Упражнение 13

Атанас Груев

12.11.2019

1 Кратка теория

1.1 Производни

Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \Delta$. *Производна* на функцията f в точката x_0 наричаме границата (ако съществува):

$$f'(x_0) \coloneqq \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Казваме, че f е диференцируема в x_0, ако f има производна в x_0, т.е. горната граница съществува. Да диференцираме f означава да намерим f'.[1]

1.2 Основни правила за диференциране

Тук ще изредим най-важните техники за намиране на производни.[2]

1. Производната на $c \,.\, f$ за функция f е $c \,.\, f'$, т.е. константата по производната на f:

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

2. Правило за диференциране на сбор:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

3. Правило за диференциране на произведение:

$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

4. Правило за диференциране на частно:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$$

5. Правило за диференциране на съставна функция:

$$[g(f(x))]' = g'(f(x))\, f'(x)$$

[1] https://betterexplained.com/articles/calculus-building-intuition-for-the-derivative/

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_limits

6. Производна на обратна функция - ако $x = f(y)$ и $y = g(x)$ е обратна на f (непрекъсната), то в сила е:
$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

(1) $c' = 0$

(2) $x' = 1$

(3) $(f^{\alpha}(x))' = \alpha f^{\alpha-1}(x) f'(x)$

(4) $\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} f'(x)$

(5) $(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$

(6) $(\sin f(x))' = \cos f(x) f'(x)$

(7) $(\cos f(x))' = -\sin f(x) f'(x)$

(8) $(\operatorname{tg} f(x))' = \frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x)$

(9) $(\operatorname{cotg} f(x))' = -\frac{1}{\sin^2 f(x)} f'(x)$

(10) $(\arcsin f(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - f^2(x)}} f'(x)$

(11) $(\arccos f(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - f^2(x)}} f'(x)$

(12) $(\operatorname{arctg} f(x))' = \frac{1}{1 + f^2(x)} f'(x)$

(13) $(\operatorname{arccotg} f(x))' = -\frac{1}{1 + f^2(x)} f'(x)$

2 Задачи

Ще решим няколко задачи от Ръководството на Любенова, Недевски и др. (Глава 3, Параграф 1 - Техника на диференцирането). Подходящи задачи има и в Сборника на Проданов, Хаджииванов и Чобанов (Глава 7 - Производни).

- Ръководство - зад. 1.4, подточка к) - да се намери производната на:

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

Представяме в удобен вид и диференцираме:

$$\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right]' = \left[\left(x+\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x+\left(x+\left(x+\sqrt{x}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} . \left[x+\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]' =$$

$$= \frac{1}{2\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)}\left(1+\left(\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\left[x+\sqrt{x}\right]'\right) =$$

$$= \frac{1}{2\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)} . \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right), \quad x>0$$

- Ръководство - зад. 1.4, подточка м) - да се намери производната на:

$$f\left(x\right) = xe^x \ln x$$

Прилагаме правилото за диференциране на произведение два пъти:

$$\left[xe^x . \ln x\right]' = \left(xe^x\right)' \ln x + \left(xe^x\right)\left(\ln x\right)' = \left(e^x + xe^x\right)\ln x + e^x = e^x\left(\ln x + x\ln x + 1\right)$$

- Ръководство - зад. 1.4, подточка о) - да се намери производната на:

$$f\left(x\right) = x^{x^x}$$

Ще приложим *логаритмично диференциране* и ще ползваме доказаната на упражнения производна $\left(x^x\right)' = x^x\left(\ln x+1\right)$.

$$\left[x^{x^x}\right]' = \left[e^{x^x \ln x}\right]' = x^{x^x}\left[x^x \ln x\right]' = x^{x^x}\left(x^x\left(\ln x+1\right)\ln x + \frac{x^x}{x}\right) =$$
$$= x^{x^x} . x^{x-1}\left(x\left(\ln x+1\right)\ln x+1\right), \quad x>0$$

- Ръководство - зад. 1.5, подточка ж) - намерете производната на функцията:

$$f\left(x\right) = \ln\frac{1-e^x}{e^x}$$

Прилагаме правилата за диференциране:

$$\left[\ln\frac{1-e^x}{e^x}\right]' = \frac{1}{\left(\frac{1-e^x}{e^x}\right)}\left[\frac{1-e^x}{e^x}\right]' = \frac{e^x}{1-e^x}\left(\frac{\left(1-e^x\right)' e^x - \left(1-e^x\right)\left(e^x\right)'}{e^{2x}}\right) =$$
$$= \frac{e^x}{1-e^x}\left(\frac{-e^{2x}-e^x+e^{2x}}{e^{2x}}\right) = \frac{e^x}{1-e^x} . -\frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^x-1}, \quad x<0$$

- Ръководство - зад. 1.7, подточка и) - намерете производната на функцията:

$$f\left(x\right)=\sqrt[3]{1+x}\sqrt{2+x^2}\left(3+x^3\right)$$

Отново прилагаме правилото за диференциране на произведение два пъти:

$$\left[\sqrt[3]{1+x}\sqrt{2+x^2}\left(3+x^3\right)\right]'=$$

$$=\left[\sqrt[3]{1+x}\sqrt{2+x^2}\right]'\left(3+x^3\right)+\left[\sqrt[3]{1+x}\sqrt{2+x^2}\left(3+x^3\right)\right]\left(3+x^3\right)'=$$

$$=\left[\left(1+x\right)^{\frac{1}{3}}\left(2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]'\left(3+x^3\right)+\left[\sqrt[3]{1+x}\sqrt{2+x^2}\right]\left(3x^2\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{3}\,.\,\frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{\left(1+x\right)^2}}+\frac{1}{2}\,.\,\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}\right)\left(3+x^3\right)+3x^2\,.\,\sqrt[3]{1+x}\sqrt{2+x^2}$$

- Ръководство - зад. 1.8, подточка м) - намерете производната на функцията:

$$f\left(x\right)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$$

Прилагаме правилата за диференциране:

$$\left[x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\right]'=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(-2x\right)=\arcsin x,\quad -1<x<1$$

- Ръководство - зад. 1.8, подточка н) - намерете производната на функцията:

$$f\left(x\right)=\operatorname{tg}^2x+\ln\cos^2x$$

Прилагаме правилата за диференциране:

$$\left[\operatorname{tg}^2x+\ln\cos^2x\right]'=2\operatorname{tg}x\,.\,\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\cos^2x}\left(2\cos x\right)\left(-\sin x\right)=\frac{2\operatorname{tg}x-\sin 2x}{\cos^2x}$$

Покажете, че $f'\left(x\right)=2\operatorname{tg}^3x$ за $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$.

- Ръководство - зад. 1.8, подточка н) - намерете производната на функцията:

$$f\left(x\right)=\operatorname{arctg}x+\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Прилагаме правилата за диференциране (накрая съобразете, че $-1<x<1$):

$$\left[\operatorname{arctg}x+\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right]'=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]'=$$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1}{2}\,.\,\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[\frac{1-x}{1+x}\right]'\right)=$$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1}{2}\,.\,\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{-1-x-\left(1-x\right)}{\left(1+x\right)^2}\right)\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1-x^2}=-\frac{2x^2}{1-x^4}$$