Директна сума на подпространства. Представяне на подпространства от наредени n-торки като решения на хомогенна система линейни уравнения

Определение 1. *Сума на подпространства $V_1+\ldots+V_n$ е директна, ако всеки вектор $v \in V_1+\ldots+V_n$ има единствено представяне $v = v_1+\ldots+v_n$ като сума на вектори $v_i \in V_i$. Бележим с $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ директната сума на подпространства.*

Твърдение 2. *Сума на подпространства $V_1+\ldots+V_n$ е директна тогава и само тогава, когато за всяко $1 \leq i \leq n$ е в сила*

$$V_i \cap \left(\sum_{\forall j \neq i} V_j \right) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}.$$

Доказателство. Ако сумата $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ е директна и $v_i = \sum_{\forall j \neq i} v_j \in V_i \cap \left(\sum_{\forall j \neq i} V_j \right)$, то $\sum_{\forall j \neq i} v_j + (-v_i) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. От единствеността на представянето на $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ като вектор от $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ получаваме $v_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}$, откъдето $V_i \cap \left(\sum_{\forall j \neq i} V_j \right) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$.

Обратно, нека $V_i \cap \left(\sum_{\forall j \neq i} V_j \right) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ и $v = \sum_{i=1} v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i'$ са две представяния на вектор $v \in V_1+\ldots+V_n$ като сума на вектори $v_i, v_i' \in V_i$. Тогава за всяко $1 \leq i \leq n$ имаме

$$V_i \ni v_i - v_i' = \sum_{\forall j \neq i} v_j' - v_j \in V_i \cap \left(\sum_{\forall j \neq i} V_j \right) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\},$$

откъдето $v_i = v_i'$ и двете представяния съвпадат. Това доказва директността на сумата $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$.

□

Твърдение 3. (Съответствие между разбиванията на базис и разлаганията в директна сума:) *Нека V е крайномерно линейно пространство.*

(i) Ако $e_1,\ldots,e_n$ е базис на V, то за всяко $1 \leq k \leq n$ е в сила разлагане $V = l(e_1,\ldots,e_k) \oplus l(e_{k+1},\ldots,e_n)$ в директна сума на подпространства.

(ii) Ако $V = U \oplus W$ е директна сума на ненулеви подпространства U и W, $e_1,\ldots,e_k$ е базис на U и $e_{k+1},\ldots,e_n$ е базис на W, то $e_1,\ldots,e_k,e_{k+1},\ldots,e_n$ е базис на V.

Доказателство. (i) Ако $e_1,\ldots,e_n$ е базис на V, то

$$V = l(e_1,\ldots,e_n) = l(e_1,\ldots,e_k) + l(e_{k+1},\ldots,e_n).$$

От произволен вектор

$$v = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i = \sum_{j=k+1}^{n} x_j e_j \in l(e_1, \dots, e_k) \cap l(e_{k+1}, \dots, e_n)$$

получаваме линейна комбинация

$$\sum_{i=1}^{k} x_i e_i + \sum_{j=k+1}^{n} (-x_j) e_j = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

на базисните вектори $e_1, \dots, e_n$, представяща нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}$. Съгласно линейната независимост на $e_1, \dots, e_n$, оттук следва $x_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq n$. Това доказва, че $l(e_1, \dots, e_k) \cap l(e_{k+1}, \dots, e_n) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ и сумата $V = l(e_1, \dots, e_k) \oplus l(e_{k+1}, \dots, e_n)$ е директна.

(ii) Ако $V = U \oplus W$ е разлагане на V в директна сума на ненулеви подпространства U, W, $e_1, \dots, e_k$ е базис на U и $e_{k+1}, \dots, e_n$ е базис на W, то от $U = l(e_1, \dots, e_k)$ и $W = l(e_{k+1}, \dots, e_n)$ следва

$$V = U \oplus W = l(e_1, \dots, e_k) \oplus l(e_{k+1}, \dots, e_n) = l(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n).$$

Произволна линейна комбинация $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ дава вектор

$$\sum_{i=1}^{k} x_i e_i = \sum_{i=k+1}^{n} (-x_i) e_i \in l(e_1, \dots, e_k) \cap l(e_{k+1}, \dots, e_n) = U \cap W = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\},$$

откъдето

$$\sum_{i=1}^{k} x_i e_i = \overrightarrow{\mathcal{O}} \quad \text{и} \quad \sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

Линейната независимост на базиса $e_1, \dots, e_k$ на U изисква $x_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq k$. Аналогично, линейната независимост на базиса $e_{k+1}, \dots, e_n$ на W води до $x_i = 0$ за всички $k + 1 \leq i \leq n$. Това доказва, че векторите $e_1, \dots, e_n$ са линейно независими, а оттам и базис на V.

□

Твърдение 4. *Нека V е n-мерно линейно пространство, а U е k-мерно подпространство на V за някои естествени числа $k < n$. Тогава съществува $(n - k)$-мерно подпространство W на V, така че $V = U \oplus W$. Всяко такова подпространство се нарича допълнение на U до V.*

Доказателство. Избираме произволен базис $e_1, \dots, e_k$ на U и го допълваме до базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ на V. Тогава

$$V = l(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n) = l(e_1, \dots, e_k) \oplus l(e_{k+1}, \dots, e_n) = U \oplus l(e_{k+1}, \dots, e_n)$$

съгласно Твърдение 3 (i). Полагаме $W := l(e_{k+1}, \dots, e_n)$ и забелязваме, че W е подпространство на V с размерност $n-k$, защото векторите $e_{k+1}, \dots, e_n$ са линейно независими като част от линейно независимата система $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$. Това доказва съществуването на допълнение W на произволно собствено подпространство U на V.

□

Допълнението на подпространство W към V не е единствено. Например, ако $V = \mathbb{R}^3$ и W е права през началото в $\mathbb{R}^3$, то произволна равнина U през началото, не съдържаща W е допълнение на W до $\mathbb{R}^3$, т.е. $W \oplus U = \mathbb{R}^3$. Ако $V = \mathbb{R}^3$ и W е равнина през началото, то произволна права през началото, нележаща в W е допълнение на W до $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$.

Система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & =0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & =0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{m,n}x_n & =0 \end{array} \right. \tag{1}$$

с нулеви свободни членове се наричат хомогенни

Лема 5. *Елементарните преобразувания по редове към матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix}$$

не променят линейната обвивка $L = l(a_1, \ldots, a_m)$ *на вектор-редовете* $a_1, \ldots, a_m$ *на* A.

Доказателство. Нека L' е линейната обвивка на вектор-редовете на матрица $'$, получена от A чрез елементарно преобразувание R по редове. Достатъчно е да проверим, че $L' \subseteq L$. Понеже A е получава от A' чрез обратното елементарно преобразувание по редове R^{-1}, оттук следва $L \subseteq L'$ и $L = L'$.

Ако $R = R_{i,j}(p)$ е умножение на j-ти ред с $p \in F$ и прибавяне към i-ти ред, то единственият ред на A', който не се среща в A е $a_i + pa_j \in L$. За умножение $R_i(q)$ на i-ти ред с $q \in F \setminus \{0\}$ имаме $qa_i \in L$, откъдето $L' \subseteq L$. При размяна $R_{i,j}$ на i-ти и j-ти ред линейната обвивка на вектор-редовете на A не се променя и $L = L'$.

□

Гаус-Жордановият вид на хомогенната система линейни урвнения (1) има матрица от коефициенти

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & a_{2,r+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & a_{r-1,r+1} & \ldots & a_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{r,r+1} & \ldots & a_{r,n} \end{pmatrix} \tag{2}$$

след подходяща пермутация на променливите. Линейната обвивка $l(a'_1, \ldots, a'_r)$ на вектор-редовете $a'_1, \ldots, a'_r$ на A е с размерност $\dim l(a'_1, \ldots, a'_r) = r$, защото ако $\lambda_1 a'_1 + \ldots + \lambda_r a'_r = (0, \ldots, 0) \in M_{n \times 1}(F)$, то сравняването на първите r омпоненти дава $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ и доказва линейната независимост на $a'_1, \ldots, a'_r$. Съгласно Лема 5, линейната обвивка $l(a_1, \ldots, a_m)$ на вектор-редовете $a_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})$, $1 \leq i \leq m$ на A съвпада с $l(a'_1, \ldots, a'_r)$ и $\dim l(a_1, \ldots, a_m) = \dim l(a'_1, \ldots, a'_r) = r$.

Твърдение 6. *Нека (1) е хомогенна система линейни уравнения с n неизвестни, чиято матрица от коефициенти*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix}$$

има вектор-редове $a_1, \ldots, a_m \in M_{n\times 1}(F)$. Тогава множеството от решения $U \subseteq F^n$ на (1) е подпространство на F^n с размерност $\dim U = n - \dim l(a_1, \ldots, a_m)$.

