NO DATE

Най-къс път в граф.

Нека е даден граф. $G=(V,E)$

$u_i \in V$, $w: E \to R^+$

$p = u_1 \dots u_t$ - път от u_1 до u_t.

Претеглена дължина на пътя наричаме.

$w(p) = \sum_{i=1}^{t-1} w(u_i, u_{i+1})$ - сбора от теговността на всички ребра ~~от~~ използвани за да се стигне от u_1 до u_t.

Пътят от u_1 до u_t с най-малка претеглена дължина наричаме най-къс път от u_1 до u_t, като деф. претеглена дължина 0 ~~от~~ за тривиалния път от u_1 ~~до~~ u, $\forall u \in V$.

Най-късия път е структура, която се състои от подструктури.

Тези подструктури също са най-къси пътища.

Забележка:

Най-дългия път не се състои от най-дълги пътища.

NO DATE

Теорема.

Ако теглата са единици в неориент. свързан граф, $G=(V,E)$, то след приключване на ~~на~~ построяне в ширина (BFS)

1) $\forall v \in V$:

$\underbrace{dist[v]}_{\text{масив от върхове (може да се промени)}} = \underbrace{dist_G(s,v)}_{\text{раст. от един връх до друг връх (не може да се промени)}}$

2) дървото на най-късите пътища $\mathcal{D}$ реализирано $\pi[1,\ldots,n]$ е такова, че

$dist_{\mathcal{D}}(s,v) = dist_G(s,v)$, $\forall v \in V$.

Доказателство:

Правим индукция по k, където k е $dist[\,]$ - стойността на върховете.

База $k=0$.

Единствен връх z

$dist[z]=0$.

1) $dist[z] \overset{?}{=} dist_G(z,z)$

твърдението е вярно

2) $dist_{\mathcal{D}}(z,z) \overset{?}{=} dist_G(z,z)$

твърдението е вярно.

Индукт. предположение.

Твърденията са верни за всички върхове с $dist[\,] \in \{0, \ldots, k-1\}$

Индукт. стъпка.

Разглеждате произволен връх w, такъв че $dist[w] = k$.

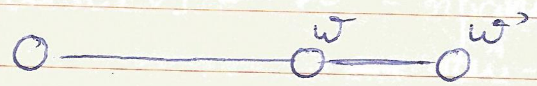
Взимате случаен връх w', такъв че $dist[w'] = k-1$

Согл. индукт. предполож.

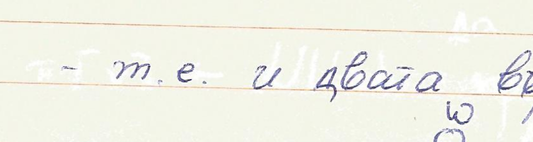
$$dist[w'] = dist_G(\cancel{z}, w')$$

$$\left.\begin{array}{l}(w, w') \in E \\ dist_G(s, w') = k-1\end{array}\right\} \Rightarrow dist_G(s, w) = \left\{\begin{array}{l}k-2 \\ k-1 \\ k.\end{array}\right.$$

$k-2$. - т.е. w да предхожда w'



$k-1$. - т.е. и двата върха да са листа.



Но при тези 2 случая вече щяхме да сте разгледали w

$\Rightarrow dist_G(s, w) = k.$

$$dist_{\mathcal{D}}(z,w) \stackrel{?}{=} \underbrace{dist_G(z,w)}_{k.}$$

$\mathcal{D}$ е подграф на G $\Rightarrow$ $dist_{\mathcal{D}}(z,a) \geq dist_G(z,a)$

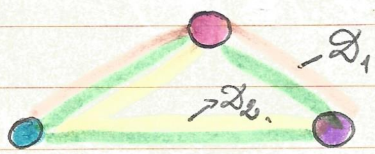
$$\pi[w'] \leftarrow w$$

$$dist_{\mathcal{D}}(s,w) = dist_{\mathcal{D}}(s,w') + 1.$$

Забележка:

$$dist_{\mathcal{D}}(s,v) = 1$$

$$dist_G(s,v) = 2.$$



$\Rightarrow dist_{\mathcal{D}}(s,v) \geq dist_G(s,v)$

Алгоритъм на Дейкстра.

$\pi[\ldots]$ - реализира дървото на най-късите пътища [пази предшественика на даден връх]

dist[v] - пази стойностите на най-късите пътища.

U - множеството на върховете, за които ~~вкл. в дървото~~ знаем най-леките пътища.

Нека са дадени $G=(V,E)$, ω, s където s е начален връх.

$\omega: E \to R^+$, $\omega(e) > 0$ $\forall e$.

for $v \in V(G)$
 dist[v] $\leftarrow \infty$ - правим д-ните на най-късите пътища да са ∞.
 $\pi[v] \leftarrow$ NULL - правим предшест. на всеки връх да е NULL.
dist[s] $\leftarrow 0$ - тривиален път от s до s.
$U \leftarrow s$ - добавяме s в множ. от върховете на дървото.

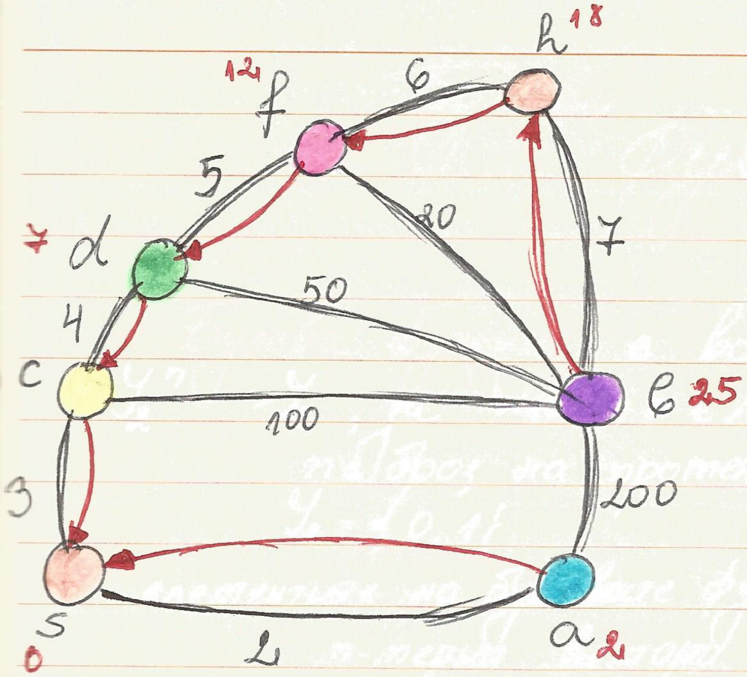
NO DATE

foreach $v \in Adj[s]$ → за всеки съседен на s.
$dist[v] \leftarrow w((s,v))$
$\pi[v] \leftarrow s$

Докато в $V \setminus U$ има върхове с $dist[\,] = \infty$
$x \leftarrow$ произв. врех от $V \setminus U$ с min $dist[\,]$ ст-ст.
$U \leftarrow U \cup \{x\}$. → за всички съседни.
foreach $y \in Adj[x]$ do.
if $(dist[y] > dist[x] + w((x,y)))$
$dist[y] \leftarrow dist[x] + w((x,y))$
$\pi[y] \leftarrow x$.

за следващ. врех се избира върха с най-малка dist[ ]-ст-ст.
→ отразява най-лесния начин за достигане от x до y, но ако има по-лесен, то ние го заменяме.

Недостатък на алгоритъма:
винаги се пробва да се върне към предшественика, когато гледа съседите.



h 18
12 f
6
5
20
7 d
7
50
4
c
b 25
100
3
200
s
0
a 2
2