Упражнение 18-19

Атанас Груев

02.12.2019 и 03.12.2019

1 Кратка теория

1.1 Основна теорема на интегралното смятане (Принцип за константност)

Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ е отворен интервал, и освен това f е диференцируема в Δ. Тогава е изпълнено:

$$f \equiv const \iff f'(x) = 0 \; \forall x \in \Delta$$

С други думи, ако една диференцируема функция приема в отворен интервал единствена функционална стойност $c \in \mathbb{R}$, то нейната първа производна се нулира за всяка точка от интервала. Вярно е и обратното - ако производната на дадена функция в отворен интервал е нула, то тази функция е константна.

1.2 Принцип за монотонност

Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ е отворен интервал, е диференцируема в Δ. Тогава:

- f е растяща тогава и само тогава, когато $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in \Delta$.
- f е намаляваща тогава и само тогава, когато $f'(x) \leq 0 \; \forall x \in \Delta$.

Често използваме Принципа за монотонност, за да изследваме поведението на дадена функция върху интервал. Той е особено полезен при скицирането на графики на функции, но също така може да се използва за доказване на неравенства - решените по-долу задачи илюстрират това му приложение.

1.3 Локални екстремуми

Нека $f : D \to \mathbb{R}$ и $D \subset \mathbb{R}, a \in D$. Казваме, че a е **локален минимум** на f, ако съществува околност $U \subset D$ на a, така че за всяко $x \in U$ е изпълнено: $f(a) \leq f(x)$, т.е.

$$\exists U \subset D \; \forall x \in U : f(a) \leq f(x)$$

Аналогично, казваме, че a е **локален максимум** на f, ако съществува околност $U \subset D$ на a, така че за всяко $x \in U$ да е в сила: $f(a) \geq f(x)$, т.е.

$$\exists U \subset D \; \forall x \in U : f(a) \geq f(x)$$

Локален екстремум е или точка на локален максимум, или точка на локален минимум. Ако неравенствата по-горе са строги, говорим за **строги** локални екстремуми.

Редно е да напомним няколко факта за локалните екстремуми:

1. **Теорема на Ферма** - ако f е диференцируема в a и има локален екстремум в тази точка, то $f'(a) = 0$.

2. **Теорема на Вайерщрас** - ако f е дефиниране в интервал $[a, b]$ и е непрекъсната в него, то тя е ограничена и достига най-голяма и най-малка стойност.

3. Работна дефиниция на локален екстремум:

   ◇ Ако при $f'(a) = 0$ е изпълнено:
   $$\exists\, \delta > 0 : f(x) \geq 0 \;\forall\, x \in (a - \delta, a) \;\;\&\;\; f(x) \leq 0 \;\forall\, x \in (a, a + \delta),$$
   то a е точка на локален максимум.

   ◇ Ако при $f'(a) = 0$ е изпълнено:
   $$\exists\, \delta > 0 : f(x) \leq 0 \;\forall\, x \in (a - \delta, a) \;\;\&\;\; f(x) \geq 0 \;\forall\, x \in (a, a + \delta),$$
   то a е точка на локален минимум.

4. Точка x_0 може да бъде локален екстремум за функция f върху краен затворен интервал $[a, b]$, ако:

   ◇ $f'(x_0) = 0$.

   ◇ f не е диференцируема в x_0.

   ◇ x_0 е някой от краищата на интервала, т.е. $x_0 = a$ или $x_0 = b$.

2 Задачи

Основно разглеждаме задачи от Ръководството на Любенова, Недевски и др. - Параграф 7 (Принцип за константност) и Параграфи 8,9 (Принцип за монотонност). Още задачи могат да бъдат намерени в Сборника на Проданов, Хаджииванов, Чобанов - Параграф 8 (“Критерий за константност на функция”), Параграф 10 (“Критерий за монотонност”) и Параграф 11 (“Локални екстремуми”).

- Ръководство - зад. 7.3 - докажете (с диференциране) тъждеството:
  $$\arcsin \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 - 2x}} = \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{\pi}{8} \text{ при } |x| \leq 1$$
  Обикновено за решаването на задача от този вид е добра идея да дефинираме функция f, която представлява разлика на изразите от двете страни на равенството, което трябва да се докаже. Нека дефинираме:
  $$f(x) = \arcsin \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 - 2x}} - \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{\pi}{8}$$
  Сега диференцираме:
  $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 - 2x}}\right)^2}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 - 2x}}\right)' - \frac{1}{4\sqrt{1 - x^2}} =$$
  $$= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2 - 2x}\right)}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{2 - 2x}}} \cdot \frac{(-1)}{2\sqrt{2 - 2x}}(-2)\right) - \frac{1}{4\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2-2x}}}\left(\frac{1}{4\left(\sqrt{2-\sqrt{2-2x}}\right)\left(\sqrt{2-2x}\right)}\right) - \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2-2x}\right)\left(2-\sqrt{2-2x}\right)(2-2x)}} - \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}$$

Нека за удобство положим $y \coloneqq \sqrt{2-2x}$ само за израза вляво (преди минуса) и го опростим отделно:

$$\frac{1}{4\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{4}\right)(2-y)\left(y^2\right)}} = \frac{1}{4\sqrt{\left(\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{4}\right)(2-y)}} = \frac{1}{4\sqrt{y^2-\frac{y^4}{4}}}$$

Връщаме се към променливата x:

$$\frac{1}{4\sqrt{\left(\sqrt{2-2x}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\sqrt{2-2x}\right)^4}} = \frac{1}{4\sqrt{2-2x-\frac{1}{4}\left(4-8x+4x^2\right)}} = \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}$$

Последният израз се получава след привеждане под общ знаменател и очевидни преобразувания. Всичко казано дотук ни позволява да заключим, че:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2-2x}}}\left(\frac{1}{4\left(\sqrt{2-\sqrt{2-2x}}\right)\left(\sqrt{2-2x}\right)}\right) = \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}$$

Остава само да съобразим, че:

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \ \ |x| \le 1$$

Съгласно ОТИС, функцията f е константа в интервала. За да намерим тази константа, пресмятаме стойността на f в някоя точка x, за която $|x| \le 1$, например в точката нула. Наготово ще ползваме, че:

$$\left.\begin{aligned} &\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-0}}\right) = \frac{\pi}{8} \\ &\frac{1}{4}\arcsin(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(0) = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = 0$$

Следователно тъждеството от условието на задачата е доказано.

- Сборник (ПХЧ) - зад. 79, подточка в) - да се докаже тъждеството:

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} -\pi - 2\operatorname{arctg} x, & x \le -1 \\ 2\operatorname{arctg} x, & |x| < 1 \\ \pi - 2\operatorname{arctg} x, & x \ge 1 \end{cases}$$

Ще решим задачата, като разгледаме три случая за x - тези от условието, и за всеки съставим подходяща функция f. Нека пресметнем производната на аркуссинуса и поразсъждаваме върху получените резултати.

$$\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{1+x^2}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^2-4x^2}}\left(\frac{2\left(1+x^2\right)-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\right)$$

$$= \frac{\cancel{1+x^2}}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}}\left(\frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^{\cancel{2}}}\right) = \frac{1-x^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}}\cdot\frac{2}{1+x^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{|1-x|\,|1+x|}\cdot(2\operatorname{arctg}x)'$$

Ще отбележим две неща - модула в знаменател и представянето на втората дроб. Наистина, модулът в знаменател е съществен, тъй като x може да приема произволни реални стойност (съгл. условието на задачата). От друга страна, не е трудно да се съобрази, че $(2\operatorname{arctg}x)'$ е точно дясната дроб - ще предпочетем този запис. Сега остава да разгледаме трите случая:

- $x\le -1$. В този случай $|1-x|=(1-x)$ и $|1+x|=(-1-x)$. Дефинираме:

  $$f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}+\pi+2\operatorname{arctg}x \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow f'(x)=\frac{(1-x)(1+x)}{|1-x|\,|1+x|}\cdot(2\operatorname{arctg}x)'+(2\operatorname{arctg}x)'$$

  Заместваме модулите във f' и имаме:

  $$f'(x)=\frac{(1-x)(1+x)}{-(1+x)(1-x)}\cdot(2\operatorname{arctg}x)'+(2\operatorname{arctg}x)'=-(2\operatorname{arctg}x)'+(2\operatorname{arctg}x)'=0$$

