Bài tập cá nhân tuần 1

Chương 2: Đại số ma trận và véc tơ ngẫu nhiên

Véctơ

Một chuỗi x của n số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ được gọi là một véc tơ và được viết dưới dạng:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$$

hay là $x' = [x_1, x_2, ..., x_n]$

Trong đó dấu ngoặc chỉ chuyển vị một cột thành 1 dòng.

Một véctơ x có thể được diễn tả hình học là một đường thẳng có hướng trong không gian n chiều với thành phần x_1 theo trục đầu tiên, x_2 theo trục thứ hai,..., và x_n theo trục thứ n.

Ta định nghĩa véc tơ x nhân với một hằng số c là:

$$cx = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ ... \\ cx_n \end{bmatrix}$$

Phép cộng hai véc tơ x và y là:

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ ... \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

Một véctơ có cả hướng lẫn độ dài. Với n chiều, ta có véc tơ:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$$

Độ dài của x, viết là L_x là:

$$L_x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

Tích của một véctơ x với một đại lượng vô hướng làm thay đổi độ dài véctơ:

$$L_{cx} = \sqrt{c^2x_1^2 + c^2x_2^2 + ... + c^2x_n^2} = |c|\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = |c|L_x$$

Với một số ngẫu nhiên n chiều, ta định nghĩa tích trong của x và y là:

$$x'y = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

Khi đó:

$$L_x = \sqrt{x'x}$$

$$cos(\theta) = \frac{x'y}{L_xL_y} = \frac{x'y}{\sqrt{x'x}.\sqrt{y'y}}$$

Hình chiếu của một véctơ x lên 1 véctơ y là:

$$Projection\ of\ x\ on\ y = \frac{(x'y)}{y'y}y = \frac{(x'y)}{L_y}\frac{1}{L_y}y$$

Trong đó, véc tơ $L_y^{-1}y$ có véc tơ đơn vị. Độ dài của hình chiếu là:

$$Length\ of\ projection = \frac{|x'y|}{L_y} = L_x\left|\frac{x'y}{L_xL_y}\right| = L_x|cos(\theta)|$$

Trong đó θ là góc giữa x và y.

Ma trận

Một ma trận là một dãy hình chữ nhiệu có số thực. Chúng ta định nghĩa một dãy n dòng và p cột như sau:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & \ddots & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} \end{bmatrix}$$

Một ma trận có thể nhân với một hằng số c. Tích cA là một ma trận có được bằng cách nhân mỗi phần tử của A với c. Do đó:

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ... & ca_{1p} \\ ca_{21} & ca_{22} & ... & ca_{2p} \\ ... & ... & \ddots & ... \\ ca_{n1} & ca_{n2} & ... & ca_{np} \end{bmatrix}$$

Ta có thể định nghĩa tích của hai ma trận nếu số chiều của các ma trận tuân theo quy luật: Khi A là (n x k) và B(k x p), thì số phần tử ở một dòng của A bằng số phần tử ở một cột của B, ta có tích hai trận AB. Mỗi phần tử của ma trận mới AB tính bằng cách lấy tích trong của từng dòng của A với mỗi cột của B.

Hay là:

$$\textit{Phần tử (i,j) của } AB = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj}$$

Nếu tồn tại một ma trận B sao cho:

$$BA = AB = I$$

Khi đó, B được gọi là ma trận nghịch đảo của A và kí hiệu là A^{-1}

Một trường hợp đặc biệt của ma trận vuông là ma trận trực giao, có tính chất là:

$$QQ' = Q'Q = I \text{ hoặc } Q' = Q^{-1}$$

Tên được lấy từ tính chất là nếu Q có dòng thứ i q_i', khi đó, $QQ' = I$ suy ra $q_i'q_i$ và $q_j'q_j = 0$ với $i \neq j$, do đó các dòng có độ dài đơn vị và đều vuông góc với nhau. Theo điều kiện $Q'Q = I$, các cột cũng có tính chất như vậy.

Một ma trận vuông A được cho là có một trị riêng λ tương ứng với véc tơ riêng $x \neq 0$, nếu:

$$Ax = \lambda x$$

Nếu ma trận A là một ma trận k x k đối xứng vuông. Khi đó A có k cặp trị riêng và véctơ riêng:

$$\lambda_1, e_1, \lambda_2, e_2, ..., \lambda_k, e_k$$

Các véctơ riêng có thể chọn thoả điều kiện: $1 = e_1'e_1 = ... = e_k'e_k$ và vuông góc với nhau. Các véctơ riêng đều là duy nhất trừ khi 2 hoặc nhiều trị riêng bằng nhau.

Ma trận xác định dương

Dạng phân rã một ma trận đối xứng k x k A là:

$$A = \lambda_1 e_1 e_1' + \lambda_2 e_2 e_2' + ... + \lambda_k e_k e_k'$$

Trong đó, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ là các trị riêng của A và $e_1, e_2, ..., e_k$ là các véc tơ chuẩn tắc.

Vì $x'Ax$ chỉ có các cụm bình phương x_i^2 và tích các cụm x_ix_k, nó được gọi là dạng toàn phương.

Khi một ma trận đối xứng k x k A thoả:

$$0 \leq x'Ax$$

Với mọi $x' = [x_1, x_2, ..., x_k]$, cả ma trận A và dạng toàn phương đều là xác định không âm. A là ma trận xác định dương nếu:

$$0 < x'Ax$$

với mọi véctơ $x \neq 0$.

Sử dụng dạng phân rax ma trận, ta có tính chất là một ma trận đối xứng k x k A là một ma trận xác định dương nếu và chỉ nếu mọi trị riêng của A là dương. A là một ma trận xác định không âm nếu và chỉ nếu các trị riêng của nó đều lớn hoặc hoặc bằng 0.

Ma trận nghiệm bậc 2 Cho A là một ma trận xác định dương k x k có dạng phân rã là: $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i e_i'$. Cho các véc tơ riêng chuẩn hoá là những cột của một ma trận P khác: $P = [e_1, e_2, ..., e_k]$. Khi đó,

$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i e_i' = P\Lambda P'$$

Trong đó $PP' = P'P = I$ và Λ là một ma trận đường chéo.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Với $\lambda_i > 0$. Do đó:

$$A^{-1} = P\Lambda^{-1}P' = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} e_i e_i'$$

Bởi vì:

$$(P\Lambda^{-1}P')P\Lambda P' = PP' = I$$

Đặt $A^{1/2}$ là ma trận đường chéo với $\sqrt{\lambda_i}$ là phần tử thứ i ở đường chéo. Ma trận $\sum_{i=1}^{k} \sqrt{\lambda_i e_i e_i'} = P\Lambda^{1/2}P'$ được gọi là nghiệm bình phương của A và được kí hiệu là $A^{1/2}$.

Ma trận nghiệm bình phương của một ma trận xác định dương A có các tính chất sau đây:

- $(A^{1/2})' = A^{1/2}$ (nghĩa là $A^{1/2}$ là đối xứng)
- $A^{1/2}A^{1/2} = A$
- $(A^{1/2})^{-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i e_i' = P\Lambda^{-1/2}P'$, trong đó $\Lambda^{-1/2}$ là một ma trận đường chéo với $1/\sqrt{\lambda_i}$ ở phần tử thứ i trên đường chéo.
- $A^{1/2}A^{-1/2} = A^{-1/2}A^{1/2} = I$ và $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$, trong đó $A^{-1/2} = (A^{1/2})^{-1}$

Véc tơ ngẫu nhiên và ma trận ngẫu nhiên

Một véc tơ ngẫu nhiên là một véc tơ mà các phần tử của nó đều là biến ngẫu nhiên. Tương tự, một ma trận ngẫu nhiên là một ma trận mà các phần tử của nó đều là các biến ngẫu nhiên. Kì vọng của một ma trận ngẫu nhiên hay vectơ là một ma trận hoặc véctơ bao gồm kì vọng của mỗi phần tử của nó. Cụ thể là đặt $X = X_{ij}$ là một ma trận ngẫu nhiên n x p. Khi đó, kì vọng của X, kí hiệu là $E(X)$ là một ma trận n x p của các số (nếu tồn tại):

$$E(X) = \begin{bmatrix} E(X_{11}) & E(X_{12}) & ... & E(X_{1p}) \\ E(X_{21}) & E(X_{22}) & ... & E(X_{2p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_{n1}) & E(X_{n2}) & ... & E(X_{np}) \end{bmatrix}$$

