Ядро и образ на линейно изображение, теорема за ранга и дефекта. Обратим линеен оператор.

Определение 1. *Ако $\varphi : U \to V$ е линейно изображение, то множеството*

$$\ker(\varphi) = \{u \in U \,|\, \varphi(u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$$

се нарича ядро на φ, а множеството

$$\mathrm{im}(\varphi) = \{\varphi(u) \,|\, u \in U\}$$

се нарича образ на φ.

Твърдение 2. *Ако $\varphi : U \to V$ е линейно изображение, то ядрото $\ker(\varphi)$ на φ е подпространство на U, а образът $\mathrm{im}(\varphi)$ на φ е подпространство на V.*

Доказателство. Ако $a_1, \ldots, a_n \in \ker(\varphi)$, то от

$$\varphi(x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n) = x_1 \varphi(a_1) + \ldots + x_n \varphi(a_n) = x_1 \overrightarrow{\mathcal{O}}_V + \ldots + x_n \overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$$

за произволни $x_1, \ldots, x_n \in F$ следва $x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n \in \ker(\varphi)$. Това доказва, че $\ker(\varphi)$ е подпространство на U.

За произволни $u_1, \ldots, u_n \in U$ и $x_1, \ldots, x_n \in F$ е изпълнено

$$x_1 \varphi(u_1) + \ldots + x_n \varphi(u_n) = \varphi(x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n) \in \mathrm{im}(\varphi).$$

С това установяваме, че $\mathrm{im}(\varphi)$ е подпространство на V.

□

Определение 3. *Ако $\varphi : U \to V$ е линейно изображение, то размерността $d(\varphi) = \dim \ker(\varphi)$ на ядрото $\ker(\varphi)$ на φ се нарича дефект на φ, а размерността $\mathrm{rk}(\varphi) = \dim \mathrm{im}(\varphi)$ на образа $\mathrm{im}(\varphi)$ на φ се нарича ранг на φ.*

Твърдение 4. *Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение и $e = (e_1, \ldots, e_n)$ е базис на U. Тогава образът $\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ на φ се поражда от образите $\varphi(e_i)$ на базисните вектори на U.*

Още повече, ако V е крайномерно пространство, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ е базис на V и A е матрицата на φ спрямо базисите e и f, то рангът $\mathrm{rk}(\varphi) = \mathrm{rk}(A)$ на φ съвпада с ранга на A.

Доказателство. Произволен вектор от $\mathrm{im}(\varphi)$ има вида $\varphi(u)$ за някакъв вектор $u \in U$. Изразяваме

$$u = ex = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

като линейна комбинация на базисните вектори $e_1, \ldots, e_n$ на U. Тогава

$$\varphi(u) = \varphi(ex) = \varphi(e)x = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$$

е линейна комбинация на $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ и $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$. Обратното включване $l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \subseteq \mathrm{im}(\varphi)$ се дължи на $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \in \mathrm{im}(\varphi)$ и на това, че $\mathrm{im}(\varphi)$ е подпространство на V. Това доказва

$$\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)).$$

Рангът на φ е

$$\mathrm{rk}(\varphi) = \dim \mathrm{im}(\varphi) = \dim l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = \mathrm{rk}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)).$$

Ако V е крайномерно, то по определение, вектор-стълбовете на матрицата A са съставени от координатите на $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ спрямо базиса $f_1, \ldots, f_m$, така че

$$\mathrm{rk}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = \mathrm{rk}(A) \quad \text{и} \quad \mathrm{rk}(\varphi) = \mathrm{rk}(A).$$

□

Твърдение 5. (Теорема за ранга и дефекта на линейно изображение на крайномерно пространство:) *Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение на n-мерно пространство U в произволно линейно пространство V. Тогава рангът $\mathrm{rk}(\varphi)$ и дефектът $d(\varphi)$ на φ изпълняват равекството*

$$\mathrm{rk}(\varphi) + d(\varphi) = n.$$

Доказателство. Нека $k = d(\varphi)$ и $e_1, \ldots, e_k$ е базис на ядрото $\ker(\varphi)$ на φ. Продължаваме до базис $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ на U. Достатъчно е да проверим, че $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ е базис на образа $\mathrm{im}(\varphi)$ на φ, за да получим, че

$$\mathrm{rk}(\varphi) := \dim \mathrm{im}(\varphi) = n - k = \dim(U) - d(\varphi)$$

и да докажем твърдението.

По предишното твърдение, $\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k), \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n))$. Вземайки предвид $\varphi(e_1) = \ldots = \varphi(e_n) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ за векторите $e_1, \ldots, e_k \in \ker(\varphi)$, получаваме

$$\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)).$$

Ако $\sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$, то

$$\varphi\left(\sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i\right) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V.$$

Следователно $\sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i e_i \in \ker(\varphi)$ и съществуват $x_1, \ldots, x_k \in F$ с

$$\sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{k} x_j e_j.$$

В резултат,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} (-x_i) e_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}_U,$$

откъдето $x_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq n$, съгласно линейната независимост на базиса $e_1, \ldots, e_n$ на U. Това доказва, че $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ са линейно независими, а оттам и базис на $\mathrm{im}(\varphi)$.

□

Определение 6. *Линейните изоморфизми $\varphi : U \to U$ на пространство U със себе си се наричат обратими линейни оператори.*

Знаем, че ако $\varphi : U \to U$ е обратим линеен оператор, то $\varphi^{-1} : U \to U$ е линейно изображение, а оттам и обратим линеен оператор.

Твърдение 7. *Следните условия са еквивалентни за линеен оператор $\varphi : U \to U$ в n-мерно пространство U:*
(i) φ е обратим линеен оператор;
(ii) ядрото $\ker(\varphi) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_U\}$ на φ е нулевото пространство;
(iii) дефектът на φ е $d(\varphi) = 0$;
(iv) рангът на φ е $\mathrm{rk}(\varphi) = n$;
(v) образът $\mathrm{im}(\varphi) = U$ на φ съвпада с цялото пространство U;
(vi) φ трансформира базис $e_1, \ldots, e_n$ на U в базис $\varphi(e_1), \ldots \varphi(e_n)$ на U.

Доказателство. $(i) \Rightarrow (ii)$ Произволен линеен оператор $\varphi : U \to U$ оставя на място нулевия вектор $\varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}_U) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_U$, така че $\overrightarrow{\mathcal{O}}_U \in \ker(\varphi)$. Поради взаимната еднозначност на φ, за всеки ненулев вектор $u \in U$, $u \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}_U$ е в сила $\varphi(u) \neq \varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}_U) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_U$, така че $\ker(\varphi) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_U\}$ се състои само от нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}_U$ на U.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Ако ядрото $\ker(\varphi) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_U\}$, то дефектът $d(\varphi) := \dim \ker(\varphi) = 0$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ По Теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение $\varphi : U \to U$ на n-мерно пространство U, $\mathrm{rk}(\varphi) = n - d(\varphi) = n - 0 = n$.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Ако подпространството $\mathrm{im}(\varphi)$ на U е с размерност $\dim \mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{rk}(\varphi) = n = \dim(U)$, то $\mathrm{im}(\varphi)$ съвпада с U, $\mathrm{im}(\varphi) = U$.

$(v) \Rightarrow (vi)$ Ако $e_1, \ldots, e_n$ е базис на U и $\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = U$, то $n = \dim(U) = \dim l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = \mathrm{rk}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$, така че $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ са линейно независими, а оттам и базис на n-мерното пространство U.

$(vi) \Rightarrow (i)$ Ако линеен оператор $\varphi : U \to U$ изобразява базис $e_1, \ldots, e_n$ на U в базис $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ на U, то еднозначно определеният линеен оператор $\psi : U \to U$ с $\psi(\varphi(e_i)) = e_i$ за всички $1 \leq i \leq n$ е обратен на φ съгласно

$$(\psi\varphi)\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \psi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i \psi(\varphi(e_i)) = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \mathrm{Id}_U\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)$$

за произволни $x_i \in F$ и

$$(\varphi\psi)\left(\sum_{i=1}^n y_i \varphi(e_i)\right) = \varphi\left(\psi\left(\sum_{i=1}^n y_i \varphi(e_i)\right)\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n y_i \psi(\varphi(e_i))\right) =$$
$$= \varphi\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n y_i \varphi(e_i) = \mathrm{Id}_U\left(\sum_{i=1}^n y_i \varphi(e_i)\right)$$

за всички $y_i \in F$.

□

Твърдение 8. *Линеен оператор $\varphi : U \to U$ в n-меро пространство U е обратим тогава и само тогава, когато матрицата $A \in M_{n\times n}(F)$ на φ спрямо произволен базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на U е обратима.*

Доказателство. Нека $\varphi : U \to U$ е обратим линеен оператор с обратен $\varphi^{-1} : U \to U$. Ако φ има матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ спрямо базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на U, а φ^{-1} има матрица $B \in M_{n\times n}(F)$ спрямо същия базис, то съгласно Твърдение 6 от темата за действия с линейни изображения, матрицата на тъждественото изображение $\varphi\varphi^{-1} = \mathrm{Id}_U = \varphi^{-1}\varphi$ е $AB = E_n = BA$. Следователно A е обратима и $A^{-1} = B$.

Обратно, нека матрицата $A \in M_{n\times n}(F)$ на $\varphi : U \to U$ спрямо някакъв базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на U е обратима. Разглеждаме линейния оператор $\psi : U \to U$ с матрица $A^{-1} \in M_{n\times n}(F)$ спрямо базиса e. Съгласно Твърдение 6 от темата за действия с линейни изображения, операторът $\psi\varphi$ има матрица $A^{-1}A = E_n$ спрямо базиса e. Следователно $\psi\varphi = \mathrm{Id}_U$ е тъждественото изображение на U. Аналогично, произведението $\varphi\psi$ има матрица $AA^{-1} = E_n$ спрямо базиса e и $\varphi\psi = \mathrm{Id}_U$. Следователно операторът φ е обратим и обратният му е $\varphi^{-1} = \psi$.

□

Задача 9. *Нека e_1, e_2, e_3 е базис на линейно пространство V над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа, а $f : V \to V$ е линейният оператор, действащ по правилото*

$$f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_1 - x_2)e_1 + (x_1 + x_2)e_2$$

за произволни $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Да се намерят ядрото $\ker(\varphi)$ и образът $\mathrm{im}(\varphi)$ на φ.

Доказателство. По определение, ядрото $\ker(f)$ на f се състои от векторите $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in V$, за които $f(v) = (x_1 - x_2)e_1 + (x_1 + x_2)e_2 = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Координатите на тези вектори са решенията на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lll} x_1 & -x_2 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & = 0 \end{array} \right.$$

С други думи,

$$\ker(f) = \{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \,|\, x_1 = x_2 = 0\} = \{x_3e_3 \,|\, x_3 \in \mathbb{R}\} = l(e_3)$$

е правата, породена от e_3. В частност, дефектът на f е $d(f) = \dim\ker(f) = 1$. Образът

$$\mathrm{im}(f) = \{f(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3) \,|\, x_i \in \mathbb{R}\} = \{(x_1-x_2)e_1+(x_1+x_2)e_2 \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq l(e_1, e_2)$$

се съдържа в линейната обвивка на e_1 и e_2. По Теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение, $\dim\mathrm{im}(f) = \mathrm{rk}(f) = \dim(V) - d(f) = 3 - 1 = 2$, така че $\mathrm{im}(f) = l(e_1, e_2)$.

□