בדד

בכל דרכיך דעהו

כתב־עת לענייני תורה ומדע

36

אדר ב׳ תשפ״ב

הוצאת אוניברסיטת בר־אילן

בדד

בכל דרכיך דעהו

כתב־עת לענייני תורה ומדע

חוב׳ 36 אדר ב תשפ״ב

עורך

עלי מרצבך

הוצאת אוניברסיטת בר־אילן, רמת גן

ISSN 0793-3894

נדפס בישראל תשפ"ב

תוכן העניינים

9 **יצחק שפירא ומאיר סנדיק:** בין שלמות והשתלמות אצל הרב קוק: לתורת הקבוצות של קנטור ופרנקל

17 **אחיקם קשת:** תעלומת גורל העשיריות

31 **מרדכי כסלו ואורית שמחוני:** מוציא זית ושורש קטן, גריס וגריס הקילקי – שחזור שיעורי שטח הלכתיים

43 **אריאל כהן:** תחילת תקופת תשרי כנקודת העיקר של הלוח העברי וההתאמה בין מולד וי"ד והאלמגסט

61 **רחמים שר־שלום וערן רביב:** תורת העיבור ברמזים ובחרוזים במסמך מהגניזה הקהירית

77 **דביר רוס:** שרשרת מרקוב לווסת ההפלגה

פרפראות

105 **ישראל נתנאל רובין:** הערה פיזיקלית בדיני משקלות (ב"ב פט ע"א)

109 תקצירים בעברית

חלק אנגלי

*7 **יוסף יצחק איידלר:** היום ושעותיו באסטרונומיה יהודית – הבהרה של כמה מובאות אסטרונומיות של רבנים מימי הביניים

*63 **שלמה א' גליקסברג:** ירק בשבועות: חקר המנהגים וטעמיהם

*87 **דורון ויצטום:** מדידת מובהקות במחקר הצפנים בתורה: רנדומיזציה של הטקסט לעומת מבחן פרמוטציות

*107 תקצירים באנגלית

דביר רוס

שרשרת מרקוב לווסת ההפלגה

במאמר זה נציג מערכת מצבים מרקובית המדמה תופעות הקשורות לווסת ההפלגה תחת הנחות יסוד מסוימות. מטרת המחקר לבחון את הסיכוי של אישה שהייתה לה וסת הפלגה קבועה להישאר במצב דומה לאורך זמן. דרך המחקר היא מציאת התפלגות סטציונרית של המערכת והוכחת התכנסות שלה.

א. מבוא

1. רקע למחקר

יכולת חיזוי אורך מחזור הווסת ושלביו חשובה בעבור התמודדות עם בעיות פוריות ותכנון המשפחה.[1] באפידמיולוגיה עולה ההכרה בחשיבות של ניתוח תפקוד הווסת בכלל ואורך המחזור בפרט.[2]

בספרות ההלכה היהודית מוצאים בהלכות טהרת המשפחה שיטות חיזוי לצפיית הופעת הווסת, שיטות המתייחסות לאפשרויות ולנתונים רבים. השפעתן של השיטות הללו באה לידי ביטוי מעשי בניהול מערכות יחסי האישות ומגע בין בעל ואישה החיים חיי דת יהודיים.

אני שואף לערוך מחקר שמטרתו תהיה בנייה הדרגתית וניתוח של מודלים מתמטיים המתארים את שיטות החיזוי המופיעות בספרות ההלכה היהודית, ובמקביל להשוות את מאפייני השיטות הללו למאפיינים מרכזיים של שיטות מהמחקר המדעי. כמו כן, בעתיד אני מעוניין לבצע בחינה של התאמת שיטות החיזוי הנחקרות לנתונים שנמצא במאגרי נתונים ובמאמרים מדעיים.

1. P. Bortot et al., “Sequential Predictions of Menstrual Cycle Lengths”, *Biostatistics* 11.4 (2010), pp. 741-755
2. S.D. Harlow et al., “Epidemiology of Menstruation and its Relevance to Women's Health”, *Epidemiologic Reviews* 17.2 (1995), pp. 265-286

במאמר זה אני רוצה להניח יסודות לעבודה המחקרית של בניית מודלים מתמטיים שיתארו את הלכות וסתות. לצורך כך בחרתי להתחיל בהתמקדות בתופעה אחת מיני רבות המופיעה בהלכות וסתות: וסת ההפלגה. אני מקווה שמתוך עבודת מחקר ממוקדת זו אוכל להרחיב את המודל המתמטי לעוד תופעות המופיעות בהלכות וסתות, עד שאקבל מודל מתמטי יחיד שיצליח לתאר את התפיסה של חז"ל את טבע מחזור הווסת של האישה.

2. רקע תורני

במשנה (נידה א, א וגם ט, ח) הביטוי "אישה שיש לה וסת" מתייחס לאישה בעלת וסת קבוע (וסת זמן או וסת גוף). מביטוי זה נלמד בהנגדה שהמושג "אישה שאין לה וסת", המופיע בתלמוד ובספרות ההלכה בכלל ובברייתא במסכת נידה בפרט (תלמוד בבלי, נידה יב ע"ב), מתייחס לאישה שאין לה וסת קבוע. מהדיון ההלכתי על הברייתא במסכת נידה עולה שהימצאות אישה במצב שאין לה וסת קבוע היא עילה לגירושין. מבלי להתייחס לעומק הפרטים של הדיון, ניתן להבין ממנו שהימצאות של אישה במצב כזה אינה נחשבת טבעית ורגילה.

חיזוק לדברים אלו ניתן למצוא בדברי הטור, יורה דעה, סימן קפד סע' א: "רוב הנשים יש להן וסתות לראות כל אחת לפי זמנה". מדברי הבית יוסף על דברי הטור ניתן להבין שמדובר בווסת ההפלגה: "כלומר יש רואה לט"ו ימים ויש רואה לעשרים ויש רואה לכ"ה ויש רואה לשלושים".

החשיבות והמרכזיות שייחסו הפוסקים לווסת ההפלגה בתור המצב הטבעי שבו אמורה אישה להימצא, הובילו אותי להתחיל את בניית המודלים המתמטיים עבור הלכות וסתות עם בניית מודל עבור וסת ההפלגה.

מאחר שבקרב פוסקים בהלכות נידה עולה הטענה שבימינו וסת קבועה אינה שכיחה,, בכוונתי לפרסם בעתיד מאמר שיתייחס לניתוח נתונים של מאגר רפואי או תגובות לשאלון שיופץ באינטרנט. במאמר זה אבחן את השכיחויות של וסתות קבועות שונות.

ב. בסיס הלכתי

1. וסת ההפלגה

שולחן ערוך, יורה דעה, סי' קפט סע' ב: "כיצד קובעתו? כגון שתראה ארבע פעמים וביניהם שלשה זמנים שווים". אם נסמן $\forall i \geq 0$ ב־ t_i את הפרש הימים[3] העובר בין וסת i לווסת

3. על פי שולחן ערוך, יורה דעה, סי' קפט סע' יג פסקו רוב הפוסקים שווסת קבועה נקבעת דווקא אם

$i+1$, וסת הפלגה נקבעת אם מתקיים $t_i = t_{i+1} = t_{i+2}$. למעשה, וסת ההפלגה מתארת אישה שהפרשי הימים בין וסתותיה שווים.

> היתה למודה להיות רואה יום חמשה עשר ושנתה להיות רואה ליום עשרים, זה וזה אסורין. שינתה פעמים ליום עשרים, זה וזה אסורין. שינתה שלש פעמים ליום עשרים, הותר חמשה עשר וקבעה לה יום עשרים, שאין אשה קובעת לה וסת, עד שתקבענה שלש פעמים. ואינה מטהרת הווסת, עד שתעקר ממנה שלש פעמים (משנה, נידה ט, י)

כדי שאישה תעקור את וסת ההפלגה הקבועה שלה, נדרש שיהיו שלוש סטיות רצופות מאורך מחזור הווסת הקבוע. כלומר, לאחר הווסת ה־i ההפרשים שייווצרו על ידי שלוש הווסתות הבאות יהיו שונים מההפרש האחרון שהיה באורך של הווסת הקבועה t_i, ויתקיים: $t_i \neq t_{i+1}$ וגם $t_i \neq t_{i+2}$ וגם $t_i \neq t_{i+3}$.

אדגיש שאישה שהיו לה שתי סטיות מאורך הווסת הקבוע, ולאחר שתי הסטיות הללו היא חזרה וראתה וסת בהפרש זהה להפרש הווסת הקבוע, חזרה למצב 'ברירת המחדל' של וסת קבועה ותצטרך שלוש סטיות ממנה כדי לעקרה.[4]

נשים לב שיש שלוש אפשרויות לעקירת וסת ההפלגה:

1. עקירת וסת תוך כדי קביעת וסת חדשה (על ידי רצף של שלושה הפרשים זהים), כאשר $t_{i+1} = t_{i+2} = t_{i+3}$.
2. עקירת וסת עם רצף של שני הפרשים זהים, כאשר $t_{i+1} \neq t_{i+2} = t_{i+3}$.
3. עקירת וסת על ידי הפרש שונה מקודמו, כאשר $t_{i+2} \neq t_{i+3}$.

