Bài tập cá nhân tuần 2

Kết quả 4.9 Cho A là một ma trận đối xứng k x k và x là một véctơ k x 1. Khi đó,

a) x'Ax=tr(x'Ax)=tr(Axx')

b) $tr(A) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ với λ_i là các trị riêng của A

Chứng minh

a) Ta thấy rằng $x'Ax$ là đại lượng vô hướng nên $x'Ax = tr(x'Ax)$.

Hơn nữa, theo kết quả $2A.12$, với bất kỳ B, C có số chiều tương ứng là m x k và k x m.

Khi đó, $tr(BC) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{k} b_{ij}c_{ji})$.

Tương tự, $tr(CB) = \sum_{j=1}^{k}(\sum_{i=1}^{m} c_{ji}b_{ij})$

Do đó, $tr(BC) = tr(CB)$.

Từ đây, $tr(x'Ax) = tr(x'(Ax)) = tr((Ax)x') = tr(Axx')$.

b) Ta có, phân rã phổ của A là:

$$A = P'\Lambda P$$

trong đó, $PP' = I$ và Λ là một ma trận đường chéo với các phần tử trên đường chéo là $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_k$.

Do đó, $tr(A) = tr(P'\Lambda P) = tr(\Lambda PP') = tr(\Lambda) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$

Kết quả 4.10 Cho một ma trận đối xứng, xác định dương p x p và một đại lượng vô hướng $b > 0$, khi đó:

$$\frac{1}{|\Sigma|^b} e^{-tr(\Sigma^{-1}B)/2} \leq \frac{1}{|B|^b}(2b)^{pb}e^{-bp}$$

Với mọi ma trận xác định dương Σ, với dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi $\Sigma = (1/2b)B$.

Chứng minh

Cho $B^{1/2}$ là ma trận căn bậc hai đối xứng của B. Khi đó, $B^{1/2}B^{1/2} = B, B^{1/2}B^{-1/2} = I, B^{-1/2}B^{-1/2} = B^{-1}$.

Ta có, $tr(\Sigma^{-1}B) = tr[\Sigma B^{1/2}B^{1/2}] = tr(B^{1/2}(\Sigma^{-1}B^{1/2}))$.

Đặt λ là một trị riêng của $B^{1/2}\Sigma^{-1}B^{1/2}$.

Do $y'B^{1/2}\Sigma^{-1}B^{1/2}y = (B^{1/2}y)'\Sigma^{-1}(B^{1/2}y) > 0$ nếu $B^{1/2}y \neq 0$ hay là $y \neq 0$.

Nên ma trận trên là ma trận xác định dương.

Do đó, các trị riêng λ_i của $B^{1/2}\Sigma^{-1}B^{1/2}$ đều dương.

Vậy nên, theo kết quả 4.9, ta có,

$$tr(\Sigma^{-1}B) = tr(B^{1/2}\Sigma^{-1}B^{1/2}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$$

Hơn nữa, $|B^{1/2}\Sigma^{-1}B^{1/2}| = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i$.

Theo tính chất 2A.11, ta có,

$$\begin{aligned} |B^{1/2}\Sigma^{-1}B^{1/2}| &= |B^{1/2}||\Sigma^{-1}||B^{1/2}| \\ &= \frac{1}{|\Sigma|}|B| \end{aligned}$$

Hay là,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Sigma|} &= \frac{B^{1/2}\Sigma^{-1}B^{1/2}|}{|B|} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{p}\lambda_i}{|B|} \end{aligned}$$

Khi đó, kết hợp với kết quả của vết và định thức, ta thu được,

$$\frac{1}{|\Sigma|^b}e^{-tr[\Sigma^{-1}B]/2} = \frac{\prod_{i=1}^{p}\lambda_i}{|B|^b}e^{-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i/2} = \frac{1}{|B|^b}\prod_{i=1}^{p}\lambda_i^b e^{-\lambda_i/2}$$

Xét hàm $\lambda^b e^{-\lambda/2}$ có cực đại là $(2b)^b e^{-b}$. Dấu bằng xảy ra khi $\lambda = 2b$.

Với $\lambda_i = 2b$, với mỗi i, ta thu được:

$$\frac{1}{|\Sigma|^b}e^{-tr(\Sigma^{-1}B)/2} \leq \frac{1}{|B|^b}(2b)^{pb}e^{-bp}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\Sigma = (1/2b)B$.

Kết quả 4.11 Cho $X_1, X_2, ..., X_n$ là một mẫu ngẫu nhiên từ một phân bố bình thường có trung bình μ và hiệp phương sai Σ. Khi đó,

$$\hat{\mu} = \bar{X} \;\; Và \; \hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})(X_j - \bar{X})' = \frac{n-1}{n}S$$

là ước lượng hợp lí cực đại cho μ, Σ.

Chứng minh

Theo phương trình 4 - 17, ta có hàm hợp lí là:

$$tr[\Sigma^{-1}(\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})')] + n(\bar{x} - \mu)'\Sigma^{-1}(\bar{x} - \mu)$$

Theo kết quả 4.1, Σ^{-1} xác định dương, nên $(\bar{x} - \mu)'\Sigma^{-1}(\bar{x} - \mu) > 0$ với $\mu \neq \bar{x}$.

Do đó, hàm hợp lí đạt cực đại tại $\hat{\mu} = \bar{x}$.

Ta sẽ xét tính cực đại của

$$L(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\Sigma|^{n/2}}e^{-tr[\Sigma^{-1}(\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})(x_j-\bar{x})')]/2}$$

Theo kết quả 4.10, ta có giá trị cực đại xảy ra khi $\hat{\Sigma} = \frac{1}{2.\frac{n}{2}}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x}') = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x}')$