מאמר מחקרי סיכום ודוגמאות

מבוא

המאמר דן בבעיה בגיאומטריה חישובית הנקראת חלוקת אורך קצה מינימלית.
המטרה היא לחלק מצולע פשוט וישר למלבנים, תוך מזעור האורך הכולל של חלוקות חדשות (מינימום דיו כאשר נצייר את החלוקות החדשות על דף).

הבעיה חשובה ומעניינת כי היא רלוונטית במגוון תחומים כגון בקרת תהליכים ארכיטקטורה וכו'.

פתרונות קודמים התמקדו בצמצום מספר הרכיבים ולא השיגו חלוקה מינימלית באורך החלוקה.
בנוסף הפתרונות התמקדו במקרים ספציפיים של בעיות. כגון פתרון שעובד רק עבור צורות ללא חורים (כלומר צורות שלמות ללא חללים פנימיים, או פתרון שעובד רק עבור צורות עם חורים מנוונים.
המאמר נותן אלג' פולינומי עבור מצולע פשוט וישר ללא חורים, ומוכיח שמצולע חורים זה בעיית NPC.
אני אתמקד באלגוריתם שמתייחס לחלוקה מינימלית של מצולע ישר פשוט ללא חורים (פרקים 1-3).

עבודות קודמות

המאמרים שמצוינים במאמר לא נמצאים ברשת (לא מצאתי), אבל במאמר נאמר שההבדל המרכזי הוא התייחסות למצולעים ישרים כללים בלבד שיכולים להיות עם "איים" פנימיים תוך התייחסות לקריטריון המינימליות שציינתי לעיל.

הגדרות

גבול ישר: מצולע פשוט שבו כל צדדיו מקבילים או מאונכים זה לזה וכל זוויותיו הן 90 או 270.
מיוצג בתור רשימה של קודקודים במרחב דו מימדי.

חור ישר: מצולע ישר פשוט המוקף במלואו בגבול ישר, המייצג חור או אזור שלא נכלל מהגבול. חור הוא מנוון אם הוא מורכב מנקודה אחת.

מצולע ישר: קבוצה של גבולות ישר, שכל אחד מהם עשוי להכיל חורים שאינם חופפים. אסור לחורים להכיל חורים נוספים.

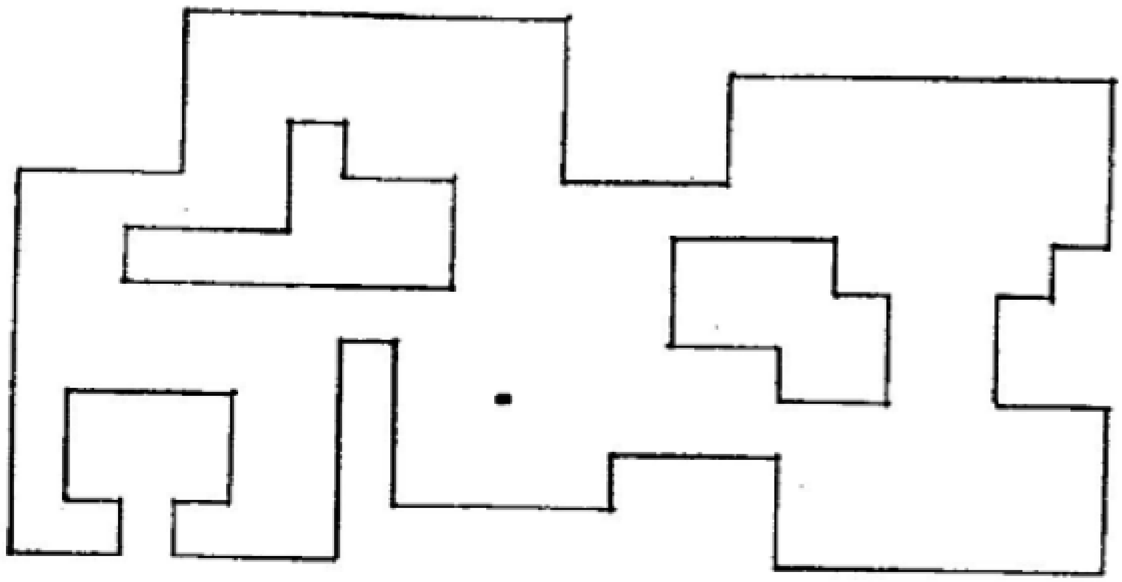


Figure 1. A rectilinear figure with three holes (one is degenerate).

