Упражнение 7

Атанас Груев

22.10.2019

1 Кратка теория

Основната цел на това упражнение е да задълбочим познанията си за граници, свързани с Неперовото число e. По-точно, доказахме няколко важни твърдения, с чиято помощ лесно се пресмятат граници от вида:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right)^{p(n)}$$

Тук $f(n)$ и $g(n)$ са полиноми на n от равна степен $(deg(f) = deg(g))$, а $p(n)$ е функция на n, която клони към безкрайност за n клонящо към безкрайност, т.е. $f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

- Ръководство, зад. 2.5 от Глава 1, Параграф 2 - разгледахме редицата:

  $$\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \text{ с общ член } a_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

  Тази редица е сходяща за всяко реално x. По-точно, говорим за функцията *експонента*, като дефинирахме:

  $$e^x \coloneqq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

  Това твърдение е важно само по себе си, защото за всяко $x \in \mathbb{R}$ можем да дефинираме експонента (експонентата над реални числа е свързана с теореми като тази за продължението и др.). При решаването на задачи често ползваме свойствата на експонентата.

- Ръководство, зад. 2.6 д) - следното свойство беше доказано:

  $$\text{Ако } x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x, \text{ то } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = e^x (= e^{\lim_{n\to\infty} x_n})$$

  От това свойство може да се изведе следващата закономерност.

- По-общо казано, в сила е:

  $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

  Както е известно от лекции, имаме твърдението:

  $$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \iff \frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Това ни дава право да запишем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+a_n\right)^{\frac{1}{a_n}}, \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

По същество това е друг запис на третата граница.

- Ръководство, зад. 2.7 - въведохме *естествения логаритъм* като границата:

$$l\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}2^n\left(\sqrt[2^n]{x}-1\right)$$

Означаваме го с $\ln x$ - обратната функция на e^x. По-точно:

$$\ln\left(e^x\right)=x\ \forall\, x\in\mathbb{R} \quad \text{и} \quad e^{\ln x}=x\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

Забележка - това не е единсвеният начин да въведем естествения логаритъм. В Сборника със задачи на Проданов и Чобанов е дадена дефиницията:

$$\ln x=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$$

Проверява се, че съответната редица е монотонно намаляващи и лесно се вижда, че е ограничена отдолу. Това влече нейната сходимост. Някои свойства на логаритъма могат да бъдат намерени в Ръководството - зад. 2.8.

2 Задачи

- Задача - да се пресметне границата:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-5}\right)^{4n+7}$$

Тази задача има едно решение, но то може да бъде достигнато по различни начини на база горната теория. Да преобразуваме:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5+6}{3n-5}\right)^{4n+7}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\boxed{\frac{6}{3n-5}}\right)^{4n+7}$$

I) Първи начин - да умножим и разделим с подходящ израз заградената част, така че да получим граница, в която знаменателят на дробта е точно равен на степенния показател:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n+7}{4n+7}\cdot\frac{6}{3n-5}\right)^{4n+7}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{6(4n+7)}{3n-5}}{4n+7}\right)^{4n+7}$$

Остава да проверим дали редицата $\{4n+7\}_{n=1}^{\infty}$ клони към безкрайност. Това обаче е очевидно и значи:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{6(4n+7)}{3n-5}}{4n+7}\right)^{4n+7}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{6(4n+7)}{3n-5}}=e^{\frac{24}{3}}$$

II) Втори начин - да умножим и разделим в степенния показател с реципрочното на заградения израз. Получаваме:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{3n-5}\right)^{\frac{3n-5}{6}\cdot\frac{6}{3n-5}\cdot(4n+7)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{3n-5}\right)^{\frac{3n-5}{6}\cdot\frac{6(4n+7)}{3n-5}}$$

Последният израз приема стойност:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{3n-5}\right)^{\frac{3n-5}{6}\cdot\frac{6(4n+7)}{3n-5}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{6(4n+7)}{3n-5}} = e^{\frac{24}{3}}$$

- Задача - да се намери границата:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{2n^2-4}\right)^{\frac{3n}{4}}$$

Отново ще покажем два начина.

I) Първи начин - преобразуваме:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-4+7}{2n^2-4}\right)^{\frac{3n}{4}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{2n^2-4}\right)^{\frac{3n}{4}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\left(\frac{\frac{3n}{4}.7}{2n^2-4}\right)}{\frac{3n}{4}}\right)^{\frac{3n}{4}}$$

Проверяваме, че редицата $\left\{\frac{3n}{4}\right\}$ дивергира към безкрайност. Можем да запишем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\left(\frac{\frac{3n}{4}.7}{2n^2-4}\right)}{\frac{3n}{4}}\right)^{\frac{3n}{4}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{21n}{4(2n^2-4)}} = e^0 = 1$$

II) Втори начин - използваме твърдението от Ръководството, зад. 1.19:

Ако $\{a_n\}$ е сходяща редица от неотрицателни числа,
за която е в сила $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, то за произволно $k \in \mathbb{N}$ е изпълнено:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{L}$$

Да разглеждаме редицата $\left\{\left(1+\frac{7}{2n^2-4}\right)^{3n}\right\}$. С някой от начините от предишната задача намираме, че:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\left(\frac{3n.7}{2n^2-4}\right)}{3n}\right)^{3n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{21n}{2n^2-4}} = e^0 = 1$$

Като приложим твърдението за редицата $\left\{\sqrt[4]{\left(1+\frac{7}{2n^2-4}\right)^{3n}}\right\}$, то получваме, че границата на първоначалната редица е $\sqrt[4]{1} = 1$.

- Сборник (ПХЧ) - зад. 65 от Глава 4, Параграф 13 - да се намери границата на редицата:

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}, \dots$$

Решението е да съобразим, че сме изправени пред редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \\ &a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{8}} = 2^{\frac{3}{4}} \\ &a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{128}}} = 2^{\frac{7}{8}} \\ &\dots \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a_n = 2^{\frac{2^n-1}{2^n}} = 2^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$$

Това представяне на общия член прави намирането на границата значително по-лесно:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{1-\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} 2\,.\,\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{2^n}}} = 2\,.\,\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2^n]{2}} = 2\,.\,1 = 2$$

Вече сме обсъждали границата $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ за $a \in \mathbb{N}$. Тъй като $2^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, то можем да положим $k \coloneqq 2^n$, където $k \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ и да сведем към познатия случай, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{2} \overset{k\,\coloneqq\,2^n}{=} \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2} = 1$$

- Задача 274 (Кудрявцев) - да се намери границата:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}-1}\right)$$

Преди всичко, да запишем във вида:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$

Да положим $t_n \coloneqq e^{\frac{1}{n}} - 1$. Тогава $1 + t_n = e^{\frac{1}{n}}$ и след повдигане на степен n, имаме $(1+t_n)^n = e$. Съвсем лесно можем да изразим n чрез t_n като логаритмуваме двете страни, т.е.

$$\left.\begin{aligned} \ln(1+t_n)^n &= \ln e = 1 \\ \ln(1+t_n)^n &= n\,.\,\ln(1+t_n) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow n = \ln(1+t_n) = \frac{1}{n}$$

От нашето полагане и последното изразяване веднага се вижда, че:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{\ln(1+t_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{t_n}\,.\,\ln(1+t_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(1+t_n)^{\frac{1}{t_n}}}$$

Проверява се, че $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Без доказателство ще ползваме, че:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(1+t_n)^{\frac{1}{t_n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \ln(1+t_n)^{\frac{1}{t_n}}} = \frac{1}{\ln\left(\lim_{n\to\infty}(1+t_n)^{\frac{1}{t_n}}\right)} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

Границата действително е 1, но е необходимо да се докаже, че границата на естествен логаритъм от даден израз е естествен логаритъм от границата на израза. По-нататък в курса ще видим, че това следва директно от непрекъснатостта на логаритмичната функция, $ln : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$. Опитайте се да го докажете с редици.

Доказателството на послединия факт, че за сходяща редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с неотрицателни членове е изпълнено:

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right),$$

не е тривиално. Един подход можем да намерим в Сборника със задачи на Проданов, Хаджииванов и Чобанов. Конкретно, ще решим няколко задачи оттам, които ни дават горния резултат.

- Глава 4, Параграф 14, Задача 69 - да се докаже, че ако е изпълнено $0 < x < y$, то в сила е неравенството:

$$n\left(\sqrt[n]{y} - 1\right) - n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) \leq \frac{y - x}{x}\sqrt[n]{x}$$

Това става най-лесно, като положим $\alpha \coloneqq \sqrt[n]{x}$ и $\beta \coloneqq \sqrt[n]{y}$. В новия запис, нашата цел е да докажем неравенството:

$$n\,(\beta - 1) - n\,(\alpha - 1) \overset{?}{\leq} \frac{\beta^n - \alpha^n}{\alpha^n}\alpha$$

$$n\,(\beta - \alpha) \overset{?}{\leq} (\beta^n - \alpha^n)\,\alpha^{1-n}$$

$$n\alpha^{n-1} \overset{?}{\leq} \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}$$

Съобразете, че можем да използваме формулата:

$$\beta^n - \alpha^n = (\beta - \alpha)\left(\beta^{n-1}\alpha^0 + \beta^{n-2}\alpha^1 + \cdots + \beta^1\alpha^{n-1} + \beta^0\alpha^{n-1}\right) = (\beta - \alpha)\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k\beta^{n-1-k}$$

Това направихме с цел множителят преди сумата да се съкрати, т.е. сега показваме:

$$n\alpha^{n-1} \overset{?}{\leq} \frac{\cancel{\beta - \alpha}}{\cancel{\beta - \alpha}}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k\beta^{n-1-k}$$

Сега използваме условието, че $y > x > 0$, т.е. $\beta > \alpha > 0$. Това означава, че всеки множител от вида $\alpha^k\beta^{n-1-k}$ е строго по-голям от $\alpha^k\alpha^{n-1-k}$, защото $\beta > \alpha$ и това неравенство не променя посоката си след повдигане на положителна степен на двете страни. Следователно:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k\beta^{n-1-k} > \sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k\alpha^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{n-1} = n\alpha^{n-1} \Rightarrow \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha} > n\alpha^{n-1}$$

Това доказва първоначалното неравенство.

- Глава 4, Параграф 14, Задача 70 - дефиницията на естествения логаритъм е:

$$L\left(x\right) \coloneqq \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$$

Да се докаже, че при условие $0 < x < y$ се удовлетворява следното неравенство:

$$L\left(y\right) - L\left(x\right) \leq \frac{y-x}{x}$$

Получава се с *граничен преход* от предишната задача. По-подробно, съгласно свойството на сходящите редици:

$$\left.\begin{aligned} & a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \\ & b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b \\ & a_n \leq b_n \ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a \leq b$$

Тогава очевидно:

$$\underbrace{n\left(\sqrt[n]{y}-1\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} L(y)} - \underbrace{n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} L(x)} \leq \frac{y-x}{x} \quad \underbrace{\sqrt[n]{x}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1}$$

Прилагаме горното свойство и задачата е решена.

- Глава 4, Параграф 14, Задача 74 - да се докаже, че ако $a_n > 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, като $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a > 0$, то имаме:

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \ln a$$

Доказателството предполага да съобразим, че щом $a_n > 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, то съществува някакво $x > 0$, за което $x \leq a_n$. От горното свойство на сходящите редици се вижда, че тогава $x \leq a$. Сега прилагаме предходната задача, според която:

$$\left|L\left(y\right) - L\left(x\right)\right| \leq \frac{y-x}{x} \Longrightarrow \left|\ln x_n - \ln x\right| \leq \frac{\left|x_n - x\right|}{x} \leq \frac{\left|x_n - x\right|}{a}$$

От дефиницията на Коши, за всяко $\varepsilon > 0$ можем да намерим индекс n_0 такъв, че за всички индекси n след него, $|x_n - x| < \varepsilon$. Тогава е ясно, че можем да приложим дефиницията на Коши за $|\ln x_n - \ln x| < \frac{\varepsilon}{a} = \varepsilon'$ за произволен $\varepsilon' > 0$, т.е. от дефиницията на Коши следва:

$$\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \ln x$$

Това завършва доказателството на твърденията, необходими за строга формалност при решаване на задача 274 от Кудрявцев. Тук трудността произтича от факта, че имаме на разположение единствено похватите за редици, без да разполагаме с математическия апарат на диференциалното и интегралното смятане за работа с функции.

БОНУС

- Задача 251 (Кудрявцев) - да се докаже:

$$\text{Ако } a_n > 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ и съществува границата } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ то } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- Задача 252 а) (Кудрявцев) - да се намери границата:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

Да разгледаме редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с общ член $a_n = \frac{n!}{n^n}$. За нея можем лесно да намерим следната граница:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\,(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{1+n}\right)^n$$

Тази граница е известна от упражнения, по-точно:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

От Твърдението по-горе веднага се вижда, че:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e}$$

Задачата може да се реши и като се използва апроксимацията на Стирлинг[1]:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Тогава разглеждаме границата:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\cancel{n}}{e}\right)}{\cancel{n}} = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2\pi n} = \frac{1}{e}$$

Апроксимацията на Стирлинг намира различни приложения в числените методи и компютърните науки. Например, с нейна помощ може да се намери асимптотична долна граница за Изчислителната Задача **Сортиране на масив** и да се покаже, че тя е точно $\Omega(\log_2 n)$. (За асимптотика и Изчислителни Задачи подробно се говори в курса Дизайн и Анализ на Алгоритми (ДАА)).

[1] Повече за **Stirling's Approximation** - `http://www.math.ualberta.ca/pi/issue7/page10-12.pdf`