BÀI TẬP MÔN THỐNG KÊ NHIỀU CHIỀU

Tuần 4

Đinh Anh Huy - 18110103

Nguyễn Đức Vũ Duy - 18110004

Bài tập 5.6. Kiểm tra bất đẳng thức Bonferroni ở mục (5-28) với $m = 3$.

Lời giải

Theo đề bài, ta có: $P(C_i) = 1 - \alpha_i$ với $i = 1, 2, 3$.

Ta xét:

$$
\begin{aligned}
P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) &= P((C_1 \cap C_2) \cap C_3) \\
&= P(C_1 \cap C_2) + P(C_3) - P((C_1 \cap C_2) \cup C_3) \\
&= P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cup C_2) + P(C_3) - P((C_1 \cap C_2) \cup C_3) \\
&= P(C_1) + P(C_2) - (1 - P(\overline{(C_1 \cup C_2)}) + P(C_3) - (1 - P(\overline{((C_1 \cap C_2) \cup C_3)})) \\
&\geq P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) - 2 \\
&= 1 - \alpha_1 + 1 - \alpha_2 + 1 - \alpha_3 - 2 \\
&= 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)
\end{aligned}
$$

Vậy, ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 5.7. Sử dụng dữ liệu sweat cho ở bảng 5.1 (Ví dụ 5.2), tìm khoảng tin cậy đồng thời 95% cho μ_1, μ_2 và μ_3 sử dụng kết quả 6.3. Xây dựng khoảng tin cậy Bonferroni 95% sử dụng (5-29). So sánh hai tập khoảng tin cậy ở trên.

Lời giải

Từ dữ liệu sweat cho ở bảng 5.1, ta có X_1, X_2, X_3 là mẫu ngẫu nhiên kích thước $n = 20$ lấy từ tổng thể có phân phối chuẩn $p = 3$ chiều $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ và

$$
\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4.640 \\ 45.400 \\ 9.965 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2.879 & 10.010 & -1.809 \\ 10.010 & 199.788 & -5.640 \\ -1.809 & -5.640 & 3.628 \end{bmatrix}
$$

Với độ tin cậy 95% ta có

$$
\frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,n-p}(1 - 0.95) = \frac{3(20-1)}{20-3} F_{3,20-3}(0.05) \approx \frac{3 \times 19}{17} 3.196 \approx 10.716
$$

Từ kết quả 6.3 ta thu được khoảng tin cậy 95% cho từng thành phần của $\boldsymbol{\mu}$ là

$$
\overline{x}_i - \sqrt{\frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,n-p}(0.05)} \sqrt{\frac{s_{ii}}{n}} \leq \mu_i \leq \overline{x}_i + \sqrt{\frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,n-p}(0.05)} \sqrt{\frac{s_{ii}}{n}}
$$

với $i = 1, 2, 3$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\mu_1 : \quad & \left[\overline{x}_1 - \sqrt{10.716}\sqrt{\frac{s_{11}}{20}}, \quad \overline{x}_1 + \sqrt{10.716}\sqrt{\frac{s_{11}}{20}}\right] \\
= \ & \left[4.640 - \sqrt{10.716}\sqrt{\frac{2.879}{20}}, \quad 4.640 - \sqrt{10.716}\sqrt{\frac{2.879}{20}}\right] \\
= \ & [3.398, \quad 5.882] \\
\mu_2 : \quad & \left[\overline{x}_2 - \sqrt{10.716}\sqrt{\frac{s_2}{20}}, \quad \overline{x}_2 + \sqrt{10.716}\sqrt{\frac{s_2}{20}}\right] \\
= \ & \left[45.400 - \sqrt{10.716}\sqrt{\frac{199.788}{20}}, \quad 45.400 - \sqrt{10.716}\sqrt{\frac{199.788}{20}}\right] \\
= \ & [35.054, \quad 55.746] \\
\mu_3 : \quad & \left[\overline{x}_3 - \sqrt{10.716}\sqrt{\frac{s_{33}}{20}}, \quad \overline{x}_3 + \sqrt{10.716}\sqrt{\frac{s_{33}}{20}}\right] \\
= \ & \left[9.965 - \sqrt{10.716}\sqrt{\frac{3.628}{20}}, \quad 9.965 - \sqrt{10.716}\sqrt{\frac{3.628}{20}}\right] \\
= \ & [8.571, \quad 11.359]
\end{aligned}$$

