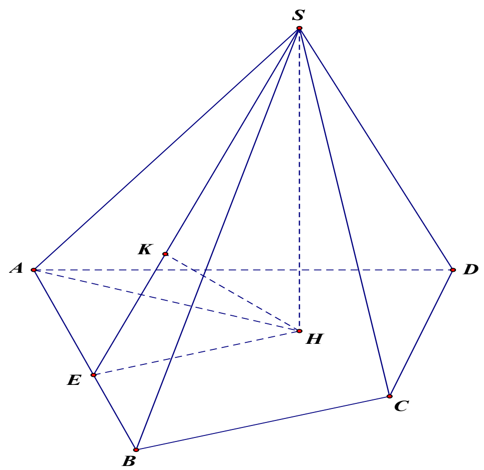
THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

PHẦN 1: KHỐI CHÓP

1. Hình chóp:



) Cho hình chóp S.ABCD, H là hình chiếu của S lên mp(ABCD), E là hình chiếu của H lên cạnh AB, K là hình chiếu của H lên SE. Ta có:

• SH = h là chiều cao của hình chóp.

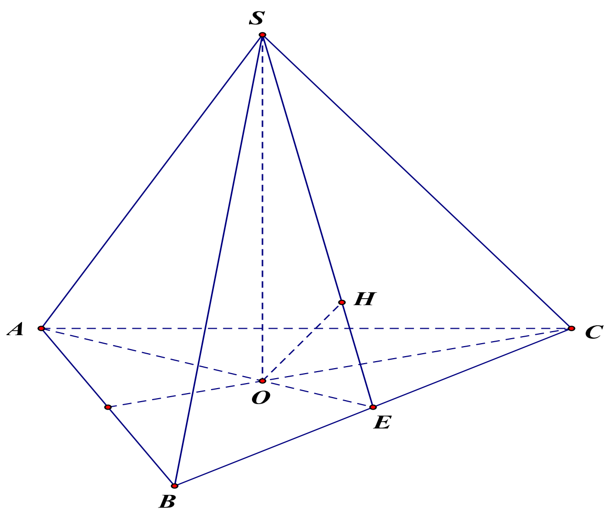
• SAH là góc giữa SA với mặt đáy (ABCD)

• SEH là góc giữa mặt bên (SAB) với mặt đáy.

• Độ dài đoạn HK là khoảng cách từ H đến (SAB)

2. Các hình chóp đặc biệt:

2.1 Hình chóp đều: Là hình chóp có đáy là đa giác đều và có các cạnh bên bằng nhau.

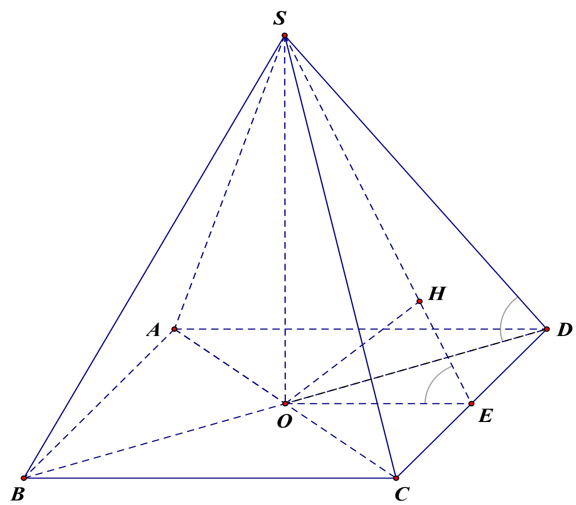


• SO = h là chiều cao của hình chóp.

• SAO là góc giữa SA với mặt đáy (ABCD)

• SEO là góc giữa mặt bên (SAB) với mặt đáy.

• Độ dài đoạn OH là khoảng cách từ H đến (SBC)



• SO = h là chiều cao của hình chóp.

• SAO là góc giữa SA với mặt đáy (ABCD)

• SEO là góc giữa mặt bên (SAB) với mặt đáy.

• Độ dài đoạn OH là khoảng cách từ H đến (SBC)

***) Tính chất:**

- Đáy là đa giác đều
- Các mặt bên là các tam giác cân và bằng nhau.
- Các cạnh bên hợp với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau.

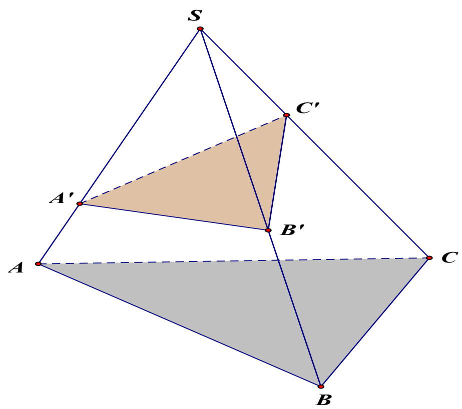
2.2 Tứ diện đều: Có 6 cạnh đều bằng nhau.

*) Tính chất: Có 4 mặt là các tam giác đều và bằng nhau.

2.3 Tứ diện gần đều: Có các cạnh đối diện bằng nhau.

<u>3. Thể tích khối chóp:</u> $\boxed{V=\frac{1}{3}B.h}$ Trong đó: B_ diện tích đáy, h_ chiều cao của khối chóp.

<u>4. Tỉ số thể tích hai khối tứ diện:</u>

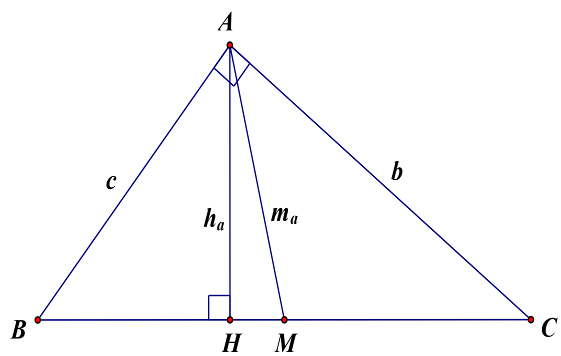


Cho khối tứ diện S.ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB, SC. Ta có:

$$\frac{V_{SABC}}{V_{S.A'B'C'}}=\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$$

<u>5/ Chú ý:</u>

5.1 Các hệ thức lượng trong tam giác vuông:



+) $a^2=b^2+c^2$

+) $b^2=ab',\ c^2=a.c'$

+) $a.h=b.c=(2S)$

+) $\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

+) $\sin B=\cos C=\frac{b}{a},\sin C=\cos B=\frac{c}{a}$

+) $\tan B=\cot C=\frac{b}{c},\ \tan C=\cot B=\frac{c}{b}$

5.2 Hệ thức lượng trong tam giác thường.

a/ Định lí sin: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ **b/ Định lí cosin:** $a^2=b^2+c^2-2bc\sin A$

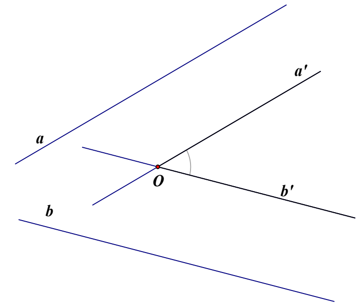
5.3 Các công thức tính diện tích tam giác. $S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}ab.\sin C=\frac{abc}{4R}=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

5.4 Cách xác định góc:

<table>
<tr><td>

a/ Giữa hai đường thẳng:
Góc giữa hai đường thẳng a, b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a’, b’ cùng đi qua O và lần lượt song song với a và b.
*) $0^0 \le (a,b) \le 90^0$ *) $(a,b) = 0^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a // b \\ a \equiv b \end{array}\right.$
*) $(a,b) = 90^0 \Leftrightarrow a \perp b$

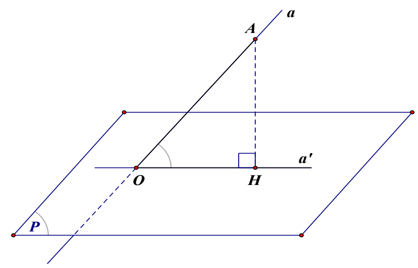
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

b/ Giữa đường thẳng và mặt phẳng:
$(a,(P)) = (a,a')$ trong đó a’ là hình chiếu của a lên (P).

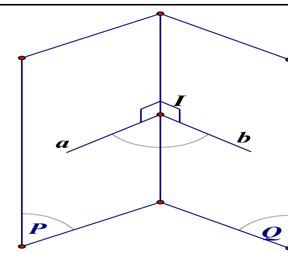
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

c/ Giữa hai mặt phẳng.
- Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q) và $I \in \Delta$
- đường thẳng $a \subset (P)$ và vuông góc với Δ tại I
- đường thẳng $b \subset (Q)$ và vuông góc với Δ tại I
Khi đó: (a,b) = ((P),(Q))

</td><td>



</td></tr>
</table>

5.5 Các cách xác định khoảng cách:

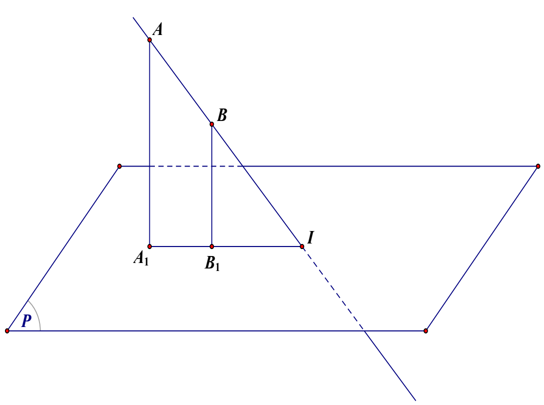
a/ Khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng, từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng.

b/ Khoảng cách từ 1 đường thẳng đến 1 mặt phẳng song song.

c/ Khoảng cách giữa hai mp song song.

d/ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

<u>Chú ý:</u> ***(cách tính khoảng cách gián tiếp)***



Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P) tại I.

Khi đó ta có: $\dfrac{d(A,(P))}{d(B,(P))} = \dfrac{AI}{BI}$

CÁ C DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1: Khối chóp đều – Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau.

Chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy

Bài 1: Cho hình chóp đều S.ABC có $AB = a, SA = a\sqrt{3}$.

a. Tính $V_{S.ABC.}$ b/ Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC).

Bài 2: Cho hình chóp đều S.ABC, có $AB = a$, góc giữa SA với mặt đáy (SBC) bằng 30^0.

a/ Tính $V_{S.ABC}$. b/ Tính khoảng cách giữa SA và BC.

Bài 3: Cho hình chóp đều S.ABC, có $AB = a.$ Góc giữ (SBC) và (ABC) bằng 30^0. Tính $V_{S.ABC}$.

Bài 4: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC đều cạnh a. Gọi H là chân đường cao của tứ diện hạ từ đỉnh S và H cách đều các đỉnh A, B, C. Khoảng cách từ H đến (SBC) bằng $\frac{a}{2}$.

a/ Chứng minh S.ABC là khối chóp đều. b/ Tính $V_{S.ABC}$

Bài 3: Cho tứ diện ABCD có cạnh CD = 2a, các cạnh còn lại bằng $a\sqrt{2}$.

a/ C/m AB $\perp$ CD. Xác định đường vuông góc chung của AB và CD.

b/ Tình V_{ABCD}

c/ Nhận dạng tam giác ACD và BCD. Từ đó tìm tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ giác ABCD.

Bài 4: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, có $AB = a, SA = a\sqrt{3}$

a/ Tính $V_{S.ABCD}$ b/ Tính khoảng cách từ tâm của ABCD đến mặt phẳng (SCD).

Bài 5: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, có $AB = a$, góc giữa SC với mặt đáy bằng 60^0.

a/ Tính $V_{S.ABCD}$ b/ Tính khoảng giữa BD và SC.

Bài 6: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, có $SA = a\sqrt{3}$, góc giữa (SCD) với mặt đáy bằng 60^0.

a/ Tính $V_{S.ABCD}$ b/ Tính khoảng giữa SA và CD.

Bài 7: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, có ABCD là hình vuông tâm O, khoảng cách từ O đến (SCD) bằng a, góc giữa (SCD) với mặt đáy bằng 60^0. Tính $V_{S.ABCD}$.

Bài 5: (KB – 2004) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0 . Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD). Tình $V_{S.ABCD}$ theo a.

Bài 6: (NN I – 2000) Cho hình chóp đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a$\sqrt{5}$. Một mặt phẳng (P) qua AB và vuông góc với (SCD) cắt SC và SD tại C' và D'.

a/ Tính $S_{ABC'D'}$ b/ Tính $V_{ABCDD'C'}$

Bài 7: (KTQD – 2001). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a, BC = a$. Các cạnh bên bằng nhau và cùng bằng a$\sqrt{2}$.

a/ Tính $V_{S.ABCD}$ theo a.

b/ Gọi M, N là trung điểm của AB và CD, K là điểm trên cạnh AD sao cho AK = $\frac{a}{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SK theo a.

Bài 8: Cho tứ diện đều S.ABC có cạnh bằng a. Dựng đường cao SH.

a/ Chứng minh $SA \perp BC$.

b/ Tính thể tích khối chóp và diện tích toàn phần của tứ diện.

c/ Gọi O là trung điểm của SH. Chứng minh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau.

Bài 9: Cho hình chóp S.ABCD có các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a.

a/ Tính thể tích của khối chóp.

b/ Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

Bài 10: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0 và cạnh đáy bằng a.

a/ Tính $V_{S.ABCD}$

b/ Qua A dựng mặt phẳng (P) vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi (P).

Bài 11: Cho hình chóp đều S.ABCD có khoảng cách từ tâm O của đáy đến mặt bên là a, góc giữa mặt bên và đường cao bằng 30^0.

a/ Tính thể tích khối chóp S.ABCD

b/ Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. M là điểm trên cạn SD sao cho $MS = 2MD$. Mặt phẳng (MEF) cắt SA tại N. Tính thể tích khối chóp S.EFMN.

Bài 12: (2012B) Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với $SA = 2a, AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên trên SC. Chứng minh $SC \perp (ABH)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABH$

Bài 13: (09CĐ) Cho hình chóp đều S.ABCD có $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của SA, SB, CD. Chứng minh $MN \perp SP$. Tính thể tích của khối tư diện $AMNP$

DẠNG 2: ***Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy (có hai mặt bên cùng vuông góc với đáy)***

- Cạnh bên vuông góc với đáy: Là chiều cao của khối chóp

- Hai mặt bên vuông góc với đáy: Đường cao là giao tuyến

Bài 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, SA $\perp$ (ABC), $SB = a\sqrt{3}$.

a/ Tính $V_{S.ABC}$ b/ Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Bài 2: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, SA $\perp$ (ABC), (SBC) tạo với mặt đáy một góc bằng 30^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Bài 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, góc $ACB = 30^0$, cạnh $AC = a\sqrt{3}$. Góc giữa SB với mặt đáy (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Bài 4: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác cân tại A, góc $BAC = 120^0$, cạnh $BC = 2a$. Góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 45^0. Tính $V_{S.ABC}$

Bài 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, có SA $\perp$ (ABCD), SC = a$\sqrt{3}$.

a/ Tính $V_{S.ABCD}$ b/ Tính khoảng cách giữa BD với SC.

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, có SA $\perp$ (ABCD), Góc giữa SC với mặt đáy (ABCD) bằng 30^0.

a/ Tính $V_{S.ABCD}$ b/ Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

Bài 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, SA $\perp$ (ABCD) và $AC = 2a$. Góc giữa (SCD) với mặt đáy (ABCD) bằng 30^0.

a/ Tính $V_{S.ABCD}$ b/ Tính tan của góc giữa SC với mặt đáy (ABCD).

Bài 8: Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc nhọn A bằng 60^0. $SA \perp (ABCD)$, khoảng cách từ A đến SC bằng a. Tính $V_{S.ABCD}$.

Bài 9: Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, có $AB = BC = a, AD = 2a$. Mặt phẳng (SCD) hợp với đáy một góc bằng 60^0. Tính $V_{S.ABCD}$.

Bụi 10. (KD – 2006). Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

Bài 11: **(KB – 2006)**Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$. SA = a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Bài 12: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD. Chứng minh $SC \perp (AHK)$. Tính thể tích của khối tứ diện S.AHK.

Bài 13: ***(2011A)*** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB, mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC ở N. Biết góc giữa (SBC) với (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Bài 14: ***(08CĐ)*** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, $BAD = ABC = 90^0$, $AB = BC = a, AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Chứng minh BCNM là hình chữ nhật và tính thể tích khối chóp S.BCNM theo a.

HD: Dùng tỉ số thể tích.

DẠNG 3: Khối chóp có mặt vuông góc với đáy

Chú ý: Đường cao của khối chóp = đường cao của mặt đó và chân đường cao thuộc giao tuyến

Bài 1: Cho hình chóp S. ABC có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, tam giác SAC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Tính $V_{S.ABC}$ trong các trường hợp:

a/ SB = $a\sqrt{3}$ b/ SB tạo với mặt đáy một góc 30^0.

Bài 2: Cho tứ diện ABCD có ΔBCD vuông cân tại B, $CD = a$, ΔACD cân tại A và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (BCD). Tính V_{ABCD} biết AB tạo với mạt phẳng (BCD) góc 60^0.

Bài 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC = a$. Mặt phẳng (SAC) vuông góc với đáy, các mặt bên (SAB) và (SBC) cùng tạo với đáy 1 góc 45^0.

a/ Chứng minh chân đường cao của khối chóp là trung điểm của AC

b/ Tính thể tích khối chóp S.ABC

Bài 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, ΔSAD cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABCD). Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 30^0. Tính $V_{S.ABCD}$

Bài 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = 2AD = 2a. Tam giác SAD cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABCD). Tính $V_{S.ABCD}$ biết SB tạo vơi đáy một góc 30^0.

Bài 6: Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông cân tại A và $BC = a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC), góc giữa (SAC) với mặt đáy (ABC) bằng 45^0. Tính $V_{S.ABC}$

Bài 7: (KA – 2007) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

Bài 8: (KB – 2008) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a,SB = $\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Bài 9: (KA – 2009) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; AB = AD = 2a; CD = a; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Bài 10: (2011D): Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a, BC = 4a$, mặt phẳng (SBC) vuôn góc với mp(ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $SBC = 30^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ B đến (SAC) theo a.

<u>Bài 11:</u> (2010 CĐ) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, SA = SB, góc giữa SC với mặt phẳng đáy bằng 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD.

<u>Bài 12:</u> Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh 2a, $(SAB) \perp (ABCD)$. Góc giữa (SAD) và (ABCD) bằng 60^0. M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Tính $V_{S.AMCN}$.

<u>Bài 13:</u> Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}, AD = a, (SAC) \perp (ABCD), SA = a$ tam giác SAC vuông tại S. Tính $V_{S.ABCD}$.

<u>Bài 16:</u> Cho hình chóp S.ABCD là hình vuông cạnh a, $(SAB) \perp (ABCD)$, tam giác SAB cân tại S, M là trung điểm của CD, mặt phẳng (SBM) tạo với mặt đáy (ABCD) góc 60^0. Tính $V_{S.ABCD}$.

DẠNG 4: Khối chóp cho trước đường cao.

<u>Bài 1:</u> Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Hình chiếu của S lên (ABCD) là trọng tâm của tam giác ACD, SA = a, SA tạo với mặt đáy (ABCD) góc 60^0. M, N, P lần lượt là trung điểm của SC, AB, AD. a/ Tính $V_{S.ABCD}$ b/ Tính $V_{M.ANP}$

<u>Bài 2:</u> Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang vuông tại A, D. Hình chiếu của S lên (ABCD) là trung điểm M của AC. Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy (ABCD) một góc 60^0. $AB = AD = 2a, DC = a$.

a/ Tính $V_{S.ABCD}$

b/ Gọi N, P, Q lần lượt là trung điểm của SC, AB, AD. Tính V_{NPQD}

<u>Bài 3:</u> Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tai A và D.Hình chiếu của S lên (ABCD) là trung điểm của cạnh AD. Góc giữa SB với mặt đáy (ABCD) bằng 60^0, $AB = AD = 2a, DC = a$. Tính $V_{S.ABCD}$

<u>Bài 4:</u> Cho hình chóp S.ABC có ΔABC là tam giác vuông tại A, $ACB = 60^0$. Hình chiếu của S lên trên (ABC) là trọng tâm của tam giác ABC, $SB = a$, góc giữa SB với mặt đáy (ABC) bằng 60^0. Tính $V_{S.ABCD}$.

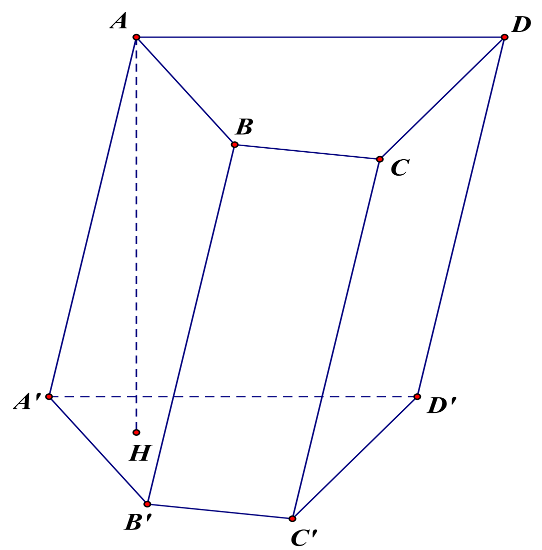
<u>Bài 5:</u> (2010D) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA = a, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là H thuộc đoạn AC và $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích của khối tứ diện SMBC theo a.

<u>Bài 6:</u> ***(2012A)*** Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là H thuộc AB sao cho $HA = 2HB$.Góc giữa SC với (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

<u>Bài 7:</u> ***(2010A)*** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AD, H là giao điểm của CN và DM. Biết $SH \perp (ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và tính khoảng cách giữa DM và SC theo a.

PHẦN 2: KHỐI LĂNG TRỤ

1. Hình lăng trụ



2/ Các lăng trụ đặc biệt

a/ Lăng trụ đứng: Là lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy. Các mặt bên là các hình chữ nhật. Cạnh bên bằng đường cao của lăng trụ.

b/ Lăng trụ đều: Là lăng trụ đứng và có đáy là đa giác đều. Các mặt bên của LT đều là các hình chữ nhật và bằng nhau.

c/ Hình hộp: Là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

- 6 mặt của hình hộp là các hình bình hành.
- Hai mặt đối diện song song và bằng nhau.
- Bốn đường chéo của hình hộp đồng quy tại trung điểm của mỗi đường.

d/ Hình hộp chữ nhật: Có 6 mặt đều là các hình chữ nhật.

e/ Hình lập phương: Là hình có 6 mặt đều là các hình vuông (bằng nhau).

3/ Thể tích của khối lăng trụ: $\boxed{V = B.h}$

CÁC MÔ HÌNH CHÍNH

Mô hình 1: LĂNG TRỤ ĐỨNG – LĂNG TRỤ ĐỀU

Bài 1: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có tam giác ABC vuông cân tại A, $BC = 2a$, Mặt phẳng (A'BC) tạo với mặt đáy (ABC) một góc 60^0.

a/ Chứng minh $AB \perp (ACC'A')$

a/ Tính thể tích khối lăng trụ theo a.

b/ Tính khoảng cách từ A đến đến mp(A'BC).

c/ Tính từ AA' đến mp(BCC'B').

Bài 2: Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C' , góc giữa mặt phẳng (C'AB) với (ABC) bằng 30^0, khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABB'A') bằng a. Tính khoảng cách từ C đến mp(C'AB) và thể tích khối lăng trụ.

Bài 3: Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A với AC = a, $ACB = 60^0$, biết BC' hợp với (AA'C'C) một góc 30^0.Tính AC' và thể tích lăng trụ.

Bài 4: Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có cạnh bên bằng 4a và đường chéo 5a. Tính thể tích khối lăng trụ này.

Bài 5: Cho hình lăng trụ đều ABCD.A'B'C'D', góc giữa (B'AC) với mặt đáy (ABCD) bằng 60^0, khoảng cách từ B đến (B'AC) bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ ABCD.A'B'C'D'.

Bài 6: Cho lăn trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ đáy là tam giác đều. Mặt phẳng (A_1BC) tạo với đáy (ABC) một góc 30^0 và tam giác A_1BC có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

Bài 7: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có khoảng cách giữa AB và A_1D bằng 2. Độ dài đường chéo mặt bên bằng 5.

a/ Hạ $AK \perp A_1D$. Chứng minh AK = 2.

b/ Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Các bài tập tự luyện

Bài 1: Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và biết $A'B = 3a$. Tính thể tích khối lăng trụ.

Bài 2: Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $BAC = 60^0$, $AC = BD'$. Tính thể tích khối lăng trụ theo a.

Bài 3: Lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có cạnh đáy là a. đường chéo AC' tạo với mặt bên BCC'B' góc 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ .

Bài 4: Đáy của hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' là hình thoi có đường chéo nhỏ là a và góc nhọn là 60^0. Diện tích mặt bên của khối hộp là $a^2\sqrt{2}$ Tính thể tích khối hộp .

Bài 5: Lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy là a . Diện tích tam giác ABC' là $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ .

Bài 6: Lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có chiều cao $a\sqrt{2}$. Mặt phẳng (ABC') tạo với mặt đáy góc 30^0 . Tính thể tích khối lăng trụ .

Bài 7: Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông. Gọi O là tâm của ABCD và $OA' = a$. Tính thể tích của khối hộp khi:

a/ Cạnh đáy và cạnh bên của lăng trụ bằng nhau. b/ OA' hợp với đáy ABCD một góc 60^o.

c/ A'B hợp với (AA'CC') một góc 30^0. d/ Diên tích tam giác BDA' bằng $2a^2$.

Bài 8: Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C' có cạnh bên AA' = a. Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau:

a/ Mặt phẳng (A'BC) hợp với đáy (ABC) một góc 60^0. b/ A'B hợp với đáy (ABC) một góc 45^0.

c/ Khoảng cách từ A đến (A'BC) bằng $\frac{a}{\sqrt{2}}$. d/ Diện tích tam giác A'BC bằng $\frac{a^2}{4}$.

Bài 9: Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD A'B'C'D' có cạnh bên AA' = 2a .Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

a/ Mặt (ACD') hợp với đáy ABCD một góc 45^0 . b/ BD' hợp với (ABCD) một góc 60^0 .

c/ Khoảng cách từ D đến mặt (ACD') bằng a . d/ Diện tích tam giác ACD' bằng $\frac{a^2\sqrt{5}}{2}$

Bài 10: Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông đường chéo bằng 2a. Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

a/ Mặt phẳng (BDC') hợp với đáy ABCD một góc 60^0. b/ Tam giác BDC' là tam giác đều.

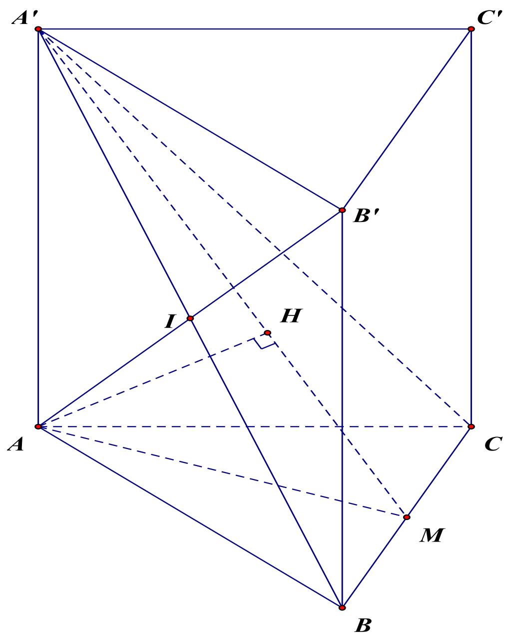
c/ AC' hợp với đáy ABCD một góc 45^0. d/ Khoảng cách giữa AC với BD' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài 11: Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và góc nhọn $BAC = 60^0$ .Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

a/ Mặt (BDC') hợp với đáy ABCD một góc 60^0. b/ Khoảng cách từ C đến (BDC') bằng a

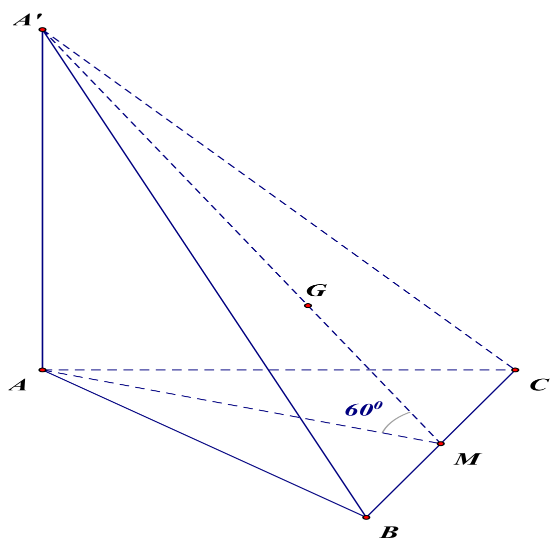
c/ AC' hợp với đáy ABCD một góc 45^0. d/ Diện tích tam giác BDC' bằng $\frac{a^2}{2}$

Bài 12: (KD – 2008) Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, AB = BC = a, cạnh bên AA' = a$\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.



HD: Dùng tỉ số khoảng cách

Bài 13: (2010B) Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa mặt phẳng (A'BC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. G là trọng tâm của tam giác A'BC. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.



Mô hình 2: LĂNG TRỤ XIÊN

Chú ý: ***- Giả thiết không có từ “đứng” hoặc “đều”***

- Thường cho trước đường cao với giả thiết “ Hình chiếu của đỉnh lên trên mặt đối diện là ...”

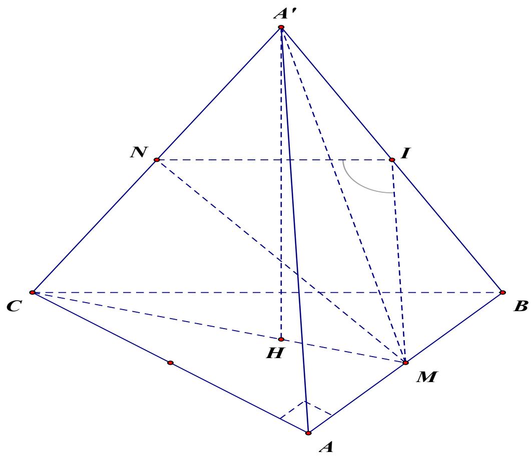
Bài 1: Cho lăng trụ tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết AA' hợp với đáy ABC một góc 60^0.

a/ Chứng minh rằng BB'C'C là hình chữ nhật. b/ Tính thể tích lăng trụ.

Bài 2: Cho lăng trụ ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, biết chân đường vuông góc hạ từ A' trên ABC trùng với trung điểm của BC và AA' = a.

a/ Tìm góc hợp bởi cạnh bên với đáy lăng trụ. b/ Tính thể tích lăng trụ.

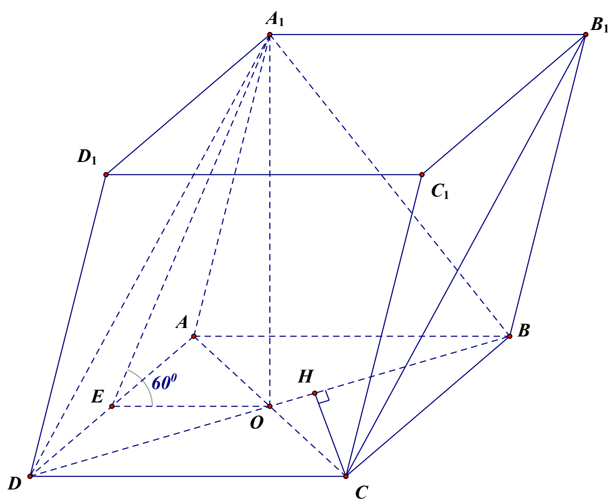
Bài 3: (NGT 2011) Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$, $A'A = A'B = A'C$. Mặt phẳng $(A'AB)$ hợp với mặt đáy góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ và cosin của góc giữa BC và AA'.



Bài 4: (2011B) Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A_1 lên mặt phẳng ABCD trùng vào giao điểm của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

***Chú ý:* Khoảng cách từ 1 điểm M đến một mặt phẳng (P) bằng k/c từ đường thẳng d đến (P). Trong đó d qua M và song song với (P).**

Từ đó ta có: $d_{(B_1,(A_1BD))} = d_{(B_1C.(A_1BD))} = d_{(C,(A_1BD))} = CH$

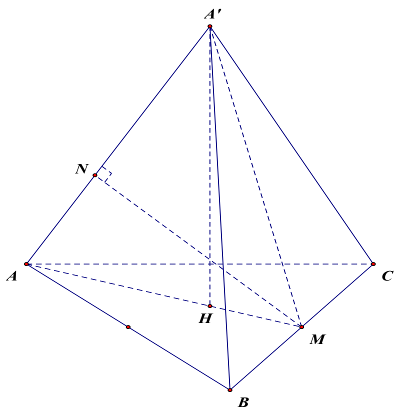


Bài 6: (2012D) Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông, tam giác A'AC vuông cân, $A'C = a$. Tính thể tích khối tứ diện ABB'C' và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

Bài 7: (DTH 2011) Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân tại A. $AB = 2a, BAC = 120^0$.

Hình chiếu của A’ lên đáy trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Biết ta giác A’BC vuông tại A’. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

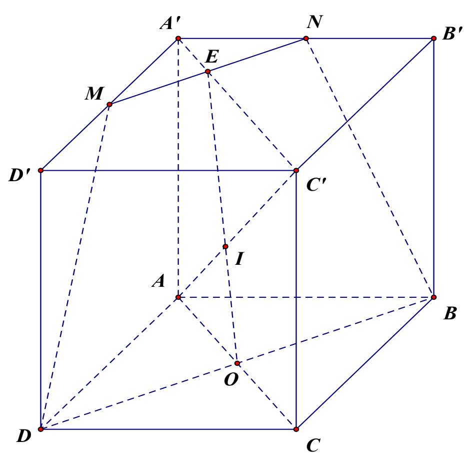
Bài 8: (LTV 2010) Cho lăng trụ ABC.A’B’C’ có $A'.ABC$ là hình chóp đều cạnh AB = a. Biết độ dài đoạn vuông góc chung của AA’ và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$, Tính thể tích khối chóp $A'.BB'C'C$.



CÁC BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1: ***(DB06)*** Cho hình hộp đứng ABCD.A’B’C’D’ co các cạnh $AB = AD = a, AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}, BAD = 60^0$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của A’D’ và A’B’.

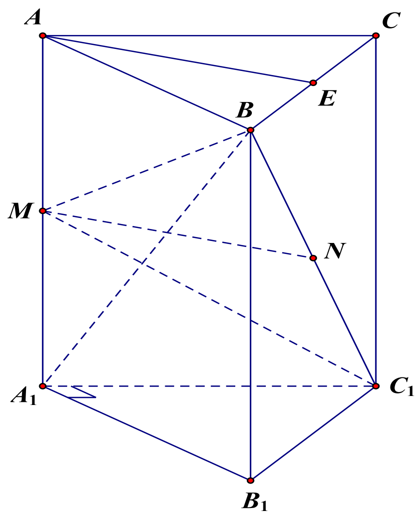
a/ Chứng minh $AC' \perp (BDMN)$ b/ Tính thể tích khối chóp A.BDMN.



Bài 2*: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A’ lên (ABC) trùng với tâm O của tam giác ABC. Một mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA’ cắt lăng trụ theo thiết diện có diện tích là $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Tính thể tích khối lăng trụ.

Bài 3 (DB 2007): Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác vuông $AB = AC = a, AA_1 = a\sqrt{2}$. Gọi

M, N lần lượt là trung điểm của AA_1, BC_1. Chứng minh MN là đoạn vuông góc chung của AA_1 và BC_1. Tính thể tích khối chóp MA_1BC_1.



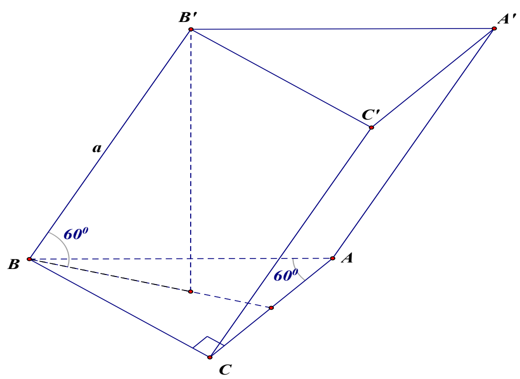
HD: *) MN // AE mà $AE \perp AA_1 \Rightarrow MN \perp AA_1$

Do hai hình chữ nhật: AA_1B_1B, AA_1C_1C bằng nhau: $MB = MC_1$ Do đó ΔMBC_1 cân tại M $\Rightarrow MN \perp BC_1$. MN là đường vuông góc chung.

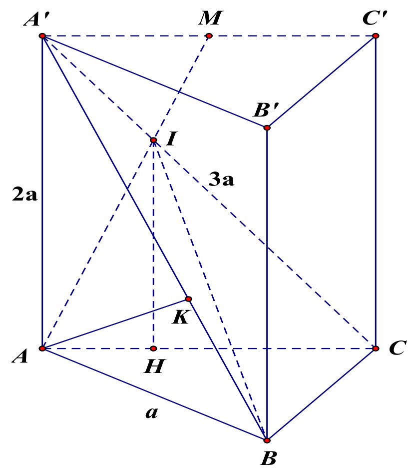
*) $A_1C_1 \perp (AA_1B_1B) \Rightarrow A_1C_1 \perp (A_1MB)$

$$\Rightarrow V_{MA_1BC_1} = V_{C_1.A_1MB} = \frac{1}{3} A_1C_1.S_{A_1MB}$$

<u>Bài 4:</u> (KB - 2009) Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có BB' = a, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0; tam giác ABC vuông tại C và $BAC = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A'ABC theo a.



<u>Bài 5:</u> (KD – 2009). Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).



HD: $\frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{2}{3}AA' = \frac{4a}{3}$ và IH là đường cao của tứ diện IABC. $AC = a\sqrt{5}, BC = 2a \Rightarrow V_{IABC} = \frac{1}{3}IH.S_{ABC} =$

*) Dựng IK vuông góc với A'B. Ta có A'K là khoảng cách từ A đến (IBC).

Bài 6: **(KA - 2008)** Cho lăng trụ ABC.A 'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.