Relatório de Laboratório de Métodos Numéricos

Autor: Eduardo Figueredo Pacheco

Data
19/05/2023

Sumário

1 Introdução

A integração numérica é uma técnica essencial em diversas áreas da matemática e da física, permitindo aproximar o valor de integrais que não podem ser calculadas de forma exata ou que são computacionalmente custosas. Neste relatório, exploraremos duas abordagens comumente utilizadas na integração numérica: a integração por fórmulas analíticas e a integração por Monte Carlo.

Na primeira parte deste relatório, vamos nos concentrar na integração numérica da fórmula física do trabalho. O trabalho é um conceito fundamental na física e está diretamente relacionado à integração de funções ao longo de um caminho ou intervalo. Utilizando métodos como a regra do trapézio composto e a regra de Simpson composto, iremos aproximar o valor do trabalho ao longo de uma trajetória.

Na segunda parte, exploraremos a integração por Monte Carlo, uma técnica estatística que utiliza números aleatórios para obter aproximações numéricas de integrais. Inicialmente, iremos focar em integrais unidimensionais, utilizando a geração de números aleatórios para estimar o valor de funções unidimensionais específicas, como o seno, polinômios e exponenciais.

Em seguida, expandiremos nosso estudo para integrais multidimensionais, explorando funções g(x) que dependem de mais de uma variável. Utilizaremos a abordagem de Monte Carlo para estimar a área de figuras geométricas, como a circunferência em um quadrante.

Ao longo deste relatório, iremos apresentar e discutir os métodos utilizados, bem como seus pontos fortes e limitações. Além disso, forneceremos exemplos numéricos para ilustrar a aplicação prática desses métodos. A integração numérica desempenha um papel fundamental na resolução de problemas complexos e na obtenção de resultados aproximados em situações onde a integração exata não é viável.

O objetivo deste relatório é apresentar uma visão geral dos métodos de integração numérica, fornecendo uma base sólida para compreender e aplicar essas técnicas em contextos acadêmicos e profissionais.

2 Desenvolvimento

2.1 Parte 1

A primeira parte deste relatório aborda a integração numérica da fórmula física do trabalho. O trabalho é uma grandeza física que representa a energia transferida para um objeto devido à aplicação de uma força ao longo de um determinado deslocamento. Matematicamente, o trabalho é calculado como a integral da força aplicada em relação ao deslocamento.

Existem diferentes métodos para realizar a integração numérica, sendo dois deles amplamente utilizados: a regra do trapézio composto e a regra de Simpson composto. Ambos os métodos dividem o intervalo de integração em subintervalos menores e aproximam o valor da integral através da soma ponderada das contribuições de cada subintervalo.

2.1.1 Trapézio Composto

A regra do trapézio composto consiste em aproximar a curva da função por segmentos de reta, formando trapezoides em cada subintervalo. A área de cada trapezoide é calculada e somada para obter a aproximação da integral. Quanto mais subintervalos são utilizados, maior a precisão da aproximação.

2.1.2 Simpson Composto

Já a regra de Simpson composto utiliza polinômios de segundo grau para aproximar a curva da função em cada subintervalo. Essa abordagem proporciona uma maior precisão na aproximação em comparação à regra do trapézio composto. A regra de Simpson composto utiliza três pontos (inicial, final e ponto médio de cada subintervalo) para construir parábolas e calcular a área sob cada parábola. Essas áreas são somadas para obter o valor aproximado da integral.

A escolha entre a regra do trapézio composto e a regra de Simpson composto depende da precisão desejada e da complexidade da função a ser integrada. Em geral, a regra de Simpson composto fornece resultados mais precisos para funções suaves, enquanto a regra do trapézio composto é adequada para funções mais complexas ou quando a precisão não é o principal requisito.

É importante ressaltar que a escolha do número de subintervalos também afeta a precisão da aproximação. Quanto mais subintervalos forem utilizados, maior será a precisão, porém, o custo computacional também aumentará. Portanto, é necessário encontrar um equilíbrio entre a precisão desejada e o tempo de processamento disponível.

```
Resultado usando trapezio composto: 117.138600
Resultado usando Simpson composto: 117.131620
```

2.2 Parte 2: Integração por Monte Carlo

Nesta parte do relatório, exploramos a técnica de integração numérica conhecida como Método de Monte Carlo. Essa abordagem é baseada na geração aleatória de pontos dentro de uma região de interesse e no cálculo da média dos valores da função nesses pontos. Essa média é então multiplicada pelo volume da região para aproximar a integral da função.

2.2.1 Integrais Unidimensionais

Vamos considerar algumas funções unidimensionais e calcular suas integrais utilizando o Método de Monte Carlo.

Função: $f(x) = \sin(x)$

Para esta função, desejamos calcular a integral de $f(x)$ no intervalo $[0, 1]$.

Decisão Teórica: Nesse caso, não há necessidade de realizar uma mudança de variável, pois a integral pode ser diretamente calculada no intervalo fornecido.

Função: $f(x) = x^3$

Aqui, a integral de interesse é a de $f(x)$ no intervalo $[3, 7]$.

Decisão Teórica: Para resolver esse problema, aplicamos uma mudança de variável. Definimos uma nova variável t tal que $x = 4t+3$. Com essa substituição, a integral de $f(x)$ é transformada em uma integral de t. O novo intervalo de integração é $[0, 1]$, e a integral pode ser calculada nesse intervalo.

Função: $f(x) = e^{-x}$

Neste caso, queremos calcular a integral de $f(x)$ no intervalo $[0, 1]$.

Decisão Teórica: Para simplificar o cálculo da integral, realizamos uma mudança de variável. Definimos $u = 1 - x$, o que implica em $x = 1 - u$. A integral de $f(x)$ pode ser transformada em uma integral de u no intervalo $[0, 1]$.

2.2.2 Integrais Multidimensionais

Vamos considerar agora funções multidimensionais e calcular suas integrais usando o Método de Monte Carlo.

Função: $f(x, y) = AreadaCircunferncia$

Aqui, desejamos calcular a área da circunferência no primeiro quadrante.

Decisão Teórica: A função $f(x, y)$ avalia se um ponto (x, y) está dentro da circunferência ou não. Para calcular a área da circunferência, utilizamos o Método de Monte Carlo para estimar a fração de pontos gerados aleatoriamente dentro da circunferência. Multiplicando essa fração pelo quadrado do intervalo de integração (que neste caso é $[-1, 1]$ para x e y), obtemos uma aproximação da área da circunferência.

Essas são as decisões teóricas tomadas para cada função, permitindo-nos calcular as integrais desejadas utilizando o Método de Monte Carlo.

2.2.3 Testes

À medida que aumentamos o valor de n (número de amostras) nos testes de integração numérica, observamos uma maior precisão nos resultados obtidos. Isso ocorre porque, ao aumentar o número de amostras, estamos dividindo o intervalo de integração em subintervalos menores, permitindo uma melhor aproximação da função em cada subintervalo.

No caso do método de integração por Monte Carlo, ao aumentar n, estamos selecionando mais pontos aleatórios dentro do intervalo de integração. Isso significa que teremos uma amostragem mais densa da função, resultando em uma estimativa mais precisa da área sob a curva. Quanto maior o número de pontos, menor será a influência de flutuações aleatórias e maior será a estabilidade do resultado.

```
n = 10 :

Integral de seno(x) no intervalo [0, 1]: 0.390612
Integral de x^3 no intervalo [3, 7]: 530.126903
Integral de e^(-x) entre [0, inf]: 1.000000
Area no primeiro quadrante: 2.800000
```

```
n = 100 :

Integral de seno(x) no intervalo [0, 1]: 0.440987
Integral de x^3 no intervalo [3, 7]: 548.495565
Integral de e^(-x) no intervalo [0, inf]: 1.000000
Area no primeiro quadrante: 3.000000
```

```
n = 1000 :

Integral de seno(x) no intervalo [0, 1]: 0.467478
Integral de x^3 no intervalo [3, 7]: 589.562502
Integral de e^(-x) entre [0, inf]: 1.000000
Area no primeiro quadrante: 3.132000
```

```
n = 10000 :

Integral de seno(x) no intervalo [0, 1]: 0.462526
Integral de x^3 no intervalo [3, 7]: 584.723879
Integral de e^(-x) entre [0, inf]: 1.000000
Area no primeiro quadrante: 3.130800
```

```
n = 100000 :

Integral de seno(x) no intervalo [0, 1]: 0.460630
Integral de x^3 no intervalo [3, 7]: 581.380857
Integral de e^(-x) entre [0, inf]: 1.000000
Area no primeiro quadrante: 3.148400
```

```
n = 1000000 :

Integral de seno(x) no intervalo [0, 1]: 0.459583
Integral de x^3 no intervalo [3, 7]: 579.816452
Integral de e^(-x) entre [0, inf]: 1.000000
Area no primeiro quadrante: 3.142520
```

```
n = 10000000 :

Integral de seno(x) no intervalo [0, 1]: 0.459798
Integral de x^3 no intervalo [3, 7]: 580.173340
Integral de e^(-x) entre [0, inf]: 1.000000
Area no primeiro quadrante: 3.141539
```

3 Conclusão

Em conclusão, neste relatório, exploramos o tema da integração numérica, abordando dois métodos específicos: o método do trapézio composto e o método de Simpson composto. Além disso, investigamos a integração por Monte Carlo, tanto para integrais unidimensionais quanto para integrais multidimensionais.

Na primeira parte do relatório, aplicamos os métodos de trapézio composto e Simpson composto para aproximar a integral da função para computar a grandeza física trabalho.

Na segunda parte, utilizamos a integração por Monte Carlo para estimar integrais de algumas funções, realizando uma análise comparativa dos resultados. Observamos que, ao aumentar o número de amostras (n), obtivemos resultados mais precisos, devido à maior densidade de pontos aleatórios ou ao refinamento da discretização da função.

Em ambos os métodos, destacamos a importância de encontrar um equilíbrio entre a precisão desejada e o tempo de processamento necessário. Valores muito altos de n podem levar a um aumento significativo no tempo de cálculo, sem necessariamente proporcionar uma melhoria proporcional na precisão.

Portanto, concluímos que a integração numérica é uma ferramenta poderosa para estimar integrais quando não é possível realizar uma avaliação analítica direta. Os métodos estudados neste relatório, tanto os métodos clássicos quanto a abordagem de Monte Carlo, oferecem alternativas válidas e eficientes para a solução de problemas de integração. A escolha do método mais adequado dependerá das características específicas do problema em questão, levando em consideração fatores como a complexidade da função e a precisão desejada.