Упражнение 14

Атанас Груев

18.11.2019

1 Кратка теория

Занимаваме се с *производни от по-висок ред.*

- Нулева производна на една функция f считаме самата функция, т.е. $f^{(0)} \equiv f$.
- Ако $f^{(n)}$ е n-та производна на функцията f, след диференциране - $\left(f^{(n)}\right)' = f^{(n+1)}$.

Основни n-ти производни, които са използвани по време на упражнение, могат да бъдат намерени в Сборника (ПХЧ), Глава 7, Параграф 2 ("n-ти производни").

Формула на Лайбниц за производни от по-висок ред:

Ако f и g са n пъти диференцируеми и имат обща дефиниционна област, то в сила е *формулата на Лайбниц*:

$$(fg)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

2 Задачи

Препоръчително е да се прегледат задачите от съответния параграф в ПХЧ - няколко примера са решени тук. В Ръководството подходящи задачи са 2.5, 2.7, 2.8 и 2.9 от Главата за производни, Параграф 2 - "Повторно диференциране".

- Сборник ПХЧ - зад. 22, подточка г) - да се намери n-та производна на функцията:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2-5x+6}$$

Ще приложим *метода на неопределените коефициенти.* Забелязваме, че знаменателят може да се представи като $(x-2)(x-3)$. Тогава съществува представяне на функцията в следния вид:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{x^2-5x+6},$$

където A, B са някакви константи, които ще определим. Привеждаме под общ знаменател и виждаме, че трябва $A(x-2)+B(x-3) = Ax-2A+Bx-3B = 2x+3$. Остава да сравним коефициентите пред всяка степен на x (те са две - x^1 и x^0):

$$\left.\begin{aligned} A+B &= 2 \\ -2A-3B &= 3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A = 9 \text{ и } B = -7$$

Следователно можем да запишем f по следния начин:

$$f(x) = \frac{9}{x-3} - \frac{7}{x-2} = 9(x-3)^{-1} - 7(x-2)^{-1}$$

Готови сме да диференцираме. Лесно се намира n-та производна за израз от вида $(x-c)^{-1}$ за константа c. Да видим:

$$\left[(x-c)^{-1}\right]^{(n)} = (-1)\left[(x-c)^{-2}\right]^{(n-1)} = (-1)(-2)\left[(x-c)^{-3}\right]^{(n-2)} = \cdots =$$
$$= \cdots = (-1)(-2)\ldots(-n)(x-c)^{-n-1} = (-1)^n \,.\, n!\,.\, \frac{1}{(x-c)^{n+1}}$$

По-формално тази производна може да се докаже с индукция по n. И така, остава да заместим в нашата функция и да получим:

$$f^{(n)}(x) = 9\left((-1)^n \,.\, n!\,.\, \frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right) - 7\left((-1)^n \,.\, n!\,.\, \frac{1}{(x-3)^{n+1}}\right)$$

Краен отговор:

$$f^{(n)}(x) = (-1) \,.\, n!\left[\frac{9}{(x-2)^{n+1}} - \frac{7}{(x-3)^{n+1}}\right]$$

- Сборник ПХЧ - зад. 23, подточка в) - да се намери n-та производна на:

$$f(x) = \sin^m x \, (m \in \mathbb{N})$$

Без да расписваме решението в явен вид, ще изведем рекурентна формула за пресмятането на n-та производна от $\sin^m x$ чрез формулата на Лайбниц. Наистина, нека с D_m^n бележим $(\sin^m x)^{(n)}$. Лесно се вижда, че:

1. За $m = 0$ имаме:
$$D_0^n = \left(\sin^0 x\right)^{(n)} = 1^{(n)} = 0$$

2. За $m = 1$ имаме:
$$D_1^n = \left(\sin^1 x\right)^{(n)} = \sin^{(n)} x = \sin\left(x + n\,.\,\frac{\pi}{2}\right)$$

3. За $m = 2$ имаме:
$$D_2^n = \left(\sin^2 x\right)^{(n)} = [\sin x\,.\,\sin x]^{(n)} = 2^{n-1}\cos\left(2x + n\,.\,\frac{\pi}{2}\right)$$

4. За $m > 2$ имаме:
$$D_m^n = (\sin^m x)^{(n)} = \left[\sin x\,.\,\sin^{m-1} x\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sin x)^{(k)}\left(\sin^{m-1} x\right)^{(n-k)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D_1^k \,.\, D_{m-1}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin\left(x + k\,.\,\frac{\pi}{2}\right) D_{m-1}^{n-k}$$

