Упражнение 3

Атанас Груев

11.10.2019

1 Кратка теория

> На теория няма разлика между теорията и практиката. Но на практика има.
>
> *Жан Л.А. ван дер Снепшот*

След две упражнения, в които отделихме значително време на теория - припомняне на дефиниции, въвеждане на математическа нотация, даване на графични примери, извеждане на тригонометрични формули - в третото упражнение поставяме акцент на практическата част, т.е. решаването на задачи. Ползваме теорията, която може да бъде намерена в Упражнение 2 от 08.10.2019 г.

Силно ви съветвам самостоятелно да се опитате и да решите предложените тук задачи, след което да проверите своите решения. Сами може да откриете по-хубави или удобни за вас подходи или пък да намерите грешка в разсъжденията тук. Задачите, които ще срещате, ще изискват разбиране на материала, така че е наивно да се мисли, че решенията могат да се наизустят.

2 Задачи

Отново черпим материал от Ръководството по математически анализ на Любенова, Недевски и др., като се съсредоточаваме върху задачи от Глава 0, Параграф 6. Те изискват някои съображения, а понякога - разглеждане на случаи.

- Задача 6.6 Да се докаже, че

  $$\arcsin\left(2x^2-1\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - 2\arcsin x, & -1 \leq x \leq 0 \\ -\frac{\pi}{2} + 2\arcsin x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

  Можем да решим задачата с едно полагане, а може и с две полагания. Нека положим $\arcsin x = \alpha$, като $x = \sin\alpha$ и $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Необходимо е да разгледаме следните два случая:

  1. $-1 \leq x \leq 0$ - с помощта на графика върху единичната окръжност се съобразява, че $\arcsin x$ се мени между $-\frac{\pi}{2}$ и 0, т.е. това е интервалът на α $\left(\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]\right)$. Същото заключение може да се направи и като ползваме, че $\arcsin x$ е растяща функция и $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

2. $0 \leq x \leq 1$ - отново графично лесно се вижда, че за тези стойности на x е в сила: $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Може да се провери с монотонността на arcsin.

Иска се да проверим, че:

$$\arcsin\left(2\sin^2\alpha - 1\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - 2\alpha, & -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0 \\ -\frac{\pi}{2} + 2\alpha, & 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Преди всичко, да преобразуваме лявата страна:

$$\arcsin\left(2\sin^2\alpha - 1\right) = \arcsin\left(-\left(1 - 2\sin^2\alpha\right)\right) = \arcsin\left(-\cos 2\alpha\right) =$$
$$= \arcsin\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

По време на упражнение се убедихме, че винаги е необходимо да проверяваме интервала на аргумента, тъй като фиксирахме биекцията за интервалите $[-1, 1] \iff \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ в случая на arcsin и sin. Имаме:

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0 \Rightarrow 2\alpha - \dfrac{\pi}{2} \in \left[-\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \pi + \left(2\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 2\alpha - \dfrac{\pi}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

В първия случай, изместването на аргумента с π дава правилния интервал. Ползваме формулата:

$$\sin\left(x + \pi\right) = \sin x \cos \pi + \sin \pi \cos x = -\sin x$$

Прилагаме това равенство:

$$\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\pi + \left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$$

Следователно, за $-1 \leq x \leq 0$ или $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0$ е в сила:

$$\arcsin\left(2\sin^2\alpha - 1\right) = \arcsin\left(\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right) = -\frac{\pi}{2} - 2\alpha$$

Във втория случай директно се намираме в желания интервал, значи можем директно да приложим това, което знаем за обратните функции:

$$\arcsin\left(2\sin^2\alpha - 1\right) = \arcsin\left(\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{\pi}{2} + 2\alpha$$

Убедете се, че с това доказахме двата случая, които изисква задачата.

- Задача 6.12 б) Иска се да докажем, че:

$$\cos\left(2\arctan x\right) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

Извършваме полагане $\arctan x = \alpha$, за което е изпълнено $x = \tan\alpha$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (помним, че в крайните точки $\pm\frac{\pi}{2}$ функцията tan не е дефинирана). След заместване имаме:

$$\cos\left(2\alpha\right) \stackrel{?}{=} \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$$

Наистина, тази формула е в сила и беше изведена в предишното упражнение. Ако искаме да сме напълно формални, трябва да разпишем лявата страна (т.е.$\cos(2\alpha)$) до израза, който седи вдясно от знака за равенство, т.е.

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1 - \left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2} = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$$

Доказахме, че желаното равенство наистина се удовлетворява.

- Задача 6.17 Иска се да докажем, че е изпълнено:

$$\arctan\frac{x-1}{x+1} = \begin{cases} \arctan x - \dfrac{\pi}{4}, & x > -1 \\ \arctan x + \dfrac{3\pi}{4}, & x < -1 \end{cases}$$

Ще извършим полагане $\arctan x = \alpha$. Разбира се, $x = \tan\alpha$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Преобразуваме израза отляво:

$$\arctan\frac{x-1}{x+1} \overset{x \to \alpha}{\Rightarrow} \arctan\frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1} = \arctan\frac{\tan\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{\tan\alpha\,.\,\tan\frac{\pi}{4} + 1} = \arctan\left(\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Тук хитро използвахме формулата от редовното упражнение:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Разглеждаме два случая:

1. $x > -1$. Това изисква $\tan\alpha > -1$, което е изпълнено за $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$. От друга страна, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, следователно:

$$\left[\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)\right] \cap \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

В този случай $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\alpha - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. Това е "хубав" интервал за arctan и tan, т.е.

$$\arctan\left(\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \alpha - \frac{\pi}{4}$$

2. $x < -1$. Аналогични съображения дават, че $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$. Поначало $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, така че:

$$\left[\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right)\right] \cap \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$$

Тогава $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ и $\alpha - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{-\pi}{2}\right)$. Ако добавим π, ще се преместим в удобния интервал $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, затова ползваме формулата:

$$\tan\left(\pi + \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\tan\pi + \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \tan\pi\,.\,\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

Да заключим, че $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right)$, откъдето:

$$\arctan\left(\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right)\right) = \alpha + \frac{3\pi}{4}$$

Съгласно нашето полагане и проверка на двата случая, задачата е решена.

- Задача 6.22 Да се намери:

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = ?$$

Задачата ще решим с два полагания:

$$\underbrace{\arctan x}_{\alpha} + \underbrace{\arctan\frac{1}{x}}_{\beta} = ?$$

Ясно е, че $x = \tan\alpha$ и $\frac{1}{x} = \tan\beta$, където $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ще използваме, че можем да изразим x чрез α и β:

$$x = \tan\alpha \text{ и } \frac{1}{x} = \tan\beta \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta} \Rightarrow \tan\alpha\tan\beta = 1$$

Разглеждаме два случая в зависимост от знака на x:

1. $x > 0$. Тогава $\tan\alpha > 0$ и $\tan\beta > 0$. Лесно се проверява с помощта на единичната окръжност, че $\tan x > 0 \iff x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ за някакво x. Обаче $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и сечението на интервалите дава:

$$\left[\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)\right] \cap \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Следователно в този случай $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Освен това знаем, че $\tan\alpha\tan\beta = 1$. Да разпишем подробно:

$$\tan\alpha\tan\beta = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)} = 1$$

Сега:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = 0$$

Имаме системата:

$$\begin{cases} \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos(\alpha + \beta) = 0 \end{cases}$$

При положение, че $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то със сигурност $\alpha + \beta \in (0, \pi)$. Освен това, в интервала $(0, \pi)$ функцията $\cos$ се нулира само за стойност на аргумента си $\frac{\pi}{2}$. Това означава, че в този случай $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

2. $x < 0$. Разсъжденията ни са анлогични - $\tan\alpha < 0$ и $\tan\beta < 0$. Вижда се, че $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. От друга страна, поначало $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и сечението им е:
$$\left[\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right] \cap \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$
Оттук е ясно, че $\alpha + \beta \in (-\pi, 0)$ и след преобразуванията, които имаме в първия случай, получаваме:
$$\cos(\alpha + \beta) = 0 \iff \alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}$$
Това е единствената възможност в интервала $(-\pi, 0)$. Следователно, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Решението е:
$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} +\frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

- Задача 6.23 в) - Подточка б) решихме в час, а подточка а) е разписана и прикачена отделно в Dropbox-а, папка Др. материали. Трябва да докажем, че:
$$\arcsin\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right) = \frac{\arcsin x}{2}, \quad |x| \leq 1$$
Това се доказва със същата хитрост, която използвахме в решението на подточка б). Полагаме $\arcsin x = \alpha$. Тогава $x = \sin\alpha$ за $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Сега искаме:
$$\arcsin\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right) \stackrel{?}{=} \frac{\alpha}{2}$$
Ще преобразуваме лявата страна:
$$\arcsin\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right) =$$
$$= \arcsin\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right) =$$
$$= \arcsin\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right) =$$
$$= \arcsin\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right) =$$
$$= \arcsin\frac{1}{2}\left(\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right) - \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \arcsin\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$
Важно е да съобразим, че $\frac{\alpha}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, т.е. в този интервал е в сила $\cos\frac{\alpha}{2} \geq \sin\frac{\alpha}{2}$, като равенство се достига в краищата на интервала. Това обяснява защо във втория

радикал записахме $\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)$ - след коренуване изразът излиза без модул, защото приема единствено неотрицателни стойности. Накрая, тъй като α е в "хубав" интервал, можем да напишем:

$$\arcsin\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

Това е точно което искахме да докажем.