Autovalores y autovectores

Los definimos como operadores Hermíticos, existen ciertos vectores (no cualquiera) que al ser asociados a una matriz hermítica particular, retornan el mismo vector pero multiplicado por un factor que podríamos llamar escalado. En física, una de las principales tareas es obtener los llamados invariantes y ¿qué son los autovectores? son invariantes, una forma simple de verlo es: *Un vector que mantiene su dirección bajo la acción de un operador se denomina autovector, y el factor por el cual se dilata o contrae es el autovalor correspondiente*. Veamos el siguiente ejemplo:
Consideremos la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{55}$$

Autovalores y autovectores

Queremos ver el efecto que produce esa matriz sobre un conjunto de vectores en R^2 ¿Qué pasa cuando se multiplica esa matriz **A** por un vector ? Realicemos la operación:

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3x+2y \\ x+4y \end{bmatrix} \tag{56}$$

Tomemos el cuadrado de lado 1 y ubicado sobre el origen de coordenadas como muestra la figura:

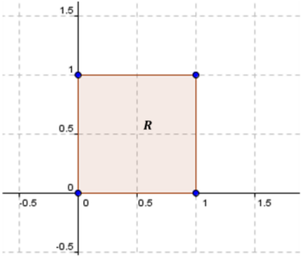

Figure: Cuadrado de lado 1 en el primer cuadrante

Autovalores y autovectores

¿En qué se transforma este cuadrado bajo el efecto de la matriz **A**? Veamos cuál es la transformación de sus vértices y dibujemos el resultado.

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\mathbf{A}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} \tag{57}$$

Autovalores y autovectores

Gráficamente tenemos que el cuadrado se ha transformado bajo esa operación en el siguiente rombo:

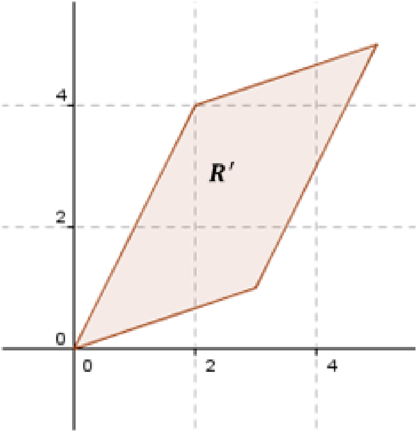

Figure: Resultado de aplicar la matriz **A**

Autovalores y autovectores

¿Existirán vectores que después de la deformación del cuadrado, conservan la dirección? veamos,

- El vector $(1,0)$ se transformó en el $(3,1)$. No conserva la dirección.
- El vector $(0,1)$ se transforma en el $(2,4)$. No conserva la dirección.
- El vector $(1,1)$ se transformó en el $(5,5)$. Entonces se produjo una dilatación de factor 5, y se conservó la dirección.

Ese vector que mantuvo su dirección se denomina *autovector*, y el factor por el cual se dilató es el *autovalor* correspondiente.
Esta operación la denotamos de la siguiente forma:

$$\mathbf{T}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \tag{58}$$

El autovalor corresponde a la cantidad que se dilató el vector, en este caso, 5 y el autovector será: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Comprendido el concepto, regresemos a la notación de Dirac. La operacíon que define los autovalores será:

$$\mathbf{M} |\psi\rangle = \lambda_\psi |\psi\rangle \tag{59}$$

linea 1648

Final del capítulo 2

¿Preguntas? ¿Comentarios?