<u>מאמר מחקרי סיכום ודוגמאות</u>

<u>מבוא</u>

המאמר דן בבעיה בגיאומטריה חישובית הנקראת חלוקת אורך קצה מינימלית.
המטרה היא לחלק מצולע פשוט וישר למלבנים, תוך מזעור האורך הכולל של חלוקות חדשות (מינימום דיו כאשר נצייר את החלוקות החדשות על דף).

הבעיה חשובה ומעניינת כי היא רלוונטית במגוון תחומים כגון בקרת תהליכים ארכיטקטורה וכו'.

פתרונות קודמים התמקדו בצמצום מספר הרכיבים ולא השיגו חלוקה מינימלית באורך החלוקה.
בנוסף הפתרונות התמקדו במקרים ספציפיים של בעיות. כגון פתרון שעובד רק עבור צורות ללא חורים (כלומר צורות שלמות ללא חללים פנימיים, או פתרון שעובד רק עבור צורות עם חורים מנוונים.
המאמר נותן אלג' פולינומי עבור מצולע פשוט וישר ללא חורים, ומוכיח שמצולע חורים זה בעיית NPC.
אני אתמקד באלגוריתם שמתייחס לחלוקה מינימלית של מצולע ישר פשוט ללא חורים (פרקים 1-3).

<u>עבודות קודמות</u>

המאמרים שמצוינים במאמר לא נמצאים ברשת (לא מצאתי), אבל במאמר נאמר שההבדל המרכזי הוא התייחסות למצולעים ישרים כללים בלבד שיכולים להיות עם "איים" פנימיים תוך התייחסות לקריטריון המינימליות שציינתי לעיל.

<u>הגדרות</u>

גבול ישר: מצולע פשוט שבו כל צדדיו מקבילים או מאונכים זה לזה וכל זוויותיו הן 90 או 270.
מיוצג בתור רשימה של קודקודים במרחב דו ממדי.

חור ישר: מצולע ישר פשוט המוקף במלואו בגבול ישר, המייצג חור או אזור שלא נכלל מהגבול. חור הוא מנוון אם הוא מורכב מנקודה אחת.

מצולע ישר: קבוצה של גבולות ישר, שכל אחד מהם עשוי להכיל חורים שאינם חופפים. אסור לחורים להכיל חורים נוספים.

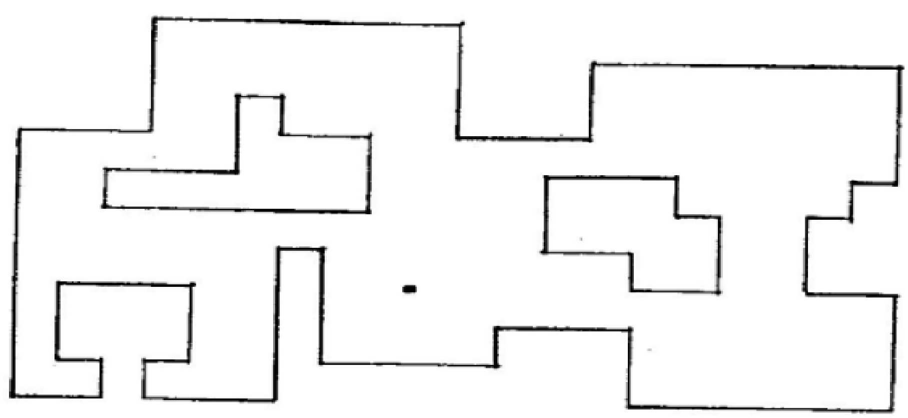


Figure 1. A rectilinear figure with three holes (one is degenerate).

בסרטוט לעיל ניתן לראות מצולע ישר (מורכב מסט של גבולות ישר) המכיל 2 חורים רגילים וחור אחד מנוון.

מחיצה מלבנית: קבוצה של קטעי קו השוכנים בתוך הגבול של המצולע, ואינם חוצים חורים כלשהם.
הקבוצה יוצרת חלוקה למלבנים של המצולע, ואין "קצוות בודדים" משמע כל קו יוצר ניצב לגבול הקיים או לחור.

מחיצה: צלע פנימית המהווה מחיצה. היא לא חלק מהצורה המקורית אלא תיווסף כדי ליצור מחיצה. המטרה היא הוספת כל הצלעות הנ"ל על מנת לקבל חלוקה מינימלית (סכום כל המחיצות) שיוצרת מלבנים.

חלוקה מינימלית: חלוקה ישרה כך שסכום אורכי קטעי הקו שנוספו יהיה הקטן ביותר מבין כל החלוקות האפשריות, כדי למזער את ההיקף הכולל של המלבנים המתקבלים.

הערה: נובע מלמה 1 במאמר שכל מחיצה בחלוקה המינימלית נמצאת על הרשת הפורשת

רשת פורשת: קבוצה של קווים אופקיים, אנכיים ונקודות החיתוך שלהם שעליהם שוכנים קטעי הגבול.
כלומר, הרשת המושרה על ידי הגבול מתייחסת לרשת הבסיסית שנוצרה על ידי הקווים האופקיים והאנכיים המצטלבים בנקודות שבהן קודקודי הגבול שוכנים.

קו בנוי: קו הלוקח קטע קיים מהמחיצה ומרחיב אותו בצורה מקסימלית באותו כיוון אופקי או אנכי עד שהוא פוגע בגבול בשני הקצוות (וגם אם הקו מתלכד עם הגבול המקורי, כלומר עד כמה שניתן להרחיב). זה מאפשר לכלול קצוות גבול קולינאריים עם קטע קו המחיצה לקו אחד "בנוי" מורחב.
בניגוד לצלע שהגדרנו לעיל, צלע מהווה מחיצה בלבד ללא תנאי ההרחבה המקסימלית שיש לקו בנוי. חלק מהקו הבנוי יכול לחפוף לקטע מהמחיצה המלבנית המקורית של המצולע. הקו הנ"ל ישמש אותנו לחלק את הצורה לתתי צורות וכך לעבוד בצורה רקורסיבית על תתי הצורות עד שלא ניתן לחלק יותר.
הערה: נובע מלמה 2 שלכל קו בנוי יש לפחות נק' אחת על הגבול של הצורה המקורית.

עוגן: קצה של קו בנוי שנמצא על המחיצה (לפי למה 2 במאמר, לכל קו בנוי יש לפחות עוגן אחד). הוא יכול להיות פינה או נקודה האנכית לצלע.

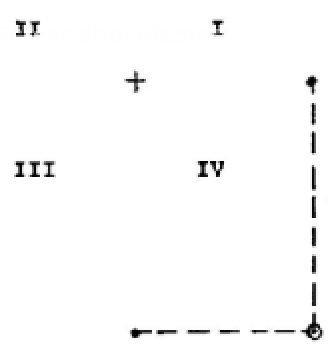
מצולע ביניים: חלק מהמצולע המקורי שמהווה גבול ישר ללא חורים. הוא מורכב מחלק רציף מהגבול המקורי ולכל היותר שני קווים בנויים (הרחבות של קצוות מחיצות לגבול).
במאמר מציינים שמספיק להראות שהאלגוריתם המוצע עובד על צורות ביניים וזה משליך על כל המצולע הכולל.

<u>הגדרות הקשורות לחלוקה של צורות ביניים</u>

נקודת מועמדת: מיקום פוטנציאלי לקודקוד המחיצה הבא שמוגדרת ביחס לכמות הקווים הבנויים שעוברים דרכה. היא יכולה להיות קמורה או קעורה ביחס לצורת הביניים.
אם אין קו העובר דרכה - ניתן לבחור כל פינה קמורה בצורת הביניים.
אם קו אחד - אחד מקודקודי הקו הבנוי יבחר.
אם שני קווים - נבחר את נק' החיתוך שלהם המוגדרת כקצה המשותף של שני קווים בנויים (הם סמוכים).

נקודת התאמה: נקודה על הרשת הפורשת כך שקיימת חלוקה חוקית (הוספת מחיצות לאו דווקא אופטימליות באורכן שיוצרות מלבן שחסום בגבולות המצולע המקורי, שאותו נחלק לרבעים) שבה נקודת המועמדת ונקודת ההתאמה אלכסוניות זה לזה (מהוות קודקודים נגדיים).
הנקודה הנ"ל היא נקודה ביחס לנקודה מועמדת שכבר נוספה לחלוקה בצורת הביניים, משמע מהווה נקודה פוטנציאלית.

מקור של קודקודים נגדיים: בהינתן שני קווים בנויים היוצרים נק' מועמדת נגדיר את הקודקוד הנגדי שנוצר על ידי השלמת שאר הצלעות (הוספת שתי צלעות) בתור מקור של קודקודים נגדיים
נחלק את השטח מסביב למקור הנגדי לרבעים.



The four quadrants around the kitty-corner origin (+).

בסרטוט לעיל ניתן לראות שני קווים בנויים שיוצרים נקודה מועמדת,
ואם נמתח ממנה אלכסון נגיע ל + המהווה מקור של קודקודים נגדיים.

נקודה מועמדת קמורה: נק' מועמדת (הגדרנו לעיל) שלא ניתן למתוח ממנה הצלע חיצונית לאף קודקוד מהצורה החלקית מבלי לחצות את אחת הצלעות.
נקודה מועמדת קעורה: נק' מועמדת שניתן למתוח ממנה צלע חיצונית לאחד הקודקודים בצורה החלקית.

