Bài tập cá nhân tuần 3

Bài 4.14

Xét X_1, X_2 có:

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Do $\Sigma^{-1}\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^{-1} & 0 \\ 0' & \Sigma_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0' & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{11} + 00' & \Sigma_{11}^{-1}0 + 0\Sigma_{22} \\ 0'\Sigma_{11} + \Sigma_{22}^{-1}0' & 0'0 + \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$

Khi đó,

$$\begin{aligned} (x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu) &= \begin{bmatrix} x_1-\mu_1 & x_2-\mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1-\mu_1 & x_2-\mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^{-1}(x_1-\mu_1) \\ \Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2) \end{bmatrix} \\ &= (x_1-\mu_1)'\Sigma_{11}^{-1}(x_1-\mu_1) + (x_2-\mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2) \end{aligned}$$

Theo đề bài, ta có $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ tuân theo phân phối chuẩn p chiều $N_p(\mu, \Sigma)$ với $|\Sigma| \neq 0$. Với $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$ và $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0' & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$. Khi đó,

$$EX_1 = \mu_1, Var(X_1) = \Sigma_{11}, EX_2 = \mu_2, Var(X_2) = \Sigma_{22}$$

Hay là X_1, X_2 tương ứng tuân theo phân phối chuẩn $N(\mu_1, \Sigma_{11}), N(\mu_2, \Sigma_{22})$.

Vậy nên, ta thu được,

$$\begin{aligned} (X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu) &= (X_1-\mu_1)'\Sigma_{11}^{-1}(X_1-\mu_1) + (X_2-\mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}(X_2-\mu_2) \\ &= (X_1-EX_1)'(Var(X_1))^{-1}(X_1-EX_1) + (X_2-EX_2)'(Var(X_2))^{-1}(X_2-EX_2) \end{aligned}$$

Mặt khác, áp dụng kết quả bài 4.10(a), ta có:

$$|\Sigma| = \begin{vmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0' & \Sigma_{22} \end{vmatrix} = |\Sigma_{11}||\Sigma_{22}|$$

Từ đó, ta thu được,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)/2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{g/2}(2\pi)^{(p-q)/2}|\Sigma_{11}|^{1/2}|\Sigma_{22}|^{1/2}} e^{-(x_1-\mu_1)'\Sigma_{11}^{-1}(x_1-\mu_1)/2-(x_2-\mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2))/2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{g/2}|\Sigma_{11}|^{1/2}} e^{-(x_1-\mu_1)'\Sigma_{11}^{-1}(x_1-\mu_1)/2} \frac{1}{(2\pi)^{(p-q)/2}|\Sigma_{22}|^{1/2}} e^{-(x_2-\mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2)/2} \\ &= f(x_1)f(x_2) \end{aligned}$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

Bài 4.15

Ta xét,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})(\bar{x}-\mu)' &= (\sum_{j=1}^{n} x_j - n\bar{x})(\bar{x}-\mu)' \\ &= (n\bar{x}-n\bar{x})(\bar{x}-\mu)' \\ &= 0(\bar{x}-\mu)' \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tương tự như vậy:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}(\bar{x}-\mu)(x_j-\bar{x})' &= (\bar{x}-\mu)\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})' \\ &= (\bar{x}-\mu)(\sum_{j=1}^{n} x_j - n\bar{X})' \\ &= (\bar{x}-\mu)(n\bar{x}-n\bar{x})' \\ &= (\bar{x}-\mu)0' \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bài 4.16

a) Áp dụng kết quả 4.8, ta có:

$$V_1 = \frac{1}{4}X_1 - \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3 - \frac{1}{4}X_4$$

Khi đó,

$$E(V_1) = \frac{1}{4}\mu - \frac{1}{4}\mu + \frac{1}{4}\mu - \frac{1}{4}\mu = 0$$

$$Var(V_1) = ((\frac{1}{4})^2 + (\frac{-1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{-1}{4})^2)\Sigma = \frac{1}{4}\Sigma$$

Do đó, phân phối lề của V_1 là $N_p(0, \frac{1}{4})$

Tương tự, ta có:

$$V_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2 - \frac{1}{4}X_3 - \frac{1}{4}X_4$$

Khi đó,

$$E(V_2) = \frac{1}{4}\mu + \frac{1}{4}\mu - \frac{1}{4}\mu - \frac{1}{4}\mu = 0$$

$$Var(V_2) = ((\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{-1}{4})^2 + (\frac{-1}{4})^2)\Sigma = \frac{1}{4}\Sigma$$

Do đó, phân phối lề của V_2 là $N_p(0, \frac{1}{4}\Sigma)$

b) Áp dụng kết quả 4.8, do $X_1, X_2, ..., X_n$ đều độc lập và cùng phân phối $N_p(\mu, \Sigma)$ nên $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ có phân phối:

$$N_{2p}(\begin{bmatrix} (\sum_{j=1}^n c_j)\mu \\ (\sum_{j=1}^n b_j)\mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (\sum_{j=1}^n c_j^2)\Sigma & (\sum_{j=1}^n c_j b_j)\Sigma \\ (\sum_{j=1}^n b_j c_j)\Sigma & (\sum_{j=1}^n b_j^2)\Sigma \end{bmatrix})$$

Ta có:

$$\sum_{j=1}^4 c_j b_j = (\frac{1}{4}\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4})\Sigma = 0.\Sigma = 0$$

Thay các kết quả của câu a, ta có phân phối hợp của V_1, V_2 sẽ là:

$$N_{2p}(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\Sigma & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\Sigma \end{bmatrix})$$

Bài 4.17

Áp dụng kết quả 4.8, ta có:

$$V_1 = \frac{1}{5}X_1 + \frac{1}{5}X_2 + \frac{1}{5}X_3 + \frac{1}{5}X_4 + \frac{1}{5}X_5$$

Khi đó,

$$E(V_1) = \frac{1}{5}\mu + \frac{1}{5}\mu + \frac{1}{5}\mu - \frac{1}{5}\mu + \frac{1}{5}\mu = \mu$$

$$Var(V_1) = ((\frac{1}{5})^2 + (\frac{1}{5})^2 + (\frac{1}{5})^2 + (\frac{1}{5})^2 + (\frac{1}{5})^2)\Sigma = \frac{1}{5}\Sigma$$

Do đó, phân phối lề của V_1 là $N_p(\mu, \frac{1}{5}\Sigma)$

Áp dụng kết quả 4.8, ta có:

$$V_2 = X_1 - X_2 + X_3 - X_4 + X_5$$

Khi đó,

$$E(V_2) = \mu - \mu + \mu - \mu + \mu = \mu$$

$$Var(V_1) = ((1)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (-1)^2 + (1)^2)\Sigma = 5\Sigma$$

Do đó, phân phối lề của V_1 là $N_p(\mu, 5\Sigma)$

Hơn nữa,

$$Cov(V_1, V_2) = (\sum_{j=1}^{5} c_j b_j)\Sigma = (\frac{1}{5}.1 + \frac{1}{5}.(-1) + \frac{1}{5}.1 + \frac{1}{5}.(-1) + \frac{1}{5})\Sigma = \frac{1}{5}\Sigma$$

Bài 4.18

Áp dụng kết quả 4.11, ta có ước lượng hợp lí cực đại cho véctơ trung bình X là:

$$\bar{x} = \frac{1}{4}(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ta có ước lượng hợp lí cực đại cho ma trận hiệp phương sai Σ là:

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})'$$

Trong đó,

$$(x_1 - \bar{x})(x_1 - \bar{x})' = (\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix})(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix})' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(x_2 - \bar{x})(x_2 - \bar{x})' = (\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix})(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix})' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(x_3 - \bar{x})(x_3 - \bar{x})' = (\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix})(\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix})' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(x_4 - \bar{x})(x_4 - \bar{x})' = (\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix})(\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix})' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Từ đây, ta có ước lượng hợp lí cực đại cho Σ là:

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' = \frac{1}{4}(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$