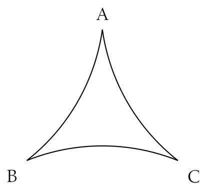
Acta Academia Scientiarum Imperialis Petropolitanae 1778, p. 3
E513 (Eneström Index)

De curvis triangularibus
Autore
L. Euler

§.1. Curvas triangulares voco, quae tribus arcubus AB, AC et BC intus inflexis constant, qui in angulis A, B et C coeant, praeterea autem nullos alios ramos contineant. Huiusmodi ergo curvae ut sint continuae, sive quapiam aequatione, vel algebraica, vel etiam transcendente, exprimi queant, necesse est, ut in angulis A, B et C habeant cuspides acutissimas, ubi bini arcus coeuntes communi tangente sint praediti. Tales autem curvas innumerabiles exhiberi posse, tam algebraicas, quam transcendentes, iam olim ostendi, cum Problema de eiusmodi curvis, circa datum punctum lucidum describendis, proposuissem, ita ut omnes radii, a curvua bis reflexi, iterum in ipsum punctum lucidum revertantur, quod Problema variis solutionibus in Actis Lipsiensibus pro Annis 1746 et 1748 solutum reperitur. Hic enim tota solutio ad inventionem huiusmodi curvarum triangularium reducitur, quippe quibus causticae radiorum reflexorum formantur.



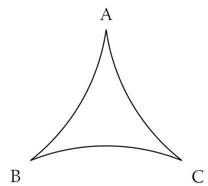
Tab. I. Fig. 1.

§.2. Praeter eum usum autem, quem istiusmodi curvae triangulares in commemorato problemate catoptrico praestant, imprimis considerari merentur curvae, quae ex evolutione talis curvae triangularis ABC nascuntur. Hunc in sinem vocemus longitudinem arcus AB $= c$, arcus AC $= b$ et arcus

Acta Academia Scientiarum Imperialis Petropolitanae 1778, p. 3
E513 (Eneström Index)

Over de driehoekige krommen
Auteur
L. Euler

§.1. Ik noem driehoekige krommen, deze uit drie bogen AB, AC en BC naar binnen gebogen, die in de hoeken A, B en C samenkomen en die ook geen andere vertakkingen bevatten. Deze krommen van deze aard om ononderbroken te zijn, kunnen uitgedrukt worden volgens zekere vergelijking, hetzij algebraïsch, of zelfs transcendent, het is essentieel, dat ze in de hoeken A, B en C scherpe spitsen hebben, waar de twee bogen samenkomen bevatten ze een gemeenschappelijke raaklijn. Er kunnen ontelbare zulke krommen gemaakt worden, zowel algebraïsch als transcendent, een lange tijd geleden heb ik aangetoond dat problemen van de soorten krommen, die een bepaald brandpunt omschrijven, te verklaren, waarbij elke straal tweemaal terugkaatst in de kromme en terugkeert naar hetzelfde brandpunt, voor het welke probleem meerdere oplossingen in Actis Lipsiensibus gedateerd 1746 en 1748 gevonden werden. Hier worden deze oplossingen herleid tot het vinden van driehoekige krommen, immers worden deze gevormd als caustiek door deze teruggekaatste stralen.



Tab. I. Fig. 1.

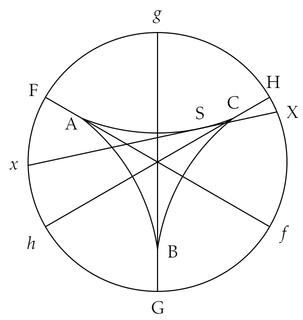
§.2. Afgezien van het gebruik van, het geven van krommen van een driehoekige aard bij de bepaling van het *catoptrische* probleem, verdienen vooraf de krommen, die als evolvente uit de driehoekige krommen ABC geboren worden, beschouwd te worden. Hierbij zal ik de lengte van de boog benoemen

BC $= a$. Iam arcui AB concipiatur filum applicatum, quod extra A prolongetur usque in F, ita ut sit AF $= f$, et stilus in F insertus promoveatur, donec arcus AB fuerit evolutus, et filum perveniat in situm Bg, eritque Bg = AF+ arcu AB $= f + c$; tum motus stili continuetur et filum Bg successive applicetur arcui BC $= a$, donec perveniat in H, eritque

$$\mathrm{BC} + \mathrm{CH} = \mathrm{B}g = f + c, \quad \text{unde sit} \quad \mathrm{CH} = f + c - a;$$

quo cum fuerit perventum, filum applicetur arcui CA, ubi notari convenit, perinde esse, sive arcus CA maior sit, sive minor arcu CB; semper enim filum totum arcum CA occupare debet. Iam motus stili ex H continuetur in f donec filum fA cuspidem A tanget, tum igitur erit

$$\mathrm{A}f = \mathrm{CH} + \mathrm{AC} = f + c - a + b;$$



Tab. I. Fig. 2.

Nunc igitur filum motum Af succesive arcum AB involuet, donec perueniat in G, eritque

$$\mathrm{BG} = \mathrm{A}f - \mathrm{AB} = f - a + b.$$

Iam filum ab arcu BA transferatur in arcum BC et evoluatur, donec perueniat in situm Ch, ubi erit

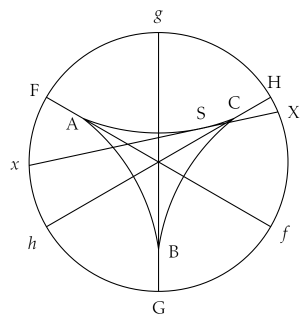
$$\mathrm{C}h = \mathrm{BG} + \mathrm{BC} = f + b.$$

als AB $= c$, boog AC $= b$ en boog BC $= a$. Bevestig nu een touw aan de boog AB, en verleng dit vanuit A tot in F, zodat AF $= f$, en beweeg een pen ingebracht in F, tot de boog AB ontwikkeld wordt, en de draad aankomt in positie Bg, en dus Bg = AF + de boog AB $= f + c$; beweeg opnieuw de pen continu en bevestig opeenvolgend de draad Bg aan de boog BC $= a$, tot het aankomt in H, en dan

$$\mathrm{BC} + \mathrm{CH} = \mathrm{B}g = f + c, \quad \text{zodat het is dat} \quad \mathrm{CH} = f + c - a;$$

wanneer dit is bereikt, bevestig de draad aan de boog CA; waarbij we afspreken te noteren, als het is, dat de boog CA langer is, of de kortere boog CB, dan zal de draad altijd de gehele boog CA moeten innemen. Beweeg nu een pen uit H continu tot in f, zodat de draad fA de spits A raakt, dan is het dat

$$\mathrm{A}f = \mathrm{CH} + \mathrm{AC} = f + c - a + b;$$



Tab. I. Fig. 2.

Beweeg nu de draad Af achtereenvolgens om de boog AB, tot deze G bereikt, en dan

$$\mathrm{BG} = \mathrm{A}f - \mathrm{AB} = f - a + b.$$

Breng nu de draad van de boog BA naar de boog BC en ontrol, tot de positie Ch bereikt is, waar

$$\mathrm{C}h = \mathrm{BG} + \mathrm{BC} = f + b.$$

Denique stilus ab h promoveatur involvendo arcum CA, hocque modo revertetur in ipsum punctum F, ubi motus est inceptus: erit enim $\mathrm{AF} = \mathrm{C}h - \mathrm{CA}$, ideoque $\mathrm{AF} = f$: erat autem utique $\mathrm{AF} = f$.

§.3. Hinc igitur patet, curvuam, ex evolutione curvae triangularis ABC natam, esse curvam in se redeuntem, et tractu uniformi praeditam, scilicet FgHfGhF, si modo puncta F, H, H extra curvam ABC cadant. Atque hic ista insignis proprietas ante omnia se offert: quod rectae FAf, HCh et GBg non solum utrinque ad curvam sint normales, uti ex natura evolutionis manifestum est, sed etiam, quod inter se sint aequales; est enim

$$\mathrm{FA}f = \mathrm{AF} + \mathrm{A}f = 2f + c - a + b,$$

tum vero

$$\mathrm{AC}h = \mathrm{CH} + \mathrm{C}h = 2f + c - a + b,$$

simili modo

$$\mathrm{GB}g = \mathrm{BG} + \mathrm{B}g = 2f + c - a + b.$$

Verum haec proprietas multo latius patet. Si enim per quoduis punctum S nostrae curvae triangularis producatur utrinque tangens XSx, ea etiam ex natura evolutionis utrinque ad curvam descriptam erit normalis; tum vero erit

$$\mathrm{SX} = \mathrm{CS} + \mathrm{CH} = f + c - a = \mathrm{CS},$$

deinde vero etiam erit

$$\mathrm{S}x = \mathrm{FA} + \mathrm{AS} = f + \mathrm{AS}$$

hinc tota recta

$$\mathrm{X}x = 2f + c - a + \mathrm{CS} + \mathrm{AS} = 2f + c - a + b \quad \text{ob} \quad \mathrm{AS} + \mathrm{CS} = b,$$

Beweeg tot slot de pen vanuit h om de boog CA, op deze manier zullen we terugkeren naar het punt F, waar de beweging is gestart: het zal dus zo zijn dat $\mathrm{AF} = \mathrm{C}h - \mathrm{CA}$, daarom $\mathrm{AF} = f$: en natuurlijk was er $\mathrm{AF} = f$.

§.3. Hier is het duidelijk dat, de krommen, uit de ontwikkeling van de driehoekige kromme ABC geboren, terug te brengen zijn tot krommen, als spoor van gelijke grootte, namelijk FgHfGhF, als alleen de punten F, H, G buiten de kromme ABC vallen. Boven alles biedt het dit geval opmerkelijke eigenschappen: want de rechten FAf, HCh en GBg zijn niet alleen loodrecht aan weerskanten van de kromme, wat duidelijk is uit de aard van de ontwikkeling, maar ook, zijn ze gelijk aan elkaar; want er is

$$\mathrm{FA}f = \mathrm{AF} + \mathrm{A}f = 2f + c - a + b,$$

maar ook

$$\mathrm{HC}h = \mathrm{CH} + \mathrm{C}h = 2f + c - a + b,$$

en gelijkaardig

$$\mathrm{GB}g = \mathrm{BG} + \mathrm{B}g = 2f + c - a + b.$$

Maar dit heeft die eigenschappen die veel verder gaan. Als door een punt S van onze driehoekige kromme aan weerskanten een raaklijn XSx wordt gemaakt, zal deze uit de aard van de ontwikkeling aan weerskanten van de kromme normaal zijn; dan is er

$$\mathrm{SX} = \mathrm{CS} + \mathrm{CH} = f + c - a + \mathrm{CS},$$

het is ook waar dat er geldt

$$\mathrm{S}x = \mathrm{FA} + \mathrm{AS} = f + \mathrm{AS}$$

zodat de totale rechte

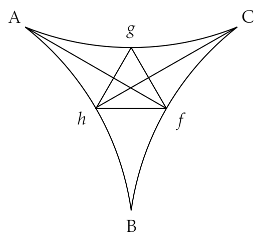
$$\mathrm{X}x = 2f + c - a + \mathrm{CS} + \mathrm{AS} = 2f + c - a + b \quad \text{gezien} \quad \mathrm{AS} + \mathrm{CS} = b,$$

quocirca curva, ex evolutione curvae triangularis ABC nata, hac eximia gaudet proprietate: ut si ad cius punctum quodcunque X ducatur normalis, donec curvae iterum occurrat in x, ea etiam in hoc puncto ad curvam sit normalis, ac praeterea tota hac recta Xx ubique eandem habeat longitudinem $= 2f + c - a + b$, quae proprietas vulgo circulo tam propria esse videtur, ut vix in alias lineas curvas competere posse videatur.

§.4. Mirum hic fine dubio videbitur, quod terna latera figurae triangularis a, b et c non aequaliter in formulas inventas ingrediantur. Ratio autem huius disparitatis in eo est sita, quod intervallum AF potius quam CH vel BG simplici litera f designauimus. Quo igitur hanc inaequalitem evitemus, et uniformitatem in calculum introducamus, vocemus intervallum AF $= k + a$, ita ut sit $f = k + a$ atque omnes rectae supra exhibitae iam sequenti modo concinne experimentur:

AF $= k + a$;	BG $= k + b$;	CH $= k + c$
Af $= k + b + c$;	Bg $= k + a + c$;	Ch $= k + a + b$

tum vero nunc longitudo omnium rectarum per curvam discriptam normaliter ductarum, erit $= 2k + a + b + c$. Hic autem quantitatem k pro lubitu accipere licet, ita ut ex eadem figura triangulari innumerae curvae istius indolis describi possint. Quin etiam quantitas k adea negat accipi poterit, dummodo formulae $k + a; k + b$ et $k + c$ positivos obtineant valores; si enim haec intervalla fierent negativa, curva descripta non amplius prodiret circuli-formis, sed intra curvam ABC caderet, atque etiam tres cuspides g, f, h esset habitura, quemadmodum ex natura evolutionis facile colligere licet.



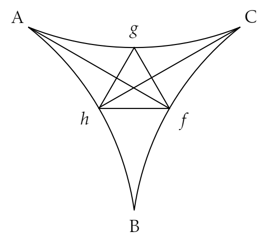
Tab. I. Fig. 3.

deze kromme, die ontstaan is als een evolvent van de driehoekige kromme ABC, heeft de volgende buitengewone eigenschap: als een normaal wordt geconstrueerd op een punt X en de kromme wordt een tweede keer gesneden in een punt x, dan is ze ook daar normaal en bovendien heeft de afstand Xx eenzelfde lengte $= 2f + c - a + b$, een eigenschap die zo verbonden wordt aan een cirkel dat het onmogelijk lijkt dat ze ook bestaat in andere krommes.

