CHUYÊN ĐỀ 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

I. Kiến thức cơ bản:

1. Định lý:

* $f'(x) > 0 \forall x \in D \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên D.

* $f'(x) < 0 \forall x \in D \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên D.

2. Định lý mở rộng:

* $f'(x) \ge 0 \forall x \in D$ và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm $\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên D.

* $f'(x) \le 0 \forall x \in D$ và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm $\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên D.

3. Chú ý:

* $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a;b)$ và f(x) liên tục trên $[a;b] \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$.

* $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a;b)$ và f(x) liên tục trên $[a;b] \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$.

4. Điều kiện không đổi dấu trên R:

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \ne 0)$.

* $f(x) \ge 0 \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$ * $f(x) \le 0 \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

* $f(x) > 0 \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ * $f(x) < 0 \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

II. Các dạng toán:

1. Tìm điều kiện để hàm số đơn điệu trên khoảng, đoạn cho trước:

Phương pháp:

* Tính y' .

* Cho y' = 0.

Có các cách sau

Cách 1. (Nếu ta tìm được nghiệm của y')

+ Lập bảng biến thiên.

+ Dựa vào bảng biến thiên để xác định điều kiện bài toán.

Cách 2. (Nếu ta rút ra được y' = 0 về dạng g(x) = h(m))

+ Xét sự biến thiên của g(x).

+ Dựa vào bảng biến thiên để xác định điều kiện bài toán.

Cách 3. (Không làm được như hai cách trên)

+ Lập bảng biến thiên dưới dạng tổng quát.

+ Dựa vào bảng biến thiên để xác định điều kiện bài toán.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (2m+1)x + 6$

a. Xác định m để hàm số đồng biến trên R.

b. Xác định m để hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$

c. Xác định m để hàm số nghịch biến trên $[-3;1]$

Giải:

a. Tập xác định: D = R.

$y' = x^2 - 2(m+1)x + 2m + 1$

Hàm số đồng biến trên R $\Leftrightarrow y' \ge 0 \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in R \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$

b. Tập xác định: D = R.

$y' = x^2 - 2(m+1)x + 2m + 1$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2m+1 \end{array}\right.$$

* Trường hợp 1: $2m+1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{1}{3}$	↗	$+\infty$

Suy ra hàm số đồng biến trên R nên đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Do đó m = 0 thỏa mãn.

* Trường hợp 2 : $2m+1 > 1 \Leftrightarrow m > 0$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2m+1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	y(1)	↘	y(2m+1)	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2m+1 > 2 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$ (thỏa đk m>0)

* Trường hợp 3 : $2m+1 < 1 \Leftrightarrow m < 0$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2m+1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	y(2m+1)	↘	y(1)	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy không có giá trị nào của m để hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$

Vậy hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi m = 0 hoặc $m > \frac{1}{2}$

c. Tập xác định: D = R.

$$y' = x^2 - 2(m+1)x + 2m + 1$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2m+1 \end{array}\right.$$

* Trường hợp 1: $2m+1=1 \Leftrightarrow m=0$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số đồng biến trên R nên không nghịch biến trên $[-3;1]$

Do đó m = 0 không thỏa mãn.

* Trường hợp 2 : $2m+1>1 \Leftrightarrow m>0$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2m+1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	y(1)	$\searrow$	y(2m+1)	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy không có giá trị nào của m để hàm số nghịch biến trên $[-3;1]$

* Trường hợp 3 : $2m+1<1 \Leftrightarrow m<0$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2m+1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	y(2m+1)	$\searrow$	y(1)	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $[-3;1] \Leftrightarrow 2m+1 \le -3 \Leftrightarrow m \le -2$ (Thỏa mãn điều kiện m <0)

Vậy $m \le -2$ hàm số nghịch biến trên $[-3;1]$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - mx - 10$

a. Xác định m để hàm số đồng biến trên R.

b. Xác định m để hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$

c. Xác định m để hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$

d. Xác định m để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

Giải:

a. Tập xác định: D = R.

$y' = x^2 + 4x - m$

Hàm số đồng biến trên R $\Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 4 + m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in R \\ m \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -4$

b. * Tập xác định: D = R.

$y' = x^2 + 4x - m$

* Hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$ $\Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in [0;+\infty)$

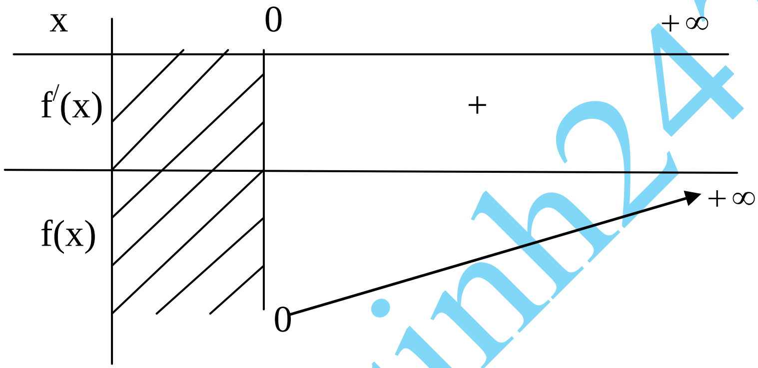
$\Leftrightarrow x^2 + 4x - m \geq 0 \forall x \in [0;+\infty) \Leftrightarrow x^2 + 4x \geq m \quad \forall x \in [0;+\infty)$

* Xét hàm số $f(x) = x^2 + 4x$ trên $[0;+\infty)$

Ta có $f'(x) = 2x + 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (loại)

Ta có bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy YCBT $\Leftrightarrow m \leq 0$

Vậy $m \leq 0$ hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$.

c. * Tập xác định: D = R.

$y' = x^2 + 4x - m$

* Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ $\Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in (-\infty;1)$

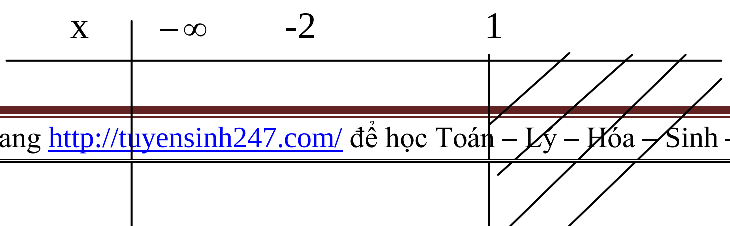
$\Leftrightarrow x^2 + 4x - m \geq 0 \forall x \in (-\infty;1) \Leftrightarrow x^2 + 4x \geq m \quad \forall x \in (-\infty;1)$

* Xét hàm số $f(x) = x^2 + 4x$ trên $(-\infty;1)$

Ta có $f'(x) = 2x + 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (nhận)

Ta có bảng biến thiên:



$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy YCBT $\Leftrightarrow m \le -4$

d. * Tập xác định: D = R.

$y' = x^2 + 4x - m$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - m = 0$

Hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ |x_1 - x_2|^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + m > 0 \\ {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ (-2)^2 - 4(-m) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ m = -\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}$$

Vậy $m = -\frac{3}{4}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + 12x - 1$

a. Xác định m để hàm số đồng biến trên R.

b. Xác định m để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$

c. Xác định m để hàm số nghịch biến trên $(1;2)$

d. Xác định m để hàm số nghich biến trên đoạn có độ dài bằng 2.

Giải:

a. Tập xác định: D = R.

$y' = 3x^2 - 2mx + 12$

Hàm số đồng biến trên R

$$\Leftrightarrow y' \ge 0 \, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ m^2 - 36 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in R \\ -6 \le m \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \le m \le 6$$

b. Tập xác định: D = R.

$y' = 3x^2 - 2mx + 12$

* Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ $\Leftrightarrow y' \ge 0 \, \forall x \in (1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2mx + 12 \ge 0 \, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow 2m \le \frac{3x^2 + 12}{x} \, \forall x \in (1;+\infty)$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2 + 12}{x}$ trên $(1;+\infty)$

Ta có $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 12}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 12}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \ (n) \\ x = -2 \ (l) \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	1	2	$+\infty$

$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		15 $\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy YCBT $\Leftrightarrow 2m \le 12 \Leftrightarrow m \le 6$

Vậy $m \le 6$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

c. Tập xác định: D = R.

$y' = 3x^2 - 2mx + 12$

* Hàm số nghịch biến trên $(1;2)$ $\Leftrightarrow y' \le 0 \, \forall x \in (1;2)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2mx + 12 \le 0 \, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow 2m \le \dfrac{3x^2 + 12}{x} \, \forall x \in (1;2)$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2 + 12}{x}$ *trên* $(1;2)$

Ta có $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 12}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 12}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \ (l) \\ x = -2 \ (l) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x		1		2	
$f'(x)$			$-$		
$f(x)$		15	$\searrow$	12	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy YCBT $\Leftrightarrow 2m \le 12 \Leftrightarrow m \le 6$

Vậy $m \le 6$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

d. * Tập xác định: D = R.

$y' = 3x^2 - 2mx + 12$

Hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ |x_1 - x_2|^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 36 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -6) \cup (6; +\infty) \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty;-6) \cup (6;+\infty) \\ \left(\dfrac{2m}{3}\right)^2 - 4.4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty;-6) \cup (6;+\infty) \\ \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \in \phi$$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+9}{x+m}$.

a. Xác định m để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
b. Xác định m để hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$.
c. Xác định m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$

Giải:

a. TXĐ: $D = R \setminus \{-m\}$

$$y' = \frac{m^2-9}{(x+m)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0\ \forall x \neq -m$

$\Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m \in (-3;3)$

Vậy: $m \in (-3;3)$ thỏa điều kiện bài toán.

b. TXĐ: $D = R \setminus \{-m\}$

$$y' = \frac{m^2-9}{(x+m)^2}$$

Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ $\Leftrightarrow y' > 0\ \forall x \in (2;+\infty) và\, x \neq -m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 > 0 \\ -m \notin (2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty;-3) \cup (3;+\infty) \\ -m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty;-3) \cup (3;+\infty) \\ m \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$$

Vậy: $m > 3$ thỏa điều kiện bài toán.

c. TXĐ: $D = R \setminus \{-m\}$

$$y' = \frac{m^2-9}{(x+m)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1) \Leftrightarrow y' < 0\ \forall x \in (-\infty;-1) và\, x \neq -m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 < 0 \\ -m \notin (-\infty;-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-3;\,3) \\ -m \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-3;\,3) \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m \le 1$$

Vậy: $-3 < m \le 1$ thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 5. (ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A, A1 NĂM 2013)

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ (1), với m là tham số thực. Tìm m để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Giải:

Ta có y' = $-3x^2 + 6x + 3m$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ y' $\le 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 3m \le 0\ \ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \le x^2 - 2x\ \ \forall x \in (0;+\infty)$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x$ với x > 0

Ta có $g'(x) = 2x - 2$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có bảng biến thiên:

x		0		1		$+\infty$
$g'(x)$			-	0	+	
$g(x)$		0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy YCBT $\Leftrightarrow m \le -1$

Vậy $m \le -1$ hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LÀM

1. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$ có đồ thị (C). Xác định m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$. (ĐỀ DỰ BỊ KHỐI A NĂM 2009)

2. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ có đồ thị (C_m).
Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

3. **(Dự bị 1 khối D 2003)** Cho hàm số: $y = \dfrac{x^2 + 5x + m^2 + 4}{x+3}$, (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m=1.

b) Tìm m để hàm số (1) đồng biến trong khoảng $(1;+\infty)$.

2 .<u>Ứng dụng tính đơn điệu để chứng minh bất đẳng thức</u>:

Ví dụ 1. Chứng minh rằng:

a. $\sin x < x \quad \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ b. $x < \tan x \quad \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ c. $x^4 - 2x^2 \le 0 \ \forall x \in [-1;1]$

Giải:

a. Ta có: $\sin x < x \Leftrightarrow x - \sin x > 0$

Xét $f(x) = x - \sin x$ Với $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $f'(x) = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \ge 0 \ \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Leftrightarrow x = k2\pi \Leftrightarrow x = 0 \ (Do\ x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right))$$

Suy ra, $f(x)$ đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

Do đó, $\forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $0 < x \Rightarrow f(0) < f(x) \Leftrightarrow 0 < x - \sin x \Leftrightarrow \sin x < x$

Vậy: sinx < x $\forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

b. Ta có: $x < \tan x \Leftrightarrow x - \tan x < 0$

Xét hàm số $f(x) = x - \tan x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x \le 0 \ \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \Leftrightarrow x = 0 \ (Do\ x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right))$$

Suy ra, $f(x)$ nghịch biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

Do đó, $\forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $0 < x \Rightarrow f(0) > f(x) \Leftrightarrow 0 > x - \tan x \Leftrightarrow x < \tan x$

Vậy $x < \tan x \ \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

c. $x^4 - 2x^2 \le 0 \ \forall x \in [-1;1]$

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2$ với $x \in [-1;1]$

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x		-1		0		1	
$f'(x)$			+	0	-		
$f(x)$		-1	↗	0	↘	-1	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x) = x^4 - 2x^2 \le 0 \ \forall x \in [-1;1]$ (đpcm)

CHUYÊN ĐỀ 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Tìm điều kiện để hàm số đạt cực trị tai một điểm:

Cách 1. (Thường dùng cho hàm đa thức)

* f(x) đạt cực trị tại x = x_0 $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) \ne 0 \end{cases}$

* f(x) đạt cực đại tại x = x_0 $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}$

* f(x) đạt cực tiểu tại x = x_0 $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$

Cách 2. (Thường dùng cho hàm phân thức)

* Nếu f(x) đạt cực trị tại x = x_0 thì $y'(x_0) = 0$.

* Giải phương trình $y'(x_0) = 0$ tìm m, thay m vừa tìm được vào hàm số .

* Lập bảng biến thiên và kết luận.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 5$.

a. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại x = 0.

b. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại x = 1.

c. Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại x = 3.

Giải:

a. TXĐ: D = R

$y' = x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m + 2$

$y'' = 2x - 2(m-1)$

Hàm số đạt cực trị tại x = 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \\ y''(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ -2(m-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right. \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

Vậy Hàm số đạt cực trị tại x = 0

b. TXĐ: D = R

$y' = x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m + 2$

$y'' = 2x - 2(m-1)$

Hàm số đạt cực đại tại x = 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 5 = 0 \\ 4 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

c. TXĐ: D = R

$y' = x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m + 2$

$y'' = 2x - 2(m-1)$

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9m + 17 = 0 \\ 8 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \phi \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \phi$$

Vậy không có giá trị nào của m để hàm số đạt cực tiểu tại x = 3.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + bx + \frac{1}{3}$. Xác định a và b để hàm số đạt cực đại tại x = 1 và giá trị cực đại tại điểm đó bằng 2.

Giải:

* TXĐ: D = R

* $y' = -x^2 + ax + b$

$y'' = -2x + a$

Hàm số đạt cực đại tại x = 1 và giá trị cực đại tại điểm đó bằng 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)<0 \\ y(1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+a+b=0 \\ -2+a<0 \\ \frac{1}{2}a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \\ a<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ví dụ 3. Xác định m để hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 5$

a. Hàm số đạt cực tiểu tại x = - 1

b. Hàm số đạt cực đại tại x = - 2.

Giải:

a. TXĐ: D = R

$y' = 4x^3 - 4m^2x$

$y'' = 12x^2 - 4m^2$

Hàm số đạt cực tiểu tại x = - 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(-1)=0 \\ y''(-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4+4m^2=0 \\ 12-4m^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right. \\ m \in \left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$$

b. TXĐ: D = R

$y' = 4x^3 - 4m^2x$

$y'' = 12x^2 - 4m^2$

Hàm số đạt cực đại tại x = - 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(-2)=0 \\ y''(-2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -32+8m^2=0 \\ 48-4m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right. \\ m \in \left(-\infty;-2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3};+\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow m=2$$

Ví dụ 4. Xác định m để hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + 5}{x+1}$ đạt cực tiểu tại x = 3.

Giải:

TXĐ: $D = R \setminus \{-1\}$

$$y' = \frac{x^2 + 2x - 2m - 5}{(x+1)^2}$$

* Nếu hàm số đạt cực tiểu tại x = 3 thì $y'(3) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{10-2m}{16} = 0 \Leftrightarrow m = 5$$

* Với $m = 5$ ta có

$$y' = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x+1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -5 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		CĐ		CT		$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy x = 3 là điểm cực tiểu.
Vậy m = 5 hàm số đạt cực tiểu tại x = 3.

Ví dụ 5. Xác định m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x + m}{x^2 - 2x + 2}$ đạt cực đại tại $x = \sqrt{2}$.

Giải:

TXĐ: D = R

$* \ y' = \dfrac{-4x^2 + 4x - 2mx + 2m}{\left(x^2 - 2x + 2\right)^2}$

* Nếu hàm số đạt cực tiểu tại $x = \sqrt{2}$ thì $y'(\sqrt{2}) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{4\sqrt{2} - 8 + 2\left(1 - \sqrt{2}\right)m}{\left(4 - 2\sqrt{2}\right)^2} = 0 \Leftrightarrow m = -2\sqrt{2}$$

* Với $m = -2\sqrt{2}$ ta có $y' = \dfrac{-4x^2 + \left(4 + 4\sqrt{2}\right)x - 4\sqrt{2}}{\left(x^2 - 2x + 2\right)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	1		CT		CĐ		1

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = \sqrt{2}$.
Vậy $m = -2\sqrt{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

2. <u>Tìm m để hàm số có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước</u>:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (2m - 1)x^2 + (1 - 4m)x + 1$

a. Xác định m để hàm số có cực đại và cực tiểu.
b. Xác định m để hàm số có hai điểm cực trị x_1 , x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 4$.
c. Xác định m để hàm số có hai điểm cực trị x_1 , x_2 sao cho $3x_1 + x_2 = 4$.
d. Xác định m để hàm số có hai điểm cực trị x_1 , x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 \le 2$.
e. Xác định m để đồ thị hàm số có hai điểm cực nằm về cùng phía so với trục tung.

Giải:

a. TXĐ: D = R

$y' = x^2 - 2(2m-1)x + 1 - 4m$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(2m-1)x + 1 - 4m = 0$ (*)

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Delta' = 4m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \ne 0$

Vậy $m \ne 0$ hàm số có cực đại và cực tiểu.

b. TXĐ: D = R

$y' = x^2 - 2(2m-1)x + 1 - 4m$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(2m-1)x + 1 - 4m = 0$ (*)

* Hàm số có hai điểm cực trị x_1 , x_2 $\Leftrightarrow$ phương (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \ne 0$

* Với $m \ne 0$ hàm số có hai điểm cực trị x_1 , x_2

Ta có x_1 , x_2 là nghiệm của phương trình (*) nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(2m-1) \\ x_1.x_2 = 1 - 4m \end{cases}$

Theo đề ta có $|x_1 - x_2| = 4 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16$

$\Leftrightarrow [2(2m-1)]^2 - 4.(1-4m) = 16 \Leftrightarrow 16m^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \ (n) \\ m = -1 \ (n) \end{array}\right.$

Vậy m = 1; m = -1 thỏa mãn điều kiện bài toán.

c. TXĐ: D = R

$y' = x^2 - 2(2m-1)x + 1 - 4m$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(2m-1)x + 1 - 4m = 0$ (*)

* Hàm số có hai điểm cực trị x_1 , x_2 $\Leftrightarrow$ phương (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Delta' = 4m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \ne 0$

* Với $m \ne 0$ hàm số có hai điểm cực trị x_1 , x_2

Ta có x_1 , x_2 là nghiệm của phương trình (*) nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(2m-1) & (1) \\ x_1.x_2 = 1 - 4m & (2) \end{cases}$

Theo đề ta có $3x_1 + x_2 = 4$ (3)

Từ (3) $\Rightarrow x_2 = 4 - 3x_1$ thay vào (1) và (2) ta được $\begin{cases} 4 - 2x_1 = 2(2m-1) \\ x_1(4 - 3x_1) = 1 - 4m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - 2m & (3) \\ 4x_1 - 3x_1^2 = 1 - 4m & (4) \end{cases}$

Thay $x_1 = 3 - 2m$ vào (4) ta được $4(3-2m) - 3(3-2m)^2 = 1 - 4m$

$$-12m^2+32m-16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{2}{3}\ (n) \\ m=2\ (n) \end{array}\right.$$

Vậy $m=\frac{2}{3}; m=2$ thỏa TĐKBT.

d. TXĐ: D = R

$y' = x^2-2(2m-1)x+1-4m$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2-2(2m-1)x+1-4m=0$ (*)

* Hàm số có hai điểm cực trị x_1 , x_2 $\Leftrightarrow$ phương (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Delta' = 4m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

* Với $m \neq 0$ hàm số có hai điểm cực trị x_1 , x_2

Ta có x_1 , x_2 là nghiệm của phương trình (*) nên $\begin{cases} x_1+x_2=2(2m-1) \\ x_1.x_2=1-4m \end{cases}$

Theo đề ta có $x_1{}^2+x_2{}^2 \leq 2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 \leq 2 \Leftrightarrow [2(2m-1)]^2-2(1-4m) \leq 2$

$\Leftrightarrow 16m^2-8m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{2}$

Vậy $0 \leq m \leq \frac{1}{2}$ thỏa TĐKBT.

e. TXĐ: D = R

$y' = x^2-2(2m-1)x+1-4m$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2-2(2m-1)x+1-4m=0$ (*)

* Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Delta' = 4m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

* Với $m \neq 0$ hàm số có hai điểm cực trị . Gọi x_1 , x_2 là hai điểm cực trị của hàm số.

Ta có x_1 , x_2 là nghiệm của phương trình (*) nên $\begin{cases} x_1+x_2=2(2m-1) \\ x_1.x_2=1-4m \end{cases}$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực nằm về cùng phía so với trục tung

$\Leftrightarrow x_1.x_2 > 0 \Leftrightarrow 1-4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$

Kết hợp với điều kiện $m \neq 0$ ta được $m \neq 0; m < \frac{1}{4}$

Vậy $m \neq 0; m < \frac{1}{4}$ thỏa TĐKBT.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^4-2mx^2+2$

a. Xác định m để hàm số có ba điểm cực trị.

b. Xác định m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị lập thành một tam giác vuông cân.

c. Xác định m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị lập thành một tam giác đều.

d. Xác định m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích bằng 1.

Giải:

a. TXĐ: D = R

$y' = 4x^3-4mx$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \quad (*)$

$\Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad (1) \\ x^2 = m \quad (2) \end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0^2 \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$

Vậy m > 0 thỏa mãn TĐKBT.

b. TXĐ: D = R

$y' = 4x^3 - 4mx$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \quad (*)$

$\Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad (1) \\ x^2 = m \quad (2) \end{array}\right.$

* Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0^2 \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$

* Với $m > 0$, ta có $(2) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{m}$ nên đồ thị hàm số có ba điểm cực trị A(0; 2), $B(-\sqrt{m}; 2 - m^2)$, $C(\sqrt{m}; 2 - m^2)$.

Ta có $AB = \sqrt{m^4 + m}$; $AC = \sqrt{m^4 + m} \Rightarrow AB = AC$ nên tam giác ABC cân tại A.

Do đó tam giác ABC vuông cân $\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \,(**)$

Có $\overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{m}; -m^2\right)$; $\overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{m}; -m^2\right)$

Vậy $(**) \Leftrightarrow -\sqrt{m}.\sqrt{m} + (-m^2).(-m^2) = 0 \Leftrightarrow -m + m^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \ (l) \\ m = 1 \ (n) \end{array}\right.$

Vậy m = 1 đồ thị hàm số có ba điểm cực trị lập thành một tam giác vuông cân.

c. TXĐ: D = R

$y' = 4x^3 - 4mx$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \quad (*)$

$\Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad (1) \\ x^2 = m \quad (2) \end{array}\right.$

* Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0^2 \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$

* Với $m > 0$, ta có (2)$(2) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{m}$ nên đồ thị hàm số có ba diểm cực trị A(0; 2), $B(-\sqrt{m}; 2 - m^2)$, $C(\sqrt{m}; 2 - m^2)$.

Tam giác ABC đều $\Leftrightarrow AB = AC = BC \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AC = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m^4 + m} = \sqrt{m^4 + m} \\ \sqrt{m^4 + m} = \sqrt{4m} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{m^4 + m} = \sqrt{4m}$

$\Leftrightarrow m^4 - 3m = 0 \Leftrightarrow m(m^3 - 3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \ (l) \\ m = \sqrt[3]{3} \ (n) \end{array}\right.$

Vậy $m=\sqrt[3]{3}$ thỏa mãn ĐKBT.

d. TXĐ: D = R

$y' = 4x^3 - 4mx$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \quad (*)$

$\Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & (1) \\ x^2 = m & (2) \end{array}\right.$

* Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0^2 \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$

* Với $m > 0$, ta có (2)$(2) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{m}$ nên đồ thị hàm số có ba diểm cực trị

A(0; 2), B$(-\sqrt{m}; 2-m^2)$, C$(\sqrt{m}; 2-m^2)$.

. $BC = \sqrt{4m}$

. $\overrightarrow{BC} = (2\sqrt{m}; 0) = 2\sqrt{m}.(1;0) \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của đường thẳng BC là $\vec{n} = (0;1)$

Nên BC có phương trình: $y + m^2 - 2 = 0$

d(A; BC)=$|m^2| = m^2$

Ta có, $S_{ABC} = \frac{1}{2}.BC.d(A;BC) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.\sqrt{4m}.m^2 = 1 \Leftrightarrow m^5 = 1 \Leftrightarrow m = 1\ (n)$

Vậy m = 1 thỏa ĐKBT.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ (1)

Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) cách đều gốc tọa độ O.

Giải:

TXĐ: D = R

$y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1)$,

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - (m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - m$ hoặc $x = 1 + m$

Do đó (1) có cực đại và cực tiểu

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1 - m \neq 1 + m \Leftrightarrow m \neq 0$

Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số (1)

$\Rightarrow A(1 + m; 2(m^3 - 1))$; $B(1 - m; -2(m^3 + 1))$

Ta có : $OA^2 = OB^2 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \Leftrightarrow 4m = 16m^3 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4}(\text{vì } m \neq 0) \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$

a. Xác định m để hàm số có cực trị.

b. Xác định m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Giải:

a. TXĐ:

$$y' = \frac{x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \quad (1) \\ x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1^2 - 2.1 + m^2 - 3m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 3m - 2 > 0 \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2$$

b. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định

$$\Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \neq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3 \geq 0 \ \forall x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3 \geq 0 \ \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -m^2 + 3m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$$

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$

Chứng minh rằng với mọi m để hàm số có cực trị.

Giải:

TXĐ: $D = R \setminus \{-m\}$

$$y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -m \quad (1) \\ x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (-m)^2 + 2m.(-m) + m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in R$$

Vậy với mọi m hàm số luôn có cực trị.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho OA = BC, O là gốc tọa độ, A là cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

(ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC Khối B NĂM 2011)

Giải:

y' = $4x^3 - 4(m + 1)x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad (1) \\ x^2 = m + 1 \quad (2) \end{array}\right.$$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ 0^2 \neq m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$$

Khi đó đồ thị hàm số có 3 cực trị A (0; m), B ($\sqrt{m+1}$; $-m^2 - m - 1$), C ($-\sqrt{m+1}$; $-m^2 - m - 1$)

Ta có: OA = BC $\Leftrightarrow m^2 = 4(m + 1) \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}$ (thỏa m > -1)

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m-2)x^2+(5m+4)x+3m+1$. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 < 2 < x_2$.

Giải:

* TXĐ: D = R.
* $y' = x^2+2(m-2)x+5m+4$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2+2(m-2)x+5m+4=0 \quad (*)$

* Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = (m-2)^2-(5m+4)=m^2-9m>0 \Leftrightarrow m<0$ hoặc $m>9$ (1)

* Khi $m<0$ hoặc $m>9$, hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 < 2 < x_2$

$\Leftrightarrow (x_1-2)(x_2-2)<0 \Leftrightarrow x_1x_2-2x_1-2x_2+4<0 \Leftrightarrow x_1x_2-2(x_1+x_2)+4<0$

$\Leftrightarrow 5m+4-2.(-2)(m-2)+4<0 \Leftrightarrow 9m<0 \Leftrightarrow m<0$ (2)

Đối chiếu (1) và (2) ta được m < 0.

Vậy m < 0 thỏa điều kiện bài toán.

BÀI TẬP TỰ LÀM

1. Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x-m$. Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1-x_2|\le 2$.
2. Cho hàm số $y=(m-1)x^4-(m+2)x^2-3m$. Xác định m để hàm số có ba điểm cực trị.
3. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+m$ (1). Xác định m để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị A, B sao cho $AOB=120^0$.
4. Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m^2+m$. Xác định m để đồ thị của hàm số đã cho có ba điểm cực trị lập thành một tam giác có một góc bằng 120^0.
5. Cho hàm số $y=x^4+2(m^2-m+1)x^2+m-1$. Xác định m để đồ thị của hàm số đã cho có khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu ngắn nhất.

3. <u>Phương trình đường thẳng đi qua điểm cực trị và cực trị của đồ thị hàm số</u>:

A. <u>Kiến thức cơ bản</u>:

a/ Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

Thực hiện phép chia đa thức cho y cho y' ta được: $y=y'.(Ax+B)+Cx+D$

Gọi (x_1 ; y_1) và (x_2 ; y_2) là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Khi đó,

y_1 = Cx + D và y_2 = Cx + D

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là y = Cx + D.

b/ Cho hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$.

Gọi (x_1 ; y_1) và (x_2 ; y_2) là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Khi đó, $y_1=\frac{2x_1+b}{d}$ và $y_2=\frac{2x_2+b}{d}$.

Suy ra, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=\frac{2x+b}{d}$

c/ Gọi (x_1 ; y_1) và (x_2 ; y_2) là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.
Khi đó,
* Đồ thị hàm số có hai điểm nằm về cùng phía so với trục hoành $\Leftrightarrow y_1.y_2 > 0$
* Đồ thị hàm số có hai điểm nằm về khác phía so với trục hoành $\Leftrightarrow y_1.y_2 < 0$

B. Các ví dụ:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu. Lập phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu đó.

Giải:

TXĐ: D = R

$y' = 3x^2 + 2mx + 7$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2mx + 7 = 0$ (*)

*Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 21 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\sqrt{21} \\ m > \sqrt{21} \end{array}\right.$

*Với $\left[\begin{array}{l} m < -\sqrt{21} \\ m > \sqrt{21} \end{array}\right.$ hàm số có hai điểm cực trị

Gọi (x_1 ; y_1) và (x_2 ; y_2) là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

Thực hiện phép chia đa thức y cho y' ta được:

$y = y'.\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}m\right) + \left(\frac{14}{3} - \frac{2m^2}{9}\right)x + 3 - \frac{7}{9}m$

Gọi (x_1 ; y_1) và (x_2 ; y_2) là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

Ta có: $y_1 = \left(\frac{14}{3} - \frac{2m^2}{9}\right)x_1 + 3 - \frac{7}{9}m$

$y_2 = \left(\frac{14}{3} - \frac{2m^2}{9}\right)x_2 + 3 - \frac{7}{9}m$

Suy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là $y = \left(\frac{14}{3} - \frac{2m^2}{9}\right)x + 3 - \frac{7}{9}m$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$.

a. Xác định m để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu cùng dấu.

b. Xác định m để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu nằm về khác phía so với trục hoành.

c. Xác định m để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu nằm về khác phía so với trục tung.

Giải:

a. Ta có $y' = 3x^2 - 12x + 3m + 6$

* Đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Delta' = 36 - 9m - 18 > 0 \Leftrightarrow m < 2$

* Với đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu

Gọi (x_1 ; y_1) và (x_2 ; y_2) là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

Chia y cho y' ta được $y=\frac{1}{3}y'(x-2)+(m-2)(2x+1)$

Ta có $y_1=(m-2)(2x_1+1)$; $y_2=(m-2)(2x_2+1)$

Suy ra $y_1.y_2=(m-2)^2(2x_1+1)(2x_2+1)=(m-2)^2(4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1)$

Do x_1 , x_2 là nghiệm của phương trình $y'=0$ nên $\begin{cases}x_1+x_2=4\\ x_1x_2=m+2\end{cases}$

Do đó $y_1.y_2=(m-2)^2(4m+17)$

Vậy y_1 và y_2 cùng dấu $\Leftrightarrow y_1.y_2>0 \Leftrightarrow (m-2)^2(4m+17)>0 \Leftrightarrow \begin{cases}m>-\frac{17}{m}\\ m\neq 2\end{cases}$

Kết hợp với điều kiện m < 2 ta được $-\frac{17}{4}<m<2$

b. Ta có $y'=3x^2-12x+3m+6$

* Đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu

$\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Delta'=36-9m-18>0 \Leftrightarrow m<2$

* Với đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu

Gọi (x_1 ; y_1) và (x_2 ; y_2) là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

Chia y cho y' ta được $y=\frac{1}{3}y'(x-2)+(m-2)(2x+1)$

Ta có $y_1=(m-2)(2x_1+1)$; $y_2=(m-2)(2x_2+1)$

Suy ra $y_1.y_2=(m-2)^2(2x_1+1)(2x_2+1)=(m-2)^2(4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1)$

Do x_1 , x_2 là nghiệm của phương trình $y'=0$ nên $\begin{cases}x_1+x_2=4\\ x_1x_2=m+2\end{cases}$

Do đó $y_1.y_2=(m-2)^2(4m+17)$

Đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu nằm về khác phía so với trục hoành

$y_1.y_2<0 \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 2\\ m<-\frac{17}{2}\end{cases} \Leftrightarrow m<-\frac{17}{2}$

Kết hợp với điều kiện m < 2 ta được $m<-\frac{17}{2}$

Vậy $m<-\frac{17}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$. Xác định m để

a. Đường thẳng nối hai điểm cực trị đi qua điểm (2; -1)

b. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác vuông tại O. Tính diện tích tam giác đó.

c. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Giải:

a. TXĐ: D = R

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Suy ra đồ thị luôn có hai cực trị

Gọi (x_1 ; y_1) và (x_2 ; y_2) là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

Thực hiện phép chia đa thức y *cho* y' ta được

$y = y'\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) + m - 2x$

Ta có $y_1 = m - 2x_1$; $y_2 = m - 2x_2$

Suy ra đường thẳng nối hai điểm cực trị là d: $y = m - 2x$

Đường thẳng d đi qua điểm (2; -1) $\Leftrightarrow -1 = m - 2.2 \Leftrightarrow m = 3$

Vậy m = 3 thỏa yêu cầu bài toán.

b. TXĐ: D = R

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Suy ra đồ thị luôn có hai cực trị là A(0 ; m), B(2; m – 4)

$\overrightarrow{OA} = (0; m)$, $\overrightarrow{OB} = (2; m-4)$

Tam giác OAB vuông tại O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow m(m-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \ (l) \ (Do \ \ A \equiv O) \\ m = 4 \end{array}\right.$

Vậy m =4 thỏa điều kiện bài toán.

* Với m = 4 $\Rightarrow A(0;4)$ *và* $B(2;0)$

$\Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.4.2 = 4$

c. TXĐ: D = R

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Suy ra đồ thị luôn có hai cực trị là A(0 ; m), B(2; m – 4)

Đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $y_A.y_B < 0 \Leftrightarrow m(m-4) < 0$

$\Leftrightarrow 0 < m < 4$

Vậy $0 < m < 4$ thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$.

a. Xác định m để các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng với nhau qua đường thẳng y = x.

b. Lập phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu .

c. Xác định m để độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị bằng $2\sqrt{5}$.

Giải:

a. TXĐ: D = R

$y' = 3x^2 - 6mx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$$

* Đồ thị có cực đại cực tiểu

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

* Với $m \neq 0$ đồ thị hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu là $A(0;4m^3)$, $B(2m;0)$.

Hai điểm cực đại cực tiểu đối xứng qua đường thẳng y = x

$$\Leftrightarrow y_A = x_B \neq 0 \Leftrightarrow 4m^3 = 2m \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ m = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Vậy $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $m = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thỏa điều kiện bài toán.

b. **Cách 1.**

TXĐ: D = R

$$y' = 3x^2 - 6mx$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$$

* Đồ thị có cực đại cực tiểu

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

*Với $m \neq 0$ đồ thị hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu là $A(0;4m^3)$, $B(2m;0)$.

Vectơ chỉ phương của AB là $\overrightarrow{AB} = (2m;-4m^3)$

Suy ra vectơ pháp tuyến của AB là: $\vec{n} = (4m^3;2m)$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị A và B là:

$4m^3(x-0) + 2m(y-4m^3) = 0 \Leftrightarrow y = -2m^2x + 4m^3$

Cách 2. TXĐ: D = R

$$y' = 3x^2 - 6mx$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$$

* Đồ thị có cực đại cực tiểu

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

*Với $m \neq 0$ đồ thị hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu.

Thức hiện phép chia đa thức y cho y' ta được:

$$y = y'\left(\frac{1}{3}x - \frac{m}{3}\right) - 2m^2x + 4m^3$$

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là:

$y = -2m^2x + 4m^3$

c. TXĐ: D = R

$y' = 3x^2 - 6mx$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$

* Đồ thị có cực đại cực tiểu

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

*Với $m \neq 0$ đồ thị hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu là $A(0;4m^3)$, $B(2m;\,0)$.

Ta có $AB = \sqrt{4m^2 + 16m^6} = 2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 4m^6 + m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1(n)$

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - mx + 2}{x - 1}$.

a. Xác định đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

b. Xác định m để hai cực trị cùng dấu.

c. Xác định m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về khác phía so với trục Ox.

d. Xác định m để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu nằm về khác phía so với trục Oy.

Giải:

a. TXĐ: $D = R \setminus \{1\}$

$y' = \dfrac{x^2 - 2x + m - 2}{(x-1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x + m - 2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 & (1) \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0 & (2) \end{cases}$

*Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác

$1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3 - m > 0 \\ 1^2 - 2.1 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3$

* Với m < 3, đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Gọi (x_1 ; y_1) và (x_2 ; y_2) là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

Ta có $y_1 = \dfrac{2x_1 - m}{1}$; $y_2 = \dfrac{2x_2 - m}{1}$

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là y = 2x – m

Vậy m < 3 , đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là y = 2x – m

b. TXĐ: $D = R \setminus \{1\}$

$y' = \dfrac{x^2 - 2x + m - 2}{(x-1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x + m - 2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 & (1) \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0 & (2) \end{cases}$

*Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác

$1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3 - m > 0 \\ 1^2 - 2.1 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3$

* Với m < 3, đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Gọi (x_1 ; y_1) và (x_2 ; y_2) là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

Ta có $y_1 = \frac{2x_1 - m}{1}$; $y_2 = \frac{2x_2 - m}{1}$

Nên $y_1.y_2 = (2x_1 - m)(2x_2 - m) = 4x_1x_2 - 2m(x_1 + x_2) + m^2$

Do x_1 , x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0$ nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = m - 2 \end{cases}$

Do đó $y_1.y_2 = 4(m-2) - 2m.2 + m^2 = m^2 - 8$

Vậy, y_1 và y_2 cùng dấu $y_1.y_2 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$

c. TXĐ: $D = R \setminus \{1\}$

$$y' = \frac{x^2 - 2x + m - 2}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + m - 2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \quad (1) \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

*Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3 - m > 0 \\ 1^2 - 2.1 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3$

* Với m < 3, đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Gọi (x_1 ; y_1) và (x_2 ; y_2) là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

Ta có $y_1 = \frac{2x_1 - m}{1}$; $y_2 = \frac{2x_2 - m}{1}$

Nên $y_1.y_2 = (2x_1 - m)(2x_2 - m) = 4x_1x_2 - 2m(x_1 + x_2) + m^2$

Do x_1 , x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0$ nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = m - 2 \end{cases}$

Do đó $y_1.y_2 = 4(m-2) - 2m.2 + m^2 = m^2 - 8$

Vậy, đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về khác phía so với trục Ox

$\Leftrightarrow y_1.y_2 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 < 0 \Leftrightarrow m \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$

d. TXĐ: $D = R \setminus \{1\}$

$$y' = \frac{x^2 - 2x + m - 2}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + m - 2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \quad (1) \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

*Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3 - m > 0 \\ 1^2 - 2.1 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3$

* Với m < 3, đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Gọi (x_1 ; y_1) và (x_2 ; y_2) là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu nằm về khác phía so với trục Oy

$\Leftrightarrow x_1.x_2 < 0 \Leftrightarrow m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$

Đối chiếu với điều kiện $m < 3$ ta được $m < 2$

Vậy $m < 2$ Đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu nằm về khác phía so với trục Oy

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + m}{x+1}$.

a. Xác định đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số .

b. Xác định m để khoảng cách giữa hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số bằng $2\sqrt{5}$

Giải:

a. TXĐ: $D = R \setminus \{-1\}$

$y' = \dfrac{x^2 + 2x + 1 - m}{(x+1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 2x + 1 - m}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \quad (1) \\ x^2 + 2x + 1 - m = 0 \quad (2) \end{cases}$

* Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác -1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m > 0 \\ (-1)^2 + 2.(-1) + 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$

* Với m > 0, đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Gọi (x_1 ; y_1) và (x_2 ; y_2) là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Ta có: $y_1 = \dfrac{2x_1 + 1}{1}$; $y_2 = \dfrac{2x_2 + 1}{1}$

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là y = 2x + 1

Vậy m >0 , đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là y = 2x + 1

b. TXĐ: $D = R \setminus \{-1\}$

$y' = \dfrac{x^2 + 2x + 1 - m}{(x+1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 2x + 1 - m}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \quad (1) \\ x^2 + 2x + 1 - m = 0 \quad (2) \end{cases}$

* Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác -1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m > 0 \\ (-1)^2 + 2.(-1) + 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$

* Với m > 0, đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Gọi (x_1 ; y_1) và (x_2 ; y_2) là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Ta có: $y_1 = \dfrac{2x_1 + 1}{1}$; $y_2 = \dfrac{2x_2 + 1}{1}$

Suy ra, đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(x_1; 2x_1 + 1)$, $B(x_2; 2x_2 + 1)$

Ta có $AB = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (2x_2 - 2x_1)^2} = \sqrt{5(x_2 - x_1)^2}$

$= \sqrt{5\left((x_1 + x_2)^2 - 4x_1.x_2\right)} = \sqrt{5\left((-2)^2 - 4(1-m)\right)} = \sqrt{20m}$

Theo đề ta có $AB = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{20m} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 20m = 20 \Leftrightarrow m = 1\,(n)$

Vậy m = 0 thỏa ĐKBT.

Ví dụ 7:

Cho hàm số $y = x + m + \frac{m}{x-2}$ (Cm). Tìm m để đồ thị (Cm) có cực trị tại các điểm A, B sao cho đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ 0.

Giải:

TXĐ: D = R

Ta có: $y = x + m + \frac{m}{x-2} \Rightarrow y' = 1 - \frac{m}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - m}{(x-2)^2}$

Đồ thị h/s có 2 cực trị $\Leftrightarrow$ y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq 2 \Leftrightarrow m > 0$

Gọi A (x_1, y_1) ; B (x_2, y_2) là 2 điểm cực trị

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 - \sqrt{m} \Rightarrow y_1 = 2 + m - 2\sqrt{m} \\ x_2 = 2 + \sqrt{m} \Rightarrow y_2 = 2 + m + 2\sqrt{m} \end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng AB : $\frac{x - (2 - \sqrt{m})}{2\sqrt{m}} = \frac{y - (2 + m - 2\sqrt{m})}{4\sqrt{m}}$ $(m > 0)$

$\Leftrightarrow 2x - y - 2 + m = 0$

AB qua gốc O (0, 0) $\Leftrightarrow -2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Cách khác:

TXĐ: D = R

$$y = \frac{x^2 + (m-2)x + m}{x-2} = \frac{u}{v};$$

$$y' = 1 - \frac{m}{(x-2)^2}$$

y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $m > 0$

Khi $m > 0$, pt đường thẳng qua 2 cực trị là

$$y = \frac{u'}{v'} = 2x + m - 2$$

Do đó, ycbt $\Leftrightarrow$ $m - 2 = 0$ $\Leftrightarrow m = 2$

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m$ (Cm)

Tìm m để hàm số có hai cực trị. Gọi M_1 và M_2 là các điểm cực trị ,tìm m để các điểm M_1, M_2 và B(0,-1) thẳng hàng.

Giải:

TXĐ: D = R

*Tìm m để hàm số có hai cực trị

$y' = 6x^2 + 6(m-3)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6(m-3) = 0$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3-m \end{array}\right.$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow m-3\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 3.$$

* Tìm m để 2 điểm cực trị M_1, M_2 và B(0, -1) thẳng hàng.

Để tìm phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị M_1, M_2 ta chia f(x) cho $f'(x)$:

$$f(x)=f'(x)\left(\frac{1}{3}x+\frac{m-3}{6}\right)-(m-3)^2x+11-3m$$

Suy ra phương trình đường thẳng M_1M_2 là:

$$y=-(m-3)^2x+11-3m$$

M_1, M_2, B thẳng hàng $\Leftrightarrow B\in M_1M_2$

$\Leftrightarrow$ -1=11-3m $\Leftrightarrow$ m= 4

So với điều kiện $m\neq 3$ nhận m= 4

Vậy m = 4 thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(m+3)x^2+3x+4$ (m là tham số)

Tìm m để đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu. Khi đó, tìm m đường thẳng đi qua hai điểm cực trị này có hệ số góc bằng $-\frac{14}{9}$

Giải:

TXĐ: D = R

$y'=3x^2-2(m+3)x+3$

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-2(m+3)x+3=0 \quad (1)$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow (m+3)^2-9>0$$

$$\Leftrightarrow m^2+6m>0 \Leftrightarrow m<-6 \vee m>0$$

Chia f(x) cho f'(x) ta được :

$$y=f'(x)\left[\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}(m+3)\right]-\frac{2}{9}(m^2+6m)x+\frac{1}{3}m+5$$

Vậy phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị là:

$$y=-\frac{2}{9}(m^2+6m)x+\frac{1}{3}m+5$$

Theo đề ta có $-\frac{2}{9}\left(m^2+6m\right)=-\frac{14}{9} \Leftrightarrow m^2+6m-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\ (n) \\ m=-7\ (n) \end{array}\right.$

Vậy m = 1; m = - 7 thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 10: Cho hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ (Cm) (1)

Chứng minh rằng , $\forall m$ hàm số (1) luôn đạt cực trị tại x_1, x_2 với x_1-x_2 không phụ thuộc m.

Giải:

TXĐ: D = R

$y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$

$y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 - (2m+1)x + m(m+1) = 0 \quad (*)$

$\Delta = (2m+1)^2 - 4m(m+1) = 1 > 0$

$\Rightarrow$ (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

$\Rightarrow$ Hàm số luôn đạt cực trị tại x_1, x_2.

Ta có:

$x_1 = 2m + 1 - 1 = 2m$

$x_2 = 2m + 1 + 1 = 2m + 2$

$\Rightarrow x_2 - x_1 = 2m + 2 - 2m = 2$ (hằng số)

Vậy: $x_1 - x_2$ không phụ thuộc m.

Ví dụ 11: Cho hàm số : $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m đề hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại ,cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

Giải

Ta có: $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$

$y' = 3x^2 - 6x + m^2$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m^2 = 0 \quad (1)$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m^2 > 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

Gọi $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ là điểm CĐ, điểm CT của đồ thị.

M_1, M_2 đối xứng qua (d): $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trung điểm I của } M_1M_2 \in (d) \\ M_1M_2 \perp (d) \end{cases}$

- Chia f(x) cho f'(x) ta được phương trình đường thẳng M_1M_2:

$y = f'(x)\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}m^2 - 2\right)x + \frac{1}{3}m^2 + m$

$\Rightarrow (M_1M_2): y = \left(\frac{2}{3}m^2 - 2\right)x + \frac{1}{3}m^2 + m$

- Trung điểm I của M_1M_2 là tâm đối xứng của đồ thị:

Ta có: $y'' = 6x - 6$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = m^2 + m - 2 \Rightarrow I(1, m^2 + m - 2)$

Ta có:

$$\begin{cases} M_1M_2 \\ I \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}m^2 - 2\right).\frac{1}{2} = -1 \\ m^2 + m - 2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ m^2 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 0 \vee m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

So với điều kiện: $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$ nhận m = 0.

Vậy m = 0 thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 + (2m-5)x + 3$ (C_m)

Tìm m để đồ thị hàm số (C_m) có cực trị đồng thời hoành độ cực tiểu nhỏ hơn 1.

Giải:

TXĐ: D = R

$y' = 3x^2 + 2(m-1)x + 2m - 5$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2(m-1)x + 2m - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{5-2m}{3} \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số (C_m) có cực trị đồng thời hoành độ cực tiểu nhỏ hơn 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5-2m}{3} < 1 \\ \frac{5-2m}{3} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 4 \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} m > 1 \\ m \neq 4 \end{cases}$ thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (1)

Tìm điểm M thuộc đường thẳng y=3x-2 sao tổng khoảng cách từ M tới hai điểm cực trị nhỏ nhất.

Giải:

Tọa độ điểm cực đại là A(0;2), điểm cực tiểu B(2;-2)

Xét biểu thức P=3x-y-2

Thay tọa độ điểm A(0;2)=>P=-4<0, thay tọa độ điểm B(2;-2)=>P=6>0

Vậy 2 điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của đường thẳng y=3x-2,

MA+MB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ 3 điểm A, M, B thẳng hàng

Phương trình đường thẳng AB: y=-2x+2

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$$

Ví dụ 14. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ (1). Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị *A* và *B* sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng y = x + 2.

(ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC Khối B NĂM 2013)

Giải

Ta có y' = $6(x^2 – (m + 1)x + m)$),

Đồ thị hàm số (1) có 2 cực trị A và B ⇔ y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt

⇔ $(m + 1)^2 – 4m > 0$ ⇔ $(m - 1)^2 > 0$

⇔ $m \neq 1$

Thực hiện phép chia đa thức của y cho y' ta có,

$y = \frac{1}{6}(2x-m-1).y' - (m-1)^2x + m^2 + m$

Suy ra, đường thẳng đi qua hai điểm cực trị A và B là

$y = -(m – 1)^2x + m^2 + m$

Đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng y = x + 2

⇔ $-(m – 1)^2 .1= -1$ ⇔ m = 0 hoặc m = 2 (thỏa $m \neq 1$)

Vậy m = 0 hoặc m = 2 thỏa yêu cầu bài toán

BÀI TẬP TỰ LÀM

1/ **(Dự bị 2 khối A 2003)** Cho hàm số: $y=\frac{x^2+(2m+1)x+m^2+m+4}{2(x+m)}$, (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m=0.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có cực trị và tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

2/ **(Dự bị 1 khối A 2002)** Cho hàm số: $y=x^4-2m^2x^2+1$, (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m=1.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân .

3/ **(Dự bị 1 khối D 2002)** Cho hàm số: $y=\frac{x^2+mx}{1-x}$, (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m=0.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có cực đại cực tiểu . Với giá trị nào của m thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) bằng 10.

4/ **(Dự bị 1 khối B 2002)** Cho hàm số: $y=mx^4+(m^2-9)x^2+10$, (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m=1.

b) Tìm m để hàm số (1) có ba điểm cực trị .

5. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m$ có đồ thị (C_m). Tìm m để hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu và hai điểm cực trị A, B của đồ thị hàm số đã cho cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 8.

6. Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}(m+3)x^2-2(m+1)x+1$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị với hoành độ lớn hơn 1.

7. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ (1). Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị ấy nằm trên đường tròn có bán kính bằng 1.

8. **(Dự bị 1 khối A 2005)** Cho hàm số: $y=\frac{x^2+2mx+1-3m^2}{x-m}$, (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m=1.

b) Tìm m để hàm số (1) có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục tung.

CHUYÊN ĐỀ 3: ÁP DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^3 - 12x - m = 0$. Tìm m để phương trình.
a. Có ba nghiệm phân biệt. b. Có nghiệm thuộc $(-\infty;0)$.
c. Có nghiệm thuộc $[-1;1]$

Giải:

a. Ta có $x^3 - 12x - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 12x = m$
Xét hàm số $f(x) = x^3 - 12x$ trên R
Ta có $f'(x) = 3x^2 - 12$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2\ (n) \\ x = 2\ (n) \end{array}\right.$$

BBT

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	16	↘	-16	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy phương trình có ba nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow -16 < m < 16$
Vậy $-16 < m < 16$ phương trình có ba nghiệm phân biệt

b. Ta có $x^3 - 12x - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 12x = m$
Xét hàm số $f(x) = x^3 - 12x$ trên $(0;+\infty)$
Ta có $f'(x) = 3x^2 - 12$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2\ (l) \\ x = 2\ (n) \end{array}\right.$$

BBT

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
$f'(x)$			-	0	+	
$f(x)$		0	↘	-16	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy phương trình có nghiệm trên $(0;+\infty)$
$\Leftrightarrow m \ge -16$
Vậy $m \ge -16$ thấy phương trình có nghiệm trên $(0;+\infty)$

Chú ý: Nếu yêu cầu bài toán có hai nghiệm phân biệt trên $(0;+\infty)$ thì $-16<m<0$

c. Ta có $x^3-12x-m=0 \Leftrightarrow x^3-12x=m$

Xét hàm số $f(x)=x^3-12x$ trên $[-1;1]$

Ta có $f'(x)=3x^2-12$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\ (l) \\ x=2\ (l) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	-1		1
$f'(x)$		-	
$f(x)$	11	$\searrow$	-11

Dựa vào BBT ta thấy phương trình có nghiệm thuộc $[-1;1]$

$\Leftrightarrow -11\le m\le 11$

Ví dụ 2. Cho phương trình $x+\sqrt{4-x^2}=m$ .Xác định m để phương trình

a. có nghiệm b. Có hai nghiệm phân biệt.

Giải:

TXĐ:

a. Điều kiện: $-2\le x\le 2$

Xét hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}$ trên $[-2;2]$

$$y'=\frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}-x \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 4-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$$

Bảng biến thiên:

x	-2		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

Dựa vào BBT ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -2\le m\le 2\sqrt{2}$

b. Điều kiện: $-2\le x\le 2$

Xét hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ trên $[-2; 2]$

$y' = \dfrac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} - x \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

Bảng biến thiên:

x	-2		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

Dựa vào BBT ta thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2 \le m < 2\sqrt{2}$

Ví dụ 3. Xác định m để bất phương trình $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} \ge m$

a. Có nghiệm b. Nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định.

c. Có nghiệm duy nhất d. Vô nghiệm.

Giải:

a. Điều kiện: $-1 \le x \le 4$

xét $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}$ với $-1 \le x \le 4$

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x}} > 0 \quad \forall x \in (-1; 4)$

Bảng biến thiên:

x	-1		4
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\sqrt{5}$	↗	$\sqrt{5}$

Dựa vào BBT ta thấy bất phương trình có nghiệm $m \le \sqrt{5}$

b. Dựa vào BBT ở câu a. ta thấy bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định $\Leftrightarrow m \le -\sqrt{5}$.

Ví dụ 4. Cho bất phương trình $x + 3 < m\sqrt{x^2+1}$ .Xác định m để bất phương trình

a. Nghiệm đúng $\forall x \in R$ b. Vô nghiệm c. Có nghiệm thuộc $\lfloor 0; 4 \rfloor$

d. Có nghiệm x>0.

Giải:

a. Ta có bpt $\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} < m$

Xét $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ trên R.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{x-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

BBT

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0		
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\searrow$	1

Dựa vào BBT ta thấy bất phương trình có nghiệm đúng $\forall x \in R$

$\Leftrightarrow m > \sqrt{10}$

b. Dựa vào BBT ở câu a. ta thấy bất phương trình vô nghiệm

$\Leftrightarrow m \le -1$

c. Ta có bpt $\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} < m$

Xét $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $\lfloor 0;4 \rfloor$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{x-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}\ (n)$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{3}$		4
f'(x)		+	0	-	
f(x)	3	$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\searrow$	$\frac{7}{\sqrt{17}}$

Dựa vào BBT ta thấy bất phương trình có nghiệm thuộc $\lfloor 0;4 \rfloor$

$\Leftrightarrow m > \dfrac{7}{\sqrt{17}}$.

d. Ta có bpt $\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} < m$

Xét $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $(0;+\infty)$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}\ (n)$

BBT

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-	
$f(x)$		3	$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\searrow$	1

Dựa vào BBT ta thấy bất phương trình có nghiệm x > 0

$\Leftrightarrow m \geq 3$

Bài Tập Tự Làm

CHUYÊN ĐỀ 4: TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. <u>Kiến thức cơ bản</u>:

* Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

+ Đồ thị có tiệm cận đứng là: $x=-\dfrac{b}{a}$

+ Đồ thị có tiệm cận ngang là: $y=\dfrac{a}{c}$

* Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$

+ Đồ thị có tiệm cận đứng là: $x=-\dfrac{e}{d}$

+ Ta có $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}=\text{A}x+B+\dfrac{C}{dx+e}$

Đồ thị có tiệm cận xiên là: $y=\text{AX}+B$

B. <u>Các ví dụ</u>:

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x+1}\ (C)$.

Gọi M là một điểm bất kì trên đồ thị (C), tiếp tuyến tại M cắt các tiệm cận của (C) tại A, B. CMR diện tích tam giác ABI (I là giao của hai tiệm cận) không phụ thuộc vào vị trí của M.

Giải:

Gọi $M\left(a;\frac{2a-4}{a+1}\right)\in(C)\ a\neq-1$

Tiếp tuyến tại M có phương trình: $y=\frac{6}{(a+1)^2}(x-a)+\frac{2a-4}{a+1}$

Giao điểm với tiệm cận đứng $x=-1$ là $A\left(-1;\frac{2a-10}{a+1}\right)$

Giao điểm với tiệm cận ngang $y=2$ là $B(2a+1;2)$

Giao hai tiệm cận I(-1; 2)

$IA=\frac{12}{a+1};\ IB=2(a+1)\Rightarrow S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.AB=\frac{1}{2}.24=12(dvdt)$

Suy ra diện tích tam giác ABI không phụ thuộc vào vị trí của M .

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$

Tìm trên (C) những điểm có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

Giải:

Gọi $M(x_0;y_0)$ là một điểm thuộc (C), ($x_0\neq-1$) thì $y_0=\frac{2x_0+1}{x_0+1}$

Tiệm cận đứng d: x = - 1

Tiệm cận ngang Δ: y = 2

$d(M;d)=|x_0+1|$, $d(M;\Delta)=|y_0-2|=\left|\frac{2x_0+1}{x_0+1}-2\right|=\left|\frac{1}{x_0+1}\right|$

Theo Côsi thì $d(M;d)+d(M;\Delta)=|x_0+1|+\left|\frac{1}{x_0+1}\right|\geq 2\sqrt{|x_0+1|.\left|\frac{1}{x_0+1}\right|}=2$

$\Rightarrow$ MA + MB nhỏ nhất bằng 2 khi $x_0=0$ hoặc $x_0=-2$.

Vậy ta có hai điểm cần tìm là (0;1) và (-2;3)

Ví dụ 3.

Cho hàm số $y=\frac{-x^2+4x+3}{x-2}$

Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên đồ thị hàm số đến các đường tiệm cận của nó là hằng số.(**Đề thi Dự trữ khối A-năm 2007)**

Giải:

Gọi (C) là đồ thị của hàm số.

$M(x,y)\in(C)\Rightarrow M\left(x;-x+2+\frac{7}{x-2}\right)$

Phương trình tiệm cận xiên $y=-x+2 \Leftrightarrow x+y-2=0$

khoảng cách từ M đến tiệm cận xiên là $\frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}|x-2|}=d_1$

khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng là $d_2=|x-2|$

Ta có $d_1d_2=\frac{7}{\sqrt{2}|x-2|}|x-2|=\frac{7}{\sqrt{2}}$: hằng số.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=\frac{mx^2+(3m^2-2)x-2}{x+3m}$ (1)

Tìm các giá trị của m để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0. **(ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2008)**

Giải:

$$y=\frac{mx^2+(3m^2-2)x-2}{x+3m}=mx-2+\frac{6m-2}{x+3m}$$

+ Khi $m=\frac{1}{3}$ đồ thị hàm số (1) không tồn tại hai tiệm cận.

+ Khi $m\neq\frac{1}{3}$ đồ thị hàm số (1) tồn tại hai tiệm cận.

* Tiệm cận đứng $d_1: x=-3m \Leftrightarrow x+3m=0$

* Tiệm cận xiên $d_2: y=mx-2 \Leftrightarrow mx-y-2=0$

Vectơ pháp tuyến của d_1 và d_2 lần lượt là: $\overrightarrow{n_1}=(1;0), \overrightarrow{n_2}=(m;-1)$

Góc giữa d_1 và d_2 bằng 45^0 khi và chỉ khi

$$\cos45^0=\frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m=\pm1$$

Vậy $m=\pm1$ thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 5: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{2x^2+x+1}{x+1}$.

Gọi $M\in(C)$ có hoành độ $x_m=m$. Chứng tỏ rằng tích các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (C) không phụ thuộc vào m. Gọi M $\in$(C) có X_M= m. Chứng tỏ rằng tích các khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận của (C) không phụ thuộc m.

Giải:

Ta có: X_M = m $\Rightarrow y_M=2m-1+\frac{2}{m+1}$

Tiệm cận đứng : x + 1 = 0 (D1)

Suy ra d_1(M, D1) $=\frac{|m+1|}{\sqrt{1}}=|m+1|$

Tiệm cận xiên: 2x - y - 1 = 0 (D2)

$$d_2(M,D2)=\frac{\left|2m-2m+1-\frac{2}{m+1}-1\right|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}|m+1|}$$

Suy ra $d_1.d_2 = |m+1|.\dfrac{2}{\sqrt{5}|m+1|} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (không phụ thuộc m)

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}$ có đồ thị (C)

Tìm các giá trị của m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0 (với O là gốc tọa độ).

Giải:

+ PT hoành độ giao điểm $\dfrac{x}{x-1} = -x + m \Leftrightarrow g(x) = x^2 - mx + m = 0$ (1)

(Do x = 1 không là nghiệm).

+ Đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > 4 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > 4$ (*).

+ Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của (1), ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = m \\ g(x_1) = g(x_2) = 0 \end{cases}$ (**)

+ Các giao điểm là $A(x_1; -x_1 + m), B(x_2; -x_2 + m)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (x_1; -x_1 + m) \\ \overrightarrow{OB} = (x_2; -x_2 + m) \end{cases}$

+ Khi đó $\cos 60^0 = \left|\cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)\right| = \dfrac{|x_1x_2 + (-x_1 + m)(-x_2 + m)|}{\sqrt{2x_1^2 - 2mx_1 + m^2}\sqrt{2x_2^2 - 2mx_2 + m^2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|2x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2|}{\sqrt{2g(x_1) + m^2 - 2m}.\sqrt{2g(x_2) + m^2 - 2m}} = \frac{|2x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2|}{\sqrt{m^2 - 2m}.\sqrt{m^2 - 2m}} = \frac{|2m|}{m^2 - 2m}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 - 2m = 4m \\ m^2 - 2m = -4m \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in \{-2; 0; 6\}$$

Kết hợp với (*) ta có m = -2 hoặc m = 6.

BÀI TẬP TỰ LÀM

1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Gọi M là giao điểm của hai tiệm cận. Tìm trên đồ thị (C) điểm I có hoành độ dương sao cho tiếp tuyến tại I với đồ thị (C) cắt hai tiệm cận tại A, B thỏa mãn $MA^2 + MB^2 = 40$.

2. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{1-x}$. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. A là điểm trên (C) có hoành độ a. Tiếp tuyến tại A của (C) cắt hai tiệm cận tại P và Q. Chứng minh A là trung điểm của PQ. Tính diện tích tam giác IPQ.

CHUYÊN ĐỀ 5: BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐƯỜNG

1. <u>Biện luận số giao điểm của hai đồ thị</u>:

Để biện luận số giao điểm của đồ thị hàm số y = f(x) (C) và đường thẳng
d: y = g(x) ta lập phương trình hoành độ giao điểm:
* f(x) = g(x).(*)
* Số nghiệm của phương trình (*) là số điểm chung của đô thị (C) và đường thẳng d.

Chú ý: Phương trình hoành độ giao điểm có thể quy về phương trình bậc hai, bậc ba, trùng phương hoặc bậc 4.
a. Đối với phương trình bậc hai dùng biệt thức Δ để biện luận
b. Đối với phương trình bậc ba ta đoán một nghiệm, dùng sơ đồ Hoocne để đưa về phương trình dạng tích.
c. Đối với phương trình trùng phương ta đặt t = x^2 để quy về phương trình bậc hai.
d. Đối với phương trình bậc bốn ta phải đoán nghiệm dùng sơ đồ Hoocne để đưa về phương trình dạng tích.

Ví dụ 1. Biện luận số giao điểm của hai đồ thị hàm số sau:
$y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (C) và y = m – x (d)

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:
$\dfrac{x+1}{x-1}=m-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x+1=(m-x)(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow x+1=mx-m-x^2+x$ (vì x = -1 không là nghiệm của phương trình)
$\Leftrightarrow x^2-mx+m+1=0$
$\Delta=m^2-4m-4$
Biện luận:
* $\Delta>0 \Leftrightarrow m<2-\sqrt{2}$ hoặc $m>2+\sqrt{2} \Rightarrow$ (C) và d có hai điểm chung.

* $\Delta=0 \Leftrightarrow m=2-\sqrt{2}$ hoặc $m=2+\sqrt{2} \Rightarrow$ (C) và d có một điểm chung.
* $\Delta<0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{2}<m<2+\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ (C) và d không có điểm chung.

Ví dụ 2. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ (C). Tìm m để đường thẳng d: y = m – x cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{x}{x-1}=m-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x=(m-x)(x-1)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=mx-m-x^2+x$ (vì x = -1 không là nghiệm của phương trình)

$\Leftrightarrow x^2-mx+m=0$ (*)

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta=m^2-4m>0\Leftrightarrow m\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x-2}$ có đồ thị (C).

a. Chứng minh rằng: Với mọi k đường thẳng $\Delta: y=-x+k$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

b. Xác định m để đường thẳng d: y = x + m cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $AB=3\sqrt{2}$.

Giải:

a. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{x-3}{x-2}=-x+k\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq k\\ x-3=(-x+k)(x-2)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x-3=-x^2+2x+kx-2k$ (vì x = 2 không là nghiệm của phương trình)

$\Leftrightarrow x^2-(k+1)x+2k-3=0$ (*)

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

Ta có $\Delta=(k+1)^2-4(2k-3)=k^2-6k+13=(x-3)^2+4>0\ \ \forall k$

Suy ra (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi k

Vậy Δ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt với mọi k.

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{x-3}{x-2}=x+m\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x-2=(x+m)(x-2)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x-2=x^2-2x+mx-2m$ (vì x = 2 không là nghiệm của phương trình)

$\Leftrightarrow x^2+(m-3)x+2-2m=0$ (*)

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta=m^2+2m+1>0\Leftrightarrow(m+1)^2>0\Leftrightarrow m-1\neq 0\Leftrightarrow m\neq 1$

* Với $m\neq 1$, đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A;y_A)$ *và* $B(x_B;y_B)$.

Ta có x_A *và* x_B là nghiệm của phương trình (*) nên $\begin{cases}x_A+x_B=3-m\\ y_A.y_B=2-2m\end{cases}$

Lại có $y_A=x_A+m;\quad y_B=x_B+m$

Theo đề ta có $AB=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x_B-x_A)^2+(x_B-x_A)^2}=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2(x_B-x_A)^2}=3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\sqrt{2(x_A{}^2+x_B{}^2-2x_{A.}x_B)}=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2((x_A+x_B)^2-4x_{A.}x_B)}=3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2\left[(3-m)^2-4(2-2m)\right]}=3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2m^2+4m+2}=3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2m^2+4m+2=18 \Leftrightarrow m^2+2m-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2\ \ (n) \\ m=-4\ \ (n) \end{array}\right.$

Vậy m = 2; m = - 4 thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 4. Tìm m để đồ thị hàm số (C) $y=x^3+mx+5$ cắt đường thẳng d: y = 6x + m tại ba điểm phân biệt.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$x^3+mx+5=6x+m\ \ (*)$

$\Leftrightarrow x^3+(m-6)x+5-m=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+m-5\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & (1) \\ x^2+x+m-5=0 & (2) \end{array}\right.$

Đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=21-4m>0 \\ 1^2+1+m-5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{21}{4} \\ m\neq 3 \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} m<\dfrac{21}{4} \\ m\neq 3 \end{cases}$ đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại ba điểm phân biệt.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ có đồ thị (C_m).

Xác định m để (C_m) cắt đường thẳng y = - 1 tại bốn điểm phân biệt.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-(3m+2)x^2+3m=-1$

$\Leftrightarrow x^4-(3m+2)x^2+3m+1=0\ \ (1)$

Đặt $t=x^2,\ t\geq 0$

Phương trình (1) trở thành: $t^2-(3m+2)t+3m+1=0\ \ (2)$

Đồ thị (C_m) cắt đường thẳng y = - 1 tại bốn điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2>0 \\ 3m+1>0 \\ 3m+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m>-\dfrac{1}{3} \\ m>-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m>-\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} m\neq 0 \\ m>-\dfrac{1}{3} \end{cases}$ thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+2}$

Chứng minh rằng đồ thị hàm số đã cho luôn cắt đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}x+m$ tại hai điểm phân biệt A và B. Tìm m sao cho độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{x+3}{x+2}=\frac{1}{2}x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ x+3=\left(\frac{1}{2}x+m\right)(x+2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x^2+2mx+4m-6$ (*) (vì x = -2 không là nghiệm của phương trình)

Ta có $\Delta' = m^2-1(4m-6)=m^2-4m+6=(m-2)^2+2>0\ \forall m$

Suy ra (C) luôn cắt d tại A và B với mọi m.

Gọi $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$

Ta có $y_A=\dfrac{1}{2}x_A+m;\quad y_B=\dfrac{1}{2}x_B+m$

Lại có x_A và x_B là nghiệm của phương trình (*) nên $\begin{cases} x_A+x_B=-2m \\ y_A.y_B=4m-6 \end{cases}$

Nên $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+\frac{1}{4}(x_B-x_A)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}(x_B-x_A)^2}=$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{5}{4}(x_A{}^2+x_B{}^2-2x_{A.}x_B)}=\sqrt{\frac{5}{4}((x_A+x_B)^2-4x_{A.}x_B)}=\sqrt{\frac{5}{4}\left[(-2m)^2-4(4m-6)\right]}$

$=\sqrt{5\left[(m-2)^2+2\right]}\geq\sqrt{10}$

Khi đó, độ dài đoạn AB nhỏ nhất bằng $\sqrt{10}\Leftrightarrow m-2=0\Leftrightarrow m=2$

Vậy m = 2 thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1\quad (C_m)$.

Xác định m để (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành là:

$x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$ (1)

Đặt $t=x^2,\ t\geq 0$

Phương trình (1) trở thành $t^2-2(m+1)t+2m+1=0$ (2)

Đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2>0\\ 2m+1>0\\ 2(m+1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m>-\frac{1}{2}\\ m>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m>-\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Với $\begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt

Gọi t_1 *và* t_2 $(t_1 < t_2)$ là hai nghiệm của (2).

Khi đó (1) có bốn nghiệm $-\sqrt{t_2}$; $-\sqrt{t_1}$; $\sqrt{t_1}$; $\sqrt{t_2}$ là hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành.

Các hoành độ trên lập thành cấp số cộng

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} \\ 3\sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} \end{cases} \Leftrightarrow 3\sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2 \ (3)$$

Ta cũng có t_1 ,t_2 là nghiệm của (2) nên $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+1) \ (4) \\ t_1.t_2 = 2m+1 \ (5) \end{cases}$

Từ (3) $\Rightarrow t_2 = 9t_1$ vào (4) và (5) ta được $\begin{cases} 10t_1 = 2(m+1) \\ 9t_1^{\,2} = 2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{m+1}{5} \quad (6) \\ 9\left(\dfrac{m+1}{5}\right)^2 = 2m+1 \ (7) \end{cases}$

Ta có (7) $\Leftrightarrow 9m^2 + 18m + 9 = 50m + 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \ (n) \\ m = -\dfrac{9}{4} \ \ (l) \end{array} \right.$

Vậy m = 4 thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 8. Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng y = - x + m cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho AB = 4.

(ĐỀ TS KHỐI B NĂM 2009)

Giải:

Pt hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng là : $-x + m = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

$\Leftrightarrow 2x^2 - mx - 1 = 0$ (*) (vì x = 0 không là nghiệm của (*))

Đường thẳng cắt đồ thị $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = m^2 + 8 > 0 \Leftrightarrow m \in R$

Do đó đồ thị và đường thẳng luôn có 2 giao điểm phân biệt A, B

Ta có AB = 4

$\Leftrightarrow (x_B - x_A)^2 + [(-x_B + m) - (-x_A + m)]^2 = 16 \Leftrightarrow 2(x_B - x_A)^2 = 16$

$\Leftrightarrow (x_B - x_A)^2 = 8 \Leftrightarrow \left(\dfrac{m^2 + 8}{4}\right) = 8 \Leftrightarrow m^2 = 24 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}$

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = x^3 - (m+3)x^2 + (2m-1)x + 3(m+1)$. Xác định m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ âm.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành là:

$x^3 - (m+3)x^2 + (2m-1)x + 3(m+1) = 0$ (*)

$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2 - (m+4)x + 3m + 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \ \ (1) \\ \left(x^2 - (m+4)x + 3m + 3\right) = 0 \ (2) \end{array} \right.$

Đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ âm
$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có ba nghiệm âm phân biệt
$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm âm phân biệt khác – 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \\ (-1)^2 - (m+4)(-1) + 3m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 4 > 0 \\ 3m + 3 > 0 \\ m + 1 < 0 \\ 4m + 8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > -1 \\ m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \phi$$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 10: Tìm các giá trị của m để đường thẳng d đi qua A(3; 20) có hệ số góc m cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tại ba điểm phân biệt.

Giải:

Đường thẳng d có phương trình: y-20 = m(x-3) hay y = mx+20-3m
Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$x^3 - 3x + 2 = mx + 20 - 3m$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x - mx + 3m - 18 \Leftrightarrow x^3 - (3+m)x + 3m - 18 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 6 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x^2 + 3x + 6 - m = 0 \ \ (*) \end{array} \right.$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt
$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4m - 15 > 0 \\ 3^2 + 3.3 + 6 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} m > \dfrac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}$ thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 11. Chứng minh rằng với k > -3 thì đường thẳng d đi qua I(1; 2) có hệ số góc k cắt đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại ba điểm phân biệt I, A, B sao cho I là trung điểm của AB.

Giải:

Đường thẳng d có phương trình: y – 2 = k(x – 1) hay y = kx + 2 - k
Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = kx + 2 - k \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 2 - k) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x - 2 - k = 0 \ (*) \end{array} \right.$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt
$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 3 + k > 0 \\ -3 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k > -3$$

Suy ra với k > - 3 đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt I, A, B. (1)

Gọi $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$

Ta có Ta có $y_A = kx_A + 2 - k; \quad y_B = kx_B + 2 - k$

Lại có x_A và x_B là nghiệm của phương trình (*) nên $\begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ y_A . y_B = -2 - k \end{cases}$

Suy ra trung điểm của đoạn AB là $I' \begin{cases} x_{I'} = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_{I'} = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{k(x_A + x_B) + 4 - 2k}{2} = \dfrac{k.2 + 4 - 2k}{2} = 2 \end{cases}$

Nên $I' \equiv I$ hay I là trung điểm của đoạn AB (2)

Từ (1) và (2) suy ra ĐPCM.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m).

Tìm m để đường thẳng y = -1 cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

(ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2009)

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng y = -1 là

$x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m = -1$

$\Leftrightarrow x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ hay $x^2 = 3m + 1$ (*)

Đường thẳng y = -1 cắt (C_m) tại 4 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác ±1 và nhỏ hơn 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3m + 1 < 4 \\ 3m + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Ví dụ 13: Cho hàm số: $y = x^4 - (m^2 + 10)x^2 + 9$. Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$, đồ thị của hàm số luôn cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt .

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox.

$x^4 - (m^2 + 10)x^2 + 9 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$

Phương trình trở thành:

$t^2 - (m^2 + 10)t + 9 = 0$ (2)

Ta có:

$$\begin{cases} \Delta = (m^2 + 10)^2 - 36 > 0, \forall m \\ P = 9 > 0 \\ S = m^2 + 10 > 0, \forall m \end{cases}$$

$\Rightarrow 0 < t_1 < t_2$

$\Rightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow$ ĐPCM

Ví dụ 14: Cho hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + (m+2)x + 2m \quad (C_m)$.

Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ là số âm.

Giải:

*Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox.

