Транспониране на детерминанта. Основни свойства на детерминантите. Развитие на детерминанта по ред и по стълб.

Твърдение 1. *Нека $j_1, \dots, j_n$ и $k_1, \dots, k_n$ са пермутации на $1, \dots, n$ с $[j_1, \dots, j_n]$, съответно $[k_1, \dots, k_n]$ инверсии. Тогава*

$$\alpha = (-1)^{[j_1,\dots,j_n]+[k_1,\dots,k_n]} \ \ a_{j_1,k_1} a_{j_2,k_2} \dots a_{j_n,k_n}$$

е събираемо на детерминантата $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ *на матрицата* $(a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$.

Доказателство. За произволни $1 \leq p < q \leq n$ прилагането на транспозицията (j_p, j_q) към $j_1, \dots, j_n$ и на транпозицията (k_p, k_q) към $k_1, \dots, k_n$ трансформира α в

$$\beta = (-1)^{[j_1,\dots,j_q,\dots,j_p,\dots,j_n]+[k_1,\dots,k_q,\dots,k_p,\dots,k_n]} \ \ a_{j_1,k_1} \dots a_{j_q,k_q} \dots a_{j_p,k_p} \dots a_{j_n,k_n}.$$

Умножението в F е комутативно, така че

$$a_{j_1,k_1} \dots a_{j_p,k_p} \dots a_{j_q,k_q} \dots a_{j_n,k_n} = a_{j_1,k_1} \dots a_{j_q,k_q} \dots a_{j_p,k_p} \dots a_{j_n,k_n}.$$

Прилагането на транспозицията (j_p, j_q) към $j_1, \dots, j_n$ променя четността на тази пермутация и

$$(-1)^{[j_1,\dots,j_q,\dots,j_p,\dots,j_n]} = -(-1)^{[j_1,\dots,j_p,\dots,j_q,\dots,j_n]}.$$

Аналогично, прилагането на транспозицията (k_p, k_q) към $k_1, \dots, k_n$ променя четността на тази пермутация, така че

$$(-1)^{[k_1,\dots,k_q,\dots,k_p,\dots,k_n]} = -(-1)^{[k_1,\dots,k_p,\dots,k_q,\dots,k_n]}$$

Следователно

$$(-1)^{[j_1,\dots,j_q,\dots,j_p,\dots,j_n]+[k_1,\dots,k_q,\dots,k_p,\dots,k_n]} = (-1)^{[j_1,\dots,j_p,\dots,j_q,\dots,j_n]+[k_1,\dots,k_p,\dots,k_q,\dots,k_n]}$$

и $\beta = \alpha$.

С подходяща последователност от транспозиции свеждаме $j_1, \dots, j_n$ към $1, \dots, n$. По-точно, ако $j_s = 1$, то разменяме j_s с j_1, така че получената пермутация да започва с 1. После преместваме числото 2 на втора позиция чрез транспозиция на j_2 с $j_t = 2$ и т.н., докато получим пермутацията $1, \dots, n$. Съответните транспозиции свеждат пермутацията $k_1, \dots, k_n$ на $1, \dots, n$ към пермутация $i_1, \dots, i_n$. Това дава възможност да представим

$$\alpha = (-1)^{[1,\dots,n]+[i_1,\dots,i_n]} \ \ a_{1,i_1} \dots a_{n,i_n} = (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} \ \ a_{1,i_1} \dots a_{n,i_n},$$

вземайки предвид, че пермутацията $1, \dots, n$ няма инверсии. Сега е ясно, че

$$\alpha = (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{n,i_n}$$

е събираемо на

$$\det(a_{i,j})_{i,j=1}^{n} = \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} \ a_{1,i_1}\ldots a_{n,i_n},$$

където сумирането е по всички пермутации $i_1,\ldots,i_n$ на $1,\ldots,n$ и $[i_1,\ldots,i_n]$ е броят на инверсиите в $i_1,\ldots,i_n$.

□

Определение 2. *Размяната на редовете и стълбовете на матрица $A \in M_{m\times n}(F)$ се нарича транспониране, т.е. $A^t \in M_{n\times m}(F)$ има елемнти $A^t_{i,j} = A_{j,i}$ за всички $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$.*

Твърдение 3. *Транспонирането на квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ не променя нейната детерминанта.*

Доказателство. Ако $A = (A_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in M_{n\times n}(F)$ е матрица с елементи $A_{i,j} \in F$, то транспонираната матрица $A^t \in M_{n\times n}(F)$ има елементи $(A^t)_{i,j} = A_{j,i}$, $1 \leq i,j \leq n$. По определение,

$$\det(A^t) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} \ (A^t)_{1,i_1}\ldots (A^t)_{n,i_n} =$$
$$= \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} \ A_{i_1,1}\ldots A_{i_n,n},$$

където сумирането е по всички пермутации $i_1,\ldots,i_n$ на числата $1,\ldots,n$, а $[i_1,\ldots,i_n]$ е броят на инверсиите в пермутация $i_1,\ldots,i_n$. Всяко събираемо

$$(-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} A_{i_1,1}\ldots A_{i_n,n} = (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]+[1,\ldots,n]} A_{i_1,1}\ldots A_{i_n,n}$$

на $\det(A^t)$ е събираемо на

$$\det(A) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} \ A_{1,i_1}\ldots A_{n,i_n}.$$

Следователно $\det(A^t)$ и $\det(A)$ съвпадат, защото имат един и същи брой събираеми - $n!$.

□

Нека $A \in M_{n\times n}(F)$ е квадратна матрица с редове

$$a_s = (a_{s,1}, a_{s,2}, \ldots, a_{s,j}, \ldots, a_{s,n}) \in M_{1\times n}(F), \quad 1 \leq s \leq n.$$

Линейността на детерминантата относно своите редове дава

$$(i) \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a'_p + a''_p \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a'_p \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a''_p \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$$

и

$$(ii) \det \begin{pmatrix} {}_a1 \\ \ldots \\ \lambda a_p \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_p \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Освен това

$$(iii)\det\begin{pmatrix} a_1\\ \dots\\ a_p\\ \dots\\ \lambda a_p\\ \dots\\ a_n\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a_1\\ \dots\\ a_p\\ \dots\\ a_p\\ \dots\\ a_n\end{pmatrix} = \lambda 0 = 0,$$

съгласно (ii) и анулирането на детерминанта с равни редове.

Използвайки (i) и (iii) получаваме, че умножението на ред с число и прибавянето му към друг ред не променя детерминантата, т.е.

$$(iv)\det\begin{pmatrix} a_1\\ \dots\\ a_p+\lambda a_q\\ \dots\\ a_q\\ \dots\\ a_n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1\\ \dots\\ a_p\\ \dots\\ a_q\\ \dots\\ a_n\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1\\ \dots\\ \lambda a_q\\ \dots\\ a_q\\ \dots\\ a_n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1\\ \dots\\ a_p\\ \dots\\ a_q\\ \dots\\ a_n\end{pmatrix}.$$

Аналогично, (i) и (iii) дават анулирането на детерминанта с линейно зависими редове,

$$(v)\det\begin{pmatrix} a_1\\ \dots\\ \sum\limits_{\forall q\neq p}\alpha_q a_q\\ \dots\\ a_q\\ \dots\\ a_n\end{pmatrix} = \sum_{\forall q\neq p}\det\begin{pmatrix} a_1\\ \dots\\ \alpha_q a_q\\ \dots\\ a_q\\ \dots\\ a_n\end{pmatrix} = 0.$$

От анти-симетричността на детерминантата относно своите редове получаваме, че размяната на редове променя знака на детерминанта,

$$(vi)\det\begin{pmatrix} a_1\\ \dots\\ a_q\\ \dots\\ a_p\\ \dots\\ a_n\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_1\\ \dots\\ a_p\\ \dots\\ a_q\\ \dots\\ a_n\end{pmatrix}.$$

Аналогични свойства са в сила относно стълбовете на детерминанта. Те се извеждат чрез траспониране, прилагане на съответните свойства по редове и повторно транспониране.

Определение 4. *Нека $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ е детерминанта от n-ти ред, а $1\le p,q\le n$ са естествени числа. Ако от събираемите на $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$, които са кратни на $a_{p,q}$ изнесем пред скоби $a_{p.q}$, то това което остава в скобата са нарича адюнгирано количество и се бележи с $A_{p,q}$.*

Адюнгираното количество $A_{p,q}$ има $(n-1)!$ събираеми от вида

$$(-1)^{[i_1,\dots,i_{p-1},q,i_{p+1},\dots,i_n]}a_{1,i_1}\dots a_{p-1,i_{p-1}}a_{p+1,i_{p+1}}\dots a_{n,i_n},$$

защото пермутациите $i_1,\dots i_n$ на $1,\dots,n$ с $i_p=q$ са $(n-1)!$ на брой.

Твърдение 5. *Нека* $(a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ *е квадратна матрица от ред* n *с елементи от поле* F, *а* $1 \leq p, q \leq n$ *са естествени числа. Тогава са в сила равенствата*

(i) $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{p,s}A_{p,s} = \det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ *(развитие на детерминанта по ред) и*

(ii) $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{s,q}A_{s,q} = \det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ *(развитие на детерминанта по стълб), където* $A_{i,j}$ *е адюнгираното количество на* $a_{i,j}$.

