Действия с линейни изображения. Връзка със съответните операции с матрици.

Твърдение 1. *Нека $\varphi : U \to V$, $\psi : U \to V$ са линейни изображения на линейни пространства над поле F, а $\lambda \in F$. Тогава*

$$\varphi + \psi : U \longrightarrow V, \quad (\varphi + \psi)(u) := \varphi(u) + \psi(u), \quad \forall u \in U$$

е линейно изображение на U във V, което се нарича сума на φ и ψ. Аналогично,

$$\lambda\varphi : U \longrightarrow V, \quad (\lambda\varphi)(u) := \lambda\varphi(u), \quad \forall u \in U$$

е линейно изображение, което се нарича произведение на λ и φ.

Доказателство. От

$$(\varphi+\psi)\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) + \psi\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(u_i) + \sum_{i=1}^n x_i \psi(u_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i[\varphi(u_i) + \psi(u_i)] = \sum_{i=1}^n x_i (\varphi+\psi)(u_i)$$

за произволни $u_i \in U$ и $x_i \in F$ следва, че $\varphi + \psi : U \to V$ е линейно изображение.

Съгласно

$$(\lambda\varphi)\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \lambda\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \lambda\left[\sum_{i=1}^n x_i \varphi(u_i)\right] = \sum_{i=1}^n x_i[\lambda\varphi(u_i)] = \sum_{i=1}^n x_i(\lambda\varphi)(u_i)$$

за произволни $u_i \in U$ и $x_i \in F$, изображението $\lambda\varphi : U \to V$ е линейно.

□

Твърдение 2. *Нека U и V са линейни пространства над поле F. Тогава множеството $\mathrm{Hom}(U, V)$ на линейните изображения $U \to V$ е линейно пространство над F.*

Доказателство. Аксиомите за линейно пространство в $\mathrm{Hom}(U, V)$ следват от съответните аксиоми във V, след остойностяване в произволен вектор $u \in U$. По-точно, от

$$[\theta + (\psi + \varphi)](u) = \theta(u) + (\psi + \varphi)(u) = \theta(u) + [\psi(u) + \varphi(u)] =$$
$$= [\theta(u) + \psi(u)] + \varphi(u) = (\theta + \psi)(u)(u) + \varphi(u) = [(\theta + \psi) + \varphi](u)$$

за всяко $u \in U$ следва $\theta + (\psi + \varphi) = (\theta + \psi) + \varphi$.

От

$$(\psi + \varphi)(u) = \psi(u) + \varphi(u) = \varphi(u) + \psi(u) = (\varphi + \psi)(u) \quad \text{за} \quad \forall u \in U$$

следва $\psi + \varphi = \varphi + \psi$.

Нулевото изображение

$$\mathbb{O} : U \longrightarrow V, \quad \mathbb{O}(u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \quad \text{за} \quad \forall u \in U$$

играе ролята на нулев вектор в $\mathrm{Hom}(U, V)$, съгласно

$$(\varphi + \mathbb{O})(u) = \varphi(u) + \mathbb{O}(u) = \varphi(u) + \overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \varphi(u) \quad \text{за} \quad \forall u \in U,$$

което дава $\varphi + \mathbb{O} = \varphi$.

Произволно линейно изображение $\varphi : U \to V$ има противоположно $(-\varphi) := (-1)\varphi \in \mathrm{Hom}(U, V)$, така че $\varphi + (-\varphi) = \mathbb{O}$ поради

$$[\varphi + (-\varphi)](u) = \varphi(u) + (-1)\varphi(u) = \varphi(u) + [-\varphi(u)] = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \mathbb{O}(u)$$

за всички $u \in U$.

Нека $\varphi : U \to V$, $\psi : U \to V$ са линейни изображения, а $\lambda, \mu \in F$. От

$$\begin{aligned}[\lambda(\varphi + \psi)](u) = \lambda[(\varphi + \psi)](u) = \lambda[\varphi(u) + \psi(u)] = \\ = \lambda\varphi(u) + \lambda\psi(u) = (\lambda\varphi)(u) + (\lambda\psi)(u) = (\lambda\varphi + \lambda\psi)(u)\end{aligned}$$

за всички $u \in U$ следва дистрибутивния закон $\lambda(\varphi + \psi) = \lambda\varphi + \lambda\psi$ над векторен множител.

