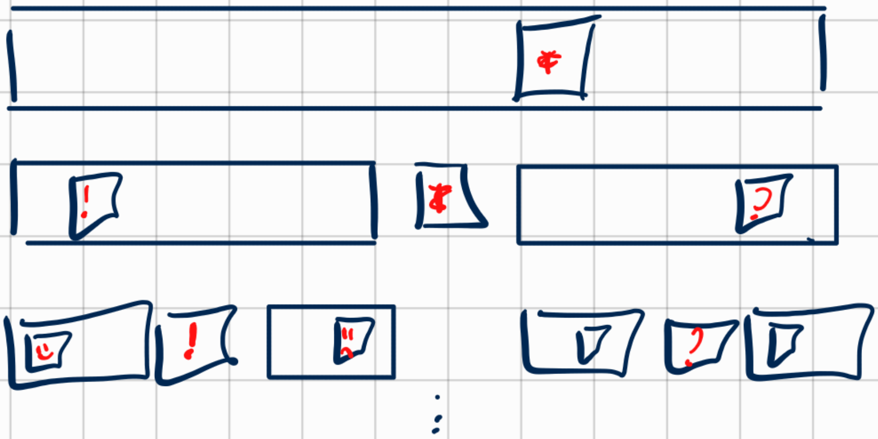
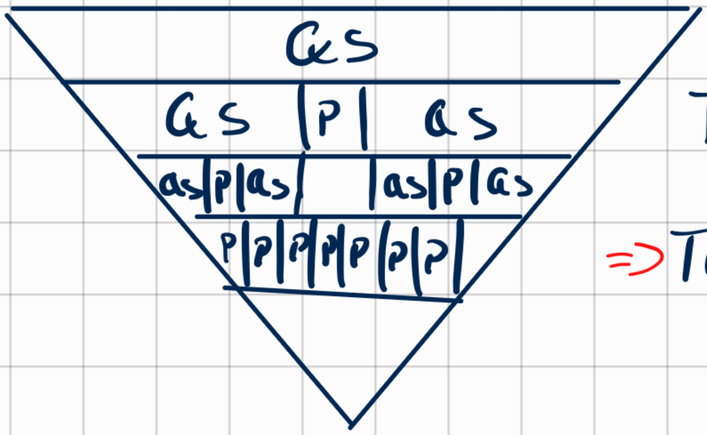
QuickSort: Mejor caso



