Минимално и максимално покриващо дърво на граф.

Нека $G(V,E)$ е свързан граф и $\omega: E \to R$ е функция с реални стойности, дефинирана по ребрата на графа. Стойността $\omega(e)$, $e \in E$, наричаме цена или тегло на реброто e.

~~Нека D(V,E) е дърво.~~

Деф.

За всяко покриващо дърво T множ. от върховете е същото, множ. на ребрата е подмножеството на ребрата на графа.

$$T=(V,E')$$

Цена на дървото наричаме сумата

$$\omega(T)=\sum_{e\in E'} \omega(e).$$

Покриващото дърво - съдържа всички върхове на графа и с едно ребро по-малко от броя на върховете.

Понятията минимално и максимално покриващо дърво са аналогични.
Максимално покриващо дърво се получава, ако се замени min с max и се обърнат съотв. неравенства.

Минимално покриващо дърво (МПД) е всяко покриващо дърво T'', такова че цената на T'' е по-малка от цената на $\hat{T}$, за всяко покриващо дърво (ПД) $\hat{T}$.

Запис: $w(T'') \le w(\hat{T})$ за всяко ПД $\hat{T}$

~~МД~~ МПД - взимат ребрата с най-ниска цена.

Забележка:
МПД не се гледа глобално, а се тръгва от един връх и се ~~гледа~~ взима локално, най-лекото ребро за него.

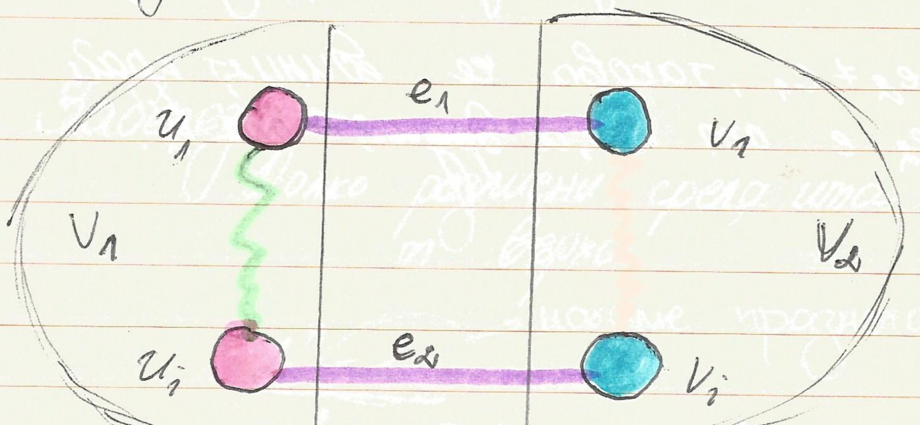
1. МПД - свойство:

Нека $G=(V,E)$ е свързан граф.
Срез в графа (cut) е всяко разбиване на множеството V на 2 подмножества - V_1 и V_2 (по дефиниц. на разбиване $\Rightarrow$ $V_1 \neq \varnothing$ и $V_2 \neq \varnothing$.)
Нека $\hat{E}$ е множеството от ребрата, които прекосяват среза.

$$\hat{E} = \{(u,v) \mid u \in V_1 \wedge v \in V_2\}.$$

Нека $\hat{E}_{min}$ са „най-леките" ребра от $\hat{E}$. Тогава за всяко $e \in \hat{E}_{min}$ съществува МПД T, такова че $e \in E(T)$.

Доказателство:



NO DATE

Взимате реброто е минималната тежест. на което ще казвате e_1

Допускате, че нито едно МПД на G не съдържа e_1.

Разглеждате произволно МПД на G - $T' = (V, E')$. Поне едно ребро на T' прекосява среза. Добавяте e_1 към T' и образувате графа $D = (V, E' \cup \{e_1\})$

$\Rightarrow |E' \cup \{e_1\}| = |E'| + 1$.

$\Rightarrow$ D не е дърво, защото има n ребра, а не n-1. D е уницикличен граф: има точно един цикъл.

Ако върховете на цикъл са оцветени в 2 цвята, то поне 2 ребра на цикъла имат краища оцв. в разл. цветове.

$\Rightarrow \exists e_2 \neq e_1$, такова че единият край на e_2 е от V_1, а другият от V_2.

Изтриваме e_2 от $\mathcal{D}$ и получаваме дървото T''

$$T' \xrightarrow{+e_1} \mathcal{D} \xrightarrow{-e_2} T''$$

$$w(T'') = w(T') + w(e_1) - w(e_2),$$
където $e_1 \in \hat{E}_{min}$.

Ако $e_2 \in \hat{E}_{min}$, то $w(e_1) = w(e_2)$
$\Rightarrow w(T') = w(T'') \Rightarrow ↯$ (имат едно и също тегло, но T' е МПД).

Ако $e_2 \notin \hat{E}_{min}$, то $w(e_2) > w(e_1)$.
$\Rightarrow w(e_1) - w(e_2) < 0 \Rightarrow T'$ не е било МПД ↯

Забележка:
Колко различни среза има при n върха.

$$\frac{2^n - 2}{2}$$

-2 → махаме празното множество.

2 → делим на 2, защото съществува симетрия и едно ребро ще си броим два пъти.

NO DATE

При построяване на МПД на свързан граф би трябвало да започнем винаги с едно от най-леките ребра, а когато имате няколко ребра, свързващи две множества върхове - да избирате това, което има минимална цена измежду тях.

