Матрица на Грам. Неравенство на Коши-Буняковски и неравенство на триъгълника. Ортогонално допълнение на подпространство.

Определение 1. *Ако $a_1, \dots, a_n$ са вектори от крайномерно евклидово (унитарно) пространство V, то матрицата*

$$G(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_j \rangle & \dots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle a_i, a_1 \rangle & \dots & \langle a_i, a_j \rangle & \dots & \langle a_i, a_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \dots & \langle a_n, a_j \rangle & \dots & \langle a_n, a_n \rangle \end{pmatrix},$$

съставена от скаларните произведения $\langle a_i, a_j \rangle$, $1 \leq i, j \leq n$ се нарича матрица на Грам на $a_1, \dots, a_n$.

Детерминантата на матрицата на Грам $G(a_1, \dots, a_n)$ се нарияа детерминанта на Грам и се бележи с $\Gamma(a_1, \dots, a_n) = \det G(a_1, \dots, a_n)$.

Твърдение 2. *Детерминантата на Грам $\Gamma(a_1, \dots, a_n)$ на произволни вектори a_1, $\dots$, a_n от крайномерно евклидово (унитарно) пространство V приема неотрицателни стойности $\Gamma(a_1, \dots, a_n) \geq 0$ с равенство $\Gamma(a_1, \dots, a_n) = 0$ тогава и само тогава, когато $a_1, \dots, a_n$ са линейно зависими.*

Доказателство. Нека $A = (a_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ е матрицата, съставена по стълбове от координатите

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \dots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$$

на a_j спрямо ортонормиран базис $e = (e_1, \dots, e_m)$ на V, т.е.

$$a_j = (e_1, \dots, e_m) \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \dots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$A^t \overline{A} = \begin{pmatrix} a_1^t \\ \dots \\ a_n^t \end{pmatrix} (\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) = \begin{pmatrix} a_1^t \overline{a_1} & \dots & a_1^t, \overline{a_j} & \dots & a_1^t, \overline{a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_i^t \overline{a_1} & \dots & a_i^t \overline{a_j} & \dots & a_i^t \overline{a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^t \overline{a_1} & \dots & a_n^t \overline{a_j} & \dots & a_n^t \overline{a_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_j \rangle & \dots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle a_i, a_1 \rangle & \dots & \langle a_i, a_j \rangle & \dots & \langle a_i, a_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \dots & \langle a_n, a_j \rangle & \dots & \langle a_n, a_n \rangle \end{pmatrix} = G(a_1, \dots, a_n)$$

е матрицата на Грам, съгласно $a_i^t \overline{a_j} = \langle a_i, a_j \rangle$ за всички $1 \leq i, j \leq n$.

Нека $b_1, \dots, b_n$ се получават от $a_1, \dots, a_n$ чрез ортогонализация по метода на Грам-Шмид. Тогава съществува триъгълна матрица $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ с $t_{i,j} = 0$ за $\forall i > j$ и $t_{i,i} = 1$ за $\forall 1 \leq i \leq n$, така че

$$(b_1, \dots, b_n) = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} 1 & t_{1,2} & \dots & t_{1,n-1} & t_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & t_{2,n-1} & t_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = AT.$$

Ако $B \in M_{m \times n}(F)$ е матрицата, образувана по стълбове от координатите на

$$b_j = (e_1, \dots, e_m) \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \dots \\ b_{m,j} \end{pmatrix}$$

спрямо ортонормирания базис $e = (e_1, \dots, e_m)$ на V, то $B = AT$. Следователно матрицата на Грам на $b_1, \dots, b_n$ е

$$G(b_1, \dots, b_n) = B^t\, \overline{B} = (AT)^t\, \overline{(AT)} = T^t (A^t \overline{A}) \overline{T} = T^t G(a_1, \dots, a_n) \overline{T}.$$

За $\overline{(AT)} = \overline{A}\overline{T}$ използваме правилото за умножение на матрици, както и $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ са произволни комплексни числа $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Детерминантите на Грам

$$\det G(b_1, \dots, b_n) = \det(T^t) G(a_1, \dots, a_n) \det(\overline{T}) = \det G(a_1, \dots, a_n)$$

съвпадат, защото $\det(T^t) = \det(T) = \det(\overline{T}) = 1$. Пресмятаме в явен вид

$$G(b_1, \dots, b_n) = \begin{pmatrix} ||b_1||^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & ||b_2||^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & ||b_{n-1}||^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & ||b_n||^2 \end{pmatrix},$$

и забелязваме, че

$$\det G(b_1, \dots, b_n) = ||b_1||^2 ||b_2||^2 \dots ||b_{n-1}||^2 ||b_n||^2 \geq 0$$

с равенство $\det G(b_1, \dots, b_n) = 0$ точно когато $b_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ за някое $1 \leq i \leq n$. От свойствата на ортогонализацията по метода на Грам-Шмид знаем, че ако $i \in \mathbb{N}$ е минималното естествено, за което $b_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$, то $a_1, \dots, a_{i-1}$ са линейно независими и $a_i \in l(a_1, \dots, a_{i-1})$. Затова $b_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ за някое $1 \leq i \leq n$ тогава и само тогава, когато векторите $a_1, \dots, a_n$ са линейно зависими.

□

Твърдение 3. (Неравенство на Коши-Буняковски:) *За произволни вектори a и b от крайномерно евклидово или унитарно пространство V е в сила*

$$|\langle a, b \rangle| \leq ||a||\, ||b||$$

с равенство $|\langle a, b \rangle| = ||a||\, ||b||$ точно когато a, b са линейно зависими.

Доказателство. Детерминантата на Грам

$$\det G(a,b) = \begin{vmatrix} \langle a,a\rangle & \langle a,b\rangle \\ \langle b,a\rangle & \langle b,b\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ||a||^2 & \langle a,b\rangle \\ \overline{\langle a,b\rangle} & ||b||^2 \end{vmatrix} =$$
$$= ||a||^2||b||^2 - \langle a,b\rangle\overline{\langle a,b\rangle} = ||a||^2||b||^2 - |\langle a,b\rangle|^2 \geq 0$$

е неотрицателна и $||a||^2||b||^2 - |\langle a,b\rangle|^2 = 0$ тогава и само тогава, когато a,b са линейно зависими.

За произволни $X,Y \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ условието $X^2 \geq Y^2$ е еквивалентно на $X \geq Y$ с равенство $X^2 = Y^2$ точно когато $X = Y$. За целта е достатъчно да разложим

$$X^2 - Y^2 = (X+Y)(X-Y)$$

и да забележим, че $X + Y \geq 0$. Ако $X + Y = 0$, то $Y = -X \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cap \mathbb{R}^{\leq 0} = \{0\}$, така че от $X^2 = Y^2$ следва $X = Y$.

В случая, $||a||^2||b||^2 \geq |\langle a,b\rangle|^2$ е еквивалентно на $||a||||b|| \geq |\langle a,b\rangle|$ с равенство $||a||||b|| = |\langle a,b\rangle|$ точно когато a,b са линейно зависими.

□

Ако $a,b \in V\setminus\{\overline{\mathcal{O}}\}$ са ненулеви вектори от евклидово пространство, то $||a||,||b|| \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ и

$$-1 \leq \frac{\langle a,b\rangle}{||a||||b||} \leq 1.$$

Следователно съществува еднозначно определен ъгъл $\varphi \in [0,\pi]$ с

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle a,b\rangle}{||a||||b||},$$

който наричаме ъгъл между a и b. Това дава възможност да изразим

$$\langle a,b\rangle = ||a||||b||\cos(\varphi).$$

Твърдение 4. (Неравенство на триъгълника:) *Произволни вектори a,b от евклидово или унитарно пространство V изпълняват неравенството $||a+b|| \leq ||a|| + ||b||$ с равенство $||a+b|| = ||a|| + ||b||$ точно когато $a = \lambda b$ за $\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ или $b = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$.*

Доказателство. За произволно комплексно число $z = r + is \in \mathbb{C}$ с $r,s \in \mathbb{R}$ е в сила

$$r \leq |z| = \sqrt{r^2+s^2}^{\geq 0}$$

с равенство $r = \sqrt{r^2+s^2}^{\geq 0}$ точно когато $s = 0$ и $r \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Последното е еквивалентно на $z \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Затова

$$||a+b||^2 = \langle a+b,a+b\rangle = \langle a,a\rangle + \langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle + \langle b,b\rangle = ||a||^2 + \langle a,b\rangle + \overline{\langle a,b\rangle} + ||b||^2 =$$
$$= ||a||^2 + 2Re(\langle a,b\rangle) + ||b||^2 \leq ||a||^2 + 2|\langle a,b\rangle| + ||b||^2$$

с равенство $||a+b||^2 = ||a||^2 + 2|\langle a,b\rangle| + ||b||^2$ тогава и само тогава, когато $\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Прилагайки неравенството на Коши-Буняковски $|\langle a,b\rangle| \leq ||a||||b||$ получаваме

$$||a+b||^2 \leq ||a||^2 + 2||a||||b|| + ||b||^2 = (||a|| + ||b||)^2$$

с равенство $||a+b||^2 = (||a|+||b||)^2$ точно когато a,b са линейно зависими и $\mu a + \nu b = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ за $\mu,\nu \in \mathbb{R}$,$(\mu,\nu) \neq (0,0)$. Ако $\mu \neq 0$, това е еквивалентно на $a = \lambda b$ за някое $\lambda \in \mathbb{R}$, а от $\mu = 0$ следва $\nu \neq 0$ и $b = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$. При $b = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ е в сила $2\langle a, b = 0$, откъдето $Re(\langle a, b \rangle) = |\langle a, b \rangle| = 0$. Ако $a = \lambda b$, то условието $\langle a, b \rangle = \langle \lambda b, b \rangle = \lambda ||b||^2 \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ е изпълнено точно когато $\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. За $X, Y \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ условието $X^2 \geq Y^2$ е еквивалентно на $X \geq Y$ с равенство $X^2 = Y^2$ тогава и само тогава, когато $X = Y$. Затова $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$ с равенство $||a + b|| = ||a|| + ||b||$ точно когато $a = \lambda b$ или $b = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$.

□

Прилагайки неравенството на триъгълника към векторите $a - b$ и b от евклидово или унитарно пространство V получаваме

$$||a|| = ||(a - b) + b|| \leq ||a - b|| + ||b||,$$

откъдето $||a - b|| \geq ||a|| - ||b||$. Равенството $||a - b|| = ||a|| - ||b||$ е в сила точно когато $a - b = \lambda b$ за $\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ или $b = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Това е изпълнено за $a = \mu b$ с $\mu \in \mathbb{R}^{\geq 1}$ или $b = \overrightarrow{\mathcal{O}}$.

Определение 5. *Ортогоналното допълнение на подпространство U на евклидово или унитарно пространство V е множеството*

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0, \quad \forall u \in U\}$$

на векторите $v \in V$, които са ортогонални на произволен вектор $u \in U$.

Ортогоналното допълнение $U^{\perp}$ на подпространство $U \subset V$ е подпространство на V. По-точно, за произволни $v_1, v_2 \in U^{\perp}$, $u \in U$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ или $\lambda \in \mathbb{C}$ е в сила

$$\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle = 0 + 0 = 0 \quad \text{и}$$

$$\langle u, \lambda v_1 \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v_1 \rangle = \overline{\lambda} 0 = 0.$$

Следователно $v_1 + v_2, \lambda v_1 \in U^{\perp}$ и $U^{\perp}$ е подпространство на V.

Твърдение 6. *Нека V е n-мерно евклидово (унитарно) пространство, U е подпространство на V, а $U^{\perp}$ е ортогоналното допълнение на U. Тогава*

(i) $U \oplus U^{\perp} = V$ и

(ii) $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

От (i) следва, че произволен вектор $v \in V$ има единствено представяне като сума $v = u_o + h$ на $u_o \in U$ и $h \in U^{\perp}$. Векторът u_o се нарича ортогонална проекция на v върху U, а h е перпендикулярът от v към U.

Доказателство. (i) Избираме ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_k$ на U и допълваме до ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ на V. Тогава

$$V = l(e_1, \ldots, e_k) \oplus l(e_{k+1}, \ldots, e_n) = U \oplus l(e_{k+1}, \ldots, e_n).$$

Достатъчно е да докажем, че $l(e_{k+1}, \ldots, e_n) = U^{\perp}$, за да получим (i). За произволни $v = \sum\limits_{j=k+1}^{n} y_j e_j$ и $u = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i e_i \in U$ е в сила

$$\langle u, v \rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} x_i e_i, \sum_{j=k+1}^{n} y_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle e_i, e_j \rangle = 0,$$

така че $l(e_{k+1}, \ldots, e_n) \subseteq U^{\perp}$. Обратно, ако $v = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j \in U^{\perp}$, то за всяко $1 \leq i \leq k$ векторът e_i принадлежи на U, откъдето

$$0 = \langle e_i, v \rangle = \langle e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{y_j} \langle e_i, e_j \rangle = \overline{y_i}.$$

Следователно $v = \sum\limits_{j=k+1}^{n} y_j e_j \in l(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ и $U^\perp \subseteq l(e_{k+1}, \ldots, e_n)$. Това доказва

$$U^\perp = l(e_{k+1}, \ldots, e_n).$$

(ii) От една страна, $U \subseteq (U^\perp)^\perp$, защото за произволни вектори $u \in U$ и $v \in U^\perp$ е изпълнено

$$\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle} = \overline{0} = 0.$$

Съгласно (i) имаме разлагания

$$U \oplus U^\perp = V = U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp.$$

Оттук, $\dim(U^\perp)^\perp = \dim V - \dim(U^\perp) = \dim(U)$ и подпространството U съвпада с пространството $(U^\perp)^\perp$.