בסרטוט לעיל ניתן לראות מצולע ישר (מורכב מסט של גבולות ישר) המכיל 2 חורים רגילים וחור אחד מנוון.

מחיצה מלבנית: קבוצה של קטעי קו השוכנים בתוך הגבול של המצולע, ואינם חוצים חורים כלשהם. הקבוצה יוצרת חלוקה למלבנים של המצולע, ואין "קצוות בודדים" משמע כל קו יוצר ניצב לגבול הקיים או לחור.

מחיצה: צלע פנימית המהווה מחיצה. היא לא חלק מהצורה המקורית אלא תיווסף כדי ליצור מחיצה. המטרה היא הוספת כל הצלעות הנ"ל על מנת לקבל חלוקה מינימלית (סכום כל המחיצות) שיוצרת מלבנים.

חלוקה מינימלית: חלוקה ישרה כך שסכום אורכי קטעי הקו שנוספו יהיה הקטן ביותר מבין כל החלוקות האפשריות, כדי למזער את ההיקף הכולל של המלבנים המתקבלים.

רשת פורשת: קבוצה של קווים אופקיים, אנכיים ונקודות החיתוך שלהם שעליהם שוכנים קטעי הגבול. כלומר, הרשת המושרה על ידי הגבול מתייחסת לרשת הבסיסית שנוצרה על ידי הקווים האופקיים והאנכיים המצטלבים בנקודות שבהן קודקודי הגבול שוכנים.

קו בנוי: קו הלוקח קטע קיים מהמחיצה ומרחיב אותו בצורה מקסימלית באותו כיוון אופקי או אנכי עד שהוא פוגע בגבול בשני הקצוות. זה מאפשר לכלול קצוות גבול קולינאריים עם קטע קו המחיצה לקו אחד "בנוי" מורחב. בניגוד לצלע שהגדרנו לעיל, צלע מהווה מחיצה בלבד ללא תנאי ההרחבה המקסימלית שיש לקו בנוי. חלק מהקו הבנוי יכול לחפוף לקטע מהמחיצה המלבנית המקורית של המצולע. הקו הנ"ל ישמש אותנו לחלק את הצורה לתתי צורות וכך לעבוד בצורה רקורסיבית על תתי הצורות עד שלא ניתן לחלק יותר.

עוגן: קצה של קו בנוי שנמצא על המחיצה (לפי למה 2 במאמר, לכל קו בנוי יש לפחות עוגן אחד). הוא יכול להיות פינה או נקודה האנכית לצלע.

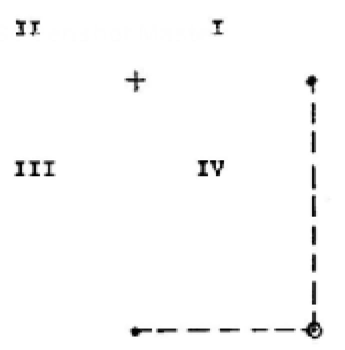
מצולע ביניים: חלק מהמצולע המקורי שמהווה גבול ישר ללא חורים. הוא מורכב מחלק רציף מהגבול המקורי ולכל היותר שני קווים בנויים (הרחבות של קצוות מחיצות לגבול).
במאמר מציינים שמספיק להראות שהאלגוריתם המוצע עובד על צורות ביניים וזה משליך על כל המצולע הכולל.

<u>הגדרות הקשורות לחלוקה של צורות ביניים</u>

נקודת מועמדת: מיקום פוטנציאלי לקודקוד המחיצה הבא שמוגדרת ביחס לכמות הקווים הבנויים שעוברים דרכה.
היא יכולה להיות קמורה או קעורה ביחס לצורת הביניים.
אם אין קו העובר דרכה - ניתן לבחור כל פינה קמורה בצורת הביניים.
אם קו אחד - אחד מקודקודי הקו הבנוי יבחר.
אם שני קווים - נבחר את נק' החיתוך שלהם המוגדרת כקצה המשותף של שני קווים בנויים (הם סמוכים).

