Chương 2

ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN

Bài 1: Quy luật của đại lượng ngẫu nhiên

I. Khái niệm

Đại lượng ngẫu nhiên là đại lượng mà giá trị của nó đại diện cho các kết quả có thể xảy ra của một phép thử ngẫu nhiên với một xác suất nhất định nào đó phụ thuộc vào kết quả của phép thử ngẫu nhiên.

Các đại lượng ngẫu nhiên thường được ký hiệu bằng các chữ cái hoa như: X, Y, Z, … hoặc dạng chỉ số: X_1, X_2, …, X_n; Y_1, Y_2, …, Y_n;…

Các giá trị có thể có của đại lượng ngẫu nhiên được ký hiệu là x_1,..., x_m ...; y_1, …,y_m...

Một đại lượng ngẫu nhiên coi như được xác định nếu biết được tập các giá trị của nó và các xác suất tương ứng.

Ví dụ 1: Tung 1 đồng xu: $\Omega = \{S, N\}$.

$$\text{Đặt } X = \begin{cases} 0 \text{ nếu đồng xu xuất hiện mặt } S \\ 1 \text{ nếu đồng xu xuất hiện mặt } N \end{cases}$$

$\Rightarrow X = \{0,1\}$ là đại lượng ngẫu nhiên.

Tính xác suất:

$$P(X = 0) = P(S) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 1) = P(N) = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 2: Tung 1 con xúc sắc, ta có: Ω = {*Mặt 1 chấm, 2 chấm, 3 chấm, …, 6 chấm*}

$$\text{Đặt } X = \begin{cases} 1 \text{ nếu con xúc sắc xuất hiện mặt } \textit{1 chấm} \\ 2 \text{ nếu con xúc sắc xuất hiện mặt } \textit{2 chấm} \\ 6 \text{ nếu con xúc sắc xuất hiện mặt } \textit{6 chấm} \end{cases}$$

$\Rightarrow X = \{1,2,3,4,5,6\}$ là đại lượng ngẫu nhiên

* **Cách 2**: Đặt X là số chấm xuất hiện khi tung con xúc xắc:

$\Rightarrow X = \{1,2,3,4,5,6\}$

Tính xác suất:

$$P(X = 1) = \frac{1}{6} \qquad P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Ví dụ 3: Gọi Y là số sinh viên vắng của một lớp học phần Xác suất thống kê gồm có *60* sinh viên trong một buổi học.

=> Khi đó Y là đại lượng ngẫu nhiên và có thể nhận các giá trị là: 0, 1, 2, 3, …60.

$\Rightarrow Y = \{0, 1, 2, 3, ..., 60\}$

Ví dụ 4: Gọi Z là nhiệt độ của một vùng tại một thời điểm. Giả sử vùng này có nhiệt độ thấp nhất là 29^0C và cao nhất là 32^0C thì Z cũng là đại lượng ngẫu nhiên với giá trị $Z \in [29;32]$.

Ví dụ 5: Trong đợt kiểm tra sức khỏe đầu năm của sinh viên khóa mới. Gọi T là chiều cao của sinh viên. Giả sử chiều cao thấp nhất và cao nhất của sinh viên lần lượt là *1.35m* và *1.85m* thì T cũng là đại lượng ngẫu nhiên với giá trị $T \in [1.35;1.85]$.

*** Phân loại:** Dựa vào tập giá trị ta phân chia Đại lượng ngẫu nhiên làm 2 loại:

a) Đại lượng ngẫu nhiên rời rạc: là các đại lượng mà ta có thể liệt kê từ bé đến lớn (*Hoặc có thể hiểu là Đại lượng ngẫu nhiên mà tập giá trị của nó là một tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được các phần tử*).

$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

Ví dụ:- Đặt X là số người vào siêu thị trong 1 giờ, khi đó: $\Rightarrow X = \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$

- Ở các Ví dụ 1, 2, 3.

b) Đại lượng ngẫu nhiên liên tục: là các đại lượng mà ta không thể liệt kê từ bé đến lớn được (*Hoặc có thể hiểu là Đại lượng ngẫu nhiên mà tập giá trị của nó lấp đầy một khoảng trên trục số*).

