Sở GD & ĐT Hà Nam
TRUNG TÂM GDTX DUY TIÊN

CHUYÊN ĐỀ

# HÀM SỐ MŨ VÀ LÔGARÍT

BÙI QUỸ

# MỤC LỤC





VIETMATHS.NET

# §1 KIẾN THỨC CƠ BẢN

## 1.1 LUỸ THỪA

### 1.1.1 Luỹ thừa với số mũ nguyên

Định nghĩa

- Luỹ thừa với số mũ nguyên dương:
  Cho $a$ là một số thực, $n$ là một số nguyên dương. Luỹ thừa bậc $n$ của $a$, kí hiệu là $a^n$, được xác định như sau
  $$a^n = \underbrace{a.a.\ldots.a}_{n \text{ thừa số}} \quad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*,$$
  trong đó $a$ gọi là cơ số, $n$ gọi là số mũ.

- Luỹ thừa với số mũ nguyên âm, luỹ thừa với số mũ 0:
  Cho $a > 0, n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó
  $$a^0 = 1;\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$
  **Chú ý.** $0^0$ và $0^{-n}$ không có nghĩa.

### 1.1.2 Căn bậc $n$

Cho số thực $b$ và số nguyên dương $n \geq 2$. Số $a$ được gọi là căn bậc $n$ của số $b$, kí hiệu $\sqrt[n]{b}$ nếu
$$a^n = b.$$
Khi $n$ lẻ, $b \in \mathbb{R}$ thì tồn tại duy nhất $\sqrt[n]{b}$;
Khi $n$ chẵn thì

- với $b < 0$: không tồn tại căn bậc $n$ của $b$;
- với $b = 0$: có một căn là $\sqrt[n]{0} = 0$;
- với $b > 0$: có hai căn là $\sqrt[n]{b}$ (dương) và $-\sqrt[n]{b}$ (âm).

### 1.1.3 Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực $a$ và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khi đó, nếu $\sqrt[n]{a^m}$ có nghĩa thì
$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

### 1.1.4 Luỹ thừa với số mũ vô tỉ

Cho số dương $a$, $\alpha$ là một số vô tỉ và $(r_n)$ là một dãy số hửu tỉ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \alpha$. Khi đó
$$a^\alpha = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n}.$$

### 1.1.5 Các tính chất

Cho $a, b > 0; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Khi đó

- $a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta};\ (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta};$
- $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha;\ a^\alpha > 0;$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha};\ \dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta};$
- Nếu $a > 1$ thì $\alpha > \beta$ khi và chỉ khi $a^\alpha > a^\beta$;
- Nếu $0 < a < 1$ thì $\alpha > \beta$ khi và chỉ khi $a^\alpha < a^\beta$.

## 1.2 HÀM SỐ LUỸ THỪA

### 1.2.1 Định nghĩa

Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số luỹ thừa.

### 1.2.2 Tập xác định

Tập xác định $D$ của hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$ tuỳ thuộc vào giá trị của $\alpha$, cụ thể như sau:

- Nếu $\alpha$ nguyên dương thì $D = \mathbb{R}$;
- Nếu $\alpha$ nguyên âm thì $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$;
- Nếu $\alpha$ không nguyên thì $(0; +\infty$

### 1.2.3 Đạo hàm

Hàm số $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
Đối với hàm số hợp $y = u^\alpha, u = u(x)$, ta có $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$.

### 1.2.4 Tính chất của hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$ trên khoảng $(0; +\infty)$

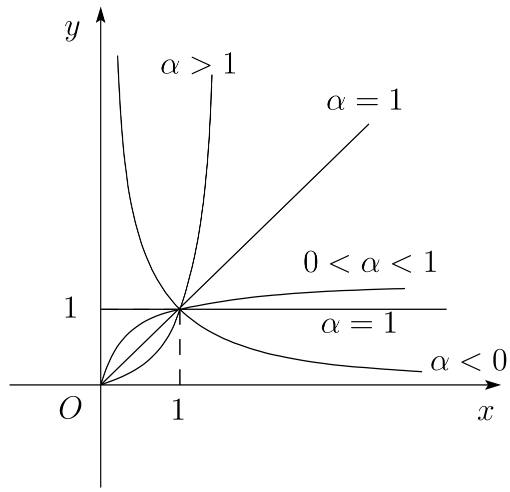
Ta có các tính chất sau

- Đồ thị luôn đi qua điểm $(1; 1)$;
- Khi $\alpha > 0$ hàm số luôn đồng biến, khi $\alpha < 0$ hàm số luôn nghịch biến;
- Đồ thị của hàm số không có tiệm cận khi $\alpha > 0$. Khi $\alpha < 0$ đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là $Ox$, tiệm cận đứng là $Oy$.

VIETMATHS.NET

### 1.2.5 Đồ thị

Đồ thị của hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ứng với các giá trị khác nhau của $\alpha$ (hình vẽ).




## 1.3 LÔGARIT

### 1.3.1 Định nghĩa

Cho hai số $a, b$ với $a \neq 1$. Số $\alpha$ thoả mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số $a$ của $b$ và kí hiệu là $\log_a b$. Như vậy

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow \ a^\alpha = b \quad (a, b > 0, a \neq 1).$$

### 1.3.2 Các tính chất

Với $a > 0, a \neq 1, b > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ ta có

$$\log_a 1 = 0;\ \log_a a = 1;$$
$$a^{\log_a b} = b;\ \log_a(a^\alpha) = \alpha.$$

### 1.3.3 Các quy tắc tính

- Với $a, b_1, b_2 > 0, a \neq 1$, ta có

$$\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2;$$
$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2.$$

**Chú ý.** Ta có $\log_a(b_1 b_2) = \log_a |b_1| + \log_a |b_2|,$ nếu $b_1, b_2 < 0.$

- Với $a, b > 0, a \neq 1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b;$$
$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b;\ \log_a b^{2\beta} = 2\beta.\log_a |b|;$$
$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b.$$

- Với $a, b, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$, ta có

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a};\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a}\ (b \neq 1);\ \log_a b = 0\ (b = 1);$$
$$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b\ (\alpha \neq 0).$$

### 1.3.4 Lôgarit thập phân, lôgarit tự nhiên

Lôgarit cơ số 10 được gọi là lôgarit thập phân. Ta thường viết $\log_{10} b$ là $\lg b$ hoặc $\log b$.
Lôgarit cơ số $e$ được gọi là lôgarit tự nhiên. Ta thường viết $\log_e b$ là $\ln b$.

## 1.4 HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT

### 1.4.1 Hàm số mũ

- Hàm số $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ được gọi là hàm sô mũ cơ số $a$.
- Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm tại mọi $x$ và $(a^x)' = a^x \ln a$. Đặc biệt, $(e^x)' = e^x$.
- Các tính chất
  a) Tập xác định của hàm số mũ là $\mathbb{R}$.
  b) Khi $a > 1$ hàm số luôn đồng biến.
  Khi $0 < a < 1$ hàm số luôn nghịch biến.
  c) Đồ thị có tiệm cận ngang là $Ox$ và luôn đi qua các điểm $(0; 1), (1; a)$ và nằm phía trên trục hoành.

### 1.4.2 Hàm số lôgarit

- Hàm số $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số $a$.
- Hàm số lôgarit có đạo hàm tại mọi $x > 0$ và $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
  Đặc biệt, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
- Các tính chất
  a) Tập xác định của hàm số lôgarit là $(0; +\infty)$;

VIETMATHS.NET
VIETMATHS.NET

b) Khi $a > 1$ thì hàm số luôn đồng biến;
Khi $0 < a < 1$ thì hàm số luôn nghịch biến.

c) Đồ thị có tiệm cận đứng là $Oy$ và luôn đi qua các điểm $(1;0),(a;1)$ và nằm phía bên phải trục tung.

## 1.5 PHƯƠNG TRÌNH MŨ, PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

### 1.5.1 Phương trình mũ

- Phương trình mũ là phương trình chứa ẩn số ở số mũ của luỹ thừa.
- Phương trình mũ cơ bản là phương trình có dạng $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$.
  Nếu $b \leq 0$, phương trình vô nghiệm;
  Nếu $b > 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

### 1.5.2 Phương trình lôgarit

- Phương trình lôgarit là phương trình chứa ẩn số dưới dấu lôgarit.
- Phương trình lôgarit cơ bản là phương trình có dạng $\log_a x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$.
  Phương trình lôgarit cơ bản luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

### 1.5.3 Hệ phương trình mũ và lôgarit

Hệ phương trình mũ là hệ phương trình có chứa ít nhất một phương trình mũ.
Hệ phương trình lôgarit là hệ phương trình có chưa ít nhất một phương trình lôgarit.

### 1.5.4 Bất phương trình mũ và lôgarit

*Bất phương trình mũ cơ bản* có một trong các dạng

$$a^x > b; \quad a^x \geq b; \quad a^x < b; \quad a^x \leq b,$$

trong đó $a > 0,\ a \neq 1$.
Để giải bất phương trình mũ cơ bản, ta sử dụng tính chất của hàm số mũ. Chẳng hạn giải bất phương trình $a^x > b$ ta làm như sau:
Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$, vì $a^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Xét $b > 0$, khi đó

Với $a > 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow a^x > a^{\log_a b} \Leftrightarrow x > \log_a b$;

Với $0 < a < 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow a^x > a^{\log_a b} \Leftrightarrow x < \log_a b$.

*Bất phương trình lôgarit cơ bản* có một trong các dạng:

$$\log_a x > b; \quad \log_a x \geq b; \quad \log_a x < b; \quad \log_a x \leq b,$$

trong đó $a > 0,\ a \neq 1$.
Để giải bất phương trình lôgarit cơ bản, ta sử dụng tính chất của hàm số lôgarit. Chẳng hạn giải bất phương trình $\log_a x > b$, ta làm như sau:
Với $a > 1$, ta có $\log_a x > b \Leftrightarrow \log_a x > \log_a a^b \Leftrightarrow x > a^b$;
Với $0 < a < 1$, ta có $\log_a x > b \Leftrightarrow \log_a x > \log_a a^b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$.

# §2 CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

## 2.1 BÀI TẬP VỀ LUỸ THỪA

Đối với luỹ thừa, các dạng bài tập chủ yếu là: tính toán, rút gọn biểu thức, so sánh các số,...
**Phương pháp giải.** Đây đều là các bài tập đơn giản, để giải các bài tập này ta chỉ cần sử dụng định nghĩa và các tính chất cơ bản của luỹ thừa đã nêu ở mục trước.
**Chú ý.** Để so sánh các căn thức, ta thường đưa chúng về cùng một căn bậc $n$ nào đó để so sánh (thông thường $n$ này là bội chung nhỏ nhất của các chỉ số của các căn thức đó). Sau đây là các ví dụ.

**Ví dụ 2.1.** Rút gọn các biểu thức sau
a) $A = (0,04)^{-1,5} - (0,125)^{\frac{-2}{3}}$; b) $B = \left(6^{\frac{-2}{7}}\right)^{-7} + \left[(0,2)^{0,75}\right]^{-4}$;
c) $C = \dfrac{a^{\sqrt{5}+3}.a^{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}}{(a^{2\sqrt{2}-1})^{2\sqrt{2}+1}}$; d) $D = \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2 : \left(b - 2b\sqrt{\dfrac{b}{a}} + \dfrac{b^2}{a}\right)$ $(a, b > 0)$.

**Lời giải.** Ta có
a) $A = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^{\frac{-3}{2}} - \left[2^{-3}\right]^{\frac{-2}{3}} = 5^3 - 2^2 = 121$.
b) $B = 6^2 + \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{-4} = 6^2 + 5^3 = 161$.
c) $C = \dfrac{a^{\sqrt{5}+3}.a^{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}}{(a^{2\sqrt{2}-1})^{2\sqrt{2}+1}} = \dfrac{a^{\sqrt{5}+3}.a^{5-\sqrt{5}}}{a^{(2\sqrt{2})^2-1^2}} = \dfrac{a^{\sqrt{5}+3+5-\sqrt{5}}}{a^{8-1}} = \dfrac{a^8}{a^7} = a$.
d) Ta có

$$\begin{aligned}
D &= \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2 : \left(b - 2b\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b^2}{a}\right) = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 : b\left[1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right] \\
&= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 : b\left(1 - \sqrt{b}a\right)^2 = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{b.\left(\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2} \\
&= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{b.\dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a}} = \frac{a}{b}.
\end{aligned}$$

**Ví dụ 2.2.** So sánh các cặp số sau

a) $\sqrt[4]{6}$ và $\sqrt[3]{5}$; b) $\sqrt{10}$ và $\sqrt[3]{30}$;
c) $\left(\dfrac{\pi}{5}\right)^{\sqrt{10}-3}$ và 1; d) $e^{\sqrt{3}+1}$ và $e^{\sqrt{7}}$.



VIETMATHS.NET

**Lời giải.** a) Đưa các căn thức về cùng căn bậc 12, ta có

$$\sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216};$$
$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}.$$

Mà $216 < 625$ nên $\sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{5}$.
b) Đưa các căn thức về cùng căn bậc 6, ta có

$$\sqrt{10} = \sqrt[6]{10^3} = \sqrt[6]{1000};$$
$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[6]{30^2} = \sqrt[6]{900}.$$

Mà $1000 > 900$ nên $\sqrt{10} > \sqrt[3]{30}$.
c) Ta có

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\sqrt{10}-3} = \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\sqrt{10}}}{\left(\frac{\pi}{5}\right)^{3}}.$$

Lại có $0 < \pi < 5$ nên $0 < \dfrac{\pi}{5} < 1$ và $\sqrt{10} > 3$, do đó $\left(\dfrac{\pi}{5}\right)^{\sqrt{10}} < \left(\dfrac{\pi}{5}\right)^{3}$.
Mà $\left(\dfrac{\pi}{5}\right)^{3} > 0$ nên

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\sqrt{10}-3} = \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\sqrt{10}}}{\left(\frac{\pi}{5}\right)^{3}} < 1.$$

d) So sánh $\sqrt{3}+1$ và $\sqrt{7}$, ta có

$$(\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{7})^2 = 3+1+2\sqrt{3}-7 = 2\sqrt{3}-3.$$

Hơn nữa

$$(2\sqrt{3})^2 - 3^2 = 4.3 - 9 = 3 > 0.$$

Do đó $\sqrt{3}+1 > \sqrt{7}$, mà $e > 1$ nên $e^{\sqrt{3}+1} > e^{\sqrt{7}}$.

**Ví dụ 2.3.** Tính giá trị của biểu thức

a) $A = \dfrac{a^{\frac{5}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{-3}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{-1}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right)}$, với $a = \pi - 3\sqrt{2}$;

b) $B = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})\left[a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - (ab)^{\frac{1}{3}}\right]$, với $a = 7 - \sqrt{2}, b = \sqrt{2} + 3$.

**Lời giải.** a) Rút gọn $A$, ta có

$$A = \frac{a^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}} - a^{\frac{5}{2}+\frac{-3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}} - a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}} = \frac{a^3 - a}{1 - a^2} = -a.$$

Do đó

$$A = -(\pi - 3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - \pi.$$

b) Rút gọn $B$, ta có

$$B = \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left[\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2\right] = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a + b.$$

Do đó

$$B = (7 - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} + 3) = 10.$$

# Bài tập tương tự.

**Bài tập 2.1.** Tính giá trị các biểu thức

a) $A = 4^{3+\sqrt{2}}.2^{1-\sqrt{2}}.2^{-3-\sqrt{2}}$;

b) $B = \dfrac{12^{3+\sqrt{5}}}{4^{2+\sqrt{5}}.3^{1+\sqrt{5}}}$;

c) $C = \left(49^{1+\sqrt{2}} - 7^{2\sqrt{2}}\right).7^{-1-2\sqrt{2}}$.

*Đáp số.* a) $A = 16$; b) $B = 36$; c) $C = \dfrac{48}{7}$.

**Bài tập 2.2.** Đơn giản các biểu thức

a) $A = \sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}},\ (a > 0)$;

b) $B = \sqrt[7]{\dfrac{a}{b}\sqrt[5]{\dfrac{b}{a}}},\ (a, b \neq 0)$;

c) $C = \left(a^{\frac{-1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right).a^{\frac{2}{3}}.\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{-1}{3}}\right)$;

d) $D = 1 + (a-1)(\sqrt{a} - \sqrt[4]{a} + 1)(\sqrt{a} + \sqrt[4]{a} + 1)(a - \sqrt{a} + 1),\ (a \geq 0)$.

*Hướng dẫn.* a) $A = a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{9}}.a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{11}{18}}$;

b) $B = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{7}}.\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{35}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{7}}.\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{-1}{35}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{7}-\frac{1}{35}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{4}{35}}$;

c) $C = a^{\frac{2}{3}}.\left[\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^2 - \left(a^{\frac{-1}{3}}\right)^2\right] = a^{\frac{2}{3}}.\left(a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{-2}{3}}\right) = a^2 - 1$;

d) Ta có

$$\begin{aligned} D &= 1 + (a-1)[(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt[4]{a})^2](a - \sqrt{a} + 1) \\ &= 1 + (a-1)(a + \sqrt{a} + 1)(a - \sqrt{a} + 1) \\ &= 1 + (a-1)[(a+1)^2 - (\sqrt{a})^2] \\ &= 1 + (a-1)(a^2 + a + 1) = 1 + (a^3 - 1) = a^3. \end{aligned}$$

**Bài tập 2.3.** Tính giá trị các biểu thức

a) $A = a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{4}}.\sqrt[12]{a^5}$ với $a = 3,14$;

VIETMATHS.NET

VIETMATHS.NET

b) $B = \dfrac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \dfrac{b^{\frac{-1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{-1}{2}}}$ với $a = 3 - \sqrt{2}, b = \sqrt{2} - 2$.

*Đáp số.* a) $A = a = 3,14$; b) $B = a + b = 1$.

**Bài tập 2.4.** So sánh các cặp số

$$\text{a) } \sqrt[3]{10} \text{ và } \sqrt[5]{20}; \qquad \text{b) } \left(\frac{1}{e}\right)^{\sqrt{8}-3} \text{ và } 1;$$
$$\text{c) } \left(\frac{1}{8}\right)^{\pi} \text{ và } \left(\frac{1}{8}\right)^{3,14}; \quad \text{d) } \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1,4} \text{ và } \pi^{-\sqrt{2}}.$$

*Hướng dẫn.* a) $\sqrt[3]{10} = \sqrt[15]{10^5} > \sqrt[15]{20^3} = \sqrt[5]{20}$.

b) Vì $\dfrac{1}{e} < 1$ và $\sqrt{8} - 3 < 0$ nên $\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\sqrt{8}-3} > 1$.

c) Vì $\dfrac{1}{8} < 1$ và $\pi > 3,14$ nên $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\pi} < \left(\dfrac{1}{8}\right)^{3,14}$.

d) Vì $\dfrac{1}{\pi} < 1$ và $1,4 < \sqrt{2}$ nên $\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{1,4} > \pi^{-\sqrt{2}}$.

## 2.2 BÀI TẬP VỀ HÀM SỐ LUỸ THỪA

Bài tập về hàm số luỹ thừa bao gồm các dạng như tìm tập xác định, tính đạo hàm, khảo sát vẽ đồ thị của hàm số luỹ thừa, so sánh các số dựa vào tính đơn điệu của hàm số luỹ thừa. Sau đây là các ví dụ.

**Ví dụ 2.4.** Tìm tập xác định và tính đạo hàm của các hàm số

$$\text{a) } y = (x^3 - 8)^{\frac{\pi}{3}}; \qquad \text{b) } y = (x^2 + x - 6)^{\frac{-1}{3}}.$$

**Chú ý.** Tập xác định của hàm số luỹ thừa phụ thuộc vào cả số mũ và biểu thức chứa biến (cơ số) của hàm số đó, cụ thể

- Nếu số mũ là số nguyên dương thì hàm số xác định khi cơ số là số thực;
- Nếu số mũ là 0 hoặc số nguyên âm thì hàm số xác định khi cơ số khác 0;
- Nếu số mũ là hữu tỉ hoặc số thực thì hàm số xác định khi cơ số dương.

Trên cơ sở đó, ta dễ dàng có lời giải cho bài toán.
**Lời giải.** a) Hàm số $y = (x^3 - 8)^{\frac{\pi}{3}}$ xác định khi và chỉ khi $x^8 - 8 > 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $(2; +\infty)$.
Đạo hàm của hàm số là

$$y' = \frac{\pi}{3}.(x^3 - 8)'.(x^3 - 8)^{\frac{\pi}{3}-1} = \frac{\pi}{3}.3x^2.(x^3 - 8)^{\frac{\pi}{3}-1} = x^2(x^3 - 8)^{\frac{\pi}{3}-1}.$$

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2+x-6>0 \Leftrightarrow x<-3,$ hoặc $x>=2$.
Vậy tập xác định của hàm số là $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$.
Đạo hàm của hàm số là

$$y'=\frac{-1}{3}.(x^2+x-6)'.(x^2+x-6)^{\frac{-1}{3}-1}=\frac{-(2x+1)(x^2+x-6)^{\frac{-4}{3}}}{3}.$$

**Ví dụ 2.5.** Viết các số sau theo thứ tự tăng dần

a) $0,3^{\pi};0,3^{0,5};0,3^{\frac{2}{3}};0,3^{3,15}$;

b) $\sqrt{2^{\pi}};1,8^{\pi};\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi};\pi^{\pi}$.

**Lời giải.** a) Ta có cơ số $a=0,3<1$ và $3,15>\pi>\dfrac{2}{3}>0,5$ nên thứ tự tăng dần là

$$0,3^{3,15};0,3^{\pi};0,3^{\frac{2}{3}};0,3^{0,5}.$$

b) Vì số mũ $\pi>0$ nên hàm số luỹ thừa $y=x^{\pi}$ luôn đồng biến. Mặt khác

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}<1,8<\pi,$$

nên thứ tự tăng dần là

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi};\sqrt{2^{\pi}};1,8^{\pi};\pi^{\pi}.$$

## Bài tập tương tự.

**Bài tập 2.5.** Tìm tập xác định và tính đạo hàm của các hàm số

a) $y=(x^2-3x-4)^{\frac{1}{4}}$; b) $y=(2-x^2)^{\frac{3}{5}}$;
c) $y=(3x^2-1)^{-2}$; d) $y=\sqrt[3]{1-x}$.

**Bài tập 2.6.** Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số $y=x^5$ và $y=x^{-5}$ trên cùng một hệ tọa độ. Từ các đồ thị trên hãy suy ra các đồ thị hàm số

a) $y=|x|^5$; b) $y=|x^{-5}|$.

**Bài tập 2.7.** Sắp xếp các số sau theo thứ tự giảm dần

a) $0,5^{\frac{-2}{3}};1,3^{\frac{-2}{3}};\pi^{\frac{-2}{3}};\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{-2}{3}}$; b) $5^{-2};5^{-0,7};5^{\frac{1}{3}};\left(\frac{1}{5}\right)^{2,2}$.

*Hướng dẫn.* a) $y=x^{\frac{-2}{3}}$ luôn nghịch biến; b) $y=5^x$ luôn đồng biến.



VIETMATHS.NET

## 2.3 BÀI TẬP VỀ LÔGARIT

Bài tập về lôgarit bao gồm các dạng như tính toán các biểu thức lôgarit, so sánh các biểu thức chứa lôgarit, chứng minh các đẳng thức và bất đẳng thức mũ, lôgarit,... Để giải các bài tập này, chúng ta chỉ cần sử dụng các qui tắc tính toán của lôgarit.

**Ví dụ 2.6.** Tính toán các biểu thức

$$\text{a) } A = \log_{\frac{1}{25}} 5\sqrt[4]{5}; \quad \text{b) } B = 9^{\frac{1}{2}\log_3 2 - 2\log_{27} 3};$$
$$\text{c) } C = \log_3 \log_2 8; \quad \text{d) } D = 2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}.$$

**Lời giải.** a) $A = \log_{5^{-2}} 5^{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{2}.\frac{5}{4}.\log_5 5 = -\frac{5}{8}$.

b) $B = 9^{\frac{1}{2}\log_3 2 - 2\log_{27} 3} = 3^{\log_3 2 - \frac{4}{3}\log_3 3} = \dfrac{2}{3^{\frac{4}{3}}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{3}}$.

c) $C = \log_3 \log_2 8 = \log_3 \log_2 2^3 = \log_3 3 = 1$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} D &= \log_{\frac{1}{3}} 6^2 - \log_{\frac{1}{3}} 400^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{3}} (\sqrt[3]{45})^3 \\ &= \log_{\frac{1}{3}} 36 - \log_{\frac{1}{3}} 20 + \log_{\frac{1}{3}} 45 \\ &= \log_{\frac{1}{3}} \frac{36.45}{20} = \log_{3^{-1}} 81 = -\log_3 3^4 = -4. \end{aligned}$$

**Ví dụ 2.7.** (Tính toán biểu thức có điều kiện)

a) Tính $A = \log_6 16$ biết $\log_{12} 27 = a$;

b) Tính $B = \log_{125} 30$ biết $\lg 3 = a$ và $\lg 2 = b$;

c) Tính $C = \log_6 35$ biết $\log_{27} 5 = a, \log_8 7 = b, \log_2 3 = c$;

d) Tính $D = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}$ biết $\log_a b = \sqrt{3}$.

**Nhận xét.** Đối với các bài tập dạng này, chúng ta thường phân tích các lôgarit cần tính và các lôgarit đã cho về dạng lôgarit cơ số nguyên tố. Thông thường, các lôgarit đó có mối liên hệ với nhau.

**Lời giải.** a) Chọn 2 làm cơ số, ta có

$$A = \log_6 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 6} = \frac{4}{1 = \log_2 3}.$$

Mặt khác

$$x = \log_{12} 27 = \frac{\log_2 27}{\log_2 12} = \frac{3\log_2 3}{2 + \log_2 3}.$$

Do đó $\log_2 3 = \dfrac{2x}{3-x}$ và suy ra $A = \dfrac{4(3-x)}{3+x}$.

b) Ta có

$$B = \frac{\lg 30}{\lg 125} = \frac{\lg 10 + \lg 3}{3\lg \dfrac{10}{2}} = \frac{1+\lg 3}{3(1-\lg 2)} = \frac{1+a}{3(1-b)}.$$

c) Ta có

$$C = \log_6 5 + \log_6 7 = \frac{1}{\dfrac{1}{\log_2 5} + \dfrac{1}{\log_3 5}} + \frac{1}{\dfrac{1}{\log_2 7} + \dfrac{1}{\log_3 7}}.$$

Ta đi tính $\log_2 5; \log_3 5; \log_2 7; \log_3 7$ theo $a, b, c$. Từ

$$a = \log_{27} 5 = \log_{3^3} 5 = \frac{1}{3}\log_3 5,$$

suy ra $\log_3 5 = 3a$, do đó

$$\log_2 5 = \log_2 3.\log 35 = 3ac.$$

Mặt khác $b = \log_8 7 = \log_{2^3} 7 = \dfrac{1}{3}\log_2 7$ nên $\log_2 7 = 3b$. Do đó

$$\log_3 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 3} = \frac{3b}{c}.$$

Vậy

$$C = \frac{1}{\dfrac{1}{3ac} + \dfrac{1}{3a}} + \frac{1}{\dfrac{1}{3b} + \dfrac{c}{3b}} = \frac{3(ac+b)}{1+c}.$$

d) Điều kiện $a > 0, a \neq 1, b > 0$.
Từ giả thiết $\log_a b = \sqrt{3}$ suy ra $b = a^{\sqrt{3}}$. Do đó

$$\frac{\sqrt{b}}{a} = a^{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}; \ \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}} = a^{\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)}.$$

Từ đó ta tính được

$$A = \log_{a^\alpha} a^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha} = \log_{a^\alpha}(a^\alpha)^{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{với } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1).$$

**Ví dụ 2.8.** Tính

a) $A = \dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_3 x} + \cdots + \dfrac{1}{\log_{2007} x}$ với $x = 2007!$;

b) $B = \lg\tan 1^0 + \lg\tan 2^0 + \cdots + \lg\tan 89^0$.

**Lời giải.** a) Sử dụng công thức $\dfrac{1}{\log_b a} = \log_a b$, hơn nữa $x = 2007! > 1$ nên ta có

$$\begin{aligned} A &= \log_x 2 + \log_x 3 + \cdots + \log_x 2007 \\ &= \log_x (2.3\ldots 2007) \\ &= \log_x x = 1. \end{aligned}$$



VIETMATHS.NET

b) Nhận thấy

$$\lg\tan 1^0 + \lg\tan 89^0 = \lg(\tan 1^0.\tan 89^0) = \lg 1 = 0.$$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned}&\lg\tan 2^0 + \lg\tan 88^0 = 0;\\ &\ \ ...\\ &\lg\tan 44^0 + \lg\tan 46^0 = 0;\\ &\lg\tan 45^0 = \lg 1 = 0.\end{aligned}$$

Do đó

$$B = (\lg\tan 1^0 + \lg\tan 89^0) + (\lg\tan 2^0 + \lg\tan 88^0) + \cdots + \lg\tan 45^0 = 0.$$

**Nhận xét.** Đây là bài tập không khó, nhưng khi giải phải sử dụng kĩ năng biến đổi, do đó có thể kích thích được sự tư duy, sáng tạo của học sinh.

**Ví dụ 2.9.** (Chứng minh đẳng thức lôgarit)

a) Cho các số dương $a, b$ thoả mãn $a^2 + 4b^2 = 12ab$. Chứng minh rằng

$$\lg(a+2b) - 2\lg 2 = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b);$$

b) Cho $a = 10^{\frac{1}{1-\lg b}}; b = 10^{\frac{1}{1-\lg c}}$. Chứng minh rằng $c = 10^{\frac{1}{1-\lg a}}$;

**Lời giải.** a) Ta có

$$a^2 + 4b^2 = 12ab \Leftrightarrow (a+2b)^2 = 16ab.$$

Do $a, b$ dương nên $a + 2b = 4\sqrt{ab}$. Khi đó, lấy lôgarit cơ số 10 hai vế ta được

$$\lg(a+2b) = \lg 4 + \frac{1}{2}\lg(ab)$$

hay

$$\lg(a+2b) - 2\lg 2 = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b).$$

b) Giả sử $a, b, c$ đều dương và khác 10. Để biểu diễn $c$ theo $a$, ta rút $\lg b$ từ biểu thức $a = 10^{\frac{1}{1-\lg b}}$ và thế vào biểu thức $b = 10^{\frac{1}{1-\lg c}}$ (sau khi lấy lôgarit cơ số 10 hai vế). Ta có

$$a = 10^{\frac{1}{1-\lg b}} \Rightarrow \lg a = \frac{1}{1-\lg b} \Rightarrow \lg b = 1 - \frac{1}{\lg a}.$$

Mặt khác, từ $b = 10^{\frac{1}{1-\lg c}}$ suy ra $\lg b = \dfrac{1}{1-\lg c}$. Do đó

$$\begin{aligned}&1 - \frac{1}{\lg a} = \frac{1}{1-\lg c}\\ &\Rightarrow 1 - \lg c = \frac{\lg a}{\lg a - 1} = 1 + \frac{1}{\lg a - 1}\\ &\Rightarrow\ \lg c = \frac{1}{1-\lg a}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $c = 10^{\frac{1}{1-\lg a}}$.

**Ví dụ 2.10.** So sánh

a) $\log_3 2$ và $\log_2 3$; b) $\log_2 3$ và $\log_3 11$;

c) $\dfrac{1}{2} + \lg 3$ và $\lg 19 - \lg 2$; d) $\lg \dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$ và $\dfrac{\lg 5 + \lg\sqrt{7}}{2}$.

**Nhận xét.** Thông thường, để so sánh các lôgarit, chúng ta so sánh chúng với một số nguyên nào đó.

**Lời giải.** a) Ta có

$$\log_3 2 < \log_3 3 = 1 = \log_2 2 < \log_2 3.$$

b) Ta có

$$\log_2 3 < \log_2 4 = 2 = \log_3 9 < \log_3 11.$$

c) Đưa về cùng một lôgarit cơ số 10, ta có

$$\frac{1}{2} + \lg 3 = \frac{1}{2}\lg 10 + \lg 3 = \lg 3\sqrt{10};$$
$$\lg 19 - \lg 2 = \lg\frac{19}{2}.$$

Ta so sánh hai số $3\sqrt{10}$ và $\dfrac{19}{2}$. Ta có

$$(3\sqrt{10})^2 = 9.10 = 90 = \frac{360}{4} < \frac{361}{4} = \left(\frac{19}{2}\right)^2,$$

vì vậy $3\sqrt{10} < \dfrac{19}{2}$. Từ đó suy ra $\dfrac{1}{2} + \lg 3 < \lg 19 - \lg 2$.

d) Ta có

$$\frac{\lg 5 + \lg\sqrt{7}}{2} = \lg(5\sqrt{7})^{\frac{1}{2}} = \lg\sqrt{5\sqrt{7}}.$$

Ta đi so sánh hai số $\sqrt{5\sqrt{7}}$ và $\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$. Ta có

$$\sqrt{5\sqrt{7}}^{\,2} = 5\sqrt{7};$$
$$\left(\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \frac{32+10\sqrt{7}}{4} = 8 + \frac{5}{2}\sqrt{7}.$$

Xét hiệu

$$8 + \frac{5}{2}\sqrt{7} - 5\sqrt{7} = 8 - \frac{5}{2}\sqrt{7} = \frac{16-5\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{256}-\sqrt{175}}{2} > 0.$$

Suy ra $8 + \dfrac{5}{2}\sqrt{7} > 5\sqrt{7}$. Do đó $\dfrac{5+\sqrt{7}}{2} > \sqrt{5\sqrt{7}}$, và

$$\lg\frac{5+\sqrt{7}}{2} > \frac{\lg 5 + \lg\sqrt{7}}{2}.$$

**Ví dụ 2.11.** (Chứng minh các bất đẳng thức lôgarit)



VIETMATHS.NET

a) Không dùng máy tính, chứng minh rằng $2 < \log_2 3 + \log_3 2 < \dfrac{5}{2}$;

b) Cho $a \geq 1, b \geq 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{\ln a} + \sqrt{\ln b}}{2} \leq \sqrt{\ln \dfrac{a+b}{2}}$;

c) Chứng minh rằng $\log_{2006} 2007 > \log_{2007} 2008$. Hãy phát biểu và chứng minh bài toán tổng quát?

**Lời giải.** a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương, ta có

$$\log_2 3 + \log_3 2 > 2\sqrt{\log_2 3.\log_3 2} = 2\sqrt{1} = 2$$

(không xảy ra dấu " = " vì $\log_2 3 \neq \log_3 2$).
Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned}\log_2 3 + \log_3 2 < \frac{5}{2} &\Leftrightarrow \log_2 3 + \frac{1}{\log_2 3} - \frac{5}{2} < 0\\ &\Leftrightarrow 2\log_2^2 3 - 5\log_2 3 + 2 < 0\\ &\Leftrightarrow (2\log_2 3 - 1)(\log_2 3 - 2) < 0. \qquad (*)\end{aligned}$$

Hơn nữa, $2\log_2 3 > 2\log_2 2 > 1$ nên $2\log_2 3 - 1 > 0$. Mà

$$\log_2 3 < \log_2 4 = 2 \text{ nên } \log_2 3 - 2 < 0.$$

Từ đó suy ra $(*)$ luôn đúng. Vậy $2 < \log_2 3 + \log_3 2 < \dfrac{5}{2}$.
b) Vì $a, b \geq 1$ nên $\ln a, \ln b, \ln \dfrac{a+b}{2}$ không âm. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\ln a + \ln b \geq 2\sqrt{\ln a.\ln b}.$$

Suy ra
$$2(\ln a + \ln b) \geq \ln a + \ln b + 2\sqrt{\ln a.\ln b} = (\sqrt{\ln a} + \sqrt{\ln b})^2.$$

Mặt khác
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \ln \frac{a+b}{2} \geq \frac{1}{2}(\ln a + \ln b).$$

Từ đó ta có $\ln \dfrac{a+b}{2} \geq \dfrac{1}{4}(\sqrt{\ln a} + \sqrt{\ln b})^2$ hay $\dfrac{\sqrt{\ln a} + \sqrt{\ln b}}{2} \leq \sqrt{\ln \dfrac{a+b}{2}}$.
c) Ta chứng minh bài toán tổng quát

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2),\ \forall n > 1.$$

Thật vậy, từ $(n+1)^2 = n(n+2) + 1 > n(n+2) > 1$ suy ra

$$\begin{aligned}\log_{(n+1)^2} n(n+2) < 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_{n+1} n(n+2) < 1\\ &\Leftrightarrow \log_{n+1} n + \log_{n+1}(n+2) < 2.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$2 > \log_{n+1} n + \log_{n+1}(n+2) > 2\sqrt{\log_{n+1} n . \log_{n+1}(n+2)}.$$

Do đó ta có $1 > \log_{n+1} n . \log_{n+1}(n+2)$, và

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2),\ \forall n > 1.$$

## Bài tập tương tự.

**Bài tập 2.8.** Tính giá trị các biểu thức

$$\text{a) } A = \log_{\frac{1}{3}} 5 . \log_{25} \frac{1}{27}; \quad \text{b) } B = (\sqrt[3]{9})^{\frac{3}{5\log_5 3}};$$
$$\text{c) } C = \log_a a^2 . \sqrt[4]{a^3 \sqrt[5]{a}}; \quad \text{d) } D = \lg \log_{\frac{1}{a^3}} \sqrt[5]{a\sqrt{a}}.$$

*Đáp số.* a) $A = \dfrac{3}{2}$; b) $B = \sqrt[5]{25}$; c) $C = \dfrac{14}{5}$; d) $D = \lg 9 - 1$.

**Bài tập 2.9.** Tính

a) $A = \log_{25} 15$ theo $a = \log_3 15$;

b) $B = \log_{\sqrt[3]{7}} \dfrac{121}{8}$ theo $a = \log_{49} 11, b = \log_2 7$;

c) $C = \log_{140} 63$ theo $a = \log_2 3, b = \log_3 5, c = \log_2 7$;

d) $D = \log_{\sqrt{ab}} \dfrac{b}{\sqrt{a}}$ biết $\log_a b = \sqrt{5}$.

*Đáp số.* a) $A = \dfrac{a}{2(a-1)}$; b) $B = 12a - \dfrac{9}{b}$; c) $C = \dfrac{2ac+1}{abc+2c+1}$; d) $D = \dfrac{11-3\sqrt{5}}{4}$.

**Bài tập 2.10.** (Chứng minh các đẳng thức có điều kiện)

a) Cho các số dương $a, b, c$ $(c \neq 1)$. Chứng minh rằng $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$;

b) Cho $a = \log_{12} 18, b = \log_{24} 54$. Chứng minh rằng $ab + 5(a-b) = 1$;

c) Cho các số dương $a, b$ thoả mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Chứng minh rằng

$$\log_7 \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_7 a + \log_7 b);$$

d) Cho các số dương $a, b$ và $4a^2 + 9b^2 = 4ab$. Chứng minh rằng

$$\lg \frac{2a+3b}{4} = \frac{\lg a + \lg b}{2}.$$

VIETMATHS.NET

*Hướng dẫn.* a) Đặt $x = \log_c b$ thì $b = c^x$ nên

$$b^{\log_c a} = (c^x)^{\log_c a} = \left(c^{\log_c a}\right)^x = a^x = a^{\log_c b}.$$

b) Tính $\log_2 3$ theo $a$ và theo $b$ ta được $\log_2 3 = \dfrac{2a-1}{2-a}$; $\log_2 3 = \dfrac{3b-1}{3-b}$.
(chú ý rằng $a \neq 2, b \neq 3$).
Từ hệ thức $\dfrac{2a-1}{2-a} = \dfrac{3b-1}{3-b}$ suy ra điều phải chứng minh.
c) Từ giả thiết suy ra $\left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2 = ab$. Lấy lôgarit cơ số 7 hai vế, ta được điều phải chứng minh.
d) Từ giả thiết suy ra $\dfrac{2a+3b}{4} = \sqrt{ab}$. Lôgarit hai vế với cơ số 10.

**Bài tập 2.11.** So sánh

a) $\log_3 5$ và $\log_7 4$; b) $\log_{0,3} 2$ và $\log_5 3$;
c) $\log_2 10$ và $\log_5 50$; d) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5}$ và $\sqrt[3]{18}$.

*Hướng dẫn.* a) $\log_3 5 > \log_3 3 = 1 = \log_7 7 > \log_7 4$.

b) $\log_{0,3} 2 = -\log_3 2 < 0 < \log_5 3$.

c) $\log_2 10 > \log_2 8 = 3 = \log_5 125 > \log_5 50$.

d) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5} = (6^{-1})^{\log_6 2 - \log_6 5} = \dfrac{5}{2} = \sqrt[3]{\dfrac{125}{8}} < \sqrt[3]{18}.$

## 2.4 BÀI TẬP VỀ HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT

Các dạng bài tập cơ bản, bao gồm tìm tập xác định, vẽ đồ thị của hàm số mũ, hàm số lôgarit, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số mũ và hàm số lôgarit dựa vào tính đơn điệu của chúng.

**Ví dụ 2.12.** Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \log_3(x^2 - 2x)$; b) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x-3) - 1}$.

**Lời giải.** a) Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
b) Hàm số xác định khi và chỉ khi

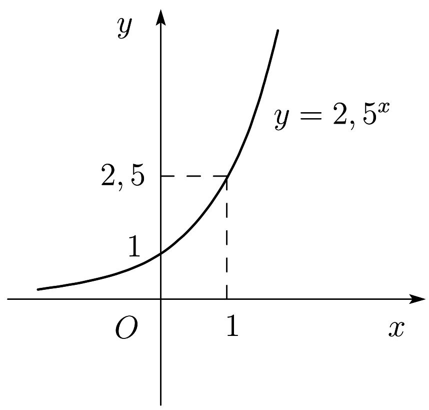
$$\begin{cases} x - 3 > 0, \\ \log_{\frac{1}{3}}(x-3) - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x = 3 \leq \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \leq \dfrac{10}{3}.$$

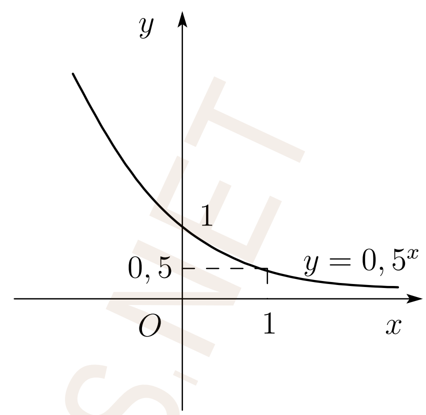
Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left(3; \dfrac{10}{3}\right]$.

**Ví dụ 2.13.** Vẽ đồ thị các hàm số

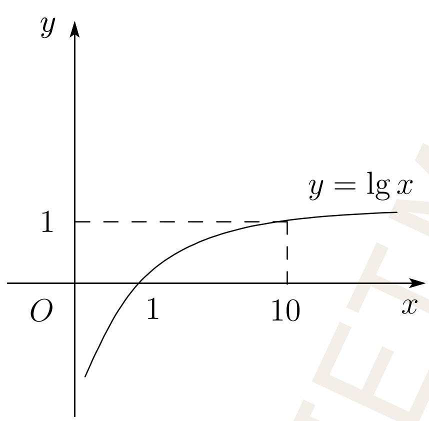
$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = 2,5^x; & \text{b) } y = 0,5^x; \\ \text{c) } y = \lg x; & \text{d) } y = \log_{\frac{1}{\pi}} x. \end{array}$$

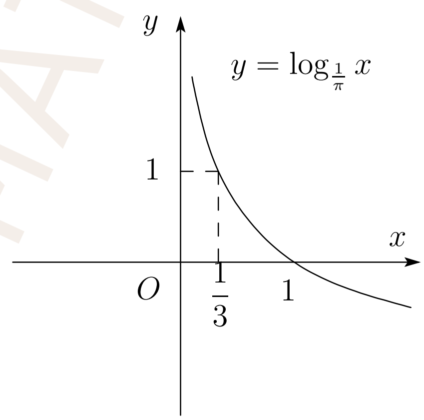
**Lời giải.** a) Hàm số $y = 2,5^x$ là hàm số mũ có cơ số lớn hơn 1 nên luôn đồng biến. Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0;1),(1;2,5)$. Ta có đồ thị




b) Hàm số $y = 0,5^x$ là hàm số mũ có cơ số nhỏ hơn 1 nên luôn nghịch biến. Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0;1),(1;0,4)$ (hình vẽ trên). c) Hàm số $y = \lg x$ là hàm số lôgarit có cơ số lớn hơn 1 nên luôn đồng biến. Đồ thị đi qua các điểm $(1;0),(10;1)$. Đồ thị như sau




d) Hàm số $y = \log_{\frac{1}{\pi}} x$ là hàm số lôgarit có cơ số là $\dfrac{1}{\pi} < 1$ nên luôn nghịch biến. Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(1;0), \left(\dfrac{1}{\pi};1\right)$ (hình vẽ trên).

**Ví dụ 2.14.** Cho $f(x) = \dfrac{4^x}{4^x + 2}$, tính

$$S = f\left(\frac{1}{2007}\right) + f\left(\frac{2}{2007}\right) + \cdots + f\left(\frac{2006}{2007}\right).$$

**Lời giải.** Ta có nhận xét rằng nếu $a + b = 1$ thì

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= \frac{4^a}{4^a + 2} + \frac{4^b}{4^b + 2} = \frac{4^a(4^a + 2) + 4^b(4^b + 2)}{(4^a + 2)(4^b + 2)} \\ &= \frac{4^{a+b} + 2.4^a + 4^{a+b} + 2.4^b}{4^{a+b} + 2.4^a + 2.4^b + 4} = \frac{2.4^a + 2.4^b + 8}{2.4^a + 2.4^b + 8} = 1. \end{aligned}$$



VIETMATHS.NET

Áp dụng kết quả trên ta có

$$S = \left[f\left(\frac{1}{2007}\right) + f\left(\frac{2006}{2007}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2007}\right) + f\left(\frac{2005}{2007}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{1003}{2007}\right) + f\left(\frac{1004}{2007}\right)\right].$$

Vậy

$$S = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{1003 \text{ số hạng}} = 1003.$$

# Bài tập tương tự.

**Bài tập 2.12.** Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \log_{0,3} \dfrac{x-4}{x+4}$; b) $y = \log_\pi(2^x - 2)$;

c) $y = \sqrt{\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 4 - x)}$; d) $y = 2^{\sqrt{|x-3|-|8-x|}} + \sqrt{\dfrac{-\log_{0,5}(x-1)}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}}$.

*Đáp số.* a) $D = (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$; b) $D = (1; +\infty)$;

c) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ \sqrt{x^2 - 3x + 2} + 4 - x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1 \vee x \geq 2.$

Tập xác định là $D = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

d) Hàm số xác định khi và chỉ khi

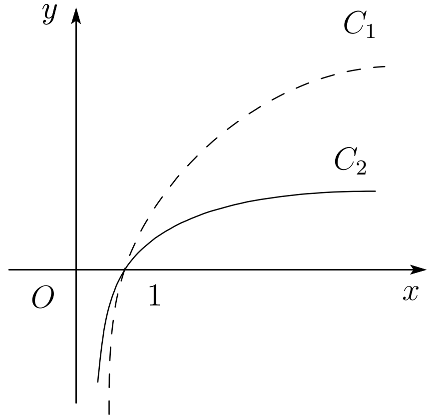
$$\begin{cases} |x-3| - |8-x| \geq 0, \\ x - 1 > 0, \\ \log_{0,5}(x-1) \leq 0, \\ x^2 - 2x - 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 \geq (8-x)^2, \\ x > 1, \\ x - 1 \geq 1, \\ x < -2 \vee x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{11}{2}.$$

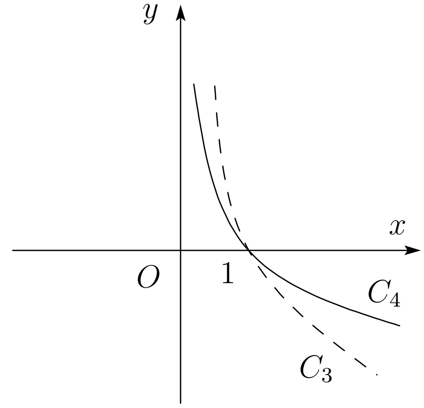
Tập xác định là $D = \left[\dfrac{11}{2}; +\infty\right)$.

**Bài tập 2.13.** Hình dưới đây là đồ thị của 4 hàm số

$$y = \log_{\sqrt{2}} x;\ y = \log_{\frac{1}{e}} x;$$
$$y = \log_{\sqrt{5}} x;\ y = \log_{\frac{1}{3}} x.$$

Hãy chỉ rõ đồ thị tương ứng của mỗi hàm số và giải thích.



*Hướng dẫn.* Ta thấy $C_1, C_2$ là đồ thị của các hàm đồng biến, tức là đồ thị ứng với hàm số lôgarit có cơ số lớn hơn 1. Mặt khác, khi $x > 1$ thì $\log_{\sqrt{2}} x > \log_{\sqrt{5}} x$ và khi $x < 1$ thì $\log_{\sqrt{2}} x < \log_{\sqrt{5}} x$. Do đó $C_1$ là đồ thị của hàm số $y = \log_{\sqrt{2}} x$ và $C_2$ là đồ thị của hàm số $\log_{\sqrt{5}} x$.
Tương tự thì $C_3$ là đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{e}} x$ và $C_4$ là đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

**Bài tập 2.14.** Từ đồ thị hàm số $y = 3^x$, hãy vẽ đồ thị các hàm số

a) $y = 3^x - 2$; b) $y = 3^x + 3$;
c) $y = |3^x - 2|$; d) $y = 2 - 3^x$.

*Hướng dẫn.* a) Đồ thị hàm số $y = 3^x - 2$ nhận được từ đồ thị hàm số $y = 3^x$ bằng phép tịnh tiến song song với trục tung xuống dưới 2 đơn vị.
b) Tương tự câu a).
c) Ta có $y = |3^x - 2| = \begin{cases} 3^x - 2, & \text{khi } 3^x - 2 \geq 0 \\ -3^x + 2, & \text{khi } 3^x - 2 < 0. \end{cases}$
Do đó đồ thị hàm số $y = |3^x - 2|$ bao gồm:

– Phần đồ thị của hàm số $y = 3^x - 2$ ứng với $3^x - 2 \geq 0$ (nằm phía trên trục hoành);

– Phần đồ thị của hàm số $y = 3^x - 2$ ứng với $3^x - 2 < 0$ lấy đối xứng qua trục hoành.

d) Ta có $y = 2 - 3^x = -(3^x - 2)$, do đó, đồ thị của hàm số $y = 2 - 3^x$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = 3^x - 2$ qua trục hoành.

**Bài tập 2.15.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^{|x|}$ trên đoạn $[-1; 1]$.
*Hướng dẫn.* Trên đoạn $[-1; 1]$ ta có

$$y = 2^{|x|} = \begin{cases} 2^x, & \text{khi } x \in [0; 1] \\ 2^{-x}, & \text{khi } x \in [-1; 0]. \end{cases}$$

Do đó trên đoạn $[0; 1]$ hàm số đồng biến, trên đoạn $[-1; 0]$ hàm số nghịch biến. Suy ra, các giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất sẽ đạt được tại các đầu mút. Ta có

$$y(-1) = 2^{-(-1)} = 2^1 = 1;\ y(0) = 2^0 = 1;\ y(1) = 2^1 = 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất là $y(1) = y(-1) = 2$, giá trị nhỏ nhất là $y(0) = 1$.

## 2.5 BÀI TẬP VỀ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Phương trình mũ và phương trình lôgarit là nội dung rất quan trọng trong chương này. Các dạng bài tập cũng rất phong phú như giải phương trình, chứng minh nghiệm của phương trình thỏa mãn các điều kiện cho trước (tồn tại, tồn tại duy nhất, hữu hạn nghiệm,...), giải và biện luận phương trình theo tham số, chứng minh phương trình tương đương,...
**Phương pháp giải.** Các phương pháp thường dùng để giải phương trình mũ và phương trình lôgarit là

- Đưa về các phương trình mũ và lôgarit cơ bản, bao gồm các cách



VIETMATHS.NET

– Đưa về cùng một cơ số;
– Đặt ẩn phụ;
– Mũ hoá (hoặc lôgarit hoá).

- Phương pháp đồ thị.
- Sử dụng tính đơn điệu của hàm số mũ và lôgarit.

Ngoài ra, còn một số phương pháp giải khác như phương pháp biến thiên hằng số, sử dụng định lí Lagrange, định lí Rolle, đánh giá, phương pháp hàm số,... Sau đây chúng ta sẽ đi vào từng nội dung cụ thể.

### 2.5.1 Đưa về phương trình mũ, phương trình lôgarit cơ bản

Đây là phương pháp rất cơ bản, thường được sử dụng. Các cách để đưa về phương trình mũ, lôgarit cơ bản là đưa về cùng một cơ số, đặt ẩn phụ, mũ hoá hoặc lôgarit hoá.

**a) Đưa về cùng một cơ số**

**Ví dụ 2.15.** Giải các phương trình mũ sau

$$\text{a) } 3^{x^2-4x+5}=9; \qquad \text{b) } 1,5^{5x-7}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1};$$
$$\text{c) } 2^{2x-1}+4^{x+2}=10; \qquad \text{d) } 0,125.4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{8}\right)^{-x}.$$

**Lời giải.** a) Đưa về cùng cơ số 3, ta có phương trình tương đương với

$$3^{x^2-4x+5}=3^2 \Leftrightarrow x^2-4x+5=2 \Leftrightarrow x=1 \vee x=3.$$

Vậy $1;3$ là nghiệm của phương trình đã cho.
b) Ta có $\dfrac{2}{3}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}=1,5^{-1}$ nên phương trình đã cho có dạng

$$1,5^{5x-7}=1,5^{-x-1}.$$

Vậy $5x-7=-x-1$ hay $x=1$ là nghiệm của phương trình.
c) Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{2}.4^x+16.4^x=10 \Leftrightarrow \frac{33}{2}.4^x=10 \Leftrightarrow 4^x=\frac{20}{33} \Leftrightarrow x=\log_4\frac{20}{33}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\log_4\dfrac{20}{33}$.
d) Đưa hai vế về cùng cơ số 2, ta được

$$2^{-3}.2^{4x-6}=\left(2^{\frac{-5}{2}}\right)^{-x} \text{ hay } 2^{4x-9}=2^{\frac{5}{2}x}.$$

Do đó

$$4x-9=\frac{5}{2}x \Leftrightarrow \frac{3}{2}x=9 \Leftrightarrow x=6.$$

Vậy phương trình đã cho chỉ có một nghiệm $x = 6$.
**Chú ý.** Muốn đưa các lôgarit về cùng một cơ số, ta thường xem mối liên hệ giữa các cơ số và thường sử dụng các tính chất sau của lôgarit:

$$a = \log_b b^a;\ \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

**Ví dụ 2.16.** Giải các phương trình lôgarit sau

a) $\lg x + \lg(x+9) = 1$;

b) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;

c) $\log_5 x^3 + 3\log_{25} x + \log_{\sqrt{125}} \sqrt{x^3} = \dfrac{11}{2}$;

d) $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x$.

**Lời giải.** a) Điều kiện $\begin{cases} x > 0, \\ x+9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\lg x(x+9) = \lg 10 \Leftrightarrow x(x+9) = 10 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -10.$$

Vì $x > 0$ nên phương trình chỉ có một nghiệm duy nhất là $x = 1$.
b) Điều kiện $x > 0$. Đưa về cùng cơ số 2, ta có

$$\log_2 x + \log_{2^2} x + \log_{2^3} x = 11 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 11 \Leftrightarrow \frac{11}{6}\log_2 x = 11.$$

Do đó $\log_2 x = 6$ và $x = 2^6 = 64$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 64$.
c) Điều kiện $x > 0$. đưa về cùng cơ só 5, ta có

$$\begin{aligned}
\log_5 x^3 + 3\log_{25} x + \log_{\sqrt{125}} \sqrt{x^3} = \frac{11}{2} &\Leftrightarrow 3\log_5 x + 3\log_{5^2} x + \log_{5^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{11}{2} \\
&\Leftrightarrow 3\log_5 x + 3.\frac{1}{2}\log_5 x + \frac{3}{2}.\frac{2}{3}\log_5 x = \frac{11}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{11}{2}\log_5 x = \frac{11}{2} \\
&\Leftrightarrow \log_5 x = 1 \Leftrightarrow x = 5^1 = 5 \text{ (thoả mãn).}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình chỉ có một nghiệm $x = 5$.
d) Điều kiện $x > 0$. Áp dụng công thức đổi cơ số, ta có

$$\begin{aligned}
\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x &\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 3} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{\log_2 20} \\
&\Leftrightarrow \log_2 x.\left(1 + \frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\log_2 20}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \log_2 x.\left(\frac{3}{2} + \log_3 2 - \log_{20} 2\right) = 0.
\end{aligned}$$

Ta có $\dfrac{3}{2} + \log_3 2 - \log_{20} 2 > \dfrac{3}{2} + 0 - 1 > 0$. Do đó từ phương trình trên ta phải có $\log_2 x = 0$ hay $x = 2^0 = 1$.
Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.
**Chú ý.** Khi giải phương trình lôgarit, ta phải đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

# Bài tập tương tự.

**Bài tập 2.16.** Giải các phương trình mũ sau

a) $7^{x-1} = 2^x$; b) $8^{\frac{4}{3}x^3-2x^2+2} = 4^{x^2+x+1}$;
c) $0,75^{2x-3} = \left(1\dfrac{1}{3}\right)^{5-x}$; d) $5^{x+1} - 5^x = 2^{x+1} + 2^{x+3}$.

*Hướng dẫn.* a) Lấy lôgarit cơ số 2 cả hai vế. *Đáp số.* $x = \dfrac{\log_2 7}{-1 + \log_2 7}$.
b) Lấy lôgarit cơ số 2 cả hai vế. *Đáp số.* $x = 2$; $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
c) Viết $0,75 = \dfrac{3}{4}$; $1\dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$. *Đáp số.* $x = -2$.
d) Phương trình tương đương với $5.5^x - 5^x = 2.2^x + 2^3.2^x$. *Đáp số.* $x = 1$.

**Bài tập 2.17.** Giải các phương trình lôgarit sau

a) $\ln(x+1) + \ln x + 3 = \ln(x+7)$; b) $\lg x^4 + \lg 4x = 2 + \lg x^3$;
c) $\dfrac{\lg(\sqrt{x+1}+1)}{\lg\sqrt[3]{x-40}} = 3$; d) $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$.

*Hướng dẫn.* a) *Đáp số.* $x = 1$. b) Đưa về cùng cơ số 10. *Đáp số.* $x = 5$.
c) Phương trình tương đương với $\lg(\sqrt{x+1}+1) = \lg(x-40)$ $(x > 40)$.
*Đáp số.* $x = 48$. d) *Đáp số.* $x = 16$.

**b) Đặt ẩn phụ**

Đối với một số phương trình phức tạp hơn, chúng ta không thể sử dụng cách đưa về cùng một cơ số như trên. Khi đó, chúng ta có thể đặt ẩn phụ để được phương trình hoặc hệ phương trình đại số thông thường.
**Chú ý.** Khi đặt ẩn phụ, ta nên tìm điều kiện của ẩn phụ (tuỳ thuộc vào điều kiện của ẩn cần tìm).

**Ví dụ 2.17.** Giải các phương trình mũ sau

a) $2^{2x+1} - 2^{x+3} = 64$; b) $e^{2x} - 4e^{-2x} = 3$;
c) $6.4^{\frac{1}{x}} - 13.6^{\frac{1}{x}} + 6.9^{\frac{1}{x}} = 0$; d) $8^x + 18^x = 2.27^x$.

**Lời giải.** a) Phương trình đã cho tương đương với

$$2.(2^x)^2 - 2^3.2^x = 64 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4.2^x - 32 = 0.$$

Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$ thì phương trình trở thành $t^2 - 4t - 32 = 0$. Đây là phương trình bậc hai với ẩn $t$, ta tìm được $t = 8$ hoặc $t = -4$. Tuy nhiên $t > 0$ nên chỉ có $t = 8$ là thoả mãn. Thay lại để tìm $x$, ta có

$$2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình chỉ có một nghiệm $x = 3$.
b) Đặt $t = e^{2x}$ $(t > 0)$, ta có phương trình

$$t - \frac{4}{t} = 3 \text{ hay } t^2 - 3t - 4 = 0.$$

Phương trình bậc hai ẩn $t$ này chỉ có một nghiệm dương $t = 4$, suy ra $e^{2x} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln 4$.
c) Điều kiện $x \neq 0$. Chia cả hai vế của phương trình cho $6^{\frac{1}{x}} > 0$, ta có

$$6.\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} - 13.1 + 6.\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(t > 0)$, phương trình trở thành

$$6t - 13 + \frac{6}{t} = 0 \text{ hay } 6t^2 - 13t + 6 = 0.$$

Phương trình bậc hai trên có hai nghiệm dương $t = \frac{3}{2}; t = \frac{2}{3}$.
Với $t = \frac{3}{2}$ thì $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.
Với $t = \frac{2}{3}$ thì $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x = -1$.
Phương trình có hai nghiệm $x = 1; x = -1$.
d) Phương trình đã cho tương đương với

$$2^{3x} + 2^x.3^{2x} = 2.3^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 2 = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ $(t > 0)$ thì phương trình trở thành

$$t^3 + t - 2 = 0 \text{ hay } (t-1)(t^2 + t + 2) = 0.$$

Do $t^2 + t + 2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ nên $t - 1 = 0$ hay $t = 1$. Từ đó suy ra

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{0} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

**Ví dụ 2.18.** Giải các phương trình lôgarit sau

a) $\dfrac{1}{4 + \log_3 x} + \dfrac{1}{2 - \log_3 x} = 1$; b) $-\ln^3 x + 2\ln x = 2 - \ln x$;
c) $x^{\lg^2 x^2 - 3\lg x - \frac{9}{2}} = 10^{-2\lg x}$; d) $\log_2 \sqrt{|x|} - 4\sqrt{\log_4 |x|} - 5 = 0$.



VIETMATHS.NET

**Lời giải.** a) Điều kiện $\begin{cases} x > 0, \\ 4 + \log_2 x \neq 0, \\ 2 - \log_2 x \neq 0. \end{cases}$

Đặt $t = \log_2 x$ thì điều kiện của $t$ là $t \neq -4, t \neq 2$ và phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \frac{1}{4+t} + \frac{1}{2-t} = 1 &\Leftrightarrow 2 - t + 4 + t = (4+t)(2-t) \\ &\Leftrightarrow t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = -2 \text{ (thoả mãn).} \end{aligned}$$

Với $t = -1$ thì $\log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$;

Với $t = -2$ thì $\log_2 x = -2 \Leftrightarrow x = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{1}{2}, x = \dfrac{1}{4}$.

b) Điều kiện $x > 0$, đặt $t = \lg x$ $(t \in \mathbb{R})$, phương trình trở thành

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)(t-2) = 0.$$

Do đó $t$ nhận các giá trị là $1; -1$ hoặc $2$.

Với $t = 1$ thì $\lg x = 1 \Leftrightarrow x = 10^1 = 10$;

Với $t = -1$ thì $\lg x = -1 \Leftrightarrow x = 10^{-1} = \dfrac{1}{10}$;

Với $t = 2$ thì $\lg x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x = 10, x = \dfrac{1}{10}, x = 100$.

c) Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &x^{\lg^2 x^2 - 3\lg x - \frac{9}{2}} = (10^{\lg x})^{-2} = x^{-2} \\ \Leftrightarrow\ &\lg^2 x^2 - 3\lg x - \frac{9}{2} = -2 \Leftrightarrow 8\lg^2 x - 6\lg x - 5 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \lg x$ $(t \in \mathbb{R})$ thì phương trình trở thành

$$8t^2 - 6t - 5 = 0 \text{ hay } t = -\frac{1}{2} \vee t = \frac{5}{4}.$$

Với $t = -\dfrac{1}{2}$ thì $\lg x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$;

Với $t = \dfrac{5}{4}$ thì $\lg x = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{10^5}$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ và $x = \sqrt[4]{10^5}$.

d) Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0, \\ \log_2 |x| \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x| \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2 |x|^{\frac{1}{2}} - 4\sqrt{\log_{2^2} |x|} - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 |x| - 4\sqrt{\frac{1}{2}\log_2 |x|} - 5 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{1}{2}\log_2|x|}$ $(t \geq 0)$ thì phương trình trở thành

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \text{ hay } t = -1 \vee t = 5.$$

Do $t \geq 0$ nên $t = 5$. Suy ra $\frac{1}{2}\log_2|x| = 25 \Leftrightarrow \log_2|x| = 50 \Leftrightarrow |x| = 2^{50}$ (thoả mãn).
Vậy $x = \pm 2^{50}$ là nghiệm của phương trình.

**Nhận xét.** Ta sẽ đặt ẩn phụ khi gặp những bài toán (tương đối phức tạp) có cơ số giống nhau hoặc có cơ số liên quan nhau bằng các lũy thừa. Không phải bài toán nào ta cũng đặt ẩn phụ được ngay. Chẳng hạn như khi giải phương trình

$$(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 14$$

ta phải nhận thấy rằng $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1$, từ đó suy ra

$$2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^{-1},$$

và nếu đặt $t = (2-\sqrt{3})^x$ thì $\frac{1}{t} = (2+\sqrt{3})^x$. Tương tự như vậy đối với phương trình

$$(\log_{2\sqrt{2}+\sqrt{7}} x)^2 - \log_{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} x = 2.$$

Muốn đặt được ẩn phụ, ta phải nhận thấy được mối liên hệ

$$2\sqrt{2}+\sqrt{7} = \frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} = (2\sqrt{2}-\sqrt{7})^{-1}.$$

Thậm chí, một số phương trình còn "khó nhìn" ra hơn! Chẳng hạn khi giải phương trình

$$(3+2\sqrt{2})^x = (\sqrt{2}-1)^x + 3$$

ta cần nhận thấy $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$ và $3+2\sqrt{2} = 1+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2}+1)^2$.
Từ đó nếu đặt $2t = (\sqrt{2}+1)^x,\ (t > 0)$ thì ta có

$$4t^2 = \frac{1}{2t} + 3 \text{ hay } 4t^3 - 3t = \frac{1}{2}.$$

(Chú ý rằng $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = 4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9}$. *Đáp số.* $x = \log_{\sqrt{2}+1}\left(2\cos\frac{\pi}{9}\right)$).
Bên cạnh đó, cũng có những bài toán mà chúng ta phải đặt nhiều hơn một ẩn phụ. Khi đó phương trình đã cho được đưa về một hệ phương trình đại số. Ví dụ sau đây sẽ minh chứng cho nhận định này.

**Ví dụ 2.19.** Giải các phương trình

a) $2^{2x} - \sqrt{2^x + 6} = 6$;

b) $\sqrt{3+\log_2(x^2-4x+5)} + 2\sqrt{5-\log_2(x^2-4x+5)}$.



VIETMATHS.NET

**Lời giải.** a) Đặt $u = 2^x$ $(u > 0)$ thì phương trình trở thành $u^2 - \sqrt{u+6} = 6$.
Tiếp tục đặt $v = \sqrt{u+6}$ $(v > \sqrt{6})$ thì $v^2 = u + 6$ và ta có hệ phương trình đối xứng

$$\begin{cases} u^2 = v + 6, \\ v^2 = u + 6. \end{cases}$$

Trừ vế với vế ta được

$$u^2 - v^2 = -(u - v) \Leftrightarrow (u - v)(u + v + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rcl} u - v & = & 0, \\ u + v + 1 & = & 0. \end{array}\right.$$

Với $u = v$ ta được $u^2 = u + 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} u & = & 3 \\ u & = & -2 \quad \text{(loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$;

Với $u + v + 1 = 0$ ta được $u^2 + u - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} u & = & \dfrac{-1 + \sqrt{21}}{2} \\ u & = & \dfrac{-1 - \sqrt{21}}{2} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 8; x = \log_2 \dfrac{-1 - \sqrt{21}}{2}$.
b) Điều kiện

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 > 0, \\ 3 + \log_2(x^2 - 4x + 5) \geq 0, \\ 5 - \log_2(x^2 - 4x + 5) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 \leq 2^5 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{29} \leq x \leq 2 + \sqrt{29}.$$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{3 + \log_2(x^2 - 4x + 5)} \\ v = \sqrt{5 - \log_2(x^2 - 4x + 5)} \end{cases}$ $(u, v \geq 0)$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u + 2v = 6, \\ u^2 + v^2 = 8. \end{cases}$$

Giải ra ta được $\begin{cases} u = 2, \\ v = 2; \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = \dfrac{2}{5}, \\ v = \dfrac{14}{5}. \end{cases}$

Từ đó suy ra $\log_2(x^2 - 4x + 5) = 1$ hoặc $\log_2(x^2 - 4x + 5) = \dfrac{-71}{25}$ và tìm được 4 nghiệm của phương trình.

**Nhận xét.** Đối với một số phương trình ẩn $x$, sau khi đặt ẩn phụ thì trong phương trình vẫn còn ẩn $x$ (không biểu diễn hết được theo ẩn phụ), ta vẫn giải bình thường bằng cách coi $x$ lúc đó là hệ số tự do, và tính ẩn phụ theo $x$ rồi thay lại để tìm $x$. Ví dụ sau minh họa điều này.

**Ví dụ 2.20.** Giải các phương trình

a) $25^x - 2(3-x).5^x + 2x - 7 = 0$;

b) $x.2^x = x(3-x) + 2(2^x - 1)$;

c) $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x + 2x - 6 = 0$.

**Lời giải.** a) Đặt $t = 5^x$ $(t > 0)$ thì phương trình trở thành

$$t^2 - 2(3-x)t + 2x - 7 = 0.$$

Phương trình bậc hai (ẩn $t$) này thoả mãn điều kiện $a - b + c = 0$ nên có một nghiệm $t = -1$ và nghiệm còn lại là $t = -2x + 7$. Vì $t > 0$ nên $t = -2x + 7$. Khi đó

$$5^x = -2x + 7. \qquad (*)$$

Đến đây ta có hai cách lập luận để tìm được $x$.

*Cách 1.* Ta thấy $x = 1$ là một nghiệm của $(*)$ vì $5^1 = -2 + 7$.
Nếu $x > 1$ thì $5^x > 5 > -2x + 7$, do đó $(*)$ vô nghiệm.
Nếu $x < 1$ thì $5^x < 5 < -2x + 7$, do đó $(*)$ cũng vô nghiệm.
Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của $(*)$.

*Cách 2.* Ta thấy $y = f(x) = 5^x$ là hàm số luỹ thừa đồng biến và $y = g(x) = -2x + 7$ là hàm số nghịch biến. Do đó, đồ thị của chúng cắt nhau tại nhiều nhất là một điểm. Mặt khác $f(1) = g(1) = 5$ nên đồ thị của chúng cắt nhau tại điểm duy nhất là $(1; 5)$. Vậy phương trình $(*)$ có duy nhất một nghiệm $x = 1$.

b) Đặt $2^x = y$ $(y > 0)$ thì phương trình trở thành

$$xy = x(3-x) + 2(y-1).$$

Phương trình này tương đương với

$$y(x-2) + x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow y(x-2) + (x-1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(y + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} x & = & 2, \\ 2^x & = & 1 - x \end{array}\right. \qquad (*)$$

Tương tự câu a), ta cũng lập luận được $x = 0$ là nghiệm duy nhất của $(*)$.
Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2, x = 0$.

c) Điều kiện $x \geq 0$. Đặt $t = \log_2 x$ $(t \in \mathbb{R})$ thì phương trình trở thành

$$t^2 + (x-1)t + 2x - 6 = 0.$$

Phương trình này tương đương với

$$\begin{aligned} t^2 - t - 6 + x(t+2) = 0 &\Leftrightarrow (t+2)(t-3) + x(t+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (t+2)(t - 3 + x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} t & = & -2, \\ t & = & 3 - x. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $t = -2$ thì $\log_2 x = -2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$;
Với $t = 3 - x$ thì $\log_2 x = 3 - x$ $(*)$. Nhận thấy vế trái là hàm đồng biến, vế phải là hàm nghịch biến và $x = 2$ là một nghiệm của phương trình $(*)$. Do đó phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x = 2$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{1}{4}, x = 2$.

VIETMATHS.NET

## Bài tập tương tự.

**Bài tập 2.18.** Giải các phương trình mũ

a) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$; b) $8.3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} = 9^{\sqrt{x}}$;
c) $3.2^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}} - 8.2^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}} + 4$; d) $(\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^{x-10} - 84 = 0$.

*Hướng dẫn.* a) Đặt $t = 10^{x^2}$. *Đáp số.* $x = \pm 1$.
b) Chia hai vế cho $9^{\sqrt[4]{x}}$. Đặt $t = 3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$. *Đáp số.* $x = 16$.
c) Đặt $t = 2^{\frac{\sqrt{x}+1}{2}}$ $(t \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \forall x \geq 0)$. *Đáp số.* $x = 9$.
d) Đặt $t = 3^{\frac{x}{10}}$. *Đáp số.* $x = 20$.

**Bài tập 2.19.** Giải các phương trình lôgarit sau

a) $\dfrac{2\lg x}{\lg x - 1} = -\lg x + \dfrac{2}{\lg x - 1}$; b) $\log_x 2 - \log_4 x + \dfrac{7}{6} = 0$;
c) $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$; d) $\lg_{2x} 64 + \log_{x^2} 16 = 3$.

*Hướng dẫn.* a) Đặt $t = \lg x$. *Đáp số.* $x = \dfrac{1}{100}$.
b) Đặt $t = \log_2 x$. *Đáp số.* $x = 8, x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$.
c) Viết $\lg 5 - 1 = \lg\dfrac{1}{2}$. Đặt $t = 2^x$. *Đáp số.* $x = 1$.
d) Đặt $t = \log_2 x$. *Đáp số.* $x = 4, x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

**Bài tập 2.20.** Giải các phương trình

a) $(5-\sqrt{21})^x + 7.(5+\sqrt{21})^x = 2^{x+3}$;

b) $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$;

c) $(\sqrt{-2+\sqrt{5}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{5}})^x = 2$;

d) $3\log_{7-4\sqrt{3}}(x-5) + 2\log^2_{4\sqrt{3}+7}(x-5) + 1 = 0$.

*Hướng dẫn.* a) Từ $(5-\sqrt{21})(5+\sqrt{21}) = 5^2 - 21 = 4$ suy ra $\dfrac{5+\sqrt{21}}{2} = \dfrac{2}{5-\sqrt{21}}$. Chia cả hai vế cho $2^x$, đặt $t = \left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x$ $(t > 0)$. *Đáp số.* $x = 0, x = \log_{\frac{5-\sqrt{21}}{2}} 7$.
b) Đặt $t = (2+\sqrt{3})^{x^2-2x}$ $(t \geq (2+\sqrt{3})^{-1})$. *Đáp số.* $x = 0, x = 2$.
c) Đặt $t = (\sqrt{-2+\sqrt{5}})^x$. *Đáp số.* $x = 0$.
d) Đặt $t = \log_{4\sqrt{3}+7}(x-5)$. *Đáp số.* $x = 12 + 4\sqrt{3}$; $x = 5 + \sqrt{4\sqrt{3}+7}$.

**Bài tập 2.21.** Giải các phương trình

a) $\dfrac{8}{2^{x-1}+1} + \dfrac{2^x}{2^x+2} = \dfrac{18}{2^{x-1}+2^{x+1}+2}$;

b) $\log_2[x(x-1)^2] + \log_2 x.\log_2(x^2-x) = 2;$

c) $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1.$

*Hướng dẫn.* a) Đặt $t = 2^x$ hoặc đặt hai ẩn $\begin{cases} u = 2^{x-1} + 1, \\ v = 2^{1-x} + 1 \end{cases}$, khi đó ta có

$$uv = 2^{x-1} + 2^{1-x} + 2 = u + v$$

và đưa về hệ hai ẩn $u, v$. *Đáp số.* $x = 1, x = 4$.
b) Điều kiện $x > 1$. Đặt $\begin{cases} u = \log_2(x^2-x), \\ v = \log_2 x \end{cases}$ và viết

$$\log_2[x(x-1)^2] = \log_2 \frac{(x^2-x)^2}{x} = 2u - v.$$

Đưa phương trình về dạng $(u-1)(v+2) = 0$. *Đáp số.* $x = 2, x = 4$.
c) Đặt $u = \log_2 x, v = \sqrt{u+1}$, đưa phương trình về hệ đối xứng ẩn $u, v$.
*Đáp số.* $x = 2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}, x = 1, x = \dfrac{1}{2}$.

**Bài tập 2.22.** Giải các phương trình

a) $9^x + 2(x-2).3^x + 2x - 5 = 0;$

b) $\lg^2(x^2+1) + (x^2-5)\lg(x^2+1) - 5x^2 = 0;$

c) $(x+2)\log_3^2(x+1) + 4(x+1)\log_3(x+1) - 16 = 0;$

d) $4x^2 + 3^{\sqrt{x}}.x + 3^{1+\sqrt{x}} = 2.3^{\sqrt{x}}.x^2 + 2x + 6.$

*Hướng dẫn.* Đặt ẩn phụ, tính ẩn phụ theo biến $x$.
*Đáp số.* a) $x = 1$; b) $x = \pm\sqrt{99999},\ x = 0$; c) $x = 2,\ x = -\dfrac{80}{81}$;
d) Đặt $y = 3^{\sqrt{x}}$, ta được $4x^2 + yx + 3y = 2yx^2 + 2x + 6 \Leftrightarrow\ (y-2)(2x^2 - x - 3) = 0$.
*Đáp số.* $x = \dfrac{3}{2};\ x = (\log_3 2)^2$.

### c) Mũ hoá, lôgarit hoá

Trong một số phương trình, để đưa về cùng cơ số hoặc khử biểu thức mũ, lôgarit chứa ẩn số, ta thường lấy mũ hoặc lôgarit các vế. Ta áp dụng các công thức

$$a^M = a^N \Leftrightarrow M = N;$$
$$\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N > 0;$$
$$\log_a N = M \Leftrightarrow N = a^M.$$

trong đó $a > 0, a \neq 1$.

**Ví dụ 2.21.** Giải các phương trình

VIETMATHS.NET

a) $3^x.2^{x^2}=1$; b) $2^{3^x}=3^{2^x}$;
c) $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0,25.125^{\frac{x+17}{x-3}}$; d) $2^{x+2}.3^x=4^x.5^{x-1}$.

**Lời giải.** a) Lấy lôgarit cơ số 3 hai vế, ta có phương trình tương đương với

$$\log_3(3^x.2^{x^2})=\log_3 1\Leftrightarrow \log_3 3^x+\log_3 2^{x^2}=0\Leftrightarrow x+x^2\log 32=0.$$

Do đó phương trình có hai nghiệm là $x=0, x=\dfrac{-1}{\log_3 2}=-\log_2 3$.
b) Lấy lôgarit cơ số 2 hai vế ta được phương trình tương đương

$$\log_2 2^{3^x}=\log_2 3^{2^x}\Leftrightarrow 3^x=2^x.\log_2 3\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x=\log_2 3.$$

Do đó $x=\log_{\frac{3}{2}}\log_2 3$ là nghiệm của phương trình.
c) Phương trình đã cho tương đương với

$$2^{5.\frac{x+5}{x-7}}=2^{-2}.5^{3.\frac{x+17}{x-3}}\Leftrightarrow 2^{\frac{7x+11}{x-7}}=5^{\frac{3x+51}{x-3}}.$$

Lấy lôgarit cơ số 2 hai vế ta được

$$\begin{aligned}&\frac{7x+11}{x-7}=\frac{3x+51}{x-3}\log_2 5\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}x\neq 7, x\neq 3,\\ (7-3\log_2 5)x^2-2(5+15\log_2 x)x-(33-357\log_2 5)=0.\end{cases}\end{aligned}$$

Phương trình bậc hai trên có

$$\Delta'=1296\log_2^2 5-2448\log_2 5+256>0,$$

nên có nghiệm

$$x=\frac{5+15\log_2 5\pm\sqrt{\Delta'}}{7-3\log_2 5}.$$

Hai nghiệm này đều thoả mãn vì chúng đều khác 7 và 3.
d) Lấy lôgarit cơ số 10 hai vế ta có

$$\begin{aligned}&\lg 2^{x+2}+\lg 3^x=\lg 4^x+\lg 5^{x-1}\\ \Leftrightarrow\ &(x+2)\lg 2+x\lg 3=x\lg 4+(x-1)\lg 5\\ \Leftrightarrow\ &x(\lg 4+\lg 5-\lg 3-\lg 2)=2\lg 2+\lg 5\\ \Leftrightarrow\ &x.\lg\frac{4.5}{3.2}=\lg(2^2.5)\Leftrightarrow\ x=\frac{\lg 20}{\lg\frac{10}{3}}.\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\lg 20}{\lg\frac{10}{3}}$.

**Ví dụ 2.22.** Giải các phương trình

a) $\log_x \sqrt[10]{2} = -0,01$;   b) $\log_{x-2}(2x) = 3$.

**Lời giải.** a) Điều kiện $x > 0, x \neq 1$. Mũ hoá hai vế lên bằng cơ số $x$, ta có

$$x^{\log_x \sqrt[10]{2}} = x^{-0,01} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{10}} = x^{\frac{-1}{100}}.$$

Do đó

$$x = \left(2^{\frac{1}{10}}\right)^{-100} = 2^{-10} = \frac{1}{1024}.$$

b) Điều kiện $x > 2, x \neq 3$. Mũ hoá hai vế bởi cơ số $x - 2$, ta có

$$2x = (x-2)^3 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 2x + 2) = 0.$$

Vì $x^2 - 2x + 2 > 0$ nên $x - 4 = 0$ hay $x = 4$ (thoả mãn).
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 4$.

# Bài tập tương tự.

**Bài tập 2.23.** Giải các phương trình

a) $x^{\lg 9} + 9^{\lg x} = 6$;   b) $x^{\frac{1}{\lg x}} = 10^{x^4}$;
c) $x^{3\lg^3 x - \frac{2}{3}\lg x} = 100\sqrt[3]{10}$;   d) $6^{x^2}.7^{x-1} = 8^x.9^{x-1}$.

*Hướng dẫn.* a) Điều kiện $x > 0$. Ta có

$$\lg x^{\lg 9} = \lg 9.\lg x = \lg x.\lg 9 = \lg 9^{\lg x}.$$

Do đó $x^{\lg 9} = 9^{\lg x}$. *Đáp số.* $x = \sqrt{10}$.
b) Lôgarit cơ số 10 hai vế. *Đáp số.* Phương trình vô nghiệm.
c) Lôgarit cơ số 10 hai vế, đặt $t = \lg x$. *Đáp số.* $x = 10, x = \dfrac{1}{10}$.
d) Lấy lôgarit cơ số bất kì cả hai vế, đưa về phương trình bậc hai của $x$.

### 2.5.2 Phương pháp đồ thị

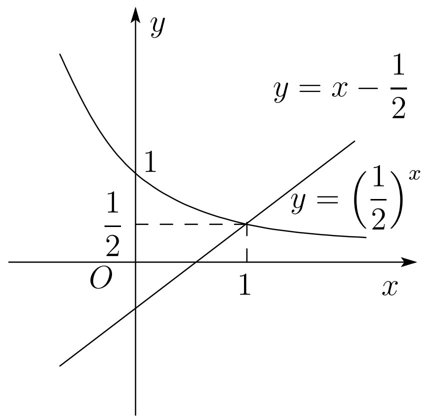
**Phương pháp giải.** Vẽ đồ thị của các hàm số trong phương trình cần giải trên cùng một hệ trục tọa độ. Sau đó tìm giao điểm của chúng và biện luận, kết luận nghiệm của phương trình là hoành độ của các giao điểm đó.

**Ví dụ 2.23.** Giải phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = x - \dfrac{1}{2}$.

**Lời giải.** Vẽ đồ thị hàm số $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ và đường thẳng $y = x - \dfrac{1}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ $Oxy$. Ta thấy chúng cắt nhau tại điểm duy nhất có hoành độ $x = 1$. Thử lại ta thấy giá trị này thoả mãn phương trình đã cho. Mặt khác, $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ là hàm số nghịch biến, $y = x - \dfrac{1}{2}$ là hàm số đồng biến nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$.



VIETMATHS.NET




**Nhận xét.** Việc vẽ đồ thị thực chất là để áng khoảng và dự đoán nghiệm (nếu có) của phương trình. Sau khi dự đoán được nghiệm, ta thử trực tiếp vào phương trình, nếu thỏa mãn thì kết luận ngay (như lời giải trên) - khi đó nhờ đồ thị ta biết rằng phương trình có nghiệm duy nhất.

## Bài tập tương tự.

**Bài tập 2.24.** Giải các phương trình sau bằng đồ thị

$$\text{a) } \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{-3}{x}; \qquad \text{b) } \log_4 x = \frac{1}{x}; \qquad \text{c) } 16^x = \log_{\frac{1}{2}} x.$$

*Hướng dẫn.* Giải tương tự ví dụ trên.

### 2.5.3 Sử dụng tính đơn điệu của hàm số mũ, hàm số lôgarit

**Phương pháp giải.** Sử dụng các tính chất cơ bản của hàm số mũ và hàm số lôgarit, đó là

- Hàm số luỹ thừa $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu $a > 1$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nếu $0 < a < 1$.
- Hàm số lôgarit $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nếu $a > 1$, nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nếu $0 < a < 1$.
- Các hàm số mũ $y = a^x$ và hàm số luỹ thừa $y = \log_a x$ đều liên tục trên tập xác định của chúng.

**Ví dụ 2.24.** Giải các phương trình

$$\text{a) } 3^x + 4^x = 5^x; \qquad \text{b) } 2^{x+1} - 4^x = x - 1.$$

**Lời giải.** a) Chia cả hai vế của phương trình cho $5^x > 0$, ta có

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

Xét $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$. Ta có $f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln\frac{4}{5} < 0, \forall x$.
Do đó $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác $f(2) = 1$. Do đó $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương

trình.
b) Phương trình tương đương với
$$2^x(2-2^x)=x-1.$$
Với $x=1$ thì phương trình trên đúng, do đó $x=1$ là nghiệm của phương trình.
Nếu $x>1$ thì $2^x>2$ và $x-1>0$, do đó $2^x(2-2^x)<0<x-1$. Phương trình đã cho vô nghiệm.
Nếu $x<1$ thì $2^x<2$ và $x-1<0$, do đó $2^x(2-2^x)>0>x-1$. Phương trình đã cho vô nghiệm.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

**Ví dụ 2.25.** Giải các phương trình

a) $\lg(x-4)=5-x$; b) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)=2x-1$.

**Lời giải.** a) Điều kiện $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$.
Đặt $f(x)=\lg(x-4), g(x)=5-x$, phương trình đã cho trở thành
$$f(x)=g(x).$$
Ta có $f(x)$ đồng biến trên $(4;+\infty)$ và $g(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
Hơn nữa $f(5)=g(5)$, đo đó $x=5$ là nghiệm duy nhất của phương trình.
b) Tương tự. *Đáp số.* $x=0$.

# Bài tập tương tự.

**Bài tập 2.25.** Giải các phương trình sau

a) $2^x+3^x+5^x=10^x$; b) $3^x+4^x+12^x=13^x$;
c) $\ln(x-2)=3-x$; d) $\log_{0,4}(3-x)=\dfrac{18}{5}-x$.

*Đáp số.* a) $x=1$; b) $x=2$; c) $x=3$; d) $x=\dfrac{13}{5}$.

**Bài tập 2.26.** Giải phương trình $x^x=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.
*Hướng dẫn.* Dễ thấy $x=\sqrt{2}$ là nghiệm của phương trình. Nếu $x>\sqrt{2}$ thì
$$x^x>(\sqrt{2})^x>(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}.$$
Tương tự khi $x<\sqrt{2}$. Vậy $x=\sqrt{2}$ là nghiệm duy nhất.

**Bài tập 2.27.** Giải phương trình $5^x+4^x=\dfrac{3}{2}(2^x+3^x+1)$.
*Hướng dẫn.* Biến đổi phương trình về dạng
$$\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^x+1}{\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{2}{4}\right)^x+\left(\frac{3}{4}\right)^x}=\frac{3}{2}.$$

VIETMATHS.NET

Nhận thấy $x = 1$ là nghiệm. Nếu $x > 1$ thì $\left(\frac{5}{4}\right)^x + 1 > \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$, và

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{2}{4}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x < \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4}.$$

Suy ra $VT > \frac{3}{2} = VP$, phương trình vô nghiệm. Tương tự khi $x < 1$. *Đáp số.* $x = 1$.

### 2.5.4 Các phương pháp khác

Bên cạnh các cách giải phương trình truyền thống, chúng ta còn có rất nhiều cách giải độc đáo khác. Trong phần này chúng tôi xin giới thiệu một số phương pháp khác, đó là: biến thiên hằng số, sử dụng định lí Lagrange, định lí Rolle, phương pháp đánh giá và phương pháp hàm số.

**a) Phương pháp biến thiên hằng số**

Trong phương pháp này, ta đổi vai trò của ẩn cần tìm với hằng số: coi hằng số là ẩn và ẩn là hằng số.

**Ví dụ 2.26.** Giải phương trình

$$4^{2x} + 2^{3x+1} + 2^{x+3} - 16 = 0.$$

**Lời giải.** Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$ thì phương trình trở thành

$$t^4 + 2t^3 + 8t - 16 = 0.$$

Ta viết lại phương trình này thành

$$4^2 - 2t.4 - (t^4 + 2t^3) = 0.$$

Bây giờ ta coi $4 = u$ là một ẩn của phương trình, còn $t$ là số đã biết. Phương trình trở thành phương trình bậc hai đối với ẩn $u$. Tính $\Delta'$, ta có

$$\Delta' = (-t)^2 + (t^4 + 2t^3) = (t^2 + t)^2.$$

Do đó $\left[\begin{array}{l} u = t - t(t+1) \\ u = t + t(t+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 = -t^2 \\ 4 = t^2 + 2t \end{array}\right. \Leftrightarrow t^2 + 2t - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = -1 - \sqrt{5} & \text{(loại)} \\ t = -1 + \sqrt{5} & \text{(thoả mãn)} \end{array}\right.$$

Suy ra $2^x = \sqrt{5} - 1 \Leftrightarrow x = \log_2(\sqrt{5} + 1)$.

# Bài tập tương tự.

**Bài tập 2.28.** Giải phương trình $\lg^4 x + \lg^3 x - 2\lg^2 x - 9\lg x - 9 = 0$.
*Hướng dẫn.* Đặt $t = \lg x$, viết lại phương trình ở dạng

$$3^2 + 3t.3 - (t^4 + t^3 - 2t^2) = 0.$$

Coi $3 = u$ là ẩn, giải phương trình bậc hai theo ẩn $u$, $\Delta = (2t^2 + t)^2$, tìm được

$$\left[\begin{array}{lcl} u & = & -t^2 - 2t, \\ u & = & t^2 - t \end{array}\right. \quad \text{và} \quad \left[\begin{array}{l} x = 10^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}} \\ x = 10^{\frac{1-\sqrt{13}}{2}} \end{array}\right.$$

**b) Sử dụng định lí Lagrange, định lí Rolle**

Định lí Lagrange: *Giả sử* $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *là hàm thỏa mãn*

*i)* $f$ *liên tục trên* $[a;b]$;

*ii)* $f$ *khả vi trên* $(a;b)$.

*Khi đó tồn tại* $c \in (a;b)$ *sao cho* $f(b) - f(a) = f'(c).(b-a)$.

Định lí Rolle (hệ quả của định lí Lagrange): *Giả sử* $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *là hàm thỏa mãn*

*i)* $f$ *liên tục trên* $[a;b]$;

*ii)* $f$ *khả vi trên* $(a;b)$;

*ii)* $f(a) = f(b)$.

*Khi đó tồn tại* $c \in (a;b)$ *sao cho* $f'(c) = 0$.

**Ví dụ 2.27.** Giải phương trình

$$3^{\cos x} - 2^{\cos x} = \cos x.$$

**Lời giải.** Viết lại phương trình dưới dạng

$$3^{\cos x} - 3\cos x = 2^{\cos x} - 2\cos x.$$

Giả sử phương trình có nghiệm là $\alpha$, khi đó

$$3^{\cos\alpha} - 3\cos\alpha = 2^{\cos\alpha} - 2\cos\alpha.$$

Xét hàm số $f(t) = t^{\cos\alpha} - t\cos\alpha$, ta có $f'(x) = (t^{\cos\alpha - 1} - 1)\cos\alpha$.

Khi đó $f(3) = f(2)$ và $f(t)$ khả vi liên tục trên $[2;3]$, theo định lí Lagrange thì tồn tại $c \in [2;3]$, sao cho

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} \text{ hay } (c^{\cos\alpha - 1} - 1)\cos\alpha = 0.$$

Từ đó suy ra

$$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 0\\ \cos\alpha = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl}\alpha & = & \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ \alpha & = & k2\pi\end{array}\right. \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Thử lại ta thấy các giá trị này đều thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

**Ví dụ 2.28.** Giải phương trình

$$4^{\log_3 x} + 2^{\log_3 x} = 2x.$$

**Lời giải.** Điều kiện $x > 0$. Đặt $u = \log_3 x$ thì $x = 3^u$. Khi đó phương trình trở thành

$$4^u + 2^u = 2.3^u \Leftrightarrow 4^u - 3^u = 3^u - 2^u.$$

Giả sử phương trình ẩn $u$ này có nghiệm là $\alpha$, tức là $4^\alpha - 3^\alpha = 3^\alpha - 2^\alpha$.

Xét hàm số $f(t) = (t+1)^\alpha - t^\alpha,\ t > 0$, ta có $f'(t) = \alpha[(t+1)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}]$.

Khi đó ta có $f(3) = f(2)$, $f(t)$ khả vi liên tục trên $[2;3]$. Theo định lí Lagrange, tồn tại $c \in [2;3]$ sao cho $f'(c) = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha[(c+1)^{\alpha-1} - c^{\alpha-1}] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha = 0\\ \alpha = 1\end{array}\right.$$

Thử lại thấy $u = \alpha = 0$ và $u = \alpha = 1$ đều thoả mãn. Từ đó tìm được $x = 1, x = 3$.



VIETMATHS.NET

## Bài tập tương tự.

**Bài tập 2.29.** Giải các phương trình

a) $3^x + 5^x = 2.4^x$; b) $6^x + 2^x = 5^x + 3^x$.

*Hướng dẫn.* a) Chuyển về dạng $5^x - 4^x = 4^x - 3^x$. Giải tương tự ví dụ trên.
b) Chuyển về dạng $6^x - 5^x = 3^x - 2^x$. Giải tương tự.

**Bài tập 2.30.** Cho $\dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} + c = 0$. Chứng minh rằng phương trình

$$a.2^{2x} + b.2^x + c = 0$$

luôn có nghiệm.
*Hướng dẫn.* Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$, xét hàm số $F(t) = \dfrac{a}{3}t^3 + \dfrac{b}{2}t^2 + ct$ khả vi liên tục trên $(0; +\infty)$ và $F(1) - F(0) = \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} + c = 0$. Theo định lí Lagrange thì tồn tại ít nhất một số $k \in (0; 1)$ sao cho $F'(k) = ak^2 + bk + c = 0$. Do đó $x = \log_2 k$ là nghiệm của phương trình đã cho.

**Bài tập 2.31.** Cho $\dfrac{a}{2008} + \dfrac{b}{2007} + \dfrac{c}{2006} = 0$. Chứng minh rằng phương trình

$$a\lg^2 x + b\lg x + c = 0$$

luôn có nghiệm dương.
*Hướng dẫn.* Tương tự, đặt $t = \lg x$ xét $F(t) = \dfrac{a.t^{2008}}{2008} + \dfrac{b.t^{2007}}{2007} + \dfrac{c.t^{2006}}{2006}$.

**c) Phương pháp đánh giá**

**Ví dụ 2.29.** Giải phương trình

$$3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 2^x + 2^{-2} + 2.$$

**Lời giải.** Phương trình tương đương với

$$3^{\sin^2 x} + 3^{1-\sin^2 x} = 2^x + 2^{-2} + 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3^{2\sin^2 x} + 3}{3^{\sin^2 x}} - 4 = 2^{2.\frac{x}{2}} + 2^{2.\frac{-x}{2}} - 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{(3^{\sin^2 x} - 1)(3^{\sin^2 x} - 3)}{3^{\sin^2 x}} = \left(2^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{-x}{2}}\right)^2.$$

Vì $0 \le \sin^2 x \le 1$ nên $1 \le 3^{\sin^2 x} \le 3$. Suy ra $VT \le 0 \le VP$ và phương trình trên tương đương với hệ $\begin{cases} (3^{\sin^2 x} - 1)(3^{\sin^2 x} - 3) = 0, \\ 2^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{-x}{2}} = 0. \end{cases}$
Từ phương trình thứ hai, dễ dàng suy ra $x = 0$ (thỏa mãn). Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

**Ví dụ 2.30.** Giải phương trình

$$2^{x+2} + 3^{x+2} = 3^{2x+1} + 2^{2x+1}.$$

**Lời giải.** Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$3^{x+2} - 3^{2x+1} = 2^{2x+1} - 2^{x+2}.$$

Dễ thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.
Nếu $x > 1$ thì $x + 2 < 2x + 1$, do đó

$$3^{x+2} < 3^{2x+1};\ 2^{2x+1} > 2^{x+2}.$$

Hay $VT < 0 < VP$, phương trình vô nghiệm.
Tương tự, nếu $x < 1$ thì phương trình cũng vô nghiệm.
Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

## Bài tập tương tự.

**Bài tập 2.32.** Giải phương trình $\log_2 x + \log_3(x+1) = \log_4(x+2) + \log_5(x+3)$.
*Hướng dẫn.* Điều kiện $x > 0$. Nhận thấy $x = 2$ là nghiệm. Nếu $x > 2$ thì

$$\frac{x}{2} > \frac{x+2}{4} > 1;\ \frac{x+1}{3} > \frac{x+3}{5} > 1.$$

Suy ra

$$\log_2 \frac{x}{2} > \log_2 \frac{x+2}{4} > \log_4 \frac{x+2}{4} \text{ hay } \log_2 x > \log_4(x+2);$$
$$\log_3 \frac{x+1}{3} > \log_3 \frac{x+3}{5} > \log_5 \frac{x+3}{5} \text{ hay } \log_3(x+1) > \log_5(x+3).$$

Suy ra $VT > VP$, phương trình vô nghiệm. Tương tự khi $0 < x < 2$ thì

$$0 < \frac{x}{2} < \frac{x+2}{4} < 1;\ 0 < \frac{x+1}{3} < \frac{x+3}{5} < 1.$$

Suy ra

$$\log_2 \frac{x}{2} < \log_2 \frac{x+2}{4} < \log_4 \frac{x+2}{4} \text{ hay } \log_2 x < \log_4(x+2);$$
$$\log_3 \frac{x+1}{3} < \log_3 \frac{x+3}{5} < \log_5 \frac{x+3}{5} \text{ hay } \log_3(x+1) < \log_5(x+3).$$

Suy ra $VT < VP$, phương trình vô nghiệm. *Đáp số.* $x = 2$.

**Bài tập 2.33.** Giải phương trình $\log_2 x + \log_5(2x+1) = 2$.
*Hướng dẫn.* Điều kiện $x > 0$. Nhận thấy $x = 2$ là nghiệm. Nếu $x > 2$ thì

$$\log_2 x > \log_2 2 = 1;\ \log_5(2x+1) > \log_5(2.2+1) = 1.$$

Suy ra phương trình vô nghiệm. Tương tự khi $0 < x < 2$. *Đáp số.* $x = 2$.



VIETMATHS.NET

**Bài tập 2.34.** Giải phương trình $\log_x(x+1) = \lg 1,5$.
*Hướng dẫn.* Điều kiện $x > 0;\ x \neq 1$. Nếu $0 < x < 1$ thì $x+1 > 1$, do đó

$$\log_x(x+1) < \log_x 1 = 0 = \lg 1 < \lg 1,5.$$

Do đó phương trình vô nghiệm. Tương tự, khi $x > 1$ thì

$$\log_x(x+1) > \log_x x = 1 = \lg 10 > \lg 1,5.$$

*Đáp số.* Phương trình vô nghiệm.

**d) Phương pháp hàm số**

**Phương pháp giải.** Sử dụng tính đồng biến, nghịch biến của hảm số, đưa việc giải phương trình mũ, phương trình lôgarit về giải phương trình đại số (nhờ tính chất: *Nếu $f(u)$ đơn điệu và $f(u) = f(v)$ thì $u = v$*).

**Ví dụ 2.31.** Giải phương trình

$$2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}.$$

**Lời giải.** Điều kiện $x \neq 0$. Nhận thấy

$$\frac{1-2x}{x^2} - \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{x^2-2x}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right).$$

Do đó phương trình tương đương với phương trình

$$2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-2x}{x^2} - \frac{1-x^2}{x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + \frac{1}{2}.\frac{1-x^2}{x^2} = 2^{\frac{1-2x}{x^2}} + \frac{1}{2}.\frac{1-2x}{x^2}.$$

Mặt khác $f(t) = 2^t + \dfrac{t}{2}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó từ

$$f\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right) = f\left(\frac{1-2x}{x^2}\right)$$

suy ra

$$\frac{1-x^2}{x^2} = \frac{1-2x}{x^2}.$$

Từ đó dễ dàng tìm được $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

**Ví dụ 2.32.** Giải phương trình

$$5^{x-2} = 5^{x^2-x-1} + (x-1)^2.$$

**Lời giải.** Phương trình tương đương với

$$5^{x-2} - x - 1 = 5^{x^2-x-1} + x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow 5^{x-1} + 5(x-1) = 5^{x^2-x} + 5(x^2-x).$$

Xét $f(t) = 5^t + 5t$ $(t \in \mathbb{R})$. Dễ thấy $f(t)$ luôn đồng biến. Mặt khác

$$f(x-1) = f(x^2 - x),$$

do đó

$$x - 1 = x^2 - x.$$

Từ đó dễ dàng tìm được $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

# Bài tập tương tự.

**Bài tập 2.35.** Giải phương trình $\dfrac{18^x + 32^x - 12^x - 16^x}{27^x + 36^x + 48^x + 64^x} = \dfrac{-5}{2x}$.

*Hướng dẫn.* Viết phương trình về dạng $\dfrac{2^x}{3^x + 4^x} - \dfrac{4^x}{9^x + 16^x} = \dfrac{-5}{2x}$, hay

$$\frac{2^x}{3^x + 4^x} + \frac{5}{x} = \frac{2^{2x}}{3^{2x} + 4^{2x}} + \frac{5}{2x}.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{2^t}{3^t + 4^t} + \dfrac{5}{t}$ luôn đồng biến. *Đáp số.* Phương trình vô nghiệm.

**Bài tập 2.36.** Giải phương trình $2^{2^x} + 3^{2^x} = 2^x + 3^{x+1} + x + 1$.
*Hướng dẫn.* Cộng thêm $2^x$ vào cả hai vế, viết phương trình về dạng

$$2^{2^x} + 3^{2^x} + 2^x = 2^{x+1} + 3^{x+1} + x + 1.$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + 3^t + t$ $(t \in \mathbb{R})$.

**Bài tập 2.37.** Giải phương trình $2x^2 - 6x + 2 = \log_2 \dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$.

*Hướng dẫn.* Điều kiện $x > \dfrac{-1}{2}$, $x \neq 1$. Viết phương trình về dạng

$$2(x-1)^2 + \log_2[2(x-1)^2] = (2x+1) + \log_2(2x+1).$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_2 t$ $(t > 0)$. *Đáp số.* $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$.

**Bài tập 2.38.** Giải phương trình $\dfrac{2x^2+1}{x^2+2} = \dfrac{3^{\sqrt{x^2+2}}}{3^{\sqrt{2x^2+1}}}$.
*Hướng dẫn.* Lôgarit cơ số 3 hai vế, viết phương trình về dạng

$$\log_3(2x^2+1) + \sqrt{2x^2+1} = \log_3(x^2+2) + \sqrt{x^2+2}.$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + \sqrt{t}$ $(t > 0)$. *Đáp số.* $x = \pm 1$.

**Bài tập 2.39.** Giải phương trình $2.2^{(\sqrt{x-2})^2} = \log_2(2x)$.
*Hướng dẫn.* Điều kiện $x \geq 2$. Biến đổi phương trình về $2^{x-1} = \log_2(2x)$.
Đặt $y = 2^{x-1}$, $y \geq 2$ thì $x = 1 + \log_2 y = \log_2(2y)$. Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} y = \log_2(2x), \\ x = \log_2(2y), \\ x, y \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = 2x, \\ 2^x = 2y, \\ x, y \geq 2. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $y.2^y = x.2^x$. Xét hàm số $f(t) = t.2^t$ $(t \geq 2)$ đồng biến. Suy ra $x = y$.
*Đáp số.* $x = 1$, $x = 2$.



VIETMATHS.NET

## 2.6 BÀI TẬP VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

**Phương pháp giải.** Các phương pháp giải bất phương trình mũ và bất phương trình lôgarit cũng tương tự như giải phương trình mũ và phương trình lôgarit, bao gồm: đưa về bất phương trình mũ, bất phương trình lôgarit cơ bản (đưa về cùng cơ số, đặt ẩn phụ, mũ hóa hoặc lôgarit hóa); sử dụng đồ thị; sử dụng tính chất của hàm số mũ và hàm số lôgarit.
Sau đây, chúng tôi đưa ra các ví dụ minh họa.

**Ví dụ 2.33.** (Đưa về cùng cơ số)
Giải các bất phương trình

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 3^{x^2+2x-15} > 1; & \text{b) } (\sqrt{5}+2)^{x+1} \geq (\sqrt{5}-2)^{x-3}; \\ \text{c) } \log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \geq -4; & \text{d) } \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) < 1. \end{array}$$

**Lời giải.** a) Bất phương trình tương đương với

$$3^{x^2+2x-15} > 3^0 \Leftrightarrow\; x^2+2x-15 > 0 \Leftrightarrow x > 3 \vee x < -5.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $D = (-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$.
b) Nhận xét rằng $\sqrt{5}-2 = (\sqrt{5}+2)^{-1}$, do đó bất phương trình có thể viết thành

$$(\sqrt{5}+2)^{x+1} \geq [(\sqrt{5}+2)^{-1}]^{x-3} = (\sqrt{5}+2)^{3-x} \Leftrightarrow\; x+1 \geq 3-x \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $D = [1; +\infty)$.
c) Ta có điều kiện của bất phương trình là $x^2+2x-8 > 0$. Khi đó ta có thể viết bất phương trình dưới dạng

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \geq \log_{\frac{1}{2}} 16.$$

Vì cơ số $\dfrac{1}{2}$ nhỏ hơn 1 nên bất phương trình trên tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2+2x-8 > 0 \\ x^2+2x-8 \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \vee x > 2 \\ -6 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \leq x < -4 \\ \;2 < x \leq 4. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $D = [-6; 4) \cup (2; 4]$.
d) Điều kiện $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow\; |x| > 1$. Bất phương trinh tương đương với

$$\begin{aligned} &\log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) < \log_3 3 \Leftrightarrow\; 0 < \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) < 3 \\ \Leftrightarrow\; &\log_{\frac{1}{2}} 1 < \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \Leftrightarrow\; 1 > x^2-1 > \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow &\; 2 > x^2 > \frac{9}{8} \Leftrightarrow\; \sqrt{2} > |x| > \frac{3}{2\sqrt{2}} \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $D = \Big(-\sqrt{2}; \dfrac{-3}{2\sqrt{2}}\Big) \cup \Big(\dfrac{3}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}\Big)$.

**Ví dụ 2.34.** (Đặt ẩn phụ)
Giải các bất phương trình sau

a) $0,4^x - 2,5^{x+1} > 1,5$; b) $\dfrac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$;
c) $2(\lg x)^2 + (1-\sqrt{2})\lg x^2 > 2\sqrt{2}$; d) $2\log_2^3 x + 5\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \geq 0$.

**Lời giải.** a) Vì $2,5 = \dfrac{1}{0,4} = 0,4^{-1}$ nên bất phương trình có thể viết lại thành

$$0,4^x - 2,5.0,4^{-x} - 1,5 > 0.$$

Đặt $t = 0,4^x$ $(t > 0)$, ta có bất phương trình đại số

$$t^2 - 1,5t - 2,5 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1 \text{ (loại)} \\ t > 2,5. \end{array}\right.$$

Khi đó ta có $0,4^x > 2,5$ hay $0,4^x > 0,4^{-1}$, do đó $x < -1$.
b) Chia cả tử và mẫu cho $4^x$ $(4^x > 0)$, ta có

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x} < 4.$$

Đặt $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x = t$ $(t > 0)$, ta có bất phương trình

$$\frac{1}{1-t} - 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{4t-3}{t-1} > 0 \Leftrightarrow t < \frac{3}{4} \vee t > 1.$$

Vì $t > 0$ nên ta có $0 < t < \dfrac{3}{4}$ hoặc $t > 1$. Từ đó suy ra $x > 1$ hoặc $x < 0$.
c) Đặt $t = \lg x,\ x > 0$, ta có

$$2t^2 + 2(1-\sqrt{2})t > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow t < -1 \vee t > \sqrt{2}.$$

Do đó ta có $\left[\begin{array}{l} \lg x < -1 \\ \lg x > \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{1}{10} \\ x > 10^{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$
d) Tương tự, đặt $t = \log_2 x$, ta có bất phương trình

$$2t^3 + 5t^2 + t - 2 \geq 0$$

hay

$$(t+2)(2t^2 + t - 1) \geq 0.$$

Bất phương trình này có nghiệm $-2 \leq t \leq -1$ hoặc $t \geq \dfrac{1}{2}$.
Suy ra $\dfrac{1}{4} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ hoặc $x \geq \sqrt{2}$.

**Ví dụ 2.35.** (Mũ hóa hoặc lôgarit hóa)
Giải các bất phương trình

a) $x^{\log_2 x} < 32$; b) $(x^2 + x + 1)^x < 1$;
c) $\log_{\frac{1}{5}} x + \log_4 x \geq 1$; d) $\log_x(5x^2 - 8x + 3) > 2$.

