Линейни изображения. Изоморфизъм на линейни пространства.

Определение 1. *Изображение $f : U \to V$ на линейни пространства е линейно, ако*

$$f(x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n) = x_1 f(u_1) + \ldots + x_n f(u_n) \quad \textit{за всички} \quad u_i \in U \quad \textit{и} \quad x_i \in F.$$

Линейно изображение $f : U \to U$ на линейно пространство U в себе си се нарича линеен оператор.

Ако $\mathbb{R}[x]^{(n+1)}$ е пространството на полиномите $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ на x от степен $\leq n$ с реални коефициенти, то диференцирането

$$\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x]^{(n+1)} \longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(n)}, \quad \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$$

е линейно изображение в пространството на полиномите на x от степен $\leq n-1$ с реални коефициенти. По-точно,

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{d}{dx} f_i(x)$$

за произволни полиноми $f_i(x) \in \mathbb{R}[x]^{(n+1)}$ и произволни константи $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Можем да разглеждаме

$$\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x]^{(n+1)} \longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(n+1)}$$

като линеен оператор в $\mathbb{R}[x]^{(n+1)}$.

Нулевото изображение

$$\mathbb{O} : U \longrightarrow V, \quad \mathbb{O}(u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \quad \text{за всички} \quad u \in U$$

е линейно, защото

$$x_1 \mathbb{O}(u_1) + \ldots + x_n \mathbb{O}(u_n) = x_1 \overrightarrow{\mathcal{O}}_V + \ldots + x_n \overrightarrow{\mathcal{O}}_V =$$
$$= \overrightarrow{\mathcal{O}}_V + \ldots + \overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \mathbb{O}(x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n)$$

за произволни $u_i \in U$, $x_i \in F$.

Тъждественото изображение $\mathrm{Id} : U \to U$ на линейно пространство U е линеен оператор, съгласно

$$x_1 \mathrm{Id}(u_1) + \ldots + x_n \mathrm{Id}(u_n) = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n = \mathrm{Id}(x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n)$$

за всички $u_i \in U$ и $x_i \in F$.

Твърдение 2. *Изображение $\varphi : U \to V$ на линейни пространства е линейно тогава и само тогава, когато $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$ и $\varphi(\lambda u_1) = \lambda\varphi(u_1)$ за произволни $u_1, u_2 \in U$, $\lambda \in F$.*

Доказателство. Ако $\varphi : U \to V$ е линейно изображение, то по определение

$$\varphi(x_1u_1 + \ldots + x_nu_n) = x_1\varphi(u_1) + \ldots + x_n\varphi(u_n) \quad \text{за произволни} \quad u_i \in U, \quad x_i \in F.$$

В частност,

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(1.u_1 + 1.u_2) = 1.\varphi(u_1) + 1.\varphi(u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \quad \text{и}$$

$$\varphi(\lambda u_1) = \lambda\varphi(u_1) \quad \text{за всички} \quad u_1, u_2 \in U, \quad \lambda \in F.$$

Обратно, ако $\varphi(u_1+u_2) = \varphi(u_1)+\varphi(u_2)$ и $\varphi(\lambda u_1) = \lambda\varphi(u_1)$ за произволни $u_1, u_2 \in U$, $\lambda \in F$, то с индукция по n ще проверим, че

$$\varphi(x_1u_1 + \ldots + x_nu_n) = x_1\varphi(u_1) + \ldots + x_n\varphi(u_n) \quad \text{за произволни} \quad u_i \in U, \quad x_i \in F.$$

В случая $n = 1$ имаме $\varphi(x_1u_1) = x_1\varphi(u_1)$ по предположение. В общия случай,

$$\varphi(x_1u_1 + \ldots + x_{n-1}u_{n-1} + x_nu_n) = \varphi(x_1u_1 + \ldots + x_{n-1}u_{n-1}) + \varphi(x_nu_n)$$

от съгласуваността на φ със събирането на вектори. По индукционно предположение,

$$\varphi(x_1u_1 + \ldots + \varphi x_{n-1}u_{n-1}) = x_1\varphi(u_1) + \ldots + x_{n-1}\varphi(u_{n-1}).$$

По предположение, $\varphi(x_nu_n) = x_n\varphi(u_n)$. Следователно

$$\varphi(x_1u_1 + \ldots + x_{n-1}u_{n-1} + x_nu_n) = x_1\varphi(u_1) + \ldots + x_{n-1}\varphi(u_{n-1}) + x_n\varphi(u_n),$$

което доказва твърдението.

□

Твърдение 3. *Ако $\varphi : U \to V$ е линейно изображение на линейни пространства над поле F, то:*
(i) $\varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}_U) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ за нулевите вектори $\overrightarrow{\mathcal{O}}_U$ на U и $\overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ на V;
(ii) $\varphi(-u) = -\varphi(u)$ за произволен вектор $u \in U$;
(iii) ако $u_1, \ldots, u_n$ са линейно зависими, то $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)$ са линейно зависими.

Доказателство. (i) За произволен вектор $u \in U$ и $0 \in F$ е изпълнено

$$\varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}_U) = \varphi(0u) = 0\varphi(u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V.$$

(ii) За произволен вектор $u \in U$ и $1 \in F$ е в сила

$$\varphi(-u) = \varphi((-1)u) = (-1)\varphi(u) = -\varphi(u),$$

съгласно $-u = (-1)u$ и $(-1)\varphi(u) = -\varphi(u)$.

(iii)Нека $\lambda_1u_1 + \ldots + \lambda_iu_i + \ldots + \lambda_nu_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}_U$ за $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ с поне едно $\lambda_i \neq 0$. Тогава

$$\overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}_U) = \varphi\left(\lambda_1u_1 + \ldots + \lambda_iu_i + \ldots + \lambda_nu_n\right) = \lambda_1\varphi(u_1)+\ldots+\lambda_i\varphi(u_i)+\ldots+\lambda_n\varphi(u_n)$$

с поне едно $\lambda_i \neq 0$, така че $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)$ са линейно зависими. Още повече, ако $u_1, \ldots, u_n$ изпълняват линейна зависимост $\lambda_1u_1 + \ldots + \lambda_iu_i + \ldots + \lambda_nu_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}_U$ с коефициенти $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$, то и $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)$ изпълняват линейна зависимост със същите коефициенти.

□

Твърдение 4. (Еднозначно задаване на линейно изображение чрез образите на базис:) *Нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на линейно пространство U, а $v_1, \dots, v_n$ са произволни вектори от линейно пространство V. Тогава съществува единствено линейно изображение $\varphi : U \to V$ с $\varphi(e_i) = v_i$ за всички $1 \leq i \leq n$.*

Доказателство. За съществуването на φ достатъчно да проверим, че

$$\varphi : U \longrightarrow V,$$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

е линейно изображение с $\varphi(e_i) = v_i$ за всички $1 \leq i \leq n$. Преди всичко, φ е коректно определено, защото всеки вектор $u \in U$ има еднозначно определени координати $x_1, \dots, x_n$ спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$, които определят еднозначно образа $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i$ на $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ под действие на φ. Освен това,

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)v_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i v_i + \sum_{i=1}^{n} y_i v_i = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) + \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right)$$

и

$$\varphi\left(\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i)v_i = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \lambda\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$$

доказват, че изображението φ е линейно. Накрая,

$$\varphi(e_i) = \varphi(0.e_1 + \ldots + 0.e_{i-1} + 1.e_i + 0.e_{i+1} + \ldots + 0.e_n) =$$
$$= 0.v_1 + \ldots + 0.v_{i-1} + 1.v_i + 0.v_{i+1} + \ldots + 0.v_n = v_i \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq n.$$

За единствеността на φ да забележим, че ако $\psi : U \to V$ е линейно изображение с $\psi(e_i) = v_i$ за всички $1 \leq i \leq n$, то

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \psi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \quad \text{за всички за всички} \quad x_i \in F$$

и $\psi \equiv \varphi$ съвпадат.

□

Определение 5. *Взаимно еднозначните линейни изображения $\varphi : U \to V$ се наричат линейни изоморфизми.*

Линейни пространства U и V са изоморфни, ако съществува линеен изоморфизъм $\varphi : U \to V$.

Твърдение 6. *Ако $\varphi : U \to V$ е изоморфизъм на линейни пространства, то обратното изображение $\varphi^{-1} : V \to U$ е линейно, а оттам и линеен изоморфизъм.*

Доказателство. Достатъчно е да проверим, че

$$\varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi^{-1}(v_i) \tag{1}$$

за произволни $v_i \in V$ и $x_i \in F$. За целта използваме взаимната еднозначност на $\varphi : U \to V$, съгласно която за произволен вектор $v_i \in V$ съществува еднозначно определен вектор $u_i = \varphi^{-1}(v_i) \in U$ с $\varphi(u_i) = v_i$ и доказваме, че

$$\varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(u_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \tag{2}$$

за произволни $u_i \in U$ и $x_i \in F$. От линейността на φ имаме

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(u_i).$$

Действаме с φ^{-1} върху горното равенство, за да получим

$$\sum_{i=1}^{n} x_i u_i = \varphi^{-1}\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(u_i)\right)$$

и да докажем твърдението.

□

Твърдение 7. *Крайномерни пространства U и V са изоморфни тогава и само тогава, когато имат равни размерности* $\dim(U) = \dim(V)$.

Доказателство. Нека $\varphi : U \to V$ е линеен изоморфизъм на крайномерни пространства и $e_1, \ldots, e_n$ е базис на U. Достатъчно е да проверим, че $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ е базис на V, за да получим, че $\dim(V) = n = \dim(U)$. Всеки вектор на V е от вида $v = \varphi(u)$ за някакъв вектор $u \in U$. Ако $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, то

$$v = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) \in l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)).$$

Това доказва, че $l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = V$. Ако допуснем, че $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ са линейно зависими, то след прилагане на линейния изоморфизъм $\varphi^{-1} : V \to U$ получаваме линейно зависими вектори $e_1, \ldots, e_n$. Това противоречи на линейната независимост на базисните вектори $e_1, \ldots, e_n$ на U и доказва линейната независимост на $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$. С това доказахме, че $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ е базис на V и $\dim U = \dim V$.

Нека $\dim(U) = \dim(V) = n$, $e_1, \ldots, e_n$ е базис на U и $f_1, \ldots, f_n$ е базис на V. Разглеждаме еднозначно определеното линейно изображение

$$\varphi : U \longrightarrow V, \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

с $\varphi(e_i) = f_i$ за всички $1 \leq i \leq n$ и еднозначно определеното линейно изображение

$$\psi : V \longrightarrow U, \quad \psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

с $\psi(f_i) = e_i$ за всички $1 \leq i \leq n$. От

$$\psi\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{и}$$

$$\varphi\psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

следва, че $\psi\varphi = \mathrm{Id}_U$ и $\varphi\psi = \mathrm{Id}_V$, така че $\psi = \varphi^{-1}$ и $\varphi : U \to V$ е линеен изоморфизъм.

$\square$

Съгласно Твърдение 7, за всяко поле F и всяко естествено число n съществува единствено с точност до линеен изоморфизъм линейно пространство над F с размерност n. Пространството F^n на наредените n-торки с елементи от F е модел за n-мерно линейно пространство над F. За произволно n-мерно пространство V над F и произволен базис $v_1, \dots, v_n$ на V, изображението

$$\varphi : V \longrightarrow F^n, \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = (x_1, \dots, x_n),$$

съпоставящо на вектор $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ наредената n-торка $(x_1, \dots, x_n)$ от координатите на v спрямо базиса $v_1, \dots, v_n$ е линеен изоморфизъм. Това е линейният изоморфизъм $\varphi : V \to F^n$ с

$$\varphi(v_i) = e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i}), \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

за базиса $v_1, \dots, v_n$ на V и стандартния базис $e_1, \dots, e_n$ на F^n.