NO DATE

Пълни множества от булеви функции.

Дефиниция.

Множеството $F \subseteq F_2$ е пълно, ако $[F] = F_2$,

където F_2 са всички булеви функции.

$[F]$ - затварянето на F (спрямо някакви операции) - значи че спрямо тези операции, отговорите, които се получават също са в даденото множество.

Теорема на Бул.

$\{-, \wedge, \vee\}$ е пълно, т.е. всички булеви функции могат да се изразят чрез тези операции.

$[\{-, \wedge, \vee\}] = F_2$.

Формула, която се състои от променлива или отрицание на променлива се нар. литерал.

[Форма = формула, но ≠ функция.]

$x, \bar{x}, \bar{y}$ - формули, литерали.

1. Елементарни конюнкции. Съвършена ДНФ.

Елементарна конюнкция. ($x\bar{y}\bar{z}$) - конюнкция от негирани и ненегирани променливи (литерали)

Дизюнктивна нормална форма. - една или повече елементарни конюнкции върху, които се прилага дизюнкция.

$x\bar{y}\bar{z} \vee ux\bar{w} \vee \ldots$

NO DATE

Пълна елементарна конюнкция - елементарна конюнкция, в която има точно един литерал за всяка променлива. (т.е. името на всяка променлива трябва да се съдържа точно един път)

Пример: Променливи - x_1, x_2, x_3.

$x_1 x_2 x_3$ - ПЕК

$x_1 x_2 \bar{x}_3$ - ПЕК, но $x_1 x_2$ - не е ПЕК.

Съвършена дизюнктивна нормална форма - дизюнктивна нормална форма, в която елементарните конюнкции са пълни.

Пример: Променливи - x_1, x_2, x_3.

$x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

$x_1 x_2 \bar{x}_3$ - само по себе си е Съв.ДНФ.

NO DATE

2. Теорема на Бул.

Множеството $\{-, \wedge, \vee\}$ е пълно, т.е.

$[\{-, \wedge, \vee\}] = F_2$.

Доказателство:

Взимаме произв. булева функция $f \in F_2^n$

Ще покажем че $f \in [\{-, \wedge, \vee\}]$, т.е. можем да представим f с формула над $\{\vee, \wedge, -\}$.

1. Нека $f = \tilde{0}$. Тогава $f(x_i) = x_i \cdot \bar{x}_i$ $i \in \{1..n\}$ и следователно f се представя с формула над $\{\vee, \wedge, -\}$.

2. Нека $f \neq \tilde{0}$. => тя има една или повече единици. За редовете, където $f = 1$ слагаме по една пълна елементарна конюнкция (където обръщаме ст-та на променливата, ако е 0 в 1)

Пример:

x_1	x_2	x_3	f	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\bar{x}_1 x_2 x_3$
1	0	0	1	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	0	

Правим Съв.ДНФ. ~~за редовете~~ от елемент. конюнкции.

$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

За тази Съв. ДНФ като заметим сме стойностите на кой да е ~~рес~~ ~~рег~~ вектор, при $f = 1$, получ. израза ~~да~~ ~~е~~ равен на единица, като само една от елем. конюнкции има ст-ст едно.

I сл. за всеки вектор върху, който f има стойност 1 е вярно, че съществува точно една пълна елем. конюнкция, такава че всеки неин литерал има ст-ст 1.

II сл. За всеки входен вектор, върху който $f = 0$, за всяка пълна елем. конюнкция съществува поне един литерал, който има стойност нула.

NO DATE

3. Пълнота на множеството на булевите функции чрез свеждане до известно пълно множество.

Забележка:

Ако не успеем за дадено множ. да ~~по~~ докажем, че е пълно по този начин, не следва, че ~~множеството~~ не е пълно.

$[\{-, \wedge, \vee\}] = F_2$.

$G \subseteq F_2$.

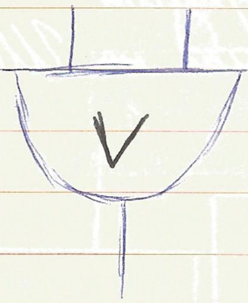
$[G] \subseteq [\{-, \wedge, \vee\}]$.

$G = [\{-, \wedge\}]$.

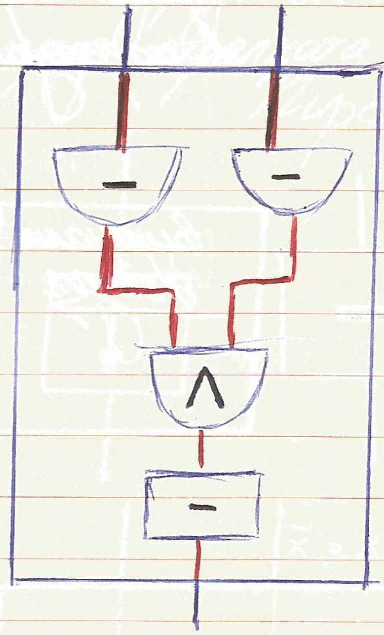
Трябва да докажем, че G е пълно.

