Умножение на детерминанти. Ранг на система вектори и ранг на матрица.

Лема 1. *Детерминантата на блочно-диагонална матрица*

$$D = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O}_{n\times m} \\ C & B \end{pmatrix} \in M_{(n+m)\times(n+m)}(F)$$

с $A \in M_{n\times n}(F)$*,* $B \in M_{m\times m}(F)$*,* $C \in M_{m\times n}(F)$ *и нулева матрица* $\mathbb{O}_{n\times m} \in M_{n\times m}(F)$ *е*

$$\det(D) = \det(A)\det(B).$$

Доказателство. С индукция по $n \in \mathbb{N}$, при $n = 1$ развитието на $\det(D)$ по първия ред дава $\det(D) = A\det(B)$.

В общия случай, нека $A'_{1,s} \in M_{(n-1)\times(n-1)}(F)$, $1 \leq s \leq n$ са матриците, получени от A чрез премахване на първия ред и s-тия стълб на A. Тогава развитието на $\det(D)$ по първия ред е

$$\det(D) = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{1+s}a_{1,s}\det\begin{pmatrix} A'_{1,s} & \mathbb{O}_{(n-1)\times m} \\ C_s & B \end{pmatrix},$$

където $C_s \in M_{m\times(n-1)}(F)$ е матрицата, получена от C чрез премахване на s-тия стълб. По индукционно предположение

$$\det\begin{pmatrix} A'_{1,s} & \mathbb{O}_{(n-1)\times m} \\ C_s & B \end{pmatrix} = \det(A'_{1,s})\det(B).$$

Следователно

$$\det(D) = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{1+s}a_{1,s}\det(A'_{1,s})\det(B) =$$

$$= \left[\sum_{s=1}^{n}(-1)^{1+s}a_{1,s}\det(A'_{1,s})\right]\det(B) = \det(A)\det(B),$$

използвайки развитието на $\det(A)$ по първия ред.

□

Твърдение 2. *Ако* $A, B \in M_{n\times n}(F)$ *са квадратни матрици от един и същи ред, то*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Доказателство. Нека

$$D_1 = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O}_{n\times n} \\ -E_n & B \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(F).$$

За всяко $1 \leq j \leq n$, умножаваме първите n стълба на D с елементите $b_{1,j}, \ldots, b_{n-1,j}$, съответно, $b_{n,j}$ на j-тия стълб на B и прибавяме към $(n+j)$-тия стълб на D_1. За всяко

$1 \leq i \leq n$, елементът от i-ти ред и $(n+j)$-ти стълб на получената матрица D_2 съвпада с елемента

$$a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,n}b_{n,j} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}b_{s,j} = (AB)_{i,j}$$

от i-ти ред и j-то стълб на AB. Елементът от $(i+n)$-ти ред и $(n+j)$-ти стълб на D_2 е

$$(-1).b_{i,j} + b_{i,j} = 0.$$

Следователно

$$D_2 = \left(\begin{array}{cc} A & AB \\ -E_n & \mathbb{O}_{n\times n} \end{array} \right).$$

Умножението на стълб с елемент на F и прибавянето към друг стълб не променя детерминантата, така че

$$\det(D_2) = \det(D_1).$$

Разменяме първия с $(n+1)$-вия ред на D_2, втория с $(n+2)$-рия и т.н., n-тия с $(2n)$-тия ред. В резултат получаваме матрицата

$$D_3 = \left(\begin{array}{cc} -E_n & \mathbb{O}_{n\times n} \\ A & AB \end{array} \right)$$

с

$$\det(D_3) = (-1)^n \det(D_2),$$

защото размяната на два реда променя знака на детерминанта. Детерминантата на блочно-триъгълната матрица D_1 е

$$\det(D_1) = \det(A)\det(B),$$

а на блочно-триъгълната матрица D_3 е

$$\det(D_3) = \det(-E_n)\det(AB) = (-1)^n \det(AB).$$

Комбинирайки с $\det(D_3) = (-1)^n \det(D_1)$ получаваме

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

□

Твърдение 3. *Следните условия са еквивалентни за вектори $b_1, \ldots, b_m$ от линейно пространство V:*

(i) $b_1, \ldots, b_r$ са линейно независими и за произволни $1 \leq i_1 < \ldots < i_{r+1} \leq m$ векторите $b_{i_1}, \ldots, b_{i_{r+1}}$ са линейно зависими;

(ii) $b_1, \ldots, b_r$ са линейно независими и $b_1, \ldots, b_m \in l(b_1, \ldots, b_r)$;

(iii) $b_1, \ldots, b_r$ са линейно независими и $l(b_1, \ldots, b_m) = l(b_1, \ldots, b_r)$.

Ако е изпълнено едно, а оттам и всяко едно от тези три условия, то казваме, че системата вектори $b_1, \ldots, b_m$ има ранг $\mathrm{rk}(b_1, \ldots, b_m) = r$. С други думи, рангът на система вектори $b_1, \ldots, b_m$ е максималният брой линейно независими вектори, съдържащи се в $\{b_1, \ldots, b_m\}$. Рангът на система вектори съвпада с размерността $\mathrm{rk}(b_1, \ldots, b_m) = \dim l(b_1, \ldots, b_m)$ на линейната им обвивка.

Доказателство. $(i) \Rightarrow (ii)$ Ако допуснем, че съществува $1 \leq i \leq m$ с $b_i \not\in l(b_1, \ldots, b_r)$, то $i \not\in \{1, \ldots, r\}$ и векторите $b_1, \ldots, b_r, b_i$ са линейно независими съгласно Лемата за линейна независимост. Това противоречи на предположението за линейна зависимост на произволни $r+1$ вектора от $b_1, \ldots, b_m$ и доказва, че от (i) следва (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$ От $\{b_1, \ldots, b_r\} \subseteq \{b_1, \ldots, b_m\}$ следва $l(b_1, \ldots, b_r) \subseteq l(b_1, \ldots, b_m)$. Подпространството $l(b_1, \ldots, b_r)$ на V съдържа векторите $b_1, \ldots, b_m$, а оттам и всички техни линейни комбинации, т.е. $l(b_1, \ldots, b_m) \subseteq l(b_1, \ldots, b_r)$. Това доказва $l(b_1, \ldots, b_m) = l(b_1, \ldots, b_r)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Съгласно Лемата за линейна зависимост, произволни вектори

$$b_{i_1}, \ldots, b_{i_{r+1}} \in l(b_1, \ldots, b_m) = l(b_1, \ldots, b_r)$$

с $1 \leq i_1 < \ldots < i_{r+1} \leq m$ са линейно зависими.

Ако е в сила (iii) и $b_1, \ldots, b_r$ са линейно независими вектори с линейна обвивка $l(b_1, \ldots, b_r) = l(b_1, \ldots, b_m)$, то $b_1, \ldots, b_r$ е базис на $l(b_1, \ldots, b_m)$ и

$$\dim l(b_1, \ldots, b_m) = r = \mathrm{rk}(b_1, \ldots, b_m).$$

$\square$

Определение 4. *Рангът на нулевата матрица $\mathbb{O}_{m\times n} \in M_{m\times n}(F)$ е $\mathrm{rk}(\mathbb{O}_{m\times n}) = 0$.*

Минор от r-ти ред на матрица $\in M_{m\times n}(F) \setminus \{\mathbb{O}_{m\times n}\}$ е детерминантата на матрица, получена от A чрез пресичане на r различни реда с r различни стълба.

Рангът $\mathrm{rk}(A)$ на ненулева матрица $A \in M_{m\times n}(F) \setminus \{\mathbb{O}_{m\times n}\}$ е максималният размер r на ненулев минор на A.

Съгласно формулата за развитие на детерминанта по ред или по стълб, $\mathrm{rk}(A) = r$ ако съществува ненулев минор на A от ред r и всички минори на A от ред $r+1$ са равни на $0 \in F$.

Твърдение 5. *Нека $A \in M_{m\times n}(F)$ е матрица с вектор-редове*

$$a_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}) \in M_{1\times n}(F), \quad 1 \leq i \leq m$$

и вектор-стълбове

$$c_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \ldots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(F), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Тогава рангът $\mathrm{rk}(A)$ на матрицата A съвпада с ранга $\mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_m)$ на нейните вектор-редове и ранга $\mathrm{rk}(c_1, \ldots, c_n)$ на нейните вектор-стълбове.

Доказателство. Достатъчно е да докажем, че $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_m)$, защото тогава

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^t) = \mathrm{rk}(c_1^t, \ldots, c_n^t) = \mathrm{rk}(c_1, \ldots, c_n).$$

Ако $A = \mathbb{O}_{m\times n}$ е нулевата матрица, то всички вектор-редове $a_i = \mathbb{O}_{1\times n}$ са нулеви и

$$\mathrm{rk}(\mathbb{O}_{m\times n}) = 0 = \mathrm{rk}(\underbrace{\mathbb{O}_{1\times n}, \ldots, \mathbb{O}_{1,\times n}}_{m}).$$