- Сборник ПХЧ - зад. 32, подточка е) - да се намери n-та производна:

$$f(x) = x^a \ln x, \quad a \text{ - произволна константа}$$

Разсъждаваме точно както в предходния пример и използваме форнулата на Лайбниц:

$$\left[x^a \ln x\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^a)^{(k)} (\ln x)^{(n-k)}$$

Не е трудно да се провери, че:

$$(\ln x)^{(n)} = \left(x^{-1}\right)^{(n-1)} = \cdots = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

Но този извод не може да се приложи директно във формулата на Лайбниц, защо изисква предварително еднократно диференциране на логаритъма! Ако диференцираме вътре в сумата, то ще има проблем със сумационния индекс при $k = n$. С други думи, ако еднократно диференцираме логаритъма вътре в сумата, трябва да сменим границите на сумационния индекс - но трябва да се съобразим и с множителя x^a. Решението е да представим сумата като сбор:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^a)^{(k)} (\ln x)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (x^a)^{(k)} (\ln x)^{(n-k)} + \binom{n}{n} (x^a)^{(n)} \ln x$$

В израза отдясно можем спокойно да заместим $(\ln x)^{(n)}$ с $\left(x^{-1}\right)^{(n-1)}$, без това да води до проблем при индексирането. И така, готови сме да пресметнем n-та производна:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^a)^{(k)} (\ln x)^{(n-k)} = (x^a)^{(n)} \ln x + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (x^a)^{(k)} (\ln x)^{(n-k)} =$$

$$= \frac{a!}{(a-k)!} x^{a-n} \ln x + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{a!}{(a-k)!} x^{a-k} \left(x^{-1}\right)^{(n-k-1)} =$$

$$= k! \binom{a}{k} x^{a-n} \ln x + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} k! \binom{a}{k} x^{a-k} (-1)^{n-k-1} (n-k-1)! \left(x^{n-k}\right) =$$

$$= a! \binom{a}{k} x^{a-n} \left[\ln x + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k-1)! \left(\frac{(-1)^{n-k-1}}{x^{2k-a-n}}\right)\right]$$

Последният израз може да бъде преработен до:

$$n! x^{a-n} \left[\binom{a}{n} \ln x - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \binom{a}{n-k}\right]$$

Това ще изисква смяна на сумационния индекс.

- Сборник ПХЧ - зад. 32, подточка в) - да се намери n-та производна на функцията:

$$f\left(x\right)=x^{a}\cos x,\qquad a\text{ - произволна константа}$$

Прилагаме формулата на Лайбниц:

$$\left[x^{a}\cos x\right]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x^{a}\right)^{(k)}\left(\cos x\right)^{(n-k)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a\left(a-1\right)\dots\left(a-k+1\right)x^{a-k}\cos\left(x+\left(n-k\right)\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{a!}{\left(a-k\right)!}x^{a-k}\cos\left(x+\left(n-k\right)\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{k=0}^{n}k!\binom{n}{k}\binom{a}{k}x^{a-k}\cos\left(x+\left(n-k\right)\frac{\pi}{2}\right)$$

- Ръководство - зад. 2.8, подточка д) - да се намери n-та производна:

$$f\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$$

използваме формулата на Лайбниц за функциите x и $\left(1+x\right)^{-\frac{1}{3}}$:

$$f^{(n)}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(k)}\left(\left(1+x\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n-k)}=$$

$$=\binom{n}{0}x\left(\left(1+x\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n)}+\binom{n}{1}\left(\left(1+x\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n-1)}=$$

$$x\left(\left(1+x\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n)}+n\left(\left(1+x\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n-1)}$$

Пресмята се, че:

$$\left(\left(1+x\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n)}=-\frac{1}{3}\left(\left(1+x\right)^{-\frac{4}{3}}\right)^{(n-1)}=\left(-1\right)^{2}\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\left(\left(1+x\right)^{-\frac{7}{3}}\right)^{(n-2)}=\dots=$$

$$=\dots=\left(-1\right)^{n}\frac{1\,.\,4\,.\,\dots\,.\left(3n-2\right)}{3^{n}}\left(1+x\right)^{-\frac{3n+1}{3}}$$

Следователно търсената n-та производна е:

$$f^{(n)}\left(x\right)=x\,.\,\left(-1\right)^{n}\frac{1\,.\,4\,.\,\dots\,.\left(3n-2\right)}{3^{n}}\left(1+x\right)^{-\frac{3n+1}{3}}+$$

$$+n\,.\,\left(-1\right)^{n-1}\frac{1\,.\,4\,.\,\dots\,.\left(3\left(n-1\right)-2\right)}{3^{n-1}}\left(1+x\right)^{-\frac{3(n-1)+1}{3}}$$