תרגול מכפלים ומחלקים

נושאי תרגול:

חלק 1:

- מכפל מערך מקבילי
- מכפל טורי/מקבילי – מספרים לא מסומנים
- מכפל טורי/מקבילי – מספרים מסומנים

חלק 2:

- מחלק שלמים
- מחלק שברים

תזכורת: תוצאת כפל של 2 מספרים בני m סיביות, תוצאתה היא לכל היותר

$$(2^m-1)^2 = 2^{2m} - 2^{m+1} + 1 \le 2^{2m} - 1$$

מכפל מערך מקבילי

בדומה לכפל ארוך רגיל (שלמדנו ביסודי):

$$\times\begin{cases}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{cases}$$

$$+\begin{cases} & & & 1 & 0 & 1\\ & & 1 & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & 1 & & \end{cases}$$

$$1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$$

נממש מכפל טורי מקבילי, ע"י מספר בלוקים זהים:

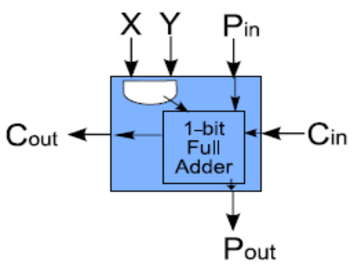
בלוק זה הינו הרכיב הבסיסי במכפל טורי מקבילי, מכפיל בין שני ביטים

$P_{OUT} = (P_{in}+X_iY_j+C_{in})\ MOD\ b$

$C_{OUT} = (P_{in}+X_iY_j+C_{in})\ DIV\ b$

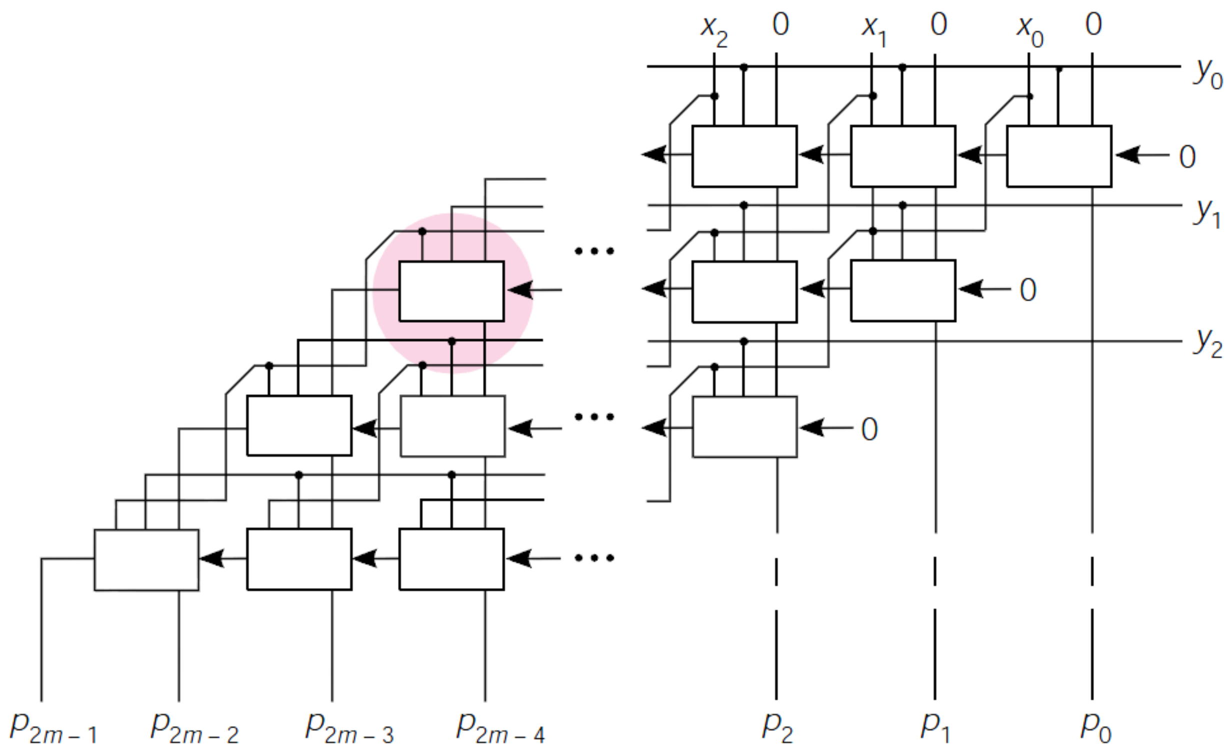
$P_{OUT} = P_{in}$ **xor** X_iY_j **xor** C_{in}

$C_{OUT} = P_{in}C_{in} + X_iY_j(P_{in}+C_{in})$



הרכיב הינו פשוט ביותר ובעצם מורכב מ FAומשער AND :

