Một số kỹ thuật hay trong các bài toán phương trình hàm trên $\mathbb{R}^+$

Lê Trí Đức

Ngày 4/7/2024

1 Một số kinh nghiệm

1.1 Tính chất kết hợp

Ta cần ghi nhớ hai kết quả cực kì quan trọng như sau về tính chất của hàm

i/ Một hàm số toàn ánh và đơn điệu thì nó sẽ là hàm liên tục

ii/ Một hàm số liên tục và đơn ánh thì nó sẽ là hàm đơn điệu

Về chứng minh mọi người có thể tham khảo tại 2 đường link ở trên

1.2 Phương pháp thế CDE

Về phương pháp thế CDE thì mọi người có thể tham khảo tại đây

Nôm na thì ý tưởng của phương pháp sẽ là đưa phương trình hàm về dạng $f(x+c) = f(x) + d, \forall x \geqslant e$ sau đó sử dụng các phép biến đổi như $P(x+c, y) - P(x, y)$ để triệt tiêu hoặc làm mất đi tính đối xứng của phương trình hàm giúp giải quyết bài toán hoặc tạo ra thêm các giả thiết khác. Tuy vậy phương pháp này không phải lúc nào cũng hiệu quả vì mỗi lần thế như vậy có thể sẽ tạo ra một phiên bản $f(x+c') = f(x) + d', \forall x \geqslant e'$ khác.

1.3 Sử dụng các bổ đề

Ở đây ta thường dùng các kết quả quen thuộc như sau

i/ Nếu $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mà f cộng tính thì $f(x) \equiv Id$

ii/ Nếu $f, g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mà thỏa mãn

$$f(x+g(y)) = f(x) + h(y), \forall x, y > 0$$

Thì $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ là hằng số

Bổ đề ii/ có vẻ đã quá quen thuộc với các bạn học sinh. Ngoài ra ta còn có thêm các bổ đề khác như sau iii/ Cho $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x + g(y)) = f(x) + g(y), \forall x, y > 0$$

Thì khi đó $f(x) \geqslant x, \forall x > 0$ hoặc là tồn tại một số thực d sao cho $g(y) \in d\mathbb{Z}$

Tham khảo tại đây

iv/ Cho hàm số $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn tồn tại các số thực dương a_i, b_i, c_i, d_i với $i = 1, 2$ sao cho

$$\begin{cases} g(x + a_1) + b_1 = g(x + c_1) + d_1 & (1) \\ g(x + a_2) + b_2 = g(x + c_2) + d_2 & (2) \end{cases}, \forall x > 0$$

Khi đó tồn tại số thực không âm $\lambda \geqslant 0$ sao cho $d_i - b_i = \lambda(a_i - c_i), \forall i = 1, 2$

v/ Cho $f, g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn h là hàm toàn ánh và

$$f(g(x) + f(y)) = h(x) + y, \forall x, y > 0$$

thì khi đó f là hàm tuyến tính

Tham khảo tại đây

1.4 Xây dựng dãy

Xây dựng dãy trong phương trình hàm là một kỹ thuật khó. Thực ra về mặc bản chất ta sẽ xem xét các dãy dạng $\{f(z_n)\}$ hoặc các dãy có dạng sai phân $f(a_{n+1}) = f(a_n) + g(n)$

1.5 Các định lý về hàm thực

Các định lý liên quan đến hàm thực

i/ Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a, b]$

ii/ Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì $f([a, b]) = [m, M]$ trong đó m là giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a, b]$ còn M là giá trị lớn nhất của hàm f trên đoạn $[a, b]$.

iii/ Định lý Fermat : Cho hàm f đạt cực trị tại x_0 và khả vi tại x_0 thì ta có $f'(x_0) = 0$

iv/ Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trên khoảng (a, b). Giả sử $f(a) = f(b)$ thì tồn tại c sao cho $f'(c) = 0$

v/ Định lý Cauchy : Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trong khoảng (a, b). Nếu $g(a) \neq g(b)$ và $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

vi/ Định lý Lagrange : Cho f khả vi trên (a, b) và liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ở trên, tác giả chỉ tóm tắt các kết quả cơ bản thường hay sử dụng trong các bài toán về phương trình hàm trên tập số thực dương. Ngoài ra còn rất rất nhiều các kỹ thuật khác sẽ được trình bày dưới đây trong phần bài tập.

2 Thực hành

Bài 1. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(yf(x)^3 + x\right) = x^3 f(y) + f(x), \forall x, y > 0$$

Balkan MO 2022

Lời giải.

Ta chứng minh một vài kết quả sau :

i/ f là đơn ánh

Thật vậy, quan sát đơn giản ta xét $y \to 0^+$ còn x cố định, với mỗi x như vậy thì $f(x+\varepsilon) > f(x)$ với ε đủ nhỏ cho nên f là đơn ánh

ii/ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ tồn tại và nó bằng 0.

Thật vậy, vì f đơn điệu và f bị chặn dưới bởi 0 cho nên theo tiêu chuẩn cơ bản của sự hội tụ ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ tồn tại. Giới hạn trên bằng $L \geqslant 0$. Ta phản chứng $L > 0$ thì khi đó xét

$$\begin{aligned} & f\left(yf(x)^3 + x\right) = x^3 f(y) + f(x) \\ \Longrightarrow\ & f\left(yf(x)^3\right) < x^3 f(y) + f(x) \end{aligned}$$

cho $x \to 0$ thì

$$f\left(yL^3\right) < L$$

hay nói cách khác là f bị chặn. Nhưng điều này là không đúng. Giả sử $f(x) \leqslant M, \forall x > 0$ thì từ giả thiết ta có

$$x^3 f(y) < x^3 f(y) + f(x) \leqslant M$$

và cho $x \to +\infty$ thì có điều mâu thuẫn. Vậy $L = 0$

Bây giờ ta sẽ chứng minh f là liên tục

iii/ f là hàm liên tục.

Thật vậy, từ giả thiết, ta cho x cố định, với mỗi x như vậy cho $y \to 0^+$ thì được

$$\lim_{t\to 0}(f(x+t) - f(x)) = 0$$

vì $x^3 f(y) \to 0$ khi $y \to 0$. Vậy f tồn tại giới hạn bên phải. Bây giờ ta chứng minh f tồn tại giới hạn bên trái.

Ứng với mỗi $v > 0$ ta xét $y = \dfrac{v}{f(x)^3}$ thì đưa về

$$f(x+v) = x^3 f\left(\frac{v}{f(x)^3}\right) + f(x)$$

thay $x \to u - v, u > v > 0$ thì

$$f(u) - f(u-v) = x^3 f\left(\frac{v}{f(x)^3}\right)$$

cho $v \to 0$ thì ta có

$$\lim_{v\to 0}(f(u) - f(u-v)) = 0$$

vậy f có giới hạn bên phải. Vì f có giới hạn bên phải và trái tại mỗi $x > 0$ cho nên f liên tục.

iv/ kết thúc bài toán

Từ f liên tục, ta xét đạo hàm theo y của 2 vế

$$\frac{f'\left(yf(x)^3 + x\right)}{f'(y)} = \left(\frac{x}{f(x)}\right)^3$$

chú ý rằng f đơn điệu, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ cho nên đạo hàm f' cũng dương và f là toàn ánh trên $\mathbb{R}^+$ vì f liên tục nên suy ra nó nhận mọi giá trị trên khoảng xác định của nó. Bây giờ chọn $x \in (0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^+$ sao cho $f(x) < 1$ và thay y sao cho $yf(x)^2 + x = y \leftrightarrow y = \dfrac{x}{1 - f(x)^2}$ thì được $f(x) = x$ với mỗi x đủ nhỏ. Quay lại bài toán, với mỗi y cho x đủ nhỏ và tách ra ta được $f(y) = y, \forall y > 0$. Vậy suy ra $f(y) = y, \forall y > 0$ là hàm ta cần tìm.

Bài 2. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(f(x) + f(y)) = yf(1 + yf(x)), \forall x, y > 0$$

Lời giải.

Thay $y \to \dfrac{x-1}{f(x)}$ với $x > 1$ bất kỳ vào giả thiết thì đưa về

$$f\left(f(x) + f\left(\frac{x-1}{f(x)}\right)\right) = x - 1, \forall x > 1$$

và đổi $x \to x + 1$ thì có $f\left(f(x+1) + f\left(\dfrac{x}{f(x+1)}\right)\right) = x, \forall x > 0$ cho nên f là toàn ánh. Điều này dẫn tới giả thiết có thể được viết lại thành $f(x + f(y)) = yf(1 + xy), \forall x, y > 0$. Ký hiệu phép đổi biến vào $f(x + f(y)) = yf(1 + xy)$ bởi $Q(x, y)$

Nhận xét 1. $f(1) = 1$

Thật vậy, thay $Q(x, 1)$ vào thì ta có

$$f(x + f(1)) = f(x + 1)$$

Nếu $f(1) \neq 1$ thì $f(x + f(1) - 1) = f(x), \forall x > 0$ và không mất tính tổng quát có thể giả sử $f(1) > 1$. Suy ra f tuần hoàn theo chu kì $d = f(1) - 1$ và thay $Q(x, y + d)$ vào giả thiết thì có

$$f(x + f(y + d)) = f(x + f(y)) = (y + d)f(1 + xy + xd)$$

chọn $x \in \mathbb{Z}$ thì có $(y + d)f(1 + xy + xd) = (y + d)f(1 + xy) = yf(1 + xy)$ cho nên $y + d = y$ dẫn tới $d = 0$ và buộc $f(1) = 1$

Nhận xét 2. $f(x) \leqslant 1, \forall x > 1$ và $f(x) \geqslant 1, \forall x < 1$

Thật vậy, giả sử tồn tại $x > 1$ sao cho $f(x) \geqslant 1$ thì thay x bởi $\dfrac{f(y) - 1}{y - 1}$ thì được

$$y = \frac{f(x + f(y)}{f(1 + xy)} = 1$$

là điều mâu thuẫn. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét 3. f là hàm song ánh.

Từ phép thế đầu tiên ta đã có f là toàn ánh. Ta sẽ đi chứng minh f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử tồn tại $a < b$ sao cho $f(a) = f(b)$ thì từ $Q(x, a)$ và $Q(x, b)$ ta có

$$f(x + f(a)) = f(x + f(b)) = af(1 + xa) = bf(1 + xb)$$

suy ra $f(1 + xa) = \frac{b}{a}f(1 + xb)$ hay $f\left(x\frac{a}{b} + 1\right) = \frac{b}{a}f(x + 1)$.

