Упражнение 16-17

Атанас Груев

25.11.2019 и 26.11.2019

1 Кратка теория

1.1 Формула на Тейлър-Пеано

Нека функцията f е дефинирана и n пъти диференцируема в околност на точката a. В сила е ***формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Пеано***:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

при $x \to a$. Тук $o\left((x-a)^n\right)$ е остатъчният член във вид на Пеано - т.нар. "о-малко"[1]. По-точно, в сила е следната зависимост:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Longrightarrow f(x) = o\left(g(x)\right)(x \to a)$$

1.2 Формули на Маклорен

Ако във формулата на Тейлър с остатъчен член във вида на Пеано изберем $a = 0$, то получаваме ***формула на Маклорен***. Формулите на Маклорен за основните елементарни функции, които ще се налага да ползваме често, са следните:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}x^k + o(x^n)$$

[1] Уводните бележки в Глава 2, Параграф 2 ("Намиране на граници на функции") от Ръководството дават добра представа за някои свойства на "о-малко".

Като следствие от Маклореновата формула за $\ln(1+x)$ се получават следните две формули. Първата е резултат от диференциране, а във втората x заменяме с $-x$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

1.3 Важни понятия

Тук ще дадем кратка информация за някои обозначения, които се срещат в задачите и облекчават тяхното решаване.

1. *Главна част* - казваме, че $f(x)$ се държи в околност на т. a като функцията $c(x-a)^n$ и записваме $f(x) \sim c(x-a)^n \ (x \to a)$, ако е изпълнено:

   $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{c(x-a)^n} = 1$$

   Конкретни примери са:

   $$\sin x \sim x \ (x \to 0) \quad \cos x \sim 1 \ (x \to 0) \quad e^x \sim 1 \ (x \to 0) \quad \ln(1+x) \sim x \ (x \to 0)$$

   Ако $f(x) \sim c(x-a)^n \ (x \to a)$, то *главна част* на $f(x)$ е $c(x-a)^n$. Ако $f(x) \sim cx^n \ (x \to \infty)$, то *главна част* на $f(x)$ е cx^n.

2. По време на упражнения е показано как да се развият по Маклорен функциите $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{arctg} x$. Да припомним:

   $$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)$$

   $$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)$$

3. Досега знаем за биномните коефициенти, че:

   $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!},$$

   където $n, k \in \mathbb{Z}$. Тази дефиниция на биномен коефициент може да се разшири до произволно реално n. По-точно, отсега нататък под биномен коефициент ще разбираме *биномната функция*, която дефинираме:

   $$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, & \text{ако } k > 0 \\ 1, & \text{ако } k = 0 \end{cases}$$

2 Задачи

Основните задачи могат да бъдат намерени в Ръководството, Параграф 12. Тук ще разпишем някои задачи оттам, както и задачи от руските ръководства (Демидович, Ляшко). Накрая ще бъде даден пример за подходяща контролна задача.

- Демидович - зад. 1399, - да се намери границата:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x\left(1+x\right)}{x^3}$$

Развиваме e^x и $\sin x$. Тъй като в знаменател седи x^3, достатъчно е да развием до $o\left(x^3\right)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x\left(1+x\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) - x - x^2}{x^3}$$

Сега си мислим за разкриване на скобите по познатия ни начин - умножение "всяко с всяко". Единствената особеност е, че така ще получим едночлени на x от степен, по-голяма от 3 - те не се записват явно, защото $o\left(x^3\right)$ ги съдържа.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \boxed{\dfrac{x^4}{6}} - \dfrac{x^3}{6} - \boxed{\dfrac{x^4}{6}} - \boxed{\dfrac{x^5}{12}} - \boxed{\dfrac{x^6}{36}} + o\left(x^3\right) - x - x^2}{x^3}$$

Оградените едночлени формално не се записват - това тук беше направено с обяснителна цел. По-точно, всички тези изрази са част от "о-малко" и не се пишат, защото са от степен по-голяма от 3. Следователно горната граница е еквивалентна на:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) - x - x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)}{x^3} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^3\right)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Това е търсената граница.

- Демидович - зад. 1406.1 - намерете границата:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sin x\right) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$$

Тук ще използваме, че биномният коефициент има смисъл за всяко реално положително α. Конкретно, изпълнено е, че:

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \;\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad \text{и} \quad \binom{\alpha}{1} = \alpha \;\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad \text{и} \quad \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha\left(\alpha - 1\right)}{2} \;\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Следователно нашата граница е:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sin x\right) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + + \frac{\sin^5 x}{5!} + o\left(sin^5 x\right) - x\left(1 + \left(-x^2\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{x^5}$$

Както имаме право да развием $\sin x$, така имаме право да развием и $\sin(\sin x)$ при $x \to 0$. От друга страна, понеже $\sin x = x + o(x)$, то $o\left(\sin^5 x\right) = o\left(x^5\right)$ (с други думи, тъй като $\sin x \sim x$, то и $o\left(\sin^5 x\right) = o\left(x^5\right)$). Тези съображения ни дават:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + \frac{\sin^5 x}{5!} + o\left(x^3\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)x^4}{2} + o\left(x^4\right)\right)}{x^5}$$

Второто развитие дойде от казаното за биномните коефициенти и развитието на $(1+t)^\alpha$, където $t = -x^2$ и $\alpha = \frac{1}{3}$. Вече сме готови да развием синусите и да пресметнем границата:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x + o(x)\right)^5 - x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{9} + o\left(x^5\right)}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{x^5}{5!} - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^3}{3}} + \frac{x^5}{9} + o\left(x^5\right)}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{6x^5}{360} + \frac{30x^5}{360} + \frac{40x^5}{360} + o\left(x^5\right)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{76x^5 + o\left(x^5\right)}{360x^5} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{19}{90} + \frac{1}{360} \cdot \frac{o\left(x^5\right)}{x^5}\right) = \frac{19}{90}$$

- Учебник на Кудрявцев - задача:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\sqrt[4]{1-x^2} - 4e^{x^3} + \ln\left(1+x^2\right)}{\operatorname{arctg} x - \sin x}$$

Първата ни грижа е с каква точност да развием функциите. Забележете, че понеже $\sin x \sim x$ и $\operatorname{arctg} x \sim x$, необходимо е нещо повече. Тъй като коефициентите в двете развития се различават пред x^3, значи е добра идея да развием до $o\left(x^3\right)$. Постъпваме така и с функциите в числителя. Съобразете например, че $\ln\left(1+x^2\right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right) = x^2 + o\left(x^3\right)$. Като разсъждаваме до $o\left(x^3\right)$, получаваме:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\left(1 + \left(-x^2\right)\right)^{\frac{1}{4}} - 4\left(1 + x^3 + \ o\left(x^3\right)\right) + \left(x^2 + \left(x^3\right)\right)}{\left(x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\left(1 - \frac{x^2}{4} + o\left(x^3\right)\right) - 4 - 4x^3 + x^2 + o\left(x^3\right)}{-\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4 - x^2 - 4 - 4x^3 + x^2 + o\left(x^3\right)}{-\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-4x^3 + o\left(x^3\right)}{-\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-4 + \frac{o\left(x^3\right)}{x^3}}{-\frac{1}{6} + \frac{o\left(x^3\right)}{x^3}} = 24$$

Търсената граница е 24.

Следващите няколко примера са отново оттам - помислете самостоятелно:

  - Да се намери границата:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 + x + x^2\right) + \ln\left(1 - x - x^2\right)}{x \sin x}$$

– Да се намери границата:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$$

– Да се намери границата:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x})+2x^3}{x^5}$$

- Ръководство - зад. 12.1, подточка у) - намерете границата:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}-2x\right)$$

Не можем директно да приложим знанията си за Маклореново развитие, тъй като нямаме функция от изброените по-горе, а и $x\to\infty$. Решението е да изнесем x пред скоби, като това ни дава възможност да развием израза в скобите:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)\overset{t:=\frac{1}{x}}{\Rightarrow}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((1+t)^{\frac{1}{2}}+(1-t)^{\frac{1}{2}}-2\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(1+\frac{t}{2}+\binom{\frac{1}{2}}{2}t^2+1-\frac{t}{2}+\binom{\frac{1}{2}}{2}t^2-2+o\left(t^2\right)\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(2\binom{\frac{1}{2}}{2}t^2+o\left(t^2\right)\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(2\,.\,\frac{\frac{1}{2}\,.\,\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}t^2+o\left(t^2\right)\right)=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{4}t^2+o\left(t^2\right)\right)=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{4}t+\frac{o\left(t^2\right)}{t}\right)=0+0=0$$

Тук използвахме дефиницията на биномната функция. Крайният отговор е 0.

- Ръководство - зад. 12.3, подточка д) - да се покаже, че при $x\to 0$:

$$\text{Главната част на }\left(\operatorname{cotg}x-\frac{1}{x}\right)\text{ е }\left(\frac{x}{3}\right)$$

Задачата ще решим, като проверим, че $\operatorname{cotg}x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}+o(x)$. Това означава да пресметнем следните граници (последната проверете самостоятелно):

$$(*)\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{cotg}x}{\left(\frac{1}{x}\right)}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}=1\Longrightarrow\operatorname{cotg}x\sim\frac{1}{x}$$

$$(**)\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{cotg}x-\frac{1}{x}}{\left(\frac{x}{3}\right)}=3\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}\overset{L}{=}3\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}=$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x+x\cos x}\overset{L}{=}3\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2\cos x+\cos x-x\sin x}=-1\Longrightarrow\operatorname{cotg}x\sim\frac{1}{x}-\frac{x}{3}$$

$$(***)\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{cotg}x-\frac{1}{x}+\frac{x}{3}}{x}=0\Longrightarrow\operatorname{cotg}x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}+o(x)$$

- Ръководство - зад. 12.6, подточка б) - да се намерят константите A, B, за които при $x \to 0$ е изпълнено равенството:

$$\operatorname{tg} x = \frac{x + Ax^3}{1 + Bx^2} + o\left(x^6\right)$$

Първата стъпка е да се освободим от знаменателите. Това става по следния начин:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x + Ax^3}{1 + Bx^2} + o\left(x^6\right) \iff \sin x\left(1 + Bx^2\right) = \cos x\left(x + Ax^3\right) + o\left(x^6\right)$$

На практика умножаваме на кръст. Сега развиваме $\sin x$ и $\cos x$ и сравняваме коефициентите пред съответните степени на x (т.нар. метод на неопределените коефициенти):

$$\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^6\right)\right)\left(1 + Bx^2\right) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o\left(x^6\right)\right)\left(x + Ax^3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + Bx^3 - \frac{x^3}{6} - \frac{Bx^5}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^6\right) = x + Ax^3 - \frac{x^3}{2} - \frac{Ax^5}{2} + \frac{x^5}{24} + o\left(x^6\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \left(B - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{120} - \frac{B}{6}\right)x^5 + o\left(x^6\right) =$$
$$= x + \left(A - \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} - \frac{A}{5}\right)x^5 + o\left(x^6\right)$$

Получаваме системата:

$$\left.\begin{aligned} B - \frac{1}{6} &= A - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{120} - \frac{B}{6} &= \frac{1}{24} - \frac{A}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{15} \text{ и } B = -\frac{2}{5}$$

- Сборник на Кудрявцев, Глава 4 (“Применение производных к исследованию функций”), Параграф 18 (“Формула Тейлора”), зад. 4, подточка 6) - да се развие по Маклорен до $o\left(x^n\right)$:

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 + x - 6}$$

Едно класическо приложение на метода на неопределените коефициенти е за представяне на рационални функции със “сложен” знаменател като сбор от рационални функции с “прости” знаменатели. С други думи, ако знаменателят на рационална функция се явява произведение от линейни и квадратни множители, да запишем същата функция като сбор на дроби със знаменатели точно тези линейни и квадратни множители. В конкретния случай:

$$\frac{3x - 1}{x^2 + x - 6} = \frac{3x - 1}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 3} = \frac{A(x + 3) + B(x - 2)}{x^2 + x - 6}$$

Неизвестните A, B намираме чрез привеждане под общ знаменател и приравняването на коефициентите пред съответните степени на x. Сега имаме:

$$\frac{A(x+3)+B(x-2)}{x^2+x-6} = \frac{(A+B)x+3A-2B}{x^2+x-6} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} A+B=3 \\ \\ 3A-2B=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ \\ B=2 \end{cases}$$

Следователно $f(x)$ се представя като:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+3} = \frac{1}{(-2)\left(1-\frac{x}{2}\right)} + \frac{2}{3\left(1+\frac{x}{3}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{2}\right)^k + \frac{2}{3}\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\left(\frac{x}{3}\right)^l + o(x^n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(-2^{-(k+1)} + 2(-1)^k 3^{-(k+1)}\right)x^k + o(x^n)$$

Тук използвахме формулите на Маклорен, получени след диференциране на двете страни за $\ln(1+x)$, съответно при $-\frac{x}{2}$ и $\frac{x}{3}$.

- Сборник на Кудрявцев, зад. 4, подточка 9) - да се развие по Маклорен до $o(x^n)$ функцията:

$$f(x) = \frac{3x^2+5x-5}{x^2+x-2} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Преди всичко забелязваме, че $P(x)$ (изразът в числител) е от степен, равна на степента на $Q(x)$ (изразът в знаменател). Можем да разделим полиномите, което впоследствие ще опрости крайния вид на развитието по Маклорен. И така, делим $P(x)$ на $Q(x)$:

$$\begin{array}{r} 3 \\ x^2+x-2\overline{\big)\;3x^2+5x-5} \\ \underline{-\,3x^2-3x+6} \\ 2x+1 \end{array}$$

Най-горе се намира частното, което в случая е 3, а най-долу е записан остатъкът при делене - $2x+1$. Получихме, че можем да работим със следното представяне на $f(x)$:

$$f(x) = 3 + \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} = 3 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = 3 + \frac{A(x+2)+B(x-1)}{x^2+x-2}$$

Действаме с метода на неопределените коефициенти:

$$3 + \frac{A(x+2)+B(x-1)}{x^2+x-2} = 3 + \frac{(A+B)x+2A-B}{x^2+x-2} \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ \\ 2A-B=1 \end{cases}$$

Решението на системата е $A = 1, B = 1$. Използваме същата стратегия като в предходната задача:

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = 3 - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} =$$

$$= 3 - \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^l + o(x^n) = 3 - \left(1 + \sum_{k=1}^{n} x^k\right) + \left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{n} (-1)^l \left(\frac{x}{2}\right)^l\right)$$

$$= \frac{5}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k 2^{-(k+1)} - 1\right) x^k + o(x^n)$$

- Задача от Контролна Работа по ДИС 1 (2017 г.) - развийте в ред на Маклорен с точност $o\left(x^4\right)$ функцията:

$$f(x) = \frac{x}{\arcsin x}$$

Потърсете решение чрез развитие на $\arcsin x$ и делене, като тук подреждаме степените във възходящ ред. Възможен е и следният подход:

$$\arcsin(0) = 0$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \arcsin'(x) = 1$$

$$\arcsin''(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \Rightarrow \arcsin''(0) = 0$$

$$\arcsin'''(x) = \frac{2x^2+1}{\sqrt{(1-x^2)^5}} \Rightarrow \arcsin'''(0) = 1$$

$$\arcsin^{(4)}(x) = \frac{3x\left(2x^2+3\right)}{\sqrt{(1-x^2)^7}} \Rightarrow \arcsin^{(4)}(0) = 0$$

$$\arcsin^{(5)}(x) = \frac{24x^4+72x^2+9}{\sqrt{(1-x^2)^9}} \Rightarrow \arcsin^{(5)}(0) = 9$$

Пресмятаме по формулата на Тейлър:

$$\arcsin(x) = \frac{0}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{9}{5!}x^5 + o\left(x^5\right) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right)$$

Следователно:

$$f(x) = \frac{x}{\arcsin x} = \frac{x}{x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + o(x^5)} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + o(x^4)} = \frac{1}{1+y},$$

където $y := \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + o\left(x^4\right)$. Развиваме по познатата формула на Маклорен:

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + o\left(y^2\right) = 1 - \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + o\left(x^4\right)\right) + \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + o\left(x^4\right)\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{3x^4}{40} + \frac{x^2}{6} . \frac{x^2}{6} + o\left(x^4\right) = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{17x^4}{360} + o\left(x^4\right)$$

Забележка: Можем да намерим развитието до $o\left(x^5\right)$ чрез следното оригинално съображение - търсим неизвестните коефициенти в:

$$\arcsin x = x + Ax^3 + Bx^5 + o\left(x^5\right)$$

Ползваме, че $\sin\left(\arcsin x\right) = x$, т.е. можем да заместим:

$$\sin\left(x + Ax^3 + Bx^5 + o\left(x^5\right)\right) = x + o\left(x^5\right)$$

Сега остава само да развием синуса, така че да е изпълнено:

$$\sin\left(x + Ax^3 + Bx^5 + o\left(x^5\right)\right) = x + o\left(x^5\right)$$

Наистина, имаме:

$$\sin\left(x + Ax^3 + Bx^5 + o\left(x^5\right)\right) = \left(x + Ax^3 + Bx^5 + o\left(x^5\right)\right) -$$
$$\frac{1}{6}\left(x + Ax^3 + Bx^5 + o\left(x^5\right)\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x + Ax^3 + Bx^5 + o\left(x^5\right)\right)^5 =$$

$$= x + Ax^3 + Bx^5 - \frac{1}{6}\left(x^3 + 3Ax^5 + o\left(x^5\right)\right) + \frac{1}{120}\left(x^5 + o\left(x^5\right)\right) =$$
$$= x + \left(A - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(B - \frac{1}{2}A + \frac{1}{120}\right)x^5 = x + o\left(x^5\right)$$

Помним, че трябва да получим x, т.е. трябва да изберем A, B такива, че да нулират коефициентите пред x^3 и x^5. От горния запис лесно се вижда, че това налага:

$$\left.\begin{array}{c} A - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{6} \\ B - \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = 0 \Rightarrow B = \frac{3}{40} \end{array}\right\} \Longrightarrow \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o\left(x^5\right)$$

Това спестява пресмятането на производните до 5-ти ред включително.