命题拾贝

冷岗松

上海大学数学系

2015年5月•郑州

积小致巨,

以微致显.

—— 董仲舒

一. 命题拾贝

1. m 维向量的逼近问题.

Ivan Borsenco (Math. Refl., 2012) 证明了如下结果:

定理:

设 m, n 是正整数, $X = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_m) \middle| x_i > 0, \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1\right\}$, $Y = \left\{(y_1, y_2, \cdots, y_m) \middle| y_i \in \{0, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\}, \sum\limits_{i=1}^{m} y_i = 1\right\}$. 证明: 对任何 $(x_1, x_2, \cdots, x_m) \in X$, 存在 $(y_1, y_2, \cdots, y_m) \in Y$ 使得

$$\sum_{i=1}^{m} |y_i - x_i| \leq \frac{m}{2n}.$$

思考: m 维正实向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 可否替代为一般的 m 维实向量?

直接替代不行, 可举出反例: 令

$$x_1 = -\frac{m+1}{2n}, x_2 = \frac{m+1}{2n} + 1, x_3 = \cdots = x_m = 0.$$

这时由 $y_1 \geq 0$ 知

$$|y_1 - x_1| \geq \frac{m+1}{2n} > \frac{m}{2n},$$

因此

$$\sum_{i=1}^{m} |y_i - x_i| \geq |y_1 - x_1| > \frac{m}{2n},$$

矛盾!

进一步思考: 能否改变集合 Y 以适应 X 的变化?

这样, 就产生了下面关于一般的 m 维实向量的逼近问题.

问题 1:

设 m, n 是正整数,

$$X = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_m) \middle| x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\right\},$$

$$Y = \left\{(y_1, y_2, \cdots, y_m) \middle| ny_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^{m} y_i = 1\right\}.$$

证明: 对任何 $(x_1, x_2, \cdots, x_m) \in X$, 存在 $(y_1, y_2, \cdots, y_m) \in Y$ 使得

$$\sum_{i=1}^{m} |y_i - x_i| \leq \frac{m}{2n}.$$

湖南雅礼中学的贺嘉帆同学 (2015 国家队队员) 在求解问题 1 时作代换 $a_i = nx_i$, $b_i = ny_i$, 将其写为一个简明的等价形式. 这诱发我们进一步研究这个问题 “系数” 的最优值, 这就产生了

问题 1′:

设 m, n 是正整数,

$$A = \left\{(a_1, \cdots, a_m)\middle| a_i > 0, \sum_{i=1}^{m} a_i = n\right\},$$

$$B = \left\{(b_1, \cdots, b_m)\middle| b_i \in \{0, 1, \cdots, n\}, \sum_{i=1}^{m} b_i = n\right\}.$$

求最小的常数 c, 使得对任意 $(a_1, \cdots, a_m) \in A$, 均存在 $(b_1, \cdots, b_m) \in B$ 满足

$$\sum_{i=1}^{m} |a_i - b_i| \le cm.$$

答案: $c_{\min} = \frac{1}{2}$.

2. 从等差、等比数列到凸数列.

长沙市一中于杰延老师 (中等数学增刊 (2015)) 提出并证明了如下优雅的结论:

定理:

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为递增的等差数列, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为递增的等比数列, 且 $a_1 = b_1 > 0$, 实数 x 满足

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = nx.$$

证明:

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - x| \geq \sum_{i=1}^{n} |a_i - x|.$$

思考: 等差数列与等比数列从分析的观点看属于同一类, 上述结果仅仅反映了等差数列的极值性质. 能否把等比数列 $\{b_n\}$ 换成一般的凸数列?

这样, 就产生了

问题 2:

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为递增的等差数列, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为递增的凸数列, 即对任意 $1 \le i \le n-1$, 有 $b_{i+1} \le \frac{b_i + b_{i+2}}{2}$, 且满足

(1) $a_1 = b_1 > 0$,

(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| b_i - \frac{1}{n} \right| \ge \sum_{i=1}^{n} \left| a_i - \frac{1}{n} \right|.$$

问题 2 也可重新表述为下面的形式:

问题 2′:

给定实数 $a_1 > 0$ 和正整数 n, 对任何满足条件 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ 的递增凸数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 求 $\sum_{i=1}^{n} \left|a_i - \frac{1}{n}\right|$ 的最小值.

