בס"ד שם:______________________ ת"ז:___________________________

בוחן 1 לדוגמא – לוסטיג

חלק א – כתבי לכל טענה נכון/לא נכון והוכיחי

לכל שתי שפות רגולריות L_1 ו-L_2, $\overline{L_1} \cdot \overline{L_2} \neq \overline{L_1 \cdot L_2}$.

קיים ביטוי רגולרי r, **שלא מופיע בו הסימן ε**, כך ש- $L[r] = \{\varepsilon\}$.

חלק ב - כתבי לכל שפה האם היא רגולרית או לא רגולרית והוכיחי

6. $L_1 = \{uv \mid u, v \in \{a, b\}^+, \#_a(u) = \#_b(u)\}$

תזכורת: הסימון $\#_a(w)$ מייצג את מספר המופעים של האות a במילה w.

דוגמאות למילים בשפה: aba, bbaabab, aabbb.

דוגמאות למילים שאינן בשפה: ε, ab, bbba.

8. ✓ $L_3 = \{\sigma c^n \pi \mid$ אם $\sigma \neq \pi$ אז n זוגי $, \sigma, \pi \in \{a, b\},\ n \geq 0\}$

דוגמאות למילים בשפה: ab, accb, aca, bccb.

דוגמאות למילים שאינן בשפה: ε, a, c, bca, cb, ac, cab.

בס"ד   שם:________________   ת"ז:____________________

<u>חלק ג- שאלה פתוחה</u>

10. יהי A אוטומט סופי לא דטרמיניסטי (עם מעברי ε) **שיש לו מצב התחלתי יחיד** שאין קשתות שנכנסות אליו, ומצב מקבל יחיד שאין קשתות שיוצאות ממנו.

א. (6 נק') יהי A_1 האוטומט שמתקבל מ-A על-ידי הוספת מעבר ε מהמצב ההתחלתי של A לכל מצב שהוא בר-הגעה (נגיש) מהמצב ההתחלתי.
מהי השפה שמזהה A_1? הסבירו בקצרה.

ב. (6 נק') יהי A_2 האוטומט שמתקבל מ-A על-ידי הוספת מעבר ε אל המצב המקבל של A מכל מצב q שהמצב המקבל של A הוא בר הגעה (נגיש) ממנו.
מהי השפה שמזהה A_2? הסבירו בקצרה.

ג. (6 נק') יהי A_3 האוטומט שמתקבל מ-A על-ידי הוספת מעברי ε גם כמתואר בסעיף א' וגם כמתואר בסעיף ב'.
מהי השפה שמזהה A_3? <u>הוכיחו בצורה פורמלית</u>.

בהצלחה!!!

בוחן באוטומטים 1 – לוסטיג

חלק א' (30 נקודות, לכל טענה 15 נקודות)

עבור כל טענה משתי הטענות הבאות כתבי נכון/לא נכון **והוכיחי**.

טענה 1:

אם שתי השפות: L_1 ו- L_2 מקיימות את למת הניפוח לשפות רגולריות, אזי גם השפה $L_1 \cap L_2$ מקיימת את למת הניפוח לשפות רגולריות.

תשובה: לא נכון

הוכחה: דוגמא נגדית

תהי $L1=\{a^ib^jc^j|j>=2,i>=0\}$ U b*c* זוהי שפה לא רגולרית המקיימת את הלמה.

תהי L2=ab*c* זוהי שפה רגולרית ולכן מקיימת את הלמה

חיתוך שתי שפות אלו נותן את השפה $L=\{ab^jc^j|j>=0\}$ אשר אינה מקיימת את הלמה.

אם הטענה היתה עם איחוד – אז הטענה נכונה.

טענה 2:

יהי A אוטומט סופי אי-דטרמיניסטי **ללא** מסעי-ε בעל n מצבים, שבו לכל אות קלט יש **לכל היותר מעבר אחד** מכל מצב; אזי קיים אוטומט סופי **דטרמיניסטי** שקול B, שמספר מצביו קטן או שווה ל- $(n+1)$.

תשובה: נכון

הוכחה: נבנה אוטומט סופי דטרמניסטי B מהאוטומט האי דטרמניסטי A. נוסיף מצב תקיעה. מכל מצב שאינו מטפל בכל אותיות הקלט נעביר קשתות ממנו למצב התקיעה עם אותיות הקלט בהן אינו מטפל. נקבל אס"ד בגודל n+1. במידה ויש טיפול בכל אותיות הקלט מכל המצבים ב A,אז לא צריך להוסיף מצב תקיעה B=Aומספר המצבים כמובן שווה.

חלק ב' (30 נקודות, לכל שפה 15 נקודות)

עבור כל שפה משתי השפות הבאות סמני האם היא רגולרית/לא רגולרית **והוכיחי**.

<u>שפה 1</u>

$L_1 = \{a^k b^{l^2} \ | \ k,l \geq 1\}$

דוגמאות למילים בשפה: המילה הריקה, *aaabbbb*, *aaaaa*

דוגמאות למילים שאינן בשפה: *bbb*, *bab*, *abb*

תשובה: נחתוך שפה זו עם ab^* ונקבל את השפה

$L_1 = \{ab^{l^2} \ | \ l \geq 0\}$

ונוכיח עם למת הניפוח. המילה ab^{n^2} כאשר n הוא קבוע הלמה

שפות רגולריות סגורות לרוורס. ולכן נוכיח על שפת הרוורס.

הלמה החזקה – אפשר לעשות על כל n בסדרה. אז אפשר לקחת את ה n האחרונות.

<u>שפה 2:</u>

$L_2 = \{w_1 c w_2 c w_3 \ldots c w_n \ | n \geq 2, \quad \forall i \ (w_i \in \{a,b\}^*), \ \exists i \ (w_i \in \{a\}^*) \ \}$

דוגמאות למילים בשפה: *aca* , *aaacaca* ,*ccc*

דוגמאות למילים שאינן בשפה: *ab*, *bcab*, *abbcbbbcabbcba*

תשובה: השפה רגולרית

a*(c(a+b)*)(c(a+b)*)* + (a+b)*(c(a+b)*)*ca*(c(a+b)*)*

חלק ג' (40 נקודות, לכל שפה 10 נקודות)

תהי L שפה רגולרית. לגבי כל אחת משתי השפות הבאות, קבעו האם היא **בהכרח** רגולרית , **בהכרח** לא רגולרית, או שהיא **לא בהכרח** רגולרית, והוכיחו את תשובתכם.

$L_3 = \{ \ w \in \Sigma^* \ | \ vw \in L \ , \quad v \in \Sigma^* \}$

L_4 $\{w \in \Sigma^* | w = xzy$ כך ש $x, y \in \Sigma^*$ וקיימות $z \in L$ קיימת$\}$

$L_5 = \{w \in \Sigma^* | \sigma w \in L$: כך ש , $\sigma \in \Sigma$ קיימת$\}$

$L_6 = \{xzy | xy \in L$, $x, y \in \Sigma^*, |x| = |y|$, $z \in \Sigma$ קיימת$\}$

תשובה :

L_3 בהכרח רגולרית. ניתן לבנות אסל"ד עם מעברי אפסילון ממצב התחלה לכל מצב שהוא בר הגעה ממצב ההתחלה.

L_4 בהכרח רגולרית. נצמיד לביטוי הרגולרי שיש ל L את סיגמא כוכב בהתחלה ובסוף.

L_5 בהכרח רגולרית. נבנה אסל"ד על ידי הוספת מצב התחלתי חדש, וקשתות ממנו עם אפסילון לכל המצבים מהן יוצאת קשת ממצב התחלה מקורי

L_6 לא בהכרח רגולרית. עבור $L = \varnothing$ או $L=a(aa)^*$ היא רגולרית. עבור $(ab)^*$ רגולרית תיצור שפה לא רגולרית.

בוחן לדוגמא 2 באוטומטים

בבוחן 5 שאלות. עליך לענות על כולן. בהצלחה רבה!

<u>שאלה מספר 1</u>

עבור כל אחד מהמשפטים הבאים כתבי: נכון תמיד / לעולם לא נכון / יתכן שנכון ויתכן שלא נכון. הוכיחי את קביעתך.

א. נתון – שהשפה LL רגולרית ⇐ השפה L רגולרית.
ב. נתון אס"ד $A=(\Sigma,Q,q_0,F,\delta)$. יהי B אס"ד נוסף - $A=(\Sigma,Q,q_0,F-\{q_0\},\delta)$. אזי ב- L(A) אותו מספר מילים כמו L(B).

