南京邮电大学第十届数学建模竞赛

参赛人员	姓名	学号	所在学院	专业	手机号
1	杜永凯	B16120130	经济学院	经济学	15295515361
2	南玉熙	B16120120	经济学院	经济学	18252011360
3	许梦安	B16012302	通信与信息工程学院	信息工程	17768115953

商业银行人民币贷款规模分配及盈利问题

摘要

商业银行有固定的盈利方法，现今的商业银行多采用动态平衡模式，既需满足多方面社会需求，又需努力使收益达到最大。本文根据问题所需建立相关模型。

针对问题一，首先使用主成分分析法将 20 个宏观经济指标简化成 6 个特征指标，然后经过一系列数据处理可得 2018 年存贷款预测总额，建立**基于主成分分析的存贷款预测模型**，与 2017 年存贷款总值作差，得到 2018 年存贷款增量。

针对问题二、三，首先以 30 个省市 2018 年存贷款总利息收入最大为目标函数；随后，以问题一预测的 2018 年存贷款总额、2018 年各省市存贷款利率服从经验法则、2018 年各省市存贷款利率受限于央行基准利率等为约束条件，建立**基于存贷款利息收入最大的单目标非线性规划模型**。最后利用$matlab$软件求解，得出该年各省市最优存贷款分配金额及最优存贷款利率定价，以实现该年商业银行存贷款利息收入最大。

针对问题四，由于存取款行为随机，故 2017 年存取款差值数据可沿用至 2018 年。然后我们采用**蒙特卡罗模拟**，随机生成一百万组数据，每一组我们用存取款差值的累加和最小值的绝对值作为该省备付资金，建立**基于蒙特卡罗算法的备付金概率模型**，接着将其排序找出一个大于等于其中 99%数据的数值，该数据就是该省在 99%的置信水平下的备付资金。

针对问题五，立足于分析收益率和控制风险，因此用 $\boldsymbol{VaR}$ **约束**以限定收益率的形式表现。以资产组合的收益最大、方差风险最小为双目标，以贷款组合 VaR 的有限组合约束为条件，建立**基于 $\boldsymbol{VaR}$ 约束的多目标组合贷款优化决策模型**，提出基于 VaR 限定收益率的组合贷款多目标决策优化方法研究。其核心思想是以银行的风险承担能力为约束条件，建立**多目标优化模型**，为便于求解，采用**线性加权和法**，将多目标转化为单一目标规划问题，并引入**拉格朗日乘子法**对该模型求解，从而得到贷款组合的有效边界和相应的决策权重。在有效边界上，不仅可以使风险达到最小，还可以使收益尽可能大，这种组合贷款的决策分配满足盈利性和安全性的商业银行经营管理原则。

关键字:主成分分析 多目标规划 蒙特卡罗模拟 $\boldsymbol{VaR}$风险约束 拉格朗日乘子法

一、 问题重述

商业银行在贷款投放中，需先从客户端获得存款，并缴存一定的法定准备金，且需预留出一定比例的备付水平，此后剩余的资金可用于贷款的投放或其余资产配置。其贷款规模增长被存款规模增长所限制，而存款规模增长受多个宏观经济指标影响。现在的商业银行采用的多是动态平衡模式，既需平衡差异，调动积极性，并扶持一些国家项目，又需要努力达到收益最大。目前有一中型商业银行 A，现需基于附件一、二、三、四中的数据，解决以下四个问题：

1. 分析附件一、二中的数据，预测该银行在资金来源只有客户存款、且不考虑备付水平时 2018 年存款与贷款的增量情况。
2. 结合问题一的结果及附件三数据，给出商业银行 A 各分行在 2018 年的贷款规模分配方案，使全行增量存贷款利息的净收入达到最大值。
3. 假设商业银行 A 会在 2018 年 5 月 1 日当天发行具有 500 亿规模的 15 年期普通债，对问题 2 进行优化。
4. 根据附件四数据，在置信水平为 99%的条件下，计算出商业银行 A 各分行在 2018 年的日常经营中所需要的最低备付金额。
5. 对以上模型进行改进，使得商业银行 A 在贷款的规模分配问题中可得到双赢或多赢。

二、 模型假设

1. 假设存贷款利率、央行基准利率均以一年为期。
2. 假设到 2018 年底商业银行 A 发行的普通债利率为平摊至一年期的利率。
3. 假设单目标规划中 2018 年存贷款利率呈正态分布。
4. 假设仅存在库存现金对备付金额的影响。
5. 假设多目标规划中组合回报率服从正态分布，利用中心极限定理，将 VaR 约束条件进行转化。

三、 符号说明

X_i	宏观经济指标
X_i^*	标准化后的指标
S	各指标标准差
α_i	各省市存款利率
s_i'	存款利率标准差
s_i''	贷款利率标准差
φ_i	各省市贷款利率
x_i	各省市的存款份额分配量
y_i	各省市贷款份额分配量
R	全行增量存贷款利息净收入最大值
M^*	2018 年各省市分行存款总额预测值
N^*	2018 年各省市分行贷款总额预测值
Z_i	第i个省市该年度最小备付金额
a_{ij}	第i个省市第j天的存款金额
b_{ij}	第i个省市第j天的取款金额
ΔP	资产在持有期内的损失
C	置信水平
VaR	置信水平C下处于风险中的价值
r_i	第I种贷款的收益率
σ_{ij}	第i种贷款与第j种贷款的协方差
r_0	贷款组合的既定收益

四、 问题分析

4.1 问题一的分析

对于问题一，鉴于附件一中数据较多，所以首先使用主成分分析法在信息保留率为 95%的条件下处理所有数据，在保留结果精度的前提下缩减数据量并对其进行处理，利用最小二乘法分析并得出最优解，然后对数据做进一步处理，即可得出 2018 年总存贷款量预测值，将其与前一年数据做差即可得存贷款增量值。

4.2 问题二的分析

对于问题二，全行增量存贷款利息的最大净收入等于贷款收益减去存款收益，从而需要分别求出每个省份两种收益的累加，而此和式中的各参量需满足题目一中的条件，且存贷款收益均需满足在一个范围区间内，在这几个限制条件之下即可求出最大净收入。

4.3 问题三的分析

对于问题三，问题三在问题二的基础上发生了改动，因此求解时可保留问题二的原有思路。由于商业银行 A 发布了 15 年期的债券，该债券产生的利息在 15 年期满后一次性发放给购入者，但是为了控制变量方便求解，仍取一年为时间长度，将产生的利息总和平摊至 15 个年份上，最终的最大净收入需在问题二的基础上减去一年份的利息金额。

4.4 问题四的分析

对于问题四，采用基于蒙特卡罗算法备付金概率模型依据本题具体情况分析，可将影响备付金额的因素缩减至一个。由于备付金额取决于某省市每日随机发生的存取款差额，故采用累加法来反映这一动态过程。利用蒙特卡罗模拟，基于附件四中某省市的数据，生成一百万组该省市存取款差值图，从而可得一百万组最小备付金额，由于存取款行为随机发生，故 2017 年的数据可延用至 2018 年。利用排序法，最终挑选出一个大于等于其中 99%数据的值，该值即为 2018 年该省市备付金额最小值，用同样方法求得剩余省市备付金额即可。

4.5 问题五的分析

对于问题二、三，我们采用单目标规划模型，而银行在进行经营决策时，大

多是对贷款组合结构进行优化，以持有一个具有尽可能高的收益和尽可能低的风险贷款组合，因此本题引入多目标规划模型，不仅评估每笔贷款的收益和风险，还研究贷款组合之间的每个目标权重系数来反映各个目标间的相对重要性。

五、 模型的建立及求解

5.1 基于主成分分析的存贷款预测模型

由于附件中所给数据量较多，因此将 20 个指标X_i（i=1,2 ••• 19,20）进行处理整合成 6 个特征值k_i（i=1,2 ••• 6），进一步处理数据之后得到一组 2018 年存贷款初始预测值，并将前三年的存贷款数据代入所得式子中检验误差值。

5.1.1 数据标准化

首先将附件一中的所有数据按以下公式，以列为单位进行标准化处理，将得到一组标准化参量。公式为：

$$X_i^* = \frac{离差}{标准差} = \frac{X_i - \bar{X}}{S}$$

5.1.2 求解过程

①特征值求解

对附件一中的数据进行主成分分析，在信息保留率不小于 95%的情况下得出具有主要影响力的 6 个特征值：

表 1：6 个宏观经济特征值

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
8.2848	4.6851	2.4757	2.0127	1.2583	0.4782

②系数求解

将 20 个指标按照同一方法缩减至 6 个特征指标，将同年四个季度的六个指标分别求平均值，得到六个平均指标值。将这六个平均指标值与六个特征值进行线性组合，并将求得的值与对应年份的存贷款值作比，得到总计 6 个比例系数。具体数值见表 4。

③优化系数

利用最小二乘法分别处理存款系数与贷款系数，得到两个最优系数，具体数值见表 4。

④2018 年存贷款预测值

将两个最优的存贷款系数与 6 个特征值做线性组合，得到 2018 年存贷款预测总值，具体数值见表 4。

⑤2018 年存贷款增量情况

由附件二中 2017 年存贷款总值及表 4 中 2018 年存贷款预测总值可得，2018 年存款增量为 1138 亿元，2018 年贷款增量为 500 亿元。

5.1.3 数据检验

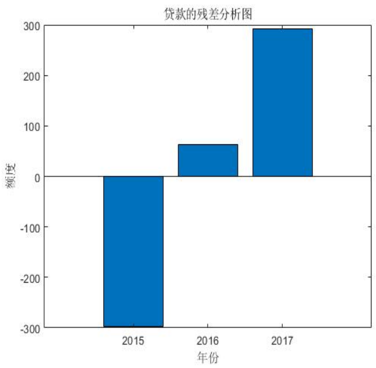
分别将 2015-2017 年的六个宏观经济指标与最终的存贷款特征值进行线性组合，求解得 2015-2017 年的存贷款值，具体数值见表 4。

