KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT CHO KỲ VỌNG

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng

Giới thiệu

- Xét véc-tơ ngẫu nhiên $\mathbf{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$ có kỳ vọng $\boldsymbol{\mu}$. Ta cần kiểm định

$$H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$$

trong đó $\boldsymbol{\mu}_0' = (\mu_{01}, \mu_{02}, \ldots, \mu_{0p})$ là véc-tơ chứa các giá trị cần kiểm định cho trước.

- Khi ta có p biến tương quan với nhau, các biến này cần được phân tích đồng thời. Do đó, ta sẽ có bài toán kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng trong trường hợp nhiều chiều.

Nhắc lại trường hợp 1 chiều

- Khảo sát 1 đặc tính X được quan tâm. X là biến ngẫu nhiên có kỳ vọng μ và phương sai σ^2.
- Chọn mẫu, ta thu được n quan trắc chọn từ tổng thể:X_1, X_2,. . . , X_n. Trong đó, X_i $(i = 1, \ldots, n)$ là các biến độc lập và có cùng phân phối.
- Khi cỡ mẫu nhỏ, ta cần thêm giả thiết $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Nhắc lại trường hợp 1 chiều

- Giả thuyết:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{và} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

  với μ_0 là giá trị cần kiểm định.

- Thống kê kiểm định:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

- Nếu H_0 đúng, $T \sim t(n-1)$. Chú ý: khi cỡ mẫu lớn thì $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- Kết luận: bác bỏ H_0 khi p-giá trị $\leq \alpha$, với α là mức ý nghĩa của kiểm định.

Nhắc lại trường hợp 1 chiều

- Khoảng tin cậy (2 phía) với độ tin cậy $100(1-\alpha)\%$ cho μ là tập hợp các giá trị quan trắc sao cho

$$\left|\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right| \le t_{1-\alpha/2}^{n-1}$$

hay

$$\left(\bar{x}-t_{1-\alpha/2}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x}+t_{1-\alpha/2}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Chuẩn bị cho trường hợp nhiều chiều

- Bình phương thống kê kiểm định:

$$T^2 = \frac{(\bar{X} - \mu_0)^2}{S^2/n} = n\left(\bar{X} - \mu_0\right)\left(S^2\right)^{-1}\left(\bar{X} - \mu_0\right)$$

- T^2 là bình phương khoảng cách thống kê giữa trung bình mẫu và giá trị kiểm định μ_0.
- Phân phối của T^2:

$$n\left(\bar{X} - \mu_0\right)\left(S^2\right)^{-1}\left(\bar{X} - \mu_0\right) \sim \mathcal{F}_{1,n-1} \qquad (1)$$

Thống kê Hotelling's T^2

- Mở rộng từ trường hợp 1 chiều lên nhiều chiều, ta thay thế $\bar{X}$ và μ_0 trong 1 bằng các véc-tơ $\bar{\mathbf{X}}$ và $\boldsymbol{\mu}_0$, thu được:

$$T^2 = n\left(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0\right)\mathbf{S}^{-1}\left(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0\right) \qquad (2)$$

trong đó

$$\bar{\mathbf{X}}_{p\times 1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$\boldsymbol{\mu}_0' = (\mu_{01}, \mu_{02}, \ldots, \mu_{0p})$$

$$\mathbf{S}_{p\times p} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})'$$

T^2 được gọi là thống kê Hotelling.

Thống kê Hotelling's T^2

- Phân phối của T^2:

$$T^2 \sim \frac{(n-1)p}{(n-p)} \mathcal{F}_{p,n-p} \tag{3}$$

trong đó $\mathcal{F}_{p,n-p}$ là phân phối Fisher với hai bậc tự do là p và $n-p$.

Kiểm định giả thuyết dùng T^2

- Với mức ý nghĩa α, ta có:

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathbf{P}\left[T^2 > \frac{(n-1)p}{(n-p)}\mathcal{F}_{p,n-p}(\alpha)\right] \\ &= \mathbf{P}\left[n\left(\bar{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}_0\right)\left(S^2\right)^{-1}\left(\bar{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}_0\right) > \frac{(n-1)p}{(n-p)}\mathcal{F}_{p,n-p}(\alpha)\right]\end{aligned} \tag{4}$$

- Do đó, ta bác bỏ giả thuyết $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ khi

$$p - \text{giá trị} \leq \alpha$$

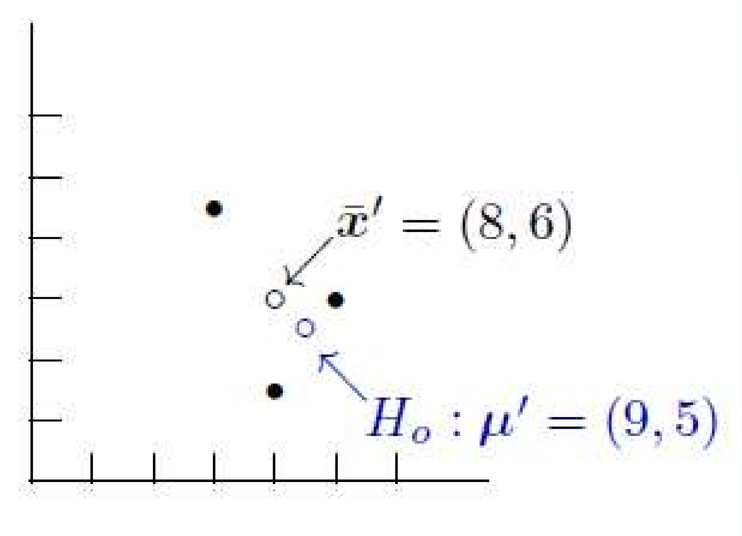
với

$$p - \text{giá trị} = \mathbf{P}\left[\mathcal{F}_{p,n-p} \geq \frac{n-p}{(n-1)p}T^2\right]$$

Ví dụ

Cho ma trận dữ liệu:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$



Kiểm định

$$H_0 : \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/9 \\ 1/9 & 4/27 \end{pmatrix}$$

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng

Ví dụ

Tính T^2:

$$
\begin{aligned}
T^2 &= n\left(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0\right)\left(S^2\right)^{-1}\left(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0\right) \\
&= 3\left(-1, 1)\right)\begin{pmatrix} 1/3 & 1/9 \\ 1/9 & 4/27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 7/9
\end{aligned}
$$

Với $\alpha = 0.05$ ta có $F_{2,1}(0.05) = 199.51$. Suy ra

$$
\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{2,1}(0.05) = 4 \times 199.51 = 798.04
$$

Bác bỏ H_0 khi $T^2 > [(n-1)p/(n-p)]F_{2,1}(0.05)$.

Vì $T^2 = 0.778 < 798.04$ suy ra chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

Tính p-giá trị:

$$
p - \text{giá trị} = \mathbf{P}\left(F_{2,1} \geq 4 \times 0.778\right) = 0.625 > 0.05
$$

Ví dụ

...

Trờ lại trường hợp 1 chiều

Thống kê T^2:

$$T^2 = \frac{(\bar{X} - \mu_0)^2}{S^2/n} = n(\bar{X} - \mu_0)(S^2)^{-1}(\bar{X} - \mu_0)$$

Vì,

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0) \sim \mathcal{N}\left(\sqrt{n}(\mu - \mu_0), \sigma^2\right)$$
$$(n-1)S^2 \sim \sigma^2\chi^2(n-1)$$

và,

$$S^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})}{n-1} = \frac{\text{Biến ngẫu nhiên Chi bình phương}}{\text{Bậc tự do}}$$

Do đó,

$$T^2 = \left(\text{Bnn chuẩn}\right)\left(\frac{\text{Bnn Chi bình phương}}{\text{Bậc tự do}}\right)\left(\text{Bnn chuẩn}\right)$$

TH nhiều chiều: thống kê T^2

Ta có:

$$n\left(\bar{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}_0\right)\left(\mathbf{S}^2\right)^{-1}\left(\bar{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}_0\right)$$

Vì $\bar{\mathbf{X}} \sim \mathcal{N}_p\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/n\right)$ và $\sqrt{n}\left(\bar{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}_0\right)$ là một tổ hợp tuyến tính của $\mathbf{X}$,

$$\sqrt{n}\left(\bar{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}_0\right) \sim \mathcal{N}_p\left(\sqrt{n}(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma})\right)$$

Ma trận hiệp phương sai $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{X}_j-\bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_j-\bar{\mathbf{X}})'}{n-1} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\mathbf{Z}_j\mathbf{Z}_j'}{n-1}$$

$$= \left(\frac{\text{Ma trận ngẫu nhiên Wishart với n-1 bậc tự do}}{\text{Bậc tự do}}\right)$$

trong đó $\mathbf{Z}_j \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ nếu H_0 đúng.

TH nhiều chiều: thống kê T^2

Phân phối mẫu của $(n-1)\mathbf{S}$ là Wishart trong đó

$$\mathbf{W}_m\left(\cdot|\mathbf{\Sigma}\right) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_j'$$

Do đó,

$$T^2 = \begin{pmatrix} \text{Véc-tơ nn} \\ \text{chuẩn} \\ \text{nhiều chiều} \end{pmatrix}' \left(\frac{\text{Ma trận nn Wishart}}{\text{Bậc tự do}}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \text{Véc-tơ nn} \\ \text{chuẩn} \\ \text{nhiều chiều} \end{pmatrix}$$

Tính bất biến của T^2

- Nếu $\mathbf{Y}_{p\times 1} = \mathbf{C}_{p\times p}\mathbf{X}_{p\times 1} + \mathbf{d}_{p\times 1}$ với $\mathbf{C}$ là ma trận không suy biến (non-singular) thì thống kê T^2 cho kiểm định:

$$H_0(\mathbf{Y}) : \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\mu}_0 + \mathbf{d}$$

sẽ tương đương với thống kê T^2 cho kiểm định:

$$H_0(\mathbf{X}) : \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\mu}_0$$

- Tính bất biến của T^2 không chỉ áp dụng đối với sự thay đổi về vị trí và tỷ lệ của từng biến ngẫu nhiên thành phần mà còn xảy ra khi thực hiện biến đổi các biến thông qua một tổ hợp tuyến tính.

Kiểm định Tỷ lệ hợp lý (Likelihood Ratio Test)

Kiểm định Tỷ lệ hợp lý

- Một phương pháp khác để kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng là sử dụng tỷ lệ hợp lý (Likelihood ratio).
- Kiểm định tỷ lệ hợp lý sẽ tương đương với kiểm định Hotelling's T^2 cho $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ hoặc $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$.
- Kiểm định tỷ lệ hợp lý là phương pháp tổng quát hơn kiểm định Hotelling's T^2 trong các bài toán kiểm định giả thuyết khác.

Kiểm định Tỷ lệ hợp lý

- Giả sử các biến ngẫu nhiên $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$, $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^p$, phụ thuộc vào véc-tơ tham số $\mathbf{\Theta}$. Xét hai giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 & : \mathbf{\Theta} \in \mathbf{\Theta}_0 \\ H_1 & : \mathbf{\Theta} \in \mathbf{\Theta}_1 \end{cases}$$

  Giả thuyết H_0 tương ứng với "mô hình rút gọn" (reduced model) và H_1 tương ứng với "mô hình đầy đủ" (full model).

- Gọi $\mathbf{\Theta}_0$ là tập hợp các tham số chưa biết ứng với H_0 và $\mathbf{\Theta}$ là tập hợp các tham số chưa biết ứng với H_1.

- $\mathcal{L}(\cdot)$ là hàm hợp lý.

Kiểm định Tỷ lệ hợp lý

- Xét $X_i, X_2, \ldots, X_n \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, tỷ lệ hợp lý xác định bởi

$$\Lambda = \frac{\max_{\boldsymbol{\mu}_0, \Sigma}[\mathcal{L}(\boldsymbol{\mu}_0, \Sigma)]}{\max_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma}[\mathcal{L}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)]} \tag{5}$$

- Nếu Λ nhỏ, dữ liệu có xu hướng không xảy ra dưới điều kiện $H_0 \Rightarrow$ bác bỏ H_0.

- Nếu Λ lớn, dữ liệu có xu hướng xảy ra dưới điều kiện $H_0 \Rightarrow$ không bác bỏ H_0.

Kiểm định Tỷ lệ hợp lý

Công thức tính Λ:

$$\Lambda = \left(\frac{|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|}{|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_0|} \right)^{n/2} \tag{6}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\Sigma}} &= \text{Ước lượng hợp lý cực đại (MLE) của } \boldsymbol{\Sigma} \\
&= (1/n) \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})' \\
\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_0 &= \text{Ước lượng hợp lý cực đại (MLE) của } \boldsymbol{\Sigma} \text{ giả sử } \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \\
&= (1/n) \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{X}_j - \boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{X}_j - \boldsymbol{\mu}_0)'
\end{aligned}$$

Kiểm định Tỷ lệ hợp lý

$$\Lambda = \left(\frac{|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|}{|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_0|} \right)^{n/2}$$

- Nếu $\boldsymbol{\mu}_0$ thực sự "xa" so với $\boldsymbol{\mu}$, thì $|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_0|$ sẽ lớn hơn nhiều so với $|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|$. Trong trường hợp kiểm định giả thuyết về véc-tơ kỳ vọng, thống kê tỷ lệ hợp lý Λ được gọi là thống kê Wilk's Lambda.

- Bác bỏ H_0 khi
  $$\Lambda < C_\alpha$$
  với C_α là phân vị mức $100\alpha\%$ của phân phối của Λ tương ứng với giả thuyết không.

- Khi cỡ mẫu lớn (n lớn):
  $$-2\ln(\Lambda) \sim \chi^2_p$$

Bậc tự do của Kiểm định Tỷ lệ hợp lý

- Ta xét các tham số tương ứng với mỗi giả thuyết (H_0 và H_1):
  - Giả thuyết H_0:

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = \{\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}\} \Rightarrow \frac{p(p+1)}{2} \text{ hiệp phương sai.}$$

  - Đối thuyết H_1:

$$\boldsymbol{\Theta} = \{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}\} \Rightarrow \text{ có } p \text{ trung bình và } \frac{p(p+1)}{2} \text{ hiệp PS.}$$

- Bậc tự do = sai khác giữa số tham số ước lượng theo mỗi giả thuyết = p.

Liên hệ giữa T^2 và Λ

- Ta chứng minh được:

$$\Lambda^{2/n} = \left(1 + \frac{T^2}{n-1}\right)^{-1} \tag{7}$$

hay

$$T^2 = (n-1)\Lambda^{-2/n} - (n-1) \tag{8}$$

- Λ và T^2 có mối quan hệ ngược nhau, suy ra bác bỏ H_0 khi T^2 lớn hoặc Λ nhỏ.