
De Curvis Triangularibus

Autore
L. EULER

§.1. Curvas triangulares voco, quae tribus arcibus AB , AC et BC intus inflexis constant, qui in angulis A , B et C coeant, praeterea autem nullos alios ramos contineant. Huiusmodi ergo curvae ut sint continuae, siue quapiam aequatione, vel algebraica, vel etiam transcendente, exprimi queant, necesse est, ut in angulis A , B et C habeant cuspides acutissimas, ubi bini arcus coeuntes communi tangente sint praediti. Tales autem curvas innumerabiles exhiberi posse, tam algebraicas, quam transcendentes, iam olim ostendi, cum Problema de eiusmodi curvis, circa datum punctum lucidum describendis, proposuissem, ita ut omnes radii, a curvua bis reflexi, iterum in ipsum punctum lucidum revertantur, quod Problema variis solutionibus in Actis Lipsiensibus pro Annis 1746 et 1748 solutum reperitur. Hic enim tota solutio ad inventionem huiusmodi curvarum triangularium reducitur, quippe quibus causticae radiorum reflexorum formantur.

§.2. Praeter eum usum autem, quem istiusmodi curvae triangulares in commemorato problemate catoptrico praestant, imprimis considerari merentur curvae, quae ex evolutione talis curvae triangularis ABC nascuntur. Hunc in sinem vocemus longitudinem arcus $AB = c$, arcus $AC = b$ et arcus $BC = a$. Iam arcui AB concipiatur filum applicatum, quod extra A prolongetur usque in F , ita ut sit $AF = f$, et stilus in F insertus promoveatur, donec arcus AB fuerit evolutus, et filum perveniat in situm Bg , eritque $Bg = AF + \text{arcu } AB = f + c$; tum motus stili continuetur et filum Bg successive applicetur arcui $BC = a$, donec perveniat in H , eritque

$$BC + CH = Bg = f + c, \quad \text{unde sit} \quad CH = f + c - a;$$

quo cum fuerit perventum, filum applicetur arcui CA , ubi notari convenit, perinde esse, siue arcus CA maior sit, siue minor arcu CB ; semper enim filum totum arcum CA occupare debet. Iam motus stili ex H continuetur in f donec filum fA cuspidem A tanget, tum igitur erit

$$Af = CH + AC = f + c - a + b;$$

De Curvis Triangularibus

Auteur
L. EULER

§.1. Ik noem driehoekige krommen, deze uit drie bogen AB , AC en BC naar binnen gebogen, die in de hoeken A , B en C samenkomen en die ook geen andere vertakkingen bevatten. Deze krommen van deze aard zijn continu en **kunnen uitgedrukt worden een zekere vergelijking**, hetzij algebraïsch, of zelfs transcendent

huiusmodi: van deze aard, redictur: wordt herleid, quippe:immers

§.2. Naast het gebruik van de driehoekige krommen hierboven vermeldt ...

catoptrico praestant, imprimis considerari merentur curvae, quae ex evolutione talis curvae triangularis ABC nascuntur.

Hierbij zal ik de lengte van de boog benoemen als $AB = c$, boog $AC = b$ en boog $BC = a$. Bevestig nu een touw aan de boog AB , en verleng dit vanuit A tot in F , zodat $AF = f$, en beweeg een pen ingebracht in F , tot de boog AB ontwikkeld wordt, en de draad aankomt in positie Bg , en dus $Bg = AF + \text{de boog } AB = f + c$; beweeg opnieuw de pen continu en bevestig opeenvolgend de draad Bg aan de boog $BC = a$, tot het aankomt in H , en dan

$$BC + CH = Bg = f + c, \quad \text{zodat het is dat} \quad CH = f + c - a;$$

catoptrico: gespiegeld?

Nunc igitur filum motum Af successive arcum AB involuet, donec perueniat in G , eritque

$$BG = Af - AB = f - a + b.$$

Iam filum ab arcu BA transferatur in arcum BC et evoluatur, donec perveniat in situm Ch , ubi erit

$$Ch = BG + BC = f + b.$$

Denique stilus ab h promoveatur involuendo arcum CA , hocque modo revertetur in ipsum punctum F , ubi motus est inceptus: erit enim $AF = Ch - CA$, ideoque $AF = f$: erat autem utique $AF = f$.

§.3. Hinc igitur patet, curvuam, ex evolutione curvae triangularis ABC natam, esse curvam in se redeuntem, et tractu uniformi praeditam, scilicet $FgHfGhF$, si modo puncta F , H , H extra curvam ABC cadant. Atque hic ista insignis proprietas ante omnia se ossert: quod rectae $F A f$, $H C h$ et $G B g$ non solum utrinque ad curvam sint normales, uti ex natura evolutionis manifestum est, sed etiam, quod inter se sint aequales; est enim

$$FAf = AF + Af = 2f + c - a + b,$$

tum vero

$$ACH = CH + Ch = 2f + c - a + b,$$

simili modo

$$GBg = BG + Bg = 2f + c - a + b.$$

Verum haec proprietas multo latius patet. Si enim per quoduis punctum S nostrae curvae triangularis producat utrinque tangens XSx , ca etiam ex natura evolutionis utrinque ad curvam descriptam erit normalis; tum vero erit

$$SX = CS + CH = f + c - a = CS,$$

deinde vero etiam erit

$$Sx = FA + AS = f + AS$$

hinc tota recta

$$Xx = 2f + c - a + CS + AS = 2f + c - a + b \text{ ob } AS + CS = b,$$

§.3. ...

tum vero

$$\textcolor{red}{H}Ch = CH + Ch = 2f + c - a + b,$$

Maar dit heeft die eigenschappen die veel verder gaan.

...

$$SX = CS + CH = f + c - a + \textcolor{red}{C}S,$$

het is ook waar dat er geldt

$$Sx = FA + AS = f + AS$$

zodat de totale rechte

$$Xx = 2f + c - a + CS + AS = 2f + c - a + b \text{ ob } AS + CS = b,$$

Deze kromme, die ontstaan is als een involutie van de driehoekige kromme ABC , heeft de volgende buitengewone eigenschap: Als een normaal wordt geconstrueerd op een punt X en de kromme wordt een tweede keer gesneden in een punt x , dan is ze ook daar normaal en bovendien heeft de afstand Xx eenzelfde lengte $= 2f + c - a + b$, een eigenschap die zo verbonden wordt aan een cirkel dat het onmogelijk lijkt dat ze ook bestaat in andere krommes.

quocirca curva, ex evolutione curvae triangularis ABC nata, hac eximia gaudet proprietate: ut si ad eius punctum quodcunque X ducatur normalis, donec curvae iterum occurrat in x , ea etiam in hoc puncto ad curvam sit normalis, ac praeterea tota hac recta Xx ubique eandem habeat longitudinem $= 2f + c - a + b$, quae proprietas vulgo circulo tam propria esse videtur, ut vix in alias lineas curvas competere posse videatur.

- §.4. Mirum hic fine dubio videbitur, quod terna latera figurae triangularis a, b et c non aequaliter in formulas inventas ingrediantur. Ratio autem huius disparitatis in eo est sita, quod intervallum AF potius quam CH vel BG simplici litera f designauimus. Quo igitur hanc inaequalitem evitemus, et uniformitatem in calculum introducamus, vocemus intervallum $AF = k + a$, ita ut sit $f = k + a$ atque omnes rectae supra exhibitae iam sequenti modo concinne experimentur:

$$\begin{array}{lll} AF = k + a; & BG = k + b; & CH = k + c \\ Af = k + b + c; & Bg = k + a + c; & Ch = k + a + b \end{array}$$

tum vero nunc longitudo omnium rectorum per curvam discriptam normaliter ductarum, erit $= 2k + a + b + c$. Hic autem quantitatem k pro lubitu accipere licet, ita ut ex eadem figura triangulari innumerae curvae istius indolis describi possint. Quin etiam quantitas k adea negat accipi poterit, dummodo formulae $k + a$; $k + b$ et $k + c$ positivos obtineant valores; si enim haec intervalla fierent negativa, curva descripta non amplius prodiret circuli-formis, sed intra curvam ABC caderet, atque etiam tres cuspides g, f, h esset habitura, quemadmodum ex natura evolutionis facile colligere licet.

- §.5. Huiusmodi autem curvas, ex evolutione curvarum triangularium natas, quatenus cum circulo tam egregie conveniunt, brevitatis gratia *Orbiformes* nominemus, hicque ante omnia observasse *inunabit*, ex qualibet curva orbiformi problema catoptricum supra memoratum infinitis modis facillime resolvi posse. Sit enim FGH talis curva orbiformes quaecunque, intra qua punctum lucidum X pro lubitu constituatur; tum ducta recta quaecunque Xx , ad curvam utrinque normali, quae ergo constantem habebit magnitudinem, iungantur rectae LX et Lx , eaeque bisecentur in punctis O et o , unde ad eas normaliter educantur rectae OZ et oz , rectae Xx occurrentes in punctis Z et z ; haecque duo puncta sita erunt in curva quaesita. Ra-

- §.4. Het is wonderbaarlijk dat de zijden van de driehoekige figuur a, b en c niet als gelijkwaardige ingrediënten gevonden worden in de formule. De reden voor deze ongelijkheid ligt er eenvoudigweg in dat AF in plaats van CH of BG als letter f benoemd werd. Zodat hierdoor om deze ongelijkheid te vermijden en gelijkheid in de berekeningen te brengen, de afstand $AF = k + a$ genoemd wordt, zodat het zo is dat $f = k + a$, en alle lijnen hierboven op deze manier elegant uitgedrukt kunnen worden als:

$$\begin{array}{lll} AF = k + a; & BG = k + b; & CH = k + c \\ Af = k + b + c; & Bg = k + a + c; & Ch = k + a + b \end{array}$$

zodat nu inderdaad de lengte van alle lijnen, normaal beschreven op de afgeleide kromme, $= 2k + a + b + c$ zal zijn. Hier kan de waarde van k naar wens aangepast worden, waaruit op een zelfde manier de driehoekige figuur de geboorte van ontelbare krommen beschrijft. Het is zelfs mogelijk dat k negatieve waarden aanneemt zolang de formules $k + a$; $k + b$ en $k + c$ positieve waarden hebben; want als deze afstanden negatief zijn, dan heeft de beschreven kromme niet meer een cirkelvormig uitzicht, maar verdwijnt binnenin de kromme ABC

- §.5. De krommen van deze aard, geboren als involuties uit driehoekige krommen, die samen met de cirkel zo uitzonderlijk samenkomen, zal ik voor het gemak *Orbiformen* noemen, en uit al deze observaties ... Uit de voorge-noemde probleem van de orbiformen kan het *catoptrische* probleem op een oneindig aantal manieren opgelost worden. Als FGH zo'n orbiform is, en hierbinnen uit een punt X gewenste lichtstralen gevormd worden; dan heeft elke rechte Xx , langs beide kanten normaal aan de kromme, eenzelfde constante lengte, verbonden via de rechten LX en Lx , en ze moeten middendoor verdeeld worden in de punten O en o , en breng er de normale lijnen OZ en oz aan, rechten die Xx in de punten Z en z ontmoeten; zodat

dius enim LZ , primu reflexus, fiet Zz , qui, denuo reflexus in z , in ipsum punctum lucidum L remittetur, quemadmodum ex natura reflexionis haud difficulter demonstrare liceret, nisi hoc argumentatum iam uberrime esset pertractatum.