$x^3 + 3x^2 + (m+2)x + 2m = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x+2)\left(x^2 + x + m\right) = 0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x^2 + x + m = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

*(C_m) cắt Ox tại 3 điểm có hoành độ âm $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm âm phân biệt khác -2.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ 1 - 4m > 0 \\ m > 0 \\ -1 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m < \dfrac{1}{4} \\ m > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < m < \dfrac{1}{4}$

Ví dụ 15: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2 - m$ (có đồ thị là (C_m)), m là tham số

Tìm các giá trị của m sao cho đồ thị (C_m) chỉ có hai điểm chung với trục Ox.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục Ox:

$x^4 - 2x^2 + 2 - m = 0 \quad (1)$

Đặt $t = x^2 \quad (t \geq 0)$

Phương trình (1) trở thành:

$t^2 - 2t + 2 - m = 0 \quad (2)$

(1) chỉ có 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm trái dấu hoặc (1) có nghiệm kép dương

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P < 0 \\ \begin{cases} \Delta' = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - m < 0 \\ 1 - 2 + m = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m = 1 \end{array}\right.$

Vậy (C_m) cắt Ox tại 2 điểm khi: m = 1 hay m > 2.

Ví dụ 16: Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}$ (1)

Tìm m để đường thẳng d: $y=m(x-2)+3$ và đường cong (1) cắt nhau tại A, B phân biệt sao cho M(2; 3) làm trung điểm của AB.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}=m(x-2)+3 \Leftrightarrow f(x)=(2m+1)x^2+3(1-2m)x+4m-3=0;\ \text{với } x\neq 1$$

Đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng $y=m(x-2)+3$ tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow f(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1\neq 0 \\ \Delta=9(1-2m)^2-4(2m+1)(4m-3)>0 \\ f(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{7+2\sqrt{7}}{2} \\ \begin{cases} m<\dfrac{7-2\sqrt{7}}{2} \\ m\neq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Với điều kiện trên, gọi $x_1;x_2$ là nghiệm của $f(x)=0 \Rightarrow x_1+x_2=-\dfrac{3(1-2m)}{2m+1}$

Gọi 2 giao điểm là $A(x_1;m(x_1-2)+3);B(x_2;m(x_2-2)+3)$.

Điểm $M(2;3)\in d$ là trung điểm của AB $\Leftrightarrow x_1+x_2=4 \Leftrightarrow -\dfrac{3(1-2m)}{2m+1}=4 \Leftrightarrow m=-\dfrac{7}{2}$

Vậy $m=-\dfrac{7}{2}$

Ví dụ 17: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m(1)$ .Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$(**ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2010)**

Giải:

Phương trình xác định hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là:

$x^3-2x^2+(1-m)x+m=0$ (1)

Biến đổi tương đương phương trình này:

(1) $\Leftrightarrow x^3-2x^2+x\text{-}mx+m=0$

$\Leftrightarrow x(x^2-2x+1)-m(x\text{-}1)=0$

$\Leftrightarrow x(x\text{-}1)^2-m(x\text{-}1)=0$

$\Leftrightarrow (x\text{-}1).(x(x\text{-}1)\text{-}m)=0$

$\Leftrightarrow (x\text{-}1)(x^2-x\text{-}m)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-x\text{-}m=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Đặt $x_3 = 1$

Yêu cầu bài toán sẽ được thực hiện khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 1$ thỏa mãn điều kiện:

$1^2+x_1^2+x_2^2<4 \qquad (3)$

Điều kiện để (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 là:

$$\begin{cases} \Delta=1+4m>0 \\ 1^2-1-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{1}{4} \quad (a) \\ m\neq 0 \end{cases}$$

Theo Viet ta có: $x_1+x_2=1,\ x_1x_2=-m$ nên

$(3) \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2<3$

$\Leftrightarrow 1+2m<3$

$\Leftrightarrow m<1 \quad (b)$

Tổng hợp các điều kiện (a) và (b) ta được các giá trị cần tìm của m là:

$-\dfrac{1}{4}<m<0;\ 0<m<1$

Ví dụ 18: Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x-1}$

Tìm những điểm trên đồ thị (C) cách đều hai điểm A(2 , 0) và B(0 , 2).

Giải:

Pt đường trung trực đoạn AB : y = x

Điểm M thuộc (C) $\Rightarrow M\left(x_0; \dfrac{x_0+2}{2x_0-1}\right)\ (x_0 \neq \dfrac{1}{2})$

Điểm M thuộc đồ thị cách đều A và B $\Leftrightarrow$ M thuộc trung trực của đoạn AB

$\Leftrightarrow \dfrac{x_0+2}{2x_0-1} = x_0$

$\leftrightarrow x_0^2 - x_0 - 1 = 0$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\ (n) \\ x_0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ (n) \end{array}\right.$$

Hai điểm trên đồ thị thỏa ycbt : $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right); \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Ví dụ 19: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$.

Tìm trên đồ thị (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết M(-3; 0) và N(-1; -1).

Giải:

Gọi 2 điểm cần tìm là A, B có $A\left(a;2-\dfrac{6}{a+1}\right);B\left(b;2-\dfrac{6}{b+1}\right);a,b\neq -1$

Trung điểm I của AB: I$\left(\dfrac{a+b}{2};\dfrac{a-2}{a+1}+\dfrac{b-2}{b+1}\right)$

Pt đường thẳng MN: x + 2y +3= 0

Có : $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN}=0\\ I\in MN\end{cases}$

=> $\begin{cases}a=0\\ b=2\end{cases}$ => $\begin{cases}A(0;-4)\\ B(2;0)\end{cases}$

Ví dụ 20. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.Tìm k để đường thẳng y = kx + 2k +1 cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau. **(ĐỀ TSĐH KHỐI D NĂM 2011)**

Giải:

Pt hoành độ giao điểm :

$\dfrac{2x+1}{x+1}=kx+2k+1$

$\Leftrightarrow$ kx^2 + (3k - 1)x + 2k = 0 (x = -1 không là nghiệm)

Ycbt : $\Leftrightarrow$ k $\neq$ 0 và Δ = k^2 - 6k + 1 > 0 $\Leftrightarrow$ $k<3-2\sqrt{2}\vee k>3+2\sqrt{2}$ và k $\neq$ 0 (*)

Khoảng cách từ A và B đến Ox bằng nhau

$\Leftrightarrow |y_A| = |y_B|$ $\Leftrightarrow$ $|kx_A+2k+1|=|kx_B+2k+1|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}kx_A=kx_B\,(loai)\\ k(x_A+x_B)+4k+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow k(\dfrac{1-3k}{k})+4k+2=0$

$\Leftrightarrow$ k = – 3 (thỏa đk (*)). Vậy YCBT $\Leftrightarrow$ k = – 3

Ví dụ 21. Cho hàm số $y=2x^3-3mx^2+(m-1)x+1$ (1) . Tìm m để đường thẳng y = -x +1 cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt.
(ĐỀ TSĐH KHỐI D NĂM 2013)

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$$2x^3-3mx^2+mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ g(x)=2x^2-3mx+m=0\ \ (1)\end{array}\right.$$

(d) cắt (C) tại 3 điểm $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=9m^2-8m>0\\ g(0)=m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<0\vee m>\dfrac{8}{9}$$

BÀI TẬP TỰ LÀM

1. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-4$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng
y = m(x + 1) cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt M(- 1; 0) sao cho MA = 2MB.
2. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị (C). Viết phương trình đường thẳng cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho điểm A có hoành độ bằng 2 và $BC=2\sqrt{2}$.
3. **(Dự bị 2 khối A 2002)** Cho hàm số: $y=mx^4-mx^2+m-1$, (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m=8.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt .

4. Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ (1), đồ thị là (C_m). Gọi (D) là đường thẳng có phương trình y=x+4 và K(1;3). Tìm các giá trị của tham số m sao cho (D) cắt (C_m) tại 3 điểm A(0;4),B,C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$.
5. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng d: y = x + m cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O.

2. <u>Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm</u>:

A. <u>Kiến thức cơ bản</u>:

* Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) tại điểm $M_0(x_0; y_0)$
là: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$.

* Chú ý:

1. Cho d_1: $y = k_1x + b_1$
d_2: $y = k_2x + b_2$

+ $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$ + $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$

2. Cho d_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a_1;b_1)$
d_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a_2;b_2)$

Khi đó, $\cos(d_1;d_2)=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{\left|a_1.a_2+b_1.b_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

B. <u>Các ví dụ</u>:

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số
a. Tại điểm M(2; -2)
b. Tại điểm có hoành độ bằng – 1.
c. Tại điểm có tung độ bằng 2.
d. Tại giao điểm với trục tung.
e. Tại giao điểm với đường thẳng y = -2
f. Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 9x + 7.
g. Biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{45}x$

h. Biết côsin của góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng 4x – 3y = 0 bằng $\frac{3}{5}$.

Giải:

a. $y' = 3x^2 - 6x$

$x_0 = 2;\ y_0 = -2$

$y'(2) = 0$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y + 2 = 0(x – 2) $\Leftrightarrow y = -2$

b. $y' = 3x^2 - 6x$

$x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2$

$y'(-1) = 0$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y + 2 = 9(x + 1) $\Leftrightarrow$ y = 9x + 7

c. $y' = 3x^2 - 6x$

Cho $y_0 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$

* Với $x_0 = 0$; $y_0 = 2$

$y'(0) = 0$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 2 = 0(x – 0) $\Leftrightarrow$ y = 2.

* Với $x_0 = 3$; $y_0 = 2$

$y'(3) = 9$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 2 = 9(x – 3) $\Leftrightarrow$ y = 9x – 25 .

d. $y' = 3x^2 - 6x$

Cho x = 0 $\Rightarrow y = 2$

Suy ra giao điểm với trục tung là A(0; 2)

$y'(0) = 0$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 2 = 0(x – 0) $\Leftrightarrow$ y = 2.

e. Gọi M(x_0; y_0) là tiếp điểm.

$y' = 3x^2 - 6x$

Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 9x + 7

Nên $y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$

* Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2$

$y'(-1) = 0$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y + 2 = 9(x + 1) $\Leftrightarrow$ y = 9x + 7 (loại)

* $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2$

$y'(3) = 9$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 2 = 9(x – 3) $\Leftrightarrow$ y = 9x – 25 (nhận)

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y = 9x – 25

f. Gọi M(x_0; y_0) là tiếp điểm.

$y' = 3x^2 - 6x$

Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0) = 3x_0{}^2 - 6x_0$

Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{45}x$

Nên $y'(x_0) = \frac{-1}{-\frac{1}{45}} = 45 \Leftrightarrow 3x_0{}^2 - 6x_0 = 45 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 5 \\ x_0 = -3 \end{array}\right.$

* Với $x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = 52$

$\Rightarrow$phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 52 = 45(x – 5)$\Leftrightarrow$y = 45x – 173

* Với $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = -52$

$\Rightarrow$phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y + 52 = 45(x +3)$\Leftrightarrow$y = 45x +83

h.* Tiếp tuyến d có hệ số góc $a = y'(x_0) = 3x_0{}^2 - 6x_0$

$\Rightarrow$ vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_d} = (1; a)$

$\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến của d là: $\overrightarrow{n_d} = (a; -1)$

* Đường thẳng Δ: 4x – 3y = 0$\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến của Δ là: $\overrightarrow{n_\Delta} = (4; -3)$

Theo đề ta có $\cos(d;\Delta) = \frac{|a.4 + (-1).(-3)|}{\sqrt{a^2+1}.\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{|4a+3|}{\sqrt{a^2+1}.5} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow |4a+3| = 3\sqrt{a^2+1}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -\frac{24}{7} \end{array}\right.$

* Với a = 0 ta có: $y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3x_0{}^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$

+ $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2$

$\Rightarrow$phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 2 = 0(x – 0)$\Leftrightarrow$y = 2.

+ $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -2$

$\Rightarrow$phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y + 2 = 0(x – 2)$\Leftrightarrow y = -2$

* Với $a = -\frac{24}{7}$ ta có: $y'(x_0) = -\frac{24}{7} \Leftrightarrow 3x_0{}^2 - 6x_0 = -\frac{24}{7} \Leftrightarrow 21x_0{}^2 - 42x_0 + 24 = 0$

(Phương trình vô nghiệm)

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+3}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

a. Biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$

b. Tại giao điểm với trục hoành.

c. Biết tiếp tuyến hợp với trục hoành một góc bằng 45^0.

Giải:

a. Gọi M(x_0; y_0) là tiếp điểm.

$y' = \dfrac{1}{(x+3)^2}$

Hệ số góc của tiếp tuyến là: $y'(x_0) = \dfrac{1}{(x_0+3)^2} = \dfrac{1}{4}$

$(x_0+3)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0+3=2 \\ x_0+3=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=-5 \end{array}\right.$

* Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – $\dfrac{1}{2}$ = $\dfrac{1}{4}$(x + 1) $\Leftrightarrow y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$

* Với $x_0 = -5 \Rightarrow y_0 = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow$phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – $\dfrac{3}{2}$ = $\dfrac{1}{4}$(x +5) $\Leftrightarrow y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{11}{4}$

b. $y' = \dfrac{1}{(x+3)^2}$

Cho y = 0 $\Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Suy ra, giao điểm với trục hoành là: A(- 2; 0)

$y'(-2) = 1$

$\Rightarrow$phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 0 = 1(x + 2)$\Leftrightarrow y = x+2$

c. Gọi M(x_0; y_0) là tiếp điểm.

$y' = \dfrac{1}{(x+3)^2}$

Hệ số góc của tiếp tuyến là: $y'(x_0) = \dfrac{1}{(x_0+3)^2} = \tan 45^0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(x_0+3)^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-2 \\ x_0=-4 \end{array}\right.$

* Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$

$y'(-2) = 1$

$\Rightarrow$phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 0 = 1(x + 2)$\Leftrightarrow y = x+2$

* Với $x_0 = -4 \Rightarrow y_0 = 2$

$y'(-4) = 1$

$\Rightarrow$phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 2 = 1(x +4)$\Leftrightarrow y = x+6$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 6$. Xác định m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ bằng m đi qua gốc tọa độ.

Giải:

* $x_0 = m \Rightarrow y_0 = m^4 - 3m^2 + 6$

$y' = 4x^3 - 6x \Rightarrow y'(m) = 4m^3 - 6m$

* Suy ra phương trình tiếp tuyến là:

$y-(m^4-3m^2+6)=(4m^3-6m)(x-m)$

Tiếp tuyến đi qua gốc tọa độ O(0; 0) $\Leftrightarrow 0-(m^4-3m^2+6)=(4m^3-6m)(0-m)$

$\Leftrightarrow 3m^4-3m^2-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2=-1\ (VN) \\ m^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$

Vậy $m=\pm\sqrt{2}$ thỏa điều kiện bài toán

Ví dụ 4: Cho đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm I(1;2) đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

Giải:

*Tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0;f(x_0))\in(C)$ có phương trình

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Hay $x+(x_0-1)^2y-2x_0{}^2+2x_0-1=0$ (*)

*Khoảng cách từ điểm I(1;2) đến tiếp tuyến (*) bằng $\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2-2x_0|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=2$

* Suy ra các tiếp tuyến cần tìm là : $x+y-1=0$ và $x+y-5=0$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ (C).

Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) để tiếp tuyến của (C) tại M với đường thẳng đi qua M và giao điểm hai đường tiệm cận có tích hệ số góc bằng - 9.

Giải:

Ta có I(- 1; 2). Gọi $M\in(C)\Rightarrow M(x_0;2-\dfrac{3}{x_0+1})\Rightarrow k_{IM}=\dfrac{y_M-y_I}{x_M-x_I}=\dfrac{-3}{(x_0+1)^2}$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M: $k_M=y'(x_0)=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}$

$ycbt \Leftrightarrow k_M.k_{IM}=-9 \Leftrightarrow \dfrac{3}{(x_0+1)^2}.\dfrac{-3}{(x_0+1)^2}=-9$

$\Leftrightarrow x_0=0;\ x_0=-2.$

Suy ra có 2 điểm M thỏa mãn: M(0; - 3), M(- 2; 5)

Ví dụ 6 : Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+1$ có đồ thị là (C_m); (m là tham số). Xác định m để (C_m) cắt đường thẳng $y=1$ tại ba điểm phân biệt $C(0;1)$, D, E sao cho các tiếp tuyến của (C_m) tại D và E vuông góc với nhau.

Giải:

PT hoành độ giao điểm $x^3+3x^2+mx+1=1 \Leftrightarrow x(x^2+3x+m)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+3x+m=0 \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán pt $x^2+3x+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 và $y'(x_1).y'(x_2) = -1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-4m>0,\ f(0)=m\neq 0 \\ (3x_1^2+6x_1+m)(3x_2^2+6x_2+m)=-1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{9}{4}, m\neq 0 \\ 9(x_1x_2)^2+18x_1x_2(x_1+x_2)+3m(x_1^2+x_2^2)+36x_1x_2+6m(x_1+x_2)+m^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{9}{4}, m\neq 0 \\ 4m^2-9m+1=0 \end{cases}$$

Giải ra ta có ĐS: m = $\dfrac{9\pm\sqrt{65}}{8}$

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$

Cho *M* là điểm bất kì trên (*C*). Tiếp tuyến của (*C)* tại *M* cắt các đường tiệm cận của (*C*) tại *A* và *B*. Gọi *I* là giao điểm của các đường tiệm cận. Tìm toạ độ điểm *M* sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác *IAB* có diện tích nhỏ nhất.

Giải:

Ta có: $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$, $x_0\neq 2$, $y'(x_0)=\dfrac{-1}{(x_0-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng: $\Delta: y=\dfrac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}$

Toạ độ giao điểm A, B của (Δ) và hai tiệm cận là: $A\left(2;\dfrac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$; $B(2x_0-2;2)$

Ta thấy $\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{2+2x_0-2}{2}=x_0=x_M$, $\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}=y_M$

suy ra M là trung điểm của AB.

Mặt khác I = (2; 2) và tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S=\pi IM^2=\pi\left[(x_0-2)^2+\left(\frac{2x_0-3}{x_0-2}-2\right)^2\right]=\pi\left[(x_0-2)^2+\frac{1}{(x_0-2)^2}\right]\geq 2\pi$$

Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2=\dfrac{1}{(x_0-2)^2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=3 \end{array}\right.$

Do đó có hai điểm M cần tìm là M(1; 1) và M(3; 3)

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ .Tìm tọa độ điểm M sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất .

Giải:

. Nếu $M\left(x_0;2-\dfrac{3}{x_0+1}\right)\in(C)$ thì tiếp tuyến tại M có phương trình $y-2+\dfrac{3}{x_0+1}=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)$

hay $3(x-x_0)-(x_0+1)^2(y-2)-3(x_0+1)=0$

. Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến là

$d=\frac{|3(-1-x_0)-3(x_0+1)|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}$. Theo bất đẳng thức Côsi

$\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\geq 2\sqrt{9}=6$, vậy $d\leq\sqrt{6}$. Khoảng cách d lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi

$\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow(x_0+1)^2=3\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}$.

Vậy có hai điểm M : $\boxed{M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)}$ hoặc $\boxed{M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)}$

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C).Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất .

Giải:

Lấy điểm $M\left(m;2+\frac{1}{m-2}\right)\in(C)$. Ta có : $y'(m)=-\frac{1}{(m-2)^2}$.

Tiếp tuyến (d) tại M có phương trình :

$$y=-\frac{1}{(m-2)^2}(x-m)+2+\frac{1}{m-2}$$

Giao điểm của (d) với tiệm cận đứng là : $A\left(2;2+\frac{2}{m-2}\right)$

Giao điểm của (d) với tiệm cận ngang là : B(2m – 2 ; 2)

Ta có : $AB^2=4\left[(m-2)^2+\frac{1}{(m-2)^2}\right]\geq 8$. Dấu "=" xảy ra khi $m=2$

Vậy điểm M cần tìm có tọa độ là : (2; 2)

Ví dụ 10: Cho hàm số $y=\frac{-x+1}{2x+1}$ (C)

a. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\in(C)$, biết tiếp tuyến cắt 2 trục tọa độ tạo thành 1 tam giác có diện tích bằng 1.

b . Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\in(C)$, biết tiếp tuyến cắt 2 trục tọa độ tạo thành 1 tam giác cân.

Giải:

a. Gọi $M\in\left(x_0-\frac{1}{2};\frac{3}{4x_0}-\frac{1}{2}\right)\in(C)$. Tiếp tuyến tại M có dạng:

$$d:y=\frac{-3}{4x_0^2}(x-x_0)+\frac{3}{4x_0}-\frac{1}{2}=\frac{-3}{4x_0^2}x+\frac{3}{2x_0}-\frac{1}{2}$$

Giả sử $A=d\cap Ox;\ B=d\cap Oy$ suy ra: $A\left(\frac{2x_0(x_0-3)}{3};0\right)$; $B\left(0;\frac{3-x_0}{x_0}\right)$

ΔOAB vuông tạo O $\Rightarrow S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{2}{3}(3-x_0)^2=1$

$$\Rightarrow 3-x_0=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\Rightarrow x_0=\frac{6\pm\sqrt{6}}{2}$$

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn là: $y=\frac{-3}{40-12\sqrt{6}}x+\frac{4-\sqrt{6}}{20}$ hay $y=\frac{-3}{40+12\sqrt{6}}x-\frac{4+\sqrt{6}}{20}$

b. Tiếp tuyến cắt 2 trục tọa độ tạo thành một tam giác cân nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=\pm 1$. Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm

- Nếu $k=-1\Rightarrow\frac{-3}{(2x_0+1)^2}=-1\Rightarrow 2x_0+1=\pm\sqrt{3}\Rightarrow x_0=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

Với $x_0=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\Rightarrow y_0=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, suy ra tiếp tuyến là: $y=-x-1-\sqrt{3}$

Với $x_0=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\Rightarrow y_0=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, suy ra tiếp tuyến là: $y=-x-1+\sqrt{3}$

- Nếu $k=1\Rightarrow\frac{-3}{(2x_0+1)^2}=1\Rightarrow(2x_0+1)^2=-3$ $(PTVN)$: Vô nghiệm

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn bài toán là: $y=-x-1-\sqrt{3}$; $y=-x-1+\sqrt{3}$

Ví dụ 11: Cho hàm số $y=\frac{2x}{x+1}$

Tìm tọa độ điểm M thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai trục Ox, Oy tại A, B và tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{4}$.

(ĐỀ TSĐH KHỐI D NĂM 2007)

Giải:

Pttt tại M (x_0, y_0) là $d: y-\frac{2x_0}{x_0+1}=\frac{2}{(x_0+1)^2}(x-x_0)$

* A = d $\cap$ Ox $\Rightarrow$ Tọa độ của A là nghiệm của hệ $\begin{cases} y-\frac{2x_0}{x_0+1}=\frac{2}{(x_0+1)^2}(x-x_0)\\ y=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-x_0^2\\ y=0\end{cases}\Rightarrow$ A $(-x_0^2; 0)$.

* B = d $\cap$ Oy $\Rightarrow$ Tọa độ của A là nghiệm của hệ $\begin{cases} y-\frac{2x_0}{x_0+1}=\frac{2}{(x_0+1)^2}(x-x_0)\\ x=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\end{cases}\Rightarrow$ B $(0; \frac{2x_o^2}{(x_o+1)^2})$

Ta có $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}|x_A|.|x_B|=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x_0^2.\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x_0^2 = |x_0 + 1|$ $(x_0 \neq -1)$

$\Leftrightarrow x_0 + 1 = \pm 2x_0^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = -2 \end{array}\right.$

Vậy M (1; 1) hoặc M $(-\frac{1}{2}; -2)$

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$. Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng y = x + m luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất. **(ĐỀ TSĐH KHỐI A NĂM 2011)**

Giải:

* Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d : y = x +m

$\frac{-x+1}{2x-1} = x + m \Leftrightarrow (2x-1)(x+m) = -x+1$ (Vì x = $\frac{1}{2}$ không là nghiệm)

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - (m+1) = 0$ (1)

Phương trình (1) có $\Delta = m^2 + 2m + 2 = (m+1)^2 + 1 > 0, \forall m \in$ R

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có 2 nghiệm nên d luôn cắt (C) tại hai điểm A, B.

* Hoành độ tiếp điểm tại A, B là x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1)

$\Rightarrow x_1 + x_2 = -m$ và $x_1.x_2 = -\frac{m+1}{2}$

Ta có: $k_1 + k_2 = -\frac{1}{(2x_1-1)^2} - \frac{1}{(2x_2-1)^2} = -\frac{4(x_1^2+x_2^2) - 4(x_1+x_2) + 2}{\left[4x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 1\right]^2}$

$= -(4m^2 + 8m + 6) = -4(m+1)^2 - 2 \leq -2$

Vậy $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất bằng -2 $\Leftrightarrow$m+1 =0 $\Leftrightarrow$ m = -1.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C). Xác định m để đường thẳng d: y = 2x + m cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

Giải:

* Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d là

$\frac{x+1}{x-1} = 2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x + 1 = (2x+m)(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2 + (m-3)x - m - 1 = 0$ (1)

(vì x =1 không là nghiệm của phương trình)

* d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = (m+1)^2 + 16 > 0 \Leftrightarrow m \in R$

Suy ra d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m.

* Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A và B

Ta có x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1) nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(3-m) \\ x_1x_2 = \frac{-m-1}{2} \end{cases}$

Tiếp tuyến tại A và B lần lượt có hệ số góc là $k_1 = \frac{-2}{(x_1-1)^2}$; $k_2 = \frac{-2}{(x_2-1)^2}$

Do tiếp tuyến tại A và B song song với nhau nên

$k_1 = k_2 \Leftrightarrow \frac{-2}{(x_1-1)^2} = \frac{-2}{(x_2-1)^2} \Leftrightarrow (x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \ (loai) \\ x_1 + x_2 = 2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(3-m) = 2 \Leftrightarrow m = -1$

Vậy m = -1 thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 14: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C). Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến tại M của (C) cắt lại (C) tại điểm N khác M. Tìm tọa độ của điểm N biết NM = $\sqrt{2952}$.

Giải:

Gọi $M(x_0; x_0^3 - 3x_0)$ là điểm thuộc đồ thị (C).

$y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'(x_0) = 3x_0^2 - 3$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $y = (3x_0^2 - 3)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và tiếp tuyến tại M là

$x^3 - 3x = (3x_0^2 - 3)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x_0^2x + 2x_0^3 = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)^2(x + 2x_0) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ x = -2x_0 \end{array}\right.$

Suy ra điểm $N\left(-2x_0; -8x_0^3 + 6x_0\right)$ với $x_0 \neq 0$

Ta có $NM = \sqrt{81x_0^6 - 162x_0^4 + 90x_0^2} = \sqrt{2952}$

$\Leftrightarrow 81x_0^6 - 162x_0^4 + 90x_0^2 - 2952 = 0$ (*)

Đặt $t = x_0^2, t \geq 0$

Phương trình (*) trở thành $81t^3 - 162t^2 + 90t - 2952 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(81t^2 + 162t + 738) = 0 \Leftrightarrow t = 4$

Do đó $x_0 = \pm 2$

Vậy có hai điểm N cần tìm là $N(-4; 488)$ hoặc $N(4; -488)$

Ví dụ 15: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$

Gọi M là điểm thuộc (C) có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục tọa độ Ox và Oy lần lượt tại A và B. Tính diện tích tam giác OAB.

(ĐỀ THI TUYỂN SINH CAO ĐẲNG KHỐI A, A1, B và D NĂM 2013)

Giải:

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $\frac{2x+1}{x-1} = 5 \Leftrightarrow$ x = 2

Suy ra M(2; 5).

Phương trình tiếp tuyến tại M là d: y – 5 = y'(2)(x – 2) ⇔ y = -3x + 11

Tọa độ giao điểm A của d và trục Ox là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = -3x + 11 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 11 \end{cases}$$

Suy ra, A (0; 11)

Tọa độ giao điểm B của d và trục Oy là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = -3x + 11 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

Suy ra, B ($\frac{11}{3}$; 0)

Do tam giác ABC vuông tại O nên $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{121}{6}$

3. <u>Sự tiếp xúc của hai đồ thị và tiếp tuyến đi qua một điểm:</u>

Cho y = f(x) có đồ thị (C), y = g(x) có đồ thị (C_1)

Khi đó, (C) và (C_1) tiếp xúc $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = g'(x) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ có nghiệm.

Ví dụ 1: Cho hàm $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$ (C). Tìm phương trình các đường thẳng qua $A\left(\frac{19}{12};4\right)$ và tiếp xúc với đồ thị của hàm số .

Giải:

Đường thẳng (d) qua A và có hệ số góc k:

$$y = k(x - \frac{19}{12}) + 4$$

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} 2x^3 - 3x^2 + 5 = k\left(x - \dfrac{19}{12}\right) + 4 \quad (1) \\ 6x^2 - 6x = k \quad (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thay (2) vào (1):

$$2x^3 - 3x^2 + 5 = (6x^2 - 6x)(x - \frac{19}{12}) + 4$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 25x^2 + 19x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(8x^2 - 17x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Leftrightarrow k = 0 \\ x = 2 \Leftrightarrow k = 12 \\ x = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow k = -\dfrac{21}{32} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đường thẳng qua A và tiếp xúc với (C) là:

y=4 hoặc y=12x - 15 hoặc $y = -\frac{21}{32} + \frac{645}{128}$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-2}$ (C).

Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-6;5)$.

Giải:

Phương trình đường thẳng đi qua $A(-6;5)$ là $(d): y=k(x+6)+5$.

(d) tiếp xúc (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases} k(x+6)+5=\frac{x+2}{x-2} \\ k=-\frac{4}{(x-2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{(x-2)^2}\cdot(x+6)+5=\frac{x+2}{x-2} \\ k=-\frac{4}{(x-2)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4(x+6)+5(x-2)^2=(x+2)(x-2) \\ k=-\frac{4}{(x-2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-24x=0 \\ k=-\frac{4}{(x-2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; k=-1 \\ x=6; k=-\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Suy ra có 2 tiếp tuyến là : $(d_1): y=-x-1;$ $(d_2): y=-\frac{x}{4}+\frac{7}{2}$

Ví dụ 3: Cho hàm số : $y=\frac{-x+1}{2x+1}$ (C)

Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến đó đi qua giao điểm của đường tiệm cận và trục Ox.

Giải :

Giao điểm của tiệm cận đứng với trục Ox là $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$

Phương trình tiếp tuyến (Δ) qua A có dạng $y=k\left(x+\frac{1}{2}\right)$

(Δ) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-x+1}{2x+1}=k\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{-x+1}{2x+1}\right)'=k \end{cases}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-x+1}{2x+1}=k\left(x+\frac{1}{2}\right) & (1) \\ \frac{-3}{(2x+1)^2}=k & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1) ta có pt hoành độ tiếp điểm là

$$\frac{-x+1}{2x+1}=-\frac{3\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(2x+1)^2} \Leftrightarrow (x-1)(2x+1)=3(x+\frac{1}{2}) \text{ và } x\neq-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-1=\frac{3}{2}$$

$\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$. Do đó $k=-\frac{1}{12}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-\frac{1}{12}\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Ví dụ 4. Xác định m để đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2-(m-1)x+m$ tiếp xúc với trục hoành.

Giải:

Đồ thị tiếp xúc với trục hoành: y = 0

$\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-4x-m+1=0 & (1)\\ x^3-2x^2-(m-1)x+m=0 & (2)\end{cases}$ có nghiệm.

Từ (1) $\Rightarrow m=3x^2-4x+1$ thay vào (2) ta được: $2x^3-5x^2+4x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

* Với $x=1\Rightarrow m=0$

* Với $x=\frac{1}{2}\Rightarrow m=-\frac{1}{4}$

Vậy $m=0;m=-\frac{1}{4}$ thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 5. Cho (C): $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ và (P): $y=x^2+a$

Xác định a để (C) tiếp xúc với (P).

Giải:

Đồ thị (C) tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm: $\begin{cases}\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=2x & (1)\\ \frac{x^2-x+1}{x-1}=x^2+a & (2)\end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ 2x^3-5x^2+4x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0$ thay vào (2) ta được a = - 1

Vậy a = - 1 thỏa điều kiện bài toán.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ (C)

Tìm trên đường thẳng (d): y = 2 các điểm kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C).

Giải:

Gọi M $\in(d)\Rightarrow$M(m;2). Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm M và có hệ số góc k $\Rightarrow$ PTĐT Δ có dạng : y=k(x-m)+2.

ĐT Δ là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ PT sau có nghiệm $\begin{cases}-x^3+3x^2-2=k(x-m)+2 & (1)\\ -3x^2+6x=k & (2)\end{cases}$ (I)

Thay (2) và (1) được: $2x^3-3(m+1)x^2+6mx-4=0\Leftrightarrow(x-2)[2x^2-(3m-1)x+2]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ 2x^2-(3m-1)x+2=0\quad(3)\end{array}\right.$.

Đặt f(x) $=2x^2-(3m-1)+2$

Từ M kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) $\Leftrightarrow$ hệ (I) có 3 nghiệm x phân biệt $\Leftrightarrow$ PT(3) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ f(2) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} m < -1\\ m > \dfrac{5}{3}\end{array}\right.\\ m \neq 2\end{cases}$$

Vậy M(m;2) thuộc (d): y = 2 với $\begin{cases}\left[\begin{array}{l} m < -1\\ m > \dfrac{5}{3}\end{array}\right.\\ m \neq 2\end{cases}$ thì từ M kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị.

BÀI TẬP TỰ LÀM

1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$(C). Gọi d là đường thẳng qua điểm A(3;4) và có hệ số góc là m. Định m để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A,M,N sao cho 2 tiếp tuyến của (C) tại M và N vuông góc với nhau.

2. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 9x + 3$ có đồ thị (C). Tìm các giá trị của k để tồn tại hai tiếp tuyến của (C) phân biệt nhau và có cùng hệ số góc k, đồng thời các đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến của (C) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt ở A và B sao cho OB =2011.OA.

3. Cho hàm số $y = -2x^3 + x - 1$ có đồ thị (C).
   a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
   b. Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến tại M của (C) cắt lại (C) tại điểm N khác M. Tìm tọa độ của điểm N biết MN = 3.

4. **(Dự bị 1 khối B 2003)** Cho hàm số: $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$, (1)
   a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) .
   b) Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) . Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM.

5. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}(m+1)x^3 - mx^2 + (m+1)x - 3$ có đồ thị (C_m).

a. Tìm m để hàm số đồng biến trên R.

b. Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ x = 1. Xác định m để khoảng cách từ O đến d bằng $\sqrt{5}$.

6. **(Dự bị 2 khối A 2005)**
   a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x+1}$.
   b) Viết phương trình đường thẳng đi qua M(-1;0) và tiếp xúc với đồ thị (C).

7. Cho hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 1$ (C_m). Chứng minh rằng khi m thay đổi thì (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định. Tìm m để các tiếp tuyến tại A, B vuông góc với nhau.

8. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho OA = 4OB.

9. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số đã cho tiếp tuyến tại A và B song song với nhau và $AB = 4\sqrt{2}$.

CHUYÊN ĐỀ 5. ĐỒ THỊ HÀM SỐ CÓ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI. PHÉP SUY ĐỒ THỊ

A. Kiến thức cơ bản:

Cho đồ thị (C)

1. Cho hàm số $y = |f(x)|$ có đồ thị (C_1)

Ta có $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \ khi \ f(x) \geq 0 \\ -f(x) \ khi \ f(x) < 0 \end{cases}$

Nên đồ thị (C_1) được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $y \geq 0$(phần phía trên trục Ox)

+ Lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị (C) ứng với $y < 0$(phần phía dưới trục Ox)

2. Cho hàm số $y = f(|x|)$ có đồ thị (C_2)

Ta có $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) \ khi \ x \geq 0 \\ f(-x) \ khi \ f(x) < 0 \end{cases}$

Ta lại có $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn.

Nên đồ thị (C_2) được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $x \geq 0$(phần phía bên phải trục Oy)

+ Lấy đối xứng qua trục Oy phần đồ thị vừa vẽ được.

3. Cho hàm số $|y| = f(x)$ có đồ thị (C_3)

Ta có $|y| = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = -f(x) \end{array} \right. \end{cases}$

Nên đồ thị (C_3) được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $y \geq 0$(phần phía trên trục Ox)

+ Lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị vừa vẽ được.

B. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

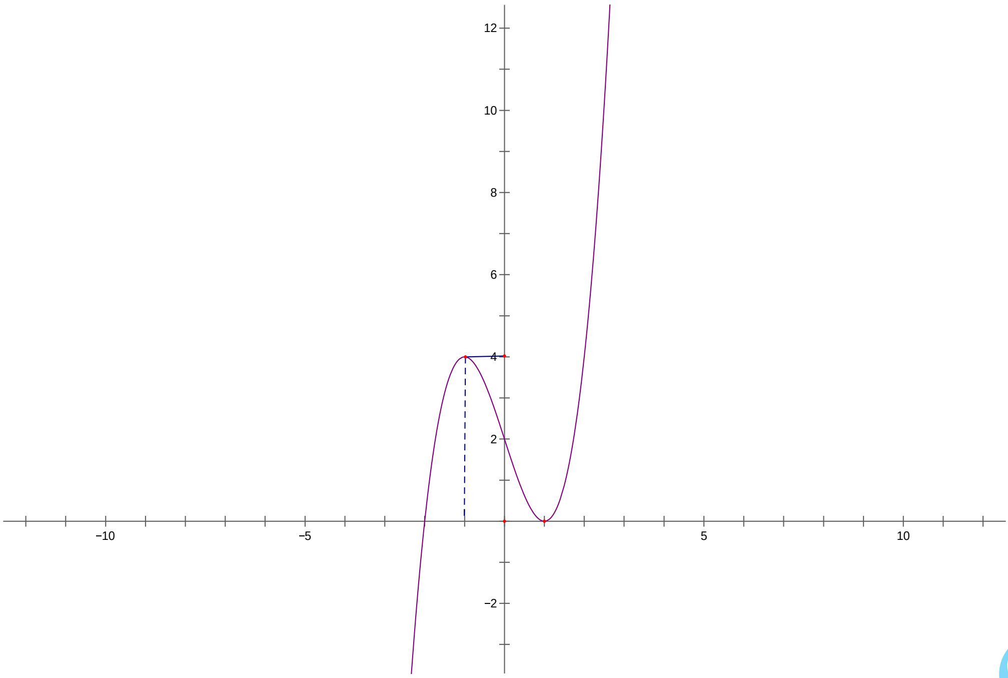
2. Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị các hàm số sau

a. $y = |x^3 - 3x + 2|$ (C_1) b. $y = |x|^3 - 3|x| + 2$ (C_2)

c. $|y| = x^3 - 3x + 2$ (C_3)

Giải:

1. Tự khảo sát

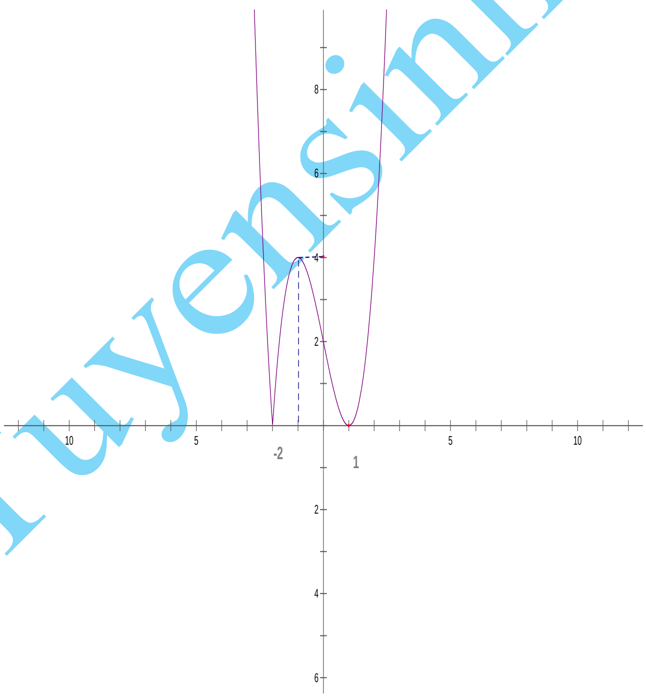


2. a. Ta có $y=\left|x^3-3x+2\right|=\begin{cases}x^3-3x+2 \quad khi\ x^3-3x+2\ge 0\\ -\left(x^3-3x+2\right)\ khi\ x^3-3x+2<0\end{cases}$

Nên đồ thị (C_1) được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $y\ge 0$(phần phía trên trục Ox)

+ Lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị (C) ứng với $y<0$(phần phía dưới trục Ox)



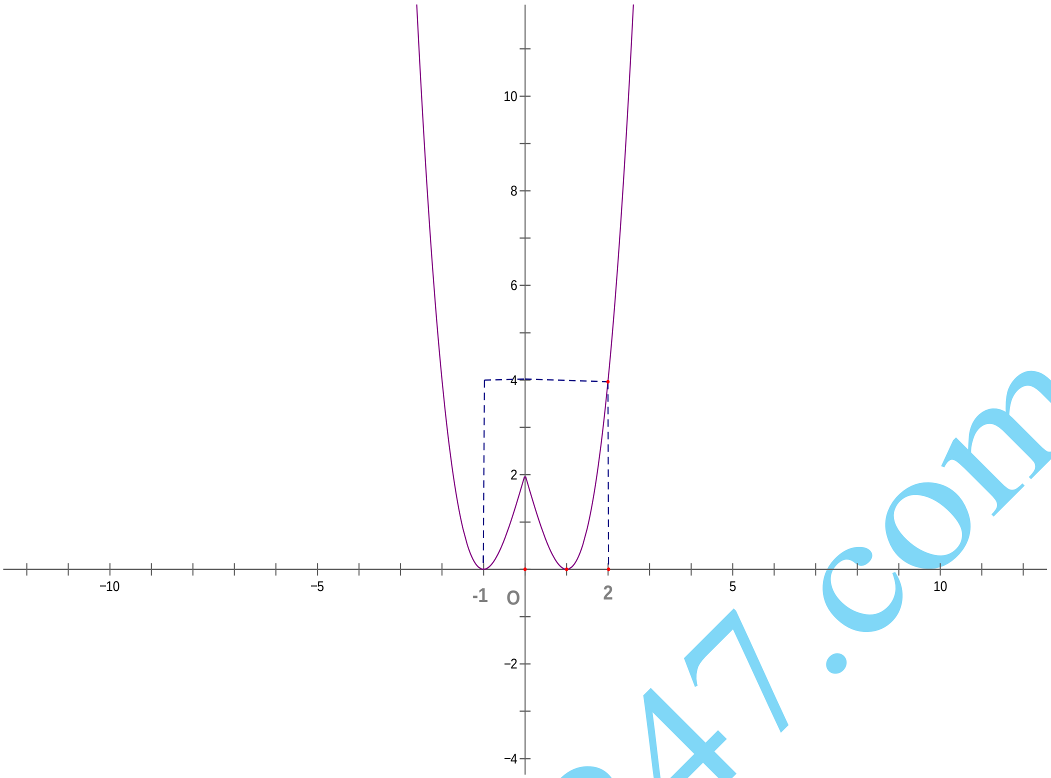
b. Ta có $y=|x|^3-3|x|+2=\begin{cases}x^3-3x+2\ \ khi\ \ x\ge 0\\ -x^3+3x+2\ khi\ x<0\end{cases}$

Ta lại có $y=|x|^3-3|x|+2$ là hàm số chẵn

Nên đồ thị (C_2) được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $x\ge 0$(phần phía bên phải trục Oy)

+ Lấy đối xứng qua trục Oy phần đồ thị vừa vẽ được.

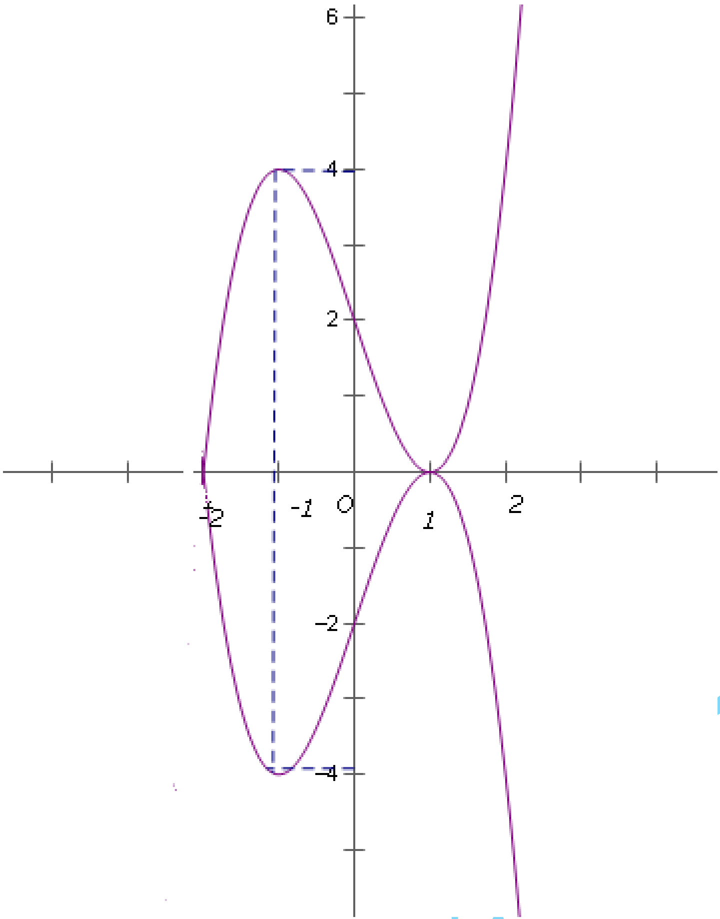


c.Ta có: $|y| = x^3 - 3x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 2 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = x^3 - 3x + 2 \\ y = -\left(x^3 - 3x + 2\right) \end{array}\right. \end{cases}$

Nên đồ thị (C_3) được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $y \geq 0$ (phần phía trên trục Ox)

+ Lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị vừa vẽ được.



Ví dụ 2: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$

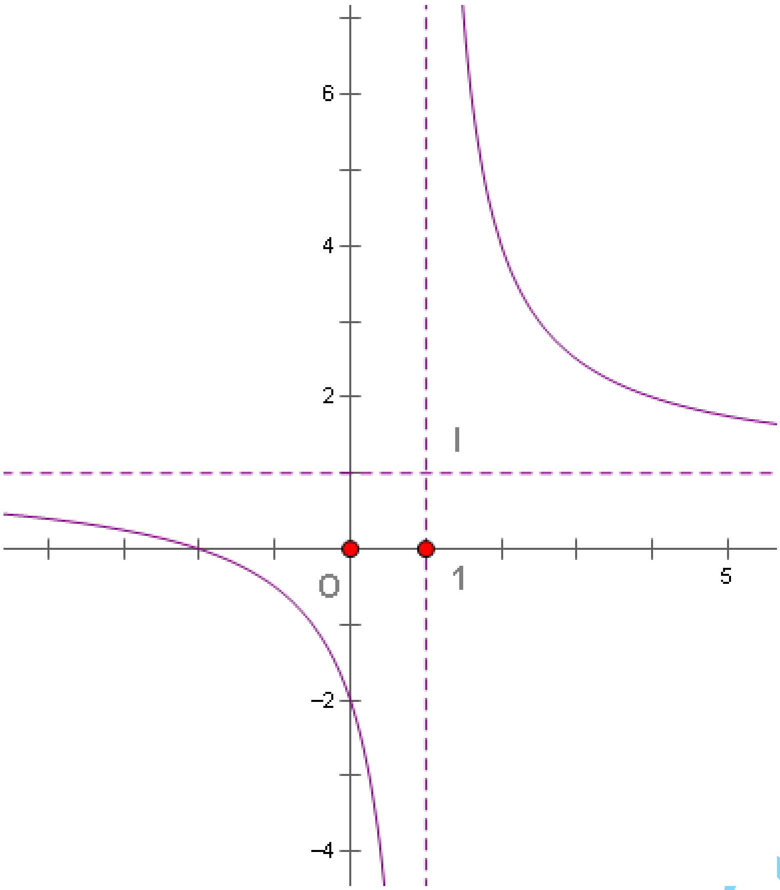
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị các hàm số sau

a. $y=\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|$ (C_1) b. $y=\dfrac{|x|+2}{|x|-1}(C_2)$

c. $y=\dfrac{x+2}{|x-1|}$ (C_3)

Giải

1. Tự khảo sát



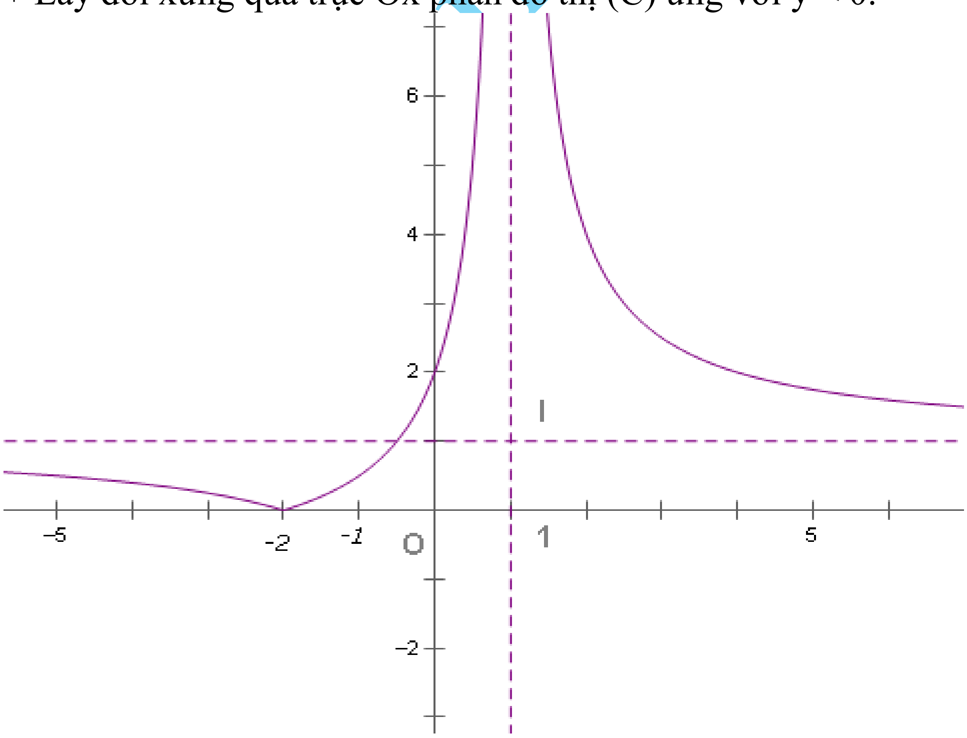
2.

a. $y=\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1} \;\; khi\; \dfrac{x+2}{x-1}\ge 0\\ -\dfrac{x+2}{x-1} khi\; \dfrac{x+2}{x-1}<0\end{cases}$

Nên đồ thị (C_1) được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $y \ge 0$

+ Lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị (C) ứng với y < 0.



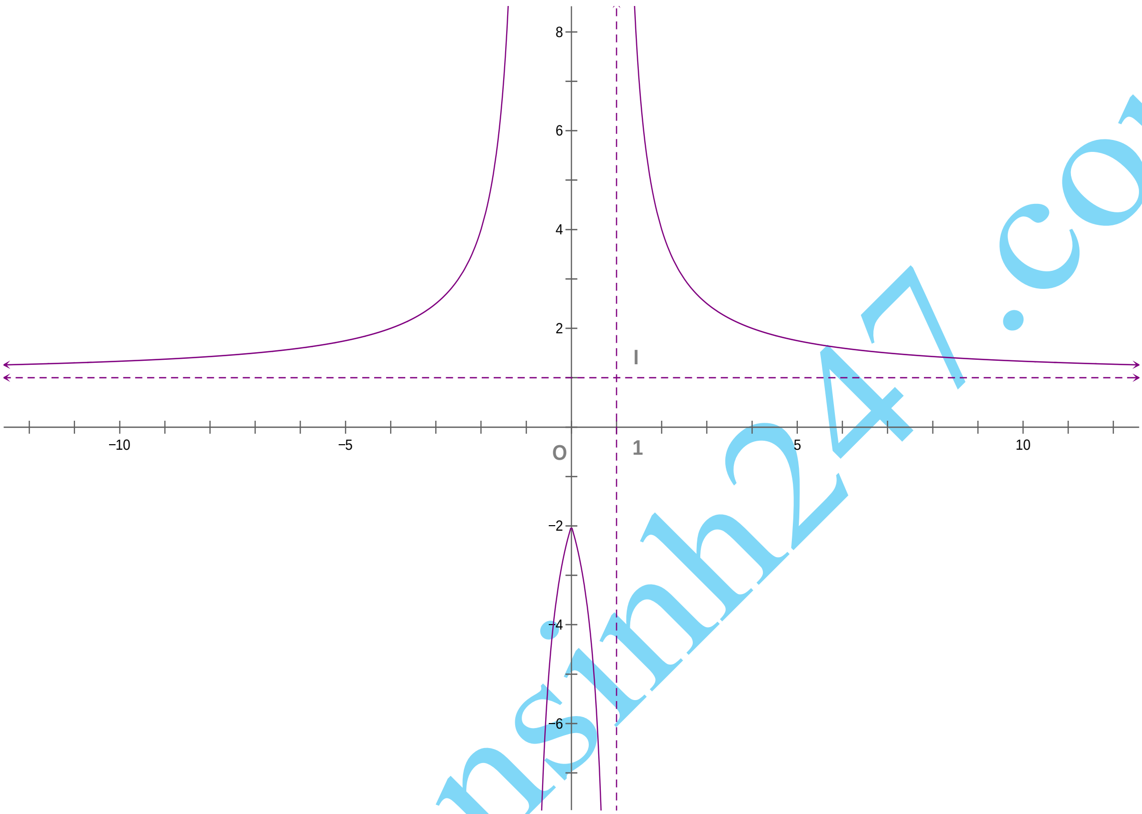
b. Ta có: $y=\dfrac{|x|+2}{|x|-1}=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1} & khi\, x\ge 0\\ \dfrac{-x+2}{-x+1} & khi\, x<0\end{cases}$

Ta lại có $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ là hàm số chẵn

Nên đồ thị (C_2) được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $x\ge 0$

+ Lấy đối xứng qua trục Oy phần đồ thị vừa vẽ được.

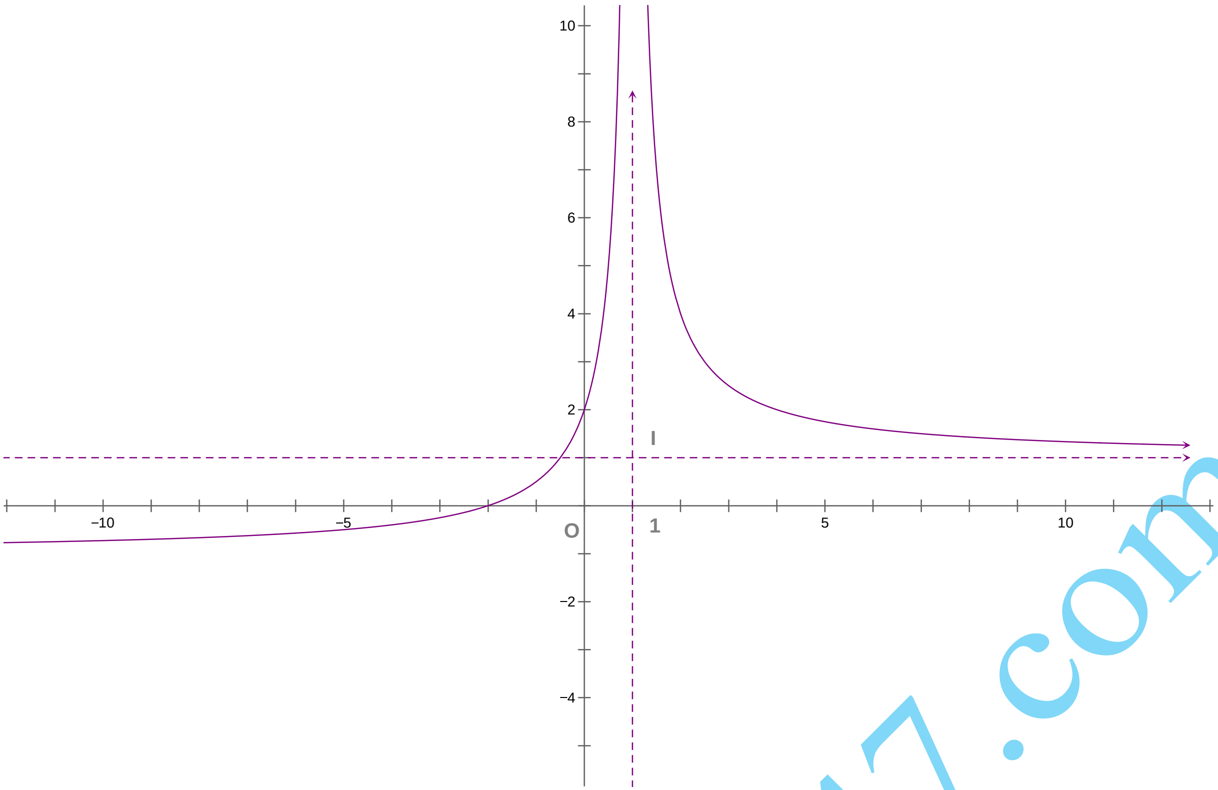


c. $y=\dfrac{x+2}{|x-1|}=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1} & khi\ x>1\\ -\dfrac{x+2}{x-1} & khi\, x<1\end{cases}$

Nên đồ thị (C_3) được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $x>1$

+ Lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ (C) ứng với x < 1.



