Bài 2: Các tham số của đại lượng ngẫu nhiên

I. Kỳ vọng

Kỳ vọng của đại lượng ngẫu nhiên *X*, ký hiệu: $E(X)$ được xác định theo công thức ở hai trường hợp như sau:

a) Khi *X* là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Khí đó, ta có:

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \text{ là trung bình của } X.$$

Tổng quát, với mọi *k = 1, 2, 3, …*, ta có:

$$E(X^k) = x_1^k p_1 + x_2^k p_2 + ... + x_n^k p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \text{ là trung bình của } X.$$

b) Khi *X* là đại lượng ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất $f(x)$

Ta có:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \text{ là trung bình của } X.$$

Tổng quát, với mọi *k = 1, 2, 3, …*, ta có:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx \text{ là trung bình của } X.$$

Ví dụ 1: Cho đại lượng ngẫu nhiên rời rạc *X* có bảng phân phối xác suất:

X	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

Ta có:

$$E(X) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.2 = 0.9$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0.3 + 1^2 \times 0.5 + 2^2 \times 0.2 = 1.3$$

$$E(X^3) = 0^3 \times 0.3 + 1^3 \times 0.5 + 2^3 \times 0.2 = 2.1$$

Ví dụ 2: Cho đại lượng ngẫu nhiên liên tục *X* có hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9} x(3 - x) & , \ x \in [0;3] \\ 0 & , \ x \notin [0;3] \end{cases}$$

Ta có:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)=\int_0^3 x\frac{2}{9}x(3-x)dx=\int_0^3\frac{2}{9}\left(3x^2-x^3\right)=\frac{2}{9}\left(\frac{3x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^3=\frac{3}{2}$$

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^3 x^2\frac{2}{9}x(3-x)dx=\int_0^3\frac{2}{9}\left(3x^3-x^4\right)=\frac{2}{9}\left(\frac{3x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^3=\frac{27}{5}$$

c) Tính chất

- $E(C)=C$, C là hằng số

Ví dụ: $E(2)=2, E(0)=0, E(10)=10$

- $E(CX)=CE(X)$

- $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$

- Nếu X và Y độc lập thì $E(XY)=E(X)E(Y)$

d) Ý nghĩa của kỳ vọng

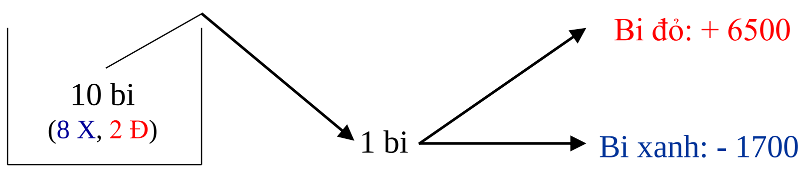
Kỳ vọng của đại lượng ngẫu nhiên X xấp xỉ với giá trị trung bình của các giá trị quan sát, và nó phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất.

Do đó, trong thực tế sản xuất hay kinh doanh nếu ta cần chọn phương án cho năng suất cao (*hay lợi nhuận cao*) ta cần chọn phương án cho năng suất kỳ vọng cao (*hay lợi nhuận kỳ vọng cao*).

e) Áp dụng

Trò chơi: Một hộp có 8 bi xanh và 2 bi đỏ. Một người tham gia trò chơi như sau. Anh ta chọn ngẫu nhiên ra một bi, nếu bi đỏ được 6500 đồng, nếu rút bi xanh thì bị phạt 1700 đồng. Trò chơi này có công bằng cho người tham gia chơi hay không?

<u>Giải</u>



Đặt X là số tiền có được sau một lần chơi

Bước 1: Xác định tập giá trị $X \Rightarrow X=\{-1700;+6500\}$

Bước 2: Tính xác suất

$$P(X=-1700)=\frac{C_8^1}{C_{10}^1}=\frac{8}{10} \qquad P(X=+6500)=\frac{C_2^1}{C_{10}^1}=\frac{2}{10}$$

Bước 3: Lập bảng phân phối xác suất

X	-1700	+6500
P	0.8	0.2

Khi đó,

$$E(X) = -1700 \times \frac{8}{10} + 6500 \times \frac{2}{10} = -60$$

Vậy trò chơi trên không công bằng cho người tham gia chơi.

