Упражнение 6

Атанас Груев

21.10.2019

1 Кратка теория

В това упражнение ще отделим внимание на *монотонните* редици. За монотонност говорихме и по-рано, но в контекста на функции (т.е. функциите биват монотонно растящи и намаляващи). Понятието *монотонност* играе голяма роля при редиците $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, както ще стане ясно по-долу.

В частност, сериозно внимание отделяме на една специална граница:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Числото e е т.нар. Неперово число (още - основа на естествените логаритми) и е приблизително равно на 2.718281828459[1]. Границите, които имат връзка с него, са важни и затова ги разглеждаме подробно.

- Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща, ако $a_{n+1} \geq a_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. По същия начин, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно намаляваща, ако $a_{n+1} \leq a_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
- **Твърдение:** Всяка ограничена монотонна редица е сходяща. По-точно, ако една редица е монотонно растяща и ограничена отгоре (или монотонно намаляваща и ограничена отдолу), то тя е сходяща.

Последното твърдение ни дава още един метод за определяне дали дадена редица има граница. Наистина, освен дефиницията на Коши за сходимост на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ или лемата на полицаите (която е свойство на сходящите редици, а не критерий), сходимост можем да установим и като проверим, че дадена редица е монотонна, а след това и ограничена.

2 Задачи

Основно решаваме задачи за това упражнение от Ръководството по анализ на Любенова, Недевски и др. - Глава 1, Параграф 2 (Монотонни редици). В Сборникът със задачи ПХЧ може да разгледате Параграф 12 от Глава 4 (Числото e) - ще намерите 3 задачи с по няколко подточки. Хубави задачи има в сборника на Кудрявцев, напр. 166 и 175 от Глава 2, Параграф 8 (Предел последовательности).

[1] Който желае по-подробно запознаване с e, да разгледа `https://betterexplained.com/articles/an-intuitive-guide-to-exponential-functions-e/`

- Преди да започнем темата за монотонни редици, нека още един път приложим лемата за двамата полицаи в малко по-сложна задача. Става въпрос за Задача 1.25 б) от Ръководството - да се намери границата на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с общ член:

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^3+2n+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2n+2} + \cdots + \frac{n^2+n}{n^3+2n+n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2+i}{n^3+2n+i}$$

Тук не можем директно да изведем някакво неравенство, като ограничим a_n между (n пъти)(първия член на сумата) и (n пъти)(последния член на сумата). Причината е, че едновременно се менят както числителят, така и знаменателят. Необходимо е да действаме поетапно - разглеждаме общия член на сумата:

$$\frac{n^2+i}{n^3+2n+i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Той може да бъде ограничен двустранно - ползваме, че една дроб е по-голяма от друга точно когато има по-голям числител (при равни знаменатели) или по-малък знаменател(при равни числители). Следното неравенство е в сила:

$$\frac{n^2+i}{n^3+2n+n} \leq \frac{n^2+i}{n^3+2n+i} \leq \frac{n^2+n}{n^3+2n+i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Съобразихме, че каквото и да е i, то се мени измежду стойностите $\{1, 2, \dots, n\}$. Следователно ако вземем най-големия знаменател (n^3+2n+n), то дробта със същия числител ще бъде по-малка или равна на общия член на сумата. Аналогично, ако вземем най-големия числител (n^2+n), то тази дроб ще бъде по-голяма от общия член на сумата. Щом горното неравенство е изпълнено за всяко $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, то можем да сумираме страните на неравенството и то остава вярно:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{n^2+i}{n^3+2n+n}}_{(*)} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2+i}{n^3+2n+i} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{n^2+n}{n^3+2n+i}}_{(**)}$$

Последотателно разглеждаме двете суми (*) и (**).

$$(*) \quad n \cdot \frac{n^2+1}{n^3+2n+n} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2+i}{n^3+2n+n} \leq n \cdot \frac{n^2+n}{n^3+2n+n}$$

От неравенството:

$$\frac{n^2+1}{n^3+2n+n} \leq \frac{n^2+i}{n^3+2n+n} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

следва, че ако сумираме двете страни до n, то ще получим първото неравенство от (*). Аналогично за второто, сумиране до n прилагаме към:

$$\frac{n^2+i}{n^3+2n+n} \leq \frac{n^2+n}{n^3+2n+n}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

За частта (**) пък съобразете, че от неравенствата:

$$\frac{n^2+n}{n^3+2n+n} \leq \frac{n^2+n}{n^3+2n+i} \leq \frac{n^2+n}{n^3+2n+1}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

след сумиране на страните до n се получава веригата неравенства:

$$(**) \quad n \,.\, \frac{n^2+n}{n^3+2n+n} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2+n}{n^3+2n+i} \le n \,.\, \frac{n^2+n}{n^3+2n+1}$$

Окончателно, прилагаме лемата за двамата полицаи към (*) и (**). Двустранно сумите се ограничават от редици с граница 1, откъдето и самите суми са общи членове на сходящи редици.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n^2+i}{n^3+2n+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n^2+n}{n^3+2n+i} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \end{cases} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2+i}{n^3+2n+i} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Последното заключение се получава като приложим лемата за полицаите към ограничаващите двустранно редици с граница 1.

- Задача 2.4 е) от Ръководството - да се намери границата:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$$

Тази подточка е комбинация от подточките в) и д) - наистина, да постъпим по същия начин:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-k+k}{n-k}\right)^{-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n-k}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n-k}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n-k}\right)^{n-k} \left(1 + \frac{k}{n-k}\right)^k}$$

По време на упражнението показахме, че:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right) = e^k$$

Оттук можем да заключим, че

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n-k}\right)^{n-k} = e^k$$

Лесно се съобразява, че ако степенният показател е константа, границата се пресмята с лекота:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n-k}\right)^k = 1$$

Естествено, за знаменател клонящ към безкрайност, цялата граница е единица.

- Задача 2.4 ж) от Ръководството - да се намери границата:
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n$$
Бихме могли да се изхитрим и да напишем:
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{k}}{n}\right)^n=e^{\frac{1}{k}}$$
Обаче не сме доказали, че:
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)=e^k$$
е в сила за $k\in\mathbb{R}$. В нашите разглеждание досега $k\in\mathbb{N}$. Следователно, ако искаме да сме напълно формални, трябва да опитаме друго. Ръководството ни подсказва да използваме резултата от Зад 1.19 - прегледайте я внимателно (доказва се с дефиницията на Коши). Най-общо казано, ако $k\in\mathbb{N}$ и редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща с граница $l>0$, то:
$$\lim_{n\to\infty}a_n=l\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{l}$$
Ако сега разгледаме:
$$a_n^k=\left[\left(1+\frac{1}{nk}\right)^n\right]^k=\left(1+\frac{1}{nk}\right)^{nk}\quad\text{с граница }\lim_{n\to\infty}a_n^k=e,$$
то можем да приложим горния резултат след като сме го доказали. Оттам:
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n^k}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{nk}\right)^n=\sqrt[k]{e}=e^{\frac{1}{k}}$$

- Задача 166 от Кудрявцев - решени са няколко подточки, като цяло задачата е базова и използва доказаното по време на упражнение:

  а) Подточка 2) -
  $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)^{2^n}$$
  Нека положим $m:=2^n$ и да съобразим, че щом $n\to\infty$, то $m\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ (идеята е, че щом n расте неограничено, 2^n също расте неограничено). Да запишем новата граница:
  $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m+1}{m}\right)^m=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e$$

  б) Подточка 4) -
  $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2=e^2$$

  в) Подточка 5) -
  $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=e^{\frac{1}{2}}$$
  Просто прилагаме доказаното по-горе.

- Задача 175 от Кудрявцев - леко избързваме и даваме без доказателство (което се разглежда по време на следващото упражнение) следното твърдение:

  Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Тогава е в сила: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x_n}{n}\right)^n = e^{x_0}$

  Освен това можем да ползваме, че за някаква функция на n, което означаваме $f(n)$ е в сила:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\,.\,f(n)} = e^{\lim_{n\to\infty} f(n)}$$

  В упражнение 7 ще обърнем повече внимание на доказателствената част, а сега ще дадем две подточки, за които е удобно да се ползват тези твърдения.

  a) Подточка 4)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2+2n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+n+2-n-2}{n^2+2n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2+n}{n^2+2n+2}\right)^n$$

  Умножаваме и разделяме степенния показател с $\frac{2+n}{n^2+n+2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2+n}{n^2+2n+2}\right)^{\frac{n^2+2n+2}{n^2+n+2}\cdot\frac{2+n}{2+n}\,.\,n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2+n}{n^2+2n+2}\right)^{\frac{n^2+2n+2}{2+n}\cdot\frac{n(2+n)}{n^2+2n+2}}$$

  Сега прилагаме горното свойство - знаем, че:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2+n}{n^2+2n+2}\right)^{\frac{n^2+2n+2}{2+n}} = e^{-1}$$

  Ползваме това, за да презапишем границата:

$$e^{-1\,.\,\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n^2+2n+2}} = e^{-1\,.\,1} = e^{-1}$$

  Това следва от факта, че границата в степенния показател има стойност 1.

- Подточка 5) -

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1+2n-2n}{n^2+n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n}{n^2+n+1}\right)^n$$

  Отново умножаваме и разделяме степенния показател с $\frac{n^2+n+1}{2n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n^2+n+1}{2n}\cdot\frac{n(2n)}{n^2+n+1}}$$

  Отново същия трик със съображението, че:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n^2+n+1}{2n}} = e^{-1}$$

  Откъдето веднага имаме:

$$e^{-1\,.\,\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n+1}} = e^{-1\,.\,2} = e^{-2}$$

Забележка - този подход е приложим за граници от вида:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha\left(n\right)}\right)^{\alpha(n)},$$

където за $n \to \infty$ имаме $\alpha\left(n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ Внимавайте това условие да е изпълнено за граници като горните.