За дистрибутивния закон $(\lambda + \mu)\varphi = \lambda\varphi + \mu\varphi$ над скаларен множител е достатъчно да забележим, че

$$\begin{aligned}[(\lambda + \mu)\varphi](u) = (\lambda + \mu)\varphi(u) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(u) = \\ = (\lambda\varphi)(u) + (\mu\varphi)(u) = (\lambda\varphi + \mu\varphi)(u)\end{aligned}$$

за всички $u \in U$.

От

$$[(\lambda\mu)\varphi](u) = (\lambda\mu)\varphi(u) = \lambda[\mu\varphi(u)] = \lambda[(\mu\varphi)(u)] = [\lambda(\mu\varphi)](u) \quad \text{за всички} \quad u \in U$$

получаваме $(\lambda\mu)\varphi = \lambda(\mu\varphi)$.

Накрая, за произволно линейно изображение $\varphi : U \to V$ и $1 \in F$ е в сила

$$(1.\varphi)(u) = 1.\varphi(u) = \varphi(u)$$

за всички $u \in U$, откъдето $1.\varphi = \varphi$.

$\square$

Твърдение 3. *Нека U е линейно пространство над F с размерност $\dim U = n$, а V е линейно пространство над F с $\dim V = m$. Тогава пространството $\mathrm{Hom}(U, V)$ на линейните изображения на U във V е изоморфно на пространството $M_{m \times n}(F)$ на матриците с m реда и n стълба. По-точно, за всеки избор на базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на U и базис $f = (f_1, \ldots, f_m)$ на V, съответствието*

$$\mathcal{A} : \mathrm{Hom}(U, V) \longrightarrow M_{m \times n}(F),$$

съпоставящо на линейно изображение $\varphi : U \to V$ матрицата $\mathcal{A}_\varphi$ на φ спрямо базисите e и f е линеен изоморфизъм.

Доказателство. Съответствието $\mathcal{A}$ е инективно, защото матрицата $\mathcal{A}_\varphi$ на линейно изображение $\varphi : U \to V$ спрямо базисите e и f определя еднозначно φ. Съответствието $\mathcal{A}$ е сюрективно, защото всяка матрица $A \in M_{m\times n}(F)$ се реализира като матрица на линейно изображение $U \to V$ спрямо базиса e на U и базиса f на V.

За произволни $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(U,V)$, от определението за матрица $\mathcal{A}_{\varphi+\psi}$ на линейното изображение $\varphi+\psi$ следва

$$f\mathcal{A}_{\varphi+\psi} = (\varphi+\psi)(e) = ((\varphi+\psi)(e_1), \dots, (\varphi+\psi)(e_n)) =$$
$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) = \varphi(e) + \psi(e) = f\mathcal{A}_\varphi + f\mathcal{A}_\psi = f(\mathcal{A}_\varphi + \mathcal{A}_\psi).$$

Вземайки предвид линейната независимост на базиса $f = (f_1, \dots, f_m)$ на V, получаваме

$$\mathcal{A}_{\varphi+\psi} = \mathcal{A}_\varphi + \mathcal{A}_\psi.$$

Аналогично, за произволни $\lambda \in F$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$, определението за матрица $\mathcal{A}_{\lambda\varphi}$ на $\lambda\varphi$ дава

$$f\mathcal{A}_{\lambda\varphi} = (\lambda\varphi)(e) = ((\lambda\varphi)(e_1), \dots, (\lambda\varphi)(e_n)) = (\lambda\varphi(e_1), \dots, \lambda\varphi(e_n)) =$$
$$= \lambda(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \lambda\varphi(e) = \lambda(f\mathcal{A}_\varphi) = f(\lambda\mathcal{A}_\varphi).$$

Съгласно линейната независимост на базиса $f = (f_1, \dots, f_m)$ на V, това е достатъчно за

$$\mathcal{A}_{\lambda\varphi} = \lambda\mathcal{A}_\varphi.$$

С това установяваме линейността на биективното изображение

$$\mathcal{A} : \mathrm{Hom}(U,V) \longrightarrow M_{m\times n}(F)$$

и доказваме, че $\mathcal{A}$ е линеен изоморфизъм.

□

Твърдение 4. *Ако $\varphi : U \to V$ и $\psi : V \to W$ са линейни изображения на пространства над F, то*

$$\psi\varphi : U \longrightarrow W, \quad (\psi\varphi)(u) := \psi(\varphi(u)), \quad \forall u \in U$$

е линейно изображение, което се нарича произведение на φ и ψ.