Trong đó, với mỗi phần tử của ma trận:

$$E(X_{ij}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x_{ij} f_{ij}(x_{ij}) dx_{ij} \ \textit{nếu } X_{ij} \textit{là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ } f_{ij}(x_{ij}) \\ \sum_{\forall x_{ij}} x_{ij} p_{ij}(x_{ij}) \ \textit{nếu } X_{ij} \textit{là biến ngẫu nhiên rời rạc có hàm xác suất } p_{ij}(x_{ij}) \end{cases}$$

Véc tơ trung bình và ma trận hiệp phương sai

Giả sử $X' = [X_1, X_2, ..., X_p]$ là một véc tơ ngẫu nhiên p x 1. Khi đó, mỗi phần tử của X là một biến ngẫu nhiên với hàm xác suất lề. Trung bình lề μ_i và phương sai σ_i được định nghĩa là $\mu_i = E(X_i)$ và $\sigma_i^2 = E(X_i - \mu_i)^2, i = 1, 2, ..., p$ tương ứng. Cụ thể là:

$$\mu_i = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_i(x_i) dx_i \ \textit{nếu } X_i \textit{là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ } f_i(x_i) \\ \sum_{\forall x_i} x_i p_i(x_i) \ \textit{nếu } X_i \textit{là biến ngẫu nhiên rời rạc có hàm xác suất } p_i(x_i) \end{cases}$$

$$\sigma_i^2 = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_i)^2 f_i(x_i) dx_i \ \textit{nếu } X_i \textit{là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ } f_i(x_i) \\ \sum_{\forall x_i} (x_i - \mu_i)^2 p_i(x_i) \ \textit{nếu } X_i \textit{là biến ngẫu nhiên rời rạc có hàm xác suất } p_i(x_i) \end{cases}$$

Các tính chất của bất kỳ cặp biến ngẫu nhiên nào, ví dụ như X_i, X_k, được mô tả bởi hàm xác suất đồng thời và một độ đo cho sự liên kết tuyến tính giữa chúng được cho bởi hiệp phương sai:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= E(X_i - \mu_i)(X_k - \mu_k) \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k) f_{ik}(x_i, x_k) dx_i dx_k \ \textit{nếu } X_i, X_k \textit{là biến ngẫu nhiên liên tục } f_{ik}(x_i, x_k) \\ \sum_{\forall x_i} \sum_{\forall x_k} (x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k) p_{ik}(x_i, x_k) \ \textit{nếu } X_i, X_k \textit{là biến ngẫu nhiên rời rạc } p_{ik}(x_i, x_k) \end{cases} \end{aligned}$$

Và $\mu_i, \mu_k, i, k = 1, 2, ..., p,$ là các trung bình lề. Khi $i = k$, hiệp phương sai trở thành phương sai lề.

Nếu xác suất đồng thời $P[X_i \leq x_i, X_k \leq x_k]$ có thể được viết dưới dạng tích của các xác suất lề tương ứng. Khi đó,

$$P[X_i \leq x_i, X_k \leq x_k] = P[X_i \leq x_i]P[X_k \leq x_k]$$

Với tất cả các cặp giá trị x_i, x_k, khi đó, X_i, X_k được cho là độc lập.

Khi X_i, X_k là các biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ đồng thời $f_{ik}(x_i, x_k)$ và hàm mật độ lề $f_i(x_i), f_k(x_k)$, điều kiện độc lập trở thành:

$$f_{ik}(x_i, x_k) = f_i(x_i)f_k(x_k)$$

với mọi cặp (x_i, x_k).

p biến ngẫu nhiên liên tục $X_1, X_2, ..., X_p$ được gọi là độc lập với nhau nếu hàm mật độ đồng thời có thể viết thành:

$$f_{12...p}(x_1, x_2, ..., x_p) = f_1(x_1)f_2(x_2)...f_p(x_p)$$

với mọi bộ p $(x_1, x_2, ..., x_p)$.

Ta có:

$$Cov(X_i, X_k) = 0 \text{ nếu } X_i, X_k \text{ độc lập}$$

Trung bình và hiệp phương sai của véc tơ ngẫu nhiên p x 1 X có thể đặt là ma trận. Kì vọng của từng phần tử được chứa trong véctơ của trung bình $\mu = E(X)$, và p phương sai σ_{ii} và $\dfrac{p(p-1)}{2}$ hiệp phương sai phân biệt $\sigma_{ik}(i < k)$ được chứa trong một ma trận phương sai - hiệp phương sai đối xứng $\Sigma = E(X-\mu)(X-\mu)'$. Cụ thể là:

$$E(X) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \mu$$

và,

$$\Sigma = E(X-\mu)(X-\mu)' = \begin{bmatrix} E(X_1-\mu_1)^2 & E(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & ... & E(X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\ E(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & E(X_2-\mu_2)^2 & ... & E(X_2-\mu_2)(X_p-\mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1) & E(X_p-\mu_p)(X_2-\mu_2) & ... & E(X_p-\mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

Hoặc,

$$\Sigma = Cov(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & ... & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & ... & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & ... & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

Hệ số tương quan p_{ik} được định nghĩa theo hiệp phương sai σ_{ik} và phương sai σ_{ii}, σ_{kk}:

$$p_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{kk}}}$$

Hệ số tương quan cho biết số liên hợp tuyến tính của hai biến ngẫu nhiên X_i, X_k.

Đặt ma trận tương quan là ma trận đối xứng p x p:

$$p = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} & ... & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{pp}}} \\ \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} & \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{\sigma_{22}\sigma_{22}}} & ... & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{pp}}} & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}\sigma_{pp}}} & ... & \frac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}\sigma_{pp}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p_{12} & ... & p_{1p} \\ p_{12} & 1 & ... & p_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1p} & p_{2p} & ... & 1 \end{bmatrix}$$

và đặt ma trận độ lệch chuẩn p x p là:

$$V^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}$$

Chúng ta dễ dàng kiểm chứng được là:

$$V^{1/2} p V^{1/2} = \Sigma$$

và

$$p = (V^{1/2})^{-1} \Sigma (V^{1/2})^{-1}$$

Phân hoạch ma trận hiệp phương sai

Nói chung, chúng ta có thể phân hoạch p đặc tính chứa trong véctơ ngẫu nhiên p x 1 thành, ví dụ như, hai nhóm có kích cỡ q và p - q tương ứng. Ví dụ, ta có thể viết:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_q \\ \ldots\ldots\ldots \\ X_{q+1} \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ \ldots\ldots \\ X^{(2)} \end{bmatrix}$$

Và,

$$\mu = E(x) = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mu_{q+1} \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^{(1)} \\ \ldots\ldots \\ \mu^{(2)} \end{bmatrix}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \Sigma &= E(X-\mu)(X-\mu)' = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \vdots & \Sigma_{12} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \Sigma_{21} & \vdots & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1q} & \sigma_{1,q+1} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{q1} & \cdots & \sigma_{qq} & \sigma_{q,q+1} & \cdots & \sigma_{qp} \\ \sigma_{q+1,1} & \cdots & \sigma_{q+1,q} & \sigma_{q+1,q+1} & \cdots & \sigma_{q+1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pq} & \sigma_{p,q+1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Chú ý rằng $\Sigma_{12} = \Sigma'_{21}$.

Véctơ trung bình và ma trận hiệp phương sai cho sự liên kết tuyến tính của các biến ngẫu nhiên

Nói chung, xét q liên kết tuyến tính của p biến ngẫu nhiên $X_1, ..., X_p$:

$$\begin{aligned} Z_1 &= c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + ... + c_{1p}X_p \\ Z_2 &= c_{21}X_1 + c_{22}X_2 + ... + c_{2p}X_p \\ \vdots & \qquad \vdots \\ Z_q &= c_{q1}X_1 + c_{q2}X_2 + ... + c_{qp}X_p \end{aligned}$$

hoặc

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & ... & c_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = CX$$

Sự liên kết tuyến tính $Z = CX$ có:

$$\mu_Z = E(Z) = E(CX) = C\mu_X$$

$$\Sigma_Z = Cov(Z) = Cov(CX) = C\Sigma_X C'$$

Trong đó, μ_x, Σ_X là véctơ trung bình và ma trận phương sai - hiệp phương sai của X tương ứng.

Phân hoạch véc tơ trung bình mẫu và ma trận hiệp phương sai

Đặt $\bar{x}' = [\bar{x_1}, \bar{x_2}, ..., \bar{x_p}]$ là véc tơ của trung bình mẫu được tính từ n quan trắc trên p biến $X_1, X_2, ..., X_p$ và đặt:

$$\begin{aligned} S_n &= \begin{bmatrix} s_{11} & ... & s_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1p} & ... & s_{pp} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (x_{j1} - \bar{x_1})^2 & ... & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (x_{j1} - \bar{x_1})(x_{jp} - \bar{x_p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (x_{j1} - \bar{x_1})(x_{jp} - \bar{x_p}) & ... & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (x_{jp} - \bar{x_p})^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

là ma trận phương sai - hiệp phương sai mẫu tương ứng.

Véc tơ trung bình mẫu và ma trận hiệp phương sai có thể phân hoạch để phân biệt định lượng tương ứng từng nhóm biến. Do đó,

$$\begin{bmatrix} \bar{x_1} \\ \vdots \\ \bar{x_q} \\ .... \\ x_{\bar{q}+1} \\ \vdots \\ \bar{x_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{\bar{(1)}} \\ .... \\ x^{\bar{(2)}} \end{bmatrix}$$

Và,

$$\begin{aligned} S_n &= \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1q} & s_{1,q+1} & \cdots & s_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{q1} & \cdots & s_{qq} & s_{q,q+1} & \cdots & s_{qp} \\ s_{q+1,1} & \cdots & s_{q+1,q} & s_{q+1,q+1} & \cdots & s_{q+1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & \cdots & s_{pq} & s_{p,q+1} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{11} & \vdots & S_{12} \\ .... & .... & .... \\ S_{21} & \vdots & S_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Trong đó, $x^{\bar{(1)}}, x^{\bar{(2)}}$ là véc tơ trung bình mẫu được xây dựng từ quan trắc $x^{(1)} = [x_1, ..., x_q]'$ và $x^{(2)} = [x_{q+1}, ..., x_p]'$ tương ứng; S_{11} là ma trận hiệp phương sai mẫu được xây dựng từ quan trắc $x^{(1)}$; S_{22} là ma trận hiệp phương sai mẫu được tính từ quan trắc $x^{(2)}$; và $S_{12} = S'_{21}$ là ma trận hiệp phương sai mẫu cho những phần tử của $x^{(1)}$ và phần tử của $x^{(2)}$.

Bất đẳng thức ma trận và cực đại hoá

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Cho b và d là hai véc tơ p x 1 bất kì. Khi đó:

$$(b'd)^2 \le (b'b)(d'd)$$

Với dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = cd$ hoặc $d = cb$ với vài hằng số c.

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz mở rộng

Cho b và d là hai véc tơ bất kỳ và B là một ma trận xác định dương. Khi đó,

$$(b'd)^2 \le (b'Bb)(d'B^{-1}d)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = cB^{-1}d$ hoặc $d = cBb$ với vài hằng số c.

Bổ đề cực đại hoá

Cho B là xác định dương và d là một véctơ cho trước. Khi đó, với một véctơ khác 0 ngẫu nhiên x,

$$max_{x\neq 0}\frac{(x'd)^2}{x'Bx} = d'B^{-1}d$$

Với đạt cực đại khi $x = cB^{-1}d$ với bất kỳ hằng số $c \neq 0$.

Tối đa hoá của dạng toàn phương cho những điểm trên quả cầu đơn vị

Cho B là một ma trận xác định dương với các trị riêng $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_p \geq 0$ và tương ứng với các véctơ riêng chuẩn tắc $e_1, e_2, ..., e_p$. Khi đó,

$$max_{x\neq 0}\frac{x'Bx}{x'x} = \lambda_1 \ \textit{đạt được khi } x = e_1$$

$$min_{x\neq 0}\frac{x'Bx}{x'x} = \lambda_p \ \textit{đạt được khi } x = e_p$$

Hơn nữa,

$$max_{x\perp e_1,...,e_k}\frac{x'Bx}{x'x} = \lambda_{k+1} \ \textit{đạt được khi } x = e_{k+1}, k = 1, 2, ..., p-1$$

với ký hiệu $\perp$ nghĩa là vuông góc.