נקודת התאמה: נקודה על הרשת הפורשת כך שקיימת חלוקה חוקית (הוספת מחיצות לאו דווקא אופטימליות באורכן שיוצרות מלבן, שאותו נחלק לרבעים) שבה נקודת המועמדת ונקודת ההתאמה אלכסוניות זה לזה. כלומר מהוות קודקודים נגדיים.
מטרת מציאת נקודת התאמה חוקית היא לקבוע את הקודקוד הבא למחיצה, תוך שמירה על חלוקה מינימלית.
נקודת ההתאמה תלויה בנקודה מועמדת אחרת.

הנקודה הנ"ל היא נקודה ביחס לנקודה מועמדת שכבר נוספה לחלוקה בצורת הביניים, משמע מהווה נקודה פוטנציאלית
מקור של קודקודים נגדיים: בהינתן שני קווים בנויים היוצרים נק' מועמדת נגדיר את הקודקוד הנגדי שנוצר על ידי השלמת שאר הצלעות (הוספת שתי צלעות) בתור מקור של קודקודים נגדיים
נחלק את השטח מסביב למקור הנגדי לרבעים.



The four quadrants around the kitty-corner origin (+).

בסרטוט לעיל ניתן לראות שני קווים בנויים שיוצרים נקודה מועמדת,
ואם נמתח ממנה אלכסון נגיע ל + המהווה מקור של קודקודים נגדיים.

נקודה מועמדת קמורה: נק' מועמדת (הגדרנו לעיל) שלא ניתן למתוח ממנה הצלע חיצונית לאף קודקוד מהצורה החלקית מבלי לחצות את אחת הצלעות.

נקודה מועמדת קעורה: נק' מועמדת שניתן למתוח ממנה צלע חיצונית לאחד הקודקודים בצורה החלקית.

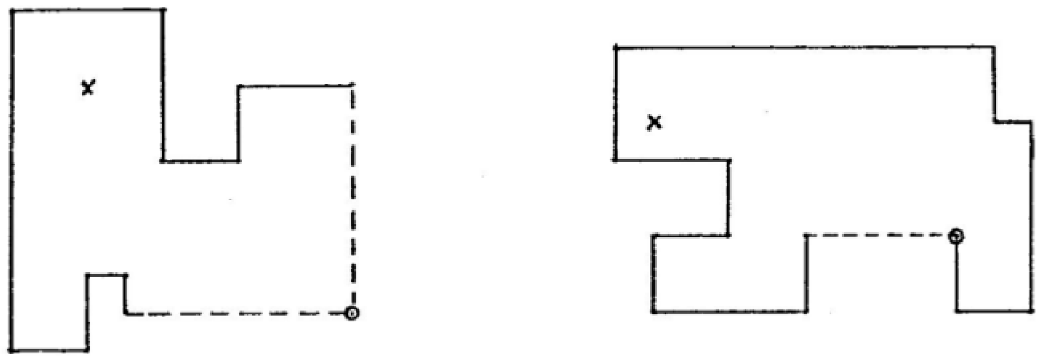


Figure 5. Forbidden matching points. ⊙ = candidate point
X = matching point

הנקודה הימנית לעיל מהווה נקודה קעורה ומשמאל נקודה קמורה (ביחס לצורה החלקית).
בנוסף, ניתן לראות שנקודות ההתאמה לעיל לא חוקיות ביחס לנקודות המועמדות כי לא ניתן ליצור חלוקה (לאו דווקא אופטימלית) כך שהנקודות נגדיות אחת לשנייה.

היסטוגרם: מצולע ישר שהקואורדינטות ה-x או ה-y של הקודקודים שלה יוצרות רצף מונוטוני עולה. במילים אחרות, אם נסדר את קואורדינטות ה-x (או קואורדינטות ה-y) של הקודקודים לפי הסדר, הן גדלות או נשארות קבועות.
שמיים: הצלע הארוכה היותר בחלק העליון של ההיסטוגרף.
גגות: צלעות המקבילות לשמיים
לדוגמה:

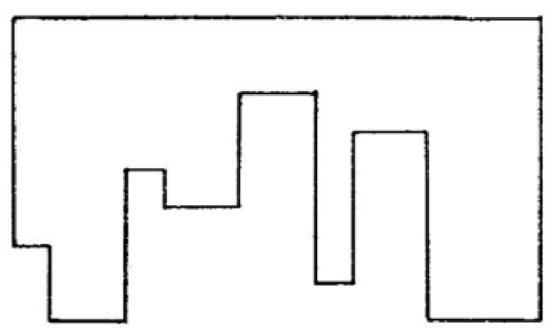


Figure 9. An upside-down histogram.

<u>אלגוריתם</u>

לפני שנציג את האלג' נציין את שתי הלמות שעליהן הוא מתבסס:
למה 3: אם נק' התאמה נמצאת באותו רביע של נק' מועמדת קמורה, ביחס למקור כלשהו של קודקודים נגדיים, הנקודה המועמדת לא רלוונטית.
למה 4: אם הנק' המועמדת קעורה, נק' ההתאמה צריכה ליצור היטל אופקי או אנכי על גבי אחד מהקווים הבנויים.
חשוב - במאמר מצוין שזה מספיק להסתכל על חלק מהצורה המקורית, חלק שמכיל לכל היותר 2 קווים בנויים שנחתכים בנק'.

האלגוריתם הבא לא כתוב באופן מפורש במאמר אלא ניסוח שלי בהסתמך על הלמות ועל ההגדרות שציינתי לעיל.

קלט: מצולע ישר ללא חורים המיוצג כרשימה של קודקודים ממוינים עם או נגד כיוון השעון.
פלט: רשימה של מחיצות המייצגים את החלוקה המינימלית באורך המחיצות של מצולע הקלט למלבנים.
שלבים:
1. אתחול רשימה ריקה כדי לאחסן את המחיצה הסופית.
2. זהה את כל מצולעי הביניים (גבולות ללא חורים עם שני קווים בנויים לכל היותר) בתוך מצולע הקלט.
3. כל עוד נותרו מצולעי ביניים:
- בחר מצולע ביניים.
- בדוק אם יש לו קווים בנויים*
- אם למצולע אין קווים בנויים (כלומר, מלבן), הוסף את הקצוות שלה לרשימת המחיצות.
- אם למצולע יש קו בנוי אחד:
- הגדר את אחת מקצוות הקו להיות הנקודה המועמדת.
אם יש שני קווים בנויים:
- הנק' המועמדת תהיה הקצה המשותף לשני הקווים.
מצא נקודת התאמה חוקית על הרשת המושרה שיוצרת פינה מלבנית עם הנקודה המועמדת.
- לכל נק' התאמה אפשרית:
- אם הנק' המועמדת קמורה, בדוק אם למה 3 מתקיימת.
- אם הנק' המועמדת קעורה, בדוק אם למה 4 מתקיימת.
אם נמצאה נק' התאמה חוקית, השתמש בה ובנק' המועמדת כדי לפצל את צורת הביניים לצורות ביניים חדשות להמשך עיבוד.

*פונק' עזר לזיהוי מצולעי ביניים:
עבור על נק' הצורה שמסודרות לפי סדר, בדוק את הקמור של הצורה והוסף את כל הצלעות שלא מהוות חלק מהקמור של הצורה.
עבור צלע שנוספה לרשימה – בדוק האם ניתן להרחיב את הצלע באופן מקסימלי עד שנגיע לגבולות הגזרה של הצורה המקורית.
הוסף את הצלעו לרשימה שתהווה רשימה של קווים בנויים.

זמן ריצה:
עובד על צורות פשוטות שלא מכילות חורים בזמן של $O(n^4)$. כאשר n זה כמות צדדי המחיצה.
עבור גרף מסוג היסטוגרם נקבל $O(n^3)$.

<u>נכונות</u>

כדי להוכיח את נכונות האלגוריתם, עלינו להראות שהחלטות החלוקה שהתקבלו על ידי האלגוריתם מובילות לפתרון אופטימלי.

החלוקה מתבצעת על ידי העקרונות של למה 3 ו 4.
הוכחה של למה 3:

במידה ונק' התאמה נמצאת באותו רביע של נק' מועמדת קמורה, ביחס למקור כלשהו של קודקודים נגדיים, זה מפר את האופטימליות של החלוקה מכיוון שהחלוקה לתת הצורה הבאה לא תהיה אופטימלית, כלומר תתווסף מחיצה לא אופטימלית על ידי החלוקה הנ"ל.
לפי למה 4, אם לנקודת ההתאמה אין היטל אופקי או אנכי על קו בנוי, זה אומר שהנקודה המועמדת ונקודת ההתאמה יוצרות קצה אלכסוני במלבן המתקבל . עם זאת, במחיצה אופטימלית, לקודקוד קעור אסור שיהיו לו קצוות אלכסוניים, מכיוון שהדבר יוביל לאורך קצה לא אופטימלי (ארוך יותר).

