TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
9 2009
Số 387

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 46
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35144272, (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

Chào Năm Học Mới!

KHOA TOÁN TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

50 năm một chặng đường

Địa chỉ: 182 - Đường Lê Duẩn - Thành phố Vinh - Tỉnh Nghệ An
Điện thoại: 038.3855329 - Fax: 038. 3855269 - Email: Faculmath@vinhuni.edu.vn

PGS. TS NGUYỄN THÀNH QUANG
Trưởng Khoa Toán, ĐH Vinh

Khoa Toán (tiền thân là Ban Toán - Lí) là một trong hai khoa được thành lập đầu tiên của Trường Đại học Sư phạm Vinh (nay là Trường Đại học Vinh). Năm 1959, Khoa Toán - Trường Đại học Vinh được thành lập gồm 4 nhóm chuyên môn: Giải tích, Đại số, Hình học, Phương pháp dạy học Toán với 7 thầy giáo.

Hiện tại, Khoa có 3 ngành đào tạo đại học: Sư phạm Toán học, Toán học, Toán Tin học - Ứng dụng.

Về đào tạo sau đại học, Khoa có 5 chuyên ngành đào tạo thạc sĩ và tiến sĩ: Đại số và Lí thuyết số; Toán Giải tích; Hình học và Tôpô; Lí thuyết Xác suất và Thống kê toán học; Lí luận và Phương pháp dạy học Bộ môn Toán.

Khoa hiện có 5 bộ môn, với một đội ngũ giảng viên gồm: 2 Nhà giáo Ưu tú, 1 Giáo sư, 10 Phó Giáo sư, 17 Tiến sĩ, 24 Thạc sĩ.

CÁC ĐƠN VỊ HỢP TÁC ĐÀO TẠO VÀ NGHIÊN CỨU

* Viện Toán học Việt Nam; Khoa Toán - Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội; Khoa Toán - Trường Đại học Sư phạm Hà Nội; Trường Đại học Đồng Tháp...

* Trung tâm Vật lí lí thuyết Quốc tế (ICTP); Tổ chức Rencontres du Vietnam; Tổ chức Formathvietnam; Viện Toán học Fourier (Pháp); Trường Đại học Nakhon Phanom, Trường Đại học Rajabhat Maha Sarakham (Thái Lan)...

TÓM TẮT THÀNH TÍCH CỦA KHOA TRONG 50 NĂM (1959 - 2009)

- Đào tạo 10.000 cử nhân sư phạm và cử nhân toán học hệ chính quy.
- Đào tạo 2000 giáo viên trung học cơ sở cấp bằng Cử nhân sư phạm Toán - Lí.
- Đào tạo 800 Thạc sĩ và 40 Tiến sĩ toán học.
- Nhà nước tặng thưởng 8 Huân chương Lao Động hạng Ba cho tập thể và cá nhân;
- Thủ tướng Chính phủ tặng 24 Bằng khen cho tập thể và cá nhân;
- Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng 25 Bằng khen cho tập thể và cá nhân;
- Công đoàn Giáo dục Việt Nam tặng 10 Bằng khen cho tập thể và cá nhân;
- Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh tặng 10 Bằng khen cho tập thể và cá nhân;
- 25 cán bộ được tặng Huy chương Vì sự nghiệp Giáo dục;
- 22 cán bộ được tặng Huy chương Vì sự nghiệp Khoa học Công nghệ;
- Đảng bộ Khoa Toán liên tục được công nhận danh hiệu Đảng bộ vững mạnh;
- Khoa Toán nhiều năm được công nhận danh hiệu Tập thể Lao động Xuất sắc;
- Trong đội ngũ cán bộ đã hoặc đang giảng dạy tại Khoa Toán - ĐH Vinh, vinh dự đã có: 1 Nhà giáo Nhân dân, 14 Nhà giáo Ưu tú, 3 Giáo sư, 30 Phó Giáo sư, 40 Tiến sĩ.
- Có 378 công trình toán học công bố trên các tạp chí khoa học có uy tín trong và ngoài nước, trong số đó có 117 công trình được liệt kê trong *Tạp chí Mathematical Reviews* của Hội Toán học Hoa Kỳ. Khoa đã hoàn thành 8 đề tài nghiên cứu cơ bản cấp Nhà nước và 40 đề tài cấp Bộ.
- Có 20 sinh viên đạt giải trong Hội thi sinh viên Nghiên cứu khoa học của Bộ Giáo dục và Đào tạo, trong đó có 2 giải Nhất và 4 giải Nhì.
- Đội tuyển Olympic Sinh viên Khoa Toán của trường đã đạt được tổng cộng 106 giải (trong đó có 17 giải Nhất) trong 10 Kì thi Olympic Toán học Sinh viên toàn quốc do Bộ Giáo dục và Đào tạo và Hội Toán học Việt Nam đồng tổ chức từ năm 2000 đến năm 2009.

THƯ CỦA CHỦ TỊCH NƯỚC NGUYỄN MINH TRIẾT

Gửi các thầy giáo, cô giáo, cán bộ viên chức ngành giáo dục, các bậc phụ huynh và các em học sinh, sinh viên cả nước nhân dịp khai giảng năm học mới 2009-2010

Nhân ngày khai giảng năm học mới và ngày "toàn dân đưa trẻ đến trường", tôi thân ái gửi tới các thế hệ nhà giáo, cán bộ, công nhân viên chức ngành giáo dục, các bậc phụ huynh và các em học sinh, sinh viên trong cả nước lời chúc mừng tốt đẹp nhất.

Năm học vừa qua, toàn ngành giáo dục đã không ngừng phấn đấu, vượt qua nhiều khó khăn trở ngại, thực hiện thắng lợi nhiệm vụ, đạt được những kết quả quan trọng. Hệ thống, quy mô, mạng lưới giáo dục đào tạo tiếp tục được mở rộng. Ngày càng nhiều địa phương đạt chuẩn phổ cập giáo dục tiểu học đúng độ tuổi và trung học cơ sở. Năm qua cũng đánh dấu sự chuyển biến tích cực trong đổi mới chương trình, sách giáo khoa, phương pháp giáo dục cũng như việc ứng dụng khoa học công nghệ trong giảng dạy và học tập. Chất lượng và hiệu quả giáo dục có tiến bộ, đặc biệt là về giáo dục đạo đức, pháp luật, giáo dục lí tưởng, ý chí, hoài bão để xây dựng và bảo vệ Tổ quốc. Đội ngũ giáo viên đạt chuẩn các bậc học, cấp học đều tăng lên. Phần lớn các địa phương đều có thêm trường khang trang, nhất là ở vùng sâu, vùng xa; điều kiện dạy và học của thầy và trò từng bước được cải thiện... Đây là những kết quả quan trọng góp phần nâng cao dân trí, giáo dục công dân, đào tạo nguồn nhân lực phục vụ sự nghiệp công nghiệp hóa, hiện đại hóa đất nước. Tôi nhiệt liệt biểu dương những cố gắng, nỗ lực và những thành tựu của ngành giáo dục, đặc biệt là các tập thể, cá nhân đi đầu trong cuộc vận động lớn và các phong trào thi đua của ngành, biểu dương các nhà giáo đang công tác ở vùng sâu, vùng xa, biên giới, hải đảo.

Đất nước ta đang cần có nhiều hơn nữa những trí thức, lao động có trình độ, có tâm, đức, có kĩ năng và bản lĩnh hội nhập. Giáo dục đào tạo có vai trò quan trọng đáp ứng yêu cầu nhiệm vụ này, phải tiếp tục triển khai mạnh mẽ các chủ trương của Đảng, Nhà nước và của ngành, đặc biệt là việc thực hiện kết luận 242 KL/TW của Bộ Chính trị về tiếp tục triển khai Nghị quyết TW2 (khóa VIII) và phương hướng phát triển giáo dục đào tạo đến năm 2020.

Tôi hoan nghênh ngành giáo dục phát động chủ đề cho năm học 2009 - 2010 là "Đổi mới quản lí và nâng cao chất lượng giáo dục". Mục tiêu này phải được cụ thể hóa bằng nhiều chương trình hành động và phải trở thành hiện thực trong năm học mới. Các nhà quản lí giáo dục, các thầy, cô giáo và các em học sinh, sinh viên hãy phát huy các thành tựu, khắc phục yếu kém, cố gắng hơn nữa, nỗ lực và tâm huyết hơn nữa; hãy dấy lên phong trào thi đua mới trong giảng dạy và học tập theo hướng chất lượng, hiệu quả, toàn diện, phấn đấu thực hiện thành công các nhiệm vụ đề ra cho năm học 2009-2010 và những năm tiếp theo.

Chúc năm học mới thắng lợi.

Thân ái!

NGUYỄN MINH TRIẾT

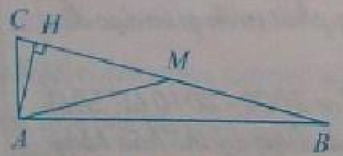
DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

VỀ MỘT TAM GIÁC thú vị

HOÀNG ĐỨC NGUYÊN
(GV trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội),
LƯƠNG ĐÌNH GIÁP
(GV trường THPT Sơn Động số 3, Bắc Giang)

Chúng ta đã biết nhiều tính chất đẹp của hai loại tam giác vuông đặc biệt là tam giác vuông cân và tam giác vuông có góc bằng 30°. Bài viết này giới thiệu một tam giác vuông khá thú vị khác, tam giác vuông có một góc bằng 15°.

Xét tam giác ABC có $\widehat{BAC}=90°$, $\widehat{ABC}=15°$, kẻ đường trung tuyến AM và đường cao AH.



Hình 1

Ta có $MA = MB$ hay ΔMAB cân tại M, suy ra $\widehat{AMC}=30°$.

Tam giác AHM vuông tại H có $\widehat{AMH}=30°$,

suy ra $AH=\frac{1}{2}AM=\frac{1}{4}BC$ (1)

Mặt khác $S_{ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}AB.AC$. Vậy

$$AB.AC=\frac{1}{4}BC^2 \Leftrightarrow BC^2=4AB.AC \quad (2)$$

Ngược lại ta cũng chỉ ra được nếu tam giác ABC vuông tại A và thỏa mãn hệ thức (1) hoặc (2) thì tam giác ABC có một góc bằng 15°. Ta có mệnh đề sau, chứng minh chi tiết xin dành cho bạn đọc.

Mệnh đề. *Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tam giác ABC có một góc bằng 15° khi và chỉ khi một trong các khẳng định sau đúng:*

i) $AH=\frac{1}{4}BC$,

ii) $BC^2=4AB.AC$,

iii) $S_{ABC}=\frac{1}{8}BC^2=2AH^2$,

iv) $(AB+AC)^2=6AB.AC$,

v) $\frac{(AB+AC)^2}{3}=\frac{BC^2}{2}$.

★**Bài toán 1.** *Cho tam giác ABC vuông tại A, trung tuyến BM, $\widehat{ABM}=15°$ và $S_{ABC}=16$. Tính độ dài đoạn thẳng BM.*

Lời giải (h. 2).

Hình 2

Ta có $S_{ABM}=\frac{1}{2}S_{ABC}=8$.

Tam giác ABM vuông tại A có $\widehat{ABM}=15°$, nên theo Mệnh đề trên ta có

$S_{ABM}=\frac{1}{8}BM^2=8$.

Do đó $BM = 8$. ❒

★**Bài toán 2.** *Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH và $AH^2 = 4AM.AN$, trong đó M, N theo thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ H đến AC, AB. Tính số đo các góc nhọn của tam giác ABC.*

Lời giải. (h. 3)

Hình 3

Tứ giác $AMHN$ là hình chữ nhật nên $AM = HN$.

Theo hệ thức lượng cho tam giác vuông AHC ta có

$$AH^2 = AM.AC.$$

Kết hợp với giả thiết $AH^2 = 4AM.AN$ suy ra

$$AC = 4AN = 4HM.$$

Theo Mệnh đề trên thì tam giác AHC có một góc bằng $15°$.

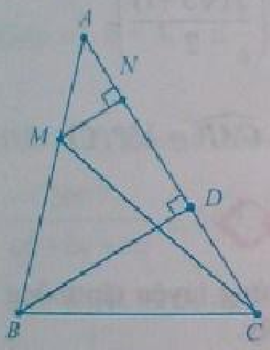
Nếu $\widehat{ACB} = 15°$ thì $\widehat{ABC} = 75°$.

Nếu $\widehat{CAH} = 15°$ thì $\widehat{ACB} = 75° \Rightarrow \widehat{ABC} = 15°$.

Vậy số đo các góc nhọn của tam giác ABC là $15°$ và $75°$. □

★**Bài toán 3.** *Cho tam giác ABC có* $\widehat{BAC} = 45°$, $\widehat{ABC} = 75°$. *Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho* $AM = \frac{1}{3}AB$. *Tính số đo góc ACM.*

Lời giải



Hình 4

Kẻ $MN \perp AC$, $BD \perp AC$ (h. 4) ta có $\widehat{ABC} = 45°$; $\widehat{CBD} = 30°$.

Đặt $AN = x$ suy ra $ND = 2x$, $MN = x$, $BD = 3x$, $CD = x\sqrt{3}$,

$NC = (2+\sqrt{3})x$,

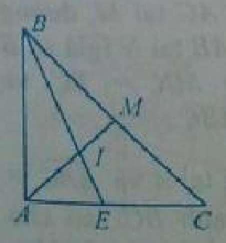
$MC^2 = MN^2 + NC^2$

$= 4x^2(2+\sqrt{3})$

$= 4MN.NC$.

Vì $\widehat{NMC} > \widehat{NCM}$ nên theo Mệnh đề trên ta có $\widehat{ACM} = 15°$. □

★**Bài toán 4.** *Cho tam giác ABC vuông tại A có BE là đường phân giác trong, I là tâm đường tròn nội tiếp. Biết* $\frac{BI}{IE} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$. *Tính số đo góc ACB.*



Hình 5

Lời giải. (h. 5)

Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{AB}{AE} = \frac{IB}{IE} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

Đặt $AB = (\sqrt{3}+1).x$

$\Rightarrow AE = (\sqrt{3}-1).x$

Theo định lí Pythagore ta có

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = (\sqrt{3}+1)^2 x^2 + (\sqrt{3}-1)^2 x^2$$

$$= 8x^2 = 4AB.AE,$$

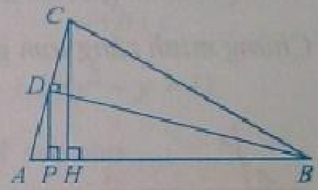
tức là $BE^2 = 4AB.AE$. Vì $\widehat{AEB} > \widehat{ABE}$ nên theo Mệnh đề trên ta có

$$\widehat{ABE} = 15° \Rightarrow \widehat{ABC} = 30° \Rightarrow \widehat{ACB} = 60°. \ □$$

★**Bài toán 5.** *Cho tam giác ABC có* $\widehat{BAC} = 75°$, *đường cao CH thoả mãn* $CH = \frac{1}{2}AB$. *Chứng minh rằng tam giác ABC cân.*

Lời giải

Cách 1. Kẻ $BD \perp AC$, $DP \perp AB$ (h. 6) Tam giác ADB vuông tại D có $\widehat{BAD} = 75°$ nên $\widehat{ABD} = 15°$,



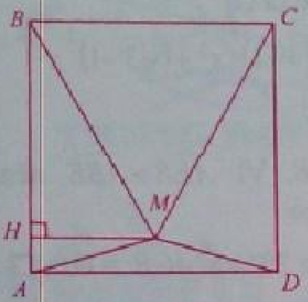
Hình 6

theo Mệnh đề trên suy ra $DP = \frac{1}{4}AB$. Theo giả thiết $CH = \frac{1}{2}AB$, nên $DP = \frac{1}{2}CH$. Lại có $DP \parallel CH$ nên DP là đường trung bình của tam giác ACH, hay D là trung điểm của AC. Vậy tam giác ABC cân tại B.

Cách 2. (bạn đọc tự vẽ hình). Đường thẳng qua C và vuông góc với AC cắt AB tại B'. Tam giác CAB' vuông tại C và $\widehat{B'} = 15°$ suy ra $CH = \frac{1}{4}AB'$. Theo giả thiết $CH = \frac{1}{2}AB$ nên $AB = \frac{1}{2}AB'$ hay B là trung điểm của AB'. Từ đó suy ra $BC = BA$. Vậy tam giác ABC cân tại B. □

★**Bài toán 6.** *Cho M là điểm nằm trong hình vuông ABCD thỏa mãn* $\widehat{MAD} = \widehat{MDA} = 15°$. *Chứng minh tam giác MBC đều.*

Lời giải. (h. 7)
Dễ thấy tam giác MBC cân tại M. Kẻ $MH \perp AB$ suy ra $MH = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB$.

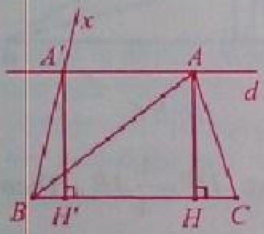


Hình 7

Xét tam giác ABM có $\widehat{MAB} = 75°$, $MH = \frac{1}{2}AB$, nên theo Bài toán 5 thì tam giác ABM cân tại B suy ra $BM = BA = BC$. Tương tự có $MC = BC$. Vậy tam giác MBC đều. ☐

★**Bài toán 7.** *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 75°$, kẻ đường cao AH, biết $AH = \frac{1}{2}BC$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.*

Lời giải.



