NO DATE

Булеви функции.

Булева функция е всяка функция $J_2^n \to J_2$, за някоя $n \in N$, където n е брой на променливите.

$J_2 = \{0, 1\}$.

елементите на булевите функции са n-мерни вектори.

Забележка:

$g: A \to B$.

за променливи може да се говори само ако A има структура.

$\Rightarrow J_2^n$ има структура.

→ брой променливи.

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

брой вектори

брой функции - 2^{2^n}

f_{15}	1	1	1	1	→ const 1 не зависи от нито една от променливите.
f_{14}	1	1	1	0	→ черта на Шефер $x\mid y$ побитово отрицание на конюнкцията.
f_{13}	1	1	0	1	→ импликация $x \to y$. „от x следва y"
f_{12}	1	1	0	0	→ отрицание на x $\bar{x}$ не зависи от y.
f_{11}	1	0	1	1	→ обратна импликация $y \to x$ „от y следва x"
f_{10}	1	0	1	0	→ отрицание на y $\bar{y}$ не зависи от x.
f_9	1	0	0	1	→ еквивалентност. $x \equiv y$
f_8	1	0	0	0	→ стрелка на Пирс $x \downarrow y$ побитово отриц. на дизюнкция
f_7	0	1	1	1	→ дизюнкция $x \vee y$ $\max(x,y)$
f_6	0	1	1	0	→ събиране по модул 2 $x \oplus y$
f_5	0	1	0	1	→ идентитет на y $id(y)$ не зависи от x.
f_4	0	1	0	0	
f_3	0	0	1	1	→ идентитет на x $id(x)$ не зависи от y
f_2	0	0	1	0	
f_1	0	0	0	1	→ ~~конюнкция~~ ~~min~~ конюнкция $x \wedge y$ $\min(x,y)$.
f_0	0	0	0	0	→ const 0 не зависи от нито една от променливите
y	0	1	0	1	
x	0	0	1	1	

Забележка: $\equiv$ ($\to$, $=$) не е съюз, тъй като не създава по-голямо съждение.

NO DATE

$f_2 = \overline{x \to y}$ } нямат общо прието
$f_4 = \overline{y \to x}$ } име.

1. Съществени и несъществени променливи.

Когато в една функция, някоя от променливите не оказва влияние - то тя се нарича фиктивна или не съществена.

x е фиктивна в f_0, f_5, f_{10}, f_{15}.
y е фиктивна в f_0, f_3, f_{12}, f_{15}.

Забележка:
x, y се определя в колко функции са фиктивни променливи, чрез метода на вкл. и изкл.

Дефиниция.
$f(x_1 \ldots x_n)$
x_i е фиктивна променлива $(i \in \{1 \ldots n\})$
ако $f(x_1 \ldots x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, n)$

За всички (2^{n-1}) стойности на вектора.
т.е. за стойностите на вектора няма значение i-тата позиция.

NO DATE

2. Композиция на функции.

Нека са дадена функциите

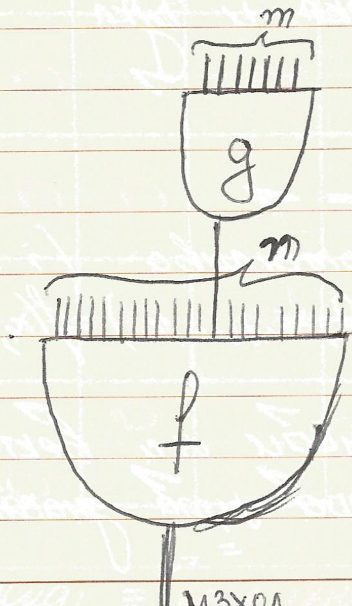
$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.] имат елементи от един и същи тип.
$g(y_1, \dots, y_m)$.

?
<u>кодомейна</u> на g е същия, като множеството за x_i.

Комп. на g на мястото на x_i в f.

$f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(y_1, \dots, y_m), x_{i+1}, \dots, x_n)$.

ако $x \neq y$, то функцията е с $n+m-1$ променливи (вход)



3. Формули на функции.

формула - синтактично понятие (~~казва~~ опред. разполож. на бук. и ~~с~~ символите, казва, кои са позволени).

семантика - функция, която съпоставя др. обекти на синтактичните обекти (добавя смисъл)

нещо $\longrightarrow$ представ. на нещо
семантика — синтаксис
(функция — (формула

Синтаксис ↗ правилен запис → само дадените елем.

$$\Sigma = \{f, x, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (,), ,\}$$

$\oplus \rightarrow \neq \emptyset$.

$x\alpha$ е формула, където $\alpha \in \{0, \dots, 9\}^{+}$

$f\beta(x\alpha_1, x\alpha_2, \dots, x\alpha_n)$ е формула, където $n \in \mathbb{N}^{+}$

ако $\tau_1 \dots \tau_k$ са формули, то
$f\beta(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ е формула, $k \geq 1$.

Нищо друго не е формула.

NO DATE

Семантика.

булеви променливи $x_1 \dots x_t$

булеви функции $f_1, f_2 \dots$

$x\alpha \xrightarrow{\text{семант.}} x_i$, i е числото, което се записва с α.

$f\beta(x\alpha_1, \dots, x\alpha_n) \xrightarrow{\text{семант.}} f_j(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$

β е записът на j.
α_1 е записът на i_1.

$f\beta(e_1, e_2, \dots, e_k) \xrightarrow{\text{семант.}} f_j(f_1, \dots, f_k)$

композ. на ф-ята съотв. на e_1 на мястото на x_1.

Забележка:
Семантиката се оценява от вътре на вън.

x_1 x_2	$f_4(\overset{1}{x_1}, f_7(\overset{1}{x_1}\overset{0}{x_2}\overset{0}{x_3}))$
1 0	0

4. Свойства:

4.1. комутативни свойства.

$$xy = yx.$$
$$x \vee y = y \vee x$$
$$x \oplus y = y \oplus x.$$

4.2. асоциативни свойства.

$$(xy)z = x(yz) \qquad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$
$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

4.3. дистрибутивни свойства.

$$x(y \vee z) = xy \vee xz \qquad x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z).$$
$$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$$

4.4. идемпотентни свойства.

$$xx = x \qquad x \oplus x = \tilde{0}$$
$$x \vee x = x$$

4.5. свойства на отрицанието.

$$x\bar{x} = \tilde{0} \qquad x \vee \bar{x} = \tilde{1}$$
$$x \oplus \bar{x} = \tilde{1} \qquad \bar{\bar{x}} = x$$

4.6. свойства на константите.

$$x\tilde{0} = \tilde{0} \qquad x\hat{1} = \tilde{1} \qquad x \oplus \tilde{0} = x$$
$$x \vee \tilde{0} = x \qquad x \vee \hat{1} = 1 \qquad x \oplus \hat{1} = \bar{x}$$

NO DATE

4.7. Закони на Де Морган.

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \qquad \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

Допълнителни
бележки:

Пример:
Арит. изрази.

$\{0, 1, 2, +, *, (,)\}$

База: 0 е валид. израз
1 —″—
2 —″—

Ако: e_1 и e_1 са изрази, то
$(e_1 + e_2)$ е валид израз.
$(e_1 * e_2)$ е валид израз.
и нищо др. не е валиден израз.

0 валидно
01 невалидно.
((0+2)*1) валидно
(0+2)*1 невалидно (няма скоби)
0+1 невалидно.
(0*1) валидно.