Упражнения - Интеграли

Атанас Груев

13.12.2019 г. и 16-17.12.2019 г. и 06-07.01.2020 г. и 13-14.01.2020 г.

Съдържание

1 Интегриране чрез внасяне под знака на диференциала

Използваме твърдението:

$$\text{Ако } \int f(u)\, du = F(u) + C, \text{ то } \int f(\varphi(x))\, \mathrm{d}(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C$$

По дефиниция:

$$\int f(x)\, \mathrm{d}(g(x)) = \int f(x)\, g'(x)\, dx$$

Задачи

- Ръководство, задача 2.40 - Пресметнете интеграла:

$$\int \frac{x\, dx}{(1+x)^4}$$

Решение: Ще прибавим и извадим единица в числител.

$$\int \frac{x\, dx}{(1+x)^4} = \int \frac{1+x-1}{(1+x)^4}\, dx = \int \frac{dx}{(1+x)^3} - \int \frac{dx}{(1+x)^4} =$$

$$= \int (1+x)^{-3}\, \mathrm{d}(1+x) - \int (1+x)^{-4}\, \mathrm{d}(1+x) = \frac{(1+x)^{-2}}{-2} - \frac{(1+x)^{-3}}{-3} + C$$

Крайният отговор е:

$$I = -\frac{1}{2(1+x)^2} + \frac{1}{3(1+x)^3} + C$$

- Ръководство, задача 2.61 - Решете интеграла:

$$\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{25\sin^2 x + 9\cos^2 x}}$$

Решение: В знаменателя ще ползваме основното тригонометрично тъждество, а в числителят ще внесем под знака на диференциала два пъти.

$$\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{25\sin^2 x + 9\cos^2 x}} = \int \frac{2\sin x \cos x}{\sqrt{1+16\sin^2 x}}\, dx = 2\int \frac{\sin x \mathrm{d}(\sin x)}{\sqrt{1+16\sin^2 x}} =$$

$$\frac{2}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\sin^2 x\right)}{\sqrt{1+16\sin^2 x}} = \frac{1}{16}\int \frac{\mathrm{d}\left(1+16\sin^2 x\right)}{\sqrt{1+16\sin^2 x}} = \frac{1}{16}\,.\,2\sqrt{1+16\sin^2 x} + C$$

- Ръководство, задача 2.65 - Решете интеграла:

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}\, dx$$

Решение: Директно внасяне под знака на диференциала на знаменателя и свеждане до табличен интеграл:

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}\, dx = \int \operatorname{arctg}^3 x \mathrm{d}(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4} + C$$

- Ръководство, задача 2.66 - Решете интеграла:

$$\int \frac{\ln \arccos x \, dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos x}$$

Решение: Двукратно внасяне под знака на диференциала:

$$\int \frac{\ln \arccos x \, dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} = -\int \frac{\ln \arccos x}{\arccos x} \mathrm{d}\left(\arccos x\right) =$$
$$= -\int \ln \arccos x \mathrm{d}\left(\ln \arccos x\right) = -\frac{1}{2} \ln^2 \arccos x + C$$

2 Интегриране по части

За еднократно гладки функции f, g (т.е. притежаващи непрекъснати производни) е в сила следното тъждество, известно като*правило за интегриране по части*:

$$\int f\left(x\right) \mathrm{d}g\left(x\right) = f\left(x\right) g\left(x\right) - \int g\left(x\right) \mathrm{d}g\left(x\right)$$

За достатъчно гладки функции f, g е в сила и *обобщената формула за интегриране по части*:

$$\int f\left(x\right) g^{(n+1)}\left(x\right)\, dx = f\left(x\right) g^{(n)}\left(x\right) - f'\left(x\right) g^{(n-1)}\left(x\right) + f''\left(x\right) g^{(n-2)}\left(x\right) - \cdots$$
$$+ \left(-1\right)^n f^{(n)}\left(x\right) g\left(x\right) + \left(-1\right)^{n+1} \int f^{(n+1)}\left(x\right) g\left(x\right)\, dx$$

Задачи

- Ръководство, задача 3.44 - Пресметнете интеграла:

$$\int \frac{\ln x \, dx}{\left(x+1\right)^2}$$

Решение: Както обикновено, като подготовка за интегриране по части се налага внасяне под знака на диференциала:

$$\int \frac{\ln x \, dx}{\left(x+1\right)^2} = -\int \ln x \, \mathrm{d}\left(x+1\right)^{-1} = -\frac{\ln x}{x+1} + \int \frac{\mathrm{d}\left(\ln x\right)}{x+1} = -\frac{\ln x}{x+1} + \int \frac{dx}{x\left(x+1\right)}$$

Използваме единицата в числител, за да запишем:

$$\int \frac{1\, dx}{x\left(x+1\right)} = \int \frac{1+x-x}{x\left(x+1\right)} dx = \int \frac{dx}{x} - \frac{dx}{x+1} = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

Окончателно получаваме:

$$\int \frac{\ln x \, dx}{\left(x+1\right)^2} = -\frac{\ln x}{x+1} + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

- Ръководство, задача 3.45 - Пресметнете интеграла:

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1}\, dx$$

Решение: Директно интегрираме по части:

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1}\, dx = x \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \int x \,\mathrm{d}\left(\operatorname{arctg} \sqrt{2x-1}\right) =$$

$$= x \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \int x \,.\, \frac{dx}{1+(2x-1)} = x \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \frac{x}{2} + C$$

- Ръководство, задача 3.46 - Пресметнете интеграла:

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

Решение: Двукратно внасяне под знака на диференциала. Внимание - използваме наготово решението на зад. 3.11, подробно разписана в Ръководството.

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}\left(\operatorname{arctg} x\right) = \int \frac{\mathrm{d}\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right)}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int e^{\operatorname{arctg} x}\, \mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx =$$

$$= \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{(x-1)\, e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C = \frac{(x+1)\, e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C$$

- Ръководство, задача 3.47 - Пресметнете интеграла:

$$\int x \operatorname{arctg}^2 x\, dx$$

Решение: Ще внесем x под знака на диференциала и ще интегрираме по части:

$$\int x \operatorname{arctg}^2 x\, dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{arctg}^2 x \,\mathrm{d}\left(x^2\right) = \frac{x^2}{2} \,.\, \operatorname{arctg}^2 x - \frac{1}{2} \int x^2 \,.\, \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg}^2 x - \int \frac{\left(x^2+1-1\right) \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg}^2 x - I_1 + \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg}^2 x - I_1 + \int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}\left(\operatorname{arctg} x\right)$$

Интегралът I_1 ще сметнем отделно:

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}\left(1+x^2\right)}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + C$$

Окончателно получаваме:

$$\int x \operatorname{arctg}^2 x\, dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg}^2 x - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C$$

3 Интегриране чрез субституции

Твърдение: Нека $f: \Delta \to \mathbb{R}$ и $\varphi: \Delta' \to Range(\varphi)$, където $\varphi(t)$ е диференцируема в Δ' и $Range(\varphi) \subset \Delta$. Нека също $\varphi(t)$ притежава диференцируема обратна функция $\psi(x)$, а функцията $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ притежава неопределен интеграл в Δ'. Полагаме:

$$g(t) \coloneqq \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Тогава:

$$\int f(x)\,dx = g(\psi(x)) + C$$

Следствие: Най-често извършваме *смяна на променливите* в неопределен интеграл:

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \mathrm{d}(\varphi(t)) \\ t = \psi(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$$

Задачи:

- Ръководство, зад. 4.15 - С подходяща субституция решете интеграла:

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx$$

Решение: Ще извършим полагането:

$$\left.\begin{array}{l} t = e^{\sqrt{x}} \\ x = \ln^2 t \\ dx = 2\ln t\dfrac{dt}{t} \end{array}\right\} \Longrightarrow \int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int \cancel{t}\,.\,\frac{2\ln t}{\cancel{t}}\,dt = 2\int \ln t\,dt$$

