NO DATE

Логика

I Същност.

1. **Логика** - наука за правенето на валидни изводи и правилни разсъждения.

2. **Валиден извод** - зависи от формата му (т.е. ако формата на извода е правилна, то извода е валиден - не зависи от верността на съставящите го думи ~~твърденията~~ ~~съжденията~~)

Пр: Всяка риба е безсмъртна.
Заекът е риба.
Следователно, заекът е безсмъртен.

II Съждителна логика (Propositional Logic) - не допуска ~~[illegible]~~ частична истинност.

1. **Съждение** - просто разказвателно изречение, което е истина или лъжа (още се нар. логическа променлива)

Изречения, при които каквото и да доп. получавате обратното, не са съждения логически константи - T (true) и F (false)

съставни съждения - образува се от прости съждения / други съставни съждения, чрез логически съюзи.

2. Видове логически съюзи.

p и q - съждения ~~Разместителен с-во: $p \wedge q = q \wedge p$~~

2.1. Конюнкция - Бележи се с "$\wedge$".
Съответства на "и" от естествения език.
(+ "а", "но", "обаче", "хем, ... хем")
Конюнкцията е истина само когато и двете съждения са истина

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Разместително с-во: $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

* - и двете трябва да са включени за да протече ток.

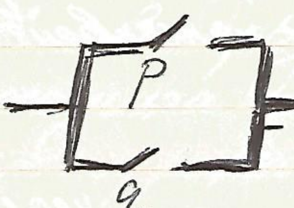
2.2. Дизюнкция - Съответства на "или"

2.2.1. Включващо или - Бележи се с "v". За да е T се изисква поне едното съждение да е истина, но не пречи и двете да са истина.

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

Пр: ф-ята f е непрекъсната или ф-ята g е непрекъсната.
(Поне едното трябва да е истина)

(*)



- поне едното трябва да е изпълнено, за да протече ток.

2.2.2. Изключващо или - Бележи се с $\oplus$. За да е T се изисква точно едно от съжденията да е истина, а другото да е лъжа.

NO DATE

p	q	p ⊕ q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Пр: Или f(x) е непрекъсната, или g(x) е непрекъсната.

2.3. Импликация - Бележи се с "→". При нея има причинно-следствена връзка. Отговаря на "ако..., то..." (като обещание и изпълнение).

$p \to q$ (p влече q)

антецедент — p; q — консеквент.

Антецедентът влече консеквента.

→ неасоциативна.

p	q	p → q
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

- от лъжата следва всичко
- от истина не може да следва лъжа.

(*) Ако обещанието е вярно, но не е изпълнено, е лъжа
Ако обещанието е невярно, но е изпълнено, то до някаква степен е истина

2.4. Би-импликация: Бележи се с "<->"

$p <-> q$ (чете се: p тогава и само тогава когато (т.с.т.к.) q.)

Би-импликацията е истина, когато двете съждения имат една и съща лог. стойност, и лъжа в противен случай

p	q	p<->q
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

-> асоциативност

2.5. Отрицание (негация) - Бележи се с "¬". За разлика от предните свързки негацията се прилага само върху едно. съждение.

p	¬p
F	T
T	F

NO DATE

3. Приоритет на логическите връзки.

1) негация ($\neg$)
2) конюнкция ($\wedge$)
3) дизюнкция ($\vee$, $\oplus$)
4) импликация ($\rightarrow$)
5) би-импликация ($\leftrightarrow$)

4. Таблица на истинност.

4.1. При прости съждения

Всеки ред на таблицата отговаря на съответено ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ ← раздаване на конкретни стойности на съжденията.

Брой на валюациите е 2^{n} → участващите ~~[illegible]~~ променливи.

Забележка: Логическите константи също имат таблица на истинност, но тя се състои само от 1 ред. ($2^{0} = 1$, няма променливи).

T e T

F e F

4.2. При съставни съждения.

Те също са или T, или F.
За всяка възможна валюация на прости съждения, стойността на съставното съждение е строго определена.

p	q	r	p ∨ q	p ∨ r	(p ∨ q) ∧ (p ∨ r)
F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	T	T

повторение на 2^2 пети

повторение на 2^1 пети

повторение на 2^0 пети.

повторението в първата колонка е 2^{n-1}, където n е броя на променливите.

NO DATE

5. Еквивалентност на съждения.

(=) - когато 2 съждения са напълно еднакви

(≡) - когато 2 съждения са еквивалентни.

Еквивалентността не е логически съюз, защото от 2 съждения, които са еквивалентни не се получава по-голямо съждение.

Опред.] p и q са еквивал. т.с.т.к. $p \leftrightarrow q$. (тавтология)

трябва да имат еднакъв бр. редове и на всеки ред булевата оценка да съвпада.

тавтология - е съставно съждение, което има стойност T, за всяка булева оценка на участващите прости съждения

булева оценка - стойност лъжа или истина на дадените съждения.

противоречие - е съставно съждение, което има стойност F, за всяка булева оценка на участващите прости съждения

условност - съставно съждение, чиято стойност е T за поне една булева оценка и F за поне една булева оценка.

NO DATE

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

противоречие.

тавтология

6. Свойства на логическите свързи:

6.1) с-ва на константите.

$p \wedge T \equiv p$

$p \vee T \equiv T$

$p \wedge F \equiv F$

$p \vee F \equiv p.$

6.2) с-ва на отрицанието:

$p \vee \neg p \equiv T$

$p \wedge \neg p \equiv F$

6.3) закон за двойното отрицание.

$\neg(\neg p) \equiv p.$

6.4) комутативност.

$p \vee q \equiv q \vee p$

$p \wedge q \equiv q \wedge p.$

$p \oplus q \equiv q \oplus p.$

$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p.$

НО: $p \to q \not\equiv q \to p.$

NO DATE

6.5) асоциативност.

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \equiv p \wedge q \wedge r.$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

НО: $(p \to q) \to r \not\equiv p \to (q \to r)$

6.6) дистрибутивност

конюнкцията е дистрибутивна спрямо дизюнк.

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

дизюнк. е дистрибутивна спрямо конюнк.

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

6.7) закон на DeMorgan:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q.$$

6.8) свойство на импликацията:

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

6.9) свойство на би-импликацията.

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

6.10) поглъщане:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p.$$

NO DATE

6.11) и демпотентност.

$p \vee p \equiv p$

$p \wedge p \equiv p.$

7. Доказване на еквивалентност, чрез еквивалентни преобразувания.

(Пр: $(p \to q) \vee (q \to r) \equiv T$)

7.1) На първи ред пишем едно от съжденията.

7.2) След това пишем знака за еквивалентност и след него в скоби пишем основание, поради което твърдим еквивалентност.

8. Извод в съждителната логика.

Опр| Казваме, че p следва логически от q, ако $p \to q$ е тавтология. Бележи се с „ ; " ($p ; q$)

Съжденията $p_1, p_2, \ldots, p_n$ са предпоставки, а q е следствие.

Изводът да е валиден означава, че следствието е вярно тогава, когато всички предпоставки са верни

NO DATE

Забележска: ① $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$ -

Ако ① е истина независимо от истинността на q, следователно изводът винаги е валиден при наличие на поне една предпоставка - лъжа.

Ако всички предпоставки са истина, то q трябва да е истина, за да имаме валиден извод.

III. Предикатна логика.

1. Едноместни предикати.

Опр.] Съждение, което има "празно място", в което празно място се слага обект от някаква предварително зададена област, наречена домейн. За всеки обект от домейна, предикатът е или истина, или лъжа.

Предикатът сам по себе си не е нито истина, нито лъжа.

универсален квантор ($\forall$) - когато предикатът е истина за всеки елемент от домейна.

екзистенциален квантор ($\exists$) - когато има поне един елемент от домейна, за който предикатът е истина.

Универс. квантор: $\forall x P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$

↳ има връзка с конюнкцията.

Екзистенц. квантор: $\exists x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$

↳ има връзка с дизюнкцията.

$$\boxed{\begin{array}{l} \neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) \\ \neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \end{array}}$$

$\forall x P(x) \to Q(x)$ - неправилно (няма стойност), защото x е свободна променлива в $Q(x)$

Правилно: $\forall x (P(x) \to Q(x))$

x - от домейна
$P(x)$ - предикат.

NO DATE

2. Двуместни предикати.

Кванторите се използват и при предикати с повече от една променлива.

В израза $\forall x \forall y\, P(x,y)$, казваме че кванторите са вложени.

Еднотипните квантори могат да бъдат разместване без това да се отразява на истинността.

Разнотипните квантори не може да бъдат разместване:

$$\forall x \exists y\, Q(x,y) \not\equiv \exists x \forall y\, Q(x,y)$$

Пр: $x+y=2$.
$\forall x, \exists y : y = 2-x$, но.
не може чрез x събрано със всяко реално число да получим 2.

Забележка:

$$\forall x \exists y\, P(x,y) \equiv \forall y \exists x\, P(y,x)$$ - вярно,

защото просто са преименувани променливите.