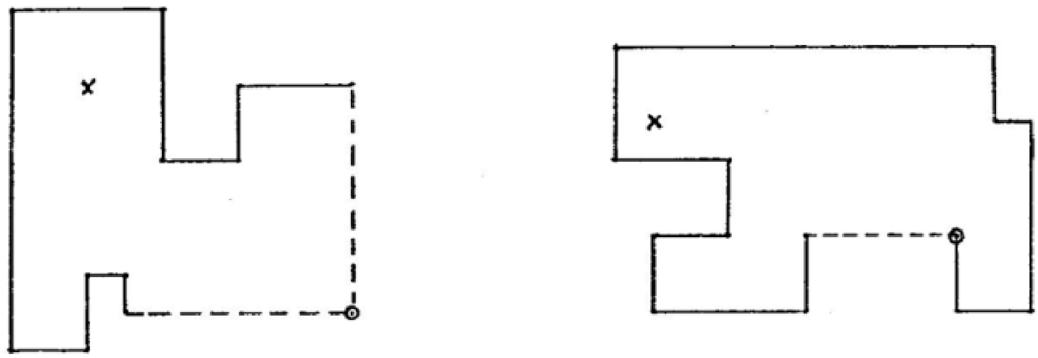


Figure 5. Forbidden matching points. ⊙ = candidate point
X = matching point

הנקודה הימנית לעיל מהווה נקודה קעורה ומשמאל נקודה קמורה (ביחס לצורה החלקית).
בנוסף, ניתן לראות שנקודות ההתאמה לעיל לא חוקיות ביחס לנקודות המועמדות כי נקודות ההתאמה לא נמצאות על הרשת הפורשת.

היסטוגרם: מצולע ישר שהקואורדינטות ה-x או ה-y של הקודקודים שלה יוצרות רצף מונוטוני עולה. במילים אחרות, אם נסדר את קואורדינטות ה-x (או קואורדינטות ה-y) של הקודקודים לפי הסדר, הן גדלות או נשארות קבועות.
שמיים: הצלע הארוכה היותר בחלק העליון של ההיסטוגרף.
גגות: צלעות המקבילות לשמיים
לדוגמה:

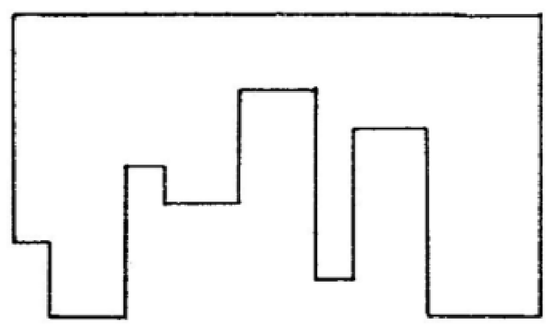


Figure 9. An upside-down histogram.

<u>אלגוריתם</u>

לפני שנציג את האלג' נציין את שתי הלמות שעליהן הוא מתבסס:
למה 3: אם נק' התאמה נמצאת באותו רביע של נק' מועמדת קמורה, ביחס למקור כלשהו של קודקודים נגדיים, הנקודה המועמדת לא רלוונטית.
למה 4: אם הנק' המועמדת קעורה, נק' ההתאמה צריכה ליצור היטל אופקי או אנכי על גבי אחד מהקווים הבנויים.
חשוב - במאמר מצוין שזה מספיק להסתכל על חלק מהצורה המקורית, חלק שמכיל לכל היותר 2 קווים בנויים שנחתכים בנק'.
אנחנו טוענים שמספיק להסתכל על צורה חלקית שהגבול שלה מורכב מקטע רציף מהגבול המקורי. בכל שלב נתמקד בשני קווים בנויים סמוכים לכל היותר.

קלט: מצולע ישר ללא חורים המיוצג כרשימה של קודקודים ממוינים עם או נגד כיוון השעון ביחס לנק' מסוימת. כלומר בין כל זוג קודקודים סמוכים יש צלע.
פלט: רשימה של מחיצות המייצגים את החלוקה המינימלית באורך המחיצות של מצולע הקלט למלבנים.

אלג':
נעבור לפי סדר מסוים על הנק'
נבדוק כמה קווים בנויים יש בצורה הנתונה (בהתחלה 0)
אם אין: נבחר נק' מועמדת קמורה כלשהי.
אם יש קו בנוי אחד: ניקח את אחת מהקצוות שלו.
אם יש שני קווים בנויים: ניקח את הקצה המשותף שלהם.
נעבור על כל נק' ההתאמה אפשרית:
לכל נק' התאמה השייכת למועמדת - נחתוך לפי הקווים הבנויים שהמלבן יצר, נשמור את המידע הרלוונטי ונקרא רקורסיבית על הצורות החדשות שנוצרו

נעצור כאשר אין יותר צורות ביניים שמכילות מלבנים, ונחזיר את המחיצות שנוצרו.

זמן ריצה:
עובד על צורות פשוטות שלא מכילות חורים בזמן של O(n^4) כאשר n זה כמות הצלעות החיצוניות .
עבור גרף מסוג היסטוגרם נקבל O(n^3)

<u>נכונות</u>

כדי להוכיח את נכונות האלגוריתם, עלינו להראות שהחלטות החלוקה שהתקבלו על ידי האלגוריתם מובילות לפתרון אופטימלי.
נראה נכונות עבור קיום הרשת הפורשת והקוים הבנויים:
ע"פ למה 1, האומרת שכל פתרון חלוקה <u>מינימלי</u> לצורה נתונה, נמצא על הרשת הפורשת
משמע נובע מהלמה שהחלוקה צריכה להיות ביחס לרשת הפורשת – שכל נק' ההתאמה שוכנות עליה.
ע"פ למה 2, האומרת שלכל פתרון חלוקה מינימלי לצורה נתונה, לכל קו בנוי יש קצה על הגבול המקורי – נובע ישירות מהגדרת קו בנוי.

