PHẦN A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Trong phần này, kiến thức cơ bản về lý thuyết xác suất và thống kê toán học sẽ được trình bày dưới dạng ngắn gọn nhất nhằm giúp người đọc có thể vận dụng để giải bài tập một cách nhanh chóng.

Chương 1

XÁC SUẤT VÀ CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT

Bài 1. Phép đếm

- Đếm tiền, số lượng sinh viên trong lớp, … => rất dễ.
- Tại sau đếm trong xác suất rất khó vì phải tưởng tượng, … => Vẽ môn hình.
- Bắt trước theo Thầy => sáng tạo.

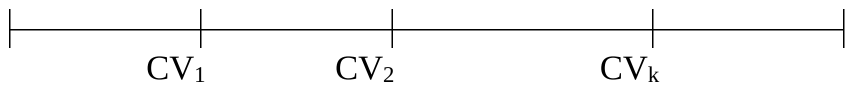
I. Các quy tắc đếm

1) Qui tắc nhân

Định nghĩa: Giả sử cho một công việc. Hỏi có bao nhiêu cách để thực hiện công việc đã cho?

Giải:

Mô tả:



Xét: (*Hay giả sử một công việc được thực hiện qua k giai đoạn*)

Công việc 1: Có n_1 cách thực hiện

Công việc 2: Có n_2 cách thực hiện

……………………

Công việc k: Có n_k cách thực hiện

=> Vậy theo QTN cho rằng:

$$\text{Số cách} = n_1 * n_2 * ... * n_k$$

Ví dụ 1: *Một hợp đựng 2 bi đỏ và 3 bi trắng. Chọn ngẫu nhiên 2 bi từ hợp này. Tính số cách chọn được 1 bi đỏ và 1 bi trắng?*

Giải

Việc chọn ra 1 bi **đỏ,** 1 bi **trắng** có thể tiến hành qua hai giai đoạn sau:

- Chọn 1 bi đỏ: có $n_1 = 2$ cách. - Chọn 1 bi trắng: có $n_2 = 3$ cách.

Vậy theo QTN số cách $n = n_1.n_2 = 2.3 = 6$ cách khác nhau để thực hiện công việc.

Cách 2: Bằng cách liệt kê

Bi trắng / Bi đỏ	T1	T2	T3
Đ1	Đ1T1	Đ1T2	Đ1T3
Đ1	Đ2T1	Đ2T2	Đ2T3

Ví dụ 2: *Tại một cửa hàng bán quần áo, một cậu bé muốn chọn mua cho mình 1 bộ quần áo thể thao. Có 5 áo và 5 quần theo đúng cỡ của cậu bé. Hỏi có bao nhiêu cách để cậu bé chọn mua?*

Giải

Số cách cậu bé chọn mua 1 bộ quần áo thể thao, được chia thành 2 giai đoạn:

- Chọn mua áo: có $n_1 = 5$ cách. - Chọn mua quần: có $n_2 = 5$ cách.

Vậy có tất cả $n = n_1.n_2 = 5.5 = 25$ cách khác nhau để thực hiện công việc.

Ví dụ 3: Có bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau (*hay đôi 1 khác nhau*)?

Giải

* Nếu cách liệt kê: 3256; 4567; 5231; 1023 ----> 9876.

* Công việc: Lập 1 số có 4 chữ số khác nhau.

abcd:

Chú ý:

- Con số nào có nhiều điều kiện nhất thì lập trước.

- Công việc nhỏ nào có nhiều điều kiện nhất thì làm trước.

abcd

- Lập a (bắt buộc) : 9 cách (a = 1-> 9)
- Lập b (Không bắt buộc) : 9 cách (b $\neq$ a)
- Lập c (Không bắt buộc) : 8 cách (c $\neq$ a, b)
- Lập d (Không bắt buộc) : 7 cách (d $\neq$ a, b, c)

QTN: 9*9*8*7 = 4536

*** Cách sai hướng**

- Lập b: 10 cách (b=0, 1, 2, …, 9)
- Lập a: + 9 cách (b=0: Trường hợp 1)

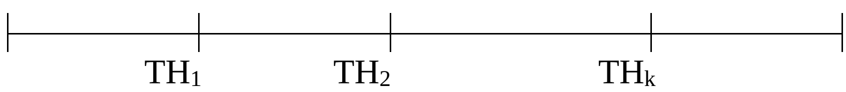
  + 8 cách (nếu b $\neq$ 0: Trường hợp 2)

2) Qui tắc cộng

Định nghĩa: Giả sử cho một công việc. Hỏi có bao nhiêu cách để thực hiện công việc đã cho.

Giải:

Mô tả:



Ta chia làm *k* trường hợp.

Khi đó, ta xét:

Trường hợp 1: Có m_1 cách thực hiện,

Trường hợp 2: Có m_2 cách thực hiện,

. . . .

Trường hợp *k*: Có m_k cách thực hiện.

Khi đó theo QTC cho rằng:

$$\text{Số cách: } m_1 + m_2 + ... + m_k$$

Ví dụ 1: *Một hợp đựng 2 bi đỏ và 3 bi trắng. Chọn ngẫu nhiên 2 bi từ hợp này. Tính số cách chọn được ít nhất 1 bi trắng?*

Giải

Số cách chọn được ít nhất 1 bi trắng có hai trường hợp xảy ra:

- **Trường hợp 1**: Chọn được 1 bi trắng, 1 bi đỏ: có $n_1 = 2.3 = 6$ cách.

- **Trường hợp 2**: Chọn được 2 bi trắng: có $n_2 = 3$ cách.

Vậy có tất cả $n = n_1 + n_2 = 6 + 3 = 9$ cách khác nhau để thực hiện công việc.

Ví dụ 2: *Tại một cửa hàng bán quần áo, một cậu bé muốn chọn mua cho mình 1 bộ quần áo thể thao nhưng cậu bé chỉ đủ tiền mua áo hoặc mua quần. Có 5 áo và 5 quần theo đúng cỡ của cậu bé. Hỏi có bao nhiêu cách để cậu bé chọn mua?*

Giải

Chọn thỏa yêu cầu bài toán bài toán có 2 trường hợp xảy ra:

- Trường hợp 1: Chọn mua áo có $n_1 = 5$ cách.

- Trường hợp 2: Chọn mua quần có $n_2 = 5$ cách.

Vậy có tất cả $n = n_1 + n_2 = 5 + 5 = 10$ cách khác nhau để thực hiện công việc.

Ví dụ 3: Có báo nhiêu số chẵn có 4 chữ khác nhau?

Giải

4 chữ số khác nhau: - Số chẵn (xuôi) - Sỗ lẻ (ngược)

Công viêc: Lập 1 số chẵn có 4 số khác nhau.

a	b	c	d

Cách 1: Ta chia làm 2 trường hợp theo d

Trường hợp 1: Khi d = 0.

a	b	c	d

Lập d : 1 cách.

a : 9 cách (a $\neq$ 0, a= 1, 2, …, 9)

b : 8 cách (b $\neq$ a, d)

c : 7 cách (c $\neq$ a, b, d)

=> QTN: 1*9*8*7 = 504 = KQ$_1$

Trường hợp 2: Khi $d \neq 0$

a	b	c	d

Lập d : 4 cách (d=2, 4, 6, 8)

a : 8 cách ($a \neq 0$, d)

b : 8 cách ($b \neq a$, d)

c : 7 cách ($c \neq a$, b, d)

=> QTN: 4*8*8*7 = 1792 = KQ_2

Theo QTC số cách là: $KQ_1 + KQ_2 = 2296$

Cách 2: Ta chia làm 2 trường hợp theo a

Trường hợp 1: Khi a lẻ.

a	b	c	d

Lập a : 5 cách (1, 3, 5, 7, 9)

d : 5 cách (0, 2, 4, 6, 8)

b : 8 cách ($b \neq a$, d)

c : 7 cách ($c \neq a$, b, d)

=> QTN: 5*5*8*7 = 1400 = KQ_1

Trường hợp 2: Khi a chẵn

a	b	c	d

Lập a : 4 cách (2, 4, 6, 8)

d : 4 cách ($d \neq a$)

b : 8 cách ($b \neq a$, d)

c : 7 cách ($c \neq a$, b, d)

=> QTN: 4*4*8*7 = 896 = KQ_2

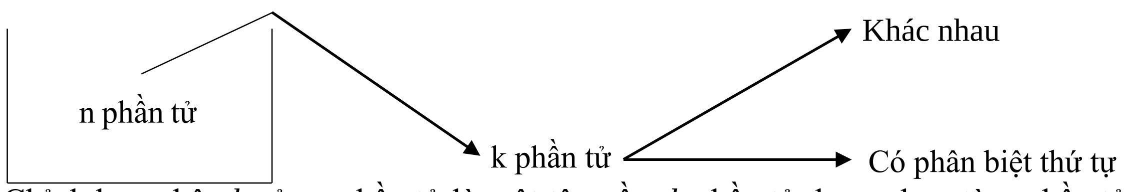
Theo QTC số cách là: $KQ_1 + KQ_2 = 2296$

==> Giai đoạn: Nhân **Trường hợp: Cộng**

II. Một số công thức

1. Chỉnh hợp không lặp

Mô hình:



Chỉnh hợp chập *k* của *n* phần tử là một tập gồm *k* phần tử được chọn từ *n* phần tử đã cho có hai tính chất: **khác nhau và có quan tâm đến thứ tự sắp xếp**.

Số chỉnh hợp chập *k* của *n* phần tử là

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}} \qquad (0 \le k \le n)$$

Giải: Ta chia làm K công việc nhỏ:

- Chọn phần tử 1: n cách

2: n – 1 cách

k: n – (k - 1) = n- k + 1

QTN: n * (n - 1) … (n- k + 1) = $\frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$

Giai thừa: 0! = 1 (quy ước)

1! = 1

2! = 1*2

3! = 1*2*3

n! = 1*2*3 ….. *(n - k)

Vậy: $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1*2*...*(n-k)*(n-k+1)*...*n}{1*2*...*(n-k)} = (n-k+1)*...*n$

Ví dụ 1: Có 32 vận động viên thi đấu môn bóng bàn. Hỏi có bao nhiêu cách để Ban tổ chức phát 1 bộ huy chương gồm có.

a) Một vàng, một bạc và một đồng. b) Một vàng, một bạc và hai đồng.

Giải

a) Một vàng, một bạc và một đồng.

Cách 1: Ta có: n = 32

K = 3 (có phân biệt thứ tự)

Vậy số cách là:

$$A_n^k = A_{32}^3 = \frac{32!}{(32-3)!} = 30*31*32 = 29760.$$

Cách 2: (QTNN)

Phát một đồng: 32

Phát một bạc: 31

Phát một vàng: 30

==> QTN: 32*31*30 = 29760

Nhận xét: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Nếu k = n thì $A_n^k = \frac{n!}{0!} = n! = P_n$. P_n : Số hoán vị của n phần tử.

Ví dụ 2 (Sinh viên tự giải): Cho tập $A=\{1,2,3,4,5\}$, có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau đội một.

Ví dụ 3 (Sinh viên tự giải): Một lớp học 30 sinh viên trong đó có 20 nam. Có bao nhiêu cách chọn ra một Ban cán sự lớp gồm: 1 lớp trưởng, 1 lớp phó, 1 ủy viên học tập, 1 ủy viên đời sống. Nếu:

a) Chọn bất kỳ b) Toàn là nữ c) Toàn là nam

2) Hoán vị

Hoán vị của *n* phần tử là số chỉnh hợp chập *n* của *n* phần tử đã cho. Hay hoán vị của *n* phần tử là một cách sắp xếp **có thứ tự gồm đủ mặt *n* phần tử đã cho**.

Số hoán vị của *n* phần tử được ký hiệu là

$$\boxed{P_n = n!}.$$

Ví dụ 1: Xếp 4 quyển sách lên kệ.

<u>Giải</u>

q1
q2
q3
q4

Ta có: $n=4$ (hoán vị)

Số cách: $P_4 = 4! = 24$

Ví dụ 2: Bỏ ngẫu nhiên 5 lá thư vào 5 phong bì đã ghi địa chỉ sẵn. Hỏi có bao nhiêu cách?

<u>Giải</u>

Số cách bỏ là $P_5 = 5! = 120$ (cách).

Ví dụ 3: Có 4 học sinh lớp A, 5 học sinh lớp B và 2 học sinh lớp C. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 11 học sinh vào một dãy bàn dài.

a) Xếp tùy ý. b) Học sinh cùng lớp thì ngồi cạnh nhau.

c) Học sinh lớp B ngồi cạnh nhau.

d) Các học sinh lớp B không được ngồi cạnh nhau.

<u>Giải</u>

a) Xếp tùy ý: => Số cách $P_{11} = 11! = 39916800$

b) Cùng lớp ngồi cạnh nhau

Lớp A	Lớp B	Lớp C	Số cách = $(4!5!2!)3!$
$P_4 = 4!$	$P_5 = 5!$	$P_2 = 2!$	*Sai* $(4!5!3!)2!$

c) Học sinh lớp B ngồi cạnh nhau

- Học sinh lớp B ngồi cạnh nhau: $P_5 = 5!$

- Nhóm học sinh lớp B và lớp A và lớp C => $P_7 = 7!$ => Số cách $(5!1!)7!$

d) Học sinh lớp B không ngồi cạnh nhau

- Xếp học sinh lớp A và lớp C => số cách $P_6 = 6!$

- Xếp học sinh lớp B vào các vị trí xen kẽ của học sinh lớp A và lớp C:

	*	*	*	*	*	*	
↗ 1	↗ 2	↗ 3	↗ 4	↗ 5	↗ 6	↗ 7	

+ Xếp B_1: có 7 cách

B_2: có 6 cách

B_3: có 5 cách

B_4: có 4 cách

B_5: có 3 cách

=> Số cách = 7*6*5*4*3

Vậy số cách xếp học sinh lớp B không ngồi cạnh nhau là = 6!*7*6*5*4*3

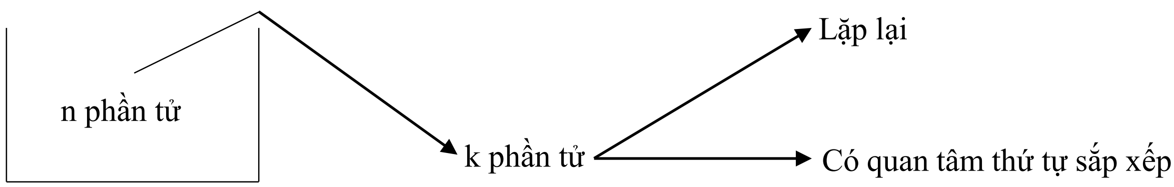
Ví dụ 4 (Sinh viên tự giải): Có 5 người. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 5 người này:

a) Ngồi thành hàng dài

b) Ngồi thành vòng tròn

c) Ngồi vào bàn tròn có đánh số.

3) Chỉnh hợp lặp



Chỉnh hợp lặp chập *k* của *n* phần tử là một tập gồm *k* phần tử được chọn từ *n* phần tử đã cho có hai tính chất: có thể lặp lại và có quan tâm đến thứ tự sắp xếp.

Số chỉnh hợp lặp chập *k* của *n* phần tử được ký hiệu là

$$\boxed{B_n^k = n^k}$$

Ví dụ 1: Xếp ngẫu nhiên 8 quyển sách khác nhau vào 5 ngăn kéo khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách?

<u>Giải</u>

Mỗi quyển sách có 5 cách chọn ngăn nên số cách xếp là $B_5^8 = 5^8$

Ví dụ 2: Năm người cùng lên một đoàn tàu hỏa có 8 toa. Có bao nhiêu cách để:

a) Lên tùy ý.

b) Lên 5 toa đầu

c) Lên 5 toa khác nhau.

d) Lên tùy ý ở 6 toa đầu.

e) Chỉ có 2 người lên chung toa đầu.

Giải

a) Ta có: n = 8, k = 5. Lê tùy ý => Số cách $B_8^5 = 8^5 = 32768$

b) Lên 5 toa đầu. Khi đó, ta có: n = 5, k = 5 => Số cách $B_5^5 = 5^5 = 3125$

c) Lê 5 toa khác nhau. Khi đó, ta có: n = 8, k = 5 => Số cách $A_8^5 = \dfrac{8!}{(8-5)!} = 6720$

d) Ta có: n = 6, k = 5. Lê tùy ý => Số cách $B_6^5 = 6^5 = 7776$

e) Chỉ có 2 người lên chung toa đầu

- Chọn 2 người từ 5 người và sắp vào 2 toa đầu: $C_5^2 = 10$.

- Sắp 3 người còn lại vào 7 toa => Số cách $B_7^3 = 7^3 = 343$

$\Rightarrow C_5^2 B_7^3 = 3430$

Ví dụ 2: Người ta dùng 5 cột cờ để báo hiệu trên biển. Biết rằng có tất cả 7 màu cờ khác nhau. Hỏi có bao nhiêu tín hiệu khác nhau.

a) Dùng màu tùy ý. b) Dùng 5 màu khác nhau.

c) Hai cột kế tiếp không được cùng màu.

Giải

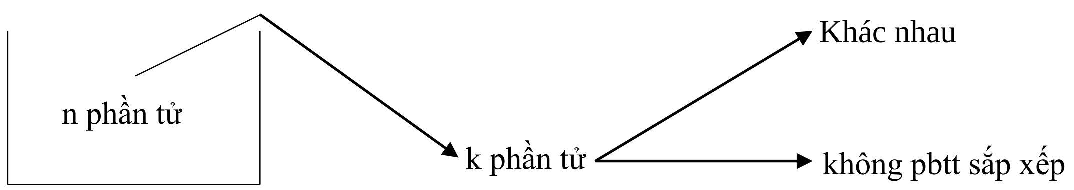
a) Ta có: n = 7, k = 5. Lê tùy ý => Số cách $B_7^5 = 7^5 = 16807$

b) Dùng màu khác nhau. Khi đó, ta có: n = 7, k = 5 => Số cách $A_7^5 = \dfrac{7!}{(7-5)!} = 2520$

c) Số cách: $7*6*6*6*6 = 9072$.

4) Tổ hợp

Mô hình:



Tổ hợp chập *k* của *n* phần tử là một tập gồm *k* phần tử được chọn từ *n* phần tử đã cho có hai tính chất: khác nhau và không quan tâm đến thứ tự sắp xếp.

Số chỉnh hợp chập *k* của *n* phần tử là

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Chú ý: Khi áp dụng quy tắc nhân nếu có **k phần tử** không phân biệt thứ tự thì kết quả phải chia cho ***k!***.

Ví dụ 1: Có 32 vận động viên thi đấu môn bóng bàn. Hỏi có bao nhiêu cách để Ban tổ chức phát 1 bộ huy chương gồm có.

a) Một vàng, một bạc và một đồng. b) Một vàng, một bạc và hai đồng.

<u>Giải</u>

b) Một vàng, một bạc và hai đồng.

Cách 1:

- Phát 2 huy chương đồng $\Rightarrow C_{32}^{2} = 496$ (không phân biệt thứ tự sắp xếp)

- Phát 1 huy chương vàng và 1 huy chương bạc $\Rightarrow A_{30}^{2} = 870$

$\Rightarrow C_{32}^{2} * A_{30}^{2} = 496*870 = 431520$

Cách 2:

- Phát 1 huy chương đồng thứ I có 32 cách.

- Phát 1 huy chương đồng thứ II có 31 cách.

- Phát 1 huy chương bạc có 30 cách.

- Phát 1 huy chương vàng có 29 cách.

Do 2 VĐV nhận huy chương đồng: Khác nhau + Không pbtt sắp xếp

$$\Rightarrow \frac{32*31*30*29}{2!} = 431520$$

Ví dụ 2: Có 5 đôi vợ chồng. Người ta cần chọn 1 nhóm gồm 3 người để tham gia 1 hoạt động xã hội. Hỏi có bao nhiêu cách chọn trong các trường hợp sau đây.

a) Chọn ra 3 người tùy ý.

b) Chọn ra 3 người, mà có 2 người là vợ chồng của nhau.

c) Chọn ra 3 người, không có ai là vợ chồng của nhau.

<u>Giải</u>

a) Chọn 3 người tùy ý $C_{10}^{3} = 120$ hoặc $\frac{10*9*8}{3!} = 120$

b) - Chọn 1 cặp trong 5 cặp vợ chồng: $C_{5}^{1} = 5$ cách

- Chọn 1 người trong 8 người còn lại: $C_{8}^{1} = 8$ cách

$\Rightarrow C_{5}^{1} * C_{8}^{1} = 40$

c) - Cách 1: 120 – 40 = 80

- Cách 2: + Chọn người thứ I: 10 cách

+ Chọn người thứ II: 8 cách

+ Chọn người thứ III: 6 cách

$$\Rightarrow \frac{10*8*6}{3!} = 80 \text{ cách}$$