統計概論

科學的決策框架

2018.02.26

杜岳華

Outline

- 資料觀點
- 機率觀點
- Statistics is about inference and estimation
- Estimation
- 中央極限定理（Central Limit Theorem）
- Hypothesis test
- Maximum Likelihood Estimation

資料觀點

統計是幫我們從**資料**中萃取知識跟資訊的技術

假設：藉由蒐集資料可以讓我們了解這個世界

也就是，資料呈現了真實世界的面貌

依據資料分類

- Continuous data
  - Real-valued data
- Discrete data
  - Counting data
  - Ordinal data
  - Nominal data
    - Binary data
    - Categorical data

Real-valued data

eg. 身高、體重、時間、
空間（長度、體積）

Counting data

eg. 網站點擊次數
影片瀏覽次數

Ordinal data (次序資料)

eg. 名次、排序

Nominal data (名目資料)

eg. 性別、出生年、居住縣市

沒辦法直接分析的資料

eg. 文章、陳述性的句子

Noise!

我們從這個世界蒐集到的資料都不那麼*完美*

> *eg. 純水的 pH 值是7.0，但 pH meter 測出來都不會是準確的7.0，一定含有小數點*

處理資料都會遇到不確定性（uncertainty）

我們要如何處理不確定性？

> *我們要怎麼說"純水的 pH 值是7.0"*

機率觀點

處理不確定性的絕佳手段是引進機率

把問題轉化為：

> *這件事所發生的機率為何？*

也就是，在大多數情況下

> *純水的 pH 值是接近7.0*

但是怎麼知道是7.0，而不是7.001，或是其他數字？

機率的引進 $P(X = x)$

- 樣本空間 (sample space, Ω):
在試驗中，所有可能出現的元素的集合
  - {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- 事件 (event, x):
樣本空間的子集，用簡單的數字來代表
  - x = {1}
  - x = {1, 2, 3}
- 隨機變數 (random variable, X):
用來代表變項

事件發生的機率

- x = {1}
  => $P(X = 1)$
- x = {1, 2, 3}
  => $P(1 \leq X \leq 3)$
- x ?
  => $P(X = x)$

$$P(X = x) = ?$$

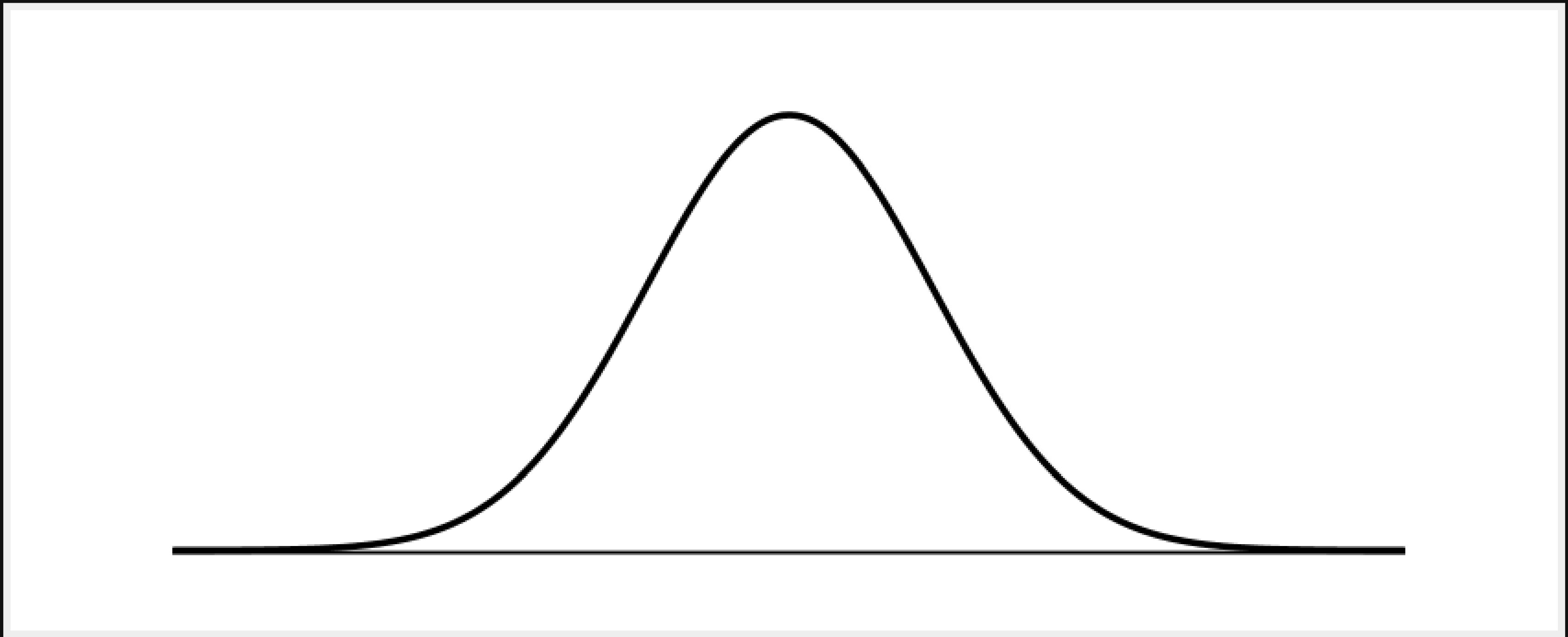
I don't know.

Maybe take a look at the distribution of data?

Maybe get a hypothesis yourself?

We usually use normal distribution.

(but not always fit, worth give it a try!)



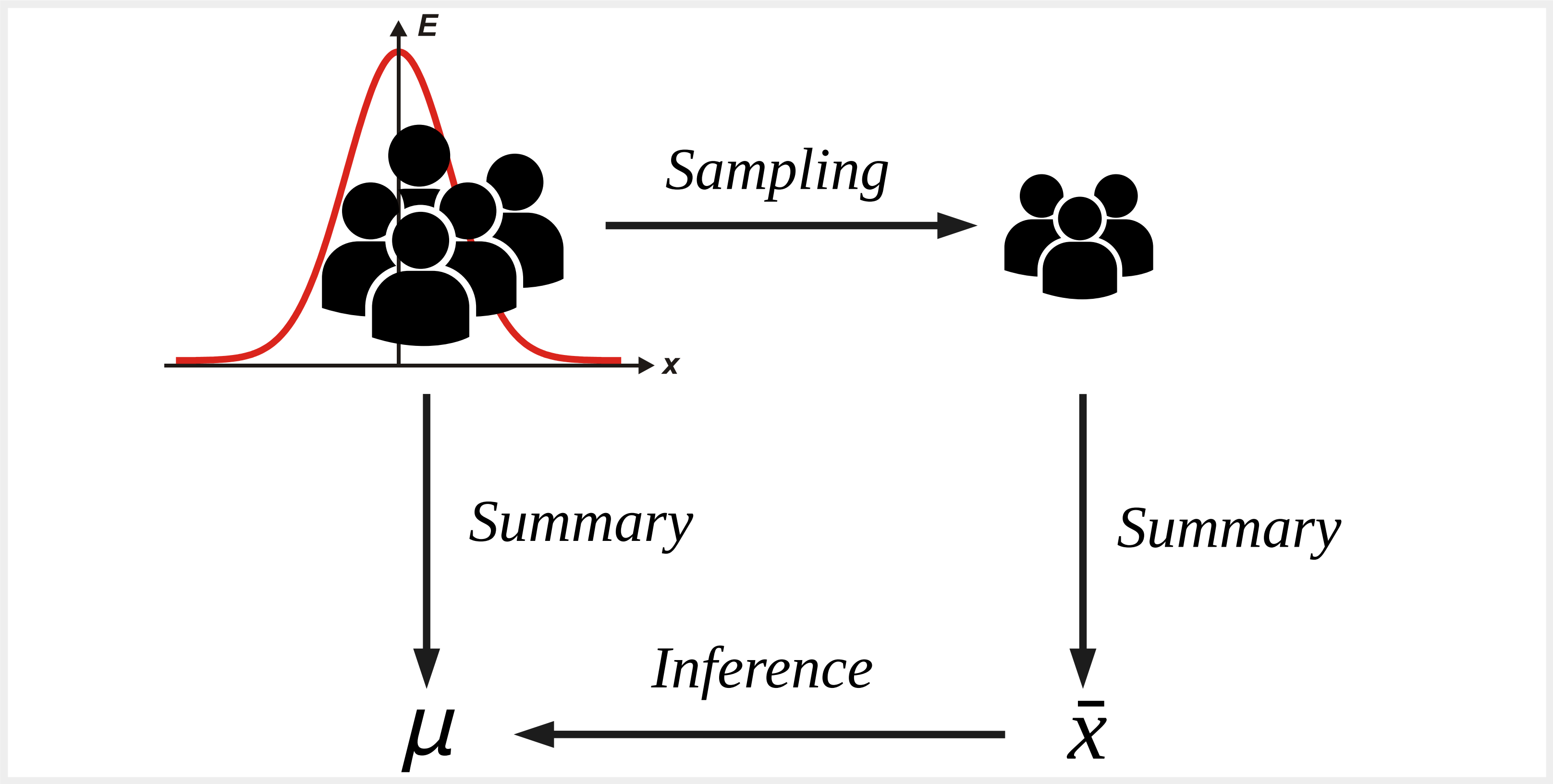
在資料的分佈中我們會探討兩個趨勢：

- 集中趨勢
  - mean（平均值）
  - median（中位數）
  - mode（眾數）
- 離散趨勢
  - standard deviation（標準差）
  - quartile（四分位數）
  - max, min（最大最小值）