Thay $x \to x\frac{a}{b}$ lặp lại trong đẳng thức trên thì được

$$f\left(x\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1\right) = \frac{b}{a}f\left(x\frac{a}{b} + 1\right) = \left(\frac{b}{a}\right)^2 f(x + 1)$$

Quy nạp ta có

$$f\left(xr^n + 1\right) = \frac{1}{r^n}f(x + 1)$$

trong đó $r = \frac{a}{b} < 1$. Từ **nhận xét 2** ta có $f\left(xr^n + 1\right) \leqslant 1$ và chú ý rằng $\left(\frac{b}{a}\right)^n f(x + 1) \leqslant 1$ nhưng $\frac{b}{a} > 1$ nên cố định x và cho $n \to +\infty$ ta có $\left(\frac{b}{a}\right)^n f(x + 1) \to +\infty$ và ta có ngay điều mâu thuẫn. Do đó $\frac{a}{b} = 1$ hay f là đơn ánh.

Nhận xét 4. f là hàm đơn điệu

Thay $Q(xz, y)$ thì được

$$f(xz + f(y)) = yf(1 + xyz), \forall x, y, z > 0$$

Hoán đổi vị trí của x, y thì được

$$f(yz + f(x)) = xf(1 + xyz), \forall x, y, z > 0$$

suy ra

$$\frac{f(xz + f(y))}{y} = \frac{f(yz + f(x))}{x}, \forall x, y, z > 0$$

Nếu tồn tại một cặp $x \neq y$ sao cho $x - y$ và $f(x) - f(y)$ cùng dấu thì thay $z = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ ta sẽ được $xz + f(y) = yz + f(x)$ hay $\frac{1}{y} = \frac{1}{x}$ là vô lý vì ta đang xét $x - y \neq 0$. Suy ra f là hàm không tăng tức với $x > y$ thì ta có $f(x) \leqslant f(y)$ nhưng từ **nhận xét 3** ta có f là đơn ánh cho nên f cũng là hàm đơn điệu

Từ đây ta có f vừa là hàm đơn điệu vừa là toàn ánh cho nên nó cũng là hàm liên tục.

Ta xét từ $Q(1, y)$ thì có

$$f(f(y) + 1) = yf(y + 1)$$

Cho $y \to +\infty$ và xét $\frac{f(f(y) + 1)}{y} \to 0$ do $\lim\limits_{y \to +\infty} f(f(y) + 1) = f\left(\lim\limits_{y \to +\infty}(f(y) + 1)\right) = f(c)$ là một hằng số. Xét $Q(x, y + f(z))$ ta đưa về

$$f(x + zf(1 + yz)) = (y + f(z))f(1 + xy + xf(z))$$

Bây giờ ta có cố định $y > 1$, xét $zf(1 + yz)$ khi cho z tiến tới dương vô cùng thì ta được $zf(1 + yz)$ sẽ tiến về một số $d > 0$ nào đó. Vì ta có

$$f(y + f(z)) = zf(1 + yz)$$

khi cho $z \to +\infty$ thì $\lim_{z\to+\infty} f(y+f(z)) = f\left(\lim_{z\to+\infty}(y+f(z))\right) = d$ do các tính chất ta đã chứng minh ở trên thì f bị chặn, cụ thể $0 < f \leqslant 1$ và f đơn điệu. Do đó ta khi ta cho $z \to +\infty$ ở biểu thức trên thì sẽ được

$$f(x+d) = (y+c)f(1+xy+xe)$$

Thay $x = 1$ ta được

$$f(1+d) = (y+c)f(1+y+e)$$

hay

$$f(y)(y+c-1-e) = f(1+d)$$
$$\Longrightarrow f(y) = \frac{f(1+d)}{y+c-1-e} = \frac{A}{y+B}, \forall y > 1+e$$

Thay trở lại vào bài toán

$$f(x+f(y)) = yf(1+xy)$$

Cho y cố định và x đủ lớn thì được

$$\frac{1}{x+f(y)} = \frac{y}{1+xy} = \frac{y}{xy+yf(y)}$$

suy ra $f(y) = \frac{1}{y}, \forall y > 0$ và ta có điều phải chứng minh.

Bài 3. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+f(xy)) = xf(1+f(y)), \forall x, y > 0$$

Lời giải.

Cố định $y > 0$, thay $x \to \frac{x}{f(1+f(y))}$ thì ta có $f\left(\frac{x}{f(1+f(y))} + f\left(\frac{x}{f(1+f(y))}y\right)\right) = x$ cho nên f là hàm toàn ánh.

Ta sẽ chứng minh f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử tồn tại $a \neq b$ sao cho $f(a) = f(b)$. Thay $P\left(x, \frac{a}{x}\right)$ và $P\left(x, \frac{b}{x}\right)$ ta có được

$$f(x+f(a)) = f(x+f(b)) = xf\left(1+f\left(\frac{a}{x}\right)\right) = xf\left(1+f\left(\frac{b}{x}\right)\right)$$
$$\Longrightarrow f\left(1+f\left(\frac{a}{x}\right)\right) = f\left(1+f\left(\frac{b}{x}\right)\right)$$

Thay lại $x \to \frac{1}{x}$ thì có

$$f(1+f(xa)) = f(1+f(xb)), \forall x > 0$$
$$\Longrightarrow f(1+f(x)) = f\left(1+f\left(x\frac{b}{a}\right)\right), \forall x > 0$$

Đặt $\frac{b}{a} = r < 1$ thì quy nạp ta có được

$$f(1+f(x)) = f\left(1+f\left(xr^n\right)\right), \forall x > 0, n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

Thay $y \to yr$ thì ta được

$$f(x+f(xyr)) = xf(1+f(yr)) = xf(1+f(y)) = f(x+f(xy)), \forall x, y > 0$$

Thay $y \to \dfrac{z}{x}$ thì có được

$$f(x+f(zr)) = f(x+f(z)), \forall x > 0$$

Trong đó z là số thực dương cố định bất kỳ. Nếu $f(zr) \neq f(z)$ thì ta có $f(x+f(zr)-f(z)) = f(x), \forall x > 0$. Không mất tỉnh tổng quát, ta có thể giả sử $f(zr) > f(z)$ thì suy ra f tuần hoàn theo chu kì $d > 0$ và do đó nó cũng tuần hoàn theo chu kì nd với $n \in \mathbb{Z}$. Thay $P(x+d, y)$ vào giả thiết và chọn $y \in \mathbb{Z}_{>0}$ thì có

$$f(x+d+f(xy+yd)) = f(x+f(xy)) = (x+d)f(1+f(y)) = xf(1+f(y))$$

cho nên $d = 0$. Vậy $f(zr) = f(z)$ với mỗi $z > 0$. Thay $P(r, y)$ thì ta được

$$f(r+f(ry)) = f(r+f(y)) = rf(1+f(y))$$

do f là toàn ánh cho nên ta có thể viết lại thành

$$f(y+r) = rf(y+1)$$

suy ra $f(y) = rf(y+1-r)$ và từ $r < 1$ ta suy ra $f(y) = rf(y+d)$ là hàm tuần hoàn theo chu kì d. Suy ra

$$\begin{gathered} f(y+d) = rf(y+2d) \\ \Longrightarrow f(y) = r^2 f(y+2d) \end{gathered}$$

Trong giả thiết tiếp tục thay $x \to r^2$ và làm tương tự ta có

$$f\left(y+r^2\right) = r^2 f(y+1)$$

suy ra trong $f(y) = r^2 f(y+2d)$ ta cho $y \to y + r^2$ thì được

$$f\left(y+r^2\right) = r^2 f\left(y+2d+r^2\right) = r^2 f(y+1)$$

Suy ra $f(y) = f\left(y+2d+r^2-1\right), \forall y > C$ là hàm tuần hoàn theo chu kì d với y đủ lớn. Làm tương tự như trên ta suy ra $2d + r^2 = 1$ trong đó $d = 1 - r$, thay lại ta được

$$\begin{gathered} 2 - 2r + r^2 = 1 \\ \Longrightarrow 1 - 2r + r^2 = 1 \\ \Longrightarrow r = 1 \end{gathered}$$

vậy f là đơn ánh. Bây giờ xét $P(x, 1)$ ta được

$$f(x+f(x)) = xf(1+f(1)), \forall x > 0$$

Đặt $f(1+f(1)) = c$ thì ta đưa về

$$f(x+f(x)) = xc, \forall x > 0$$

Thay $x \to \dfrac{f(x)}{c}$ thì đưa về

$$f\left(\frac{f(x)}{c} + f\left(\frac{f(x)}{c}\right)\right) = f(x), \forall x > 0$$

và từ f đơn ánh ta suy ra $f\left(\dfrac{f(x)}{c}\right)+\dfrac{f(x)}{c}=x, \forall x>0$.

Nhận xét.

i/ Với số thực không âm a, nếu $f(x)>ax, \forall x>0$ thì ta cũng có $f(x)<\dfrac{c}{a+1}x, \forall x>0$

ii/ Với số thực không âm a, nếu $f(x)<ax, \forall x>0$ thì ta cũng có $f(x)>\dfrac{c}{a+1}x, \forall x>0$

Thật vậy, xét trong đẳng thức ở trên, ta có nếu $f(x)>ax$ thì

$$\begin{aligned} x=f\left(\frac{f(x)}{c}\right)+\frac{f(x)}{c}&>a\frac{f(x)}{c}+\frac{f(x)}{c} \\ \Longrightarrow x&>\frac{a+1}{c}f(x) \\ \Longrightarrow f(x)&<\frac{c}{a+1}x \end{aligned}$$

Vế còn lại chứng minh tương tự.

Bây giờ ta xây dựng hai dãy $(a_n),(b_n)$ như sau

$$a_1=0, b_1=c, a_{n+1}=\frac{c}{b_n+1}, b_{n+1}=\frac{c}{a_n+1}$$

Bằng quy nạp ta sẽ chứng minh rằng

$$a_nx<f(x)<b_nx, \forall x>0$$

Thật vậy, trường hợp cơ sở ta có

$$0x<f(x)<cx$$

đúng theo **nhận xét** ở trên.

Bây giờ giả sử ta đã có

$$a_nx<f(x)<b_nx, \forall x>0$$

thì từ **nhận xét** ta cũng có $\dfrac{c}{b_n+1}<f(x)<\dfrac{c}{a_n+1}\Longrightarrow a_{n+1}x<f(x)<b_{n+1}x$.