Bảo hiểm: Theo số liệu thống kê cho thấy tỷ lệ xe máy bị tai nạn giao thông ở một địa phương 1/10000. Một công ty bán bảo hiểm xe máy một năm 70000 đồng/xe và chi phí bồi thường 10000000 đồng (10 triệu đồng). Khi bán một hợp đồng thì Công ty thu lợi bao nhiêu, biết rằng tổng chi phí quản lý và các chi phí khác chiếm 30% số tiền bán bảo hiểm.

Giải

Khi bán bảo hiểm xe máy là 70.000 đồng (*trừ chi phí quản lý và chi phí khác 30%*) thì Công ty thu lợi 49.000 đồng (*lợi nhuận*).

Khi xe máy bị tai nạn giao thông (*xe máy đã mua bảo hiểm*) và Công ty bồi thường là 10.000.000 đồng, khi đó Công ty thua lỗ là 9.951.000 đồng.

Gọi *X* là lợi nhuận của Công ty khi bán một hợp đồng bảo hiểm

Bước 1: Xác định tập giá trị của *X*

$\Rightarrow X = \{-9.951.000; 49.000\}$

Bước 2: Tính xác suất

$P(X = -9.951.000) = \frac{1}{10000}$ *(tỷ lệ xe máy bị tai nạn giao thông là 1/10000)*

$P(X = 49.000) = \frac{9999}{10000}$ *(tỷ lệ xe máy không bị tai nạn giao thông là 1-1/10000)*

Bước 3: Lập bảng phân phối xác suất

X	-9.951.00	+49.000
P	$\frac{1}{10000}$	$\frac{9999}{10000}$

Khi đó,

$$E(X) = -9.951.000 \times \frac{1}{10000} + 49.000 \times \frac{9999}{10000} = 48000$$

Khi bán một hợp đồng thì Công ty thu lợi là 48.000 đồng.

Mua vé số (Sinh viên tự giải):

- Mua vé số truyền thống 6 số: $1/10^6$ trúng được 2 tỷ, không trúng thua 10000 đồng.
- Mua vé số tự chọn 6/45 cặp: $1/C_{45}^{6}$ trúng được 12 tỷ, không trúng thua 10000 đồng.

II. Phương sai

Định nghĩa: Phương sai của đại lượng ngẫu nhiên *X*, kí hiệu: $V(X)$, được xác định bởi công thức:

$$V(X)=E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}.$$

$$\Leftrightarrow V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$$

Ví dụ 3: Cho đại lượng ngẫu nhiên rời rạc *X* có bảng phân phối xác suất:

X	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

Ta có: $E(X)=0.9$ $\qquad E\left(X^2\right)=1.3$

$$\Rightarrow V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2=1.3-0.81=0.49$$

Ví dụ 4: Trọng lượng của một loại sản phẩm là đại lượng ngẫu nhiên *X* (*đơn vị tính: kg*) có hàm mật độ xác suất :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{16}\left(x^2-1\right) & khi \quad x\in[2;3]\\ 0 & khi \quad x\notin[2;3]\end{cases}$$

Tính trọng lượng trung bình và phương sai của *X*.

<u>**Giải**</u>

Trọng lượng trung bình của *X* là:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_2^3 x\frac{3}{16}\left(x^2-1\right)dx=\frac{3}{16}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^3=\frac{165}{64}(kg).$$

Ta có,

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_2^3 x^2\frac{3}{16}\left(x^2-1\right)dx=\frac{3}{16}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^3=\frac{269}{40}.$$

Do đó, khi phương sai của *X* là

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2=\frac{269}{40}-\left(\frac{165}{64}\right)^2=0.0783\left(kg^2\right).$$

Tính chất:

- $V(C)=0$, C hằng số.

Ví dụ: *V(1)=0, V(10)=0*

- $V(CX)=C^2V(X)$

- $V(X+C)=V(X)$

- Nếu *X*, *Y* độc lập: $V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)$.

Ý nghĩa: Phương sai của *X* chính là trung bình bình phương độ lệch so với trung bình, nó phản ánh mức độ phân tán các giá trị của *X* so với giá trị Trung bình của nó.

- Kinh tế: Phương sai phản ánh mức độ rủi ro.

- Công nghệ: Phương sai phản ánh độ ổn định.

Ví dụ 4: Năng suất của hai máy tương ứng là các đại lượng ngẫu nhiên rời rạc X, Y (*đơn vị: sản phẩm/phút*) có bảng phân phối xác suất:

X	1	2	3	4
P	0.3	0.1	0.5	0.1

Y	2	3	4	5
P	0.1	0.4	0.4	0.1

Nếu phải chọn mua một trong hai máy này với giả thiết giá bán của hai máy là như nhau ta nên chọn mua máy nào? Tại sao?

III. Độ lệch tiêu chuẩn

Độ lệch tiêu chuẩn của đại lượng ngẫu nhiên *X*, kí hiệu: $\sigma(X)$, được xác định bởi công thức:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

IV. Giá trị tin chắc

Mode của đại lượng ngẫu nhiên *X*, kí hiệu: $Mod(X)$, là giá trị của đại lượng ngẫu nhiên *X* mà tại đó nó có nhiều khả năng xảy ra nhất.

- Đại lượng ngẫu nhiên rời rạc: $Mod(X)$ là có xác suất lớn nhất.

- Đại lượng ngẫu nhiên liên tục: $Mod(X)$ là có hàm mật độ xác suất đạt cực đại.

Ví dụ 5: Trên một cái kệ có 6 cuốn sách toán và 4 cuốn sách lý, chọn ngẫu nhiên 3 cuốn sách. Số cuốn sách toán chọn được có nhiều khả năng nhất là bao nhiêu?

Giải

Gọi *X* là số cuốn sách toán chọn được

Bước 1: Xác định tập giá trị của *X*

Khi đó *X* là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận các giá trị: 0, 1, 2, 3.

$\Rightarrow X = \{0, 1, 2, 3\}$

Bước 2: Tính xác suất

$$P(X=0) = \frac{C_6^0 C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} \qquad P(X=1) = \frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{36}{120}$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} \qquad P(X=3) = \frac{C_6^3 C_4^0}{C_{10}^3} = \frac{20}{120}$$

Bước 3: Lập bảng phân phối xác suất

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{20}{120}$

Từ bảng trên ta được $Mod(X) = 2$

Vậy số cuốn sách toán có nhiều khả năng chọn được là 2 cuốn.

Ví dụ 6: Cho đại lượng ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất:

$$f(X)=\begin{cases}-\dfrac{64}{135}\left(x^3-3x\right), x\in\left[0;\dfrac{3}{2}\right]\\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad , x\notin\left[0;\dfrac{3}{2}\right]\end{cases}$$

Tìm $Mod(X)$

Giải

Vì $f(x)=0, \forall x\notin\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$ nên để tìm $Mod(X)$ ta chỉ cần tìm xét hàm số $f(x)=-\dfrac{64}{135}\left(x^3-3x\right)$ trên $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$.

Ta có $f^{'}(x)=-\dfrac{64}{135}\left(3x^2-3\right)$

Cho $f^{'}(x)=0$

$$\Leftrightarrow -\frac{64}{135}\left(3x^2-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1 \quad \text{(Nhận)}\\ x=-1 \quad \text{(Loại vì } x\in\left[0;\dfrac{3}{2}\right]\text{)}\end{array}\right.$$

Khi đó ta tính $f(x)$ tại các giá trị đầu mút và nghiệm của $f^{'}(x)$:

$$f(x=0)=0;\ f\left(x=\frac{3}{2}\right)=\frac{8}{15};\ f(x=1)=\frac{128}{135}$$

$$\Rightarrow \max_{R} f(x)=f(x=1)=\frac{128}{135}$$

Vậy $Mod(X)=1$.

Ví dụ 7 (Sinh viên tự giải): Cho đại lượng ngẫu nhiên liên tục *X* có hàm mật độ xác suất như sau:

$$f(x)=\begin{cases}a-\dfrac{3}{2}x & khi \quad x\in[0;1]\\ 0 & khi \quad x\notin[0;1]\end{cases}$$

a) Xác định hằng số a.

b) Tính $E(X)$ và $V(E)$.

Ví dụ 8 (Sinh viên tự giải): Hộp 1 có 20 lọ thuốc trong đó có 2 lọ hỏng và 18 lọ tốt. Hộp 2 có 20 lọ trong đó có 3 lọ hỏng và 17 lọ tốt. Lấy ở mỗi hộp 1 lọ. Gọi *X* là số lọ hỏng có trong 2 lọ lấy ra.

a) Tìm bảng phân phối xác suất của *X*.

b) Tính $E(X)$ và $V(E)$.