Определение за линейно пространство, основни свойства и примери. Подпространства и линейна обвивка.

Определение 1. *Непразно множество V е линейно пространство над поле F, ако в него са определени събиране на вектори*

$$V \times V \longrightarrow V, \quad (u,v) \mapsto u+v$$

и умножение на вектор със скалар

$$F \times V \longrightarrow V, \quad (\alpha, u) \mapsto \alpha u,$$

изпълняващи следните свойства:

(i) асоциативност на събирането $(u+v)+w = u+(v+w)$ за всички $u,v,w \in V$;

(ii) комутативност на събирането $u+v = v+u$ за всички $u,v \in V$;

(iii) съществуване на нулев вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$, така че $\overrightarrow{\mathcal{O}} + u = u$ за всяко $u \in V$;

(iv) съществуване на противоположен вектор $-u \in V$ за всеки вектор $u \in V$, така че $u + (-u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$;

(v) дистрибутивен закон над скаларен множител $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$ за произволни $\alpha, \beta \in F$, $u \in V$;

(vi) дистрибутивен закон над векторен множител $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ за произволни $\alpha \in F$, $u,v \in V$;

(vii) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ за произволни $\alpha, \beta \in F$, $u \in V$;

(viii) $1.u = u$ за произволен вектор $u \in V$ и единицата 1 на F.

Например, множеството F^n на наредените n-торки с елементи от поле F е линейно пространство над F относно покомпонентно определените операции събиране на вектори

$$x + y = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{за} \quad x, y \in F^n$$

и умножение на вектор със скалар

$$\alpha x = \alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \quad \text{за} \quad \alpha \in F, \quad x \in F^n.$$

Посочените операции вземат стойности в F^n.

Асоциативността на събирането

$$[(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)] + (z_1, \ldots, z_n) = ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) =$$
$$= (x_1 + (y_1 + z_1), \ldots, x_n + (y_n + z_n)) = (x_1, \ldots, x_n) + [(y_1, \ldots, y_n) + (z_1, \ldots, z_n)]$$

следва от асоциативността на събирането в F и покомпонентността на събирането на вектори.

Комутативността на събирането

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) =$$
$$= (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) = (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n)$$

в F^n се дължи на комутативността на събирането в F и покомпонентността на събирането на вектори.

Векторът $(0,\dots,0) \in F^n$, чиито всички компоненти са равни на $0 \in F$ е нулев, защото

$$(0,\dots,0) + (x_1,\dots,x_n) = (0 + x_1,\dots,0 + x_n) = (x_1,\dots,x_n) \quad \text{за} \quad \forall (x_1,\dots,x_n) \in F^n.$$

Всеки вектор $(x_1,\dots,x_n) \in F^n$ има противоположен $(-x_1,\dots,-x_n) \in F^n$, така че

$$(x_1,\dots,x_n) + (-x_1,\dots,-x_n) = (x_1 + (-x_1),\dots,x_n + (-x_n)) = (0,\dots,0).$$

За произволни $\alpha, \beta \in F$ и $x = (x_1,\dots,x_n) \in F^n$ е в сила дистрибутивен закон над скаларен множител

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(x_1,\dots,x_n) &= ((\alpha+\beta)x_1,\dots,(\alpha+\beta)x_n) = (\alpha x_1 + \beta x_1,\dots,\alpha x_n + \beta x_n) = \\ &= (\alpha x_1,\dots,\alpha x_n) + (\beta x_1,\dots,\beta x_n) = \alpha(x_1,\dots,x_n) + \beta(x_1,\dots,x_n),\end{aligned}$$

съгласно дистрибутивните закони за събиране и умножение в F и покомпонентността на събирането на вектори и умножението на вектор с елемент от F.

Аналогично, дистрибутивният закон над векторен множител

$$\begin{aligned}\alpha((x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n)) &= \alpha(x_1 + y_1,\dots,x_n + y_n) = \\ = (\alpha(x_1 + y_1),\dots,\alpha(x_n + y_n)) &= (\alpha x_1 + \alpha y_1,\dots,\alpha x_n + \alpha y_n) = \\ = (\alpha x_1,\dots,\alpha x_n) + (\alpha y_1,\dots,\alpha y_n) &= \alpha(x_1,\dots,x_n) + \alpha(y_1,\dots,y_n)\end{aligned}$$

следва от дистрибутивните закони за събиране и умножение в F и покомпонентността на събирането на вектори и умножението на вектор с елемент на F.

За произволни $\alpha, \beta \in F$ и $x = (x_1,\dots,x_n) \in F^n$ е в сила

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)(x_1,\dots,x_n) &= ((\alpha\beta)x_1,\dots,(\alpha\beta)x_n) = (\alpha(\beta x_1),\dots,\alpha(\beta x_n)) = \\ &= \alpha(\beta x_1,\dots,\beta x_n) = \alpha(\beta(x_1,\dots,x_n))\end{aligned}$$

съгласно асоциативността на умножението в F и покомпонентността на умножението на вектор с елемент на F.

Накрая,

$$1(x_1,\dots,x_n) = (1.x_1,\dots,1.x_n) = (x_1,\dots,x_n)$$

се получава от определението за единица 1 на F.

Твърдение 2. *Нека V е линейно пространство над поле F. Тогава:*

(i) нулевият вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ е единствен;

(ii) всеки вектор $u \in V$ има единствен противоположен $-u \in V$;

(iii) $0u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ за $0 \in F$, всеки вектор $u \in V$ и $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$;

(iv) $\alpha\overrightarrow{\mathcal{O}} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ за всяко $\alpha \in F$ и $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$;

(v) $(-1)u = -u$ за $1 \in F$ и произволен вектор $u \in V$;

(vi) ако $\alpha u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ за $\alpha \in F$ и $u \in V$, то $\alpha = 0 \in F$ или $u = \overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$.

Доказателство. (i) Ако $\overrightarrow{\mathcal{O}}_1 \in V$ и $\overrightarrow{\mathcal{O}}_2 \in V$ са нулеви вектори, то $\overrightarrow{\mathcal{O}}_1 + \overrightarrow{\mathcal{O}}_2 = \overrightarrow{\mathcal{O}}_2$, защото $\overrightarrow{\mathcal{O}}_1 \in V$ е нулев вектор и $\overrightarrow{\mathcal{O}}_1 = \overrightarrow{\mathcal{O}}_1 + \overrightarrow{\mathcal{O}}_2$, защото $\overrightarrow{\mathcal{O}}_2 \in V$ е нулев вектор. Следователно $\overrightarrow{\mathcal{O}}_1 = \overrightarrow{\mathcal{O}}_2$.

(ii) Ако $u \in V$ има противоположни вектори $u_1, u_2 \in V$, то

$$u_2 = \overrightarrow{\mathcal{O}} + u_2 = (u_1 + u) + u_2 = u_1 + (u + u_2) = u_1 + \overrightarrow{\mathcal{O}} = u_1.$$

Горните равенства използват асоциативността на събирането и определенията за противоположен и нулев вектор.

(iii) Забелязваме, че

$$0.u + u = 0.u + 1.u = (0+1)u = 1.u = u,$$

съгласно дистрибутивнния закон над скаларен множител и $1.u = u$. Прибавянето на $-u \in V$ към най-лявата и най-дясната страна на горното равенство дава

$$0.u = 0.u + \overrightarrow{\mathcal{O}} = 0.u + [u + (-u)] = (0.u + u) + (-u) = u + (-u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

чрез прилагане на асоциативността на събирането на вектори и определенията за противоположен и нулев вектор.

(iv) Една от аксиомите за линейно пространство гласи, че $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ за произволни $\alpha, \beta \in F$ и $u \in V$. Полагаме $\beta = 0 \in F$ и прилагаме (iii), за да получим

$$\overrightarrow{\mathcal{O}} = 0.u = (\alpha.0)u = \alpha(0.u) = \alpha\overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

(v) Пресмятаме, че

$$u + (-1)u = 1.u + (-1).u = [1 + (-1)].u = 0.u = \overrightarrow{\mathcal{O}},$$

съгласно $1.u = u$, дистрибутивния закон над скаларен множител и $0.u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Следователно $(-1)u \in V$ изпълнява дефиниционното равенство $u + (-u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ на противоположния вектор $-u \in V$ и $(-1)u = -u$ поради единствеността на противоположния вектор на u.

(vi) Ако $\alpha u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ и $\alpha \neq 0 \in F$, то почленното умножение с $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} \in F$ дава

$$u = 1.u = (\alpha^{-1}\alpha)u = \alpha^{-1}(\alpha u) = \alpha^{-1}\overrightarrow{\mathcal{O}} = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

Тук прилагаме $\gamma\overrightarrow{\mathcal{O}} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ за всяко $\gamma \in F$ и нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$, аксиомата $(\beta\gamma)u = \beta(\gamma u)$ за произволни $\beta, \gamma \in F$, $u \in V$ и $1.u = u$.

$\square$

Определение 3. *Непразно подмножество W на линейно пространство V е подпространство, ако заедно с произволни свои вектори $w_1, \ldots, w_n \in W$ съдържа всички техни линейни комбинации $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n \in W$ с коефициенти $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$.*

За произволни естествени числа $k < n$ подмножеството

$$F^{k,n} := \{(x = (x_1, \ldots, x_n) \in F^n \,|\, x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}$$

на F^n е линейно подпространство. Наистина, ако $x, y \in F^{k,n}$ и $\alpha \in F$, то

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k, x_{k+1} + y_{k+1}, \ldots, x_n + y_n) \in F^{k,n} \quad \text{и}$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k, \alpha x_{k+1}, \ldots, \alpha x_n) \in F^{k,n},$$

защото $x_i + y_i = 0 + 0 = 0$ и $\alpha x_i = \alpha.0 = 0$ за всички $k + 1 \leq i \leq n$.

Твърдение 4. *Непразно подмножество W на линейно пространство V е подпространство тогава и само тогава, когато за произволни $w_1, w_2 \in W$ и $\alpha \in F$ е в сила $w_1 + w_2 \in W$ и $\alpha w_1 \in W$.*

Доказателство. По определение, W е подпространство на V, ако заедно с произволни свои вектори $w_1, \ldots, w_n \in W$ съдържа всички техни линейни комбинации

$$\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n \in W$$

с коефициенти $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. Векторите $w_1 + w_2 = 1.w_1 + 1.w_2$ и αw_1 са частни случаи на линейни комбинации на $w_1, w_2 \in W$, така че ако W е подпространство на V и $w_1, w_2 \in W$, то $w_1 + w_2 \in W$ и $\alpha w_1 \in W$.

Да допуснем, че непразно подмножество W на линейно пространство V е затворено относно събиране на вектори и умножение на вектор с $\alpha \in F$. С индукция по $n \in \mathbb{N}$ ще проверим, че $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n \in W$ за произволни $w_1, \ldots, w_n \in W$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. За $n = 1$ имаме $\alpha_1 w_1 \in W$ по предположение. Да допуснем, че

$$w' := \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_{n-1} w_{n-1} \in W$$

за произволни $w_1, \ldots, w_{n-1} \in W$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in F$. По предположение, $\alpha_n w_n \in W$ за произволни $w_n \in W$ и $\alpha_n \in F$. Следователно W съдържа

$$w' + \alpha_n w_n = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_{n-1} w_{n-1} + \alpha_n w_n$$

и W е подпространство на V.

□

Определение 5. *Линейната обвивка $l(S)$ на непразно подмножество S на линейно пространство V е множеството на линейните комбинации $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ на вектори $u_1, \ldots, u_n \in S$ с коефициенти $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$.*

Линейната обвивка $l(u)$ на вектор $u \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ е правата $l(u)$ през началото, породена от u.

Твърдение 6. *Нека S е непразно подмножество на линейно пространство V. Тогава линейната обвивка $l(S)$ на S е подпространство на V и $l(S) = \cap_{W \supseteq S} W$ съвпада със сечението на подпространствата W на V, съдържащи S.*

Доказателство. Линейната обвивка $l(S)$ на S е подпространство на V, защото заедно с произволни свои вектори $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ и $v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$ с $u_i, v_j \in S$, $\alpha_i, \beta_j \in F$ съдържа тяхната сума

$$u + v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n \in l(S) \quad \text{и}$$

$$\gamma u = \gamma(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m) = (\gamma\alpha_1) u_1 + \ldots + (\gamma\alpha_m) u_m \in l(S)$$

за произволно $\gamma \in F$.

Твърдим, че

$$l(S) = \cap_{W \supseteq S} W$$

е сечението на подпространствата W на V, съдържащи S, така че $l(S)$ се съдържа във всяко подпространство на V, съдържащо S и $l(S)$ е минималното подпространство на V, съдържащо S. От определението за подпространство W на V, за произволни $w_1, \ldots, w_n \in S$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$, предположението $S \subseteq W$ води до $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n \in W$. Това доказва включването $l(S) \subseteq \cap_{W \supseteq S} W$. От друга страна, $l(S)$ е подпространство на V, съдържащо S, така че $l(S)$ участва в сечението и $l(S) \supseteq \cap_{W \supseteq S} W$. Следователно

$$l(S) = \cap_{W \supseteq S} W.$$

□