  Функцията е константа. Стойността й ще определим в $x=-1$ (помним, че трябва да вземем стойност на x от интервала). Пресмятаме:

  $$f(-1)=\arcsin\frac{-2}{2}+\pi+2\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{2}+\pi-\frac{\pi}{2}=0$$

  Следователно:

  $$\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=-\pi-2\operatorname{arctg}x \quad \text{при } x\le -1$$

- $|x|<1$. В този случай $|1-x|=(1-x)$ и $|1+x|=(1+x)$. Дефинираме:

  $$f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-2\operatorname{arctg}x \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow f'(x)=\frac{(1-x)(1+x)}{|1-x|\,|1+x|}\cdot(2\operatorname{arctg}x)'-(2\operatorname{arctg}x)'$$

  Заместваме модулите във f':

  $$f'(x)=\frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x)}(2\operatorname{arctg}x)'-(2\operatorname{arctg}x)'=(2\operatorname{arctg}x)'-(2\operatorname{arctg}x)'=0$$

Отново се оказва, че функцията е константа. Да изберем $x = 0$ от интервала за този случай и да пресметнем:

$$f\left(0\right) = \arcsin\left(0\right) - 2\operatorname{arctg}\left(0\right) = 0$$

Следователно:

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x \quad \text{при } |x| < 1$$

◇ $x \geq 1$. В този случай $|1-x| = (x-1)$ и $|1+x| = (1+x)$. Дефинираме:

$$f\left(x\right) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2} - \pi + 2\operatorname{arctg} x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'\left(x\right) = \frac{\left(1-x\right)\left(1+x\right)}{\left|1-x\right|\left|1+x\right|} \,.\, \left(2\operatorname{arctg} x\right)' + \left(2\operatorname{arctg} x\right)'$$

Заместваме модулите във f' и имаме:

$$f'\left(x\right) = \frac{\left(1-x\right)\left(1+x\right)}{\left(1+x\right)\left(x-1\right)} \,.\, \left(2\operatorname{arctg} x\right)' + \left(2\operatorname{arctg} x\right)' = -\left(2\operatorname{arctg} x\right)' + \left(2\operatorname{arctg} x\right)' = 0$$

Очаквано, функцията е константа. За $x = 1$ пресмятаме:

$$f\left(1\right) = \arcsin\frac{2}{2} - \pi + 2\operatorname{arctg}\left(1\right) = \frac{\pi}{2} - \pi + \frac{\pi}{2} = 0$$

Следователно:

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi - 2\operatorname{arctg} x \quad \text{при } x \geq 1$$

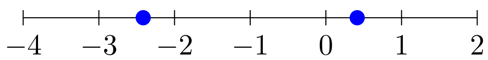
Това завършва доказателството на тъждеството.

- Ръководство - зад. 8.1, подточка г) - намерете локалните екстремуми на функцията:

$$f\left(x\right) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

Диференцираме функцията и разглеждаме знаците на производната в различните интервали на монотонност, които се определят от стойностите, в които производната се нулира. Имаме:

$$f'\left(x\right) = \frac{\left(x^2+1\right) - \left(x+1\right)\left(2x\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{\left(1+x^2\right)^2} = -\frac{\left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$



Лесно се вижда, че потенциални екстремуми са $x = \sqrt{2} - 1$ и $x = -\sqrt{2} - 1$. Проверяваме знаците на производната - това ще ни даде интервалите, в които функцията f расте и намалява съответно.

- ◇ За $x \geq \sqrt{2} - 1$ знакът е $-$.
- ◇ За $-\sqrt{2} - 1 \leq x \leq \sqrt{2} - 1$ знакът е $+$.
- ◇ За $x \leq -\sqrt{2} - 1$ знакът е $-$.

Следователно f намалява до $x = -\sqrt{2} - 1$, расте до $x = \sqrt{2} - 1$ и после отново намалява. Действително двете точки са локални екстремуми - $x = \sqrt{2} - 1$ е локален максимум и $x = -\sqrt{2} - 1$ е локален минимум. При това:

$$f\left(\sqrt{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right) \quad \text{и} \quad f\left(-\sqrt{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2}\right)$$

- Ръководство - зад. 8.1, подточка к) - намерете локалните екстремуми на функцията:

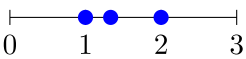
$$f(x) = (1 - x)^{\frac{1}{3}} (2 - x)^{\frac{2}{3}}$$

Нека диференцираме и съобразим в кои точки се нулира $f'(x)$. Така ще определим интервалите на монотонност на функцията f:

$$f'(x) = \left[\frac{1}{3}(1 - x)^{-\frac{2}{3}}(-1)\right](2 - x)^{\frac{2}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3}(2 - x)^{-\frac{1}{3}}(-1)\right] =$$

$$-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(2 - x)^2}{(1 - x)^2}} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1 - x}{2 - x}} = \frac{1(2 - x) - 2(1 - x)}{3\sqrt[3]{(1 - x)^2 (2 - x)}} = \frac{3x - 4}{3\sqrt[3]{(1 - x)^2 (2 - x)}}$$

Интересните точки са $x = \frac{4}{3}$, както и точките, в които първата производна не е дефинирана - $x = 1$ и $x = 2$. Нанасяме ги върху реалната права и намираме знаците на f'.



Имаме:

- ◇ За $x \geq 2$ знакът е $-$.
- ◇ За $\frac{4}{3} \leq x \leq 2$ знакът е $+$.
- ◇ За $1 \leq x \leq \frac{4}{3}$ знакът е $-$.
- ◇ За $x \leq 1$ знакът е $-$.

Фукнцията е намаляваща в интервала $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$, растяща в интервала $\left[\frac{4}{3}, 2\right]$ и после отново намаляваща в интервала $(2, +\infty)$. Веднага се съобразява, че локален максимум се достига в $x = 2$, а локален минимум - в $x = \frac{4}{3}$. Остава само да пресметнем функционалните стойности в тези точки:

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2\,3} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3} \quad \text{и } f(2) = (-1)^{\frac{1}{3}} .0 = 0$$

- Ръководство - зад. 8.1, подточка п) - да се намерят локалните екстремуми на:

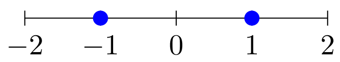
$$f\left(x\right)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$$

Решението е сходно на подхода при горните задачи. Диференцираме:

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}}\left(\frac{2\left(1+x^2\right)-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\right)=$$

$$\frac{\cancel{1+x^2}}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^2-4x^2}}\left(\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^{\cancel{2}}}\right)=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left|1-x^2\right|\left(1+x^2\right)}=\frac{\left(1-x\right)\left(1+x\right)}{\left|1-x\right|\left|1+x\right|}\cdot\frac{2}{1+x^2}$$

Интересните точки, от които зависи знака на $f'\left(x\right)$, са $x=\pm1$. Нанасяме ги върху реалната права:



- $\diamond$ За $x\geq1$ знакът е $-$.
- $\diamond$ За $-1\leq x\leq1$ знакът е $+$.
- $\diamond$ За $x\leq-1$ знакът е $-$.

Екстремалните точки са $x=1$ и $x=-1$. Първата е точка на локален максимум, а втората - на локален минимум. Пресмятаме функционалните стойности:

$$f\left(-1\right)=\arcsin\frac{-2}{2}=\arcsin\left(-1\right)=-\frac{\pi}{2}\quad\text{и}\quad f\left(1\right)=\arcsin\left(1\right)=\frac{\pi}{2}$$

- Ръководство - зад. 9.1, подточка д) - докажете неравенството:

$$1+\alpha\ln x\leq x^\alpha\quad\text{при } x,\alpha>0$$

Образуваме функцията $f\left(x\right)=1+\alpha\ln x-x^\alpha$. За $x,\alpha>0$ изследваме тази функция, т.е. намираме нейната първа производна и съобразяваме къде f расте и къде намалява:

$$f'\left(x\right)=\frac{\alpha}{x}-\alpha x^{\alpha-1}=\alpha\,.\,\frac{1-x^\alpha}{x}\overset{?}{=}0$$

Питаме се къде се нулира първата производна. Тук е от съществено значение условието $x,\alpha>0$. На практика, трябва да установим кога е в сила $x^\alpha=1$; тъй като $\alpha>0$, то единствената възможност е $x=1$. Следователно имаме, че:

- $\diamond$ За $x\geq1$ знакът на f' е $-$.
- $\diamond$ За $0<x\leq1$ знакът на f' е $+$.

Следователно в точката $x = 1$ се достига локален максимум. Можем да заключим, че $f(1) \geq f(x) \ \forall x > 0$. Но тогава е изпълнено:

$$f(1) = 1 + \alpha \,.\, 0 - 1^{\alpha} = 0 \Rightarrow 0 \geq f(x) \Rightarrow 0 \geq 1 + \alpha \ln x - x^{\alpha} \Rightarrow x^{\alpha} \geq 1 + \alpha \ln x$$

Неравенството е доказано.

- Ръководство - зад. 9.1, подточка ж) - докажете неравенството:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \quad \text{при } x > 0$$

Образуваме две функции $f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ и $g(x) = \ln(1+x) - x$ (неравенството $x - \frac{x^2}{2} < x$ за положителни x е очевидно). Ясно е, че след диференциране на двете функции и прилагане на принципа за монотонност ще получим желаните неравенства.

$$\begin{cases} f'(x) = 1 - x - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{-x^2}{1+x} \\ g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 \ \forall x > 0 \\ g'(x) < 0 \ \forall x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) > f(x) \ \ \forall x > 0 \\ g(0) > g(x) \ \ \forall x > 0 \end{cases}$$

Остава да пресметнем $f(0)$ и $g(0)$. Непосредствено се проверява, че $f(0) = g(0) = 0$. Следователно:

$$0 > x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) \Rightarrow \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \quad \text{и} \quad 0 > \ln(1+x) - x \Rightarrow x > \ln(1+x)$$

- Ръководство - зад. 9.2, подточка з) - докажете неравенството:

$$\left(2x^2 + 1\right) \arcsin x \geq \frac{\pi}{2} x^2 - 3x\sqrt{1 - x^2} \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1$$

Образуваме функцията $f(x)$ - разлика на лявата и дясната страна. Диференцираме я и ако успеем да покажем, че $f'(x) \geq 0$ за $x \in [0, 1]$, то f е растяща в $[0, 1]$:

$$f(x) = \left(2x^2 + 1\right) \arcsin x - \frac{\pi}{2} x^2 + 3x\sqrt{1 - x^2}$$

След диференциране:

$$f'(x) = 4 \arcsin x + \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} - \pi x + 3\sqrt{1 - x^2} - \frac{3x^2}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \frac{4x\sqrt{1 - x^2} \arcsin x + 2x^2 + 1 - \pi x\sqrt{1 - x^2} + 3 - 3x^2 - 3x^2}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \frac{(4 \arcsin x - \pi)\, x\sqrt{1 - x^2} + 4\left(1 - x^2\right)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ясно е, че знакът на $f'(x)$ не зависи от знаменателя. От друга страна, $\left(1-x^2\right) \geq 0$ за $x \in [0,1]$, но $(4\arcsin x - \pi)\, x\sqrt{1-x^2}$ си мени знака. Нека установим в коя точка $f'(x)$ достига най-малка стойност върху $[0,1]$. За целта ще намерим $f''(x)$ Наистина:

$$f'(x) = (4\arcsin x - \pi)\, x + 4\sqrt{1-x^2}$$

$$f''(x) = 4\arcsin x - \pi + \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{1-x^2} = 4\arcsin x - \pi$$

Втората производна се нулира в $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В интервала $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ $f'(x)$ е намаляваща, а в интервала $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ - растяща. Следователно $f'(x)$ има локален минимум в точката $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и можем да пресметнем:

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{2} > 0 \Longrightarrow f'(x) \geq f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0 \ \forall x \in [0,1]$$

Очевидно $f'(x)$ има положителен знак в интервала $[0,1]$, т.е. функцията f е растяща. Тогава е изпълнено, че:

$$f(0) \leq f(x) \ \ \forall x \in [0,1] \Longrightarrow 0 \leq f(x)$$

Съображението, че неравенството от условието е изпълнено, е тривиално.