Hình 8

Qua A kẻ đường thẳng d song song với BC. Qua B kẻ đường thẳng Bx cắt d tại A' sao cho $\widehat{A'BC} = 75°$. Kẻ $A'H' \perp BC$

$\Rightarrow A'H' = AH = \frac{1}{2}BC$. Theo Bài toán 5 thì tam giác $A'BC$ cân tại C. Xét hai trường hợp:

i) Nếu $A' \equiv A$ thì tam giác ABC cân tại C.

ii) Nếu $A' \neq A$ (h. 8) thì $\widehat{BA'C} = \widehat{BAC} = 75°$, hình thang $BA'AC$ nội tiếp nên nó là hình thang cân, suy ra $BA = CA' = CB$ hay tam giác ABC cân tại B.
Vậy tam giác ABC cân tại B hoặc C. ☐

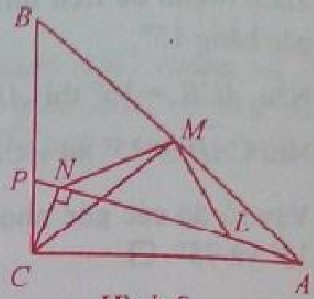
★**Bài toán 8.** *Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Gọi P là điểm trên cạnh BC, M là trung điểm của AB. Các điểm L, N thuộc đoạn AP sao cho $CN \perp AP$ và $AL = CN$. Biết rằng $S_{ABC} = 4S_{LMN}$. Tính số đo góc CAP.*
(Cuộc thi toán mùa xuân ở Bulgaria 1999).

Lời giải. Ta có $\Delta AML = \Delta CMN$ (c.g.c) $\Rightarrow$ ΔMLN vuông cân tại M.

Do đó

$S_{MLN} = \frac{1}{4}LN^2$ và

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC^2$.



Hình 9

Theo giả thiết
$S_{ABC} = 4S_{LMN}$
$\Leftrightarrow AC^2 = 2LN^2$
$\Leftrightarrow AC = \sqrt{2}LN$.

Đặt $LN = x$, $AL = CN = y$ ta có $AC = \sqrt{2}x$ và $AC^2 = AN^2 + CN^2 \Leftrightarrow 2x^2 = (x+y)^2 + y^2$

$\Leftrightarrow y = \frac{x(\sqrt{3}-1)}{2}$, suy ra $AN = \frac{x(\sqrt{3}+1)}{2}$ và

$$AC^2 = 2x^2 = 4\left(\frac{x(\sqrt{3}-1)}{2}\right)\left(\frac{x(\sqrt{3}+1)}{2}\right) = 4.AN.CN.$$

Theo Mệnh đề trên ta có $\widehat{CAP} = 15°$. ☐

Cuối cùng mời bạn đọc cùng luyện tập thông qua một số bài tập dưới đây.

1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 2AB$ và M là điểm trên cạnh AD sao cho $\widehat{ABM} = 15°$. Chứng minh rằng $MC = BC$.

2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2AD$, M là trung điểm của AB. Trên cạnh AB lấy điểm H sao cho $\widehat{ADH} = 15°$. Hai đường thẳng CH và DM cắt nhau tại K. Hãy so sánh độ dài các đoạn thẳng DH và DK.

(THTT, T2/325).

3. Cho tam giác ABC có góc B tù. Đường trung trực của cạnh AB cắt AC tại M, đường trung trực của cạnh AC cắt AB tại N (giả sử B nằm giữa A và N). Cho $MN = BC$ và $MN \perp BC$. Tính số đo góc ABC.

4. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{ABC} = 60°$. Lấy điểm M thuộc cạnh BC sao cho $AB + BM = AC + CM$. Tính số đo góc CAM.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRẦN PHÚ, HẢI PHÒNG

năm học 2009 - 2010

(Đề thi đã đăng trên THTT số 386, tháng 8 năm 2009)

Bài 1. Để ý rằng $4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2$ và $17\sqrt{5}-38=(\sqrt{5}-2)^3$ nên $x=-1$. Do đó $P=1$.

Bài 2. Theo định lí Viète ta có

$x_1+x_2=-b\,;\,x_1x_2=c$ (3)

$(x_1+1)+(x_2+1)=b^2;\,(x_1+1)(x_2+1)=bc$ (4)

Thay (3) vào (4) ta có

$b^2+b-2=0 \Leftrightarrow b=1$ hoặc $b=-2$;

và $c-b+1=bc$ (5)

Đáp số. $b=1$, $c\le\dfrac{1}{4}$ hoặc $b=-2$, $c=-1$.

Bài 3. 2) Do $ab+bc+ca\le\dfrac{(a+b+c)^2}{3}\le 3$ nên

$$\frac{2007}{ab+bc+ca}\ge 669.$$

Mặt khác, sử dụng BĐT phần 1) ta có

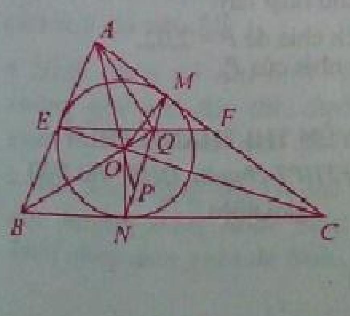
$$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)\times$$

$$\times(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)\ge 9.$$

Suy ra $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{2}{ab+bc+ca}\ge\dfrac{9}{(a+b+c)^2}\ge 1.$

Vậy $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{2009}{ab+bc+ca}\ge 670.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.



Bài 4. 1) Chứng tỏ $\widehat{BOP}=\widehat{PNC}=\dfrac{1}{2}\left(\widehat{BAC}+\widehat{ABC}\right)$ để suy ra tứ giác $BOPN$ nội tiếp. Chứng minh tứ giác $AOQM$ nội tiếp hoàn toàn tương tự. Chỉ ra $\widehat{AQB}=\widehat{APB}=90°$, để suy ra tứ giác $AQPB$ nội tiếp.

2) Tam giác AQB vuông tại Q có QE là trung tuyến và $\widehat{ABO}=\widehat{OBC}$ nên $QE\,//\,BC$.

Lại có $EF//BC$. Vậy ba điểm Q, E, F thẳng hàng.

3) Từ $\Delta MOP \backsim \Delta COB$; $\Delta NOQ \backsim \Delta COA$; $\Delta POQ \backsim \Delta BOA$ suy ra

$$\frac{OM}{OC}=\frac{MP}{a}=\frac{NQ}{b}=\frac{PQ}{c}=\frac{MP+NQ+PQ}{a+b+c}.$$

Bài 5. 1) Ta có $3^x=(y+1)(y^2-y+1)$.

Suy ra tồn tại $m,\,n\in\mathbb{N}$ sao cho

$$\begin{cases}y+1=3^m\\ y^2-y+1=3^n\\ m+n=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3^m-1\\ 9^m-3.3^m+3=3^n\\ m+n=x.\end{cases}$$

- Nếu $m=0$ thì $y=0$ suy ra $x=0$.
- Nếu $m>0$ thì $3^n\,\vdots\,3$ và $3^n\not\vdots\,9$ nên $n=1$; $m=1$.

Tìm được $x=2$, $y=2$.

Đáp số $(x\,;\,y)=(0\,;\,0);\,(2\,;\,2)$.

2) Ta tô các ô vuông của bảng bởi hai màu đen trắng xen kẽ như bàn cờ vua. Lúc đầu tổng số sỏi ở các ô đen bằng 1005×2009 là một số lẻ. Sau mỗi phép thực hiện thao tác T tổng số sỏi ở các ô đen không thay đổi tính chẵn lẻ, nên sau mỗi thao tác tổng số sỏi ở các ô đen luôn là một số lẻ. Vậy, không thể chuyển tất cả viên sỏi trên bảng ô vuông về cùng một ô sau một số hữu hạn phép thực hiện thao tác T.

ĐOÀN THÁI SƠN
(GV THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng)
giới thiệu

ĐỀ THI VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
Năm học 2009 - 2010

DÀNH CHO MỌI THÍ SINH
(Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1. (*2 điểm*) Cho các biểu thức

$A=\sqrt{20a+92+\sqrt{a^4+16a^2+64}}$;

$B=a^4+20a^3+102a^2+40a+200$.

1) Rút gọn A.

2) Tìm a để $A+B=0$.

Câu 2. (*2 điểm*) Hai người công nhân cùng làm một công việc trong 18 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 6 giờ và người thứ hai làm 12 giờ thì chỉ hoàn thành được 50% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Câu 3. (*2 điểm*) Cho parabol (P) có phương trình $y=x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y=mx+1$.

1) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.

2) Gọi $A(x_1\,;y_1)$ và $B(x_2\,;y_2)$ là giao điểm của (d) và (P). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=(y_1-1)(y_2-1).$$

Câu 4. (*3 điểm*) Cho tam giác ABC với $AB=5$, $BC=10$, $AC=3\sqrt{5}$. Đường phân giác BK của góc ABC ($K\in BC$) cắt đường cao AH ($H\in BC$) và cắt trung tuyến AM ($M\in BC$) của tam giác ABC lần lượt tại các điểm O và T.

1) Tính AH.

2) Tính diện tích tam giác AOT.

Câu 5. (*1 điểm*)

Các số thực x và y thoả mãn đẳng thức

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1.$$

Chứng minh rằng $x+y=0$.

DÀNH CHO THÍ SINH CHUYÊN TOÁN - TIN
(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 6. (*1,5 điểm*) Các số thực x, y thoả mãn $xy\neq\sqrt[3]{2}$ và $xy\neq-\sqrt[3]{2}$. Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào x, y:

$$P=\left(\frac{2\sqrt[3]{2}xy}{x^2y^2-\sqrt[3]{4}}+\frac{xy-\sqrt[3]{2}}{2xy+\sqrt[3]{2}}\right).\frac{2xy}{xy+\sqrt[3]{2}}-\frac{xy}{xy-\sqrt[3]{2}}.$$

Câu 7. (*3 điểm*) 1) Cho phương trình $x^2+bx+c=0$, trong đó các tham số b và c thoả mãn đẳng thức $b+c=4$. Tìm các giá trị của b và c để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1=x_2^2+x_2$.

2) Giả sử (x ; y ; z) là một nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{12}-\dfrac{z}{4}=1\\[2mm]\dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{z}{3}=1.\end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $A=x+y+z$.

Câu 8. (*1,5 điểm*) Ba số nguyên dương a, p, q thoả mãn các điều kiện:

i) $ap+1$ chia hết cho q,

ii) $aq+1$ chia hết cho p.

Chứng minh rằng $a>\dfrac{pq}{2(p+q)}$.

Câu 9. (*3 điểm*) Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn (C không trùng với A, B và điểm chính giữa của cung AB). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Đường tròn (O_1) đường kính AH cắt CA tại E, đường tròn (O_2) đường kính BH cắt CB tại F.

1) Chứng minh $AEFB$ là tứ giác nội tiếp.

2) Gọi O_3 là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEFB$, D là điểm đối xứng của C qua O. Chứng minh ba điểm H, O_3, D thẳng hàng.

3) Gọi S là giao điểm của các đường thẳng EF và AB, K là giao điểm thứ hai của SC với đường tròn (O). Chứng minh rằng $KE\perp KF$.

Câu 10. (*1 điểm*) Một hình vuông có độ dài cạnh bằng 1 được chia thành 100 hình chữ nhật có chu vi bằng nhau (hai hình chữ nhật bất kì không có điểm chung trong). Kí hiệu P là chu vi của mỗi hình chữ nhật này.

1) Hãy chỉ ra một cách chia để $P=2{,}02$.

2) Hãy tìm giá trị lớn nhất của P.

NGUYỄN THỊ THANH THUỶ
(*GV trường THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội*)
giới thiệu.

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

LTS. Bắt đầu từ số 387, tháng 9.2009 đến số 396, tháng 6.2010 THTT sẽ lần lượt đăng các chuyên đề toán cho chuyên mục ***Chuẩn bị thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học*** *do các thầy cô giáo có kinh nghiệm biên soạn. Tập hợp các chuyên đề đó các bạn sẽ được một tài liệu bổ ích, có hệ thống về các dạng toán thi vào Đại học và Cao đẳng. Xin giới thiệu chuyên đề thứ nhất với các bạn đọc.*

PHƯƠNG PHÁP TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

NGUYỄN MINH NHIÊN
(GV THPT Quế Võ số 1, Quế Võ, Bắc Ninh)

Bài hình học không gian trong các đề thi thường được coi là câu khó đối với nhiều bạn học sinh. Nhằm giúp các bạn ôn thi tốt chúng tôi xin giới thiệu một số phương pháp tính thể tích khối đa diện thông dụng.

I. PHƯƠNG PHÁP 1. Tính trực tiếp

Hai yếu tố quan trọng để tính thể tích khối đa diện là chiều cao và diện tích đáy. Trong quá trình tính cần lưu ý:

+ Các hệ thức lượng trong tam giác, đặc biệt là hệ thức lượng trong tam giác vuông.

+ Với khối chóp cần chính xác hóa vị trí chân đường cao của hình chóp, cụ thể :

• Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau (hoặc hợp đáy những góc bằng nhau) thì chân đường cao là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.

• Hình chóp có các mặt bên tạo với đáy những góc bằng nhau thì chân đường cao là tâm đường tròn nội tiếp đáy.

• Hình chóp có một mặt bên vuông góc với đáy thì chân đường cao nằm trên giao tuyến của mặt đó với đáy.

• Hình chóp có hai mặt bên kề nhau cùng vuông góc với đáy thì đường cao của nó là giao tuyến của hai mặt đó.

+ Với khối lăng trụ có thể tính thể tích theo các hướng trên, hoặc chia nhỏ thành nhiều khối chóp đơn giản để tính.

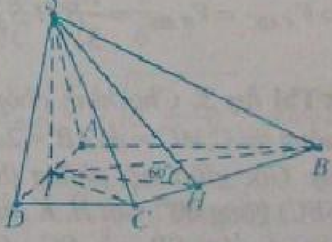
+ Với khối đa diện phức tạp, để tính thể tích ta thường chia nhỏ nó thành nhiều khối chóp đơn giản để tính.

★**Thí dụ 1.** *Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; AB = AD = 2a, CD = a. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích hình chóp S.ABCD.*

(Đề TSĐH khối A năm 2009)

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của I trên BC (h. 1). Từ giả thiết suy ra SI vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính được



Hình 1

$IC = a\sqrt{2}$,

$IB = BC = a\sqrt{5}$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AD.(AB+CD) = 3a^2$.

Ta có $\frac{1}{2}IH.BC = S_{IBC} = S_{ABCD} - S_{ABI} - S_{CDI}$

$= 3a^2 - a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$. Nên $IH = \frac{2S_{IBC}}{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}a$.

Từ đó $V_{S.ABCD} = \frac{3\sqrt{15}}{5}a^3$ (đvtt). □

★**Thí dụ 2.** *Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$. Góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60°; tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện $A'ABC$ theo a.*

(Đề TSĐH khối B năm 2009)

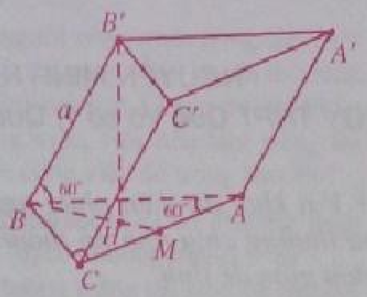
Hướng dẫn giải. Gọi M là trung điểm của AC, H là trọng tâm tam giác ABC (h. 2).

Tính được

$BH = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow BM = \dfrac{3}{4}a$,

$B'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Hình 2

Đặt $BC = x$ thì

$CM = \dfrac{1}{2}AC$

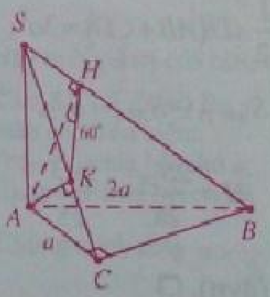
$= \dfrac{1}{2}.\dfrac{BC}{\tan\widehat{BAC}} = \dfrac{x}{2\sqrt{3}}$. Ta có $BM^2 = BC^2 + CM^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{9}{16}a^2 = x^2 + \dfrac{x^2}{12} \Rightarrow x^2 = \dfrac{27}{52}a^2$.

Suy ra $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AC = \dfrac{x^2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{9\sqrt{3}}{104}a^2$

$\Rightarrow V_{A'ABC} = V_{B'ABC} = \dfrac{1}{3}B'H.S_{ABC} = \dfrac{9a^3}{208}$ (đvtt).□

★**Thí dụ 3.** *Cho hình chóp $S.ABC$ có ΔABC vuông tại C, $AC = a$, $AB = 2a$, SA vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SBC) bằng 60°. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SC. Chứng minh rằng $AK \perp HK$ và tính thể tích hình chóp $S.ABC$.*



Hình 3

Hướng dẫn giải (h. 3).

• Ta có

$SA \perp BC, AC \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (SAC)$

$\Rightarrow BC \perp AK$

Mà $AK \perp SC$

nên $AK \perp (SBC)$

$\Rightarrow AK \perp HK$.

• Dễ dàng tính được $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (đvdt).

Trong tam giác vuông AKH, $AK = AH.\sin60^0$ $= \dfrac{\sqrt{3}}{2}AH$. Các tam giác SAB, SAC vuông tại A

nên $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{4a^2}$ (1)

$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow \dfrac{4}{3AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{a^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{3}{4SA^2} + \dfrac{3}{4a^2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{1}{4SA^2} = \dfrac{1}{2a^2}$, suy ra

$SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$ (đvtt). □

★**Thí dụ 4.** *Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a}{6}$. Tính thể tích hình lăng trụ đều đó.*

Hướng dẫn giải

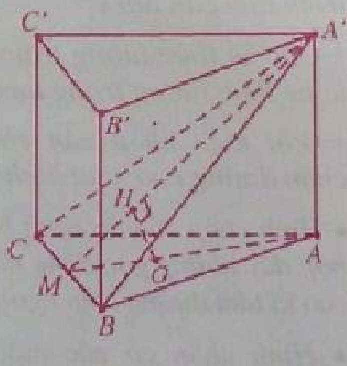
Gọi M là trung điểm của BC, H là hình chiếu của O lên $A'M$ (h. 4).

Có $AM \perp BC$,

$AA' \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (AA'M)$

$\Rightarrow BC \perp OH$.



Hình 4

Do đó

$OH \perp (A'BC) \Rightarrow d(O,(A'BC)) = OH = \dfrac{a}{6}$,

Đặt $AA' = x$, ta có $\Delta MOH \backsim \Delta MA'A$ nên

$$\frac{OH}{AA'} = \frac{MO}{MA'} \Rightarrow \frac{\frac{a}{6}}{x} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{x^2 + \frac{3}{4}a^2}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \dfrac{3\sqrt{2}}{16}a^3$ (đvtt). □

II. PHƯƠNG PHÁP 2. Sử dụng tỉ số diện tích, tỉ số thể tích

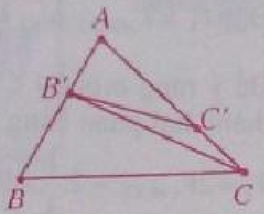
• *Về tỉ số diện tích.*

Cho ΔABC, $B' \in AB$, $C' \in AC$ (h. 5).

Khi đó

$$\frac{S_{B'BC}}{S_{ABC}} = \frac{B'B}{AB};$$

$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}$$



Hình 5

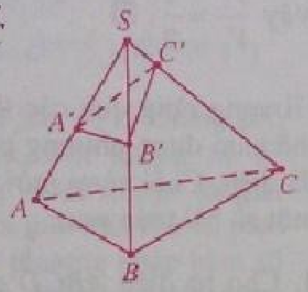
• *Về tỉ số thể tích.*

Cho hình chóp S.ABC với $A' \in SA, B' \in SB$, $C' \in SC$ (h. 6).

Khi đó

$$\frac{V_{A'ABC}}{V_{SABC}} = \frac{A'A}{SA} \quad (1)$$

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

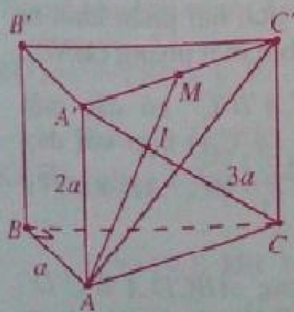


Hình 6

***Lưu ý.** Công thức (1) có thể mở rộng cho hình chóp đa giác.*

★Thí dụ 5. *Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính thể tích khối tứ diện IABC theo a.*

(Đề TSĐH khối D năm 2009)



Hình 7

Hướng dẫn giải (h. 7). Tính được $AC = a\sqrt{5}, BC = 2a$.

Vì I là trọng tâm tam giác $AA'C'$ nên $IA = \frac{2}{3}AM$.

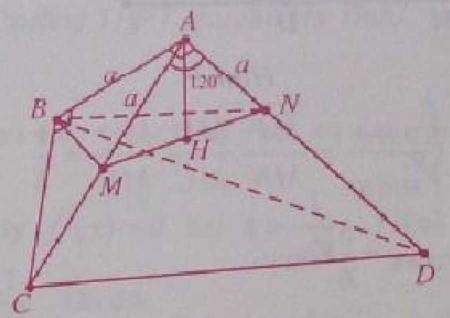
Vậy $\frac{V_{I.ABC}}{V_{M.ABC}} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow V_{I.ABC} = \frac{2}{3}V_{M.ABC} = \frac{2}{3}V_{A'.ABC} = \frac{2}{3}.\frac{1}{6}.a.2a.2a$$

$$= \frac{4}{9}a^3 \text{ (dvtt).} \square$$

★Thí dụ 6. *Cho tứ diện ABCD có $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$, $\widehat{CAD} = 120^0$, $AB = a$, $AC = 2a$, $AD = 3a$. Tính thể tích tứ diện đó.*

Hướng dẫn giải. (h. 8)



Hình 8

Lấy $M \in AC$, $N \in AD$ sao cho $AM = AN = a$.

Ta có $BM = \frac{1}{2}AC = a$, $BN = a\sqrt{2}$,

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.AN.\cos\widehat{MAN} = 3a^2$$

$$\Rightarrow MN = a\sqrt{3}.$$

Do đó tam giác BMN vuông tại B. Vì $AB = AM = AN$ nên hình chiếu của A trên (BMN) là tâm H của đường tròn ngoại tiếp ΔBMN, H cũng chính là trung điểm của MN.

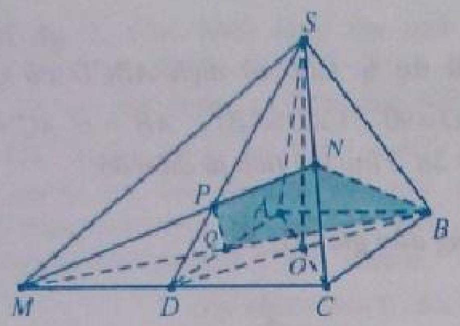
Có $\frac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \frac{AB}{AB}.\frac{AM}{AC}.\frac{AN}{AD} = \frac{1}{6}$;

$$V_{A.BMN} = \frac{1}{3}AH.S_{BMN} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - \frac{3}{4}a^2}.\frac{1}{2}a.a\sqrt{2}$$

$$= \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} \text{ (dvtt).} \square$$

★Thí dụ 7. *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy góc 60^0, Gọi M là điểm đối xứng với C qua D, N là trung điểm của SC, mặt phẳng (BMN) chia khối chóp S.ABCD thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.*

Hướng dẫn giải. (h. 9). Gọi P là giao điểm của MN và SD, Q là giao điểm của BM và AD. Khi đó P là trọng tâm ΔSCM, Q là trung điểm của MB.



Hình 9

Ta có $\frac{V_{MDPQ}}{V_{MBCN}} = \frac{MP}{MN}.\frac{MD}{MC}.\frac{MQ}{MB} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow V_{DPQCNB} = \frac{5}{6}V_{MBCN}$.

Vì D là trung điểm của MC, nên

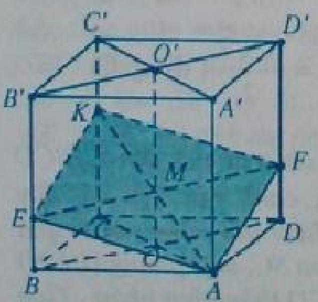
$d(M,(BCN)) = 2d(D,(BCN))$

$\Rightarrow V_{MBCN} = 2V_{DBCN} = V_{DBCS} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

Từ đó $V_{DPQCNB} = \frac{5}{12}V_{S.ABCD}$

$\Rightarrow V_{SABNPQ} = \frac{7}{12}V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_{DPQCNB}}{V_{SABNPQ}} = \frac{5}{7}$. □

★Thí dụ 8. *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a, K là điểm thuộc đoạn CC' sao cho $CK = \frac{2}{3}a$. Mặt phẳng (α) qua A, K và song song với BD chia khối lập phương thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.*



Hình 10

Hướng dẫn giải

Gọi O và O' theo thứ tự là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$, $M = AK \cap OO'$. Qua M kẻ đường thẳng song song với BD cắt BB', DD' lần lượt tại E, F.

Khi đó, thiết diện tạo bởi (α) và hình lập phương chính là hình bình hành $AEKF$ (h. 10).

Vì OM là đường trung bình tam giác ACK nên $OM = \frac{1}{2}CK = \frac{a}{3}$. Do đó $BE = DF = \frac{a}{3}$.

Đặt $V_1 = V_{ABEKFDC}$, $V_2 = V_{AEKFA'B'C'D'}$.

Để ý rằng mp($AA'C'C$) chia khối $ABEKFDC$ thành hai phần bằng nhau nên

$V_1 = 2V_{A.BCKE} = 2.\frac{1}{3}.AB.S_{BCKE} = \frac{2}{3}a.\frac{1}{2}S_{BCC'B'} = \frac{a^3}{3}$,

$V_2 = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_1 = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$. □

Hi vọng rằng qua các thí dụ trên bạn đọc có thể nắm được phương pháp tính thể tích khối đa diện. Cuối cùng mời các bạn tham gia giải một số bài toán sau.

1. Cho tứ diện $ABCD$ có ΔABC, ΔABD đều cạnh a, $(ACD) \perp (BCD)$. Tính V_{ABCD}.

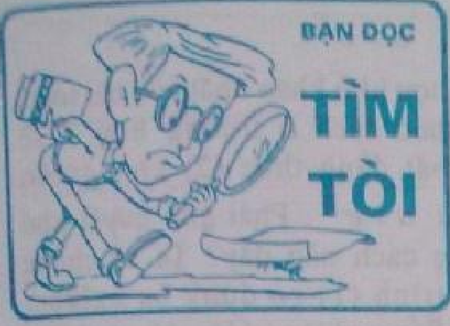
2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tính $V_{S.BMDN}$.

(Đề TSĐH khối B năm 2008)

3. Cho tứ diện $ABCD$; các điểm M, N, P lần lượt thuộc BC, BD, AC sao cho $BC = 4BM$, $BD = 2BN$, $AC = 3AP$; mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Tính tỉ số thể tích hai phần khối tứ diện $ABCD$ bị phân chia bởi mặt phẳng (MNP).

4. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt phẳng ($A'AB$), ($A'BC$), ($A'CA$) hợp với đáy (ABC) góc $60°$, góc $\widehat{ACB} = 60°$, $AB = a\sqrt{7}$, $AC = 2a$. Tính $V_{ABC.A'B'C'}$.

5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi M, N, P lần thuộc các đoạn AA', BC, CD sao cho $AA' = 3A'M$, $BC = 3BN$, $CD = 3DP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối lập phương thành hai phần. Tính thể tích từng phần.



Một bài toán cực trị

HOÀNG NGỌC CẢNH – TỪ HỮU SƠN
(GV trường THPT chuyên Hà Tĩnh)

Một lần có bạn đồng nghiệp nhờ chúng tôi giải bài toán sau:

- *Tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của các hàm số*

$$y = 3^{|\sin x|} + 3^{|\cos x|},\ y = 4^{|\sin x|} + 4^{|\cos x|} \quad (*)$$

Thoạt nhìn, nghĩ bài toán này có lẽ không khó lắm, nhưng tôi đã nhầm, thật không hề dễ chút nào. Tôi đã khá vất vả để tìm ra lời giải trọn vẹn của bài toán. Lời giải khá thú vị, phải dùng một số kĩ thuật về phương pháp hàm số và so sánh các số. Không dừng lại ở đó, chúng tôi đi tìm lời giải cho bài toán tổng quát:

- *Tìm GTLN, GTNN của hàm số* $f(x) = a^x + a^{\sqrt{1-x^2}}$ *với* $x \in [0; 1]$, *a là số dương khác 1 cho trước* (**)

Ta sẽ giải bài toán (**) bằng phương pháp hàm số.

Ta có $f'(x) = x\ln a\left(\dfrac{a^x}{x} - \dfrac{a^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Để giải phương trình $f'(x) = 0$, ta xét hàm số

$g(x) = \dfrac{a^x}{x}$, với $x \in (0 ; 1)$.

Khi đó $g'(x) = \dfrac{a^x(x\ln a - 1)}{x^2}$,

$$g'(x) = 0 \text{ khi } x = x_0 = \frac{1}{\ln a}.$$

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $0 < a < 1$.

Ta có $x_0 < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$, với mọi $x \in [0;1]$, suy ra hàm $g(x)$ nghịch biến trong $(0 ; 1)$.

Vậy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta dễ thấy $f'(x) > 0$ khi $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) < 0$ khi $x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Do đó

$$f_{\max} = f(0) = 1 + a;\ f_{\min} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2a^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Trường hợp 2. $1 < a \le e$.

Ta có $x_0 \ge 1 \Rightarrow g'(x) < 0$, với mọi $x \in [0;1]$, suy ra hàm $g(x)$ nghịch biến trong $(0 ; 1)$.

Tương tự $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Dễ thấy $f'(x) > 0$ khi $x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) < 0$ khi $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Suy ra GTNN, GTLN của hàm số $f(x)$ là

$$f_{\min} = f(0) = 1 + a;\ f_{\max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2a^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Còn $a > e$, câu trả lời như thế nào? không dễ mà có ngay! Nếu tiếp tục khảo sát hàm số $g(x)$ ta cũng đi đến kết quả, nhưng khá phức tạp, vì vậy chúng tôi chọn cách sẽ trình bày sau đây. Quá trình giải bài toán buộc ta phải chia thành các trường hợp sau:

Trường hợp 3. $e < a < e^{\sqrt{2}}$.

Mấu chốt của bài toán là phải chỉ ra số nghiệm của phương trình $\dfrac{a^x}{x} = \dfrac{a^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}$ (1)

Hiển nhiên $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ là một nghiệm của PT (1).

Ngoài ra PT (1) có nghiệm nào nữa không? ta hãy đi tìm câu trả lời.

Ta có (1)$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}.a^x = x\, a^{\sqrt{1-x^2}}$

$\Leftrightarrow \ \ln\sqrt{1-x^2} + x\ln a = \ln x + \sqrt{1-x^2}\ln a.$

Đặt $h(x) = (x-\sqrt{1-x^2})\ln a - \left(\ln x - \frac{1}{2}\ln(1-x^2)\right)$, với $x \in (0\,;1)$. Ta có

$$h'(x) = \ln a - \frac{1}{x} - \frac{x}{1-x^2} + \frac{x\ln a}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{1}{x(1-x^2)}\left((\sqrt{1-x^2}+x)x\sqrt{1-x^2}\ln a - 1\right).$$

Từ $0 < \sqrt{1-x^2} + x \le \sqrt{2}$; $0 < x\sqrt{1-x^2} \le \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow (\sqrt{1-x^2}+x)x\sqrt{1-x^2}\ln a - 1 \le \frac{\ln a}{\sqrt{2}} - 1 \le 0 \quad (2)$$

(do $a \le e^{\sqrt{2}}$).

Vậy $h'(x) \le 0$ dẫn đến hàm số $h(x)$ nghịch biến trong $(0\,;1)$. Từ đó suy ra phương trình (1) có duy nhất một nghiệm (đpcm).

Trở lại bài toán, từ chứng minh trên suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có duy nhất nghiệm $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta thấy khi $x \to 1$, thì $\frac{a^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} \to +\infty$

suy ra $f'(x) < 0$ khi $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$f'(x) > 0$ khi $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy GTLN và GTNN của hàm số $f(x)$ là:

$$f_{\max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2a^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\ ;\ f_{\min} = f(0) = 1 + a.$$

Như vậy bài toán (*) đã nêu trên ứng với $a = 3$, và $a = 4$.

Trường hợp 4. $a > e^{\sqrt{2}}$.

Đây là trường hợp khó khăn nhất của bài toán. Nếu như cứ theo cách ở trường hợp 3 sẽ không ổn vì bất đẳng thức (2) không còn đúng nữa, khi $a > e^{\sqrt{2}}$. Phải giải quyết khó khăn này bằng cách nào đây? Ta sẽ chứng minh phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt. Hiển nhiên (1) có nghiệm $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta vẫn sử dụng hàm số $h(x)$ ở trường hợp 3.

Ta có $h'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{1-x^2}(x+\sqrt{1-x^2})\ln a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(1-x^2)(1+2x\sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{\ln^2 a} = k \quad (3)$$

Do $a > e^{\sqrt{2}}$ nên $0 < k < \frac{1}{2}$. Đặt $t = x\sqrt{1-x^2}$ suy ra $0 < t < \frac{1}{2}$.

Phương trình (3) trở thành $2t^3 + t^2 = k$ (4)

Ta thấy hàm $2t^3 + t^2$ đồng biến trên $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ và cũng nhận giá trị trên $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, mà $0 < k < \frac{1}{2}$ nên PT (4) có duy nhất nghiệm $t_0 \in \left(0\,;\frac{1}{2}\right)$.

Xét phương trình $t_0 = x\sqrt{1-x^2}$ (5)

$\Leftrightarrow t_0^2 = x^2(1-x^2)$, với $t_0^2 \in \left(0\,;\frac{1}{4}\right)$.

Xét hàm $x^2(1-x^2)$ trong $(0\,;1)$ ta dễ dàng chỉ ra phương trình (5) có đúng hai nghiệm x_1, x_2 khác $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hơn thế nữa ta còn có $0 < x_1 < \frac{1}{\sqrt{2}} < x_2 < 1$.

Vậy phương trình $h'(x) = 0$ có đúng hai nghiệm. Từ đó ta lập được bảng biến thiên của hàm $h(x)$ (h.1).

x	0	x_3	x_1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	x_2	x_4	1
$h'(x)$		−	0	+	0	−	
$h(x)$	$+\infty$	0	$h(x_1)$	0	$h(x_2)$	0	$-\infty$

Hình 1

x	0		x_3		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		x_4		1
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$f(x)$	$1+a$		$f(x_3)$		$2a^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$		$f(x_4)$		$1+a$

Hình 2

Nhìn vào bảng ta dễ thấy PT $h(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt: x_3, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, x_4 và $0 < x_3 < x_1$, $x_2 < x_4 < 1$. Quay trở lại bài toán ban đầu ta có phương trình (1) $\Leftrightarrow$ $h(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 0$. Ta thấy rằng nếu x là nghiệm của $f'(x) = 0$ thì $\sqrt{1-x^2}$ cũng là nghiệm của $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow x_3^2 + x_4^2 = 1 \qquad (6)$$

Rõ ràng khi $x \to 0$ thì $\left(\frac{a^x}{x} - \frac{a^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\right) \to +\infty$

suy ra $f'(x) > 0$ khi $x \in (0; x_3)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ (h. 2).

Ta thấy với $e < a < e^{\sqrt{2}}$ thì $2a^{\frac{1}{\sqrt{2}}} > 1 + a$.

Với $a > e^{\sqrt{2}}$, bằng việc khảo sát hàm $y = 2x^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - x - 1$, ta chứng minh được tồn tại $a_0 > e^{\sqrt{2}}$ sao cho $2a_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 + a_0$.

Từ đó suy ra với $e^{\sqrt{2}} < a < a_0$ thì $2a^{\frac{1}{\sqrt{2}}} > 1 + a$, với $a > a_0$ thì $2a^{\frac{1}{\sqrt{2}}} < 1 + a$.

Đặt $m = \min\left\{2a^{\frac{1}{\sqrt{2}}}; 1+a\right\}$.

Do x_3, x_4 thỏa mãn (6) nên $f(x_3) = f(x_4) = M$. Vậy trong trường hợp $a > e^{\sqrt{2}}$ thì $f_{\max} = f(x_3) = f(x_4) = M$ và $f_{\min} = m$.

• Như vậy bài toán (**) đã được giải một cách trọn vẹn, tuy nhiên theo cách trên thì ở trường hợp 4 ta không thể biểu diễn x_3, x_4 theo a, cũng như GTLN của $f(x)$. Rất mong bạn đọc tiếp tục suy nghĩ và bổ sung để lời giải hoàn thiện hơn.

• Trong trường hợp 4, $a > e^{\sqrt{2}}$ ta có thể tiếp tục khảo sát hàm $g(x)$. Bằng cách dùng nguyên lý Cantor về dãy đoạn thắt, ta sẽ chứng minh được phương trình $g(x) = g(\sqrt{1-x^2})$ có hai nghiệm x_0 và $\sqrt{1-x_0^2}$ khác với $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Rất tiếc do khuôn khổ bài viết, chúng tôi không trình bày ở đây được.

• Ta có thể mở rộng thêm bài toán (**) trên như sau:

Tìm GTLN, GTNN của hàm số

$$f(x) = a^x + a^{\sqrt{1-x^2}}, \text{ với } x \in [-1; 1].$$

Trường hợp $x \in [0; 1]$ đã xét ở trên. Trường hợp $x \in [-1; 0]$, ta thấy $f'(x)$ có dấu không đổi trên $[-1; 0]$, suy ra hàm số $f(x)$ đơn điệu trên đó, từ đó suy ra GTLN, GTNN của hàm số trên $[-1; 1]$.

Rất mong các bạn đọc góp ý cho bài viết trên, chúng tôi xin chân thành cảm ơn.

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

Suy nghĩ về một loại toán quen thuộc

ĐƯỜNG ĐỨC HÀO
(GV THPT Hương Khê, Hà Tĩnh)

Tiếp theo bài báo *Suy nghĩ không cũ về một dạng toán không mới* đã được đăng trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 378 (tháng 12/2008) của tác giả Hà Văn Thắng (GV THPT Yên Dũng 1, Bắc Giang), tôi nhận thấy hầu hết các bài toán về tính tổng hay chứng minh các biểu thức liên quan đến biểu thức tổ hợp mà trước đây phải sử dụng đến công cụ tích phân hoặc đạo hàm để giải thì ta chỉ dùng các công thức biến đổi thuần túy cũng có thể giải được các dạng toán trên. Phần này có thể áp dụng để giảng dạy cho học sinh khối 11 theo chương trình hiện hành.

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ

$$f_1(x) = (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k\ ;$$

$$g_1(x) = (1-x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k x^k\ ;$$

$$f_2(x) = (1+x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k x^k\ ;$$

$$g_2(x) = (1-x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (-1)^k x^k .$$

Suy ra

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)+g_1(x)}{2} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} x^{2k}\ ;$$

$$h_2(x) = \frac{f_2(x)+g_2(x)}{2} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} x^{2k}\ ;$$

$$p_1(x) = \frac{f_1(x)-g_1(x)}{2} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k-1} x^{2k-1}\ ;$$

$$p_2(x) = \frac{f_2(x)-g_2(x)}{2} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} x^{2k+1}\ ;$$

$$f_1(1) = p_2(1) = 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}\ ;$$

$$h_1(1) = p_1(1) = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} = \sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1} = 2^{2n-1}.$$

BỔ ĐỀ. Với $n, k \in \mathbb{N}^*$ và $n \ge k \ge 1$, ta có

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}\ ;\quad \frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

(Xem 12/2008).

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

★ **Thí dụ 1.** *Tính tổng*

$$S_1 = \frac{1}{1.2}C_n^0 + \frac{1}{2.3}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{(n+1).(n+2)}C_n^n.$$

Lời giải. Áp dụng Bổ đề, số hạng tổng quát của S_1 là

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}C_n^k = \frac{1}{k+2}\left(\frac{1}{k+1}C_n^k\right) = \frac{1}{k+2}\cdot\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k+2}C_{n+1}^{k+1}\right) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}C_{n+2}^{k+2}.$$

Vậy
$$S_1 = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 + \ldots + C_{n+2}^{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(2^{n+2} - C_{n+2}^0 - C_{n+2}^1\right)$$

$$= \frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}. \ \square$$

★ **Thí dụ 2.** *Tính tổng*

$$S_2 = 1.2.3.C_n^3 + 2.3.4.C_n^4 + \ldots + (n-2)(n-1)nC_n^n.$$

Lời giải. Áp dụng Bổ đề nhiều lần để biến đổi số hạng tổng quát của S_2 như sau:

$$(k-2)(k-1)kC_n^k = (k-2)(k-1)nC_{n-1}^{k-1}$$

$$= n(k-2)(k-1)C_{n-1}^{k-1} = n(k-2)(n-1)C_{n-2}^{k-2}$$

$$= n(n-1)(k-2)C_{n-2}^{k-2} = n(n-1)(n-2)C_{n-3}^{k-3}.$$

Suy ra

$$S_2 = n(n-1)(n-2)\left(C_{n-3}^0 + C_{n-3}^1 + C_{n-3}^2 + \ldots + C_{n-3}^{n-3}\right)$$

$$= n(n-1)(n-2).2^{n-3}. \ \square$$

★ **Thí dụ 3.** *Tính tổng*

$$S_3 = \frac{1}{1.2.3}C_n^0 + \frac{1}{2.3.4}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}C_n^n$$

Lời giải. Biến đổi số hạng tổng quát của S_3 ta có

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}C_n^k=\frac{1}{(k+2)(k+3)}.\frac{1}{k+1}C_n^k$$

$$=\frac{1}{(k+2)(k+3)}.\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}=\frac{1}{n+1}.\frac{1}{k+3}.\frac{1}{k+2}C_{n+1}^{k+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}.\frac{1}{k+3}.\frac{1}{n+2}C_{n+2}^{k+2}=\frac{1}{n+1}.\frac{1}{n+2}.\frac{1}{k+3}C_{n+2}^{k+2}$$

$=\frac{1}{n+1}.\frac{1}{n+2}.\frac{1}{n+3}C_{n+3}^{k+3}$. Suy ra

$$S_3=\frac{1}{n+1}.\frac{1}{n+2}.\frac{1}{n+3}\left(C_{n+3}^3+C_{n+3}^4+...+C_{n+3}^{n+3}\right)$$

$$=\frac{2^{n+3}-C_{n+3}^0-C_{n+3}^1-C_{n+3}^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{2^{n+4}-n^2-7n-14}{2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

★Thí dụ 4. *Tính tổng*

$$S_4=C_{2n}^0+\frac{1}{3}C_{2n}^2+\frac{1}{5}C_{2n}^4+...+\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}.$$

Lời giải. Ta biến đổi số hạng tổng quát của S_4

$\frac{1}{2k+1}C_{2n}^{2k}=\frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2k+1}$. Suy ra

$$S_4=\frac{1}{2n+1}\left(C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+C_{2n+1}^5+...+C_{2n+1}^{2n+1}\right)$$

$$=\frac{p_2(1)}{2n+1}=\frac{2^{n+1}}{2n+1}.\ \square$$

★Thí dụ 5. *Tính tổng*

$$S_5=\frac{1}{2}C_{2n}^0+\frac{1}{4}C_{2n}^2+\frac{1}{6}C_{2n}^4+...+\frac{1}{2n+2}C_{2n}^{2n}.$$

Lời giải. Biến đổi số hạng tổng quát của S_5 như sau:

$$\frac{1}{2k+2}C_{2n}^{2k}=\frac{1}{2k+2}.\frac{2k+1}{2k+1}.\frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+1)(2n+2)}.C_{2n}^{2k}$$

$$=\frac{(2k+1)}{(2n+1)(2n+2)}C_{2n+2}^{2k+2}$$

$$=\left(\frac{2k+2}{(2n+1)(2n+2)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right)C_{2n+2}^{2k+2}$$

$$=\frac{(2k+2)}{(2n+1)}\frac{1}{(2k+2)}C_{2n+1}^{2k+1}-\frac{C_{2n+2}^{2k+2}}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$=\frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2k+1}-\frac{C_{2n+2}^{2k+2}}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\Rightarrow S_5=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2k+1}-\frac{C_{2n+2}^{2k+2}}{(2n+1)(2n+2)}\right)$$

$$=\frac{2^{2n}}{2n+1}-\frac{2^{2n+1}-1}{(2n+1))(2n+2)}=\frac{n.2^{2n+1}+1}{(2n+1)(2n+2)}.\ \square$$

★Thí dụ 6. *Chứng minh rằng*

$$S_6=2C_{2n}^2+4C_{2n}^4+6C_{2n}^6+...+2nC_{2n}^{2n}=n.2^{2n-1}.$$

Lời giải. Vận dụng bổ đề trên ta có

$2kC_{2n}^{2k}=2nC_{2n-1}^{2k-1}$. Do đó

$$S_6=2n\left(C_{2n-1}^1+C_{2n-1}^3+C_{2n-1}^5+...+C_{2n-1}^{2n-1}\right)$$

$$=2n.2^{2n-2}=n.2^{2n-1}.\ \square$$

★Thí dụ 7. *Tính tổng*

$$S_7=\frac{2^2}{2}C_{2n}^1+\frac{2^4}{4}C_{2n}^3+\frac{2^6}{6}C_{2n}^5+...+\frac{2^{2n}}{2n}C_{2n}^{2n-1}.$$

Lời giải. Ta có

$\frac{2^{2k}}{2}C_{2n}^{2k-1}=2^{2k}\frac{1}{2k}C_{2n}^{2k-1}=2^{2k}\frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2k}$. Suy ra

$$S_7=\frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}C_{2n+1}^{2k}2^{2k}\right)=\frac{1}{2n+1}\left(h_2(2)-C_{2n+1}^0\right)$$

$$=\frac{3(3^{2n}-1)}{2(2n+1)}.\ \square$$

★Thí dụ 8. *Chứng minh rằng*

$$S_7=1.2^2C_{2n}^2+2.2^4C_{2n}^4+3.2^6C_{2n}^6+...+n.2^{2n}C_{2n}^{2n}$$
$$=n(3^{2n-1}+1).$$

Lời giải. Ta biến đổi số hạng tổng quát như sau:

$k.2^{2k}C_{2n}^{2k}=2^{2k-1}.2kC_{2n}^{2k}=2^{2k-1}.2n.C_{2n-1}^{2k-1}$. Do đó

$$S_8=2n\left(C_{2n-1}^1 2^1+C_{2n-1}^3 2^3+...+C_{2n-1}^{2n-1}2^{2n-1}\right)$$

$$=2n\frac{(1+2)^{2n-1}-(1-2)^{2n-1}}{2}=n(3^{2n-1}+1).\ \square$$

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $0<a<b$, $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$\frac{b-a}{1}C_n^0+\frac{b^2-a^2}{2}C_n^1+\frac{b^3-a^3}{3}C_n^2+\frac{b^4-a^4}{4}C_n^3+...$$
$$+\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}C_n^n=\frac{(1+b)^{n+1}-(1+a)^{n+1}}{n+1}.$$

Bài 2. Cho $a>0$, $n\in\mathbb{N}^*$. Hãy tính tổng

$$1.2C_{n+1}^1+3.4.a^2C_{n+1}^2+5.6.a^4C_{n+1}^3+7.8.a^6C_{n+1}^4$$
$$+...+(2n+1)(2n+2)a^{2n}C_{n+1}^{n+1}$$

CÁC LỚP THCS

Bài T1/387. (Lớp 6) Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên gồm 2009 chữ số, được viết bởi các chữ số 0, 2, 7, 9 và có tổng các chữ số bằng 7209 sao cho số đó chia hết cho 2007.

NGUYỄN VIỆT HOÀNG
(Hà Nội)

Bài T2/387. (Lớp 7) Cho n số nguyên lẻ $a_1, a_2, ..., a_n$ ($n > 2007$) thoả mãn điều kiện

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{2005}^2 = a_{2006}^2 + a_{2007}^2 + ... + a_n^2.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của n và chỉ ra một bộ số $(a_1, a_2, ..., a_n)$ thoả mãn với n tìm được.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/387. Tính

$$S = \frac{2^3-1}{2^3+1} \times \frac{3^3-1}{3^3+1} \times ... \times \frac{2009^3-1}{2009^3+1}.$$

PHAN THẾ HẢI
(GV CĐSP Bà Rịa, Vũng Tàu)

Bài T4/387. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC > AB$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AB = AD$. Qua D dựng đường vuông góc với BC tại E. Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE tại H. Chứng minh rằng $AH < \frac{\sqrt{2}}{2} AC$.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên- Huế)

Bài T5/387. Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Lấy điểm E trên dây cung AB (E khác A và B). Qua E vẽ dây cung CD của đường tròn (O). Trên hai tia DA, DB lấy hai điểm P, Q đối xứng nhau qua E. Chứng minh rằng đường tròn (I) tiếp xúc với PQ tại E và đi qua C luôn đi qua một điểm cố định khi E di động trên dây cung AB.

BÙI VĂN CHI
(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/387. Trong các ngũ giác lồi có tổng các bình phương của các đường chéo bằng 1, tìm ngũ giác có tổng các lập phương độ dài của các cạnh nhỏ nhất.

TRỊNH NGỌC DƯƠNG
(SV Lớp A2- K63, ĐH Dược Hà Nội)

Bài T7/387. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} - y^2 = 2\sqrt{2} \\ \sqrt[4]{2x} + 2\sqrt{6-x} + 2\sqrt{2}y = 8 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

TRỊNH XUÂN TÌNH
(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Nội)

Bài T8/387. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin A}{\tan\frac{B}{2}} + \frac{\sin B}{\tan\frac{C}{2}} + \frac{\sin C}{\tan\frac{A}{2}} \geq \frac{9}{2}$$

trong đó A, B, C lần lượt là số đo ba góc trong tam giác. Đẳng thức xảy ra khi nào?

HOÀNG SỸ LUYỆN
(GV THPT-ĐTNT Quỳ Châu, Quỳ Châu, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/387. Cho tam giác ABC. P là một điểm nằm trong tam giác thoả mãn $PA = PB + PC$. Gọi R là điểm chính giữa cung AB chứa P của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP, S là điểm chính giữa cung AC chứa P của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACP. Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BPS và CPR tiếp xúc nhau.

TẠ HỒNG SƠN
(SV K50A, ĐH Kinh tế Quốc dân)

Bài T10/387. Có tồn tại hay không hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời hai điều kiện

i) f liên tục trên $\mathbb{R}$;

ii) $f(x+2008)(f(x)+\sqrt{2009})=-2010, \forall x \in \mathbb{R}$.?

NGUYỄN TÀI CHUNG
(*GV THPT KBang, KBang, Gia Lai*)

Bài T11/387. Cho dãy số (u_n) $(n = 1, 2, ...)$ được xác định như sau

$$u_1 = 2.1;\ u_{n+1} = \frac{-2u_n^2 + 5u_n}{-u_n^2 + 2u_n + 1}, n = 1, 2, ...$$

Tìm $\lim(u_1 + u_2 + ... + u_n)$.

KIỀU ĐÌNH MINH
(*GV THPT Thanh Ba, Thanh Ba, Phú Thọ*)

Bài T12/387. Trong mặt phẳng cho hai tam giác ABC, $A'B'C'$ với r, r' thứ tự là bán kính các đường tròn nội tiếp chúng, còn R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng với mọi điểm P trong mặt phẳng đó ta có bất đẳng thức

$$\left(\sin\frac{B'}{2}+\sin\frac{C'}{2}\right)PA + \left(\sin\frac{C'}{2}+\sin\frac{A'}{2}\right)PB + \left(\sin\frac{A'}{2}+\sin\frac{B'}{2}\right)PC \geq \frac{6rr'}{R'}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

TRẦN QUANG HÙNG
(*GV khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội*)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/387. Đặt một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng U = 60V vào hai đầu một đoạn mạch RLC mắc nối tiếp thì cường độ dòng điện qua đoạn mạch là $i_1 = I_0\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ (A).

Nếu nối tắt hai bản cực của tụ điện C bằng một dây dẫn điện thì cường độ dòng điện qua đoạn mạch là $i_2 = \cos I_0 \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$(A).

Tìm biểu thức của điện áp ở hai đầu đoạn mạch.

NGUYỄN QUANG HẬU
(*Hà Nội*)

Bài L2/387. Từ một khí cầu cách mặt đất một khoảng 15m đang hạ thấp với vận tốc v_1 = 2m/s người ta phóng ra một vật theo phương thẳng đứng, hướng lên trên với vận tốc v_2= 18m/s đối với mặt đất.Tìm khoảng cách lớn nhất giữa khí cầu và vật trong quá trình rơi . Cho g = 10m/s^2.

PHẠM XUÂN MAI
(*GV THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

T1/387. (For 6th grade) Prove that there exists a 2009-digits multiple of 2007 so that it is formed by four digits 0, 2, 7 and 9 and the sum of its digits is 7209.

T2/387. (For 7th grade) Let $a_1, a_2, ..., a_n$ be n odd integers ($n > 2007$) satisfying the following condition:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{2005}^2 = a_{2006}^2 + a_{2007}^2 + ... + a_n^2.$$

Determine the least possible value of n and construct an example of such a collection $(a_1, a_2, ..., a_n)$ for the smallest value found above.

T3/387. Determine the value of S, given that

$$S = \frac{2^3-1}{2^3+1} \times \frac{3^3-1}{3^3+1} \times ... \times \frac{2009^3-1}{2009^3+1}.$$

T4/387. Let ABC be a right triangle with right angle at A and $AC > AB$. Choose a poind D on AC such that $AB = AD$. Let E be the foot of the altitude from D onto BC. The line passing through A and parallel to BC meets DE at H. Prove that $AH < \frac{\sqrt{2}}{2}AC$.

(*Xem tiếp trang 27*)

★Bài T1/383. *Cho a, b, c là các số nguyên sao cho*

$$A = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{2}$$

là số chính phương. Chứng minh rằng

$$a = b = c.$$

Lời giải. Biến đổi điều kiện đề bài như sau

$$4A = a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc+a^2+c^2-2ac$$

$$\Leftrightarrow 4A = (a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2 \quad (1)$$

Do vai trò a, b, c như nhau, không giảm tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$.

Đặt $a-b = x \geq 0$; $b-c = y \geq 0$ thì

$$a-c = a-b+b-c = x+y.$$

$$(1) \Leftrightarrow 4A = x^2+y^2+(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow 2A = x^2+y^2+xy \quad (2)$$

Nếu hai số x, y đều lẻ hoặc khác tính chẵn lẻ thì vế phải của (2) là số lẻ, trong khi vế trái là số chẵn, vì vậy để có (2) thì cả hai số x, y đều là số chẵn. Xét hai trường hợp sau:

1) Nếu $A = 0$ thì do $x \geq 0$, $y \geq 0$ nên từ (2) suy ra $x = y = 0$, lúc đó $a = b = c$.

2) Nếu $A = k^2$ với $k > 0$ thì ít nhất một trong hai số x, y phải lớn hơn 0. Đặt $x = 2x_1$, $y = 2y_1$ thì vế phải của (2) chia hết cho 4 nên $A = k^2$ phải chẵn, suy ra $k = 2k_1$ với $k_1 > 0$.

Từ đó (2) $\Leftrightarrow 2^3k_1^2 = 2^2x_1^2+2^2y_1^2+2^2x_1y_1$

$$\Leftrightarrow 2k_1^2 = x_1^2+y_1^2+x_1y_1 \quad (3)$$

Với $A = k^2 = n$, lập luận như trên n lần ($n \geq 1$) dẫn đến $2^{2n+1}k_n^2 = 2^{2n}x_n^2+2^{2n}y_n^2+2^{2n}x_ny_n$.

trong đó k_n là số nguyên dương nhưng đẳng thức trên không thể xảy ra, vì lúc đó $2n = 2k^2 = 2.2^nk_n^2$ $\Rightarrow n = 2^nk_n^2$ (vô lí).

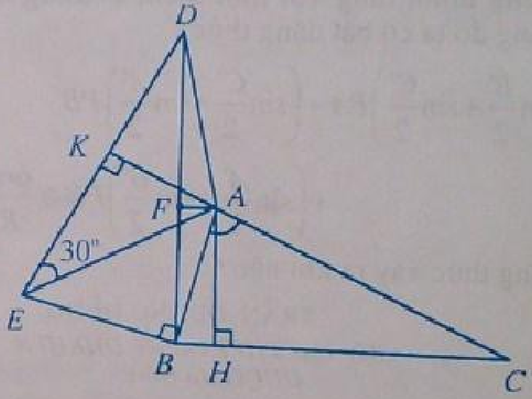
Vậy số $A = \dfrac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{2}$ chỉ có thể là số chính phương khi $a = b = c$, lúc đó $A = 0$. □

Nhận xét. Các bạn giải bài này đều lập luận không chặt chẽ.

VIỆT HẢI

★Bài T2/383. *Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = 75°$. Kẻ đường cao AH, biết $AH = \dfrac{BC}{2}$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.*

Lời giải. Dễ thấy tam giác ABC không cân tại A và góc B nhọn nên có thể giả sử $AB < AC$.



Vẽ các tam giác ABE và CBD vuông cân tại B (E nằm khác phía C so với AB và D nằm cùng phía A so với BC). Khi đó $\Delta EBD = \Delta ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DEB} = 75°$ và do đó $\widehat{AED} = 30°$.

Kéo dài CA cắt DE tại K, dễ thấy $\widehat{EAK} = 60°$ $\Rightarrow \widehat{AKE} = 90°$. Hạ $AF \perp BD$, có $BF = AH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{BD}{2} \Rightarrow BF = FD \Rightarrow AB = AD$.

Không ảnh hưởng đến kết quả của bài toán, đặt $AB = AD = BE = 1$.

Dễ thấy $AE = \sqrt{2}$, $AK = \dfrac{1}{2}AE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$$KD = \sqrt{AD^2-AK^2} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = AK,$$

nên tam giác AKD vuông cân tại K. Do đó $\widehat{DAK} = 45°$ và $\widehat{DAB} = 45° + 60° + 45° = 150°$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = 15^o$. Từ đó suy ra $\widehat{ABC} = 75^o$. Vậy tam giác ABC cân tại C (đpcm).

(*Lưu ý*. Nếu $AB > AC$ thì ΔABC cân tại B). ❒

Nhận xét. 1) Số các bạn tham giải không nhiều. Hầu hết các lời giải đều nhầm lẫn giả thiết $\widehat{ABC} = 75^o$.

2) Bằng cách dựng hình vuông, $BCEF$ (cùng phía với ΔABC đối với BC) ta thấy bài toán đã cho có liên quan đến bài toán quen thuộc:

"Trong hình vuông BCEG lấy điểm A sao cho $\widehat{AGB} = \widehat{ABG} = 15^o$. Chứng minh rằng ΔAEC là tam giác đều" (từ đó suy ra $\widehat{BAC} = 75^o$).

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/383. *Cho hai số nguyên dương x, y với $x > 1$ và thoả mãn điều kiện $2x^2 - 1 = y^{15}$. Chứng minh rằng x chia hết cho 15.*

Lời giải. *) Trước tiên, ta chứng minh $x \vdots 3$.

Đặt $y^5 = a$, $a \in \mathbb{N}^*$, ta có $2x^2 - 1 = y^{15}$

$\Leftrightarrow 2x^2 = a^3 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 = (a+1)(a^2 - a + 1)$ (1)

Gọi $d = ƯCLN\,(a+1\,;\, a^2 - a + 1)$, ta có $a + 1 \vdots d$, $a^2 - a + 1 \vdots d$. Suy ra

$(a^2 - a + 1) - (a+1)(a-2) = 3 \vdots d \Rightarrow d = 1$ hoặc $d = 3$.

•Nếu $d = 1$ thì từ (1) ta có

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+1=2 \\ a^2-a+1=x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a+1=x^2 \\ a^2-a+1=2 \end{cases} \text{(loại vì } a \notin \mathbb{N}^*) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ x=1 \end{cases} \text{(loại vì phải có } x>1).$$

• Nếu $d = 3$ thì từ (1) ta có $2x^2 \vdots 9$.

Vì $ƯCLN(2, 9) = 1$ nên $x^2 \vdots 9 \Rightarrow x \vdots 3$ (*)

*) Bây giờ ta chứng minh $x \vdots 5$.

Đặt $y^3 = b$, $b \in \mathbb{N}^*$, ta có

$2x^2 - 1 = b^5 \Leftrightarrow 2x^2 = b^5 + 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 = (b+1)(b^4 - b^3 + b^2 - b + 1)$ (2)

Gọi $k = ƯCLN\,(b+1; b^4 - b^3 + b^2 - b + 1)$, ta có

$b + 1 \vdots k$; $b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 \vdots k$

$\Rightarrow (b^4 - b^3 + b^2 - b + 1) - (b+1)(b^3 - 2b^2 + 3b - 4) = 5 \vdots k$

$\Rightarrow k = 1$ hoặc $k = 5$.

• Nếu $k = 1$ thì từ (2) ta có

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b+1=2 \\ b^4-b^3+b^2-b+1=x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} b+1=x^2 \\ b^4-b^3+b^2-b+1=2 \end{cases} \text{(loại vì } b \notin \mathbb{N}^*) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ x=1 \end{cases} \text{(loại vì phải có } x>1).$$

• Nếu $k = 5$ thì từ (2) ta có $2x^2 \vdots 25$. Vì ƯCLN $(2, 25) = 1$ nên $x^2 \vdots 25 \Rightarrow x \vdots 5$ (**).

Từ (*) và (**) suy ra $x \vdots 15$. ❒

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt là:

Hà Nội: *Lý Phụng Hoàng*, 9A1, THPT DL Nguyễn Siêu, Q. Cầu Giấy; **Nghệ An:** *Trần Đại Dương*, 9A, THCS Diễn Hùng, Diễn Châu, *Nguyễn Văn Thắng*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

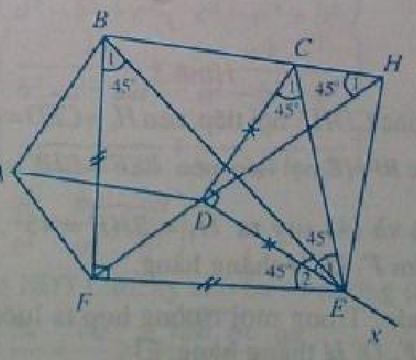
TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/383. *Cho hình bình hành ABCD. Trên nửa mặt phẳng bờ CD không chứa điểm B vẽ tia Dx vuông góc với DC tại D. Trên tia Dx lấy điểm E sao cho DE= DC. Vẽ tam giác BEF vuông cân tại F sao cho F, D nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ BC. Kẻ EH vuông góc với BC tại H. Chứng minh ba điểm F, D và H thẳng hàng.*

Lời giải. Đối với bài toán này ta cần xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $\widehat{BAD} = 45^o$. Lúc đó $H \equiv C$. Vì $\widehat{BCD} = \widehat{BCF} = \widehat{BHF} = 45^o$, nên ba điểm F, D và H thẳng hàng.

Trường hợp 2. Góc $\widehat{BAD}$ nhọn, khác 45^o (h.1)



Hình 1

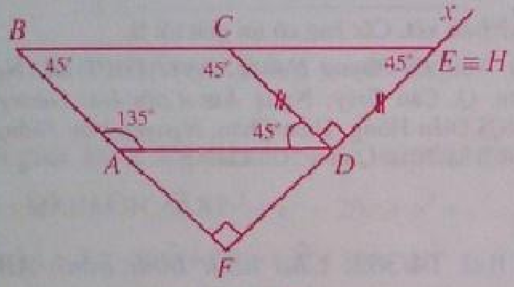
Do tam giác CDE vuông cân tại D, nên $\widehat{C_1} = \widehat{E_1} = 45^\circ$. Tứ giác $CDEH$ nội tiếp, nên $\widehat{H_1} = \widehat{CHD} = \widehat{E_1} = 45^\circ$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{CD}$) (1)

Mặt khác, tứ giác $BFEH$ nội tiếp, suy ra $\widehat{E_2} = \widehat{BHF} = 45^\circ$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BF}$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{H_1} = \widehat{BHF} = 45^\circ$, do đó hai tia HD và HF trùng nhau, nghĩa là ba điểm F, D, H thẳng hàng.

Trường hợp 3. $\widehat{BAD} = 90^\circ$. Chứng minh tương tự trường hợp 2.

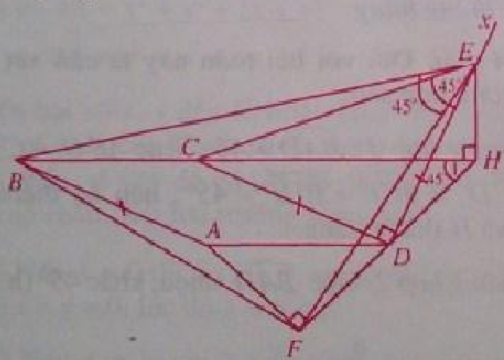
Trường hợp 4. $\widehat{BAD} = 135^\circ$ (h. 2)



Hình 2

Trong trường hợp này B, C, E thẳng hàng và $H \equiv E$. Suy ra $\widehat{CHD} = \widehat{CHF} = 45^\circ$, dẫn đến ba điểm F, D, H thẳng hàng.

Trường hợp 5. Gốc $\widehat{BAD}$ tù, khác 135° (h. 3)



Hình 3

Vì tứ giác $CDHE$ nội tiếp, nên $\widehat{H_1} = \widehat{CED} = 45^\circ$ (3)

Tứ giác $BFHE$ nội tiếp, nên $\widehat{BEF} = \widehat{BHF} = 45^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{H_1} = \widehat{BHF} = 45^\circ$. Do đó ba điểm F, D, H thẳng hàng.

Kết luận. Trong mọi trường hợp ta luôn có ba điểm F, D, H thẳng hàng. ❐

Nhận xét. Một số bạn nhận xét đúng: Đề bài thừa giả thiết $ABCD$ là hình bình hành. Đa số các bạn không xét đầy đủ các trường hợp như đã nêu ở lời giải trên. Những bạn sau có lời giải tương đối tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thế Bảo*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Phan Thanh Tùng*, 7D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Bình Định:** *Cao Xuân Thắng*, 9A7, THCS Hoài Đức, Hoài Nhơn; **Khánh Hòa:** *Vũ Ngọc Cương*, 8[6], THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

QUANG PHÚC

★ **Bài T5/383**. *Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông có cạnh huyền là a. Chứng minh rằng phương trình* $-ax^2 + bx + c = 0$ *có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *thoả mãn điều kiện* $-\sqrt{2} < x_1 < x_2 < \sqrt{2}$.

Lời giải. Từ điều kiện đã cho ta thấy a, b, c là các số dương, $a > c$ và $a^2 = b^2 + c^2$ (Định lí Pythagore). Do đó $-ac < 0$. Vì vậy phương trình $-ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu. Giả sử $x_1 < 0 < x_2$ (1)

Cách 1. Theo định lí Viète ta có

$$x_1 + x_2 = \frac{b}{a}\ ;\ x_1x_2 = -\frac{c}{a} \text{ nên}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2 + 2ac}{a^2} < \frac{b^2 + a^2 + c^2}{a^2} = 2.$$

Suy ra $x_1^2 < 2$ và $x_2^2 < 2$ (2)

Từ (1) và (2) dẫn đến $-\sqrt{2} < x_1 < x_2 < \sqrt{2}$ (đpcm).

