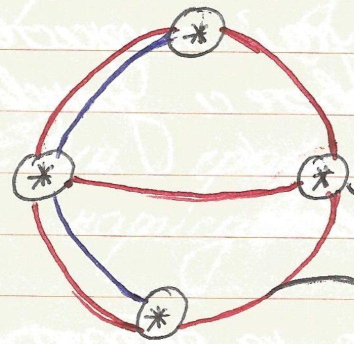
NO DATE

# Теория на графите.

Рисунка на мулти граф., защото на някой върхове има повече от 1 ребро.




Забележка:

рисунка на граф $\not\leftrightarrow$ граф.
(снимка на човек $\not\leftrightarrow$ човек)

Когато кажем **граф**, ако няма други уточнения, разбираме:

* без ориентация - ако $(v_i, v_j) \in E$, то $(v_j, v_i) \in E$
* без примки. - $(v_i, v_i)$
* не е мулти. - когато няма повече от 1 ребро м/у 2 върха.

-> антирефлекс. и симетр.

- Граф (краен) - наредена 2ка от 2 множества:

Първото (V) - множество от върхове (node, vertex)
Второто (E) - множество от. ребра. (edges)

NO DATE

Двете множества са крайни,
а графа се записва.

$G = (V, E)$

Забележка:
В общият случай множеството на върховете се записва:

$V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$n$ - брой на върховете.

А множеството на ребрата се записва:

$E = \{(v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$

$E \subseteq V_2$.

$V_2$ - множество от 2 елементни подмножества на върхове, т.е.

$V_2 = \{ A \subseteq V \mid |A| = 2 \}$

Пример:

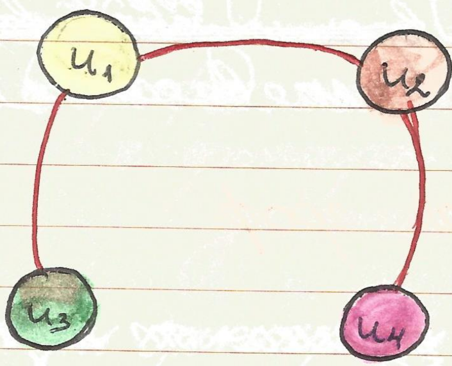
$V = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, то

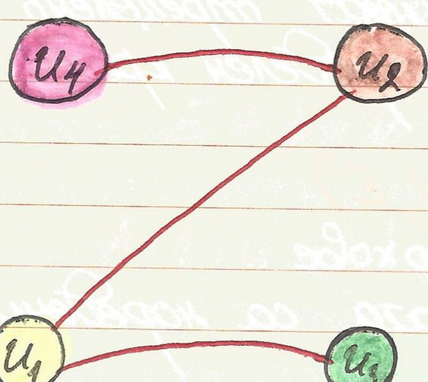
$E = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_1, u_4)\}$

Забележка:

От $E$ не се разбира дали графа е ~~тупли~~ ориентиран или не, защото елементите на $E$ са ненаредени, но е прието да се записват с ()

Един граф може да се нарисува по много начини.



NO DATE

Върховете не се повтарят (т.е. няма примки), но ако искате да се повтарят

$E \subseteq V_2 \cup V$

примки - ребра, които свързват даден връх $(v_i)$ със себе си него

$(v_i, v_i) \in E$

ребро - линия свързваща 2 различни ~~започваща от един~~ върха. ~~връх и завършва в друг, или в себе си него.~~

2. Ориентиран граф.

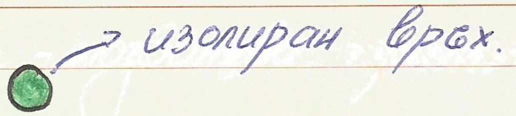
При него за разлика от неориентирания граф, ребрата имат ориентация, т.е. имат определено начало и определен край.

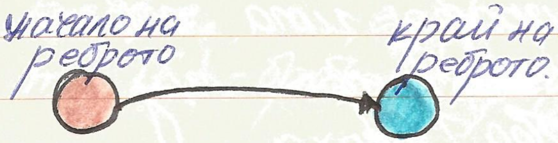
$G = (V, E)$

$V$: множ. от върхове

$E \subseteq V \times V$ - ребрата са наредени 2-ки.

Крайният ориентиран граф е релация на декартовото произв. $V \times V$.




Един връх е изолиран, когато няма ~~друго~~ свързващо ребро с кой да е друг връх.

Забележка:

Графа или е ориентиран или не е ориентиран, няма възможност за стесен граф.

При ориентирания граф се добавят примки, ако искате да няма примки:

$$E \subseteq V \times V \setminus A$$ , където

$$A = \{(u,u) \mid u \in V\}.$$

NO DATE

# 3. Мултиграф

При мултиграфа има повече от едно ребро м/у два върха.

Мултиграфите биват ориентирани и неориентирани.

При мултиграфите реброто не може да се идентифицира с краищата си, поради което възниква необходимост от свързваща функция ($f_G$), която показва за дадено ребро, кои върхове свързва.

## 3.1. Ориентиран мултиграф

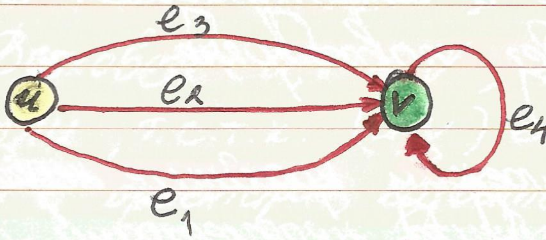
Зададен е ориентиран мултиграф, когато V - крайно множество от върхове, E - крайно множество от ребра и функция $f_G : E \to V \times V$, съпоставяща на всяко ребро наредена двойка от върхове. Означава се:

$G(V, E, f_G)$

$f_G$ - позволява примки.

$E = \{e_1, \dots, e_m\}$

$m = |E|$ - броя на ребрата.




$f_G(e_1) = (u, v)$ $\quad$ $f_G(e_3) = (u, v)$

$f_G(e_2) = (u, v)$ $\quad$ $f_G(e_4) = (v, v)$

Забележка:

Името на реброто се записва до линията, която определя.

## 3.2. Неориентирани мултиграфи.

Крайният неориентиран граф $G=(V, E)$ можем да превърнем в краен ориентиран мултиграф, ако позволим повече от едно неориентирано ребро да свързва 2 върха. Означава се:

$G = (V, E, f_G)$.

$f_G : E \to V_2$ без примки $\quad$ $f_G : E \to V_2 \cup V$ с примки.

NO DATE

## 3.3. Връзка между графите.

Връзката между крайни ориентирани мултиграфи и крайни ориентирани графи е като между конфигурациите с наредба и повторяне и конфигурациите с наредба без повторяне.

Връзката между крайните неориентирани графи и крайните неориентирани мултиграфи е като между конфигурациите без наредба и без повторяне (множества) и конфигурациите без наредба с повторяне (мултимножества)

Ако $G=(V,E)$ е краен ориентиран граф, такъв че релацията $E \subseteq V \times V$ е антирефлексивна и симетрична, то $G=(V,E)$ е краен неориентиран граф.

# 4. Дефиниции за ориентирани и неориентирани графи.

## 4.1. Съседни върхове.

### 4.1.1. Не-мулти графи.

Върховете $u, v \in V$, и $u$ и $v$ са съседни, т.с.т.к. $(u, v) \in E$. Ако графът е ориентиран, казваме, че $u$ е баща на $v$, а $v$ е син на $u$.