מימוש המכפל



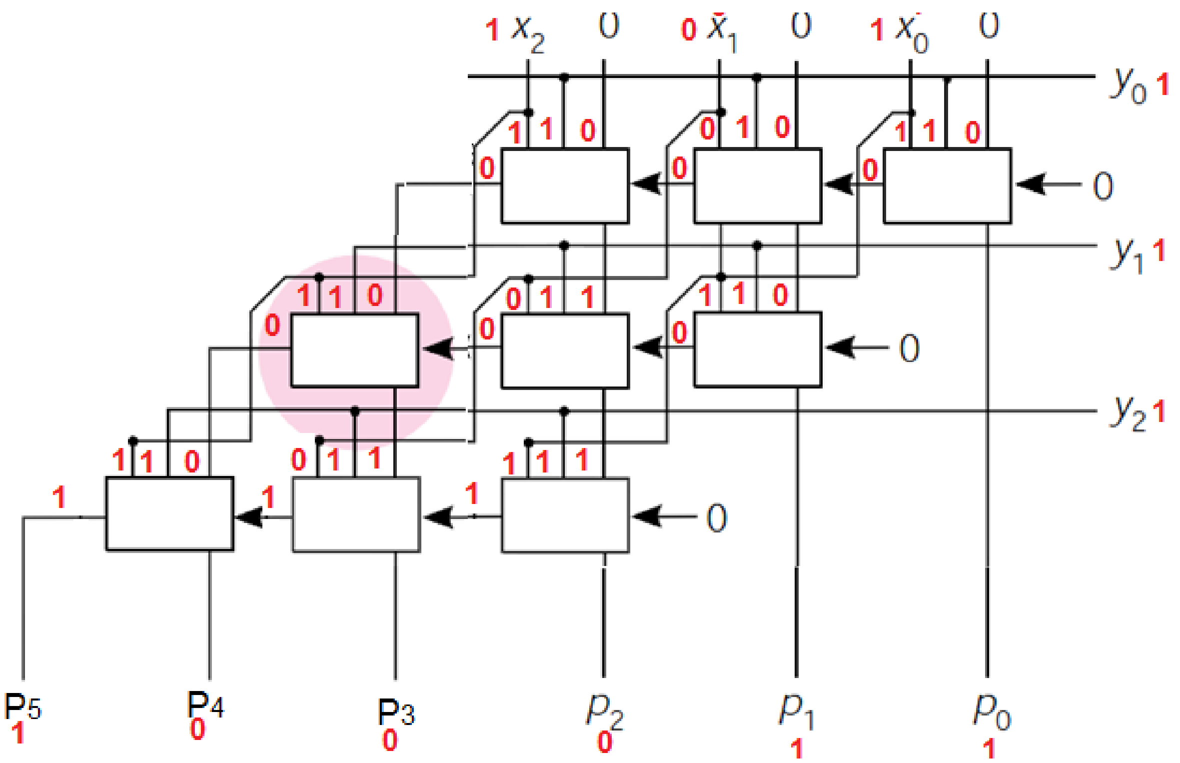
השהיית מערכת:

$$T = \underbrace{\Delta}_{and} + \underbrace{4\Delta(m-1)}_{all\ \ other\ \ levels} + \underbrace{2m\Delta}_{first\ \ level} = (6m-3)\Delta$$

ביצוע במקביל של שער AND הנמצא בכל אחד מהמודולים

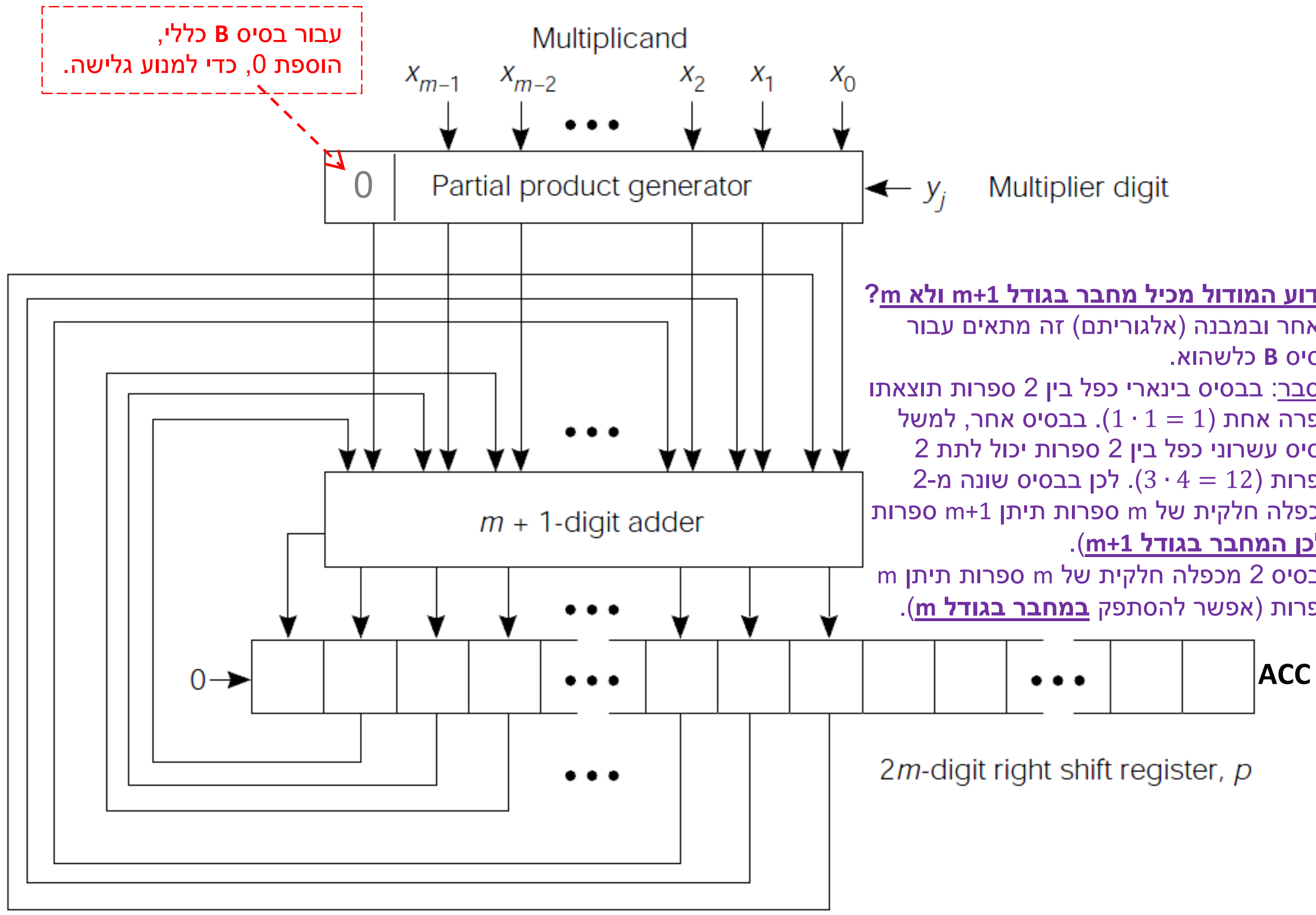
בכל שורה נוספת, חוץ מהשורה הראשונה(יש m-1 שורות כאלו) אנו זקוקים להמתנה טורית של 2 יח' FA עבור סיביות MSB ואחת לפניה.

מעבר טורי דרך m מודולים של FA הנמצאים בשורה הראשונה. השהיית FA אחד היא 2Δ



מכפל טורי/מקבילי (מספרים לא מסומנים)

1. נאתחל את הצובר ACC (2m bits), ב-0.
2. מכפל זה מבוסס על הכפלה/חיבור והזזה של התוצאה הזמנית בכל פעם .



מדוע המודול מכיל מחבר בגודל m+1 ולא m?
מאחר ובמבנה (אלגוריתם) זה מתאים עבור בסיס **B** כלשהוא.
הסבר: בבסיס בינארי כפל בין 2 ספרות תוצאתו ספרה אחת ($1 \cdot 1 = 1$). בבסיס אחר, למשל בסיס עשרוני כפל בין 2 ספרות יכול לתת 2 ספרות ($3 \cdot 4 = 12$). לכן בבסיס שונה מ-2 מכפלה חלקית של m ספרות תיתן m+1 ספרות (**לכן המחבר בגודל m+1**).
בבסיס 2 מכפלה חלקית של m ספרות תיתן m ספרות (אפשר להסתפק **במחבר בגודל m**).

<u>סדר פעולות (m פעמים)</u>:

1. הכפלה חלקית $(PP_i \overset{def}{=} Parcial\ Product\ i)$
2. חיבור בין ACC לבין PP_i
3. הזזה ימינה של רגיסטר ACC.

<u>דוגמא</u>:

<table>
<tr><td>initialization
ACC0 = 0x00</td><td>$11 \times 6 = \times \begin{cases} 1\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 1\ 1\ 0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>+ PP_0
= $temp$</td><td>0|0 0 0 0
0|0 0 0 0</td></tr>
<tr><td>ACC=rra temp
+ PP_1</td><td>0 0 0 0|0
0|1 0 1 1|</td></tr>
<tr><td>= $temp$
ACC=rra temp
+ PP_2</td><td>0|1 0 1 1|0
0|0 1 0 1|1 0
0|1 0 1 1|</td></tr>
<tr><td>= $temp$
ACC=rra temp
+ PP_3</td><td>1|0 0 0 0|1 0
0|1 0 0 0|0 1 0
0|0 0 0 0|</td></tr>
<tr><td>= $temp$
ACC=rra temp</td><td>|1 0 0 0|0 1 0
|0 1 0 0|0 0 1 0</td></tr>
</table>

<u>השהיית מערכת</u>:

$$T = \left(\underbrace{\Delta}_{pp_j} + \underbrace{2\Delta(m+1)}_{addition} \right) m$$

m ביטים של המכפלה

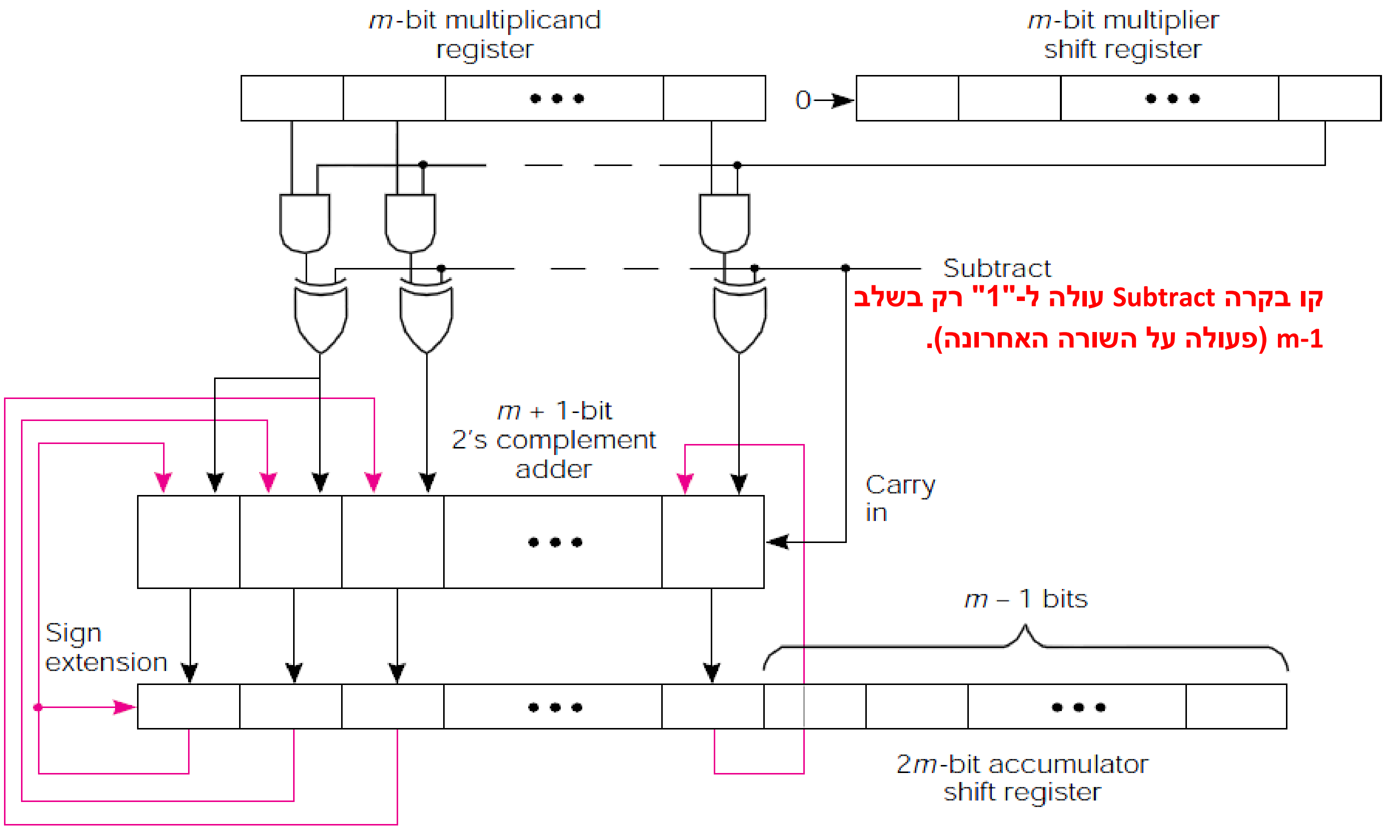
מכפלה חלקית,
ביצוע **במקביל** של
m שערי AND.

חיבור בצורה טורית (FA) של m+1 ביטים.
השהיית FA אחד היא 2Δ

<u>מכפל טורי/מקבילי(מספרים מסומנים)</u>

החישוב מתבצע באופן דומה ל"מכפל למספרים לא מסומנים" , מלבד העובדות השינויים של:

- הרחבת סימן למספרים.
- הביט האחרון מוחסר ולא מחובר (חיבור עם המשלים ל-2 של המכפלה החלקית עבור הביט האחרון).



קו בקרה Subtract עולה ל-"1" רק בשלב m-1 (פעולה על השורה האחרונה).

בס"ד

סדר פעולות (m פעמים):

1. הכפלה חלקית (PP_i) + הרחבת סימן.
2. חיבור בין ACC לבין PP_i.
3. הזזה ימינה של רגיסטר ACC עם סיבית סימן.

★ על המכפלה חלקית האחרונה נבצע משלים ל-2.
את ה-ACC האחרון לא נזיז ימינה.

דוגמא 1 :

initialization **ACC = 0x00**		$(-3)\times(-1)=\times\begin{cases}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{cases}$
מכפלה חלקית + PP_0 הרחבת סימן.	PP_0	$1\vert 1\ \ 0\ \ 1$
$temp = PP_0 + ACC$	$temp$	$1\vert 1\ \ 0\ \ 1$
הזזה ימינה עם סימן.	ACC	$1\vert 1\ \ 1\ \ 0\vert 1$
מכפלה חלקית + PP_1 הרחבת סימן.	PP_1	$1\vert 1\ \ 0\ \ 1\vert$
$temp = PP_1 + ACC$	$temp$	$1\ 1\vert 0\ \ 1\ \ 1\vert 1$
הזזה ימינה עם סימן.	ACC	$1\vert 1\ \ 0\ \ 1\vert 1\ \ 1$
מכפלה חלקית PP_2 + משלים ל-2 +הרחבת סימן.	PP_2	$0\vert 0\ \ 1\ \ 1\vert$
$temp = 2's(PP_2) + ACC = ACC - PP_2$	$temp$	$1\ 0\vert 0\ \ 0\ \ 0\vert 1\ \ 1$
ACC האחרון ללא הזזה.	ACC ללא הזזה	$0\vert 0\ \ 0\ \ 0\vert 1\ \ 1$

m ביטים של המכפלה

השהיית מערכת:

$$T = \left(\underbrace{2\Delta}_{PP_j} + \underbrace{2\Delta(m+1)}_{addition}\right)m$$

מכפלה חלקית, ביצוע **במקביל** של m שערי AND, לאחר מכן התוצאה עוברת דרך שערי XOR ביצוע **במקביל.** השהיית כל שער היא Δ

חיבור בצורה טורית (FA) של m+1 ביטים. השהיית FA אחד היא 2Δ

תזכורת: 2 שיטות למציאת ערך עשרוני **למס' שלילי** המיוצג בשיטת המשלים ל-2.

- מעבר לייצוג חיובי ותרגום למס' עשרוני.
- סיכום ערך עשרוני של M-1 ביטים תחתונים (כל הביטים למעט ספרת MSB) ולחסר ממנו את הערך העשרוני של ביט MSB.

על בסיס עקרון זה עובד מכפל Signed!

דוגמאות לכפל בין שברים (**Signed**) - מיקום נקודת השבר מימין לסיבית ה- MSB

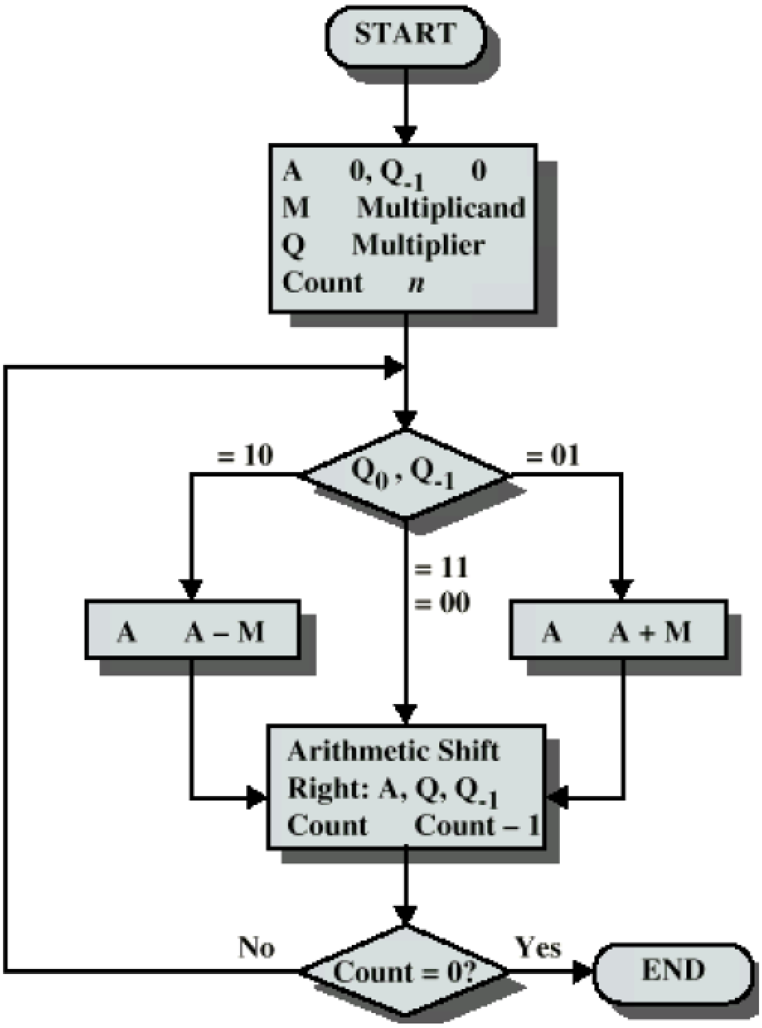
דוגמא 2 - מספר שלילי כפול מספר חיובי :

		$\left(-\frac{5}{8}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)=\times\begin{cases}1. & 0 & 1 & 1\\ 0. & 1 & 1 & 0\end{cases}$
	PP_0	$0\vert 0.\ \ 0\ \ 0\ \ 0$
	$temp$	$0\vert 0.\ \ 0\ \ 0\ \ 0$
	ACC	$\vert 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\vert 0$
	PP_1	$1\vert 1.\ \ 0\ \ 1\ \ 1\vert$
	$temp$	$1\vert 1.\ \ 0\ \ 1\ \ 1\vert 0$
	ACC	$1\vert 1.\ \ 1\ \ 0\ \ 1\vert 1\ \ 0$
	PP_2	$1\vert 1.\ \ 0\ \ 1\ \ 1\vert$
	$temp$	$1\vert 1.\ \ 0\ \ 0\ \ 0\vert 1\ \ 0$
	ACC	$1\vert 1.\ \ 1\ \ 0\ \ 0\vert 0\ \ 1\ \ 0$
2’s (PP_3)	PP_3	$0\vert 0.\ \ 0\ \ 0\ \ 0\vert$
	$temp$	$1\vert 1.\ \ 1\ \ 0\ \ 0\vert 0\ \ 1\ \ 0$
	ACC	$1\vert 1.\ \ 1\ \ 0\ \ 0\vert 0\ \ 1\ \ 0 = 2^{-5}+2^{-1}-1=\frac{-15}{32}$

דוגמא 2 - מספר חיובי כפול מספר שלילי :

		$\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{5}{8}\right)=\times\begin{cases}0. & 1 & 1 & 0\\ 1. & 0 & 1 & 1\end{cases}$
	PP_0	$0\vert 0.\ \ 1\ \ 1\ \ 0$
	$temp$	$0\vert 0.\ \ 1\ \ 1\ \ 0$
	ACC	$0\vert 0.\ \ 0\ \ 1\ \ 1\vert 0$
	PP_1	$0\vert 0.\ \ 1\ \ 1\ \ 0\vert$
	$temp$	$0\vert 1.\ \ 0\ \ 0\ \ 1\vert 0$
	ACC	$0\vert 0.\ \ 1\ \ 0\ \ 0\vert 1\ \ 0$
	PP_2	$0\vert 0.\ \ 0\ \ 0\ \ 0\vert$
	$temp$	$0\vert 0.\ \ 1\ \ 0\ \ 0\vert 1\ \ 0$
	ACC	$0\vert 0.\ \ 0\ \ 1\ \ 0\vert 0\ \ 1\ \ 0$
2’s(PP_3)	PP_3	$1\vert 1.\ \ 0\ \ 1\ \ 0\vert$
	$temp =$	$1\vert 1.\ \ 1\ \ 0\ \ 0\vert 0\ \ 1\ \ 0$
	ACC	$1\vert 1.\ \ 1\ \ 0\ \ 0\vert 0\ \ 1\ \ 0 = 2^{-5}+2^{-1}-1=\frac{-15}{32}$

Booth's - signed multiplication algorithm



דוגמה

A	Q	Q_{-1}	M		
0000	0011	0	0111	Initial Values	
1001	0011	0	0111	A A - M	First Cycle
1100	1001	1	0111	Shift	
1110	0100	1	0111	Shift	Second Cycle
0101	0100	1	0111	A A + M	Third Cycle
0010	1010	0	0111	Shift	
$\boxed{0001 \quad 0101}$		0	0111	Shift	Fourth Cycle

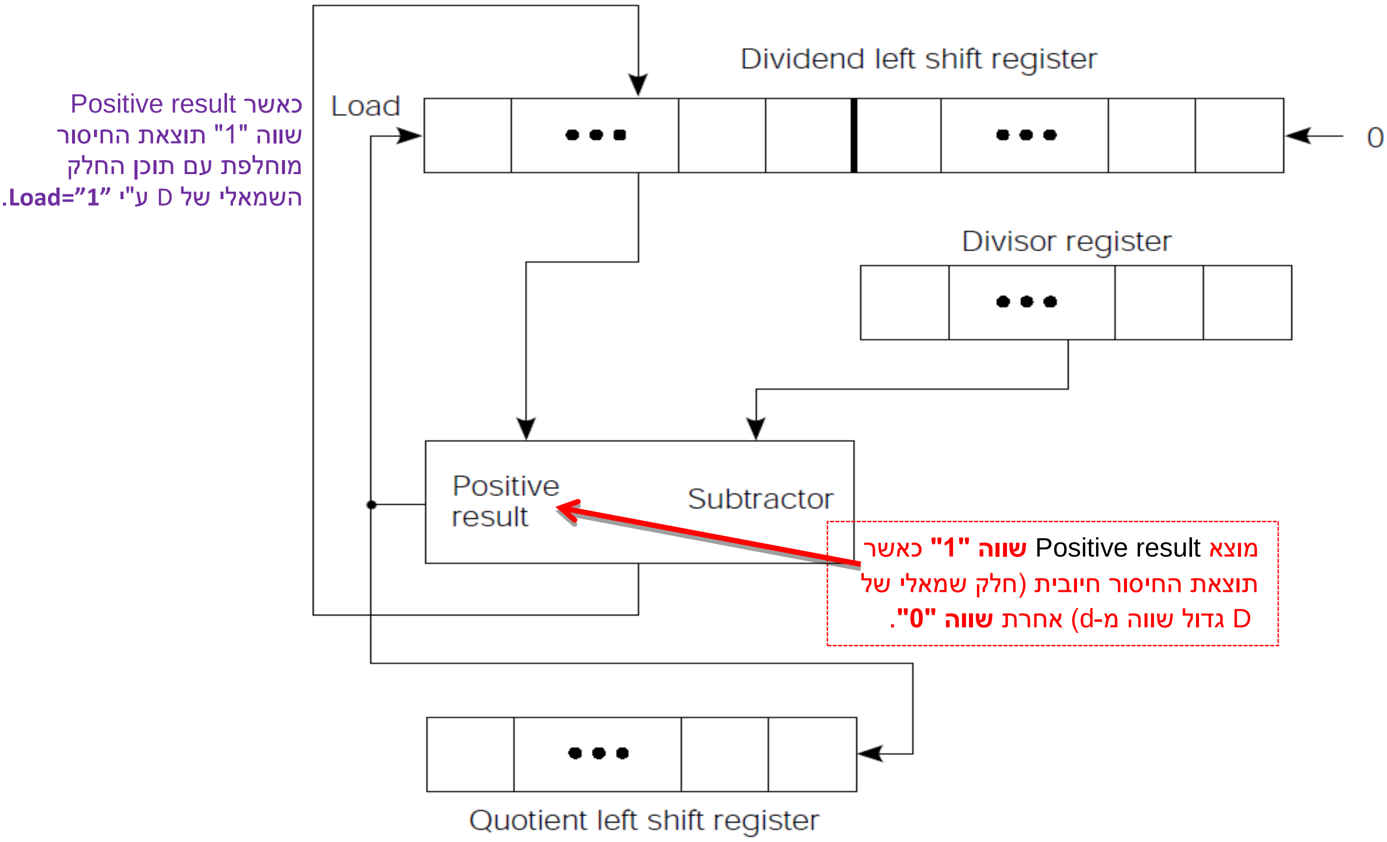
תוצאה סופית ברגיסטר AQ

מחלק שלמים (לא מסומנים Unsigned)

נעסוק בחלוקה של שני מספרים חלוקה של המחולק (D) במחלק (d), ישנן 2 תוצאות , תוצאת החלוקה והשארית.

כאשר מחלקים מחולק בן 2m ביטים במחלק בעל m ביטים , לא תמיד מקבלים תוצאה ושארית בני m ביטים כ״א .

הדוגמא הטובה ביותר הינה חלוקה ב- ״1״.



אלגוריתם חלוקת שלמים:

1. שים את המחולק בחצי התחתון (הימני) של רגיסטר המחולק. שים את במחלק ברגיסטר המחלק.אפס את התוצאה ואת ביט הסופר.
2. הזז את רגיסטר המחולק הזזה אחת שמאלה.
3. אם תוצאת החיסור חיובית , הכנס "1" לרגיסטר התוצאה והחלף את החצי השמאלי (העליון) של המחולק בהפרש.
   אם תוצאת החיסור שלילית הכנס "0" לתוך התוצאה.
4. אם נכנסו פחות מ m ביטים לתוצאת החילוק , חזור ל2.
5. m הביטים ברגיסטר תוצאת החילוק – הם תוצאת החילוק .
   m הביטים בחצי השמאלי של המחולק – הם השארית .

דוגמא 1

$21/6 = /\begin{cases}1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\\0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\end{cases}$ התוצאה הינה 3 ושארית 3.

D d $diff(-)$	$0\ 0\ 0\ 0\ 0 \mid 1\ 0\ 1\ 0\ 1$ $0\ 0\ 1\ 1\ 0 \mid$	
D d $diff(-)$	$0\ 0\ 0\ 0\ 1 \mid 0\ 1\ 0\ 1$ $0\ 0\ 1\ 1\ 0 \mid$	$q=0$
D d $diff(-)$	$0\ 0\ 0\ 1\ 0 \mid 1\ 0\ 1$ $0\ 0\ 1\ 1\ 0 \mid$	$q=00$
D d $diff(-)$	$0\ 0\ 1\ 0\ 1 \mid 0\ 1$ $0\ 0\ 1\ 1\ 0 \mid$	$q=000$
D d $diff(+)$	$0\ 1\ 0\ 1\ 0 \mid 1$ $0\ 0\ 1\ 1\ 0$ $0\ 0\ 1\ 0\ 0 \mid 1$	$q=0001$
D d $diff(+)$	$0\ 1\ 0\ 0\ 1 \mid$ $0\ 0\ 1\ 1\ 0$ $0\ 0\ 0\ 1\ 1 \mid$	$q=00011$

אכן התקבלה תוצאה סופית נכונה : תוצאה 3 ושארית 3 :

$$q\cdot d + r = D$$
$$3\cdot 6 + 3 = 21$$

מחלק שברים (לא מסומנים Unsigned)

- בחילוק בין שברים תוצאת המנה צריכה להיות שבר (שבר מונה > שבר מכנה) אחרת חומרה לא מתאימה ויוצאת הודעת גלישה).
- רמת הדיוק של תוצאת החלוקה נקבעת לפי המונה הגדול ביותר מבין שבר המחולק לשבר המחלק.
- הרגיסטרים של המחלק, מחולק, מנה, שארית כולם שברים (נק' קבועה = Fixed Point).

אלגוריתם חלוקת שברים:

1. שים את המחולק בחצי העליון (השמאלי) של רגיסטר המחולק. שים את במחלק ברגיסטר המחלק.אפס את התוצאה ואת ביט הסופר.
2. אם תוצאת החיסור חיובית, הגדר גלישת חילוק!
3. הזז את רגיסטר המחולק הזזה אחת שמאלה.
4. אם תוצאת החיסור חיובית , הכנס "1" לרגיסטר התוצאה והחלף את החצי השמאלי (העליון) של המחולק בהפרש.
   אם תוצאת החיסור שלילית הכנס "0" לתוך התוצאה.
5. אם נכנסו פחות מ m ביטים לתוצאת החילוק , חזור ל3.
6. m הביטים ברגיסטר תוצאת החילוק– הם תוצאת החילוק (מנה) . הנקודה נמצאת משמאל. $\frac{quotient}{2^m}$
   m הביטים בחצי השמאלי של המחולק – הם השארית . $\frac{remainder}{2^{2m}}$

דוגמא 2

$$\frac{3}{4} / \frac{7}{8} = / \begin{cases} 0. & 1 & 1 & 0 \\ 0. & 1 & 1 & 1 \end{cases}$$ התוצאה הינה 3 ושארית 3.

D d $diff(-)$	$0.\ 1\ 1\ 0 \mid 0\ 0\ 0$ $0.\ 1\ 1\ 1 \mid$	אין גלישה משום שההפרש שלילי. $q=0$
D d $diff(+)$	$1.\ 1\ 0\ 0 \mid 0\ 0$ $0.\ 1\ 1\ 1$ $0.\ 1\ 0\ 1 \mid 0\ 0$	$q=0.1$
D d $diff(+)$	$1.\ 0\ 1\ 0 \mid 0$ $0.\ 1\ 1\ 1$ $0.\ 0\ 1\ 1 \mid 0$	$q=0.11$
D d $diff(-)$	$0.\ 1\ 1\ 0$ $0.\ 1\ 1\ 1$	$q=0.110$

חישוב השארית הינו : $0.\ \underbrace{0\ \ 0\ \ 0}_{m\ \ bits}\ 1\ \ 1\ \ 0 = \frac{3}{32}$

תוצאת החילוק: $q = 0.110 = \frac{3}{4}$

$$q \cdot d + r = D$$

אכן התקבלה תוצאה סופית נכונה : $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{32} = \frac{21}{32} + \frac{3}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$