§.6. Ob hunc insignem usum curvarum triangularium utique optandum esset, ut methodus certa pateret, cuius ope huismodi curvas triangulares, quotquot libuerit, investigare liceret, id quod primo intuitu nimis difficile videre potest. Verum hunc investigationem invertamus, ac primo quaeramus curvas orbiformes, quales hactenus descripsimus; tum enim certi esse poterimus, earum evolutas huismodi fore curvas triangular quales desideramus, Praeterea vero etiam hoc modo istud commodum assequemur: ut, quoties curva orbiformis fuerit algebraica, toties quoque curva triangularis non solum fiat algebraica, sed insuper etiam rectificabilis, quandoquidem evolutae omnium curvarum algebraicarum simul rectificationem admittunt.

§.7. Sit igitur $FMfm$ talis curva orbiformis, qualem investigare nobis est propositum, in qua sumamus rectam Ff pro axe fixo, qui utrinque ad curvam sit normalis cuius longitudinem ponamus $Ff = 2f$. Tum ex puncto quocunque M ad curvam ducatur normalis Mm quae ergo etiam in m ad curvam debet esse normalis, eiusque longitudo Mm itidem sit $= 2f$. Iam ex punctis M et m ad axem Ff demittantur perpendiculara Pm et pm , ac pro puncto M vocentur coordinatae $FP = X$ et $PM = Y$; at pro puncto m sit $Fp = x$ et $pm = -y$, quia haec applicata in partem contrariam cadit. His positis talis aequatio inter X et Y desideratur, ut, si loco X scribatur x , valor ipsius Y sponte prodeat $= -y$. Nisi enim hoc fieret, tota curva $FMfm$ non esset continua. Sequenti autem modo hae quatuor quantitates a se inuicem pendent: Cum intervallum PN sit subnormalis respectu puncti M , posito $dY = P dX$, erit haec subnormalis $PN = PY$, hincque normalis $MN = Y\sqrt{1 + PP}$. Simili modo altero puncto m erit pN subnormalis retro posita; unde sumto $dy = p dx$ erit $pN = -py$; hinc normalis $mN = -y\sqrt{1 + pp}$. Quia igitur triangula PMN et pmN sunt similia, erit $P = p$. Porro quia nuimus esse $Mm = 2f$; ex m agatur axi parallela mS , ipsi MP productae occurrens in S , et similitudo triangulorum MNP et MmS dabit $MS = \frac{2f}{\sqrt{1+pp}}$ et $mS = \frac{2fp}{\sqrt{1+pp}}$.

Cum igitur fit

$$MS = MP + mp = Y - y \quad \text{et} \quad mS = Fp - FP = x - X$$

twee punten van de kromme bekomen worden. Zo geldt voor de straal LZ

§.6. Door het opmerkzaam gebruik van driehoekige krommen

...

wat op het eerste zicht zeer moeilijk in te zien is. Maar het onderzoek wordt omgedraaid, waar ten eerste de orbiforme krommen gezocht worden, zoals tot dusver beschreven, want dan zijn we zeker dat we in staat zijn. . .

§.7. Laat $FMfm$ een orbiforme kromme zijn . . . , waardoor we een rechte lijn Ff drijven, die normaal is aan de kromme aan beide zijden, waarvan we de lengte $Ff = 2f$ noemen. Dan voor elk ander punt M wordt de normaal aan de kromme getekend zodat deze ook in m normaal is aan de kromme, en deze lengte Mm is ook $= 2f$. Door de punten M en m wordt op de as Ff de loodrechten PM en pm getekend, en noem de coördinaten van het punt M via $FP = XF$ en $PM = Y$; in het punt m is $Fp = x$ en $pm = -y$, dit is toegepast in tegengestelde richting. . .

Er volgt de manier waarop deze vier eenheid met elkaar in verband staan: Omdat de afstand van het punt M tot PN subnormaal is, is positie $dY = P dX$. . . hieruit volgt $MN = Y\sqrt{1 + PP}$.

hinc colligitur

$$Y - y = \frac{2f}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{et} \quad x - X = \frac{2fp}{\sqrt{1+pp}},$$

praeterea vero, uti iam notauimus, debet esse

$$\frac{dY}{dX} = P = p \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = p.$$

§.8. Cum igitur inuenerimus differentias coordinatarum $Y - y$ et $x - X$, statuamus earum summas $X + x = 2Q$ et $Y + y = 2R$, hincque singulas coordinatas adipiscemur ita expressas:

$$\begin{aligned} X &= Q - \frac{fp}{\sqrt{1+pp}}; & Y &= R + \frac{f}{\sqrt{1+pp}}; \\ x &= Q + \frac{fp}{\sqrt{1+pp}}; & y &= R - \frac{f}{\sqrt{1+pp}}. \end{aligned}$$

Hinc igitur differentiando erit

$$\begin{aligned} dX &= dQ - \frac{f dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}; \\ dY &= dR - \frac{fp dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}; \\ dx &= dQ + \frac{f dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}; \\ dy &= dR + \frac{fp dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Cum igitur esse debeat $dY = p dX$ et $dy = p dx$, fiet

$$\begin{aligned} dR - \frac{fp dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} &= p dQ - \frac{fp dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \\ dR + \frac{fp dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} &= p dQ + \frac{fp dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

§.8. We vinden zo als verschil van coördinaten $Y - y$ en $x - X$, waarvan we de sommen $X + x = 2Q$ en $Y + y = 2R$ vastleggen, er volgt dat de enkele coördinaten uitgedrukt kunnen worden als:

$$\begin{aligned} X &= Q - \frac{fp}{\sqrt{1+pp}}; & Y &= R + \frac{f}{\sqrt{1+pp}}; \\ x &= Q + \frac{fp}{\sqrt{1+pp}}; & y &= R - \frac{f}{\sqrt{1+pp}}. \end{aligned}$$

Dit afleiden leidt tot:

$$\begin{aligned} dX &= dQ - \frac{f dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}; \\ dY &= dR - \frac{fp dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}; \\ dx &= dQ + \frac{f dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}; \\ dy &= dR + \frac{fp dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Waardoor het zo moet zijn dat $dY = p dX$ et $dy = p dx$, wat wordt

$$\begin{aligned} dR - \frac{fp dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} &= p dQ - \frac{fp dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \\ dR + \frac{fp dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} &= p dQ + \frac{fp dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Uit beide van deze vergelijkingen volgt $dR = p dQ$, zodat $R = \int p dQ$.

Ex utraque harum aequationum sequitur fore $dR = p dQ$, ideoque $R = \int p dQ$.

§.9. Cum igitur omnibus conditionibus satisfecerimus, quantitas Q arbitrio nostro permittitur, eiusque ergo loco functio quaecunque ipsius p accipi poterit, quae autem ita debet esse comparata, ut formula $p dQ$ integrationem admittat, siquidem curvas algebraicas desideremus. Quoniam igitur pro coordinatis x et y invenimus:

$$x = Q + \frac{fp}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{et} \quad y = R - \frac{f}{\sqrt{1+pp}}$$

existente $R = \int p dQ$; pro alteris vero coordinatis X et Y sit

$$X = Q - \frac{fp}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{et} \quad Y = R + \frac{f}{\sqrt{1+pp}},$$

manifestum est, has ex illis nasci, si modo formulae radicalis $\sqrt{1+pp}$ signum immutetur. Quare cum haec formula per suam naturam sit ambigua, priores formulae, pro x et y inventae, posteriores pro X et Y iam sponte involuunt, ita ut eadem aequatio rationalis tam pro x et y quam pro X et Y necessario sit prodituro. Ad hoc autem necesse est, ut nesque Q neque R eandem formulam $\sqrt{1+pp}$ involuant, quia alioquin etiam signum harum litterarum mutari oporteret. Hinc igitur ista regula statui potest: ut pro Q functio rationalis ipsius p accipi debeat.

§.10. Ut autem curvas algebraicas obtineamus, quia esse debet $R = \int p dQ = pQ - \int Q dp$; statuamus $\int Q dp = S$, denotante S functionem quamcunque rationalem ipsius p , eritque $Q = \frac{dS}{dp}$, hincque porro $R = \frac{p dS}{dp} - S$. Nunc igitur pro curvis orbiformibus sequentes determinationes ambarum coordinatarum x et y exhibere possumus:

$$x = \frac{dS}{dp} + \frac{fp}{\sqrt{1+pp}}, \quad y = \frac{p dS}{dp} - S - \frac{f}{\sqrt{1+pp}},$$

ubi pro S functionem quamcunque rationalem ipsius p , vel saltem talem, accipere possumus, quae, dum formula $\sqrt{1+pp}$ est ambigua, eundem valorem retineat.

§.11. Quia natura orbis, qualem consideramus, postulat, ut curva sit in se re-

§.9. Als ik voldoe aan alle voorwaarden, laat onze keuze van hoeveelheid Q toe, en hierdoor... formule $p dQ$ kan geïntegreerd worden, omdat we een algebraïsche kromme wensen. Zo vinden we voor de coördinaten x en y :

$$x = Q + \frac{fp}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{et} \quad y = R - \frac{f}{\sqrt{1+pp}}$$

als $R = \int p dQ$ bestaat; voor zeker zijn de andere coördinaten duidelijk

$$X = Q - \frac{fp}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{et} \quad Y = R + \frac{f}{\sqrt{1+pp}},$$

wat geboren is uit het vorige, waarbij enkel het teken van de wortelvorm $\sqrt{1+pp}$ gewijzigd is. Waarom is deze formule van nature ambigue, voor... Voor deze reden is het een regel die voorgeschreven mag worden: voor functie Q aanvaard rationale p .

§.10. Om een algebraïsche kromme te verkrijgen, moet het zijn dat $R = \int p dQ = pQ - \int Q dp$; we krijgen $\int Q dp = S$, stel met S een zekere rationale functie voor van p , en dan $Q = \frac{dS}{dp}$, vandaar verder $R = \frac{p dS}{dp} - S$. En dus vervolgens voor de orbiforme kromme kunnen we aantonen dat beide coördinaten x en y verkregen worden door:

$$x = \frac{dS}{dp} + \frac{fp}{\sqrt{1+pp}}, \quad y = \frac{p dS}{dp} - S - \frac{f}{\sqrt{1+pp}};$$

en voor S ...

§.11. Het is verplicht wegens de natuur van de wereld, hetgeen we beschouwen

diens, et nusquam in infinitum porrigatur, functio S ita comparata esse debet, ut neque abscissa x neque applicata y unquam fieri possit infinita, quem in finem hanc functionem S tali fractioni:

$$\frac{\alpha + \beta}{A + B} \frac{p + \gamma}{p + C} \frac{pp + \delta}{pp + D} \frac{p^3 + \text{etc.}}{p^3 + \text{etc.}}$$

aequali oportet, cuius denominator nullum habeat factorem simplicem realem; si enim factorem talem haberet puta $p - n$, tum, sumto $p = n$, valor ipsius S fieret infinitus. Deinde summa potestas ipsius p in numeratore haud debet esse major quam in denominatore; aliter enim, casu $p = \infty$, alor ipsius S iterum in infinitum excresceret. Praeterea vero etiam exponentes fracti ipsius p admitti quidem possent, ita tamen, ut nullum membrum ambiguum obtineat valorem, quia alioquin eidem valori ipsius p plures tam abscissae quam applicatae convenire possent; hoc enim casu curva non pst unam revolutionem, sed demum post duas plureque in se rediret; tum autem eius evoluta non amplius foret curva triangularis, sed vel pentagona, vel heptagona, vel enneagona vel etc. id quod insituto nostro adversatur.