Mặt khác ta có khoảng tin cậy Bonferroni 95% cho từng thành phần của $\boldsymbol{\mu}$ là

$$\overline{x}_i - t_{n-1}\left(\frac{0.05}{2p}\right)\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}} \leq \mu_i \leq \overline{x}_i + \left(\frac{0.05}{2p}\right)\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}}$$

với $i = 1, 2, 3$. Trong đó, $t_{n-1}\left(\frac{0.05}{2p}\right) = t_{20-1}\left(\frac{0.05}{2 \times 3}\right) \approx 2.625$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\mu_1 : \quad & \left[\overline{x}_1 - 2.625\sqrt{\frac{s_{11}}{20}}, \quad \overline{x}_1 + 2.625\sqrt{\frac{s_{11}}{20}}\right] \\
= \ & \left[4.640 - 2.625\sqrt{\frac{2.879}{20}}, \quad 4.640 - 2.625\sqrt{\frac{2.879}{20}}\right] \\
= \ & [3.644, \quad 5.636] \\
\mu_2 : \quad & \left[\overline{x}_2 - 2.625\sqrt{\frac{s_2}{20}}, \quad \overline{x}_2 + 2.625\sqrt{\frac{s_2}{20}}\right] \\
= \ & \left[45.400 - 2.625\sqrt{\frac{199.788}{20}}, \quad 45.400 - 2.625\sqrt{\frac{199.788}{20}}\right] \\
= \ & [37.103, \quad 53.697] \\
\mu_3 : \quad & \left[\overline{x}_3 - 2.625\sqrt{\frac{s_{33}}{20}}, \quad \overline{x}_3 + 2.625\sqrt{\frac{s_{33}}{20}}\right] \\
= \ & \left[9.965 - 2.625\sqrt{\frac{3.628}{20}}, \quad 9.965 - 2.625\sqrt{\frac{3.628}{20}}\right] \\
= \ & [8.847, \quad 11.083]
\end{aligned}$$

Bài tập 5.11. Một nhà phân chủng học làm một 1 phân tích một loại quặng có chứa tóc của 9 người Peruvian cổ xưa. Kết quả cho mức độ chromium(x_1) and strontium (x_2), theo từng phần theo đơn vị triệu (ppm), được cho với bảng sau:

$x_1(Cr)$	.48	40.53	2.19	.55	.74	.66	.93	.37	.22
$x_2(St)$	12.57	73.68	11.13	20.03	20.29	.78	4.64	.43	1.08

Biết rằng một lượng thấp (nhỏ hơn hoặc bằng .100 ppm) của chromium cho thấy sự xuất hiện của đái tháo đường, trong khi đó, strontium là chỉ đầu vào lượng protein động vật.

a) Xây dựng và vẽ một khoảng tin cậy hình ellip hợp 90% cho véc tơ trung bình tổng thể $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2]^T$, giả sử là 9 mẫu tóc Peruvian này chỉ một mẫu ngẫu nhiên từ những cá nhân thuộc vào một văn hoá Peruvian cổ xưa nhất định.

b) Thu khoảng tin cậy đồng thời riêng lẻ 90% cho μ_1, μ_2 bằng cách chiếu ellipse đã xây dựng ở phần a lên mỗi trục toạ độ. Điều ấy có xảy ra nếu văn hoá Peruvian này có mức trung bình stronium là 10 ? Nghĩa là, có phải điểm bất kỳ nào cũng ở trong miền tin cậy không ? $[0.3, 10]^T$ là 1 giá trị khả thi cho $\boldsymbol{\mu}$. Hãy bàn luận.

c) Bộ data này có chuẩn 2 chiều không ? Bàn luận về trạng thái với hình Q-Q và 1 diagram phân tán. Nếu bộ data này không chuẩn 2 chiều, có thể suy ra điều gì từ kết quả ở phần a và b

d) Lặp lại phân tích với việc bỏ quan trắc ngoại lai. Các suy diễn có thay đổi không ? Bình luận.

Lời giải

a) Từ bộ dữ liệu, ta tính được:

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5.1856 \\ 16.07 \end{bmatrix} \qquad \text{và} \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 176.004 & 287.24 \\ 287.24 & 527.85 \end{bmatrix}$$

Khi đó ta tính được các trị riêng và vectơ riêng của ma trận $\mathbf{S}$. Xét định thức

$$|\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}_p| = \begin{vmatrix} s_{11} - \lambda & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (s_{11} - \lambda)(s_{22} - \lambda) - s_{12}^2$$

Giải phương trình $|\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}_p| = 0$ ta được các trị riêng

$$\lambda_1 \approx 688.759 \qquad \text{và} \qquad \lambda_2 \approx 15.094$$

Khi đó, vectơ riêng ứng $\mathbf{e}_1$ với trị riêng λ_1 xác định bởi

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}$$

Ta suy ra được $\mathbf{e}_1 = [0.489, -0.872]^T$. Tương tự ta tìm được vectơ riêng ứng với trị riêng λ_2 là $\mathbf{e}_2 = [0.872, 0.489]$.

Với độ tin cậy 90%, ta có:

$$\frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,n-p}(\alpha) = \frac{2.8}{9-2} F_{2,7}(0.1) = 7.4456$$

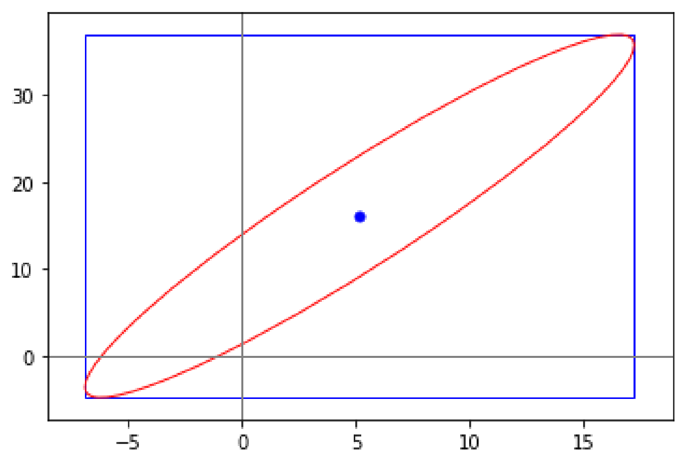
Từ đây, ta có khoảng tin cậy hợp 90% hình ellipse cho vectơ trung bình tổng thể là hình ellip thoả:

$$9 \begin{bmatrix} 5.1856 - x_1 & 16.07 - x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 176.004 & 287.24 \\ 287.24 & 527.85 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5.1856 - x_1 \\ 16.07 - x_2 \end{bmatrix} \leq 7.4456$$

Khi đó ta có hình confidence ellipse 90% có tâm là $\overline{\mathbf{x}}$ và các trục có phương trùng với phương của các vectơ riêng và có độ dài là

$$2\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \approx 47.741 \quad \text{và} \quad 2\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \approx 7.067$$

Khi đó hình confidence ellipse 90% có dạng như sau



b) Khoảng tin cậy 90% riêng lẻ, đồng thời cho μ_1 là:

$$5.1856 - \sqrt{7.4456}\sqrt{\frac{176.004}{9}} \leq \mu_1 \leq 5.1856 + \sqrt{7.4456}\sqrt{\frac{176.004}{9}}$$

Hay,

$$-6.88 \leq \mu_1 \leq 17.252$$

Khoảng tin cậy 90% riêng lẻ, đồng thời cho μ_2 là:

$$16.07 - \sqrt{7.4456}\sqrt{\frac{527.85}{9}} \leq \mu_1 \leq 16.07 + \sqrt{7.4456}\sqrt{\frac{527.85}{9}}$$

Hay,

$$-4.83 \leq \mu_2 \leq 36.967$$

Từ hình ellipse, ta thấy rằng không phải bất kỳ điểm nào có toạ độ μ_1 bất kỳ và $\mu_2 = 10$ đều nằm trong miền tin cậy.

