Собствени вектори и инвариантни подпространства на линеен оператор.

Определение 1. *Характеристичният полином на квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ от ред n е*

$$f_A(x) = \det(A - xE_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})x^{n-1} + \ldots + \det(A).$$

Корените на $f_A(x) = 0$ се наричат характеристични корени на A.

Лема 2. *Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ и $B = T^{-1}AT \in M_{n\times n}(F)$ са подобни матрици, то характеристичните полиноми $f_A(x) = f_B(x)$ на A и B съвпадат.*

Доказателство. Вземайки предвид $xE_n = x(T^{-1}E_nT) = T^{-1}(xE_n)T$, пресмятаме

$$f_B(x) = \det(B - xE_n) = \det[T^{-1}AT - T^{-1}(xE_n)T] = \det[T^{-1}(A - xE_n)T] =$$
$$= \det(T^{-1})\det(A - xE_n)\det(T) = \det(T)^{-1} f_A(x)\det(T) = f_A(x).$$

□

Да напомним, че матриците на линеен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно пространство V спрямо различни базиси са подобни помежду си. Това дава основание за следното

Определение 3. *Нека $\varphi : U \to U$ е линеен оператор в крайномерно пространство U над поле F. Характеристичният полином на матрицата на φ спрямо един, а оттам и всеки един базис на V се нарича характеристичен полином на φ и се бележи с $f_\varphi(x)$. Корените на $f_\varphi(x)$ са характеристичните корени на φ.*

Определение 4. *Собствен вектор на линеен оператор $\varphi : V \to V$ е ненулев вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$, изпълняващ равенството $\varphi(v) = \lambda v$ за някое $\lambda \in F$.*

Казваме, че λ е собствена стойност на φ, отговаряща на собствения вектор v.

Твърдение 5. *Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор в крайномерно линейно пространство V над поле F. Тогава характеристичните корени на φ от F съвпадат със собствените стойности на φ.*

Доказателство. Да напомним, че хомогенна система линейни уравнения $Mx = \mathbb{O}_{n\times 1}$ с квадратна матрица от коефициенти $M \in M_{n\times n}(F)$ има ненулево решение тогава и само тогава, когато размерността на пространството от решения е $n - \mathrm{rk}(M) > 0$. Последното е равносилно на $\mathrm{rk}(M) < n$ и е изпълнено точно когато $\det(M) = 0$.

Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис на V и $A \in M_{n\times n}(F)$ е матрицата на φ спрямо базиса e на V. Вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ с координати $x \in M_{n\times 1}(F) \setminus \{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$ спрямо базиса e е собствен вектор на φ, отговарящ на собствена стойност $\lambda \in F$ точно когато

$$Ax = \lambda x = \lambda E_n x.$$

Това е изпълнено тогава и само тогава, когато x е ненулево решение на хомогенната система линейни уравнения

$$(A - \lambda E_n)x = \mathbb{O}_{n\times 1}.$$

Последното е еквивалентно на

$$\det(A - \lambda E_n) = 0$$

и е в сила точно когато λ е характеристичен корен на φ от полето F.

□

Твърдение 6. *Нека $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ са различни собствени стойности на линеен оператор $\varphi : V \to V$ в пространство V над поле F. За всяко $1 \leq i \leq n$ да предположим, че $v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i} \in V$ са линейно независими собствени вектори на φ, отговарящи на собствената стойност λ_i. Тогава системата вектори*

$$\{v_{i,j} \,|\, 1 \leq j \leq k_i,\, 1 \leq i \leq n\}$$

е линейно независима.

В частност, ако $v_1, \dots, v_n$ са собствени вектори на φ, отговарящи на различни собствени стойности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то $v_1, \dots, v_n$ са линейно независими, защото всеки от тези собствени вектори е ненулев, а оттам и линейно независим.

Доказателство. С индукция по броя n на собствените стойности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на φ, за $n = 1$ няма какво да се доказва. В общия случай да разгледаме линейна комбинация

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j} v_{i,j} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \tag{1}$$

на дадените вектори, равна на нулевия вектор на V. Действието на φ върху (1) дава

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j} \lambda_i v_{i,j} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V. \tag{2}$$

За да елиминираме $v_{n,1}, \dots, v_{n,k_n}$ от (1) и (2), умножаваме (1) с $-\lambda_n$ и прибавяме към (2). Получаваме

$$\overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n) v_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n) v_{i,j}.$$

По индукционно предположение, системата $\{v_{i,j} \,|\, 1 \leq i \leq n-1,\, 1 \leq j \leq k_i\}$ е линейно независима, така че

$$\mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n) = 0 \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad \text{и} \quad 1 \leq j \leq k_i.$$

Съгласно $\lambda_i - \lambda_n \neq 0$ за $1 \leq i \leq n-1$, стигаме до извода, че $\mu_{i,j} = 0$ за всички $1 \leq i \leq n-1$ и $1 \leq j \leq k_i$. Сега (1) приема вида

$$\sum_{j=1}^{k_n} \mu_{n,j} v_{n,j} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V.$$

Съгласно линейната независимост на $v_{n,1}, \ldots, v_{n,k_n}$, коефициентите $\mu_{n,j} = 0$ се анулират за всички $1 \leq j \leq k_n$. Това доказва линейната независимост на

$$\{v_{i,j} \,|\, 1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq k_i\}.$$

$\square$

Определение 7. *(i) Ако квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ от ред n има n различни характеристични корена от F, казваме, че A има прост спектър.*

(ii) Линеен оператор $\varphi : V \to V$ в n-мерно пространство V над поле F има прост спектър, ако φ има n различни характеристични корена от F.

Твърдение 8. *(i) Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор с прост спектър в n-мерно пространство V над поле F. Тогава съществува базис $v_1, \ldots, v_n$ на V, в който матрицата*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

на φ е диагонална. Еквивалентно, съществува базис на V, съставен от собствени вектори за φ.

(ii) Нека $A \in M_{n\times n}(F)$ е матрица с прост спектър. Тогава съществува обратима матрица $T \in M_{n\times n}(F)$, така че $D = T^{-1}AT$ е диагонална.

Доказателство. (i) По определение, φ е оператор с прост спектър, ако има n различни характеристични корена $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ от F. Съгласно Твърдение 5, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ са собствени стойности на φ. Ако v_i са собствени вектори на $\varphi : V \to V$, отговарящи на собствените стойности λ_i, то $v_1, \ldots, v_n$ са линейно независими по Твърдение 6. Следователно $v_1, \ldots, v_n$ е базис на V, в който матрицата на φ е диагонална,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

и диагоналните елементи са равни на съответните собствени стойности.

(ii) Нека $e = (e_1, \ldots, e_n)$ е базис на n-мерно пространство V над F, а $\varphi : V \to V$ е линейният оператор с матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ спрямо e. Тогава φ има прост спектър и съгласно (i) съществува базис $v = (v_1, \ldots, v_n)$ на V, в който матрицата на φ е диагонална,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Матрицата на прехода $T \in M_{n\times n}(F)$ от базиса e към базиса $v = eT$ е обратима и

$$D = T^{-1}AT.$$

$\square$

Определение 9. *Подпространство W на линейно пространство V е инвариантно относно линеен оператор $\varphi : V \to V$, ако $\varphi(W) \subseteq W$.*

Лема 10. *Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор в линейно пространство V над поле F.*

(i) За всяко $\lambda \in F$ множеството $U_\lambda = \{v \in V \,|\, \varphi(v) = \lambda v\}$ е φ-инвариантно подпространство на V. Ако λ е собствена стойност на φ, то U_λ е обединението на собствените вектори на φ, отговарящи на собствената стойност λ и нулевия вектор на V. Ако λ не е собствена стойност на φ, то $U_\lambda = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ е нулевото подпространство.

(ii) Ненулев вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ поражда 1-мерно φ-инвариантно подпространство $l(v)$ на V тогава и само тогава, когато v е собствен вектор на φ.

Доказателство. (i) Подмножеството $U_\lambda = \{v \in V \,|\, \varphi(v) = \lambda v\}$ на V е подпространство на V, защото за произволни $u_1, u_2 \in U_\lambda$ и $\mu \in F$ е в сила $u_1 + u_2, \mu u_1 \in U_\lambda$, съгласно

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2 = \lambda(u_1 + u_2) \quad \text{и}$$

$$\varphi(\mu u_1) = \mu\varphi(u_1) = \mu(\lambda u_1) = (\mu\lambda)u_1 = (\lambda\mu)u_1 = \lambda(\mu u_1).$$

Подпространството U_λ на V е φ-инвариантно, защото за произволен вектор $u \in U_\lambda$ е изпълнено $\varphi(u) = \lambda u \in U_\lambda$.

(ii) Ако 1-мерното подпространство $l(v)$ на V е φ-инвариантно, то ненулевият вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ се изобразява в $\varphi(v) \in l(v)$, така че $\varphi(v) = \lambda v$ за някое $\lambda \in F$ и v е собствен вектор на φ, отговарящ на собствена стойност λ.

Обратно, ако $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ е собствен вектор на φ, отговарящ на собствена стойност λ, то произволен вектор $\mu v \in l(v)$ се изобразява в $\varphi(\mu v) = \mu\varphi(v) = \mu(\lambda v) = \mu\lambda v \in l(v)$ и 1-мерното подпространство $l(v)$ на V е φ-инвариантно.

□

Приемаме без доказателство следната

Теорема 11. (Основна Теорема на алгебрата:) *Всеки непостоянен полином $f(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ с комплексни коефициенти има комплексен корен $\alpha \in \mathbb{C}$.*

В частност, всеки линеен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно пространство V над $\mathbb{C}$ има комплексен характеристичен корен $\lambda \in \mathbb{C}$. Съгласно Твърдение 5, λ е собствена стойност на φ и съществува собствен вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ на φ, отговарящ на собствената стойност λ. В резултат, $l(v)$ е 1-мерно φ-инвариантно подпространство на V. Това доказва следното

Твърдение 12. *Всеки линеен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно линейно пространство V над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа има 1-мерно φ-инвариантно подпространство.*

Твърдение 13. *Всеки линеен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно пространство V над полето на реалните числа $\mathbb{R}$ има 1-мерно или 2-мерно φ-инвариантно подпространство.*

Доказателство. Избираме базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на V и разглеждаме матрицата $A \in M_{n\times n}(F)$ на φ спрямо e. Ако A има реален характеристичен корен $\lambda \in \mathbb{R}$, то λ е собствена стойност на φ и произволен собствен вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ на φ, отговарящ на собствената стойност λ поражда 1-мерно φ-инвариантно подпространство $l(v)$ на V. Отсега нататък ще предполагаме, че всички характеристични корени на φ и на A са комплексни нереални числа и ще докажем, че тогава φ има 2-мерно φ-инвариантно подпространство.

За целта разглеждаме кородинатния изоморфизъм $C : V \to M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, съпоставящ на вектор $ex \in V$ координатния му стълб $C(ex) = x$ спрямо e. Изображението

$$\varphi_o : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n\times 1}(\mathbb{R}), \quad \varphi_o(x) = Ax$$

е линейно съгласно

$$\varphi_o(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \varphi_o(x) + \varphi_o(y) \quad \text{и} \quad \varphi_o(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda\varphi_o(x)$$

за произволни $x, y \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. В диаграмата

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "C"] \arrow[d, "\varphi"] & M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \arrow[d, "\varphi_o"] \\ V \arrow[r, "C"] & M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

имаме $C\varphi = \varphi_o C$, съгласно

$$C\varphi(ex) = C(\varphi(e)x) = C((eA)x) = C(e(Ax)) = Ax = \varphi_o(x) = \varphi_o C(ex).$$

Влагаме наредените n-торки реални числа $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ в наредените n-торки комплексни числа $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ като елементите с нулеви имагинерни части на компонентите. Тогава линейният оператор

$$\varphi_o : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{R}), \quad \varphi_o(x) = Ax$$

има $\mathbb{C}$-линейно продължение до линеен оператор

$$\varphi_o^{\mathbb{C}} : M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{n\times 1}(\mathbb{C}), \quad \varphi_o^{\mathbb{C}}(w) = Aw$$

с $\varphi_o^{\mathbb{C}}|_{M_{n\times 1}(\mathbb{R})} = \varphi_o$, участващ в диаграмата

$$\begin{tikzcd} M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_o"] & M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \arrow[d, "\varphi_o^{\mathbb{C}}"] \\ M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \arrow[r] & M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \end{tikzcd} .$$

Линейният оператор $\varphi_o^{\mathbb{C}}$ в n-мерното пространство $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ над $\mathbb{C}$ има комплексен характеристичен корен $\lambda \in \mathbb{C}$, който е характеристичен корен на A, а оттам и на φ. Следователно $\lambda = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ е комплексно нереално число и съществува собствен вектор $w \in M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$ на $\varphi_o^{\mathbb{C}}$, отговарящ на собствената стойност λ. Полагаме $w = u + iv$ за $u, v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ и сравняваме реалните и имагинерните части в равенствата

$$Au + iAv = A(u+iv) = Aw = \varphi_o^{\mathbb{C}}(w) = \lambda w = (a+bi)(u+iv) = (au - bv) + i(bu + av),$$

за да изведем

$$\begin{aligned} Au &= au - bv, \\ Av &= bu + av. \end{aligned} \tag{3}$$

Оттук, линейната обвивка $l(u,v)$ е φ_o-инвариантно подпространство на $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ и $l(eu,ev)$ е φ-инвариантно подпространство на V. Остава да докажем линейната независимост на u,v, за да получим, че $l(eu,ev)$ е 2-мерно φ-инвариантно подпространство на V и да докажем твърдението.

Да допуснем, че $u,v\in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ са линейно зависими и съществуват реални числа $p,q\in\mathbb{R}$, $(p,q)\neq(0,0)$ с

$$pu+qv=\mathbb{O}_{n\times 1}. \tag{4}$$

Действайки с φ_o върху (4) получаваме

$$\mathbb{O}_{n\times 1}=p(Au)+q(Av)=p(au-bv)+q(bu+av)=(pa+qb)u+(qa-pb)v. \tag{5}$$

За да елиминираме v от (4) и (5), умножаваме почленно (4) с $qa-pb\in\mathbb{R}$, (5) с $-q\in\mathbb{R}$ и събираме. Това дава

$$-(p^2+q^2)bu=\mathbb{O}_{n\times 1}. \tag{6}$$

От $p,q\in\mathbb{R}$, $(p,q)\neq(0,0)$ следва, че $p^2+q^2\in\mathbb{R}^{>0}$ е строго положително реално число. По предположение, $\lambda=a+bi\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ е комплексно нереално число, така че $b\neq 0$. Затова $-(p^2+q^2)b\neq 0$ е ненулево реално число и (6) изисква $u=\mathbb{O}_{n\times 1}$. Сега от действието на φ_o върху u получаваме, че

$$\mathbb{O}_{n\times 1}=\varphi_o(\mathbb{O}_{n\times 1})=\varphi_o(u)=Au=au-bv=-bv,$$

използвайки (3). Поради $-b\neq 0$, оттук следва $v=\mathbb{O}_{n\times 1}$ и стигаме до извода, че собственият вектор $w=u+iv=\mathbb{O}_{n\times 1}\in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ на $\varphi_o^{\mathbb{C}}$ е нулев. Противоречието установява линейната независимост на $u,v\in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ и доказва твърдението.

$\square$