§.12. Ex hac constructione generali, in qua continentur omnes curvae orbiformes, et quidem simplices, quae post unam revolutionem in se redeunt, facile erit formulas elicere pro descriptione curvarum triangularium; cum enim evolutae harum curvarum orbiformium certe sint figurae triangulares, tantum opus est, ut in evolutas istarum curvarum inquiramus. Quia autem omnes illae curvae, pro quovis valore litterae f , ex evolutione eiusdem curvae triangularis nascuntur, litera f non in determinationem evolutae ingreditur; unde in formulis nostris, pro x et y inventis, partes, hanc litteram f involuentes, tuto omittere licebit; sicque pro hac investigatione habebimus tantum

$$x = \frac{dS}{dP} \quad \text{et} \quad y = \frac{p dS}{dp} - S,$$

quam ob rem naturam evolutae, ex his valoribus oriundae, investigasse sufficiet. ...

§.13. Sit igitur $FMfm$ talis curvas, in qua sit abscissa $FP = x = \frac{dS}{dp}$, applicata

... om uiteindelijk de functie S op te breken als:

$$\frac{\alpha + \beta}{A + B} \frac{p + \gamma}{p + C} \frac{pp + \delta}{pp + D} \frac{p^3 + \text{etc.}}{p^3 + \text{etc.}}$$

het is evengoed nodig dat, als de noemer nul bevat de factoren reëel vereenvoudigen; als er zo'n factor bevat is, bijvoorbeeld $p - n$, dan, in het geval dat $p = n$, zal de waarde van S oneindig worden. Vandaar de macht van p in de teller groter moet zijn dan in de noemer; anderzijds, in het geval dat $p = \infty$, dan zal de waarde van S opnieuw naar oneindig groeien. ...

§.12. Uit dit volgt een algemene constructie, waarin alle orbiforme krommen bevat zitten, en dit vereenvoudigt, na een revolutie om zichzelf, gemakkelijk in formules die driehoekige krommen beschrijven. ...

§.13. Laat nu $FMfm$ een dergelijke curve zijn, waarin de abscis $FP = x = \frac{dS}{dp}$,

$PM = y = \frac{p \, d}{dp} - S$, et ducta normali Mm erit subnormalis

$$PN = py = \frac{pp \, dS}{dp} - pS$$

unde sit recta

$$FN = \frac{dS}{dp}(1 + pp) - pS.$$

Ponamus nunc angulum $FNM = \phi$, erit tang. $\phi = \frac{1}{p}$, ideoque $p = \cot. \phi = \frac{\cos. \phi}{\sin. \phi}$, unde fit

$$\sin. \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + pp}} \quad \text{et} \quad \cos. \phi = \frac{p}{\sqrt{1 + pp}}$$

tum vero etiam $d\phi = -\frac{dp}{1 + pp}$. Quod si iam brevitatis gratia ponamus $FN = v$, notum est, centrum circuli, curvam in M osculantis, fore in puncto U , ita ut sit

$$NU = \frac{dv \sin. \phi}{d\phi};$$

Cum autem, sumto elemento dp constante, sit

$$dv = \frac{ddS}{dp}(1 + pp) + p \, dS - S \, dp \quad \text{et} \\ \frac{\sin. \phi}{d\phi} = -\frac{\sqrt{1 + pp}}{dp}$$

erit recta

$$NU = -\frac{ddS}{dp^2}(1 + pp)^{\frac{3}{2}} - \frac{p \, dS}{dp}\sqrt{1 + pp} + S\sqrt{1 + pp}$$

pro qua formula brevitatis ergo scribamus r , ita ut vit sit $NU = r$.

benoem $PM = y = \frac{p \, dS}{dp} - S$, en uit de normaal Mn ontstaat de subnormaal

$$PN = py = \frac{pp \, dS}{dp} - pS$$

zodat de lijn

$$FN = \frac{dS}{dp}(1 + pp) - pS.$$

Benoem nu de hoek $FNM = \phi$, zodat tang. $\phi = \frac{1}{p}$, zodat $p = \cot. \phi = \frac{\cos. \phi}{\sin. \phi}$, en dit resulteert in

$$\sin. \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + pp}} \quad \text{et} \quad \cos. \phi = \frac{p}{\sqrt{1 + pp}}$$

dan geldt ook $d\phi = -\frac{dp}{1 + pp}$. Stel nu voor het gemak de afkorting $FN = v$, het is geweten dat het centrum van de osculatiecirkel in M , in het punt U is, dan is het zo

$$NU = \frac{dv \sin. \phi}{d\phi};$$

Maar als, het element dp constant genomen wordt, is

$$dv = \frac{ddS}{dp}(1 + pp) + p \, dS - S \, dp \quad \text{et} \\ \frac{\sin. \phi}{d\phi} = -\frac{\sqrt{1 + pp}}{dp}$$

en de lijn zal zijn

$$NU = -\frac{ddS}{dp^2}(1 + pp)^{\frac{3}{2}} - \frac{p \, dS}{dp}\sqrt{1 + pp} + S\sqrt{1 + pp}$$

voor het gemak van afkorting schrijven we voor de formule r , zodat er geldt $NU = r$.

§.14. Invento puncto U , quod erit in evoluta quam quaerimus, inde axem ducamus perpendiculum UT , ac pro evoluta vocemus abscissam $FT = t$ et

§.14. a

applicatam $TU = u$; erit autem:

$$NT = NU \cos. \phi = \frac{pr}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{et}$$

$$TU = NU \sin. \phi = \frac{r}{\sqrt{1+pp}}$$

unde, loco r valorem assumptum substitutuendo, consequemur abscissam

$$t = FN + NT = \frac{dS}{dp} - \frac{p \, ddS}{dp^2} (1 + pp),$$

tum vero applicatam

$$u = S - \frac{p \, dS}{dp} - \frac{ddS}{dp^2} (1 + pp);$$

unde colligimus

$$t - pu = \frac{dS}{dp} (1 + pp) - pS.$$

Ope igitur harum formularum, quaecunque functio idonea ipsius p pro S accipiat, tam abscissam $FT = t$ quam applicatam $TU = u$ assignare poterimus, quibus curva triangularis determinatur. Valores autem idoneas, pro S accipiendos, supra indicaui.

§.15. Quo hanc investigationem exemplo illustremus, sumamus

$$S = \frac{ap}{1+pp}, \quad \text{eritque}$$

$$\frac{dS}{dp} = \frac{a(1-pp)}{(1+pp)^2} \quad \text{et} \quad \frac{ddS}{dp^2} = \frac{2ap^3 - 6ap}{(1+pp)^3}$$

unde colligimus

$$t = \frac{a + 5app - 2ap^4}{(1+pp)^2} \quad \text{et} \quad u = \frac{6ap}{(1+pp)^2}.$$

Hinc primo patet, siue p sumatur positive siue negative, abscissam t eandem manere, applicatam vero u hoc casu in partem contrariam cadere, unde

§.15. Zoals dit onderzoeksvoorbeeld illustreert, hebben we

$$S = \frac{ap}{1+pp}, \quad \text{eritque}$$

$$\frac{dS}{dp} = \frac{a(1-pp)}{(1+pp)^2} \quad \text{et} \quad \frac{ddS}{dp^2} = \frac{2ap^3 - 6ap}{(1+pp)^3}$$

hieruit zien we dat

$$t = \frac{a + 5app - 2ap^4}{(1+pp)^2} \quad \text{et} \quad u = \frac{6ap}{(1+pp)^2}.$$

Het is duidelijk dat, nemen we p positief of negatief, de abscis t hetzelfde blijft, echter zal u in deze gevallen in tegengestelde delen vallen, en onze

noster FT huius curvae erit diameter. Deinde, sumto $p = 0$ fiet $t = a$ et $u = 0$; at si capiatur p inifite parvum, fiet

$$t = a + 3app \quad \text{et} \quad u = 6ap.$$

Porro, sumto $p = \frac{1}{2}$, erit $t = \frac{34}{25}a$ et $u = \frac{48}{25}a$; sin autem $p = 1$ erit $t = a$ et $u = \frac{3}{2}a$. Sit denique $p = \infty$, eritque $t = -2a$ et $u = 0$. Hinc patet, curvam huiusmodi figuram esse habituram, qualem in figura ei dedimus, ternas cuspidis habentem, B, C, D , existente $FD = 2a$ et $FA = a$. Pro alteris cuspidibus B et C quaeratur locus, ubi applicata u fit maxima, et cum sit

$$d. \frac{p}{(1+pp)^2} = \frac{dp(1-3pp)}{(1+pp)^3}$$

hoc eueniet, ubi $3pp = 1$, siue $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$; tum autem fiet abscissa $t = \frac{11}{8}a$ et $u = \frac{9\sqrt{3}}{8}a$. Ergo ducta chorda BC , axem secante in E , erit $FE = \frac{11}{8}a$ et $EB = EC = \frac{9\sqrt{3}}{8}a$. Quod si iam quoque ducantur chordae $BD = CD = \frac{\sqrt{9\sqrt{3}}}{8}a$; ex quo patet, chordas omnes BD, CD et BC esse inter se aequales. Referet ergo haec curva triangularis triangulum aequilaterum.

§.16. Accuratius autem in symptomata nostrae curvae triangularis inquiramus, et quoniam pro coordinatis $FT = t$ et $TU = u$ has inuenimus formulas:

$$t = \frac{dS}{dp} - \frac{p \, ddS}{dp^2}(1+pp) \quad \text{et} \\ u = S - \frac{p \, dS}{dp} - \frac{ddS}{dp^2}(1+pp)$$

primum observo, rectum NU esse tangentem curvae in punctu U , quae cum ad axem sit inclinata angulo $TNU = \phi$, cuius cotangens est p , necesse est ut sit $\frac{du}{dt} = \text{tang. } \phi = \frac{1}{p}$, unde sit $dt = p \, du$. Est vero per formulas

$$dt = -\frac{3pp \, ddS}{dp} - \frac{p(1+pp) \, d^3S}{dp^2} \quad \text{et} \\ p \, du = -\frac{3pp \, ddS}{dp} - \frac{p(1+pp) \, d^3S}{dp^2}.$$

ideoque reuera $dt = p \, du$.

as FT van de kromme is de diameter. Dan veronderstel $p = 0$ zal $t = a$ en $u = 0$; nemen we p nu oneindig klein, dan

$$t = a + 3app \quad \text{et} \quad u = 6ap.$$

Verder als $p = \frac{1}{2}$, geldt $t = \frac{34}{25}a$ en $u = \frac{48}{25}a$; maar als $p = 1$ geldt $t = a$ en $u = \frac{3}{2}a$. Als uiteindelijk $p = \infty$, dan $t = -2a$ en $u = 0$. Hieruit blijkt dat deze figuur een kromme bezit, wat in de figuur, drie spitse punten heeft, B, C, D , waarbij $FD = 2a$ en $FA = a$. Voor de andere spitsen B en C zoeken een plaats, wanneer u maximaal is, en gezien het zo is is dat:

$$d. \frac{p}{(1+pp)^2} = \frac{dp(1-3pp)}{(1+pp)^3}$$

leidt dit tot, als $3pp = 1$, of $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dan wordt de abscis $t = \frac{11}{8}a$ en $u = \frac{9\sqrt{3}}{8}a$. Daardoor zal de koorde BC de as snijden in E , en zal $FE = \frac{11}{8}a$ zijn en $EB = EC = \frac{9\sqrt{3}}{8}a$. Trekken we nu ook de koorden BD en CD , met $DE = \frac{27}{8}a$ dan $BD^2 = \frac{972}{64}aa$, en dus $BD = CD = \frac{9\sqrt{3}}{4}a$; het is duidelijk, alle koorden BD, CD en BC zijn ondereen gelijk. Daarom is deze driehoekige kromme dus bevat in een gelijkzijdige driehoek.