**Lời giải.** a) Với điều kiện $x > 0$, lấy lôgarit cơ số 2 cả hai vế ta có

$$\log_2 x.\log_2 x < 5 \Leftrightarrow -\sqrt{5} < \log_2 x < \sqrt{5}.$$

Từ đó suy ra $2^{-\sqrt{5}} < x < 2^{\sqrt{5}}$.
b) Ta chú ý $x^2 + x + 1 > 0$. Lôgarit cơ số 10 hai vế ra có

$$x\lg(x^2+x+1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ \lg(x^2+x+1) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \lg(x^2+x+1) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Hệ thứ nhất vô nghiệm, hệ thứ hai cho ta nghiệm $x < -1$.
c) Đổi về lôgarit cơ số 10, ta có

$$\frac{\lg x}{\lg\dfrac{1}{5}} + \frac{\lg x}{\lg 4} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\lg 5 - \lg 4}{\lg 5.\lg 4}.\lg x \geq 1.$$

Từ đó suy ra $x \geq 10^{\frac{\lg 5.\lg 4}{\lg 5 - \lg 4}}$.
d) Bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x > 1, \\ 5x^2 - 8x + 3 > x^2 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 5x^2 - 8x + 3 < x^2. \end{cases}$$

Hệ thứ nhất cho nghiệm $x > \dfrac{3}{2}$; hệ thứ hai cho nghiệm $\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{5}$.

**Ví dụ 2.36.** (Sử dụng tính chất của hàm số mũ, hàm số lôgarit)
Giải các bất phương trình

a) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^x + 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x < 1$;

b) $\log_2(\sqrt{x^2 - 5x + 5} + 1) + \log_3(x^2 - 5x + 7) \leq 2$.

**Lời giải.** a) Đặt $f(x) = \left(\dfrac{1}{6}\right)^x + 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. Nhận thấy $f(2) = 1$. Mặt khác, $f(x)$ là tổng của các hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, do đó $f(x)$ cũng là hàm nghịch biến. Từ đó ta có

$$f(x) < 1 = f(2) \Leftrightarrow x > 2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $D = (2; +\infty)$.
b) Đặt $t = \sqrt{x^2 - 5x + 5}$ $(t \geq 0)$, bất phương trình trở thành

$$\log_2(t+1) + \log_3(t^2+2) \leq 2.$$

Xét $f(t) = \log_2(t+1) + \log_3(t^2+2)$ trên $[0; +\infty)$. Do $t \geq 0$ nên $\log_2(t+1)$ và $\log_3(t^2+2)$ đều là các hàm số đồng biến, do đó $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.
Lại có $f(1) = 2$, từ đó suy ra $t \leq 1$. Giải ra ra được

$$1 \leq x \leq \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \leq x \leq 4.$$

# Bài tập tương tự.

**Bài tập 2.40.** Giải các bất phương trình

a) $5^{\log_3 \frac{2}{x+2}} < 1$; b) $(\sqrt{2}+1)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq (\sqrt{2}-1)^{-x}$;
c) $\lg(x^2-x-2) < 2\lg(3-x)$; d) $\ln|x-2| + \ln|x+4| \leq 3\ln 2$.

*Hướng dẫn.* a) Chú ý rằng $5^M < 1 \Leftrightarrow M < 0$ và $\log_3 N < 0 \Leftrightarrow 0 < N < 1$. *Đáp số.* $x > 0$.
b) *Đáp số.* Tập nghiệm $D = (-1;2] \cup [3;+\infty)$.
c) *Đáp số.* Tập nghiệm $D = (-\infty;-1) \cup \left(2;\dfrac{11}{5}\right)$.
d) *Đáp số.* Tập nghiệm $D = [-1-\sqrt{17};-2] \cup [0;-1+\sqrt{17}]$.

**Bài tập 2.41.** Giải các bất phương trình

a) $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} \geq 10$; b) $8^{\lg x} - 19.2^{\lg x} - 6.4^{\lg x} + 24 > 0$;
c) $\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)} + 1 > \log_3(3x^2-4x+2)$; d) $\sqrt{\log_x \sqrt{7x}}.\log_7 x < -1$.

*Hướng dẫn.* Đặt ẩn phụ. *Đáp số.* a) $x = k\pi \ \vee \ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;
b) $0 < x < 1 \ \vee \ x > 1000$; c) $-1 < x \leq \dfrac{1}{3} \ \vee \ 1 \leq x < \dfrac{7}{3}$; d) $0 < x < \dfrac{1}{49}$.

**Bài tập 2.42.** Giải các bất phương trình

a) $x^{\frac{1}{\lg x}} > 10.x^4$; b) $x^{\log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} \geq 2$;
c) $x^{\lg^2 x + \lg x - 4} > 10000$; d) $\log_{x^2}(3-2x) > 1$.

*Hướng dẫn.* Mũ hóa hoặc lôgarit hóa. *Đáp số.* a) $0 < x < 1$; b) $x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$;
c) $\dfrac{1}{100} < x < \dfrac{1}{10} \ \vee \ x > 100$; d) $-3 < x < -1$.

**Bài tập 2.43.** Giải các bất phương trình

a) $3^{\sqrt{x+4}} + 2^{\sqrt{2x+4}} > 13$; b) $\log_2 \sqrt{x+1} + \log_3 \sqrt{3x+9} > 1$.

*Hướng dẫn.* Sử dụng tính chất của hàm số mũ, hàm số lôgarit. *Đáp số.* a) x>0; b) x>0.

**Bài tập 2.44.** Giải bất phương trình $\log_2(x^2-1) > 12 - x^2$.
*Hướng dẫn.* Vẽ đồ thị hai hàm số $y = \log_2(x^2-1)$ và $y = 12 - x^2$ trên cùng một hệ trục tọa độ (chú ý các giao điểm là $(-3;3)$; $(3;3)$). *Đáp số.* $x < -3$ hoặc $x > 3$.

## 2.7 BÀI TẬP VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

**Phương pháp giải.** Thông thường, để giải một hệ phương trình, ta sử dụng các cách như: rút ẩn, đặt ẩn phụ, sử dụng hàm số,... Đối với hệ phương trình mũ và hệ phương trình lôgarit cũng vậy.
Sau đây là các ví dụ.

VIETMATHS.NET
VIETMATHS.NET

**Ví dụ 2.37.** (Rút ẩn)
Giải các hệ phương trình

$$\text{a) }\begin{cases} x-y=2, \\ 3^{x^2+y}=\dfrac{1}{9}; \end{cases} \qquad \text{b) }\begin{cases} 2^x.3^y=12, \\ 3^x.2^y=18; \end{cases}$$

$$\text{c) }\begin{cases} x+y=30, \\ \ln x+\ln y=3\ln 6; \end{cases} \qquad \text{d) }\begin{cases} x^2=y^4, \\ \log_2\dfrac{x}{y}=\log_y x. \end{cases}$$

**Lời giải.** a) Từ phương trình thứ nhất ta có $y=x-2$, thay vào phương trình thứ hai, ta được

$$3^{x^2+x-2}=3^{-2}.$$

Do đó $x^2+x-2=-2$ nên $x=0$ hoặc $x=-1$. Suy ra $y=-2$ hoặc $y=-3$.
Vậy hệ có hai nghiệm là $(0;-2)$ và $(-1;-3)$.
b) Lấy lôgarit cơ số 2 cả hai vế của hai phương trình, ta có

$$\begin{cases} x+y\log_2 3=2+\log_2 3, \\ x\log_2 3+y=1+2\log_2 3. \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn $x,y$. Nhân cả hai vế của phương trình thứ nhất với $\log_2 3$ rồi trừ cho phương trình thứ hai, ta được

$$y(\log_2^2 3-1)=\log_2^2 3-1 \Leftrightarrow\ y=1.$$

Dễ dàng suy ra $x=2$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(2;1)$.
c) Điều kiện $x,y$ dương. Từ phương trình thứ nhất suy ra $y=30-x$. Thế vào phương trình thứ hai ta được

$$\ln x+\ln(30-x)=3\ln 6 \Leftrightarrow\ \ln x(30-x)=\ln 6^3.$$

Suy ra $x=18$ hoặc $x=12$. Từ đó suy ra hệ có hai nghiệm $(18;12);(12;18)$.
d) Điều kiện $x>0, y>0, y\neq 1$. Với điều kiện này thì phương trình thứ nhất tương đương với $x=y^2$. Thế vào phương trình thứ hai ta được

$$\log_2 y=\log_y y^2 \Leftrightarrow\ y=4.$$

Suy ra $x=16$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(16;4)$.

**Ví dụ 2.38.** (Đặt ẩn phụ)
Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) }\begin{cases} 9^{2\cot x+\sin y}=3, \\ 9^{\sin y}-81^{\cot x}=2; \end{cases} \qquad \text{b) }\begin{cases} \log_y\sqrt{xy}=\log_x y, \\ 2^x+2^y=3; \end{cases}$$

$$\text{c) }\begin{cases} 2\lg x-3\lg y=-5, \\ 3\lg x+4\lg y=28; \end{cases} \qquad \text{d) }\begin{cases} \sqrt{x}+2\lg y=3 \\ x-3\lg y^2=1. \end{cases}$$

**Lời giải.** a) Đặt $\begin{cases} u = 9^{\sin x} \\ v = -9^{2\cot x} \end{cases}$ $(u > 0, v < 0)$. Hệ trở thành

$$\begin{cases} u + v = 2, \\ u.v = -3. \end{cases}$$

Khi đó $u, v$ là nghiệm của phương trình $t^2 - 2t - 3 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm $t = -1, t = 3$. Vì $u > 0, v < 0$ nên $u = 3, v = -1$. Thay lại, ta được

$$\begin{cases} 9^{\sin y} = 3 \\ -9^{2\cot x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \cot x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \\ x = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

b) Điều kiện $x, y > 0, x \neq 1, y \neq 1$. Hệ tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\log_y(xy) = \log_x y, \\ 2^x + 2^y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_y x + 1 = \dfrac{2}{\log_y x}, \\ 2^x + 2^y = 3. \end{cases}$$

Giải phương trình thứ nhất ẩn $t = \log_y x$ ta được $t = 1; t = -2$ do đó $x = y$ hoặc $x = \dfrac{1}{y^2}$.

Với $x = y$, thế vào phương trình thứ hai ta được $x = \log_2 \dfrac{3}{2}$.

Vơi $x = \dfrac{1}{y^2}$, thế vào phương trình thứ hai ta được

$$2^y + 2^{\frac{1}{y^2}} = 3 \ \ (y > 0, y \neq 1).$$

Phương trình này vô nghiệm, thật vậy

- Nếu $y > 1$ thì $2^y > 2$ và $2^{\frac{1}{y^2}} > 2^0 = 1$, suy ra $VT > 3 = VP$;
- Nếu $0 < y < 1$ thì $2^y > 1$ và $2^{\frac{1}{y^2}} > 2^1 = 2$, suy ra $VT > 3 = VP$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(\log_2 \dfrac{3}{2}; \log_2 \dfrac{3}{2})$.

c) Điều kiện $x, y$ dương. Đặt $u = \lg x, v = \lg y$, ta có hệ

$$\begin{cases} 2u - 3v = -5, \\ 3u + 4v = 18. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $u = 2, v = 3$. Từ đó suy ra $x = 100, y = 1000$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(100; 1000)$.

d) Điều kiện $x, y$ dương. Đặt $u = \sqrt{x},\ v = \lg y$ $(u > 0)$. Ta có hệ

$$\begin{cases} u + 2v = 3, \\ u^2 - 6v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v = 3 - u \\ u^2 + 3u - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2, \\ v = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Từ đó tính được $x = 4, y = \sqrt{10}$.

VIETMATHS.NET

**Ví dụ 2.39.** (Sử dụng hàm số)
Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2^x + 2x = 3 + y, \\ 2^y + 2y = 3 + x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+3} = 1 + \log_3 y, \\ \log_2 \sqrt{y+3} = 1 + \log_3 x. \end{cases}$

**Lời giải.** a) Trừ hai phương trình theo vế, ta được $2^x + 3x = 2^y + 3y$.
Xét hàm số $f(f) = 2^t + 3t$. Dễ thầy $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ $f(x) = f(y)$ suy ra $x = y$. Thay vào phương trình thứ nhất ta được $2^x = 3 - x$. Phương trình này có nghiệm duy nhất $x = 1$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(1; 1)$.
b) Điều kiện $x, y$ dương. Hệ phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} \log_2(x+3) = 2(1 + \log_3 y), \\ 2(1 + \log_3 x) = \log_2(y+3). \end{cases} \qquad (*)$$

Cộng vế với vế hai phương trình của hệ $(*)$, ta có

$$\log_2(x+3) + 2\log_3 x = 2\log_3 y + \log_2(y+3).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2(t+3) + 2\log_3 t$ trên miền $(0; +\infty)$. Dễ thấy hàm số luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$. Mà $f(x) = f(y)$ nên $x = y$. Thay vào một trong hai phương trình của hệ $(*)$ ta được

$$\log_2(x+3) = 2(1 + \log_3 x)$$

hay

$$\begin{aligned} & x + 3 = 2^{2(1+\log_3 x)} = 4.2^{\log_3 x^2} = 4.2^{\log_3 2 . \log_2 x^2} = 4.\left(2^{\log_2 x^2}\right)^{\log_3 2} \\ \Leftrightarrow\ & x + 3 = 4.x^{\log_3 4} \Leftrightarrow \quad x^{1-\log_3 4} + 3.x^{-\log_3 4} = 4. \qquad (**) \end{aligned}$$

Xét $g(x) = x^{1-\log_3 4} + 3.x^{-\log_3 4}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Ta có

$$g'(x) = (1 - \log_3 4)x^{-\log_3 4} - 3.\log_3 4.x^{-1-\log_3 4}.$$

Thấy ngay $g'(x) < 0, \forall x \in (0; +\infty)$, do đó $g(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Mặt khác $g(1) = 4$. Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $(**)$.
Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(1; 1)$.

# Bài tập tương tự.

**Bài tập 2.45.** Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 8^x.\sqrt{2}^y = 2^{2x+1}, \\ 3^x.27^y = 9^{y-1}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^{3x}.4^y = 8, \\ \lg(11 - x) - \lg(y + 100) = -1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x+y)^x = (x-y)^y, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3^x.2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2. \end{cases}$

*Hướng dẫn.* a) Lấy lôgarit cơ số 2 và cơ số 3. *Đáp số.* $(4;-6)$.
b) Lấy lôgarit cơ số 2. *Đáp số.* $(1;0)$.
c) Thế $x = 2y$ từ phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất. *Đáp số.* $\left(\frac{2}{9};\frac{1}{9}\right)$.
d) Thế $x = y + 3$ từ phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất. *Đáp số.* $(5;2)$.

**Bài tập 2.46.** Giải các hệ phương trình

$$\text{a)}\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{3}} = (x+y)^{\frac{1}{x-y}},\\ (x+y).2^{y-x} = 48;\end{cases}\qquad \text{b)}\begin{cases} y^{1-\frac{2}{5}\log_x y} = x^{\frac{2}{5}},\\ 1+\log_x\left(1-\dfrac{3y}{x}\right) = \log_x 4;\end{cases}$$

$$\text{c)}\begin{cases}xy = 40,\\ x^{\lg y} = 4;\end{cases}\qquad \text{d)}\begin{cases}3^{\lg x} = 4^{\lg y},\\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3}.\end{cases}$$

*Hướng dẫn.* a) Đặt $u = x + y, v = x - y$, tìm được $u = 12, v = -2$. *Đáp số.* $(5;7)$.
b) Lấy lôgarit cơ số $x$. Đặt $t = \log_x y$. *Đáp số.* $(16;4)$.
c) Lấy lôgarit cơ số 10 hai vế phương trình thứ hai. *Đáp số.* $(10;4), (4;10)$.
d) Lấy lôgarit cơ số 10 các vế. *Đáp số.* $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$.

**Bài tập 2.47.** Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a)}\begin{cases}3^x - 3^y = y - x,\\ x^2 + xy + y^2 = 12;\end{cases}\qquad \text{b)}\begin{cases}x - y = (\log_2 y - \log_2 x)(2 + xy),\\ x^3 + y^3 = 16.\end{cases}$$

*Hướng dẫn.* a) Biến đổi phương trình thứ nhất thành $3^x + x = 3^y + y$, xét hàm số $f(t) = 3^t + t$.
b) Điều kiện $x, y$ dương. Từ phương trình thứ nhất suy ra được $x = y$ (dựa vào tính đồng biến của hàm số $y = \log_2 t \ \ (t > 0)$). *Đáp số.* $(2;2)$.

$$\sum_{n=0}^{l} n^5 + n$$

VIETMATHS.NET