Bây giờ ta sẽ quy nạp chứng minh dãy $a_n<b_n$. Với trường hợp cơ sở, ta có $a_1=0<b_1=c$. Giả sử đúng đến n, ta chứng minh nó cũng đúng với $n+1$. Từ công thức xác định của hai dãy ta có

$$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{c(a_n-b_n)}{(a_n+1)(b_n+1)}<0$$

suy ra $a_n<b_n, \forall n$. Mặt khác, ta có $a_2=\dfrac{c}{b_1+1}=\dfrac{c}{c+1}$ nên $a_1<a_2$ và $b_2=\dfrac{c}{a_1+1}=c\geqslant b_1$. Cho nên $a_1<a_2$ và $b_1\geqslant b_2$. Bằng quy nạp ta sẽ chứng minh a_n là dãy tăng và b_n là dãy không giảm. Thật vậy, ta có hàm $f(t)=\dfrac{2}{t+1}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}^+$ cho nên

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=\frac{2}{b_n+1}\geqslant\frac{2}{b_{n-1}+1}=a_n \\ b_{n+1}&=\frac{2}{a_n+1}\leqslant\frac{2}{a_{n-1}+1}=b_n \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Suy ra

$$0=a_1\leqslant a_2\leqslant ...\leqslant a_n\leqslant b_n\leqslant ...<b_1=c$$

cho nên $(a_n), (b_n)$ là hai dãy đơn điệu và bị chặn cho nên cùng tồn tại giới hạn hữu hạn. Đặt $a = \lim a_n, b = \lim b_n$ thì khi đó $a = f(b), b = f(a)$ với $f(t) = \frac{2}{t+1}$. Giải hệ trên ta suy ra $a = b$ và dẫn tới

$$f(x) = ax, \forall x > 0$$

Thay lại ta được $f(x) = x, \forall x > 0$ là hàm duy nhất thỏa mãn.

Bài 4. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(xf(y) + f(x)) = f(yf(x)) + x, \forall x, y > 0$$

Lời giải.

Đây là một bài toán rất khó với tư tưởng giải quyết độc lạ. Trước hết ta xét $P\left(x, \frac{y}{f(x)}\right)$ thì đưa về

$$f\left(xf\left(\frac{y}{f(x)}\right) + f(x)\right) = f(y) + x, \forall x, y > 0$$

Ký hiệu đẳng thức trên bởi $Q(x, y)$. Gọi $m = \inf f\left(\mathbb{R}^+\right)$. Khi đó tồn tại dãy $(y_n)_{n\geqslant 1}$ thỏa mãn $f(y_n) \to m$ khi $n \to +\infty$. Từ $Q(x, y_n)$ ta có được $(m; +\infty) \subseteq f\left(\mathbb{R}^+\right)$. Mục tiêu của ta là chứng minh $m = 0$ để suy ra f là toàn ánh.

Giả sử tồn tại a, b để mà $f(a) = f(b)$ thì thay $P(x, a)$ và $P(x, b)$ vào ta được

$$f(af(x)) = f(bf(x))$$

suy ra $f(ax) = f(bx), \forall x > m$ và ngoài ra ta sẽ có $f(x) = f(tx), \forall x > am$ trong đó $t = \frac{b}{a}$. Tiếp theo ta xét $c > f(2am)$ thì từ $P(c, y)$ ta có

$$f(cf(y) + f(c)) = f(yf(c)) + c > f(2am) = f(2amt) = ... = f\left(2amt^n\right)$$

Suy ra $cf(y) + f(c) \neq 2amt^n$ nhưng cho $n \to +\infty$ thì $2amt^n \in (cm + f(c), +\infty)$ do f là toàn ánh trên khoảng các số lớn hơn $cm + f(c)$. Vậy ta có điều mâu thuẫn, dẫn tới f là đơn ánh.

Từ $Q(x, y_n)$ ta có $xf\left(\frac{y_n}{f(x)}\right) + f(x) > m$ cho nên $(m, +\infty) \subseteq f((m, +\infty))$. Giả sử $m > 0$ thì có $f\left(\mathbb{R}^+\right) \subseteq [m, +\infty)$ do định nghĩa của m nhưng ngoài ra do f là đơn ánh nên với mỗi $x \in (0, m]$ thì $f(x) \notin (m, +\infty)$ dẫn tới $f(x) = m$ và mâu thuẫn với việc f là đơn ánh. Do đó $m = 0$ hay f là đơn ánh. Từ đây ta xét tồn tại t để $f(t) = 1$ và thay $P(t, x)$ ta được

$$f(tf(x) + 1) = f(x) + t$$

do f toàn ánh nên

$$f(xt + 1) = x + t$$
$$\implies f(x) = \frac{x + t^2 - 1}{t}, \forall x > 1$$

Đến đây thì việc sử lý phần còn lại khá đơn giản.

Bài 5. Cho $c > 0$ là hằng số bất kì. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ thỏa mãn

$$f((c + 1)x + f(y)) = f(x + 2y) + 2cx, \forall x, y > 0$$

Lời giải.

Dự đoán hàm $f(x) = 2x, \forall x > 0$ là hàm thỏa mãn. Ta có nhiều cách cho bài toán trên. Trước hết, hãy cố gắng biến đổi như thông thường.

Ta xét phép thế $x = \dfrac{2y - f(y)}{c}$ suy ra điều vô lí cho nên $2y \leqslant f(y), \forall y > 0$. Ý tưởng của ta đó chính là xây dựng 1 dãy số (a_n) thỏa mãn $f(a_n) = f(a_{n-1}) + 2cx$. Đây cũng là một cách khá hiệu quả để xử lí các bài toán mà ta có được điều kiện $f(x) \geqslant cx$ với c là hằng số nào đó.

Cụ thể ta đi vào xây dựng như sau :

Giả sử phản chứng, $f(y) > 2y$ với $y > 0$ nào đó. Ta xây dựng một dãy $(a_n)_{n\geqslant 0}$ như sau : a_0 là số thực bất kỳ lớn hơn $2y > 0$ và $f(a_n) = f(a_{n-1}) + 2cx$. Để có được điều này thì ta cần

$$\begin{cases} (c+1)x + f(y) = a_n \\ x + 2y = a_{n-1} \end{cases}$$

tương đương với $x = a_{n-1} - 2y$ và $a_n = (c+1)(a_{n-1} - 2y) + f(y)$. Nếu $x = a_{n-1} - 2y > 0$ thì ta có $a_n > f(y) > 2y$ là hợp lí. Đặt $b_n = a_n - 2y$ thì ta có được

$$b_n = (c+1)b_{n-1} + f(y) - 2y$$

và ta đưa về $f(a_n) = f(a_{n-1}) + 2cb_{n-1}$. Cộng dồn tổng lại ta được

$$f(a_n) = f(a_0) + 2c\sum_{i=0}^{n-1} b_i$$

Ta xác định được công thức tổng quát của b_n như sau

$$b_n = \left(b_0 + \frac{f(y) - 2y}{c}\right)(c+1)^n - \frac{f(y) - 2y}{c}$$

và do đó

$$\begin{aligned} f(a_n) &= f(a_0) + 2c\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left(b_0 + \frac{f(y) - 2y}{c}\right)(c+1)^i - \frac{f(y) - 2y}{c}\right) \\ &= f(a_0) + 2\left(b_0 + \frac{f(y) - 2y}{c}\right)((c+1)^n - 1) - 2n(f(y) - 2y)) \end{aligned}$$

và từ

$$f(a_n) \geqslant 2a_n = 2b_n + 4y$$

ta có được

$$\begin{aligned} f(a_0) + 2\left(b_0 + \frac{f(y) - 2y}{c}\right)((c+1)^n - 1) - 2n(f(y) - 2y)) &\geqslant 2b_n + 4y \\ &> 2\left(\left(b_0 + \frac{f(y) - 2y}{c}\right)(c+1)^n - \frac{f(y) - 2y}{c}\right) \\ \leftrightarrow f(a_0) + 2\frac{f(y) - 2y}{c} > 2\left(b_0 + \frac{f(y) - 2y}{c}\right) &+ 2n(f(y) - 2y), \forall y \geqslant 0 \end{aligned}$$

vô lí với n đủ lớn. Vậy ta có giả sử phản chứng là sai hay $f(y) = 2y, \forall y > 0$.

Ta đổi gió một chút với các bài toán sử dụng kỹ thuật CDE

Bài 6. Tìm tất cả các hàm $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn các điều kiện sau với mọi số thực dương

i/ $f(x + g(x) + y) = g(x) + f(x) + f(y), \forall x, y > 0$

ii/ $g(x + f(x) + y) = f(x) + g(x) + g(y), \forall x, y > 0.$

Lời giải.

Kí hiệu $P(x, y)$ là phép đổi biến x, y trong giả thiết i/ còn $Q(x, y)$ là phép đổi biến trong giả thiết ii/. Giả sử tồn tại $a, b > 0$ sao cho $f(x + a) = f(x) + b$. Thay $Q(x + a, y)$ vào thì có được

$$\begin{aligned} g(x + f(x) + y + a + b) &= f(x + a) + g(x + a) + g(y) \\ &= f(x) + b + g(x + a) + g(y), \forall x, y > 0 \end{aligned}$$

Tiếp theo thay $y \to y + a + b$ thì có

$$g(x + f(x) + y + a + b) = f(x) + g(x) + g(y + a + b), \forall x, y > 0$$

Suy ra ta có

$$\begin{aligned} f(x) + b + g(x + a) + g(y) &= f(x) + g(x) + g(y + a + b), \forall x, y > 0 \\ \Longrightarrow g(x + a) + b + g(y) &= g(x) + g(y + a + b), \forall x, y > 0 \end{aligned}$$

Thay $x = y$ thì đưa về

$$g(x + a) + b = g(x + a + b), \forall x > 0 \tag{1}$$

Đẳng thức trên tương đương với $g(x) + b = g(x + b), \forall x > a$.