§.16. We onderzoeken meer preciezer de eigenschappen van onze driehoekige kromme, en omdat we voor de coördinaten $FT = t$ en $TU = u$ de formules hebben gevonden:

$$t = \frac{dS}{dp} - \frac{p \, ddS}{dp^2}(1+pp) \quad \text{et} \\ u = S - \frac{p \, dS}{dp} - \frac{ddS}{dp^2}(1+pp)$$

Merk nu eerst op dat de rechte NU rakend is aan de kromme in U , die aangezien de hellingshoek met de as $TNU = \phi$ is, die cotangens p heeft, dan is het noodzakelijk dat $\frac{du}{dt} = \text{tang. } \phi = \frac{1}{p}$, en dus $dt = p \, du$. Dit volgt ook uit de formules

$$\begin{aligned} dt &= -\frac{3pp \, ddS}{dp} - \frac{p(1+pp) \, d^3S}{dp^2} \quad \text{et} \\ p \, du &= -\frac{3pp \, ddS}{dp} - \frac{p(1+pp) \, d^3S}{dp^2}. \end{aligned}$$

Zodat in het echt $dt = p \, du$.

§.17. Quia igitur est $dt = p \, du$, iisdem casibus, quibus sit $\frac{dt}{dp} = 0$, etiam fiet $\frac{du}{dp} = 0$; unde patet, ubicunque abscissa t fuerit vel maxima vel minima, ibidem quoque fore applicatam maximam vel minimam, quae proprietas utique in cuspides conuenit. Ex quo colligimus, ubicunque ambae coordinatae p et q simul fiunt vel maximae vel minimae, ibi quoque existere cuspides nostrae curvae; quare cum curva habeat tres cuspides, in tribus quoque locis tam t quam u maximum fieri necesse est.

§.18. Imprimis autem hic notatu dignum occurrit, nostram curva triangularem esse rectificabilem, quippe cuius arcu aequalis est radio osculi MU curvae orbiformis, unde est nata. Videmus autem esse

$$\begin{aligned} NU = r &= -\frac{ddS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} - \frac{p \, dS}{dp} \sqrt{1+pp} \\ &+ S \sqrt{1+pp}; \quad \text{at} \quad MN = y \sqrt{1+pp} \\ &= \frac{p \, dS \sqrt{1+pp}}{dp} - S \sqrt{1+pp}, \end{aligned}$$

unde sit radius osculi

$$MU = -\frac{ddS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}},$$

qui ergo longitudinem nostrae curvae triangularis exprimit; id quod etiam patet ex proprietate supra observata, quod sit $dt = p \, du$, unde fit elementum curvae

$$\sqrt{dt^2 + du^2} = du \sqrt{1+pp} = -\frac{3p \, dS}{dp} \sqrt{1+pp} - \frac{d^3S}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}}$$

§.17. Omdat het zo is dat $dt = p \, du$, de gevallen waarbij het zo is dat $\frac{dt}{dp} = 0$, en is het ook zo dat $\frac{du}{dp} = 0$; het is dus duidelijk dat, wanneer de abscis t ofwel maximaal ofwel minimaal is, op dezelfde plaats maximaal ofwel minimaal zal zijn, wat de eigenschappen in de spitsen doet samenvallen. Van wat we verzamelen, zijn beide coördinaten p en q dus gelijktijdig ofwel maximaal ofwel minimaal, daar bestaan dan ook de spitsen van onze krommen; en gezien de kromme 3 spitsen hebben, moeten zowel t als u in 3 plaatsen maximaal zijn.

§.18. In het bijzonder wees erop gewezen dat het voldoende is, onze driehoekige kromme te herleiden, aangezien ze gelijk is aan de kromtestraal MU van onze orbiforme kromme, en eruit geboren wordt. We zien dat

$$\begin{aligned} NU = r &= -\frac{ddS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} - \frac{p \, dS}{dp} \sqrt{1+pp} \\ &+ S \sqrt{1+pp}; \quad \text{bij} \\ MN = y \sqrt{1+pp} &= \frac{p \, dS \sqrt{1+pp}}{dp} - S \sqrt{1+pp}, \end{aligned}$$

en de kromtestraal

$$MU = -\frac{ddS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}},$$

die de lengte van onze driehoekige kromme uitdrukt; het is ook duidelijk van de observaties uit de bovenstaande eigenschap dat $dt = p \, du$, en dus begint de kromme

$$\sqrt{dt^2 + du^2} = du \sqrt{1+pp} = -\frac{3p \, dS}{dp} \sqrt{1+pp} - \frac{d^3S}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}}$$

cuius integrale manifesto est

$$-\frac{ddS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}}.$$

§.19. Quoniam hic tantum curvas triangulares investigare instituimus, parum solliciti, utrum sint rectificabiles nec ne, dummodo fuerint algebraicae: hac conditione ommissa simpliciores formulas pro coordinatis t et u exhibere, atque adeo, sine ullo respectu ad curvas orbiformes habito, directe ex ipsa indole harum curvarum elicere poterimus. Cum enim esse debeat $dt = pdu$, erit $t = \int pdu = pu - \int u dp$. Iam statuamus $\int u dp = \Pi$, ita ut fit $u = \frac{d\Pi}{dp}$, unde sit $t = \frac{p d\Pi}{dp} - \Pi$; ubi pro Π eiusmodi functiones ipsius p accipi debent, quae nullo casu fiant infinitae, quicunque valores literae t tribuantur, cuiusmodi functiones iam supra descripsimus; tum vero etiam hae functiones Π nulla signa radicalia, quae ambiguitatem involvant, involvere debent. Imprimis autem necesse est, ut ambae coordinatae t et u tribus casibus fiant maximae vel minimae, id quod eueniet, si, ob $u = \frac{d\Pi}{dp}$, haec aequatio: $\frac{dd\Pi}{dp^2} = 0$, tres habeat radices reales, neque vero plures.

§.20. Sumamus exempli gratia $\Pi = \frac{a+bp}{1+fp+gpp}$, quae nullo casu fit infinita, si modo fuerit $ff < 4g$, tum autem erit

$$\frac{d\Pi}{dp} = \frac{b - af - 2agp - bgpp}{(1 + fp + gpp)^2} = u$$

hincque

$$t = \frac{-a - 2afp - 3agp^2 - 2bgp^3}{(1 + fp + gpp)^2}.$$

Ut iam ternas cuspides definiamus, consideremus aequationem $\frac{du}{dp} = 0$, quod quo facilius fieri possit ponamus

$$u = \frac{A + Bp + Cpp}{(1 + fp + gpp)^2},$$

ita ut sit $A = b - af$, $B = -2ag$, $C = -bg$; tunc vero hinc reperitur sequens aequatio:

$$B - 2Af + (2C - Bf - 4Ag)p - 3Bgpp - 2Cgp^3 = 0$$

cuius tres radices nobis ternas cuspides monstrabunt.

waarbij de integraal duidelijk gegeven is door

$$-\frac{ddS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}}.$$

§.19. Omdat we hier enkel driehoekige krommen onderzoeken, maken we ons weinig zorgen, of ze al dan niet herleidbaar zijn, op voorwaarde dat ze algebraïsch zijn: deze voorwaarde laten vallen laat toe meer eenvoudige coördinaten t en u te vinden, en daarvoor, zonder rekening te houden met het liggen in de orbiforme krommen, als direct gevolg van de aard van deze krommen stellen we vast. Aangezien moet gelden dat $dt = pdu$, zal het zijn dat $t = \int pdu = pu - \int u dp$. Laten we nu $\int u dp = \Pi$, zodat het is $u = \frac{d\Pi}{dp}$, waardoor $t = \frac{p d\Pi}{dp} - \Pi$; als voor Π op deze manier een een functie van p moet worden genomen, dat in geen geval oneindig is . . . van welke aard functies hierboven reeds werden beschreven; maar zelfs dan heeft de functie Π geen worteltekens moeten betrekken, wat gewikkeld is in onzekerheid. Maar bovenal is het noodzakelijk dat, beide coördinaten t en u in drie gevallen maximaal ofwel minimaal zijn, hetgeen tot gevolg heeft dat voor $u = \frac{d\Pi}{dp}$, als $\frac{dd\Pi}{dp^2} = 0$, drie reële wortels heeft, of echt meer.

§.20. Laten we bijvoorbeeld $\Pi = \frac{a+bp}{1+fp+gpp}$, dat in geen geval oneindig is, als het maar $ff < 4g$, dan zal

$$\frac{d\Pi}{dp} = \frac{b - af - 2agp - bgpp}{(1 + fp + gpp)^2} = u$$

wat leidt tot

$$t = \frac{-a - 2afp - 3agp^2 - 2bgp^3}{(1 + fp + gpp)^2}.$$

Om de drie spitsen te definiëren, overwegen we de vergelijking $\frac{du}{dp} = 0$, wat we eenvoudiger kunnen maken door

$$u = \frac{A + Bp + Cpp}{(1 + fp + gpp)^2},$$

waarbij $A = b - af$; $B = -2ag$; $C = -bg$; dan vindt men hier de volgende vergelijking:

$$B - 2Af + (2C - Bf - 4Ag)p - 3Bgpp - 2Cgp^3 = 0$$

waarvan de drie wortels onze drie spitsen onthullen.

§.21. Ponamus iam huius aequationis radices esse: I°. $p = \alpha$, II°. $p = \beta$ ac III°. $p = \gamma$, siue aequemus formulam inventum huic producto:

$$2Cg(a-p)(\beta-p)(\gamma-p)$$

quod evolutum praebet

$$2Cg\alpha\beta\gamma - 2Cg(\alpha\gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma)p + 2Cg(\alpha + \beta + \gamma)pp - 2Cgp^3$$

quae forma, inventae aequata, sequentes tres producit determinationes:

$$\text{I}^\circ. B - 2Af = 2Cg\alpha\beta\gamma;$$

$$\text{II}^\circ. 2C - Bf - 4Ag = -2Cg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma);$$

$$\text{III}^\circ. -3Bg; = 2Cg(\alpha + \beta + \gamma);$$

ex quarum tertia fit $B = -\frac{2}{3}C(\alpha + \beta + \gamma)$; ex prima vero

$$A = -\frac{1}{3f}C(\alpha + \beta + \gamma) - \frac{1}{f}Cg\alpha\beta\gamma,$$

qui valores in secunda substituti praebent

$$2C + \frac{(2ff + 4g)}{3f}C(\alpha + \beta + \gamma) + \frac{4g}{f}Cg\alpha\beta\gamma = -2Cg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

quae aequatio, per $\frac{3f}{2C}$ multiplicata, abit in hanc:

$$3f + (ff + 2g)(\alpha + \beta + \gamma) + 6gg\alpha\beta\gamma = -3fg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

haecque aequationes omnes continent determinationes, quibus nostro proposito satisfit.