Последният интеграл решаваме чрез интегриране по части:

$$2\int \ln t\,dt = 2\left[t\ln t - \int t\,\mathrm{d}(\ln t)\right] = 2t\ln t - 2t + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}}\sqrt{x} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

- Ръководство, зад. 4.17 - С подходяща субституция решете интеграла:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx, \quad a > 0$$

Решение: Прилагаме следната субституция:

$$\left.\begin{array}{l} x = a\operatorname{tg} t,\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ t = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} \\ dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}\,dt \end{array}\right\} \Longrightarrow \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \int \left(\frac{\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2 t + a^2}}{a^2\operatorname{tg}^2 t}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}\right)dt$$

$$\int\left(\frac{\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2 t+a^2}}{a^2\operatorname{tg}^2 t}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}\right)dt=\int\frac{\cancel{a^2}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}{\cancel{a^2}\sin^2 t}\,dt=\int\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}{\sin^2 t}\,dt=\int\frac{dt}{|\cos t|\sin^2 t}=$$

$$=\int\frac{dt}{\cos t\sin^2 t}=\int\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos t\sin^2 t}\,dt=\int\frac{dt}{\cos t}+\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt=$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\int\frac{\mathrm{d}\left(\sin t\right)}{\sin^2 t}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{1}{sint}+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{1}{\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)}+C$$

Може да се покаже, че са в сила тъждествата:

$$\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\ln\frac{1+\sin t}{\cos t}\Rightarrow\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\Rightarrow\frac{1}{\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)}=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$$

Подробности могат да бъдат намерени в Ръководството - разгледайте решените задачи в раздела “Интегриране чрез субституции”. Окончателно получаваме, че търсеното решение е:

$$\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+C$$

- Ръководство, зад. 4.20 - С подходяща субституция решете интеграла:

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Решение: Използваме субституцията:

$$\left.\begin{aligned}x&=\sin t\\t&=\arcsin x\\dx&=\cos t\,dt\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{\cos t}{\left(1-\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

$$\int\frac{\cos t}{\left(1-\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}\,dt=\int\frac{\cos t}{|\cos t|^3}\,dt=\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\int\mathrm{d}\left(\operatorname{tg}t\right)=\operatorname{tg}t+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\operatorname{tg}\left(\arcsin x\right)+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$$

Последното тъждество може да бъде доказано самостоятелно със знанията за обратните кръгови функции.

4 Интегриране на рационални функции

Рационална функция $R(x)$ има вида $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ за полиноми $P(x), Q(x)$. Казваме, че рационалната функция $R(x)$ е правилна, ако $deg(P) < deg(Q)$. Всяка рационална функция може да се представи като сума на полином и правилна рационална функция. Следователно, ако $deg(P) \geq deg(Q)$, като първа стъпка за решаване на интеграли от рационални функции е необходимо да извършим *делене на полиноми.*

Нека $R(x)$ е правилна рационална функция. Нека имаме:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ и } Q(x) = (x+a_1)^{\alpha_1} \dots (x+a_n)^{\alpha_n} \left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1} \dots \left(x^2+p_mx+q_m\right)^{\beta_m}$$

Тогава съществуват константи $\{A_i\}_{i=1}^{\alpha_1}, \dots, \{B_i\}_{i=1}^{\alpha_n}, \dots, \{(D_i, E_i)\}_{i=1}^{\beta_1}, \dots, \{(F_i, G_i)\}_{i=1}^{\beta_m}$, за които:

$$\begin{aligned} R(x) = \left(\frac{A_1}{x+a_1} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x+a_1)^{\alpha_1}}\right) + \dots + \left(\frac{B_1}{x+a_n} + \dots + \frac{B_{\alpha_n}}{(x+a_n)^{\alpha_n}}\right) + \\ + \left(\frac{D_1x+E_1}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{D_{\beta_1}x+E_{\beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}}\right) + \dots \\ \dots + \left(\frac{F_1x+G_1}{x^2+p_mx+q_m} + \dots + \frac{F_{\beta_m}x+G_{\beta_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{\beta_m}}\right) \end{aligned}$$

Въпросните констранти са еднозначно определени и се намират с метода на неопределените коефициенти. Пресмятането на интеграл от рационална функция се свежда по горния начин до пресмятането на интеграли от т.нар. елементарни функции (с чиято помощ се представя $R(x)$). В Ръководството при теоретичните бележки в началото на параграфа "Интегриране на рационални функции" могат да бъдат разгледани тези интеграли и методите за тяхното решаване.

Метод на Остроградски-Ермит

Нека $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ е правилна рационална функция; при това $Q(x)$ има кратни нули. В сила е равенството:

$$\int R(x)\, dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$$

Тук $Q_2(x)$ има същите нули като $Q(x)$, но прости. $Q_1(x)$ се получава като $\frac{Q(x)}{Q_2(x)}$. $P_1(x)$ и $P_2(x)$ са с неопределени коефициенти и степените им са по-ниски съответно от степените на $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Тези коефициенти се определят чрез диференциране на горното равенство:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right]' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

Задачи

- Ръководство, задача 5.22 - Решете интеграла:

$$\int \frac{\left(x^3+1\right)\, dx}{x\left(x^2+x+1\right)^2}$$

Решение: Преди всичко съобразяваме, че съществуват коефициенти A, B, C, D, E такива, че да е изпълнено равенството:

$$\frac{x^3+1}{x\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

Прилагаме метода на неопределените коефициенти. По-точно, освобождаваме се от знаменателите от двете страни и получаваме:

$$x^3+1 = A\left(x^2+x+1\right)^2 + \left(Bx^2+Cx\right)\left(x^2+x+1\right) + Dx^2 + Ex$$

Това ни позволява да образуваме системата:

$$\begin{cases} A+B & = 0 \\ 2A+B+C & = 1 \\ 3A+B+C+D & = 0 \\ 2A \qquad +C \qquad +E & = 0 \\ A & = 1 \end{cases}$$

Решаваме я и получаваме, че:

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0, \quad D = -2, \quad E = -2$$

Заместваме по-горе:

$$\int \frac{\left(x^3+1\right)\,dx}{x\left(x^2+x+1\right)^2} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+x+1} + \frac{-2x-2}{\left(x^2+x+1\right)^2}\right) dx =$$
$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx - 2\int \frac{x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx = \ln|x| - I_1 - 2I_2$$

Отделно ще пресметнем интегралите I_1 и I_2, като си послужим със *субституцията на Хорнер*. Да припомним, че това е полагането $x \coloneqq t - \frac{p}{2}$ при наличие в интеграла на квадратен тричлен от вида x^2+px+q.

Да се заемем с I_1:

$$I_1 = \int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx = \left\{\begin{array}{c} x = t - \frac{1}{2} \\ t = x + \frac{1}{2} \\ dx = dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{t-\frac{1}{2}}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(t-\frac{1}{2}\right) + 1}\,dt$$

$$\int \frac{t-\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Аналогично разсъждаваме за I_2:

$$I_2 = \int \frac{x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx = \left\{\begin{array}{c} x = t-\frac{1}{2} \\ t = x+\frac{1}{2} \\ dx = dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{t+\frac{1}{2}}{\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)+1\right)^2}\,dt$$

$$\int \frac{t+\frac{1}{2}}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}\,dt = \int \frac{t\,dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}}_{I_3} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}I_3$$

Интегралът I_3 е всъщност т.нар. *интеграл на 14-те хиляди*, който е решаван по време на упражнение в общия случай. Имаме, че:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = \frac{x}{2a^2\left(a^2+x^2\right)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dt}{\left(t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2} = \frac{2t}{3\left(\frac{3}{4}+t^2\right)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C$$

Следователно,

$$I_2 = \frac{1}{2}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{2x+1}{3\left(\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] + C$$

Окончателният отговор е:

$$I = \ln|x| - \left[\frac{1}{2}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] +$$

$$+(-2)\left[\frac{1}{2}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{3\left(\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right] + C$$

- Сборник ПХЧ, задача 69, подточка б) - Да се пресметне интеграла:

$$\int \frac{x+1}{\left(x^2+x-2\right)^2}\,dx$$

Решение: Съгласно метода на Остроградски-Ермит, съществуват константи A, B, C, D такива, че да е изпълнено равенството:

$$\int \frac{x+1}{\left(x^2+x-2\right)^2}\,dx = \frac{Ax+B}{x^2+x-2} + \int \frac{Cx+D}{x^2+x-2}\,dx$$

Диференцираме равенството, за да пресметнем неизвестните коефициенти:

$$\frac{x+1}{\left(x^2+x-2\right)^2} = \left[\frac{Ax+B}{x^2+x-2}\right]' + \frac{Cx+D}{x^2+x-2}$$

Тогава:

$$\frac{x+1}{\left(x^2+x-2\right)^2} = \frac{A\left(x^2+x-2\right) - (Ax+B)(2x+1)}{\left(x^2+x-2\right)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x-2}$$

Привеждаме под общ знаменател, след което се освобождаваме от него. Получава се:

$$\begin{aligned} x+1 &= Ax^2 + \cancel{Ax} - 2A - 2Ax^2 - \cancel{Ax} - 2Bx - B + (Cx+D)\left(x^2+x-2\right) = \\ &= Cx^3 + (-A+C+D)\,x^2 + (-2B-2C+D)\,x + (-2A-B-2D) \end{aligned}$$

Това ни позволява да съставим подходяща система:

$$\begin{cases} \quad\quad\quad C \quad\quad = 0 \\ -A \quad\quad\quad + \; D = 0 \\ \quad\; - 2B \quad + \; D = 1 \\ -2A - \; B \quad - 2D = 1 \end{cases}$$

Решаваме я и определяме стойностите на A, B, C, D:

$$A = -\frac{1}{9}, \quad B = -\frac{5}{9}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{9}$$

Остава само да заместим и да пресметнем новия интеграл:

$$\int \frac{x+1}{\left(x^2+x-2\right)^2}\,dx = \frac{-x-5}{9\left(x^2+x-2\right)} - \frac{1}{9}\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+x-2}}_{I_1}$$

За I_1 прилагаме *субституцията на Хорнер*:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+x-2} = \left\{ \begin{array}{c} x = t - \frac{1}{2} \\ t = x + \frac{1}{2} \\ dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(t-\frac{1}{2}\right) + 1} = \int \frac{dt}{t^2 - \frac{9}{4}}$$

$$\int \frac{dt}{t^2-\frac{9}{4}} = \int \frac{dt}{\left(t-\frac{3}{2}\right)\left(t+\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{3}{2}+t+\frac{3}{2}-t}{\left(t-\frac{3}{2}\right)\left(t+\frac{3}{2}\right)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int \frac{dt}{t-\frac{3}{2}} - \int \frac{dt}{t+\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3}\left(\ln\left|t-\frac{3}{2}\right| - \ln\left|t+\frac{3}{2}\right|\right) + C \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow I_1 = \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$$

Окончателно получаваме:

$$\int \frac{x+1}{\left(x^2+x-2\right)^2}\,dx = -\frac{x+5}{9\left(x^2+x-2\right)} - \frac{1}{27}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$$

5 Интеграли от дробно-рационални функции

Разглеждаме интегрирането на рационални функции на x и радикали на една и съща дробно-линейна функция на x:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$$

Тук $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{N}$ и $p_i, q_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ са взаимно прости. При интеграли от този вид се извършва субституцията:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \quad \text{където } k = \text{НОК}\left(q_1, \ldots, q_n\right)$$

При частния случай на интеграл от вида:

$$\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \cdots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$$

извършваме субституцията:

$$x = t^k, \quad \text{където } k = \text{НОК}\left(q_1, \ldots, q_n\right)$$

Задачи

- Ръководство, задача 6.9 - С подходяща субституция решете интеграла:

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \, dx$$

Решение: Преди всичко съобразяваме, че ни е необходим израз от вида:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}$$

Това ни подсеща да "изкараме" пред скоби израза $\sqrt{x+1}$ или $\sqrt{x-1}$. Получаваме, че:

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \, dx = \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} \, dx$$

Очевидно ще положим:

$$\left\{\begin{array}{c} t^2 = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \\ x = \left(\dfrac{t^2+1}{t^2-1}\right) \\ dx = \dfrac{4t^3}{\left(t^2-1\right)^2} \, dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{4t^3}{\left(t^2-1\right)^2} \, dt = 4 \int \frac{t^3}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)^3} \, dt$$

Решете интеграла самостоятелно, например чрез метода на Остроградски-Ермит:

$$\int \frac{t^3}{(t-1)(t+1)^3}\,dt = \frac{At+B}{(t+1)^2} + \int \frac{Ct+D}{(t-1)(t+1)}\,dt$$

Окончателният отговор, посочен в Ръководството, е:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$$

6 Интеграли от диференциален бином

Разглеждаме интеграли от вида $\int x^m (a+bx^n)^p \,, dx$, където $a, b \neq 0$ и $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Тези интеграли се изразяват чрез елементарни функции само в следните 3 случая:

1. $p \in \mathbb{Z}$. Чрез полагането $x = t^k$, където $k =$НОК(m, n) свеждаме до интеграл от дробно-рационална функция на x.
2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$. Полагаме $a + bx^n = t^k$, където k е знаменателят на p. Така свеждаме до интеграл от рационална функция.
3. $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$. Полагаме $ax^{-n} + b = t^k$, където k е знаменателят на p. Отново свеждаме до познатите интеграли от рационална функция.

Задачи

- Ръководство, задача 8.7 - Решете интеграла:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,(1+\sqrt[3]{x})^3}$$

Решение: Добра идея е да презапишем интеграла в удобен вид, за да можем лесно да определим стойностите на m, n, p.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,(1+\sqrt[3]{x})^3} = \int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}dx$$

Ясно е, че $m = -\frac{2}{3}, n = \frac{1}{3}$ и $p = -3$. Можем да подходим с различни полагания, тъй като попадаме във всички случаи. Ще извършим първата субституция ($p \in \mathbb{Z}$). Самостоятелно решете интеграла с полаганията от случаите 2) и 3).

$$\left\{\begin{array}{c} x = t^3 \\ t = \sqrt[3]{x} \\ dx = 3t^2\,dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int t^{-2}(1+t)^{-3}\,.3t^2\,dt = 3\int \frac{dt}{(t+1)^3}$$

$$3\int \frac{dt}{(1+t)^3} = 3\int (1+t)^{-3}\,\mathrm{d}(1+t) = 3\,.\,\frac{(1+t)^{-2}}{-2} + C = -\frac{3}{2(1+t)^2} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,(1+\sqrt[3]{x})^3} = -\frac{3}{2}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{-2} + C$$

- Кудрявцев, "Интегрирование иррациональных функций", задача 19, подточка 4) - Да се реши интеграла:

$$\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx$$

Решение: Постъпваме както в предходната задача - презаписваме интеграла в по-удобен вид:

$$\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx = \int \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{1-x^2}\right)\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\left(1+(-1)\,x^2\right)^{\frac{1}{3}}\,dx$$

Сега лесно се вижда, че $m=\frac{1}{3}$, $n=2$ и $p=\frac{1}{3}$. Попадаме в третия случай на диференциален бином $\left(\frac{m+1}{n}+p=\frac{4}{6}+\frac{1}{3}=1\in\mathbb{Z}\right)$, т.е. целесъобразно е извършим полагането:

$$\left\{\begin{array}{c} t^3 = x^{-2}-1 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{t^3+1}} \\ dx = -\dfrac{3t^2}{2\left(t^3+1\right)^{\frac{3}{2}}} \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt[6]{t^3+1}}\left(1-\frac{1}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{3t^2}{2\left(t^3+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right)dt$$

Остава да пресметнем получения интеграл:

$$-\frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt[6]{t^3+1}}\cdot\frac{t}{\sqrt[3]{t^3+1}}\cdot\frac{t^2}{\sqrt{\left(t^3+1\right)^3}}\,dt = -\frac{3}{2}\int\frac{t^3}{\left(t^3+1\right)^2} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\int\frac{t}{\left(t^3+1\right)^2}\,\mathrm{d}\left(t^3+1\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\,(-1)\int t\,\mathrm{d}\left(t^3+1\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^3+1}-\int\frac{dt}{t^3+1}\right] = \frac{t}{2\left(t^3+1\right)}-\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{dt}{\left(t^3+1\right)}}_{I_1}$$

Отделно ще пресметнем I_1 - интеграл от рационална функция:

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{(t+1)\left(t^2-t+1\right)} = \frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2-t+1} = \frac{A\left(t^2-t+1\right)+(Bt+C)\,(t+1)}{t^3+1}$$

След пресмятане на съответната система уравнения имаме, че $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=\frac{2}{3}$. Следователно:

$$I_1 = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{3}\int\frac{t-2}{t^2-t+1}\,dt = \frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{3}\int\frac{t-2}{t^2-t+1}\,dt$$

За последния интеграл ще приложим *субституцията на Хорнер*:

$$\int\frac{t-2}{t^2-t+1}\,dt = \left\{\begin{array}{c} t=u+\frac{1}{2} \\ u=t-\frac{1}{2} \\ dt=du \end{array}\right\} \Rightarrow I = \int\frac{u-\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\,du$$

$$\int\frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}\,du-\frac{3}{2}\int\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(u^2+\frac{3}{4}\right)}{u^2+\frac{3}{4}}-\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{du}{1+\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right|-\sqrt{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right|-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Връщаме полагането (Хорнер), за да получим:

$$I_1 = \frac{1}{2}\ln\left|\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right| - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C$$

Следователно имаме:

$$I = \frac{t}{2\left(t^3+1\right)} - \frac{1}{6}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right| - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right] + C$$

Разбира се, за да завършим задачата е необходимо да върнем още един път полагането.

7 Субституции на Ойлер

Разглеждаме интеграли от вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx$, където $a \neq 0$ и $b^2-4ac \neq 0$, а R е рационална функция. Те могат да се приведат към интеграли от рационални функции чрез *субституциите на Ойлер*:

1. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t$, ако $a > 0$.
2. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$, ако $c > 0$.
3. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\left(x-x_1\right)t$ или $\pm\left(x-x_2\right)t$, ако x_1, x_2 са различните корени на квадратния тричлен ax^2+bx+c.

Задачи

- Ръководство, задача 7.6 - Решете интеграла:

$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}$$

Решение: Съобразяваме, че е първата Ойлерова субституция е една възможност за решение. Нека положим:

$$\left\{\begin{array}{c} \sqrt{x^2+3x-4} = -x+t \\ x = \dfrac{t^2+4}{3+2t} \\ dx = \dfrac{2\left(t^2+3t-4\right)}{(3+2t)^2}\, dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{2\left(t^2+3t-4\right)}{(3+2t)^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t^2+4}{3+2t}+4\right)\left(t-\frac{t^2+4}{3+2t}\right)}\, dt$$

$$2\int \frac{\cancel{\left(t^2+3t-4\right)}}{\cancel{(3+2t)^2}} \cdot \frac{\cancel{(3+2t)^2}}{\left(t^2+4+12+8t\right)\cancel{\left(3t+2t^2-t^2-4\right)}}\, dt = 2\int \frac{dt}{\left(t^2+4\right)^2}$$

Налице е частен случай на *интеграла на 14-те хиляди*. Довършете решението самостоятелно. Не забравяйте да върнете полагането ($t = x + \sqrt{x^2+3x-4}$).

