Relatório do EP1

Eduardo Figueredo Pacheco

São Paulo, 2023

Contents

1 Introdução

Neste trabalho, abordaremos dois métodos comuns para encontrar raízes de funções: o método do ponto fixo e o método de Newton. Ambos os métodos são amplamente utilizados por sua capacidade de convergir para uma solução com alta precisão em um número finito de iterações. A ideia principal por trás desses métodos é aproximar uma solução por meio de uma sequência iterativa de valores cada vez mais próximos da raiz real. Enquanto o método do ponto fixo usa uma transformação da função original para encontrar um ponto fixo que é a raiz da função, o método de Newton envolve a utilização da derivada da função para aproximar a raiz. Ambos os métodos são extremamente úteis para uma variedade de aplicações em diferentes áreas da matemática e da ciência.

2 Parte 1

2.1 Explicação do Código

Neste código, foi implementado o método de ponto fixo para encontrar as 3 raízes reais da função $f(x) = \exp(x) - 2x^2$.

O método de ponto fixo é uma técnica iterativa para encontrar raízes de uma função $f(x)$, que envolve a escolha de uma função de ponto fixo $g(x)$ tal que $g(x) = x$. A cada iteração, a equação $g(x) = x$ é usada para atualizar o valor de x até que o erro seja menor que uma tolerância definida.

Neste código, foram implementadas três funções de ponto fixo diferentes, cada uma projetada para encontrar uma das três raízes da função $f(x)$.

2.2 Funções de Ponto Fixo

Aqui estão as três funções de ponto fixo implementadas neste código, juntamente com suas respectivas derivadas:

2.2.1 Função 1

Para a função de ponto fixo $g(x) = \sqrt{\frac{e^x}{2}}$, a derivada é dada por $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{e^x}} \cdot e^x$.

Para que o método de ponto fixo seja convergente, precisamos ter $|g'(x)| < 1$ em algum intervalo que contenha a raiz procurada. No caso dessa função, temos:

$$|g'(x)| = \left|\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{e^x}} \cdot e^x\right| < 1$$

Agora, para encontrar o intervalo em que $|g'(x)| < 1$, podemos resolver a desigualdade $|g'(x)| < 1$ para x:

$$|g'(x)| < 1 \qquad \left|\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{e^x}} \cdot e^x\right| < 1$$

$$\left|\sqrt{\frac{2}{e^x}} \cdot e^x\right| < 4 \quad (\text{já que } \sqrt{\frac{2}{e^x}} \cdot e^x > 0); \; \frac{2}{e^x} \cdot e^{2x} < 16; \quad e^x > 4; \; x > \ln(4)$$

Portanto, temos que $|g'(x)| < 1$ para $x > \ln(4)$. Isso significa que, se escolhermos um ponto inicial $x_0 > \ln(4)$, o método de ponto fixo deve convergir para a raiz procurada.

Assim, temos que $|g'(x)| < 1$ para $x < 2.77258$. Observe que essa é a única condição para garantir a convergência da função de ponto fixo $g(x) = \sqrt{\frac{e^x}{2}}$ para a raiz positiva de $f(x)$. Além disso, note que $g(x) = x$ é uma solução trivial para $g(x)$, mas ela não é utilizada neste caso pois a derivada de $g(x)$ seria igual a 1 e, portanto, a convergência não seria garantida.

Portanto, a função de ponto fixo $g(x) = \sqrt{\frac{e^x}{2}}$ é convergente para a raiz negativa de $f(x)$ no intervalo $(-\infty, 2.77258)$.

Além disso, é importante notar que essa função de ponto fixo é equivalente a $g(x) = x$ para $x \to -\infty$, o que significa que o método de ponto fixo com essa função irá convergir rapidamente para a raiz negativa de $f(x)$ quando iniciado com um valor inicial suficientemente negativo.

2.2.2 Função 2

Portanto, a derivada de $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ em relação a x é $1 - \frac{2x^2+e^x}{(e^x-4x)^2}$.

Para a derivada $1 - \frac{2x^2+e^x}{(e^x-4x)^2}$ ser menor que um no intervalo $(-\infty, 0)$, temos que x deve ser menor que aproximadamente -0.181. Assim, o intervalo em que o método do ponto fixo com a função $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ e $f(x) = e^x - 2x^2$ irá funcionar é $(-\infty, -0.181)$.

2.2.3 Função 3

Para que a função de ponto fixo $g(x) = \ln(2x^2)$ seja convergente, precisamos ter $|g'(x)| < 1$ em algum intervalo que contenha a raiz procurada. No caso dessa função, temos:

$$\frac{d}{dx}\ln(2x^2) = \frac{1}{2x^2} \cdot 4x \ = \frac{2}{x}$$

$$\frac{2}{x} < 1 \qquad\qquad 2 < x$$

Portanto, temos que $\frac{d}{dx}\ln(2x^2) < 1$ para todo $x > 2$. Consequentemente, a função de ponto fixo $g(x) = \ln(2x^2)$ é convergente para a raiz positiva de $f(x)$ no intervalo $(2, +\infty)$.

Além disso, é importante notar que a solução trivial $g(x) = x$ é equivalente a $g(x) = \ln(2x^2)$ para $x \to +\infty$, o que significa que o método de ponto fixo com essa função irá convergir rapidamente para a raiz positiva de $f(x)$ quando iniciado com um valor inicial suficientemente grande.

2.3 Implementação do Método de Ponto Fixo

Na função `Pfixo(x)`, o método de ponto fixo é implementado para encontrar uma raiz da função $f(x)$, dada uma condição inicial x. A implementação escolhe uma das três funções de ponto fixo, dependendo do valor de x, para garantir que haja convergência para algum ponto, independentemente do valor inicial de x.

O código calcula $g(x)$ para cada iteração, atualizando o valor de x até que o erro seja menor que a tolerância definida. A função retorna a aproximação da raiz da função $f(x)$.

2.4 Critério de Parada

O critério de parada utilizado no código é que a diferença entre y e x seja menor que a tolerância definida, ou que o número máximo de iterações seja atingido (200 iterações neste caso).

2.5 Explicação do Código

O código implementa o método de ponto fixo para encontrar as três raízes reais da função $f(x) = e^x - 2x^2$. O método de ponto fixo consiste em encontrar uma função $g(x)$ tal que a solução de $g(x) = x$ seja a mesma da solução de $f(x) = 0$. A partir de um ponto inicial x_0, o método aplica a função $g(x)$ sucessivamente até que a diferença entre o valor atual y e o valor anterior x seja menor que uma tolerância definida ou que o número máximo de iterações seja atingido.

No código, a função $Pfixo(x)$ implementa o método de ponto fixo. Ela recebe como parâmetro um valor inicial x e retorna o valor aproximado da raiz da função $f(x)$. A função $Pfixo(x)$ contém três blocos condicionais que definem diferentes funções de ponto fixo $g(x)$ para diferentes intervalos de x. Cada função foi escolhida de modo que sua solução converja para uma das três raízes da função $f(x)$, independente do valor inicial x.

Os três blocos condicionais são:

- **Bloco 1:** $x < -0.2$

  Para este intervalo, a função de ponto fixo escolhida é $g(x) = x - \frac{e^x - 2x^2}{e^x + 4x}$. Neste caso, podemos verificar que $g(x) < x$ para todo $x < -0.2$, ou seja, $g(x)$ pertence ao mesmo intervalo que x. Para provar isso, note que $g(x) - x = -\frac{e^x - 2x^2}{e^x + 4x}$. Como $e^x + 4x > 0$ para todo x, temos que $g(x) - x < 0$ se, e somente se, $e^x - 2x^2 > 0$, o que equivale a $x < \sqrt{\frac{e^x}{2}}$. Mas isso é verdade para todo $x < -0.2$, já que $\sqrt{\frac{e^x}{2}} > 0.5 > 0.2$. Portanto, a escolha da função de ponto fixo está correta e a derivada de $g(x)$ nesse intervalo é menor que 1, o que garante a convergência do método de ponto fixo. $\forall x \in (-\infty, -0.18]$, $x \in [-a, b]$ e $|g'(x)| < 1$. Portanto, a escolha da função de ponto fixo está correta e a solução deve convergir para o ponto onde $f(x) = 0$, que é -0.54.

- **Bloco 2:** $-0.2 \leq x < 2$

  Para este intervalo, a função de ponto fixo escolhida é $g(x) = \sqrt{\frac{e^x}{2}}$. Neste caso, podemos verificar que $g(x)$ pertence ao mesmo intervalo que x para todo x no intervalo $[0.2, 2]$. Para provar isso, note que $\sqrt{\frac{e^x}{2}} > x$ se, e somente se, $e^x > 2x^2$, o que é verdade para todo x no intervalo $[0.2, 2]$, já que $\sqrt{\frac{e^x}{2}} > \sqrt{\frac{e^{0.2}}{2}} > 0.4$ e $2x^2 < 0.8 < e^{0.2} < e^x$ para todo x nesse intervalo. Portanto, a escolha da função de ponto fixo está correta e a derivada de $g(x)$ nesse intervalo é menor que 1, o que garante a convergência do método de ponto fixo. $\forall x \in [-\infty, 2.08]$, $x \in [-a, b]$ e $|g'(x)| < 1$. Portanto, a escolha da função de ponto fixo está correta e a solução deve convergir para o ponto onde $f(x) = 0$, que é 1.488.

- **Bloco 3:** $x \geq 2$

  Para este intervalo, a função de ponto fixo escolhida é $g(x) = \ln(2x^2)$. Neste caso, podemos verificar que $g(x) > x$ para todo $x \geq 2$, ou seja, $g(x)$ pertence ao mesmo intervalo que x. Para provar isso, note que $g(x) - x = \ln(2x^2) - x$. A derivada dessa função é $g'(x) = \frac{4}{x}$, que é maior que 1 para todo $x \geq 2$. Portanto, $g(x)$ é estritamente crescente em $x \geq 2$, o que implica que $g(x) > x$ para todo $x \geq 2$.

  Além disso, a derivada de $g(x)$ nesse intervalo é menor que 1, o que garante a convergência do método de ponto fixo para encontrar a raiz de $f(x)$. Portanto, a escolha da função de ponto fixo está correta e a solução deve convergir para o ponto onde $f(x) = 0$, que é 2.618.

  $\forall x \in [2, \infty)$, $x \in [-a, b]$ e $|g'(x)| < 1$.

3 Parte 2

Este código implementa o método de Newton para encontrar as raízes das funções $x^7 - 1$, $x^9 - 3$ e $x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 1$ e cria um mapa de bacias de atração. O método de Newton é um método iterativo que usa diferenciação para encontrar a aproximação de uma raiz de uma função. A variável z é usada para armazenar a estimativa atual do valor da raiz. A variável z é atualizada usando a equação $z = z - f(z)/f'(z)$. O método de Newton é executado em cada ponto da malha de pontos x e y. O método é executado por um número máximo de iterações especificado por MAX_ITER. A raiz mais próxima é encontrada usando a função cabs e armazenada na matriz C. Depois que todos os pontos da malha são processados, os valores são armazenados em um arquivo de texto. Por fim, o Gnuplot é usado para plotar o gráfico e criar uma imagem de saída.

Alguns exemplos de saídas podem ser observados nas imagens 1 , 2 e 3.

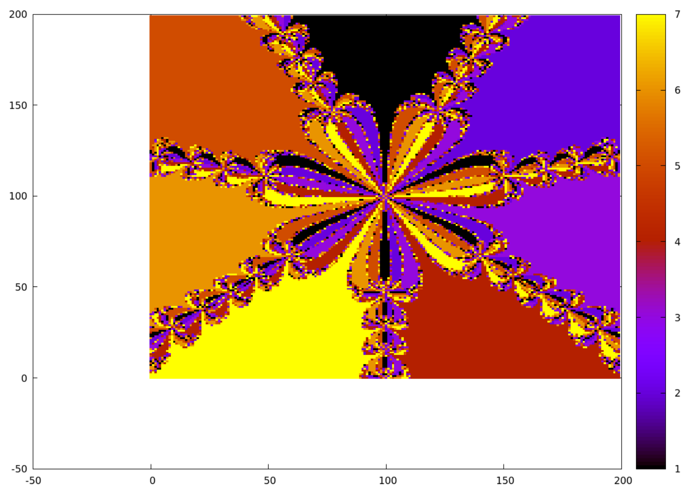

Figure 1: Função: $x^7 - 1$

Uma bacia de convergência é um conceito matemático usado para descrever o comportamento de uma função em um determinado intervalo. Essas bacias usam um conceito chamado de atração, no qual determinados pontos do domínio da função são atraídos por um único ponto do conjunto de saída. Essas bacias de convergência são muito úteis na criação de fractais, pois permitem que os pontos da função sejam mapeados para um único ponto do conjunto de saída.