进一步, 我们还证明了在有限项的凸序列中以等差数列的方差最小. 也就产生了下面的

问题 3:

给定实数 $a_1 > 0$ 和正整数 n, 对任何满足条件 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ 的递增凸数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 求 $\sum_{i=1}^{n} \left|a_i - \frac{1}{n}\right|^2$ 的最小值.

3. 关于复数的算术—调和均值不等式.

Alzer (Analysis, 2002) 证明了关于复数的算术—几何均值不等式:

设 $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $W_\phi = \{z \in \mathbb{C}, |\arg z| \le \phi\}$, 则对所有 $z_1, z_2, \cdots, z_n \in W_\phi$ 有

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \ge n \cos\phi \cdot \left| \sqrt[n]{z_1 z_2 \cdots z_n} \right|.$$

思考: 如果把 n 个复数限制在一个圆盘内, 它的算术—几何均值有何关系?

这就产生了

问题 4:

设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是复数, 满足 $|z_i - 1| \le r(0 < r < 1)$. 证明:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \ge n\sqrt{1-r^2}\left|\sqrt[n]{z_1 z_2 \cdots z_n}\right|.$$

再思考: 是否有几何—调和均值的类似结果?

这就产生了

问题 5:

设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是复数, 满足 $|z_i - 1| \le r\ (0 < r < 1)$. 证明:

$$\left|\sqrt[n]{z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_n}\right)\right| \ge n\sqrt{1-r^2}.$$

进一步思考: 是否有算术—调和均值的不等式呢?

这就产生了今年冬令营的第一题:

问题 6 (CMO, 2015):

设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是复数, 满足 $|z_i - 1| \leq r$ $(0 < r < 1)$. 证明:

$$\left|(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_n}\right)\right| \geq n^2(1 - r^2).$$

注意: 问题 6 尽管是问题 4 和问题 5 的推论, 但直接证明并不易且形式上比问题 4 和 5 更漂亮.

再进一步思考: 问题 6 的反问题?

这就产生了:

问题 7:

设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是复数, 满足 $|z_i - 1| \le r$ $(0 < r < 1)$. 证明:

$$\left|(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_n}\right)\right| \le \frac{n^2}{1 - r^2}.$$

证明要点: 注意到 $1 - r \le |z_i| \le 1 + r$ 以及用 Kantorovic 不等式 (常称反向柯西不等式): 设 $0 < a \le a_k \le b, k = 1, 2, \cdots n$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \le \frac{n^2(a+b)^2}{4ab}.$$

便可.

4. 逆算术—几何平均值不等式.

算术—几何平均值的逆的结果大多通过限制变元的特定范围 (通常是区间) 得到.

思考: 是否可在一个特殊序列, 例如凸 (凹) 序列上, 建立逆算术—几何平均值不等式呢?

这样, 就产生了

定理:

设 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是一个无穷非负实数序列, 满足

$$a_0 = 0, \quad a_i \geq \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_{i+1}), i = 1, 2, \cdots .$$

证明: 对任意正整数 n 有

$$\frac{A_n}{G_n} \leq \frac{n+1}{2(n!)^{\frac{1}{n}}},$$

其中 A_n, G_n 分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的算术平均值和几何平均值.

为了降低难度, 我们推出一个稍弱的结果作为 2015 年中国国家队选拔考试第四题:

问题 8 (2015, 中国国家队选拔考试):

设 $0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n, x_1 \geq \frac{x_2}{2} \geq \frac{x_3}{3} \geq \cdots \geq \frac{x_n}{n}$, 证明:

$$\frac{A_n}{G_n} \leq \frac{n+1}{2(n!)^{\frac{1}{n}}}.$$

其中 A_n, G_n 分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的算术平均值和几何平均值.

略解: 注意到条件可写为 $0 < x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n, \frac{1}{x_1} \le \frac{2}{x_2} \le \cdots \le \frac{n}{x_n}$, 于是由切比雪夫不等式有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{x_i}\right) \le n\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

再由几何—调和均值不等式有

$$\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i}{x_i}} \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i}}. \qquad (2)$$

故由 (1),(2) 整理便得所证结果. □

5. 非周期条件下的逆 F-T-T 不等式.

