Комплексни числа. Полета - числови полета и примери за нечислови полета.

Задача 1. *Да се даде определение за комплексно число z, реална и имагинерна части на z, комплексно спрегнато $\overline{z}$ на z и модул $|z|$ на z.*

Доказателство. Ако i е решение на уравнението $x^2 + 1 = 0$, то полиномите $a + bi$ на i от степен ≤ 1 с коефициенти $a, b \in \mathbb{R}$ се наричат комплексни числа. Означаваме с

$$\mathbb{C} = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

множеството на комплексните числа.

Реалната част на $a + bi$ е $\mathrm{Re}(a + bi) = a$, а имагинерната част е $\mathrm{Im}(a + bi) = b$.

Комплексно спрегнатото на $z = a+bi$ е $\overline{z} = a-bi$. Ако $\mathbb{C}$ се отъждестви с равнината $\mathbb{R}^2$, то z и $\overline{z}$ са симетрични относно реалната ос $Ox^{\rightarrow}$.

Произволно комплексно число има $z.\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 \geq 0$ с $z.\overline{z} = 0$ тогава и само тогава, когато $a = b = 0$ и $z = 0$. Неотрицателният реален корен квадратен от $z.\overline{z}$ се нарича модул на z и се бележи с $|z|$, $|z| = \sqrt{z.\overline{z}}^{\geq 0} = \sqrt{a^2 + b^2}^{\geq 0}$. Модулът на конплексно число е разстоянието от $0 \in \mathbb{C}$ до това число.

□

Задача 2. *Да се докаже, че:*

(i) комплексни числа $a_1 + ib_1$ и $a_2 + ib_2$ са равни тогава и само тогава, когато реалните им части $a_1 = a_2$ са равни и имагинерните им части $b_1 = b_2$ са равни;

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ и $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ за произволни комплексни числа $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

$$\text{(iii)} \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \quad \text{и} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

за комплексни числа $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$.

Доказателство. (i) Ако допуснем, че $a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2$ и $b_1 \neq b_2$, то

$$i = \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2} \in \mathbb{R},$$

което е противоречие. Затова от $a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2$ следва $b_1 = b_2$ и $a_1 = a_2$.

(ii) Ако $z_j = a_j + ib_j$ за $1 \leq j \leq 2$ и $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, то

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) =$$
$$= (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Прилагайки съгласуваността на събирането на комплексни числа с комплексното спрягане получаваме, че

$$\overline{z_1} = \overline{(z_1 - z_2) + z_2} = \overline{z_1 - z_2} + \overline{z_2},$$

откъдето

$$\overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{z_1 - z_2}.$$

(iii) Ако $z_j = a_j + ib_j$, за $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq 2$, то

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)} =$$
$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = \overline{z_1}\ \ \overline{z_2}.$$

Прилагаме доказаното тъждество към произведението на $\frac{z_1}{z_2}$ с z_2 и получаваме

$$\overline{z_1} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\overline{z_2},$$

откъдето

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}.$$

□

Задача 3. *(i) Ако $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ са ненулеви комплексни числа в тригонометричен вид, да се пресметне $z_1 z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$.*

(ii) Да се докаже, че ненулеви комплексни числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ в тригонометричен вид са равни тогава и само тогава, когато модулите им $r_1 = r_2$ са равни и аргументите им $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ се различават с цяло кратно на 2π.

Доказателство. (i) От

$$(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

и

$$\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} =$$
$$= \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\quad\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} =$$
$$= \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\quad\frac{\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)}{\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)} =$$
$$= \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos 0 + i\sin 0} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

следва, че

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad \text{и} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

(ii) Ако $r_1 = r_2$ и $\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi$, то

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1[\cos(\varphi_1 + 2k\pi) + i\sin(\varphi_1 + 2k\pi)] = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = z_1$$

поради 2π-периодичността на $\cos x$ и $\sin x$.

Да допуснем, че комплексните числа $a_1 + ib_1 = z_1 = z_2 = a_2 + ib_2$ са равни. Тогава $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, откъдето $|z_1| = r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}^{>0} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}^{>0} = r_2 = |z_2|$ и точките

$$cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1 = \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|} = cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2 \in S^1 = \{t \in \mathbb{C} \,|\, |t| = 1\}$$

от единичната окръжност съвпадат. Следователно $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$, $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$ и $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi k \in 2\pi\mathbb{Z}$.

$\square$

Задача 4. (Формула на Моавър:) *Ако $z = r(\cos\varphi + isin\varphi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ е ненулево комплексно число в тригонометричен вид, то множеството $\sqrt[n]{z}$ на n-тите корени на z съвпада с множеството*

$$M = \left\{ \sqrt[n]{r}^{>0} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right] \Big| 0 \leq k \leq n-1 \right\}$$

и се състои от n ненулеви комплексни числа. (С $\sqrt[n]{r}^{>0}$ означаваме положителния n-ти корен от $r \in \mathbb{R}^{>0}$.)

Упътване: *Ако*

$$M' := \left\{ \sqrt[n]{r}^{>0} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2m\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2m\pi}{n}\right)\right] \Big| m \in \mathbb{Z} \right\},$$

то проверете, че $M' \subseteq \sqrt[n]{z} \subseteq M' \subseteq M$, откъдето $M = M' = \sqrt[n]{z}$. След това докажете, че множеството M се състои от n различни комплексни числа.

Доказателство. За всяко

$$y = \sqrt[n]{r}^{>0} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2m\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2m\pi}{n}\right)\right] \in M'$$

е в сила

$$y^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z,$$

така че $M' \subset \sqrt[n]{z}$.

Ако $x = s(\cos\psi + i\sin\psi) \in \sqrt[n]{z}$, то $z = x^n = s^n[\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)]$, откъдето $s^n = r$ и $n\psi - \varphi = 2m\pi$ за някое $m \in \mathbb{N}$ и $x \in M'$. Това доказва $\sqrt[n]{z} \subseteq M'$ и $\sqrt[n]{z} = M'$.

Включването $M \subseteq M'$ е ясно. За обратното включване $M' \subseteq M$ делим произволно $m \in \mathbb{Z}$ на n с частно $q \in \mathbb{Z}$ и остатък $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n-1$, така че $m = nq + k$, Тогава

$$\frac{\varphi + 2m\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + 2q\pi,$$

откъдето

$$\sqrt[n]{r}^{>0} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2m\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2m\pi}{n}\right)\right] =$$
$$= \sqrt[n]{r}^{>0} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right] \in M,$$

съгласно 2π-периодичността на $\cos x$ и $\sin x$. Това доказва $M' \subseteq M$ и $\sqrt[n]{z} = M' = M$.

Ако допуснем, че

$$\sqrt[n]{r}^{>0} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{r}^{>0} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2l\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2l\pi}{n}\right)\right]$$

за $0 \leq k < l \leq n-1$, то

$$\left(\frac{\varphi + 2l\pi}{n}\right) - \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \frac{2(l-k)\pi}{n} = 2s\pi$$

за някое $s \in \mathbb{N}$. Следователно n дели $0 < l - k \leq n-1 < n$, което е противоречие, доказващо че $\sqrt[n]{z}$ се състои от n различни комплексни числа.

$\square$

Задача 5. *(а) Да се даде определение за числово поле.*

(б) Да се докаже, че:

(б-1) множеството $\mathbb{N}$ на естествените числа не е числово поле;

(б-2) множеството $\mathbb{Z}$ на целите числа не е числово поле;

(б-3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ е числово поле.

Доказателство. (а) Подмножество $F \subseteq \mathbb{C}$ с поне два елемента е числово поле, ако за произволни $a, b \in F$, $b \neq 0$ е в сила

$$a + b, a - b, ab, \frac{a}{b} \in F.$$

(б-1) Множеството $\mathbb{N}$ на естествените числа е затворено относно събиране и умножение, но не и спрямо изваждане и деление. Например, $1, 2 \in \mathbb{N}$, но $1 - 2 = -1 \not\in \mathbb{N}$ и $\frac{1}{2} \not\in \mathbb{N}$.

(б-2) Множеството $\mathbb{Z}$ на целите числа е затворено относно събиране, изваждане и умножение, но не и спрямо деление. Например, за $1, -2 \in \mathbb{Z}$ е в сила $\frac{1}{(-2)} = -\frac{1}{2} \not\in \mathbb{Z}$.

(б-3) Множеството $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ съдържа поне две различни комплексни числа. За произволни $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ е изпълнено

$$(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

Ако $c + d\sqrt{2} \neq 0$, то

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}}.\frac{c - d\sqrt{2}}{c - d\sqrt{2}} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

защото $c^2 \neq 2d^2$ за $c, d \in \mathbb{Q}$. По-точно, ако разложим числителите и знаменателите на c и d в прости множители и извършим съкращение, то целият степенен показател на 2 в дясната страна на $c^2 = 2d^2$ е нечетен, докато степенният показател на 2 в c^2 е четен. Това доказва $c^2 \neq 2d^2$ за $c, d \in \mathbb{Q}$. С това проверихме, че $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ е затворено относно действията събиране, изваждане, умножение и деление с ненулев елемент, така че $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ е числово поле.

