Упражнение 5

Атанас Груев

15.10.2019

1 Кратка теория

За решаването на задачи в това упражнение основно разчитаме на теорията, предоставена в Упражнение 4 от 14.10.2019 г. Все пак, редно е да споменем още две дефиниции, които е добре да се познават.

- Казваме, че за редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е изпълнено $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ (т.е. редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *дивергира* към безкрайност), ако за всяко $M \in \mathbb{N}$ можем да намерим индекс $n_0 \in \mathbb{N}$ такъв, че да е изпълнено $a_n \geq M \ \forall n \geq n_0$. Формално:

$$\forall M \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n \geq M$$

- Фундаментална редица (редица на Коши) - редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ наричаме *фундаментална*, ако за всяко $\varepsilon > 0$ можем да намерим естествено $M \in \mathbb{N}$ такова, че за всеки два индекса $m, n \geq M$ да е в сила $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Формално:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq M : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

  Една редица е сходящата точно тогава, когато е фундаментална!

По време на упражнението, а и по-нататък в курса по ДИС 1 може да срещнем неравенството на Бернули. За $\alpha > -1$ и $n \in \mathbb{N}$ е в сила:

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

То може да бъде доказано с математическа индукция по $n \in \mathbb{N}$.

За допълнителна интуиция, свързана с понятието граница - `https://betterexplained.com/articles/an-intuitive-introduction-to-limits/` -

2 Задачи

Сборникът със задачи по анализ на Проданов, Хадииванов, Чобанов е подходящ за решаване на задачи, свързани с първи стъпки в границите на редици. По-конкретно, разгледайте Глава 4 - Безкрайни редици. По време на упражнение решавахме от Параграф 4 - граници на рационални функции на n. Самостоятелно се опитайте да решите някои задачи от Параграф 7, напр. Задача 31. От Ръководството по анализ на Любенова, Недевски и др. Глава 1, Параграф 1 също предлага хубави задачи - обезателно се опитайте да поработите върху някои от тях, като разгледате решените в Ръководството подточки.

- Задача 20 б) - Сборник със задачи (ПХЧ) - да се намери границата:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$$

Нека преобразуваме израза, намиращ се в сумата:

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{4+(2k+1)-(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2k+5)-(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\cancel{2k+5}}{(2k+1)(2k+3)\cancel{(2k+5)}}-\frac{\cancel{2k+1}}{\cancel{(2k+1)}(2k+3)(2k+5)}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}\right]$$

Сега, сумата придобива вида:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1.3}-\cancel{\frac{1}{3.5}}+\cancel{\frac{1}{3.5}}-\cancel{\frac{1}{5.7}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}}-\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right)$$

Вече съвсем лесно намираме първоначалната граница:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right)=\left(\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right)=\frac{1}{12}$$

- Задача 21 б) - Сборник със задачи (ПХЧ) - да се намери границата:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$$

Отново е добра идея да разгледаме аргумента на произведението и да направим някакви съображения за общия му вид, които ще ни позволят по-лесно да пресметнем границата. Да приложим формулите за съкратено умножение:

$$\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)\left(k^2+k+1\right)}{(k+1)\left(k^2-k+1\right)}$$

Така произведението ще има вида:

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)\left(k^2+k+1\right)}{(k+1)\left(k^2-k+1\right)} = \frac{(2-1)\left(2^2+2+1\right)}{(2+1)\left(2^2-2+1\right)} \cdot \frac{(3-1)\left(3^2+3+1\right)}{(3+1)\left(3^2-3+1\right)} \cdot \cdots$$

$$\cdots \cdot \frac{((n-1)-1)\left((n-1)^2+(n-1)+1\right)}{((n-1)+1)\left((n-1)^2-(n-1)+1\right)} \cdot \frac{(n-1)\left(n^2+n+1\right)}{(n+1)\left(n^2-n+1\right)}$$

Ключовото наблюдение, което трябва да направим, за да съкратим схематично някои дроби, е следното:

$$(k+1)^2-(k+1)+1 = k^2+2k+1-k-1+1 = k^2+k+1$$

Горната формула е в сила за $k \geq 2$ и значи можем да я приложим, за да съкращаваме дроби, получени като съседни "итерации" от произведението. Така например, изразът в числител 2^2+2+1 можем да съкратим с израза в знаменател 3^2-3+1; изразът в числител 3^2+3+1 можем да съкратим с израза в знаменател 4^2-4+1 и т.н. Получаваме:

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(2-1)\cancel{\left(2^2+2+1\right)}}{(2+1)\left(2^2-2+1\right)} \cdot \frac{(3-1)\cancel{\left(3^2+3+1\right)}}{(3+1)\cancel{\left(3^2-3+1\right)}} \cdot \frac{(4-1)\cancel{\left(4^2+4+1\right)}}{(4+1)\cancel{\left(4^2-4+1\right)}} \cdot \cdots$$

$$\cdots \cdot \frac{((n-1)-1)\cancel{\left((n-1)^2+(n-1)+1\right)}}{((n-1)+1)\cancel{\left((n-1)^2-(n-1)+1\right)}} \cdot \frac{(n-1)\left(n^2+n+1\right)}{(n+1)\cancel{\left(n^2-n+1\right)}}$$

Така произведението може да се запише в явен вид по следния начин:

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-1}{n+1} \left(\frac{n^2+n+1}{2^2-2+1}\right) = \frac{2!\,(n-1)!}{(n+1)!} \left(\frac{n^2+n+1}{3}\right)$$

Като си дадем сметка, че $(n+1)! = (n-1)!\,[n\,.\,(n+1)]$, можем да съкратим факториелите и да получим:

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{n\,.\,(n+1)} \cdot \frac{n^2+n+1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+n+1}$$

Границата се намира директно:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n\,.\,(n+1)} \cdot \frac{n^2+n+1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+n+1} = \frac{2}{3}$$

- Задача 1.20 в) - Ръководството по математически анализ (ЛН) - да се намери границата на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако:

$$a_n = n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}\right)$$

Задачата ще решим, като *рационализираме* числителя - това е ирационална функция на n (т.е. съдържа радикали на n), затова рационализирането е добра идея. Да видим:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)^2-\left(2\sqrt{n}\right)^2}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)+2\sqrt{n}}$$

В числителя повдигаме на квадрат, докато в знаменателя изкарваме пред скоби най-високата степен на n, която в случая е $\sqrt{n}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} n\cancel{\sqrt{n}}\frac{(n+1)+2\left(\sqrt{n+1}\sqrt{n-1}\right)+(n-1)-4n}{\cancel{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}+2\right)}=\lim_{n\to\infty} n\frac{-2n+2\sqrt{n^2-1}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}+2\right)}$$

Не е съвсем очевидно, но е необходимо отново да рационализираме числителя. Това проличава, ако последната граница презапишем, а след рационализацията отново извадим най-голямата степен на n пред скоби:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\frac{2\left[\sqrt{n^2-1}-n\right]}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}+2\right)} &= \lim_{n\to\infty} n\frac{2\left[\left(\sqrt{n^2-1}\right)^2-n^2\right]}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}+2\right)\left(\sqrt{n^2-1}+n\right)}= \\
&= \lim_{n\to\infty} \cancel{n}\frac{2\left(\cancel{n^2}-1-\cancel{n^2}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}+2\right)\left[\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)\right]}= \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}+2\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}
\end{aligned}$$

Ако $n\to\infty$, то ясно е, че $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Следователно в знаменателя имаме следните прости граници:

$$\begin{cases}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1\\ \sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1\\ \sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+2\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}4\\ \left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}2\end{cases}$$

Окончателно, цялата граница е:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=-\frac{2}{2\,.\,4}=-\frac{1}{4}$$

В последната задача рационализирахме израз от вида $c_1\sqrt{A}-c_2\sqrt{B}$ за някакви константи c_1, c_2 и радикали на A, B - функции на n. Това най-общо става, като използваме формулата:

$$\left(c_1\right)^2 A-\left(c_2\right)^2 B=\left[c_1\sqrt{A}-c_2\sqrt{B}\right]\,.\,\left[c_1\sqrt{A}+c_2\sqrt{B}\right]\Rightarrow c_1\sqrt{A}-c_2\sqrt{B}=\frac{\left(c_1\right)^2 A-\left(c_2\right)^2 B}{c_1\sqrt{A}+c_2\sqrt{B}}$$

Наистина, заместете $c_1 = 1, c_2 = 2$ и $A = \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}, B = \sqrt{n}$ и вижте в конкретния пример, че точно това направихме при рационализацията. Съвсем аналогично можем да ползваме формулата за $c_1\sqrt{A} + c_2\sqrt{B}$ като разменим местата на израза отляво и на знаменателя отдясно:

$$c_1\sqrt{A} + c_2\sqrt{B} = \frac{(c_1)^2 A - (c_2)^2 B}{c_1\sqrt{A} - c_2\sqrt{B}}$$

забележете, че това не е единственият способ за рационализиране на числител на ирационална функция на n. В следващата задача за някакви изрази A, B ще използваме формулата

$$\left(\sqrt[3]{A} - B\right) = \frac{A - B^3}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{A}B + B^2}$$

- Задача 26 (Сборник на Кудрявцев, Глава 2, Параграф 8 - Предел последователности) Да се намери границата на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с общ член:

$$a_n = \frac{n}{2}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} - 1\right)$$

Решението е да рационализираме в границата с помощта на съображението, че:

$$\left[\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} - 1\right] \cdot \left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} + 1\right] = \left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}\right)^3 - 1 = 1 + \frac{2}{n} - 1 = \frac{2}{n}$$

Наистина, получава се границата:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{2}} \frac{\frac{\cancel{2}}{\cancel{n}}}{\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} + 1\right]}$$

Съкращаваме каквото можем и остава да пресметнем границата:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} + 1\right]}$$

Да запишем подробно:

$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Longrightarrow \sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Longrightarrow \sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$$

Вече е ясно, че търсената граница е $\frac{1}{3}$.

Самостоятелно приложете абсолютно същия подход, за да решите задача 1.26 от Ръководството по анализ. Имайте предвид, че това е функция на a_n за някаква безкрайно малка редица a_n, а не функция на n. Независимо от това, рационализацията работи по същия начин.