Симетрични и ермитови матрици и оператори.

Определение 1. *Матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (съответно $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$) е симетрична (ермитова), ако $\overline{A}^t = A$.*

Твърдение 2. *(i) Множеството $M^{\rm sym}_{n\times n}(\mathbb{R})$ на симетричните матрици е линейно пространство над $\mathbb{R}$, както и множеството $M^{\rm Herm}_{n\times n}(\mathbb{C})$ на ермитовите матрици.*

(ii) Ако $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (съответно $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$) е обратима симетрична (ермитова) матрица, то обратната матрица A^{-1} е симетрична (ермитова).

(iii) Ако $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (съответно $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$) са симетрични (ермитови) матрици и $AB = BA$, то AB е симетрична (ермитова) матрица.

Доказателство. (i) Ако $\overline{A}^t = A$ и $\overline{B}^t = B$, то

$$\overline{(A+B)}^t = \overline{A}^t + \overline{B}^t = A + B,$$

така че $A+B$ е симетрична (ермитова) матрица. За произволно $\lambda \in \mathbb{R}$ е в сила

$$\overline{(\lambda A)}^t = \overline{\lambda}\ \ \overline{A}^t = \lambda A$$

и затова λA е симетрична (ермитова) матрица и множеството на симетричните (ермитовите) матрици е линейно пространство над $\mathbb{R}$.

(ii) Чрез комплексно спрягане и транспониране на равенството $AA^{-1} = E_n$ получаваме

$$E_n = \overline{E_n}^t = \overline{(AA^{-1})}^t = (\overline{A}\ \ \overline{A^{-1}})^t = (\overline{A^{-1}})^t \overline{A}^t = (\overline{A^{-1}})^t A$$

съгласно $\overline{XY} = \overline{XY}$ за произволни матрици $X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Последното се дължи на определението за умножение на матрици и на равенствата $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2}$ за комплексни числа $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Единственото решение на матричното уравнение $ZA = E_n$ е A^{-1}, откъдето $(\overline{A^{-1}})^t = A^{-1}$ и A^{-1} е симетрична (ермитова) матрица.

(iii) Съгласно

$$\overline{(AB)}^t = (overline A\ \ \overline{B})^t = \overline{B}^t \overline{A}^t = BA = AB,$$

матрицата AB е симетрична (ермитова).

□

Определение 3. *Линеен оператор $\varphi : V \to V$ в евклидово (унитарно) пространство V е симетричен (съответно, ермитов), ако*

$$\langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle \quad \text{за произволни вектори} \quad u, v \in V.$$

Твърдение 4. *Следните условия са еквивалентни за линеен оператор $\varphi : V \to V$ в n-мерно евклидово (унитарно) пространство V:*

(i) φ е симетричен (ермитов) оператор;

(ii) $\langle b_i, \varphi(b_j)\rangle = \langle \varphi(b_i), b_j\rangle$ за произволни вектори b_i, b_j от базис $b_1, \ldots, b_n$ на V;

(iii) $\langle e_i, \varphi(e_j)\rangle = \langle \varphi(e_i), e_j\rangle$ за произволни вектори от ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_n$ на V;

(iv) матрицата A на φ спрямо ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_n$ на V е симетрична (ермитова).

Доказателство. Ясно е, че $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е ортонормиран базис на V и A е матрицата на φ спрямо базиса e. Условието (iii) е в сила точно когато

$$\overline{a_{i,j}} = \sum_{s=1}^{n} \overline{a_{s,j}} \langle e_i, e_s \rangle = \langle e_i, \sum_{s=1}^{n} a_{s,j} e_s \rangle = \langle e_i, \varphi(e_j) \rangle =$$
$$= \langle \varphi(e_i), e_j \rangle = \langle \sum_{s=1}^{n} a_{s,i} e_s, e_j \rangle = \sum_{s=1}^{n} a_{s,i} \langle e_s, e_j \rangle = a_{j,i}$$

за всички $1 \leq i, j \leq n$. Това е еквивалентно на симетричността (ермитовостта) на матрицата A, така че $(iii) \Leftrightarrow (iv)$.

За $(iii) \Rightarrow (i)$ да предположим, че $e_1, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на V с $\langle e_i, \varphi(e_j) \rangle = \langle \varphi(e_i), e_j \rangle$ за всички $1 \leq i, j \leq n$. Тогава произволни вектори $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $v = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$ изпълняват равенствата

$$\langle u, \varphi(v) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(e_j) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle e_i, \varphi(e_j) \rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle \varphi(e_i), e_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle = \langle \varphi \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle = \langle \varphi(u), v \rangle,$$

така че $\varphi : V \to V$ е симетричен (ермитов) оператор.

□

Твърдение 5. *Всички характеристични корени на симетричен (ермитов) оператор в крайномерно пространство V са реални числа.*

Доказателство. Собствените стойности λ на ермитов оператор $\varphi : V \to V$ са реални числа, защото съответните им собствени вектори $v \in V \setminus \{ \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \}$ изпълняват равенствата

$$\overline{\lambda} ||v||^2 = \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, \varphi(v) \rangle = \langle \varphi(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda ||v||^2,$$

откъдето $(\overline{\lambda} - \lambda) ||v||^2 = 0$ с $||v||^2 \in \mathbb{R}^{>0}$ и $\overline{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$.

Характеристичните корени на линеен оператор φ в крайномерно пространство V над $\mathbb{C}$ съвпадат със собствените стойности на φ, така че характеристичните корени на ермитов оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно унитарно пространство V са реални числа.

Всяка ермитова матрица A се реализира като матрица на ермитов оператор спрямо ортонормиран базис. По-точно, ако $e = (e_1, \dots, e_n)$ е ортонормиран базис на n-мерно унитарно пространство и $\varphi : V \to V$ е линейният оператор с матрица A спрямо e, то φ е унитарен оператор и всички характеристични корени на φ са реални числа. Характеристичните корени на A съвпадат с характеристичните корени на φ и са реалани числа.

Всяка симетрична матрица е ермитова и затова характеристичните и корени са реални числа.

В резултат, всички характеристични корени на симетричен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно евклидово пространство V са реални числа, защото матрицата на φ спрямо ортонормиран базис е симетрична.

□

Твърдение 6. *Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен (ермитов) оператор в евклидово (унитарно) пространство V. Тогава:*

(i) собствени вектори u, v, отговарящи на различни собствени стойности λ, μ са ортогонални помежду си;

(ii) ортогоналното допълнение $U^{\perp}$ на φ-инвариантно подпространство U на V е φ-инвариантно.

В частост, ако $e_1, \dots, e_k$ е ортонормиран базис на U и $e_{k+1}, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на $U^{\perp}$, то $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на V, спрямо който матрицата на φ е от вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & \mathbb{O}_{k\times(n-k)} \\ \mathbb{O}_{(n-k)\times k} & A_2 \end{pmatrix},$$

където A_1 е матрицата на $\varphi : U \to U$ спрямо базиса $e_1, \dots, e_k$, а A_2 е матрицата на $\varphi : U^{\perp} \to U^{\perp}$ спрямо базиса $e_{k+1}, \dots, e_n$ на $U^{\perp}$.

Доказателство. (i) От определението за симетричност (ермитовост) на $\varphi : V \to V$, приложено към собствените вектори $u, v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ получаваме

$$\mu\langle u, v\rangle = \overline{\mu}\langle u, v\rangle = \langle u, \mu v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle,$$

вземайки предвид, че собствените стойности на ермитов оператор са реални числа. Следователно $(\lambda-\mu)\langle u, v\rangle = 0$ с $\lambda \neq \mu$, така че $\langle u, v\rangle = 0$ и векторите u, v са ортогонални помежду си.

(ii) За произволни вектори $u \in U$ и $v \in U^{\perp}$ е в сила

$$\langle u, \varphi(v)\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle = 0,$$

съгласно $\varphi(u) \in U$. Следователно $\varphi(v) \in U^{\perp}$ и $U^{\perp}$ е φ-инварианатно подпространство на V.

□

Твърдение 7. *За произволен симетричен (ермитов) оператор $\varphi : V \to V$ в n-мерно евклидово (унитарно) пространство V съществува ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$ на V, в който матрицата*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

е диагонална.

Доказателство. С индукция по $n = \dim V$, за $n = 1$ няма какво да се доказва. В общия случай, $\varphi : V \to V$ има собствен вектор $v_1 \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$. За унитарен оператор φ това е в сила поради наличието на собствен вектор за произволен линеен оператор в крайномерно пространство над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа. За симетричен оператор φ използваме, че всички характеристични корени на φ са реални числа, а оттам и собствени стойности на φ, така че съществува собствен вектор $v_1 \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$, отговарящ на собствената стойност λ_1. Заменяме v_1 с единичен вектор $e_1 = \frac{1}{||v_1||}v_1 \in l(v_1)$ и забелязваме, че $U := l(e_1) = l(v_1)$ е 1-мерно φ-инвариантно подпространство на V, върху което действието на φ се свежда до умножение със собствената стойност λ_1, отговаряща на

v_1. Ортогоналното допълнение $U^\perp$ на U е $(n-1)$-мерно φ-инвариантно подпространство на V. По индукционно предположение съществува ортонормиран базис $e_2, \dots, e_n$ на $U^\perp$, в който матрицата

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

на $\varphi : U^\perp \to U^\perp$ е диагонална. Сега $e_1, e_2, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на $V = U \oplus U^\perp$, в който матрицата

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbb{O}_{1\times(n-1)} \\ \mathbb{O}_{(n-1)\times 1} & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

на $\varphi : V \to V$ е диагонална.

□

Следствие 8. *За произволна симетрична (ермитова) матрица съществува ортогонална (унитарна) матрица T, така че $D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT$ е диагонална матрица.*

Доказателство. Фиксираме ортонормиран базис $f = (f_1, \dots, f_n)$ на евклидово (унитарно) пространство V и разглеждаме линейния оператор $\varphi : V \to V$ с матрица A спрямо f. Тогава φ е симетричен (ермитов) оператор и съществува ортонормиран базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на V, в който матрицата D на φ е диагонална. Матрицата на прехода T от ортонормирания базис f на V към ортонормирания базис e на V е ортогонална (унитарна) и $D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT$.

□