Bây giờ xét với $x > a$ thì thay $P(x + b, y)$ vào lại ta được

$$f(x + g(x) + b + y) = g(x) + b + f(x) + f(y), \forall x > a, y > 0$$

Tiếp tục xét $P(x, y + b)$ thì được

$$f(x + g(x) + y + b) = g(x) + f(x) + f(y + b), \forall x, y > 0$$

Suy ra

$$f(y) + b = f(y + b) = f(y + a), \forall y > 0$$

Nếu như $a \neq b$ thì suy ra $f(x) = f(x + T), \forall x > 0$ trong đó $T = a - b$ và f tuần hoàn theo chu kì T. Xét $P(x + T, y)$ thì được

$$f(x + g(x + T) + y) = g(x + T) + f(x) + f(y), \forall x > T, y > 0$$

Thay $y = nT - g(x + T)$ trong đó n là số nguyên dương ta chọn đủ lớn sao cho $nT > g(n + T)$ thì đưa về

$$\begin{aligned} f(x + nT) = f(x) &= f(x) + f(nT - g(x + T)) + g(x + T) \\ \Longrightarrow f(nT - g(x + T)) &+ g(x + T) = 0 \end{aligned}$$

Và đây là điều vô lí. Vậy $T = 0$ tức $a = b$. Suy ra nếu có a, b để $f(x + a) = f(x) + b$ thì $a = b$. Quay trở lại $P(x, y)$ ta có

$$\begin{aligned} f\left(x + \underbrace{g(x) + y}_{a}\right) &= f(x) + \underbrace{g(x) + f(y)}_{b} \\ \Longrightarrow f(y) &= y, \forall y > 0 \end{aligned}$$

Vậy ta có $f(x) = x, \forall x > 0$. Thay trở lại vào $Q(x, y)$ thì có

$$g(2x + y) = x + g(x) + g(y), \forall x, y > 0$$

Ký hiệu $R(x, y)$ là phép đổi biến trong đẳng thức ở trên. Xét $s, t > 0$ là hai số phân biệt bất kỳ. Khi đó ta thực hiện phép thế

$$R(x, s) - R(x, t) : g(x + s) = g(x + t) + g(s) - g(t)$$
$$\implies g(x + c) = g(x) + d, \forall x > e$$

với $e = s - t$. Bây giờ chọn x, y đủ lớn để đẳng thức ở trên xảy ra, ta xét phép thế $R(x + c, y)$ thì được

$$g(2x + y + 2c) = g(2x + y) + 2d = x + c + g(x) + d + g(y)$$
$$\implies c = d$$

hay $g(s) - g(t) = s - t \implies g(s) - s = M$ với M là hằng số cố định. Vậy ta có $g(x) = x + c$, thử lại thì có $c = 0$.

Suy ra tất cả các hàm thỏa mãn là $g(x) = f(x) = x, \forall x > 0$.

Bài 7. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(1 + xf(y)) = yf(x + y), \forall x, y > 0$$

Lời giải

Xét $P(x, y)$ là phép đổi biến trong giả thiết. Xét phép thế $P(zf(x), f(y))$ vào ta được

$$f(1 + zf(x)f(y)) = yf(zf(x) + y), \forall x, z, y > 0$$

Hoán đổi vị trí của x, y ta được

$$f(1 + zf(x)f(y)) = xf(zf(y) + x), \forall x, y, z > 0$$

Do đó ta có được

$$yf(zf(x) + y) = xf(zf(y) + x), \forall x, y, z > 0$$

Xét phương trình $zf(x) + y = zf(y) + x$ hay $z = \dfrac{x - y}{f(x) - f(y)}$. Để phương trình trên có nghiệm thì $z > 0$ hay nói cách khác $x - y$ và $f(x) - f(y)$ cùng dấu. Điều này đồng nghĩa với việc f là hàm đơn điệu. Thay vào thì ta có

$$yf(z) = xf(z)$$

hay $x = y$ và đây là điều vô lý. Do đó f là hàm không tăng

Tiếp theo ta sẽ chứng minh f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử tồn tại $a < b$ sao cho $f(a) = f(b)$. Do f là hàm không tăng nên f sẽ là hàm hằng trên khoảng $[a, b]$. Thay $P(x, a)$ và $P\left(x, \dfrac{a + b}{2}\right)$ vào thì có

$$f(1 + xf(a)) = af(x + a)$$
$$f\left(1 + xf\left(\frac{a + b}{2}\right)\right) = \frac{a + b}{2} f\left(x + \frac{a + b}{2}\right)$$

Ta có $f(1+xf(a)) = f\left(1+xf\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. Ngoài ra ta sẽ chọn $x=\varepsilon$ đủ nhỏ sao cho đảm bảo được rằng $\varepsilon+a, \varepsilon+\frac{a+b}{2} \in [a,b]$. Thay $x=\varepsilon$ vào các đẳng thức ở trên ta có được $a=\frac{a+b}{2}$ và điều này là mâu thuẫn vì $a \neq b$. Vậy f là đơn ánh. Xét $P(x,1)$ ta có được ngay $f(1)=1$.

Tiếp theo xét $P(1,x)$ ta được $f(1+f(x)) = xf(x+1), \forall x > 1$.

Xét $P(x, 1+xf(y))$

$$f(1+xf(1+xf(y))) = f(1+xyf(x+y)) = (1+xf(y))f((x+1)f(y)+1), \forall x, y > 0$$

Hoán đổi vị trí của x và y trong đẳng thức trên ta được

$$(1+yf(x))f(1+(y+1)f(x)) = (1+xf(y))f(1+(x+1)f(y)), \forall x, y > 0$$

Thay $x=1$ vào đẳng thức vừa thu được

$$(1+f(y))f(2f(y)+1) = (1+y)f(y+2)$$

Từ $P(1,x)$ ta có được

$$(1+x)f(x+2) = f(1+f(x+1))$$

Ngoài ra thay $P(2,y)$ ta có được

$$f(2f(y)+1) = yf(y+2)$$

suy ra

$$\begin{aligned}(1+f(y))yf(y+2) &= (1+y)f(y+2)\\ \Longrightarrow 1+f(y) &= \frac{y+1}{y}\\ \Longrightarrow f(y) &= \frac{1}{y}, \forall y > 0\end{aligned}$$

Vậy tất cả các hàm thỏa mãn là $f(y) = \frac{1}{y}, \forall y > 0$.

Bài 8. Cho số nguyên dương m. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(f(x)+y) - f(x) = \left(\frac{f(y)}{y} - 1\right)x + f^m(y), \forall x, y > 0$$

Lời giải.

Trước tiên ta có nhận xét rằng $f(y) = y, \forall y > 0$ là một hàm thỏa mãn. Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng đây là hàm duy nhất thỏa mãn.

Giả sử tồn tại một số thực dương $y_0 \neq f(y_0)$

Xét $P(x,y)$ là phép thế vào giả thiết. Ta chứng minh được f là đơn ánh.

Thật vậy, xét $a, b > 0$ sao cho $f(a) = f(b)$. Thay $P(a, y_0)$ và $P(b, y_0)$ vào và so sánh ta được

$$\begin{aligned}f(f(a)+y_0) - f(a) = f(f(b)+y_0) - f(b) &= \left(\frac{f(y_0)}{y_0} - 1\right)a + f^m(y_0)\\ &= \left(\frac{f(y_0)}{y_0} - 1\right)b + f^m(y_0)\end{aligned}$$

Do $\dfrac{f(y_0)}{y_0} - 1 \neq 0$ cho nên suy ra $a = b$. Vậy f là hàm đơn ánh.

Tiếp theo, giả sử tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $f(\alpha) = \alpha$. Ta xét $P(x, \alpha)$ thì được

$$f(f(x)+\alpha) - f(x) = f^m(\alpha) = \alpha$$
$$\Longrightarrow f(f(x)+\alpha) = f(x) + \alpha$$

Gọi F là tập thỏa mãn $F = \{x > 0 : f(x) = x\}$. Khi đó với $\alpha \in F$ thì ta có $f(x) + \alpha \in F$. Tiếp tục ta xét $P(\alpha, x)$ thì được

$$f(x+\alpha) = \frac{f(f(x))}{f(x)}\alpha + f^{m+1}(x)$$

Thay $x \to f(x)$

$$f(f(x)+\alpha) = f(x) + \alpha = \frac{f(f(x))}{f(x)}\alpha + f^{m+1}(x)$$
$$\Longrightarrow f(x) - f^{m+1}(x) = \left(\frac{f(f(x))}{f(x)} - 1\right)\alpha$$

Vậy với mỗi $\alpha \in F$ thì ta có được $f(x) - f^{m+1}(x) = \left(\dfrac{f(f(x))}{f(x)} - 1\right)\alpha$. Xét $f(x) + \alpha \in F$ thì ta có

$$f(x) - f^{m+1}(x) = (\alpha + f(x))\left(\frac{f(f(x))}{f(x)} - 1\right) = \alpha\left(\frac{f(f(x))}{f(x)} - 1\right) + f(x)\left(\frac{f(f(x))}{f(x)} - 1\right)$$
$$\Longrightarrow \left(\frac{f(f(x))}{f(x)} - 1\right) f(x) = 0$$

Vì $f(x) > 0$ cho nên $f(f(x)) = f(x)$ hay $f(x) \in F$. Suy ra $f^{m+1}(x) = f^m(x) = ... = f(x)$ dẫn tới

$$f(x) - f^{m+1}(x) = 0$$

Quay trở lại giả thiết

$$f(f(x)+y) - f(x) = \left(\frac{f(y)}{y} - 1\right)x + f(y)$$

Thay $x \to f(x)$ ta được

$$f(f(x)+y) - f(x) = \left(\frac{f(y)}{y} - 1\right)f(x) + f(y)$$

Suy ra $f(x) = x$. Vậy trong trường hợp tồn tại α để $f(\alpha) = \alpha$ thì ta có $f(x) = x$. Bây giờ xét $f(x) \neq x, \forall x > 0$.

Ta sẽ kiểm tra thử xem $f(x) > x$ hay $f(x) < x$

Xét $\alpha > 0$ là số nhỏ nhất sao cho $\alpha > f(\alpha)$. Tồn tại một số α như vậy vì tập các số α thỏa mãn bị chặn dưới bởi 0. Khi đó xét phép thế $P(\alpha, \alpha - f(\alpha))$ ta được

$$f(\alpha) - f(\alpha) = \left(\frac{f(\alpha - f(\alpha))}{\alpha - f(\alpha)} - 1\right)\alpha + f^m(\alpha - f(\alpha)) = 0$$

Do $f^m(\alpha - f(\alpha)) > 0$ cho nên $\left(\dfrac{f(\alpha - f(\alpha))}{\alpha - f(\alpha)} - 1\right)\alpha < 0$ dẫn tới

$$\begin{aligned} &\frac{f(\alpha - f(\alpha))}{\alpha - f(\alpha)} < 1 \\ \Longrightarrow\ &\alpha - f(\alpha) > f(\alpha - f(\alpha)) \end{aligned}$$

Nhưng khi đó ta có $\alpha > \beta = \alpha - f(\alpha)$ là một số thực dương khác thỏa mãn tính chất $\beta > f(\beta)$ mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của α. Vậy ta có $f(x) > x, \forall x > 0$. Từ đây ta có $\dfrac{f(x)}{x} - 1 > 0$.

Ghi chú : Thông thường khi rơi vào bế tắc có một vài phép thế sau đây mà ta có thể thử: đầu tiên ta thử đưa về dạng CDE. Trong bài này thì việc được về sẽ gặp khá nhiều khó khăn vì chứa đại lượng $\dfrac{f(y)}{y}$.

Nếu không hiệu quả thì ta vẫn còn một cách khác đó chính là tạo tính đối xứng cho phương trình hàm sau đó hoán đổi vị trí của x và y. Bằng cách này ta có thể tạo ra được 1 biểu thức đối xứng theo x, y và thay các giá trị đặc biệt của y vào để tính toán. Những cách trên khá hiệu quả khi làm việc với các bài toán phương trình hàm trên $\mathbb{R}^+$ vì ta không thể thực hiện các phép thế quá thoải mái, khi phép thế không hiệu quả thì ta nghĩ ngay đến phương pháp đặc biệt hóa hoặc các tính chất giải tích khác của hàm số.

Bây giờ ta xét phép thế $P(x, f(y))$ đưa về

$$f(f(x) + f(y)) - f(x) = \left(\frac{f(f(y))}{f(y)} - 1\right)x + f^{m+1}(y)$$

Hoán đổi vị trí của x và y ta được

$$f(f(x) + f(y)) - f(y) = \left(\frac{f(f(x))}{f(x)} - 1\right)y + f^{m+1}(x)$$

Từ hai đẳng thức trên ta có

$$f(x) + f^{m+1}(y) + \left(\frac{f(f(y))}{f(y)} - 1\right)x = f(y) + f^{m+1}(x) + \left(\frac{f(f(x))}{f(x)} - 1\right)y$$

Thay $y = 1, y = 2$ lần lượt vào

$$\begin{aligned} f(x) + f^{m+1}(1) + \left(\frac{f(f(1))}{f(1)} - 1\right)x &= f(1) + f^{m+1}(x) + \left(\frac{f(f(x))}{f(x)} - 1\right) \\ f(x) + f^{m+1}(2) + \left(\frac{f(f(2))}{f(2)} - 1\right)x &= f(2) + f^{m+1}(x) + 2\left(\frac{f(f(x))}{f(x)} - 1\right) \\ \Longrightarrow \frac{f(f(x))}{f(x)} + f(2) - f(1) &= f^{m+1}(2) - f^{m+1}(1) + x\left(\frac{f(f(2))}{f(2)} - \frac{f(f(1))}{f(1)}\right) \\ \Longrightarrow \frac{f(f(x))}{f(x)} &= Ax + B, \forall x > 0, A, B \in \mathbb{R}, \forall x > 0 \end{aligned}$$

Đến đây ta có một vài nhận xét như sau: $\dfrac{f(f(x))}{f(x)}$ có thể là một hằng số vì ta không rõ $\dfrac{f(f(2))}{f(2)} - \dfrac{f(f(1))}{f(1)} \neq 0$ hay không. Ta có thể làm như sau : Vẫn giữ nguyên $y = 1$, ta khảo sát liệu có tồn tại một số $z > 0$ sao cho $\dfrac{f(f(z))}{f(z)} \neq \dfrac{f(f(1))}{f(1)}$ hay không. Nếu như không tồn tại thì khi đó $f(f(z)) = Cf(z), \forall z > 0$ trong đó $C > 0$ là một hằng số cho trước. Vì vậy ta cần phải giải quyết được trường hợp $f(f(x)) = cf(x)$.

Trường hợp $c = 1$ thì ta có $f(f(x)) = f(x) \Longrightarrow f(x) = x$ là vô lí như đã giả sử ở trên.

Ta xét $c \neq 1$ thì và xét trường hợp $c > 1$. Vì nếu $c < 1$ thì ta có vô lý ngay do $f(x) < f(f(x)) = cf(x) < f(x)$

$$\frac{f(f(f(x)))}{f(f(x))}\frac{f(f(x))}{f(x)} = \frac{f(f(f(x)))}{f(x)} = c^2$$
$$\Longrightarrow f^{m+1}(x) = c^m f(x), \forall x > 0$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
f(x) + c^m f(y) + (c-1)x &= f(y) + c^m f(x) + (c-1)y \\
\Longrightarrow f(x) + (c-1)x - c^m f(x) &= f(y) + (c-1)y - c^m f(y) \\
\Longrightarrow f(x) + (c-1)x - c^m f(x) &= C \\
\Longrightarrow f(x)\left(1 - c^m\right) &= C - (c-1)x \\
\Longrightarrow f(x) &= \frac{(c-1)x - C}{c^m - 1}
\end{aligned}$$

Hay $f(x) = ax + b$. Thay lại vào giả thiết ta có được $f(x) = x, \forall x > 0$ là điều mâu thuẫn. Vậy tồn tại một số $z > 0$ như vậy. Để suy ra $\dfrac{f(f(x))}{f(x)}$ có dạng tuyến tính

Ta dễ dàng chứng minh được $A, B > 0$ vì $Ax + B > 0, \forall x > 0$. Mặt khác điều này chứng tỏ rằng $f(f(x)) = f(x)(Ax+B) > x(Ax+B) = Ax^2 + B$. Và tương tự $f(f(f(x))) = f(f(x))(Ax+B) = f(x)(Ax+B)^2$ cho nên

$$f^{m+1}(x) = f(x)\left(C_m x^m + D_m\right), C_m > 0, \forall x > 0, \forall m \in \mathbb{Z}^+$$

Từ
$$f(x) + f^{m+1}(y) + \left(\frac{f(f(y))}{f(y)} - 1\right)x = f(y) + f^{m+1}(x) + \left(\frac{f(f(x))}{f(x)} - 1\right)y$$

ta có được

$$\begin{aligned}
f(x) + f(y)\left(C_m y^m + D_m\right) + (Ay + B - 1)x &= f(y) + f(x)\left(C_m x^m + D_m\right) + (Ax + B - 1)y \\
\Longrightarrow f(x) - f(x)\left(C_m x^m + D_m\right) + (B-1)x &= f(y) - f(y)\left(C_m y^m + D_m\right) + (B-1)y \\
\Longrightarrow f(x) - f(x)\left(C_m x^m + D_m\right) + (B-1)x &= F \\
\Longrightarrow f(x) = \frac{F - (B-1)x}{1 - (C_m x^m + D_m)} &= \frac{x(B-1) - F}{C_m x^m + D_m - 1}
\end{aligned}$$

Cho $x \to +\infty$ thì trong cả hai trường hợp $m = 1$ và $m > 1$ ta đều có $f(x)$ bị chặn vì tồn tại giới hạn hữu hạn nhưng ta chứng minh được $f(x) > x$ cho nên f không thể bị chặn. Từ đây cho ta điều vô lí và bài toán hoàn tất.

Bài 9. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(xf(y) + f(y)^n\right) = yf(x) + f(y)^n, \forall x, y > 0, n \in \mathbb{Z}^+$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh một bổ đề như sau : Cho hàm số $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn tồn tại các số thực dương a_i,b_i,c_i,d_i với $i=1,2$ sao cho

$$\begin{cases} g(x+a_1)+b_1=g(x+c_1)+d_1 & (1)\\ g(x+a_2)+b_2=g(x+c_2)+d_2 & (2)\end{cases},\forall x>0$$

Khi đó tồn tại số thực không âm $\lambda\geqslant 0$ sao cho $d_i-b_i=\lambda(a_i-c_i),\forall i=1,2$

Ta chứng minh như sau. Xét riêng trường hợp $a_1=c_1$ thì $b_1=b_1$ và $a_2=c_2$ thì $b_2=d_2$. Ta xét trường hợp khi $a_i\neq c_i$ với $i=1,2$. Khi đó không mất tính tổng quát, giả sử $a_i>c_i$. Thay $x\to x-c_i$ vào (1) và (2) ta có được

$$g(x+(a_i-c_i))+b_i=g(x)+d_i$$

Ta sẽ chứng minh $d_i\geqslant b_i,\forall i=1,2$. Thật vậy, giả sử phản chứng rằng $d_1<b_1$. Khi đó tù (1) và (2) bằng cách quy nạp ta sẽ chứng minh được

$$g(x+n(a_1-c_1))=g(x)+n(d_1-b_1),\forall x>0,n\in\mathbb{Z}^+$$

Giả sử đúng đến n, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n+1$. Bằng cách thay $x\to x+a_1-c_1$ vào phương trình trên ta có được

$$\begin{aligned} g(x+(n+1)(a_1-c_1)) &= g(x+a_1-c_1)+n(d_1-b_1)\\ &= g(x)+(n+1)(d_1-b_1),\forall x>0\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Từ kết quả trên, cố định x và cho $n\to+\infty$. Vì $d_1-b_1<0$ cho nên $n(d_1-b_1)\to-\infty$. Vậy ta có điều mâu thuẫn vì $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$.

Làm tương tự với b_2 và d_2. Bây giờ, giả sử phản chứng ta có

$$\frac{d_1-b_1}{a_1-c_1}>\frac{d_2-b_2}{a_2-c_2}\geqslant 0$$

Nếu $d_2=b_2$ thì ta có $g(x+a_2)=g(x+c_2)$. Khi đó

$$\begin{aligned} &g(x+a_2-c_2)=g(x),\forall x>0\\ &\Longrightarrow g(x+N(a_2-c_2))=g(x)\end{aligned}$$

tức g tuần hoàn vơi chu kì $T=a_2-c_2>0$. Bây giờ ta có

$$g(x)=g(x+N(a_2-c_2))=g(x+N(a_2-c_2)-M(a_1-c_1))+M(d_1-b_1)>M(d_1-b_1)$$

Trong đó ta sẽ chọn M,N sao cho

$$x+N(a_2-c_2)-M(a_1-c_1)>0$$

Khi đó cố định x và cho $M\to+\infty$ thì có điều vô lý. Vậy $d_2>b_2$. Khi đó

$$\frac{d_1-b_1}{d_2-b_2}>\frac{a_1-c_1}{a_2-c_2}$$

Do tập hữu tỉ là trù mật trong $\mathbb{R}$ cho nên tồn tại số hữu tỉ $\dfrac{m}{n},m,n\in\mathbb{Z}^+$ sao cho

$$\frac{d_1-b_1}{d_2-b_2}>\frac{m}{n}>\frac{a_1-c_1}{a_2-c_2}>0$$

Điều này dẫn đến với $x > 0$ đủ lớn thì

$$g(x) = g(x + m(a_2 - c_2)) - m(d_2 - b_2) = g(x + m(a_2 - c_2) - n(a_1 - c_1)) + n(d_1 - b_1) - m(d_2 - b_2)$$

Đặt $u = m(a_2 - c_2) - n(a_1 - c_1) > 0, v = n(d_1 - b_1) - m(d_2 - b_2) > 0$ ta có

$$g(x) = g(x + u) + v$$

Khi đó bằng quy nạp ta dễ dàng chỉ ra

$$g(x) = g(x + nu) + nv, \forall x > 0, n \in \mathbb{Z}^+$$

Cố định x và cho $n \to +\infty$ ta có ngay điều vô lí. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Quay trở lại bài toán, ký hiệu $P(x, y)$ là phép thế x, y vào trong phương trình hàm ban đầu.

