Обратимост и неособеност на матрици. Формули на Крамер. Теорема на Руше. Връзка между решенията на хомогенна и нехомогенна система.

Определение 1. *Квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима, ако съществува квадратна матрица $B \in M_{n\times n}(F)$ от същия ред, така че $AB = BA = E_n$.*

Матрицата B е единствена, защото ако B_1 и B_2 изпълняват условията $B_1A = AB_1 = E_n$, съответно, $AB_2 = B_2A = E_n$, то

$$B_2 = E_nB_2 = (B_1A)B_2 = B_1(AB_2) = B_1E_n = B_1,$$

съгласно асоциативността на умножението на матрици и $E_nB_2 = B_2$, $B_1E_n = B_1$. Следователно за всяка обратима матрица A има единствена матрица B с $AB = BA = E_n$, която се нарича обратна на A и се бележи с $B = A^{-1}$.

Лема 2. *(i) Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима матрица, то нейната обратна матрица $A^{-1} \in M_{n\times n}(F)$ е обратима и $(A^{-1})^{-1} = A$.*

(ii) Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ и $B \in M_{n\times n}(F)$ са обратими матрици, то произведението им $AB \in M_{n\times n}(F)$ е обратима матрица с обратна $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказателство. (i) Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима с обратна матрица A^{-1}, то $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$. По този начин, A изпълнява дефиниционните равенства за обратната на A^{-1} и

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

(ii) Съгласно

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = [A(BB^{-1})]A^{-1} = (AE_n)A^{-1} = AA^{-1} = E_n \quad \text{и}$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = [B^{-1}(A^{-1}A)]B = (B^{-1}E_n)B = B^{-1}B = E_n,$$

матрицата $B^{-1}A^{-1} \in M_{n\times n}(F)$ изпълнява дефиниционните равенства за $(AB)^{-1}$, откъдето съществува обратна на AB и тази обратна е $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

□

Твърдение 3. *Квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима тогава и само тогава, когато е неособена.*

Доказателство. Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима и $A^{-1} \in M_{n\times n}(F)$ е нейната обратна матрица, то $AA^{-1} = E_n$. По Теоремата за умножението на детерминанти

$$1 = \det(E_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}).$$

Следователно $\det(A) \neq 0$ и всяка обратима матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ е неособена.

Нека $A_{i,j}$ е адюнгираното количество на елемента $a_{i,j}$ на A и $A^* \in M_{n\times n}(F)$ е матрицата с елементи $(A^*)_{i,j} = A_{j,i}$ за всички $1 \leq i,j \leq n$. Тогава

$$AA^* = \left(\begin{array}{ccccc} \det(A) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \det(A) \end{array} \right),$$

защото за $1 \leq i \neq j \leq n$ е в сила

$$(AA^*)_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}(A^*)_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}A_{j,s} = 0,$$

съгласно фалшивото развитие на детерминанта по ред и

$$(AA^*)_{i,i} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}(A^*)_{s,i} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}A_{i,s} = \det(A) \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq n,$$

съгласно развитието на $\det(A)$ по i-ти ред. Аналогично,

$$A^*A = \left(\begin{array}{ccccc} \det(A) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \det(A) \end{array} \right),$$

защото

$$(A^*A)_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} (A^*)_{i,s}a_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} A_{s,i}a_{s,j} = \begin{cases} \det(A) & \text{за } 1 \leq i = j \leq n, \\ 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq n, \end{cases}$$

съгласно развитието на $\det(A)$ по i-ти стълб и фалшивото развитие на детерминанта по стълб.

Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ е неособена матрица, т.е. $\det(A) \neq 0$, то матрицата

$$B := \frac{1}{\det(A)} A^* \in M_{n\times n}(F)$$

изпълнява дефиниционните равенства

$$AB = \frac{1}{\det(A)} AA^* = E_n \quad \text{и} \quad BA = \frac{1}{\det(A)} A^*A = E_n$$

на обратната матрица на A и

$$B = \frac{1}{\det(A)} A^* = A^{-1}.$$

$\square$

Нека

$$A = \left(\begin{array}{cc} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{array} \right) \in M_{2\times 2}(F)$$

е матрица от втори ред с $\det(A) \neq 0$. Ако $A_{i,j}$ е адюнгираното количество на елемента $a_{i,j}$ на A за $1 \leq i, j \leq 2$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\begin{array}{cc} A_{1,1} & A_{2,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} \end{array} \right).$$

При това, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ и

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1}a_{2,2} = a_{2,2}, \quad A_{2,1} = (-1)^{2+1}a_{1,2} = -a_{1,2},$$

$$A_{1,2} = (-1)^{1+2}a_{2,1} = -a_{2,1}, \quad A_{2,2} = (-1)^{2+2}a_{1,1} = a_{1,1}.$$

Следователно

$$\left(\begin{array}{cc} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{array} \right)^{-1} = \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \left(\begin{array}{cc} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{array} \right).$$

Ако трябва да решим матрично уравнение $AX = B$ с неособена матрица $A \in M_{n\times n}(F)$, $\det(A) \neq 0$, то записваме една до друга матриците $(A|B)$ и прилагаме елементарни преобразувания по редове, привеждащи A към единичната матрица E_n. Нека прилагането на същите елементарни преобразувания към B дава матрицата C. Твърдим, че C е единственото решение на $AX = B$. По-точно, ако елементарните преобразувания по редове, свеждащи A към E_n се реализират чрез леви умножения с неособени матрици $P_1, \ldots, P_s$, то $P_s \ldots P_1 A = E_n$, така че $P_s \ldots P_1 = A^{-1}$. Следователно $C = P_s \ldots P_1 B = A^{-1}B$.

В частност, обратната матрица A^{-1} на A е единственото решение на матричното уравнение $AX = E_n$. Оттук следва, че ако $AB = E_n$ за квадратни матрици $A, B \in M_{n\times n}(F)$, то $B = A^{-1}$ е обратната матрица на A и $A = B^{-1}$ е обратната матрица на B.

Твърдение 4. *Нека*

$$\left| \begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 & +\ldots & +a_{1,j}x_j & +\ldots & +a_{1,n}x_n & = b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i,1}x_1 & +\ldots & +a_{ij}x_j & +\ldots & +a_{i,n}x_n & = b_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}x_1 & +\ldots & +a_{n,j}x_j & +\ldots & +a_{n,n}x_n & = b_n \end{array} \right.$$

е система от n линейни уравнения с n неизвестни, чиято матрица от коефициенти $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ има ненулева детерминанта $\Delta = \det(a_{i,j})_{i,j=1}^n \in F \setminus \{0\}$. Тогава съществува единствено решение

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta} \right),$$

където Δ_i е детерминантата на матрицата, получена от A чрез замяна на i-тия стълб на A със стълба

$$b = \left(\begin{array}{c} b_1 \\ \ldots \\ b_i \\ \ldots \\ b_n \end{array} \right)$$

на свободните членове.

Доказателство. Нека $A_{i,j}$ са адюнгираните количества на $a_{i,j}$ и $A^* \in M_{n\times n}(F)$ е матрицата с елементи $(A^*)_{i,j} = A_{j,i}$ за всички $1 \leq i, j \leq n$. Дадената система уравнения е еквивалентна на матричното уравнение $Ax = b$. По предположение, $\Delta = \det(A) \neq 0$, така че матрицата A е неособена, откъдето обратима и системата има единствено решение $s = A^{-1}b$. Съгласно доказателството на Твърдение 3,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = \frac{1}{\Delta} A^*,$$

така че

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_i \\ \dots \\ s_n \end{pmatrix} = s = \frac{1}{\Delta} A^* b.$$

Оттук следва, че за всяко $1 \leq i \leq n$ е в сила

$$s_i = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{1,i} & \dots & A_{p,i} & \dots & A_{n,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_p \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \sum_{p=1}^{n} A_{p,i} b_p = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

съгласно формулата за развитие на Δ_i относно стълба с номер i.