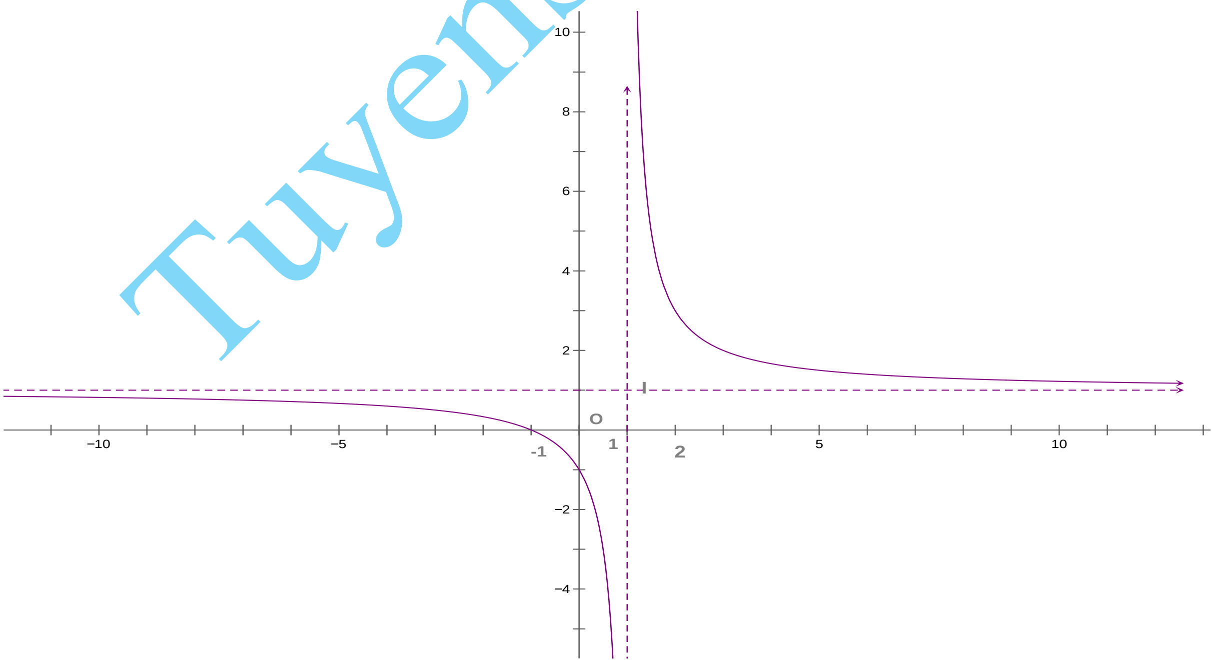
Ví dụ 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\dfrac{|x|+1}{|x|-1}=m.$

Giải:

1. Tự khảo sát

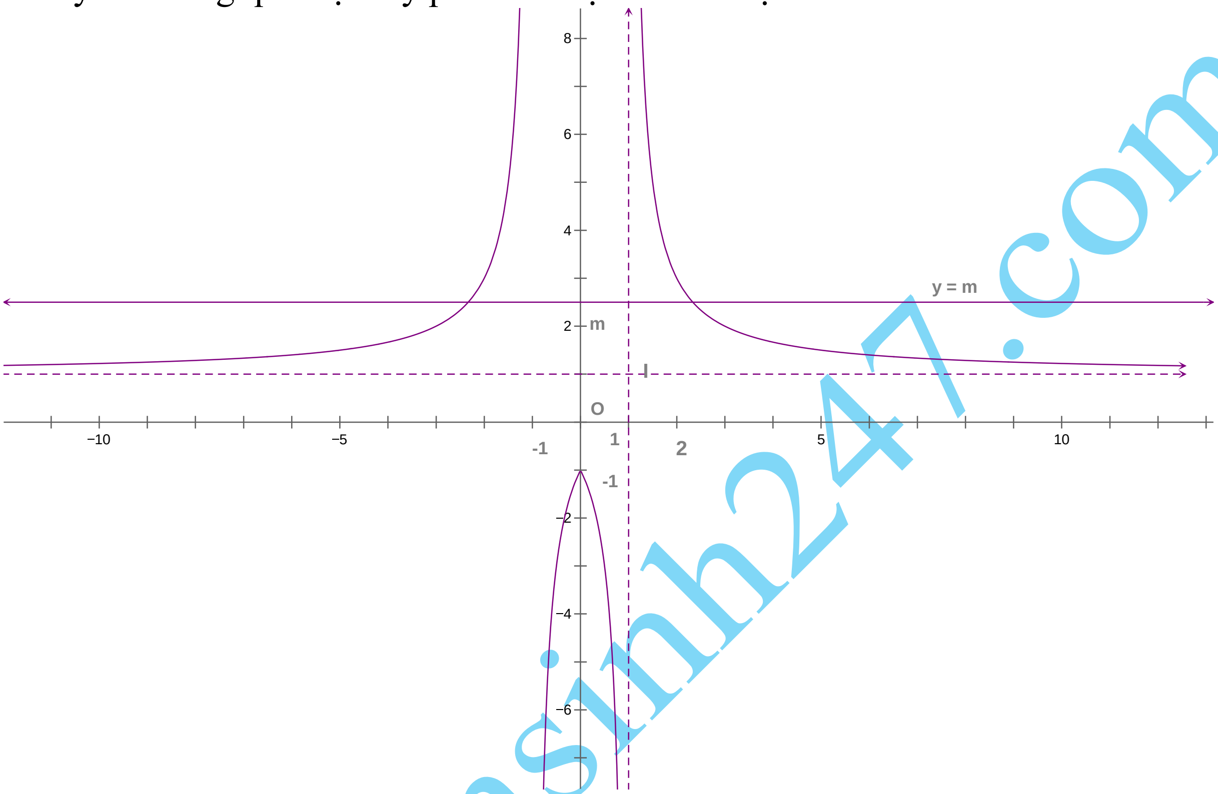


b. Số nghiệm của pt $\dfrac{|x|+1}{|x|-1}=m$ bằng số giao điểm của đồ thị (C$^{/}$) $y=\dfrac{|x|+1}{|x|-1}$ và đường thẳng $y=m.$

Ta có $y=\frac{|x|+1}{|x|-1}=\begin{cases}\frac{x+1}{x-1} & khi\ \ x\ge 0\\ \frac{-x+1}{-x-1} & khi\,x<0\end{cases}$

Ta lại có $y=\frac{|x|+2}{|x|-1}$ là hàm số chẵn

Nên đồ thị (C$^{/}$) được suy ra từ đồ thị (C) như sau:
+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $x\ge 0$
+ Lấy đối xứng qua trục Oy phần đồ thị vừa vẽ được.



Dựa vào đồ thị (C$^{/}$) ta thấy

$m<-1; m>1$: phương trình có 2 nghiệm

$m=-1$: phương trình có 1 nghiệm

$-1<m\le 1$: phương trình vô nghiệm

Ví dụ 4.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số : $y = x^3 - 3x^2 + 2$

2) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $x^2-2x-2=\frac{m}{|x-1|}$

Giải:

1. Tự khảo sát
Đồ thị

f(x)=(x^3)-3*(x)^2+2

2. Ta có $x^2-2x-2=\dfrac{m}{|x-1|} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ |x-1|\left(x^2-2x-2\right)=m \end{cases}$

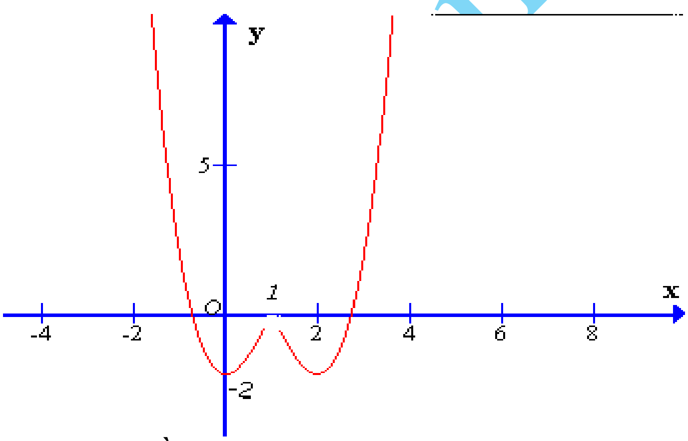
Do đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị (C$^/$) của hàm số $y=(x^2-2x-2)|x-1|$ với $x \neq 1$ và đường thẳng y = m

Ta có $y=(x^2-2x-2)|x-1|=\begin{cases} x^3-3x^2+2 \quad khi\ x>1 \\ -\left(x^3-3x^2+2\right)\ khi\ x<1 \end{cases}$

Nên đồ thị (C$^/$) được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $x>1$

+ Lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ (C) ứng với x < 1.



Dựa vào đồ thị ta có:

+ $m<-2$: Phương trình vô nghiệm;

+ $m=-2$: Phương trình có 2 nghiệm kép ;

+ $-2<m<0$: Phương trình có 4 nghiệm phân biệt;

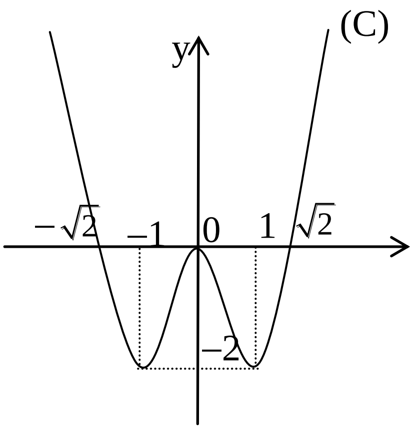
+ $m \geq 0$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 5. Cho hàm số y = $2x^4 - 4x^2$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2. Với các giá trị nào của m, phương trình $x^2|x^2-2|=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?(
ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2009)

Giải:

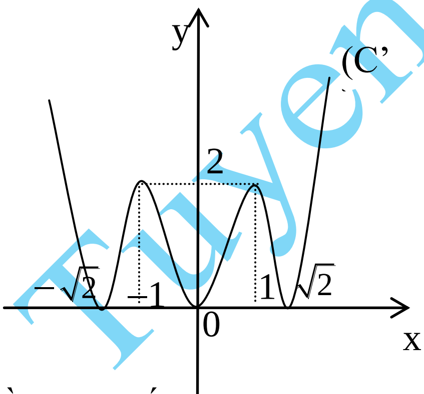
1. Tự khảo sát



2. Ta có: $x^2|x^2-2| = m \Leftrightarrow 2x^2|x^2-2| = 2m$ (*)
(*) là phương trình hoành độ giao điểm của (C') :
$y = 2x^2|x^2-2|$ và (d): y = 2m

Ta có $y = 2x^2|x^2-2| \begin{cases} 2x^4-4x^2 & khi\ x \le -\sqrt{2}\ ;\ \ x \ge \sqrt{2} \\ -(2x^4-4x^2) & khi -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$

Nên đồ thị ($C^{/}$) được suy ra từ đồ thị (C) như sau:
+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $x \le -\sqrt{2}\ ;\ \ x \ge \sqrt{2}$
+ Lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ (C) ứng với $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.



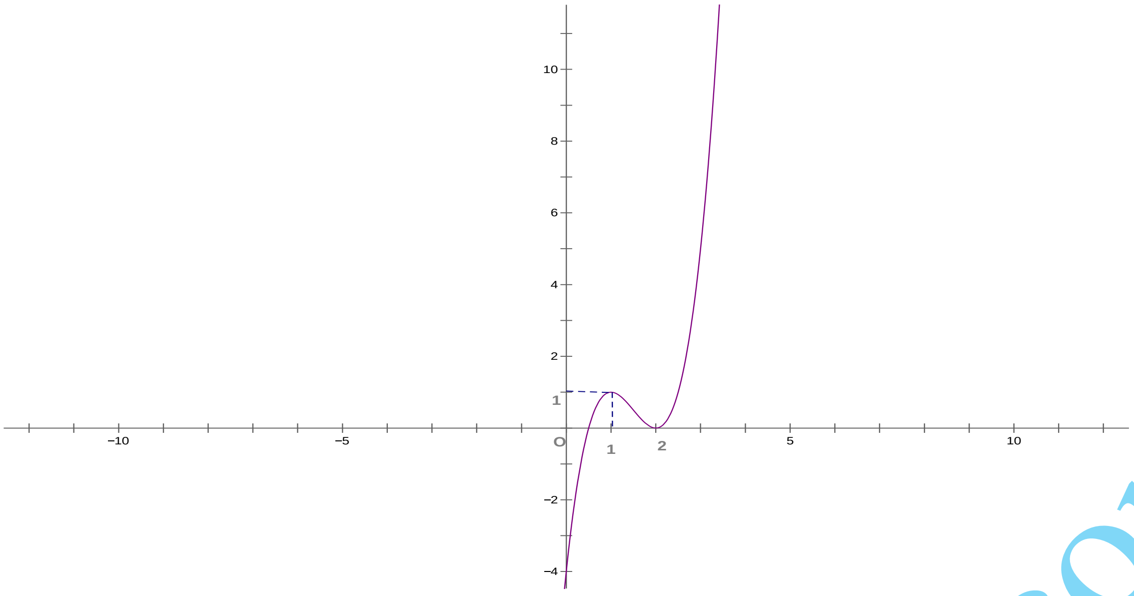
Theo đồ thị ta thấy ycbt $\Leftrightarrow 0 < 2m < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 1$

Ví dụ 6.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$
2. Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$
(ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006)

Giải:

1. Tự khảo sát



2. Ta có $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m \Leftrightarrow 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4$

Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đồ thị (C$^/$) của hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$ và đường thẳng d: y = m – 4

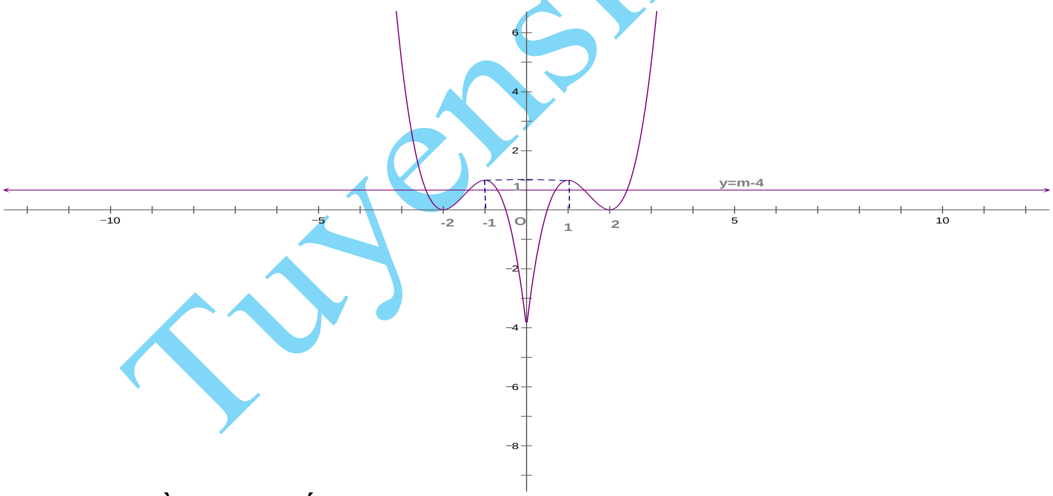
Ta có $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = \begin{cases} 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 \ khi\ x \geq 0 \\ -2x^3 - 9x^2 - 12x - 4 \ khi\ x < 0 \end{cases}$

Ta lại có $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$ là hàm số chẵn, do đó đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Nên đồ thị (C$^/$) được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $x \geq 0$

+ Lấy đối xứng qua trục Oy phần đồ thị vừa vẽ được.



Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình đã cho có 6 nghiêm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m - 4 < 1 \Leftrightarrow 4 < m < 5$

Vậy $4 < m < 5$ thỏa điều kiện bài toán.

BÀI TẬP TỰ LÀM

1. **(Dự bị 1 khối A 2003)**

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x^2-4x-3}{2(x-1)}$.

b) Tìm m để phương trình $2x^2-4x-3+2m|x-1|=0$ có hai nghiệm phân biệt.

CHUYÊN ĐỀ 6: TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA ĐỒ THỊ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+1-m^2$. Tìm m để trên đồ thị có hai điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

Giải:

Gọi A(x_0; y_0), B(- x_0; - y_0) là hai điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.
Ta có A, B thuộc đồ thị nên

$$\begin{cases} y_0 = x_0^3-3mx_0^2+3(m^2-1)x_0+1-m^2 & (1) \\ -y_0=-x_0^3-3mx_0^2-3(m^2-1)x_0+1-m^2 & (2)\end{cases}$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được $-6mx_0^2+2(1-m^2)=0 \Leftrightarrow 3mx_0^2+m^2-1=0\,(*)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m\neq 0 \\ \Delta>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -4.3m.(m^2-1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m(m^2-1)<0\end{cases} \Leftrightarrow m<-1 \text{ hoặc } 0<m<1.$$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=x^3+3x-2$ (C). Tìm trên đồ thị (C) các cặp điểm đối xứng với nhau qua điểm I(2; 18).

Giải:

Gọi $A(x_1;x_1^3+3x_1-2),\ B(x_2;x_2^3+3x_2-2)$ $(x_1\neq x_2)$ là hai điểm trên (C) đối xứng với nhau qua I.

Ta có I là trung điểm của AB nên $\begin{cases} x_A+x_B=2x_I \\ y_A+y_B=2y_I\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1^3+3x_1-2+x_2^2+3x_2-2=36\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1^3+x_2^3+3(x_1+x_2)=40\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ (x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)+3(x_1+x_2)=40\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ (x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)+3(x_1+x_2)=40\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=3\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=1\end{cases}$$

Vậy các điểm cần tìm là A(1; 2), B(3; 34).

BÀI TẬP TỰ LÀM

1/ Cho hàm số $y=x^4-2x^2-1$ có đồ thị (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b. Xác định m để phương trình $|x^4-2x^2-1|-1=m^2$ có 6 nghiệm phân biệt.

c. Xác định a để tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x = a đi qua điểm (0; - 1).

d. Xác định k để đường thẳng d: y = mx – m – 2 cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt.

2/ Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có đồ thị (C_m).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị khi m = 1.

b. Xác định m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D có hoành độ lần lượt là $x_A < x_B < x_C < x_D$ sao cho $BC = AB\sqrt{2}$.

c. Xác định m để tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ hợp với trục hoành một góc 30^0.

d. Xác định m để đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị và điểm cực trị thuộc trục tung cách đường phân giác của góc phần tư thứ nhất một khoảng bằng $\sqrt{2}$.

e. Xác định m để tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ bằng – 1 cắt trục hoành, trục tung tại hai điểm M, N sao cho ΔOMN có diện tích bằng 3.

3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b. Xác định m để phương trình $|x-1|\left(x^2 - 2x - 2\right) + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

c. Tìm m để đường thẳng d đi qua M(2; - 2) có hệ số góc m cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương.

d. Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ m. Tìm m để d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

4. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2$ có đồ thị (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b. Xác định m để phương trình $(x^2 + 2x)|x^2 - 2x| = m^2$ có bốn nghiệm phân biệt.

c. Xác định m để phương trình $|x^2 - 4|x^2 = m^2 + 3m$ có sáu nghiệm phân biệt.

d. Xác định m để đồ thị (C) cắt đường thẳng y = m tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 \geq 24$.

e. Tìm các điểm thuộc đồ thị (C) đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

5. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm tọa độ điểm M trên trục tung sao cho qua M kẻ được đường thẳng cắt (C) tại hai điểm phân biệt đối xứng với nhau qua M.

6. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-4}{2x-3}$ có đồ thị (C). Xác định tọa độ các điểm thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm đó đến trục hoành gấp hai lần khoảng cách từ điểm đó đến tiệm cận đứng.

7. Chứng minh rằng phương trình $2|x|^3 + 3(1-m)x^2 - 6m|x| - 1 + m = 0$ có bốn nghiệm thực phân biệt với mọi m > 1.