độ dày  $H_1$ , và mật độ của nó là  $\rho_1$ ; gọi thể tích phần sữa là  $V_2$ , độ dày  $H_2$  và mật độ  $\rho_2 \cdot \rho_0$  là mật độ sữa tươi.



Hình 1.29

Vì  $\rho(V_1 + V_2) = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2$ , tức là  $(\rho_2 - \rho)V_2 = (\rho - \rho_1)V_1$ , ta có  $V_2/V_1 = (\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho)$ .

Khi đó vì  $V_2/V_1 > H_2/H_1$ , nên  $(\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho) > H_2/H_1$ , hay  $\rho_1 H_1 + \rho_2 H_2 < \rho(H_1 + H_2)$ . Điều này có nghĩa là áp suất giảm.

### 1097

Giả thiết khí quyển là chất khí lý tưởng có tỉ số nhiệt dung riêng  $\gamma = C_p/C_v$  không đổi. Cũng giả thiết rằng giá tốc trọng trường  $g$  là hằng số trong toàn khí quyển. Gọi  $z = 0$  là mực nước biển,  $T_0, p_0, \rho_0$  là nhiệt độ, áp suất, và mật độ khí tại  $z = 0$ .

(a) Giả thiết rằng các biến số nhiệt động của chất khí liên hệ với nhau như

trong quá trình đoạn nhiệt, hãy tìm  $p(z)$  và  $\rho(z)$ .

(b) Chứng minh rằng đối với trường hợp này sẽ không tồn tại khí quyển ở phía trên độ cao có toạ độ  $z_{\max}$  được xác định bởi  $z_{\max} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{RT_0}{g} \right)$ , ở đây  $R$  là hằng số khí đối với 1 gam.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Khi cân bằng được thiết lập ta có

$$g\rho(z) = -\frac{dp(z)}{dz} .$$

Dùng hệ thức đoạn nhiệt  $p\rho^{-\gamma} = p_0\rho_0^{-\gamma}$ , ta có

$$\rho^{\gamma-2}(z)d\rho(z) = -\frac{g\rho_0^\gamma}{\gamma p_0} dz .$$

Kết hợp với phương trình trạng thái  $p = \rho RT$ , ta tìm được

$$\rho(z) = \rho_0 \left[ 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{gz}{RT_0} \right]^{1/(\gamma-1)} ,$$

và

$$p(z) = p_0 \left[ 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{gz}{RT_0} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} .$$

(b) Trong miền khí quyển không tồn tại,  $\rho(z_{\max}) = 0$ . Suy ra

$$z_{\max} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{RT_0}{g} .$$

### 1098

Xét một mô hình đơn giản của khí quyển trái đất. Bỏ qua gió, sự đổi lưu v.v. và bỏ qua sự biến thiên của lực hấp dẫn.

(a) Giả thiết rằng khí quyển là đẳng nhiệt ( $\text{ở } 0^\circ\text{C}$ ). Hãy thiết lập một biểu thức về sự phân bố các phân tử khí theo độ cao. Dánh giá sơ bộ độ cao mà ở đó chỉ còn phân nửa số phân tử khí.

(b) Giả thiết khí quyển là đoạn nhiệt lý tưởng. Chứng minh rằng nhiệt độ giảm tuyến tính theo độ cao. Ước tính tốc độ giảm nhiệt độ đó (cũng thường

gọi là tốc độ giảm đoạn nhiệt) đổi với trái đất.

(CUSPEA)

**Lời giải:**

(a) Kí hiệu  $n(h)$  là mật độ phân tử tại độ cao  $h$ . Từ điều kiện cân bằng cơ  $dp = -nmgdh$  và phương trình trạng thái  $p = nkT$ , ta tìm được

$$\frac{1}{p}dp = -\frac{mg}{kT}dh .$$

Suy ra  $n(h) = n_0 \exp(-mgh/kT)$ . Đặt  $\int_0^H n(h)dh / \int_0^\infty n(h)dh = \frac{1}{2}$ , ta tính được

$$H = \frac{kT}{mg} \ln 2 = \frac{RT}{N_0 mg} \ln 2 .$$

Phân tử lượng trung bình của không khí là 30. Ta có

$$H = \frac{8,31 \times 10^7 \times 273}{30 \times 980} \times \ln 2 \approx 8 \times 10^5 \text{ cm} = 8 \text{ km} .$$

(b) Hệ thức  $\frac{1}{p}dp = -\frac{mg}{kT}dh$  vẫn đúng và quá trình đoạn nhiệt được mô tả bởi phương trình

$$p^{(1-\gamma)/\gamma} T = \text{const}$$

với  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} \approx 7/2$  (đối với phân tử lưỡng nguyên tử). Do đó  $\frac{dT}{T} \frac{\gamma}{\gamma-1} = -\frac{mg}{kT} dh$ . Lấy tích phân ta được

$$T - T_0 = -(\gamma - 1)mg(h - h_0)/\gamma k .$$

Hơn nữa

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mg}{k} \approx -0,1 \text{ K/m} .$$

1099

Khí quyển thường ở trong trạng thái đối lưu ổn định có entropy không đổi nhưng nhiệt độ biến đổi. Trong điều kiện cân bằng như thế thì  $pV^\gamma$  không phụ thuộc độ cao, ở đây  $\gamma = C_p/C_v$ . Dùng điều kiện cân bằng thuỷ tĩnh trong trường hấp dẫn đều để tìm một biểu thức đổi với  $dT/dz$ , với  $z$  là độ cao.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Trong khí quyển, khi chất khí chuyển động sự cân bằng, áp suất với xung quanh có thể thiết lập nhanh chóng còn thiết lập cân bằng nhiệt độ thì chậm hơn nhiều. Do đó việc tạo thành khối khí có thể xem là đoạn nhiệt. Do nhiều lần trộn lẫn bằng cách đổi lưu, sự phân bố nhiệt độ của khí quyển có thể xem là không có sự khác nhau về nhiệt độ giữa khối khí được nén hoặc giãn với xung quanh chúng. Điều này được gọi là "Trạng thái đổi lưu ổn định có entropy không đổi". Từ  $dp/dz = -nmg$  (với  $n$  mật độ số phân tử và  $z$  là độ cao) và phương trình trạng thái khí lý tưởng  $p = nkT$ , ta có

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p}{kT} mg .$$

Kết hợp với phương trình của quá trình đoạn nhiệt

$$T^\gamma = \text{const.} p^{\gamma-1} ,$$

ta tìm được

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{mg}{k} .$$

Có thể thấy là nhiệt độ giảm một cách tuyến tính. Nhiệt độ giảm  $\approx 1^\circ\text{C}$  khi độ cao tăng 100 m.

## 1100

Một nhóm chất khí dâng lên một cách chậm chạp, đoạn nhiệt và ở rất gần mặt đất. Nó không thể dâng lên và cũng không tụt xuống một cách liên tục (tức khí quyển hầu như không có đổi lưu). Nếu độ cao  $z$  là nhỏ, thì áp suất và nhiệt độ của khí quyển tương ứng là  $p = p_0(1 - \alpha z)$  và  $T = T_0(1 - \beta z)$ , với  $p_0$  và  $T_0$  tương ứng là áp suất và nhiệt độ ở gần mặt đất. Tìm  $\alpha$  và  $\beta$  như các hàm của nhiệt độ  $T_0$ , gia tốc trọng trường ở gần mặt đất  $g$ , khối lượng mol của không khí là  $M$ . Giả thiết rằng khí gồm  $\frac{4}{5}\text{N}_2$  và  $\frac{1}{5}\text{O}_2$ , và nhiệt độ  $T_0$  đủ thấp để không kích thích các dao động phân tử, nhưng lại đủ cao để chuyển động quay của phân tử có thể xem xét bằng lý thuyết cổ điển.

(CUSPEA)

**Lời giải:**

Ở gần mặt đất ta có

$$dp/dz = -\alpha p_0 .$$

Mặt khác, xét về mặt động lực học ta cũng có  $dp/dz = -\rho g$ .

Suy ra  $\alpha = \rho_0 g / p_0$ , với  $\rho_0$  là mật độ không khí ở gần mặt đất. Xem không khí như một khí lý tưởng, ta có

$$p_0 = RT_0/V_0 = RT_0\rho_0/M ,$$

trong đó  $R$  là hằng số khí,  $V_0$  là thể tích và  $M$  là khối lượng mol ( $\frac{4}{5} \cdot 28 + \frac{1}{5} \cdot 32 = 29$ ). Do đó, ta có  $\alpha = Mg/RT_0$ .

Sự dâng lên chậm của nhóm khí có thể xem như là quá trình chuẩn dừng. Nên có  $p$  và  $\rho$  của khí quyển bao quanh nó. Với nhiệt độ  $T$  cũng như thế. Trong quá trình đoạn nhiệt

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const} ,$$

với

$$\gamma = C_p/C_v = (C_v + R)/C_v = 7/5 .$$

Lấy vi phân ta được

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} .$$

Trên mặt đất,  $dT/T = -\beta dz$  và  $dp/p = -\alpha dz$ . Thay vào công thức trên thu được

$$\beta = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \alpha = \frac{2}{7} \alpha .$$

### 1101

Giả thiết rằng khí quyển của trái đất là khí lý tưởng với khối lượng mol là  $\mu$  và trường hấp dẫn gần bề mặt là đều gây nên gia tốc  $g$ .

(a) Chứng minh rằng áp suất biến thiên như sau

$$\frac{1}{p} dp = -\frac{\mu g}{RT} dz$$

trong đó  $z$  là độ cao so với bề mặt,  $T$  là nhiệt độ, và  $R$  là hằng số khí.

(b) Giả thiết áp suất giảm theo độ cao là do sự giãn nở đoạn nhiệt. Chứng minh rằng

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} .$$

- (c) Đánh giá  $dT/dz$  đối với khí quyển là khí nitơ N<sub>2</sub> tinh khiết với  $\gamma = 1,4$ .
- (d) Giả thiết khí quyển là đẳng nhiệt với nhiệt độ  $T$ . Tìm  $p(z)$  theo  $T$  và  $p_0$ , áp suất ở mực nước biển.
- (e) Giả thiết rằng ở mực nước biển,  $p = p_0$  và  $T = T_0$ . Tìm  $p(z)$  đối với khí quyển đoạn nhiệt.

(Columbia)

**Lời giải:**

(a) Cân bằng cơ học cho ta  $dp = -n\mu g dz$ , ở đây  $n$  là số mol trong đơn vị thể tích. Như thế dùng phương trình trạng thái  $p = nRT$ , ta tìm được

$$dp = -\frac{p}{RT} \mu g dz ,$$

hay

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz .$$

(b) Quá trình đoạn nhiệt thoả mãn phương trình  $T^{\gamma/(1-\gamma)}p = \text{const}$ . Do đó

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} .$$

(c) So sánh kết quả (b) với (a), ta suy ra

$$\frac{dT}{dz} = \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\mu g}{R} .$$

Đối với N<sub>2</sub>,  $\gamma = 1,4$ , ta có  $dT/dz \approx -4,7 \text{ K/km}$ .

(d) Từ (a) ta tìm được

$$p(z) = p_0 \exp \left( -\frac{\mu g z}{RT} \right) .$$

(e) Từ (a) và (b) ta có

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz , \quad p T^{\gamma/(1-\gamma)} = p_0 T_0^{\gamma/(1-\gamma)} .$$

Suy ra

$$p^{-1/\gamma} dp = -\frac{\mu g}{RT_0} p_0^{1-\frac{1}{\gamma}} dz .$$

Lấy tích phân ta được

$$p(z) = p_0 \left[ 1 - \frac{\mu g}{RT_0} \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) z \right]^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Tất nhiên điều này chỉ đúng nếu

$$z < \frac{RT_0\gamma}{\mu g(\gamma-1)}.$$

## 1102

Một chất khí ion hóa hoàn toàn chứa một loại ion tích điện  $Z|e|$  nguyên tử lượng  $A$  cân bằng trong trường hấp dẫn đều  $g$ . Chất khí là đẳng nhiệt với nhiệt độ  $T$  và có sự cân bằng nhiệt giữa các ion và electron. Chất khí có mật độ đủ nhỏ để tương tác địa phương giữa các hạt có thể bỏ qua.

(a) Chứng minh rằng để ngăn ngừa sự phân ly điện tích có thể dùng một điện trường đều cho bởi

$$E = -\frac{(Am_p - m_e)}{(1+Z)|e|}g,$$

ở đây  $m_p$  và  $m_e$  tương ứng là khối lượng của prôton và electron.

(b) Chứng minh rằng phương trình trên đây cũng đúng nếu plasma không đẳng nhiệt. (Gợi ý: Coi mỗi thành phần  $i$  như một khí lý tưởng tuân theo phương trình cân bằng thuỷ tĩnh

$$\frac{dp_i}{dx} = n_i F_{ix},$$

trong đó  $p_i$  là áp suất riêng phần của thành phần thứ  $i$ ,  $n_i$  là mật độ số hạt của nó, và  $F_{ix}$  là lực tổng hợp đối với mỗi hạt theo phương  $x$ .

(c) Phương trình trong (a) cũng đúng hoàn toàn đối với Mặt Trời, trong đó  $E$  và  $g$  bây giờ hướng theo bán kính. Chứng minh rằng điện tích trên Mặt Trời được xác định một cách tương đối bằng công thức

$$Q = \frac{A}{1+Z} \frac{GMm_p}{|e|},$$

với  $M$  là khối lượng của Mặt Trời.

(d) Đối với Mặt Trời  $M = 2 \times 10^{33}$ . Nếu thành phần của Mặt Trời là hidrô tinh khiết thì  $Q$  là bao nhiêu culông? Cho giá trị này của  $Q$ , liệu đây có phải là phép gần đúng tốt để không có sự phân ly điện tích? (MIT)

**Lời giải:**

(a) Lấy một điểm bất kỳ trong trường hấp dẫn làm mốc thế năng bằng 0. Mật độ số hạt tại điểm này là  $n$  và độ cao lấy chiều dương ngược với chiều của  $\mathbf{g}$ . Phân bố của electron và ion tương ứng là các hàm số của độ cao như sau

$$n_e(h) = n_{oe} \exp[-(m_e gh + E|e|h)/kT] ,$$

$$n_i(h) = n_{oi} \exp[-(Am_p gh - EZ|e|h)/kT] .$$

Khi không có sự phân ly điện tích thì điều kiện sau đây được thoả mãn

$$n_i(h)/n_e(h) = n_{oi}/n_{oe} .$$

Điều này cho ta

$$Am_p g - EZ|e| = m_e g + E|e| ,$$

Suy ra

$$E = \frac{Am_p - m_e}{(Z+1)|e|} g , \text{ hoặc } \mathbf{E} = -\frac{Am_p - m_e}{(1+Z)|e|} \mathbf{g} .$$

$$(b) \frac{dp_i}{dh} = n_i(-Am_p g + Z|e|E) ,$$

$$\frac{dp_e}{dh} = n_e(-m_e g - |e|E) .$$

Ở điều kiện cân bằng áp suất riêng phần của mỗi loại hạt là như nhau (tại cùng độ cao). Do đó

$$\frac{1}{n_i} \frac{dp_i}{dh} = \frac{1}{n_e} \frac{dp_e}{dh} ,$$

tức là

$$-Am_p g + Z|e|E = -m_e g - |e|E .$$

$$\text{Suy ra } E = \frac{Am_p - m_e}{(1+Z)|e|} g .$$

$$(c) Vì \mathbf{E} = \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} , \quad \mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} , \text{ ta có}$$

$$Q/r^2 = \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{Am_p - m_e}{(1+Z)|e|} \approx \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{Am_p}{(1+Z)|e|} .$$

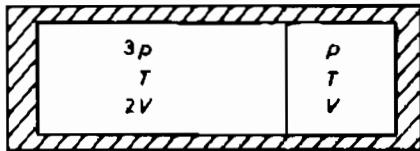
Suy ra  $Q = \frac{GMAm_p}{(1+Z)e}$ .

(d) Đối với hiđrô  $A = 1, Z = 1$ , ta có

$$Q \approx \frac{GMm_p}{2|e|} \approx 1.5 \times 10^3 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

### 1103

Xét một hệ cô lập về phương diện nhiệt gồm hai thể tích,  $V$  và  $2V$  của cùng một chất khí lý tưởng tách biệt nhờ một vách ngăn dẫn nhiệt và có thể di chuyển được.



Hình 1.30

Nhiệt độ và áp suất ghi trên hình. Vách ngăn chuyển động sao cho các chất khí không trộn lẫn với nhau.

Khi cân bằng được thiết lập, hãy xác định độ biến thiên nội năng toàn phần và độ biến thiên entropy toàn phần. Tính nhiệt độ và áp suất ở trạng thái cân bằng.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

Gọi số mol khí ở hai bên tương ứng là  $n_1$  và  $n_2$ . Từ phương trình  $6pV = n_1RT$  và  $pV = n_2RT$ , ta thu được  $n_1 = 6n_2$ . Vì đây là một hệ cô lập của khí lý tưởng nên nhiệt độ cuối cùng là  $T_f = T$  vì cả hai nhiệt độ lúc đầu đều là  $T$ . Áp suất cuối cùng  $p_f$  là

$$p_f = (n_1 + n_2)RT/3V = \frac{p}{3} \left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right) = \frac{7}{3}p.$$

Bây giờ ta tính độ biến thiên của hàm trạng thái  $S$  bằng cách thiết kế một quá

trình đẳng nhiệt và chuẩn dừng. Khi đó

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{1}{T} \left( \int p_1 dV_1 + p_2 dV_2 \right) \\ &= n_1 R \int_{2V}^{V_1} \frac{dV}{V} + n_2 R \int_V^{V_2} \frac{dV}{V} \\ &= n_1 R \ln \frac{V_1}{2V} + n_2 R \ln \frac{V_2}{V}.\end{aligned}$$

Vì  $V_1 + V_2 = 3V$  và  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} = 6$ ,  $V_1 = 6V_2 = \frac{18}{7}V$ . Suy ra

$$\Delta S = n_1 R \ln \frac{9}{7} + n_2 R \ln \frac{3}{7} \approx \frac{pV}{T}.$$

### 1104

Một xilanh cách nhiệt, kín cả hai đầu, có pittông dẫn nhiệt trượt không ma sát chia xilanh thành hai phần. Lúc đầu pittông được giữ chặt ở chính giữa, với 1 lít không khí ở 200 K và 2 atm ở một bên, và 1 lít không khí ở 300 K và 1 atm ở bên kia. Buông pittông ra và hệ thiết lập trạng thái cân bằng mới về nhiệt độ và áp suất, lúc đó pittông ở vị trí mới.

(a) Xác định áp suất và nhiệt độ cuối cùng.

(b) Xác định độ tăng toàn phần của entropy.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Số phân tử khí ở hai phần xilanh không thay đổi, gọi chúng tương ứng là  $N_1$  và  $N_2$ , áp suất cuối cùng là  $p$ , và nhiệt độ cuối cùng là  $T$ . Coi không khí là khí lý tưởng, ta có

$$p_1 V_0 = N_1 k T_1, \quad p_2 V_0 = N_2 k T_2,$$

trong đó  $p_1 = 2$  atm,  $T_1 = 200$  K,  $p_2 = 1$  atm,  $T_2 = 300$  K,  $V_0 = 1l$ .

Pittông không tiêu thụ nội năng của khí vì không có ma sát, như vậy nội năng toàn phần của khí là bảo toàn và có thể xem xilanh là đoạn nhiệt. Do đó

$$\mu N_1 k T_1 + \mu N_2 k T = \mu(N_1 + N_2) k T,$$

ở đây  $\mu$  là số bậc tự do của chuyển động của phân tử khí. Suy ra

$$T = \frac{T_1 + \frac{N_2}{N_1} T_2}{\frac{N_2}{N_1} + 1} = \frac{1 + \frac{p_2}{p_1}}{1 + \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T_2}} T_1 = 225 \text{ K}.$$

Vì  $V_1 + V_2 = 2V_0$ , ta tìm được

$$N_1 kT/p + N_2 kT/p = 2V_0 ,$$

và từ đó suy ra

$$p = \frac{(N_1 + N_2)}{2V_0} kT = \frac{T}{2} \left( \frac{p_1}{T_1} + \frac{p_2}{T_2} \right) = 1,5 \text{ atm} .$$

(b) Entropy là hàm trạng thái không phụ thuộc vào quá trình. Để tính độ biến thiên của entropy bằng cách thiết kế một quá trình chuẩn dừng, ta kí hiệu entropy của hai phần là  $S_1$  và  $S_2$ . Khi đó

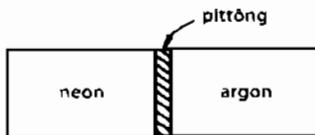
$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = \int_{(T_1, V_0)}^{(T, V_1)} dS_1 + \int_{(T_2, V_0)}^{(T, V_2)} dS_2 , \\ \int_{(T_1, V_0)}^{(T, V_1)} dS_1 &= \int_{T_1}^T \frac{dU_1}{T} + \int_{V_0}^{V_1} \frac{p}{T} dV \\ &= n_1 \left( c_v \ln \frac{T}{T_1} + R \ln \frac{V_1}{V_0} \right) , \\ \int_{(T_2, V_0)}^{(T, V_2)} dS_2 &= n_2 \left( c_v \ln \frac{T}{T_2} + R \ln \frac{V_2}{V_0} \right) , \end{aligned}$$

ở đây  $n_1$  và  $n_2$  là số mol khí trong hai phần,  $c_v$  là nhiệt dung riêng mol единичный tích, và  $R$  là hằng số khí. Do đó

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{p_1 V_0}{T_1} \left( \frac{c_v}{R} \ln \frac{T}{T_1} + \ln \frac{p_1 T}{p T_1} \right) \\ &\quad + \frac{p_2 V_0}{T_2} \left( \frac{c_v}{R} \ln \frac{T}{T_2} + \ln \frac{p_2 T}{p T_2} \right) . \end{aligned}$$

Lấy  $c_v = \frac{3}{2}R$  vì nhiệt độ của hệ không cao, và ta có  $\Delta S = 0,4 \text{ J/cal}$ .

Một bình chứa dạng xilanh lúc đầu được phân thành hai phần có thể tích bằng nhau nhờ một pittông được giữ chặt ở trong. Nửa bên trái chứa đầy 1 mol khí neon ở áp suất 4 atm, nửa bên phải chứa khí argon ở áp suất 1 atm. Các chất khí này có thể xem là lý tưởng. Cả hệ lúc đầu ở  $T = 300 \text{ K}$ , cách nhiệt với môi trường bên ngoài. Nhiệt dung của hệ xilanh – pittông là  $C$  (hằng số).



Hình 1.31

Bây giờ buồng pittông để nó chuyển động tự do, và cuối cùng dừng lại ở vị trí cân bằng. Hãy tính

- (a) Nhiệt độ mới của hệ (pittông dẫn nhiệt).
- (b) Tỉ số thể tích cuối của neon và argon.
- (c) Độ biến thiên entropy toàn phần của hệ.
- (d) Độ biến thiên entropy bổ sung được tạo ra nếu bỏ pittông đi.
- (e) Nếu trong trạng thái ban đầu ở nửa bên trái chứa 1 mol argon thay cho 1 mol neon thì các câu trả lời cho (a), (b) và (c) sẽ thay đổi như thế nào?

(UC, Berkeley)

#### Lời giải:

(a) NỘI NĂNG của khí lý tưởng là hàm số chỉ của nhiệt độ, vì thế nội năng của cả hệ không thay đổi. Nhiệt độ cũng không thay đổi. Nhiệt độ cân bằng mới vẫn sẽ là 300 K.

(b) Tỉ số thể tích là tỉ số số phân tử và cũng là tỉ số áp suất ban đầu. Do đó

$$V_{\text{Ne}} : V_{\text{Ar}} = 4 : 1 = 1 : n ,$$

trong đó  $n = 1/4$  là số mol của khí argon.

(c) Độ tăng entropy của hệ là

$$\begin{aligned} \Delta S &= N_{\text{Ne}} R \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)_{\text{Ne}} + N_{\text{Ar}} R \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)_{\text{Ar}} \\ &\quad - R \ln \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{2}} + \frac{R}{4} \ln \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = 2,0 \text{ J/K} . \end{aligned}$$

(d) Độ biến đổi entropy bổ sung là

$$\Delta S' = R \ln(1+n) + nR \ln \left( \frac{1+n}{n} \right) = 5,2 \text{ J/K} .$$

(e) Nếu khí ban đầu ở bên trái là 1 mol argon thì các câu trả lời cho (a), (b), và (c) sẽ không thay đổi. Vì đối với (d) ta có  $\Delta S' = 0$ .

#### 4. CHUYỂN PHA VÀ CÂN BẰNG PHA (1106-1147)

**1106**

Điểm nóng chảy của tungsten là 350, 3500, 35.000, hay 350.000°C?  
(Columbia)

Lời giải:

Đáp số là 3500°C.

**1107**

Giả sử rằng eV là năng lượng cần thiết để giải phóng phân tử khỏi bề mặt chất lỏng nào đó ở nhiệt độ  $T=300$  K. Hỏi nhiệt hoá hơi là bao nhiêu nếu tính theo đơn vị erg/mol?

[ $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-12} \text{ erg}$ ]

(Wisconsin)

Lời giải:

Nhiệt hoá hơi là

$$\begin{aligned} L_{\text{hh}} &= \frac{1}{20} \times 1,6 \times 10^{-12} \times 6,023 \times 10^{23} \\ &= 4,8 \times 10^{10} \text{ ergs/mol.} \end{aligned}$$

**1108**

Thả 20 gam nước đá ở 0°C vào một cái cốc chứa 120 g nước ở 70°C. Tìm nhiệt độ cuối của hỗn hợp. Bỏ qua nhiệt dung của cốc. Biết nhiệt nóng chảy của nước đá là 80 cal/g.

(Wisconsin)

Lời giải:

Giả sử nhiệt độ của hỗn hợp khi cân bằng là  $T$ . Khi đó, ta có

$$M_1 L_{\text{nóng chảy}} + M_1 C_{p,\text{nước}} T = M_2 C_{p,\text{nước}} (T_0 - T).$$

Thay  $M_1 = 20 \text{ g}$ ,  $M_2 = 120 \text{ g}$ ,  $T_0 = 70^\circ\text{C}$ ,  $L_{\text{nóng chảy}} = 80 \text{ cal/g}$  và  $C_{p,\text{nước}} = 1 \text{ cal/g}$ , vào biểu thức trên, ta thu được nhiệt độ cuối cùng là  $T = 48,57^\circ\text{C}$ .

## 1109

Entropy của nước ở áp suất khí quyển và  $100^\circ\text{C}$  là  $0,31 \text{ cal/g}\cdot\text{deg}$ , và entropy của hơi nước ở chính nhiệt độ và áp suất đó là  $1,76 \text{ cal/g}\cdot\text{K}$ .

- (a) Xác định nhiệt hoá hơi ở chính nhiệt độ đó?
- (b) Enthalpy ( $H = U + PV$ ) của hơi nước ở điều kiện này là  $640 \text{ cal/g}$ . Tính enthalpy của nước khi đó.
- (c) Tính hàm Gibbs ( $G = H - TS$ ) của nước và hơi nước ở điều kiện này.
- (d) Chứng minh rằng hàm Gibbs không thay đổi trong quá trình đẳng áp và đẳng nhiệt thuận nghịch.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

- (a) Nhiệt hoá hơi là  $L = T\Delta S = 540 \text{ cal/g}$ .
- (b) Từ  $dH = TdS + Vdp$ , suy ra  $H_{\text{nước}} = H_{\text{hơi}} - T\Delta S = 100 \text{ cal/g}$ .
- (c) Từ  $G = H - TS$ , ta có  $G_{\text{nước}} = H_{\text{nước}} - TS_{\text{nước}} = -16 \text{ cal/g}$ ,  
 $G_{\text{hơi}} = H_{\text{hơi}} - TS_{\text{hơi}} = -16 \text{ cal/g}$ .
- (d) Từ  $dG = -SdT + Vdp$ , ta thấy rằng trong quá trình đẳng áp, đẳng nhiệt, thuận nghịch,  $G$  không đổi.

## 1110

Lấy 1 kg nước ở  $100^\circ\text{C}$  và một khối nước đá rất lớn ở  $0^\circ\text{C}$ . Một động cơ nhiệt thuận nghịch hấp thụ nhiệt từ nước và truyền cho nước đá cho tới khi không thể nhận được công từ hệ. Khi quá trình được hoàn thành:

- (a) Nhiệt độ của nước là bao nhiêu?
- (b) Lượng nước đá tan là bao nhiêu? (Nhiệt nóng chảy của nước đá là  $80 \text{ cal/g}$ )
- (c) Công thực hiện bởi động cơ là bao nhiêu?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Vì khối nước đá rất lớn nên có thể giả thiết nhiệt độ của nó không đổi. Trong quá trình, nhiệt độ của nước giảm dần dần. Khi không thể lấy công ra từ hệ nữa thì hiệu suất của chu trình bằng 0

$$\eta = 1 - T_{\text{nước đá}}/T = 0, \text{ or } T = T_{\text{nước đá}} = 0^\circ\text{C}.$$

Do đó nhiệt độ cuối cùng của nước là  $0^\circ\text{C}$ .

(b) Nhiệt lượng hấp thụ bởi khối nước đá là

$$Q_2 = \int [1 - \eta(t)] dQ = mC_v \int_{273}^{373} \frac{273}{T} dT = 8,5 \times 10^4 \text{ cal}.$$

Nhiệt lượng này có thể làm tan một lượng nước đá là

$$\begin{aligned} M &= \frac{Q_2}{L_{\text{nóng chảy}}} = \frac{8,5 \times 10^4}{80} \\ &= 1,06 \text{ kg}. \end{aligned}$$

(c) Công thực hiện bởi động cơ là

$$W = Q_1 - Q_2 = 1000 \times 100 - 8,5 \times 10^4 = 1,5 \times 10^4 \text{ cal}.$$

### 111

Cần một thời gian tối thiểu là bao nhiêu để làm đóng băng 2 kg nước ở  $0^\circ\text{C}$  nếu ta dùng một động cơ 50 W và không khí bên ngoài (nguồn nóng) có nhiệt độ  $27^\circ\text{C}$ ?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Khi 2kg nước ở  $0^\circ\text{C}$  hoá thành nước đá thì nhiệt lượng được giải phóng là

$$Q_2 = 1,44 \times 2 \times 10^3 / 18 = 1,6 \times 10^2 \text{ kcal}.$$

Hiệu suất cao nhất của động cơ là

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{Q_2}{W_{\min}}.$$

Do đó

$$W_{\min} = Q_2 \frac{T_1 - T_2}{T_2} .$$

Nếu dùng động cơ  $P = 50$  W, thì thời gian tối thiểu cần thiết là

$$\tau = \frac{W_{\min}}{P} = \frac{Q_2}{P} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_2} .$$

Với  $T_1 = 300$  K,  $T_2 = 273$  K, ta tìm được

$$\tau = 1,3 \times 10^3 \text{ s} .$$

### 1112

Hãy ước tính về mặt lý thuyết lượng công tối thiểu cần thiết để làm đóng băng 1 kg nước nếu nước và môi trường xung quanh lúc đầu ở nhiệt độ  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ . Môi trường xung quanh ở đây thực ra là nguồn nhiệt lớn duy nhất có sẵn.

$$(L_{\text{nước đá}} = 80 \text{ cal/g}, \quad C_p = 1 \text{ cal/g} \cdot {}^\circ\text{C}) .$$

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Lượng công tối thiểu có thể chia thành hai phần  $W_1$  và  $W_2$ :  $W_1$  dùng để làm lạnh nước từ  $25^\circ\text{C}$  xuống  $0^\circ\text{C}$ , và  $W_2$  để chuyển nước thành nước đá. Ta tìm được

$$\begin{aligned} W_1 &= - \int_{T_0}^{T_f} (T_0 - T) MC_p dT/T \\ &= MC_p T_0 \ln(T_0/T_f) - MC_p (T_0 - T_f) \\ &= 1,1 \times 10^3 \text{ cal} , \\ W_2 &= (T_0 - T_f) LM/T_f = 7,3 \times 10^3 \text{ cal} , \\ W &= W_1 + W_2 = 8,4 \times 10^3 \text{ cal} = 3,5 \times 10^3 \text{ J} . \end{aligned}$$

### 1113

Một máy làm lạnh Carnot lý tưởng (bơm nhiệt) làm đóng băng thành những viên nước đá với tốc độ 5 g/s bắt đầu từ nước ở nhiệt độ đóng băng.

Năng lượng nhả ra phòng ở  $30^\circ\text{C}$ . Biết nhiệt nóng chảy của nước đá là  $320 \text{ J/g}$ .

- Năng lượng được nhả ra phòng với tốc độ bằng bao nhiêu?
- Điện năng cung cấp với tốc độ là bao nhiêu (tính theo đơn vị kW)?
- Hệ số hiệu dụng của máy bơm nhiệt này là bao nhiêu?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

- (a) Tốc độ mà máy lạnh lấy nhiệt từ nước là

$$Q_2 = 5 \times 320 = 1,6 \times 10^3 \text{ J/s}.$$

Tốc độ mà năng lượng nhả cho phòng là

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{T_1}{T_2} Q_2 = (303/273) \times 1,6 \times 10^3 \\ &= 1,78 \times 10^3 \text{ J/s}. \end{aligned}$$

- (b) Công suất điện cần cung cấp là

$$W = Q_1 - Q_2 = 0,18 \text{ kW}.$$

- (c) Hệ số hiệu dụng là

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{273}{30} = 9,1.$$

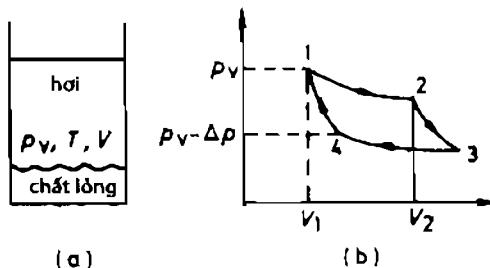
### 1114

Một chu trình Carnot với mặt phân cách chất lỏng và khí. Áp suất hơi là  $p_v$ , nhiệt độ  $T$ , thể tích  $V$ . Chu trình thực hiện theo sơ đồ  $p - V$  như trên hình vẽ.

Chu trình đi dǎng nhiệt từ 1 đến 2, làm hoá hơi  $n$  mol chất lỏng. Tiếp sau là làm lạnh thuận nghịch từ 2 đến 3, rồi co dǎng nhiệt từ 3 về 4, làm ngưng tụ  $n$  mol chất lỏng, và cuối cùng làm nóng thuận nghịch từ 4 về 1, hoàn tất một chu trình.

(a) Lưu ý là  $V_2 - V_1 = V_g - V_\ell$  ở đây  $V_g$  = thể tích của  $n$  mol chất khí,  $V_\ell$  = thể tích của  $n$  mol chất lỏng. Hãy tính hiệu suất theo  $\Delta p$ .  $V_g - V_\ell$ , và  $L_v$  = ẩn nhiệt hoá hơi của một mol chất lỏng. Coi  $\Delta p$  và  $\Delta T$  là nhỏ.

(b) Thừa nhận rằng hai động cơ Carnot làm việc giữa hai nguồn nhiệt có nhiệt độ  $T$  và  $T - \Delta T$  có cùng hiệu suất (Tại sao?) và hiệu suất này là hàm



Hình 1.32

số của \$T\$ và chỉ \$T\$ thôi, hãy dùng kết quả của phần (a) để viết được một biểu thức đối với \$dp\_v/dT\$ theo \$V\_g - V\_\ell, n, L\_v\$ và \$T\$.

(CUSPEA)

**Lời giải:**

(a) Nhiệt độ trong quá trình từ 1 đến 2 là không đổi. Vì thể tích tổng cộng không đổi, nên \$V\_2 - V\_1 = V\_g - V\_\ell\$. Động cơ sinh công \$\Delta p(V\_2 - V\_1)\$ đối với bên ngoài trong một quá trình tuần hoàn. Nhiệt lượng nó hấp thụ là \$nL\_v\$. Do đó hiệu suất là

$$\eta = \Delta p(V_2 - V_1)/(nL_v).$$

(b) Hiệu suất của chu trình Carnot thuận nghịch làm việc giữa \$T\$ và \$T - \Delta T\$ là

$$\eta = \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p(V_g - V_\ell)}{L_v n}.$$

Như vậy  $\frac{dp_v}{dT} = \frac{nL_v}{T(V_g - V_\ell)}$ .

1115

Nhiều kết quả dựa trên nguyên lý thứ hai nhiệt động lực học có thể tìm được mà không cần dùng đến khái niệm entropy hoặc những hàm loại như vậy. Phương pháp là khảo sát một chu trình Carnot (thuận nghịch) bao gồm hấp thụ nhiệt \$Q\$ tại \$(T + dT)\$ và toả ra tại \$T\$ để sinh công ra bên ngoài \$(W + dW)\$ tại \$(T + dT)\$ và công \$-W\$ tại \$T\$. Khi đó, \$Q = \Delta U + W\$, ở đây \$\Delta U\$ là độ tăng nội năng của hệ. Cứ sau một chu trình máy sẽ thực sự sinh một công \$dW\$ ra ngoài, với \$dW/dT = Q/T\$. Trong bài toán dưới đây hãy dựng ra một chu trình như thế và chứng minh những hệ thức đưa ra.

(a) Một chất lỏng hoặc rắn có áp suất hơi \$p\$ cân bằng với hơi của nó. Đối

với một mol hơi xem như khí lý tưởng có  $V$  (hơi)  $\gg V$ , gọi  $l$  là nhiệt hoá hơi của một mol. Hãy chứng minh rằng

$$d \ln p / dT = l / RT^2 .$$

(b) Một chất lỏng có mật độ năng lượng bề mặt là  $u$  và sức căng bề mặt  $\tau$ .

(i) Chứng minh rằng  $u = \tau - T \frac{d\tau}{dT}$ .

(ii) Nếu  $\frac{d\tau}{dT} < 0$ , và  $\frac{d^2\tau}{dT^2} > 0$ , thì  $T$  sẽ tăng hay giảm khi tăng đoạn nhiệt diện tích?

(Columbia)

**Lời giải:**

(a) Khảo sát chu trình sau: một mol chất lỏng hoá hơi ở nhiệt độ  $T + dT$ , áp suất  $p + dp$ ; hơi này giãn nở đoạn nhiệt tới  $T, p$  và sau đó ngưng tụ tại  $T, p$ ; và cuối cùng trở về đoạn nhiệt trạng thái ban đầu. Như vậy ta có  $Q = l$ ,  $dW \approx (p + dp)V - pV = Vdp$ , ở đây  $V$  là thể tích mol của hơi, và

$$\frac{Vdp}{dT} = \frac{l}{T} .$$

Từ phương trình trạng thái của khí lý tưởng  $V = RT/p$ , ta có

$$\frac{d \ln p}{dT} = \frac{l}{RT^2} .$$

(b)

(i) Khảo sát chu trình sau: một bề mặt giãn một đơn vị diện tích tại  $T + dT$ , và sau đó giãn đoạn nhiệt tới  $T$ , rồi co lại tại  $T$  và quay đoạn nhiệt trở về trạng thái ban đầu. Đổi với chu trình này

$$Q = u - \tau ,$$

$$dW = -\tau(T + dT) + \tau(T) = -\frac{d\tau}{dT}dT .$$

như vậy

$$\frac{dW}{dT} = -\frac{d\tau}{dT} = \frac{u - \tau}{T} ,$$

hay

$$u = \tau - T \frac{d\tau}{dT} .$$

(ii) Từ điều kiện bảo toàn năng lượng, ta có

$$d(Au) = dQ + \tau(T)dA ,$$

ở đây  $A$  là diện tích bề mặt. Vì  $dQ = 0$  trong quá trình đoạn nhiệt, ta có

$$(u - \tau)dA + Adu = 0 ,$$

hay

$$\left( \frac{dT}{dA} \right)_{\text{đoạn nhiệt}} = -\frac{u - T}{A \left( \frac{du}{dT} \right)} .$$

Từ (i) ta có

$$\frac{du}{dT} = -T \left( \frac{d^2\tau}{dT^2} \right) .$$

Với  $d\tau/dT < 0$  và  $d^2\tau/dT^2 > 0$ , phương trình trên đây cho ta

$$\left( \frac{dT}{dA} \right)_{\text{đoạn nhiệt}} > 0 .$$

Vì thế khi diện tích bề mặt tăng đoạn nhiệt thì nhiệt độ của nó cũng tăng.

### 1116

Nhiệt nóng chảy của nước đá ở áp suất khí quyển và  $0^\circ\text{C}$  là 1,4363 kcal/mol. Khối lượng riêng của nước đá ở điều kiện này là  $0,917 \text{ g/cm}^3$ , của nước là của nước là  $0,9998 \text{ g/cm}^3$ . Nếu một mol nước đá tan ở điều kiện này thì:

- (a) Công thực hiện là bao nhiêu?
- (b) Độ biến thiên nội năng là bao nhiêu?
- (c) Độ biến thiên entropy là bao nhiêu?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

- (a) Công thực hiện là

$$\begin{aligned} W &= p(V_2 - V_1) \\ &= 1,013 \times 10^5 \times \left[ \left( \frac{18}{0,9998} \right) - \left( \frac{18}{0,917} \right) \right] \\ &= -0,1657 \text{ J} = -0,034 \text{ cal} . \end{aligned}$$

- (b) Nhiệt lượng hấp thụ bởi một mol nước đá bằng nhiệt lượng nóng chảy của nó:

$$Q = 1,4363 \times 10^3 \text{ cal} .$$

Như vậy độ biến đổi nội năng là

$$\Delta U = Q - W \approx Q = 1,4363 \times 10^3 \text{ cal} .$$

(c) Độ biến đổi entropy là

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{1,4363 \times 10^3}{273} \approx 5,26 \text{ cal/K} .$$

### 1117

10 kg nước ở  $20^\circ\text{C}$  chuyển thành nước đá ở  $-10^\circ\text{C}$  bằng cách cho nó tiếp xúc với một nguồn nhiệt ở  $-10^\circ\text{C}$ . Quá trình này xảy ra ở áp suất không đổi, nhiệt dung đẳng áp của nước và nước đá tương ứng là 4180 và  $2090 \text{ J/kg.K}$ . Nhiệt nóng chảy của nước đá là  $3,34 \times 10^5 \text{ J/kg}$ . Hãy tính độ biến thiên entropy của toàn hệ.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Việc chuyển nước ở  $20^\circ\text{C}$  thành nước đá ở  $-10^\circ\text{C}$  gồm những quá trình sau đây. Nước ở  $20^\circ\text{C}$   $\xrightarrow{a}$  nước ở  $0^\circ\text{C}$   $\xrightarrow{b}$  nước đá  $0^\circ\text{C}$   $\xrightarrow{c}$  nước đá  $-10^\circ\text{C}$ , trong đó các quá trình  $a$  và  $c$  là những quá trình mất nhiệt, entropy giảm còn  $b$  là quá trình đồng đặc của nước mất nhiệt chậm và entropy cũng giảm. Vì quá trình xảy ra ở áp suất không đổi nên độ biến thiên entropy là

$$\Delta S_1 = \int_{293}^{273} \frac{MC_p}{T} dT = MC_p \ln \left( \frac{273}{293} \right) = -2955 \text{ J/K} ,$$

$$\Delta S_2 = -\frac{|Q|}{T_0} = -\frac{10 \times 3,34 \times 10^5}{273} = -1,2234 \times 10^4 \text{ J/K} ,$$

$$\Delta S_3 = \int_{273}^{263} \frac{MC_p}{T} dT = MC_p \ln \frac{263}{273} = -757 \text{ J/K} .$$

Trong các quá trình đó, độ tăng entropy của nguồn nhiệt ở  $-10^\circ\text{C}$  do hấp thụ nhiệt là

$$\begin{aligned} \Delta S_e &= \frac{10 \times (4180 \times 20 + 3,34 \times 10^5 + 2090 \times 10)}{263} \\ &= 16673 \text{ J/K} . \end{aligned}$$

Vậy độ biến thiên entropy toàn phần của cả hệ là

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_e = 727 \text{ J/K}.$$

### 1118

Hãy đánh giá sức căng bề mặt của một chất lỏng mà nhiệt hoá hơi của nó là  $10^{10}$  ergs/g (250 cal/g).

(Columbia)

**Lời giải:**

Sức căng bề mặt là năng lượng tự do đối với đơn vị diện tích; do đó sức căng bề mặt là  $\sigma = Qr\rho$ , ở đây  $Q$  là nhiệt hoá hơi,  $r$  là độ dày của bề mặt ( $r = 10^{-8}$  cm), và  $\rho$  là khối lượng riêng của chất lỏng ( $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ). Như vậy

$$\sigma = 10^{10} \times 10^{-8} \times 1 = 100 \text{ dyn/cm} = 0.1 \text{ N/m}.$$

### 1119

Hãy ghi trong tờ giấy thi của bạn các chữ cái theo thứ tự từ *a* đến *h* và ghi vào bên cạnh các chữ cái đó chữ Đ hoặc S nếu các câu được đánh số tương ứng dưới đây là đúng hoặc sai.

- (a) Pha lỏng có thể tồn tại ngay cả ở độ không tuyệt đối.
- (b) Pha rắn có thể tồn tại ở nhiệt độ trên nhiệt độ tới hạn.
- (c) Ôxi sôi ở nhiệt độ cao hơn nitơ.
- (d) Nhiệt độ đảo của He thấp hơn 20 K.
- (e)  $\gamma$  của chất khí thường lớn.
- (f) Một máy nén khí lưỡng nguyên tử sẽ nóng hơn khi nén khí đơn nguyên tử.
- (g) Hệ số làm lạnh của máy lạnh có thể lớn 1.
- (h) Một quả bóng nhám ném từ bắc xuống nam. Một người nhìn từ trên xuống thấy quả bóng quay ngược chiều kim đồng hồ. Quả bóng sẽ chuyển động lệch về phía đông.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

- (a) F; (b) F; (c) T; (d) F; (e) T; (f) F; (g) T; (h) T.

### 1120

Nước đá, nước, hơi nước mỗi thứ lấy một gam và đặt cân bằng với nhau trong một bình kín. Áp suất là 4,58 mmHg, nhiệt độ  $0,01^\circ\text{C}$ . Truyền cho hệ 60 cal nhiệt lượng. Thể tích tổng cộng giữ không đổi. Hãy tính khối lượng của nước đá, nước và hơi nước hiện có trong bình với sai số không quá 2%. Hãy biện luận kết quả thu được.

(Gợi ý: Đối với nước ở  $0,01^\circ\text{C}$ , ẩn nhiệt nóng chảy là 80 cal/g, của hơi nước là 596 cal/g, và ẩn nhiệt thăng hoa là 676 cal/g. Cũng chú ý rằng thể tích của hơi nước lớn hơn nhiều so với thể tích của nước và nước đá.)

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Giả thiết thể tích ban đầu của hơi nước là  $V$ , và thể tích của nó sau khi nung nóng cũng vẫn là  $V$ ; khối lượng của nước đá, nước, và hơi nước ở trạng thái cân bằng mới lần lượt là  $x, y$ , và  $z$ . Ta có

$$x + y + z = 3.$$

$$(1 - x)L_{th} + (1 - y)L_{bh} = Q = 60,$$

$$\frac{1 - x}{\rho_{nd}} + \frac{(1 - y)}{\rho_{nc}} + V_0 = V.$$

$$V_0 = \frac{RT}{\mu p}.$$

$$V = \frac{z}{\mu p} RT.$$

ở đây  $\mu = 18 \text{ g/mol}$ ,  $p = 4,58 \text{ mmHg}$ ,  $T = 273,16 \text{ K}$ ,  $R = 8,2 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{atm/mol} \cdot \text{K}$ ,  $\rho_{nd} = \rho_{nc} = 1 \text{ g/cm}^3$ ,  $L_{th} = 676 \text{ cal/g}$ , và  $L_{bh} = 596 \text{ cal/g}$ . Giải phương trình này tìm được

$$x = 0,25 \text{ g}, \quad y = 1,75 \text{ g}, \quad z = 1,00 \text{ g}.$$

Như vậy 60 cal nhiệt lượng gần như được dùng tất cả để làm tan nước đá.

## 1121

Định nghĩa a) điểm tới hạn, b) điểm ba trong chuyển pha.

Hêli sôi ở 4,2K dưới áp suất khí quyển  $p = 760 \text{ mmHg}$ . Điểm sôi của He là bao nhiêu khi áp suất giảm tới 1 mmHg?

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Điểm tới hạn là điểm kết thúc của đường hoá hơi. Nó thoả mãn phương trình

$$\left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_T = 0.$$

Điểm ba là điểm cùng tồn tại của các pha rắn, lỏng và khí. Khi  $p' = 1 \text{ mmHg}$ , thì điểm sôi là 2,4 K.

## 1122

(a) Phát biểu phương trình trạng thái Van der Waals đối với khí thực.

(b) Trình bày một giải thích vật lý cho phương trình này.

(c) Biểu diễn những hằng số theo các số liệu tới hạn  $T_c, V_c$ , và  $p_c$ .

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Phương trình trạng thái Van der Waals đối với khí thực là

$$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = nRT.$$

(b) Trên cơ sở phương trình trạng thái đối với khí lý tưởng ta tính đến thể tích riêng của các phân tử khí thực bằng cách đưa vào hằng số  $b$  và tính đến lực hút lẫn nhau của các phân tử bằng cách đưa vào áp suất bổ chính  $a/V^2$ .

(c) Từ  $\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = nRT$ , ta có

$$p = \frac{nRT}{V - b} - \frac{a}{V^2}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T &= -\frac{nRT}{(V - b)^2} + \frac{2a}{V^3}, \\ \left( \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_T &= \frac{2nRT}{(V - b)^3} - \frac{6a}{V^4}. \end{aligned}$$

Tại điểm tới hạn, ta có  $(\frac{\partial p}{\partial V})_T = 0$ ,  $(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2})_T = 0$ , do đó

$$V_c = 3b, \quad p_c = \frac{a}{27b^2}, \quad nRT_c = \frac{8a}{27b}.$$

Cụ thể là  $a = 3p_c V_c^2$ ,  $b = V_c/3$ .

### 1123

Phương trình trạng thái Van der Waals đối với 1 mol khí không lý tưởng

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT.$$

[Ghi chú: Phần (d) của bài toán này có thể làm độc lập với các phần từ (a) đến (c).]

(a) Vẽ phác một vài đường đẳng nhiệt của khí Van der Waals trong mặt phẳng  $p$ - $V$  ( $V$  là trục hoành,  $p$  là trục tung). Chỉ ra điểm tới hạn.

(b) Đánh giá tỉ số không thứ nguyên  $pV/RT$  tại điểm tới hạn.

(c) Trong một phần của mặt phẳng  $p$ - $V$  nằm dưới điểm tới hạn, pha lỏng và pha khí có thể cùng tồn tại. Trong miền này những đường đẳng nhiệt Van der Waals là phi vật lý và cần phải sửa đổi. Những đường đẳng nhiệt đúng đắn về mặt vật lý là những đường đẳng áp,  $p_0(T)$ . Maxwell giả thiết rằng  $p_0(T)$  có thể chọn sao cho diện tích phía dưới đường đẳng nhiệt đã sửa đổi bằng diện tích nằm dưới đường đẳng nhiệt Van der Waals gốc. Hãy vẽ một đường đẳng nhiệt đã sửa đổi và giải thích ý tưởng là cơ sở cho cách dựng đó của Maxwell.

(d) Chứng minh rằng nhiệt dung đẳng tích của khí Van der Waals là một hàm số chỉ của nhiệt độ (tức là không phụ thuộc vào thể tích).

(MIT)

Lời giải:

(a) Như đã chỉ rõ trên hình 1.33, từ  $(\partial p / \partial V)_{T=T_c} = 0$  và  $(\partial^2 p / \partial V^2)_{T=T_c} = 0$ , ta rút ra

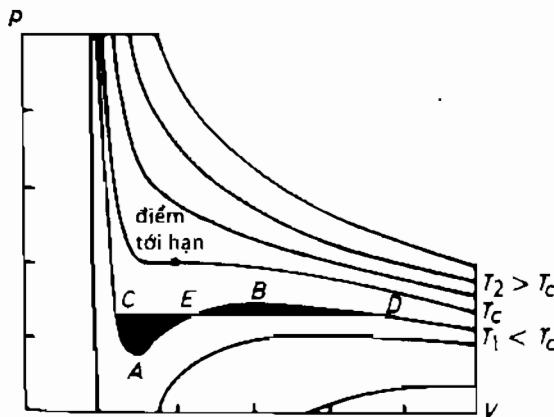
$$T_c = \frac{3a}{V_c^4} \frac{(V_c - b)^3}{R},$$

với

$$V_c = 3b, \quad p_c = \frac{a}{27b^2}, \quad T_c = \frac{8a}{27bR}.$$

(b)  $p_c V_c / RT_c = 3/8$ .

(c) Trong hình 1.33 đường nằm ngang  $CD$  là đường đẳng nhiệt đã sửa đổi. Diện tích hình  $CAB$  bằng diện tích hình  $EBC$ . Ý tưởng ở đây là những điểm



Hình 1.33

chung, tức các điểm  $C$  và  $D$  của đường đẳng nhiệt Van der Waals và đường đẳng nhiệt vật lý có cùng năng lượng tự do Gibbs. Vì  $G = G(T, p)$ , cho nên những đẳng thức của  $T$  và của  $p$  tương ứng là nguyên do chủ yếu của đẳng thức  $G$ . Theo cách này

$$\int_C^D dG = \int_C^D V dp = \int_A^A V dp + \int_A^E V dp + \int_E^B V dp + \int_B^D V dp = 0 .$$

Tức là

$$\int_A^B V dp - \int_A^C V dp = \int_D^B V dp - \int_E^B V dp, \text{ hay } \Delta S_{CAE} = \Delta S_{EBD} .$$

$$(d) \quad \left( \frac{\partial C_p}{\partial V} \right)_T = T \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = -T \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right) \\ = T \left( \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_V .$$

Đối với khí Van der Waals, phương trình trạng thái cho ta

$$\left( \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_V = 0$$

Do đó

$$\left( \frac{\partial C_p}{\partial V} \right)_T = 0 .$$

## 1124

Hãy xác định tỉ số ( $pV/RT$ ) tại điểm tới hạn đối với một chất khí tuân theo phương trình trạng thái sau (phương trình Dieterici)

$$p(V - b) = RT \exp(-a/RTV).$$

Cho đáp số bằng số chính xác tới hai chữ số có nghĩa.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Điểm tới hạn thoả mãn các phương trình

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = 0.$$

Từ phương trình trạng thái, ta tính được

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = RT \frac{\left[\frac{a(V-b)}{RTV^2} - 1\right]}{(V-b)^2} e^{-\frac{a}{RTV}}.$$

Do đó  $\frac{a(V-b)}{RTV^2} - 1 = 0$ .

Dùng kết quả này ta tính được

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = \frac{a}{(V-b)V^3} \left(\frac{a}{RTV} - 2\right) e^{-\frac{a}{RTV}}.$$

Suy ra,  $\frac{a}{RTV} - 2 = 0$ . Khi đó,  $V = 2b$ ,  $RT = \frac{a}{4b}$ .

Thay các giá trị này trở lại phương trình trạng thái, ta tìm được  $\frac{pV}{RT} = 0,27$ .

## 1125

Hãy tìm mối liên hệ giữa bán kính cán bằng  $r$ , thể nồng  $\phi$ , và độ dư so với áp suất xung quanh đối với áp suất bên trong  $\Delta p$  của một bong bóng xà phòng, giả thiết bỏ qua sức căng bề mặt.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Giả thiết rằng không khí ở trong bong bóng ở pha  $\alpha$ , không khí bên ngoài ở pha  $\beta$ , còn chính bong bóng xà phòng thì ở pha  $\gamma$ . Ta có thể giải bài toán

này bằng cách dùng nguyên lý năng lượng tự do cực tiểu. Nếu nhiệt độ không đổi ta có

$$\delta F^\alpha = -p^\alpha \delta V^\alpha, \quad \delta F^\beta = -p^\beta \delta V^\beta, \quad \text{và} \quad \delta F^\gamma = q(\partial\phi/\partial r)\delta r,$$

ở đây  $V^\alpha = \frac{4}{3}\pi r^3$ ,  $\delta V^\alpha = 4\pi r^2 \delta r$ ,  $\delta V^\beta = -\delta V^\alpha$ .

Điều kiện năng lượng tự do cực tiểu đòi hỏi

$$-p^\alpha \delta V^\alpha - p^\beta \delta V^\beta + q \frac{\partial\phi}{\partial r} \delta r = 0.$$

Do đó ta có

$$\left( p^\beta - p^\alpha + \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) 4\pi r^2 dr = 0.$$

Suy ra

$$\Delta p = p^\beta - p^\alpha = -\frac{q}{4\pi r^2} \frac{\partial\phi}{\partial r}.$$

với  $\phi = q/r$ , Suy ra  $\Delta p = \frac{\phi^2}{4\pi r^2}$ .

## 1126

Khảo sát một bong bóng xà phòng hình cầu có sức căng bề mặt  $\sigma$  không đổi, và chứa đầy không khí (xem là khí lý tưởng). Kí hiệu áp suất môi trường xung quanh là  $p_0$  nhiệt độ là  $T$ .

(a) Tìm mối liên hệ giữa bán kính cân bằng  $r$  của bong bóng xà phòng và khối lượng khí ở bên trong nó.

(b) Giải thích rõ hệ thức ở phần (a) đối với trường hợp bán kính  $r$  ở điều kiện giới hạn khi bong bóng “rất lớn”. Xác định rõ thế nào là “rất lớn”.

(MIT)

**Lời giải:**

(a) Gọi  $d\tau$  là một diện tích rất nhỏ trên bề mặt bong bóng xà phòng,  $p_1$  và  $p_0$  là áp suất trong và ngoài bong bóng, và  $\mu_1, \mu_2$  là thế năng hóa học của chúng. Ta có  $dU = TdS - p_1 dV_1 - p_0 dV_2 + \sigma d\tau + \mu_1 dN_1 + \mu_2 dN_2$ .

Từ điều kiện cân bằng  $dU = 0$ ,  $dS = 0$ ,  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $dV_1 = -dV_2$  và  $d(N_1 + N_2) = 0$ , ta được  $(p_1 - p_0)dV_1 = \sigma d\tau$ , hoặc  $p_1 - p_0 = \sigma d\tau/dV_1$ , ở đây  $\frac{d\tau}{dV_1} = \frac{2}{r}$ , suy ra  $p_1 - p_0 = 2\sigma/r$ .

Vì  $p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT$ , ở đây  $m$  là khối lượng không khí trong bóng bóng,  $M$  là phân tử lượng của không khí, ta có

$$m = \frac{4\pi}{3} \frac{M}{RT} r^3 \left( p_0 + \frac{2\sigma}{r} \right) .$$

(b) Khi  $p_0 \gg 2\sigma/r$ , tức là  $r \gg 2\sigma/p_0$ , ta có  $m = \frac{4\pi M p_0 r^3}{3RT}$ .

### 1127

Từ phương trình áp suất hơi (phương trình Clausius- Clapeyron) hãy tính  $dp/dT = ?$

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Bảo toàn năng lượng cho ta

$$d\mu_1 = -S_1 dT + V_1 dp, \quad d\mu_2 = -S_2 dT + V_2 dp,$$

ở đây  $V_1$  là thể tích hơi, và  $V_2$  là thể tích chất lỏng. Khi chuyển pha từ lỏng sang hơi, thế hoá học bất biến, tức là  $\mu_1 = \mu_2$ , do đó ta có phương trình áp suất hơi

$$\frac{dp}{dT} = \frac{S_1 - S_2}{V_1 - V_2} = \frac{L}{T(V_1 - V_2)},$$

ở đây  $L$  là ẩn nhiệt hoá hơi.

Thường thì  $V_2 \ll V_1$ , do đó phương trình này có thể đơn giản thành

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{TV_1}.$$

### 1128

(a) Bằng cách cân bằng năng lượng tự do Gibbs hoặc thế hoá học ở hai phía của đường cong lỏng - hơi cùng tồn tại, dẫn ra phương trình Clausius – Clapeyron  $\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(V_V - V_L)}$ , ở đây  $q$  là nhiệt hoá hơi tính cho một hạt,  $V_L$  là thể tích tính cho một hạt của chất lỏng, và  $V_V$  là thể tích cho một hạt của chất hơi.

(b) Giả thiết chất hơi tuân theo định luật khí lý tưởng và có khối lượng riêng bé hơn nhiều so với khối lượng riêng của chất lỏng, chúng

mình rằng  $p \sim \exp(-q/kT)$  khi nhiệt hóa hơi không phụ thuộc vào  $T$ .  
(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Từ nguyên lý thứ nhất nhiệt động lực học

$$d\mu = -SdT + Vdp$$

và điều kiện thế hoá học của chất lỏng bằng thế hoá học của chất hơi lúc cân bằng, ta thu được

$$-S_LdT + V_Ldp = -S_VdT + V_Vdp .$$

Suy ra

$$\frac{dp}{dT} = \frac{S_V - S_L}{V_V - V_L} .$$

Với  $q = T(S_V - S_L)$ , ta có

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(V_V - V_L)} .$$

Đây chính là phương trình Clausius – Clapeyron.

(b) Nếu chất hơi xem là khí lý tưởng thì ta có

$$pV_V = kT .$$

Vì khối lượng riêng của hơi nhỏ hơn rất nhiều so với chất lỏng, ta có thể bỏ qua  $V_L$  trong phương trình Clausius – Clapeyron và viết

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dT} = \frac{q}{kT^2} .$$

Nghiệm của phương trình này là  $p \sim \exp(-q/kT)$ .

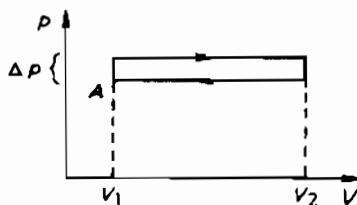
### 1129

Một gam chất lỏng và hơi có nhiệt hoá hơi  $L$  thực hiện một chu trình thuận nghịch rất dẹt như hình 1.34. Bắt đầu từ điểm  $A$  một thể tích chất lỏng  $V_1$  nằm cân bằng với một lượng không đáng kể hơi bão hòa của nó, được nâng nhiệt độ lên  $\Delta T$  và áp suất lên  $\Delta p$  sao cho vẫn giữ nguyên ở trạng thái lỏng. Sau đó đun nóng đẳng áp và thể tích tăng tới  $V_2$  để lại một lượng chất lỏng không

đáng kể. Sau đó giảm áp suất một lượng là  $\Delta p$  và nhiệt độ giảm  $\Delta T$  sao cho về cơ bản ở nguyên ở trạng thái hơi. Cuối cùng nhiệt nhả ra, toàn bộ hơi ngưng tụ trở về trạng thái lỏng tại điểm A.

Hãy khảo sát một chu trình Carnot như thế và viết biểu thức độ biến thiên của nhiệt độ sôi theo áp suất,  $dT/dp$ , đối với chất lỏng theo nhiệt hoá hơi và các đại lượng khác.

(Wisconsin)



Hình 1.34

### Lời giải:

Trong chu trình này những quá trình mà áp suất không đổi là *đẳng nhiệt*. Ta giả thiết nhiệt lượng hấp thụ bởi hệ là  $Q$ . Khi đó hiệu suất là  $\eta = Q/L$ . Đối với chu trình Carnot thuận nghịch, hiệu suất là  $\eta = \frac{\Delta T}{T}$ , do đó  $Q = \frac{\Delta T}{T}L$ . Vì  $Q$  phải bằng công mà hệ thực hiện trong một chu trình,  $W = \Delta p(V_2 - V_1)$ , nên

$$\frac{\Delta T}{T}L = \Delta p(V_2 - V_1).$$

Do đó

$$dT/dp = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{T(V_2 - V_1)}{L}.$$

1130

(a) Từ nguyên lý thứ nhất và thứ hai nhiệt động lực học hãy suy ra rằng nếu một vật như H<sub>2</sub>O chẳng hạn, giãn nở 0,091 cm<sup>3</sup>/g khi đóng băng thì nhiệt độ đóng băng của nó giảm khi áp suất tăng.

(b) Trong một sân trượt băng, mặt sàn trượt nên khó chịu (tức là luôn bị trượt ngã) khi nhiệt độ xuống quá thấp khiến cho nước đá quá cứng. Hãy ước tính nhiệt độ thấp nhất của nước đá để mặt băng trượt là tốt đối với một người trọng lượng bình thường. (Cho ẩn nhiệt của nước đá là 80 cal/g).

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

Ký hiệu pha lỏng và rắn tương ứng là 1 và 2.

(a) Điều kiện để hai pha tồn tại đồng thời là

$$\mu_2 = \mu_1, \quad \text{tức là } d\mu_2 = d\mu_1,$$

Suy ra

$$V_1 dp_1 - S_1 dT_1 = V_2 dp_2 - S_2 dT_2.$$

Vì  $p_2 = p_1 = p$  và  $T_2 = T_1 = T$  trên đường cùng tồn tại, nên ta có

$$\left( \frac{dp}{dT} \right)_{\text{đường pha}} = \frac{S_2 - S_1}{V_2 - V_1}.$$

Đối với những miền mà nhiệt độ cao hơn nhiệt độ chuyển pha ta có  $\mu_1 < \mu_2$ , và đối với những miền mà nhiệt độ thấp hơn nhiệt độ chuyển pha thì ta có  $\mu_1 > \mu_2$ . Điều này có nghĩa là

$$\left( \frac{\partial \mu_1}{\partial T} \right)_p < \left( \frac{\partial \mu_2}{\partial T} \right)_p$$

tức là đối với mọi nhiệt độ  $S_1 > S_2$ .

Đối với những chất như nước chẳng hạn,  $V_2 > V_1$ , nên  $\left( \frac{dp}{dT} \right)_{\text{đường pha}} < 0$ .

(b) Nhiệt độ thấp nhất cho phép mặt băng trượt là tốt chính là nhiệt độ mà ở đó áp suất trên đường cùng tồn tại của hai pha (lỏng và rắn) bằng áp suất do người trượt băng tác dụng lên băng. Điểm ba của nước là ở  $T_0 = 273,16 \text{ K}$ ,  $p_0 = 1 \text{ atm}$ . Đối với người trượt có trọng lượng bình thường  $\bar{p} \sim 10 \text{ atm}$ , thì

$$(\bar{p} - p_0)/(T_{\min} - T_0) = -h/T_{\min}\Delta V.$$

Với  $h = 80 \text{ cal/g}$ ,  $\Delta V = 0,091 \text{ cm}^3/\text{g}$ , ta có

$$T_{\min} = \frac{T_0}{1 + \frac{(\bar{p} - p_0)\Delta V}{h}} = (1 - 2.5 \times 10^{-3})T_0 = -0,06^\circ\text{C}.$$

1131

Những số liệu sau đây áp dụng cho điểm ba của  $\text{H}_2\text{O}$ .

Nhiệt độ:  $0,01^\circ\text{C}$ ; áp suất:  $4,6 \text{ mmHg}$

Thể tích riêng của chất rắn:  $1,12 \text{ cm}^3/\text{g}$

Thể tích riêng của chất lỏng:  $1,00 \text{ cm}^3/\text{g}$

Nhiệt nóng chảy:  $80 \text{ cal/g}$

Nhiệt hoá hơi:  $600 \text{ cal/g}$ .

(a) Vẽ phác giản đồ  $p - T$  đối với  $\text{H}_2\text{O}$  không cần định lượng mà cần đúng về mặt định tính. Ghi rõ các pha khác nhau và những điểm tới hạn.

(b) Áp suất bên trong một bình chứa nước (giữ ở nhiệt độ  $T = -1,0^\circ\text{C}$ ) giảm chậm từ giá trị ban đầu  $10^5 \text{ mmHg}$ . Mô tả điều gì xảy ra và tính áp suất tại lúc diễn ra sự chuyển pha. Giả sử pha hơi được xem như khí lý tưởng.

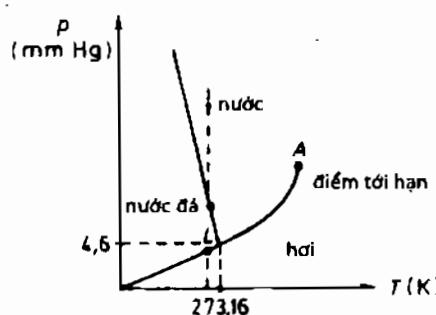
(c) Tính độ biến thiên ẩn nhiệt riêng theo nhiệt độ  $dL/dT$  tại điểm  $(p, T)$  đọc theo một đường cân bằng pha. Biểu diễn kết quả thu được theo  $L$  và nhiệt dung  $C_p$ , hệ số giãn nở  $\alpha$ , và thể tích riêng  $V$  của mỗi pha tại nhiệt độ  $T$  và áp suất  $p$  ban đầu.

(d) Nếu ẩn nhiệt riêng tại áp suất 1 atm trên một đường hoá hơi là  $540 \text{ cal/g}$  thì hãy xác định độ biến thiên ẩn nhiệt ở  $10^\circ\text{C}$  cao hơn đường cong đó. Giả thiết rằng chất hơi có thể xem như khí lý tưởng có bậc tự do quay.

(MIT)

**Lời giải:**

(a) Sơ đồ  $p - T$  của  $\text{H}_2\text{O}$  vẽ trên hình 1.35.



Hình 1.35

## (b) Phương trình Clausius – Clapeyron cho ta

$$\left( \frac{dp}{dT} \right)_{\text{nước đá-nước}} = \frac{L}{T(V_{\text{nước}} - V_{\text{nước đá}})} = -2,4 \text{ cal/cm}^3 \cdot \text{K},$$

$$\left( \frac{dp}{dT} \right)_{\text{nước-hơi}} > 0.$$

Khi áp suất giảm chậm đạt tới đường pha rắn – lỏng, nhiệt lượng được nước giải phóng trong khi áp suất vẫn giữ nguyên không đổi cho đến khi toàn bộ nước chuyển hoàn toàn thành nước đá. Khi đó áp suất bắt đầu giảm trong khi pha hơi vẫn giữ nguyên. Áp suất tại lúc nước đã trở thành nước đá cho bởi

$$p_{\text{nước-nước đá}} = p_0 + \frac{L}{V_{\text{nước}} - V_{\text{nước đá}}} \cdot \frac{T - T_0}{T_0} = 6,3 \times 10^3 \text{ cmHg}$$

ở đây ta đã dùng giá trị  $T = 272,15 \text{ K}$ ,  $T_0 = 273,16 \text{ K}$  và  $p_0 = 4,6 \text{ mmHg}$ . Vì  $V_{\text{hơi}} = \frac{kT}{pm} \gg V_{\text{nước đá}}$ , ta có

$$\frac{dp}{dT} \approx \frac{L}{TV_{\text{hơi}}} = \frac{mLp}{T^2 k}.$$

Áp suất tại đó nước đá chuyển thành hơi là

$$p_{\text{nước đá-nước}} \approx p_0 \exp \left[ \frac{mL}{k} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right] = 4,4 \text{ mmHg}$$

ở đây  $m$  là khối lượng phân tử của nước.

(c) Từ  $L = T(S_1 - S_2)$ , ta có

$$\frac{dL}{dT} = \frac{L}{T} + T \left( \frac{dS_1}{dT} - \frac{dS_2}{dT} \right).$$

Vì  $dS_1 = \frac{C_{p_1}}{T} dT - \alpha_1 V_1 dp$ , trong đó  $\alpha_1 = \frac{1}{V_1} \left( \frac{\partial V_1}{\partial T} \right)_p$ , ta có

$$\frac{dL}{dT} = \frac{L}{T} + (C_{p_1} - C_{p_2}) - (\alpha_1 V_1 - \alpha_2 V_2) T \frac{dp}{dT}.$$

Dùng

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_1 - V_2)},$$

ta thu được

$$\frac{dL}{dT} = \frac{L}{T} + (C_{p_1} - C_{p_2}) - (\alpha_1 V_1 - \alpha_2 V_2) \frac{L}{V_1 - V_2}.$$

(d) Gọi 1 và 2 tương ứng chỉ nước và hơi. Từ  $V_2 \gg V_1$ , ta có

$$\frac{dL}{dT} \approx \frac{L}{T} + (C_{p_1} - C_{p_2}) - \alpha_2 L ,$$

ở đây  $\alpha_2 = 1/T$ , nên  $\Delta L = (C_{p_1} - C_{p_2})\Delta T$ .

Đặt  $C_{p_1} = 1 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$ ,  $C_{p_2} = \frac{2}{9}R \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$ ,  $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ , ta được  $\Delta L = 6 \text{ cal/g}$ .

### 1132

(a) Tìm một biểu thức mô tả sự phụ thuộc của áp suất hơi cân bằng của một chất vào áp suất toàn phần.

(b) Dùng kết quả này lập luận định tính về sự khác nhau giữa điểm ba và điểm đóng băng của nước.

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Ta giả thiết nồng độ mol của chất hòa tan trong dung dịch là  $x \ll 1$ . Khi đó thể hoá học mol của dung dịch là

$$\mu_1(p, T) = \mu_1^\circ(p, T) - xRT ,$$

ở đây  $\mu_1^\circ(p, T)$  là thể hoá học mol của dung môi nguyên chất. Nếu thể hoá học mol của pha hơi là  $\mu_2^\circ(p, T)$ , áp suất hơi cân bằng  $p_0$ , của dung môi được xác định bởi

$$\mu_1^\circ(p_0, T_0) = \mu_2^\circ(p_0, T_0) .$$

Khi áp suất bên ngoài (áp suất toàn phần) là  $p$  thì điều kiện cân bằng của hơi và chất lỏng là

$$\mu_1^\circ(p, T) - xRT = \mu_2^\circ(p, T) .$$

Dùng định lý Taylor, từ các phương trình trên đây ta có

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mu_1^\circ}{\partial p}(p - p_0) + \frac{\partial \mu_1^\circ}{\partial T}(T - T_0) - xRT \\ &= \frac{\partial \mu_2^\circ}{\partial p}(p - p_0) + \frac{\partial \mu_2^\circ}{\partial T}(T - T_0) . \end{aligned}$$

Dùng hệ thức nhiệt động lực học  $d\mu = -SdT + Vdp$ , ta có thể viết biểu thức trên như sau

$$p - p_0 = [(S_2 - S_1)(T - T_0) - xRT]/(V_2 - V_1) ,$$

hay

$$p_0 = p - [L(T - T_0)/T - xRT]/(V_2 - V_1) ,$$

ở đây  $V$  là thể tích mol,  $S$  là entropy mol và  $L$  là ẩn nhiệt,  $L = T(S_2 - S_1)$ .

(b) Điểm ba của nước là nhiệt độ  $T_0$  mà ở đó nước đá, nước và hơi cân bằng. Bằng điểm là nhiệt độ  $T$  mà ở đó nước đá nguyên chất và nước hơi bao hòa cân bằng tại 1 atm. Dùng kết quả của phần (a) ta có

$$T - T_0 = T(V_2 - V_1)(p - p_0)/L + xRT^2/L ,$$

ở đây  $V_2$  và  $V_1$  tương ứng là thể tích mol của nước đá và nước. Từ  $V_2 > V_1$  và  $L < 0$ , ta biết bằng điểm nằm thấp hơn điểm ba. Số hạng thứ nhất của công thức trên do sự biến đổi áp suất, số hạng thứ hai do nước không nguyên chất. Kết quả định lượng của số hạng thứ nhất là  $-0,0075\text{ K}$  và của số hạng thứ hai là  $-0,0023\text{ K}$ .

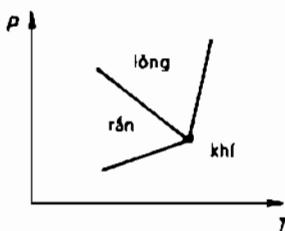
### 1133

Một số nhà nghiên cứu thuộc Học viện Taxidermy ở Modford tuyên bố rằng họ đã đo được giản đồ pha nhiệt độ - áp suất sau đây của một chất mới, mà họ gọi là "embalmium". Những kết quả của họ chỉ ra rằng dọc theo các đường pha gần điểm ba

$$0 < \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{rắn}} < \left(-\frac{dp}{dT}\right)_{\text{nóng chảy}} < \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{khí}}$$

nếu đã chỉ trên giản đồ. Nếu những kết quả này là đúng thì "embalmium" quả là có một đặc tính khác thường và một đặc tính vi phạm các nguyên lý của nhiệt động lực học. Hai đặc tính đó là gì?

(MIT)



Hình 1.36

**Lời giải:**

Đặc tính  $\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{nóng chảy}} < 0$  là bát thường chỉ đối với một vài chất giống như nước chẳng hạn. Phương trình Clausius – Clapeyron cho ta

$$\begin{aligned} \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{hóa hơi}} &= \frac{(S_{\text{khi}} - S_{\text{lỏng}})}{V_{\text{khi}}} \\ \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{thăng hòa}} &= \frac{(S_{\text{khi}} - S_{\text{lỏng}})}{V_{\text{khi}}} \end{aligned}$$

$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{hóa hơi}} > \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{thăng hòa}}$  có nghĩa là  $S_{\text{rắn}} > S_{\text{lỏng}}$ , tức là entropy mol của pha rắn thì lớn hơn pha lỏng, điều này vi phạm nguyên lý thứ hai nhiệt động lực học bởi vì một khối chất hấp thụ nhiệt chuyển từ rắn sang lỏng thì entropy phải tăng.

### 1134

Ấn nhiệt của hơi nước là  $2,44 \times 10^6 \text{ J/kg}$  và khối lượng riêng của hơi nước là  $0,598 \text{ kg/m}^3$  tại  $100^\circ\text{C}$ . Hãy tìm tốc độ biến thiên của nhiệt độ sôi theo độ cao (đơn vị  $\text{K/km}$ ). Giả thiết nhiệt độ của không khí là  $300\text{K}$ . (Khối lượng riêng của không khí ở  $0^\circ\text{C}$  và  $1 \text{ atm}$  là  $1,29 \text{ kg/m}^3$ .)

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Phân bố Boltzmann cho biết áp suất biến đổi theo độ cao là

$$p(z) = p(0) \exp\left(-\frac{mgz}{kT_0}\right),$$

ở đây  $p(0)$  là áp suất tại mực nước biển  $z = 0$ ,  $m$  là phân tử lượng của không khí, và  $T_0 = 300 \text{ K}$  là nhiệt độ của khí quyển. Phương trình Clausius – clapeyron có thể viết như sau

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)} = \frac{L}{TM\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)} = \frac{\alpha}{T},$$

với  $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_2 = 0,598 \text{ kg/m}^3$  và  $L/M = 2,44 \times 10^6 \text{ J/kg}$ , ta có

$$\alpha = \frac{L\rho_1\rho_2}{M(\rho_1 - \rho_2)} = 1,40 \times 10^6 \text{ J/m}^3.$$

Như vậy tốc độ biến thiên của điểm sôi theo độ cao là

$$\frac{dT}{dz} = \frac{dT}{dp} \cdot \frac{dp}{dz} = \frac{T}{\alpha} \cdot \left( -\frac{mg}{kT_0} \right) p(z).$$

Dùng phương trình trạng thái khí lý tưởng  $p = \rho k T_0 / m$ , ở gần mực nước biển ta có

$$\frac{dT}{dz} = -\rho g T(0) / \alpha,$$

ở đây  $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$  là khối lượng riêng của không khí,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  và  $T(0) = 100^\circ\text{C}$ .

Suy ra  $\frac{dT}{dz} = -0,87^\circ\text{C/km}$ .

### 1135

Một cột hình trụ dài thẳng đứng làm bằng một chất ở nhiệt độ  $T$  trong trường hấp dẫn  $g$ . Dưới một điểm nào đó dọc theo cột là chất rắn và trên điểm đó là chất lỏng. Khi nhiệt độ giảm  $\Delta T$ , thì vị trí của mặt phân cách rắn - lỏng chuyển dịch lên phía trên một khoảng  $l$ . Bỏ qua sự giãn nở nhiệt của chất rắn, hãy tìm một biểu thức đối với khối lượng riêng  $\rho_l$  của chất lỏng theo khối lượng riêng  $\rho_s$  của chất rắn, ẩn nhiệt  $L$  của chuyển pha rắn - lỏng,  $g$  và nhiệt độ tuyệt đối  $T$  và  $\Delta T$ .

Giả thiết  $\Delta T/T \ll 1$ .

(Princeton)

**Lời giải:**

Phương trình Clausius – Clapeyron cho ta

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_1 - V_s)} = \frac{L}{T\left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_s}\right)}.$$

Trong bài toán,  $dT = -\Delta T$ ,  $dp = -gl\rho_s$ . Suy ra  $\rho_l = \rho_s \frac{1}{1 + \frac{\Delta T}{T} \frac{L}{lg}}$ .

### 1136

(a) Dùng những khảo sát nhiệt động đơn giản để thu được một hệ thức giữa  $\frac{1}{T_m} \frac{dT_m}{dp}$ , (tốc độ biến thiên lôga của điểm nóng chảy với áp suất thay đổi),

khối lượng riêng của pha rắn và lỏng của khói chất được khảo sát và ẩn nhiệt nóng chảy. (Có thể tìm nó một cách thuận tiện bằng cách liên hệ ẩn nhiệt với độ biến thiên entropy).

(b) Dùng những khảo sát thuỷ tĩnh đơn giản để liên hệ gradien áp suất bên trong quả đất với khối lượng riêng của nó và gia tốc trọng trường. (Giả thiết vùng khảo sát trong bài toán không sâu so với bề mặt.)

(c) Kết hợp những kết quả trên để tính tốc độ biến thiên của điểm nóng chảy của đá silicát theo độ sâu dưới bề mặt trái đất trong miền ở đó điểm nóng chảy trung bình của đá này là  $1300^{\circ}\text{C}$ . Giả thiết tỉ số mật độ

$$\rho_{\text{lỏng}}/\rho_{\text{rắn}} \approx 0,9$$

và ẩn nhiệt nóng chảy là 100 cal/g. Trả lời theo đơn vị  ${}^{\circ}\text{C}/\text{km}$

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Trong quá trình chuyển pha,  $\mu_l = \mu_s$ , ở đây chỉ số  $l$  và  $s$  lần lượt chỉ pha lỏng và pha rắn. Theo hệ thức nhiệt động lực học

$$d\mu = -SdT + VdP,$$

ta có  $(S_l - S_s)dT_m = (V_l - V_s)dP$ , do đó

$$\frac{1}{T_m} \frac{dT_m}{dp} = \frac{V_l - V_s}{T_m(S_l - S_s)} = \frac{V_l - V_s}{L}.$$

Thay  $V = 1/\rho$  vào phương trình trên, ta được

$$\frac{dT_m}{T_m dp} = \frac{1}{L\rho_l} \left( 1 - \frac{\rho_l}{\rho_s} \right).$$

(b) Gọi  $z$  là độ sâu, ta có  $\frac{dp}{dz} = \rho g$ .

(c) Từ những kết quả trên ta có

$$\begin{aligned} \frac{dT_m}{dz} &= \frac{T_m \rho g}{L \rho_l} \left( 1 - \frac{\rho_l}{\rho_s} \right) \approx \frac{T_m g}{L} \left( 1 - \frac{\rho_l}{\rho_s} \right) \\ &= 37 \times 10^{-6} {}^{\circ}\text{C/cm} = 3,7 {}^{\circ}\text{C/km}. \end{aligned}$$

1137

Áp suất hơi tính theo mmHg của amôniắc rắn cho bởi hệ thức:  $\ln p = 23,03 - 3754/T$  ở đây  $T$  là nhiệt độ tuyệt đối.

Áp suất hơi tính theo mmHg của amôniắc lỏng cho bởi hệ thức:  $\ln p = 19,49 - 3063/T$ .

- (a) Nhiệt độ của điểm ba là bao nhiêu?
- (b) Tính ẩn nhiệt hoá hơi (sôi) tại điểm ba. Viết đáp số theo đơn vị cal/mol. (Có thể xem gần đúng hơi là khí lý tưởng và xem khối lượng riêng của hơi là rất nhỏ có thể bỏ qua so với khối lượng riêng của chất lỏng.)
- (c) Ẩn nhiệt thăng hoa tại điểm ba là 7508 cal/mol. Hãy xác định ẩn nhiệt nóng chảy tại điểm ba đó?

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Nhiệt độ  $T$  ở điểm ba thoả mãn phương trình  $23,03 - 3754/T_0 = 19,49 - 3063/T_0$ , suy ra  $T_0 = 195$  K.

(b) Từ hệ thức giữa áp suất hơi và nhiệt độ của amôniắc lỏng

$$\ln p = C - 3063/T,$$

ta được  $dp/dT = 3063p/T^2$ .

Khi đó phương trình Clausius – Clapeyron  $\frac{dp}{dT} = \frac{L}{TV}$  cho

$$\begin{aligned} L &= 3063pV/T = 3063R = 2,54 \times 10^4 \text{ J/mol} \\ &= 6037 \text{ cal/mol}. \end{aligned}$$

(c) Gọi  $S_g$ ,  $S_l$  và  $S_s$  là entropy đôi với hơi, chất lỏng và chất rắn tại điểm ba. Khi đó ẩn nhiệt hoá hơi là  $T_0(S_g - S_l)$ , ẩn nhiệt thăng hoa là  $T_0(S_g - S_s)$ , và ẩn nhiệt nóng chảy là

$$\begin{aligned} T(S_l - S_s) &= T(S_g - S_l) - T(S_g - S_s) \\ &= 7508 - 6037 = 1471 \text{ cal/mol}. \end{aligned}$$

## 1138

Tính chất của sắt ở nhiệt độ cao có thể tóm tắt như sau:

- Dưới  $900^{\circ}\text{C}$  và trên  $1400^{\circ}\text{C}$  sắt- $\alpha$  là pha ổn định.
- Giữa những nhiệt độ này sắt- $\gamma$  là ổn định
- Nhiệt dung riêng của mỗi pha có thể lấy là hằng số:  $C_{\alpha} = 0.775 \text{ J/g} \cdot \text{K}$ ;  $C_{\gamma} = 0.690 \text{ J/g} \cdot \text{K}$ .

Xác định ẩn nhiệt của mỗi chuyển pha?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Theo hình 1.37 dưới đây, ta thấy toàn bộ quá trình là đẳng áp.

Chọn entropy tại  $T_1$  bằng 0 đối với pha  $\alpha$ . Vì  $T \frac{dS}{dT} = C$ , ta có

$$S = C \ln T + \text{const.} \quad S_{\alpha} = C_{\alpha} \ln \left( \frac{T}{T_1} \right), \quad S_{\gamma} = S_1 + C_{\gamma} \ln \left( \frac{T}{T_1} \right).$$

Độ biến thiên của thế hóa học là

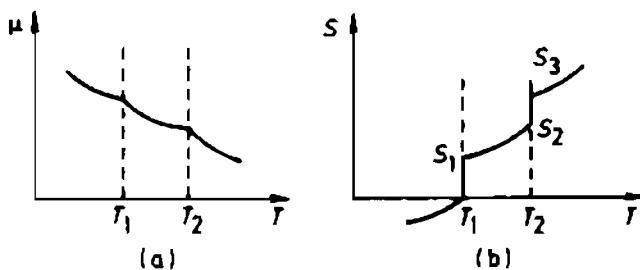
$$\begin{aligned} \Delta\mu^{\alpha} &= \mu^{\alpha}(T_2) - \mu^{\alpha}(T_1) = - \int_{T_1}^{T_2} S_{\alpha} dT \\ &= -C_{\alpha} T_2 \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + C_{\alpha} (T_2 - T_1), \\ \Delta\mu^{\gamma} &= \mu^{\gamma}(T_2) - \mu^{\gamma}(T_1) = - \int_{T_1}^{T_2} S_{\gamma} dT \\ &= -C_{\gamma} T_2 \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + (C_{\gamma} - S_1)(T_2 - T_1). \end{aligned}$$

Vì  $\Delta\mu^{\alpha} = \Delta\mu^{\gamma}$ , ta có

$$\begin{aligned} S_1 &= \left( \frac{T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) (C_{\alpha} - C_{\gamma}) \\ &= 1.60 \times 10^{-2} \text{ J/g} \cdot \text{K}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} L_1 &= S_1 T_1 = 18.8 \text{ J/g}, \\ L_2 &= T_2 (S_3 - S_2) \\ &= (C_{\alpha} - C_{\gamma}) T_2 \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - S_1 T_2 \\ &= 23.7 \text{ J/g}. \end{aligned}$$



Hình 1.37

## 1139

He-4 lỏng có điểm sôi chuẩn là 4,2 K. Tuy nhiên, ở áp suất 1 mmHg nó sôi ở 1,2 K. Hãy xác định ẩn nhiệt hoá hơi trung bình của He ở khoảng nhiệt độ này.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Theo phương trình Clausius – Clapeyron và phương trình trạng thái khí lý tưởng, ta có

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_g - V_l)} \approx \frac{L}{TV_g}, \quad pV_g = RT.$$

Xem  $L$  là hằng số thì ta có

$$L = R \ln \frac{p}{p_0} \left/ \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right..$$

Do đó  $L = 93 \text{ J/mol}$ .

## 1140

(a) Giảm đồ áp suất – thể tích vẽ hai đường đẳng nhiệt gần nhau trong miền chuyển pha lỏng – khí. Bằng cách khảo sát một chu trình Carnot giữa hai nhiệt độ  $T$  và  $T + dT$  trong miền gạch chéo trên hình, từ phương trình Clausius – Clapeyron hãy suy ra phương trình  $dp/dT = L/(T\Delta V)$  liên hệ áp suất hơi và nhiệt độ, trong đó  $L$  là ẩn nhiệt hoá hơi mol,  $\Delta V$  là độ biến thiên thể tích giữa khí và lỏng trên một mol.

(b) He lỏng sôi ở nhiệt độ  $T_0 = 4,2 \text{ K}$  khi đó áp suất của nó là  $p_0 = 1 \text{ atm}$ .

Bây giờ ta bơm hơi và giảm áp suất tới giá trị  $p$  nhỏ hơn rất nhiều. Giả thiết một cách gần đúng rằng ẩn nhiệt  $L$  không phụ thuộc nhiệt độ, và khối lượng riêng của hơi He nhỏ hơn nhiều so với He lỏng, tính gần đúng nhiệt độ  $T_m$  của He lỏng trong trạng thái cân bằng với hơi của nó tại áó suất  $p$ . Biểu diễn kết quả theo  $L, T_0, p_0, p_m$ , và những hằng số khác, nếu cần thiết.

(CUSPEA)

**Lời giải:**

(a) Từ giản đồ  $p - V$  ta thấy rằng công sinh bởi tác nhân (chất sinh công) đối với bên ngoài là  $dW = dp\Delta V$  trong một chu trình Carnot vô cùng nhỏ. Nhiệt lượng hấp thụ trong quá trình này là  $Q = L$ . Theo công thức tính hiệu suất của động cơ Carnot, ta có  $\frac{dW}{L} = \frac{dT}{T}$ .

Do đó  $\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T\Delta V}$ .

(b) Vì

$$\Delta V = V_{\text{hơi}} - V_{\text{lỏng}} \approx V_{\text{hơi}} = RT/p,$$

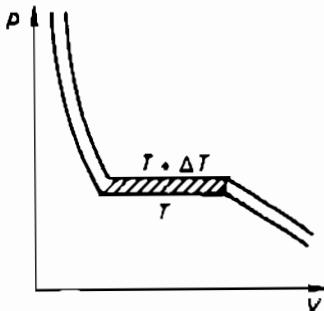
$$\frac{dp}{dT} = \frac{Lp}{RT^2}.$$

Suy ra

$$\ln \frac{p_0}{p_m} = \frac{L}{R} \left( \frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_0} \right).$$

Do đó

$$T_m = \frac{T_0}{\left( 1 + \frac{RT_0}{L} \ln \frac{p_0}{p_m} \right)}.$$

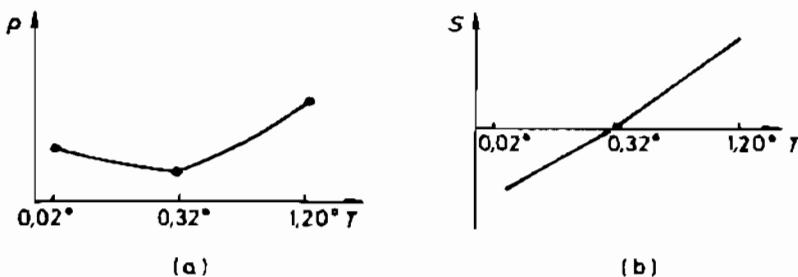


Hình 1.38

## 1141

Khi  $\text{He}^3$  nóng chảy thì thể tích tăng. Trên hình là đường cong nóng chảy của  $\text{He}^3$  trong khoảng nhiệt độ từ 0,02 đến 1,2 K. Hãy vẽ phác đồ thị chỉ rõ độ biến thiên của entropy kèm theo quá trình nóng chảy trong khoảng nhiệt độ này.

(Wisconsin)



Hình 1.39

**Lời giải:**

Từ phương trình Clausius - Clapeyron, ta có

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}, \text{ và do đó } \Delta S = \Delta V \frac{dp}{dT}.$$

Khi  $\text{He}^3$  nóng chảy, thể tích tăng, tức là  $\Delta V > 0$ .

Khi  $0,02 \text{ K} < T < 0,32 \text{ K}$ , vì  $\frac{dp}{dT} < 0$ , nên  $\Delta S < 0$ .

Khi  $0,32 \text{ K} < T < 1,2 \text{ K}$ , vì  $\frac{dp}{dT} > 0$ , nên  $\Delta S > 0$ .

Khi  $T = 0,32 \text{ K}$ ,  $\Delta S = 0$ . Các kết quả này được chỉ trên hình 1.39 (b).

## 1142

Sự chuyển pha giữa pha thơm (a) và pha thơm ngát (f) của chất lỏng huyền thoại Mercaptan là bậc hai trong sơ đồ Ehrenfest, tức là  $\Delta V$  và  $\Delta S$  đều bằng 0 tại tất cả những điểm trên đường chuyển pha  $p_{a \rightarrow f}(T)$ .

Dùng kết quả  $\Delta V = V_a(T, p) - V_f(T, p) = 0$ , trong đó  $V_a$  và  $V_f$  lần lượt là thể tích mol ở pha a và pha f, hãy tìm độ dốc của đường chuyển pha, tức là tính  $dp_{a \rightarrow f}(T)/dT$ , theo độ biến thiên của hệ số giãn nở nhiệt  $\alpha$  hệ số nén đẳng nhiệt  $k_T$  tại lúc chuyển pha.

(MIT)

**Lời giải:**

Đọc theo đường chuyển pha ta có

$$V_a(T, p) = V_f(T, p) .$$

Do đó,  $dV_a(T, p) = dV_f(T, p)$ .

Vì

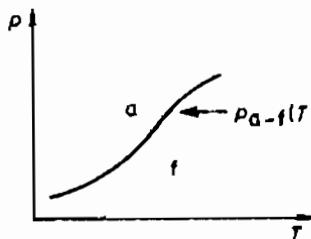
$$dV(T, p) = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp = V(\alpha dT - k_T dp) ,$$

Ta có

$$(\alpha_a - \alpha_f)dT = (k_{Ta} - k_{Tf})dp ,$$

hay

$$dp_{a-f}(T)/dT = (\alpha_a - \alpha_f)/(k_{Ta} - k_{Tf}) .$$



Hình 1.40

1143

Phát biểu định luật Curie đối với sự từ hoá của khí thuận từ. Tại sao sự từ hoá lại phụ thuộc vào nhiệt độ? Cần phải sửa đổi gì đối với định luật đó khi  $T \rightarrow 0$ ?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Định luật Curie phát biểu rằng độ từ hoá của chất thuận từ tỉ lệ nghịch với nhiệt độ tuyệt đối  $M = CH/T$ , trong đó  $C$  là hằng số Curie. Khi nhiệt độ thay đổi, sự phân bố hướng spin của các nguyên tử và ion cũng thay đổi, do đó độ từ hoá phụ thuộc vào  $T$ .

Ở nhiệt độ thấp, pha thuận từ biến thành pha sắt từ. Lúc này từ trường ngoài  $B_a$  tạo ra một độ từ hoá  $M$  nào đó, và độ từ hoá này lại tạo ra một từ trường trao đổi  $B_E = \lambda M$  ( $\lambda$  là một hằng số). Từ hệ thức  $M = \chi(B_a + B_E) = \chi(B_a + \lambda M)$  và  $\chi = C/T$  (định luật Curie), ta có

$$\chi = \frac{M}{B_a} = \frac{C}{T - T_C},$$

Trong đó  $T_C = C\lambda$  là nhiệt độ Curie.

### 1144

Một chất có hai pha:  $N$  và  $S$ . Ở trạng thái bình thường, pha  $N$ , độ từ hoá  $M$  có thể bỏ qua. Ở một nhiệt độ cố định  $T < T_c$ , khi từ trường bên ngoài  $H$  thấp hơn trường tới hạn

$$H_c(T) = H_0 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right],$$

trạng thái bình thường chuyển pha tới trạng thái mới, pha  $S$ . Trong trạng thái  $S$  người ta thấy rằng ở bên trong vật liệu  $B = 0$ . Giản đồ pha cho trên hình 1.41.

(a) Chứng minh rằng hiệu năng lượng tự do Gibbs (tính theo đơn vị CGS) giữa hai pha tại  $T \leq T_c$  được cho bởi

$$G_S(T, H) - G_N(T, H) = \frac{1}{8\pi} [H^2 - H_c^2(T)].$$

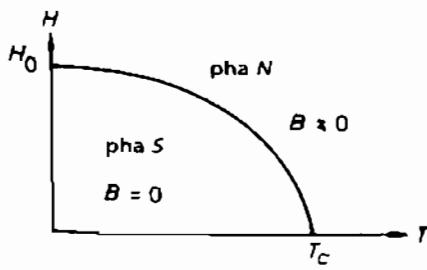
(Có thể biểu diễn kết quả theo một hệ đơn vị khác. Năng lượng tự do Gibbs trong từ trường được cho bởi công thức  $G = U - TS - HM$ .)

(b) Tại  $H \leq H_0$ , tính ẩn nhiệt chuyển pha  $L$  từ pha  $N$  tới pha  $S$ . (Gợi ý: Một cách tiếp cận là khảo sát kiểu phân tích “Clausius - Clapeyron”).

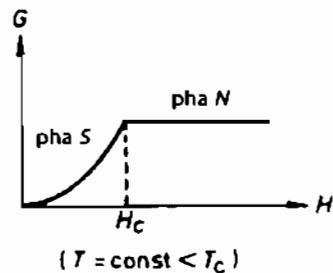
(c) Tại  $H = 0$ , tính độ gián đoạn của nhiệt dung riêng khi chuyển từ pha  $N$  sang  $S$ .

(d) Tại  $H = 0$  đây là sự chuyển pha bậc nhất hay bậc hai?

(UC, Berkeley)



Hình 1.41



Hình 1.42

**Lời giải:**

(a) Lấy vi phân biểu thức đối với năng lượng tự do Gibbs, ta tìm được  $dG = -SdT - MdH$ , trong đó  $B = H + 4\pi M$  trong đơn vị CGS. Theo hình 1.42 ta có:

Pha N:  $M = 0$ ,  $G_N = G_0(T)$ ,

Pha S:  $B = 0$ ,  $M = -H/4\pi$ .

Tích phân phương trình  $dG = -MdH$ , ta được

$$G_S = H^2/8\pi + \text{const.}$$

Chú ý rằng  $G_S(H_c, T) = G_0(T)$  tại điểm chuyển pha, ta có

$$G_S = G_0(T) + \frac{1}{8\pi}(H^2 - H_c^2).$$

Suy ra

$$G_S - G_N = \frac{1}{8\pi}(H^2 - H_c^2).$$

(b) Vì

$$S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_H,$$

ta có

$$\begin{aligned} L = T(S_N - S_S) &= T \left[ \frac{\partial(G_S - G_N)}{\partial T} \right]_H = -\frac{TH_c}{4\pi} \left( \frac{\partial H_c}{\partial T} \right) \\ &= \frac{H_0^2}{2\pi} \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) C_S - C_N &= T \left[ \frac{\partial(S_S - S_N)}{\partial T} \right]_H \\
 &= \frac{T}{4\pi} \left[ \left( \frac{\partial H_c}{\partial T} \right)^2 + H_c \left( \frac{\partial^2 H_c}{\partial T^2} \right) \right] \\
 &= \frac{H_0^2}{2\pi} \frac{T}{T_c^2} \left[ 3 \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 - 1 \right].
 \end{aligned}$$

Khi  $H = 0, C_S - C_N = H_0^2/\pi T_c$ .

(d) Tại  $H = 0, L = 0, C_S - C_N \neq 0$ , do đó sự chuyển pha là bậc hai.

### 1145

Ranh giới pha giữa pha siêu dẫn và pha thường của kim loại trong mặt phẳng tọa độ  $H_e - T$  (với  $H_e$  là cường độ trường ngoài) cho trên hình 1.43.

Những thông số nhiệt động có liên quan là  $T, p$ , và  $H_e$ . Sự cân bằng pha đòi hỏi thể năng Gibbs suy rộng  $G$  phải bằng nhau ở hai bên đường cong. Khảo sát một trạng thái  $A$  ở pha thường và trạng thái  $A'$  ở pha siêu dẫn, mỗi trạng thái nằm ở một bên của đường ranh giới pha và có cùng  $T, p$  và  $H_e$  nhưng khác nhau về entropy và độ từ hoá. Khảo sát hai trạng thái khác  $B$  và  $B'$  tùy ý ở gần  $A$  và  $A'$ ; như được chỉ ra bởi  $p_A = p_B$ .

(a) Sử dụng thông tin này để rút ra hệ thức Clapeyron – Clausius (tức là hệ thức giữa ẩn nhiệt chuyển pha và độ dốc  $dH_e/dT$  của đường cong). Ẩn nhiệt tại một đầu mút của đường cong là bao nhiêu? (Đối với một mẫu siêu dẫn dạng thanh dài có thể tích  $V$  đặt song song với trường thì mômen từ cảm ứng sẽ cho bởi  $M'_H = -VH_e/4\pi$ ; trong trạng thái thường đặt  $M_H = 0$ .)

(b) Tính hiệu số nhiệt dung khi trường và áp suất không đổi ( $C_{p,H_e}$ ) đối với hai pha. Xác định độ gián đoạn của  $C_{p,H_e}$  khi  $H_e = 0, T = T_c$ ? Và tại  $T = 0, H_e = H_c$ ?

(Princeton)

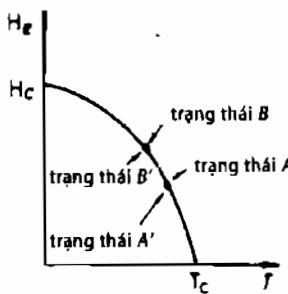
Lời giải:

$$(a) dG = -SdT + Vdp - M_H dH_e.$$

Điều kiện cân bằng pha là

$$G_A = G'_A, \quad G_B = G_{B'}.$$

Do đó,  $dG = dG'$ .



Hình 1.43

Với  $dp = 0$ , đối với mău siêu dẫn, ta có

$$\frac{dH_e}{dT} = -\frac{S' - S}{M'_H - M_H} = \frac{L}{T(M'_H - M_H)} = -\frac{4\pi L}{VH_e T}$$

ở đây  $L = T(S - S')$  là ẩn nhiệt chuyển pha. Tại hai đầu của đường cong  $H_e(T_c) = 0$  tại  $T = T_c$  cho  $L = 0$ ;  $dH_e/dT = 0$  tại  $T = 0$  cũng cho  $L = 0$ .

(b) Từ phương trình trên ta có

$$S' - S = \frac{VH_e}{4\pi} \cdot \frac{dH_e}{dT}$$

Vì  $C = T(dS/dT)$ , ta có

$$\Delta C = C'_{p,H_e} - C_{p,H_e} = \frac{VT}{4\pi} \left[ H_e \frac{d^2H_e}{dT^2} + \left( \frac{dH_e}{dT} \right)^2 \right]$$

Vì  $T = T_c, H_e = 0$ , ta có

$$\Delta C = \frac{VT_c}{4\pi} \left[ \frac{dH_e}{dT} \right]_{T_c}^2$$

Vì  $T = 0, H_e = H_c$ , ta có

$$\Delta C = \frac{VT}{4\pi} H_c \left[ \frac{d^2H_e}{dT^2} \right]_{T=0} = 0$$

## 1146

Một lý thuyết đơn giản của nhiệt động lực học về sắt từ dùng năng lượng tự do viết như một hàm của độ từ hoá  $M$  dưới dạng sau:  $F = -HM + F_0 + A(T - T_c)M^2 + BM^4$ , trong đó  $H$  là cường độ từ trường,  $F_0, A, B$  là những hằng số dương,  $T$  là nhiệt độ và  $T_c$  là nhiệt độ tới hạn.

(a) Điều kiện nào về năng lượng tự do  $F$  xác định giá trị có xác suất nhiệt động lớn nhất của độ từ hoá  $M$  khi cân bằng?

(b) Xác định giá trị cân bằng của  $M$  đối với  $T > T_c$  và vẽ một đồ thị của  $M$  theo  $T$  đối với từ trường  $H$  nhỏ và không đổi.

(c) Giải thích ý nghĩa vật lý của sự phụ thuộc của  $M$  vào nhiệt độ khi  $T$  tiến gần tới  $T_c$  đối với trường hợp  $H$  nhỏ như trong câu (b).

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Theo bài toán  $F$  là kí hiệu của hàm Gibbs.

(a)  $F = \min$  là điều kiện xác định giá trị có xác suất lớn nhất của  $M$  tại cân bằng. Do đó,  $M$  được xác định từ điều kiện  $(\partial F / \partial M)_{T,H} = 0$ .

$$(b) (\partial F / \partial M)_{T,H} = -H + 2A(T - T_c)M + 4BM^3 = 0. \quad (*)$$

Nếu  $2A(T - T_c)M \gg 4BM^3$ , tức là nếu  $T$  cách xa  $T_c$ , thì ta có

$$M = \frac{H}{2A(T - T_c)}.$$

Đây chính là định luật Curie - Weiss. Sự thay đổi của  $M$  theo  $T$  được chỉ rõ trên hình 1.44.

(c) Nếu  $H = 0$ , phương trình (\*) có nghiệm

$$M = 0, \quad M = \pm \sqrt{A(T_c - T)/2B}.$$

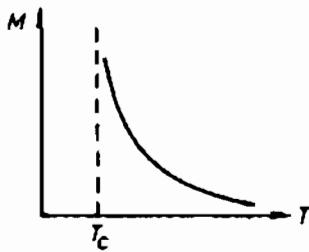
Để khảo sát tính ổn định, ta xét

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial M^2} \right)_{T,H} = 2A(T - T_c) + 12BM^2.$$

Khi  $T > T_c$ , chỉ có nghiệm thực  $M = 0$  là ổn định.

Khi  $T < T_c$ , nghiệm  $M = 0$  là không ổn định trong khi đó các nghiệm

$$M = \pm \sqrt{A(T_c - T)/2B}$$
 lại là ổn định.



Hình 1.44

Khi  $T = T_c, M = 0$ ,  $T_c$  là điểm chuyển pha bậc hai. (Nếu  $T > T_c$ , là điểm chuyển pha bậc hai. Nếu  $T < T_c$ , vật liệu là sắt từ).

Nếu  $H \neq 0$ , (\*) đòi hỏi  $M \neq 0$ . Khi đó chứng nào mà  $M^2 > A(T_c - T)/6B$ , thì hệ là ổn định. Khi  $T \rightarrow T_c, 2A(T - T_c)M \ll 4BM^2$ , và (\*) có nghiệm  $M = (H/4B)^{\frac{1}{3}}$ . Như vậy  $T_c$  là điểm chuyển pha bậc nhất.

## 1147

Khi không có từ trường ngoài, một chất nào đó là siêu dẫn đối với nhiệt độ  $T < T_0$ . Khi có mặt một trường đều  $B$  và đối với  $T < T'_0$ , hệ có thể tồn tại ở hai pha nhiệt động:

Đối với  $B < B_c(T)$ , hệ ở pha siêu dẫn và trong pha này độ từ hoá trên một đơn vị thể tích là  $M = -B/4\pi$ .

Đối với  $B > B_c(T)$ , hệ ở pha bình thường và ở đây  $M = 0$ .

Hai pha trên có thể đồng thời tồn tại cân bằng đọc theo đường cong  $B = B_c(T)$  trong mặt phẳng toạ độ  $B - T$ .

Hiển nhiên có một sự gián đoạn của độ từ hoá khi cắt ngang đường cong cùng tồn tại. Cũng có sự gián đoạn của cả entropy. Gọi  $S_N(T)$  và  $S_s(T)$  tương ứng là entropy trên một đơn vị thể tích đối với pha thường và pha siêu dẫn đọc theo đường cong cùng tồn tại. Cho  $B_c(T) = B_0 \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right)$  hãy tính  $\Delta S = S_N(T) - S_s(T)$  như là một hàm số của  $T$  và các thông số khác.

(CUSPEA)

## Lời giải:

So sánh hệ này với hệ  $p - V$ , ta có sự tương ứng sau  $-B \rightarrow P$  và  $M \rightarrow V$ .

Từ phương trình Clausius - Clapeyron của hệ  $p - V$ ,

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V},$$

đối với hệ từ trên đường cong cùng tồn tại của hai pha, ta có

$$\frac{dB}{dT} = \frac{-\Delta S}{\Delta M},$$

ở đây  $\Delta S = S_N - S_s$ ,  $\Delta M = M_N - M_s = B/4\pi$ . Do đó

$$\begin{aligned}\Delta S &= -\Delta M \cdot \frac{dB}{dT} = -\frac{B}{4\pi} \frac{dB}{dT} \\ &= \frac{B_0^2}{2\pi} \cdot \frac{T}{T_0^2} \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right).\end{aligned}$$

## 5. NHIỆT ĐỘNG LỰC HỌC KHÔNG CÂN BẰNG (1148–1159)

### 1148

Một ống dài  $L$  chứa dung dịch với nồng độ đường tại thời điểm  $t = 0$  được cho bởi biểu thức:

$$n(x, 0) = n_0 + n_1 \left\{ \cos \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi x}{L} \right\}.$$

Giả thiết rằng  $n(x, t)$  tuân theo phương trình khuếch tán 1 chiều với hằng số khuếch tán  $D$ .

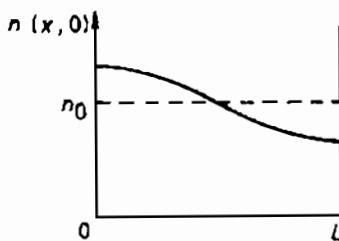
- (a) Viết phương trình khuếch tán đối với  $n(x, t)$ .
- (b) Tính  $n(x, t)$  đối với  $t > 0$ .

(MIT)

**Lời giải:**

- (a) Phương trình khuếch tán là

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2},$$



Hình 1.45

và điều kiện tồn tại của các dung dịch là

$$\left( \frac{\partial n}{\partial x} \right)_{x=0} = \left( \frac{\partial n}{\partial x} \right)_{x=L} = 0 .$$

(b) Đặt  $n(x, t) = X(x)T(t)$ . Khi đó ta có

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 .$$

$$T'(t) + D\lambda T(t) = 0, \quad \text{với } \lambda \neq 0 \quad \text{và } X'(0) = X'(L) = 0 .$$

Các điều kiện này đòi hỏi  $\lambda = (k\pi/L)^2$ , với  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Nghiệm tổng quát là

$$n(x, t) = n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-D(k\pi/L)^2 t} \cos \frac{k\pi}{L} x .$$

Các hệ số  $c_k$  được tìm từ nồng độ cho trước tại  $t = 0$ , tức  $n(x, 0)$ . Từ đó, ta có

$$n(x, t) = n_0 + n_1 e^{-D(\frac{\pi}{L})^2 t} \left[ \cos \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{9} e^{-8D(\frac{\pi}{L})^2 t} \cos \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{25} e^{-24D(\frac{\pi}{L})^2 t} \cos \frac{5\pi x}{L} + \dots \right] .$$

## 1149

(a) Bỏ qua độ nhớt và độ dẫn nhiệt, những nhiễu động nhỏ trong một chất lưu truyền như một sóng âm không tắt dần. Cho trước hệ thức  $p = p(\rho, S)$ , trong đó  $p$  là áp suất,  $\rho$  là khối lượng riêng,  $S$  là entropy, hãy tìm một biểu thức của vận tốc âm  $v$ .

(b) Để làm ví dụ cho một chất lưu như thế ta khảo sát một hệ hạt spin  $-\frac{1}{2}$

không tương tác, đồng nhất, có khối lượng  $m$  ở không độ tuyệt đối. Mật độ số hạt là  $n$ . Hãy tính tốc độ âm  $v$  trong hệ đó.

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Phương trình liên tục và phương trình động lượng trong chất lưu lần lượt là

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{v}) + \nabla p &= 0.\end{aligned}$$

Đối với chất lỏng đứng yên  $\mathbf{v} = 0, \rho = \rho_0, p = p_0$ . Khảo sát những nhiễu động nhỏ, các đại lượng tương ứng là  $\mathbf{v} = \mathbf{v}', \rho = \rho_0 + \rho', p = p_0 + p'$ . Thay chúng vào các phương trình trên và chỉ giữ lại những số hạng bậc nhất, ta được

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla p' &= 0.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \nabla^2 p' = \nabla^2 \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \rho' \right] = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \cdot \nabla^2 \rho'.$$

So sánh với phương trình sóng  $\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \rho'$ , ta tìm được  $v^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S$ .

(Chú ý: Ở đây đã dùng giả thiết cho rằng sự nén chất lưu gây bởi các nhiễu động là đoạn nhiệt, nên có  $S = \text{const}$ . Nói chung, việc dùng phép gần đúng đó là chấp nhận được vì ta đã bỏ qua độ dẫn nhiệt).

(b) Tại  $T = 0$  K, đối với hệ khí fermion có spin  $-\frac{1}{2}$  ta có

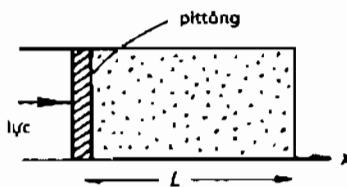
$$\begin{aligned}p &= \frac{2}{5} \frac{N \mu_0}{V} \\ &= \frac{\hbar^2}{5m^2} \left( \frac{3}{8\pi m} \right)^{2/3} \cdot \rho^{5/3}.\end{aligned}$$

Từ đó tính được  $v = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\hbar}{m} \left( \frac{3N}{8\pi V} \right)^{1/3}$ .

## 1150

Một chất khí cân bằng ở áp suất  $p_0$  và khối lượng riêng  $\rho_0$ , được chứa trong một xilanh dài  $L$ , tiết diện ngang  $A$ . Đầu phải của xilanh bít kín và cố định. Đầu trái là pittông khối lượng không đáng kể và chuyển động không ma sát. Khi cân bằng, ngoại lực tác dụng lên pittông tất nhiên là  $f_0 = p_0 A$ . Tuy nhiên, giả thiết có một lực nhỏ tác dụng từ bên ngoài: đó là lực điều hòa  $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$ . Điều này tạo nên những chuyển động nhỏ của pittông và những nhiễu động biên độ nhỏ trong chất khí. Gọi  $c$  là tốc độ của âm trong chất khí đó; bỏ qua độ nhớt. Gọi  $v(t)$  là vận tốc của pittông. Tính  $v(t)$ .

(CUSPEA)



Hình 1.46

**Lời giải:**

Khảo sát chất khí như một chất lưu lý tưởng. Chọn hệ toạ độ có gốc tại vị trí cân bằng (như trên hình 1.46). Gọi vận tốc của chuyển động vĩ mô của chất khí là  $v(x, t)$  và áp suất của chất khí là  $p(x, t)$ . Vì độ dịch chuyển của pittông là rất nhỏ, ta có thể giải gần đúng  $v(x, t)$  và  $p(x, t)$  trong miền  $0 \leq x \leq L$  và khảo sát  $v(0, t)$ . Điều kiện biên  $p(0, t) = f(t)/A$  và  $v(L, t) = 0$ . Vì  $f(t)$  là hàm sin của  $t$  với tần số  $\omega$ , nên kết quả  $v(x, t)$  và  $p(x, t)$  là những sóng có tần số  $\omega$  và vectơ sóng  $k = \omega/c$ . Trong thực tế,  $v(x, t)$  và  $p(x, t)$  cả hai đều thoả mãn phương trình sóng với vận tốc truyền  $c$ . Ta có thể viết

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{Re} f_0 \exp(i\omega t) , \\ p &= \operatorname{Re} \tilde{p}(x) \exp(i\omega t) , \\ v &= \operatorname{Re} \tilde{v}(x) \exp(i\omega t) . \end{aligned}$$

Do đó, để thoả mãn điều kiện biên của  $p$ , ta có

$$\tilde{p}(x) = \frac{f_0}{A} \cos(kx) + \lambda \sin(kx) ,$$

ở đây  $\lambda$  còn cần được xác định.

Mặt khác, chuyển động vĩ mô của chất lưu thoả mãn phương trình Euler

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x},$$

ở đây  $\rho_0$  là khối lượng riêng trung bình,  $v$  là vận tốc và  $p$  là áp suất. Khi đó  $\tilde{v}(x) = \frac{ik}{\omega\rho_0}(-p_0 \sin kx + \lambda \cos kx)$ , với  $p_0 = \frac{f_0}{\lambda}$ .

Dùng điều kiện biên  $v(L) = 0$ , ta có

$$\lambda = p_0 \tan(kL).$$

Do đó,

$$\begin{aligned}\tilde{v}(x=0) &= \frac{ik}{\omega\rho_0}p_0 \tan kL = \frac{i}{c} \frac{p_0}{\rho_0} \tan \frac{\omega L}{c}. \\ v(t) &= \operatorname{Re}(\tilde{v}(0)e^{i\omega t}) = - \left( \frac{p_0}{c\rho_0} \tan \frac{\omega L}{c} \right) \sin \omega t.\end{aligned}$$

### 1151

Ở điều kiện tiêu chuẩn nhiệt độ của khí quyển giảm đều đặn theo độ cao đến khoảng 12 km (vùng đỉnh của tầng đối lưu), ở cao hơn nhiệt độ lại tăng đều đặn (trong tầng bình lưu) đến độ cao khoảng 50 km.

- (a) Nguyên nhân nào đã làm cho nhiệt độ tăng ở tầng bình lưu?
- (b) Tầng bình lưu ấm hơn bao bọc toàn Trái Đất, ở trên tầng đối lưu lạnh hơn, như một trạng thái ổn định lâu dài. Giải thích.
- (c) Sóng âm do một máy bay ở tầng đối lưu phát ra sẽ truyền được những khoảng cách rất lớn ở các độ cao đó, với cường độ giảm gần đúng chỉ như  $1/R$ . Giải thích.

(Columbia)

**Lời giải:**

- (a) Nồng độ ôzôn trong tầng bình lưu (tạo thành do tác dụng của tia cực tím trong ánh nắng mặt trời tác dụng lên ôxi trong không khí) giảm theo độ cao. Chính ôzon này lại hấp thụ bức xạ cực tím của mặt trời và làm tăng nhiệt độ của không khí xung quanh.

- (b) Trong tầng bình lưu, ôzôn hấp thụ bức xạ từ ngoại của mặt trời, trong

khi đó  $\text{CO}_2$  ở đó lại phát xạ bức xạ hồng ngoại dẫn đến sự cân bằng về năng lượng.

(c) Sóng âm có xu hướng lệch về phía miền có tốc độ truyền thấp hơn, tức là miền có nhiệt độ thấp hơn. Trong tầng đối lưu nhiệt độ tăng cả theo chiều có độ cao cao hơn và thấp hơn. Do đó, sóng âm bị giam ở lớp trên cùng của tầng đối lưu, lóe ra hai bên, truyền như hình cái quạt, nên cường độ giảm gần đúng như  $\frac{1}{R}$  thay vì  $\frac{1}{R^2}$ .

### 1152

Vì sự biến thiên về nhiệt độ ban ngày và ban đêm giảm đáng kể ở độ sâu cỡ 10 cm trong đá granit, nên độ dẫn nhiệt của đá này là  $5 \times (10^{-3}, 10^{-1}, 10^2, 10^5) \text{ cal/s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ\text{C}$ .

(Columbia)

**Lời giải:**

Giả thiết rằng nhiệt độ ở độ sâu 10 cm bên dưới bề mặt đá là không đổi tại  $T_0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Khi nhiệt độ ban ngày là cao nhất thì nhiệt độ của mặt đất được coi là  $T_1 \approx T_0 + 10 \text{ }^\circ\text{C}$ . Cường độ bức xạ mặt trời trên mặt đất là

$$Q = 1400 \text{ W/m}^2 \approx 3,3 \times 10^{-2} \text{ cal/s} \cdot \text{cm}^2 .$$

$Q$  hoàn toàn bị hấp thụ bởi trái đất trong 10 cm đầu tiên dưới bề mặt. Khi đó từ định luật Fourier về dẫn nhiệt, ta có thể đánh giá được độ dẫn nhiệt của đá granit là

$$\begin{aligned} K - Q \cdot \frac{\Delta x}{\Delta T} &= Q \cdot \frac{\Delta x}{T_1 - T_0} \\ &= 3,3 \times 10^{-2} \times (10/10) = 3,3 \times 10^{-2} \text{ cal/s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ\text{C} . \end{aligned}$$

Nếu kể đến sự phản xạ từ bề mặt trái đất thì giá trị của  $K$  sẽ nhỏ hơn giá trị ước tính trên. Do đó ta chọn câu trả lời là  $5 \times 10^{-3} \text{ cal/s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ\text{C}$ .

### 1153

Nhiệt lượng được truyền tới và lui từ một mặt thẳng đứng, như tấm kính cửa sổ chẳng hạn, do sự đối lưu của không khí xung quanh tìm được là  $0,4 \times 10^{-1} (\Delta t)^{5/4} \text{ cal/s} \cdot \text{cm}^2$ , trong đó  $\Delta t$  là hiệu nhiệt độ giữa bề mặt và không khí. Nếu nhiệt độ không khí ở trong phòng là  $25^\circ\text{C}$  và  $-15^\circ\text{C}$  ở ngoài phòng

thì nhiệt độ mặt kính cửa sổ phía trong phòng là bao nhiêu? Biết rằng kính cửa sổ có độ dày 2 mm và độ dẫn nhiệt là  $2 \times 10^{-3}$  cal/s·cm·°C. Bỏ qua sự truyền nhiệt bởi bức xạ.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Xét một diện tích  $1 \text{ cm}^2$ , và giả thiết nhiệt độ mặt trong và mặt ngoài kính tương ứng là  $t_1$  °C và  $t_2$  °C. Do đó ta có

$$\begin{aligned} 0,4 \times 10^{-4}(t_2 + 15)^{5/4} &= 2 \times 10^{-3} \times \frac{1}{0,2}(t_1 - t_2) \\ &= 0,4 \times 10^{-4}(25 - t_1)^{5/4}. \end{aligned}$$

Nghiệm là  $t_1 = 5$  °C.

### 1154

Nước trên mặt hồ và không khí ở trên nó cân bằng nhiệt ở bên trên điểm đồng đặc. Nhiệt độ không khí đột nhiên giảm  $\Delta T$  độ. Hãy tìm độ dày của lớp băng trên mặt hồ như là một hàm số của thời gian theo ẩn nhiệt trên một đơn vị thể tích  $L/V$  và độ dẫn nhiệt  $\Lambda$  của nước đá. Giả thiết  $\Delta T$  nhỏ đến nỗi có thể bỏ qua nhiệt dung của nước đá.

(MIT)

**Lời giải:**

Xét một diện tích  $\Delta S$  tùy ý trên mặt nước và gọi  $h(t)$  là độ dày của lớp băng. Nước trong thể tích  $\Delta S dh$  dưới lớp băng toả một nhiệt lượng  $L\Delta S dh/V$  ra không khí trong thời gian  $dt$  và chuyển thành nước đá. Do đó, ta có

$$\Delta S dh \cdot \frac{L}{V} = \Lambda \frac{\Delta T}{h} \Delta S dt,$$

Tức là

$$h dh = \frac{\Lambda \Delta T}{(L/V)} dt.$$

Từ đó suy ra  $h(t) = \left[ \frac{2\Lambda \Delta T t}{(L/V)} \right]^{1/2}$ .

## 1155

Một lớp nước đá dày 1 cm đóng băng trên mặt ao. Mặt trên của lớp có nhiệt độ  $-20^\circ\text{C}$ .

- (a) Xác định tốc độ tăng độ dày của lớp nước đá?
- (b) Sau bao lâu thì bề dày của lớp tăng gấp đôi?

Biết độ dẫn nhiệt của nước đá là  $\kappa = 5 \times 10^{-3} \text{ cal/cm}\cdot\text{s}\cdot^\circ\text{C}$ . Ảnh nhiệt của nước đá là  $L = 80 \text{ cal/g}$ . Khối lượng riêng của nước là  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ .

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Gọi tốc độ tăng bề dày của lớp nước đá là  $\eta$ . Chọn một điểm trên mặt nước đá làm gốc của trục  $z$ , và độ dày của nước đá là  $z$ .

Mật độ dòng nhiệt truyền qua lớp nước đá là  $j = -\kappa \frac{T-T_0}{z}$  và nhiệt lượng do nước toả ra trong đơn vị thời gian và đơn vị diện tích là  $\rho L \frac{dz}{dt}$ . Từ đó ta nhận được phương trình  $\rho L \frac{dz}{dt} = -j$ , cho  $\eta = \frac{dz}{dt} = -j/\rho L = \kappa(T-T_0)/\rho L z$ .

(b) Biểu thức trên có thể viết lại như sau

$$dt = \frac{\rho L}{\kappa(T-T_0)} zdz .$$

$$t = \rho L(z_2^2 - z_1^2)/2\kappa(T-T_0) .$$

Nếu ta lấy  $z_1 = 1 \text{ cm}$  và  $z_2 = 2 \text{ cm}$ , thì khi đó  $\Delta t = 1,2 \times 10^3 \text{ s} = 20 \text{ min}$ .

## 1156

Xét một hành tinh nhỏ (băng đá) văng ra từ hệ thống mặt trời sao cho bức xạ từ mặt trời không còn có tác dụng rõ rệt lên nhiệt độ của hành tinh nữa. Những nguyên tố phỏng xạ tạo nên nhiệt lượng đều bên trong hành tinh với tốc độ  $\dot{q} = 3 \times 10^{-14} \text{ cal/g}\cdot\text{s}$ . Khối lượng riêng của đá là  $\rho = 3,5 \text{ g/cm}^3$ , và độ dẫn nhiệt  $k = 5 \times 10^{-3} \text{ cal/deg}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}$ . Bán kính của hành tinh là  $R = 100 \text{ km}$ . Xác định nhiệt độ  $T_c$  ở tâm hành tinh và nhiệt độ trên bề mặt  $T_s$  của hành tinh, giả thiết hành tinh đã đạt tới trạng thái ổn định.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Nhiệt độ bề mặt thoả mãn phương trình

$$4\pi R^2 \sigma T_s^4 = Q = \frac{4\pi R^3}{3} \rho \dot{q} ,$$

Do đó

$$T_s = \left( \frac{R\rho\dot{q}}{3\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = 22,5 \text{ K} .$$

Phương trình dẫn nhiệt bên trong hành tinh là

$$\nabla \cdot (-k\nabla T) = \dot{q}\rho .$$

Dùng tọa độ cầu, ta có

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\rho\dot{q}r^2}{k}$$

và do đó

$$T = -\frac{\dot{q}\rho}{6k}(r^2 - R^2) + T_s .$$

Vậy nhiệt độ ở trung tâm là

$$T_c = \frac{\dot{q}\rho}{6k}R^2 + T_s = 372 \text{ K} .$$

### 1157

Gọi  $H$  là dòng nhiệt trong một đơn vị thời gian qua một đơn vị diện tích vuông góc với mặt dẫn nhiệt tại điểm  $P$  của vật. Giả sử kết quả thực nghiệm là

$$\mathbf{H} = -k\nabla T ,$$

trong đó  $T$  là nhiệt độ và  $k$  hệ số dẫn nhiệt. Cuối cùng, nhiệt năng hấp thụ bởi một đơn vị thể tích cho bởi  $c\rho T$ , với  $c$  là nhiệt dung và  $\rho$  là khối lượng riêng.

- (a) Lập sự tương tự giữa các đại lượng nhiệt  $H, k, T, c, \rho$  và các đại lượng tương ứng  $E, J, V, \rho$  của dòng điện không đổi.
- (b) Dùng kết quả của câu (a) tìm phương trình dẫn nhiệt.
- (c) Một ống bán kính trong  $r_1$ , bán kính ngoài  $r_2$  và độ dẫn nhiệt  $k$  không đổi được giữ với nhiệt độ bên trong là  $T_1$  và nhiệt độ bên ngoài là  $T_2$ . Đối với ống có chiều dài  $L$ , hãy tìm tốc độ mất nhiệt và nhiệt độ ở giữa  $r_1$  và  $r_2$  (trạng thái ổn định).

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) So sánh với định luật Ohm  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \operatorname{grad} V$  ( $V$  là hiệu điện thế) và định luật bảo toàn điện tích  $\partial \rho / \partial t = -\nabla \cdot \mathbf{J}$ , ta thu được sự tương tự  $c\rho T \iff \rho$ ;  $\mathbf{H} \iff \mathbf{J}$ ;  $\operatorname{grad} T \iff \operatorname{grad} V$ ;  $k \iff \sigma$ .

(b) Nhờ sự tương tự nói trên và định luật bảo toàn điện tích, ta có

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{grad} \cdot (-k \operatorname{grad} T) = k\nabla^2 T .$$

Khi đó phương trình dẫn nhiệt là

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k}{\rho c} \nabla^2 T = 0 .$$

(c) Khi cân bằng được thiết lập,  $\partial T / \partial t = 0$ ; suy ra  $\nabla^2 T = 0$ .

Các điều kiện biên là  $T(r_1) = T_1$  và  $T(r_2) = T_2$ .

Chọn hệ toạ độ trụ và giải phương trình Laplace, ta thu được nhiệt độ ở giữa  $r_1$  và  $r_2$

$$T(r) = \frac{1}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \left[ T_1 \ln \frac{r}{r_2} - T_2 \ln \frac{r}{r_1} \right] .$$

Theo

$$\mathbf{H} = -k\nabla T = -k \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{k(T_1 - T_2)}{r \ln(r_2/r_1)} \mathbf{r}^0 ,$$

ta thu được tốc độ mất nhiệt

$$\dot{q} = 2\pi r L H = 2\pi k(T_1 - T_2) L / \ln \frac{r_2}{r_1} .$$

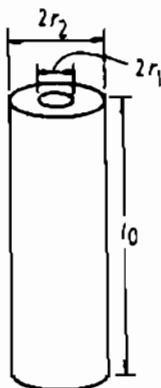
### 1158

Một hình trụ với thành có độ dày không đổi, làm bằng chất phi kim, có bán kính ngoài  $r_1$ , bán kính trong  $r_2$ , chiều dài  $l_0$ , được giữ cho mặt ngoài có nhiệt độ  $100^\circ\text{C}$  và mặt trong có nhiệt độ  $0^\circ\text{C}$ .

(a) Xác định sự phân bố nhiệt độ ở bên trong thành hình trụ?

(b) Nếu bây giờ đặt hình trụ trong một buồng cách nhiệt có nhiệt dung không đáng kể và để cho đi tới trạng thái cân bằng nhiệt độ thì entropy sẽ tăng, giảm hay giữ nguyên không đổi?

(Wisconsin)



Hình 1.47

**Lời giải:**

(a) Vì vật liệu là đồng đều nên ta có thể giả thiết độ dẫn nhiệt cũng không đổi. Theo các công thức  $dQ = -k(dT/dr)sdt$  và  $s = 2\pi l_0 r$ , ta có

$$dQ/dt = -2\pi l_0 r k dT/dr.$$

Vì  $dQ/dt$  không phụ thuộc vào  $r$ , nên ta muốn  $dT/dr = A/r$ , với  $A$  là hằng số. Khi đó  $T(r) = A \ln r + B$ .

Từ các điều kiện biên ta có

$$A = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad B = \frac{T_1 \ln r_2 - T_2 \ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

ở đây  $T_1 = 373$  K và  $T_2 = 273$  K, cho nên

$$T(r) = \frac{1}{\ln r_1 - \ln r_2} [(T_1 - T_2) \ln r + T_2 \ln r_1 - T_1 \ln r_2].$$

(b) Đây là một quá trình đoạn nhiệt không thuận nghịch nên entropy của nó tăng.

1159

Khi có một dòng nhiệt trong một vật liệu dẫn nhiệt thì entropy của nó tăng. Hãy tìm tốc độ địa phương của sự sinh entropy trên đơn vị thể tích của vật dẫn nhiệt khi biết độ dẫn nhiệt và gradient nhiệt độ.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Nếu bỏ qua sự giãn nở thể tích bên trong vật liệu dẫn nhiệt, thì khi đó  $du = TdS$ . Phương trình dẫn nhiệt là

$$\frac{du}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 .$$

Suy ra

$$dS/dt = -\nabla \cdot \mathbf{q}/T = -\nabla \cdot (\mathbf{q}/T) + \mathbf{q} \cdot \nabla(1/T) ,$$

trong đó  $\mathbf{q}/T$  là dòng entropy, và  $\mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{T}\right)$  là độ tăng entropy không thuận nghịch do sự phân bố nhiệt độ không đồng đều gây ra. Do vậy tốc độ sinh entropy địa phương trên một đơn vị thể tích là

$$\dot{S} = \mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{\nabla T}{T^2} \cdot \mathbf{q} .$$

Theo định luật dẫn nhiệt Fourier,  $\mathbf{q} = -k\nabla T$  phương trình trên trở thành

$$\dot{S} = k \left(\frac{\nabla T}{T}\right)^2 .$$

## **PHẦN II**

### **VẬT LÝ THỐNG KÊ**

## 1. XÁC SUẤT VÀ ENTROPY THỐNG KÊ (2001-2013)

**2001**

Một dao động tử diều hoà cổ điển khôi lượng  $m$  và độ cứng  $k$  có năng lượng toàn phần  $E$ , nhưng hoàn toàn không biết thời điểm ban đầu của nó.

Tìm hàm mật độ xác suất  $p(x)$  sao cho  $p(x)dx$  là xác suất để khôi lượng  $m$  nằm trong khoảng cách  $x$  một đoạn  $dx$ .

(MIT)

**Lời giải:**

Từ định luật bảo toàn năng lượng, ta có

$$E = \frac{k}{2}l^2 = \frac{k}{2}x^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^2,$$

trong đó  $l$  là biên độ dao động. Suy ra chu kì dao động là

$$T = 2 \int_{-l}^l \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E-kx^2}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Do đó ta có

$$p(x)dx = \frac{2dt}{T} = \frac{2}{T} \left( \frac{m}{2E - kx^2} \right)^{\frac{1}{2}} dx,$$

hay

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{k}{2E - kx^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**2002**

Giả thiết có hai loại (vi khuẩn) E. coli, “đỏ” và “xanh”. Mỗi loại vi khuẩn sinh sản giống hệt như nhau (vô tính) bằng cách phân đôi, đỏ → đỏ + đỏ hoặc xanh → xanh + xanh, với thời gian sinh sản trong 1 giờ. Ngoại trừ dấu hiệu “đỏ” và “xanh”, còn thì không có sự khác biệt nào giữa chúng. Một đám E. coli gồm 5.000 “đỏ” và 5.000 “xanh” được nuôi dưỡng và sinh sản. Để giữ cho “dân số” của đám vi khuẩn không tăng lên, một động vật ăn thịt được đưa vào để giữ

“dân số” đâm vi khuẩn vào khoảng 10.000 bằng cách ăn những con vi khuẩn (một cách ngẫu nhiên).

(a) Sau một thời gian rất dài, xác định phân bố xác suất của số vi khuẩn “đỏ”.

(b) Phải đợi khoảng chừng bao lâu để câu trả lời này là chính xác?

(c) Nếu động vật ăn thịt ưa ăn những vi khuẩn “đỏ” hơn là vi khuẩn “xanh” khoảng 1% thì điều đó ảnh hưởng như thế nào đối với các kết quả câu (a) và câu (b)?

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Sau một thời gian đủ dài, những vi khuẩn sẽ tăng lên tới một con số khổng lồ  $N \gg 10.000$  nếu không có động vật ăn thịt. Việc động vật ăn thịt ăn những con vi khuẩn một cách ngẫu nhiên về mặt toán học là tương đương với sự chọn  $n = 10.000$  vi khuẩn từ  $N$  con, như những con còng sống sót.  $N \gg n$  có nghĩa là trong mỗi sự lựa chọn xác suất để  $E. coli$  “đỏ” và “xanh” sống sót là như nhau. Có  $2^n$  cách lựa chọn, và có  $C_m^n$  cách để  $m$  vi khuẩn “đỏ” sống sót. Do đó phân bố xác suất của số  $E. coli$  “đỏ” là

$$\frac{1}{2^n} C_m^n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

(b) Chúng ta đòi hỏi  $N \gg n$ . Thực tế chỉ cần  $N/n \approx 10^2$  là đủ. Vì  $N = 2^t n$ , nên  $t = 6$  đến 7 giờ sẽ là đủ.

(c) Nếu xác suất ăn những vi khuẩn đỏ là  $\left(\frac{1}{2} + p\right)$ , và xác suất ăn những vi khuẩn xanh là  $\left(\frac{1}{2} - p\right)$ , thì kết quả trong câu (a) trở thành

$$\begin{aligned} C_m^n \left(\frac{1}{2} + p\right)^m \left(\frac{1}{2} - p\right)^{n-m} \\ = \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{1}{2} + p\right)^m \cdot \left(\frac{1}{2} - p\right)^{n-m}. \end{aligned}$$

Kết quả của câu (b) không thay đổi.

2003

- (a) Ma trận mật độ rút gọn trong không gian toạ độ và xung lượng là gì?  
 (b) Kí hiệu ma trận mật độ rút gọn trong không gian xung lượng bằng  $\phi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ . Chúng tôi rằng nếu  $\phi$  là chéo, tức là,

$$\phi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = f(\mathbf{p}_1)\delta_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2},$$

thì những yếu tố chéo của ma trận mật độ toạ độ là hằng số.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Ma trận mật độ rút gọn là biểu thức ma trận của toán tử mật độ  $\hat{\rho}(t)$  trong một tập hợp trực giao đầy đủ của các trạng thái đơn tuyến, trong đó toán tử mật độ  $\hat{\rho}(t)$  được định nghĩa sao cho giá trị kì vọng của một toán tử bất kì  $\hat{O}$  là  $\langle \hat{O} \rangle = \text{tr}[\hat{O}\hat{\rho}(t)]$ . Ta biết rằng tập hợp trực giao đầy đủ của các trạng thái đơn tuyến trong không gian toạ độ là  $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ , từ đó ta có thể nhận được ma trận mật độ rút gọn trong không gian toạ độ là  $\langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}(t) | \mathbf{r} \rangle$ . Tương tự, ma trận mật độ rút gọn trong không gian xung lượng là  $\langle \mathbf{p}' | \hat{\rho}(t) | \mathbf{p} \rangle$ , trong đó  $\{|\mathbf{p}\rangle\}$  là tập trực giao đầy đủ của các trạng thái đơn tuyến trong không gian xung lượng.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}(t) | \mathbf{r} \rangle &= \sum_{\mathbf{p}' \mathbf{p}} \langle \mathbf{r}' | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \hat{\rho}(t) | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{r} \rangle \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}' \mathbf{p}} \phi(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \exp(i(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{p}' - \mathbf{r} \cdot \mathbf{p})) \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}' \mathbf{p}} f(\mathbf{p}) \delta_{\mathbf{p}', \mathbf{p}} \exp(i(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}) \exp(i(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p}). \end{aligned}$$

Khi đó những yếu tố chéo  $\langle \mathbf{r} | \hat{\rho}(t) | \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p})$  hiển nhiên là hằng số.

2004

- (a) Xét một số lớn hạt  $N$  được đặt trong từ trường ngoài  $\mathbf{H}$ . Mỗi hạt có spin  $1/2$ . Tìm số trạng thái khả dĩ đối với hệ như là một hàm số của  $M_s$ , thành phần- $z$  của spin toàn phần của hệ. Xác định giá trị của  $M_s$  để số trạng thái là

cực đại.

(b) Định nghĩa không độ tuyệt đối của nhiệt độ nhiệt động lực học. Giải thích ý nghĩa của nhiệt độ tuyệt đối âm, và cho một thí dụ cụ thể để chỉ ra nhiệt độ tuyệt đối âm có thể đạt tới như thế nào.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Spin của một hạt có hai định hướng khả dĩ  $1/2$  và  $-1/2$ . Gọi số hạt có spin  $1/2$  mà hướng của chúng cùng chiều với  $\mathbf{H}$  là  $N_\uparrow$  và số hạt có spin  $-1/2$  ngược hướng với  $\mathbf{H}$  là  $N_\downarrow$ ; khi đó thành phần của spin toàn phần theo hướng của  $\mathbf{H}$  là  $M_s = \frac{1}{2}(N_\uparrow - N_\downarrow)$ . Vì  $N_\uparrow + N_\downarrow = N$ , ta được  $N_\uparrow = \frac{N}{2} + M_s$  và  $N_\downarrow = \frac{N}{2} - M_s$ . Số trạng thái của hệ là

$$Q = \frac{N!}{N_\uparrow! N_\downarrow!} \left[ \frac{N}{2} + M_s \right]! \left[ \frac{N}{2} - M_s \right]! .$$

Dùng công thức Stirling, ta nhận được

$$\begin{aligned} \ln Q &= \ln \frac{N!}{N_\uparrow! N_\downarrow!} \\ &= N \ln N - N_\uparrow \ln N_\uparrow - N_\downarrow \ln N_\downarrow \\ &= N \ln N - N_\uparrow \ln N_\uparrow - (N - N_\uparrow) \ln(N - N_\uparrow) . \end{aligned}$$

Vì

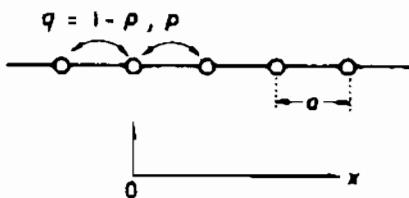
$$\frac{\partial \ln Q}{\partial N_\uparrow} = -\ln N_\uparrow + \ln(N - N_\uparrow) = 0 ,$$

ta có  $N_\uparrow = \frac{N}{2}$ , tức là khi  $M_s = 0$  số trạng thái của hệ là cực đại.

(b) Xem bài 2009.

2005

Có một mạng (nguyên tử - ND) một chiều với hằng số mạng  $a$  như trên hình 2.1. Cứ mỗi  $\tau$  giây một nguyên tử lại dịch chuyển từ một vị trí đến vị trí gần nhất bên cạnh. Xác suất dịch chuyển sang phải và trái tương ứng là  $p$  và  $q = 1 - p$ .



Hình 2.1

- (a) Tính vị trí trung bình  $\bar{x}$  của nguyên tử ở thời điểm  $t = N\tau$ , với  $N \gg 1$ ;  
 (b) Tính giá trị toàn phương trung bình  $\overline{(x - \bar{x})^2}$  ở thời điểm  $t$ .

(MIT)

**Lời giải:**

(a) Chọn vị trí ban đầu của nguyên tử ở gốc  $x = 0$ , với trục- $x$  hướng sang phải. Ta có

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} (2n-N)ap^nq^{N-n} \\ &= 2ap \frac{\partial}{\partial p} \left( \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \right) - Na \\ &= 2ap \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N - Na = Na(p-q).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b) \overline{x^2} &= \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} (2n-N)^2 a^2 p^n q^{N-n} \\ &= 4a^2 p^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} (p+q)^N - 4(N-1)a^2 p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N + N^2 a^2 \\ &= Na^2 [(N-1)(p-q)^2 + 1], \text{suy ra} \\ \overline{(x - \bar{x})^2} &= \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 4Na^2 pq.\end{aligned}$$

2006

- (a) Nêu định nghĩa của entropy trong vật lý thống kê.  
 (b) Trình bày lý lẽ tổng quát để giải thích vì sao và dựa vào những sự kiện nào entropy của một hệ kín  $A$  là không đổi, hoặc tăng. Đề thuận tiện bạn có

thể giả thiết rằng  $A$  có thể được chia ra thành hai hệ con  $B$  và  $C$  có tiếp xúc yếu với nhau, nhưng mỗi hệ con vẫn còn ở trạng thái cân bằng nhiệt động nội tại.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a)  $S = k \ln \Omega$ , trong đó  $k$  là hằng số Boltzmann và  $\Omega$  là tổng số các trạng thái vi mô của trạng thái vi mô đã cho.

(b) Giả thiết rằng nhiệt độ của hai hệ con tương ứng là  $T_B$  và  $T_C$  với  $T_B \geq T_C$ . Theo định nghĩa của entropy, nếu có một năng lượng nhỏ  $\Delta > 0$  trao đổi giữa chúng (từ  $B$  đến  $C$ ), thì

$$\begin{aligned}\Delta S_B &= -\frac{\Delta}{T_B}, \quad \Delta S_C = \frac{\Delta}{T_C}, \\ \Delta S &= \Delta S_B + \Delta S_C = \frac{(T_B - T_C)}{T_B T_C} \Delta \geq 0.\end{aligned}$$

Khi  $T_B > T_C$ , không có cân bằng nhiệt giữa hai hệ con, và  $\Delta S > 0$ .

Khi  $T_B = T_C$ , tức là hai hệ con ở trạng thái cân bằng,  $\Delta S = 0$ .

2007

Nêu định nghĩa thống kê của entropy của Boltzmann và trình bày ngắn gọn nhưng rõ ràng ý nghĩa vật lý của nó. Một hệ có hai mức (năng lượng - ND) gồm  $N = n_1 + n_2$  hạt được sắp xếp vào hai trạng thái 1 và 2 tương ứng với năng lượng  $E_1$  và  $E_2$ . Hệ tiếp xúc với một bình điều nhiệt ở nhiệt độ  $T$ . Nếu xảy ra một phát xạ lượng tử đơn lẻ vào bình điều nhiệt, số hạt trong các trạng thái sẽ thay đổi  $n_2 \rightarrow n_2 - 1$  và  $n_1 \rightarrow n_1 + 1$ . Đổi với  $n_1 \gg 1$  và  $n_2 \gg 1$ , hãy rút ra biểu thức cho độ biến thiên entropy của

- (a) hệ hai mức, và của
- (b) bình điều nhiệt, và cuối cùng
- (c) từ (a) và (b) nhận được hệ thức Boltzmann đối với tỉ số  $n_1/n_2$ .

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

$S = k \ln \Omega$ , trong đó  $\Omega$  là số trạng thái vi mô của hệ. Về mặt vật lý, entropy

là thước đo sự hỗn loạn của hệ.

(a) Độ biến thiên entropy của hệ hai mức là

$$\begin{aligned}\Delta S_1 &= k \ln \frac{N!}{(n_2 - 1)!(n_1 + 1)!} - k \ln \frac{N!}{n_1!n_2!} \\ &= k \ln \frac{n_2}{n_1 + 1} \cong k \ln \frac{n_2}{n_1}.\end{aligned}$$

(b) Độ biến thiên entropy của bình điều nhiệt là

$$\Delta S_2 = \frac{E_2 - E_1}{T}.$$

(c) Từ  $\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$ , ta có

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right)$$

## 2008

Xét một hệ gồm một số rất lớn  $N$  nguyên tử có thể phân biệt được, không chuyển động và giữa chúng không có tương tác, mỗi nguyên tử chỉ có hai mức năng lượng (không suy biến):  $0, \varepsilon > 0$ . Gọi  $E/N$  là năng lượng trung bình trên mỗi nguyên tử trong giới hạn  $N \rightarrow \infty$ .

(a) Xác định giá trị cực đại khả dĩ của  $E/N$  nếu hệ không nhất thiết ở trạng thái cân bằng nhiệt động?  $E/N$  có thể đạt giá trị cực đại bằng bao nhiêu, nếu hệ ở trạng thái cân bằng (tất nhiên, với nhiệt độ dương)?

(b) Đối với trường hợp cân bằng nhiệt động, tính entropy trên mỗi nguyên tử,  $S/N$ , như là một hàm của  $E/N$ .

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Nếu hệ không nhất thiết ở trạng thái cân bằng nhiệt động, giá trị cực đại khả dĩ của  $E/N$  là  $\varepsilon$ ; nếu hệ ở trạng thái cân bằng (với nhiệt độ dương), giá trị cực đại khả dĩ của  $E/N$  là  $\varepsilon/2$  tương ứng với  $T \rightarrow \infty$ .

(b) Khi năng lượng trung bình trên mỗi nguyên tử là  $E/N$ , thì có  $E/\varepsilon$  hạt ở mức năng lượng  $\varepsilon$  và số trạng thái vi mô là

$$Q = \frac{N!}{\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)! \left(N - \frac{E}{\varepsilon}\right)!}.$$

Do đó entropy của hệ là

$$S = k \ln \frac{N!}{\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)! \left(N - \frac{E}{\varepsilon}\right)!}.$$

Nếu  $E/\varepsilon \gg 1, N - E/\varepsilon \gg 1$ , ta có

$$\begin{aligned} \frac{S}{N} &= k \left[ \ln N - \frac{E/\varepsilon}{N} \ln \frac{E}{\varepsilon} - \left(1 - \frac{E/\varepsilon}{N}\right) \ln \left(N - \frac{E}{\varepsilon}\right) \right] \\ &= k \left[ \frac{E}{\varepsilon N} \ln \frac{\varepsilon N}{E} + \left(1 - \frac{E}{N\varepsilon}\right) \ln \frac{1}{1 - \frac{E}{\varepsilon N}} \right]. \end{aligned}$$

### 2009

Xét một hệ có  $N$  hạt không tương tác, mỗi hạt được cố định tại một vị trí và có mômen từ  $\mu$ , hệ được đặt trong từ trường  $H$ . Khi đó mỗi hạt có thể tồn tại ở một trong hai trạng thái năng lượng  $E = 0$  hoặc  $E = 2\mu H$ . Xem như các hạt có thể phân biệt được.

(a) Entropy  $S$  của hệ có thể được viết dưới dạng  $S = k \ln \Omega(E)$ , với  $k$  là hằng số Boltzmann và  $E$  là năng lượng toàn phần của hệ. Giải thích ý nghĩa của  $\Omega(E)$ .

(b) Viết một công thức cho  $S(n)$ , trong đó  $n$  là số hạt trong trạng thái trên. Vẽ phác đồ thị hàm  $S(n)$ .

(c) Rút ra công thức gần đúng Stirling đối với  $n$  lớn:

$$\ln n! \approx n \ln n - n$$

bằng cách thay gần đúng  $\ln n!$  bằng một tích phân.

(d) Dùng kết quả của (c) viết lại kết quả của (b). Tìm giá trị của  $n$  sao cho  $S(n)$  là cực đại.

(e) Xem như  $E$  là liên tục, chứng tỏ rằng hệ này có thể có nhiệt độ tuyệt đối âm.

(f) Tại sao nhiệt độ tuyệt đối âm lại có thể có ở đây nhưng lại không thể có đối với một khối khí trong hộp?

**Lời giải:**

(a)  $\Omega(E)$  là toàn bộ số các trạng thái vi mô khả dĩ của hệ khi năng lượng của nó là  $E$ , trong đó

$$0 \leq E \leq N\varepsilon, \quad \varepsilon = 2\mu H.$$

(b) Vì các hạt có thể phân biệt được, nên

$$Q = \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

Do đó  $S = k \ln \frac{N!}{n!(N-n)!} = S(n)$ .

Chú ý rằng  $S(n=0) = S(n=N) = 0$ , và ta chờ đợi  $S_{\max}$  xuất hiện tại  $n = N/2$  (sẽ chứng minh trong câu (d) dưới đây). Đồ thị của  $S(n)$  được biểu diễn ở hình 2.2.

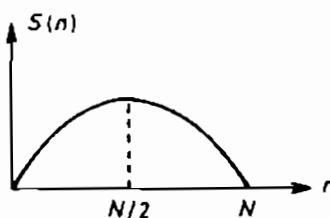
(c)  $\ln n! = \sum_{m=1}^n \ln m \approx \int_1^n \ln x dx = n \ln n - n + 1 \approx n \ln n - n$ , (đối với  $n$  lớn).

$$(d) \frac{S}{k} \approx N \ln \frac{N}{N-n} - n \ln \frac{n}{N-n},$$

$$\frac{dS}{dn} = 0 \quad \text{đến} \quad \text{đến}$$

$$\frac{N}{N-n} - 1 - \ln n - \frac{n}{N-n} + \ln(N-n) = 0.$$

Vì thế,  $S = S_{\max}$  khi  $n = N/2$ .



Hình 2.2

(e) Vì  $E = n\varepsilon$ , nên  $S = S_{\max}$  khi  $E = \frac{1}{2}N\varepsilon$ . Khi  $E > \frac{1}{2}N\varepsilon$ ,  $\frac{\partial S}{\partial E} < 0$  (xem h. 2.2). Vì  $\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE}$ , ta có  $T < 0$  khi  $E > N\varepsilon/2$ .

(f) Lý do là ở đây mức năng lượng của một hạt có giới hạn trên. Đối với một hệ khí, mức năng lượng của một hạt không có giới hạn trên, và entropy là

một hàm tăng của năng lượng  $E$ ; vì vậy nhiệt độ tuyệt đối âm không thể xảy ra.

Theo quan điểm về năng lượng, ta có thể nói rằng một hệ với nhiệt độ tuyệt đối âm là “nóng” hơn bất kì một hệ nào có nhiệt độ dương.

### 2010

Một vật rắn bao gồm  $N$  nguyên tử từ tính có spin. Với nhiệt độ đủ cao mỗi spin được định hướng hoàn toàn hỗn loạn. Khi nhiệt độ đủ thấp tất cả các spin trở nên hướng dọc theo một chiều như nhau (thí dụ, sắt từ). Ta hãy biểu diễn gần đúng nhiệt dung như là một hàm của nhiệt độ  $T$  bởi

$$C(T) = \begin{cases} c_1 \left( \frac{2T}{T_1} - 1 \right) & \text{khi } T_1/2 < T < T_1 \\ 0 & \text{khi ,} \end{cases}$$

trong đó  $T_1$  là một hằng số. Tìm giá trị cực đại của nhiệt dung riêng  $c_1$  (bằng cách xét entropy)

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Từ  $C = T \frac{dS}{dT}$ , ta có

$$S(\infty) - S(0) = \int_0^\infty \frac{C}{T} dT = c_1(1 - \ln 2).$$

Mặt khác, từ định nghĩa của entropy  $S(0) = 0, S(\infty) = Nk \ln 2$ ; do đó

$$c_1 = \frac{Nk \ln 2}{1 - \ln 2}.$$

### 2011

Tính dàn hồi của một dải cao su có thể được mô tả bằng mô hình polymer một chiều bao gồm  $N$  nguyên tử được nối liền thành một dây. Góc giữa các liên kết kế tiếp có thể bằng  $0^\circ$  hoặc  $180^\circ$ .

(a) Chứng tỏ rằng số những cách sắp xếp được thực hiện trên toàn bộ dài  $L = 2md$  được cho bởi

$$g(N, m) = \frac{2N!}{\left(\frac{N}{2} + m\right)! \left(\frac{N}{2} - m\right)!}, \quad \text{với } m \text{ là dương}$$

Hãy nêu rõ lập luận mà bạn dùng để thu được kết quả này.

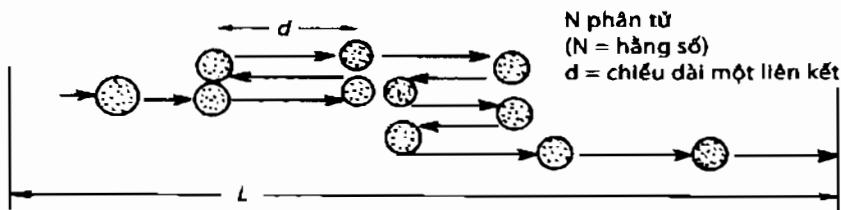
(b) Đối với  $m \ll N$ , biểu thức trên trở thành

$$g(N, m) \approx g(N, 0) \exp(-2m^2/N)$$

Tìm entropy của hệ như là một hàm số của  $L$  khi  $N \gg 1, L \ll Nd$ .

(c) Tìm lực cần có để duy trì độ dài  $L$  khi  $L \ll Nd$ .

(d) Tìm hệ thức giữa lực và độ dài, mà không dùng điều kiện trong câu (c), tức là, đối với mọi giá trị khả dĩ của  $L$ , nhưng  $N \gg 1$ .  
(UC, Berkeley)



Hình 2.3

**Lời giải:**

(a) Giả thiết rằng có  $N_+$  liên kết với góc  $0^\circ$  và  $N_-$  liên kết với góc  $180^\circ$  khi đó

$$N_+ - N_- = 2m, \quad N_+ + N_- = N$$

Do đó

$$N_+ = \frac{N}{2} + m, \quad N_- = \frac{N}{2} - m$$

Điều này tương ứng với  $N!/(N_+!N_-!)$  cách sắp xếp. Chú ý rằng đối với mỗi cách sắp xếp nếu các góc đảo ngược, ta vẫn nhận được độ dài toàn bộ là  $2md$ . Do đó

$$g = \frac{2N!}{\left(\frac{N}{2} + m\right)! \left(\frac{N}{2} - m\right)!}$$

(b) Khi  $m \ll N$ ,  $g(N, m) \approx g(N, 0) \exp(-2m^2/N)$ , entropy của hệ trở thành

$$S = k \ln g(N, m) = k \ln g(N, 0) - \frac{kL^2}{2Nd^2}$$

(c) Từ các hệ thức nhiệt động  $dU = TdS + fdL$  và  $F = U - TS$  ta được  $dF = -SdT + fdL$ . Do đó

$$\left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_L = - \left( \frac{\partial S}{\partial L} \right)_T = \frac{kL}{Nd^2},$$

$$f = \frac{kTL}{Nd^2} + C.$$

Vì  $f = 0$  khi  $L = 0$ , suy ra

$$f = \frac{kTL}{Nd^2}.$$

(d) Xét chỉ một liên kết. Khi dùng ngoại lực  $f$  xác suất để góc là  $0^\circ$  hoặc  $180^\circ$  tương ứng tỷ lệ với  $e^\alpha$  hoặc  $e^{-\alpha}$ , ở đây  $\alpha = fd/kT$ . Do đó độ dài trung bình trên mỗi liên kết là

$$\bar{l} = d \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} = d \tanh \alpha.$$

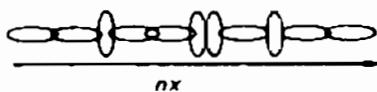
Khi đó độ dài toàn bộ của polymer là

$$L = N\bar{l} = Nd \tanh(fd/kT).$$

## 2012

Xét một chuỗi một chiều bao gồm  $n \gg 1$  mắt xích như được minh họa trên hình 2.4. Gọi độ dài của mỗi mắt xích là  $a$  khi chiều dài của mắt xích song song với chuỗi và bằng 0 khi mắt xích là thẳng đứng (tức là, chiều dài của mắt xích vuông góc với hướng của chuỗi). Mỗi mắt xích chỉ có hai trạng thái, hướng nằm ngang và hướng thẳng đứng, và mỗi trạng thái đó đều là không suy biến. Khoảng cách giữa hai đầu mút của chuỗi là  $nx$ .

- (a) Tìm entropy của chuỗi như là một hàm số của  $x$ .
- (b) Tìm một hệ thức giữa nhiệt độ  $T$  của chuỗi và sức căng  $F$  cần thiết để duy trì khoảng cách  $nx$ , bằng cách đảm bảo cho các mối nối quay tự do.
- (c) Với những điều kiện nào câu trả lời của bạn dẫn tới định luật Hooke? (Princeton)



Hình 2.4

**Lời giải:**

(a) Khi chiều dài của chuỗi là  $nx$ , tức là có  $m = nx/a$  mắt xích song song với chuỗi; do đó tổng các trạng thái vi mô là

$$\Omega = C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Từ đó, ta có

$$\begin{aligned} S &= k \ln \Omega \\ &= k \ln \frac{n!}{\left(\frac{x}{a}n\right)! (n - \frac{x}{a}n)!} \end{aligned}$$

(b) Dưới tác dụng của ứng suất  $F$ , hiệu năng lượng giữa các trạng thái thẳng đứng và song song của mắt xích là  $Fa$ . Chiều dài trung bình của một mắt xích là

$$l = \frac{ae^{Fa/kT}}{1 + e^{Fa/kT}},$$

Sao cho

$$nx = nl = \frac{nae^{Fa/kT}}{1 + e^{Fa/kT}},$$

(c) Khi nhiệt độ cao,

$$L = nx = na \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{Fa}{kT} \right),$$

Đây chính là định luật Hook.

2013

Xét một tinh thể lý tưởng có  $N$  nút mạng và một số lượng tương tự các vị trí trống (đặt giữa các nút mạng đã bị các nguyên tử chiếm chỗ). Gọi  $E$  là

năng lượng cần thiết để di chuyển một nguyên tử từ một nút mạng đến một vị trí trống và gọi  $n$  là số nguyên tử chiếm các vị trí trống khi cân bằng.

- (a) Xác định nội năng của hệ?  
 (b) Xác định entropy  $S$ ? Suy ra công thức tiệm cận dùng được cho trường hợp  $n \gg 1$ ?  
 (c) Khi cân bằng ở nhiệt độ  $T$ , có bao nhiêu các khuyết tật như vậy trong vật rắn, tức là  $n$  bằng bao nhiêu? (Giả thiết  $n \gg 1$ .)

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Gọi  $U_0$  là nội năng khi không có nguyên tử nào chiếm các vị trí trống. Khi  $n$  vị trí trống bị chiếm chỗ, nội năng của hệ là

$$U = U_0 + nE .$$

(b) Có  $C_n^N$  cách lựa chọn  $n$  nguyên tử từ  $N$  nút mạng, và  $C_n^N$  cách đặt chúng vào  $N$  vị trí trống, do đó số trạng thái vi mô là  $\Omega = (C_n^N)^2$ . Do đó

$$S = k \ln \Omega = 2k \ln \frac{N!}{n!(N-n)!} .$$

Khi  $n \gg 1$  và  $(N-n) \gg 1$ , ta có  $\ln(n!) = n \ln n - n$ , do đó

$$S = 2k[N \ln N - n \ln n - (N-n) \ln(N-n)] .$$

(c) Với nhiệt độ và thể tích cố định, năng lượng tự do là cực tiểu khi cân bằng.

Từ  $F = U_0 + nE - TS$  và  $\partial F / \partial n = 0$ , ta có

$$n = \frac{N}{e^{E/2kT} + 1} .$$

## 2. THỐNG KÊ MAXWELL-BOLTZMANN (2014-2062)

2014

(a) Giải thích thống kê Boltzmann, thống kê Fermi và thống kê Bose, đặc biệt là về những khác nhau của chúng. Các thống kê này liên hệ với tính không thể phân biệt được của các hạt đồng nhất như thế nào?

(b) Hãy giải thích về mặt vật lý vì sao sự khác biệt của ba dạng thống kê trên trở nên không quan trọng nữa khi ở giới hạn nhiệt độ cao (nhiệt độ như thế nào là cao)? Không chỉ đơn thuần trích dẫn các công thức.

(c) Trong phạm vi nhiệt độ nào sẽ phải áp dụng thống kê lượng tử cho một tập hợp các neutron được dàn trải trên một mặt phẳng hai chiều với số neutron trên một đơn vị diện tích là  $\sim 10^{12}/\text{cm}^2$ ?

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) *Thống kê Boltzmann.* Đối với một hệ định xứ, các hạt có thể phân biệt được và số hạt chiếm một trạng thái lượng tử đơn không bị hạn chế. Số hạt trung bình chiếm mức năng lượng  $\varepsilon_l$  là

$$a_l = w_l \exp(-\alpha - \beta \varepsilon_l),$$

trong đó  $w_l$  là độ suy biến của mức năng lượng thứ  $l$ .

*Thống kê Fermi.* Đối với một hệ gồm các fermion, các hạt không thể phân biệt được và tuân theo nguyên lý loại trừ Pauli. Số hạt trung bình chiếm mức năng lượng  $\varepsilon_l$  là

$$a_l = \frac{w_l}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_l} + 1}.$$

*Thống kê Bose.* Đối với một hệ hạt gồm các boson, các hạt không thể phân biệt được và số hạt chiếm một trạng thái lượng tử đơn không bị hạn chế. Số hạt trung bình chiếm mức năng lượng  $\varepsilon_l$  là

$$a_l = \frac{w_l}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_l} - 1}.$$

(b) Từ (a) ta thấy rằng khi  $e^\alpha \gg 1$ , hoặc  $\exp(-\alpha) \ll 1$ ,

$$\frac{w_l}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_l} \pm 1} \sim w_l e^{-\alpha - \beta \varepsilon_l},$$

và sự khác biệt của ba loại thống kê trên biến mất.

Từ  $e^{-\alpha} = n \left( \frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2}$ , ( $n$  là mật độ số hạt), ta thấy rằng điều kiện trên được thoả mãn khi  $T \gg \frac{n^{2/3} h^2}{2\pi m k}$ . Do đó sự khác biệt theo ba loại thống kê trên trở nên không quan trọng nữa ở giới hạn nhiệt độ cao.

Điều này cũng có thể hiểu được theo quan điểm vật lý. Khi  $e^\alpha \gg 1$ , ta có  $a_l/w_l \ll 1$ , điều này cho thấy rằng số hạt trung bình trong trạng thái lượng tử bất kì phải nhỏ hơn 1. Lý do là số các trạng thái vì mô săn có cho các hạt là rất

lớn, lớn hơn nhiều so với tổng số hạt. Do vậy xác suất để hai hạt chiếm cùng một trạng thái lượng tử là rất nhỏ và nguyên lý loại trừ Pauli được thoả mãn một cách tự nhiên. Do đó, sự phân biệt giữa thống kê Fermi và thống kê Bose không còn nữa.

(c) Sự cần thiết phải sử dụng các thống kê lượng tử này sinh ra từ hai điểm sau đây. Thứ nhất là tính không thể phân biệt được của các hạt và nguyên lý loại trừ Pauli, vì thế mà  $e^{-\alpha} = n \left( \frac{h^2}{2\pi m k T} \right)$  không phải là rất nhỏ hơn 1 (suy biến). Thứ hai là sự lượng tử hóa các mức năng lượng, tức là  $\Delta E/kT$ , ở đây  $\Delta E$  là khoảng cách giữa các mức năng lượng, không phải là rất nhỏ hơn 1 (gián đoạn).

Đối với hệ nêtron hai chiều,

$$\frac{\Delta E}{kT} = \frac{h^2}{2mkTL^2} .$$

Lấy  $L \approx 1$  cm, ta có  $T \approx 10^{-13}$  K. Do đó các mức năng lượng là gần như liên tục ở nhiệt độ thông thường. Vì vậy sự cần thiết phải sử dụng các thống kê lượng tử thực tế là do điều kiện suy biến mạnh quyết định

$$e^{-\alpha} = n \left( \frac{h^2}{2\pi m k T} \right) \gtrsim 1 .$$

Thay giá trị các đại lượng vào biểu thức trên, ta thấy rằng phải sử dụng các thống kê lượng tử khi  $T \lesssim 10^{-2}$  K.

## 2015

(a) Trình bày những khác biệt căn bản trong các giả thuyết làm cơ sở cho các thống kê Maxwell-Boltzmann (MB) và Fermi-Dirac (FD) .

(b) Vẽ phác đồ thị của hàm phân bố năng lượng ở hai nhiệt độ khác nhau đối với hệ hạt tự do tuân theo thống kê MB và hệ hạt tuân theo thống kê FD . Chỉ ra đường cong nào ứng với nhiệt độ cao hơn.

(c) Giải thích ngắn gọn sự không phù hợp giữa những giá trị thực nghiệm của nhiệt dung riêng của kim loại và tiên đoán của thống kê MB. Thống kê FD có khắc phục khó khăn đó như thế nào?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

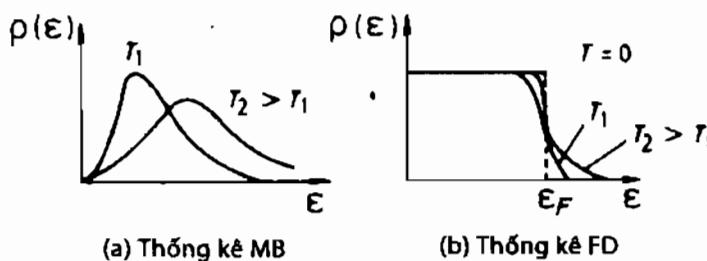
(a) So sánh với MB, thống kê FD có thêm hai giả thiết:

1) Nguyên lý về tính không thể phân biệt: các hạt đồng nhất không thể phân biệt được với nhau.

2) Nguyên lý loại trừ Pauli: không thể có quá một hạt chiếm một trạng thái lượng tử.

Trong giới hạn không suy biến, thống kê FD từ từ trở thành thống kê MB.

(b)  $\rho(\varepsilon)$  cho số hạt trong khoảng đơn vị năng lượng hoặc ở mức năng lượng  $\varepsilon$ . Hình 2.5 cho phác thảo của các phân bố năng lượng ((a) MB, (b) FD).



Hình 2.5

(c) Căn cứ vào thống kê MB (hoặc nguyên lý phân bố đều năng lượng), đóng góp của một electron vào nhiệt dung riêng của kim loại sẽ là 1,5 K. Điều này không được thực nghiệm xác nhận, nó chỉ ra rằng đóng góp của các electron trong kim loại vào nhiệt dung riêng thường có thể bỏ qua trừ trường hợp ở những nhiệt độ rất thấp. Ở những nhiệt độ thấp đóng góp của các electron vào nhiệt dung riêng tỉ lệ với nhiệt độ T. Thống kê FD kết hợp với nguyên lý loại trừ Pauli có thể giải thích kết quả này.

2016

Nói rõ thống kê nào (Maxwell-Boltzmann cổ điển, Fermi-Dirac hay Bose-Einstein) là thích hợp trong những bài toán sau và giải thích vì sao (bán định lượng):

- (a) Mật độ của khí He<sup>4</sup> ở nhiệt độ và áp suất phòng.
- (b) Mật độ của các electron trong đồng ở nhiệt độ phòng.
- (c) Mật độ của các electron và lỗ trống trong bán dẫn Ge ở nhiệt độ phòng (khe năng lượng của  $\approx 1$  eV).

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Thống kê Maxwell-Boltzmann cở điển là thích hợp vì

$$n\lambda^3 = \frac{p}{kT} \cdot \left( \frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2} \approx 3 \times 10^{-6} \ll 1.$$

(b) Thống kê Fermi-Dirac là thích hợp vì các electron là các fermion và năng lượng Fermi của khí electron trong đồng khoảng 1 eV tương đương với nhiệt độ cao  $10^4$  K. Ở nhiệt độ phòng (nhiệt độ thấp), khí electron suy biến mạnh.

(c) Thống kê Maxwell-Boltzmann cở điển là thích hợp vì ở nhiệt độ phòng các electron và các lỗ trống không có đủ năng lượng trung bình để vượt qua khe năng lượng 1 eV với số lượng đáng kể.

### 2017

Chứng tỏ rằng công thức  $\lambda = \exp(\mu/kT) = nV_Q$  đối với một khí lý tưởng chỉ đúng khi  $\lambda \ll 1$ ; ở đây  $\mu$  là thế hoá học,  $n$  là mật độ khí và

$$V_Q = (h^2/2\pi mkT)^{3/2}$$

là thể tích lượng tử. Thậm chí nếu bạn không thể chứng minh được điều đó, kết quả này cũng sẽ có ích trong những bài toán khác.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Khi  $\lambda \ll 1$ , hai thống kê Fermi-Dirac và Bose-Einstein qui về thống kê Maxwell-Boltzmann

$$\frac{1}{\exp(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}) \pm 1} \rightarrow e^{\mu/kT} \cdot e^{-\varepsilon/kT}.$$

Mật độ trạng thái của một khí lý tưởng (bỏ qua các trạng thái spin) là

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon.$$

Do đó

$$n = \int_0^\infty D(\varepsilon)d\varepsilon \cdot e^{\mu/kT} e^{-\varepsilon/kT} = \lambda \cdot \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} = \frac{\lambda}{V_Q}.$$

Tức là,  $\lambda = nV_Q$ .

### 2018

Một hạt bụi dài mảnh (tức là hình kim) lơ lửng trong một cái hộp chứa đầy khí ở nhiệt độ không đổi  $T$ . Về trung bình, vectơ momen xung lượng gần như song song hay vuông góc với trục dài của hạt? Giải thích.

(MIT)

**Lời giải:**

Đặt trục dài của hạt trùng với trục  $z$ . Hình dạng của hạt chỉ ra rằng các momen quán tính chính thoả mãn  $I_z < I_x, I_y$ . Khi đạt được cân bằng nhiệt, ta có

$$\frac{1}{2}I_z\omega_z^2 = \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 = \frac{1}{2}I_y\omega_y^2,$$

sao cho  $|\omega_z| = \left(\frac{I_x}{I_z}\right)^{1/2} |\omega_x| = \left(\frac{I_y}{I_z}\right)^{1/2} |\omega_y|$ . Do đó

$$|I_z\omega_z| = \sqrt{I_z/I_x}|I_x\omega_x| < |I_x\omega_x|.$$

tương tự

$$|I_z\omega_z| < |I_y\omega_y|.$$

Vậy vectơ momen xung lượng gần như vuông góc với trục dài của hạt.

### 2019

Một bình có dạng hình lập phương với cạnh dài 20 cm chứa khí lưỡng nguyên tử  $H_2$  ở nhiệt độ. Mỗi phân tử  $H_2$  gồm hai nguyên tử hidrô với khối lượng mỗi nguyên tử là  $1,66 \times 10^{-24}$  g và cách nhau khoảng  $\sim 10^{-8}$  cm. Giả thiết rằng chất khí ở đây được coi như là khí lý tưởng. Bỏ qua bậc tự do dao động.

- (a) Tính vận tốc trung bình của phân tử?
- (b) Tính vận tốc quay trung bình của phân tử xung quanh một trục vuông góc với đường trung trực của đường nối hai nguyên tử (xem mỗi nguyên tử như là một chất điểm)?
- (c) Suy ra giá trị mong đợi của nhiệt dung phân tử  $C_p$  và  $C_v$  đối với chất khí đó.

(Columbia)

**Lời giải:**

- (a) Số bậc tự do tịnh tiến là 3. Vậy ta có

$$\cdot \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}M\overline{v^2},$$

do đó  $\bar{v} \approx \sqrt{\bar{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{M}} \approx 2 \times 10^3$  m/s.

(b) Số bậc tự do quay là 2. Vì thế

$$\frac{1}{2}I\bar{\omega^2} = \frac{2}{2}kT ,$$

trong đó  $I = m \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{1}{2}mr^2$  là momen quán tính của phân tử H<sub>2</sub>, m là khối lượng của nguyên tử H và r là khoảng cách giữa hai nguyên tử hiđrô. Vì vậy ta tính được

$$\sqrt{\bar{\omega^2}} \approx 3,2 \times 10^{13}/s .$$

(c) Nhiệt dung phân tử tương ứng là

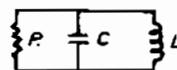
$$C_v = \frac{5}{2}R = 21 \text{ J/mol} \cdot \text{K} ,$$

$$C_p = \frac{7}{2}R = 29 \text{ J/mol} \cdot \text{K} .$$

## 2020

Mạch điện trên hình 2.6. cân bằng nhiệt với xung quanh ở nhiệt độ T. Tìm biểu thức cổ điển đối với cường độ hiệu dụng của dòng điện hiệu dụng qua cuộn cảm.

(MIT)



Hình 2.6

**Lời giải:**

Những thăng giáng trong chuyển động của các electron trong dây dẫn làm tăng thêm những dòng thăng giáng. Nếu dòng qua cuộn cảm là  $I(t)$ , khi đó năng lượng trung bình của cuộn cảm là  $\bar{W} = \frac{L}{2}\bar{I^2}$ , ở đây  $\bar{I^2}$  là dòng bình phương trung bình. Theo nguyên lý phân bố đều của năng lượng, ta có  $\bar{W} = \frac{1}{2}kT$ . Do đó

$$\sqrt{\bar{I^2}} = \sqrt{\frac{kT}{L}} .$$

## 2021

Xác suất năng lượng.

Tìm mật độ xác suất  $\rho(E)$ , đối với năng lượng  $E$  của một nguyên tử trong một chất khí cổ điển đơn nguyên tử không tương tác ở cân bằng nhiệt. Vẽ phác đồ thị của mật độ xác suất đó.

(MIT)

Lời giải:

Khi số nguyên tử khí rất lớn, ta có thể biểu diễn những trạng thái của hệ bằng một phân bố liên tục. Khi hệ đạt được cân bằng nhiệt, xác suất để một nguyên tử có năng lượng  $E$  tỉ lệ với  $\exp(-E/kT)$ , ở đây  $E = p^2/2m$ ,  $p$  là xung lượng của nguyên tử. Do đó xác suất để một nguyên tử có xung lượng nằm giữa  $p$  và  $p + dp$  là

$$A \exp(-p^2/2mkT) d^3\mathbf{p} .$$

Từ

$$A \int \exp(-p^2/2mkT) d^3\mathbf{p} = 1 ,$$

ta nhận được

$$A = (2\pi mkT)^{-3/2} .$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \int A e^{-p^2/2mkT} d^3\mathbf{p} &= \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} \int_0^\infty E^{1/2} e^{-E/kT} dE \\ &\equiv \int_0^\infty \rho(E) dE , \end{aligned}$$

Suy ra

$$\rho(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^{3/2}}} E^{1/2} e^{-E/kT} .$$

## 2022

Giả thiết rằng năng lượng của một hạt có thể biểu diễn bằng biểu thức  $E(z) = az^2$  ở đây  $z$  là một tọa độ hoặc xung lượng và có thể nhận mọi giá trị từ  $-\infty$  đến  $+\infty$ .

(a) Chứng tỏ rằng năng lượng trung bình mỗi hạt đối với một hệ gồm các hạt như trên tuân theo thống kê Boltzmann sẽ là  $\bar{E} = kT/2$ .

(b) Phát biểu nguyên lý phân bố đều năng lượng và thảo luận ngắn gọn về mối quan hệ của nó với các tính toán trên.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Theo thống kê Boltzmann, dù cho  $z$  là vị trí hoặc xung lượng, hàm phân bố của nó là

$$f(z) \propto \exp\left(-\frac{E(z)}{kT}\right).$$

Do đó năng lượng trung bình của một hạt là

$$\bar{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)E(z)dz = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{E(z)}{kT}\right) E(z)dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{E(z)}{kT}\right) dz}.$$

Đặt  $E(z) = az^2$  vào, ta thu được  $\bar{E} = \frac{1}{2}kT$ .

(b) Nguyên lý phân bố đều năng lượng: Đối với một hệ hạt cổ điển cân bằng nhiệt ở nhiệt độ  $T$ , năng lượng trung bình của mỗi bậc tự do của một hạt bằng  $\frac{1}{2}kT$ .

Trong bài toán này chỉ có một bậc tự do, do vậy năng lượng trung bình là  $\frac{1}{2}kT$ .

### 2023

Một hệ có hai mức năng lượng  $E_0$  và  $E_1$  gồm  $N$  hạt ở nhiệt độ  $T$ . Các hạt chiếm các mức năng lượng theo định luật phân bố cổ điển.

- (a) Tìm biểu thức đối với năng lượng trung bình tính trên mỗi hạt.
- (b) Tính năng lượng trung bình tính trên mỗi hạt theo nhiệt độ khi  $T \rightarrow 0$  và  $T \rightarrow \infty$ .
- (c) Tìm biểu thức đối với nhiệt dung riêng của hệ gồm  $N$  hạt.
- (d) Tính nhiệt dung riêng tại những giới hạn  $T \rightarrow 0$  và  $T \rightarrow \infty$ .

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Năng lượng trung bình của một hạt là

$$u = \frac{E_0 e^{-\beta E_0} + E_1 e^{-\beta E_1}}{e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_1}}.$$

Giả thiết  $E_1 > E_0 > 0$  và đặt  $\Delta E = E_1 - E_0$ , ta có

$$u = \frac{E_0 + E_1 e^{-\beta \Delta E}}{1 + e^{-\beta \Delta E}}.$$

(b) Khi  $T \rightarrow 0$ , tức là,  $\beta = 1/kT \rightarrow \infty$ , ta có

$$u \approx (E_0 + E_1 e^{-\beta \Delta E})(1 - e^{-\beta \Delta E}) = E_0 + \Delta E e^{-\beta \Delta E}.$$

Khi  $T \rightarrow \infty$ , hoặc  $\beta \rightarrow 0$ , ta có

$$u \approx \frac{1}{2}(E_0 + E_1 - \beta E_1 \Delta E) \left(1 + \frac{1}{2}\beta \Delta E\right) \approx \frac{1}{2}(E_0 + E_1) - \frac{\beta}{4}(\Delta E)^2.$$

(c) Nhiệt dung riêng (mỗi mol) là

$$C = N_A \frac{\partial u}{\partial T} = N_A \frac{\partial u}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial T} = R \left( \frac{\Delta E}{kT} \right)^2 \frac{e^{-\Delta E/kT}}{(1 + e^{-\Delta E/kT})^2}.$$

(d) Khi  $T \rightarrow 0$ , ta có

$$C \approx R \cdot \left( \frac{\Delta E}{kT} \right)^2 \cdot e^{-\Delta E/kT}.$$

Khi  $T \rightarrow \infty$ ,

$$C \approx \frac{R}{4} \cdot \left( \frac{\Delta E}{kT} \right)^2.$$

## 2024

Xét một khối thủy tinh trong đó một phần của nó gồm những nguyên tử có thể chiếm một trong hai vị trí hơi khác nhau làm xuất hiện hai mức năng lượng  $\Delta_i > 0$  và  $-\Delta_i$ , đối với nguyên tử thứ  $i$ .

(a) Nếu mỗi nguyên tử tham gia có những mức  $\Delta$  và  $-\Delta$  như nhau, hãy tính đóng góp của những nguyên tử này vào nhiệt dung. (Bỏ qua nhiệt dung riêng Debye thông thường vốn có mặt trong một vật rắn thực.)

(b) Nếu thủy tinh đó có một cấu tạo ngẫu nhiên với những nguyên tử sao cho tất cả các giá trị của  $\Delta$ , đường như bằng nhau cho đến một giới hạn  $\Delta_0 > 0$  nào đó, hãy xác định dáng điệu của nhiệt dung ở nhiệt độ thấp, tức là,

$kT \ll \Delta_0$ . (Không cần phải tính các tích phân xác định với điều kiện là chúng không được phụ thuộc vào bất kì tham số nào).

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Năng lượng trung bình mỗi nguyên tử là  $\bar{\varepsilon} = -\Delta \tanh(\frac{\Delta}{kT})$ . Đóng góp của nó vào nhiệt dung là

$$c_v = \frac{d\bar{\varepsilon}}{dT} = 4k \left( \frac{\Delta}{kT} \right)^2 \frac{1}{(e^{\Delta/kT} + e^{-\Delta/kT})^2}.$$

Tổng các số hạng đó đối với tất cả các nguyên tử như vậy, ta có

$$c_v = 4Nk \left( \frac{\Delta}{kT} \right)^2 \cdot \frac{1}{(e^{\Delta/kT} + e^{-\Delta/kT})^2}.$$

(b) Đóng góp vào nhiệt dung riêng của nguyên tử thứ  $i$  là

$$c_i = 4k \left( \frac{\Delta_i}{kT} \right)^2 \frac{1}{(e^{\Delta_i/kT} + e^{-\Delta_i/kT})^2}.$$

Khi  $kT \ll \Delta_i$ , ta có

$$c_i = 4k \left( \frac{\Delta_i}{kT} \right)^2 e^{-2\Delta_i/kT}.$$

Lấy tổng các số hạng đó đối với các nguyên tử như vậy, ta có

$$\begin{aligned} c &= 4k \sum_i \left( \frac{\Delta_i}{kT} \right)^2 e^{-2\Delta_i/kT} \\ &= 4k \int \left( \frac{\Delta}{kT} \right)^2 e^{-2\Delta/kT} \rho(\Delta) d\Delta, \end{aligned}$$

trong đó  $\rho(\Delta)$  là mật độ trạng thái của phân bố  $\Delta_i$ .

## 2025

Ba mức năng lượng thấp nhất của một phân tử nào đó là  $E_1 = 0, E_2 = \varepsilon, E_3 = 10\varepsilon$ . Chúng tỏ rằng ở nhiệt độ đủ thấp (thấp như thế nào?) chỉ có các mức  $E_1, E_2$  là bị chiếm chỗ. Tìm năng lượng trung bình  $E$  của phân tử ở nhiệt độ  $T$ . Xác định đóng góp của các mức này vào nhiệt dung phân tử,  $C_v$ , và vẽ

phác đồ thị của  $C_v$  như là một hàm số của  $T$ .

(Wisconsin)

### Lời giải:

Chúng ta không cần xét các mức năng lượng cao hơn ba mức năng lượng thấp nhất đối với nhiệt độ thấp. Giả sử hệ có  $N$  hạt và theo thống kê Boltzmann, ta có

$$N_1 + N_2 + N_3 = N ,$$

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\varepsilon/kT} .$$

$$\frac{N_3}{N_1} = e^{-10\varepsilon/kT} .$$

Suy ra

$$N_3 = \frac{N}{1 + e^{9\varepsilon/kT} + e^{10\varepsilon/kT}} .$$

Khi  $N_3 < 1$ , mức năng lượng  $E_3$  không bị chiếm. Điều đó có nghĩa là, khi  $T < T_c$ , chỉ có các mức  $E_1$  và  $E_2$  là bị chiếm, trong đó  $T_c$  thoả mãn

$$\frac{N}{1 + e^{9\varepsilon/kT_c} + e^{10\varepsilon/kT_c}} = 1 .$$

Nếu  $N \gg 1$ , ta có

$$T_c \approx \frac{10\varepsilon}{k \ln N} .$$

Năng lượng trung bình của phân tử là

$$E = \frac{\varepsilon(e^{-\varepsilon/kT} + 10e^{-10\varepsilon/kT})}{1 + e^{-\varepsilon/kT} + e^{-10\varepsilon/kT}} .$$

Nhiệt dung phân tử (trên mol) là

$$C_v = N_A \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{R\varepsilon^2(e^{-\beta\varepsilon} + 100e^{-10\beta\varepsilon} + 81e^{-11\beta\varepsilon})}{(1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-10\beta\varepsilon})^2} \beta^2 ,$$

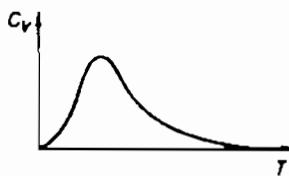
trong đó  $\beta = 1/kT$  và  $N_A$  là số Avogadro.

Tại nhiệt độ cao,  $kT \gg \varepsilon$ ,

$$C_v \approx \frac{182}{9} R \left( \frac{\varepsilon}{kT} \right)^2 \propto \frac{1}{T^2} .$$

Tại nhiệt độ thấp,  $kT \ll \varepsilon$ ,

$$C_v \approx R\varepsilon^2 \frac{e^{-\varepsilon/kT}}{(kT)^2} .$$



Hình 2.7

Sự biến thiên của  $C_v$  theo  $T$  được biểu diễn trên hình 2.7.

### 2026

Cho một hệ gồm hai nút mạng phân biệt, mỗi nút bị chiếm bởi một nguyên tử có spin ( $s = 1$ ) được định hướng sao cho năng lượng của nó nhận một trong ba giá trị  $\varepsilon = 1, 0, -1$  với xác suất bằng nhau. Các nguyên tử không tương tác với nhau. Tính giá trị trung bình theo tập hợp  $\bar{U}$  và  $\bar{U}^2$  đối với năng lượng  $U$  của hệ được giả thiết là chỉ phụ thuộc spin.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Đối với một nguyên tử riêng lẻ, ta có

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{1 + e^\beta + e^{-\beta}},$$

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{1 + e^\beta + e^{-\beta}}.$$

Đối với hệ, ta có

$$\bar{U} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 = -2\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{1 + e^\beta + e^{-\beta}},$$

$$\bar{U}^2 = (\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2)^2 = \bar{\varepsilon}_1^2 + \bar{\varepsilon}_2^2 + 2\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2.$$

Vì  $\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_1 \cdot \bar{\varepsilon}_2$ , suy ra

$$\bar{U}^2 = \frac{2[\exp(2\beta) + \exp(-2\beta)] + \exp(\beta) + \exp(-\beta)}{[1 + \exp(\beta) + \exp(-\beta)]^2}.$$

2027

Tìm nhiệt độ của mỗi hệ sau:

(a)  $6,0 \times 10^{22}$  nguyên tử khí hêli chiếm 2,0 lít ở áp suất khí quyển. Xác định nhiệt độ của khí.

(b) Một hệ hạt chiếm những mức một hạt và tuân theo thông kê Maxwell-Boltzmann tiếp xúc nhiệt với một bình điều nhiệt ở nhiệt độ  $T$ . Xác định nhiệt độ của hệ, nếu phân bố các hạt theo các mức năng lượng không suy biến như sau

Năng lượng (eV)	Độ cư trú
$30,1 \times 10^{-3}$	3,1%
$21,5 \times 10^{-3}$	8,5%
$12,9 \times 10^{-3}$	23%
$4,3 \times 10^{-3}$	63%

(c) Trong một thí nghiệm làm đông lạnh, nhiệt được cung cấp cho một vật mẫu với tốc độ không đổi 0,01W. Entropy của vật mẫu tăng theo thời gian được chỉ ra trong bảng. Nhiệt độ của vật mẫu ở thời điểm  $t = 500$  s là bao nhiêu?

Thời gian:	100	200	300	400	500	600	700	(s)
Entropy:	2,30	2,65	2,85	3,00	3,11	3,20	3,28	(J/K)

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Dùng phương trình trạng thái đối với khí lý tưởng, ta có

$$T = pV/nk = 241 \text{ K} .$$

(b) Phân bố các hạt cho bởi

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp((\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/kT) .$$

Do đó

$$T = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{k} \frac{1}{\ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right)} .$$

Sử dụng  $n_1$  và  $n_2$  đã cho, ta nhận được các giá trị của  $T$  như sau:

$$99,2; 99,5; 99,0; 99,5; 100,2; 98,8 \text{ K} .$$

Giá trị trung bình là  $T = 99,4 \text{ K}$ .

(c) Tốc độ cung cấp nhiệt là  $q = \frac{dQ}{dt} = T \frac{dS}{dt}$ , dẫn tới

$$T = \frac{q}{\left(\frac{dS}{dt}\right)}.$$

Ta sẽ ước lượng  $\frac{dS}{dt}$  bằng sai phân trung bình tại  $t = 500s$ , và có được

$$\frac{dS}{dt} = \left( \frac{3,20 - 3,00}{600 - 400} \right) = 1,0 \times 10^{-3} \text{ J/sec.K}.$$

Do đó  $T = 10 \text{ K}$ .

## 2028

Giả thiết rằng phản ứng  $H \rightleftharpoons p + e$  xảy ra ở trạng thái cân bằng nhiệt ở nhiệt độ  $T = 4000 \text{ K}$  trong một chất khí có mật độ rất thấp (không suy biến) của mỗi loại với tổng diện tích bằng 0.

(a) Hãy viết thể hoá học của mỗi loại khí qua mật độ số hạt  $[H]$ ,  $[p]$ , hoặc  $[e]$  của chúng. Để đơn giản có thể bỏ qua phổ các trạng thái liên kết thích hợp của  $H$  và chỉ xét trạng thái cơ bản. Hãy biện minh cho giả thiết này.

(b) Dẫn ra điều kiện cân bằng nhiệt và tính giá trị cân bằng của  $[e]$  như là một hàm của  $[H]$  và  $T$ .

(c) Dánh giá mật độ nucleon mà đối với nó một nửa chất khí bị ion hoá ở nhiệt độ  $T = 4000 \text{ K}$ . (Lưu ý rằng đây là bức tranh gần đúng về vũ trụ vào lúc độ dịch chuyển về phía đỏ  $z = 10^3$ .)

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Theo thống kê Boltzmann, đối với chất khí lý tưởng không có spin

$$n = e^{\mu/kT} \cdot (2\pi m k T / h^2)^{3/2}.$$

Cả proton và electron đều có spin, do đó

$$[p] = 2(2\pi m_p k T / h^2)^{3/2} e^{\mu_p/kT}$$

$$[e] = 2(2\pi m_e k T / h^2)^{3/2} e^{\mu_e/kT}.$$

Đối với nguyên tử hiđrô, p và e có thể tạo thành bốn cấu hình spin với năng lượng ion hoá  $E_d$ . Do đó

$$[H] = 4(2\pi m_H k T / h^2)^{3/2} \exp(E_d/kT) \exp(\mu_H/kT).$$

Các thế hoá học  $\mu_p$ ,  $\mu_e$  và  $\mu_H$  cho bởi những hệ thức trên với các mật độ số hạt.

(b) Điều kiện cân bằng là  $\mu_H = \mu_e + \mu_p$ . Chú ý rằng vì  $m_H \approx m_p$  và  $[e] = [p]$  ta có

$$[e] = \sqrt{[H]} \cdot (2\pi m_e k T / h^2)^{3/2} \cdot \exp(-E_d / 2kT).$$

(c) Khi một nửa chất khí bị ion hoá,  $[e] = [p] = [H] = n$ . Khi đó

$$n = (2\pi m_e k T / h^2)^{3/2} \cdot \exp(-E_d / kT) = 3,3 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}.$$

## 2029

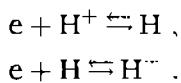
Một mẫu kim loại có thể được xem như một bình chứa các electron; công thoát electron (năng lượng cần thiết để bứt một electron ra khỏi kim loại) là 4 eV. Chỉ xét quỹ đạo thứ nhất (mà nó có thể không có, có một hoặc hai electron chiếm chỗ) và biết rằng nguyên tử hidrô có năng lượng ion hoá là 13,6 eV và một ái lực electron là 0,6 eV, hãy xác định các xác suất tìm thấy  $T = 300 \text{ K}$  ở lân cận một kim loại đối với nguyên tử hidrô trong cân bằng hóa học ở  $H^+$ ,  $H^0$  và  $H^-$ . Chỉ lấy tới một chữ số có nghĩa.

Giá trị nào của công thoát electron có thể dẫn đến xác suất tìm  $H^0$  và  $H^-$  là như nhau?

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

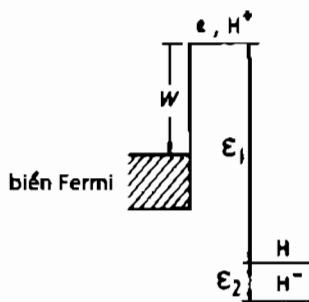
Ta có (xem h. 2.8)



Thế hoá học của khí electron là  $\mu_e = -W$ . Từ thống kê cổ điển, ta dễ dàng nhận được

$$[e] = 2e^{\mu_e / kT} \left( \frac{2\pi m_e k T}{h^2} \right)^{3/2},$$

$$[H^+] = 2e^{\mu_{H^+} / kT} \left( \frac{2\pi m_p k T}{h^2} \right)^{3/2},$$



Hình 2.8

ở đây thừa số 2 xuất hiện do bậc tự do nội tại spin. Đối với nguyên tử hiđrô, các spin của electron và proton có thể có bốn trạng thái spin khả dĩ, vì vậy

$$[H^0] = 4e^{\mu_{H^0}/kT} \left( \frac{2\pi m_p kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{\varepsilon_1/kT}.$$

Đối với  $H^-$ , cả hai electron đều ở trạng thái cơ bản với spin toàn phần bằng 0 (mức đơn tuyển), vì hàm sóng không gian là đối xứng khi các hạt trao đổi lẫn nhau. Do đó, bậc tự do spin của  $H^-$  chỉ tương ứng với hai trạng thái spin của nucleon; vì vậy

$$[H^-] = 2e^{\mu_{H^-}/kT} \left( \frac{2\pi m_p kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left( \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{kT} \right).$$

Các điều kiện để cân bằng hóa học là

$$\mu_{H^0} = \mu_e + \mu_{H^+},$$

$$\mu_{H^-} = \mu_e + \mu_{H^0},$$

do đó

$$\frac{[H^0]}{[H^+]} = 2 \exp \frac{\mu_e + \varepsilon_1}{kT},$$

$$\frac{[H^-]}{[H^0]} = \frac{1}{2} \exp \frac{\mu_e + \varepsilon_2}{kT}.$$

Vậy, xác suất tỉ đối để tìm thấy  $H^+$ ,  $H^0$  và  $H^-$  là

$$P_{H^+} : P_{H^0} : P_{H^-} = [H^+] : [H^0] : [H^-] = 1 : 2 \exp \frac{\mu_e + \varepsilon_1}{kT} :$$

$$\exp \frac{2\mu_e + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{kT} = 1 : 2e^{371} : e^{240}.$$

Nếu  $P_H = P_{H^-}$ , hoặc  $[H^0] = [H^-]$ , ta có

$$W = -\mu_e = -\varepsilon_2 + kT \ln 2 \approx 0,6 \text{ eV}.$$

### 2030

Thê năng  $V$  giữa hai nguyên tử ( $m_H = 1,672 \times 10^{-24} \text{ g}$ ) trong một phân tử hiđrô được cho bởi biểu thức thực nghiệm

$$V = D \{e^{-2a(r-r_0)} - 2e^{-a(r-r_0)}\},$$

trong đó  $r$  là khoảng cách giữa các nguyên tử. Cho

$$D = 7 \times 10^{-12} \text{ erg},$$

$$a = 2 \times 10^8 \text{ cm}^{-1},$$

$$r_0 = 8 \times 10^{-9} \text{ cm}.$$

Xác định nhiệt độ mà ở đó chuyển động quay ( $T_R$ ) và dao động ( $T_V$ ) bắt đầu đóng góp vào nhiệt dung riêng của khí hiđrô. Tính các giá trị gần đúng của  $C_v$  và  $C_p$  (nhiệt dung riêng mol đẳng tích và đẳng áp) đối với các nhiệt độ sau:

$$T_1 = 25 \text{ K}, \quad T_2 = 250 \text{ K}, \quad T_3 = 2500 \text{ K}, \quad T_4 = 10000 \text{ K}.$$

Bỏ qua sự ion hoá và sự phân ly.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Khoảng cách trung bình giữa hai nguyên tử gần đúng là khoảng cách cân bằng. Từ

$$\left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=d} = 0,$$

ta nhận được  $d = r_0$ . Tần số dao động xuyên tâm của hai nguyên tử là

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}},$$

trong đó  $\mu = m_H/2$  là khối lượng rút gọn và

$$k = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \Big|_{r=d} = 2a^2 D.$$

Do đó,

$$\omega = \sqrt{\frac{4a^2 D}{m}} .$$

Năng lượng đặc trưng của mức độ chuyển động quay là

$$k\theta_R = \frac{\hbar^2}{2\mu d^2} ,$$

Khi đó

$$\theta_R = \frac{\hbar^2}{km_H r_0^2} = 75 \text{ K} .$$

Năng lượng đặc trưng của dao động là  $k\theta_V = \hbar\omega$ , do đó

$$\theta_V = \frac{\hbar\omega}{k} = \frac{2a\hbar}{k} \sqrt{\frac{D}{m_H}} = 6250 \text{ K} .$$

Vậy, chuyển động quay bắt đầu đóng góp vào nhiệt dung riêng ở  $T = 75 \text{ K}$ , và dao động ở  $T = 6250 \text{ K}$ .

Khi  $T_1 = 25 \text{ K}$ , chỉ có chuyển động tịnh tiến đóng góp vào  $C$ , do đó

$$C_v = \frac{3}{2}R = 12,5 \text{ J/K}, \quad C_p = \frac{5}{2}R = 20,8 \text{ J/K} .$$

Khi  $T_2 = 250 \text{ K}$ , chỉ có chuyển động tịnh tiến và quay đóng góp vào  $C$ , do đó

$$C_v = \frac{5}{2}R = 20,8 \text{ J/K}, \quad C_p = \frac{7}{2}R = 29,1 \text{ J/K} .$$

Khi  $T_3 = 2500 \text{ K}$ , các kết quả giống như khi  $T_2 = 250 \text{ K}$ .

Khi  $T_4 = 10000 \text{ K}$ , dao động cũng đóng góp vào  $C$ , do đó

$$C_v = \frac{7}{2}R = 29,1 \text{ J/K}, \quad C_p = \frac{9}{2}R = 37,4 \text{ J/K} .$$

### 2031

Rút ra biểu thức tính nhiệt dung riêng do dao động của một chất khí lưỡng nguyên tử như là một hàm số của nhiệt độ. (Đặt  $\hbar\omega_0/k = \theta$ .) Xuất phát từ biểu thức cho hàm phân bố dao động, đánh giá nó và dùng kết quả đó để tính  $C_{vib}$ .

Mô tả các giới hạn của  $T$  ở nhiệt độ  $C_{\text{vib}}$  cao và thấp.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Các mức năng lượng dao động của khí lưỡng nguyên tử là

$$\varepsilon_v = \hbar\omega_0(v + 1/2), \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

Hàm phân bố là

$$Z_{\text{vib}} = \sum_{v=0}^{\infty} \exp \left[ -\beta \hbar \omega_0 \left( v + \frac{1}{2} \right) \right] = \left( \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{1 - e^{-x}} \right),$$

trong đó  $x = \beta \hbar \omega_0$ . Năng lượng tự do của 1 mol khí là

$$F = -N_A k T \ln Z_{\text{vib}} = \frac{N_A}{2} \hbar \omega_0 + \frac{N_A}{\beta} \ln [1 - \exp(-\beta \hbar \omega_0)],$$

và nội năng của nó là

$$U = F - T \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{N_A}{2} \hbar \omega_0 + \frac{N_A \hbar \omega_0}{\exp(\beta \hbar \omega_0) - 1}.$$

Nhiệt dung riêng mol là

$$C_v = \frac{dU}{dT} = R \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}, \quad x = \frac{\hbar \omega_0}{kT} = \frac{\theta}{T}.$$

(a) Tại giới hạn của nhiệt độ cao,  $T \gg \theta$ , hoặc  $x \ll 1$ , ta có

$$C_v \approx R.$$

(b) Tại giới hạn của nhiệt độ thấp,  $T \ll \theta$ , hoặc  $x \gg 1$ , ta có

$$C_v \approx R(\theta/T)^2 \exp(-\theta/T).$$

**2032**

Một dao động tử điều hoà lượng tử một chiều (mà năng lượng trạng thái cơ bản là  $\hbar\omega/2$ ) ở trong trạng thái cân bằng nhiệt với một bình điều nhiệt tại nhiệt độ  $T$ .

- (a) Xác định giá trị năng lượng trung bình của dao động tử,  $\langle E \rangle$ , xem như là một hàm của  $T$ ?
- (b) Xác định giá trị của  $\Delta E$ , tức độ lệch căn quan phương về năng lượng xung quanh giá trị  $\langle E \rangle$ ?
- (c) Dáng điệu của  $\langle E \rangle$  và  $\Delta E$  như thế nào tại các giới hạn  $kT \ll \hbar\omega$  và  $kT \gg \hbar\omega$ .

(MIT)

**Lời giải:**

Hàm phân bố là

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{-E_n}{kT}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\hbar\omega}{kT}\right] = \frac{2}{\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)}.$$

- (a) Năng lượng trung bình là

$$\langle E \rangle = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln z = \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right).$$

- (b) Độ lệch căn quan phương là

$$\Delta E = T \sqrt{k \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}} = \frac{\hbar\omega}{2 \sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)}.$$

- (c) Khi  $kT \ll \hbar\omega$ ,

$$\langle E \rangle \rightarrow \frac{\hbar\omega}{2}, \quad \Delta E \rightarrow \hbar\omega \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2kT}\right).$$

Khi  $kT \gg \hbar\omega$ ,

$$\langle E \rangle \rightarrow kT, \quad \Delta E \rightarrow kT.$$

## 2033

Xét một hệ gồm  $N_0$  dao động tử lượng tử không tương tác trong trạng thái cân bằng ở nhiệt độ  $T$ . Các mức năng lượng của một dao động tử riêng rẽ là

$$E_m = (m + 1/2)\gamma/V \quad \text{với } m = 0, 1, 2, \dots$$

( $\gamma$  là một hằng số, các dao động tử và thể tích  $V$  là một chiều).

- (a) Tìm  $U$  và  $C_v$  như là một hàm của  $T$ .
- (b) Vẽ phác đồ thị  $U(T)$  và  $C_v(T)$ .
- (c) Xác định phương trình trạng thái của hệ.
- (d) Tỷ phần các hạt ở mức năng lượng thứ  $m$  là bao nhiêu?

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

- (a) Hàm phân bố là

$$\begin{aligned} z &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta(m+1/2)\gamma V^{-1}} = \frac{e^{-\beta\gamma/2V}}{1 - e^{-\beta\gamma V^{-1}}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{csch} \frac{\gamma\beta}{2V}. \end{aligned}$$

Nội năng của hệ là

$$\begin{aligned} U &= -N_0 \frac{\partial}{\partial \beta} \ln z = \frac{N_0 \gamma}{2V} \coth \frac{\gamma\beta}{2V} \\ &= \frac{N_0 \gamma}{2V} \coth \frac{\gamma}{2V kT}. \end{aligned}$$

Nhiệt dung riêng đẳng tích là

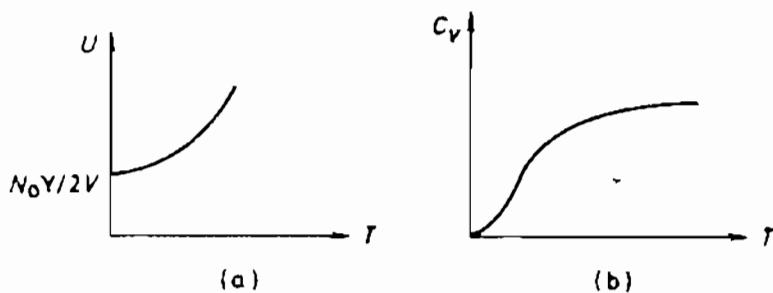
$$c_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = N_0 k \left( \frac{\gamma}{2V kT} \right)^2 \operatorname{csch}^2 \left( \frac{\gamma}{2V kT} \right).$$

- (b) Đồ thị biểu diễn trên hình 2.9.

- (c) Phương trình trạng thái là

$$p = \frac{N_0}{\beta} - \frac{\partial}{\partial V} \ln z = \frac{N_0 \gamma}{2V^2} \coth \left( \frac{\gamma}{2V kT} \right),$$

trong đó  $p$  là áp suất.



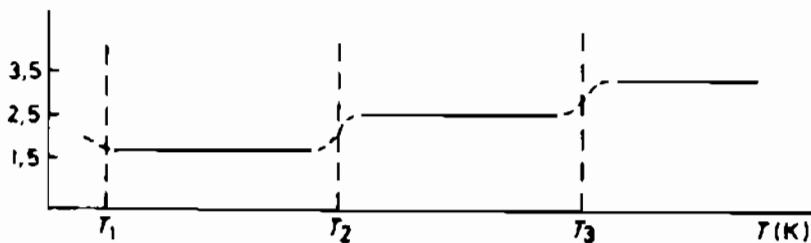
Hình 2.9

(d) Tỷ phần các hạt ở mức thứ  $m$  là

$$\begin{aligned} a_m &= e^{-\alpha - \beta(m+1/2)\gamma V^{-1}} \\ &= \frac{N_0}{z} e^{-\beta(m+1/2)\gamma V^{-1}} \\ &= 2N_0 e^{-\beta(m+1/2)\gamma V^{-1}} \cdot \sinh\left(\frac{\gamma\beta}{2V}\right). \end{aligned}$$

## 2034

Các phân tử của một chất khí nào đó gồm hai nguyên tử khác nhau liên kết với nhau, mỗi nguyên tử đều có spin hạt nhân bằng 0. Kết quả đo nhiệt dung riêng của chất khí này trên một vùng nhiệt độ rộng được biểu diễn trên đồ thị dưới đây.



Hình 2.10

(Các giá trị được ghi trên trục tung ứng với độ cao của đường cong ở mỗi

“đoạn bằng” của đồ thị)

(a) Giải thích những kết quả khác nhau ở mỗi vùng nhiệt độ: trên  $T_3$ ; giữa  $T_2$  và  $T_3$ ; giữa  $T_1$  và  $T_2$ ; dưới  $T_1$ .

(b) Cho biết rằng trạng thái kích thích thứ nhất của phô quay của phân tử này ở mức năng lượng cao hơn năng lượng của trạng thái quay cơ bản là  $kT_e$  với  $T_e = 64$  K. Từ lý thuyết cơ bản này, hãy tính phần đóng góp của chuyển động quay vào nhiệt dung đẳng tích của chất khí này ở 20 K, 100 K, 300 K.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Khi  $T > T_3$ , tất cả các chuyển động tịnh tiến, quay và dao động đều bị kích thích, và  $C_v = 7k/2$ . Khi  $T_2 < T < T_3$ , dao động không bị kích thích và  $C_v = 5k/2$ . Khi  $T_1 < T < T_2$ , chỉ chuyển động tịnh tiến đóng góp vào nhiệt dung riêng và  $C_v = 3k/2$ . Khi  $T < T_1$ , xảy ra sự chuyển pha, và pha khí không còn tồn tại nữa.

(b) Khi  $T = 20$  K, bỏ qua các mức năng lượng quay cao hơn và chỉ xét trạng thái cơ bản và trạng thái kích thích thứ nhất. Ta có

$$\bar{E} = \frac{3kT_e e^{-T_e/T}}{1 + 3e^{-T_e/T}},$$

$$C_v = \frac{d\bar{E}}{dT} = 3k \left( \frac{T_e}{T} \right)^2 \cdot \frac{e^{-T_e/T}}{(1 + 3e^{-T_e/T})^2} = 0,1k.$$

Khi  $T = 100$  K, xét các trạng thái kích thích thứ nhất và thứ hai, ta có

$$\bar{E} = kT_e \frac{3e^{-T_e/T} + 15e^{-3T_e/T}}{1 + 3e^{-T_e/T} + 5e^{-3T_e/T}},$$

$$C_v = \frac{d\bar{E}}{dT} = 3k \left( \frac{T_e}{T} \right)^2 \cdot \frac{e^{-T_e/T} + 15e^{-3T_e/T} + 10e^{-4T_e/T}}{(1 + 3e^{-T_e/T} + 5e^{-3T_e/T})^2}$$

$$= 0,22k.$$

Khi  $T = 300$  K, tất cả các mức năng lượng quay đều được xem xét và

$$C_v = 1,0k.$$

2035

Các mức năng lượng lượng tử của một quay tử rắn là

$$\varepsilon_j = j(j+1)h^2/8\pi^2ma^2 ,$$

ở đây  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Độ suy biến của mỗi mức năng lượng là  $g_j = 2j + 1$ .

- (a) Tìm biểu thức tổng quát của hàm phân bố, và chứng tỏ rằng ở nhiệt độ cao nó có thể được biểu diễn gần đúng bằng một tích phân.
- (b) Đánh giá năng lượng và nhiệt dung ở nhiệt độ cao.
- (c) Tìm các biểu thức gần đúng ở nhiệt độ thấp cho  $z, U$  và  $C_v$ .  
 (SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Hàm phân bố là

$$z = \sum_{j=0}^{\infty} g_j e^{-\varepsilon_j/kT} = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) e^{-j(j+1)h^2/8\pi^2ma^2kT} .$$

(b) Tại nhiệt độ cao  $\Delta_x \equiv (h^2/8\pi^2ma^2kT)^{1/2} \ll 1$ , suy ra

$$\begin{aligned} z &= 2e^{h^2/32\pi^2ma^2kT} \sum_{j=0}^{\infty} \left( j + \frac{1}{2} \right) e^{-(j+1/2)^2h^2/8\pi^2ma^2kT} \\ &= 2e^{(\Delta_x)^2/4} \frac{1}{(\Delta_x)^2} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j e^{-\varepsilon_j^2/\Delta_x^2} \Delta \varepsilon_j , \end{aligned}$$

trong đó

$$\varepsilon_j = \left( j + \frac{1}{2} \right) \Delta_x, \quad \Delta \varepsilon_j = \varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j = \Delta_x .$$

Do đó

$$\begin{aligned} z &\approx \frac{2}{(\Delta_x)^2} e^{(\Delta_x)^2/4} \int_0^{\infty} \varepsilon e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{(\Delta_x)^2} e^{(\Delta_x)^2/4} \\ &\approx \frac{1}{(\Delta_x)^2} = 8\pi^2ma^2kT/h^2 . \end{aligned}$$

Nội năng là

$$U = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln z = kT .$$

Nhiệt dung là

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = k .$$

(c) Đối với nhiệt độ thấp, ta chỉ cần lấy hai số hạng đầu của  $z$ , tức là  $z \approx 1 + 3e^{-\theta/T}$ , ở đây  $\theta = h^2/4\pi^2ma^2k$ .

Do đó

$$U = \frac{3k\theta e^{-\theta/T}}{1 + 3e^{-\theta/T}}$$

$$C_v = \frac{3k(\theta/T)^2 e^{-\theta/T}}{(1 + 3e^{-\theta/T})^2} .$$

### 2036

Các mức năng lượng lượng tử của một quay tử rắn là

$$\varepsilon_j = j(j+1)h^2/8\pi^2ma^2 ,$$

trong đó  $j = 0, 1, 2, \dots, m$  và  $a$  là hằng số dương. Độ suy biến của mỗi mức năng lượng là  $g_j = 2j + 1$ .

(a) Tìm biểu thức tổng quát cho hàm phân bố  $z_0$ .

(b) Chứng tỏ rằng ở nhiệt độ cao hàm phân bố có thể coi gần đúng là một tích phân.

(c) Ước lượng nội năng  $U$  và nhiệt dung  $C_v$  ở nhiệt độ cao.

(d) Cũng tìm các biểu thức gần đúng cho  $z_0, U$  và  $C_v$  ở nhiệt độ thấp.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Hàm phân bố là

$$z_0 = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \exp\left(-\frac{j(j+1)h^2}{8\pi^2ma^2kT}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \exp\left(-\frac{\theta j(j+1)}{T}\right)$$

ở đây

$$\theta = \frac{h^2}{8\pi^2 m a^2 k} .$$

(b) Tại nhiệt độ cao  $\theta/T \ll 1$  và  $\exp[-\theta j(j+1)/T]$  biến đổi chậm khi  $j$  thay đổi, đến mức có thể coi như  $(2j+1)\exp[-\theta j(j+1)/T]$  là một hàm liên tục của  $j$ . Đặt  $x = j(j+1)$ , khi đó  $dx = 2j+1$ , và ta có thể viết  $z_0$  như là một tích phân:

$$z_0 = \int_0^\infty e^{-\theta x/T} dx = \frac{T}{\theta} - \frac{8\pi^2 m a^2 k T}{h^2} .$$

(c) Tại nhiệt độ cao, nội năng là

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z_0 = kT .$$

Nhiệt dung là

$$C_v = k .$$

(d) Ở nhiệt độ thấp, ta có  $T \ll \theta$ , và  $\exp[-\theta j(j+1)/T]$  rất nhỏ. Ta chỉ cần lấy hai số hạng đầu của  $z_0$ , do đó

$$z_0 \approx 1 + 3 \exp(-2\theta/T) ,$$

$$U = \frac{6k\theta}{z_0} e^{-2\theta/T}$$

$$C_v = \frac{12k\theta^2}{z_0^2 T^2} e^{-2\theta/T} .$$

### 2037

Một quay từ rắn ba chiều với mômen quán tính  $I$  có các mức năng lượng sau

$$E_{J,M} = \hbar^2 J(J+1)/2I ,$$

ở đây  $J = 0, 1, 2, \dots ; M = -J, -J+1, \dots, J$ . Xét một hệ gồm  $N$  quay tử:

(a) Dùng thống kê Boltzmann, hãy tìm biểu thức cho nội năng nhiệt động của hệ.

(b) Với điều kiện nào tổng trong câu (a) có thể coi gần đúng là một tích phân? Trong trường hợp này hãy tính nhiệt dung riêng  $C_v$  của hệ.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Hàm phân bố của hệ là

$$z = \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) \exp[-\hbar^2 J(J+1)/2IkT] .$$

Nội năng là

$$\begin{aligned} U &= NkT^2 \frac{d \ln z}{dT} \\ &= N \frac{\sum_J \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)(2J+1) \exp\left[-\frac{\hbar^2}{2IkT} J(J+1)\right]}{\sum_J (2J+1) \exp\left[-\frac{\hbar^2}{2IkT} J(J+1)\right]} . \end{aligned}$$

(b) Tại giới hạn nhiệt độ cao,  $kT \gg \hbar^2/2I$ , và tổng trên có thể được thay bằng một tích phân. Đặt  $x = J(J+1)$ , ta có

$$\begin{aligned} z &= \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{\hbar^2}{2IkT} x\right\} dx = \frac{2IkT}{\hbar^2} . \\ U &= NkT . \end{aligned}$$

Do đó nhiệt dung phân tử là  $C_v = N_A k = R$ .

**2038**

Xét một phân tử lưỡng nguyên tử có hạt nhân khác nhau với mômen quán tính  $I$ . Trong bài này chỉ xét chuyển động quay của phân tử.

(a) Dùng cơ học thống kê cổ điển, tính nhiệt dung riêng  $C(T)$  của hệ này ở nhiệt độ  $T$ .

(b) Theo cơ học lượng tử, hệ này có các mức năng lượng

$$E_j = \frac{\hbar^2}{2I} j(j+1) , j = 0, 1, 2, \dots .$$

Mỗi mức  $j$  suy biến bậc  $(2j+1)$ . Dùng thống kê lượng tử, suy ra biểu thức cho hàm phân bố  $z$  và năng lượng trung bình  $\langle E \rangle$  của hệ này như là một hàm của nhiệt độ. Không cần thử ước lượng các biểu thức này.

(c) Hãy đơn giản hóa biểu thức ở (b) để suy ra biểu thức cho nhiệt dung

riêng  $C(T)$  ở nhiệt độ rất thấp. Trong phạm vi nào của nhiệt độ, biểu thức của bạn còn áp dụng được?

(d) Hãy đơn giản hóa lời giải đối với (b) để nhận được một biểu thức gần đúng ở nhiệt độ cao cho nhiệt dung riêng  $C(T)$ . Biểu thức gần đúng của bạn áp dụng được trong phạm vi nào?

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Đối với quay tử cổ điển, ta có

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2I} \left( p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} p_\varphi^2 \right) , \\ z &= \int e^{-\beta E} dp_\theta dp_\varphi d\theta d\varphi = \frac{8\pi^2 I}{\beta} , \\ \langle E \rangle &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z = \frac{1}{\beta} = kT . \end{aligned}$$

Do đó,  $C(T) = k$ .

(b) Theo cơ học thống kê,

$$\begin{aligned} z &= \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \exp \left[ -\frac{\beta \hbar^2}{2I} j(j+1) \right] \\ \langle E \rangle &= -\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \beta} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \frac{\hbar^2}{2I} j(j+1) \exp \left[ -\frac{\beta \hbar^2}{2I} j(j+1) \right]}{\sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \exp \left[ -\frac{\beta \hbar^2}{2I} j(j+1) \right]} . \end{aligned}$$

(c) Tại giới hạn nhiệt độ thấp,  $\frac{\beta \hbar}{2I} \gg 1$ , hoặc  $\frac{\hbar^2}{2I} \gg kT$ , nên chỉ có hai số hạng đầu  $j = 0$  và  $j = 1$  là quan trọng. Do đó

$$\begin{aligned} z &= 1 + 3 \exp \left( -\frac{\beta \hbar^2}{I} \right) . \\ \langle E \rangle &= \frac{3\hbar^2}{I} \cdot \frac{\exp \left( -\frac{\beta \hbar^2}{I} \right)}{1 + 3 \exp \left( -\frac{\beta \hbar^2}{I} \right)} . \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} C(T) &= 3k \left( \frac{\beta \hbar^2}{I} \right)^2 \frac{\exp\left(\frac{\beta \hbar^2}{I}\right)}{\left[3 + \exp\left(\frac{\beta \hbar^2}{I}\right)\right]^2} \\ &= 3k \left( \frac{\hbar^2}{kTI} \right)^2 \frac{\exp\left(\frac{\hbar^2}{kTI}\right)}{\left[3 + \exp\left(\frac{\hbar^2}{kTI}\right)\right]^2}. \end{aligned}$$

(d) Tại giới hạn nhiệt độ cao,  $\frac{\beta \hbar^2}{2I} \ll 1$  hoặc  $kT \gg \frac{\hbar^2}{2I}$ , do đó tổng có thể được thay bằng một tích phân, tức là,

$$\begin{aligned} z &= \int_0^\infty (2x+1) \exp\left[-\frac{\beta \hbar^2}{2I}x(x+1)\right] dx = \frac{2I}{\hbar^2} kT, \\ \langle E \rangle &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z = kT. \end{aligned}$$

Do đó,  $C(T) = k$ .

### 2039

Tại nhiệt độ của hidrô lỏng là 20,4 K, người ta có thể nghĩ rằng hầu hết các phân tử H<sub>2</sub> (gần 100%) là ở trong trạng thái quay với mômen xung lượng bằng 0. Thực tế, nếu H<sub>2</sub> được làm lạnh đến nhiệt độ này thì thấy hơn một nửa số phân tử là ở trong trạng thái quay với mômen xung lượng  $\hbar$ . Người ta dùng một chất xúc tác ở 20,4K để hoán chuyển số phân tử trên sang trạng thái với mômen xung lượng quay bằng 0. Giải thích những sự kiện này.

(Columbia)

**Lời giải:**

Các phân tử hidrô là một hệ các fermion. Theo nguyên lý loại trừ Pauli, hàm sóng của electron ở trạng thái cơ bản là đối xứng. Do đó nếu spin hạt nhân toàn phần  $I$  bằng không thì số lượng tử quay của mômen xung lượng chắc chắn là nguyên và phân tử được gọi là para-hidrô. Nếu spin hạt nhân toàn phần bằng 1 thì số lượng tử quay của mômen xung lượng chắc chắn là lẻ và phân tử được gọi là ortho-hidrô. Vì spin  $I$  có  $2I+1$  khả năng định hướng nên tỷ lệ số phân tử ortho-hidrô với số phân tử para-hidrô là 3:1 ở những nhiệt độ đủ cao. Vì khó thay đổi spin hạt nhân toàn phần khi các phân tử hidrô va chạm với các phân tử khác cho nên các ortho-hidrô và para-hidrô xử sự như là hai thành phần độc lập. Nói cách khác, tỷ lệ số phân tử ortho-hidrô so với số

phân tử para-hidrô hầu như là không phụ thuộc vào nhiệt độ. Do vậy có nhiều phân tử ortho-hidrô hơn phân tử para-hidrô ngay cả trong trạng thái lỏng. Để thay đổi điều này cần có một chất xúc tác.

### 2040

Một chất khí gồm các phân tử hidrô  $H_2$  ban đầu cân bằng ở nhiệt độ 1.000 K. Nó được làm lạnh đến 20 K nhanh đến mức mà các trạng thái spin hạt nhân của các phân tử không thay đổi, mặc dù các bậc tự do tịnh tiến và quay đã điều chỉnh lại thông qua các va chạm. Tìm biểu thức nội năng cho mỗi phân tử theo đơn vị nhiệt độ tuyệt đối K?

Chú ý rằng phân năng lượng quay đối với một phân tử lưỡng nguyên tử là  $A(l+1)$  trong đó  $l$  là số lượng tử quay và  $A \sim 90$  K đối với  $H_2$ . Có thể bỏ qua dao động.

(MIT)

#### Lời giải:

Ban đầu ở nhiệt độ cao và các phân tử para-hidrô và ortho-hidrô cân bằng theo tỷ lệ khoảng chừng 1:3. Khi hệ được làm lạnh nhanh, trong một thời gian khá dài các trạng thái spin hạt nhân vẫn giữ nguyên như nhau. Tỷ lệ của para-hidrô và ortho-hidrô vẫn là 1:3. Bây giờ para-hidrô và ortho-hidrô không còn cân bằng nữa, nhưng thông qua các va chạm, mỗi thành phần này là cân bằng. Tại nhiệt độ thấp 20 K,  $\exp(-\beta A) \sim \exp(-90/20) \ll 1$ , do đó mỗi phân tử đều ở trạng thái cơ bản. Như vậy  $\bar{E}_{r,p} = 0$ ,  $\bar{E}_{r,o} = A(1+1) \cdot 1 = 2A = 180$  K, dẫn đến

$$\bar{E}_r = \frac{1}{4}\bar{E}_{r,p} + \frac{3}{4}\bar{E}_{r,o} = 135 \text{ K} .$$

Từ nguyên lý phân bố đều năng lượng, ta có

$$\bar{E}_t = \frac{3}{2}kT = 30 \text{ K} .$$

Năng lượng trung bình của một phân tử là

$$\bar{E} = \bar{E}_r + \bar{E}_t = 165 \text{ K} .$$

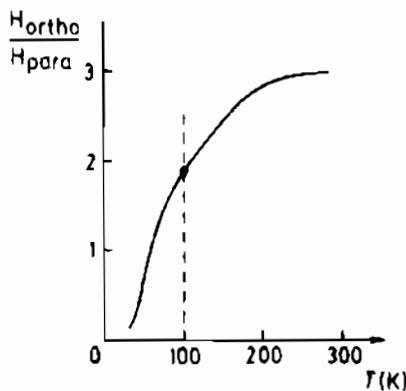
## 2041

Đồ thị dưới đây mô tả tỷ số cân bằng của các phân tử ortho-hidrô với các phân tử para-hidrô xem như là một hàm của nhiệt độ tuyệt đối. Spin của các proton song song trong ortho-hidrô và đổi song trong para-hidrô.

(a) Nêu một biểu thức lý thuyết cho tỷ số này như là một hàm của nhiệt độ.

(b) Tính giá trị của tỷ số trên đổi với 100 K, tương ứng với điểm  $P$  trên đồ thị. Cho biết khoảng phân cách giữa các proton trong phân tử hidrô là 0,7415 Å.

(UC, Berkeley)



Hình 2.11

Lời giải:

(a) Momen quán tính của phân tử hidrô là

$$I = \frac{m_H}{2} d^2 ,$$

và mức năng lượng quay là

$$E_l = \frac{L^2}{2I} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I} ,$$

với độ suy biến  $(2l + 1)$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Đổi với ortho-H,  $l = 1, 3, 5, \dots$ ; đổi với para-H,  $l = 0, 2, 4, 6, \dots$ . Như vậy trong các phân tử hidrô, tỷ lệ giữa số ortho-H và para-H là

$$f = \frac{3 \sum_{l=1,3,5,\dots} (2l+1) e^{-l(l+1)\lambda}}{\sum_{l=0,2,4,\dots} (2l+1) e^{-l(l+1)\lambda}} ,$$

trong đó số 3 là kết quả từ độ suy biến spin và

$$\lambda = \frac{\hbar^2}{md^2kT} .$$

(b) Khi  $T = 100$  K,  $\lambda = 0,88$ , cũng như trước đây vì  $l$  tăng nên những số hạng trong các tổng giảm nhanh, ta chỉ cần xét hai số hạng đầu tiên. Vì vậy

$$f = 3 \frac{3e^{-2\lambda} + 7e^{-12\lambda}}{1 + 5e^{-6\lambda}} = 1,52 .$$

### 2042

Trong khí hidrô ở nhiệt độ thấp, các phân tử có thể tồn tại ở hai trạng thái: các spin của proton song song (ortho-hidrô) và đối song (para-hidrô). Sự chuyển đổi giữa hai dạng phân tử này là chậm chạp. Các thí nghiệm được thực hiện trong khoảng thời gian ít hơn một vài giờ có thể được coi như ta làm việc với hai chất khí tách rời nhau theo một tỷ lệ cho bởi các phân bố thống kê của chúng ở nhiệt độ cuối cùng cho phép chất khí đạt tới cân bằng.

(a) Biết rằng khoảng cách giữa các proton trong một phân tử hidrô là  $7,4 \times 10^{-9}$  cm, xác định hiệu năng lượng giữa trạng thái cơ bản và trạng thái kích thích đầu tiên của para-hidrô (lấy đơn vị năng lượng là độ K). Gọi năng lượng này là  $k\theta_0$ , để sao cho các sai số trong câu (a) không lan truyền đến các phần khác của câu hỏi.

(b) Biểu diễn hiệu năng lượng giữa các trạng thái quay cơ bản và kích thích đầu tiên của ortho-hidrô  $k\theta_1$ , theo  $k\theta_0$ . Trong một thí nghiệm đo nhiệt dung riêng, khí này đi đến cân bằng ở nhiệt độ cao, sau đó được làm lạnh nhanh tới nhiệt độ mà tại đó tiến hành đo nhiệt dung riêng. Hãy xác định nhiệt dung phân tử đẳng tích tại:

(c) những nhiệt độ rất cao so với  $\theta_0$  và  $\theta_1$ , nhưng chưa đủ cao để kích thích các mức dao động?

(d) những nhiệt độ rất cao so với  $\theta_0$  và  $\theta_1$  [chỉ giữ lại số hạng phụ thuộc nhiệt độ bậc thấp nhất]?

(e)  $T = \theta_0/2$ ?

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Hạt nhân của hidrô là một fermion. Hàm sóng toàn phần bao gồm cả chuyển động của hạt nhân là phản đối xứng. Có thể xác định tính đối xứng của hàm sóng toàn phần từ các hàm sóng quay và spin. Đối với ortho-hidrô, hàm sóng spin là đối xứng khi các hạt nhân trao đổi lẫn nhau. Do đó, hàm sóng quay của chúng là phản đối xứng, tức là,  $l$  là lẻ. Tương tự, đối với para-hidrô,  $l$  là chẵn. Như vậy, ta có

$$\begin{aligned} \text{ortho-hidrô: } E_l &= \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I}, \quad l = 1, 3, 5, \dots \\ \text{para-hidrô: } E_l &= \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I}, \quad l = 0, 2, 4, \dots \end{aligned}$$

trong đó  $I$  là mômen quán tính của hạt nhân đối với tâm của khoảng cách giữa các hạt nhân.

$$(a) \quad I = \frac{m}{2}d^2,$$

$$k\theta_0 = \frac{2 \times (2+1)}{2} \frac{\hbar^2}{I} = 3 \frac{\hbar^2}{I},$$

Do đó,  $k\theta_0 = \frac{6\hbar^2}{md^2} = 7,3 \times 10^{-21} \text{ J}$ ,  $\theta_0 = 530 \text{ K}$ .

$$(b) \quad k\theta_1 = \frac{3 \times (3+1)}{2I} \hbar^2 - \frac{1 \times (1+1)}{2I} \hbar^2 = \frac{5}{3} k\theta_0.$$

Vì khí hidrô đã đạt đến cân bằng nhiệt ở nhiệt độ cao trước khi làm thí nghiệm, tỷ lệ giữa số para-hidrô đối với số ortho-hidrô trong thí nghiệm là 1:3, đó cũng là tỷ số của bậc tự do spin.

(c) Khi  $T \gg \theta_0, \theta_1$ , các mức năng lượng quay đã hoàn toàn bị kích thích. Từ sự phân bố đều của năng lượng,  $\bar{E} = nkT$ , hoặc  $C_v = nk$ , trong đó  $n$  là tổng số các phân tử hidrô. (Chú ý rằng ở đây ta chỉ xét nhiệt dung riêng liên quan đến chuyển động quay.)

(d) Khi  $T \ll \theta_0, \theta_1$ , hầu như không có nguyên tử hidrô nào ở trong những trạng thái kích thích rất mạnh. Do đó ta chỉ xét trạng thái kích thích thứ nhất đối với para-hidrô và ortho-hidrô. Chú ý tới độ suy biến của các mức năng lượng, đối với ortho-hidrô ta có

$$\begin{aligned} \bar{E}_o &= n_o \frac{7k\theta_1 e^{-\theta_1/T}}{3 + 7e^{-\theta_1/T}}, \\ C_v^{(o)} &= \frac{d\bar{E}_o}{dT} = n_o k \frac{21 \left(\frac{\theta_1}{T}\right)^2 e^{-\theta_1/T}}{(3 + 7e^{-\theta_1/T})^2} \\ &\approx n_o k \cdot \frac{7}{3} \left(\frac{\theta_1}{T}\right)^2 e^{-\theta_1/T}. \end{aligned}$$

Tương tự đối với ortho-hidrô ta có

$$C_v^{(p)} \approx n_p k \cdot 5 \left( \frac{\theta_0}{T} \right)^2 e^{-\theta_0/T}.$$

Lưu ý rằng

$$n_o = \frac{3}{4}n, \quad n_p = \frac{1}{4}n,$$

khi đó

$$C_v = nk \left[ \frac{7}{4} \left( \frac{\theta_1}{T} \right)^2 e^{-\theta_1/T} + \frac{5}{4} \left( \frac{\theta_0}{T} \right)^2 e^{-\theta_0/T} \right].$$

(e) Khi  $T = \theta_0/2$ , các hàm phân bố đối với ortho-hidrô và para-hidrô là

$$z_o = \sum_{l=1,3,5,\dots} (2l+1) \exp[-l(l+1)\lambda],$$

$$z_p = \sum_{l=0,2,4,\dots} (2l+1) \exp[-l(l+1)\lambda]$$

trong đó  $\lambda = h^2/4\pi^2 m d^2 k T$ . Không có khả năng giải các phương trình này và tính chính xác  $C_v$  nhưng dùng các kết quả gần đúng của (d) ta có thể ước lượng chúng.

### 2043

Thông thường có hai dạng hidrô phân tử, ortho-hidrô (spin hai hạt nhân “song song”) và para-hidrô (spin hai hạt nhân “đối song”).

(a) Sau khi đạt đến cân bằng ở nhiệt độ “cao”, tỷ lệ của khí H<sub>2</sub> là para-hidrô là bao nhiêu? (Giả thiết rằng mỗi một dạng phân tử hidrô này hầu hết đều ở trong trạng thái năng lượng thấp nhất).

(b) Tại những nhiệt độ thấp ortho-hidrô hầu hết hoán chuyển thành para-hidrô. Giải thích vì sao năng lượng được giải phóng ra do hoán chuyển mỗi phân tử lớn hơn nhiều so với năng lượng do đảo ngược spin hạt nhân.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Đối với hai loại phân tử lưỡng nguyên tử của các hạt nhân đồng nhất, dao động và bậc suy biến của trạng thái thấp nhất của electron là như nhau đối với cả hai loại trong khi đó các chuyển động quay của chúng là khác nhau.

Các hạt nhân đồng nhất là fermion, các trạng thái spin hạt nhân phản đối xứng liên kết với các trạng thái quay với số lượng tử  $l$ , chẵn, và các trạng thái spin hạt nhân đối xứng liên kết với các trạng thái quay với số lượng tử  $l$  lẻ (ngược lại đối với boson). Do vậy

$$Z_{N-R} = s(2s+1)Z_{\text{para}} + (s+1)(2s+1)Z_{\text{ortho}},$$

ở đây  $s$  là spin bán nguyên của một nucleon (đối với các hạt nhân hidrô,  $s = 1/2$ ),  $s(2s+1)$  là số các trạng thái spin phản đối xứng và  $(s+1)(2s+1)$  là số trạng thái spin đối xứng.

$$Z_{\text{para}} = \sum_{l=0,2,4}^{\infty} (2l+1) \exp \left[ -\frac{l(l+1)\theta}{T} \right],$$

$$Z_{\text{ortho}} = \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} (2l+1) \exp \left[ -\frac{l(l+1)\theta}{T} \right],$$

trong đó  $\theta = h^2/8\pi^2Ik$ ,  $I$  là mômen quán tính quay. Với các nhiệt độ cao, ta có  $Z_{\text{para}} = Z_{\text{ortho}}$ , và  $n_{\text{para}}/n_{H_2} = 1/4$ . Theo điều kiện đã cho trong bài (nhiệt độ không quá cao), chỉ những trạng thái  $l = 0$  và  $l = 1$  là tồn tại. Khi đó tỷ lệ của para-hidrô là

$$\frac{n_{\text{para}}}{n_{H_2}} = \frac{Z_{\text{para}}}{Z_{N-R}} = \frac{1}{1 + 3e^{-2\theta/T}}.$$

(b) Khi  $T \ll \theta$ , ortho-hidrô chuyển đổi thành para-hidrô. Năng lượng tương ứng để đổi hướng spin hạt nhân là năng lượng tương tác của các lưỡng cực từ của các hạt nhân và các electron  $\Delta E_{SJ} \sim 10^8$  Hz. Do các trạng thái quay liên quan với các trạng thái spin, các trạng thái quay cũng thay đổi nên sự biến đổi năng lượng tương ứng là

$$\Delta E_R = \frac{h^2}{8\pi^2 I} \approx 10^{11} \text{ Hz}.$$

Khi ortho-hidrô chuyển đổi thành para-hidrô, sự biến đổi năng lượng toàn phần là  $\Delta E = \Delta E_R + \Delta E_{SJ} \approx \Delta E_R$ . Do vậy năng lượng được giải phóng ra lớn hơn nhiều so với  $\Delta E_{SJ}$ .

Một hạt nhân  ${}^7N_{14}$  có spin hạt nhân  $I = 1$ . Giả thiết rằng phân tử lưỡng nguyên tử có thể quay nhưng không dao động ở những nhiệt độ bình thường

và bỏ qua chuyển động của các electron. Hãy tìm hàm lượng tương đối của các phân tử ortho và para trong một mẫu khí nitơ (*ortho* = trạng thái spin đối xứng; *para* = trạng thái spin phản đối xứng). Điều gì sẽ xảy ra đối với hàm lượng tương đối khi nhiệt độ được hạ thấp tới không độ tuyệt đối? (Biện minh cho câu trả lời của bạn!)

(SUNY, Buffalo)

### Lời giải:

Hàm sóng của  $N_2$  là đối xứng vì  $^7N_{14}$  là một boson. Hàm sóng spin của  $N_2$  bao gồm sáu hàm sóng đối xứng và ba hàm sóng phản đối xứng. Ta biết rằng hàm sóng quay đối xứng khi hàm sóng spin đối xứng, và hàm sóng quay phản đối xứng khi hàm sóng spin phản đối xứng. Vì vậy hàm phân bố của ortho- $N_2$  là

$$Z_{\text{ortho}} = \sum_{l=0,2,4}^{\infty} 6(2l+1)e^{-\theta_r l(l+1)/T},$$

trong đó  $\theta_r = \frac{\hbar^2}{2kT}$ , và  $I$  là mômen quán tính quay của  $N_2$ . Tương tự,

$$Z_{\text{para}} = \sum_{l=1,3,5,\dots} 3(2l+1)e^{-\theta_r l(l+1)/T}.$$

Vì  $\theta_r/T \ll 1$  ở những nhiệt độ thông thường, nên các tổng trên có thể được thay bằng các tích phân

$$\begin{aligned} Z_{\text{ortho}} &= 3 \int_0^{\infty} e^{-\theta_r x/T} dx = \frac{3T}{\theta_r} \\ Z_{\text{para}} &= 1.5 \int_0^{\infty} e^{-\theta_r x/T} dx = \frac{3T}{2\theta_r}. \end{aligned}$$

Do đó, hàm lượng tương đối được cho bởi

$$\frac{N_{\text{ortho}}}{N_{\text{para}}} = \frac{Z_{\text{ortho}} e^{\beta \mu_{\text{ortho}}}}{Z_{\text{para}} e^{\beta \mu_{\text{para}}}}.$$

Tại cân bằng  $\mu_{\text{ortho}} = \mu_{\text{para}}$ , tỷ lệ trên là 2.

Khi nhiệt độ được hạ thấp tới độ không tuyệt đối, ta có  $\theta_r/T \gg 1$ , tức là  $\exp[-\theta_r l(l+1)/T] \ll 1$ . Do đó

$$\begin{aligned} Z_{\text{ortho}} &\approx 6, \\ Z_{\text{para}} &\approx 9 \exp(-2\theta_r/T). \end{aligned}$$

Suy ra hàm lượng tương đối là

$$\frac{N_{\text{ortho}}}{N_{\text{para}}} = \left(\frac{2}{3}\right) \exp(2\theta_r/T).$$

Khi  $T \rightarrow 0$ , hàm lượng tương đối  $\rightarrow \infty$ . Tức là tất cả các phân tử-para trở thành các phân tử-ortho.

### 2045

(a) Viết một biểu thức đơn giản cho phần nội tại của hàm phân bố đối với một đơn nguyên tử hidrô có lập và tiếp xúc rất yếu với một bình điều nhiệt ở nhiệt độ  $T$ . Biểu thức của bạn có phân kì không đổi với  $T = 0$ , đổi với  $T \neq 0$ ?

(b) Phải chăng tất cả hoặc một phần của sự phân kì này xuất hiện từ sự chọn gốc 0 của năng lượng?

(c) Hãy chỉ ra một cách rõ ràng mọi ảnh hưởng của sự phân kì này đối với các tính toán năng lượng nhiệt trung bình  $U$ .

(d) Sự phân kì này có bị ảnh hưởng không nếu giả thiết đơn nguyên tử bị giam giữ trong một cái hộp với thể tích hữu hạn  $L^3$  để thực hiện sự tính toán lượng tử của hàm phân bố toàn phần? Giải thích.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Các mức năng lượng bên trong của nguyên tử hidrô là  $-E_0/n^2$  với độ suy biến  $2n^2$ , trong đó  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Do đó

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \exp\left(-\frac{E_0}{n^2 kT}\right).$$

Khi  $T = 0$ , biểu thức không có ý nghĩa; còn khi  $T \neq 0$ , nó phân kì.

(b) Sự phân kì ở đây không có liên quan gì đến việc chọn gốc không của năng lượng cả. Nếu ta chọn

$$E = -\frac{E_0}{n^2} + E' ,$$

thì

$$Z' = e^{-E'/kT} \left( \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 e^{E_0/n^2 kT} \right)$$

chắc chắn vẫn phân kì.

(c) Khi  $T \neq 0$ ,

$$\overline{E} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{E_0}{n^2}\right) 2n^2 e^{E_0/n^2 kT}}{\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 e^{E_0/n^2 kT}} = 0 .$$

Có nghĩa là, do kích thích nhiệt (dù là nhiệt độ thấp thế nào đi nữa, miễn là  $T \neq 0$ ), các hạt nhân không thể giữ được các electron.

(d) Nguồn gốc của sự phân kì là sự suy biến lớn của các trạng thái kích thích cao của hidrô. Nếu ta giam giữ nguyên tử hidrô trong một cái hộp có thể tích  $L^3$ , thì các trạng thái kích thích cao đó sẽ không tồn tại và do đó sẽ không có phân kì.

### 2046

Động năng trung bình của các nguyên tử hidrô trong khí quyển của một ngôi sao nào đó (giả thiết là ở trạng thái cân bằng nhiệt) là 1,0 eV.

- (a) Nhiệt độ của khí quyển đó tính bằng độ Kelvin là bao nhiêu?
- (b) Tỷ lệ của số nguyên tử ở trạng thái kích thích thứ hai ( $n = 3$ ) đối với số nguyên tử ở trạng thái cơ bản là bao nhiêu?
- (c) Khảo sát định lượng số nguyên tử bị ion hoá. Đường như nó lớn hơn nhiều hoặc ít hơn nhiều số nguyên tử ở trạng thái  $n = 3$ ? Tại sao?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

- (a) Nhiệt độ của khí quyển ngôi sao là

$$T = \frac{2\varepsilon}{3k} = \frac{2 \times 1,6 \times 10^{-19}}{3 \times 1,38 \times 10^{-23}} = 7,7 \times 10^3 \text{ K}.$$

- (b) Các mức năng lượng đối với nguyên tử hidrô là

$$E_n = \left( \frac{-13,6}{n^2} \right) \text{ eV}.$$

Dùng phân bố Boltzmann, ta nhận được

$$\frac{N_3}{N_1} = \exp \left[ \frac{(E_1 - E_3)}{kT} \right].$$

Đặt  $E_1 = -13,6 \text{ eV}$ ,  $E_3 = (-13,6/9) \text{ eV}$ , và  $kT = (2/3) \text{ eV}$  vào công thức trên, ta có  $N_3/N_1 \approx 1,33 \times 10^{-8}$ .

- (c) Số các nguyên tử bị ion hoá bằng hiệu giữa tổng số nguyên tử và tổng số nguyên tử ở các trạng thái liên kết, tức là số các nguyên tử ở mức  $n = \infty$ .

Hiển nhiên, nó nhỏ hơn nhiều so với số nguyên tử ở trạng thái  $n = 3$ . Do vậy  $\frac{N_{\text{ion}}}{N_3} = \exp\left(\frac{E_3}{kT}\right) \approx 0,1$ , tức là  $N_{\text{ion}}$  bằng khoảng một phần mươi của  $N_3$ .

## 2047

Một chất khí đơn nguyên tử gồm các nguyên tử với nội năng gồm hai mức: trạng thái cơ bản có độ suy biến  $g_1$  và một trạng thái kích thích nằm thấp có độ suy biến  $g_2$  hiệu năng lượng của hai mức là  $E$ . Tìm nhiệt dung riêng của chất khí này.

(CUSPEA)

**Lời giải:**

Theo phân bố Boltzmann, năng lượng trung bình của các nguyên tử là

$$\varepsilon = \frac{3}{2}kT + E_0 + \frac{g_2 E e^{-E/kT}}{g_1 + g_2 e^{-E/kT}} .$$

ở đây  $E_0$  là năng lượng phân ly của trạng thái cơ bản (ta chọn trạng thái cơ bản là điểm 0 của năng lượng). Do vậy

$$\begin{aligned} c_v &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = \frac{3}{2}k + \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{g_2 E e^{-E/kT}}{g_1 + g_2 e^{-E/kT}} \right) \\ &= \frac{3}{2}k + \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{g_2 E}{g_2 + g_1 e^{E/kT}} \right) \\ &= \frac{3}{2}k + \frac{g_1 g_2 E^2 e^{E/kT}}{kT^2 (g_2 + g_1 e^{(E/kT)})^2} . \end{aligned}$$

## 2048

Xét một hệ có hai trạng thái orbital (một hạt) mà cả hai có cùng năng lượng. Khi cả hai trạng thái orbital chưa bị chiếm chỗ, năng lượng của hệ bằng 0; còn khi một trong hai trạng thái orbital đó bị một hạt chiếm chỗ, thì năng lượng của hệ là  $\varepsilon$ . Giả thiết rằng năng lượng của hệ cao hơn nhiều, ví dụ như là cao vô hạn, khi mà cả hai trạng thái orbital đều bị chiếm. Chứng tỏ rằng số hạt trung bình theo tập hợp trong một mức là

$$\langle N \rangle = \frac{2}{2 + e^{(\varepsilon - \mu)/\tau}} .$$

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Xác suất để một trạng thái vi mô bị chiếm chỗ tỷ lệ với thừa số Gibbs  $\exp[(\mu - \varepsilon)\tau]$ . Vì vậy ta có

$$\langle N \rangle = \frac{1 \cdot e^{(\mu-\varepsilon)/\tau} + 1 \cdot e^{(\mu-\varepsilon)/\tau}}{1 + e^{(\mu-\varepsilon)/\tau} + e^{(\mu-\varepsilon)/\tau}} = \frac{2}{e^{(\varepsilon-\mu)/\tau} + 2}.$$

**2049**

(a) Phát biểu định luật phân bố năng lượng Maxwell-Boltzmann. Định nghĩa các số hạng. Thảo luận ngắn gọn một ứng dụng mà định luật sai.

(b) Giả thiết rằng khí quyển của trái đất hoàn toàn là nitơ ở trạng thái cân bằng nhiệt động ở nhiệt độ 300 K. Tìm chiều cao ở trên mức nước biển mà tại đó mật độ khí quyển bằng một nửa giá trị mật độ khí quyển tại mức nước biển.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Định luật phân bố năng lượng Maxwell-Boltzmann (M-B): Đối với một hệ gồm chất khí cân bằng, số hạt mà các toạ độ của chúng nằm giữa  $\mathbf{r}$  và  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  và các vận tốc của chúng ở giữa  $\mathbf{v}$  và  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$  là

$$dN = n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\varepsilon/kT} d\mathbf{v} d\mathbf{r},$$

trong đó  $n_0$  ký hiệu số hạt trong một đơn vị thể tích mà thế năng của chúng  $\varepsilon_p$  bằng 0,  $\varepsilon = \varepsilon_k + \varepsilon_p$  là năng lượng toàn phần,  $d\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z$ ,  $d\mathbf{r} = dx dy dz$ .

Phân bố M-B là một định luật rất tổng quát. Nó đúng đối với các hệ định xứ, các hệ cổ điển và các hệ lượng tử không suy biến. Nó không còn đúng đối với những hệ lượng tử suy biến không định xứ, thí dụ, một hệ các electron có spin ở nhiệt độ thấp và có mật độ cao.

(b) Ta chọn trục-z vuông góc với mặt nước biển và  $z = 0$  ở mức nước biển. Theo định luật phân bố M-B, số các phân tử trong yếu tố thể tích  $dxdydz$  ở độ cao  $z$  là  $z$  là  $dN' = n_0 e^{-mgz/kT} dxdydz$ . Do đó số phân tử trong đơn vị thể tích ở độ cao  $z$  là

$$n(z) = n_0 e^{-mgz/kT}.$$

Suy ra

$$z = \frac{kT}{mg} \ln \frac{n_0}{n} = \frac{RT}{\mu g} \ln \frac{n_0}{n} .$$

Phân tử lượng của khí nitơ là  $\mu = 28$  g/mol. Với  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>,  $R = 8,31$  J/K·mole,  $T = 300$  K, ta tìm được  $z = 6297$  m đối với  $n_0/n = 2$ . Tức là mật độ của khí quyển ở độ cao bằng một nửa giá trị mật độ ở mức nước biển.

### 2050

Một chất khí gồm các hạt điểm cổ điển, tương tác giữa chúng có thể bỏ qua, choán đầy một hình trụ tròn có chiều cao  $L$ , tiết diện  $A$ . Tất cả các hạt với khối lượng  $m$ , đều chịu tác dụng của trọng lực (Ký hiệu  $g$  là gia tốc trọng trường, giá thiết không đổi). Hệ được giữ cân bằng nhiệt ở nhiệt độ  $T$ . Gọi  $c_v$  nhiệt dung riêng đẳng tích (trên hạt). Tính  $c_v$  như một hàm của  $T$ , các tham số khác đã cho. Cũng đặc biệt lưu ý đối với các trường hợp,  $T \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$ .

(CUSPEA)

**Lời giải:**

Ký hiệu  $z$  là độ cao của một phân tử của chất khí. Năng lượng trung bình của phân tử là

$$e = 1,5 kT + mgz ,$$

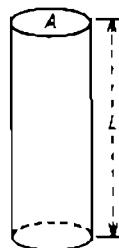
trong đó  $\bar{z}$  là độ cao trung bình. Theo phân bố Boltzmann, mật độ xác suất mà phân tử ở độ cao  $z$  là  $p(z) \propto \exp(-mgz/kT)$ . Do đó

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \int_0^L z e^{-mgz/kT} dz / \int_0^L e^{-mgz/kT} dz \\ &= \frac{kT}{mg} \left( 1 - \frac{L}{e^{mgL/kT} - 1} \right) ,\end{aligned}$$

và

$$e = \frac{5}{2} kT - \frac{mgL}{e^{mgL/kT} - 1} .$$

$$\begin{aligned}c_v &= \frac{\partial e}{\partial T} = \frac{5}{2} k - \frac{k(mgL)^2}{(kT)^2} \frac{e^{mgL/kT}}{(e^{mgL/kT} - 1)^2} \\ &= \begin{cases} \frac{5}{2} k, & \text{với } T \rightarrow 0 \\ \frac{3}{2} k, & \text{với } T \rightarrow \infty \end{cases} .\end{aligned}$$



Hình 2.12

## 2051

Một hình trụ bán kính  $a$  chiều dài  $L$  chứa khí lý tưởng đơn nguyên tử. Hình trụ quay với vận tốc góc  $\omega$  quanh trục đối xứng của nó và khí lý tưởng là cân bằng ở nhiệt độ  $T$  trong một hệ toạ độ quay cùng với hình trụ. Giả thiết rằng các nguyên tử của chất khí có khối lượng  $m$ , không có bậc tự do nội tại, và tuân theo thống kê cổ điển.

- (a) Viết Hamiltonian trong hệ toạ độ quay.
- (b) Xác định hàm phân bố đối với hệ.
- (c) Tính mật độ số hạt trung bình như một hàm của  $r$ ?

(MIT)

**Lời giải:**

- (a) Hamiltonian đối với một đơn nguyên tử là

$$h' = \frac{p'^2}{2m} + \phi - \frac{1}{2}m\omega^2r^2,$$

$$\phi(r, \varphi, z) = \begin{cases} 0, & r \leq a, |z| < \frac{L}{2}, \\ \infty, & \text{các giá trị khác.} \end{cases}$$

Hamiltonian đối với hệ là

$$H' = \sum_i h'_i .$$

- (b) Hàm phân bố là

$$z = \iint d^3 p' d^3 r e^{-\beta(p'^2/2m + \phi - m\omega^2 r^2/2)}$$

$$= \frac{L}{m^2 \omega^2} (2\pi mkT)^{5/2} (e^{m\omega^2 a^2/2kT} - 1) .$$

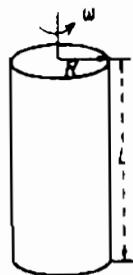
(c) Mật độ số hạt trung bình là

$$\begin{aligned}\Delta N / \Delta V &= N \int d^3 \mathbf{p}' \exp[-\beta(p'^2/2m + \phi - m\omega^2 r^2/2)]/z \\ &= \frac{N}{\pi L} \frac{\exp \frac{m\omega^2}{2kT} r^2}{\frac{2kT}{m\omega^2} \left( \exp \frac{m\omega^2 a^2}{2kT} - 1 \right)} \quad (r < a) .\end{aligned}$$

### 2052

Tìm mật độ số hạt xem như là hàm của toạ độ xuyên tâm  $r$  đối với một chất khí gồm  $N$  phân tử, mỗi phân tử có khối lượng  $M$ , được chứa trong một máy ly tâm có bán kính  $R$  chiều dài  $L$  đang quay với vận tốc góc  $\omega$  quanh trục của nó. Bỏ qua hiệu ứng hấp dẫn và giả thiết rằng máy ly tâm quay đủ lâu để chất khí đạt đến cân bằng.

(Chicago)



Hình 2.13

**Lời giải:**

Trong hệ đứng yên  $S$ , năng lượng  $E$  là độc lập với khoảng cách xuyên tâm  $r$ . Nhưng trong hệ quay  $S'$ , năng lượng của một hạt là

$$E(r) = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M r^2 \omega^2 .$$

Hiệu ứng quay giống hệt như hiệu ứng khi thêm vào một trường ngoài tác dụng lên hệ

$$U(r) = -\frac{1}{2} M r^2 \omega^2 .$$

Dùng phân bố Boltzmann ta nhận được mật độ số hạt

$$n(r) = A \exp\left(-\frac{U(r)}{kT}\right) = A \exp\left(\frac{M\omega^2 r^2}{2kT}\right),$$

ở đây thừa số chuẩn hoá  $A$  có thể xác định theo  $\int n(r) dV = N$ , nhận được

$$A = \frac{NQ}{\pi L [e^{QR^2} - 1]}, \quad \text{với} \quad Q = \frac{M\omega^2}{2kT}.$$

Do đó ta có

$$n(r) = \frac{NM\omega^2}{2\pi kT L} \frac{\exp\left(\frac{M\omega^2 r^2}{2kT}\right)}{\exp\left(\frac{M\omega^2 R^2}{2kT}\right) - 1}.$$

### 2053

Giả thiết rằng một lượng khí hidrô trung hoà được làm nóng tới nhiệt độ  $T$  với  $T$  là đủ cao để hidrô hoàn toàn bị ion hoá, nhưng đủ thấp sao cho  $kT/m_e c^2 \ll 1$  ( $m_e$  là khối lượng của electron). Trong chất khí này, sẽ có một mật độ nhỏ các hạt positron bởi vì những quá trình như  $e^- + e^- \leftrightarrow e^- + e^- + e^+$  hoặc  $e^- + p \rightarrow e^- + p + e^- + e^+$  mà trong đó các cặp electron-positron sinh ra và huỷ đi.

Đối với bài toán này, bạn không cần hiểu chi tiết các phản ứng đó. Chỉ cần xem rằng chúng là những phản ứng làm thay đổi số các electron và positron, nhưng luôn luôn đảm bảo diện tích được bảo toàn.

Giả thiết rằng mật độ các proton là  $10^{10}/\text{cm}^3$ . Tìm các thể hoá học cho electron và positron. Tìm nhiệt độ mà ở đó mật độ của positron là  $1/\text{cm}^3$ . Tìm nhiệt độ mà mật độ positron là  $10^{10}/\text{cm}^3$ .

(Princeton)

**Lời giải:**

Khi  $kT/m_e c^2 \ll 1$ , có thể bỏ qua các phản ứng hạt nhân. Từ định luật bảo toàn điện tích, ta có  $n_- = n_p + n_+$ , trong đó  $n_-$ ,  $n_+$  tương ứng là mật độ số hạt của electron và positron. Đối với trường hợp phi tương đối tính và không suy biến, ta có

$$n_- = 2 \left( \frac{2\pi m_e k T}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu_- - m_e c^2}{kT}\right),$$

$$n_+ = 2 \left( \frac{2\pi m_e k T}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu_+ - m_e c^2}{kT}\right),$$

trong đó  $\mu_-$  và  $\mu_+$  tương ứng là các thê hoá học của electron và positron. Từ điều kiện cân bằng hoá học, ta thu được  $\mu_- = -\mu_+ = \mu$ . Do đó

$$n_+/n_- = \exp(-2\mu/kT).$$

Đối với  $n_+ = 1/\text{cm}^3$ ,  $n_- \approx n_p = 10^{10}/\text{cm}^3$ , ta có  $\exp(\mu/kT) = 10^5$  hay  $\mu/kT \approx 11,5$ . Đặt các kết quả này vào biểu thức của  $n_-$ , ta có  $T \approx 1,2 \times 10^8 \text{ K}$ , do đó  $\mu \approx 1,6 \times 10^{-7} \text{ erg}$ . Đối với  $n = 10^{10}/\text{cm}^3$ , ta được  $\exp(\mu/kT) = \sqrt{2}$ ,  $\mu/kT \approx 0,4$ . Đặt các kết quả này vào biểu thức của  $n_+$ , ta thu được  $T \approx 1,5 \times 10^8 \text{ K}$ ,  $\mu \approx 8,4 \times 10^{-9} \text{ erg}$ .

### 2054

Xét một mạng liên kết cứng gồm các nguyên tử spin  $1/2$  có thể phân biệt được đặt trong từ trường. Các spin có hai trạng thái với năng lượng  $-\mu_0 H$  và  $+\mu_0 H$  tương ứng với spin hướng lên ( $\uparrow$ ) và hướng xuống ( $\downarrow$ ) đối với  $H$ . Nhiệt độ của hệ là  $T$ .

- (a) Xác định hàm phân bố chính tắc  $z$  đối với hệ này.
- (b) Xác định mômen từ tổng cộng  $M = \mu_0(N_+ - N_-)$  của hệ.
- (c) Xác định entropy của hệ.

Wisconsin)

Lời giải:

- (a) Hàm phân bố là

$$z = \exp(x) + \exp(-x),$$

ở đây  $x = \mu_0 H/kT$ .

- (b) Mômen từ tổng cộng là

$$\begin{aligned} M &= \mu_0(N_+ - N_-) = NkT \frac{\partial}{\partial H} \ln z \\ &= N\mu_0 \tanh(x). \end{aligned}$$

- (c) Entropy của hệ là

$$\begin{aligned} S &= Nk(\ln z - \beta \partial \ln z / \partial \beta) \\ &= Nk(\ln 2 + \ln(\cosh x)) - x \tanh(x). \end{aligned}$$

## 2055

Một hệ nghịch từ bao gồm  $N$  lưỡng cực từ. Mỗi một lưỡng cực mang một mômen từ  $\mu$  có thể xem như là mômen từ cổ điển. Cho rằng hệ ở trong từ trường  $H$  với nhiệt độ hữu hạn  $T$ , tìm

- (a) độ từ hóa cảm ứng trong hệ, và
- (b) nhiệt dung riêng khi  $H$  không đổi.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

- (a) Mômen từ trung bình đối với một lưỡng cực là

$$\begin{aligned}\langle \mu \rangle &= \frac{\int \mu \cos \theta \exp(x \cos \theta) d\Omega}{\int \exp(x \cos \theta) d\Omega} \\ &= \frac{\mu \int_0^\pi \cos \theta \exp(x \cos \theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \exp(x \cos \theta) \sin \theta d\theta} = \mu \left[ \coth x - \frac{1}{x} \right],\end{aligned}$$

trong đó  $x = \mu H / kT$ . Do đó độ từ hóa cảm ứng trong hệ là

$$\langle M \rangle = N \langle \mu \rangle = N \mu \left( \coth x - \frac{1}{x} \right).$$

$$(b) c = \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial T} = -H \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial T} = Nk(1 - x^2 \operatorname{csch}^2 x^2).$$

## 2056

Xét một chất khí gồm các nguyên tử có spin 1/2 với mật độ  $n$  nguyên tử trong một đơn vị thể tích. Mỗi nguyên tử có một mômen từ là  $\mu$  và tương tác giữa các nguyên tử có thể bỏ qua. Giả thiết hệ tuân theo các thống kê cổ điển

(a) Xác suất tìm thấy một nguyên tử có  $\mu$  song song với từ trường ngoài  $H$  ở nhiệt độ tuyệt đối  $T$  là bao nhiêu? Cũng hỏi như vậy với trường hợp  $\mu$  đối song với  $H$ ?

(b) Tìm độ từ hóa trung bình của chất khí trong cả hai giới hạn nhiệt độ cao và thấp.

(c) Xác định độ cảm từ  $\chi$  theo  $\mu$ .

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Năng lượng tương tác giữa một nguyên tử và từ trường ngoài là  $\varepsilon = -\mu \cdot \mathbf{H}$ . Dùng phân bố Boltzmann cổ điển, số nguyên tử trong đơn vị thể tích, trong yếu tố góc khối  $d\Omega$  theo hướng  $(\theta, \varphi)$ , là

$$g \exp(-\beta\varepsilon) d\Omega = g \exp(\mu H \cos \theta / kT) d\Omega ,$$

trong đó  $\theta$  là góc giữa  $\mu$  và  $\mathbf{H}$  và  $g$  là thừa số chuẩn hóa được cho bởi

$$2\pi g \int_0^\pi e^{-\beta\varepsilon} \sin \theta d\theta = n ,$$

có nghĩa là,

$$g = \frac{n\mu H}{4\pi kT \sinh \frac{\mu H}{kT}} .$$

Suy ra mật độ xác suất để cho mômen từ của một nguyên tử song song với  $\mathbf{H}$  là

$$\frac{g}{n} e^{\mu H / kT} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\mu H}{kT} \right) e^{\mu H / kT} / \sinh \left( \frac{\mu H}{kT} \right)$$

và xác suất để cho mômen từ đổi song với  $\mathbf{H}$  là

$$\frac{g}{n} e^{-\mu H / kT} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\mu H}{kT} \right) e^{-\mu H / kT} / \sinh \left( \frac{\mu H}{kT} \right) .$$

(b) Độ từ hóa trung bình của chất khí ở nhiệt độ  $T$  là

$$\begin{aligned} \bar{M} &= 2\pi g \int_0^\pi e^{\mu H \cos \theta / kT} \mu \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= n\mu \left[ \coth \left( \frac{\mu H}{kT} \right) - \frac{kT}{\mu H} \right] . \end{aligned}$$

Tại những nhiệt độ cao,  $\frac{\mu H}{kT} \ll 1$ . Đặt  $\frac{\mu H}{kT} = x$ , và khai triển

$$\coth x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + \dots \right) - \frac{1}{x} \approx \frac{1}{3}x ,$$

do đó  $\bar{M} \approx \frac{n\mu^2}{3kT} H$ .

Tại những nhiệt độ thấp,  $x \gg 1$ , do đó

$$\coth x - \frac{1}{x} \approx 1 ,$$

và  $\bar{M} \approx n\mu$ .

(c) Độ cảm từ của hệ là

$$\chi(\mu) = \frac{\bar{M}}{H} \approx \begin{cases} n\mu^2/3kT, & \text{tại nhiệt độ cao}, \\ \infty, & \text{tại nhiệt độ thấp}. \end{cases}$$

Đó là độ từ hoá tự phát trong giới hạn nhiệt độ thấp.

### 2057

Một vật liệu bao gồm  $n$  hạt độc lập và ở trong một từ trường ngoài yếu  $H$ . Mỗi hạt có thể có một mômen từ  $m\mu$  hướng dọc theo từ trường, trong đó  $m = J, J-1, \dots, -J+1, -J, J$  với  $J$  là số nguyên,  $\mu$  là hằng số. Hệ ở nhiệt độ  $T$ .

- (a) Tìm hàm phân bố cho hệ này.
- (b) Tính độ từ hoá trung bình  $\bar{M}$  của vật liệu.
- (c) Tìm biểu thức tiệm cận của  $\bar{M}$  khi nhiệt độ  $T$  cao.

(MIT)

**Lời giải:**

(a) ) Hàm phân bố là

$$z = \sum_{m=-J}^J e^{m\mu H/kT} = \sinh \left[ \left( J + \frac{1}{2} \right) \mu H/kT \right] / \sinh \left( \frac{1}{2} \mu H/kT \right).$$

(b) Độ từ hoá trung bình là

$$\begin{aligned} \bar{M} &= - \left( \frac{\partial F}{\partial H} \right)_T = NkT \left( \frac{\partial}{\partial H} \ln z \right)_T \\ &= \frac{N\mu}{2} \left[ (2J+1) \coth \left[ (2J+1) \frac{\mu H}{2kT} \right] - \coth \frac{\mu H}{2kT} \right]. \end{aligned}$$

(c) Khi  $kT \gg \mu H$ , sử dụng hệ thức gần đúng

$$\coth x \approx \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{x^2}{3} \right) \quad \text{với } x \ll 1,$$

ta nhận được

$$\bar{M} \approx \frac{1}{3} NJ(J+1) \frac{\mu^2 H}{kT}.$$

## 2058

Hai lưỡng cực với các mômen lưỡng cực  $M_1$  và  $M_2$ , được giữ cố định cách nhau một khoảng  $R$ , chỉ có sự định hướng của các mômen là tự do. Hai lưỡng cực này cân bằng nhiệt với môi trường ở nhiệt độ  $T$ . Tính lực trung bình  $F$  giữa các lưỡng cực trong giới hạn nhiệt độ cao, tức  $\frac{M_1 M_2}{kT R^2} \ll 1$ . Hệ được coi như là hệ cổ điển.

**Chú ý:** Thể năng giữa hai lưỡng cực là:

$$\phi = \frac{[3(\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{R})(\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{R}) - (\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2)R^2]}{R^5} .$$

(Princeton)

**Lời giải:**

Chọn trục  $z$  dọc theo đường thẳng nối hai lưỡng cực  $M_1$  và  $M_2$ , ta có

$$\phi = \frac{M_1 M_2}{R^3} [2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] .$$

Hàm phân bố cổ điển là

$$\begin{aligned} z &= \int e^{-\beta \phi} d\Omega_1 d\Omega_2 \\ &= \int \exp \left[ -\frac{\beta M_1 M_2}{R^3} \right. \\ &\quad \left. (2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \right] d\Omega_1 d\Omega_2 . \end{aligned}$$

Vì  $\lambda = \beta M_1 M_2 / R^3 \ll 1$ , khai triển hàm dưới dấu tích phân đối với  $\lambda$ , và chỉ giữ lại các số hạng khác 0 thứ nhất và chú ý rằng tích phân của số hạng bậc nhất của  $\cos \theta$  bằng 0, ta có

$$\begin{aligned} z &= \int \left[ 1 + \frac{\lambda^2}{2} (2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2))^2 \right] d\Omega_1 d\Omega_2 \\ &= 16\pi^2 + \frac{32\pi^2}{9} \lambda^2 + \frac{4\pi^2}{9} = \frac{4\pi^2}{9} (37 + 8\lambda^2) , \\ u &= -\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{16\lambda}{37 + 8\lambda^2} \cdot \frac{M_1 M_2}{R^3} , \\ F &= -\frac{\partial u}{\partial R} = \frac{16kT}{R} \cdot \frac{74\lambda^2}{37 + 8\lambda^2} . \end{aligned}$$

## 2059

Phân tử của một chất khí lý tưởng gồm hai nguyên tử có khối lượng  $m$  liên kết cứng với nhau trên khoảng cách  $d$ . Các nguyên tử của mỗi phân tử mang các điện tích tương ứng  $q$  và  $-q$  và chất khí được đặt trong điện trường  $\varepsilon$ . Tìm độ phân cực trung bình và nhiệt dung riêng phân tử. Cho rằng có thể bỏ qua các hiệu ứng lượng tử.

Phát biểu điều kiện để cho giả thiết sau cùng là đúng.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Giả thiết rằng góc giữa một lưỡng cực phân tử và trường ngoài là  $\theta$ . Năng lượng của lưỡng cực trong trường là

$$E = -E_0 \cos \theta, \quad E_0 = dq\varepsilon.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{\int dq \cos \theta e^{E_0 \cos \theta / kT} d\Omega}{\int e^{E_0 \cos \theta / kT} d\Omega} = \frac{\int_0^\pi \cos \theta e^{E_0 \cos \theta / kT} \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{E_0 \cos \theta / kT} \sin \theta d\theta} dq \\ &= dq \left[ \coth \left( \frac{E_0}{kT} \right) - \frac{kT}{E_0} \right], \\ \bar{E} &= -\bar{p}\varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varepsilon} = \frac{dq}{\varepsilon} \cdot \frac{kT}{E_0} \left[ 1 - \frac{\left( \frac{E_0}{kT} \right)^2}{\sinh^2 \left( \frac{E_0}{kT} \right)} \right], \\ c &= \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = k \left[ 1 - \frac{\left( \frac{E_0}{kT} \right)^2}{\sinh^2 \left( \frac{E_0}{kT} \right)} \right]. \end{aligned}$$

Điều kiện để sự gần đúng cổ điển có thể áp dụng được là sự lượng tử hóa của năng lượng quay có thể bỏ qua, tức là  $kT \gg \frac{\hbar^2}{md^2}$ .

## 2060

Đáp ứng của các chất phân cực (ví dụ, HCl, H<sub>2</sub>O, ...) đối với các điện trường ngoài có thể được mô tả theo một mô hình cổ điển cho rằng mỗi phân tử là một mômen lưỡng cực điện vĩnh cửu với độ lớn  $p$ .

- (a) Viết biểu thức tổng quát cho độ phân cực vĩ mô trung bình  $\bar{p}$  (tức

mômen lưỡng cực trong đơn vị thể tích) đổi với một hệ thống gồm  $n$  phân tử trong một đơn vị thể tích ở nhiệt độ  $T$  đặt trong một điện trường đều  $E$ .

(b) Tính tường minh một kết quả gần đúng cho độ phân cực vĩ mô trung bình  $\bar{p}$  tại nhiệt độ cao ( $kT \gg pE$ ).

(MIT)

**Lời giải:**

(a) Năng lượng của một lưỡng cực trong điện trường là

$$u_e = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \theta .$$

Khi đó hàm phân bố là

$$z \approx \int_0^\pi e^{pE \cos \theta / kT} \sin \theta d\theta = \frac{2kT}{pE} \sinh \left( \frac{pE}{kT} \right) .$$

Độ phân cực là

$$\bar{p} = - \left( \frac{\partial F}{\partial E} \right)_{V,T,N} = nkT \frac{\partial \ln z}{\partial E} = - \frac{n k T}{E} + np \coth \frac{pE}{kT} .$$

(b) Với điều kiện  $x = \frac{pE}{kT} \ll 1$ ,  $\coth x \approx \frac{1}{3}x + \frac{1}{x}$  ta có

$$\bar{p} \approx np^2 E / 3kT .$$

## 2061

Entropy của một chất thuận từ lý tưởng trong một từ trường được cho gần đúng bởi

$$S = S_0 - CU^2 ,$$

trong đó  $U$  là năng lượng của hệ spin và  $C$  là một hằng số với các tham số cơ học cố định của hệ.

(a) Dùng định nghĩa cơ bản của nhiệt độ, xác định năng lượng  $U$  của hệ spin như là một hàm số của  $T$ .

(b) Phác họa đồ thị của  $U$  theo  $T$  đối với mọi giá trị của  $T$  ( $-\infty < T < \infty$ ).

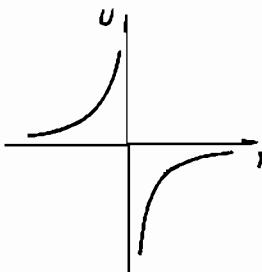
(c) Nói ngắn gọn về ý nghĩa vật lý mà bạn có thể rút ra ở phần nhiệt độ âm trong kết quả của bạn.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Từ định nghĩa về nhiệt độ

$$T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = -\frac{1}{2CU},$$

ta có  $U = -\frac{1}{2CT}$ .(b) Giả thiết  $C > 0$ . Sự thay đổi của  $U$  theo  $T$  được chỉ ra trên hình 2.14.

Hình 2.14

(c) Với những điều kiện bình thường, số hạt ở các trạng thái năng lượng cao hơn là ít hơn so với số hạt ở các trạng thái năng lượng thấp hơn. Ý nghĩa vật lý của phần nhiệt độ âm, đó là với điều kiện như thế số hạt ở một trạng thái kích thích lớn hơn số hạt ở trạng thái cơ bản. Điều đó có nghĩa là, có nhiều hạt với mômen từ đôi song so với từ trường hơn là các hạt với mômen từ song song với từ trường.

2062

Xét một hệ gồm  $N$  hạt không tương tác ( $N \gg 1$ ), trong đó năng lượng của mỗi hạt có thể giả thiết là có hai và chỉ hai giá trị phân biệt là 0 và  $E$  ( $E > 0$ ). Kí hiệu  $n_0$  và  $n_1$  lần lượt là độ cự trú của các mức năng lượng 0 và  $E$ . Năng lượng tổng cộng của hệ là  $U$  cố định.

(a) Tìm entropy của hệ.

(b) Tìm nhiệt độ như là một hàm số của  $U$ . Đối với khoảng giá trị nào của

$n_0$  thì  $T < 0$ ?

(c) Dòng nhiệt chảy theo hướng nào khi một hệ có nhiệt độ âm được cho tiếp xúc nhiệt với một hệ có nhiệt độ dương? Vì sao?

(Princeton)

Lời giải:

(a) Số các trạng thái là

$$\Omega = \frac{N!}{n_0!n_1!} .$$

Do đó  $S = k \ln \Omega = k \ln \frac{N!}{n_0!n_1!}$ .

(b)  $n_1/n_0 = \exp(-E/kT)$ , ở đây chúng ta đã giả thiết các mức năng lượng là không suy biến. Do vậy

$$T = \frac{E}{k} \cdot \frac{1}{\ln \frac{n_0}{n_1}} = \frac{E}{k} \cdot \frac{1}{\ln \left( \frac{NE-U}{U} \right)} .$$

Khi  $n_0 < N/2$ , ta nhận được  $T < 0$ .

(c) Nhiệt sẽ truyền từ một hệ nhiệt độ âm tới một hệ nhiệt độ dương. Đó là do hệ nhiệt độ âm có năng lượng cao hơn do sự đảo ngược số hạt, tức là có nhiều hạt ở các trạng thái năng lượng cao hơn so với ở các trạng thái năng lượng thấp hơn.

### 3. CÁC THỐNG KÊ BOSE-EINSTEIN VÀ FERMI-DIRAC (2063-2115)

#### 2063

Một hệ gồm  $N$  boson đồng nhất, không có spin, có khối lượng  $m$  ở trong một hộp có thể tích  $V = L^3$  ở nhiệt độ  $T > 0$ .

(a) Viết biểu thức tổng quát cho số hạt  $n(E)$  có năng lượng giữa  $\epsilon$  và  $\epsilon + d\epsilon$  theo khối lượng của  $m$  năng lượng, nhiệt độ, thể hóa học, thể tích, và bất kì đại lượng liên quan nào khác.

(b) Chứng tỏ rằng trong giới hạn mà khoảng cách trung bình  $d$  giữa các hạt là rất lớn so với bước sóng de Broglie của chúng (tức là  $d \gg \lambda$ ) phân bố trở thành bằng phân bố được tính toán bằng cách dùng hàm phân bố cổ điển (Boltzmann).

(c) Tính hiệu số bậc nhất về năng lượng trung bình giữa một hệ gồm  $N$  hạt không spin, không đồng nhất và một hệ gồm  $N$  boson đồng nhất, không

spin khi  $d \gg \lambda$ . Đối với cả hai hệ, hộp lập phương có thể tích  $V = L^3$  và các hạt có khối lượng  $m$ .

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Số hạt là

$$n(\varepsilon) = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1} d\varepsilon .$$

(b) Trong phép gần đúng khí loãng, ta có  $\exp(-\mu/kT) \gg 1$ , và phân bố Bose-Einstein trở thành phân bố Boltzmann. Sau đây ta sẽ chứng minh rằng điều kiện giới hạn này chính là  $d \gg \lambda$ .

Vì

$$\begin{aligned} N &= \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \cdot \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} e^{\frac{\mu}{kT}} d\varepsilon \\ &= V \left( \frac{2\pi m k T}{\hbar^2} \right)^{3/2} e^{\frac{\mu}{kT}} , \end{aligned}$$

ta có

$$e^{-\frac{\mu}{kT}} = \frac{V}{N} \cdot \frac{1}{\lambda^3} = \left( \frac{d}{\lambda} \right)^3 ,$$

trong đó  $\lambda = \hbar/\sqrt{2\pi mkT}$  là bước sóng de Broglie của chuyển động nhiệt của hạt và  $d = \sqrt[3]{V/N}$ .

Như vậy phép gần đúng khi  $\exp(-\mu/kT) \gg 1$  tương đương với  $d \gg \lambda$ .

(c) Trong gần đúng bậc nhất

$$\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1} \approx e^{-(\varepsilon-\mu)/kT} (1 + e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}) ,$$

năng lượng trung bình là

$$\begin{aligned} \overline{E} &= \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \left[ \int_0^\infty \varepsilon \sqrt{\varepsilon} e^{\mu/kT} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \varepsilon \sqrt{\varepsilon} e^{2\mu/kT} e^{-2\varepsilon/kT} d\varepsilon \right] = \frac{3}{2} N k T \left( 1 + \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{\lambda^3}{d^3} \right) . \end{aligned}$$

## 2064

Xét một chất khí lượng tử gồm các boson không spin, không tương tác, mỗi boson có khối lượng  $m$  chuyển động tự do trong thể tích  $V$ .

(a) Tìm năng lượng và nhiệt dung riêng trong vùng nhiệt độ rất thấp. Hãy giải thích tại sao, sẽ là thích hợp nếu ở các nhiệt độ thấp có thể đặt thế hoá học bằng 0.

(b) Hãy chỉ rõ các tính toán trên phải được sửa đổi như thế nào để dùng được cho khí photon (khối lượng nghỉ = 0). Chứng minh rằng năng lượng tỷ lệ với  $T^4$ .

Chú ý: Đặt tất cả tích phân dưới dạng không thứ nguyên, nhưng không cần tính.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Phân bố Bose

$$\frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1}$$

đòi hỏi  $\mu \leq 0$ . Một cách tổng quát

$$n = \int \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1} \cdot \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon .$$

Khi  $T$  giảm, thế hoá học  $\mu$  phải tăng cho đến khi  $\mu = 0$ , khi đó

$$n = \int \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon .$$

Sự ngưng tụ Bose xảy ra khi nhiệt độ tiếp tục giảm với  $\mu = 0$ . Do đó trong giới hạn của nhiệt độ rất thấp, hệ Bose có thể được coi như có  $\mu = 0$ . Số hạt ở trạng thái không ngưng tụ là không bảo toàn. Do vậy mật độ năng lượng  $u$  và nhiệt dung riêng  $c$  có thể nhận được như sau

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \cdot \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon \\ &= \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} (kT)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx , \\ c &= 5\pi k \left( \frac{2mkT}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx . \end{aligned}$$

(b) Đối với khí photon, ta có  $\mu = 0$  ở nhiệt độ bất kì và  $\varepsilon = \hbar\omega$ .

Mật độ trạng thái là  $\frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$ , và mật độ năng lượng là

$$u = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int \frac{\hbar \omega^3}{e^{\hbar \omega/kT} - 1} d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left( \frac{kT}{\hbar} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

## 2065

Một chất khí gồm  $N$  hạt bose không có spin với khối lượng  $m$  được nhốt kín trong một thể tích  $V$  ở nhiệt độ  $T$ .

(a) Tìm một biểu thức cho mật độ các trạng thái một hạt  $D(\varepsilon)$  như là một hàm của năng lượng một hạt  $\varepsilon$ . Vẽ phác đồ thị của kết quả nhận được.

(b) Viết một biểu thức cho độ cư trú trung bình của một trạng thái một hạt  $\bar{n}_\varepsilon$ , như là một hàm của  $\varepsilon, T$  và thể hoá học  $\mu(T)$ . Vẽ đồ thị hàm số này trên cùng hệ toạ độ như đồ thị ở câu (a) đối với một nhiệt độ tương đối cao, tức là một nhiệt độ trên sự chuyển dịch Bose-Einstein. Chỉ ra vị trí trên trục  $\varepsilon$  mà  $\varepsilon = \mu$ .

(c) Viết một biểu thức tích phân gián tiếp xác định  $\mu(T)$ . Tham khảo đồ thị vẽ phác của bạn ở câu (a), hãy xác định xem  $\mu(T)$  biến đổi theo hướng nào khi  $T$  giảm.

(d) Tìm một biểu thức cho nhiệt độ chuyển pha Bose-Einstein  $T_c$ , mà dưới nhiệt độ đó ta phải có một sự chiếm chỗ vĩ mô của một vài trạng thái một hạt. Cho đáp số của bạn dưới dạng một tích phân không có thứ nguyên.

(e)  $\mu(T)$  như thế nào đối với  $T < T_c$ ?

Mô tả  $\bar{n}(\varepsilon, T)$  đối với  $T < T_c$ .

(f) Tìm một biểu thức chính xác cho năng lượng toàn phần  $U(T, V)$  của chất khí đối với trường hợp  $T < T_c$ . Cho đáp số của bạn dưới dạng một tích phân không có thứ nguyên.

(MIT)

**Lời giải:**

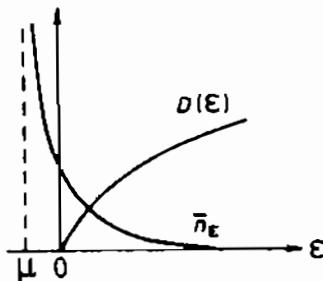
(a) Từ  $\varepsilon = p^2/2m$  và

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{4\pi V}{\hbar^3} p^2 dp$$

ta tìm được

$$D(\varepsilon) = \frac{2\pi V}{\hbar^3} (2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2}.$$

Kết quả được biểu diễn bằng đồ thị trên hình 2.15.



Hình 2.15

$$(b) \bar{n}_\varepsilon = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1} \quad (\mu \leq 0) .$$

$$\begin{aligned} (c) \text{ Với } \varepsilon = \frac{p^2}{2m} \text{ ta có } N &= \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty p^2 \bar{n}_\varepsilon dp \\ &= \frac{2\pi(2m)^{3/2}V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} \frac{d\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1}, \\ \text{hay } N/V &= \frac{2\pi}{h^3} (2mkT)^{3/2} \int_0^\infty x^{1/2} \frac{dx}{e^{x-x_\mu} - 1}, \end{aligned}$$

trong đó  $x_\mu = \mu/kT \leq 0$ . Vì  $N/V$  không đổi khi  $T$  giảm,  $\mu(T)$  tăng và dần tới 0.

(d) Giả sử  $n$  là mật độ số hạt và  $T_c$  là nhiệt độ tối hạn. Lưu ý rằng ở nhiệt độ  $T_c$  thế hoá học  $\mu$  gần như bằng 0 và số hạt ở trạng thái cơ bản vẫn gần tới 0, do đó ta có

$$\begin{aligned} n &= \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \\ &= \frac{2\pi}{h^3} (2mkT_c)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1}, \end{aligned}$$

trong đó tích phân

$$A = \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1} = 1.306\sqrt{\pi} .$$

Suy ra

$$T_c = \frac{\hbar^2}{2mk} \left( \frac{n}{2\pi A} \right)^{2/3} .$$

(e) Đối với boson,  $\mu < 0$ . Khi  $T \leq T_c$ ,  $\mu \approx 0$  và ta có

$$\bar{n}_{\varepsilon>0} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) - 1},$$

và

$$\begin{aligned}\bar{n}_{\varepsilon=0} &= n \left[ 1 - \frac{2\pi}{h^3} (2mkT)^{3/2} \int_0^\infty x^{1/2} \frac{dx}{e^x - 1} \right] \\ &= n \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right].\end{aligned}$$

(f) Khi  $T < T_c$ , ta có

$$\begin{aligned}U &= \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} (kT)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1} \\ &= 0,770 N kT \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2}.\end{aligned}$$

## 2066

(a) Trong cơ học thống kê lượng tử, hãy định nghĩa ma trận mật độ một hạt trong  $\mathbf{r}$ -biểu diễn, ở đây  $\mathbf{r}$  là vị trí của hạt.

(b) Đối với một hệ gồm  $N$  boson đồng nhất tự do, cho

$$\rho_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \langle N_k \rangle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}},$$

ở đây  $\langle N_k \rangle$  là số hạt trung bình nhiệt trong trạng thái xung lượng  $\mathbf{k}$ . Thảo luận về dáng điệu giới hạn của  $\rho_1(\mathbf{r})$  khi  $r \rightarrow \infty$ , khi nhiệt độ  $T$  chuyển từ  $T > T_c$  đến  $T < T_c$ , trong đó  $T_c$  là nhiệt độ ngưng tụ Bose-Einstein. Trong trường hợp  $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(\mathbf{r})$  tiến đến 0, bạn có thể chỉ ra nó dần tới 0 như thế nào khi  $r$  trở nên lớn và lớn hơn?

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Hàm Hamilton một hạt là  $H = p^2/2m$ , và trạng thái riêng năng lượng là  $|E\rangle$ . Do đó ma trận mật độ trong biểu diễn năng lượng là  $\rho(E) =$

$\exp(-E/k_B T)$ , mà ta có thể chuyển nó về biểu diễn toạ độ

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r} | \rho | \mathbf{r}' \rangle &= \sum_{E, E'} \langle \mathbf{r} | E \rangle \langle E | e^{-E/k_B T} | E' \rangle \langle E' | \mathbf{r}' \rangle \\ &= \sum_{E, E'} \varphi_E(\mathbf{r}) e^{-E/k_B T} \delta_{EE'} \varphi_{E'}^*(\mathbf{r}) \\ &= \sum_E \varphi_E(\mathbf{r}) e^{-E/k_B T} \varphi_E^*(\mathbf{r}') ,\end{aligned}$$

ở đây  $k_B$  là hằng số Boltzmann. Hàm sóng một hạt dừng là

$$\varphi_E(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - iEt} ,$$

trong đó  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ . Thay vào biểu thức trên, ta được

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r} | \rho | \mathbf{r}' \rangle &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \hbar^2 k^2 / 8\pi^2 m k_B T} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \hbar^2 k^2 / 8\pi^2 m k_B T} \\ &= \left( \frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-mk_B T(r-r')^2 2\pi^2/\hbar^2} .\end{aligned}$$

(b) Đối với các boson tự do, ta có

$$\langle N_{\mathbf{k}} \rangle = [\exp(\hbar^2 k^2 / 2m - \mu) / k_B T - 1]^{-1} .$$

Do đó

$$\begin{aligned}\rho_1(\mathbf{r}) &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} [e^{(\hbar^2 k^2 / 8\pi^2 m - \mu) / k_B T} - 1]^{-1} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} [e^{(\hbar^2 k^2 / 8\pi^2 m - \mu) / k_B T} - 1]^{-1} \\ &= \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty dk \cdot k \sin kr [e^{(\hbar^2 k^2 / 8\pi^2 m - \mu) k_B T} - 1]^{-1} .\end{aligned}$$

$\mu = 0$  khi nhiệt độ  $T$  chuyển từ  $T > T_c$  tới  $T < T_c$ , do đó

$$\rho_1(\mathbf{r}) = \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty dk k \sin kr [e^{\hbar^2 k^2 / 8\pi^2 m k_B T_c} - 1]^{-1} .$$

Khi  $r \rightarrow \infty$ , một cách gần đúng ta có

$$\begin{aligned}\rho(r) &\approx \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{1}{r^3} \int_0^{\sqrt{2mk_B T_c r}/\hbar} dx \cdot x \sin x \left[ e^{\hbar^2 x^2 / 8\pi^2 m k_B T_c r^2} - 1 \right]^{-1} \\ &\approx \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \left( \int^{\sqrt{2mk_B T_c r}/\hbar} dx \frac{\sin x}{x} \right) \frac{2mk_B T_c}{\hbar^2} \\ &\approx \frac{4mk_B T_c}{(2\pi)^2 \hbar^2 r} \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} \\ &\approx \frac{mk_B T_c}{2\pi \hbar^2} \frac{1}{r}.\end{aligned}$$

### 2067

Xét một chất khí gồm các boson đồng nhất phi tương đối tính và không tương tác. Hãy giải thích có hay không và vì sao hiệu ứng ngưng tụ Bose-Einstein áp dụng cho chất khí ba chiều cũng áp dụng được cho chất khí hai chiều và chất khí một chiều.

(Princeton)

**Lời giải:**

Nói ngắn gọn, sự ngưng tụ Bose-Einstein xảy ra khi  $\mu = 0$ . Đối với chất khí hai chiều, ta có

$$\begin{aligned}N &= \frac{2\pi mA}{h^2} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1} \\ &= \frac{2\pi mA}{h^2} \int_0^\infty \left( \sum_{l=1}^\infty e^{-l(\varepsilon-\mu)/kT} \right) d\varepsilon \\ &= \frac{2\pi mA}{h^2} kT \sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l} e^{l\mu/kT}.\end{aligned}$$

Nếu  $\mu = 0$ , và sự ngưng tụ Bose-Einstein không xảy ra.

Đối với chất khí một chiều, ta có

$$N = \frac{\sqrt{2m}L}{2h} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon} [e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1]}.$$

Nếu  $\mu = 0$ , tích phân trên cũng phân kì, tức là sự ngưng tụ Bose-Einstein một lần nữa lại không xảy ra.

## 2068

Xét một chất khí photon được nhốt trong thể tích  $V$  và cân bằng ở nhiệt độ  $T$ . Photon là một hạt không có khối lượng nghỉ do đó  $\epsilon = pc$ .

- (a) Xác định thế hoá học của khí trên. Giải thích.
- (b) Xác định sự phụ thuộc của số photon trong thể tích  $V$  vào nhiệt độ.
- (c) Người ta có thể viết mật độ năng lượng dưới dạng

$$\frac{\bar{E}}{V} = \int_0^\infty \rho(\omega) d\omega .$$

Xác định dạng của  $\rho(\omega)$ , hàm mật độ phổ của năng lượng.

- (d) Xác định sự phụ thuộc của năng lượng  $\bar{E}$  vào nhiệt độ?

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Thế hoá học của khí photon bằng 0. Vì số photon không bảo toàn ở nhiệt độ và thể tích đã cho, nên số photon trung bình được xác định bằng biểu thức  $\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = 0$ . Do đó

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{N}}\right)_{T,V} = 0 .$$

(b) Mật độ trạng thái là  $8\pi V p^2 dp/h^3$ , hay  $V\omega^2 d\omega/\pi^2 c^3$ . Vì vậy số photon là

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \int \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega \\ &= \frac{V}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \int_0^\infty \frac{\alpha^2 d\alpha}{e^\alpha - 1} \propto T^3 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{c}), (\text{d}) \quad \frac{\bar{E}}{V} &= \int \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega \\ &= \frac{(kT)^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} . \end{aligned}$$

Do đó

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \text{ và } \bar{E} \propto T^4 .$$

2069

(a) Chứng tỏ rằng đối với khí photon  $p = U/3V$ .

(b) Sử dụng các lý luận nhiệt động lực học (các Nguyên lý thứ nhất và thứ hai), và hệ thức giữa áp suất và mật độ năng lượng ở trên để nhận được sự phụ thuộc của mật độ năng lượng vào nhiệt độ của khí photon.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Mật độ trạng thái là

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \alpha V \varepsilon^2 d\varepsilon ,$$

trong đó  $\alpha$  là hằng số.

Với

$$\begin{aligned} \ln \Xi &= - \int D(\varepsilon) \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon})d\varepsilon , \\ p &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln \Xi \\ &= -\frac{\alpha}{\beta} \int \varepsilon^2 \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon})d\varepsilon , \end{aligned}$$

ta có

$$p = \frac{1}{3V} \int_0^\infty V \alpha \varepsilon^2 \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon = \frac{U}{3V} .$$

(b) Đối với bức xạ nhiệt, ta có

$$U(T, V) = u(T)V .$$

Sử dụng công thức sau của nhiệt động lực học

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p ,$$

ta nhận được  $u = \frac{T}{3} \frac{du}{dT} - \frac{u}{3}$ , tức là  $u = \gamma T^4$ , trong đó  $\gamma$  là hằng số.

## 2070

Xét một hình hộp lập phương với cạnh  $L$  và không vật chất gì ở bên trong. Các vách hộp được giữ cố định ở nhiệt độ  $T$ , và chúng cân bằng nhiệt với trường bức xạ điện từ ở bên trong hộp.

(a) Tìm năng lượng điện từ trung bình trong một đơn vị thể tích với khoảng tần số từ  $\omega$  đến  $\omega + d\omega$  như là một hàm số của  $\omega$  và  $T$ . (Nếu bạn muốn bắt đầu với một hàm phân bố đã biết – thí dụ, Maxwell-Boltzmann, Planck, v.v. – thì không cần dẫn ra hàm này).

(b) Tìm sự phụ thuộc của năng lượng điện từ toàn phần trong một đơn vị thể tích vào nhiệt độ. (Gợi ý: để trả lời câu hỏi này, thực sự không cần phải tính tích phân trong kết quả của câu (a)).

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Năng lượng điện từ trung bình trong khoảng xung lượng  $p \rightarrow p + dp$  được cho bởi

$$dE_p = 2 \cdot \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{4\pi p^2 dp \hbar\omega}{e^{\hbar\omega/2\pi kT} - 1},$$

trong đó thừa số 2 tương ứng với hai hướng phân cực của sóng điện từ và  $V = L^3$ .

Dùng  $p = \hbar\omega/c$ , ta nhận được năng lượng điện từ trung bình trong khoảng tần  $\omega \rightarrow \omega + d\omega$ :

$$dE_\omega = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/2\pi kT} - 1}.$$

Mật độ năng lượng tương ứng là

$$du_\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/2\pi kT} - 1}.$$

(b) Năng lượng điện từ toàn phần trong một đơn vị thể tích là

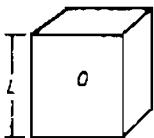
$$u = \int_0^\infty du_\omega = \frac{(kT)^4}{\pi^2 (\hbar c)^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Do đó  $u \propto T^4$ .

## 2071

Sự mô tả bức xạ điện từ của một vật đen tuyệt đối của vật lý cổ điển là một thất bại lịch sử. Xét một mô hình đơn giản cho một vật đen tuyệt đối gồm một hốc hình lập phương có cạnh  $L$  với một lỗ nhỏ ở một mặt.

(a) Giả thiết năng lượng được phân bố đều theo vật lý cổ điển, hãy rút ra biểu thức đối với năng lượng trung bình trong một đơn vị thể tích và đơn vị tần số (Định luật Rayleigh-Jeans). Vì sao kết quả này sai lệch so với quan sát thực tế?



Hình 2.16

(b) Bây giờ sử dụng các ý tưởng lượng tử, lặp lại các tính toán trên để nhận được một biểu thức mô tả đúng đắn phân bố phổ quan sát được (Định luật Planck).

(c) Tìm sự phụ thuộc của công suất phát xạ toàn phần từ lỗ vào nhiệt độ.  
(CUSPEA)

**Lời giải:**

(a) Cho một dãy gồm ba số nguyên dương  $(n_1, n_2, n_3)$ , trường điện từ khi cân bằng nhiệt ở trong hốc có hai kiểu dao động với tần số  $\nu(n_1, n_2, n_3) = \frac{c}{2L}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2}$ . Do đó, số các kiểu (dao động - ND) trong khoảng tần số  $\Delta\nu$  là

$$\left(\frac{4\pi}{8}\nu^2\Delta\nu\right)\left(\frac{2L}{c}\right)^2 \cdot 2.$$

Như vậy sự phân bố đều năng lượng cho một mật độ năng lượng

$$u_\nu = \frac{1}{L^3} \frac{dE}{d\nu} = \frac{1}{L^3} \cdot \frac{kT \cdot \frac{4\pi}{8}\nu^2\Delta\nu \cdot \left(\frac{2L}{c}\right)^2 \cdot 2}{\Delta\nu} \\ = 8\pi\nu^2kT/c^3.$$

Khi  $\nu$  rất lớn, biểu thức này không phù hợp với các quan sát thực nghiệm bởi

vì nó ngược  $u_\nu \propto \nu^2$ .

(b) Đối với các dao động với tần số  $\nu$ , năng lượng trung bình là

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}} &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta nh\nu} \Big|_{\beta=\frac{1}{kT}} \\ &= h\nu e^{-h\nu\beta} / (1 - e^{-h\nu\beta}) = \frac{h\nu}{e^{h\nu\beta} - 1}, \end{aligned}$$

Biểu thức này thay thế cho đại lượng cổ điển  $kT$  để nhận được

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu\beta} - 1}.$$

(c) Năng lượng được bức xạ từ lỗ trong đơn vị thời gian là

$$u \propto \int_0^{\infty} u_\nu d\nu \propto T^4.$$

## 2072

Bức xạ điện từ tuân theo phân bố Planck choán đầy một hốc có thể tích  $V$ . Ban đầu  $\omega_i$  là tần số ứng với cực đại của đường cong  $u_i(\omega)$ , là mật độ năng lượng trên một đơn vị tần số góc đối với  $\omega$ . Nếu thể tích được giãn nở một cách đường như tinh đến  $2V$ , hãy xác định tần số đỉnh cuối cùng  $\omega_f$  của đường cong phân bố  $u_f(\omega)$ . Giãn nở là đoạn nhiệt.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Vì phân bố Planck cho bởi  $1/[\exp(\hbar\omega/kT) - 1]$  và mật độ trạng thái của khí photon là

$$D(\omega)d\omega = a\omega^2d\omega \quad (a = \text{const}),$$

tần số góc  $\omega$  mà nó làm  $u(\omega)$  đạt cực trị là  $\omega = \gamma T$ , trong đó  $\gamma$  là một hằng số. Mặt khác, từ  $dU = TdS - pdV$  và  $U = 3pV$ , ta nhận được  $V^4p^3 = \text{const}$  khi  $dS = 0$ . Vì  $p \propto T^4$ , ta có

$$VT^3 = \text{const.},$$

$$\begin{aligned} T_f &= \left( \frac{V_i}{V_f} \right)^{1/3} T_i = \frac{T_i}{3\sqrt[3]{2}}, \\ \omega_f &= \frac{\omega_i}{3\sqrt[3]{2}}. \end{aligned}$$

## 2073

Một laser He -Ne phát ra một chùm tia gần như đơn sắc với 6328Å. Chùm tia có một công suất phát ra 1 mw ( $10^{-3}$  W), một góc lệch radian, và một độ rộng vạch phổ 0,01Å. Nếu một vật đèn có diện tích  $1 \text{ cm}^2$  được dùng để phát ra một chùm tia như thế sau khi đã lọc một cách thích hợp, thì nhiệt độ của vật đèn gần đúng là bao nhiêu?

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Khảo sát bức xạ vật đèn trong một hốc, ta nhận được mật độ số photon trong khoảng  $d\varepsilon d\Omega$  là

$$dn = \frac{2}{h^3} \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \cdot \frac{\varepsilon^2}{c^3} d\varepsilon d\Omega .$$

Số photon trong chùm tia laser bay xuyên qua diện tích A trong đơn vị thời gian là  $dn' = cAdn$ , và công suất phát ra là  $W = \varepsilon dn'$ .

Đưa  $\varepsilon = hc/\lambda$  và  $d\Omega = \pi(d\theta)^2$  vào biểu thức trên, ta nhận được

$$W = W_0 \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} ,$$

**ở đây**

$$W_0 = \frac{2\pi A h c^2 d\lambda (d\theta)^2}{\lambda^5} .$$

**Do đó**

$$T = \frac{hc}{\lambda k} \cdot \frac{1}{\ln(\frac{W_0}{W} + 1)} .$$

Sử dụng các đại lượng đã biết, ta nhận được

$$W_0 = 3,60 \times 10^{-9} \text{ W} \quad \text{và} \quad T = 6 \times 10^9 \text{ K} .$$

## 2074

(a) Chứng tỏ rằng số photon trong cân bằng tại nhiệt độ  $T$  bên trong một cái hốc với thể tích  $V$  bằng  $N = V(kT/\hbar c)^3$  lần một hằng số.

(b) Sử dụng kết quả này để nhận được một biểu thức định lượng cho nhiệt dung đẳng tích của khí photon.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Mật độ trạng thái của khí photon được cho bởi

$$dg = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \varepsilon^2 d\varepsilon .$$

Do đó

$$\begin{aligned} N &= \int \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \varepsilon^2 \frac{1}{e^{\varepsilon \beta} - 1} d\varepsilon \\ &= V \cdot \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^2 \cdot \alpha , \end{aligned}$$

trong đó

$$\beta = \frac{1}{kT}, \text{ và hằng số } \alpha = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{e^\lambda - 1} d\lambda .$$

(b) Mật độ năng lượng là

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \varepsilon^2 \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon \beta} - 1} d\varepsilon \\ &= kTV \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \cdot \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\lambda^3 d\lambda}{e^\lambda - 1} , \end{aligned}$$

Do đó  $C_v \propto T^3$ .

## 2075

Như bạn đã biết, bức xạ vật đen 3 K tràn ngập trong vũ trụ. Theo một nhận xét đơn giản, bức xạ này xuất hiện do sự giãn nở đoạn nhiệt của một đám mây photon rất nóng được sinh ra trong thời gian Vụ nổ lớn (Big Bang).

(a) Vì sao sự giãn nở xảy ra gần đây là đoạn nhiệt hơn là, ví dụ, đẳng nhiệt?

(b) Nếu trong  $10^{10}$  năm tới thể tích của vũ trụ tăng lên hai lần, thì nhiệt độ của bức xạ vật đen sẽ là bao nhiêu? (Nêu rõ phép tính của bạn.)

(c) Viết một tích phân cho phép xác định đám mây bức xạ này chứa bao nhiêu năng lượng trong một mét khối. Ước lượng kết quả về bậc độ lớn theo đơn vị  $J/m^3$ .

(Chicago)

**Lời giải:**

(a) Đám mây photon là một hệ cô lập, do đó sự giãn nở của nó là đoạn nhiệt.

(b) Mật độ năng lượng của bức xạ vật đen là  $u = aT^4$ , do đó năng lượng toàn phần  $E \propto VT^4$ . Từ công thức  $TdS = dE + pdV$ , ta có

$$T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \propto VT^3.$$

Suy ra  $S = VT^3$ . const.

Đối với sự giãn nở đoạn nhiệt thuận nghịch, entropy  $S$  không thay đổi. Do vậy khi  $V$  tăng gấp đôi  $T$  sẽ giảm một thừa số  $(2)^{-1/3}$ . Như vậy sau  $10^{10}$  năm nữa, nhiệt độ của bức xạ vật đen sẽ trở thành  $T = 3 \text{ K}/2^{1/3}$ .

(c) Bức xạ vật đen tuân theo thống kê Bose -Einstein

$$\frac{E}{V} = 2 \int \frac{d^3 p}{h^3} pc \frac{1}{e^{\beta pc} - 1} = \frac{8\pi c}{h^3} \frac{1}{(\beta c)^4} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1},$$

trong đó thừa số 2 là số phân cực của mỗi trạng thái. Do đó

$$\frac{E}{V} = \frac{8\pi^5}{15} \frac{(kT)^4}{(hc)^3} = 10^{-14} \text{ J/m}^3.$$

## 2076

Bức xạ vật đen (các photon) ở nhiệt độ  $T = 3 \text{ K}$  tràn ngập vũ trụ của chúng ta. Điều này ngụ ý rằng đó là vết tích của sự giãn nở đầu tiên sau “Vụ nổ lớn” (Big Bang).

(a) Biểu diễn mật độ số hạt photon  $n$  bằng một biểu thức giải tích theo  $T$  và các hằng số vũ trụ. Dáp số của bạn cần chỉ rõ sự phụ thuộc vào  $T$  và vào các hằng số vũ trụ. Tuy nhiên, có thể có một thừa số được viết dưới dạng một tích phân không thứ nguyên mà bạn không cần phải tính trong câu này.

(b) Bây giờ hãy ước lượng thô tích phân trên, dùng sự hiểu biết của bạn về các hằng số vũ trụ, và xác định thô  $n$  trong khoảng hai bậc độ lớn, đối với  $T = 3 \text{ K}$ .

**Lời giải:**

(a) Phân bố Bose cho bởi

$$n(k) = 1/[\exp(\beta\epsilon(k)) - 1] .$$

Số photon khi đó là

$$N = 2 \cdot V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta\hbar ck/2\pi} - 1} ,$$

trong đó  $\epsilon(k) = \hbar c k$  đối với các photon và  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ . Thừa số 2 là do có hai hướng phân cực. Do đó

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \cdot I ,$$

với

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x - 1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty dx \cdot x^2 e^{-nx} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 2,4 . \end{aligned}$$

(b) Khi  $T = 3$  K,  $n \approx 1000/\text{cm}^3$ .

2077

Chúng ta được bao quanh bởi bức xạ vật đen (photon) ở 3 K. Hãy khảo sát câu hỏi: liệu có thể tồn tại hay không một cuộc “tắm” tương tự trong các nơtrinô nhiệt.

(a) Có thể thực hiện các loại thí nghiệm nào trong phòng thí nghiệm để đưa ra các giới hạn tốt nhất về nhiệt độ của khí nơtrinô?

(b) Khí photon chiếm khoảng  $10^{-6}$  mật độ năng lượng cần thiết để vũ trụ là đóng. Nếu giả thiết vũ trụ vừa đủ để là đóng, thì nghiên cứu này sẽ đưa ra giới hạn có bậc độ lớn là bao nhiêu về nhiệt độ của nơtrinô?

(c) Trong mô hình chuẩn của Big bang, bạn kì vọng nhiệt độ của nơtrinô là bao nhiêu (phỏng chừng)?

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Đây là những thí nghiệm để nghiên cứu phản ứng dòng yếu trung hoà giữa các neutrino và electron,  $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$ , bằng cách sử dụng các neutrino được tạo ra từ máy gia tốc ở CERN. Các phản ứng như vậy đã không được phát hiện trên nền (phông) và giới hạn độ tin cậy của các phép đo là 90%. Điều này cho một giới hạn trên đối với tiết diện tương tác yếu  $\sigma < 2,6 \times 10^{-42} E_\nu \text{ cm}^2/\text{electron}$ . Với  $E_\nu \sim kT$  ta thu được  $T < 10^6 \text{ K}$ .

(b) Mật độ năng lượng của khí neutrino là  $\rho_\nu \approx a T_\nu^4$ , và mật độ năng lượng của khí photon là  $\rho_\gamma = a T^4$ . Vì  $\rho_\nu \leq 10^{-6} \rho_\gamma$  ta có  $T_\nu \leq T/10^{1.5}$ . Đối với  $T \simeq 3 \text{ K}$ , ta nhận được  $T_\nu < 0.1 \text{ K}$ .

(c) Ở thời kì ban đầu của vũ trụ (khi  $kT \gtrsim m_\mu c^2$ ) các neutrino và các hạt vật chất khác như là photon ở trong trạng thái cân bằng nhiệt với  $T_\nu = T_\gamma$ ,  $\rho_\nu \approx \rho_\gamma$  và cả hai đều có phân bố năng lượng giống như phân bố năng lượng của bức xạ vật đen. Sau đó khi neutrino giãn nở tự do cùng với vũ trụ và mật độ năng lượng của nó biến đổi theo hàm số  $\rho_\nu(\nu/T)$ , trong đó tần số  $\nu \propto \frac{1}{R}$ , nhiệt độ  $T \propto \frac{1}{R}$ ,  $R$  là "bán kính" của vũ trụ. Do đó phổ năng lượng neutrino luôn luôn tuân theo phổ vật đen, hoàn toàn giống như photon. Tuy nhiên, vì sự tạo thành của photon là do sự huỷ cặp electron - positron  $\rho_\gamma > \rho_\nu$ , và nhiệt độ của khí photon hơi cao hơn nhiệt độ của khí neutrino. Do nhiệt độ của khí photon hiện nay là 3 K, nên ta cho rằng  $T_\nu < 3 \text{ K}$ .

### 2078

Hãy tưởng tượng vũ trụ là một vòm cầu với bán kính  $10^{28} \text{ cm}$  và tường vòm không thể xuyên qua.

(a) Nếu nhiệt độ trong vòm cầu là 3 K, hãy ước lượng tổng số photon trong vũ trụ và tổng năng lượng của các photon này.

(b) Nếu nhiệt độ là 0 K, và vũ trụ chứa  $10^{80}$  electron tuân theo phân bố Fermi, hãy tính xung lượng Fermi của các electron.

(Columbia)

**Lời giải:**

(a) Số phôtôen có tần số góc trong khoảng từ  $\omega$  đến  $\omega + d\omega$  là

$$dN = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}, \quad \beta = \frac{1}{kT}.$$

Tổng số photon là

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\beta\omega\hbar/2\pi} - 1} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{1}{(\beta\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \\
 &= \frac{V}{\pi^2} \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \cdot 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx \frac{2 \times 1, 2}{\pi^2} \cdot V \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \\
 &= \frac{2, 4}{\pi^2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (10^{28})^3 \cdot \left( \frac{1, 38 \times 10^{-16} \times 3}{1, 05 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{10}} \right)^3 \\
 &\approx 2, 5 \times 10^{87}.
 \end{aligned}$$

Tổng năng lượng là

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta\omega\hbar/2\pi} - 1} = \frac{\pi^2 k^4}{15(\hbar c/2\pi)^3} VT^4 \\
 &\approx 2, 6 \times 10^{72} \text{ ergs}.
 \end{aligned}$$

(b) Xung lượng Fermi của các electron là

$$p_F = \hbar \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} = 2 \times 10^{-26} \text{ g} \cdot \text{cm/s}.$$

2079

Một vũ trụ  $n$  chiều. Trong vũ trụ ba chiều của chúng ta, từ cơ học thống kê và nhiệt động lực học ta đã biết rõ các kết quả sau đây:

(a) Mật độ năng lượng của bức xạ vật đen phụ thuộc vào nhiệt độ như  $T^\alpha$ , ở đây  $\alpha = 4$ .

(b) Trong mô hình Debye của vật rắn, nhiệt dung riêng ở nhiệt độ thấp phụ thuộc vào nhiệt độ như  $T^\beta$ , trong đó  $\beta = 3$ .

(c) Tỷ số giữa nhiệt dung riêng đẳng áp so với nhiệt dung riêng đẳng tích đổi với khí lý tưởng đơn nguyên tử là  $\gamma = 5/3$ .

Hãy tìm các kết quả tương tự (tức là,  $\gamma, \alpha$  và  $\beta$ ) trong vũ trụ  $n$  chiều.

(MIT)

**Lời giải:**

(a) Năng lượng của bức xạ vật đen là

$$\begin{aligned} E &= 2 \iint \frac{d^n p d^n q}{(2\pi\hbar)^n} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/2\pi kT} - 1} \\ &= \frac{2V}{(2\pi\hbar)^n} \int d^n p \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/2\pi kT} - 1}. \end{aligned}$$

Đối với bức xạ ta có  $p = \hbar\omega/c$ , do đó

$$\frac{E}{V} = 2 \left( \frac{k}{2\pi\hbar c} \right)^n k \int d^n x \frac{x}{e^x - 1} \cdot T^{n+1},$$

trong đó  $x = \hbar\omega/kT$ . Do đó  $\alpha = n + 1$ .

(b) Mô hình Debye xem vật rắn như một môi trường liên tục đẳng hướng với hàm phân bố

$$Z(T, V) = \exp \left[ -\hbar \sum_{i=1}^{nN} \omega_i / 2kT \right] \prod_{j=1}^{nN} [1 - \exp(-\hbar\omega_j/kT)]^{-1}.$$

Năng lượng tự do Helmholtz là

$$F = -kT \ln Z = \frac{\hbar}{2} \sum_{i=1}^{nN} \omega_i + kT \sum_{i=1}^{nN} \ln [1 - \exp(-\hbar\omega_i/kT)].$$

Khi  $N$  rất lớn

$$\sum_{i=1}^{nN} \rightarrow \frac{n^2 N}{\omega_D^n} \int_0^{\omega_D} \omega^{n-1} d\omega,$$

trong đó  $\omega_D$  là tần số Debye. Do đó ta có

$$F = \frac{n^2 N}{2(n+1)} \hbar\omega_D + (kT)^{n+1} \frac{n^2 N}{(\hbar\omega_D)^n} \int_0^{x_D} x^{n-1} \ln [1 - \exp(-x)] dx,$$

ở đây  $x_D = \hbar\omega_D/kT$ . Do đó

$$c_v = -T \left( \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V \propto T^n,$$

tức là,  $\beta = n$ .

(c) Định lý phân bố đều năng lượng cho nhiệt dung riêng đẳng tích của một phân tử như là  $c_v = \frac{l}{2}k$  trong đó  $l$  là số bậc tự do của phân tử. Đối với phân tử đơn nguyên tử trong không gian  $n$  chiều,  $l = n$ . Với  $c_p = c_v + k$ , ta có

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{(n+2)}{n}.$$

2080

(a) Giả thiết một người thực hiện đo nhiệt dung riêng đẳng tích  $C_v$ , cho một vật rắn nào đó như là một hàm của nhiệt độ  $T$  và nhận được các kết quả như sau:

$T$	$C_v$ (đơn vị tùy ý)
1000 K	20
500 K	20
40 K	8
20 K	1

Vật rắn đó là vật dẫn hay điện môi? Hãy giải thích.

(b) Nếu gọi độ dịch chuyển của một nguyên tử dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng của nó trong một vật rắn là  $U$ , thì độ dịch chuyển toàn phương trung bình được cho bởi

$$\langle U^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2M} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} g(\varepsilon) [1 + 2n(\varepsilon)],$$

trong đó  $M$  là khối lượng của nguyên tử,  $g(\varepsilon)$  là mật độ trạng thái năng lượng chuẩn hoá thích hợp và  $n(\varepsilon)$  là thừa số chiếm Bose-Einstein đối với các phonon có năng lượng  $\varepsilon$ . Thừa nhận mô hình Debye đối với mật độ trạng thái:

$$g(\varepsilon) = 9\varepsilon^2/(\hbar\omega_D)^3 \quad \text{với } \varepsilon < \hbar\omega_D,$$

$$g(\varepsilon) = 0 \quad \text{với } \varepsilon > \hbar\omega_D,$$

trong đó  $\omega_D$  là tần số Debye, hãy xác định sự phụ thuộc vào nhiệt độ của  $\langle U^2 \rangle$  trong trường hợp nhiệt độ rất cao và rất thấp. Kết quả của bạn có ý nghĩa gì?  
(Chicago)

**Lời giải:**

(a) Đối với chất rắn ta có  $C_v \propto T^3$  ở nhiệt độ thấp và  $C_v = \text{constant}$  ở nhiệt độ cao. Do đó đây là một điện môi.

(b) Phonon là boson. Thừa số số chiếm Bose-Einstein cho các phonon có năng lượng  $\varepsilon$  là

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} - 1}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \langle U^2 \rangle &= \frac{\hbar^3}{2M} \int_0^{\hbar\omega_D/2\pi} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \frac{9\varepsilon^2}{(\hbar\omega_D)^3} \left[ 1 + \frac{2}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \right] \\ &= \frac{9\hbar^2}{4M} \cdot \frac{1}{\hbar\omega_D} + \frac{9\hbar^2}{M} \cdot \frac{1}{(\hbar\omega_D)^3} \int_0^{\hbar\omega_D/2\pi} \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} d\varepsilon. \end{aligned}$$

Nếu nhiệt độ cao, tức là  $kT \gg \varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} \langle U^2 \rangle &\approx \frac{9\hbar^2}{4M} \cdot \frac{1}{\hbar\omega_D} + \frac{9\hbar^2}{M} \cdot \frac{1}{(\hbar\omega_D)^3} \int_0^{\hbar\omega_D/2\pi} \varepsilon \cdot \frac{kT}{\varepsilon} d\varepsilon \\ &\approx \frac{9\hbar^2}{M} \cdot \frac{kT}{(\hbar\omega_D)^2} \propto T. \end{aligned}$$

Nếu nhiệt độ thấp, tức là  $kT \ll \varepsilon$ ,

$$\langle U^2 \rangle \approx \frac{9\hbar^2}{4M} \cdot \frac{1}{\hbar\omega_D}.$$

Các kết quả này chỉ ra rằng các nguyên tử chuyển động ngay ở  $T = 0$ , và ở nhiệt độ càng cao chuyển động càng mạnh.

### 2081

Graphít có cấu trúc tinh thể thành từng lớp trong đó tương tác giữa các nguyên tử cacbon giữa các lớp khác nhau yếu hơn nhiều so với tương tác giữa các nguyên tử cacbon trong cùng một lớp. Thí nghiệm chứng tỏ rằng nhiệt dung riêng tỷ lệ với  $T$  ở nhiệt độ thấp. Hãy dùng lý thuyết Debye để giải thích về hiện tượng đó.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

Graphít là một điện môi và nhiệt dung riêng của nó là do toàn bộ mạng tinh thể đóng góp. Khi nhiệt độ  $T$  tăng từ độ không tuyệt đối, các kiểu dao

động tương ứng với chuyển động giữa các lớp bị kích thích đầu tiên vì liên kết giữa các nguyên tử cacbon ở các lớp khác nhau là yếu hơn nhiều. Từ mô hình Debye ta có

$$\omega = ck .$$

Số các sóng dọc trong khoảng từ  $k$  đến  $k + dk$  là  $(L/2\pi)^2 2\pi k dk$ , ở đây  $L$  là chiều dài của tinh thể graphit. Từ đó ta nhận được số các sóng dọc trong khoảng từ  $\omega$  đến  $\omega + d\omega$  là  $L^2 \omega d\omega / 2\pi c_{\parallel}^2$ , ở đây  $c_{\parallel}$  là vận tốc của các sóng dọc. Tương tự, số các sóng ngang trong khoảng từ  $\omega$  đến  $\omega + d\omega$  là  $\frac{L^2 \omega d\omega}{\pi c_{\perp}^2}$ .

Do đó phổ tần số Debye được cho bởi

$$g(\omega) d\omega = \frac{L^2}{2\pi} \left( \frac{1}{c_{\parallel}^2} + \frac{2}{c_{\perp}^2} \right) \omega d\omega ,$$

*với  $\omega < \omega_D$  (tần số Debye)* .

Do đó,

$$C_v = k_B \int_0^{\omega_D} \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} g(\omega) d\omega$$

$$= \frac{k_B^3 L^2 \left( \frac{1}{c_{\parallel}^2} + \frac{2}{c_{\perp}^2} \right)}{2\pi \hbar^2} T^2 \int_0^{x_D} \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} dx ,$$

trong đó

$$x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}, \quad x_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B T} , \quad k_B \text{ là hằng số Boltzmann.}$$

Ở nhiệt độ thấp,  $\hbar\omega_D \gg k_B T$ , tức là,  $x_D \gg 1$ , khi đó

$$\int_0^{x_D} \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \approx \int_0^{\infty} \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x^3}{4 \sinh^2 \left( \frac{1}{2}x \right)} dx = 6\zeta(3) ,$$

trong đó

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \approx 1,2 .$$

Kết quả là nhiệt dung riêng tỷ lệ với  $T^2$  ở nhiệt độ thấp, hay chính xác hơn,

$$C_v = \frac{3k_B^3 L^2 (c_{\parallel}^{-2} + 2c_{\perp}^{-2})}{\pi \hbar^2} \zeta(3) T^2 .$$

## 2082

Chất rắn Debye một chiều.

Xét một mạng một chiều gồm  $N$  chất điểm đồng nhất với khối lượng  $m$ , tương tác với các chất điểm lân cận bằng lực giả đàn hồi với hệ số đàn hồi  $m\omega^2$ . Ký hiệu  $a$  là chu kỳ mạng. Để dàng chỉ ra rằng; các tần số riêng mode chuẩn được cho bởi

$$\omega_k = \omega \sqrt{2(1 - \cos ka)}$$

với  $k = 2\pi n/aN$ , trong đó số nguyên  $n$  lấy từ  $-N/2$  đến  $+N/2$  ( $N \gg 1$ ). Tìm biểu thức cho nhiệt dung riêng lượng tử của hệ này trong gần đúng Debye. Đặc biệt, hãy ước lượng các số hạng khác 0 quan trọng nhất như là các hàm số của nhiệt độ  $T$  đối với hai giới hạn  $T \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow 0$ .

(Princeton)

Lời giải:

Xem lời giải Bài toán 2083.

## 2083

Một mạng một chiều bao gồm  $N$  hạt xếp thẳng hàng ( $N \gg 1$ ) tương tác với các hạt lân cận bằng lực tương tự như lực đàn hồi (của lò xo). Các tần số mode chuẩn được cho bởi

$$\omega_n = \bar{\omega} \sqrt{2(1 - \cos(2\pi n/N))} ,$$

trong đó  $\bar{\omega}$  là một hằng số và  $n$  là số nguyên lấy từ  $-N/2$  đến  $+N/2$ . Hệ ở trong trạng thái cân bằng nhiệt ở nhiệt độ  $T$ . Gọi  $c_v$  là nhiệt dung riêng đẳng "tích" (dài).

(a) Tính  $c_v$  đối với trường hợp  $T \rightarrow \infty$ .

(b) Đối với  $T \rightarrow 0$

$$c_v \rightarrow A\omega^{-\alpha}T^\gamma ,$$

ở đây  $A$  là một hằng số mà bạn không cần tính. Hãy tìm số mũ  $\alpha$  và  $\gamma$ .

Bài toán phải giải bằng cơ học lượng tử.

(Princeton)

**Lời giải:**

$$(a) U = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \hbar\omega_n \frac{1}{e^{\hbar\omega_n/kT} - 1}.$$

Khi  $kT \gg \hbar\omega_n$

$$U \approx \sum \hbar\omega_n \cdot \frac{kT}{\hbar\omega_n} = NkT.$$

Do đó  $c_v = \frac{dU}{dT} = Nk$ .

(b) Khi  $kT \ll \hbar\omega$ , ta có

$$U = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \hbar\omega_n \frac{1}{e^{\hbar\omega_n/kT} - 1} \approx 2 \sum_{n=0}^{N/2} \hbar\omega_n e^{-\hbar\omega_n/kT}.$$

Do đó

$$c_v = \frac{dU}{dT} = 2 \sum_{n=0}^{N/2} \frac{(\hbar\omega_n)^2}{kT^2} e^{-\hbar\omega_n/kT}.$$

Chú ý rằng  $N \gg 1$  gần đúng ta có

$$\begin{aligned} c_v &= 2 \frac{\hbar^2 \omega^2}{kT^2} \int_0^{N/2} 2 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{N}\right) e^{-(\hbar\omega/\pi kT) \sin(\pi x/N)} dx \\ &= 8 \frac{\hbar^2 \omega^2}{kT^2} \int_0^{N/2} \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{N} e^{-(\hbar\omega/\pi kT) \sin(\pi x/N)}}{\cos \frac{\pi x}{N}} \cdot \frac{N}{\pi} d \left(\sin \frac{\pi x}{N}\right) \\ &= \frac{8\hbar^2 \omega^2 N}{kT^2 \pi} \int_0^1 \frac{t^2 e^{-(t\hbar\omega/\pi kT)}}{\sqrt{1-t^2}} dt. \end{aligned}$$

Vì  $\exp(-t\hbar\omega/\pi kT)$  giảm nhanh khi  $t \rightarrow 1$ , ta có

$$\begin{aligned} c_v &\approx \frac{8\hbar^2 \omega^2}{kT^2} \cdot \frac{N}{\pi} \int_0^1 t^2 e^{-(t\hbar\omega/\pi kT)} dt \\ &= \frac{8\hbar^2 \omega^2}{kT^2} \cdot \frac{N}{\pi} \cdot \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^3 \cdot \int_0^\infty \xi^2 e^{-\xi} d\xi = A\omega^{-1}T, \end{aligned}$$

ở đây  $A = (16Nk^2/h) \int_0^\infty \xi^2 \exp(-\xi) d\xi$ .

Do đó  $\alpha = \gamma = 1$ .

### 2084

Cho phổ năng lượng

$$\varepsilon_p = [(pc)^2 + m_0^2 c^4]^{1/2} \rightarrow pc \quad \text{khi } p \rightarrow \infty .$$

(a) Chứng minh rằng khí fermion lý tưởng siêu tương đối tính thoả mãn phương trình trạng thái  $pV = E/3$ , với  $E$  là năng lượng toàn phần

(b) Chứng minh rằng entropy của một khí lý tưởng lượng tử được cho bởi

$$S = -k \sum_i [n_i \ln(n_i) \mp (1 \pm n_i) \ln(1 \pm n_i)] ,$$

trong đó, các dấu ở trên (ở dưới) ứng với boson (fermion).

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Số các trạng thái trong khoảng xung lượng từ  $p$  đến  $p + dp$  là  $\frac{8\pi V}{h^3} p^2 dp$  (lấy  $S = \frac{1}{2}$ ). Từ  $\varepsilon = cp$ , ta tìm được số các trạng thái trong khoảng năng lượng từ  $\varepsilon$  đến  $\varepsilon + d\varepsilon$ :

$$N(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{8\pi V}{c^3 h^3} \varepsilon^2 d\varepsilon .$$

Do đó năng lượng toàn phần là

$$E = \frac{8\pi V}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^3 d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} .$$

Biểu diễn qua thế nhiệt động  $\ln \Xi$ , ta có

$$\begin{aligned} pV &= KT \ln \Xi = kT \int_0^\infty \frac{8\pi V}{c^3 h^3} \varepsilon^2 \ln[1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}] d\varepsilon \\ &= \frac{8\pi V}{3c^3 h^3} \cdot kT \int_0^\infty \ln[1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}] d\varepsilon^3 \\ &= \frac{8\pi V}{3c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^3 e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}} d\varepsilon \\ &= \frac{1}{3} E . \end{aligned}$$

Lưu ý rằng phương trình này cũng áp dụng được cho khí boson siêu tương đối tính.

(b) Số hạt trung bình trong trạng thái lượng tử  $i$  cho bởi  $n_i = 1/\exp(\alpha + \beta\varepsilon_i) \mp 1$ , từ đó ta có

$$\exp(\alpha + \beta\varepsilon_i) = (1 \pm n_i)/n_i ,$$

hay

$$\alpha + \beta\varepsilon_i = \ln(1 \pm n_i) - \ln(n_i) ,$$

và

$$\begin{aligned} \ln \Xi &= \mp \sum_i \ln(1 \mp e^{-\alpha - \beta\varepsilon_i}) = \mp \sum_i \ln \frac{1}{1 \pm n_i} \\ &= \pm \sum_i \ln(1 \pm n_i) . \end{aligned}$$

Vì

$$S = k \left[ \ln \Xi - a \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \Xi \right)_\beta - \beta \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi \right)_\alpha \right]$$

ta có

$$S = -k \sum_i [n_i \ln(n_i) \mp (1 \pm n_i) \ln(1 \pm n_i)] .$$

## 2085

Xét một khí lượng tử lý tưởng gồm các hạt Fermi ở nhiệt độ  $T$ .

(a) Tính xác suất  $p(n)$  để có  $n$  hạt trong trạng thái một hạt đã cho như là một hàm của độ cung trú trung bình  $\langle n \rangle$ .

(b) Tìm độ thăng giáng căn quân phương  $\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle^{1/2}$  của độ cung trú của trạng thái một hạt như là một hàm của độ cung trú trung bình  $\langle n \rangle$ . Vẽ phác đồ thị của kết quả.

(MIT)

**Lời giải:**

(a) Gọi  $\varepsilon$  là năng lượng của trạng thái một hạt,  $\mu$  là thể hóa học. Hàm phân bố là

$$z = \sum_n \exp[n(\mu - \varepsilon)/kT] = 1 + \exp[(\mu - \varepsilon)/kT] .$$

Độ cư trú trung bình là

$$\langle n \rangle = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln z = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1}.$$

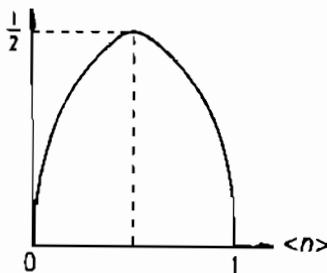
Xác suất là

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{1}{z} e^{n(\mu - \epsilon)/kT} \\ &= \frac{(1 - \langle n \rangle)^n}{\langle n \rangle^{n-1}}. \end{aligned}$$

$$(b) \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = kT \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial \mu} = \langle n \rangle (1 - \langle n \rangle).$$

Do đó ta có  $\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\langle n \rangle (1 - \langle n \rangle)}.$

Kết quả được biểu diễn trên hình 2.17.



Hình 2.17

### 2086

Trong một khí electron lý tưởng, số hạt trung bình chiếm trạng thái một hạt với năng lượng  $E_i$  là

$$N_i = \frac{1}{\exp[(E_i - \mu)/kT] + 1}.$$

(a) Tìm một công thức có thể dùng để xác định  $\mu$  theo mật độ số hạt  $n$  và các hằng số khác.

(b) Chứng tỏ rằng biểu thức trên quy về phân bố Maxwell-Boltzmann khi

$n\lambda^3 \ll 1$ , trong đó  $\lambda$  là bước sóng de Broglie nhiệt.

(c) Vẽ phác đồ thị của  $N_i$  theo  $E_i$  khi  $T = 0$  K và khi  $T = \mu/5$  K. Ghi rõ các điểm đáng chú ý trên hai trục toạ độ.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Mật độ số hạt là

$$\begin{aligned} n &= \int \frac{4x}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} + 1} d\varepsilon \\ &= \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int \frac{\sqrt{x}}{e^{-\mu/kT} \cdot e^x + 1} dx . \end{aligned}$$

Vì

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{1/2} \text{ nên} \\ n\lambda^3 &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{e^{-\mu/kT} e^x + 1} . \end{aligned}$$

Công thức này có thể dùng để xác định  $\mu$ .

(b) Khi  $n\lambda^3 \ll 1$ , trong tích phân trên ta có

$$\exp\left(\frac{-\mu}{kT}\right) \gg 1 .$$

Do đó

$$N_i = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/kT} + 1} \approx e^{\mu/kT} \cdot e^{-E_i/kT} ,$$

tức là quy về phân bố Boltzmann.

(c) Sự phụ thuộc của  $N_i$  vào  $E_i$  được biểu diễn trên hình 2.18.

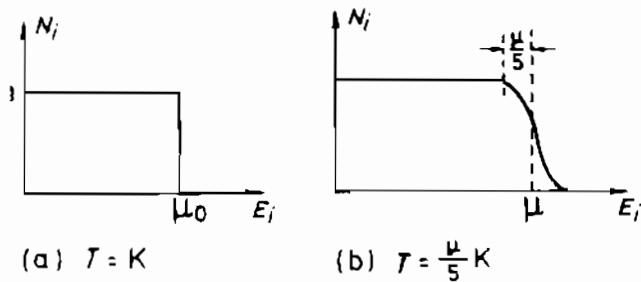
### 2087

Giả sử trong một mẫu nào đó mật độ trạng thái của các electron  $D(\varepsilon)$  là hằng số  $D_0$  khi năng lượng  $\varepsilon > 0$  ( $D(\varepsilon) = 0$  khi  $\varepsilon < 0$ ) và tổng số các electron là  $N$ .

(a) Tính thế Fermi  $\mu_0$  ở 0 K.

(b) Đối với các nhiệt độ khác 0, hãy tìm điều kiện để hệ không suy biến.

(c) Chứng tỏ rằng nhiệt dung riêng electron tỷ lệ với nhiệt độ  $T$  khi hệ suy



Hình 2.18

bí ên manh.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Khi  $T = 0$  K, tất cả các mức năng lượng nằm thấp đều bị chiếm chỗ, trong khi đó những mức năng lượng lớn hơn  $\mu_0$  lại hoàn toàn trống. Lưu ý rằng êlectron có spin  $1/2$ , nên mỗi trạng thái có thể nhận chứa hai êlectron, do đó  $2D_0\mu_0V = N$ , hay

$$\mu_0 = \frac{N}{2VD_0}.$$

trong đó  $V$  là thể tích của mẫu.

(b) Điều kiện không suy biến đòi hỏi  $\exp\left(\frac{\mu}{kT}\right) \ll 1$ , khi đó

$$\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} + 1} \approx e^{\mu/kT} \cdot e^{-\varepsilon/kT}$$

### Trong gần đúng này

$$\frac{N}{V} = \int_0^\infty \frac{2D_0}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} + 1} d\varepsilon = 2D_0 \cdot kT \cdot e^{\mu/kT} .$$

Vậy điều kiện không suy biến là  $kT \gg \left(\frac{N}{V}\right)/2D_0 = \mu_0$ .

(c) Khi  $T = 0$  K, các electron ở trong trạng thái cơ bản không bị kích thích. Khi  $T \neq 0$  K, nhưng  $T \ll \mu_0/k$ , chỉ những electron nào ở gần mặt Fermi mới bị kích thích,  $N_{\text{eff}} \approx kTD_0$ , và nhiệt dung riêng do các electron đóng góp là  $C_0 = \frac{3}{2}k$ . Do đó, khi hệ bị suy biến mạnh nhiệt dung riêng  $C \propto T$ .

## 2088

Xét một hệ gồm  $N$  electron "không tương tác"/cm<sup>3</sup>, mỗi hạt có thể chiếm một trạng thái liên kết với năng lượng  $\varepsilon = -E_d$  hoặc một trạng thái trong continuum năng lượng của hạt tự do với  $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$ . (Đây có thể là một chất bán dẫn như Si với  $N$  ônô nồng/cm<sup>3</sup>.)

- (a) Tính mật độ trạng thái như là một hàm số của  $\varepsilon$  trong continuum năng lượng.
- (b) Tìm một biểu thức cho thế hoá học trong miền nhiệt độ thấp.
- (c) Tính số các electron tự do (tức là các electron ở trong continuum năng lượng) như là một hàm của  $T$  trong miền nhiệt độ thấp.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Giả thiết rằng mỗi trạng thái liên kết có thể chứa ít nhất một cặp electron với spin đối song, và số các trạng thái liên kết là  $\frac{N}{2}$ . Tức là, khi  $T = 0$  K, tất cả các trạng thái liên kết đã đầy và không có electron tự do. Khi  $T$  rất thấp, chỉ có một vài electron ở trong continuum hạt tự do vì vậy ta có thể dùng gần đúng suy biến yếu.

- (a) Mật độ trạng thái trong continuum năng lượng là

$$D(\varepsilon) = \frac{4\pi}{h^3} (2r_{ii})^{3/2} \sqrt{\varepsilon} .$$

- (b), (c) Số electron trong các trạng thái liên kết là

$$N_b = \frac{N}{e^{-(E_d + \mu)/kT} + 1} ,$$

hay

$$\frac{N - N_b}{N_b} = e^{-E_d/kT} e^{-\mu/kT} . \quad (1)$$

Số electron trong continuum năng lượng (gần đúng suy biến yếu) là

$$N_f = \int_0^\infty D(\varepsilon) e^{\mu/kT} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon = N_c e^{\mu/kT} , \quad (2)$$

trong đó

$$N_c = 2 \left( \frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} .$$

Từ (1) và (2), ta có

$$\frac{N_f(N - N_b)}{N_b} = N_c e^{-E_d/kT}.$$

Vì  $N_b + N_f = N$ ,  $N_b \approx N$ , do đó

$$N_f^2 = NN_c e^{-E_d/kT}, \quad \text{hay} \quad N_f = \sqrt{NN_c} e^{-E_d/2kT}. \quad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được

$$\mu = kT \ln \frac{N_f}{N_c} = \frac{kT}{2} \ln \frac{N}{N_c} - \frac{E_d}{2}.$$

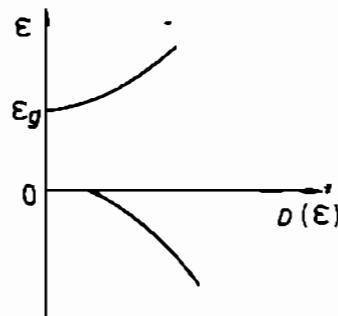
### 2089

(a) Chứng minh rằng, đối với một hệ các electron không tương tác, xác suất tìm thấy một electron ở trong một trạng thái với năng lượng  $\Delta$  bên trên thế hoá học  $\mu$  bằng xác suất không tìm thấy một electron ở trạng thái với năng lượng  $\Delta$  bên dưới  $\mu$  ở bất kì nhiệt độ  $T$  nào cho trước.

(b) Giả thiết rằng mật độ trạng thái  $D(\varepsilon)$  được cho bởi

$$D(\varepsilon) = \begin{cases} a(\varepsilon - \varepsilon_g)^{1/2}, & \varepsilon > \varepsilon_g, \\ 0, & 0 < \varepsilon < \varepsilon_g, \\ b(-\varepsilon)^{1/2}, & \varepsilon < 0, \end{cases}$$

nó như được biểu diễn trên hình 2.19,



Hình 2.19

và ở  $T = 0$  tất cả các trạng thái với  $\varepsilon < 0$  đều bị chiếm trong khi đó các trạng thái khác đều còn trống. Vậy giờ đổi với  $T > 0$ , một số trạng thái với  $\varepsilon > 0$  sẽ bị chiếm chỗ trong khi đó một số trạng thái với  $\varepsilon < 0$  sẽ là trống. Nếu  $a = b$ , thì đâu là vị trí của  $\mu$ ? Đổi với  $a \neq b$ , hãy viết phương trình toán học xác định  $\mu$  và thảo luận một cách định tính xem  $\mu$  sẽ ở đâu nếu  $a > b$ ?  $a < b$ ?

(c) Nếu có một số dồi dư  $n_d$  electron trong đơn vị thể tích hơn mức có thể dung nạp bởi các trạng thái với  $\varepsilon < 0$ , phương trình cho  $\mu$  sẽ như thế nào khi  $T = 0$ ? Khi  $T$  tăng,  $\mu$  sẽ thay đổi như thế nào?

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Theo phân bố Fermi, xác suất để mức năng lượng  $\varepsilon$  bị chiếm chỗ là

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1},$$

do đó xác suất để tìm thấy một electron tại  $\varepsilon = \mu + \Delta$  là

$$F(\mu + \Delta) = \frac{1}{e^{\beta\Delta} + 1},$$

và xác suất không tìm thấy electron ở  $\varepsilon = \mu - \Delta$  cho bởi

$$1 - F(\mu - \Delta) = \frac{1}{e^{\beta\Delta+1}}.$$

Hai xác suất trên có cùng giá trị đúng như yêu cầu phải chứng minh.

(b) Khi  $T > 0$  K, một số electron với  $\varepsilon < 0$  sẽ bị kích thích lên trạng thái với  $\varepsilon > \varepsilon_g$ . Có nghĩa là có một số trạng thái trống được hình thành với  $\varepsilon < 0$  trong khi đó một số electron chiếm các trạng thái với  $\varepsilon > \varepsilon_g$ . Số các electron với  $\varepsilon > \varepsilon_g$  cho bởi

$$\begin{aligned} n_e &= \int_{\varepsilon_g}^{\infty} D(\varepsilon) \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} d\varepsilon \\ &= \int_{\varepsilon_g}^{\infty} a(\varepsilon - \varepsilon_g)^{1/2} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} d\varepsilon. \end{aligned}$$

Số các lỗ trống với  $\varepsilon < 0$  cho bởi

$$\begin{aligned} n_p &= \int_{-\infty}^0 D(\varepsilon) [1 - F(\varepsilon)] d\varepsilon \\ &= \int_{-\infty}^0 b(-\varepsilon)^{1/2} \frac{1}{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} d\varepsilon. \end{aligned}$$

Từ  $n_e = n_p$ , ta có  $\mu = \varepsilon_g/2$  khi  $a = b$ . Ta cũng tìm được phương trình để xác định  $\mu$  khi  $a \neq b$ ,

$$\frac{a}{b} = \frac{e^{\beta(\varepsilon + \varepsilon_g - \mu)} + 1}{e^{\beta(\varepsilon + \mu)} + 1}.$$

Khi  $a > b$ , ta có

$$\frac{e^{\beta(\varepsilon + \varepsilon_g - \mu)} + 1}{e^{\beta(\varepsilon + \mu)} + 1} > 1,$$

suy ra  $\varepsilon + \varepsilon_g - \mu > \varepsilon + \mu$ , tức là  $\mu < \varepsilon_g/2$ . Do đó,  $\mu$  dịch chuyển đến vùng năng lượng thấp hơn.

Khi  $a < b$ ,  $\mu > \varepsilon_g/2$ ,  $\mu$  dịch chuyển đến vùng năng lượng cao hơn.

(c) Khi  $T = 0$ , từ

$$\int_{\varepsilon_g}^{\mu} a(\varepsilon - \varepsilon_g)^{1/2} d\varepsilon = n_d,$$

ta tìm được

$$\mu = \varepsilon_g + \left( \frac{3n_d}{2a} \right)^{2/3}.$$

$\mu$  dịch chuyển đến vùng năng lượng thấp hơn khi  $T$  tăng lên.

## 2090

(a) Tính độ dài của véctơ sóng Fermi đối với  $4,2 \times 10^{21}$  électron bị nhốt trong một hộp  $1 \text{ cm}^3$ .

(b) Tính năng lượng Fermi (bằng eV) cho hệ électron này.

(c) Nếu các électron được thay thế bằng nơtron, hãy tính độ dài véctơ sóng Fermi và năng lượng Fermi.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Tổng số hạt là

$$N = \frac{2V}{h^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3.$$

Bước sóng Fermi là

$$\lambda_F = \frac{h}{p_F} = \left( \frac{8\pi V}{3N} \right)^{1/3} = 1,25 \times 10^{-9} \text{ m} = 12,5 \text{ Å}.$$

(b) Năng lượng Fermi là

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{\lambda_F} \right)^2 = 1,54 \times 10^{-19} \text{J} = 0,96 \text{ eV}.$$

(c) Nếu thay thế các electron bằng các neutron, ta tìm được

$$\lambda'_F = \lambda_F \approx 12,5 \text{\AA},$$

$$\text{và } \varepsilon'_F = \frac{m}{m_e} \varepsilon_F = 5,2 \times 10^{-4} \text{eV}.$$

### 2091

Tính năng lượng trung bình trên mỗi hạt  $\varepsilon$  đối với một chất khí Fermi ở  $T = 0$ , cho năng lượng Fermi là  $\varepsilon_F$ .

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Ta xét hai trường hợp, phi tương đối tính và tương đối tính.

(a) Đối với một hạt phi tương đối tính,  $p \ll mc$  ( $p$  là xung lượng và  $m$  là khối lượng nghỉ), ta có

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}.$$

Mặt khác,  $D(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \cdot \text{const}$  suy ra

Do đó

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_F} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon} = \frac{3}{5} \varepsilon_F.$$

(b) Đối với trường hợp tương đối tính  $p \gg mc$ , ta có  $\varepsilon = pc$ , và  $D(\varepsilon) = \varepsilon^2 \cdot \text{const}$ . Do đó,

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^2 \cdot \varepsilon d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^2 d\varepsilon} = \frac{3}{4} \varepsilon_F.$$

### 2092

Tính mật độ trạng thái  $D(\varepsilon)$  như một hàm của năng lượng  $\varepsilon$  của một khí electron tự do một chiều. (Giả thiết điều kiện biên tuần hoàn hay hạn chế một

chuỗi dài có độ dài  $L$  nào đó). Hãy tính năng lượng Fermi  $\varepsilon_F$  ở không độ tuyệt đối đối với một hệ  $N$  electron.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Năng lượng của một hạt là  $\varepsilon = p^2/2m$ . Do đó

$$dp = \left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)^{1/2} d\varepsilon .$$

Chú ý đến hai trạng thái của spin, ta có

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2L \cdot dp}{h} = \frac{L(2m)^{1/2}}{h\varepsilon^{1/2}} d\varepsilon ,$$

hay

$$D(\varepsilon) = L \left(\frac{2m}{\varepsilon}\right)^{1/2} / h .$$

Tại nhiệt độ 0 K, electron sẽ chiếm tất cả các trạng thái có năng lượng từ 0 đến năng lượng Fermi  $\varepsilon_F$ . Do đó

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} D(\varepsilon)d\varepsilon ,$$

Suy ra

$$\varepsilon_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{N}{2L}\right)^2 .$$

### 2093

Xét một khí Fermi ở nhiệt độ thấp  $kT \ll \mu(0)$ , ở đây  $\mu(0)$  là thế hoá học tại  $T = 0$ . Hãy dùng những lý lẽ định tính để xác định giá trị chính của số mũ trong số hạng phụ thuộc nhiệt độ của mỗi đại lượng sau: (a) năng lượng; (b) nhiệt dung; (c) entropy; (d) năng lượng tự do Helmholtz; (e) thế hoá học. Góc 0 của thang năng lượng lấy tại orbital thấp nhất.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Tại nhiệt độ thấp, chỉ những hạt nào có năng lượng rơi vào vùng có độ rộng cỡ  $\sim kT$  gần mặt Fermi mới bị kích thích nhiệt. Năng lượng của những hạt đó có độ lớn cỡ  $kT$ .

(a)  $E = E(0) + \alpha kT \cdot kT$ , trong đó  $\alpha$  là một hằng số tỷ lệ. Do đó  $E - E(0) \propto T^2$ .

$$(b) C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \propto T.$$

(c) Từ  $dS = \frac{C_v}{T} dT$ , ta có

$$S = \int_0^T \frac{C_v}{T} dT \propto T.$$

(d) Từ  $F = E - TS$ , ta có  $F - F(0) \propto T^2$ .

(e) Từ  $\mu = (F + pV)/N$  và  $p = 2E/3V$ , trong đó  $N$  trong đó  $\mu - \mu(0) \propto T^2$ .

**2094**

Tìm biểu thức thế hoá học của một khí electron tự do với mật độ gồm  $N$  electron trong một đơn vị thể tích ở độ không tuyệt đối ( $T = 0$  K). Tìm thế hoá học của các electron dẫn trong một kim loại (các electron này có thể được coi như là các electron tự do) với  $N = 10^{22}$  electron/cm<sup>3</sup> ở  $T = 0$  K.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Từ mật độ trạng thái

$$D(\varepsilon) d\varepsilon = 4\pi (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon / h^3 ,$$

ta nhận được

$$N = \int_0^{\mu_0} \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{2m\mu_0}{h^2} \right)^{3/2} .$$

$$\text{Do đó, } \mu_0 = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3N}{8\pi} \right)^{2/3} .$$

Đối với  $N = 10^{22}$  electron/cm<sup>3</sup> =  $10^{28}$  electron/m<sup>3</sup>, ta có

$$\mu_0 = 2,7 \times 10^{-19} \text{ J} = 1,7 \text{ eV} .$$

## 2095

$D(E)$  là mật độ trạng thái trong một kim loại, và  $E_F$  là năng lượng Fermi. Tại năng lượng Fermi  $D(E_F) \neq 0$ .

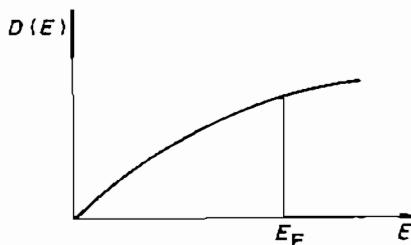
(a) Tìm biểu thức đôi với tổng số các electron trong hệ ở nhiệt độ  $T = 0$  theo  $E_F$  và  $D(E_F)$ .

(b) Tìm một biểu thức đôi với tổng số các electron trong hệ ở nhiệt độ  $T \neq 0$  theo thể hóa học  $\mu$  và  $D(E)$ .

(c) Tìm sự phụ thuộc vào nhiệt độ của thể hóa học ở nhiệt độ thấp, tức là  $\mu \gg kT$ .

(Cho biết:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^x}{(e^x+1)^2} dx = \frac{\pi^2}{3}$ .)

(Chicago)



Hình 2.20

Lời giải:

Mật độ trạng thái là

$$D(E) = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{h^3} E^{1/2}.$$

(a) Nếu  $T = 0$ , tổng số electron là

$$N = \int_0^{E_F} D(E)dE = \frac{2}{3} D(E_F) E_F.$$

(b) Nếu  $T \neq 0$ ,

$$N = \int_0^{\infty} \frac{D(E)}{e^{(E-\mu)/kT} + 1} dE.$$

(c) Tại nhiệt độ thấp  $\mu \gg kT$ ,

$$\begin{aligned} N &= \int_0^\infty \frac{D(E)dE}{e^{(E-\mu)/kT} + 1} \\ &= \int_0^\mu D(E)dE + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 D'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360}(kT)^4 D'''(\mu) + \dots \\ &\approx \frac{8\pi V(2m)^{3/2}}{3h^3} \mu^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Do đó, ta nhận được

$$\mu = E_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2 \right],$$

trong đó

$$E_F = \mu_0 = \frac{1}{2m} \left( \frac{3h^3 N}{8\pi V} \right)^{2/3}.$$

### 2096

Na kim loại có khoảng chừng  $2,6 \times 10^{22}$  electron/cm<sup>3</sup>, mà ta có thể coi gần đúng là khí electron tự do. Từ các giả thiết đó, hãy

- (a) tìm một trị số gần đúng của năng lượng Fermi (bằng eV) trong Na,
- (b) tìm một trị số gần đúng cho nhiệt dung riêng electron của Na ở nhiệt độ phòng.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Năng lượng Fermi là

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}.$$

Thay  $\hbar = 6,58 \times 10^{-16}$  eV·s,  $m = 0,511$  MeV/c<sup>2</sup> và  $\frac{N}{V} = 2,6 \times 10^{22}/\text{cm}^3$  vào trong công thức trên, ta tìm được  $E_F \approx 3,2$  eV.

(b) Nhiệt dung riêng là

$$C \approx \frac{1}{M} \frac{N}{E_F} k^2 T = \frac{k}{m_e} \cdot \frac{kT}{E_F},$$

trong đó  $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$  kg là khối lượng của electron,  $k = 1,38 \times 10^{-23}$  J/K là hằng số Boltzmann, và  $kT \approx \frac{1}{40}$  eV ở nhiệt độ phòng. Thay  $E_F$  và các đại lượng khác vào biểu thức trên, ta tìm được  $C \approx 11,8$  J/K·g.

### 2097

Các electron trong một vật rắn kim loại có thể được xem như là một khí electron tự do ba chiều. Đối với trường hợp này, hãy

- tìm những giá trị cho phép của  $k$ , và vẽ phác mặt cầu Fermi tương ứng trong không gian -  $k$ . (Dùng điều kiện tuần hoàn với chiều dài  $L$ .)
- tìm giá trị cực đại của  $k$  đối với một hệ gồm  $N$  electron, và sau đó tìm biểu thức cho năng lượng Fermi ở  $T = 0$  K.
- sử dụng một lập luận đơn giản chứng tỏ rằng sự đóng góp của các electron làm cho nhiệt dung riêng tỷ lệ với  $T$ .

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Điều kiện tuần hoàn đòi hỏi chiều dài của vật rắn  $L$  phải là một bội số nguyên lần của bước sóng de Broglie đối với các trạng thái khả dĩ của chuyển động của hạt, tức là

$$L = |n_x| \lambda, \quad |n_x| = 0, 1, 2, \dots .$$

Dùng hệ thức giữa bước sóng và vectơ sóng  $k = 2\pi/\lambda$ , và chú ý đến hai chiều lan truyền của sóng trên mỗi phương, ta tìm được các giá trị cho phép của  $k_x$ :

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

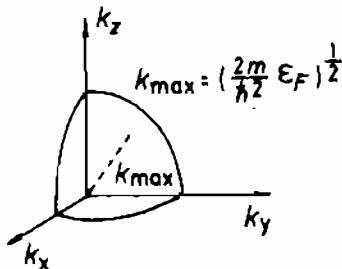
Tương tự ta có

$$\begin{aligned} k_y &= \frac{2\pi}{L} n_y, \quad n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots , \\ k_z &= \frac{2\pi}{L} n_z, \quad n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \end{aligned}$$

Do đó năng lượng

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

là gián đoạn. Hình 2.21. biểu diễn mặt cầu Fermi



Hình 2.21

$$(b) dn_x = \frac{L}{2\pi} dk_x ,$$

$$dn_y = \frac{L}{2\pi} dk_y ,$$

$$dn_z = \frac{L}{2\pi} dk_z .$$

Do đó trong thể tích  $V = L^3$ , số trạng thái lượng tử của các electron tự do trong miền  $k_x \rightarrow k_x + dk_x, k_y \rightarrow k_y + dk_y, k_z \rightarrow k_z + dk_z$  (có xét đến hai hướng của spin) là

$$dn = dn_x dn_y dn_z = 2 \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 dk_x dk_y dk_z = \frac{V}{4\pi^3} dk_x dk_y dk_z .$$

Tại  $T = 0$  K, các electron chiếm các trạng thái thấp nhất. Theo nguyên lý loại trừ Pauli, có nhiều nhất một electron trong một trạng thái lượng tử. Do đó

$$N = \frac{V}{4\pi^3} \iiint dk_x dk_y dk_z = \frac{V}{4\pi^3} \int_0^{k_{\max}} 4\pi k^2 dk ,$$

suy ra

$$k_{\max} = \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} .$$

Năng lượng Fermi là

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} k_{\max}^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3} .$$

(c) Tại  $T = 0$  K, các electron chiếm tất cả các trạng thái lượng tử có năng lượng từ 0 đến  $\epsilon_F$ . Khi nhiệt độ tăng, một số electron có thể bị kích thích lên các trạng thái có năng lượng cao hơn mà còn trống, nhưng để làm được như

vậy, chúng phải hấp thụ nhiều năng lượng, do đó xác suất là rất bé. Vì vậy tình trạng chiếm chỗ của hầu hết các trạng thái là không thay đổi, trừ những trạng thái với  $kT$  gần năng lượng Fermi  $\epsilon_F$ . Do đó, chỉ những electron trong các trạng thái như vậy mới đóng góp vào nhiệt dung. Ký hiệu  $N_{\text{eff}}$  là số các electron như vậy, ta có  $N_{\text{eff}} = kTN/\epsilon_F$ . Do đó nhiệt dung phân tử do các electron đóng góp là

$$C_v = \frac{3}{2}R \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right) \propto T.$$

## 2098

Vẽ phác đường nhiệt dung  $C_v$ , xem như một hàm của nhiệt độ tuyệt đối  $T$  đối với một vật rắn kim loại. Hãy nêu ra những lập luận để chứng minh vì sao sự đóng góp vào  $C_v$  của các electron tự do tỷ lệ với  $T$ .

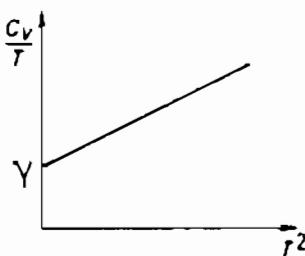
(Wisconsin)

**Lời giải:**

Như biểu diễn trên hình 2.22, nhiệt dung của kim loại là

$$C_v = \gamma T + AT^3,$$

trong đó số hạng thứ nhất ở vế phải là do các electron tự do đóng góp và số hạng thứ hai là đóng góp của dao động mạng.



\*Hình 2.22

Phản thảo luận định tính về đóng góp vào  $C_v$  của các electron tự do, hãy xem lời giải của Bài toán 2097.

## 2099

(a) Tìm công thức tính động năng cực đại của một electron trong một khí Fermi gồm  $N$  electron không tương tác trong thể tích  $V$  ở độ không tuyệt đối.

(b) Tính khe năng lượng giữa trạng thái cơ bản và trạng thái kích thích đầu tiên đối với một khí Fermi như thế, bao gồm các electron hóa trị trong một khối lập phương bằng đồng có cạnh bằng 100 Å.

(c) So sánh khe năng lượng với  $kT$  ở 1 K.

Mật độ khói lượng và nguyên tử lượng của đồng tương ứng là 8,93 g/cm<sup>3</sup> và 63,6.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Khi  $T = 0$  K, phân bố Fermi là

$$f = \begin{cases} 1, & \varepsilon < \varepsilon_F, \\ 0, & \varepsilon > \varepsilon_F. \end{cases}$$

Mật độ trạng thái lượng tử là

$$\frac{4\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon.$$

Do đó,  $\frac{N}{V} = \int_0^{\varepsilon_F} \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$ , suy ra

$$\varepsilon_F = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3},$$

tức là,  $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_F = 1,1 \times 10^{-18}$  J.

(b) Vì  $n\lambda/2 = a$  và  $p = h/\lambda$ , các mức lượng tử của các electron hóa trị trong khối lập phương bằng đồng cho bởi

$$\varepsilon = \frac{h^2}{8ma^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2),$$

trong đó  $n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \dots$  (không đồng thời bằng 0). Như vậy trạng thái kích thích thứ nhất của khí Fermi là một electron bị kích thích từ mặt Fermi tới trạng thái năng lượng cao hơn liền kề. Tức là

$$(n, 0, 0) \rightarrow (n, 1, 0).$$

Do đó

$$\Delta\varepsilon = \frac{h^2}{8ma^2} = 6,0 \times 10^{-30} \text{ J}.$$

$$(c) \frac{\Delta\varepsilon}{k} = 4,4 \times 10^{-7} \text{ K} \ll 1 \text{ K}.$$

### 2100

(a) Cho một khí Fermi không tương tác, spin  $\frac{1}{2}$ , suy biến ở không độ tuyệt đối, hãy tìm một biểu thức năng lượng của một hệ gồm  $N$  hạt như trên bị nhốt trong thể tích  $V$ . Giả thiết các hạt là phi tương đối tính.

(b) Cho biểu thức nội năng của một hệ tổng quát (không nhất thiết là một khí tự do) ở không độ tuyệt đối, làm thế nào xác định được áp suất của hệ?

(c) Từ đó hãy tính áp suất của khí này và chứng tỏ rằng nó phù hợp với kết quả cho bởi thuyết động học.

(d) Nếu và giải thích ngắn gọn hai hiện tượng ít nhất đã được giải thích định tính bằng mô hình khí Fermi của kim loại nhưng lại không phù hợp với cơ học thống kê cổ điển. Đưa ra một hiện tượng mà mô hình đơn giản này là không đủ ngay cả để giải thích một cách định tính.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Mật độ trạng thái cho bởi

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon.$$

Do đó

$$N = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_F} \sqrt{\varepsilon}d\varepsilon = \frac{8\pi V}{3} \left( \frac{2m\varepsilon_F}{h^2} \right)^{3/2}$$

và

$$\begin{aligned} E &= \left( \frac{4\pi V}{h^3} \right) \int_0^{\varepsilon_F} (2m\varepsilon)^{3/2} d\varepsilon \\ &= 3N\varepsilon_F/5. \end{aligned}$$

(b) Từ hệ thức nhiệt động lực học

$$\left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p$$

và  $T = 0$  K, ta có

$$p = - \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T = \frac{2E}{3V}.$$

(c) Giả thiết phân bố theo vận tốc là  $D(\mathbf{v})dv$ , do đó số phân tử va chạm trên một đơn vị diện tích của thành bình trong một đơn vị thời gian có vận tốc giữa  $\mathbf{v}$  và  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$  là  $n v_x D(\mathbf{v})dv$ . Lực tác dụng lên một đơn vị diện tích do va chạm là

$$dp = 2m v_x^2 n D(\mathbf{v}) dv.$$

Do đó áp suất là

$$\begin{aligned} p &= \int_{v_x > 0} n D(\mathbf{v}) \cdot 2m v_x^2 dv = \int_{-\infty < v_x < +\infty} n D(\mathbf{v}) \cdot m v_x^2 dv \\ &= \frac{2}{3} \int n D(\mathbf{v}) \frac{1}{2} m v^2 dv = \frac{2}{3} \frac{E}{V}. \end{aligned}$$

Đối với khí electron

$$p = \frac{2E}{3V} = \frac{N}{5V} \cdot \frac{h^2}{m} \left( \frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3}.$$

(d) Nhiệt dung riêng và độ từ hóa thuận từ của kim loại có thể giải thích định tính bằng mô hình khí Fermi.

Hiện tượng siêu dẫn không thể giải thích bằng mô hình khí Fermi.

## 2101

Mô hình electron tự do của các electron dẫn trong kim loại nghe có vẻ ngây thơ nhưng thường lại thành công. Mô hình này cho phép ta giải thích được tính nén được của một số kim loại nào đó. Điều này gợi ý đặt ra câu hỏi như sau. Cho biết mật độ số hạt  $n$  và năng lượng Fermi  $\epsilon$  của một khí Fermi không tương tác ở độ không tuyệt đối  $T = 0$  K, hãy tìm hệ số nén dẫn nhiệt

$$\kappa = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T,$$

trong đó  $V$  là thể tích,  $p$  là áp suất.

Gợi ý: Cần nhớ rằng  $pV = \frac{2}{3}E$ , ở đây  $E$  là năng lượng toàn phần.

(CUSPEA)

**Lời giải:**

$p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T$ , trong đó  $F$  là năng lượng tự do,  $F = E - TS$ . Khi  $T = 0$  K,  $F = E$  và

$$p = - \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T .$$

Dùng  $pV = \frac{2}{3}E$ , ta có

$$p = - \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T = - \left[ \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{3}{2}pV \right) \right]_T = - \frac{3}{2} \left[ V \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T + p \right] ,$$

hay

$$V \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = - \frac{5}{3}p .$$

Do đó  $\kappa = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{3}{5p}$  ( $T = 0$  K).

Tại  $T = 0$  K,

$$p = \frac{2E}{3V} = \frac{2}{3V} \cdot 2 \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{k < k_F} d^3k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_F^5}{15m\pi^2} .$$

Với

$$nV = N = 2 \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{k < k_F} d^3k ,$$

ta thu được

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2} .$$

Đối với một khí lý tưởng, năng lượng của một hạt là

$$\varepsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} .$$

Vì vậy

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} .$$

Do đó

$$p = \frac{2}{5}n \cdot \varepsilon_F , \quad (T = 0 \text{ K}) \quad (2.1)$$

và

$$\kappa = \frac{3}{2n\epsilon_F} , \quad (T = 0 \text{ K}) \quad (2.2)$$

### 2102

Khí Fermi. Xét một khí Fermi lý tưởng mà các nguyên tử của nó có khối lượng  $m = 5 \times 10^{-24}$  g, spin hạt nhân  $I = \frac{1}{2}$ , và mômen từ hạt nhân  $\mu = 1 \times 10^{-23}$  erg/gauss. Tại  $T = 0$  K, để khí có thể bị phân cực hoàn toàn bởi một từ trường ngoài  $10^5$  gauss thì mật độ số hạt cực đại là bao nhiêu? (Giả thiết không có mômen từ electron).

(MIT)

Lời giải:

Sau khi khí bị phân cực hoàn toàn bởi từ trường ngoài, năng lượng Fermi là  $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}(6\pi^2 n)^{2/3}$ , trong đó  $n$  là mật độ hạt.

Với  $\epsilon_F \leq 2\mu H$ , ta có

$$n \leq \frac{1}{6\pi^2} \left( \frac{4m\mu H}{\hbar^2} \right)^{3/2} .$$

Do đó,  $n_{\max} = \frac{1}{6\pi^2} \left( \frac{4m\mu H}{\hbar^2} \right)^{3/2} \approx 2 \times 10^{17} \text{ nguyên tử/cm}^3$ .

### 2103

Phát biểu và nêu ra một chứng minh ngắn gọn đối với số mũ chính  $n$  của các đại lượng phụ thuộc nhiệt độ sau đây trong một khí electron ba chiều suy biến mạnh:

(a) nhiệt dung riêng đẳng tích;

(b) sự đóng góp của spin vào mômen từ  $M$  trong một từ trường không đổi  $H$ .

(MIT)

**Lời giải:**

Xét tích phân  $I$ :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} + 1} \\ &= \int_{-\mu/kT}^\infty \frac{f(\mu + kTz)}{e^z + 1} kT dz \\ &= kT \int_0^{\mu/kT} \frac{f(\mu - kTz)}{e^{-z} + 1} dz + kT \int_0^\infty \frac{f(\mu + kTz)}{e^z + 1} dz \\ &= \int_0^\mu f(x) dx - kT \int_0^{\mu/kT} \frac{f(\mu - kTz)}{e^z + 1} dz + kT \int_0^\infty \frac{f(\mu + kTz) dz}{e^z + 1}, \end{aligned}$$

trong đó  $kTz = -\mu + \varepsilon$ . Vì  $\mu/kT \gg 1$ , ta có thể thay cận trên của tích phân thứ hai trong biểu thức ở trên bằng  $\infty$ , sao cho

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\mu f(x) dx + kT \int_0^\infty \frac{f(\mu + kTz) - f(\mu - kTz)}{e^z + 1} dz \\ &= \int_0^\mu f(x) dx + 2(kT)^2 f'(\mu) \int_0^\infty \frac{z dz}{e^z + 1} + \dots, \text{ trong đó } f'(\mu) = \frac{df(\mu)}{d\mu}. \end{aligned}$$

(a) Cho  $f(\varepsilon) = \varepsilon^{3/2}$ , khi đó nội năng  $E \sim I, C_v = (\frac{\partial E}{\partial T})_V \sim T$ , tức là  $n = 1$ . Thực vậy, khi  $T = 0$  K, do nhiệt năng quá nhỏ nên chỉ những electron nào nằm ở vùng chuyển tiếp với bề rộng  $\approx kT$  trên mặt Fermi mới có thể bị kích thích lên các mức với năng lượng  $\approx kT$ . Phần nội năng này liên quan trực tiếp với  $T$ , khi đó

$$\overline{N}T \sim T^2, \quad \text{tức là } C_v \sim T.$$

(b) Cho  $f(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}$ , khi đó  $M \sim I$ , do đó  $M \approx M_0(1 - \alpha T^2)$ , tức là,  $n = 0$ . Khi  $T = 0$  K, mặt Fermi  $\varepsilon_F$  với hướng spin song song với  $\mathbf{H}$  là  $\varepsilon_{F\uparrow} = \mu + \mu_B H$  ( $\mu_B$  là manheton Bohr), trong khi mặt Fermi  $\varepsilon_F$  với hướng spin đối song với  $\mathbf{H}$  là  $\varepsilon_{F\downarrow} = \mu - \mu_B H$ . Do vậy, thực sự có tồn tại một mômen từ spin song song với  $\mathbf{H}$ . Vì vậy  $n = 0$ .

Đặt một hệ gồm  $N = 2 \times 10^{22}$  electron vào trong một “hộp” với thể tích  $V = 1 \text{ cm}^3$ . Các thành hộp là những rào thế cao vô hạn. Hãy tính các đại lượng dưới đây với sai khác với một số là 5 và chỉ ra sự phụ thuộc vào những tham

số vật lý có liên quan:

- (a) nhiệt dung riêng  $C$ ,
- (b) độ từ cảm  $\chi$ ,
- (c) áp suất  $p$  lên các thành hộp,
- (d) động năng trung bình  $\langle E_k \rangle$ .

(Chicago)

Lời giải:

Mật độ trạng thái trong không gian  $\mathbf{k}$  cho bởi

$$D(k)dk = 2V \cdot \frac{4\pi k^2}{8\pi^3} dk ,$$

và động năng của electron là  $\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$ . Kết hợp hai biểu thức trên ta được

$$D(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} .$$

Tại  $T = 0$  K,  $N$  electron chiếm tất cả các mức năng lượng từ 0 đến  $E_F = \frac{\hbar^2}{2m}k_F^2$ , tức là,

$$N = \int_0^{E_F} D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2}{3}D(E_F)E_F ,$$

Suy ra  $E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}}$ .

(a) Nhiệt dung riêng là

$$C \approx k_B^2 T D(E_F) \approx \frac{N}{E_F} k_B^2 T ,$$

trong đó  $k_B$  là hằng số Boltzmann.

(b) Độ từ cảm là

$$\chi = \mu_B^2 D(E_F) \approx \frac{N}{E_F} \mu_B^2 ,$$

trong đó  $\mu_B$  là magneton Bohr.

(c), (d) Động năng trung bình là

$$\langle E_k \rangle = \int_0^{E_F} \varepsilon D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2}{5} D(E_F) E_F^2 = \frac{3}{5} N E_F ,$$

và áp suất lên các thành hộp là

$$p = \frac{d\langle E_{\mathbf{k}} \rangle}{dV} = \frac{3}{5} \frac{N E_F}{V} .$$

### 2105

Một khí lý tưởng gồm  $N$  fermion có spin  $\frac{1}{2}$  bị giam vào trong một thể tích  $V$ . Hãy tính giới hạn của (a) thể hoá học, (b) năng lượng trung bình của mỗi hạt, (c) áp suất, (d) độ cảm spin Pauli ở không độ tuyêt đối. Chứng tỏ rằng trong hệ đơn vị Gauss độ cảm có thể được viết dưới dạng  $3\mu_B^2 N / 2\mu(0)V$ , trong đó  $\mu(0)$  là thể hoá học ở không độ tuyêt đối. Giả thiết mỗi fermion tương tác với từ trường ngoài theo công thức  $2\mu_0 H S_z$ , trong đó  $\mu_B$  là magneton Bohr và  $S_z$  là thành phần trên trục  $z$  của spin.

(Wisconsin)

Lời giải:

Vì spin của mỗi fermion là  $\frac{1}{2}$ , thành phần trên trục  $-z$  của nó có hai hướng khả dĩ so với từ trường: hướng lên trên ( $\uparrow$ ) và hướng xuống dưới ( $\downarrow$ ). Điều này tương ứng với các mức năng lượng  $\pm \mu_B H$ . Do đó năng lượng của một hạt là

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \pm \mu_B H .$$

Tại  $T = 0$  K, các hạt nói trên chiếm tất cả các mức năng lượng ở dưới năng lượng Fermi  $\mu(0)$ . Do đó động năng của các hạt với spin âm phân bố giữa 0 và  $\mu(0) - \mu_B H$ , động năng của các hạt với spin dương phân bố giữa 0 và  $\mu(0) + \mu_B H$ , số hạt của chúng là

$$N_- = \frac{4\pi V}{3h^3} p_-^3 \left( \frac{1}{2m} p_-^2 = \mu(0) + \mu_B H \right)$$

$$N_+ = \frac{4\pi V}{3h^3} p_+^3 \left( \frac{1}{2m} p_+^2 = \mu(0) - \mu_B H \right)$$

(a) Tổng số các hạt là

$$N = N_+ + N_- = \frac{4\pi V (2m)^{3/2}}{3h^3} \{ [\mu(0) - \mu_B H]^{3/2} + [\mu(0) + \mu_B H]^{3/2} \} .$$

Với  $H = 0$ , ta nhận được thể hoá học

$$\mu(0) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

(b) Đối với các hạt có thành phần  $z$  của spin,  $\frac{1}{2}$  và  $-\frac{1}{2}$ , xung lượng Fermi tương ứng là

$$p_+ = \{2m[\mu(0) - \mu_B H]\}^{1/2},$$

$$p_- = \{2m[\mu(0) + \mu_B H]\}^{1/2}.$$

Tổng năng lượng tương ứng là

$$E_+ = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_+} \left( \frac{p^2}{2m} + \mu_B H \right) p^2 dp$$

$$= \frac{4\pi V}{h^3} \left[ \frac{p_+^5}{10m} + \frac{\mu_B H}{3} p_+^3 \right],$$

$$E_- = \frac{4\pi V}{h^3} \left[ \frac{p_-^5}{10m} - \frac{\mu_B H}{3} p_-^3 \right].$$

Do đó năng lượng trung bình của mỗi hạt là

$$\frac{E}{N} = \frac{E_+ + E_-}{N} = \frac{4\pi V}{h^3 N} \left[ \frac{1}{10m} (p_+^5 + p_-^5) + \frac{\mu_B H}{3} (p_+^3 - p_-^3) \right].$$

Khi  $\mu(0) \gg \mu_B H$ ,

$$\frac{E}{N} \approx \frac{3}{5} \mu(0) \left[ 1 - \frac{5}{2} \left( \frac{\mu_B H}{\mu_0} \right)^2 \right].$$

(c) Áp suất là

$$p = - \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T = - \frac{\partial E}{\partial \mu(0)} \cdot \frac{\partial \mu(0)}{\partial V} = \frac{2N}{5V} \mu(0) = \frac{2}{5} n \mu(0).$$

(d) Khi  $\mu(0) \gg \mu_B H$ , độ từ hóa cho bởi

$$M = \mu_B (N_- - N_+)/V = \frac{3\mu_B^2 N}{2\mu(0)V} H = \chi H.$$

Do đó  $\chi = \frac{3N\mu_B^2}{2\mu(0)V}$ .

## 2106

Xét một mảnh khí Fermi của hạt nhân nguyên tử.

Ngoại trừ nguyên lý Pauli ra, các nucleon trong những các hạt nhân nặng được giả thiết là chuyển động một cách độc lập trong một quả cầu tương ứng

với thể tích  $V$  của hạt nhân. Chúng được xem như là một khí Fermi hoàn toàn suy biến. Cho  $A = N$  (số neutron) +  $Z$  (số proton), giả thiết  $N = Z$ , hãy tính động năng trên mỗi nucleon,  $E_{\text{kin}}/A$ , với mẫu này. Thể tích của các hạt nhân là  $V = \frac{4\pi}{3} R_0^3 A$ , với  $R_0 \approx 1,4 \times 10^{-13}$  cm. Hãy viết kết quả ra Mev.

(Chicago)

**Lời giải:**

Trong không gian xung lượng,

$$dn = \frac{4V}{h^3} 4\pi p^2 dp ,$$

trong đó  $n$  là mật độ số nucleon.

Tổng số nucleon là

$$\begin{aligned} A &= \int dn = 16\pi V \int_0^{p_F} \frac{p^2}{h^3} dp \\ &= \frac{16\pi V}{3h^3} p_F^3 , \end{aligned}$$

Trong đó  $p_F$  là xung lượng Fermi.

Tổng động năng của các nucleon là

$$E_{\text{kin}} = \int \frac{p^2}{2m} dn = \frac{16\pi V}{5h^3} \frac{p_F^5}{2m} .$$

Do đó

$$\frac{E_{\text{kin}}}{A} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m} .$$

Thể tích  $V$  có thể biểu diễn bằng hai cách:

$$V = \frac{4\pi}{3} R_0^3 A = \frac{3(2\pi)^3}{16\pi} p_F^{-3} A , \quad (\text{đặt } \hbar \equiv \frac{\hbar}{2\pi} = 1)$$

Suy ra  $p_F = R_0^{-1} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3}$ , và

$$\frac{E_{\text{kin}}}{A} = \frac{3}{10} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \frac{1}{mR_0^2} \approx 16 \text{ MeV} .$$

## 2107

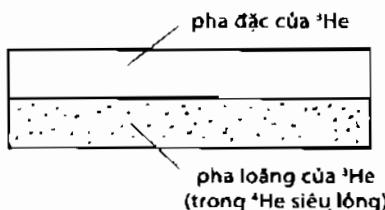
Tại nhiệt độ thấp, một hỗn hợp gồm  $^3\text{He}$  và  $^4\text{He}$  tạo thành một chất lỏng tách rời thành hai pha: một pha đặc (gần như gồm  $^3\text{He}$  nguyên tử), và một pha loãng (khoảng chừng 6,5%  $^3\text{He}$  khi  $T \leq 0,1\text{ K}$ ). Pha  $^3\text{He}$  nhẹ hơn nổi lên trên pha loãng, và các nguyên tử  $^3\text{He}$  có thể vượt qua biên giới pha (xem hình 2.23).

Bỏ qua sự kích thích của  $^4\text{He}$  siêu lỏng, và về mặt nhiệt động lực học, pha loãng có thể được biểu diễn như là một khí Fermi lý tưởng suy biến gồm các hạt có mật độ  $n_d$  và khối lượng hiệu dụng  $m^*$  ( $m^*$  lớn hơn  $m_3$ , khối lượng của nguyên tử  $^3\text{He}$  tròn, do sự có mặt của chất lỏng  $^4\text{He}$ , thực tế  $m^* = 2,4m_3$ ). Ta có thể biểu diễn thô pha đặc bằng một khí Fermi lý tưởng suy biến với mật độ  $n_c$  và khối lượng hạt là  $m_3$ .

(a) Tính năng lượng Fermi đối với hai chất lỏng.

(b) Dùng các lập luận vật lý đơn giản, hãy ước lượng nhiệt dung riêng ở nhiệt độ rất thấp của pha đặc  $c_c(T, T_{Fc})$  trong đó đã chỉ rõ sự phụ thuộc của nó vào  $T$  và  $T_{Fc}$  (ở đây  $T_{Fc}$  là nhiệt độ Fermi của pha đặc, và không cần xác định mọi hằng số không phụ thuộc vào  $T$  và  $T_{Fc}$ ). So sánh nhiệt dung riêng của pha đặc và pha loãng.

(c) Cần một nhiệt lượng bằng bao nhiêu để làm nóng mỗi pha từ  $T = 0\text{ K}$  đến  $T$ ?



Hình 2.23

(d) Nay giả thiết bình chứa trong hình vẽ được nối với một máy hút sao cho các nguyên tử  $^3\text{He}$  có thể chuyển từ pha cô đặc sang pha loãng với một tốc độ  $N_s$  nguyên tử trong một giây (như sự làm loãng khí trong tủ lạnh). Đối với nhiệt độ  $T$  cố định, hệ đó có thể hấp thụ được một công suất bằng bao nhiêu?

(Princeton)

**Lời giải:**

$$(a) Vì n = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{2mE_F}{\hbar^2} \right)^{3/2}, ta có E_{Fc} = \frac{\hbar^2}{2m_3} \left( \frac{3n_c}{8\pi} \right)^{2/3}, và E_{Fd} = \frac{\hbar^2}{2m_*} \left( \frac{3n_d}{8\pi} \right)^{2/3}.$$

(b) Đối với một khí Fermi lý tưởng suy biến ở nhiệt độ thấp, chỉ những hạt có năng lượng trong khoảng  $(E_F - kT)$  và  $(E_F + kT)$  mới đóng góp vào nhiệt dung riêng. Số hạt hiệu dụng là  $n_{\text{eff}} = n \frac{kT}{E_F}$ , do đó

$$c_v \propto n_{\text{eff}} \propto \frac{T}{E_F} = \alpha_c \frac{T}{T_{Fc}},$$

trong đó  $\alpha_c$  là một hằng số.

$$(c) Q_c = \int_0^T c_v dT = \frac{\alpha_c T^2}{2T_{Fc}},$$

$$Q_d = \int_0^T c_v dT = \frac{\alpha_d T^2}{2T_{Fd}}.$$

(d) Entropy trên mỗi hạt ở nhiệt độ thấp là

$$S(T) = \int_0^T \frac{c_v}{T} dT = \lambda \frac{T}{T_F}, \quad \text{trong đó } \lambda \text{ là một hằng số.}$$

Công suất hấp thụ được chuyển đổi thành ẩn nhiệt là

$$W = \dot{N}_s (S_d(T) - S_c(T)) T = \dot{N}_s T^2 \left( \frac{\lambda_d}{T_{Fd}} - \frac{\lambda_c}{T_{Fc}} \right).$$

### 2108

Người ta cho rằng sao lùn-trắng là một hệ electron suy biến với nhiệt độ đồng nhất thấp hơn nhiều so với nhiệt độ Fermi. Hệ này là ổn định, chống lại được sự suy sáp do hấp dẫn, chừng nào mà các electron là các hạt phi tương đối tính.

- (a) Hãy tính mật độ electron sao cho xung lượng Fermi bằng một phần mươi khối lượng nghỉ của electron  $\times c$ .
- (b) Hãy tính áp suất của khí electron suy biến ở những điều kiện đó.  
(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

$$(a) Từ N = \frac{2V}{h^3} \iiint_{p \leq p_F} d\mathbf{p},$$

$$\text{suy ra } n = \frac{N}{V} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{p_F}{h}\right)^3.$$

Với

$$p_F = \frac{m_e c}{10},$$

ta có

$$n = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{m_e c}{10h}\right)^3 = 5,8 \times 10^{32} / \text{m}^3.$$

(b) Đối với một khí Fermi suy biến mạnh (trong gần đúng hoá trị 0), ta nhận được

$$\bar{E} = \frac{3}{5} N \mu_0,$$

và

$$p = \frac{2\bar{E}}{3V} = \frac{2}{5} n \mu_0 = \frac{2}{5} n \cdot \frac{p_F^2}{2m} = 9,5 \times 10^{16} \text{ N/m}^2.$$

### 2109

Sao lùn-trắng là sao duy trì được nhờ áp suất của các electron suy biến. Để xây dựng một mô hình đơn giản cho thiên thể này, ta hãy xét một quả cầu khí lý tưởng gồm các electron và Si<sup>28</sup>, bị ion hoá hoàn toàn, với mật độ không đổi trong toàn bộ ngôi sao. (Lưu ý rằng giả thiết về một mật độ không đổi không phù hợp với cân bằng thuỷ tĩnh, vì khi đó áp suất cũng là không đổi. Giả thiết rằng khí là lý tưởng cũng không thực sự logic. Tuy nhiên, những nhược điểm này của mô hình không quan trọng lắm đối với các vấn đề mà ta muốn xét.) Ký hiệu  $n_i$  là mật độ của các iôn silic, và  $n_e = 14n_i$  là mật độ của electron. (Nguyên tử số của silic là 14).

(a) Hãy tìm hệ thức giữa động năng trung bình  $\bar{E}_e$  của các electron và mật độ  $n_e$ , giả thiết rằng các mật độ có giá trị sao cho các electron là “siêu tương đối tính”, tức là khối lượng nghỉ của electron có thể bỏ qua so với năng lượng toàn phần.

(b) Hãy tính  $\bar{E}_e$  (ra MeV) trong trường hợp mật độ (khối lượng nghỉ) của khí bằng  $\rho = 10^9 \text{ g/cm}^3$ . Cũng tính động năng trung bình  $\bar{E}_i$  của các ion silic ở

vùng tâm của sao lùn, giả thiết rằng nhiệt độ là  $10^8$  K và “khí ion” có thể được xem như một khí Maxwell - Boltzmann, và từ đó bạn sẽ thấy rằng  $\bar{E}_e \gg \bar{E}_i$ .

(c) Nếu  $M$  là khối lượng của sao và  $R$  là bán kính của nó, thì thế năng hấp dẫn cho bởi

$$U_G = \frac{3GM^2}{5R}.$$

Trong trường hợp nội năng chủ yếu là đóng góp của các electron siêu tương đối tính (như trong phần (b) ở trên), thì từ định lý virian sẽ suy ra rằng tổng nội năng gần đúng bằng thế năng hấp dẫn. Thì ra nhận sự bằng nhau đó, và giả thiết rằng các electron không đóng góp đáng kể vào khối lượng của ngôi sao, hãy chứng tỏ rằng khối lượng của ngôi sao có thể được biểu diễn chỉ bằng các hằng số vật lý cơ bản. Tính bằng số câu trả lời của bạn và so sánh nó với khối lượng của mặt trời  $2 \times 10^{30}$  kg. (Có thể nói rằng đây là khối lượng gần đúng cực đại khả dĩ của một sao lùn-trắng.)

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Sử dụng tính gần đúng của khí electron suy biến mạnh và  $\varepsilon = pc$ , từ mật độ trạng thái lượng tử của electron, suy ra

$$\frac{2}{h^3} dp = \frac{8\pi}{h^3 c^3} \varepsilon^2 d\varepsilon,$$

khi đó

$$\begin{aligned} n_e &= \int_0^{\varepsilon_F} \frac{8\pi}{h^3 c^3} \varepsilon^2 d\varepsilon \\ &= \frac{8\pi}{3h^3 c^3} \varepsilon_F^3. \end{aligned}$$

Do đó

$$\bar{E}_e = \frac{\int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon \cdot \varepsilon^2 d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^2 d\varepsilon} = \frac{3}{4} \varepsilon_F = \frac{3}{4} hc \left( \frac{3n_e}{8\pi} \right)^{1/3}.$$

(b) Khi  $\rho = 10^9$  g/cm<sup>3</sup>,

$$n_e = 14n_i = 3 \times 10^{32} \text{ cm}^{-3} = 3 \times 10^{38} \text{ m}^{-3},$$

$$\bar{E}_e = 5 \times 10^{-13} \text{ J} = 3 \text{ MeV},$$

$$\bar{E}_i = \frac{3}{2} kT = 2 \times 10^{-15} \text{ J} = 1,3 \times 10^{-2} \text{ MeV}.$$

Hiển nhiên,  $\bar{E}_i \ll \bar{E}_e$ .

(c) Từ định lý virian, ta có

$$\left( \frac{4\pi}{3} R^3 n_e \right) \cdot \frac{3}{4} hc \left( \frac{3n_e}{8\pi} \right)^{1/3} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Chú ý rằng

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{n_e}{14} m_i = \frac{8\pi}{3} R^3 n_e m_p,$$

Khi đó ta có

$$M = \frac{15}{128\pi} \cdot \frac{hc}{Gm_p^2} \sqrt{\frac{5hc}{2G}} = 8,5 \times 10^{30} \text{ kg} = 4,1 M_\odot,$$

trong đó  $M_\odot$  là khối lượng của mặt trời.

### 2110

(a) Cho khối lượng mặt trời bằng  $2 \times 10^{33}$  g, hãy ước lượng số electron trong mặt trời. Giả thiết mặt trời gồm phần lớn là hidrô nguyên tử.

(b) Trong một sao lùn-trắng có khối lượng bằng mặt trời, các nguyên tử hoàn toàn bị iôn hoá và được giữ trong một hình cầu với bán kính  $2 \times 10^9$  cm. Hãy tính năng lượng Fermi của electron (ra eV).

(c) Nếu nhiệt độ của sao lùn trắng là  $10^7$  K, hãy thảo luận xem các electron và/những nucleon trong sao đó có bị suy biến không.

(d) Nếu số các electron ở trên được giữ trong một punxa với khối lượng bằng mặt trời và bán kính 10 km, hãy tìm bậc độ lớn của năng lượng Fermi của chúng.

(Columbia)

Lời giải:

(a) Số electron là

$$N = \frac{2 \times 10^{33}}{1,67 \times 10^{-24}} \approx 1,2 \times 10^{57}.$$

(b) Năng lượng Fermi của electron là

$$E_{Fe} = \frac{h^2}{2m_e} \left( \frac{3}{8\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3} = \frac{h^2}{2m_e} \left( \frac{9}{32\pi^2} \frac{N}{R^3} \right)^{2/3} \approx 4 \times 10^4 \text{ eV}.$$

Năng lượng Fermi của nucleon là

$$E_{Fn} = E_{Fe} \frac{m_e}{m_n} = \frac{1}{1840} E_{Fe}$$

(c)  $E_{Fe}/k = 4 \times 10^8 \text{ K} > 10^7 \text{ K}$ ,  $E_{Fn}/k \ll 10^7 \text{ K}$ .

Do đó, trong một sao lùn trắng, các electron bị suy biến mạnh trong khi đó các nucleon chỉ bị suy biến yếu.

(d) Năng lượng Fermi của các electron nếu bị giữ ở trong một punxa là

$$E'_{Fe} = \left( \frac{R}{R'} \right)^2 E_{Fe} = 4 \times 10^6 E_{Fe} = 1,6 \times 10^5 \text{ MeV}$$

### 2111

Một khí elêctron tự do (được xét ở  $T = 0 \text{ K}$ ) có mật độ hạt bằng bao nhiêu để có đủ động năng lượng một hạt (năng lượng Fermi) cho phép xảy ra phản ứng



Dùng kết quả trên hãy ước lượng mật độ tối thiểu của một sao nôtron.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Khi  $T = 0 \text{ K}$ , hệ thức giữa năng lượng Fermi và mật độ số hạt của khí elêctron là

$$n = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{2m\varepsilon_F}{h^2} \right)^{3/2}$$

Điều kiện để phản ứng xảy ra là  $\varepsilon_F \geq 0,8 \text{ MeV}$ , khi đó

$$n_{min} = 3,24 \times 10^{36} \text{ m}^{-3}$$

Do đó mật độ khối lượng tối thiểu của sao nôtron là

$$\rho_{min} = m_n n_{min} = 5,4 \times 10^9 \text{ kg/m}^3$$

## 2112

Giả thiết rằng sao neutron là một khí neutron phi tương đối tính suy biến mạnh trong một cấu hình cân bằng đối xứng cầu. Đồng thời khí neutron bị giam giữ bởi lực hấp dẫn của một vật nặng có khối lượng  $M$  và bán kính  $r_0$  nằm ở tâm của sao. Bỏ qua mọi tương tác giữa các neutron. Hãy tìm mật độ neutron như là một hàm số của khoảng cách  $r$  tính từ tâm, với  $r > r_0$ .

(Chicago)

**Lời giải:**

Đối với một khí suy biến phi tương đối tính, mật độ  $\rho \propto \mu^{3/2}$ , áp suất  $p \propto \mu^{5/2}$ , trong đó  $\mu$  là thể hóa học. Do đó,  $p = a\rho^{5/3}$ , ở đây  $a$  là một hằng số. Áp dụng nó cho phương trình

$$\frac{dp}{\rho} = MGd \left( \frac{1}{r} \right) ,$$

ta tìm được  $a \cdot \frac{5}{2}d\rho^{2/3} = MGd \left( \frac{1}{r} \right)$  và do đó

$$\rho(r) = \left[ \frac{2MG}{5a} \cdot \frac{1}{r} + \text{const} \right]^{3/2} .$$

Khi  $r \rightarrow \infty$ ,  $\rho(r) \rightarrow 0$ , ta tìm được const. = 0. Cuối cùng, với  $r > r_0$ , ta có

$$\rho(r) = \left[ \frac{2MG}{5a} \cdot \frac{1}{r} \right]^{3/2} .$$

## 2113

Xét một khí suy biến (tức là  $T = 0$  K) gồm  $N$  electron trong một thể tích  $V$ .

(a) Hãy tìm một phương trình liên hệ áp suất, năng lượng và thể tích của khí này trong trường hợp siêu tương đối tính (tức là bỏ qua khối lượng nghỉ của electron).

(b) Đối với một khí gồm các electron thực (tức là có khối lượng nghỉ  $m$ ), hãy tìm điều kiện về  $N$  và  $V$  để kết quả của phần (a) vẫn đúng được một cách gần đúng.

(MIT)

**Lời giải:**

Năng lượng của khí electron suy biến không tương tác là:

$$E = 8\pi V \int_0^{p_F} \frac{\varepsilon p^2}{h^3} dp ,$$

trong đó  $\varepsilon$  là năng lượng của một electron,  $p_F$  là xung lượng Fermi,

$$p_F = (3N/8\pi V)^{1/3} h .$$

(a) Đối với trường hợp siêu tương đối tính,  $\varepsilon = cp$ , do đó ta có năng lượng

$$E = \frac{2\pi cV}{h^3} p_F^4 ,$$

và áp suất  $p = -(\frac{\partial E}{\partial V})_{T=0} = \frac{1}{3} \frac{E}{V}$ , tức ta có phương trình trạng thái

$$pV = \frac{1}{3} E .$$

(b) Đối với một electron thực,

$$\varepsilon = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} \approx pc \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{mc}{p} \right)^2 \right] ,$$

ở đây  $p$  là xung lượng của nó, ta nhận được

$$E \approx 2\pi cV [p_F^4 + (mc p_F)^2]/h^3 .$$

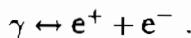
Điều kiện để kết quả của phần (a) vẫn dùng được một cách gần đúng là  $p_F \gg mc$ , hay

$$\frac{N}{V} \gg \frac{8\pi}{3} \left( \frac{mc}{h} \right)^3 .$$

Hoặc  $N \rightarrow \infty$  hoặc  $V \rightarrow 0$  đều sẽ thỏa mãn điều kiện này.

### 2114

Xét một hộp có thể tích  $V$  chứa các cặp electron-positron và các photon trong trạng thái cân bằng ở nhiệt độ  $T = 1/k\beta$ . Giả thiết rằng trạng thái cân bằng được xác lập là do phản ứng



Phản ứng không xảy ra trong không gian tự do, nhưng có thể cho rằng phản ứng trên được xúc tác bởi các thành hộp. Bỏ qua các thành hộp, trừ lúc cần để gây ra phản ứng, hãy tìm

(a) thế hoá học đối với các fermion.

(b) số cặp electron -positron trung bình trong hai miền giới hạn  $kT \gg m_ec^2$  và  $kT \ll m_ec^2$ . (Câu trả lời của bạn có thể để dưới dạng một tích phân xác định không có thứ nguyên.)

(c) việc bỏ qua các thành hộp, nói một cách chặt chẽ là không được phép, nếu có sự mất cân bằng vật chất - phản vật chất. Giả thiết rằng sự mất cân bằng này tạo ra một thế hoá học thực  $\mu \neq 0$  đối với các electron, khi đó thế hoá học đối với các positron là bao nhiêu?

(d) hãy xác định điện tích toàn phần của hệ khi có sự mất cân bằng này trong miền giới hạn  $kT \gg \mu \gg m_ec^2$ . (Một lần nữa, câu trả lời của bạn có thể được để dưới dạng một tích phân xác định không có thứ nguyên.)

(Chicago)

**Lời giải:**

(a) Đối với phản ứng hoá học  $A \leftrightarrow B + C$  trong trạng thái cân bằng,  $\mu_A = \mu_B + \mu_C$ . Vì thế hoá học của khí photon  $\mu_\gamma = 0$ , ta có

$$\mu_{e^+} + \mu_{e^-} = 0 .$$

Xét tính đối xứng giữa hạt và phản hạt, ta có

$$\mu_{e^+} = \mu_{e^-} .$$

Do đó  $\mu_{e^+} = \mu_{e^-} = 0$ .

(b) Tại miền giới hạn  $kT \gg m_ec^2$ , bỏ qua khối lượng nghỉ của electron và đặt  $E = cp$ , ta tìm được

$$\begin{aligned} N_{e^-} &= \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \frac{1}{e^{\beta cp} + 1} \\ &= \frac{V}{\pi^2} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x + 1} = N_{e^+} . \end{aligned}$$

Tại miền giới hạn  $kT \ll m_ec^2$ , số "1" ở mẫu số của thừa số Fermi

$$\frac{1}{[\exp(\beta\sqrt{(cp)^2 + (m_ec^2)^2}) + 1]}$$

có thể bỏ qua và ta cũng có

$$\varepsilon_p \equiv \sqrt{(cp)^2 + (m_e c^2)^2} \approx m_e c^2 + p^2 / 2m .$$

Do đó

$$\begin{aligned} N_{e^\pm} &= \frac{2V}{(2\pi h)^3} \int_0^\infty e^{-\beta m_e c^2} e^{-\beta p^2 / 2m_e} 4\pi p^2 dp \\ &= 2V \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-m_e c^2 / kT} . \end{aligned}$$

(c) Vì  $\mu_{e^+} + \mu_{e^-} = 0$ , nên  $\mu_{e^+} = -\mu_{e^-} = -\mu$ .

(d) Diện tích toàn phần của hệ là  $q = (-e)(n_{e^-} - n_{e^+})$ , trong đó

$$n_{e^\pm} = \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\beta(\varepsilon_p + \mu)} + 1} .$$

Do  $\beta\mu \ll 1$ ,  $e^{\pm\beta\mu} \approx 1 \pm \beta\mu$ , và

$$\begin{aligned} q &= \frac{-e \cdot 8\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp \left[ \frac{1}{e^{-\beta\mu} e^{\beta\varepsilon_p} + 1} - \frac{1}{e^{\beta\mu} e^{\beta\varepsilon_p} + 1} \right] \\ &= -\frac{8\pi e V}{h^3 c^3} (kT)^2 \mu \int_0^\infty \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx . \end{aligned}$$

### 2115

Trong giai đoạn sơ khai của vũ trụ, người ta thường bỏ qua khối lượng và thế hoá học so với  $kT$  mà đó vẫn là một phép gần đúng tốt.

(a) Xác định mật độ số hạt và mật độ năng lượng trung bình của một khí gồm có các fermion không tương tác trong trạng thái cân bằng nhiệt với những điều kiện nói trên. (Bạn không cần tính các tích phân không thứ nguyên bậc nhất.)

(b) Nếu khí giãn nở đoạn nhiệt mà vẫn giữ được cân bằng, thì mật độ số hạt và mật độ năng lượng trung bình phụ thuộc vào kích thước của hệ như thế nào?

