Упражнение 11-12

Атанас Груев

04.11.2019 и 11.11.2019

1 Кратка теория

Разглеждаме граници на функции, опирайки се на дефинициите дадени в предишното упражнение. Тук ще отбележим някои основни граници, които се ползват често и са доказвани по време на учебните занятия. След това ще ги използваме в задачи. Ще дадем още един пример за употребата на o-малко.

Основни граници на функции са:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a > 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = a^b$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^x = e^a$

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{\ln y}{y-1} = 1$

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

(7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad a > 0$

(8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a-1}{x} = a$

2 Задачи

В редовните часове основно решавахме от Ръководството на Любенова, Недевски и др. Тук наистина е препоръчително да прегледате задачите в Сборника на Проданов, Хаджииванов и Чобанов от Глава 5 - Граници на функции (Параграфи 7-10). Оттам също ще включим примери.

- Ръководство - зад. 2.10, подточка г) - намерете границата:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

Едно решение е да извършим полагане, което да улови НОК за 2 и 3 - знаменатели на степенните показатели на cos в числител. Такива субституции са полезни за справяне с граници на ирационални функции. Наистина, полагаме:

$$\left.\begin{aligned} & t=\sqrt[6]{\cos x}\\ & t^6=\cos x\\ & x\to 0 \iff t\to 1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{t\to 1}\frac{t^3-t^2}{1-t^{12}}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2\left(t-1\right)}{\left(1-t\right)\left(1+t+\cdots+t^{11}\right)}$$

Можем да съкратим множителя $(t-1)$ и да съобразим, че сме отстранили проблема в знаменател - границата вече се пресмята директно от непрекъснатост на рационалните функции:

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^2\cancel{\left(t-1\right)}}{\cancel{\left(1-t\right)}\left(1+t+\cdots+t^{11}\right)}=-\lim_{t\to 1}\frac{t^2}{1+t+\cdots+t^{11}}=-\frac{1}{12}$$

- Ръководство - зад. 1.4, подточка д) - намерете границата:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$$

Ще използваме тригонометрични преобразувания, за да отстраним неопределеността. Да разгледаме следния подход:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2-4\cos x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{2-4\cos x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\cdot\frac{\sqrt{3}\cos x+\sin x}{\sqrt{3}\cos x+\sin x}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\left(1-2\cos x\right)\left(\sqrt{\cos x}+\sin x\right)}{3\cos^2 x-sin^2x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\left(1-2\cos x\right)\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x\right)}{4\cos^2 x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cancel{\left(1-2\cos x\right)}\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x\right)}{\cancel{\left(2\cos x-1\right)}\left(2\cos x+1\right)}=$$

$$=-2\,.\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\cos x+\sin x}{2\cos x+1}=\left(-2\right)\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$$

- Ръководство - зад. 2.17, подточка ж) - намерете границата:

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a},\quad a>0$$

Решението ни ще използва основна граница (7). Нека да запишем горната граница като:

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^x-a^a+a^a-x^a}{x-a}=\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{a^a\left(a^{x-a}-1\right)}{x-a}}_{(1)}+\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{a^a-x^a}{x-a}}_{(2)}$$

Решението ни да прибавим и извадим a^a в числител е продиктувано именно от желанието да напишем израз, подобен на (7). И така, нека пресметнем двете граници поотделно:

$$(1) \quad \lim_{x\to a} \frac{a^a\left(a^{x-a}-1\right)}{x-a} = a^a \lim_{x\to a} \frac{a^{x-a}-1}{x-a}$$

Полагаме $t \coloneqq x-a$ и съобразяваме, че $x \to a \iff t \to 0$.

$$a^a \lim_{t\to 0} \frac{a^t-1}{t} = a^a \ln a$$

За втората граница имаме:

$$(2) \quad \lim_{x\to a} \frac{a^a - x^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(a-x)}\left(x^{a-1}+\cdots+a^{a-1}\right)}{\cancel{x-a}} = -\lim_{x\to a} x^{a-1}+\cdots+a^{a-1} = -a^a$$

Окончателно получаваме, че търсената граница е $a^a(\ln a - 1)$.

- Ръководство - зад. 2.18, подточка е) - пресметнете границата:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{3x}\right)^{\frac{1}{2x}}$$

Ще умножим и разделим с $2x$ дробта в скобите, за да използваме основна граница (3):

$$\lim_{x\to 0}\left(1+2x\,.\left(\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{3x}}{2x}\right)\right)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{3x}}{2x}} = \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{3x}}{2x}\right\} = e^{\frac{3}{2}}$$

Ще разгледаме получената граница отделно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{3x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\sqrt{3x}}{\left(\sqrt{3x}\right)^2}\,.\,\frac{3}{2\cos^2\sqrt{3x}} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2\sqrt{3x}} = \frac{3}{2}$$

Така намерихме границата от условието.

- Ръководство - зад. 2.18, подточка ж) - пресметнете границата:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

Ще запишем границата като произведение на две граници:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos x}\,.\,\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}}$$

Самостоятелно докажете, че $\sqrt[x]{\cos x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Ние ще се съсредоточим върху втората граница:

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+x\,.\,\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\operatorname{tg} x}{x}} = e$$

Търсената граница е числото e.

- Сборник (ПХЧ) - зад. 64, подточка б) - да се пресметне границата:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\,.\,3^x+3\,.\,2^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Ще използваме основната граница (7) още веднъж. Тук отново трябва да сме съобразителни и презапишем израза по удобен начин. Да постъпим така:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\,.\,3^x+3\,.\,2^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2\,.\,3^x+3\,.\,2^x-5}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+x\,.\,\left(\frac{2\,.\,3^x+3\,.\,2^x}{5x}\right)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{2\,.\,3^x+3\,.\,2^x-5}{5x}}$$

Да пресметнем границата в степенен показател на e отделно - имаме:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\,.\,3^x+3\,.\,2^x-5}{5x}=\frac{1}{5}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\,.\,3^x-2}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{3\,.\,2^x-3}{x}\right)=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}+\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\frac{2}{5}\ln 3+\frac{3}{5}\ln 2=\ln\sqrt[5]{72}$$

Следователно търсената граница е $\sqrt[5]{72}$.

- Сборник (ПХЧ) - зад. 74, подточка г) - да се пресметне границата:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin 2x}\left(\sqrt[6]{1+\ln(1+x)}-1\right)$$

Ще използваме основната граница (8). Ето как:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin 2x}\left(\sqrt[6]{1+\ln(1+x)}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\,.\,\frac{(1+\ln(1+x))^{\frac{1}{6}}-1}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\,.\,\lim_{x\to 0}\frac{(1+\ln(1+x))^{\frac{1}{6}}-1}{\ln(1+x)}\,.\,\frac{\ln(1+x)}{2x}=$$

$$=1\,.\,\lim_{x\to 0}\frac{(1+\ln(1+x))^{\frac{1}{6}}-1}{\ln(1+x)}\,.\,\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x}=1\,.\,\frac{1}{6}\,.\,\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

- Ляшко, Боярчук, Гай, Головач - зад. 160 от Параграф "Предел функции" (стр. 74) - да се пресметне границата:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$$

Задачата ще решим с използването на o-малко нотацията. Наистина, нека положим $1+t:=\sqrt[5]{1+5x}$. Изразяваме $x=\frac{1}{5}\left((1+t)^5-1\right)$ и имаме, че $x\to 0\iff t\to 0$.

Пресмятаме границата:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{25}\left((1+t)^5-1\right)^2}{(1+t)-\left(1+\frac{1}{5}\left((1+t)^5-1\right)\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{25}\left(\cancel{1}+5t+o\left(t\right)-\cancel{1}\right)^2}{t-\left(\frac{1}{5}\left(\cancel{1}+5t+10t^2+o\left(t^2\right)-\cancel{1}\right)\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{25}\left(5t+o\left(t\right)\right)^2}{t-\left(t+2t^2+o\left(t^2\right)\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{25}\left(25t^2+o\left(t^2\right)\right)}{-2t^2+o\left(t^2\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2+o\left(t^2\right)}{-2t^2+o\left(t^2\right)}=-\frac{1}{2}$$