Теория на множествата (Set Theory)

множество - първично понятие (не се дефинира - ако кажем, че е съвкупност ще се завъртим в кръг)

протоелементи - всички обекти, с помощта на които се изграждат множества, никое множество не е протоелемент.

Елементи на множеството: протоелементи или вече образувани множества. Но никое множество не може да бъде елемент на самото себе си.

$\in$ - принадлежи $\quad$ $\ni$ - съдържа

$a \in M$ $\quad$ $M \ni a$

Забележка:

протоелементи.

$$A = \{\{a, b, c, d\}, a\}$$

NO DATE

Аксиоми:

1) Аксиома за обема:

$\forall a \, (a \in A \Leftrightarrow a \in B) \Rightarrow A = B.$

Едно множество зависи и се определя само от елементите си.

празно множество бележи се с $\varnothing$ или $\{\}$

Пр.:1 $M_\varnothing = \{\varnothing\}$
$M_\varnothing \neq \varnothing$, тъй като $M_\varnothing$ има един елемент, а $\varnothing$ няма елементи.

От акс. за обема $\Rightarrow$ В множествата няма повтаряне на елементи и наредба на елементите. Редът, по който са изписани елементите, е без значение.

$\{a, a, b\} = \{a, b\}.$ $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}.$

Забележка:
$C = \{ a, \{ b, c, d\}$ - не деф. множество, тъй като трябва да има още една фигурна скоба.

2) Аксиома за отделянето.

$$M' = \{x \mid x \in M, \pi(x)\}.$$

M - множество

$\pi(x)$ - предикат, в/у елементи

$M' = \{x \mid x \in M, \pi(x)\}.$

M' - подмножество, с елементи от M, за които е изпълнен предикатът $\pi(x)$

subset

M - надмножество над M'

superset.

Забележка: $\xrightarrow{\text{отрицание}} \neg \exists x \; \pi(x) \rightarrow M' = \phi$

$\forall x, \pi(x) \rightarrow M' = M$.

Всяко множество е подмножество на себе си. ($M' \subseteq M$)

Същинско подмножество: ако $M' \subseteq M$ и $M' \neq M$ ($M' \subset M$)

$a \in M$; $\exists a \; \neg\pi(a)$

$\phi \subseteq \phi$ (но $\phi \notin \phi$)

NO DATE

3) Аксиома за степенното множество

Ако A е множество, то съвкупността от всички подмножества на A е множество.

Бележи се с 2^A (Powerset)

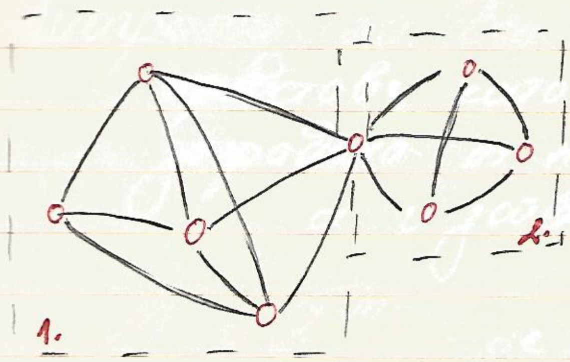
множество

Пр: 1 $A = \{a, b\}$

$2^A = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$2^\emptyset = 2^{\{\}} = \{\{\}, \{\}\} = \{\{\}\}$.

Минималност и максималност.



2 клики - има връзка м/у 2 всички елементи.

1./2. е максимална по включване (maximal), защото не може да нараства, но от нея могат да се вземат други клики с премахването на някой елемент от нея.

1. е глобално максимална (maximum), защото е най-голямата клика.

2. е глобално минимална (minimum), защото е най-~~голямата~~ малката клика.

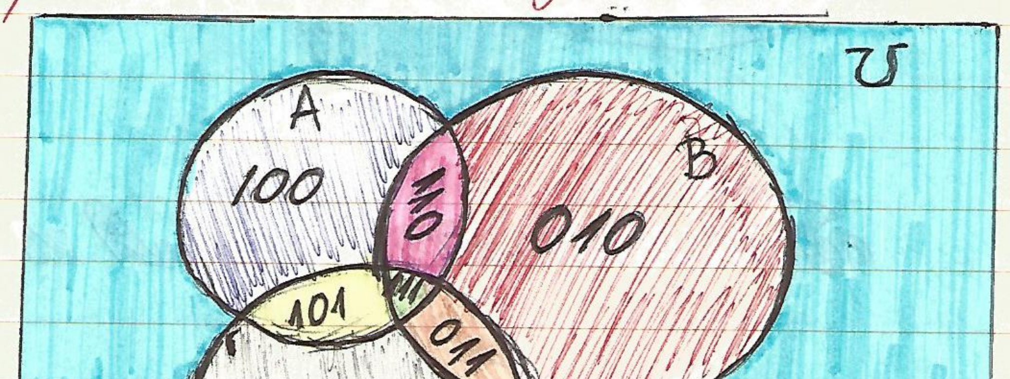
Минимална по включване е

Диаграми на Вен. - множеството се представя като част от равнината, заградена от някаква несамопресичаща се и затворена крива.

M и 2^M - не е възможно да се представят с една и съща диаграма.
степенното множество.

A, B, C - множества
Диаграма на Вен - $2^{\text{броя на можествата}}$
т.е. 2^3 - ~~образува~~ множества на диаграмата,
когато всички множества има по един общ елемент.
и поне един различен

U - надмножество на всички интересуващи ни множества.
универсално



NO DATE

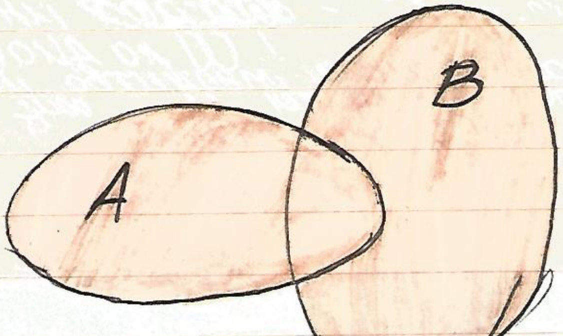
Операции върху множества:

операция - функция от някакво множество в себе си.

A, B - множества.

1) обединение (the union) - елементи са: всеки елемент на A и всеки елемент на B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$



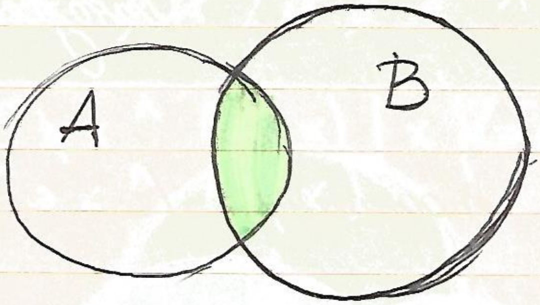
обединението на A и B

NO DATE

2) сечението (the intersection)

елементите са: общите елементи за A и B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

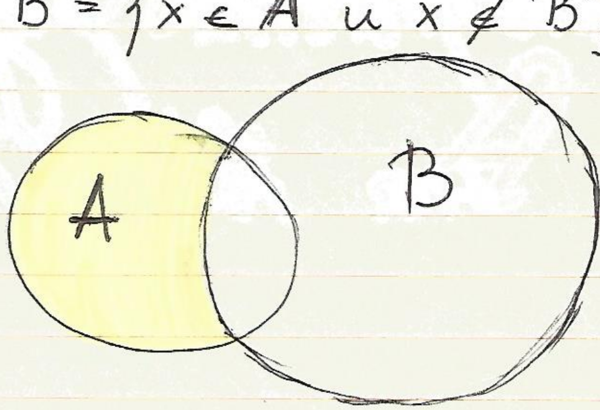


сечението на A и B

3) разлика на A с B

елементи: тези които принадлежат на A, но не и на B.

$$A \setminus B = \{x \in A \text{ и } x \notin B\}$$



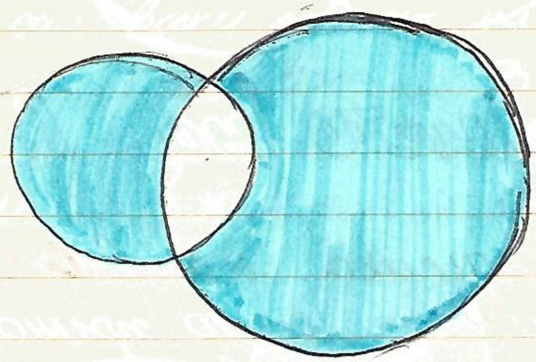
разлика на A с B

NO DATE

4) симетрична разлика на A и B.

елементи: всички елементи на A и всички елементи на B, които не са принадлежат и на 2те множества.

$$A \triangle B = \{ x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B) \}.$$



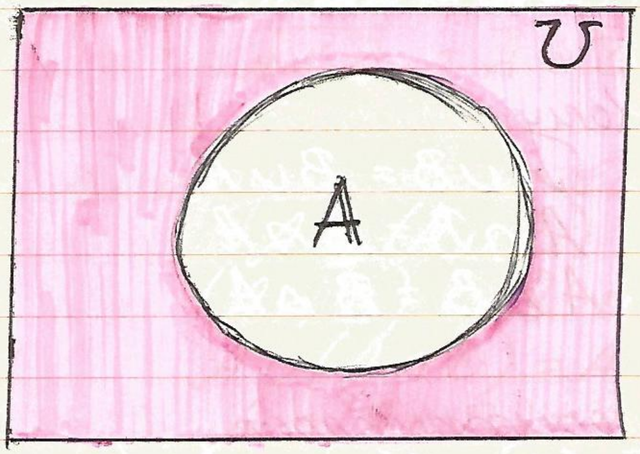
симетрична разлика на A и B

NO DATE

5) Допълнение на A

елементи: всички елементи, които са елемни на U, но не и на A.

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A \wedge x \in U\}$$



Допълнението на A

NO DATE

Свойства на основните операции:

1) Идемпотентност

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

2) Комутативност.

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

$A \Delta B = B \Delta A.$

3) Асоциативност.

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

4) Дистрибутивност.

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

5) Свойства на празното и универсалното множество

$A \cup \phi = A$ $\qquad$ $A \cup U = U$

$A \cap \phi = \phi$ $\qquad$ $A \cap U = A.$

NO DATE

6) Свойства на допълнението.

$A \cup \overline{A} = U$

$A \cap \overline{A} = \varnothing$

$\overline{\overline{A}} = A$

7) Закон на ДеМорган.

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

8) Други свойства.

$A \subseteq (A \cup B)$

$(A \cap B) \subseteq A$ и $(A \cap B) \subseteq B$.

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$.

Забележка:

Асоциативността на сечение и обединение позволява да избегнем употребата на скоби.

NO DATE

протоелементи

a, b - произволни елементи

Наредена двойка - означаваме с (a,b) множеството $\{\{a\},\{a,b\}\}$ и го нар. наредена двойка от елементите a и b.

Забележка:

При наредените n-орки има значение мястото на елементите и не се допуска смяна на местата

$(a,b) \neq (b,a)$.

наредена 3-ка: $(a,b,c) = \{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$

всеки елемент се образува от предходния.

Декартово произведение $(A \times B)$ - множеството от наредени двойки (a,b), такива че $a \in A$, а $b \in B$.

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Забележка:

Декартовото произведение **не е** **комутативно** и **асоциативно**

Пр1 $R_x \perp R_y$.

R_x, R_y - перпендик. прави.

x - ортог. проекция на точката P в/у R_x

y - ортог. проекция на точката P в/у R_y.

P се определя от наредената двойка (x, y).

E - равнина

$$E = R_x \times R_y.$$

Броя на елементите се опр. като:

(брой ел. I-во множ) $\cdot$ (брой ел. II-ро множ)

$A \times A = A^2$ - декартов квадрат.

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1 \dots a_n) \mid \forall a_i \in A_i\}$$

т.е. $\bigtimes_{i=1}^{n} A_i$

Забележка:

числа: $x_1 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ → при празен интервал 0

числа: $y_1 \cdot y_2 \cdots y_n = \prod_{i=1}^{n} y_i$ → при празен интервал 1

множества: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A^n$ $\quad A_1 = A_2 = \dots = A_n =$

NO DATE

Допълнителни

бележки:

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i = \{\underbrace{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}_{n \text{ мерен вектор.}} \mid \forall i \in I_n\}.$$

$i = 1, 2, \ldots, n.$

$$\mathop{\times}_{i=0}^{\infty} A_i = \{\underbrace{(a_0, a_1, \ldots)}_{\text{редица.}} \mid \forall i \in I_n\}.$$

$i = 0, 1, 2, \ldots, \ldots.$