Cách 2. Giả sử $x_0 \in \{x_1, x_2\}$ thì $-ax_0^2 + bx_0 + c = 0$ $\Leftrightarrow ax_0^2 = bx_0 + c$.

Bình phương hai vế và áp dụng BĐT Bunyakovsky ta được

$$a^2x_0^4 = (bx_0 + c)^2 \le (b^2 + c^2)(x_0^2 + 1) = a^2(x_0^2 + 1),$$

suy ra $x_0^4 < x_0^2 + 1 \Rightarrow x_0^4 < x_0^2 + 2 \Leftrightarrow (x_0^2 - 2)(x_0^2 + 1) < 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x_0 < \sqrt{2}$ (3)

Từ (1) và (3) ta có $\sqrt{2} < x_1 < x_2 < \sqrt{2}$. ❐

Nhận xét. 1) Đa số các bạn đều làm theo một trong hai cách trên. Có một số bạn đã tính cụ thể nghiệm x_1, x_2 rồi mới đánh giá nên lời giải quá dài. Riêng bạn *Nguyễn Thế Bảo*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc** đã nêu và chứng minh được bài toán tổng quát như sau:

Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông có cạnh huyền là a và m, n, p là các số dương. Chứng minh rằng phương trình $-ax^2 + bx + c = 0$ *có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *thỏa mãn điều kiện*

$$-\frac{1}{mn}\sqrt{n^4+m^2p^2} < x_1 < x_2 < \frac{1}{mn}\sqrt{n^4+m^2p^2}.$$

2) Ngoài bạn *Bảo*, các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: *Lý Phụng Hoàng*, 9A1, THPT Nguyễn Siêu, Cầu Giấy; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Hương Lý*, 7A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong, *Chu Hương Giang*, 9A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Hậu*, 8A, *Đỗ Công Huân*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Nguyễn Thế Tiến*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, *Võ Duy Văn*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Quảng Ngãi:** *Phạm Quốc Việt*, 9A, THCS Nguyễn Tự Lân, Bình Sơn; **Quảng Trị:** *Nguyễn Anh Thư*, 7E, THCS Phan Đình Phùng, Đông Hà.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T6/383. *Trong đa giác lồi 2009 đỉnh người ta cắt theo tất cả các đường chéo của đa giác chia đa giác thành các phần, mỗi phần là một đa giác lồi nhỏ. Hỏi rằng trong những đa giác con thu được bằng cách này, số đỉnh của đa giác có nhiều cạnh nhất là bao nhiêu?*

Lời giải. (*Theo đa số các bạn*).

Xét bài toán với đa giác lồi ban đầu là P có n đỉnh (n lẻ, $n \geq 5$) và các đa giác tạo thành sau khi thực hiện phép cắt đa giác là $A(P)$.

Nhận xét rằng, mỗi đường thẳng chứa cạnh của $A(P)$ đi qua hai đỉnh của P và qua mỗi đỉnh của P có không quá hai đường thẳng chứa cạnh của $A(P)$. Do đó, số cạnh của $A(P)$ không thể nhiều hơn số cạnh của P hay $A(P)$ có không quá n đỉnh.

Với n ($n \geq 5$) lẻ, ta chọn P là đa giác đều thì các đường chéo của P không đồng quy. Xét đa giác $A*(P)$ chứa tâm của P. Từ tính chất của đa giác đều, từ một đỉnh của P có hai đường chéo chứa hai cạnh khác nhau của $A*(P)$ nên đa giác $A*(P)$ có n cạnh và n đỉnh.

Vậy với $n = 2009$ thì đa giác con thu được sau khi cắt có nhiều nhất là 2009 cạnh, 2009 đỉnh. ❒

Nhận xét. 1) Khi n chẵn ($n \geq 6$) thì $A(P)$ có nhiều nhất là $n-1$ đỉnh.

2) Các bạn bạn có lời giải tốt là:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Mạnh Quân*, 10A1 THPT Chuyên; **Hà Nội:** *Trần Thế Khải*, 11A1, khối THPT Chuyên Toán, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** *Nguyễn Tuấn Dũng*, 10T, *Lê Văn Huỳnh*, 12T1, THPT Chuyên Nguyễn Trãi; **Hà Nam:** *Trần Trung Kiên*, 11T, THPT Chuyên Hà Nam; **Quảng Ninh:** *Hoàng Minh Tuấn*, 10T, THPT Chuyên Hạ Long; **Thanh Hóa:** *Lê Huy Toàn*, Đội 6, Hoằng Minh, Hoằng Hóa, *Đào Quang Hà*, 11T, *Trịnh Đăng Sơn*, 10T, THPT Chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Chế Hoàng Thông*, 10A1, THPT Chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** *Hồ Phạm Thiều*, 10A1, THPT Lê Hữu Trác 1, Hương Sơn; **Bình Định:** *Nguyễn Đông Tiến*, 11T, THPT Chuyên Lê Quý Đôn TP. Quy Nhơn; **An Giang:** *Nguyễn Văn Huyện*, 11A2, THPT Nguyễn Trung Trực, TT Tri Tôn; **Cần Thơ:** *Hồ Diên Tuấn Anh*, 11A1, THPT Chuyên Lý Tự Trọng; **Vĩnh Long:** *Ngô Trung Hiếu*, 11A1, THPT Tân Lược.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T7/383. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = \frac{ab+bc}{a^2-b^2+c^2} + \frac{bc+ca}{b^2-c^2+a^2} + \frac{ca+ab}{c^2-a^2+b^2}$$

trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác ABC và abc = 1.

Lời giải. Nhận xét rằng T chỉ đạt giá trị nhỏ nhất trong trường hợp ΔABC là tam giác nhọn. Thật vậy,

• Nếu tam giác ABC vuông (chẳng hạn tại A) thì $c^2 - a^2 + b^2 = 0$, biểu thức T không xác định.

• Nếu tam giác ABC tù (chẳng hạn tại A). Chọn $b = c = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \alpha$, (với $\alpha \in \mathbb{R}$ đủ nhỏ), $a = \frac{1}{bc}$. Khi đó rõ ràng $T \to -\infty$ khi $\alpha \to 0$.

Lúc này T không đạt giá trị nhỏ nhất.

• Xét trường hợp tam giác ABC nhọn. Khi đó $a^2 - b^2 + c^2, b^2 - c^2 + a^2, c^2 - a^2 + b^2$ là các số dương. Áp dụng BĐT quen thuộc

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}, \forall x, y > 0, \text{ ta thấy}$$

$$T = ab\left(\frac{1}{a^2-b^2+c^2} + \frac{1}{c^2-a^2+b^2}\right)$$
$$+bc\left(\frac{1}{b^2-c^2+a^2} + \frac{1}{a^2-b^2+c^2}\right)$$
$$+ca\left(\frac{1}{c^2-a^2+b^2} + \frac{1}{b^2-c^2+a^2}\right)$$
$$\geq 2\left(\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2}\right).$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta có

$$\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{ab}{c^2} \cdot \frac{bc}{a^2} \cdot \frac{ca}{b^2}} = 3.$$

Do đó $T \ge 6$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Lúc này ΔABC là tam giác đều. ❐

Nhận xét. 1) Nhiều bạn lập luận không chính xác khi nhận xét rằng các số $a^2 - b^2 + c^2$, $b^2 - c^2 + a^2$, $c^2 - a^2 + b^2$ luôn dương, điều này chỉ đúng khi tam giác ABC nhọn.

2) Một số trường hợp 2 bạn cùng để tên trong bài giải là không đúng quy định nên không được tính điểm, mong các bạn lưu ý. Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

Hải Dương: *Lê Văn Huỳnh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Quý*, 10 A1 Toán, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; *Đào Trọng Anh*, 11A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, Long Biên; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Tuấn Linh*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Bến Tre:** *Lê Phúc Lữ*, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Trí Nam*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Khiết; **Hà Tĩnh:** *Hồ Phạm Thiều*, 10A1, THPT Lê Hữu Trác 1, Hương Sơn; **Thái Bình:** *Phạm Tuấn Anh*, 12A1, THPT Thái Phúc, Thái Thụy; **Cà Mau:** *Nguyễn Phạm Tuấn Anh*, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân*, 10A1, *Phan Quốc Khánh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

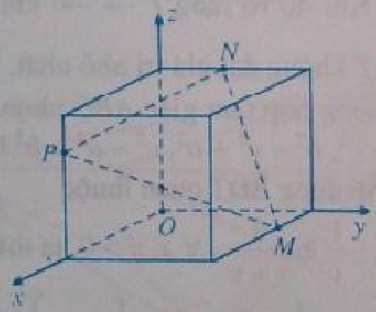
NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T8/383.** *Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trên ba cạnh đôi một chéo nhau của hình lập phương thứ tự lấy ba điểm M, N, P. Xác định vị trí M, N, P để tam giác MNP có*

1) Chu vi nhỏ nhất.

2) Diện tích nhỏ nhất.

Lời giải



1) *Bổ đề*

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}+\sqrt{x_3^2+y_3^2+z_3^2}$$
$$\ge\sqrt{(x_1+x_2+x_3)^2+(y_1+y_2+y_3)^2+(z_1+z_2+z_3)^2}$$

trong đó các số $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$; $i = 1, 2, 3$.

Chứng minh. Xét các vectơ

$\overrightarrow{u_1}=(x_1;y_1;z_1)$, $\overrightarrow{u_2}=(x_2;y_2;z_2)$, $\overrightarrow{u_3}=(x_3;y_3;z_3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_3}=(x_1+x_2+x_3;\ y_1+y_2+y_3;\ z_1+z_2+z_3)$.

Từ bất đẳng thức $|\overrightarrow{u_1}|+|\overrightarrow{u_2}|+|\overrightarrow{u_3}|\ge|\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_3}|$ suy ra bất đẳng thức trong bổ đề được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_2}=k\overrightarrow{u_1}$; $\overrightarrow{u_3}=m\overrightarrow{u_1}$ $(k, m\in\mathbb{R}^+)$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết cạnh của hình lập phương bằng 1. Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ và giả sử các điểm M, N, P là $M(x\,;1\,;0)$, $N(0\,;y\,;1)$, $P(1\,;0\,;z)$ với $x, y, z \in [0\,;1]$.

Ta có chu vi tam giác MNP là

$$Q=\sqrt{x^2+(1-y)^2+1}+\sqrt{y^2+(1-z)^2+1}+\sqrt{z^2+(1-x)^2+1}.$$

Áp dụng bổ đề và bất đẳng thức quen thuộc $a^2+b^2\ge\frac{1}{2}(a+b)^2$, $(a, b\in\mathbb{R})$, ta được

$$Q\ge\sqrt{(x+y+z)^2+(3-x-y-z)^2+3^2}\ge\sqrt{\frac{9}{2}+9}=\frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Do đó chu vi của tam giác MNP có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Giá trị đó đạt được khi $x=y=z=\frac{1}{2}$ hay M, N, P là trung điểm của ba cạnh đôi một chéo nhau của hình lập phương.

2) Ta có $\overrightarrow{MN}=(-x\,;y-1\,;1)$, $\overrightarrow{MP}=(1-x\,;-1\,;z)$.

Diện tích tam giác $S_{MNP}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}]\right|$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(xy-y+1)^2+(yz-z+1)^2+(zx-x+1)^2}.$$

Ta có $x,y,z\in[0;1]\Rightarrow xyz+(1-x)(1-y)(1-z)\ge0$

$\Rightarrow x+y+z-(xy+yz+zx)\le1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong ba số x, y, z có một số bằng 0; một số bằng 1; số còn lại có thể nhận giá trị bất kì trong $[0;1]$.

Đặt $t=x+y+z-(xy+yz+zx)$ suy ra $0\le t\le1$ và

$$t=y(1-x)+z(1-y)+x(1-z)$$
$$=z(1-x)+x(1-y)+y(1-z).$$

Gọi biểu thức trong dấu căn là R, ta có

$$R=(xy-y+1)^2+(yz-z+1)^2+(zx-x+1)^2$$
$$=(1-y(1-x))^2+(1-z(1-y))^2+(1-x(1-z))^2$$
$$=3-2t+(y(1-x))^2+(z(1-y))^2+(x(1-z))^2$$

$$=3-2t+t^2-2\big(y(1-x)z(1-y)+z(1-y)x(1-z)+$$
$$+x(1-z)y(1-x)\big).$$

Lưu ý rằng với mọi số thực a, ta có bất đẳng thức $a(1-a)\le\frac{1}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\frac{1}{2}$. Ta được

$$y(1-x)z(1-y)+z(1-y)x(1-z)+x(1-z)y(1-x)$$
$$\le\frac{1}{4}\big(z(1-x)+x(1-y)+y(1-z)\big)=\frac{t}{4}.$$

Suy ra $S_{MNP}\ge 3-\frac{5t}{2}+t^2=\frac{(1-t)(3-2t)}{2}+\frac{3}{2}\ge\frac{3}{2}$.

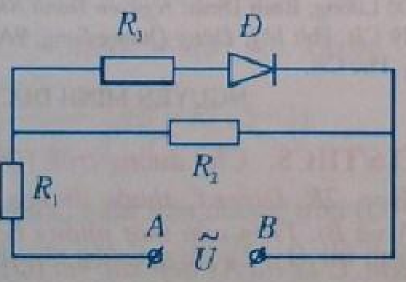
Do đó $S_{MNP}=\frac{1}{2}\sqrt{R}\ge\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $\min S_{MNP}=\frac{\sqrt{6}}{4}$. Giá trị đó đạt được khi trong ba số x, y, z có một số bằng 0 ; một số bằng 1 và số còn lại bằng $\frac{1}{2}$ (hai trong ba điểm M, N, P là hai đỉnh đối diện của hình lập phương ; điểm còn lại là trung điểm của các cạnh không xuất phát từ hai đỉnh kia). ❐

Nhận xét. Đây là bài toán khó nên có rất ít bạn tham gia gửi lời giải.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài L1/383. *Cho mạch điện như hình vẽ.*



Các điện trở $R_1=R_2=R_3=R$, điôt Đ coi là lí tưởng. Đặt vào A, B một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng U. Tìm điện áp hiệu dụng ở hai đầu điện trở R_1.

Lời giải. Ta xét trong khoảng thời gian $t\gg T$, ở đây T là chu kì dòng điện.

• Trong khoảng thời gian $t_1=\frac{t}{2}$ thì Đ mở nên nhiệt tỏa ra trên điện trở R_1 là

$$Q_1=I_1^2Rt_1=\left(\frac{U}{\frac{3R}{2}}\right)^2Rt_1=\frac{4U^2}{9R}t_1=\frac{2U^2}{9R}t$$

• Trong khoảng thời gian $t_2=\frac{t}{2}$ thì Đ đóng nên nhiệt tỏa ra trên điện trở R_1 là

$$Q_1'=I_1'^2Rt_2=\left(\frac{U}{2R}\right)^2Rt_2=\frac{U^2}{8R}t.$$

• Gọi I là cường độ dòng điện hiệu dụng qua R_1 thì nhiệt tỏa ra trên điện trở R_1 trong thời gian t là

$$Q=Q_1+Q_1'=\frac{2U^2}{9R}t+\frac{U^2}{8R}t=I^2Rt.$$

Suy ra $I=\frac{5U}{6\sqrt{2}R}$.

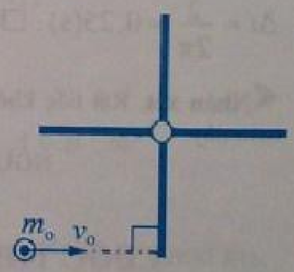
Vậy điện áp hiệu dụng hai đầu điện trở R_1 là

$$U_1=IR_1=\frac{5U}{6\sqrt{2}}.$$ ❐

Nhận xét. Bạn *Hồ Trọng Hùng*, 10A3K37, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An** có lời giải tốt.

NGUYỄN VĂN THUẬN

★Bài L2/383. *Một chiếc thước thợ mỏng, đồng chất hình dấu cộng được đặt trên sàn ngang nhẵn. Thước có thể quay tự do quanh trục cố định là trục đối xứng của thước. Chiều dài mỗi cạnh của thước là l = 30 cm, khối lượng mỗi cạnh là m = 600 g. Thước đang nằm yên thì một hòn bi nhỏ có khối lượng m_0= 800 g bay theo phương ngang với vận tốc v_0= 1,885 m/s đến va chạm đàn hồi với một đầu cạnh của thước (hình vẽ). Cho biết mômen quán tính của thanh mỏng đối với một trục đi qua đầu thanh và vuông góc với thanh là $\frac{1}{3}ml^2$. Tính thời gian và góc quay của thước.*



Lời giải. Mômen quán tính của thước đối với trục Δ đi qua tâm và vuông góc với các cạnh là

$$I = 4.\frac{ml^2}{3} = 0,8l^2$$

Do không có ngoại lực tác dụng gây ra mômen đối với trục Δ nên mômen động lượng của hệ được bảo toàn:

$$m_0v_0l = m_0vl + I\omega \Leftrightarrow 0,8v_0 = 0,8v + 0,8.0,3\omega$$

$$\Leftrightarrow v_0 = v + 0,3\omega \qquad (1)$$

Do va chạm tuyệt đối đàn hồi nên cơ năng bảo toàn:

$$\frac{m_0v_0^2}{2} = \frac{m_0v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \Leftrightarrow v_0^2 = v^2 + 0,3^2\omega^2 \qquad (2)$$

Từ hai phương trình (1) và (2) ta tìm được

$$v = 0 \text{ và } \omega = \frac{v_0}{0,3} = 2\pi \text{ (rad/s)}.$$

Ta thấy sau va chạm vật m_0 dừng lại còn thước quay đều với vận tốc góc ω. Sau khi thước quay được $\frac{1}{4}$ vòng thì nó lại va chạm với vật m_0. Kết quả sau va chạm lần 2 này thì thước dừng lại không quay còn vật m_0 sẽ chuyển động theo hướng ban đầu với vận tốc bằng v_0.

Vậy thước quay được $\frac{1}{4}$ vòng trong thời gian

$$\Delta t = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = 0,25(\text{s}).\ \square$$

Nhận xét. Rất tiếc không có bạn nào giải đúng bài toán này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

CUỘC THI GIẢI TOÁN KỈ NIỆM 45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

★Bài T5/THCS. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thoả mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$1 < \frac{b}{\sqrt{a+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{b+c^2}} + \frac{a}{\sqrt{c+a^2}} < 2.$$

Lời giải. Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a, b, c > 0$ và $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$. Suy ra $0 < a, b, c < \frac{1}{2}$ (do $a + b + c = 1$).

Bởi vậy $a+b^2 < a+b < a+b+c = 1$.

Tương tự $b+c^2 < 1, c+a^2 < 1$.

Do đó

$$\frac{b}{\sqrt{a+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{b+c^2}} + \frac{a}{\sqrt{c+a^2}} > b + c + a = 1.$$

Tiếp theo ta có nhận xét

$$a + b^2 = (a+b) + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{\sqrt{a+b^2}} < 2b.$$

Tương tự có $\frac{c}{\sqrt{b+c^2}} < 2c$, $\frac{a}{\sqrt{c+a^2}} < 2a$.

Bởi vậy

$$\frac{b}{\sqrt{a+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{b+c^2}} + \frac{a}{\sqrt{c+a^2}} < 2(b+c+a) = 2.$$

Các bất đẳng thức đã được chứng minh. $\square$

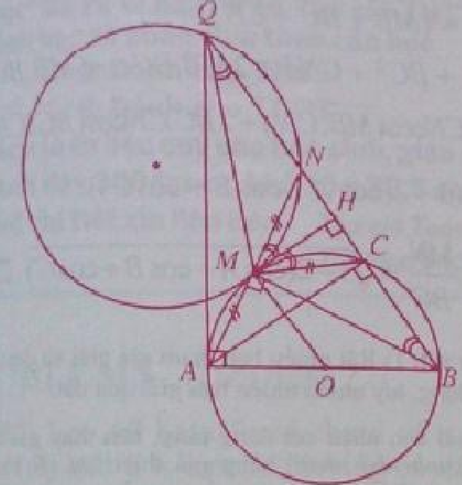
Nhận xét. Các bạn học sinh THCS sau có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Nguyễn Văn Cương*, 9A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Việt Hoàng Phú*, 8B, THCS Gia Khánh, Bình Xuyên, *Đặng Quang Tuấn*, 8C, THCS Vĩnh Tường, *Nguyễn Thế Bảo*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Thắng*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bình Định:** *Nguyễn Danh Nhân*, 9A2, THCS Mỹ Cát, Phù Mỹ; *Đặng Quang Sang*, 9A5, THCS Ngô Mây, Phù Cát.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T6/THCS. *Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Điểm C thuộc đường tròn (C khác A và B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C kẻ tia Ay tiếp xúc với (O). Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AC. Tia BC cắt Ay tại Q, tia AM cắt BC tại N. Hãy xác định vị trí của điểm C để đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tiếp xúc với đường tròn (O).*

Lời giải. Từ giả thiết đề ra ta thấy $AM = MC$. Do tam giác ACN vuông tại C nên M là trung điểm của đoạn AN. Giả sử đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tại M. Qua M kẻ tiếp tuyến chung với hai đường tròn nói trên cắt BQ tại H. Lúc đó do $OM // BQ$, $OM \perp MH$, suy ra $BQ \perp MH$. Trong tam giác cân MNC, đường MH là đường cao nên nó cũng là đường phân giác, nghĩa là $\widehat{NMH} = \widehat{CMH}$ (1). Lại có $\widehat{MQN} = \widehat{NMH}$ (2), $\widehat{MBC} = \widehat{CMH}$ (3).



Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{MQN} = \widehat{MBC}$, dẫn đến tam giác MQB cân tại M. Kết hợp với tam giác MNC cân tại M, tam giác BAN cân tại B ta thu được $QC = BN = AB$.

Từ đây, sử dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông QAB, ta có

$AB^2 = BC.BQ = BC(BC + QC) = BC^2 + BC.AB$,

hay $BC^2 + AB.BC - AB^2 = 0$. Do đó

$$BC = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)AB = R(\sqrt{5}-1).$$

Vậy điểm C nằm trên đường tròn (O) và cách điểm B một khoảng $R(\sqrt{5}-1)$ thì đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tiếp xúc với đường tròn (O). □

Nhận xét. Số lời giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

Bắc Ninh: *Ngô Quang Quân*, 9A, THCS Yên Phong; **Thái Bình:** *Trần Quang Đại*, 9A1, Phân hiệu học sinh giỏi Kiến Xương; **Nghệ An:** *Võ Duy Văn*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Bình Định:** *Nguyễn Danh Nhân*, 9A2, THCS Mỹ Cát, Phù Mỹ; **Bạc Liêu:** *Trần Quang Minh*, 8/4, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Ngọc Quang*, 9P2, THCS Ngô Sỹ Liên, Q. Tân Bình.

HỒ QUANG VINH

★Bài T5/THPT. *1) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương a luôn tồn tại vô số số nguyên dương lẻ n để $a^n + 2009^n$ không chia hết cho n.*

2) Tìm tất cả các số nguyên dương a thỏa mãn điều kiện : Có vô số số nguyên dương lẻ n để $a^n + 2009^n$ chia hết cho n.

Lời giải. • Để cho gọn đặt $b = 2009$.

1) Chọn số nguyên tố $p > a + b$. Theo định lí Fermat nhỏ $a^p + b^p \equiv a + b \not\equiv 0 \pmod{p}$ vì có vô số số nguyên tố $p > a + b$ nên suy ra điều phải chứng minh.

2) Ta chứng minh a có tính chất đã nêu khi và chỉ khi $a \neq 2^k - 2009 = 2^k - b$.

• Giả sử $a + b \neq 2^k$. Gọi m là một ước lẻ của $a + b$ $(m > 1)$. Đặt $x_k = m^k$. Ta chứng minh $a^{x_k} + b^{x_k} \vdots x_k$ bằng quy nạp.

Với $k = 1$, $a^{x_1} + x^{x_1} = a^m + b^m \vdots a + b \vdots m = x_1$.

Giả sử $a^{x_k} + b^{x_k} \vdots x_k$. Khi đó

$a^{x_{k+1}} + b^{x_{k+1}} = a^{x_k m} + b^{x_k m}$

$= (A+B)\sum_{i=0}^{m-1} A^{m-1-i} B^i (-1)^i$.

Ở đó $A = a^{x_k}$; $B = b^{x_k}$.

Theo giả thiết quy nạp $A + B \vdots m^k$

$\Rightarrow A \equiv -B \pmod{m}$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{m-1} A^{m-1-i}.(-B)^i \equiv mA^{m-1} \equiv 0 \pmod{m}$.

Do đó $a^{x_{k+1}} + b^{x_{k+1}} \vdots m^{k+1} = x_{k+1}$.

• Đảo lại, giả sử $a + b = 2^k$. Ta sẽ chứng minh khi đó $\forall n$ lẻ, $n > 1$ thì $a^n + b^n \not\vdots\, m$. Giả sử trái lại tồn tại $n > 1$, n lẻ để $a^n + b^n \vdots n$.

Gọi p là ước nguyên tố bé nhất của n. Khi đó $a^n \equiv -b^n \pmod{p}$. Ta có $a \not\vdots\, p$ và $b \not\vdots\, p$ (vì nếu trái lại suy ra $p \mid a + b = 2^k$).

Do n lẻ nên $a^n \equiv -b^n \equiv (-b)^n \pmod{p}$ (1)

Đặt $A = \{k \in \mathbb{N} : a^k \equiv (-b)^k \pmod{p}\}$

và $h = \min A$.

Nhận xét. Với mỗi $k \in A$ thì $k \,\vdots\, h$.

Thật vậy, giả sử $k = qh + r$, $0 \le r < h$. Ta có $a^k = a^{qh}a^r$, $(-b)^k = (-b)^{qh}(-b)^r$. Vì $a^k \equiv (-b)^k \pmod{p}$, $a^{qh} \equiv (-b)^{qh} \pmod{p}$ nên $a^r \equiv (-b)^r \pmod{p}$.

Nếu $r \ge 1$ thì $r \in A$, $r < h$, trái với cách chọn h. Thành thử $r = 0$. Nhận xét được chứng minh.

Theo (1) $n \in A$. Mặt khác $a^{p-1} \equiv (-b)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ nên $p - 1 \in A$. Theo nhận xét $h \mid n$; $h \mid p - 1$. Nếu $h > 1$ thì h có ước nguyên tố q. Suy ra $q \mid n$; $q \mid p - 1 \Rightarrow q \mid n$, $q < p$. Điều này mâu thuẫn, vì p là ước nguyên tố bé nhất của n. ❐

Nhận xét. Chỉ có 6 bạn giải đúng bài này (tuy cách giải chưa thật ngắn gọn). Đó là các bạn:

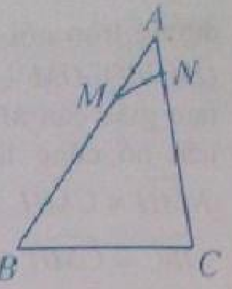
Hà Nội: *Trần Thế Khải*, 11A1, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, *Mai Anh Bằng*, 10A, trường THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Lê Tuấn Tú*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** *Lê Văn Huỳnh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Vương Khôi*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Đặng Cảnh Thiện*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T6/THPT. *Cho tam giác ABC với BC là cạnh nhỏ nhất. Trên AB, AC thứ tự lấy các điểm M, N sao cho BM = BC và CN = CB. Chứng minh rằng*

$$\frac{MN}{BC} = \sqrt{3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C)}.$$

Lời giải. (Theo các bạn *Đào Trọng Anh*, 11A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, Long Biên, **Hà Nội** và *Nguyễn Thị Ngọc An*, 11A1, Khối THPT chuyên, ĐH Vinh, **Nghệ An**).



Từ giả thiết $BM = BC = CN$, chú ý rằng

$\cos(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BC}) = -\cos B$,

$\cos(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{CN}) = -\cos A$,

$\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CN}) = -\cos C$,

ta có

$$MN^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN})^2$$
$$= MB^2 + BC^2 + CN^2 + 2MB.BC\cos(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BC})$$
$$+ 2MB.CN\cos(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{CN}) + 2BC.CN\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CN})$$
$$= BC^2(3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C)).$$

Suy ra $\dfrac{MN}{BC} = \sqrt{3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C)}$. ❐

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn tham gia giải và đều cho lời giải đúng, tuy nhiên nhiều bạn giải quá dài.

2) Một vài bạn nhận xét đúng rằng, nên thay giả thiết "*BC là cạnh nhỏ nhất*" bằng giả thiết "*M, N thứ tự thuộc các tia BA, CA*".

3) Từ kết quả trên, chú ý tới đẳng thức quen thuộc

$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$, ta có $\dfrac{MN}{BC} = \sqrt{1 - 2\dfrac{r}{R}}$.

4) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Hà Nội: *Vũ Minh Thắng*, 12A1, Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hải Dương:** *Lê Văn Huỳnh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Trọng Hoàng Hiệp*, 10T2, THPT chuyên; **Thừa Thiên - Huế:** *Thái Nhật Quang*, 11/1, THPT Quốc Học Huế; **Đắk Lắk:** *Trần Khắc Vỹ*, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đoàn Minh Luân*, 10T, Trường THPT Năng khiếu ĐHQG TP. Hồ Chí Minh; **Quảng Ngãi:** *Lê Nguyễn Khánh*, 11T, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** *Nguyễn Quang Hải*, 9A1, THCS Hoài Tân, Hoài Nhơn; **Đồng Nai:** *Nguyễn Thị Thanh Hoà*, 10T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Bến Tre:** *Lê Phúc Lữ*, 12T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN MINH HÀ

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

T5/387. Let AB be a fixed chord of a given circle (O) and E is a point moving on AB (but distinct from A and B). From E, draw another chord CD. P and Q are two points on the rays DA and DB respectively such that P is the reflection of Q through E. Prove that the circle (I) passing through C and touches PQ at E always passes through a fixed point.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/387. Of all pentagons whose sum of the squares of its diagonals equals 1, which one has the smallest possible sum of cube of its sides.

T7/387. Solve the system of equations:

$$\begin{cases}\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}-y^2=2\sqrt{2}\\ \sqrt[4]{2x}+2\sqrt{6-x}+2\sqrt{2}y=8+\sqrt{2}.\end{cases}$$

T8/387. Prove that

$$\frac{\sin A}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{\sin B}{\tan\frac{C}{2}}+\frac{\sin C}{\tan\frac{A}{2}}\geq\frac{9}{2}$$

where A, B, C are the measures of the angles of a triangle. When does equality occur ?

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/387. In a triangle ABC, let P be a point such that $PA = PB + PC$. R is the midpoint of the chord AB (the one that contains P) of the circumcircle of the triangle ABP and S is the midpoint of the chord AC (containing P) of the circumcircle of the triangle ACP. Prove that circumcircles of the triangles BPS and CPR touch each other.

T10/387. Does there exist a function f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that:
i) f is continuous on $\mathbb{R}$; and
ii) $f(x+2008)(f(x)+\sqrt{2009})=-2010,\ \forall x\in\mathbb{R}$.?

T11/387. Let (u_n) $(n = 1, 2, ...)$ be a sequence given by:

$$u_1=2,1\ ;\ u_{n+1}=\frac{-2u_n^2+5u_n}{-u_n^2+2u_n+1},\ n=1,2,...$$

Find $\lim(u_1+u_2+...+u_n)$.

T12/387. ABC and $A'B'C'$ are two triangles in a given plane whose inradii are r, r', respectively. Let R' be the radius of the circumcircle of the triangle $A'B'C'$. Prove that:

$$\left(\sin\frac{B'}{2}+\sin\frac{C'}{2}\right)PA+\left(\sin\frac{C'}{2}+\sin\frac{A'}{2}\right)PB+\left(\sin\frac{A'}{2}+\sin\frac{B'}{2}\right)PC\geq\frac{6rr'}{R'},$$

for any point P in the same plane. When does equalitiy occur?

Translated by LE MINH HA

luận câu sau "*Tiền bạc đem đến hạnh phúc*". Chúng ta đọc lời bình sau:

"Có lẽ quan điểm trên là đúng. Thật đơn giản, có tiền mới làm được việc, không có tiền thì chẳng làm được gì cả. Những người ham mê ca nhạc, muốn vào xem phải có tiền mua vé. Khi có tiền, người ta sẽ ăn sung mặc sướng. Nếu thiếu tiền thì việc kiếm miếng cơm ăn qua bữa cũng quý lắm rồi, còn sức đâu mà nghĩ đến chuyện hạnh phúc hay không!".

Tuy nhiên, có những người chỉ cần nhìn thấy được thần tượng của mình là vui và hạnh phúc

LOGIC HỌC – SỢI DÂY LIÊN KẾT GIỮA TOÁN HỌC VÀ VĂN HỌC

NGUYỄN CUNG HOÀNG NAM
(GV THPT Trưng Vương, Q.1, TP. Hồ Chí Minh)

1) Phép phản chứng

Trong toán học phép suy luận phản chứng đã giúp chứng minh rất nhiều bài toán, tính chất, định lí...Chẳng hạn như: chứng minh "*Có vô số các số nguyên tố*" bằng phép suy luận phản chứng như sau:

Giả sử chỉ có một số hữu hạn số nguyên tố, kí hiệu là $p_1, p_2, ..., p_n$. Khi đó số $p = p_1...p_n + 1$ không chia hết cho bất kì số nguyên tố p_i ($i = 1, 2, ..., n$). Do đó p phải là một số nguyên tố, nhưng p không nằm trong danh sách các số nguyên tố nói trên. Điều vô lí này chứng tỏ có vô số các số nguyên tố.

Để nói về suy luận phản chứng trong văn học, chúng ta bắt đầu từ câu chuyện cười "Mâu–thuẫn":

Có một người nước Sở vừa bán mộc, vừa bán giáo. Ai hỏi mua mộc thì anh ta khoe rằng: "Mộc này thật chắc, không gì đâm thủng". Ai hỏi mua giáo thì anh ta khoe rằng: "Giáo này thật sắc, đâm gì cũng thủng". Có người nghe được vậy, hỏi rằng "Thế bây giờ lấy giáo của bác đâm vào mộc của bác thì thế nào?". Anh ta không sao trả lời được. (*Logic học phổ thông – Hoàng Chúng*).

Chính hai câu nói mang tính "quảng cáo" đã gây bất lợi cho anh ta!

Trong vấn đề bình luận văn học, suy luận phản chứng tạo ra một nét riêng, đặc sắc, tạo sự bất ngờ, thú vị cho người đọc. Thí dụ như, hãy bình lắm rồi, cần gì phải bỏ ra kiếm một số tiền khá lớn để mua vé xem ca sĩ nổi tiếng. Ngay cả việc ăn sung mặc sướng cũng vậy. Ăn là điều tất yếu của cơ thể, nhưng nếu ăn không đúng cũng có thể gây ra biết bao nhiêu bệnh tật cho cơ thể. Còn mặc? Nếu có tiền mà mặc không thích hợp vóc dáng thì cũng chỉ để thiên hạ nhìn thấy mà cười. Như vậy, "*Tiền bạc không hẳn đã đem lại hạnh phúc*".

Qua bài bình luận trên, người viết đã rất khéo léo lật ngược vấn đề, để cho thấy được câu nói "*Tiền bạc đem đến hạnh phúc*" là sai.

2) Phép diễn dịch và phép quy nạp

Trong toán học, phép diễn dịch rất hay được sử dụng trong các suy luận, cấu trúc thường được sử dụng như sau:

Nếu mệnh đề $P(x)$ đúng với mọi x thì mệnh đề $P(a)$ đúng.

Thí dụ, ta có định lí: "*Mọi số tự nhiên có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5 thì chia hết 5*". Từ đó, suy ra số 125 chia hết cho 5.

Suy luận quy nạp trong toán học nghĩa là đi từ các riêng, cụ thể để kết luận cái chung, tổng quát. Với phương pháp quy nạp, người ta đã chứng minh được nhiều định lí, công thức, đẳng thức, bất đẳng thức, ...

Thí dụ. a) $1^3+2^3+3^3+....+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

b) *Bất đẳng thức Bernoulli*. Với mọi $x > -1$, $x \neq 0$ và với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta có bất đẳng thức $(1+x)^n > 1 + nx$.

Để chứng minh được các kết quả trên người ta sử dụng phương pháp quy nạp hoàn toàn nghĩa là cũng đi từ cụ thể, nhưng chứng minh được cho mọi trường hợp cụ thể, nên chắc chắn sẽ đúng với tổng quát. Với phương pháp quy nạp không hoàn toàn, nghĩa là từ một số trường hợp mà đúc kết thành một tính chất tổng quát, thì chưa chắc đã thu được mệnh đề đúng.

Chẳng hạn, nhà toán học Pháp *Fermat* (1601 – 1665) đã xét dãy số 5, 17, 257, 65537,... với số hạng tổng quát $2^{2^n}+1$. Ông nhận thấy rằng, bốn số hạng đã viết ở trên tương ứng với $n = 1$, 2, 3, 4... là những số nguyên tố. Ông giả định rằng các số tiếp theo cũng là những số nguyên tố. Tuy không chứng minh được nhưng ông vẫn cho rằng giả thuyết của mình là đúng. Nhưng nhà toán học Thụy Sỹ *Euler* (1707 – 1783) đã chỉ ra rằng ngay số hạng tiếp theo $2^{32}+1$ ứng với $n = 5$ không phải là số nguyên tố vì số đó chia hết cho 614.

Phép diễn dịch và phép suy luận quy nạp cũng có trong văn học.

Thí dụ. Truyện "Thầy bói xem voi", các thầy bói mù, mỗi người chỉ sờ vào một bộ phận con voi (vòi – chân – tai – đuôi) (cái riêng), mà kết luận liền là con voi chỉ giống như (đỉa – cột nhà – quạt – chổi) (đi đến kết luận chung). Các thầy bói chỉ nhìn phiến diện, lập luận bằng phép quy nạp không hoàn toàn. Nên dẫn đến phán đoán sai về con voi.

Hay trong ca dao Việt Nam, một thầy bói "phán":

"Số cô có mẹ có cha,
Mẹ cô đàn bà, cha cô đàn ông.
Số cô có vợ có chồng,
Sinh con đầu lòng chẳng gái thì trai."

Trong trường hợp này thầy bói đã đi từ một mệnh đề luôn đúng "*ai là người cũng có mẹ có cha*", vì cô là người nên cô cũng có mẹ có cha. Đó chính là phép diễn dịch. Thành ra, thầy bói trong trường hợp thứ hai này nói điều gì cũng đúng và những điều đã nói... ai cũng biết.

Tóm lại, thế giới toán học và văn học tuy khác nhau nhưng lại có những nét tương đồng.

TIN TỨC

Lễ Sơ kết 1 năm thực hiện Phong trào thi đua "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC"

Ngày 22.8.2009, tại Chí Linh, Hải Dương đã diễn ra Lễ Sơ kết 1 năm thực hiện Phong trào thi đua "*Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực*" do Bộ GD&ĐT tổ chức dưới sự chủ trì chỉ đạo của Phó Thủ tướng kiêm Bộ trưởng Bộ GD&ĐT, GS. Nguyễn Thiện Nhân, Trưởng ban chỉ đạo phong trào thi đua. Tham dự Hội nghị còn có Ông Uông Chu Lưu, Ủy viên BCH Trung ương Đảng, Phó Chủ tịch Quốc hội, cùng đông đảo quan khách trung ương và các địa phương.

Phong trào thi đua này được phát động vào đầu năm học 2008-2009 nhằm phát huy sức mạnh tổng hợp trong và ngoài nhà trường để xây dựng môi trường giáo dục an toàn, thân thiện, hiệu quả, phù hợp với điều kiện của địa phương và đáp ứng nhu cầu của xã hội. Sau 1 năm triển khai đã có 40637 trường đăng kí tham gia phong trào, trong đó có 5506 trường được chọn làm đơn vị chỉ đạo điểm cấp Tỉnh. Một số tỉnh thành đã triển khai tới cả TTGDTX. Cảnh quan trường học xanh, sạch, đẹp hơn. Việc dạy và học trong nhà trường có sự tiến bộ, vấn đề giáo dục kĩ năng sống được quan tâm hơn. Trò chơi dân gian và những làn điệu dân ca đưa vào nhà trường đã được học sinh và phụ huynh hưởng ứng tích cực. Các hình thức chăm sóc, phát huy giá trị các di tích lịch sử văn hoá cách mạng địa phương đã được thể hiện phong phú ở hầu hết các nơi. Tại Hội nghị, các đại biểu đã phát biểu về các bài học kinh nghiệm rút ra từ thực tế thực hiện phong trào ở từng địa phương; Bộ GD & ĐT đã công bố và trao quyết định khen thưởng của Bộ trưởng cho 13 tác giả đoạt giải cuộc thi sáng tác logo cho phong trào thi đua, 132 tập thể và 109 cá nhân có thành tích xuất sắc trong phong trào thi đua năm học 2008-2009.

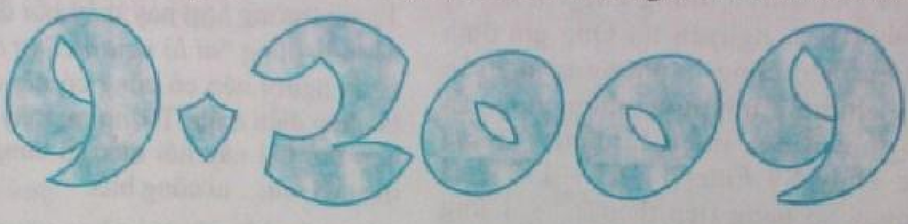
PV.

Cắt giấy, ghép thành số 9.2009

Nhân dịp năm học mới, một nhóm bạn trẻ yêu toán dự định tổ chức buổi ngoại khóa toán vào tháng 9 năm 2009, đã lấy ba mảnh giấy hình tròn bằng nhau, cùng màu (có màu một mặt), cắt ra các miếng rồi ghép tất cả các miếng lại được số 9.2009, để dán lên bảng lớp (xem hình bên, kể cả dấu chấm xen giữa tháng và năm).

Bạn hãy cho biết cách cắt, ghép đó như thế nào?

Chú ý rằng tất cả các đường cong bị cắt đều là cung tròn của hai đường tròn với các bán kính khác nhau.



AN MINH

Giải đáp:

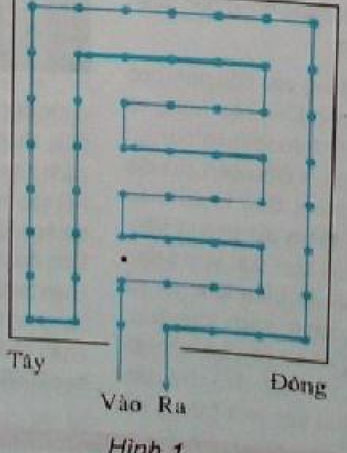
ĐƯỜNG CÀY

(Đề đăng trên THTT số 383 tháng 5.2009)

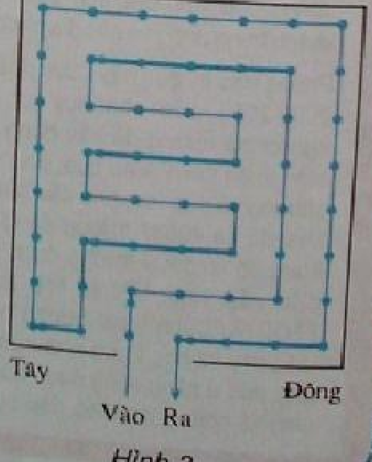
Muốn số lần quay (đổi hướng) là ít nhất thì cần chọn mỗi đoạn thẳng đi qua càng nhiều điểm càng tốt. Trên thửa ruộng có 7 đoạn thẳng theo chiều dọc và 8 đoạn thẳng theo chiều ngang. Để có đường đi và đường về thì cần chọn số đường là số chẵn, nghĩa là ưu tiên chọn các đoạn đường ngang. Trong nhiều sơ đồ với *số lần quay là ít nhất* (18 lần quay) có hai sơ đồ ứng với *số đoạn đường đi từ Đông sang Tây ít nhất* (5 đoạn với 14 đơn vị dài) như ở hình 1 và hình 2.

Rất tiếc là không có bạn nào có lời giải đúng.

HOÀNG NGUYỄN



Hình 1



Hình 2

VIETNAM® CALCULATOR

MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ VIỆT NAM

VN-570RS VN-500RS

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CẦM TAY VIETNAM CALCULATOR

Trưởng ban tổ chức : Trần Minh Thế

Chuyên viên Toán học sinh giỏi máy tính cầm tay VIETNAM CALCULATOR

Bài 1 : Giả sử thời gian thí sinh bắt đầu tranh tài "Cuộc thi học sinh giỏi giải Toán trên máy tính cầm tay Vietnam Calculator" là lúc 9 giờ 9 phút ngày 9 tháng 9 năm 2009. Từ ý nghĩa của các con số theo mốc thời gian này. Ta có bài toán sau:
Tìm số tự nhiên x, biết x^2 có bốn chữ số đầu tiên là 9999 và bốn chữ số tận cùng là 2009. Khi đó, hãy viết x^2 với đầy đủ các chữ số.

Bài 2 : Tìm chữ số thứ 9^{2009} sau dấu phẩy trong phép chia $51 \div 53$.

Bài 3 : Tìm số **b**, biết rằng số 2006742975324**b**62 chia hết cho 2009.

Bài 4 : Tìm cặp số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình :

$$2x^3 - 103xy = 8370 + 3y^2$$

Bài 5 : Cho đa thức: $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết rằng:

$$P(1) = -1807; P(2) = -14893; P(2008) = -8086401493; P(2010) = 8130602003.$$

Hãy tính: $P(2009)$?

HẾT

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 387(9.2009)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35144272, 04.35121606
Email: lapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

TRONG SỐ NÀY

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật : MINH THƠ
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

TRƯỜNG THPT HAI BÀ TRƯNG - HUẾ

Hơn 90 NĂM xây dựng và trưởng thành

Địa chỉ: 14 LÊ LỢI, THÀNH PHỐ HUẾ - Điện thoại: 054.3823087
Website: http://www.thpt-haibatrung-tthue.edu.vn

Ông NGUYỄN PHƯỚC BỬU TUẤN
Hiệu trưởng nhà trường.

Tập thể Hội đồng Sư phạm nhà trường.

Trường THPT Hai Bà Trưng có diện tích trên 30.000m² được xây dựng từ 15/7/1917 và hoàn thành vào năm 1919. Là một trường lớn của miền Trung, có năm trường có đến 63 lớp và gần 3000 học sinh.

Trường đã nhiều lần thay đổi tên gọi. Trong những năm 1917 - 1975 trường mang tên trường Nữ Trung học Đồng Khánh. Trong những năm 1975 - 1981 trường mang tên trường cấp III Trưng Trắc. Từ 1981 đến nay trường mang tên trường THPT Hai Bà Trưng.

Trong nhiều năm qua, Thầy và trò trường THPT Hai Bà Trưng đã nỗ lực phấn đấu để đáp ứng yêu cầu phát triển sự nghiệp giáo dục và đào tạo và đã đạt được những thành tích sau đây:

- Chi bộ nhà trường hằng năm đều được công nhận Chi bộ trong sạch, vững mạnh.
- Công đoàn nhà trường thường xuyên được công nhận là "Công đoàn cơ sở vững mạnh"; được Công đoàn Giáo dục Việt Nam tặng Bằng khen liên tục trong nhiều năm.
- Đoàn trường TNCS Hồ Chí Minh liên tục đạt danh hiệu vững mạnh, được Trung ương Đoàn tặng bằng khen và thường được Tỉnh Đoàn Thừa Thiên - Huế trao cờ thi đua, tặng thưởng.
- Hằng năm tỉ lệ học sinh tốt nghiệp trên 95% và tỉ lệ đỗ vào ĐH trên 70%. Nhiều học sinh đạt giải học sinh giỏi cấp Quốc gia và cấp Tỉnh. Năm học 2008 - 2009 vừa qua tỉ lệ tốt nghiệp là 99,64%; có 1 giải Nhì Quốc gia môn Văn và 27 giải cấp Tỉnh ở nhiều môn.
- Phong trào TDTT của nhà trường có thành tích nổi bật : Liên tục 15 năm dẫn đầu HKPĐ toàn tỉnh, có nhiều học sinh của trường đã trở thành VĐV Quốc gia và Quốc tế.
- Hoạt động văn nghệ là một sân chơi hào hứng được tổ chức hàng năm tại trường và trong các cuộc thi đã đạt nhiều giải cao.
- Hoạt động nhân đạo thường xuyên được phát huy. Nhà trường đã tổ chức nhiều đợt quyên góp với số tiền trên 100 triệu đồng giúp đồng bào bị thiên tai, đi cứu trợ các học sinh, cư dân ở vùng sâu, vùng xa của Nam Đông, A Lưới và giúp nạn nhân chất độc màu da cam. Ban học bổng vận động các nhà hảo tâm giúp học sinh nghèo, học sinh mồ côi vượt khó mỗi năm đều được trên 100 triệu đồng.
- Trường có 100% giáo viên đạt chuẩn, trong đó có 19 Thạc sĩ. Đội ngũ giáo viên có năng lực về chuyên môn, nhiệt tình, tận tâm, luôn có ý thức nâng cao nghiệp vụ chuyên môn. Nhiều giáo viên được phong tặng Nhà giáo Ưu tú. Hàng năm có nhiều giáo viên đạt danh hiệu CSTĐ các cấp, giáo viên dạy giỏi cấp tỉnh.
- Những phần thưởng cao quý đã nhận được:
  - Huân chương Lao động Hạng Ba do Chủ tịch nước trao tặng năm 1998.
  - Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ tặng năm 2006.
  - Bằng khen của Ủy ban TDTT năm 2007.
  - Bằng khen của Bộ Văn hóa về việc tham gia tuần lễ văn hóa.
  - Bằng khen của Bộ GD và ĐT về việc thực hiện đổi mới phương pháp dạy - học và thực hiện nhiệm vụ năm học.
  - Cờ và Bằng khen của UBND Tỉnh về thực hiện nhiệm vụ năm học.
  - Bằng khen của CĐGDVN tặng công đoàn trường.
  - Bằng khen của TW Đoàn TNCS Hồ Chí Minh cấp cho Đoàn trường.
  - Tháng 7/2009 vừa qua trường đã vinh dự được công nhận là trường đạt chuẩn Quốc gia.

Trong niềm tự hào lớn lao này, Hội đồng Sư phạm và học sinh trường THPT Hai Bà Trưng quyết tâm phấn đấu tiếp tục đổi mới phương pháp dạy học để nâng cao chất lượng giáo dục, đáp ứng nhu cầu ngày càng cao của ngành. Trường tiếp tục phấn đấu để nhận thêm nhiều phần thưởng cao quý khác, xứng đáng với truyền thống hơn 90 năm xây dựng và phát triển.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT09M9
Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2009
Giá : 6000 đồng