Упражнение 15-16

Атанас Груев

19.11.2019 и 25.11.2019

1 Кратка теория

По време на упражненията беше припомнено *правилото на Лопитал.*

Правило на Лопитал:

Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ клонят към 0 или ∞ за $x \to a$, то за пресмятане на границата от частното на функциите можем да използваме следното правило:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

За целта е необходимо втората граница да съществува и функциите f, g да бъдат дефинирани и диференцируеми в околност на точката a ($x \neq a$ и $g'(x) \neq 0$). Точката a може да бъде $\pm\infty$, като под околност на $+\infty$ разбираме всеки неограничен отдясно интервал (аналогично за околност на $-\infty$).

2 Задачи

Съсредоточаваме се върху Ръководството на Любенова, Недевски и др. - Параграф 11, зад. 11.1 и 11.2. В Сборника на ПХЧ са поместени хубави задачи за упражнение - зад. 69 - 78. Препоръчително е да се прегледат.

- Ръководство - зад. 11.1, подочка и) - да се пресметне границата:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$$

Прилагаме правилото на Лопитал и помним, че $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \overset{L}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x\left[x^x(\ln x + 1) - 1\right]}{1 - x} \overset{L}{=}$$

$$\overset{L}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1 + x\left(x^x(\ln x + 1)^2 + x^x\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{-1} =$$

$$= -\lim_{x\to 1} x^x(\ln x + 1) - 1 + x\left(x^x(\ln x + 1)^2 + x^x\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -2$$

- Ръководство - зад. 11.1, подточка и) - намерете границата:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

Логаритмуваме и прилагаме правилото на Лопитал към границата в степенен показател на e. Наистина, условието за Лопитал е да имаме неопределеност от вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, така че логаритмуването е наложително:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\operatorname{tg} 2x \ln \operatorname{tg} x} = e^{\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\ .\ \operatorname{tg} 2x \ln \operatorname{tg} x\right)}$$

Да пресметнем новата граница:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x\,.\,\ln \operatorname{tg} x = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} 2x} \overset{L}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\sin^2 2x\,.\,2}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin^2 2x}{2\,.\,\operatorname{tg} x\,.\,\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin^2 x\,.\,\cancel{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x\,.\,\cancel{\cos^2 x}} = -1$$

Да заключим, че оригиналната граница е e^{-1}.

- Ръководство - зад. 11.1, подточка р) - да се намери границата:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$$

Полагаме $y := e^x - 1$ и съобразяваме, че $x \to 0 \iff y \to 0$. Границата придобива вида:

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{\ln(y+1)}\right)^{\frac{1}{y}}$$

Да приложим знанията си за функции, чиято граница е e. По-точно, извършваме следните преобразувания:

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{\ln(y+1)}\right)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0}\left(1+\frac{y-\ln(y+1)}{\ln(y+1)}\right)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0}\left(1+y\,.\,\frac{y-\ln(y+1)}{y\,.\,\ln(y+1)}\right)^{\frac{1}{y}}$$

Вижда се, че това е границата при $y \to 0$ от $e^{g(y)}$, където за краткост сме означили:

$$g(y) = \frac{y-\ln(y+1)}{y\,.\,\ln(y+1)}$$

Остава да пресметнем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{y-\ln(y+1)}{y\,.\,\ln(y+1)} \overset{L}{=} \lim_{y\to 0}\frac{1-\frac{1}{y+1}}{\ln(y+1)+y\,.\,\frac{1}{y+1}} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{(y+1)\ln(y+1)+y} \overset{L}{=}$$

$$\overset{L}{=} \lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(y+1)+\frac{y+1}{y+1}+1} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lim_{y\to 0} e^{g(y)} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

- Ръководство - зад. 11.2, подточка п) - пресметнете границата:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Преобразуваме израза, като го запишем като $e^{\ln(.)}$. Това налага да пресметнем граница от частно на две функции в степенния показател на e. Тази нова граница е удобна за прилагането на Лопитал:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{1}{x}\,.\,\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)\right)}=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\,.\,\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)\right)\right\}$$

Сега пресмятаме новата граница, която е неопределеност от вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)}\right)\left(\frac{\pi}{(2x+1)^2}\right)=$$

$$=\pi\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)(2x+1)^2}=2\pi\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)(2x+1)^2}=$$

$$=2\pi\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{(2x+1)^2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)}\overset{L}{=}2\pi\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{-4x}{(2x+1)^4}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)\left(\frac{2\pi}{(2x+1)^2}\right)}=$$

$$=2\pi\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)}\,.\,\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{2\pi\,(2x+1)^2}=2\pi\,(-1)\left(\frac{1}{2\pi}\right)\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{4x^2+4x+1}=0$$

Следователно оригиналната граница е $e^0=1$.

- Сборник ПХЧ - зад. 69, подточка е) - да се намери границата:

$$\lim_{x\to2}\frac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$

Директно прилагаме правилото на Лопитал:

$$\lim_{x\to2}\frac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}\overset{L}{=}\lim_{x\to2}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-(2-x)^2}}(-1)}{\frac{1}{2\sqrt{x^2-3x+2}}(2x-3)}=\lim_{x\to2}\frac{-2\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{1-(2-x)^2}\,(2x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-2\sqrt{(x-2)\,\cancel{(x-1)}}}{(2x-3)\sqrt{(3-x)\,\cancel{(x-1)}}}=\lim_{x\to2}\frac{-2\sqrt{2-x}}{(2x-3)\sqrt{3-x}}=0$$

Знаменателят не се нулира и можем да ползваме непрекъснатостта на функциите от търсената граница.

- Сборник ПХЧ - зад. 71, подточка в) - да се пресметне:

$$\lim_{x\to-1}\frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$$

Можем да приложим правилото на Лопитал:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} \stackrel{L}{=} \lim_{x\to -1} \frac{\frac{1}{1+x}}{\cos^{-2}\left(\frac{\pi x}{2}\right) . \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \lim_{x\to -1} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1+x}$$

Все още имаме неопределеност - отново Лопитал:

$$\frac{2}{\pi} \lim_{x\to -1} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1+x} \stackrel{L}{=} \frac{2}{\pi} \lim_{x\to 1} 2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) . \frac{\pi}{2} = 0$$

- Сборник ПХЧ - зад. 74, подточка в) - да се намери границата:

$$\lim_{x\to 1} \ln x \,.\, \ln(1-x)$$

За този пример Лопитал не може да се приложи непосредствено, тъй като имаме неопределеност от вида $[0.\infty]$. В такива случаи обикновено е добра идея една от функциите да се запише по подходящ начин в знаменател, за да се получи неопределеност от желания вид - $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Процедираме така:

$$\lim_{x\to 1} \ln x \,.\, \ln(1-x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(1-x)}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)} \stackrel{L}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\left(\frac{1}{1-x}\right)\cancel{(-1)}}{\cancel{(-1)}\left(\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln^2 x}{1-x} \stackrel{L}{=}$$

$$\stackrel{L}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln^2 x + 2x\ln x \,.\, \frac{1}{x}}{-1} = -\lim_{x\to 1}\left(\ln^2 x + 2\ln x\right) = 0$$

Съобразете защо трябва да приложим Лопитал повторно (отново неопределеност) и се убедете, че диференцирането е правилно извършено. След първоначалното съображение за уместен запис на границата, с правилото на Лопитал лесно намираме нейната стойност.

- Сборник ПХЧ - зад. 76, подточка в) - пресметнете:

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$$

Както обикновено, представяме израза в подходящ вид и прилагаме Лопитал:

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x \,.\, \ln \operatorname{cotg} x}$$

Разглеждаме границата:

$$\lim_{x\to 0} \sin x \,.\, \ln \operatorname{cotg} x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{cotg} x}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)} \stackrel{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{cotg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\operatorname{cotg} x \,.\, \cos x} = 0$$

Убедете се, че наистина това е търсената граница.

- Сборник ПХЧ - зад. 77, подточка а) - да се намери:

$$\lim_{x\to 0} x^x$$

представяме x^x чрез логаритмуване и прилагаме Лопитал в степенния показател на e:

$$\lim_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0} x\ln x} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} \stackrel{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{x} = 0$$

Остава само да заключим, че границата е $e^0 = 1$.

- Сборник ПХЧ - зад. 78, подточка г) - да се намери границата:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{cotg} x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$$

Преди да приложим правилото на Лопитал, трябва да приведем под общ знаменател и да се убедим, че се получава неопределеност, която е подходяща. Наистина, тук имаме:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{cotg} x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2x\cos x - \pi\operatorname{cotg} x}{2\cos x\operatorname{cotg} x} \stackrel{L}{=}$$

$$\stackrel{L}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x - 2x\sin x + \left(\frac{\pi}{\sin^2 x}\right)}{-2\sin x\operatorname{cotg} x - 2\cos x\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x\cos x - 2x\sin^3 x + \pi}{-2\sin^2 x\cos x - 2\cos x} \stackrel{L}{=}$$

$$\stackrel{L}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x\,(\cos x)\cos x + 2\sin^2 x\,(-\sin x) - 2\sin^3 x - 2x\,.\,3\sin^2 x\cos x}{-4\sin x\,(\cos x)\cos x - 2\sin^2 x\,(-\sin x) + 2\sin x} =$$

$$= \frac{4\,.\,1\,.\,0^2 - 2\,.\,1^3 - 2\,.\,1^3 - \pi\,.\,3\,.\,1\,.\,0}{(-4)\,.\,1\,.\,0^2 + 2\,.\,1^3 + 2\,.\,1} = \frac{-2-2}{2+2} = -1$$

След първото прилагане на Лопитал приведохме отново под общ знаменател $\sin^2 x$. Оттам насетне внимателното прилагане на правилата за диференциране гарантира успех.