□

Задача 6. *Да се докаже, че:*

(i) множеството $\mathbb{Z}_p$ на остатъците при деление с просто число p е нечислово поле относно операциите събиране $\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}$ и умножение $\overline{a}\overline{b} := \overline{ab}$;

(ii) множеството $\mathbb{Z}_4$ на остатъците при деление с 4 не е поле.

Доказателство. (i) От асоциативността $(a + b) + c = a + (b + c)$ на събирането на цели числа $a, b, c \in \mathbb{Z}$ следва асоциативността на събирането на остатъци

$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a + b} + \overline{c} = \overline{(a + b) + c} = \overline{a + (b + c)} = \overline{a} + \overline{b + c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}).$$

Условието $a + b = b + a$ за $a, b \in \mathbb{Z}$ е достатъчно за

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b} = \overline{b + a} = \overline{b} + \overline{a}.$$

Освен това,

$$\overline{a} + \overline{0} = \overline{a + 0} = \overline{a} \quad \text{и} \quad \overline{a} + \overline{(-a)} = \overline{a + (-a)} = \overline{0}.$$

Аналогично, умножението на остатъци при деление с p има свойствата

$$(\overline{a}\overline{b})\overline{c} = \overline{(ab)}\overline{c} = \overline{(ab)c} = \overline{a(bc)} = \overline{a}\overline{(bc)} = \overline{a}(\overline{b}\overline{c}),$$

$$\overline{a}\overline{b} = \overline{ab} = \overline{ba} = \overline{b}\overline{a},$$

$$\overline{a}\overline{1} = \overline{a.1} = \overline{a}.$$

В сила са дистрибутивни закони за събиране и умножение

$$(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} = \overline{(a+b)}\overline{c} = \overline{(a+b)c} = \overline{ac+bc} = \overline{ac} + \overline{bc} = \overline{a}\,\overline{c} + \overline{b}\,\overline{c} \quad \text{и}$$

$$\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{b} + \overline{c})\overline{a} = \overline{b}\overline{a} + \overline{c}\overline{a}.$$

За обратимостта на ненулев остатък $\overline{a} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{\overline{0}\}$ относно умножението разглеждаме умножението с $\overline{a}$,

$$\mu_{\overline{a}} : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p, \quad \mu_{\overline{a}}(\overline{b}) = \overline{a}\overline{b} \quad \text{за всяко } \overline{b} \in \mathbb{Z}_p.$$

Ако $\overline{a}\overline{b} = \mu_{\overline{a}}(\overline{b}) = \mu_{\overline{a}}(\overline{c}) = \overline{a}\,\overline{c}$, то

$$\overline{0} = \overline{a}\overline{b} - \overline{a}\,\overline{c} = \overline{ab} - \overline{ac} = \overline{ab - ac} = \overline{a(b-c)},$$

откъдето p дели $a(b-c)$. Цялото число a е взаимно просто с p, защото p не дели a. Следователно p дели $b-c$ и $\overline{b} = \overline{c}$. Това доказва инективността на $\mu_{\overline{a}} : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$. В резултат, $\mu_{\overline{a}}(\mathbb{Z}_p)$ се състои от p различни остатъка и $\mu_{\overline{a}}(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$. В частност, съществува $\overline{b} \in \mathbb{Z}_p$ с $\overline{a}\overline{b} = \mu_{\overline{a}}(\overline{b}) = \overline{1}$ и всеки ненулев остатък $\overline{a} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{\overline{0}\}$ е обратим относно умножението. Това доказва, че $\mathbb{Z}_p$ е поле.

Ако допуснем, че $\mathbb{Z}_p$ е числово поле, то полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа се съдържа в $\mathbb{Z}_p$. Това е противоречие, защото $\mathbb{Q}$ е безкрайно поле, а $\mathbb{Z}_p$ има точно p елемента. Следователно полето $\mathbb{Z}_p$ на остатъците при деление на просто число p не е числово.

(ii) Множеството $\mathbb{Z}_4$ на остатъците при деление с 4 не е поле, защото съществува ненулев остатък $\overline{2} \in \mathbb{Z}_4$, който не е обратим относно умножението. Ако допуснем, че съществува $\overline{a} \in \mathbb{Z}_4$ с $\overline{2}\overline{a} = \overline{1}$, то почленното умножение с $\overline{2}$ дава

$$\overline{2} = \overline{2}.\overline{1} = \overline{2}.(\overline{2}.\overline{a}) = (\overline{2}.\overline{2}).\overline{a} = \overline{0}.\overline{a} = \overline{0}.$$

Това е противоречие, доказващо необратимостта на $\overline{2} \in \mathbb{Z}_4$ относно умножението.

$\square$