Численный метод решения уравнений в частных производных на примере расчета высокотемпературного керамического теплообменника периодического действия.

Апанович Данил Владимирович
Клер Александр Матвеевич
ИСЭМ СО РАН

Иркутск 2020

Существующие методы

- Метод конечных разностей
  - Основывается на замене производных в уравнениях разностными схемами.
  - Является сеточным методом.
- Метод контрольных объемов
  - Расчетная область разбивается на непересекающиеся контрольные объемы, для которых допустима неправильная геометрическая форма.
  - Для каждого объема формируются балансовые уравнения, учитывающие обмен данного объема с соседними объемами массой, энергией и импульсом.
- Метод конечных элементов
  - Основан на разбиении расчетной области на достаточно большое число конечных элементов простой формы, как правило, многоугольников.
  - Для каждого элемента ищутся линейные комбинации заранее заданных базисных функций,

Постановка задачи

$x_1, \ldots, x_N$ - N независимых параметров

$y_1, \ldots, y_M$ - M искомых функций

$(x_1, \ldots, x_N) \in Q$ - Расчетная область

$Q_1, \ldots, Q_L \subset Q$ - Подобласти

$$D^{lk}\left(y_{i^{lk}_{01}}, y_{i^{lk}_{02}}, \cdots, y_{i^{lk}_{0N^{lk}_0}}, \frac{\partial y_{i^{lk}_{11}}}{\partial x_{j^{lk}_{11}}}, \cdots, \frac{\partial y_{i^{lk}_{1N^{lk}_1}}}{\partial x_{j^{lk}_{1N^{lk}_1}}}, \cdots\right) = 0$$

$$k = 1, \ldots, K_l, \forall (x_1, \ldots x_N) \in Q_l, l = 1, \ldots, L$$

Граничные условия

Условия равенства на границах смежных областей

$$y_i\psi^s(x_1, \cdots, x_N) = y_i\psi^q(x_1, \cdots, x_N),$$

$$\forall(x_1, \cdots, x_N) \in \Gamma^{s,q}$$ - Граница смежных областей

Условия реверсивности

Пусть x_N - это время то для периодических процессов выполняется условие реверсивности

$$y_i\psi(x_1, \cdots, x_{N-1}, 0) = y_i\psi(x_1, \cdots, x_{N-1}, T)$$

Полиномы

Вводится замена всех искомых функций полиномами:

$$y = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{01}x_2 + a_{02}x_2^2$$

Вводятся контрольные точки $(x_1^1, \cdots, x_N^1), \cdots, (x_1^t, \cdots, x_N^t)$

Пусть $\bar{y}$ будет значением полинома вычисленным в контрольной точке

Полиномы

Для всех граничных точек вычисляем конкретные значения и сравниваем

$$\bar{y}^s(x_1, \cdots, x_N) - \bar{y}^q(x_1, \cdots, x_N) = \theta^{sqt}$$

Для которых вычисляются конкретные значения ДУ с замененными искомыми функциями

$$\overline{D}^{lkt}\left(\bar{y}_{i_{01}^{lkt}}, \bar{y}_{i_{02}^{lkt}}, \cdots, \bar{y}_{i_{0N_0^{lk}}^{lkt}}, \frac{\partial \bar{y}_{i_{11}^{lkt}}}{\partial x_{j_{11}^{lk}}}, \cdots, \frac{\partial \bar{y}_{i_{1N_1^{lk}}^{lkt}}}{\partial x_{j_{1N_1^{lk}}^{lk}}}, \cdots\right) = \theta^{lkt}$$

Определение ограничений и построение задачи линейного программирования

$$g^+ = z - \frac{\theta^{lkt}}{\delta^{lk}} \geq 0$$
$$g^- = z + \frac{\theta^{lkt}}{\delta^{lk}} \geq 0$$

Аналогично поступаем для граничных и начальных условий

Задача линейного программирования

$$\min_{z,a,a,\cdots} z$$
$$g^+ \geq 0$$
$$g^- \geq 0$$

Теплообменник

$$(T_{gp}(x,\tau,r)-T_{cp}(x,\tau,r))\alpha F_{spec}+\rho^2c^2F_*W\frac{\partial T_{gp}(x,\tau,r)}{\partial x}+\rho^2c^2F_*\frac{\partial T_{gp}(x,\tau,r)}{\partial \tau} = 0$$

$$(T_{gp}(x,\tau,r) - T_{cp}(x,\tau,r))\alpha F_{spec} - \lambda\frac{\partial T_{cp}(x,\tau,r)}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial T_{cp}(x,\tau,r)}{\partial \tau} - A\left(\frac{\partial^2 T_{cp}(x,\tau,r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T_{cp}(x,\tau,r)}{\partial r}\right) = 0$$