Упражнение 8

Атанас Груев

28.10.2019

1 Кратка теория

Това упражнение има за цел да допълни знанията ни за основни похвати, свързани с пресмятането на граници на редици от ирационални функции на n (упражняваме *рационализирането* чрез формулите за съкратено умножение), както и да даде пример за граници от вида:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+k} \pm b^{n+k}}{a^{n+l} \pm b^{n+l}}, \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

Можем да разделим в числител и знаменател на $\max\{a, b\}$ и да ползваме свойствата на числови редици, заедно с известния факт, че редицата $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща с граница 0 за $|q| < 1$. Тази граница е сред основните, които сме доказвали в предходни упражнения.

Въвеждаме *рекурентни редици*. Това са редици $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, за които знаем първите k члена $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и как да получим всеки следващ член като функция на предишните k члена. По-точно,

$$a_n = f\left(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}\right), \quad n > k$$

Тук функцията f е функция на k аргумента. Интуитивно си мислим, че всеки измежду тези k аргумента може да влияе на функционалната стойност на f. С други думи, a_n може да зависи по някакъв начин (да се получава) от предходните k елемента на редицата.

2 Задачи

На задачите от рекурентни редици ще отделим особено внимание по време на следващото упражнение. Затова тук ще поместим една такава задача, подробно решена. Задачи за граници от горните видове могат да бъдат намерени в Ръководството на Любенова и Недевски (Глава 1, Параграф 1, Зад. 1.20), в Сборника със задачи на Проданов, Хаджииванов и Чобанов (Глава 7, Параграф 4), в Сборника на Кудрявцев (Параграф 8, Предел последователности)

- Ръководство, зад. 1.20 з - да се намери границата:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$$

Достатъчно е да рационализираме:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2+n+1\right) - \left(n^2-n+1\right)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}}$$

Следващата стъпка е да съкратим каквото можем в числител и да изнесем най-голяма степен пред скоби в знаменател:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2+n+1\right)-\left(n^2-n+1\right)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(1-\frac{1}{n}+1\right)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+n\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}$$

Остава да съобразим, че:

$$\left.\begin{array}{l} 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \\ 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{2}{1+1} = 1$$

- Ръководство, зад. 1.20 и) - да се намери границата:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$$

Да разгледаме по-внимателно сумата в числител, като потърсим затворен вид на формулата:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

Използваме следните свойства на сумирането:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[f(k)\pm g(k)\right] = \sum_{k=1}^{n} f(k) \pm \sum_{k=1}^{n} g(k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda f(k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Тук под f, g разбираме изрази, които зависят от сумационния индекс $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, т.е. функции на k, а $\lambda \in \mathbb{R}$ е произволно число (скалар). Свойствата следват директно от свойствата на операцията събиране, по-точно - сумираме в определена последователност или изнасяне на общ елемент пред скоби. С помощта на тези съображения лесно се вижда, че:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n} 2k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\sum_{k+1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = \cancel{2}\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - n = n^2 + \cancel{n} - \cancel{n} = n^2$$

Остава да заместим в числителя на границата с n^2 и да изнесем n^2 пред корена:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{\sqrt{n^4+n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4+n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}} = 1$$

Препоръчвам самостоятелно да прегледате нерешените подточки на зад. 1.20. Задача 32 от Параграф 7 (Граници на ирационални функции на n) от Сборника на Проданов, Хаджииванов, Чобанов е също много подходяща за упражнение.

- Сборник на Кудрявцев - зад. 36, подточка 4) - да се намери границата:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} 6^{n+1}}$$

За такива задачи прилагаме стратегия в две стъпки - преобразуваме израза, така че навсякъде степента да бъде n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} 6^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 6^n - 5\,.\,5^n}{5^n - (-1)\,.\,(-1)^n\,.\,6\,.\,6^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-6)^n - 5\,.\,5^n}{5^n + 6\,(-6)^n}$$

Забележете как предпочитаме да записваме $(-1)^n 6^n = (-6)^n$. Това не просто упростява записа - това е подсказка, че трябва да разделим в числител и знаменател на $(-6)^n$. Ако забравим минуса и разделим на $(6)^n$, ще получим в числител и знаменател изрази $(-1)^n$. Както знаем, редицата $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ не е сходяща (има 2 точки на сгъстяване).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-6)^n - 5\,.\,5^n}{5^n + 6\,(-6)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-6)^n - 5\,.\,5^n}{(-6)^n}}{\frac{5^n + 6(-6)^n}{(-6)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 5\left(-\frac{5}{6}\right)^n}{\left(-\frac{5}{6}\right)^n + 6} = \frac{1}{6}$$

Съобразете, че $\left(-\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{0}$, тъй като $-\frac{5}{6} \in (-1, 1)$

- Сборник на Кудрявцев - зад. 36, подточка 5) - да се намери границата:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1 + a^n}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Да добавим и извадим единица в числителя:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + 1 - 1}{a^n + 1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{a^n + 1}\right)$$

Необходимо е да разгледаме няколко случая в зависимост от стойността на $a \in \mathbb{R}$:

1) $|a| > 1 \Rightarrow a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Тогава $\frac{1}{a^n + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{a^n + 1}\right) = 1$

2) $|a| = 1 \Rightarrow a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Тогава $\frac{1}{a^n + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ и $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{a^n + 1}\right) = \frac{1}{2}$

3) $|a| < 1 \Rightarrow a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогава $\frac{1}{a^n + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ и $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{a^n + 1}\right) = 0$

- Сборник на Кудрявцев - зад. 36, подточка 6) - да се намери границата:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1 + a^{2n}}, \quad a \in \mathbb{R}$$

В зависимост от стойностите на a има няколко възможности:

$$1)\quad |a| < 1 \Rightarrow a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ и } a^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \text{ Тогава } \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} = 0$$

$$2)\quad |a| > 1 \Rightarrow a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \text{ и } a^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty. \text{ Разглеждаме неравенствата:}$$

$$\frac{a^n}{2a^{2n}} \le \frac{a^n}{1+a^{2n}} \le \frac{a^n}{a^{2n}} \Rightarrow \frac{1}{2a^n} \le \frac{a^n}{1+a^{2n}} \le \frac{1}{a^n}$$

След граничен преход получаваме:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \le \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} = 0$$

$$3)\quad a = 1 \Rightarrow a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ и } a^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1. \text{ Лесно се вижда, че } \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} = \frac{1}{2}$$

$$4)\quad a = (-1) \Rightarrow a^n = (-1)^n \text{ - не е сходяща, но } a^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1. \text{ Значи } \neg\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$$

<u>Важно!</u> Внимателно ще решим зад. 3.4 б) от Ръководството, Параграф 3 - за кои стойности на α е сходяща редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и колко е границата ѝ за тези стойности на α, ако:

$$a_1 = \alpha,\ a_{n+1} = \frac{3a_n^2 + a_n + 6}{a_n + 9} \quad (\alpha \ne -9)$$

Първата стъпка е да допуснем, че редицата е сходяща. Нека $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ за някакво l. Тогава $a_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$. Сега ползваме рекурентната връзка за a_n, за да получим с помощта на граничен преход:

$$a_{n+1} = \frac{3a_n^2 + a_n + 6}{a_n + 9} \Rightarrow l = \frac{3l^2 + l + 6}{l + 9}$$

Решаваме уравнението и получаваме, че възможните стойности на l са точно две - $l = 1$ или $l = 3$.

Втората стъпка е да търсим кога редицата е монотонно намаляваща или нарастваща. По-точно, образуваме разликата $a_{n+1} - a_n$ и изследваме спрямо нейния знак. В тази задача,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n^2 + a_n + 6}{a_n + 9} - a_n = \frac{3a_n^2 + a_n + 6 - a_n^2 - 9a_n}{a_n + 9} = \frac{2\,(a_n - 3)\,(a_n - 1)}{a_n + 9}$$

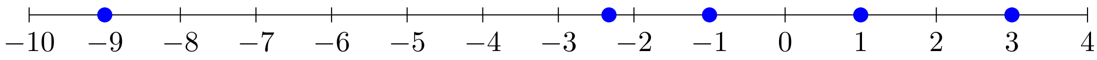
Знакът зависи от изразите $(a_n - 3)\,, (a_n - 1)$ и $(a_n + 9)$. Те се нулират при $a_n = 3, 1, -9$ съответно. Да образуваме равенствата:

$$(*)\quad a_{n+1} - 3 = \frac{3a_n^2 + a_n + 6}{a_n + 9} - 3 = \frac{(a_n - 3)\,(3a_n + 7)}{a_n + 9}$$

$$(**)\quad a_{n+1} - 1 = \frac{3a_n^2 + a_n + 6}{a_n + 9} - 1 = \frac{3\,(a_n - 1)\,(a_n + 1)}{a_n + 9}$$

$$(***)\quad a_{n+1} - (-9) = \frac{3a_n^2 + a_n + 6}{a_n + 9} + 9 = \frac{3a_n^2 + 10a_n + 87}{a_n + 9}$$

Трета стъпка е да определим кога $a_{n+1} - a_n, (*), (**)$ и $(***)$ са равни на 0 - това са числата, които разполагаме по реалната права и според които разглеждаме подходящи случаи. Тази част е лесна - просто гледаме кога се нулира числителя. Накрая трябва да добавим и стойността, която нулира знаменателя, която тук е -9.



Разглеждаме следните случаи в зависимост от стойността на α:

I) $\alpha > 3$. Стойността 3 се появява при условие $(*)$, така че то ни дава информация за членовете на редицата. По-конкретно, разглеждаме $a_2 - 3$ - вторият член на редицата в условие $(*)$:

$$a_2 - 3 = \frac{(\alpha - 3)(3\alpha + 7)}{\alpha + 9} > 0 \Rightarrow a_2 > 3$$

С индукция по $n \geq 2$ доказваме, че $a_n > 3$ за всяко $n \geq 2$. Да допуснем, че $a_k > 3$ за някое $k \in \mathbb{N}$. Тогава за a_{k+1} от условие $(*)$ имаме:

$$a_{k+1} - 3 = \frac{(a_k - 3)(3a_k + 7)}{a_k + 9} > 0 \Rightarrow a_{k+1} > 3$$

Така доказахме, че $a_n > 3$ за всяко $n \geq 2$. Проверяваме, че:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(a_n - 3)(a_n - 1)}{a_n + 9} > 0$$

Следователно в този случай редицата е монотонно растяща. Обаче $a_{n+1} > a_n > 3$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Нито една от границите $l = 1$ или $l = 3$ не се достига, т.е. редицата дивергира към безкрайност и $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

II) $\alpha = 3$. Сега ползваме рекурентната връзка:

$$a_2 = \frac{3\alpha^2 + \alpha + 6}{\alpha + 9} = \frac{36}{12} = 3$$

С индукция по $n \geq 2$ доказваме, че $a_n = 3$. Да допуснем, че $a_k = 3$ за някое $k \in \mathbb{N}$. Тогава за a_{k+1} имаме:

$$a_{k+1} = \frac{3a_k^2 + a_k + 6}{a_k + 9} = \frac{36}{12} = 3$$

Доказахме, че $a_n = 3$ за всяко $n \geq 2$. Ясно е, че редицата е сходяща и $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$.

Забележка По същия начин се разглеждат случаите за $\alpha = 1$, $\alpha = -1$ и $\alpha = -\frac{7}{3}$. Ще ги разпишем по-подробно тук, като така си спестяваме по-нататъшни занимания със случаи от вида $\alpha = c$. И така, ако $\alpha = 1$, лесно се проверява, че:

$$a_2 = \frac{3\alpha^2 + \alpha + 6}{\alpha + 9} = \frac{10}{10} = 1$$

С индукция по $n \geq 2$ показваме, че $a_n = 1$ за всяко $n \geq 2$. Ако допуснем, че $a_k = 1$ за някое $k \in \mathbb{N}$, то следва да проверим за a_{k+1}:

$$a_{k+1} = \frac{3a_k^2 + a_k + 1}{a_k + 9} = \frac{10}{10} = 1$$

Така доказахме, че $a_n = 1$ за всяко $n \geq 2$. Оттук редицата е сходяща и $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Съвсем аналогичен е случаят за $\alpha = -1$. По-точно, за a_2 пресмятаме с рекурентната връзка:

$$a_2 = \frac{3\alpha^2 + \alpha + 6}{\alpha + 9} = \frac{8}{8} = 1$$

С индукция по $n \geq 2$ доказваме, че $a_n = 1$. Допускането ни е, че $a_k = 1$ за някое $k \in \mathbb{N}$. За a_{k+1} се проверява:

$$a_{k+1} = \frac{3a_k^2 + a_k + 6}{a_k + 9} = \frac{10}{10} = 1$$

Следователно и сега с индукция показахме, че $a_n = 1$ за всяко $n \geq 2$. Това означава, че редицата е сходяща, като $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Накрая, ако $\alpha = -\frac{7}{3}$, то за a_2 имаме;

$$a_2 = \frac{3\alpha^2 + \alpha + 6}{\alpha + 9} = \frac{60}{20} = 3$$

Твърдим, че $a_n = 3$ за всяко $n \geq 2$. Индукционното предположение е, че $a_k = 3$ за някое $k \in \mathbb{N}$. Тогава да видим за a_{k+1}:

$$a_{k+1} = \frac{3a_k^2 + a_k + 6}{a_k + 9} = \frac{60}{20} = 3$$

Така доказахме с индукция, че $a_n = 3$ за всяко $n \geq 2$. Очевидно редицата е сходяща с $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$.

III) $\alpha \in (1, 3)$. Сега ограничаваме α между стойности, получени от две различни условия (1-цата идва от условие $(**)$, а 3-ката - както преди малко, от условие $(*)$). Налага се да ги разгледаме и двете, като започваме своите проверки отново с $a_2 - 3$ и $a_2 - 1$:

$$a_2 - 3 = \frac{3\,(\alpha - 3)\,(3\alpha + 7)}{\alpha + 9} < 0 \Rightarrow a_2 < 3$$

С индукция по $n \geq 2$ се показва, че $a_n < 3$. Ако допуснем, че $a_k < 3$ за някое $k \in \mathbb{N}$, то за a_{k+1} веднага получаваме от условие $(**)$:

$$a_{k+1} - 3 = \frac{(a_k - 3)\,(3a_k + 7)}{a_k + 9} < 0 \Rightarrow a_{k+1} < 3$$

Това доказва, че $a_n < 3$ за всяко $n \geq 2$. Освен това, от условие $(**)$ с индукция по $n \geq 2$ ще докажем, че $a_n > 2$ за всяко $n \geq 2$ (това ни дава основание за определянето на горния знак, $a_{k+1} < 3$. Ако искаме да сме напълно формални, двете условия $(*)$ и $(**)$ трябва да разгледаме съвместно и да изкажем индукционно предположение, че $0 < a_n < 3$ за всяко $n \geq 2$). Наистина, базата е:

$$a_2 - 1 = \frac{3\,(\alpha - 1)\,(\alpha + 1)}{\alpha + 9} > 0 \Rightarrow a_2 > 1$$

Допускаме, че $a_k > 1$ за някое $k \in \mathbb{N}$. Лесно се проверява, че за a_{k+1} от условие $(**)$ имаме:

$$a_{k+1} - 1 = \frac{3\,(a_k - 1)\,(a_k + 1)}{a_k + 9} > 0 \Rightarrow a_{k+1} > 1$$

Това доказва, че $a_n > 1$ за всяко $n \geq 2$. Накрая, получихме $1 < a_n < 3$ за всяко $n \geq 2$. Използваме това в $a_{n+1} - a_n$, за да определим монотонността на редицата:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2\,(a_n - 3)\,(a_n - 1)}{a_n + 9} < 0$$

Оказва се, че редицата е монотонно намаляваща и ограничено отдолу от 1-ца. Следователно е сходяща и $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

IV) $\alpha \in (-1, 1)$. Стойностите -1 и 1 се получават от условие $(**)$, така че записваме:

$$a_2 - 1 = \frac{3\,(\alpha - 1)\,(\alpha + 1)}{\alpha + 9} < 0 \Rightarrow a_2 < 1 \quad \text{и} \quad a_2 = \frac{3\alpha^2 + \alpha + 6}{\alpha + 9} > 0$$

С индукция по $n \geq 2$ ще докажем, че $a_n \in (0, 1)$. Допускаме, че $a_k \in (0, 1)$ за някое $k \in \mathbb{N}$. За a_{k+1} ползваме условие $(**)$ и проверяваме:

$$a_{k+1} - 1 = \frac{3\,(a_k - 1)\,(a_k + 1)}{a_k + 9} < 0 \Rightarrow a_{k+1} < 1 \quad \text{и} \quad a_{k+1} = \frac{3a_k^2 + a_k + 6}{a_k + 9} > 0$$

Доказахме, че $a_n \in (0, 1)$ за всяко $n \geq 2$. Оттук проверяваме монотонност на редицата с:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2\,(a_n - 3)\,(a_n - 1)}{a_n + 9} > 0$$

Редицата е монотонно растяща и ограничена отгоре от 1-ца. Следователно тя е сходяща и $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

V) $\alpha \in \left(-\frac{7}{3}, -1\right)$. Стойностите $-\frac{7}{3}$ и -1 се получават от условия $(*)$ и $(**)$. С индукция ще покажем, че тогава $1 < a_n < 3$ за всяко $n \geq 2$. Наистина, базата е:

$$a_2 - 1 = \frac{3\,(\alpha - 1)\,(\alpha + 1)}{\alpha + 9} > 0 \Rightarrow a_2 > 1 \quad \text{и} \quad a_2 - 3 = \frac{(\alpha - 3)\,(3\alpha + 7)}{\alpha + 9} < 0 \Rightarrow a_2 < 3$$

Допускаме, че $a_k \in (1, 3)$. За a_{k+1} пак от условията $(*)$ и $(**)$ получаваме:

$$a_{k+1} - 1 = \frac{3\,(a_k - 1)\,(a_k + 1)}{a_k + 9} > 0 \text{ и } a_{k+1} - 3 = \frac{(a_k - 3)\,(3a_k + 7)}{a_k + 9} < 0 \Rightarrow 1 < a_{k+1} < 3$$

С индукция доказахме, че $a_n \in (1, 3)$ за всяко $n \geq 2$. Да установим монотонност:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2\,(a_n - 3)\,(a_n - 1)}{a_n + 9} < 0$$

Редицата е монотонно намаляваща и ограничена отдолу от 1. Ясно е, че е сходяща и $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

VI) $\alpha \in \left(-9, -\frac{7}{3}\right)$. Използваме условие $(*)$:

$$a_2 - 3 = \frac{(\alpha - 3)(3\alpha + 7)}{\alpha + 9} > 0 \Rightarrow a_2 > 3$$

С индукция по $n \geq 2$ доказваме, че $a_n > 3$ за всяко $n \geq 2$. Допускаме, че $a_k > 3$ за някое $k \in \mathbb{N}$. От условие $(*)$, приложено към a_{k+1}:

$$a_{k+1} - 3 = \frac{(a_k - 3)(3a_k + 7)}{a_k + 9} > 0 \Rightarrow a_{k+1} > 3$$

Доказахме, че $a_n > 3$ за всяко $n \geq 2$. Лесно се вижда тогава, че $a_{n+1} - a_n > 0$ и редицата е монотонно растяща. Ако допуснем, че тя има граница $l = 1$ или $l = 3$, то ще получим противоречие с $a_{n+1} > a_n > 3$ за всяко $n \geq 2$. Следователно редицата дивергира към безкрайност и не е сходяща.

VII) $\alpha < -9$. Това е единственият случай, в който ползваме условие $(***)$. С негова помощ по индукция доказваме, че $a_n < -9$ за всяко $n \geq 2$. Наистина,

$$a_2 + 9 = \frac{3\alpha^2 + 10\alpha + 87}{\alpha + 9} < 0 \Rightarrow a_2 < -9$$

Забележете, че числителят в $(***)$ е винаги положителен, така че проверяваме само знаменателя. Допускаме, че $a_k < -9$ за някое $k \in \mathbb{N}$. Тогава за a_{k+1} имаме:

$$a_{k+1} + 9 = \frac{3a_k^2 + 10a_k + 87}{a_k + 9} < 0 \Rightarrow a_{k+1} < -9$$

С помощта на доказаното и проверката $a_{n+1} - a_n < 0$ се вижда, че редицата е монотонно намаляваща и $a_{n+1} < a_n < -9$ за всяко $n \geq 2$. Тогава няма как да е сходяща с граница $l = 1$ или $l = 3$, т.е. дивергира към безкрайност.

Краен отговор: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ за $\left(-\frac{7}{3}, 3\right)$ и $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ за $\left\{-\frac{7}{3}, 3\right\}$.