□

Нека

$$Ax = b \tag{1}$$

е система линейни уравнения, чиято матрица от коефициенти

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

има вектор-стълбове $c_1, \dots, c_n \in M_{n\times 1}(F)$. В такъв случай,

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(F)$$

е решение на (1) тогава и само тогава, когато

$$As = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_n \end{pmatrix} = s_1c_1 + \ldots + s_nc_n = b.$$

Следователно, системата (1) е съвместима точно когато $b \in l(c_1, \dots, c_n)$. Съгласно $l(c_1, \dots, c_n) \subseteq l(c_1, \dots, c_n, b)$, условието $b \in l(c_1, \dots, c_n)$ е еквивалентно на

$$l(c_1, \dots, c_n) = l(c_1, \dots, c_n, b).$$

Съгласно $l(c_1, \dots, c_n) \subseteq l(c_1, \dots, c_n, b)$, условието $l(c_1, \dots, c_n) = l(c_1, \dots, c_n, b)$ е еквивалентно на $\dim l(c_1, \dots, c_n) = \dim l(c_1, \dots, c_n, b)$. Вземайки предвид

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(c_1, \dots, c_n) = \dim l(c_1, \dots, c_n) \quad \text{и}$$

$$\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}(c_1, \dots, c_n, b) = \dim l(c_1, \dots, c_n, b),$$

получаваме следното

Твърдение 5. (Теорема на Руше:) *Система линейни уравнения $Ax = b$ е съвместима тогава и само тогава, когато* $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b)$.

Твърдение 6. (Алтернатива на Фредхолм:) *Нека $v \in M_{n\times 1}(F)$ е едно решение на система линейни уравнения $Ax = b$, а $U \subseteq M_{n\times 1}(F)$ е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения $Ax = \mathbb{O}_{n\times 1}$ със същата матрица от коефициенти $A \in M_{m\times n}(F)$. В такъв случай, $w \in M_{n\times 1}(F)$ е решение на $Ax = b$ тогава и само тогава, когато $w = v + u$ за някакво решение $u \in U$.*

Доказателство. Ако $w \in M_{n\times 1}(F)$ е решение на $Ax = b$, то $A(w - v) = Aw - Av = b - b = \mathbb{O}_{n\times 1}$ и $w - v = u \in U$ е решение на хомогенната система линейни уравнения $Ax = \mathbb{O}_{n\times 1}$.

Обратно, ако $w = v + u$ за $u \in U$, то $Aw = A(v + u) = Av + Au = b + \mathbb{O}_{n\times 1} = b$. Това доказва, че $w \in M_{n\times 1}(F)$ е решение на $Ax = b$.

□

Следствие 7. *(i) Система линейни уравнения $Ax = b$ с n неизвестни е определена тогава и само тогава, когато* $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b) = n$.

(ii) Система линейни уравнения $Ax = b$ с n неизвестни е неопределена тогава и само тогава, когато $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b) < n$.

Доказателство. (i) Съгласно Твърдение 6, системата $Ax = b$ има единствено решение тогава и само тогава, когато съответната хомогенна система линейни уравнения $Ax = \mathbb{O}_{n\times 1}$ има само нулевото решение. Това е в сила точно когато $0 = \dim U = n - \mathrm{rk}(A)$ за пространството от решения $U \subseteq M_{n\times 1}(F)$ на $Ax = \mathbb{O}_{n\times 1}$. Комбинирайки с Теоремата на Руше - Твърдение 5 получаваме, че системата $Ax = b$ е определена тогава и само тогава, когато $\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}(A) = n$.

(ii) От Твърдение 6 следва, че системата линейни уравнения $Ax = b$ е неопределена тогава и само тогава, когато съответната хомогенна линейна система $Ax = \mathbb{O}_{n\times 1}$ има пространство от решения U с размерност $\dim U = n - \mathrm{rk}(A) > 0$. Вземайки предвид Теоремата на Руше - Твърдение 5, стигаме до извода, че $Ax = b$ е неопределена точно тогава, когато $\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}(A) < n$.

□