§.22. Antequam hanc determinationem iu genere ulterius prosequamur, evolua-
mus casum specialem, quo

$$\begin{aligned} \gamma = 0 \text{ et } \beta = -\alpha, \quad \text{unde sit } \alpha\beta\gamma = 0; \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -\alpha^2 \quad \text{et } \alpha + \beta + \gamma = 0, \end{aligned}$$

§.21. Laten we veronderstellen dat de wortels van deze vergelijking al gegeven zijn: $p = \alpha$, II°. $p = \beta$ ac III°. $p = \gamma$, of gelijk aan de formule gevonden door het product

$$2Cg(a-p)(\beta-p)(\gamma-p)$$

die als ontwikkeling biedt

$$2Cg\alpha\beta\gamma - 2Cg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)p + 2Cg(\alpha + \beta + \gamma)pp - 2Cgp^3$$

welke de vorm, gevonden uit de vergelijking, de volgende drie bepalingen produceert:

$$\text{I}^\circ. B - 2Af = 2Cg\alpha\beta\gamma;$$

$$\text{II}^\circ. 2C - Bf - 4Ag = -2Cg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma);$$

$$\text{III}^\circ. -3Bg; = 2Cg(\alpha + \beta + \gamma);$$

uit de derde volgt $B = -\frac{2}{3}C(\alpha + \beta + \gamma)$; van de eerste echter

$$A = -\frac{1}{3f}C(\alpha + \beta + \gamma) - \frac{1}{f}Cg\alpha\beta\gamma,$$

welke waarden in de tweede vervangen worden geeft:

$$2C + \frac{(2ff + 4g)}{3f}C(\alpha + \beta + \gamma) + \frac{4g}{f}Cg\alpha\beta\gamma = -2Cg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

Deze vergelijking met $\frac{3f}{2C}$ vermenigvuldigen, wijziget naar:

$$3f + (ff + 2g)(\alpha + \beta + \gamma) + 6gg\alpha\beta\gamma = -3fg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

de vergelijkingen hier bevatten alle bepalingen, om aan ons doel te voldoen.

§.22. Alvorens we de algemene bespreking van de bepalingen voortzetten, eval-
ueren we het speciale geval, waarbij

$$\begin{aligned} \gamma = 0 \text{ et } \beta = -\alpha, \quad \text{waardoor } \alpha\beta\gamma = 0; \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -\alpha^2 \quad \text{en } \alpha + \beta + \gamma = 0, \end{aligned}$$

eritque postrema aequatio $3f = 3\alpha\alpha fg$, siue $f = \alpha\alpha fg$; unde sequitur vel $f = 0$, vel $g = \frac{1}{\alpha\alpha}$. Consideremus primo casum $f = 0$, fietque $A = -\frac{0}{0}$, unde littera A non determinatur, vel potius fit $A = 0$, porroque $B = 0$, unde colligitur $b = 0$, siue etiam b non determinatur; tum vero erit $a = 0$. Quia autem aequationem postremam per f multiplicauimus, hic valor $f = 0$ lubricus est habendus. Sumamus igitur alterum valorem $g = \frac{1}{\alpha\alpha}$, et quia debet esse $ff < 4g$, sequitur esse debere $f < \frac{2}{\alpha}$; hinc vero fiet $A = 0$ et $B = 0$, ideoque $b - af = 0$, et $-2ag = 0$, unde sit $a = 0$.

§.23. Sufficiat autem haec in genere indicasse, et consideremus potius casum magis determinatum, sumendo

$$\Pi = \frac{bp}{\alpha\alpha + pp}, \quad \text{unde fit} \quad \frac{d\Pi}{dp} = u = \frac{b(\alpha\alpha - pp)}{(\alpha\alpha + pp)^2} \quad \text{et} \\ t = \frac{2bp^3}{(\alpha\alpha + pp)^2}.$$

Quod si iam pro cuspidibus faciamus $\frac{du}{dp} = 0$, nascitur haec aequatio: $p^3 - 3\alpha\alpha p = 0$, cuius ternae radices sunt

$$\text{I}^\circ. p = 0; \quad \text{II}^\circ. p = +\alpha\sqrt{3}; \quad \text{III}^\circ. p = -\alpha\sqrt{3}$$

pro quarum prima habebimus $t = 0$ et $u = \frac{b}{\alpha\alpha}$;

pro secunda:

$$t = \frac{2b\sqrt{3}}{8\alpha} \quad \text{et} \quad u = -\frac{b}{8\alpha\alpha};$$

pro tertia vero:

$$t = \frac{-3b\sqrt{3}}{8\alpha} \quad \text{et} \quad u = -\frac{b}{8\alpha\alpha},$$

unde curva habebit formam in figura 8 delineatam, ubi est

$$FB = \frac{b}{\alpha\alpha}, FG = FH = \frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha} \quad \text{ac} \\ GC = HD = \frac{-b}{8\alpha\alpha}$$

zo wordt de laatste vergelijking $3f = 3\alpha\alpha fg$, of $f = \alpha\alpha fg$; hieruit volgt ofwel $f = 0$, ofwel $g = \frac{1}{\alpha\alpha}$. Beschouw het eerste geval, $f = 0$, en dus $A = -\frac{0}{0}$, waarbij de letter A niet kan worden bepaald, ofwel wordt eerder $A = 0$, gezien ook $B = 0$, vandaar ook $b = 0$, of zelfs b niet bepaald; maar dan zal $a = 0$. Aangezien we de finale vergelijking met f vermenigvuldigd hebben, wordt de waarde $f = 0$ als gevaarlijk beschouwd. Laten we de tweede waarde bekijken $g = \frac{1}{\alpha\alpha}$, en gezien het moet zijn dat $ff < 4g$, moet worden gevolgd $f < \frac{2}{\alpha}$; maar hieruit zal $A = 0$ en $B = 0$, daardoor is $b - af = 0$, en $-2ag = 0$, en is $a = 0$.

§.23. Laat het genoeg zijn deze in het algemene geval bekend te maken, en laten we eerder een meer bepaalde vorm beschouwen, neem

$$\Pi = \frac{bp}{\alpha\alpha + pp}, \quad \text{waardoor} \quad \frac{d\Pi}{dp} = u = \frac{b(\alpha\alpha - pp)}{(\alpha\alpha + pp)^2} \quad \text{en} \\ t = \frac{2bp^3}{(\alpha\alpha + pp)^2}.$$

Maar als je voor de spits maakt $\frac{du}{dp} = 0$ hieruit wordt de vergelijking geboren: $p^3 - 3\alpha\alpha p = 0$, waarvan de wortels zijn

$$\text{I}^\circ. p = 0; \quad \text{II}^\circ. p = +\alpha\sqrt{3}; \quad \text{III}^\circ. p = -\alpha\sqrt{3}$$

voor de eerste hebben we $t = 0$ en $u = \frac{b}{\alpha\alpha}$;

voor de tweede:

$$t = \frac{2b\sqrt{3}}{8\alpha} \quad \text{en} \quad u = -\frac{b}{8\alpha\alpha};$$

voor de derde waarde:

$$t = \frac{-3b\sqrt{3}}{8\alpha} \quad \text{en} \quad u = -\frac{b}{8\alpha\alpha},$$

waarbij de kromme de vorm geschetst in figuur 8 aanneemt, waar

$$FB = \frac{b}{\alpha\alpha}, FG = FH = \frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha} \quad \text{en} \\ GC = HD = \frac{-b}{8\alpha\alpha}$$

sicque ternae cuspides erunt in punctis B, C, D , ac ductis chordis erit

$$BC = BD = \frac{3b\sqrt{3}(1 + \alpha\alpha)}{8\alpha\alpha} \quad \text{et} \quad CD = \frac{3b\sqrt{3}}{4\alpha},$$

ita ut haec figura triangularis triangulum isosceles exhibeat.

§.24. Evoluamus simili modo casum $\Pi = \frac{a}{\alpha\alpha + pp}$, unde sit

$$\frac{d\Pi}{dp} = u = -\frac{2ap}{(\alpha\alpha + pp)^2}, \quad \text{hincque} \quad t = -\frac{a(\alpha\alpha + 3pp)}{(\alpha\alpha + pp)^2}.$$

Nunc pro cuspidibus fiat

$$\frac{du}{dp} = -\frac{2a(\alpha\alpha - 3pp)}{(\alpha\alpha + pp)^3} = 0,$$

quae aequatio tantum duas praebet radices

$$p = +\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}};$$

tertia autem radix est $p = \infty$. Hinc igitur pro prima cuspidē, quae sit ubi $p = \infty$, fit $t = 0$ et $u = 0$, sicque haec cuspis B cadit in ipsum punctum F . Pro secunda cuspidē sumatur

$$p = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \quad \text{eritque} \quad t = \frac{-9a}{8\alpha\alpha} \quad \text{et} \quad u = -\frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}.$$

Pro tertia cuspidē sit

$$p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \quad \text{erit} \quad t = -\frac{9a}{8\alpha\alpha} \quad \text{et} \quad u = +\frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}.$$

Sumto igitur $FG = \frac{9a}{8\alpha\alpha}$ binae reliquae cuspides erunt in C et D , ita ut sit $GC = GD = \frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}$, ideoque earum distantia

$$CD = \frac{3a\sqrt{3}}{4\alpha^3}, \quad \text{unde colligitur}$$

$$BC = BD = \frac{3a\sqrt{9\alpha\alpha + 3}}{8\alpha^3}$$

zodat de drie spitsen ontstaan in B, C, D , en de verbonden koorden zijn

$$BC = BD = \frac{3b\sqrt{3}(1 + \alpha\alpha)}{8\alpha\alpha} \quad \text{et} \quad CD = \frac{3b\sqrt{3}}{4\alpha},$$

en uit deze driehoekige figuur ontstaat een gelijkbenige driehoek.

§.24. Laten we op een gelijkaardige manier het geval $\Pi = \frac{a}{\alpha\alpha + pp}$ evalueren, waarbij

$$\frac{d\Pi}{dp} = u = -\frac{2ap}{(\alpha\alpha + pp)^2}, \quad \text{waardoor} \quad t = -\frac{a(\alpha\alpha + 3pp)}{(\alpha\alpha + pp)^2}.$$

Nu voor de spitsen wordt

$$\frac{du}{dp} = -\frac{2a(\alpha\alpha - 3pp)}{(\alpha\alpha + pp)^3} = 0,$$

waarbij de vergelijking alleen twee wortels heeft

$$p = +\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \quad \text{en} \quad p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}};$$

en een andere derde wortel is $p = \infty$. Daarom geeft dit hier een eerste spits, dat is waar $p = \infty$, is $t = 0$ en $u = 0$, zodat het punt B samenvalt met het punt F . De tweede spits wordt bekomen

$$p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \quad \text{en dan} \quad t = -\frac{9a}{8\alpha\alpha} \quad \text{en} \quad u = -\frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}.$$

Voor de derde spits is

$$p = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \quad \text{en dan} \quad t = -\frac{9a}{8\alpha\alpha} \quad \text{en} \quad u = +\frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}.$$

Met $FG = \frac{9a}{8\alpha\alpha}$ zijn de twee resterende punten C en D , zodat het kan dat $GC = GD = \frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}$, waardoor de afstand

$$CD = \frac{3a\sqrt{3}}{4\alpha^3}, \quad \text{vandaar dat}$$

$$BC = BD = \frac{3a\sqrt{9\alpha\alpha + 3}}{8\alpha^3}$$

sicque erit

$$CD : BC = 2 : \sqrt{3\alpha\alpha + 1}$$

ex quo patet, casu $\alpha = 1$ triangulum fore aequilaterum.