$\square$

Следствие 7. *Нека V е крайномерно евклидово (унитарно) пространство, а U е подпространство на V. Перпендикулярът $h \in U^\perp$ от вектор $v \in V$ към U е единственият вектор с минимална дължина, за който съществува $u_o \in U$ с $v = h + u_o$.*

Доказателство. Ако $v = u + w$ за $u \in U$, $w \in V$, то от $u + w = v = u_o + h$ следва

$$w = (u_o - u) + h \quad \text{с} \quad u_o - u \in U, \quad h \in U^\perp.$$

Следователно

$$\begin{aligned} ||w||^2 = \langle w, w\rangle = \langle (u_o - u) + h, (u_o - u) + h\rangle = \\ = \langle u_o - u, u_o - u\rangle + \langle h, h\rangle = ||u_o - u||^2 + ||h||^2 \geq ||h||^2, \end{aligned}$$

съгласно $\langle u_o - u, h\rangle = 0 = \langle h, u_o - u\rangle$. Равенството $||w||^2 = ||h||^2$ е в сила точно когато $||u_o - u||^2 = 0$. Това е изпълнено само за $u_o = u$ и е еквивалентно на $w = h$.

$\square$

Нека $Ax = b$ е несъвместима система линейни уравнения, чиято матрица от коефициенти $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ е с ранг $\mathrm{rk}(A) = n$. Ако $a_1, \ldots, a_n \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ са вектор-стълбовете на A, то

$$A^t A = \begin{pmatrix} a_1^t \\ \ldots \\ a_n^t \end{pmatrix} (a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1^t\overline{a_1} & \ldots & a_1^t\overline{a_j} & \ldots & a_1^t\overline{a_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_i^t\overline{a_1} & \ldots & a_i^t\overline{a_j} & \ldots & a_i^t\overline{a_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^t\overline{a_1} & \ldots & a_n^t\overline{a_j} & \ldots & a_n^t\overline{a_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \ldots & \langle a_1, a_j\rangle & \ldots & \langle a_1, a_n\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle a_i, a_1\rangle & \ldots & \langle a_i, a_j\rangle & \ldots & \langle a_i, a_n\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle a_n, a_1\rangle & \ldots & \langle a_n, a_j\rangle & \ldots & \langle a_n, a_n\rangle \end{pmatrix} = G(a_1, \ldots, a_n)$$

е матрицата на Грам на $a_1, \ldots, a_n$. Умножавайки отляво $Ax = b$ с A^t получаваме системата линейни уравнения

$$G(a_1, \ldots, a_n)x = A^t A x = A^t b.$$

Съгласно $\mathrm{rk}(a_1,\ldots,a_n) = \mathrm{rk}(A) = n$, векторите $a_1,\ldots,a_n$ са линейно независими и $\Gamma(a_1,\ldots,a_n) = \det G(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^{>0}$. Затова съществува единствено решение $s \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ на $A^tAx = A^tb$, за което

$$\begin{pmatrix} a_1^t \\ \ldots \\ a_n^t \end{pmatrix} (b - As) = \mathbb{O}_{n\times 1}.$$

Следователно векторът $b - As \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ е ортогонален на $a_1,\ldots,a_n \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ и принадлежи на ортогоналното допълнение

$$b - As \in l(a_1,\ldots,a_n)^{\perp}$$

на $l(a_1,\ldots,a_n)$. От друга страна,

$$As = (a_1,\ldots,a_n) \begin{pmatrix} s_1 \\ \ldots \\ s_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} s_i a_i \in l(a_1,\ldots,a_n)$$

принадлежи на линейната обвивка на $a_1,\ldots,a_n$. Затова

$$b = (b - As) + As \in l(a_1,\ldots,a_n)^{\perp} \oplus l(a_1,\ldots,a_n)$$

е разлагането на $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ в сума на ортоналната си проекция As върху $l(a_1,\ldots,a_n)$ и перпендикуляра $b - As$ от b към $l(a_1,\ldots,a_n)$. Следователно $b - As \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ е единственият вектор с минимална дължина, за който $b - (b - As) = As \in l(a_1,\ldots,a_n)$. По този начин, щом не съществува $s \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ с $b - As = \mathbb{O}_{m\times 1}$, то решението $s \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, за което векторът $b - As \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ е с минимална дължина се нарича приближено решение на несъвместимата система $Ax = b$ с $\mathrm{rk}(A) = n$ по метода на най-малките квадрати.