- Ръководство, задача 7.9 - Решете интеграла:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(-x^2+7x-10)^3}}$$

Решение: Явно е, че тук е удачна единствено третата Ойлерова субституция. Наистина, можем лесно да проверим, че $-x^2+7x-10=(x-2)(5-x)$. Полагаме:

$$\left\{\begin{array}{c} \sqrt{-x^2+7x-10}=(x-2)\,t \\ x=\dfrac{2t^2+5}{t^2+1} \\ dx=\dfrac{-6t}{(t^2+1)^2}\,dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{\left(\frac{2t^2+5}{t^2+1}\right)\left(\frac{-6t}{(t^2+1)^2}\right)}{\left[\left(\frac{2t^2+5}{t^2+1}-2\right)t\right]^3}\,dt$$

$$\int \frac{\left(\frac{2t^2+5}{t^2+1}\right)\left(\frac{-6t}{(t^2+1)^2}\right)}{\left[\left(\frac{2t^2+5}{t^2+1}-2\right)t\right]^3}\,dt = -6\int \frac{t\left(t^2+5\right)}{\cancel{(t^2+1)^3}}\cdot\frac{\cancel{(t^2+1)^3}}{(3t)^3}\,dt = -\frac{2}{9}\int \frac{t^2+5}{t^2}\,dt$$

Последния интеграл се разпада на два таблични. Върнете полагането, довършете самостоятелно.

8 Интегриране на трансцедентни функции

Съсредоточаваме се върху интеграли от вида $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, където R е рационална функция. За свеждане до интеграл от рационална функция използваме т.нар. *универсална тригонометрична субституция.*

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Тя е удобна, защото всички тригонометрични функции имат лесно изразяване от нея:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}=\frac{2t}{1-t^2}\quad \text{и}\quad \operatorname{cotg}x=\frac{1-t^2}{2t}$$

С цел избягване на голям обем пресмятания понякога е удобно да приложим други субституции:

1. Ако $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то полагаме $t=\cos x$.
2. Ако $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то полагаме $t=\sin x$.

3. Ако $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то полагаме $t = \operatorname{tg} x$.

Освен това ще обърнем внимание, че интегралите от вида:

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx$$

могат да се сведат до интеграли от диференциален бином с полаганията $t = \sin x$ или $t = \cos x$. Също така, следващите интеграли пресмятаме чрез *интегриране по части*:

$\displaystyle\int P(x) f(x) \, dx$ - тук $P(x)$ е полином на x, а $f(x)$ е някоя измежду функциите

$$f(x) = e^{ax},\ \sin ax,\ \cos ax,\ \ln x,\ \arcsin ax,\ \arccos ax,\ \operatorname{arctg} ax,\ \operatorname{arccotg} ax$$

Задачи

- Ръководство, задача 9.9 - Решете интеграла:

$$\int \frac{dx}{\sin x \left(2 + \cos x - 2\sin x\right)}$$

Решение: Извършваме универсалната тригонометрична субституция:

$$\left\{ \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \\ \\ x = 2\operatorname{arctg} t \\ \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}\, dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{\left(\frac{2}{1+t^2}\right) dt}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\left[2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{4t}{1+t^2}\right]}$$

$$\int \frac{\left(\frac{2}{1+t^2}\right) dt}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\left[2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{4t}{1+t^2}\right]} = \int \frac{\left(1+t^2\right) dt}{t\left(t^2 - 4t + 3\right)} = \int \frac{\left(1+t^2\right) dt}{t\left(t-1\right)\left(t-3\right)}$$

Последният интеграл се решава с добре известния алгоритъм за интегриране на рационални функции.

- Ръководство, задача 9.11 - Решете интеграла:

$$\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

Решение: Съобразяваме, че $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ и е удачно да положим $t = \operatorname{tg} x$. Предварително ще извършим някои тригонометрични преобразувания:

$$\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int \frac{\frac{\left(\sin^2 x \cos x\right)}{\cos x}}{\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}}\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x + 1}\, dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x \, \mathrm{d}\left(\operatorname{tg} x\right)}{\operatorname{tg} x + 1}$$

Извършваме полагането и смятаме интеграла:

$$\int \frac{t^2}{t+1}\, dt = \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{t^2}{2} - t + \ln\left|t+1\right| + C$$

Връщаме полагането. Крайният отговор е:

$$\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \operatorname{tg} x + \ln\left|\operatorname{tg} x + 1\right| + C$$