Giả thiết rằng các fermion chiếm ưu thế là các électron và positron khi  $T \simeq 10^{11}$  K trong phần (c) và (d) dưới đây.

(c) Giả thiết đưa ra trong (a) cho rằng các hạt không tương tác có hợp lý không? Vì sao? [Gợi ý: Năng lượng tương tác Coulomb trung bình bằng

bao nhiêu? Cho điện tích của positron =  $1,6 \times 10^{-19}$  C; hằng số Boltzmann  $k = 1,38 \times 10^{-16}$  erg/K].

(d) Nếu tiết diện tương tác trong khí electron -positron có cỡ độ lớn như tiết diện tán xạ Thomson  $\sigma_T = 8\pi r_0^2/3$  (bán kính cỡ điển của electron  $r_0 = 2,8 \times 10^{-13}$  cm), hãy tính khoảng thời gian tự do trung bình giữa các va chạm của các hạt. Nếu trong phần (b) tốc độ giãn nở  $\approx 10^4$  s<sup>-1</sup>, thì giả thiết cho rằng khí duy trì được trạng thái cân bằng có hợp lý không? Vì sao?

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Với gần đúng được nói ở trên, ta có

$$\varepsilon = pc, \quad \frac{\mu}{kT} \approx 0.$$

Do đó

$$N = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi \int_0^\infty \frac{p^2}{e^{pc/kT} + 1} dp.$$

Mật độ số hạt trung bình là

$$n = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x + 1}.$$

Mật độ năng lượng trung bình là

$$\rho = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 kT \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x + 1}.$$

(b) Quá trình giãn nở đoạn nhiệt chuẩn tĩnh thoả mãn phương trình  $d(\rho V) = -pdV$ . Bỏ qua khối lượng các hạt, ta có  $p = \rho/3$  (tương tự khí photon), khi đó

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{4}{3} \frac{dV}{V},$$

Suy ra

$$\rho \propto V^{-4/3},$$

Từ đó ta nhận được  $T \propto V^{-1/3}$ . Do đó mật độ số hạt  $n \propto V^{-1}$ .

(c) Khoảng cách trung bình giữa các hạt  $r \propto n^{-1/3}$ . Tỷ số giữa năng lượng tương tác Coulomb trên mỗi hạt so với động năng của hạt là

$$\frac{e^2/r}{kT} \sim \frac{e^2 n^{1/3}}{kT} \sim \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

Điều đó ngụ ý rằng năng lượng tương tác nhỏ hơn nhiều so với động năng, chính điều này đã làm cho phép gần đúng trong câu (a) là hợp lý.

(d) Khoảng thời gian tự do trung bình là  $t \sim 1/n\sigma_T v$ , trong đó tốc độ trung bình

$$v \sim \left( \frac{kT}{m_e} \right)^{1/2}$$

$$\text{Do đó } t \sim \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^{-3} \sigma_T^{-1} \left( \frac{kT}{m_e} \right)^{-1/2} \sim 10^{-23} \text{ s.}$$

Giả thiết cho rằng khí duy trì được trạng thái cân bằng là hợp lý vì khoảng thời gian tự do trung bình ngắn hơn nhiều so với thời gian giãn nở vào cỡ  $10^{-4}$  s.

#### 4. TẬP HỢP THỐNG KÊ (2116–2148)

##### 2116

Nhiệt dung.

Nhiệt dung *đẳng tích* của một hệ với năng lượng trung bình  $\langle E \rangle$  cho bởi  $C_v = \left( \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \right)_{N,V}$ .

Hãy dùng tập hợp chính tắc để chứng minh rằng:  $C$  liên hệ với thăng giáng năng lượng toàn phương trung bình như sau:

$$C_v = \frac{1}{kT^2} \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle .$$

(MIT)

Lời giải:

Hàm phân bố là

$$Z = \sum \exp(-E_n/kT) .$$

Do đó,  $\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum E_n e^{-E_n/kT}$ . Khi đó

$$\begin{aligned} C_v &= \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \Bigg|_{N,V} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \langle E \rangle + \frac{1}{kT^2} \langle E^2 \rangle \\ &= \frac{1}{kT^2} [\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2] = \frac{1}{kT^2} \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle . \end{aligned}$$

2117

(a) Hãy cho định nghĩa nhiệt động lực học của năng lượng tự do Helmholtz  $F$ , định nghĩa cơ học thống kê cổ điển của hàm phân bố  $Z$ , và quan hệ giữa các đại lượng này. Định nghĩa tất cả các ký hiệu.

(b) Dùng các biểu thức trên và các lập luận nhiệt động để chứng tỏ rằng nhiệt dung đẳng tích  $c_v$  được cho bởi

$$c_v = kT \left[ \frac{\partial^2}{\partial T^2} (T \ln Z) \right]_V .$$

(c) Xét một hệ cổ điển có hai trạng thái năng lượng gián đoạn  $E_0$  và  $E_1$ . Tìm  $Z$  và  $c_v$ .

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a)  $F = U - TS$ ,  $Z = \int \exp(-\beta E(p, q)) d\omega$ , trong đó  $U$  là nội năng,  $T$  nhiệt độ tuyệt đối,  $S$  entropy,  $\beta = 1/kT$ ,  $E(p, q)$  năng lượng của hệ và  $d\omega = dp dq$  là yếu tố thể tích vi phân trong không gian pha,  $p$  và  $q$  tương ứng là xung lượng và toạ độ suy rộng, và  $k$  hằng số Boltzmann.

Hệ thức giữa  $F$  và  $Z$  là

$$F = -kT \ln Z .$$

(b) Từ  $dF = -SdT - pdV$ , ta có

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V .$$

Do đó

$$\begin{aligned} c_v &= T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = -T \left( \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V \\ &= kT \left[ \frac{\partial^2}{\partial T^2} (T \ln Z) \right]_V . \end{aligned}$$

(c)  $Z = e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_1} ,$ 

$$\begin{aligned} c_v &= kT \left\{ \frac{\partial^2}{\partial T^2} [T \ln(e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_1})] \right\}_V \\ &= \frac{(E_1 - E_0)^2}{4kT^2 \cosh^2 \left( \frac{E_1 - E_0}{2kT} \right)} . \end{aligned}$$

## 2118

Xét năng lượng và thăng giáng năng lượng của một hệ bất kì tiếp xúc với một bình điều nhiệt ở nhiệt độ tuyệt đối  $T = 1/k\beta$ .

(a) Chứng minh rằng năng lượng trung bình  $\bar{E}$  của hệ là

$$\bar{E} = -\frac{\partial \ln z}{\partial \beta},$$

trong đó  $z = \sum_n \exp(-\beta E_n)$  lấy tổng theo mọi trạng thái của hệ.

(b) Tìm một biểu thức của  $\bar{E}^2$  theo các đạo hàm của  $\ln z$ .

(c) Tính năng lượng toàn phương trung bình  $(\Delta E)^2 = \bar{E}^2 - \bar{E}^2$ .

(d) Chứng minh rằng độ lệch chuẩn (độ lệch căn quân phương)  $\tilde{\Delta E} = ((\Delta E)^2)^{1/2}$  có thể được biểu diễn theo nhiệt dung của hệ và nhiệt độ tuyệt đối.

(e) Dùng kết quả đó để tìm một biểu thức của  $\tilde{\Delta E}/\bar{E}$  đối với khí lý tưởng đơn nguyên tử.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

$$(a) \bar{E} = \frac{\sum_n E_n e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}} = \frac{-\frac{\partial z}{\partial \beta}}{z} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z.$$

$$(b) \bar{E}^2 = \frac{\sum_n E_n^2 e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}}{z} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \ln z \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \ln z \right)^2.$$

$$(c) (\Delta E)^2 = \bar{E}^2 - (\bar{E})^2 = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln z = -\frac{\partial}{\partial \beta} \bar{E} = kT^2 c_v.$$

$$(d) \tilde{\Delta E} = \sqrt{(\Delta E)^2} = \sqrt{k c_v} T.$$

(e) Đối với khí lý tưởng đơn nguyên tử

$$\tilde{\bar{E}} = \frac{3}{2} N k T, \quad c_v = \frac{3}{2} N k,$$

và do đó

$$\frac{\tilde{\Delta E}}{\bar{E}} = \sqrt{\frac{2}{3N}}.$$

## 2119

Một cách thông thường để làm lạnh He<sup>3</sup> là đặt một áp suất  $P$  vào hỗn hợp rắn - lỏng cùng tồn tại ở nhiệt độ đủ thấp  $T$ . Mô tả định tính điều này diễn ra như thế nào trên cơ sở các giả thiết sau đây:

(a) Thể tích mol của pha lỏng,  $V_L$ , lớn hơn thể tích mol của pha rắn,  $V_S$ , ở mọi nhiệt độ.

(b) Entropy mol của pha lỏng được cho bởi

$$S_L = \gamma RT \quad \text{với} \quad \gamma \sim 4,6 \text{ K}^{-1}$$

(c) Entropy của pha rắn,  $S_S$ , xuất hiện hoàn toàn là do sự hỗn loạn liên quan với các spin hạt nhân ( $s = 1/2$ ).

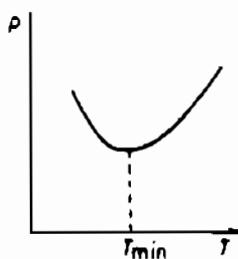
Chú ý: Trong câu trả lời của bạn (nhận được bằng cách dùng các thông tin trên) phải kèm theo một đồ thị bán định lượng trên biểu đồ  $p - T$  của He<sup>3</sup> ở nhiệt độ thấp.

(Chicago)

**Lời giải:**

Phương trình Clausius - Clapeyron là

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{S_L - S_S}{V_L - V_S}$$



Hình 2.24

Đối với các hạt có спин  $\frac{1}{2}$ ,  $S_S = kN_A \ln 2$ . Do đó

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\gamma RT - kN_A \ln 2}{V_L - V_S} = \frac{\gamma RT - R \ln 2}{V_L - V_S}$$

Theo đề bài,  $V_L - V_S > 0$ , do đó khi  $T \rightarrow 0$ ,  $\frac{dp}{dT} < 0$ . Như vậy, khi

$$T_{\min} = \frac{\ln 2}{\gamma} = \frac{\ln 2}{4,6} \text{ K},$$

thì áp suất đạt giá trị cực tiểu. Điều đó có nghĩa là ở nhiệt độ đủ thấp ( $T < T_{\min}$ ), tác dụng nén có thể dẫn đến một sự giảm nhiệt độ của hỗn hợp rắn-lỏng.

Giản đồ bán định lượng  $p - T$  của He<sup>3</sup> ở nhiệt độ thấp được biểu diễn trên hình 2.24.

## 2120

(a) Trình bày nguyên lý thứ ba của nhiệt động lực học.

(b) Giải thích ý nghĩa vật lý của nhiệt độ tuyệt đối âm. Nó có vi phạm nguyên lý thứ ba không? Vì sao?

(c) Đưa ra một ví dụ về nhiệt độ tuyệt đối âm có thể đạt được trên thực tế.

(d) Thảo luận vì sao nhiệt độ tuyệt đối âm không có ý nghĩa trong nhiệt động lực học cổ điển.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Nguyên lý thứ ba hay định lý Nernst phát biểu rằng không có hệ nào mà nhiệt độ tuyệt đối của nó có thể giảm tới 0.

(b) Theo phân bố Gibbs, ở trạng thái cân bằng tỷ số giữa số hạt có năng lượng  $E_n$  với số hạt có năng lượng  $E_m$  là  $N_n/N_m = \exp[-(E_n - E_m)/kT]$ . Do đó số hạt ở mức năng lượng cao sẽ nhỏ hơn số hạt ở mức năng lượng thấp khi  $T > 0$ . Nếu ngược lại, tức là trường hợp nghịch đảo mật độ ở dưới lên trên, phương trình cần phải có  $T < 0$  và ta nói là hệ ở nhiệt độ âm. Theo quan điểm về năng lượng, điều này không vi phạm nguyên lý thứ ba vì một hệ ở nhiệt độ tuyệt đối âm còn cách xa không độ tuyệt đối hơn so với một hệ ở nhiệt độ dương.

(c) Một hệ định xứ gồm các hạt có spin  $\frac{1}{2}$  là một ví dụ như vậy. Ta có thể đưa vào một từ trường mạnh để bắt tất cả các spin xếp thẳng hàng theo cùng một hướng, tức là song song với hướng của từ trường. Khi đó ta đảo ngược rất nhanh từ trường sao cho không có thời gian để hầu hết các spin đổi hướng.

Như vậy là ta đã đạt được nhiệt độ âm.

(d) Trong nhiệt động lực học cổ điển, một hệ ở nhiệt độ âm là không ổn định về mặt cơ học. Ta chia một chất đứng yên thành nhiều phần. Gọi nội năng và entropy của phần thứ  $i$  tương ứng là  $U_i$  và  $S_i(U_i)$ . Ta có

$$U_i = E_i - p_i^2/2M_i .$$

trong đó  $E_i$  là tổng năng lượng của phần thứ  $i$ ,  $M_i$  là khối lượng và  $p_i$  là xung lượng của nó với  $\sum_i p_i = 0$ . Sự cân bằng cơ học đòi hỏi mọi  $p_i = 0$ . Đối với một hệ ở nhiệt độ âm ta có,  $dS_i(U_i)/dU_i = 1/T < 0$ ,  $S_i$  sẽ tăng khi  $U_i$  giảm, tức là  $p_i$  tăng. Do đó entropy  $S_i(U_i)$  cực đại khi  $|p_i|$  đạt được cực đại. Điều này mâu thuẫn với điều kiện cân bằng cơ học  $p_i = 0$ .

### 2121

Xét một hệ gồm hai nguyên tử, mỗi nguyên tử chỉ có 3 trạng thái lượng tử với năng lượng là  $0$ ,  $\varepsilon$  và  $2\varepsilon$ . Hệ tiếp xúc với một bình điều nhiệt ở nhiệt độ  $T$ . Xác định hàm phân bố  $Z$  đối với hệ trên nếu các hạt tuân theo

- (a) thống kê cổ điển và chúng có thể phân biệt được.
- (b) thống kê cổ điển và chúng không thể phân biệt được.
- (c) thống kê Fermi -Dirac
- (d) thống kê Bose -Einstein.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

- (a)  $Z_1 = A^2$ , với  $A = 1 + \exp(-\beta\varepsilon) + \exp(-2\beta\varepsilon)$ .
- (b)  $Z_2 = \frac{Z_1}{2}$ .
- (c)  $Z_3 = A \exp(-\beta\varepsilon)$ .
- (d)  $Z_4 = A(1 + \exp(-2\beta\varepsilon))$ .

### 2122

- (a) Cho một hệ gồm hai hạt đồng nhất mà chúng có thể chiếm bất kì mức

nào trong ba mức năng lượng

$$\varepsilon_n = n\varepsilon, \quad n = 0, 1, 2.$$

Trạng thái năng thấp nhất,  $\varepsilon_0 = 0$ , suy biến bậc hai. Hệ cân bằng nhiệt ở nhiệt độ  $T$ . Trong mỗi trường hợp sau, hãy xác định hàm phân bố và năng lượng, đồng thời liệt kê chi tiết các cấu hình.

- 1) Các hạt tuân theo thống kê Fermi.
- 2) Các hạt tuân theo thống kê Bose.
- 3) Các hạt (bây giờ phân biệt được) tuân theo thống kê Boltzmann.

(b) Thảo luận điều kiện mà theo đó các fermion và boson có thể được coi như các hạt Boltzmann.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Xét hệ như là một tập hợp chính tắc, hàm phân bố là  $z = \sum_n \omega_n \exp(-\beta E_n)$ , trong đó  $\omega_n$  là bậc suy biến của mức năng lượng  $n$ .

- 1) Các hạt tuân theo thống kê Fermi. Ta có

$$\begin{aligned} z &= 1 + 2e^{-\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon}(1 + 2e^{\beta\varepsilon}), \\ E &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln z = -\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial\beta} \\ &= \frac{\varepsilon}{z} e^{-\beta\varepsilon}(2 + 4e^{-\beta\varepsilon} + 3e^{-2\beta\varepsilon}). \end{aligned}$$

Cấu hình được biểu diễn trên hình 2.25(a).

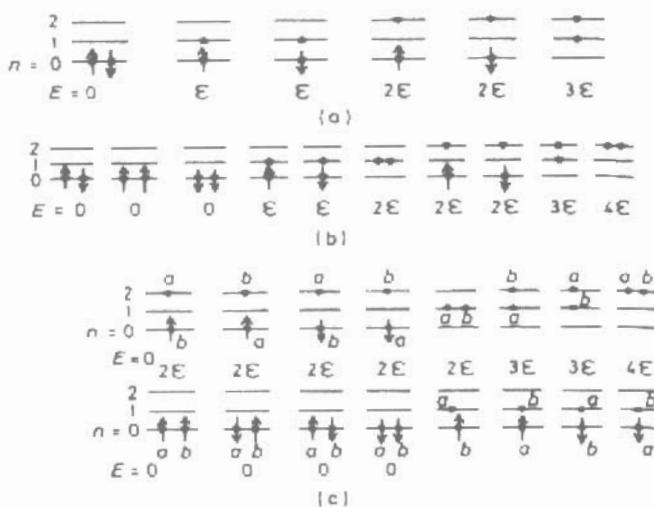
- 2) Các hạt tuân theo thống kê Bose. Ta có

$$\begin{aligned} z &= 3 + 2e^{-\beta\varepsilon} + 3e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon} + e^{-4\beta\varepsilon}, \\ E &= -\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial\beta} \\ &= \frac{\varepsilon}{z} e^{-\beta\varepsilon}(2 + 6e^{-\beta\varepsilon} + 3e^{-2\beta\varepsilon} + 4e^{-3\beta\varepsilon}). \end{aligned}$$

Cấu hình được biểu diễn trên hình 2.25(b).

- 3) Các hạt tuân theo thống kê Boltzmann. Ta có

$$\begin{aligned} z &= 4 + 4e^{-\beta\varepsilon} + 5e^{-2\beta\varepsilon} + 2e^{-3\beta\varepsilon} + e^{-4\beta\varepsilon}, \\ E &= \frac{2\varepsilon}{z} e^{-\beta\varepsilon}(2 + 5e^{-\beta\varepsilon} + 3e^{-2\beta\varepsilon} + 2e^{-3\beta\varepsilon}). \end{aligned}$$



Hình 2.25

Câu hình được biểu diễn trên hình 2.25(c).

(b) Khi điều kiện không suy biến được thoả mãn, tức là khi  $e^{-\alpha} \approx \frac{N}{V} \left( \frac{\hbar^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} \ll 1$ , tính không phân biệt được của các hạt trở nên không còn quan trọng nữa và các fermion và boson có thể được xem như các hạt Boltzmann.

## 2123

(a) Cho một định nghĩa về hàm phân bố  $z$  đối với một hệ thống kê.

(b) Tìm một hệ thức giữa nhiệt dung của một hệ và  $\frac{\partial^2 \ln z}{\partial \beta^2}$ , trong đó  $\beta = \frac{1}{kT}$ .

(c) Đối với hệ có một trạng thái kích thích với năng lượng  $\Delta$  ở trên trạng thái cơ bản, hãy tìm một biểu thức của nhiệt dung theo  $\Delta$ . Vẽ phác sự phụ thuộc của nó vào nhiệt độ và thảo luận đáng diệu của nó tại giới hạn của những nhiệt độ cao và thấp.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Hàm phân bố là tổng các xác suất thống kê.

Đối với thống kê lượng tử,  $z = \sum_s \exp(-\beta E_s)$ , lấy tổng theo mọi trạng

thái lượng tử.

Đối với thống kê cổ điển,  $z = \int \exp(-\beta E) d\Gamma / h^\gamma$ , lấy tích phân trong toàn bộ không gian pha, trong đó  $\gamma$  là số bậc tự do.

$$(b) \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z ,$$

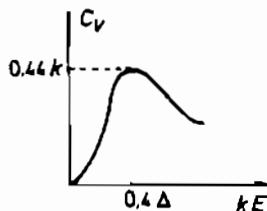
$$c_v = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = -\frac{1}{k\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \bar{E} = \frac{1}{k\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln z .$$

(c) Giả thiết hai trạng thái không suy biến, khi đó

$$\bar{E} = \frac{\Delta e^{-\Delta/kT}}{1 + e^{-\Delta/kT}} = \frac{\Delta}{e^{\Delta/kT} + 1} ,$$

$$c_v = \frac{d\bar{E}}{dT} = k \left( \frac{\Delta}{kT} \right)^2 \frac{e^{\Delta/kT}}{(1 + e^{\Delta/kT})^2} .$$

Biến thiên của nhiệt dung theo nhiệt độ được biểu diễn trên hình 2.26.



Hình 2.26

2124

Xét một tập hợp gồm  $N$  hệ hai-mức trong trạng thái cân bằng nhiệt ở nhiệt độ  $T$ . Mỗi hệ chỉ có hai trạng thái: một trạng thái cơ bản với năng lượng 0 và một trạng thái kích thích với năng lượng  $\epsilon$ . Hãy tìm các đại lượng sau đây và vẽ phác sự phụ thuộc của từng đại lượng vào nhiệt độ.

(a) Xác suất tìm thấy một hệ đã cho ở trạng thái kích thích.

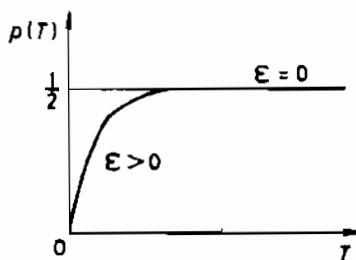
(b) Entropy của toàn bộ tập hợp.

Lời giải:

(a) Xác suất để một hệ ở trong trạng thái kích thích là  $P = \frac{1}{z} e^{-\varepsilon/kT}$ , trong đó  $z = 1 + e^{-\varepsilon/kT}$ , tức là

$$P = \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} + 1}$$

Sự phụ thuộc của xác suất này vào nhiệt độ được biểu diễn trên hình 2.27.

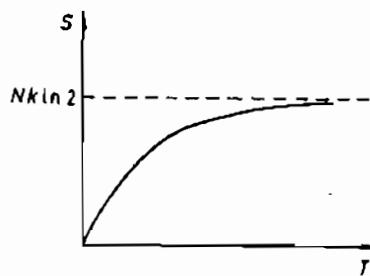


Hình 2.27

$$(b) z_N = (1 + e^{-\varepsilon/kT})^N, \quad F = -kT \ln z_N,$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \frac{N\varepsilon}{T}(1 + e^{\varepsilon/kT})^{-1} + Nk \ln(1 + e^{-\varepsilon/kT}).$$

Sự phụ thuộc của entropy vào nhiệt độ được biểu diễn trên hình 2.28.



Hình 2.28

2125

*N* hạt liên kết yếu tuân theo thống kê Maxwell-Boltzmann, mỗi hạt có thể ở một trong 3 mức năng lượng không suy biến  $-E, 0, +E$ . Hệ tiếp xúc với

một bình điều nhiệt ở nhiệt độ  $T$ .

- (a) Xác định entropy của hệ ở  $T = 0$  K?
- (b) Xác định entropy khả dĩ lớn nhất của hệ.
- (c) Xác định năng lượng khả dĩ nhỏ nhất của hệ.
- (d) Tìm hàm phân bố của hệ
- (e) Mức năng lượng có xác suất lớn nhất là bao nhiêu?
- (f) Nếu  $C(T)$  là nhiệt dung của hệ, thì giá trị của  $\int_0^\infty \frac{C(T)}{T} dT$  bằng bao nhiêu?

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

- (a) Tại  $T = 0$  K, entropy của hệ là  $S(0) = 0$ .

- (b) Entropy cực đại của hệ là

$$S_{\max} = k \ln \Omega_{\max} = k \ln 3^N = Nk \ln 3 .$$

- (c) Năng lượng cực tiểu của hệ là  $-NE$ .

- (d) Hàm phân bố của hệ là

$$z = (e^{E/kT} + 1 + e^{-E/kT})^N .$$

- (e) Khi  $N \gg 1$ , năng lượng có xác suất lớn nhất là năng lượng trung bình

$$\begin{aligned} NE_p &\approx N\bar{E} \\ &= -NE \frac{\left(a - \frac{1}{a}\right)}{\left(a + 1 + \frac{1}{a}\right)} \\ &= -\frac{2NE \sinh\left(\frac{E}{kT}\right)}{1 + 2 \cosh\left(\frac{E}{kT}\right)}, \end{aligned}$$

trong đó  $a = \exp(E/kT)$ .

$$(f) \int_0^\infty \frac{C(T)}{T} dT = \int_0^\infty dS = S(\infty) - S(0) = Nk \ln 3 .$$

## 2126

Hãy tìm áp suất, entropy, và nhiệt dung riêng đẳng tích của một khí Boltzmann lý tưởng gồm các hạt không thể phân biệt được ở giới hạn siêu tương đối tính, trong đó năng lượng của một hạt liên hệ với xung lượng của nó bởi  $\varepsilon = cp$ . Biểu diễn đáp số của bạn như là một hàm số của thể tích  $V$ , nhiệt độ  $T$ , và số hạt  $N$ .

(Princeton)

Lời giải:

Ký hiệu hàm  $z$  là hàm phân bố của một hạt,  $Z$  là hàm phân bố toàn bộ hệ,  $p$  là áp suất,  $S$  là entropy,  $U$  là nội năng, và  $c$  là nhiệt dung riêng. Ta có

$$z = \frac{4\pi V}{h^3 c^3} \int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon = \frac{8\pi V}{h^3 c^3} (kT)^3 ,$$

$$Z = \frac{z^N}{N!} = \frac{1}{N!} \left( \frac{8\pi V}{h^3 c^3} \right)^N (kT)^{3N} ,$$

$$p = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln Z = \frac{N}{\beta V} = \frac{NkT}{V} ,$$

$$\begin{aligned} S &= k \left( \ln Z - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \right) \\ &= Nk \left( 3 \ln kT + \ln \frac{8\pi V}{Nh^3 c^3} + 4 \right) , \end{aligned}$$

$$u = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = 3NkT ,$$

$$c = 3Nk .$$

## 2127

Một bình có thể tích  $V$  chứa  $N$  phân tử của một khí lý tưởng được giữ ở nhiệt độ  $T$  và áp suất  $P_1$ . Năng lượng của một phân tử có thể được viết dưới dạng

$$E_k(p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \varepsilon_k ,$$

trong đó  $\varepsilon_k$  ký hiệu các mức năng lượng ứng với các trạng thái nội tại của các phân tử khí.

- (a) Hãy tính năng lượng tự do  $F = -kT \ln Z$ , trong đó  $Z$  là hàm phân bố

và  $k$  là hằng số Boltzmann. Biểu diễn một cách tường minh sự phụ thuộc của năng lượng tự do vào thể tích  $V_1$ .

Bây giờ xét một bình khác chứa cùng một số phân tử khí đồng nhất được giữ ở áp suất  $P_2$  cũng ở nhiệt độ  $T$ .

(b) Hãy tìm biểu thức đối với tổng năng lượng của hai khí theo  $P_1, P_2, T, N$ .

(c) Khi các bình được nối với nhau để cho phép các khí thành hỗn hợp mà không sinh công. Hãy tính một cách tường minh độ biến thiên entropy của hệ. Kiểm tra xem đáp số của bạn có ý nghĩa gì hay không bằng cách xét trường hợp đặc biệt  $V_1 = V_2$  (tức là  $P_1 = P_2$ ).

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Hàm phân bố của một hạt là

$$\begin{aligned} z &= \frac{V}{h^3} \sum_k \iiint e^{-E_k/kT} d\mathbf{p} \\ &= V \cdot \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} z_0 , \end{aligned}$$

trong đó  $z_0 = \sum_n \exp(-\varepsilon_n/kT)$  liên quan tới các mức năng lượng nội tại. Chú ý đến tính không thể phân biệt được của các hạt, hàm phân bố của hệ  $N$  hạt là

$$Z = \frac{z^N}{N!} = \frac{V^N}{N!} \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3N/2} \cdot z_0^N .$$

Do đó

$$\begin{aligned} F &= -kT \ln Z \\ &= -kT \left( N \ln V + N \ln z_0 + \frac{3N}{2} \ln \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right) - \ln N! \right) . \end{aligned}$$

$$(b) S = k \left( \ln Z - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \right)$$

$$= Nk \left( \ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right) + \frac{5}{2} + \ln z_0 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln z_0 \right).$$

Do đó

$$S_1 = Nk \left( \frac{V_1}{N} + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right) + \frac{5}{2} + S_0 \right),$$

$$S_2 = Nk \left( \ln \frac{V_2}{N} + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right) + \frac{5}{2} + S_0 \right),$$

trong đó

$$S_0 = \ln z_0 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln z_0.$$

Entropy toàn phần là

$$S = S_1 + S_2$$

$$= 2Nk \left[ \ln \frac{\sqrt{V_1 V_2}}{N} + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right) + \frac{5}{2} + S_0 \right].$$

(c) Sau khi trộn lẫn, nhiệt độ của khí lý tưởng giống như trước, sao cho

$$S' = 2Nk \left[ \ln \frac{V_1 + V_2}{2N} + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right) + \frac{5}{2} + S_0 \right].$$

Do đó

$$\Delta S = S' - S = 2Nk \ln \frac{V_1 + V_2}{2\sqrt{V_1 V_2}} = 2Nk \ln \frac{P_1 + P_2}{2\sqrt{P_1 P_2}}.$$

Khi  $V_1 = V_2$ ,  $\Delta S = 0$  đúng như chờ đợi.

**2128**

(a) Hãy tìm hàm phân bố  $z$  của một nguyên tử không có spin với khối lượng  $M$  chuyển động tự do trong một hình hộp có thể tích  $V = L^3$ . Biểu diễn kết quả của bạn theo nồng độ lượng tử

$$n_q = \left( \frac{M k T}{2\pi} \right)^{3/2} .$$

Giải thích ý nghĩa vật lý của  $n_q$ .

(b) Một khí lý tưởng gồm  $N$  nguyên tử không có spin chiếm một thể tích  $V$  ở nhiệt độ  $T$ . Mỗi nguyên tử chỉ có hai mức năng lượng cách nhau một khe năng lượng  $\Delta$ . Hãy tìm thế hoá học, năng lượng tự do, entropy, áp suất và nhiệt dung đẳng áp.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Các giá trị riêng năng lượng được cho bởi

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\hbar^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2), \\ &= \frac{1}{2M}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{p^2}{2M}, \end{aligned}$$

trong đó  $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \dots$ .

Các mức năng lượng có thể được xem gần như là liên tục sao cho số các trạng thái lượng tử trong phạm vi  $p \rightarrow p + dp$  là  $\frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp$ , từ đó suy ra số các trạng thái trong khoảng năng lượng  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + d\varepsilon$  là  $\frac{2\pi V}{h^3} (2M)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$ . Do đó

$$\begin{aligned} z &= \int_0^\infty \frac{2\pi V}{h^3} (2M)^{3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon \\ &= \frac{V}{h^3} \left( \frac{M k T}{2\pi} \right)^{3/2} \cdot (4\pi^2)^{3/2} = \frac{8\pi^3 V}{h^3} \cdot n_q, \end{aligned}$$

ở đây  $n_q = \left( \frac{M k T}{2\pi} \right)^{3/2}$  là số trạng thái lượng tử trung bình trong một đơn vị thể tích.

(b) Khí lý tưởng cổ điển thoả mãn điều kiện không suy biến. Hàm phân bố của một hệ con là  $z = \exp(-\beta\varepsilon_1) + \exp(-\beta\varepsilon_2)$ , vì  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \Delta$ . Do đó hàm phân bố của hệ là

$$Z = [z]^N = (e^{-\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta\varepsilon_2})^N.$$

Năng lượng tự do là

$$F = -kT \ln Z = -NkT \ln \left( e^{-\beta \varepsilon_1} + e^{-\beta \varepsilon_2} \right).$$

Thể hoá học là

$$\mu = \left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = -kT \ln \left( e^{-\beta \varepsilon_1} + e^{-\beta \varepsilon_2} \right).$$

Áp suất là

$$p = kT \frac{\partial}{\partial V} \ln Z = -N \frac{\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial V} e^{-\beta \varepsilon_1} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial V} e^{-\beta \varepsilon_2}}{e^{-\beta \varepsilon_1} + e^{-\beta \varepsilon_2}}.$$

Entropy là

$$S = Nk \left( \ln z - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln z \right) - k \ln N! = Nk \left[ 1 + \ln \left( \frac{e^{-\beta \varepsilon_1} + e^{-\beta \varepsilon_2}}{N} \right) \right] \\ + \frac{N(\varepsilon_1 e^{-\beta \varepsilon_1} + \varepsilon_2 e^{-\beta \varepsilon_2})}{T(e^{-\beta \varepsilon_1} + e^{-\beta \varepsilon_2})}.$$

Nhiệt dung đẳng áp là

$$C_p = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_p = \frac{\partial}{\partial T} \left[ NkT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln z \right]_p \\ = \frac{N\Delta^2}{2kT^2 (1 + \cosh \frac{\Delta}{kT})} = \frac{N\Delta^2}{4kT^2 \cosh (\frac{\Delta}{2kT})}.$$

2129

(a) Xét một khí lý tưởng gồm  $N$  hạt khối lượng  $m$  bị giam vào một thể tích  $V$  ở nhiệt độ  $T$ . Sử dụng phép gần đúng cổ điển đối với hàm phân bố và giả thiết rằng các hạt là không thể phân biệt được, hãy tính thể hoá học  $\mu$  của khí đó.

(b) Một khí gồm  $N$  hạt, cũng có khối lượng  $m$ , bị hấp thụ trên một mặt có diện tích  $A$ , tạo thành một khí lý tưởng hai chiều với nhiệt độ  $T$  trên mặt. Năng lượng một hạt hấp thụ được là  $\varepsilon = |\mathbf{p}|^2/2m - \varepsilon_0$ , trong đó  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$  và  $\varepsilon_0$  là năng lượng liên kết bề mặt trên mỗi hạt. Cũng sử dụng phép gần đúng

và giả thiết giống như trong phần (a), hãy tính thế hoá học  $\mu$  của khí bị hấp thụ.

(c) Tại nhiệt độ  $T$ , các hạt trên mặt và trong khí ba chiều xung quanh ở trong trạng thái cân bằng. Điều này dẫn tới mối quan hệ giữa các thế hoá học tương ứng. Dùng điều kiện này để tìm số phân tử trung bình  $n$  bị hấp thụ trên đơn vị diện tích khi áp suất trung bình của khí ba chiều xung quanh là  $p$ . (Tổng số hạt trong khí bị hấp thụ cộng với hơi xung quanh là  $N_0$ .)

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Hàm phân bố cổ điển là

$$z = \frac{V^N}{N!} \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}}$$

Do đó

$$\begin{aligned} G &= F + pV = -kT \ln z + NkT \\ &= NkT \left[ \ln \frac{N}{V} - \frac{3}{2} \ln \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right) \right] , \\ \mu &= -kT \left[ \ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right) \right] . \end{aligned}$$

(b) Hàm phân bố cổ điển cho khí lý tưởng hai chiều là

$$z = \frac{A^N}{N!} \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^N \cdot e^{N\varepsilon_0/kT} .$$

Do đó

$$\begin{aligned} G &= F + pA = -NkT \left[ \ln \frac{A}{N} + \ln \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right) + \frac{\varepsilon_0}{kT} \right] , \\ \mu &= -kT \left[ \ln \frac{A}{N} + \ln \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right) + \frac{\varepsilon_0}{kT} \right] . \end{aligned}$$

(c) Thế hoá học của khí ba chiều bằng thế hoá học của khí hai chiều. Chú ý rằng trong biểu thức của thế hoá học đối với khí ba chiều,  $\frac{V}{N} = \frac{kT}{p}$ , và trong biểu thức đối với khí hai chiều,  $\frac{A}{N} = \frac{1}{n}$ . Vì hai thế hoá học phải có giá trị như nhau, ta có

$$n = \frac{p}{kT} \left( \frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{1/2} e^{\varepsilon_0/kT} .$$

## 2130

Một dao động tử điều hoà một chiều có mức năng lượng  $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ , trong đó  $\omega$  là tần số (góc) đặc trưng của dao động tử và  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

(a) Giả thiết dao động tử tiếp xúc nhiệt với một bình điều nhiệt có nhiệt độ  $T$ , với  $\frac{kT}{\hbar\omega} \ll 1$ . Tìm năng lượng trung bình của dao động tử như là một hàm số của nhiệt độ  $T$ .

(b) Đối với dao động tử hai chiều,  $n = n_x + n_y$ , với

$$E_{n_x} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_x, \quad E_{n_y} = \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_y,$$

$n_x = 0, 1, 2, \dots$  và  $n_y = 0, 1, 2, \dots$ , hãy tìm hàm phân bố đôi với trường hợp này ở nhiệt độ bất kì. Quy nó về trường hợp suy biến  $\omega_x = \omega_y$ .

(c) Nếu một dao động tử phi điều hoà cổ điển một chiều có thể năng  $V(x) = cx^2 - gx^3$ , trong đó  $gx^3 \ll cx^2$ , ở nhiệt độ cân bằng  $T$ . Hãy tìm

- 1) nhiệt dung riêng cho một dao động tử và
- 2) giá trị trung bình của ly độ  $x$  của dao động tử.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Đặt  $\alpha = \frac{\hbar\omega}{kT} = \hbar\omega\beta$ , ta có

$$\begin{aligned} z &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\alpha} = \frac{e^{\alpha/2}}{e^{\alpha} - 1}, \\ \overline{E} &= -\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\alpha} - 1}. \end{aligned}$$

(b) Không có sự khác biệt giữa một dao động tử hai chiều và hai dao động tử một chiều độc lập, khi đó hàm phân bố là

$$z = \frac{e^{\alpha_x/2}}{e^{\alpha_x} - 1} \cdot \frac{e^{\alpha_y/2}}{e^{\alpha_y} - 1}.$$

Khi  $\omega_x = \omega_y, \alpha_x = \alpha_y = \alpha$ , ta có

$$z = \frac{e^{\alpha}}{(e^{\alpha} - 1)^2}.$$

(c) 1) Ta tính hàm phân bố

$$z = \int \exp[-(cx^2 - gx^3)/kT] dx .$$

(Chú ý rằng số hạng động năng không được đưa vào biểu thức này mà sau đây điều này sẽ được làm bằng cách cộng thêm  $\frac{k}{2}$  vào nhiệt dung.) Số hạng phi điều hoà  $[\exp(gx^3/kT) - 1]$  là nhỏ trong miền chuyển động. Dùng khai triển Taylor và chỉ giữ lại những số hạng bậc thấp nhất, ta được

$$\begin{aligned} z &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{gx^3}{kT} \right)^2 \right] e^{-(cx^2/kT)} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{c}} \left( \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{15g^2}{16c^3} \cdot \frac{1}{\beta\sqrt{\beta}} \right) . \end{aligned}$$

Giá trị trung bình của thế năng là

$$\bar{V} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z = \frac{kT}{2} \left( 1 + \frac{15g^2}{8c^3} kT \right) .$$

Nhiệt dung riêng của mỗi dao động tử là

$$C = \frac{k}{2} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial T} = k + \frac{15g^2}{8c^3} k^2 T .$$

2) Ở gần đúng bậc nhất, giá trị trung bình của ly độ  $x$  của dao động tử là

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x \left[ 1 + \frac{gx^3}{kT} \right] e^{-(cx^2/kT)} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(cx^2/kT)} dx} = \frac{3gkT}{4c^2} .$$

### 2131

Xét một khí lưỡng nguyên tử loãng mà phân tử của nó chứa những cặp nguyên tử không đồng nhất. Mômen quán tính đối với trục đi qua khối tâm và vuông góc với đường nối hai nguyên tử là  $I$ . Hãy tính phần đóng góp quay vào nhiệt dung riêng và vào entropy tuyệt đối cho một mol tại nhiệt độ  $T$  trong các trường hợp giới hạn sau đây:

(a)  $kT \gg \hbar^2/I$ ,

(b)  $kT \ll \hbar^2/I$ .

Thực hiện các tính toán với độ chính xác cần thiết đủ để thu được phần đóng góp khác không vào nhiệt dung riêng và vào entropy.

(CUSPEA)

**Lời giải:**

Phần đóng góp của chuyển động quay vào hàm phân bố là

$$z_R^T = (z_R)^N ,$$

với  $N$  là tổng số phân tử trong một mole khí, và

$$z_R = \sum_J (2J+1) \exp(-\beta \varepsilon_J) \quad \text{với} \quad \varepsilon_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) .$$

Phần đóng góp vào năng lượng là

$$E_R = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z_R^T = -N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln z_R .$$

Phần đóng góp vào nhiệt dung riêng là

$$C_R = \frac{\partial E_R}{\partial T} .$$

Phần đóng góp vào entropy là

$$S_R = Nk \ln z_R + \frac{E_R}{T} .$$

(a)  $kT \gg \hbar^2/I$ , tức là  $\beta \hbar^2/2I \ll 1$ . Ta có

$$z_R = \int_0^\infty (2J+1) \exp[-\beta \hbar^2 J(J+1)/2I] dJ = \frac{2IkT}{\hbar^2} ,$$

$$E_R = NkT ,$$

$$C_R = Nk ,$$

$$S_R = Nk \left( 1 + \ln \frac{2IkT}{\hbar^2} \right) .$$

(b)  $kT \ll h^2/I$ . Ta có

$$z_R = 1 + 3e^{-\beta(h^2/4\pi^2 I)} + \dots \approx 1 + 3e^{-h^2/4\pi^2 kT} ,$$

$$E_R = 3N \frac{\frac{h^2}{I} e^{-h^2/4\pi^2 I kT}}{1 + 3e^{-h^2/4\pi^2 I kT}} \approx \frac{3Nh^2}{I} e^{-h^2/4\pi^2 I kT} ,$$

$$C_R = \frac{3N\hbar^4}{I^2 k T^2} e^{-h^2/4\pi^2 I kT} ,$$

$$S_R = kN \ln(1 + 3e^{-h^2/4\pi^2 I kT}) + \frac{3Nh^2}{IT} e^{-h^2/4\pi^2 I kT}$$

$$\approx 3kN \left( 1 + \frac{h^2}{IkT} \right) e^{-h^2/4\pi^2 I kT} \approx \frac{3Nh^2}{IT} e^{-h^2/4\pi^2 I kT} .$$

## 2132

Một tập hợp  $N$  hạt cố định có spin  $\frac{1}{2}$  mômen từ  $\mu_0$  ở trong một từ trường tinh đều. Các spin chỉ tương tác với từ trường còn lại thì gần như hoàn toàn tự do.

(a) Hãy biểu diễn năng lượng của hệ như là một hàm của mômen từ toàn phần và từ trường tác dụng.

(b) Hãy tìm mômen từ toàn phần và năng lượng, với giả thiết rằng hệ là cân bằng nhiệt tại nhiệt độ  $T$ .

(c) Hãy tìm nhiệt dung và entropy của hệ cũng dưới những điều kiện đó.  
(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a)  $E = -MH$ .

(b) Giả thiết rằng  $\bar{\mu}$  là mômen từ trung bình tính cho mỗi hạt dưới ảnh hưởng của từ trường ngoài khi cân bằng đã được thiết lập, khi đó  $M = N\bar{\mu}$  và

$$\bar{\mu} = \mu_0 \frac{e^{\mu_0 H/kT} - e^{-\mu_0 H/kT}}{e^{\mu_0 H/kT} + e^{-\mu_0 H/kT}} = \mu_0 \tanh\left(\frac{\mu_0 H}{kT}\right) .$$

Do đó  $E = -N\mu_0 H \tanh(\mu_0 H/kT)$ .

$$(c) C_H = (\frac{\partial E}{\partial T})_H = Nk \cdot \frac{(\frac{\mu_0 H}{kT})^2}{\cosh^2(\frac{\mu_0 H}{kT})}.$$

Hàm phân bố của hệ là

$$z = (a + 1/a)^N \text{ với } a = \exp(\mu_0 H/kT).$$

Do đó

$$\begin{aligned} S &= k \left( \ln z - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln z \right) \\ &= Nk [\ln(e^{\mu_0 H \beta} + e^{-\mu_0 H \beta}) - \mu_0 H \beta \tanh(\mu_0 H \beta)]. \end{aligned}$$

### 2133

Cho một hệ  $N$  ion từ, đồng nhất không tương tác có spin  $\frac{1}{2}$ , mômen từ  $\mu_0$  ở trong tinh thể có nhiệt độ tuyệt đối  $T$  đặt trong một từ trường  $B$ . Đối với hệ này hãy tính:

(a) Hàm phân bố  $Z$ .

(b) Entropy  $\sigma$ .

(c) Năng lượng trung bình  $\bar{U}$ .

(d) Mômen từ trung bình  $\bar{M}$ , và độ thăng giáng của mômen từ,  $\Delta M = \sqrt{\langle (M - \bar{M})^2 \rangle}$ .

(e) Lúc đầu tinh thể ở trạng thái cân bằng nhiệt với bình điều nhiệt có nhiệt độ  $T = 1$  K trong từ trường  $B_i = 10.000$  Gauss. Khi đó cho tinh thể cách nhiệt với bình điều nhiệt và từ trường giảm tới  $B_f = 100$  Gauss. Hỏi điều gì sẽ xảy ra?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Vì giữa các ion không có tương tác nên hàm phân bố của hệ là

$$z = (e^\alpha + e^{-\alpha})^N,$$

ở đây  $\alpha = \mu_0 B / kT$ .

(b) Entropy là

$$\sigma = k \left( \ln z - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln z \right) = Nk [\ln(e^\alpha + e^{-\alpha}) - \alpha \tanh \alpha] .$$

(c) Năng lượng trung bình là

$$\overline{U} = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln z = -N\mu_0 B \tanh \left( \frac{\mu_0 B}{kT} \right) .$$

(d) Mômen từ trung bình là

$$\overline{M} = N\mu_0 \tanh \left( \frac{\mu_0 B}{kT} \right) .$$

Đối với một ion ta có

$$\overline{(\Delta m)^2} = \overline{m^2} - (\overline{m})^2 = \mu_0^2 - \mu_0^2 \tanh^2 \left( \frac{\mu_0 B}{kT} \right) = \frac{\mu_0^2}{\cosh^2 \left( \frac{\mu_0 B}{kT} \right)} .$$

Đối với toàn hệ, ta có

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta M)^2} &= N \overline{(\Delta m)^2} \\ \Delta M &= \sqrt{N} \frac{\mu_0}{\cosh \left( \frac{\mu_0 B}{kT} \right)} . \end{aligned}$$

(e) Nhìn vào (b) ta thấy entropy  $\sigma$  là hàm số của  $\mu_0 B / kT$ . Nếu entropy của những trạng thái spin được giữ không đổi, tức  $\mu_0 B / kT$  được giữ không đổi thì nhiệt độ của các trạng thái spin có thể hạ thấp bằng cách giảm từ trường một cách đoạn nhiệt. Trong tinh thể, sự giảm nhiệt độ của những trạng thái spin có thể dẫn đến sự giảm nhiệt độ của các dao động tinh thể bằng cách “truyền nhiệt”. Do đó toàn bộ tinh thể sẽ lạnh đi bằng cách “giảm từ trường một cách đoạn nhiệt”. Từ

$$\frac{T_f}{B_f} = \frac{T_i}{B_i} ,$$

ta có  $T_f = 10^{-3}$  K.

## 2134

Khảo sát  $N$  mômen từ cố định không tương tác, mỗi cái có độ lớn  $\mu_0$ . Hệ cân bằng nhiệt ở nhiệt độ  $T$  và đặt trong một từ trường ngoài đều  $B$ . Mỗi mômen từ có thể định hướng song song hoặc phản song song với  $B$ . Hãy tính:

- (a) Hàm phân bố,
- (b) Nhiệt dung riêng,
- (c) Mômen từ nhiệt trung bình ( $\bar{M}$ ).

Hãy chỉ ra rằng ở giới hạn nhiệt độ cao thì định luật Curie được thoả mãn, tức là  $\chi = d\bar{M}/dB \propto 1/T$ .

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Vì những mômen từ gần như độc lập với nhau nên ta có thể khảo sát một mômen từ riêng rẽ. Vì hàm số phân bố của nó là

$$z = a + \frac{1}{a},$$

ở đây  $a = \exp(\mu_0 B/kT)$ , nên hàm phân bố đối với toàn hệ là

$$Z = z^N.$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \bar{E} &= -\mu_0 B N \left( a - \frac{1}{a} \right) / \left( a + \frac{1}{a} \right) \\ &= -\mu_0 B N \tanh(\mu_0 B/kT), \end{aligned}$$

Suy ra nhiệt dung riêng là

$$c = \frac{d\bar{E}}{dT} = kN \left( \frac{\mu_0 B}{kT} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2 \left( \frac{\mu_0 B}{kT} \right)}.$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \bar{M} &= N \mu_0 \tanh \left( \frac{\mu_0 B}{kT} \right), \\ \chi &\equiv \frac{d\bar{M}}{dB} = \frac{N \mu_0^2}{kT} \frac{1}{\cosh^2 \left( \frac{\mu_0 B}{kT} \right)}. \end{aligned}$$

Trong giới hạn nhiệt độ cao:  $\chi \propto \frac{1}{T}$ .

## 2135

Khảo sát một hệ các spin không tương tác đặt trong một từ trường ngoài  $H$ . Dùng  $S = k(\ln Z + \beta E)$ , với  $Z$  là hàm phân bố,  $E$  là năng lượng và  $\beta = 1/kT$ , chứng tỏ rằng sự phụ thuộc của  $S$  vào  $H$  và  $T$  dưới dạng  $S = f(H/T)$  trong đó  $f(x)$  là một hàm nào đó không cần phải xác định.

Chứng minh rằng nếu một hệ như thế được tử hoà tại nhiệt độ  $T$  không đổi thì khi cách nhiệt và sau đó khử từ đoạn nhiệt thì hệ sẽ bị lạnh đi.

Tại sao kỹ thuật khử từ đoạn nhiệt này được dùng cho máy lạnh chỉ ở nhiệt độ rất thấp?

Làm thế nào ta có thể có  $T < 0$  đối với hệ này? Liệu điều này có thể cho một phương tiện để đạt được  $T = 0$ ?

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

Một spin đơn lẻ có hai mức năng lượng:  $\mu H$  và  $-\mu H$ , và hàm phân bố của nó là  $z = \exp(-\beta b) + \exp(b)$ , với  $b = \mu H/kT$ . Hàm phân bố đối với hệ được cho bởi

$$Z = z^N = (2 \cosh b)^N,$$

trong đó  $N$  là tổng số spin.

Suy ra

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z = -N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln[2 \cosh(\mu H \beta)] \\ &= -N \mu H \tanh\left(\frac{\mu H}{kT}\right). \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} S &= k(\ln z + \beta E) \\ &= N k \left\{ \ln \left[ 2 \cosh \left( \frac{\mu H}{kT} \right) \right] - \frac{\mu H}{kT} \tanh \left( \frac{\mu H}{kT} \right) \right\} = f\left(\frac{H}{T}\right). \end{aligned}$$

Khi hệ được tử hoà tại nhiệt độ  $T$  không đổi, entropy của trạng thái cuối là  $S$ . Vì entropy của hệ không thay đổi trong quá trình đoạn nhiệt, nên  $T$  cần phải giảm khi hệ bị khử từ đoạn nhiệt để giữ cho  $H/T$  không thay đổi. Kết quả là nhiệt độ giảm. Sự làm lạnh này đạt được bằng cách sử dụng tính chất của những hạt từ có spin đặt trong một từ trường ngoài. Trong thực tế những hạt từ này là những ion trong mạng. Muốn hiệu ứng này xảy ra, đòi hỏi entropy và nhiệt dung riêng của những ion mạng phải nhỏ hơn nhiều so với entropy và nhiệt dung riêng của các hạt từ. Do đó, ta cần có nhiệt độ rất thấp,  $T \lesssim 1$  K.

Khi từ trường ngoài tăng đến một giá trị nhất định, ta có thể đột ngột đảo chiều từ trường ngoài. Trong khoảng thời gian ngắn hơn thời gian hồi phục spin thì hệ sẽ ở trong trạng thái có  $T < 0$ . Tuy nhiên, nó không thể đạt đến  $T = 0$  vì  $T < 0$  tương ứng với trạng thái năng lượng cao hơn.

## 2136

Mô hình Curie - Weiss.

Khảo sát một tinh thể gồm  $N$  ( $N \sim 10^{23}$ ) nguyên tử có số lượng tử spin  $s = \frac{1}{2}$  và  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ . Momen từ của nguyên tử thứ  $i$  là  $\mu_i = g\mu_B s_i$ , với  $g$  là nhân tử Landé còn  $\mu_B = e\hbar/2mc$  là magneton Bohr. Giả thiết rằng các nguyên tử hầu như không tương tác nhưng nằm cân bằng ở nhiệt độ  $T$  và đặt trong một từ trường ngoài  $H = Hz$ .

(a) Chứng tỏ rằng hàm phân bố là  $z = (2 \cosh \eta)^N$  với  $\eta = g\mu_B H / 2kT$ .

(b) Tìm một biểu thức đối với entropy  $S$  của tinh thể (chỉ cần khảo sát sự đóng góp từ những trạng thái spin). Tính giá trị  $S$  trong các giới hạn trường mạnh ( $\eta \gg 1$ ) và trường yếu ( $\eta \ll 1$ ).

(c) Một quá trình quan trọng để làm lạnh các chất ở nhiệt độ dưới 1 K là khử từ đoạn nhiệt. Trong quá trình này từ trường trong mẫu tăng từ 0 đến  $H_0$  trong khi mẫu tiếp xúc với bình điều nhiệt ở nhiệt độ  $T_0$ . Sau đó mẫu được cách nhiệt và từ trường giảm tới  $H_1 < H_0$ . Xác định nhiệt độ cuối cùng của mẫu.

(d) Độ từ hóa  $M$  và độ từ cảm  $\chi$  được định nghĩa tương ứng là  $M = \langle \sum_{i=1}^N (\mu_i)_z \rangle$  và  $\chi = M/H$ . Hãy tìm biểu thức của  $M$  và  $\chi$ , và đánh giá các biểu thức đó trong giới hạn trường yếu.

Giả sử mỗi nguyên tử tương tác với  $n$  nguyên tử lân cận. Để tính đến tương tác này một cách gần đúng ta giả thiết rằng  $n$  nguyên tử lân cận gần nhất sinh ra một “trường trung bình”  $\overline{H}$  tại vị trí mỗi nguyên tử, ở đây

$$g\mu_B \overline{H} = 2\alpha \left\langle \sum_{k=1}^N (S_k)_z \right\rangle,$$

với  $\alpha$  là một thông số đặc trưng cho cường độ tương tác.

(e) Dùng trường trung bình gần đúng đó và kết quả câu (d) ở trên, hãy tính độ từ cảm  $\chi$  trong giới hạn trường yếu (tức là nhiệt độ cao). Tại nhiệt độ  $T_c$  bằng bao nhiêu thì  $\chi$  trở thành vô hạn?

(MIT)

**Lời giải:**

$$(a) z = (e^{-g\mu_B H/2kT} + e^{g\mu_B H/2kT})^N = (2 \cosh \eta)^N ,$$

ở đây  $\eta = g\mu_B H/2kT$ .

$$(b) F = -kT \ln z, S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_H = Nk[\ln(2 \cosh \eta) - \eta \tanh \eta].$$

Khi  $\eta \gg 1$ ,  $S \approx Nk(1 + \eta) \exp(-2\eta)$ ;

Khi  $\eta \ll 1$ ,  $S \approx Nk \ln 2$ .

(c) Tiết hành khử từ đoạn nhiệt, entropy của hệ giữ không đổi, tức là  $S_1 = S_0$ . Như vậy  $\eta_1 = \eta_0$ , tức là  $T_1 = H_1 T_0 / H_0$ . Suy ra  $T_1 < T_0$ .

$$\begin{aligned} (d) M &= \left\langle \sum_{i=1}^N (\mu_i)_z \right\rangle = -\frac{\partial F}{\partial H} = kT \left( \frac{\partial}{\partial H} \ln z \right)_T \\ &= \frac{Ng\mu_B}{2} \tanh \frac{g\mu_B H}{2kT}, \\ \chi &= M/H = \frac{Ng\mu_B}{2H} \tanh \frac{g\mu_B H}{2kT}. \end{aligned}$$

Tại giới hạn trường yếu

$$M \approx \frac{N}{4kT} (g\mu_B)^2 H,$$

nên

$$\chi = \frac{N}{4kT} (g\mu_B)^2.$$

(e) Từ định nghĩa đã cho của trường trung bình, ta có

$$\overline{H} = \frac{2\alpha}{g\mu_B} \cdot \frac{n}{N} \cdot \frac{M}{g\mu_B},$$

ở đây  $M$  là mômen từ toàn phần. Dùng kết quả trong câu (d) ta có

$$\begin{aligned} M &\approx \frac{N}{4kT} (g\mu_B)^2 (H + \overline{H}) \\ &= \frac{N}{4kT} (g\mu_B)^2 \left[ H + \frac{2\alpha}{(g\mu_B)^2} \cdot \frac{n}{N} M \right]. \end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned} M &= H \frac{N}{4kT} (g\mu_B)^2 / \left( 1 - \frac{\alpha n}{2kT} \right), \\ \chi &= \frac{N}{4kT} (g\mu_B)^2 / \left( 1 - \frac{\alpha n}{2kT} \right). \end{aligned}$$

Khi

$$T = T_c = \alpha n / 2k, \chi \rightarrow \infty .$$

### 2137

Xét một hệ các electron tự do trong một từ trường đều  $B = B_z$ , và không để ý đến spin của các electron. Chứng minh rằng sự lượng tử hóa các quỹ đạo, trái với các quỹ đạo cổ điển, đã ảnh hưởng đến cách tính toán tính nghịch từ tại giới hạn nhiệt độ cao, bằng cách tính:

- (a) bậc suy biến của các mức năng lượng đã bị lượng tử hóa,
- (b) hàm phân bố lớn,
- (c) độ từ cảm ở giới hạn nhiệt độ cao.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Giả thiết các electron được giữ trong một hộp lập phương thể tích  $L^3$ . Số mức năng lượng trong khoảng  $p_x$  tới  $p_x + dp_x, p_y$  tới  $p_y + dp_y$  khi không có từ trường ngoài là

$$L^2 dp_x dp_y / h^2 .$$

Khi có mặt từ trường ngoài, các electron chuyển động theo quỹ đạo tròn trong mặt phẳng  $x-y$  với tần số góc  $eB/mc$ . Các mức năng lượng được cho bởi

$$\hbar \frac{eB}{mc} \left( l + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2m} p_z^2, \quad l = 0, 1, 2, \dots .$$

Bậc suy biến của các mức năng lượng đã bị lượng tử hóa được cho bởi

$$\frac{L^2}{h^2} \iint_{A_1} dp_x dp_y = \frac{L^2}{h^2} \int_{A_2} 2\pi p dp = \frac{L^2 eB}{hc} ,$$

ở đây các giới hạn lấy tích phân  $A_1$  là  $2\mu_B Bl < (p_x^2 + p_y^2)/2m < 2\mu_B B(l+1)$ ,

và  $A_2$  là  $2\mu_B Bl < p^2/2m < 2\mu_B B(l+1)$  với  $\mu_B = e\hbar/2mc$ .

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \ln \Xi &= \sum_u \ln(1 + e^{\beta\mu} \cdot e^{-\beta\varepsilon}) \\ &= \frac{eBV}{h^2c} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \sum_{l=0}^{\infty} \frac{L^2 eB}{h^c} \\ &\quad \times \ln\{1 + \lambda e^{-\beta[2\mu_B B(l+1/2) + p_z^2/2m]}\}, \end{aligned}$$

ở đây  $\lambda = \exp(\beta\mu)$ .

Tại giới hạn nhiệt độ cao,  $\lambda \ll 1$ , nên

$$\begin{aligned} \ln \Xi &= \frac{eBV}{h^2c} \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\beta[2\mu_B B(l+1/2) + p_z^2/2m]} \\ &= \frac{\lambda V}{\lambda_T^3} \cdot \frac{\mu_B B}{kT \sinh \chi}. \end{aligned}$$

ở đây  $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi mkT}$  và  $\chi = \mu_B B/kT$ .

$$\text{(c)} \quad M = -\frac{\partial F}{\partial B} = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial \ln \Xi}{\partial B} \right)_{\mu, T, V},$$

trong đó  $F$  là năng lượng tự do của hệ.

Suy ra

$$M = \frac{\lambda V}{\lambda_T^3} \mu_B \left[ \frac{1}{\sinh x} - \frac{x \cosh x}{\sinh^2 x} \right].$$

Do

$$\overline{N} = \left( \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \Xi \right)_{B, T, V} = \frac{\lambda V}{\lambda_T^3} \frac{x}{\sinh x},$$

ta có  $M = -\overline{N}\mu_B L(x)$ , với  $L(x) = \coth x - 1/x$ .

Tại nhiệt độ cao,  $kT \gg \mu_B B$  hoặc  $x \ll 1$ . Do đó,

$$L(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + \dots,$$

$$\overline{N} \approx \frac{\lambda V}{\lambda_T^3},$$

$$M \approx -\overline{N}\mu_B^2 B/3kT,$$

$$\chi_{\infty} = \frac{M}{VB} = -\overline{n}\mu_B^2/3kT,$$

ở đây  $\overline{n} = \overline{N}/V$  là mật độ số hạt.

## 2138

Một vật rắn có lập nào đó chứa  $N_A$  nguyên tử không từ tính và  $N_I$  nguyên tử tạp chất có từ tính mỗi hạt có spin  $\frac{3}{2}$ . Mỗi spin tạp chất quay tự do không phụ thuộc vào các phân tử còn lại. Có sự tương tác spin – phonon rất yếu mà trong nhiều mục đích có thể hoàn toàn bỏ qua. Như vậy vật rắn và tạp chất tương tác rất yếu với nhau.

(a) Một từ trường được đặt vào hệ trong lúc nó được giữ ở nhiệt độ  $T$  không đổi. Trường đủ mạnh để có thể định hướng hoàn toàn các spin. Hãy xác định độ lớn và dấu biến đổi của entropy trong hệ khi có mặt từ trường.

(b) Nay giờ hệ được giữ cách nhiệt không cho nhiệt lượng truyền vào hay rút ra. Từ trường giảm tới 0. Hỏi nhiệt độ của vật rắn tăng hay giảm? Tại sao?

(c) Giả sử nhiệt dung riêng của vật rắn cho bởi  $C = 3N_A k$ ,  $k$  là hằng số Boltzmann. Xác định độ biến thiên nhiệt độ xảy ra do sự khử từ nói trong phần (b)? (Bỏ qua sự giãn nở thể tích của vật rắn B).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Entropy cho bởi  $S = k \ln (\text{số trạng thái vi mô})$ .

Trước khi đặt từ trường ngoài,  $S = kN_I \ln 4$ ; sau khi có từ trường ngoài  $S = 0$ . Như vậy độ giảm entropy là  $kN_I \ln 4$ .

(b) Trong quá trình khử từ đoạn nhiệt, một phần năng lượng của hệ nguyên tử chuyển cho hệ spin. Năng lượng của hệ nguyên tử giảm và nhiệt độ trở nên thấp dần.

(c) Với từ trường,  $S = 3N_A k \ln T$ . Sau khi bỏ từ trường đi,  $S = 3N_A k \ln T' + N_I k \ln 4$ . Trong quá trình đó, entropy là không đổi và cho

$$T' = T \exp(-N_I \ln 4 / 3N_A)$$

## 2139

Xác định thăng giáng căn quân phương của số photon có tần số  $\omega$  trong một hốc chữ nhật dẫn điện? Nó có luôn luôn nhỏ hơn số photon trung bình trong mode đó?

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Khảo sát một mode (hay một trạng thái) photon có tần số  $\omega$ . Nó có thể được chiếm bởi 0, 1, 2, ... photon.

Kí hiệu  $\lambda = \hbar\omega/kT$ , khi đó

$$\langle n \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\lambda}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\lambda}} = -\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \lambda},$$

Suy ra

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\lambda} = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}.$$

$$\begin{aligned}\langle n \rangle &= \frac{1}{e^\lambda - 1}, \\ \langle n^2 \rangle &= \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right) + \left( \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)^2, \\ \langle (\Delta n)^2 \rangle &= \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \langle n \rangle = \frac{e^\lambda}{(e^\lambda - 1)^2}, \\ \sqrt{\langle (\Delta n)^2 \rangle} &= \frac{e^{\lambda/2}}{e^\lambda - 1} = \langle n \rangle e^{\lambda/2} > \langle n \rangle.\end{aligned}$$

Như vậy **thăng giáng căn quan phương** luôn luôn lớn hơn số photon trung bình.

### 2140

Xét một mặt hấp thụ có  $N$  vị trí chỗ, mỗi chỗ có thể hấp thụ một phân tử khí. Mặt này được tiếp xúc với một chất khí lý tưởng có thể **năng hoá học**  $\mu$  (xác định bởi áp suất  $p$  và nhiệt độ  $T$ ). Giả thiết rằng phân tử bị hấp thụ có **năng lượng**  $-\varepsilon_0$  so sánh với 1 trong một trạng thái tự do.

(a) Tìm hàm phân bố chính tắc lớn (đôi khi còn gọi là **tổng lớn**)

(b) Tính tỉ số phủ  $\theta$ , tức là tỉ số các phân tử bị hấp thụ với số chỗ hấp thụ trên bề mặt. [Một hệ thức thường dùng là  $(1+x)^N = \sum_{N_1} N!x^{N_1}/N_1!(N-N_1)!$ ].

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Với  $N_1$  phân tử bị hấp thụ trên bề mặt ta có

$$C_{N_1}^N = \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!}$$

cấu hình khác nhau. Do đó hàm phân bố lớn là

$$\Xi = \sum_{N_1=0}^N C_{N_1}^N \cdot e^{N_1(\mu + \varepsilon_0)/kT} = (1 + e^{(\mu + \varepsilon_0)/kT})^N.$$

$$(b) \overline{N} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \Xi = Ne^{(\mu + \varepsilon_0)/kT}/(1 + e^{(\mu + \varepsilon_0)/kT}),$$

ở đây  $\alpha = -\frac{\mu}{kT}$ , do đó tỉ số phủ là

$$\theta = \frac{\overline{N}}{N} = \frac{1}{1 + e^{-(\mu + \varepsilon_0)/kT}}.$$

Thế hoá học của các phân tử bị hấp thụ bằng thế hoá học của các phân tử khí. Đối với khí lý tưởng,

$$\frac{p}{kT} = n = \int_0^\infty \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \sqrt{\varepsilon} e^{\mu/kT} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon.$$

Suy ra

$$e^{\mu/kT} = \frac{p}{kT} \left( \frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2},$$

$$\theta = \frac{1}{1 + \frac{kT}{p} \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\varepsilon_0/kT}}.$$

### 2141

Một khoá fermotua có  $N$  răng. Mỗi răng có hai trạng thái: trạng thái 1 nghĩa là đóng có năng lượng 0 và trạng thái 2 nghĩa là mở có năng lượng  $\varepsilon$ . Khoá chỉ có thể mở từ đầu trái và răng thứ  $s$  không thể mở được trừ khi tất cả các răng phía trái nó ( $1, 2, \dots, s-1$ ) đã mở.

(a) Tìm hàm phân bố đối với khoá.

(b) Ở giới hạn nhiệt độ thấp,  $\varepsilon \gg kT$ , hãy tìm số răng mở trung bình

(c) Thông thường có vô số trạng thái tương ứng với cùng một năng lượng khi răng mở vì hai phần của một răng mở có sự định hướng bất kì. Giả thiết

số trạng thái mở là  $g$ . Hãy viết hàm số phân bố và thảo luận xem có sự chuyển pha hay không.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Trạng thái khả dĩ của khoá được xác định bởi số răng mở  $s$ . Hàm phân bố là

$$z = \sum_{s=0}^N e^{-s\varepsilon/kT} = \frac{1 - e^{-(N+1)\varepsilon/kT}}{1 - e^{-\varepsilon/kT}}.$$

(b) Số răng mở trung bình là

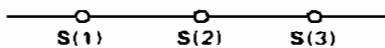
$$\bar{s} = \frac{kT^2}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial T} \ln z \approx e^{-\varepsilon/kT}, \quad \varepsilon \gg kT,$$

$$(c) z = \sum_{s=0}^N g^s e^{-s\varepsilon/kT} = \frac{[1 - (ge^{-\varepsilon/kT})^{N+1}]}{[1 - ge^{-\varepsilon/kT}]}.$$

Việc có hay không có sự chuyển pha xác định bởi tính liên tục của đạo hàm của thể hoá học  $\mu = G/N$ , ở đây  $G = F + pV$ , với  $F = -kT \ln z$ ,  $p = -N(\partial \ln z / \partial V)/\beta$ . Vì  $z$  có giá trị khác 0 nên  $\partial \mu / \partial T$  và  $\partial \mu / \partial V$  là liên tục, và như vậy không có sự chuyển pha bậc nhất. Tương tự, cũng không có sự chuyển pha bậc hai.

### 2142

Một hệ gồm ba spin ở trên một đường thẳng mỗi spin có  $s = \frac{1}{2}$ , được liên kết bằng tương tác đôi gần nhau nhất (xem hình 2.29).



Hình 2.29

Mỗi spin có mômen từ hướng cùng chiều với spin,  $\mu = 2\mu_s$ . Hệ này được đặt trong từ trường ngoài  $H$  hướng theo trục  $z$  và cân bằng nhiệt tại nhiệt độ  $T$ . Hamiltonian đối với hệ đã cho được lấy gần đúng theo mô hình Ising, trong đó tương tác spin – spin thực được thay thế bằng số hạng có dạng  $J S_z(i) S_z(i+1)$ :

$$H = JS_z(1)S_z(2) + JS_z(2)S_z(3) - 2\mu H [S_z(1) + S_z(2) + S_z(3)],$$

với  $J$  và  $\mu$  là những hằng số dương! (a) Hãy liệt kê những trạng thái vi mô khả

dĩ của hệ và năng lượng của chúng. Vẽ phác sơ đồ các mức năng lượng như là một hàm số của  $H$ . Chỉ rõ các suy biến.

(b) Đối với mỗi điều kiện sau đây, hãy viết ra các giá trị giới hạn của nội năng lượng  $U(T, H)$ , entropy  $S(T, H)$ , và độ từ hoá  $M(T, H)$ .

- 1)  $T = 0$  và  $H = 0$ ,
- 2)  $T = 0$  và  $0 < H \ll J/\mu$ ,
- 3)  $T = 0$  và  $J/\mu \ll H$ ,
- 4)  $J \ll kT$  và  $H = 0$ .

(c) Dựa trên những khảo sát vật lý đơn giản, không cần tính toán, hãy vẽ phác đồ thị của nhiệt dung khi trường ngoài không đổi,  $C_H(T, H)$ , với  $H = 0$ . Xác định sự phụ thuộc vào nhiệt độ ở những nhiệt độ  $T$  rất cao và rất thấp?

(d) Tìm một biểu thức dưới dạng đóng của hàm phân bố  $Q(T, H)$ .

(e) Tìm độ từ hoá  $M(T, H)$ . Tìm một biểu thức gần đúng đối với  $M(T, H)$  mà chỉ đúng khi  $kT \gg \mu H$  hoặc  $J$ .

(MIT)

**Lời giải:**

(a) Đặt  $(S_z(1), S_z(2), S_z(3))$  là các trạng thái vi mô, và  $E(S_z(1), S_z(2), S_z(3))$  tương ứng là năng lượng của chúng. Ta có

$$E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{J}{2} - 3\mu H ,$$

$$E\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{J}{2} - \mu H ,$$

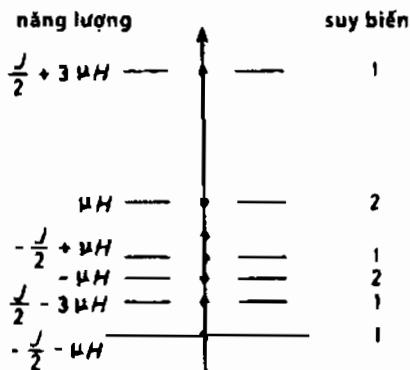
$$E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = E\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\mu H ,$$

$$E\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{J}{2} + \mu H ,$$

$$E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = E\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \mu H ,$$

$$E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{J}{2} + 3\mu H.$$

Những mức năng lượng này được vẽ phác trên hình 2.30, ở đây ta giả thiết rằng  $2\mu H > \frac{J}{2} > \mu H$ .



Hình 2.30

(b) 1)  $U = -\frac{J}{2}$ ,  $M = \pm\mu$ ,  $S = k \ln 2$ ;

2)  $U = -\frac{J}{2} - \mu H$ ,  $M = \mu$ ,  $S = 0$ ;

3)  $U = \frac{J}{2} - 3\mu H$ ,  $M = 3\mu$ ,  $S = 0$ ;

4)  $U = 0$ ,  $M = 0$ ,  $S = 3k \ln 2$ .

(c) Khi  $H = 0$ , hệ có ba mức năng lượng  $\left(-\frac{J}{2}, 0, \frac{J}{2}\right)$ . Tại  $T = 0$  K, hệ ở trạng thái cơ bản, khi  $0 < kT \ll \frac{J}{2}$ , năng lượng của hệ được nâng lên một lượng

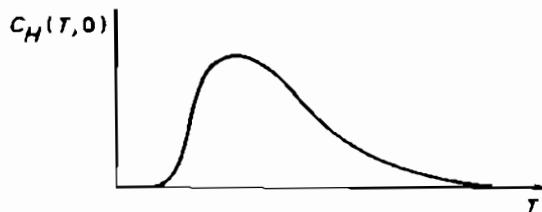
$$\Delta E \propto e^{-J/2kT},$$

và

$$C_H \propto \frac{1}{T^2} e^{-J/2kT}.$$

Khi nhiệt độ tăng,  $E$  và  $C_H$  tăng nhanh. Khi hệ ở gần trạng thái mà các mức năng lượng bị chiếm một cách đồng đều, sự tăng của năng lượng trở nên chậm hơn và  $C_H$  giảm. Khi  $kT \gg J$ ,  $\Delta E \propto 1/\exp(J/kT)$  và  $C_H \propto \frac{1}{T^2}$ . Cuối cùng

năng lượng trở thành không đổi và  $C_H = 0$ . Đường cong mô tả sự phụ thuộc của  $C_H(T, H = 0)$  vào  $T$  được cho trên hình 2.31.



Hình 2.31

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad Q &= e^{-\beta(J/2-3\mu H)} + e^{\beta(J/2+\mu H)} + 2e^{\beta\mu H} \\ &\quad + e^{-\beta(-J/2+\mu H)} + 2e^{-\beta\mu H} + e^{-\beta(J/2+3\mu H)} \\ &= 2e^{-\beta J/2} \cosh(3\beta\mu H) + 2(e^{\beta J/2} + 2) \cosh(\beta\mu H), \end{aligned}$$

với  $\beta = \frac{1}{kT}$ .

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad M &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \ln Q = \frac{2\mu}{Q} [3e^{-\beta J/2} \sinh(3\beta\mu H) \\ &\quad + (e^{\beta J/2} + 2) \sinh(\beta\mu H)]. \end{aligned}$$

Khi  $kT \gg \mu H$  hoặc  $J, Q \approx 6, M \approx 4\beta\mu^2 H$ .

### 2143

Khảo sát một tinh thể có những spin Ising  $s_\ell = \ell$  tại mỗi chỗ (site)  $\ell$ . Khi có mặt từ trường ngoài  $\mathbf{H} = (0, 0, H_0)$ , thì Hamiltonian của hệ có thể viết như sau

$$H = -J \sum_{\ell, \ell'} s_\ell s_{\ell'} - \mu_0 H_0 \sum_\ell s_\ell,$$

ở đây  $J > 0$  là một hằng số và  $\sum_{\ell, \ell'}$  chỉ lấy theo tất cả các site gần nhất (mỗi site có  $p$  site lân cận gần nhất).

(a) Viết một biểu thức cho năng lượng tự do của hệ tại nhiệt độ  $T$  (không cần tính giá trị của nó).

(b) Dùng phép gần đúng trường trung bình, hãy rút ra biểu thức của độ từ

hoá tự phát  $m = \langle s_0 \rangle$  đổi với  $\mathbf{H}_0 = 0$  và tính nhiệt độ tới hạn  $T_c$  mà ở dưới nó thì  $m \neq 0$ .

(c) Tính số mũ tới hạn  $\beta$  được xác định từ phương trình  $m(T, \mathbf{H}_0 = 0) \sim \text{const.} (1 - T/T_c)^3$  khi  $T \rightarrow T_c$ .

(d) Mô tả đáng điệu của nhiệt dung riêng tại  $\mathbf{H}_0$  không đổi .  $C(\mathbf{H}_0 = 0)$ , ở gần  $T = T_c$ .

(Princeton)

**Lời giải:**

Gọi  $N_A$  và  $N_B$  tương ứng là tổng số hạt có  $s_\ell = +1$  và  $s_\ell = -1$ . Cũng gọi  $N_{AA}$ ,  $N_{BB}$ , và  $N_{AB}$  lần lượt là tổng số các cặp hạt gần nhau nhất mà cả hai cùng có  $s_\ell = 1$ , cả hai cùng có  $s_\ell = -1$ , và cả hai có spin đối song nhau. Hamiltonian của hệ có thể viết như sau

$$H = -J(N_{AA} + N_{BB} - N_{AB}) - \mu_0 H_0(N_A - N_B) .$$

Khảo sát số cặp hạt gần nhau nhất với ít nhất một hạt có  $s_\ell = +1$ , ta có

$$PN_A = 2N_{AA} + N_{AB} .$$

Tương tự,  $PN_B = 2N_{BB} + N_{AB}$  . Vì  $N = N_A + N_B$ , nên trong số các đại lượng  $N_A$ ,  $N_B$ ,  $N_{AB}$ ,  $N_{AA}$  và  $N_{BB}$  chỉ có hai đại lượng độc lập. Do đó ta có thể biểu diễn chúng qua  $N_A$  và  $N_{AA}$

$$N_B = N - N_A ,$$

$$N_{AB} = PN_A - 2N_{AA} ,$$

$$N_{BB} = PN/2 - PN_A + N_{AA} .$$

Suy ra  $H = -4JN_{AA} - 2(-PJ + \mu_0 H_0)N_A + (-PJ/2 + \mu_0 H_0)N$ .

(a) Hàm phân bố là

$$z = \sum_{\text{mọi trạng thái}} \exp \left( \frac{-H}{kT} \right) .$$

Năng lượng tự do là  $F = -kT \ln z$ .

(b) Dùng phép gần đúng trường trung bình thì tỉ số giữa số các cặp gần nhất với spin hướng lên so với tổng số cặp sẽ bằng xác suất của trường hợp tất cả các spin đều hướng lên tại những site gần nhau nhất, tức là

$$\frac{2N_{AA}}{PN} = \left( \frac{N_A}{N} \right)^2 .$$

Như vậy

$$H = -2PJ \left( \frac{N_A}{N} \right)^2 N + 2(PJ - \mu_0 H_0)N_A + \left( -\frac{PJ}{2} + \mu_0 H_0 \right) N .$$

Khi đó hàm phân bố là

$$z = \sum_{N_A=0}^N C_{N_A}^N \exp \left( -\frac{H}{kT} \right) .$$

Định nghĩa độ tự hoà là

$$m = \frac{N_A - N_B}{N_A + N_B} ,$$

ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \ln z &\approx -\frac{H}{NkT} - \frac{1}{2}(1+m) \ln \frac{1+m}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2}(1-m) \ln \frac{1-m}{2} . \end{aligned}$$

Để  $\partial \ln z / \partial m = 0$ , ta được

$$\frac{\mu_0 H_0}{kT} + \frac{PJ}{kT} m - \frac{1}{2} \ln \frac{1+m}{1-m} = 0 ,$$

hay

$$\frac{\mu_0 H_0}{kT} + \frac{PJm}{kT} = \tanh^{-1} m .$$

Với  $H_0 = 0$ ,  $m = \tanh(\frac{T_c}{T}m)$ . Do đó chỉ khi  $T < T_c = PJ/k$ , thì phương trình trên đây có nghiệm  $m \neq 0$ . Như vậy nhiệt độ tới hạn là  $T_c = PJ/k$ .

(c) Khi  $H_0 = 0$ , ta có  $m = \tanh(\frac{T_c}{T}m)$ . Khi  $T \rightarrow T_c$  ta có thể dùng khai triển Taylor và viết

$$m \sim \text{const.} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^{1/2} .$$

Suy ra  $\beta = \frac{1}{2}$ .

(d) Từ  $E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z$ , ta được

$$\frac{E}{N} = -\mu_0 H_0 m - \frac{1}{2} P J m^2 ,$$

và

$$C = \frac{1}{N} \frac{\partial E}{\partial T} = (-\mu_0 H_0 - PJm) \frac{\partial m}{\partial T} .$$

Khi  $H_0 = 0$ ,  $C = -PJm \frac{\partial m}{\partial T}$ . Khi  $T \geq T_c$  thì  $m = 0$ ,  $C = 0$ . Khi  $T < T_c$ , ở gần  $T_c$ ,

$$\begin{aligned} m &= \text{const.} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2} \text{ tac} \\ m^2 &\propto 1 - \frac{T}{T_c}, \\ C &\propto \frac{PJ}{T_c}. \end{aligned}$$

### 2144

Xét một chất khí gồm những quả cầu rắn với tương tác 2 vật có dạng

$$\begin{aligned} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) &= 0 & |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| > a \\ &= \infty, \text{ khi} & |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < a. \end{aligned}$$

Dùng hàm phân bố cổ điển tính năng lượng trung bình tại một nhiệt độ và mật độ cho trước (nhiệt động lực học: nội năng).

Dựa trên những lập luận vật lý đơn giản bạn có thể hi vọng tìm lại được những kết quả này khi tính toán với hàm phân bố cơ học lượng tử không?  
(Wisconsin)

**Lời giải:**

Hàm phân bố của toàn hệ là

$$Z = Z_T Z_V ,$$

Với  $Z_T$  là hàm phân bố chuyển động nhiệt của các hạt và  $Z_V$  là hàm phân bố tương tác giữa các hạt:

$$\begin{aligned} Z_T &= \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}}, \\ Z_V &= \int \dots \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N \exp \left[ -\beta \sum_{j \neq i} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \right] \\ &= [V - (N-1)\alpha][V - (N-2)\alpha] \dots [V - \alpha]V \\ &= V^N \left[ 1 - \frac{N(N-1)}{2V} \alpha + \dots \right], \end{aligned}$$

ở đây  $\alpha = \frac{4}{3}\pi a^3$ . Năng lượng trung bình là

$$\langle E \rangle = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{3N}{2}kT.$$

Như vậy, trong mẫu này, năng lượng trung bình của hệ (nội năng nhiệt động lực học) bằng tổng năng lượng chuyển động nhiệt của các hạt và không phụ thuộc vào tương tác giữa chúng. Vì tương tác giữa các hạt không gây ra một kết quả gì nên ta hy vọng thu được chính những kết quả này từ hàm phân bố lượng tử.

### 2145

Một chất khí cổ điển gồm  $N$  hạt điểm chiếm thể tích  $V$  ở nhiệt độ  $T$ . Các hạt tương tác theo từng cặp,  $\phi(r_{ij})$  là thế năng giữa các hạt  $i$  và  $j$ ,  $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ . Giả sử đây là thế năng của “quả cầu rắn”

$$\phi(r_{ij}) = \begin{cases} \infty, & r_{ij} < a, \\ 0, & r_{ij} > a. \end{cases}$$

(a) Tính nhiệt dung riêng bằng tích như một hàm số của nhiệt độ và thể tích riêng  $v = \frac{V}{N}$ .

(b) Khai triển virian đối với phương trình trạng thái là khai triển của  $\frac{pV}{RT}$  theo lũy thừa của  $V$ :

$$\frac{pV}{RT} = 1 + \frac{A_1(T)}{V} + \frac{A_2(T)}{V^2} + \dots$$

Tính hệ số virian  $A_1$ .

(Princeton)

Lời giải:

Đối với phân bố chính tắc thì hàm phân bố là

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{N!} \cdot \frac{1}{h^{3N}} \int e^{-\beta E} d\mathbf{q}d\mathbf{p} \\ &= \frac{1}{N!} \left( \frac{2\pi m}{\beta h^2} \right)^{3N/2} \cdot Q, \end{aligned}$$

với

$$Q = \int \dots \int e^{-\beta \sum_{i < j} \phi(r_{ij})} dq_1 \dots dq_{3N},$$

ở đây  $q_i$  biểu diễn tọa độ  $p_i$  biểu diễn động lượng của hạt thứ  $i$ . Định nghĩa  $f_{ij} = \exp[-\beta \phi(r_{ij})] - 1$  với  $f_{ij} = 0$  khi  $r_{ij} > a$ , ta có thể viết

$$Q = \int \dots \int \left( 1 + \sum_{i < j} f_{ij} + \sum_{i < j} f_{ij} \cdot \sum_{i' < j'} f_{i'j'} + \dots \right) dq_1 \dots dq_{3N}.$$

Giữ lại hai số hạng đầu ta có

$$\begin{aligned} Q &= \int \dots \int \left( 1 + \sum_{i < j} f_{ij} \right) dq_1 \dots dq_{3N}, \\ Q &\approx V^N + \frac{N^2}{2} V^{N-1} \int f_{12} dq_1 dq_2 dq_3 \\ &= V^N \left( 1 + \frac{N^2}{2V} \cdot (-\tau) \right), \end{aligned}$$

ở đây  $\tau = \frac{4\pi a^3}{3}$ .

Suy ra

$$\ln Q = N \ln V + \ln \left[ 1 - \frac{\tau}{2V} N^2 \right] \approx N \ln V - \frac{\tau}{2V} N^2.$$

cho nên

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z = \frac{3N}{2} kT, \\ c_v &= \frac{3}{2} Nk, \end{aligned}$$

và

$$p = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln z = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln Q = \frac{1}{\beta} \left( \frac{N}{V} + \frac{\tau N^2}{2V^2} \right),$$

Từ đây ta tìm được

$$\frac{pV}{NkT} = 1 + \frac{\tau N}{2V}.$$

Và do đó

$$A_1(T) = \frac{\tau N}{2} = \frac{2\pi a^3}{3} N.$$

## 2146

Khảo sát một hệ cổ điển gồm  $N$  hạt điểm khối lượng  $m$  trong thể tích  $V$  ở nhiệt độ  $T$ . Gọi  $U$  là năng lượng toàn phần của hệ,  $p$  là áp suất. Các hạt tương tác thông qua một thế năng 2 hạt xuyên tâm

$$\phi(r_{ij}) = \frac{A}{r_{ij}^n}, \quad A > 0, \quad n > 0, \quad r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|.$$

Chú ý đến tính chất scaling  $\phi(\gamma r) = \gamma^{-n}\phi(r)$  đối với  $\gamma$ , bất kì. Từ đó và từ những lập luận scaling (ví dụ, áp dụng hàm phân bố) hãy chứng tỏ rằng

$$U = apV + bNkT, \quad k = \text{Boltzmann's const.},$$

trong đó các hằng số  $a$  và  $b$  phụ thuộc vào số mũ  $n$  trong thế năng cặp. Biểu diễn  $a$  và  $b$  theo  $n$ .

(Princeton)

Lời giải:

Hàm phân bố của hệ là

$$\begin{aligned} z(T, V) &= \frac{1}{h^{3N}} \int e^{-\beta E} d\mathbf{p} d\mathbf{r} \\ &= \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3N/2} \int_V e^{-\beta \sum \phi(r_{ij})} d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Thay  $T$  bằng  $\lambda T$ , và chú ý rằng  $\phi(r_{ij}) = A/r_{ij}^n$ , ta có

$$\begin{aligned} z(\lambda T, V) &= \left( \frac{2\pi mk\lambda T}{h^2} \right)^{3N/2} \int_V e^{-(\beta/\lambda)\sum \phi(r_{ij})} d\mathbf{r} \\ &= \left( \frac{2\pi mk\lambda T}{h^2} \right)^{3N/2} \int_V \exp \left( -\beta \sum \phi(\lambda^{1/n} r_{ij}) \right) d\mathbf{r} \\ &= \left( \frac{2\pi mk\lambda T}{h^2} \right)^{3N/2} \int_{\lambda^{3/n} V} \lambda^{-3N/n} e^{-\beta \sum \phi(r_{ij})} d\mathbf{r} \\ &= \lambda^{3N(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})} z(T, \lambda^{3/n} V). \end{aligned}$$

Điều này có thể viết lại dưới dạng

$$z(\lambda T, \lambda^{-3/n} V) = \lambda^{3N(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})} z(T, V).$$

Năng lượng tự do

$$\begin{aligned} F(\lambda T, \lambda^{-3/n} V) &= -kT\lambda \ln z(\lambda T, \lambda^{-3/n} V) \\ &= -3N \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) kT\lambda \ln \lambda + \lambda F(T, V). \end{aligned}$$

Lấy đạo hàm biểu thức trên theo  $\lambda$ , rồi đặt  $\lambda = 1$ , ta được

$$T \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V - \frac{3}{n} V \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = -3N \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) kT + F.$$

Mặt khác từ

$$U = F - T \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V, \quad p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T,$$

ta có  $U = 3 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) NkT + \frac{3}{n} pV = apV + bNkT$ , suy ra  $a = \frac{3}{n}$ ,  $b = 3 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right)$ .

### 2147

(a) Cho  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\pi/\alpha}$ , chứng minh rằng

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{-3/2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \alpha^{-5/2}.$$

(b) Cho  $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \ll 1$  và  $a$  cõi như  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ , chứng minh rằng

$$\int_{-a}^a f(x) e^{-\alpha(x^2 + \beta x^3)} dx \approx \int_{-a}^a f(x) (1 - \alpha \beta x^3) e^{-\alpha x^2} dx.$$

(c) Hai nguyên tử tương tác qua thế năng

$$U(x) = U_0 \left[ \left( \frac{a}{x} \right)^{12} - 2 \left( \frac{a}{x} \right)^6 \right],$$

ở đây  $x$  là khoảng cách giữa chúng. Vẽ phác đồ thị của thế năng này. Tìm giá trị của  $x$  để  $U(x)$  là cực tiểu.

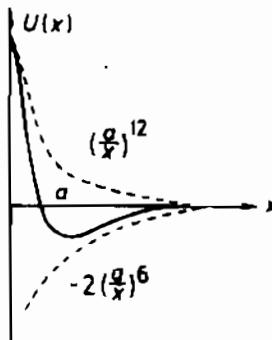
(d) Cho một dãy các nguyên tử như vậy chỉ chuyển động trên trục  $x$  và giả thiết rằng mỗi nguyên tử chỉ tương tác với những nguyên tử gần nó nhất, hãy dùng cơ học thống kê cổ điển tính khoảng cách trung bình giữa các nguyên tử  $\bar{x}(T)$ .

Để làm điều đó, hãy khai triển  $U$  ở lân cận cực tiểu của nó, và giữ lại những số hạng cần thiết để thu được sự phụ thuộc nhiệt độ bậc thấp nhất của  $\bar{x}(T)$ .

Giả thiết rằng  $kT \ll U_0$ , và trong các tích phân liên quan, hãy mở rộng các cận lũy tích phân tới  $\pm\infty$  ở những chỗ thích hợp. Hãy biện luận rõ ràng cho sự mở rộng cận tích phân này và tính

$$\lambda = \frac{\left(\frac{d\bar{x}}{dT}\right)}{a}$$

(CUSPEA)



Hình 2.32

**Lời giải:**

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{-3/2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{d^2}{d\alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \alpha^{-5/2}.$$

$$(b) \int_{-a}^a f(x) e^{-\alpha|x^2 + \beta x^3|} dx = \int_{-a}^a f(x) e^{-\alpha \beta x^3} e^{-\alpha x^2} dx.$$

Vì

$$\begin{aligned} |\alpha \beta x^3| &= |\alpha x^2 \cdot \sqrt{\alpha} x \cdot \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}| = |(\sqrt{\alpha} x)^3 \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}| \\ &< |\sqrt{\alpha} a|^3 \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \sim \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \ll 1, \end{aligned}$$

ta có

$$e^{-\alpha \beta x^3} = 1 - \alpha \beta x^3 + \dots \approx 1 - \alpha \beta x^3,$$

và từ đó

$$\int_{-a}^a f(x)e^{-\alpha[x^2 + \beta x^2]} dx \approx \int_{-a}^a f(x)(1 - \alpha\beta x^3)e^{-\alpha x^2} dx .$$

(c) Đồ thị biểu diễn thế năng được cho trên hình 2.32. Từ

$$\frac{dU}{dx} = U_0 \left[ -12 \frac{a^{12}}{x^{13}} - 2(-6) \frac{a^6}{x^7} \right] = 0 ,$$

ta tìm được  $U(x)$  đạt cực tiểu khi  $x = a$ .

(d) Theo cơ học cổ điển, các nguyên tử đứng yên tại vị trí cân bằng của nó khi  $T = 0$ . Khoảng cách giữa hai nguyên tử cạnh nhau là  $a$ . Nếu  $T \neq 0$ , thì thế năng tương tác là

$$\begin{aligned} U_T(x) &= U(x+a) + U(a-x) \\ &= U_T(a) + U_{T_2}x^2 + U_{T_3}x^3 + \dots , \end{aligned}$$

ở đây  $x$  là độ dịch chuyển khỏi vị trí cân bằng, và  $U_{T_2} = 72U_0/a^2$ ,  $U_{T_3} = -504U_0/a^3 \dots$

Dùng cơ học thống kê cổ điển, ta được

$$\begin{aligned} \bar{x}(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot xe^{-U_T(x)/kT} \Bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot e^{-U_T(x)/kT} \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot xe^{-(U_{T_2}x^2 + U_{T_3}x^3)/kT} \Bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot e^{-(1/kT)U_{T_2}x^2} . \end{aligned}$$

Vì  $kT \ll U_0$ , ta có

$$\begin{aligned} \bar{x}(T) &\approx \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x \left( 1 - \frac{U_{T_3}}{kT} x^3 \right) e^{-(U_{T_2}/kT)x^2} \Bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot e^{-(U_{T_2}/kT)x^2} \\ &= 7akT/96U_0 , \end{aligned}$$

và  $\lambda = \frac{7k}{96U_0}$ .

## 2148

Một hệ cổ điển có Hamiltonian  $H$  là một hàm số của toạ độ suy rộng  $q_i$  và xung lượng  $p_i$ . Phương trình chuyển động chính tắc là

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} , \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} .$$

Hãy viết phương trình liên tục đối với  $\rho$ , mật độ trong không gian pha, và dùng nó chứng minh rằng entropy của hệ này không thay đổi theo thời gian.

Bây giờ khảo sát một hệ mà chuyển động của nó tắt dần do lực ma sát. Để đơn giản ta khảo sát dao động tử diều hoà một chiều tắt dần. Phương trình chuyển động là

$$\ddot{p} = -kq - \frac{\gamma p}{m}, \quad \dot{q} = \frac{p}{m}.$$

ở đây  $m$  là khối lượng,  $k$  là độ cứng của lò xo, và  $\gamma$  là một hằng số có liên quan với ma sát ( $m, k$  và  $\gamma$  đều là những hằng số dương).

Hãy viết phương trình chuyển động đối với mật độ không gian  $\rho$ ? Chứng minh rằng bây giờ entropy là một hàm giảm theo thời gian.

Kết quả cuối cùng này có phù hợp với nguyên lý thứ hai nhiệt động lực học không?

(Princeton)

### Lời giải:

Sự bảo toàn của  $\rho$  được mô tả bởi

$$\frac{d\rho}{dt} + \sum_i \rho \left[ \frac{\partial}{\partial q_i} (\dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i} (\dot{p}_i) \right] = 0.$$

Với phương trình chuyển động chính tắc, ta có

$$\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Điều này có nghĩa là dọc theo quỹ đạo pha thì  $\rho$  là hằng số. Vì các quỹ đạo pha nằm trong mặt phẳng năng lượng không đổi, nên từ phương trình  $d\rho/dt = 0$  suy ra rằng không có sự dịch chuyển giữa các mức năng lượng. Như vậy entropy của hệ không thay đổi theo thời gian.

Đối với dao động tử diều hoà một chiều tắt dần, phương trình chuyển động cho

$$\frac{d\rho}{dt} - \frac{\gamma\rho}{m} = 0.$$

Vì thế dọc theo quỹ đạo pha (dường dòng), ta có mật độ trạng thái

$$\rho = \rho_0 \exp(\gamma t/m),$$

luôn luôn tăng. Ngoài ra, sự khảo sát năng lượng cho

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 \right) = -\gamma \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 < 0,$$

tức là đọc theo quỹ đạo pha năng lượng giảm. Nói cách khác, đường dòng hướng tới miền năng lượng thấp. Như vậy tổ hợp cả hai kết quả trên, ta thấy có sự chuyển dịch từ trạng thái năng lượng cao xuống trạng thái năng lượng thấp. Vì thế entropy là một hàm số giảm theo thời gian. Vì dao động tử không phải là một hệ cô lập cho nên sự giảm của entropy không mâu thuẫn với nguyên lý thứ hai nhiệt động lực học.

## 5. THUYẾT ĐỘNG HỌC CHẤT KHÍ (2149-2208)

**2149**

Hãy ước tính

- (a) Số phân tử khí trong một phòng.
- (b) Năng lượng của các phân tử này trên một mol theo đơn vị jun hoặc erg.
- (c) Nhiệt lượng cần để làm nóng một mol khí ở 1 atm từ 0°C đến 20°C?
- (d) Năng lượng tối thiểu cần cung cấp cho một máy lạnh để làm lạnh một mol khí ở 1 atm từ 20°C xuống 18°C? Máy lạnh làm việc theo chu trình và thả nhiệt ra ở 40°C.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

- (a) Một mol khí chiếm thể tích khoảng 23 lít và một căn phòng có kích thước trung bình cỡ  $50 \text{ m}^3$ . Khi đó số phân tử khí có trong phòng là

$$N \simeq \frac{50 \times 1000}{23} \times 6,02 \times 10^{23} \sim 10^{27} .$$

- (b) Năng lượng của 1 mol khí là

$$E = \frac{5}{2}RT = \frac{5}{2} \times 8,31 \times 300 = 6,2 \times 10^3 \text{ J} .$$

- (c) Nhiệt lượng cần phải cung cấp

$$Q = C_p \Delta T = \frac{7}{2}R \cdot \Delta T = 5,8 \times 10^2 \text{ J} .$$

$$(d) dW = \frac{T_1 - T_2}{T_2} dQ.$$

Với  $T_1 = 313$  K,  $T_2 = 293$  K, ta cần có

$$\Delta W = \frac{T_1 - T_2}{T_2} C_p \Delta T = 4 \text{ J} ,$$

ở đây ta đã lấy  $\Delta T = 2$  K.

### 2150

Xét một hình lập phương cạnh 10 cm chứa khí He ở điều kiện tiêu chuẩn. Hãy ước tính (về độ lớn) số lần va chạm của các phân tử vào một mặt thành bình trong một giây.

(Columbia)

**Lời giải:**

Ở điều kiện tiêu chuẩn áp suất  $p \approx 10^6$  dyn/cm<sup>2</sup>,  $T \approx 300$  K, do đó số lần va chạm là

$$N \approx \frac{1}{6} \bar{v} n S = \frac{\sqrt{2} p S}{3\sqrt{\pi m k T}} \approx 5 \times 10^{25} \text{ s}^{-1} ,$$

ở đây  $\bar{v} = (8kT/\pi m)^{1/2}$  là vận tốc trung bình,  $n$  là mật độ số phân tử khí,  $S$  là diện tích của một mặt thành bình.

### 2151

Ước tính quãng đường trung bình của proton trong tia vũ trụ ở khí quyển tại mực nước biển.

(Columbia)

**Lời giải:**

Proton bị tán xạ do tương tác với hạt nhân của các phân tử của khí quyển. Mật độ khí quyển tại gần mực nước biển là

$$n = \frac{N}{V} = \frac{p}{kT} .$$

Quãng đường tự do trung bình là

$$l = \frac{1}{\pi n \sigma} = \frac{1}{\pi \sigma} \cdot \frac{kT}{p} = 10^6 \text{ cm} ,$$

trong đó  $\sigma = 10^{-26} \text{ cm}^2$ .

### 2152

Mặc dù kim loại có mật độ electron cao (khoảng cách trung bình  $r \sim 1 - 3 \text{ \AA}$ ), quãng đường tự do trung bình electron-electron là dài. ( $\lambda_{ee} \sim 10^4 \text{ \AA}$  ở nhiệt độ phòng). Phát biểu những nguyên nhân để quãng đường tự do trung bình trong va chạm electron-electron là dài và cho một lập luận định lượng về sự phụ thuộc vào nhiệt độ của nó.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Quãng đường tự do trung bình  $\lambda \propto \frac{1}{n_{\text{eff}}}$ , ở đây  $n_{\text{eff}}$  là mật độ số electron hiệu dụng. Đối với khí electron trong kim loại ở nhiệt độ  $T$ , chỉ những electron ở gần mặt Fermi mới có thể bị kích thích và tham gia va chạm với nhau. Mật độ số electron hiệu dụng ở gần mặt Fermi là

$$n_{\text{eff}} = \frac{n k T}{\varepsilon_F} .$$

Do đó  $\lambda$  là rất dài mặc dù mật độ electron lớn, từ trên ta có

$$\lambda_{ee} \propto \frac{\varepsilon_F}{k T n \sigma} \propto \frac{1}{T} .$$

Điều này có nghĩa là khi nhiệt độ tăng sẽ có nhiều electron bị kích thích và có khả năng va chạm với nhau. Điều này làm giảm quãng đường tự do trung bình.

### 2153

Ước tính các đại lượng sau:

- (a) Thời gian trung bình giữa các va chạm của phân tử nitơ trong không khí ở nhiệt độ phòng và áp suất khí quyển.
- (b) Mật độ số electron trong khí electron Fermi suy biến tại  $T = 0 \text{ K}$  với xung lượng Fermi  $p_F = m_e c$ .

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Giả thiết quãng tự do trung bình của phân tử là  $l$ , vận tốc trung bình của nó là  $v$ , thời gian va chạm trung bình là  $\tau$ . Ta có

$$l = \frac{1}{n\sigma} = \frac{kT}{p\sigma} \approx 4 \times 10^{-6} \text{ m} ,$$

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx 9 \times 10^2 \text{ m/s} .$$

$$\tau = \frac{l}{v} \approx 4 \times 10^{-9} \text{ s} .$$

(b) Mật độ số electron là

$$n = 2 \iiint_{p \leq p_F} \frac{d\mathbf{P}}{h^3} = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 = \left(\frac{8\pi}{3}\right) \left(\frac{m_e c}{h}\right)^3 = 6 \times 10^{35} \text{ m}^{-3} .$$

### 2154

Một bình chia thành hai phần nhờ một vách ngăn có một lỗ thủng nhỏ đường kính  $D$ . Khí He chứa trong hai phần được giữ ở nhiệt độ lần lượt là  $T_1 = 150 \text{ K}$  và  $T_2 = 300 \text{ K}$  nhờ đốt nóng các thành bình.

(a) Đường kính  $D$  của lỗ xác định như thế nào đối với quá trình vật lý xảy ra để đưa các khí tới trạng thái ổn định?

(b) Tỉ số các quãng đường tự do trung bình  $l_1/l_2$ , giữa hai phần của bình là bao nhiêu khi  $D \ll l_1, D \ll l_2$ , và hệ có tiến tới trạng thái ổn định không?

(c) Tính  $l_1/l_2$  khi  $D \gg l_1, D \gg l_2$ ?

(Princeton)

**Lời giải:**

(a) Tại trạng thái ổn định, số phân tử trong mỗi phần là cố định. Nếu  $D \gg l_1$  và  $D \gg l_2$ , thì các phân tử trao đổi bằng một dòng khí vĩ mô. Nếu  $D \ll l_1, D \ll l_2$  thì các phân tử trao đổi bằng một dòng khí rò rỉ qua lỗ nhỏ.

(b) Khi  $l_1 \gg D$  và  $l_2 \gg D$ , thì trạng thái ổn định xảy ra với điều kiện

$$\frac{n_1 v_1}{4} = \frac{n_2 v_2}{4} ,$$

tức là số va chạm bằng nhau. Vì thế

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = 0,707.$$

(c) Khi  $l_1 \ll D$  và  $l_2 \ll D$ , thì trạng thái ổn định xảy ra với điều kiện  $p_1 = p_2$ , tức là áp suất bằng nhau. Vì thế

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{T_1}{T_2} = 0,5.$$

### 2155

Khảo sát một người say rượu xuất phát từ một cột đèn đường. Mỗi bước của người đó hoặc theo phương chính bắc, chính nam, chính đông, hoặc chính tây, nhưng mỗi bước theo hướng nào là hoàn toàn ngẫu nhiên. Biết mỗi bước của người đó dài  $L$ . Tính xác suất để người đó vẫn ở trong vòng tròn tâm là cột điện và bán kính  $2L$  sau khi bước ba bước?

(Columbia)

**Lời giải:**

Số cách bước ba bước là  $4 \times 4 \times 4 = 64$ . Người say rượu có hai cách bước ra ngoài vòng tròn là:

- i) Bước dọc theo một đường thẳng
- ii) Hai bước tiến, một bước rẽ phải (hoặc trái).

Số cách tương ứng i) và ii) lần lượt là  $C_1^4 = 4$  và  $C_1^4 \cdot C_1^3 \cdot C_1^2 = 24$ . Vì thế xác suất để người đó vẫn còn ở trong vòng tròn sau khi bước ba bước là

$$P = 1 - \frac{4 + 24}{64} = \frac{9}{16}.$$

### 2156

Nếu xem không khí trong một căn phòng là đứng yên trên phương diện vĩ mô, có áp suất và nhiệt độ hoàn toàn đồng nhất, hãy ước tính khoảng thời gian để một phân tử khí trong phòng di được khoảng cách 5 m.

(Columbia)

**Lời giải:**

Vì sự khuếch tán phân tử là một quá trình ngẫu nhiên, nên ta có

$$L^2 = nl^2 ,$$

$L$  là độ dịch chuyển toàn phần của phân tử,  $l$  là quãng đường tự do trung bình,  $n$  là số va chạm nó gặp phải trên suốt khoảng dịch chuyển  $L$ . Do đó thời gian cần thiết là

$$t = n \frac{l}{v} = \frac{L^2}{lv} = 10^4 \text{ s} ,$$

ở đây ta lấy  $l = 5 \times 10^{-6}$  m và  $v = 5 \times 10^2$  m/s.

### 2157

Giả sử bạn vừa thả nhẹ ra một nguyên tử He trong căn phòng này. Hãy tính khoảng thời gian cần thiết ( $t$  theo đơn vị giây) để nó khuếch tán tới một điểm nào đó trên mặt cầu bán kính  $R = 1$  m quanh đầu ta.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Trước hết ta tính quãng đường tự do trung bình  $l$  và khoảng thời gian trung bình  $\tau$  đối với các va chạm của phân tử:

$$l = \frac{1}{n\sigma} = \frac{kT}{p\sigma} = \frac{1,38 \times 10^{-23} \times 300}{1 \times 10^5 \times 10^{-20}} = 4 \times 10^{-6} \text{ m} ,$$

$$\tau = \frac{l}{v} = \frac{4 \times 10^{-6}}{300} = 1,4 \times 10^{-8} \text{ s} .$$

Vì  $R^2 = Nl^2$ , với  $N$  là số va chạm mà nó gặp phải trên suốt khoảng dịch chuyển  $R$ , ta có

$$t = N\tau = \left( \frac{R}{l} \right)^2 \tau = \frac{R^2}{lv} = 8,6 \times 10^2 \text{ s} \approx 14 \text{ min} .$$

## 2158

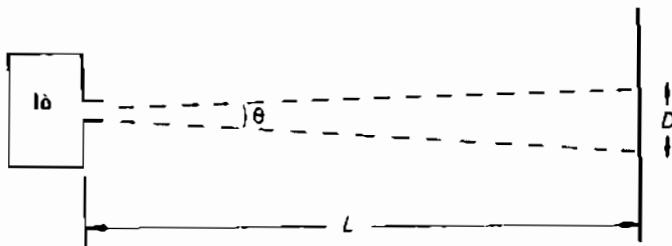
Trong một thí nghiệm một chùm nguyên tử bạc đi ra từ một cái lò chứa hơi bạc ở  $T = 1200$  K. Chùm được chuẩn trực bằng cách cho đi qua một lỗ tròn nhỏ.

(a) Hãy đưa ra lập luận chứng tỏ rằng không thể giảm vô hạn đường kính  $D$  của vết trên màn bằng cách thu hẹp lỗ  $a$ .

(b) Nếu màn đặt cách lỗ  $L = 1$  m hãy ước tính bằng số giá trị nhỏ nhất của  $D$  có thể thu được khi điều chỉnh  $a$ .

(Để đơn giản có thể giả thiết tất cả các nguyên tử có cùng động lượng dọc theo hướng của chùm và có khối lượng  $M_{Ag} = 1,8 \times 10^{-22}$  g.)

(UC, Berkeley)



Hình 2.33

**Lời giải:**

(a) Theo nguyên lý bất định, khi  $a$  càng nhỏ thì độ bất định của thành phần  $y$  của động lượng của nguyên tử bạc đi qua lỗ nhỏ càng lớn do đó vết càng rộng.

(b) Dùng nguyên lý bất định ta thu được góc lệch của các nguyên tử từ lò đi ra là

$$\theta \approx \frac{\lambda}{a} \approx \frac{h}{pa} = \frac{h}{a\sqrt{3mkT}} .$$

Do đó,  $D = a + 2\theta L = a + \frac{2hL}{a\sqrt{3mkT}} \geq 2\sqrt{\frac{2hL}{\sqrt{3mkT}}} \text{ và}$

$$D_{\min} = 2 \frac{(2hL)^{1/2}}{(3mkT)^{1/4}} = 8.0 \times 10^{-6} \text{ m} .$$

Vậy là đường kính nhỏ nhất vào cỡ  $80 \times 10^3$  Å.

## 2159

Tán xạ.

Tầm của thế tương tác giữa hai nguyên tử hidro gần đúng là  $4 \text{ \AA}$ . Đối với một chất khí ở điều kiện cân bằng nhiệt hãy ước tính nhiệt độ mà dưới nó sự tán xạ nguyên tử – nguyên tử chủ yếu là sóng  $S$ .

(MIT)

Lời giải:

Đối với tán xạ sóng  $S$ ,  $Ka < 2\pi$ , với  $a = 4 \text{ \AA}$  là tầm của thế nồng tương tác. Vì

$$\frac{1}{2}kT = \frac{\hbar^2 K^2}{8\pi^2 m},$$

ta có

$$T < \frac{\hbar^2}{mka^2} \approx 1 \text{ K}.$$

## 2160

Hãy chứng minh rằng một vật nhỏ lơ lửng trong một chất lưu ở nhiệt độ  $T$  sẽ chuyển động ngẫu nhiên do va chạm với các phân tử của chất lưu sao cho độ dịch chuyển bình phương trung bình theo một hướng bất kì thoả mãn điều kiện

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = Tt/\lambda,$$

ở đây  $t$  là khoảng thời gian,  $\lambda$  là một hằng số tỉ lệ với độ nhớt của chất lưu.  
(Columbia)

Lời giải:

Do chuyển động nhiệt của các phân tử chất lưu nên vật nhỏ liên tục bị các phân tử này đập vào. Lực tác động lên vật là một lực hãm  $-\gamma v$  ( $\gamma$  là độ nhớt của chất lưu) và lực ngẫu nhiên  $f(t)$  có dạng

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = a\delta(t-t'), \quad \text{trong đó } a \text{ cần được xác định.}$$

Phương trình chuyển động của vật là

$$m \frac{dv}{dt} = -\gamma v + f(t).$$

Giả sử  $v(0) = 0$ , ta có

$$v(t) = \int_0^t F(s) \exp[(s-t)\beta] ds,$$

trong đó  $t > 0, \beta = \gamma/m, F(t) = f(t)/m$ . Xét

$$\begin{aligned}\langle v(t)v(t') \rangle &= \int_0^t ds \int_0^{t'} ds' e^{-(t-s)\beta - (t'-s')\beta} \langle F(s)F(s') \rangle \\ &= \frac{a}{m^2} \int_0^t ds \int_0^{t'} e^{-(t+t')\beta + (s+s')\beta} \delta(s - s') ds' \\ &= \frac{a}{m^2} e^{-(t+t')\beta} \int_0^t ds \int_0^{t'} e^{2\beta s} \delta(s - s') ds' \\ &= \frac{a}{m^2} e^{-(t+t')\beta} \int_0^t e^{2\beta s} \theta(s) \theta(t' - s) ds \\ &= \frac{a}{m^2} e^{-(t+t')\beta} \frac{1}{2\beta} \exp[2\beta \min(t, t')] \\ &= \frac{a}{2\beta m^2} \exp(-\beta|t - t'|),\end{aligned}$$

trong đó  $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Khi cân bằng nhiệt,  $\langle v^2(t) \rangle = \frac{kT}{m}$ . So sánh với kết quả ở trên, ta được

$$a = 2\beta mkT = 2\gamma kT.$$

Tiếp theo, ta xét

$$\Delta x = x(t) - x(0) = \int_0^t v(s) ds,$$

và

$$\begin{aligned}\langle (\Delta x)^2 \rangle &= \int_0^t ds \int_0^{t'} \langle v(s)v(s') \rangle ds' \\ &= 2kT \int_0^t ds \int_0^s \exp[-\gamma(s - s')/m] / m ds' \\ &= \frac{2kT}{m} \left[ \frac{m}{\gamma} t - \frac{m^2}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma t/m}) \right] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{2kT}{\gamma} t.\end{aligned}$$

Công thức trên có thể viết lại là

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{Tt}{\lambda}$$

với

$$\lambda = \gamma/2k \propto \gamma.$$

## 2161

Một bình thể tích  $2V$  chia thành hai nửa nhờ một vách ngăn mỏng. Nửa bên trái chứa khí lý tưởng ở áp suất  $p_0$  còn nửa phải lúc đầu là chân không. Một lỗ nhỏ  $A$  được khoét trên vách ngăn. Áp suất  $p_1$  ở nửa bên trái phụ thuộc vào thời gian như thế nào? Giả thiết nhiệt độ ở cả hai bên là không đổi. Hãy biểu diễn đáp số theo vận tốc trung bình  $v$ .

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Vì lỗ nhỏ nên ta có thể giả thiết khí ở hai bên vách ngăn bình là cân bằng nhiệt ở mọi thời điểm. Nếu số hạt ở phía bên trái trong một đơn vị thể tích tại thời điểm  $t = 0$  là  $n_0$ , thì mật độ số hạt ở ngăn bên trái và bên phải ở thời điểm  $t$  lần lượt là  $n_1(t)$  và  $n_0 - n_1(t)$ . Ta có

$$V \frac{dn_1(t)}{dt} = -\frac{A}{4}n_1v + \frac{A}{4}(n_0 - n_1)v ,$$

ở đây  $v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$  là vận tốc trung bình của các hạt. Số hạng thứ nhất là tốc độ giảm số hạt trong nửa bình bên trái và cũng chính là số hạt chuyển sang nửa bình bên phải; số hạng thứ hai là tốc độ tăng số hạt trong nửa bình trái do số hạt chuyển từ nửa bên phải sang. Phương trình được đơn giản thành

$$\frac{dn_1(t)}{dt} + \frac{A}{2V}n_1v = \frac{A}{4V}n_0v .$$

Với điều kiện ban đầu  $n_1(0) = n_0$ , ta có

$$n_1(t) = \frac{n_0}{2} \left( 1 + e^{-\frac{Avt}{2V}} \right) ,$$

và

$$p_1(t) = \frac{p_0}{2} \left( 1 + e^{-\frac{Avt}{2V}} \right) .$$

## 2162

Xuất phát từ định lý virian đối với một cấu hình cân bằng, hãy chứng minh rằng:

- (a) động năng toàn phần của một cấu hình khí hữu hạn bằng nội năng toàn phần nếu  $\gamma = C_p/C_v = 5/3$ , trong đó  $C_p$  và  $C_v$  là nhiệt dung riêng mol

đẳng áp và đẳng tích tương ứng,

(b) cấu hình khí hữu hạn có thể nằm trong cân bằng hấp dẫn Newton chỉ khi  $C_p/C_v > 4/3$ .

(Columbia)

**Lời giải:**

Đối với một cấu hình khí hữu hạn định lý virian cho ta

$$2\bar{K} + \sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i = 0,$$

với  $\bar{K}$  là động năng toàn phần trung bình,  $\mathbf{F}_i$  là lực tổng hợp tác dụng lên phân tử thứ  $i$  bởi các phân tử khí khác. Nếu tương tác là lực hấp dẫn Newton với thế năng  $V(r_{ij}) \sim \frac{1}{r_{ij}}$ , thì ta có:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i = - \sum_{j \neq i} r_{ij} \frac{\partial V(r_{ij})}{\partial r_{ij}} = \sum_{j < i} V(r_{ij}),$$

$$r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|.$$

Từ đó suy ra  $2\bar{K} + \bar{V} = 0$ , với  $\bar{V}$  là thế năng toàn phần trung bình.

Ta có thể coi chất khí trong một vùng nhỏ của cấu hình là lý tưởng vì thế mật độ nội năng  $\bar{u}(\mathbf{r})$  và mật độ động năng  $\bar{K}(\mathbf{r})$  thoả mãn mối liên hệ

$$\bar{u}(\mathbf{r}) = \frac{2}{3} \frac{1}{\gamma - 1} \bar{K}(\mathbf{r}) \quad \text{với } \bar{K}(\mathbf{r}) = \frac{3}{2} kT(\mathbf{r}).$$

Vì thế nội năng toàn phần là  $\bar{U} = 2\bar{K}/3(\gamma - 1)$ .

Khi  $\gamma = \frac{5}{3}$ ,  $\bar{U} = \bar{K}$ . Trong trường hợp tổng quát định lý virian cho ta  $3(\gamma - 1)\bar{U} + \bar{V} = 0$ , do đó năng lượng toàn phần của hệ là

$$E = \bar{U} + \bar{V} = (4 - 3\gamma)\bar{U}.$$

Đối với hệ ở trạng thái cân bằng bền và không phân kỳ vô hạn, ta cần có  $E < 0$ . Vì  $\bar{U} > 0$ , nên ta phải có

$$\gamma > \frac{4}{3}.$$

## 2163

Một hệ gồm  $N$  hạt tương tác rất yếu ở nhiệt độ đủ cao để có thể dùng được thống kê cổ điển. Mỗi hạt có khối lượng  $m$  và dao động trên một phương quanh vị trí cân bằng của nó. Hãy tính nhiệt dung ở nhiệt độ  $T$  trong mỗi trường hợp sau:

- (a) Lực phục hồi tỉ lệ với độ dịch chuyển  $x$  từ vị trí cân bằng.
- (b) Lực phục hồi tỉ lệ với  $x^3$ .

Những kết quả này có thể thu được mà không cần tính toán tường minh các tích phân.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Theo định lý virian, nếu thế năng của mỗi hạt là  $V \propto x^n$ , thì khi đó động năng trung bình  $\bar{T}$  và thế năng trung bình  $\bar{V}$  thoả mãn hệ thức  $2\bar{T} = n\bar{V}$ . Theo định lý phân bố đều năng lượng, đối với chuyển động một chiều,  $\bar{T} = \frac{1}{2}kT$ . Từ đó ta có thể phát biểu như sau:

- (a) Khi  $f \propto x$ ,  $V \propto x^2$  và  $n = 2$ . Khi đó  $\bar{V} = \bar{T} = \frac{1}{2}kT$ ,  $E = \bar{V} + \bar{T} = kT$ . Do đó, nhiệt dung đối với mỗi hạt là  $k$  và  $C_v = Nk$ .
- (b) Khi  $f \propto x^3$ ,  $V \propto x^4$  và  $n = 4$ . Khi đó  $\bar{V} = \frac{1}{2}\bar{T} = \frac{1}{4}kT$ ,  $E = \frac{3}{4}kT$ . Do vậy nhiệt dung đối với mỗi hạt là  $\frac{3}{4}k$  và  $C_v = \frac{3}{4}Nk$  đối với toàn hệ.

## 2164

Bằng cách xử lý bức xạ trong một cái hốc như là một khí photon có năng lượng  $\epsilon$  và động lượng  $k$  liên hệ với nhau bởi biểu thức  $\epsilon = ck$ , với  $c$  là vận tốc ánh sáng, chứng minh rằng áp suất p tác dụng lên thành hốc bằng một phần ba mật độ năng lượng.

Với kết quả trên chứng minh rằng khi bức xạ được chứa trong một bình có các thành phần xạ lý tưởng bị nén đoạn nhiệt thì bức xạ đó tuân theo phương trình

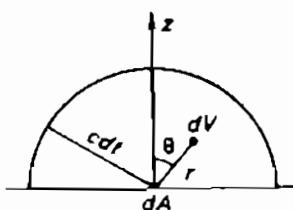
$$PV^\gamma = \text{constant}$$

Xác định giá trị của  $\gamma$ .

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Gọi  $n(\omega)d\omega$  là số photon trong một khoảng tần số góc  $\omega \sim \omega + d\omega$ . Xét áp suất tác dụng lên thành bình bởi các photon nằm trong yếu tố thể tích  $dV$  ở vị trí  $(r, \theta, \varphi)$  (Hình 2.34). Xác suất để các photon này va chạm với một diện tích  $dA$  của thành là  $dA \cdot \cos \theta / 4\pi r^2$ , mỗi một va chạm đóng góp một xung lượng  $2k \cos \theta$  vuông góc với  $dA$ . Do đó, ta có



Hình 2.34

$$\begin{aligned} dp_\omega &= \frac{df}{dAdt} \\ &= \frac{n d\omega \cdot dV \cdot \frac{dA \cdot \cos \theta}{4\pi r^2} \cdot 2k \cos \theta}{dAdt} \\ &= \frac{d\omega}{4\pi dt} 2nk \cos^2 \theta \sin \theta dr d\theta d\varphi, \\ p &= \int_{r \leq cdt} dp_\omega = \int \frac{n}{3} k c d\omega = \int \frac{u(\omega)}{3} d\omega. \end{aligned}$$

Lấy tích phân, ta được  $p = \frac{u}{3} = \frac{U}{3V}$ , với  $u$  là mật độ năng lượng và  $U$  là năng lượng toàn phần. Từ phương trình nhiệt động lực học

$$dU = TdS - pdV$$

và  $p = U/3V$ , ta thu được  $dU = 3pdV + 3Vdp$ . Do đó  $4pdV + 3Vdp = TdS$ . Đổi với quá trình đoạn nhiệt  $dS = 0$ , do đó  $4 \frac{dV}{V} + 3 \frac{dp}{p} = 0$ . Tích phân phương trình đó, ta được

$$pV^{4/3} = \text{const.}, \quad \gamma = \frac{4}{3}.$$

## 2165

Áp suất bức xạ.

Ta có thể coi bức xạ như là một khí photon và áp dụng nhiều kết quả của thuyết động học và nhiệt động lực học cho khí bức xạ.

(a) Chứng minh rằng áp suất gây bởi một trường bức xạ đẳng hướng có mật độ năng lượng  $u$  lên một thành phần xạ lý tưởng là  $p = u/3$ .

(b) Bức xạ vật đen là bức xạ được chứa và cân bằng trong một hốc có các thành giữ ở nhiệt độ cố định  $T$ . Dùng những lập luận nhiệt động lực học chứng tỏ rằng mật độ năng lượng của vật đen chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ mà không phụ thuộc kích thước cũng như chất liệu của thành hốc.

(c) Từ (a) và (b) đi đến kết luận rằng đối với bức xạ vật đen, áp suất chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ,  $p = p(T)$ , và nội năng  $U$  cho bởi  $U = 3p(T)V$  trong đó  $V$  là thể tích của hốc. Dùng hai dữ kiện này về chất khí đang xét và dùng những lập luận thuần túy nhiệt động lực học, hãy rút ra dạng hàm số của  $p(T)$ , với sai khác một hằng số nhân (chưa cần xác định).

(MIT)

Lời giải:

(a) Xét một yếu tố diện tích  $dS$  của mặt tường phản xạ lý tưởng và các photon nằm trong góc khôi  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ . Độ biến thiên động lượng trong đơn vị thời gian theo phương vuông góc với  $dS$  là  $u \cdot \sin \theta d\theta d\varphi \cdot dS \cos \theta \cdot 2 \cos \theta / 4\pi$ . Vì thế áp suất lên thành là

$$p = \left( \frac{u}{2\pi} \right) \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \theta \sin \theta = \frac{u}{3} .$$

(b) Khảo sát một hốc gồm hai nửa tuỳ ý ngăn cách bởi một vách. Thể tích và chất liệu tạo thành các hốc con là khác nhau nhưng các thành được giữ ở cùng nhiệt độ  $T$ . Khi đó ở cân bằng nhiệt, bức xạ trong các hốc con cũng cùng có nhiệt độ  $T$ , nhưng mật độ năng lượng khác nhau nếu ngoài nhiệt độ ra, chúng phụ thuộc vào những nhân tố khác. Nếu một lỗ nhỏ được mở giữa hai hốc con thì sẽ có một dòng bức xạ chảy từ hốc con có  $u$  cao, vì áp suất của chúng khác nhau. Một động cơ nhiệt khi đó có thể hấp thụ dòng bức xạ nhiệt này và chuyển thành công cơ học. Điều này sẽ mâu thuẫn với nguyên lý thứ hai nhiệt động lực học, nếu không liên quan đến một hiệu ứng bên ngoài nào khác. Vì thế mật độ năng lượng của bức xạ vật đen chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ.

(c) Vì năng lượng tự do  $F$  là một đại lượng quảng tính và

$$\left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = -p = -\frac{1}{3}u(T),$$

ta có

$$F = -\frac{1}{3}u(T)V.$$

Từ nhiệt động lực học ta cũng có  $F = U - TS$ , trong đó  $U = uV$  là nội năng,  $S$  là entropy, và

$$\begin{aligned} S &= -\left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \\ &= \frac{1}{3} \frac{du(T)}{dT} V. \end{aligned}$$

Do đó

$$\frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T},$$

suy ra  $u = aT^4$ ,  $p = \frac{1}{3}aT^4$ , với  $a$  là một hằng số.

### 2166

Một khí gồm các nguyên tử tương tác có phương trình trạng thái và nhiệt dung đẳng tích cho bởi các biểu thức sau

$$\begin{aligned} p(T, V) &= aT^{1/2} + bT^3 + cV^{-2}, \\ C_v(T, V) &= dT^{1/2}V + eT^2V + fT^{1/2}, \end{aligned}$$

ở đây từ  $a$  đến  $f$  đều là những hằng số độc lập với  $T$  và  $V$ .

- (a) Tìm vi phân của nội năng  $dU(T, V)$  theo  $dT$  và  $dV$ .
- (b) Tìm mối liên hệ giữa các hằng số từ  $a$  đến  $f$  nhờ dữ kiện là  $U(T, V)$  là một biến trạng thái.
- (c) Tìm  $U(T, V)$  như là một hàm số của  $T$  và  $V$ .
- (d) Dùng các lập luận động học tìm một hệ thức đơn giản giữa  $p$  và  $U$  đối với khí lý tưởng đơn nguyên tử (là khí mà các nguyên tử không tương tác với nhau, nhưng sự phân bố vận tốc của chúng là tùy ý). Nếu khí được xét ở

những câu trên làm cho là lý tưởng thì các hằng số từ  $a$  đến  $f$  phải chịu những ràng buộc gì?

(MIT)

**Lời giải:**

$$(a) Ta có  $dU(T, V) = C_v dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$ ,$$

$$p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V.$$

$$\text{Do đó, } dU = (dT^{1/2}V + eT^2V + fT^{1/2})dT - \left( \frac{a}{2}T^{1/2} - 2bT^3 + cV^{-2} \right) dV.$$

(b) Vì  $U(T, V)$  là một biến trạng thái nên  $dU(T, V)$  là một ví phân toàn phần (toàn chỉnh), điều đó đòi hỏi

$$\frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T,$$

tức là

$$dT^{1/2} + eT^2 = - \left( \frac{1}{4}aT^{-1/2} - 6bT^2 \right).$$

Suy ra  $a = 0, d = 0, e = 6b$ .

(c) Dùng kết quả trong phần (b) ta có thể viết

$$dU(T, V) = d(2bT^3V) + fT^{1/2}dT - cV^{-2}dV.$$

Từ đó suy ra

$$U(T, V) = 2bT^3V + 2fT^{3/2}/3 + cV^{-1} + \text{const.}$$

(d) Hãy tưởng tượng có một mặt phẳng phản xạ lý tưởng đặt trong chất khí đang xét. Áp suất tác dụng lên mặt phẳng này bởi các nguyên tử có vận tốc  $v$  là

$$p_v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{N \sin \theta d\theta d\varphi}{V} v \cos \theta \cdot 2mv \cos \theta = \frac{1}{3} \frac{N}{V} mv^2.$$

Mật độ nội năng trung bình của khí lý tưởng cũng đúng bằng mật độ động năng trung bình của nó, tức là

$$u = \frac{1}{2} \overline{mv^2} \cdot \frac{N}{V}.$$

Áp suất trung bình  $p = \bar{p}_v = 2u/3$ , suy ra  $pV = \frac{2}{3}U$ . Nếu muốn khí xét ở trên trở thành thành lý tưởng thì phương trình trên đây phải thoả mãn:

$$\left( bT^3 + \frac{c}{V^2} \right) V = \frac{2}{3} \left( 2bT^3V + \frac{2}{3}fT^{3/2} + \frac{c}{V} + \text{const.} \right),$$

tức là  $3bT^3V + 4fT^{\frac{3}{2}} - \frac{3c}{V} = \text{const.}$ .

Suy ra  $b$  và  $f$  không thể đồng thời bằng 0. Biểu thức đổi với  $p$  cũng chứng tỏ rằng  $b$  và  $c$  cũng không thể đồng thời bằng 0.

### 2167

(a) Từ lý thuyết động học đơn giản nhất hãy rút ra một biểu thức gần đúng đổi với hệ số khuếch tán  $D$  của một chất khí. Để đạt mục đích đó, không cần bận tâm đến những thừa số nhỏ và cũng không cần tích phân các hàm phân bố v.v.

(b) Từ những con số mà bạn đã biết, hãy ước tính  $D$  đổi với không khí ở điều kiện tiêu chuẩn.

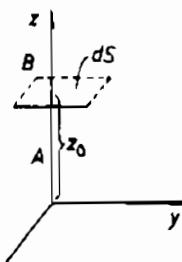
(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Ta lấy một yếu tố diện tích  $dS$  trên một mặt tường tượng đặt tại  $z = z_0$  chia chất khí thành hai phần  $A$  và  $B$  như trên hình 2.35. Đổi với chất khí đồng nhất tỉ lệ số hạt chuyển động song song với trục  $z$  (hướng lên hoặc hướng xuống) là  $\frac{1}{6}$ . Do đó khối lượng khí truyền dọc theo hướng dương của trục  $z$  qua yếu tố diện tích  $dS$  trong khoảng thời gian  $dt$  là

$$\begin{aligned} dM &= m \left( \frac{1}{6}n_A \bar{v} dS dt - \frac{1}{6}n_B \bar{v} dS dt \right) \\ &= \frac{1}{6} \bar{v} dS dt (\rho_A - \rho_B) \\ &= -\frac{1}{6} \bar{v} dS dt \cdot 2\bar{\lambda} \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_{z_0} \\ &= -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_{z_0} dS dt, \end{aligned}$$

ở đây  $\bar{v}$  là vận tốc trung bình và  $\bar{\lambda}$  là quang đường tự do trung bình của các



Hình 2.35

hạt chất khí. Theo định nghĩa, hệ số khuếch tán là

$$D = \frac{-dM}{dSdt} / \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_{z_0} = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} .$$

(b) Ở điều kiện tiêu chuẩn tốc độ trung bình của các phân tử không khí là

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx 448 \text{ m/s} ,$$

và quãng đường tự do trung bình là

$$\bar{\lambda} \approx 6,9 \times 10^{-8} \text{ m} .$$

Như vậy hệ số khuếch tán là

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \approx 3,1 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} .$$

### 2168

(a) Chứng minh rằng tỉ số giữa áp suất và hệ số nhớt cho biết một cách gần đúng số va chạm trong một đơn vị thời gian của phân tử trong chất khí.

(b) Tính số va chạm trong một đơn vị thời gian đối với một phân tử khí ở điều kiện tiêu chuẩn bằng cách dùng kết quả ở câu (a) hoặc tính nó từ vận tốc trung bình, đường kính phân tử và mật độ số hạt.

Biết hệ số nhớt của không khí ở điều kiện tiêu chuẩn là  $1,8 \times 10^{-4}$  trong hệ đơn vị cgs. Có thể dùng giá trị của những hằng số khác, nếu cần.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Hệ số nhớt là  $\eta = \frac{n}{3}m\bar{v}\lambda$ , ở đây  $n$  là mật độ số hạt. Áp suất của khí là

$$p = nkT.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{p}{\eta} = \frac{3kT}{m\bar{v}\lambda}.$$

Tốc độ bình phương trung bình của các phân tử là  $\bar{v}^2 = \frac{3kT}{m}$ . Bỏ qua sự khác nhau giữa tốc độ trung bình và tốc độ căn quân phương, ta có

$$\frac{p}{\eta} = \frac{\bar{v}^2}{\bar{v}\lambda} \approx \frac{\bar{v}}{\lambda}$$

đó chính là số va chạm trung bình trong một đơn vị thời gian đối với một phân tử.

(b) Ở điều kiện tiêu chuẩn áp suất là  $p = 1,013 \times 10^6$  dyn/cm<sup>2</sup>. Suy ra số va chạm trong đơn vị thời gian là

$$\frac{p}{\eta} = \frac{1,013 \times 10^6}{1,8 \times 10^{-4}} = 5,63 \times 10^9 \text{ s}^{-1}.$$

### 2169

(a) Giả thiết khí Heli khá loãng sao cho các va chạm hai hạt của các nguyên tử He xác định các hệ số vận chuyển, hãy tìm một biểu thức đối với độ dẫn nhiệt của chất khí đó.

(b) Ước tính tỉ số giữa độ dẫn nhiệt của khí <sup>3</sup>He và độ dẫn nhiệt của khí <sup>4</sup>He ở nhiệt độ phòng.

(c) Tỉ số này sẽ trở nên khác ở nhiệt độ gần 2 K. Tại sao?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Khảo sát một yếu tố diện tích  $dS$  trên một mặt phẳng tưởng tượng đặt tại  $z = z_0$  chia chất khí thành hai phần  $A$  và  $B$  (xem hình 2.35). Giả thiết nhiệt độ ở  $A$  và  $B$  lần lượt là  $T_A$  và  $T_B$ . Trong trường hợp sự khác nhau về nhiệt độ là nhỏ ta có thể lấy gần đúng  $n_A\bar{v}_A = n_B\bar{v}_B = n\bar{v}$ , khi đó số phân

tử trao đổi giữa  $A$  và  $B$  qua  $dS$  trong khoảng thời gian  $dt$  là  $n\bar{v}dSdt/6$ . Theo nguyên lý phân bố đều năng lượng, động năng trung bình của các phân tử ở  $A$  là  $\frac{l}{2}kT_A$ , và ở  $B$  là  $\frac{l}{2}kT_B$  ( $l$  là số bậc tự do của phân tử). Do đó năng lượng toàn phần chuyển qua  $dS$  trong khoảng thời gian  $dt$  (hay nhiệt lượng chuyển dọc theo chiều dương của trục  $z$ ) là

$$dQ = lk(T_A - T_B)n\bar{v}dSdt/12 .$$

Hiệu số nhiệt độ có thể khai triển theo gradient nhiệt độ:

$$T_A - T_B = -2\bar{\lambda} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{z_0} .$$

Sao cho

$$dQ = -\frac{1}{3}n\bar{v}\bar{\lambda}\frac{l}{2}k \left( \frac{dT}{dz} \right)_{z_0} dSdt ,$$

Suy ra độ dẫn nhiệt là

$$\kappa = \frac{1}{3}n\bar{v}\bar{\lambda}\frac{l}{2}k = \frac{1}{3}\rho\bar{v}\bar{\lambda}c_v . \quad (*)$$

trong đó  $c_v$  là nhiệt dung riêng đẳng tích.

(b) Vì  $\rho\bar{\lambda} \propto m/\sigma^2$ ,  $\bar{v} \propto m^{-1/2}$ ,  $c_v \propto 1/m$ , với công thức (\*) ta có  $\kappa \propto \frac{1}{\sqrt{m}}\sigma^{-2}$ , ở đây  $\sigma$  là đường kính nguyên tử. Đổi với  ${}^3\text{He}$  và  ${}^4\text{He}$ ,  $\sigma$  có thể lấy giống nhau, nên ta có

$$\frac{\kappa_3}{\kappa_4} = \left( \frac{m_3}{m_4} \right)^{-1/2} = \left( \frac{3}{4} \right)^{-1/2} \approx 1,15 .$$

(c) Khi nhiệt độ gần 2 K,  ${}^3\text{He}$  ở pha lỏng và  ${}^4\text{He}$  ở pha siêu chảy, nên mô hình trên đây không còn đúng nữa. Tỉ số các độ dẫn nhiệt sẽ thay đổi đột ngột tại nhiệt độ này.

Một mạng lưới các bọt xốp kín dùng như một vật liệu cách nhiệt trong nhà được chế tạo sao cho các ô ban đầu đã chứa khí đa nguyên tử có phân tử lượng  $\sim 60$ . Sau một vài năm khí này khuếch tán

ra ngoài bọt xốp và được thay bằng không khí khô (phân tử lượng  $\sim 30$ ). Giả thiết tính chất cách nhiệt chủ yếu là do độ dẫn nhiệt của chất khí.

Hãy thảo luận về những nhân tố ảnh hưởng đến độ dẫn nhiệt của chất khí. Đối với mỗi nhân tố hãy xét xem khả năng cách nhiệt là tăng hay giảm. Hiệu quả tổng thể đến khả năng cách nhiệt điện là như thế nào?

(MIT)



Hình 2.36

### Lời giải:

Dộ dẫn điện là  $\kappa \sim \lambda \bar{v} n C_v$ , ở đây  $\lambda$  là quãng đường tự do trung bình,  $\bar{v}$  là vận tốc trung bình, và  $n$  là mật độ số phân tử khí,  $C_v$  là nhiệt dung đối với một phân tử. Ta có  $\bar{v} \propto \sqrt{T/A}$ , trong đó  $A$  là phân tử lượng,  $n\lambda \propto 1/\sigma$  với  $\sigma$  là tiết diện ngang của phân tử tỉ lệ với  $\propto A^{2/3}$ . Do đó

$$\kappa \propto A^{-2/3} \sqrt{T/A} = \sqrt{T}/A^{7/6}.$$

Như vậy phân tử lượng là một nhân tố quan trọng nhất. Khả năng cách nhiệt toàn phần giảm khi khí đa nguyên tử được thay bằng không khí khô.

**2171**

Bình cách nhiệt.

(a) Hãy phát biểu và giải thích về sự phụ thuộc của độ dẫn nhiệt của một chất khí lý tưởng vào mật độ của nó ở một nhiệt độ cố định.

(b) Bình cách nhiệt (Dewar) cấu tạo gồm hai lớp vỏ thuỷ tinh đồng trục ở khoảng giữa hai lớp có chứa không khí ở mật độ rất thấp. Tại sao nó lại có tác dụng như một bình cách nhiệt mặc dù trong đó chân không chưa phải là tuyệt đối?

(MIT)

**Lời giải:**

(a) Tốc độ trung bình của các phân tử khí là không đổi tại một nhiệt độ cố định. Tuy nhiên khi mật độ khí càng lớn thì tần số va chạm càng nhiều và do đó, sự truyền năng lượng sẽ càng nhanh hơn. Vì thế độ dẫn nhiệt sẽ cao hơn khi mật độ khí lớn hơn.

(b) Vì mật độ không khí thấp nên độ dẫn nhiệt cũng thấp. Do đó nó có thể làm tăng tính cách nhiệt.

### 2172

Hãy vẽ phác đồ thị mô tả sự phụ thuộc của độ dẫn nhiệt của một vật rắn cô lập vào nhiệt độ. Phát biểu sự phụ thuộc nhiệt độ tại những giới hạn của nhiệt độ và rút ra những sự phụ thuộc đó một cách định lượng.

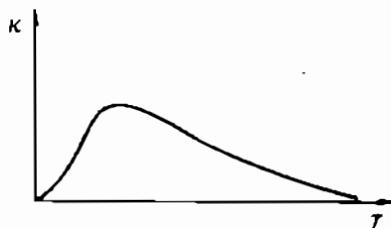
(Chicago)

**Lời giải:**

Độ dẫn nhiệt của vật rắn là  $\kappa = cv_s\lambda/3$ , với  $c$  là nhiệt dung tính trên một đơn vị thể tích,  $v_s$  là tốc độ âm,  $\lambda$  là quang đường tự do trung bình của phonon. Sự phụ thuộc của  $\kappa$  vào  $T$  được mô tả trên hình 2.37.

(a) Tại nhiệt độ thấp nhiệt dung  $c \propto T^3$ ,  $v_s$  và  $\lambda$  là những hằng số, vì thế  $\kappa \propto T^3$ .

(b) Tại nhiệt độ cao  $v_s$  là hằng số và  $\lambda \propto \frac{1}{T}$ , nhiệt dung  $c$  là hằng số, vì thế  $\kappa \propto \frac{1}{T}$ .



Hình 2.37

## 2173

Hãy biểu diễn phương trình thông lượng nhiệt cân bằng theo nhiệt dung, sự kích thích hoặc vận tốc hạt, quãng đường tự do trung bình và gradient nhiệt. Thảo luận về sự biểu hiện của cơ học lượng tử và thống kê lượng tử trong độ dẫn nhiệt của một kim loại.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Phương trình của thông lượng nhiệt cân bằng là

$$\mathbf{j} = -\lambda \nabla T ,$$

ở đây  $\lambda = \frac{1}{3} C_v v l$  là độ dẫn nhiệt,  $C_v$  là nhiệt dung trên một đơn vị thể tích,  $v$  là vận tốc trung bình và  $l$  là quãng đường tự do trung bình của các hạt. Ở đây ta đã sử dụng giả thiết cho rằng độ dẫn điện electron lớn hơn nhiều so với độ dẫn điện do mạng (điều này đúng ở nhiệt độ phòng). Mạng kim loại tương tác hút với các electron; thế năng của tương tác này có thể coi là đồng đều ở bên trong kim loại và bằng 0 ở bên ngoài. Vì thế ta có thể coi các electron hoá trị như các electron chiếm những mức năng lượng trong một giềng thế năng. Khi đó xác suất chiếm mức năng lượng  $\varepsilon$  cho bởi phân bố Fermi:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp[(\varepsilon - \varepsilon_F)/kT] + 1} .$$

Năng lượng Fermi  $\varepsilon_F$  của kim loại thường rất lớn ( $cõ \sim \text{eV}$ ). Vì  $1 kT = 0,025 \text{ eV}$  tại nhiệt độ phòng nên thông thường sự tăng nhiệt độ ít có ảnh hưởng đến sự phân bố electron. Tại các nhiệt độ thường độ dẫn điện electron được đóng góp chủ yếu bởi các electron có năng lượng lớn, tức là những electron ở phía trên mặt Fermi mà tỉ phần của chúng trong tổng số các electron là  $\frac{kT}{\varepsilon_F}$ . Như vậy ta cần chọn vận tốc Fermi làm vận tốc trung bình

$$v = v_F = (2\varepsilon_F/m_e)^{1/2} .$$

Khi đó  $l = v_F \tau$ ,  $\tau$  là thời gian hồi phục của electron. Sự khác nhau giữa khảo sát lượng tử và thống kê cổ điển là ở chỗ việc tăng nhiệt độ chỉ ảnh hưởng đến những electron gần mặt Fermi. Dùng phép gần đúng suy biến mạnh thì nhiệt dung là

$$C_v = \frac{\pi^2}{2} n k \left( \frac{kT}{\varepsilon_F} \right) ,$$

với  $n$  là mật độ số electron, và

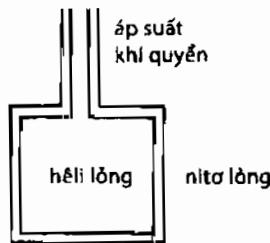
$$\lambda = \pi^2 n k^2 T \tau / 3m .$$

Công thức này phù hợp tốt với những thực nghiệm trên kim loại kẽm.

### 2174

Một bình hêli lỏng như trên hình 2.38, chứa  $1000 \text{ cm}^3$  hêli lỏng và có tổng diện tích bề mặt thành bình là  $600 \text{ cm}^2$ . Bình được cách nhiệt với một nguồn nitơ lỏng bao quanh bằng một lớp vỏ chân không dày  $0,5 \text{ cm}$ . Hêli lỏng ở  $4,2 \text{ K}$  trong khi đó nitơ lỏng ở  $77 \text{ K}$ . Nếu lớp vỏ chân không được đổ đầy hêli ở áp suất  $10 \mu\text{mHg}$ , hãy ước tính xem sau bao lâu thì toàn bộ  $1000 \text{ cm}^3$  hêli lỏng trong bình chứa sẽ biến mất. (Để làm một phép gần đúng thô, có thể giả thiết có một gradient nhiệt độ không đổi ngang qua lớp vỏ chân không và tính toán độ dẫn nhiệt trung bình của lớp vỏ chứa đầy hêli tại nhiệt độ trung bình của nó).

(UC, Berkeley)



Hình 2.38

**Lời giải:**

Khi He lỏng hấp thụ nhiệt, nó bốc hơi và giãn nở để thoát ra ngoài bình. Một cách gần đúng ta có thể coi ẩn nhiệt hoá hơi và công thực hiện do giãn nở có cùng bậc độ lớn, tức là lấy đường cong chuyển pha như được cho bởi

$$\frac{dp}{dT} \sim \frac{p}{T} .$$

Do đó nhiệt lượng cần để hêli thoát ra là

$$Q \sim pV = nRT .$$

Giả thiết rằng  $n$  so được với số mol của cùng một thể tích nước, ta có đánh giá sau

$$n \approx 1000 \times \frac{1}{18} = 56 \text{ mol.}$$

Từ đó suy ra  $Q \approx 56 \times 8, 3 \times 4, 2 \approx 2 \times 10^3$  J.

Bây giờ khảo sát sự truyền nhiệt. Vì quang đường tự do trung bình của phân tử trong lớp chân không là

$$l = \frac{1}{\bar{n}\sigma} = \frac{k\bar{T}}{p\rho} \approx 1 \text{ m} \gg 0,5 \text{ cm},$$

Nên nhiệt lượng được truyền là

$$q \sim A(\bar{n} \bar{v}) \cdot (k\Delta T) \approx 30 \text{ J/s}.$$

Như vậy thời gian để hêli thoát hết ra ngoài là

$$t = \frac{Q}{q} \approx 10^2 \text{ s}.$$

## 2175

Các tính chất vận chuyển của một khí đơn giản.

Nhiều tính chất của khí các nguyên tử có thể đánh giá bằng cách dùng một mô hình đơn giản, coi khí như là một tập hợp các quả cầu rắn va chạm. Mục đích của bài toán này là tìm một biểu thức gần đúng một số các hệ số được dùng để mô tả định lượng những hiện tượng khác nhau. Đối với mỗi hệ số dưới đây, hãy phát biểu câu trả lời của bạn qua:  $k$  = hằng số Boltzman,  $T$  = nhiệt độ,  $R$  = bán kính nguyên tử,  $m$  = khối lượng nguyên tử,  $c$  = nhiệt dung cho 1 gam,  $\rho$  = mật độ. Có thể bỏ qua những thừa số cỡ đơn vị. (Gợi ý: đầu tiên tìm biểu thức đối với quang đường tự do trung bình  $\lambda$ , giữa những va chạm, và vận tốc căn quân phương  $\bar{v}$ .)

(a) Tìm hệ số dẫn nhiệt  $\kappa$  (đơn vị:  $\text{g}\cdot\text{cm}/\text{s}^3\cdot\text{K}$ ). Hệ số này xuất hiện trong hệ thức giữa thông lượng nhiệt và gradient nhiệt độ.

(b) Tìm hệ số nhớt  $\eta$  (đơn vị:  $\text{g}/\text{cm}\cdot\text{s}$ ). Hệ số này xuất hiện trong hệ thức giữa lực tiếp tuyến trên đơn vị diện tích và gradient vận tốc.

(c) Tìm hệ số khuếch tán  $D$  (đơn vị:  $\text{cm}^2/\text{s}$ ). Hệ số này đặc trưng cho một hệ chứa hai loại khí. Nó liên hệ tốc độ biến thiên theo thời gian của mật độ của một loại với độ không đồng nhất trong mật độ của nó.

(MIT)

**Lời giải:**

Quãng đường tự do trung bình là

$$\lambda \sim \frac{m}{R^2 \rho} .$$

Vận tốc căn quân phương là

$$\bar{v} \sim \left( \frac{kT}{m} \right)^{1/2} .$$

(a) Giả thiết có một gradient nhiệt độ  $\frac{\partial T}{\partial x}$  tồn tại dọc theo phương  $x$  và xét một đơn vị diện tích vuông góc với nó. Thông lượng nhiệt toàn phần do kết quả trao đổi một cặp phân tử qua đơn vị diện tích đó là

$$q \approx mc \left[ T - \left( T + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] = -\lambda mc \frac{\partial T}{\partial x} .$$

Số những cặp phân tử như thế được trao đổi trong đơn vị thời gian là  $\frac{\bar{v}\rho}{m}$ , sao cho thông lượng nhiệt là

$$J_H \approx -\bar{v}\rho c \lambda \frac{\partial T}{\partial x} ,$$

và độ dẫn nhiệt là

$$\kappa \sim \lambda \bar{v} \rho c \sim \frac{c}{R^2} (mkT)^{1/2} .$$

(b) Độ biến thiên của thành phần  $v_y$  của vận tốc trung bình trong sự trao đổi cặp phân tử như đã đề cập trong phần (a) là  $-\lambda \frac{\partial}{\partial x} v_y(x)$ , sao cho lực tiếp tuyến trên đơn vị diện tích đặt vuông góc với phương  $x$  là

$$F_y \sim -m\lambda \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot \frac{\bar{v}\rho}{m} .$$

Do đó hệ số nhớt là

$$\eta \sim \lambda \bar{v} \rho \sim \frac{(mkT)^{1/2}}{R^2} .$$

(c) Giả sử mật độ khối lượng  $\rho(z)$  là không đồng nhất theo phương  $z$ . Dòng khối lượng theo phương này là

$$\begin{aligned} J_\rho &\approx \left[ \rho - \left( \rho + \lambda \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right] \bar{v} \\ &= -\lambda \bar{v} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z} , \end{aligned}$$

Vậy hệ số khuếch tán là

$$D = \lambda \bar{v} \sim (mkT)^{1/2} / R^2 \rho .$$

### 2176

Tốc độ âm ( $c_s$ ) trong khí loãng như không khí được cho bởi hệ số nén đoạn nhiệt:

$$c_s^2 = \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \right]^{-1} = \gamma \frac{kT}{M} ,$$

trong đó  $M$  là phân tử lượng trung bình,  $k$  là hằng số Boltzman và  $\gamma$  là tỉ số các nhiệt dung riêng chính.

(a) Ước tính bằng số đối với không khí ở nhiệt độ phòng,

- (1) tốc độ âm;
- (2) tần số va chạm phân tử trung bình;
- (3) quãng đường tự do trung bình của phân tử;
- (4) tỉ số quãng đường tự do trung bình với bước sóng đặc trưng;
- (5) tỉ số của tần số sóng đặc trưng với tần số va chạm. (Lấy  $\nu = 300$  Hz là tần số sóng đặc trưng).

(b) Dùng những tỉ số tìm được ở trên giải thích tại sao những điều kiện đoạn nhiệt lại thích hợp với âm.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

$$(a) (1) c_s = \sqrt{\gamma \frac{kT}{M}} \approx 350 \text{ m/s.}$$

(2), (3) Quãng đường tự do trung bình là

$$l = \frac{1}{n\sigma} = \frac{kT}{p\sigma} = 4 \times 10^{-6} \text{ m.}$$

Tần số va chạm trung bình là

$$f = \frac{\bar{v}}{l} = 1,2 \times 10^8 \text{ s}^{-1} .$$

$$(4) \frac{l}{\lambda} = \frac{l\nu}{c_s} = 3,4 \times 10^{-6}$$

$$(5) \nu/f = 2,5 \times 10^{-6}$$

(b) Vì sóng âm nén không khí trong thang cỡ bước sóng  $\lambda$ , ta sẽ ước tính tỉ số giữa thời gian để nhiệt truyền được khoảng cách  $\lambda$  do chuyển động của các phân tử và chu kỳ của sóng âm. Một phân tử có quãng đường tự do trung bình  $l$  thực hiện  $N$  va chạm trong khoảng dịch chuyển  $\lambda$ , ở đây  $N$  cho bởi

$$\lambda^2 = Nl^2$$

tỉ số mà ta yêu cầu là

$$\begin{aligned} \frac{t_H}{\tau} &= \left( \frac{N}{f} \right) / \left( \frac{1}{300} \right) \\ &= \frac{300\lambda^2}{fl^2} = \frac{300}{1,2 \times 10^8 \times (3,4 \times 10^{-6})^2} = 2,2 \times 10^5 \end{aligned}$$

Vì  $t_H \gg \tau$ , nên dao động của không khí là nhanh để sự truyền nhiệt xảy ra, do đó những điều kiện đoạn nhiệt chiếm ưu thế.

2177

Tốc độ âm trong không khí được tính theo công thức

$$v = \sqrt{\text{suất nén đoạn nhiệt/mật độ}}$$

(a) Chứng tỏ rằng phương trình trên có thứ nguyên đúng.

(b) Từ công thức này suy ra kết quả là sự truyền âm qua không khí là một quá trình chuẩn tĩnh. Mặt khác, tốc độ âm trong không khí vào khoảng 340 m/s tại nhiệt độ mà tốc độ căn quân phương của phân tử khí là khoảng 500 m/s. Tại sao khi đó quá trình lại có thể xem là chuẩn tĩnh được?

(Wisconsin)

Lời giải:

Tốc độ âm là  $v = \sqrt{B/\rho}$ , với  $B$  là suất nén đoạn nhiệt và  $\rho$  là mật độ (khối

**lượng riêng).**

$$(a) [B] = \left[ \frac{V\Delta p}{\Delta V} \right] = [\Delta p] = ML^{-1}T^{-2}, \\ [\rho] = ML^{-3},$$

**Do đó**

$$\left[ \sqrt{\frac{B}{\rho}} \right] = LT^{-1} = [v].$$

(b) Trong khi ở điều kiện bình thường tốc độ cản quan phuơng của phân tử khí là 500 m/s, quãng đường tự do trung bình của nó vào khoảng  $10^{-5}$  cm, và là rất nhỏ so với bước sóng của sóng âm. Do đó việc truyền âm qua không khí có thể xem là đoạn nhiệt, tức là quá trình chuẩn tĩnh.

### 2178

**Khảo sát một khí Fermi tương đối tính không tương tác tại nhiệt độ 0 K**

(a) Viết biểu thức đối với áp suất và mật độ năng lượng trong hệ quy chiếu mà khí đứng yên. Tìm phuơng trình trạng thái của khí đó.

(b) Khảo sát hệ như là một chất lưu tinh đồng nhất, tìm phuơng trình sóng đối với sự truyền những thăng giáng mật độ nhỏ và từ đó suy ra một biểu thức đối với vận tốc của âm trong chất khí đó.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Hệ thức giữa động lượng và năng lượng của hạt tương đối tính là  $\epsilon = pc$ . Mật độ năng lượng là

$$u = \left( \frac{4\pi}{h^3} \right) (2J+1) \int_0^{p_F} \epsilon p^2 dp = (2J+1)\pi \frac{cp_F^4}{h^3},$$

trong đó  $J$  là số lượng tử spin của các fermion và  $p_F$  cho bởi phuơng trình

$$N = (2J+1) \frac{V}{h^3} \frac{4}{3} \pi p_F^3.$$

Từ đó suy ra

$$u = \hbar c \left[ \frac{81\pi^2}{32(2J+1)} \right]^{1/3} \left( \frac{N}{V} \right)^{4/3}.$$

Áp suất là

$$p = -\frac{\partial(uV)}{\partial V} = -u + V \frac{\partial u}{\partial V} = \frac{u}{3},$$

tức phương trình trạng thái là

$$pV = \frac{E}{3}$$

với  $E = uV$ .

(b) Đặt  $\rho = \rho_0 + \delta\rho$  và  $p = p_0 + \delta p$ , với  $\rho_0$  và  $p_0$  lần lượt là mật độ và áp suất của chất lưu, và  $\delta\rho$  và  $\delta p$  là những thăng giáng tương ứng. Đối với chất lỏng tinh,  $v \simeq \delta v$  và phương trình liên tục là

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \delta v = 0.$$

Cũng trong bậc gần đúng ấy, phương trình Euler có thể được quy về

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} = -\frac{\nabla \delta p}{\rho_0}.$$

Chuyển động của chất lưu lý tưởng là đoạn nhiệt, do đó

$$\delta p = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \delta \rho = \left( \frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \right)_S \delta \rho.$$

Tổ hợp những phương trình trên ta được phương trình sóng

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta \rho - v^2 \nabla^2 \delta \rho = 0,$$

ở đây  $v = \sqrt{\left( \frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \right)_S}$  là vận tốc âm trong chất khí. Vì  $\rho_0 = \frac{mN}{V}$  và  $p_0 = \frac{\alpha}{3} \rho_0^{4/3}$ , với

$$\alpha = \frac{\hbar c}{m} \left[ \frac{81\pi^2}{32(2J+1)m} \right]^{1/3},$$

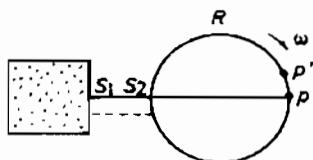
và  $m$  là khối lượng của hạt, ta có

$$v = \frac{2}{3} \sqrt{\alpha} \rho_0^{1/6}.$$

## 2179

Một dòng các nguyên tử hidro trung hoà năng lượng cao ( $> 100$  eV) đi qua một cái lỗ trên thành của một thiết bị giữ plasma. Hãy mô tả một thiết bị được dùng để đo sự phân bố năng lượng của các nguyên tử này.

(Wisconsin)



Hình 2.39

Lời giải:

Hình 2.39 vẽ một thiết bị có thể dùng để đo sự phân bố năng lượng các nguyên tử. Một chùm nguyên tử đi vào trong hình trụ  $R$  đường kính  $D$  sau khi đã đi qua hai khe  $S_1$  và  $S_2$ . Hình trụ  $R$  quay quanh trục của nó với vận tốc góc  $\omega$ . Giả thiết một nguyên tử đến điểm  $p'$  trên hình trụ,  $\hat{pp}' = s$ . Thời gian để nguyên tử đi từ  $S_2$  đến  $p'$  là  $t = \frac{D}{v}$ ,  $v$  là vận tốc của nguyên tử.

Trong thời gian này hình trụ đã quay một góc  $\theta = \omega t$ . Do đó

$$s = \frac{D}{2} \cdot \theta = \frac{1}{2} \frac{D^2 \omega}{v} .$$

Do đó năng lượng của nguyên tử là  $\varepsilon = \frac{m}{2} v^2 = m D^4 \omega^2 / 8s^2$ . Từ đó có một sự tương ứng một – một giữa  $s$  và  $\varepsilon$ . Bằng cách đo sự phân bố độ dày của các nguyên tử phủ trên mặt trụ ta có thể xác định được sự phân bố năng lượng của các nguyên tử.

## 2180

Viết phân bố Maxwell  $P(v_x, v_y, v_z)$  đối với vận tốc của các phân tử khói lượng  $M$  trong chất khí ở áp suất  $p$  và nhiệt độ  $T$ . (Nếu quên hằng số chuẩn hoá thì tìm nó từ tích phân Gauss)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2\sigma^2) dx = \sqrt{2\pi}\sigma .$$

Khi một mặt vật rắn sạch phơi ra trước khí này thì nó sẽ hấp thụ các phân tử với tốc độ  $W$  (phân tử/s·cm<sup>2</sup>).

Một phân tử có xác suất hấp thụ bằng 0 khi thành phần vận tốc vuông góc nhỏ hơn một giá trị ngưỡng  $v_T$ , và có xác suất hấp thụ bằng 1 khi vận tốc vuông góc lớn hơn  $v_T$ . Hãy tìm biểu thức của  $W$ .

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Phân bố Maxwell của vận tốc được cho bởi

$$P(v_x, v_y, v_z) = \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{M}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}.$$

Ta lấy trục  $x$  vuông góc với mặt vật rắn. Khi đó phân bố của thành phần vận tốc  $v_x$  là

$$P(v_x) = \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{M}{2kT} v_x^2}.$$

Từ đó suy ra

$$W = \int_{v_T}^{\infty} n v_x P(v_x) dv_x = n \left( \frac{kT}{2\pi M} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{M v_T^2}{2kT} \right),$$

với  $n$  là mật độ phân tử.

### 2181

Một chất khí trong bình chứa gồm các phân tử khối lượng  $m$ . Khí có nhiệt độ  $T$  hoàn toàn xác định. Hãy tính

- (a) Tốc độ cái nhất của phân tử.
- (b) Tốc độ trung bình của các phân tử.
- (c) Vận tốc trung bình của các phân tử.

(MIT)

**Lời giải:**

Phân bố vận tốc Maxwell cho bởi

$$d\omega = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp(-mv^2/2kT) dv_x dv_y dv_z.$$

(a) Đặt  $f(v) = v^2 \exp(-mv^2/2kT)$ . Tốc độ cái nhiên nhất được xác định từ phương trình  $\frac{df(v)}{dv} = 0$  do đó

$$v = \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2}.$$

(b) Tốc độ trung bình là

$$\bar{v} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v f(v) dv = (8kT/\pi m)^{1/2}.$$

(c) Vận tốc trung bình  $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z)$  được cho bởi

$$\bar{v}_x = (m/2\pi kT)^{3/2} \iiint_{-\infty}^{\infty} v_x \exp[-mv^2/2kT] dv_x dv_y dv_z = 0,$$

và  $\bar{v}_y = \bar{v}_z = 0$ . Do đó  $\bar{\mathbf{v}} = 0$ .

## 2182

Tìm suất va chạm trên thành bình (tức là số các nguyên tử va chạm vào một đơn vị diện tích trên thành bình trong một giây) đối với chất khí cổ điển khi cân bằng nhiệt theo mật độ nguyên tử và tốc độ trung bình của các nguyên tử.

(MIT)

**Lời giải:**

Lấy trục  $z$  vuông góc với thành bình và hướng về phía thành bình. Suất va chạm là

$$\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_0^{\infty} v_z f dv_z,$$

trong đó  $f = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m}{2kT} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right]$ , và  $n$  là mật độ nguyên tử. Sau khi lấy tích phân ta thu được  $\Gamma = \frac{1}{4} n \bar{v}$ , trong đó  $\bar{v}$  là tốc độ trung bình.

$$\bar{v} = (8kT/\pi m)^{1/2}.$$

## 2183

Một bình thành mỏng thể tích  $V$  giữ ở nhiệt độ không đổi chứa  $N_0$  phân tử khí lý tưởng. Tại  $t = 0$ , các phân tử bắt đầu rò ra ngoài qua một lỗ nhỏ diện tích  $A$ . Giả sử áp suất ở ngoài bình nhỏ không đáng kể, tính số phân tử lọt qua lỗ trong đơn vị thời gian và số phân tử còn lại tại thời điểm  $t$ . Biểu diễn kết quả theo  $N_0$ ,  $A$ ,  $V$ , và vận tốc trung bình  $\bar{v}$  của phân tử.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Từ phân bố vận tốc Maxwell ta tìm được số phân tử va chạm vào một đơn vị diện tích của thành bình chứa trong một đơn vị thời gian là  $\frac{nv}{4}$ , với  $n$  là mật độ phân tử. Do đó số phân tử lọt qua lỗ nhỏ diện tích  $A$  trong một đơn vị thời gian là

$$-\frac{dN}{dt} = \frac{A}{4} nv = \frac{A}{4V} N\bar{v}.$$

Dùng điều kiện ban đầu  $N(0) = N_0$ , sau khi tích phân phương trình trên ta được

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{A\bar{v}}{4V} t},$$

đây là số phân tử còn lại trong bình chứa tại thời điểm  $t$ .

## 2184

Một chùm phân tử thường được tạo ra bằng cách cho khí thoát vào chân không qua một lỗ rất nhỏ trên thành bình chứa khí. Cường độ toàn phần của chùm được định nghĩa là số phân tử lọt qua lỗ nhỏ trong đơn vị thời gian. Hãy tìm độ biến thiên cường độ toàn phần của chùm nếu:

- (a) diện tích của lỗ tăng gấp 4 lần;
- (b) nhiệt độ tuyệt đối tăng gấp 4 lần khi áp suất giữ không đổi;
- (c) áp suất trong bình chứa tăng gấp 4 lần khi nhiệt độ giữ không đổi,
- (d) tại nhiệt độ và áp suất ban đầu, nhưng thay cho khí ban đầu người ta dùng loại khí có phân tử lượng lớn hơn 4 lần.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Cường độ toàn phần của chùm là

$$I = \frac{1}{4}n\bar{v}A,$$

trong đó

$$n = \frac{p}{kT}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

hay

$$I = \frac{1}{4}Ap\sqrt{\frac{8}{\pi mkT}}.$$

- (a) Nếu  $A \rightarrow 4A$ , khi đó  $I \rightarrow 4I$ .
- (b) Nếu  $p$  không đổi và  $T \rightarrow 4T$ , khi đó  $I \rightarrow I/2$ .
- (c) Nếu  $T$  không đổi và  $p \rightarrow 4p$ , khi đó  $I \rightarrow 4I$ .
- (d) Nếu  $T$  và  $p$  cả hai đều không đổi và  $m \rightarrow 4m$ , khi đó  $I \rightarrow I/2$ .

### 2185

Hãy cho một đánh giá thô về quãng đường tự do trung bình của một phân tử ở điều kiện tiêu chuẩn. Chiều dài quãng đường giữa những va chạm là bao nhiêu đối với

- (a) một phân tử chậm?
- (b) một phân tử nhanh?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Xét chuyển động của phân tử  $A$ . Chỉ có những phân tử có tâm nằm cách tâm của phân tử  $A$  một khoảng nhỏ hơn hoặc bằng đường kính hiệu dụng của phân tử mới có thể va chạm được với phân tử  $A$ . Ta tưởng tượng một hình trụ có trục trùng với quỹ đạo của tâm của phân tử  $A$ , với bán kính bằng đường kính hiệu dụng  $d$  của phân tử đó. Khi đó tất cả các phân tử có tâm nằm trong hình trụ này sẽ va chạm với phân tử  $A$ . Tiết diện của hình trụ này là  $\sigma = \pi d^2$ .

Trong khoảng thời gian  $t$ , độ dài quãng đường của  $A$  là  $\bar{u}t$  ( $\bar{u}$  là tốc độ tương đối trung bình) tương ứng với thể tích  $\sigma\bar{u}t$  của hình trụ. Số va chạm của các phân tử khác lên phân tử  $A$  là  $n\sigma\bar{u}t$  ( $n$  là mật độ phân tử). Do đó tần số va chạm là

$$\bar{z} = \frac{n\sigma\bar{u}t}{t} = n\sigma\bar{u}.$$

Vì thế quãng đường tự do trung bình là  $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} = \frac{\bar{v}}{n\sigma u}$ . Từ phân bố Maxwell ta có thể chứng minh rằng  $\bar{u} = \sqrt{2}\bar{v}$ . Do đó

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2}.$$

Tính toán chính xác hơn từ phân bố Maxwell thì đối với phân tử có tốc độ trung bình  $\bar{v} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}x$  quãng đường tự do trung bình sẽ là

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{nd^2} \frac{x^2}{\sqrt{\pi}\psi(x)},$$

ở đây  $\psi(x) = x \exp(-x^2) + (2x^2 + 1) \int_0^x \exp(-y^2) dy$ .

(a) Đối với các phân tử chậm,  $\bar{v} \rightarrow 0$ , hay  $x \rightarrow 0$ ,

$$\bar{\lambda} \approx \frac{x}{\sqrt{\pi}nd^2} = \frac{mv}{nd^2\sqrt{2\pi mkT}}.$$

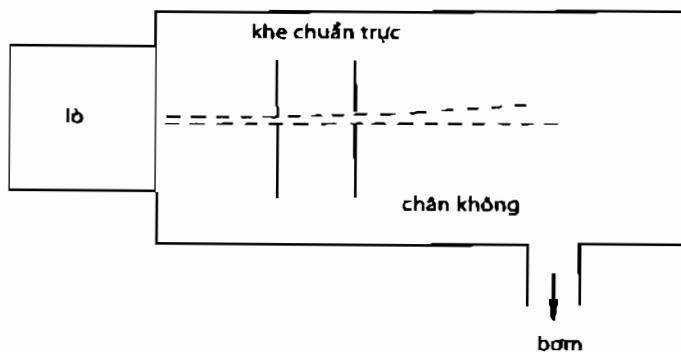
(b) Đối với phân tử nhanh,  $\bar{v} \rightarrow \infty$ , hay  $x \rightarrow \infty$ ,

$$\bar{\lambda} \approx \frac{1}{\pi n d^2}.$$

### 2186

Một máy tạo chùm phân tử đơn giản được vẽ trên hình 2.40. Một lò chứa các phân tử  $H_2$  ở nhiệt độ 300 K và áp suất 1 mmHg. Một lỗ nhỏ trên lò có đường kính  $100 \mu m$  là rất nhỏ so với quãng đường tự do trung bình của các phân tử. Sau các khe chuẩn trực chùm có góc loe là 1 mrad. Hãy tìm:

- (a) phân bố tốc độ của phân tử trong chùm;
- (b) tốc độ trung bình của các phân tử trong chùm;
- (c) tốc độ cái nhiên nhất của phân tử trong chùm;
- (d) suất của chùm (là số phân tử đi qua khe cuối cùng trong một đơn vị thời gian);
- (e) năng lượng quay trung bình của các phân tử  $H_2$ .



Hình 2.40

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Phân bố Maxwell cho bởi

$$n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}v^2} dv .$$

Phân bố tốc độ của các phân tử trong chùm cho bởi

$$nv \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}v^2} v^2 dv d\Omega .$$

(b) Tốc độ trung bình là

$$\langle v \rangle = \frac{\int v \cdot v^3 e^{-\frac{m}{2kT}v^2} dv}{\int v^3 e^{-\frac{m}{2kT}v^2} dv} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi kT}{2m}} .$$

(c) Tốc độ cái nhiên nhất  $v_p$  thoả mãn

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( v^3 e^{-\frac{m}{2kT}v^2} \right) = 0 .$$

**Suy ra**

$$v_p = \sqrt{\frac{3kT}{m}} .$$

(d) Công suất chùm là

$$\begin{aligned} N &= nA \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left( \int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3 dv \right) \Delta\Omega \\ &= \frac{A}{2} n \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} (\Delta\theta)^2 \\ &= \frac{A}{2} \frac{p}{kT} \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} (\Delta\theta)^2 \\ &= 1,1 \times 10^{11} \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

(e) Năng lượng quay của các phân tử trong chùm đúng bằng năng lượng quay của chúng trong lò. Từ định lý về phân bố đều năng lượng ta thu được năng lượng quay trung bình là  $kT$ .

### 2187

Xét khí ở nhiệt độ  $T$ , áp suất  $p$  thoát vào chân không qua một lỗ có diện tích  $A$  trên thành bình chứa khí. Giả sử bán kính của lỗ rất nhỏ so với quãng đường tự do trung bình của khí trong bình chứa.

(a) Tốc độ khối lượng khí thoát ra ước chừng là bao nhiêu?

(b) Nếu khí là một hỗn hợp thì tỉ phần khối lượng thoát ra của một thành phần khí có phải chỉ phụ thuộc vào mật độ tương đối của chúng không?

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Vì quãng đường tự do trung bình của các hạt lớn hơn nhiều so với đường kính của lỗ, ta có thể giả thiết chất khí trong bình chứa là cân bằng nhiệt và vì thế tuân theo phân bố vận tốc Maxwell. Nếu  $n$  là số hạt trong một đơn vị thể tích của bình tại thời điểm  $t$  thì số hạt trong một thể tích hình trụ đáy là diện tích  $A$ , chiều cao  $v_x$  là

$$dN' = An \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{mv_x^2}{2kT} \right) v_x dv_x.$$

Do đó tỉ phần khối lượng khí thoát ra là

$$\frac{M'}{M} = \frac{N'}{Vn} = \frac{A}{V} \int_0^{\infty} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( \frac{-mv_x^2}{2kT} \right) v_x dv_x = \frac{A}{4V} \bar{v},$$

ở đây  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8\pi kT}{\pi m}}$  là tốc độ trung bình.

(b) Nếu khí là một hỗn hợp, khi đó mỗi thành phần đều thoả mãn phân bố Maxwell. Từ kết quả trên đây ta thấy rằng tỉ phần khối lượng khí thoát ra phụ thuộc vào khối lượng phân tử của thành phần ấy thông qua tốc độ trung bình  $\bar{v}$ .

### 2188

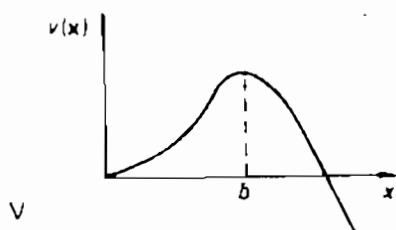
Khảo sát một hệ hai chiều với Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2m}(P_1^2 + P_2^2) + \frac{1}{2}\mu^2(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(x_1^2 + x_2^2)^2.$$

Một hệ  $N$  hạt khối lượng mỗi hạt  $m$  cân bằng nhiệt ở nhiệt độ  $T$  trong một giếng thế năng thể hiện trong Hamiltonian.  $T$  đủ nhỏ để phần lớn các hạt nằm ở phần bậc hai của giếng. Tuy nhiên có một số hạt có đủ nhiệt năng để thoát ra khỏi giếng này bằng cách vượt qua “đỉnh” của giếng; trong lát cắt một chiều của  $V(\mathbf{x})$  vẽ trên hình 2.41, điều này xảy ra tại  $x_1 = b$ , với  $b$  được xác định từ phương trình trên.

Hãy tính tốc độ thoát đối với các hạt rời khỏi giếng bằng cách vượt qua đỉnh thế.

(Princeton)



Hình 2.41

**Lời giải:**

Đặt  $x_2 = 0$  và  $\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$ , ta thu được  $b = \mu/\sqrt{\lambda}$  tương ứng với đỉnh của rào thế. Giả sử  $b \gg l$ , với  $l$  là quãng đường tự do trung bình của hạt, sao cho để ngay cả khi ở gần đỉnh rào thế các hạt cũng ở trạng thái cân bằng nhiệt. Ta chỉ xét tốc độ thoát tại gần đỉnh:

$$\begin{aligned}\dot{N} &= \int 2\pi b v_x n(b) f d\mathbf{v} / \int f d\mathbf{v} \\ &= 2\pi b n(b) \frac{\int_0^\infty v_x e^{-\frac{m}{2kT} v_x^2} dv_x}{\int_0^\infty e^{-\frac{m}{2kT} v_x^2} dv_x} \\ &= \pi b n(b) \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} ,\end{aligned}$$

$n(b)$  là mật độ hạt tại đỉnh. Để tìm  $n(b)$  ta để ý rằng

$$\begin{aligned}n(r) &= ce^{-\frac{V(r)}{kT}} \\ &= ce^{-\frac{1}{kT}(\frac{1}{2}\mu^2 r^2 - \frac{1}{4}\lambda r^4)} ,\end{aligned}$$

trong đó  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ , và  $c$  là thừa số chuẩn hoá xác định bởi phương trình sau:

$$N = \int 2\pi r n(r) dr = 2\pi c \int r e^{-\frac{1}{kT}(\frac{1}{2}\mu^2 r^2 - \frac{1}{4}\lambda r^4)} dr .$$

Vì đa số hạt nằm trong phần bậc hai của giềng thế năng, nên tích phân trên có thể lấy gần đúng như sau:

$$\begin{aligned}N &= 2\pi c \int_0^\infty r \left(1 + \frac{\lambda r^4}{4kT}\right) e^{-\frac{\mu^2 r^2}{2kT}} dr \\ &= 2\pi c \frac{2kT}{\mu^2} \left[ \int_0^\infty t e^{-t^2} dt + \frac{\lambda}{4kT} \left(\frac{2kT}{\mu^2}\right)^2 \int_0^\infty t^5 e^{-t^2} dt \right] \\ &= \frac{4\pi kT}{\mu^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda kT}{\mu^4}\right) c ,\end{aligned}$$

Do đó

$$c = \frac{N \mu^2}{4\pi kT} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\lambda kT}{\mu^4}} ,$$

và

$$n(b) = \frac{N\mu^2}{2\pi kT} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\lambda kT}{\mu^4}} e^{-\frac{\mu^4}{4kT\lambda}}.$$

Từ đó suy ra tốc độ thoát là

$$\begin{aligned}\dot{N} &= \frac{N\mu^3}{\sqrt{2\pi m\lambda kT}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\lambda kT}{\mu^4}} e^{-\frac{\mu^4}{4kT\lambda}} \\ &\approx \frac{N\mu^3}{\sqrt{2\pi m\lambda kT}} \cdot e^{-\frac{\mu^4}{4kT\lambda}}.\end{aligned}$$

### 2189

Một cái chai  $\frac{1}{4}$  lít chứa đầy khí oxi ở áp suất  $10^{-4}$  atm được hàn kín do một nhà du hành vũ trụ để lại trên bề mặt mặt trăng. Tại thời điểm khi nhiệt của chai là  $400$  K thì chai xuất hiện một lỗ rò nhỏ đường kính  $2$  micron. Xác định sự phụ thuộc của lượng khí trong chai vào thời gian và thời gian cần thiết để khôi lượng khí trong chai giảm chỉ còn  $\frac{1}{10}$  khôi lượng ban đầu.

Trừ hằng số Boltzmann ( $k = 1,38 \times 10^{-16}$  erg/K.) ra, hãy tính các hằng số cần thiết. Có thể giả thiết rằng nhiệt độ được giữ không đổi bằng ánh sáng mặt trời của ngày mặt trăng.

(Wisconsin)

**Lời giải:**

Quãng đường tự do trung bình của khí là

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 n}} = \frac{kT}{\sqrt{2\pi d^2 p}}.$$

Với  $T = 400$  K,  $d = 3,6 \times 10^{-10}$  m và  $p = 10^{-4}$  atm  $\approx 10$  N/m<sup>2</sup>, ta tính được  $\bar{\lambda} \approx 10^{-3}$  m. Như vậy, tại mọi thời điểm ta đều có thể coi khí trong chai là cân bằng nhiệt. Từ phân bố Maxwell, ta tìm được tốc độ giảm số phân tử trong chai là

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{AN}{4V} \bar{v}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

Và điều kiện ban đầu là

$$N(t=0) = N_0.$$

Giải ra ta được

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{A}{4V}\bar{v}t\right).$$

Điều này có nghĩa là số hạt trong chai giảm theo thời gian theo hàm số mũ.

Khoảng thời gian  $\tau$  để số hạt trong chai còn lại là  $N$  được xác định bởi

$$\tau = \frac{4V}{A\bar{v}} \ln \frac{N_0}{N}.$$

Để  $N = N_0/10$ , với

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx 514 \text{ m/s},$$

$V = 0,25 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ , và  $A = \pi(10^{-6})^2 \text{ m}^2$ , thì thời gian  $\tau$  bằng

$$\tau \approx 1,43 \times 10^6 \text{ s}.$$

## 2190

(a) Xác định tỉ phần khí  $H_2$  ở mực nước biển và  $T = 300 \text{ K}$  có tốc độ đủ lớn để thoát ra khỏi trường hấp dẫn của Trái Đất. (Có thể giả thiết khí ở đây lý tưởng. Đưa ra câu trả lời dưới dạng tích phân).

(b) Bây giờ hãy tưởng tượng một phân tử  $H_2$  ở tầng trên của khí quyển có tốc độ bằng tốc độ vũ trụ cấp I. Giả thiết phần khí quyển còn lại ở bên trên phân tử này có bề dày  $d = 100 \text{ km}$ , và toàn bộ khí quyển là đồng nhất và đẳng nhiệt với mật độ phân tử trung bình  $n = 2,5 \times 10^{25}/\text{m}^3$  (tất nhiên đây không phải là một khí quyển thực tế lầm).

Hãy dùng các lập luận đơn giản ước tính thời gian trung bình cần thiết để phân tử đang xét thoát ra. Giả thiết tất cả các va chạm đều là đàn hồi, và độ cao toàn phần của khí quyển là nhỏ so với bán kính trái đất.

Một vài số liệu cần dùng:  $M_{\text{trái đất}} = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ ,

$$R_{\text{trái đất}} = 6,4 \times 10^3 \text{ km}.$$

(Princeton)

Lời giải:

(a) Phân bố vận tốc Maxwell được cho bởi

$$4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv.$$

Tốc độ vũ trụ cấp II là

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 7,9 \times 10^3 \text{ m/s}^1.$$

Các phân tử  $H_2$  có vận tốc lớn hơn  $v_e$  có thể thoát ra khỏi trường hấp dẫn của quả đất. Các phân tử này chiếm một tỉ phần là

$$f = \left( \frac{4}{\sqrt{\pi}} \right) \int_a^\infty x^2 \exp(-x^2) dx ,$$

trong đó  $a = v_e/v_0$  với  $v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = 2,2 \text{ km/s}$ . Do đó

$$\begin{aligned} f &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ ae^{-a^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^\infty e^{-x^2} dx \right] \\ &= 1,4 \times 10^{-5} + 1,13 \int_{3,55}^\infty e^{-x^2} dx = 6 \times 10^{-5} . \end{aligned}$$

(b) Thời gian trung bình cần thiết là thời gian để các phân tử  $H_2$  khuếch tán qua khoảng cách  $d$  với xác suất đáng kể. Quãng đường tự do trung bình là

$$l = \frac{1}{n\sigma} = 4 \times 10^{-6} \text{ m} .$$

Khoảng thời gian giữa hai lần va chạm là

$$\tau = \frac{1}{v_0} = 5 \times 10^{-10} \text{ s} .$$

Sau  $N$  va chạm, bình phương trung bình của độ dịch chuyển khuếch tán là

$$\langle z^2 \rangle = Nl^2 .$$

Đặt  $\langle z^2 \rangle = d^2$ , sao cho  $N = d^2/l^2$ , ta có

$$t = N\tau = \frac{\tau d^2}{l^2} = 3 \times 10^{11} \text{ s} \approx 10^4 \text{ năm} ,$$

tức là cần khoảng  $10^4$  năm để phân tử  $H_2$  mới thoát ra khỏi khí quyển.

<sup>1</sup>ND: Ở đây có lẽ các tác giả đã nhầm lẫn, vận tốc để thoát ra khỏi lực hấp dẫn của Trái Đất là vận tốc vũ trụ cấp II  $v_{II} = \sqrt{2g_0 R} \approx 11,2 \text{ km/s}$

## 2191

(a) Khảo sát sự phát xạ hoặc hấp thụ ánh sáng trông thấy bởi các phân tử khí nóng. Hãy tìm một biểu thức của phân bố tần số  $F(\nu)$  đối với vạch phổ có tần số trung tâm  $\nu_0$  được mở rộng do hiệu ứng Doppler. Giả sử một khí lý tưởng có nhiệt độ  $T$  với khối lượng phân tử  $M$ . Xét một bình chứa đầy khí argon ở áp suất 10 mmHg và nhiệt độ 200°C. Trong bình có một mẫu nhỏ Na được đốt nóng sao cho bình sẽ chứa một ít hơi Na. Ta quan sát vạch hấp thụ tại 5896 Å trong ánh sáng của một sợi đốt tungsten chiếu qua bình.

Hãy tính:

- (b) Độ lớn của sự mở rộng vạch do hiệu ứng.
- (c) Độ lớn của sự mở rộng vạch do va chạm.

Ở đây giả thiết số nguyên tử Na nhỏ hơn rất nhiều so với số nguyên tử argon. Có thể tính thêm những đại lượng cần thiết không cho ở đây và viết đáp số về độ mở rộng bằng đơn vị Å

Nguyên tử lượng của Na là 23.

(CUSPEA)

Lời giải:

- (a) Ta quan sát dọc theo trục  $z$ . Phân bố Maxwell- Boltmann đối với  $v_z$  là

$$dP = \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{Mv_z^2}{2kT}} dv_z .$$

Độ dịch tần số do hiệu ứng Doppler là

$$\nu = \nu_0 \left( 1 + \frac{v_z}{c} \right) .$$

Như vậy

$$v_z = c \left( \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right)$$

và

$$\begin{aligned} dP &= \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{Mv_z^2}{2kT}} dv_z \\ &= \frac{1}{\nu_0} \left( \frac{Mc^2}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{Mc^2}{2kT} \left( \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right)^2} d\nu . \end{aligned}$$

(b) Độ lớn của độ mờ rộng do hiệu ứng Doppler là

$$\begin{aligned}\Delta\nu &\approx \sqrt{\frac{kT}{Mc^2}}\nu_0, \\ \Delta\lambda &\approx \sqrt{\frac{kT}{Mc^2}}\lambda_0 = \sqrt{\frac{kT}{M}}\frac{1}{c}\lambda_0 \\ &= \sqrt{\frac{8,3 \times 473}{40 \times 10^{-3}}} \frac{\lambda_0}{3 \times 10^8} \simeq 1,04 \times 10^{-6}\lambda_0 \\ &= 1,04 \times 10^{-6} \times 5896 \text{ Å} = 6,13 \times 10^{-3} \text{ Å}.\end{aligned}$$

(c) Độ mờ rộng vạch do va chạm là

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau},$$

ở đây  $\tau$  là thời gian giữa hai lần va chạm liên tiếp (của một nguyên tử Na). Ta có  $\tau = \frac{\Lambda}{v}$ , với  $v$  là vận tốc trung bình của nguyên tử Na và  $\Lambda$  là quãng đường tự do trung bình của nó. Vì  $\Lambda = \frac{1}{n\sigma}$ , với  $n$  là mật độ của phân tử argon,  $\sigma$  là tiết diện tán xạ:

$$\sigma = \pi r^2 \approx 3 \times 10^{-20} \text{ m}^2.$$

Ta có

$$\begin{aligned}n &= \frac{p}{RT} \times N_A = 1,01 \times 10^5 \times 10 \times 6,02 \times 10^{23} / (760 \times 8,3 \times 473) \\ &= 2,04 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}, \\ \Lambda &\approx 1,7 \times 10^{-14} \text{ m}, \\ v &= \sqrt{\frac{kT}{M}} = \left( \frac{8,3 \times 473}{23 \times 10^{-3}} \right)^{1/2} \approx 413 \text{ m/s}, \\ \tau &\approx 4 \times 10^{-7} \text{ s},\end{aligned}$$

Và do đó

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{\nu} \Delta\nu = \frac{\lambda^2}{c\tau} \approx 3 \times 10^{-5} \text{ Å}.$$

**2192**

Một chất khí chứa hỗn hợp hai loại phân tử có khối lượng phân tử là  $M_1$ ,  $M_2$  gam, và mật độ tương ứng là  $N_1$ ,  $N_2$  (phân tử/ $\text{s} \cdot \text{cm}^2$ ).

Tiết diện va chạm giữa hai phân tử khác loại là  $A|V_{12}|$ , với  $A$  là hằng số,  $V_{12}$  là vận tốc tương đối của một cặp phân tử đó.

(a) Tìm động năng khối tâm đối với mỗi cặp lấy trung bình trên tất cả các cặp phân tử khác nhau.

(b) Có bao nhiêu va chạm xảy ra trên  $1 \text{ cm}^3$  trong 1 giây giữa các phân tử khác nhau?

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Theo phân bố Maxwell

$$fdv = N \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{M}{2kT}v^2} dv .$$

$$(a) \quad \varepsilon = \frac{1}{N_1 N_2} \iint \frac{1}{2(M_1 + M_2)} (M_1 \mathbf{v}_1 + M_2 \mathbf{v}_2)^2 f_1 f_2 dv_1 dv_2 .$$

Lưu ý rằng tích phân đối với các số hạng bắt chéo  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 f_1 f_2$  thì bằng 0. Từ đó suy ra

$$\varepsilon = 3kT/2 .$$

(b) Số va chạm trên  $1 \text{ cm}^3$  trong 1 giây giữa các phân tử khác loại là

$$\begin{aligned} J &= \iint A|V_{12}| \cdot |V_{21}| f_1 f_2 dv_1 dv_2 \\ &= A \iint (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 f_1 f_2 dv_1 dv_2 \\ &= 3AN_1 N_2 kT \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) . \end{aligned}$$

### 2193

Xét không khí ở nhiệt độ phòng chuyển động qua một cái ống ở áp suất dù thấp để cho quang đường tự do trung bình dài hơn rất nhiều so với đường kính ống. Tìm thông lượng tổng cộng của các phân tử trong trạng thái dừng, kết quả của một gradient áp suất đã cho trong ống. Dùng kết quả này để tính xem cần thời gian bao lâu để giảm áp suất trong một bình chứa có thể tích 100 lít từ  $10^{-5} \text{ mmHg}$  xuống còn  $10^{-8} \text{ mmHg}$  nếu nó được nối đến chỗ chân

không hoàn toàn qua một ống dài 1 m, đường kính 10 cm. Giả thiết rằng sự lọt khí qua thành bình chứa và ống có thể bỏ qua.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Giả thiết chiều dài ống rất dài hơn quãng đường tự do trung bình, khi đó có thể xem khí dọc theo ống nằm trong trạng thái cân bằng định xứ tại những áp suất khác nhau nhưng ở cùng một nhiệt độ. Từ phân bố Maxwell ta tính được vận tốc trung bình:

$$v_0 = \frac{\int_0^\infty v_z e^{-\frac{m}{2kT}v_z^2} dv_z}{\int_0^\infty e^{-\frac{m}{2kT}v_z^2} dv_z} = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} .$$

Do đó thông lượng phân tử dọc theo ống là

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= -Av_0 \cdot \Delta n \\ &= -Av_0 l \frac{\Delta n}{l} = -Av_0 l \frac{1}{kT} \left( \frac{\Delta p}{l} \right) .\end{aligned}$$

Vì

$$l = \frac{1}{n\sigma} = \frac{kT}{p\sigma} ,$$

ta có

$$\dot{\phi} = -\frac{Av_0}{\sigma} \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} .$$

(b) Như đã cho,  $p \leq 10^{-5}$  mmHg, ta có

$$l = \frac{kT}{p\sigma} \geq 3 \times 10^2 \text{m} \gg 1 \text{m} .$$

Điều này có nghĩa là quãng đường tự do trung bình dài hơn rất nhiều so với ống và biểu thức trên đổi với  $\phi$  không còn dùng được nữa. Tuy nhiên, vì đường kính của ống rất nhỏ hơn chiều dài của nó, nên ta có  $\phi = Av_0 n$ .

Giả thiết rằng cả hai trạng thái đầu và cuối đều cân bằng nhiệt ở nhiệt độ  $T$ , khi đó

$$V \frac{dn}{dt} = -Av_0 n .$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}t &= \frac{V}{Av_0} \ln \frac{n_i}{n_f} = \frac{V}{Av_0} \ln \frac{p_i}{p_f} \\ &= \frac{V}{A} \sqrt{\frac{\pi m}{2kT}} \ln \frac{p_i}{p_f} = 0,4 \text{ s} .\end{aligned}$$

## 2194

Xét những điều kiện về dòng chảy thuỷ động lực. Sự làm lạnh chất khí bằng gián nở có thể biểu diễn như sau,  $\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{M^2}{3}$ , trong đó  $T_0$  là nhiệt độ trước lúc gián,  $T$  là nhiệt độ sau khi gián,  $M$  là tỉ số vận tốc dòng chảy  $v$  với vận tốc âm  $c$  tại nhiệt độ  $T$ .

(a) Hãy rút ra công thức trên.

(b) Tìm biểu thức tương ứng đối với  $\frac{p_0}{p}$ , và tính giá trị của  $M$  khi  $\frac{p_0}{p} = 10^4$ .

(c) Tính giá trị của  $T$  khi  $\frac{p_0}{p} = 10^4$  và  $T_0 = 300$  K.

(d) Tìm giá trị cực đại của  $v$  trong giới hạn  $T \rightarrow 0$ .

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Xét quá trình một thể tích nhỏ khí chứa  $N$  phân tử truyền qua một lỗ nhỏ. Khi đi vào lỗ, khí mang theo nội năng  $Nc_v T_0$  và toàn khối khí thực hiện một công lên chính nó tới một lượng bằng  $p_0 V_0 = NkT_0$ . Khi thể tích khí rời khỏi lỗ, nội năng của nó là  $Nc_v T$  và nó thực hiện công  $pV = NkT$  lên khí bên ngoài. Bây giờ động năng của khí là  $Nmv^2/2$ . Do đó đối với mỗi phân tử khí trong thể tích đó  $c_p T_0 = c_p T + mv^2/2$ , trong đó

$$c_p = c_v + k = \frac{\gamma}{\gamma - 1} k, \quad \gamma = c_p/c_v.$$

Nhớ rằng vận tốc của âm là  $c = \sqrt{\frac{\gamma k T}{m}}$ , do đó ta có

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2.$$

Đối với không khí,  $\gamma = \frac{5}{3}$  và  $\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{M^2}{3}$ .

(b) Từ hệ thức đoạn nhiệt

$$\frac{p_0}{p} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left( 1 + \frac{M^2}{3} \right)^{\frac{5}{2}},$$

ta có

$$M = \sqrt{3 \left[ \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{2}{5}} - 1 \right]}.$$

Khi  $\frac{p_0}{p} = 10^4$ ,  $M = 11$ .

$$(c) T = T_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{5}} = 7,5 \text{ K.}$$

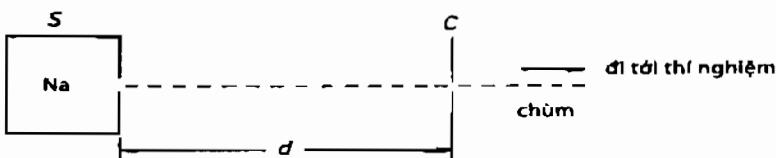
(d) Khi  $T \rightarrow 0$ , ta có

$$\frac{1}{2}mv_M^2 = c_p T_0.$$

$$\text{Từ đó suy ra } v_M = \sqrt{\frac{2c_p T_0}{m}} = \sqrt{\frac{5kT_0}{m}} = 557 \text{ m/s.}$$

### 2195

Hình vẽ dưới đây (hình 2.42) mô tả sơ lược một thiết bị để tạo ra chùm các nguyên tử Na chuẩn trực tốt để dùng cho một thí nghiệm về chùm nguyên tử. Na đặt trong lò S giữ ở nhiệt độ  $T = 550$  K. Tại nhiệt độ này áp suất hơi của Na là  $p = 6 \times 10^{-3}$  mmHg. Các nguyên tử Na đi qua một khe trên thành lò. Khe này hình chữ nhật kích thước  $10 \text{ mm} \times 0,1 \text{ mm}$ . Ống chuẩn trực C có một lỗ hình dạng và kích thước giống hệt và nguyên tử Na đi qua ống chuẩn trực C như thế tạo thành chùm nguyên tử cần cho thí nghiệm. Nguyên tử lượng của Na là 23. Khoảng cách  $d$  trong hình là 10 cm.



Hình 2.42

(a) Tính số nguyên tử  $\phi$  đi qua khe trong  $C$  trong một giây

(b) Tìm biểu thức của hàm  $D(v)$  mô tả sự phân bố vận tốc của các hạt trong chùm theo nghĩa là  $D(v)dv$  là xác suất để một nguyên tử qua  $C$  có vận tốc trong nǎm khoảng  $(v, v + dv)$ .

(c) Miền mà chùm phải truyền qua tất nhiên phải là chân không đủ cao. Hãy ước tính (theo đơn vị mmHg) độ chân không chính xác để chùm giữ nguyên tính chuẩn trực khi đi được 1 m.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Phân bố Maxwell cho bởi

$$fdv_x dv_y dv_z = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z .$$

Có  $nAv_x fdv_x dv_y dv_z$  nguyên tử trong khoảng vận tốc  $\mathbf{v} \sim \mathbf{v} + d\mathbf{v}$  lọt qua diện tích  $A$  của khe. Số nguyên tử qua khe thứ hai (trong ống chuẩn trực  $C$ ) là

$$\begin{aligned} \phi &= nA \int \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v_x e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z \\ &= nA \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \cdot \int \cos \theta d\Omega \\ &= nA \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{1}{2} \left( \frac{2kT}{m} \right)^2 \frac{A}{d^2} \\ &= \frac{A^2}{2\pi d^2} \cdot \frac{p}{kT} \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} . \end{aligned}$$

Với  $A = 10 \times 0,1 = 1,0 \text{ mm}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$ ,

$$d = 10 \text{ cm} = 1,0 \times 10^{-1} \text{ m} ,$$

$$p = 6 \times 10^{-3} \text{ mmHg} = 0,80 \text{ N/m}^2 ,$$

$$T = 550 \text{ K} ,$$

$$\text{ta có } \phi = 6 \times 10^{11} \text{ s}^{-1} .$$

(b)  $D(v)dv = Cv^3 e^{-\frac{m}{2kT}v^2} dv$ , ở đây  $C$  là thừa số chuẩn hoá được xác định từ phương trình

$$1 = \int D(v)dv = C \cdot \left( \frac{2kT}{m} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} .$$

Từ đó suy ra

$$D(v) = 2v^3 \left( \frac{m}{2kT} \right)^2 e^{-\frac{m}{2kT}v^2} .$$

(c) Giả thiết miền chân không ở nhiệt độ phòng  $T = 300 \text{ K}$ . Vì quang đường tự do trung bình  $l = 1 \text{ m}$ , ta có

$$\begin{aligned} p &\sim \frac{kT}{l\sigma} = \frac{1,38 \times 10^{-23} \times 300}{1 \times 10^{-20}} = 0,414 \text{ Pa} \\ &= 3 \times 10^{-3} \text{ torr} . \end{aligned}$$

## 2196

Một cái hộp cô lập có thể tích  $2V$  chia thành hai phần bằng nhau nhờ vách ngăn mỏng và dẫn nhiệt. Một bên chứa khí gồm các phân tử được coi như những quả cầu rắn ở áp suất khí quyển và  $T = 293$  K.

(a) Chứng minh rằng số phân tử đập vào một đơn vị diện tích của vách ngăn trong đơn vị thời gian là  $n\bar{v}/4$ .

(b) Một lỗ tròn nhỏ bán kính  $r$  được mở ở vách ngăn, lỗ đủ nhỏ để giữ được trạng thái cân bằng nhiệt giữa hai bên do sự dẫn nhiệt qua vách ngăn. Tính áp suất và nhiệt độ như là một hàm số của thời gian trong cả hai ngăn của hộp.

(c) Giả sử vách ngăn không dẫn nhiệt. Hãy giải thích một cách ngắn gọn và định tính sự sai lệch đối với sự phụ thuộc thời gian của nhiệt độ và áp suất đã tìm được trong phần (b).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Phân bố Maxwell cho bởi

$$f dv = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT} dv_x dv_y dv_z .$$

Trong số các phân tử đập vào một đơn vị diện tích của vách ngăn trong một đơn vị thời gian thì số phân tử có tốc độ trong khoảng  $v \sim v + dv$  là  $n v_x f dv_x dv_y dv_z$ . Lấy tích phân biểu thức trên ta tìm được số phân tử va chạm với một đơn vị diện tích vách ngăn trong đơn vị thời gian là

$$\frac{n}{4} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \frac{n}{4} \bar{v} .$$

(b) Xem khí là lý tưởng và nội năng của nó chỉ phụ thuộc nhiệt độ. Vì hộp là cô lập, nên nhiệt độ của khí trong nó là không đổi. Khi đó ta chỉ cần tính được mật độ phân tử như là một hàm số của thời gian trong cả hai ngăn. Đặt lần lượt  $n_1, n_2$  là mật độ phân tử trong nửa bên trái và nửa bên phải tại thời điểm  $t$ ,  $V$  là thể tích của mỗi ngăn và  $A$  là diện tích của lỗ nhỏ. Khi đó từ các

phương trình

$$V \frac{dn_1}{dt} + \frac{A\bar{v}}{4}(n_1 - n_2) = 0 ,$$

$$V \frac{dn_2}{dt} + \frac{A\bar{v}}{4}(n_2 - n_1) = 0 ,$$

$$n_1(0) = \frac{N}{V} = n_1 + n_2$$

$$n_2(0) = 0 ,$$

ta được

$$n_1 = \frac{N}{2V}(1 + e^{-at}) ,$$

$$n_2 = \frac{N}{2V}(1 - e^{-at}) ,$$

trong đó

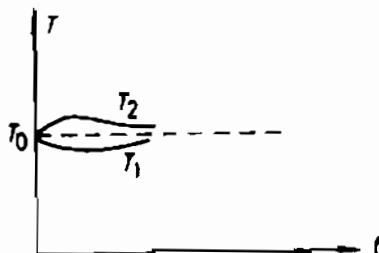
$$a = \frac{A\bar{v}}{2V} = \frac{\pi r^2 \bar{v}}{2V} .$$

Từ  $p = nkT$

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0[1 + \exp(-at)]/2 , \\ p_2 &= p_0[1 - \exp(-at)]/2 , \end{aligned}$$

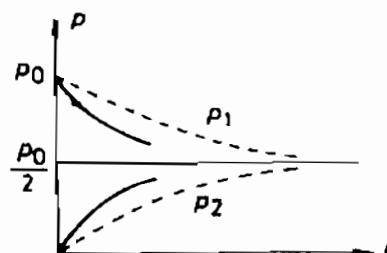
trong đó  $p_0 = NkT/V$ .

(c) Khi vách ngăn là cách nhiệt ta vẫn có thể giả thiết khí trong mỗi ngăn vẫn ở trạng thái cân bằng nhiệt. Lúc bắt đầu các phân tử có năng lượng cao ở phần bên trái sẽ dễ dàng chuyển động sang phần bên phải dễ dàng hơn là những phân tử có năng lượng thấp. Do đó nhiệt độ của phần bên phải hơi cao hơn so với giá trị ban đầu và tương ứng nhiệt độ phần bên trái sẽ hơi thấp hơn. Quá trình diễn ra là đoạn nhiệt, do đó sự biến thiên của áp suất sẽ nhanh hơn so với trường hợp (b). Dáng điệu của nhiệt độ và áp suất được minh họa trên các hình 2.43 và 2.44



Trường hợp (a): đường cong liền nét  
Trường hợp (b): đường cong đứt nét

Hình 2.43



Trường hợp (b): đường cong đứt nét  
Trường hợp (c): đường cong liền nét

Hình 2.44

## 2197

Xét một chất khí lý tưởng, đơn nguyên tử, hai chiều chứa  $N$  phân tử khối lượng  $M$ , nhiệt độ  $T$  chỉ chuyển động trong mặt phẳng  $xy$ . Trong trường hợp này thể tích thông thường trở thành diện tích  $A$ , áp suất  $p$  là lực tác dụng lên một đơn vị dài (chứ không còn là lực tác dụng trên một đơn vị diện tích nữa).

- Hãy dẫn ra biểu thức đối với  $f(v)dv$ , tức là tổng số phân tử có tốc độ nằm giữa  $v$  và  $v + dv$ . (Giả thiết giới hạn cổ điển còn áp dụng được để khảo sát đáng diệu của các phân tử này).
- Hãy rút ra phương trình trạng thái (tức phương trình liên hệ áp suất, nhiệt độ, v.v.)
- Tính nhiệt dung riêng đẳng diện tích (là sự tương tự hai chiều với khái niệm nhiệt dung đẳng tích) và đẳng áp.
- Tìm công thức tính số phân tử đạp vào một đơn vị dài của thành trong đơn vị thời gian. Biểu diễn kết quả tìm được theo  $N, A, T, M$  và các hằng số cần thiết khác.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

- Từ phân bố vận tốc Maxwell

$$fdv \propto e^{-\frac{M}{2kT}(v_x^2+v_y^2)} dv_x dv_y ,$$

ta có  $fdv = ce^{-\frac{Mv^2}{2kT}} v dv$ , với  $c$  là thừa số chuẩn hoá được xác định từ phương trình

$$N = \int_0^\infty f dv .$$

Do đó  $f dv = \frac{MN}{kT} v e^{-\frac{Mv^2}{2kT}} dv$ .

(b), (c), (d). Phương trình trên có thể viết thành

$$fdv_x dv_y = \frac{MN}{2\pi kT} e^{-\frac{M}{2kT}(v_x^2 + v_y^2)} dv_x dv_y .$$

Trước hết ta tính số phân tử va chạm với một đơn vị chiều dài của "thành" trong một đơn vị thời gian:

$$\begin{aligned} n &= \int \int_{v_x > 0} \frac{v_x}{A} \cdot \frac{MN}{2\pi kT} e^{-m(v_x^2 + v_y^2)/2kT} dv_x dv_y \\ &= \frac{N}{A} \cdot \sqrt{\frac{kT}{2\pi M}}, \end{aligned}$$

với  $A$  là diện tích của hệ. Sau đó ta tính được áp suất:

$$p = \iint \frac{2Mv_x^2}{A} f dv_x dv_y = \frac{N}{A} kT ,$$

Chính phương trình trên cho ta phương trình trạng thái  $pA = NkT$ . Từ định lý phân bố đều năng lượng, ta biết rằng

$$c_v = Nk ,$$

$$\text{và } c_p = c_v + Nk = 2Nk.$$

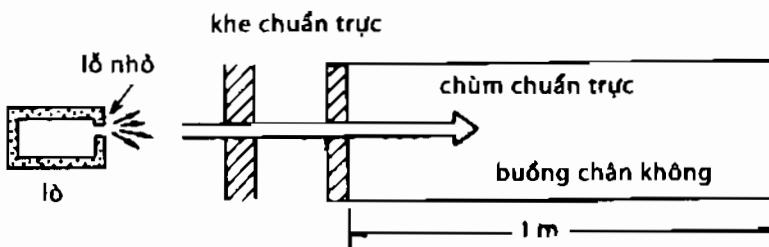
## 2198

Một chùm song song các nguyên tử Be ( $A = 9$ ) tạo ra bằng cách bay hơi trong một lò có nhiệt độ 1000 K rồi đi qua một lỗ nhỏ

(a) Nếu chùm nguyên tử đi qua một quãng đường dài 1 m với độ hao hụt nhỏ hơn  $1/e$  do va chạm với các nguyên tử của khí nền ở nhiệt độ phòng (300 K) thì áp suất trong buồng chân không là bao nhiêu? Giả thiết tiết diện va chạm là  $10^{-16} \text{ cm}^2$ , và bỏ qua va chạm giữa hai nguyên tử trong chùm.

(b) Tính thời gian trung bình ( $\bar{\tau}$ ) để chùm nguyên tử đi được 1 m. Chỉ rõ cách tính chính xác giá trị của  $\bar{\tau}$  nhờ sử dụng phân bố vận tốc thích hợp. Không cần tính các tích phân. Dùng lập luận đơn giản để tính trị số của  $\bar{\tau}$ .

(c) Nếu các nguyên tử Be va chạm với thành ở xa, hãy tính áp suất lên thành do chùm gây ra ở nơi chùm va chạm với thành. Giả thiết mật độ các hạt trong chùm là  $10^{10}/\text{cm}^3$ . So sánh kết quả này với áp suất gây bởi khí nền.



Hình 2.45

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Tỉ phần mất mát của các nguyên tử trong chùm là  $1 - \exp(-x/l)$ , với  $l$  là quãng đường tự do trung bình. Nếu độ mất mát của chùm nhỏ hơn  $1/e$  sau khi đi được quãng đường  $L$ , thì  $L$  phải nhỏ hơn  $l \ln\left(\frac{e}{e-1}\right)$ . Vì

$$n = \frac{1}{l\sigma} < \ln\left(\frac{e}{e-1}\right) / L\sigma ,$$

ta đòi hỏi

$$p = nkT < kT \ln\left(\frac{e}{e-1}\right) / L\sigma = 0,18 N/m^2 \quad \text{đối với } L = 1 \text{ m} .$$

(b) Nếu vận tốc theo phương  $x$  là  $v_x$ , thì thời gian bay là  $L/v_x$ . Vì phân bố số hạt trong chùm là

$$f dv_x \propto v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x ,$$

nên ta có

$$\bar{\tau} = \frac{\int_0^\infty \frac{L}{v_x} \cdot v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x}{\int_0^\infty v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv} = L \sqrt{\frac{\pi m}{2kT}} = 1,3 \times 10^{-3} \text{ s} .$$

(Nhớ rằng ở đây đã bỏ qua tán xạ trên các phân tử của khí nén).

(c) Áp suất do các hạt có tốc độ trong khoảng  $v_x \sim v_x + dv_x$  tác dụng lên thành tỉ lệ với

$$N \frac{v_x A m v_x f dv_x}{A} ,$$

với  $N$  là mật độ số hạt trong chùm và  $A$  là tiết diện ngang của chùm. Từ đó suy ra

$$p_0 = N \frac{\int m v_x^2 \cdot v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x}{\int v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x} = 2NkT_0 = 3 \times 10^{-4} \text{ N/m}^2,$$

Áp suất này nhỏ hơn nhiều áp suất gây bởi các phân tử của khí nền.

### 2199

Một lượng khí argon (phân tử lượng 40) chứa trong một buồng ở nhiệt độ  $T_0 = 300 \text{ K}$ .

(a) Tính vận tốc phân tử cái nhiên nhất.

Một lỗ nhỏ được khoan trên thành buồng và khí được phép phóng vào miền có áp suất nhỏ hơn.

(b) Tính vận tốc cái nhiên nhất của các phân tử khí lọt qua lỗ.

Áp suất trong buồng và miền ngoài lỗ được điều chỉnh để duy trì dòng thuỷ lực của khí qua lỗ, sao cho các hiệu ứng nhớt, xoáy, và trao đổi nhiệt với thành của lỗ đều có thể bỏ qua. Trong thời gian giãn nở này khí đã được làm lạnh đến nhiệt độ  $30 \text{ K}$ .

(c) Tính tốc độ âm  $c$  tại nhiệt độ thấp hơn đó

(d) Tính vận tốc dòng trung bình  $\bar{v}$  tại nhiệt độ thấp hơn đó, và so sánh phân bố vận tốc này với phân bố ban đầu trong buồng.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

(a) Phân bố Maxwell được cho bởi

$$f dv = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv,$$

hay

$$f dv = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

Tốc độ cái nhiên nhất là giá trị của  $v$  tương ứng với cực đại của  $f$ . Từ  $\frac{\partial f}{\partial v} = 0$ , ta được

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT_0}{m}} = 352 \text{ m/s}.$$

(b) Phân bố vận tốc đối với các phân tử thoát ra được cho bởi

$$Fdv = Nv^3 e^{-\frac{m}{2kT}v^2} dv ,$$

với  $N$  là hằng số chuẩn hoá. Từ  $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$ , ta được

$$v_m = \sqrt{\frac{3kT_0}{m}} = 431 \text{ m/s} .$$

(c) Vận tốc của âm là

$$c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_S} .$$

Dùng hệ thức đoạn nhiệt  $p = \rho^\gamma \cdot \text{const.}$ , ta có

$$c = \sqrt{\gamma \frac{kT}{m}} ,$$

với  $\gamma = c_p/c_v$ . Đối với khí argon,  $\gamma = 5/3$ , và  $c = 101 \text{ m/s}$ .

(d) Tốc độ dòng trung bình là

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \int v \cdot v^3 e^{-\frac{m}{2kT_0}v^2} dv / \int v^3 e^{-\frac{m}{2kT_0}v^2} dv \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi kT_0}{2m}} = 468 \text{ m/s} . \end{aligned}$$

## 2200

Trên cơ sở thuyết động học, hãy ước tính cỡ độ lớn của độ dẫn nhiệt theo nhiệt độ, mật độ, phân tử lượng, và nhiệt dung đẳng tích. Hãy tự tính tiết diện va chạm và quãng đường tự do trung bình của phân tử. Có thể chỉ xét các áp suất ở gần với áp suất khí quyển, nhiệt độ gần nhiệt độ phòng, và kích thước cỡ centimét hoặc mét. Coi sự truyền nhiệt bằng đối lưu là không quan trọng. ( $k = 1,38 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$ ).

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Giả thiết rằng tồn tại một gradient nhiệt độ  $\frac{dT}{dx}$  trong chất khí và phân tử trôi từ miền nhiệt độ cao xuống miền nhiệt độ thấp. Số va chạm trên một đơn

vị diện tích đặt vuông góc với phương trôi trong đơn vị thời gian là  $n\bar{v}/4$ . Tính trung bình mỗi phân tử va chạm một lần khi di chuyển một quãng đường  $l$ , bằng quãng đường tự do trung bình và vận chuyển một năng lượng  $c_v \Delta T \sim c_v l \frac{dT}{dx}$ . Do đó dòng nhiệt truyền qua một đơn vị diện tích trong đơn vị thời gian là  $q = \frac{1}{4} n \bar{v} c_v l \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{dT}{dx}$ , với

$$\kappa = \frac{1}{4} n \bar{v} c_v = \frac{c_v}{4\sigma} \sqrt{\frac{3kT}{M}}$$

là độ dẫn nhiệt của chất khí. Lấy không khí làm ví dụ với  $M = 29 \times 1,67 \times 10^{-27}$  kg,  $\sigma = 10^{-20} \text{ m}^2$ ,  $c_v = 5k/2$ ,  $T = 300$  K, ta có

$$\kappa = 0,44 \text{ J/mK} .$$

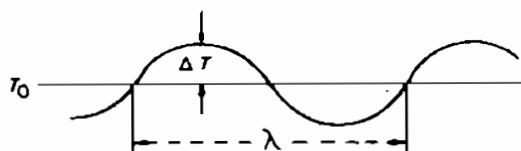
### 2201

Sóng âm truyền gây nên sự biến thiên tuần hoàn nhiệt độ. Tính dẫn nhiệt có tác dụng loại bỏ sự biến thiên này, nhưng thường thường người ta thấy rằng sóng là một quá trình đoạn nhiệt, tức là, sự dẫn nhiệt là quá chậm.

Từ thuyết động học người ta tính được độ dẫn nhiệt của khí lý tưởng là  $k \approx 1,23 C_v \bar{v} l$ , với  $C_v$  là nhiệt dung trên một đơn vị thể tích,  $\bar{v}$  là tốc độ nhiệt trung bình và  $l$  là quãng đường tự do trung bình.

Hãy tính tỉ phần của độ biến thiên nhiệt độ  $\Delta T$  được truyền đi với bước sóng  $\lambda$  và xác định điều kiện đối với  $\lambda$  để sự dẫn nhiệt này là không có hiệu quả?

(Wisconsin)



Hình 2.46

**Lời giải:**

Nhiệt độ tại  $x$  có thể viết như sau

$$T = T_0 + \Delta T \cos \left( \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0 \right) .$$

Khi đó độ biến thiên của nhiệt độ do dẫn nhiệt là

$$\begin{aligned}\delta T &= -2l \left( \frac{dT}{dx} \right) \\ &= \frac{4\pi l}{\lambda} \Delta T \sin \left( \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0 \right).\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{\delta T}{\Delta T} = \frac{4\pi l}{\lambda} \sin \left( \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0 \right).$$

Đây là tỉ phần của  $\Delta T$  là kết quả của sự dẫn nhiệt. Điều kiện để sự dẫn nhiệt không còn hiệu quả là

$$\frac{\delta T}{\Delta T} \ll 1, \quad \text{tức là } \lambda \gg l.$$

## 2202

Hãy cho một lập luận định tính dựa trên thuyết động học chất khí để chứng tỏ rằng hệ số nhớt của khí cổ điển không phụ thuộc vào áp suất tại nhiệt độ không đổi.

(UC, Berkeley)

**Lời giải:**

Xét một dòng các phân tử khí di chuyển theo hướng  $x$  mà vận tốc trung bình  $\bar{v} = v_x$  của nó có gradient theo hướng  $y$ . Số phân tử đi qua một đơn vị diện tích đặt vuông góc với hướng  $x$  trong một đơn vị thời gian là  $n\bar{v}/4$ . Trong một va chạm, động lượng truyền theo hướng  $y$  là  $m\Delta v_x$ . Vì chỉ có một va chạm xảy ra trên khoảng cách  $\sim l$ , là quãng đường tự do trung bình của phân tử, nên với phép tính bậc độ lớn ta có thể lấy gần đúng

$$\Delta v_x = \Delta y \frac{\partial v_x}{\partial y} \sim l \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Do đó lực trượt ngang qua một đơn vị diện tích hay là lực nhớt là

$$f = \frac{nm\bar{v}\Delta v_x}{4} = \frac{1}{4} nm\bar{v}l \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Từ đó suy ra hệ số nhớt là

$$\eta = \frac{nm\bar{v}l}{4} = \frac{m}{4\sigma} \sqrt{8kT/\pi m},$$

ở đây  $\sigma$  là tiết diện va chạm của phân tử. Như đã thấy từ công thức trên  $\eta$  không phụ thuộc vào áp suất khi nhiệt độ không đổi.

## 2203

Xét một khí loãng, phân tử của nó có khối lượng  $m$  độ lớn vận tốc trung bình  $\bar{v}$ . Giả thiết vận tốc trung bình theo phương  $x$  là  $u_x$  tăng đơn điệu theo  $z$ , tức là  $u_x = u_x(z)$  với  $|u_x| \ll \bar{v}$  và tất cả các gradient đều nhỏ. Có  $n$  phân tử trong đơn vị thể tích và quãng đường tự do trung bình của chúng là  $l$  với  $l \gg d$  (đường kính phân tử) và  $l \ll L$  (kích thước dài của bình kín).

(a) Độ nhớt  $\eta$  định nghĩa là hằng số tỉ lệ giữa gradient vận tốc và ứng suất theo phương  $x$  trong một mặt phẳng tưởng tượng có pháp tuyến hướng theo phương  $z$ . Tìm một biểu thức gần đúng của  $\eta$  theo các thông số đã cho.

(b) Nếu sự tán xạ của các phân tử được xử lý như những quả cầu rắn thì sự phụ thuộc vào nhiệt độ của  $\eta$  như thế nào? Sự phụ thuộc vào áp suất như thế nào? Giả sử có phân bố Maxwell trong cả hai trường hợp.

(c) Nếu tiết diện tán xạ của phân tử  $\sigma \propto E_{cm}^2$ , với  $E_{cm}$  là năng lượng khôi tâm của hai hạt va chạm, hãy xác định sự phụ thuộc vào nhiệt độ của  $\eta$ ? Một lần nữa lại giả thiết rằng có phân bố Maxwell.

(d) Tính  $\eta$  đối với không khí ở áp suất khí quyển ( $10 \text{ dyn/cm}^2$ ) và nhiệt độ phòng. Phát biểu rõ các giả thiết nếu có.

(Princeton)

Lời giải:

(a) Số phân tử đi qua một đơn vị diện tích đặt vuông góc với phương  $z$  trong đơn vị thời gian là  $n\bar{v}/4$ . Mỗi hạt thực hiện một va chạm sau khi đi một khoảng cách có độ lớn  $c\bar{o}_l$  khi đó động lượng theo phương  $x$  được truyền đi một lượng  $m(u_x + \Delta z \frac{\partial u_x}{\partial z} - u_x) = m\Delta z \frac{\partial u_x}{\partial z}$ . Để có một đánh giá gần đúng ta lấy  $\Delta z \sim l$ , thì lực nhớt và độ nhớt tương ứng là

$$\tau = \frac{1}{4} n \bar{v} m l \frac{\partial u_x}{\partial z},$$

$$\eta = \frac{1}{4} m \bar{v} n l.$$

(b) Vì  $l = \frac{1}{n\sigma}$  nên  $\eta = \frac{m\bar{v}}{4\sigma}$ . Mô hình quả cầu rắn cho  $\sigma = \text{const.}$ , khi đó vì

$\bar{v} \propto \sqrt{T}$ , nên  $\eta \propto \sqrt{T}$  và không phụ thuộc vào áp suất.

(c) Nếu  $\sigma \propto E_{cm}^2 \propto T^2$ , thì  $\eta \propto T^{-3/2}$  và không phụ thuộc vào áp suất.

(d) Tại nhiệt độ phòng, ta có thể lấy gần đúng phân tử lượng của không khí là 30,  $\bar{v}$  là vận tốc của ám và  $\sigma \sim 10^{-20} \text{ m}^2$ . Khi đó  $\eta \approx 1,3 \times 10^{-6} \text{ kg/ms}$ .

### 2204

Độ dẫn điện. Tìm một biểu thức gần đúng của độ dẫn điện  $\sigma$  của khí electron suy biến mật độ  $n$  electrons/cm<sup>3</sup> theo thời gian va chạm hiệu dụng  $\tau$  giữa các electron.

(MIT)

Lời giải:

Đối với khí electron suy biến, vận tốc là đều trên mặt Fermi. Khi đó dòng điện toàn phần theo mọi hướng bằng 0. Dưới tác dụng của điện trường  $E_z$ , các electron chuyển động như toàn bộ theo hướng  $z$  tạo thành dòng điện. Ta có

$$E_z e = m \frac{dv_z}{dt}, \quad \Delta v_z \approx \tau \frac{dv_z}{dt},$$

Suy ra mật độ dòng điện

$$j_z = en\Delta v_z \approx enE_z e \tau / m,$$

ở đây  $m$  là khối lượng electron và  $e$  là điện tích của nó. So sánh công thức trên với hệ thức giữa mật độ dòng điện và độ dẫn điện, ta được

$$\sigma = e^2 n \tau / m.$$

### 2205

Xét một hệ các hạt tích điện chứa trong thể tích  $V$ . Các hạt này cân bằng nhiệt tại nhiệt độ  $T$  trong điện trường  $E$  hướng theo trục  $z$ .

(a) Đặt  $n(z)$  là mật độ hạt tại độ cao  $z$ . Dùng cơ học thống kê cân bằng tìm hệ số tỉ lệ giữa  $\frac{dn}{dz}$  và  $n$ .

(b) Giả sử các hạt có thể đặc trưng bằng hệ số khuếch tán  $D$ . Dùng định nghĩa của  $D$  tìm thông lượng  $J_D$  sinh ra từ gradient nồng độ thu được trong

câu (a).

(c) Giả sử các hạt cũng còn được đặc trưng bằng độ linh động  $\mu$  liên hệ vận tốc trôi của nó với trường tác dụng. Tìm thông lượng hạt  $J_\mu$  liên kết với độ linh động này.

(d) Dùng tính chất là tại điều kiện cân bằng thông lượng hạt cần phải triệt tiêu để thiết lập hệ thức Einstein giữa  $\mu$  và  $D$ :

$$\mu = \frac{e}{k} \frac{D}{T}$$

(Wisconsin)

**Lời giải:**

(a) Hạt được giả thiết có diện tích  $e$ , thể năng của nó trong điện trường  $E$  là

$$u = -eEz .$$

Khi đó phân bố nồng độ ở điều kiện cân bằng là

$$n(z) = n_0 \exp\left(\frac{eEz}{kT}\right) ,$$

trong đó  $n_0$  là mật độ hạt tại  $z = 0$ , từ đó suy ra

$$\frac{dn(z)}{dz} = \frac{eE}{kT} n(z) .$$

(b) Theo định nghĩa,

$$\begin{aligned} J_D &= -D \frac{dn(z)}{dz} = -D \frac{eE}{kT} n(z) \\ &= -D \frac{eE}{kT} n_0 \exp(eEz/kT) . \end{aligned}$$

(c) Thông lượng hạt dọc theo trường tác dụng là

$$J_\mu = n(z)\bar{v} = n(z)\mu E = \mu E n_0 \exp\left(\frac{eEz}{kT}\right) .$$

(d) Thông lượng toàn phần bằng không tại điều kiện cân bằng. Vì thế  $J_D + J_\mu = 0$ , suy ra

$$\mu = \frac{eD}{kT} .$$

## 2206

Xét một hệ electron suy biến ở nhiệt độ thấp trong điều kiện cân bằng dưới ảnh hưởng đồng thời của gradient mật độ và của điện trường.

(a) Thể hoá học  $\mu$  liên hệ như thế nào với thể năng tĩnh điện  $\phi(x)$  và năng lượng Fermi  $E_F$  đối với một hệ như thế?

(b)  $E_F$  phụ thuộc vào mật độ electron  $n$  như thế nào?

(c) Từ điều kiện đối với  $\mu$  ở trạng thái cân bằng và những khảo sát trong các câu (a) và (b), hãy tìm một hệ thức giữa độ dẫn điện  $\sigma$ , hệ số khuếch tán  $D$  và mật độ trạng thái trên mặt Fermi đối với hệ đã cho.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Từ phân bố  $n_\varepsilon = \{\exp[(\varepsilon - \mu - e\phi(x))/kT] + 1\}^{-1}$ , ta được  $E_F = \mu_0 + e\phi(x)$ , với  $\mu_0 = \mu(T = 0)$ .

$$(b) N = 2 \cdot \frac{V}{h^3} \frac{4}{3} \pi p_F^3 = 2 \cdot \frac{V}{h^3} \cdot \frac{4}{3} \pi (2mE_F)^{3/2}.$$

(c) Mật độ dòng điện  $j$  trong điện trường  $E$  là

$$j = \sigma E = -\sigma \nabla \phi(x).$$

Mật độ dòng khuếch tán là  $J = -D \nabla \rho$ . Ở điều kiện cân bằng ta có

$$\mathbf{j}/e = -\mathbf{J}/m \quad \text{tức là } \sigma \nabla \phi(x)/e = -D \nabla \rho/m = -D \nabla n.$$

Mật độ trạng thái trên mặt Fermi là

$$N_F = \frac{dN}{dE_F} = 4\pi V(2m)^{3/2} \frac{E_F^{1/2}}{h^3}.$$

Điện thế hóa học  $\tilde{\mu} \equiv \mu + e\phi(x)$  không phụ thuộc vào  $x$  ở điều kiện cân bằng. Do đó

$$\nabla \tilde{\mu} = \nabla \mu + e \nabla \phi(x) \doteq 0,$$

tức là

$$e \nabla \phi(x) + \left( \frac{\partial \mu}{\partial n} \right)_T \nabla n = 0.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sigma}{e^2} \left( \frac{\partial \mu}{\partial n} \right)_T \approx \left( \frac{\sigma}{e^2} \right) \frac{\partial E_F}{\partial n} = \frac{2\sigma E_F}{3e^2 N} \\ &= \frac{2\sigma}{3e^2 n} \left[ \frac{h^3}{4\pi(2m)^{3/2}} \frac{N_F}{V} \right]^2. \end{aligned}$$

## 2207

Xét một khí Fermi không tương tác của các électron. Giả thiết các électron là phi tương đối tính.

(a) Tìm mật độ trạng thái  $N(E)$  như là một hàm số của năng lượng ( $N(E)$  là số trạng thái trong một khoảng đơn vị năng lượng) đối với các trường hợp sau đây:

- 1) Các hạt bị bắt buộc chuyển động chỉ dọc theo một đường có chiều dài  $L$ .
- 2) Các hạt chỉ chuyển động trong một mặt hai chiều có diện tích  $A$ .
- 3) Các hạt chuyển động trong thể tích ba chiều  $V$ .

(b) Trong khí électron Fermi ở bên trong vật rắn khi  $T \ll T_F$  (tức nhiệt độ khí nhỏ hơn rất nhiều so với nhiệt độ Fermi), sự tán xạ bởi các phonon và các tạp chất làm hạn chế khả năng dẫn điện. Trong trường hợp này độ dẫn  $\sigma$  có thể viết dưới dạng

$$\sigma = e^2 N(E_F) D ,$$

với  $e$  là điện tích électron,  $N(E_F)$  là mật độ trạng thái được định nghĩa như trên, tính tại năng lượng Fermi và  $D$  là hệ số khuếch tán électron.  $D$  tỉ lệ với tích bình phương vận tốc Fermi và thời gian trung bình  $\tau_e$  giữa các lần tán xạ ( $D \sim v_F^2 \tau_e$ ).

- 1) Nêu một lập luận vật lý về sự phụ thuộc của độ khuếch tán vào  $N(E_F)$ .
- 2) Tính sự phụ thuộc của  $\sigma$  vào mật độ électron toàn phần trong cả ba trường hợp của câu (a). Mật độ électron tùy trường hợp có thể là tổng số électron trong đơn vị thể tích, hoặc đơn vị diện tích, hoặc đơn vị chiều dài.  
(CUSPEA)

**Lời giải:**

- (a) 1) Chuyển động dọc theo chiều dài  $L$ . Hàm sóng riêng của hạt là

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) , \quad n = 1, 2, \dots .$$

Phương trình Schrödinger cho mức năng lượng lượng tử là

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 ,$$

tức là

$$n = \frac{2L}{\hbar} \sqrt{2mE} .$$

Số trạng thái  $\bar{N}$  đối với mỗi  $n$  là 2 do suy biến spin. Do đó

$$N(E) = \frac{d\bar{N}}{dE} = \frac{d\bar{N}}{dn} \cdot \frac{dn}{dE} = 2 \frac{dn}{dE} = L \left( \frac{8m}{h^2 E} \right)^{1/2}.$$

2) Chuyển động trong hình vuông cạnh  $L$  ( $L^2 = A$ ). Hàm riêng của một hạt là

$$\sin \frac{n_x \pi x}{L} \sin \frac{n_y \pi y}{L}, \quad n_x = 1, 2, \dots \\ n_y = 1, 2, \dots$$

với năng lượng

$$E(n_x, n_y) = \frac{\hbar^2(n_x^2 + n_y^2)}{8mL^2} = \frac{\hbar^2 n^2}{8mL^2} = E(n).$$

Như vậy số trạng thái giữa  $n$  và  $n + dn$  là

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi n dn = \pi n dn.$$

Từ đó suy ra

$$N(E) = \pi n \frac{dn}{dE} = \frac{4\pi m L^2}{h^2}, \\ = \frac{4\pi m A}{h^2},$$

ở đây ta đã sử dụng công thức

$$n = \frac{L\sqrt{8mE}}{\hbar}.$$

3) Chuyển động trong thể tích  $V$  ( $L^3 = V$ ).

$$E(n) = \frac{\hbar^2}{8m} \left( \frac{n}{L} \right)^2,$$

với  $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ ,

trong đó  $n_x = 1, 2, \dots, n_y = 1, 2, \dots, n_z = 1, 2, \dots$ .

Số trạng thái giữa  $n$  và  $n + dn$

$$2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 4\pi n^2 dn = \pi n^2 dn.$$

Từ đó suy ra  $N(E) = \pi n^2 \frac{dn}{dE} = 4\pi V \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} E^{1/2}$ .

(b) 1) Thời gian tự do trung bình tỉ lệ nghịch với xác suất va chạm, còn xác suất va chạm lại tỉ lệ với mật độ trạng thái trên mặt Fermi (vì  $T \ll T_F$ , tán xạ và va chạm chỉ xảy ra gần mặt Fermi và ta giả thiết rằng tán xạ đàn hồi là chủ yếu). Như vậy

$$\tau_e \sim \frac{1}{N(E_F)} .$$

Từ đó suy ra

$$D \sim \frac{v_F^2}{N(E_F)} .$$

2) Ta có  $\sigma = e^2 D N(E_F) \sim e^2 v_F^2 \sim E_F$ . Giả sử tổng số electron là  $z$ , và mật độ electron là  $\mu$ , khi đó

$$\mu = \begin{cases} z/L & (\text{một chiều}) \\ z/A & (\text{hai chiều}) \\ z/V & (\text{ba chiều}) . \end{cases}$$

Vì  $E_F = \frac{\hbar^2}{8m} \left( \frac{n_F}{L} \right)^2$  đối với tất cả ba trường hợp, và

$$z = \begin{cases} 2n_F & (\text{một chiều}) \\ \pi n_F^2/2 & (\text{hai chiều}) \\ \pi n_F^3/3 & (\text{ba chiều}) , \end{cases}$$

ta có

$$\sigma \sim E_F \sim \begin{cases} \mu^2 & (\text{một chiều}) \\ \mu & (\text{hai chiều}) \\ \mu^{2/3} & (\text{ba chiều}) . \end{cases}$$

Kết quả này khác nhiều với kết quả của lý thuyết cổ điển. Nguyên nhân là do chỉ những electron ở gần mặt Fermi mới cho đóng góp vào độ dẫn điện.

## 2208

(a) Hãy liệt kê và giải thích tóm tắt những giả thiết đã dùng để rút ra phương trình động học Boltzmann.

(b) Tích phân va chạm Boltzmann thường được viết dưới dạng

$$(\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t)/\partial t)_{\text{vch}} = \int d^3\mathbf{v}_2 \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) ,$$

ở đây  $f_1 = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t)$ ,  $f'_1 = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_1, t)$  và  $\sigma(\Omega)$  là tiết diện vi phân đối với va chạm  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \rightarrow (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2)$ . Rút ra biểu thức này đối với tích phân va chạm và giải thích các giả thiết đã được đưa vào trong các giai đoạn khác nhau như thế nào.

(SUNY, Buffalo)

**Lời giải:**

(a) Các giả thiết đã được đưa ra như sau.

1) Một va chạm có thể được coi là xảy ra tại một điểm vì thời gian va chạm nói chung ngắn hơn nhiều so với khoảng thời gian trung bình giữa hai lần va chạm.

2) Mật độ các hạt  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  là như nhau trong toàn bộ khoảng  $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}$ .

3) Các hạt có vận tốc khác nhau thì hoàn toàn độc lập với nhau, tức là phân bố của các hạt có vận tốc khác nhau  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  có thể được biểu diễn như

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t) \cdot f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2, t) .$$

4) Chỉ xét những lực xuyên tâm và va chạm đàn hồi

(b) Theo giả thiết 1) ta chỉ cần khảo sát tốc độ va chạm  $(\partial f_1/\partial t)_{\text{vch}}$  của các hạt với vận tốc  $\mathbf{v}_1$  trong khoảng  $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}_1$ .

Theo giả thiết 2) xác suất để hạt có vận tốc  $\mathbf{v}_1$  bị tán xạ bởi hạt có vận tốc  $\mathbf{v}_2$  trong góc khói  $\Omega$  và trong khoảng thời gian  $dt$  có thể viết như sau

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \sigma(\Omega) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2, t) d\Omega d^3\mathbf{v}_2 dt .$$

Theo giả thiết 3) ta có thể viết mật độ số hạt có vận tốc  $\mathbf{v}_1$  bị tán xạ trong góc khói  $\Omega$  như sau

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \sigma(\Omega) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t) d\Omega d^3\mathbf{v}_2 d^3\mathbf{v}_1 dt .$$

Tương tự, độ tăng mật độ số hạt có  $\mathbf{v}_1$  trong khoảng không gian  $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}_1$  sau va chạm  $(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2) \rightarrow (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  được cho bởi

$$|\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2| \sigma(\Omega) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_2, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_1, t) d\Omega d^3\mathbf{v}'_2 d^3\mathbf{v}'_1 dt.$$

Theo giả thiết 4) thì cho  $d^3\mathbf{v}_1 d^3\mathbf{v}_2 = d^3\mathbf{v}'_1 d^3\mathbf{v}'_2$  và

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2|.$$

Từ đó rút ra

$$\left( \frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{\text{vch}} = \int d^3\mathbf{v}_2 \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| (f'_1 f'_2 - f_1 f_2).$$

*Chịu trách nhiệm xuất bản:*

Chủ tịch HDQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI  
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

---

*Tổ chức bán tháo và chịu trách nhiệm nội dung:*

Phó Tổng biên tập NGÔ ÁNH TUYẾT  
Giám đốc Công ty Sách dịch và Từ điển Giáo dục NGUYỄN NHƯ Ý

*Biên tập lần đầu:*

NGUYỄN HỮU ĐIỀN  
PHẠM VĂN THIỀU

*Biên tập tái bản:*

ĐẶNG VĂN SỬ

*Xử lý bìa:*

HOÀNG ANH TUẤN

*Sửa bản in:*

ĐỖ THỊ TỐ NGA

*Ché bản:*

NGUYỄN HỮU ĐIỀN

---

## **BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI NHIỆT ĐỘNG LỰC HỌC VÀ VẬT LÝ THỐNG KÊ**

**Mã số: 8Z077z0-SBQ**

**In 1000 cuốn (QĐ: 3399/QĐ-GD), khổ 16x24cm, tại Công ty CP In Phúc Yên**

**Số xuất bản: 114-2010/CXB/48-129/GD.**

**In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2010**

Bài tập và lời giải của các  
Trường Đại học nổi tiếng Hoa Kỳ

Bộ sách gồm 7 cuốn:

## Bài tập và lời giải

1. Cơ học
2. Cơ học lượng tử
3. Quang học
4. Nhiệt động lực học và vật lý thống kê
5. Điện từ học
6. Vật lý nguyên tử, hạt nhân và các hạt cơ bản
7. Vật lý chất rắn, thuyết tương đối và các vấn đề liên quan

Bộ sách tuyển chọn 2550 bài tập từ các bài thi kiểm tra chất lượng và kiểm tra đầu vào của các trường đại học nổi tiếng ở Hoa Kỳ, bao quát toàn diện các vấn đề của vật lý học. Các câu hỏi trải rộng trên nhiều chủ đề, có những bài vận dụng nhiều lĩnh vực khác nhau của vật lý, áp dụng linh hoạt nhiều nguyên lý và định luật vật lý, đưa ra các tình huống sát thực và cập nhật, không đòi hỏi nhiều các kỹ năng về toán.

Các lời giải được đưa ra để gợi ý sinh viên tự giải quyết vấn đề hơn là hướng dẫn thao tác từng bước.

Bộ sách là tài liệu tham khảo quý bổ trợ cho các sách giáo khoa, giáo trình chuyên ngành vật lý.



Công ty cổ phần Sách dịch và Từ điển Giáo dục  
25 Hàn Thuyên - Hai Bà Trưng - Hà Nội  
Tel/Fax: 04.39726508 - 04.38266359  
[www.tudiengiaoduc.com.vn](http://www.tudiengiaoduc.com.vn)  
Mua sách tại: [www.sach24.vn](http://www.sach24.vn); [www.vinabook.com](http://www.vinabook.com)



VƯƠNG MIỀN KIM CƯƠNG  
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ



8934980009741



Giá: 59.500 đ