Евклидови и унитарни пространства. Ортогонализация по метода на Грам-Шмид.

Определение 1. *Скаларно произведение*

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow F,$$

в линейно пространство V над $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{C}$ е изображение със свойствата:
(i) $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$ *за* $\forall u, v \in V$*;*
(ii) $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$ *за* $\forall u_1, u_2, v \in V$*;*
(iii) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ *за* $\forall u, v \in V$*,* $\forall \lambda \in F$*;*
(iv) $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ *за* $\forall v \in V$ *с* $\langle v, v\rangle = 0 \in F$ *точно когато* $v = \mathcal{O}_V \in V$*.*

Определение 2. *Линейно пространство V над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа е евклидово, ако в него е определено скаларно произведение $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$.*

Линейно пространство V над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа е унитарно, ако в него е определено скаларно произведение $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$.

Следствия от аксиомите за евклидово (унитарно) пространство:
(а) $\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle$ за $\forall u, v_1, v_2 \in V$.
По-точно,

$$\langle u, v_1 + v_2\rangle = \overline{\langle v_1 + v_2, u\rangle} = \overline{\langle v_1, u\rangle + \langle v_2, u\rangle} = \overline{\langle v_1, u\rangle} + \overline{\langle v_2, u\rangle} = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle.$$

(б) $\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle$ за $\forall u, v \in V$, $\forall \lambda \in F$.
Това следва от

$$\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\langle \lambda v, u\rangle} = \overline{\lambda\langle v, u\rangle} = \overline{\lambda}\ \ \overline{\langle v, u\rangle} = \overline{\lambda}\ \ \langle u, v\rangle.$$

(в) $\langle \overrightarrow{\mathcal{O}_V}, v\rangle = \langle v, \overrightarrow{\mathcal{O}_V}\rangle = 0$ за $\forall v \in V$ и нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}_V \in V$.
За произволен вектор $u \in V$ е в сила $0u = \mathcal{O}_V$, така че

$$\langle \mathcal{O}_V, v\rangle = \langle 0u, v\rangle = 0\langle u, v\rangle = 0 \quad \text{и}$$

$$\langle v, \mathcal{O}_V\rangle = \langle v, 0u\rangle = \overline{0}\ \ \langle v, u\rangle = 0\ \ \langle v, u\rangle = 0.$$

(г) За произволни $u_i, v_j \in V$ и $\lambda_i, \mu_j \in F$ е в сила

$$\langle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda i \overline{\mu_j}\langle u_i, v_j\rangle.$$

Последното свойство се получава от аксиоми (ii), (iii) за скаларно произведение и следствия (а), (б) от аксиомите за скаларно произведение.

Лема 3. *Произволни ненулеви ортогонални вектори v_1, ..., v_n от евклидово (унитарно) пространство V са линейно независими.*

Определение 4. *Ако V е евклидово или унитарно пространство и $v \in V$, то неотрицателният корен квадратен $||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle}^{\geq 0} \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ от скаларния квадрат $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ на v се нарича дължина на v.*

За произволен вектор $v \in V$ и произволен скалар $\lambda \in \mathbb{R}$ или $\lambda \in \mathbb{C}$ е в сила

$$\langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle = |\lambda|^2 ||v||^2,$$

откъдето $||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$. В частност, ако $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}_V}\}$ е ненулев вектор от евклидово или унитарно пространство V, то $\frac{v}{||v||} \in V$ има дължина

$$\left|\left|\frac{v}{||v||}\right|\right| = 1.$$

Определение 5. *Векторите $b_1, \ldots, b_n$ от евклидово или унитарно пространство V са ортогонални, ако $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ за всички $1 \leq i \neq j \leq n$.*

Векторите $e_1, \ldots, e_n$ от евклидово или унитарно пространство V са ортонормирани, ако са ортогонални и $||e_i|| = 1$ за всички $1 \leq i \leq n$.

Доказателство. Нека

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i v_i + \ldots + \lambda_n v_n = \mathcal{O}_V$$

е линейна комбинация на $v_1, \ldots, v_n$, равна на нулевия вектор $\mathcal{O}_V \in V$. Скаларното произведение на тази линейна комбинация с v_i е равно на

$$0 = \langle \mathcal{O}_V, v_i\rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i v_i + \ldots + \lambda_n v_n, v_i\rangle = \lambda_i\langle v_i, v_i\rangle,$$

съгласно $\langle v_j, v_i\rangle = 0$ за $1 \leq i \neq j \leq n$. Поради $v_i \neq \mathcal{O}_V$ имаме $\langle v_i, v_i\rangle = ||v_i||^2 > 0$, откъдето $\lambda_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq n$ и векторите $v_1. \ldots, v_n$ са линейно независими.

□

Лема 6. *Базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на евклидово или унитарно пространство V е ортонормиран тогава и само тогава, когато*

$$\langle ex, ey\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} = x^t\overline{y}$$

за произволни вектори $ex, ey \in V$ с координати $x, y \in M_{n\times 1}(F)$, $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ спрямо базиса e.

Доказателство. Ако $e = (e_1, \ldots, e_n)$ е ортонормиран базис на V, то

$$\langle ex, ey\rangle = \langle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\overline{y_j}\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} = (x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix}\overline{y_1}\\ \ldots\\ \overline{y_i}\\ \ldots\\ \overline{y_n}\end{pmatrix},$$

съгласно

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq n,\\ 1 & \text{за } 1 \leq i = j \leq n.\end{cases}$$

Обратно, ако $\langle ex, ey\rangle = x^t\overline{y}$ за произволни вектори $ex, ey \in V$, то

$$\langle e_i, e_i\rangle = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)\begin{pmatrix} 0\\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} = 1 \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

и

$$\langle e_i, e_j\rangle = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)\begin{pmatrix} 0\\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} = 0 \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq n.$$

□

Твърдение 7. *Съществува алгоритъм, наречен ортогонализация по метода на Грам-Шмид, който по зададени линейно независими вектори $a_1, \dots, a_n$ от евклидово (унитарно) пространство V построява ненулеви ортогонални вектори $b_1, \dots, b_n$ с*

$$l(a_1, \dots, a_i) = l(b_1, \dots, b_i) \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Ако $a_1, \dots, a_l$ са ортогонални за някое $l \leq n$, то $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2, \dots, b_l = a_l$.

Доказателство. С индукция по i, за произволни линейно независими $a_1, \dots, a_i \in V$ ще докажем, че съществуват ненулеви ортогонални вектори $b_1, \dots, b_i \in V$ с линейна обвивка $l(b_1, \dots, b_i) = l(a_1, \dots, a_i)$. В частност, ако $a_1, \dots, a_i$ са ортогонални, то $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, …, $b_n = a_n$.

За $n = 1$ избираме $b_1 = a_1$.

Ако $a_1, \dots, a_i \in V$ са линейно независими вектори, то $a_1, \dots, a_{i-1}$ са линейно независими и по индукционно предположение съществуват ненулеви ортогонални вектори $b_1, \dots, b_{i-1} \in V$ с $l(a_1, \dots, a_{i-1}) = l(b_1, \dots, b_{i-1})$. Търсим

$$b_i = a_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{i,j} b_j \tag{1}$$

с такива $\lambda_{i,j} \in F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, че

$$0 = \langle b_i, b_j\rangle = \langle a_i, b_j\rangle + \langle \lambda_{i,j} b_j, b_j\rangle = \langle a_i, b_j\rangle + \lambda_{i,j}\langle b_j, b_j\rangle \quad \text{за всички} \quad 1 \leq j \leq i-1.$$

С други думи, избираме

$$\lambda_{i,j} = -\frac{\langle a_i, b_j\rangle}{\langle b_j, b_j\rangle} \quad \text{за} \quad 1 \leq j \leq i-1.$$

Тогава $b_1, \dots, b_{i-1}, b_i$ образуват ортогонална система вектори. Ако допуснем, че $b_i = \mathcal{O}_V$, то

$$a_i = \sum_{j=1}^{i-1} (-\lambda_{i,j}) b_j \in l(b_1, \dots, b_{i-1}) = l(a_1, \dots, a_{i-1})$$

противоречи на линейната независимост на $a_1, \dots, a_{i-1}, a_i$. Това доказва, че векторите $b_1, \dots, b_{i-1}, b_i$ са ненулеви. За да проверим, че $l(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i) = l(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i)$ използваме, че $l(a_1, \dots, a_{i-1}) = l(b_1, \dots, b_{i-1})$, откъдето

$$l(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i) = l(a_1, \dots, a_{i-1}) + l(a_i) = l(b_1, \dots, b_{i-1}) + l(a_i) = l(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i).$$

За

$$l(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i) = l(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i)$$

е достатъчно да забележим, че от (**??**) следва

$$b_i \in l(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i) \quad \text{и} \quad a_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{i,j} b_j \in l(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i).$$

Ако $a_1, \dots, a_i \in V$ са ортогонални, то $a_1, \dots, a_{i-1} \in V$ са ортогонални и $b_1 = a_1$, $\dots$, $b_{i-1} = a_{i-1}$ по индукционно предположение. Тогава при търсене на b_i по правилото (**??**) получаваме

$$\lambda_{i,j} = -\frac{\langle a_i, b_j \rangle}{\langle b_j, b_j \rangle} = -\frac{\langle a_i, a_j \rangle}{\langle a_j, a_j \rangle} = 0$$

за всички $1 \leq j \leq i-1$, откъдето $b_i = a_i$.

□

Следствие 8. *Нека $a_1, \dots, a_n$ са линейно независими вектори от евклидово (унитарно) пространство V и $a_{n+1} \in l(a_1, \dots, a_n)$. Тогава ортогонализацията по метода на Грам-Шмид дава $b_{n+1} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$.*

Доказателство. Чрез ортогонализация по метода на Грам-Шмид, от линейно независимите вектори $a_1, \dots, a_n \in V$ получаваме ненулеви ортогонални $b_1, \dots, b_n \in V$ с $l(a_1, \dots, a_n) = l(b_1, \dots, b_n)$. Търсим

$$b_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n+1,j} b_j.$$

Съгласно $a_{n+1} \in l(a_1, \dots, a_n) = l(b_1, \dots, b_n)$ съществуват $\mu_j \in F$ с $a_{n+1} = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j b_j$. В резултат,

$$b_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n+1,j} b_j = \sum_{j=1}^{n} (\mu_j + \lambda_{n+1,j}) b_j$$

и от условията

$$0 = \langle b_{n+1}, b_j \rangle = (\mu_j + \lambda_{n+1,j}) \langle b_j, b_j \rangle$$

следва $\mu_j + \lambda_{n+1,j} = 0$ за всички $1 \leq j \leq n$ и $b_{n+1} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$.

□

Следствие 9. *Нека V е n-мерно евклидово (унитарно) пространство, а $e_1, \dots, e_k \in V$ е ортонормирана система вектори. Тогава $k \leq n$ и $e_1, \dots, e_k$ се продължава до ортонормиран базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ на V.*

В частност, съществува ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$ на V.

Доказателство. Ненулевите ортогонални вектори $e_1, \ldots, e_k$ са линейно независими. Ако $a_1, \ldots, a_n$ е базис на V, то $e_1, \ldots, e_k \in V = l(a_1, \ldots, a_n)$ изисква $k \leq n$ по Основната лема на линейната алгебра (Лемата за линейна зависимост). Продължаваме $e_1, \ldots, e_k$ до базис $e_1, \ldots, e_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ на V или избираме базис $v_1, \ldots, v_n$ на V. Към линейно независимите вектори $e_1, \ldots, e_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ или $v_1, \ldots, v_n$ прилагаме ортогонализация по метода на Грам-Шмид и получаваме ненулеви ортогонални вектори $b_1, \ldots, b_n \in V$. При това, $b_1 = e_1, \ldots, b_k = e_k$, ако $v_1 = e_1, \ldots, v_k = e_k$. Векторите $b_1, \ldots, b_n$ са линейно независими и образуват базис на V. Полагаме

$$e_i := \frac{b_i}{||b_i||}, \quad ||b_i|| := \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle}^{\geq 0} \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq n$$

и получаваме ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_n$ на V, който съдържа ортонормираните вектори $e_1, \ldots, e_k$, ако $v_1 = e_1, \ldots, v_k = e_k$.

□