<u>סיכום ועבודה עתידיים</u>

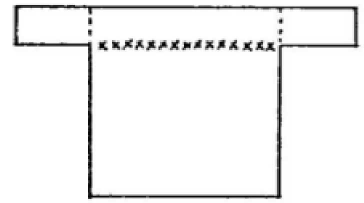
המשך המאמר נותן פתרון פולינומי עבור צורות ללא חורים. בהמשך המאמר (לא רלוונטי לפרויקט) מוכח שכאשר הפוליגון מכיל חורים זאת בעיית NPC (הוכחה באמצעות רדוקציה) שהיא אכן מהווה שאלה פתוחה.
ישנם מס' שאלות עתידיות שמתייחסות למקרים פרטיים שבהם המצולע מכיל חור (מקרה שלא קיים עבורו אלג' פולינומי).
הערה שלי – האלג' לא רשום באופן מפורש במאמר וצריך לחדד את חלק מהשלבים שציינתי לעיל (כמו מציאת צורות חלקיות על-ידי קווים בנויים וכו').

דוגמאות הרצה:

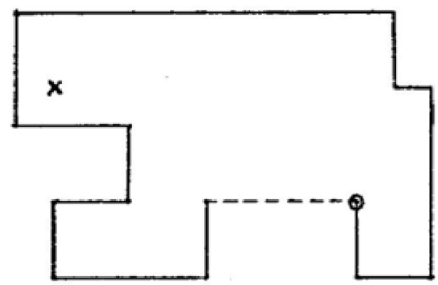
כאשר יש לנו צורה שמהווה מלבן, האלג' יחזיר את אותה צורה מכיוון שלא ניתן לפרק אותה לתתי צורות או להוסיף קווים בנויים.

```
(0,3)---(2,3)---(4,3)---(6,3)
  |                       |
  |                       |
  |                       |
  |                       |
  |                       |
  |                       |
 (0,0)-------------------(6,0)
```

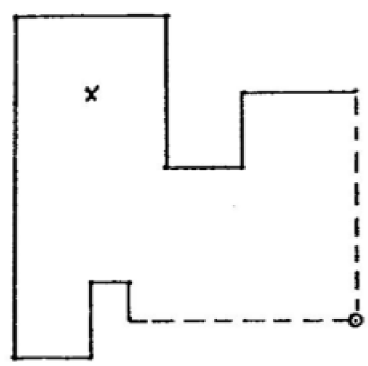
דוגמאות מהמאמר:



בהינתן הצורה לעיל, האלג' יוסיף לרשימה שלשה קווים בנויים. ניתן לראות שהקודקוד הקמור שמהווה נק' המועמדת לא מקיים את למה 4 עבור הקו הבנוי שמסומן בעזרת איקסים, לכן הקו הבנוי לא רלוונטי ונסיר אותו מהרשימה. עבור שני הקווים הקצרים הנוספים, נוסיף את שאר הצורות החלקיות שהם יוצרים (סה"כ 3) ובקריאה הרקורסיבית הבאה לא יהיה עוד תתי צורות חלקיות לכן נחזיר את שני הקווים בתור המחיצות.
הדוג' באה להדגים קו בנוי שלא מקיים את למה 4 מבחינת היטל.



הצורה לעיל מהווה צורה חלקית לצורה אחרת שלא מופיעה במאמר.
היא מכילה קו בנוי אחד, הנק' המועמדת (קעורה) מסומנת בעיגול ונק' ההתאמה הפוטנציאלית מסומנת באיקס.
נק' ההתאמה לא רלוונטית כי היא לא יוצרת מלבן חסום בתוך הצורה החלקית שבו שתי הנק' מהוות נק' נגדיות.
לכן האלג' ימשיך לבדוק נק' התאמה אחרת על הרשת המושרית.



צורה חלקית עם נק' מועמדת (קמורה המסומנת בעיגול) עם שני קווים בנויים שמצטלבים דרכה.
נק' ההתאמה המסומנת באיקס לא רלוונטית מאותה סיבה שהזכרנו בדוגמה לעיל.
האלג' יחפש נק' התאמה אחרת