CHƯƠNG 3

KỸ THUẬT THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

KỸ THUẬT QUY HOẠCH ĐỘNG
(Dynamic Programming)

Võ Huỳnh Trâm

Một số kỹ thuật thiết kế thuật toán

- Kỹ thuật **Chia để trị** (Divide and Conquer)
- Kỹ thuật **Tham ăn** */Háu ăn/Tham lam* (Greedy)
- Kỹ thuật **Nhánh cận** (Branch and Bound)
- Kỹ thuật **Quy hoạch động** (Dynamic Programming)
- Kỹ thuật **Quay lui** (Backtracking)
- Kỹ thuật **Cắt tỉa alpha-beta** (Alpha-Beta Pruning) trên Cây trò chơi
- *Kỹ thuật **Tìm kiếm địa phương** (Local Search)*

CANTHO UNIVERSITY

Thuật toán Quy hoạch động

- Ý tưởng : Trong thuật toán đệ quy, một số bài toán con phải giải **nhiều lần**.

→ Giải pháp: Tạo **bảng lưu trữ** kết quả các bài toán con để khi cần sẽ sử dụng mà **không cần phải giải lại**.

Thuật toán Quy hoạch động : 2 bước

(1) **Tạo bảng** bằng cách:

– Gán giá trị cho một số ô nào đó.

– Gán trị cho các ô khác nhờ vào giá trị của các ô trước đó.

(2) **Tra bảng** và xác định kết quả bài toán ban đầu.

Quy hoạch động: Ưu và nhược điểm

- **Ưu điểm:**
  - Chương trình **thực hiện nhanh.**
  - Kỹ thuật quy hoạch động có thể vận dụng để giải các bài toán *tối ưu*, **các bài toán có *công thức truy hồi***.
- **Nhược điểm:** Quy hoạch động không hiệu quả khi:
  - Không tìm được *công thức truy hồi*.
  - Số lượng bài toán con cần giải quyết và lưu giữ kết quả là rất lớn.
  - Sự kết hợp lời giải của các bài toán con chưa chắc cho lời giải của bài toán ban đầu.

Bài toán TÍNH SỐ TỔ HỢP

- **<u>Bài toán</u>:** Tính số ***tổ hợp lặp chập k của n*** theo công thức truy hồi:

$$C^k_n = \begin{cases} 1 & \text{neu } k = 0 \text{ hoac } k = n \\ C^{k-1}_{n-1} + C^k_{n-1} & \end{cases}$$

CANTHO UNIVERSITY

Bài toán tính số tổ hợp
Thuật toán ĐỆ QUY

```
int Comb(int n, int k) {
  if (k==0 || k==n)
      return 1;
  return Comb(n-1, k-1) + Comb(n-1, k);
}
```

Bài toán tính số tổ hợp
Đánh giá Thuật toán Đệ quy

- Gọi **T(n)** là thời gian để tính số tổ hợp chập k của **n.**

→ **T(n-1)** là thời gian tính số tổ hợp chập i của **(n-1)**

- Khi n =1 thì k= 0 hoặc k = 1= n → **Return 1** tốn C_1
- Khi n >1, trường hợp xấu nhất 0 <k < n → Chương trình **gọi đệ quy 2 tổ hợp chập** con **2T(n-1).** Thời gian thực hiện phép **cộng** và trả về kết quả là hằng C_2
- Ta có phương trình đệ quy:

