Bài 3: Một số quy luật đặc biệt

I. Quy luật nhị thức

Nếu X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận một trong các giá trị $0,1,2,3,...n$ với các xác suất tương ứng được tính theo **công thức Bernoulli**:

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{(n-k)}, k=0,1,2,3,...n$$

thì X được gọi là có phân phối Nhị thức với hai tham số n, p.

Kí hiệu: $X \sim B(n;p)$.

Các tham số đặc trưng:

- $E(X)=np$
- $V(X)=np(1-p)=npq$
- $\sigma(X)=\sqrt{npq}$
- $np-q \le Mod(X) \le np+p, Mod(X) \in N$.

Ví dụ 1: Cho một xạ thủ bắn 10 phát súng vào bia với xác suất trúng bia ở mỗi lần là 0.7. Tính xác suất bia bị trúng 4 viên đạn và trung bình số viên đạn bắn trúng.

<u>Giải</u>

Gọi X là số viên đạn bắn trúng bia.

Khi đó, X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận các giá trị $0, 1, 2, 3, 4, ..., 10$ với các xác suất tương ứng được tính theo công thức:

$$P(X=k)=C_{10}^k 0.7^k 0.3^{10-k}, k=\overline{0,10}$$

$\Rightarrow X \sim B(10;0.7)$ là phân phối Nhị thức và ta có: $n=10, p=0.7$

$P(X=4)=C_{10}^4 0.7^4 0.3^6=0.0368$

$E(X)=np=10*0.7=7$

Ví dụ 2 (Sinh viên tự giải): Một lo hàng có rất nhiều sản phẩm với tỷ lệ phế phẩm là 5%. Lấy ngẫu nhiên 100 sản phẩm để kiểm tra.

a) Tính xác suất để có 4 phế phẩm.

b) Tìm số phế phẩm trung bình có trong 100 sản phẩm kiểm tra.

c) Tìm số phế phẩm tin chắc nhất có trong 100 sản phẩm kiểm tra.

II. Phân phối Poisson

Nếu X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận các giá trị $0,1,2,3,...$ với các xác suất tương ứng được tính theo công thức:

$$P(X=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a}, (k=0,1,2,...)$$

thì X được gọi là có phân phối Poisson với tham số a.

Kí hiệu: $X \sim P(a)$

Các tham số:

- $E(X) = a$

- $V(X) = a$

- $\sigma(X) = \sqrt{a}$

- $a - 1 \le Mod(X) \le a$

Ví dụ 3: Được biết số khách hàng vào siêu thị trong một giờ là đại lượng ngẫu nhiên có phân Poisson, có tham số *a=8*.

a) Tính xác suất có 9 khách hàng vào siêu thị trong một giờ.

b) Trung bình có bao nhiêu khách hàng vào siêu thị trong một giờ.

c) Số khách hàng vào siêu thị trong một giờ có xác suất cao nhất.

<u>Giải</u>

Gọi *X* là số khách hàng vào siêu thị trong một giờ.

Khi đó, *X* là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận các giá trị *0, 1, 2, 3, 4, ...* với các xác suất tương ứng được tính theo công thức:

$$P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, (k = 0,1,2,...)$$

Ta có: $a = 8 \Rightarrow X \sim P(8)$

a) $P(X = 9) = \frac{8^9}{9!} e^{-8} = 0.124$

b) $E(X) = a = 8$

c) $a - 1 \le Mod(X) \le a$

$7 \le Mod(X) \le 8 \Rightarrow Mod(X) = 7, Mod(X) = 8$

Ví dụ 4 (Sinh viên tự giải): Cho biết trung bình trong một tuần tại thành phố A xảy ra 30 tai nạn giao thông. Tính xác suất:

a) Không xảy ra tai nạn trong một tuần.

b) Xảy ra 2 tai nạn trong một ngày.

*** Xấp xỉ Nhị thức – Poisson**

Cho $X \sim B(n; p)$, ta có: $P(X = k) = C_n^k p^k q^{(n-k)}$

Nếu *n* đủ lớn và $p < 0.1$ *(Trong thực tế, để có kết quả xấp xỉ tốt nhất thì* $n \ge 20$ *và* $p \le 0.05$) thì $X \approx P(np)$.

Suy ra:

$$P(X=k) \approx \frac{(np)^k}{k!}e^{-np}$$

Ví dụ 5: Ở vùng biển Somalia, trung bình một ngày có khoảng *5000* tàu, thuyền qua lại. Xác suất để một tàu bị cướp biển tấn công là *0.001*. Tính xác suất trong một ngày thì có 25 tàu bị tấn công.

<u>Giải</u>

Đặt *X* là số tàu bị tấn công.

Ta có: n = 5000 và p = 0.001

$\Rightarrow X \sim B(n, 0.001)$, khi đó: $P(X=k) = C_n^k p^k q^{(n-k)}$

Tính: $P(X=25) = C_{5000}^{25} 0.001^{25} 0.999^{4975}$ (*Không tính được*)

Vì $n = 5000$ quá lớn và $p = 0.001 < 0.1$ nên

$$X \approx P(a), \Rightarrow P(X=k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}$$

Trong đó: $a = np = 5000*0.001 = 5$

Tính: $P(X=25) = \frac{5^{25}}{25!}e^{-5} = 1.296*10^{-10}$

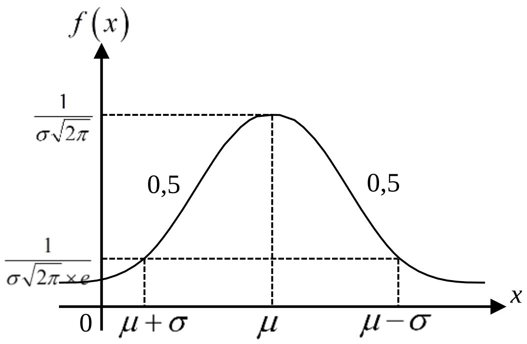
III. Quy luật phân phối chuẩn

Đại lượng ngẫu nhiên liên tục *X* được gọi là có phân phối chuẩn nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}; \forall x \in R$$

thì *X* được gọi là có phân phối Chuẩn với hai tham số μ và σ^2.

Kí hiệu: $X \sim N(\mu; \sigma^2)$



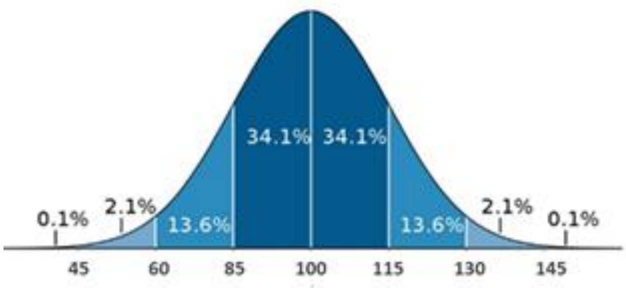
*** Một số nhận xét về hàm mật độ:**

- Đồ thị luôn nằm phía trên trục hoành.
- Đồ thị hàm $f(x)$ là một đường cong có dạng hình chuông và nhận đường thẳng $x = \mu$ làm trục đối xứng.

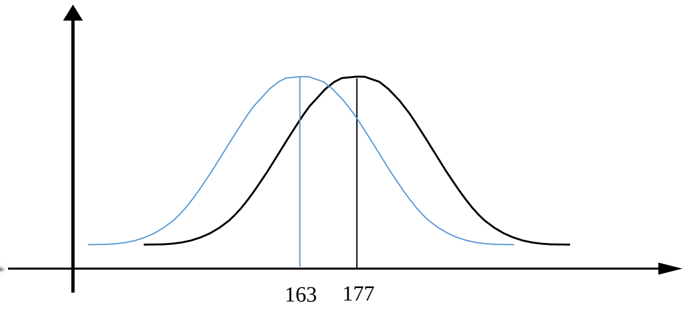
$$\int_{x=-\infty}^{\mu} f(x)dx = 0.5 = \int_{x=\mu}^{+\infty} f(x)dx$$

*** Các tham số**:

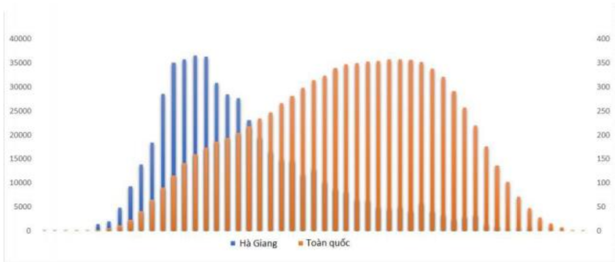
- $E(X) = \mu$
- $\sigma(X) = \sigma$
- $V(X) = \sigma^2$
- $Mod(X) = \mu$



Phân bố chỉ số IQ (100, 15)



Chiều cao nam thanh niên



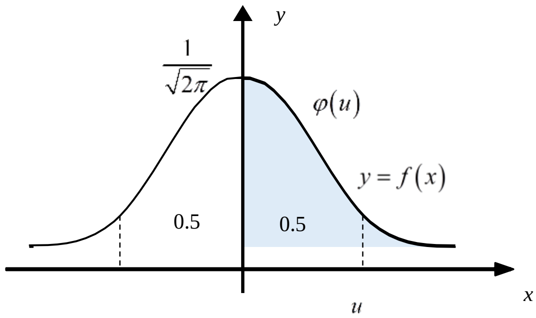
* **Đặc biệt**: Cho $X \sim N\left(\mu;\sigma^2\right)$

Nếu $\mu = 0$ và $\sigma = 1$ thì $X \sim N(0;1)$

X gọi là có quy luật phân phối chuẩn tắc.

Hàm mật độ xác suất của X

$$f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} \qquad (\textit{Hàm Gauss})$$



Đặt $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{u=0}^{u} e^{\frac{-x^2}{2}}dx$ (hàm Laplace)

Tính $\varphi(u)$: $\qquad \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{0} e^{\frac{-x^2}{2}}dx$

$$\varphi(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{1} e^{\frac{-x^2}{2}}dx$$

Tính tích phân rất khó nên giá trị của hàm φ được tra cứu dựa trên hàm Laplace ở **Phụ lục 1** (Trang 181).

Đặt $u = x + y\ (x, y \geq 0)$ $\qquad \varphi(0) \Rightarrow 0 = 0.0 + 0.0 \Rightarrow \varphi(0) = 0$

$$\varphi(1.03) \Rightarrow 1 = 1.0 + 0.03 \Rightarrow \varphi(1.03) = 0.3485$$

$$\varphi(2.25) \Rightarrow 2.25 = 2.2 + 0.05 \Rightarrow \varphi(2.25) = 0.4875$$

$$\varphi(-6) = -\varphi(6) \approx 0.5$$

X	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0.0	0.00									
…										
1.0				0.3485						
…										
2.2						0.4875				
…										
3.9										0. 49997

Chú ý: $\varphi(-u) = -\varphi(u)$

$\varphi(u) \approx 0.5, \forall x \geq 4$

*** Công thức tính xác suất**

Cho $X \sim N(\mu;\sigma^2)$, khi đó:

- $P(a \leq X \leq b) = \varphi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$

- $P(X \leq a) = 0.5 + \varphi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$

- $P(X \geq a) = 0.5 - \varphi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$

- $P(|X-\mu| \leq \varepsilon) = 2\varphi\left(\dfrac{\varepsilon}{\sigma}\right)$

Ví dụ 6: Được biết chiều cao của nam thanh niên có quy luật chuẩn với $\mu = 165cm$ và $\sigma^2 = 25cm^2$. Theo quy định những người có chiều cao $155cm$ trở lên thì đủ điều kiện tham gia nghĩa vụ quân sự.

a) Tính tỷ lệ người có chiều cao từ *160cm* đến *180cm*.

b) Tính tỷ lệ người có đủ điều kiện đi nghĩa vụ quân sự.

c) Trung bình 100 người chọn ra thì có bao nhiêu người đủ điều kiện đi tham gia nghĩa vụ quân sự.

d) Tính xác suất trong 20 người có 8 người tham gia nghĩa vụ quân sự.

