Линейна зависимост и независимост. Основна лема на линейната алгебра.

Определение 1. *Крайна система вектори $a_1, \dots, a_n$ е линейно независима, ако единствената линейна комбинация $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ на $a_1, \dots, a_n$, представяща нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$ е тази с нулеви коефициенти $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 \in F$.*

Безкрайна система вектори е линейно независима, ако всяка нейна крайна подсистема е линейно независима.

Оттук следва, че крайна система вектори $b_1, \dots, b_m \in V$ е линейно зависима, ако съществуват $\mu_1, \dots, \mu_m \in F$ с поне едно $\mu_i \neq 0$, така че $\mu_1 b_1 + \ldots + \mu_i b_i + \ldots + \mu_m b_m = \overrightarrow{\mathcal{O}}$.

Безкрайна система вектори е линейно зависима, ако съдържа крайна линейно зависима подсистема.

Твърдение 2. *Линейната зависимост и независимост на вектори от линейно пространство V има следните свойства:*

(i) един вектор $u \in V$ е линейно зависим точно когато е нулевият $u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$;

(ii) векторите $b_1, \dots, b_k \in V$, $k \geq 2$ са линейно зависими тогава и само тогава, когато някой от тях

$$b_i = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{i-1} b_{i-1} + \mu_{i+1} b_{i+1} + \ldots + \mu_k b_k$$

може да се представи като линейна комбинация на останалите;

(iii) ако $b_1, \ldots b_m$ са линейно зависими, то $b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n$ са линейно зависими за произволни $b_{m+1}, \dots, b_n$;

(iv) ако $a_1, \dots, a_n$ са линейно независими вектори, то за всяко $1 \leq k \leq n-1$ векторите $a_1, \dots, a_k$ са линейно независими.

Доказателство. (i) От $\lambda u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ с $\lambda \in F \setminus \{0\}$ следва $u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$.

(ii) Ако $b_1, \dots, b_k$ са линейно зависими и $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_i b_i + \ldots + \lambda_k b_k = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ за $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F$ с поне едно $\lambda_i \neq 0$, то $\lambda_i b_i = -\lambda_1 b_1 - \ldots - \lambda_{i-1} b_{i-1} - \lambda_{i+1} b_{i+1} - \ldots - \lambda_k b_k$, откъдето

$$b_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} b_1 - \ldots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} b_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} b_{i+1} - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} b_k$$

и b_i е линейна комбинация на $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_k$.

Обратно, ако $b_i = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{i-1} b_{i-1} + \mu_{i+1} b_{i+1} + \ldots + \mu_k b_k$ за някакви $\mu_j \in F$, то

$$\mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{i-1} b_{i-1} + (-1) b_i + \mu_{i+1} b_{i+1} + \ldots + \mu_k b_k = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

с $-1 \neq 0$, така че $b_1, \dots, b_k$ са линейно зависими.

(iii) Ако $\lambda b_1 + \ldots + \lambda_i b_i + \ldots + \lambda_m b_m = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ с поне едно $\lambda_i \neq 0$, то

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_i b_i + \ldots + \lambda_m b_m + 0.b_{m+1} + \ldots + 0.b_n = \overrightarrow{\mathcal{O}} \quad \text{с} \quad \lambda_i \neq 0$$

доказва линейната зависимост на $b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n$.

(iv) Ако допуснем, че $a_1, \dots, a_k$ са линейно зависими, то $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ са линейно зависими, съгласно (iii). Противоречието доказва линейната независимост на $a_1, \dots, a_k$.

$\square$

Лема 3. (Основна лема на линейната алгебра или Лема за линейна зависимост:) *Ако $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ са вектори от линейно пространство V, $b_1, \dots, b_m \in l(a_1, \dots, a_n)$ и $m > n$, то $b_1, \dots, b_m$ са линейно зависими.*

Доказателство. Ако съществува нулев вектор $b_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}$, то b_i е линейно зависим, откъдето и системата $b_1, \dots, b_{i-1}, b_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}, b_{i+1}, \dots, b_m$ е линейно зависима.

Отсега нататък предполагаме, че векторите $b_1, \dots, b_m \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ са ненулеви и доказваме лемата с индукция по n. За $n = 1$ и $m > 1$ от $b_1, b_2 \in l(a_1)$ следва съществуването на $\lambda_1, \lambda_2 \in F$ с $b_1 = \lambda_1 a_1$, $b_2 = \lambda_2 a_1$. Предположението $b_1 \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$ изисква $\lambda_1 \neq 0$ и предоставя представяне

$$b_2 = \lambda_2 \left(\frac{1}{\lambda_1} b_1 \right) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} b_1 \in l(b_1).$$

Следователно b_1, b_2 са линейно зависими, откъдето $b_1, b_2, \dots, b_m$ са линейно зависими.

