NO DATE

Релации.

Релация - подмножество на декартовото произведение.

$A_1 \dots A_n$ - множества.
A_1 - първи домейн .... A_n - n-ти домейн.

Релация на $A_1 \dots A_n$ е всяко $R \subseteq \overset{n}{\underset{i=1}{X}} A_i$

Релацията представлява множество от наредени n-орки.

При $n=2$. бинарна релация:

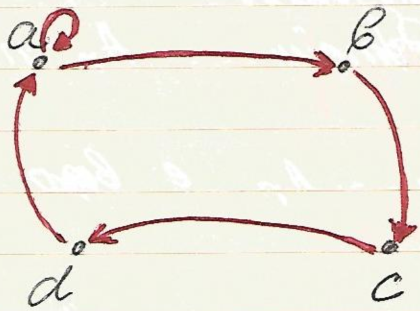
Записи:
aRa
$(a,a) \in R$.

NO DATE

Свойства на бинарните релации. ($R \subseteq A \times A$)

$A = \{a, b, c, d\}$.

$R = \{(a,a), (a,b), (c,d), (b,c), (d,a)\}$.



стрелките се рисуват от първия към втория ел. на наредената двойка

Като броя на стрелките е равен на броя на елементите на R.

 - примка, когато ел. е в релация със самия себе си.

1) Рефлексивност.

$\forall a \in A \quad aRa$.

т.е. всеки ел. на A да е в релация със себе си.

2) антирефлексивност.

$\forall a \in A, \quad \neg aRa$.

т.е. нито един от елементите на A да не е в релация със себе си.

Забележка:

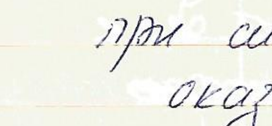
$\exists$ релации, които не са нито рефлексивни, нито антирефлексивни, т.е. някои от елем. са в релация със себе си, но някои не са.

3) симетричност.

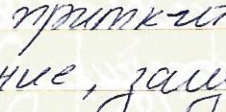
$\forall a, \forall b \in A, \quad aRb \to bRa,$

където $a \neq b$;

при симетричност примките не оказва влияние, защото се изисква само различните елементи, ако единия е в релация с другия, то и втория да е в релация с първия или да не съществува никаква релация м/у 2та ел.



или



4) антисиметричност.

$\forall a, \forall b, a \neq b \quad aRb \rightarrow \neg bRa$

(т.е. $\forall a, \forall b : aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$)

при антисиметричността примките не оказват влияние, тъй като се изисква ~~за~~ различните елементи само единия да е в релация с други, но не и обратното или нито един от ел. да не е в релация с различен ел.

5) силна антисиметричност.

$\forall a, \forall b, a \neq b \quad aRb \oplus bRa.$

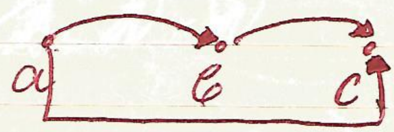
(т.е. $(aRb \wedge \neg bRa) \vee (\neg aRb \wedge bRa)$).

Изисква и само единия елемент да е в релация с другия

б) транзитивност.

$\forall a, \forall b, \forall c: aRb \wedge bRc \to aRc$

Ако един ел. е в релация ~~в~~ с втори, а втория в релация с трети, то трябва първия и третия да са в релация



Забележка:
Не е задължително да са 3 различни елемента.

Таблица на релациите (спрямо R)

	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	0	0	1	0
c	0	0	0	1
d	1	0	0	0

Трябва да са симетрично нанесени елементите

Забележка:
Ако по главния диагонал има са единици, то R е рефлексивна, ако има само нули, то е антирефлексивна.

NO DATE

2^{n^2} - възможни релации.

симетричност (спрямо матрица)

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 0 \\ \hline & & \\ \hline 0 & & \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline\end{array}$$

антисиметричност (спрямо матрица)

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 0 \\ \hline & & \\ \hline 0 & & \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 0 & & \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 0 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline\end{array}$$

силна антисиметричност (спрямо матрица)

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 0 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 0 & & \\ \hline\end{array}$$

NO DATE

Релации на еквивалентност.

$R \subseteq A \times A$ е релация на еквивалентност, ако е:

* рефлексивна
* симетрична
* транзитивна.

Пр:) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

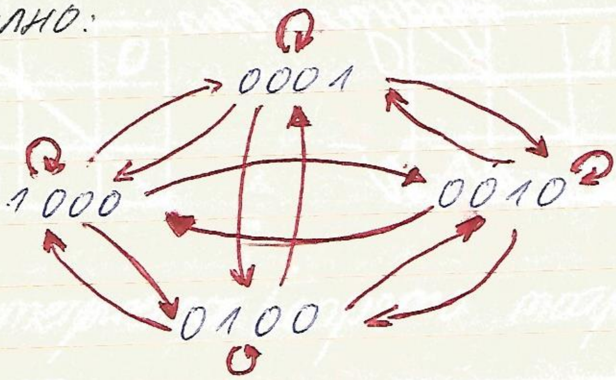
Класове на еквивалентност - те ~~са~~ част от цялата релация, но само в тази част са рефл., сим., транзитивни (т.е. имат макс. брой стрелки помежду си всички елементи)

Пр:)

0000	5)	1000	1)
0001	1)	1100	2)
0010	1)	1010	3)
0011	2)	1001	2)
0100	1)	1101	4)
0101	3)	1110	4)
0110	2)	1111	6)
0111	4)		

1, 2, 3, 4, 5, 6 - са класове на еквивал.
(чрез ротация от всеки ел.
могат да получат останалите
от класа)

Визуално:



но ако се нарисува графа на
релацията ~~що~~ няма да има
връзки м/у класовете
на еквивалентност.

[0001] = {0001, 0010, 0100, 1000}.

самия ел. и всички негови
~~релации~~ ротации.

[0000] = {0000}

[0101] = {0101, 1010}.

⋮

[1111] = {1111}.

Теорема:

Фамилията (множество от множества) $S = \{[a] \mid a \in A\}$ е разбиване на R_3

(т.е. $S = \{\{0000\}, \underbrace{\{0001, 0010, 0100, 1000\}, \ldots}_{\text{множествата нямат припокриване.}}\}$)

Доказателство:

1) $\forall a \in A$

$\exists S_1 \in S : a \in S_1$

R е реф. $\rightarrow [a]$ - ще съд. поне себе си.

2) $\forall S_i, S_j \in S, S_i \neq S_j : S_i \cap S_j = \varnothing$.

Доп. противното:

$\exists [a_i], [a_j] \in S$

такива че $\left| \begin{array}{l} [a_i] \neq [a_j] \\ [a_i] \cap [a_j] \neq 0. \end{array} \right.$

$\Rightarrow \exists b \in [a_i] \cap [a_j]$.

$\otimes$ $[a_i], [a_j]$ - разл. класове на еквивал. (т.е. м/у техните ел. $\exists$ рефлексивност, ~~релация~~ транзитивност, симетрия, но в принадлежи и на 2та класа $\Rightarrow$ едно и също множество

$\Rightarrow \lightning$

NO DATE

Допълнителни бележки: