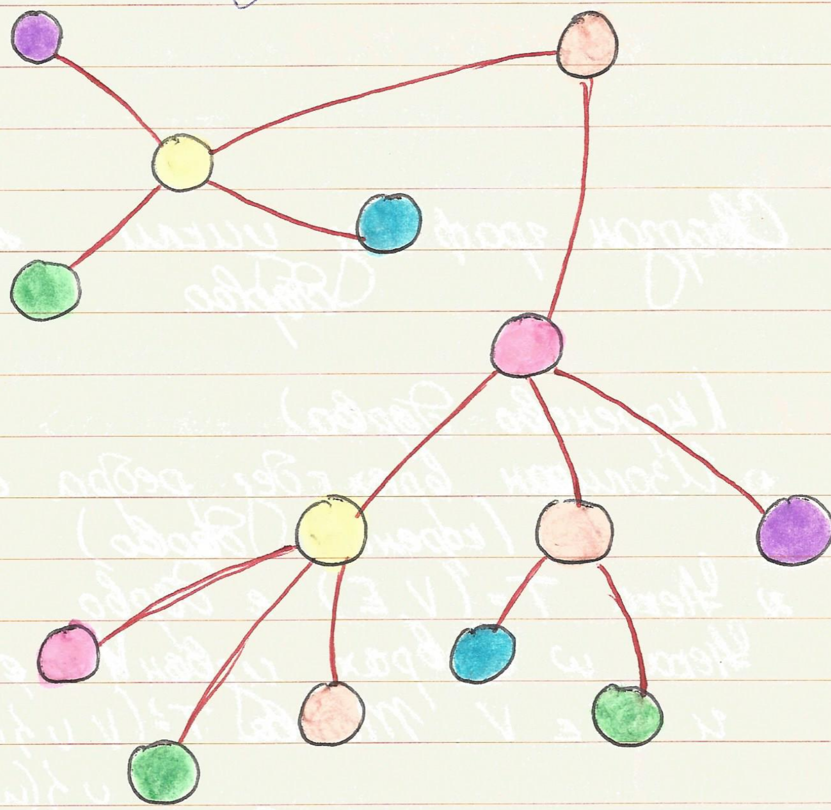
Дървета.

Опр. 1.
Свързан граф без цикли наричаме дърво.

Опр. 2. (кореново дърво)
1) Изолиран връх r без ребра е дърво. (кореново дърво)
2) Нека $T = (V, E)$ е дърво. Нека w е връх извън V ($w \notin V$) и $r \in V$. Тогава $T' = (V \cup \{w\}, E \cup \{(w, r)\})$ - дърво.
(Върхът извън ~~граф~~ дървото се свързва само с един връх от дървото, за да не се получи цикъл)

3) Нищо друго не е дърво освен ако не се получи след краен брой прилагания на 1) и 2)

Рисунка на дърво:



не може да се
въртят в него.

Теорема:

Опр. 1 и Опр. 2 са
еквивалентни.

Доказателство по индукция.

Опр. 2 -> Опр. 1.

База:

самотен връх без ребра
е свързан граф без цикли.

Инд. предположение:

Нека $T = (V, E)$ е свързан
граф без цикли.

Инд. стъпка:

Ще покажем, че T' е свързан
граф. без цикли.

$T = (V, E)$.

Нека $\omega \notin V$ и $r \in V$. $T' = \langle \{\omega\} \cup V,$
Доп., че T' ~~не~~ е свързан граф. с цикл $\{(r, \omega)\} \cup E \rangle$.
всеки връх, който участва в
цикъл има степен поне 2, а
ω има ребро само с $r \Rightarrow$ има степен 1.
$\Rightarrow$ ↯ с даденото, че T е свързан граф. без
цикли.

NO DATE

Графът е свързан, защото от произволен връх в T ще има път до z

=> ~~като~~ в T' => (всеки връх ще има път до z, а

като добавим ω,

то ще има

~~връх~~ ребро до z => всеки връх в T' ще има път до ω.

Върхове на дървета от степен 1 се нар. висящи върхове.

За да има висящи върхове едно дърво, то неговите върха трябва да са поне два.

Лема.

В дърво $|V|>1$ има поне един висящ връх.

Доказателство.

Взимаме произволно дърво T. Разглеждаме произволен максимален път p в T.

$p = u \ldots v$

Допускаме, че $deg(u) \neq 1 \Rightarrow \exists$ съседен връх x на u, който

1) участва в пътя => образува се цикъл => $\lightning$ (дърво)

2) не участва в пътя => p не е макс. път => $\lightning$

Теорема:

Всяко дърво с корен е дърво.

Доказателство по индукция:

База:

~~...~~ D е дърво. $D = (\{r\}, \emptyset\})$

D - е свързан граф, защото съществува път от r до r с дължина 0. Освен това D няма цикли, той като няма ребра.

Инд. ~~...~~ предпол.

Допускаме, че $D(V, E)$ с корен r е свързан граф без цикли.

Инд. стъпка.

Ще док., че дърво $D'(V', E') = D'(V \cup \{w\}, E \cup \{(u, w)\})$ е корен r, получено от D с присъединяване на

NO DATE

новият връх ω към $u \in V$ е също свързан граф и няма цикли.

За произволни 2 върха v_i и v_j от V съществува път от v_i до v_j в D, защото според инд. предположение D е свързан граф. Следователно, съществува такъв път и в D'.
Път от произволен връх $v_i \in V$ до ω в D' получаваме, като към съществуващия в D път от v_i до u добавим реброто (u, ω), с което ω е присъединен към u.
Не е възможно ω да съвпада с върха, предхождащ u, защото $\omega \notin V$.
$\Rightarrow$ в D' съществува път между всеки два върха $\Rightarrow$ D' е свързан граф.

Съгласно инд. предположение в D няма цикли. За да има цикъл в D', той непременно трябва да съдържа реброто (u, ω). Това обаче не е възможно, тъй като ω е край само на реброто (u, ω), $d(\omega) = 1$ и съгласно деф. не може да участва в цикъл.

NO DATE

Листа ~~са върховете към~~ на кореновоо дърво са тези върхове към които не е присъединен друг врех.

Врех родител ~~в~~ а кореново дърво са тези върхове към които е присъединен друг врех.

Теорема:

Нека $D=(V,E)$ е дърво с корен. Тогава $|V| = |E| + 1$

Доказателство:

База:

Нека D е тривиално кореново дърво, с корен r., то $|V|=1$, $|E|=0$ и следователно $|V|=|E|+1$ е изпълнено.

Инд. предположение:

Нека $D(V,E)$ е кореново дърво и $|V|=|E|+1$.

Инд. стъпка:

Присъединяваме го към върха $u \in V$ и получаваме кореновото дърво $D'(V',E')$, $V'=V \cup \{\omega\}$, $E'=E \cup \{(u,\omega)\}$.

NO DATE

$\Rightarrow |V'| = |V| + 1$

$|E'| = |E| + 1$

$|V'| - |E'| = |V| - |E| = 1$

$\Rightarrow |V'| = |E'| + 1.$

Теорема:

Нека $D(V, E)$ е дърво. Съществува единствен път между всеки два върха на D.

Доказателство:

Съществуването на поне един път между всеки два върха на дървото е следствие от свързаността му. Ако допуснем наличието на два различни пътя между върховете v_i и v_j, ще получим противоречие с отсъствието на цикли в D, тъй като тези пътища непременно образуват поне един цикъл.

Теорема:

Нека $D=(V,E)$ е дърво и реброто $(v_i, v_j) \notin E$. Тогава графът $G(V, E \cup \{(v_i, v_j)\})$ съдържа единствен цикъл.

Доказателство:

D е свързан и съществуващият в него път между v_i и v_j заедно с новодобавеното ребро, образуват цикъл.

Ако допуснем, че след добавянето на реброто в D са се получили 2 различни цикъла в D, то тогава в D има два различни пътя м/у върховете v_i и v_j $\Rightarrow$ ↯

~~Теорема: Нека $D=(V,E)$ е кореново дърво~~

Височина на кореново дърво е дължината на най-дългия път от корена до кое да е листо.

Дължината на пътя от корена r до върха v_i в кореновото дърво наричаме височина на v_i.

NO DATE

Теорема.

Нека $D = (V, E)$ е кореново дърво с височина h и разклоненост m. Тогава има не повече от m^h листа.

Доказателство:

База:

Нека $h = 0$, броя на листа е 1.

$m^0 = 1 \Rightarrow$ за $h = 0$ е изпълнено.

Инд. предположение:

Допускаме, че при $h = h' - 1$ твърдението е вярно.

Инд. стъпка:

Нека кореновото дърво D е с височина $h = h'$. Нека да разгледаме неговия подграф D', индуциран от върховете, които не са листа. Този подграф е дърво с височина $h' - 1$ и съгласно инд. предп. $\leq m^{h'-1}$ листа.

Всеки лист на D' има $\leq m$ ~~си~~ ~~сина~~ върха,
които се ~~присъединяват~~ към него
~~са~~ ~~наследника~~ в D и следователно броят на листата в дървото с височина $h = h'$ не надхвърля $m^{h'-1} \cdot m = m^{h'} = m^h$.

(съгл. Принципа на умножението)

Деф.
Нека $G=(V,E)$ е граф, а $D(V,E')$, $E' \subseteq E$ е дърво. Тогава D наричаме **покриващо дърво**.

НЕ ВСЕКИ ГРАФ ИМА ПОКРИВАЩО ДЪРВО.

Теорема:
Графът $G=(V,E)$ има покриващо дърво, тогава и само тогава, когато е свързан.

Доказателсто:
1) Нека $G=(V,E)$ има покриващо дърво $D(V,E')$. Това, че в D има път между всеки два върха от V. Но $E' \subseteq E$ и всеки път в D е път и в G.
Следователно графът е свързан.

NO DATE

2) Нека $G(V,E)$ е свързан. Ще покажем, че G има покриващо дърво, като докато в графа има цикъл ще изхвърляме ребро от този цикъл.

Процедурата завършва след краен брой стъпки, защото на всяка стъпка от текущия граф се отстранява ребро, а ребрата са краен брой. Ще док., че след всяка стъпка получения граф остава свързан.

Да доп. противното, т.е. че отстраненото ребро (v_k, v_e) разрушава път свързващ върховете v_i и v_j. Но сега вместо реброто (v_k, v_e) можем да използваме остатъка от цикъла и да получим друг път м/у v_i и v_j. Следователно, след изхвърляне на ребрата участващи в цикъл, ще имаме граф $G'(V, E')$, който е свързан.
Но процедурата завършва, когато в G' не е останал нито един цикъл.
$\Rightarrow$ G' е дърво и това е покриващото дърво на G

NO DATE

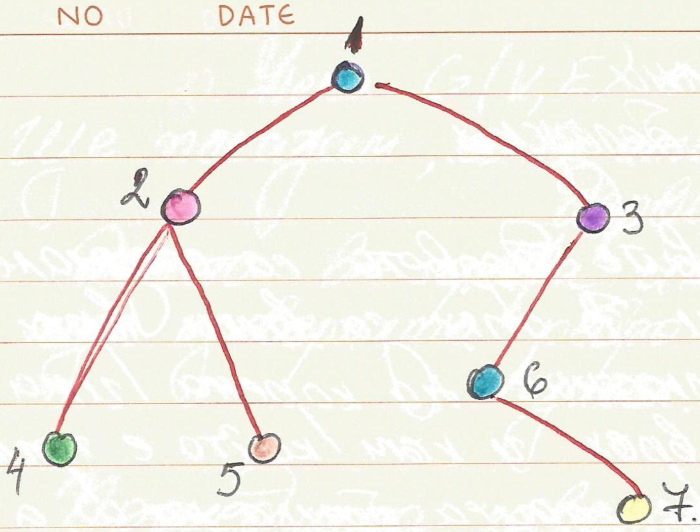
Допълнителни бележки.

Кореновите дървета са специален вид графи. В тях за всеки връх ω, с изключение на корена, има единствен връх и към който е привеждиме и се нарича баща на ω, а ω - син на и.

Кореново дърво с разклоненост 2 наричате двоично дърво.

В двоичното дърво всеки връх, който не е лист, има не повече от двата сина, като първият в наредбата нар. ляв. син, а вторият - десен. син.

Двоичните дървета с наредба на синовете се представят чрез списък на синовете.
Списъкът съдържа за всеки връх наредената двойка от синовете му, като отсъствието на съотв. син. се означ. с някакъв спец. знак напр *.



Списък на синовете.

1:	2	3
2:	4	5
3:	6	*
4:	*	*
5:	*	*
6:	*	7
7:	*	*

Аналогично можем да дефинираме m-ично дърво, като кореново дърво с разклоненост m, но с нарастване на m списъкът на синовете става не ефективен, тъй като ще има много липсващи синове.