NO DATE

Принципи на изброителната комбинаторика.

Обектите на комбинаториката наричат комбинаторни конфигурации.

Комбинаторните конфигурации строим от елементите на някое крайно множество, комбинирайки ги по зададени правила.

При изброителната комбинаторика, получените конфигурации са краен брой.

Дирихле -> min, max -> Top. Sort.

NO DATE

1) Принцип на Дирихле.

Нека X и Y са крайни множества, $|X| > |Y|$. Тогава за всяка тотална функция $f: X \to Y$ съществуват $a_i \neq a_j \in X$ такива, че $f(a_i) = f(a_j)$

неформално (принципа на чекмеджетата)
Ако вземем n предмета и ги поставим по произволен начин в m чекмеджета и $n > m$, то поне в едно чекмедже ще има поне 2 предмета.

(+) 2) Принцип на биекцията.

Нека X и Y са крайни множества, $|X| = n$ и $|Y| = m$. Съществува биекция, тогава и само тогава, когато $n = m$.

Доказателство:
I н-н.
Нека $m = n$. $X = \{a_1 \dots a_n\}$ и $Y = \{b_1 \dots b_n\}$.
Сега дефинираме $f: X \to Y$
$f(a_i) = b_i$, $\forall i \in I_n$, което очевидно е биекция.

NO DATE

II н-н.

Нека ∃ биекция $f: X \to Y$.

Да доп., че $n > m$.

(Съгл. принципа на Дирихле) $\Rightarrow \forall g: X \to Y$, $\exists b \in Y$ $\exists a_i \neq a_j \in X$ такива, че $g(a_i) = g(a_j) = b$. Същото е в сила за f, което противоречи на факта, че f е биекция. Аналог. $m > n$. (f^{-1})

$\Rightarrow n = m$.

3) Принцип на разбиването.

Нека A е крайно множество, а $R = \{S_1, \dots, S_k\}$ е разбиване на A. Тогава $|A| = \sum_{i=1}^{k} |S_i|$.

Д-во:

$A = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, означава, че всеки елемент участва в някое S_i и следователно е преброен, а $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$ означава, че никой елемент не е преброен повече от 1 път.

NO DATE

4) Принцип на изваждането.

Нека A е крайно множество, $A', A'' \subseteq A$, $A' = A \setminus A''$. Тогава $|A'| = |A| - |A''|$

5) Принцип на умножението.

Нека X и Y са крайни множества, $|X| = n$, $|Y| = m$. Тогава $|X \times Y| = |X| . |Y| = n.m$.

Доказателство:

1) Нека $n = 0$, т.е. $X = \emptyset$. Тогава $X \times Y = \emptyset$ и $|X \times Y| = 0 = n.m$.

2) Нека $n \neq 0$, $m \neq 0$. $X = \{a_1 \dots a_n\}$ $Y = \{b_1, \dots b_m\}$. Нека $\forall a_i \in X$ дефинираме множеството $S_{a_i} = \{(a_i, b) \mid b \in Y\}$.

$R = \{S_{a_1}, \dots, S_{a_n}\}$.

От ест. биекция ~~даде~~ $f : X \to R$ $f(a_i) = S_{a_i}$, следва че $|R| = |X| = n$.

Дефинираме биекцията $g_i : S_{a_i} \to Y$. $g_i(a_i, b) = b \Rightarrow |S_{a_i}| = |Y| = m$.

NO DATE

Но R е разбиване на $X \times Y$, защото.

1) $|S_{a_i}| = m \neq 0$.

2) $S_{a_i} \cap S_{a_j} = \emptyset$, $a_i \neq a_j$

3) $\bigcup_{i \in I_n} S_{a_i} = X \times Y$.

От принц. на разб.

$$|X \times Y| = \sum_{i \in I_n} |S_{a_i}| =$$

n пъти m.

$$= \sum_{i \in I_n} m = n m. = |X||Y|$$

Следствие: 1:

Нека $|A_1| = m_1$, $|A_2| = m_2, \dots, |A_n| = m_n$.
Тогава $|A_1 \times \dots \times A_n| = m_1 . m_2 \dots m_3$.

Д-во: $n-1$ пъти принципа на умнож.

Следствие 2:

Нека $|A| = m$. Тогава $|A^n| = |A|^n = m^n$

Следствие 3:

Нека $|A| = n$. Тогава $|2^A| = 2^{|A|} = 2^n$.

NO DATE

б) Принцип на делението.

Нека $|A|=n$. Нека $R \subseteq A \times A$ е релация на еквивалентност. Нека всеки клас на еквивалентност има мощност k.
Тогава броя на класовете на еквивалентност е $\frac{n}{k}$.

г) Принцип на включването и изключването.
(Inclusion - Exclusion Principle).

Нека $A_1 \dots A_n$ - множ в универсум U, тогава:

$$|\overline{A_1}^{U} \cap \overline{A_2}^{U} \cap \dots \cap \overline{A_n}^{U}| =$$

$$= |U| - \sum_{1 \le i \le n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| -$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{n-1}}| +$$

$$+ (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Доказателство:

База:

$n = 1$

$\overline{A_1^{U}} = |U| - |A_1|$ => вярно съгласно принципът на изваждането.

Индуктивно предположение.

Допускаме, че е вярно за всяко $n-1$ множество $B_1, \dots B_{n-1}$ спрямо някакъв универсум $\mathcal{U}$

$|\overline{B_1^{\mathcal{U}}} \cap \dots \cap \overline{B_{n-1}^{\mathcal{U}}}| =$

$= |\mathcal{U}| - \sum_{1 \le i \le n-1} |B_i| + \dots + (-1)^{n-1} |B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}|$

Индуктивна стъпка:

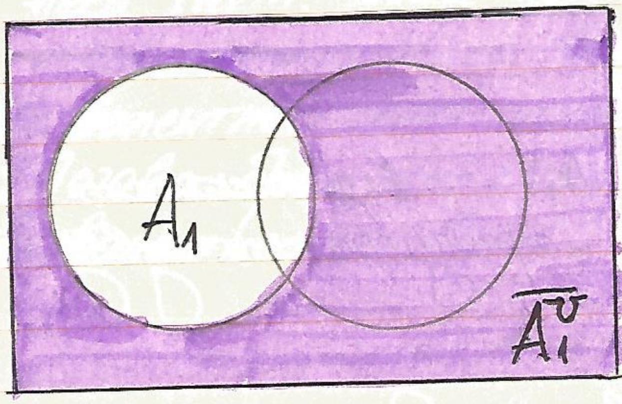
Към $A_1 \dots A_{n-1}$ добавяме A_n по най-общия начин.

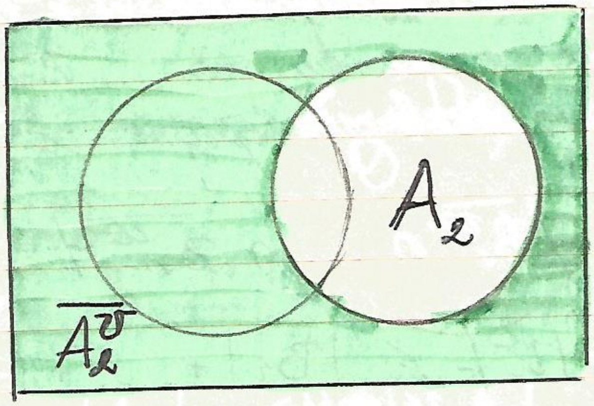
$|\overline{A_1^{U}} \cap \overline{A_2^{U}} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}^{U}}| =$

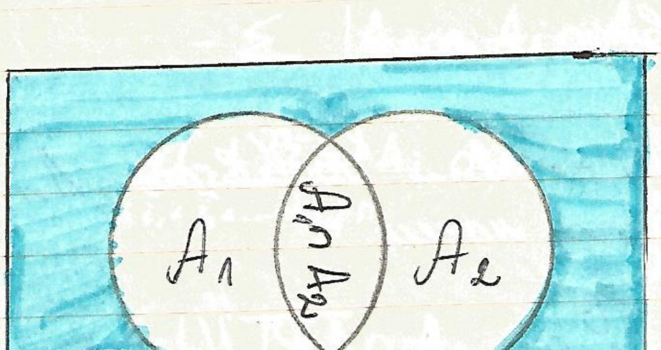
$= |\overline{A_1^{U}} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}^{U}} \cap A_n| + |\overline{A_1^{U}} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}^{U}} \cap \overline{A_n^{U}}|$

NO DATE

Забележка (Пример):
имаме A_1 и A_2.



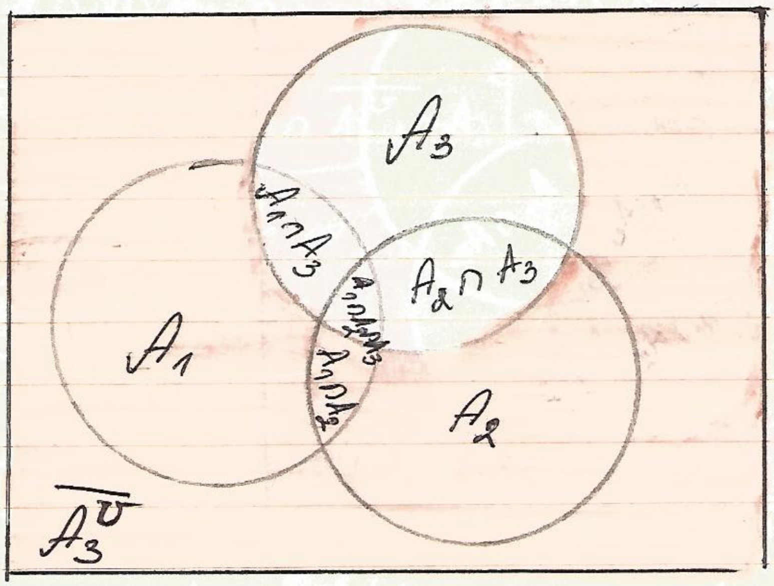




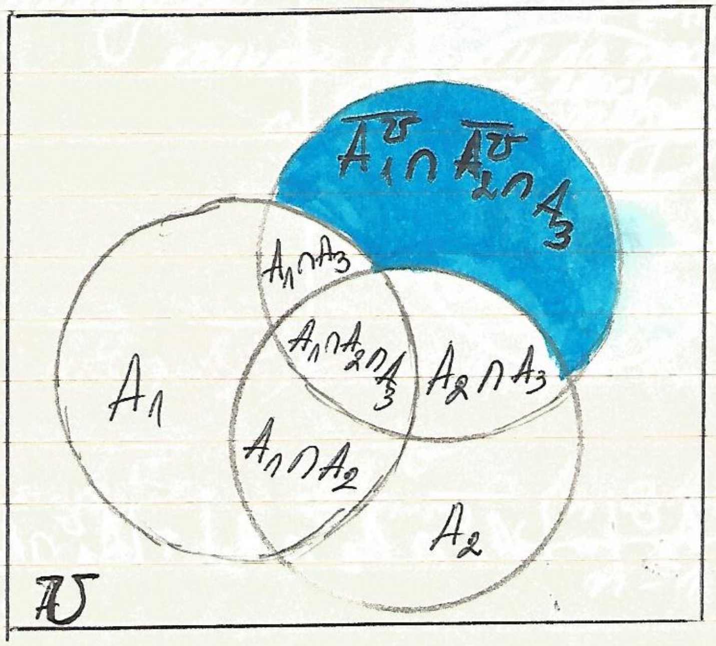
$$|\overline{A_1^U} \cap \overline{A_2^U}| = |U| - \underbrace{|A_1| - |A_2|}_{\sum_{1 \le i \le 2} |A_i|} + |A_1 \cap A_2|$$

защото като вади множествата тези елементи ги вадим 2 пъти, а трябва да е

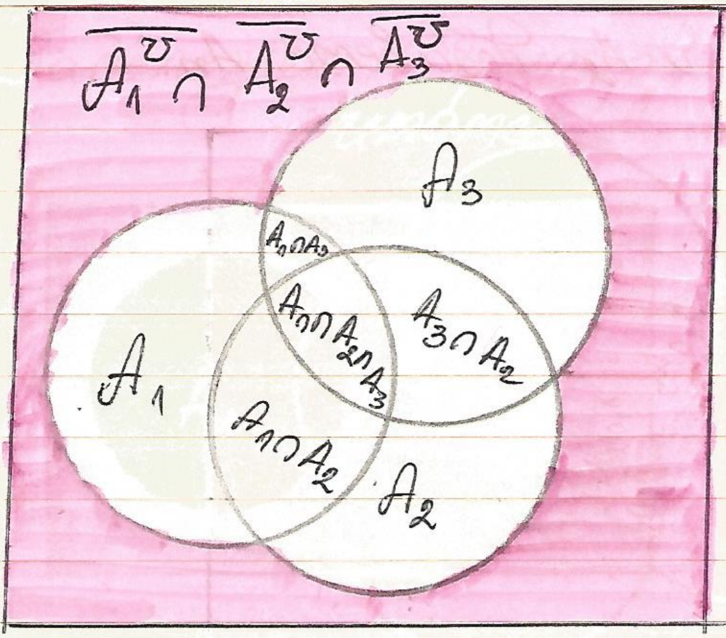
Към A_1 и A_2 добавете A_n.

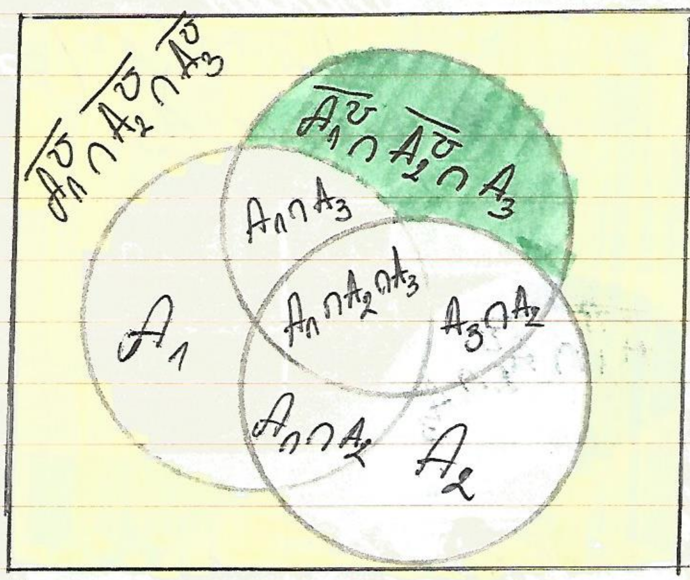


Стремим се да запазим равенството за $(\overline{A_1^U} \cap \overline{A_2^U})$ само че включвайки и A_3.



само 1 лет.





$$\Rightarrow |\overline{A_1^{\upsilon}} \cap \overline{A_2^{\upsilon}}| = |\overline{A_1^{\upsilon}} \cap \overline{A_2^{\upsilon}} \cap A_3| + |\overline{A_1^{\upsilon}} \cap \overline{A_2^{\upsilon}} \cap \overline{A_3^{\upsilon}}|$$

$$\overbrace{|\overline{A_1^U} \cap \overline{A_2^U} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}^U}|}^{\text{разписваме от допуснатото}} =$$

$$= \underbrace{|\overline{A_1^U} \cap \overline{A_2^U} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}^U} \cap A_n|}_{\text{прехвърляме от другата страна.}} + \underbrace{|\overline{A_1^U} \cap \overline{A_2^U} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}^U} \cap \overline{A_n^U}|}_{?}$$

$$|\overline{A_1^U} \cap \dots \cap \overline{A_n^U}| = |U| - \sum_{1 \le i \le n-1} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n-1} |A_i \cap A_j| +$$

$$\dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}| -$$

$$- |\overline{A_1^U} \cap \dots \overline{A_{n-1}^U} \cap A_n|$$

Забележка:
колкото и пъти да правим сечени с ~~дадено~~ кое да е множество от ~~някак~~ даденото сечение, то резултата се запазва.

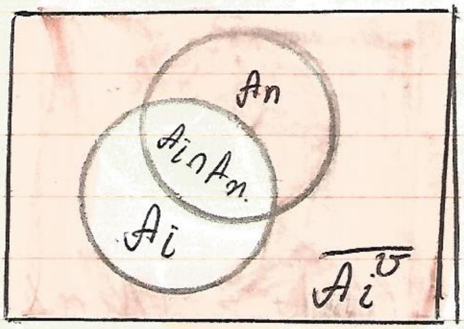
$$\overline{A_1^U} \cap \overline{A_2^U} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}^U} \cap A_n =$$

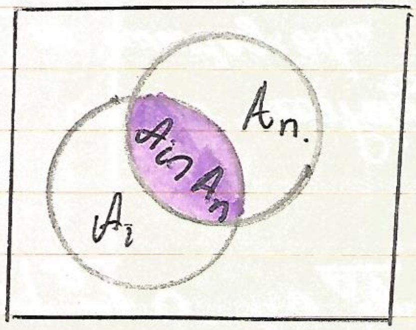
$$= \overline{A_1^U} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}^U} \cap \underbrace{A_n \cap A_n \cap \dots \cap A_n}_{n-1 \text{ пъти,}} =$$

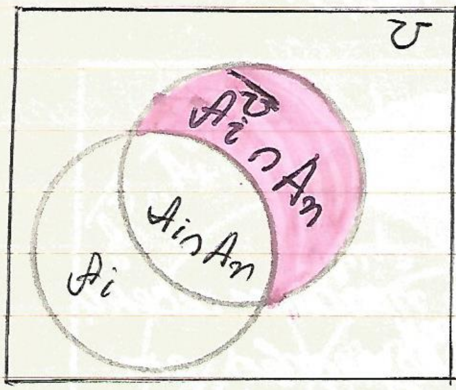
за до може да се групират.

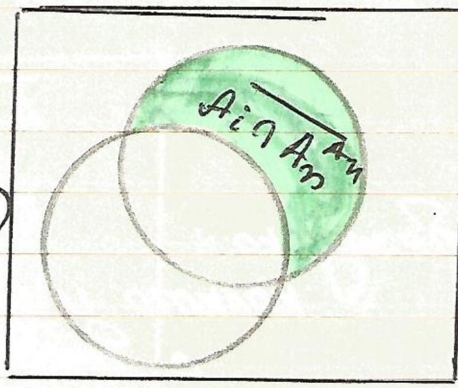
$$= (\overline{A_1}^U \cap A_n) \cap (\overline{A_2}^U \cap A_n) \cap \dots \cap (\overline{A_{n-1}}^U \cap A_n) =$$

$$= \overline{A_i}^U \cap A_n = \overline{A_i \cap A_n}^{A_n}$$

1) 

1) 

2) 

$\Leftrightarrow$ 2) 

$\downarrow$

~~допъл~~
елементите, които
не са в сечението
на A_i и A_n, но
са елементи
на A_n.

$$\overline{A_1^U} \cap \overline{A_2^U} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}^U} \cap A_n \cap A_n \dots \cap A_n$$

$$\overline{A_i^U} \cap A_n = \overline{A_i \cap A_n}^{A_n} \dots$$

заместваме.

$$|\overline{A_1^U} \cap \overline{A_2^U} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}^U} \cap A_n| =$$

$$= |\underbrace{\overline{A_1 \cap A_n}^{A_n}}_{B_1} \cap \underbrace{\overline{A_2 \cap A_n}^{A_n}}_{B_2} \cap \dots \cap \underbrace{\overline{A_{n-1} \cap A_n}^{A_n}}_{B_{n-1}}|$$

$$\Omega = A_n.$$

$$|\overline{A_1^U} \cap \overline{A_2^U} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}^U} \cap A_n| =$$

$$= |A_n| - \sum_{1 \le i \le n-1} |A_i \cap A_n| + \sum_{1 \le i < j \le n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| +$$

$$+ \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n|.$$

Връщаме се в началния израз

$$(|\overline{A_1^U} \cap \dots \cap \overline{A_n^U}| = \underbrace{|U| - \sum_{1 \le i \le n-1} |A_i| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|}_{|\overline{A_1^U} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}^U}|}$$

$$- |\overline{A_1^U} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}^U} \cap A_n| \;)$$

$$|\overline{A_1^U} \cap \dots \cap \overline{A_n^U}| =$$

$$= |U| - \sum_{1 \le i \le n-1} |A_i| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

$$- |A_n| + \dots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_{n-2} \le n-1} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{n-1}|$$

NO DATE

$$+(-1)^n \, |A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}|$$

$$\Rightarrow |\overline{A_1}^{U} \cap \overline{A_2}^{U} \cap \ldots \cap \overline{A_n}^{U}| =$$

$$= |U| - \sum_{1 \le i \le n} |A_i| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Забележка:

червените балончета показват, кое с кое се събира, за да може обиколките от n-1 да са n. (на втори ред винаги участва A_n)