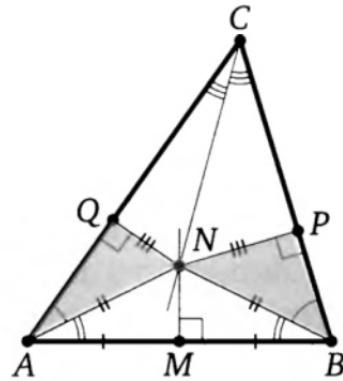


Пусть ABC — произвольный треугольник ; проведём биссектрису угла C , затем ось симметрии стороны AB (т.е. прямую, перпендикулярную к AB в середине M отрезка AB , — срединный перпендикуляр) и рассмотрим различные случаи взаимного



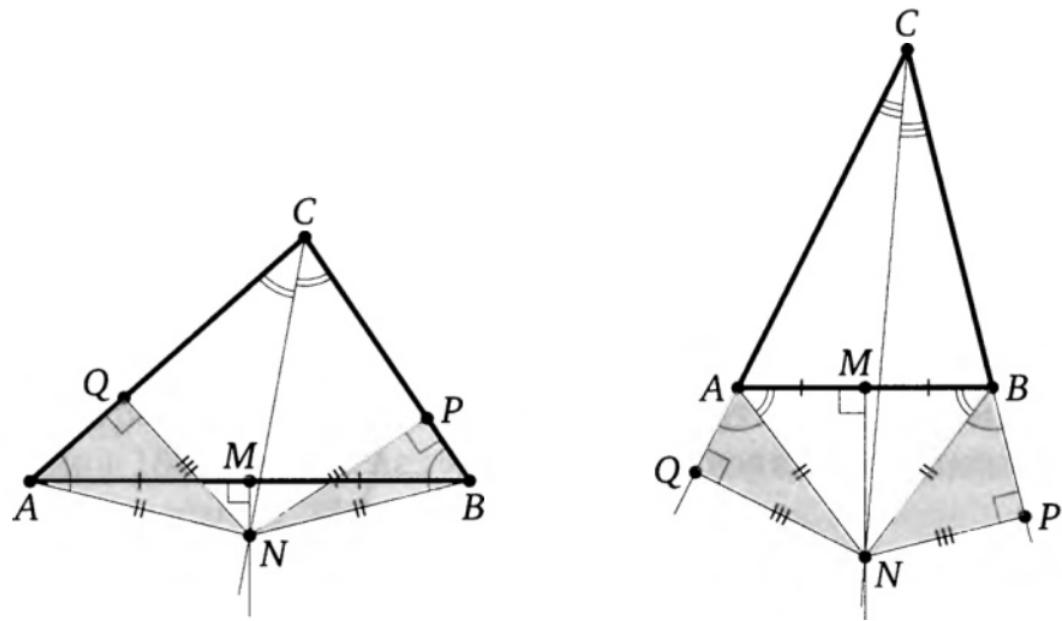
расположения этих прямых; так как в рассуждениях участвуют только одна биссектриса и одна ось симметрии, мы разрешим себе называть их просто «биссектриса» и «ось».

Случай 1: биссектриса и ось параллельны или совпадают. Так как ось перпендикулярна к AB , биссектриса тоже перпендикулярна к AB , т. е. совпадает с высотой, а в таком случае треугольник ABC равнобедренный ($CA = CB$).

Случай 2: биссектриса и ось пересекаются внутри треугольника ABC , пусть в точке N . Эта точка равноудалена от сторон углов ABC ; опустив из нее перпендикуляры NP и NQ соответственно на CB и CA , имеем $NP = NQ$. Но точка N в то же время равноудалена от концов отрезка AB , т. е. $NB = NA$. Прямоугольные треугольники NPB и NQA равны по катету и гипotenузе, следовательно, $\angle NAQ = \angle NBP$. Прибавляя к этим равным углам равные между собою (как углы при основании равнобедренного треугольника ANB) углы NAB и NBA , получим $\angle CAB = \angle CBA$, значит, треугольник ABC равнобедренный (именно, $CA = CB$).

Случай 3: биссектриса и ось пересекаются на стороне AB , т. е. в середине M этой стороны. Это означает, что в треугольнике ABC медиана и биссектриса, проведенные из вершины C , совпадают, а отсюда, как известно, следует, что этот треугольник равнобедренный (для доказательства можно, опять опустив перпендикуляры на AB и AC , повторить — с упрощениями — рассуждения из случая 2).

Случай 4а: биссектриса и ось пересекаются вне треугольника ABC ; перпендикуляры, опущенные из точки N пересечения на стороны CB и CA , попадают на эти стороны (рис.), а не на их продолжения. Как и раньше, получаем равные треугольники NPB



и NQA , а также равнобедренный треугольник ANB . Углы при основаниями AB треугольника ABC равны теперь как разности (а не как суммы, в отличие от случая 2) соответственно равных углов.

Случай 46: биссектриса и ось пересекаются вне треугольника; перпендикуляры, опущенные из точки N пересечения на стороны CB и CA , попадают на продолжения этих сторон (рис.). Те же построения и рассуждения приводят к выводу о равенстве внешних углов при вершинах A и B треугольника ABC . Отсюда сейчас же вытекает равенство внутренних углов A и B , следовательно, $CA = CB$.