NO DATE

Комбинаторни конфигурации.

Комбинаторни конфигурации - строим от елементите на някое крайно множество (опорно множество), комбинирайки ги по зададени правила.

A - опорно множество.
$A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

A има мощност n и от него се взимат елементи за изграждането на комбинаторни конфигурации.

Конфигурациите имат големина.

В зависимост от това, използваме или не повторение на елементи при построяване на конфигурациите и от това, дали използваме или не наредба, получаваме 4 основни типа комбинаторни конфигурации:

NO DATE

1. Комбинаторни конфигурации с наредба и повторение.

$$|K_{н,п}(n, m)| = |A^m| = n^m$$

брой елементи на A (мощност)

големината на комбинаторната конфигурация

Конфигурациите са вектори с дължина m.

$K_{н,п}$ - множеството, в което всеки елемент е наредена m-орка с елементи от образуващото множество, като един елемент може да участва произволен брой пъти в m-орката.

Пр: $A = \{0, 1\}$. $m = 3$

$K_{н,п}(2, 3) = \{000, 001, \ldots, 111\}$.

NO DATE

2. Комбинаторни конфигурации с наредба без повтаряне

$$|K_H(n,m)| = n(n-1)\dots(n-m+1) = \prod_{k=0}^{m-1}(n-k)$$

$= n-(m-1)$

мощност на образуващото множество.

дължина на комб. конф.

$n \geq m$, ако $m>n$ $K_H(n,m) = \varnothing$.

за първия елем — n възможности
за втория елемент — $(n-1)$ възможности
за последния елемент — $(n-m+1)$ възможности.

$(n-(m-1))$

мощността ~~минус~~ всеки ~~ел. без последния~~

възм. конфигурации до ~~пре~~последния ел. (включително)

~~да се до~~ броя на множителите трябва да е m

защото е последния елемент (иначе се губи един елемент)

$K_H(n,m)$ — множество от наредени m-торки с елементи от образуващото множество, в което всеки елемент участва не повече от 1 път.

(вариации ~~от~~ на n елемента от m-ти клас. — V_n^m)

с наредба без повтаряне.

Пр: $A = \{0,1,2\}$ $m=2$ ~~(0,0)~~

$K_H(n,m) = \{(0,1),(0,2),(1,0),(1,2),(2,0),(2,1)\}$

Пр.: NO DATE с наредба
$n=m$. без повторение.

Пермутации - частен случай на вариацията, при който $n=m$.

комб. конф. в този случай са векторите, които съпоставят на биекцията $f: A \to A$.

$$\mathcal{K}_н(n,n) = n!$$

3. Комбинаторни конфигурации без наредба, без повторение

$$|\mathcal{K}(n,m)| = \frac{K_н(n,m)}{m!} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}$$

Отсъствието на наредба и повторение означава, че разглежданите конфигурации са ~~[illegible]~~ m-елементните подмножества на опорното множество.

$\binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q} = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}$

без наредба
без повторение

Комбинации - на n елемента от m-ти клас.

$|K(n,m)| = \frac{K_H(n,m)}{m!}$ - тази формула се

извежда съгласно комбинаторния принцип на делението.

Над $K_H(n,m)$ се въвежда R.

$R \subseteq K_H(n,m) \times K_H(n,m)$:

$a, b \in K_H(n,m)$: $aRb \Leftrightarrow a, b$ има едни и същи елементи.

$\Rightarrow R$ е релация на еквивалентност.

$\Rightarrow \exists$ класове на еквивалентност.

Всеки клас на еквивалентност на R има точност $m!$ ($m!$ възможности за ротация за получаване на дадения клас).

Забележка:

Конфиг. без наредба са с $m!$ пъти по-малко, тъй като с наредба има значение, кой елемент къде е поставен, а при тези без наредба няма значение и така ~~в сравнение~~ се извършват $m!$ повторения за различното място на всеки елемент.

NO DATE

Биномен коефициент. - $\binom{n}{m}$

n-choose-m.

$\binom{n}{m}$ $n \to$ горен индекс, $m \to$ долен индекс.

$$\binom{n}{m} = \frac{(n-m+1)\dots n}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ за } k > n.$$

$\binom{n}{0} = 1$ - търсим множ с 0 ел. $\Rightarrow$ ф. ($\exists$ 1)

$\binom{n}{1} = n$

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}$

брой на ненаредед. 2ки.

$\binom{n}{n-1} = n$

$\binom{n}{n} = 1$

симетрия.

NO DATE

Нютонов бином.

За всяко естествено число n и реални x и y е в сила.

$$\underbrace{(x+y)^n}_{\text{бином.}} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{биномен коефициент.}} x^{k} y^{n-k}$$

заради
∃ симетрия.
(общ. бр. n)

Доказателство:

При повдигане бинома $x+y$ на n-та степен всеки едночлен от вида $x^m y^{n-m}$ ще се получи толкова пъти, по колкото начина можем да изберем m множителя измежду n-те, от които вземаме x (от останалите $n-m$ избираме y), а това е точно броят на ненаредените конфигурации без повторение $\binom{n}{m}$.

Броят на всички подмножества на множество с n елемента можем да изразим като сума на броя на m елементните му подмножества за $m=0,1,\dots,n$.

$$2^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}$$

NO DATE

Теорема.

Нека $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$. Тогава

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Доказателство:

A - опорно множество

$|A| = n$.

$\binom{n}{k}$ е броят на k елементните подмножества на A.

$a \in A$, a - произв.

S_1 - конфигурациите, които съдържат a.

S_2 - конфигурациите, които не съдържат a.

$\Rightarrow |S_1| + |S_2| = \binom{n}{k}$

$|S_2| = \binom{n-1}{k}$ - k елементна конфигурация с възможност за избор м/у $n-1$ елемента, защо S_2 съдържа всички конфигурации не съдърж. a, а $a \in A$.

$$\{\underbrace{\sqcup, \sqcup, \ldots, \sqcup}_{k}\}$$

$$|S_1| = \binom{n-1}{k-1}$$

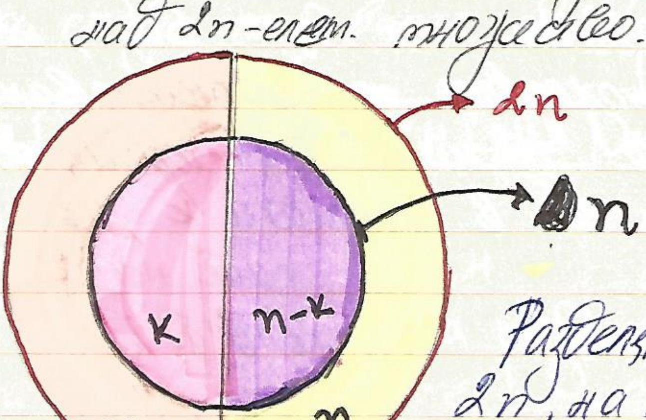
n-1, защото единия елемент е a,
а k-1, защото единия елемент е a,
т.е. има избор м/у n-1 елементи на k-1 места.

$$\{ \underbrace{\underline{a}, \underbrace{\_, \dots, \_}_{k-1}}_{k} \}$$

Теорема.
Нека $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$. Тогава.

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

броят на n-елементните подмножества над 2n-елем. множество.

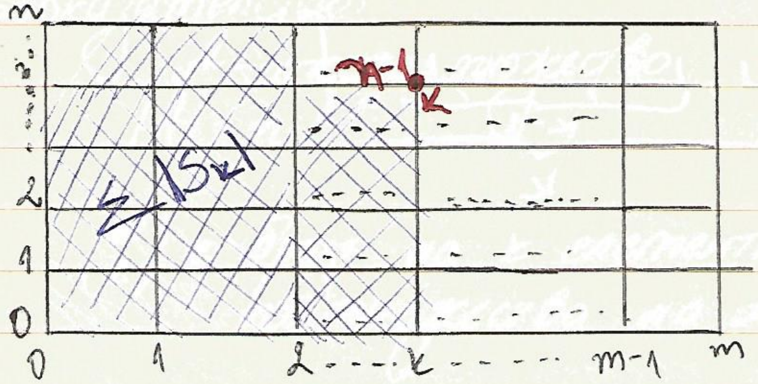


Разделяме множеството 2n, на 2 части с по n елемента и от определени ~~[illegible]~~ елементи от 2-те множества, образуваме трето с n елемента, от което взимаме k елемента. => остават n-k елемента.

Теорема.

Нека $n, m \in \mathbb{N}$. Тогава

$$\binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{k}$$



$\binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{n}$ - общия брой ходове на таблата.

Множеството от всички придвижвания се разбива на $S_0, \dots, S_m$, където S_k е множеството от придвижвания, които се достигат най-горния ред за пръв път в колоната k, $0 \le k \le m$.

$n-1$ - ред k - стълб.

$$\binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n-1+k}{k}$$

4. Комбинаторни конфигурации без наредба, с повторение.

$$|K_n(n,m)| = \binom{m+n-1}{n-1} = \binom{m+n-1}{m} = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!\,m!}$$

$$\binom{m+n-1}{n-1} = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!\,(m+n-1-n+1)!} \qquad \binom{m+n-1}{m} = \frac{(m+n-1)!}{m!\,(m+n-1-m)!}$$

Получените конфигурации са мултимножества.

Забележка (Разяснение на формулата):

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $\to n = 5$ $\quad m = 6$.

m - големина на конф.

$n-1$ - броя на запетайките.

Общ. броя на кутийките - за поставяне на ел. е $m+n-1$

Представете си полученото множество като масив от m-елемента и $n-1$ запетайки, като когато даден ел. липсва поставяте запетайка и между 2 не еднотипни елемента също поставяте запетайка.

1	,	2	3	3	,	4	4	,	5

= [1, 3, 3, 4, 5, 4]

2-ката липсва

1 и 3 са различни.

3 и 4 са различни

4 и 5 са различни.

Броят на конфигурациите е равен на броя на различните начини по които можем да изберем място на $n-1$ запетайки в $m+n-1$ - различни кутийки.

NO DATE

Брой на пермутациите на n различни елемента от вида k.

$$|P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}| = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots n_k}$$

мултиномен коефициент

Забележка:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!\,(n-\underbrace{(n_1+n_2+\dots+n_k)}_{n\text{ - разл. ел. от вида } k})!}$$

Вида на записване е подобен на този на биномния коефициент и то не случайно. Биномния коефициент е частен случай на мултиномния при $k=2$.

$$(x+y)^n = \sum_{m_1+m_2=n} \frac{n!}{m_1!\, m_2!} x^{m_1} y^{m_2}.$$

$$m_1 = n-q \qquad m_2 = q.$$

$$(x+y+z)^n = \sum_{m_1+m_2+m_3=n} \frac{n!}{m_1!\, m_2!\, m_3!} x^{m_1} y^{m_2} z^{m_3}.$$

За всяко естествено число n и реални числа $x_1, x_2, \dots, x_k$ е в сила:

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)^n = \sum_{m_1+m_2+\dots+m_k=n} \underbrace{\frac{n!}{m_1!\, m_2! \dots m_k!}}_{\binom{n}{m_1, m_2, \dots, m_k}} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k}.$$