Rapport bioreactor

Wouter Raateland en Diederik van Engelenburg

1 maart 2015

Beste lezer.

Hoofdstuk 1

Introductie in de vergelijkingen.

1.1 Interpretatie van de vergelijkingen.

Bacterie-concentratie

De vergelijkingen zoals beschreven in hoofdstuk 1, de inleiding, komen niet uit de lucht vallen. Hier zullen we een korte analyse geven over de interpretatie van de vergelijkingen. Hiertoe beginnen we met de analyse van de bacterie-groei. In eerste instantie beschouwen we hiertoe vat bacteriën in optima-forma, oftwel: er is geen enkele beperkende factor met betrekking tot de groei van de kolonie en we bekijken een omgeving waarin geen bacteriën worden weggenomen. Dan weten we dat, afhankelijk van het type bacterie, moet gelden:

$$X(t) = e^{\alpha_1 t}$$

voor een zekere constante α_1, waarbij $X(t)$ de concentratie bacteriën is t.o.v. de tijd t. Er geldt dan dus ook dat $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = cX$ voor dezelfde constante c. Deze α_1 is dus de maximale groei van de bacterie-kolonie.

Een van de meest logische en meest voor de hand liggende beperkende factoren is dan natuurlijk de voedsel-hoeveelheid. Deze noemen we $S(t)$, een functie die afhankelijk is van de tijd. S is dus de concentratie voedsel. We weten een aantal eigenschappen van de verhouding tussen S en X. Een van de meest logische is: als $S(t) = 0$, dan geldt dat er geen groei van bacteriën mogelijk is. Het lijkt misschien logisch om te kiezen voor het verband: $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \alpha_1 SX$, maar dan zou de maximale groei overschreden kunnen worden. Daarom kiezen we voor het volgende verband:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \alpha_1 \frac{S}{1+S} X$$

Dit doen we zodat hoe hoger het voedsel, hoe dichter we tegen de maximale groei (α_1) aan gaan zitten. Met dit verband houden we dus rekening met drie eisen: hoe hoger de voedselconcentratie, hoe hoger de bacterie groei, de bacterie-groei is nooit hoger dan de maximum of optimale groei en als de voedselconcentratie nul is, is de toename van bacteriën ook nul. Daarmee zitten we bij een redelijk goed verband. De 1 onder de deler in de factor $\frac{S}{1+S}$ zal enkel afhangen van de eenheden waarin gemeten wordt.

Het vat bacteriën, of de bioreactor, is echter niet alleen een plaats waar bacteriën normaal kunnen groeien. We willen natuurlijk ook constant een deel van de bacteriën wegnemen. In dit geval bepalen we dat we $X(t)$, de totale concentratie bacteriën op ieder moment weghalen. Er volgt dus dat er een uitstroom van bacteriën is, die per t gelijk is aan X. Dus volgt dat we de volgende vergelijking hebben voor de groei van bacteriën in de bioreactor:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \alpha_1 \frac{S}{1+S} X - X \tag{1.1}$$

en dat is precies de vergelijking zoals gegeven / beschreven in ??

voedselconcentratie

Vervolgens beschouwen we de voedselconcentratie S in de bioreactor. Wederom beschouwen we eerst een reactor zonder in- of uitstroom. De voedselhoeveelheid hangt dan enkel af van de hoeveelheid bacteriën aanwezig in de reactor. Bovendien zal de voedselconcentratie enkel afnemen in het geval we hier beschouwen. We zien dus dat er ongeveer moet gelden dat $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -a(t)X$ voor een van de tijd afhankelijke $a(t)$. Om uit te zoeken wat $a(t)$ zou moeten zijn, bekijken we weer een aantal voorwaarden: als $S(t) = 0$ is er geen toename in het voedsel mogelijk is zonder voedseltoevoer. Wederom willen we dat, naarmate het voedsel toeneemt, de voedselafname (relatief) groter wordt, ook wegens vergelijking (1.1).

1.2 Berekening evenwicht.

We beschouwen de differentiaal vergelijkingen zoals beschreven in sectie ??:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \alpha_1 \frac{S}{1+S} X - X \tag{1.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\frac{S}{1+S} X - S + \alpha_2 \tag{1.3}$$

Er bevindt zich een evenwicht, wanneer de hoeveelheid bacteriën niet meer groeit of daalt én hetzelfde geldt voor het voedsel. We gaan nu op zoek naar deze evenwichten, als het er meerdere zijn. In andere woorden, we stellen dat zowel vergelijking (1.2) als vergelijking (1.3) nul moeten zijn. Er vindt dan immers geen verandering plaats in zowel de voedselvoorziening als de groei in bacteriën.

Hiertoe bekijken we eerst vergelijking (1.2). Er volgt snel dat, als $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = 0$, dan

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{S}{1+S} X - X = 0 &\iff \\ X = \alpha_1 \frac{S}{1+S} X &\iff \\ \alpha_1 = \frac{1+S}{S} & \end{aligned}$$

waarbij aangenomen wordt dat $X(t) \neq 0$. Als $X(t) = 0$, geldt namelijk dat de bacteriën constant zijn, maar ook dat het voedsel op den duur constant zal worden, als $S(t) = 0$. In dat geval hebben we natuurlijk te maken met een stabiel evenwicht, maar ook met een zinloos evenwicht. Dus geldt er dat

$$S = \frac{1}{\alpha_1 - 1} \tag{1.4}$$

als er geen verandering plaatsvindt in bacterie populatie.

Dit nemen we mee naar de stabilisatie van het voedsel. Immers, als we te maken hebben met een evenwicht, moet gelden dat zowel $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = 0$ als $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0$. We weten al dat er een evenwicht plaatsvindt als $X(t) = 0$. We zien dan gelijk aan vergelijking (1.3) dat $S(t)$ ook naar nul toe gaat of gelijk wordt aan α_2. Daarnaast hebben we nog te maken met evenwicht als $S(t)$ voldoet aan vergelijking (1.4).

Uit vergelijking (1.3) vinden we dan dat, als $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0$,

$$\begin{aligned} -\frac{S}{1+S} X - S + \alpha_2 = 0 &\iff \\ \frac{S}{1+S} X = \alpha_2 - S &\iff \\ X = \frac{\alpha_2 + \alpha_2 S - S - S^2}{S} & \end{aligned}$$

Laten we nu weer aannemen dat $S(t) \neq 0$,als dit wel zo is, zien we gelijk dat $X(t)$ naar nul toe gaat (immers: de groei van bacteriën heeft dan een negatief verband met de hoeveelheid bacteriën dat aanwezig is). Er volgt dan dat

$$X = \alpha_2 \left(\frac{1}{S} + 1 \right) - 1 - S$$

We weten dat, mochten we een evenwicht hebben wat betreft bacteriën, er moet gelden dat S voldoet aan vergelijking (1.4). Dus geldt dat

$$X = \alpha_2 \left(\frac{\alpha_1 - 1}{1} + 1 \right) - 1 - \frac{1}{\alpha_1 - 1}$$

Dus weten we dat er een evenwicht is als we zowel hebben dat vergelijking (1.4) geldt en de volgende vergelijking:

$$X = \alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{\alpha_1 - 1} - 1$$

Wat als een breuk geschreven kan worden door:

$$X = \frac{\alpha_1(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2 - 1)}{\alpha_1 - 1} \tag{1.5}$$