Vectores base

Tomemos los ket base $|e_i\rangle = keti$, de decir, llamemos los vectores base sólo como *keti*, la condición de ortonormalidad de la base la podemos escribir como $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$, entonces un vector v se puede expandir en la base *keti* como:

$$|v\rangle = \sum_i |i\rangle \alpha_i \tag{39}$$

Pero como se vio en una ecuación anterior,
$\langle e_k|v\rangle = \langle e_k|\sum_i \alpha_i e_i\rangle = \sum_i \alpha_i \langle e_k|e_i\rangle = \alpha_k$, es decir, $\alpha_k = \langle k|v\rangle$
entonces obtenemos el resultado final:

$$|v\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i|v\rangle \tag{40}$$

Norma y ortogonalidad usando notación de Dirac

La norma de un vector $|u\rangle$ es un número real no negativo que cumple la siguiente condición:

$$\| |u\rangle \| = \sqrt{\langle u|u\rangle} = \sqrt{\sum_i^n |a_i|^2} \geqslant 0 \tag{41}$$

Un vector unitario tiene una norma de 1 y se cumple que $\sum_i^n |a_i|^2 = 1$.
Para un qubit en un estado $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ se se cumple que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Bases: estándar y computacional

Definimos una base en $\mathbb{C}^n$ como una colección de vectores $|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, ..., |v_n\rangle$ tal que todo vector $|v_1\rangle \in \mathbb{C}^n$ pueda ser expresado como una combinación lineal de estos vectores base, así:

$$|v\rangle = \alpha_1 |v_1\rangle + \alpha_2 |v_2\rangle + ... + \alpha_n |v_n\rangle \tag{42}$$

Los coeficientes $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Los vectores $|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, ..., |v_n\rangle$ son linealmente independientes si se cumple que ningún vector $|v_i\rangle$ puede expresarse como una combinación lineal de los otros vectores.

Bases: estándar y computacional

El número n se denomina el tamaño de la base vectorial y está univocamente determinada por el espacio vectorial, se denomina la dimensión del espacio vectorial, por ejemplo, la dimensión de $\mathbb{C}^n$ es n. Dada una base, todo vector $|v_i\rangle$ puede ser representado por una tupla de orden n de los valores $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ a las que llamaremos las coordenadas del vector $|v\rangle$ ene sa base. Una base ortonormal se construye con vectores unitarios que son ortogonales, esta condición se escribe como:

$$\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij} \tag{43}$$

Bases: estándar y computacional

Como ejemplo para el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ podems definir las siguientes bases ortonormales: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ o $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Para $\mathbb{C}^n$ la base estándar o base computacional será:

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}; |2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}; |3\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \ldots |n\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ n \end{bmatrix} \tag{44}$$

Bases: estándar y computacional

La expansión de cualquier vector (como lo vimos en detalle en el apartado anterior) se puede escribir como:

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i \, |i\rangle \tag{45}$$

Producto exterior y proyección

Tomemos dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ podemos expresar los dos vectores en una base estándar de denominaremos $e_1, e_2, ..., e_n$ entonces los dos vectores pueden expresarse como, $\vec{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + ... + u_n e_n$ y $\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + ... + v_n e_n$, u_i, v_i donde suponemos bases ortonormales para esta expansión. Se pueden extraer de las proyecciones $\langle u|e_i\rangle$ y $\langle v|e_i\rangle$. Encontremos la expresión para $\langle u|v\rangle$:

$$\langle u|v\rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + ... + u_n v_n = \begin{bmatrix} u_1 & . & . & . & u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} \tag{46}$$

Producto exterior y proyección

Pensando en los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en forma de vector columna y vector fila, podemos escribir la expresión: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u^T v$ el vector u^T es el transpuesto de la columna u. La mutplicación anterior es un arreglo de $1 \times n$ con otro arreglo de $n \times 1$, lo cual da como resultado un arreglo de 1×1, justamente un número. En notación de Dirac, hacer la transpuesta del vector columna al vector final consiste en convertir el ket $|u\rangle$ en el bra $\langle v|$. Y hasta el momento hemos definido el producto escalar o interno como se conoce.

Producto exterior y proyección

Pero notemos que la regla de multiplicación de matrices permanece si multiplicamos la columna por la fila, en el orden opuesto al producto interno, en ese caso no obtenemos un número, obtenemos una matriz $n \times n$ veamos esa operación:

$$vu^T = \begin{bmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & . & . & . & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & . & . & u_n v_1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ u_n v_1 & . & . & u_n v_n \end{bmatrix} = |v\rangle \langle u| \tag{47}$$

Producto exterior y proyección

Este es un operador que puede actuar sobre otros vectores, por ejemplo, si w es cualquier otro vector, al evaluar esta matriz sobre w, vemos que:

$$(|v\rangle \langle u|)\,|w\rangle = (vu^T)w = v(u^T w) = (u \cdot w)v \tag{48}$$

La última igualdad viene de que $(u^T w)$ es el producto interno de u y w. Este procedimiento permite crear un operador de dos vectores, llamado el producto exterior, porque claramente es contrario al producto interno.

Producto exterior y proyección

Para un espacio vectorial de dimensión finita, el producto externo puede entenderse como una simple multiplicación de matrices, de la siguiente forma:

$$|\phi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ . \\ . \\ . \\ \phi_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \dots & \psi_N^* \end{bmatrix} \tag{49}$$

Producto exterior y proyección

$$
= \begin{bmatrix}
\phi_1 \psi_1^* & \phi_1 \psi_2^* & \phi_1 \psi_3^* & \cdots & \phi_1 \psi_N^* \\
\phi_2 \psi_1^* & \phi_2 \psi_2^* & \phi_2 \psi_3^* & \cdots & \phi_2 \psi_N^* \\
\phi_3 \psi_1^* & \phi_3 \psi_2^* & \phi_3 \psi_3^* & \cdots & \phi_3 \psi_N^* \\
. & . & . & \cdots & \\
. & . & . & \cdots & \\
. & . & . & \cdots & \\
\phi_N \psi_1^* & \phi_N \psi_2^* & \phi_N \psi_3^* & \cdots & \phi_N \psi_N^*
\end{bmatrix} \tag{50}
$$

Producto exterior y proyección

Un ejemplo clásico sería, una función que mapea los puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ a los puntos $(x,y,0) \in \mathbb{R}^2$ como una proyección ortogonal en el plano $x-y$. Esta función puede representarse por el producto exterior:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{51}$$

La acción de esta matriz en un vector arbitrario será:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{52}$$

Usando la notación de Dirac, el producto exterior y **P** lo podemos escribir como:

$$\mathbf{P} = \sum_{j=1}^{r} |\psi_j\rangle \langle\psi_j| \tag{53}$$

De forma más simple podemos escribir $\mathbf{P} = |\psi\rangle\langle\psi|$ en la notación de Dirac tenemos que $|\psi\rangle^* = \langle\psi|$ la propiedad de idempotencia se prueba así: $\mathbf{P}^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \mathbf{P}$ asumimos que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

Producto exterior

El producto exterior es un operador apliquemos este operador a un ket arbitrario $|\chi\rangle$:

$$(|\psi\rangle\langle\phi|)|\chi\rangle = |\psi\rangle\langle\phi|\chi\rangle = (\langle\phi|\chi\rangle)|\psi\rangle \tag{54}$$

Debemos notar para no confundirnos con esta igualdad que que los ket son vectores columna en el espacio $\mathbb{C}^n$ y los bra son los adjuntos (transpuestos conjugados), en ese sentido la igualdad que se cumple es: $(\psi\phi^*)\chi = \psi(\phi^*\chi) = (\phi^*\chi)\psi$ donde la asociatividad es la del producto de matrices.