<u>Giải</u>

Đặt *X* là chiều cao của nam thanh niên.

Ta có, $X \sim N\left(165cm;25cm^2\right)$ trong đó $\Rightarrow \mu = 165, \sigma = 5$

a) Tính tỷ lệ người có chiều cao từ *160cm* đến *180cm*

Áp dụng công thức $P\left(a \le X \le b\right) = \varphi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$$\Rightarrow P\left(160 \le X \le 180\right) = \varphi\left(\frac{180-165}{5}\right) - \varphi\left(\frac{160-165}{5}\right) = \varphi(3) - \varphi(-1)$$

$$= \varphi(3) + \varphi(1) = 0.49865 + 0.3413 = 0.83995 \Rightarrow 83.995\%$$

b) Điều kiện tham gia nghĩa vụ quân sự có chiều cao $155cm$ trở lên.

$$\Rightarrow P\left(X \ge 155\right) = 0.5 - \varphi\left(\frac{155-165}{5}\right) = 0.5 - \varphi(-2) = 0.5 + \varphi(2) = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$

$\Rightarrow 97.72\%$

c) Ta có, $n = 100, p = 0.9772 \Rightarrow X \sim B\left(100;0.9772\right)$ là phân phối Nhị thức.

$\Rightarrow E\left(X\right) = np = 100 \times 0.9772 = 97.72$

d) Ta có, $n = 20, p = 0.9772 \Rightarrow$ Công thức Bernoulli

$\Rightarrow P_{20,8}\left(DK\right) = C_{20}^{8} \times 0.9772^{8} \times 0.0228^{12} = 2.067 \times 10^{-15}$

Ví dụ 7 (Sinh viên tự giải): Trọng lượng của một loại mì gói là đại lượng ngẫu nhiên có quy luật chuẩn với $\mu = 72gam$ và $\sigma^2 = 16gam^2$. Những gói có trọng lượng sai lệch so với trung bình nhỏ hơn *4gam* thì đạt tiêu chuẩn.

a) Tính tỷ lệ các gói mì có trọng lượng < *72gam*.

b) Tính tỷ lệ các gói mì có trọng lượng đạt chuẩn.

c) Một người mua ngẫu nhiên 30 gói mì nói trên, thì trung bình có nhiêu gói đạt tiêu chuẩn.

d) Tính xác suất trong 10 gói mì chọn ra, thì ít nhất có 02 gói đạt tiêu chuẩn.

Ví dụ 8 (Sinh viên tự giải): Thời gian *X* (tính bằng phút) của một khách hàng chờ để được phục vụ tại một quầy hàng là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình bằng 4 phút và phương sai bằng 0.36 phút^2.

a) Tính tỷ lệ khách hàng phải chờ để được phục vụ trong khoảng thời gian từ 2 phút đến 4 phút; không quá 2 phút; quá 4 phút.

b) Thời gian phải chờ tối thiểu là bao nhiêu, nếu tỷ lệ khách hàng phải chờ phục vụ vượt quá thời gian đó không quá 5%?

*** Xấp xỉ Chuẩn và Nhị thức**

Cho $X \sim B\left(n;p\right) \Rightarrow P\left(X = k\right) = C_n^k p^k q^{(n-k)}$

Nếu *n* lớn và $p \in \left(0.1;0.9\right)$ thì $X \approx N\left(np;npq\right)$

Khi đó:

$$P\left(X=k\right)=\frac{1}{\sqrt{npq}}f\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Trong đó:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$P\left(m_1\le X\le m_2\right)\approx\varphi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\varphi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Ví dụ 8: Xác suất sinh 1 em bé gái là 0.52. Gọi X là số bé gái trong 100 em bé sắp được sinh ra.

a) Tìm quy luật của X.

b) Tính xác suất có 30 bé gái được sinh ra.

c) Tính từ 40 đến 90 bé gái sắp được sinh ra.

Giải

Ta có: $p=0.52, n=100$

a) Gọi *X* là số bé gái sắp được sinh ra.

