Lattice Boltzmann Model for Relativistic Hydrodynamics

M. Mendoza, B. M. Boghosian, H. J. Herrmann, and S. Succi.

arXiv:1009.0129v1 [astro-ph.SR] 1 Sep 2010

La descripción de la dinamica de un fluido se puede abordar de varias formas:

La descripción de la dinamica de un fluido se puede abordar de varias formas:

Microscópicamente → Seguir el movimiento individual de las partículas

La descripción de la dinamica de un fluido se puede abordar de varias formas:

Microscópicamente → Seguir el movimiento individual de las partículas

Macroscopicamente → Usar cantidades macroscópicas $\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$, v, T.

La descripción de la dinamica de un fluido se puede abordar de varias formas:

Microscópicamente → Seguir el movimiento individual de las partículas

Mesoscopicamente → Teoría cinética

Macroscopicamente → Usar cantidades macroscópicas $\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$, v, T.

Mesoscopicamente

Se describe al fluido mediante una distribución f(x,v,t).

Mesoscopicamente $\Rightarrow$ Se describe al fluido mediante una distribución f(x,v,t).

$\rho(\mathbf{x}, t)$ Representa la densidad de masa en el espacio físico

Mesoscopicamente

Se describe al fluido mediante una distribución f(x,v,t).

$\rho(\mathbf{x}, t)$ Representa la densidad de masa en el espacio físico

$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ Representa la densidad de masa en el espacio físico y en el espacio de velocidades

Mesoscopicamente → Se describe al fluido mediante una distribución f(x,v,t).

$\rho(\mathbf{x}, t)$ Representa la densidad de masa en el espacio físico

$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ Representa la densidad de masa en el espacio físico y en el espacio de velocidades

$$\boxed{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)}$$

representa la densidad de partículas con velocidad **ξ** con posición **x** en el tiempo t.

Notesé:

Nótese:

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = \int f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, t)\, \mathrm{d}^3\xi.$$

Densidad

Nótese:

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = \int f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, t)\, \mathrm{d}^3\xi.$$

Densidad

$$\rho(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \int \boldsymbol{\xi} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, t)\, \mathrm{d}^3\xi.$$

Densidad de momento

Nótese:

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = \int f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, t)\, \mathrm{d}^3\xi.$$

Densidad

$$\rho(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \int \boldsymbol{\xi} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, t)\, \mathrm{d}^3\xi.$$

Densidad de momento

$$\rho(\boldsymbol{x}, t)E(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2}\int |\boldsymbol{\xi}|^2 f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, t)\, \mathrm{d}^3\xi.$$

Densidad de energía total

Tomando la derivada total con respecto al tiempo de f:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_\beta}\right)\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_\beta}\right)\frac{\mathrm{d}\xi_\beta}{\mathrm{d}t}.$$

Tomando la derivada total con respecto al tiempo de f:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_\beta}\right)\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}t}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_\beta}\right)\frac{\mathrm{d}\xi_\beta}{\mathrm{d}t}.$$

Advección de f debida al movimiento de las partículas con velocidad **ξ**

Tomando la derivada total con respecto al tiempo de f:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_\beta}\right)\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_\beta}\right)\frac{\mathrm{d}\xi_\beta}{\mathrm{d}t}.$$

Advección de f debida al movimiento de las partículas con velocidad **ξ**

Termino de fuerza afectando a la velocidad

Usando la notación $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \Omega(f)$

Usando la notación $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \Omega(f)$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\beta \frac{\partial f}{\partial x_\beta} + \frac{F_\beta}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \xi_\beta} = \Omega(f).}$$

Usando la notación $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \Omega(f)$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\beta \frac{\partial f}{\partial x_\beta} + \frac{F_\beta}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \xi_\beta} = \Omega(f).}$$

Donde $\Omega(f)$ es llamado operador de colisión.

Derivando:

Derivando:

$$\int \Omega(f)\,\mathrm{d}^3\xi = 0,$$

Conservación de la masa

Derivando:

$$\int \Omega(f)\, \mathrm{d}^3\xi = 0,$$

Conservación de la masa

$$\int \boldsymbol{\xi}\, \Omega(f)\, \mathrm{d}^3\xi = \mathbf{0},$$

Conservación del momento

Derivando:

$$\int \Omega(f)\, \mathrm{d}^3\xi = 0,$$

Conservación de la masa

$$\int \boldsymbol{\xi}\, \Omega(f)\, \mathrm{d}^3\xi = \mathbf{0},$$

Conservación del momento

$$\int |\boldsymbol{\xi}|^2 \Omega(f)\, \mathrm{d}^3\xi = 0,$$

Conservación de la energía total

Así la dinámica del sistema estará determinada por el termino de colisión $\Omega(f)$

Así la dinámica del sistema estará determinada por el termino de colisión $\Omega(f)$

La formulación original de Boltzmann para $\Omega(f)$ es muy complicada.

Así la dinámica del sistema estará determinada por el termino de colisión $\Omega(f)$

La formulación original de Boltzmann para $\Omega(f)$ es muy complicada.

Sin embargo, en miras hacia LBM, existe una simplificación para $\Omega(f)$, la aproximación **BGK**:

Así la dinámica del sistema estará determinada por el termino de colisión $\Omega(f)$

La formulación original de Boltzmann para $\Omega(f)$ es muy complicada.

Sin embargo, en miras hacia LBM, existe una simplificación para $\Omega(f)$, la aproximación **BGK**:

$$\Omega(f) = -\frac{1}{\tau}\left(f - f^{\mathrm{eq}}\right)$$

BGK collision operator

Teniendo en mente las cantidades que se deben conservar en la formulación, se busca ahora plantear ecuaciones de continuidad para las cantidades:

Teniendo en mente las cantidades que se deben conservar en la formulación, se busca ahora plantear ecuaciones de continuidad para las cantidades:

$$\boxed{\Pi_0 = \int f \, \mathrm{d}^3\xi = \rho,}$$

Teniendo en mente las cantidades que se deben conservar en la formulación, se busca ahora plantear ecuaciones de continuidad para las cantidades:

$$\boxed{\Pi_0 = \int f \, \mathrm{d}^3\xi = \rho,}$$

$$\boxed{\Pi_\alpha = \int \xi_\alpha f \, \mathrm{d}^3\xi = \rho u_\alpha,}$$

Teniendo en mente las cantidades que se deben conservar en la formulación, se busca ahora plantear ecuaciones de continuidad para las cantidades:

$$\Pi_0 = \int f \, \mathrm{d}^3\xi = \rho,$$

$$\Pi_\alpha = \int \xi_\alpha f \, \mathrm{d}^3\xi = \rho u_\alpha ,$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = \int \xi_\alpha \xi_\beta f \, \mathrm{d}^3\xi,$$

Teniendo en mente las cantidades que se deben conservar en la formulación, se busca ahora plantear ecuaciones de continuidad para las cantidades:

$$\Pi_0 = \int f \, \mathrm{d}^3\xi = \rho,$$

$$\Pi_\alpha = \int \xi_\alpha f \, \mathrm{d}^3\xi = \rho u_\alpha,$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = \int \xi_\alpha \xi_\beta f \, \mathrm{d}^3\xi,$$

$$\Pi_{\alpha\beta\gamma} = \int \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma f \, \mathrm{d}^3\xi.$$

Y de igual forma se toman los momentos del termino de fuerza:

Y de igual forma se toman los momentos del termino de fuerza:

$$\int \frac{\partial f}{\partial \xi_\beta} \, \mathrm{d}^3\xi = 0,$$

$$\int \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial \xi_\beta} \, \mathrm{d}^3\xi = -\int \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \xi_\beta} f \, \mathrm{d}^3\xi = -\rho \delta_{\alpha\beta},$$

$$\int \xi_\alpha \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial \xi_\beta} \, \mathrm{d}^3\xi = -\int \frac{\partial(\xi_\alpha \xi_\alpha)}{\partial \xi_\beta} f \, \mathrm{d}^3\xi = -2\rho u_\beta.$$

Luego, la ecuación conservación para la masa se obtiene haciendo:

Luego, la ecuación conservación para la masa se obtiene haciendo:

$$\int * \, d^3\xi \longrightarrow \text{Ec. Boltzamnn}$$

Luego, la ecuación conservación para la masa se obtiene haciendo:

$$\boxed{\int * \, \mathrm{d}^3\xi \longrightarrow \text{Ec. Boltzamnn}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int f\,\mathrm{d}^3\xi + \frac{\partial}{\partial x_\beta}\int \xi_\beta f\,\mathrm{d}^3\xi + \frac{F_\beta}{\rho}\int \frac{\partial f}{\partial \xi_\beta}\,\mathrm{d}^3\xi = \int \Omega(f)\,\mathrm{d}^3\xi.}$$

Luego, la ecuación conservación para la masa se obtiene haciendo:

$$\int * \, \mathrm{d}^3\xi \longrightarrow \text{Ec. Boltzamnn}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f\,\mathrm{d}^3\xi + \frac{\partial}{\partial x_\beta}\int \xi_\beta f\,\mathrm{d}^3\xi + \frac{F_\beta}{\rho}\int \frac{\partial f}{\partial \xi_\beta}\mathrm{d}^3\xi = \int \Omega(f)\,\mathrm{d}^3\xi.$$

y reemplazando las def. anteriores

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_\beta)}{\partial x_\beta} = 0.$$

$$\int * \, \xi_\alpha \, d^3\xi$$ ➡ Ec. Boltzamnn

$$\frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = F_\alpha .$$

Ecuación de conservación del momento

$$\int * \, \xi_\alpha \, d^3\xi \Rightarrow \text{Ec. Boltzamnn}$$

$$\frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = F_\alpha .$$

Ecuación de conservación del momento

$$\int * \, \xi_\alpha \xi_\alpha \, d^3\xi \Rightarrow \text{Ec. Boltzamnn}$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Pi_{\alpha\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = F_\beta u_\beta .$$

Ecuación de conservación de la energía

A pesar de lo complicado que pueda parecer la implementación del método, este resulta ser una fácil implementación.

A pesar de lo complicado que pueda parecer la implementación del método, este resulta ser una fácil implementación.

Además de ser altamente paralelizable dado que la EB resulta ser una ecuación que describe la advección de la función de distribución

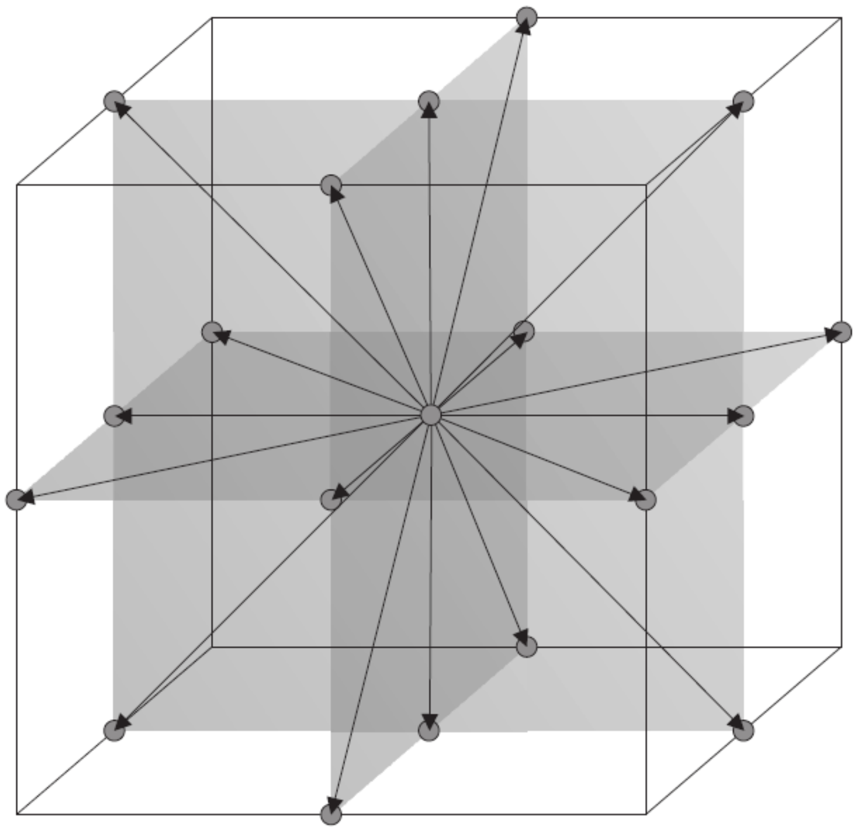
A pesar de lo complicado que pueda parecer la implementación del método, este resulta ser una fácil implementación.

