
Lettre LXXIX

EULER à GOLDBACH

...

Ich bin letztens auf dieses problema gefallen: Circa datum punctum radians R curvan describere ejusmodi, ut singuli radii ex R egressi post duplicem reflexionem in M et N in ipsum punctum R revertantur. Es gibt ausser der Ellipse, alterum focum in R habente, noch unendlich viel andere Linien quaesitu satisfaciennes, sowohl algebraicae als transcendentes; un dieses problema d  cht mich eines von den schersten in hoc genere zu seyn.

...

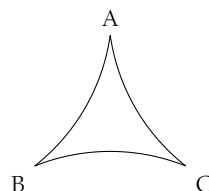


Fig. 10

Lettre LXXX

GOLDBACH    EULER

...

Was das andere problema betrifft, so wird die curva nachfolgende proprietates haben:

1. muss, posita $AB = x, BC = y, HA = a, AG = b, y$ eine solche function ipsius x seyn, dass positis $x = -a$ et $x = b, y = 0$ werde.
2. Weil die pars axis inter radium incidentem AC et radium reflexum CD intercepta, nemlich AD per x et y ope normalis CN bekannt wird, folglich

Brief LXXIX

EULER aan GOLDBACH

...

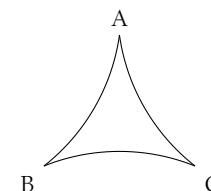


Fig. 10

Brief LXXX

GOLDBACH aan EULER

...

posita $AD = u$, u per x et y data ist, so muss auch positis $AF = x'$, $FE = y'$ die inter radios AE et ED intercepta eadem pars axis AD per x' et y' gegeben seyn, durch welche Aequation y' eliminirt wird.

3. Fiat $\frac{CB}{y} : \frac{BD}{u-x} :: \frac{DF}{x'-u} : \frac{EF=y'}{\frac{(u-x)(x'-y)}{y'}}$, wodurch x' eliminirt wird. Wenn endlich auch
4. die summa radiorum incidentis et reflexi usque ad axem entweder constans (wie in der ellipsi), oder certa cuidam functioni ipsius x gleich gesetz wird, so kan dadurch auch y per x determiniret werd, wiewohl ich dieses alles jetzt nicht gnugsam einsehe und Ew. besseren Beurtheilung überlasse.

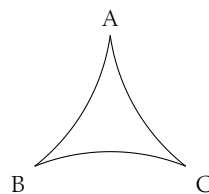


Fig. 11



Lettre LXXXI

EULER à GOLDBACH

...

Was das andere problema anlangt, welches jetzt in den Actis Lipsiensibus herauskommt, da die radii ex puncto dato emanates post duplicem reflexionem in eben dasselbe Punct zurückkommen sollen, so hat das tentamen Ew. seine volle Richtigkeit, und dienet, um die curvam infra axem constitutum zu finden, wenn die obere als bekannt angenommen wird. Die grösste Schwierigkeit aber beruhet darauf, dass beyde curvae eandem curvam continuam aussmachen, welcher Umstand von Ew. nicht in Betrachtung gezogen worden. Ich habe anfänglich die Solution auch auf eben diese Art tentirt, die formulae werden aber allzu weitläufig und verwirrt, als dass ich dieser letzten Bedingung hätte ein Genüge leisten

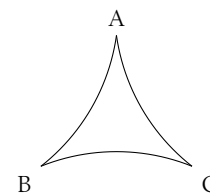


Fig. 11



Brief LXXXI

EULER aan GOLDBACH

...

können. Ich glaubte, dass die Annahme einer Axe daran schuldig wäre, indem man wenig hinreichenden Grund hat, warum man vielmehr diese, als eine andere Linie für die Axe annehmen sollte. Daher habe ich diese Betrachtung völlig beiseit gesetzt und meine Solution folgendergestalt vorgenommen:

Lettre LXXXVII

EULER à GOLDBACH

...

Ueber das problema catoptricum nehme die Freyheit Ew. meine Solution himit zu übersenden, deren analysis alle Umstände hinlänglich erläutern wird.

...

Est ergo haec caustica linea quarti ordinis, quae ex aequatione

$$q = \frac{(9c \mp \sqrt{9cc + 12cp})\sqrt{3c - 2p \pm \sqrt{9cc + 12cp}}}{2\sqrt{6c}}$$

non difficulter construetur.

Curva haec est tricuspidata triangulo aequilatero inscripta uti haec figura adjecta repraesentat, et curva problemati satisfaciens oritur, si filum huic curvae complicitur, alterque terminus in C figatur, sicque per evolutionem fili describetur.

Lettre CXVII

EULER à GOLDBACH (25 juni 1748)

...

Hr. Oechliz aus Leipzig, welcher nach St. Petersburg zur mathesi sublimiori berufen worden, die Vocation aber ausgeschalgen, hat eine sehr schöne Solution des schon längst erwähnten problematis catoptrici erfunden, welche Ew. unfehlbar gefallen wird.

Brief LXXXVII

EULER aan GOLDBACH

...

Over het catoptrische probleem neem ik de vrijheid u mijn oplossing met te zenden, wiens analyse alle omstandigheden adequaat zal verklaren.

...

Deze kromme is een driespitsig ingeschreven in een gelijkzijdige driehoek, die de aangrenzende figuur vertegenwoordigd, en een kromme laat verschijnen die voldoet aan het probleem, als een draad in deze kromme volgens deze kromme wordt gebogen, het andere uiteinde bevestigd in C, te beschrijven door zo de draad te ontwikkelen.

Brief CXVII

EULER aan GOLDBACH (25 juni 1748)

...

Es sey MN eine von den gesuchte curvis, welche alle radios ex puncto fixo C emissos post geminam reflexionem in M et N factam in idem punctum C remittat. Man verlängere MN beiderseits in E et F, so dass $ME = CM$ et $NF = CN$, so wird die longitudo EF constant seyn und die Puncte E und F werden in einer solchen krummen Linie EIF seyn, dass die grade Linie EF beiderseits auf dieselbe perpendicular fällt. Die ganze Sache kommt also darauf an, das man solche krumme Linien EIF finde, dass die auf ein jegliches Punct derselben gezogenen Perpendicular-Linien EF dieselbe krumme Linie nochmal in F ad angulos rectos durchschneiden. Denn diese Eigenschaft schliesst jene schon in sich, dass die quantitas lineae hujus EF constant seyn müsse. Man sieht nun alsbald, dass die Linie EIF ein Circul seyn könne, dessen diameter = EF; es gibt aber noch uneindlich viel andere krumme Linien, welche diese Eigenschaft mit dem Circul gemein haben, wie ich bald zeigen werde.

Hat man aber eine solche krumme Linie EIF gefunden, so kann daraus sehr leicht die gesuchte krumme Linie MN gefunden werden, und das auf uneindlich vielerley Art. Denn man kann das punctum radians C nach Belieben annehmen, und wenn man daraus ad terminos Lineae EF die graden Linien CE und CF zieht, dieselben in G und H in zwey gleiche Theile schneidet, aus den Puncten G und H auf dieselben die Perpendicular-Linien GM und HN aufrichtet, bis solche der EF begegnen, so sind nicht nur die Puncte M und N in der gesuchten Linie MN, sondern GM und HN sind auch tangentes derselben. Nimmt man für EIF ein Circul an, diametri EF, so wird MN eine ellipsis, deren foci sind das punctum radians C und das centrum circuli EIF.

Um aber alle mögliche krumme Linien EAF zu finden, welche von ihren normalibus ERF nochmal in F normaliter durchschnitten werden, so setze ich die abscissas $AP = x$, $AQ = X$, die applicatas $PE = y$, $QF = -Y$, (weil diese ad partes oppositas axis fällt). So ist die subnormalis $PR = \frac{y \, dy}{dx}$ und die subnormalis $QR = \frac{-Y \, dY}{dX}$. Da nun $PE : PR = QF : QR$, so wird $y : \frac{y \, dy}{dx} = -Y : \frac{-Y \, dY}{dX}$, folglich $\frac{y}{dx} = \frac{dY}{dX}$. Jetzt setze ich $dx = p \, dy$, so wird auch $dX = p \, dY$ und $PR = \frac{y}{p}$, $QR = \frac{-Y}{p}$; also $PQ = \frac{y-Y}{p} =$