Упражнение 2

Атанас Груев

08.10.2019

1 Кратка теория

1.1 Тригонометрични функции

В това упражнение ще припомним тригонометричните функции $\sin x, \cos x, \tan x$ и $\cot x$ и някои формули, свързани с тях. Ще разгледаме обратните тригонометрични функции $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ и $\operatorname{arccot} x$ и техните графики.

- Казваме, че $f : D \to \mathbb{R}$ за $D \subset \mathbb{R}$ е *периодична* с период T, ако $f(x+T) = f(x) \ \forall x \in D$.
- Казваме, че $f : D \to \mathbb{R}$ за $D \subset \mathbb{R}$ е *четна*, ако $f(x) = f(-x) \ \forall x \in D$. Така например $f(x) = x^\alpha$, дефинирана върху реалната права, е четна функция за α - четно.
- Казваме, че $f : D \to \mathbb{R}$ за $D \subset \mathbb{R}$ е *нечетна*, ако $f(-x) = -f(x) \ \forall x \in D$. Така например $f(x) = x^\alpha$, дефинирана върху реалната права, е нечетна функция за α - нечетно.

Забележете, че дадена функция f може да не е нито четна, нито нечетна. Лесно се проверява например, че $f(x) = 2^x$ не е четна и не е нечетна.

Двете основни тригонометрични функции са $\sin x$ и $\cos x$. Те са дефинирани за всички реални числа и връщат стойност между -1 и 1, т.е.:

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1] \ \text{ и } \ \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

Естествено, това значи, че синусът и косинусът са ограничени функции. Освен това те са периодични с период $T = 2\pi$. Синусът е нечетна функция, значи $\sin(-x) = -\sin x$, докато косинусът е четна функция, като $\cos x = -\cos(-x)$.

1.2 Основни тригонометрични формули

Има някои основни формули - достатъчно е да запомним тях, за да извеждаме всички останали.

1. Следните формули са основни:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \tag{1}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{2}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1 \text{ (основно тригонометрично тъждество, ОТТ)} \tag{3}$$

2. Формули за $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ лесно се извеждат от (1) и (2):

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{4}$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \tag{5}$$

Забележете, че последната формула може да се запише по още два начина с помощта на (3):

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \left(1 - \cos^2\alpha\right) = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(1 - \sin^2\alpha\right) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

3. Следните формули служат за изразяване на sin и cos чрез tan и ползват (3), (4) и (5):

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} =$$

$$= 2\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = 2\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 + \left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2} = \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha} \tag{6}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1 - \left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2} = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} \tag{7}$$

4. Друга група формули, които можем да изведем чрез основните, е следната:

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cancel{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2} + \cancel{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{8}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}\right) =$$

$$= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cancel{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} + \cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2} - \cancel{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{9}$$

5. Можем да изведем и формули за произведенията $\sin\alpha\sin\beta$ и $\cos\alpha\cos\beta$, както и за $\sin\alpha\cos\beta$:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

   Като съберем от двете страни, получаваме:

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \Rightarrow \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right) \tag{10}$$

   Аналогично се показва, че:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right) \tag{11}$$

   Ако пък използваме, че:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

   Веднага получаваме:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right) \tag{12}$$

6. Формулите за понижаване на степен имат следния вид:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \tag{13}$$

$$\sin 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \tag{14}$$

1.3 Обратни кръгови функции

Знаем, че $f : D \to \mathbb{R}$ за $D \subset \mathbb{R}$ е биекция тстк е обратима. Обаче $\sin x$ и $\cos x$ не са инекции и няма как да бъдат биекции, поне не и върху цялата реална права. *Рестриктираме* домейните им, за да получим биекции:

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

Ако изберем интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, рестриктираният синус е биекция и следователно обратим. Неговата обратна функция се нарича аркус-синус и се бележи с arcsin. По-подобен начин стои въпроса с $\cos x$, който обаче обикновено се рестриктира в интервала $[0, \pi]$:

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

Обратната на рестриктирания косинус (биекция) е аркус-косинусът, който се бележи с arccos. Да заключим, че обратните на sin и cos са функциите:

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

Остана само да отбележим, че ако рестриктираме в подходящи интервали tan и cot, то и за тях получаваме обратни функции. По-точно:

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \iff \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R} \iff \operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

2 Задачи

Всички задачи тук са от Ръководството по математически анализ на Любенова, Недевски и др., взети от Глава 0, Параграф 6. Решени са едва няколко примера, които са крайно недостатъчни. Това е съвсем целенасочено - за усвояване на материала е необходимо да се разгледат и решат достатъчно задачи, което е самостоятелно занимание (примерите само ще илюстрират основни техники).

- Задача 6.11 а) Извършваме полагане $\arccos x = \alpha$, следователно $x = \cos\alpha$ и α се мени в интервала $[0, \pi]$. Да заместим в тъждеството:

$$\sin(\arccos x) \stackrel{?}{=} \sqrt{1 - x^2} \stackrel{\arccos x = \alpha}{\Longrightarrow} \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = |\sin\alpha|$$

  Остава да съобразим, че в интервала $\alpha \in [0, \pi]\, \sin\alpha$ приема само положителни стойности, т.е. тъждеството се удовлетворява.

- Задача 6.12 - по време на упражнение беше доказано тъждеството:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

  Самостоятелно докажете съответното тъждество от задачата, като използвате аналогични разсъждения.

- Задача 6.15 а) Ще докажем тъждеството:

$$2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right) + \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

  Първо полагаме:

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \sin\alpha,\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &\beta = \arccos\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos\beta,\ \beta \in [0, \pi] \end{aligned}\right. \Longrightarrow 2\alpha + \beta \stackrel{?}{=} \frac{\pi}{2}$$

  По-лесно е да започнем с β. Наистина, знаем, че $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и следователно $\beta = \frac{\pi}{6}$, тъй като трябва да изберем β в подходящ интервал. Случаят на α изисква да използваме някоя от горните формули. Да съобразим:

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \stackrel{\surd}{\Rightarrow} \sin\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

Повдигаме двете страни на квадрат:

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12}$$

Това удовлетворява изискванията към интервала на α и завършва задачата, защото наистина:

$$2\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

- Задача 6.19 г) Полагаме $\operatorname{arccot} x = \alpha$, откъдето $x = \cot\alpha$ и $\alpha \in (0, \pi)$. Сега искаме да докажем, че:

$$\cos(\operatorname{arccot} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \overset{\operatorname{arccot} x = \alpha}{\Longrightarrow} \cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{1+\cot^2\alpha} = \frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2}}$$

  Последният израз преобразуваме:

$$\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\sqrt{\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}} = \frac{\dfrac{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}}}{\dfrac{1}{\cancel{|\sin\alpha|}}} = \cos\alpha$$

  Това завършва доказателството. Съобразете, че $\sin\alpha$ в интервала $(0, \pi)$ приема само положителни стойности.

- Задача 6.19 д) Аналогична задача - полагаме $\arcsin x = \alpha$, откъдето $x = \sin\alpha$ за $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогава:

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \overset{\arcsin x = \alpha}{\Longrightarrow} \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

  Тъждеството излезе директно.

Самостоятелно - зад. 6.7, 6.8, 6.9, 6.12 и всички други подточки на задачи от по-горе, а защо не и някоя измежду другите задачи.