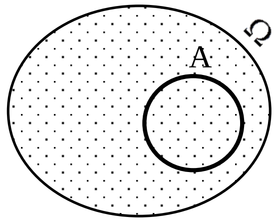
Bài 3. Định nghĩa xác suất

I. Định nghĩa xác suất theo cổ điển

Định nghĩa: Cho một phép thử và một biến cố A bất kỳ. Nếu phép thử có M kết quả xảy ra đồng khả năng, ký hiệu $n(\Omega) = M$, và có m kết quả làm cho biến cố A xảy ra, ký hiệu $n(A) = m$. Khi đó, xác suất xảy ra A là:



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{m}{M}$$

Ví dụ 1: Tung 1 đồng xu. Tính xác suất để đồng xu xuất hiện mặt sấp?

Giải

Ta có, $\Omega = \{S, N\}$ có các kết quả đồng khả năng và $n(\Omega) = 2$

Đặt A là biến cố đồng xu xuất hiện mặt sấp: $A = \{S\} \Rightarrow n(A) = 1$

Khi đó, xác suất để đồng xu xuất hiện mặt sấp là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{2} = 0.5$

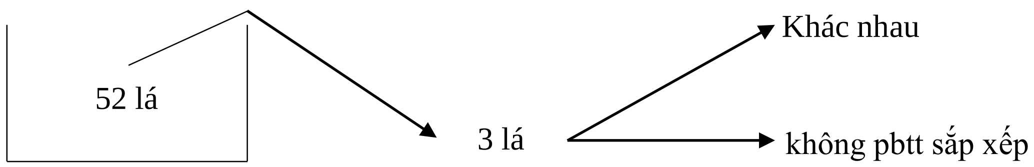
Ví dụ 2: Rút ngẫu nhiên 3 lá bài từ 1 bộ bài 52 lá. Tính xác suất ở các trường hợp sau:

a) Rút 3 lá hình.

b) Rút 1 lá 4, 1 lá 5 và 1 lá 6.

c) Rút 2 lá đỏ và 1 lá đen.

Giải



Ta có, $n(\Omega) = C_{52}^{3} = 22100$

a) Gọi A là biến cố rút được 3 lá hình: *A = {3 lá hình}*

$\Rightarrow n(A) = C_{12}^{3} = 220$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{12}^{3}}{C_{52}^{3}} = \frac{220}{22100} = \frac{11}{1105}$$

b) Gọi B là biến cố rút được 1 lá 4, 1 lá 5 và 1 lá 6: *B = {lá 4, lá 5, lá 6}*

$\Rightarrow n(B) = C_{4}^{1} \times C_{4}^{1} \times C_{4}^{1}$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{C_4^1\times C_4^1\times C_4^1}{C_{52}^3}=\frac{3}{5525}$$

c) Gọi C là biến cố rút được 2 lá đỏ và 1 lá đen: *C* = {2 *lá đỏ, 1 lá đen}*

$$\Rightarrow n(C)=C_{26}^2\times C_{26}^1$$

$$\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(\Omega)}=\frac{C_{26}^2\times C_{26}^1}{C_{52}^3}=\frac{13}{34}$$

Ví dụ 3 (Sinh viên tự giải): Một hộp có 9 viên bi, được đánh số từ 1 đến 9. Chọn ngẫu nhiên ra 3 bi, tính xác suất?

a) Chọn được 2 bi chẵn, 1 bi lẻ.

b) Chọn được 2 bi chẵn mà có bi số 4 trong đó.

c) Chọn được 3 bi có tổng các con số lớn hơn 6.

Ví dụ 4 (Sinh viên tự giải): Có 4 câu hỏi và 4 câu trả lời đúng cho 4 câu hỏi đó. Ghép ngẫu nhiên 1 câu hỏi với 1 câu trả lời. Tính xác suất ghép đúng ít nhất 2 câu?

Ví dụ 5 (Sinh viên tự giải): Trong một hộp có 12 bóng đèn, trong đó có 3 bóng hỏng. Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại ba bóng để dùng. Tính xác suất để:

a) Cả ba bóng đều hỏng?

b) Cả ba bóng đều không hỏng?

c) Có ít nhất một bóng không hỏng?

Ví dụ 6 (Sinh viên tự giải): Một sọt cam có 10 trái trong đó có 4 trái hư. Lấy ngẫu nhiên ra ba trái.

a) Tính xác suất lấy được 3 trái hư.

b) Tính xác suất lấy được 1 trái hư.

c) Tính xác suất lấy được ít nhất một trái hư.

d) Tính xác suất lấy được nhiều nhất 2 trái hư.

*** Bài toán tỷ lệ:** Một tập hợp bao gồm hai loại phần tử: loại I và loại II. Khi đó,

- Tỷ lệ phần tử loại 1 của tập hợp đã cho là

$$p=\frac{\text{Số phần tử loại I}}{\text{Tổng số phần tử}}$$

- Tỷ lệ phần tử loại II của tập hợp đã cho là

$$q=\frac{\text{Số phần tử loại II}}{\text{Tổng số phần tử}}$$

Ta thấy rằng $0\le p,q\le 1$ và $p+q=1\Rightarrow q=1-p$. Ví dụ sau đây nói lên ý nghĩa của xác suất.

Ví dụ 4: *(Ý nghĩa xác suất)* Một lô hàng có tỷ lệ phế phẩm là *p*. Người ta chọn ngẫu nhiên ra **một** sản phẩm để kiểm chất lượng. Tính xác suất để sản phẩm được kiểm tra là phế phẩm.

Phế phẩm (Sản phẩm xấu)

Lô hàng bao gồm:

Chính phẩm (Sản phẩm tốt)

Tỷ lệ phế phẩm $p = \dfrac{\text{Số phế phẩm}}{\text{Tổng số sản phẩm}}$

Gọi N là tổng số sản phẩm của lô hàng. Khi đó lô hàng có *pN* phế phẩm.

Gọi A là biến cố lấy 1 sản phẩm ra để kiểm tra là phế phẩm. Ta có

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{pN}^1}{C_N^1} = \frac{pN}{N} = p$$

Ta thấy xác suất này không phụ thuộc vào *N* và bằng với tỷ lệ phế phẩm *p*. Từ đó ta có thể rút ra kết luận rằng

Xác suất = Tỷ lệ.

II. Xác suất theo tần suất

Định nghĩa: Cho 1 phép thử bất kỳ. Thực hiện phép thử n lần giống nhau. Có *m* lần xảy ra biến cố *A***.**

+ *n* tổng số lần thực hiện

+ *m* tần số xảy ra biến cố *A*

+ $\dfrac{m}{n}$ tần suất xảy tra biến cố *A*

Khi đó, với n đủ lớn ta có:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Ví dụ 5: (Xúc xắc = bầu cua)

P(Cá) $= \dfrac{1}{6}$ (lúc đầu)

Quan sát 30 lần tung thì có 8 lần ra con cá.

P(Cá) $= \dfrac{8}{30} > \dfrac{1}{6}$ (lúc sau)

Ví dụ 6: Bắn 1 viên đạn vào tấm bia: $\Omega = \{T, K\}$ không đồng khả năng.

$$P(T) = \frac{1}{2} = 50\%$$ (Cổ điển)

Bắn 100 lần có 27 lần trúng $\Rightarrow$ xác suất bắn trúng là 27% (Tần suất).

Ví dụ 7: Để nghiên cứu khả năng xuất hiện mặt sấp khi tung một đồng xu cân đối đồng chất, người ta đã tiến hành tung đồng xu nhiều lần và được kết quả như sau:

Người tung	Số lần tung	Số lần xuất hiện mặt sấp	Tần suất
Buyffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016

Từ kết quả trên ta thấy khi số phép thử tăng lên thì tần suất xuất hiện mặt sấp của đồng xu tiến dần đến một số cố định là 0.5. Khi đó, 0.5 được xem là xác suất để đồng xu xuất hiện mặt sấp.

III. Tính chất

i) $0 \le P(A) \le 1$ *với A là một biến cố bất kỳ.*

ii) Nếu A là biến cố chắc chắn thì $P(A) = 1$.

iii) Nếu A là biến cố không thể thì $P(A) = 0$.

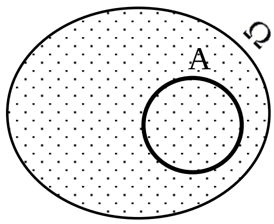
iv) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

v) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$.