表 2：题目二求解过程中的所得数据（单位：亿元）

	2015	2016	2017			2015	2016	2017
类别	系数			系数最优值	2018 年预测值	检验值（单位：亿元）		
存款	0.0101	0.0101	0.0101	0.01011	44018	35283	39328	43031
贷款	0.0080	0.0081	0.0082	0.00813	35377	28357	31608	34584

5.1.4 误差分析

基于附件二中的数据及残差求解公式“残差 = 观测值 – 预测值”，利用主成分分析法在信息保留率为 95%的条件下进行残差分析，存贷款残差情况如图所示：



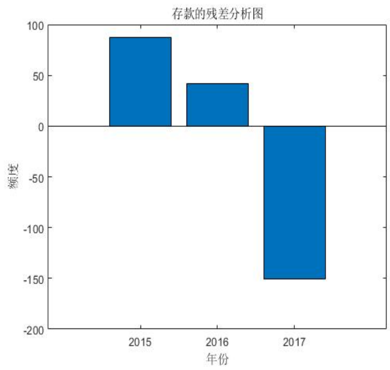


图 1：2015-2017 存贷款残差图

利用图中数据可得存贷款残差的平均值和标准差，结果如下表所示：

表 3：2015-2017 存贷款残差、残差平均值及残差标准值

存款					贷款				
	残差		残差	残差		残差		残差	残差
2015	2016	2017	平均值	标准差	2015	2016	2017	平均值	标准差
87	42	-151	-7.333	126.437	-297	63	293	19.6667	126.4371

由表可知，残差的误差均值在以 0 为期望的正负一个标准差之内，因此我们可认为所得结果较准确。

5.2 基于存贷款利息收入最大的单目标非线性规划模型

由于央行基准利率随存贷款时间长短而变，为了控制变量利于求解，时间均以一年为期，因此取一年期的央行基准存款利率 1.5%，基准贷款利率 4.75%。

5.2.1 问题参量

- α_i为各省市存款利率
- φ_i为各省市贷款利率
- s_i'、s_i''分别为存、贷款利率标准差
- x_i为各省市的存款份额分配量
- y_i为各省市贷款份额分配量
- R 为全行增量存贷款利息净收入最大值
- M^*为题目一中 2018 年各省市分行存款总额预测值
- N^*为题目一中 2018 年各省市分行贷款总额预测值

5.2.2 模型建立

本题采用单目标非线性规划模型，根据银行获利方式可得以下式子：

$$R=\sum_{i=1}^{30}\varphi_i*y_i-\sum_{i=1}^{30}\alpha_i*x_i$$

该式中各个值需满足以下条件：

$$
\text{s.t.}\quad\left\{\begin{array}{c}
M^* = \sum_{i=1}^{30} x_i \\
N^* = \sum_{i=1}^{30} y_i \\
\overline{\alpha_\iota} - 2s_i{}' \le \alpha_i \le \overline{\alpha_\iota} + 2s_i{}' \\
\overline{\varphi_\iota} - 2s_i{}'' \le \varphi_i \le \overline{\varphi_\iota} + 2s_i{}'' \\
1.5 - 10\% * 1.5 \le \alpha_i \le 1.5 + 10\% * 1.5 \\
4.75 - 20\% * 4.75 \le \varphi_i \le 4.75 + 20\% * 4.75 \\
s_i{}' = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{3}(\alpha_j - \overline{\alpha_\iota})^2}{2}} \\
s_i{}'' = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{3}(\varphi_j - \overline{\alpha_\iota})^2}{2}}
\end{array}\right.
$$

其中，i 代表各个省市；j 代表年份，$j = 1$ 时代表 2015 年，以此类推；由于 α_i 和 φ_i 服从正态分布，根据经验法则得，约束条件为 $\overline{\alpha_\iota} - 2s_i{}' \le \alpha_i \le \overline{\alpha_\iota} + 2s_i{}'$ 和 $\overline{\varphi_\iota} - 2s_i{}'' \le \varphi_i \le \overline{\varphi_\iota} + 2s_i{}''$，经过多次试验，标准差 s_i' 和 s_i'' 前的系数为 2 时结果最优。由于各分行的存款利率可在央行基准利率基础上下浮动 10%，贷款利率可在央行基准利率基础上下浮动 20%，因此得到约束条件 $1.5 - 10\% * 1.5 \le \alpha_i \le 1.5 + 10\% * 1.5$ 和 $4.75 - 20\% * 4.75 \le \varphi_i \le 4.75 + 20\% * 4.75$

5.2.3 数据表格

见题目四数据表格内容。

5.3 基于存贷款利息收入最大的单目标非线性规划模型

问题三在问题二的基础上加入了变量，由于银行 A 将发行商业银行普通债，2018 年的利息净收入还需减去普通债在这一年产生的利息，为了控制变量利于求解，仍取一年为期的利息金额作为限制条件，因此假设 2018 年年底需偿还一整年的利息金额，最终的最大净收入需在问题二的基础上减去这一利息金额。

5.3.1 模型建立

本题在问题二的基础之上可得 2018 年银行获利公式：

$$R=(\sum_{i=1}^{30}\varphi_i*y_i-\sum_{i=1}^{30}\alpha_i*x_i-500*5.1\%)_{max}$$

该式中各个值需满足以下条件：

$$\text{s.t.}\left\{\begin{array}{c}M^*=\sum_{i=1}^{30}x_i\\ N^*+500=\sum_{i=1}^{30}y_i\\ \overline{\alpha_i}-2s_i'\le\alpha_i\le\overline{\alpha_i}+2s_i'\\ \overline{\varphi_i}-2s_i''\le\varphi_i\le\overline{\varphi_i}+2s_i''\\ 1.5-10\%*1.5\le\alpha_i\le1.5+10\%*1.5\\ 4.75-20\%*4.75\le\varphi_i\le4.75+20\%*4.75\\ s_i'=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{3}(\alpha_j-\overline{\alpha_i})^2}{2}}\\ s_i''=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{3}(\varphi_j-\bar{\varphi})^2}{2}}\end{array}\right.$$

其中，i代表各个省市，j代表年份，$j=1$时代表 2015 年，以此类推。

5.3.3 数据表格

见题目四数据表格内容。

5.4 基于蒙特卡罗算法的备付金概率模型

由于备付金额=在中央银行存款+库存现金-法定准备金，而此题中只涉及弥补存取款差额，为控制变量利于求解，此题中仅考虑库存现金对备付金额的影响。

5.4.1 新增变量

- Z_i为第i个省市该年度最小备付金额
- a_{ij}为第i个省市第j天的存款金额
- b_{ij}为第i个省市第j天的取款金额

5.4.2 备付金额的计算

当日存款量大于日取款量时，它们的差值便作为备付金额的一部分，来平衡

之后产生的变化;当日存款量小于日取款量时,便调用备付金额来弥补这一差值。因为存取款行为具有随机性，故可由 2017 年备付金额预测得 2018 年备付金额。采取累加和积分的方法可以较好地反映备付金额的动态变化过程。因此，基于附件四中数据，利用按省市、按日累加存取款差额的方法得到 2017 年各省市备付金额值，利用蒙特卡罗算法得到一组 2018 年备付金额预测值，在满足置信区间为 99%的条件下，可求得备付金额最小值。由于最后的累加和可能为负数，因此对最后的值进行取绝对值运算，计算公式为：

$$Z_1 = \left| \sum_{j=1}^{365} (a_{1j-b_{1j}})_{min} \right|$$

$$Z_2 = \left| \sum_{j=1}^{365} (a_{2j-b_{2j}})_{min} \right|$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$Z_{29} = \left| \sum_{j=1}^{365} (a_{29j-b_{29j}})_{min} \right|$$

$$Z_{30} = \left| \sum_{j=1}^{365} (a_{30j-b_{30j}})_{min} \right|$$

5.4.3 求解过程

基于附件四，分析各省市每日存取款差值，其分布图如下所示：

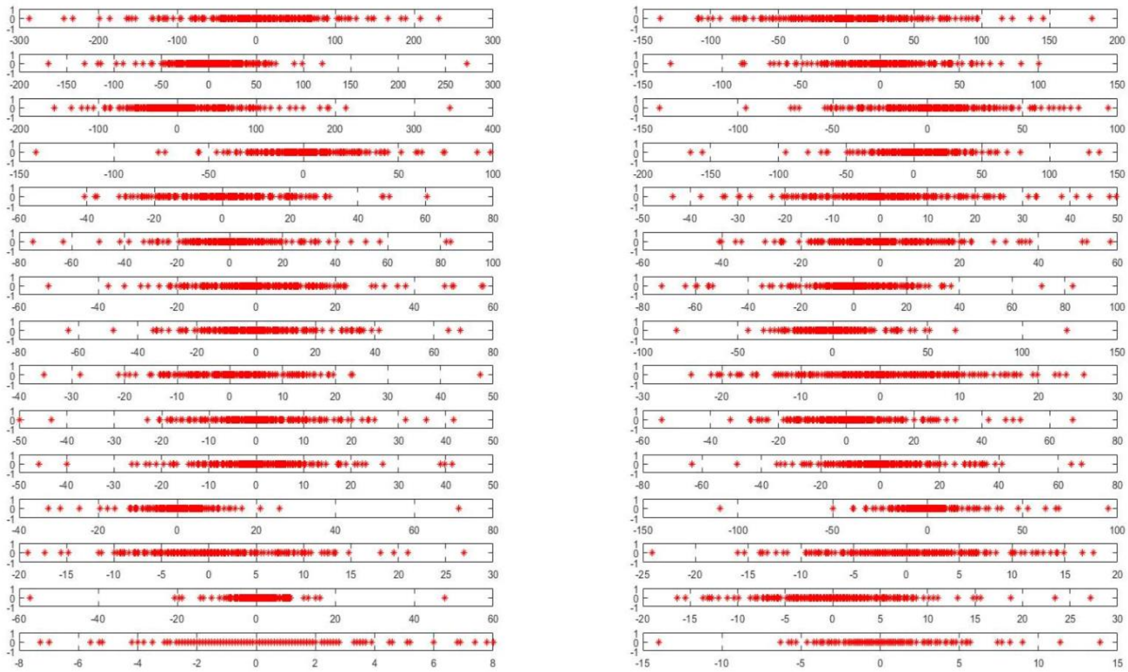


图 2：2017 年各省市存取款差值分布图

从图中可明显看出 2017 年的各省市存取款差值多集中于零值附近，呈正态分布。由于每天存取款行为随机发生，故 2018 年各省市存取款差值的分布图与 2017 年相似。依据这些图形，利用蒙特卡罗模拟生成一百万组具有相同分布情况的差值分布图，按照备付金额的计算法则，可得到一百万个备付金额最小值，将其按照从小到大顺序排序，取出一个大于等于其中 99%数据的值，该值即为所求的该省市备付金额最小值。

