Упражнение 10

Атанас Груев

4.11.2019

1 Кратка теория

1.1 Граници на функции

Въвеждаме основните дефиниции, свързани с понятието *граница на функция*:

Дефиниция: Нека $f : D \to \mathbb{R}$ за $D \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in D$ - точка на сгъстяване. Казваме, че функцията f има граница L при x клонящо към x_0, ако е в сила:

- За всяка околност U на L съществува околност V на x_0 такава, че за всяко $x \in V \setminus \{x_0\}$ е вярно $f(x) \in U$. Формално:

$$\forall U \text{ - околност на } L \ \exists V \text{ - околност на } x_0 \ \forall x \in V \setminus \{x_0\} : f(x) \in U$$

- (Хайне) За всяка редица от стойности на аргумента $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}$, която клони към x_0 е вярно, че $f(x_n)$ клони към L. Формално:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\} : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$$

- (Коши) За всяко $\varepsilon > 0$ можем да намерим $\delta > 0$ такова, че за всяко $x \in D \setminus \{x_0\}$, което изпълнява $|x - x_0| < \delta$, да е вярно $|f(x) - L| < \varepsilon$. Формално:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

По време на лекции се доказва, че формулировките на Коши и Хайне са еквивалентни.

1.2 Непрекъснатост

Дефиниция: Нека $f : D \to \mathbb{R}$ за $D \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in D$ - точка на сгъстяване. Казваме, че $f(x)$ е непрекъсната в точката $x_0 \in D$, ако е в сила:

- (Коши) За всяко $\varepsilon > 0$ можем да намерим $\delta > 0$ такова, че за всяко x от D, за което $|x - x_0| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Формално:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- (Хайне) За всяка редица от стойности на аргумента $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ такава, че x_n клони към x_0 е изпълнено, че $f(x_n)$ е сходяща редица с граница $f(x_0)$. Формално:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$$

От дефиницията на Хайне може да се провери, че разглежданите от нас функции sin, cos, tan, cot, експонента (e^x), логаритъм ($\ln x$), корен ($\sqrt[n]{x}$) и коя да е рационална функция са все примери за непрекъснати функции.

1.3 Свойства, Неопределености

Ще отбележим най-важните свойства на границите на функции. Прегледайте задача 1.17 от Глава 2, Параграф 1 на Ръководството - там ще намерите свойствата (и доказателства) на безкрайните граници.

Свойства:

- Граница на сбор е сбор от границите:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

- Граница от произведение е произведение от границите:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \,.\, g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \,.\, \lim_{x\to x_0} g(x)$$

- За $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ имаме:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Относно неопределеностите - прегледайте тук: `http://fmi.wikidot.com/anal107#toc4`

2 Задачи

В Ръководството - глава 2, Параграф 2 - могат да бъдат намерени много задачи, изключително подходящи за упражнение на основните техники при търсене на граници на функции. Още задачи има в Сборника на Проданов, Хаджииванов, Чобанов - Глава 5 (Граници на функции) - задължително да се прегледат при подготовка върху материала.

- Ръководство - зад. 2.5, подточка з) - да се пресметне границата:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^2} - \sqrt{3+x}}{x-1}$$

не можем директно да използваме непрекъснатостта на разглежданата функция, т.к. в знаменател се получава 0 при $x \to 1$. Решението е да рационализираме поетапно и да използваме правилото за граница от произведение:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^2} - \sqrt{3+x}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(7+x^2\right)^{\frac{2}{3}} - (3+x)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{7+x^2} + \sqrt{3+x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{7+x} + \sqrt{3+x}} \,.\, \lim_{x\to 1} \frac{\left(7+x^2\right)^{\frac{2}{3}} - (3+x)}{x-1}$$

Първата граница можем да пресметнем веднага:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{7+x}+\sqrt{3+x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7+1}+\sqrt{3+1}} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Продължаваме с първоначалната граница - рационализираме още веднъж:

$$\frac{1}{4}\lim_{x\to 1} \frac{\left(7+x^2\right)^{\frac{2}{3}}-(3+x)}{x-1} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 1} \frac{\left(7+x^2\right)^2-(3+x)^3}{(x-1)\left[(7+x^2)^{\frac{4}{3}}+(3+x)\,(7+x^2)^{\frac{2}{3}}+(3+x)^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{4}\,.\,\lim_{x\to 1} \frac{1}{(7+x^2)^{\frac{4}{3}}+(3+x)\,(7+x^2)^{\frac{2}{3}}+(3+x)^2}\,.\,\lim_{x\to 1}\frac{\left(7+x^2\right)^2-(3+x)^3}{x-1}$$

Отново пресмятаме първата част директно:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(7+x^2)^{\frac{4}{3}}+(3+x)\,(7+x^2)^{\frac{2}{3}}+(3+x)^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^4}+4\sqrt[3]{8^2}+4^2} = \frac{1}{16+16+16} = \frac{1}{48}$$

Остава да разкрием скобите в последната граница и да съкратим:

$$\frac{1}{4\,.\,48}\lim_{x\to 1}\frac{\left(7+x^2\right)^2-(3+x)^3}{x-1} = \frac{1}{192}\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^3+5x-22\right)}{\cancel{(x-1)}} = -\frac{16}{192} = -\frac{1}{12}$$

- Ръководство - зад. 2.6, подточка г) - да се пресметне границата:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$$

Рационализираме:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

Изкарваме най-високата степен от корените в знаменател и съобразяваме, че са приложими разсъжденията, които използвахме за границите на редици.

$$2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)} = 2\,.\,0 = 0$$

Изразите под корен клонят към 1, но x пред скоби клони към безкрайност. Това води до знаменател, клонящ към безкрайност при фиксиран числител.

- Ръководство - зад. 2.6, подточка е) - да се реши:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2+2x}\right)$$

Следното решение е от Справочника на Ляшко, Боярчук, Гай, Головач - добавяме и изваждаме x, за да получим две лесни граници:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x-\sqrt{x^2-2x}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)+\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)$$

Довършете самостоятелно като рационализирате всяка от двете граници. Търсената стойност е 2.

- Сборник (ПХЧ) - зад. 15, подточка б) - да се намери границата:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)$$

Рационализираме. След няколко упражнения ще демонстрираме и друг подход - т.нар. *развитие на Тейлър.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1+x-\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{\sqrt{1+x}+\left(1+\frac{x}{2}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\cancel{1+x-1-x}-\frac{x^2}{4}}{\sqrt{1+x}+\left(1+\frac{x}{2}\right)}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cancel{x^2}}\left(\frac{\frac{\cancel{x^2}}{4}}{\sqrt{1+x}+\left(1+\frac{x}{2}\right)}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\left(1+\frac{x}{2}\right)}=-\frac{1}{8}$$

- Сборник (ПХЧ) - зад.18, подточка г) - да се реши:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$$

Тук използваме една от основните граници, а именно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Тогава прилагаме следната техника:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cancel{x}\cdot\dfrac{\sin ax}{ax}}{b\cancel{x}\cdot\dfrac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}\,\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}$$

- Сборник (ПХЧ) - зад.20, подточка а) - да се пресметне:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$$

Използваме, че $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}$$

Полагаме $t:=\frac{\pi}{2}-x$. Съобразяваме, че $x\to\frac{\pi}{2}\iff t\to 0$. Записваме новата граница:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}\overset{(t:=\frac{\pi}{2}-x)}{=}-\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=-1$$

Разгледайте задачите от папка Учебници > Учебници на руски > "Ляшко, Боярчук, Гай, Головач" - това е справочно пособие, съдържащо интересни задачи, например 150-170 от Параграф 7, Глава 1.

Следните линкове може да ви бъдат полезни -
`https://en.wikibooks.org/wiki/Calculus/Limits/An_Introduction_to_Limits` и
`https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_limits`