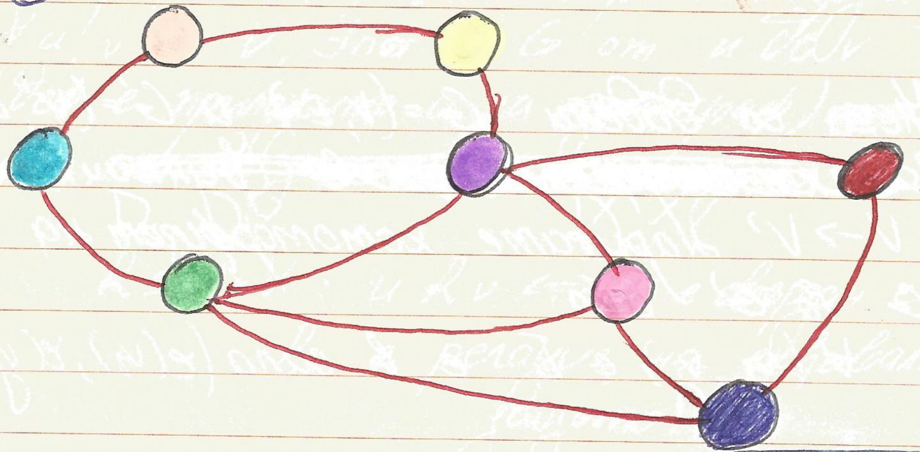
Графи и подграфи.

1. Подграфи.

Нека $G = (V, E)$, то $G' = (V', E')$ е подграф на G, ако:

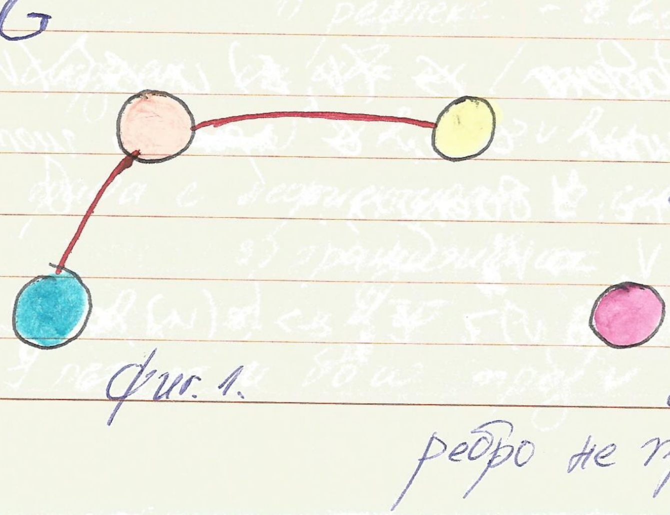
1. $V' \subseteq V$
2. $E' \subseteq E$ (двата края на реброто трябва да са в V')
3. G' е граф.

G



$\boxed{\text{Индуциран подграф}}$

G'



Всички върхове освен розовия вкарват ребро. Той не вкарва, защото никой от върховете, с който има общо ребро не принадлежи на V'

фиг. 1.

NO DATE

1.1. Индуциран подграф.

Индуцираният подграф е частен случай на подграф. Получава се когато E' съдържа всички ребра от E двата края на които са във V'.

т.е. Фиг. 1 е индуциран подграф, но ако 1 от ребрата се махне става просто подграф.

?

2. Графи

2.1. Хомоморфизъм.

Нека са дадени $G=(V,E)$ и $G'=(V',E')$ ~~хомоморфизъм на~~ Функцията $\varphi: V \to V'$ наричаме хомоморфизъм на G в G' ако:

$$\forall (v_i, v_j) \in E \text{ е в сила } (\varphi(v_i), \varphi(v_j)) \in E'$$

2.2. Изоморфизъм.

Нека са дадени $G=(V,E)$ и $G'=(V',E')$, G и G' - еднотипни. G и G' ~~при~~ са изоморфни.

т.с.т.к: $\exists$ биекция:

$$\varphi: V_1 \to V_2'$$

$$\forall u,v \in V: (u,v) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E'$$

NO DATE

За да са изоморфни 2 графа, те трябва да имат еднакъв брой върхове, ребра и свърз. компоненти.

2.3. Автоморфизъм

изоморф. е наричате автоморфизъм на G, когато $G = G'$

3. Свързаност и свързани компоненти в неориентирани графи

3.1. Свързаност

Графът $G(V, E)$ се нарича свързан, ако $\forall u, v \in V$, $\exists$ път в G от u до v (деф. е приложимо и за мулти граф) ~~ако~~ ~~път и затворен с маршрут)~~

$R \subseteq V \times V$: $u R v \iff$ u е свързан с v, а R е релация на еквивалентност, защото:

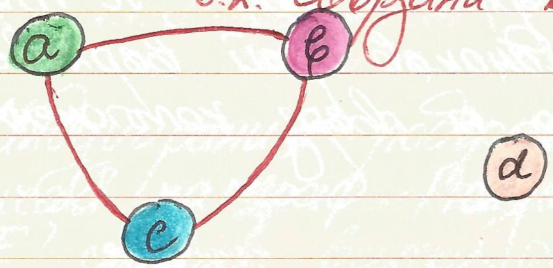
1) рефлекс. - всеки връх u се свързан със себе си. (път с дължина 0)

2) $u R v \Rightarrow v R u$, тъй като графа е неориентиран. => симетричност

3) транзитивност

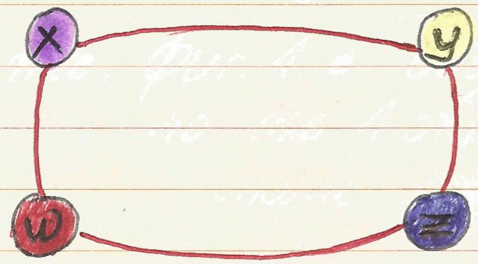
$u R v \wedge v R w \rightarrow u R w$, тъй като. $\exists$ път от u до w през v

3.2. Свързани компоненти.



G

$V = \{a, b, c, d, x, y, w, z\}$.



$E = \{(a,b), (a,c), (b,c), (x,y), (x,w), (y,z), (w,z)\}$.

$R \subseteq V \times V$

В R. $\exists$ 3 класа на еквивалентност
$\{\{a,b,c\}, \{x,y,z,w\}, d\}$.
В зависимост от броя на класовете на еквивалентност се определя и броя на свързани компоненти в графа.

Всеки свързан граф има една свързана компонента.

Забележка:
Индуцирания граф от d е сам себе.

~~(За ориент. граф) * Всеки връх е отделна компонента, ако излизат от него и не могат да се върнат.~~

NO DATE

~~[illegible]~~ Свързана компонента е максимална по включване ~~[illegible]~~. всеки връх е свързан с останалите. (пряко, ~~не~~ чрез път)

Съществува глобално максимална свърз. компонента, тя е тази която съдържа най-голям брой върхове.

4. Силна и слаба свързаност, силни и слабо свързани компоненти в ориентирани графи.

4.1. Силна свързаност.

Върховете $u, v \in V$ на ориентиран граф са силно свързани, т.с.т.к. съществува маршрут, както от u до v, така и от v до u.

4.2. Слаба свързаност.

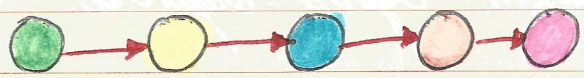
Върховете $u, v \in V$ на ориентиран граф са слабо свързани, т.с.т.к. ~~или~~ съществува маршрут или само от u до v, или само от v до u.

NO DATE

4.3. Силно свързани компоненти.

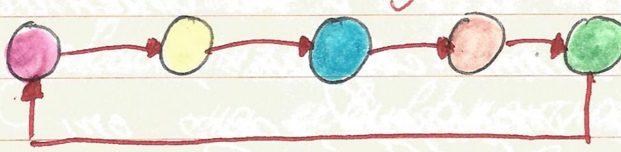
Нека $G = (V, E)$ ориентиран граф.

Силно свързаните компоненти на G са максимални по включване силно свързани подграфи на G

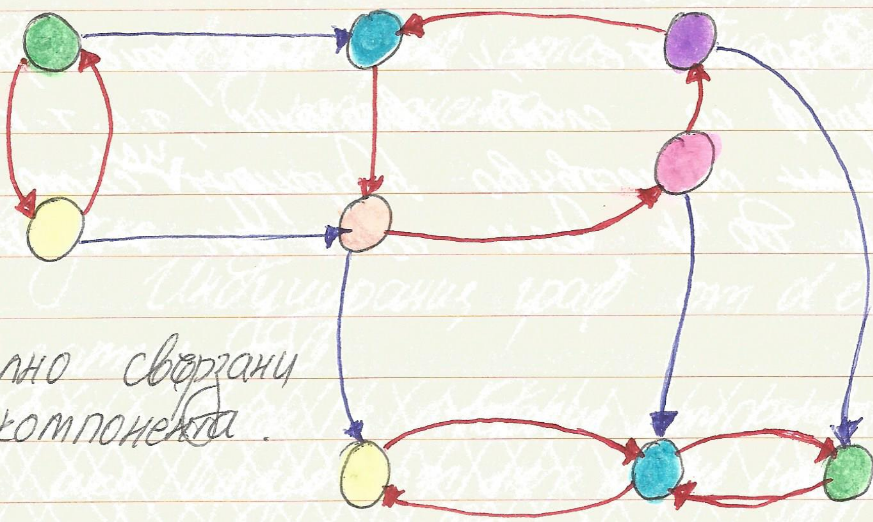


- 5 силно свърз. комп.