Доказателство. Ако $u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in U \subseteq F^n$ са решения на (1) и $\alpha \in F$, то за всяко $1 \leq i \leq m$ е в сила

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(u_j + v_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j = 0 + 0 = 0 \quad \text{и}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha u_j) = \alpha \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j \right) = \alpha.0 = 0$$

и $u+v = (u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n)$, $\alpha u = (\alpha u_1, \ldots, \alpha u_n) \in U$ са решения на (1). Това доказва, че U е подпространство на F^n.

Ако матрицата $A = \mathbb{O}_{m\times n}$ е нулева, то $a_1 = \ldots = a_m = \mathbb{O}_{1\times n}$ и $\dim l(a_1, \ldots, a_m) = \dim\{\overrightarrow{\mathcal{O}}\} = 0$. Множеството от решения $U = F^n$ на (1) е с размерност $\sim U = \dim F^n = n = n - \dim l(a_1, \ldots, a_m)$.

Отсега нататък, $r := \dim l(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{N}$ и Гаус-Жордановият вид на (1) има матрица от коефициенти (2) след подходяща пермутация на променливите. За всяко $r+1 \leq j \leq n$ нека $u^{(j)} = (u_1^{(j)}, \ldots, u_r^{(j)}, u_{r+1}^{(j)}, \ldots, u_n^{(j)}) \in U$ е решението с $u_j^{(j)} = 1$, $u_i^{(j)} = 0$ за всички $i \in \{r+1, \ldots, n\}$ и $u_1^{(j)}, \ldots, u_r^{(j)} \in F$, пресметнати от уравненията

$$x_i = -\sum_{i=r+1}^{n} a_{i,j}x_j \quad \text{за} \quad 1 \leq i \leq r. \tag{3}$$

Твърдим, че $u^{(r+1)}, \ldots, u^{(n)} \in U$ е базис на U. Ако

$$(0, \ldots, 0) = \lambda_{r+1}u^{(r+1)} + \ldots + \lambda_n u^{(n)}$$

за някакви $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n \in F$, то сравняването на компонентите с номера от $r+1$ до n дава $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ и доказва линейната независимост на $u^{(r+1)}, \ldots, u^{(n)}$. За произволно решение $s = (s_1, \ldots, s_r, s_{r+1}, \ldots, s_n) \in U$ разглеждаме решението

$$s' := s - s_{r+1}u^{(r+1)} - \ldots - s_n u^{(n)} \in U$$

има анулиращи се компоненти с номера от $r+1$ до n. Компонентите на s' с номера от 1 до r се пресмятат по формулите (3) и се анулират. Това доказва, че $s' = (0, \ldots, 0)$ е нулевата n-торка и $s = s_{r+1}u^{(r+1)} + \ldots + s_n u^{(n)} \in l(u^{(r+1)}, \ldots, u^{(n)})$, така че $u^{(r+1)}, \ldots, u^{(n)}$ е базис на U и $\dim U = n - r = n - \dim l(a_1, \ldots, a_m)$.

□

Твърдение 7. *За всяко подпространство $U \subseteq F^n$ от наредени n-торки съществува хомогенна система линейни уравнения с пространство от решения U.*

Доказателство. Ако $U = \{(0, \ldots, 0)\}$ е нулевото пространство, то U съвпада с пространството от решения на хомогенната система линейни уревнения

$$\left| \begin{array}{ll} x_1 & = 0 \\ \ldots & \ldots \\ x_n & = 0 \end{array} \right. .$$

Отсега нататък $U \neq \{(0, \dots, 0)\}$ и съществува базис $a_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$, $1 \leq i \leq k$ на U. Образуваме система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_k \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Пространството от решения $U_1 \subseteq F^n$ на (4) е с размерност $n - k$. Ако $b_1, \dots, b_{n-k} \in U_1 \subset F^n$ е базис на U_1, твърдим че U съвпада с пространството от решения U_2 на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-k} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

От $b_1, \dots, b_{n-k} \in U_1$ следва $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{i,s} b_{j,s} = 0$ за всички $1 \leq i \leq k$ и $1 \leq j \leq n - k$. Следователно $a_1, \dots, a_k \in U_2$ и $U = l(a_1, \dots, a_k) \subseteq U_2$. Размерностите на U и U_2 съвпадат и са равни на $\dim U_2 = n - (n - k) = k = \dim U$, откъдето и подпространствата $U = U_2$ съвпадат.

$\square$