Полилинейни и антисиметрични функции. Инверсии на пермутации.

Определение 1. *Ако V е линейно пространство над поле F, то изображение $f : V \to F$ е линейна функция, ако $f(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 f(a_n) + \ldots + \lambda_n f(a_n)$ за произволни $a_1, \ldots, a_n \in V$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.*

Твърдение 2. *Нека V е линейно пространство над поле F. Функция $f : V \to F$ е линейна тогава и само тогава, когато $f(u + v) = f(u) + f(v)$ и $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ за произволни $u, v \in V$ и $\alpha \in F$.*

Доказателство. Ако $f : V \to F$ е линейна функция, то

$$f(u + v) = f(1.u + 1.v) = 1.f(u) + 1.f(v) = f(u) + f(v) \quad \text{и} \quad f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

за произволни $u, v \in V$, $\alpha \in F$, защото $u + v = 1.u + 1.v$ и αu са частни случаи на линейни комбинации на вектори от V.

Да предположим, че $f(u+v) = f(u)+f(v)$ и $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ за произволни $u, v \in V$, $\alpha \in F$. С индукция по $n \in \mathbb{N}$ ще проверим, че

$$f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n)$$

за произволни $v_i \in V$, $\alpha_i \in F$, за да твърдим, че $f : V \to F$ е линейна функция. За $n = 1$ знаем по предположение, че $f(\alpha_1 v_1) = \alpha_1 f(v_1)$. В общия случай, полагаме $u := \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1} \in V$, $v := \alpha_n v_n \in V$ и използваме $f(u + v) = f(u) + f(v)$, за да представим

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + \alpha_n v_n) &= f(u + v) = \\ = f(u) + f(v) &= f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1}) + f(\alpha_n v_n). \end{aligned}$$

По индукционно предположение, първото събираемо е равно на

$$f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1}) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_{n-1} f(v_{n-1}).$$

Комбинирайки с $f(\alpha_n v_n) = \alpha_n f(v_n)$ получаваме, че

$$f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_{n-1} f(v_{n-1}) + \alpha_n f(v_n)$$

и завършваме доказателството.

□

Определение 3. *Нека V е линейно пространство над поле F. Изображение*

$$f : \underbrace{V \times \ldots V}_{n} \to F$$

е полилинейна функция, ако f е линейна функция относно всеки аргумент.

Определение 4. *Нека V е линейно пространство над поле F. Изображение*

$$f : \underbrace{V \times \dots V}_{n} \to F$$

е анти-симетрична функция, ако

$$f(v_1, \dots, v_p, \dots, v_q, \dots v_n) = -f(v_1, \dots, v_q, \dots, v_p, \dots, v_n)$$

променя знака си при размяна на аргументите си v_p и v_q за произволни $1 \leq p < q \leq n$.

Задача 5. *Нека $e_1, \dots, e_n$, $n \geq 4$ е базис на линейно пространство V над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа, а $f : V \times V \to \mathbb{Q}$ действа по правилото*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}e_j\right) = a_{1,3}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,3} \quad \text{за произволни} \quad a_{1,i}, a_{2,j} \in \mathbb{Q}.$$

Да се докаже, че f е полилинейна анти-симетрична функция.

Доказателство. От

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a'_{1,i}e_i + \sum_{i=1}^{n} a''_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}e_j\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n}(a'_{1,i} + a''_{1,i})e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}e_j\right) =$$
$$= (a'_{1,3} + a''_{1,3})a_{2,4} - (a'_{1,4} + a''_{1,4})a_{2,3} = a'_{1,3}a_{2,4} + a''_{1,3}a_{2,4} - a'_{1,4}a_{2,3} - a''_{1,4}a_{23} =$$
$$= (a'_{1,3}a_{2,4} - a'_{1,4}a_{2,3}) + (a''_{1,3}a_{2,4} - a''_{1,4}a_{2,3}) =$$
$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} a'_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}e_j\right) + f\left(\sum_{i=1}^{n} a''_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}e_j\right)$$

и от

$$f\left(\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}e_i\right), \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}e_j\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{1,i})e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}e_j\right) =$$
$$= (\lambda a_{1,3})a_{2,4} - (\lambda a_{1,4})a_{2,3} = \lambda(a_{1,3}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,3}) = \lambda f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}e_j\right)$$

следва, че функцията f е линейна относно първия си аргумент.

Линейността на f относно втория аргумент се дължи на

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^{n} a'_{2,j}e_j + \sum_{j=1}^{n} a''_{2,j}e_j\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^{n}(a'_{2,j} + a''_{2,j})e_j\right) =$$
$$= a_{1,3}(a'_{2,4} + a''_{2,4}) - a_{1,4}(a'_{2,3} + a''_{2,3}) = a_{1,3}a'_{2,4} + a_{1,3}a''_{2,4} - a_{1,4}a'_{2,3} - a_{1,4}a''_{2,3} =$$
$$= (a_{1,3}a'_{2,4} - a_{1,4}a'_{2,3}) + (a_{1,3}a''_{2,4} - a_{1,4}a''_{2,3}) =$$
$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^{n} a'_{2,j}e_j\right) + f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^{n} a''_{2,j}e_j\right)$$

и на

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}e_i, \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2,j}e_j\right)\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^{n}(\lambda a_{2,j})e_j\right) =$$

$$= a_{1,3}(\lambda a_{2,4}) - a_{1,4}(\lambda a_{2,3}) = \lambda(a_{1,3}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,3}) = \lambda f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}e_j\right).$$

Това доказва полилинейността на f.

Анти-симетричността на f може да се провери непосредствено,

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2,j}e_j, \sum_{i=1}^{n} a_{1,i}e_i\right) = a_{2,3}a_{1,4} - a_{2,4}a_{1,3} =$$

$$= -(a_{1,3}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,3}) = -f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}e_j\right).$$

Ако полилинейна функция се анулира за равни аргументи, то тя е анти-симетрична. Затова е достатъчно да забележим, че

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}e_j\right) = a_{1,3}a_{1,4} - a_{1,4}a_{1,3} = 0,$$

за да твърдим, че полилинейната функция f е анти-симетрична.

□

Твърдение 6. *Нека F е числово поле, V е линейно пространство над F и*

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

е полилинейна функция. В такъв случай, f е анти-симетрична функция тогава и само тогава, когато

$$f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots, a_n) = 0$$

се анулира при равни аргументи.

Доказателство. Ако

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

е полилинейна анти-симетрична функция върху линейно пространство V над числово поле F, то за произволни вектори $a_1, \ldots, a_n \in V$ с $a_p = a_q$ за някои $1 \leq p < q \leq n$ следва

$$f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots a_n) = -f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots, a_n),$$

защото размяната на a_p с $a_q = a_p$ променя знака на анти-симетричната функция f. В резултат, $2f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots, a_n) = 0$, откъдето $f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots, a_n) = 0$, защото произведение на комплексни числа се анулира само ако единият множител е нулев. В горното разсъждение използваме, че полето F е числово, но не използваме полилинейността на f.

Обратно, ако полилинейна функция

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

се анулира при равни аргументи, то

$$\begin{aligned} 0 = f(a_1, \ldots, a_p + a_q, \ldots, a_p + a_q, \ldots, a_n) = \\ = f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p + a_q, \ldots, a_n) + f(a_1, \ldots, a_q, \ldots, a_p + a_q, \ldots, a_n) = \\ = f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots, a_n) + f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_q, \ldots, a_n) + \\ + f(a_1, \ldots, a_q, \ldots, a_p, \ldots, a_n) + f(a_1, \ldots, a_q, \ldots, a_q, \ldots, a_n) = \\ = f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_q, \ldots, a_n) + f(a_1, \ldots, a_q, \ldots, a_p, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Следователно

$$f(a_1, \ldots, a_q, \ldots, a_p, \ldots, a_n) = -f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_q, \ldots, a_n)$$

за произволни $1 \leq p < q \leq n$ и функцията f е анти-симетрична. В горното разсъждение се използва полилинейността на f, но не и това, че полето F е числово.

□

Следващият пример показва, че полилинейна антисиметрична функция може да не се анулира при равни аргументи, ако основното поле не е числово.

Пример 7. *Изображението*

$$f_0 : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2, \quad f_0((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 \quad \text{за} \quad (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}_2^2$$

е полилинейна антисиметрична функция с ненулева стойност $f((\overline{1}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{0})) = \overline{1}.\overline{1} = \overline{1}$ *за равни аргументи* $(\overline{1}, \overline{0}) \in \mathbb{Z}_2^2$.