<u>שאלה מספר 2</u>

תהי השפה L שפת המילים מעל {a,b} המכילות לפחות פעם אחת a ולפחות פעם אחת b אך אינן מכילות את הרצף aab.

א. כיתבי ביטוי רגולרי לשפה.
ב. ציירי אסל"ד עבור השפה.

<u>שאלה מספר 3</u>

תהי L שפת המילים מעל {a,b} בהן מספר תתי-המילים ab שווה למספר תתי-המילים ba .

דוגמאות למילים בשפה: ε, a, b, abba, aba, abaaba

דוגמאות למילים שאינן שייכות לשפה: baaaba, ba, ab

הוכיחו או סתרו את הטענה הבאה : L אינה רגולרית, מכיוון שלצורך בדיקת תקינות המילים, האוטומט צריך לבצע ספירה לא חסומה.

<u>שאלה מספר 4</u>

תהי L שפה רגולרית, ויהי n הקבוע מהלמה.

ידוע כי אין בשפה מילים באורך m כך ש- n<=m<=2n.

כתבי כל מה שידוע לך אודות השפה L. הוכיחי את קביעתך.

<u>שאלה מספר 5</u>

תהי L שפה רגולרית. נגדיר את השפה M כך: $M=\{xy|x\in L \text{ and } y\notin L\}$.

האם השפה M רגולרית? הוכיחי את קביעתך!

בוחן בית 1 באוטומטים

תשובות

שאלה מספר 1

עבור כל אחד מהמשפטים הבאים כתבי: נכון תמיד / לעולם לא נכון / יתכן שנכון ויתכן שלא נכון. הוכיחי את קביעתך.

א. נתון – שהשפה LL רגולרית $\Leftarrow$ השפה L רגולרית.
ב. נתון אס"ד $A=(\Sigma,Q,q_0,F,\delta)$. יהי B אס"ד נוסף - $B=(\Sigma,Q,q_0,F\text{-}\{q_0\},\delta)$. אזי ב- L(A) אותו מספר מילים כמו L(B).

תשובה:

א. הקיפי את התשובה הנכונה: נכון תמיד / לעולם לא נכון / יתכן שנכון ויתכן שלא נכון
הוכחה: **כאשר $LL=(a+b)(a+b)(a+b)^*$ יכול לנבוע מ: $L=(a+b)(a+b)^*$ שהיא רגולרית.**

L תהיה מילים באורך שאינו חזקה של 2.
ברור שהשפה L אינה רגולרית, אבל LL זה כל המילים באורך של 7 ומעלה.
אם המילה היא באורך של 7 ומעלה ואורכה זוגי - אפשר לחלק לשני חלקים באורך אי זוגי כך שכל אחד מהם באורך גדול מ- 1, ולכן הוא שייך לשפה.
אם המילה באורך אי זוגי (שוב, גדול ממש מ- 7)- ניקח את 3 התוים הראשונים - ונשאיר את כל השאר.
אם השאר זו חזקה של 2 - נוסיף עוד שני תוים לשלושת הראשונים.
בגלל שמדובר רק על אורך גדול מ- 7 - מה שיקרה זה שהערך הראשון שיטופל זה מילה באורך מינימלי 9, מורידים ממנה 3 תוים - נשארה מילה באורך 6 - וזה לא חזקה של 2.
המילים הבאות יהיו באורך של 8 ומעלה (מה שנשאר אחרי הורדת ה- 3), ובמקרה זה - אם התקבלה חזקה של 2 ונוריד ממנה 2 תוים לא נקבל חזקה של 2 (צריך קפיצות גדולות יותר באורכים האלה).

ב. דוגמה נוספת: **$L=\{w|a\#(w)\neq b\#(w)\}$ לא רגולרית.** ו LL הנבנית ממנה היא השפה **$(a+b)(a+b)^*$ פחות $(ab)^*a$ ופחות $(ba)^*b$**

ג. הקיפי את התשובה הנכונה: נכון תמיד / לעולם לא נכון / יתכן שנכון ויתכן שלא נכון

הוכחה: **אם q0 היה מקבל, כעת הוא לא מקבל וכבר אפסילון לא בשפה, ואז המשפט לא נכון. ואם q0 לא היה מקבל אז המשפט נכון.**

שאלה מספר 2

תהי השפה L שפת המילים מעל {a,b} המכילות לפחות פעם אחת a ולפחות פעם אחת b אך אינן מכילות את הרצף aab.

א. כיתבי ביטוי רגולרי לשפה.
ב. ציירי אסל"ד עבור השפה.

תשובה:

ביטוי **$bb^*a(bb^*a)^*(b^*+a^*)+abb^*(abb^*)^*a^*$**

ציור:

אסל"ד עם 6 מצבים

שאלה מספר 3

תהי L שפת המילים מעל {a,b} בהן מספר תתי-המילים ab שווה למספר תתי-המילים ba .

דוגמאות למילים בשפה: ε, a, b, abba, aba, abaaba

דוגמאות למילים שאינן שייכות לשפה: baaaba, ba, ab

הוכיחו או סתרו את הטענה הבאה : L אינה רגולרית, מכיוון שלצורך בדיקת תקינות המילים, האוטומט צריך לבצע ספירה לא חסומה.

תשובה:

הקיפי את התשובה הנכונה: הטענה נכונה / לא נכונה

הוכחה: זו **שאלה משיעורי הבית, מראים אוטומט- שפה של מילים שמתחילות ומסתיימות באותה האות**

שאלה מספר 4

תהי L שפה רגולרית, ויהי n הקבוע מהלמה.

ידוע כי אין בשפה מילים באורך m כך ש- n<=m<=2n.

כתבי כל מה שידוע לך אודות השפה L. הוכיחי את קביעתך.

תשובה:

השפה סופית. נניח בשלילה שיש אינסוף מילים, וניקח מילה באורך גדול שווה מ2n. כיוון שאנו חייבים לעבור בלולאה (כי השפה רגולרית וקבוע הלמה הוא n) אז חייב להיות חלק של הניפוח, שאותו ניתן לכווץ (שאיבה), בניפוח/כיווץ ניתן להכניס עד מ תווים, ולכן נגיע למילה שהיא בין n ל 2n , אבל נתון שאין בשפה מילים באורך m כך ש- n<=m<=2n. סתירה. מכאן שהשפה סופית.

שאלה מספר 5

תהי L שפה רגולרית. נגדיר את השפה M כך: $M=\{xy|x\in L \text{ and } y\notin L\}$.

האם השפה M רגולרית? הוכיחי את קביעתך!

תשובה:

M רגולרית, שרשור השפה L עם המשלים שלה

שאלות חזרה 6 פתרונות

כתבי נכון או לא נכון והוכיחי

<u>טענה 1:</u>

תהי L שפה מעל א"ב ∑

השפה רגולרית אם ורק אם ניתן לבנות את L מתוך ∑ו Ø על ידי פעולות איחוד,שרשור,כוכבית וחיתוך

נכון-הוכחה באינדוקציה-כמו ההוכחה לבניית ביטוי רגולרי

<u>טענה 2:</u>

תהי L רגולרית ויהיו r1 וr2 ביטויים רגולריים, אז מתקיים:

$L=L[r1]$ אם ורק אם $L\neq L[r2]$

לא נכון דוגמא נגדית של 2 ביטויים רגולריים המייצגים את אותה השפה

<u>טענה 3:</u>

לא קיימת שפה L מעל א"ב $\sum=\{a,b\}$ כך ש $L^*=\{a^jb^j \mid j\geq 0\}$

נכון, כי לצורך קבלת רצף a ואחר כך רצף b ניקח שפה עם a ושפה עם b אבל האיטרציה תייצר את הרצפים ללא הגבלה על הכמות שתהיה זהה

<u>טענה 4:</u>

קיימת שפה L מעל א"ב $\sum=\{a,b\}$ כך ש $L^*=\{a^jb^j \mid 2\geq j\geq 0\} U \{b^ja^j \mid 2\geq j\geq 0\}$

לא נכון. כי מהאיטרציה נוצרות גם abb ו baa

<u>טענה 5:</u>

לכל שפה קיים אס"ד שבו לפחות מחצית מהמצבים אינם מקבלים

נכון, לא בעיה להוסיף מצבים לא מקבלים שאינם נגישים ממצב התחלה שהרי לא נתון אס"ד מינימאלי

<u>טענה 6:</u>

לכל שפה רגולרית L, יש אס"ד שמזהה את L , שאין בו קשתות עצמיות (קשת עצמית היא קשת הנכנסת למצב בו היא יוצאת)

נכון, כי ניתן להוסיף מצבים ולקבל מעגלים ארוכים יותר בלי לשנות את שפת האוטומט

<u>טענה 7:</u>

לכל שפה סופית רגולרית L, באס"ד המינימאלי המתאר אותה, ישנה קשת עצמית אחת לפחות

נכון, כי האס"ד המתאר אותה חייב לכלול מצב תקיעה עם קשת עצמית

טענה 8

קיימת שפה L מעל א"ב $\Sigma=\{a,b\}$ כך ש איטרציה של השפה שווה לשפה בה אין רצף של 3 aים ומעלה וגם לא רצף של 3 bים ומעלה

נכון. $L=(ab)^*+(ba)^*$

טענה 9:

כל L^* ניתן לבנות מתוך שפה רגולרית L כלשהי

לא נכון, לא ניתן לבנות את $L^*=\{a^jb^j \mid j\geq 0\}$ משפה רגולרית כלשהיא L

טענה 10:

לכל L רגולרית ניתן לבנות L^*

נכון.

טענה 11:

לכל שפה קיים אס"ד מינימאלי שבו לפחות מחצית מהמצבים אינם מקבלים

לא נכון. סיגמא כוכב, או קבוצה ריקה

טענה 12:

לכל שפה רגולרית L, באס"ד המינימאלי המתאר אותה, ישנה קשת עצמית אחת לפחות

לא נכון, דוגמא נגדית – שפה שמכילה מילים מעל א"ב a שבה אורך המילים זוגי

טענה 13:

לכל שפה רגולרית L, באס"ד המינימאלי המתאר אותה, חייבת להיות לולאה בדרך למצב מקבל

לא נכון. דוגמא קבוצה ריקה, או שפה סופית

טענה 14:

לכל שפה רגולרית L אינסופית , באס"ד המינימאלי המתאר אותה, חייבת להיות לולאה בדרך למצב מקבל

נכון, כיוון שיש אינסוף מילים בשפה , ומספר המצבים סופי, לכן חייבת להיות לולאה בדרך למצב מקבל

נתונות השפות הבאות. קבעי האם השפה רגולרית או לא. אם היא רגולרית הוכיחי.

שפה 1:

$L_1 = \{ xwx | x \in \{a,b\}^+, w \in \{a,b\}^* \}$

לא רגולרית

שפה 2:

$L_2 = \{ ww | w \in \{a,b,c\}^* \}$

לא רגולרית

שפה 3:

$L_3 = \{ a^i b^j | (i+j)mod3=2, I,j \geq 0 \}$

רגולרית: (bbb)*bb+(aaa)*aa+(aaa)*ab(bbb)* + (aaa)*aa(bbb)*

אפשר גם להוכיח רגולריות:

השפה היא חיתוך של 2 שפות רגולריות:

1. a*b*
2. {w| |w|mod 3 = 2} ביטוי רגולרי לשפה זו ((a+b)(a+b)(a+b))*((a+b)(a+b))

חיתוך שתי שפות רגולריות נותן שפה רגולרית.

שפה 4:

$L_4 = \{ ac^i b |$ זוגי i אז $a \neq b$ אם $a,b \in \{0,1\}, i \geq 0 \}$

רגולרית: a(cc)*b + b(cc)*a+ac*a+bc*b

שפה 5:

$L_5 = \{ xwx^R | x \in \{a,b\}^+, w \in \{a,b\}^* \}$

רגולרית: a(a+b)*a+b(a+b)*b

שאלות פתוחות:

כתבי ביטוי רגולרי לשפה.

בהינתן שפה L ובניה עליה הוכיחי רגולריות או אי רגולריות.

ציירי אוטומט אס"ד מינימאלי לשפה

סילוק מעברי אפסילון מאסל"ד

העברת אסל"ד לאס"ד

שאלות משיעורי הבית:

בחירת שאלה או רעיון הדומה לשאלות משיעורי הבית

שאלות חזרה 6 פתרונות

כתבי נכון או לא נכון והוכיחי

טענה 1:

תהי L שפה מעל א"ב ∑

השפה רגולרית אם ורק אם ניתן לבנות את L מתוך ∑ ו ∅ על ידי פעולות איחוד,שרשור,כוכבית וחיתוך

נכון-הוכחה באינדוקציה-כמו ההוכחה לבניית ביטוי רגולרי

טענה 2:

תהי L רגולרית ויהיו r1 וr2 ביטויים רגולריים, אז מתקיים:

L=L[r1] אם ורק אם L≠L[r2]

לא נכון דוגמא נגדית של 2 ביטויים רגולריים המייצגים את אותה השפה

טענה 3:

לא קיימת שפה L מעל א"ב ∑ ={a,b} כך ש $L^*=\{a^jb^j \mid j\geq 0\}$

נכון, כי לצורך קבלת רצף a ואחר כך רצף b ניקח שפה עם a ושפה עם b אבל האיטרציה תייצר את הרצפים ללא הגבלה על הכמות שתהיה זהה

טענה 4:

קיימת שפה L מעל א"ב ∑ ={a,b} כך ש $L^*=\{a^jb^j \mid 2\geq j\geq 0\} \cup \{b^ja^j \mid 2\geq j\geq 0\}$

לא נכון. כי מהאיטרציה נוצרות גם abb ו baa

טענה 5:

לכל שפה קיים אס"ד שבו לפחות מחצית מהמצבים אינם מקבלים

נכון, לא בעיה להוסיף מצבים לא מקבלים שאינם נגישים ממצב התחלה שהרי לא נתון אס"ד מינימאלי

טענה 6:

לכל שפה רגולרית L, יש אס"ד שמזהה את L , שאין בו קשתות עצמיות (קשת עצמית היא קשת הנכנסת למצב בו היא יוצאת)

נכון, כי ניתן להוסיף מצבים ולקבל מעגלים ארוכים יותר בלי לשנות את שפת האוטומט

טענה 7:

לכל שפה סופית רגולרית L, באס"ד המינימאלי המתאר אותה, ישנה קשת עצמית אחת לפחות

נכון, כי האס"ד המתאר אותה חייב לכלול מצב תקיעה עם קשת עצמית

טענה 8

קיימת שפה L מעל א"ב $\sum=\{a,b\}$ כך ש איטרציה של השפה שווה לשפה בה אין רצף של 3 aים ומעלה וגם לא רצף של 3 bים ומעלה

נכון. $L=(ab)^*+(ba)^*$

טענה 9:

כל L^* ניתן לבנות מתוך שפה רגולרית L כלשהי

לא נכון, לא ניתן לבנות את $L^*=\{a^jb^j \mid j\geq 0\}$ משפה רגולרית כלשהיא L

טענה 10:

לכל L רגולרית ניתן לבנות L^*

נכון.

טענה 11:

לכל שפה קיים אס"ד מינימאלי שבו לפחות מחצית מהמצבים אינם מקבלים

לא נכון. סיגמא כוכב, או קבוצה ריקה

טענה 12:

לכל שפה רגולרית L, באס"ד המינימאלי המתאר אותה, ישנה קשת עצמית אחת לפחות

לא נכון, דוגמא נגדית – שפה שמכילה מילים מעל א"ב a שבה אורך המילים זוגי

טענה 13:

לכל שפה רגולרית L, באס"ד המינימאלי המתאר אותה, חייבת להיות לולאה בדרך למצב מקבל

לא נכון. דוגמא קבוצה ריקה, או שפה סופית

טענה 14:

לכל שפה רגולרית L אינסופית , באס"ד המינימאלי המתאר אותה, חייבת להיות לולאה בדרך למצב מקבל

נכון, כיוון שיש אינסוף מילים בשפה , ומספר המצבים סופי, לכן חייבת להיות לולאה בדרך למצב מקבל

נתונות השפות הבאות. קבעי האם השפה רגולרית או לא. אם היא רגולרית הוכיחי.

שפה 1:

$L_1 = \{ xwx | x \in \{a,b\}^+, w \in \{a,b\}^* \}$

לא רגולרית

שפה 2:

$L_2 = \{ ww | w \in \{a ,b ,c\}^* \}$

לא רגולרית

שפה 3:

$L_3 = \{ a^i b^j | (i+j)\mathrm{mod}3=2, I,j \geq 0 \}$

רגולרית: (bbb)*bb+(aaa)*aa+(aaa)*ab(bbb)* + (aaa)*aa(bbb)*

אפשר גם להוכיח רגולריות:

השפה היא חיתוך של 2 שפות רגולריות:

1. a*b*
2. {w| |w|mod 3 = 2} ביטוי רגולרי לשפה זו ((a+b)(a+b)(a+b))*((a+b)(a+b))

חיתוך שתי שפות רגולריות נותן שפה רגולרית.

שפה 4:

$L_4 = \{ ac^i b |$ זוגי i אז $a \neq b$ אם $a,b \in \{0,1\} ,i \geq 0 \}$

רגולרית: a(cc)*b + b(cc)*a+ac*a+bc*b

שפה 5:

$L_5 = \{ xwx^R | x \in \{a,b\}^+, w \in \{a,b\}^* \}$

רגולרית: a(a+b)*a+b(a+b)*b

שאלות פתוחות:

כתבי ביטוי רגולרי לשפה.

בהינתן שפה L ובניה עליה הוכיחי רגולריות או אי רגולריות.

ציירי אוטומט אס"ד מינימאלי לשפה

סילוק מעברי אפסילון מאסל"ד

העברת אסל"ד לאס"ד

שאלות משיעורי הבית:

בחירת שאלה או רעיון הדומה לשאלות משיעורי הבית

בס"ד

שם: פרון דוגמה ת"ז: א' הדר סלפיג

בוחן 1 – לוסטיג

<u>חלק א – כתבי לכל טענה נכון/לא נכון והוכיחי –יש לענות על שלושת השאלות- כל טענה 10 נקודות</u>

לכל שתי שפות רגולריות L_1 ו-L_2, $\overline{L_1}\cdot\overline{L_2} \neq \overline{L_1\cdot L_2}$.

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

עבור $L_1=\Sigma^*$ ו- $L_2=\Sigma^*$

צד שמאל: $\overline{L_1}\cdot\overline{L_2} = \overline{\Sigma^*}\cdot\overline{\Sigma^*} = \phi\cdot\phi=\phi$

צד ימין: $\overline{L_1\cdot L_2} = \overline{\Sigma^*\cdot\Sigma^*} = \overline{\Sigma^*}=\phi$

הראנו שיוויון

(4) תהי L שפה לא-רגולרית כלשהי, אזי בכל מחלקת שקילות שלה יש יותר ממילה אחת.

לא נכון.

יכול להיות שיש לה מחלקת שקילות עם מילה אחת בלבד.

לדוגמה השפה הלא רגולרית $\{a^nb^n | n\geq 0\}$

יש לה מחלקת שקילות עם המילה a בלבד.

(יותר מכך כל מילה מהמחלקה האינסופית $\{a^i\}$ נמצאות במחלקות שקילות נפרדות)

(5) קיים ביטוי רגולרי r, **שלא מופיע בו הסימן ε**, כך ש- $L[r]=\{\varepsilon\}$.

נכון

$\phi^* = \varepsilon$

בס"ד

שם:__________________ ת"ז:____________________

חלק ב - כתבי לכל שפה האם היא רגולרית או לא רגולרית והוכיחי-יש לענות על שתי השפות- כל שפה 15 נקודות

6. $L_1 = \{uv \mid u, v \in \{a, b\}^+, \#_a(u) = \#_b(u)\}$

תזכורת: הסימון $\#_a(w)$ מייצג את מספר המופעים של האות a במילה w.

דוגמאות למילים בשפה: aba, bbaabab, aabbb.

דוגמאות למילים שאינן בשפה: ε, ab, bbba.

השפה לא רגולרית.

נניח שהשפה רגולרית, אז מס' מחלקות השקילות סופי.

נתבונן בקבוצה: $\{a^i \mid i \geq 1\}$

קיימים n ו-m שונים $a^n R a^m$

אבל עבור $z = b^n a$ נקבל $m < n$

$a^n b^n a \in L$

$a^m b^n a \notin L$

סתירה, יש אינסוף מחלקות שקילות

ולכן השפה לא רגולרית

8. ✓ $L_3 = \{\sigma c^n \pi \mid$ אם $\sigma \neq \pi$ אז n זוגי $, \sigma, \pi \in \{a, b\}, n \geq 0\}$

דוגמאות למילים בשפה: ab, accb, aca, bccb.

דוגמאות למילים שאינן בשפה: ε, a, c, bca, cb, ac, cab.

השפה רגולרית

ביטוי רגולרי:

$a(cc)^*b + b(cc)^*a + ac^*a + bc^*b$

בס"ד

שם:______________ ת"ז:______________________

חלק ג- שאלות פתוחות

ענו על אחת משתי השאלות הבאות- 40 נקודות (א.10 ב.10 ג.20)

9. תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a, b\}$ אשר האות השנייה שלהן זהה לאות האחרונה שלהן.

א. (6 נק') רשמו ביטוי רגולרי עבור השפה L.

ב. (6 נק') רשמו ביטוי רגולרי עבור השפה L^R (שפת ההיפוך של L).

ג. (6 נק') כמה מחלקות שקילות יש לשפה L^R? הוכיחו.

10. יהי A אוטומט סופי לא דטרמיניסטי (עם מעברי ε) שיש לו מצב התחלתי יחיד שאין קשתות שנכנסות אליו, ומצב מקבל יחיד שאין קשתות שיוצאות ממנו.

א. (6 נק') יהי A_1 האוטומט שמתקבל מ-A על-ידי הוספת מעבר ε מהמצב ההתחלתי של A לכל מצב שהוא בר-הגעה (נגיש) מהמצב ההתחלתי. מהי השפה שמזהה A_1? הסבירו בקצרה.

ב. (6 נק') יהי A_2 האוטומט שמתקבל מ-A על-ידי הוספת מעבר ε אל המצב המקבל של A מכל מצב q שהמצב המקבל של A הוא בר הגעה (נגיש) ממנו. מהי השפה שמזהה A_2? הסבירו בקצרה.

ג. (6 נק') יהי A_3 האוטומט שמתקבל מ-A על-ידי הוספת מעברי ε גם כמתואר בסעיף א' וגם כמתואר בסעיף ב'. מהי השפה שמזהה A_3? <u>הוכיחו בצורה פורמלית</u>.

10 א. A_1 מזהה את כל המילים שהן סיפות של מילים המתקבלות ע"י A.
$L(A_1) = \{v \mid uv \in L(A)\}$

ב. A_2 מזהה את כל המילים שהן רישות של מילים המתקבלות ע"י A
$L(A_2) = \{u \mid uv \in L(A)\}$

ג. A_3 מזהה את כל תתי המילים שניתן לגזור ממילים המתקבלות ע"י A
הוכחה פורמלית מצורפת בהמשך.
$L(A_3) = \{v \mid uvw \in L(A)\}$

המשך 10

הוכחה:

כיוון א:

לכל $v\in\Sigma^*$, אם $x=uvw\in L(A)$ אז $v\in L(A_3)$:

נסמן את המצב המקבל של A ב q_f

$x=uvw\in L(A)\Leftarrow$ קיימים $p,q\in Q$

כך ש:

$p\in\delta(q_0,u)\ ,\ q\in\delta(p,v)\ ,\ q_f\in\delta(q,w)$

(כלומר קיים מסלול מהמצב ההתחלתי אל המצב המקבל, כך שתת מילה u מביאה את A אל מצב p, ממנו מביאה v את A אל המצב q, ומשם מביאה w את A אל המצב המקבל)

כיון ש p נגיש מ q_0, הרי של A_3 קיים מעבר ε מ q_0 ל p.

בדומה כיון ש q_F נגיש מ q, הרי שקיים מעבר ε מ q ל q_f לסיכום:

$p\in\delta_3(q_0,\varepsilon)\ ,\ q\in\delta_3(p,v)\ ,\ q_f\in\delta_3(q,\varepsilon)$

כלומר $q_f\in\delta_3(q_0,v)$

ומכאן ש $v\in L(A_3)$ מש"ל.

כיוון ב:

ולכל $v\in L(A_3)$ קיימים $u,w\in\Sigma^*$ כך ש $uvw\in L(A)$

$\Downarrow$

קיימים $p,q\in Q$ כך ש

$p\in\delta_3(q_0,\varepsilon)\ ,\ q\in\delta_3(p,v)\ ,\ q_f\in\delta_3(q,\varepsilon)$

אם $p=q_0$, אזי שב-A הריקה קיימת סדרה לא ריקה של מעברי ε ריקה, נסמן $u\in\varepsilon$

אחרת הרי שהאוטומט עובר מ q_0 ל-p דרך מעבר ε שנוסף ב A_3 מ q_0 לכל מצב הנגיש ממנו ב-A. במקרה זה נסמן ב u את תת מילה כלשהי היכולה להעביר את A מ q_0 ל p.

בדומה, $w\in\varepsilon$ או w היא תת מילה היכולה להעביר את A מ-q ל q_f.

כעת ניתן לכתוב עבור האוטומט A:

$p\in\delta(q_0,u),\ q\in\delta(p,v),\ q_f\in\delta(q,w)$

כלומר. $q_f\in\delta(q_0,uvw)$

ומכאן ש $uvw\in L(A)$ מ.ש.ל.

מסקנה: $L(A_3)$ היא שפת כל תתי המילים של $L(A)$ מ.ש.ל.

פתרון 9

א. $L(L) = (a+b)a(a+b)^*a + (a+b)b(a+b)^*b + (a+b)(a+b)$

ב. $L(L^R) = a(a+b)^*a(a+b) + b(a+b)^*b(a+b) + (a+b)(a+b)$

ג. 11 מחלקות:

בשפה

$S_1 = b(a+b)^*bb + bb$

$S_2 = b(a+b)^*ba + ba$

$S_3 = a(a+b)^*aa + aa$

$S_4 = a(a+b)^*ab + ab$

לא בשפה

$S_5 = b(a+b)^*ab$

$S_6 = b(a+b)^*aa$

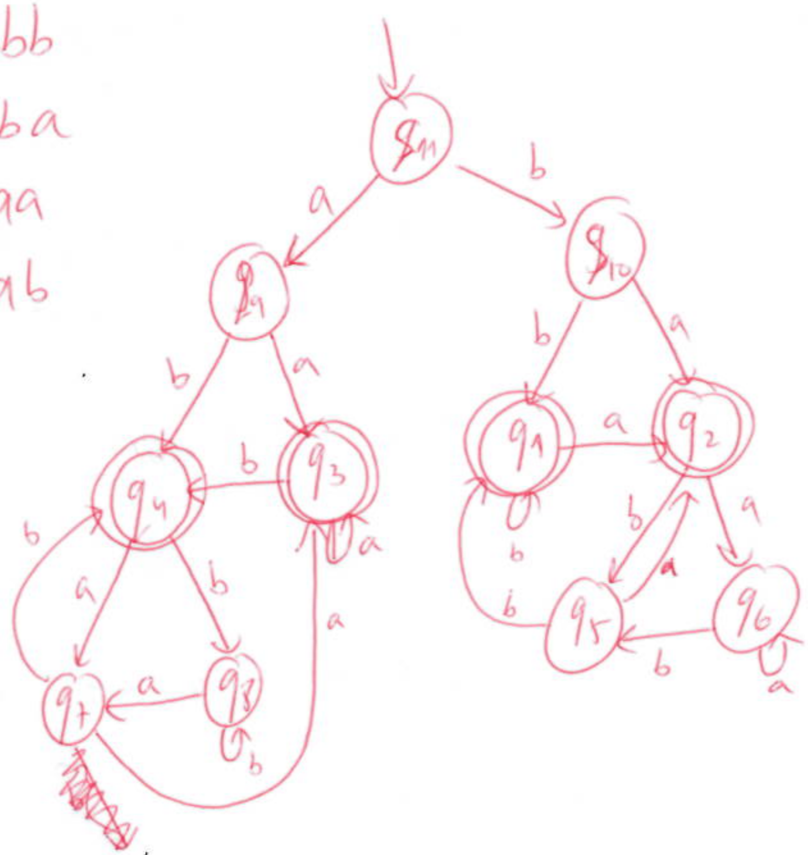
$S_7 = a(a+b)^*ba$

$S_8 = a(a+b)^*bb$

$S_9 = a$

$S_{10} = b$

$S_{11} = \varepsilon$



בהצלחה!!!

חן תאוי - שותפה

שאלות חזרה 9

לכל שפה כתבי האם היא רגולרית או לא, והוכיחי.

.7 $L_2 = \{a^p \mid$ ראשוני $p\}$ לא רגולרית

דוגמאות למילים בשפה: aa, a^3, a^5.

דוגמאות למילים שאינן בשפה: ε, a^4, a^6.

(6) $L_1 = \{uv \mid u, v \in \{a, b\}^+, \#_a(v) = \#_b(v)\}$ מתמטי כבר ע"י נרוג ← מאחורה ע"י למר ניכות. לא רגולרית

תזכורת: הסימון $\#_a(w)$ מייצג את מספר המופעים של האות a במילה w.

דוגמאות למילים בשפה: aba, $bbaabab$, $aaabb$.

דוגמאות למילים שאינן בשפה: ε, ab, $baaa$.

7.א. (7.) $L_2 = \{a^{n \cdot m} \mid$ n ו-m ראשוניים$\}$ $(\Sigma = \{a\})$ לא רגולרית

(לענייננו, המספר 1 ייחשב כראשוני)

1,11,13..

דוגמאות למילים בשפה: a^3, a^4, a^6, a^{21}, a^4, a^2

דוגמאות למילים שאינן בשפה: ε, a^8, a^{12}, a^{18}.

7.ב. (7) $L_2 = \{ a^m b^k c^s \mid m,k,s \geq 0 ,\quad$ אם $m \geq 2$ אז $k \geq s \}$ לא רגולרית

דוגמאות למילים בשפה: ε, aaabbc, bccc, aaa.

דוגמאות למילים שאינן בשפה: aabccc, aaac, cba.

(8) $L_3 = \{w \in \{0,1,2\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)+1$ and $|w|$ is even$\}$ זוגי לא רגולרית

תזכורות: הסימון $\#_0(w)$ מייצג את מספר המופעים של האות 0 במילה w;

even – זוגי.

דוגמאות למילים בשפה: 02, 220021, 01021010.

דוגמאות למילים שאינן בשפה: ε, 010, 22, 000001.

פיתרון

קס"ק

6. נניח שהשפה רגולרית אז יהי n קבוע הלמה

ניקח מילה z, $z=aa^nb^n$ $z\in L$, $|z|=2n+1\geq n$

מילה ולא קבוצה.

קיים פירוק: $z=uvw$

עבור.

$$z=\underbrace{aa^s\overbrace{a^t}^{v}}_{uv}\underbrace{a^{n-s-t}b^n}_{w}$$

$1+s+t\leq n$

$t\geq 1$

$uv^iw\in L$

ניקח $i=0$,

$$uv^iw=aa^s(a^t)^0a^{n-s-t}b^n$$

$$=aa^sa^{n-s-t}b^n$$

$=aa^{n-t}b^n \notin L$ סתירה ומכאן השפה לא רגולרית.

7.ב. נניח ש-L_2 רגולרית יהי n קבוע הלמה, תהי $z=aab^nc^n$, $z\in L$, $|z|=2n+2\geq n$

קיים פרוק:

$$uvw=\underbrace{aab^s\overbrace{b^t}^{v}}_{uv}b^{n-s-t}c^n$$

$2+s+t\leq n$

$t\geq 1$

לא נכון, קיים פרוק שננפח את a או נשאב את a ונישאר בשפה. ולכן לא הוכחנו.

$$uv^0w=aab^s(b^t)^0b^{n-s-t}c^n$$

$$=aab^{n-t}c^n\notin L$$

$n-t<n,\ t\geq 1 \Leftarrow$ סתירה, השפה לא רגולרית.

לכן, ניקח את L_2 ונחתוך עם רגולרי כלומר: $L_2 \cap$ רגולרי $=$ לא רגולרי

השפה $L_R=aab^*c^*$ רגולרית אז $=L_2\cap L_R$ $L_3=\{aab^kc^s \mid k\geq s\}$

נראה ש-L_3 היא לא רגולרית:

תהי $z=aab^nc^n$ $z\in L_3$, $|z|\geq n$

אם ה-v נמצא בחלק ה-a-ים אז לכל i $uv^iw\notin L_3$

אם ה-v נמצא בחלק ה-b-ים עבור $i=0$

$$uv^0w=aab^s(b^t)^0b^{n-s-t}c^n=aab^{n-t}c^n\notin L$$

נוסף

- פיתרון -

7. ק. נניח בשלילה ש- L רגולרית אז מס מחלקות שקילות סופי.