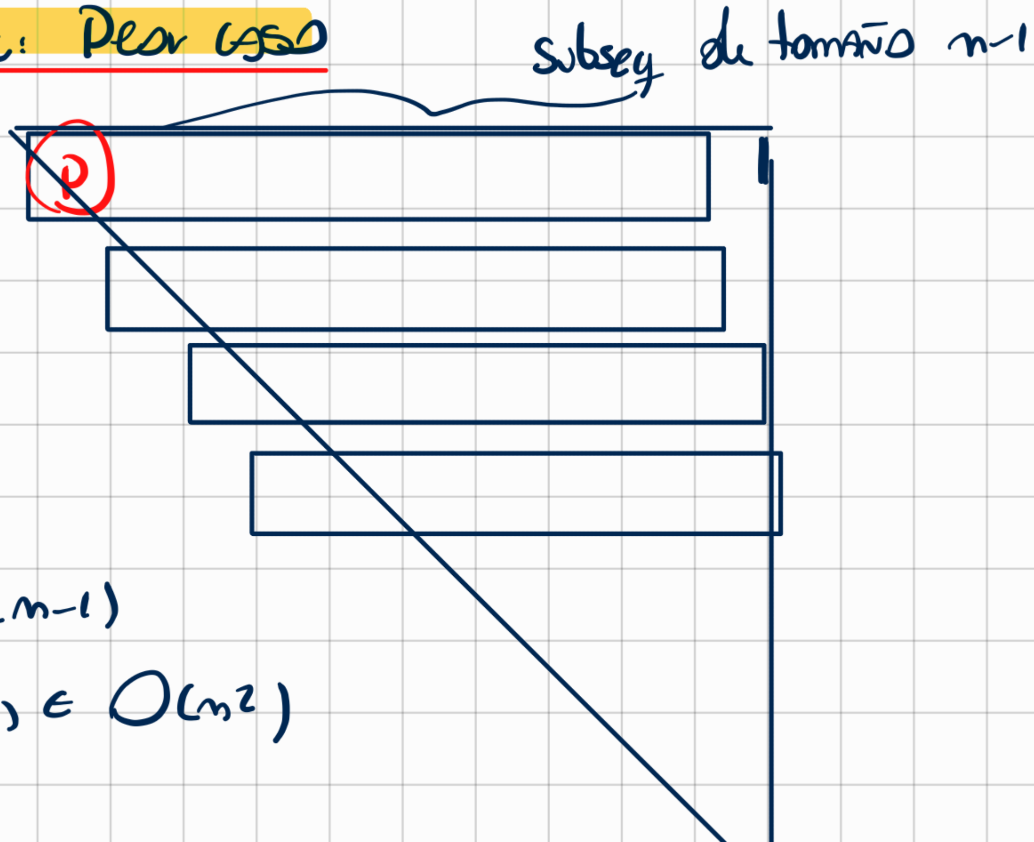
Evolucion del tamaño de las llamadas



$T(n) = n + 2T(n/2)$

$\Rightarrow T(n) \in O(n \log n)$

QuickSort: Peor caso



$T(n) = n + T(n-1)$

$\Rightarrow T(n) \in O(n^2)$

Caso Promedio

```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en
      {i, ..., f};   p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i ... f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```

Suponemos que el pivote queda en cualquiera de las n posiciones con la misma Prob.

contaremos el nº de comparacion de esta línea, pues es la que mide cuantas iteraciones debe hacer este metodo

$C(n) :=$ # comp. $A[k] < p$ en Quicksort

↳ buscaremos su ec. de recurrencia

llamada 1 : $n-1$ comps ya que $i=0$, $f=n-1$

- Suponemos que Partition retorna q ⇒ deja al pivote p en $A[q]$

↳ vienen 2 llamadas Quicsort

- uno para los q elems. a la izq.
- otro para los $n-q-1$ elems. a la der.

→ Aportan $C(q) + C(n-q-1)$

Entonces el nº de comparaciones cuando el pivote queda en $A[q]$ es

$$(n-1) + C(q) + C(n-q-1)$$

Para el caso promedio, cada elem tiene la misma prob de ser elegido como pivote

$$C(n) = (n-1) + \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \left(C(q) + C(n-q-1) \right)$$

Notamos que:

$$\sum_{q=0}^{n-1} C(n-q-1) = C(n-1) + C(n-2) + C(0)$$

$$= \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

Entonces

$$\boxed{C(n) = (n-1) + \frac{2}{n} \sum_{q=0}^{n-1} C(q)}$$

Tenemos 2 casos base

- $C(0) = 0$, $\Leftarrow$ Caso base de QuickSort
- $C(1) = 0$ $\Leftarrow$ Partition NO itera si hay un sob elemento

Amplificamos por la recurrencia y reescribimos

$$n\,C(n) = n(n-1) + 2 \sum_{q=0}^{n-1} C(q) \qquad (1)$$

$$(n-1)\,C(n-1) = (n-1)(n-2) + 2 \sum_{q=0}^{n-1} C(q) \qquad (2)$$

expresando (1) - (2)

$$nC(n) - (n-1)C(n-1) = n(n-1) - (n-1)(n-2)$$

$$nC(n) = (n-1)C(n-1) + n(n-1) - (n-1)(n-2)$$

$$nC(n) = (n+1)C(n-1) + 2n - 2 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\frac{C(n)}{n+1} = \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1}$$

$$\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1}$$

$$\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1}$$

$$\ldots$$

$$\leq \frac{C(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k+1}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \leq \int_1^n \frac{2}{x}\,dx = \underbrace{2\log n}_{\text{cola sup.}}$$

$$C(n) \leq 2(n+1)\log n$$

$\therefore$ Q.S es $O(n\log n)$ en el caso promedio