

Astrofísica Computacional

Ejercicios Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

A. Movimiento de un Cometa

Existen muchos cometas que orbitan alrededor del Sol con trayectorias elípticas. De acuerdo con las leyes de Kepler, cuando el cometa se encuentra lejos del centro de fuerza, su movimiento es lento, mientras que al acercarse al Sol su velocidad es bastante grande. Este es un sistema físico que claramente debería ser solucionado con un método de paso adaptativo: en la región lejana se pueden utilizar pasos grandes mientras que en la región cercana se necesitan pasos muy cortos para tener un error pequeño.

Utilizando coordenadas cartesianas en el plano de movimiento, la dinámica del cometa bajo la influencia Solar está descrito por las ecuaciones

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -GM \frac{x}{r^3} \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -GM \frac{y}{r^3} \quad (2)$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, G es la constante gravitacional de Newton y M es la masa del Sol.

1. Escriba un programa para solucionar estas ecuaciones utilizando el método Runge-Kutta de orden 4 con paso fijo. Elija adecuadamente el sistema de unidades y escriba correspondientemente los valores de M y G . Como condición inicial, suponga que en $t = 0$ el cometa se encuentra en las coordenadas

$$\begin{cases} x = 4 \times 10^9 \text{ km} \\ y = 0 \text{ km} \end{cases} \quad (3)$$

y se mueve con la velocidad

$$\begin{cases} v_x = 0 \text{ m/s} \\ v_y = 500 \text{ m/s.} \end{cases} \quad (4)$$

Implemente una función que calcule las cantidades conservadas del problema (energía y momento angular) para cada paso temporal. Escoja un tamaño de paso Δt apropiado para poder calcular al menos 5 orbitas completas del cometa. Grafique la trayectoria y compruebe que durante las 5 orbitas se mantiene igual. Grafique el comportamiento de las cantidades conservadas en función del tiempo y verifique su valor durante toda la trayectoria obtenida.

2. Ahora escriba un programa que resuelva el problema utilizando uno de los métodos RK con paso adaptativo. Establezca la tolerancia de tal forma que se tenga una precisión de 1 km por año en la posición del cometa. Como se comparan los resultados de los dos métodos? Realice un gráfico de x vs. t y otro de y vs. t localizando los puntos correspondientes a los calculos con paso adaptativo para confirmar que el tamaño cambia de acuerdo a la ubicación del cometa con respecto al Sol.

B. Orbita Terrestre

Las ecuaciones para el movimiento de la Tierra alrededor del Sol son

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5)$$

donde G es la constante gravitacional de Newton y M es la masa del Sol. Como es bien conocido, la órbita terrestre no es perfectamente circular. En el punto de máximo acercamiento al Sol (perihelio), la distancia entre los dos cuerpos es de $1,4710 \times 10^{11}$ m y su velocidad lineal es de $3,0287 \times 10^4$ m/s.

1. Escriba un programa que calcule la órbita terrestre utilizando uno de los métodos simplécticos con un paso temporal de 1 hora. Grafique la trayectoria completando varias vueltas alrededor del Sol.
2. Incluya en el programa una función que calcule la energía potencial, la energía cinética y la energía total del sistema en cada paso y grafique sus resultados en los mismos ejes. Los resultados deben mostrar que las energías cinética y potencial cambian visiblemente a lo largo de la trayectoria mientras que la energía total debe permanecer aproximadamente constante.
3. Ahora grafique únicamente la energía total para comprobar que existe una pequeña variación en cada una de las órbitas. Sin embargo, el método simpléctico debe retornar al valor inicial después de cada vuelta.
4. Utilice el programa que escribió para verificar si puede describir el movimiento del planeta enano Plutón. Este objeto tiene una órbita mucho más excéntrica que la órbita terrestre, con una distancia al Sol en el perihelio de $4,4368 \times 10^{12}$ m y una velocidad lineal en este punto de $6,1218 \times 10^3$ m/s.

Nota: En cada uno de los casos, verifique el sistema de unidades utilizado para las condiciones iniciales del sistema y realice las transformaciones del caso para que estos datos se ajusten a las unidades que utilice su código.