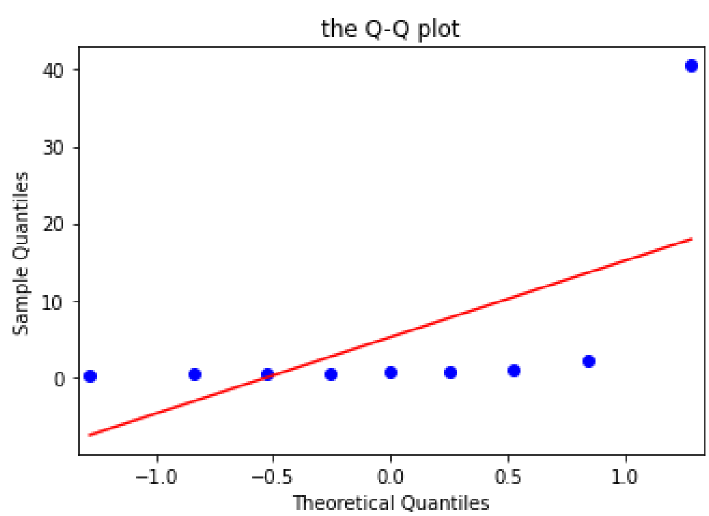
$[0.3, 10]$ là một giá trị khả thi cho μ vì điểm này nằm trong hình ellipse.

c) Để khảo sát tính chuẩn 2 chiều, ta tính với $j = 1, 2, ..., 9$

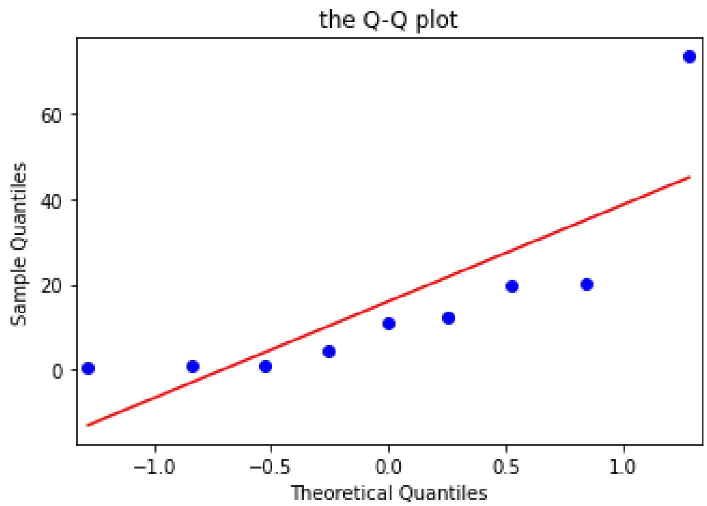
$$d_j^2 = (\boldsymbol{x_j} - \overline{\mathbf{x}})'\mathbf{S}^{-1}(\boldsymbol{x_j} - \overline{\mathbf{x}})$$

Một điểm nằm trong vùng contour của phân phối chi bình phương bậc tự do là 2 và $\alpha = 5$ nếu $d_j \leq 1.38$ Ta có 6 trên 9 điểm nằm trong vùng contour của phân phối chi bình phương bậc tự do là 2 và $\alpha = .5$ nên, ta không có đủ dữ kiện để bác bỏ tính chuẩn 2 chiều của bộ dữ liệu. Tuy nhiên, cỡ mẫu quá nhỏ nên ta không thể đi đến kết luận chắc chắn về tính chuẩn 2 chiều.

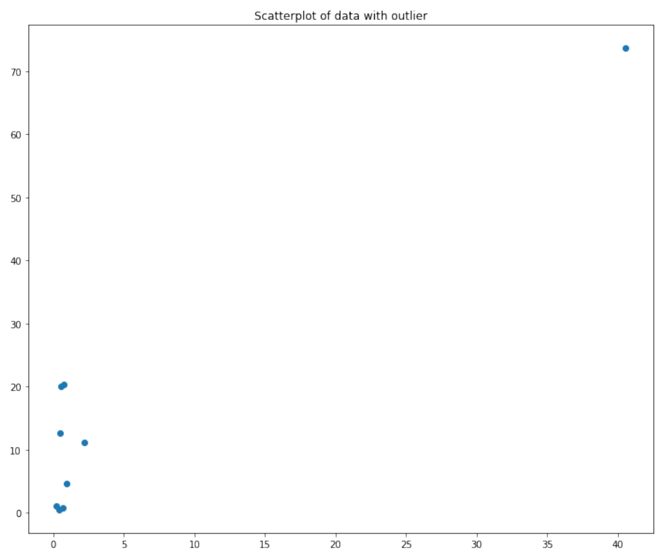
Hình Q-Q cho $\boldsymbol{x_1}$:



Hình Q-Q cho $\boldsymbol{x_2}$:



Hình scatterplot cho $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ khi có điểm ngoại lai:



Từ hai hình Q-Q trên, ta đều bác bỏ tính chuẩn của từng biến.

d) Ta sẽ loại bỏ điểm (40.53,73.68) khỏi bộ dữ liệu vì nó là điểm ngoại lai.

Lúc này, ta có:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0.767 \\ 8.86 \end{bmatrix}$$

và:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.378 & 1.03 \\ 1.03 & 69.86 \end{bmatrix}$$

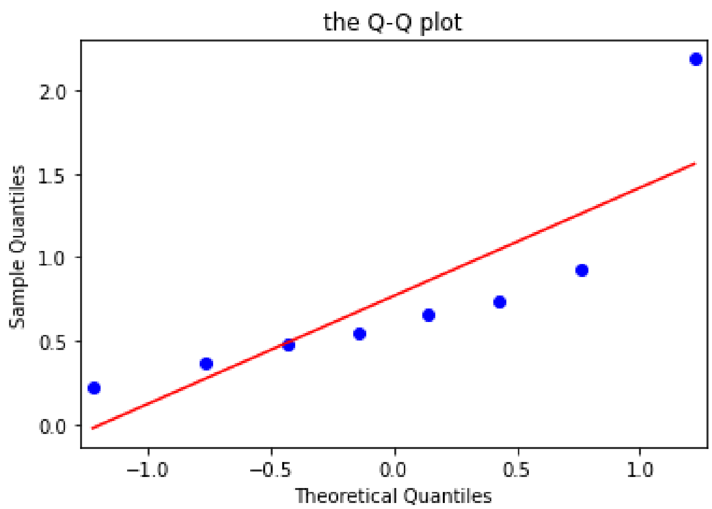
Ta sẽ kiểm tra tính chuẩn 2 chiều: ta tính với $j = 1, 2, ..., 8$

$$d_j^2 = (\boldsymbol{x_j} - \overline{\mathrm{x}})'\mathbf{S}^{-1}(\boldsymbol{x_j} - \overline{\mathrm{x}})$$