Bài 4. Xác suất có điều kiện

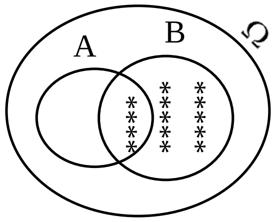
I. Định nghĩa

Cho một phép thử và một biến cố A bất kỳ, ta có:



$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{m}{M}$$: Cổ điển

Giả sử có biến cố B đã xảy ra, tính xác suất xảy ra biến cố A?



Xác suất của biến cố A trong điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất có điều kiện của biến cố A, ký hiệu $P(A/B)$.

- A: **Xác suất cần tính**.

- B: **Xác suất đã biết.**

II. Cách tính

Ta có:

$$P(A/B)=\frac{n(AB)}{n(B)}$$: Cổ điển

Biến đổi

$$P(A/B)=\frac{\frac{n(AB)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} \Rightarrow P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Ví dụ 1: Tung 1 con xúc sắc. Tính xác suất?

a) Xuất hiện mặt 2 chấm.

b) Xuất hiện mặt 2 chấm. **Biết rằng** nó đã xuất hiện mặt chẵn.

c) Xuất hiện mặt lẻ. **Biết rằng** nó đã xuất hiện mặt < 6 chấm.

<u>Giải</u>

Ta có, $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ có các kết quả đồng khả năng và $n(\Omega)=6$

a) Gọi *A* là biến cố con xúc sắc xuất hiện 2 chấm: *A={2 chấm}*

$\Rightarrow n(A)=1$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{1}{6}$$

b) Ta có, xác suất của biến cố *A={2 chấm}* trong điều kiện biến cố *B={mặt chẵn}* đã xảy ra, khi đó:

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{3}$$

c) Ta có, xác suất của biến cố *C={mặt lẻ}* trong điều kiện biến cố *D={mặt < 6 chấm}* đã xảy ra, khi đó:

$$P(C/D)=\frac{P(CD)}{P(D)}=\frac{3}{5}$$

Ví dụ 2 (Sinh viên tự giải): Một nhóm 10 bạn nam, 20 bạn nữ. Trong đó, có 1 bạn nữ tên Mai. Người ta cần chọn ngẫu nhiên ra 3 người để tham gia 1 chiến dịch Mùa hè xanh. Tính xác suất ?

a) Chọn được 2 nữ và 1 nam.

b) Chọn được 2 nữ và 1 nam. **Biết rằng** đã chọn được bạn Mai (Trong 3 người được chọn có Mai).

c) Chọn được ít nhất 1 bạn nữ. **Biết rằng** không có bạn Mai trong đó (Trong 3 người được chọn không có Mai).

Ví dụ 3 (Sinh viên tự giải): Mua ngẫu nhiên một tờ vé số có 6 chữ số. Tính xác suất?

a) Mua được một tờ vé số có 6 chữ số, điều là số lẻ.

b) Mua được một tờ vé số có 6 chữ số, điều là số lẻ. Biết rằng vé số đã mua có các chữ số < 7.

c) Mua được một tờ vé số có 6 chữ số, có tất cả các chữ số điều khác 0. Biết rằng vé số đã mua có các chữ số điều là số chẵn.

Ví dụ 4 (Sinh viên tự giải): Một hộp có 5 bi đỏ và 9 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 bi (mỗi lần 1 bi). Tính xác suất để lần sau lấy được bi trắng biết rằng lần đầu lấy được bi trắng.

Ví dụ 5 (Sinh viên tự giải): Quan sát những sinh viên chuyên ngành Toán (SVCNT) thấy rằng : 70% thích nghiên cứu, 55% thích văn thơ và 35% thích cả hai. Tính xác suất để SVCNT thích văn thơ sẽ thích nghiên cứu và xác suất để SVCNT thích nghiên cứu sẽ thích văn thơ.

Ví dụ 6 (Sinh viên tự giải): Một hộp có 7 bi màu đỏ, 3 bi màu xanh và 4 bi màu vàng. Chọn ngẫu nhiên ra 3 bi. Tính xác suất?

a) Chọn được 3 bi cùng màu?

b) Chọn được ít nhất 1 bi màu đỏ?

c) Chọn được 3 bi cùng màu biết rằng đã chọn được ít nhất 1 bi màu đỏ?