§.25. Quod si ergo ambo casus praecedentes combinentur, ita ut statuatur $\Pi = \frac{a+bp}{\alpha\alpha+pp}$, tum tam abscissa t quam applicata u aequabitur summae ambarum praecedentium formularum, ita ut sit

$$t = \frac{2bp^3 - a(\alpha\alpha + 3pp)}{(\alpha\alpha + pp)^2} \quad \text{et} \quad u = \frac{b(\alpha\alpha - pp) - 2ap}{(\alpha\alpha + pp)^2};$$

unde si pro cuspidibus inveniendis ponamus $\frac{du}{dp} = 0$, habebimus hanc aequationem:

$$2bp^3 - 6b\alpha\alpha p - 2a\alpha\alpha + 6app = 0, \quad \text{siue} \quad bp^3 + 3app - 3b\alpha\alpha p - a\alpha\alpha = 0,$$

cuius ergo ternas radices quaeri oportet, quod cum per regulam *Cardani* difficulter praestetur, trisectione anguli utamur, quem in finem fingamus esse $p = r + s \cos. \phi$ eritque

$$pp = rr + \frac{1}{2}ss + 2rs \cos. \phi + \frac{1}{2}ss \cos. 2\phi \quad \text{et} \\ p^3 = r^3 + \frac{2}{3}rss + (3rrs + \frac{3}{4}s^3) \cos. \phi + \frac{3}{2}rss \cos. 2\phi + \frac{1}{4}s^3 \cos. 3\phi$$

quibus valoribus substitutis aequatio nostra transmutabitur in sequentem:

$$+ br^3 + 3brrs \cos. \phi + \frac{3}{2}brss \cos. 2\phi + \frac{1}{4}bs^3 \cos. 3\phi \\ + \frac{3}{2}brss + \frac{3}{4}bs^3 \cos. \phi + \frac{3}{2}ass \cos. 2\phi \\ + 3arr + 6ars \cos. \phi \\ + \frac{3}{2}ass - 3b\alpha\alpha \cos. \phi \\ - 3b\alpha\alpha r \\ - a\alpha\alpha.$$

hieruit is het duidelijk dat

$$CD : BC = 2 : \sqrt{3\alpha\alpha + 1}$$

uit het geval, $\alpha = 1$ zou het een gelijkzijdige driehoek zijn.

§.25. Daarom kunnen we de voorgaande zaken combineren, en dus geldt $\Pi = \frac{a+bp}{\alpha\alpha+pp}$, evenals kunnen we dit toepassen op de abscissen t en u gelijk aan de de som van de voorgaande formules, zodat het is

$$t = \frac{2bp^3 - a(\alpha\alpha + 3pp)}{(\alpha\alpha + pp)^2} \quad \text{en} \quad u = \frac{b(\alpha\alpha - pp) - 2ap}{(\alpha\alpha + pp)^2};$$

en als voor de spitsen wordt gezet $\frac{du}{dp} = 0$, hebben we deze vergelijking

$$2bp^3 - 6b\alpha\alpha p - 2a\alpha\alpha + 6app = 0, \quad \text{of} \quad bp^3 + 3app - 3b\alpha\alpha p - a\alpha\alpha = 0,$$

het is dus nodig te zoeken naar de drie wortels, maar met de regel van *Cardano* is dit eenvoudig volbracht, om gebruik te maken van een driedelige hoek, die we eindig veronderstellen is $p = r + s + \cos. \phi$, en dan

$$pp = rr + \frac{1}{2}ss + 2rs \cos. \phi + \frac{1}{2}ss \cos. 2\phi \quad \text{en} \\ p^3 = r^3 + \frac{2}{3}rss + (3rrs + \frac{3}{4}s^3) \cos. \phi + \frac{3}{2}rss \cos. 2\phi + \frac{1}{4}s^3 \cos. 3\phi$$

waarbij deze waarden substitueren onze vergelijking in de volgende uitdrukking omzet:

$$+ br^3 + 3brrs \cos. \phi + \frac{3}{2}brss \cos. 2\phi + \frac{1}{4}bs^3 \cos. 3\phi \\ + \frac{3}{2}brss + \frac{3}{4}bs^3 \cos. \phi + \frac{3}{2}ass \cos. 2\phi \\ + 3arr + 6ars \cos. \phi \\ + \frac{3}{2}ass - 3b\alpha\alpha \cos. \phi \\ - 3b\alpha\alpha r \\ - a\alpha\alpha.$$

Nunc definiantur litterae r et s ita, ut membra intermedia, tam $\cos.\phi$ quam $\cos.2\phi$ involuentia, seorsim evanescant, unde hae duae aequationes oriuntur:

$$\begin{aligned} \text{I}^\circ. 3brrs + \frac{3}{4}bs^3 + 6ars - 3b\alpha\alpha s &= 0; \\ \text{II}^\circ. \frac{3}{2}brss + \frac{3}{2}ass &= 0; \end{aligned}$$

ex quarum, posteriore fit $r = -\frac{a}{b}$, qui valor in priore substitutus dat

$$\begin{aligned} \frac{3aas}{b} + \frac{3}{4}bs^3 - \frac{6aas}{b} - 3b\alpha\alpha s &= 0, \quad \text{unde fit} \\ ss = \frac{4(bb\alpha\alpha + aa)}{bb}, \quad \text{ideoque} \quad s &= \frac{2\sqrt{bb\alpha\alpha + aa}}{b}. \end{aligned}$$

Hi iam valores in nostra aequatione substituantur, fietque

$$\frac{2a^3}{bb} + 2a\alpha\alpha + \frac{1}{4}bs^3 \cos.3\phi = 0,$$

unde fit

$$\cos.3\phi = -\frac{3a(aa + bb\alpha\alpha)}{b^3s^3} = -\frac{a}{\sqrt{aa + bb\alpha\alpha}}.$$

Quaeratur igitur angulus ω , cuius Cosinus sit

$$= -\frac{a}{\sqrt{aa + bb\alpha\alpha}},$$

qui Cosinus cum etiam conveniat angulis $-\omega$; $2\pi - \omega$; item $2\pi + \omega$, habebimus sequentes valores:

$$\begin{aligned} \text{I}^\circ. 3\phi = \omega, \quad \text{II}^\circ. 3\phi = -\omega, \quad \text{III}^\circ. 3\phi = 2\pi - \omega, \\ \text{IV}^\circ. \quad \text{et} \quad 3\phi = 2\pi + \omega \end{aligned}$$

unde omisso secundo valore, quippe qui a primo non discrepat, tres valores pro angulo ϕ erunt

$$\text{I}^\circ. \phi = \frac{1}{3}\omega, \quad \text{II}^\circ. 120^\circ - \frac{1}{3}\omega \quad \text{et} \quad \phi = 120^\circ + \frac{1}{3}\omega,$$

Definieer nu de letters r en s op een zodanige manier, dat de leden van de tussenproducten, betrokken aan $\cos.\phi$ en $\cos.2\phi$, afzonderlijk verdwijnen, hetgeen tot deze twee vergelijkingen leidt:

$$\begin{aligned} \text{I}^\circ. 3brrs + \frac{3}{4}bs^3 + 6ars - 3b\alpha\alpha s &= 0; \\ \text{II}^\circ. \frac{3}{2}brss + \frac{3}{2}ass &= 0; \end{aligned}$$

uit de laatste wordt $r = -\frac{a}{b}$, waarvan de waarde in de voormalige vervangen geeft:

$$\begin{aligned} \frac{3aas}{b} + \frac{3}{4}bs^3 - \frac{6aas}{b} - 3b\alpha\alpha s &= 0, \quad \text{waardoor} \\ ss = \frac{4(bb\alpha\alpha + aa)}{bb}, \quad \text{daarom} \quad s &= \frac{2\sqrt{bb\alpha\alpha + aa}}{b}. \end{aligned}$$

Deze waarden in onze vergelijking vervangen, leidt tot

$$\frac{2a^3}{bb} + 2a\alpha\alpha + \frac{1}{4}bs^3 \cos.3\phi = 0,$$

waardoor

$$\cos.3\phi = -\frac{3a(aa + bb\alpha\alpha)}{b^3s^3} = -\frac{a}{\sqrt{aa + bb\alpha\alpha}}.$$

Er wordt dus gevraagd een hoek ω , zodat de Cosinus gegeven is door:

$$= -\frac{a}{\sqrt{aa + bb\alpha\alpha}},$$

hij is het ook eens met de Cosinus van een hoek $-\omega$; $2\pi - \omega$; en ook $2\pi + \omega$, we hebben de volgende waarden:

$$\begin{aligned} \text{I}^\circ. 3\phi = \omega, \quad \text{II}^\circ. 3\phi = -\omega, \quad \text{III}^\circ. 3\phi = 2\pi - \omega, \\ \text{IV}^\circ. \quad \text{et} \quad 3\phi = 2\pi + \omega \end{aligned}$$

waarvan we de waarde van de tweede hebben weggelaten, aangezien hij niet sterk verschilt met de eerste, de drie waarden voor de hoek ϕ zijn dus

$$\text{I}^\circ. \phi = \frac{1}{3}\omega, \quad \text{II}^\circ. 120^\circ - \frac{1}{3}\omega \quad \text{en} \quad \phi = 120^\circ + \frac{1}{3}\omega,$$

quibus inventis terni valores litterae p erunt

$$\begin{aligned} \text{I}^{\text{us}}. p &= -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{bb\alpha\alpha + aa}}{b} \cos. \frac{1}{3}\omega, \\ \text{II}^{\text{us}}. p &= -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{bb\alpha\alpha + aa}}{b} \cos.(120^\circ - \frac{1}{3}\omega), \\ \text{III}^{\text{us}}. p &= -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{bb\alpha\alpha + aa}}{b} \cos.(120^\circ + \frac{1}{3}\omega). \end{aligned}$$

§.26. His casibus evolutis revertamur ad quaestionem nostram generalem, qua eiusmodi curvae triangulares quaeruntur, in quibus pro cuspidibus littera p ternos datos obtineat valores, scilicet: $p = \alpha$, $p = \beta$ et $p = \gamma$. Nunc autem primo ponamus brevitatis gratia $\alpha + \beta + \gamma = \zeta$; $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \eta$ et $\alpha\beta\gamma = \theta$, et tres aequationes adimplendae erunt

$$\begin{aligned} \text{I}^\circ. B - 2Af &= 2Cg\theta \\ \text{II}^\circ. 2C - Bf - 4Ag &= -2Cg\eta \\ \text{III}^\circ. -3Bg &= 2Cg\zeta. \end{aligned}$$

Cum igitur esset

$$A = b = af, B = -2ag \quad \text{et} \quad C = -bg,$$

hinc ternae nostrae aequationes erunt

$$\begin{aligned} \text{I}^\circ. -ag - bg + aff &= -bgg\theta \\ \text{II}^\circ. 3b + 3af &= bg\eta \\ \text{III}^\circ. 3a &= -b\zeta; \end{aligned}$$

ex quibus statim ternos valores pro fractione $\frac{a}{b}$ nanciscimur, qui sunt:

$$\text{I}^\circ. \frac{a}{b} = \frac{f - gg\theta}{ff - g}, \quad \text{II}^\circ. \frac{a}{b} = \frac{g\eta + 3}{3f} \quad \text{et} \quad \text{III}^\circ. \frac{a}{b} = -\frac{\zeta}{3}.$$