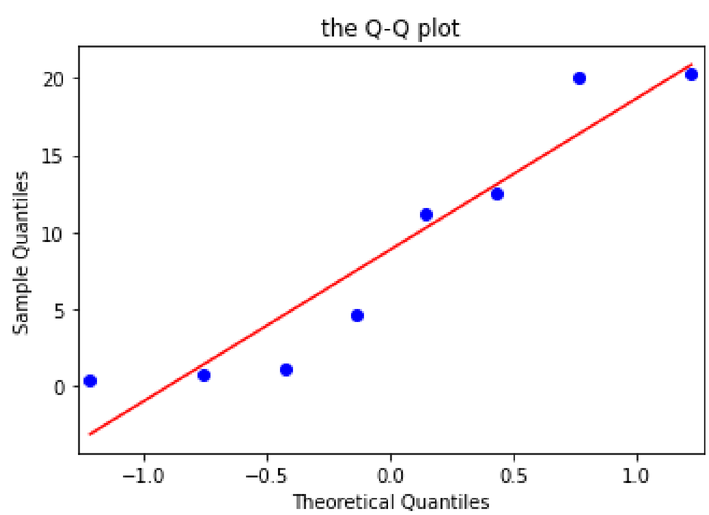
Một điểm nằm trong vùng contour của phân phối chi bình phương bậc tự do là 2 và $\alpha = 5$ nếu $d_j \leq 1.38$ Ta có 5 trên 8 điểm nằm trong vùng contour của phân phối chi bình phương bậc tự do là 2 và $\alpha = .5$ nên, ta không có đủ dữ kiện để bác bỏ tính chuẩn 2 chiều của bộ dữ liệu. Tuy nhiên, cỡ mẫu quá nhỏ nên ta không thể đi đến kết luận chắc chắn về tính chuẩn 2 chiều.

Sau khi khảo sát tính chuẩn 2 chiều sau khi loại bỏ điểm ngoại lai. Ta khảo sát tính chuẩn của từng biến:

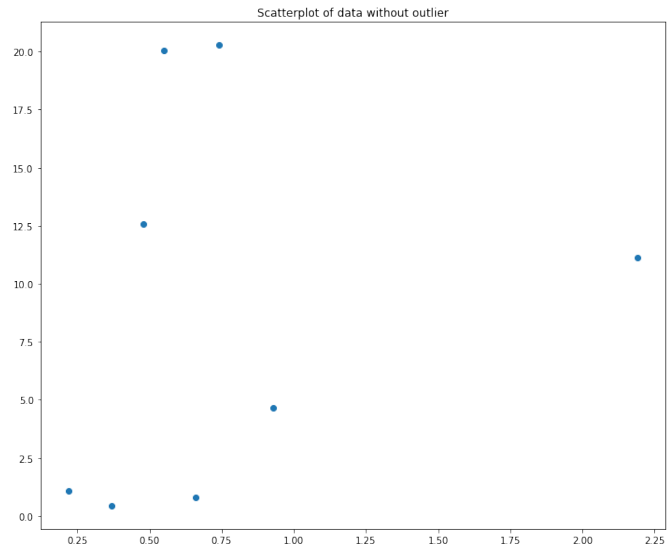
Hình Q-Q plot cho biến $\boldsymbol{x_1}$:



Hình Q-Q plot cho biến $\boldsymbol{x_2}$:



Hình scatterplot cho biến $\boldsymbol{x_1, x_2}$:



Từ hai hình Q-Q, ta thấy bộ dữ liệu đã fit với đường thẳng hơn so với khi có điểm ngoại lai.

Bài tập 5.12. Cho dữ liệu

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \\ - & 8 & 3 \\ 5 & - & - \end{bmatrix}$$

với các thành phần bị thiếu, sử dụng thuật toán *prediction-estimation* để ước lượng $\boldsymbol{\mu}$ và $\boldsymbol{\Sigma}$. Xác định các giá trị ước lượng ban đầu và lặp lại để tìm các ước lượng được cập nhật đầu tiên.

Lời giải

Với dữ liệu được cho ở ma trận $\mathbf{X}$ ta có $p = 4, n = 4$ và một phần quan trắc của các vectơ $\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ bị mất. Khi đó ta thu được ước lượng của các giá trị trung bình của mẫu

$$\widetilde{\mu}_1 = \frac{3+4+5}{3} = 4, \quad \widetilde{\mu}_2 = \frac{6+4+8}{3} = 6, \quad \widetilde{\mu}_3 = \frac{0+3+3}{3} = 2$$

Thay các giá trị bị thiếu bằng ước lượng trung bình tương ứng $x_{31} = 4, x_{42} = 6$ và $x_{43} = 2$, ta thu được ước lượng của các giá trị của ma trận hiệp phương sai

