

# **HYDRODYNAMISK TEORI FOR BØLGJEKRAFTVERK**

**FORELESNINGSNOTAT  
VED  
J. FALNES OG L.C. IVERSEN**



**EKSPERIMENTALFYSIKK  
TRONDHEIM – NTH**



UNIVERSITETET I TRONDHEIM  
NOREGS TEKNISKE HØGSKOLE  
INSTITUTT FOR EKSPERIMENTALFYSIKK

## HYDRODYNAMISK TEORI FOR BØLGJEKRAFTVERK

forelesningsnotat

ved

J. Falnes og L.C. Iversen

Trondheim

1980

## II

### FORORD

Forelesningsnotata, som her blir lagde fram, gjeld dr.-ing.-faget nr. 710 90 "Energi frå havbølgjer" ved NTH. Faget vart gjennomført for fyrste gongen i haustsemestret 1979 med i alt 50 forelesningstimar. Åtte av desse timane førelas universitetsstipendiat Lars Christian Iversen. Jfr. kapitla C, E og F. Etter særskild innbeding var tre av forelesningane ved Dr. B.M. Count frå Central Electricity Generating Board, Southampton, England. Jfr. kap. H og vedlegg 4.

Det er no vel seks år sidan førsteamanuens Kjell Budal og underskrivne tok til å arbeida med dette emnet ved Institutt for eksperimentalphysikk. Utgangspunktet for arbeidet vårt var m.a. bakgrunn i akustiske og elektromagnetiske bølgjer. Eit bølgjekraftverk kan på bølgjeteoretisk vis samanliknast med ein mikrofon eller med ei mottakarantenne.

Forelesningane her er også merka av denne bakgrunnen og av vårt eige arbeid i feltet gjennom seks år. Eg har prøvt å halda ei einskapleg og systematisk framstelling av teorien, men har sikkert ikkje lukkast heilt ut. Framstellinga her er berre ei temmeleg uredigert form av notata til forelesningane. Siste delen av innleiingskapitlet A har eg likevel "forvist" til eit vedlegg 1. Framstellinga av teorien kunne nok med fordel ha vore stramma inn ein del.

Meir praktiske forhold vedrørande utnytting av energien i havbølgjene har her i notata fått eit lite omfang; etter måten endå mindre enn i sjølvve forelesningane. Men dette er eit emne som for tida er inne i ei sterk utvikling. Den reint tekniske delen av emnet er enno fersk og inne i ein tilstand av hyppige omskiftingar. Det kan difor forsvarast at ei detaljert gjennomgåing av den reint tekniske sida får venta til eit seinare høve.

Øvingsoppgåvene i faget hausten 1979 er med her som vedlegg 2.

Eg takkar Randi Grønli og Gillian P. Hagfors for nøyaktig og grei maskinskriving av notata her.

Trondheim i februar 1980

Johannes Falnes  
dosent

### III

#### INNHOLD

|   | Side       |
|---|------------|
| <b>A. Innleiing</b>   | <b>1</b>   |
| Energitransport i bølgjer                                       | 1          |
| Harmoniske svingingar. Impedans. Effekt.                        | 2          |
| Harmoniske bølgjer  | 5          |
| Intensiteten  | 6          |
| Strålingsresistans og strålingsimpedans                         | 8          |
| Absorpsjonstverrsnittet for ein mikrofon                        | 10         |
| Resonansabsorpsjon  | 13         |
| <b>B. Hydrodynamisk potensialteori</b>                          | <b>17</b>  |
| Kervelfri rørsle i ideell væske. Bernoullis likning.            | 17         |
| Grunnlikningane for tyngdebølgjer. Linearisering.               | 19         |
| Regulære (harmoniske) bølgjer. Dispersjonslikninga.             | 23         |
| Plane bølgjer. Intensitet og energitransport.                   | 29         |
| Sirkulære bølgjer   | 34         |
| Spreiing av plan bølgje på vertikal sylinder                    | 39         |
| <b>C. Bølgestatistikk og energipotensial</b>                    | <b>41</b>  |
| Innledning  | 41         |
| Energispekteket   | 41         |
| Bølgespektekterparametre  | 44         |
| Registrering av energispekteket                                 | 45         |
| Analytiske uttrykk for energispekteket                          | 47         |
| Bølgehøydestatistikk  | 47         |
| Energipotensialet i havbølger                                   | 48         |
| <b>D. Vekselverknad mellom ei bølgje og ein svingande kropp</b> | <b>54</b>  |
| Svingemodi for ein fast kropp                                   | 54         |
| Hydrodynamisk kraft som verkar på kroppen                       | 58         |
| Strålingsimpedansen   | 60         |
| Energitolking av strålingsimpedansen                            | 61         |
| Bølgjegenerator utan addert masse                               | 62         |
| Bølgjegenerering med ei svingande vertikal plate                | 66         |
| Greens setning  | 72         |
| Strålingsresistansen  | 75         |
| Bølgjer som oppfyller strålingsvilkåret                         | 77         |
| Resiprositetssetninga   | 78         |
| Kotsjin-funksjonar  | 79         |
| Haskind-relasjonen  | 80         |
| Meir om Kotsjin-funksjonar                                      | 82         |
| Effekt absorbert av svingande kropp                             | 86         |
| Eksitasjonskraftkoefisient og strålingsresistans                | 91         |
| Sirkulærssymmetrisk kropp                                       | 93         |
| To-dimensjonalt tilfelle  | 98         |
| Effektabsorpsjon med ein modus i det to-dimensjonale tilfellet  | 102        |
| Svingesystem med høgre-venstre-symmetri                         | 104        |
| <b>E. Eksitasjonskraften</b>                                    | <b>106</b> |
| Generelle uttrykk for eksitasjonskraften                        | 107        |
| Froude-Krylov-kraften   | 108        |
| Diffraeksjonskraften på små legemer                             | 112        |
| Storvolumskonstruksjoner  | 114        |

|  | Side |
|--|------|
| F. Ikke-lineære effekter   | 118  |
| Ikke-lineariteter i de hydrodynamiske grunnlikningene  | 118  |
| Ikke-lineære effekter som følge av at legemet beveger seg  | 120  |
| Viskositet   | 121  |
| Ikke-lineariteter generert av maskineri  | 123  |
| G. Punktabsorbator   | 124  |
| H. Praktiske problem ved bølgjekraftverk   | 127  |
| J. Vekselverknad mellom ei bølgje og fleire svingande kroppar  | 128  |
| Fjernfeltkoeffisienten referert til origo  | 128  |
| Generelle formlar  | 130  |
| Strålingsimpedansen  | 132  |
| Eksitasjonskrafta  | 134  |
| Kommentar vedrørande singulær strålingsresistansmatrise  | 135  |
| K. Rette rader av jamt fordelte svingande kroppar  | 137  |
| Utstrålt bølgje  | 138  |
| Ei rett linje av like kroppar  | 140  |
| Uendelig lang rekke av svingande kroppar   | 143  |
| Symmetriske kroppar i hiving og jaging   | 147  |
| <br>Vedlegg 1. Stråling frå oscillerande elektrisk dipol   | 150  |
| Dipolantenne   | 152  |
| Absorpsjonstverrsnitt for Hertz-dipol  | 154  |
| Vekselverknad mellom lys og eit atom   | 155  |
| Vedlegg 2. Rekneoppgåver til øving.  | 158  |
| Vedlegg 3. Kopi (preprint) av artikkelen "Experiments with point absorbers in regular waves" av K. Budal, J. Falnes, Å. Kyllingstad og G. Oltedal. | 164  |
| Vedlegg 4. Disposisjon for inviterte forelesningar av B.M. Count: Wave power research in UK.   | 179  |
| Vedlegg 5. Kopi (preprint) av artikkelen "Radiation impedance matrix and optimum power absorption for interacting oscillators in surface waves."   | 186  |

## A. INNLEIING

Det er nyttig å sjå på likskapar og skilnader mellom ulike slag bølgjer.

I alle fall har ei slik samanlikning hatt mykje å seia for vårt arbeid med havbølgjeenergi.

Me skal samanlikna elektromagnetiske bølgjer (lys- og radiobølgjer) og akustiske bølgjer (lydbølgjer) med havbølgjer.

Denne samanlikninga kan vera nyttig for dei som har bakgrunn i elektromagnetisme og akustikk. (Dei som ikkje har slik bakgrunn, får heller hoppa over denne samanlikninga i staden for å la seg bli forvirra!)

Elektromagnetiske og akustiske bølgjer er vanlegvis rombølgjer, medan havbølgjer er overflatebølgjer.

### Energitransport i bølgjer.

#### Intensitet I

$$[I] = \frac{J}{sm^2} = \frac{W}{m^2}$$

#### Akustiske bølgjer og havbølgjer

$$I = \overline{pv} \quad (\text{i tidsmiddel}) \quad (\text{A1})$$

der  $p$  er det dynamiske trykket og  $v = v_x$  = partikkelfarten  $\vec{v}$  sin komponent i bølgjeforplantingsretninga.

Merk at  $\overline{v} = 0$ , slik at

$$\begin{aligned} I &= \overline{p_{\text{total}}v} = \overline{(p_{\text{statisk}} + p_{\text{dynamisk}})v} = \overline{(p_0 + p)v} \\ &= p_0 \overline{v} + \overline{pv} = \overline{pv} \end{aligned}$$

#### Elektromagnetisk bølgje (lys, radiobølgje)

$$\vec{I} = \vec{S} = \overline{\vec{E} \times \vec{H}} \quad (\text{A4})$$

For rein vandrebølgje (progressiv bølgje, d.v.s. inga reflek-

tert bølgje) gjeld

Elektromagnetisk bølgje

$$|\vec{H}| = |\vec{E}| / Z_0$$

I vakuum eller luft er

$$Z_0 = \sqrt{\eta_0 / \epsilon_0} = \eta_0 c = \frac{1}{\epsilon_0 c} = 377 \Omega$$

$$I = \bar{S} = \frac{1}{Z_0} |\vec{E}|^2 = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 \quad (\text{A7})$$

$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  = lysfarten.

Akustisk bølgje (Jfr. t.d. Falnes & Budal, Bølgjelære)

$$v_x = p/\rho c \quad (\text{A8})$$

For luft ved  $20^\circ\text{C}$  og 1 atm. er massettelleiken (densiteten)  $\rho = 1,21 \text{ kg/m}^3$  og lydfarten  $c = 343 \text{ m/s}$

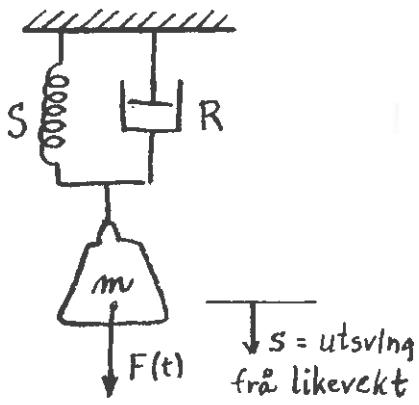
$$\rho c = 415 \text{ Nsm}^{-3}$$

$$I = \frac{1}{\rho c} \bar{P}^2 \quad (\text{A10})$$

For havbølgjer, som i motsetnad til akustiske og elektromagnetiske bølgjer er dispersive, gjeld ikkje ein tilsvarende enkel samanheng mellom  $p$  og  $v$  (for ei progressiv bølgje).

### Harmoniske svingingar. Impedans. Effekt.

Newton's lov



$$m\ddot{s} = F_S + F_R + F(t) \quad (\text{A11})$$

$F(t)$  er ytre kraft.

$$\text{Fjørkraft } F_S = -Ss$$

$S$  = stivheten

$$\text{Bremsekraft } F_R = -R\dot{s}$$

$R$  = mekanisk resistans

Ser på mekanisk svingesystem med lineær karakteristikk.

D.v.s. me går ut frå at R og S (og m) er uavhengige av s,  $\dot{s}$  og  $\ddot{s}$ . Me får den lineære differensiallikninga

$$m\ddot{s} + R\dot{s} + Ss = F(t)$$

Ser på tvungne svingingar med harmonisk eksitasjon

$$\begin{aligned} F(t) &= |\hat{F}| \cos(\omega t + \varphi_F) = \operatorname{Re}(\hat{F}e^{i\omega t}) \\ &= \frac{1}{2} \hat{F}e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \hat{F}^* e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

$|\hat{F}|$  er amplituden av krafta.

$$\hat{F} = |\hat{F}| e^{i\varphi_F} \quad (\text{A14})$$

er den komplekse amplituden. Oftast skriv me  $F = \hat{F}e^{i\omega t}$  med di det er underforstått at me skal ta realdelen. Den stasjonære løysinga av differensiallikninga er eit harmonisk utsving

$$s = \operatorname{Re}(\hat{s}e^{i\omega t})$$

Farten:

$$u = \operatorname{Re}(\hat{u}e^{i\omega t}) \quad \hat{u} = i\omega \hat{s}$$

Akselerasjonen:

$$a = \operatorname{Re}(\hat{a}e^{i\omega t}) \quad \hat{a} = i\omega \hat{u} = -\omega^2 \hat{s}$$

Innsetjing i differensiallikninga gjev

$$i\omega m\hat{u} + R\hat{u} + (S/i\omega)\hat{u} = \hat{F} \quad (\text{A18})$$

med løysing for den komplekse fartamplituden

$$\hat{u} = \frac{\hat{F}}{Z} \quad (\text{A19})$$

der me har ført inn den mekaniske impedansen

$$Z = R + i\omega m + S/i\omega = R + iX \quad (\text{A20})$$

X =  $\omega m - S/\omega$  er den mekaniske reaktansen.

Merk

$$Z_{\text{mek}} = \frac{\text{kraft}}{\text{fart}} \quad [Z] = \text{Nsm}^{-1}$$

Momentan effekt levert av den ytre krafta

$$\begin{aligned} F(t)u(t) &= \frac{1}{2} (\hat{F}e^{i\omega t} + \hat{F}^*e^{-i\omega t}) \frac{1}{2} (\hat{u}e^{i\omega t} + \hat{u}^*e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{4} (\hat{F}\hat{u}^* + \hat{F}^*\hat{u} + \hat{F}\hat{u}e^{i2\omega t} + (\hat{F}\hat{u})^* e^{-i2\omega t}) \end{aligned}$$

Effekten i tidsmiddel er

$$\begin{aligned} P &= \overline{F(t)u(t)} = \frac{1}{4} (\hat{F}\hat{u}^* + \hat{F}^*\hat{u}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{F}\hat{u}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z\hat{u}\hat{u}^*) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z)|\hat{u}|^2 = \frac{1}{2} R|\hat{u}|^2 \end{aligned} \quad (\text{A22})$$

Effekten i resistansen

$$P_R = \overline{R u^2(t)} = \frac{1}{2} R |\hat{u}|^2 = P$$

Men merk at generelt er  $Ru^2 \neq F(t)u(t)$ .

Eit energilager tek seg mellombels av skilnaden.

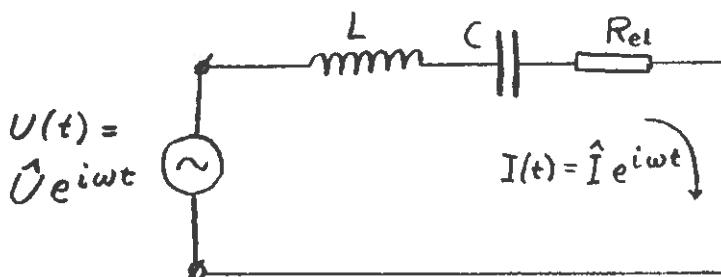
Max. kinetisk energi:

$$W_{k,\max} = \frac{1}{2} m |\hat{u}|^2$$

Max. potensiell energi:

$$W_{p,\max} = \frac{1}{2} S |\hat{s}|^2 = \frac{1}{2} \frac{S}{\omega^2} |\hat{u}|^2$$

Elektrisk svingesystem:



$$U(t) = L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int^t I dt + R_{el} I = 0 \quad (\text{A26})$$

Harmonisk varierande spenning og straum. Likning for kompleks amplitud:

$$\hat{U} = Li\omega \hat{I} + \frac{1}{C} \frac{\hat{I}}{i\omega} + R_{el} \hat{I} \quad (A27)$$

$$\hat{U} = \hat{I} Z_{el} \quad (A28)$$

$$Z_{el} = R_{el} + iX_{el} \quad \text{elektrisk impedans} \quad (A29)$$

$$X_{el} = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad \text{elektrisk reaktans} \quad (A30)$$

Tilført effekt (i tidsmiddel):

$$P = \overline{U(t)I(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{U}\hat{I}^*) = \frac{1}{2} R_{el} |\hat{I}|^2 \quad (A31)$$

Forbrukt effekt:

$$P_R = \overline{R_{el} I^2(t)} = \frac{1}{2} R_{el} |\hat{I}|^2 = P$$

### Harmoniske bølgjer.

Plan akustisk bølgje

$$p(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)} \quad (A33)$$

(Som me seinare skal sjå gjeld tilsvarende for det hydro-dynamiske trykket med ei plan havbølgje, bortsett frå at der er A og B ikkje konstantar, men minkar med vassdjupna:

A og B  $\propto e^{kz}$  på djupt vatn ( z positiv oppover.))

Plan (lineærpolarisert) elektromagnetisk bølgje

$$E(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)} \quad (A34)$$

$\omega$  - vinkel frekvens

k - vinkel repetens (angulært bølgjetal)

T =  $2\pi/\omega$  - perioden

$\lambda = 2\pi/k$  - bølgjelengda

For akustiske og elektromagnetiske bølgjer, som begge er dispersjonsfrie, gjeld

$$\omega = ck \quad (\text{A37})$$

der  $c$  er lydfarten, respektivt lysfarten.

Havbølgjer på djupt vann er derimot disperorative med di-

$$\omega^2 = gk \quad (\text{A38})$$

( $g$  tyngdeakselerasjonen). Jfr. (B45).

Fasefarten:

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad (\text{A39})$$

Gruppefarten:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (\text{A40})$$

For akustiske og elektromagnetiske bølgjer i fritt rom gjelder

$$v_f = v_g = c \quad (\text{uavhengig av } \omega \text{ og } k. \text{ Dvs. dispersjonsfrie})$$

For havbølgjer på djupt vann:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega} = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (\text{A42})$$

$$2\omega d\omega = gdk$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega} = \frac{1}{2} v_f \quad (\text{A43})$$

### Intensiteten.

For harmonisk akustisk bølgje eller havbølgje har man

$$p(x, y, z, t) = \hat{p}(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (\text{A44})$$

$$v_x(x, y, z, t) = \hat{v}_x(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (\text{A45})$$

F.eks. for plan akustisk bølgje (A33) er

$$\hat{p} = A e^{-ikx} + B e^{+ikx} \quad (\text{A46})$$

Intensiteten

$$I(x, y, z) = \overline{pv_x} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{p}\hat{v}_x^*) \quad (\text{A47})$$

Er bølgja progressiv (t.d. med  $B = 0$  i (A46) kan me bruka (A8) eller (A10) for ei akustisk bølgje:

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \hat{p} \frac{\hat{p}^*}{\rho c} \right) = \frac{1}{2\rho c} |\hat{p}|^2 \quad (\text{A48})$$

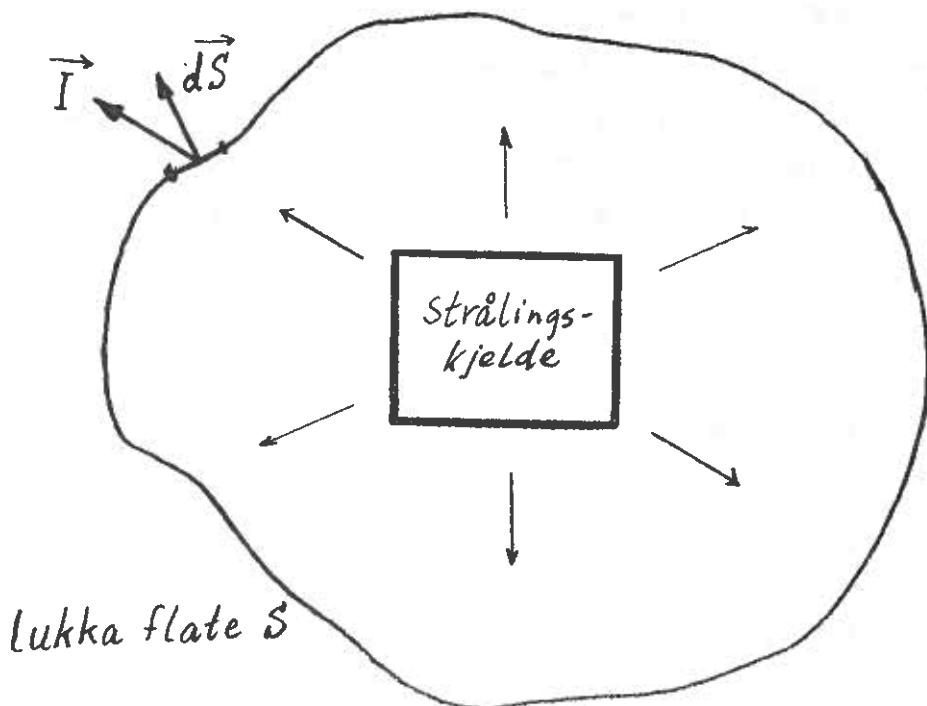
For ei harmonisk elektromagnetisk bølgje har me tilsvarende

$$\begin{aligned} \vec{I}(x, y, z) &= \overline{\vec{S}(x, y, z, t)} = \overline{\vec{E} \times \vec{H}} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{E}(x, y, z) \times \vec{H}^*(x, y, z) \} \end{aligned} \quad (\text{A49})$$

Er bølgja dessutan progressiv får me v.h.a. (A7)

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 \quad (\text{A50})$$

Me ser på utstråling av ei harmonisk bølgje frå ei strålingskjelde (bølgjegenerator, høgtalar eller sendarantenne)

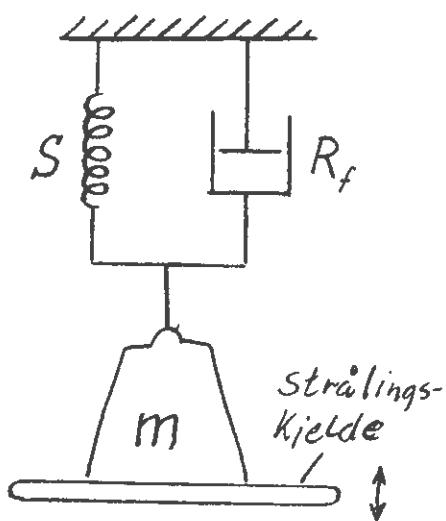


Effekten som strålar ut gjennom ei lukka flate  $S$  omkring "strålingskjelda" er

$$P_r = \oint \vec{I} \cdot d\vec{s} \quad (A51)$$

Når mediet som bølgja forplantar seg i kan reknast for tapsfritt, er den utstrålte effekten uavhengig av kor den lukka flata  $S$  er lagt og lik den effekten som strålar ut frå strålingskjelda.

### Strålingsresistans og strålingsimpedans.



Me tek for oss det mekaniske svingesystemet me såg på tidlegare.

Stivhet  $S$ , friksjonsresistans  $R_f$  masse  $m$

På figuren er skissert ei plate som svingar med i rørsla og fører til bølgjegenerering i mediet (t.d. luft eller vatn). Det kan vera ei akustisk bølgje. Er det nede under ei havflate, kan det også vera snakk om havbølgje. Systemet blir sett i tvungne svingingar av ei ytre harmonisk kraft. Effekttapet i friksjonsresistansen

$R_f$  er

$$P_f = \frac{1}{2} R_f |\hat{u}|^2 \quad (A52)$$

Ved den ytre krafta må det bli levert ein effekt  $P = P_f + P_r$  der  $P_r$  er den utstrålte effekten (A51). I analogi med (A52) skriv me

$$P_r = \frac{1}{2} R_r |\hat{u}|^2 \quad (A53)$$

der me kallar  $R_r$  for strålingsresistansen.

Ein annan måte å sjå det på: Det at det strålar ut energi med ei generert bølgje fører til at ei reaksjonskraft

$F_r$  verkar på den svingande strålingskjelda i tillegg til den ytre krafta  $F$ . Newtons lov for svingesystemet kan då uttrykkjast - jfr. (A18) -

$$i\omega m\ddot{u} + R_v \dot{u} + \frac{S}{i\omega} \ddot{u} = \hat{F} + \hat{F}_r \quad (\text{A54})$$

Me hugsar at mekanisk impedans er forholdet mellom komplekse amplitudar for kraft og fart. Me skriv

$$\boxed{\hat{F}_r = -Z_r \dot{u}} \quad (\text{A55})$$

Her kallar me  $Z_r$  for strålingsimpedansen. Han er i lineær teori uavhengig av amplituden. Derimot er  $Z_r$  å sjå på som ein frekvensavhengig parameter som også avheng av geometrien til sjølv strålaren. Generelt kan  $Z_r$  vera kompleks:

$$Z_r = R_r + iX_r \quad (\text{A56})$$

No får me

$$(i\omega m + R_f + \frac{S}{i\omega} + Z_r) \dot{u} = \hat{F} \quad (\text{A57})$$

$$\dot{u} = \frac{\hat{F}}{(R_r + R_f) + i(\omega m + X_r - S/\omega)} \quad (\text{A58})$$

Strålingsreaktansen  $X_r$  skriv me ofte  $\omega m_r$  der  $m_r$  er den såkalla adderte massen.

Strålingsimpedansen

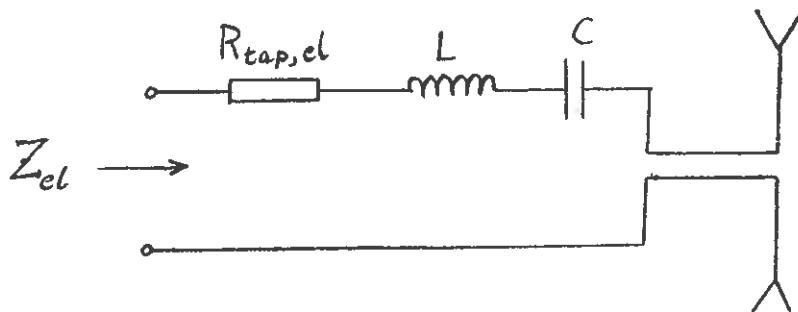
$$\boxed{Z_r = R_r + i\omega m_r} \quad (\text{A59})$$

kjem altså i tillegg til den ordinære mekaniske impedansen  $R_f + i(\omega m - S/\omega)$  for svingesystemet når dette strålar ut ei bølgje.

Dette gjeld eit mekanisk svingesystem som strålar ut ei akustisk bølgje eller ei overflatebølgje på vatn.

Men det er heilt analogt med ein elektrisk svingekrets

som er kopla til ei utstrålande antennе.



$$\begin{aligned} Z_{el} &= R_{tap, el} + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + Z_{r,el} \\ &= (R_{tap} + R_{r,el}) + i\left(\omega L + X_{r,el} - \frac{1}{\omega C}\right) \end{aligned}$$

$$Z_{r,el} = R_{r,el} + iX_{r,el} \quad (A60)$$

Merk at (A60) er analog med (A59). Analogt med (A55) har me

$$Z_{r,el} = \frac{-\hat{U}_r}{\hat{I}} \quad (A60a)$$

der  $U_r$  er den spenninga som blir indusert p.g.a. den utstrålte bølgja.

Analogt med (A53) har me

$$P_r = \frac{1}{2} R_{r,el} |\hat{I}|^2 \quad (A60b)$$

### Absorpsjonstverrsnittet for ein mikrofon.

(Jfr. Meyer & Newman, Physikalische und Technische Akustik (Vierweg, Braunschweig, 1967, pp. 180 - 182)).

Me skal sjå på ein mikrofon i form av eit stempel som står i ei opning i ein stiv vegg. Stempelradien  $a$  er liten i forhold til bølgjelengda  $\lambda$  for den innfallande akustiske bølgja, d.v.s.  $a \ll \lambda$ . Stempelet går inn i eit mekanisk

svingesystem som er karakterisert ved massen  $m$ , den mekaniske resistansen  $R_f$  og stivheten  $S$ . Me må også ta med den adderte massen  $m_r$  og strålingsresistansen  $R_r$  i rekninga. Det fell ei bølgje  $\hat{p}_i = Ae^{-ikx}$  loddrett inn mot veggen ved  $x = 0$ . I rommet  $x < 0$  er den resulerende lydbølgja

$$\hat{p} = Ae^{-ikx} + Be^{ikx} + \hat{p}_r \quad (A61)$$

der siste leddet står for den bølgja som strålar ut frå det svingande stempelet. Nest siste leddet står for den reflekterte bølgja. Den innfallande bølgja blir totalreflektert (om stempelet er i ro). Altså er  $B = A$ .

Svingelikninga for stempelfarten  $\hat{u}$  er

$$(i\omega m)\hat{u} + R_f \hat{u} + \frac{S}{i\omega} \hat{u} = \hat{p}\pi a^2$$

Me fører inn strålingsimpedansen (A55)

$$-\frac{\hat{F}_r}{\hat{u}} = -\frac{\hat{p}_r}{\hat{u}} \pi a^2 = Z_r = R_r + i\omega m_r$$

For  $ka < 0,4$  gjeld

$$R_r \approx \frac{1}{2} \rho c (ka)^2 \pi a^2 \quad (A62)$$

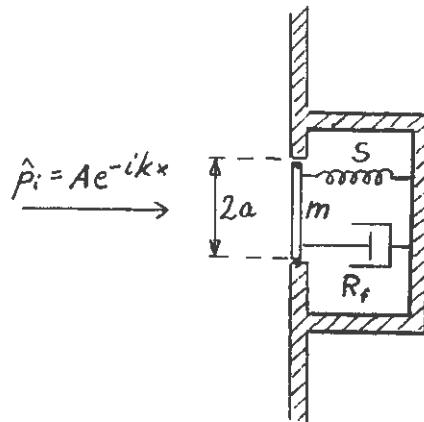
$$m_r \approx \rho \pi a^2 \frac{8a}{3\pi} \quad (A63)$$

med feil mindre enn 10%, (Jfr. Falnes & Budal, Bølgjelære).

Med stempeldiameter  $2a = 0,20$  m gjeld for  $v = \omega/2\pi < 200$  Hz

$$R_r \approx 0,000022 v^2 \quad (\text{Hz, Nsm}^{-1})$$

$$m_r \approx 0,0032 \text{ kg}$$



Svingelikninga kan no skrivast

$$\{i\omega(m + m_r) + (R_f + R_r) + \frac{S}{i\omega}\} \hat{u} = (A + A)\pi a^2 = \hat{F} \quad (A64)$$

Amplituden blir størst ved resonans, d.v.s. når

$$\omega^2(m + m_r) = S \quad (A65)$$

Då er den komplekse fartamplituden

$$\hat{u} = \frac{2A\pi a^2}{R_f + R_r} \quad (A66)$$

Effekten absorbert i resistansen  $R_f$  er

$$P = P_f = \frac{1}{2} R_f |\hat{u}|^2 = \frac{1}{2} R_f \frac{(2A\pi a^2)^2}{(R_f + R_r)^2} \quad (A67)$$

Effekten blir størst når den indre resistansen  $R_f$  i mikrofonen er lik strålingsresistansen (jfr. "resistanstilpassing")

$$P_{max} = \frac{|A|^2 (\pi a^2)^2}{2R_r} \quad (A68)$$

Ein like stor effekt  $P_r = R_r |\hat{u}|^2 / 2$  blir forresten strålt ut frå mikrofonen. Jfr. (A53)

I den innfallande plane bølgja er intensiteten - jfr. (A48) -

$$I_i = \frac{|A|^2}{2\rho c} \quad (A69)$$

Me definerer absorpsjonstverrsnittet  $A_a$  for mikrofonen ved

$$P_{max} = IA_a \quad (A70)$$

Med innsetjing frå (A62), (A68) og (A69) får me

$$A_a = \frac{P_{max}}{I_i} = \frac{(\pi a^2)^2}{R_r} \rho c = \frac{2\pi a^2}{(ka)^2} = \frac{2\pi}{k^2} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \quad (A71)$$

Merk at  $A_a$  her er uavhengig av stempelradien  $a$ . Absorpsjonstverrsnittet kan vera mykje større enn stempelarealet.

For  $\nu = 100$  Hz er  $A_a$  bortimot  $2 \text{ m}^2$ .

Om mikrofonen ikkje hadde stått i ein vegg, men vore frittståande, ville ei undersøking ha vist at absorpsjons-tverrsnittet er

$$A_a = \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad (\text{A72})$$

### Resonansabsorpsjon.

Me ser på eit mekanisk svingesystem som kan stråla ut energi. Svingesystemet kan brukast som bølgjegenerator eller bølgjeabsorbator. La svingesystemet ha lineær karakteristikk med masse  $m$ , stivhet  $S$  og mekanisk resistans  $R$ . Deter påverka avei kraft  $F_e$  som kan vera ei ytre påtrykt kraft (når systemet skal brukast som bølgjegenerator) eller kraft frå ei innkomande bølgje (når systemet skal brukast som bølgjeabsorbator). I sistnemnde tilfelle er krafta den som verkar på systemet når det er fastlåst ( $u = 0$ ). I tillegg verkar ei reaksjonskraft  $F_r$  frå den utstrålte bølgja som har sitt opphav i at systemet svingar med ein fart  $u$ . Likninga for svingesystemet

$$i\omega m\hat{u} + R\hat{u} + \frac{S}{i\omega}\hat{u} = \hat{F}_e + \hat{F}_r = \hat{F}_e - Z_r\hat{u} = \hat{F}_e - R_r\hat{u} - i\omega m_r\hat{u} \quad (\text{A73})$$

$$\left( i\omega(m + m_r) + (R + R_r) + \frac{S}{i\omega} \right) \hat{u} = \hat{F}_e \quad (\text{A74})$$

Effekt absorbert i den mekaniske resistansen  $R$

$$P = \frac{1}{2} R |\hat{u}|^2 = \frac{R |\hat{F}_e|^2}{2 \{(R + R_r)^2 + (\omega m + \omega m_r - S/\omega)^2\}} \quad (\text{A75})$$

Me vil no velja systemparametrane  $R$  og  $m$  (eventuelt  $R$  og  $S$ ) slik at den absorberte effekten  $P$  blir maksimum. Me ser utan vidare at då må me ha resonans

$\omega^2(m + m_r) = S$

(A76)

slik at

$$P = \frac{R |\hat{F}_e|^2}{2(R+R_r)^2} \quad (A77)$$

Me ser at  $P = 0$  for  $R = 0$  og for  $R = \infty$ .

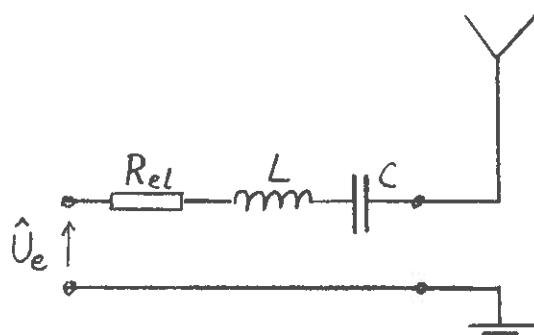
$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0 \text{ når } 1 \cdot (R + R_r)^2 = R^2(R + R_r), \text{ dvs. } R = R_r.$$

Altså må me få

$$P = P_{\max} \text{ når } \boxed{R = R_r} \quad (A78)$$

$$\boxed{P = P_{\max} = \frac{|\hat{F}_e|^2}{8R_r}} \quad (A79)$$

Tilsvarande for ein elektrisk svingekrets med antennen:



$$\begin{aligned} (i\omega L + R_{el} + \frac{1}{i\omega C}) \hat{I} &= \hat{U}_e + \hat{U}_r = \\ &= \hat{U}_e - Z_{r,el} \hat{I} = \hat{U} - (R_r + X_r) \hat{I}_{el} \end{aligned} \quad (A80)$$

(jfr. (A60a))

Her er  $\hat{U}_e$  eksisterande spenning. For sendarantenne er  $\hat{U}_e$  påtrykt frå ein spenningsgenerator. For mottakarantenne er  $\hat{U}_e$  den spenninga som den innfallande bølgja induserer i antennekretsen når der ikkje går nokon straum ( $\hat{I} = 0$ ). Her vil me analogt finna for

(resonans)

$$\omega L + X_{r,el} - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad (A81)$$

og (resistanstilpassing)

$$(R - R_r)_{el} = 0 \quad (A82)$$

at me får maksimal absorbert effekt

$$P_{\max} = \frac{|\hat{U}_e|^2}{8R_{r,el}} \quad (A83)$$

Ved resonansabsorpsjon av ei bølgje som ikkje er reint harmonisk, men som har eit spektrum med endeleg breidd ( $\Delta\omega$ ) vil dei spektrale komponentane som ligg ved sida av eigenfrekvensen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{S}{m+m_r(\omega_0)}} \quad (A83a)$$

bli mindre effektivt absorbert. (Jfr. A76.) Med (A78)  $R = R_r$  innsett i (A75) blir

$$P = \frac{|\hat{F}_e|^2}{8R_r \left\{ 1 + \frac{(m+m_r)^2}{4R_r^2} \omega_0^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right\}} = P(\omega) \quad (A83b)$$

$$\delta = \frac{R+R_r}{2(m+m_r)} = \frac{R_r}{m+m_r} \quad (A83c)$$

Den absorberete effekten er redusert til halvparten når:

$$\frac{\omega_0^2}{4\delta^2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 1$$

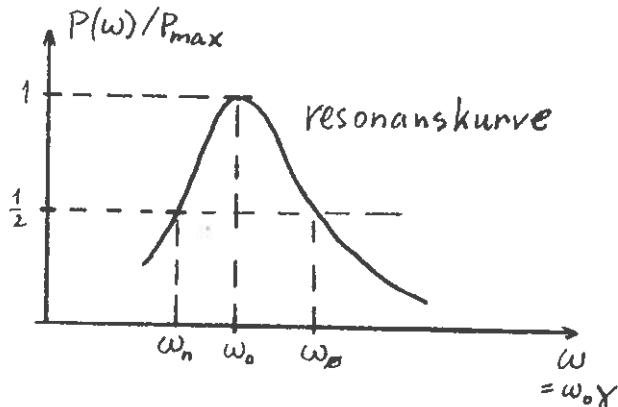
$$\left( \gamma - \frac{1}{\gamma} \right) = \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm \frac{2\delta}{\omega_0} = \pm 2\kappa$$

$$\gamma_\phi > 1: \quad \gamma_\phi - \frac{1}{\gamma_\phi} = +2\kappa$$

$$\gamma_n < 1: \quad \gamma_n - \frac{1}{\gamma_n} = -2\kappa$$

$$\gamma_\phi^2 - 2\kappa\gamma_\phi - 1 = 0 \quad \gamma_\phi = \kappa + \sqrt{\kappa^2 + 1} \quad \gamma_\phi \rightarrow 1 \text{ når } \kappa \rightarrow 0$$

$$\gamma_n^2 + 2\kappa\gamma_n - 1 = 0 \quad \gamma_n = -\kappa + \sqrt{\kappa^2 + 1} \quad \gamma_n \rightarrow 1 \text{ når } \kappa \rightarrow 0$$



$$\frac{\gamma_\phi - \gamma_n}{(\Delta\omega)_{res}} = \frac{2\kappa}{\omega_\phi - \omega_n} = \frac{2\delta}{\frac{2R_r}{(m+m_r)(\omega_0)}} \quad (A83d)$$

Skal resonansabsorpsjonen vera effektiv, må resonanskurva ha ei halvverdibreidd  $(\Delta\omega)_{res}$  som er større enn breidda  $(\Delta\omega)_E$  for bølgjespektret. Dvs.

$$(\Delta\omega)_{res} > (\Delta\omega)_E \quad (A83e)$$

## B. HYDRODYNAMISK POTENSIALTEORI

I dette kapitlet skal me stilla opp grunnlikningane for bølgjer, såkalla tyngdebølgjer, som kan forplanta seg på overflata av vatn. Me skal sjå på bølgjeutsving og energi-forhold ved plane og sirkulære bølgjer.

Me startar med to grunnleggjande hydrodynamiske likningar som uttrykkjer bevaring av masse og impuls, nemleg kontinuitetslikninga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (B1)$$

og Navier-Stokes likning

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + v \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{f} \quad (B2)$$

Her er  $\rho$  massetettleiken (densiteten) til væska,  $\vec{v}$  er strøymingsfarten til væskeelementet,  $p$  er trykket og  $v = \eta/\rho$  er den kinematiske viskositetskoeffisienten.

Vidare er  $\vec{f}$  den ytre krafta pr. volumeining. Her skal me berre sjå på tilfelle med tyngdekraft, d.v.s.

$$\vec{f} = \rho \vec{g} \quad (B3)$$

der  $\vec{g}$  er tyngdeakselerasjonen. Me går ut frå at væska er inkompressibel. Då er  $\rho$  konstant og (B1) gir

$\nabla \cdot \vec{v} = 0$

(B4)

Kvervelfrei rørsle i ideell væske. Bernoullis likning.

Me kan ofte med god tilnærming sjå bort frå viskositeten, slik at me reknar ideell væske,  $v = 0$ . Då blir rørslelikninga (B2)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} \quad (B4a)$$

Me bruker vektoridentiteten

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \quad (B5)$$

og tek curlen til (B4a)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{v}) = \nabla \times \left[ -\nabla v^2/2 + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) - \nabla \frac{p}{\rho} + \vec{g} \right]$$

No gjeld  $\nabla \times \nabla \phi = 0$  og også  $\nabla \times \vec{g} = 0$  fordi  $\vec{g}$  er konstant eller meir generelt fordi krafta  $\vec{g}$  kan utleiaast av eit gravitasjonspotensial,  $gz$ . Altså er

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{v}) = \nabla \times [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})]$$

Dersom væska ein gong i tida var kvervelfri,  $\nabla \times \vec{v} = 0$  overalt, t.d. ved at væska var heilt i ro, vil ho alltid sidan halda fram med å vera kvervelfri, med di  $(\partial/\partial t) \nabla \times \vec{v} = 0$ . Me går ut frå at så er tilfelle, at altså

$$\boxed{\nabla \times \vec{v} = 0}$$

(B9)

overalt og til alle tider. Då kan me skriva

$$\boxed{\vec{v} = \nabla \phi}$$

(B10)

der  $\phi$  er det såkalla fartpotensialet. Merk at (B10) stettar (B9) p.g.a. vektoridentiteten  $\nabla \times \nabla = 0$ .

Me set (B10) og (B5) inn i (B4a)

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \quad (B11)$$

der me har ført inn ein oppoverretta z-akse og gravitasjonspotensialet  $gz$  slik at  $\nabla gz = -\vec{g}$ .

Integrasjon av (B11) gjev

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C(t)$$

der integrasjons"konstanten" er uavhengig av romkoordinatorane  $x$ ,  $y$ , og  $z$ . Me kan ("without loss of generality")

velja  $C(t)$  konstant. For me kan redefinera fartpotensialet

$$\phi' = \phi - \int_0^t C(t) dt$$

Då skilnaden mellom  $\phi'$  og  $\phi$  berre avheng av  $t$  og ikkje av romkoordinatane, er  $\vec{v} = \nabla\phi' = \nabla\phi$ . Me kan difor likså godt setja  $C(t) = C$  som uavhengig av tida. Altså

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C} \quad (B14)$$

Dette er Bernoullis likning. Denne byggjer på føresetnaden (B9) om kvervelfri (irrotasjonal) rørsle.

For stasjonær strøyming  $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$  kan ein utleia Bernoullis likning

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C' = \text{konstant langs ei straumline} \quad (B14a)$$

utan å gjera føresetnaden om kvervelfri rørsle  $\nabla \times \vec{v} = 0$ .

Me ser at når væska er i ro, d.v.s. når  $v = 0$  og  $\phi = \text{konstant}$ , er

$$p = p_{\text{statisk}} = -\rho gz + \rho C'$$

Ved den fri overflata av væska, der  $z = 0$  er  $p$  lik atmosfæretrykket  $p_{\text{luft}}$ . Difor er

$$p_{\text{statisk}} = -\rho gz + p_{\text{luft}} \quad (B15)$$

Det hydrostatiske trykket aukar lineært med avstanden under overflata.

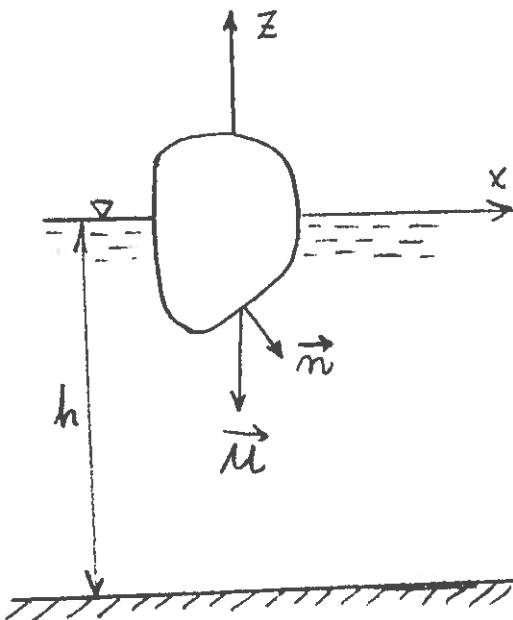
### Grunnlikningane for tyngdebølgjer. Linearisering.

Med å setja (B10),  $\vec{v} = \nabla\phi$ , inn i (B4)  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  får me den partielle differensiallikninga

$$\boxed{\nabla^2\phi = 0} \quad (B16)$$

Dette er Laplace-likninga (som er kjent t.d. frå elektrostatikken.)

Som grensevilkår har me at på faste overflater som grensar mot væska, må normalkomponenten av farten  $\vec{u}$  på overflata vera lik normalkomponenten av partikkelfarten  $\vec{v}$  i væska ved grenseflata



$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{n} = u_n = v_n = \vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial n}} \quad (B17)$$

I ei ideell væske ( $v = 0$ ) kan væska gli fritt langs den faste overflata, så det er ingen spesielle krav til tangentkomponenten av  $\vec{v}$ .\*)

Spesielt vil me for ei fast flate som er i ro ( $\vec{u} = 0$ ) ha at

$$\vec{n} \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (B18)$$

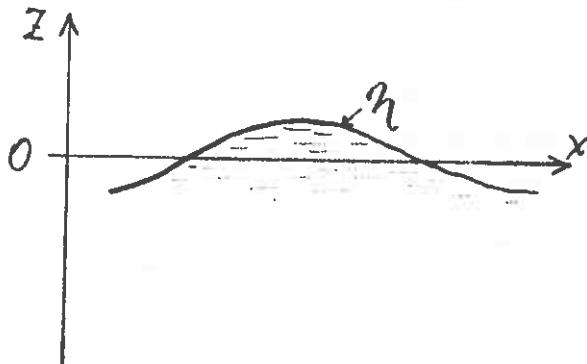
Innfører me eit koordinatsystem med z-aksen peikande oppover, vil me på ein horisontal sjøbotn  $z = -h$  ha grensevilkåret  $\partial \phi / \partial z = 0$ .

Så må me sjå på grensevilkåret mot den frie overflata (mot lufta). Overflata er  $z = \eta = \eta(x, y, t)$ . Me kallar  $n$

\*) Tangentkomponenten er altså vilkårleg. For ei reell væske med viskositet gjeld dette grensekraavet rett utanfor det såkalla grensesjiktet i staden for på den fysiske faste flata. Dette spelar lita rolle så lenge grensesjiktet er svært tynt.

for bølgjeutsvinget  
eller elevasjonen.  
Grensevilkåret er  
at her er trykket  
konstant og lik  
atmosfæretrykket  
 $P_{luft}$ .

Med bruk av  
Bernoullis likning  
(B14) får me



$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right)_{z=\eta} + \frac{P_{luft}}{\rho} + gn = C$$

For spesialtilfellet med inga bølgje, altså væska i ro, er  
første og tredje ledet null. Me ser då at me må velja kon-  
stanten

$$C = \frac{P_{luft}}{\rho} \quad (B21)$$

Altså gjeld

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\eta} + \left. \frac{v^2}{2} \right|_{z=\eta} + gn = 0 \quad (B22)$$

Me skal no gå ut frå at det er små bølgjer slik at me  
kan linearisera likningane. Me har at ledet  $v^2/2$  er lite  
av andre orden. Dessutan set me  $\left. (\partial \phi / \partial t) \right|_{z=\eta} \approx \left. (\partial \phi / \partial t) \right|_{z=0}$ .  
Grensevilkåret ved den frie overflata blir dermed:

$$\eta = - \frac{1}{g} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0}$$

(B23)

Me seier at (B23) er ei linearisering av det generelle  
kravet (B22).

Den partielle differensiallikninga (B16),  $\nabla^2 \phi = 0$  er  
ei elliptisk differensiallikning i motsetnad til bølgje-  
likninga for akustiske og elektromagnetiske bølgjer, som er  
av typen

$$\nabla^2 \psi = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Dette er ei hyperbolsk differensiallikning. Det som gjer at me får bølgjeløysingar av den elliptiske differensiallikninga (B16), er at løysinga må oppfylla randvilkåret (B23) på den frie overflata av væska.

Det er altså den frie overflata som er ansvarleg for bølgjeforplantinga og det er tyngdekrafta som skaffar bølgjene ein potensiell energi. Merk at tyngdeakselerasjonen g går inn i randvilkåret (B23), men ikkje i randvilkåret (B17) og ikkje i differensiallikninga (B16). Løysingane av differensiallikninga med randvilkåra kallar me tyngdebølgjer for di tyngdekrafta er viktig fysisk sett. Tyngdebølgjer på havet kan me gjerne kalla havbølgjer.

Me vil derivera (B23) m.o.p.  $t$

$$-\frac{1}{g} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_{z=0} = v_z \left. \right|_{\eta=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0}$$

Grensevilkåret (B23) ved den frie overflata kan difor skrivast som

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad (B25)$$

slik at  $\phi$  er den einaste avhengig variable som går inn i kravet.

Trykket  $p$  i væska er summen av eit hydrostatisk trykk og eit hydrodynamisk trykk

$$p = p_{\text{statisk}} + p_{\text{dyn}} \quad (B26)$$

Med bruk av (B15) og (B21) i Bernoullis likning (B14) får me

$$p_{\text{dyn}} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

når me lineariserer bort leddet  $v^2/2$ . Heretter vil me sløyfa indeks "dyn" og la  $p$  stå for det hydrodynamiske

trykket, altså

$$P = P_{dyn} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

(B27)

### Regulære (harmoniske) bølgjer. Dispersjonslikninga.

Når tidsvariasjonen er sinusforma, kan me skriva

$$\phi = \phi(x, y, z, t) = \hat{\phi}(x, y, z)e^{i\omega t} \quad (B28)$$

der  $\hat{\phi}$  er den komplekse amplituden av fartpotensialet, og der det er underforstått at me skal ta realdelen av den komplekse høgresida i formelen.

Differensiallikninga (B14) og grensevilkåra (B17) og (B25) kan skrivast

Overalt:

$$\nabla^2 \hat{\phi} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \hat{\phi} = 0 \quad (B29)$$

På faste overflater S:

$$\vec{n} \cdot \nabla \hat{\phi} = \vec{n} \cdot \hat{u} \quad \text{på } S \quad (B30)$$

På den frie overflata:

$$\left( -\omega^2 \hat{\phi} + g \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad (B31)$$

Bølgjeutsvinget (elevasjonen)

$$\hat{n} = -\frac{i\omega}{g} \hat{\phi} \Big|_{z=0} \quad (B32)$$

Det dynamiske trykket

$$\hat{P} = -i\omega \rho \hat{\phi} \quad (B33)$$

Jfr. (B23) og (B27).

Me prøver å finna ei partikulær løysing av differensial-

likninga (B29) med Bernoullis separasjonsmetode, d.v.s. med å setja

$$\hat{\phi}(x, y, z) = H(x, y)Z(z) \quad (B34)$$

Innsetjing i (B29) og divisjon med  $\hat{\phi}$  gjev

$$\frac{1}{H(x, y)} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) = - \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$$

Venstre sida er ein funksjon berre av  $x$  og  $y$ . Høgre sida er ein funksjon berre av  $z$ . Begge sidene er like, og dei må difor vera uavhengige av  $x$ ,  $y$  og  $z$  og difor ein konstant som me kallar  $-k^2$ . Altså

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 Z \quad (B35)$$

$$\nabla_H^2 H = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) H = -k^2 H(x, y) \quad (B36)$$

Løysinga av (B35) er

$$Z = c_+ e^{kz} + c_- e^{-kz}$$

Me vil også få integrasjonskonstantar når me skal løysa (B36) for  $H$ . Me vil difor velja  $Z = 1$  for  $z = 0$ .  
Altså

$$c_+ + c_- = 1$$

Me går ut frå at væska botnar på eit fast horisontalt plan,  $z = -h$ , som er i ro, slik at randkravet (B30) gjev

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad \text{for } z = -h \quad (B39)$$

D.v.s.

$$k(c_+ e^{-kh} - c_- e^{+kh}) = 0$$

$$c_- = +c_+ e^{-2kh}$$

$$1 - c_+ = +c_+ e^{-2kh}$$

$$1 = c_+ (1 + e^{-2kh})$$

$$c_+ = \frac{1}{1 + e^{-2kh}}$$

$$c_- = 1 - c_1 = \frac{1 + e^{-2kh} - 1}{1 + e^{-2kh}} = + \frac{e^{-2kh}}{1 - e^{-2kh}}$$

$$\begin{aligned} Z(z) &= \frac{e^{kz} + e^{-2kh - kz}}{1 + e^{-2kh}} = \frac{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}}{e^{kh} + e^{-kh}} = \\ &= \frac{\cosh\{k(z+h)\}}{\cosh(kh)} = e(kz) \end{aligned} \quad (\text{B40})$$

Merk at når  $h \rightarrow \infty$  vil  $e(kz) \rightarrow e^{kz}$ . D.v.s. for "djupt vatn",  $kh \gg 1$  gjeld  $e(kz) \approx e^{kz}$  (B41)

Då har me altså den partikulære løysinga

$$\hat{\phi} = H(x, y)e(kz) \quad (\text{B42})$$

med

$$e(kz) = \frac{\cosh(kz + kh)}{\cos(kh)}$$

(B43)

der  $H$  er ei løysing av (B36). Når me seinare løyer denne likninga for tilfellet med plane bølgjer vil me finna at  $k$  er vinkelrepetensen.

Me må også ha oppfylt grensevilkåret (B31). Dette kravet gjev oss dispersjonslikninga

$$\omega^2 = g \left. \frac{\partial e(kz)}{\partial z} \right|_{z=0} = gk \frac{\sinh(kh)}{\cosh(kh)}$$

eller

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

(B44)

For djupt vann  $kh \gg 1$  gjeld

$$\boxed{\omega^2 = gk} \quad (\text{B45})$$

i samsvar med den tidlegare påstanden (A38).

Merk at

$$\tanh(kh) > 0,95 \quad \text{for } kh > 1,83 \quad \text{eller } h > 0,3\lambda$$

$$\tanh(kh) > 0,99 \quad \text{for } kh > 2,6 \quad \text{eller } h > 0,42\lambda$$

Vilkåret for å rekna med djupt vann er altså, avhengig av kor nøyaktig me vil rekna, at djupna er minst ei tredjedels eller ei halv bølgjelengd.

For djupt vann er bølgjelengda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi g}{\omega^2} = \frac{g}{2\pi} T^2 = (1,56 \text{ m/s}^2) T^2 \quad (\text{B46})$$

Som me før har funne - jfr. (A42) og (A43) - gjeld for djupt vann

$$2v_g = v_f = \frac{g}{\omega} = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (\text{B47})$$

For grunt vann med horisontal botn,  $kh \ll 1$  gjeld

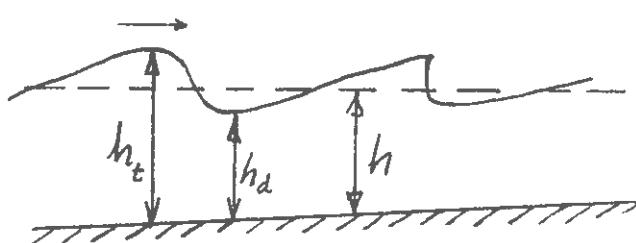
$$\omega^2 = gk(kh + \dots) \approx ghk^2$$

I denne tilnærminga er bølgja ikkje dispersiv då

$$v_g = v_f = \sqrt{gh} \quad (\text{B48})$$

uavhengig av  $k$  og  $\omega$ .

Teorien her er lineær, men la oss likevel prøva å gi ei kvantitativ forklaring av bølgjebryting på grunt vann.



Formelen

$$v_g = v_f = \sqrt{gh}$$

tyder på at bølgja går fortare på bølgjetoppen enn i bølgjedalen, for di  $h_t > h_d$ .

Tilslutt blir det ein loddrett kant ("brimhestar") og då gjeld sjølv sagt ikkje lineær teori lenger, med di  $\partial\eta/\partial x \rightarrow \infty$ .

For vilkårleg djupn  $h$  gjeld (B44) som er ei transcendent likning for  $k$ . Numerisk kan me finna  $k$  t.d. ved iterasjon. Tilnærming nr.  $n$

$$k^{(n)} = \frac{\omega^2}{g \tanh(k^{(n-1)} h)} \quad (B49)$$

med  $k^{(0)} = \omega^2/g$ . Fasefarten er

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{(g/k) \tanh(kh)} = \frac{g}{\omega} \tanh(kh) \quad (B50)$$

For å finna gruppefarten  $v_g$  differensierer me (B44)

$$\begin{aligned} 2\omega d\omega &= gdk \tanh(kh) + \frac{gh}{\cosh^2(kh)} hdk \\ &= \frac{dk}{k} gk \tanh(kh) + \frac{gk \tanh k}{\cosh(kh) \sinh(kh)} hdk \\ &= \frac{dk}{k} \omega^2 + \frac{2\omega^2 hdk}{\sinh(2kh)} \end{aligned}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{2k} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right)$$

Då  $v_f = \omega/k$ , får me altså

$$v_g = \frac{f(kh)}{2 \tanh(kh)} v_f = \frac{g}{2\omega} f(kh) \quad (B51)$$

der me har ført inn djupnefunksjonen

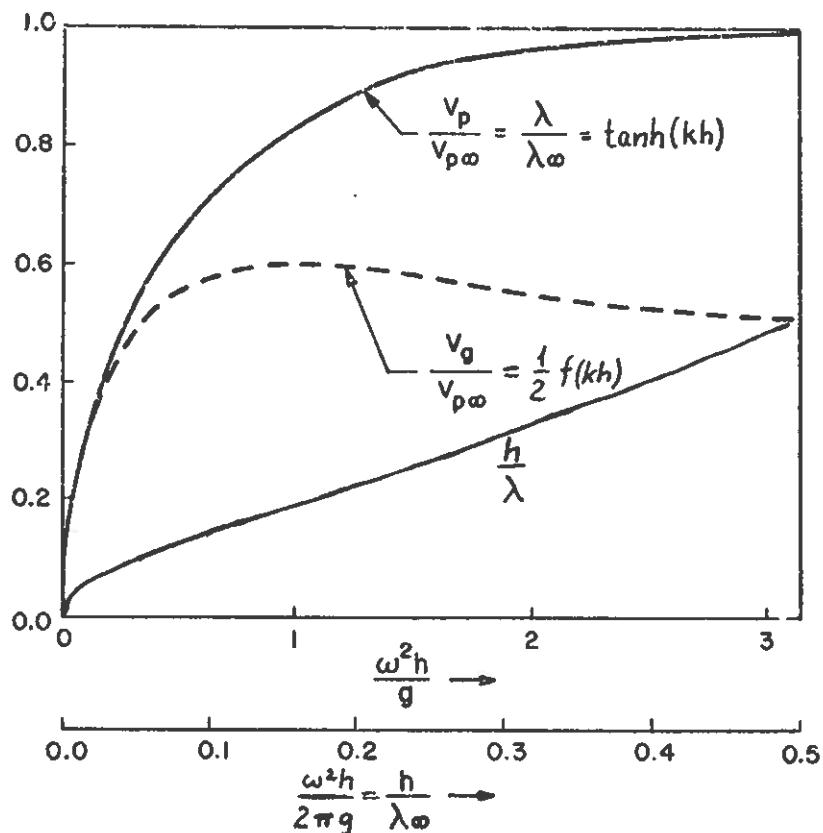
$$f(kh) = \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \tanh(kh) \quad (B52)$$

for di me får mykje bruk for denne funksjonen seinare. Merk at for djupt vatn,  $kh \gg 1$  er  $f(kh) \approx 1$  og  $\tanh(kh) \approx 1$ . For små  $kh$  gjeld

$$\tanh(kh) = kh + \dots \quad \text{og} \quad f(kh) = 2kh + \dots$$

Medan  $\tanh(kh)$  er ein monoton aukande funksjon har  $f(kh)$  eit maksimum  $f_{\text{maks}} = 1,200$  for  $kh = 1,19$ .

For vilkårlege  $\omega$ , finn me  $k$  av den transcidente dispersjonslikninga (B44) og så finn me  $v_f$  og  $v_g$  av (B50) og (B51). Samanhengen er vist grafisk i kurvene i figuren nedanfor.



Fasefart  $v_p$ , gruppefart  $v_g$  og bølgjelengd  $\lambda$  som funksjon av djupna  $h$ . Indeksen  $\infty$  svarar til uendeleig djupn.

Me skal finna ei partikulær løysing av (B36)

$$\nabla_H^2 H = -k^2 H$$

også ved Bernoullis separasjonsmetode. Bruker me kartesiske koordinater  $(x, y)$ , får me ei plan bølgje som løysing. Bruker me polarkoordinatar  $(r, \theta)$ , får me ei sirkulær bølgje som partikulær løysing.

Plane bølgjer. Intensitet og energitransport.

Me skal sjå på ei plan harmonisk bølgje som forplantar seg i x-retning

$$(B36) \text{ med } \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -k^2 H \quad (B54)$$

$$H = Ae^{-ikx} + Be^{ikx} \quad (B55)$$

(sum av ei framovergående og ei tilbakegående bølgje)

Innsett i (B34) og (B40) får me den komplekse amplituden av fartpotensialet

$$\hat{\phi} = (Ae^{-ikx} + Be^{+ikx})e(kz) \quad (B56)$$

Me ser at  $k$  er vinkelrepetensen for den harmoniske bølgja, slik som påstått tidlegare i tilknyting til (B43) og (B44).

Ofte vil me oppfatta den tilbakegående bølgja som ei reflektert bølgje og den framovergående bølgja som ei innkomande bølgje. Då skriv me (B56) som

$$\hat{\phi} = -\frac{g}{i\omega} n_i (e^{-ikx} + \Gamma e^{ikx}) e(kz) \quad (B57)$$

der  $\Gamma$  er "refleksjonskoeffisienten" og  $n_i$  er den komplekse amplituden av elevasjonen ved  $x = 0$ , dersom der er inga reflektert bølgje. Av (B32) får me nemleg

$$\hat{n} = -\frac{i\omega}{g} (Ae^{-ikx} + Be^{+ikx}) =$$

$$n_i (e^{-ikx} + \Gamma e^{+ikx}) = \hat{n}_f + \hat{n}_b \quad (B58)$$

der dei to ledda  $\hat{n}_f$  og  $\hat{n}_b$  gjeld respektivt framovergående og bakovergående bølgje. Me har altså av (B32), (B33) og (B56)

$$\hat{\phi} = \frac{-g}{-i\omega} e(kz) \hat{n} \quad (B59)$$

$$\hat{p} = \rho g \hat{n} e(kz) \quad (B60)$$

Det hydrodynamiske trykket minkar altså som funksjonen  $e(kz)$  med avstanden under overflata. Med bruk av (B10), eller  $\hat{\vec{v}} = \nabla\hat{\phi}$ , får me dessutan

$$\hat{v}_x = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\phi} = g \frac{k}{\omega} e(kz) (\hat{n}_f - \hat{n}_b) \quad (B61)$$

$$\hat{v}_z = \frac{\partial}{\partial z} \hat{\phi} = g \frac{ik}{\omega} e'(kz) (\hat{n}_f + \hat{n}_b) \quad (B62)$$

der

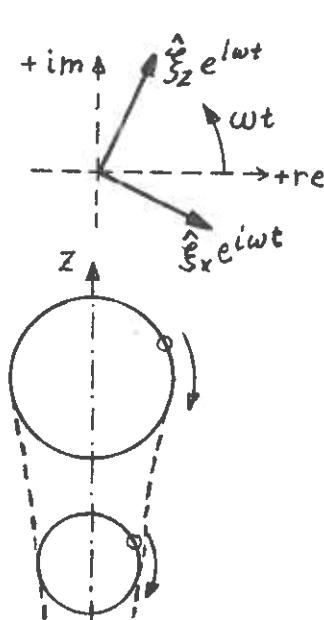
$$e'(kz) = \frac{d}{d(kz)} e(kz) = \frac{\sinh(kz+kh)}{\cosh(kh)} = e(kz)\tanh(kz + kh) \quad (B63)$$

Dersom me har ei framovergående progressiv bølgje ( $\hat{n}_b = 0$ ) på djupt vatn ( $kh \gg 1$ ) er rørsla av væskepartiklene sirkulærpolarisert med negativ dreieretning (med urvisaren)

$$\hat{v}_x = \omega \hat{n}_f e^{kz} \quad (B64)$$

$$\hat{v}_z = i\omega \hat{n}_f e^{kz} \quad (B65)$$

Dette har me funne ved å bruka dispersjonslikninga (B45)  
 $\omega^2 = gk$ .



Væskepartikkelenutsvinget er

$$\hat{\xi} = \hat{\vec{v}}/i\omega \quad (B66)$$

$$\hat{\xi}_x = -i\hat{n}_f e^{kz} \quad (B67)$$

$$\hat{\xi}_z = \hat{n}_f e^{kz} \quad (B68)$$

For ei bakovergående progressiv bølgje ( $\hat{n}_f = 0$ ) på djupt vatn er rørsla sirkulærpolarisert med positiv dreieretning

(mot urvisaren).

Når både  $\hat{n}_f \neq 0$  og  $\hat{n}_b \neq 0$  er rørsla elliptisk polarisert med forhold  $(|\hat{n}_f| + |\hat{n}_b|)/(|\hat{n}_f| - |\hat{n}_b|)$  mellom den lange og den korte aksen i ellipsen. For ei reint ståande bølgje,  $|\hat{n}_f| = |\hat{n}_b|$ , er svingerørsbla lineærpolarisert.

Med endeleg vassdjupn er svingerørsbla elliptisk polarisert også for progressive bølgjer.

Me skal sjå på energitransporten i denne plane bølgja som forplantar seg i x-retning. Etter (A47) er intensiteten

$$I = \overline{pv_x} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{p}\hat{v}^*) \quad (\text{B69})$$

Ved innsetjing frå (B60) og (B61) får me bruk for produktet

$$(\hat{n}_f + \hat{n}_b)(\hat{n}_f - \hat{n}_b)^* = |\hat{n}_f|^2 - |\hat{n}_b|^2 + (\hat{n}_f^*\hat{n}_b - \hat{n}_f\hat{n}_b^*) \quad (\text{B70})$$

Då siste ledet her er reint imaginært, får me

$$I = \frac{1}{2} \omega k \rho |\hat{\phi}|^2 = \frac{k \rho g^2}{2\omega} (|\hat{n}_f|^2 - |\hat{n}_b|^2) e^2(kz) \quad (\text{B71})$$

Effekttransporten pr. lengdeeining av bølgjefronten (som her er parallell med y-aksen) er

$$K = \int_{-h}^0 I(z) dz = \frac{\rho g^2}{2\omega} (|\hat{n}_f|^2 - |\hat{n}_b|^2) k \int_{-h}^0 e^2(kz) dz \quad (\text{B72})$$

Mellomrekning:

$$\begin{aligned} k \int_{-h}^0 e^2(kz) dz &= \int_{-kh}^0 \frac{\cosh^2(u+kh)}{\cosh^2(kh)} du = \int_{-kh}^0 \frac{\cosh(2u+2kh)+1}{2 \cosh^2(kh)} du \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sinh(2kh)+kh}{\cosh^2(kh)} = \frac{\sinh(kh)\cosh(kh)}{2 \cosh^2(kh)} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right) \tanh(kh) = \frac{1}{2} f(kh) \end{aligned} \quad (\text{B73})$$

der  $f(kh)$  er gjeven av (B52).

Altså

$$K = \frac{\rho g^2 f(kh)}{4\omega} (|\hat{\eta}_f|^2 - |\hat{\eta}_b|^2) \quad (B74)$$

For ei reint progressiv bølgje ( $B = 0$ ,  $\Gamma = 0$ , eller  $\hat{\eta}_b = 0$ ) har me

$$K = \frac{\rho g^2 f(kh)}{4\omega} |\hat{\eta}_f|^2 = \frac{\rho g^2 f(kh)}{4\omega} |\hat{\eta}_i|^2 \quad (B75)$$

Me fører inn perioden  $T = 2\pi/\omega$  og bølgjehøgda  $H = 2|\hat{\eta}_i|$ . For djupt vann er  $f(kh) = 1$  og

$$K = \frac{\rho g^2}{32\pi} TH^2 = (976 \text{ Ws}^{-1}\text{m}^{-3}) TH^2 \quad (B76)$$

når me set  $\rho = 1020 \text{ kg/m}^3$  for sjøvatn. Med  $[K] = \text{kW/m}$ ,  $[T] = \text{s}$  og  $[H] = \text{m}$  gjeld avrunda

$$\{K\} \approx \{T\}\{H\}^2$$

for ei regulær bølgje.

T.d. med  $T = 10 \text{ s}$  og  $H = 2 \text{ m}$  får me  $K = 40 \text{ kW/m}$ .

Så vil me sjå på energien som er lagra i den progressive bølgja. I tidsmiddel er den kinetiske energien pr. volumeinining

$$\frac{1}{2} \rho \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \hat{v}_x \hat{v}_x^* + \hat{v}_z \hat{v}_z^* \} =$$

$$= \frac{1}{4} \rho \left( \frac{gk}{\omega} \right)^2 (e^{2(kz)} + e'^2(kz)) |\hat{\eta}_f|^2 \quad (B78)$$

$$e^{2(kz)} + e'^2(kz) = \frac{\cosh^2(kz+kh) + \sinh^2(kz+kh)}{\cosh^2(kh)} =$$

$$= \frac{2 \cosh^2(kz+kh) - 1}{\cosh^2(kh)} = 2e^{2(kz)} - \frac{1}{\cosh^2(kh)}$$

Kin. energi pr. volumeining:

$$\frac{1}{4} \rho \left( \frac{gk}{\omega} \right)^2 \left\{ 2e^{2(kz)} - \frac{1}{\cosh^2(kh)} \right\} |\hat{\eta}_f|^2$$

Ved integrasjon  $\int_{-h}^0 dz$  får me  $E_k$  - kin. energi pr. flateeinining av sjøoverflata. Bruk av (B73) gjev

$$E_k = \frac{1}{4} \rho \left( \frac{gk}{\omega} \right)^2 \left\{ \frac{1}{k} f(kh) - \frac{h}{\cosh^2(kh)} \right\} |\hat{n}_f|^2 \quad (B80)$$

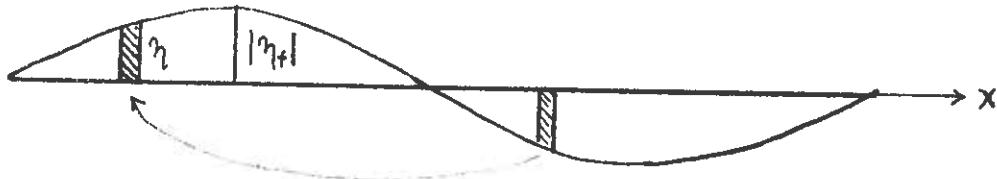
$$E_k = \frac{\rho g}{4} \frac{gk}{\omega^2} \left\{ f(kh) - \frac{kh}{\cosh^2 kh} \right\} |\hat{n}_f|^2$$

Med bruk av (B44) og (B52)

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{\rho g}{4} |\hat{n}_f|^2 \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} - \frac{kh}{\sinh(kh)\cosh(kh)} \right) = \\ &= \frac{\rho g}{4} |\hat{n}_f|^2 \end{aligned} \quad (B81)$$

$E_p$  - potensiell tyngdeenergi pr. flateeinining.

Potensiell energi for eit rektangel 1 bølgjelengd lang og ei lengdeeining brei:



$$E_p \lambda = \int_0^{\lambda/2} \rho g n \frac{\eta}{2} 2dx = \rho g \int_0^{\lambda/2} n^2 dx \quad (B82)$$

$$E_p = \frac{\rho g}{2} \frac{1}{\lambda/2} \int_0^{\lambda/2} n^2 dx = \frac{\rho g}{4} |\hat{n}_f|^2 \quad (B83)$$

Me ser at

$E_k = E_p = \frac{\rho g}{4} |\hat{n}_f|^2$

(B84)

Dette er analogt med at energien som er lagra i ei progressiv elektromagnetisk bølgje er likt delt mellom elektrisk energi

og magnetisk energi. Energien lagra i ei progressiv lydbølgje er likt delt mellom kinetisk energi og potensiell elastisk energi.

Energien pr. flateeinining av sjøoverflata blir altså

$$E = E_k + E_p = \frac{\rho g}{2} |\hat{n}_f|^2 \quad (B85)$$

Me kan definera ein energiforplantingsfart for den progressive bølgja

$$v_E = \frac{K}{E} = \frac{g}{2\omega} f(kh) \quad (B86)$$

Samanliknar me med (B51), ser me at dette er gruppefarten. Altså har me

$K = v_E E$

(B87)

for den progressive bølgja.

### Sirkulære bølgjer.

Me har funne ei partikulær løysing (B42)

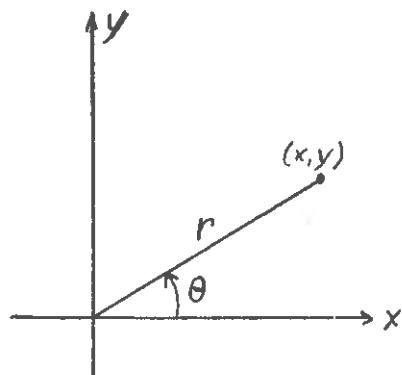
$$\hat{\phi} = H e(kz) \quad (B88)$$

H er ein funksjon av koordinatane x og y. Men me fører inn polarkoordinatar r, θ ved

$$x = r \cos\theta$$

$$y = r \sin\theta$$

Funksjonen H skal oppfylla (B36)



$$-k^2 H = \nabla^2 H = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \quad (B89)$$

Me prøver etter å bruka Bernoullis separasjonsmetode for å finna ei partikulær løysing

$$H(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta) \quad (B90)$$

Innsetjing i (B89) og divisjon med  $H/r^2$  gjev

$$\frac{r^2}{R} \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 \right) = - \frac{1}{\theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = n^2$$

der  $n$  er ein konstant for di høgre sida er ein funksjon berre av  $r$ , medan høgre sida er uavhengig av  $r$ .

Altså

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \Theta''(\theta) = -n^2 \Theta \quad (B91)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (B92)$$

eller

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left( k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0$$

Den generelle løysinga av (B91) skriv me

$$\Theta = \Theta_n = c_c \cos(n\theta) + c_s \sin(n\theta) \quad (B91a)$$

der  $c_c$  og  $c_s$  er integrasjonskonstantar. Me må ha ei einatydig løysing, d.v.s.

$$\Theta_n(\theta + 2\pi) = \Theta_n(\theta) \quad (B91b)$$

Dette krev at  $n$  er eit heilt tal

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (B91c)$$

Då me har integrasjonskonstant også i løysinga for faktoren  $R(r)$ , vil me setja

$$\Theta_{\max} = 1 \quad (B91d)$$

slik at

$$c_s^2 + c_c^2 = 1 \quad (B91e)$$

Då kan me skriva

$$\theta_n(\theta) = \cos(n\theta + \psi_n) = \cos\psi_n \cos(n\theta) - \sin\psi_n \sin(n\theta)$$

(B93)

der  $\psi_n$  er ein integrasjonskonstant som førebels er uspesifisert.

Før me skriv opp noka generell løysing på (B92) vil me konstatera at i ei ideell væske som er ikkje-viskøs og dermed tapsfri, så må den effekten  $P_r$  som passerer ein sylinder med stor radius  $r$  vera uavhengig av  $r$ . D.v.s.

$$P_r = K \cdot 2\pi r \quad \text{uavhengig av } r$$

Altså må  $K \propto r^{-1}$ . For store  $r$  er den sirkulære bølgja nær plan (krumminga av bølgjefronten har lite å seia). Då gjeld (B75)  $-K \propto |\hat{n}|^2$  - som visar at  $|\hat{n}| \propto r^{-\frac{1}{2}}$ . Dermed er  $|\hat{\phi}| \propto r^{-\frac{1}{2}}$  - jfr. t.d. (B59)  $\hat{\phi} = \frac{g}{-i\omega} e(kz)\hat{n}$  - og  $|R| \propto r^{-\frac{1}{2}}$ . Men  $R$  har og ein fase, som for ei utovergåande bølgje er  $-kr$ . For store  $r$  må me altså venta

$$\hat{\phi} \propto r^{-\frac{1}{2}} e^{-ikr} e(kz) \quad (B94)$$

Bessels differensiallikning (B92) har dei to lineært uavhengige løysingane  $J_n(kr)$  og  $N_n(kr)$ , som er Bessel-funksjonar av orden  $n$ .  $J_n$  er av 1. slag og  $N_n$  av 2. slag.  $J_n$  er endeleg for  $r = 0$ , medan  $N_n \rightarrow \infty$  når  $r \rightarrow 0$ . Andre singularitetar finst ikkje for  $r \neq \infty$ . For store  $r$  går  $J_n$  og  $N_n$  som cosinus- og sinus-funksjonar multiplisert med  $r^{-\frac{1}{2}}$ . I analogi med Eulers formlar

$$\begin{aligned} e^{ikr} &= \cos(kr) + i \sin(kr) \\ e^{-ikr} &= \cos(kr) - i \sin(kr) \end{aligned} \quad (B95)$$

definerer me Hankel-funksjonar av orden  $n$  og av 1. slag, respektivt 2. slag.

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(kr) &= J_n(kr) + iN_n(kr) \\ H_n^{(2)}(kr) &= J_n(kr) - iN_n(kr) \end{aligned} \quad (B96)$$

Merk at

$$H_n^{(1)}(kr) = \left(H_n^{(2)}(kr)\right)^* \quad (B97)$$

Asymptotisk gjeld

$$H_n^{(2)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - n\pi/2 - \pi/4)} \left(1 + O\left(\frac{1}{kr}\right)\right)$$

når  $kr \rightarrow \infty$

(B98)

(Jfr. t.d. Jahnke-Emde-Lösch, Tafeln höherer Funktionen, 1960, p. 146.)

For  $\rho = kr \rightarrow 0$  gjeld (med  $\gamma = 1,781\dots$ )

$$\begin{aligned} H_0^{(2)}(\rho) &= i \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma\rho} + 1 - i \frac{\rho^2}{2\pi} \ln \frac{2}{\gamma\rho} + O\{\rho^2\} \\ H_1^{(2)}(\rho) &= i \frac{2}{\pi\rho} + i \frac{\rho}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma\rho} + O\{\rho\} \\ H_n^{(2)}(\rho) &= i \frac{(n-1)}{\pi} \left(\frac{2}{\rho}\right)^n + O\{\rho^{-n+2}\} \quad n > 1 \end{aligned} \quad (B99)$$

Løysinga av differensiallikninga (B92) kan me difor skriva

$$R(r) = A_n H_n^{(2)}(kr) + B_n H_n^{(1)}(kr) \quad (B100)$$

der  $A_n$  og  $B_n$  er integrasjonskonstantar. Av det asymptotiske uttrykket (B98) ser me at  $H_n^{(2)}$  representerer ei utovergående bølgje og av (B97) at då representerer  $H_n^{(1)}$  ei innovergående bølgje. Me skal bruka strålingsvilkåret for utgåande bølgje i uendeleig og setja  $B_n = 0$ . Då har me løysinga

$$\hat{\phi} = A_n H_n^{(2)}(kr) \theta_n(\theta) e(kz) \quad (B101)$$

Ein sum av slike løysingar

$$\hat{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(kr) \theta_n(\theta) e(kz)$$

(B102)

er også ei løysing som oppfyller strålingsvilkåret, disper-

sjonslikninga (B44) og Laplace-likninga (B29).

Etter (B98) går (B102) over til

$$\hat{\phi} \approx A(\theta)e(kz)(kr)^{-\frac{1}{2}}e^{-ikr} \quad \text{for } kr \gg 1 \quad (\text{B103})$$

der

$$A(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2/\pi} A_n \theta_n(\theta) e^{i(n\pi/2 + \pi/4)} \quad (\text{B104})$$

Den utgående sirkulære bølgja har sitt opphav i ei strålingskjelde i eller ved origo,  $r = 0$ . Det er berre i spesielle tilfelle at fartpotensialet er gjeve på den spesielle forma (B102) der variasjonen med  $z$  er teken vare på med faktoren  $e(kz)$ . Ei meir generell løysing som oppfyllar Laplace-likninga (B29), grensevilkåra og strålingsvilkåret for  $r \rightarrow \infty$ , er av forma

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}_1(r, \theta, z) + A(\theta)e(kz)(kr)^{-\frac{1}{2}}e^{-ikr} \quad (\text{B105})$$

Her representerer siste ledet det såkalla "fjernfeltet", medan fyrste ledet  $\hat{\phi}_1$  representerer "nærfeltet", eit lokalt fartpotensial som "knyter" fjernfeltet til strålingskjelda på ein slik måte at grensevilkåra ved strålingskjelda er oppfylte. Det kan visast at det lokale feltet  $\hat{\phi}_1$  minkar med avstanden  $r$  frå kjelda minst så sterkt som  $1/r$ . Jfr. t.d. pp. 475-478 i Wehausen + Laitone, Surface Waves, Handbuch der Physik, Bd. IX, pp. 446-778 (1960).

Med bruk av (B32) gjev (B105)

$$\hat{n} = \hat{n}(r, \theta) = -\frac{i\omega}{g} \hat{\phi}_1(r, \theta, 0) - \frac{i\omega}{g} A(\theta)(kr)^{-\frac{1}{2}}e^{-ikr} \quad (\text{B106})$$

For store  $(kr)$ , der  $\hat{\phi}_1$  kan neglisjerast, vil  $(kr)^{-\frac{1}{2}}$  variera relativt lite over ei bølgjelengd, så krumminga av bølgjefronten har lite å seia. Me kan då bruka energitransportformelen (B75) for plane bølgjer og byta ut  $|n_i|$  med  $|\frac{\omega}{g} A(\theta)(kr)^{-\frac{1}{2}}|$ . Effekten transportert pr. lengdeeining av bølgjefronten blir dermed

$$K(r, \theta) = \frac{f(kh)\rho g^2}{4\omega} \frac{\omega^2}{g^2} |A(\theta)|^2 \frac{1}{kr} = \frac{\omega\rho f(kh)}{4kr} |A(\theta)|^2$$

Den utstrålte effekten blir

$$P_r = \int_0^{2\pi} K(r, \theta) r d\theta = \frac{\omega\rho f(kh)}{4k} \int_0^{2\pi} |A(\theta)|^2 d\theta \quad (B108)$$

For sirkulærsymmetrisk strålingskjelde er etter (B104)

$$A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} A_0 e^{i\pi/4} \quad (B109)$$

slik at

$$P_r = \frac{\omega\rho f(kh)}{k} |A_0|^2 \quad (B110)$$

Dette er nyttig når me seinare skal finna strålingsresistan-  
sen for ein rundstrålar.

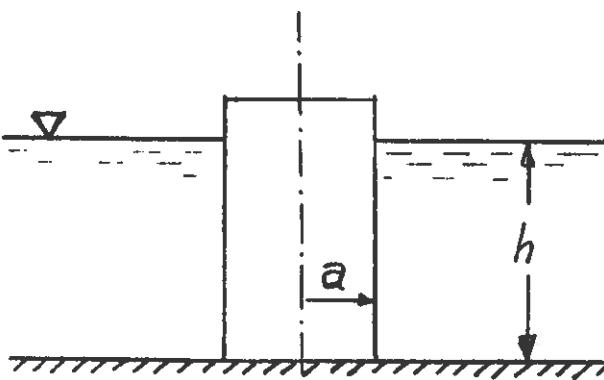
### Spreiing av plan bølgje på vertikal sylinder.

Me ser på tilfellet med ein vertikal sirkulær sylinder med radius  $a$ . Sylinderen står på sjøbotnen og har akse samanfallande med z-aksen. Etter grensevilkåret (B30) må me ha

$$\boxed{\left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} \right|_{r=a} = 0} \quad (B111)$$

Det fell ei progressiv plan bølgje

$$\hat{n}_f = n_i e^{-ikx} \quad (B112)$$



inn mot sylinderen. Denne bølgja kan ikkje åleine oppfylla grensevilkåret (B111). P.g.a. diffraksjon blir det sett opp ei spreidd bølgje  $\hat{n}_s$  slik at den resulterande bølgja blir

$$\hat{\eta} = \hat{\eta}_f + \hat{\eta}_s = n_i e^{-ikr \cos\theta} + \hat{\eta}_s(r, \theta) \quad (B113)$$

Vi må ha  $\hat{\eta}_s$  slik at den resulterende bølgja oppfyller grensevilkåret (B111) ved  $r = a$ .

Vi skal sjå at dette kan oppfyllast med ei spreidd bølgje  $\hat{\phi}_s$  av typen (B102). P.g.a. symmetrien i problemet må vi ha  $\theta(-\theta) = \theta(\theta)$ . Difor set vi  $\psi_n = 0$  i (B93), slik at  $\theta_n(\theta) = \cos(n\theta)$ .

Av (B102) får vi da for det spreidde fartpotensialet

$$\hat{\phi}_s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(kr) \cos(n\theta) e(kz) \quad (B114)$$

Så bruker vi den matematiske formelen

$$e^{-ikx} = e^{-ikr \cos\theta} = J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) \cos(n\theta) \quad (B115)$$

Bruker vi da (B113) i (B59) får vi

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \frac{g}{-i\omega} e(kz) \hat{\eta} = \frac{g}{-i\omega} e(kz) (\hat{\eta}_f + \hat{\eta}_s) \\ &= e(kz) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -\frac{g}{i\omega} n_i \epsilon_n (-i)^n J_n(kr) + A_n H_n^{(2)}(kr) \right\} \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (B116)$$

der  $\epsilon_0 = 1$  og  $\epsilon_n = 2$  for  $n > 0$ . Grensevilkåret (B111) ved  $r = a$  er oppfylt dersom vi set

$$(-i)^{n-1} \frac{g}{\omega} n_i \epsilon_n J'_n(ka) + A_n H_n^{(2)'}(kr) = 0$$

der

$$J'_n(ka) = \frac{d}{dp} J_n(p) \Big|_{p=ka}$$

og tilsvarende for  $H_n^{(2)'}(ka)$ .

Altså får vi

$$A_n = -(-i)^{n-1} \epsilon_n \frac{g}{\omega} n_i \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)} \quad (B119)$$

Med desse verdiane for  $A_n$  bestemte gjev (B114) det spreidde potensialet  $\hat{\phi}$ .

## C. BØLGESTATISTIKK OG ENERGIPOTENSIAL

### C1 - Innledning

Virkelige havbølger er ikke harmoniske og plane. Hvorfor?

1. Dispersjon.
2. Genereringsmekanismen - vind.

Dette at havbølger er generert av vind gir dem en ikke-deterministisk karakter.

Virkelige havbølger må beskrives med statistiske metoder.

### C2 - Energispekteret

Under forutsetning av at lineær teori er gyldig kan superposisjonsprinsippet benyttes for å beskrive en gitt sjøtilstand. Sjøtilstanden splittes opp i harmoniske, plane bølger med forskjellige frekvenser og innfallsretninger gjennom en Fourieromvending. Umiddelbart ville det være tiltrekkende å prøve å uttrykke overflatens posisjon,  $\eta(x, y, t)$ , på denne måten. I såfall skal  $\eta(x, y, t)$  fourier-omvendes til å gi en spekteramplitude,  $\hat{A}(\omega, \theta)$ :

$$\hat{A}(\omega, \theta) = |\hat{A}(\omega, \theta)| e^{i\psi(\omega, \theta)} \quad (C1)$$

Her oppstår imidlertid problemer ut fra den fysiske virkelighet:

1. Overflatens posisjon,  $\eta(x, y, t)$ , er ikke absolutt integrerbar.

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |\eta| dx dy \rightarrow \infty \quad (C2)$$

2. Havet er ikke å betrakte som en flate, men heller som forskjellige områder med diffuse avgrensninger. Først innenfor ett slikt område kan vi snakke om ensartede forhold.
3. Generering av havbølger gir transiente forløp og dermed ikke-stasjonære prosesser.
4. Havbølgene har en ikke-deterministisk karakter p.g.a. genereringsmekanismen.

Disse forholdene gjør at vi ikke direkte kan gi oss til å fourieromvende  $\eta(x,y,t)$ .

For det første må vi begrense beskrivelsen av en sjøtilstand til å gjelde ett bestemt havområde og tidsintervall. Innenfor dette området og intervallet kan sjøtilstanden betraktes som en stasjonær, stokastisk prosess. Videre oppnåes en ikke-deterministisk beskrivelse (pkt 4.) ved å begrense kravet til fasevinklen  $\psi$  - jmfr. likn. (C1). Det eneste som kreves av denne fasevinklen er at den skal være rektangulærfordelt i området 0 til  $2\pi$ .

$$f(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{når } 0 < \psi < 2\pi \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (C3)$$

På grunn av at  $\eta(x,y,t)$  ikke er absolutt integrerbar er det hensiktsmessig i første omgang å begrense fourierrepresentasjonen til å gjelde midlere energitethet,  $\bar{E}$ , i sjøtilstanden. Energispekteret  $S(\omega, \theta)$ , defineres gjennom

$$\bar{E} \stackrel{\text{def}}{=} \rho g \iint_0^{2\pi} S(\omega, \theta) d\omega d\theta \quad (C4)$$

Energiinnholdet innenfor området  $(\omega, \omega+d\omega)$  og  $(\theta, \theta+d\theta)$  er altså  $\rho g \cdot S(\omega, \theta)$ .  $S(\omega, \theta)$  betegnes også gjerne som to-dimensjonalt eller retningsoppløst energispekter for å skille fra størrelsen  $S(\omega)$  gitt ved

$$S(\omega) = \int_0^{2\pi} S(\omega, \theta) d\theta \quad (C5)$$

Rent måleteknisk begrenser en seg ofte til å registrere  $S(\omega)$ . Å registrere den fullstendige  $S(\omega, \theta)$  er langt mer komplisert. Ofte benyttes betegnelsen "energispekter" på  $S(\omega)$  og ikke  $S(\omega, \theta)$ .

Dersom en nå ønsker å uttrykke  $\eta(x,y,t)$  på samme måte, må en gå forsiktig fram. Det er da tryggest først å skrive likning (C4) på diskretisert form :

$$\bar{E} = \rho g \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^m S(\omega_j, \theta_\ell) \Delta\omega \Delta\theta \quad (C6)$$

hvor

$$m\Delta\omega = 2\pi \quad (C7)$$

På samme måte kan nå  $\eta(x, y, t)$  uttrykkes på diskretisert form

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) = & \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^m |\hat{A}(\omega_j, \theta_\ell)| \exp(i\psi(\omega_j, \theta_\ell)) \right. \\ & \cdot \exp \left( i(\omega_j t - k_j(x \cos \theta_\ell + y \sin \theta_\ell)) \right) \Delta\omega \Delta\theta \left. \right\} \end{aligned} \quad (C8)$$

hvor  $\psi(\omega_j, \theta_\ell)$  er gitt ut fra likn. (C3).  $\hat{A}(\omega_j, \theta_\ell) \Delta\omega \Delta\theta$  er således amplituden til en bølge med frekvens  $\omega_j$  og innfallsretning  $\theta_\ell$ .

Dermed kan midlere energitetthet,  $\bar{E}(\omega_j, \theta_\ell) \Delta\omega \Delta\theta$ , innenfor  $(\omega_j, \omega_j + \Delta\omega)$  og  $(\theta_\ell, \theta_\ell + \Delta\theta)$  uttrykkes på to forskjellige måter. Fra likn. (C6) :

$$\bar{E}(\omega_j, \theta_\ell) \Delta\omega \Delta\theta = \rho g S(\omega_j, \theta_\ell) \Delta\omega \Delta\theta \quad (C9)$$

Fra likning (C8) :

$$\bar{E}(\omega_j, \theta_\ell) \Delta\omega \Delta\theta = \frac{1}{2} \rho g |\hat{A}(\omega_j, \theta_\ell)|^2 (\Delta\omega \Delta\theta)^2 \quad (C10)$$

Dette gir følgende sammenheng mellom  $S(\omega_j, \theta_\ell)$  og  $|\hat{A}(\omega_j, \theta_\ell)|$  :

$$|\hat{A}(\omega_j, \theta_\ell)| \Delta\omega \Delta\theta = \left( 2 S(\omega_j, \theta_\ell) \Delta\omega \Delta\theta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (C11)$$

Likn. (C11) illustrerer da klart problemet som oppstår dersom en ønsker å uttrykke  $\eta(x, y, t)$  på integralform ut fra likning (C8) ved å gå til grensen  $\Delta\omega, \Delta\theta \rightarrow 0$ .

$S(\omega_j, \theta_\ell)$  er en endelig størrelse. Av likn. (C11) går det fram

$$\lim_{\Delta\omega, \Delta\theta \rightarrow 0} |\hat{A}(\omega_j, \theta_\ell)| \rightarrow \infty \quad (C12)$$

Således er det kun på diskretisert form det har mening å uttrykke  $\eta(x, y, t)$  på spektral form.

Størrelsen  $\bar{\eta}^2$  er definert ved

$$\bar{\eta}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{T, L_x, L_y \rightarrow \infty}} \frac{1}{T L_x L_y} \int_0^T \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \eta^2(x, y, t) dy dx dt \quad (\text{C13})$$

Det kan da vises med utgangspunkt i likn. (C8) samt ved å benytte likn. (C11)

$$\bar{\eta}^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} S(\omega, \theta) d\omega d\theta \quad (\text{C14})$$

Slik at

$$\bar{E} = \rho g \bar{\eta}^2 \quad (\text{C15})$$

Autokorrelasjonsfunksjonen til overflatens posisjon,  $R_\eta(\tau)$ , defineres ved :

$$R_\eta(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) \eta(t+\tau) dt \quad (\text{C16})$$

hvor  $\eta(t)$  er lik  $\eta(x, y, t)$  målt i vilkårlig punkt, f.eks.  $x = y = 0$ . På samme måte kan det nå vises :

$$R_\eta(\tau) = \int_0^\infty S(\omega) \cos \omega \tau d\omega \quad (\text{C17})$$

Altså er  $R_\eta(\tau)$  fourier cosinus-transformen til  $S(\omega)$ . Derav følger at eventuelt kan  $S(\omega)$  finnes når  $R_\eta(\tau)$  er kjent :

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_\eta(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (\text{C18})$$

### C3 - Bølgespekterparametre

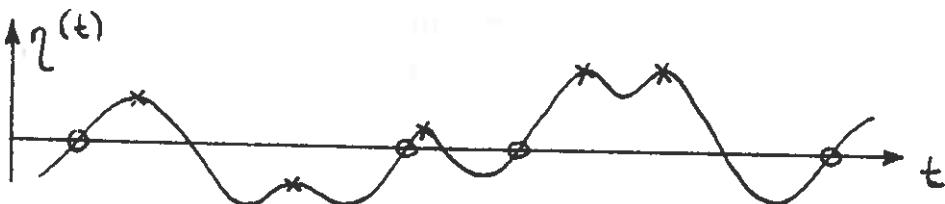
Definerer j'te ordens moment,  $m_j$ , og spektrumsbredde-parameteren,  $\epsilon$  :

$$m_j \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} \omega^j S(\omega) d\omega \quad (\text{C19})$$

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4} \quad (\text{C20})$$

Bredt spekter :  $m_0 m_4 \gg m_2^2$  gir  $\epsilon \rightarrow 1$

Regulære bølger:  $m_0 = m_2 = m_4$  gir  $\epsilon = 0$



x - bølgetopper

o - nulloppkrysning

$\omega_z$  - nulloppkrysningsfrekvens

$\omega_c$  - bølgetoppfrekvens

$$\omega_c > \omega_z \quad (\text{C21})$$

I praksis viser det seg:

$$\omega_z \approx \omega_{02} \quad (\text{C22})$$

$$\omega_c \approx \omega_{24} \quad (\text{C23})$$

hvor

$$\omega_{02}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_2}{m_0} \quad (\text{C24})$$

$$\omega_{24}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_4}{m_2} \quad (\text{C25})$$

#### C4 - Registrering av energispekteret

Ved hjelp av bøye og akselerometer (Waverider) foregår det for tiden registrering av bølgene på fire steder langs kysten - Utsira, Halten, Hekkingen og Tromsøflaket.

I tillegg kommer visuell bølgeregistrering foretatt fra fyrtårn.

Med Waverider registreres overflatens posisjon over en periode,  $t_{reg}$ , på ca 20 min. (1024 sek.) hver tredje time. Registreringen gjøres om til en diskretisert sampling med samplingsintervall,  $\Delta t$ , på 0.5 sek. Spekteret finnes ved å anta at forløpet gjentar seg med en periode på  $t_{reg}$ . Dette gir et diskretisert spekter (råspekter) med

$$\Delta v = \frac{1}{t_{reg}} \quad (C26)$$

Båndbredden til spekteret har sammenheng med  $\Delta t$ , samplingsintervallet, og er gitt av den såkalte Nyquistfrekvensen:

$$v_c = \frac{1}{2\Delta t} \quad (C27)$$

Antall punkter i tidsplan:  $n_t$

Antall punkter i frekvensplan:  $n_v$

$$n_v = \frac{v_c}{\Delta v} = \frac{t_{reg}}{2\Delta t} = \frac{1}{2} n_t \quad (C28)$$

Vanligvis foretaes en glatting av råspekteret før resultatet presenteres. Det er gjerne vanlig å glatte over 8 og 8 punkter. I praksis vil en da ha:

$$\Delta v = \frac{1}{1024} \text{ Hz} \approx 10^{-3} \text{ Hz}$$

$$v_c = 1 \text{ Hz}$$

$$n_v = 1024$$

$$\Delta v_g = 8\Delta v = 0.78 \cdot 10^{-2} \text{ Hz}$$

$$n_{v,g} = 128$$

Fra den diskretiserte registreringen i tidsplan skal det numerisk beregnes et diskretisert spekter. Dette kan gjøres på forskjellige måter:

1. Fullstendig Fouriertransform (FT).
2. Gå veien om autokorrelasjonsfunksjonen,  $R_n(t)$ , slik som antydet i likning (C18).
3. Bruk av såkalt Hurtig Fouriertransform (FFT). Denne metoden er numerisk sett langt den raskeste. En forutsetning for å benytte metoden er at registreringen

er gitt i  $2^n$  punkter. FFT benyttes i forbindelse med registreringene fra Waverider. I den forbindelse er det utviklet et såkalt NEPTUN-program.

Det bør presiseres at et spektralestimat slik det f.eks. regnes ut ved hjelp av NEPTUN-programmet har knyttet til seg en usikkerhet. Således må det oppgies et konfidensintervall sammen med spektralestimatet. Som en fingerregel kan en regne at spektralestimatet er  $\chi_k^2$ -fordelt hvor k (antall frihetsgrader) er to ganger antall frekvenspunkter det glattes over. Der hvor energispekteret har skarpe topper vil k være mindre. Ved gitt  $t_{reg}$  vil avtagende  $\Delta v_g$  (større oppløsning i frekvensplan) gi økende usikkerhet i hvert enkelt spektralestimat. Ved gitt  $\Delta v_g$  må  $t_{reg}$  øke for at usikkerheten i spektralestimatet skal avta.

#### C5 - Analytiske uttrykk for energispekteret

En rekke forsøk er gjort på å framstaffe analytiske uttrykk for energispekteret ut fra fysikalske modeller samt de erfaringer en har med bølgeregistrering. Vanlige parametre i slike spektra er  $H_s$  (signifikant bølgehøyde - jmfr. avsn. (5) og  $T_z$ . En annen parameter som også ofte benyttes er vindhastigheten,  $u_{10}$ .

De spektra som framkommer har alle sine begrensninger. En bør derfor studere forutsetningene som ligger til grunn for hvert enkelt spekter før en velger et egnet spekter. Et velegnet spekter i Nordsjøen burde være det såkalte JONSWAP - spekteret (JONSWAP - Joint North Sea Wave Project). Det såkalte Pierson-Moscowitz spekteret er et spesialtilfelle av JONSWAP-spekteret.

#### C6 - Bølgehøydestatistikk

Med bølgehøyden, H, menes høydeforskjellen mellom minimalpunkt og påfølgende maksimalpunkt i sjøoverflatens posisjon,  $\eta(t)$ . Til dimensjonerende formål benyttes gjerne fordelingen av bølgehøyder. En skiller da mellom

- \* Korttidsstatistikk
- \* Fordeling av sjøtilstander
- \* Langtidsstatistikk.

### Korttidsstatistikk

Vanlige sjøtilstander har  $\epsilon = 0.4 - 0.5$  (jmfr.likn. (C20)). Det kan da vises at  $H$  med god tilnærming følger Rayleigh-fordeling.

$$F(H) = 1 - \exp\left(\frac{-H^2}{8m_0}\right) \quad (C29)$$

Signifikant bølgehøyde,  $H_s$ , er definert ved

$$H_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_a^\infty H f(H) dH}{\int_a^\infty f(H) dH} \quad (C30)$$

hvor

$$\int_a^\infty f(H) dH = 1/3 \quad (C31)$$

Med Rayleighfordeling kan det vises

$$H_s = 4.0043 \sqrt{m_0} \approx 4\sqrt{m_0} \quad (C32)$$

$$F(H) = 1 - \exp\left(-2\left(\frac{H}{H_s}\right)^2\right) \quad (C33)$$

$$\bar{E} = \frac{1}{16} \rho g H_s^2 \quad (C34)$$

Forøvrig - når det gjelder sammenheng mellom de forskjellige typer bølgestatistikk er dette vist i en egen oversiktstabell.

### C 7 - Energipotensialet i havbølger

Effekttransporten i regulære, plane bølger er gitt ved:

$$K = \frac{1}{4} \frac{\rho g^2 f(kh)}{\omega} |\hat{n}|^2 \quad (C35)$$

Tilsvarende får vi for effekttransporten i irregulære bølger langs retningen  $\theta_0$ :

|                    | KORTTIDSSATISTIKK                                    | SJØSTILSTANDER  | LANGTIDSSATISTIKK  |
|--------------------|--|---|--|
| Uavhengig variabel | $H$  | $H_s$   | $H$  |
| Parameter          | $H_s$  | $H_c, \gamma$<br>"     cont. $H_o$  |  |
| Tidsskala          | $\sim$ time  | $\sim$ år   | $\sim$ år  |
| Type fordeling     | Rayleighfordeling                                    | Weibullfordeling  | Weibullfordeling.  |
|                    | $F_k(H) = 1 - \exp\left\{-(\frac{H}{H_s})^2\right\}$ | $F(H_s) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{H_s - H_o}{H_c - H_o}\right)^C\right\}$ | $F_L(H) = \int_0^H f_x(H) dH_s$<br>$F_L(H) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{H}{C H_c}\right)^D\right\}$<br>$C = C(\gamma); D = D(\gamma)$ |
| Anvendelse         | Bestemme $H_s$                                       | Bestemme $H_c, \gamma, H_o$   | Dimensionering<br>(f.eks.: 100 års-tilslutte)<br>Dimensionering<br>Cf. eks varighet av sjøstilstander)                                 |

$$K(\theta_0) = \frac{1}{2} \rho g^2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{S(\omega, \theta)}{\omega} f(kh) \cos(\theta - \theta_0) d\theta d\omega \quad (C36)$$

Dersom sjøtilstanden er slik at bølgene kommer inn fra kun en retning,  $\theta_i$ , kan det uttrykkes ved

$$S(\omega, \theta) = S(\omega) \delta(\theta_i) \quad (C37)$$

I dette tilfellet får en

$$K(\theta_0) = \frac{1}{2} \rho g^2 \cos(\theta_i - \theta_0) \int_0^\infty \frac{S(\omega)}{\omega} f(kh) d\omega \quad (C38)$$

På dypt vann går dette over til (jmfr. likn. (C19)):

$$K(\theta_0) = \frac{1}{2} \rho g^2 m_{-1} \cos(\theta_i - \theta_0) \quad (C39)$$

Figur C1 og C2 viser energitransporten beregnet ut fra kjennskap til  $S(\omega)$  (basert på registreringer fra Waverider og bruk av NEPTUN-programmet.).

Figur C3 viser effekttransporten langs Norskekysten basert på visuelt observerte bølgedata fra fyrtårn. Beregningene indikererer en midlere effekttransport i størrelsesorden 20 kW/m inn mot Norskekysten. Dette tilsvarer en energitransport på 0.2 GWh/m pr. år.

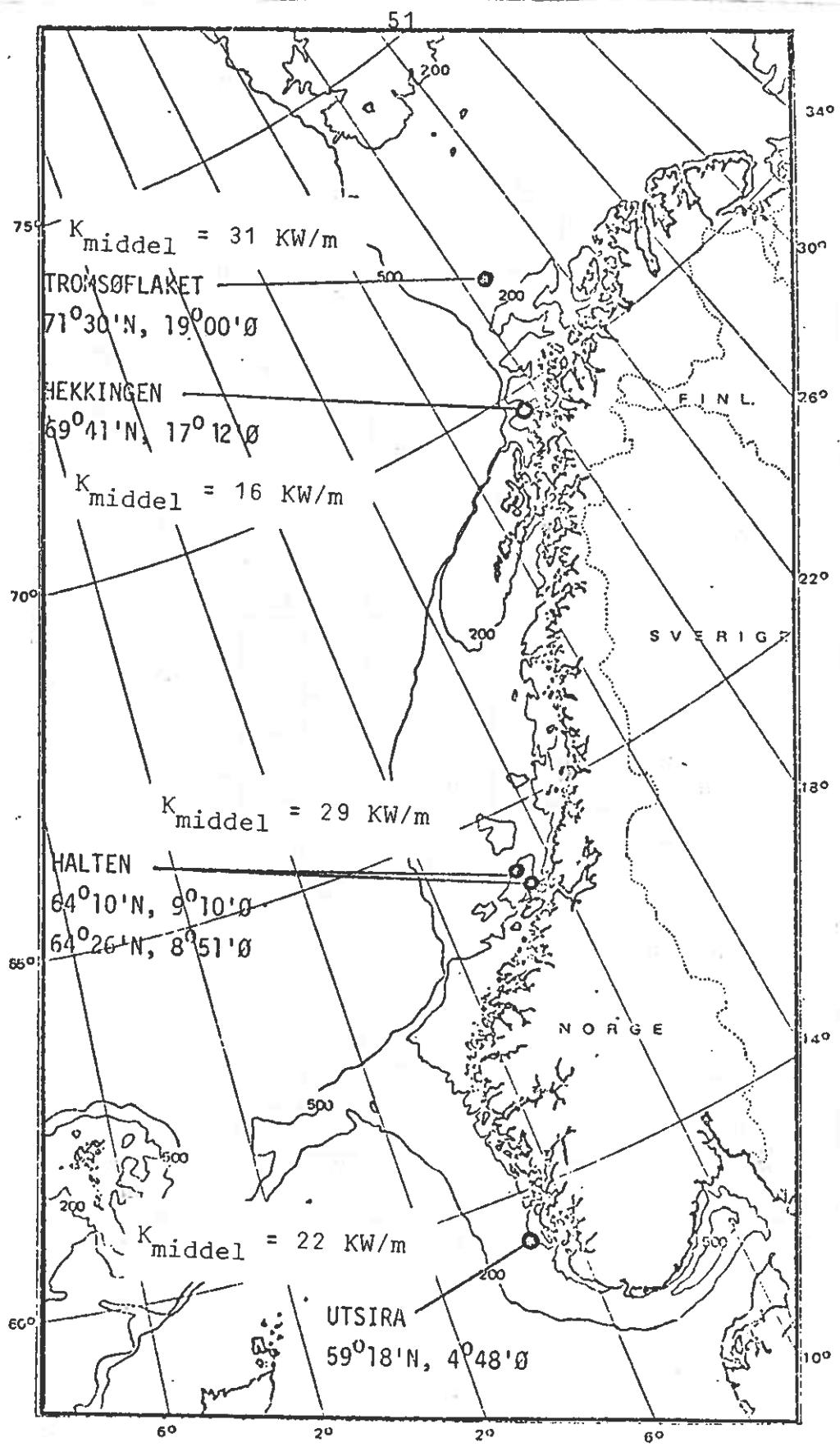


Fig. C1 - Hentet fra Harald E. Krogstad - "Bølgeenergifluks mot fire målestasjoner utenfor Norskekysten" - IKU 1979. K er beregnet ut fra likn. (C39) med  $\theta_i = \theta_0$ .

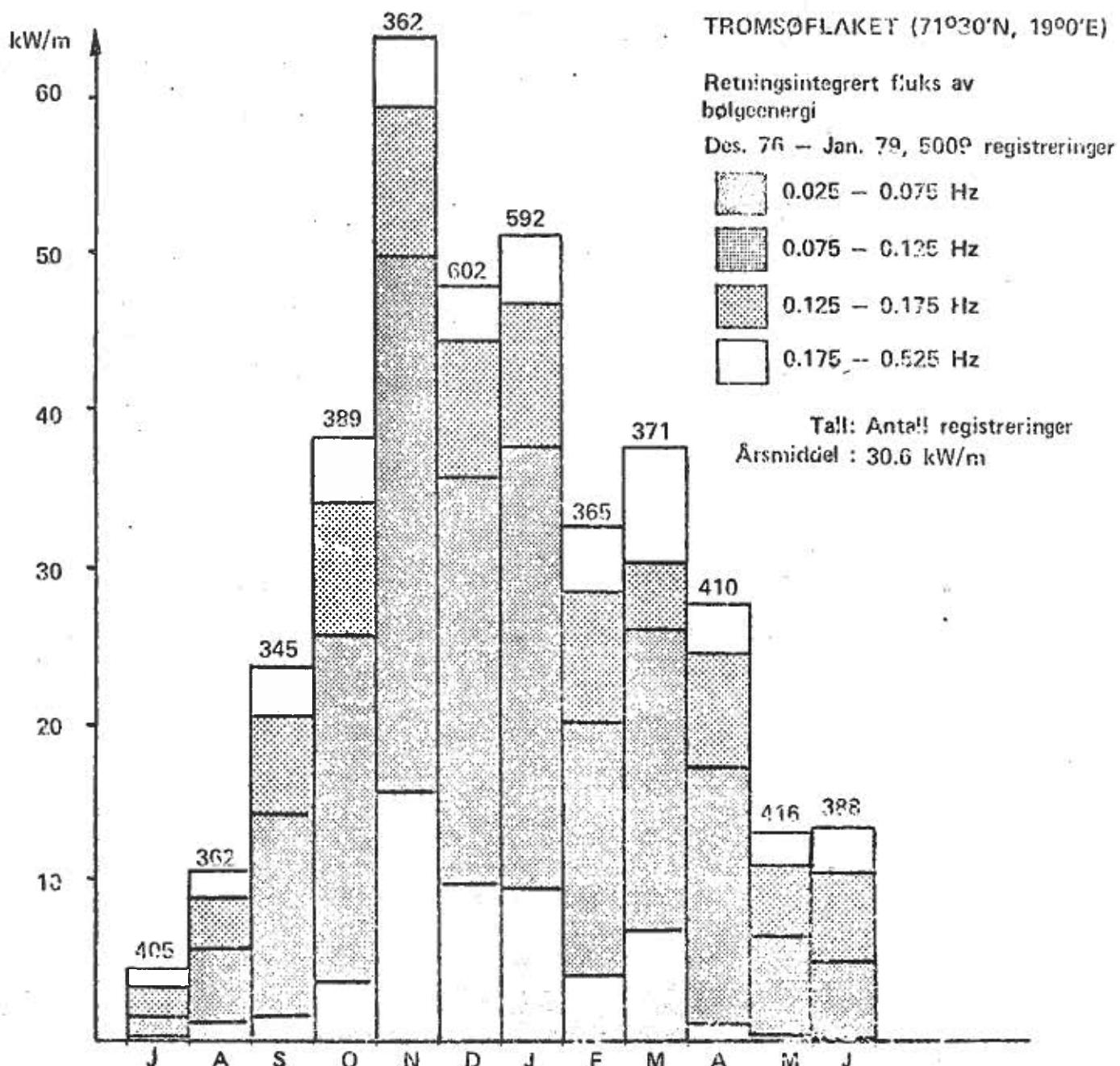


Fig. C2 - Samme referanse som fig. C1.

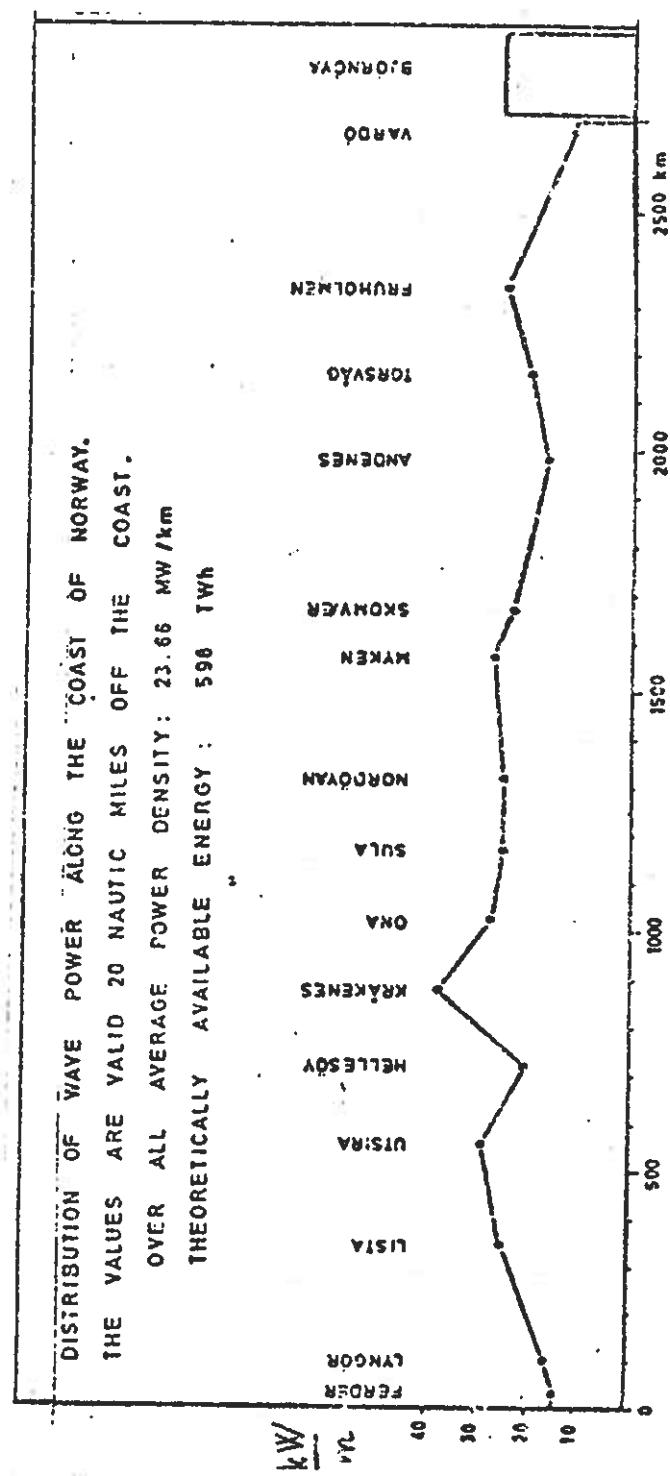


Fig. C3 - Hentet fra Sverre Gran - "Estimates of wave power at the coast of Norway." DnV-rapport 77-570.

#### D. VEKSELVERKNAD MELLOM EI BØLGJE OG EIN SVINGANDE KROPP

Hittil har me sett på eigenskapar ved bølgjeforplanting men ikkje sett på korleis bølgjer blir sett opp.

Sagt på ein annan måte, har me sett på grenseflater som berre er i ro. No skal me sjå på korleis svingande grenseflater kan setja opp ei bølgje i væska. Grensevilkåret (B30)

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} = \hat{u}_n \quad (D1)$$

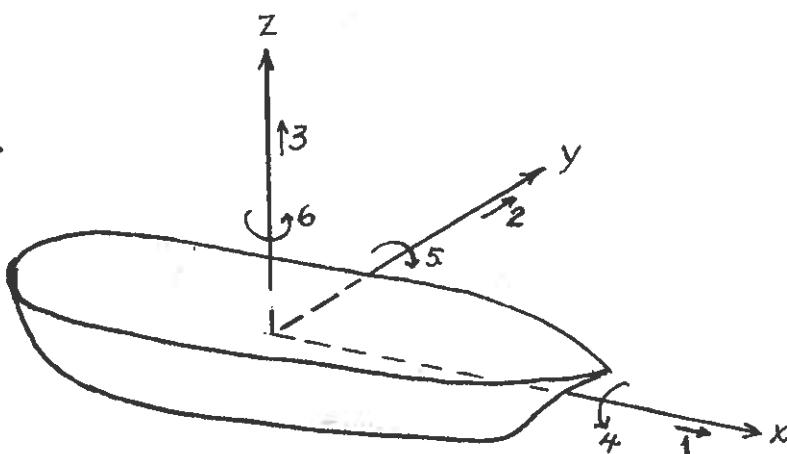
har me hittil berre brukt for grenseflater som er i ro ( $u_n = 0$ ).

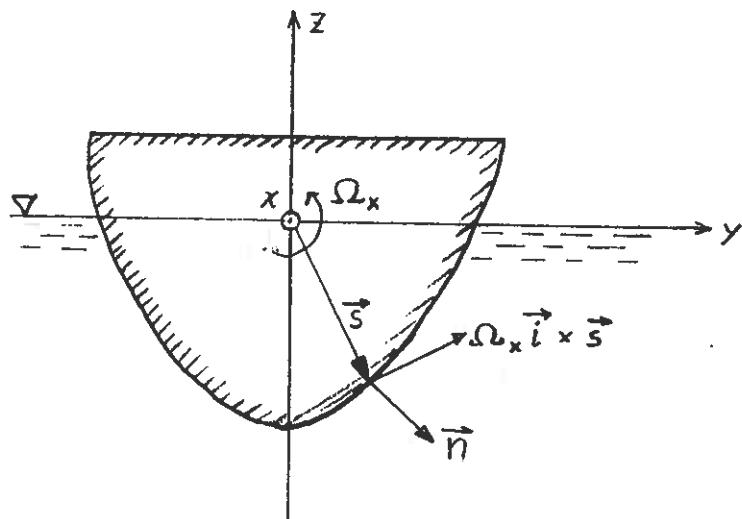
Me skal også sjå på dei kreftene som ei bølgje påverkar grenseflata med. Vidare skal me sjå på ein samanheng mellom slike bølgjekrefter og strålingsresistansen.

#### Svingemodi for ein fast kropp.

Ein fast kropp kan svinga på seks ulike måtar, eller som me seier i seks ulike svingemodi. Av dette er det tre translasjonsmodi og tre rotasjonsmodi.

Me ser på  
ein skipsliknande  
kropp, med x-aksen  
vælt langs lengde-  
retninga av kroppen.  
Vidare har me lagt  
den vertikale  
z-aksen gjennom  
tyngdepunktet av  
kroppen.





Dei seks svingemodiane har då namn som vist i tabellen under

| Modus<br>nr. | Rørsleform              | Namn      |         |
|--------------|-------------------------|-----------|---------|
|              |                         | norsk     | engelsk |
| 1            | Translasjon i x-retning | jaging    | surge   |
| 2            | " " y- "                | slingring | sway    |
| 3            | " " z- "                | hiving    | heave   |
| 4            | Rotasjon om x-aksen     | rulling   | roll    |
| 5            | " " y- "                | stamping  | pitch   |
| 6            | " " z- "                | giring    | yaw     |

For kroppar som ikkje er langstreckte som eit skip kan det koma på det same med namna jaging og slingring og med rulling og stamping.

Me skal sjå korleis me kan formulera grensevilkåret (D1) spesielt for dei ulike modiane. La oss fyrst sjå på translasjon, t.d. hivmodusen. D.v.s. la

$$\vec{u} = u_z \vec{k} = u_3 \vec{k}. \quad (D2)$$

Då er normalkomponenten av farten

$$u_n = u_3 n_3 \quad (D3)$$

der

$$n_3 = \cos(n, z) \quad (D4)$$

Her er  $(n, z)$  vinkelen mellom flatenormalen  $\vec{n}$  og  $z$ -aksen. Me reknar framleis med så små utsving at me kan bruka lineær teori. Den genererte bølgja vil då vera proporsjonal med  $\hat{u}_3$ . Me skriv då fartpotensialet

$$\hat{\phi} = \varphi_3 \hat{u}_3 \quad (D5)$$

Grensevilkåret (D1) gjev då

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = u_n = u_3 n_3 \quad (D6)$$

eller

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = n_3 \quad (D7)$$

Tilsvarande blir det for dei to andre translasjonsmodiane.

La oss no sjå på ein rotasjonsmodus, t.d. rullemodusen. Den er karakterisert ved ein vinkelfart med kompleks amplitude

$$\hat{\Omega}_x = \hat{u}_4. \quad (D8)$$

Eit flateelement i posisjonen  $\vec{s}$  har då farten

$$\vec{u} = \hat{\Omega}_x \times \vec{s} = \hat{u}_4 \times \vec{s}. \quad (D9)$$

Den genererte bølgja har eit fartpotensial

$$\hat{\phi} = \varphi_4 \hat{u}_4 \quad (D10)$$

(i lineær teori). Grensevilkåret (D1) blir no

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} \hat{u}_4 = \hat{u} \cdot \vec{n} = (\hat{u}_4 \times \vec{s}) \cdot \vec{n} = (\vec{s} \times \vec{n}) \cdot \hat{u}_4 =$$

$$= (\vec{s} \times \vec{n})_x \hat{u}_4 = (y n_z - z n_y) \hat{u}_4 \quad (D11)$$

eller

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial n} = (\vec{s} \times \vec{n})_x = y n_z - z n_y = y \cos(n, z) - z \cos(n, y) \quad (D12)$$

Innfører me

$$n_4 = (\vec{s} \times \vec{n})_x \quad (D13)$$

får me

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial n} = n_4 \quad (D14)$$

Tilsvarande gjeld for dei to andre rotasjonsmodiane.

Me har såleis definert ein generalisert fartvektor med seks komponentar

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \quad (D15)$$

Merk at komponentane  $u_4, u_5$  og  $u_6$  er vinkelfartar med eining rad/s. Vidare har me definert ein generalisert normalvektor med seks komponentar. Dei tre fyrste er

$$\boxed{\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = n_1 \vec{i} + n_2 \vec{j} + n_3 \vec{k}} \quad (D16)$$

og dei er dimensjonslause. Dei tre siste er

$$\boxed{\vec{s} \times \vec{n} = (n_4, n_5, n_6)} \quad (D17)$$

og dei har dimensjon av lengd med eining m.

Grensevilkår for svingemodus nr. q, der  $q = 1, 2, \dots, 6$ , er etter (D7) og (D14)

$$\boxed{\frac{\partial \varphi_q}{\partial n} = n_q \text{ på } S} \quad (D18)$$

der  $S$  er den svingande grenseflata. I lineær teori, som gjeld for små utsving, kan me gjera det matematisk enklare ved å rekna  $S$  som den middels grenseflata av den svingande kroppen. Ein annan måte å seia det på at  $S$  er den vatte overflata av kroppen. Den tørre delen av overflata som er over vatnet kjem ikkje direkte inn i noko grensevilkår.

I væska utanfor  $S$  gjev Laplace-likninga (B29) at

$$\nabla^2 \varphi_q = 0 \quad (\text{D19})$$

Vidare gjeld (B31) på den frie overflata

$$\left[ -\omega^2 \varphi_q + g \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_q) \right]_{z=0} = 0 \quad (\text{D20})$$

og på sjøbotnen

$$\left. \frac{\partial \varphi_q}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0 \quad (\text{D21})$$

Ved utstråling på ein uendeleg vid sjø må me dessutan krevja at  $\varphi_q$  skal oppfylla strålingsvilkåret om utgåande bølgje i uendeleg avstand.

I lineær teori kan me bruka superposisjonsprinsippet. Når kroppen svingar i alle modiane samstundes, har den utstrålte (genererte) bølgja eit fartpotensial

$$\hat{\phi} = \sum_{q=1}^6 \varphi_q \hat{u}_q \quad (\text{D22})$$

Sjå også (D186) og etterfølgjande utleining.

#### Hydrodynamisk kraft som verkar på kroppen.

For eit gjeve fartpotensial  $\phi$  skal me finna uttrykk for kraft og moment som verkar på kroppen.

La oss fyrst sjå på ein kraftkomponent t.d.  $F_z$ .

Vertikal kraft på flateelementet  $dS$  er

$$p(-n_z) dS = -p n_3 dS \quad (\text{D23})$$

Vertikal kraft på heile kroppen

$$F_3 = F_z = - \iint_S p n_3 dS \quad (D24)$$

med kompleks amplitude etter  
(B33)

$$\hat{F}_3 = \hat{F}_z = i \omega \rho \iint_S \hat{\phi} n_3 dS \quad (D25)$$

Tilsvarande gjeld for dei to andre kraftkomponentane.

Så ser me på kraftmomentet om x-aksen. Moment som verkar på flateelementet  $dS$

$$dM_x = y dF_z - z dF_y = (-p n_z y + p n_y z) dS \quad (D26)$$

$$M_x = - \iint_S p (y n_z - z n_y) dS \quad (D27)$$

Med bruk av (B33) og (D13) får me

$$= \hat{M}_x = i \omega \rho \iint_S \hat{\phi} n_4 dS \quad (D28)$$

Tilsvarande gjeld for dei andre komponentane  $M_y$  og  $M_z$ .

Me definerer ein generalisert kraftvektor med seks komponentar, der dei tre første

$$(F_1, F_2, F_3) = (F_x, F_y, F_z) = \vec{F} \quad (D29)$$

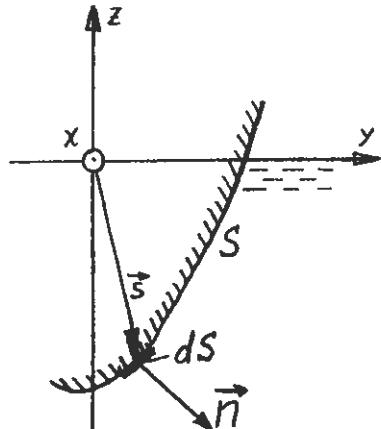
har eining N, og dei tre siste

$$(F_4, F_5, F_6) = (M_x, M_y, M_z) = \vec{M} \quad (D30)$$

har eining Nm.

For komponent nr. q der  $q = 1, 2, \dots, 6$ , har me altså

$$\hat{F}_q = - \iint_S \hat{p} n_q dS = i \omega \rho \iint_S \hat{\phi} n_q dS \quad (D31)$$



for eit vilkårleg gjeve potensial  $\hat{\phi}$ .

Denne formelen kan brukast til å finna ut t.d. dei kreftene som bølgjene påverkar ein stilleståande kropp med.

Men no skal me fyrst sjå på dei kreftene som verkar når kroppen sjølv svingar og set opp ei bølgje og såleis påverkar kroppen med bølgjekrefter.

### Strålingsimpedansen.

Når kroppen svingar i modus nr.  $q$ , med ein kompleks fartamplitude  $\hat{u}_q$ , blir det etter (D22) generert ei bølgje med fartpotensial

$$\hat{\phi} = \varphi_q \hat{u}_q \quad (\text{D32})$$

P.g.a. dette blir det sett opp ei reaksjonskraft på kroppen. Kraftkomponent nr.  $q$  er etter (D31)

$$\hat{F}_q = i\omega\rho \iint_S \hat{u}_q \varphi_q n_q dS \quad (\text{D33})$$

Merk at  $\hat{u}_q$  (anten det er snakk om ein translasjonsfart eller ein vinkelfart for ein rotasjonsmodus) er konstant og kan setjast utanfor integralet. Altså kan me setja

$$\hat{F}_q = -Z_{qq} \hat{u}_q \quad (\text{D34})$$

der me i samsvar med (A55) har innført strålingsimpedansen

$$Z_{qq} = -i\omega\rho \iint_S \varphi_q n_q dS \quad (\text{D35})$$

Men generelt kan dei fem andre komponentane av den generaliserte kraftvektoren få tilskot frå den bølgja som svingemodusen  $q$  genererer.

Den generelle kraftkomponenten er

$$\hat{F}_j = -Z_{jq} \hat{u}_q \quad (\text{D36})$$

der

$$Z_{jq} = i\omega\rho \iint_S \varphi_q n_j dS \quad (D37)$$

$q = 1, 2, \dots, 6$  og  $j = 1, 2, \dots, 6$ .

Med bruk av grensevilkåret (D18) på den vætte overflata  $S$  av kroppen får me

$$Z_{jq} = -i\omega\rho \iint_S \varphi_q \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} dS$$

(D38)

Me ser at me kan definera ei strålingsimpedansmatrise  $Z_{jq}$  som me skal drøfta meir inngående seinare. M.a. skal me visa resiprositetssatsen som seier at

$$Z_{jq} = Z_{qj} \quad (D39)$$

Sjå også (D135b).

#### Energitolking av strålingsimpedansen.

Etter definisjonen er alle  $n_q$  for ein fast kropp reelle. Difor er etter grensevilkåret (D18)

$$\frac{\partial \varphi_q^*}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_q}{\partial n} = n_q \quad \text{på } S \quad (D40)$$

Då kan me setja strålingsimpedansen

$$Z_r = Z_{qq} = -i\omega\rho \iint_S \varphi_q \frac{\partial \varphi_q}{\partial n} dS = -i\omega\rho \iint_S \varphi_q \frac{\partial \varphi_q^*}{\partial n} dS \quad (D41)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Z_r |\hat{u}_q|^2 &= + \frac{1}{2} \iint_S (-i\omega\rho \varphi_q \hat{u}_q) \frac{\partial \varphi_q^*}{\partial n} \hat{u}_q^* dS \\ &= + \iint_S \frac{1}{2} \hat{p}_n^* dS \end{aligned} \quad (D42)$$

Realdelen av dette er den effekten som blir levert til væska når kroppen svingar i modus nr.  $q$ . Imaginærdelen representerer den såkalla reaktive "effekten".

For strålingsresistansen  $R_r = \operatorname{Re}(Z_r)$  gjeld

$$\frac{1}{2} R_r |\hat{u}_q|^2 = \frac{1}{2} R_{qq} |\hat{u}_q|^2 = \operatorname{Re} \left\{ \iint_S \frac{1}{2} \hat{p} \hat{v}_n^* dS \right\} = P_r \quad (\text{D43})$$

i samsvar med (A53). Merk at (D38) definerer strålingsimpedansen slik i forhold til den rom-uavhengige  $\hat{u}_q$  at den utstrålte effekten  $P_r$  er som uttrykt ved (D43).

### Bølgjegenerator utan addert masse.

Me skal sjå på generering av ei harmonisk bølgje

$$\hat{n} = n_0 e^{-ikx} \quad (\text{D44})$$

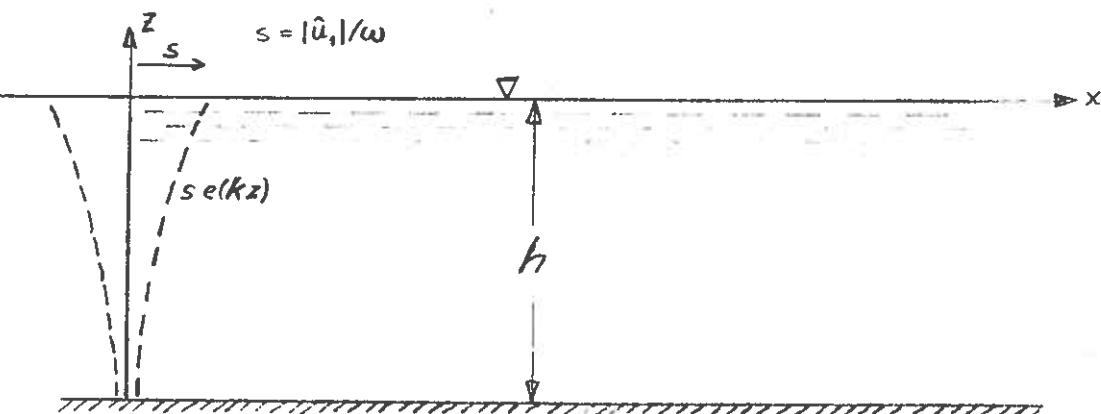
i ei bølgjerenne med veger parallelle med x-aksen. Ei absorberande strand syter for at inga bølgje er reflektert. Eventuelt kan me tenkja oss bølgjerenna uendelig lang. Me går ut frå at bølgja er plan, d.v.s. at ingen tverrsvingingar finst.

Det tilsvarende fartpotensialet er

$$\hat{\phi} = \frac{-g}{i\omega} n_0 e(kz) e^{-ikx} \quad (\text{D45})$$

Partikkelfarten har ein x-komponent

$$\hat{v}_x = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = \frac{gk}{\omega} n_0 e(kz) e^{-ikx} \quad (\text{D46})$$



Me tenkjer oss ein ideell bølgjegenerator forma som ei vertikal plate ved  $x = 0$ . Plata er bøyeleg og gjer små horisontale svingerørsler slik at farten er følgjande funksjon av djupna

$$\hat{u} = \hat{u}(z) = \hat{u}_1 e(kz) \quad (D47)$$

der  $\hat{u}_1$  er ein konstant.

Maksimalutsvinget er vist med stipla kurver i figuren. Merk at for  $z = 0$  er  $\hat{u} = \hat{u}_1$ .

Grensevilkåret  $\hat{v}_x = \hat{u}_x$  ved  $x = 0$  kan me få oppfylt med den plane bølgja (D46) og denne spesielle  $\hat{u}(z)$  fordi  $u_x$  og  $v_x$  varierer med  $z$  på same måten. Grensevilkåret gjev

$$\hat{u}_1 e(kz) = \hat{u}_x = \hat{v}_x \Big|_{x=0} = \frac{gk}{\omega} \eta_0 e(kz) e^{-i0} \quad (D48)$$

Me må altså ha

$$\eta_0 = \frac{\omega}{gk} \hat{u}_1 \quad (D49)$$

$$\hat{\eta} = \frac{\omega}{gk} \hat{u}_1 e^{ikx} \quad (D50)$$

$$\hat{\phi} = \frac{-1}{ik} \hat{u}_1 e(kz) e^{-ikx} = \varphi_1 \hat{u}_1 \quad (D51)$$

$$\varphi_1 = \frac{-1}{ik} e(kz) e^{-ikx} \quad (D52)$$

Med denne spesielle bølgjegeneratoren har me greidd å setja opp eit fjernfelt som gjeld heilt innåt bølgjegeneratoren. Det er altså ikkje noko nærfelt i dette spesielle tilfellet.

Me skal så rekna ut strålingsimpedansen direkte. Det hydrodynamiske trykket er etter (B33)

$$\hat{p} = -i\omega\rho\hat{\phi} = \frac{\omega\rho}{k} \hat{u}_1 e(kz) e^{-ikx} \quad (D53)$$

$$\hat{v}_x = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = \hat{u}_1 e(kz) e^{-ikx} \quad (D54)$$

På den bølgjegenererende plata  $x = 0$  er

$$\frac{1}{2} \hat{p}\hat{v}_x^* = \frac{1}{2} \frac{\omega\rho}{k} e^2(kz) |\hat{u}|^2 \quad (D56)$$

Merk at dette er reellt. Her er altså ingen reaktiv effekt. Effekten som bølgjegeneratoren leverer, finn me ved å integrera over den svingande plata

$$\iint_S \frac{1}{2} \hat{p}\hat{v}^* dS = \frac{1}{2} |\hat{u}_1|^2 \frac{\omega\rho}{k} \int_{-h}^0 e^2(kz) dz \cdot d$$

der  $d$  er breidda av bølgjerenna og bølgjegeneratoren. Strålingsimpedansen blir etter (D42)

$$Z_{11} = \frac{\omega\rho}{k} \int_{-h}^0 e^2(kz) dz \cdot d \quad (D58)$$

Med bruk av (B73) finn me

$$Z_{11} = \frac{\omega\rho d}{2k^2} f(kh) \quad (D59)$$

Merk at

$$Z_{11} = R_{11} + i\omega m_{11} \quad (D60)$$

er reint reell. Altså er den adderte massen null for denne bølgjegeneratoren

$$Z_{11} = R_{11} = \frac{\omega\rho f(kh)d}{2k^2} \quad (D61)$$

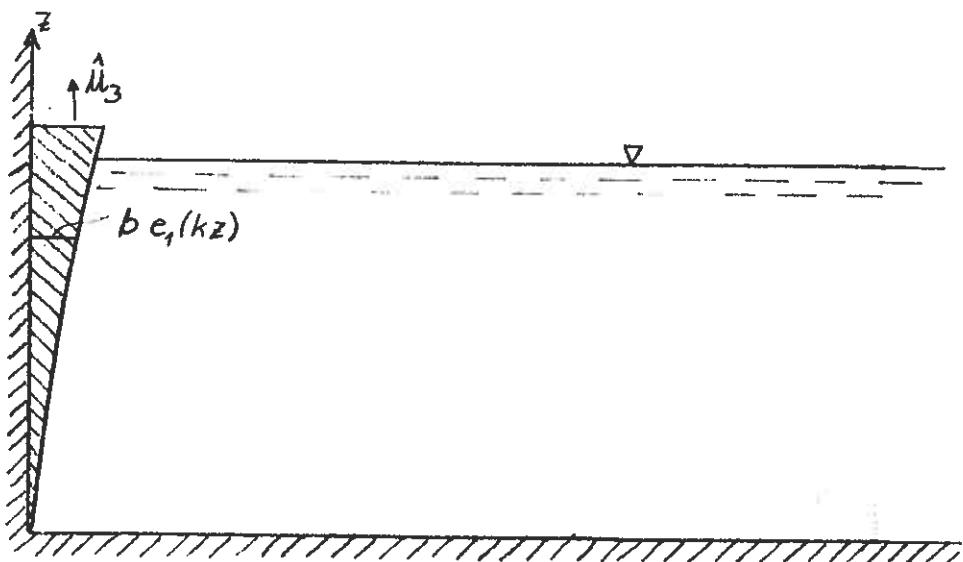
Den utstrålte effekten blir

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1}{2} R_{11} |u_1|^2 = \frac{\omega\rho f(kh)d}{2 \cdot 2 \cdot k^2} |u_1|^2 \\ &= \left| \frac{\omega \hat{u}_1}{gk} \right|^2 \frac{\rho g^2 f(kh)d}{4\omega} = \frac{\rho g^2 f(kh)d}{4\omega} |\hat{n}|^2 = Kd \end{aligned} \quad (D62)$$

i samsvar med (B75).

Merk at denne bølgjegeneratoren er fri for addert masse berre ved ein frekvens, nemleg berre den frekvensen som gir ein  $k$  og dermed  $e(kz)$  som passar til den konstruerte bølgjegeneratoren.

Me kan bruka dei funne resultata for å finna strålingsimpedansen til ein bølgjegenerator som arbeider i hivmodusen. Kroppen er plan og vertikal på venstre sida. På høgre sida er han avgrensa av flata  $x = be_1(kz)$  der  $b$  er så liten at det i samsvar med lineær teori kan seiast at denne flata går opp og ned ved  $x \approx 0$ . D.v.s.  $b$  er liten av same orden som bølgjeutsvinget  $\eta \ll \lambda$



Me viser nedanfor at funksjonen  $e_1(kz)$  skal vera

$$e_1(kz) = \frac{\sinh(kz+kh)}{\cosh(kh)} \quad (\text{D63})$$

$$\tan\alpha = b \frac{de_1(kz)}{dz} \quad (\text{D64})$$

Då  $b$  er liten av 1. orden, kan me setja  $\alpha \approx be_1'(kz)$

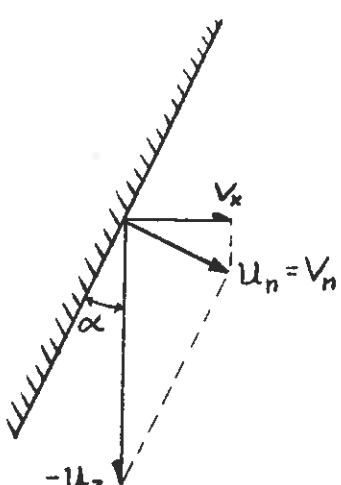
$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} = \hat{v}_n = \hat{u}_3 n_3 = \hat{u}_3 \cos(n, z) = -\hat{u}_3 \sin\alpha = -\hat{u}_3 \alpha \quad (\text{D65})$$

På S:

$$\hat{v}_x = \hat{v}_n \cos\alpha \approx \hat{v}_n = \hat{u}_3 n_3 \approx -\hat{u}_3 \alpha \quad (\text{D66})$$

På  $x = 0$ :

$$\hat{v}_x \Big|_{x=0} \approx -u_3 \alpha \approx -u_3 b \frac{de_1}{dz} \quad (\text{D67})$$



Skal få dette til å passa med løysing der

$$v_x \propto e(kz)e^{-ikx} \quad (\text{D68})$$

For å få dette til må me velja t.d.

$$e_1(kz) = \frac{\sinh(kz+kh)}{\cosh(kh)}$$

slik at

$$\frac{de_1}{dz} = ke(kz) = k \frac{\cosh(kz+kh)}{\cosh(kh)}$$

$$v_x \Big|_{x=0} \approx -\hat{u}_3 bke(kz)$$

$$\text{Altså må } v_x = -\hat{u}_3 bke(kz)e^{-ikx}$$

I formlane framfor må me då byta ut  $\hat{u}_1$  med  $-\hat{u}_3 b$ .

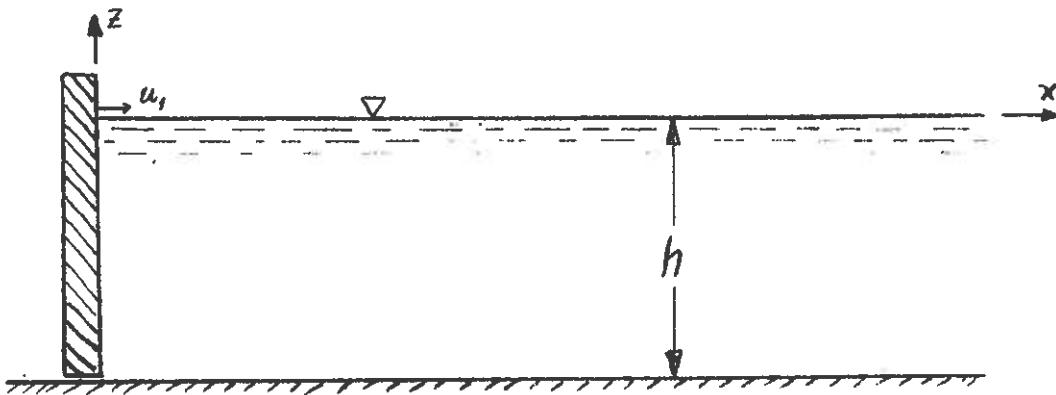
Den utstrålte effekten blir

$$\iint \frac{1}{2} \hat{p}\hat{v}^* d_1 s = \frac{d}{2} \left| bk\hat{u}_3 \right|^2 \frac{\omega\rho}{k} \int_{-h}^0 e^2(kz) dz \quad (\text{D69})$$

$$Z_{33} = \frac{\omega\rho b^2 d}{2} f(kh) \quad (\text{D70})$$

Merk at denne er reell. Den adderte massen  $m_{33}$  er null.

Bølgjegenerering med ei svingande vertikal plate.



Ei vertikal plate, som er sett i tvungne horisontale svingerørsler, genererer ei bølgje som forplantar seg ut frå planet  $x = 0$ . Som ei generalisering av (D47) går me ut frå at den horisontale farten har ein kompleks amplitud

$$\hat{u}_x = \hat{u}(z) = \hat{u}_1 c(z) \quad (D71)$$

For ei stiv plate i rein jagemodus er funksjonen  $c(z) \equiv 1$ . Set me  $c(z) = e(kz)$  får me spesialtilfellet som er undersøkt i det førre avsnittet. Er plata bøyteleg og det er ordna slik at fasen til svingerørsla varierer med djupna  $-z$ , blir funksjonen  $c$  kompleks. Me har difor ført inn funksjonen  $c(z)$  for å få meir generelle resultat enn om me berre set  $\hat{u}_x = \hat{u}_1$ .

Med å bruka separasjonsmetoden på Laplace likninga finn me at

$$\hat{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Z_n(z) \quad (D72)$$

der  $X_n(x)$  oppfyller (B54)

$$X_n'' = -\lambda_n X_n \quad (D73)$$

og  $Z_n(z)$  oppfyller (B35)

$$Z_n'' = \lambda_n Z_n \quad (D74)$$

Det kan visast at alle  $\lambda_n$  er reelle, at med

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots \quad (D75)$$

er berre  $\lambda_0 > 0$ , medan  $\lambda_n < 0$  for  $n > 0$ . Jfr. oppgåve B4. Me skriv då

$$\lambda_0 = k^2 \quad \text{og} \quad \lambda_n = -m_n^2 \quad \text{for } n > 0 \quad (D76)$$

Med

$$X_0(x) = A_0 e^{-ikx} \quad \text{og} \quad (D77)$$

$$X_n(x) = A_n e^{-m_n x} \quad \text{for } n > 0 \quad (\text{D78})$$

er strålingsvilkåret for  $x \rightarrow \infty$  oppfylt. Her er alle  $A_n$  førebels ukjende konstanter.

Med løysinga

$$Z_0(z) = \frac{2 \cosh(kz + kh)}{\sqrt{(1/k)\sinh(2kh) + 2h}} = \sqrt{\frac{2k}{f(kh)}} e(kz) \quad (\text{D79})$$

$$Z_n(z) = \frac{2 \cos(m_n z + m_n h)}{\sqrt{(1/m_n)\sin(2m_n h) + 2h}} \quad (\text{D80})$$

er grensevilkåra ved sjøbotnen  $z = -h$  og ved den frie overflata  $z = 0$  oppfylte dersom  $k$  er ei løysing av dispersjonslikninga (B44)

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (\text{D81})$$

og  $m_n$  ei løysing av

$$\omega^2 = -g m_n \tan(m_n h) \quad (\text{D82})$$

Vidare kan det visast at funksjonssettet  $\{Z_n(z)\}$  er normalisert og ortogonal. Jfr. oppg. B4. D.v.s. for  $n, l = 0, 1, 2, 3, \dots$  gjeld

$$\int_{-h}^0 Z_l^*(z) Z_n(z) dz = \delta_{nl} = \begin{cases} 1 & \text{for } l = n \\ 0 & \text{for } l \neq n \end{cases} \quad (\text{D83})$$

Med innsetjing av (D77) og (D78) i (D72) får me fartpotensialet

$$\hat{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Z_n(z) = A_0 e^{-ikx} Z_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-m_n x} Z_n(z) \quad (\text{D84})$$

For å bestemma dei ukjende konstantane  $A_n$ , bruker me grensevilkåret ved  $x = 0$

$$\hat{u} = \hat{u}(z) = \left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right|_{x=0} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n'(0) Z_n(z) \quad (\text{D85})$$

Me multipliserer med  $Z_1^*(z)$ , integrerer fra  $z = -h$  til  $z = 0$  og bruker ortogonalitetsvilkåret (D83). Det gjev

$$\int_{-h}^0 \hat{u}(z) Z_1^*(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} X_n'(0) \int_{-h}^0 Z_1^*(z) Z_n(z) dz = X_1'(0)$$

D.v.s.

$$X_n'(0) = \int_{-h}^0 \hat{u}(z) Z_n^*(z) dz$$

Etter (D77) og (D78) har me

$$X_0'(0) = -ikA_0 \quad X_n'(0) = -m_n A_n \quad \text{for } n > 0 \quad (\text{D88})$$

Med bruk av (D71) får me

$$A_n = a_n \hat{u}_1 \quad (\text{D89})$$

der

$$a_0 = \frac{-1}{ik} \int_{-h}^0 c(z) Z_0^*(z) dz \quad (\text{D90})$$

$$a_n = \frac{-1}{m_n} \int_{-h}^0 c(z) Z_n^*(z) dz \quad \text{for } n > 0 \quad (\text{D91})$$

Altså

$$\hat{\phi} = \varphi_1 \hat{u}_1 \quad (\text{D92})$$

der

$$\varphi_1 = a_0 Z_0(z) e^{-ikx} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_n(z) e^{-m_n x} \quad (\text{D93})$$

Fyrste ledet står for fjernfeltet og det siste ledet for nærfeltet.

Strålingsimpedansen blir etter (D41)

$$Z_{11} = -i\omega pd \int_{-h}^0 \left[ \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial x} \right]_{x=0} dx \quad (\text{D94})$$

der  $d$  er breidda av bølgjegeneratoren og renna. Strålings-

impedansen i forhold til breidda blir

$$\begin{aligned} Z'_{11} &= Z_{11}/d = -i\omega\rho \int_{-h}^0 \{a_0 Z_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_n(z)\} c^*(z) dz \\ &= -i\omega\rho \{a_0 i k a_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-m_n) a_n^*\} \end{aligned}$$

der me har brukt (D91) og (D92).

Altså

$$Z'_{11} = Z_{11}/d = \omega k \rho |a_0|^2 + i\omega \rho \sum_{n=1}^{\infty} m_n |a_n|^2 \quad (\text{D96})$$

Strålingsresistansen blir

$$R_{11} = \operatorname{Re}(Z_{11}) = \omega k \rho |a_0|^2 d \quad (\text{D97})$$

Den adderte massen blir

$$m_{11} = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}(Z_{11}) = \rho \sum_{n=1}^{\infty} m_n |a_n|^2 \quad (\text{D98})$$

Då alle  $m_n$  er positive ser me at alle tilskot til strålingsreaktansen er positive. Me ser at strålingsresistansen er knytt til "fjernfeltet" (leddet med  $a_0 e^{-ikx}$ ) medan strålingsreaktansen og dermed den adderte massen er knytt til "nærfeltet" (ledda med  $a_n e^{-mnx}$ ).

Før me diskuterer effekttransporten reknar me ut integralet

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_{-h}^0 \frac{1}{2} \hat{p} \hat{v}_x^* dz = -\frac{1}{2} i\omega \rho \int_{-h}^0 \hat{\phi} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}^* dz \\ &= -\frac{1}{2} i\omega \rho \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} X_n(x) X_l^*(x) \int_{-h}^0 Z_n Z_l^* dz \\ &= -\frac{1}{2} i\omega \rho \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) X_n^*(x) \end{aligned} \quad (\text{D99})$$

der me har brukt (D84) og (D83). Med bruk av (D88) og (D99) får me

$$K(x) = \left( \frac{1}{2} \omega k \rho |a_0|^2 + \frac{1}{2} i \omega \rho \sum_{n=1}^{\infty} m_n |a_n|^2 e^{-2m_n x} \right) |\hat{u}_1|^2 \quad (D100)$$

Me ser at p.g.a. ortogonalitetsvilkåret (D83) får me i produktet ikkje noko kryssledd frå ulike modi.

Effekttransporten pr. lengdeeining av bølgjefronten er

$$K = \operatorname{Re}\{K(x)\} = \frac{1}{2} \omega k \rho |a_0|^2 |\hat{u}|^2 \quad (D101)$$

Me ser at det dessutan er ein reaktiv effekt  $\operatorname{Im}\{K(x)\}$  som eksisterer berre i nærfeltet. Den aktive effekttransporten  $K$  i ei plan bølgje i ei ideell (tapstri) væske er sjølv sagt uavhengig av  $x$ . Me ser også at den utstrålte effekten - i samsvar med (A53) er

$$\frac{1}{2} R_{11} |\hat{u}_1|^2 = P_r = Kd = \operatorname{Re}\{K(x)\}d = K(\infty)d \quad (D102)$$

Tilsvarande kan strålingsimpedansen  $Z_{11}$  uttrykkjast ved

$$\frac{1}{2} Z_{11} |\hat{u}_1|^2 = K(0)d \quad (D103)$$

i samsvar med (D42).

Spesialtilfelle:

$$c(z) = e(kz) \quad (D104)$$

(Dette har me undersøkt direkte før).

Av (D90) og (D79) får me at

$$a_0 = \frac{-1}{ik} \sqrt{\frac{f(kh)}{2k}}$$

og av (D83) at  $a_n = 0$  for  $n > 0$ . Av (D98) får me då

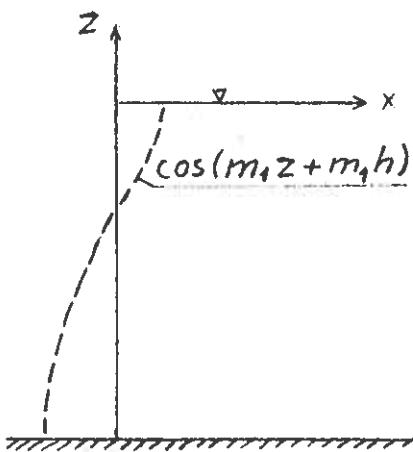
$$m_{11} = 0 \quad (D106)$$

i samsvar med tidlegare resultat. Av (D97) får me

$$R_{11} = \omega k \rho \frac{f(kh)}{2k^3} d = \frac{\omega \rho f(kh) d}{2k^2} \quad (D107)$$

i samsvar med (D61).

Dersom me derimot vel  
 $c(z) = \cos(m_1 z + m_1 h)$  får  
 me berre ein svinnmodus og  
 inga progressiv bølgje. Me  
 har altså lært oss korleis  
 me kan plaska i vatnet slik  
 at det berre blir plask og  
 inga bølgje! Dette er noko  
 som kan vera nyttig dersom  
 ein svingande kropp i sjøen ikkje skal generera uynskte  
 bølgjer. Jfr. R. Meir, The development of the oscillating  
 water column, pp. 35 - 42, Proc. Wave Energy Conference,  
 Heathrow Hotel, London, 22 - 23 Nov. 1978.



### Greens setning.

For to vilkårlege funksjonar  $\varphi_i$  og  $\varphi_j$  som begge oppfyller Helmholtz-likninga

$$\nabla^2 \varphi + \beta^2 \varphi = 0 \quad (\text{D108})$$

i eit visst volum, gjeld Greens setning

$$\oint \left( \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (\text{D109})$$

der integrasjonen går over den lukka flata som avgrensar rommet. Spesielt gjeld Greens setning om  $\varphi_i$  og  $\varphi_j$  oppfyller Laplace-likninga, d.v.s. om  $\beta = 0$ .

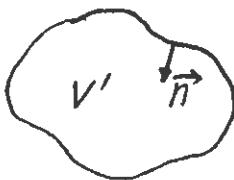
[Dette resultatet følgjer av Greens setning

$$\iiint_{V'} \nabla \cdot \vec{A} = - \oint A_n ds$$

med

$$\vec{A} = \varphi_i \nabla \varphi_j - \varphi_j \nabla \varphi_i$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j + \varphi_i \nabla^2 \varphi_j - \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i - \varphi_j \nabla^2 \varphi_i$$



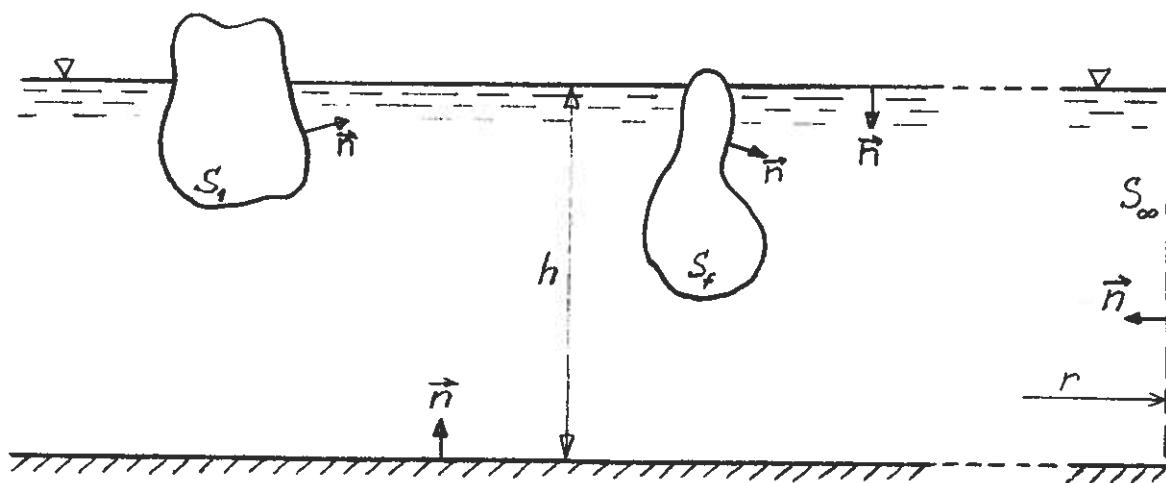
$$\begin{aligned}
 &= \varphi_i \nabla^2 \varphi_j - \varphi_j \nabla^2 \varphi_i \\
 &= \varphi_i (-\beta^2 \varphi_j) - \varphi_j (-\beta^2 \varphi_i) = 0
 \end{aligned}$$

og

$$A_n = \varphi_i \nabla_n \varphi_j - \varphi_j \nabla_n \varphi_i = \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}$$

Me skal bruka Greens setning på ei lukka flate som er sett saman av

- $S_1$ : Den vatte overflata av ein svingande fast kropp som kan generera bølgjer.
- $S_f$ : Den vatte overflata av ein annan fast kropp som er i ro.
- $z=-h$ : Sjøbotnen. (Merk at det same grensevilkåret  $\partial\phi/\partial n = 0$  gjeld både på sjøbotnen og på  $S_f$ , og at føresetnaden om plan horisontal sjøbotn er berre eit spesialtilfelle).
- $z=0$ : Den frie overflata. (Merk at visse delar av planet  $z = 0$  eventuelt må ekskluderast frå integrasjonsflata, p.g.a. dei to faste kroppane).
- $S_\infty$ : Ei sylinderflate med radius  $r$ , der  $r \rightarrow \infty$ .



Grunnen til at me tek med ein stilleståande kropp  $S_f$  er ikkje berre at me skal dekka tilfellet med at det ligg ein stor stein på sjøbotnen. Me kan t.d. ha interesse av å sjå på ein bølgjereflekterande fast vegg. Me skal sidan sjå at for di me har teke med flata  $S_f$  kan resultata her lett overførast til det interessante tilfellet med fleire svingande kroppar.

Me merkar oss at det er vatn overalt innanfor denne lukka flata, slik at me kan bruka Greens setning for to vilkårlege fartpotensial  $\phi_i$  og  $\phi_j$ , sidan desse må oppfylla Laplace-likninga overalt i vatnet. Grensevilkåret

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_{i,j} = 0 \quad \text{på } S_f \quad (\text{D113})$$

gjer at

$$\iint_{S_f} \left( \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (\text{D114})$$

Det tilsvarende integralet over sjøbotnen  $z = -h$  blir og null. Det tilsvarende integralet over den frie overflata  $z = 0$  blir og null fordi grensevilkåret der

$$0 = \left( \omega^2 - g \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi_{i,j} = \left( \omega^2 + g \frac{\partial}{\partial n} \right) \phi_{i,j} \quad (\text{D115})$$

gjev

$$\phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} = -\phi_i \frac{\omega^2}{g} \phi_j + \phi_j \frac{\omega^2}{g} \phi_i = 0$$

Me definerer

$I(\phi_i, \phi_j) = \iint_S \left( \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right) dS$

(D117)

der  $S = S_1$ , den vætte overflata av den svingande kroppen. Men merk at det ikkje gjer nokon skilnad om me seier at  $S = S_1 \cup S_f$ , sidan flata  $S_f$  ikkje gjev noko tilskot til integralet.

Det følgjer no av Greens setning at

$$I(\phi_i, \phi_j) = - \iint_{S_\infty} \left( \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right) dS \quad (D118)$$

Merk at me i desse uttrykka godt kan byta  $\phi_i$  eller  $\phi_j$  med sine kompleks konjugerte. Funksjonane  $\phi_i$  og  $\phi_j$  er fartpotensialet for bølgjer som er genererte av den svingande kroppen  $S_1$  eller andre bølgjer. Vilkåret er berre at fartpotensiala oppfyller dei nemnde randvilkåra på dei stille flatene  $S_f$  og sjøbotnen og på den frie overflata  $z = 0$ .

Merk at

$$I(\phi_i, \phi_j) = -I(\phi_j, \phi_i)$$

### Strålingsresistansen.

Etter (D41) er strålingsimpedansen for svingemodus nr. q

$$Z_{qq} = -i\omega\rho \iint_{S_1} \varphi_q \frac{\partial \varphi_q}{\partial n} dS = -i\omega\rho \iint_{S_1} \varphi_q \frac{\partial \varphi_q^*}{\partial n} dS \quad (D119)$$

Strålingsresistansen er

$$R_{qq} = \operatorname{Re}\{Z_{qq}\} = \frac{1}{2} (Z_{qq} + Z_{qq}^*) \quad (D120)$$

$$R_{qq} = \frac{\omega\rho}{2} \iint_{S_1} \left( -i\varphi_q \frac{\partial \varphi_q^*}{\partial n} + i\varphi_q^* \frac{\partial \varphi_q}{\partial n} \right) dS \quad (D121)$$

Med bruk av (D117) og (D118) får me

$$R_{qq} = \frac{i\omega\rho}{2} I(\varphi_q^*, \varphi_q) = \quad (D122)$$

$$= - \frac{i\omega\rho}{2} \iint_{S_\infty} \left( \varphi_q^* \frac{\partial \varphi_q}{\partial n} - \varphi_q \frac{\partial \varphi_q^*}{\partial n} \right) dS \quad (D123)$$

Så bruker me strålingsvilkåret om utgående bølgje i uendelig avstand. Etter (B105) er då  $\varphi_q$  asymptotisk når  $kr \rightarrow \infty$

av forma

$$\varphi_q = a_q(\theta) e(kz)(kr)^{-\frac{1}{2}} e^{-ikr} + O(r^{-1}) \quad (D124)$$

Altså

$$\frac{\partial \varphi_q}{\partial n} = - \frac{\partial \varphi_q}{\partial r} = ik\varphi_q + O(r^{-1}) \quad (D125)$$

Difor er  $(\varphi_q \frac{\partial \varphi^*}{\partial n})$  reint imaginær på  $S_\infty$ . Dei to ledda i integralet over  $S_\infty$  er altså like, slik at

$$R_{qq} = i\omega\rho \int \int_{S_\infty} \varphi_q \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} dS \quad (D126)$$

Me samanliknar resultatet (D126) med utgangspunktet, uttrykket (D119) for  $Z_{qq}$ . Uttrykka for  $Z_{qq}$  og  $R_{qq}$  har ein viss likskap. Skiftet av forteikn heng saman med den valde retninga på flatenormalane, nemleg at  $\vec{n}$  peikar utover frå  $S_1$  og innover frå  $S_\infty$  (i begge tilfelle innover i væskevolumet som det er integrert over. Sjå figuren). Når me integrerer over den vætte overflata  $S_1$  av den svingande kroppen, får me heile strålingsimpedansen. Når me integrerer i fjernfeltet over  $S_\infty$ , får me strålingsresistansen, altså berre realdelen av strålingsimpedansen.

Me har vore borti noko helt tilsvarande før, nemleg for ei generert plan bølgje. Samanlikna (D102) og (D103).

Då  $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$  på  $S_\infty$  og vidare  $\partial\varphi^*/\partial r = ik\varphi^*$  har me

$$R_{qq} = \omega k \rho \iint_{S_\infty} |\varphi_q|^2 dS = \omega k \rho \int_0^{2\pi} \int_{-h}^0 |\varphi_q|^2 r d\theta dz \quad (D126a)$$

Dette viser at  $R_{qq}$  er reell og positiv. Med bruk av (D124) og (B73) får me

$$R_{qq} = \frac{\omega \rho f(kh)}{2k} \int_0^{2\pi} |a_q(\theta)|^2 d\theta \quad (D126b)$$

Bølgjer som oppfyller strålingsvilkåret.

Bølgjer som oppfyller strålingsvilkåret har i fjernfeltet eit potensial

$$\hat{\phi} = \psi \sim A(\theta) e(kz) (kr)^{-\frac{1}{2}} e^{-ikr} \quad (\text{D129-3})$$

Jfr. (B105). Dette gjeld i det tre-dimensjonale tilfellet. Me bruker her symbolet  $\psi$  for å markera at potensialet oppfyller strålingsvilkåret. I det to-dimensjonale tilfellet, med plane bølgjer i fjernfeltet gjeld

$$\hat{\phi} = \psi \sim A^\pm e(kz) e^{\mp ikx} = A^\pm e(kz) e^{-ik|x|} \quad (\text{D129-2})$$

Her gjeld øvre forteikn for  $x \rightarrow +\infty$  ( $\theta = 0$ ) og nedre forteikn for  $x \rightarrow -\infty$  ( $\theta = \pi$ ).

For to vilkårlege bølgjer som begge oppfyller strålingsvilkåret (D129) har me, når me tek med berre det dominerande leddet i fjernfeltet

$$\frac{\partial}{\partial n} \psi_{i,j} = ik\psi_{i,j} \quad (\text{D130})$$

Jfr. også (D125). Difor blir

$$\iint_{S_\infty} \left( \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial n} - \psi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (\text{D131})$$

og etter (D118)

$$I(\psi_i, \psi_j) = 0 \quad (\text{D132})$$

Merk at også

$$I(\psi_i^*, \psi_j^*) = 0 \quad (\text{D133})$$

men at

$$I(\psi_i, \psi_j^*) \neq 0$$

då  $\psi_i$  og  $\psi_j^*$  ikkje oppfyller same strålingsvilkåret.

Med bruk av (D118), (D129-3) og (D130) får me

$$\begin{aligned}
 I(\psi_i, \psi_j^*) &= - \iint_{S_\infty} A_i(\theta) A_j^*(\theta) e^{2(kz)} \frac{1}{kr} (-ik - ik) dS \\
 &= 2i \int_{-h}^0 e^{2(kz)} dz \int_0^{2\pi} A_i(\theta) A_j^*(\theta) d\theta \quad (D134-3)
 \end{aligned}$$

Integralet over  $z$  er utrekna i (B73). Det gjev

$$I(\psi_i, \psi_j^*) = i \frac{f(kh)}{k} \int_0^{2\pi} A_i(\theta) A_j^*(\theta) d\theta \quad (D135-3)$$

For det to-dimensjonale tilfellet gjev (D129-2)

$$I(\psi_i, \psi_j^*) = -(A_i^+ A_j^{+*} + A_i^- A_j^{-*})(-ik - ik) \int_{-h}^0 e^{2(kz)} dz \int_0^d dy \quad (D134-2)$$

Pr. lengdeining i  $y$ -retning har me då

$$I(\psi_i, \psi_j^*)/d = +if(kh)(A_i^+ A_j^{+*} + A_i^- A_j^{-*}) \quad (D135-2)$$

### Resiprositetssetninga.

Me har definert ei strålingsimpedansmatrise (D38)

$$Z_{ij} = -i\omega\rho \iint_{S_1} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS = -i\omega\rho \iint_{S_1} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n} dS \quad (D135a)$$

Av dette får me

$$Z_{ij} - Z_{ji} = -i\omega\rho I(\varphi_j, \varphi_i) = 0 \quad (D135b)$$

i samsvar med (D132), sidan både  $\varphi_j$  og  $\varphi_i$  oppfyller strålingsvilkåret. Av dette følgjer at strålingsimpedansmatrisa er symmetrisk om hovuddiagonalen

$Z_{ij} = Z_{ji}$

(D135c)

Dette er resiprositetssatsen som seier at krafta i ein modus på grunn av svining i ein annan modus med einingsamplitude, er lik krafta i den andre modusen p.g.a. svining med einingsamplitude i den fyrste modusen.

Vidare har me

$$\begin{aligned} R_{ij} = \operatorname{Re}(Z_{ij}) &= \frac{1}{2} (Z_{ij} + Z_{ij}^*) = \frac{1}{2} (Z_{ij} + Z_{ji}^*) \\ &= -\frac{i\omega\rho}{2} \iint_{S_1} \left( \varphi_j \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n} - \varphi_i^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \right) dS \end{aligned}$$

eller

$$R_{ij} = R_{ji} = \frac{i\omega\rho}{2} I(\varphi_i^*, \varphi_j) = -\frac{i\omega\rho}{2} I(\varphi_i, \varphi_j^*) \quad (\text{D135d})$$

### Kotsjin-funksjonar.

Utstrålte bølgjer og diffraksjonsbølgjer er typiske eksempel på bølgjer som oppfyller strålingsvilkåret. Men innfallande bølgjer oppfyller ikke strålingsvilkåret. Me ser på to generelle bølgjer

$$\boxed{\Phi_{i,j} = \Phi_{i,j} + \psi_{i,j}} \quad (\text{D136})$$

der  $\Phi_i$  og  $\Phi_j$  er komplekse amplitudar for to vilkårlege innfallande bølgjer.

Då har me etter (D117)

$$I(\Phi_i, \Phi_j) = I(\Phi_i, \Phi_j) + I(\Phi_i, \psi_j) + I(\psi_i, \Phi_j) + I(\psi_i, \psi_j) \quad (\text{D137})$$

Her er siste ledet null etter (D132). Vidare er fyrste ledet null etter Greens setning. Me har nemleg at innfallande bølgjer, per definisjon, oppfyller Laplace-likninga overalt innanfor den sylinderiske flata  $S_\infty$ , ja jamvel innanfor flatene  $S_1$  og  $S_f$ .

Etter dette har me

$$I(\phi_i, \phi_j) = I(\phi_i, \psi_j) + I(\psi_i, \phi_j) \quad (D138)$$

Me ser no på to plane innkomande bølgjer med amplituden  $n_{oi,j}$  og innfallsvinkel  $\gamma_{i,j}$

$$\Phi_{i,j} = \frac{-g}{i\omega} n_{oi,j} e(kz) \exp\{-ikx \cos\gamma_{i,j} - iky \sin\gamma_{i,j}\} \quad (D139)$$

Vidare definerer me dei såkalla Kotsjin-funksjonane etter Newman (1976).

$$H_j(\gamma) = -\frac{k}{f(kh)} I\{e(kz)e^{ik(x \cos\gamma + y \sin\gamma)}, \psi_j\}$$

(D140)

Me skal sidan sjå at koeffisienten  $A(\theta)$  i fjernfeltpotensialet (D129-3) er proporsjonal med  $H(\theta)$ . Jfr. (D165).

Me ser at

$$H_j(\gamma + \pi) = -\frac{k}{f(kh)} I\{e(kz)e^{-ik(x \cos\gamma + y \sin\gamma)}, \psi_j\} \quad (D141)$$

Her multipliserer me med  $(-g/i\omega)n_o$  for begge dei innfallande bølgjene. Dermed får me fra (D138)

$$I(\phi_i, \phi_j) = \frac{gf(kh)}{i\omega k} \{n_{oi} H_j(\pi + \gamma_i) - n_{oj} H_i(\pi + \gamma_j)\} \quad (D142)$$

der me har brukt relasjonen  $I(\phi_i, \phi_j) = -I(\phi_j, \phi_i)$  i siste ledet.

### Haskind-relasjonen.

Me skal no bruka den funne samanhengen (D142) til å utleia Haskind-relasjonen som gjev eit nyttig uttrykk for den eksiterande krafta som ei innkomande bølgje påverkar ein fast kropp med.

Etter (D31) gjev den innkomande bølgja  $\hat{\phi}_i$  ei eksitasjonskraft med komponent nr. q ( $q = 1, 2, \dots, 6$ )

$$\hat{F}_{e,q} = i\omega\rho \iint_{S_1} \hat{\phi}_i n_q dS \quad (D143)$$

Her er

$$\hat{\phi}_i = \hat{\phi}_i + \hat{\psi}_i \quad (D143a)$$

potensialet ved overflata  $S_1$  av kroppen. Vidare er  $\psi_i$  potensialet frå den diffrakterte bølgja som skriv seg frå at den innfallende bølgja  $\hat{\phi}_i$  ikke åleine oppfyller randvilkåret på  $S_1$ , nemleg at

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} (\hat{\phi}_i + \psi_i) = 0 \quad \text{på } S_1 \text{ (og på } S_f) \quad (D144)$$

Eksitasjonskrafta  $F_{e,q}$  er nemleg den krafta som verkar på kroppen når han er i ro.

Etter (D18) er

$$n_q = \left. \frac{\partial \phi_q}{\partial n} \right|_{S_1} \quad (D145)$$

der  $\phi_q$  er koeffisienten  $\hat{\phi}/\hat{u}_i$  for utstrålt bølgje frå svingemodus nr. q.

Me har då

$$\hat{F}_{e,q} = i\omega\rho \iint_{S_1} \hat{\phi}_i \frac{\partial \phi_q}{\partial n} dS \quad (D146)$$

$$= i\omega\rho \iint_{S_1} \left( \hat{\phi}_i \frac{\partial \phi_q}{\partial n} - \phi_q \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial n} \right) dS \quad (D147)$$

Merk at dette er lovleg, då me etter (D144) har addert til null i integranden. Etter (D117) har me

$$\hat{F}_{e,q} = i\omega\rho I(\hat{\phi}_i, \phi_q) \quad (D148)$$

Så bruker me (D142), med di me let  $\psi_j \rightarrow \phi_q$  og  $H_j(\gamma) \rightarrow$

$h_q(\gamma)$ . Vidare har me  $\eta_{oj} \rightarrow \eta_{oq} = 0$ , etter di me har berre ei innfallande bølgje, altså berre  $\eta_{oi} \neq 0$ . Då får me

$$\hat{F}_{e,q} = i\omega\rho \frac{gf(kh)}{i\omega k} \eta_{oi} h_q(\pi + \gamma_i) = \frac{\rho g f(kh)}{k} \eta_{oi} h_q(\pi + \gamma_i) \quad (D149)$$

Med bruk av (D141) kan dette uttrykkjast

$$\hat{F}_{e,q} = i\omega\rho \frac{-g}{i\omega} \eta_{oi} I\{e(kz)e^{-ik(x\cos\gamma+y\sin\gamma)}, \varphi_q\} \quad (D150)$$

og vidare med bruk av (D139)

$$\hat{F}_{e,q} = i\omega\rho I(\hat{\Phi}_i, \varphi_q) \quad (D151)$$

Dette er Haskinds formel som me og kunne ha fått direkte frå (D148) slik:

$$\hat{F}_{e,q} = i\omega\rho I(\hat{\Phi}_i + \hat{\psi}_i, \varphi_q) = i\omega\rho I(\hat{\Phi}_i, \varphi_q) + i\omega\rho I(\hat{\psi}_i, \varphi_q)$$

for siste ledet her blir null i samsvar med (D132) då både  $\psi_i$  og  $\varphi_q$  oppfyller strålingsvilkåret.

Det er særsteds nyttig at me har eit uttrykk for eksitasjonskrafta der diffraksjonspotensialet  $\psi_i$  ikkje går eksplisitt inn. Spesielt er det ofte nyttig å utføra integrasjonen i fjernfeltet i samsvar med (D118).

$$\begin{aligned} \hat{F}_{e,q} &= -i\omega\rho \iint_{S_\infty} \left( \hat{\Phi}_i \frac{\partial \varphi_q}{\partial n} - \varphi_q \frac{\partial \hat{\Phi}_i}{\partial n} \right) dS \\ &= i\omega\rho \int_0^{2\pi} \int_{-h}^0 \left( \hat{\Phi}_i \frac{\partial \varphi_q}{\partial r} - \varphi_q \frac{\partial \hat{\Phi}_i}{\partial r} \right) r d\theta dz \end{aligned} \quad (D153)$$

### Meir om Kotsjin-funksjonar.

Me skal fyrst visa at  $H_j(\theta) \propto A_j(\theta)$  og sidan uttrykkja  $I(\phi_i, \phi_j^*)$  ved Kotsjin-funksjonar. Her er  $\phi_i$  og  $\phi_j$  defi-

nerte ved (D136) som ein sum av ei innfallande bølgje og ei bølgje som oppfyller strålingsvilkåret.

Av definisjonen (D140) og av (D129-3) får me

$$-\frac{f(kh)}{k} H_j(\gamma) = I \left\{ e(kz) e^{ikr(\cos\theta\cos\gamma + \sin\theta\sin\gamma)}, \right. \\ \left. \frac{A_j(\theta)}{\sqrt{kr}} e(kz) e^{-ikr} \right\} \quad (D154)$$

med di me kan bruka fjernfeltpotensialet for  $\psi_j$ , fordi integralet kan gå over  $S_\infty$  i samsvar med (D118). Då me har (B73)

$$\int_{-h}^0 e^2(kz) dz = \frac{f(kh)}{2k} \quad (D155)$$

får me

$$-H_j(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos(\theta-\gamma)} (-ik) A_j(\theta) e^{-ikr} \\ -A_j(\theta) e^{-ikr} ik \cos(\theta-\gamma) e^{ikr \cos(\theta-\gamma)} \} (kr)^{-\frac{1}{2}} r d\theta \\ = -\frac{i}{2} \sqrt{kr} \int_0^{2\pi} (1+\cos(\theta-\gamma)) A_j(\theta) e^{-ikr(1-\cos(\theta-\gamma))} d\theta \quad (D156)$$

Her er det underforstått at  $kr \rightarrow \infty$ . Difor oscillerer integranden uendelig raskt med  $\theta$  og gjev såleis ikke noko tilskot til integralet, bortsett frå når  $1-\cos(\theta-\gamma) = 0$ . Me kan altså integrera med den såkalla "metoden med stasjonær fase".

Me innfører ny integrasjonsvariabel  $\alpha$ , ved

$$\alpha^2 = kr(1-\cos(\theta-\gamma)) \quad (D157)$$

$$2\alpha d\alpha = kr \sin(\theta-\gamma) d\theta = kr \sqrt{1-\cos^2(\theta-\gamma)} d\theta$$

$$\cos(\theta-\gamma) = 1 - \frac{\alpha^2}{kr}$$

$$\begin{aligned}
 d\theta &= \frac{2\alpha}{kr} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{\alpha^2}{kr} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} d\alpha = \frac{2\alpha}{kr} \left\{ \frac{2\alpha^2}{kr} - \frac{\alpha^4}{(kr)^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} d\alpha \\
 &= \sqrt{\frac{2}{kr}} \left\{ 1 - \frac{\alpha^2}{2kr} \right\}^{-\frac{1}{2}} d\alpha \\
 1 + \cos(\theta - \gamma) &= 2 - \frac{\alpha^2}{kr} = 2 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2kr} \right)
 \end{aligned}$$

Tilskot til integralet får me altså berre for området  $\theta \approx \gamma$  som gjev  $\alpha^2/kr \approx 0$ . Same kor raskt den kontinuerlege funksjonen  $A_j(\theta)$  varierer, kan me parera med ein så stor  $r$  at me kan setja  $A_j(\theta) \approx A_j(\gamma)$  i heile det området som gjev tilskot til integralet. Me får altså

$$-H_j(\gamma) = -\frac{i}{2} \sqrt{kr} 2 A_j(\gamma) \sqrt{\frac{2}{kr}} \int e^{-i\alpha^2} d\alpha \quad (\text{D163})$$

der me har sløyft ledd som forsvinn når  $r \rightarrow \infty$ . Tilskot til integralet får me berre i eit lite intervall nær 0 for  $\frac{\alpha^2}{kr}$ . Men når  $kr \rightarrow \infty$ , kan me setja integrasjonsgrensene  $\pm \infty$ .

Altså får me

$$\begin{aligned}
 -H_j(\gamma) &= -i \sqrt{2} A_j(\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha^2} d\alpha \quad (\text{D164}) \\
 &= \sqrt{2} A_j(\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} (-\sin \alpha^2 - i \cos \alpha^2) d\alpha \\
 &= -\sqrt{2} A_j(\gamma) (1+i) \sqrt{\pi/2}
 \end{aligned}$$

$H_j(\gamma) = \sqrt{2\pi} A_j(\gamma) e^{+i\pi/4} \quad (\text{D165})$

Me kan då også uttrykkja fjernfeltløysinga (D129-3) som

$\psi_j \sim H_j(\theta) e(kz) (2\pi kr)^{-\frac{1}{2}} e^{-i(kr+\pi/4)} \quad (\text{D166})$

og (D135-3) blir

$$I(\psi_i, \psi_j^*) = i \frac{f(kh)}{2\pi k} \int_0^{2\pi} H_i(\theta) H_j^*(\theta) d\theta \quad (D167)$$

Som ein parallel til uttrykket (D142) for  $I(\phi_i, \phi_j)$ , skal me no finna eit uttrykk for  $I(\phi_i, \phi_j^*)$ , der  $\phi_i$  og  $\phi_j$  som før er gjevne ved (D136):  $\phi_{i,j} = \phi_{i,j} + \psi_{i,j}$  der  $\phi_i$  og  $\phi_j$  representerer innfallande bølgjer (D139) og  $\psi_i$  og  $\psi_j$  representerer bølgjer som oppfyller strålingsvilkåret. Generelt får me frå (D117) og (D136)

$$I(\phi_i, \phi_j^*) = I(\phi_i, \phi_j^*) + I(\phi_i, \psi_j^*) + I(\psi_i, \phi_j^*) + I(\psi_i, \psi_j^*) \quad (D168)$$

Fyrste leddet her forsvinn fordi dei innfallande bølgjene  $\phi_i$  og  $\phi_j$  (og dermed  $\phi_j^*$ ) oppfyller Laplace-likninga også innanfor flatene  $S_1$  og  $S_f$ . Frå (D140) har me

$$H_j^*(\gamma) = - \frac{k}{f(kh)} I \left\{ e(kz) e^{-ik(x \cos \gamma + y \sin \gamma)}, \psi_j^* \right\} \quad (D169)$$

Mellomrekning:

$$\begin{aligned} I(\phi_i, \psi_j^*) &= \frac{g}{-i\omega} n_{oi} I \left( e(kz) e^{-ik(x \cos \gamma_i + y \sin \gamma_i)}, \psi_j^* \right) \\ &= \frac{gf(kh)}{i\omega k} n_{oi} H_j^*(\gamma_i) \end{aligned} \quad (D170)$$

$$\begin{aligned} I(\psi_i, \phi_j^*) &= -I(\phi_j^*, \psi_i) = -[I(\phi_j, \psi_i)]^* \\ &= - \left[ \frac{gf(kh)}{i\omega k} n_{oj} H_i^*(\gamma_j) \right]^* = \frac{gf(kh)}{i\omega k} n_{oj}^* H_i(\gamma_j) \end{aligned} \quad (D171)$$

Me får då når me også bruker (D167)

$$\begin{aligned} I(\phi_i, \phi_j^*) &= \frac{gf(kh)}{i\omega k} \left\{ n_{oi} H_j^*(\gamma_i) + n_{oj}^* H_i(\gamma_j) \right\} \\ &\quad + \frac{if(kh)}{2\pi k} \int_0^{2\pi} H_i(\theta) H_j^*(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (D172)$$

Det er siste leddet i (D172) som representerer den tydelegaste skilnaden frå uttrykket (D142) for  $I(\phi_i, \phi_j)$ .

Som ein illustrasjon ser me på (D135d)

$$R_{ij} = R_{ji} = -\frac{i\omega\rho}{2} I(\phi_i, \phi_j^*) \quad (D173)$$

Med  $\phi_{i,j} = 0 + \phi_{i,j} \hat{u}_{i,j}$ , altså  $n_{oi,j} = 0$  og  $H_{i,j} = h_{i,j} \hat{u}_{i,j}$  gjev (D172):

$$R_{ij} = \frac{\omega\rho f(kh)}{4\pi k} \int_0^{2\pi} h_i(\theta) h_j^*(\theta) d\theta \quad (D174)$$

Med bruk av (D165) gjev dette

$$R_{ij} = \frac{\omega\rho f}{2k} \int_0^{2\pi} a_i(\theta) a_j^*(\theta) d\theta \quad (D175)$$

som er i samsvar med (D126b) når  $i = j$ .

### Effekt absorbert av svingande kropp.

Eit flatelement  $dS$  på den svingande flata  $S_1$  tek i tidsmiddel ein effekt

$$dP = -I_n dS \quad (D176)$$

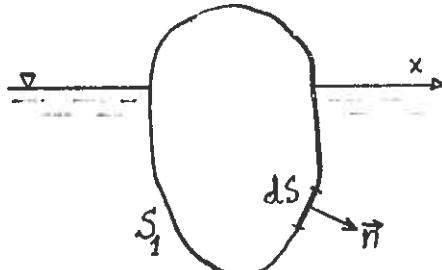
der intensiteten etter (A47) har ein normalkomponent

$$I_n = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{p}\hat{v}_n^*) = \frac{1}{4} (\hat{p}\hat{v}_n^* + \hat{p}^*\hat{v}_n) \quad (D177)$$

med  $\hat{p} = -i\omega\rho\hat{\phi}$  og  $\hat{v}_n = \partial\hat{\phi}/\partial n$ . Den absorberete effekten er altså

$$P = - \iint_{S_1} I_n dS = - \frac{1}{4} \iint_{S_1} (\hat{p}\hat{v}_n^* + \hat{p}^*\hat{v}_n) dS \quad (D180)$$

$$= \frac{i\omega\rho}{4} \iint_{S_1} \left( \hat{\phi} \frac{\partial\hat{\phi}^*}{\partial n} - \hat{\phi}^* \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial n} \right) dS \quad (D181)$$



eller med bruk av (D117)

$$P = \frac{i\omega\rho}{4} I(\hat{\phi}, \hat{\phi}^*) \quad (D182)$$

Me skal sjå på absorpsjon av energi frå ei innfallande plan bølgje med kompleks amplitud  $n_0$  (referert til origo) og innfallsvinkel  $\gamma$ . Fartpotensialet har ein kompleks amplitud

$$\hat{\phi}_i = \frac{-g}{i\omega} n_0 e(kz) e^{-ik(x \cos \gamma + y \sin \gamma)} \quad (D183)$$

Då denne ikkje åleine kan oppfylla randvilkåra på den svingande overflata  $S_1$  (og på den stilleståande overflata  $S_f$ ), blir det sett opp eit diffraksjonspotensial  $\psi_d$  som oppfyller strålingsvilkåret og som er slik at

$$\frac{\partial}{\partial n} (\hat{\phi}_i + \hat{\psi}_d) = 0 \quad \text{på } S_1 \text{ (og på } S_f) \quad (D184)$$

Skal kroppen absorbera energi, må han svinga. Arbeid er jo kraft multiplisert med veg, og effekt er kraft multiplisert med fart. Den svingande kroppen genererer ei bølgje med fartpotensial

$$\hat{\phi}_r = \sum_{q=1}^6 \varphi_q \hat{u}_q \quad (D185)$$

i samsvar med (D22). Alle  $\varphi_q$  og dermed  $\phi_r$  oppfyller strålingsvilkåret, og randvilkåra (D18) er

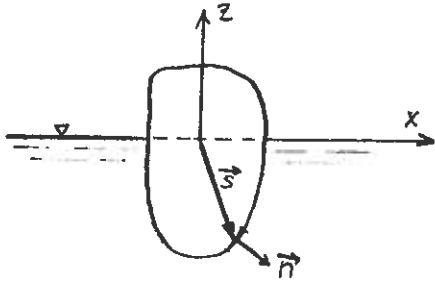
$$\frac{\partial \varphi_q}{\partial n} = n_q \quad \text{på } S_1 \quad (D186)$$

Elles oppfyller alle  $\varphi_q$  dei vanlege homogene randvilkåra på dei stilleståande flatene  $S_f$  og  $z = -h$  og på den frie overflata  $z = 0$ .

Av (D185) og (D186) får me

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi_r}{\partial n} \right|_{S_1} &= \sum_{q=1}^6 n_q \hat{u}_q = \vec{n} \cdot \vec{u} + (n_4, n_5, n_6) \cdot (u_4, u_5, u_6) \\ &= \vec{n} \cdot \vec{u} + (\vec{s} \times \vec{n}) \cdot \vec{\delta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \vec{n} \cdot \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{s} \cdot \vec{n} \\
 &= \vec{n} \cdot (\vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{s}) \\
 &= (\vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{s})_n \\
 &\quad (D186a)
 \end{aligned}$$



Her er  $\vec{u}$  farten p.g.a. translasjon, og  $\vec{\omega} \times \vec{s}$  er farten p.g.a. rotasjon. Randvilkåret (B17) på den svingande overflata er altså oppfylt når (D186) er gyldig.

Det resulterende fartpotensialet er då

$$\hat{\phi} = \hat{\Phi}_i + \hat{\psi}_d + \hat{\phi}_r \quad (D187)$$

For å finna effekten  $P$  må me i samsvar med (D182) rekna ut

$$\begin{aligned}
 I(\hat{\phi}, \hat{\phi}^*) &= I(\hat{\Phi}_i + \hat{\psi}_d, \hat{\Phi}_i^* + \hat{\psi}_d^*) + I(\hat{\Phi}_i + \hat{\psi}_d, \hat{\phi}_r^*) \\
 &\quad + I(\hat{\phi}_r, \hat{\Phi}_i^* + \hat{\psi}_d^*) + I(\hat{\phi}_r, \hat{\phi}_r^*) \quad (D188)
 \end{aligned}$$

Det første av desse fire ledde forsvinn p.g.a. randvilkåret (D184). Jfr. (D117). Me har altså den absorberte effekten

$P = P_i - P_r$

(D189)

der

$$\begin{aligned}
 P_i &= \frac{i\omega\rho}{4} I(\hat{\Phi}_i + \hat{\psi}_d, \hat{\phi}_r^*) - \frac{i\omega\rho}{4} I(\hat{\Phi}_i^* + \hat{\psi}_d^*, \hat{\phi}_r) \\
 &= \text{Re} \left\{ \frac{i\omega\rho}{2} I(\hat{\Phi}_i + \hat{\psi}_d, \hat{\phi}_r^*) \right\} \quad (D190)
 \end{aligned}$$

kan kallast den innfallande effekten og

$$P_r = -\frac{i\omega\rho}{4} I(\hat{\phi}_r, \hat{\phi}_r^*) \quad (D191)$$

kan kallast den utstrålte effekten.

Med bruk av (D167) får me

$$P_r = \frac{\omega \rho f(kh)}{8\pi k} \int_0^{2\pi} |H_r(\theta)|^2 d\theta \quad (D191a)$$

som viser at den utstrålte effekten er positiv definit.

No bruker me (D185) og får

$$P_i = \operatorname{Re} \left\{ \frac{i\omega\rho}{2} \sum_{q=1}^6 I(\hat{\phi}_i + \hat{\psi}_d, \varphi_q^*) \hat{u}_q^* \right\} \quad (D192)$$

og

$$P_r = - \frac{i\omega\rho}{4} \sum_{q=1}^6 \sum_{q'=1}^6 I(\varphi_q, \varphi_{q'}^*, \hat{u}_q \hat{u}_{q'}^*) \quad (D193)$$

For å føra inn eksitasjonskrafta  $\hat{F}_{e,q}$  i (D192) konstanter me at p.g.a. randvilkåret (D184) og p.g.a. at  $\partial\varphi_q / \partial n$  er reell, så gjeld

$$\begin{aligned} I(\hat{\phi}_i + \hat{\psi}_d, \varphi_q^*) &= \iint_{S_1} (\hat{\phi}_i + \hat{\psi}_d) \frac{\partial \varphi_q^*}{\partial n} dS \\ &= \iint_S (\hat{\phi}_i + \hat{\psi}_d) \frac{\partial \varphi_q}{\partial n} dS = I(\hat{\phi}_i + \hat{\psi}_d, \varphi_q) \\ &= I(\hat{\phi}_i, \varphi_q) = \hat{F}_{e,q} / i\omega\rho \end{aligned} \quad (D194)$$

i samsvar med (D148). Difor kan (D192) skrivast

$$P_i = \operatorname{Re} \sum_{q=1}^6 \frac{1}{2} (\hat{F}_{e,q} \hat{u}_q^*) \quad (D195)$$

I samsvar med (D135d) kan me dessutan skriva (D193)

$$P_r = \sum_{q=1}^6 \sum_{q'=1}^6 \frac{1}{2} R_{q'q} \hat{u}_q \hat{u}_{q'}^* \quad (D196)$$

der  $R_{q'q}$  er element i strålingsresistensmatrisa.

Merk at me ikke får nokon absorbert effekt  $P = P_i - P_r$  utan at  $P_r \neq 0$  d.v.s.:  $\phi_r \neq 0$ . Det går ikke an å absorbera energi frå den innkomande bølgja utan å generera ei bølgje.

Me ser no på spesialtilfellet med berre ein modus, t.d. berre hivmodusen,  $q = 3$ .

Då har me

$$P_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{F}_{e,3} \hat{u}_3^*) = \frac{1}{2} |\hat{F}_{e,3}| \cdot |\hat{u}_3| \cos\beta \quad (\text{D197})$$

der  $\beta$  er fasevinkelen mellom farten  $u_3$  og eksitasjonskrafta  $F_{e,3}$ . Den absorberete effekten er

$$P = P_i - P_r = \frac{1}{2} |\hat{F}_{e,3}| \cdot \cos\beta |\hat{u}_3| - \frac{1}{2} R_{33} |\hat{u}_3|^2 \quad (\text{D198})$$

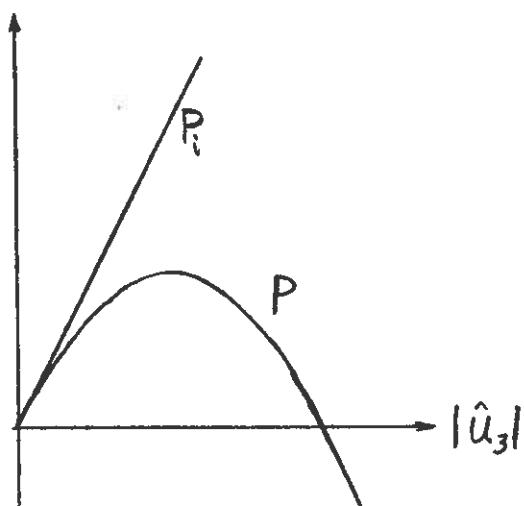
For ei viss innfallande bølgje er  $|\hat{F}_{e,3}|$  gitt. Då varierer  $P$  med  $|\hat{u}_3|$  som ein parabel.

Me ser at  $P_i$  er størst når  $\beta = 0$ . Dette favevilkåret er automatiskt oppfylt om den hivande kroppen er resonant med bølgja. Jfr. resonansabsorpsjon. Me finn av (D198) at

$$P = P_{\max} = \frac{|\hat{F}_{e,3}|^2}{8R_{33}} \quad (\text{D199})$$

for  $\beta = 0$  og  $|\hat{u}_3| = |\hat{F}_{e,3}| / 2R_{33}$ , d.v.s.  $\hat{u}_3 = \hat{F}_{e,3} / 2R_{33}$   
Jfr. (A79). (D200)

Hittil har me sett på ei generell innkomande bølgje. No skal me sjå spesielt på ei plan bølgje med innfallsvinkel  $\gamma$  og amplitude  $\eta_0$  i samsvar med (D183). Eksitasjonskrafta er då gjeven av (D149)



$$\hat{F}_{e,q} = \frac{\rho g f(kh)}{k} n_o h_q (\pi + \gamma) \quad (D201)$$

Med dessutan å bruka (D174)

$$R_{q'q} = \frac{\omega \rho f(kh)}{4\pi k} \int_0^{2\pi} h_{q'}(\theta) h_q^*(\theta) d\theta \quad (D202)$$

kan me i samsvar med (D195) og (D196) skriva den absorberte effekten

$$\begin{aligned} P &= P_i - P_r \\ &= \operatorname{Re} \sum_{q=1}^6 \frac{\rho g f(kh)}{2k} n_o h_q (\pi + \gamma) \hat{u}_q^* \\ &\quad - \frac{\omega \rho f(kh)}{8\pi k} \sum_{qq'} \int_0^{2\pi} h_{q'}(\theta) h_q^*(\theta) d\theta \hat{u}_{q'} \hat{u}_q^* \end{aligned} \quad (D203)$$

Me kan no tolka integraluttrykket (D202) eller (D175) for strålingsresistansmatrisa. Det strålar ut mykje energi i dei retningane  $\theta$  i fjernfeltet der integranden gjev stort tilskot til integralet. I desse retningane er det etter måten sterk intensitet i utstrålinga. Jfr. også (D43).

### Eksitasjonskraftkoeffisient og strålingsresistans.

Eksitasjonskrafta er avhengig av innfallsretninga på den plane bølgja

$$\hat{F}_{e,q} = \hat{F}_{e,q}(\gamma) = \frac{\rho g f(kh)}{k} n_o h_q (\pi + \gamma) \quad (D204)$$

Jfr. (D149). Me innfører "eksitasjonskraftkoeffisienten"

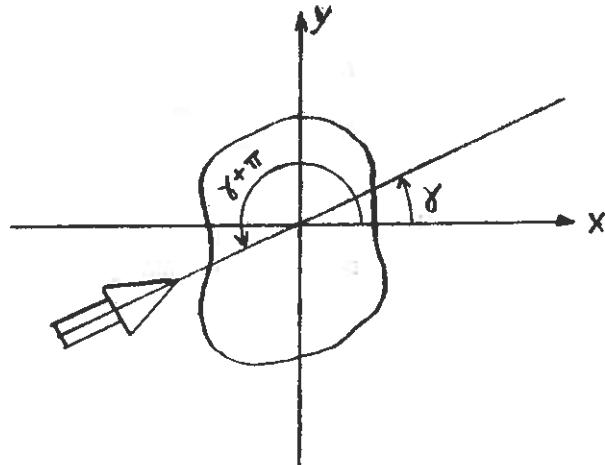
$$\kappa_q = \frac{\hat{F}_{e,q}}{\hat{n}_i} \quad (D205)$$

der  $\hat{n}_i$  er den komplekse amplituden av den (uskipla) innkomande bølgja i same horisontale posisjon som tyngdepunktet for kroppen, her  $(x,y) = (0,0)$ , d.v.s. her er

$$\kappa_q = \frac{\hat{F}_{e,q}}{\eta_0} = \frac{\rho g f(kh)}{k} h_q(\pi + \gamma) = \kappa_q(\gamma) \quad (D206)$$

Merk at eksitasjonskraft-koeffisienten ved innfallsretning  $\gamma$  står i direkte samanheng med amplituden på den utstrålte fjernfeltbølgja i retninga  $\gamma + \pi$ .

Med bruk av (D165) kan me og skriva



$$\kappa_q(\gamma) = \frac{\rho g f(kh)}{k} a_q(\gamma + \pi) \sqrt{2\pi} e^{i\pi/4} \quad (D206a)$$

Av (D206) får me

$$h_q(\gamma) = \frac{k}{\rho g f(kh)} \kappa_q(\gamma - \pi) \quad (D207)$$

Altså kan  $h_q(\theta)$  bestemmas eksperimentelt ved å måla  $\kappa_q(\theta)$ .

Frå (D174) har me strålingsresistansmatrisa

$$R_{ij} = \frac{\omega \rho f(kh)}{4\pi k} \int_0^{2\pi} h_i(\theta) h_j^*(\theta) d\theta \quad (D208)$$

$$R_{ij} = \frac{\omega k}{4\pi \rho g^2 f(kh)} \int_0^{2\pi} \kappa_i(\theta - \pi) \kappa_j^*(\theta - \pi) d\theta \quad (D209)$$

Ved innføring av ny integrasjonsvariabel  $\theta' = \theta - \pi$ , får me

$$R_{ij} = \frac{\omega k}{4\pi \rho g^2 f(kh)} \int_{-\pi}^{\pi} \kappa_i(\theta') \kappa_j^*(\theta') d\theta' \quad (D210)$$

Når kroppen svingar i berre ein modus  $q$ , blir den maksimalt absorberta effekten etter (D199):

$$P_{\max} = \frac{|F_{e,q}|^2}{8R_{qq}} = \frac{|n_o|^2 2\rho g^2 f(kh) G_q(\gamma)}{8\omega k} \quad (D211)$$

der me har innført den såkalla direktiviteten

$$G_q(\gamma) = 2\pi |\kappa_q(\gamma)|^2 / \int_{-\pi}^{\pi} |\kappa(\theta)|^2 d\theta \quad (D215)$$

Me definerer absorpsjonslengda ved

$$d_q(\gamma) = \frac{P_{\max}(\gamma)}{K} \quad (D213)$$

som er forholdet mellom maksimal absorbert effekt og transportert bølgje-effekt pr. lengdeeining av bølgjefronten.

Med bruk av (B75)

$$K = \frac{\rho g^2 f(kh)}{4\omega} |n_o|^2 \quad (D212)$$

får me

$$d_q(\gamma) = \frac{G_q(\gamma)}{K} \quad (D214)$$

For sirkulærsymmetrisk tilfelle er  $\kappa_q$  uavhengig av  $\theta$  slik at absorpsjonslengda blir

$$d_q = \frac{1}{K} = \lambda / 2\pi \quad (D216)$$

Sirkulærsymmetrisk kropp.

Flatenormalen  $\vec{n}$  for ein sirkulærsymmetrisk kropp er

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) \quad (D217)$$

i posisjonen

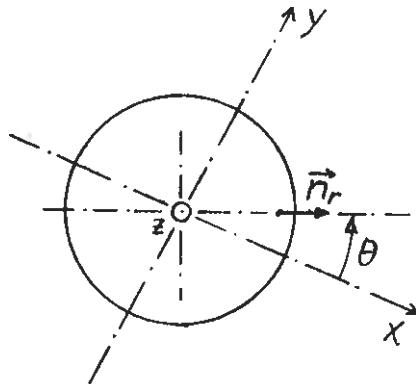
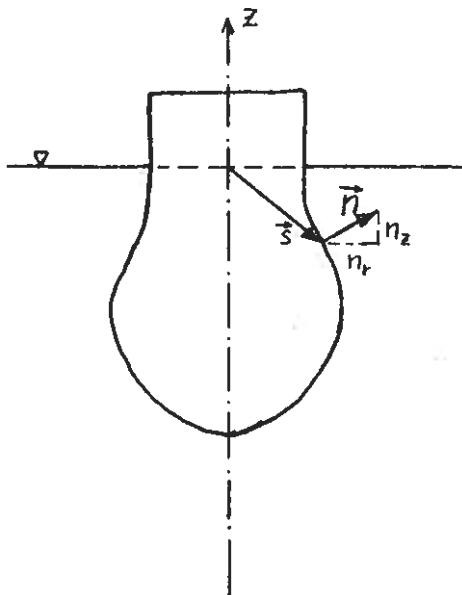
$$\begin{aligned}\vec{s} &= (x, y, z) \\ &= (r \cos \theta, r \sin \theta, z)\end{aligned}\quad (D218)$$

Merk at  $n_z$  er uavhengig av  $\theta$ , at  $n_x = n_r \cos \theta$  og  $n_y = n_r \sin \theta$ .

Altså er

$$\vec{n} = (n_r \cos \theta, n_r \sin \theta, n_z) \quad (D219)$$

$$\vec{s} \times \vec{n} = (n_4, n_5, n_6) \quad (D220)$$



$$\left. \begin{aligned}n_4 &= y n_z - z n_y = (r n_z - z n_r) \sin \theta = -n_M \sin \theta \\n_5 &= z n_x - x n_z = (z n_r - r n_z) \cos \theta = n_M \cos \theta \\n_6 &= x n_y - y n_x = r n_r (\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta) = 0\end{aligned}\right\} \quad (D221)$$

$$(n_q) = (n_r \cos \theta, n_r \sin \theta, n_z, -n_M \sin \theta, n_M \cos \theta, 0) \quad (D222)$$

$$n_M = z n_r - r n_z \quad \text{og} \quad n_r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} \quad (D223)$$

Grensevilkåret (D18)

$$\frac{\partial \varphi_q}{\partial n} = n_q \quad \text{på } S_1 \quad (D224)$$

er for  $q = 6$  oppfylt med  $\varphi_6 = 0$ , noko som me måtte venta då giringsmodusen for ein sirkulærssymmetrisk kropp ikkje kan generera ei bølgje i ei ideell væske.

Elles må  $\varphi_q$  oppfylla Laplace-likninga og dei vanlege homogene grensevilkåra på den frie overflata  $z = 0$  og på faste overflater,  $S_f$  og  $z = -h$ , forutan at  $\varphi_q$  oppfyller strålingsvilkåret i uendeleg avstand.

For ein sylindersymmetrisk kropp kan me lett sjå at ei partikulær løysing av forma

$$\varphi_q(r, \theta, z) = \varphi_{q0}(r, z)\theta_q(\theta) \quad (D225)$$

oppfyller Laplace-likninga, dersom  $\theta_q(\theta)$  er ein funksjon som spesifisert i (B93). Om me spesielt vel

$$\theta_1(\theta) = \theta_5(\theta) = \cos\theta$$

$$\theta_2(\theta) = \theta_4(\theta) = \sin\theta \quad (D226)$$

$$\theta_3(\theta) = \theta_6(\theta) = 1$$

så er også randvilkåret på  $S_1$  oppfylt i samsvar med (D222) og (D224).

Ei slik løysing oppfyller også randvilkåret på flata  $S_f$ , dersom denne flata er sirkulærssymmetrisk og konsentrisk med den svingande flata  $S_1$ . I motsett fall gjeld ikkje ei løysing av typen (D225) utan at flata  $S_f$  er fjerna.

Løysinga er sjølvsgåt av typen (D225) også i fjernfeltet slik at me for Kotsjin-funksjonane har

$$h_q(\theta) = h_{q0}\theta_q(\theta) \quad (D227)$$

og for eksitasjonskraftkoeffisientane

$$\kappa_q(\gamma) = \kappa_{q0}\theta_q(\gamma + \pi) \quad (D228)$$

med

$$\kappa_{q0} = \frac{\rho g f(kh)}{k} h_{q0} \quad (D229)$$

i samsvar med (D206). Me har difor

$$\frac{h_1(\theta)}{h_{10}} = \frac{h_5(\theta)}{h_{50}} = \cos\theta \quad \left. \right\} \quad (D230)$$

$$\frac{h_2(\theta)}{h_{20}} = \frac{h_5(\theta)}{h_{50}} = \sin\theta \quad \left. \right\} \quad (D230)$$

$$h_3 = h_{30} \quad h_6 = 0$$

$$\frac{\kappa_1(\gamma)}{\kappa_{10}} = \frac{\kappa_5(\gamma)}{\kappa_{50}} = \cos(\gamma + \pi) = -\cos\gamma \quad \left. \right\} \quad (D231)$$

$$\frac{\kappa_2(\gamma)}{\kappa_{20}} = \frac{\kappa_4(\gamma)}{\kappa_{40}} = \sin(\gamma + \pi) = -\sin\gamma \quad \left. \right\} \quad (D231)$$

$$\kappa_3 = \kappa_{30} \quad \kappa_6 = 0$$

Sidan

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta, \sin\theta, \sin\theta\cos\theta) d\theta = (0, 0, 0) \quad (D232)$$

og

$$\int_0^{2\pi} (\sin^2\theta, \cos^2\theta) d\theta = (\pi, \pi) \quad (D233)$$

Har me fra (D210), (D226) og (D231) at strålingsresistans-matrisa er

$$\tilde{R} = (R_{ij}) = \frac{\omega k}{4\rho g^2 f(kh)} \begin{bmatrix} |\kappa_{10}|^2 & 0 & 0 & 0 & \kappa_{10}\kappa_{50}^* & 0 \\ 0 & |\kappa_{20}|^2 & 0 & \kappa_{20}\kappa_{40}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2|\kappa_3|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{20}\kappa_{40}^* & 0 & |\kappa_{40}|^2 & 0 & 0 \\ \kappa_{10}\kappa_{50}^* & 0 & 0 & 0 & |\kappa_{50}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (D234)$$

Me har og gjort nytte av resiprositetssatsen (D135d)  $R_{ij} = R_{ji}$ . Sidan  $R_{ij} = \operatorname{Re}(Z_{ij})$ , må me ha at  $\kappa_{10}\kappa_{50}^*$  og  $\kappa_{20}\kappa_{40}^*$  er reelle (positive eller negative). Difor må

$$\frac{\kappa_{10}}{|\kappa_{10}|} = \pm \frac{\kappa_{50}^*}{|\kappa_{50}|} \text{ og } \frac{\kappa_{20}}{|\kappa_{20}|} = \pm \frac{\kappa_{40}^*}{|\kappa_{40}|} \quad (\text{D235})$$

D.v.s. kjenner me fasen på t.d.  $\hat{F}_{e,1}$  kjenner me også fasen på  $\hat{F}_{e,5}$ , bortsett frå ei uvisse på  $\pi = 180^\circ$ . Ein tilsvarende samanheng gjeld mellom fasane for eksitasjonskrafta  $F_{e,2}$  for slingring og eksitasjonsmomentet  $F_{e,4}$  for rulling.

Merk vidare at

$$R_{11} R_{55} = R_{15}^2 \quad (\text{D235a})$$

$$R_{22} R_{44} = R_{24}^2 \quad (\text{D235b})$$

for sirkulærsymmetriske kroppar.

For strålingsimpedansmatrisa gjeld (D38) og (D135c)

$$\begin{aligned} Z_{ji} &= Z_{ij} = -i\omega\mu \iint_{S_1} \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} dS \\ &= -i\omega\mu \iint_{S_1} \varphi_{io} \frac{\partial \varphi_{jo}}{\partial n} \theta_i(\theta) \theta_j(\theta) dS \end{aligned}$$

Merk at på  $S_1$  har  $\vec{n}$  ingen  $\theta$ -komponent. Av (D226) og (D232) følgjer at

$$\underline{Z} = (Z_{ij}) = \begin{bmatrix} Z_{11} & 0 & 0 & 0 & Z_{15} & 0 \\ 0 & Z_{22} & 0 & Z_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{24} & 0 & Z_{44} & 0 & 0 \\ Z_{15} & 0 & 0 & 0 & Z_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D238})$$

Med bruk av (D226) og (D231) blir direktiviteten (D215)

$$\left. \begin{aligned} G_3(\gamma) &= 1 \\ G_1(\gamma) &= G_5(\gamma) = 2 \cos^2 \gamma \\ G_2(\gamma) &= G_4(\gamma) = 2 \sin^2 \gamma \end{aligned} \right\} \quad (\text{D239})$$

For optimal hivrørsle blir absorpsjonslengda (D214)

$$d_3 = \frac{1}{K} = \frac{\lambda}{2\pi} \quad (\text{D240})$$

i samsvar med (D216).

Med innfallsretning  $\gamma = 0$  og optimal jaging eller optimal stamping blir absorpsjonslengda

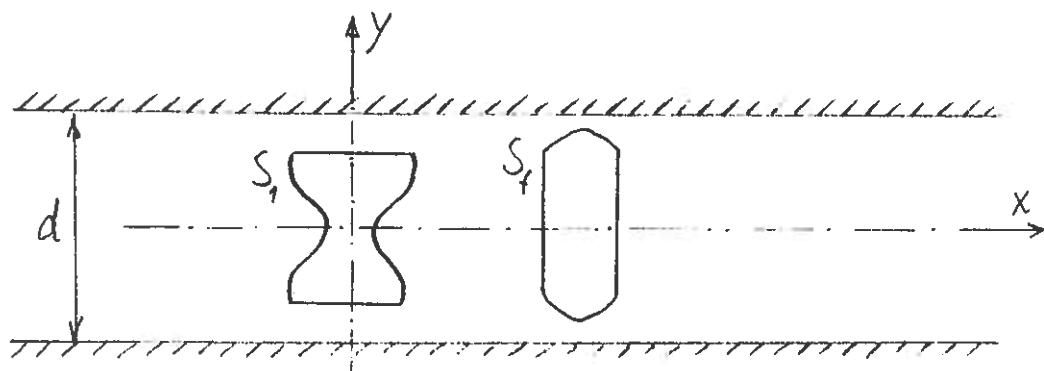
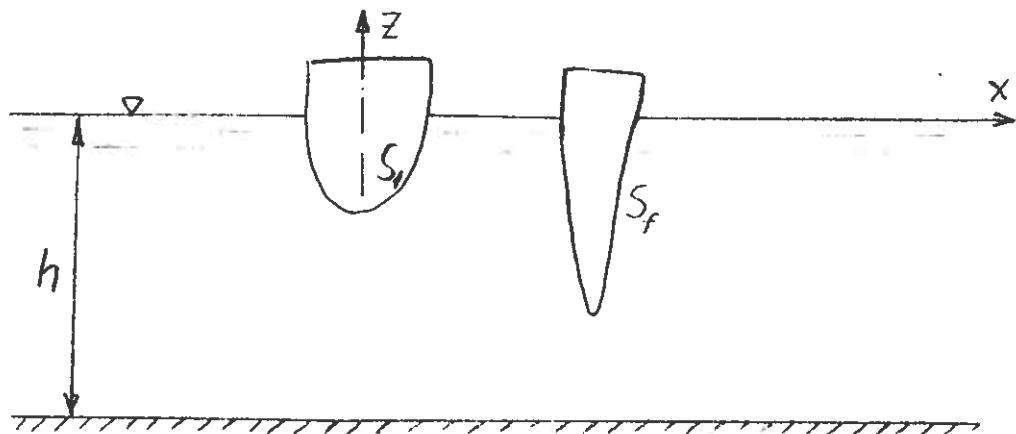
$$d_1(0) = d_5(0) = \frac{2}{K} = \frac{\lambda}{\pi} \quad (\text{D241})$$

Det kan visast (Newman 1976) at med optimalt val av  $\hat{u}_3$  og av  $\hat{u}_1$  og/eller  $\hat{u}_5$  kan me få maksimalt absorbert effekt

$$P_{\max} = \left( \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{\lambda}{\pi} \right) K = \frac{3\lambda}{2\pi} K \quad (\text{D242})$$

Jfr. oppgåve D3. Hiv-modusen genererer ei bølgje som er symmetrisk om planet  $x = 0$ . Jagemodusen og rullemodusen genererer ei bølgje som er antisymmetrisk om planet  $x = 0$ .

### To-dimensjonalt tilfelle.



Det problemet me skal sjå på, er to-dimensjonalt i fjernfeltet, med di bølgja der er ei plan bølgje. Sjølve kroppen og nærfeltet kan vera to-dimensjonalt, men det er ikkje alltid nødvendig. Det kan t.d. vera eit modellforsøk i ei (uendeleg) lang bølgjerenne med breidd  $d$  som er lita nok til at tverrsvingingar ikkje kan forplanta seg d.v.s. at

$$kd < \pi$$

Jfr. oppg. B2. Det kan og vera ei uendeleg lang rekke av kroppar som er symmetriske om plana  $y = nd/2$  der  $n$  er heiltal, og som har svingerørsler utan  $y$ -komponentar, nemleg jaging ( $q = 1$ ), hiving ( $q = 3$ ) og stamping ( $q = 5$ ).

Fjernfeltet:

$$\hat{\psi} \rightarrow A(\theta)e(kz) \frac{1}{\sqrt{kr}} e^{-ikr}, \quad kr \rightarrow \infty \quad (\text{D129-3})$$

$$\hat{\psi} \rightarrow A^* e(kz) e^{-ik|x|} \quad \text{når } kx \rightarrow \pm \infty \quad (\text{D129-2})$$

$$I(\hat{\psi}_i, \hat{\psi}_j^*) = i \frac{f(kh)}{k} \int_0^{2\pi} A_i(\theta) A_j^*(\theta) d\theta \quad (\text{D135-3})$$

For det to-dimensjonale tilfellet er  $S_\infty$  ikkje ein sylinder med  $r \rightarrow \infty$ , men dei to plana  $x = x_0 \rightarrow \infty$   $x = x_\pi \rightarrow -\infty$ . Pr. lengdeeining i  $y$ -retning har me frå før

$$I(\hat{\psi}_i, \hat{\psi}_j^*)/d = I'(\hat{\psi}_i, \hat{\psi}_j^*) = i f(kh) (A_i^+ A_j^{++} + A_i^- A_j^{--}) \quad (\text{D135-2})$$

Me bruker her apostrof ('') for å markera storleik "pr. lengdeeining". Me reknar ut den to-dimensjonale versjonen av (D165)

$$H_j(\gamma) = \sqrt{2\pi} A_j(\gamma) e^{i\pi/4} \quad (\text{D165-3})$$

Av (D140) får me, når me integrerer over  $S_\infty$  i staden for  $S_1$

$$H(\gamma) = - \frac{k}{f(kh)} \int_{-h}^0 e^2(kz) dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} \sin \gamma dy$$

$$\times [e^{ikx_0 \cos\gamma} A^+ e^{-ikx_0(-ik - ik \cos\gamma)} \\ + e^{ikx_\pi \cos\gamma} A^- e^{ikx_\pi(-ik + ik \cos\gamma)}]$$

Me har (B73)

$$\int_{-h}^0 e^2(kz) dz = \frac{f(kh)}{2k}$$

og

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{1}{2Y} \int_{-Y}^Y e^{iky \sin\gamma} dy = \begin{cases} 1 & \text{for } \sin\gamma = 0 \\ 0 & \text{for } \sin\gamma \neq 0 \end{cases}$$

Utrekna pr. lengdeeining er altså  $H'(\gamma) = H(\gamma)/2Y$  null om  $\sin\gamma \neq 0$ . For eit to-dimensjonalt tilfelle er det elles meiningslaust å ha  $\sin\gamma \neq 0$ .

Me har difor

$$H'(0) = -\frac{1}{2} A^+(-ik - ik) = ikA^+ \\ H'(\pi) = -\frac{1}{2} A^-(-ik + ik \cos\pi) = ikA^- \quad \left. \right\} \quad (D165-2)$$

Med dette får me då av (D135-2) ein to-dimensjonal versjon av (D167)

$$I'(\psi_i, \psi_j^*) = \frac{if(kh)}{k^2} (H_i^!(0)H_j^{!*}(0) + H_i^!(\pi)H_j^{!*}(\pi)) \quad (D167-2)$$

Med ei superponering av ei innkomande bølgje  $\Phi$  og ei bølgje  $\psi$  som oppfyller strålingsvilkåret

$$\phi_{i,j} = \Phi_{i,j} + \psi_{i,j} \quad (D136)$$

har me dei to-dimensjonale versjonane (D142) og (D172) med  $\gamma = 0$  eller  $\gamma = \pi$  (merk at  $\gamma = \pi + \pi = 2\pi \hat{=} \gamma = 0$ )

$$I'(\phi_i, \phi_j) = \frac{gf(kh)}{i\omega k} \left\{ n_{oi} H_j^{*(\pi + \gamma_i)} - n_{oj} H_i^{*(\pi + \gamma_j)} \right\} \quad (D142-2)$$

$$I'(\phi_i, \phi_j^*) = \frac{gf(kh)}{iwk} \left\{ n_{oi} H_j^{!*}(\gamma_i) + n_{oj}^* H_j^!(\gamma_j) \right\} \\ + \frac{if(kh)}{k^2} \left\{ H_i^!(0) H_j^{!*}(0) + H_i^!(\pi) H_j^{!*}(\pi) \right\} \quad (D172-2)$$

På lengda d (i y-retning) er det ei eksitasjonskraft  $\hat{F}_{e,q}^d$ , der  $q = 1, 3$  eller 5 i det to-dimensjonale tilfellet. Med ei innkomande bølgje  $\phi_i$  har me for  $\hat{F}_{e,q}^d$  følgjande uttrykk

$$\hat{F}_{e,q}^d = iw\rho I'(\hat{\phi}_i + \hat{\psi}_d, \phi_q) \quad (D148-2)$$

$$= iw\rho I'(\hat{\phi}_i, \phi_q) \quad (D151-2)$$

$$= \frac{\rho gf(kh)}{k} n_{oi} h_q'(\pi + \gamma) \quad (D149-2)$$

der  $\gamma = 0$  eller  $\gamma = \pi$  etter som den innkomande bølgja går i positiv eller negativ x-retning.

På lengda d (i y-retning) er det ei strålingsresistansmatrise  $R_{ij}^d$ , der  $i, j = 1, 3$  eller 5, og der

$$R_{ij}^d = -\frac{iw\rho}{2} I'(\phi_i, \phi_j^*) \quad (D173-2)$$

$$= \frac{\omega\rho f(kh)}{2k^2} \left\{ h_i^!(0) h_j^{!*}(0) + h_i^!(\pi) h_j^{!*}(\pi) \right\} \quad (D174-2)$$

Siste ledet i (D174-2) representerer den effekten som strålar ut i negativ x-retning.

På lengda d (i y-retning) er den absorberte effekten  $P'd$  der

$$P'd = P_i' - P_r' \quad (D189-2)$$

med

$$P_i' = \operatorname{Re} \left\{ \frac{iw\rho}{2} I'(\hat{\phi}_i + \hat{\psi}_d, \hat{\phi}_r^*) \right\} \quad (D190-2)$$

$$= \operatorname{Re} \sum_{q=1,3,5} \left( \frac{1}{2} \hat{F}_{e,q}^d \hat{u}_q^* \right) \quad (D195-2)$$

og med

$$P'_r = -\frac{i\omega\rho}{4} I'(\hat{\phi}_r, \hat{\phi}_r^*) \quad (\text{D191-2})$$

$$= \sum_{\substack{i,j= \\ 1,3,5}} \left( \frac{1}{2} R'_{ji} \hat{u}_i \hat{u}_j^* \right) \quad (\text{D196-2})$$

På lengda  $d$  (i  $y$ -retning) er eksitasjonskraftkoeffisienten

$$\kappa'_q(\gamma)d = \frac{\hat{F}_{e,q}}{\eta_{oi}} = \frac{\rho g f(kh)d}{k} h'_q(\pi + \gamma) \quad (\text{D206-2})$$

( $\gamma = 0, \pi$ ). Med bruk av (D174-2) får me samanhengen

$$R'_{ij} = \frac{\omega}{2\rho g^2 f(kh)} \left\{ \kappa'_i(\pi) \kappa'_j(\pi) + \kappa'_i(0) \kappa'_j(0) \right\} \quad (\text{D210-2})$$

Me skal seinare generalisera desse resultata til tilfellet med skrått innfall mot ei uendelig lang rekkeje av svingande kropper. Sjå (K30) og (K45).

#### EffektabSORPSJON MED EIN MODUS I DET TO-DIMENSJONALE TILFELLET.

Me ser på ein modus  $q = 1, 3$  eller  $5$ . Etter ovanståande har me for den absorberte effekten pr. lengdeeining

$$P' = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{F}'_{e,q} \hat{u}_q^*) - \frac{1}{2} R'_{qq} |\hat{u}_q|^2 \quad (\text{D251})$$

Med ei plan innkomande bølgje som forplantar seg i positiv  $x$ -retning ( $d.v.s \gamma = 0$ ) er effekttransporten pr. lengdeeining gjeven av (B75)

$$K = \frac{\rho g^2 f(kh)}{4\omega} |\eta_o|^2 \quad (\text{D252})$$

Me fører inn fasevinkelen  $\beta_q$  mellom fart og eksitasjonskraft

$$e^{i\beta_q} = \frac{\hat{u}_q}{\hat{F}'_{e,q}} \left| \frac{\hat{F}'_{e,q}}{\hat{u}_q} \right| \quad (\text{D253})$$

Sidan me har berre ein modus, sløyfer me indeksen  $q$ :

Me har no

$$\frac{P'}{K} = \frac{2\omega}{\rho g^2 f(kh)} \left( \frac{|\hat{F}'_e \hat{u}|}{|n_o|^2} \cos\beta - R' \left| \frac{\hat{u}}{n_o} \right|^2 \right) \quad (\text{D254})$$

Me set inn for  $\hat{F}'_e$  fra (D149-2) og for  $R'$  fra (D174-2):

$$\begin{aligned} \frac{P'}{K} &= \frac{2\omega}{\rho g^2 f(kh)} \left( \frac{\rho g f(kh)}{k} |h'(\pi)| \left| \frac{\hat{u}}{n_o} \right| \cos\beta \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega \rho f(kh)}{2k^2} (|h'(0)|^2 + |h'(\pi)|^2) \left| \frac{\hat{u}}{n_o} \right|^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{D255})$$

$$\begin{aligned} \frac{P'}{K} &= \frac{2\omega^2}{gk} |h'(\pi)| \left| \frac{\hat{u}}{\omega n_o} \right|^2 \cos\beta \\ &\quad - \frac{\omega^4}{g^2 k^2} (|h'(0)|^2 + |h'(\pi)|^2) \left| \frac{\hat{u}}{\omega n_o} \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{D256})$$

Me fører inn den relative svingeamplituden

$$y = \frac{\omega^2}{gk} |h'(\pi)| \left| \frac{\hat{u}}{\omega n_o} \right| \quad (\text{D257})$$

og får relativ absorbert effekt

$$\frac{P'}{K} = 2y \cos\beta - (1 + |h'(0)/h'(\pi)|^2)y^2 \quad (\text{D258})$$

For å få eit maksimum i den absorberte effekten må fasevilkåret

$$\beta = \beta_{\text{opt}} = 0 \quad (\text{D259})$$

vera oppfylt. Det optimale punktet svarar til

$$y_{\text{opt}} = \left( \frac{P'}{K} \right)_{\text{max}} = \frac{1}{1 + |h'(0)/h'(\pi)|^2} \quad (\text{D260})$$

For eit absorberande svingesystem som har høgre-venstre-symmetri er  $|h'(0)/h'(\pi)|^2 = 1$  slik at maksimalt halvparten av den innfallande energien kan bli absorbert.

Me ser av (D260) at dersom  $|h'(0)/h'(\pi)| \ll 1$ , vil all den innkomande energien kunna bli absorbert av svingesystemet.

Vilkåret er altså at svingesystemet strålar berre i den retninga den innkomande bølgja kjem frå.

### Svingesystem med høgre-venstre-symmetri.

Eit slikt svingesystem vil i hiv-modus generera ei symmetrisk bølgje slik at

$$h'_3(0) = h'_3(\pi) \equiv h'_3 \quad (\text{D261})$$

I jagemodus eller stampe modus vil den genererte bølgja vera antisymmetrisk

$$h'_{1,5}(\pi) = -h'_{1,5}(0) \equiv -h'_{1,5} \quad (\text{D262})$$

I begge tilfelle gjeld

$$|h'_q(\pi)| = |h'_q(0)| \quad (\text{D263})$$

slik at  $(P'/K)_{\text{maks}} = 1/2$  etter (D260).

Av (D174-2) og (D210-2) har me då for strålingsresistansen

$$\left. \begin{aligned} R'_{qq} &= \frac{\omega \rho f(kh)}{k^2} |h'_q|^2 = \frac{\omega |\kappa'_q|^2}{\rho g^2 f(kh)} \\ R'_{15} &= \frac{\omega \rho f(kh)}{k^2} h'_1 h'^*_5 = \frac{\omega \kappa'_1 \kappa'^*_5}{\rho g^2 f(kh)} \\ R'_{13} &= R'_{35} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{D264})$$

For hiv-modusen er den genererte bølgja i fjernfeltet  $n_r e^{-ik|x|}$  der me etter (B32), (D129-2) og (D165-2) har

$$n_r = \frac{i\omega}{-g} A^\pm = -\frac{\omega}{gk} h'_3 \hat{u}_3 = \tau_3 \hat{u}_3 \quad (\text{D265})$$

der me har ført inn koeffisienten

$$\tau_3 = -\frac{\omega}{gk} h'_3 \quad (\text{D266})$$

som har dimensjon av tid. Med bruk av (D206-2) og (D264) får me

$$\tau_3 = - \frac{\omega}{\rho g^2 f(kh)} \kappa'_3 = - \frac{\omega |\kappa'_3|^2}{\rho g^2 f(kh) (\kappa'_3)^*} \quad (D267)$$

$$\tau_3^* = - \frac{R'_{33}}{\kappa'_3} \quad (D268)$$

Dette resultatet skal me bruka seinare. Sjå (G14).

Elles må me vera merksam på at sjølv om kroppen  $S_1$  har høgre-venstre-symmetri, så kan me oppnå at  $|h_q(0)| \neq |h_q(\pi)|$  ved å plassera ein annan, stilleståande, kropp  $S_f$  slik at diffraksjonen frå denne verkar inn på det totale bølgjefeltet ved den absorberande kroppen  $S_1$ . Dersom  $S_1$  er ein punktabsorbator og  $S_f$  er ein reflekterande vegg som er sett bakom punktabsorbatoren, må me ha  $h(0) = 0$ . Optimalt får me då 100% energiabsorpsjon i samsvar med (D260). Jfr. også (G26) og dei eksperimenta som er nemnde i kap. G.

## E. EKSITASJONSKRAFTEN

E1 - Innledning

$$\text{Likn. (D210): } R_{ij} = \frac{\omega k}{4\pi\rho g^2 f(kh)} \int_{-\pi}^{\pi} \kappa_i(\theta) \kappa_j^*(\theta) d\theta$$

Dette viser en sammenheng mellom et legemes evne til å oppta eksitasjonskrefter og et legemes evne til å stråle ut bølger. Et system som tar opp mye bølgekrefter fungerer også godt som bølgegenerator.

Eksempel - Sirkulærsymmetrisk legeme i hiv.

$$R_{33} = \frac{\omega k}{2\rho g^2 f(kh)} |\kappa_3|^2 \quad (\text{fra likn. (D210)})$$

Tidligere (kap.D) er det vist at maksimal absorpsjonslengde,  $d_{3,\max}$ , er uavhengig av  $|\kappa_3|$

$$d_{3,\max} = \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

Derimot er ikke den tilsvarende optimale hastighetsamplituden uavhengig av  $|\kappa_3|$

$$|\hat{u}_3|_{\text{opt}} = \frac{\rho g^2 f(kh)}{\omega k} n_0 \frac{1}{|\kappa_3|} \quad (\text{E1})$$

$$|\hat{\zeta}|_{\text{opt}} \propto \frac{1}{|\kappa_3|} \quad (\text{E2})$$

Optimal utsvingsamplitude og eksitasjonskraftkoeffisient er omvendt proposjonale. Derfor - dersom  $|\kappa_3|$  blir for liten vil  $|\hat{\zeta}|_{\text{opt}}$  bli så stor at fundamentet for teorien, lineære forhold og ingen viskøse tap, bryter sammen før en når den optimale utsvingsamplitude.

En annen betraktningsmåte er å tenke seg et system med en gitt begrensning på  $|\hat{u}_3|$ . En har optimal fase mellom  $\kappa_3$  og  $\hat{u}_3$  slik at absorbert effekt blir (likn. (D197) ):

$$P = \frac{1}{2} |\kappa_3| |\hat{u}_3| n_0 - \frac{1}{2} R_{33} |\hat{u}_3|^2 \quad (\text{E3})$$

Insatt for  $R_{33}$

$$P = \frac{1}{2} |\kappa_3| |\hat{u}_3| n_0 - \frac{\omega k}{4\rho g^2 f(kh)} |\kappa_3|^2 |\hat{u}_3|^2 \quad (\text{E4})$$

$$\frac{dP}{d|\kappa_3|} = \frac{1}{2} |\hat{u}_3| n_0 - \frac{\omega k}{2\rho g^2 f(kh)} |\hat{u}_3|^2 |\kappa_3| \quad (E5)$$

$$\frac{dP}{d|\kappa_3|} > 0 \text{ når } |\hat{u}_3| < \rho g^2 \frac{f(kh)}{\omega k} \frac{1}{|\kappa_3|} n_0 = |\hat{u}_3|_{\text{opt}} \quad (E6)$$

Dersom den gitte hastighetsamplituden er mindre enn den optimale, vil absorbert effekt øke når  $|\kappa_3|$  øker. Med en gitt dimensjonerende størrelse (f.eks. overflate eller volum) er det ønskelig å forme dette slik at eksitasjonskraften blir så stor som mulig.

### E2 - Generelle uttrykk for eksitasjonskraften

Innkommende bølge :  $\hat{\Phi}_i$

Diffraktert bølge :  $\hat{\psi}_d$

$$\hat{F}_{e,q} = i\omega\rho \underbrace{\iint_S \hat{\Phi}_i n_q ds}_1 + i\omega\rho \underbrace{\iint_S \hat{\psi}_d n_q ds}_2 \quad (E7)$$

1 - Kraften fra den uforstyrrede, innkommende bølge.

Betegnes ofte som "Froude-Krylov kraft".

I det følgende vil betegnelsen  $\hat{F}_{FK,q}$  bli benyttet for denne kraften.

2 - Kraften fra den diffrakteerte bølgen.

Betegnelsen  $\hat{F}_{D,q}$  vil bli benyttet.

Haskindrelasjonen viser at diffraksjonskraften alternativt kan skrives som

$$\hat{F}_{D,q} = -i\omega\rho \iint_S \hat{\phi}_q \frac{\partial \hat{\Phi}_i}{\partial n} dS \quad (E8)$$

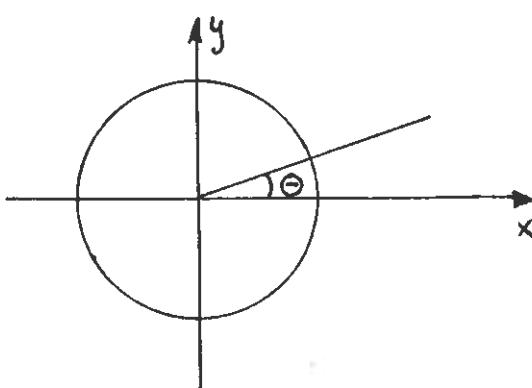
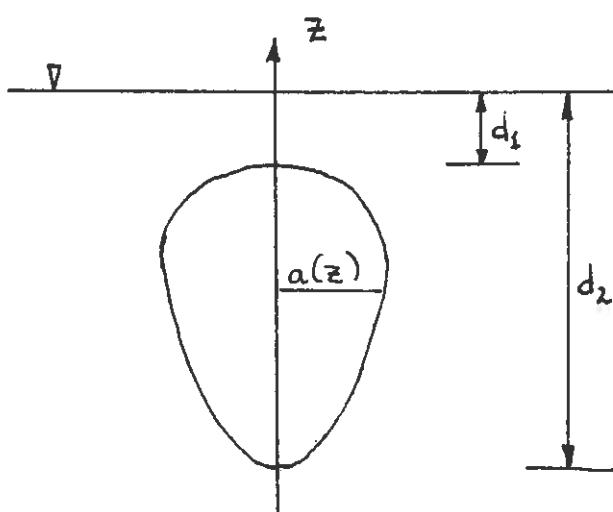
Tidligere er det vist en generell sammenheng mellom eksitasjonskraften i plane, harmoniske bølger og strålingsresistansen for harmoniske svingninger. I dette kapitlet skal det videre framover drøftes andre uttrykk for eksitasjons-

kraften.  $\hat{F}_{FK,q}$  og  $\hat{F}_{D,q}$  vil da bli studert hver for seg.

### E3 - Froude-Krylov-kraften

$\hat{F}_{FK,q}$  kan i prinsipp enkelt bestemmes da den er utelukkende gitt av legemets form og den innkommende, uforstyrrede bølge. Diffraksjonsproblemene behøver ikke å løses.

### Eks. - sirkulærsymmetrisk legeme

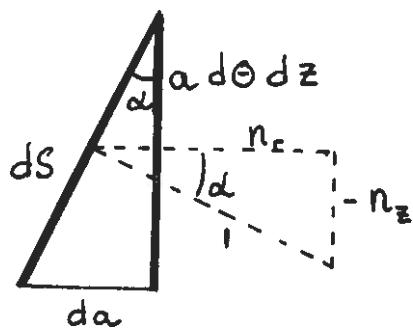


$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_i &= -\frac{g}{iw} n_i e(kz) \exp(-ikx) \\ \hat{F}_{FK,q} &= -\rho g \iint_S e(kz) \exp(-ika(z)\cos\theta) n_q dS\end{aligned}\quad (E9)$$

Fra kap.D har en for sirkulærsymmetriske legemer:

$$n_q = (n_r \cos\theta, n_r \sin\theta, n_z, -n_M \sin\theta, n_M \cos\theta, 0)$$

$$n_M = (zn_r - rn_z)$$



$$\tan \alpha = \frac{da}{dz} \quad (E10)$$

$$\cos \alpha = (1 + (\frac{da}{dz})^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (E11)$$

$$dS = \frac{1}{\cos \alpha} ad\theta dz = (1 + (\frac{da}{dz})^2)^{\frac{1}{2}} ad\theta dz \quad (E12)$$

$$n_r = \cos \alpha = (1 + (\frac{da}{dz})^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (E13)$$

$$n_z = -\sin \alpha = -\tan \alpha \cos \alpha = -\frac{da}{dz} (1 + (\frac{da}{dz})^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (E14)$$

$$n_M = (z + a \frac{da}{dz}) (1 + (\frac{da}{dz})^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (E15)$$

Innfører

$$m_q = (\cos \theta, \sin \theta, -\frac{da}{dz}, -(z + a \frac{da}{dz}) \sin \theta, (z + a \frac{da}{dz}) \cos \theta, 0) \quad (E16)$$

Slik at

$$\kappa_{FK,q} = -\rho g \int_{-d_2}^{-d_1} \int_0^{2\pi} e(kz) \exp(-ika(z) \cos \theta) m_q ad\theta dz \quad (E17)$$

I slingring og rulling gir integrasjon over  $\theta$  i begge tilfellene null som ventet.

$$\hat{\kappa}_{FK,2} = \hat{\kappa}_{FK,4} = 0 \quad (E18)$$

Hvis :

$$\int_0^{2\pi} \exp(-ika \cos \theta) d\theta = 2\pi J_0(ka) \quad (E19)$$

$J_0(ka)$  - Besselfunksjon av orden 0.

$$\kappa_{FK,3} = \rho g \pi \int_{-d_2}^{-d_1} e(kz) J_0(ka) \frac{da^2}{dz} dz \quad (E20)$$

Dette kan sammenliknes med den hydrostatiske fjærkraften på et legeme med vannplanareal,  $A_v$ . Et såkalt effektivt vannplanareal defineres ved  $A_{v,eff}$ :

$$A_{v,eff} = \pi \int_{-d_2}^{-d_1} e(kz) J_0(ka) \frac{da^2}{dz} dz \quad (E21)$$

slik at

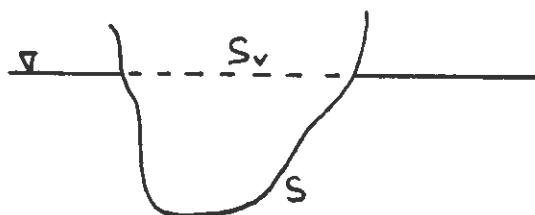
$$\kappa_{FK,3} = \rho g A_{v,eff} \quad (E22)$$

Spesialtilfelle -  $ka \ll 1$ ,  $kd_2 \ll 1$ ,  $d_1 = 0$ :

$$A_{v,eff} = \pi a^2 = A_v \quad (E23)$$

### Froude-Krylov-kraften på små legemer

Som mest generelt tilfelle behandles et legeme som flyter. Et fullstendig neddykket legeme framkommer som et spesialtilfelle av dette.



$S_v$  - vannplanarealet

$S$  - vætet overflate.

a)  $q = 1, 2, 3$  (kreftene)

$\vec{e}_q$  - enhetsvektor i  $q$ -retning.

$$\cdot \hat{F}_{FK,q} = iw\rho \left\{ \iint_{S_v+S} \hat{\Phi}_i \vec{e}_q \cdot \vec{n} dS - \iint_{S_v} \hat{\Phi}_i \vec{e}_q \cdot \vec{k} dS \right\} \quad (E24)$$

Merk at det siste ledet gir bidrag kun når  $q = 3$ ; d.v.s. i hiv.

Det første integralet utvikles ved å bruke Gauss setning

$$iw\rho \iint_{S_v+S} \hat{\Phi}_i \vec{e}_q \cdot \vec{n} dS = iw\rho \iiint_V (\nabla \hat{\Phi}_i)_q dV \quad (E25)$$

For små legemer sammenliknet med bølgelengden kan  $\nabla \hat{\Phi}_i$

betraktes som konstant over legemet lik verdien i middelposisjon.

$\hat{a}$  - amplituden til partikkelakselerasjonen i den innkommende bølgen.

Indeks  $o$  representerer verdien i legemets middelposisjon.  
Videre benyttes

$$-i\omega \hat{\Phi}_i = g \hat{n}_i \quad \text{på } z = 0$$

Dette gir

$$\boxed{\hat{F}_{FK,q} = \rho V \hat{a}_{q,o} + \rho g \hat{n}_i A_v \delta_{3,q}} \quad (\text{E26})$$

$V$  - nedsenket volum

$A_v$  - vannplanareal

b)  $q = 4, 5, 6$  (momentene)

Innfører momentvektor,  $\vec{M}$ , istedet for generalisert kraft.

Går da tilbake til å benytte  $q = 1, 2, 3$

$$M_{FK,q} = i\omega \rho \left\{ \int \int_{S+S_v} \hat{\Phi}_i \vec{e}_q \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) dS - \int \int_{S_v} \hat{\Phi}_i \vec{e}_q \cdot (\vec{r} \times \vec{k}) dS \right\} \quad (\text{E27})$$

$$\vec{r} \times \vec{k} = y \vec{i} - x \vec{j} \quad (\text{E28})$$

Det siste ledet gir altså bidrag i rulling og stamping

$$\int \int_{S_v+S} \hat{\Phi}_i \vec{e}_q \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) dS = \int \int_{S_v+S} \hat{\Phi}_i (\vec{e}_q \times \vec{r}) \cdot \vec{n} dS = \int \int \int_V \nabla \cdot (\hat{\Phi}_i \vec{e}_q \times \vec{r}) dS \quad (\text{E29})$$

$$\nabla \cdot (\hat{\Phi}_i \vec{e}_q \times \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial r_\ell} (\hat{\Phi}_i \epsilon_{\ell kp} e_{q,k} r_p) \quad (\text{E30})$$

Her er benyttet summekonvensjon samt følgende definisjon på  $\epsilon_{\ell kp}$ :

$$\epsilon_{\ell kp} = \begin{cases} 1 & ; \ell \neq k \neq p \quad \text{like permutasjon} \\ -1 & ; \ell \neq k \neq p \quad \text{ulike permutasjon} \\ 0 & ; \text{ellers} \end{cases} \quad (\text{E31})$$

Videre gjelder

$$e_{q,k} = \delta_{q,k}$$

$$\nabla \cdot (\hat{\Phi}_i \vec{e}_q \times \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial r_\ell} (\hat{\Phi}_i \epsilon_{\ell qp} r_p) = \epsilon_{\ell qp} r_p \frac{\partial}{\partial r_\ell} (\hat{\Phi}_i) \quad (\text{E32})$$

For små legemer kan også her verdien på  $\nabla \hat{\Phi}_i$  taes i legemets middelposisjon.

Innfører:

$$\Gamma_p = \iiint_V r_p dV \quad (E33)$$

$$S_y = \iint_{S_v} y dS \quad (E34)$$

$$S_x = \iint_{S_v} x dS \quad (E35)$$

Videre benyttes :

$$\epsilon_{qp\ell} \hat{a}_{\ell,o} \Gamma_p = \epsilon_{qp\ell} \hat{\Gamma}_p \hat{a}_{\ell,o} = (\vec{\Gamma} \times \vec{\hat{a}}_o)_q \quad (E36)$$

Slik at

$$M_{FK,q} = \rho (\vec{\Gamma} \times \vec{\hat{a}}_o)_q + \rho g n_i S_y \delta_{1,q} - \rho g n_i S_x \delta_{2,q} \quad (E37)$$

#### E4 - Diffraksjonskraften på små legemer

Likn. (E8) :  $\hat{F}_{D,q} = - i \omega \rho \iint_S \hat{\varphi}_q \frac{\partial \hat{\Phi}_i}{\partial n} dS$

Dette utvikles videre :

$$\begin{aligned} F_{D,q} &= - i \omega \rho \iint_S \hat{\varphi}_q \nabla \hat{\Phi}_i \cdot \vec{n} dS \\ &= - i \omega \rho \iint_S \hat{\varphi}_q \frac{\partial \hat{\Phi}_i}{\partial r_\ell} n_\ell dS \quad ; \quad \ell = 1, 2, 3 \\ &= - i \omega \rho \iint_S \hat{\varphi}_q \frac{\partial \hat{\Phi}_i}{\partial r_\ell} \frac{\partial \hat{\varphi}_\ell}{\partial n} dS \end{aligned} \quad (E38)$$

På samme måte som tidligere taes verdien i legemets middelposisjon :

$$\hat{F}_{D,q} = \hat{v}_{\ell,o} \left\{ - i \omega \rho \iint_S \hat{\varphi}_q \frac{\partial \hat{\varphi}_\ell}{\partial n} dS \right\} \quad (E39)$$

hvor  $\hat{v}$  er amplituden til partikkelhastigheten i den innkommende bølgen. Fra likn. (D38) :

$$\hat{F}_{D,q} = \hat{v}_{\ell,o} \hat{Z}_{\ell q} = \hat{Z}_{q\ell} \hat{v}_{\ell,o} \quad (E40)$$

$$\boxed{\hat{F}_{D,q} = \sum_{\ell=1}^3 \{ R_{q\ell} \hat{v}_{\ell,o} + m_{q\ell} \hat{a}_{\ell,o} \}} \quad (E41)$$

Til likn. (41) skal det knyttes noen kommentarer.

1.  $\hat{F}_{D,q}$  slik den framkommer i (E41) er sammensatt av to ledd.
  - \* Ledd i fase med partikkelakselerasjonen.
  - \* Ledd i fase med partikkelhastigheten.
2. Hvilket av de to leddene er av størst betydning når  $ka \rightarrow 0$ , hvor  $a$  er en karakteristisk dimensjon til legemet?

Fri overflatebetingelse kan skrives på formen

$$- ka \frac{\partial \psi}{\partial (za)} = 0 \quad \text{på } z = 0 \quad (E42)$$

$$ka \rightarrow 0 \text{ gir } \frac{\partial \psi}{\partial (za)} = 0 \quad \text{på } z = 0 \quad (E43)$$

I denne grensen går fri overflatebetingelse over til å bli den samme som overflatebetingelsen på en stiv vegg. Med andre ord kan fri overflate betraktes som et speilplan og forholdene kan beskrives som et legeme som beveger seg i et  $\infty$  medium. Et legeme som beveger seg i  $\infty$  medium kan i tidsmiddel ikke stråle ut noe energi (da det ikke er noen bølger som kan transportere bort energien). Dermed vil impedansen,  $Z$ , være rent imaginær (reakтив). Konklusjonen på dette blir:

$$ka \rightarrow 0 \text{ gir } X_{ij} = \omega m_{ij} \gg R_{ij} \quad (E44)$$

Dermed vil ledet hvor partikkelakselerasjonen inngår være dominerende når  $ka \rightarrow 0$

$$\hat{F}_{D,q} = \sum_{\ell=1}^3 m_{q\ell} \hat{a}_{\ell,o} \quad (E45)$$

3. Sirkulærsymmetrisk legeme om z-aksen. Det henvises til likn. (D239).

$$\hat{F}_{D,q} = m_{qq} \hat{a}_{q,o}; \quad q = 1, 2, 3 \quad (E46)$$

$$\hat{F}_{D,4} = m_{42} \hat{a}_{2,o} \quad (E47)$$

$$\hat{F}_{D,5} = m_{51} \hat{a}_{1,o} \quad (E48)$$

4. Ofte vil  $m_{qq} \approx V$  for  $ka \rightarrow 0$

Dette medfører at  $F_{D,q}$  gir bidrag til samme orden som  $\hat{F}_{FK,q}$  (ikke for flytende legeme i hiv).

### E5 - Storvolumskonstruksjoner

Med storvolumskonstruksjoner menes legemer hvor den karakteristiske dimensjon ikke er liten sammenliknet med bølgelengden. Det hydrodynamiske problemet lar seg løse eksakt når det ikke-homogene randkravet skal tilfredsstilles på koordinatflater. Eksempler på dette er sirkulær cylinder fra havbunnen opp gjennom overflaten og vertikal vegg. For enkelte storvolumskonstruksjoner kan en i gitte situasjoner splitte opp legemet i i 2-dimensjonale stripene hvor  $ka \ll 1$  og deretter integrere opp over stripene. Dette er såkalt stripeteori og er anvendelig f.eks. for lange, slanke konstruksjoner (skip) i sidesjø.

Den mest generelle metoden for å finne krefter på storvolumskonstruksjoner vil likevel være såkalte "kilde-sluk-beregninger" - beregninger hvor Greens funksjon benyttes. Dette er en metode som i prinsipp kan benyttes på alle typer legemer. I praksis vil imidlertid datamaskinkapasiteten sette en begrensning på legemets størrelse og på nøyaktigheten i beregningene. Framgangsmåten er først å finne analytisk en Greens funksjon som tilfredsstiller de homogene likningene og deretter bestemme numerisk en fordeling av kilder og sluk over legemets overflate slik at ikke-homogene randkrav tilfredsstilles. Det skal her kun gies en kort presentasjon av løsningsmetoden.

$$\hat{\phi} = \Phi_i + \sum_{q=1}^6 \varphi_q \hat{u}_q + \hat{\psi}_d \quad (E49)$$

Følgende skal være oppfylt:

$$1. \quad \nabla^2 \hat{\phi} = 0 \quad \text{i væsker} \quad (\text{E50})$$

$$2. \quad \frac{\partial}{\partial z} \hat{\phi} = 0 \quad \text{på } z = h \quad (\text{E51})$$

$$3. \quad -\omega^2 \hat{\phi} + g \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} = 0 \quad \text{på } z = 0 \quad (\text{E52})$$

$$4. \quad \hat{\phi}_q \text{ og } \hat{\psi}_d \text{ representerer} \\ \text{utgående bølge i } r \rightarrow \infty \quad (\text{E53})$$

$$5. \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} = n_q \quad \text{på } S \quad (\text{E54})$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}_d}{\partial n} = - \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial n} \quad \text{på } S$$

Greens funksjon,  $G(\vec{r}|\vec{r}_0)$ , tilfredsstiller likn. (E50), (E51), (E52) og (E53) bortsett fra i  $\vec{r} = \vec{r}_0$ , hvor  $G(\vec{r}|\vec{r}_0)$  har en singularitet. I dette tilfellet viser det seg hensiktsmessig å innføre en singularitet av typer kilde/sluk :

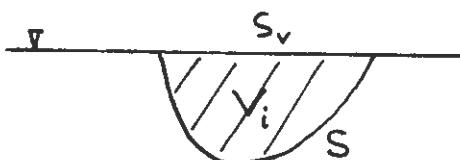
$$G(\vec{r}|\vec{r}_0) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} + g(\vec{r}|\vec{r}_0) \quad (\text{E55})$$

hvor  $g(\vec{r}|\vec{r}_0)$  tilfredsstiller likn. (E50), (E51), (E52) og (E53) uten noen form for singularitet i væskeren.

Ut fra Greens setning kan det vises at potensialet i et vilkårlig punkt,  $\vec{r}_1$ , i væskeren kan skrives som

$$\phi(\vec{r}_1) = \iint_S Q(\vec{r}_0) G(\vec{r}_1|\vec{r}_0) dS \quad (\text{E56})$$

hvor  $\vec{r}_0$  er koordinatvektor til punkter på  $S$ . En forutsetning for at  $\phi(\vec{r}_1)$  kan uttrykkes slik som likn. (E56) angir, er at følgende homogene "innvendige" problem ikke har noen løsning.



$$\nabla^2 \phi_i = 0 \quad \text{i } V_i \quad (\text{E57})$$

$$-\omega^2 \phi_i + g \frac{\partial \phi_i}{\partial z} = 0 \text{ på } S_v \quad (E58)$$

$$\phi_i = 0 \quad \text{på } S \quad (E59)$$

Dersom dette problemet har løsning, kan ikke  $\phi(\vec{r}_i)$  representeres slik som angitt i likn. (E56). For visse frekvenser,  $\omega_{ir}$ , vil likn. (E57), (E58) og (E59) ha løsning. Dette betegnes ofte som irregulære frekvenser. Dersom et hydrodynamisk problem løses numerisk ut fra likn. (E56), vil det opprette numeriske ustabiliteter omkring  $\omega = \omega_{ir}$ .

Det er mulig å regne ut  $g(\vec{r}|\vec{r}_0)$  analytisk. Referanse til dette er f.eks. :

Faltinsen og Michelsen "Motion of Large Structures in Waves at zero Froude number".  
DnV-publication no.90 - sept 75.

Med analytisk uttrykk for  $G(\vec{r}|\vec{r}_0)$  kan  $Q(\vec{r}_0)$  bestemmes numerisk. Det ikke-homogene randkravet (likn. (E54)) benyttes da. Legemets overflate,  $S$ , deles inn i  $m$  flateelementer. Likn. (E54) kan skrives på diskretisert form.

$$n_{q,i} = -2\pi Q_{q,i} + \sum_{j \neq i} Q_{q,j} \frac{\partial}{\partial n} G(\vec{r}_i|\vec{r}_j) \quad (E60)$$

$$-\frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = -2\pi Q_{d,i} + \sum_{j \neq i} Q_{d,j} \frac{\partial}{\partial n} G(\vec{r}_i|\vec{r}_j) \quad (E61)$$

hvor  $r_i$ ,  $r_j$  er koordinatvektorer til flateelementer på legemets overflate. Leddet  $-2\pi Q_i$  framkommer ved å studere

$$I = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_i} \iint_A Q_i \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} dS \quad (E62)$$

hvor  $A$  er et endelig areal på  $S$  med middelpunkt i  $\vec{r}_i$ . For hver enkelt mode samt for diffraksjonen kan det diskretiserte problemet altså skrives som  $m$  likninger med  $m$  ukjente :

$$\frac{n}{\sim} = \frac{A}{\sim} Q \quad (E63)$$

$$\underset{\sim}{Q} = A^{-1} \underset{\sim}{n} \quad (E64)$$

Merk - alle diagonalelementene i  $A$  har verdien  $-2\pi$ . Når  $A$  er bestemt, kan  $\underset{\sim}{Q}$  bestemmes ut fra likn. (E60), evnt. likn. (E61). Når  $\underset{\sim}{Q}$  er kjent, kan  $\phi$  i et vilkårlig punkt i væskeren bestemmes ut fra likn. (E56). Når  $\phi$  er kjent, kan de hydrodynamiske kreftene bestemmes.

Kommentarer til metoden :

1. Metoden krever stor regnekapasitet. Den har derfor først blitt tatt i bruk i større utstrekning de siste årene.
2. Bruk av symmetri kan redusere antall regneoperasjoner betraktelig med uforandret regnenøyaktighet.
3. Veritasprogrammet NV459 benytter seg av metoden. Det er i dette programmet mulig å legge inn to symmetriplan.
4. Metoden slik den er presentert her er 3-dimensjonal. Det eksisterer tilsvarende 2-dimensjonale metoder.

## F. IKKE-LINEÆRE EFFEKTER

F1 - Innledning

Fra likn. (E1) gjelder for isolert bøye :

$$|\hat{u}_3|_{opt} = \frac{\rho g^2 f(kh)}{w_k} n_0 \frac{1}{|\kappa_3|}$$

Til 1.orden ( $k_a \ll 1$ , punktabsorbator) :

$$|\kappa_3| \approx \begin{cases} A_v & \text{for flytende legemer} \\ V & \text{for neddykkede legemer} \end{cases}$$

Avtagende dimensjoner gir økende  $|\hat{u}_3|_{opt}$ . I sin tur gir dette økende ikke-lineære effekter. For å utnytte punktabboratoren ("sugeeffekten") er det ønskelig å ha en så liten konstruksjon som mulig. En nedre grense vil imidlertid bli satt av ikke-lineære effekter.

Typer av ikke-lineariteter :

1. Ikke-lineariteter i de hydrodynamiske grunnlikningene.
2. Ikke-lineariteter på grunn av at legemet beveger seg.
3. Viskøse tap.
4. Ikke-lineariteter generert av maskineri.

Disse skal behandles hver for seg i avsnittene videre framover. Hele kapittel F. er mest ment å gi et overblikk over emnet uten å gå i detalj.

F2 - Ikke-lineariteter i de hydrodynamiske grunnlikningene

Fri overflatebetingelse er ikke-lineær.

- a) Dynamisk (konstant trykk på overflaten = lufttrykket) :

$$gn + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 = 0 \quad \text{på } z = n \quad (F1)$$

- b) Kinematisk (væskepartikkelen som er på overflaten forblir å være på overflaten)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{D}{Dt} n = \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla n \quad \text{på } z = n \quad (F2)$$

Disse likningene må benyttes dersom f.eks. ikke-lineariteter i innkommende bølge skal beskrives. Lineær teori for hav-

bølger holder bra for  $H \lesssim 0.1 \lambda$ .

For å regne ut de hydrodynamiske kreftene benyttes Bernoulli, som har et ikke-lineært ledd:

$$P = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (\nabla \Phi)^2 \quad (F3)$$

Disse ikke-lineære effektene er i prinsipp ikke knyttet til legemets bevegelse. For et bølgekraftverk (og da spesielt et kraftverk med karakter av punktabsorbator) vil legemets bevegelse være betydelig. Dette gir opphav til andre typer ikke-lineære effekter som trolig har større betydning.

I dette avsnittet skal det også gjøres en kommentar om bølgedrivkrefter. Både effekt- og impulstransport i en regulær bølge er en bilineær effekt (2.ordens effekt).

Fra tidligere har vi :

$$K \propto |\hat{\eta}|^2 \quad (F4)$$

På samme måte vil en bølge ha en netto impulstransport. På dypt vann gjelder

$$\bar{M}_x = \frac{1}{\lambda} \rho \int_0^\lambda \int_{-\infty}^{\eta} u dz dx \quad (F5)$$

Ved å utvikle dette til 2. orden med

$$\eta = |\hat{\eta}| \sin \omega t \quad (F6)$$

$$u = \omega |\hat{\eta}| \exp(kz) \sin \omega t \quad (F7)$$

finner en :

$$I = v_g \bar{M}_x = \frac{1}{4} \rho g |\eta|^2 \quad (F8)$$

Dette medfører at dersom energi skal absorberes må det samtidig absorberes en impuls, eller med andre ord vil konstruksjonen bli utsatt for en drivkraft.

$$F_{driv} = \frac{1}{4} \rho g \{ |\hat{\eta}_i|^2 + |\hat{\eta}_r|^2 - |\hat{\eta}_t|^2 \} \quad (F9)$$

hvor  $\eta_i$  er innkommende bølge,  $\eta_r$  er reflektert bølge og  $\eta_t$  er transmittert bølge. Liknende uttrykk finnes for endelig vanndyp. - jmfr. Longuet-Higgins; Proc.R.Soc. A 352 463 - 480 (77).

F3 - Ikke-lineære effekter som følge av at legemet beveger seg.

Legemets bevegelse kan skrives som

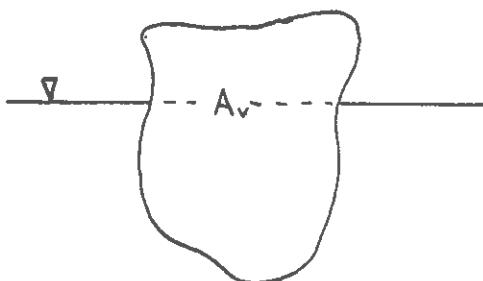
$$M \ddot{x} + R \dot{x} + S x = \ddot{F} e^{i\omega t} \quad (F10)$$

hvor M, R og S er  $6 \times 6$  - matriser.

Merk at det er kun i stasjonære, harmoniske tilfeller det har mening å snakke om M, R, S og  $\ddot{F}$  som konstante koeffisienter. Selv om vi har regulære bølger inn, vil koeffisientene være avhengig av legemets posisjon. I og med at legemets bevegelse er betydelig vil dette gi opphav til ikke-lineariteter.

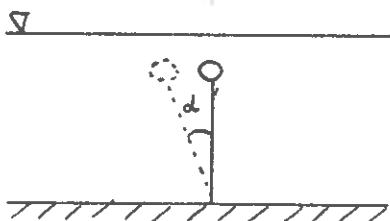
Stivheten

Eks. 1 - flytende legeme i hiv



$$A_v = A_v(\eta) \\ \text{gir } S_{33} = \rho g A_v = S_{33}(\eta)$$

Eks. 2 - neddykket system, opphengt som omvendt pendel, i jag.

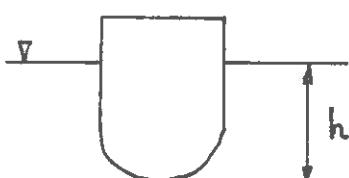


Jagekraften fra forankringen.

$$F_s = F_{s,o} \sin \alpha .$$

Eksitasjonskraften

Eks. - Legeme i hiv.



$$F_{e,3} \propto e^{-hk}$$

$$\text{gir } F_{e,3} = F_{e,3}(\eta)$$

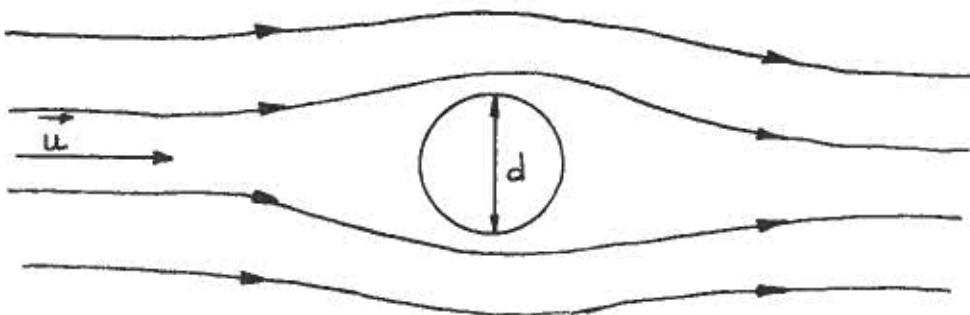
Merk sammenhengen mellom  $R$  og  $F_e$ . For et legeme i jag vil en tilsvarende ikke-linearitet oppstå, men nå vil det være fasen på  $F_e$  som varierer.

### Addert masse

Også addert masse er avhengig av nedsenkingen,  $h$ . For svært store  $h$  vil addert masse gå over til å bli den som gjelder for  $\infty$  medium.

### F4 - Viskositet

Som utgangspunkt - stasjonær strømning om en sylinder.



På grunn av viskositeten blir sylinderen utsatt for en dragkraft,  $F_{Dr}$ . I forbindelse med viskøse krefter benyttes Reynolds tall som ikke-dimensjonalt tall. ( $\ell$  er en karakteristisk lengde) :

$$R = \frac{u\ell}{v} \quad (F11)$$

hvor  $v$  er kinematisk viskositet ( $\sim 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$  for vann).

For svært små  $R$  ( $\leq 10^2$ ):  $F_{Dr} \propto u$ . Dette er imidlertid stort sett et uaktuelt område for marine konstruksjoner.

I et forholdsvis stort område ( $R \sim 10^2 - 10^5$ ) gjelder

$$F_{Dr} = \frac{1}{2} \rho C_d A u^2 \quad (F12)$$

hvor  $A$  er tverrsnittet vinkelrett på strømningen. I dette tilfellet er  $F_{Dr} \propto u^2$ , d.v.s. et ikke-lineært ledd. DnV benytter  $C_d = 0.7$  i sine spesifikasjoner.

For  $R \geq 10^5$  foregår en omvandling fra laminært til turbulent grenseskikt. Dette er i høyeste grad en ikke-lineær effekt.

Fig.F1 viser  $C_d$  for en kule.

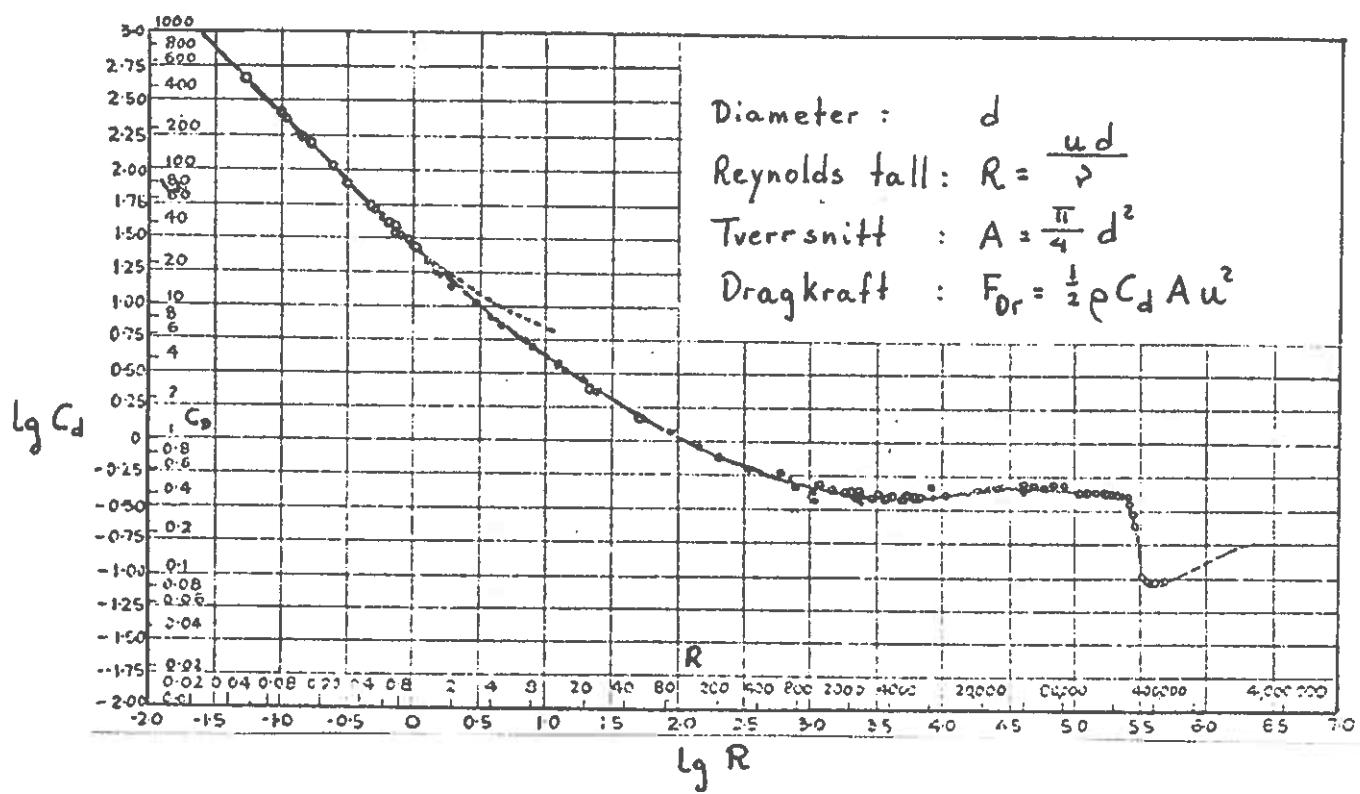


Fig. F1. Dragkoefisienten på en kule. Stiplet linje er basert på teori for lave Reynolds-tall.  
Figuren er hentet fra Gouldstein (ed.) -  
"Modern developments in fluid dynamics."  
1938 - Oxford University Press.

Fra stasjonær strømning skal vi gå over til en oscillerende strømning og bevegelse :

$$u = \hat{u} e^{i\omega t}$$

evnt.  $\vec{x} = \hat{x} e^{i\omega t}$

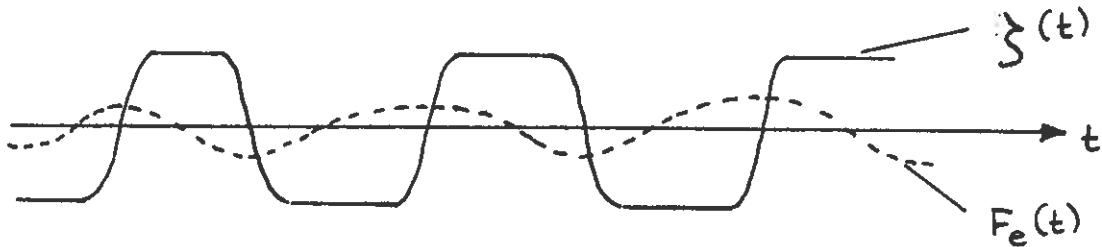
Dette er et lite utviklet fagfelt. Ut fra forsøk viser det seg at et tydeligvis svært viktig ikke-dimensjonalt tall for denslags strømninger er Keulegan-Carpenter tallet, K :

$$K = \frac{|\hat{u}| \cdot T}{\ell} = 2\pi \frac{|\hat{n}|}{\ell} \quad (\text{F13})$$

Dette tallet sier noe om hvor langt en væskepartikkelf beveger seg i forhold til en karakteristisk lengde. Dette har igjen noe med hva slags hvirvelbilde som oppstår omkring legemet. For en situasjon hvor legemet beveger seg markant bør muligens den relative hastighet mellom legeme og væskepartikkelf inngå (dette er en ren hypotese). En annen ting man skulle vente er at for svært store K burde teorien gå over til den for stasjonær strømning. Merk forøvrig at i uttrykket for K inngår ingen naturkonstanter (så som g eller v). K er en rent geometrisk størrelse, og K er konstant når  $|\hat{n}|/\ell$  er konstant. Det er vanlig å regne at hvirvlinger ikke oppstår som en merkbar effekt før  $K > 3$ .

#### F5 - Ikke-lineariteter generert av maskineri

I maskineriet vil det være lineær demping for å produsere energi. I tillegg vil maskineriet også ha ikke-lineær demping. Det er aktuelt å sette en øvre grense på legemets utsving. Videre er det aktuelt å styre legemets bevegelse for å oppnå f.eks. optimale faseforhold.



I det tilfellet som er skissert i figuren har vi en meget markant ikke-lineær demping fra maskineriet. En slik type bevegelse blir behandlet mer i kapittel G.

## G. PUNKTABSORBATOR

I dette kapitlet følgjer forelesningane artikkelen av Budal, Falnes, Kyllingstad, Oltedal: "Experiments with point absorbers in regular waves", Symposium on Wave Energy Utilization, Göteborg 30.10. - 1.11.1979. Artikkelen er attgjeven her som vedlegg 3. Det blir vist til likningane i artikkelen ved å setja bokstaven G føre likningsnummera.

Forutan denne artikkelen, som gjeld eksperiment med ei loddrett innfallande bølgje mot ei lang rekke av punktaborbatorar, ser me og på visse optimale forhold ved ein isolert flytande punktaborbator i hivrørsle.