5.4.4 数据表格

表 4:问题 2、3、4 结果

单位：亿元		问题 2	问题 3	问题 4
序号	分行	贷款规模	贷款规模	2018 年备付资金
1	北京	3071.9	3116.8	1830.4
2	江苏	4362.8	4424.6	1157.9
3	广东	3433.0	3482.0	1061.1
4	浙江	3527.8	3578.1	754.8
5	上海	2638.5	2678.1	1576.9
6	山东	1710.3	1736.8	721.3
7	河南	1375.0	1395.0	622.0

8	湖北	1465.1	1485.4	773.9
9	安徽	1095.3	1111.8	379.6
10	四川	923.4	936.8	350.8
11	辽宁	1100.8	1117.7	441.4
12	河北	814.2	826.3	355.7
13	重庆	679.0	688.6	367.4
14	湖南	1018.2	1030.6	451.0
15	山西	741.9	752.5	400.6
16	陕西	650.4	659.6	460.8
17	天津	765.0	775.5	228.3
18	广西	728.0	738.7	220.6
19	吉林	518.7	525.7	251.8
20	云南	653.5	662.9	347.0
21	福建	908.5	922.3	266.3
22	江西	607.1	615.3	398.3
23	黑龙江	416.3	421.4	203.0
24	新疆	479.6	486.3	442.1
25	贵州	393.6	393.0	157.8
26	甘肃	308.5	312.4	156.1
27	海南	325.1	329.3	176.0
28	内蒙古	400.3	406.0	151.0
29	宁夏	138.5	140.0	59.0
30	青海	126.8	127.9	66.8
全行合计		35377.2	35877	14829.7

5.4.5 误差分析

由于存在不可控的外界环境干扰因素，部分 2017 年的备付资金值与模拟备付资金平均值相差较大，但这些差值均在正负一个标准差内，因此这些值均在误差允许范围内，可认为对 2018 年各省市备付资金的模拟预测值合理。

表 5：各省市 2017 年备付资金、模拟备付资金平均值、模拟备付资金标准差

省份	2017年备付资金	模拟备付资金平均值	模拟备付资金标准差
北京	545.40	866.55	684.46
江苏	104.40	550.82	435.01
广东	165.70	503.37	396.42
浙江	232.70	358.17	282.33
上海	258.40	751.35	591.74
山东	301.30	341.43	268.70
河南	214.70	295.64	232.14
湖北	28.30	367.31	289.21
安徽	188.50	180.67	142.56
四川	90.20	166.31	131.21
辽宁	111.10	209.15	164.94
河北	70.10	168.95	133.30
重庆	174.90	174.80	137.75
湖南	58.30	214.87	168.96
山西	7.40	191.28	150.59
陕西	59.30	218.89	172.66
天津	56.60	108.63	85.54
广西	39.50	105.34	82.85
吉林	54.00	119.67	93.96
云南	63.60	163.73	129.39
福建	45.40	126.04	99.53
江西	26.90	189.91	149.45
黑龙江	59.30	96.34	75.93
新疆	81.40	211.22	166.84
贵州	20.00	74.95	59.02
甘肃	58.40	73.94	58.38
海南	21.30	83.37	65.59
内蒙古	29.90	71.72	56.40
宁夏	12.80	28.04	22.15
青海	11.30	31.77	25.03

5.5 基于VaR约束的多目标组合贷款优化决策模型

5.5.1 组合贷款的多目标优化原理

①组合贷款的风险价值

组合贷款的风险价值一般用VaR来衡量，所谓贷款组合VaR风险是指，在一定的置信水平下，在一定的期限内，某一贷款组合在正常市场条件下潜在的最大损失。其中置信水平依据管理者的风险偏好设定，一般取95%-99%。用数学语言表示为：

$$Prob(\Delta P > VaR) = 1 - C$$

其中 ΔP 为资产在持有期内的损失，VaR 为置信水平 C 下处于风险中的价值 C 为置信水平。

由定义可知，引入 VaR 约束时的投资组合前沿中被排除的具有相对较高风险的有效组合较多，有效地控制了组合风险。

②由 VaR 限定收益率的组合贷款的多目标优化原理

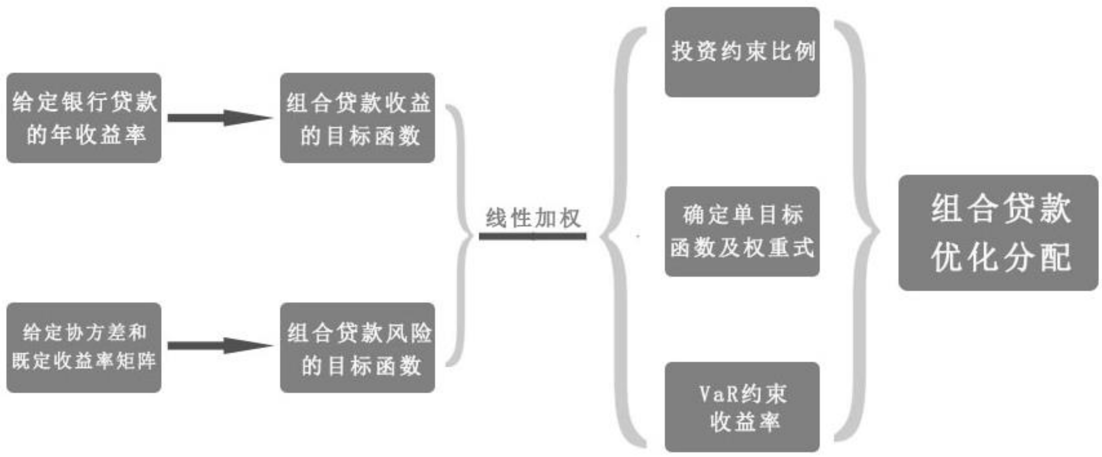


图 3：　多目标组合贷款优化决策原理图

5.5.2 模型建立

①目标函数的建立

设银行有n种贷款组合可供选择，银行选择的每种贷款的金额是任意的，第I种贷款的收益率为 r_i, 第i种贷款与第j种贷款的协方差为 σ_{ij}，r_0 为贷款组合的既定收益，VaR 约束表现为全部贷款组合收益率具有c的概率使其最小值超过 $-VaR$，即 $Prob(r_0 < -VaR) \leq 1-c$。在 VaR 约束下，选用收益和风险两个规划目标。该商业银行投放于每个分行贷款的比重向量为 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$，$0 \leq x_i \leq 1, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$，如下表所示：

表 6：　贷款收益与比重分布

贷款项目/分行	w_1	w_2	……	w_n
收益率	r_1	r_2	……	r_n
贷款比重	x_1	x_2	……	x_n

A. 组合贷款收益目标函数

$$E(r) = \max \sum_{i=1}^{n} x_i r_i \qquad (1.1)$$

其中，x_i为第i类贷款的比重，r_i为第i类贷款的收益率

B. 组合贷款风险目标函数

$$\min\sigma^2 = minD\big(E(r)\big) = min\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i x_j \sigma_{ij} \qquad (1.2)$$

其中，x_i，x_j分别代表第i类和第j类贷款占总贷款的比重，σ_{ij} 为第i种贷款与第j种贷款的协方差。

②约束条件的建立

A. VaR 对收益率的约束

由中心极限定理可知，当 n 充分大时，其组合回报率近似服从正态分布。因此，为方便讨论，假设贷款组合的回报率服从正态分布。

根据中心极限定理，可将式 $Prob(r_0 < -VaR) \leq 1-c$ 转化为：

$$VaR = \emptyset^{-1}(c)\sigma_p - r_0 \qquad (1.3)$$

其中，σ_p 为最优贷款方差，$\emptyset^{-1}(c)$ 为在置信水平 c 下的标准正态分布概率。

其经济意义表现为：以 $\emptyset^{-1}(c)$ 为斜率 ，$-VaR$ 为截距的直线为边界的上半空间。在该上半空间下的所有贷款组合回报率超过 $-VaR$ 的概率为 c ，在该边界的下半空间中的所有贷款组合回报率在置信度c下不超过 $-VaR$ 。

B. 贷款比例的非负约束

根据经济学知识，对于任何贷款组合的比例，都不存在这种买空卖空行为，且贷款比例均是非负且小于等于 1 的数，因此有：

$$0 \leq x_i \leq 1 \ \ (\mathrm{i} = 1,2,\dots，\mathrm{n}) \qquad (1.4)$$

③目标函数的进一步求解

A. 贷款比例及方差的确定

该商业银行给各个企业贷款比重向量为 $\mathrm{X} = (x_1，x_2,\dots\dots x_n)^T$ ，i类、j类贷款收益率之间的协方差矩阵为 $G =$ （σ_{ij}）$_{m\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} r_1\, r_2 \dots\dots r_n \\ 1\ 1 \dots\dots 1 \end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

$$B = \begin{pmatrix} r_0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1.6)$$

由于该目标函数为二次，约束为线性，是线性约束下的二次规划，因此

利用拉格朗日乘子法，可求最优贷款比例系数与方差如下：

$$X = G^{-1}A^T(AG^{-1}A^T)^{-1}B \tag{1.7}$$

$$\sigma_p^2 = x^T G \text{x} = B^T(AG^{-1}A^T)^{-1}B \tag{1.8}$$

B.有效边界的确定

假设 G 为正定矩阵，秩 $r=2$，则 AG^{-1} 也为正定矩阵，设 $(AG^{-1}A^T)^{-1}$=$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$，将其带入（1.8）式，联立（1.6）式，得：

$$\sigma_p^2 = m_{11}r_0^2 + 2m_{12}r_0 + m_{22} \tag{1.9}$$

对（1.9）式进行求导得其最小值为：

$$r_{min} = -\frac{m_{12}}{m_{11}} \tag{1.10}$$

由于组合收益率 r_0 小于单个贷款利率中的最大值 $\max\{r_i\}$ 因此有：

$$r_{min} \le r_0 \le max\{r_i\} \tag{1.11}$$

由于目标函数受 VaR 约束，因此 r_0 也受其约束。联立（1.3）和（1.9）求解，在 VaR 约束下，得出有效边界如图 4：

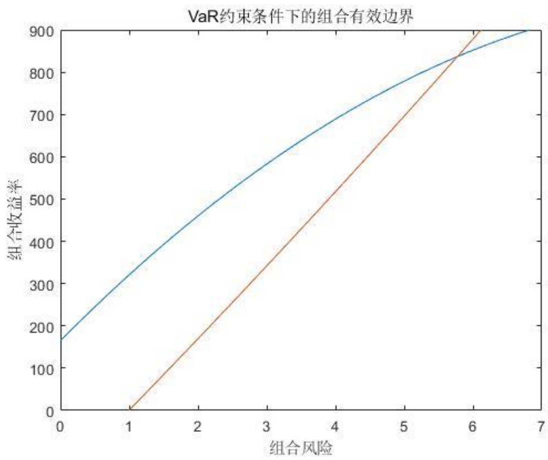


图 4： VaR 约束的贷款组合有效边界

④多重目标权重的分配

对于多目标规划问题，为了便于求解，我们采用线性加权和法将其转换为单一目标规划问题。

A.多重目标权重分配函数的建立

设 w_1 和 w_2 分别为方差和收益的权重，采用线性加权和法将目标函数（1.1）（1.2）转化为单一目标函数：

$$(w_1 \sum_{i=1}^{n} x_i r_i - w_2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i x_j \sigma_{ij})_{max} \quad (1.12)$$

B.多目标函数中的参数计算

设 r_{min} 为收益率最小值，$\sigma_{r_{min}}^2$ 为收益率最小时的方差值，σ_{min}^2 为方差最小值，$r_{\sigma_{min}}$ 为方差最小时收益率的值，α 为待定系数，得：

$$w_1 + w_2 = 1 \quad (1.13)$$

$$w_1 r_{min} + w_2 \sigma_{r_{min}}^2 = \alpha \quad (1.14)$$

$$w_1 \sigma_{min}^2 + w_2 r_{\sigma_{min}} = \alpha \quad (1.15)$$

联立以上三个式子得权重系数：

$$w_1 = (\sigma_{min}^2 - r_{\sigma_{min}})/[(\sigma_{r_{min}}^2 - r_{min})/(\sigma_{r_{min}}^2 - r_{\sigma_{min}})] \quad (1.16)$$

$$w_2 = (\sigma_{r_{min}}^2 - r_{min})/[(\sigma_{r_{min}}^2 - r_{min})/(\sigma_{r_{min}}^2 - r_{\sigma_{min}})] \quad (1.17)$$

⑤多目标优化模型的建立

A.目标函数的建立

由前文分析可知（1.12）为多目标函数方程

B.约束条件的建立

由（1.3）（1.4）得约束条件为：

$$E(r) - VaR \geq r_0 \quad (1.18)$$

该式的经济意义为：组合贷款的期望收益减置信度为 c 的情况下的最大可能损失，仍然不小于无风险金融资产的收益率。

⑥应用实例

A.基本信息

假设某银行有贷款金额 5000 万元，有 3 个不同企业（$A_1\ A_2\ A_3$)申请银行贷款，并对贷款的收益率进行组合优化。假设给定的 $c = 5\%$，由于贷款组合收益率服从正态分布，查表得 $\emptyset^{-1}(c) = 1.65$ ，表明该放贷行为的风险承受能力为：在置信度为 95% 的情况下，最大的损失不低于 -5%

已知这三类贷款的协方差矩阵为：

$$G = (\sigma_{ij})_{3\times3} = \begin{pmatrix} 2.4 & 1.2 & -1.4 \\ 1.2 & 2.4 & -1.2 \\ -1.4 & -1.2 & 1.8 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

已知这三类贷款的组合收益率均值分别为0.09，0.10，0.08，表示为：

$$r=(0.09\ \ 0.10\ \ 0.08) \tag{1.20}$$

B.数据处理

a.最有贷款比例和风险表达式的计算

将三类贷款的收益率均值带入(1.5)(1.6)，得

$$A=\begin{pmatrix}0.09 & 0.10 & 0.08\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \tag{1.21}$$

$$B=\begin{pmatrix}r_0\\ 1\end{pmatrix} \tag{1.22}$$

将（1.21）（1.22）代入 $(AG^{-1}A^T)^{-1}$ 可得：

$$(AG^{-1}A^T)^{-1}=\begin{pmatrix}12164 & -1059\\ -1059 & 92\end{pmatrix} \tag{1.23}$$

由此，通过拉格朗日乘子法，可求出最优贷款比例系数如方差如下：

$$X=G^{-1}A^T(AG^{-1}A^T)^{-1}B=\begin{pmatrix}-0.5298 & -6.0626\\ 0.3769 & -4.3288\\ -0.9095 & -10.4473\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_0\\ 1\end{pmatrix} \tag{1.24}$$

$$\sigma_p^2=x^TG\mathrm{x}=B^T(AG^{-1}A^T)^{-1}B=12164r_0^2-2118r_0+92 \tag{1.25}$$

b. VaR 约束下 r_0 取值范围的确定

由（1.3）可知

$$VaR=\emptyset^{-1}(c)\sigma_p-r_0=c \tag{1.26}$$

将基本信息中条件：$c=5\%$，$\emptyset^{-1}(c)=1.65$ 代入（1.26）中得

$$0.05=1.65\sigma_p-r_0 \tag{1.27}$$

联立（1.25）（1.27）得$r_1=0.083$，$r_1=0.0912$

在 VaR 约束下，得出 r_0 的变动范围是：$0.083\le r_0\le 0.0912$

c.组合风险最小时 r_0 取值范围的取值

由（1.10）可知

$$r_{min}=-\frac{m_{12}}{m_{11}}=-\frac{-1059}{12164}\approx 0.087$$

其中最大贷款收益率 $max\{r_i\}=\{0.09，0.10，0.08\}=0.10$，则 r_0 取值范围是：

$$0.0871\le r_0\le 0.10 \tag{1.28}$$

d.计算目标函数参数

由（1.20）可知 $r_{min}=0.08$，将其代入（1.25）得

$$\sigma_{r_{min}}^2=0.41 \tag{1.29}$$

当满足 σ_{min}^2 最优时，有

$$\sigma_{min}^2=12164r_{min}^2-2118r_{min}+92=0.2956 \tag{1.30}$$

此时，

$$r_{\sigma_{min}}=0.0871 \tag{1.31}$$

将以上参数代入（1.16）（1.17）得

$$w_1=0.3872$$

$$w_2=0.6128$$

C.多目标组合贷款优化决策模型的建立

a.目标函数的建立

目标函数方程为式(1.12).

将目标函数权重 $w_1=0.3872$，$w_2=0.6128$ 和式（1.20）和式（1.19）代入目标函数方程（1.12）得:

$$[0.3871(0.09x_1+0.10x_2+0.08x_3)-$$

$$0.6128(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2.4 & 1.2 & -1.4\\ 1.2 & 2.4 & -1.2\\ -1.4 & -1.2 & 1.8\end{pmatrix}(x_1,\ x_2,\ldots\ldots x_n)^T]_{max} \tag{1.32}$$

b.约束条件的建立

由基本信息得

$$0.05=1.65\sigma_p-r_0=1.65\sqrt{12164r_0^2-2118r_0+92}-r_0 \tag{1.33}$$

由式（1.24）可知

$$(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}-0.5298 & -6.0626\\ 0.3769 & -4.3288\\ -0.9095 & -10.4473\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_0\\ 1\end{pmatrix} \tag{1.34}$$

其中，r_0 的变动范围是 $0.083\le r_0\le 0.0912$

D.对目标模型求解及组合贷款分配

在 VaR 约束下的 $0.0871\le r_0\le 0.10$ 区间中每一个既定收益率和风险都可以找到对应的组合贷款的投资比重，并且有该商业银行可用贷款的头寸为

5000 万元，都可以人已确定每组贷款额，用 $SPSS$ 软件可得详细结果如下表所示:

表 7：优化结果

$(w_1E(r)-w_2\sigma^2)_{max}$	-6.108×10^{-2}	-6475×10^{-2}	-8068×10^{-2}	-9.714×10^{-2}	-1.12×10^{-1}
E（r）	0.0871	0.088	0.090	0.0905	0.0912
σ^2	0.2956	0.3065	0.3508	0.3941	0.4542
x_1	0.2897	0.2557	0.1084	0.1615	0.1351
x_2	0.2102	0.2721	0.4098	0.4443	0.4925
x_3	0.5001	0.4722	0.4098	0.3942	0.3724

E.优化结果分析

a.在有效边界上，如果给定收益率，可以使他的风险达到最小；如果给定可以承受的最大风险，可以使组合收益率达到最大，这也满足了追求收益最大化的要求，银行可以根据自身的需要调整各种贷款的比重，使贷款的分配直接反映商业银行的风险承受能力。

b.例如当给定收益率为 0.0871 时，可以使风险降到最低值 0.2956.这就达到了降低风险的作用，单目标的值是-6.108×10^{-2}；如果可以承受的最大的风险，那么可以将组合收益率达到最大，例如给定的风险是 0.4542 时，此时收益率达到 0.0912，单目标值是-1.12×10^{-1}。从表 7 还可以看出，单目标值的变化超过收益率的变化，这也说明了追求收益最大化的同时必然伴随着高风险。

c.由表 7 可知，若而得到风险最小组合时，这三家企业的贷款额分别是 1448.5 万元，1051 万元，2500.5 万元；若达到最大收益组合时，这三家企业的贷款额分别是 6755 万元，2462.5 万元，1862 万元，只要在有效的组合边界内，就可以得到任意风险与收益的贷款组合。

六、 模型评价

- 模型的优点
  - 对于问题一，我们利用主成分分析算法以满足较高的信息保留率，将 20 个线性相关的宏观经济指标综合成 6 个线性无关的指标，不仅把握了主要因素，还简化了问题求解，既不失真，又保证结果的准确性。
  - 对于问题四，我们充分利用了计算机的优点，以求出的概率密度为基准，根据中心极限定理生成足够多（100000 组）的数据样本，在大量数据的支撑下，使求得的解更加准确。
  - 对于问题五，我们引入多目标规划模型，以持有一个具有尽可能高的收益和尽可能低的风险贷款组合，对贷款组合结构进行优化。不仅评估每笔贷款的收益和风险，还研究贷款组合之间的每个目标权重系数来反映各个目标间的相对重要性。
- 模型的缺点
  - 对于问题二、三，由于计算机迭代次数有限（仅能迭代 3000 次），因此得出的最优解是局部最优解，无法确定该解是否为全局最优解。
  - 对于问题五，仅考虑商业银行一个主体的利益，未进行企业、国际政策等多主体的利益分析，同时仅考虑维持商业银行贷款最高收益和最低风险之间的平衡，未考虑区域化差异与分行公平考核等关系间的平衡，不具备更广泛应用的条件。
- 模型的推广
  - 问题一中使用的主成分分析法，在保留一定信息的前提下保留主要成分，抛弃次要成分，从而简化了问题。这种解决问题的思路在实际生活中非常普遍
  - 问题四中使用的蒙特卡洛算法，对于数据量较少的情况下可以生成大量的数据，克服数据量少带来的局限，这在仿真和统计上也有很大的应用。

七、 参考文献

[1] 卓金武，MATLAB 在数学建模中的应用，北京：北京航空航天大学出版社， 2014.9[M]

[2] 姜启源，数学模型，北京：高等教育出版社，2011.1[M]

[3] 司守奎，数学建模算法与应用，北京：国防工业出版社，2011.8[M]

[4] 许文,商业银行贷款组合动态优化模型研究,管理学报,第 3 卷第 6 期：第 4 页~第 11 页，2006[J]

[5] 么向华，商业银行贷款定价的简化型模型研究，天津大学，2006.12[D]