Además de ser altamente paralelizable dado que la EB resulta ser una ecuación que describe la advección de la función de distribución

y el termino de fuente $\Omega(f)$ solo depende del valor de f en un punto, y no de sus gradientes (es decir la implementación solo dependerá del punto de evaluación).

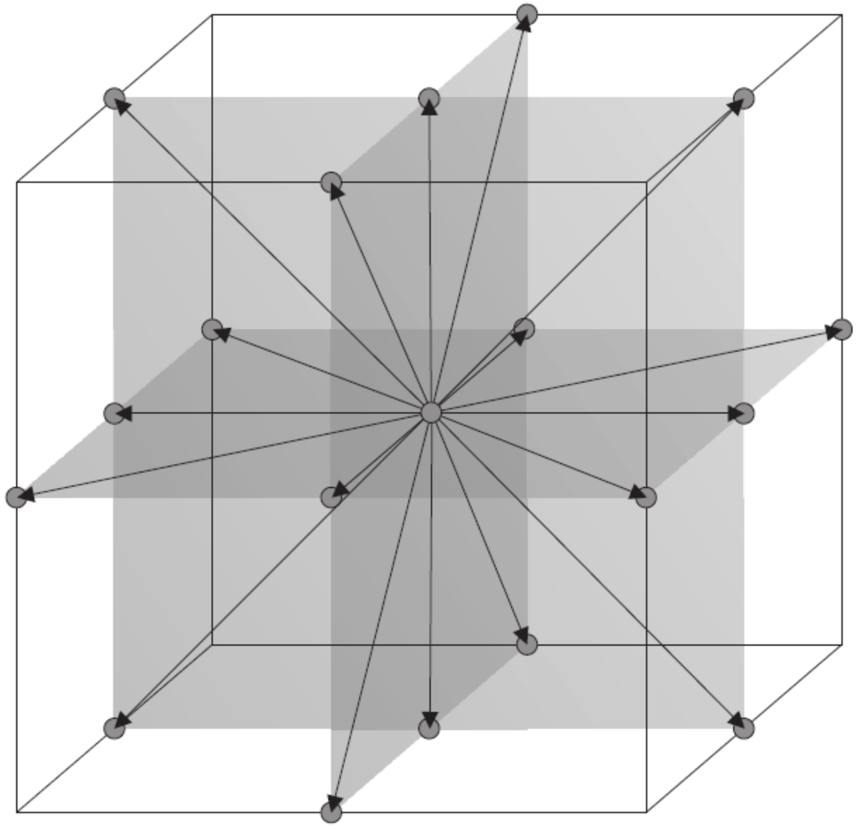
La cantidad básica en LBM es la distribución **discreta** $f_i(\boldsymbol{x}, t)$, que de forma similar a $f(\boldsymbol{x}, t)$, representa la densidad de partículas en la posición **x** y tiempo t pero ahora en un conjunto discreto de velocidades $\{\boldsymbol{c}_i\}$.

La cantidad básica en LBM es la distribución **discreta** $f_i(\boldsymbol{x}, t)$, que de forma similar a $f(\boldsymbol{x}, t)$, representa la densidad de partículas en la posición **x** y tiempo t pero ahora en un conjunto discreto de velocidades $\{\boldsymbol{c}_i\}$.



La cantidad básica en LBM es la distribución **discreta** $f_i(\boldsymbol{x}, t)$, que de forma similar a $f(\boldsymbol{x}, t)$, representa la densidad de partículas en la posición **x** y tiempo t pero ahora en un conjunto discreto de velocidades $\{\boldsymbol{c}_i\}$.

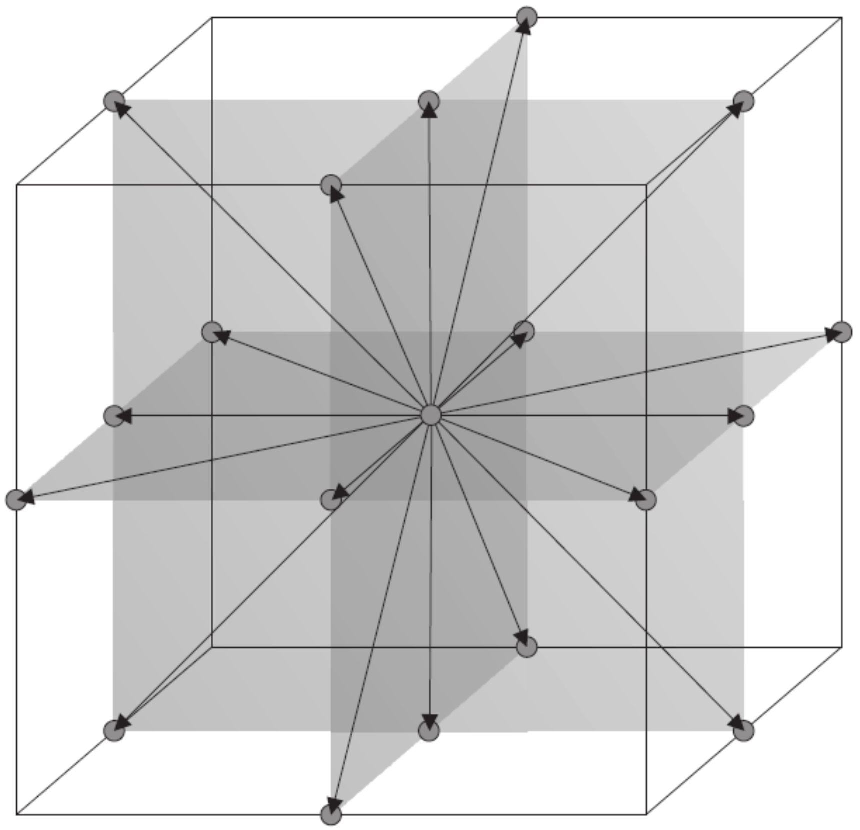
A cada velocidad se le dota de un peso w_i .



La cantidad básica en LBM es la distribución **discreta** $f_i(\boldsymbol{x}, t)$, que de forma similar a $f(\boldsymbol{x}, t)$, representa la densidad de partículas en la posición **x** y tiempo t pero ahora en un conjunto discreto de velocidades $\{\boldsymbol{c}_i\}$.

A cada velocidad se le dota de un peso w_i .

Cada conjunto $\{\boldsymbol{c}_i, w_i\}$ de le denota mediante la etiqueta DdQq.



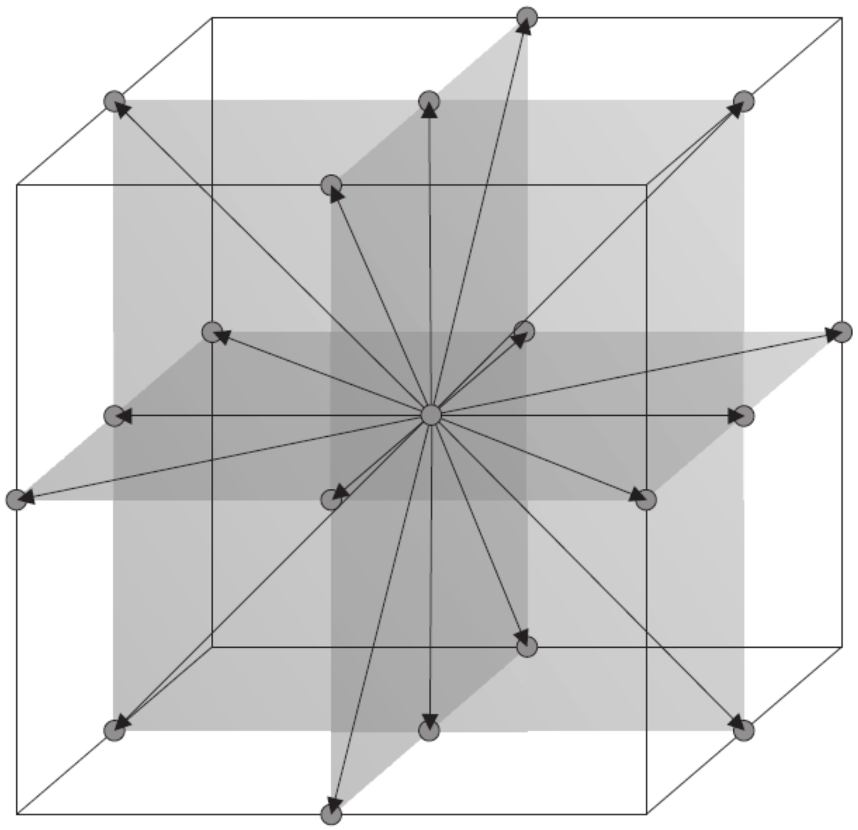
La cantidad básica en LBM es la distribución **discreta** $f_i(\boldsymbol{x}, t)$, que de forma similar a $f(\boldsymbol{x}, t)$, representa la densidad de partículas en la posición **x** y tiempo t pero ahora en un conjunto discreto de velocidades $\{\boldsymbol{c}_i\}$.

A cada velocidad se le dota de un peso w_i .

Cada conjunto $\{\boldsymbol{c}_i, w_i\}$ de le denota mediante la etiqueta DdQq.

Donde de forma análoga al caso continuo, las densidades de masa y momento estarán dadas por:

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = \sum_i f_i(\boldsymbol{x}, t), \qquad \rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_i \boldsymbol{c}_i f_i(\boldsymbol{x}, t).$$



Ahora si, la ec. de **Lattice Boltzmann (LBE)** se obtiene al discretizar:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\beta \frac{\partial f}{\partial x_\beta} + \frac{F_\beta}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \xi_\beta} = \Omega(f).}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f_i(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\boldsymbol{x}, t) + \Omega_i(\boldsymbol{x}, t).}$$

Donde el termino de colisión se toma:

$$\boxed{\Omega_i(f) = -\frac{f_i - f_i^{\mathrm{eq}}}{\tau}\Delta t.}$$

además por conservación se cumple:

$$\boxed{\sum_i f_i^{\mathrm{eq}} = \sum_i f_i = \rho}$$

$$\boxed{\sum_i \boldsymbol{c}_i f_i^{\mathrm{eq}} = \sum_i \boldsymbol{c}_i f_i = \rho \boldsymbol{u}}$$

Aquí va lo de Bolztmann relativista y lo de Marle

Las ecuaciones del fluido relativistas asociadas a la conservación del numero de partículas y al momento y energía están dadas por:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= P\eta^{\mu\nu} + (\epsilon + P)u^{\mu}u^{\nu} + \pi^{\mu\nu} \\ N^{\mu} &= n\gamma(1, \vec{\beta})^{\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}T^{\mu\nu} &= 0 \\ \partial_{\mu}N^{\mu} &= 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones del fluido relativistas asociadas a la conservación del numero de partículas y al momento y energía están dadas por:

$$\partial_t \left((\epsilon + P)\gamma^2 - P\right) + \partial_a \left((\epsilon + P)\gamma^2 u_a\right) + \partial_t \pi^{00} + \partial_a \pi^{a0} = 0$$

$$\partial_t \left((\epsilon + P)\gamma^2 u_b\right) + \partial_b P + \partial_a \left((\epsilon + P)\gamma^2 u_a u_b\right) + \partial_t \pi^{0b} + \partial_a \pi^{ab} = 0$$

Las ecuaciones del fluido relativistas asociadas a la conservación del numero de partículas y al momento y energía están dadas por:

$$\partial_t \left((\epsilon + P)\gamma^2 - P\right) + \partial_a \left((\epsilon + P)\gamma^2 u_a\right) + \partial_t \pi^{00} + \partial_a \pi^{a0} = 0$$

$$\partial_t \left((\epsilon + P)\gamma^2 u_b\right) + \partial_b P + \partial_a \left((\epsilon + P)\gamma^2 u_a u_b\right) + \partial_t \pi^{0b} + \partial_a \pi^{ab} = 0$$

$$\partial_t(n\gamma) + \partial_a \left(n\gamma u_a\right) = 0$$

Se tienen 6 cantidades, $n, \ \vec{u}, \ \epsilon$ y P, con 5 ecuaciones.

Se tienen 6 cantidades, $n, \ \vec{u}, \ \epsilon$ y P, con 5 ecuaciones.

Para cerrar el sistema se tiene que imponer una sexta ecuación, que en este caso se toma como una ecuación de estado que relaciona las cantidades P y ϵ.

Se tienen 6 cantidades, $n, \ \vec{u}, \ \epsilon$ y P, con 5 ecuaciones.

Para cerrar el sistema se tiene que imponer una sexta ecuación, que en este caso se toma como una ecuación de estado que relaciona las cantidades P y ϵ.

En este caso se toma un de modelo de radiación dado por:

$$\boxed{\epsilon = 3P}$$

Se tienen 6 cantidades, $n,\ \vec{u},\ \epsilon$ y P, con 5 ecuaciones.

Para cerrar el sistema se tiene que imponer una sexta ecuación, que en este caso se toma como una ecuación de estado que relaciona las cantidades P y ϵ.

En este caso se toma un de modelo de radiación dado por:

$$\boxed{\epsilon = 3P}$$

Sin embargo es posible plantear otra ecuación de estado, por ejemplo:

$$\boxed{3\frac{\ddot{a}}{a} = \Lambda - 4\pi G(\rho + 3p)}$$

Ecuación de aceleración de Friedmann

Se tienen 6 cantidades, n, $\vec{u}$, ϵ y P, con 5 ecuaciones.

Para cerrar el sistema se tiene que imponer una sexta ecuación, que en este caso se toma como una ecuación de estado que relaciona las cantidades P y ϵ.

En este caso se toma un de modelo de radiación dado por:

$$\boxed{\epsilon = 3P}$$

Sin embargo es posible plantear otra ecuación de estado, por ejemplo:

$$\boxed{3\frac{\ddot{a}}{a} = \Lambda - 4\pi G(\rho + 3p)}$$

Ecuación de aceleración de Friedmann

Volviendo al conjunto de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned}&\partial_t\left((\epsilon+P)\gamma^2-P\right)+\partial_a\left((\epsilon+P)\gamma^2u_a\right)+\partial_t\pi^{00}+\partial_a\pi^{a0}=0\\&\partial_t\left((\epsilon+P)\gamma^2u_b\right)+\partial_bP+\partial_a\left((\epsilon+P)\gamma^2u_au_b\right)+\partial_t\pi^{0b}\\&\qquad+\partial_a\pi^{ab}=0\end{aligned}}$$

$$\boxed{\partial_t(n\gamma)+\partial_a\left(n\gamma u_a\right)=0}$$

Volviendo al conjunto de ecuaciones, se debe notar que:

$$\partial_t \left(\boxed{(\epsilon + P)\gamma^2 - P}\right) + \partial_a \left((\epsilon + P)\gamma^2 u_a\right) + \partial_t \pi^{00} + \partial_a \pi^{a0} = 0$$

$$\partial_t \left(\boxed{(\epsilon + P)\gamma^2 u_b}\right) + \partial_b P + \partial_a \left((\epsilon + P)\gamma^2 u_a u_b\right) + \partial_t \pi^{0b} + \partial_a \pi^{ab} = 0$$

$$\partial_t \left(\boxed{n\gamma}\right) + \partial_a \left(n\gamma u_a\right) = 0$$

Luego se definen las distribuciones:

Luego se definen las distribuciones:

$$\boxed{n\gamma = \sum_{i=0}^{18} f_i}$$

donde f es asignada a la densidad de numero de partículas.

Luego se definen las distribuciones:

$$\boxed{n\gamma = \sum_{i=0}^{18} f_i}$$

donde f es asignada a la densidad de numero de partículas.

$$(\epsilon + P)\gamma^2 - P = \sum_{i=0}^{18} g_i$$

$$(\epsilon + P)\gamma^2 \vec{u} = \sum_{i=0}^{18} g_i \vec{c}_i$$

Y g es asignada a la densidad de energía.

Tomando un momento de mas para cada distribución y por conservación se encuentra:

$$\sum_{i=0}^{18} g_i^{\text{eq}} = \gamma^2(\epsilon + P) - P$$

$$\sum_{i=0}^{18} g_i^{\text{eq}}\vec{c}_i = (\epsilon + P)\gamma^2\vec{u}$$

$$\sum_{i=0}^{18} g_i^{\text{eq}}c_{ia}c_{i\beta} = P\delta_{ab} + (\epsilon + P)\gamma^2 u_a u_b$$

$$\sum_{i=0}^{18} f_i^{\text{eq}} = n\gamma$$

$$\sum_{i=0}^{18} f_i^{\text{eq}}\vec{c}_i = n\gamma\vec{u}$$

Y tomando además la forma general de f y g como:

$$f_i^{\mathrm{eq}} = w_i[A + \vec{c}_i \cdot \vec{B}] \quad , \text{for} \quad i \geq 0$$

$$g_i^{\mathrm{eq}} = w_i[C + \vec{c}_i \cdot \vec{D} + \overleftrightarrow{E} : (\vec{c}_i \vec{c}_i - \alpha \overleftrightarrow{I})] \quad , \text{for} \quad i > 0$$

$$g_0^{\mathrm{eq}} = w_0[F]$$

Y reemplazando en las anteriores expresiones.

Las funciones de equilibrio quedan:

$$f_i^{\text{eq}} = w_i n\gamma \left[1 + 3\frac{(\vec{c}_i \cdot \vec{u})}{c_l^2}\right] \qquad \text{for } i \geq 0$$

$$g_i^{\text{eq}} = w_i \epsilon \gamma^2 \left[\frac{1}{\gamma^2 c_l^2} + 4\frac{(\vec{c}_i \cdot \vec{u})}{c_l^2} + 6\frac{(\vec{c}_i \cdot \vec{u})^2}{c_l^4} - 2\frac{|\vec{u}|^2}{c_l^2}\right] \quad \text{for } i > 0$$

$$g_0^{\text{eq}} = w_0 \epsilon \gamma^2 \left[4 - \frac{2 + c_l^2}{\gamma^2 c_l^2} - 2\frac{|\vec{u}|^2}{c_l^2}\right]$$

Finalmente se postula que la forma de las discretizaciones de las ecuaciones de movimiento son de la forma:

$$\boxed{f_i(\vec{x}+\vec{c}_i\delta t, t+\delta t) - f_i(\vec{x}, t) \;=-\frac{\delta t}{\tau}(f_i - f_i^{\text{eq}})}$$

$$\boxed{g_i(\vec{x}+\vec{c}_i\delta t, t+\delta t) - g_i(\vec{x}, t) \;=-\frac{\delta t}{\tau}(g_i - g_i^{\text{eq}})}$$

Aquí va lo de Quark-Gluon

Gracias