Ejercicios

Pruebe las siguientes relaciones

1. $X^2 = Y^2 = Z^2 = I$
2. $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Z)$
3. $X = HZH$
4. $Z = HXH$
5. $-1Y = HYH$
6. $S = T^2$
7. $-1Y = XYX$

Operator	Gate(s)		Matrix
Pauli-X (X)	$\boxed{\mathbf{X}}$	$\oplus$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Y (Y)	$\boxed{\mathbf{Y}}$		$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Z (Z)	$\boxed{\mathbf{Z}}$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Hadamard (H)	$\boxed{\mathbf{H}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
Phase (S, P)	$\boxed{\mathbf{S}}$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
$\pi/8$ (T)	$\boxed{\mathbf{T}}$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$

① $X^2 = Y^2 = Z^2 = I$ $\qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$X^2 = X'X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\begin{array}{l} i \times -i = -i \\ \text{por def.} = -1 \end{array}}$

$$Y^2 = Y'Y' = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + -i\cdot i & -i\cdot 0 + -i\cdot 0 \\ i\cdot 0 + 0\cdot i & i\cdot -i + 0\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$Z^2 = Z'Z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 0\cdot 1 + 0\cdot -1 \\ 0\cdot 1 + (-1)0 & 0\cdot 0 + (-1)(-1) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Probado.

② $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Z)$ $\qquad H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0+1 & 1+0 \\ 1+0 & 0+(-1) \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

⑤ $-1Y = HYH$

$$-1\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i \\ -i & -i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & -i \\ -i & -i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i & -i \\ -i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$$

Probado

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}}$$

$$V$$

$$= ?$$

"Regla de Born" → ¡Importante!

$$\text{Probability}(x) = |\text{amplitude}(x)|^2$$

- Se utiliza para determinar la probabilidad de medir un estado cuántico en un valor particular.
- Se usa para realizar predicciones sobre el comportamiento de sistemas cuánticos

Ejemplo:

Tenemos un qubit en el estado $|0\rangle$. Podemos aplicar la compuerta Hadamard y tenemos:

$H|0\rangle = |+\rangle$ $\qquad$ $|+\rangle \rightarrow$ estado superpuesto

podemos expresar $|+\rangle$ como $|+\rangle = \frac{(|0\rangle + |1\rangle)}{\sqrt{2}}$

1. La probabilidad de medir el estado $|0\rangle$ se calcula como el coeficiente de $|0\rangle$ al cuadrado en superposición.

$$P(|0\rangle) = |\langle 0|+\rangle|^2 = \frac{(|\langle 0|1\rangle| + 1\langle 1|1\rangle)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(|1\rangle) = |\langle 1|+\rangle|^2 = \frac{(|\langle 1|0\rangle| + |\langle 1|1\rangle|)}{2} = \frac{1}{2}.$$