לאחר שנעקרה וסת קבועה, קיימת דרך נוספת לקבוע וסת. השולחן ערוך, יורה דעה סי' קפט סע' טו פוסק על פי הראב"ד והרא"ש על התלמוד הבבלי (נידה סד ע"א): "שינתה ראיותיה ולא השוה אותם, כגון: ששינתה פעם אחת ליום שלושים, והשנייה לשלושים ושניים, והשלישית לשלושים וארבעה, נעקר הווסת הראשון ואין לה וסת כלל. ואם חזרה לראות ביום הווסת הראשון, חוזר לקביעותו הראשון וחוששת לו...". כלומר, אם לאחר שנעקרה וסת קבועה חזרה האישה וראתה וסת בהפרש של הווסת הקבועה האחרונה שהייתה לה, חוזר מעמדה ההלכתי להיות של אישה בעלת וסת קבועה.

הווסתות עם ההפרשים הזהים היו ב'עונות' זהות. כלומר, כדי שאישה תקבע וסת, הווסתות צריכות להיות כולן ביום או כולן בלילה. לצורך מאמר זה לא רציתי להאריך בדברים, ולכן אני מתייחס לסטייה מעונת היום או הלילה כאל שינוי היום. שינוי היום יחושב בעזרת עיגול כלפי מעלה עבור איחור של עונה, ועיגול כלפי מטה עבור הקדמה של עונה. לדוגמה, להפרש בין וסת ביום לווסת המגיעה לאחר 29.5 ימים אתייחס כהפרש של 30 יום.

4. דוגמה מספרית להלכה זו ניתן למצוא בשולחן ערוך, יורה דעה סי' קפט, סע' יד.

2. פרישה סמוך לווסת

וסת קבועה

בחומש ויקרא יח, יט נמצא איסור משכב עם נידה: "אֶל אִשָּׁה בְּנִדַּת טֻמְאָתָהּ לֹא תִקְרַב לְגַלּוֹת עֶרְוָתָהּ [...] וְאִישׁ אֲשֶׁר יִשְׁכַּב אֶת אִשָּׁה דָּוָה וְגִלָּה אֶת עֶרְוָתָהּ [...] וְנִכְרְתוּ שְׁנֵיהֶם מִקֶּרֶב עַמָּם". מהחשש שמא יבואו איש ואישה לקיים יחסי אישות בזמן שהאישה נידה, נאסרה[5] התייחדות בזמנים שיש בהם חשש לראיית וסת. השם שניתן בספרות ההלכה להימנעות מהתייחדות הוא "פרישה סמוך לווסת". כך פסק השולחן ערוך (יורה דעה סי' קפד סע' ב) לגבי וסת קבועה: "בשעת וסתה צריך לפרוש ממנה עונה אחת [...] אם הוא בלילה פורש כל הלילה ומותר ביום שלפניו ולאחריו, בין שקבעה בג' פעמים או בפעם אחת".

במשנה (נידה ט, י) לעיל נקבע שכאשר חלה סטייה מווסת קבועה, צריך לחשוש להפרש הווסת הקבועה ולהפרש הסטייה: "היתה למודה להיות רואה יום חמשה עשר ושנתה להיות רואה ליום עשרים, זה וזה אסורין". הבית יוסף (יורה דעה, סי' קפט סע' ב ד"ה ואפילו קודם) הסביר שהמשנה התייחסה נוסף על החשש מיום ההפלגה מהסטייה מהווסת הקבועה גם לחשש מיום החודש הזהה לתאריך הסטייה (לדוגמה: אם הסטייה התרחשה בג' בניסן, צריך לחשוש לג' באייר).[6] במאמר זה לא ייחסתי הבדל למקרים שבהם יום החודש ויום ההפלגה חופפים זה לזה.

וסת שאינה קבועה

במשנה (נידה ב, ד) נפסק: "כל הנשים בחזקת טהרה לבעליהן. הבאים מן הדרך, נשיהן להן בחזקת טהרה". בתלמוד הבבלי (נידה טו ע"א) על המשנה, ריש לקיש מפרט בשם רבי יהודה הנשיא: "והוא שבא ומצאה בתוך ימי עונתה". כמה דפים קודם לכן (ט ע"ב) ריש לקיש מסביר בשם רבי יהודה הנשיא ש"עונה" היא "עונה בינונית שלושים יום". רש"י (טו ע"א ד"ה בתוך) מסביר את דברי ריש לקיש: "לאחר שלושים בעיא בדיקה, הואיל וסתם נשים חזיין לסוף עונה". ביאורם של הדברים: לאחר שמגיע הזמן הצפוי לווסת יש חובת בדיקה אם הגיעה הווסת. עד ביצוע הבדיקה יש צורך בפרישה. חז"ל קבעו שהמועד הצפוי להגעת וסת שלאחריו צריך לבצע בדיקה הוא "עונה בינונית – שלושים יום".

5. השימוש בניסוח זה נראה כהצגת האיסור כגזרת חכמים, ומכאן שחומרתו מדברי חכמים, אך למעשה יש מחלוקת בנושא. לגבי פרישה סמוך לווסת שאינה קבועה, האיסור מדברי חכמים (טהרת הבית ע"מ צא).
6. לשון הב"י: "ומשמע דבין בוסת הפלגות בין בוסת הימים איירי מתניתין".

הרב ש' לוי[7] מציג שני הסברים מדברי הראשונים לסיבת הפרישה סמוך לווסת בעונה הבינונית:

1. לא סביר שאישה לא תראה וסת לעולם.
2. זו הופעת הווסת השכיחה אצל נשים.

הרב ש' לוי מציע הסבר: הרמב"ן (על התלמוד הבבלי, נידה טו ע"א ד"ה והוא) והר"ן (ד ע"ב בדפי הרי"ף ד"ה וגרסינן) הבינו שהטעם הראשון הוא הקובע, ולכן לשיטתם קבעו חכמים תאריך שממנו והלאה מניחים שלאישה הייתה וסת, ומפני שרוב הנשים רואות וסת לפני היום ה־30 נבחר תאריך זה. במחקר של A.S. Rowland[8] מוצאים חיזוק לטיעון זה, מפני ש־81% מהנשים (מאוכלוסייה חקלאית שחיה בצורה דומה באופן יחסי לצורת החיים בימי חז"ל) דיווחו על מחזור וסת סדיר ועקבי קצר או שווה ל־30 יום.

הרשב"א (תורת הבית הארוך ז, ג) הבין שהטעם השני הוא הקובע, ולכן לשיטתו חז"ל חשבו שסביר שגם לאישה כלשהי תופיע וסת בעונה זו. אני נמצא היום בתהליך השגת גישה למאגרי נתונים שיוכלו לבחון אם טיעון זה תואם נתונים במציאות של ימינו.

יש צורך בחידוד ההבנה של הסבר זה: מחד גיסא ניתן להבין שהכוונה היא שהעונה הבינונית היא הווסת השכיחה אצל נשים ללא וסת קבועה, ולכן צריך לחשוש ליום זה. מאידך גיסא ניתן להבין שהכוונה היא שלרוב הנשים יש וסת הפלגה קבועה ו"סתם וסת שלושים יום", ולכן יש צורך לחשוש שאישה ללא וסת קבועה תראה וסת ותתחיל תהליך של קביעת וסת דווקא ביום השלושים. להבנתי ההסבר האחרון הוא המדויק יותר, מפני שבביטוי "סתם נשים חזיין לסוף שלושים" יש התייחסות לנשים בצורה כללית, ולכן יש להניח שהכוונה ב"סתם נשים" היא לרוב הנשים – שהן בעלות וסת קבועה.[9]

על פי הבנה זו, המעמד המיוחד של העונה הבינונית נובע מהמעמד שניתן לווסת ההפלגה. מפני שהמעמד של וסת ההפלגה נובע מכוח חזקת גילוי מילתא[10] (שמתברר שלאישה יש טבע לראות וסתות בהפרשים שווים), אינני מייחס הבדל בין מקרים שבהם תהליך קביעת וסת ההפלגה הוא באורך מחזור של שלושים יום, למקרים שבהם אורך הווסת שונה, ואידך זיל גמור.

7. ש' לוי, שערי אורה: הלכות נידה, ירושלים: קורן, תשע"ד.
8. A.S. Rowland et al., "Influence of Medical Conditions and Lifestyle Factors on the Menstrual Cycle", *Epidemiology* 13.6 (2002), pp. 668-674
9. יש עוד טענות היכולות לחזק כל אחת מהאפשרויות שהצגתי, אך אינני מעוניין להעמיס ולהקשות את הקריאה.
10. ע' מרצבך וי' הרשקוביץ, "בענין חזקת ג' פעמים", ישורון (תשע"א), עמ' 711-740.

ג. בניית שרשרת מרקוב לווסת ההפלגה

1. בחירת שרשרת מרקוב בתור סוג המודל לתיאור וסת ההפלגה

לאישה שהייתה לה וסת הפלגה קבועה יש מספר סופי של מצבים הלכתיים אפשריים. מצבים אלו מתחלקים לשתי קבוצות:

1. וסת קבועה.
2. וסת שאינה קבועה.

בשתי קבוצות אלו יש מצבים המתארים תהליך מעבר בין הקבוצות: בווסת קבועה כל סטייה מהווסת או חזרה עליה תתאים למצב הלכתי מסוים, בווסת שאינה קבועה חזרה/שוני באורך מחזור הווסת של הופעות עוקבות תתאים למצב הלכתי אחר.

כדי להציג מערכת שתתאר את המצבים ההלכתיים הללו, נדרש לבנות מערכת המתארת תהליך מתמשך ומתפתח לאורך זמן, שתתאר מעברים בין המצבים ההלכתיים. כדי לחקור את המערכת מבחינה הסתברותית, נדרש לתאר ולהתאים הסתברויות למעברים בין המצבים.

שרשרת מרקוב (Markov Chain) היא מודל הסתברותי המשמש לתיאור התפתחות של תהליכים כסדרה של מצבים. מערכת מוגדרת כמערכת מרקובית אם המידע הנתון על כל מצב מבין מצבי המערכת בפני עצמו מספיק לחיזוי הסתברויות המעבר למצבים העתידיים. משמעותו של תנאי זה היא שאין צורך להתחשב בדרך שבה המערכת הגיעה למצב מסוים, שכן מידע זה לא יועיל בניבוי העתיד.

נעבור לשפה מתמטית יותר. שרשרת מרקוב מסדר 1 היא תהליך סטוכסטי, כלומר סדרה של משתנים מקריים ... X_1, X_2, X_3, המקיימת את תכונת מרקוב: ההתפלגות של המשתנה המקרי ה־$n+1$ בהינתן המשתנים שקדמו לו, שווה להתפלגותו בהינתן המשתנה ה־n בלבד:

$$\forall n \geq 0: P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n)$$

כאשר הערכים של $\{i_0, i_1 \dots, i_n\}$ ו־j מייצגים את הערכים שיכולים להתקבל עבור המשתנים המקריים $X_0, X_1 \dots, X_n$ ו־X_{n+1} בהתאמה. כלומר, ההסתברות שהמצב ה־$n+1$ של המערכת המיוצג על ידי המשתנה המקרי X_{n+1} יהיה מצב המערכת ה־j, תלויה במצב ה־n בלבד.

תכונת "חוסר זיכרון" זו, מאפשרת לשער את ההסתברות למעבר ממצב אחד למשנהו ללא תלות באופן ההגעה אליו. תכונה זו חשובה לתיאור המערכת ההלכתית של הלכות וסתות, מפני שהדרישות ההלכתיות בכל מצב אינן תלויות בדרך שבה הוא נוצר. לדוגמה: היחס ההלכתי לאישה בעלת וסת קבועה שחזרה על עצמה שלוש פעמים זהה ליחס ההלכתי לאישה בעלת וסת קבועה שחזרה על עצמה שמונה פעמים. לאישה בעלת וסת שאינה קבועה במשך

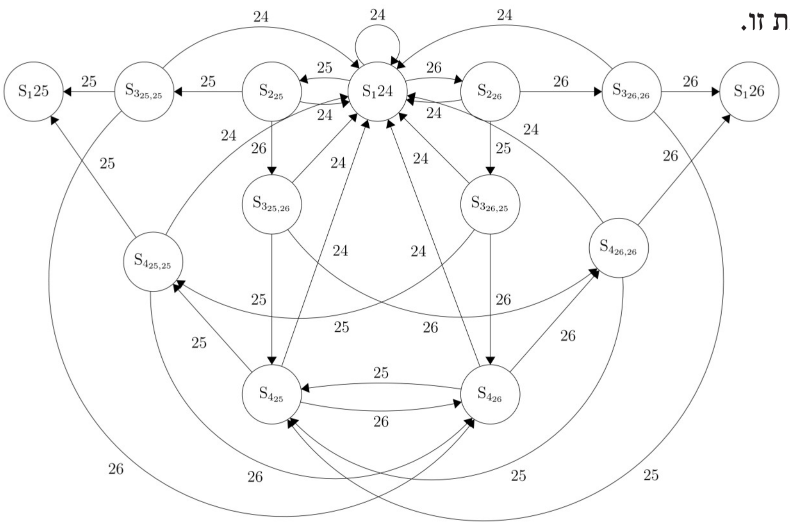
חמישה מחזורי וסת עם הפרש של 28 ימים בין שתי הווסתות האחרונות שלה, יש דרישות הלכתיות זהות כמו לאישה שווסת ההפלגה הקבועה שלה נעקרה על ידי הפרש של 28 ימים.[11]

מהסיבות שנזכרו לעיל, שרשרת מרקוב היא מודל הסתברותי המתאים לשמש לבניית מערכת מצבים הלכתיים המתארת תהליך מתמשך ומתפתח לאורך זמן, עם הסתברויות מותאמות למעברים בין המצבים.

אולם אם בניית המערכת תתבצע בעזרת שרשרת מרקוב רגילה, נקבל מערכת מצבים עם מספר מצבים גדול מאוד, מפני שלכל מצב הלכתי צריך להיות מותאם מעבר עבור כל אורך מחזור וסת אפשרי. גם אם נניח שיש הגבלת אורכי מחזורי וסת מקסימליים ומינימליים נקבל מערכת מצבים גדולה מאוד:

1. מצבי וסת קבועה לכל אורך מחזור וסת אפשרי (מצבים בשם הקטגוריה S_1 באיור להלן).
2. מצבים עבור כל סטייה אפשרית מהווסת הקבועה (S_2).
3. מצבים לכל סטייה שנייה אפשרית – עבור סטיות חוזרות ועבור סטיות שונות (S_3).
4. מצבים עבור וסת לא קבועה – כאשר אורך מחזור הווסת שונה מקודמו או ברצף של שני מחזורים זהים (S_4).

כדי להמחיש את גודל המערכת, בחרתי להדגים על־ידי הגבלת אורכי מחזור הווסת האפשריים לשלושה אורכים בלבד: 24, 25 ו־26 ולהציג באיור את המצבים במערכת הקשורים לווסת הפלגה קבועה באורך 24 יום בלבד. למעשה באיור הבא מוצגים 13 מתוך 33 מצבים של מערכת זו.



11. בתנאי שלאישה בעלת הווסת שאינה קבועה הייתה בעבר וסת קבועה זהה לווסת הקבועה של האישה שנעקרה וסתה בראייה האחרונה.

$S_1 24, S_1 25$ ו־ $S_1 26$ מייצגים מצבי וסת קבועה באורך 24, 25 ו־26 בהתאמה. $S_{2_{25}}$ ו־$S_{2_{26}}$ מייצגים מצבי סטייה מווסת קבועה של 24 יום על ידי מחזור וסת של 25 ו־26 יום בהתאמה. המצב $S_{3_{25,25}}$ מייצג מצבי סטייה מווסת קבועה של 24 יום על ידי מחזור וסת באורך 25 יום ולאחריו באורך 25 יום. באופן דומה $S_{3_{25,26}}$ מייצג סטיות של 25 ו־26 יום, $S_{3_{26,25}}$ סטיות של 26 ו־25 יום ו־ $S_{3_{26,26}}$ של 26 ו־26 יום.

המצבים בקטגוריה S_4 מייצגים מצבים עם יותר משתי סטיות מהווסת הקבועה של 24 יום, כלומר מצבים שעבורם הווסת הקבועה נעקרת. אולם כל עוד לא נקבעה וסת חדשה ישנה אפשרות חזרה לקביעת הווסת של מחזור בן 24 יום על ידי הופעה חוזרת של מחזור באורך זה. מצבים $S_{4_{25}}$ ו־$S_{4_{26}}$ מייצגים מצבים לאחר שנעקרה הווסת הקבועה, כאשר אורך המחזור האחרון היה 25 ו־26 ימים בהתאמה. המצבים $S_{4_{25,25}}$ ו־ $S_{4_{26,26}}$ מייצגים מצבים עם רצף שני אורכי מחזור וסת זהים, של 25 ו־ 26 בהתאמה. המספרים המופיעים על יד כל חץ מעבר ממצב למצב מייצגים את אורך הווסת שהוביל למעבר.

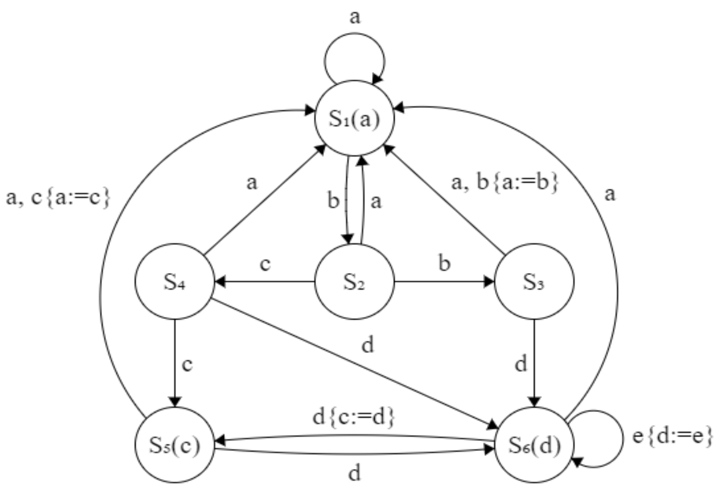
בצורה כללית עבור טווח אורכי וסתות x מספר מצבי המערכת יתקבל על־ידי הפונקציה:[12] $f(x) = x(x^2 + x - 1)$. לדוגמה, עבור טווח של 15 יום בין 21 ל־35 יום (בין פולימנוריה לאוליגומנוריה) יתקבלו 3,585 מצבים.

מפני שבספרות ההלכה אין התייחסות שונה לאורכי וסת אפשריים ביחס לסיכויי המעבר בין המצבים ההלכתיים השונים, הנחתי שהסתברויות המעבר בין המצבים אינן משתנות בין וסת קבועה אחת למשנה. מסיבות דומות הנחתי שההסתברויות לרצף של הפלגות זהות אינו משתנה, וכן שסיכויי חזרה על אורך מחזור הווסת הקבועה האחרונה שנעקרה אינה משתנה.

הנחות אלו מקנות למערכת תכונת איגודיות (lumpability) ומאפשרות להכליל את מערכת המצבים ולבצע פעולת צמצום לשישה מצבים בלבד. את הצמצום ביצעתי בעזרת סימון המוצג בתת הפרק הבא. אני מתכנן לפרסם מאמר מדעי נפרד על פעולת הצמצום עם סימוני פרמטרים אלו, עם תוספת על שינוי ההנחות שלי והכללת תכונת האיגודיות למקרים שהסתברויות המעברים שונות זו מזו.

12. פירוט על דרך ההגעה לפונקציה זו וניתוחים בסיסיים שלה מוצגים בנספחים בסוף המאמר: פונקציית מספר מצבי מערכת.

2. מערכת המצבים



הסימון $\{a := b\}$ b מתאר "החלפת תפקידים"; כאשר בעקבות הופעה של הערך b עוברים מצב, ובמצב הבא לערך a יש התייחסות מיוחדת, את ההתייחסות המיוחדת יקבל הערך b.
לדוגמה: המעבר ממצב S_3 למצב $S_1(a)$ מתאר קביעת וסת הפלגה קבועה באורך שונה מקודמתה, לכן המעבר $\{a := 29\}$ 29 יתאר את החלפת האורך של מחזור הווסת הקבוע הקודם באורך מחזור הווסת הקבוע החדש – 29.

$S_1(a)$ – מצב התחלתי של וסת הפלגה קבועה באורך a. אל מצב זה ניתן להגיע מייד לאחר שנקבעה וסת באורך a או לאחר הופעה של מחזור באורך a לפני שנעקרה הווסת. ממצב זה אפשר לחזור לעצמו כאשר אורך המחזור הבא זהה לאורך הווסת הקבועה, שאם לא כן יתבצע מעבר למצב S_2.

S_2 – מצב המתאר וסת קבועה לאחר סטייה ראשונה. כאשר אורך המחזור הבא יהיה זהה לאורך הווסת הקבועה תתבצע חזרה ל-$S_1(a)$. כאשר אורך המחזור הבא יהיה זהה לסטייה הקודמת יתבצע מעבר ל-S_3. כאשר אורך המחזור הבא יהיה שונה מהסטייה הקודמת יתבצע מעבר ל-S_4.

S_3 – מצב המתאר וסת קבועה לאחר סטייה שנייה באורך זהה לסטייה הראשונה. כאשר אורך המחזור הבא יהיה זהה לאורך הווסת הקבועה תתבצע חזרה ל-$S_1(a)$. כאשר אורך המחזור הבא יהיה זהה לסטיות הקודמות יתבצע מעבר ל-$S_1(a)$, כאשר הערך a מוחלף בערך b המבטא את הסטיות הזהות מהווסת הקודמת. למעשה תיאור המעבר האחרון מבטא את עקירת הווסת הקודמת יחד עם קביעת וסת חדשה. כאשר אורך המחזור הבא יהיה שונה

מהסטיות הקודמות ומאורך הווסת הקבועה יתבצע מעבר ל-$S_6(d)$. תיאור המעבר האחרון מבטא את עקירת הווסת הקודמת בלי קביעת וסת חדשה.

S_4 – מצב המתאר סטייה שנייה מהווסת באורך שונה מהסטייה הראשונה. כאשר אורך המחזור הבא יהיה זהה לאורך הווסת הקבועה תתבצע חזרה ל-$S_1(a)$. כאשר אורך המחזור הבא יהיה זהה לסטייה הקודמת יתבצע מעבר ל-$S_5(c)$, עקירת הווסת הקבועה עם רצף של שתי סטיות זהות (c). כאשר אורך המחזור הבא יהיה שונה מהסטייה הקודמת ומאורך הווסת הקבועה, יתבצע מעבר ל-$S_6(d)$, מעבר המוביל לעקירת הווסת הקודמת בלי קביעת וסת חדשה וללא רצף של הפלגות זהות.

$S_5(c)$ – מצב ללא וסת קבועה עם רצף של שתי הפלגות שוות באורך c. כאשר אורך המחזור הבא יהיה זהה לאורך הווסת הקבועה הקודמת תתבצע חזרה ל-$S_1(a)$. כאשר אורך המחזור הבא יהיה זהה לסטיות הקודמות יתבצע מעבר ל-$S_1(a)$, כאשר הערך a מוחלף בערך c המבטא את הסטיות הזהות מהווסת הקודמת. למעשה תיאור המעבר האחרון מבטא קביעת וסת חדשה יחד עם עקירת הקשר שהיה לווסת הקודמת. כאשר אורך המחזור הבא יהיה שונה מהסטייה הקודמת ומאורך הווסת הקבועה הקודמת, יתבצע מעבר ל-$S_6(d)$, מעבר המוביל לעקירת הווסת הקודמת בלי קביעת וסת חדשה וללא רצף של הפלגות זהות.

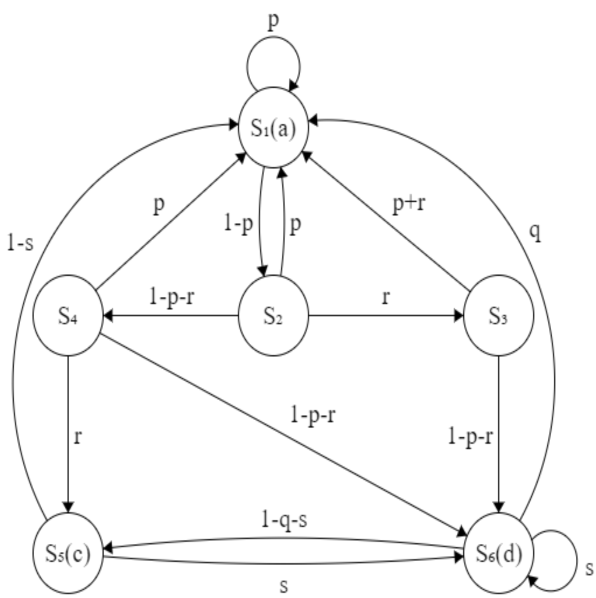
$S_6(d)$ – מצב ללא וסת קבוע, כאשר ההפלגה האחרונה (באורך d) שונה מקודמתה. כאשר אורך המחזור הבא יהיה זהה לאורך הווסת הקבוע הקודם תתבצע חזרה ל-$S_1(a)$. כאשר אורך המחזור הבא יהיה זהה לסטייה הקודמת יתבצע מעבר ל-$S_5(c)$, כאשר הערך c מוחלף בערך d המבטא את הסטיות הזהות מהווסת הקודמת. כאשר אורך המחזור הבא יהיה שונה מהסטייה הקודמת ומאורך הווסת הקבועה הקודמת, יתבצע מעבר ל-$S_6(d)$, כאשר הערך d מוחלף בערך e המבטא את הסטייה השונה מהסטייה האחרונה מהווסת הקודמת.

לצורך המחשה וחידוד הבנת מערכת המצבים, להלן מוצגת טבלה המציגה סדרת אורכי מחזור וסת יחד עם המצבים ההלכתיים המתאימים:

הסבר	מצב הלכתי	אורך מחזור וסת
וסת הפלגה קבועה עם אורך מחזור של 29 ימים	מצב התחלתי – $S_1(29)$	
סטייה ראשונה מהווסת הקבועה	S_2	30
סטייה חוזרת	S_3	30
חזרה למצב ההתחלתי על ידי חזרה על אורך הווסת הקבועה	$S_1(29)$	29
סטייה ראשונה	S_2	31

סטייה שנייה שונה	S_4	32
עקירת הווסת הקבועה כאשר שני אורכי המחזורים האחרונים זהים	$S_5(32)$	32
וסת לא קבועה כאשר שני אורכי המחזורים האחרונים שונים	$S_6(31)$	31
	$S_6(28)$	28
וסת לא קבועה כאשר שני אורכי המחזורים האחרונים זהים	$S_5(28)$	28
קביעת וסת קבועה חדשה עם אורך מחזור 8.	$S_1(28)$	28

3. התאמת הסתברויות למעברים בין המצבים



יש חילוק בין קבעתו ג׳ פעמים ללא קבעתו ג׳ פעמים, שהקבוע, אף על פי שעברה עונתה ולא הרגישה, אסורה לשמש עד שתבדוק ותמצא טהורה. ושלא קבעתו ג׳ פעמים, אם הגיע זמן הווסת ולא בדקה ולא ראתה, כיוון שעברה עונתה, מותרת. ועונה בינונית, שהיא לל׳ יום, דינה כווסת קבוע (שולחן ערוך, יורה דעה, קפט, ד על פי הרשב״א).

מהלכות אלו נובעות כמה מסקנות:

- חומרת הפרישה סמוך לווסת מהתאריך הצפוי לאורך הווסת הקבוע לא משתנה. לכן נייחס למעברים מ־ S_{1-4} ל־ S_1 הסתברות זהה, ונסמן אותה באות p.
- רמת הביטחון המיוחסת לראיית וסת בהפרש זהה לאורך הווסת הקבועה גדולה מזו המיוחסת לתאריכי הפרישה במהלך סטייה מהווסת הקבועה וכשאין וסת קבועה. את ההסתברויות עבור המעברים המבטאים סטייה חוזרת מאורך הווסת הקבועה נסמן באות r ונדרש $r < p$.

בהלכות פרישה סמוך לווסת מיוחסת חומרה זהה לסטייה מווסת קבועה ולהפרשים חוזרים במהלך וסת לא קבועה – יום ההפלגה, לכן סביר להניח שההסתברויות עבור מעברים אלו תהיינה זהות.[13] למרות זאת, בגלל שבמהלך וסת קבועה קיים גורם דומיננטי (שעשוי להשפיע) בדמות ההסתברות של מחזור וסת באורך הווסת הקבועה, אני בוחר לבנות את המודל בצורה כללית.

במהלך וסת לא קבועה, את ההסתברות למחזור וסת באורך זהה לווסת הקבועה האחרונה שנעקרה נסמן באות q.

במהלך וסת לא קבועה, את ההסתברות למחזור וסת שונה מההפרש האחרון ושונה מאורך הווסת הקבועה האחרונה שנעקרה נסמן באות s.

ד. מטריצת מעברים

1. בניית מטריצת מעברים

נסמן את הסיכוי לעבור ממצב S_i למצב S_j ב P_{ij}, ובהצגה מטריצית נקבל מטריצת מעברים:[14]

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & r & 1-p-r & 0 & 0 \\ p+r & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p-r \\ p & 0 & 0 & 0 & r & 1-p-r \\ 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & s \\ q & 0 & 0 & 0 & 1-q-s & s \end{pmatrix}$$

13. אני מניח את ההנחה הזו בסוף המאמר, בפרק של הצבת הנתונים.
14. ההסתברות לעבור ממצב S_i למצב S_j שווה לערך המופיע במטריצת המעברים בשורה ה־i בעמודה ה־j.

p – הסיכוי שאורך המחזור הבא יהיה זהה לאורך מחזור הווסת הקבוע של וסת ההפלגה הנוכחית.

r – הסיכוי שהסטייה הבאה מהווסת הקבועה תהיה שווה לסטייה הקודמת.[15]

q - הסיכוי שאורך המחזור הבא יהיה זהה לאורך מחזור הווסת הקבוע של וסת ההפלגה האחרונה שנעקרה.

s – הסיכוי שאורך המחזור הבא יהיה שונה מהקודם לו, כאשר הווסת אינה קבועה.

2. תכונות מטריצת המעברים

המטריצה שהתקבלה היא מטריצה סטוכסטית, כלומר סכום כל שורה בה שווה ל־1. בשפה מתמטית: $\forall i: \sum_{j=1}^{6} P_{ij} = 1$.

הדטרמיננטה של המטריצה שווה ל־0, כלומר המטריצה אינה הפיכה. את התכונה הזו ניתן לראות בתרשים מערכת המצבים, מכיוון שלא ניתן להפוך את כיווני החיצים.

הפולינום האופייני[16] $|P - \lambda I|$ של המערכת הוא

$$\lambda(1-p-r)(p-1)(\lambda-1)((\lambda+1)p-(pq+ps+qr+rs)+(q+r)) + \lambda(1-p-r)(p-1)(qs+(s-1)^2)$$

$$+\lambda(1-q-s)(-p^2r-\lambda p^2s-pr^2-prs+2pr+\lambda^2ps+\lambda ps+r^2+rs-r-\lambda^3s)$$

$$+\lambda^2((\lambda-s)(-\lambda^3-\lambda p^2-p^2r+\lambda^2p+\lambda p-pr^2+pr+r^2) + q(p^2r+pr^2-2pr-r^2+r))$$

למטריצה קיימים שישה ערכים עצמיים שונים כאשר שניים מהם הם $\lambda_1 = 0$ ו- $\lambda_2 = 1$. ארבעת הערכים העצמיים הנוספים ארוכים ומסובכים לכתיבה, ולכן לא נכתבם

15. חשוב להזכיר שבמודל המוצג במאמר הנוכחי לא תיארתי חלוקה למקרים שבהם וסת ההפלגה מתאחדת עם יום העונה הבינונית (כאשר ההפלגה שווה ל־30) ויום החודש (הפלגת 30 יום לחודש מלא ו־29 לחודש חסר).

16. נעזרתי באתר www.wolframalpha.com כדי לבחון את תכונות המטריצה.

כאן. תכונה חשובה של הערכים הנוספים היא שהערכים הממשיים והמדומים שלהם קטנים מ־1.

מסקנה חשובה מכך שקיבלנו שישה ערכים עצמיים שונים זה מזה היא שהמטריצה ניתנת ללכסון.

כפי שניתן לראות בעמודה הראשונה של המטריצה, מכל מצב ניתן להגיע אל S_1. בשפה מתמטית: $\forall i: P_{i1} > 0$. המשמעות הנובעת כמעט מאליה מנתון זה היא שהמצב S_1 אינו מחזורי. נתייחס לכך בהרחבה בהמשך.

3. לכסון מטריצת המעברים

מפני שמטריצת המעברים P ניתנת ללכסון, נסמן $P = S * J * S^{-1}$, כאשר

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \end{pmatrix}$$

כאשר המטריצה S מתקבלת על ידי הווקטורים העצמיים (שישמשו כעמודות שלה); הפתרונות הלא טריוויאליים למשוואה $(P - \lambda_k I)\,\overrightarrow{v_k} = 0$.

עבור הערך $\lambda_1 = 0$ נקבל וקטור עצמי

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

עבור הערך $\lambda_2 = 1$ נקבל וקטור עצמי

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

את שאר הווקטורים העצמיים מסובך להציג, ולא נעשה זאת כאן. בהמשך המאמר לאחר שנציב נתונים עבור p, r, s, q , נציג את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים במלואם.

ה. התכנסות המערכת להתפלגות סטציונרית

1. הוכחת התכנסות המערכת

התקדמות מטריצת המעברים של שרשרת מרקוב סופית, אי־מחזורית ובלתי פריקה שואפת להתפלגות סטציונרית יחידה. כלומר עבור שרשרת מרקוב סופית, אי־מחזורית ובלתי פריקה מתקיים:

1. קיים וקטור יחיד $\vec{0} \neq \pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ המקיים $\pi P = \pi$.
2. $\lim_{n \to \infty} [P^n]_{ij} = \pi_j$.

כפי שציינו לעיל, בשרשרת המתוארת במאמר זה קיים מצב אי־מחזורי (מצב S_1). כעת נפרט על כך מעט יותר בעיון.

למצב S_i יש מחזור באורך k אם כדי לחזור מ־ S_i $(X_0 = S_i)$ לעצמו $(X_n = S_i)$ צריכים להתבצע מעברים בכפולות של k. בצורה פורמלית, המחזור של מצב מוגדר כך:

$$k = \gcd\{n > 0 : \Pr(X_n = S_i | X_0 = S_i) > 0\}$$

כאשר gcd הוא המחלק המשותף הגדול ביותר (greatest common divisor).

אם $k > 1$, המצב נקרא מחזורי עם מחזור k. אם $k = 1$, המצב נקרא אי־מחזורי.

אל מצב S_1 ניתן להגיע לאחר כל מעבר אפשרי, ולכן המחלק המשותף הגדול ביותר יהיה $k = 1$. כלומר המצב S_1 אי־מחזורי.

שרשרת סופית בעלת מצב אי־מחזורי ובלתי פריקה היא שרשרת אי־מחזורית, לכן כדי להוכיח התכנסות נותר לנו להוכיח שהשרשרת בלתי פריקה.

המשמעות של תכונת בלתי־פריקות היא שניתן להגיע מכל מצב אל שאר המצבים. ניתן לראות שתכונה זו מתקיימת במערכת בקלות לפי הגרף שלה. כדי להוכיח בלתי־פריקות מספיק להראות שקיים מספר $n > 0$ שעבורו כל רכיבי המטריצה P^n יהיו שונים מ־0. בשפה מתמטית: $\exists n > 0, \forall i, j : [P^n]_{ij} > 0$. עבור $n = 3$ תנאי זה מתקיים.[17]

2. מציאת התפלגות סטציונרית

יש כמה דרכים למציאת ההתפלגות הסטציונרית. עבור הצורה הכללית של השרשרת במאמר זה, נבחר למצוא את הווקטור $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ הנותן פתרון לא טריוויאלי עבור המשוואה $\pi P = \pi$. לאחר הצבת הנתונים נציג את הדרך שנעזרת בלכסון מטריצות.

17. ניתן לראות זאת על־ידי כניסה לאתר האינטרנט הבא:
http://www.wolframalpha.com/input/?i=%7B%7Bp,1-p,0,0,0,0%7D,%7Bp,0,r,1-p-r,0,0%7D,%7Bp%2Br,0,0,0,0,1-p-r%7D,%7Bp,0,0,0,r,1-p-r%7D,%7B1-s,0,0,0,0,s%7D,%7Bq,0,0,0,1-q-s,s%7D%7D%5E3.

$$(\pi P)^T = P^T \pi^T = \pi$$

$$\begin{pmatrix} p & p & p+r & p & 1-s & q \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p-r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 & 1-q-s \\ 0 & 0 & 1-p-r & 1-p-r & s & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \end{pmatrix}$$

נבצע כמה פעולות[18] בסיסיות ונבטא בצורה כללית את π:

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \end{pmatrix} = \pi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-p \\ r(1-p) \\ (1-p-r)(1-p) \\ (1-p-r)(1-p)\left(r + \dfrac{(1-q-s)(1-p+sr)}{(1-s)^2+qs}\right) \\ \dfrac{(1-p-r)(1-p)(1-p+sr)}{(1-s)^2+qs} \end{pmatrix}$$

כדי שסכום הרכיבים של הווקטור יהיה שווה ל-1 ($\sum_{i=1}^{6} \pi_i = 1$), נדרש ש- π_1 יהיה שווה לשבר עם 1 במונה ואורך הווקטור המוכפל בו במכנה.