החלוקה מתבצעת על ידי העקרונות של למה 3 ו 4.
הוכחה של למה 3:
במידה ונק' התאמה נמצאת באותו רביע של נק' מועמדת קמורה, ביחס למקור כלשהו של קודקודים נגדיים, זה מפר את האופטימליות של החלוקה מכיוון שהחלוקה לתת הצורה הבאה לא תהיה אופטימלית, כלומר תתווסף מחיצה לא אופטימלית על ידי החלוקה הנ"ל.
לפי למה 4, אם לנקודת ההתאמה אין היטל אופקי או אנכי על קו בנוי של נק' המועמדת, זה אומר שהנקודה המועמדת ונקודת ההתאמה יוצרות קצה אלכסוני במלבן המתקבל . עם זאת, במחיצה אופטימלית, לקודקוד קעור אסור שיהיו לו קצוות אלכסוניים, מכיוון שהדבר יוביל לאורך קצה לא אופטימלי (ארוך יותר).

כאשר ננסה לחתוך צורה לתת צורה חלקית, נניח ונק' מועעמדת קמורה, אזי לפי ההגדרה נק' ההתאמה תהיה נגדית למועמדת במלבן חסום בצורה שמורכב משתי צלעות אנכיות שמהוות קווים בנויים.
אם נק' ההתאמה מקיימת את הנ"ל, נחתוך את הצורה הנוכחית לפי המלבן החסום שנוצר על ידי קו או שני קווים בנויים.
בסופו של דבר נשווה את החלוקה המינימלית ביחס לכל חלוקה ונחזיר את החלוקה המינימלית

<u>סיכום ועבודה עתידיים</u>

המשך המאמר נותן פתרון פולינומי עבור צורות ללא חורים. בהמשך המאמר (לא רלוונטי לפרויקט) מוכח שכאשר הפוליגון מכיל חורים זאת בעיית NPC (הוכחה באמצעות רדוקציה) שהיא אכן מהווה שאלה פתוחה.
ישנם מס' שאלות עתידיות שמתייחסות למקרים פרטיים שבהם המצולע מכיל חור (מקרה שלא קיים עבורו אלג' פולינומי).
הערה שלי – האלג' לא רשום באופן מפורש במאמר וצריך לחדד את חלק מהשלבים שציינתי לעיל (כמו מציאת צורות חלקיות על-ידי קווים בנויים וכו').

דוגמאות הרצה:
דוגמאות ההרצה יכילו ענף או שתיים בעץ החיפוש. כלומר עבור נק' מעומדת כלשהי כל ענף יהיה נק' התאמה חוקית שונה.

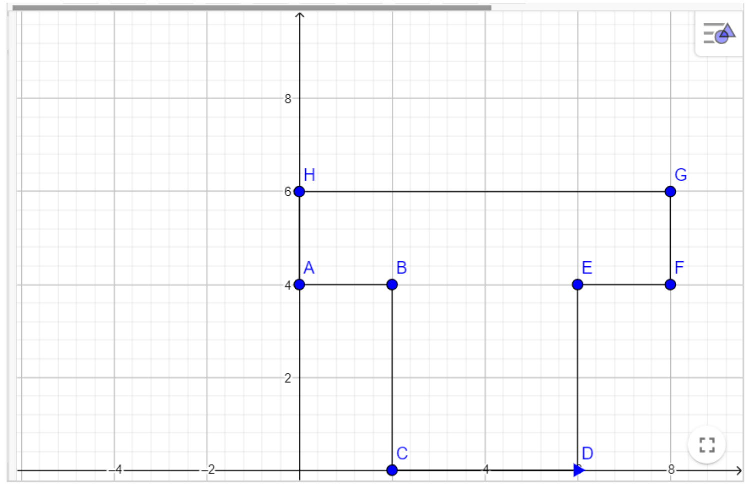
1.
קלט: מיוצג בתור רשימה של נק'

```
(0,3)-------------- ---(6,3)
  |                      |
  |                      |
  |                      |
  |                      |
  |                      |
  |                      |
(0,0)-------------------(6,0)
```

הנתון מהווה מלבן אז נחזיר רשימה ריקה של צלעות חלוקה (כי לא קיימות).