§.4. Het is wonderbaarlijk dat de zijden van de driehoekige figuur a, b en c niet als gelijkwaardige ingrediënten gevonden worden in de formule. De reden voor deze ongelijkheid ligt er eenvoudigweg in dat AF in plaats van CH of BG als letter f benoemd werd. Zodat hierdoor om deze ongelijkheid te vermijden en gelijkheid in de berekeningen te brengen, de afstand AF $= k + a$ genoemd wordt, zodat het zo is dat $f = k + a$, en alle lijnen hierboven op deze manier elegant uitgedrukt kunnen worden als:

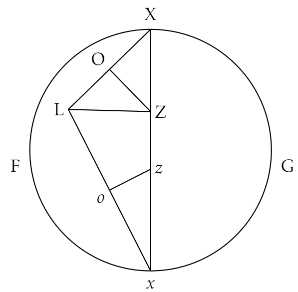
AF $= k + a$;	BG $= k + b$;	CH $= k + c$
Af $= k + b + c$;	Bg $= k + a + c$;	Ch $= k + a + b$

zodat nu inderdaad de lengte van alle lijnen, normaal beschreven op de afgeleide kromme, $= 2k + a + b + c$ zal zijn. Hier kan de waarde van k naar wens aangepast worden, waaruit op een zelfde manier de driehoekige figuur de geboorte van ontelbare krommen beschrijft. Het is zelfs mogelijk dat k negatieve waarden aanneemt zolang de formules $k + a; k + b$ en $k + c$ positieve waarden hebben; want als deze afstanden negatief zijn, dan heeft de beschreven kromme niet meer een cirkelvormig uitzicht, maar verdwijnt binnenin de kromme ABC, en heeft zelfs drie spitsen g, f, h, **als het tekenen gemakkelijk toegelaten wordt uit de aard van de ontwikkeling.**



Tab. I. Fig. 3.

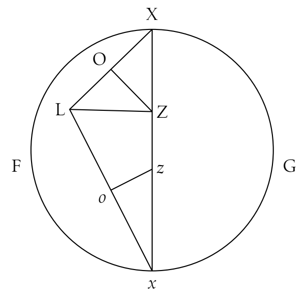
§.5. Huiusmodi autem curvas, ex evolutione curvarum triangularium natas, quatenus cum circulo tam egregie conveniunt, brevitatis gratia *Orbiformes* nominemus, hicque ante omnia observasse iuvabit, ex qualibet curva orbiformi problema catoptricum supra memoratum infinitis modus facillime resolvi posse. Sit enim FGH talis curva orbiformes quaecunque, intra qua punctum lucidum X pro lubitu constituatur; tum ducta recta quacunque Xx, ad curvam utrinque normali, quae ergo constantem habebit magnitudinem, iungantur rectae LX et Lx, eaeque bisecentur in punctis O et o, unde ad eas normaliter educantur rectae OZ et oz, rectae Xx occurentes in punctis Z et z; haecque duo puncta sita erunt in curva quaesita. Radius enim LZ, primu reflexus, fiet Zz, qui, denuo reflexus in z, in ipsum punctum lucidum L remittetur, quemadmodum ex natura reflexionis haud difficulter demonstrare liceret, nisi hoc argumentatum iam uberrime esset pertractatum.



Tab. I. Fig. 4.

§.6. Ob hunc insignem usum curvarum triangularium utique optandum esset, ut methodus certa pateret, cuius ope huismodi curvas triangulares, quotquot libuerit, investigare liceret, id quod primo intuitu nimis difficile videre potest. Verum hunc investigationem invertamus, ac primo quaeramus curvas orbiformes, quales hactenus descripsimus; tum enim certi esse poterimus, earum evolutas huismodi fore curvas triangular quales desideramus, Praeterea vero etiam hoc modo istud commodum assequemur: ut, quoties curva orbiformis fuerit algebraica, toties quoque curva triangularis non solum fiat algebraica, sed insuper etiam rectificabilis, quando-

§.5. De krommen van deze aard, geboren als evolventen uit driehoekige krommen, voor zover ze uitzonderlijk met een cirkel kunnen overeenkomen, zal ik voor het gemak *Orbiformen* noemen, **en al deze voorgaande observaties kunnen helpen**, uit elke orbiforme kromme het voorgaande genoemde *catoptrische* probleem op een oneindig aantal manieren opgelost worden. Als FGH zo'n orbiform is, en hierbinnen uit een punt L gewenste lichtstralen gevormd worden; dan heeft elke rechte Xx, langs beide kanten normaal aan de kromme, eenzelfde constante lengte, de rechten LX en Lx worden verbonden, en ze moeten middendoor verdeeld worden in de punten O en o, en breng er de normale lijnen OZ en oz aan, rechten die Xx in de punten Z en z ontmoeten; zodat twee punten van de gezochte kromme[1] **bekomen** worden. Voor een straal LZ, eenmaal weerkaatst, wordt Zz, die, opnieuw weerkaatst in z, in hetzelfde punt L wordt teruggebracht, deze manier is uit de aard van terugkaatsing niet moeilijk aan te tonen, **maar dit argument werd al overvloedig aangeraakt.**



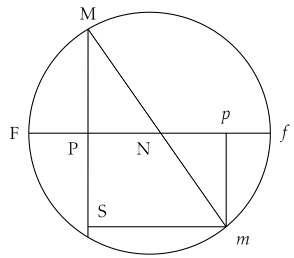
Tab. I. Fig. 4.

§.6. Door het buitengewone gebruik van driehoekige krommen, zou het zonder twijfel wenselijk zijn, om bepaalde methodes te bereiken die het mogelijk maken deze driehoekige krommen, zoveel je wil, mogelijk te te bepalen, wat op het eerste zicht zeer moeilijk in te zien is. Maar het onderzoek wordt omgedraaid, waar ten eerste de orbiforme krommen gezocht worden, zoals tot dusver beschreven, **want dan zijn we zeker dat we in staat zijn, hun ontwikkeling van de soort driehoekige krommen zal zijn zoals we wensen, bovendien is dit op deze manier handig te bereiken**: zo wanneer

[1] catoprische kromme

quidem evolutae omnium curvarum algebraicarum simul rectificationem admittunt.

§.7. Sit igitur F M $f\,m$ talis curva orbiformis, qualem investigare nobis est propositum, in qua sumamus rectam Ff pro axe fixo, qui utrinque ad curvam sit normalis cuius longitudinem ponamus $\mathrm{F}f = 2f$. Tum ex puncto quocunque M ad curvam ducatur normalis Mm quae ergo etiam in m ad curvam debet esse normalis, eiusque longitudo Mm itidem sit $= 2f$. Iam ex punctis M et m ad axem Ff demittantur perpendicula Pm et pm, ac pro puncto M vocentur coordinatae FP = X et PM = Y; at pro puncto m sit $\mathrm{F}p = x$ et $pm = -y$, quia haec applicata in partem contrariam cadit. His positis talis aequatio inter X et Y desideratur, ut, si loco X scribatur x, valor ipsius Y sponte prodeat $= -y$. Nisi enim hoc fieret, tota curva FM$f\,m$ non esset continua.

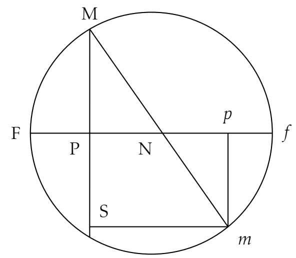


Tab. I. Fig. 5.

Sequenti autem modo hae quatuor quantitates a se inuicem pendent: Cum intervallum PN sit subnormalis respectu puncti M, posito $\mathrm{dY} = \mathrm{P\,dX}$, erit haec subnormalis PN = PY, hincque normalis $\mathrm{MN} = \mathrm{Y}\sqrt{1 + \mathrm{PP}}$. Simili modo altero puncto m erit pN subnormalis retro posita; unde sumto $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x$ erit $p\mathrm{N} = -py$; hinc normalis $m\mathrm{N} = -y\sqrt{1 + pp}$. Quia igitur triangula PMN et pmN sunt similia, erit $\mathrm{P} = p$.

de orbiforme kromme algebraïsch is, is ook de driehoekige kromme niet enkel algebraïsch, maar er bovendien ook naar te herleiden, aangezien de ontwikkeling van alle algebraïsche krommen ook zo'n herleiding toelaten.

§.7. Laat FM$f\,m$ een orbiforme kromme zijn, wat ons is voorgesteld te onderzoeken, waardoor we een rechte lijn Ff drijven, die normaal is aan de kromme aan beide zijden, waarvan we de lengte $\mathrm{F}f = 2f$ noemen. Dan voor elk ander punt M wordt de normaal aan de kromme getekend zodat deze ook in m normaal is aan de kromme, en deze lengte Mm is ook $= 2f$. Door de punten M en m wordt op de as Ff de loodrechten PM en pm getekend, en noem de coördinaten van het punt M via FP = X en PM = Y; in het punt m is $\mathrm{F}p = x$ en $pm = -y$, dit is toegepast in tegengestelde richting. Zo'n verband tussen de plaatsen X en Y is gewenst, zo, als de plaats X als x geschreven wordt, voor de waarde van Y spontaan verschijnt $= -y$. Want als dit niet zo zou zijn, zou de gehele kromme FM$f\,m$ niet doorlopend zijn.



Tab. I. Fig. 5.

Er volgt de manier waarop deze vier eenheden met elkaar in verband staan: het interval PN is de subnormaal ten opzichte van M, zodat positie $\mathrm{dY} = \mathrm{P\,dX}$, hieruit volgt voor de subnormaal[2] $\mathrm{PN} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{Y}$, vandaar de normaal $\mathrm{MN} = \mathrm{Y}\sqrt{1 + \mathrm{P}^2}$. Op gelijkaardige manier zal voor het andere punt m de subnormaal pN terug bepaald zijn; neemt men $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x$, dan[3] $p\mathrm{N} = -p \cdot y$; hierdoor geldt voor de normaal $\mathrm{M}n = -y\sqrt{1 + p^2}$. Omdat de driehoeken PMN en pmN gelijkvormig zijn, geldt $\mathrm{P} = p$.

[2] Verwarrend van Euler dat het maal-teken niet genoteerd wordt en hier dus een product van scalair en afstand rechts staat.

[3] Dezelfde verwarring neemt hier plaats.

Porro quia nuimus esse $Mm = 2f$; ex m agatur axi parallela mS, ipsi MP productae occurens in S, et similitudo triangulorum MNP et MmS dabit $MS = \frac{2f}{\sqrt{1+pp}}$ et $mS = \frac{2fp}{\sqrt{1+pp}}$.

Cum igitur fit

$$MS = MP + mp = Y - y \quad \text{et} \quad mS = Fp - FP = x - X$$

hinc colligitur

$$Y - y = \frac{2f}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{et} \quad x - X = \frac{2fp}{\sqrt{1+pp}},$$

praeterea vero, uti iam notauimus, debet esse

$$\frac{dY}{dX} = P = p \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = p.$$

§.8. Cum igitur inuenerimus differentias coordinatarum $Y-y$ et $x-X$, statuamus earum summas $X + x = 2Q$ et $Y + y = 2R$, hincque singulas coordinatas adipiscemur ita expressas:

$$X = Q - \frac{fp}{\sqrt{1+pp}}; \quad Y = R + \frac{f}{\sqrt{1+pp}};$$
$$x = Q + \frac{fp}{\sqrt{1+pp}}; \quad y = R - \frac{f}{\sqrt{1+pp}}.$$

Omdat we verder weten dat $Mm = 2f$; maak uit m een evenwijdige aan de as, die het verlengde van MP zal ontmoeten in S, en de gelijkvormige driehoeken MNP en MmS leiden tot $MS = \frac{2f}{\sqrt{1+p^2}}$ et $mS = \frac{2fp}{\sqrt{1+p^2}}$.

Aangezien derhalve het wordt dat

$$MS = MP + mp = Y - y \quad \text{en} \quad mS = Fp - FP = x - X$$

hieruit volgt

$$Y - y = \frac{2f}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{en} \quad x - X = \frac{2fp}{\sqrt{1+p^2}},$$

daarnaast echter, zoals we al hebben opgemerkt, moet het zijn dat

$$\frac{dY}{dX} = P = p \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dx} = p.$$

§.8. We vinden zo als verschil van coördinaten $Y - y$ en $x - X$, waarvan we de sommen $X + x = 2Q$ en $Y + y = 2R$ vastleggen, er volgt dat de enkele coördinaten uitgedrukt kunnen worden als:

$$X = Q - \frac{fp}{\sqrt{1+p^2}}; \quad Y = R + \frac{f}{\sqrt{1+p^2}};$$
$$x = Q + \frac{fp}{\sqrt{1+p^2}}; \quad y = R - \frac{f}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Hinc igitur differentiando erit

$$\mathrm{dX} = \mathrm{dQ} - \frac{f\,\mathrm{d}p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}};$$
$$\mathrm{dY} = \mathrm{dR} - \frac{fp\,\mathrm{d}p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}};$$
$$\mathrm{d}x = \mathrm{dQ} + \frac{f\,\mathrm{d}p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}};$$
$$\mathrm{d}y = \mathrm{dR} + \frac{fp\,\mathrm{d}p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cum igitur esse debeat $\mathrm{dY} = p\,\mathrm{dX}$ et $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x$, fiet

$$\mathrm{dR} - \frac{fp\,\mathrm{d}p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = p\,\mathrm{dQ} - \frac{fp\,\mathrm{d}p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et}$$
$$\mathrm{dR} + \frac{fp\,\mathrm{d}p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = p\,\mathrm{dQ} + \frac{fp\,\mathrm{d}p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ex utraque harum aequationum sequitur fore $\mathrm{dR} = p\,\mathrm{dQ}$, ideoque $\mathrm{R} = \int p\,\mathrm{dQ}$.

§.9. Cum igitur omnibus conditionibus satisfecerimus, quantitas Q arbitrio nostro permittitur, eiusque ergo loco functio quaecunque ipsius p accipi poterit, quae autem ita debet esse comparata, ut formula $p\,\mathrm{dQ}$ integrationem admittat, siquidem curvas algebraicas desideremus. Quoniam igitur pro coordinatis x et y invenimus:

$$x = \mathrm{Q} + \frac{fp}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{et} \quad y = \mathrm{R} - \frac{f}{\sqrt{1+pp}}$$

existente $\mathrm{R} = \int p\,\mathrm{dQ}$; pro alteris vero coordinatis X et Y sit

$$\mathrm{X} = \mathrm{Q} - \frac{fp}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} = \mathrm{R} + \frac{f}{\sqrt{1+pp}},$$

Dit afleiden leidt tot:

$$\mathrm{dX} = \mathrm{dQ} - \frac{f\,\mathrm{d}p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}};$$
$$\mathrm{dY} = \mathrm{dR} - \frac{fp\,\mathrm{d}p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}};$$
$$\mathrm{d}x = \mathrm{dQ} + \frac{f\,\mathrm{d}p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}};$$
$$\mathrm{d}y = \mathrm{dR} + \frac{fp\,\mathrm{d}p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Waarbij het zo moet zijn dat $\mathrm{dY} = p\,\mathrm{dX}$ et $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x$, wat wordt

$$\mathrm{dR} - \frac{fp\,\mathrm{d}p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = p\,\mathrm{dQ} - \frac{fp\,\mathrm{d}p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{en}$$
$$\mathrm{dR} + \frac{fp\,\mathrm{d}p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = p\,\mathrm{dQ} + \frac{fp\,\mathrm{d}p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Uit beide van deze vergelijkingen volgt $\mathrm{dR} = p\,\mathrm{dQ}$, zodat $\mathrm{R} = \int p\,\mathrm{dQ}$.

§.9. Als ik derhalve voldoe aan alle voorwaarden, laat dit ons een keuze van hoeveelheid Q toe, en kan daarom in de plaats wat dan ook van functie van p aanvaarden, als het toegelaten is de formule $p\,\mathrm{dQ}$ te integreren, omdat we een algebraïsche kromme wensen. Zo vinden we voor de coördinaten x en y:

$$x = \mathrm{Q} + \frac{fp}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{en} \quad y = \mathrm{R} - \frac{f}{\sqrt{1+p^2}}$$

als $\mathrm{R} = \int p\,\mathrm{dQ}$ bestaat; voor zeker zijn de andere coördinaten duidelijk

$$\mathrm{X} = \mathrm{Q} - \frac{fp}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{en} \quad \mathrm{Y} = \mathrm{R} + \frac{f}{\sqrt{1+p^2}},$$

manifestum est, has ex illis nasci, si modo formulae radicalis $\sqrt{1+pp}$ signum immutetur. Quare cum haec formula per suam naturam sit ambigua, priores formulae, pro x et y inventae, posteriores pro X et Y iam sponte involuunt, ita ut eadem aequatio rationalis tam pro x et y quam pro X et Y necessario sit proditura. Ad hoc autem necesse est, ut neque Q neque R eandem formulam $\sqrt{1+pp}$ involuant, quia alioquin etiam signum harum litterarum mutari oporteret. Hinc igitur ista regula statui potest: ut pro Q functio rationalis ipsius p accipi debeat.

§.10. Ut autem curvas algebraicas obtineamus, quia esse debet $R=\int p\,dQ = pQ-\int Q\,dp$; statuamus $\int Q\,dp = S$, denotante S functionem quamcunque rationalem ipsius p, eritque $Q=\frac{dS}{dp}$, hincque porro $R=\frac{p\,dS}{dp}-S$. Nunc igitur pro curvis orbiformibus sequentes determinationes ambarum coordinatarum x et y exhibere possumus:

$$x=\frac{dS}{dp}+\frac{fp}{\sqrt{1+pp}},\quad y=\frac{p\,dS}{dp}-S-\frac{f}{\sqrt{1+pp}},$$

ubi pro S functionem quamcunque rationalem ipsius p, vel saltem talem, accipere possumus, quae, dum formula $\sqrt{1+pp}$ est ambigua, eundem valorem retineat.

§.11. Quia natura orbis, qualem consideramus, postulat, ut curva sit in se rediens, et nusquam in infinitum porrigatur, functio S ita comparata esse debet, ut neque absicissa x neque applicata y unquam fieri possit infinita, quem in finem hanc functionem S tali fractioni:

$$\frac{\alpha+\beta}{A+B}\,\frac{p+\gamma}{p+C}\,\frac{pp+\delta}{pp+D}\,\frac{p^3+\text{etc.}}{p^3+\text{etc.}}$$

aequari opportet, cuius denominator nullum habeat factorem simplicem realem; si enim factorem talem haberet puta $p-n$, tum, sumto $p=n$, valor ipsius S fieret infinitus. Deinde summa potestas ipsius p in numeratore haud debet esse major quam in denominatore; aliter enim, casu $p=\infty$, alor ipsius S iterum in infinitum excresceret.

wat geboren is uit het vorige, waarbij enkel het teken van de wortelvorm $\sqrt{1+p^2}$ gewijzigd is. Waarom is deze formule van nature onzeker[4], eerste formules, voor x en y die gevonden zijn, impliceren spontaan de volgende voor X en Y, zodat dezelfde rationale vergelijkingen zo voor x en y, als voor X en Y niet noodzakelijk wordt gemaakt. Hiervoor is het meer bepaald noodzakelijk dat noch Q noch R dezelfde formule $\sqrt{1+p^2}$ **betrekken**, want anders wordt ook het teken van deze letter gewijzigd. Voor deze reden is het een regel die voorgeschreven mag worden: zo moet voor Q een rationale functie van p aanvaard worden.

§.10. Om een algebraïsche kromme te verkrijgen, moet het zijn dat $R=\int p\,dQ = pQ-\int Q\,dp$; we krijgen $\int Q\,dp = S$, stel met S een zekere rationale functie voor van p, en dan $Q=\frac{dS}{dp}$, vandaar verder $R=\frac{p\,dS}{dp}-S$. En dus vervolgens voor de orbiforme kromme kunnen we aantonen dat beide coördinaten x en y verkregen worden door:

$$x=\frac{dS}{dp}+\frac{fp}{\sqrt{1+p^2}},\quad y=\frac{p\,dS}{dp}-S-\frac{f}{\sqrt{1+p^2}};$$

wanneer we voor S **sommige rationale functies van** p**, of minstens zodanig, kunnen nemen, wat hoewel de formule** $\sqrt{1+p^2}$ **onbepaald is, dezelfde waarde behoudt.**

§.11. Het is vereist wegens het essentie de cirkel, hetgeen we beschouwen, als de kromme in zichzelf terugkeert, en zich nooit oneindig verspreid[5], de functie S die moet worden voorbereid, dat noch de absis x noch de ordinaat y ooit in staat zijn oneindig te worden, **om uiteindelijk de functie** S **op te breken als:**

$$\frac{\alpha+\beta}{A+B}\,\frac{p+\gamma}{p+C}\,\frac{p^2+\delta}{p^2+D}\,\frac{p^3+\text{etc.}}{p^3+\text{etc.}}$$

het is evengoed nodig dat, als de noemer nul bevat de factoren reëel vereenvoudigen; als er zo'n factor bevat is, bijvoorbeeld $p-n$, dan, in het geval dat $p=n$, zal de waarde van S oneindig worden. Vandaar de macht van p in de teller groter moet zijn dan in de noemer; anderzijds, in het geval dat $p=\infty$, dan zal de waarde van S opnieuw naar oneindig groeien.

[4]Niet vast bepaald? Inwisselbaar?

[5]Met andere woorden, de kromme moet zich opnieuw bij zichzelf aansluiten als bij een cirkel.

Praeterea vero etiam exponentes fracti ipsius p admitti quidem possent, ita tamen, ut nullum membrum ambiguum obtineat valorem, quia alioquin eidem valori ipsius p plures tam abscissae quam applicatae convenire possent; hoc enim casu curva non post unam revolutionem, sed demum post duas pluresue in se rediret; tum autem eius evoluta non amplius foret curva triangularis, sed vel pentagona, vel heptagona, vel enneagona vel etc. id quod insituto nostro adversatur.

§.12. Ex hac constructione generali, in qua continentur omnes curvae orbiformes, et quidem simplices, quae post unam revolutionem in se redeunt, facile erit formulas elicere pro descriptione curvarum triangularium; cum enim evolutae harum curvarum orbiformium certe sint figurae triangulares, tantum opus est, ut in evolutas istarum curvarum inquiramus. Quia autem omnes illae curvae, pro quovis valore litterae f, ex evolutione eiusdem curvae triangularis nascuntur, littera f non in determinationem evolutae ingreditur; unde in formulis nostris, pro x et y inventis, partes, hanc litteram f involventes, tuto omittere licebit; sicque pro hac inventigatione habebimus tantum

$$x = \frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{dP}} \quad \text{et} \quad y = \frac{p\,\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p} - \mathrm{S},$$

quam ob rem naturam evolutae, ex his valoribus oriundae, investigasse sufficiet.

§.13. Sit igitur FMfm talis curvas, in qua sit abscissa $\mathrm{FP} = x = \frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p}$, applicata $\mathrm{PM} = y = \frac{p\,\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} - \mathrm{S}$, et ducta normali M$m$ erit subnormalis

$$\mathrm{PN} = py = \frac{pp\,\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p} - p\mathrm{S}$$

unde sit recta

$$\mathrm{FN} = \frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p}(1 + pp) - p\mathrm{S}.$$

Meer bepaald kunnen ook breuken als exponent van p toegelaten worden, zodanig dat, er geen onbepaalde delen als waarde bekomen worden, daarnaast is zelfs het mogelijk dat voor meerdere waarden van p zo de abscis als ordinaat samen komen; maar in dit geval zal de kromme uiteindelijk niet na één onwenteling, maar na twee of meer in zichzelf terugkomen; dan meer bepaal zal zijn evolute niet meer de driehoekige kromme, maar wel de vijfhoekige, of zevenhoekige, of negenhoekige of etc. wat tegen onze opzet is.

§.12. Uit dit volgt een algemene constructie, waarin alle orbiforme krommen bevat zitten, en dit vereenvoudigt, na een omwenteling om zichzelf, gemakkelijk in formules die driehoekige krommen beschrijven. Want met de evolute van deze orbiforme kromme zijn er zeker driehoekige figuren, alleen is het noodzakelijk, dat we moeten zoeken naar de evoluten van deze kromme. Omdat al die krommen, voor elke waarde van de letter f, uit de evolvente van eenzelfde driehoekige kromme geboren zijn, is de letter f niet bepalend in de evolute bevat; en in onze formule, voor de gevonden x en y, is het toegestaan de delen , die de letter f bevatten, geheel weg te laten; en dus hebben we voor dit onderzoek alleen

$$x = \frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{dP}} \quad \text{et} \quad y = \frac{p\,\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p} - \mathrm{S},$$

wat voldoende is om de zaak van de natuurlijke evolute, uit deze waarden voortkomend, te onderzoeken.

§.13. Laat nu FMfm een dergelijke[6] curve zijn, waarin de abscis $\mathrm{FP} = x = \frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p}$, benoem $\mathrm{PM} = y = \frac{p\,\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p} - \mathrm{S}$, en uit de normaal M$n$ ontstaat de subnormaal

$$\mathrm{PN} = py = \frac{p^2\,\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p} - p\mathrm{S}$$

zodat de lijn

$$\mathrm{FN} = \frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p}(1 + p^2) - p\mathrm{S}.$$

[6]orbiforme

Ponamus nunc angulum FNM $= \phi$, erit tang. $\phi = \frac{1}{p}$, ideoque $p = \text{cot.}\,\phi = \frac{\text{cos.}\,\phi}{\text{sin.}\,\phi}$, unde fit

$$\text{sin.}\,\phi = \frac{1}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{et} \quad \text{cos.}\,\phi = \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$$

tum vero etiam $\mathrm{d}\phi = -\frac{\mathrm{d}p}{1+pp}$. Quod si iam brevitatis gratia ponamus FN $= v$, notum est, centrum circuli, curvam in M osculantis, fore in puncto U, ita ut sit

$$\mathrm{NU} = \frac{\mathrm{d}v\,\text{sin.}\,\phi}{\mathrm{d}\phi};$$

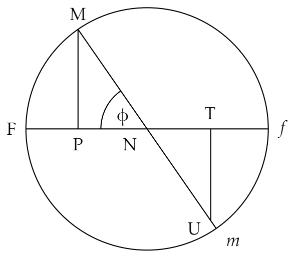
Cum autem, sumto elemento $\mathrm{d}p$ constante, sit

$$\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}p}(1+pp) + p\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}p \quad \text{et}$$
$$\frac{\text{sin.}\,\phi}{\mathrm{d}\phi} = -\frac{\sqrt{1+pp}}{\mathrm{d}p}$$

erit recta

$$\mathrm{NU} = -\frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}p^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} - \frac{p\,\mathrm{d}S}{\mathrm{d}p}\sqrt{1+pp} + S\sqrt{1+pp}$$

pro qua formula brevitatis ergo scribamus r, ita ut vit sit NU $= r$.



Tab. I. Fig. 6.

Benoem nu de hoek FNM $= \phi$, zodat $\tan\phi = \frac{1}{p}$, zodat $p = \cot\phi = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}$, en dit resulteert in

$$\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{et} \quad \cos\phi = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

dan geldt ook $\mathrm{d}\phi = -\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}$. Stel nu voor het gemak de afkorting FN $= v$, het is geweten dat het centrum van de osculatiecirkel in M, in het punt U is, dan is het zo

$$\mathrm{NU} = \frac{\mathrm{d}v \cdot \sin\phi}{\mathrm{d}\phi};$$

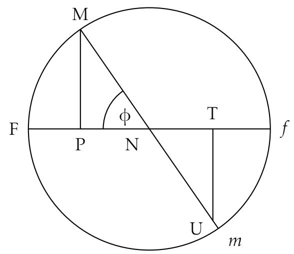
Maar als, het element $\mathrm{d}p$ constant genomen wordt, is

$$\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}p}(1+p^2) + p\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}p \quad \text{en}$$
$$\frac{\sin\phi}{\mathrm{d}\phi} = -\frac{\sqrt{1+p^2}}{\mathrm{d}p}$$

en de lijn zal zijn

$$\mathrm{NU} = -\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}p^2}(1+p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{p\,\mathrm{d}S}{\mathrm{d}p}\sqrt{1+p^2} + S\sqrt{1+p^2}$$

voor het gemak van afkorting schrijven we voor de formule r, zodat er geldt NU $= r$.



Tab. I. Fig. 6.

§.14. Invento puncto U, quod erit in evoluta quam quaerimus, inde axem ducamus perpendiculum UT, ac pro evoluta vocemus abscissam FT = t et applicatam TU = u; erit autem:

$$\mathrm{NT} = \mathrm{NU}\cos.\phi = \frac{pr}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{et}$$
$$\mathrm{TU} = \mathrm{NU}\sin.\phi = \frac{r}{\sqrt{1+pp}}$$

unde, loco r valorem assumtum substitutuendo, consequemur abscissam

$$t = \mathrm{FN} + \mathrm{NT} = \frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p} - \frac{p\,\mathrm{ddS}}{\mathrm{d}p^2}(1+pp),$$

tum vero applicatam

$$u = \mathrm{S} - \frac{p\,\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p} - \frac{\mathrm{ddS}}{\mathrm{d}p^2}(1+pp);$$

unde colligimus

$$t - pu = \frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p}(1+pp) - p\mathrm{S}.$$

Ope igitur harum formularum, quaecunque functio idonea ipsius p pro S accipiatur, tam abscissam FT = t quam applicatam TU = u assignare poterimus, quibus curva triangularis determinatur. Valores autem idoneas, pro S accipiendos, supra indicauimus.

§.15. Quo hanc investigationem exemplo illustremus, sumamus

$$\mathrm{S} = \frac{ap}{1+pp}, \quad \text{eritque}$$
$$\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p} = \frac{a(1-pp)}{(1+pp)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{ddS}}{\mathrm{d}p^2} = \frac{2ap^3-6ap}{(1+pp)^3}$$

unde colligimus

$$t = \frac{a+5app-2ap^4}{(1+pp)^2} \quad \text{et} \quad u = \frac{6ap}{(1+pp)^2}.$$

Hinc primo patet, sive p sumatur positve sive negative, abscissam t eandem manere, applicatam vero u hoc casu in partem contrariam cadere, unde

§.14. We zijn op zoek naar, het vinden van het punt U, wat de evolute zal zijn, daarvoor leiden we een loodlijn UT op de as, en voor de evolute noemen we de abscis FT = t en ordinaat TU = u, zodat het is

$$\mathrm{NT} = \mathrm{NU}\cos\phi = \frac{pr}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{en}$$
$$\mathrm{TU} = \mathrm{NU}\sin\phi = \frac{r}{\sqrt{1+p^2}}$$

en, substitueer op de plaats van r de gevonden waarde, bereikt de abscis

$$t = \mathrm{FN} + \mathrm{NT} = \frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p} - \frac{p\,\mathrm{d}^2\mathrm{S}}{\mathrm{d}p^2}(1+p^2),$$

vervolgens de waarde van de ordinaat

$$u = \mathrm{S} - \frac{p\,\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p} - \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{S}}{\mathrm{d}p^2}(1+p^2);$$

hieruit zien we dat

$$t - pu = \frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p}(1+p^2) - p\mathrm{S}.$$

Dus met behulp van deze formules, als een geschikte functie voor S uit p genomen wordt, kunnen we zo de abscis FT = t als de ordinaat TU = u toewijzen, die een driehoekige kromme bepalen. Zolang voor S geschikte waarden aanvaard worden, zoals hierboven aangegeven.

§.15. We illustreren dit onderzoek met een voorbeeld, laat ons

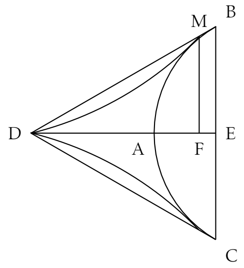
$$\mathrm{S} = \frac{ap}{1+p^2}, \quad \text{en dan}$$
$$\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}p} = \frac{a(1-p^2)}{(1+p^2)^2} \quad \text{en} \quad \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{S}}{\mathrm{d}p^2} = \frac{2ap^3-6ap}{(1+p^2)^3}$$

hieruit zien we dat

$$t = \frac{a+5ap^2-2ap^4}{(1+p^2)^2} \quad \text{en} \quad u = \frac{6ap}{(1+p^2)^2}.$$

Het is duidelijk dat, nemen we p positief of negatief, de abscis t hetzelfde blijft, echter zal u in deze gevallen in tegengestelde delen vallen, en onze noster FT huius curvae erit diameter. Deinde, sumto $p = 0$ fiet $t = a$ et $u = 0$; at si capiatur p inifite parvum, fiet

$$t = a + 3app \quad \text{et} \quad u = 6ap.$$



Tab. I. Fig. 7.

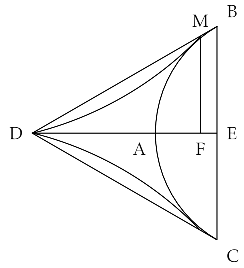
Porro, sumto $p = \frac{1}{2}$, erit $t = \frac{34}{25}a$ et $u = \frac{48}{25}a$; sin autem $p = 1$ erit $t = a$ et $u = \frac{3}{2}a$. Sit denique $p = \infty$, eritque $t = -2a$ et $u = 0$. Hinc patet, curvam huismodi figuram esse habituram, qualem in figura ei dedimus, ternas cuspides habentem, B, C, D, existente FD $= 2a$ et FA $= a$. Pro alteris cuspidibus B et C quaeratur locus, ubi applicata u fit maxima, et cum sit

$$\mathrm{d}.\frac{p}{(1+pp)^2} = \frac{\mathrm{d}p(1-3pp)}{(1+pp)^3}$$

hoc eueniet, ubi $3pp = 1$, sive $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$; tum autem fiet abscissa $t = \frac{11}{8}a$ et $u = \frac{9\sqrt{3}}{8}a$. Ergo ducta chorda BC, axem secante in E, erit FE $= \frac{11}{8}a$ et EB $=$ EC $= \frac{9\sqrt{3}}{8}a$. Quod si iam quoque ducantur chordae BD $=$ CD $= \frac{\sqrt{9\sqrt{3}}}{8}a$; ex quo patet, chordas omnes BD, CD et BC esse inter se aequales. Referet ergo haec curva triangularis triangulum aequilaterum.

as FT van de kromme is de diameter. Dan veronderstel $p = 0$ zal $t = a$ en $u = 0$; nemen we p nu oneindig klein, dan

$$t = a + 3ap^2 \quad \text{en} \quad u = 6ap.$$



Tab. I. Fig. 7.

Verder als $p = \frac{1}{2}$, geldt $t = \frac{34}{25}a$ en $u = \frac{48}{25}a$; maar als $p = 1$ geldt $t = a$ en $u = \frac{3}{2}a$. Als uiteindelijk $p = \infty$, dan $t = -2a$ en $u = 0$. Hieruit blijkt dat deze figuur een kromme bezit, wat in de figuur, drie spitse punten heeft, B, C, D, bepaal nu FD $= 2a$ en FA $= a$. Voor de andere spitsen B en C zoeken een plaats, wanneer u maximaal is, en gezien het zo is is dat:

$$\mathrm{d}\left[\frac{p}{(1+p^2)^2}\right] = \frac{\mathrm{d}p \cdot (1-3p^2)}{(1+p^2)^3}$$

leidt dit tot, als $3pp = 1$, of $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dan wordt de abscis $t = \frac{11}{8}a$ en $u = \frac{9\sqrt{3}}{8}a$. Daardoor zal de koorde BC de as snijden in E, en zal FE $= \frac{11}{8}a$ zijn en EB $=$ EC $= \frac{9\sqrt{3}}{8}a$. Trekken we nu ook de koorden BD en CD, met DE $= \frac{27}{8}a$ dan BD$^2 = \frac{972}{64}a^2$, en dus BD $=$ CD $= \frac{9\sqrt{3}}{4}a$; het is duidelijk, alle koorden BD, CD en BC zijn ondereen gelijk. Daarom is deze driehoekige kromme dus bevat in een gelijkzijdige driehoek.

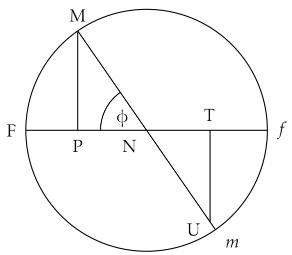
§.16. Accuratius autem in symptomata nostrae curvae triangularis inquiramus, et quoniam pro coordinatis FT $= t$ et TU $= u$ has invenimus formulas:

$$t = \frac{dS}{dp} - \frac{p\,ddS}{dp^2}(1+pp) \quad \text{et}$$
$$u = S - \frac{p\,dS}{dp} - \frac{ddS}{dp^2}(1+pp)$$

primum observo, rectum NU esse tangentem curvae in punctu U, quae cum ad axem sit inclinata angulo TNU $= \phi$, cuius cotangens est p, necesse est ut sit $\frac{du}{dt} = \text{tang.}\,\phi = \frac{1}{p}$, unde sit $dt = p\,du$. Est vero per formulas

$$dt = -\frac{3pp\,ddS}{dp} - \frac{p(1+pp)\,d^3S}{dp^2} \quad \text{et}$$
$$p\,du = -\frac{3pp\,ddS}{dp} - \frac{p(1+pp)\,d^3S}{dp^2}.$$

ideoque revera $dt = p\,du$.



Tab. I. Fig. 6.

§.17. Quia igitur est $dt = p\,du$, iisdem casibus, quibus sit $\frac{dt}{dp} = 0$, etiam fiet $\frac{du}{dp} = 0$; unde patet, ubicunque abscissa t fuerit vel maxima vel minima, ibidem quoque fore applicatam maximam vel minimam, quae propietas utique in cuspides convenit. Ex quo colligimus, ubicunque ambae coordinatae p et q

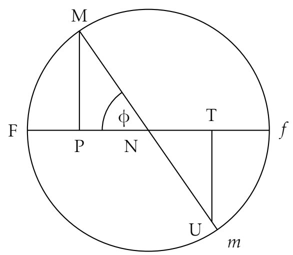
§.16. We onderzoeken meer preciezer de eigenschappen van onze driehoekige kromme, en omdat we voor de coördinaten FT $= t$ en TU $= u$ de formules hebben gevonden:

$$t = \frac{dS}{dp} - \frac{p\,d^2S}{dp^2}(1+p^2) \quad \text{en}$$
$$u = S - \frac{p\,dS}{dp} - \frac{d^2S}{dp^2}(1+p^2)$$

merk nu allereerst op dat de rechte NU rakend is aan de kromme in U, die aangezien de hellingshoek met de as TNU $= \phi$ is, die cotangens p heeft, dan is het noodzakelijk dat $\frac{du}{dt} = \tan\phi = \frac{1}{p}$, en dus $dt = p\,du$. Dit volgt ook uit de formules

$$dt = -\frac{3p^2\,d^2S}{dp} - \frac{p(1+p^2)\,d^3S}{dp^2} \quad \text{en}$$
$$p\,du = -\frac{3p^2\,d^2S}{dp} - \frac{p(1+p^2)\,d^3S}{dp^2}.$$

Zodat werkelijk $dt = p\,du$.



Tab. I. Fig. 6.

§.17. Omdat het zo is dat $dt = p\,du$, de gevallen waarbij het zo is dat $\frac{dt}{dp} = 0$, en het is dan ook zo dat $\frac{du}{dp} = 0$; dan het is dus duidelijk dat, wanneer de abscis t ofwel maximaal ofwel minimaal is, op dezelfde plaats de ordinaat simul fiunt vel maximae vel minimae, ibi quoque existere cuspides nostrae curvae; quare cum curva habeat tres cuspides, in tribus quoque locis tam t quam u maximum fieri necesse est.

§.18. Imprimis autem hic notatu dignum occurrit, nostram curva triangularem esse rectificabilem, quippe cuius arcu aequalis est radio osculi MU curvae orbiformis, unde est nata. Videmus autem esse

$$\begin{aligned} \mathrm{NU} = r = &-\frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}p^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} - \frac{p\,\mathrm{d}S}{\mathrm{d}p}\sqrt{1+pp} \\ &+ S\sqrt{1+pp}; \quad \text{at} \quad \mathrm{MN} = y\sqrt{1+pp} \\ &= \frac{p\,\mathrm{d}S\sqrt{1+pp}}{\mathrm{d}p} - S\sqrt{1+pp}, \end{aligned}$$

unde sit radius osculi

$$\mathrm{MU} = -\frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}p^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}},$$

qui ergo longitudinem nostrae curvae triangularis exprimit; id quod etiam patet ex proprietate supra observata, quod sit $\mathrm{d}t = p\,\mathrm{d}u$, unde fit elementum curvae

$$\sqrt{\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}u^2} = \mathrm{d}u\sqrt{1+pp} = -\frac{3p\,\mathrm{d}S}{\mathrm{d}p}\sqrt{1+pp} - \frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}p^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}}$$

cuius integrale manifesto est

$$-\frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}p^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}}.$$

§.19. Quoniam hic tantum curvas triangulares investigare instituimus, parum solliciti, utrum sint rectificabiles nec ne, dummodo fuerint algebraicae: hac conditione omissa simpliciores formulas pro coordinatis t et u exhibere, atque adeo, sine ullo respectu ad curvas orbiformes habito, directe ex ipsa indole harum curvarum elicere poterimus. Cum enim esse debeat

ook maximaal ofwel minimaal zal zijn, wat de eigenschappen in de spitsen doet samenvallen. Van wat we verzamelen, zijn beide coördinaten t en q dus gelijktijdig ofwel maximaal ofwel minimaal, daar bestaan dan ook de spitsen van onze krommen; en gezien de kromme 3 spitsen hebben, moeten zowel t als u in 3 plaatsen maximaal zijn.

§.18. In het bijzonder wees erop gewezen dat het voldoende is, onze driehoekige kromme te herleiden, aangezien ze gelijk is aan de kromtestraal MU van onze orbiforme kromme, en eruit geboren wordt. We zien dat

$$\begin{aligned} \mathrm{NU} = r = &-\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}p^2}(1+p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{p\,\mathrm{d}S}{\mathrm{d}p}\sqrt{1+p^2} \\ &+ S\sqrt{1+p^2}; \quad \text{en} \\ \mathrm{MN} = y\sqrt{1+p^2} &= \frac{p\,\mathrm{d}S\sqrt{1+p^2}}{\mathrm{d}p} - S\sqrt{1+p^2}, \end{aligned}$$

dus is de kromtestraal

$$\mathrm{MU} = -\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}p^2}(1+p^2)^{\frac{3}{2}},$$

die bijgevolg de lengte van onze driehoekige kromme uitdrukt; het is ook duidelijk uit de observaties van de voorgaande eigenschap dat $\mathrm{d}t = p\,\mathrm{d}u$, en is een elementair stukje van de kromme

$$\sqrt{\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}u^2} = \mathrm{d}u\sqrt{1+p^2} = -\frac{3p\,\mathrm{d}S}{\mathrm{d}p}\sqrt{1+p^2} - \frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}p^2}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}$$

waarbij de integraal duidelijk gegeven is door

$$-\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}p^2}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}.$$

§.19. Omdat we hier enkel driehoekige krommen onderzoeken, maken we ons weinig zorgen, of ze al dan niet herleidbaar zijn, op voorwaarde dat ze algebraïsch zijn: deze voorwaarde laten vallen laat toe meer eenvoudige coördinaten t en u te vinden, en daarvoor, zonder rekening te houden met het liggen in de orbiforme krommen, als direct gevolg van de aard van

$\mathrm{d}t = p\,\mathrm{d}u$, erit $t = \int p\,\mathrm{d}u = pu - \int u\,\mathrm{d}p$. Iam statuamus $\int u\,\mathrm{d}p = \Pi$, ita ut fit $u = \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}p}$, unde sit $t = \frac{p\,\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}p} - \Pi$; ubi pro Π eiusmodi functiones ipsius p accipi debent, quae nullo casu fiant infinitae, quicunque valores literae t tribuantur, cuiusmodi functiones iam supra descripsimus; tum vero etiam hae functiones Π nulla signa radicalia, quae ambiguitatem involuant, involvere debent. Imprimis autem necesse est, ut ambae coordinatae t et u tribus casibus fiant maximae vel minimae, id quod eueniet, si, ob $u = \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}p}$, haec aequatio: $\frac{\mathrm{dd}\Pi}{\mathrm{d}p^2} = 0$, tres habeat radices reales, neque vero plures.

§.20. Sumamus exempli gratia $\Pi = \frac{a+bp}{1+fp+gpp}$, quae nullo casu fit infinita, si modo fuerit $ff < 4g$, tum autem erit

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}p} = \frac{b - af - 2agp - bgpp}{(1 + fp + gpp)^2} = u$$

hincque

$$t = \frac{-a - 2afp - 3agp^2 - 2bgp^3}{(1 + fp + gpp)^2}.$$

Ut iam ternas cuspides definiamus, consideremus aequationem $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p} = 0$, quod quo facilius fieri possit ponamus

$$u = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}p + \mathrm{C}pp}{(1 + fp + gpp)^2},$$

ita ut sit $\mathrm{A} = b - af, \mathrm{B} = -2ag; \mathrm{C} = -bg$; tunc vero hinc reperitur sequens aequatio:

$$\mathrm{B} - 2\mathrm{A}f + (2\mathrm{C} - \mathrm{B}f - 4\mathrm{A}g)p - 3\mathrm{B}gpp - 2\mathrm{C}gp^3 = 0$$

cuius tres radices nobis ternas cuspides monstrabunt.

§.21. Ponamus iam huius aequationis radices esse: I°. $p = \alpha$, II°. $p = \beta$ ac III°. $p = \gamma$, sive aequemus formulam inventum huic producto:

$$2\mathrm{C}g(a - p)(\beta - p)(\gamma - p)$$

deze krommen stellen we vast. Aangezien moet gelden dat $\mathrm{d}t = p\,\mathrm{d}u$, zal het zijn dat $t = \int p\,\mathrm{d}u = pu - \int u\,\mathrm{d}p$. Laten we nu $\int u\,\mathrm{d}p = \Pi$, zodat het is $u = \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}p}$, waardoor $t = \frac{p\,\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}p} - \Pi$; als voor Π op deze manier een een functie van p moet worden genomen, dat in geen geval oneindig is, meer bepaald laten we waarden toe voor de letter t, van welke aard we hierboven reeds functies beschreven; maar zelfs dan heeft de functie Π geen worteltekens moeten betrekken, wat gewikkeld is in onzekerheid. Maar bovenal is het noodzakelijk dat, beide coördinaten t en u in drie gevallen maximaal ofwel minimaal zijn, hetgeen tot gevolg heeft dat, als $\frac{\mathrm{d}^2\Pi}{\mathrm{d}p^2} = 0$, $u = \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}p}$ drie reële wortels heeft, en niet meer.

§.20. Laten we bijvoorbeeld $\Pi = \frac{a+bp}{1+fp+gp^2}$, dat in geen geval oneindig is, als het maar $ff < 4g$, dan zal

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}p} = \frac{b - af - 2agp - bgp^2}{(1 + fp + gp^2)^2} = u$$

wat leidt tot

$$t = \frac{-a - 2afp - 3agp^2 - 2bgp^3}{(1 + fp + gp^2)^2}.$$

Om de drie spitsen te definiëren, overwegen we de vergelijking $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p} = 0$, wat we eenvoudiger kunnen maken door

$$u = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}p + \mathrm{C}p^2}{(1 + fp + gp^2)^2},$$

waarbij $\mathrm{A} = b - af; \mathrm{B} = -2ag; \mathrm{C} = -bg$; dan vindt men hier de volgende vergelijking:

$$\mathrm{B} - 2\mathrm{A}f + (2\mathrm{C} - \mathrm{B}f - 4\mathrm{A}g)p - 3\mathrm{B}gp^2 - 2\mathrm{C}gp^3 = 0$$

waarvan de drie wortels onze drie spitsen onthullen.

§.21. Laten we veronderstellen dat de wortels van deze vergelijking al gegeven zijn: $p = \alpha$, II°. $p = \beta$ en III°. $p = \gamma$, of gelijk aan de formule gevonden door het product

$$2\mathrm{C}g(a - p)(\beta - p)(\gamma - p)$$

quod evolutum praebet

$$2Cg\alpha\beta\gamma-2Cg(\alpha\gamma+\alpha\gamma+\beta\gamma)p+2Cg(\alpha+\beta+\gamma)pp-2Cgp^3$$

quae forma, inventae aequata, sequentes tres producit determinationes:

$$\begin{aligned}\text{I}^\circ.\ & B-2Af=2Cg\alpha\beta\gamma;\\ \text{II}^\circ.\ & 2C-Bf-4Ag=-2Cg(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma);\\ \text{III}^\circ.\ & -3Bg;=2Cg(\alpha+\beta+\gamma);\end{aligned}$$

ex quarum tertia fit $B=-\frac{2}{3}C(\alpha+\beta+\gamma)$; ex prima vero

$$A=-\frac{1}{3f}C(\alpha+\beta+\gamma)-\frac{1}{f}Cg\alpha\beta\gamma,$$

qui valores in secunda substituti praebent

$$2C+\frac{(2ff+4g)}{3f}C(\alpha+\beta+\gamma)+\frac{4g}{f}Cg\alpha\beta\gamma=-2Cg(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$$

quae aequatio, per $\frac{3f}{2C}$ multiplicata, abit in hanc:

$$3f+(ff+2g)(\alpha+\beta+\gamma)+6gg\alpha\beta\gamma=-3fg(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$$

haecque aequationes omnes continent determinationes, quibus nostro proposito satisfit.

§.22. Antequam hanc determinationem iu genere ulterius prosequamur, evoluamus casum specialem, quo

$$\gamma=0 \text{ et } \beta=-\alpha,\quad \text{unde sit}\quad \alpha\beta\gamma=0;$$
$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=-\alpha^2\quad \text{et}\quad \alpha+\beta+\gamma=0,$$

eritque postrema aequatio $3f=3\alpha\alpha fg$, sive $f=\alpha\alpha fg$; unde sequitur vel $f=0$, vel $g=\frac{1}{\alpha\alpha}$. Consideremus primo casum $f=0$, fietque $A=-\frac{0}{0}$, unde littera A non determinatur, vel potius fit $A=0$, porroque $B=0$, unde colligitur $b=0$, sive etiam b non determinatur; tum vero erit $a=0$. Quia

die als uitwerking biedt

$$2Cg\alpha\beta\gamma-2Cg(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)p+2Cg(\alpha+\beta+\gamma)p^2-2Cgp^3$$

welke de vorm, gevonden uit de vergelijking, de volgende drie bepalingen produceert:

$$\begin{aligned}\text{I}^\circ.\ & B-2Af=2Cg\alpha\beta\gamma;\\ \text{II}^\circ.\ & 2C-Bf-4Ag=-2Cg(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma);\\ \text{III}^\circ.\ & -3Bg;=2Cg(\alpha+\beta+\gamma);\end{aligned}$$

uit de derde volgt $B=-\frac{2}{3}C(\alpha+\beta+\gamma)$; van de eerste echter

$$A=-\frac{1}{3f}C(\alpha+\beta+\gamma)-\frac{1}{f}Cg\alpha\beta\gamma,$$

welke waarden in de tweede vervangen worden geeft:

$$2C+\frac{(2f^2+4g)}{3f}C(\alpha+\beta+\gamma)+\frac{4g}{f}Cg\alpha\beta\gamma=-2Cg(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$$

Deze vergelijking met $\frac{3f}{2C}$ vermenigvuldigen, wijzigt naar:

$$3f+(f^2+2g)(\alpha+\beta+\gamma)+6g^2\alpha\beta\gamma=-3fg(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$$

de vergelijkingen hier bevatten alle bepalingen, om aan ons doel te voldoen.

§.22. Alvorens we de algemene bespreking van de bepalingen voortzetten, evalueren we het speciale geval, waarbij

$$\gamma=0 \text{ et } \beta=-\alpha,\quad \text{waardoor}\quad \alpha\beta\gamma=0;$$
$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=-\alpha^2\quad \text{en}\quad \alpha+\beta+\gamma=0,$$

zo wordt de laatste vergelijking $3f=3\alpha^2fg$, of $f=\alpha^2fg$; hieruit volgt ofwel $f=0$, ofwel $g=\frac{1}{\alpha^2}$. Beschouw het eerste geval, $f=0$, en dus $A=-\frac{0}{0}$, waarbij de letter A niet kan worden bepaald, ofwel wordt $A=0$, verder ook $B=0$, vandaar ook $b=0$, of zelfs b niet bepaald; maar dan zal $a=0$. Aangezien we de finale vergelijking met f vermenigvuldigd hebben, autem aequationem postremam per f multiplicauimus, hic valor $f = 0$ lubricus est habendus. Sumamus igitur alterum valorem $g = \frac{1}{\alpha\alpha}$, et quia debet esse $ff < 4g$, sequitur esse debere $f < \frac{2}{\alpha}$; hinc vero fiet $A = 0$ et $B = 0$, ideoque $b - af = 0$, et $-2ag = 0$, unde sit $a = 0$.

§.23. Sufficiat autem haec in genere indicasse, et considermus potius casum magis determinatum, sumendo

$$\Pi = \frac{bp}{\alpha\alpha + pp}, \quad \text{unde fit} \quad \frac{d\Pi}{dp} = u = \frac{b(\alpha\alpha - pp)}{(\alpha\alpha + pp)^2} \quad \text{et}$$
$$t = \frac{2bp^3}{(\alpha\alpha + pp)^2}.$$

Quod si iam pro cuspidibus faciamus $\frac{du}{dp} = 0$, nascitur haec aequatio: $p^3 - 3\alpha\alpha p = 0$, cuius ternae radices sunt

$$\text{I}^\circ.\ p = 0; \quad \text{II}^\circ.\ p = +\alpha\sqrt{3}; \quad \text{III}^\circ.\ p = -\alpha\sqrt{3}$$

pro quarum prima habebimus $t = 0$ et $u = \frac{b}{\alpha\alpha}$;

pro secunda:

$$t = \frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha} \quad \text{et} \quad u = -\frac{b}{8\alpha\alpha};$$

pro tertia vero:

$$t = \frac{-3b\sqrt{3}}{8\alpha} \quad \text{et} \quad u = -\frac{b}{8\alpha\alpha},$$

unde curva habebit formam in figura 8 delineatam, ubi est

$$FB = \frac{b}{\alpha\alpha}, FG = FH = \frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha} \qquad \text{ac}$$
$$GC = HD = \frac{-b}{8\alpha\alpha}$$

sicque ternae cuspides erunt in punctis B, C, D, ac ductis chordis erit

$$BC = BD = \frac{3b\sqrt{3(1 + \alpha\alpha)}}{8\alpha\alpha} \quad \text{et} \quad CD = \frac{3b\sqrt{3}}{4\alpha},$$

ita ut haec figura triangularis triangulum isosceles exhibeat.

wordt de waarde $f = 0$ als **verraderlijk**[7] beschouwd. Laten we de tweede waarde bekijken $g = \frac{1}{\alpha^2}$, en gezien het moet zijn dat $f^2 < 4g$, moet worden gevolgd $f < \frac{2}{\alpha}$; maar hieruit zal $A = 0$ en $B = 0$, daardoor is $b - af = 0$, en $-2ag = 0$, en is $a = 0$.

§.23. Het volstaat om dit als het algemene geval te benoemen, laten we nu eerder een meer bepaalde vorm beschouwen, neem

$$\Pi = \frac{bp}{\alpha^2 + p^2}, \quad \text{waardoor} \quad \frac{d\Pi}{dp} = u = \frac{b(\alpha^2 - p^2)}{(\alpha^2 + p^2)^2} \quad \text{en}$$
$$t = \frac{2bp^3}{(\alpha^2 + p^2)^2}.$$

Maar als je voor de spits maakt $\frac{du}{dp} = 0$ hieruit wordt de vergelijking geboren: $p^3 - 3\alpha^2 p = 0$, waarvan de wortels zijn

$$\text{I}^\circ.\ p = 0; \quad \text{II}^\circ.\ p = +\alpha\sqrt{3}; \quad \text{III}^\circ.\ p = -\alpha\sqrt{3}$$

voor de eerste hebben we $t = 0$ en $u = \frac{b}{\alpha\alpha}$;

voor de tweede:

$$t = \frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha} \quad \text{en} \quad u = -\frac{b}{8\alpha^2};$$

voor de derde waarde:

$$t = \frac{-3b\sqrt{3}}{8\alpha} \quad \text{en} \quad u = -\frac{b}{8\alpha^2},$$

waarbij de kromme de vorm geschetst in figuur 8 aanneemt, waar

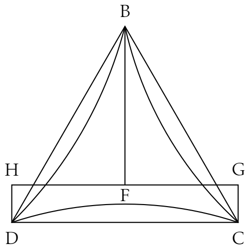
$$FB = \frac{b}{\alpha^2}, FG = FH = \frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha} \qquad \text{en}$$
$$GC = HD = \frac{-b}{8\alpha^2}$$

zodat de drie spitsen ontstaan in B, C, D, en de verbonden koorden zijn

$$BC = BD = \frac{3b\sqrt{3(3 + \alpha^2)}}{8\alpha^2} \quad \text{en} \quad CD = \frac{3b\sqrt{3}}{4\alpha},$$

en uit deze driehoekige figuur ontstaat een gelijkbenige driehoek.

[7] of ludricus (belachelijk)?



Tab. I. Fig. 8.

§.24. Evoluamus simili modo casum $\Pi = \frac{a}{\alpha\alpha+pp}$, unde sit

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}p} = u = -\frac{2ap}{(\alpha\alpha+pp)^2}, \quad \text{hincque} \quad t = -\frac{a(\alpha\alpha+3pp)}{(\alpha\alpha+pp)^2}.$$

Nunc pro cuspidibus fiat

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p} = -\frac{2a(\alpha\alpha-3pp)}{(\alpha\alpha+pp)^3} = 0,$$

quae aequatio tantum duas praebet radices

$$p = +\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}};$$

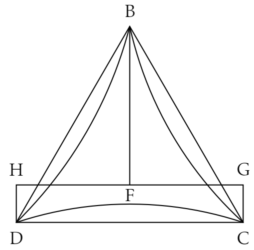
tertia autem radix est $p = \infty$. Hinc igitur pro prima cuspide, quae sit ubi $p = \infty$, fit $t = 0$ et $u = 0$, sicque haec cuspis B cadit in ipsum punctum F. Pro secunda cuspide sumatur

$$p = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \quad \text{eritque} \quad t = \frac{-9a}{8\alpha\alpha} \quad \text{et} \quad u = -\frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}.$$

Pro tertia cuspide sit

$$p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \quad \text{erit} \quad t = -\frac{9a}{8\alpha\alpha} \quad \text{et} \quad u = +\frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}.$$

Sumto igitur $FG = \frac{9\alpha}{8\alpha\alpha}$ binae reliquae cuspides erunt in C et D, ita ut sit $GC = GD = \frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}$, ideoque earum distantia



Tab. I. Fig. 8.

§.24. Laten we op een gelijkaardige manier het geval $\Pi = \frac{a}{\alpha^2+p^2}$ evalueren, waarbij

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}p} = u = -\frac{2ap}{(\alpha^2+p^2)^2}, \quad \text{waardoor} \quad t = -\frac{a(\alpha^2+3p^2)}{(\alpha^2+p^2)^2}.$$

Nu voor de spitsen wordt

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p} = -\frac{2a(\alpha^2-3p^2)}{(\alpha^2+p^2)^3} = 0,$$

waarbij de vergelijking alleen twee wortels heeft

$$p = +\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \quad \text{en} \quad p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}};$$

en een andere derde wortel is $p = \infty$. Daarom geeft dit hier een eerste spits, dat is waar $p = \infty$, is $t = 0$ en $u = 0$, zodat het punt B samenvalt met het punt F. De tweede spits wordt bekomen

$$p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \quad \text{en dan} \quad t = -\frac{9a}{8\alpha^2} \quad \text{en} \quad u = -\frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}.$$

Voor de derde spits is

$$p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \quad \text{en dan} \quad t = -\frac{9a}{8\alpha^2} \quad \text{en} \quad u = +\frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}.$$

Met $FG = \frac{9a}{8\alpha^2}$ zijn de twee resterende punten C en D, zodat het kan dat $GC = GD = \frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}$, waardoor de afstand

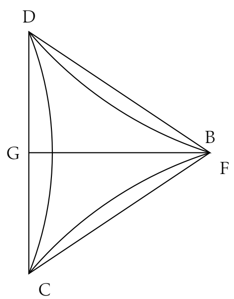
$$CD = \frac{3a\sqrt{3}}{4\alpha^3}, \quad \text{unde colligitur}$$

$$BC = BD = \frac{3a\sqrt{9\alpha\alpha + 3}}{8\alpha^3}$$

sicque erit

$$CD : BC = 2 : \sqrt{3\alpha\alpha + 1}$$

ex quo patet, casu $\alpha = 1$ triangulum fore aequilaterum.



Tab. I. Fig. 9.

§.25. Quod si ergo ambo casus praecedentes combinentur, ita ut statuatur $\Pi = \frac{a+bp}{\alpha\alpha+pp}$, tum tam abscissa t quam applicata u aequabitur summae ambarum praecedentium formularum, ita ut sit

$$t = \frac{2bp^3 - a(\alpha\alpha + 3pp)}{(\alpha\alpha + pp)^2} \quad \text{et} \quad u = \frac{b(\alpha\alpha - pp) - 2ap}{(\alpha\alpha + pp)^2};$$

unde si pro cuspidibus inveniendis ponamus $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p} = 0$, habebimus hanc aequationem:

$$2bp^3 - 6b\alpha\alpha p - 2a\alpha\alpha + 6app = 0, \quad \text{sive} \quad bp^3 + 3app - 3b\alpha\alpha p - a\alpha\alpha = 0,$$

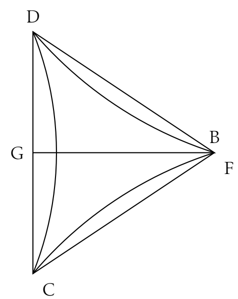
$$CD = \frac{3a\sqrt{3}}{4\alpha^3}, \quad \text{vandaar dat}$$

$$BC = BD = \frac{3a\sqrt{9\alpha^2 + 3}}{8\alpha^3}$$

hieruit is het duidelijk dat

$$CD : BC = 2 : \sqrt{3\alpha^2 + 1}$$

uit het geval, $\alpha = 1$ zou het een gelijkzijdige driehoek zijn.



Tab. I. Fig. 9.

§.25. Daarom kunnen we de voorgaande zaken combineren, en dus geldt $\Pi = \frac{a+bp}{\alpha^2+p^2}$, evenals kunnen we dit toepassen op de abscissen t en u gelijk aan de de som van de voorgaande formules, zodat het is

$$t = \frac{2bp^3 - a(\alpha^2 + 3p^2)}{(\alpha^2 + p^2)^2} \quad \text{en} \quad u = \frac{b(\alpha^2 - p^2) - 2ap}{(\alpha^2 + p^2)^2};$$

en als voor de spitsen wordt gezet $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p} = 0$, hebben we deze vergelijking

$$2bp^3 - 6b\alpha^2 p - 2a\alpha^2 + 6ap^2 = 0, \quad \text{of}$$

$$bp^3 + 3ap^2 - 3b\alpha^2 p - a\alpha^2 = 0,$$

cuius ergo ternas radices quaeri oportet, quod cum per regulam *Cardani* difficulter praestetur, trisectione anguli utamur, quem in finem fingamus esse $p = r + s\cos.\phi$ eritque

$$pp = rr + \frac{1}{2}ss + 2rs\cos.\phi + \frac{1}{2}ss\cos.2\phi \quad \text{et}$$
$$p^3 = r^3 + \frac{2}{3}rss + (3rrs + \frac{3}{4}s^3)\cos.\phi + \frac{3}{2}rss\cos.2\phi + \frac{1}{4}s^3\cos.3\phi$$

quibus valoribus substitutis aequatio nostra transmutabitur in sequentem:

$$\begin{aligned}
&+ br^3 + 3brrs\cos.\phi + \frac{3}{2}brss\cos.2\phi + \frac{1}{4}bs^3\cos.3\phi\\
&+ \frac{3}{2}brss + \frac{3}{4}bs^3\cos.\phi + \frac{3}{2}ass\cos.2\phi\\
&+ 3arr + 6ars\cos.\phi\\
&+ \frac{3}{2}ass - 3b\alpha\alpha s\cos.\phi\\
&- 3b\alpha\alpha r\\
&- a\alpha\alpha.
\end{aligned}$$

Nunc definiantur litterae r et s ita, ut membra intermedia, tam $\cos.\phi$ quam $\cos.2\phi$ involventia, seorsim evanescant, unde hae duae aequationes oriuntur:

$$\text{I}^\circ.\ 3brrs + \frac{3}{4}bs^3 + 6ars - 3b\alpha\alpha s = 0;$$
$$\text{II}^\circ.\ \frac{3}{2}brss + \frac{3}{2}ass = 0;$$

ex quarum, posteriore fit $r = -\frac{a}{b}$, qui valor in priore substitutus dat

$$\frac{3aas}{b} + \frac{3}{4}bs^3 - \frac{6aas}{b} - 3b\alpha\alpha s = 0, \quad \text{unde fit}$$
$$ss = \frac{4(bb\alpha\alpha + aa)}{bb}, \quad \text{ideoque} \quad s = \frac{2\sqrt{bb\alpha\alpha + aa}}{b}.$$

het is dus nodig te zoeken naar de drie wortels, maar met de regel van *Cardano* is dit eenvoudig volbracht, om gebruik te maken van een driedelige hoek, die we eindig veronderstellen is $p = r + s\cos\phi$, en dan

$$p^2 = r^2 + \frac{1}{2}s^2 + 2rs\cos\phi + \frac{1}{2}s^2\cos2\phi \quad \text{en}$$
$$p^3 = r^3 + \frac{3}{2}rs^2 + (3r^2s + \frac{3}{4}s^3)\cos\phi + \frac{3}{2}rs^2\cos2\phi + \frac{1}{4}s^3\cos3\phi$$

waarbij deze waarden substitueren onze vergelijking in de volgende uitdrukking omzet:

$$\begin{aligned}
&+ br^3 + 3br^2s\cos\phi + \frac{3}{2}brs^2\cos2\phi + \frac{1}{4}bs^3\cos3\phi\\
&+ \frac{3}{2}brs^2 + \frac{3}{4}bs^3\cos\phi + \frac{3}{2}as^2\cos2\phi\\
&+ 3ar^2 + 6ars\cos\phi\\
&+ \frac{3}{2}as^2 - 3b\alpha^2s\cos\phi\\
&- 3b\alpha^2r\\
&- a\alpha^2.
\end{aligned}$$

Definieer nu de letters r en s op een zodanige manier, dat de leden van de tussenproducten, betrokken aan $\cos\phi$ en $\cos2\phi$, afzonderlijk verdwijnen, hetgeen tot deze twee vergelijkingen leidt:

$$\text{I}^\circ.\ 3br^2s + \frac{3}{4}bs^3 + 6ars - 3b\alpha^2s = 0;$$
$$\text{II}^\circ.\ \frac{3}{2}brs^2 + \frac{3}{2}as^2 = 0;$$

uit de laatste wordt $r = -\frac{a}{b}$, waarvan de waarde in de voormalige vervangen geeft:

$$\frac{3a^2s}{b} + \frac{3}{4}bs^3 - \frac{6a^2s}{b} - 3b\alpha^2s = 0, \quad \text{waardoor}$$
$$s^2 = \frac{4(b^2\alpha^2 + a^2)}{b^2}, \quad \text{daarom} \quad s = \frac{2\sqrt{b^2\alpha^2 + a^2}}{b}.$$

Hi iam valores in nostra aequatione substituantur, fietque

$$\frac{2a^3}{bb} + 2a\alpha\alpha + \frac{1}{4}bs^3 \cos. 3\phi = 0,$$

unde fit

$$\cos. 3\phi = -\frac{8a(aa + bb\alpha\alpha)}{b^3 s^3} = -\frac{a}{\sqrt{aa + bb\alpha\alpha}}.$$

Quaeratur igitur angulus ω, cuius Cosinus sit

$$= -\frac{a}{\sqrt{aa + bb\alpha\alpha}},$$

qui Cosinus cum etiam conveniat angulis $-\omega$; $2\pi-\omega$; item $2\pi+\omega$, habebimus sequentes valores:

$$\text{I}^\circ.\ 3\phi = \omega, \quad \text{II}^\circ.\ 3\phi = -\omega, \quad \text{III}^\circ.\ 3\phi = 2\pi - \omega,$$
$$\text{IV}^\circ. \quad \text{et} \quad 3\phi = 2\pi + \omega$$

unde omisso secundo valore, quippe qui a primo non discrepat, tres valores pro angulo ϕ erunt

$$\text{I}^\circ.\ \phi = \frac{1}{3}\omega, \quad \text{II}^\circ.\ \phi = 120^\circ - \frac{1}{3}\omega \quad \text{et} \quad \phi = 120^\circ + \frac{1}{3}\omega,$$

quibus inventis terni valores litterae p erunt

$$\text{I}^{\text{us}}.\ p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{bb\alpha\alpha + aa}}{b}\cos. \frac{1}{3}\omega,$$
$$\text{II}^{\text{us}}.\ p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{bb\alpha\alpha + aa}}{b}\cos.(120^\circ - \frac{1}{3}\omega),$$
$$\text{III}^{\text{us}}.\ p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{bb\alpha\alpha + aa}}{b}\cos.(120^\circ + \frac{1}{3}\omega).$$

§.26. His casibus evolutis revertamur ad quaestionem nostram generalem, qua eiusmodi curvae triangulares quaeruntur, in quibus pro cuspidibus littera p ternos datos obtineat valores, scilicet: $p = \alpha, p = \beta$ et $p = \gamma$. Nunc autem

Deze waarden in onze vergelijking vervangen, leidt tot

$$\frac{2a^3}{b^2} + 2a\alpha^2 + \frac{1}{4}bs^3 \cos 3\phi = 0,$$

waardoor

$$\cos 3\phi = -\frac{8a(a^2 + b^2\alpha^2)}{b^3 s^3} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2\alpha^2}}.$$

Er wordt dus gevraagd een hoek ω, zodat de Cosinus gegeven is door:

$$= -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2\alpha^2}},$$

hij is het ook eens met de Cosinus van een hoek $-\omega$; $2\pi-\omega$; en ook $2\pi+\omega$, we hebben de volgende waarden:

$$\text{I}^\circ.\ 3\phi = \omega, \quad \text{II}^\circ.\ 3\phi = -\omega, \quad \text{III}^\circ.\ 3\phi = 2\pi - \omega,$$
$$\text{IV}^\circ. \quad \text{en} \quad 3\phi = 2\pi + \omega$$

waarvan we de waarde van de tweede hebben weggelaten, aangezien hij niet sterk verschilt met de eerste, de drie waarden voor de hoek ϕ zijn dus

$$\text{I}^\circ.\ \phi = \frac{1}{3}\omega, \quad \text{II}^\circ.\ \phi = 120^\circ - \frac{1}{3}\omega \quad \text{en} \quad \phi = 120^\circ + \frac{1}{3}\omega,$$

de drie gevonden waarden voor de letter p zijn

$$\text{I}^{\text{e}}.\ p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{b^2\alpha^2 + a^2}}{b}\cos \frac{1}{3}\omega,$$
$$\text{II}^{\text{e}}.\ p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{b^2\alpha^2 + a^2}}{b}\cos(120^\circ - \frac{1}{3}\omega),$$
$$\text{III}^{\text{e}}.\ p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{b^2\alpha^2 + a^2}}{b}\cos(120^\circ + \frac{1}{3}\omega).$$

§.26. Na het ontwikkelen van deze gevallen keren we terug naar onze algemene vraag, zodat ik zoek naar driehoekige krommen, waarbij voor de spitsen de letter p drie waarden verkrijgt, namelijk $p = \alpha, p = \beta$ en $p = \gamma$. Laat primo ponamus brevitatis gratia $\alpha+\beta+\gamma=\zeta$; $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\eta$ et $\alpha\beta\gamma=\theta$, et tres aequationes adimplendae erunt

$$\begin{aligned} \text{I}^\circ.\ & \mathrm{B}-2\mathrm{A}f=2\mathrm{C}g\theta \\ \text{II}^\circ.\ & 2\mathrm{C}-\mathrm{B}f-4\mathrm{A}g=-2\mathrm{C}g\eta \\ \text{III}^\circ.\ & -3\mathrm{B}g=2\mathrm{C}g\zeta. \end{aligned}$$

Cum igitur esset

$$\mathrm{A}=b=af, \mathrm{B}=-2ag \quad \text{et} \quad \mathrm{C}=-bg,$$

hinc ternae nostrae aequationes erunt

$$\begin{aligned} \text{I}^\circ.\ & -ag-bf+aff=-bgg\theta \\ \text{II}^\circ.\ & 3b+3af=bg\eta \\ \text{III}^\circ.\ & 3a=-b\zeta; \end{aligned}$$

ex quibus statim ternos valores pro fractione $\frac{a}{b}$ nanciscimur, qui sunt:

$$\text{I}^\circ.\frac{a}{b}=\frac{f-gg\theta}{ff-g}, \quad \text{II}^\circ.\frac{a}{b}=\frac{g\eta+3}{3f} \quad \text{et} \quad \text{III}^\circ.\frac{a}{b}=-\frac{\zeta}{3}.$$

§.27. Quod si iam horum valorum secundus et tertius inter se aequentur, prodibit $f=-\frac{g\eta-3}{\zeta}$. Aequetur nunc primus valor etiam tertio, et erit

$$3f-3gg\theta=-ff\zeta+g\zeta,$$

ubi, si loco f valor modo inuentus substituatur, prodibit

$$3g\eta-3gg\zeta\theta=g\zeta\zeta-gg\eta\eta$$

quae aequatio per g divisa dat

$$3\eta-3g\zeta\theta=\zeta\zeta-g\eta\eta, \quad \text{unde concluditur}$$
$$g=\frac{3\eta-\zeta\zeta}{3\zeta\theta-\eta\eta}, \quad \text{hincque porro} \quad f=\frac{\zeta\eta-9\theta}{3\zeta\theta-\eta\eta}.$$

ons nu eerst kortheidshalve verwelkomen $\alpha+\beta+\gamma=\zeta$; $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\eta$ en $\alpha\beta\gamma=\theta$, en de drie vergelijkingen voldoen aan:

$$\begin{aligned} \text{I}^\circ.\ & \mathrm{B}-2\mathrm{A}f=2\mathrm{C}g\theta \\ \text{II}^\circ.\ & 2\mathrm{C}-\mathrm{B}f-4\mathrm{A}g=-2\mathrm{C}g\eta \\ \text{III}^\circ.\ & -3\mathrm{B}g=2\mathrm{C}g\zeta. \end{aligned}$$

Aangezien derhalve het is

$$\mathrm{A}=b-af, \mathrm{B}=-2ag \quad \text{en} \quad \mathrm{C}=-bg,$$

hierdoor zijn onze drie vergelijkingen

$$\begin{aligned} \text{I}^\circ.\ & -ag-bf+af^2=-bg^2\theta \\ \text{II}^\circ.\ & -3b+3af=bg\eta \\ \text{III}^\circ.\ & 3a=-b\zeta; \end{aligned}$$

hieruit ontmoeten we onmiddellijk drie waarden voor de breuk $\frac{a}{b}$, die zijn:

$$\text{I}^\circ.\frac{a}{b}=\frac{f-g^2\theta}{f^2-g}, \quad \text{II}^\circ.\frac{a}{b}=\frac{g\eta+3}{3f} \quad \text{en} \quad \text{III}^\circ.\frac{a}{b}=-\frac{\zeta}{3}.$$

§.27. Als deze tweede en derde waarden aan elkaar gelijk zijn, produceert dit $f=\frac{-g\eta-3}{\zeta}$. Is nu ook de eerste waarde gelijk aan de derde, er geldt

$$3f-3g^2\theta=-f^2\zeta+g\zeta,$$

en, als hier de ontdekte waarde f wordt gesubstitueerd, produceert dit

$$3g\eta-3g^2\zeta\theta=g\zeta^2-g^2\eta^2$$

deze vergelijking delen door g

$$3\eta-3g\zeta\theta=\zeta^2-g\eta^2, \quad \text{en we besluiten}$$
$$g=\frac{3\eta-\zeta^2}{3\zeta\theta-\eta^2}, \quad \text{hetgeen leidt tot} \quad f=\frac{\zeta\eta-9\theta}{3\zeta\theta-\eta^2}.$$

§.28. His valoribus inventis denominator supra assumtus $1+fp+gpp$ hanc induet formam:

$$\frac{3\zeta\theta-\eta\eta+(\zeta\eta-9\theta)p+(3\eta-\zeta\zeta)pp}{3\zeta\theta-\eta\eta},$$

in quo esse debet $ff<4g$. Est vero

$$ff=\frac{\zeta\zeta\eta\eta-18\zeta\eta\theta+81\theta\theta}{(3\zeta\theta-\eta\eta)^2}$$
$$4g=\frac{12\eta-4\zeta\zeta}{3\zeta\theta-\eta\eta}=\frac{36\zeta\eta\theta-12\zeta^3\theta-12\eta^3+4\zeta\zeta\eta\eta}{(3\zeta\theta-\eta\eta)^2}$$

Necesse igitur est ut sit

$$\zeta\zeta\eta\eta-18\zeta\eta\theta+81\theta\theta<36\zeta\eta\theta-12\zeta^3\theta-12\eta^3+4\zeta\zeta\eta\eta$$

quod sine dubio sponte euenit. Pro numeratore sumamus

$$a=-\frac{\zeta c}{3\zeta\theta-\eta\eta}\quad\text{et}\quad b=\frac{3c}{3\zeta\theta-\eta\eta},$$

ita ut fractio pro Π assumenda sit

$$\Pi=\frac{-\zeta c+3cp}{3\zeta\theta-\eta\eta+(\zeta\eta-9\theta)p+(3\eta-\zeta\zeta)pp}.$$

Cum autem semper sit $\zeta\zeta>3\eta$ et $\eta\eta>3\zeta\theta$, concinnius hic valor ita exprimetur:

$$\Pi=\frac{\zeta c-3cp}{\eta\eta-3\zeta\theta+(9\theta-\zeta\eta)p+(\zeta\zeta-3\eta)pp}.$$

§.29. Quia positio axis penitus arbitrio nostro relinquitur, eum semper ita assumere licet, ut unam cuspides tangat, tum vero ibi fiet $p=\infty$, unde solutio nostra non minus late patebit, etiamsi ponamus $\alpha=\infty$; tum vero erit

$$\zeta=\alpha,\quad\eta=\alpha(\beta+\gamma)\quad\text{et}\quad\theta=\alpha\beta\gamma;$$

§.28. Men vindt met deze waarden voor de bovenstaande noemer $1+fp+gp^2$ de vorm

$$\frac{3\zeta\theta-\eta^2+(\zeta\eta-9\theta)p+(3\eta-\zeta^2)p^2}{3\zeta\theta-\eta^2},$$

waarbij het zo moet zijn dat $f^2<4g$. Het is zo dat

$$f^2=\frac{\zeta^2\eta^2-18\zeta\eta\theta+81\theta^2}{(3\zeta\theta-\eta^2)^2}$$
$$4g=\frac{12\eta-4\zeta^2}{3\zeta\theta-\eta^2}=\frac{36\zeta\eta\theta-12\zeta^3\theta-12\eta^3+4\zeta^2\eta^2}{(3\zeta\theta-\eta^2)^2}$$

Het moet dus noodzakelijk zijn dat

$$\zeta^2\eta^2-18\zeta\eta\theta+81\theta^2<36\zeta\eta\theta-12\zeta^3\theta-12\eta^3+4\zeta^2\eta^2$$

hetgeen zonder twijfel zal gebeuren. Nemen we voor de teller

$$a=-\frac{\zeta c}{3\zeta\theta-\eta^2}\quad\text{en}\quad b=\frac{3c}{3\zeta\theta-\eta^2},$$

zodat voor de breuk Π aangenomen wordt

$$\Pi=\frac{-\zeta c+3cp}{3\zeta\theta-\eta^2+(\zeta\eta-9\theta)p+(3\eta-\zeta^2)p^2}.$$

Omdat het altijd zo is dat $\zeta^2>3\eta$ en $\eta^2>3\zeta\theta$, is het eleganter deze waarde uit te drukken als:

$$\Pi=\frac{\zeta c-3cp}{\eta^2-3\zeta\theta+(9\theta-\zeta\eta)p+(\zeta^2-3\eta)p^2}.$$

§.29. Het blijf volledig onze keuze de positie van de as te kiezen, het zal dus altijd worden toegestaan, om te raken aan een spits, dan zal de waarde er $p=\infty$, en blijft onze oplossing niet minder breed open, zelfs als we aannemen $\alpha=\infty$; dan is er

$$\zeta=\alpha,\quad\eta=\alpha(\beta+\gamma)\quad\text{en}\quad\theta=\alpha\beta\gamma;$$

hincque propterea

$$\eta\eta - 3\zeta\theta = \alpha\alpha(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma);$$
$$9\theta - \zeta\eta = 9\alpha\beta\gamma - \alpha\alpha(\beta+\gamma) = -\alpha\alpha(\beta+\gamma) \quad \text{et}$$
$$(\zeta\zeta - 3\eta) = \alpha\alpha - 3\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\alpha.$$

Sumatur igitur $c = \alpha a$, ut numerator etiam per $\alpha\alpha$ fiat divisibilis, eritque formla nostra

$$\Pi = \frac{a}{\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta+\gamma)p + pp},$$

cuius denominator certe nullum habet factorem realem, nisi sit $\beta = \gamma$, quem casum autem ipsa rei natura respuit. Hoc autem valore pro Π assumto consequimur statim

$$u = \frac{d\Pi}{dp} = \frac{a(\beta+\gamma) - 2ap}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta+\gamma)p + pp)^2} \quad \text{et}$$
$$t = pu - \Pi = \frac{-a(\beta\beta - \beta\gamma - \gamma\gamma) + 2a(\beta+\gamma)p - 3app}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta+\gamma)p + pp)^2}.$$

§.30. Ut iam hinc cuspides definiamus, pro prima cuspide ponamus $p = \infty$, eritque tam $t = 0$, quam $u = 0$. Pro secunda cuspides sumamus $p = \beta$, eritque abscissa

$$t = -\frac{a(2\beta - \gamma)}{(\beta-\gamma)^3} \quad \text{et} \quad u = -\frac{a}{(\beta-\gamma)^3}.$$

Pro tertia vero cuspide fiat $p = \gamma$, et erit

$$t = -\frac{a(\beta - 2\gamma)}{(\beta-\gamma)^3} \quad \text{et} \quad u = +\frac{a}{(\beta-\gamma)^3}.$$

Hinc in figura erit $\mathrm{GB} = \frac{a}{(\beta-\gamma)^3}$,

$$\mathrm{AH} = \frac{a(\beta - 2\gamma)}{(\beta-\gamma)^3} \quad \text{et} \quad \mathrm{HC} = \frac{a}{(\beta-\gamma)^3}.$$

dit is de reden waarom

$$\eta^2 - 3\zeta\theta = \alpha^2(\beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2);$$
$$9\theta - \zeta\eta = 9\alpha\beta\gamma - \alpha^2(\beta+\gamma) = -\alpha^2(\beta+\gamma) \quad \text{en}$$
$$(\zeta^2 - 3\eta) = \alpha^2 - 3\alpha(\beta+\gamma) = \alpha^2.$$

Neem dan $c = \alpha a$, en gezien de teller ook deelbaar is door α^2, wordt onze formule

$$\Pi = \frac{a}{\beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2 - (\beta+\gamma)p + p^2},$$

waarbij de noemer zeker geen reële factor bezit, behalve indien $\beta = \gamma$, maar dit geval verwerpt zichzelf op een natuurlijke manier. Uit de waarde aangenomen voor Π volg onmiddellijk

$$u = \frac{d\Pi}{dp} = \frac{a(\beta+\gamma) - 2ap}{(\beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2 - (\beta+\gamma)p + p^2)^2} \quad \text{en}$$
$$t = pu - \Pi = \frac{-a(\beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2) + 2a(\beta+\gamma)p - 3ap^2}{(\beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2 - (\beta+\gamma)p + p^2)^2}.$$

§.30. Definiëren we hier nu de spitsen, voor de eerste spits stellen we $p = \infty$, en dus zo $t = 0$, dat $u = 0$. Voor de tweede spits stel $p = \beta$, zodat de abscis

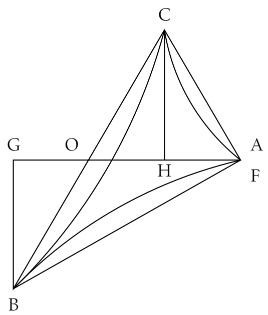
$$t = -\frac{a(2\beta - \gamma)}{(\beta-\gamma)^3} \quad \text{en} \quad u = -\frac{a}{(\beta-\gamma)^3}.$$

Voor de derde waarde van de spits wordt $p = \gamma$, en geldt

$$t = -\frac{a(\beta - 2\gamma)}{(\beta-\gamma)^3} \quad \text{en} \quad u = +\frac{a}{(\beta-\gamma)^3}.$$

In de figuur hier geldt $\mathrm{GB} = \frac{a}{(\beta-\gamma)^3}$,

$$\mathrm{AH} = \frac{a(\beta - 2\gamma)}{(\beta-\gamma)^3} \quad \text{en} \quad \mathrm{HC} = \frac{a}{(\beta-\gamma)^3}.$$



Tab. I. Fig. 10.

§.31. Ductis iam chordis AB, AC et BC erit

$$AB = \frac{a}{(\beta-\gamma)^3}\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1} \quad \text{et}$$
$$AC = \frac{a}{(\beta-\gamma)^3}\sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1}.$$

Pro tertia chorda BC cum sit

$$BC^2 = (BG+HC)^2+GH^2 = \frac{4aa+aa(\beta+\gamma)^2}{(\beta-\gamma)^6}$$

hinc erit

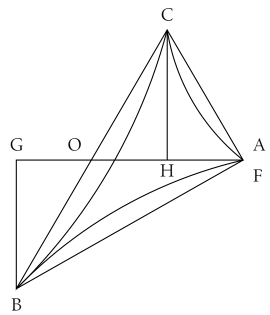
$$BC = \frac{a}{(\beta+\gamma)^3}\sqrt{4+(\beta+\gamma)^2},$$

sicque tres istae chordae AB, AC et BC eandem interse tenebunt rationem, quam habent hae tres formulae radicales:

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1}; \quad \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1}; \quad \sqrt{4+(\beta+\gamma)^2}.$$

Pro positione autem harum chordarum notetur esse tangens ang. BAG $= \frac{1}{2\beta-\gamma}$ et tang. ang. CAH $= \frac{1}{\beta-2\gamma}$, unde colligitur tangens anguli BAC

$$= \frac{3\beta-3\gamma}{2\beta\beta-5\beta\gamma+2\gamma\gamma-1}.$$



Tab. I. Fig. 10.

§.31. De reeds getrokken koorden AB, AC en BC zijn

$$AB = \frac{a}{(\beta-\gamma)^3}\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1} \quad \text{en}$$
$$AC = \frac{a}{(\beta-\gamma)^3}\sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1}.$$

Voor de derde koorde BC geldt

$$BC^2 = (BG+HC)^2+GH^2 = \frac{4a^2+a^2(\beta+\gamma)^2}{(\beta-\gamma)^6}$$

vandaar

$$BC = \frac{a}{(\beta+\gamma)^3}\sqrt{4+(\beta+\gamma)^2},$$

Dus de drie koorden AB, AC en BC bevatten dezelfde reden, en hebben deze drie wortelvormen:

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1}; \quad \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1}; \quad \sqrt{4+(\beta+\gamma)^2}.$$

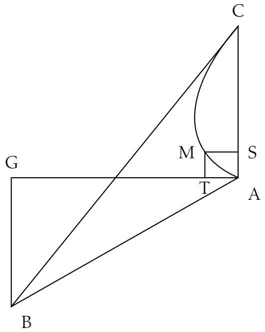
Voor de positie van deze koorden zal worden opgemerkt dat de tangens van de hoek BAG $= \frac{1}{2\beta-\gamma}$ en tangens van de hoek CAH $= \frac{1}{\beta-2\gamma}$, vandaar de tangens van de hoek BAC

$$= \frac{3\beta-3\gamma}{2\beta^2-5\beta\gamma+2\gamma^2-1}.$$

Pro tertia chorda erit tang. anguli AOC =

$$\text{tang. BOG} = \frac{\text{BG} + \text{CH}}{\text{GH}} = \frac{2}{\beta + \gamma}.$$

Cum igitur sit ABC = GOB − GAB erit tang. ABC = $\frac{3\beta + 3\gamma}{(\beta+\gamma)(2\beta-\gamma)}$. Denique, ob anguli COG tang. = −tang. ang. BOG = $-\frac{2}{\beta+\gamma}$, quia est ang. ACB = COG − CAO, erit tang. ACB = $\frac{3\gamma-3\beta}{(\beta-\gamma)(\beta-2\gamma)-2}$.



Tab. I. Fig. 11.

§.32. Statuamus exempli gratia $\beta = 2$ et $\gamma = 1$ eritque AG $= 3a$, et AH $= 0$, tum vero GB $= a$ et HC $= a$, unde curva figuram habebit, qualis fig. 11. repraesentatur, in qua ergo si capiatur punctum quodcunque u, cuius coordinatae sunt AT et TU, erit

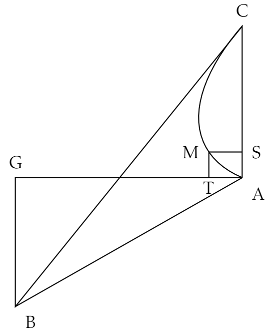
$$t = \frac{3a - 6ap + 3app}{(3 - 3p + pp)^2} \quad \text{et} \quad u = \frac{3a - 2ap}{(3 - 3p + pp)^2}.$$

Hic in ramo AUC id punctum notatu est dignum, quod a recta AC maxime distat; hoc igitur manifesto ibi erit, ubi eius tangens ad axem est normalis, ideoque hoc loco erit $p = 0$, unde fit AT $= \frac{1}{3}a$, quae est distantia maxima quaesita US; tum vero erit TU $= u = \frac{1}{3}a$. Quia porro tang. angul. GAB $= \frac{1}{3}$, in arcu AB id punctum a chorda AB maxime erit remotum, cuius tangens chordae AB est parallela; pro eo ergo reperitur $p = 3$, unde

Voor de derde koorde is de tangens van de hoek AOC =

$$\tan \text{BOG} = \frac{\text{BG} + \text{CH}}{\text{GH}} = \frac{2}{\beta + \gamma}.$$

Daarom is het dat ABC = GOB − GAB en zal tan ABC = $\frac{3\beta - 3\gamma}{(\beta+\gamma)(2\beta-\gamma)+2}$. Tot slot, voor de hoek COG tan = −tan ang. BOG = $-\frac{2}{\beta+\gamma}$, en omdat de hoek ACB = COG − CAO, zal tan ACB = $\frac{3\gamma-3\beta}{(\beta+\gamma)(\beta-2\gamma)-2}$.



Tab. I. Fig. 11.

§.32. Laten we bijvoorbeeld $\beta = 2$ en $\gamma = 1$ zodat AG $= 3a$, en AH $= 0$, maar dan GB $= a$ et HC $= a$, en men heeft een kromme figuur, zoals fig. 11 vertegenwoordigt, waarin we dus een punt u nemen, waarvan de coördinaten dus AT en TU zijn, geldt

$$t = \frac{3a - 6ap + 3ap^2}{(3 - 3p + p^2)^2} \quad \text{en} \quad u = \frac{3a - 2ap}{(3 - 3p + p^2)^2}.$$

Merk op om een punt te laten voldoen aan de tak AUC, waarbij de rechte AC de verste afstand; dan is het duidelijk dat er zal, waarbij de raaklijn langs de as normaal is, daarom zal door dit punt $p = 0$ zijn, waardoor AT $= \frac{1}{3}a$, wat US de maximale afstand laat verwerven, dan is er TU $= u = \frac{1}{3}a$. Omdat verder tang. angul. GAB $= \frac{1}{3}$, in de boog AB worden de meeste punten van de koorde AB verwijderd, dewelke de raaklijn fit AT $= t = \frac{4}{3}a$ et TU $= u = -\frac{1}{3}a$. Ex hoc exemplo autem luculenter patet, quemadmodum omnes casus euolui conueniat; neque vero difficile erit, hinc eiusmodi curvas triangulares invenire, quae dato triangulo ABC sint inscriptibiles, quandoquidem ex ratione laterum trianguli innotescit ratio harum formularum:

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1}; \quad \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1}; \quad \sqrt{4+(\beta+\gamma)^2}.$$

§.33. Sint terna latera AB, AC et BC inter se ut numeri A, B, C, ac ponatur

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1} = nA, \quad \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1} = nB \quad \text{et} \quad \sqrt{4+(\beta+\gamma)^2} = nC;$$

unde sumtis quadratis fit

$$(2\beta-\gamma)^2 = nnAA-1; \quad (\beta-2\gamma)^2 = nnBB-1 \quad \text{et} \quad (\beta+\gamma)^2 = nnCC-4,$$

unde fit

$$1^\circ.\ 2\beta-\gamma = \sqrt{nnAA-1}; \quad 2^\circ.\ \beta-2\gamma = \sqrt{nnBB-1} \quad \text{et} \quad \beta+\gamma = \sqrt{nnCC-4},$$

quarum prima dempta secunda praebet

$$\sqrt{nnAA-1} - \sqrt{nnBB-1} = \sqrt{nnCC-4},$$

ex qua aequatione quantitatem n definire oportet, qua inventa reperietur

$$3\beta = \sqrt{nnAA-1} + \sqrt{nnCC-4} \quad \text{et} \quad 3\gamma = \sqrt{nnCC-4} - \sqrt{nnBB-1};$$

quibus inventis curva triangularis satisfaciens per formulas superiores facile determinatur; ex illa autem aequatione elicitur

$$nn = \frac{4(2AA+2BB-CC)}{2AABB+2AACC+2BBCC-A^4-B^4-C^4}.$$

aan de koorde AB evenwijdig is; daarom vinden we voor $p = 3$, waardoor AT $= t = \frac{4}{3}a$ en TU $= u = -\frac{1}{3}a$. Uit dit voorbeeld blijkt helder, hoe alle gevallen gemakkelijk ontward geraken, ook is het niet moeilijk, hier deze soort driehoekige krommen te vinden, ingeschreven in een gegeven driehoek ABC, aangezien zonder reden de zijden van de driehoek zich gekend verhouden als de volgende formules:

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1}; \quad \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1}; \quad \sqrt{4+(\beta+\gamma)^2}.$$

§.33. Zijn de drie zijden AB, AC en BC en de nummers voor elk A, B, C, en laat

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1} = nA, \quad \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1} = nB \quad \text{en} \quad \sqrt{4+(\beta+\gamma)^2} = nC;$$

waaruit de kwadraten zijn

$$(2\beta-\gamma)^2 = n^2A^2-1; \quad (\beta-2\gamma)^2 = n^2B^2-1 \quad \text{en} \quad (\beta+\gamma)^2 = n^2C^2-4,$$

waardoor

$$1^\circ.\ 2\beta-\gamma = \sqrt{n^2A^2-1}; \quad 2^\circ.\ \beta-2\gamma = \sqrt{n^2B^2-1} \quad \text{en} \quad \beta+\gamma = \sqrt{n^2C^2-4},$$

welke het verschil van de eerste en de tweede leidt tot

$$\sqrt{n^2A^2-1} - \sqrt{n^2B^2-1} = \sqrt{n^2C^2-4},$$

Uit deze vergelijking moet de waarde van n bepaald worden, er wordt gevonden

$$3\beta = \sqrt{n^2A^2-1} + \sqrt{n^2C^2-4} \quad \text{en} \quad 3\gamma = \sqrt{n^2C^2-4} - \sqrt{n^2B^2-1};$$

Unde si trianguli, cuius latera sunt A, B et C, area vocetur $\triangle$, hic denominator erit $= 16\triangle\triangle$, ita ut sit

$$nn = \frac{2AA + 2BB - CC}{4\triangle\triangle}.$$

Hoc autem valore invento erit

$$\text{I. } \sqrt{nnAA - 1} = \frac{3AA + BB - CC}{4\triangle};$$
$$\text{II. } \sqrt{nnBB - 1} = \frac{3BB + AA - CC}{4\triangle} \quad \text{et}$$
$$\text{III. } \sqrt{nnCC - 4} = \frac{2AA - 2BB}{4};$$

ex his vero denique elicitur

$$3b = \frac{5AA - BB - CC}{4\triangle} \quad \text{et} \quad 3\gamma = \frac{AA - 5BB + CC}{4\triangle},$$

ita ut iam omnia sint determinata, quae ad solutionem huius problematis spectant. Proposito scilicet quocunque triangulo rectilineo, semper curva triangularis describi potest, cuius cuspides in eius angulos incidant, et latera trianguli simul sint chordae arcuum, quibus figura triangularis constat.

§.34. Ecce igitur, Problematis, cui tota haec investigatio erat destinata, concinnam solutionem subiungamus.

die het vinden van een driehoekige kromme die voldoet aan bovenstaande formules gemakkelijk bepalen, hieruit leiden we meer bepaald de vergelijking af

$$n^2 = \frac{4(2A^2 + 2B^2 - C^2)}{2A^2B^2 + 2A^2C^2 + 2B^2C^2 - A^4 - B^4 - C^4}.$$

Indien dus de driehoek, waarvan de zijden A, B en C zijn, een oppervlak $\triangle$ omvat, dan is de noemer $= 16\triangle^2$, zodat het is

$$n^2 = \frac{2A^2 + 2B^2 - C^2}{4\triangle^2}.$$

De gevonden waarden zijn dus

$$\text{I. } \sqrt{n^2A^2 - 1} = \frac{3A^2 + B^2 - C^2}{4\triangle};$$
$$\text{II. } \sqrt{n^2B^2 - 1} = \frac{3B^2 + A^2 - C^2}{4\triangle} \quad \text{en}$$
$$\text{III. } \sqrt{n^2C^2 - 4} = \frac{2A^2 - 2B^2}{4};$$

kortom blijkt uit deze dat de waarde

$$3\beta = \frac{5A^2 - B^2 - C^2}{4\triangle} \quad \text{et} \quad 3\gamma = \frac{A^2 - 5B^2 + C^2}{4\triangle},$$

zodat alles nu wordt bepaald, om een oplossing van dit probleem te beschouwen. Wat dan ook het doel dat een rechtlijnige driehoek, altijd het bevatten van een driehoekige kromme beschrijft, waarvan de spitsen samenvallen met de hoeken, en de zijden van de driehoek tegelijkertijd de koorden van de bogen zijn, die met een driehoekige vorm overeenkomen.

§.34. Zie dan, een probleem, waarvoor het onderzoek tot doel heeft, een elegante oplossing toe te voegen.

Problema

Intra datum triangulum ABC curvam triangularem continuam et algebraicam inscribere, cuius singulae cuspides in ipsos angulos trianguli A, B et C incidant.

Tab. I. Fig. 12.

Solutio

Corollarium

Ex tali autem curva triangulari facillime innumerabiles curvae orbiformes formari possent. Positis enim coordinatis curvae orbiformis x et y, sumi poterit

$$x = u + \frac{ep}{\sqrt{1+pp}} \qquad \text{et} \qquad y = t - \frac{e}{\sqrt{1+pp}},$$

quae ergo etiam erit algebraica; neque vero illa curva triangularis huius erit sevoluta, sed potius cum omnibus his curvis orbiformibus communem habebit evolutam quae itidem erit curva triangularis, simulque rectificabilis.

Probleemstelling

Beschrijf een ononderbroken en algebraïsche kromme binnen een gegeven driehoek ABC, zodat alle spitsen in de hoeken van de driehoek A, B en C samenvallen.

Tab. I. Fig. 12.

Oplossing

Gevolg

Errata

- §.3: $\mathrm{AC}h = \mathrm{CH} + \mathrm{C}h$ moet $\mathrm{HC}h$ zijn.
- §.3: $\mathrm{SX} = f + c - a = \mathrm{CS}$ moet +CS zijn.
- §.5: Punt X moet eigenlijk het punt L zijn
- §.11: Breuk moet tot pp staan (bij de δ)
- §.17: coördinaten p en q moet t en u zijn
- §.25: Foutieve breuk $\frac{2}{3}$ ipv $\frac{3}{2}$
- §.27: minteken
- pagina 14: Breuk foutief na Pythagoras
- pagina 22: = moet een − zijn
- pagina 24: tekenfoutje
- pagina 25: tekenfoutje
- pagina 27, foute beta