Тъй като $[G]$ и $\{-, \wedge, \vee\}$ имат сечение, е достатъчно да изразим елементите от $[\{-, \wedge, \vee\}]$, които не присъстват в $[G]$, чрез зададените ел. на $[G]$

т.е. трябва да изразим дизюнкцията, чрез отрицание и конюнкция.



виртуална дизюнкция



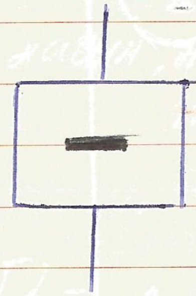
виртуалната дизюнкция не е напълно еквивалентна, заради забавяне и брой на транзисторите, но отговора който дава е същия като на дизюнкцията.

$$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\bar{x}\,\bar{y}}$$

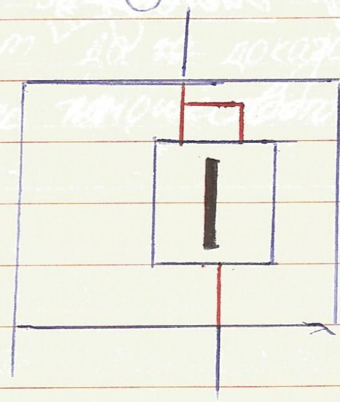
NO DATE

Да се докаже, че $\{|\}$ е пълно.

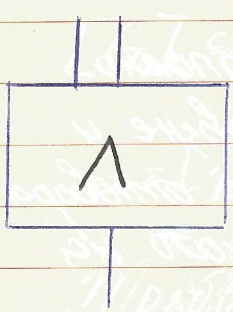
~~Тр~~ Тъй като $\{\neg, \wedge\}$ е пълно, то просто трябва да изразим 2 операции чрез чертата на Шефер.



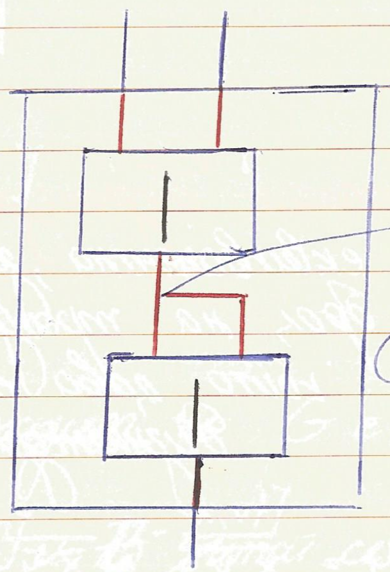
виртуална негация



$x|x = \bar{x}$



виртуална ~~конюнкция~~ конюнкция

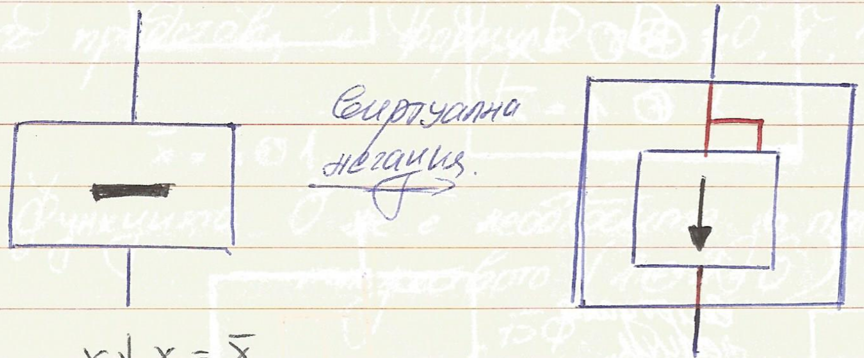


правим негация, защото чертата на Шефер е побитовото отрицание на конюнкцията

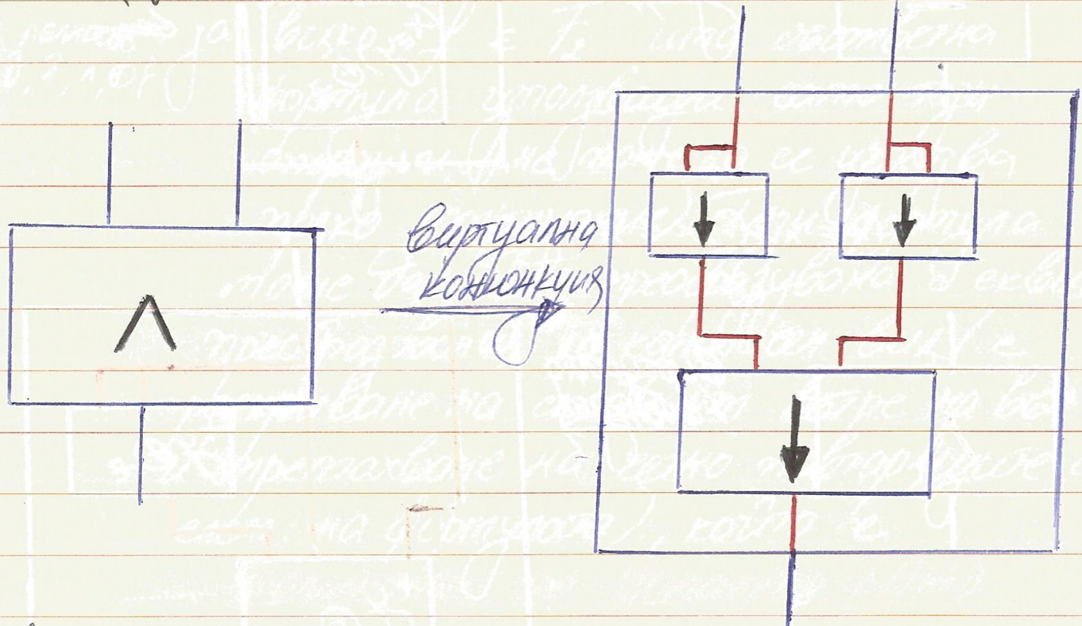
$(x|y|x|y) = x \wedge y.$

Да се докаже, че $\{\downarrow\}$ е пълно.

Тъй като $\{\neg, \wedge\}$ е пълно, то просто трябва да изразим 2 операции чрез стрелката на Пирс.



$x \downarrow x = \bar{x}$



$(x \downarrow x \downarrow y \downarrow y) = xy$

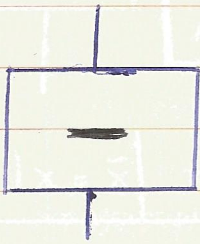
правим отрицание на входните данни, защото конюнк. и стрелк. на Пирс има разлика само когато входните данни имат една и съща стойност.

NO DATE

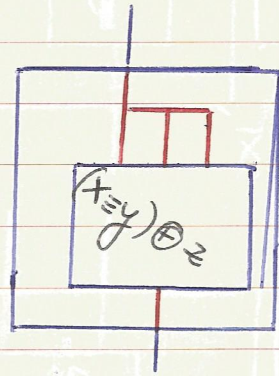
Докажете, че множеството булеви функции
$\{(x \equiv y) \oplus z, \; xy \oplus z\}$ е пълно.

$$x \oplus x = 0$$
$$x \oplus y \oplus y = x$$
$$x \oplus 0 = x$$
$$x \oplus 1 = \overline{x}$$

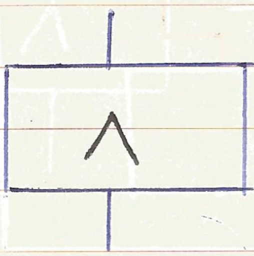
$$(x \equiv x) = 1$$



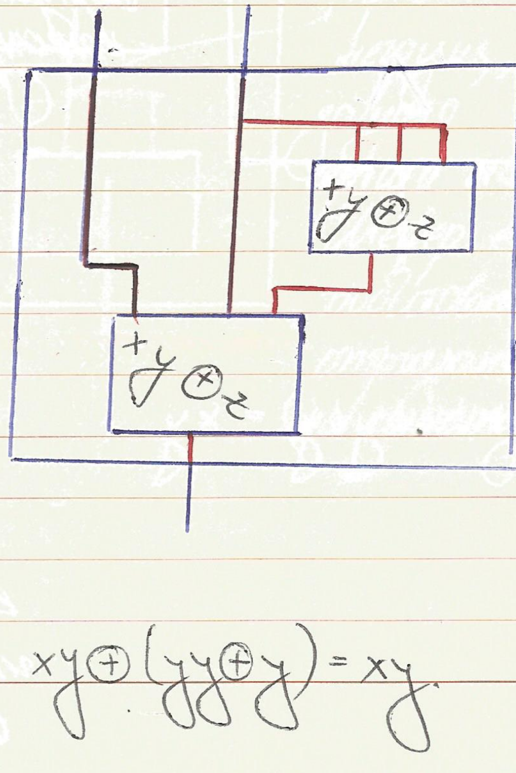
виртуална негация



$$(x \equiv x) \oplus x = \overline{x}$$



виртуална конюнкция



~~xxxy~~ $xy \oplus (yy \oplus y) = xy$

4 Полином на Жегалкин – единственост и алгоритми за получаване.

Множеството $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \wedge, \oplus\}$ е пълно, защото всяка функция на пълното $\{\wedge, -\}$, се представя с формула от $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \wedge, \oplus\}$.

$\bar{x} = x \oplus 1$.

Функцията $\tilde{0}$ не е необходима за пълнота на множеството $(\tilde{1} \oplus \tilde{1} = \tilde{0})$

от пълнотата на $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \wedge, \oplus\}$ $\Rightarrow$ за всяко $f \in F_2^n$ има съответна, БФ, формула използваща само тези операции (не може да се използва пряко отрицание). Тази формула може да бъде преобразувана с еквивал. преобразования до каноничен вид (с разкриване на скоби от вътре на вън и премахване на четно повтарящите се елем. на формулата), който е **Полинома на Жегалкин. (ПЖ)**

ПЖ е всяка формула от вида:

$$a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \dots \oplus a_n x_n \oplus a_{n+1} x_1 x_2 \oplus \dots$$

$$\dots \oplus a_t x_{n-1} x_n \oplus a_{t+1} x_1 x_2 x_3 \oplus \dots \oplus a_q x_1 x_2 \dots x_n.$$

където $a_i \in \{0, 1\}$ $\quad |a_i| = 2^n$.

~~поп~~ ПЖ се нарежда спрямо броя на променливите на дадените елементарни конюнкции, като се започва от тези с най-малко променливи и се стига до тези с най-много.

В случай че всички коефициенти (a_i) са нули, ПЖ представяме с $\tilde{0}$

Всеки от коефициентите може да приема стойност от $\{0, 1\}$ и затова броят на ПЖ на n променливи е 2^{2^n}

Теорема.

Всяка булева функция има единствен полином на Жегалкин.

~~При ПЖ преобразуваме до каноничен вид.~~

Булевите функции има различни формули, т.е. не може една формула да е формула на няколко функции ~~⇒ техния каноничен вид ще бъде различен~~ ⇒ м/у полиномите на Жегалкин и булевите функции (без знач. броя на променливите) съществува биекция.

NO DATE

Начини за намиране на ПЖ:

1) от Съв.ДНФ. – негираните променливи се заместват съответно с тяхната не негирана форма ~~не негирани като~~ като всяка от променливите се събира по модул от 2 с единица, за да се запази смисъла на ~~израза~~ формулата (т.е. използва се еквивалента на негацията за $\{\tilde{1}, \tilde{0}, \wedge, \oplus\}$). Тъй като в Съв.ДНФ. има само 1 елемент с ст-ст. единица е допустимо заместването на дизюнкцията със сума по модул от 2 (различав. се ст-тите само когато има 2 единици ст-и)

Пример:

$$\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}y \vee xy = (1\oplus x)(1\oplus y) \vee ((1\oplus x)y) \vee xy.$$

$$= (1\oplus x)(1\oplus y) \oplus (1\oplus x)y \oplus xy =$$

$$= 1 \oplus x \oplus y \oplus y \oplus xy = 1 \oplus x \oplus xy.$$

2) Заменвайки всички възможни вектори за променливите в общата формула на ПЖ. – така се получават коеф. пред променливите и след това се заместват в общата формула.

Пример:

$$f(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy.$$

$$f(0,0) = 1.$$

$$f(0,0) = a_0 \oplus a_1 0 \oplus a_2 0 \oplus a_3 0.0 = a_0 \Rightarrow a_0 = 1.$$

$$f(0,1) = 1.$$

$$f(0,1) = 1$$

$$f(0,1) = 1 \oplus a_1 0 \oplus a_2 1 \oplus a_3 1 0 = 1 \oplus a_2 \Rightarrow a_2 = 0.$$

$$f(1,0) = 0$$

$$f(1,0) = 1 \oplus a_1 1 \oplus a_2 0 \oplus a_3 1.0 = 1 \oplus a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1$$

NO DATE

$f(1,1)=1$

$f(1,1) = 1 \oplus 1.1 \oplus 0.1 \oplus a_3\, 1 1 \Rightarrow a_3 = 1.$

ПНП $= 1 \oplus x \oplus xy$

3) Чрез еквивалентни преобразувания: дадените операции се заместват с техните еквив. от $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \wedge, \oplus\}$.

Пример:

$x \to y \equiv$ (еквл. св. на имплик)

$\bar{x} \vee y \equiv$ (зак. за дв. отриц.)

$\overline{\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}}} \equiv$ (Де Морган)

$\overline{\bar{\bar{x}}\,\bar{y}} \equiv$ (дв. отриц.)

$\overline{x\bar{y}} \equiv \overline{x(1 \oplus y)} = 1 \oplus x(1 \oplus y) = 1 \oplus x \oplus xy.$