Твърдението показва също така, че кое от ребрата с най-малка цена да изберем е без значение, защото независимо от избора ще получим минимално покриващо дърво.

2. Алгоритъм на Прим.

Нека са дадени $G = (V, E)$, ω, s където $s \in V$ (и s-нач. връх)

1. T - дървото, което ще строим.

$T \leftarrow (s, \phi)$ - поставяме началния връх без никакви ребра.

2. Ако $V(T) = V$

return T

Прави се проверка дали всичките върхове ~~вече~~ от графа не са в дървото.

3. else.

$e = (u, v)$ е произволно най-леко ребро, такова че $u \in V(T)$, а $v \notin V(T)$

$$T \leftarrow (V(T) \cup \{v\}, E(T) \cup \{e\}.)$$

Вкарваме съседен ~~вър~~ връх на някое от вече вкараните върхове, като ~~върхът~~ реброто м/у двата върха има най-~~леко~~ ниска цена в сравнение с останалите, и добавяме / реброто e.

Връщаме се в 2.

NO DATE

Теорема:

Алгоритъмът на Прим строи МПД на G

Доказателство:

T - не може да има цикли (когато е вкаран даден връх, не може да си вземе ребро до друг. вкаран връх).

T е ПД на G, защото в него участват всички върхове от G, а ребрата на T ~~се~~ е подмножество от ребрата на G

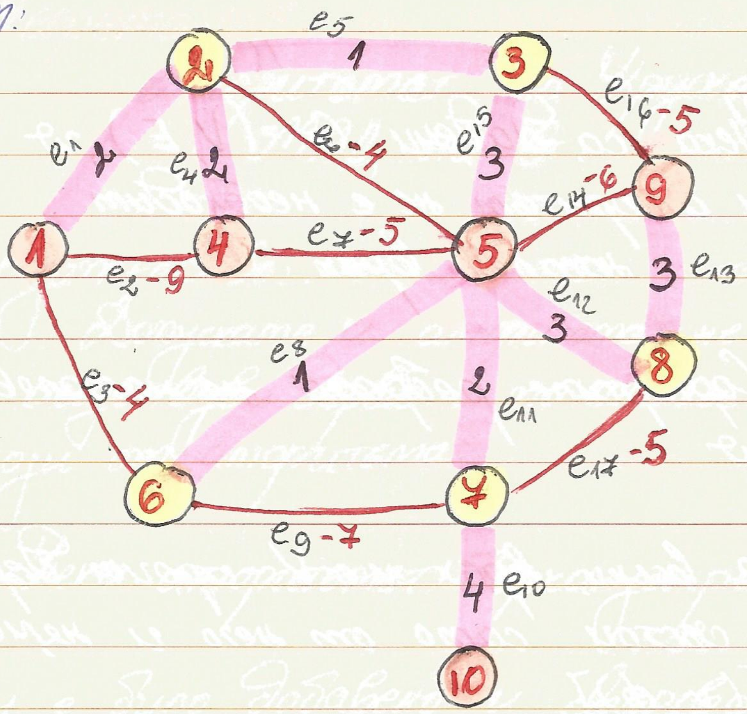
T е МПД - защото взима ~~локално~~ ~~най~~ най-леките ребра м/у върховете.

Вярно е за произв.

=> вярно за всяко.

NO DATE

Прим:



Крускал:

$\underbrace{e_8, e_5}_{1}$, $\underbrace{e_1, e_4, e_{11}}_{2}$, $\underbrace{e_{12}, e_{13}, e_{15}}_{3}$, $\underbrace{e_3, e_6, e_{10}}_{4}$,

$\underbrace{e_7, e_{17}, e_{16}}_{5}$, $\underbrace{e_{14}}_{6}$, $\underbrace{e_9}_{7}$, $\underbrace{e_2}_{9}$.

Започвате от най-леките ребра и стигате до най-тежките.

$e_8, e_5, e_1, e_4, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{15}, e_{10}$.

3. Алгоритъм на Крускал.

Нека са дадени $G = (V, E)$, ω

За този алгоритъм не е необходим начален връх.

1. Сортираме ребрата не намаляващо спрямо ω

2. За всеки връх $v \in V$ - строим дърво, което се състои само от него и няма ребра. $[(v, \phi)]$.
Получените дървета са $T_1 \dots T_n$.

3. За всяко ребро $e = (u, v)$ установено след стъпка едно:
3.1. ако u и v са от различни T_i, T_j, то сливаме T_i, T_j и добавяме реброто e.
3.2. иначе прескачаме e.

Забележка:
За бързодействие алгоритъмът се върти, докато ребрата не станат $n-1$, а не до края (След $n-1$-то ребро няма да се добавят повече ребра, тъй като това е дърво)

NO DATE

Теорема:

Алгоритъмът на Крускал строи МПД на G.

Доказателство:

Допускаме, че алгоритъмът не е коректен, т.е. съществува дърво с по-малка тежовност от този от алгоритъма.

Нека алгоритъмът бърка за реброто e_t.

e_t е било добавено и свързва две дървета T' и T''.

1. Алгоритъмът е взел е e_t, защото м/у двете дървета няма друго ребро с по-малка тегловност от получената => противоречие с допуснатото.
2. Ако $w(e_i) \neq w(e_j)$ за всяко $i \neq j$ => съществува единствено МПД, но ако има ребра с еднаква тежест, то ще има множество от дървета.

NO DATE

Допълнителни бележки: