NO DATE

Рекурентни отношения.

(recurrence relation)

За да ∃ рекурентно отношение е необходимо:

* уравнение за изчисляване на n-ти елемент, чрез предишни.

* едно или повече начални условия (Пример: $a_0 = 1$)

задава ф-я.

Рекурентните отношения са синтактичен обект, който задава числова редица.

Забележка:

$\underbrace{\text{семантика}}_{\text{нещото}} \neq \underbrace{\text{синтаксис}}_{\text{записа на нещото}}$

Пр:

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ - различен синтаксис, еднаква семантика.

Предефиниране на оператори.

NO DATE

„Функция" има 2 смисъла:

математически

програмистки

В математическия смисъл под функция се разбира релация, докато в програмистския - обект от символи.

(int f (int a, double b))

$\underbrace{\text{int}}_{\text{тип}}$ $\underbrace{\text{f}}_{\text{име}}$ $\underbrace{\text{(int a, double b)}}_{\text{променливи}}$

В математиката и в програмирането възниква ~~фон~~ конфликт и за „рекурсивна ф-я"

В математ. смисъл - функция, която е изчислима

В програмистки смисъл - функция, която вика себе си.

Рекурентните отношения са рекурсивни функции **САМО В Програмистския смисъл**

NO DATE

Да се **реши** рек. отнош. означава да дадет еквивалентен израз от дясната страна, който не съдържа функционалния символ.

При решаване на рек. отнош. се изключва буквалното изброяване, което при големи n не е възможно да се извърши за разумно време. Също така се изключват и „псевдоформули" от вида $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$

Примери:

Начално условие: $L_0 = 1$.
Уравнение за изчисляване на n-ти елем. чрез по-малки:

$$L_n = L_{n-1} + n.$$

$$L_n = L_{n-1} + n = L_{n-2} + n-1+n =$$
$$L_{n-3} + n-2+n-1+n =$$
$$\vdots$$
$$= 1 + 1 + \ldots + n = \boxed{1 + \frac{n(n+1)}{2}}$$

Доказва се по индукция

NO DATE

Задача.

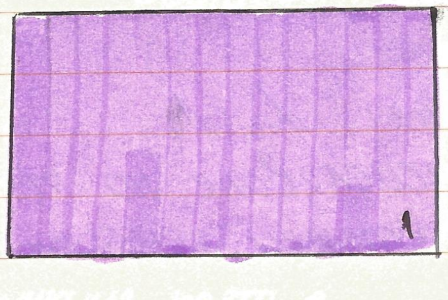
На колко района най-много се разделя универсума от n-окръжности.

Нека окръжностите се секат в 2 точки за максимизиране.

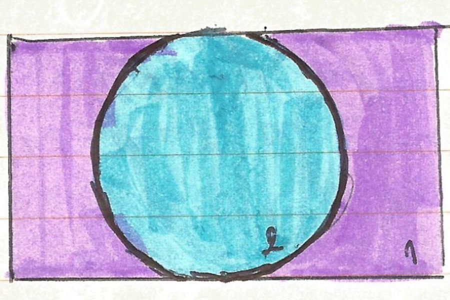
m_i - i-броят на окръжностите

броят на районите, за съотв. брой окръжности.

$m_0 = 1$

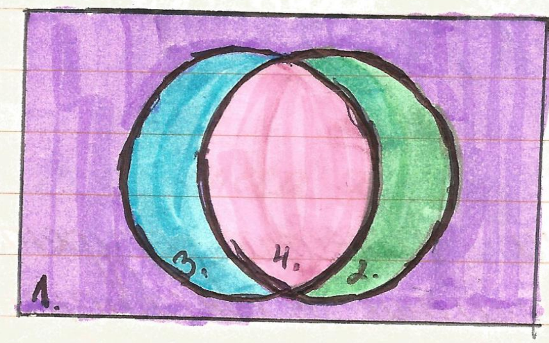


$m_1 = 2$.

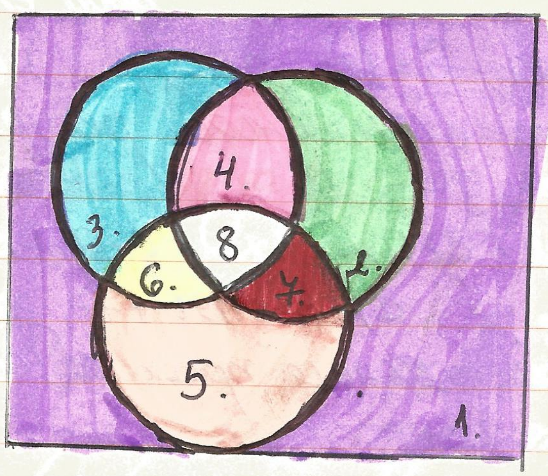


NO DATE

$M_2 = 4.$



$M_3 = 8.$



$M_n = M_{n-1} + 2(n-1)$, за база M_1 база, защото иначе рек. отношение няма да се получи.

$$M_n = M_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) =$$
$$= M_{n-3} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) = \ldots$$
$$\ldots\ldots = 2 + 2(1 + \ldots + (n-1)) = n^2 - n + 2.$$

NO DATE

$$M_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ n^2-n+2, & n>0. \end{cases}$$

1. Хомогенни линейни рекурентни отношения с константни коефициенти и крайна история

с константен брой елементи.

Нека редицата $\tilde{a}=(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ е зададена с линейното рекур. отнош.

$$a_n = c_1 . a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r} \quad n \geq r$$

където $c_1, c_2, \ldots c_r$ - const $\neq 0$, за да не се прескача елемент.

r-const

Равенството определящо a_n като линейна ф-я на предхождащите r члена на редицата наричаме линейно рекурентно отношение от ред r.

NO DATE

Пр. $a_n = 2a_{n-1}$ от 1 ред
$a_n = 2a_{n-2}$ от 2 ред.
$a_n = a_{n-3} + 4a_{n-6}$ от 6 ред

т.е. гледа се отдалечеността на най-~~задния~~ малкия индекс на елемент ~~от~~ даден в рекурентното отнош.

Нека $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ са ~~различни~~ комплекс. корени на характеристичното уравнение.

$$x^r - c_1 x^{r-1} - \dots - c_{r-1}x - c_r = 0,$$

~~което~~ $\Rightarrow$ от зададеното рек. отнош.

$$x^r = c_1 \cdot r^{r-1} + \dots + c_{r-1}x^1 + c_r x^0$$

Корените на характеристичното уравнение определят мултимножество с мощност r. (т.е корените са r, но може някой от тях да се среща повече от един път)

Забележка:

за рекур. отнош. нач. услов. са r на брой.

NO DATE

Стъпки на решаване:

1. Съставяне на характеристично уравнение.
2. Решаване на характ. уравнение (т.е. получ. на мулти множ.).
3. Съставяне на „общо" решение.

2. Нехомогенни линейни рекурентни отношения.

$$a_n = \underbrace{c_1 \cdot a_{n-1} + \ldots + c_r a_{n-r}}_{\text{хомогенна част.}} +$$

$$+ \underbrace{b_1^n Q_1(n) + b_2^n Q_2(n) + \ldots + b_m^n Q_m(n)}_{\text{нехомогенна част.}}$$

Нека разгледаме

Уравнението на Ханойските кули.

$$H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1}$$

за преместване на най-големият диск от първи на 3 прът.

за преместването на всички дискове без последния от 1 на 2 прът.

за преместване на всички дискове без последния от 2 на 3ти прът

NO DATE

n - диска
3 прета

$\boxed{H_n = 2H_{n-1} + 1}$, но.

$$H_n = 2H_{n-1} + 1 \approx H_n = 2H_{n-1} + 1^n \cdot n^0$$

I Игнорирате нехомог. част. и получавате мулти множ. от корени U

II $U \cup \{\underbrace{b_1, \dots, b_1}_{\text{стойността на } deg(Q_1)+1}, \underbrace{b_2, \dots, b_2}_{deg(Q_2)+1}, \dots, \underbrace{b_m \dots b_m}_{deg(Q_m)+1}\}_м$

III. Съставете общо реш. съгласно увеличеното мултимножество.

IV. Намират се неизв. const. от III чрез доб. на нач. усл.

b_i - разл. една от друга константи.
$Q_j(n)$ - полиноми ~~на~~ n от степен $d_j - 1$

Пример: DATE

$a_n = 2a_{n-1} + 1^n \cdot n^0$

$a_1 = 1$

I. $x - 2 = 0$

$\{2\}_M$

II. $\{2\}_M \cup \{1\}_M = \{1, 2\}_M$

III. $a_n = A1^n + B2^n$

IV. Добавяме.

$a_2 = 3$ (чрез зам.)

$A = ?$

$B = ?$

$$\begin{cases} 1 = A + 2B \\ 3 = A + 4B \end{cases}$$

$A = -1$

$B = 1$

$a_n = -1 + 2^n$

NO DATE

Забележки:

NO DATE

Да се **реши** рек. отнош. означава да дадем еквивалентен израз от дясната страна, който не съдържа функционалния символ.

При решаване на рек. отнош. се изключва буквалното изброяване, което при големи n не е възможно да се извърши за разумно време. Само така се изключват и „псевдоформули" от вида $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$

Примери:

Начално условие: $L_0 = 1$.
Уравнение за изчисляване на n-ти елем. чрез по-малки:

$$L_n = L_{n-1} + n.$$

$$L_n = L_{n-1} + n = L_{n-2} + n-1+n = L_{n-3} + n-2+n-1+n =$$

$$\vdots$$

$$= 1+1+\ldots+n = \boxed{1+\frac{n(n+1)}{2}}$$

Доказва се по индукция