# Домашна работа - теория

ДИС1, специалност "Компютърни науки"
25 ноември 2019г.

1. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функция, дефинирана в цялата реална права.
(а) Какво означава функцията $f$ да е ограничена отгоре? А какво означава това да не е вярно?
(б) Какво означава функцията $f$ да има най-голяма стойност? А какво означава това да не е вярно?
(в) Формулирайте дефинициите за непрекъснатост на дадена функция във формата на Хайне и във формата на Коши, както и техните логически отрицания.

2. Нека дадена редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ от реални числа е ограничена.
(а) Числото $\lambda$ се нарича *съществена мажоранта* на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако множеството $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq \lambda\}$ е кофинитно. Докажете, че множеството от съществените мажоранти на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничено отдолу и точната му долна граница е най-дясната точка на сгъстяване на дадената редица. Най-дясната точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича *limes superior* на редицата и се означава с $\limsup\ a_n$.
(б) Нека $c_n := \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ за всяко естествено $n$. Докажете, че $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща и ограничена и

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \limsup a_n \ .$$

(в) Проверете, че за всяко положително $\varepsilon$ почти всички членове на редицата са в интервала $(-\infty, \limsup a_n + \varepsilon)$.

3. Нека $\{a_{ij}\}_{i,j\geq 1}$ е множество от реални числа, номерирано с наредени двойки естествени числа (може да си мислите за матрица, която е безкрайна надолу и надясно). Известно е, че за всяко $i \in \mathbb{N}$ е в сила

$$\lim_{j\to\infty} a_{ij} = y_i$$

(т.е. всеки ред е сходящ) и също така, че за всяко $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{i\to\infty} a_{ij} = x_j \ .$$

Нека освен това за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $i_0$ такова, че за всяко $i \geq i_0$ и всяко $j \in \mathbb{N}$ е изпълнено $|a_{ij} - x_j| < \varepsilon$ (т.е. стълбовете също са сходящи, при това равномерно). Да се докаже, че редиците $\{x_j\}_{j\geq 1}$ и $\{y_i\}_{i\geq 1}$ са сходящи, като при това границите им съвпадат.

**Упътване:** Първо проверете, че редицата $\{x_j\}_{j\geq 1}$ е фундаментална.