Bài tập cá nhân tuần 5

Bài 4.6

a) Ta sẽ xét tính độc lập của X_1 và X_2.

Ta nhận thấy $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$ nên X_1, X_2 độc lập.

b) Ta sẽ xét tính độc lập của X_1 và X_3. Ta nhận thấy $\sigma_{13} = \sigma_{31} = -1 \neq 0$.

Nên X_1, X_3 không độc lập.

c) Ta sẽ xét tính độc lập của X_2 và X_3.

Ta nhận thấy $\sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$ nên X_2, X_3 độc lập.

d) Ta sẽ xét tính độc lập của (X_1, X_3) và X_2.

Ta đặt $\boldsymbol{X'} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_2 \end{bmatrix}$.

Khi đó ta có $\Sigma_{\boldsymbol{X'}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Khi đó $\boldsymbol{X'_1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix}$ và X_2 có $\sigma_{\boldsymbol{X'_1}X_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Do đó, $(X_1, X_3), X_2$ độc lập.

d) Để xét tính độc lập của $X_1, X_1 + 3X_2 - 2X_3$, ta đặt:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Từ đây, ta có ma trận hiệp phương sai là:

$$\boldsymbol{\Sigma'} = \boldsymbol{A\Sigma A'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 42 \end{bmatrix}$$

Từ đây, ta suy ra $X_1, X_1 + 3X_2 - 2X_3$ không độc lập.

Bài 4.7

Từ dữ kiện câu 4.6, ta đặt, $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix}$.

Khi đó, $\boldsymbol{X}$ sẽ tuân theo phân phối chuẩn $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ với:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

và,

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Áp dụng kết quả 4.6, ta có phân phối có điều kiện của X_1, cho trước $X_3 = x_3$ là phân phối chuẩn có trung bình là:

$$\mu' = \mu_1 + \sigma_{13}\sigma_{33}^{-1}(x_3 - \mu_3) = 1 + (-1)2^{-1}(x_3 - 2) = 2 - \frac{1}{2}x_3$$

và hiệp phương sai là:

$$\sigma' = \sigma_{11} - \sigma_{13}\sigma_{33}^{-1}\sigma_{31} = 4 - (-1).2^{-1}.(-1) = \frac{7}{2}$$

Vậy nên $X_1|X_3 = x_3$ tuân theo phân phối chuẩn $N(2 - \frac{1}{2}x_3, \frac{7}{2})$

b) Từ dữ kiện câu 4.6, ta đặt, $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$.

Khi đó, $\boldsymbol{X}$ sẽ tuân theo phân phối chuẩn $N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ với:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2\mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

và,

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Áp dụng kết quả 4.6, ta có phân phối có điều kiện của X_1, cho trước $X_2 = x_2, X_3 = x_3$ là phân phối chuẩn có trung bình là:

$$\mu' = \mu_1 + \mathbf{\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}} \begin{bmatrix} x_2 - \mu_2 \\ x_3 - \mu_3 \end{bmatrix} = 1 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_2 + 1 \\ x_3 - 2 \end{bmatrix} = 2 - \frac{1}{2}x_3$$

và hiệp phương sai là:

$$\sigma' = \Sigma_{11} - \mathbf{\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}} = 4 - \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{7}{2}$$

Vậy nên $X_1|X_2 = x_2, X_3 = x_3$ tuân theo phân phối chuẩn $N(2 - \frac{1}{2}x_3, \frac{7}{2})$

Bài 4.8

a) Để chứng minh X_2 cũng tuân theo phân phối chuẩn $N(0,1)$ ta sẽ chứng minh: với bất kỳ x, $P(X_2 \leq x) = P(X_1 \leq x)$.

Xét $x < -1$, khi đó,

$$P(X_2 \leq x) = P(X_1 \leq x)$$

Xét $-1 \leq x \leq 1$, khi đó,

$$\begin{aligned}
P(X_2 \leq x) &= P(X_2 < -1) + P(-1 \leq X_2 \leq x) \\
&= P(X_1 < -1) + P(-1 \leq -X_1 \leq x) \\
&= P(X_1 < -1) + P(-x \leq X_1 \leq 1) \\
&= P(X_1 < -1) + P(-1 \leq X_1 \leq x) (\textit{Do tính đối xứng qua gốc toạ độ } N(0,1) \\
&= P(X_1 \leq x)
\end{aligned}$$

Xét $x > 1$, khi đó,

$$\begin{aligned}
P(X_2 \leq x) &= p(X_2 < -1) + p(-1 \leq X_2 \leq 1) + P(1 < X_2 \leq x) \\
&= P(X_1 < -1) + P(-1 \leq -X_1 \leq 1) + P(1 < X_1 \leq x) \\
&= P(X_1 < -1) + P(-1 \leq X_1 \leq 1) + P(1 < X_1 \leq x) \\
&= P(X_1 \leq x)
\end{aligned}$$

Từ các điều trên, ta suy ra X_2 cũng tuân theo phân phối chuẩn $N(0,1)$.

b) Theo kết quả 4.3, giả sử X_1, X_2 tuân theo phân phối chuẩn 2 chiều. Khi đó, các tổ hợp tuyến tính của X_1, X_2, trong ví dụ này là $X_1 - X_2$ cũng sẽ có phân phối chuẩn.

Xét:

$$P(X_1 - X_2 = 0) = P(X_1 = X_2) = 1 - P(-1 \leq X_1 \leq 1) = 1 - (\phi(1) - \phi(-1)) = 0.317 > 0$$

Mặt khác, nếu $X_1 - X_2$ có phân phối chuẩn thì $X_1 - X_2$ là biến liên tục và $P(X_1 - X_2 = 0) = 0$. Điều này mâu thuẫn với trên.

Do đó, X_1, X_2 không có tuân theo phân phối chuẩn 2 chiều.

Bài 4.9

Chứng minh tương tự bài 4.8, ta sẽ có X_2 cũng tuân theo phân phối chuẩn $N(0,1)$ nhưng X_1, X_2

hiển nhiên không độc lập.

Khi $c = 0$, khi đó, $Cov(X_1, X_2) = Cov(X_1, X_1) = Var(X_1) = 1$.

Khi $c > 0$ và $c- > \infty$, khi đó, $Cov(X_1, X_2) = Cov(X_1, -X_1) = -Cov(X_1, X_1) = -Var(X_1) = -1$.

Như vậy, ta thấy sẽ luôn tồn tại $c > 0$ mà $Cov(X_1, X_2) = 0$.