1. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки N, K, L, M, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что $KLMN$ — также квадрат.

2. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P. Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P, из A_2 — перпендикуляр на A_3P, из A_3 — на A_4P, из A_4 — на A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекается в одной точке.

3. Два квадрата $BCDA$ и $BKMN$ имеют общую вершину B. Докажите, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBN лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов перечислены по часовой стрелке.)

4 (ТурГор, 2021). На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка P. Пусть H — точка пересечения высот треугольника APD, M — середина AD и N — середина CD. Докажите, что прямые PN и MH взаимно перпендикулярны.

★★★

5. В треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH. Прямые, проведенные через произвольную точку P плоскости перпендикулярно CA, CM и CB, пересекают прямую CH в точках A_1, M_1 и B_1. Докажите, что $A_1M_1 = B_1M_1$.

6. Дан треугольник ABC. На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.

7. На катетах CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбраны соответственно точки D и E так, что $CD = CE$. Продолжения перпендикуляров, опущенных из точек D и C на прямую AE, пересекают гипотенузу AB соответственно в точках K и L. Докажите, что $KL = LB$.