В общия случай са дадени ненулевите вектори

$$b_1 = x_{1,1} a_1 + \ldots + x_{1,n-1} a_{n-1} + x_{1,n} a_n = \sum_{j=1}^{n} x_{1,j} a_j,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$b_i = x_{i,1} a_1 + \ldots + x_{i,n-1} a_{n-1} + x_{i,n} a_n = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} a_j$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$b_{m-1} = x_{m-1,1} a_1 + \ldots + x_{m-1,n-1} a_{n-1} + x_{m-1,n} a_n = \sum_{j=1}^{n} x_{m-1,j} a_j$$

$$b_m = x_{m,1} a_1 + \ldots + x_{m,n-1} a_{n-1} + x_{m,n} a_n = \sum_{j=1}^{n} x_{m,j} a_j$$

за някои $x_{i,j} \in F$. От $b_m \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$ следва съществуването на $1 \leq j \leq n$ с $x_{m,j} \neq 0$. След преномериране на $a_1, \dots, a_n$ можем да считаме, че $x_{m,n} \neq 0$. Прибавяйки подходящи кратни на b_m към $b_1, \dots, b_{m-1}$, елиминираме a_n от представянията на $b_1, \dots, b_{m-1}$. Поточно, заменяме b_i с

$$b'_i := b_i - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} b_m = \left(\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} a_j \right) - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{m,j} a_j \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(x_{i,j} - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} x_{m,j} \right) a_j = \sum_{j=1}^{n-1} \left(x_{i,j} - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} x_{m,j} \right) a_j \in l(a_1, \dots, a_{n-1})$$

за $1 \leq i \leq m-1$, вземайки предвид

$$\left(x_{i,j} - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} x_{m,j} \right) \Big|_{j=n} = 0.$$

Геометрично, $b'_1, \ldots, b'_{m-1} \in l(a_1, \ldots, a_{n-1})$ са проекциите на векторите $b_1, \ldots, b_{m-1}$ върху $l(a_1, \ldots, a_{n-1})$, успоредно на b_m. По индукционно предположение, векторите $b'_1, \ldots, b'_{m-1} \in l(a_1, \ldots, a_{n-1})$ с $m - 1 > n - 1$ са линейно зависими и съществуват $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1} \in F$ с поне едно $\mu_i \neq 0$, така че

$$\mu_1 b'_1 + \ldots + \mu_i b'_i + \ldots + \mu_{m-1} b'_{m-1} = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

Заместваме с $b'_k = b_k - \frac{x_{k,n}}{x_{m,n}} b_m$ за $1 \leq k \leq m-1$ в горното равенство и получаваме

$$\overrightarrow{\mathcal{O}} = \sum_{k=1}^{m-1} \mu_k \left(b_k - \frac{x_{k,n}}{x_{m,n}} b_m \right) = \sum_{k=1}^{m-1} \mu_k b_k - \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\mu_k x_{k,n}}{x_{m,n}} \right) b_m$$

с $\mu_i \neq 0$. Това доказва линейната зависимост на $b_1, \ldots, b_m$.

□

Лема 4. (Лема за линейна независимост)*: Ако $a_1, \ldots, a_n$ са линейно независими вектори от линейно пространство V и $a_{n+1} \in V \setminus l(a_1, \ldots, a_n)$ е вектор извън тяхната линейна обвивка, то $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ са линейно независими.*

Доказателство. Допускаме противното и разглеждаме представяне

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

на $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ с $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in F$ и поне едно ненулево $\lambda_i \neq 0$ за някое $1 \leq i \leq n+1$.

Ако $\lambda_{n+1} \neq 0$, то

$$a_{n+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} a_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} a_n \in l(a_1, \ldots, a_n)$$

противоречи на предположението $a_{n+1} \notin l(a_1, \ldots, a_n)$.

Следователно $\lambda_{n+1} = 0$ и $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ с поне едно $\lambda_i \neq 0$ за някое $1 \leq i \leq n$. В резултат, $a_1, \ldots, a_n$ са линейно зависими. Противоречието доказва Лемата за линейна независимост,

□