Доказателство. (i) Всяко събираемо на $A_{p,s}$ е от вида

$$(-1)^{[i_1,\dots,i_{p-1},s,i_{p+1},\dots,i_n]}a_{1,i_1}\dots a_{p-1,i_{p-1}}a_{p+1,i_{p+1}}\dots a_{n,i_n}.$$

Следователно всяко събираемо на $a_{p,s}A_{p,s}$ е от вида

$$(-1)^{[i_1,\dots,i_{p-1},s,i_{p+1},\dots,i_n]}a_{1,i_1}\dots a_{p-1,i_{p-1}}a_{p,s}a_{p+1,i_{p+1}}\dots a_{n,i_n}$$

и е събираемо на

$$\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]}a_{1,i_1}\dots a_{p-1,i_{p-1}}a_{p,i_p}a_{p+1,i_{p+1}}\dots a_{n,i_n}.$$

Всяко адюнгирано количество $A_{p,s}$ има $(n-1)!$ събираеми, защото това е броят на пермутациите $i_1,\dots,i_{p-1},s,i_{p+1},\dots,i_n$ на $1,\dots,n$ с фиксирано $i_p = s$. Сумата $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{p,s}A_{p,s}$ и детерминантата $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ имат един и същи брой събираеми - $n(n-1)! = n!$ и съвпадат.

(ii) Всяко събираемо на $A_{s,q}$ е от вида

$$(-1)^{[i_1,\dots,i_{s-1},q,i_{s+1},\dots,i_n]}a_{1,i_1}\dots a_{s-1,i_{s-1}}a_{s+1,i_{s+1}}\dots a_{n,i_n}.$$

Следователно всяко събираемо на $a_{s,q}A_{s,q}$ е от вида

$$(-1)^{[i_1,\dots,i_{s-1},q,i_{s+1},\dots,i_n]}a_{1,i_1}\dots a_{s-1,i_{s-1}}a_{s,q}a_{s+1,i_{s+1}}\dots a_{n,i_n}$$

и е събираемо на $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$. Броят на събираемите на $A_{s,q}$ е равен на броя $(n-1)!$ на пермутациите $i_1,\dots,i_n$ на $1,\dots,n$ с фиксирано $i_s = q$. Следователно $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{s,q}A_{s,q}$ има $n(n-1)! = n!$ събираеми и съвпада с $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$.

□

Твърдение 6. *Нека* $(a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ *е квадратна матрица от ред* n, $1 \leq p, q \leq n$ *са естествени числа, а* $A_{p,q}$ *е адюнгираното количество на* $a_{p,q}$. *Тогава*

$$A_{p,q} = (-1)^{p+q}\Delta_{p,q}$$

за минора

$$\Delta_{p,q} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,q-1} & a_{1,q+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p-1,1} & \dots & a_{p-1,q-1} & a_{p-1,q+1} & \dots & a_{p-1,n} \\ a_{p+1,1} & \dots & a_{p+1,q-1} & a_{p+1,q+1} & \dots & a_{p+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,q-1} & a_{n,q+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

от $(n-1)$*-ви ред, който се получава от* $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ *чрез премахване на реда с номер* p *и стълба с номер* q.

Доказателство. Всяко събираемо на $A_{p,q}$ е от вида

$$\alpha = (-1)^{[i_1,\dots,i_{p-1},q,i_{p+1},\dots,i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{p-1,i_{p-1}} a_{p+1,i_{p+1}} \dots a_{n,i_n}.$$

Прилагайки транспозициите $(i_{p-1},q),(i_{p-2},q),\dots,(i_1,q)$ променяме $p-1$ пъти знака на α и получаваме

$$\alpha = (-1)^{p-1}(-1)^{[q,i_1,\dots,i_{p-1},i_{p+1},\dots,i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{p-1,i_{p-1}} a_{p+1,i_{p+1}} \dots a_{n,i_n}.$$

Изпускането на q от пермутацията $q,i_1,\dots,i_{p-1},i_{p+1},\dots,i_n$ премахва инверсиите на q със стоящите след него числа $q-1,\dots,2,1$, по-малки от q, така че

$$\alpha = (-1)^{p-1}(-1)^{q-1}(-1)^{[i_1,\dots,i_{p-1},i_{p+1},\dots,i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{p-1,i_{p-1}} a_{p+1,i_{p+1}} \dots a_{n,i_n}.$$

Да забележим, че

$$\beta := (-1)^{[i_1,\dots,i_{p-1},i_{p+1},\dots,i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{p-1,i_{p-1}} a_{p+1,i_{p+1}} \dots a_{n,i_n}$$

е събираемо на $\Delta_{p,q}$. Следователно

$$\alpha = (-1)^{p+q-2}\beta = (-1)^{p+q}\beta$$

е събиремо на $(-1)^{p+q}\Delta_{p,q}$. Броят $(n-1)!$ на събираемите на $A_{p,q}$ съвпада с броя на събираемите на $(-1)^{p+q}\Delta_{p,q}$, така че $A_{p,q} = (-1)^{p+q}\Delta_{p,q}$.

□

Комбинирайки Твърдение 5 с Твърдение 6 получаваме следното

Следствие 7. *Нека $(a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ е квадратна матрица от ред n с елементи от поле F, а $1 \leq p,q \leq n$ са естествени числа. Тогава са в сила равенствата*

(i) $\sum\limits_{s=1}^n (-1)^{p+s} a_{p,s}\Delta_{p,s} = \det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ *(развитие на детерминанта по ред) и*

(ii) $\sum\limits_{s=1}^n (-1)^{s+q} a_{s,q}\Delta_{s,q} = \det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ *(развитие на детерминанта по стълб),*

където $\Delta_{i,j}$ е детерминантата на матрицата, получена от $(a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ чрез премахване на i-ти ред и j-ти стълб.

Твърдение 8. *Нека $(a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ е квадратна матрица от ред n, а $1 \leq p,q \leq n$ и $r \in \{1,\dots,n\} \setminus \{p,q\}$ са естествени числа. Тогава*

(i) $\sum\limits_{s=1}^n a_{p,s}A_{r,s} = 0$ *(фалшиво развитие на детерминанта по ред);*

(ii) $\sum\limits_{s=1}^n a_{s,q}A_{s,r} = 0$ *(фалшиво развитие на детерминанта по стълб), където $A_{i,j}$ е адюнгираното количество на $a_{i,j}$.*

Доказателство. (i) Заменяйки r-тия ред на матрицата $(a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ с p-тия ред $(a_{p,1},\dots,a_{p,n})$, получаваме детерминанта

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \end{vmatrix}$$

с два равни реда. От една страна, $\Delta_1 = 0$. От друга страна, развитието на Δ_1 по r-тия ред е

$$\Delta_1 = \sum_{s=1}^{n} a_{p,s} A_{r,s}.$$

(ii) Ако заменим r-тия стълб на $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in M_{n\times n}(F)$ с q-тия стълб

$$\left(\begin{array}{c} a_{1,q} \\ \dots \\ a_{n,q} \end{array} \right),$$

получаваме детерминанта

$$\Delta_2 = \left| \begin{array}{ccccccc} a_{1,1} & \dots & a_{1,q} & \dots & a_{1,q} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,q} & \dots & a_{n,q} & \dots & a_{n,n} \end{array} \right| = 0,$$

която има два равни стълба и се анулира. Развитието на Δ_2 по r-тия стълб дава

$$0 = \Delta_2 = \sum_{s=1}^{n} a_{s,q} A_{s,r}.$$

$\square$

Например, за да намерим адюнгираното количество $A_{2,3}$ на

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccccc} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 \\ 0 & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 & a_{4,5} \\ a_{5,1} & 0 & a_{5,3} & a_{5,4} & 0 \end{array} \right|,$$

развиваме последователно по адюнгирани количества

$$A_{2,3} = (-1)^{2+3} \left| \begin{array}{cccc} 0 & a_{1,2} & 0 & a_{1,5} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,4} & 0 \\ 0 & a_{4,2} & 0 & a_{4,5} \\ a_{5,1} & 0 & a_{5,4} & 0 \end{array} \right| =$$

$$= - \left[(-1)^{1+2} a_{1,2} \left| \begin{array}{ccc} a_{3,1} & a_{3,4} & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,4} & 0 \end{array} \right| + (-1)^{1+4} a_{1,5} \left| \begin{array}{ccc} a_{3,1} & 0 & a_{3,4} \\ 0 & a_{4,2} & 0 \\ a_{5,1} & 0 & a_{5,4} \end{array} \right| \right] =$$

$$= a_{1,2}(-1)^{2+3} a_{4,5} \left| \begin{array}{cc} a_{3,1} & a_{3,4} \\ a_{5,1} & a_{5,4} \end{array} \right| + a_{1,5}(-1)^{2+2} a_{4,2} \left| \begin{array}{cc} a_{3,1} & a_{3,4} \\ a_{5,1} & a_{5,4} \end{array} \right| =$$

$$= (-a_{1,2}a_{4,5} + a_{1,5}a_{4,2})(a_{3,1}a_{5,4} - a_{3,4}a_{5,1}).$$