Релация на частична наредба

(Partial order relation)

$R \subseteq A \times A$ е релация на частична наредба, ако е:

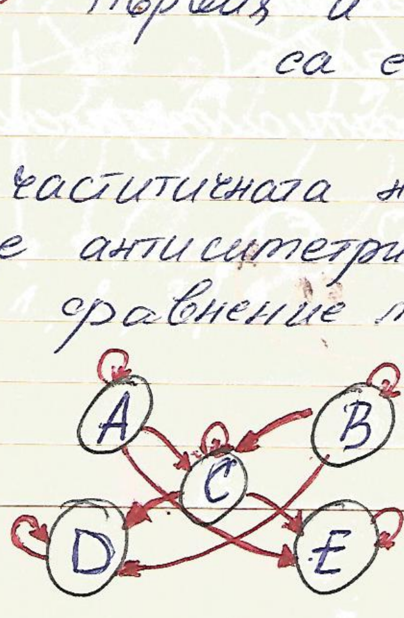
* рефлексивна,
* антисиметрична
* транзитивна.

Не съдържа контур.

Верига - множество от елементи, които са сравними.

Контур - всяка верига, в която първия и последния елемент са един и същ.

При частичната наредба, тъйкато е антисиметрична, не съществува сравнение м/у всички елементи.



A-B | не-
D-E | сравними

NO DATE

Брой стрелки при частична наредба:

n - брой елементи.

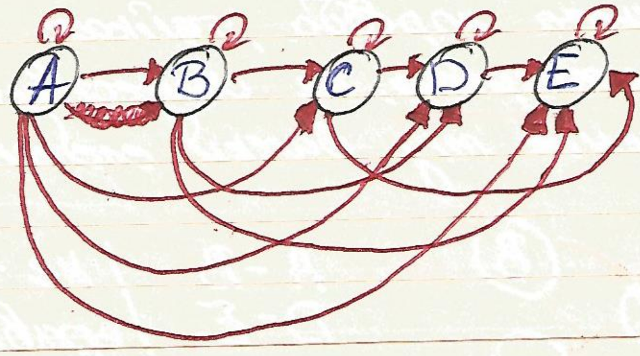
$n \leq$ стрелки $\leq \frac{n(n+1)}{2}$

Забележка:
това са стрелките между различните елементи + ~~релацията~~ рефлексивността.

Релация на пълна наредба е частичен случай на релацията на частична наредба.

$R \subseteq A \times A$ е релация на пълна наредба, ако е:

* рефлексивна
* транзитивна
* силно антисиметрична.



Брой на стрелките при пълна наредба.

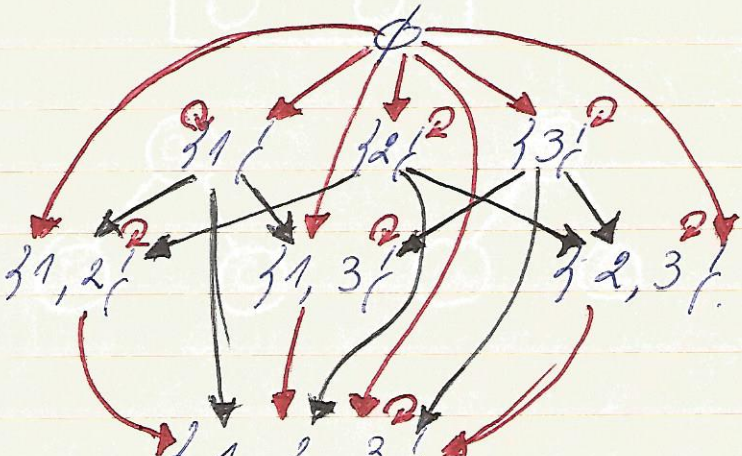
n-броя елементи

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

(никаква идея защо е така)

матрица на пълна наредба - е триъгълна матрица.

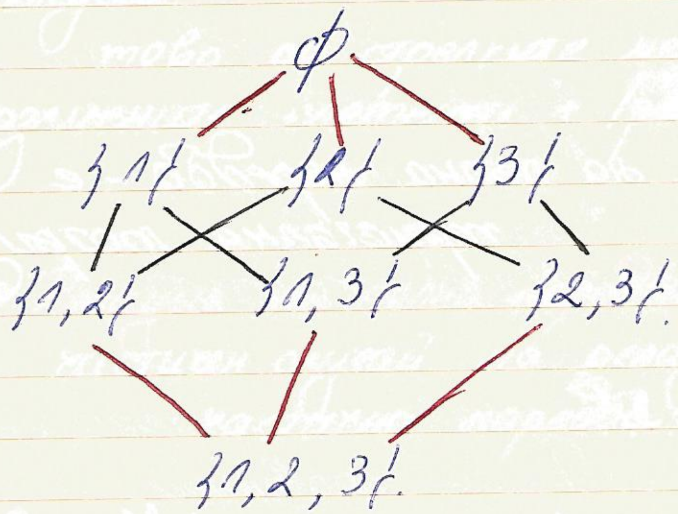
$B = \{1, 2, 3\}$.



Никога няма да има стрелки нагоре, защото няма как множество с по-малко елементи да има подмножество с повече елементи.

NO DATE

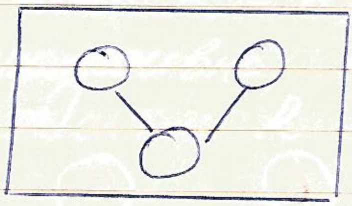
Hasse diagram. - не съдържа примки и ~~дедукцира~~ дедукцира, тези които са се получили преди това.



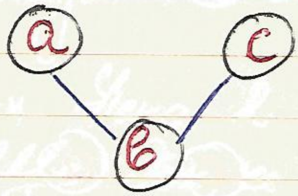
Задача.

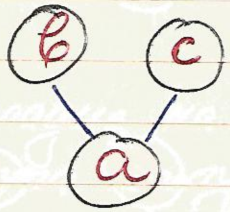
Колко релации на частична наредба има над $\{a, в, c\}$?

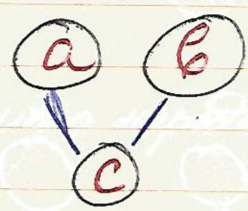
①



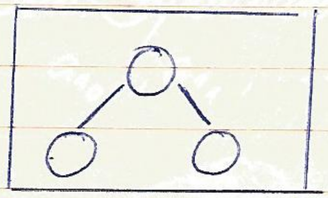
$\rightarrow 3.$



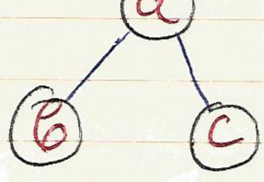


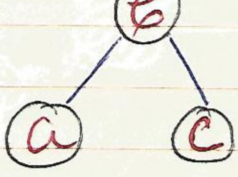


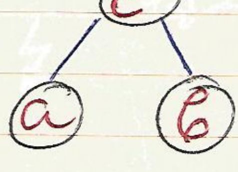
②



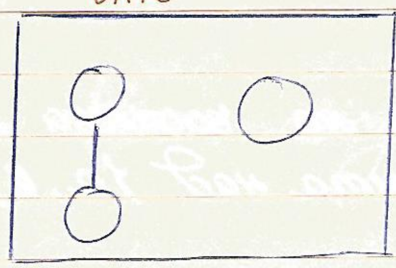
$\rightarrow 3.$

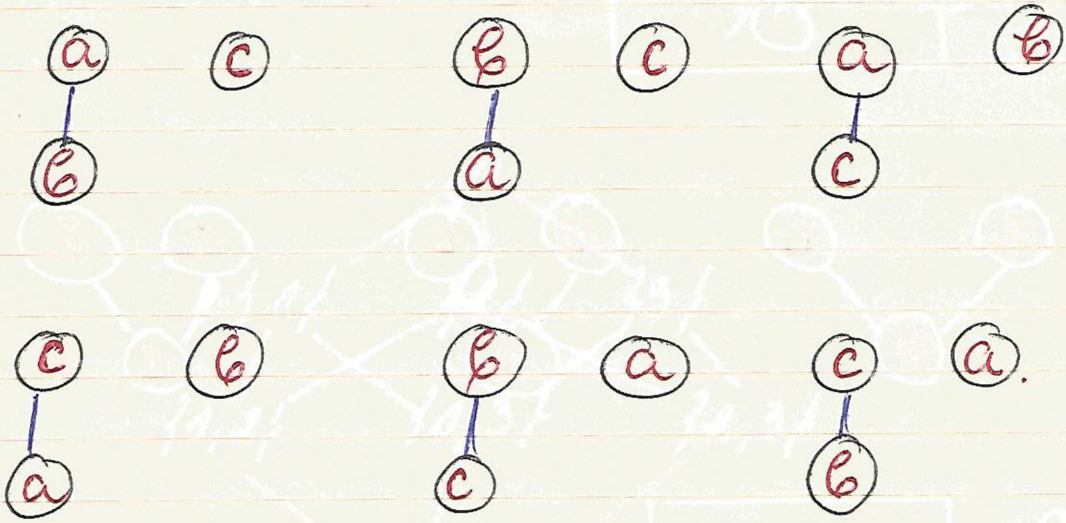


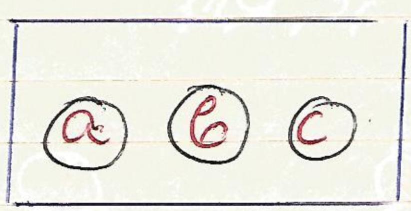




NO DATE

3  → 6



4 

→ 1

Теорема:

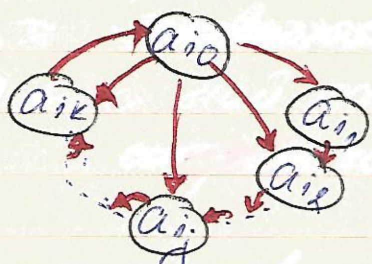
Нека $R \subseteq A \times A$ е рефлексивна и транзитивна. R е частична наредба т.с.т.к. R няма контур.

Доказателство:

I н-н. Нека R е релация на частична наредба. Ще док, че R няма контури.

Да доп. противното, че в R има контур.

$a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}, a_{i_0}$



$\Rightarrow$ не е антисиметрична ($a_{i_0} \rightleftarrows a_{i_k}$)

$\Rightarrow$ ↯

II н-н. Доп., че няма контур.

Ще докажем, че R е релация на част. нар

Доп., че R не е релация на част. нар.

$\Rightarrow$ R не е антисиметрична

$\Rightarrow \exists\, a, b \in A,\ a \neq b$, такива че $aRb \wedge bRa$

$\Rightarrow \exists$ контур ↯

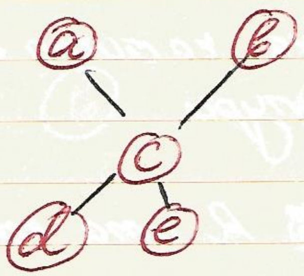
Минималност по включване.

$R \subseteq A \times A$, R е частична наредба.

$\forall a \in A$, a е минимален т.с.т.к.

$\neg \exists b \in A;\ b \neq a$ и bRa.

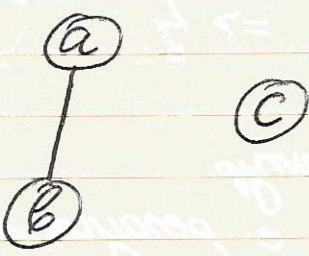
(т.е. ако не влизат стрелки в a.)



a и b - минимални.

$\forall a \in A$, a е максимален т.с.т.к.

$\neg \exists b:\ b \neq a$ и aRb.



min - a и c

max. - b и c

NO DATE

Влагане на частична наредба в пълна.

R е част. наредба, казваме, че R се влага в пълната наредба R', ако $R' \subseteq A \times A$ е релация на пълна наредба и $R \subseteq R'$

Затваряния (closure)
$R \subseteq A \times A$

$\sim n$ Рефлексивно затваряне на R е уникалната релация R', такава че $R \subseteq R'$, R' е рефлексивна, R' е минимална по включване → по главния диаг. на матр. само единици
(т.е. с най-малко промени се постига ~~отр~~ рефлекс. на R)

$\sim n^2$ Симетрично затваряне на R е уник. релация R', такава че $R \subseteq R'$, R' е симетрична, R' е минимална по включване
ако имаме 1/0 ↙ 1/1 0/0

$\sim n^3$ Транзитивно затваряне на R е уник. релация R', такава че $R \subseteq R'$, R' е ~~транз~~ транзитивна, R' е минимална по включване.

NO DATE

Допълнителни бележки: