Упражнение 20-21

Атанас Груев

06.12.2019 и 10.12.2019

1 Кратка теория

1.1 Изпъкналост и вдлъбнатост на функции. Инфлексни точки

Разглеждаме функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Казваме, че f и **<u>изпъкнала</u>**, ако графиката на функцията се намира под секущата през точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Формално:

$$\forall\, t \in [0, 1] : f(ta + (1-t)\,b) \leq tf(a) + (1-t)\,f(b)$$

Казваме, че f е **<u>вдлъбната</u>**, ако графиката на функцията се намира над секущата през точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Формално:

$$\forall\, t \in [0, 1] : f(ta + (1-t)\,b) \geq tf(a) + (1-t)\,f(b)$$

Нека $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in D$. Казваме, че x_0 е **<u>инфлексна точка за f</u>**, ако:

$$\begin{aligned}\exists\, \delta > 0 : \quad & f(x) \text{ е изпъкнала / вдлъбната } \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ и} \\ & f(x) \text{ е вдлъбната / изпъкнала } \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)\end{aligned}$$

1.2 Връзка между функцията и нейните производни

Твърдение: Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогава:

а) Ако f е 2 пъти диференцируема в $[a, b]$ и $f''(x) \geq 0$, то $f'(x)$ е растяща и $f(x)$ е изпъкнала.

б) Ако f е 2 пъти диференцируема в $[a, b]$ и $f''(x) \leq 0$, то $f'(x)$ е намаляваща и $f(x)$ е вдлъбната.

Теорема: Нека $f : [a,] \to \mathbb{R}$ е 2 пъти диференцируема и $x_0 \in [a, b]$. Ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, то f има локален екстремум в x_0. При това:

- Ако $f''(x_0) > 0$, то x_0 е точка на строг локален минимум.
- Ако $f''(x_0) < 0$, то x_0 е точка на строг локален максимум.

Теорема: Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е n-пъти диференцируема в т.x_0. Налице са условията, че $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x) \neq 0$. Тогава:

- Ако n е четно, то x_0 е точка на локален екстремум, като:
  - Ако $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 е точка на строг локален минимум.
  - Ако $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 е точка на строг локален максимум.
- Ако n е нечетно, то x_0 не е точка на локален екстремум.[1]

1.3 Скициране на графики на функции

Обикновено следваме няколко стъпки при скицирането на графики на функции:

1. Определяме $Dom(f)$.
2. Проверяваме за четност, нечетност и периодичност.
3. Проверяваме за вертикални, хоризонтални и наклонени асимптоти.
4. Разглеждаме $f'(x)$, определяме знаците на първата производна и критичните точки. Определяме интервалите на монотонност за $f(x)$.
5. Разглеждаме $f''(x)$, определяме знаците на втората производна и инфлексните точки. Определяме интервалите на изпъкналост за $f(x)$.
6. Нанасяме информацията при скициране на графиката.

2 Задачи

По време на редовните упражнения разглеждахме задачи от Ръководството на Любенова, Недевски и др (Параграф 13 - "Графики на функции"). Тук ще решим няколко примера от Сборника на Кудрявцев - Глава 4 ("Применение производных к исследованию функций"), Параграф 21 ("Построение графиков").

- Кудрявцев - задача 5, подточка 4) - да се построи графиката на функцията:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}$$

Следваме предложения план. Преди всичко определяме къде $f(x)$ е дефинирана. Лесно се вижда, че $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Това ни подсказва, че в точката $x = 1$ ще проверим за вертикална асимптота. Да проверим за четност/нечетност:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 2(-x)^2}{(-x-1)^2} = \frac{-x^3 + 2x^2}{(x+1)^2} \neq f(x)$$

$$-f(x) = -\frac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{-x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} \neq f(-x)$$

Виждаме, че f не е нито четна, нито нечетна. Нека изследваме асимпотите:

[1] Разгледайте също `http://fmi.wikidot.com/anal123`.

1. Вертикална асимптота:

$$\lim_{x\to 1^+} f\left(x\right) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3+2x^2}{\left(x-1\right)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2\left(x+2\right)}{\left(x-1\right)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f\left(x\right) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3+2x^2}{\left(x-1\right)^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2\left(x+2\right)}{\left(x-1\right)^2} = +\infty$$

Следователно в точката $x = 1$ има вертикална асимптота.