Нека $\mathrm{rk}(A) = r \in \mathbb{N}$ и

$$\Delta = \Delta(i_1, \ldots, i_r; j_1, \ldots, j_r) = \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \ldots & a_{i_1,j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_r,j_1} & \ldots & a_{i_r,j_r} \end{vmatrix} \neq 0$$

е ненулев минор от ред r. Тогава вектор-редовете $a_{i_1},\dots,a_{i_r} \in M_{1\times n}(F)$ са линейно независими. В противен случай, вектор-редовете на матрицата

$$A' = A'(i_1,\dots,i_r;j_1,\dots,j_r) = \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \dots & a_{i_1,j_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_r,j_1} & \dots & a_{i_r,j_r} \end{pmatrix}$$

са линейно зависими и нейната детерминанта Δ трабва да се анулира.

Достатъчно е да проверим, че за всяко $i \in \{1,\dots,m\} \setminus \{i_1,\dots,i_r\}$ вектор-редът $a_i \in l(a_{i_1},\dots,a_{i_r})$ е в линейната обвивка на вектор-редовете $a_{i_1},\dots,a_{i_r}$, за да получим, че $\mathrm{rk}(a_1,\dots,a_m) = r = \mathrm{rk}(A)$.

За произволни $i \in \{1,\dots,m\} \setminus \{i_1,\dots,i_r\}$ и $j \in \{1,\dots,n\}$ разглеждаме детерминантата

$$\Delta_{i,j} = \Delta_{i,j}(i_1,\dots,i_r;j_1,\dots,j_r) = \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \dots & a_{i_1,j_r} & a_{i_1,j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_r,j_1} & \dots & a_{i_r,j_r} & a_{i_r,j} \\ a_{i,j_1} & \dots & a_{i,j_r} & a_{i,j} \end{vmatrix}$$

на матрицата, получена от A' чрез присъединяване на елементите от i-тия ред, които са в стълбовете с номера $j_1,\dots,j_r,j$ и елементите от j-тия стълб, които са от редовете с номера $i_1,\dots,i_r,i$. Ако $j \in \{j_1,\dots,j_r\}$, то $\Delta_{i,j} = 0$ като детерминанта с два равни стълба. За $j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_1,\dots,j_r\}$, анулирането на минорите на A от ред $r+1$ дава $\Delta_{i,j} = 0$. Развитието на $\Delta_{i,j}$ по последния стълб е

$$0 = \Delta_{i,j} = \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s+r+1} \delta(i,s) a_{i_s,j} + (-1)^{(r+1)+(r+1)} a_{i,j}\Delta = 0 \tag{1}$$

за минорите

$$\delta(i,s) = \delta(i,i_1,\dots,i_r;s,j_1,\dots,j_r) = \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \dots & a_{i_1,j_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_{s-1},j_1} & \dots & a_{i_{s-1},j_r} \\ a_{i_{s+1},j_1} & \dots & a_{i_{s+1},j_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_r,j_1} & \dots & a_{i_r,j_r} \\ a_{i,j_1} & \dots & a_{i,j_r} \end{vmatrix}$$

от r-ти ред, които не зависят от j. Равенствата (**??**) са в сила за всички $1 \leq j \leq n$ и дават анулирането

$$\sum_{s=1}^{r} (-1)^{s+r+1} \delta(i,s) a_{i_s} + \Delta a_i = \mathbb{O}_{1\times n}$$

на линейна комбинация на вектор-редовете $a_{i_1},\dots,a_{i_r},a_i$. Оттук

$$a_i = \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s+r} \frac{\delta(i,s)}{\Delta} a_{i_s} \in l(a_{i_1},\dots,a_{i_r}),$$

което доказва, че $\mathrm{rk}(A) = r = \mathrm{rk}(a_1,\dots,a_m)$.

□

Следствие 6. *Следните условия са еквивалентни за матрица $A \in M_{n\times n}(F)$:*

(i) $\det(A) \neq 0$;

(ii) вектор-редовете $a_1,\dots,a_n$ на A са линейно независими;

(iii) вектор-стълбовете $c_1,\dots,c_n$ на A са линейно независими.

Доказателство. Условието (i) е еквивалентно на $\mathrm{rk}(A) = n$, защото квадратната матрица A от ред n има единствен минор от ред n, който е нейната детерминанта.

Условието (ii) е в сила точно когато $\mathrm{rk}(a_1, \dots, a_n) = n$, а (iii) е изпълнено точно когато $\mathrm{rk}(c_1, \dots, c_n) = n$.

По Теоремата на ранга на матрица и ранга на нейните вектор-редове и вектор-стълбове,

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{rk}(c_1, \dots, c_n)$$

и това доказва еквивалентността на условията (i), (ii) и (iii).

□