Ein punktaborbator er ein effektaborbberande svingande kropp som har tverrmål mykje mindre enn bølgjelengda. I hivrørsle vil ein slik liten kropp vera ein sirkulærssymmetrisk strålar. Ved optimal svingrørsle blir den maksimalt absorberte effekten i samsvar med (D214) og (D240)

$$P_{\max} = \frac{\lambda}{2\pi} K \quad (G53)$$

eller med bruk av (B75) og dispersjonslikninga (B45) for djupt vatn

$$P_{\max} = \frac{\rho g^3}{4\omega^3} |\eta_i|^2 \quad (G54)$$

I staden for å optimalisera med omsyn på maksimal effektaborpsjon i eit "punkt" bør me heller for eit bølgjekraftverk optimalisera med omsyn på maksimalt forhold mellom energiproduksjon og kostnader. Dette er ei særskilte vanskeleg oppgåve. Her vil me berre som ei innleiing i problemet sjå på forholdet mellom absorbert effekt  $P$  og volumet  $V$  av den hivande punktaborbatoren. Det kan visast (jfr. oppgåve G3) at  $P/V$  går mot sitt maksimum

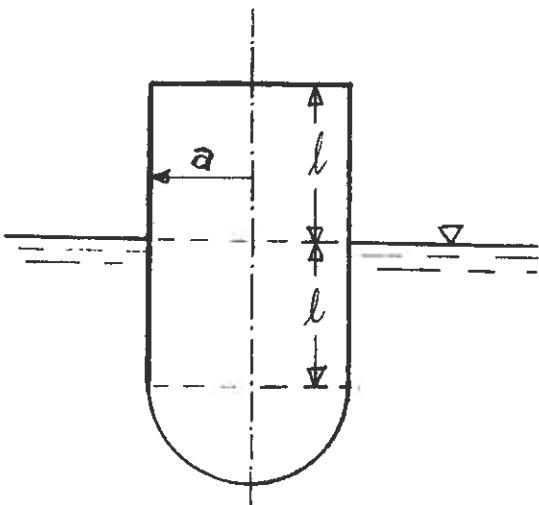
$$\left(\frac{P}{V}\right)_{\max} = \frac{\rho g \omega}{4} |\eta_i| \quad (G55)$$

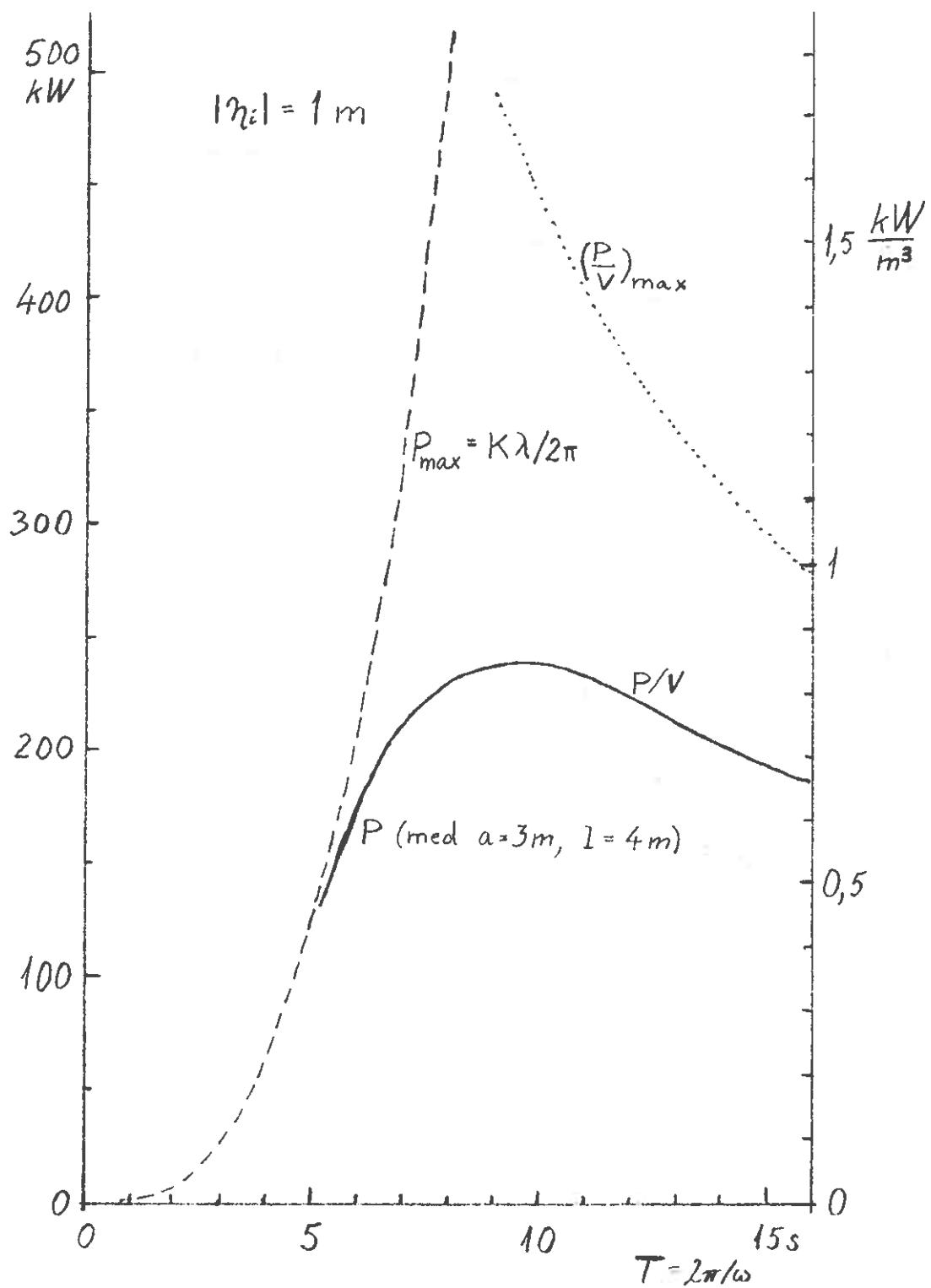
når  $V \rightarrow 0$ . Med dei typiske verdiane  $|\eta_i| = 1 \text{ m}$  og  $T = 2\pi/\omega = 10 \text{ s}$  blir  $(P/V)_{\max} = 1,6 \text{ kW/m}^3$ .

Me kan samanlikna dei teoretiske grensene (G54) og (G55) med det me kan oppnå med ein punktabso- bator i form av ein sylinder med halvkule- forma botn. Med ein diameter  $2a = 6 \text{ m}$  og sylinderhøgd og vertikal slaglengd lik  $2l = 8 \text{ m}$  er den optimalt absor- berte effekten  $P$  rekna ut (i oppgåve G3) for ein amplitud  $|\eta_i| = 1 \text{ m}$

på den innkomande bølgja. Resultatet  $P$  som funksjon av bølgjepериoden  $T = 2\pi/\omega$  er vist grafisk i diagrammet ( neste side). Då bøyen har eit kjent volum  $V = 283 \text{ m}^3$  er det i diagrammet (på høgre sida) teikna inn ein skala for  $P/V$ . Dei teoretiske grensene, tredjegradsparabelen (G54) og hyperbelen (G55) som funksjon av  $T$  er også teikna inn i diagrammet. P.g.a. den avgrensa vertikale slaglengda er  $P < P_{\max}$  når  $T > 5 \text{ s}$ . For denne nokså typiske bølgje- amplituden på  $1 \text{ m}$  er den absorberte effekten av storleik- orden  $0,2 \text{ MW}$ . Men jamvel for denne nokså little bøyen er  $P/V$  monaleg mindre enn  $(P/V)_{\max}$ . Men diagrammet tyder på at  $P/V$  nærmar seg mot  $(P/V)_{\max}$  når  $T$  aukar. Det er for di bølgjelengda  $\lambda$  aukar, slik at  $a/\lambda$  minkar, d.v.s. for di føresetnaden om punktabso- bator då er betre oppfylt.

Når det gjeld andre forhold ved konstruksjon av bølgje- kraftverk etter punktabso- batorprinsippet, kan det visast til følgjande publikasjonar av Budal og Falnes: "Wave-power conversion by point absorbers", Norwegian Maritime Research, Vol. 6, No. 4, 1978, pp. 2 - 11 og "Interacting point absor- bers with controlled motion", Conference on Power from Sea Waves" University of Edinburgh, June 26 - 28, 1979.





## H. PRAKTISKE PROBLEM VED BØLGJEKRAFTVERK

Dette emnet vart særleg dekka ved dei tre forelesningane som B.M. Count, CEGB, Southampton gav ved NTH 5. og 6. november 1979. Emnet var bølgjeenergiforskinga i Storbritannia, og innhaldet var m.a.

- energibehov i Storbritannia,
- detaljert oversyn over dei typane bølgjekraftverk som det blir arbeidt med,
- problem vedrørande konvertering og ilandføring av nytteenergi,
- samspel med andre energikjelder gjennom det elektriske kraftoverføringsnettet, og
- miljøpåverknader frå bølgjekraftverk.

Det kan elles visast til vedlegg 4 som inneheld ein meir detaljert disposisjon for forelesningane til B.M. Count.

Det kan vidare visast til følgjande publikasjonar (i tillegg til det som er nemnt under kapittel G):

B.M. Count: "Power generation from ocean waves. A theoretical review." Proceedings of SIMS 1979 Research Application Conference on Energy Conversion and Fluid Dynamics (held at Utah), published by SIAM Institute 1980.

I. Glendenning: "Energy from waves" Oceanology International 78, Proceedings 1978, pp. 20 - 32.

Ø. Holter m. fl.: "Alternative energiressurser", Universitetsforlaget, Oslo, 1979.

## J. VEKSELVERKNAD MELLOM EI BØLGJE OG FLEIRE SVINGANDE KROPPAR

Innleiing.

I dette kapitlet følgjer forelesningane artikkelen av Falnes: "Radiation impedance matrix and optimum power absorption for interacting oscillators in surface waves" som skal publiserast i Applied Ocean Research og som er attgjeve her som vedlegg 5 ("appendix") i manuskriptform ("preprint"). Det blir her referert til likningane (1) - (53) i denne artikkelen ved å setja bokstaven J føre likningsnummeret, altså (J1) - (J53). Ein del av desse likningane er oppsummerte i innleiinga av neste kapittel (K).

Merk at notasjonen er den same i artikkelen som i forelesningane bortsett frå at den komplekse fartamplituden ikkje er skiven  $U_i$  men  $u_i$ . Dessutan er der ein skilnad (med ein faktor  $\sqrt{k}$ ), i definisjonen på fjernfeltkoeffisienten  $b_i(\theta)$  med di me i staden for likn. (22) i artikkelen skriv

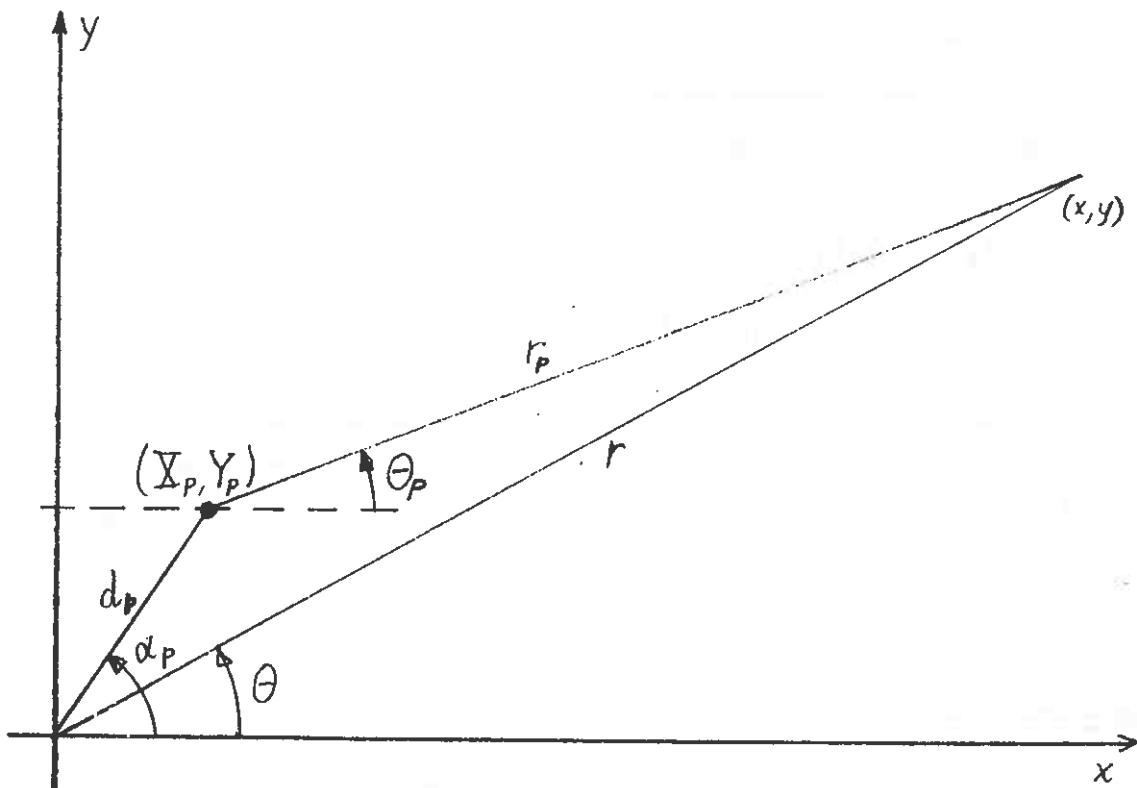
$$\Phi_i \sim b_i(\theta_p) e(kz) (kr_p)^{-\frac{1}{2}} e^{-ikr_p} \quad (J22)$$

der  $r_p$  og  $\theta_p$  er (horisontale) polarkoordinatar rekna frå ein vertikal akse gjennom tyngdepunktet av kropp nr. p.

Elles skal me her setja opp ein del generaliseringar av resultat i kap. D, og me skal gje dei generaliserte likningane same talnummer som der, men med bokstaven D skifta ut med J i likningsnummeret. (Alle desse talnummara er større enn 100.)

Fjernfeltkoeffisienten referert til origo.

La  $x = X_p$ ,  $y = Y_p$  representera den vertikale lina gjennom oppdriftsentret til kroppen nr. p. Dette er også utgangspunktet for den horisontale avstanden  $r_p$  til det aktuelle fjernfeltpunktet.



$$r \gg d_p$$

$$\theta_p \approx \theta$$

$$r_p \approx r - d_p \cos(\alpha_p - \theta)$$

$$(kr_p)^{-\frac{1}{2}} = (kr)^{-\frac{1}{2}} + O\{r^{-\frac{3}{2}}\} \approx (kr)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_i \sim b_i(\theta_p) e(kz) (kr_p)^{-\frac{1}{2}} e^{-ikr_p} =$$

$$\approx b_i(\theta) e^{ikd_p \cos(\alpha_p - \theta)} e(kz) (kr)^{-\frac{1}{2}} e^{-ikr}$$

$$\varphi_i \sim a_i(\theta) e(kz) (kr)^{-\frac{1}{2}} e^{-ikr}$$

(J129)

der

$$a_i(\theta) = b_i(\theta)e^{ikd_p \cos(\alpha_p - \theta)} \quad (J22a)$$

eller med  $d_i = d_p$  og  $\alpha_i = \alpha_p$

$$\begin{aligned} a_i(\theta) &= b_i(\theta)e^{ikd_i \cos(\alpha_i - \theta)} \\ &= b_i(\theta)e^{ik(r-r_i)} \end{aligned}$$

Merk at me p.g.a. (J1):  $i = 6p + q$  kan bruka indeks  $i$  i staden for indeks  $p$ , der  $i$  er eit vilkårleg nummer i rekka av dei seks "oscillatorane" som er tilordna kropp nr.  $p$ .

### Generelle formlar.

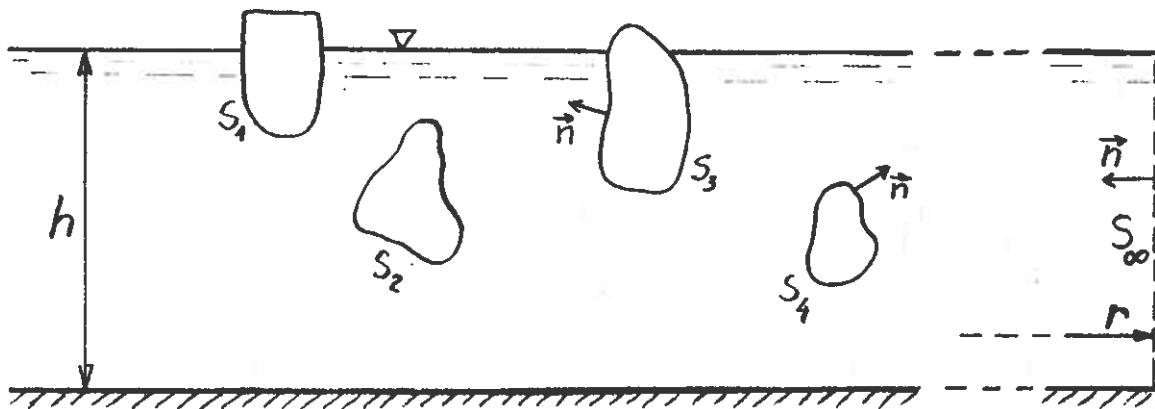
I analogi med (D117) definerer me integralet

$$I(\phi_i, \phi_j) = \iint_S \left( \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right) dS \quad (J117)$$

der  $\phi_i$  og  $\phi_j$  er vilkårlege funksjonar som oppfyller Laplace-likninga og dei homogene randvilkåra på den frie overflata  $z = 0$  og på sjøbotnen  $z = -h$ . I (J117) skal det integrerast over  $S = \cup S_p$ , altså over summen av alle vatte overflater. Me har vidare i analogi med (D118) teoremet

$$I(\phi_i, \phi_j) = - \iint_{S_\infty} \left( \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right) dS \quad (J118)$$

Her er  $S_\infty$  som før ei tenkt sylinderflate som omsluttar alle dei  $N$  svingande kroppane og som har ein radius  $r$  som går mot uendeleig.



For potensial  $\psi$  som dessutan oppfyller strålingsvilkåret i uendelig avstand, er den komplekse amplituden

$$\psi_{i,j} = A_{i,j}(\theta) e(kz) (kr)^{-\frac{1}{2}} e^{-ikr} \quad (\text{J129})$$

I analogi med (D132) og (D135) har me

$$I(\psi_i, \psi_j) = 0 \quad (\text{J132})$$

$$I(\psi_i, \psi_j^*) = i \frac{f(kh)}{k} \int_0^{2\pi} A_i(\theta) A_j^*(\theta) d\theta \quad (\text{J135})$$

Spesielt får me

$$\begin{aligned} I(\psi_i, \psi_j^*) &= i \frac{f(kh)}{k} \int_0^{2\pi} a_i(\theta) a_j^*(\theta) d\theta \\ &= i \frac{f(kh)}{k} \int_0^{2\pi} b_i(\theta) b_j^*(\theta) e^{ik[d_i \cos(\alpha_i - \theta) - d_j \cos(\alpha_j - \theta)]} d\theta \\ &= i \frac{f(kh)}{k} \int_0^{2\pi} b_i(\theta) b_j^*(\theta) e^{-ik[r_i(\theta) - r_j(\theta)]} d\theta \end{aligned}$$

### Strålingsimpedansen.

Når oscillator nr.  $j$  svingar, fører dette, i samsvar med (J2) til ei kraft  $-Z_{ij}\hat{u}_j$  på oscillator nr.  $i$  (modus  $q$  i kropp  $p$ ). I analogi med (D38) har me

$$Z_{ij} = \iint_{S_p} \frac{p_j}{u_j} n_{pq} dS_p = -i\omega\rho \iint_S \varphi_j \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n} dS \quad (\text{J25})$$

Merk at me her p.g.a. randkravet (J21) kan ta flateintegralet over

$$S \approx US_p$$

d.v.s. summen av alle vætte overflater, som eit alternativ til å integrera over berre  $S_p$ . Sidan høgre-sida i (J21) er reell, kan me også velja om me vil ha konjugasjonsstjerna i (J25) eller ikkje.

På heilt tilsvarende måte som før kan me no frå (J25) utleia resiprositetssetninga

$$\boxed{Z_{ij} = Z_{ji}}$$

(J135c)

og følgjande uttrykk for strålingsresistansen

$$R_{ij} = R_{ji} = \frac{i\omega\rho}{2} I(\varphi_i^*, \varphi_j) = -\frac{i\omega\rho}{2} I(\varphi_i, \varphi_j^*) \quad (\text{J135d})$$

eller

$$R_{ij} = -\frac{i\omega\rho}{2} \iint_{S_\infty} \left( \varphi_i^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \varphi_j \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n} \right) dS$$

Er  $S_\infty$  ei sirkulær sylinderflate, er i fjernfeltet  $-\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} = -ik\varphi_j$  og  $-\frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial r} = ik\varphi_i^*$ . Difor har me

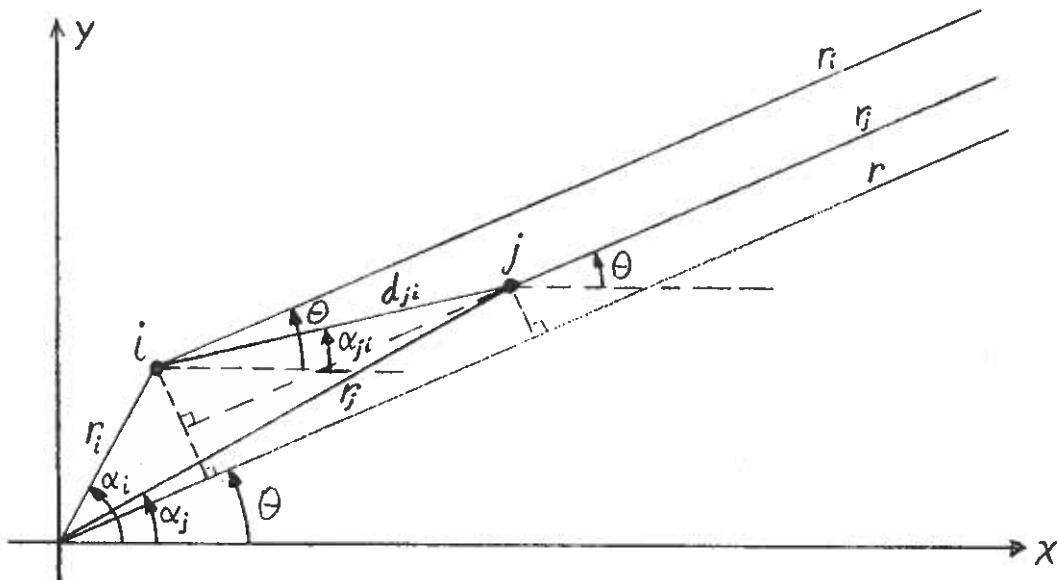
$$R_{ij} = i\omega\rho \iint_{S_\infty} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n} dS \quad (\text{J27})$$

(Jfr. (D126).) Av (J135d) får me dessutan

$$\begin{aligned} R_{ij} &= -\frac{i\omega\rho}{2} i \frac{f(kh)}{k} \int_0^{2\pi} a_i(\theta) a_j^*(\theta) d\theta \\ &= \frac{\omega\rho f(kh)}{2k} \int_0^{2\pi} a_i(\theta) a_j^*(\theta) d\theta = \frac{\omega\rho f(kh)}{2k} \int_0^{2\pi} a_i^*(\theta) a_j(\theta) d\theta \end{aligned}$$

eller

$$R_{ij} = \frac{\omega\rho f(kh)}{2k} \int_0^{2\pi} b_i(\theta) b_j^*(\theta) e^{ik[d_i \cos(\alpha_i - \theta) - d_j \cos(\alpha_j - \theta)]} d\theta$$



$$R_{ij} = \frac{\omega\rho f(kh)}{2k} \int_0^{2\pi} b_i(\theta) b_j^*(\theta) e^{-ik d_{ji} \cos(\alpha_{ji} - \theta)} d\theta \quad (\text{J29})$$

Merk at  $R_{ij}$  avheng både av den relative avstanden  $d_{ji}$  og den relative retningsorienteringa.

Merk at for  $d_{ji} = 0$ , d.v.s. når dei to oscillatorane høyrer til den same kroppen, så stemmer (J29) med (D175).

Eksitasjonskrafta.

$$F_{e,i} = i\omega \rho \iint_S (\phi_o + \phi_d) n_p dS \quad (J143)$$

Av (J21) får me

$$F_{e,i} = i\omega \rho \iint_S (\phi_o + \phi_d) \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS = i\omega \rho \iint_S (\phi_o + \phi_d) \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS$$

og av (J20):

$$F_{e,i} = i\omega \rho \iint_S \left\{ (\phi_o + \phi_d) \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial (\phi_o + \phi_d)}{\partial n} \right\} dS$$

$$F_{e,i} = i\omega \rho I\{(\phi_o + \phi_d), \varphi_i\} \quad (J147)$$

Her oppfyller  $\phi_d$  og  $\varphi_i$  strålingsvilkåret. Fra (J132) får me

$$F_{e,i} = i\omega \rho I(\phi_o, \varphi_i) \quad (J151)$$

(Haskinds formel)

Med plan innfallande bølgje

$$n_o = n_{oo} e^{-ik(x \cos \gamma + y \sin \gamma)} = n_{oo} e^{-ikr \cos(\theta - \gamma)}$$

$$\phi_o = \frac{-g}{i\omega} e(kz) n_o \quad (J33)$$

Me set dette og (J129) inn i (J151) og integrerer over  $S_\infty$ .

$$F_{e,i} = i\omega \rho \frac{-g}{i\omega} n_{oo} I \left\{ e(kz) e^{\underbrace{-ikrcos(\theta-\gamma)}_{e^{ikrcos(\theta-\gamma-\pi)}}}, \frac{a_i(\theta)}{\sqrt{kr}} e(kz) e^{-ikr} \right\}$$

Eit slikt integral har me, med mykje møde, rekna ut før.

Jfr. (D154) og (D165). Analogt har me her

$$F_{e,i} = \rho g n_{oo} \frac{f(kh)}{k} \sqrt{2\pi} a_i(\gamma + \pi) e^{i\pi/4}$$

Med bruk av (J22a) får me

$$\begin{aligned} F_{ei} &= \rho g n_{oo} \frac{f}{k} \sqrt{2\pi} b_i (\gamma + \pi) e^{ikdi \cos(\alpha_i - \gamma - \pi)} e^{i\pi/4} \\ &= \rho g \frac{f}{k} \sqrt{2\pi} b_i (\gamma + \pi) \underbrace{n_{oo} e^{-ikdi \cos(\alpha_i - \gamma)}}_{n_o(x_i, Y_i)} e^{i\pi/4} \end{aligned}$$

$F_{e,i} = \kappa_i n_o(x_i, Y_i) = \kappa_i n_{oo} e^{-ikdi \cos(\alpha_i - \gamma)}$

(J34)

$\kappa_i = \frac{\rho g f(kh)}{k} \sqrt{2\pi} b_i (\gamma + \pi) e^{i\pi/4} \quad (J34a)$

Jfr. (D206a).

#### Kommentar vedrørende singulær strålingsresistansmatrise.

Dersom  $\underline{u}$  kan veljast fritt, er den absorberete effekten

$P = \frac{1}{4} (\tilde{F}_{e\underline{u}} \underline{u}^* + \tilde{F}_{e\underline{u}}^* \underline{u}) - \frac{1}{2} \tilde{u}^* \tilde{R} \underline{u} \quad (J11)$

maksimum berre dersom

$\tilde{R} \underline{u} = \frac{1}{2} \tilde{F}_{e\underline{u}} \quad (J12)$

er oppfylt. Dersom  $\tilde{R}$  ikke er singulær, d.v.s. dersom  $\tilde{R}^{-1}$  eksisterer, har (J12) den ein tydige løysinga (J13). Dersom derimot determinanten  $|\tilde{R}|$  er null, er likninga (J12) ubestemt og ho har uendelege mange løysingar for  $\underline{u}$ . Me går ut frå at  $\tilde{F}_{e\underline{u}}$  ikke er slik at likninga (J12) er sjølvmotseiande.

Men likevel er den maksimale absorberete effekten

$P_{max} = \frac{1}{2} \tilde{u}^* \tilde{R} \underline{u} = \frac{1}{2} \tilde{u} \tilde{R} \underline{u}^* \quad (J54)$

eintydig, så sant  $\underline{u}$  er valt slik at (J12) er oppfylt.

Me skal her skissera beviset for denne påstanden. La  $\underline{u}_1$  og  $\underline{u}_2$  vera to vilkårlege løysingar av (J12). Me set  $P_1 = \tilde{u}_1^* \tilde{R} \underline{u}_1$  og  $P_2 = \tilde{u}_2^* \tilde{R} \underline{u}_2$ . Det som no skal visast, er at

$P_2 = P_1$ , altså at  $\Delta P = P_2 - P_1 = 0$ . Med bruk av (J12) får me

$$\Delta P = \frac{1}{4} (\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1)^* F_e = \frac{1}{4} \Delta \tilde{u}^* F_e$$

Altså må det visast at  $F_e$  og  $\Delta \tilde{u} = \tilde{u}_2 - \tilde{u}_1$  er ortogonale vektorar. Då både  $\tilde{u}_1$  og  $\tilde{u}_2$  er løysingar av (J12), er  $R\Delta \tilde{u} = 0$ , d.v.s.  $\Delta \tilde{u}$  tilhøyrer nullrommet av operatoren  $R$ ,  $\Delta \tilde{u} \in N_R$ . Dersom likn. (J12) ikkje er sjølvmotseiande, tilhøyrer  $F_e$  rekkjevidda av operatoren  $R$ ,  $F_e \in R_R$ . No er det velkjent at nullrommet til ein lineær operator er det ortogonale komplementet til rekkjevidda av den tilhøyrande adjungerte operatoren. (Sjå t.d. M.C. Pease, Methods of Matrix Algebra, Academic Press, 1965, p. 288, eller Ivar Stakgold, Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Vol. 1, Macmillan, 1967, p. 171). Då strålingsresistansmatrisa er både reell og symmetrisk om hovuddiagonalen, er  $R$  ein sjølvadjungert operator. Altså er alle vektorar i  $N_R$  ortogonale på alle vektorar i  $R_R$ . Difor er  $\Delta P = 0$  og  $P_1 = P_2$ . Altså er  $P_{\max}$  eintydig.

Det kan elles visast til oppgåve D3, der me har eit tilfelle der jage- og stamperørslene ikkje er innbyrdes eintydige, medan den maksimale absorberte effekten likevel viser seg å vera eintydig.

## K. RETTE RADER AV JAMT FORDELTE SVINGANDE KROPPAR.

Me startar med eit resyme av dei likningane frå kap. J som me treng som grunnlag for analysen her.

Total kraft (J2):

$$F_{t,i} = F_{e,i} - \sum_j Z_{ij} u_j \quad \tilde{F}_t = \tilde{F}_e - \tilde{Z} \tilde{u} \quad (K1)$$

Resiproositetssatsen (J5):

$$Z_{ij} = Z_{ji} \quad \tilde{Z} = \tilde{z} \quad (K2)$$

Effekt absorbert av alle oscillatorane, (J8, J11):

$$P = \frac{1}{4} \sum_i (F_{e,i} u_i^* + F_{e,i}^* u_i) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} R_{ij} u_j^* u_i \quad (K3)$$

$$P = \frac{1}{4} (\tilde{F}_e \tilde{u}^* + \tilde{F}_e^* \tilde{u}) - \frac{1}{2} \tilde{u}^* \tilde{R} \tilde{u}$$

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \tilde{u}_{\text{opt}}^* \tilde{R} \tilde{u}_{\text{opt}} \quad (K4)$$

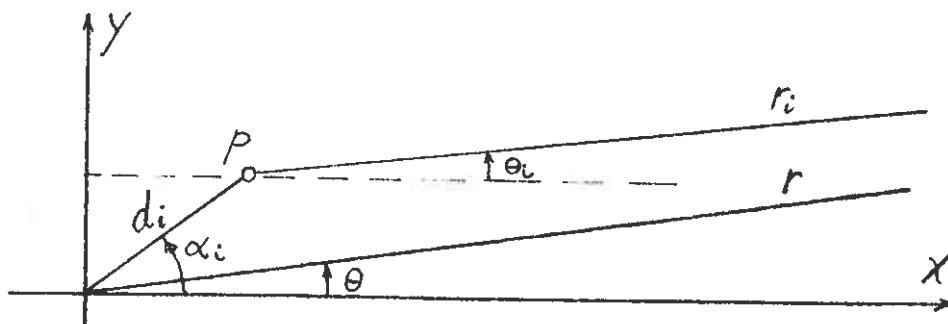
der  $\tilde{u}_{\text{opt}}$  oppfyller (J12):

$$\tilde{R} \tilde{u}_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \tilde{F}_e \quad (K5)$$

Dersom  $\tilde{R}^{-1}$  eksisterer, gjeld (J13) og (J15):

$$\tilde{u}_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \tilde{R}^{-1} \tilde{F}_e \quad (K6)$$

$$P_{\max} = \frac{1}{8} \tilde{F}_e^* \tilde{R}^{-1} \tilde{F}_e \quad (K7)$$



Utstrålt bølgje.

I fjernfeltet,  $kr \gg 1$  og  $r \gg d$ , gjeld (J22)

$$\boxed{\varphi_i \sim b_i(\theta_i) e(kz) (kr_i)^{-\frac{1}{2}} e^{-ikri}} \quad (K8)$$

$$\theta_i \approx \theta \quad r_i \approx r - d_i \cos(\alpha_i - \theta) \quad (kr_i)^{-\frac{1}{2}} \approx (kr)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_i \sim b_i(\theta) e(kz) (kr)^{-\frac{1}{2}} e^{+ik(r-r_i)} e^{-ikr}$$

Med har vidare (J129) og (J22a)

$$\boxed{\varphi_i \sim a_i(\theta) e(kz) (kr)^{-\frac{1}{2}} e^{-ikr}} \quad (K11)$$

$$\boxed{a_i(\theta) = b_i(\theta) e^{ik(r-r_i)} = b_i(\theta) e^{ikd_i \cos(\theta-\alpha_i)}} \quad (K12)$$

Med ei innkomande bølgje

$$\eta_o = \eta_{oo} e^{-ik(x \cos \gamma + y \sin \gamma)} = \eta_{oo} e^{-ikr \cos(\theta-\gamma)} \quad (K13)$$

er eksitasjonskrafta (J34):

$$\boxed{F_{e,i} = \kappa_i(\gamma) \eta_o(x_i, y_i)} \quad (K14)$$

der

$$\eta_o(x_i, y_i) = \eta_{oo} e^{-ikd_i \cos(\alpha_i - \gamma)}$$

er den (uskipla) innkomande bølgja i posisjonen av oscillator nr.  $i$ , d.v.s. av kropp nr.  $p$ . Vidare er eksitasjonskraftkoeffisienten

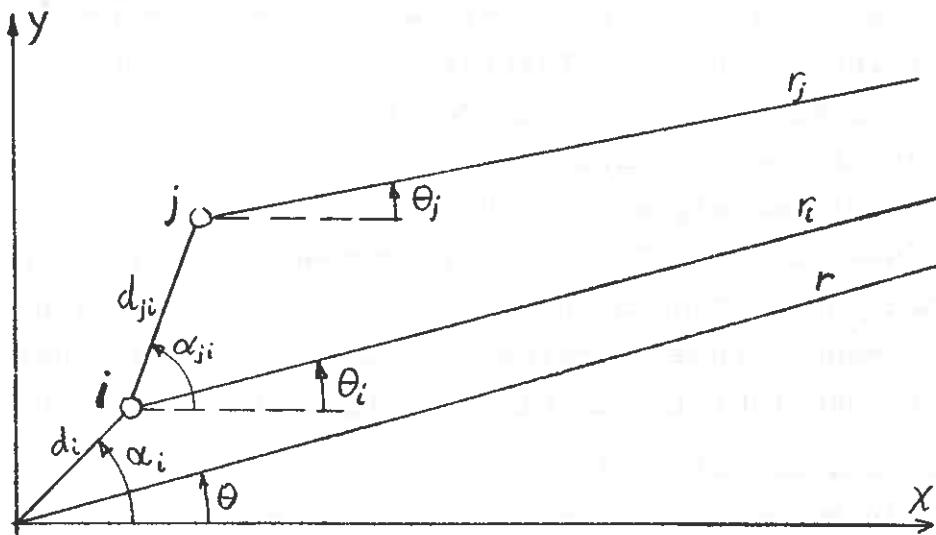
$$\kappa_i(\gamma) = \frac{\rho g f(kh)}{k} \sqrt{2\pi} b_i(\gamma + \pi) e^{i\pi/4} \quad (K15)$$

Vidare har me strålingsimpedansmatrisa (J25)

$$Z_{ij} = -i\omega\rho \iint_S \varphi_j \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n} dS \quad (K16)$$

og strålingsresistansmatrisa (J29):

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{\omega\rho f}{2k} \int_0^{2\pi} a_i(\theta) a_j^*(\theta) d\theta \\ &= \frac{\omega\rho f}{2k} \int_0^{2\pi} b_i(\theta) b_j^*(\theta) e^{-ikd_{ji} \cos(\theta - \alpha_{ji})} d\theta \end{aligned} \quad (K17)$$



I fjernfeltet:  $\theta_i = \theta_j \approx \theta$

$$r_i - r = -d_i \cos(\alpha_i - \theta)$$

$$r_i - r_j = d_{ji} \cos(\alpha_{ji} - \theta)$$

$$R_{ij} = \frac{\omega\rho f}{2k} \int_0^{2\pi} b_i(\theta) b_j^*(\theta) e^{-ik(r_i - r_j)} d\theta$$

Ei rett linje av like kroppar.

Like kroppar plasserte i innbyrdes jamn avstand  $d$  langs y-aksen. Kropp nr.  $p$  i posisjon  $y_p = pd$ . Alle kroppane er likt orienterte i retning.

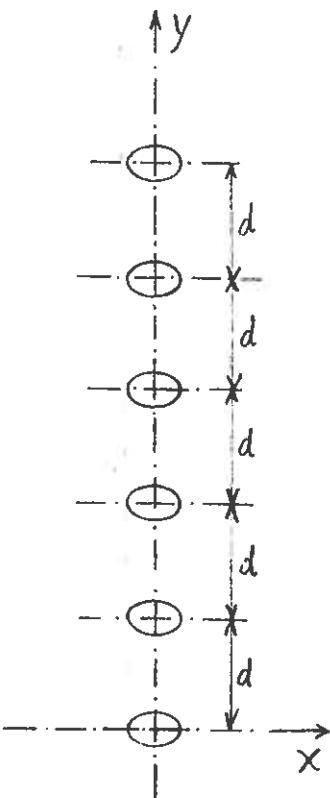
Tilfellet med at alle kroppane svingar med same komplekse fartamplituden er eigentleg behandla før (i kap. D), med di dei då kan sjåast på som ein einaste (men ikkje-samanhengande) kropp. No skal me sjå på tilfelle der kroppane ikkje svingar med same fart.

Me skal sjå på ei plan bølgje som fell inn under ein vilkårleg innfallsvinkel  $\gamma$ . For ei uendeleg rekkje av kroppar kan all innfallande bølgjeenergien absorberast under visse vilkår. I såfall må kroppane svinga i minst to svingemodi, og avstanden  $d$  må liggja under ei viss grense. Om kvar kropp svingar i berre ein modus, vil høgst halvparten av den innfallande bølgjeenergien kunna absorberast.

Me skal dessutan gå ut frå at fjernfeltkoeffisienten  $b_i(\theta)$  for modus nr.  $q$  er den same i kvar kropp, same kor i rekkja kroppen er. Altså

$$b_i(\theta) = b_{6p+q}(\theta) = b_q(\theta) \quad \text{uavhengig av } p \quad (\text{K18})$$

Denne føresetnaden er sjølv sagt oppfylt når det er tale om ei uendeleg lang rekkje av kroppar. For ei endeleg lang rekkje vil det særleg nær enden av rekkja vera annleis. Men dersom kroppane er små ("punktoscillatorar"), så den utstrålte bølgja frå ein vilkårleg kropp blir lite diffraktert på dei andre kroppane, då vil føresetnaden vera oppfylt med god



tilnærming også for ei endeleg rekke av kropper.

Etter denne føresetnaden blir eksitasjonskraftkoeffisienten - i samsvar med (K15) -

$$\kappa_i(\gamma) = \kappa_q(\gamma) \quad \text{uavhengig av } p \quad (\text{K19})$$

Eksitasjonskrafta er etter (K14) og (K13)

$$F_{e,i} = \kappa_i(\gamma) n_o(0, pd) = \kappa_q(\gamma) n_{oo} e^{-ikpd \sin \gamma} \quad (\text{K20})$$

$$F_{e,i} = F_{oq} e^{-ikpd \sin \gamma} \quad (\text{K21})$$

der

$$F_{oq} = \kappa_q(\gamma) n_{oo} \quad (\text{K22})$$

er eksitasjonskrafta for kroppen svarande til  $p = 0$ , d.v.s. den kroppen som har sitt referansepunkt i origo.

P.g.a. føresetnaden (K18) gir (K17)

$$\begin{aligned} R_{ij} &= R_{6p+q, 6p'+q'} = \\ &= \frac{\omega \rho f}{2k} \int_0^{2\pi} b_q(\theta) b_{q'}^*(\theta) e^{ik(r_{p'} - r_p)} d\theta = \\ &= \frac{\omega \rho f}{2k} \int_0^{2\pi} b_q(\theta) b_{q'}^*(\theta) e^{ikd(p-p') \sin \theta} d\theta \\ &= R_{qq}, \{k(p-p')d\} \quad (\text{K23}) \end{aligned}$$

$$= \frac{\omega k}{4\pi \rho g^2 f} \int_0^{2\pi} \kappa_q(\theta-\pi) \kappa_{q'}^*(\theta-\pi) e^{ikd(p-p') \sin \theta} d\theta$$

Her har me også brukt (K15).

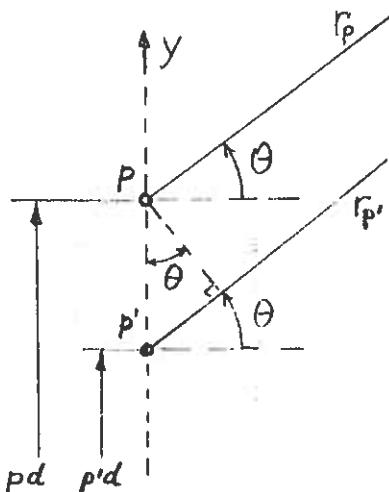
For å rekna ut den totalt absorberte effekten  $P$ , kan me setja desse resultata (K21) - (K23) inn i (K3). Ved inversering av strålingsresistansmatrisa kan me og etter (K7) finna den maksimalt absorberte effekten. Nokre slike tilfelle med  $N$  hivande punktaborbatorar er drøfta av Evans (1979, Symposium on Wave Energy Utilization, Göteborg). Men er det

mange kroppar, blir det ei stor matrise å invertera.

Me skal i staden gjera det enklare og rekna med same svingeamplitudar i alle kroppane, og med innbyrdes fasar som for den uforstyrra innkomande bølgja. Jfr. Budal (1977, Journal of Ship Research, 21, jfr. 248 - 253). Me set altså

$$u_i = u_{6p+q} = u_q e^{-ikpd \sin \gamma}$$

(K24)



For ei uendeleig lang rekkje av kroppar ( $N \rightarrow \infty$ ) må det sjølv sagt vera slik også for det optimale tilfellet med maksimal energiabsorpsjon. For ei endeleg lang rekkje, derimot, vil ende-effektar gjera at dette ikkje treng svara til den optimale situasjonen (bortsett frå tilfellet med normalt innfall mot  $N = 2$  kroppar). Kor mykje mindre den absorberte effekten blir, er drøfta av Evans (1979). Dersom talet  $N$  på kroppar er eit stort tal, vil ende-effektane ha relativt lite å seia, så me får ein absorbert effekt som er nær opp til den teoretisk maksimale.

Med innsetjing av (K21) - (K24) i (K3) får me for den totalt absorberte effekten

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \eta_{\infty} \sum_q \kappa_q (\gamma) u_q^* \sum_p 1 \right) \\ &- \frac{1}{2} \frac{\omega k}{4\pi\rho g^2 f} \sum_{q,q'} u_q^*, u_q \sum_{p,p'} e^{-ikd(p-p') \sin \gamma} \quad (K25) \\ &\cdot \int_0^{2\pi} \kappa_q(\theta-\pi) \kappa_{q'}^*(\theta-\pi) e^{ikd(p-p') \sin \theta} d\theta \end{aligned}$$

Mellomrekning:

$$\sum_{p,p'} e^{ikd(p-p')(sin\theta - sin\gamma)} = \left| \sum_{p=0}^{N-1} e^{ikdp(sin\theta - sin\gamma)} \right|^2 = \\ = \left| \frac{1 - e^{ikd(sin\theta - sin\gamma)N}}{1 - e^{ikd(sin\theta - sin\gamma)}} \right|^2 = \frac{\sin^2\{Nkd(sin\theta - sin\gamma)/2\}}{\sin^2\{kd(sin\theta - sin\gamma)/2\}}$$

Her har me brukt summeformelen for ei geometrisk rekke.

Dessutan er

$$\sum_{p=0}^{N-1} 1 = N$$

Den middels absorberte effekten pr. svingande kropp er difor

$$\frac{P}{N} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ n_{oo} \sum_{q=1}^6 \kappa_q(\gamma) u_q^* \right\} - \frac{1}{2} \sum_{qq'} R_{N,qq'} u_q^* u_{q'} \quad (K28)$$

der

$$R_{N,qq'} = \frac{\omega k}{4\pi\rho g^2 f} \int_0^{2\pi} \kappa_q(\theta-\pi) \kappa_{q'}^*(\theta-\pi) \frac{\sin^2\{Nkd(sin\theta - sin\gamma)/2\}}{N \sin^2\{kd(sin\theta - sin\gamma)/2\}} d\theta \quad (K29)$$

For ei svært lang rekke av svingande kropper, har endeffektane etter måten lite å seia. Me kan rekna at kvar kropp absorberer like mykje effekt. Som ei god tilnærming kan me då forenkla rekninga med å sjå på ei uendelig lang rekke.

### Uendelig lang rekke av svingande kropper.

Med  $N \rightarrow \infty$  blir den absorberte effekten pr. svingande kropp:

$$P_o = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P}{N} = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ n_{oo} \sum_{q=1}^6 \kappa_q(\gamma) u_q^* \right\} - \frac{d}{2} \sum_{q,q'} R'_{qq'}(\gamma) u_q^* u_{q'} \quad (K30)$$

der me etter (K28) og (K29) har

$$R'_{qq},(\gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\omega k}{4\pi \rho g^2 f d} \int_0^{2\pi} \kappa_q(\theta - \pi) \kappa_q^*(\theta - \pi) \right. \\ \left. \frac{\sin^2\{Nkd(\sin\theta - \sin\gamma)/2\}}{N \sin^2\{kd(\sin\theta - \sin\gamma)/2\}} d\theta \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} R_{N,qq},/d \quad (K31)$$

Merk at (K30) er formelt lik den tilsvarende (D189-2), med (D195-2) og (D196-2), som gjeld for det to-dimensjonale tilfellet, som svarar til loddrett innfall,  $\gamma = 0$ .

Når  $N \rightarrow \infty$ , vil integranden i (K31) bli forsvinnande liten bortsett frå ved dei diskrete vinklane  $\theta_o, \pi - \theta_o, \theta_1, \pi - \theta_1, \theta_2, \pi - \theta_2, \dots$  som oppfyller

$$\sin\{kd(\sin\theta - \sin\gamma)/2\} = 0 \quad (K32)$$

D.v.s.

$$\sin\theta = \sin\gamma - n \frac{2\pi}{kd} = \sin\gamma - n \frac{\lambda}{d} \quad (K33)$$

der  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  For  $n = 0$  gjev dette  $\sin\theta = \sin\gamma$ , som er oppfylt for

$$\theta = \theta_o = \gamma \quad \text{og for } \theta = \pi - \theta_o = \pi - \gamma \quad (K34)$$

Dersom

$$\frac{\lambda}{d} > 1 + \sin|\gamma| \quad (K35)$$

finst det ingen andre reelle løysingar av (K32).

Når  $N \rightarrow \infty$  kan me rekna ut integralet i (K31) på følgjande måte (metoden med "stasjonær fase"): Me får tilskot til integralet berre frå dei diskrete vinklane  $\theta_n$  (og  $\pi - \theta_n$ ) som oppfyller (K32). Då funksjonane  $\kappa_q(\theta)$  er kontinuerlege, kan me setja  $\kappa_q(\theta) \approx \kappa_q(\theta_n)$  utanfor integrasjonsteiknet. For kvar slik diskret vinkel  $\theta_n$  får me følgjande tilskot til integralet i (K31)

$$\kappa_q(\theta_n - \pi) \kappa_q^*(\theta_n - \pi) I(\theta_n) \quad (K36)$$

der

$$I(\theta_n) = \int_{\theta_n - \epsilon}^{\theta_n + \epsilon} \frac{\sin^2[Nkd(\sin\theta - \sin\gamma)/2]}{N\sin^2[kd(\sin\theta - \sin\gamma)/2]} d\theta \quad (K37)$$

og  $\epsilon > 0$ . Me kan her velja  $\epsilon$  så liten me vil ved berre å velja  $N$  stor nok. Ved rekkjeutvikling om  $\theta = \theta_n$  får me

$$\sin\theta = \sin\theta_n + (\theta - \theta_n)\cos\theta_n + O((\theta - \theta_n)^2) \quad (K38)$$

$$\sin\gamma - \sin\theta = -(\theta - \theta_n)\cos\theta_n + O((\theta - \theta_n)^2)$$

Me fører inn ny integrasjonsvariabel:

$$x = \frac{1}{2} Nkd(\theta - \theta_n)\cos\theta_n$$

og får

$$\begin{aligned} I(\theta_n) &= \frac{2}{kd\cos\theta_n} \int_{\theta_n - \epsilon}^{\theta_n + \epsilon} \frac{\sin^2[Nkd(\sin\theta - \sin\gamma)/2]}{[Nkd(\sin\theta - \sin\gamma)/2]^2} \frac{Nkd}{2} \cos\theta_n d\theta \\ &= \frac{2}{kd|\cos\theta_n|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{2\pi}{kd|\cos\theta_n|} \end{aligned} \quad (K42)$$

Dette integralet konvergerer raskt når integrasjonsgrensene går mot uendelig. Merk at me difor har kunna setja  $\epsilon N$  lik  $\infty$ .

Då  $\cos(\pi - \theta_n) = -\cos\theta_n$  har me også

$$I(\pi - \theta_n) = \frac{2\pi}{kd|\cos\theta_n|}$$

Etter slik å ha rekna ut integralet kan me skriva (K31) som

$$R'_{qq},(\gamma) = \frac{\omega}{2\rho g^2 f d^2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{\kappa_q(\theta_n - \pi)\kappa_q^*, (\theta_n - \pi) + \kappa_q(\theta_n)\kappa_q^*, (\theta_n)}{|\cos\theta_n|} \quad (K44)$$

Merk at talet  $2(n_{\max} + 1)$  på reelle løysingar av (K32) av-

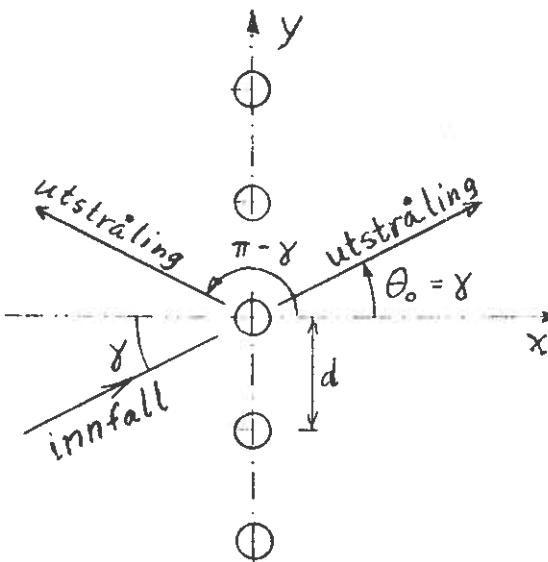
heng av forholdet  $\lambda/d$ . Her skal vi gå ut frå at (K35) gjeld, slik at  $n_{\max} = 0$ . Det er då berre eit ledd i summen i (K44). Me har då

$$R'_{qq},(\gamma) = \frac{\omega}{2\rho g^2 f d^2} \frac{\kappa_q (\gamma - \pi) \kappa^*,(\gamma - \pi) + \kappa_q (\gamma) \kappa^*,(\gamma)}{|\cos \gamma|} \quad (K45)$$

når

$$\frac{\lambda}{d} > 1 + \sin |\gamma|$$

I effektuttrykket (K30) går det inn ein "effektiv strålingsresistans"  $R'_{qq},(\gamma)$  som altså avheng av innfallsvinkelen  $\gamma$ , for di  $\gamma$  - i samsvar med (K24) - går inn i fasen for svingefarten på dei ulike kroppane. P.g.a. denne faseskilnaden blir det (ved konstruktiv interferens) stråla ut plane bølgjer i retningane  $\theta = \gamma$  og  $\theta = \pi - \gamma$ . Når vilkåret (K35) ikkje er oppfylt, eksisterer det andre reelle løysingar av (K32). Dette svarar til at det blir stråla ut plane bølgjer i andre retningar (ved konstruktiv interferens mellom dei ulike kroppane).



For loddrett innfall,  $\gamma = 0$ , svarar (K45) til det "to-dimensjonale" tilfellet me såg på tidlegare. Sjå (D210-2). Me kan difor utleia eit tilsvarende resultat som (D260), og dermed visa at dersom  $\kappa_q (\gamma - \pi) = 0$ , kan me optimalt absorbera all innfallande bølgjeenergi, endå om kroppen svingar berre i ein modus  $q$ . Jfr. også likn. (46) i Budal (1977) J. Ship Research. Merk at me ikkje kan realisera vilkåret  $\kappa_q (\gamma - \pi) = 0$  med berre ei rekkje av punktabsorbatorar. Men det kan tilnærma bli oppfylt t.d. med ei samanhengande rekkje av Salter-"ender".

Symmetriske kropper i hiving og jaging.

Me går ut frå at kroppane har symmetri om planet  $x = 0$  og om planet  $y = 0$ . I såfall vil hivrørsbla gje ei bølgjegenerering som er symmetrisk om desse to plana. Difor er

$$\kappa_3(\gamma) = \kappa_3(-\gamma) = \kappa_3(\pi - \gamma) = \kappa_3(\pi + \gamma) \quad (\text{K46})$$

For jagemodusen er det symmetri om planet  $y = 0$  og antisymmetri om planet  $x = 0$ , slik at

$$\kappa_1(\gamma) = \kappa_1(-\gamma) = -\kappa_1(\pi - \gamma) = -\kappa_1(\pi + \gamma) \quad (\text{K47})$$

Då får me av (K45)

$$R'_{13}(\gamma) = 0 \quad (\text{K48})$$

$$R'_{qq}(\gamma) = \frac{\omega |\kappa_q(\gamma)|^2}{\rho g^2 f d^2 |\cos \gamma|} \quad (\text{K49})$$

for  $q = 1$  og  $q = 3$ . Når me då set  $u_q = 0$  for  $q = 2, 4, 5$  og  $6$ , får me av (K30) at den absorberte effekten pr. kropp er

$$\begin{aligned} P_o &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{n_{oo}(\kappa_1(\gamma)u_1^* + \kappa_3(\gamma)u_3^*)\} \\ &\quad - \frac{\omega}{2\rho g^2 f d |\cos \gamma|} \left( |\kappa_1(\gamma)u_1|^2 + |\kappa_3(\gamma)u_3|^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{K50})$$

Formelt skil dette seg frå tilfellet med loddrett innfall berre med faktoren  $|\cos \gamma|$  i nemnaren. Jfr. (D189-2) og (D210-2). For loddrett innfall,  $\gamma = 0$ , har me optimalisert (K50) i oppgåve D3 og funne at den maksimalt absorberte energien er lik heile energien i den innfallande bølgja. Ei tilsvarende direkte optimalisering av (K50) m.o.p.  $u_1$  og  $u_3$  kan lett gjennomførast. Optimalt gjeld for  $q = 1$  og  $q = 3$  at

$$u_q = \frac{\kappa_q(\gamma)n_{oo}}{2R'_{qq}(\gamma)d} \quad (\text{K51})$$

noko som impliserer at farten er i fase med eksitasjonskrafta for begge modiane. Med bruk av (K51) og (K49) får me

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\eta_{\infty} \kappa_q(\gamma) u_q^*\} - \frac{\omega |\kappa_q(\gamma) u_q|^2}{2\rho g^2 f d |\cos \gamma|} = \\
 &= \frac{1}{2} |\eta_{\infty}|^2 \frac{|\kappa_q(\gamma)|^2}{2R'_{qq}(\gamma)d} - \left( 1 - \frac{\omega |\kappa_q(\gamma)|^2}{\rho g^2 f d |\cos \gamma| 2R'_{qq}(\gamma)d} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} |\cos \gamma| \frac{\rho g^2 f d}{4\omega} |\eta_{\infty}|^2 = \frac{1}{2} Kd |\cos \gamma| \quad (K52)
 \end{aligned}$$

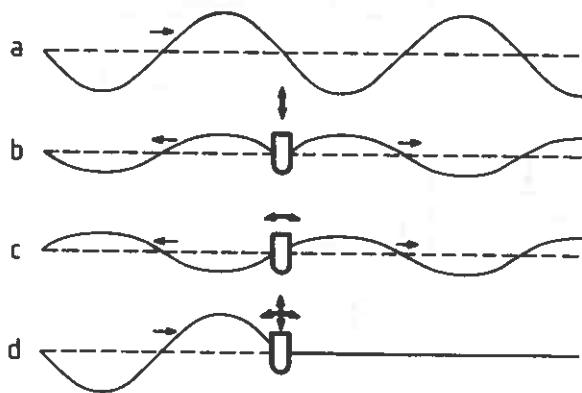
der me har brukt (B75) og innført  $K$ , effekten transportert pr. lengdeeining av bølgjefronten. Av (K50) og (K52) går det fram at me med denne rekka av symmetriske kroppar ikkje kan absorbera meir enn halvparten av den innkomande bølgjeenergien, dersom kroppane svingar i berre ein modus. Jfr. og likn. (40) i Budal (1977), J. Ship Research.

Men med optimal hiving og jaging i samsvar med (K51) gjev (K50) ein absorbert effekt pr. kropp:

$$P_{o,maks} = Kd |\cos \gamma| \quad (K53)$$

Jfr. likn. (53) i Budal (1977), J. Ship Research. Resultatet viser at all energien som fell inn på delinga  $d$  projisert inn på bølgjefronten, altså på lengda  $|\cos \gamma|d$ , blir absorbert av kroppen som svingar optimalt i jaging og hiving. I staden kunne me ha brukt dei to modiane stamping og hiving. Poenget er, på ein optimal måte, å generera ei symmetrisk bølgje ved hivrørsle og ei antisymmetrisk bølgje ved jaging eller stamping, eller eventuelt ved ei kombinert jage- og stamperørsle. Hivrørsla og jagerørsla genererer like store bølgjer. I retninga  $\theta = \pi - \gamma$  er dei i motfase med kvarandre,  $b_1(\pi - \gamma) = -b_3(\pi - \gamma)$  slik at den resulterande bølgjeutstrålinga blir null i denne retninga. Derimot er dei i fase med kvarandre i retninga  $\theta = \gamma$ , altså  $b_1(\gamma) = b_3(\gamma)$  slik at dei der "fordoblar" seg til å bli like stor som den innkomande bølgja, men har motsett fase, slik at innfallande pluss utstrålt bølgje i retninga  $\theta = \gamma$  blir null. All innfallande energi er dermed absorbert.

Total absorpsjon av innfallande bølgje (a) med ei rekkje av kropper som strålar i ein symmetrisk modus (b) og ein anti-symmetrisk modus (c). Kurve (d) viser det resulterande bølgjebiletet.



Endeleg skal me sjå litt på spesialtilfellet med sirkulærsymmetriske punktaborbatorar under slike forhold at eksitasjonskrafta på kroppen er tilnærma den same som for ein isolert kropp ( $N = 1$ ). Då er  $\kappa_3(\gamma) = \kappa_3$  uavhengig av innfallsvinkelen  $\gamma$ . Me får då følgjande generalisering av (G51)

$$R_{33}(\gamma) = R'_{33}(\gamma)d \approx \frac{2R_{o3}}{kd|\cos\gamma|} \quad (K54)$$

der  $R_{o3} = R_{1,33}$  er strålingsresistansen for ein isolert kropp i hivrørsle. Resultatet følgjer ved kombinering av (G15) og (K49). Eksitasjonskraftkoeffisienten for jaging varierer etter (D231) som  $\cos\gamma$ . Bruker me dessutan (D234) og (K49) finn me

$$R_{11}(\gamma) = R'_{11}(\gamma)d \approx \frac{4R_{o1}}{kd} |\cos\gamma| \quad (K55)$$

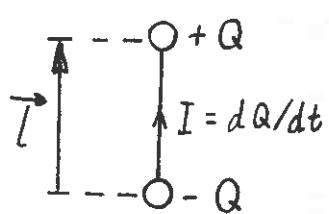
der  $R_{o1} = R_{1,11}$  er strålingsresistansen for ein isolert kropp i jagerørsle. For stamperørsle gjeld tilsvarende

$$R_{55}(\gamma) = R'_{55}(\gamma)d \approx \frac{4R_{o5}}{kd} |\cos\gamma| \quad (K56)$$

der  $R_{o5} = R_{1,55}$ . Føresetnaden for desse formlane er at eksitasjonskraftkoeffisienten har tilnærma same verdiar anten kroppen er isolert eller han er i ei rekkje. Med eksperiment i ei bølgjerenne som forklart i kapittel G kan me lett måla  $R_{33}(\gamma)$ ,  $R_{11}(\gamma)$  og  $R_{55}(\gamma)$  for loddrett innfall,  $\gamma = 0$ . Dersom me dessutan måler  $R_{o3}$ ,  $R_{o1}$  og  $R_{o5}$  på ein isolert sirkulærsymmetrisk kropp i eit breitt bølgjebasseng, kan me eksperimentelt få ein delvis verifikasjon på formlane (K54) - (K56).

Stråling frå oscillanterende elektrisk dipol.

Oscillerande dipol

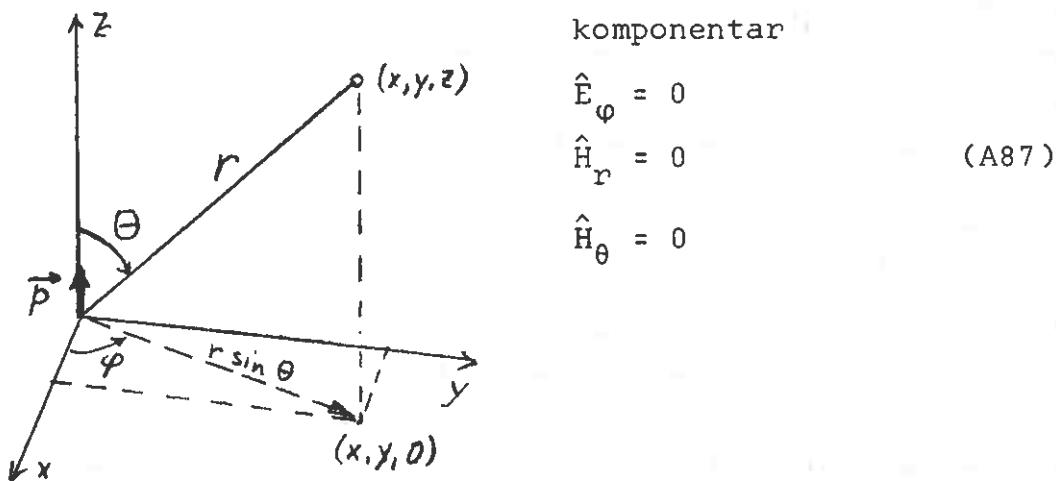


$$\mathbf{p} = Q\mathbf{l} = \hat{\mathbf{p}} e^{i\omega t} \quad (\text{A84})$$

$$\hat{\mathbf{p}} = \hat{Q}\mathbf{l}$$

$$\hat{\mathbf{l}} = i\omega \hat{Q}\mathbf{l} = i\omega \hat{\mathbf{p}} = ikc\hat{\mathbf{p}} \quad (\text{A86})$$

Fra elektromagnetisk feltteori kan utleiaast (t.d. ved bruk av retarderte potensial) atfeltet frå ein oscillanterende dipol har følgjande komponentar



$$\hat{E}_\phi = 0 \quad (\text{A87})$$

$$\hat{H}_r = 0 \quad (\text{A87})$$

$$\hat{H}_\theta = 0$$

$$\hat{E}_r = \frac{(ik)^3 \hat{p}}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2}{(ikr)^3} + \frac{2}{(ikr)^2} + 0 \right) \cos\theta e^{-ikr}$$

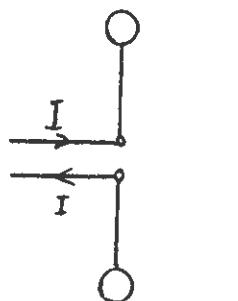
$$\hat{E}_\theta = \frac{(ik)^3 \hat{p}}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(ikr)^3} + \frac{1}{(ikr)^2} + \frac{1}{ikr} \right) \sin\theta e^{-ikr} \quad (\text{A88})$$

$$\hat{H}_\phi = \frac{(ik)^3 c \hat{p}}{4\pi} \underbrace{\left( 0 + \frac{1}{(ikr)^2} + \frac{1}{ikr} \right)}_{\text{"nærfelt" }} \sin\theta e^{-ikr}$$

fjernfelt

Ein slik dipol  $\hat{\mathbf{p}}$  kan vera modell for eit atom der (middelpunktet av) den negative elektronladningen svingar att og fram i forhold til den positive kjerneladningen, som nærmast er i ro.

Dipolen  $\hat{p}$  kan også vera modell for ein kort radioantenne med lengd  $l \ll \lambda$  og matestraum

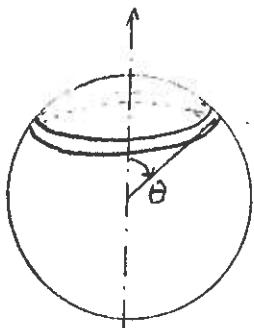


$$\hat{I} = iw\hat{p}/l. \quad (\text{A89})$$

Dette blir i radioteknikken kalla ein Hertz-dipol.

Effekten  $P_r$  som strålar ut frå dipolen, finn me ved å integrera Poyntingvektoren  $\vec{I} = \vec{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{E} \times \hat{H}^*)$  over ei kule omkring dipolen. Jfr. (A4) og (A51). Merk at felta er

uavhengige av  $\varphi$



$$\begin{aligned} P_r &= \int_0^\pi I_r r^2 \sin\theta d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^\pi I_r r^2 \sin\theta d\theta \end{aligned} \quad (\text{A90})$$

Då mediet (vakuum eller luft) kan reknast for tapsfritt, må integralet vera uavhengig av radien. Det er difor berre fjernfeltet som gjev tilskot til  $P_r$ .

Me har altså bruk for intensiteten berre i fjernfeltet

$$I_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{E}_\theta \times \hat{H}_\varphi^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{k c \hat{p} \hat{p}^*}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{k^2 r^2} \sin^2 \theta \right) + O(r^{-4})$$

NB: Leddet  $O(r^{-3})$  er reint imaginært.

$$I_r = \frac{ck^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 r^2} |\hat{p}|^2 \quad (\text{A91})$$

$$P_r = 2\pi \frac{k^4 c |\hat{p}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (1-\cos^2 \theta) d(\cos \theta) = \int_{x=1}^{-1} (1-x^2) dx = 2(1 - \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$$

Utstrålt effekt frå dipolen er altså

$$\boxed{P_r = \frac{k^4 c |\hat{p}|^2}{12\pi\epsilon_0}} = \frac{\mu_0 \omega^4 |\hat{p}|^2}{12\pi c} \quad (A92)$$

### Dipolantenne.

Effekten som strålar ut frå Hertz-dipolen finn me ved å bruka (A86)

$$P_r = \frac{k^4 c |\hat{I}|^2 (l/kc)^2}{12\pi\epsilon_0} = \frac{1}{2} \frac{(kl)^2}{6\pi\epsilon_0 c} |\hat{I}|^2$$

Samanliknar me med (A60b) ser me at Hertz-dipolen har ein strålingsresistans

$$\boxed{R_{r,el} = \frac{(kl)^2}{6\pi\epsilon_0 c} = \frac{\eta_0 c (kl)^2}{6\pi} = \frac{Z_0}{6\pi} (kl)^2 = (kl)^2 \frac{377\Omega}{6\pi} \quad (A94)}$$

$$R_{r,el} = (kl)^2 20,0 \text{ ohm} \quad (A95)$$

Når dipolføresetnaden  $l \ll \lambda$  eller  $kl \ll 1$  ikkje er oppfylt trengst ein modifisert analyse. Jfr. antenneteorien.

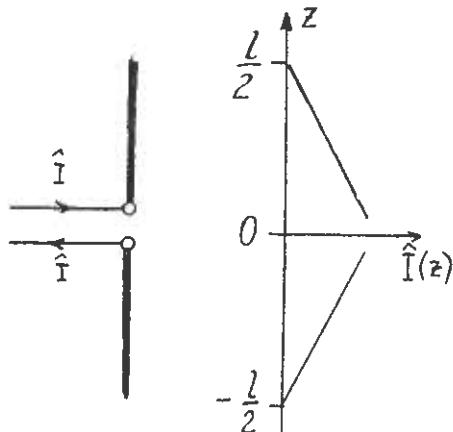
Formelen (A95) gjeld altså for så korte dipolantennar at  $R_{r,el} < 20$  ohm.

Vi har utleidd formelen under føresetnad av at straumen  $\hat{I}$  er konstant over heile lengda

1. For ein tynn tråd er straumen null på enden.

Me kan definera ei effektiv lengd  $l_{eff}$  ved

$$\hat{I}l_{eff} = \int_{-l/2}^{l/2} \hat{I}(z) dz$$



der  $\hat{I}$  er straumen ved matepunktet. Det resulterande dipolmomentet er

$$\hat{p} = \frac{\hat{I}l_{\text{eff}}}{i\omega}$$

slik at strålingsresistansen for dipolen er

$$R_{r,\text{el}} = (kl_{\text{eff}})^2 20,0 \text{ ohm} \quad (\text{A95a})$$

Merk at når  $kl \ll 1$  vil fjernfelta frå alle antenneelementa dz interferera konstruktivt. For lengre antenner vil det bli destruktiv interferens og utrekninga av det resulterande fjernfeltet må ta omsyn til det. For ei tynn halvbølgje-antenne ( $l = \lambda/2$ ) eller ein "halvbølgjedipol" gissar ein på ei straumfordeling

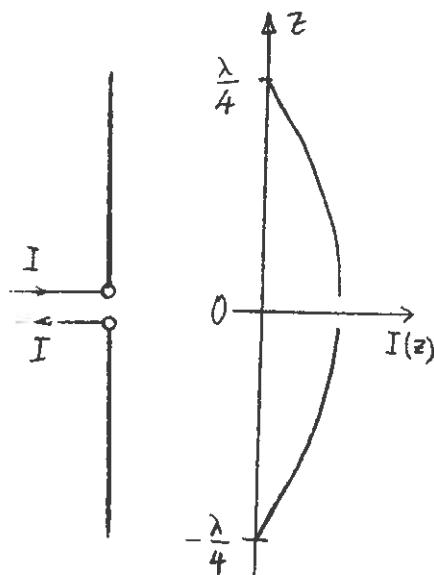
$$\hat{I}(z) = \hat{I} \cos kz$$

der  $\hat{I}$  er straumen i matepunktet. Resultantfeltet blir som frå ein superposisjon av Hertz-dipolar med minkande dipolmoment utover mot enden av antennen. Ved integrasjon vil ein finna

$$R_{r,\text{el}} = 73,1 \text{ ohm}$$

Målte verdiar for praktiske halvbølgjedipolar ligg gjerne i området 65 til 72 ohm. Strålingsreaktansen som heng saman med nærfeltet (lagringsfeltet) er gjerne ca. 40 ohm.

Formelen (A95) brukte ukritisk gir for stor verdi når  $kl = \pi$  ( $\ll 1$ ), nemleg:  $\pi^2 20 \text{ ohm} = 197 \text{ ohm}$ .



### Absorpsjonstverrsnitt for ein Hertz-dipol.

Me går ut frå at ei innfallande plan bølgje med vertikalpolarisert elektrisk felt  $\hat{E}_i$  induserer ei eksitasjonspenning

$$\hat{U}_e = \hat{E}_i l$$

i dipolen. Med bruk av (A94) og innsetjing i (A83) får me

$$P_{\max} = \frac{|\hat{E}_i l|^2 6\pi\epsilon_0 c}{8(kl)^2} = \frac{3\pi\epsilon_0 c}{4k^2} |\hat{E}_i|^2$$

Merk at  $l$  fell ut av samanhengen. Antennedimensjonen er ikkje avgjerande (anna enn at  $l \ll \lambda$ ). Etter (A50) er den innfallande intensiteten

$$I_i = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |\hat{E}_i|^2$$

Absorpsjonstverrsnittet blir

$$A_a = \frac{P_{\max}}{I_i} = \frac{3}{2} \frac{\pi}{k^2} = \frac{3}{2} \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

For ein rundstrålar er  $A_a = \frac{\lambda^2}{4\pi}$ . Jfr. (A72) og oppg. A2. At me her får 50% større absorpsjonstverrsnitt heng saman med at Hertz-dipolen ikkje strålar isotropt, og vidare med at me her har gått ut frå den mest gunstige retningsorienteringa av mottakarantenna, nemleg med dipolen retta parallelt med polarisasjonsretninga for det elektriske feltet i den innfallande plane bølgja

Med  $v = \omega/2\pi = 3 \cdot 10^6$  Hz er  $\lambda = \frac{c}{v} = 100$  m og

$$A_a = \frac{3}{2} \frac{100^2}{4\pi} = 1194 \text{ m}^2 \quad (\text{A96})$$

trass i at antennelengda  $l$  er mykje mindre enn 100 m. Me ser at den absorberte effekten ved resonansavstemt og resistanstilpassa antennekrets ikkje er korrelert med dimensjonen på antenna.

Vekselverknad mellom lys og eit atom (klassisk, og ikkje-  
kvantemekanisk teori her).

Ein molekyl eller eit atom blir elektrisk polarisert når der er eit elektrisk felt.

Det elektriskefeltet i lyset induserer ein elektrisk dipol i partikkelen som oscillatorer med lysfrekvensen. Den oscillatorande dipolen sender ut lys i ymse retningar (mest i retninga  $\theta = \frac{\pi}{2}$  - jfr. (A91) - der  $\theta = 0$  svarar til dipolretninga, d.v.s. retninga til feltet i det innfallande lyset som i atmosfæren er upolarisert lys).

Det spreidde lyset frå luftmolekylene er ansvarleg for at himmelen ser blå ut, trass i at sollyset har ein etter måten svak styrke i den blå enden av spektret. Det blå lyset, som har størst  $\omega$ , dominerer likevel i det spreidde lyset p.g.a. faktoren  $\omega^4$  i (A92). Det raude lyset blir spreidd minst. Dette forklarer kvifor himmelen er raudfarga nær solrenning og solefall.

Desse effektane forsvinn ved overskya ver fordi partiklane (vassdropane) i skyene er så store at føresetnaden for (A92), nemleg  $l \ll \lambda$  ikke gjeld. Skyene er kvite eller grå.

Sterkare vekselverknad mellom lys og atom, blir det når lyset er i resonans med atomet:

Me ser på ein klassisk harmonisk oscillator (oscillatorande dipol) som ein modell for eit lys-absorberande og lys-emitterande atom. Atomet har altså ein eigenfrekvens  $\omega$  (svarande til spektrale absorpsjons- og emisjonslinjer).

I nullte orden lyder den oscillatorande dipolen differensiallikninga

$$m_e(\ddot{s} + \omega^2 s) = 0$$

Her er  $m_e$  - elektronmassen og  $s$  posisjonen til elektronet (eller middelposisjonen til "elektronskya"). Denne har ei løysing  $s = s_0 e^{i\omega t}$  svarande til udempa frie svingingar.

$$m_e(\ddot{s}\dot{s} + \omega^2 s\ddot{s}) = 0$$

$$\frac{1}{2} m_e (\dot{s})^2 + \frac{1}{2} \omega^2 m_e s^2 = W = \text{konst}$$

$$W_k + W_p = W$$

): Totalenergien fordeler seg på kinetisk og potensiell energi. Utsvinget kan uttrykkjast ved dipolmomentet

$$p = es$$

$$W_k = \frac{1}{2} m_e (\dot{s})^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{e^2} (\dot{p})^2$$

$$W_p = \frac{1}{2} \omega^2 m_e s^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\omega}{e}\right)^2 p^2$$

$$W = W_k + W_p = \frac{1}{2} \frac{m}{e^2} (\dot{p}^2 + \omega^2 p^2) = \frac{1}{2} \frac{m}{e^2} \omega^2 p_0^2$$

Men dei frie svingingane er ikkje udempa. Energitapet pr. tidseining er etter (A92)

$$\dot{W} = -P_r = -\frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c}$$

$$\frac{\dot{W}}{W} = -\frac{\mu_0 \omega^4 2e^2}{12\pi c m \omega^2} = -\frac{2\mu_0 e^2 \omega^2}{12\pi cm}$$

Energien minkar altså eksponensielt med tida

$$W \propto e^{-\frac{2\mu_0 e^2 \omega^2}{12\pi cm} t}$$

$$s_0 \propto p_0 \propto W^{\frac{1}{2}} \propto e^{-\frac{\mu_0 e^2 \omega^2}{12\pi cm} t} = e^{-\delta t}$$

Dempingskoeffisienten

$$\delta = \frac{\mu_0 e^2 \omega^2}{12\pi cm}$$

For atom er  $\delta \ll \omega$ .

Ser me på tvungne svingingar for oscillatoren, vil me ha ei skarp resonanskurve med halvverdibreidd

$$\Gamma = 2\delta = \frac{\mu_0 e^2 \omega^2}{6\pi cm}$$

Jfr. t.d. Westin, Svingningslære, kap. 3., s. 12. Dette er den naturlege linjebreidda for spektrallinja. Den relative halvverdibreidda er

$$\frac{\Gamma}{\omega} = \frac{\mu_0 e^2 \omega}{6\pi cm_e}$$

For synleg lys er  $\frac{\Gamma}{\omega} \ll 1$ .

$$\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$$

$$\left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right| = \left| -\frac{\Delta\omega}{\omega} \right| \approx \left| -\frac{\Gamma}{\omega} \right|$$

Naturleg linjebreidd:

$$\begin{aligned} (\Delta\lambda)_{\text{naturleg}} &= \frac{\Gamma}{\omega} \lambda = \frac{\mu_0 e^2 \omega \lambda}{6\pi cm_e} = \frac{\mu_0 e^2}{3m} \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{3 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}} = 1,18 \cdot 10^{-14} m \end{aligned}$$

Synleg lys (gult)  $\lambda = 0,56 \text{ nm}$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1,18 \cdot 10^{-14}}{0,56 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^{-8} \quad (\text{klassisk})$$

I tillegg til den naturlege linjebreidda kan spektrallinja ha tilleggsbreidd (kollisjonsbreiing, dopplerbreiing).

Då  $\delta = R/2m$  (jfr. Westin, Svingningslære) kan me gjerne definera ein mekanisk strålingsresistans for atomet

$$R_r = 2m_e \delta = 2m_e \frac{\mu_0 e^2 \omega^2}{12\pi cm_e} = \frac{\mu_0 e^2 \omega^2}{6\pi c}$$

VEDLEGG 2.  
REKNEOPPGAYER TIL ØVING.

inn mot kula. For ein punktabsorbor kan me sjå bort frå spreidde (reflekte og diffraakte) bølgjer.

Opgåve A1. (Strålingsimpedansen for ei pulserande kule).

Ei frittståande kule med radius  $a$  strålar ut ei akustisk kulebølgje. Overflata av kula svingar radielt med farten  $u = \hat{u} e^{i\omega t}$ . For  $r > a$  kan bølgja uttrykka ved lydtrykket

$$p = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}$$

og (den radielt retta) partikkelfartan

$$v = v_r = \left( \frac{1}{ikr} + 1 \right) \frac{A}{pr} e^{i(\omega t - kr)}$$

(Jfr. "Bølgjelære", § 14 og § 15).

Bruk grensevilkåret  $u = v|_{r=a}$  til å finna koeffisienten  $A$  og finn strålingsimpedansen  $Z_r$ , strålingsresistansen  $R_r$  og den adderte massen  $m_r$ . Utlei  $Z_r$  med utgangspunkt i reaksjonskrafta frå bølgja. Kontroller resultatet for  $R_r$  med utgangspunkt i den utstrålte effekten.

Opgåve A2. (Akustisk punktabsorbor)

Sjå på ei frittståande pulserande kule. Kula skal brukast som mikrofon. Radian  $a$  for kula er så mykje mindre enn bølgjelengda ( $ka \ll 1$ ) at me kan sjå på mikrofonen som ein punktabsorbor. Når  $ka \ll 1$ , er strålingsresistansen

$$R_r \approx 4\pi a k^2 \rho c .$$

Kulenoverflata har ein masse  $m$  og ein stivhet  $S$  mot radiale utsving. Dessutan er der ein mekanisk resistans  $R$  som t.d. kan realiserast ved elektrodynamisk konvertering av den absorberete energien til elektrisk energi. Det fell ei harmonisk plan bølgje

$$p_i = A_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

Svingeparametrane er dimensjonerte slik at me får resonansabsorpsjon. Finn den maksimale absorberete effekten  $P_{max}$  uttrykt ved  $A_0$ ,  $a$ ,  $k$  og  $\rho c$ . Vis også at absorpsjonstverrsnittet for den frittståande kula er  $\lambda^2 / 4\pi$ .

Opgåve A3. (Kort dipolantenne)

Ei vertikal jorda antennen

med høgd  $h = 4$  m har ved

$$v = \omega/2\pi = 3 \text{ MHz} \quad (\text{eller})$$

$$\lambda = 100 \text{ m})$$
 ei effektiv høgd

$h_{eff} = 2$  m. Matepunktet for antennen er ved jordplanet og antennen er kopla til ein elektrisk krets som skissert i figuren. Vis at strålingsresistansen er  $R_s = 0,63 \text{ ohm}$ .

Antenna blir brukt til mottaking av ei plan bølgje ned vertikalspolarisert elektrisk felt som har amplitude  $|E_1| = 10^{-3} \text{ V/m}$ . Antennekretsen er både resistanstilpassa og avstamt til resonans.

Rekn ut den effekten som blir absorbert av antennekretsen.

Rekn og ut absorpsjonstverrsnittet for antennen.

Opgåve B1. (Refleksjon av plan bølgje ved vertikal vegg)

Vis at ei tyngdebølgje med elevasjon, som har kompleks amplitude

$$\hat{\eta}_i = \eta_0 \exp \{-ik_x x - ik_y y\}$$

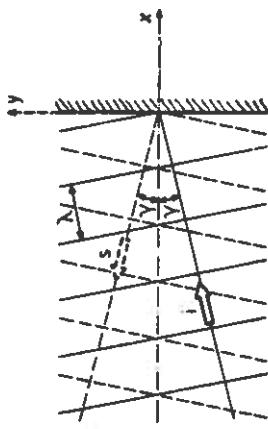
kan forplanta seg på eit uendleg stort vatn med konstant djupn  $h$ . Uttrykk  $k_x$  og  $k_y$  ved vinkelrepasjonen  $k$  og vinkelen  $\gamma$  mellom forplantingsretninga og  $x$ -aksen.

Opgåve B3. (Svinnmodus)

Vi tenker oss at bølgja (1) i området  $x < 0$  blir reflektert ved ein stilleståande vertikal vegg i planet  $x = 0$ . Bruk grensevilkår ved veggan til å finna den resulterande bølgja

$$\hat{n} = \hat{n}_i + \hat{n}_s$$

der  $\hat{n}_s$  står for den reflekterte bølgja. Påvis at refleksjonsvinkelen er lik innfalls- vinkelen.



Den komplekse amplituden  $\hat{\phi}$  til fartpotensialet må oppfylla Laplace-likninga. Ei plan bølgje, som forplantar seg i x-retning på eit uendleg stort vatn med konstant vassdjup  $h$ , er drøfta i forelesningane. Bølgja er av typen

$$\hat{\phi} = X(x)Z(z), \text{ der } X''(x) = -k^2 X(x) \text{ og } Z''(z) = k^2 Z(z),$$

og der  $k$  har ein ein-eintydig positiv verdi for gitt  $\omega$ . Vis at separasjonskonstanten  $\lambda = k^2$  må vera reell (når  $\omega$  er reell).

Det er mogleg å finna andre partikulære løysingar for  $\hat{\phi}$  svarande til visse negative verdiar på  $\lambda$ ,  $\lambda = -m^2$ . Finn den (transcendentene) likninga som  $m$  må oppfylla, og vis korleis ein grafisk kan finna løysingar  $\{m_n\} = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ . Finn det tilsvarende fartpotensialet  $\hat{\phi}_n$ . (Føresetnaden er at eit område  $x > x_{\max}$  og/eller  $x < x_{\min}$  er ekskluderte frå det området av x-aksen der løysinga gjeld.) Slike løysingar svarar til såkalla svinnmodi eller svinn-“bølgjer” (engelsk: evanescent modes, evanescent waves).

Vis at svinn-“bølgjer” ikkje overfører energi i tidsmiddel.

$$\eta = (A \exp \{-ik_x x\} + B \exp \{ikx\}) \exp \{-ik_y y\}$$

Opgåve B4. (Ortogonal funksjonssett  $\{Z_n(z)\}$ )

Bruk grensevilkåra til å finna krav som  $k_x$  må oppfylla. Kva vilkår må vinkelrekvensen  $\omega$  oppfylla for at det ikkje skal kunna vera tverrsvingingar i renna?

Utlei uttrykk for fasefarten  $v_f = \omega/k_y$  og gruppefarten  $v_g = dw/dk_y$  for bølgjer som forplantar seg i y-retning i bølgjerenna.

$$\hat{\phi} = Z(z) H(x, y)$$

Med separasjonsmetoden finn me at eit fartpotensial med kompleks amplitude

$$V_H^2 H \equiv \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = -\lambda H$$

øg

$$\text{hvor } \ell \Delta Y = 2\pi$$

$$Z'' = \frac{d^2 Z}{dz^2} = \lambda Z$$

der  $\lambda$  er den såkalla separasjonskonstanten. Her må funksjonen  $Z(z)$  oppfylla randvilkåra på den frie overflata  $z = 0$  og på sjøbotnen  $z = -h$ , nemleg

$$\omega^2 Z(0) = g Z'(0) \quad \text{og} \quad Z'(-h) = 0$$

Det skal visast at det finst ei uendelig mengd  $\{\lambda_n\}$  av mogelige verdiar ("eigenverdiar") på  $\lambda$ . Vis at dei alle er reelle (når  $\omega$  er reell), og ordna dei slik at

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$$

der  $\lambda_0$  er den største eigenverdien. Vis også at dei tilsvarende (eigen)-funksjonane  $\{Z_n(z)\}$  er ortogonale. Finn uttrykk for alle  $Z_n(z)$  slik at dei er normaliserte, d.v.s. slik at

$$\int_{-h}^0 z_n(z) Z_l^*(z) dz = \delta_{nl} = \begin{cases} 1 & \text{når } l = n \\ 0 & \text{når } l \neq n \end{cases}$$

Sjølv spesielt opp uttrykket for  $Z_0(z)$ .

#### Oppgave C1. (Energispekteret).

En irregulær sjøtilstand kan betraktes som sammensatt av bølger med alle mulige frekvenser,  $\omega$ , og innfallsvinkler,  $\gamma$ . Energinnholdet for bølger innenfor området  $(\omega, \omega + \Delta\omega)$  og  $(\gamma, \gamma + \Delta\gamma)$  kan skrives som:

$$E(\omega, \gamma) \Delta\omega \Delta\gamma = \frac{1}{2} \rho g \sum_{m=1}^{\infty} |A(\omega_m, \gamma_m)|^2 \Delta\omega \Delta\gamma \quad (1)$$

slik at sjøtilstandens totale energiinnhold vil være:

$$E = \frac{1}{2} \rho g \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |A(\omega_m, \gamma_n)|^2 \Delta\omega \Delta\gamma \quad (2)$$

Dette kan også skrives på integralform.

$$E = \frac{1}{2} \rho g \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |A(\omega, \gamma)|^2 d\omega d\gamma \quad (4)$$

På samme måte kan sjøoverflatens posisjon skrives som

$$n(x, y, t) = \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}'(\omega_m, \gamma_n) \exp(i(\omega_m t - ik_m(x \cos \gamma_n + y \sin \gamma_n)) \Delta\omega \Delta\gamma \quad (5)$$

Her er  $\hat{A}'(\omega, \gamma)$  en kompleks amplitud med vilkårlig fase i intervallet  $0$  til  $2\pi$ . Finn sammenhengen mellom  $|\hat{A}'(\omega, \gamma)|$  og  $|A(\omega, \gamma)|$ . Vis ut fra likn. (5) at

$$\overline{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |A(\omega, \gamma)|^2 \Delta\omega \Delta\gamma \quad (6)$$

$$\text{hvor } \overline{n^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} n^2 dx dy \quad (7)$$

#### Oppgave D1. (Strålingsresistans for vertikal plate)

Ei bølgjerenne med breidd  $d$  og djupn  $h$  har i den eine enden ( $x = 0$ ) ein bølgjegenerator i form av ei stiv vertikal plate (rekktangulært stempel) som svingar harmonisk med fartamplitude  $\hat{u}_1$  (rein jagerørsle) og med vinkelfrekvensen  $\omega$ .

I den andre enden av bølgjerenna er ein ideell absorborator, d.v.s. me kan rekna som om bølgjelengda er uendelig lang ( $0 < x < \infty$ ).

Finn eit eksakt uttrykk for fartpotensialet i den genererte bølgja. (Svaret, som er ei uendelig rekke, inneholder parametrar som må definerast implisitt ved transcedente likningar.)

Bruk elementære funksjonar til å uttrykkja strålingsresistansen  $R_{11}$  ved vinkelrepelsen  $k$ , væsketettleiken  $\rho$  og lengdene  $h$  og  $d$ .

Teikna kurve for  $(R_{11} \omega^3 / \rho g^2 d)$  som funksjon av  $kh$ .

Løys også oppgåva for det tilfellet at plata er hengsla om nedre kanten (ved  $z = -h$ ) og at  $\hat{u}_1$  står for den horisontale komponenten av fartamplituden i vasskorpa ( $z = 0$ ).

#### Oppgåve D2. (Sirkular bølgjegenerator).

Ein vertikal sylinder med radius  $a$  og høgd større enn vassdjupna står på sjøbotnen,  $z = -h$ . Veggjen i sylinderen pulserer i radiell retning med ein kompleks fartamplitude  $\hat{u}_r(z) = \hat{u}_o c(z)$ , der konstanten  $\hat{u}_o = \hat{u}(0)$  representerer pulsersingsfarten i vasskorpa  $z = 0$ . (Merk at  $c(0) = 1$ ). Det er sirkular symmetri i pulseringa slik at det er ingen variasjon med koordinatvinkelen  $\theta$ .

Finn fartpotensialet  $\hat{\phi} = \psi \hat{u}_o$  for den genererte bølgja uttrykt som ei uendelleg rekkeje, der me går ut frå at dei normaliserte eigenfunksjonane  $\{Z_n(z)\}$  i oppgåve B4 og dei tilhøyrande eigenverdiane  $\lambda_o = \kappa^2$ ,  $\lambda_1 = -m_1^2$ ,  $\lambda_2 = -m_2^2$ , ... er kjende.

Uttrykk strålingsimpedansen  $Z_{oo}$  ved ei uendelleg rekkeje, og finn eit enkelt uttrykk for strålingsresistansen  $R_{oo}$ .

Det kan bli bruk for følgjande relasjonar for Bessel-funksjonar: Me har  $(d/dx)J_o(x) = -J_1(x)$  og tilsvarende for  $N_o(x)$ ,  $H_o^{(1)}(x)$ ,  $H_o^{(2)}(x)$  og  $K_o(x)$ , medan  $(d/dx)I_o(x) = I_1(x)$ . Her er  $I_n$  og  $K_n$  n-te ordens modifiserte Bessel-funksjonar av 1. og 2. slag. Asymptotiske uttrykk er  $I_o(x) \rightarrow e^{x/\sqrt{2\pi x}}$  og  $K_o(x) \rightarrow \pi e^{-x/\sqrt{2\pi x}}$  når  $x \rightarrow +\infty$ . Dessutan gjeld

$$J_1(x)N_o(x) - J_o(x)N_1(x) = 2/\pi x.$$

#### Oppgåve D3. (Maksimum absorbert effekt.)

Bruk resultat frå forelesningane til å visa at ein sirkulær-symmetrisk bøye maksimalt kan absorbera ein effekt

$$(a) P_{maks} = (3\lambda/2\pi)K$$

når han kan svinga berre i jage- og hiving-modiane.

- (b)  $P_{maks} = (\lambda/\pi)K$   
om nedre kanten (ved  $z = -h$ ) og at  $\hat{u}_1$  står for den horisontale komponenten av fartamplituden i vasskorpa ( $z = 0$ ).

$$(c) P_{maks} = (3\lambda/2\pi)K$$

når han kan svinga berre i jaging, hiving og stamping.

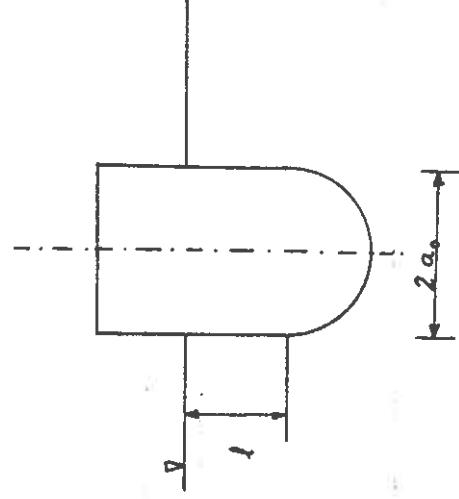
Vis vidare at ein 1D-dimensjonal kropp med venstre-høgrysometri maksimalt kan absorbera

- (d) halvparten av den innkomande bølgjeenergien når han kan svinga berre i jage- og stampemodiane, og

- (e) heile den innkomande bølgjeenergien når han kan sveinga i jaging og hiving, eventuelt jaging, hiving og stamping.

Nemn i kvart av tilfellia (a) - (e) kva vilkår dei komplekse fartamplitudane må oppfylla.

16.1



## Oppgave E1 - vedlegg

fra forelesningene har vi: (dypt vann):

$$\kappa_{FKJ3} = \rho g \pi \int_{-ka_0}^0 J_0(ka) \exp(kz) \frac{d}{dz}(a^2) dz \quad (1)$$

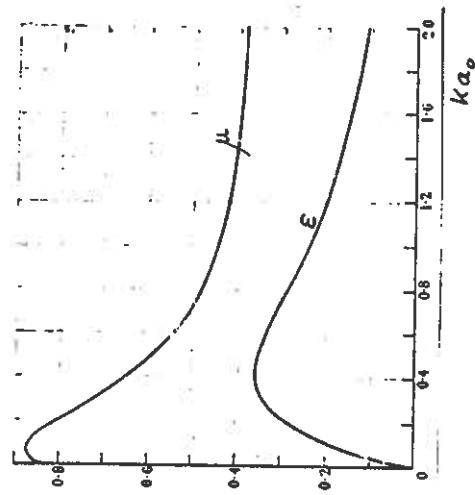
Fra dette kan  $\kappa_{FKJ3}$  beregnes analytisk som en rekkeutvikling i  $(ka_0)$  og  $(kl)$ . Finn de to første leddene i denne rekkeutviklingen og sammenlikn med teorien for  $\kappa_{FKJ3}$  basert på  $ka_0 \rightarrow 0$  og  $kl \rightarrow 0$ .

I det videre framover skal vi benytte  $l = 0$ .

Havelock, [1], har for dette tilfellet regnet ut strålingsresistansen og addert masse.

$$m_{33} = \frac{2}{3} \pi a_0^3 \rho \mu \quad (2)$$

$$R_{33} = \frac{2}{3} \pi a_0^3 \rho w \epsilon \quad (3)$$



Parametrene  $\mu$  og  $\epsilon$  er dimensjonsløse funksjoner av  $ka_0$ . Vedlegg til oppgaven viser  $\epsilon$  og  $\mu$  plottet som funksjon av  $ka_0$ .

Flott  $\frac{|\kappa_3|}{\rho g a_0^2}$  ut fra følgende to metoder

\* Benytt  $m_{33}(ka_0)$  samt teori for  $ka_0 \ll 1$ .

\* Benytt  $R_{33}(ka_0)$  samt eksakt sammenheng mellom  $R_{33}(ka_0)$  og  $|\kappa_3|$ .

Sammenlikn de to resultatene.

[1] Havelock, Proc. Royal. Soc. 231A 1-7 (55)

### Oppgave G1. (Strålingsresistans for sylinderisk bøye.)

Figuren viser ein flytande sylinderisk bøye med halvkuleforma botn. Radien er  $a$ , og  $l$  er likevektsnedskjøkinga av den sylinderiske delen. For hivmodusen har det vist seg at formelen

$$R_O = R_H e^{-2kl}$$

for strålingsresistansen passar godt med eksperimentelle målinger, når det er djupt vath. Her er

$$R_H = \omega p \frac{2\pi}{3} a^3 \epsilon$$

der  $\epsilon = \epsilon(ka)$  er Havelocks dimensjonslause dempingskoeffisient. Jfr. tabellen nedanfor. Den hydrostatiske stivheten til bøyen er

$$S = \rho g \pi a^2$$

P.g.a. den sirkulære symmetriene gjeld

$$R_o = \frac{\omega k}{2\rho g^2} |\kappa_o|^2$$

der  $\kappa_o$  er eksitasjonskraftkoefisienten. Uttrykk dei dimensjonslause parametra  $|\kappa_o|/S$  og  $\omega R_o/S$  ved  $\epsilon$ ,  $\kappa_a$  og  $k_l$ . Rekna ut numeriske verdiar for desse to parametrane med  $1/a \approx 0,4/3$  og  $8/3$  for kvar av  $\kappa$ -verdiane i tabellen nedanfor.

|                      |          |         |        |        |        |        |
|----------------------|----------|---------|--------|--------|--------|--------|
| $\kappa_a \approx 0$ | $0,01$   | $0,05$  | $0,1$  | $0,15$ | $0,2$  | $0,3$  |
| $\epsilon = 0$       | $0,0230$ | $0,104$ | $0,18$ | $0,24$ | $0,28$ | $0,34$ |

- (b) reknt ut og teikn diagram for  $\beta$  som funksjon av  $|n_i|$  slik at den absorberte effekten er  $P = P_{\text{maks}}$ . Perioden har fire ulike verdiar som i punkt (a).

- (c) Grei kort ut om korleis dette vil forandra seg dersom me i staden for å spesifisera  $P_{\text{maks}} = 300 \text{ kW}$ , spesifiserer ei maksimal dempingeskraft  $|\hat{F}_n|_{\text{maks}} = 2,4 \cdot 10^5 \text{ N}$  i maskinriet, eller ein maksimal lastresistans  $R_{\text{maks}} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-1}$ .

#### Oppgåve G2. (Effektabsorpsjon med kraftbøye.)

Ein hivande bøyte svingar med fart i fase med eksitasjonskrafta (nett som for eit resonant svingesystem) slik at fasevilkåret for maksimal energiabsorpsjon er oppfylt. Bøyen er sylinderisk og botnen er halvkuleforma. Jfr. oppgåve G1. Diameteren er  $2a = 6 \text{ m}$  og den sylinderiske delen av bøyen har ei likevektsnedskjøring  $l = 4 \text{ m}$ . Bøyen har ein maksimal utsvingsamplitude  $|\zeta| < 1$ . Dempinga av hivrørla skal avpassast for maksimum effektabsorpsjon ved moderate bølgjeamplitudar og for maksimal utsvingsamplitude ved høgare bølgjer. Bortsett frå denne avgrensinga i amplituden, reknar me at lineær teori gjeld. Bruk numeriske verdiar rekna ut i oppgåve G1.

- (a) Reknt ut og teikn diagram for absorbert effekt  $P$  som funksjon av amplituden  $|n_i|$  på den innkommende regulære bølgja, når perioden er  $T = 6,3 \text{ s}, 9,0 \text{ s}, 11,0 \text{ s}$  og  $15,5 \text{ s}$ . Me skal no gå ut frå at maskineriet i bøyen ikkje har kapasitet til å absorbera større effekt enn  $P_{\text{maks}} = 300 \text{ kW}$  (inkludert effektapt i friksjon o.l.). Ved ekstremt høge bølgjer skal difor fasewinkelene  $\beta$  mellom farten og eksitasjonskrafta ikkje lengre vera null. For denne situasjonen

#### Oppgåve G3. (Absorbert effekt pr. volum.)

Det er gitt ei regulær bølgje med amplitude  $|\eta_0| = 1 \text{ m}$ . Bølgjepериодen kan variera i området  $5 \text{ s} < T < 16 \text{ s}$ . Det er djupt vatn. Det skal absorberast maksimalt med bølgjeenergi med eit optimalt styrkt bøye, som er ein sylinder med halvkuleforma botn. Jfr. oppgåvne E1 og G1. Diameteren er  $2a$ , og sylinderhøgda er  $2l$ , der  $l$  er likevektsnedskjøringa. Bortsett frå at utsvingsamplituden er avgrensa til  $|\zeta| < 1$ , skal me rekna at lineær teori er gyldig.

- (a) Finn eit uttrykk for forholdet mellom den absorberete effekten  $P$  og volumet  $V$  av bøyen. Når  $l$  er fast, vis at  $(P/V)$  har sin maksimale verdi når  $a \rightarrow 0$ . Teikna kurve for  $(P/V)_{\text{maks}}$  som funksjon av  $T$ .

- (b) Reknt ut og teikn kurve for  $P/V$  som funksjon av  $T$  når  $a = 3 \text{ m}$  og  $l = 4 \text{ m}$ . Teikn og kurve for korleis  $P/V$  ville ha vore om det ikkje hadde vore avgrensing i utsvingsamplituden. I tillegg til skalaen for  $P/V$  ( $\text{kW/m}^3$ ) legg inn ein skala for  $P$  ( $\text{i kW}$ ).

## 1. INTRODUCTION

A wave-power absorber whose horizontal extension is very small compared to the wavelength, has been termed "a point absorber"<sup>1,2,3,4</sup>. In theory, it has been known for some time that an optimally run point absorber, operating in the heaving mode of oscillation, may absorb an amount of power equal to the propagating wave power in a plane wave of frontage  $\lambda/2\pi$  where  $\lambda$  is the wavelength.

K. Budal, J. Falnes, A. Kyllingstad and G. Oltedal,  
Institutt for eksperimentalfysikk, Norges tekniske høgskole,  
N-7034 Trondheim - NTH, Norway.

## EXPERIMENTS WITH POINT ABSORBERS IN REGULAR WAVES

The subject of this paper is experiments on a row of buoys with heaving motion optimised for maximum absorption of wave power. Optimum phase is obtained by two methods: (i) by resonance tuning and (ii) by locking the heave motion during controlled intervals of each wave cycle. It is demonstrated, in agreement with theory, that 50% of the incident wave power may be absorbed by a single row of heaving buoys, and that 100% may be absorbed if a reflector is placed behind the buoys. The reflector may be either a fixed vertical wall or another row of resonant heaving buoys (dynamic reflector).

The effect of interaction between buoys in a linear row has been experimentally investigated. In agreement with theory it has been found that the interaction factor is proportional to the ratio of buoy interspacing to wavelength, when this ratio is less than unity.

## ABSTRACT

The optimum oscillating motion of the buoy requires tuning of the dynamic mass of the oscillator. Alternatively we can use a buoy whose mass is too small, but instead a device, controllable by a computer, holds the buoy in a fixed vertical position during two individually controlled time intervals of each oscillation cycle. Both methods for optimum motion have been used in the present experiments.

## 2. SURVEY OF THEORY

Consider an infinitely long row of circularly symmetric heaving buoys separated by a regular interspace  $d$  between consecutive buoys, Fig. 1. The maximum radius of each buoy is  $a$ , where  $a < d$ . Let a regular plane wave  $\eta_i = e^{i\omega t}$  be normally incident on the row. (For convenience the factor  $e^{i\omega t}$  is omitted here and also in the following).

Thus  $\eta_i$  is the complex amplitude of the undisturbed wave elevation at the position of (the center of) each buoy. The angular frequency  $\omega$  and the angular repetency  $k = 2\pi/\lambda$  are related by

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (1)$$

where  $h$  is the water depth and  $g$  the acceleration of gravity.

The incident wave induces an oscillating vertical force (excitation force), which has a complex amplitude

$$F_e = \kappa \eta_i \quad (2)$$

when all buoys are held fixed. The heave force coefficient  $\kappa$  is independent of  $\eta_i$  when we assume that the wave amplitude is small enough for linear theory to be valid.

When all buoys in the row are oscillating in phase and with the same complex velocity amplitude  $U$ , a radiated wave is generated. Beyond a certain distance (in the far-field region) the radiated wave is plane. (We omit the near-field or local, non-propagating part of the radiated wave.) Provided the row has left-right symmetry the radiated wave can be expressed by  $\eta_r e^{-ik|x|}$  where

$$\eta_r = \tau U \quad (3)$$

For point absorbers ( $ka \ll 1$ ) the proportionality factors  $\kappa$  and  $\tau$  are approximately real, and they have opposite signs. For the point absorbers shown in fig. 1 (floating bodies),  $\kappa$  is positive and  $\tau$  is negative. A general relationship between  $\kappa$  and  $\tau$  is given by (14).

The (time-averaged) power absorbed by each buoy is

$$P = \frac{1}{2} |F_e U| \cos u - \frac{1}{2} R_r |U|^2 \quad (4)$$

where  $u$  is the phase between heaving velocity and excitation force. Further  $R_r = R_r(\omega)$  is the radiation resistance, which depends on the magnitude and the shape of the buoy, and on the distance  $d$  between adjacent buoys. It is easily shown that the maximum absorbed power is

$$P_{\max} = \frac{|F_e|^2}{8R_r} \quad \text{when } u = 0 \quad \text{and } U = \frac{F_e}{2R_r} \quad (5)$$

It is known<sup>1</sup> that for one isolated buoy, the maximum absorbed power is  $P_{o,\max} = K/k$  where

$$K = \frac{f_0 \rho g^2}{\eta_0} |\eta_i|^2 \quad (6)$$

is the incident wave power per unit frontage. Here  $\rho$  is the mass density of water and

$$f = f(kh) = \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \tanh(kh) \quad (7)$$

is a depth parameter that tends to unity for deep water ( $kh \rightarrow \infty$ ).

The individual buoys of a row interact. In general, the radiation resistance  $R_r$  and the absorbed power  $P_{\max}$  differ substantially from the corresponding values of an isolated buoy. We introduce the interaction factor

$$q = \frac{P_{\max}}{P_{o,\max}} = \frac{k P_{\max}}{K} = \frac{\omega k |\kappa|^2}{2 f_0 \rho g^2 R_r} \quad (8)$$

Due to the left-right symmetry of the row of heaving buoys we have<sup>5</sup>

$$P_{\max} = \frac{1}{2} K d \quad \text{when } kd < 2\pi \quad (9)$$

that is, when the distance between the buoys is less than one wavelength. Equating with (5) and using (6) yields

$$R_r = \frac{\omega |\kappa|^2}{f \rho g^2 d} \quad \text{for } kd < 2\pi \quad (10)$$

Inserting into (8) gives<sup>5</sup>

$$q = \frac{1}{2} kd \quad \text{for } kd < 2\pi \quad (11)$$

We now consider the radiation problem: There is no incident wave ( $\eta_i = 0$  and  $F_e = 0$ ), but the buoys are set in harmonic oscillation by some motor. Assuming that  $kd < 2\pi$  (and disregarding the near-field) a plane wave of amplitude  $|\eta_r|$  is radiated both in the positive  $x$  direction and the negative  $x$  direction. The radiated power equals the power delivered to the heaving buoys. Hence, according to (6) and (4) we have

$$2 \frac{f \rho g^2 d}{4\omega} |\eta_r|^2 = \frac{1}{2} R_r |U|^2 \quad (12)$$

Thus the radiation resistance may be expressed by

$$R_r = \frac{f \rho g^2 d}{\omega} \left| \frac{\eta_r}{U} \right|^2 \quad \text{for } kd < 2\pi \quad (13)$$

If we compare this with (10) and use (3), we find the relationship  $|\tau| = R_r / |\kappa|$ . For  $kd < 2\pi$  it can be shown that, in general,  $\tau = -R_r / \kappa^*$ , where  $\kappa^*$  is the complex conjugate of  $\kappa$ . However, as stated earlier,  $\kappa$  is approximately real for point absorbers. Hence, we have

$$\tau = -\frac{R_r}{\kappa^*} \approx -\frac{R_r}{\kappa} \quad \text{for } kd < 2\pi \quad (14)$$

The heave force coefficient  $\kappa$  is approximately independent of  $d$  as long as scattering of waves, due to the presence of the neighbouring buoys, is not important. Then  $\kappa \approx \kappa_0$  where  $\kappa_0$  is the heave force coefficient for one isolated buoy. According to Newman<sup>6</sup> the radiation resistance (damping coefficient) of an isolated circularly symmetric heaving buoy is

$$R_o = \frac{\omega k |\kappa_0|^2}{2 f \rho g^2} \quad (15)$$

From (8) we now find

$$q = \left| \frac{\kappa}{\kappa_0} \right|^2 \frac{R_o}{R_r} \approx \frac{R_o}{R_r} \quad (16)$$

The last approximation is valid when the diameter  $2a$  of the buoys is so small that wave scattering, due to the presence of the neighbouring buoys, is negligible.

We shall now consider the case with a reflector placed behind the row of absorbing buoys. The undisturbed plane wave is  $\eta_i (e^{-ikx}, r e^{ikx})$ , where

$$r = |r| e^{i\theta} \quad (17)$$

is the complex reflection factor referred to the position  $x = 0$ . For an ideal static reflector at the position  $x = d_s$  we have  $\theta = -2kd_s$ , while  $\theta = -2kd_d + \pi$  for a resonant dynamic reflector at  $x = d_d$ . Instead of (2) we now have

$$F_e = \kappa(1+r)\eta_i \quad (18)$$

Consider now the radiation problem in the presence of the reflector. The reaction force  $F_r$  on the buoy due to the wave it radiates when oscillating with velocity

amplitude  $U$ , can be expressed by the radiation impedance  $Z_{rr}$ :

$$F_r = -Z_{rr} U = -z_r U + kr\eta_r \quad (19)$$

Here  $Z_r$  is the radiation impedance in the absence of reflector. The last term in (19) corresponds to the excitation force due to the reflection of the radiated

wave. Using (3) and (14) we obtain

$$Z_{rr} = Z_r + rR_r \quad (20)$$

Using (17) we find the radiation resistance  $R_{rr}$  in the presence of reflector

$$R_{rrr} = \text{Re}\{Z_{rr}\} = R_r(1+r|\cos\theta|) \quad (21)$$

Exchanging  $R_r$  in (4) with  $R_{rr}$  and using (18) we obtain the absorbed power

$$P = \frac{1}{2}|(1+r)\kappa n_i U| \cos u - \frac{1}{2} R_r(1+r|\cos\theta|)|U|^2, \quad (22)$$

where  $u$  is the phase angle between  $U$  and  $F_e$  in (18).

In analogy with (5) we find

$$\frac{P_{\max}}{P_{\min}} = \frac{|(1+r)\kappa n_i|^2}{8R_r(1+r|\cos\theta|)} = \frac{|\kappa n_i|^2}{8R_r} \frac{1+2|r|\cos\theta+|r|^2}{1+|r|\cos\theta} \quad (23)$$

when

$$U = \frac{(1+r)\kappa n_i}{2R_r(1+r|\cos\theta|)} \quad (24)$$

which implies that  $u = 0$ , a condition that corresponds to a resonant oscillator. Note, however, that the natural frequency of the oscillator depends on the reflection factor  $r$ , because the added mass, according to (20), is

$$m_{rr} = \frac{1}{\omega} \text{Im}\{Z_{rr}\} = m_r + \frac{R_r|r|\sin\theta}{\omega} \quad (25)$$

where  $m_r$  is the added mass in absence of reflector. Hence, in order to tune the point oscillators to resonance it is necessary to adjust the real mass to compensate for the change in the added mass, if e.g. the phase angle  $\theta$  is changed.

For the case  $k_d < 2\pi$  we use (6), (9) and (10) in (23) which yields the interesting result<sup>9</sup>

$$P_{\max} = \left( 1 - \frac{1-|r|^2}{2(1+|r|\cos\theta)} \right) k_d \quad (kd < 2\pi) \quad (26)$$

This shows the important result that 100% absorption of the incident wave power is possible in the case of total reflection,  $|r| = 1$ . In principle, this is obtainable with a passive resonant oscillator for arbitrary reflection phase angles  $\theta$ , that is, for arbitrary distance between the reflector and the row of point absorbers. In practice, however, this is not possible unless the loss resistance, due to viscosity and friction, is smaller than the radiation resistance  $R_{rr}$ . Note that for  $|r| = 1$ , we have a singular case when  $\theta$  is an odd multiple of  $\pi$ , since the radiation resistance (21) is then zero, and the optimum amplitude (24) becomes infinite. For  $|r| = 1$ , the radiation resistance  $R_{rr}$  has a maximum  $2R_r$  when  $\theta$  is an even multiple of  $\pi$ . In this case the row of point absorbers is placed in an antinode of the standing wave, which results from the total reflection.

### 3. EXPERIMENTAL SET-UP

We report here on three kinds of experiment: on absorption of wave power by (i) resonant heaving buoys and by (ii) heaving buoys with phase-controlled motion, and finally (iii) on wave generation by heaving buoys. The absorption experiments have been performed both with and without a reflector behind the absorbing buoys.

The experiments have been carried out in a wave flume, 1.01 m wide and 33 m long. The water depth is  $h = 1.5$  m. The side walls act as total reflectors for waves. Hence, the experiment corresponds to an infinitely long row of buoys subject to perpendicularly, incident waves.

In the absorption experiments we use two absorbing buoys with their vertical symmetry axes placed  $d = 0.50$  m apart and  $0.25$  m from the side walls of the flume. The wave period \* is  $T = 2\pi/\omega = 1.5$  s, which corresponds to  $kd = 0.91$  and  $f(kh) = 1.04$ . In the wave generation experiment we use, for some of the measurements, one buoy only, placed midway between the side walls. This corresponds to  $d = 1.01$  m. The wave period  $T$  is varied between  $1.0$  s and  $0.6$  s in order to cover the range of values of  $kd$  up to  $2\pi$ . For these parameters we have deep water conditions,  $f(kh) = 1.00$ .

The buoys are shaped as cylinders with hemispherical bottom (figs. 2 and 3). The diameter is  $2a = 0.15$  m. Unless stated otherwise the cylindrical part of the buoys is at equilibrium submerged to a depth of  $1 = 0.10$  m.

The heaving buoys are suspended from a wire which runs over a pulley as indicated in figs. 2 and 3. The pulley is mounted on the axis of a moving coil which can perform oscillatory motion in an adjustable magnetic field. A potentiometer mounted to the same axis serves for measurement of the vertical position of the two buoys.

The moving coil has an electrical resistance  $91$  ohm. It is connected to a galvanometer with input resistance  $3.4$  ohm.

In the wave generation experiment a sinusoidally varying electric current is fed to the moving coil which acts as a motor forcing the buoy to move up and down. In the absorption experiments the moving coil acts as an electrical generator which damps the oscillatory motion.

In the absorption experiment with resonant buoys tuning is obtained by adjusting the mass of the buoys and the counterweight (C in fig. 2). In the experiment with phase-controlled motion the counterweight is replaced by a locking magnet and a helical spring with its lower end

\*  $T = 1.49$  s in the experiment with resonant point absorbers.  
 $T = 1.50 - 1.52$  s in the experiment with phase-controlled absorbers.

at a fixed point. See fig. 3. An electronic circuit provides electric pulses to the magnet in order to lock when the speed of the buoy is zero at its lowest or highest position. Then the oscillatory motion is stopped until it is released by another electronic pulse approximately a time  $T_0/4$  before the instantaneous heave force has a maximum or minimum, where  $T_0 = 0.7$  s is the natural period of the buoy being shorter than the period  $T$  of the wave. Then the buoy velocity is in phase with the heave excitation force, and the optimum phase condition for maximum power absorption is approximately fulfilled.<sup>6,10</sup>

The two-wire probes  $S_1$ ,  $S_2$  and  $S_3$  (fig. 2) are placed more than half a wavelength from the buoys in order to measure waves which are essentially plane. The probes  $S_1$  and  $S_2$  are interspaced  $\lambda/4$  with  $S_1$  in the antinode and  $S_2$  in the node of the partially standing wave. The experimental errors in the following presented results are mainly due to the inaccuracy in the wave measurements.

#### 4. EXPERIMENTAL RESULTS FOR ABSORPTION

The moving-coil instrument presents to the oscillating buoy a mechanical load resistance  $R_e$  that is proportional to the square of the magnetic field of the instrument. In addition, there is an unavoidable loss resistance  $R_f$  which is mainly due to viscosity and to mechanical friction. Assuming that  $R_f$  is independent on the buoy's velocity, the (time-average) lost power is proportional to  $|U|^2$ , the square of the velocity amplitude. Deducting this from the total absorbed power (22) we obtain for the net electrical power generated in the moving-coil

$$P_e = \frac{\omega}{2} |(1+r)kn_1 \zeta| \cos u - \frac{1}{2} (R_f (1+|r| \cos \theta) + R_e) \omega^2 |\zeta|^2 \quad (27)$$

where we have introduced the complex amplitude  $\zeta = U/i\omega$  for the heave oscillation.

#### 4.1. No reflector behind the point absorbers

At first we shall consider the case with no reflector behind the point absorbers,  $r = 0$ . Further we assume that the resonance condition  $u = 0$  is fulfilled. Then (27) reduces to

$$P_e = \frac{\omega}{2} |\kappa n_i r| - \frac{1}{2} \omega^2 (R_p + R_f) |\zeta|^2 \quad (28)$$

If the magnetic field is zero, we have  $R_e = 0$  and hence  $P_e = 0$ . For this case we have from (28) the linear relationship

$$|\zeta| = \frac{|\kappa|}{\omega(R_p + R_f)} |n_i| \quad (29)$$

which is experimentally tested as shown in fig. 4. The linear relationship (3) or

$$|\zeta| = \frac{1}{\omega|\tau|} |n_r| = \frac{|\kappa|}{\omega R_p} |n_p| \quad (30)$$

- cf. (14) - has also been experimentally tested as shown in fig. 4, in a wave generation experiment as well as in an experiment with dynamic reflection<sup>6</sup>. It is evident from (29) and (30) that a fraction

$$|n_p/n_i| = R_p/(R_p + R_f) \quad (31)$$

of the incident wave is re-radiated and appears as a reflected wave.

It is evident from the linearity test (fig. 4) that the linearity is fairly good for heave amplitudes less than the radius of the buoy (75 mm). From the slopes of the fitted lines in fig. 4 we find

$$|\zeta| = 17.5 |n_i| = 22.6 |n_r| \quad (32)$$

which means that a fraction

$$|n_p/n_i| = 0.77 \quad (33)$$

of the incident wave is dynamically reflected. Further, using the numerical result (32), we find from (13) the radiation resistance

$$R_p = 1.34 \text{ Nsm}^{-1} \quad (34)$$

Within experimental accuracy, this value of  $R_p$  for  $T = 1.49$  s or  $k d = 0.90$  agrees with the theoretical curve in fig. 11. Using (34) and (33) in (31) we find the loss resistance per buoy

$$R_f = 0.39 \text{ Nsm}^{-1} \quad (35)$$

A friction resistance of 0.2 Ns/m in the pulley has been found by a separate measurement. Hence the viscous resistance per buoy is  $0.39 - 0.2/2 \approx 0.3$  Ns/m.

For the absorption experiment with phase-controlled buoys, linearity measurements are shown in fig. 5. Also here the deviation from linearity is small when the heave amplitude is less than the radius of the buoys. In this case the heave motion is non-sinusoidal but periodic.<sup>6</sup> During heave motion the buoys position varies with time approximately as a free oscillation corresponding roughly to a cosine variation. The periodic motion is Fourier-analysed. The first harmonic amplitude  $|\zeta_1|$  is somewhat larger than the measured amplitude  $\zeta_m$  as indicated by the two vertical scales in fig. 5. In the linear region we have an amplitude magnification

$$|\zeta_1/n_i| \approx 10.4 \quad (36)$$

when there is zero electrical damping,  $R_e = 0$ . In comparison with (32) this indicates that the loss resistance  $R_f$  is larger than in the case of resonant buoys. Friction losses in the locking magnet, and perhaps energy losses due to non-precise locking and unlocking pulses, are partly responsible for the increased value of  $R_f$ . Another reason is increased viscous losses due to an increased maximum heave speed. Yet another, but less important, reason is the lost power due to generated higher harmonic waves. Allowing, as before,  $R_p = 1.3$  Ns/m the value in (36) yields an effective loss resistance

$$R_f = 1.5 \text{ Nsm}^{-1} \quad (37)$$

for the phase-controlled buoy. In this case, a portion of the incident wave of only  $|n_p/n_i| \approx 0.46$

is dynamically reflected. Note that we disregard, here, the relatively small higher harmonic waves which result from the present phase-controlled heave motion.

When the magnetic field and hence the loss resistance  $R_e$  are varied, we obtain measured values of the electric power  $P_f$  in the moving coil, as shown by the circle points in fig. 6. In the case of phase-controlled buoys the calculated first-harmonic amplitude  $|\zeta_1|$  is used in the abscissa coordinate  $|\zeta/\eta_i|$ . The triangular points in fig. 6 are obtained by adding the known power loss

$$P_f = \frac{1}{2} R_f |U|^2 = \frac{1}{2} \omega^2 R_f |\zeta|^2 \quad (38)$$

to the measured electrical power of the resonant buoys.

In fig. 6 the power is plotted in units of incident power  $K_d$  where  $K_d$  is given by (6). Fig. 6 reveals excellent agreement between theory and experiment.

Theoretically, one row of point absorbers may absorb a maximum of 50% of the incident wave power. In the present case this corresponds to a loading where the amplitude magnification is  $|\zeta/\eta_i| = 11.3$ . At a somewhat smaller magnification  $|\zeta/\eta_i| = 8.7$  a maximum of 38% of the incident wave power is converted to electrical power by the resonant point absorbers. With a magnification of  $|\zeta_1/\eta_i| = 5.2$  a maximum of 25% of the incident wave power is converted to electrical power by the phase-controlled point absorbers.

Fig. 7 shows the measured converted electrical power  $P_e$  as a function of the incident wave amplitude  $\eta_i$ . The electrical damping of the system is, in this experiment, kept constant, equal to its optimum value

$$R_e = R_f + R_f \quad (39)$$

i.e.  $|\zeta| = (17.5/2) |\eta_i|$ , in the range  $0 < |\eta_i| < 8.6$  mm or  $0 < |\zeta| < 75$  mm (parabolic part of curve). For  $|\eta_i| > 8.6$  mm,  $R_e$  is varied in order

to keep a constant heave amplitude  $|\zeta| = 75$  mm (linear part of curve). The fully drawn, theoretical curve in fig. 7, obtained from (28), fits the experimental points fairly well.

The experiment shown in fig. 8 for buoys with phase-controlled motion is made with optimised  $R_e = R_f + R_r$ . In this case there is a significant deviation from theory (the parabolic curve) for large values of  $|\eta_i|$ .

#### 4.2. Reflector behind the point absorbers

A reflector behind the point absorbers is realised simply by removing the absorbing beach (A in fig. 2). The end wall is then a static reflector.

Alternatively, we can use a second row of resonant heaving buoys with no electrical damping behind the row of power-absorbing buoys. That is, we utilise a dynamic reflector. This set-up corresponds to power absorption by two parallel rows of resonant heaving buoys. Note that only the front row is electrically damped in order to convert wave power into electrical power.

Experimental results from both types of reflector are reported below. With the dynamic reflector placed a distance  $\lambda/4$  behind the absorbing buoys, the reflection coefficient (17) is real, and we have

$$r = 0.77 \quad (\text{dynamic reflector}) \quad (40)$$

in accordance with (33).

The distance between the absorbing buoys and the downstream end of the wave flume is 10.6 m corresponding to 3 wavelengths with  $T = 1.5$  s. If this distance is an integral number of half wavelengths, the reflection coefficient (17) with the static reflector is real. By separate measurements we find

$$R_e = R_f + R_f \quad (39)$$

$$|r| = 0.95 \quad (\text{static reflector}) \quad (41)$$

The phase angle  $\theta$  of the reflection coefficient can be changed by  $50^\circ$  by  $1\%$  change in the wave period  $T$ .

Since the reflector is non-ideal ( $|r| < 1$ ) it absorbs some power which is dissipated and/or transmitted.

Before discussing experimental results it is useful to derive some formulas. Due to the combined action of the reflector and the row of point absorbers a wave  $\eta_u e^{jkx}$  is propagating in the negative  $x$ -direction. Here

$$\eta_u = \eta_r + r(\eta_i + \eta_r) = \left(r - (1+r)^2 \frac{R_r}{Z}\right)\eta_i \quad (42)$$

where we have introduced the mechanical impedance

$$Z = F_e/U = (1+r)\kappa\eta_i/U \quad (43)$$

and used (3) and (14). Introducing the complex heave amplitude  $\zeta = U/i\omega$  we have

$$\frac{R_r}{Z} = \frac{i\omega R_r}{(1+r)\kappa} (\zeta/\eta_i). \quad (44)$$

Note that

$$\eta_u = 0 \quad \text{when} \quad Z = R_p(1+r)^2/r \quad (45)$$

The total power  $P_a$  absorbed by the point absorbers and the reflector relative to the incident power  $K_d$  is

$$P_a = \frac{P_d}{K_d} = 1 - \left| \frac{\eta_u}{\eta_i} \right|^2 = 1 - \left| r \right|^2 + 2\operatorname{Re} \left\{ r^* (1+r)^2 \frac{R_r}{Z} \right\} - \left| 1+r \right|^2 \left| \frac{R_r}{Z} \right|^2 \quad (46)$$

Note that (22) gives the absorbed power in the point absorber, only. It is easily seen from (46) that  $P_a = 1 - |r|^2$  for  $R_r/Z = 0$ , that is for stationary point absorbers.

For this latter case, the experimental points for the measured electrical power  $P_e$  are plotted (as filled circle points) in fig. 9. Corresponding results for the resonant buoy are missing due to failure in the regeneration equipment. We have, instead, in fig. 9 plotted experimental (open circle) points for  $P_e$  based on wave measurements and computed lost power. The results shown

For simplicity, assume that both  $Z$  and  $r$  are real,  $Z = R = R_r + R_f + R_e$  and  $r = |r|$  (i.e.  $u = 0$  and  $\theta$  is a multiple of  $2\pi$ ). Then  $P_a$  is a parabolic function of  $R_r/R$  and hence of  $|\zeta/\eta_i|$ ,

$$P_a = 1 - |r|^2 + 2|r|(1+|r|)^2 \frac{R_r}{R} - \left(1+|r|\right)^2 \left(\frac{R_r}{R}\right)^2 \quad (47)$$

It is easily shown that

$$(P_a)_{\max} = 1 \quad \text{when} \quad R = R_p(1+|r|)^2/|r| \quad (48)$$

This result is in agreement with (45). Using (47) and

$$\frac{R_r}{R} = \left\{ \frac{\omega^3 R_p}{F \rho g^2 d} \right\}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\zeta/\eta_i}{1+r} \right| \quad (49)$$

obtained from (10) and (44), we can compute the theoretical curves for  $P_a$  in fig. 9 and fig. 10 for  $r = 0.95$  and  $r = 0.77$ , respectively.

By means of the two wave-measuring probes ( $S_1$  and  $S_2$  in fig. 2) we find experimental values for  $|\eta_i|$  and  $|\eta_u|$  in order to compute the experimental points pertaining to the curves for  $P_a$  in figs. 9 and 10. Note the good agreement between theory and experiment.

Using the derived experimental values (34) for  $R_r$  and (35) for  $R_f$  in (27) we compute the theoretical curve  $b$  for  $P_e$  in fig. 9 with  $r = 0.95$  and in fig. 10 with  $r = 0.77$ . Similarly, we use (37) for  $R_f$  to compute the theoretical curve  $c$  for  $P_e$  in fig. 9 for the case of phase-controlled buoys.

For this latter case, the experimental points for the measured electrical power  $P_e$  are plotted (as filled circle points) in fig. 9. Corresponding results for the resonant buoy are missing due to failure in the regeneration equipment. We have, instead, in fig. 9 plotted experimental (open circle) points for  $P_e$  based on wave measurements and computed lost power. The results shown

in fig. 9, which apply to the experiment with static reflector, indicate reasonably good agreement between theory and experiment.

With a dynamic reflector behind the point absorbers we have carried out experiments with the resonant buoys only. The experimental results are presented in fig. 10. There is still fair agreement between theory and experiment, although the deviation is larger than in the case of the static reflector. In particular, the measured electrical power, is somewhat less than expected by theory.

The experimental results shown in figs. 9 and 10 have been obtained with the absorbing buoys located in the antinode of the standing wave in front of the reflector that is,  $r = |r|$  is real. The phase angle  $\theta$  for the reflection coefficient  $r$  of the static reflector can be varied by slightly changing  $T$ . For  $\theta = -41^\circ$  experimental results<sup>9</sup> for the phase-controlled buoys are essentially identical with those presented in fig. 9 for  $\theta = 0^\circ$ . In both cases, the maximum value of the measured electrical power  $P_e$  is almost 60% of the incident wave power  $Kd$ . However, for  $\theta = -88^\circ$  the measured<sup>9</sup> values of  $P_e/Kd$  are less than 0.45. This is reasonable because the lost power  $P_f$  is expected to be of greater importance when the singular situation (with the buoy located in a node or  $\theta$  being an odd multiple of  $180^\circ$ ) is approached.

For  $R_o$  the following expression has been proposed<sup>7</sup>.

$$R_o = \frac{2}{3} \pi a^3 \rho \epsilon(ka) e^{-2kl} \quad (50)$$

where  $\epsilon = \epsilon(ka)$  is the normalised damping coefficient for a heaving hemisphere, as given by Havelock<sup>12</sup>, and where  $l$  is the submerged depth of the cylindrical part of the buoy. Performed measurements<sup>11</sup> indicate that the radiation resistance varies with  $l$  as  $e^{-2kl}$ .

$$\text{If } \kappa = \kappa_o \text{ and if } kd < 2\pi \text{ we have from (11) and} \quad (16)$$

$$R_r \approx \frac{R_o}{q} = \frac{2R_o}{kd} \quad (51)$$

The theoretical curves for  $R_r$  in fig. 11 are based on (50) and (51).

For  $kd < 2$  (or  $T > 1.0$  s) the experimental points in fig. 11 are results from absorption experiments<sup>11</sup>. The other experimental points are based on (13) or

$$R_r = \frac{\Omega g^2 d}{\omega^3} + \frac{n_r}{\zeta} |^2 \quad (52)$$

where the heaving buoys are used as a wave generator on otherwise still water. (Note that since  $T < 1.0$  s we have  $f(kh) = 1.00$ .)

The experimental values fit fairly well with theory for  $kd < 4.5$ . This indicates that the proposed expression (50) for  $R_o$  is correct. Further, for  $kd < 4.5$ , the results represent an experimental support for the relationship  $q = kd/2$ . The deviation between the experimental points and the theoretical curve in fig. 11 is probably due to breakdown, for  $kd > 4.5$ , of the approximation  $\kappa \approx \kappa_o$ .

5. MEASUREMENT OF THE INTERACTION FACTOR  $q$
- According to (8) we can determine  $q$  experimentally if we measure the heave force coefficient  $\kappa$  and the radiation resistance  $R_r$ . Another possibility is to measure only  $R_r$  and use the approximation (16). However, this requires that  $R_o$ , the radiation resistance for one isolated buoy, is known and that  $\kappa$  has a negligible deviation from  $\kappa_o$ .

Therefore, we have measured  $|\kappa|$  and compared it with  $|\kappa_0|$  as obtained from (15) when using (50). The buoy is held in a fixed vertical position and the heave force amplitude  $|F_e| = |\kappa n_i|$  is measured by means of a strain gauge. As seen from fig. 12 the experiment shows that  $|\kappa| < |\kappa_0|$  for  $k_d > 4.5$  when  $d = 1.01$  m.

When we have measured both  $R_r$  and  $|\kappa|$ , we find experimental values of the interaction factor  $q$  by using (8). The experimental results are plotted in fig. 13. The experimental points for  $k_d > 4.5$  are based on experimental points for  $R_r$  (fig. 11) and the experimental smoothed curve for  $|\kappa|$  (fig. 12) or vice versa.

The measurement of the heave amplitude  $|\xi|$  and the corresponding amplitude  $|\eta_r|$  of the two generated plane waves is stopped as soon as a reflected wave appears from one end of the wave flume. The nearest end is 8 m from the location of the buoy. Hence the experiment corresponds to a point-absorber row which is less than 32 m long. Correspondingly, the number of buoys is of the order of magnitude  $N = 30$ .

In order to compare the experimental results with theory<sup>5</sup> we have in fig. 13 drawn computed curves for  $N = 30$  and  $N = \infty$ . There is fairly good agreement.

## 6. CONCLUSION

We have described experiments with wave-absorbing and wave-generating heaving buoys in a wave flume. The set-up corresponds to a linear row of regularly spaced point absorbers with interspacing  $d$ , where  $d < \lambda$ .

The theory<sup>5</sup> for interacting point absorbers is experimentally verified. In particular, it has been demonstrated that for  $d < \lambda$  the interaction factor  $q$

increases linearly with  $d/\lambda$  up to  $\pi$  as  $d/\lambda$  approaches unity.

Further, we have experimentally verified the proposed formula (50) for the radiation resistance  $R_o$  of one (isolated) heaving cylindrical buoy with hemispherical bottom.

In the experiments with maximum absorption of wave power we have optimised the phase of the heave motion by two methods, (i) by resonance tuning, which is ideal in a regular wave only, and (ii) by locking the heave motion during controlled intervals of each wave cycle. The latter method introduces increased power losses in the present model experiment. It is, however, more suitable than resonance tuning in irregular waves.<sup>10</sup> Moreover, the first harmonic heave amplitude is larger than the real heave amplitude. This is obviously an advantage for a practical wave-power converter which oscillates with its maximum physical heave amplitude most time of the year.<sup>6</sup>

It has been experimentally demonstrated, in agreement with theory, that 50% of the incident wave power may be absorbed by a single row of buoys and that 100% may be absorbed if a reflector is placed behind the absorbing buoys. However, due to unavoidable losses not all of the absorbed power is converted to useful power. In the present experiment with resonant point absorbers a maximum of 38% of the incident wave power has been converted to electricity under optimum conditions. With a reflecting wall behind the resonant point absorbers more than 80% have been converted to electricity. For the experiment with phase-controlled point absorbers the corresponding figures are 25% and 60%, respectively. It is remarkable that the converted useful power may be more than doubled by placing a reflector behind the point absorbers, in spite of some loss in the reflector, and in spite of the larger optimum heave amplitude when

reflector is used (cf. figs. 6 and 9). However, with a reflector the radiation resistance is doubled (if  $r = 1$ ,  $\theta = 0$ ) - cf. (21). - Hence, the relative importance of the loss resistance is decreased due to the presence of the reflector. Note, however, that for certain values of the distance between the reflector and the buoys (corresponding to  $\theta$  being close to an odd multiple of  $\pi$ ) the effective radiation resistance is very small and, hence, the loss resistance is of greater significance.

The linearity tests (figs. 4 and 5) indicate that the linear theory is applicable when the heave amplitude is less than the radius of the used buoys. For this reason (cf. figs. 7 and 8) and also for economical reasons<sup>6,10</sup> it is, in large waves, necessary to increase the electrical damping beyond the optimum value (39), which pertains to situations with a linear relationship between the heave amplitude and the wave amplitude.

In the point-absorber theory which is presented here, we neglect the wave which is diffracted or scattered (on fixed bodies). The good agreement between this theory and the obtained experimental results indicates that neglect of scattered waves is a fairly good approximation. Hence, the presented theory represents a very useful mathematical tool in designing wave-power converters in the form of heaving buoys.

#### ACKNOWLEDGMENT

The experimental work reported here has been financially supported by Norges vassdrags- og elektrisitetsvesen (The Norwegian Water Resources and Electricity Board) and by Olje- og energidepartementet (The Royal Ministry of Petroleum and Energy).

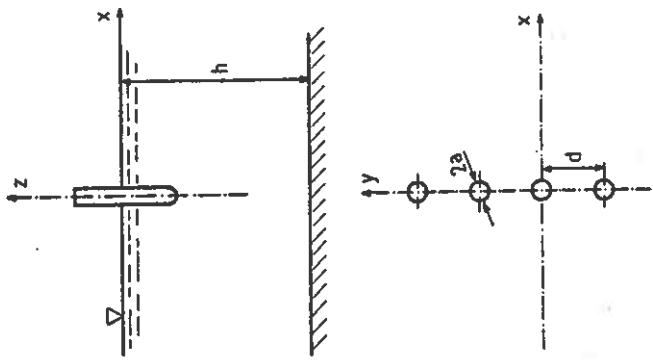


Fig. 1.  
Linear row of heaving buoys.

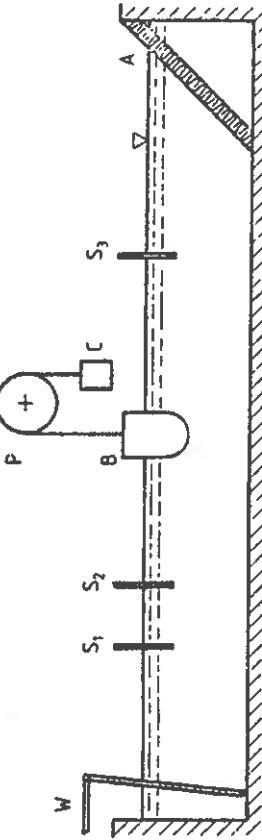


Fig. 2.  
Wave flume with wave maker W. The absorbing beach A may be removed. The surface elevation is measured by means of resistive two-wire probes S<sub>1</sub> and S<sub>2</sub> in front of the buoy B and S<sub>3</sub> behind the buoy.

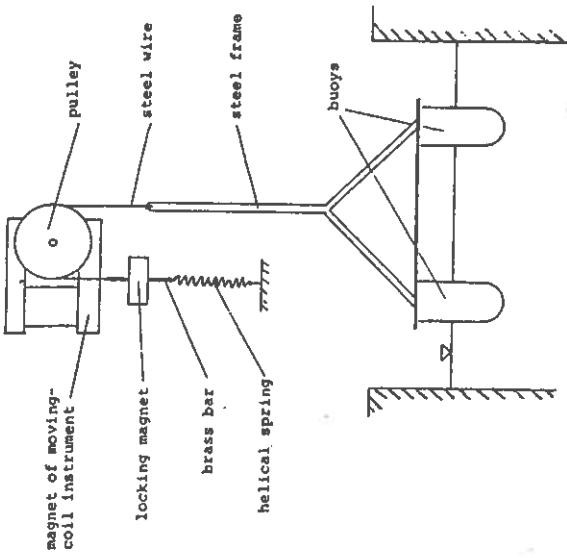


Fig. 3.  
Arrangement for phase-controlled heaving buoys.

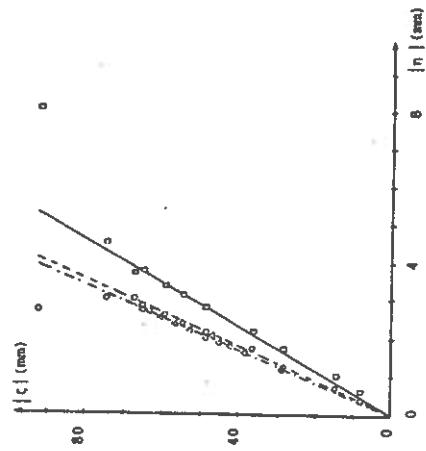


Fig. 4.  
Linearity test of resonant heaving buoy with amplitude  $|\xi|$ .

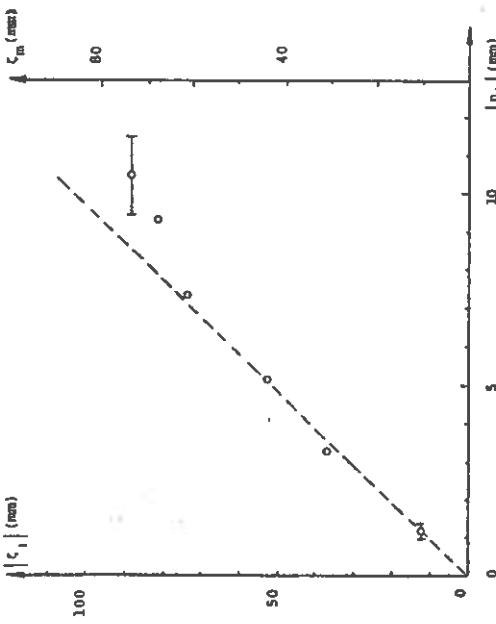


Fig. 5.

Linearity test<sup>9</sup> of phase-controlled heaving buoy with amplitude  $\zeta_m$ . The incident wave has amplitude  $|\eta_i|$ . The first harmonic amplitude of the periodic buoy oscillation is  $|\xi_i|$ , as given on the left-hand vertical scale. The measurements are taken under condition of no electrical damping,  $R_e = 0$ .

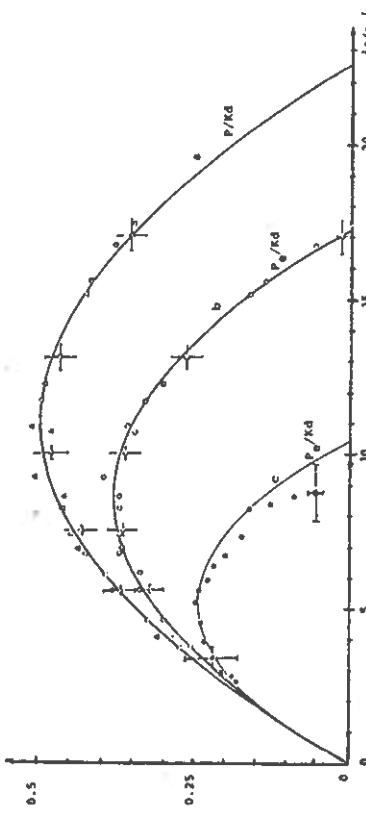


Fig. 6.

Relative absorbed power  $P/Kd$  versus relative oscillation amplitude of buoy. The theoretical curves represent the total absorbed power  $P$  (curve a) and the electrical power in the moving coil produced by resonant buoy (curve b) and by phase-controlled buoy (curve c). Cf. eqs. (4) and (28). The circle points represent measured electrical power generated by the moving coil. The triangular points are obtained by adding friction loss to the electrical power. The filled circle points represent electrical power in the case of phase-controlled motion.

Linearity test<sup>11</sup> of resonant heaving buoy with amplitude  $|\xi|$ . The fully drawn line with slope 17.5 is fitted to the measured square points representing the incident wave amplitude  $|\eta_i|$ . The dashed line with slope 22.1 is fitted to the measured circle points representing the radiated wave amplitude  $|\eta_r|$ . These measurements of dynamical  $|\eta_i|$  and  $|\eta_r|$  are taken under the condition of dynamical reflection (zero net load resistance,  $R=0$ ). The dash-dotted line with slope 23.1 is fitted to the radiated wave  $|\eta_r|$  when the buoys are used as a wave generator.

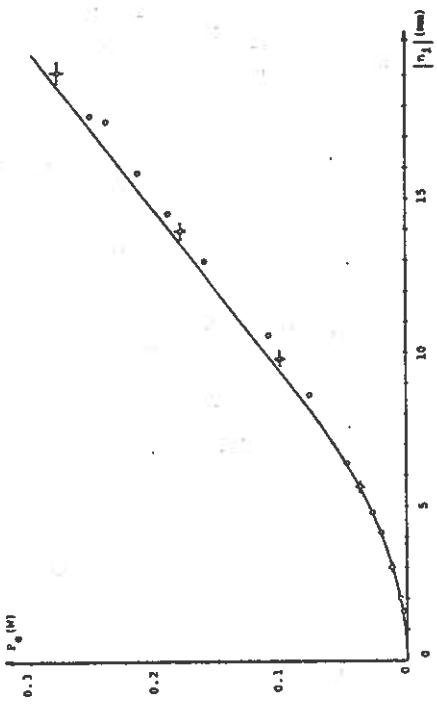


Fig. 7. Maximum electrical power generated by one resonant buoy versus incident wave amplitude  $|n_1|$ . The curve is theoretical and the circular points represent measured values. For the larger values, where the curve is a straight line, the heave amplitude is restricted to  $|\zeta| < 75$  mm.

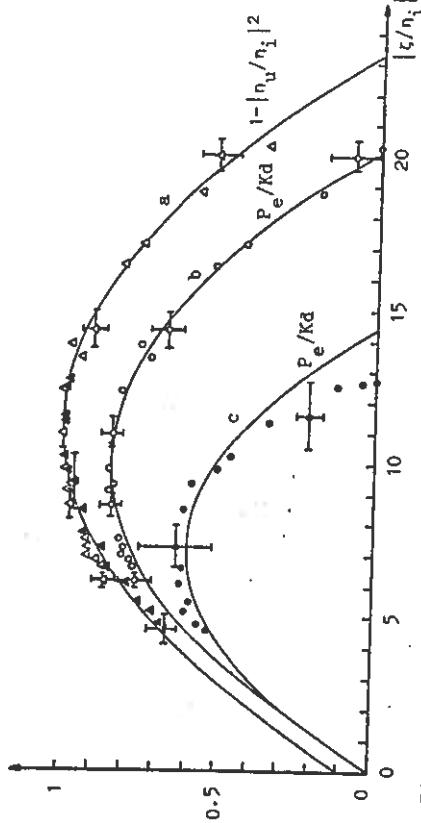


Fig. 9.

Relative absorbed power  $P_e/Kd$  versus relative heave amplitude of the buoys, with static reflector ( $r=0.95$ ) behind the buoys. The theoretical curve a - eqs. (47) and (44) - represents the power absorbed in the buoy and the reflector relative to the incident power. The experimental (triangular) points,  $\circ$ , are obtained from measurement of the incoming and outgoing waves in front of the buoys. The open points are obtained for resonant buoys and the filled points for phase-controlled buoys. The theoretical curves b (resonant buoys) and c (phase-controlled buoys) represent the electrical power  $P_e^B$  generated in the moving coil. Experimental values for  $R_f$  are used in eq. (27). The filled circle points, represent measured electric power  $P_e$ . The open circle points are obtained from the open triangular points by correcting for the loss resistance  $R_f = 0.4$  Ns/m.

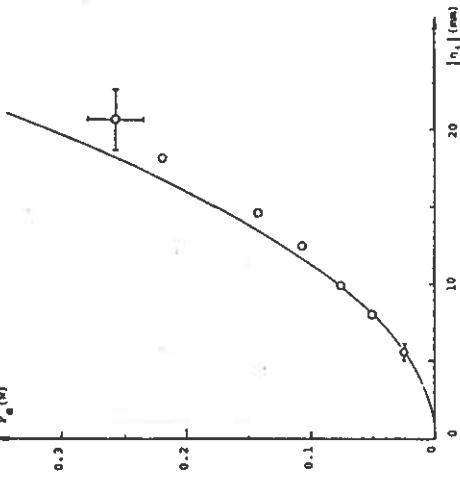


Fig. 8. Maximum electrical power generated per phase-controlled buoy versus incident wave amplitude. The circles represent measured points. The curve corresponds to 26% of the incident wave power  $K_d$  per buoy.

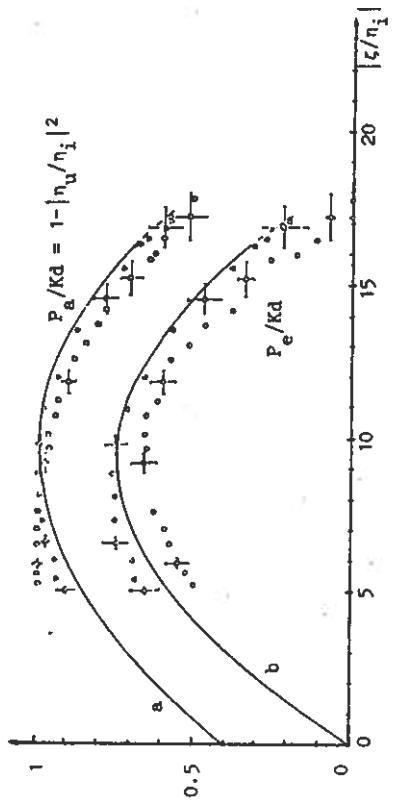


Fig. 10.

Relative absorbed power  $P_e/Kd$  versus relative amplitude  $|ξ/η_i|$  of the power-absorbing resonant buoys, with dynamic reflector ( $r \approx 0.77$ ) behind the power-absorbing buoys. The theoretical curve 'a' - eqs. (47) and (44) - represents the power absorbed in the reflector and in the power-absorbing buoys relative to the incident power. The experimental points ( $\square$ ,  $\nabla$ ) are based on wave measurements in two different runs. The theoretical curve 'b' - eq. (27) with  $R_f = 0.4$  Ns/m - represents the electrical power  $P_e$  in the moving coil. The experimental circle points ( $\circ$ ) are based on measurement of the electrical power (in the run where the square points above were measured). The triangular points ( $\Delta$ ) are obtained from the triangular points ( $\nabla$ ) above by subtraction of known power loss in the reflector and in the absorber.

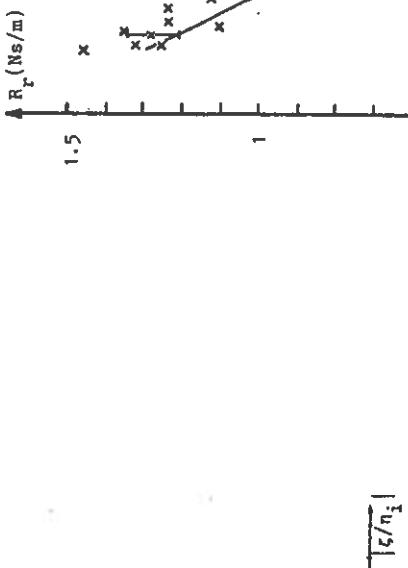


Fig. 11.

Radiation resistance  $R_r$  for one buoy of a linear row of heaving buoys oscillating in phase with each other. The fully drawn, theoretical curve - eqs. (50) and (51) - and the corresponding experimental cross points apply for a buoy interspacing  $d = 0.50$  m. The dash-and-dotted theoretical curve and the experimental circle points apply for  $d = 1.01$  m. The dashed curve is drawn (by eye) to fit those experimental points which deviate significantly from the (approximative) theory.

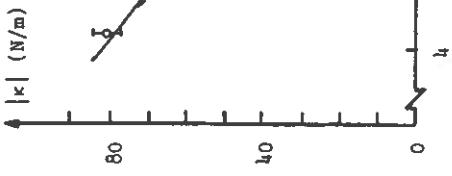


Fig. 12.

Heave force coefficient  $|\kappa|$  versus angular repetency  $k$  for one buoy of a linear row with buoy interspacing  $d = 1.01$  m. The dashed line is drawn (by eye) to fit the experimental circle points. The fully drawn theoretical curve - eqs. (15) and (50) - applies to one isolated buoy.

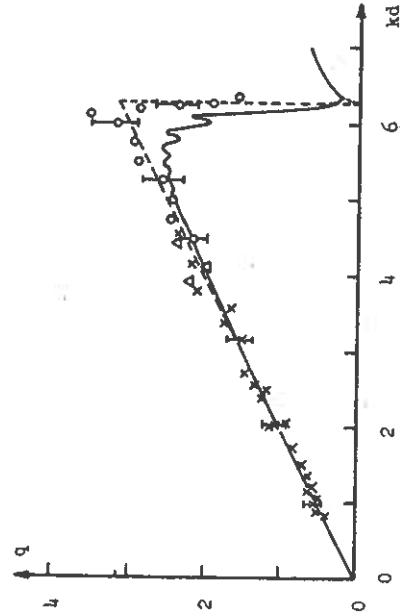
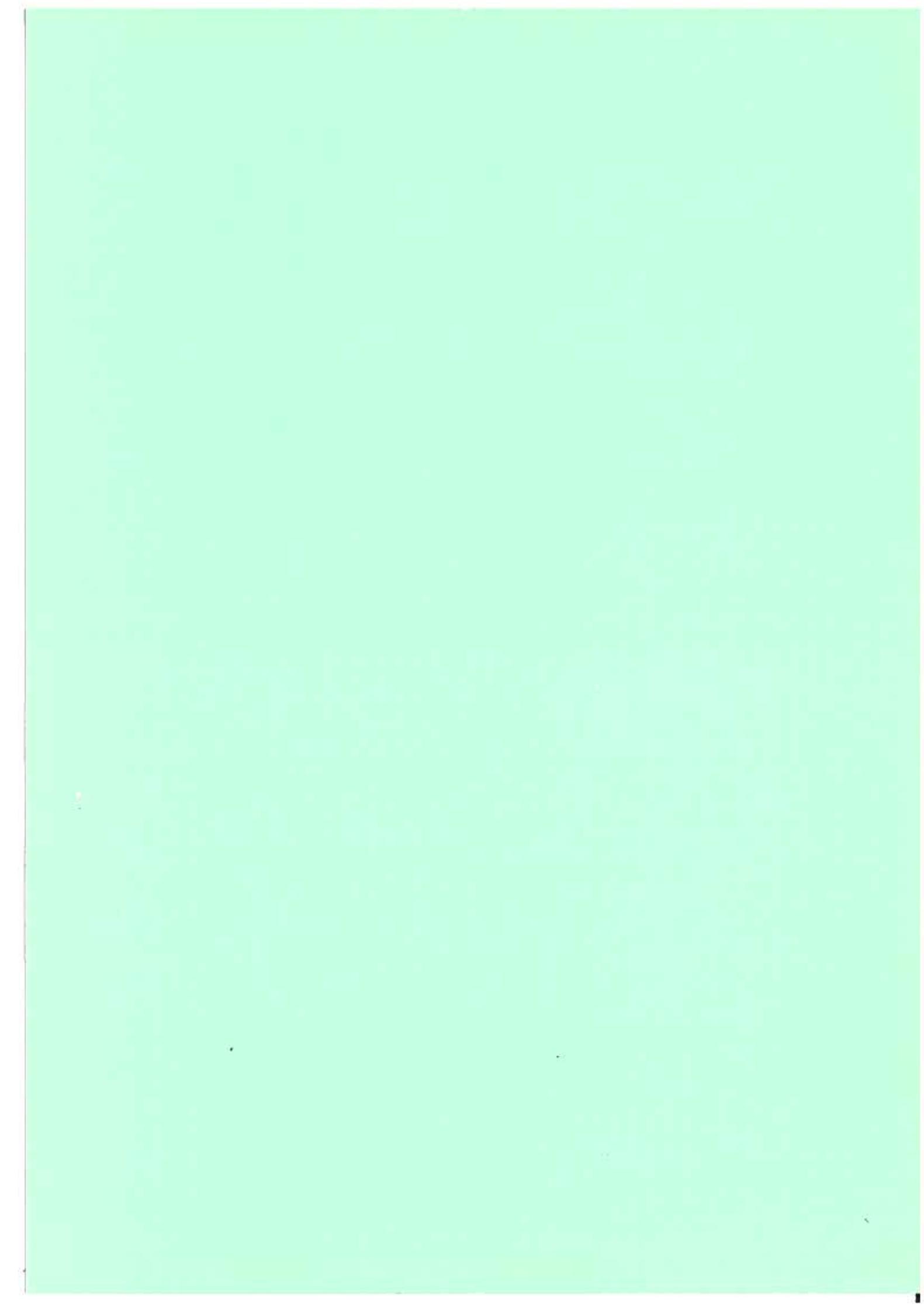


Fig. 13.

The interaction factor  $q$  versus  $kd$ . The curves are theoretical for  $N = 30$  (fully drawn curve) and for  $N = \infty$  (dashed curve). The experimental cross points ( $x$ ) for  $d = 0.50$  m and triangular points ( $\Delta$ ) for  $d = 1.01$  m are based on eq. (51) and experimental values for  $R_r$  (fig. 11). The experimental circle points ( $\circ$ ) for  $d = 1.01$  m are based on eq. (8) and experimental values for  $R_r$  and  $|\kappa|$  (figs. 11 and 12).

## REFERENCES:

- Budal, K. and Falnes, J. A resonant point absorber of ocean-wave power. *Nature* 256 (1975), pp. 478 - 9, 257 (1975), p. 626.
- Evans, D.V. A theory for wave-power absorption by oscillating bodies. *J. Fluid Mechanics* 77 (1976): 1, pp. 1 - 25.
- Newman, J.N. The interaction of stationary vessels with regular waves. *Proc. 11th Symp. Naval Hydro-dynamics* (1976), pp. 491 - 501.
- Budal, K. and Falnes, J. Optimum operation of improved wave-power converter. *Marine Science Communication* 3 (1977): 2, pp. 133 - 150.
- Budal, K. Theory for absorption of wave power by a system of interacting bodies. *J. Ship Research* 21 (1977): 4, pp. 248 - 253.
- Falnes, J. and Budal, K. Wave-power conversion by point absorbers. *Norwegian Maritime Research* 6 (1978): 4, pp. 2 - 11.
- Ambli, N. et al. Wave power conversion by a row of optimally operated buoys. *Paper 4.5 - 2, 10th World Energy Conference*, Istanbul, 1977.
- Newman, J.N. The exciting forces on fixed bodies in waves. *J. Ship Research* 6 (1962): 3, pp. 10 - 17.
- Kyllingstad, A. Absorption av harmoniske bølger med styrkt kraftbøymodell. Thesis, NTH, Trondheim, 1979.
- Budal, K. and Falnes, J. Interacting point absorbers with controlled motion. *Proc. of Conference on Power from Sea Waves*, University of Edinburgh, June 26 - 28, 1979.
- Oltedal, G. Resonansavstømt kraftbøymodell. Thesis, NTH, Trondheim, 1979.
- Havelock, T. Waves due to a floating sphere making periodic heaving oscillations. *Proc. Roy. Soc. 231A (1955)*, pp. 1 - 7.



Rettingar til "HYDRODYNAMISK TEORI FOR BØLGJEKRAFTVERK"  
 ved J. Falnes og L.C. Iversen (1980)

| <u>Side og linje</u> | <u>Står</u>  | <u>Skal stå</u>  |
|----------------------|--|--|
| S. A 12, likn (A70)  | $\bar{I}A_a$   | $I_i A_a$  |
| s. B 4, l. 7 o.      | $\vec{n}$  | $\vec{u}$  |
| s. B9, likn (B43)    | $\cos$   | $\cosh$  |
| s. B10, l. 7 n.      | kvantitativ  | kvalitativ   |
| s. B11, l. 10 o.     | gh   | gk   |
| s. B15, likn (B71)   | $\frac{1}{2}\omega k\rho  \hat{\phi} ^2 =$                 | skal fjernast  |
| s. B16, likn (B75)   | $\hat{n}_i$  | $n_i$  |
| s. B17, l. 4 o.      | $\cosh^2 kh$   | $\cosh^2(kh)$  |
| s. B19, l. 4 o.      | høgre  | venstre  |
| s. B20, l. 11 o.     | visar  | viser  |
| s. B22, l. 10 n.     | Wehauser   | Wehausen   |
| s. C6, likn. (C28)   | $\Delta_v$   | $\Delta v$   |
| s. D12, l. 7 n.      | b  | bk   |
| s. D13, l. 7 og 8 o. | $\hat{v}_x$  | $\hat{v}_x$  |
| s. D19, l. 5 n.      | av Greens  | av Gauss'  |
| s. D40, likn. (D215) | $\kappa(\theta)$   | $\kappa_q(\theta)$   |
| s. D43, l. 2 o.      | $h_5(\theta)/h_{50}$                                       | $h_4(\theta)/h_{40}$   |
| s. D43, l. 5 o.      | Mellom deito brøkane skal vera:                            | =  |
| s. D50, l. 6 o.      | $ \hat{u}/\omega \eta_o ^2$                                | $ \hat{u}/\omega \eta_o $  |
| s. E2, likn. (E7)    | ds   | dS   |
| s. E2, likn. (E8)    | $\hat{\varphi}_q \frac{\partial \Phi_i}{\partial \hat{x}}$ | $\hat{\varphi}_q \frac{\partial \hat{\Phi}_i}{\partial \hat{x}}$ |
| s. E7, l. 8 n.       | $\iint_S$  | $\iint_S$  |
| s. E7, l. 8-1 n.     | $\hat{\varphi}_q \text{ og } \hat{\psi}_1$                 | $\varphi_q \text{ og } \varphi_1$                                |

Rettingar til Hydrodynamisk teori for bølgjekraftverk

| <u>Side og linje</u>  | <u>Står</u>  | <u>Skal stå</u>  |
|---|--|--|
| s. E7, l. 5 n.  | ; $l = 1, 2, 3$  | Skal fjernast  |
| s. E7, l. 5 og 4 n.<br>og likn. (E39) og (E40)                | =  | $\sum_{l=1}^3$   |
| s. E8, likn. (E42) og<br>(E43)                                | za   | $z/a$  |
| s. E8, likn. (E45) bør innrammast<br>(heller enn likn. (E41)) |  |  |
| s. F2, likn. (F5) og (F7)                                     | u  | v  |
| s. J6, figuren  | Avstand fra origo til punkta i og j<br>skal kallast $d_i$ og $d_j$ , ikke $r_i$ og $r_j$ |  |
| s. K8 l. 7 n.   | (metoden med<br>"stasjonær fase")  | Skal fjernast  |
| s. K8, l. 6 o.  | $-(\theta - \theta_n) \cos \theta_n$   | $n \frac{2\pi}{kd} - (\theta - \theta_n) \cos \theta_n$            |
| s. K9, likn. (K44)  | $n=0$  | $n=n_1$  |
| "   | $n_{\max}$   | $n_2$  |
| "   | $\kappa_q(\theta_n) \kappa_{q'}^*(\theta_n)$   | $\kappa_q(-\theta_n) \kappa_{q'}^*(-\theta_n)$                     |
| s. K9, l. 1 n.  | Merk at talet<br>$2(n_{\max} + 1)$   | der $n_2 \geq 0$ og $n_1 \leq 0$ . Merk at talet<br>$2(n_2 - n_1)$ |
| s. K10, likn (K45)  | $\kappa_q(\gamma) \kappa_{q'}^*(\gamma)$   | $\kappa_q(-\gamma) \kappa_{q'}^*(-\gamma)$                         |
| s. A22, (s.155), l. 1 o.                                      | ikkje -  | ikkje  |