Доказателство. Линейността на f спрямо първия аргумент следва от

$$\begin{aligned} f_0((x_1, x_2) + (z_1, z_2), (y_1, y_2)) = f_0((x_1 + z_1, x_2 + z_2), (y_1, y_2)) = (x_1 + z_1) y_1 = \\ = x_1 y_1 + z_1 y_1 = f_0((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + f_0((z_1, z_2), (y_1, y_2)) \quad \text{и от} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_0(\lambda(x_1, x_2), (y_1, y_2)) = f_0((\lambda x_1, \lambda x_2), (y_1, y_2)) = (\lambda x_1) y_1 = \\ = \lambda(x_1 y_1) = \lambda f_0((x_1, x_2), (y_1, y_2)). \end{aligned}$$

Аналогично получаваме линейността на f относно втория аргумент от

$$\begin{aligned} f_0((x_1, x_2), (y_1, y_2) + (z_1, z_2)) = f_0((x_1, x_2), (y_1 + z_1, y_2 + z_2)) = x_1(y_1 + z_1) = \\ = x_1 y_1 + x_1 z_1 = f_0((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + f_0((x_1, x_2), (z_1, z_2)) \quad \text{и от} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_0((x_1, x_2), \lambda(y_1, y_2)) = f_0((x_1, x_2), (\lambda y_1, \lambda y_2)) = x_1(\lambda y_1) = \\ = \lambda(x_1 y_1) = \lambda f_0((x_1, x_2), (y_1, y_2)). \end{aligned}$$

За произволни $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}_2^2$ е в сила

$$f_0((y_1, y_2), (x_1, x_2)) = y_1 x_1 = -x_1 y_1 = -f_0((x_1, x_2), (y_1, y_2)),$$

защото $y_1 x_1 + x_1 y_1 = 2 x_1 y_1 = \overline{0}$. Следователно $f_0 : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2$ е полилинейна антисиметрична функция, която не се анулира при равни аргументи.

□

Определение 8. *Всяко подреждане $i_1, \dots, i_n$ на числата $1, \dots, n$ се нарича пермутация на $1, \dots, n$*

Например, пермутациите на $1, 2$ са $1, 2$ и $2, 1$. Съществуват шест пермутации на $1, 2, 3$ и това са

$$1, 2, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2; \quad 1, 3, 2; \quad 2, 1, 3; \quad 3, 2, 1.$$

Пермутациите $i_1, \dots, i_n$ на числата $1, \dots, n$ са $n! = n(n-1)\dots.2.1$ на брой. По-точно, за $i_1 \in \{1, \dots, n\}$ има n възможности. След избора на i_1 за $i_2 \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1\}$ има $n-1$ независими възможности. След избора на i_1 и i_2 можем да изберем $i_3 \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2\}$ по $n-2$ начина и т.н.

Определение 9. *Числата i_p и i_q от пермутация $i_1, \dots, i_p, \dots, i_q, \dots, i_n$ образуват инверсия, ако $p < q$ и $i_p > i_q$.*

Пермутация $i_1, \dots, i_n$ е четна (нечетна), ако участващите в нея числа образуват четен (нечетен) брой инверсии.

Например, пермутацията $1, 2$ е четна, а $2, 1$ нечетна. От пермутациите на $1, 2, 3$ четни са $1, 2, 3$ с 0 инверсии и $2, 3, 1$; $3, 1, 2$ с по две инверсии. Нечетни са пермутациите $1, 3, 2$ и $2, 1, 3$ с по една инверсия и пермутацията $3, 2, 1$ с три инверсии.

Твърдение 10. *Да се докаже, че прилагането на транспозиция променя четността на пермутация.*

Доказателство. Нека $i_1, \dots, i_n$ е пермутация на числата $1, \dots, n$. Ако приложим транспозиция (i_p, i_{p+1}) на съседни числа от $i_1, \dots, i_n$ (т.е. ако разменим помежду си съседните числа i_p и i_{p+1}), то двойките от вида i_r, i_s; i_r, i_p и i_r, i_{p+1} с $r, s \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p, p+1\}$, $r \neq s$ не променят взаимното си положение. Затова между тях не изчезват и не възникват инверсии. Ако $i_p < i_{p+1}$, то действието на транспозицията (i_p, i_{p+1}) поражда инверсия между i_{p+1}, i_p и променя четността на пермутацията. Ако $i_p > i_{p+1}$, то транспозицията (i_p, i_{p+1}) премахва инверсията между i_p, i_{p+1} и променя четността на пермутацията.

За произволни $1 \leq p < q \leq n$ ще представим транспозицията (i_p, i_q) като последователност от нечетен брой транспозиции на съседни числа. Вече доказахме, че всяка транспозиция на съседни числа променя четността на пермутация. Следователно прилагането на нечетен брой транспозиции на съседни числа променя нечетен брой пъти четността на пермутация и прилагането на (i_p, i_q) променя четността на пермутацията.

Транспозицията (i_p, i_q) премества числото i_p между i_{q-1} и i_{q+1} (на старото място на i_q) и числото i_q между i_{p-1} и i_{p+1} (на старото място на i_p). Последователно разменяме i_p с i_{p+1}, $i_{p+2}, \dots, i_q$, за да преместим i_p между i_q и i_{q+1}. С други думи, прилагаме транспозициите на съседни числа

$$(i_p, i_q) \dots (i_p, i_{p+2})(i_p, i_{p+1}),$$

четени отдясно наляво. Това се налага от факта, че транспозициите са изображения на множеството $\{1, \dots, n\}$ в себе си и аргументът на изображение се записва вдясно от изображението. В резултат, първата транспозиция, която действа е най-дясната и тя е последвана от останалите, четени отдясно наляво. Броят на транспозициите, с които изпращаме i_p на мястото на i_q е $q-p$. След като преместим i_p между i_q и i_{q+1}, трабва да разменим i_q с $i_{q-1}, \dots i_{p+1}$, за да изпратим i_q на мястото на i_p между i_{p-1} и i_{p+1}. С други думи, прилагаме транспозициите на съседни числа

$$(i_q, i_{p+1}) \dots (i_q, i_{q-2})(i_q, i_{q-1}),$$

чийто брой е $q-1-p$. Това дава разлагане

$$(i_p, i_q) = (i_q, i_{p+1}) \dots (i_q, i_{q-2})(i_q, i_{q-1})(i_p, i_q) \dots (i_p, i_{p+2})(i_p, i_{p+1})$$

в произведение на $(q-p)+(q-p-1)=2(q-p)-1$ транспозиции на съседни числа и завършва доказателството.

$\square$

Следствие 11. *Прилагането на транспозиция (i,j) за фиксирани $1 \leq i < j \leq n$, $n \geq 2$ задава взаимно еднозначно съответствие между четните и нечетните пермутации. Затова броят на четните пермутации на $1,\ldots,n$ съвпада с броя на нечетните пермутации и е равен на $\frac{n!}{2}$.*

Твърдение 12. *Нека V е линейно пространство над поле F,*

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

е анти-симетрична функция на n аргумента, $a_1,\ldots,a_n \in V$, а $i_1,\ldots,i_n$ е пермутация на числата $1,2,\ldots,n$. Да се докаже, че

$$f(a_{i_1},\ldots,a_{i_n}) = (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} f(a_1,\ldots,a_n)$$

за броя $[i_1,\ldots,i_n]$ на инверсиите в $i_1,\ldots,i_n$.

Доказателство. Ако пермутацията $j_1,\ldots,j_n$ се получава от пермутацията $i_1,\ldots,i_n$ чрез прилагане на транспозиция, то $(-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} = -(-1)^{[j_1,\ldots,j_n]}$, защото прилагането на транспозиция променя четността на пермутация и $f(a_{i_1},\ldots,a_{i_n}) = -f(a_{j_1},\ldots,a_{j_n})$ от определението за анти-симетрична функция.

Нека $1,\ldots,n$ се получава от $i_1,\ldots,i_n$ чрез прилагане на m транспозиции. Тогава

$$(-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} = (-1)^m (-1)^{[1,\ldots,n]} = (-1)^m,$$

защото прилагането на m транспозиции сменя m пъти четността на пермутация и

$$f(a_{i_1},\ldots,a_{i_n}) = (-1)^m f(a_1,\ldots,a_n),$$

защото прилагането на m транспозиции към аргументите на анти-симетрична функция води до умножение с $(-1)^m$. В резултат,

$$f(a_{i_1},\ldots,a_{i_n}) = (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} f(a_1,\ldots,a_n).$$

$\square$