附录：

第一问

```
clear;
clc;

%%使用PCA分析得出各项存贷款与宏观经济指标之间的最优线性组合
%原始数据集的导入-[[sourceData1 sourceText1] [sourceData2 sourceText2] [sourceData3 sourceText3] [sourceData4 sourceText4]]
[sourceData1, sourceText1] = xlsread('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\校赛题目\B题附件.xlsx','附件1-宏观经济指标','A3:U34');
[sourceData2, sourceText2] = xlsread('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\校赛题目\B题附件.xlsx','附件2-各项存贷款历史数据','A3:H32');

%原始数据集的属性-[[r_sourceData1 c_sourceData1] [r_sourceData2 c_sourceData2]]
[r_sourceData1 c_sourceData1] = size(sourceData1);
[r_sourceData2 c_sourceData2] = size(sourceData2);

%PCA分析的信息保留率-[set_T]
set_T = 0.95;

%原始数据集计算对应的相关系数矩阵-[CS_sourceData1]
CS_sourceData1 = corrcoef(sourceData1);
clearvars k;
```

```
%计算相关系数矩阵的降序排列的特征值和特征向量-[e V]
[V, D] = eig(CS_sourceData1);
for k = 1:c_sourceData1
    e(k) = D(c_sourceData1+1-k, c_sourceData1+1-k);
end
clearvars D k;

%计算贡献率和贡献率累加-[De_rate SDe_rate]
Se_val = sum(e);
temp = 0;
for k = 1:c_sourceData1
    De_rate(k) = e(k)/Se_val;
    temp = temp + De_rate(k);
    SDe_rate(k) = temp;
end
clearvars k temp Se_val;

%在符合 PCA 保留率的情况下提取主成分对应的特征向量-[PCA_V colNum_T]
for k = 1:c_sourceData1
    if SDe_rate(k) >= set_T
        colNum_T = k;
        break;
    end
end
for k = 1:colNum_T
    PCA_V(:,k) = V(:,c_sourceData1+1-k); %一定是倒序提取!
end
clearvars k;
```

```
%计算各评价对象的主成分得分-[new_score]
new_score = sourceData1 * PCA_V;

%季度总分-[total_score]
for k = 1:r_sourceData1
    total_score(k, 1) = sum(new_score(k,:).*e(1:colNum_T));
end
clearvars k;

%年度总分-[total_score_year]
m = 0;
for k = 1:4:(r_sourceData1-3)
    m = m+1;
    total_score_year(m) = mean(total_score(k:k+3));
end
clearvars m k;

%存款历史数据对应的年度总分除存款数据得出比例-[p  Pi_in  Pi_out
p_in p_out]
n = (size(total_score_year,2)-2):size(total_score_year,2);
m = 0;
for k = 3:2:7
    m = m+1;
    p_in(m) = sum(sourceData2(:,k))/total_score_year(n(m));
end
m = 0;
for k = 4:2:8
```

```
        m = m+1;
        p_out(m) = sum(sourceData2(:,k))/total_score_year(n(m));
    end
    pi_in = mean(p_in);
    pi_out = mean(p_out);
    clearvars m k n;

    %得出六个主成分对应的比例-[pi_PCA po_PCA]
    pi_PCA = pi_in * e(1:colNum_T);
    po_PCA = pi_out * e(1:colNum_T);

    %输出 PCA 模型及结果报告
    disp('# PCA 分析的输出模型及结果报告');
    disp('## 特征值及其贡献率、累计贡献率');
    disp('### 特征值 e');
    disp(e);
    %  xlswrite('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\code\report.xlsx', e, 1, 'B1');
    disp('### 贡献率 De');
    disp(De_rate);
    %  xlswrite('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\code\report.xlsx', De_rate, 1, 'B2');
    disp('### 累计贡献率 SDe');
    disp(SDe_rate);
    %  xlswrite('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\code\report.xlsx', SDe_rate, 1, 'B3');
    disp('### 累计贡献率 SDe');
    disp('## 信息保留率对应的主成分数与特征向量');
```

```
    disp('### 信息保留率 T');
    disp(set_T);
    % xlswrite('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\code\report.xlsx', set_T, 1, 'B4');
    disp('### 满足主成分信息保留率的特征向量的列数 colNum_T');
    disp(colNum_T);
    % xlswrite('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\code\report.xlsx', colNum_T, 1, 'B5');
    disp('### 主成分下的特征向量 PV');
    disp(PCA_V);
    % xlswrite('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\code\report.xlsx', PCA_V, 1, 'B6');
    disp('## 主成分得分[new_score total_score]');
    disp([new_score total_score]);
    % xlswrite('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\code\report.xlsx', [new_score total_score], 1, 'B27');
    disp('## 对于 PCA 分析构造出来的总分与现实存款贷款的三年的三个比例系数');
    disp('### 存款 p_in');
    disp(p_in);
    % xlswrite('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\code\report.xlsx', p_in, 1, 'B60');
    disp('### 贷款 p_out');
    disp(p_out);
    % xlswrite('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\code\report.xlsx', p_out, 1, 'B61');
    disp('## 对于 PCA 分析构造出来的总分与现实存款贷款的最终平均的比例系数');
```

```
    disp('### 存款 pi_in');
    disp(pi_in);
    % xlswrite('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\code\report.xlsx', pi_in, 1, 'B62');
    disp('### 贷款 pi_out');
    disp(pi_out);
    % xlswrite('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\code\report.xlsx', pi_out, 1, 'B63');
    disp('## 对于 PCA 分析构造出来的分量得分的最终的比例系数');
    disp('### 存款 pi_PCA');
    disp(pi_PCA);
    % xlswrite('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\code\report.xlsx', pi_PCA, 1, 'B64');
    disp('### 贷款 po_PCA');
    disp(po_PCA);
    % xlswrite('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\code\report.xlsx', po_PCA, 1, 'B65');
    disp('-------------------------------------------------------------------------');

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    %原始数据集的导入-[[sourceData1 sourceText1] [sourceData2 sourceText2] [sourceData3 sourceText3] [sourceData4 sourceText4]]
    [sourceData1, sourceText1] = xlsread('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\校赛题目\B题附件.xlsx', '附件1-宏观经济指标', 'A3:U35');
    clearvars sourceText1;
```

```
%原始数据集的属性-[r_sourceData1 c_sourceData1]
[r_sourceData1 c_sourceData1] = size(sourceData1);

%计算相关系数矩阵的降序排列的特征值和特征向量-[V]
[V, D] = eig(CS_sourceData1);
clearvars D;

%提取主成分对应的特征向量-[PCA_V]
for k = 1:colNum_T
    PCA_V(:,k) = V(:,c_sourceData1+1-k); %一定是倒序提取!
end
clearvars k;

%计算各评价对象的主成分得分-[new_score]
new_score = sourceData1 * PCA_V;

%季度存款和贷款总分-[total_score_in total_score_out]
for k = 1:r_sourceData1
    total_score_in(k, 1) = sum(new_score(k,:).*pi_PCA);
end
for k = 1:r_sourceData1
    total_score_out(k, 1) = sum(new_score(k,:).*po_PCA);
end
clearvars k;

%年度存款和贷款总分-[total_score_yearIn total_score_yearOut]
m = 0;
```

```
    for k = 1:4:(r_sourceData1-3)
        m = m+1;
        total_score_yearIn(m) = mean(total_score_in(k:k+3));
    end
    m = 0;
    for k = 1:4:(r_sourceData1-3)
        m = m+1;
        total_score_yearOut(m) = mean(total_score_out(k:k+3));
    end
    clearvars m k;

    %输出检验和预测的结果报告
    disp('# 检验以及预测值的主成分得分总分');
    disp('## 季度度存款检验    季度贷款检验');
    disp('total_score_in    total_score_out');
    disp([total_score_in(1:numel(total_score_in)-1, 1)
total_score_out(1:numel(total_score_out)-1, 1)]);
    disp('## 年度存款检验   年度贷款检验');
    disp('total_score_yearIn    total_score_yearOut');
    disp([transpose(total_score_yearIn)
transpose(total_score_yearOut)]);
    % xlswrite('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛
\code\report.xlsx', [transpose(total_score_yearIn)
transpose(total_score_yearOut)], 1, 'B66');
    disp('2018 年度存款预测    年度贷款预测');
    disp([total_score_in(numel(total_score_in))
total_score_out(numel(total_score_out))]);
    disp('-----------------------------------------------------------
```

```
--------');
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%误差分析%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    residual = xlsread('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\校赛题目\B 题附件.xlsx', '附件 2-各项存贷款历史数据', 'C35:H35');
    residual_in = residual(1:2:6);
    residual_out = residual(2:2:6);
    time_serious = [2015 2016 2017];

    subplot(1, 2, 1);
    bar(time_serious, residual_in);
    xlabel('年份');
    ylabel('额度');
    title('存款的残差分析图');
    subplot(1, 2, 2);
    bar(time_serious, residual_out);
    xlabel('年份');
    ylabel('额度');
    title('贷款的残差分析图');
    disp('# 误差分析');
    disp('- 2015-2017 年存款的残差');
    disp(residual_in);
    disp('- 2015-2017 年贷款的残差');
    disp(residual_out);
    disp('- 2015-2017 年存款的残差均值');
    disp(mean(residual_in));
```

```
disp('- 2015-2017 年存款的残差的标准差');
disp(std(residual_in));
disp('- 2015-2017 年贷款的残差均值');
disp(mean(residual_out));
disp('- 2015-2017 年存款的残差的标准差');
disp(std(residual_in));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
执行结果
# PCA 分析的输出模型及结果报告
## 特征值及其贡献率、累计贡献率
### 特征值 e
  1 至 13 列

    8.2848    4.6851    2.4757    2.0127    1.2583    0.4782
0.2586    0.1748    0.1021    0.0655    0.0515    0.0458    0.0384

  14 至 20 列

    0.0293    0.0218    0.0098    0.0035    0.0023    0.0013
0.0005

### 贡献率 De
  1 至 13 列

    0.4142    0.2343    0.1238    0.1006    0.0629    0.0239
0.0129    0.0087    0.0051    0.0033    0.0026    0.0023    0.0019
```

```
    14 至 20 列

      0.0015      0.0011      0.0005      0.0002      0.0001      0.0001
0.0000

  ### 累计贡献率 SDe
    1 至 13 列

      0.4142      0.6485      0.7723      0.8729      0.9358      0.9597
0.9727     0.9814     0.9865     0.9898     0.9924     0.9947     0.9966

    14 至 20 列

      0.9980      0.9991      0.9996      0.9998      0.9999      1.0000
1.0000

  ### 累计贡献率 SDe
  ## 信息保留率对应的主成分数与特征向量
  ### 信息保留率 T
      0.9500

  ### 满足主成分信息保留率的特征向量的列数 colNum_T
       6

  ### 主成分下的特征向量 PV
      0.3068   -0.1671    0.0122    0.0745   -0.1504   -0.1436
      0.2645    0.0547    0.0951   -0.1727   -0.2074   -0.6470
      0.3278   -0.1119    0.0367    0.0668   -0.0753   -0.0261
```

```
    0.1502   -0.1950    0.4367   -0.1875   -0.0008   -0.3331
    0.2437    0.2198    0.2537   -0.1271    0.0829    0.1166
    0.0341   -0.4410    0.0164   -0.0503   -0.0908    0.0238
    0.2636   -0.2006   -0.2146    0.1270   -0.1637    0.2148
    0.2014    0.0193    0.0420    0.4723    0.3710   -0.0210
    0.1327   -0.0308    0.2512    0.4388    0.4748   -0.0464
    0.3243   -0.0683    0.0061    0.0170   -0.2046    0.1359
    0.1296   -0.0898   -0.4031   -0.3234    0.4008   -0.1104
    0.1251   -0.3232    0.1530   -0.2682    0.0836    0.4371
    0.2929    0.0831   -0.2636    0.0902   -0.1566    0.1002
    0.1274   -0.0291   -0.3959   -0.3319    0.4341   -0.1585
    0.1673   -0.2161    0.3428   -0.2262    0.2668    0.1646
   -0.3287   -0.0414    0.1396   -0.1028    0.1016   -0.0039
    0.2613    0.2959   -0.0570    0.0014    0.0048    0.1018
    0.2575    0.3018   -0.0489   -0.0238   -0.0090    0.1094
    0.0807    0.3236    0.1916   -0.3259   -0.0637    0.2787
    0.0293    0.4213    0.1779   -0.1048    0.1245   -0.0469

## 主成分得分[new_score total_score]
   1.0e+06 *

   -0.2096   -0.0264    0.0890   -0.0657    0.0649   -0.0025   -
1.6918
   -0.2215   -0.0279    0.0940   -0.0694    0.0686   -0.0026   -
1.7873
   -0.2303   -0.0290    0.0978   -0.0721    0.0713   -0.0027   -
1.8587
   -0.2360   -0.0297    0.1002   -0.0739    0.0731   -0.0028   -
```

```
1.9043
          -0.2474   -0.0311    0.1050   -0.0775    0.0766   -0.0029   -
1.9960
          -0.2584   -0.0325    0.1097   -0.0809    0.0800   -0.0031   -
2.0851
          -0.2609   -0.0328    0.1108   -0.0817    0.0808   -0.0031   -
2.1054
          -0.2659   -0.0335    0.1129   -0.0833    0.0824   -0.0031   -
2.1459
          -0.2783   -0.0350    0.1182   -0.0871    0.0862   -0.0033   -
2.2455
          -0.2902   -0.0365    0.1232   -0.0909    0.0898   -0.0034   -
2.3414
          -0.2956   -0.0372    0.1255   -0.0926    0.0915   -0.0035   -
2.3854
          -0.3015   -0.0379    0.1280   -0.0944    0.0933   -0.0036   -
2.4329
          -0.3218   -0.0405    0.1367   -0.1008    0.0996   -0.0038   -
2.5967
          -0.3316   -0.0417    0.1408   -0.1038    0.1026   -0.0039   -
2.6758
          -0.3388   -0.0426    0.1439   -0.1061    0.1049   -0.0040   -
2.7335
          -0.3430   -0.0432    0.1457   -0.1074    0.1062   -0.0040   -
2.7679
          -0.3585   -0.0451    0.1522   -0.1122    0.1110   -0.0042   -
2.8930
          -0.3733   -0.0470    0.1585   -0.1169    0.1156   -0.0044   -
```

3.0126

-0.3702 -0.0466 0.1572 -0.1159 0.1146 -0.0044 -

2.9874

-0.3742 -0.0471 0.1589 -0.1171 0.1158 -0.0044 -

3.0195

-0.4104 -0.0516 0.1743 -0.1285 0.1270 -0.0049 -

3.3119

-0.4333 -0.0545 0.1840 -0.1356 0.1341 -0.0051 -

3.4960

-0.4395 -0.0553 0.1866 -0.1375 0.1360 -0.0052 -

3.5466

-0.4460 -0.0561 0.1894 -0.1396 0.1380 -0.0053 -

3.5988

-0.4638 -0.0584 0.1969 -0.1451 0.1435 -0.0055 -

3.7425

-0.4806 -0.0605 0.2041 -0.1504 0.1487 -0.0057 -

3.8783

-0.4881 -0.0614 0.2073 -0.1528 0.1510 -0.0058 -

3.9388

-0.4949 -0.0623 0.2102 -0.1549 0.1531 -0.0058 -

3.9935

-0.5115 -0.0644 0.2172 -0.1601 0.1583 -0.0060 -

4.1277

-0.5247 -0.0660 0.2228 -0.1642 0.1624 -0.0062 -

4.2342

-0.5333 -0.0671 0.2265 -0.1669 0.1650 -0.0063 -

4.3035

-0.5394 -0.0678 0.2291 -0.1687 0.1668 -0.0064 -

```
4.3519

    ## 对于 PCA 分析构造出来的总分与现实存款贷款的三年的三个比例系数
    ### 存款 p_in
       -0.0101    -0.0101    -0.0101

    ### 贷款 p_out
       -0.0080    -0.0081    -0.0082

    ## 对于 PCA 分析构造出来的总分与现实存款贷款的最终平均的比例系数
    ### 存款 pi_in
       -0.0101

    ### 贷款 pi_out
       -0.0081

    ## 对于 PCA 分析构造出来的分量得分的最终的比例系数
    ### 存款 pi_PCA
       -0.0838    -0.0474    -0.0250    -0.0204    -0.0127    -0.0048

    ### 贷款 po_PCA
       -0.0673    -0.0381    -0.0201    -0.0164    -0.0102    -0.0039

    ------------------------------------------------------------------
--
    # 检验以及预测值的主成分得分总分
    ## 季度度存款检验      季度贷款检验
    total_score_in     total_score_out
```

```
  1.0e+04 *


    1.7112    1.3753
    1.8078    1.4529
    1.8800    1.5110
    1.9262    1.5480
    2.0189    1.6226
    2.1090    1.6950
    2.1296    1.7115
    2.1705    1.7444
    2.2713    1.8254
    2.3683    1.9034
    2.4128    1.9392
    2.4608    1.9778
    2.6265    2.1109
    2.7065    2.1752
    2.7649    2.2221
    2.7997    2.2501
    2.9262    2.3518
    3.0471    2.4489
    3.0217    2.4285
    3.0541    2.4546
    3.3498    2.6922
    3.5361    2.8419
    3.5873    2.8831
    3.6401    2.9255
    3.7854    3.0423
    3.9228    3.1527
```

```
        3.9840      3.2019
        4.0393      3.2463
        4.1750      3.3554
        4.2828      3.4420
        4.3528      3.4983
        4.4018      3.5377

    ## 年度存款检验    年度贷款检验
    total_score_yearIn    total_score_yearOut
      1.0e+04 *


        1.8313      1.4718
        2.1070      1.6934
        2.3783      1.9114
        2.7244      2.1896
        3.0123      2.4209
        3.5283      2.8357
        3.9328      3.1608
        4.3031      3.4584

    2018 年度存款预测    年度贷款预测
      1.0e+04 *


        4.4018      3.5377


    -------------------------------------------------------------------
--
    # 误差分析
```

```
- 2015-2017 年存款的残差
    87     42   -151

- 2015-2017 年贷款的残差
  -297     63    293

- 2015-2017 年存款的残差均值
   -7.3333

- 2015-2017 年存款的残差的标准差
  126.4371

- 2015-2017 年贷款的残差均值
   19.6667

- 2015-2017 年存款的残差的标准差
  126.4371
```

第二问

```
clear;
clc;

%导入原始数据-[sourceData2]
sourceData2 = xlsread('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\校赛题目\B 题附件.xlsx', '附件 2-各项存贷款历史数据', 'C3:H32');
sourceData3 = xlsread('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\校赛题目\B 题附件.xlsx', '附件 3-存贷款利率水平', 'C15:H44');
```

```
x_foreIn = 44018;
x_foreOut = 35377;

%写出约束条件中的等式的矩阵
Aeq = zeros(2, 120);
Aeq(1, 31:60) = 1;
beq(1, 1) = x_foreIn;
Aeq(2, 91:120) = 1;
beq(2, 1) = x_foreOut;

%求各个省份的平均值
for k = 1:30
    mean_rk_in(k) = mean(sourceData3(k, 1:2:6));
end
for k = 1:30
    mean_rk_out(k) = mean(sourceData3(k, 2:2:6));
end
%求出各个省份的标准差
for k = 1:30
    std_rk_in(k) = std(sourceData3(k, 1:2:6));
end
for k = 1:30
    std_rk_out(k) = std(sourceData3(k, 2:2:6));
end
%写出存款的不等的约束条件
A1 = zeros(60, 120);
m = 1:30;
for k = 1:30
```

```
    A1(k, m(k)) = -1;
end
b1(1:30, 1) = 2*std_rk_in - mean_rk_in;
for k = 1:30
    A1(k+30, m(k)) = 1;
end
b1(31:60, 1) = 2*std_rk_in + mean_rk_in;
%贷款的不等式的约束条件
A2 = zeros(60, 120);
m = 61:90;
for k = 1:30
    A2(k, m(k)) = -1;
end
b2(1:30, 1) = 2*std_rk_out - mean_rk_out;
for k = 1:30
    A2(k+30, m(k)) = 1;
end
b2(31:60, 1) = 2*std_rk_out + mean_rk_out;

%存款的央行基准不等约束条件
A3 = zeros(60, 120);
m = 1:30;
for k = 1:30
    A3(k, m(k)) = -1;
end
b3(1:30, 1) = -1.35;
for k = 1:30
    A3(k+30, m(k)) = 1;
```

```
    end
    b3(31:60, 1) = 1.65;
    %贷款的央行基准不等约束条件
    A4 = zeros(60, 120);
    m = 61:90;
    for k = 1:30
        A4(k, m(k)) = -1;
    end
    b4(1:30, 1) = -3.8;
    for k = 1:30
        A4(k+30, m(k)) = 1;
    end
    b4(31:60, 1) = 5.7;

    A = [A1; A2; A3; A4];
    b = [b1; b2; b3; b4];
    ri = transpose(mean_rk_in);
    xi = sourceData2(:, 5) + (x_foreIn-sum(sourceData2(:, 5))) .*
((sourceData2(:, 5)/sum(sourceData2(:, 5))));
    ro = transpose(mean_rk_out);
    xo = sourceData2(:, 6) + (x_foreOut-sum(sourceData2(:, 6))) .*
((sourceData2(:, 6)/sum(sourceData2(:, 6))));
    x0 = [ri; xi; ro; xo];
    [x, y] = fmincon('function_b2_1', x0, A, b, Aeq, beq, zeros(120,
0), []);

    disp('# 分配方案');
    disp('存款利率 存款金额 贷款利率 贷款金额');
```

```
disp([x(1:30) x(31:60) x(61:90) x(91:120)]);
disp(-y);
```

```
%目标函数
function f = function_b2_1(x)
    r_in = x(1:30);
    x_in = x(31:60);
    r_out = x(61:90);
    x_out = x(91:120);
    f = sum(r_in .* x_in) - sum(r_out .* x_out);
end
```

```
# 分配方案
存款利率 存款金额 贷款利率 贷款金额
   1.0e+03 *

    0.0021    5.1558    0.0052    3.0480
    0.0016    5.1550    0.0052    4.3738
    0.0018    4.1553    0.0052    3.4280
    0.0019    3.8339    0.0052    3.5222
    0.0019    3.4410    0.0052    2.6161
    0.0018    2.4196    0.0052    1.7044
    0.0017    1.8703    0.0052    1.3802
    0.0018    1.7090    0.0053    1.4852
    0.0018    1.3187    0.0052    1.0848
    0.0018    1.2994    0.0052    0.9237
    0.0020    1.1880    0.0052    1.0904
    0.0019    1.0008    0.0052    0.8022
```

```
    0.0017    1.0785    0.0053    0.6846
    0.0016    1.1004    0.0053    1.0508
    0.0018    0.9461    0.0052    0.7375
    0.0018    0.8892    0.0052    0.6464
    0.0021    0.6749    0.0052    0.7472
    0.0017    0.8308    0.0052    0.7163
    0.0019    0.6442    0.0053    0.5308
    0.0017    0.7220    0.0052    0.6438
    0.0019    0.6885    0.0052    0.9015
    0.0018    0.6703    0.0053    0.6183
    0.0018    0.6388    0.0052    0.3956
    0.0013    0.7317    0.0052    0.4700
    0.0015    0.5098    0.0053    0.4494
    0.0017    0.4312    0.0053    0.3236
    0.0018    0.3207    0.0053    0.3394
    0.0017    0.2927    0.0052    0.3830
    0.0018    0.1277    0.0053    0.1624
    0.0015    0.1738    0.0052    0.1173


   1.0574e+05
```

