Детерминанта - определение, основни свойства, транспониране на детерминанта.

Твърдение 1. *Нека F е числово поле, V е линайно пространство над F с базис $e_1, \dots, e_n$,*

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

е полилинейна анти-симетрична функция на n аргумента, а

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} e_j, \quad 1 \leq i \leq n$$

са n вектора с координати $a_{i,1}, \dots, a_{i,n}$ спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$. Тогава

$$f(a_1, \dots, a_n) = \left(\sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{n,i_n} \right) f(e_1, \dots, e_n),$$

където сумирането е по всички пермутации $i_1, \dots, i_n$ на числата $1, \dots, n$, а $[i_1, \dots, i_n]$ е броят на инверсиите в пермутацията $i_1, \dots, i_n$.

Доказателство. Съгласно полилинейността на f е в сила

$$f(a_1, \dots, a_n) = f\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1,j_1} e_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{n,j_n} e_{j_n} \right) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1,j_1} \dots a_{n,j_n} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}).$$

Анти-симетричната функция f над числово поле F се анулира при равни аргументи, така че е достатъчно да сумираме

$$f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{1,i_1} \dots a_{n,i_n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

по пермутациите $i_1, \dots, i_n$ на $1, \dots, n$. Понеже

$$f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} f(e_1, \dots, e_n)$$

за броя $[i_1, \dots, i_n]$ на инверсиите в пермутация $i_1, \dots, i_n$, получаваме

$$f(a_1, \dots, a_n) = \left(\sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{n,i_n} \right) f(e_1, \dots, e_n).$$

□

Твърдение 2. *Нека V е линейно пространство над числово поле F с базис $e_1, \ldots, e_n$. Тогава съществува единствена полилинейна анти-симетрична функция*

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

на n аргумента с $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Доказателство. Ако

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

е полилинейна анти-симетрична функция на n аргумента върху n-мерно линейно пространство V над числово поле F и $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$, то за произволни вектори $a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} e_j$, $1 \leq i \leq n$ е в сила

$$f(a_1, \ldots, a_n) = f\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1,j_1} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{n,j_n} e_{j_n} \right) =$$

$$= \left(\sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} a_{1,i_1} \ldots a_{n,i_n} \right) f(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} a_{1,i_1} \ldots a_{n,i_n},$$

където сумирането е по всички пермутации $i_1, \ldots, i_n$ на $1, \ldots, n$, а $[i_1, \ldots, i_n]$ е броят на инверсиите в пермутация $i_1, \ldots, i_n$. Това доказва единствеността на f.

Да разгледаме функцията

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F,$$

$$f(a_1, \ldots, a_n) = f\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1,j_1} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{n,j_n} e_{j_n} \right) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} a_{1,i_1} \ldots a_{n,i_n}, \tag{1}$$

където сумирането е по всички пермутации $i_1, \ldots, i_n$ на $1, \ldots, n$ и $[i_1, \ldots, i_n]$ е броят на инверсиите в пермутация $i_1, \ldots, i_n$. Достатъчно е да докажем, че (1) е полилинейна анти-симетрична функция с $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$, за да установим съществуването на f и да докажем твърдението. Следващите разглеждания не използват, че полето F е числово и (1) е полилинейна анти-симетрична функция над произволно поле F.

За произволно $1 \leq j \leq n$, ако $a'_j = \sum\limits_{i_j=1}^{n} a'_{j,i_j} e_{i_j}$ и $a''_j = \sum\limits_{i_j=1}^{n} a''_{i,i_j} e_{i_j}$, то

$$f(a_1, \ldots, a'_j + a''_j, \ldots, a_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} a_{1,i_1} \ldots (a'_{j,i_j} + a''_{j,i_j}) \ldots a_{n,i_n} =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} a_{1,i_1} \ldots a'_{j,i_j} \ldots a_{n,i_n} + \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} a_{1,i_1} \ldots a''_{j,i_j} \ldots a_{n,i_n} =$$

$$= f(a_1, \ldots, a'_j, \ldots, a_n) + f(a_1, \ldots, a''_j, \ldots, a_n).$$

За произволни $1 \leq j \leq n$ и $\lambda \in F$ е изпълнено

$$f(a_1, \ldots, \lambda a_j, \ldots, a_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} a_{1,i_1} \ldots (\lambda a_{j,i_j}) \ldots a_{n,j_n} =$$

$$= \lambda \left(\sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} a_{1,i_1} \ldots a_{j,i_j} \ldots a_{n,i_n} \right) = \lambda f(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n).$$

Това доказва линейността на f относно j-тия аргумент, а оттам и полилинейността на функцията f.

Ако $1 \leq p < q \leq n$, $a_q = a_p$, то

$$f(a_1, \dots, a_p, \dots, a_p, \dots, a_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_p, \dots, i_q, \dots, i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{p,i_p} \dots a_{p,i_q} \dots a_{n,i_n} = 0,$$

защото за произволни фиксирани $1 \leq i_p < i_q \leq n$ събираемите

$$\alpha = (-1)^{[i_1, \dots, i_p, \dots, i_q, \dots, i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{p,i_p} \dots a_{p,i_q} \dots a_{n,i_n}$$

и

$$\beta = (-1)^{[i_1, \dots, i_q, \dots, i_p, \dots, i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{p,i_q} \dots a_{p,i_p} \dots a_{n,i_n}$$

се унищожават. Причина за това е, че прилагането на транспозиция (i_p, i_q) променя четността на пермутация, така че

$$(-1)^{[i_1, \dots, i_q, \dots, i_p, \dots, i_n]} = -(-1)^{[i_1, \dots, i_p, \dots i_q, \dots, i_n]}.$$

Комутативността на умножението в F гарантира

$$a_{1,i_1} \dots a_{p,i_p} \dots a_{p,i_q} \dots a_{n,i_n} = a_{1,i_1} \dots a_{p,i_q} \dots a_{p,i_p} \dots a_{n,i_n}$$

и доказва, че $\beta = -\alpha$. Полилинейната функция f, анулираща се за два равни аргумента е анти-симетрична.

Вземайки предвид, че координатите на базисните вектори e_p спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ са

$$\delta_{p,j} = \begin{cases} 1 & \text{за } 1 \leq p = j \leq n, \\ 0 & \text{за } 1 \leq p \neq j \leq n, \end{cases}$$

пресмятаме, че

$$f(e_1, \dots, e_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} \delta_{1,i_1} \dots \delta_{n,i_n} = (-1)^{[1, \dots, n]} \delta_{1,1} \dots \delta_{n,n} = 1$$

и установяваме съществуването на f с необходимите свойства.

$\square$

Определение 3. *Ако $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n \times n}(F)$ е квадратна матрица n реда и n стълба, то детерминантата на A е*

$$\det(A) = \sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \dots a_{n,i_n},$$

където сумирането е по всички пермутации $i_1, \dots, i_n$ на $1, \dots, n$ и $[i_1, \dots, i_n]$ е броят на инверсиите в $i_1, \dots, i_n$.

Съгласно Твърдение 2, ако F е числово поле, то детерминантата е единствената полилинейна анти-симетрична функция на вектор-редовете $a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$ на

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

със стойност 1 за

$$a_i = e_i = (\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-i}), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ако полето F не е числово, то детерминантата на матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ е също полилинейна анти-симетрична функция на редовете си със стойност 1 за $a_i = e_i$, $1 \leq i \leq n$, но това не е единствената функция с тези свойства.

За да илюстрираме с пример, да напомним полилинейната анти-симетрична функция

$$f_0 : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2,$$

$$f_0((a_{11},a_{12}),(a_{21},a_{22}) = a_{11}a_{21}$$

от Пример 7 на предишната лекция. Детерминантата

$$\det : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2,$$

$$\det((a_{11},a_{12}),(a_{21},a_{22})) = \sum_{i_1,i_2} (-1)^{[i_1,i_2]} a_{1,i_1}a_{2,i_2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

е също полилинейна анти-симетрична функция на $a_1 = (a_{11}, a_{12})$, $a_2 = (a_{21}, a_{22})$.

За произволни функции

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F \quad \text{и} \quad g : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

сумата

$$f + g : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

се определя поточково, т.е.

$$(f+g)(v_1,\ldots,v_n) := f(v_1,\ldots,v_n) + g(v_1,\ldots,v_n), \quad \forall (v_1,\ldots,v_n) \in \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n}.$$

Сумата $f = f_0 + \det$ на две полилинейни анти-симетрични функции е полилинейна антисиметрична функция. Полагаме $f_1 := \det$ и забелязваме, че

$$\begin{aligned}
(f_o + f_1)(a_1,\ldots,a_j + a_j',\ldots,a_n) = \\
= f_0(a_1,\ldots,a_j + a_j',\ldots,a_n) + f_1(a_1,\ldots,a_j + a_j',\ldots,a_n) = \\
= f_0(a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_n) + f_0(a_1,\ldots,a_j',\ldots,a_n) + \\
+ f_1(a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_n) + f_1(a_1,\ldots,a_j',\ldots,a_n) = \\
= (f_0 + f_1)(a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_n) + (f_0 + f_1)(a_1,\ldots,a_j',\ldots,a_n)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
(f_0 + f_1)(a_1,\ldots,\lambda a_j,\ldots,a_n) = \\
= f_0(a_1,\ldots,\lambda a_j,\ldots,a_n) + f_1(a_1,\ldots,\lambda a_j,\ldots,a_n) = \\
= \lambda f_0(a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_n) + \lambda f_1(a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_n) = \\
= \lambda (f_0 + f_1)(a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_n),
\end{aligned}$$

за да получим линейността на f_0+f_1 относно всеки аргумент, а оттам и полилинейността на f_0+f_1. За произволни $1 \leq i < j \leq n$ е в сила

$$\begin{aligned}
&(f_0+f_1)(a_1,\dots,a_j,\dots,a_i,\dots,a_n) = \\
&= f_0(a_1,\dots,a_j,\dots,a_i,\dots,a_n) + f_1(a_1,\dots,a_j,\dots,a_i,\dots,a_n) = \\
&= -f_0(a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n) - f_1(a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n) = \\
&= -(f_0+f_1)(a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n),
\end{aligned}$$

така че f_0+f_1 е анти-симетрична за анти-симетрични f_0 и f_1. Полилинейната анти-симетрична функция $f_o + \det : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2$ има стойност

$$(f_0+\det)(e_1,e_2) = f_0((1,0),(0,1)) + \det(e_1,e_2) = \overline{1}.\overline{0} + \overline{1},$$

но не съвпада с детерминантата det.

Задача 4. *Да се пресметне детерминантата*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Доказателство. Събираемо $(-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{p,i_p} \dots a_{n,i_n}$ на Δ се анулира за всички $2 \leq i_1 \leq n$. Затова

$$\Delta = \sum_{i_2,\dots,i_n} (-1)^{[i_2,\dots,i_n]} a_{1,1} a_{2,i_2} \dots a_{n,i_n},$$

където сумирането е по всички пермутации $i_2,\dots,i_n$ на $2,\dots,n$. Ако $3 \leq i_2 \leq n$, то $a_{2,i_2} = 0$, така че

$$\Delta = \sum_{i_3,\dots,i_n} (-1)^{[i_3,\dots,i_n]} a_{1,1} a_{2,2} a_{3,i_3} \dots a_{n,i_n}.$$

Продължавайки по същия начин получаваме, че детерминантата

$$\Delta = a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} \dots a_{n,n}$$

на диагонална матрица е равна на произведението на елементите от диагонала.

□

Задача 5. *Нека e_1, e_2, e_3 е базис на линейно пространство V над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа, а $f : V \times V \to \mathbb{Q}$ е полилинейна анти-симетрична функция. Да се докаже, че за произволни вектори*

$$a_1 = \sum_{j_1=1}^{3} a_{1,j_1} e_{j_1} \quad \text{и} \quad a_2 = \sum_{j_2=1}^{3} a_{2,j_2} e_{j_2}$$

от V е в сила

$$f(a_1,a_2) = A_{3,1} f(e_2,e_3) + A_{3,2} f(e_3,e_1) + A_{3,3} f(e_1,e_2),$$

където $A_{3,i}$ са адюнгираните количества на елементите от третия ред на матрицата

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Доказателство. От полилинейността на f следва, че

$$f(a_1, a_2) = f\left(\sum_{j_1=1}^{3} a_{1,j_1} e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{3} a_{2,j_2} e_{j_2}\right) = \sum_{j_1=1}^{3}\sum_{j_2=1}^{3} a_{1,j_1} a_{2,j_2} f(e_{j_1}, e_{j_2}).$$

Анти-симетричността на функцията f над числовото поле $\mathbb{Q}$ води до анулиране на f при равни аргументи, така че

$$f(a_1, a_2) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq 3} a_{1,j_1} a_{2,j_2} f(e_{j_1}, e_{j_2}) + a_{1,j_2} a_{2,j_1} f(e_{j_2}, e_{j_1}) =$$
$$= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq 3} (a_{1,j_1} a_{2,j_2} - a_{1,j_2} a_{2,j_1}) f(e_{j_1}, e_{j_2}),$$

вземайки предвид $f(e_{j_2}, e_{j_1}) = -f(e_{j_1}, e_{j_2})$. По-подробно,

$$f(a_1, a_2) =$$
$$= (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}) f(e_1, e_2) + (a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2}) f(e_2, e_3) + (a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1}) f(e_1, e_3).$$

От друга страна,

$$A_{3,i} = (-1)^{3+i} \Delta_{3,i}$$

за детерминантата $\Delta_{3,i}$ на матрицата, получена от A чрез премахване на третия ред и i-тия стълб. Това дава

$$A_{3,1} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} = a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2},$$

$$A_{3,2} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} = -(a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1}),$$

$$A_{3,3} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

Прилагайки $f(e_1, e_3) = -f(e_3, e_1)$ завършваме решението на задачата.

$\square$

Задача 6. *Нека e_1, e_2 е базис на линейно пространство V над полето $\mathbb{Z}_2$ на остатъците при деление на 2 и $a_i = a_{i,1}e_1 + a_{i,2}e_2 \in V$, $1 \leq i \leq 2$. Да се докаже, че:*

(i) $f : V \times V \to \mathbb{Z}_2$, $f(a_1, a_2) = a_{1,2}a_{2,2}$ е полилинейна анти-симетрична функция;

(ii) $f(a_1, a_2) = \overline{0} \in \mathbb{Z}_2$ тогава и само тогава, когато a_1 или a_2 принадлежи на правата през началото $l(e_1)$.

Доказателство. (i) Ако $a_1' = \sum\limits_{j_1=1}^{2} a_{1,j_1}' e_{j_1}$, $a_1'' = \sum\limits_{j_1=1}^{2} a_{1,j_1}'' e_{j_1}$, то

$$f(a_1' + a_1'', a_2) = f\left(\sum_{j_1=1}^{2} (a_{1,j_1}' + a_{1,j_1}'') e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{2} a_{2,j_2} e_{j_2}\right) = (a_{1,2}' + a_{1,2}'') a_{2,2} =$$
$$= a_{1,2}' a_{2,2} + a_{1,2}'' a_{2,2} = f\left(\sum_{j_1=1}^{2} a_{1,j_1}' e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{2} a_{2,j_2} e_{j_2}\right) + f\left(\sum_{j_1=1}^{2} a_{1,j_1}'' e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{2} a_{2,j_2} e_{j_2}\right) =$$
$$= f(a_1', a_2) + f(a_1'', a_2).$$

Аналогично, за $a'_2 = \sum\limits_{j_2=1}^{2} a'_{2,j_2} e_{j_2}$ и $a''_2 = \sum\limits_{j_2=1}^{2} a''_{2,j_2} e_{j_2}$ е изпълнено

$$f(a_1, a'_2 + a''_2) = f\left(\sum_{j_1=1}^{2} a_{1,j_1} e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{2} (a'_{2,j_2} + a''_{2,j_2}) e_{j_2} \right) = a_{1,2}(a'_{2,2} + a''_{2,2}) =$$

$$= a_{1,2}a'_{2,2} + a_{1,2}a''_{2,2} = f\left(\sum_{j_1=1}^{2} a_{1,j_1} e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{2} a'_{2,j_2} e_{j_2} \right) + f\left(\sum_{j_1=1}^{2} a_{1,j_1} e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{2} a''_{2,j_2} e_{j_2} \right) =$$

$$= f(a_1, a'_2) + f(a_1, a''_2).$$

За $\lambda = \overline{1} \in \mathbb{Z}_2$ е в сила

$$f(\overline{1}a_1, a_2) = f(a_1, a_2) = \overline{1} f(a_1, a_2)$$

и

$$f(a_1, \overline{1}a_2) = f(a_1, a_2) = \overline{1} f(a_1, a_2).$$

Ако $\lambda = \overline{0} \in \mathbb{Z}_2$, то

$$f(\overline{0}a_1, a_2) = f(\overline{0}e_1 + \overline{0}e_2, a_2) = \overline{0}a_{2,2} = \overline{0} = \overline{0} f(a_1, a_2)$$

и

$$f(a_1, \overline{0}a_2) = f(a_1, \overline{0}e_1 + \overline{0}e_2) = a_{1,2}\overline{0} = \overline{0} = \overline{0} f(a_1, a_2).$$

Това доказва полилинейността на f.

За $a_{i,j}$ от полето $\mathbb{Z}_2$ на остатъците при деление с 2 е изпълнено $a_{2,2}a_{1,2} + a_{1,2}a_{2,2} = 2a_{1,2}a_{2,2} = \overline{0}$. (Тук използваме, че $2.\overline{0} = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$ и $2.\overline{1} = \overline{1} + \overline{1} = \overline{0}$.) Следователно

$$f(a_2, a_1) = a_{2,2}a_{1,2} = -a_{1,2}a_{2,2} = -f(a_1, a_2)$$

и функцията f е анти-симетрична.

(ii) Понеже $\mathbb{Z}_2$ е поле, произведението $f(a_1, a_2) = a_{1,2}a_{2,2} = \overline{0} \in \mathbb{Z}_2$ се анулира само ако единият множител се анулира. Ако $a_{1,2} = \overline{0}$, то $a_1 = a_{1,1}e_1 \in l(e_1)$. За $a_{2,2} = \overline{0}$ е изпълнено $a_2 = a_{2,1}e_1 \in l(e_1)$.

□