$$T(1) = C_1$$
$$T(n) = 2T(n-1) + C_2$$

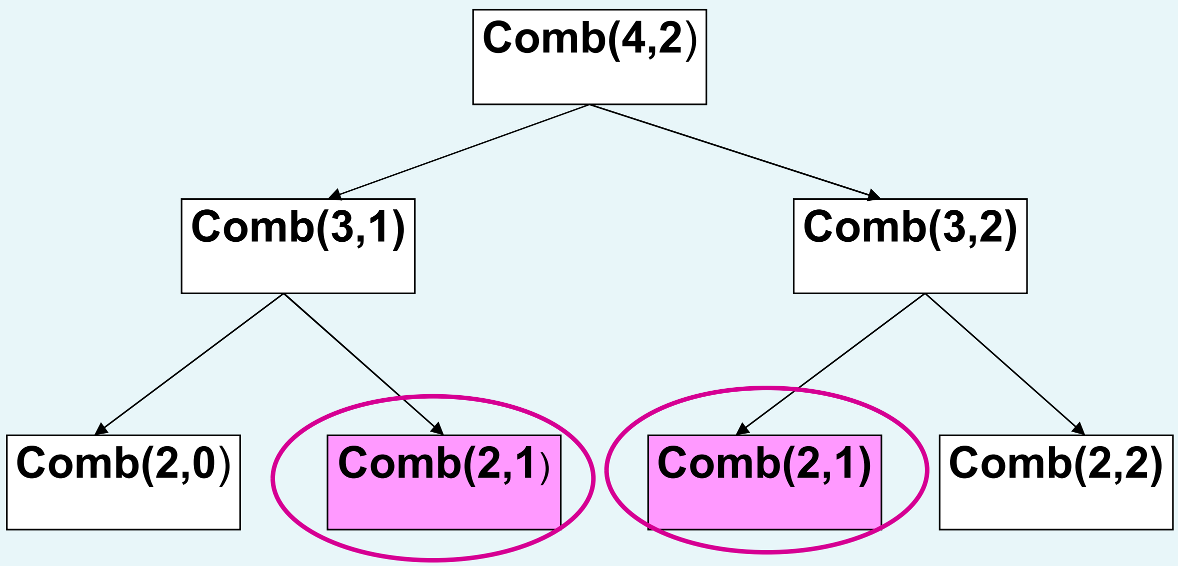
$$\Rightarrow T(n) = O(2^n)$$

Bài toán tính số tổ hợp
Nhận xét Thuật toán Đệ quy

$$C^k_n = \begin{cases} 1 & \text{neu } k = 0 \text{ hoac } k = n \\ & C^{k-1}_{n-1} + C^k_{n-1} \end{cases}$$

Nhận xét:

Ví dụ tính số tổ hợp chập 2 của 4 (***k* = 2, *n* = 4**)



Bài toán tính số tổ hợp
Thuật toán QUY HOẠCH ĐỘNG

(1) Tạo bảng: Xây dựng một bảng **C** gồm **n+1 dòng** (từ 0 đến n) và **n+1 cột** (từ 0 đến n).

- **C[i,j]** lưu trữ giá trị của **Comb(i,j)** theo quy tắc truy hồi sau: (Quy tắc **tam giác Pascal**):
  - C[0,0] = 1;
  - C[i,0] =1;
  - C[i,i] = 1 với $0 < i \le n$;
  - **C[i,j] = C[i-1,j-1] + C[i-1,j]** với $0 < j < i \le n$.

(2) Tra bảng: C[n,k] chính là **Comb(n,k)**.

i \ j	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Tam giác Pascal

CANTHO UNIVERSITY

Bài toán tính số tổ hợp
Thuật toán Quy hoạch động

```
int Comb_QHD (int n, int k) {
   int C[n+1,n+1], i, j;
   C[0,0] = 1;
   for (i = 1; i <= n; i++) {
      C[i,0] = 1;
      C[i,i] = 1;
      for (j = 1; j < i; j++)
       C[i,j]=C[i-1,j-1]+C[i-1,j];  }
   return C[n,k];  }
```

i \ j	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
0	1				
1					
2					
3					
4					

Bài toán tính số tổ hợp
Thuật toán Quy hoạch động

```
int Comb_QHD (int n, int k) {
   int C[n+1,n+1], i, j;
   C[0,0] = 1;
   for (i = 1; i <= n; i++) {
      C[i,0] = 1;
      C[i,i] = 1;
      for (j = 1; j < i; j++)
       C[i,j]=C[i-1,j-1]+C[i-1,j];  }
   return C[n,k];  }
```

i \ j	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1		1		
3	1			1	
4	1				1

Bài toán tính số tổ hợp
Thuật toán Quy hoạch động

```
int Comb_QHD (int n, int k) {
   int C[n+1,n+1], i, j;
   C[0,0] = 1;
   for (i = 1; i <= n; i++) {
      C[i,0] = 1;
      C[i,i] = 1;
      for (j = 1; j < i; j++)
       C[i,j]=C[i-1,j-1]+C[i-1,j];}
   return C[n,k];  }
```

i \ j	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Bài toán tính số tổ hợp
Thuật toán Quy hoạch động

```
int Comb_QHD (int n, int k) {
   int C[n+1,n+1], i, j;
   C[0,0] = 1;
   for (i = 1; i <= n; i++) {
      C[i,0] = 1;
      C[i,i] = 1;
      for (j = 1; j < i; j++)
       C[i,j]=C[i-1,j-1]+C[i-1,j];  }
   return C[n,k];  }
```

i \ j	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Bài toán tính số tổ hợp: Đánh giá thuật toán Quy hoạch động

- Thuật toán quy hoạch động gán trị cho ½ **mảng hai chiều** (n+1) dòng, (n+1) cột với số phần tử là **$(n-1)^2/2$** ô của bảng.
- Mỗi phép gán trị cần 1 đơn vị thời gian (hằng C).
- Gọi T(n) là thời gian thực hiện chương trình:

$$\mathbf{T(n) = (n-1)^2 C/2 = O(n^2)}$$

→ Thuật toán **quy hoạch động** hiệu quả hơn nhiều so với thuật toán **đệ qui** (**$n^2 < 2^n$**).

Ví dụ *với n = 10*: Thuật toán đệ quy : $2^n = 1024$

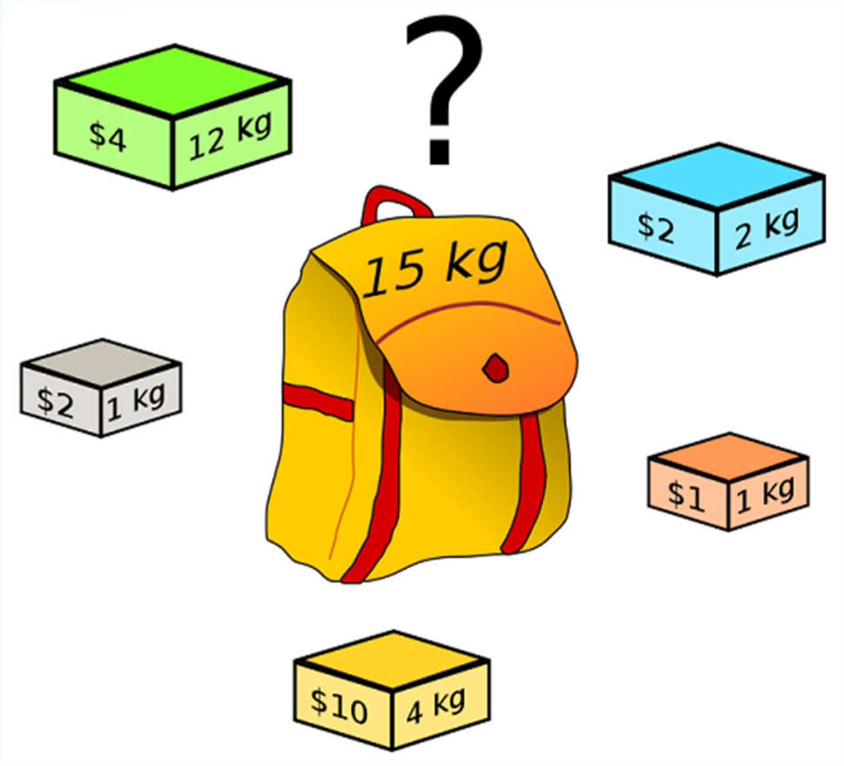
Thuật toán quy hoạch động : $n^2 = 100$

Quy hoạch động: Bài toán Cái ba lô

- **Bài toán**: Cho một cái ba lô có thể chứa trọng lượng **W** với **n** loại đồ vật, mỗi đồ vật **i** có một **trọng lượng g_i** và một **giá trị v_i**. *Tất cả đồ vật đều có số lượng không hạn chế*. Tìm một cách lựa chọn các đồ vật đựng vào ba lô sao cho tổng trọng lượng không vượt quá **W** và tổng giá trị đồ vật là **lớn nhất.**

- **Yêu cầu**: Sử dụng **kỹ thuật quy hoạch động** để giải bài toán cái ba lô với điều kiện các số liệu (*trọng lượng ba lô và trọng lượng các đồ vật)* đều được cho dưới dạng ***số nguyên***.

Bài toán CÁI BA LÔ



Trọng lượng = W CBL 1

Số đồ vật = n

Đồ vật i → TL g_i, GT v_i, SL --

f(X) → Max: CT

Quy hoạch động: Bài toán cái ba lô - Công thức truy hồi

(1) Tạo bảng: Xây dựng công thức truy hồi

- **k** : đồ vật (***k = 1 .. n)***
- **V**: trọng lượng còn lại của ba lô ***(V = 0 ..W)***

Đặt : **X[k,V]** = **số lượng** đồ vật k được chọn

F[k,V] = **tổng giá trị** k đồ vật đã được chọn

$$\mathbf{F(n,W) = F(X)} = x_1 * v_1 + x_2 * v_2 + \ldots + x_n * v_n \rightarrow \mathbf{Max}$$

Quy hoạch động: Bài toán cái ba lô - Công thức truy hồi

X[k,V] = **<u>số lượng</u>** đồ vật k được chọn

F[k,V] = **<u>tổng giá trị</u>** k đồ vật đã được chọn

- Trường hợp <u>chỉ có 1 đồ vật</u> (hay k=1): **Đồ vật i : TL g_i, GT v_i**

  SL: $X[1,V] = V/g_1$

  GT: $F[1,V] = X[1,V] * v_1$, $\forall V = 0 .. W$

- Giả sử đã tính **F[k-1,V]**. Khi có thêm đồ vật thứ k→ tính **F[k,V]**, $\forall V = 0 .. W$. Cách tính: Nếu chọn x_k đồ vật loại k thì :

  - Trọng lượng còn lại của ba lô là : $U = V - x_k * g_k$

  - Tổng giá trị k loại đồ vật đã chọn $F[k,V] = F[k-1,U] + x_k * v_k$, với

x_k đổi từ 0 đến $y_k = V/g_k$ và chọn x_k sao cho **F[k,V]** **<u>lớn nhất</u>**.

Quy hoạch động: Bài toán cái ba lô - Công thức truy hồi

- Ta có **công thức truy hồi** như sau:

$X[1,V] = V/g_1$ và **$F[1,V] = X[1,V] * v_1$.**

$F[k,V] = Max(F[k-1,V-x_k*g_k] + x_k*v_k)$, với **$x_k= 0..V/g_k$**

- Sau khi xác định được **F[k,V]** thì **X[k,V]** là x_k ứng với giá trị **F[k,V]** được chọn trong công thức trên.
- Để lưu các giá trị trung gian tính **F[k,V]**, sử dụng bảng:
  - **n dòng** (1 .. n): dòng thứ k ứng với đồ vật loại k
  - **W+1 cột** (0 ..W): cột thứ V ứng với trọng lượng còn lại V.

Mỗi cột V bao gồm hai cột nhỏ: - cột bên trái lưu **F[k,V] : TGT**

- cột bên phải lưu **X[k,V] : SL**

Quy hoạch động: Bài toán cái ba lô - Ví dụ

Ví dụ : Cho bài toán cái ba lô với trọng lượng **W=9**, và 5 loại đồ vật được cho trong bảng sau:

Đồ vật	Trọng lượng (g_i)	Giá trị (v_i)
1	3	4
2	4	5
3	5	6
4	2	3
5	1	1

Bảng F và X với W=9

n = 5 dòng (1 .. 5): ứng với 5 loại đồ vật

W+1 = 9 + 1 = 10 cột (0 ..9): ứng với trọng lượng còn lại V

Đồ vật	g_i	v_i
1	3	4
2	4	5
3	5	6
4	2	3
5	1	1

F[k, V] :GT

X[k, V]: SL

k \ V	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	
1	0	0	0	0	0	0	4	1	4	1	4	1	8	2	8	2	8	2	12	3
2	0	0	0	0	0	0	4	0	5	1	5	1	8	0	9	1	10	2	12	0
3	0	0	0	0	0	0	4	0	5	0	6	1	8	0	9	0	10	0	12	0
4	0	0	0	0	3	1	4	0	6	2	7	1	9	3	10	2	12	4	13	3
5	0	0	1	1	3	0	4	0	6	0	7	0	9	0	10	0	12	0	13	0

Cách tính bảng F và X

F[k, V] X[k, V]

k \ V	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	
1	0	0	0	0	0	0	4	1	4	1	4	1	8	2	8	2	8	2	12	3
2	0	0	0	0	0	0	4	0	5	1	5	1	8	0	9	1	10	2	12	0
3	0	0	0	0	0	0	4	0	5	0	6	1	8	0	9	0	10	0	12	0
4	0	0	0	0	3	1	4	0	6	2	7	1	9	3	10	2	12	4	13	3
5	0	0	1	1	3	0	4	0	6	0	7	0	9	0	10	0	12	0	13	0

- Điền giá trị cho dòng 1 theo:

  $X[1,V] = V \text{ DIV } g_1$ và **$F[1,V] = X[1,V] * v_1$.**

- Từ dòng 2 đến dòng 5, sử dụng công thức truy hồi:

  $F[k,V] = Max(F[k-1,V-x_k*g_k] + x_k*v_k)$

  với $x_k : 0 \rightarrow V / g_k$

Bảng F và X: Dòng 1

Đồ vật	g_i	v_i
1	3	4
2	4	5
3	5	6
4	2	3
5	1	1

$X[1,7] = V / g_1 = 7/3 = 2$

$F[1,7] = X[1,7] * v_1 = 2 * 4 = 8$

- Điền giá trị cho dòng 1:

  $X[1,V] = V \text{ DIV } g_1$ và $F[1,V] = X[1,V] * v_1$.

F[1, 7]

X[1, 7]

k \ V	0		1		2		3		4		5				7		8		9	
1	0	0	0	0	0	0	4	1	4	1	4	1	8	2	8	2	8	2	12	3
2	0	0	0	0	0	0	4	0	5	1	5	1	8	0	9	1	10	2	12	0
3	0	0	0	0	0	0	4	0	5	0	6	1	8	0	9	0	10	0	12	0
4	0	0	0	0	3	1	4	0	6	2	7	1	9	3	10	2	12	4	13	3
5	0	0	1	1	3	0	4	0	6	0	7	0	9	0	10	0	12	0	13	0

Cách tính bảng F và X: Dòng k > 1

F[2, 7] X[2, 7]

k \ V	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	
1	0	0	0	0	0	0	4	1	4	1	4	1	8	2	8	2	8	2	12	3
2	0	0	0	0	0	0	4	0	5	1	5	1	8	0	9	1	10	2	12	0
3	0	0	0	0	0	0	4	0	5	0	6	1	8	0	9	0	10	0	12	0
4	0	0	0	0	3	1	4	0	6	2	7	1	9	3	10	2	12	4	13	3
5	0	0	1	1	3	0	4	0	6	0	7	0	9	0	10	0	12	0	13	0

Ví dụ: Tính **F[2,7] và X[2,7]** ?

(Đồ vật k=2: $g_2 = 4$, $v_2 = 5$, *trọng lượng ba lô còn lại V=7)*

F[k,V] = Max(F[k-1,V-x_k*g_k] + x_k*v_k) với **x_k : 0 → V / g_k.**

Ta có x_2 : 0 → V / g_2 = 7 / 4 = 1, tức x_2 có 2 giá trị **0 và 1.**

Khi đó **F[2,7]** = **Max** (F[2-1, 7-**0***4] + **0***5, F[2-1,7-**1***4] + **1***5)

= **Max**(**F[1,7], F[1,3]** + 5) = Max(**8**, **4**+5) = Max(8, 9) = **9**.

F[2,7] = 9 ứng với x_k = 1 do đó **X[2,7]** = **1**.

Ví dụ: Tính F[4, 8] và X[4, 8] ?

F[4, 8] X[4, 8]

V / k	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	
1	0	0	0	0	0	0	4	1	4	1	4	1	8	2	8	2	8	2	12	3
2	0	0	0	0	0	0	4	0	5	1	5	1	8	0	9	1	10	2	12	0
3	**0**	0	0	0	**0**	0	4	0	**5**	0	6	1	**8**	0	9	0	**10**	0	12	0
4	0	0	0	0	3	1	4	0	6	2	7	1	9	3	10	2	**12**	**4**	13	3
5	0	0	1	1	3	0	4	0	6	0	7	0	9	0	10	0	12	0	13	0

Ví dụ: Tính **F[4, 8] và X[4, 8]** ?

*(Đồ vật **k=4**: $g_4 = 2$, $v_4 = 3$, **trọng lượng ba lô còn lại V=8**)*

Đồ vật	g_i	v_i
1	3	4
2	4	5
3	5	6
4	**2**	**3**
5	1	1

(2) Tra bảng: Xác định phương án

V / k	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	
1	0	0	0	0	0	0	4	1	4	1	4	1	8	2	8	2	8	2	12	3
2	0	0	0	0	0	0	4	0	5	1	5	1	8	0	9	1	10	2	12	0
3	0	0	0	0	0	0	4	0	5	0	6	1	8	0	9	0	10	0	12	0
4	0	0	0	0	3	1	4	0	6	2	7	1	9	3	10	2	12	4	13	3
5	0	0	1	1	3	0	4	0	6	0	7	0	9	0	10	0	12	0	13	0

- Khởi đầu, trọng lượng còn lại của ba lô V = W.
- Xét các đồ vật từ n đến 1, với mỗi đồ vật k, ứng với trọng lượng còn lại V của ba lô, nếu X[k,V] > 0 thì **chọn X[k,V] đồ vật loại k**. Tính lại **V = V - X[k,V] * g_k.**
- Ví dụ, trong bảng trên, ta sẽ xét các đồ vật từ 5 đến 1. Khởi đầu V = W = 9.

  - Với k = 5, vì X[5,9] = 0 nên ta không chọn đồ vật loại 5.

  - Với k = 4, vì X[4,9] = 3 nên ta chọn 3 đồ vật loại 4. Tính lại V = 9 – 3 * 2 = 3.

  - Với k = 3, vì X[3,3] = 0 nên ta không chọn đồ vật loại 3.

  - Với k = 2, vì X[2,3] = 0 nên ta không chọn đồ vật loại 2.

  - Với k = 1, vì X[1,3] = 1 nên ta chọn 1 đồ vật loại 1. Tính lại V = 3 – 1 * 3 = 0.

Vậy phương án **X=(1, 0, 0, 3, 0)** với TTL= **3 * 2 + 1 * 3 = 9**; TGT= **3 * 3 + 1 * 4 = 13**.