Упражнение 1

Атанас Груев

04.10.2019

1 Кратка теория

1.1 Множества. Елемент на множество. Теоретико-множествени операции

- Множеството е първично понятие и като такова, няма точна математическа дефиниция (интуитивно е ясно, че то представлява *съвкупност* от някакви елементи, т.е. множеството обема съдържание от елементи). Елементите на множеството, отново на интуитивно ниво, са това - което го съставя. Например:

  $$A = \{1, 2, \dots, 10\}$$

  A е множество, състоящо се от 10 елемента - естествените числа от 1 до 10. Това е крайно множество, понеже има краен брой елементи. *Кардиналност на множество* е броят на елементите му - бележи се с $|A|$. Очевидно $|A| = 10$.

  Нека A, B са множества. Основните операции над тях са:

  1. Обединение:
     $$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$
  2. Сечение:
     $$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
  3. Разлика:
     $$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$
  4. Декартово произведение:
     $$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

- Релация - $R \subset A \times B$. Наредена двойка (a, b) от елементи на декартовото произведение $A \times B$ са в релация, ако aRb или $(a, b) \in R$, т.е. елементът (a, b) е част от подмножеството R.

- Изображение - f е изображение, дефинирано в A и приемащо стойности в B, ако $f \subset A \times B$, т.е. изображението е релация. Обикновено използваме означенията:

  $$f : A \to B \text{ (} f \text{ изобразява елементи на } A \text{ в елементи на } B\text{)}$$

  $$xfy \iff f(x) = y \text{ (} x \text{ и } y \text{ са в релация, ако } f(x) = y\text{)}$$

- Квантори - биват два типа и се използват за характеризиране на елементи от дадено множество:

  1. Квантор за всеобщност ($\forall$) - чета се "за всяко" или "за всеки" и се отнася до всички елементи на множеството (оттам - всеобщност). Ето някои примери:

  $$\forall x \in 2\mathbb{N} : 2 \mid x \text{ (за всяко четно естествено число е вярно, че се дели на 2)}$$
  $$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : 2n \geq n + 2 \text{ (за естествените числа без 1, е в сила неравенството)}$$

  2. Екзистенциалне квантор ($\exists$) - служи за поясняване наличието на поне един елемент от множеството, за който е в сила някакво твърдение. Например:

  $$\exists x \in \mathbb{R} : x^3 = 100 \text{ (съществува реално число, което на трета степен е 100)}$$
  $$\exists x \in X : P(x) \wedge Q(x) \ \text{ (за някое } x \text{ от множество } X \text{ са в сила условията } P \text{ и } Q\text{)}$$

- Инекция - $f : A \to B$ е *инекция*, ако:

  $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

  или еквивалентно

  $$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Сюрекция - $f : A \to B$ е сюрекция, ако:

  $$\forall y \in B \, \exists x \in A : f(x) = y$$

- Биекция - $f : A \to B$ е биекция, ако е инекция и сюрекция.

- Образ - $Im(f)$ е *образ* на f, т.е. това подмножество на кодомейна на f, за което функцията изобразява елементите на домейна в него. Ако $f : A \to B$ е инекция, то $f : A \to Im(f)$ е биекция.

- Монотонност - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е монотонно растяща, ако:

  $$\forall x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$$

  Обратно, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е монотонно намаляваща, ако:

  $$\forall x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$$

- Обратна функция - нека $f : A \to B$ е функция и $g : B \to A$ е такава, че:

  $$g(f(x)) = x \ \forall x \in A$$

  Означаваме f^{-1}. Една функция е обратима точно когато тази функция е биекция.

1.2 Задачи

Препоръчително е да прегледате първа глава от сборника на Проданов, Хаджииванов и Чобанов.

- Твърденията от първия параграф са тривиални, като оттам научаваме означението на празното множество - $\emptyset$.

- Във втория параграф - ясно е, че обединението на четните и нечетните естествени числа дава всички естествени числа, формално:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \nmid x\} \cup \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \mid x\} = \mathbb{N}$$

  За да докажем например, че $A \cup B = A \iff B \subset A$, разглеждаме 2-те посоки. В правата посока - знаем, че $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} = A$. Ако допуснем, че съществува елемент $x \in B$, за който $x \notin A$, то той участва в обединението $A \cup B$, но не е елемент на A - противоречие. Следователно всеки елемент на B е елемент и на A, т.е. $B \subset A$. Обратното е тривиално.

- Трети параграф - сечението на множествата от елементим които се делят на x и на y е множеството от елементи, които се делят на НОК(x, y) - аналогично разсъждение за множества от елементи, които не се делят на дадени числа. Ще покажем, че

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

  Наистина, ако $x \in (A \cap B) \cup C$, то $x \in (A \cap B)$ или $x \in C$. Ако $x \in C$, то очевидно $x \in (A \cup C)$ и $x \in (B \cup C)$, откъдето $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Ако пък $x \in (A \cap B)$, то $A \subset A \cup C$ и $B \subset B \cup C$ - тогава $A \cap B \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Ясно е, че x е елемент на надмножеството. Разсъждавайте самостоятелно за другата страна.

- Самостоятелно разгледайте четвъртия параграф - опитайте се да направите някой пример от Задача 13. а), б), в).

- Важно е да упражним задачи с изображения, монотонност, обратимост. Следните няколко задачи са подробно решени:

  а) Задача 15. За задачи, в които се налага да покажем, че едно множество A е подмножество на друго множество B, се процедира по следния начин - взима се елемент от A и се показава, че той е елемент на B. Подробно разписано:

$$\begin{aligned} f(M) \setminus f(N) = \{f(x) \mid x \in M\} \setminus \{f(x) \mid x \in N\} = \\ = \{f(x) \mid f(x) \in \{f(x) \mid x \in M\} \wedge f(x) \notin \{f(x) \mid x \in N\}\} = \\ = \{f(x) \mid x \in M \wedge x \notin N\} = \{f(x) \mid x \in M \setminus N\} = f(M \setminus N) \end{aligned}$$

  б) Задача 19. Прочитаме внимателно условието и виждаме, че нашето изображение е:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \text{ за } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

Следователно:

$$f\left(0\right)=f\left(\frac{0}{1}\right)=\frac{1}{1}=1$$

$$f\left(\mathbb{Q}\right)=f\left(\left\{\frac{p}{q}\,|\,p,q\in\mathbb{Z}\wedge q>0\right\}\right)=\left\{\frac{1}{q}\,|\,q\in\mathbb{Z}\wedge q>0\right\}=\left\{\frac{1}{q}\,|\,q\in\mathbb{N}\right\}$$

$f\left(\mathbb{Z}\right)=f\left(\left\{z\,|\,z\in\mathbb{Z}\right\}\right)=1$ - всяко цяло число е рационално със знаменател 1

$f\left(\mathbb{N}\right)=f\left(\left\{n\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}\right)=1$ - аналогично на горното

$f\left(\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}\right)=f\left(\left\{z\,|\,z\in\mathbb{Z}^{-}\cup\{0\}\right\}\right)=1$

$f^{-1}\left(1\right)$ - особен случай!

Знаем, че $f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=x$ за x в ДМ на f. Оттам:

$$f\left(x\right)=f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}=1\iff x\in\mathbb{Z}$$

Следователно $f^{-1}\left(1\right)=f^{-1}\left(f\left(\mathbb{Z}\right)\right)=\mathbb{Z}$. Обосновката е, че $f\left(x\right)=1$ само за целите числа, т.е. за всички числа от вида $\frac{p}{q}$, за които $q=1$.

в) Задача 33. За да докажем, че функцията $f\left(x\right)=ax, a\neq 0$ е обратима, достатъчно е да посочим функция $g\equiv f^{-1}$, за която:

$$f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=x\;\forall\,x\in\mathbb{R}$$

Сега, за произволно $x\in\mathbb{R}$ заместваме $f\left(x\right)=ax$:

$$f^{-1}\left(ax\right)=x\Rightarrow ax\xmapsto{f^{-1}}x$$

Очевидно това е функцията $g\left(y\right)=\frac{1}{a}y$, която умножава своя аргумент по $\frac{1}{a}$.

- Разгледайте например параграф 11 - прочетете кратката теоретична забележка и вижте примери за релации.

- В Ръководството на Любенова, Недевски и др. вижте глава 0, параграф 6 - Обратни кръгови функции, задачи 6.1 и 6.2. Те са решени в ръководството, но опитайте самостоятелно първо.