Fan-Taussky-Todd (Monatsh. Math. 1955) 证明了如下结论:

定理:

设 $n(n \geq 2)$ 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足

(i) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$; (ii) $\max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i| = 1$; (iii) $x_{n+1} = x_1$.

则 $J(x) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_{i+1} - x_i|$ 的最小值是 $\begin{cases} \frac{4}{n}, & \text{当 } n \text{ 是偶数;} \\ \frac{4n}{4n+1}, & \text{当 } n \text{ 是奇数.} \end{cases}$

思考: 保持条件不变, 研究它的反问题, 即求 $\min\limits_{1\le i\le n}|x_{i+1}-x_i|$ 的最大值, 结果如何?

这是一个不难的问题, 答案为 $\begin{cases} 2, & \text{当 } n \text{ 是偶数;} \\ 1, & \text{当 } n \text{ 是奇数.} \end{cases}$

进一步思考: 如果去掉周期条件 (iii), 继续考虑 F-T-T 不等式的反问题, 这就产生了

问题 9 (2014, 中国西部):

给定整数 $n\ge 2$, 设实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 (1) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$; (2) $|x_i|\le 1, i=1,2,\cdots,n$. 求 $\min\limits_{1\le i\le n-1}|x_{i+1}-x_i|$ 的最大值.

答案: $\begin{cases} 2, & \text{当 } n \text{ 是偶数;} \\ \frac{2n}{n+1}, & \text{当 } n \text{ 是奇数.} \end{cases}$

6. 图的最大独立子集问题.

Fajtlowicz 在他的一篇论文 (Graph theory and comput., 1978) 中证明了如下结论:

定理:

设 G 是 n 个顶点的简单图, 它的最大度为 p, 且不包含 q 个顶点的团. 若 $p \geq q$, 则图 G 的最大独立集的元素个数 α 满足

$$\alpha \geq \frac{2n}{p+q}.$$

Fajtlowicz 在他的另一片论文 (Combinatorica, 1984) 中讨论了上述估计等号成立的条件, 他证明了:

定理:

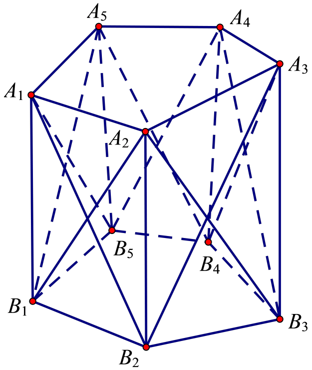
如果 $q \le p$, 则 $\alpha = \frac{2n}{p+q}$ 可推出 $3q - 2p \le 5$. 另外, 对于满足 $3q_1 - 2p_1 = 5$ 的正整数 p_1 和 q_1, 存在一个唯一的连通图 G 使得 $p = p_1, q = q_1$ 且 $\alpha = \frac{2n}{p+q}$.

思考: 能否综合这两篇论文的结果, 产生一个关于图的最大独立子集的组合极值问题?

尝试了一些 n, p, q 的值后, 我们决定选取 $n = 30, p = 5, q = 5$. 编拟了如下问题:

设 G 是 30 个顶点的简单图, 它的每个顶点的度都不超过 5, 且 G 的任何 5 点都存在两点没有连边. 求 G 的最大独立子集元素个数的最小值.

随后, 我们反复思考的一个问题是: 如何构造一个可用“几何语言”描述的组合模型? 最后成功构造了这样一个平面上的“五棱柱”(即将 G 的 30 个顶点分成 3 组, 任何两组不连边, 在每组中画成五棱柱).



这样, 改变成非图论的语言, 这就产生了今年冬令营的第五题:

问题 10 (CMO, 2015):

某次会议共有 30 人参加, 其中每个人在其余人中至少有 5个熟人; 任意 5 个人中, 至少有两人不是熟人. 求最大的正整数 k, 使得在满足上述条件的 30 个人总存在 k 个人, 两两不是熟人.

二. 问题的难度评估

1. 一些观点和看法.

(1) 难题 $\neq$ 好题;

(2) 偏题和太难的题缺乏教育功能;

(3) 培训中难题数量要控制在一个合适的比例;

(4) 难度评估的两要素 $\begin{cases} \text{学生的水平;} \\ \text{数学上的难点.} \end{cases}$

2. 难度评估一例.

题 1 (2015年国家集训队):

设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 是定义在实数集上的实值有界函数, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是不同的 n 个实数. 证明: 存在实数 x 使得

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x - a_i) < 1.$$

要评估这个试题的难度, 我们先看它的两个特例.

题 1 中 $n=1$ 的情况:

题 2:

设 $f(x)$ 是定义在实数集上的实值有界函数, $a \in \mathbb{R}$. 证明: 存在实数 x 使得

$$f(x) - f(x-a) < 1.$$

略解: 由 $f(x)$ 有界, 存在正常数 M 使得 $|f(x)| \le M$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

假设结论不成立, 则对任意实数 x, 均有 $f(x) - f(x-a) \ge 1$.

于是取 $x = ja$, $j \in \mathbb{N}^*$ 得 $f(ja) - f((j-1)a) \ge 1$.

故对任意 $k \in \mathbb{N}^*$, 有

$$2M \ge f(ka) - f(0) = \sum_{j=1}^{k} (f(ja) - f((j-1)a)) \ge \sum_{j=1}^{k} 1 = k,$$

矛盾! $\square$

题 2 有三个难点 (相对联赛水平的学生来说):

(1) 取 $x = ja$, 产生差分 (差分思想);

(2) 对差分求一个待定项数的和 (差分累加效应);

(3) 对和式 "算两次" .

同时, 题 2 方法的单一性, 增加了它的难度. 但上述难点除 (2) 外都是常用方法, 问题入手不难, 且没有有难度的代数变形(或计算), 这又降低了问题的难度.

综上, 我们认为题 2 是一个全国联赛水平的中等难度的问题.

再看题 1 中 $n = 2$ 的情况:

题 3:

设 $f(x), g(x)$ 是定义在实数集上的实值有界函数, a, b 是不相等的两个实数. 证明: 存在实数 x 使得

$$f(x) + g(x) - f(x-a) - g(x-b) < 1.$$

略解: 由 f, g 的有界性知, 存在正常数 M 使得 $|f(x)| \le M, |g(x)| \le M$.

假设结论不成立, 则对任意 $x \in \mathbb{R}$ 有

$$f(x) + g(x) - f(x-a) - g(x-b) \ge 1.$$

取 $x = ia + jb, i, j \in \mathbb{N}^*$ 得

$$f(ia+jb) - f((i-1)a+jb) + g(ia+jb) - g(ia+(j-1)b) \ge 1.$$

对任意 $k \in \mathbb{N}^*$, 考虑二重和

$$S(k) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\Big(f(ia+jb) - f((i-1)a+jb) + g(ia+jb) - g(ia+(j-1)b)\Big),$$

一方面有

$$S(k) \geq \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} 1 = k^2,$$

另一方面

$$\begin{aligned} S(k) &= \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k}\Big(f(ia+jb) - f((i-1)a+jb)\Big)\right) + \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k}\Big(g(ia+jb) - g(ia+(j-1)b)\Big)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k}\Big(f(ka+jb) - f(jb)\Big) + \sum_{i=1}^{k}\Big(g(ia+kb) - g(ia)\Big) \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} 2M + \sum_{i=1}^{k} 2M = 4Mk. \end{aligned}$$

故有 $4Mk \geq k^2$, 即 $k < 4M$,矛盾! $\square$

题 3 仍有三个难点:

(1) 取 $x = ia + jb$, 产生两个差分;

(2) 对两个差分考虑一个待定项数的两重和;

(3) 两重和的“算两次”.

这里的每一个难点都高于题 2, 都要有一定的想法支配. 因此, 我们认为题 3 是一个 CMO (冬令营) 水平的中等难度的问题.

题 1 的难度分析:

题 1 的三个难点:

(1) 取 $x = i_1a_1 + i_2a_2 + \cdots + i_na_n$, 产生 n 个差分;

(2) 对 n 个差分考虑一个待定项数的 n 重和;

(3) n 重和的“算两次”.

对于一般学生, 要攻克题 1, 先研究它的特例: $n = 1$ 和 $n = 2$ 的情况, 即细致地做好题 2 和题 3, 再把方法提升一下便可. 如果不研究特例, 步伐过大, 则要求很高的分析能力.

综上, 我们认为题 1 是国家集训队水平的中等难度的问题.

谢 谢 大 家 !