2. Наклонена асимпота:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f\left(x\right)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2x^2}{x\left(x-1\right)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2x^2}{x^3-2x^2+x} = 1$$

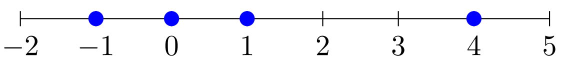
$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f\left(x\right)-x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3+2x^2}{\left(x-1\right)^2} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{\cancel{x^3}+2x^2-\cancel{x^3}+2x^2-x}{x^2-2x+1}\right] = 4$$

Налице е наклонена асимптота $y = x + 4$.

Продължаваме с първата производна:

$$f'\left(x\right) = \frac{\left(3x^2+4x\right)\left(x-1\right)^2 - \left(x^3+2x^2\right)2\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)^4} = \frac{\left(3x^2+4x\right)\left(x-1\right)-2x^3-4x^2}{\left(x-1\right)^3} =$$

$$= \frac{3x^4+4x^2-3x^2-4x-2x^3-4x^2}{\left(x-1\right)^3} = \frac{x\left(x-4\right)\left(x+1\right)}{\left(x-1\right)^3} \stackrel{?}{=} 0$$



Интересните точки са отбелязани по-горе. Непосредствено се проверява, че:

- $f'\left(x\right) > 0\ \forall x \in (4, +\infty)$, т.е. функцията е растяща в интервала $(4, +\infty)$.
- $f'\left(x\right) < 0\ \forall x \in (1, 4)$, т.е. функцията е намаляваща в интервала $(1, 4)$.
- $f'\left(x\right) > 0\ \forall x \in (0, 1)$, т.е. функцията е растяща в интервала $(0, 1)$.
- $f'\left(x\right) < 0\ \forall x \in (-1, 0)$, т.е. функцията е намаляваща в интервала $(-1, 0)$.
- $f'\left(x\right) > 0\ \forall x \in (-\infty, -1)$, т.е. функцията е растяща в интервала $(-\infty, -1)$.

Следва да пресметнем функционалните стойности в точките на локален сктремум:

Точката $x = 4$ е точка на локален минимум и $f\left(4\right) = \frac{32}{3}$.

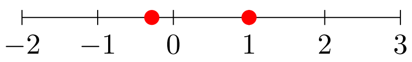
Точката $x = 0$ е точка на локален минимум и $f\left(0\right) = 0$.

Точката $x = -1$ е точка на локален максимум и $f\left(-1\right) = \frac{1}{4}$.

Разглеждаме втората производна:

$$f''(x)=\left[\frac{x(x-4)(x+1)}{(x-1)^3}\right]'=\frac{\left(3x^2-6x-4\right)(x-1)^3-3(x-1)^2\left(x^3-3x^2-4x\right)}{(x-1)^6}=$$

$$=\frac{\left(3x^2-6x-4\right)(x-1)-3\left(x^3-3x^2-4x\right)}{(x-1)^4}=\cdots=\frac{14x+4}{(x-1)^4}$$

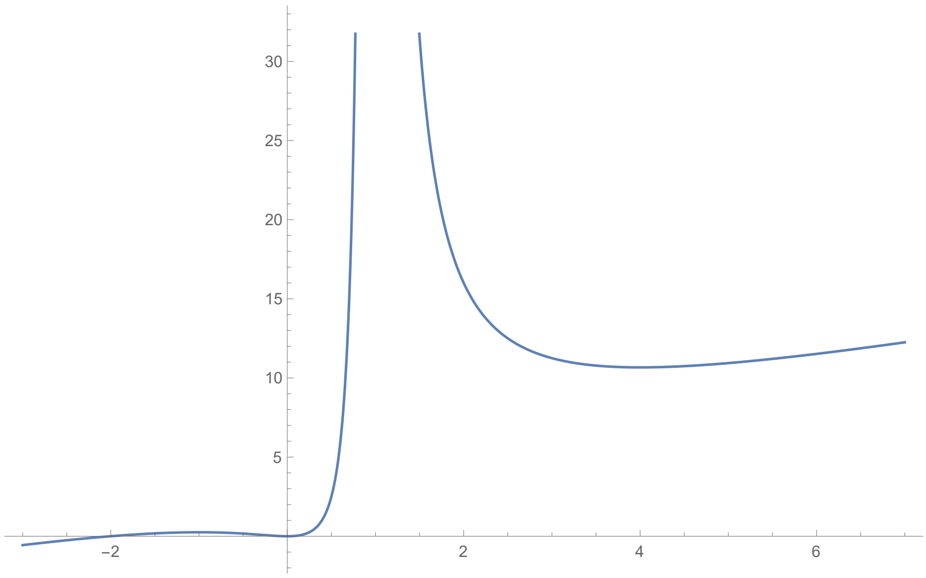


Съсредоточаваме се върху точките $x=-\frac{2}{7}$ и $x=1$. Непосредствено се установява, че:

- $f''(x)>0\ \forall x\in\left(-\frac{2}{7},+\infty\right)$, т.е. функцията е изпъкнала в интервала $\left(-\frac{2}{7},+\infty\right)$.
- $f''(x)<0\ \forall x\in\left(-\infty,-\frac{2}{7}\right)$, т.е. функцията е вдлъбната в интервала $\left(-\infty,-\frac{2}{7}\right)$.

Точка на инфлексия е $x=-\frac{2}{7}$ и функционалната стойност в тази точка е $f\left(-\frac{2}{7}\right)=\frac{16}{189}$.

Накрая остава да изчертаем графика на функцията. Тя има следния вид:



Фигура 1: Графика на $f(x)$

- Задача - да се построи графиката на функцията:

$$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2-2}}$$

Нека първо определим къде е дефинирана $f(x)$. Знаем, че подкоренният израз трябва да е положителен - това ни дава:

$$Dom(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{x:x^2-2\le 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{x:|x|\le\sqrt{2}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:|x|>\sqrt{2}\right\}$$

Сега проверяваме за четност/нечетност.

$$f(-x) = \frac{(-x)}{2} + \frac{\operatorname{arctg}(-x)}{\sqrt{(-x)^2 - 2}} = -\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2-2}} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2-2}}\right) = -f(x)$$

Това е достатъчно по отношение на втора точка от плана - виждаме, че функцията е нечетна, т.е. симетрична относно координатното начало. Изследваме асимптотите:

1. Вертикална асимптота:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{2}^+} \left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x\to-\sqrt{2}^-} \left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}}\right) = -\infty$$

   В точките $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$ следва да проверим само за дясна и лява граница съответно поради естеството на дефиниционната област. Получаваме, че в известен смисъл имаме две вертикални асимптоти в тези точки, като в "правоъгълника", който те заграждат, функцията не е дефинирана.

2. Хоризонтална асимптота:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2-2}}\right) = +\infty \left(\text{Съобразете, че } \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2-2}}\right) = -\infty \left(\text{Тук } \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}\right)$$

   Няма хоризонтални асимптоти.

3. Наклонена асимпота:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x^2-2}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2-2}}\right) - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2-2}} = 0$$

   Имаме наклонена асимптота $y = \frac{x}{2}$.

Продължаваме с първата производна:

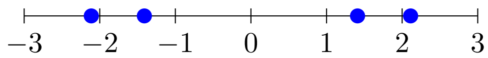
$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\sqrt{x^2-2} - \operatorname{arctg} x \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}\right)}{x^2-2} = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{x^2-2}{1+x^2} - x \operatorname{arctg} x\right)}{\left(\sqrt{x^2-2}\right)^3} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{x^2 - 2 - \left(x + x^3\right)\operatorname{arctg} x}{\left(1+x^2\right)\left(\sqrt{x^2-2}\right)^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{x^2-2}} - \frac{x \operatorname{arctg} x}{\left(\sqrt{x^2-2}\right)^3} \stackrel{?}{=} 0$$

Окончателно имаме:

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)(x^2-2)\sqrt{x^2-2} + 2(x^2-2) - 2x(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{2(1+x^2)\left(\sqrt{x^2-2}\right)^3}$$

Определянето на точните стойности на x, където $f'(x)$ се нулира, е трудна задача. С помощта на Wolfram Alpha например можем да видим, че това са приблизително точките $x \sim \pm 2.11281\ldots$. Означаваме $x_1 = -2.11281\ldots$ и $x_2 = 2.11281\ldots$.



Проверява, че:

- $f'(x) > 0\ \forall x \in (x_2, +\infty)$, т.е. функцията е растяща в интервала $(x_2, +\infty)$.
- $f'(x) < 0\ \forall x \in \left(\sqrt{2}, x_2\right)$, т.е. функцията е намаляваща в интервала $\left(\sqrt{2}, x_2\right)$.
- $f'(x) < 0\ \forall x \in \left(x_1, -\sqrt{2}\right)$, т.е. функцията е намаляваща в интервала $\left(x_1, -\sqrt{2}\right)$.
- $f'(x) > 0\ \forall x \in (-\infty, x_1)$, т.е. функцията е растяща в интервала $(-\infty, x_1)$.

Пресмятаме функционалните стойности в точките на локален сктремум:

Точката $x = x_1$ е точка на локален максимум и $f(x_1) \sim -1.7754796\ldots$.

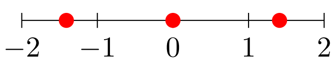
Точката $x = x_2$ е точка на локален мимимум и $f(x_2) \sim 1.7754796\ldots$.

Разглеждаме втората производна:

$$f''(x) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x^2-2}} - \frac{x \operatorname{arctg} x}{\left(\sqrt{x^2-2}\right)^3}\right]' = \cdots$$

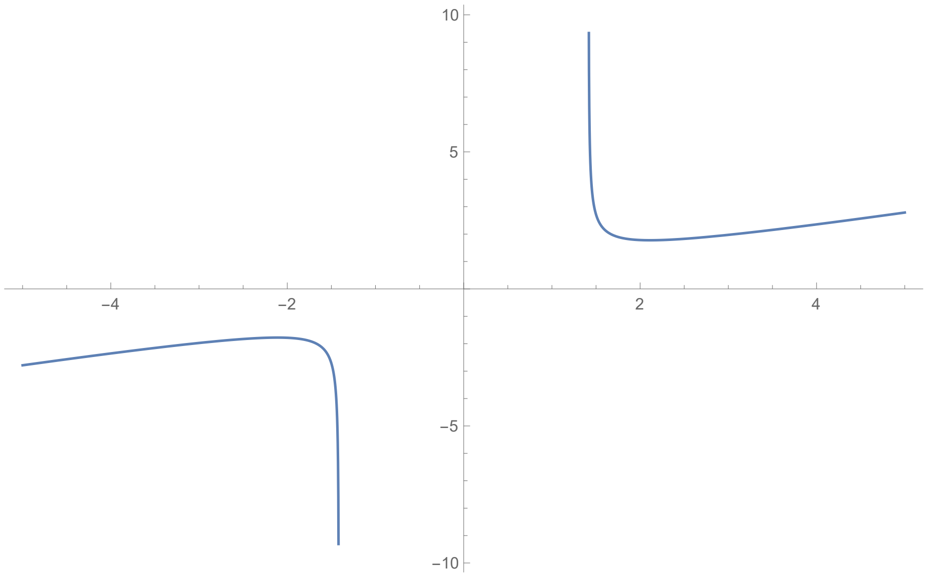
$$\cdots = \frac{2\left(-2x^5 + 5x^3 + \left(x^2+1\right)^3 \operatorname{arctg} x - 2x\right)}{(x^2-2)^{\frac{5}{2}}(x^2+1)^2}$$

Възползваме се от възможностите на Wolfram Alpha и установяваме, че $f''(x) = 0$ за $x = 0$. По-точно, това е единственото реално решение (съществуват и комплексни такива). Отчитаме обаче, че функцията не е дефинирана в интервала $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.



Лесно можем да се убедим, че:

- $f''(x) > 0\ \forall x \in \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$, т.е. функцията е изпъкнала в интервала $\left(\sqrt{2}, +\infty\right)$.
- $f''(x) < 0\ \forall x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$, т.е. функцията е вдлъбната в интервала $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$.



Фигура 2: Графика на $f(x)$

Разполагаме с цялата необходима информация, за да скицираме графика на $f(x)$.

- Кудрявцев - задача 14, подточка 3) - да се построи графиката на функцията:

$$f(x) = (x-2)\, e^{-\frac{1}{x}}$$

Определяме дефиниционната област на $f(x)$. Не е трудно да се види, че $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Възможно ли е да присвоим такава стойност на $f(0)$, за да е налице непрекъснатост в тази точка? Да проверим за четност/нечетност:

$$f(-x) = ((-x)-2)\, e^{-\frac{1}{(-x)}} = -(x+2)\, e^{\frac{1}{x}} \neq f(x)$$

$$-f(x) = -(x-2)\, e^{-\frac{1}{x}} \neq f(-x)$$

Виждаме, че f не е нито четна, нито нечетна. Изследваме асимптотите:

1. Вертикална асимптота:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-2}{e^{\frac{1}{x}}} = 0 \left(\text{Имаме предвид, че } \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty\right)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-2}{e^{\frac{1}{x}}} = 0 \left(\text{Съобразяваме, че } \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0^+\right)$$

Не можем да твърдим, че в $x = 0$ имаме вертикална асимптота.

2. Хоризонтална асимптота

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (x-2)\, e^{-\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} (x-2)(1+o(1)) = \lim_{x\to\pm\infty} (x+o(x)) = \pm\infty$$

Нямаме хоризонтална асимптота.

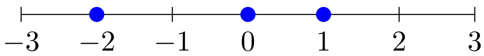
3. Наклонена асимптота:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{x}{2}\right)(1+o(1))=\lim_{x\to\pm\infty}(1+o(1))=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[(x-2)\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x\right]=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\cancel{x}-1-2+\frac{2}{x}+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-\cancel{x}\right]=-3$$

Продължаваме с първата производна:

$$f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}+(x-2)\,e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{x^2e^{-\frac{1}{x}}+(x-2)\,e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}=e^{-\frac{1}{x}}\left[\frac{(x+2)(x-1)}{x^2}\right]$$



Проверяваме, че:

- $f'(x)>0\ \forall x\in(1,+\infty)$, т.е. функцията е растяща в интервала $(1,+\infty)$.
- $f'(x)<0\ \forall x\in(-2,0)\cup(0,1)$, т.е. функцията е намаляваща в обединението на интервалите $(-2,0)\cup(0,1)$.
- $f'(x)>0\ \forall x\in(-\infty,-2)$, т.е. функцията е растяща в интервала $(-\infty,-2)$.

Следва да пресметнем функционалните стойности в точките на локален сктремум:

Точката $x=1$ е точка на локален минимум и $f(1)=\frac{1}{e}$.

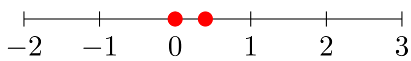
Точката $x=-2$ е точка на локален максимум и $f(-2)=-4\sqrt{e}$.

Разглеждаме втората производна:

$$f''(x)=\left[e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2+x-2}{x^2}\right)\right]'=$$

$$e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right)\left[\frac{x^2+x-2}{x^2}\right]+e^{-\frac{1}{x}}\left[\frac{(2x+1)\,x^2-\left(x^2+x-2\right)2x}{x^4}\right]=$$

$$=e^{-\frac{1}{x}}\left[\frac{x^2+x-2}{x^4}+\frac{2x^3+x^2-2x^3-2x^2+4x}{x^4}\right]=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{5x-2}{x^4}\right)$$

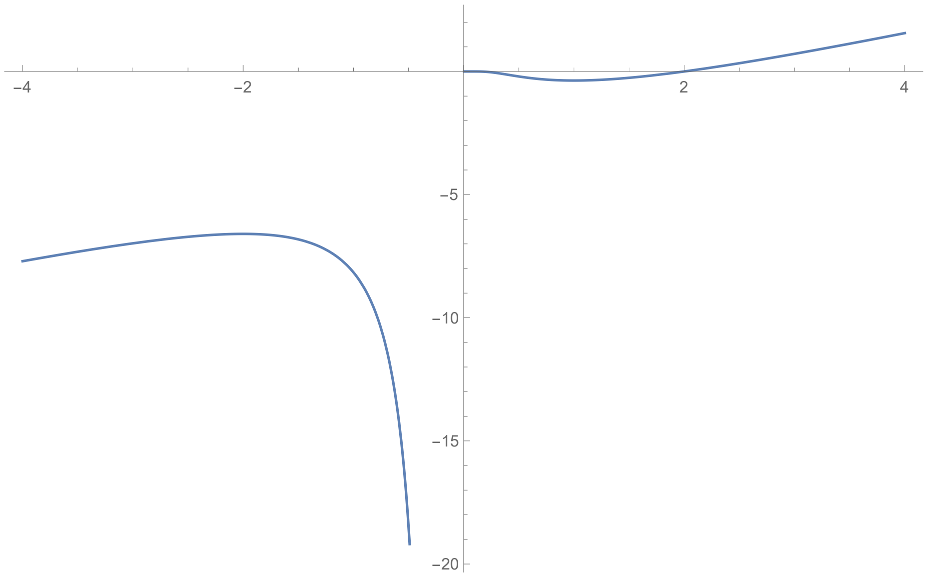


Съсредоточаваме се върху точката $x=\frac{2}{5}$. Установяваме, че:

- $f''(x) > 0 \;\forall x \in \left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$, т.е. функцията е изпъкнала в интервала $\left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$.
- $f''(x) < 0 \;\forall x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{2}{5}\right)$, т.е. функцията е вдлъбната в обединението на интервалите $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{2}{5}\right)$.

Точка на инфлексия е $x = \frac{2}{5}$. Пресмятаме $f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{5\sqrt{e^5}}$.

Графиката на функцията има следния вид:



Фигура 3: Графика на $f(x)$