Матрица на линейно изображение на крайномерни пространства. Смяна на базиса. Трансформация на матрицата на линейно изображение при смяна на базисите. Подобни матрици.

Лема 1. (Матричен запис на линейността на изображение:) *Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение, $u = (u_1, \dots, u_m)$ е наредена m-торка вектори $u_1, \dots, u_m \in U$ и $A = (a_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} \in M_{m\times n}(F)$ е матрица. Тогава*

$$\varphi(uA) = \varphi(u)A$$

за

$$v_j := (u_1, u_2, \dots, u_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i,$$

$\varphi(uA) = \varphi(v_1, \dots, v_n) = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$ *и* $\varphi(u) = (\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n))$.

Доказателство. Достатъчно е да забележим, че за всяко $1 \leq j \leq n$ е в сила равенството

$$\varphi(v_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \varphi(u_i) = (\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

на j-тия стълб на $\varphi(uA)$ с j-тия стълб на $\varphi(u)A$.

□

Определение 2. *Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение на крайномерни пространства, $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис на U, а $f = (f_1, \dots, f_m)$ е базис на V. Матрицата*

$$A = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \in M_{m\times n}(F),$$

образувана по стълбове от координатите на векторите $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \in V$ спрямо базиса $f = (f_1, \dots, f_m)$ на V се нарича матрица на φ спрямо базисите e и f.

Еквивалентно,

$$\varphi(e) = fA$$

за $\varphi(e) := (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$.

Линейното изображение $\varphi : U \to V$ се определя еднозначно от образите $\varphi(e_1)$, ..., $\varphi(e_n)$ на базис $e_1, \dots, e_n$ на U. Затова матрицата на φ спрямо базис e на U и базис f на V определя еднозначно φ. Всяка матрица $A \in M_{m\times n}(F)$ се реализира като матрица на линейно изображение $\varphi : U \to V$ от n-мерно пространство U в m-мерно пространство V над F. По-точно, за произволен базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на U и произволен базис

$f=(f_1,\ldots,f_m)$ на V определяме φ като единственото линейно изображение $\varphi : U \to V$ с

$$\varphi(e_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \quad \text{за всяко} \quad 1\leq j\leq n.$$

Ако $u\in U$ има координати

$$x=\begin{pmatrix} x_1\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}\in M_{n\times 1}(F)$$

спрямо базиса $e=(e_1,\ldots,e_n)$, то

$$u=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i=(e_1,\ldots,e_n)\begin{pmatrix} x_1\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}=ex.$$

Действайки с φ върху $u=ex$ получаваме

$$\varphi(u)=\varphi(e)x=(fA)x=f(Ax).$$

Ако

$$y=\begin{pmatrix} y_1\\ \ldots\\ y_n\end{pmatrix}\in M_{m\times 1}(F)$$

са координатите на $\varphi(u)$ спрямо базиса $f=(f_1,\ldots,f_m)$ на V, то $\varphi(u)=fy$, откъдето

$$fy=\varphi(u)=f(Ax).$$

Следователно $f(y-Ax)=\overrightarrow{\mathcal{O}}$ и $y-Ax=\mathbb{O}_{n\times 1}$. Това доказва

$$y=Ax.$$

Например, нулевото линейно изображение $\mathbb{O} : U\to V$, $\mathbb{O}(u)=\overrightarrow{\mathcal{O}}_V$, $\forall u\in U$ на n-мерно пространство U в m-мерно пространство V има нулевата матрица $\mathbb{O}_{m\times n}\in M_{m\times n}(F)$ спрямо произволен базис $e=(e_1,\ldots,e_n)$ на U и произволен базис $f=(f_1,\ldots,f_m)$ на V.

Диференцирането $\frac{d}{dx}:\mathbb{R}[x]^{(n+1)}\to\mathbb{R}[x]^{(n)}$ има матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_{n\times(n+1)}(\mathbb{R})$$

спрямо базиса $1,x,\frac{x}{2!},\ldots,\frac{x^n}{n!}$ на $\mathbb{R}[x]^{(n+1)}$ и базиса $1,x,\frac{x}{2!},\ldots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ на $\mathbb{R}[x]^{(n)}$.

Определение 3. *Ако $\varphi : U\to U$ е линеен оператор в n-мерно пространство U и $e=(e_1,\ldots,e_n)$ е базис на U, то матрицата*

$$A=(\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n))\in M_{n\times n}(F),$$

образувана по стълбове от координатите на $\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n)$ спрямо $e_1,\ldots,e_n$ се нарича матрица на φ спрямо базиса e.

Еквивалентно, A се определя от равенството

$$\varphi(e)=eA.$$

Матрицата A на $\varphi : U \to U$ спрямо произовлен базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на U определя еднозначно φ. Всяка квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ се реализира като матрица на линеен оператор в n-мерно линейно пространство. Ако $u = ex$ е вектор с координати $x \in M_{n\times 1}(F)$ спрямо базиса e на U, то

$$\varphi(u) = \varphi(ex) = \varphi(e)x = (eA)x = e(Ax)$$

е векторът с координати Ax спрямо същия базис.

Например, тъждественият линеен оператор $\mathrm{Id} : U \to U$, $\mathrm{Id}(u) = u$, $\forall u \in U$ има единична матрица E_n спрямо произволен базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на U.

Ако разглеждаме диференцирането $\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x]^{(n+1)} \to \mathbb{R}[x]^{(n+1)}$ като линеен оператор в пространството $\mathbb{R}[x]^{(n+1)}$ на полиномите на x от степен $\leq n$ с реални коефициенти, то матрицата на $\frac{d}{dx}$ спрямо базиса $1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^n}{n!}$ на $\mathbb{R}[x]^{(n+1)}$ е

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R}).$$

Лема 4. (Матрична форма на линейната независимост на вектори:) *Нека $u_1, \dots, u_m$ са линейно независими вектори от линейно пространство U, $u = (u_1, \dots, u_m)$, $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{m\times n}(F)$ и*

$$uA = \underbrace{(\overrightarrow{\mathcal{O}}, \dots, \overrightarrow{\mathcal{O}})}_{n}.$$

Тогава $A = \mathbb{O}_{m\times n}$ е нулевата матрица.

Доказателство. За всяко $1 \leq j \leq n$, сравняването на j-тите компоненти на двете страни на

$$uA = \underbrace{(\overrightarrow{\mathcal{O}}, \dots, \overrightarrow{\mathcal{O}})}_{n}$$

дава

$$\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \dots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

Но равенството

$$\sum_{s=1}^m a_{s,j} u_s = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

за линейно независимите вектори $u_1, \dots, u_m$ изисква $a_{s,j} = 0$ за $\forall 1 \leq s \leq m$. Това доказва $a_{s,j} = 0$ за всички $1 \leq s \leq m$, $1 \leq j \leq n$ и $A = \mathbb{O}_{m\times n}$.

□

Определение 5. *Ако $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ са базиси на линейно пространство V над поле F, то матрицата $T \in M_{n\times n}(F)$, образувана по стълбове от координатите на $f_1, \dots, f_n$ спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ се нарича матрица на прехода от базиса e към базиса f. Еквивалентно, матрицата на прехода $T \in M_{n\times n}(F)$ от базиса e към базиса f е единствената матрица, изпълняваща равенството*

$$f = (f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n)T = eT.$$

Задача 6. *Да се намери матрицата на прехода от базис e_1, e_2, e_3 на $\mathbb{R}^3$ към базиса*

$$f_1 = e_1 + 3e_2 + e_3, \quad f_2 = -e_1 + e_2 + 2e_3, \quad f_3 = 2e_1 - e_2 + 3e_3$$

на $\mathbb{R}^3$.

Доказателство. Първият стълб на $T \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ е

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

вторият стълб е

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

е третият стълб е

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

С други думи, матрицата на прехода $T \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ от e_1, e_2, e_3 към f_1, f_2, f_3 е

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

Твърдение 7. *Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис на линейно пространство V, а $T \in M_{n\times n}(F)$ е квадратна матрица. В такъв случай, T е матрица на прехода от базиса e към базиса $f = (f_1, \dots, f_n) = eT$ тогава и само тогава, когато матрицата T е неособена.*

Доказателство. Векторите $(f_1, \dots, f_n) = f = eT$ образуват базис на V тогава и само тогава, когато са линейно независими. Това е еквивалентно на $\mathrm{rk}(f_1, \dots, f_n) = n$ за вектор-стълбовете $f_1, \dots, f_n$ на T е в сила точно когато матрицата T има ранг $\mathrm{rk}(T) = n$. Вземайки предвид, че $T \in M_{n\times n}(F)$ е квадратна матрица от ред n и единственият минор на T от ред n е нейната детерминанта, стигаме до извода, че $f = eT$ е базис на V тогава и само тогава, когато $\det(T) \neq 0$

□

Твърдение 8. *Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ са базиси на линейно пространство V с матрица на прехода $T \in M_{n\times n}(F)$ от e към f. Тогава координатите $x \in M_{n\times 1}(F)$ на вектор $v \in V$ спрямо базиса e и координатите $y \in M_{n\times 1}(F)$ на същия вектор v спрямо базиса f са свързани с равенството*

$$x = Ty.$$

Доказателство. Съгласно $f = eT$ и $ex = v = fy$ имаме $ex = (eT)y = e(Ty)$, откъдето $e(x - Ty) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Прилагаме Лема 4 към линейно независимите вектори $e_1, \dots, e_n$ и получаваме $x - Ty = \mathbb{O}_{n\times 1}$, откъдето

$$x = Ty.$$

□

Твърдение 9. *Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение с матрица A спрямо базис $e = (e_1, \dots e_n)$ на U и базис $f = (f_1, \dots, f_m)$ на V, $e' = eT$ е друг базис на U с матрица на прехода T от e към e' и $f' = fS$ е друг базис на V с матрица на прехода S от f към f'. Тогава матрицата на φ спрямо базиса e' на U и базиса f' на V е*

$$B = S^{-1}AT.$$

Доказателство. По определение, $\varphi(e) = fA$ и $\varphi(e') = f'B$. Заествайки $e' = eT$ и $f' = fS$ и прилагайки Лема 1 получаваме

$$f(AT) = (fA)T = \varphi(e)T = \varphi(eT) = \varphi(e') = f'B = (fS)B = f(SB).$$

Базисът $f = (f_1, \dots, f_m)$ на V се състои от линейно независими вектори, така че от

$$f(AT - SB) = (\underbrace{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V, \dots, \overrightarrow{\mathcal{O}}_V}_{n})$$

следва $AT - SB = \mathbb{O}_{m\times n}$. Оттук, $AT = SB$ и $B = S^{-1}AT$, съгласно обратимостта на матрицата на прехода S от базиса f на V към базиса f' на V.

□

Задача 10. *Нека $\varphi : U \to V$ е $\mathbb{R}$-линейното изображение с матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

спрямо базис $e = (e_1, e_2, e_3)$ на U и базис $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ на V. Да се намери матрицата $B \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ на φ спрямо базиса

$$e'_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3, \quad e'_2 = e_2 + 2e_3, \quad e'_3 = e_3$$

на U и базиса

$$f'_1 = f_1, \quad f'_2 = 2f_1 + f_2, \quad f'_3 = 3f_1 + 2f_2 + f_3, \quad f'_4 = 4f_1 + 3f_2 + 2f_3 + f_4$$

на V.

Решение: Матрицата на прехода от базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ към базиса $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ на U е

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}),$$

а матрицата на прехода от базиса $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ към базиса $f' = (f'_1, f'_2, f'_3, f'_4)$ на V е

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

С елементарни преобразувания по редове към $(S|E_4)$ свеждаме S към единичната матрица E_4. Матрицата, получена от E_4 под действие на същите елементарни преобразувания по редове е S^{-1}. По-точно,

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

така че

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

и матрицата на φ спрямо e' и f' е

$$B = S^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -5 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

От Твърдение 10 следва, че ако линеен оператор $\varphi : U \to U$ има матрица A спрямо базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на U и $e' = eT$ е друг базис на U, то матрицата на φ спрямо e' е $B = T^{-1}AT$.

Определение 11. *Квадратни матрици $A, B \in M_{n\times n}(F)$ с един и същи размер са подобни, ако съществува обратима матрица $T \in M_{n\times n}(F)$, така че $B = T^{-1}AT$.*

Твърдение 12. *Квадратни матрици $A, B \in M_{n\times n}(F)$ са подобни тогава и само тогава, когато съществува линеен оператор в n-мерно линейно пространство над F с матрици A и B спрямо подходящи базиси.*

Доказателство. От Твърдение 10 следва, че ако $\varphi : U \to U$ е линеен оператор с матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ спрямо някакъв базис e на U, то матрицата на φ спрямо базиса $e' = eT$ с матрица на прехода $T \in M_{n\times n}(F)$ от e към e' е подобна на A и равна на $B = T^{-1}AT$.

Нека A и $B = T^{-1}AT$ са подобни матрици. Избираме базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на n-мерно линейно пространство U над F и разглеждаме линейния оператор $\varphi : U \to U$ с матрица A спрямо базиса e. Матрицата T е неособена, така че $e' = eT$ е базис на U и матрицата на φ спрямо e' е $T^{-1}AT = B$.

□