### 4.1.2. Мулти графи.

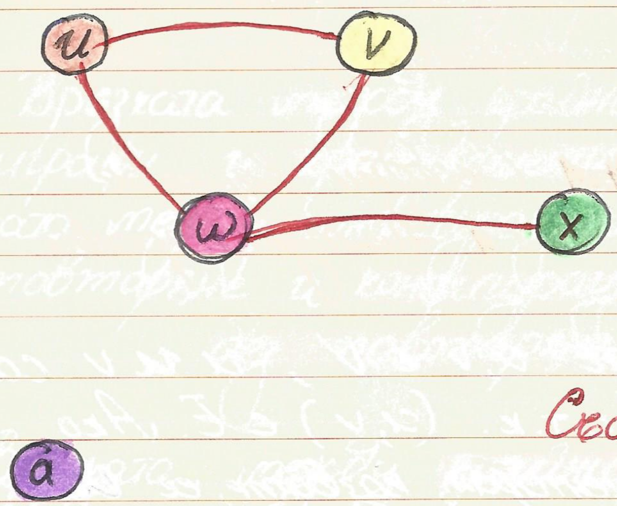
Върховете $u, v \in V$, и $u$ и $v$ са съседни, т.с.т.к. $\exists e_i : f_G(e_i) = (u, v)$

## 4.2. Степени на върхове при неориентирани графи. ($d(v_i)$)

Степен на връх се бележи с $d(v_i)$ или $deg(v_i)$, където $v_i \in V$.

Степента на връх в граф, без примки и който не е мулти е равна на броя на съседите на дадения връх.

NO DATE




Съседни върхове:

u – v

u – w

v – w

w – x

Степени на върхове:

$d(u) = 2.$

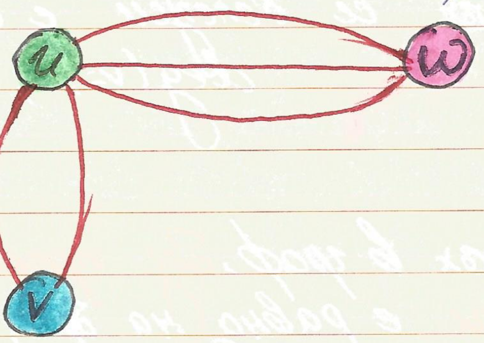
$d(w) = 3.$

$d(v) = 2$

$d(x) = 1.$

$d(a) = 0.$

Степента на връх в мултиграф без примки е равна на броя на ребрата, чийто един край е дадения връх.




Степени на върхове:

$d(u) = 5$

$d(v) = 2.$

$d(w) = 3.$

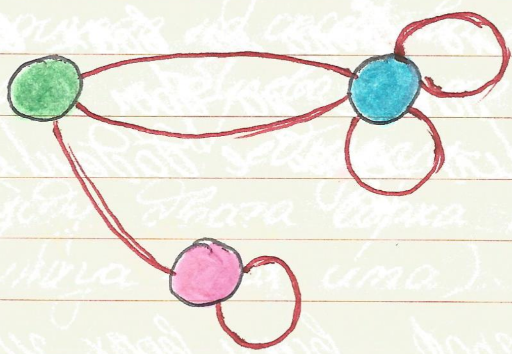
Ако в дадения граф **има примки**, всяка примка се брои 2 пъти към степента на съотв. връх.

Забележка (Разяснение):

Не доизграден граф.

– начало или съотв. край на ребро (резечки)

Изграден от горния граф.



Забележка:

Ако степента на един връх е нула то той е изолиран.

Деф. Краен неориентиран граф, където всички върхове имат една и съща степен (к) се нар. регулярен със степен к.

NO DATE Полустепен на входа и изхода.

4.3. ~~Степени на върхове~~ при ориентирани графи.

Полустепента на изхода на даден връх се бележи с $d^-(v_i)$, където $v_i \in V$.

Полустепента на входа на даден връх се бележи с $d^+(v_i)$, където $v_i \in V$.

Полустепента на изхода на връх в ориентиран граф е равна на броя на ребрата, чието начало е дадения връх.

Полустепента на входа на връх в ориентиран граф е равна на броя на ребрата, чиито край е дадения връх.

В ориент. граф всеки връх има както полустепен на входа, така и полустепен на изхода.

# 5. Представяне на графи.

Има два начина за представяне на графи: чрез матрица или списък на съседство.

## 5.1. Матрица на съседство.

Ако графът е неориентиран матрицата на съседство е симетрична и по главния диагонал има само нули.

Матрицата на съседство на неориентиран или ориентиран граф е булева (само с нули или единици, нула - ако между двата върха няма ребро, единица - ако има)


| | u | v | w | x |
|---|---|---|---|---|
| u | 0 | 1 | 1 | 0 |
| v | 1 | 0 | 1 | 0 |
| w | 1 | 1 | 0 | 1 |
| x | 0 | 0 | 1 | 0 |

Тъй като матр. е сим. може да се пази

само частта с червен контур, за
да се пести памет (програмиране)

Ако разглеждаме матрицата на съседство на мултиграфи (ориент. или неориент.), то тя вече няма да е булева, а ще е запълнена с естествени числа, където всяко ест. число ще посочва броя на ребрата между определени 2 върха.

($\forall v_i, v_j \in V_G$ в сила $a_{ij} = |\{e \mid e \in E, f_G(e) = (v_i, v_j)\}|$)

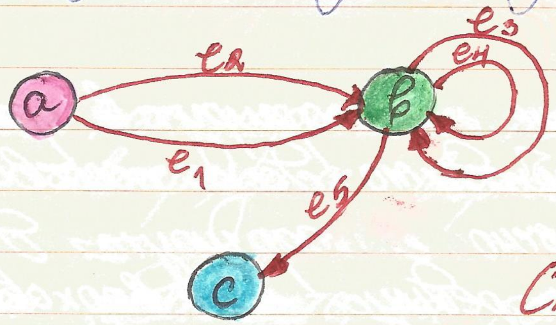
Забележка (програмиране):

Матрицата на съседство е удобна за реализиране на алгоритми с често срещан въпрос: „съседни ли са върховете $v_i$ и $v_j$"

## 5.2. Списък на съседство.

Когато графът не е мулти, ~~срещу~~ за всеки връх е зададено множество от неговите съседи, т.е. изброяват се един след друг имената на върховете, с които даден връх е съсед.

Когато е даден мултиграф, за всеки връх е зададено мултимножество:




Списък на съседство:

a: b, b.
b: c, b, b.
c:

Забележка (програмиране):

Списъкът на съседство е удобен за реализиране на алгоритми, в които основни са указания от вида:

„за всички съседи на $v_i$ …"

# 6. Маршрути и контури в ориентирани графи.

## 6.1. Маршрут.

Нека $G(V,E,f_G)$ е ориентиран мултиграф. Редицата от редуващи се върхове и ребра нав $v_{i_0}, e_{e_1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}$, в която $f_G(e_{e_j}) = (v_{i_{j-1}}, v_{i_j})$, $j=1,\dots k$ се нарича маршрут, а k се нарича дължина на маршрута.

При задаване на маршрут в ориентиран немултиграф не е необходимо да се посочват ребрата. Достатъчно е маршрутът да се зададе само с редица от върховете.

## 6.2. Контур.

Ако първият и последният връх в маршрута съвпадат, то той е контур.

Забележка:

маршрут, напомня на верига (от релации) само че при маршрута може да има примки.

# 7. Пътища и цикли в неориентирани графи.

## 7.1. Път.

Нека $G = (V, E, f_G)$ е неориентиран мултиграф. Редицата от редуващи се върхове и ребра на $G$: $(v_{i_0}, e_{e_1}, \dots, v_{i_{k-1}})$ в която $f_G(e_{e_j}) = v_{i_{j-1}}, v_{i_j})$, $j = 1, \dots, k$ и $v_{i_0} \neq v_{i_{k-1}}$ се нарича път, а $k$ наричаме дължина на пътя.

Прост път наричаме път, който няма повтарящи се върхове и ребра.

При задаването на път в неориентиран немултиграф не е необходимо да се посочват ребрата.

Забележка: Разлика м/у път и маршрут.

Когато графа е ориентиран се счита, че имаме тривиален маршрут от $v_i$ до $v_i$ (без да се минава през други върхове), а дължината на такъв маршрут е единица. Докато при неориент.

NO DATE

графи е сята, че всеки връх има тривиален път с дължина нула.

## 7.2. Цикъл.

Ако първият и последният връх в пътя съвпадат, то пътя е цикъл.

Прост цикъл: без повтаряне на върхове с изключение на първия и без повтаряне на ребра.

Най-малкият прост цикъл (без примки) е с дължина 3, защото се забранява повт. на ребра, а степента на всеки връх участващ в цикъла е поне 2.

NO DATE

# 8. Теорема за броя на маршрутите със зададена дължина в крайни ориентирани мултиграфи.

Нека $G = (V, E, f_G)$ е краен ориентиран мултиграф, а $M$ е матрицата на съседство с ел. ест. числа $M[i,j] \in N$, където $M[i,j]$ са броя на ребра с нач. връх $i$ и краен връх $j$. То тогава $M^k[i,j]$ е броят на маршрутите от $v_i$ до $v_j$ с дължина $k$.

Доказателство:

1) База $k = 1$

$M^1[i,j] = M[i,j] =$ броя на маршрутите от $v_i$ до $v_j$ с дължина 1.

Деф. Вярно.

2) Инд. предположение.

Доп, че $M^{k-1}[i,j]$ е броят на маршрутите от $v_i$ до $v_j$ с дължина $k-1$.

NO DATE

3) Индуктивна стъпка.

Разглеждаме $M^k[i,j]$.

$M^k[i,j] = \sum_{t=1}^{n} M^{k-1}[i,t] \cdot M^1[t,j]$ (~~не~~ от линейната алгебра)

(Разгл. възм. пътища от $i$ до $t$ и от $t$ до $j$ и умнож. техния брой (комбинации), но тъй като това е сума, то представлява точно $M^k[i,j]$)

Нека $T_{ij}^k$ е множеството от маршрутите от $v_i$ до $v_j$ с дължина $k$,

а $T_{ij}^{kl}$ е множеството от маршрутите от $v_i$ до $v_j$ с дължина $k$ с предпоследен връх $v_l$

Правим разбиване спрямо $v_l$. (ДС)

$T^k[i,j] = \sum_{l=1}^{n} |T_{ij}^{kl}|$

$T_{ij}^{kl} = T_{il}^{k-1} \times T_{lj}^{1}$ (спрямо допускането за $T^{kl}$, т.е. стигаме до $v_l$ и за да стигнем

NO DATE

до $v_j$, трябва да умножим с възможните начини да стигнем от $v_e$ до $v_j$)

$$|T_{ij}^{k-e}| = |T_{ie}^{k-1}| \cdot |T_{ej}^{1}| =$$

спрямо инд. предп. $\Rightarrow |T_{ij}^{ke}| = M^{k-1}[i,e] \cdot M[e,j] =$

$$= M^k[i,j]$$

Забележка:

Теорема.

Даден е неориентиран граф. Сумата от степените на всички възможни върхове ~~е равна на 2~~ е 2 пъти броя на ребрата.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

Доказателство:

Всяко ребро $(v_i, v_j)$ се брой 2 пъти: веднъж при определяне на степента на $v_i$ и втори път при определяне на степента на $v_j$.

$$\Rightarrow \sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

NO DATE

Брoят на върховете с нечетни степени е четно число, при неориент. граф.

Доказателство:

$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$

$\sum_{\substack{d(v) \text{четно} \\ v \in V}} (d(v))$ - върхове с четни степени.

$\sum_{\substack{d(v) \text{нечетно} \\ v \in V}} d(v)$ - върхове с нечетни степени.

$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{d(v) \text{четно}} d(v) + \sum_{d(v) \text{нечетно}} d(v) = 2m.$

$\Rightarrow \sum_{d(v) \text{нечет.}} d(v)$ е четно число.

$\Rightarrow$ броят на събираемите е четно число

$\Rightarrow$ твърдението е изпълнено.