Ví dụ: Thời gian, nhiệt độ (*ở Ví dụ 4:* $Z \in [29;32]$), độ dài (*ở Ví dụ 5:* $T \in [1.35;1.85]$), khối lượng, …

II. Quy luật của đại lượng ngẫu nhiên

1. Đối với đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Bước 1: Xác định tập giá trị của X

$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

Bước 2: Tính xác suất (*Tính xác suất xảy ra tương ứng với từng giá trị của X*)

$P(X = x_1) = p_1$

$P(X = x_2) = p_2$

……………..

$P(X = x_n) = p_n$

Bước 3: Lập bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Trong đó,

- Dòng trên ghi các giá trị có thể có của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc.
- Dòng dưới ghi các xác suất suất tương ứng.

$$P(X = x_i) = p_i, i = \overline{1,n} \text{ và } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Ví dụ 6: Một hộp có 4 bi trắng và 6 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 bi. Hãy xác định luật phân phối xác suất của số bi đỏ được lấy ra.

<u>Giải</u>

Đặt X là số bi đỏ lấy ra.

Bước 1: Xác định tập giá trị của X *(Xác định tất cả các trường hợp có thể xảy ra của X)*

Khi đó X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận các giá trị 0, 1, 2, 3.

$\Rightarrow X = \{0,1,2,3\}$

Bước 2: Tính xác suất

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} \qquad P(X=1) = \frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{36}{120}$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} \qquad P(X=3) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120}$$

Bước 3: Lập bảng phân phối xác suất

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{20}{120}$

Lưu ý: $P = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{4}{120} + \frac{36}{120} + \frac{60}{120} + \frac{20}{120} = 1$ *(Khi giải xong chúng ta kiểm tra, nếu giá trị của P nhỏ hơn 1 hoặc lớn 1 là sai và giá trị của P luôn bằng 1).*

Ví dụ 7 (Sinh viên tự giải): Một hộp có 5 thẻ màu xanh, 3 thẻ màu đỏ. Mỗi thẻ màu xanh có mệnh giá 5 triệu đồng và mỗi thẻ màu đỏ có mệnh giá 10 triệu đồng. Một người tham trò chơi như sau: Anh ta chọn ngẫu nhiên ra 3 thẻ thì được số tiền thưởng bằng tổng giá trị của 3 thẻ đó. Tìm quy luật số tiền mà người chơi được hưởng.

<u>Giải</u>

Đặt X là số tiền mà người chơi được hưởng

Bước 1: Xác định tập giá trị của *X*

Khi đó X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận các giá trị 15 triệu, 20 triệu, 25 triệu, 30 triệu.

⇒X = {15 triệu, 20 triệu, 25 triệu, 30 triệu}

(Rút 3 thẻ có các trường hợp sau: 3 thẻ xanh; 2 thẻ xanh và 1 thẻ đỏ; 1 thẻ xanh và 2 thẻ đỏ; 3 thẻ đỏ)

Bước 2: Tính xác suất

$P(X = 15\ triệu) = \dfrac{C_5^3}{C_8^3} = \dfrac{5}{28} = 0.179$ $\qquad$ $P(X = 20\ triệu) = \dfrac{C_5^2 \times C_3^1}{C_8^3} = \dfrac{15}{28} = 0.536$

$P(X = 25\ triệu) = \dfrac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \dfrac{15}{56} = 0.268$ $\qquad$ $P(X = 30\ triệu) = \dfrac{C_3^3}{C_8^3} = \dfrac{1}{56} = 0.018$

Bước 3: Lập bảng phân phối xác suất

X	15 triệu	20 triệu	25 triệu	30 triệu
P	$\dfrac{5}{28}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{15}{56}$	$\dfrac{1}{56}$

Ta có: $P = \dfrac{5}{28} + \dfrac{15}{28} + \dfrac{15}{56} + \dfrac{1}{56} = 1$

Ví dụ 8 (Sinh viên tự giải): Một cửa hàng bán 4 điện thoại cùng loại. Có 01 người khách đến mua điện thoại. Người khách lần lượt thử từng điện thoại đến khi nào vừa ý thì mua hoặc không vừa ý cả 4 điện thoại thì ra về không mua. Tìm quy luật số lần thử điện thoại của người khách. Biết rằng mỗi lần thử điện thoại xác suất người khách mua điện thoại là 80%.

Giải

Gọi X là số lần thử điện thoại của khách hàng

Bước 1: Xác định tập giá trị của X

Khi đó X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận các giá trị 1, 2, 3, 4.

$\Rightarrow X = \{1, 2, 3, 4\}$

Bước 2: Tính xác suất

$P(X = 1) = 0.8$ (Thử 1 lần, ưng ý và người khách mua điện thoại)

$P(X = 2) = 0.2 \times 0.8 = 0.16$ (Thử và ưng ý, người khách mua điện thoại ở lần thử thứ 2)

$P(X = 3) = 0.2 \times 0.2 \times 0.8 = 0.032$ (Thử và ưng ý, người khách mua điện thoại ở lần thử thứ 3)

$P(X = 4) = 0.2 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.8 + 0.2 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.2 = 0.008$ (Lần thử thứ 4 có 2 trường hợp: (1) khách thử điện thoại, ưng ý nên mua; (2) khách thử điện thoại, không ưng ý nên không mua)

Bước 3: Lập bảng phân phối xác suất

X	1	2	3	4
P	0.8	0.16	0.032	0.008

Ta có: $P = 0.8 + 0.16 + 0.032 + 0.008 = 1$

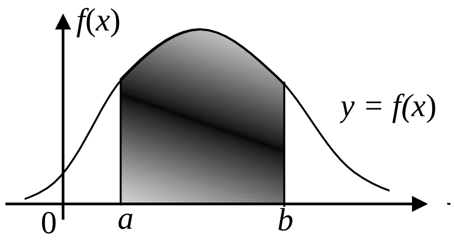
2. Đối với đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ xác định trên R được gọi là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X nếu nó thỏa 2 tính chất sau:

i) $f(x)$ là hàm không âm: $f(x) \geq 0\ \forall x \in R$,

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

Từ hai điều kiện trên ta có thể suy ra rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ không nằm dưới trục hoành và diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$ và trục hoành bằng 1. Phần diện tích này đặc trưng cho tất cả các khả năng xảy ra của phép thử ngẫu nhiên. Vì vậy, ta có thể suy ra rằng xác suất để biến ngẫu nhiên X nhận giá trị trong đoạn $[a, b]$ bằng diện tích của hình phẳng giới hạn bởi trục Ox, đồ thị $y = f(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$.



Tính chất:

i) $P(X = x_0) = 0, \forall x_0 \in R.$ hay x_0 là một giá trị tùy ý.

ii) $P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx.$

iii) $P(X > a) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$

iv) $P(X < b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx.$

v) Đặc biệt, nếu X chỉ nhận giá trị trong $[a, b]$ thì $\int_a^b f(x)\,dx = 1.$

Ví dụ 9: Cho đại lượng ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & khi \quad x \in [0;2] \\ 0 & khi \quad x \notin [0;2] \end{cases}$$

a) Tìm hằng số k.

b) Tính $P(0.5 < X \le 1)$ c) Tính $P(0.5 < X \le 3)$

<u>Giải</u>

a) Tìm hằng số k

Từ định nghĩa, ta có: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

$$\Leftrightarrow 1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{+\infty} f(x)dx=1$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{2} kx^2dx+\int_{2}^{+\infty} 0dx=1$$

$$\Leftrightarrow k\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=1\Leftrightarrow k\left(\frac{2^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)=1\Leftrightarrow k=\frac{3}{8}$$

Trong đó,

Theo đề bài $x\notin[0;2]$ thì $f(x)=0\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)dx=\int_{2}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx=\int_{2}^{+\infty} 0dx=0$

$x\in[0;2]$ thì $f(x)=kx^2\Rightarrow \int_{0}^{2} f(x)dx=\int_{0}^{2} kx^2dx$

b) Tính $P(0.5<X\le 1)=\int_{0.5}^{1} f(x)dx=\int_{0.5}^{1}\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{8}\frac{x^3}{3}\Big|_{0.5}^{1}=\frac{3}{8}\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0.5^3}{3}\right)=\frac{7}{64}.$

(*Áp dụng tính chất ii)* $P(a<X\le b)=\int_a^b f(x)dx$)

c) Tính $P(0.5<X\le 3)=\int_{0.5}^{3} f(x)dx=\int_{0.5}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{3} f(x)dx$ (Vì $x\in[0;2]$)

$$=\int_{0.5}^{2}\frac{3}{8}x^2dx+\int_{2}^{3}0dx=\frac{3}{8}\frac{x^3}{3}\Big|_{0.5}^{2}=\frac{3}{8}\left(\frac{2^3}{3}-\frac{0.5^3}{3}\right)=\frac{63}{64}.$$

Ví dụ 2 (Sinh viên tự giải): Được biết tuổi thọ của một thiết bị điện là đại lượng ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất:

$$f(x)=\begin{cases} kx(3-x) & khi \quad x\in[0;3] \\ 0 & khi \quad x\notin[0;3] \end{cases} \qquad (\textit{đơn vị: năm})$$

a) Tìm hằng số *k*.

b) Tính tỷ lệ các thiết bị có tuổi thọ từ 1 đến 2 năm. (*Hướng dẫn: Tỷ lệ = xác suất nên ta tính* $P(1\le X\le 2)$)

c) Giả sử thời gian bảo hành là 1 năm (*Miễn phí*). Tính xác suất thiết bị đem đi bảo hành trong vòng 1 năm. (*Hướng dẫn: tính* $P(0\le X\le 1)$ *hoặc* $P(X\le 1)$)

d) Một cửa hàng bán ra 540 sản phẩm, thì có khoảng bao nhiêu sản phẩm cần được bảo hành. (*Hướng dẫn: dựa vào câu c) để tính số sản phẩm có thể đem đi bảo hành*)

e) Tính xác suất thiết bị đem đi bảo hành sau 1 năm (*Tính phí* hay *đem đi sửa*).

Giải

a) Tìm hằng số *k*

Từ định nghĩa, ta có: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\Leftrightarrow 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{3} kx(3-x)dx + \int_{3}^{+\infty} 0dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{3} k(3x - x^2)dx = 1$$

$$\Leftrightarrow k\left(3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = 1 \Leftrightarrow k = \frac{9}{2}$$

b) Tính tỷ lệ các thiết bị có tuổi thọ từ 1 đến 2 năm

Ta có,

$$P(1 \le X \le 2) = \int_{1}^{2} \frac{9}{2}x(3-x)dx = \frac{13}{27}$$

c) Tính xác suất thiết bị đem đi bảo hành trong vòng 1 năm

Ta có $X \le 1 \Rightarrow 0 < X \le 1$

$$\Rightarrow P(0 < X \le 1) = \int_{0}^{1} \frac{9}{2}x(3-x)dx = \frac{7}{27}$$

d) Bán ra 540 sản phẩm

Ta có tỷ lệ bảo hành của sản phẩm bán ra là $\frac{7}{27}$ *(Do tính chất Xác suất = Tỷ lệ)*

Vậy số sản phẩm cần được bảo hành = $540 \times \frac{7}{27} = 140$

e) Tính xác suất thiết bị đem đi bảo hành sau 1 năm

Ta có $X > 1 = P(1 < X < +\infty)$

$$\Rightarrow P(1 < X < +\infty) = \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{3} \frac{9}{2}x(3-x)dx = \frac{20}{27}$$ (Vì $x \in [0;3]$)