



## Chủ đề 5: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

### I/ MỤC ĐÍCH

- Thực hành về các phương pháp giải bài toán điều kiện ban đầu (IVP):
  - + Phương pháp Euler
  - + Phương pháp Heun
  - + Phương pháp Midpoint
  - + Phương pháp Ralston (tự học)
  - + Phương pháp Runge-Kutta\*
- Thực hành về các phương pháp giải bài toán điều kiện biên (BVP):
  - + Phương pháp bắn (shooting method)\*
- Thực hành các lệnh tương ứng của Matlab và so sánh: *dsolve*, *ode45*

### II/ NỘI DUNG

#### 1. Ví dụ

##### Ví dụ 5.1: Phương pháp Euler

```
% Phương pháp Euler
clc;clear all;close all;
syms x;dy=-2*x^3+12*x^2-20*x+8.5;
a=0;b=4;y0=1;
% Nghiệm chính xác
y=int(dy,'x')+y0;
fplot(char(y),[a b]);hold on
% Giải bằng phương pháp Euler
f=inline(vectorize(dy),'x');
xi=linspace(a,b,20);
yi(1)=y0;
n=length(xi);h=(b-a)/(n-1);
for k=2:n
    yi(k)=yi(k-1)+h*f(xi(k-1));
end
plot(xi,yi,'r')
```

##### Ví dụ 5.2: Phương pháp Heun

```
% Phương pháp Heun
clc;clear all;close all;
syms x;dy=-2*x^3+12*x^2-20*x+8.5;
a=0;b=4;y0=1;
% Nghiệm chính xác
y=int(dy,'x')+y0;
fplot(char(y),[a b]);hold on
% Giải bằng phương pháp Euler
f=inline(vectorize(dy),'x');
xi=linspace(a,b,20);
yi(1)=y0;
n=length(xi);h=(b-a)/(n-1);
for k=2:n
    %Y=yi(k-1)+f(xi(k-1))*h;
    yi(k)=yi(k-1)+h*(f(xi(k-1))+f(xi(k)))/2;
end
plot(xi,yi,'r')
```

##### Ví dụ 5.3: Lệnh *dsolve*

```
% Giải bằng dsolve
clc;clear all;close all;

% Phương trình vi phân cấp 2:
%  $x^2 y'' - 6y = 0$ 
%  $2 \leq y \leq 6$ 

hptvp='Dy1=y2,Dy2=6*y1/x^2';
```

```
% Điều kiện ban đầu  $y(2)=1, y'(2)=3$ ;
dkb='y1(2)=1,y2(2)=3';
no = dsolve(hptvp, dkb, 'x');
y=no.y1
figure(1);fplot(char(y),[2 6])
% Điều kiện biên  $y(2)=4, y(6)=3$ ;
dkb='y1(2)=4,y1(6)=3';
no = dsolve(hptvp, dkb, 'x');
y=no.y1
figure(2);fplot(char(y),[2 6])
```

### Ví dụ 5.4: Lệnh *ode45*

```
% Giai bang dsolve
clc;clear all;close all;
% Phương trình vi phân cấp 2:
%  $x^2y'' - 6y = 0$ 
%  $2 \leq y \leq 6$ 

dy=inline('[y(2);6*y(1)/x^2]','x','y');
% Điều kiện ban đầu y(2)=1, y'(2)=5;
[x,y]=ode45(dy,[2 6],[1 5]);
figure(1);plot(x,y(:,1))

% Điều kiện biên y(2)=4, y(6)=3;
% Sử dụng phương pháp ban
dy0=-10:5:10;
for k=1:length(dy0);
    [x,y]=ode45(dy,[2 6],[4,dy0(k)]);
    yend(k)=y(end,1)-3;
end;
dyn=sp_solve(dy0,yend);
[x,y]=ode45(dy,[2:1:6],[4,dyn]);
figure;plot(x,y(:,1))
```

## 2. Bài tập

**Bài 5.1:** Dựa trên [Ví dụ 5.1] và [Ví dụ 5.1] hãy viết chương trình giải phương trình vi phân như trong 2 ví dụ này.

a/ Sử dụng các phương pháp Midpoint, Ralston, Runge-Kutta

b/ Viết dạng *function file* cho cả 5 phương pháp. Gọi *function* để tìm và vẽ đồ thị kết quả nghiệm của phương trình vi phân nêu trên cùng với nghiệm chính xác để so sánh. Đánh giá về độ chính xác của các phương pháp này?

c/ So sánh kết quả với kết quả bằng lệnh *dsolve* trong Matlab [Ví dụ 5.3]

**Bài 5.2\*:** Cho phương trình vi phân:

$$y'' + y' - 6y^2 = 0 \quad [5.1]$$

a/ Dựa trên [Ví dụ 5.3] hãy viết chương trình giải phương trình vi phân [5.1] sử dụng *dsolve* trong 2 trường hợp

+ Điều kiện ban đầu  $y(0)=1.5$ ,  $y'(0)=2$

+ Điều kiện biên  $y(0)=1$ ,  $y'(1)=3$

b\*/ Dựa trên [Ví dụ 5.3] giải lại câu a với lệnh *ode45*

c\*/ Viết chương trình sử dụng phương pháp Runge-Kutta giải lại câu a, so sánh với kết quả của câu b.

**Bài 5.3:** Một thuyền đi dọc dòng nước chịu tác dụng của một lực cản tỷ lệ thuận với  $v''$  ( $v$  là vận tốc tức thời của dòng nước). Theo định luật II Newton ta có

$$m \frac{dv}{dt} = -kv'' \quad [5.2]$$

Với  $m$  là khối lượng thuyền,  $k$  là hệ số tỷ lệ, điều kiện ban đầu  $v(t=0)=v_0$  và  $x(t=0)=0$ .

a/ với  $n=1$ , sử dụng lệnh *dsolve* tìm biểu thức của  $v$  và quãng đường theo thời gian.

b/ Viết chương trình giải p/t vi phân [5.2] sử dụng phương pháp *Heun*. Cho  $m = 2kg$ ,  $k = 0.05$ ;  $v_0=20km/h$ ;  $n = 1$ . So sánh với kết quả giải bằng lệnh *dsolve*

c/ Giải lại câu b với  $n=2$ . So sánh với kết quả giải bằng lệnh *ode45*

**Bài 5.4\*:**

a/ Sự chuyển động của một vật rơi trong môi trường có ma sát khi lực cản tỷ lệ với vận tốc, được biểu diễn bởi phương trình sau:

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = mg - k \frac{dx}{dt} \quad [5.3]$$

Với  $m$  là khối lượng,  $k$  là hệ số tỷ lệ, điều kiện ban đầu  $v(t=0)=v_0$  và  $x(t=0)=h$ . Viết chương trình giải p/t vi phân [5.3] sử dụng phương pháp Runge-Kutta. Cho  $m = 3kg$ ,  $k = 0.1$ ;  $v_0=20km/h$ ;  $h = 100$ . So sánh với kết quả giải bằng lệnh *dsolve* hoặc *ode45*

b/ Một vật có khối lượng  $m$  được gia tốc bởi một lực thay đổi theo thời gian và chịu tác dụng của lực cản không khí có p/t chuyển động như sau:

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = F_0 e^{-\beta t} \left( \frac{dx}{dt} \right)^3 - k \frac{dx}{dt} \quad [5.4]$$

Với  $k$  là hệ số tỷ lệ, điều kiện ban đầu  $v(t=0)=v_0$  và  $x(t=0)=0$ . Viết chương trình giải p/t vi phân [5.4] sử dụng phương pháp Runge-Kutta. Cho  $m = 4kg$ ,  $k = 0.2$ ;  $v_0=20km/h$ ;  $F_0 = 10$ ;  $\beta = 0.5$ . So sánh với kết quả giải bằng lệnh *ode45*