Xét phép thế $P(xf(z) + f(z)^n, y)$ vào giả thiết ta được

$$\begin{gathered} f\left((xf(z) + f(z)^n) f(y) + f(y)^n\right) = yf\left(xf(z) + f(z)^n\right) + f(y)^n, \forall x, y, z > 0 \\ \leftrightarrow f\left(xf(z)f(y) + f(z)^n f(y) + f(y)^n\right) = y\left(zf(x) + f(z)^n\right) + f(y)^n, \forall x, y, z > 0 \\ \leftrightarrow f\left(xf(z)f(y) + f(z)^n f(y) + f(y)^n\right) = yzf(x) + yf(z)^n + f(y)^n, \forall x, y, z > 0 \end{gathered}$$

Hoán đổi vai trò y, z trong biểu thức trên ta có

$$f\left(xf(z)f(y) + f(y)^n f(z) + f(z)^n\right) = yzf(x) + zf(y)^n + f(z)^n, \forall x, y, z > 0$$

Vậy ta có được

$$f\left(xf(z)f(y) + f(z)^n f(y) + f(y)^n\right) + zf(y)^n + f(z)^n = f\left(xf(z)f(y) + f(y)^n f(z) + f(z)^n\right) + yf(z)^n + f(y)^n$$

Thay $x \to \dfrac{x}{f(z)f(y)}$ ta có

$$f\left(x + f(z)^n f(y) + f(y)^n\right) + zf(y)^n + f(z)^n = f\left(x + f(y)^n f(z) + f(z)^n\right) + yf(z)^n + f(y)^n, \forall x, y, z > 0$$

Áp dụng bổ đề trên ta suy ra tồn tại số thực λ sao cho

$$(yf(z)^n + f(y)^n) - (zf(y)^n + f(z)^n) = \lambda\left((f(z)^n f(y) + f(y)^n) - (f(y)^n f(z) + f(z)^n)\right), \forall y, z > 0(*)$$

Ta chứng minh được rằng f là đơn ánh. Thậy vậy, từ giả thiết, ta xét $a, b > 0$ sao cho $f(a) = f(b)$ thì $P(x, b), P(x, a)$ cho ta

$$af(x) + f(a)^n = bf(x) + f(b)^n \leftrightarrow a = b$$

Vậy với $y \neq z$ thì ta luôn có $f(y) \neq f(z)$. Bây giờ xét riêng

Đặt $A = xf(z)f(y) + f(z)^n f(y) + f(y)^n$, $B = xf(z)f(y) + f(y)^n f(z) + f(z)^n$. Ta có

$$\begin{gathered} f(A) - f(B) = yf(z)^n + f(y)^n - zf(y)^n - f(z)^n, \forall y, z > 0, y \neq z \\ \leftrightarrow f(A) - f(B) = (f(y)f(z))^n \left(\frac{f(y) - 1}{f^n(y)} - \frac{f(z) - 1}{f^n(z)}\right), \forall y, z > 0, y \neq z \end{gathered}$$

Ta chứng minh được rằng f là đơn ánh. Thậy vậy, từ giả thiết, ta xét $a, b > 0$ sao cho $f(a) = f(b)$ thì $P(x, b), P(x, a)$ cho ta

$$af(x) + f(a)^n = bf(x) + f(b)^n \leftrightarrow a = b$$

Vậy với $y \neq z$ thì ta luôn có $f(y) \neq f(z)$. Bây giờ xét riêng

$$yf(z)^n + f(y)^n - zf(y)^n - f(z)^n = 0, \forall y, z > 0, y \neq z$$

Khi đó thay $y = 1$ ta có

$$f(1)^n = zf(1)^n$$

Hay $z = 1$ và điều này mâu thuẫn. Vậy tồn tại ít nhất một cặp y, z sao cho $y \neq z$ và

$$yf(z)^n + f(y)^n - zf(y)^n - f(z)^n \neq 0$$

Khi đó, đặt $yf(z)^n + f(y)^n - zf(y)^n - f(z)^n = C$ và xét $x > M = f(y)^n f(z) + f(z)^n$. Khi đó với $T = f(z)^n f(y) + f(y)^n - f(y)^n f(z) + f(z)^n$ ta có được từ

$$f\left(x + f(z)^n f(y) + f(y)^n\right) + zf(y)^n + f(z)^n = f\left(x + f(y)^n f(z) + f(z)^n\right) + yf(z)^n + f(y)^n, \forall x, y, z > 0$$

thì tồn tại các số T, C sao cho

$$f(x + T) = f(x) + C, \forall x > M$$

Xét các phép thế sau : $P(x, 1)$ ta được

$$f\left(xf(1) + f(1)^n\right) = f(x) + f(1)^n$$

Trong phương trình trên, thay $x \to x + T$ ta có

$$f\left((x + T)f(1) + f(1)^n\right) = f(x) + c + f(1)^n$$

Xét $x > \dfrac{M - f(1)^n}{f(1)}$ thì khi đó

$$f\left(xf(1) + f(1)^n + T\right) = f\left(xf(1) + f(1)^n\right) + c = f(x) + f(1)^n + c$$

Suy ra

$$f\left(xf(1) + f(1)^n + T\right) = f\left((x + T)f(1) + f(1)^n\right), \forall x > 0$$

và từ f đơn ánh ta có ngay $f(1) = 1$

Với $(*)$ ta xét $z = 1$ và có ngay

$$y - 1 = \lambda((f(y) - 1))$$
$$\implies f(y) = \frac{y - 1}{\lambda} + 1, \forall y > 0$$

Thử lại ta có $\lambda = 1$. Vậy $f(y) = y, \forall y > 0$ và bài toán hoàn tất.

Ghi chú: Vì sao ta nghĩ đến việc sử dụng bổ đề ngay từ đầu? Và làm sao để đưa về đúng dạng như bổ đề.

Để đưa về đúng dạng như bổ đề thì ta thường nghĩ tới những ý tưởng như sau : Đầu tiên ta hãy cố gắng tạo đối xứng bằng việc thêm một biến z vào bài toán. Việc thêm biến z vào như vậy giúp ta có thể hoán đổi vị trí của các cặp như $(x, z), (x, y), (z, y)$ tùy vào biểu thức trong ngoặc có cấu trúc như thế nào mà ta sẽ lựa chọn phép thế. Ngoài ra ta cũng nên "lặp lại" cấu trúc hàm, thường là những hàm biểu thức mà chứa x, y đứng riêng lẽ không trong ngoặc, ví dụ như $xF(x, y)$ thì ta sẽ cố gắng thay $F(x, y)$ khéo léo sao cho có thể làm xuất hiện y hoặc z

ra bên ngoài để trở thành $xz\psi(x,y,z)$ để thuận tiện đảo vị trí x,z. Chú ý rằng cố gắng giữ x lại trong ngoặc để có đưa về dạng

$$f(x+A)+B=f(x+C)+D$$

Bài 10. Cho số nguyên dương n. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(xf(y)+f(x)^n\right)=yf(x)+f(x)^n$$

Lời giải.

Bài này có thể coi là biến thể của bài vừa rồi, chỉ cần thay $f(y)^n\to f(x)^n$ thì gần như ta không thể áp dụng cách lúc nãy để giải quyết nữa. Trước hết ta xem thử f có tính chất gì đặc biệt không

Ta có f là hàm đơn ánh. Thật vậy, xét $a,b>0$ sao cho $f(a)=f(b)$ thì ta có

$$f\left(xf(a)+f(x)^n\right)=f\left(xf(b)+f(x)^n\right)=af(x)+f(x)^n=bf(x)+f(x)^n$$

Suy ra $a=b$ và f đơn ánh.

Ngoài ra ta cũng có f không bị chặn vì $yf(x)+f(x)^n\to\infty$ với x cố định và $y\to\infty$.

Đặt $A=\{x>0:f(x)=x\}$. Xét $\alpha=f(1)+f(1)^n\in A$. Thay $P(\alpha,\alpha)$ thì được

$$f\left(\alpha^2+\alpha^n\right)=\alpha^2+\alpha^n$$

Vậy cứ hễ $\alpha\in A$ thì ta có $\alpha^2+\alpha^n\in A$. Xét $P(x,x)$ ta cũng có

$$f\left(xf(x)+f(x)^n\right)=xf(x)+f(x)^n$$

Suy ra $xf(x)+f(x)^n\in A$. Ta sẽ thử một vài phép thế liên quan đến tập A để xem thử co tính chất gì đặc biệt không (tạm thời đây là cách duy nhất để ta khai thác phương trình hàm). Xét $P(\alpha,y)$ ta có

$$\begin{aligned}
f\left(\alpha f(y)+\alpha^n\right)&=y\alpha+\alpha^n\\
\Longrightarrow f\left(\alpha f\left(\alpha f(y)+\alpha^n\right)\right)+\alpha^n\big)&=\alpha\left(\alpha f(y)+\alpha^n\right)+\alpha^n\\
\Longrightarrow f\left(y\alpha^2+\alpha^{n+1}+\alpha^n\right)&=\alpha^2f(y)+\alpha^{n+1}+\alpha^n\\
\Longrightarrow f\left(y\alpha^2+C\right)&=\alpha^2f(y)+C
\end{aligned}$$

Ta có được hai đẳng thức $f\left(\alpha f(x)+\alpha^n\right)=x\alpha+\alpha^n$ và $f\left(\alpha^2x+C\right)=\alpha^2f(x)+C,\forall x>0,\forall\alpha\in A$. Ta muốn tạo đối xứng để triệt tiêu bớt các hằng số và đưa về dạng đơn giản hơn. Để có được điều đó ta xét phép thế $P\left(x,\alpha f(y)+\alpha^n\right)$ thì được

$$\begin{aligned}
f\left(x\left(y\alpha+\alpha^n\right)+f(x)^n\right)&=\left(\alpha f(y)+\alpha^n\right)f(x)+f(x)^n=\alpha f(x)f(y)+\alpha^nf(x)+f(x)^n\\
\Longrightarrow f\left(xy\alpha+\alpha^nx+f(x)^n\right)&=\alpha f(x)f(y)+\alpha^nf(x)+f(x)^n
\end{aligned}$$

Ta phân tích như sau : Đầu tiên ta thử hoán đổi vai trò của x,y xem sao

$$\begin{aligned}
f\left(xy\alpha+\alpha^ny+f(y)^n\right)&=\alpha f(x)f(y)+\alpha^nf(y)+f(y)^n\\
\Longrightarrow f\left(xy\alpha+\alpha^ny+f(y)^n\right)-f\left(xy\alpha+\alpha^nx+f(x)^n\right)&=\alpha^n(f(y)-f(x))+f(y)^n-f(x)^n
\end{aligned}$$