Доказателство. Съгласно

$$(\psi\varphi)\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \psi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right)\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^n x_i \varphi(u_i)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i \psi(\varphi(u_i)) = \sum_{i=1}^n x_i (\psi\varphi)(u_i)$$

за произволни $u_i \in U$ и $x_i \in F$, произведението $\psi\varphi : U \to W$ на линейни изображения е линейно изображение.

□

Твърдение 5. *Произведението на линейни изображения има следните свойства:*

(i) асоциативност: $\theta(\psi\varphi) = (\theta\psi)\varphi$ за произволни линейни изображения $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to W$, $\theta : W \to T$;

(ii) дистрибутивни закони за събиране и умножение: $\theta(\psi+\varphi) = \theta\psi+\theta\varphi$ за линейни изображения $\varphi, \psi : U \to V$, $\theta : V \to W$ и $(\theta+\psi)\varphi = \theta\varphi + \psi\varphi$ за линейни изображения $\varphi : U \to V$, $\theta, \psi : V \to W$;

(iii) $\lambda(\psi\varphi) = [(\lambda\psi)\varphi] = [\psi(\lambda\varphi)]$ за произволни линейни изображения $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to W$ и $\lambda \in F$.

Доказателство. (i) За произволен вектор $u \in U$ е в сила

$$[\theta(\psi\varphi)](u) = \theta[(\psi\varphi)(u)] = \theta[\psi(\varphi(u))] = \theta(\psi(\varphi(u))) = (\theta\psi)(\varphi(u)) = [(\theta\psi)\varphi](u),$$

откъдето $\theta(\psi\varphi) = (\theta\psi)\varphi$.

(ii) От

$$\begin{gathered}[\theta(\psi + \varphi)](u) = \theta((\psi + \varphi)(u)) = \theta(\psi(u) + \varphi(u)) = \\ = \theta(\psi(u)) + \theta(\varphi(u)) = (\theta\psi)(u) + (\theta\varphi)(u) = (\theta\psi + \theta\varphi)(u)\end{gathered}$$

за произволен вектор $u \in U$ следва $\theta(\psi + \varphi) = \theta\psi + \theta\varphi$. Аналогично,

$$[(\theta + \psi)\varphi](u) = (\theta + \psi)(\varphi(u)) = \theta(\varphi(u)) + \psi(\varphi(u)) = (\theta\varphi)(u) + (\psi\varphi)(u) = (\theta\varphi + \psi\varphi)(u)$$

за всяко $u \in U$ е достатъчно за $(\theta + \psi)\varphi = \theta\varphi + \psi\varphi$.

(iii) За произволен вектор $u \in U$ е изпълнено

$$[\lambda(\psi\varphi)](u) = \lambda(\psi(\varphi(u))) = (\lambda\psi)(\varphi(u)) = \psi((\lambda\varphi)(u)) = [(\lambda\psi)\varphi](u) = [\psi(\lambda\varphi)](u),$$

откъдето $\lambda(\psi\varphi) = (\lambda\psi)\varphi = \psi(\lambda\varphi)$.

□

Твърдение 6. *Ако $\varphi : U \to V$ е линейно изображение с матрица $\mathcal{A}_\varphi$ спрямо базис e на U и базис f на V, а $\psi : V \to W$ е линейно изображение с матрица $\mathcal{A}_\psi$ спрямо базиса f на V и базис g на W, то матрицата на $\psi\varphi$ спрямо базиса e на U и базиса g на W е*

$$\mathcal{A}_{\psi\varphi} = \mathcal{A}_\psi \mathcal{A}_\varphi.$$

Доказателство. От определението за матрица $\mathcal{A}_{\psi\varphi}$ на $\psi\varphi$ следва

$$\begin{gathered}g\mathcal{A}_{\psi\varphi} = (\psi\varphi)(e) = ((\psi\varphi)(e_1), \ldots, (\psi\varphi)(e_n)) = (\psi(\varphi(e_1)), \ldots, \psi(\varphi(e_n))) = \\ = \psi(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = \psi(\varphi(e)) = \psi(f\mathcal{A}_\varphi) = \psi(f)\mathcal{A}_\varphi = (g\mathcal{A}_\psi)\mathcal{A}_\varphi = g(\mathcal{A}_\psi\mathcal{A}_\varphi),\end{gathered}$$

така че $\mathcal{A}_{\psi\varphi} = \mathcal{A}_\psi\mathcal{A}_\varphi$, съгласно линейната независимост на базиса g на W.

□