在不確定性的世界不要奢望確定性，那不存在

只存在大多數情況及例外

Statistics is about inference and estimation



我們假設：

1. 我們的樣本都是從同一個母體來的
2. 樣本之間是互相獨立的

統計量

我們計算統計量：

- $\bar{x}$
- s

希望可以推估母體（機率模型）的參數

- μ
- σ

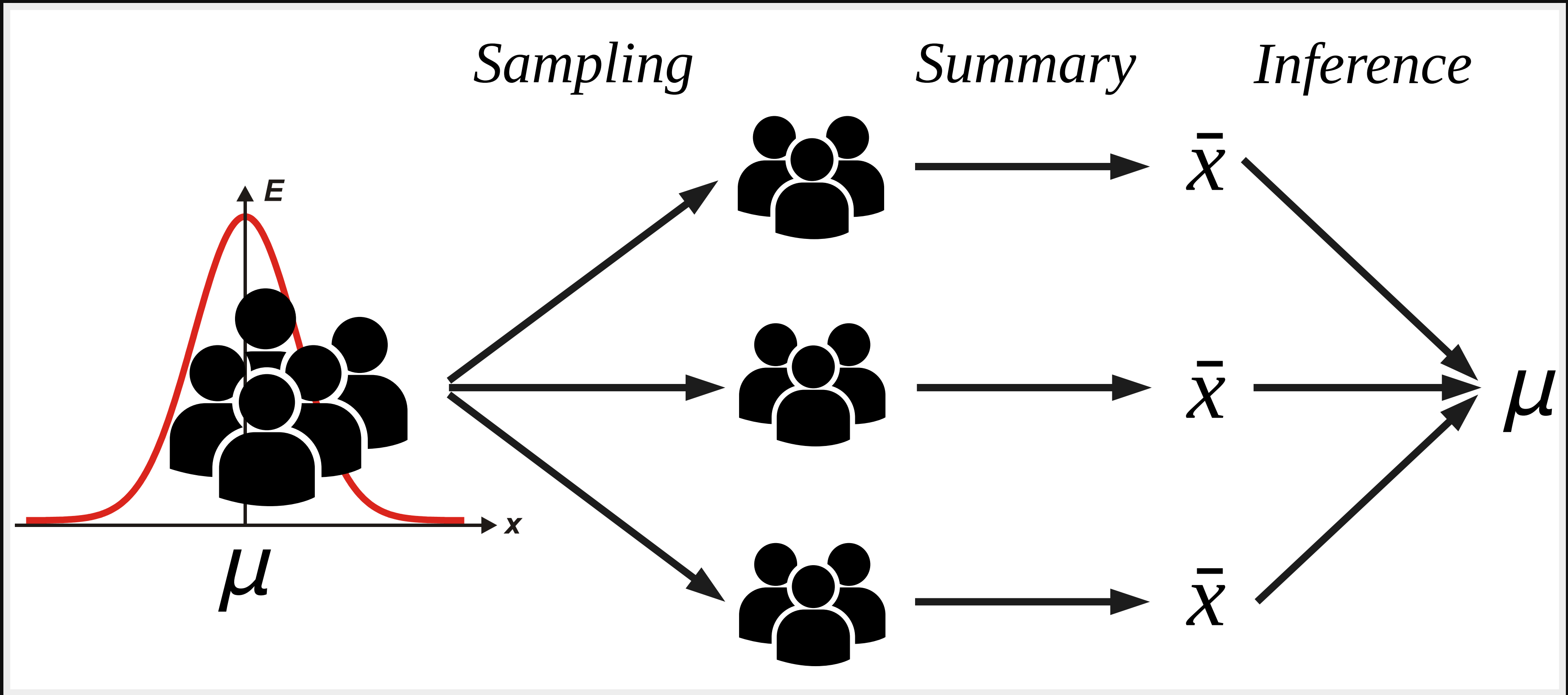
Expectation operator (期望值運算子)

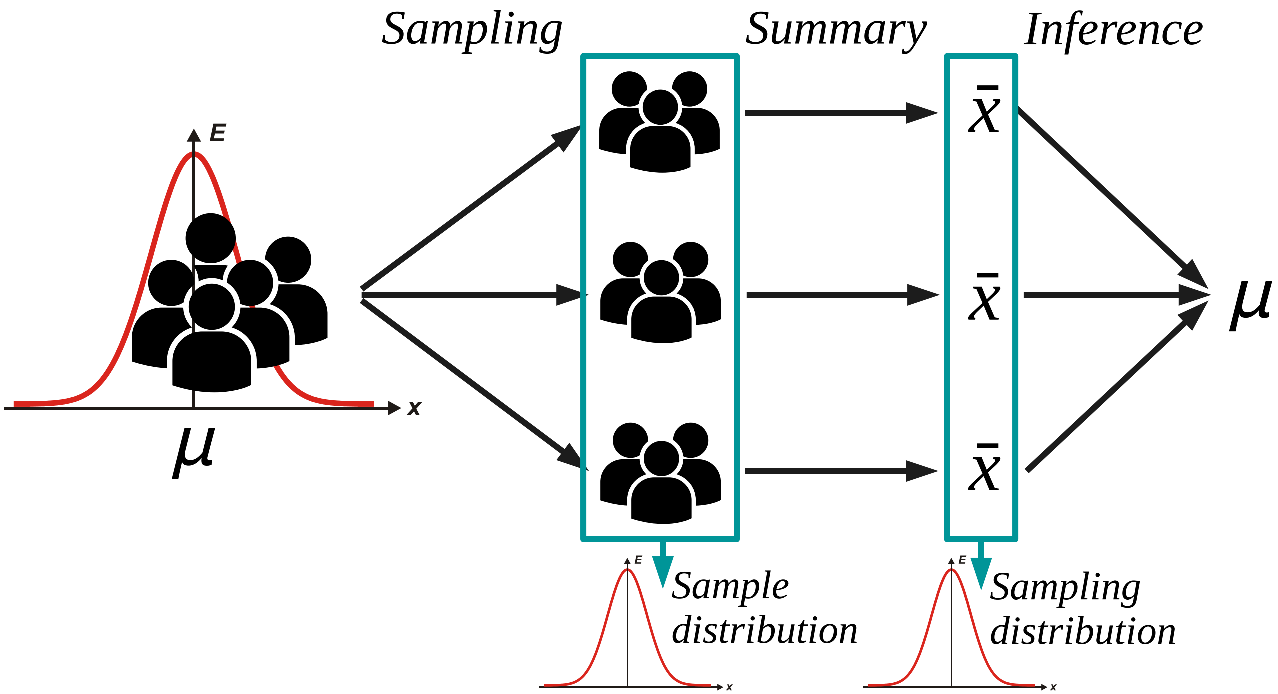
$$P(X = x)$$

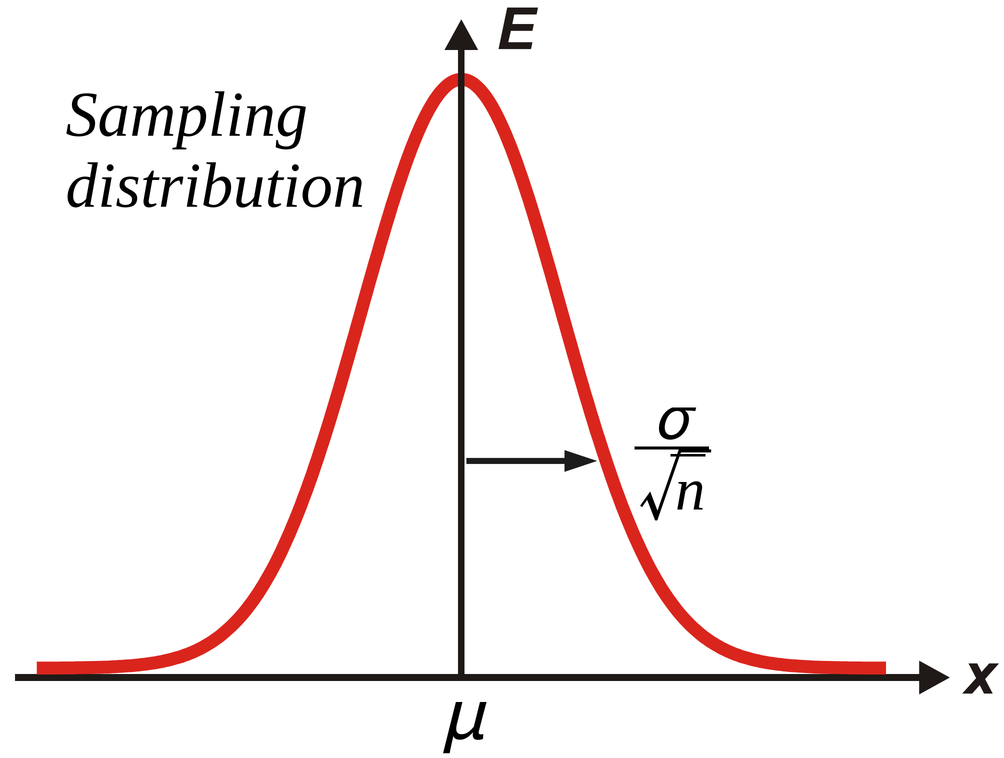
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x_i \times P(X = x_i) dx$$

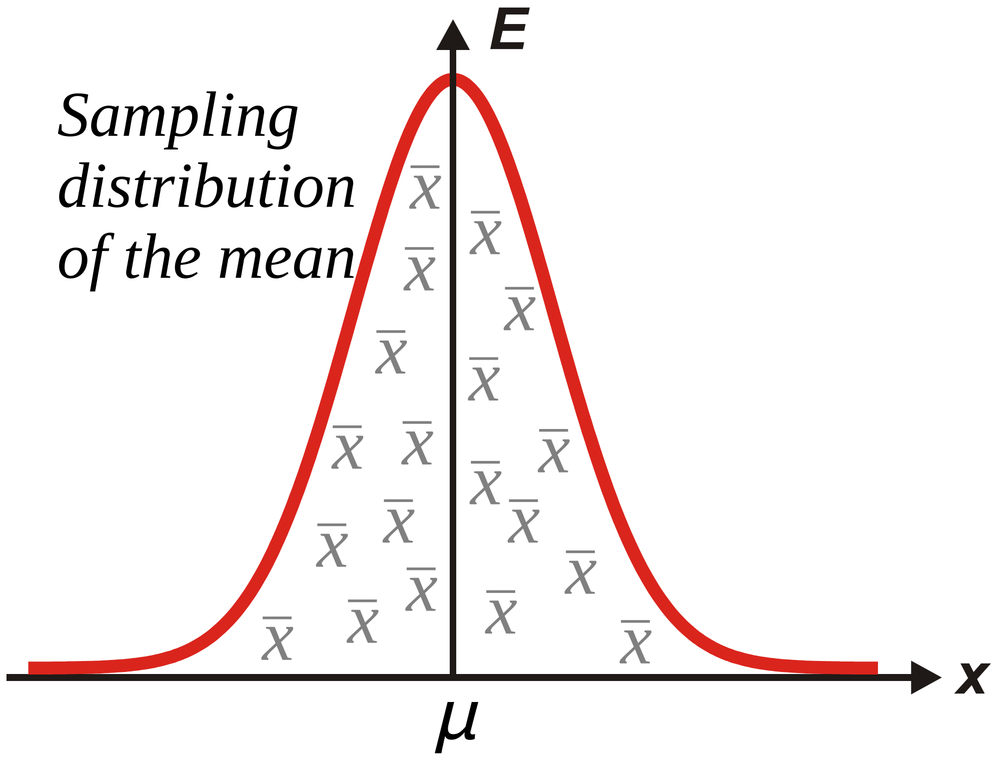
Central Limit Theorem




Sampling
Summary
Inference
E
x
μ
$\bar{x}$
$\bar{x}$
$\bar{x}$
μ
Sample distribution
Sampling distribution



E
Sampling distribution
$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
x
μ


E
Sampling
distribution
of the mean
x
μ

Central Limit Theorem

Random samples $X_1, X_2, \ldots, X_n$

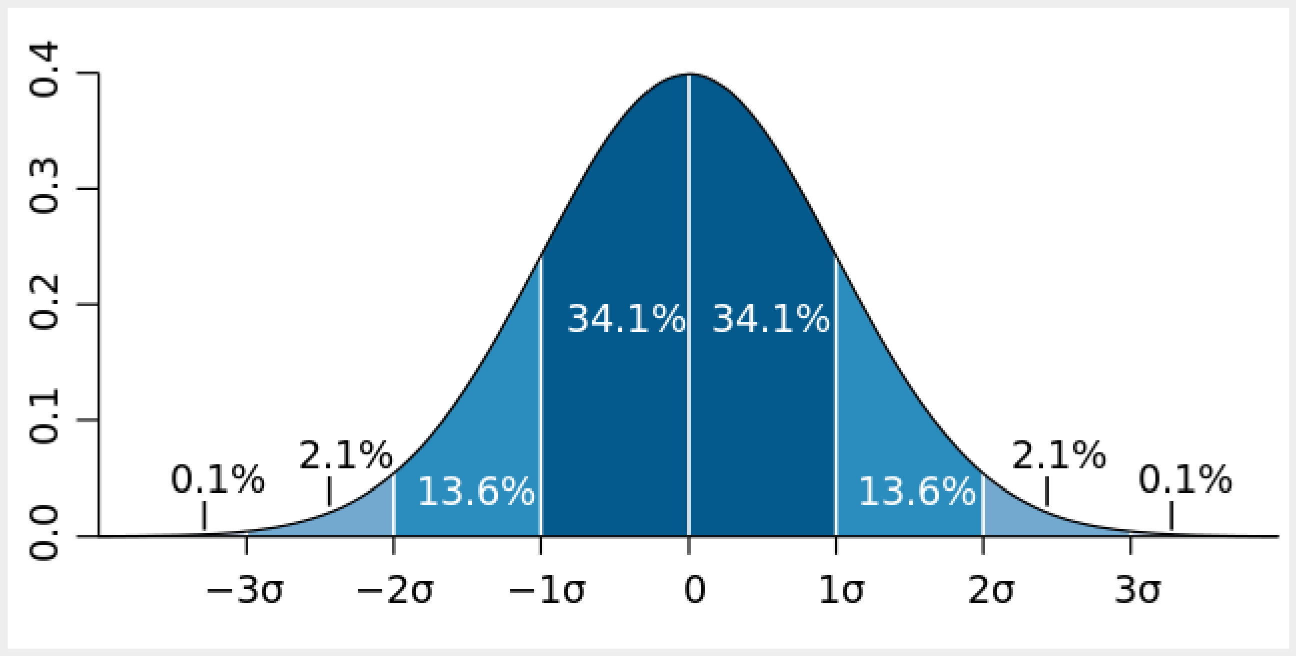
from population with mean μ,

if $n \to \infty$

then $\mathbb{E}[X] \to \mu$

Estimation

- Point estimation
- Interval estimation



Point estimation

我們由資料中得出資料的統計量：

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

接著，我們用這個統計量推估（inference）母體的平均值：

$$\mathbb{E}[\bar{x}] = \mu$$

$\bar{x}$ is an unbiased estimation of μ.

Point estimation

我們由資料中得出資料的統計量：

$$s^2$$

接著，我們用這個統計量推估（inference）母體的變異數：

$$\mathbb{E}[s^2] = \frac{(n-1)\times\sigma^2}{n}$$

s^2 is an biased estimation of σ^2.

Point estimation

他提供給我們一個值，讓我們知道資料的集中跟離散的程度。

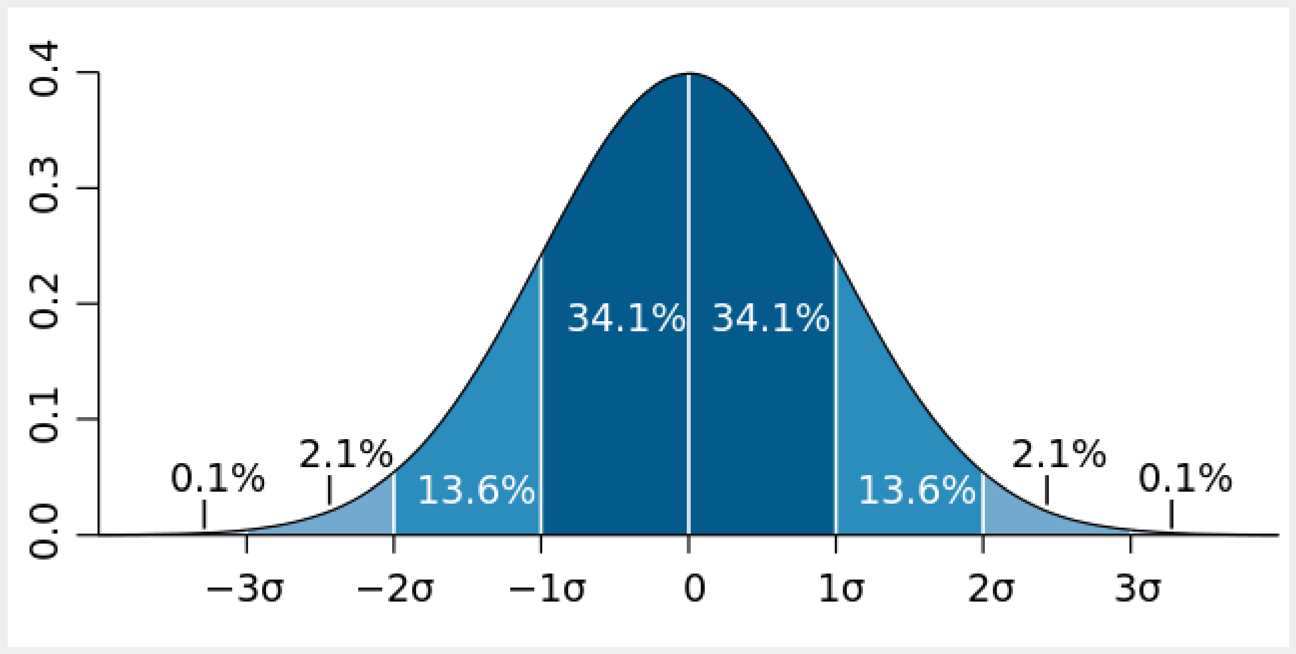
但是這個值有多精準呢？

我們說這組資料的 $\bar{x}$ 會往3.4集中，但...

{3.4001, 3.3935, 3.4012, 3.3899, 3.4153}
{7.033, 2.341, 3.753, 3.097, 1.908, 2.268}

Interval Estimation

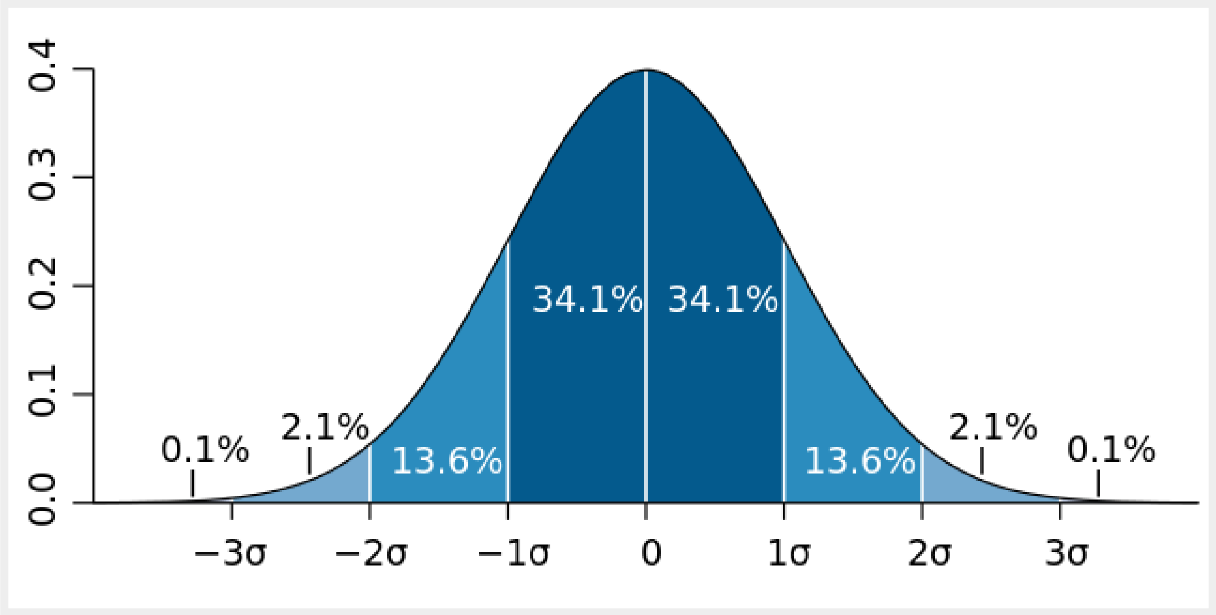
我們利用區間來給出一個估計值



Interval Estimation

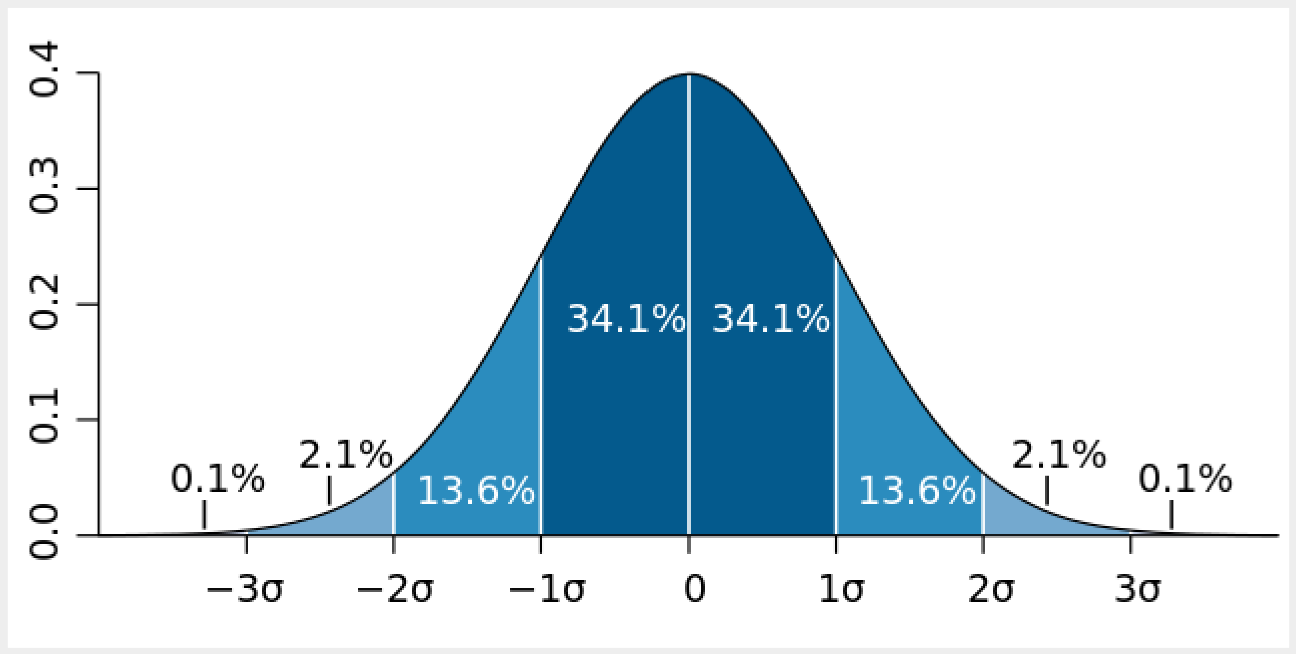
通常會用$[\bar{x} - 1.96s, \bar{x} + 1.96s]$區間（信賴區間）

這個區間涵蓋了約95%的機會（信心水準）



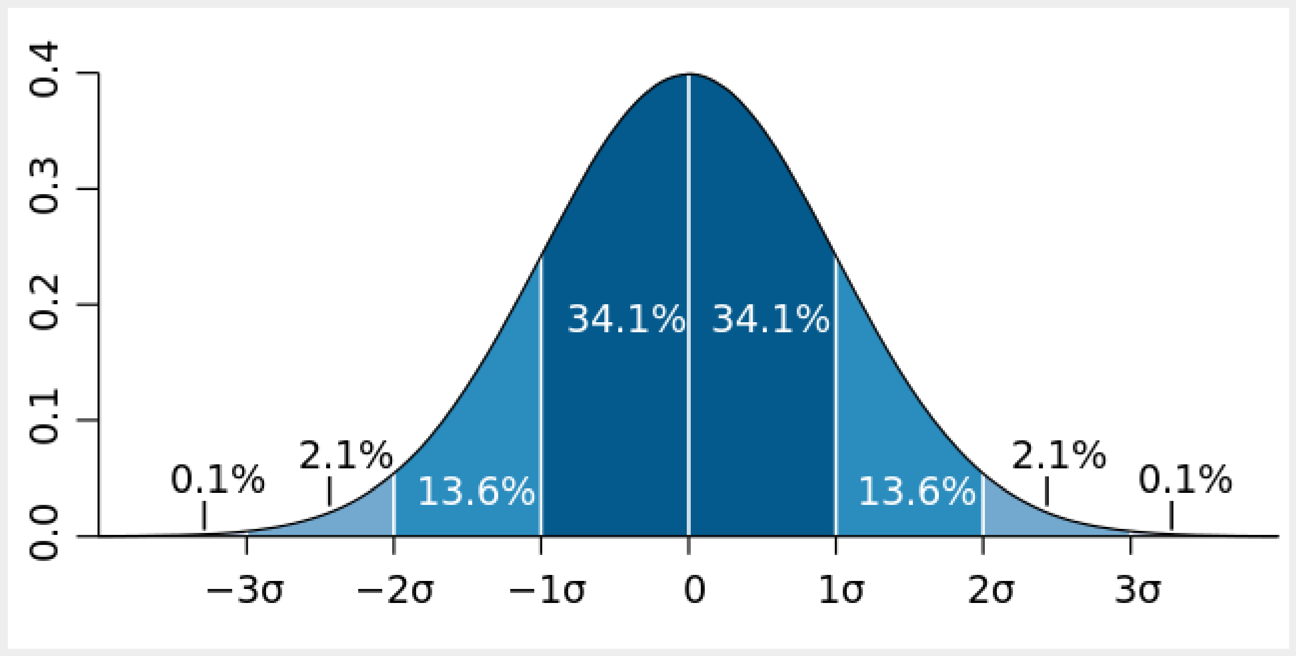
Interval Estimation

我有95%的信心 μ 會落在 $[\bar{x} - 1.96s, \bar{x} + 1.96s]$ 中



Interval Estimation

我有95%的信心 μ 會落在[3.256, 3.544] 中



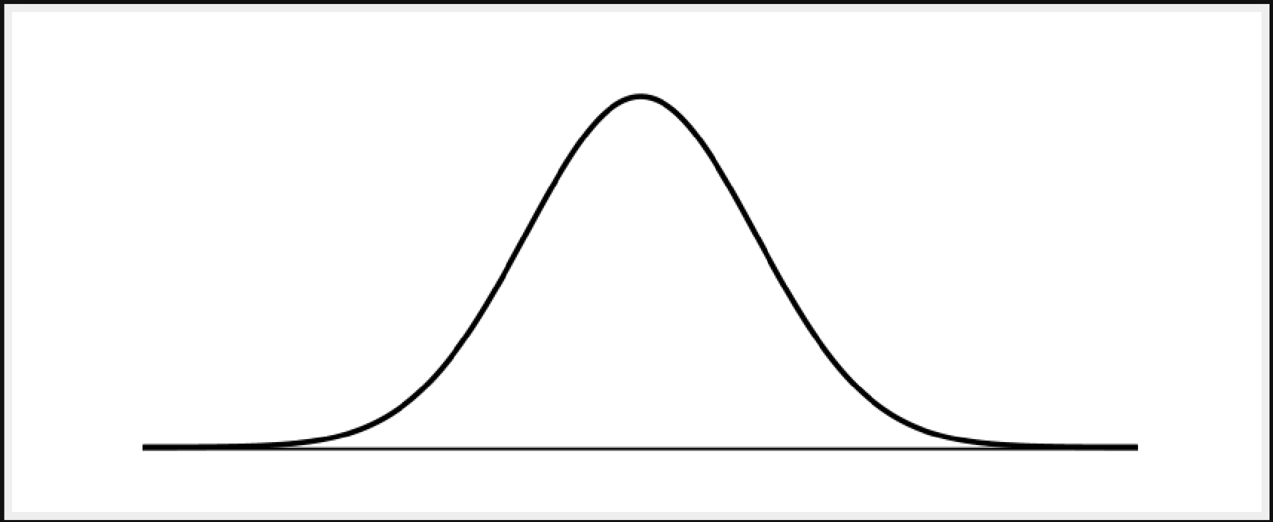
Hypothesis test

- Null hypothesis (H_0)
  - $\bar{x} = \mu_0$
  - $\bar{x_1} \leq \bar{x_2}$
- Alternative hypothesis (H_1 or H_A)
  - $\bar{x} \neq \mu_0$
  - $\bar{x_1} > \bar{x_2}$

Z test

$$z = \frac{x - \mu_0}{\sigma}$$

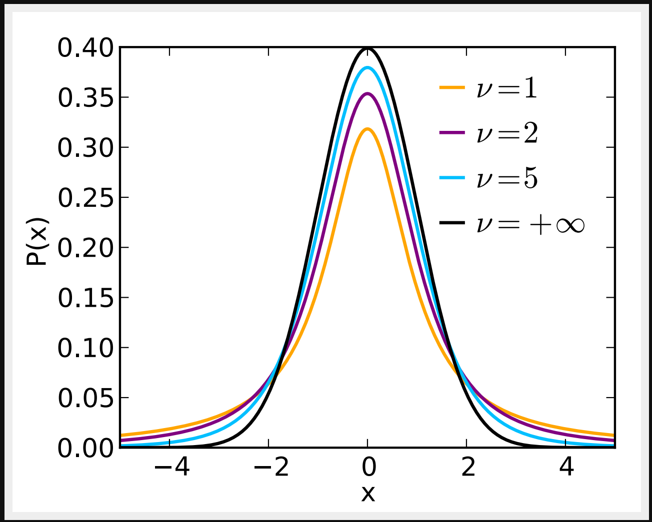
當 $n > 30$，母體是常態分佈時



T test

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

當 $n \leq 30$，母體是常態分佈時



Many other tests

- F test: 檢定variance
- paired t test: 配對型資料
- ANOVA: 檢定三者以上
- Wilcoxon signed-rank test
- Wilcoxon rank-sum test

Probability density function

$$P(X=x|\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

已知μ,σ，求特定x的**機率** $f(x)$

Likelihood function

$$\mathcal{L}(\mu,\sigma)$$
$$= f(\mu,\sigma|X_1=x_1,X_2=x_2,\dots,X_n=x_n)$$
$$= f(\mu,\sigma|X_1=x_1)\times f(\mu,\sigma|X_2=x_2)\times\dots$$
$$\times f(\mu,\sigma|X_n=x_n)$$

已知資料$X_1=x_1,X_2=x_2,\dots,X_n=x_n$，求模型（母體）的**參數**$\mu,\sigma$**的可能性**

Likelihood function

- $f(\mu, \sigma | X_1 = x_1) \times f(\mu, \sigma | X_2 = x_2) \times \ldots \times f(\mu, \sigma | X_n = x_n)$
- $= \prod_{i=1}^{n} f(\mu, \sigma | X_i = x_i)$
- $= \prod_{i=1}^{n} f(\theta | X_i = x_i)$

Maximum likelihood estimation

$$argmax_\theta \ \mathcal{L}(\theta)$$

or

$$argmax_\theta \ l(\theta)$$

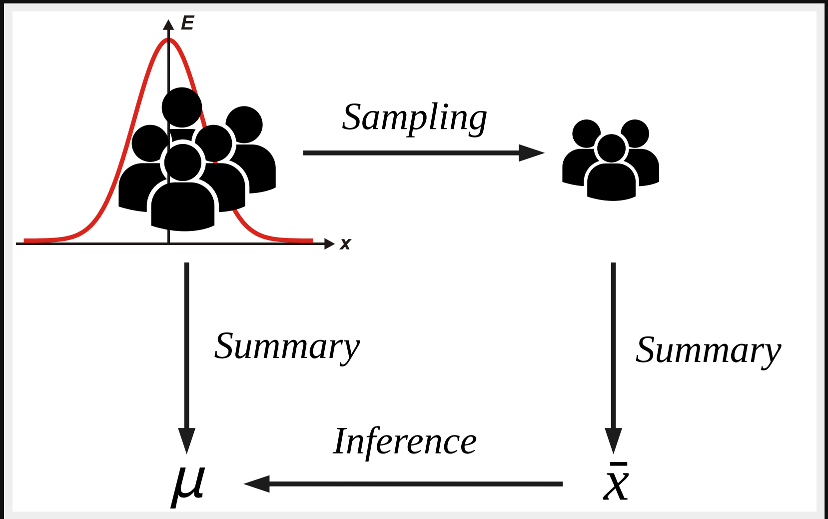
$$= argmax_\theta \ \log \mathcal{L}(\theta)$$

給定機率模型及資料，找到一組參數讓機率模型最符合資料的分佈。

Take home messages

- 資料觀點
- 機率觀點
- Statistics is about inference and estimation
- Estimation
- 中央極限定理（Central Limit Theorem）
- Hypothesis test
- Maximum Likelihood Estimation

Thank you for attention!



Q & A