תהי: $\{aab^n \mid n\geq 1\}$ ← קבוצה אינסופית של מילים לא בשפה.

קיימים i ו- j $\quad aab^iRaab^j$

$j<i$

עבור $z=c^i$

$aab^ic^i \in L$

$aab^jc^i \notin L$

סתירה, השפה לא רגולרית.

8. תהי השפה L_3, יהי n קבוע הלמה. $\quad z=0^n1^{n-1}2$

$n\leq|z|$, $z\in L_3$ ניתן לפרק את z כך:

$$uvw=\underbrace{0^s0^t}_{uv}\underbrace{0^{n-s-t}1^{n-1}2}_{w}$$

עבור $i=2$ $\quad uv^iw=0^s(0^t)^2 0^{n-s-t}1^{n-1}2$

$$=0^s0^{2t}0^{n-s-t}1^{n-1}2$$

$$=0^{n+t}1^{n-1}2$$

$$n+t\neq n-1+1$$

עפ"י נרוד: $\quad \{0^{2n+1}2 \mid n\geq 1\}$

$0^{2i+1}2\,R\,0^{2j+1}2 \qquad i\neq j$

$z=1^{2i}$ $\quad 0^{2i+1}21^{2i} \in L$

$0^{2j+1}21^{2i} \notin L$

סתירה.

קס״פ

7.

$$L=\{a^p \mid p_{\text{ראשוני}}\}$$

למת הניפוח: יהי n קבוע הלמה. יהי m המספר הכי קרוב ל- n וגדול ממנו וראשוני.

$$z=a^m\in L \qquad |z|=m\geq n$$

$$uvw=a^s a^t a^{m-s-t} \qquad i=m+1$$

$$uv^{m+1}w=a^s(a^t)^{m+1}a^{m-s-t}$$

$$=a^{\cancel{s}+tm+\cancel{t}+m-\cancel{s}-\cancel{t}}$$

$$=a^{tm+m}=a^{m(t+1)}\notin L$$

הכפלה בין 2 מספרים אומרת ני שאפשר לחלק את זה ב- m או ב- $t+1$, וזה סותר הגדרה של ראשוני - שזה מס שמתחלק בעצמו וב-1. בלבד!!

7.ב.

$$L=\{a^{n\cdot m} \mid n,\ m-1 \text{ ראשוניים}\}$$

נניח ש- L רגולרית, יהי k קבוע הלמה.

ויהי x המספר הכי קרוב ל-k וגדול ממנו וראשוני.

$$z=a^{x^2} \quad z\in L \qquad |z|=|x^2|=2x\geq k$$

$$uvw=a^s a^t a^{x^2-s-t}$$

בעבור: $i=x^2+1$

$$uv^{x^2+1}w=a^s(a^t)^{x^2+1}a^{x^2-s-t}$$

$$=a^s a^{tx^2+t}a^{x^2-s-t}$$

$$=a^{s+tx^2+t+x^2-s-t}$$

$$=a^{x^2(t+1)}\notin L$$

שאלות חזרה 1 פתרונות

1. **לכל** שפה **לא-ריקה** L מעל אלפבית נתון Σ, $\overline{L} \cdot L \neq \varnothing$.

<u>לא נכון, אם L שווה לסיגמא כוכב זה לא יהיה נכון.</u>

1. לכל שתי שפות L_1 ו-L_2, $(L_1^R \cdot L_2^R)^R \neq L_1 \cdot L_2$.

<u>לא נכון. שתי השפות שוות קבוצה ריקה, אפסילון, תו בודד, ויש דוגמאות נוספות.</u>

3. יהיו A_1 ו-A_2 אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים, ויהי A אוטומט המכפלה שלהם; אזי מספר מסלולי החישוב של A על מילת קלט כלשהי, w, שווה למכפלת מספר המסלולים של A_1 ושל A_2 על w.

<u>נכון, מספר מסלולי החישוב הוא 1. כי מדובר באוטומט מכפלה שהוא אס"ד.</u>

1. אם $L = L \cdot L$ אזי $L^* = L \cdot L$.

<u>לא נכון, אם L קבוצה ריקה L איטרציה מכילה את אפסילון.</u>

1. קיימות שתי שפות L_1 ו-L_2, **השונות זו מזו ואינן ריקות**, המקיימות: $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$.

<u>נכון. לדוגמא: L1={a}, L2={aa} . עוד דוגמא שאחת מהן מכילה אפסילון. $L1=\{a^i | i>=1\}$ $L2=\{a^i | i>=0\}$</u>

2. **יהי A אוטומט סופי, ויהי q_0 מצבו ההתחלתי. אם q_0 אינו מקבל, אזי $\varepsilon \in L(A)$.**

<u>בגלל שהוא לא דטרמיניסטי זה לא נכון, יתכנו מעברי אפסילון.</u>

<u>בכיתה שינתי לאס"ד והוכחנו שכך כן נכון. כיוון שלכל מילה יש מסלול אחד – ותמיד אפסילון במצב ההתחלתי – אין לו עוד מסלולים וכו'....</u>

שאלות חזרה 2 –תשובות

אם L היא שפה **לא רגולרית אינסופית**, אז כל תת-שפה **אינסופית** של L **איננה רגולרית**.

תשובה- לא נכון.

לדוגמא – תהי $L=\{a^nb^m \mid n>m\}$. השפה לא רגולרית.

נסתכל על קבוצת המילים האינסופית הבאה: *a. זוהי קבוצה אינסופית השייכת לשפה, אך הקבוצה עצמה רגולרית. כמובן שיש קבוצות רבות כאלה (aa*, aaa*, aaa*b, וכו'...).

2. אם F היא שפה **סופית**, ו- $L \cup F$ היא שפה **רגולרית**, אזי גם L היא שפה רגולרית.

תשובה – נכון. Lאיחוד F פחות F תיתן את L. מסגירויות רגולריות , L רגולרית

3. ונניח ש-L_1 ו-L_2 שפות רגולריות, ויהיו A_1 ו-A_2 אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים **מינימליים** המקבלים את L_1 ואת L_2, בהתאמה. אם A הוא אוטומט המכפלה של A_1 ו-A_2 עבור השפה $L_1 \cap L_2$, אזי גם A מינימלי.

תשובה – כלל לא בטוח. לדוגמא – במקרה בו החיתוכים ריקים.

יחושב אוטומט שלם ללא מצבים מקבלים, כאשר בפועל על מנת לייצר אוטומט המזהה את השפה הריקה מספיק מצב אחד.

5. לכל שפה רגולרית L יש אוטומט סופי **דטרמיניסטי** A שמזהה את L ויש ב-A **לפחות שני מצבים <u>שאינם</u> מקבלים הנגישים** מן המצב ההתחלתי.

(האם התייחסתי לכך שזה מינימאלי או לא?)תשובה – לא נכון. דוגמא נגדית –אוטומט לסיגמא כוכב (המשפט נכון לכל שפה שהיא כוללת את כל הסיגמא כוכב ואין בה רק 2 מילים)

5. יהי A אוטומט סופי **לא-דטרמיניסטי** בעל מצבים מקבלים, כך שסגור-ε של כל מצב ב-A כולל את כל מצבי האוטומט, אזי מתקיים: $L(A) = \Sigma^*$.

לא נכון. המצב הבודד לא מגדיר.

באסל"ד לא מחייב שיהיה מסלול לכל מילה, ולכן גם אם כל המצבים מקבלים זה לא אומר שזו שפת סיגמא כוכב

שאלות חזרה 3 – פתרונות

3. יהי ND אוטומט סופי **לא-דטרמיניסטי** בעל n מצבים, אזי לכל אוטומט סופי **דטרמיניסטי** D השקול ל-ND, מספר מצבי D הוא לפחות $\log_2 n$.

לא נכון. ניתן לעשות אסל"ד עם המון מצבים לשפה Σ^* הדורשת מצב אחד בלבד.

3. L היא שפה רגולרית אם ורק אם קיים אוטומט **לא דטרמיניסטי** M, כך שלכל מילה $w \in L$ **יש** מסלול ב-M ממצב התחלתי אל מצב מקבל.

תשובה – לא נכון. צד אחד אם מימין לשמאל נכון. אבל הצד השני משמאל לימין (אם ורק אם) לא נכון. כי סיגמא כוכב תתאים לכל שפה L גם כזו שאיננה רגולרית. כלומר יכולות להיות עוד מילים שיתקבלו באוטומט הלא דטרמיניסטי

3. יהיו D אס"ד ו-ND אסל"ד. אם $L(D) = L(ND)$, אזי מספר מצבי D גדול או שווה למספר מצבי ND.

לא נכון. יתכן שיש לאסלד מעברי אפסילון רבים או מצבים שאינם נגישים, הרי לא נתון שמדובר באוטומטים מינימאליים. גם ההיפך לא נכון - יתכן שב- D יש המון מצבים לא נגישים ולכן יש לו יותר מצבים. (אם נתון שהם מינימאליים אז הטענה נכונה) אין הגדרה לאסל"ד מינאמאלי לכן לא ניתן לקבוע בודאות את היחס בין מספר המצבים באס"ד לעומת אסל"ד גם לאס"ד מיניאמלי

10. נשנה את ההגדרה של קבלת מילה באוטומט סופי לא דטרמיניסטי, ונגדיר שמילה מתקבלת אם ורק אם יש <u>לפחות שני</u> מסלולי חישוב (שונים) מקבלים. נקרא למודל כזה **אוטומט דו-קבלי.**

א. (8 נק') בנו אוטומט דו-קבלי המקבל את השפה:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{bbba מכילה את תת-המילה } w\}$$

ב. (10 נק') הראו שאם L רגולרית אז קיים אוטומט דו-קבלי המקבל את L.

תשובה –

א. שתי אפשרויות כלליות ליצירת האוטומט הנדרש, ישנן אפשרויות נוספות:
1. נשכפל את ציור האוטומט המזהה את השפה, ונשים אותם כאוטומט אחד יחד.
2. נצייר אסל"ד המזהה את השפה ובנוסף נוסיף ציור ל אס"ד המזהה את Σ^*. המילים היחידות להן יש שני מסלולים מקבלים הן המילים השייכות לשפה. לכל שאר המילים השייכות ל - Σ^* ישנו מסלול אחד המסתיים במצב מקבל.

ב. אם היא רגולרית – ניתן לצייר לה אוטומט. אם ניתן לצייר לה אוטומט ניתן באחת מהדרכים המוזכרות כאן לצייר לה אוטומט דו קבלי.

שאלות חזרה 4 – פתרונות

1. תהי L שפה מעל אלפבית Σ שמכיל את האות a. נגדיר את השפה L' הבאה:

$$L' = \{awa \mid w \in L\}$$

(מילות L' מתקבלות מן המילים של L על-ידי הוספת a אחד בתחילת כל מילה ו-a אחד בסופה).

למשל, אם $L = \{\varepsilon, abcba, bbb\}$, אז $L' = \{aa, aabcbaa, abbba\}$.

א. נתון ש-L היא שפה **רגולרית**. האם בהכרח L' היא שפה רגולרית? הוכיחו!

ב. נתון ש-L' היא **רגולרית**. האם מזה נובע שבהכרח L היא רגולרית? הוכיחו!

בס"ד

א. כן. השפה L רגולרית.

$\Leftarrow$ קיים אס"ד A המזהה את L כך: $A=\{\Sigma,Q,q_0,F,\delta\}$

נבנה אוטומט A' לזיהוי L' כך: $A'=\{\Sigma,Q',q_0',F',\delta'\}$

$Q'=Q\cup\{q_0',q_{end}\}$

המצב ההתחלתי - q_0' - שהוספנו.

$F'=\{q_{end}\}$

δ' יכיל את כל מעברי δ ובנוסף:

$\delta'(q_0',a)=q_0$

לכל $q_i\in F$ נוסיף: $\delta'(q_i,a)=q_{end}$

ב. כן. L' רגולרית. $\Leftarrow$ קיים אס"ל A' המזהה את L'. $A'=\{\Sigma,Q',q_0',F',\delta'\}$

נבנה אס"ל A לזיהוי L כך: $A=\{\Sigma,Q,q_0,F,\delta\}$

הוספנו מצב התחלתי + מקבל חדשים: $Q=Q'\cup\{q_0,q_{end}\}$

q_0 - המצב ההתחלתי החדש.

$F=\{q_{end}\}$

δ תכלול את כל δ' ובנוסף:

- לכל חץ שיוצא מ-q_0' עם a נוסיף מעבר מקביל מ-q_0 עם ε:

לכל $q_i'\in Q'$ כך ש: $\delta'(q_0',a)=q_i'$ נוסיף: $\delta(q_0,\varepsilon)=q_i$

- לכל חץ שנכנס למצב מקבל כלשהו עם a נוסיף שכפול ל-q_{end} עם ε:

לכל $q_i',q_j'\in Q'$ כך שקיים: $\delta'(q_i',a)=q_j'$ ובנוסף $q_j'\in F'$ נוסיף:

$\delta(q_i',\varepsilon)=q_{end}$

9. תהי L שפה מעל Σ, $\Sigma=\{a,b\}$.

א. נגדיר פעולה "שכפל-שפה", $\text{Dup}(L)$, באופן הבא:

$$\text{Dup}(L)=\{x\in\Sigma^{*}\ |\ \exists w\in L,\ x=ww\}$$

האם השפות הרגולריות סגורות לפעולת "שכפל-שפה"? הוכיחו.

ב. נגדיר פעולה "שַׁמֵר-אורך", $\text{PresLen}(L)$, באופן הבא:

$$\text{PresLen}(L)=\{x\in\Sigma^{*}\ |\ \exists w\in L,\ |w|=|x|\}$$

האם השפות הרגולריות סגורות לפעולת "שמר-אורך"? הוכיחו.

תשובה –

א. השפות הרגולריות לא סגורות לפעולה Dup(L) . ניקח כל שפה רגולרית שהיא.
ב. השפות הרגולריות סגורות לפעולה שמר אורך. הוכחה: ניקח אוטומט המזהה את L ונחליף את האותיות שיש על כל החיצים לכל האפשרויות של האותיות ב – Σ.

שאלות חזרה 5פתרונות

כתבי נכון או לא נכון והוכיחי

טענה 1:

תהי L שפה מעל א"ב ∑

השפה רגולרית אם ורק אם ניתן לבנות את L מתוך ∑ו Ø על ידי פעולות איחוד,שרשור,כוכבית וחיתוך

נכון-הוכחה באינדוקציה-כמו ההוכחה לבניית ביטוי רגולרי

טענה 2:

תהי L רגולרית ויהיו r1 וr2 ביטויים רגולריים, אז מתקיים:

$L=L[r1]$ אם ורק אם $L \neq L[r2]$

לא נכון דוגמא נגדית של 2 ביטויים רגולריים המייצגים את אותה השפה

טענה 3:

לא קיימת שפה L מעל א"ב $\sum=\{a,b\}$ כך ש $L^*=\{a^j b^j \mid j \geq 0\}$

נכון, כי לצורך קבלת רצף a ואחר כך רצף b ניקח שפה עם a ושפה עם b אבל האיטרציה תייצר את הרצפים ללא הגבלה על הכמות שתהיה זהה

טענה 4:

קיימת שפה L מעל א"ב $\sum=\{a,b\}$ כך ש $L^*=\{a^j b^j \mid 2 \geq j \geq 0\} U \ \{b^j a^j \mid 2 \geq j \geq 0\}$

לא נכון. השפה המדוברת כאן היא סופית. ומהאיטרציה נקבל שפה אינסופית (פרט לקבוצה ריקה או אפסילון)

טענה 5:

לכל שפה רגולרית קיים אס"ד שבו לפחות מחצית מהמצבים אינם מקבלים

נכון, לא בעיה להוסיף מצבים לא מקבלים שאינם נגישים ממצב התחלה שהרי לא נתון אס"ד מינימאלי

טענה 6:

לכל שפה רגולרית L, יש אס"ד שמזהה את L , שאין בו קשתות עצמיות (קשת עצמית היא קשת הנכנסת למצב בו היא יוצאת)

לכל שפה רגולרית יש אס"ד שאין בו קשתות עצמיות.

נכון, כי ניתן להוסיף מצבים ולקבל מעגלים ארוכים יותר בלי לשנות את שפת האוטומט

לא נכון.

טענה 7:

לכל שפה לא סופית רגולרית L, באס"ד המינימאלי המתאר אותה, ישנה קשת עצמית אחת לפחות

לא נכון. ניקח את שפת המילים באורך זוגי.

טענה 8

קיימת שפה L מעל א"ב $\Sigma = \{a,b\}$ כך ש איטרציה של השפה שווה לשפה סיגמא כוכב בה אין רצף של 3 aים ומעלה וגם לא רצף של 3 bים ומעלה

נכון. L=(ab)*+(ba)*

טענה 9:

כל שפה R ניתן לבנות מתוך שפה רגולרית L כלשהי כך ש L*=R

לא נכון, לא ניתן לבנות את $L^*=\{a^jb^j \mid j\geq 0\}$ משפה רגולרית כלשהיא L

טענה 10:

לכל L רגולרית ניתן לבנות L*

נכון.

טענה 11:

לכל שפה קיים אס"ד מינימאלי שבו לפחות מחצית מהמצבים אינם מקבלים

לא נכון. סיגמא כוכב, או קבוצה ריקה

טענה 12:

לכל שפה רגולרית L, באס"ד המינימאלי המתאר אותה, ישנה קשת עצמית אחת לפחות

לא נכון, דוגמא נגדית – שפה שמכילה מילים מעל א"ב a שבה אורך המילים זוגי

טענה 13:

לכל שפה רגולרית L, באס"ד המינימאלי המתאר אותה, חייבת להיות לולאה בדרך למצב מקבל

לא נכון. דוגמא קבוצה ריקה, או שפה סופית

טענה 14:

לכל שפה רגולרית L אינסופית , באס"ד המינימאלי המתאר אותה, חייבת להיות לולאה בדרך למצב מקבל

נכון, כיוון שיש אינסוף מילים בשפה , ומספר המצבים סופי, לכן חייבת להיות לולאה בדרך למצב מקבל

טענה 15:

קיימת שפה L מעל א"ב $\sum=\{a,b\}$ כך ש $LL=\{a^jb^j|2\geq j\geq 0\}U\ \{b^ja^j|2\geq j\geq 0\}$

לא נכון. כי מהאיטרציה נוצרות גם abb ו baa

טענה 16:

קיימת שפה L מעל א"ב $\sum=\{a,b\}$ כך ש $L1L2=\{a^jb^j|2\geq j\geq 0\}U\ \{b^ja^j|2\geq j\geq 0\}$

לא נכון. כי מהאיטרציה, תיווצר גם המילה baa

טענה 17:

לכל שפה סופית רגולרית L, באס"ד המינימאלי המתאר אותה, ישנה קשת עצמית אחת לפחות

נכון, כי האס"ד המתאר אותה חייב לכלול מצב תקיעה עם קשת עצמית

שפות:

שפה 1:

$L_1 = \{ xwx | x \in \{a,b\}^+, w \in \{a,b\}^* \}$

לא רגולרית

שפה 2:

$L_2 = \{ ww | w \in \{a ,b ,c\}^* \}$

לא רגולרית

שפה 3:

$L_3 = \{ a^i b^j | (i+j)mod3=2, I,j \geq 0 \}$

(aaa)*(bbb)*bb + (aaa)*a(bbb)*b + (aaa)*aa(bbb)*

שפה 4:

$L_4 = \{ ac^i b |$ זוגי i אז a≠b אם $a,b,c \in \{0,1\} ,i \geq 0 \}$

רגולרית: a(cc)*b + b(cc)*a + ac*a + bc*b

שפה 5:

$L_5 = \{ xwx^R | x \in \{a,b\}^+, w \in \{a,b\}^* \}$

רגולרית: a(a+b)*a+b(a+b)*b

שאלות חזרה 6 אוטומטים ושפות פורמאליות

חלק א : לגבי כל אחת הטענות כתבי נכון/לא נכון והוכיחי

טענה 1:

תהי L שפה רגולרית המכילה את ε, אז קיים אוטומט סופי אי-דטרמניסטי ללא מסעי-ε, A, שיש לו מצב מקבל יחיד, כך ש $L(A)=L$

לא נכון. דוגמא נגדית אסל"ד עבור L={a,epsilon}

טענה 2:

תהי R שפה סופית מעל $\Sigma=\{a,b\}$ ותהי L שפה אינסופית מעל $\Sigma=\{a,b\}$, אזי $\overline{R}\cup L$ בהכרח רגולרית

נכון. אם Rהיא שפה סופית ונניח ישנן Xמילים בR. אז המשלים של Rהוא סיגמא כוכב מינוס X. איחוד עם כל שפה (לא משנה אם היא רגולרית או לא רגולרית, סופית או לא סופית) או שנוסיף מילים אחרי האיחוד או שלא. את המילים שנוסיף נסמן ב y . מהאיחוד נקבל סיגמא כוכב פחות x ועוד y. שזה בסך הכל סיגמא כוכב פחות מספר סופי של מילים. וזו שפה רגולרית, מסגירות לחיסור.

חלק ב: לגבי כל אחת מהשפות הבאות כתבי האם השפה רגולרית או לא. רק אם היא רגולרית, הוכיחי.

שפה 1:

$$L_1=\{xyz\mid \Sigma=\{a,b\},x,y,z\in\Sigma^*,|x|>|y|>|z|\}$$

שפה רגולרית - מדובר בשפה שבה המילים באורך 3 ומעלה. נבנה אס"ד

שפה 2:

$$L_2=\{wuv\mid w,v\in\{a,b\}^*,u\in(a,b),|wuv|\equiv 1(\bmod 2)\}$$

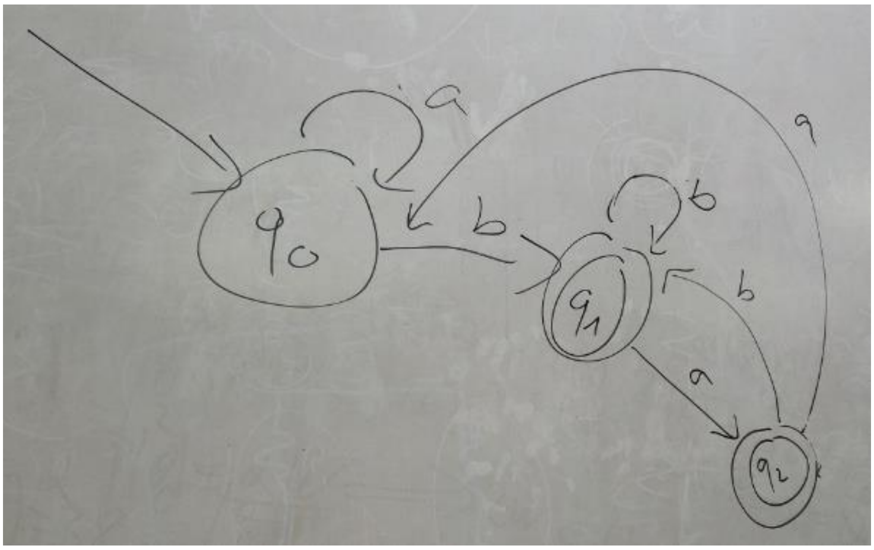
שפה רגולרית. ביטוי רגולרי ((a+b)(a+b))*(a+b)

חלק ג: שאלה פתוחה:

תהי L שפה המיוצגת על ידי הביטוי הרגולרי הבא:

$$(a+b)^*b(a+b+\varepsilon)$$

א. יש לצייר אוטומט סופי דטרמניסטי מינימאלי המזהה את L



ב. יש לכתוב ביטוי רגולרי לכל אחת משפת המצבים של האוטומט מסעיף א'

L(q0) = a*+(a+b)*aa

L(q1) =(a+b)*b

L(q2) = (a+b)*ba

ג. כתבי מהו האורך של המילה הקצרה ביותר ב $L(A)$ ומהי המילה הארוכה ביותר השייכת ל $L(A)$, מבלי לעבור באף לולאה באוטומט.

המילה הכי קצרה היא b באורך 1. המילה הארוכה ביותר ללא מעבר בלולאה היא באורך 2. ba

ד. נסחי כלל לגבי האורכים האפשריים למילים השייכות לשפה לכל שפה רגולרית , כאשר אין אפשרות לעבור בלולאה כלל.

האורכים האפשריים הם החל מאורך 0 עד מספר המצבים פחות 1.