问题三

```
clear;
clc;

%导入原始数据-[sourceData2]
sourceData2 = xlsread('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\校赛题目\B 题附件.xlsx', '附件 2-各项存贷款历史数据', 'C3:H32');
```

```
    sourceData3 = xlsread('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\校赛题目\B题附件.xlsx', '附件3-存贷款利率水平', 'C15:H44');

    x_foreIn = 44018;
    x_foreOut = 35377+500;

    %写出约束条件中的等式的矩阵
    Aeq = zeros(2, 120);
    Aeq(1, 31:60) = 1;
    beq(1, 1) = x_foreIn;
    Aeq(2, 91:120) = 1;
    beq(2, 1) = x_foreOut;

    %求各个省份的平均值
    for k = 1:30
        mean_rk_in(k) = mean(sourceData3(k, 1:2:6));
    end
    for k = 1:30
        mean_rk_out(k) = mean(sourceData3(k, 2:2:6));
    end
    %求出各个省份的标准差
    for k = 1:30
        std_rk_in(k) = std(sourceData3(k, 1:2:6));
    end
    for k = 1:30
        std_rk_out(k) = std(sourceData3(k, 2:2:6));
    end
    %写出存款的不等的约束条件
```

```
A1 = zeros(60, 120);
m = 1:30;
for k = 1:30
    A1(k, m(k)) = -1;
end
b1(1:30, 1) = 2*std_rk_in - mean_rk_in;
for k = 1:30
    A1(k+30, m(k)) = 1;
end
b1(31:60, 1) = 2*std_rk_in + mean_rk_in;
%贷款的不等式的约束条件
A2 = zeros(60, 120);
m = 61:90;
for k = 1:30
    A2(k, m(k)) = -1;
end
b2(1:30, 1) = 2*std_rk_out - mean_rk_out;
for k = 1:30
    A2(k+30, m(k)) = 1;
end
b2(31:60, 1) = 2*std_rk_out + mean_rk_out;

%存款的央行基准不等约束条件
A3 = zeros(60, 120);
m = 1:30;
for k = 1:30
    A3(k, m(k)) = -1;
end
```

```
    b3(1:30, 1) = -1.35;
    for k = 1:30
        A3(k+30, m(k)) = 1;
    end
    b3(31:60, 1) = 1.65;
    %贷款的央行基准不等约束条件
    A4 = zeros(60, 120);
    m = 61:90;
    for k = 1:30
        A4(k, m(k)) = -1;
    end
    b4(1:30, 1) = -3.8;
    for k = 1:30
        A4(k+30, m(k)) = 1;
    end
    b4(31:60, 1) = 5.7;

    A = [A1; A2; A3; A4];
    b = [b1; b2; b3; b4];
    ri = transpose(mean_rk_in);
    xi = sourceData2(:, 5) + (x_foreIn-sum(sourceData2(:, 5))) .*
((sourceData2(:, 5)/sum(sourceData2(:, 5))));
    ro = transpose(mean_rk_out);
    xo = sourceData2(:, 6) + (x_foreOut-sum(sourceData2(:, 6))) .*
((sourceData2(:, 6)/sum(sourceData2(:, 6))));
    x0 = [ri; xi; ro; xo];
    [x, y] = fmincon('function_b3_1', x0, A, b, Aeq, beq, zeros(120,
0), []);
```

```
disp('# 分配方案');
disp('存款利率 存款金额 贷款利率 贷款金额');
disp([x(1:30) x(31:60) x(61:90) x(91:120)]);
disp(-y);
```

```
%目标函数
function f = function_b3_1(x)
    r_in = x(1:30);
    x_in = x(31:60);
    r_out = x(61:90);
    x_out = x(91:120);
    f = sum(r_in .* x_in) - sum(r_out .* x_out) + 25.5;
end
```

```
# 分配方案
存款利率 存款金额 贷款利率 贷款金额
   1.0e+03 *

    0.0021    4.7437    0.0052    2.9941
    0.0016    5.3976    0.0052    4.4235
    0.0018    4.2549    0.0052    3.4237
    0.0019    3.6136    0.0052    3.5151
    0.0019    3.2826    0.0052    2.5806
    0.0018    2.4832    0.0052    1.7205
    0.0017    1.9109    0.0052    1.4197
    0.0018    1.6889    0.0053    1.5670
    0.0018    1.2328    0.0052    1.0781
```

```
    0.0018    1.2165    0.0052    0.9432
    0.0020    0.9240    0.0052    1.0899
    0.0019    0.8319    0.0052    0.7859
    0.0017    1.1417    0.0052    0.7141
    0.0016    1.3374    0.0053    1.1557
    0.0017    0.9452    0.0052    0.7417
    0.0018    0.8360    0.0052    0.6494
    0.0021    0.2903    0.0052    0.7351
    0.0017    0.9280    0.0052    0.6999
    0.0019    0.4464    0.0053    0.5754
    0.0017    0.7909    0.0052    0.6318
    0.0019    0.6934    0.0052    0.9101
    0.0017    0.6858    0.0053    0.6622
    0.0018    0.5847    0.0052    0.3453
    0.0013    1.2377    0.0052    0.4564
    0.0015    0.7952    0.0053    0.5989
    0.0017    0.4895    0.0052    0.3777
    0.0018    0.2888    0.0053    0.3883
    0.0017    0.3685    0.0052    0.3505
    0.0018    0.1064    0.0053    0.2352
    0.0015    0.4715    0.0052    0.1082


   1.0930e+05
```

第四问

```
clear;
clc;

%导入原始数据-[sourceData4]
```

```
    sourceData4 = xlsread('E:\Users\dyk\Documents\Projects\数学建模\数模校赛\校赛题目\B 题附件.xlsx', '附件 4-存取款每日数据=存款-取款', 'A1:AD365');

    %数据可视化：画出 30 个省的 365 个差值的散点图
    for k = 1:30
        subplot(15, 2, k)
        x = sort(sourceData4(:, k));
        y = repelem(0, 365);
        plot(x, y, '*r');
    end
    clearvars x y k;

    %数据的特征：30 个省的 365 个差值的平均值和标准差-[mean_zones std_zones]
    for k = 1:30
        mean_zones(k) = mean(sourceData4(:,k));
        std_zones(k) = std(sourceData4(:,k));
    end
    clearvars k;

    %总体的特征：30 个省的差值的平均值的平均值和标准差-[mean_total std_total]
    mean_total = mean(mean_zones);
    std_total = std(mean_zones);

    %显示结果报告
    disp('## 原始数据的总体报告');
```

```
    disp('- 30 个省的 365 个差值的平均值和标准差-[mean_zones std_zones]');
    disp([transpose(mean_zones) transpose(std_zones)]);
    disp('- 30 个省的差值的平均值的平均值和标准差-[mean_total std_total]');
    disp([mean_total std_total]);

    %计算 2017 年各个省的备付资金
    for m = 1:30
        sum_temp = 0;
        for k = 1:365
            sum_temp = sum_temp + sourceData4(k,m);
            sum_data(k) = sum_temp;
        end
        result2017(m) = -1 * min(sum_data);
    end

    %设置生成符合概率密度的随机数的副本数-[N]
    N = 1000;

    %通过随机数模拟的方法计算出各个省份在 99%情况下的备付资金
    for c = 1:30
        for n = 1:N
            %在一个副本内，生成一年 365 天的随机数
            for k = 1:365
                data_zone(k) = randn * std_zones(c);
            end
            %对 365 天的随机数进行累加求和
```

```
            sum_temp = 0;
            for k = 1:365
                sum_temp = sum_temp + data_zone(k);
                sum_data(k) = sum_temp;
            end
            result(n) = min(sum_data);
        end
        result_zones(c) = -1 * max(mink(result, round(N*0.1)));
        mean_result(c) = -1 * mean(result);
        std_result(c) = std(result);
    end

    %显示结果报告
    disp('## 模拟数据分析报告');
    disp('- 模拟的数据个数 N');
    disp(N);
    disp('- 2017 年 30 个省各自的备付资金与 2018 年 30 个省在 99%置信水平下各自的备付资金、模拟值的期望、模拟值的标准差');
    disp(['result2017' ' ' 'result_zones' ' ' 'mean_result' ' ' 'std_result']);
    disp([transpose(result2017) transpose(result_zones) transpose(mean_result) transpose(std_result)]);
```

```
    ## 原始数据的总体报告
    - 30 个省的 365 个差值的平均值和标准差-[mean_zones std_zones]
        1.1233    59.2025
        1.1233    37.5704
        0.9863    34.4104
```

0.8767	24.4717
0.7397	51.1597
0.4932	23.3680
0.4110	20.1833
0.4110	25.0543
0.3014	12.3129
0.2740	11.3746
0.2466	14.3100
0.2466	11.5350
0.2466	11.9003
0.2466	14.6191
0.2192	12.9921
0.2192	14.9323
0.1370	7.3909
0.1644	7.1617
0.1370	8.1573
0.1370	11.2398
0.1370	8.6221
0.1370	12.9184
0.1370	6.5796
0.1096	14.3441
0.0822	5.1192
0.0822	5.0623
0.0822	5.6956
0.0548	4.8836
0.0274	1.9158
0.0274	2.1679

- 30 个省的差值的平均值的平均值和标准差-[mean_total std_total]

0.3205 0.3212

模拟数据分析报告

- 模拟的数据个数 N

100000

- 2017 年 30 个省各自的备付资金与 2018 年 30 个省在 99%置信水平下各自的备付资金、模拟值的期望、模拟值的标准差

result2017 result_zones mean_result std_result

1.0e+03 *

0.5454	1.8176	0.8649	0.6813
0.1044	1.1647	0.5530	0.4367
0.1657	1.0628	0.5058	0.3969
0.2327	0.7544	0.3593	0.2827
0.2584	1.5813	0.7513	0.5909
0.3013	0.7237	0.3432	0.2699
0.2147	0.6260	0.2965	0.2344
0.0283	0.7745	0.3671	0.2896
0.1885	0.3798	0.1806	0.1422
0.0902	0.3497	0.1664	0.1309
0.1111	0.4428	0.2098	0.1657
0.0701	0.3547	0.1690	0.1328
0.1749	0.3662	0.1740	0.1372
0.0583	0.4518	0.2142	0.1688
0.0074	0.4025	0.1907	0.1505
0.0593	0.4607	0.2184	0.1726

0.0566	0.2282	0.1081	0.0852
0.0395	0.2208	0.1048	0.0825
0.0540	0.2522	0.1196	0.0940
0.0636	0.3450	0.1642	0.1292
0.0454	0.2669	0.1270	0.1000
0.0269	0.3998	0.1897	0.1492
0.0593	0.2023	0.0959	0.0758
0.0814	0.4427	0.2101	0.1657
0.0200	0.1584	0.0753	0.0593
0.0584	0.1567	0.0743	0.0584
0.0213	0.1765	0.0837	0.0657
0.0299	0.1508	0.0716	0.0564
0.0128	0.0595	0.0281	0.0221
0.0113	0.0669	0.0318	0.0251