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sigma}_{11} &= \frac{(3-4)^2+(4-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2}{4} = 0.5\\
\widetilde{\sigma}_{22} &= \frac{(6-6)^2+(4-6)^2+(8-6)^2+(6-6)^2}{4} = 2\\
\widetilde{\sigma}_{33} &= \frac{(0-2)^2+(3-2)^2+(3-2)^2+(2-2)^2}{4} = 1.5\\
\widetilde{\sigma}_{12} = \widetilde{\sigma}_{21} &= \frac{(3-4)(6-6)+(4-4)(4-6)+(4-4)(8-6)+(5-4)(6-6)}{4} = 0\\
\widetilde{\sigma}_{13} = \widetilde{\sigma}_{31} &= \frac{(3-4)(0-2)+(4-4)(3-2)+(4-4)(3-2)+(5-4)(2-2)}{4} = 0.5\\
\widetilde{\sigma}_{23} = \widetilde{\sigma}_{32} &= \frac{(6-6)(0-2)+(4-6)(3-2)+(8-6)(3-2)+(6-6)(2-2)}{4} = 0
\end{aligned}$$

Do đó ta có các giá trị ước lượng của $\widetilde{\boldsymbol{\mu}}$ và $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ là

$$\widetilde{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} 4\\ 6\\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 2 & 0\\ 0.5 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Với thành phần thứ nhất của $\mathbf{x}_3$ bị mất, ta có phân hoạch của $\widetilde{\boldsymbol{\mu}}$ và $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ như sau

$$\widetilde{\boldsymbol{\mu}} = \left[\begin{array}{c} \widetilde{\mu}_1\\ \hdashline \widetilde{\mu}_2\\ \widetilde{\mu}_3 \end{array}\right], \quad \text{và } \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \left[\begin{array}{c:cc} \widetilde{\sigma}_{11} & \widetilde{\sigma}_{12} & \widetilde{\sigma}_{13}\\ \hdashline \widetilde{\sigma}_{12} & \widetilde{\sigma}_{22} & \widetilde{\sigma}_{23}\\ \widetilde{\sigma}_{13} & \widetilde{\sigma}_{23} & \widetilde{\sigma}_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{11} & \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{12}\\ \hdashline \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{21} & \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{22} \end{array}\right]$$

Khi đó

$$\widetilde{x}_{31} = \widetilde{\mu}_1 + \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{12}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{22}^{-1} \begin{bmatrix} x_{32}-\widetilde{\mu}_2\\ x_{33}-\widetilde{\mu}_3 \end{bmatrix} = 4 + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0\\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8-6 & 3-2 \end{bmatrix} = \frac{13}{3}$$

và

$$\widetilde{x_{31}^2} = \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{11} - \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{12}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{22}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{21} + \widetilde{x}_{31}^2 = 0.5 - \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0\\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0\\ 0.5 \end{bmatrix} + \left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{172}{9}$$

$$\widetilde{x_{31}\begin{bmatrix} x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}} = \widetilde{x}_{31}\begin{bmatrix} x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \frac{13}{3}\begin{bmatrix} 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{104}{3} & 13 \end{bmatrix}$$

Với các thành phần bị mất của $\mathbf{x}_4$, ta có phân hoạch của $\widetilde{\boldsymbol{\mu}}$ và $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ như sau

$$\widetilde{\boldsymbol{\mu}} = \left[\begin{array}{c} \widetilde{\mu}_2\\ \widetilde{\mu}_3\\ \hdashline \widetilde{\mu}_1 \end{array}\right], \quad \text{và } \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \left[\begin{array}{cc:c} \widetilde{\sigma}_{22} & \widetilde{\sigma}_{23} & \widetilde{\sigma}_{21}\\ \widetilde{\sigma}_{32} & \widetilde{\sigma}_{33} & \widetilde{\sigma}_{31}\\ \hdashline \widetilde{\sigma}_{12} & \widetilde{\sigma}_{13} & \widetilde{\sigma}_{11} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{11} & \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{12}\\ \hdashline \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{21} & \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{22} \end{array}\right]$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
\widetilde{\begin{bmatrix} x_{42} \\ x_{43} \end{bmatrix}} &= E\left(\begin{bmatrix} X_{42} \\ X_{43} \end{bmatrix} \middle| x_{41} = 5; \widetilde{\boldsymbol{\mu}}, \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}\right) = \begin{bmatrix} \widetilde{\mu}_2 \\ \widetilde{\mu}_3 \end{bmatrix} + \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{12}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{22}^{-1}(x_{41} - \widetilde{\mu}_1) \\
&= \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}(0.5)^{-1}(5-4) = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \widetilde{x_{42}^2} & \widetilde{x_{42}x_{43}} \\ \widetilde{x_{42}x_{43}} & \widetilde{x_{43}^2} \end{bmatrix} &= E\left(\begin{bmatrix} X_{42}^2 & X_{42}X_{43} \\ X_{42}X_{43} & X_{43}^2 \end{bmatrix} \middle| x_{41} = 5; \widetilde{\mu}, \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}\right) \\
&= \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{11} - \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{12}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{22}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{21} + \begin{bmatrix} \widetilde{x}_{42} \\ \widetilde{x}_{43} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{x}_{42} & \widetilde{x}_{43} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}(0.5)^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 18 \\ 18 & 10 \end{bmatrix} \\
\widetilde{\begin{bmatrix} x_{42} \\ x_{43} \end{bmatrix}(x_{41})} &= \begin{bmatrix} \widetilde{x}_{42} \\ \widetilde{x}_{43} \end{bmatrix}(x_{41}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} 5 = \begin{bmatrix} 30 \\ 15 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ta xác định được các thống kê đủ như sau

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{T}}_1 &= \begin{bmatrix} x_{11} + x_{21} + \widetilde{x}_{31} + x_{41} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + \widetilde{x}_{42} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + \widetilde{x}_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 4 + \frac{13}{3} + 5 \\ 6 + 4 + 8 + 6 \\ 0 + 3 + 3 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{49}{3} \\ 24 \\ 9 \end{bmatrix} \\
\widetilde{\mathbf{T}}_2 &= \begin{bmatrix} x_{11}^2 + x_{21}^2 + \widetilde{x_{31}^2} + x_{41}^2 & & \\ x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22} + \widetilde{x_{31}x_{32}} + \widetilde{x_{41}x_{42}} & x_{12}^2 + x_{22}^2 + x_{32}^2 + \widetilde{x_{42}^2} & \\ x_{11}x_{13} + x_{21}x_{23} + \widetilde{x_{31}x_{33}} + \widetilde{x_{41}x_{43}} & x_{12}x_{13} + x_{22}x_{23} + x_{32}x_{33} + \widetilde{x_{42}x_{43}} & x_{13}^2 + x_{23}^2 + x_{33}^2 + \widetilde{x_{43}^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3^2 + 4^2 + \frac{172}{9} + 5^2 & & \\ 3\times 6 + 4\times 4 + \frac{104}{3} + 30 & 6^2 + 4^2 + 8^2 + 38 & \\ 3\times 0 + 4\times 3 + 13 + 15 & 6\times 0 + 4\times 3 + 8\times 3 + 18 & 0^2 + 3^2 + 3^2 + 10 \end{bmatrix} \\
&\approx \begin{bmatrix} 69.11 & 98.67 & 40 \\ 98.67 & 154 & 54 \\ 40 & 54 & 28 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ở bước ước lượng tiếp theo, các ước lượng được cập nhật thành

$$\widetilde{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\widetilde{\mathbf{T}}_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{49}{3} \\ 24 \\ 9 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4.083 \\ 6.000 \\ 2.250 \end{bmatrix}$$

và

$$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n}\widetilde{\mathbf{T}}_2 - \widetilde{\boldsymbol{\mu}}\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 69.11 & 98.67 & 40 \\ 98.67 & 154 & 54 \\ 40 & 54 & 28 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4.083 \\ 6.000 \\ 2.250 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4.083 & 6.000 & 2.250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.607 & 0.170 & 0.813 \\ 0.170 & 2.50 & 0 \\ 0.813 & 0 & 1.938 \end{bmatrix}$$