נחשב את אורך הווקטור בשני שלבים: שלב ראשון עבור המצבים המייצגים וסת קבועה ושלב שני עבור מצבים המייצגים וסת שאינה קבועה.

$$x_1 = \frac{\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4}{\pi_1} = 1 + 1 - p + r(1-p) + (1-p-r)(1-p) = p^2 - 3p + 3$$

$$x_2 = \frac{\pi_5+\pi_6}{\pi_1} = (1-p-r)(1-p)\left(r + \frac{(1-q-s)(1-p+sr)}{(1-s)^2+qs}\right) + \frac{(1-p-r)(1-p)(1-p+sr)}{(1-s)^2+qs}$$

18. הפעולות מופיעות בנספחים בסוף המאמר: חישובים למציאת התפלגות סטציונרית.

$$= (1-p-r)(1-p)\left(r + \frac{(2-q-s)(1-p+sr)}{(1-s)^2+qs}\right)$$

$$\pi = \frac{1}{x_1+x_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-p \\ r(1-p) \\ (1-p-r)(1-p) \\ (1-p-r)(1-p)(r+\dfrac{(1-q-s)(1-p+sr)}{(1-s)^2+qs}) \\ \dfrac{(1-p-r)(1-p)(1-p+sr)}{(1-s)^2+qs} \end{pmatrix}$$

3. ניתוח ההתפלגות הסטציונרית

מפני ש־ $0 < p, r < 1$, קל לראות שמתקיים $\pi_3 < \pi_2 < \pi_1$ וגם $\pi_4 < \pi_2 < \pi_1$.
יתרה מכך, מתקיים גם $\pi_3 + \pi_4 < \pi_2 < \pi_1$.
עבור $r < \frac{1-p}{2}$ מתקיים $\pi_4 > \pi_3$, עבור $r = \frac{1-p}{2}$ מתקיים $\pi_4 = \pi_3$ ועבור $\frac{1-p}{2} < r < 1-p$ מתקיים $\pi_4 < \pi_3$.

ההתפלגות הסטציונרית מתארת את התנהגות המערכת לטווח ארוך. ארבעת הרכיבים הראשונים בווקטור π מתארים את אחוז הפעמים שהמערכת תהיה במצבי הווסת הקבועה, ושני הרכיבים האחרונים מתארים את אחוז הפעמים שהמערכת תהיה במצבי הווסת שאינה קבועה.

היחס בין האחוזים הללו יהיה

$$R = \frac{x_1}{x_2} = \frac{p^2-3p+3}{(1-p-r)(1-p)\left(r+\frac{(2-q-s)(1-p+sr)}{(1-s)^2+qs}\right)}$$

כדי להבין את התנהגות פונקציית יחס זו, נתבונן במונה ובמכנה בנפרד:
עבור $0 < p < 1$ מתקיים $1 < x_1 < 3$. נוכל להסיק מתוצאה זו שעבור $x_2 \in \Re^+$ יתקבל $R \in \Re^+$.

כדי לבחון את השפעת כל אחד מהפרמטרים על x_2, ניתן להיעזר בשני כלים שמבחינות מסוימות משלימים זה את זה: נגזרות חלקיות וגבולות. מכיוון שבמקרה הזה הנגזרות החלקיות

הן ביטויים מורכבים מאוד ולכן גם מסובכים להסברה בצורה פשוטה, אתמקד בגבולות כדי להמחיש את רמת ההשפעה של כל פרמטר ביחס לאחרים על ידי השאפתו לגודל מקסימלי – במודל זה ל־ 1. מפני שאילוצי הזוגות $p+r<1$ ו־ $s+q<1$ מבטאים אילוצים המדמים יחס לינארי, את אופן ההשפעה של הגדלת פרמטר אחד על הקטנת הזוג שלו אבטא בצורת יחס לינארי. כמו כן, אבטא את יחסי ההגדלה וההקטנה של אחד מהפרמטרים p ו־r וההגדלה וההקטנה של הפרמטרים s ו-q בצורת יחס לינארי.

כדי לבחון את רמת ההשפעה של גדילת ההסתברות s (הסתברות המעבר ממצבים S_5 ו־ S_6 ל־ S_6), תחילה נשאיף את s ל־ 1 כדי לבחון את האפשרויות שעבורן אישה שעקרה וסת תישאר ללא וסת קבועה במרבית הזמן.

$$\lim_{\{s,q,h\}\to\{1-h,ah,0\}} x_2 = \lim_{h\to 0}(1-p-r)(1-p)\left(r+\frac{(1-p+r)}{h^2(1-a)+ah}\right)$$
$$= r(1-p-r)(1-p) + \lim_{h\to 0}\frac{(1-p-r)(1-p)(1-p+r)}{h^2(1-a)+ah}$$

כעת נוסיף לחישוב את מידת ההשפעה של גדילת ההסתברות p לעבור למצב S_1 במהלך וסת קבועה, ולמעשה נשאיף את p ל־ 1 כדי לבחון את האפשרויות שאישה שקבעה וסת תישאר בה מרבית הזמן.

$$\lim_{\{p,r,s,q,h\}\to\{1-h,ah,1-bh,ch,0\}} x_2 = \lim_{h\to 0}\frac{h^3(1-a^2)}{b^2h^2(1-c)+ch} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2(1-a^2)}{b^2h(1-c)+c} = 0$$

$$\lim_{x_2\to 0} R = \infty$$

נובע מתוצאה זו, שכאשר שתי ההסתברויות s ו־ p שואפות ל־ 1, ההגדלה של p מגדילה את היחס R יותר משהגדלה של s מקטינה את היחס R. כלומר, כשיש סיכויים גבוהים לאישה להישאר במצב של וסת שאינה קבועה אם היא נמצאת בה ובווסת קבועה אם היא נמצאת בה, בהסתכלות לטווח רחוק ברוב הזמן לאישה תהיה וסת קבועה. זוהי התוצאה המשמעותית ביותר עבורנו, כי היא מסבירה שגם אם נניח שההסתברות להישאר בווסת שאינה קבועה גבוה מההסתברות להישארות בווסת קבועה ($p<s$), עדיין ברוב הזמן האישה תהיה בעלת וסת קבועה ($x_1>x_2$). נסביר משמעות זו בפרק הסקת המסקנות.

כעת נחליף את השאפת ההסתברות p להישארות במצב של וסת קבועה S_1 בהשאפת ההסתברות r לקבלת סטייה חוזרת מווסת קבועה ל־1.

$$\lim_{\{p,r,s,q,h\}\to\{ah,1-h,1-bh,ch,0\}} x_2 = \lim_{h\to 0}\frac{2h(1-a)}{b^2h^2(1-c)+ch} = \frac{2(1-a)}{c}$$

$$\lim_{\{p,r,s,q,h\}\to\{ah,1-h,1-bh,ch,0\}} R = \frac{3c}{2(1-a)}$$

ההסתברות לחזרה של אורך הווסת הקבועה גדולה מההסתברות לסטייה חוזרת ממנה (לפי החומרה ההלכתית בהלכות פרישה סמוך לווסת), כלומר נדרש $r < p$. פירוש של נתון זה הוא שהגבול שמצאנו כרגע לא יתאפשר. לכן לא אפרט את כל המסקנות שניתן להסיק מתוצאה מעניינת זו. למרות זאת, מגבול זה ניתן ללמוד שככל ששיעור ההפחתה מ־p קרוב לשיעור הגדילה של r (כלומר, ככל ש־a מתקרב ל־1) יחד עם שיעורי הפחתה וגדילה של q ו־s בעלי יחס לינארי להפחתה של r, היחס R לא יקטן בצורה משמעותית.

לאחר שלמדנו על מידת ההשפעה של הגדלת s, נבחן את מידת ההשפעה של הגדלת הסיכוי לחזור מווסת לא קבועה לווסת קבועה על ידי אורך מחזור זהה לאורך הווסת הקבועה שנעקרה.

$$\lim_{\{s,q,h\}\to\{ah,1-h,0\}} x_2 = (1-p-r)(1-p)(1-p+r) = (1-p)((1-p)^2-r^2)$$

הנתון $p+r<1$ גורר $0<(1-p)((1-p)^2-r^2)<1$ ויוצא ש־ $3<\lim_{\{s,q,h\}\to\{ah,1-h,0\}} R<\infty$.

המשמעות של תוצאה זו היא שככל שההסתברות לעבור ממצב של וסת שאינה קבועה חזרה לווסת האחרונה שנקבעה גבוהה יותר, היחס בין מספר מחזורי הווסת של אישה בווסת קבועה למספר המחזורים בווסת שאינה קבועה יהיה גדול מ־3. תוצאה זו הגיונית אך לא תואמת מעשית את המודל שאנו רוצים לבנות, מפני שצריך לייחס להסתברות זו ערך נמוך מהערך למעבר ממצב של וסת לא קבועה ללא רצף למצב של וסת לא קבועה עם רצף (כי למעבר כזה חוששים מבחינה הלכתית ולמעבר הנידון לא חוששים), כלומר נדרש $q < s$.

אני בוחר שלא להציג את תוצאות ההשאפה של זוגות הפרמטרים ל־0, מפני שמצבים אלו אינם סבירים, ולמעשה הגבולות שהצגנו מספיקים להסקת מסקנות ברורה: מידת ההשפעה של ההסתברויות p ו־r על המערכת גדולה ממידת ההשפעה של s. כלומר

הגדלים של הסתברויות המעבר ממצב של וסת קבוע לעצמו (p) ולסטייה חוזרת מווסת קבוע (r) משפיעים יותר מגודל הסתברות המעבר למצב ללא וסת קבועה וללא רצף של מחזורי וסת זהים (s) על היחס של כמות מחזורי הווסת שבהם תהיה אישה בווסת קבועה ביחס לכמות מחזורי הווסת שבהם תהיה ללא וסת קבועה.

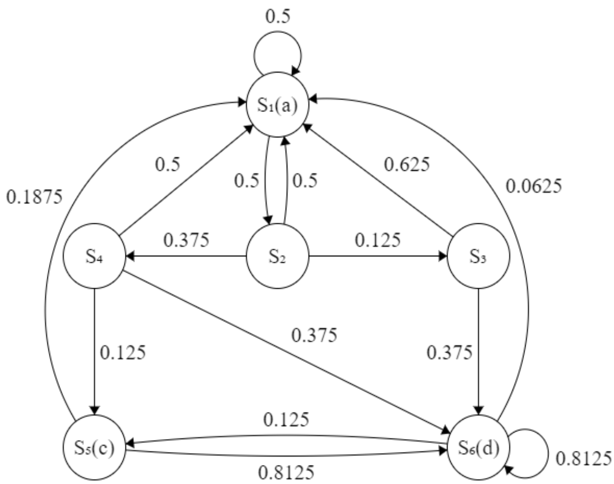
ו. הצבת נתונים

החשש למחזור וסת באורך זהה לאורך הווסת הקבועה גדול מהחשש לסטייה חוזרת ממנו ולכן $r < p$. החשש בווסת קבועה לראייה באורך הקביעות חזק מאוד, אך איני יודע כיצד נכון לבצע השוואה לסיכוי שתהיה סטייה ממנו, לכן בהצבת הנתונים נבחר לתת לשתי האפשרויות משקל זהה. כלומר $p = 0.5$. חשוב לי לציין שנראה שערך זה נמוך מהערך שחז"ל ייחסו לסיכוי זה בפועל. מפני שבהלכות פרישה סמוך לווסת רואים שמלבד החשש ליום ההפלגה (אורך מחזור זהה), יש חשש גם ליום החודש (תאריך זהה) ולעונה הבינונית (הפרש של שלושים יום), לכן כשננסה לתת יחס בין האפשרות לסטייה חוזרת לסטייה נוספת אך שונה מהסטייה הראשונה, ניתן משקל רב יותר לסטייה באורך השונה. מצד שני, בהלכות וסתות ניתן למצוא התייחסות ל"אישה שמשנית את וסתה", כלומר הקביעות שלה נשמרת אך אורך המחזור הקבוע משתנה. לכן, מצד שני יש לתת משקל רב יותר לאפשרות שתהיה סטייה זהה ביחס לשאר ימי החשש שנזכרו בהלכות פרישה סמוך לווסת. לצורך הצבת הנתונים נבחר $1 - p - r = 3r$, ולכן $r = 0.125$.

מבחינה הלכתית, החשש לווסת באורך זהה כאשר אין וסת קבועה זהה לחשש שתהיה סטייה חוזרת במהלך וסת קבועה. מפני שהיחס ההלכתי זהה, נניח ש־ $1 - q - s = r$ ולכן $q = 1 - s - r$. בווסת לא קבועה, חוששים לאורך מחזור זהה לקודם, ולא חוששים לאורך מחזור זהה לאורך הווסת הקבועה האחרונה, ולכן $1 - s - r < r$ ולאחר העברת אגפים $1 - 2r < s$. לאחר הצבת $r = 0.125$ נקבל ש־ $0.75 < s$. מפני ש־ $r + s < 1$ יוצא $0.75 < s < 0.875$. לצורך הצבת הנתונים נבחר את הערך הממוצע $s = 0.8125$.

נשים לב שההסתברות לסטייה מווסת קבועה $(1 - p)$ אמורה להיות קטנה מההסתברות לאורך מחזור וסת שונה במצב של וסת לא קבועה (s). יוצא מכך ש־ $p + s > 1$. בהתאמה לנתונים שבחרנו: $0.5 + 0.8125 > 1$.

לאחר הצבת הנתונים, תרשים המצבים עם הסתברויות מותאמות למעברים ייראה כך:



ומטריצת המעברים תיראה כך:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.125 & 0.375 & 0 & 0 \\ 0.625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.375 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.125 & 0.375 \\ 0.1875 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8125 \\ 0.0625 & 0 & 0 & 0 & 0.125 & 0.8125 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

בנספח "מציאת התפלגות סטציונרית לאחר הצבת נתונים" מוצג התהליך של מציאת ההתפלגות הסטציונרית באמצעות לכסון מטריצת המעברים.

הווקטור המייצג את ההתפלגות הסטציונרית יהיה

$$\vec{\pi} \approx \begin{pmatrix} 0.308 \\ 0.154 \\ 0.019 \\ 0.058 \\ 0.058 \\ 0.404 \end{pmatrix}$$

כעת נוכל לחשב את היחס בין סכום ארבעת איבריו הראשונים של הווקטור לבין סכום שני איבריו האחרונים של הווקטור:

$$\frac{x_1}{x_2} \approx \frac{0.308 + 0.154 + 0.019 + 0.058}{0.058 + 0.404} = \frac{0.539}{0.461} = \frac{7}{6} = 1.1\overline{66}$$

המשמעות של תוצאה זו היא שלאורך זמן, על כל שישה מחזורי וסת שאישה תהיה בהם ללא וסת הפלגה קבועה, יהיו שבעה מחזורי וסת שתהיה לאישה וסת קבועה.

ז. הסקת מסקנות

במאמר זה הצגנו מערכת מצבים מרקובית המדמה תופעות הקשורות לווסת ההפלגה. בבניית המערכת התחשבנו בכמה הלכות מהלכות פרישה סמוך לווסת ומהלכות וסתות. למרות הניסיון לבנות מערכת שמתחשבת בהלכות מרובות, חשוב לציין שבמסגרת מחקר זה לא התאפשר להתחשב בכל ההלכות הרלוונטיות העשויות להשפיע על המודל (לדוגמה המחלוקת לגבי קביעת וסת בתוך וסת). מפני שהתחשבנו בגורמים המרכזיים, לעניות דעתי בהתמקדות על השפעת הפרמטר של אורך מחזור הווסת, ללא התחשבות בגורמים כמו היריון ולידה, פעילויות גופניות, תזונה, מצבי לחץ וכדומה, המערכת שנבנתה מייצגת בצורה טובה את גישת חז"ל להסברת וסת ההפלגה.

בעזרת מציאת התפלגות סטציונרית של המערכת הצלחנו למצוא ביטוי מפורש ליחס בין מספר מחזורי הווסת שבהם אישה צפויה להיות בעלת וסת קבועה לבין מספר מחזורי הווסת שבהם אישה צפויה להיות בעלת וסת לא קבועה.

ביצענו בחינה של מידת ההשפעה של הפרמטרים המסמלים את ההסתברויות למעברים בין מצבי המערכת. מבדיקה זו עולה שמידת ההשפעה של הסיכויים להישאר במצב של וסת קבועה על היחס הנחקר, גדולה מזו של הסיכויים להישאר במצב של וסת לא קבועה. לכן סביר שהיחס הנחקר יהיה גדול מ־1.

לצורך המחשת תוצאות המחקר, ביצענו הצבת נתונים סבירה והגענו לתוצאה שאכן במרבית הזמן צפויה אישה להיות בעלת וסת קבועה (7:6). בעזרת הנחות דומות, כדי להגיע למצב שבו היחס יהיה שווה בקירוב ל־1, יש להציב ב־p את הערך 0.43 וב־s את הערך 0.786. למעשה, סביר יותר להניח שחז"ל ייחסו סיכוי גבוה מ־0.5 ל־p, ולכן סביר שיצופה שהיחס הנחקר יהיה גדול מהתוצאה שקיבלנו בהצבת הנתונים בצורה משמעותית.

למסקנה, בעזרת מחקר זה ניתן להבין טוב יותר מדוע קבעו חז"ל ש"רוב הנשים יש להן וסתות לראות כל אחת לפי זמנה" ולחזק את עמדתם. והיה זה שכרנו.

ח. נספחים

נספח א: פונקציית מספר מצבי מערכת

נסמן ב־x את גודל הטווח עבור אורכי וסתות אפשריים. למערכת יהיו x מצבי וסת קבועה עבור כל אורך אפשרי. עבור מצב וסת קבועה יותאמו $x-1$ מצבי סטייה מהווסת, בסה"כ $x*(x-1)$ מצבים. עבור כל אחד ממצבי הסטייה יותאם מספר זהה של סטיות חוזרות (באורך זהה לסטייה הראשונה) ועוד $x-2$ אפשרויות סטייה שונות, בסה"כ $x*(x-1)+x*(x-1)*(x-2)$ ולאחר הוצאת גורם משותף $x*(x-1)^2$.

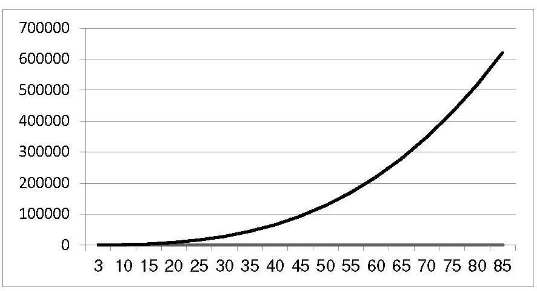
בווסת לא קבועה יהיו $x-1$ מצבים עבור רצפים של שני מחזורי וסת זהים ו־ $x-1$ מצבים למקרים שבהם מחזור הווסת האחרון שונה מקודמו, בסה"כ $2x*(x-1)$.

לאחר חיבור כל המצבים לפונקציית סכום מצבים נקבל:

$$f(x)=x+x(x-1)+x(x-1)^2+2x*(x-1)$$
$$=x\big(1+(x-1)*(1+x-1+2)\big)=x(x^2+x-1)$$

טבלת ערכים של הפונקציה וגרף להמחשה:

גודל טווח וסתות	מספר מצבים
3	33
10	1,090
15	3,585
20	8,380
25	16,225
30	27,870
35	44,065
40	65,560
45	93,105
50	127,450
55	169,345
60	219,540
65	278,785
70	347,830
75	427,425
80	518,320
85	621,265



נספח ב: חישובים למציאת התפלגות סטציונרית

$$(\pi P)^T = P^T\pi^T = \pi$$

$$\begin{pmatrix} p & p & p+r & p & 1-s & q \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p-r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 & 1-q-s \\ 0 & 0 & 1-p-r & 1-p-r & s & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \end{pmatrix}$$

לאחר הכפלת המטריצה בווקטור נקבל מערכת משוואות:

$$\begin{cases} p\pi_1 + p\pi_2 + (p+r)\pi_3 + p\pi_4 + (1-s)\pi_5 + q\pi_6 & = & \pi_1 \\ (1-p)\pi_1 & = & \pi_2 \\ r\pi_2 & = & \pi_3 \\ (1-p-r)\pi_2 & = & \pi_4 \\ r\pi_4 + (1-q-s)\pi_6 & = & \pi_5 \\ (1-p-r)(\pi_3+\pi_4) + s(\pi_5+\pi_6) & = & \pi_6 \end{cases}$$

כדי לקבל התפלגות סטציונרית, ניתן לבחור אחת מהמשוואות להחלפה במשוואה $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1$, נבצע את ההחלפה עם שורה מספר 1. בנוסף, נציג את π_3 ו-π_4 כביטויים התלויים ב-π_1.

$$\begin{cases} \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 & = & 1 \\ (1-p)\pi_1 & = & \pi_2 \\ r(1-p)\pi_1 & = & \pi_3 \\ (1-p-r)(1-p)\pi_1 & = & \pi_4 \\ r(1-p-r)(1-p)\pi_1 + (1-q-s)\pi_6 & = & \pi_5 \\ (1-p-r)(\pi_3+\pi_4) + s(\pi_5+\pi_6) & = & \pi_6 \end{cases}$$

במשוואה השישית נציב עבור $\pi_3 + \pi_4$ ביטוי התלוי ב-π_1 ונעביר מאגף שמאל את $s\pi_6$ לאגף ימין.

$$\begin{cases} \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5+\pi_6 & = & 1 \\ (1-p)\pi_1 & = & \pi_2 \\ r(1-p)\pi_1 & = & \pi_3 \\ (1-p-r)(1-p)\pi_1 & = & \pi_4 \\ r(1-p-r)(1-p)\pi_1+(1-q-s)\pi_6 & = & \pi_5 \\ (1-p-r)(1-p)^2\pi_1+s\pi_5 & = & (1-s)\pi_6 \end{cases}$$

במשוואה השישית נציב את π_5.

$$\begin{cases} \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5+\pi_6 & = & 1 \\ (1-p)\pi_1 & = & \pi_2 \\ r(1-p)\pi_1 & = & \pi_3 \\ (1-p-r)(1-p)\pi_1 & = & \pi_4 \\ r(1-p-r)(1-p)\pi_1+(1-q-s)\pi_6 & = & \pi_5 \\ (1-p-r)(1-p)^2\pi_1+s(r(1-p-r)(1-p)\pi_1+(1-q-s)\pi_6) & = & (1-s)\pi_6 \end{cases}$$

במשוואה השישית נעביר מאגף שמאל את הביטוי המכפיל את π_6 לאגף ימין.

$$\begin{cases} \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5+\pi_6 & = & 1 \\ (1-p)\pi_1 & = & \pi_2 \\ r(1-p)\pi_1 & = & \pi_3 \\ (1-p-r)(1-p)\pi_1 & = & \pi_4 \\ r(1-p-r)(1-p)\pi_1+(1-q-s)\pi_6 & = & \pi_5 \\ (1-p-r)(1-p)^2\pi_1+sr(1-p-r)(1-p)\pi_1 & = & (1-2s+s^2+qs)\pi_6 \end{cases}$$

במשוואה השישית נוציא גורם משותף $(1-p-r)(1-p)\pi_1$ ונחלק בביטוי הכופל את π_6. לאחר מכן נציב במשוואה החמישית את π_6.

$$\begin{cases} \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5+\pi_6 & = & 1 \\ (1-p)\pi_1 & = & \pi_2 \\ r(1-p)\pi_1 & = & \pi_3 \\ (1-p-r)(1-p)\pi_1 & = & \pi_4 \\ r(1-p-r)(1-p)\pi_1+(1-q-s)\dfrac{(1-p-r)(1-p)\pi_1(1-p+sr)}{(1-s)^2+qs} & = & \pi_5 \\ \dfrac{(1-p-r)(1-p)\pi_1(1-p+sr)}{(1-s)^2+qs} & = & \pi_6 \end{cases}$$

במשוואה החמישית נוציא גורם משותף $(1-p-r)(1-p)\pi_1$.

$$\begin{cases} \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5+\pi_6 & = & 1 \\ (1-p)\pi_1 & = & \pi_2 \\ r(1-p)\pi_1 & = & \pi_3 \\ (1-p-r)(1-p)\pi_1 & = & \pi_4 \\ (1-p-r)(1-p)\pi_1\left(r+\dfrac{(1-q-s)(1-p+sr)}{(1-s)^2+qs}\right) & = & \pi_5 \\ \dfrac{(1-p-r)(1-p)\pi_1(1-p+sr)}{(1-s)^2+qs} & = & \pi_6 \end{cases}$$

כעת נוכל לבטא בצורה כללית את π:

$$\pi=\begin{pmatrix}\pi_1\\ \pi_2\\ \pi_3\\ \pi_4\\ \pi_5\\ \pi_6\end{pmatrix}=\pi_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1-p \\ r(1-p) \\ (1-p-r)(1-p) \\ (1-p-r)(1-p)\left(r+\dfrac{(1-q-s)(1-p+sr)}{(1-s)^2+qs}\right) \\ \dfrac{(1-p-r)(1-p)(1-p+sr)}{(1-s)^2+qs}\end{pmatrix}$$

נספח ג: מציאת התפלגות סטציונרית לאחר הצבת נתונים

הפולינום האופייני של המטריצה:

$$\lambda(\lambda-1)\left(\lambda^4-\frac{5}{16}\lambda^3-\frac{33}{128}\lambda^2-\frac{35}{256}\lambda-\frac{7}{512}\right)$$

נוסף על שני הערכים העצמיים שמצאנו לעיל, לפולינום זה יש ארבעה ערכים עצמיים שניתן למצוא בצורה נומרית, נסדרם במטריצה אלכסונית עם ערכים מקורבים:

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -0.12243 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.83804 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.20156-0.30436i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.20156+0.30436i \end{pmatrix}$$

את הווקטורים העצמיים נסדר במטריצת מעברי בסיסים:

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.817 & 0 & -14.451+8.771i & -14.451-8.771i\\ 0 & 1 & -1.017 & 0 & 25.616-3.5105i & 25.616+3.5105i\\ -3 & 1 & -7.234 & 0 & 0.573-28.064i & 0.573+28.064i\\ 1 & 1 & 1.654 & 0.83804 & 2.460-21.244i & 2.460+21.244i\\ 0 & 1 & -1.888 & 0 & -0.887-6.821i & -0.887+6.821i\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ונחשב מטריצה הופכית:

$$S^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.25 & 0.25 & 0.25 & -0.25\\ 0.308 & 0.154 & 0.019 & 0.058 & 0.058 & 0.404\\ 0.002 & -0.009 & 0.009 & 0.028 & -0.117 & 0.869\\ -0.292 & -0.174 & -0.026 & -0.078 & 0.064 & 0.506\\ -0.009-0.007i & 0.015-0.005i & -0.001+0.005i & -0.004+0.016i & -0.002-0.002i & 0.002-0.006i\\ -0.009+0.007i & 0.015+0.005i1 & -0.001-0.005i & -0.004-0.016i & -0.002+0.002i & 0.002+0.006i \end{pmatrix}$$

כעת נוכל לחשב את $\lim_{n\to\infty} P^n$ בצורה מפורשת:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = S * \lim_{n\to\infty} J^n * S^{-1} = S\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.308 & 0.154 & 0.019 & 0.058 & 0.058 & 0.404\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} P^n = S^{-1} * \lim_{n\to\infty} J^n * S = \begin{pmatrix} 0.308 & 0.154 & 0.019 & 0.058 & 0.058 & 0.404 \\ 0.308 & 0.154 & 0.019 & 0.058 & 0.058 & 0.404 \\ 0.308 & 0.154 & 0.019 & 0.058 & 0.058 & 0.404 \\ 0.308 & 0.154 & 0.019 & 0.058 & 0.058 & 0.404 \\ 0.308 & 0.154 & 0.019 & 0.058 & 0.058 & 0.404 \\ 0.308 & 0.154 & 0.019 & 0.058 & 0.058 & 0.404 \end{pmatrix}$$

כלומר, הווקטור המייצג את ההתפלגות הסטציונרית יהיה

$$\vec{\pi} \approx \begin{pmatrix} 0.308 \\ 0.154 \\ 0.019 \\ 0.058 \\ 0.058 \\ 0.404 \end{pmatrix}$$

Markov Chain for the 'Interval Menstruation'

Dvir Ross

In this article, we will present a Markovian states system which simulates phenomena related to the 'interval menstruation' under certain assumptions. The purpose of the study is to examine the likelihood of a woman who had a consistent 'interval menstruation' to remain in a similar condition over time. The method of research is finding the stationary distribution of the system and proving its convergence.