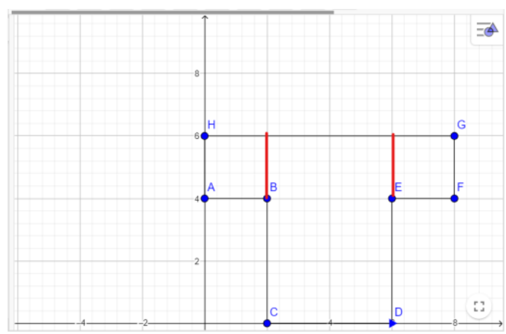
צורות מהמאמר:

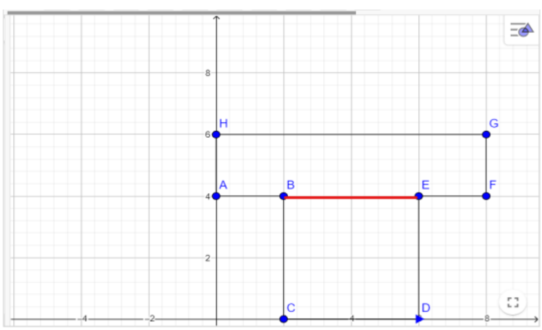
1.



ראשית אין קווים בנויים לכן נבחר פינה קמורה כלשהי (בה"כ D).

נחפש נק' התאמה חוקית ונקבל שתי חלוקות אפשריות:



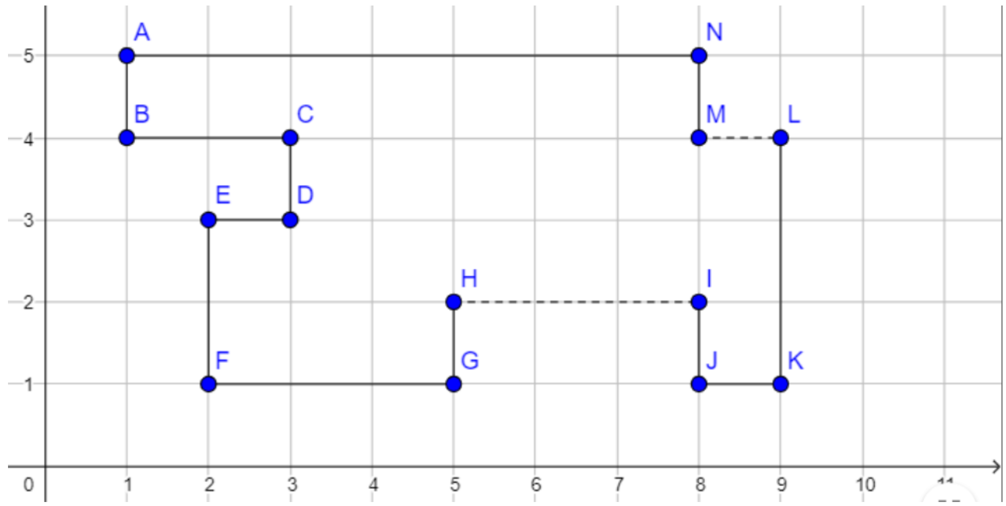


נוסיף את הצורות החלקיות עבור כל חלוקה ונחשב את האורך המינימלי של החלוקה.

שתי החלוקות נותנות חלוקה למלבנים לכן נעזור את החישוב ונשווה את אורך החלוקה המינימלית.

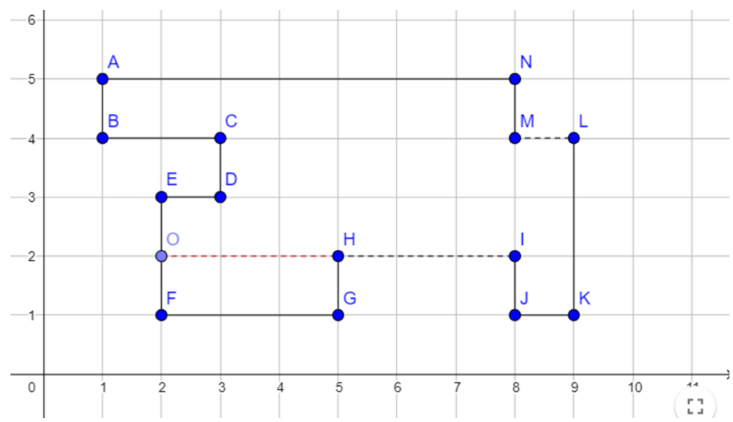
שתי החלוקות נותנות את אותו אורך מינימלי לכן נבחר באקראי באחת מהן.

2. נתונה הצורה החלקית הבאה עם קו בנוי אחד:

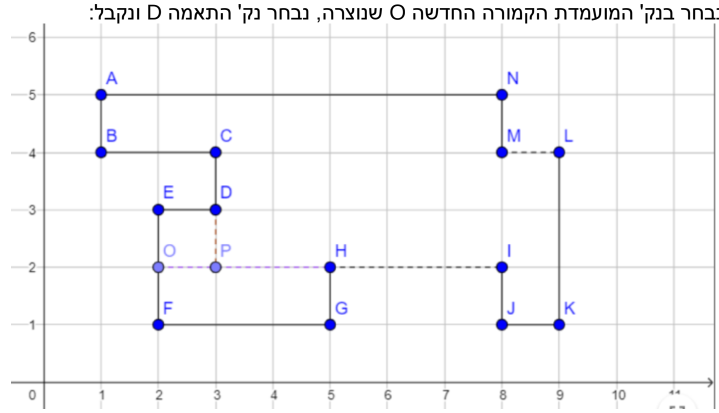


קו בין (H,I) ששתי הנק' מהוות נק' קמורות.
מכיוון שע"פ המאמר מניחים שבכל צורת ביניים יש שני קווים בנויים בנק' מועמדת, אזי גם (G,H) ו- (J,I) מהווים קווים בנויים בנק' H, I בהתאמה.

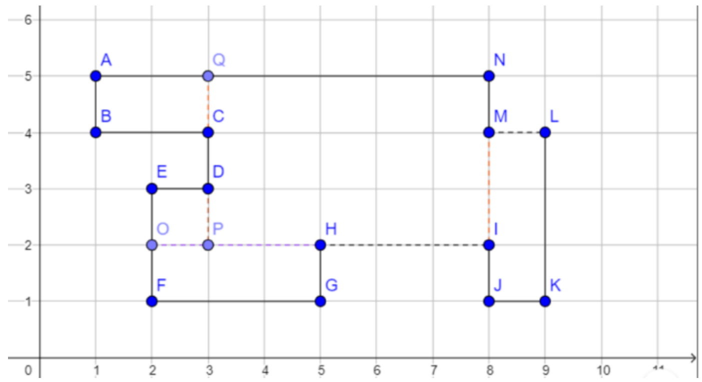
נבחר במסלול החישוב הבא:
ניקח את H בתור נק' מועמדת, נצטרך נק' התאמה שעושה היטל על הקו הבנוי – היחידה שמקיימת את זה היא F.
ניצור את המחיצה ונקבל:



נבחר בנק' המועמדת הקמורה החדשה O שנוצרה, נבחר נק' התאמה D ונקבל:

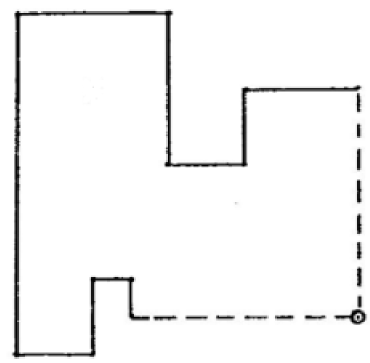


נק' מועמדת קמורה חדשה P, נבחר בנק' התאמה N ונקבל:

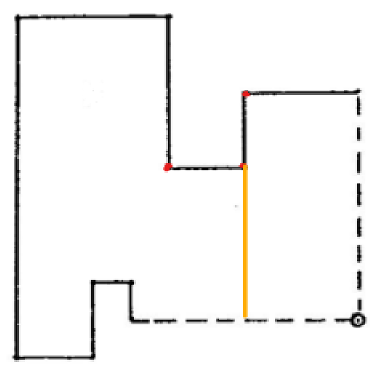


סה"כ חלוקה מינימלית

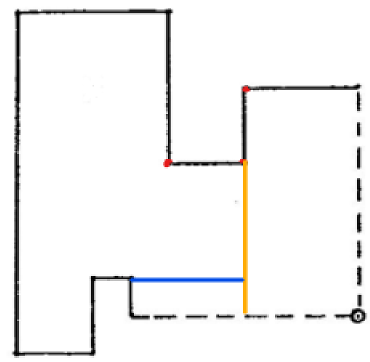
.3
צורה חלקית עם שני קווים בנויים בנק' מועמדת קמורה.



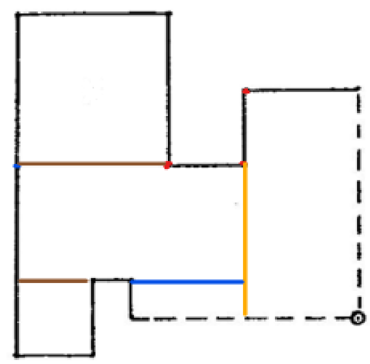
ישנן 4 נק' התאמה, נבחר אחת מהן ונקבל:



נמשיך לצורה החלקית משמאל, יש לה קו בנוי אחד, נבחר את נק' ההתאמה התחתונה. עבורה הנק' המועמדת יחידה ונקבל:

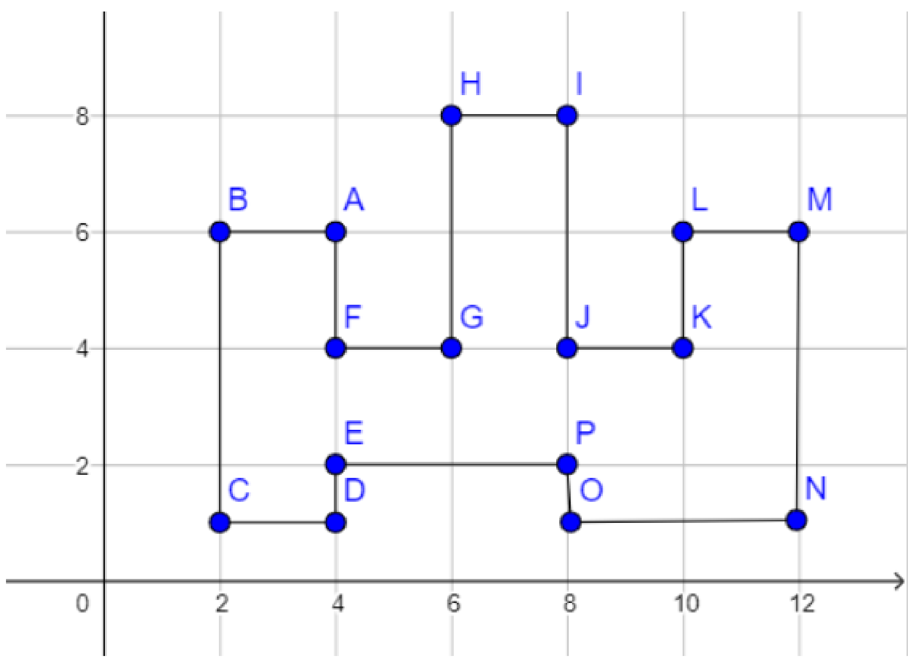


הצורה החלקית הבאה עם שני קווים בנויים, יש שתי נק' ההתאמה, נבחר אחת לדוגמה ונקבל:



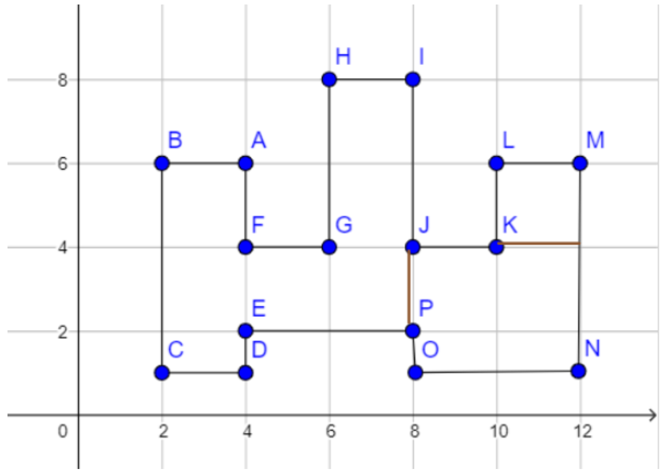
סה"כ חלוקה מינימלית

4. צורה שלמה התחלתית שמדגימה מעבר מלא על ענף כלשהו:

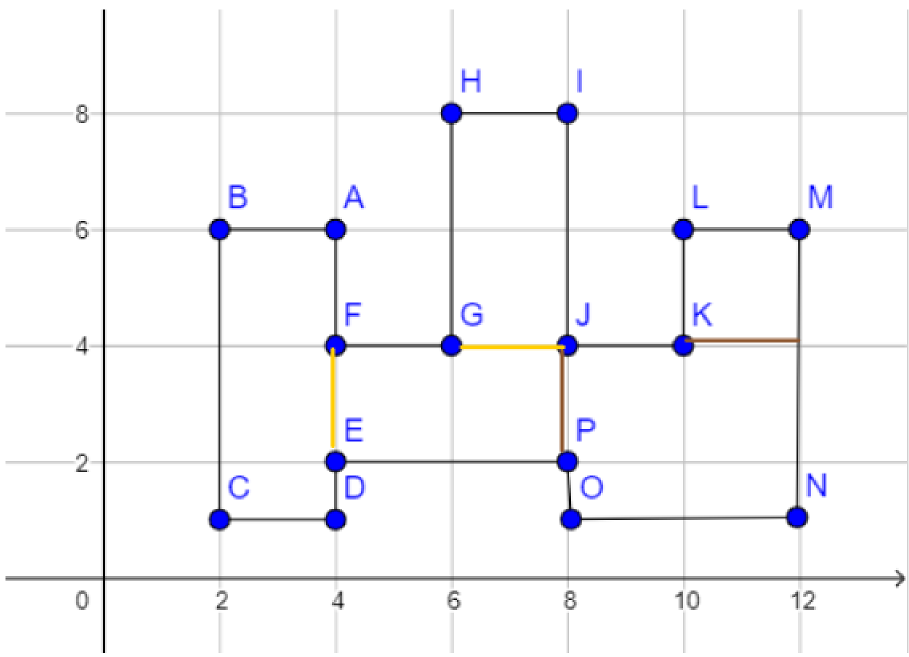


ראשית אין קווים בנויים לכן נבחר פינה קמורה כלשהי (בה"כ N).

נק' התאמה פוטנציאלית J, נחתוך ונקבל:



תת הצורה החלקית משמאל עם קו בנוי אחד, נק' ההתאמה F נקבל:



4. היסטוגרם:

אין קווים בנויים – נבחר נק' מועמדת קמורה (מסומנת באדום) נבחר נק' התאמה ונחתוך (קו בנוי בכחול).

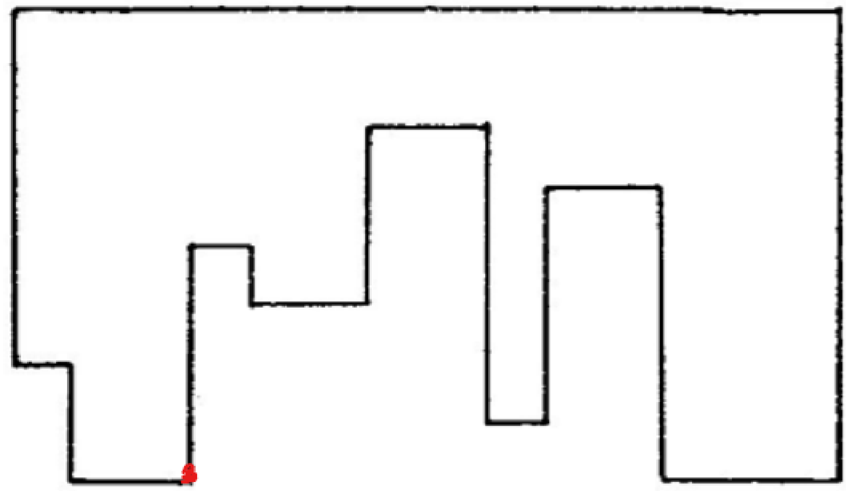


Figure 9. An upside-down histogram.

נמשיך לצורה החלקית הבאה: יש קו בנוי אחד לכם נק' מועמדת תהיה אחת מקצותיו, נבחר את הימנית ונבחר עבורה נק' התאמה ונחתוך לפי המלבן (קו צהוב).

צורה החלקית הבאה עם קו בנוי אחד – נבחר נק' מועמדת בתור אחת מקצותיו (בה"כ השמאלית שמהווה נק' קעורה) ועבורה נק' התאמה(שיש לה היטל על הנק'), נחתוך לפי המלבן (קו בנוי נוסף בכחול).

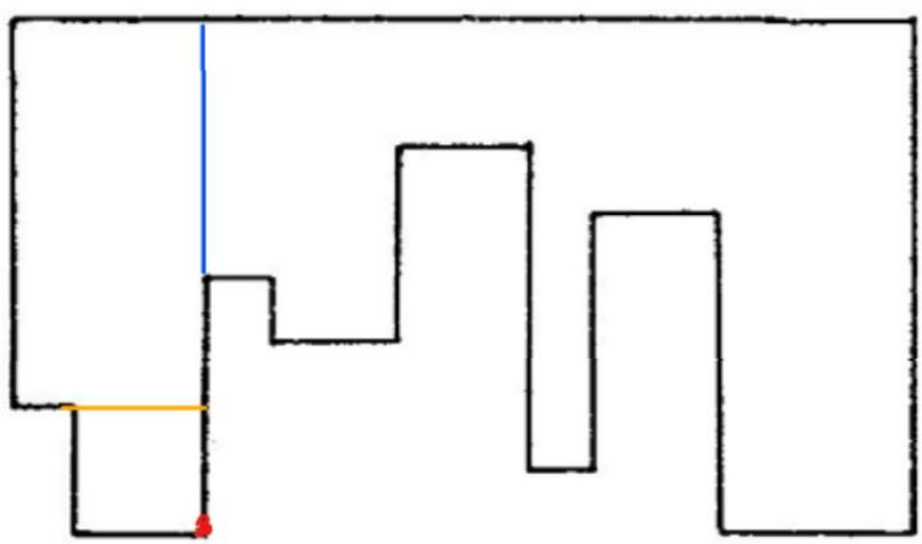


Figure 9. An upside-down histogram.

נמשיך באותו אופן ולבסוף נקבל:

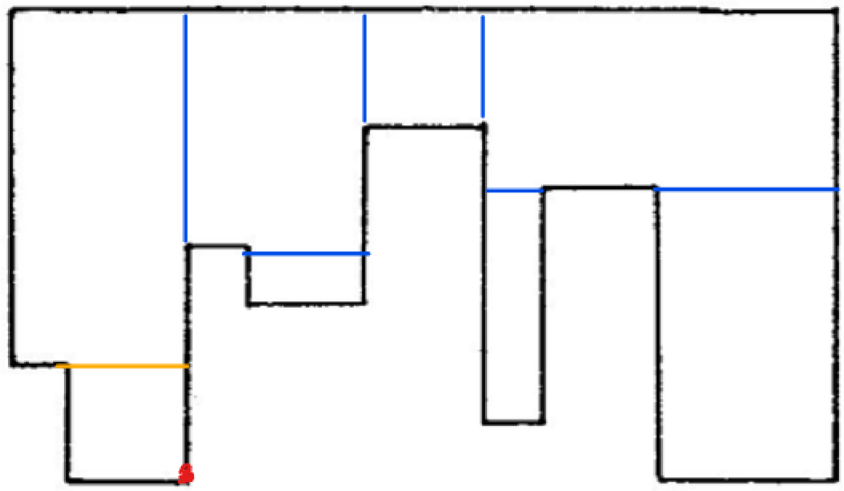


Figure 9. An upside-down histogram.