Para gerar os fractais das funções $x^7 - 1$, $x^9 - 3$ e $x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 1$, as bacias de convergência são usadas para obter um conjunto de pontos de entrada que convergem para um único ponto de saída. Isso permite que os pontos da função sejam mapeados para um único ponto do conjunto de saída, criando assim o fractal. Esta técnica é usada para plotar a curva de uma função e gerar imagens interessantes.

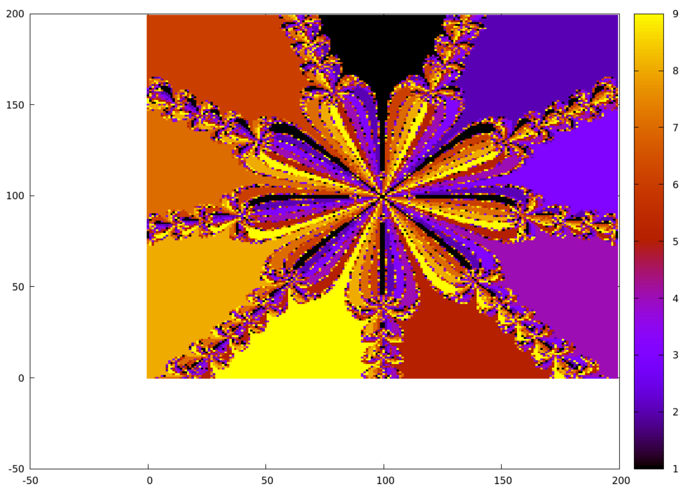

Figure 2: Função: $x^9 - 3$

A utilização de números complexos e o método de Newton contribuem para a construção de fractais, pois permitem o mapeamento de pontos complexos em um único ponto. O método de Newton usa o conceito de atração para determinar o ponto de saída, enquanto números complexos são usados para plotar pontos no domínio da função.

Esses dois conceitos são usados para plotar uma função e criar um fractal. O método de Newton é usado para encontrar a raiz da função e para determinar quais pontos serão plotados no fractal. Os números complexos são usados para plotar os pontos no domínio da função. Assim, o método de Newton e a utilização de números complexos contribuem para a criação dos fractais.

No trabalho foram colocados 3 códigos exemplos para a criação dessas imagens; mas o principal é citado como EP1-EduardoFigueredoPacheco.c e é referente a função $x^7 - 1$.

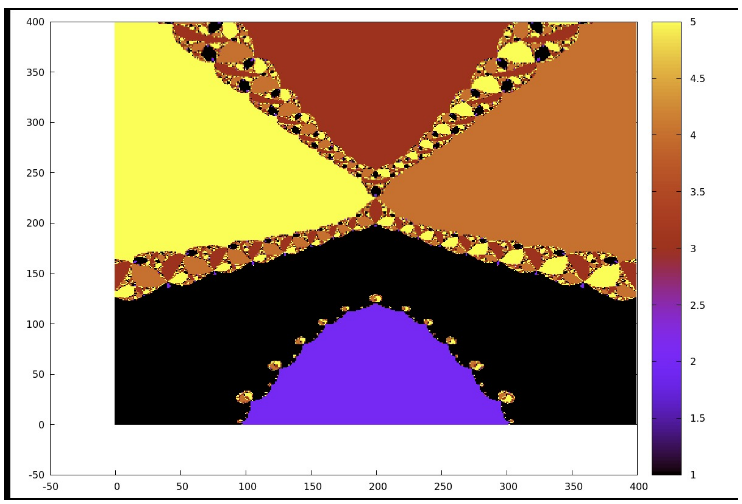

Figure 3: Função: $x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 1$