Vậy cách này không hiệu quả lắm, ta cũng không thể thế $y=\dfrac{y}{\alpha x}$ để triệt tiêu đi được. Và vế phải còn chứa thêm đại lượng $f(y)^n,f(x)^n$. Vấn đề chính trong bài này đó là làm sao làm mất đi $f(x)^n$ để thuận tiện cho biến đổi. Cho nên ta cần phải thử một phép thế khác. Ta quan sát thấy rằng : nếu cho cả x, y di động thì rất khó kiểm soát. Thay vào đó ta sẽ cố định x và thay y bởi một giá trị nào đó để hoán đổi với α. Nếu làm được như vậy thì ta có thể triệt tiêu hoàn toàn đi $f(x)^n$. Ở đây ta xét $y = \beta \in A$ thì sẽ có

$$f\left(x\alpha\beta + \alpha^n\beta + \beta^n\right) = \beta\alpha f(x) + \alpha^n\beta + \beta^n$$

Hoán đổi vị trí α, β ta có

$$\begin{gathered} f\left(x\alpha\beta + \beta^n\alpha + \alpha^n\right) = \alpha\beta f(x) + \beta^n\alpha + \alpha^n \\ \Longrightarrow f\left(x\alpha\beta + \beta^n\alpha + \alpha^n\right) - f\left(x\alpha\beta + \alpha^n\beta + \beta^n\right) = \beta^n\alpha + \alpha^n - \alpha^n\beta - \beta^n \end{gathered}$$

Xét $x \to \dfrac{x - \beta^n\alpha - \alpha^n}{\alpha\beta}$ và cần thêm điều kiện

$$\begin{gathered} \alpha^n + \beta^n\alpha \neq \alpha^n\beta + \beta^n \\ \leftrightarrow \alpha^n(1-\beta) \neq \beta^n(1-\alpha) \\ \leftrightarrow \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \neq \frac{\beta^n}{1-\beta} \end{gathered}$$

Tồn tại hai số α, β như vậy vì tập A không bị chặn trên. Ta đưa được về đẳng thức

$$f(x+\Delta) = f(x) + \Delta, \forall x > 0, \Delta > 0, \Delta = \beta^n\alpha + \alpha^n - \alpha^n\beta - \beta^n$$

Ta chọn được α, β như vậy thỏa mãn đẳng thức trên. Bây giờ quay trở lại bài toán ban đầu

$$f\left(xf(y) + f(x)^n\right) = yf(x) + f(x)^n, \forall x, y > 0$$

Cho y đủ lớn và xét $y \to y + \Delta$

$$f\left(x(f(y)+\Delta) + f(x)^n\right) = f\left(xf(y) + x\Delta + f(x)^n\right) = yf(x) + \Delta f(x) + f(x)^n$$

Cho $x = 1$ ta được

$$\begin{gathered} f\left(f(y) + \Delta + f(1)^n\right) = yf(1) + \Delta f(1) + f(x)^n \\ = f\left(f(y) + f(1)^n\right) + \Delta = yf(1) + f(x)^n + \Delta \\ \Longrightarrow f(1) = 1 \end{gathered}$$

Xét $P(1, y)$ được

$$f(f(y)+1) = y + 1, \forall y > 0$$

Suy ra f toàn ánh trên $(1; +\infty)$. Ngoài ra từ đẳng thức trên tiếp tục thay $y \to f(y) + 1$ ta có được

$$f(y+2) = f(y) + 2, \forall y > 0$$

Vấn đề chính của ta bây giờ vẫn là $f(x)^n$ vì ta vẫn chưa biết cách để khử đại lượng này một cách hợp lí. Lặp lại liên tục 2 đẳng thức ở trên ta có

$$\begin{gathered} f(f(y+2)+1) = f(f(y)+3) = y + 3 \\ \to f(f(f(y)+3)+1) = f(y+4) = f(y) + 4 \end{gathered}$$

Vậy quy nạp suy ra $f(f(y) + 2n + 1) = y + 2n + 1$ và $f(y + 2n) = f(y) + 2n, \forall y > 0, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Ngoài ra ta cũng chứng minh được $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Từ đây ta xét $P(2, y)$ thì được

$$f\left(2f(y) + 2^n\right) = 2y + 2^n = f(2f(y)) + 2^n$$

Do $f\left(y+2^n\right)=y+2^n$ do 2^n chẵn như ta nhận xét ở trên. Điều này dẫn tới $f(2f(y))=2y, \forall y>0$ và f là toàn ánh. Tương tự ta có $P(4,y)$ thì được

$$\begin{gathered} f\left(4f(y)+4^n\right)=4y+4^n=f(4f(y))+4^n \\ \Longrightarrow f(4f(y))=4y \end{gathered}$$

Mặt khác từ $f(2f(y))=2y$ ta thay $y \rightarrow 2f(y)$ thì được

$$\begin{gathered} f(2f(2f(y)))=f(4y)=4f(y) \\ \Longrightarrow f(f(4f(y))=4f(y) \end{gathered}$$

Mà $f(y)$ toàn ánh nên $4f(y)$ cũng toàn ánh dẫn tới $f(f(y))=y, \forall y>0$. Từ đây ta suy ra được đẳng thức

$$f(f(f(y))+1)=f(y+1)=f(y)+1, \forall y>0$$

Xét $P\left(\frac{1}{f(y)}, y\right)$ ta được

$$\begin{gathered} f\left(1+f\left(\frac{1}{f(y)}\right)^n\right)=yf\left(\frac{1}{f(y)}\right)+f\left(\frac{1}{f(y)}\right)^n \\ \Longrightarrow f\left(1+f\left(\frac{1}{y}\right)^n\right)=f(y)f\left(\frac{1}{y}\right)+f\left(\frac{1}{y}\right)^n \\ \Longrightarrow f\left(1+f(y)^n\right)=f(y)f\left(\frac{1}{y}\right)+f(y)^n=f\left(f(y)^n\right)+1 \end{gathered}$$

Bây giờ xét $P\left(x, \frac{1}{f(x)}\right)$ ta lại có

$$\begin{gathered} f\left(xf\left(\frac{1}{f(x)}\right)+f(x)^n\right)=1+f(x)^n=f\left(f\left(f(x)^n\right)+1\right) \\ \Longrightarrow f(x)^n+xf\left(\frac{1}{f(x)}\right)=f\left(f(x)^n\right)+1 \end{gathered}$$

Từ đây thu được $f(y)f\left(\frac{1}{y}\right)=yf\left(\frac{1}{f(y)}\right), \forall y>0$. Nếu các phép thế đơn biến y không hiệu quả thì ta thử kết hợp cả x, y lại xem sao, tận dụng những đẳng thức ta vừa thu được. Ta xét $P(x,1)$ thì được

$$f\left(x+f(x)^n\right)=f(x)+f(x)^n, \forall x>0$$

Bây giờ cho $P(x, f(y))$ đưa về

$$f\left(xy+f(x)^n\right)=f(x)f(y)+f(x)^n$$

Thay $y \rightarrow y+1$ được

$$f\left(xy+x+f(x)^n\right)=f(x)f(y)+f(x)+f(x)^n$$

Thay $x \rightarrow \frac{1}{y}$ được

$$f\left(\frac{1}{y}+f\left(\frac{1}{y}\right)^n+1\right)=f\left(\frac{1}{y}+f\left(\frac{1}{y}\right)^n\right)+1=f(y)f\left(\frac{1}{y}\right)+f\left(\frac{1}{y}\right)+f\left(\frac{1}{y}\right)^n$$

Mà
$$f\left(\frac{1}{y}+f\left(\frac{1}{y}\right)^n\right)=f\left(\frac{1}{y}\right)+f\left(\frac{1}{y}\right)^n$$
từ đẳng thức $f\left(x+f(x)^n\right)=f(x)+f(x)^n$ ta thế ở trên. Cho nên $1=f(y)f\left(\frac{1}{y}\right)$. Quay trở lại ta có
$$f(y)f\left(\frac{1}{y}\right)=yf\left(\frac{1}{f(y)}\right)=1$$
Mà ta lại có
$$f(x)^n+xf\left(\frac{1}{f(x)}\right)=f\left(f(x)^n\right)+1$$
$$\Longrightarrow f\left(f(x)^n\right)=f(x)^n,\forall x>0$$
Vì f toàn ánh nên $f(x)^n$ cũng toàn ánh và từ đây ta có được $f(x)=x,\forall x>0$ và bài toán hoàn tất.

Bài 11. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn
$$x(f(x)+f(y))\geqslant(f(f(x))+y)f(y),\forall x,y>0$$

Lời giải.

Ta ký hiệu $P(x,y)$ là phép đổi biến trong giả thiết. Xét $P(1,y)$ ta được
$$f(1)+f(y)\geqslant(f(f(1))+y)f(y),\forall y>0$$
$$\Longrightarrow f(1)\geqslant f(y)(y+f(f(1))-1),\forall y>0$$
Ta nhận thấy rằng, với mỗi y đủ lớn, nếu tồn tại một hằng số $M>0$ sao cho $f(y)\geqslant M$ thì khi đó
$$f(1)\geqslant f(y)(y+f(f(1))-1)>M(y+f(f(1))-1)$$
Với y càng lớn thì ta có ngay điều mâu thuẫn. Suy ra $f(y)\to 0$ khi $y\to+\infty$, tức là với y lớn vô cùng thì $f(y)$ nhỏ hơn một số thực dương tùy ý. Ta lại có
$$f(1)\geqslant yf(y)+f(y)(f(f(1))-1),\forall y>0$$
Khi cho y đủ lớn thì $f(y)$ sẽ rất nhỏ và do đó $f(y)(f(f(1))-1)$ cũng sẽ nhỏ tùy ý. Dẫn tới $f(1)\geqslant yf(y),\forall y>N$ với N đủ lớn. Suy ra $f(y)\leqslant\frac{f(1)}{y},\forall y>N$.

Thay $P(x,x)$ ta được
$$2xf(x)\geqslant(f(f(x))+x)f(x)$$
$$\Longrightarrow 2x\geqslant f(f(x))+x$$
$$\Longrightarrow x\geqslant f(f(x)),\forall x>0$$
Thay $x\to f(y)$ ta có được
$$f(f(y))+f(y)\geqslant f(f(f(y)))+y,\forall y>0$$
$$\Longrightarrow f(y)-f(f(f(y)))\geqslant y-f(f(y)),\forall y>0$$
Từ bất đẳng thức ở trên ta thiết lập được một dãy số $a_i=f^i(y)-f^{i+2}(y)$, bắt đầu từ $a_0=y-f(f(y)),a_1=f(y)-f(f(f(y)),a_2=f(f(y))-f(f(f(f(y))),$ ...trong đó y là một số thực

dương cố định. Cứ tiếp tục như vậy ta sẽ có được (a_n) là dãy số không âm vì $y \geqslant f(f(y)), \forall y > 0$ và đồng thời là dãy tăng

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant ... \leqslant a_n \leqslant ...$$

Nếu như tồn tại một chỉ số j để cho $a_j = f^j(y) - f^{j+2}(y) = 0$ thì ta có được mọi chỉ số trong dãy đều bằng 0 tức là $a_0 = a_1 = ... = a_j = ... = a_n = ... = 0$. Vì ta có $0 \leqslant a_0 \leqslant ... \leqslant a_{j-1} \leqslant 0$ và do đó $y = f(f(y))$ dẫn tới mọi chỉ số sau này đều bằng 0. Vì vậy ta sẽ xét trường hợp mọi số trong dãy đều dương tức $a_u > 0, \forall u$. Giả sử dãy không bị chặn trên thì khi đó $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ đồng nghĩa với việc $f^j(y) - f^{j+2}(y)$ có thể lớn tùy ý. Khi đó ta xét tổng sau

$$f^j(y) - f^{j+2}(y) + f^{j+2}(y) - f^{j+4}(y) + ... + f^{j+2N}(y) - f^{j+2N+2}(y) \to +\infty$$
$$\Longrightarrow f^j(y) - f^{j+2N+2}(y) \to +\infty$$

Tại đây, j cố định và N cho lớn tùy ý. Thì khi đó

$$C - f^{j+2N+2}(y) \to +\infty$$

để điều trên xảy ra thì ta cần có $f^{j+2N+2}(y) < 0$ với N đủ lớn là mâu thuẫn vì $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Suy ra a_n bị chặn trên. Và vì $(a_n)_{n \geqslant 0}$ cũng đồng thời là dãy tăng cho nên nó có giới hạn hữu hạn. Nếu như giới hạn hữu hạn của dãy khác 0 thì khi đó chuỗi $\sum a_i$, tương tự như trên sẽ tiến ra vô cùng

$$f^j(y) - f^{j+2}(y) + f^{j+2}(y) - f^{j+4}(y) + ... + f^{j+2N}(y) - f^{j+2N+2}(y) \to +\infty$$

Điều này là mâu thuẫn. Do đó $\lim a_n = 0$. Lưu ý rằng đây chỉ là điều kiện cần chứ không đủ, vì có những dãy khác như $b_n = \dfrac{1}{n}$ tuy có giới hạn bằng 0 nhưng tổng $b_1 + b_2 + .. + b_n$ lại tiến ra vô cùng. Trong trường hợp này ta đã suy ra rằng tổng $a_j + a_{j+2} + ... + a_{j+2N}$ không thể quá lớn khi N tiến ra vô cùng được, tức là nó có giới hạn hữu hạn, lúc này ta mới áp dụng được kết quả ở trên. Nhưng vẫn còn một câu hỏi nữa được đặt ra, còn những số hạng có chỉ số dạng a_{j+2i+1} thì sao? Thực ra những dãy con có chỉ số như vậy đều có giới hạn bằng 0 vì chúng là một dãy con của dãy a_n có giới hạn bằng 0, vả lại ở đây ta chỉ xét cho j đủ lớn thì $\lim a_j = 0$ cho nên không cần quan tâm đến các chỉ số lẻ làm gì. Vậy suy ra ta có $\lim a_n = 0$ nhưng $a_u > 0$ với mỗi chỉ số u cho nên đây là điều mâu thuẫn. Vậy ta luôn có $y = f(f(y))$. Đến đây bài toán hoàn tất, vì từ giả thiết ta có

$$x(f(x) + f(y)) \geqslant (x + y)f(y)$$
$$\Longrightarrow xf(x) \geqslant yf(y), \forall x, y > 0$$
$$\Longrightarrow xf(x) = c, \forall x > 0$$

và hàm duy nhất thỏa mãn là $f(x) = \dfrac{c}{x}, \forall x > 0, c > 0$ là hằng số.

Bài 12. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(xy + x^2\right) = f(x)f(y) + f\left(f(x)^2\right), \forall x, y > 0$$

Lời giải.

Ta xét phép thế $P\left(x, \dfrac{f(x)^2 - x^2}{x}\right)$ đưa về

$$f\left(f(x)^2\right) = f(x)f\left(\frac{f(x)^2 - x^2}{x}\right) + f\left(f(x)^2\right)$$

Đẳng thức trên dẫn trên mâu thuẫn. Suy ra $f(x) \leqslant x$. Ta thay $y = 1 - x$ trong đó $x \in (0;1)$ thì được

$$\begin{aligned} f(x) = f(x)f(1-x) + f\left(f(x)^2\right) \leqslant f(x)(1-x) + f(x)^2 = f(x)(1-x+f(x)) \\ \leqslant f(x)(1-x+x) = f(x) \end{aligned}$$

Suy ra $f(x) = f(x) - xf(x) + f(x)^2 \Longrightarrow f(x) = x, \forall x \in (0;1)$. Bây giờ xét trong phương trình ban đầu, cho $x \in (0;1)$ và y bất kì. Ta có

$$f\left(xy + x^2\right) = xf(y) + x^2$$

Bây giờ, với y bất kì, ta có thể chọn x đủ bé sao cho $xy + x^2 < 1$ bằng cách cho $x \to 0^+$. Vậy $f\left(xy + x^2\right) = xy + x^2$ và thay lại ta có được

$$f(y) = y, \forall y \geqslant 1$$

Vậy bài toán hoàn tất. Tất cả các hàm thỏa mãn là $f(x) = x$.

Bài 13. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x)f\left(\frac{1}{x} + yf(x)\right) = f(y+1), \forall y > 0$$

Lời giải.

Ta xét $f \equiv 1$ là một hàm thỏa mãn. Bây giờ xét f khác hàm hằng.

Tương tự với bài trước đó, tất cả các biến của phương trình hàm đều nằm trong ngoặc cho nên hướng xử lí của ta thường là thế triệt tiêu hoặc tìm một bất đẳng thức nào đó phù hợp để đánh giá, đẩy ra ngoài ngoặc.

Ta xét $x > 1$ và giả sử với $x > 1$ thì $f(x) > 1$ thì khi đó ta có thể thế $y = \dfrac{1 - \frac{1}{x}}{f(x) - 1}$ vào giả thiết. Lúc này ta được

$$f(x) = 1$$

Và đây là điều vô lí. Vậy với $x > 1$ thì $f(x) \leqslant 1$. Xét $P(y+1, y)$ thì được

$$f\left(\frac{1}{y+1} + yf(y+1)\right) = 1$$

Lúc này, ý tưởng tiếp theo của ta đó là chứng minh f là hàm đơn ánh. Nếu chứng minh được nhận xét trên thì bài toán coi như hoàn tất và ta sẽ rút ra được $f(x) = \dfrac{1}{x}, \forall x > 0$. Bây giờ, giả sử tồn tại $a \neq b$ sao cho $f(a) = f(b) = c$. Xét phép thế $P(a, y)$ và $P(b, y)$ ta có được

$$f(a)f\left(\frac{1}{a} + yf(a)\right) = f(y+1)$$

$$f(b)f\left(\frac{1}{b} + yf(b)\right) = f(y+1)$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{1}{a} + yf(a)\right) = f\left(\frac{1}{b} + yf(b)\right), \forall y > 0$$

Thay $y = \dfrac{y}{c}$ ta được

$$f\left(y + \frac{1}{a}\right) = f\left(y + \frac{1}{b}\right), \forall y > 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \leftrightarrow a < b$, từ đây ta có

$$f(y) = f\left(y + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = f(y+d)$$

Vậy f là hàm tuần hoàn. Quay trở lại giả thiết ta thay $x \to x+d$ thì được

$$f(x+d)f\left(\frac{1}{x+d} + yf(x+d)\right) = f(x)f\left(\frac{1}{x+d} + yf(x)\right) = f(x)f\left(\frac{1}{x} + yf(x)\right) = f(y+1)$$
$$\Longrightarrow f\left(\frac{1}{x} + yf(x)\right) = f\left(\frac{1}{x+d} + yf(x)\right)$$

Thay $y \to \frac{y}{f(x)}$ ta được

$$f\left(\frac{1}{x} + y\right) = f\left(\frac{1}{x+d} + y\right), \forall x, y > 0$$

Xét

$$f(y) = f\left(y + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+d}\right), \forall y > \frac{1}{x+d}, x \leqslant M$$

với M là một hằng số dương cố định. Tiếp tục ta xét $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+d} = \frac{d}{x(x+d)}$. Cho $x \to 0^+$ thì $g(x) = \frac{d}{x(x+d)} \to +\infty$ và g liên tục nên nó nhận mọi giá trị trên khoảng $[g(M), +\infty)$. Khi $x \to 0^+$ thì $\frac{1}{x+d} \to \frac{1}{d}$ và lúc này bất đẳng thức về điều kiện của y đưa về $y \geqslant \frac{1}{d}$. Vậy xét với $y \geqslant \frac{1}{d}$ và $x \leqslant M$, ta cho x chạy trên khoảng $(0; M]$ thì có được $f(y), y > \frac{1}{d}$ tuần hoàn với chu kì lớn tùy ý. Tức là với $y > \frac{1}{d}$ ta sẽ có

$$f(y) = f(y+T), \forall y > \frac{1}{d}, T \in [g(M), +\infty)$$

Cho M càng lớn thì khi đó $g(M) \to 0$ và $T \in (0, +\infty)$. Tù đây ta chứng minh được f là hàm hằng. Thật vậy xét

$$f(y) = f(y+T), y > \frac{1}{d}, \forall T > 0$$

Tịnh tiến y thêm một gia trị $y \to y + \varepsilon$ thì chọn $T = \varepsilon$ ta có được.

$$f(y) = f(y+\varepsilon), \forall y > 0$$

Cứ tiếp tục như vậy suy ra $f(y) \equiv C$ là hàm hằng với mọi $y > \frac{1}{d}$. Bây giờ, quay trở lại bài toán ban đầu. Xét x cố định sao cho $x > \frac{1}{d}$ và chọn y đủ lớn để $\frac{1}{x} + yf(x) > \frac{1}{d}, y+1 > \frac{1}{d}$ ta được

$$C^2 = C \Longrightarrow C = 1$$

Tiếp tục, xét x bất kì cố định, cho y một lần nữa đủ lớn để $\frac{1}{x} + yf(x) > \frac{1}{d}, y+1 > \frac{1}{d}$ thì có được

$$f(x) = 1, \forall x > 0$$

Nhưng ta đã loại trường hợp f là hàm hằng cho nên có điều vô lí. Ngược lại f là hàm đơn ánh cho nên từ

$$f\left(\frac{1}{y+1} + yf(y+1)\right) = 1$$

ta dễ dàng tính được $f(x) = \dfrac{1}{x}, \forall x > 0$ và bài toán hoàn tất.