Exercício 4.2)

A matriz circulante associada ao vetor $h = (1,5,7,2)^T$ é dada por:

$$M_h = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a convolução $x * h$ com o vetor $x = (1,-1,1,2)^T$ é dada por:

$$x * h = M_h \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 20 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 4.9)

(a) Sejam i, j os índices de linhas e colunas da matriz circulante M_h. Logo, o elemento na linha i e coluna j de M_h é $h_{(i-j) \bmod N}$. Transpondo a matriz M_h, temos que o elemento na linha i e coluna j de M_h^T é $h_{(j-i) \bmod N}$. Note que o elemento na linha i e coluna j de $M_{h'}$ é $h_{(j-i) \bmod N}$. Logo, $M_{h'} = M_h^T$

(b) Seja o filtro $h = [h_0, h_1, \dots, h_{N-1}]$ e M_h a sua matriz circulante associada. Queremos provar que h é simétrico se, e somente se, M_h é simétrica.

(=>) Sejam i, j os índices de linhas e colunas da matriz circulante M_h. O elemento na linha i e coluna j de M_h é $h_{(i-j) \bmod N}$. Seja h' o adjunto do filtro h. Se $h = h'$, temos que, para um elemento nos índices i, j, $h_{(i-j) \bmod N} = h_{(j-i) \bmod N}$, o que equivale aos elementos de M_h serem iguais aos elementos de M_h^T. Logo, M_h é simétrica.

(<=) Se M_h é simétrica, temos que $M_h = M_h^T = M_{h'}$. Como $M_h = M_{h'}$, temos que $h = h'$.

(c) Sejam i, j os índices de linhas e colunas da matriz circulante M_h. Logo, o elemento na linha i e coluna j de M_h é $h_{(i-j) \bmod N}$. Transpondo e conjugando a matriz M_h, temos que o elemento de índices i,j da matriz $\overline{M_h^T} = M_h^*$ é $\overline{h_{(j-i) \bmod N}}$. Note que o elemento de índices i,j da $M_{h'}$ é $\overline{h_{(j-i) \bmod N}}$. Logo, $M_{h'} = M_h^*$.

Exercício 4.10)

Sejam os filtros $g, h \in \mathbb{R}^N$ e g', h' seus adjuntos. Temos que: $(g' * h') = (M_{h'} g')'$. A partir da definição de reversão temporal, temos que o adjunto de um filtro adjunto é o filtro original. Assim, temos que $(g')' = g$ e $(h')' = h \iff (M_{h'})' = M_h$. Logo, $(g' * h') = (M_{h'} g')' = $
$= M_h g = g * h \therefore (g' * h') = g * h$.

Exercício 4.15)

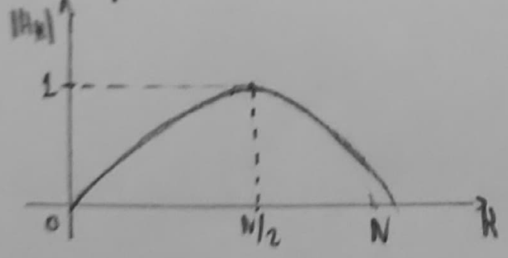
Seja o filtro da diferença $h = [1/2, -1/2, 0, 0, \ldots] \in \mathbb{C}^N$. A DFT de h é dada por

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{\frac{-2\pi k n i}{N}} = \frac{1}{2} e^0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{\frac{-2\pi k i}{N}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{\frac{-2\pi k i}{N}} = \frac{1 - e^{\frac{-2\pi k i}{N}}}{2} = H_k$$

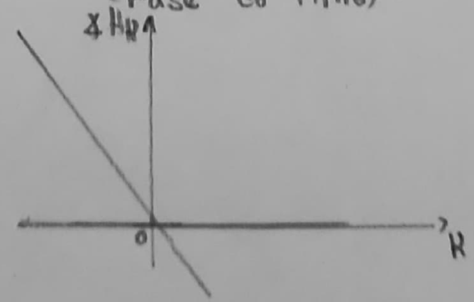
Assim, $|H_k| = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{N}\right)$ e $\measuredangle H_k = -\frac{k\pi}{N}$.

Esboços gráficos:

(Resposta em magnitude)



(Fase do filtro)



A partir da resposta em magnitude, temos que esse filtro enfatiza frequências altas e atenua frequências baixas. Por isso, é um filtro "passa-alta".