§.27. Quod si iam horum valorum secundus et tertius inter se aequentur, prodibit

de drie gevonden waarden voor de letter p zijn

$$\begin{aligned} \text{I}^{\text{us}}. p &= -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{bb\alpha\alpha + aa}}{b} \cos. \frac{1}{3}\omega, \\ \text{II}^{\text{us}}. p &= -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{bb\alpha\alpha + aa}}{b} \cos.(120^\circ - \frac{1}{3}\omega), \\ \text{III}^{\text{us}}. p &= -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{bb\alpha\alpha + aa}}{b} \cos.(120^\circ + \frac{1}{3}\omega). \end{aligned}$$

§.26. Na het ontwikkelen van deze gevallen keren we terug naar onze algemene vraag, zodat ik zoek naar driehoekige krommen, waarbij voor de spitsen de letter p drie waarden verkrijgt, namelijk $p = \alpha$, $p = \beta$ en $p = \gamma$. $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \eta$ et $\alpha\beta\gamma = \theta$. Laat ons nu eerst korthedshalve verwelkomen $\alpha + \beta + \gamma = \zeta$; $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \eta$ en $\alpha\beta\gamma = \theta$, en de drie vergelijkingen voldoen aan:

$$\begin{aligned} \text{I}^\circ. B - 2Af &= 2Cg\theta \\ \text{II}^\circ. 2C - Bf - 4Ag &= -2Cg\eta \\ \text{III}^\circ. -3Bg &= 2Cg\zeta. \end{aligned}$$

Aangezien derhalve het is

$$A = b - af, B = -2ag \quad \text{en} \quad C = -bg,$$

hierdoor zijn onze drie vergelijkingen

$$\begin{aligned} \text{I}^\circ. -ag - bg + aff &= -bgg\theta \\ \text{II}^\circ. -3b + 3af &= bg\eta \\ \text{III}^\circ. 3a &= -b\zeta; \end{aligned}$$

hieruit ontmoeten we onmiddellijk drie waarden voor de breuk $\frac{a}{b}$, die zijn:

$$\text{I}^\circ. \frac{a}{b} = \frac{f - gg\theta}{ff - g}, \quad \text{II}^\circ. \frac{a}{b} = \frac{g\eta + 3}{3f} \quad \text{en} \quad \text{III}^\circ. \frac{a}{b} = -\frac{\zeta}{3}.$$

§.27. Als deze tweede en derde waarden aan elkaar gelijk zijn, produceert dit

$f = -\frac{g\eta-3}{\zeta}$. Aequetur nunc primus valor etiam tertio, et erit

$$3f - 3gg\theta = -ff\zeta + g\zeta,$$

ubi, si loco f valor modo inuentus substituat, prodibit

$$3g\eta - 3gg\zeta\theta = g\zeta\zeta - gg\eta\eta$$

quae aequatio per g divisa dat

$$3\eta - 3g\zeta\theta = \zeta\zeta - g\eta\eta, \quad \text{unde concluditur}$$

$$g = \frac{3\eta - \zeta\zeta}{3\zeta\theta - \eta\eta}, \quad \text{hincque porro} \quad f = \frac{\zeta\eta - 9\theta}{3\zeta\theta - \eta\eta}.$$

§.28. His valoribus inventis denominator supra assumtus $1 + fp + gpp$ hanc induet formam:

$$\frac{3\zeta\theta - \eta\eta + (\zeta\eta - 9\theta)p + (3\eta - \zeta\zeta)pp}{3\zeta\theta - \eta\eta},$$

in quo esse debet $ff < 4g$. Est vero

$$ff = \frac{\zeta\zeta\eta\eta - 18\zeta\eta\theta + 81\theta\theta}{(3\zeta\theta - \eta\eta)^2}$$

$$4g = \frac{12\eta - 4\zeta\zeta}{3\zeta\theta - \eta\eta} = \frac{36\zeta\eta\theta - 12\zeta^3\theta - 12\eta^3 + 4\zeta\zeta\eta\eta}{(3\zeta\theta - \eta\eta)^2}$$

Necesse igitur est ut sit

$$\zeta\zeta\eta\eta - 18\zeta\eta\theta + 81\theta\theta < 36\zeta\eta\theta - 12\zeta^3\theta - 12\eta^3 + 4\zeta\zeta\eta\eta$$

quod sine dubio sponte euenit. Pro numeratore sumamus

$$a = -\frac{\zeta c}{3\zeta\theta - \eta\eta} \quad \text{et} \quad b = \frac{3c}{3\zeta\theta - \eta\eta},$$

ita ut fractio pro Π assumenda sit

$$\Pi = \frac{-\zeta c + 3cp}{3\zeta\theta - \eta\eta + (\zeta\eta - 9\theta)p + (3\eta - \zeta\zeta)pp}.$$

$f = -\frac{g\eta-3}{\zeta}$. Is nu ook de eerste waarde gelijk aan de derde, er geldt

$$3f - 3gg\theta = -ff\zeta + g\zeta,$$

en, als hier de ontdekte waarde f wordt gesubstitueerd, produceert dit

$$3g\eta - 3gg\zeta\theta = g\zeta\zeta - gg\eta\eta$$

deze vergelijking delen door g

$$3\eta - 3g\zeta\theta = \zeta\zeta - g\eta\eta, \quad \text{en we besluiten}$$

$$g = \frac{3\eta - \zeta\zeta}{3\zeta\theta - \eta\eta}, \quad \text{hetgeen leidt tot} \quad f = \frac{\zeta\eta - 9\theta}{3\zeta\theta - \eta\eta}.$$

§.28. Men vindt met deze waarden voor de bovenstaande noemer $1 + fp + gpp$ de vorm

$$\frac{3\zeta\theta - \eta\eta + (\zeta\eta - 9\theta)p + (3\eta - \zeta\zeta)pp}{3\zeta\theta - \eta\eta},$$

waarbij het zo moet zijn dat $ff < 4g$. Het is zo dat

$$ff = \frac{\zeta\zeta\eta\eta - 18\zeta\eta\theta + 81\theta\theta}{(3\zeta\theta - \eta\eta)^2}$$

$$4g = \frac{12\eta - 4\zeta\zeta}{3\zeta\theta - \eta\eta} = \frac{36\zeta\eta\theta - 12\zeta^3\theta - 12\eta^3 + 4\zeta\zeta\eta\eta}{(3\zeta\theta - \eta\eta)^2}$$

Het moet dus noodzakelijk zijn dat

$$\zeta\zeta\eta\eta - 18\zeta\eta\theta + 81\theta\theta < 36\zeta\eta\theta - 12\zeta^3\theta - 12\eta^3 + 4\zeta\zeta\eta\eta$$

hetgeen zonder twijfel zal gebeuren. Nemen we voor de teller

$$a = -\frac{\zeta c}{3\zeta\theta - \eta\eta} \quad \text{et} \quad b = \frac{3c}{3\zeta\theta - \eta\eta},$$

zodat voor de breuk Π aangenomen wordt

$$\Pi = \frac{-\zeta c + 3cp}{3\zeta\theta - \eta\eta + (\zeta\eta - 9\theta)p + (3\eta - \zeta\zeta)pp}.$$

Cum autem semper sit $\zeta\zeta > 3\eta$ et $\eta\eta > 3\zeta\theta$, concinnius hic valor ita exprimetur:

$$\Pi = \frac{\zeta c - 3cp}{\eta\eta - 3\zeta\theta + (9\theta - \zeta\eta)p + (\zeta\zeta - 3\eta)pp}.$$

§.29. Quia positio axis penitus arbitrio nostro relinquitur, eum semper ita assumere licet, ut unam cuspides tangat, tum vero ibi fiet $p = \infty$, unde solutio nostra non minus late patebit, etiamsi ponamus $\alpha = \infty$; tum vero erit

$$\zeta = \alpha, \quad \eta = \alpha(\beta + \gamma) \quad \text{et} \quad \theta = \alpha\beta\gamma;$$

hincque propterea

$$\begin{aligned} \eta\eta - 3\zeta\theta &= \alpha\alpha(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma); \\ 9\theta - \zeta &= 9\alpha\beta\gamma - \alpha\alpha(\beta + \gamma) = -\alpha\alpha(\beta + \gamma) \quad \text{et} \\ (\zeta\zeta - 3\eta) &= \alpha\alpha - 3\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\alpha. \end{aligned}$$

Sumatur igitur $c = \alpha\alpha$, ut numerator etiam per $\alpha\alpha$ fiat divisibilis, eritque formla nostra

$$\Pi = \frac{a}{\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma)p + pp},$$

cuius denominator certe nullum habet factorem realem, nisi sit $\beta = \gamma$, quem casum autem ipsa rei natura respuit. Hoc autem valore pro Π assumto consequimur statim

$$\begin{aligned} u &= \frac{d\Pi}{dp} = \frac{a(\beta + \gamma) - 2ap}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma)p + pp)^2} \quad \text{et} \\ t &= pu - \Pi = \frac{-a(\beta\beta - \beta\gamma - \gamma\gamma) + 2a(\beta + \gamma)p - 3app}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma)p + pp)^2}. \end{aligned}$$

§.30. Ut iam hinc cuspides definiamus, pro prima cuspide ponamus $p = \infty$, eritque tam $t = 0$, quam $u = 0$. Pro secunda cuspides sumamus $p = \beta$, eritque abscissa

$$t = -\frac{a(2\beta - \gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \quad \text{et} \quad u = -\frac{a}{(\beta - \gamma)^3}.$$

Omdat het altijd zo is dat $\zeta\zeta > 3\eta$ en $\eta\eta > 3\zeta\theta$, is het eleganter deze waarde uit te drukken als:

$$\Pi = \frac{\zeta c - 3cp}{\eta\eta - 3\zeta\theta + (9\theta - \zeta\eta)p + (\zeta\zeta - 3\eta)pp}.$$

§.29. Het blijf volledig onze keuze de positie van de as te kiezen, het zal dus altijd worden toegestaan, om te raken aan een spits, dan zal de waarde er $p = \infty$, en blijft onze oplossing niet minder breed open, zelfs als we aannemen $\alpha = \infty$; dan is er

$$\zeta = \alpha, \quad \eta = \alpha(\beta + \gamma) \quad \text{en} \quad \theta = \alpha\beta\gamma;$$

dit is de reden waarom

$$\begin{aligned} \eta\eta - 3\zeta\theta &= \alpha\alpha(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma); \\ 9\theta - \zeta &= 9\alpha\beta\gamma - \alpha\alpha(\beta + \gamma) = -\alpha\alpha(\beta + \gamma) \quad \text{en} \\ (\zeta\zeta - 3\eta) &= \alpha\alpha - 3\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\alpha. \end{aligned}$$

Neem dan $c = \alpha\alpha$, en gezien de teller ook deelbaar is door $\alpha\alpha$, wordt onze formule

$$\Pi = \frac{a}{\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma)p + pp},$$

waarbij de noemer zeker geen reële factor bezit, maar is $\beta = \gamma$, ... Uit de waarde aangenomen voor Π volg onmiddellijk

$$\begin{aligned} u &= \frac{d\Pi}{dp} = \frac{a(\beta + \gamma) - 2ap}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma)p + pp)^2} \quad \text{et} \\ t &= pu - \Pi = \frac{-a(\beta\beta - \beta\gamma - \gamma\gamma) + 2a(\beta + \gamma)p - 3app}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma)p + pp)^2}. \end{aligned}$$

§.30. Definieren we hier nu de spitsen, voor de eerste spits stellen we $p = \infty$, en dus bij $t =$, en $u = 0$. Voor de tweede spits stel $p = \beta$, zodat de abscis

$$t = -\frac{a(2\beta - \gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \quad \text{en} \quad u = -\frac{a}{(\beta - \gamma)^3}.$$

Pro tertia vero cuspidē fiat $p = \gamma$, et erit

$$t = -\frac{a(\beta - 2\gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \quad \text{et} \quad u = +\frac{a}{(\beta - \gamma)^3}.$$

Hinc in figura erit $GB = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3}$,

$$AH = \frac{a(\beta - 2\gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \quad \text{et} \quad HC = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3}.$$

§.31. Ductis iam chordis AB , AC et BC erit

$$AB = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3} \sqrt{(2\beta - \gamma)^2 + 1} \quad \text{et} \\ AC = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3} \sqrt{(\beta - 2\gamma)^2 + 1}.$$

Pro tertia chorda BC cum sit

$$BC^2 = (BG + HC)^2 + GH^2 = \frac{4aa + aa(\beta + \gamma)^2}{(\beta - \gamma)^6}$$

hinc erit

$$BC = \frac{a}{(\beta + \gamma)^3} \sqrt{4 + (\beta + \gamma)^2},$$

sicque tres istae chordae AB , AC et BC eandem interse tenebunt rationem, quam habent hae tres formulae radicales:

$$\sqrt{(2\beta - \gamma)^2 + 1}; \quad \sqrt{(\beta - 2\gamma)^2 + 1}; \quad \sqrt{4 + (\beta + \gamma)^2}.$$

Pro positione autem harum chordarum notetur esse tangens ang. $BAG = \frac{1}{2\beta - \gamma}$ et tang. ang. $CAH = \frac{1}{\beta - 2\gamma}$, unde colligitur tangens anguli BAC

$$= \frac{3\beta - 3\gamma}{2\beta\beta - 5\beta\gamma + 2\gamma\gamma - 1}.$$

Pro tertia chorda erit tang. anguli $AOC =$

$$\text{tang. } BOG = \frac{BG + CH}{GH} = \frac{2}{\beta + \gamma}.$$

Voor de derde waarde van de spits wordt $p = \gamma$, en geldt

$$t = -\frac{a(\beta - 2\gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \quad \text{en} \quad u = +\frac{a}{(\beta - \gamma)^3}.$$

In de figuur hier geldt $GB = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3}$,

$$AH = \frac{a(\beta - 2\gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \quad \text{en} \quad HC = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3}.$$

§.31. De reeds getrokken koorden AB , AC en BC zijn

$$AB = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3} \sqrt{(2\beta - \gamma)^2 + 1} \quad \text{en} \\ AC = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3} \sqrt{(\beta - 2\gamma)^2 + 1}.$$

Voor de derde koorde BC geldt

$$BC^2 = (BG + HC)^2 + GH^2 = \frac{4aa + aa(\beta + \gamma)^2}{(\beta - \gamma)^6}$$

vandaar

$$BC = \frac{a}{(\beta + \gamma)^3} \sqrt{4 + (\beta + \gamma)^2},$$

Dus de drie koorden AB , AC en BC bevatten dezelfde reden, en hebben deze drie wortelvormen:

$$\sqrt{(2\beta - \gamma)^2 + 1}; \quad \sqrt{(\beta - 2\gamma)^2 + 1}; \quad \sqrt{4 + (\beta + \gamma)^2}.$$

Voor de positie van deze koorden zal worden opgemerkt dat de tangens van de hoek $BAG = \frac{1}{2\beta - \gamma}$ en tang. ang. $CAH = \frac{1}{\beta - 2\gamma}$, vandaar de tangens van de hoek BAC

$$= \frac{3\beta - 3\gamma}{2\beta\beta - 5\beta\gamma + 2\gamma\gamma - 1}.$$

Voor de derde koorde is de tang. van de hoek $AOC =$

$$\text{tang. } BOG = \frac{BG + CH}{GH} = \frac{2}{\beta + \gamma}.$$

Cum igitur sit $ABC = GOB - GAB$ erit $\text{tang. } ABC = \frac{3\beta+3\gamma}{(\beta+\gamma)(2\beta-\gamma)}$.
Denique, ob anguli COG $\text{tang.} = -\text{tang. ang. } BOG = -\frac{2}{\beta+\gamma}$, quia est
 $\text{ang. } ACB = COG - CAO$, erit $\text{tang. } ACB = \frac{3\gamma-3\beta}{(\beta-\gamma)(\beta-2\gamma)-2}$.

§.32. Statuamus exempli gratia $\beta = 2$ et $\gamma = 1$ eritque $AG = 3a$, et $AH = 0$,
tum vero $GB = a$ et $HC = a$, unde curva figuram habebit, qualis fig.
11. repraesentatur, in qua ergo si capiatur punctum quodcunque u , cuius
coordinatae sunt AT et TU , erit

$$t = \frac{3a - 6ap + 3app}{(3 - 3p + pp)^2} \quad \text{et} \quad u = \frac{3a - 2ap}{(3 - 3p + pp)^2}.$$

Hic in ramo AUC id punctum notatu est dignum, quod a recta AC maxima
distat; hoc igitur manifesto ibi erit, ubi eius tangens ad axem est normalis,
ideoque hoc loco erit $p = 0$, unde sit $AT = \frac{1}{2}a$, quae est distantia maxima
quaesita US ; tum vero erit $TU = u = \frac{1}{3}a$. Quia porro tang. angul.
 $GAB = \frac{1}{3}$, iu arcu AB id punctum a chorda AB maxime erit remotum,
cuius tangens chordae AB est prallela; pro eo ergo reperitur $p = 3$, unde
sit $AT = t = \frac{4}{3}a$ et $TU = u = -\frac{1}{3}a$. Ex hoc exemplo autem luculenter
patet, quemadmodum omnes casus evolui conveniat; neque vero difficile
erit, hinc eiusmodi curvas triangulares invenire, quae dato triangulo ABC
sint inscriptibiles, quandoquidem ex ratione laterum trianguli innotescit
ratio harum formularum:

$$\sqrt{(2\beta - \gamma)^2 + 1}; \quad \sqrt{(\beta - 2\gamma)^2 + 1}; \quad \sqrt{4 + (\beta + \gamma)^2}.$$

§.33. Sint terna latera AB, AC et BC interse ut numeri A, B, C , ac ponatur

$$\sqrt{(2\beta - \gamma)^2 + 1} = nA, \quad \sqrt{(\beta - 2\gamma)^2 + 1} = nB \quad \text{et} \\ \sqrt{4 + (\beta + \gamma)^2} = nC;$$

unde sumtis quadratis sit

$$(2\beta - \gamma)^2 = nnAA - 1; \quad (\beta - 2\gamma)^2 = nnBB - 1 \quad \text{et} \\ (\beta + \gamma)^2 = nnCC - 4,$$

Daarom is het dat $ABC = GOB - GAB$ en zal $\text{tang. } ABC = \frac{3\beta - 3\gamma}{(\beta+\gamma)(2\beta-\gamma) + 2}$.
Tot slot, voor de hoek COG $\text{tang.} = -\text{tang. ang. } BOG = -\frac{2}{\beta+\gamma}$, en om-
dat de hoek $ACB = COG - CAO$, zal $\text{tang. } ACB = \frac{3\gamma-3\beta}{(\beta+\gamma)(\beta-2\gamma)-2}$.

§.32. Laten we bijvoorbeeld $\beta = 2$ en $\gamma = 1$ zodat $AG = 3a$, en $AH = 0$,
maar dan $GB = a$ et $HC = a$, en men heeft een kromme figuur, zoals
fig. 11 vertegenwoordigt, waarin we dus een punt u nemen, waarvan de
coördinaten dus AT en TU zijn, geldt

§.33. ...

unde sit

$$\begin{aligned} 1^\circ. 2\beta - \gamma &= \sqrt{nnAA - 1}; 2^\circ. \beta - 2\gamma = \sqrt{nnBB - 1} \quad \text{et} \\ \beta + \gamma &= \sqrt{nnCC - 4}, \end{aligned}$$

quarum prima dempta secunda praebet

$$\sqrt{nnAA - 1} - \sqrt{nnBB - 1} = \sqrt{nnCC - 4},$$

ex qua aequatione quantitatem n desinire oportet, qua inventa reperietur

$$\begin{aligned} 3\beta &= \sqrt{nnAA - 1} + \sqrt{nnCC - 4} \quad \text{et} \\ 3\gamma &= \sqrt{nnCC - 4} - \sqrt{nnBB - 1}; \end{aligned}$$

quibus inventis curva triangularis satisfaciens per formulas superiores facile determinatur; ex illa autem aequatione elicitur

$$nn = \frac{4(2AA + 2BB - CC)}{2AABB + 2AACC + 2BBCC - A^4 - B^4 - C^4}.$$

Unde si trianguli, cuius latera sunt A, B et C , area vocetur Δ , hic denominator erit $= 16\Delta\Delta$, ita ut sit

$$nn = \frac{2AA + 2BB - CC}{4\Delta\Delta}.$$

Hoc autem valore invento erit

$$\begin{aligned} \text{I. } \sqrt{nnAA - 1} &= \frac{3AA + BB - CC}{4\Delta}; \\ \text{II. } \sqrt{nnBB - 1} &= \frac{3BB + AA - CC}{4\Delta} \quad \text{et} \\ \text{III. } \sqrt{nnCC - 4} &= \frac{3AA - 2BB}{4}; \end{aligned}$$

ex his vero denique elicitur

$$3b = \frac{5AA - BB - CC}{4\Delta} \quad \text{et} \quad 3\gamma = \frac{AA - 5BB + CC}{4\Delta},$$

ita ut iam omnia sint determinata, quae ad solutionem huius problematis spectant. Proposito scilicet quocunque triangulo rectilineo, semper curva triangularis describi potest, cuius cuspides in eius angulos incidant, et latera trianguli simul sint chordae arcuum, quibus figura triangularis constat.

§.34. Ecce igitur, Problematis, cui tota haec investigatio erat destinata, concin- §.34. ...
nam solutionem subiungamus.

Problema

Intra datum triangulum $A B C$ curvam triangularem continuam et algebraicam inscribere, cuius singulae euspides in iplos angulos trianguli A, B et C incidant.

Solutio

Corollarium

Ex tali autem curva triangulari facillime innumerabiles curvae orbiformes formari possent. Positis enim coordinatis curvae orbiformis x et y , sumi poterit

$$x = u + \frac{ep}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{et} \quad y = t - \frac{e}{\sqrt{1+pp}},$$

quae ergo etiam erit algebraica; neque vero illa curva triangularis huius erit sevoluta, sed potius cum omnibus his curvis orbiformibus communem habebit evolutam quae itidem erit curva triangularis, simulque rectificabilis.

Errata

- pagina 5: $ACh = CH + Ch$ moet HCh zijn.
- pagina 5: $SX = f + c - a = CS$ moet $+CS$ zijn.
- pagina 11: Breuk moet tot pp staan (bij de δ)
- pagina 14: Breuk foutief na Pythagoras
- pagina 22: $=$ moet een $-$ zijn
- pagina 24: tekenfoutje
- pagina 25: tekenfoutje