Връх е отделна компонента, ако когато излезем от него не можем да се върнем.



- 1 силно свърз. комп.

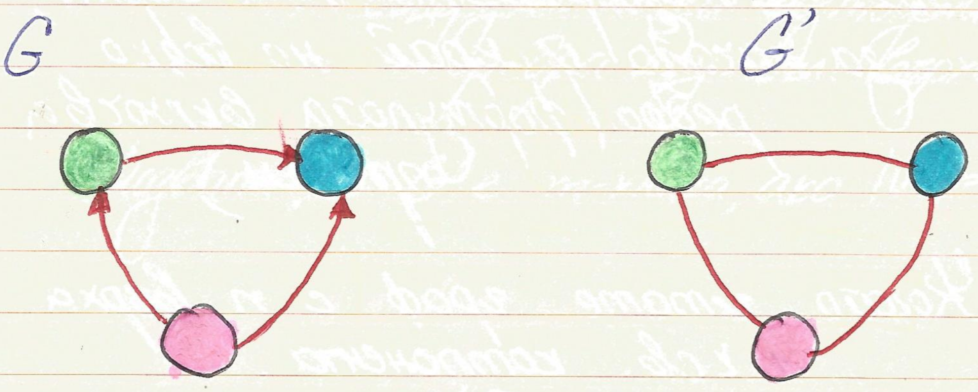


3 силно свързани компонента.

Всеки свързан ~~гр~~ граф има само една свързана компонента.

4.4. Слабо свързани компоненти.

Слабо св. компоненти на ориентирания граф G съвпадат със свързаните компоненти на неориентирания граф G', където G' се получава след премахване на ориентацията на ребрата.



G не е силно св., защото св. комп. на G ~~не~~ не е макс. по вкл., но е слабо св., защото при махане на ориентацията се получ. св. комп.

NO DATE

5. Пълни графи. (не мулти)

Графът $G(V, E)$ наричаме пълен, ако $\forall v_i, v_j \in V, (v_i, v_j) \in E$, т.е когато съдържа всички възможни ребра.

Пълен граф с n върха се означава с K_n

Максималният брой на ребрата е $\binom{n}{2}$, той като избираме по два върха, за начало и край на всяко ребро. (формулата включва примки)

Когато имаме граф с n върха и k св. компонента, максималният брой на ребрата е $\binom{n-k+1}{2}$. Това е вярно, защото максималният брой се достига, когато в $k-1$ компонента има по 1 връх, а k-тия са всички останали.

6. Клика и антиклика в граф.

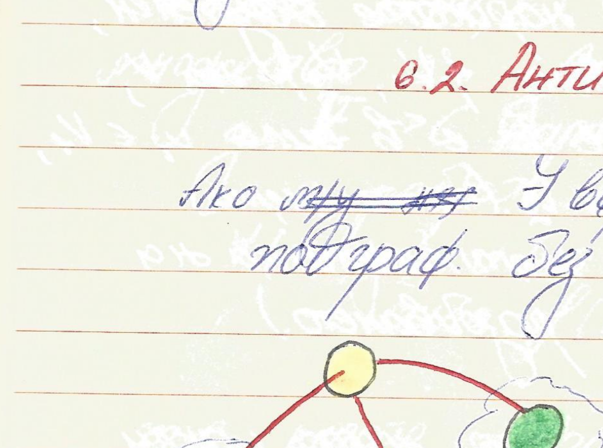
6.1. Клика.

Подграфът $G'(V', E')$ на графа $G(V, E)$, индуциран от $V' \subseteq V$ (т.е. за всички върхове от V' са включени ребрата м/у тях в E'), наричаме клика на G, ако е пълен подграф (т.е. съдържа всички възможни ребра м/у вкл. върхове)

Казваме, че G' е m-клика, ако $|V'| = m$.

6.2. Антиклика.

Ако ~~м/у~~ ~~тях~~ $\exists$ върхове в даден подграф без връзка помежду си.



Заградените върхове образуват 3-антиклика, ~~тъй~~ като нямат никакви директни ребра помежду си. (не са вкл. др. врех, тъй като той винаги ще е съседен на някой от 3-те)

NO DATE

Забележска:

Във всеки граф с 6 върха има поне 3-клика или поне 3-антиклика

Доказателството се състой в оцвет. на всички възможни ребра излизащи от един връх, в един цвят тези с които ~~вр~~ дадения връх има връзка с друг. връх и с друг цвят - когато м/у тях няма връзка (т.е. не са свързани)

4. Двуделен граф.

Графът $G = (V, E)$ наричаме двуделен, ако съществува разбиване $\{V_1, V_2\}$ на V, такова че $\forall (v_i, y_j) \in E$ е в сила $v_i \in V_1$, $y_j \in V_2$. (т.е. няма ~~връзка~~ ребра м/у компоненти на на разбиването).

Граф е двуделен, ако няма цикли с нечетна дължина.

NO DATE

8. Оцветяване на графи.

8.1. Оцветяване на върхове

Нека $G(V,E)$ е граф, а C - крайно множество от цветове. Функцията $f: V \to C$ наричате оцветяване на върховете на G, ако:

$\forall (v_i, v_j) \in E$ е в сила $f(v_i) \neq f(v_j)$

т.е. няма свързни върхове с еднакъв цвят.

8.2. Оцветяване на ребра.

Нека $G(V,E)$ е граф, а C - крайно множество от цветове. Функцията $g: E \to C$ наричате оцветяване на ребрата на G, ако:

$\forall (v_i, v_j)$ и $(v_i, v_k) \in E$, $v_j \neq v_k$ е в сила $f(v_i, v_j) \neq f(v_i, v_k)$

т.е. когато ребрата с общ врех са оцветени с разл. цветове.

8.3. Хроматично число на G.

$X(G)$ - минималният брой от цветове, с който можем да оцветим графа.

NO DATE

върхово хроматично число - най-малкия брой цветове, с които можем да оцветим върховете на графа.

ребрено хроматично число - най-малкият брой цветове, с които можем да оцветим ребрата на графа.

9. Планарност на графи.

Нека $G = (V, E)$ е граф.

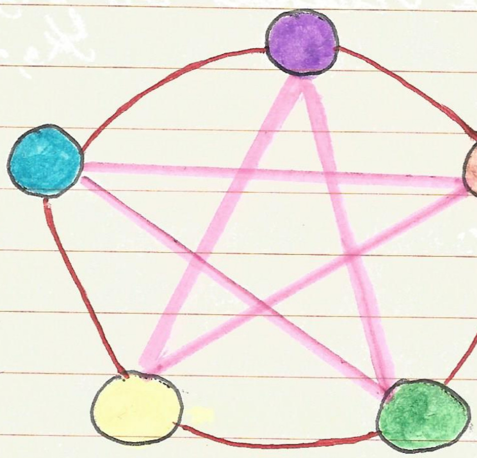
G е планарен, т.с.т.к. може да бъде нарисуван в равнината, така че никои 2 планарни ребра да не се пресичат освен в крайните си точки.

$\Rightarrow$ планарен.

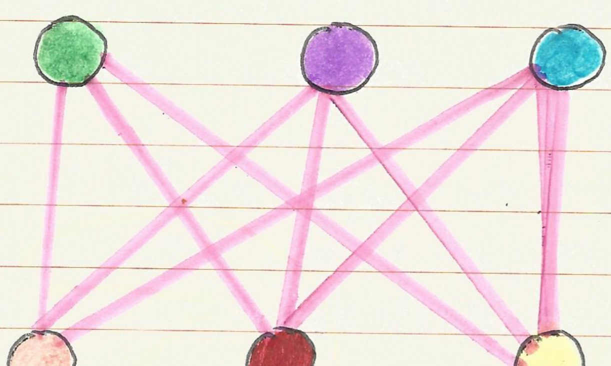
NO DATE

Има графи, които не са планарни.

Пълният граф K_5:



и Пълният двуделен граф $K_{3,3}$:



Проверка за планарност
m - брой ребра
n - брой върхове

$m \le 3n - 6$ ⇒ ако е изпълнено графа НЕ Е ПЛАНАРЕН.

NO DATE

Теорема:

Графът $G=(V,E)$ е планарен,

т.с.т.к. не съдържа подграфи,

които се свиват до K_5 или $K_{3,3}$.

Допълнителни

бележки: