四元数简介

1 四元数表示

1.1 定义

$$\mathbf{q} = q_w + q_x + q_y + q_z$$

2 四元数性质

2.1 四元数的和

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_w \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_w + q_w \\ \mathbf{p}_v + \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_w + q_w \\ \mathbf{p}_x + \mathbf{q}_x \\ \mathbf{p}_y + \mathbf{q}_y \\ \mathbf{p}_z + \mathbf{q}_z \end{bmatrix}$$

对应的元素直接相加即可。

2.2 四元数的乘积

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_w & \mathbf{p}_x & \mathbf{p}_y & \mathbf{p}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_w & \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_w q_w - p_x q_x - p_y q_y - p_z q_z \\ p_w q_x + p_x q_w + p_y q_z - p_z q_y \\ p_w q_y - p_x q_y + p_y q_w + p_z q_x \\ p_w q_z + p_x q_z - p_y q_x + p_z q_w \end{bmatrix}$$

写成标量和向量形式：

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_w & \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_w q_w - \mathbf{p}_v^T \mathbf{q}_v \\ p_w \mathbf{q}_v + q_w \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v \end{bmatrix}$$

四元数不满足交换律：

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \neq \mathbf{q} \otimes \mathbf{p}$$

结合律：

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} = \mathbf{q} \otimes (\mathbf{p} \otimes \mathbf{r})$$

2.3 矩阵形式

$$\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 = \mathbf{Q}^+ \mathbf{q}_2$$
$$\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 = \mathbf{Q}^- \mathbf{q}_1$$

其中：

$$\mathbf{Q}^+ = q_w \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^T \\ \mathbf{q}_v & [\mathbf{q}_v]_\times \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}^- = q_w \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^T \\ \mathbf{q}_v & -[\mathbf{q}_v]_\times \end{bmatrix}$$

2.4 单位四元数

$$\mathbf{q}_1 = 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_x \end{bmatrix}$$

2.5 四元数共轭

共轭的定义：

$$\mathbf{q}^\star \triangleq q_w - \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} q_w \\ -\mathbf{q}_v \end{bmatrix}$$

2.6 四元数的模

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$$

2.7 四元数的逆

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1} \otimes \mathbf{q} = \mathbf{q}_1$$

3 四元数恒等式

3.1 旋转表示

$$\mathbf{q}\{\theta\} = \cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2} = \begin{bmatrix} cos\frac{\theta}{2} \\ \mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

3.2 向量旋转

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}' \end{bmatrix} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}^\star$$

3.3 旋转矩阵

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}\mathbf{v}$$

其中：

$$\mathbf{R}\{q\} = \begin{bmatrix} q_w^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 & 2(q_x q_y - q_w q_z) & 2(q_x q_z + q_w q_y) \\ 2(q_x q_y + q_w q_z) & q_w^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 & 2(q_y q_z - q_w q_x) \\ 2(q_x q_z - q_w q_y) & 2(q_y q_z + q_w q_x) & q_w^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 \end{bmatrix}$$

3.4 导数

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \mathbf{w}$$