Khi đó, *X* là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận các giá trị *X = 0, 1, 2, ..., 100* với các xác suất tương ứng được tính theo công thức:

$$P\left(X=k\right)=C_{100}^{k}\times0.52^{k}\times0.48^{100-k}$$

Vì vậy, $X\sim B\left(100;0.52\right)$ là quy luật phân phối Nhị thức.

b) $P\left(X=30\right)=C_{100}^{30}\times0.52^{30}\times0.48^{70}=4.314\times10^{-6}$

c) $P\left(40\le X\le90\right)=P\left(X=40\right)+P\left(X=41\right)+...+P\left(X=90\right)$

Vì *n = 100* khá lớn và $p=0.52\in\left(0.1;0.9\right)$ nên $X\approx N\left(np;npq\right)$

Trong đó,

$\mu=np=100\times0.52=52$ và $\sigma^2=npq=100\times0.52\times0.48=24.96$

Khi đó, ta áp dụng công thức:

$$P\left(m_1\le X\le m_2\right)\approx\varphi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\varphi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(40\le X\le90\right)=\varphi\left(\frac{90-52}{\sqrt{24.96}}\right)-\varphi\left(\frac{40-52}{\sqrt{24.96}}\right)=\varphi\left(7.61\right)-\varphi\left(-2.40\right)$$

$$=\varphi\left(7.61\right)+\varphi\left(2.40\right)=0.5+0.4918=0.9918$$

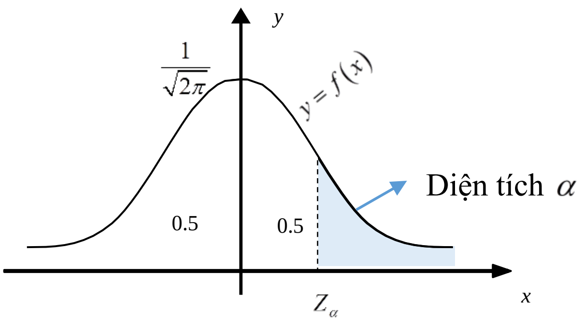
Ví dụ 9 (Sinh viên tự giải): Một lô hàng có rất nhiều sản phẩm với tỷ lệ phế phẩm là 20%. Lấy ngẫu nhiên 100 sản phẩm để kiểm tra. Tính xác suất để:

a) Lấy được 30 phế phẩm.

b) Lấy được không quá 30 phế phẩm.

*** Phân vị chuẩn**

Cho $X \sim N(0;1)$ và cho $\alpha \in (0;1)$



Tìm Z_α sao cho: $P(X < Z_\alpha) = \alpha$.

Khi đó Z_α gọi là phân vị chuẩn với xác suất α. Các giá trị thường dùng của phân vị chuẩn tắc Z_α được xác định trong **Phụ lục 2** (Trang 182).

Ví dụ: Cho $\alpha = 0.5 \Rightarrow Z_{0.5} = ?$

Cho $\alpha = 0.95 \Rightarrow Z_{0.95} = ?$

α	Z_α
0.50	$Z_\alpha = 0.000$
…	…
0.60	$Z_\alpha = 0.253$
…	…
0.990	$Z_\alpha = 2.326$
…	…

IV. Quy luật Khi bình phương

$\chi^2_\alpha(n)$: là phân vị Khi bình phương mức xác suất α với bậc tự do *n*, kí hiệu: $\chi^2_\alpha(n)$, là giá trị của đại lượng ngẫu nhiên $X \sim \chi^2_\alpha(n)$ sao cho $P(X < \chi^2_\alpha(n)) = \alpha$.

Các giá trị thường dùng của phân vị Khi bình phương $\chi^2_\alpha(n)$ được xác định trong **Phụ lục 3** (Trang 183).

V. Quy luật Student

$t_\alpha(n)$: Phân vị Student mức xác suất α với bậc tự do *n*, kí hiệu: $t_\alpha(n)$, là giá trị của đại lượng ngẫu nhiên $X \sim T(n)$ sao cho $P(X < t_\alpha(n)) = \alpha$.

Các giá trị thường dùng của phân vị Student được xác định trong bảng **Phụ lục 4** (Trang 184).