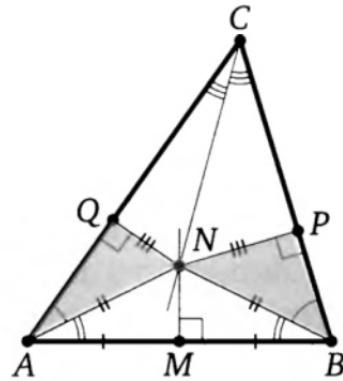


Пусть  $ABC$  — произвольный треугольник ; проведём биссектрису угла  $C$ , затем ось симметрии стороны  $AB$  (т.е. прямую, перпендикулярную к  $AB$  в середине  $M$  отрезка  $AB$ , — срединный перпендикуляр) и рассмотрим различные случаи взаимного



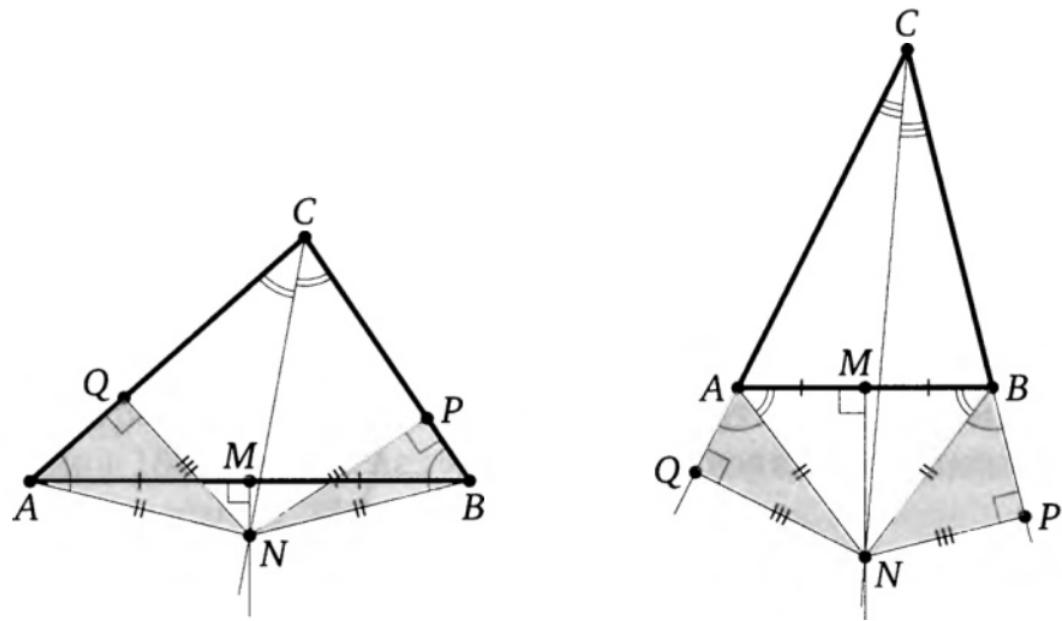
расположения этих прямых; так как в рассуждениях участвуют только одна биссектриса и одна ось симметрии, мы разрешим себе называть их просто «биссектриса» и «ось».

*Случай 1: биссектриса и ось параллельны или совпадают.* Так как ось перпендикулярна к  $AB$ , биссектриса тоже перпендикулярна к  $AB$ , т. е. совпадает с высотой, а в таком случае треугольник  $ABC$  равнобедренный ( $CA = CB$ ).

*Случай 2: биссектриса и ось пересекаются внутри треугольника  $ABC$ ,* пусть в точке  $N$ . Эта точка равноудалена от сторон углов  $ABC$ ; опустив из нее перпендикуляры  $NP$  и  $NQ$  соответственно на  $CB$  и  $CA$ , имеем  $NP = NQ$ . Но точка  $N$  в то же время равноудалена от концов отрезка  $AB$ , т. е.  $NB = NA$ . Прямоугольные треугольники  $NPB$  и  $NQA$  равны по катету и гипotenузе, следовательно,  $\angle NAQ = \angle NBP$ . Прибавляя к этим равным углам равные между собою (как углы при основании равнобедренного треугольника  $ANB$ ) углы  $NAB$  и  $NBA$ , получим  $\angle CAB = \angle CBA$ , значит, треугольник  $ABC$  равнобедренный (именно,  $CA = CB$ ).

*Случай 3: биссектриса и ось пересекаются на стороне  $AB$ , т. е. в середине  $M$  этой стороны.* Это означает, что в треугольнике  $ABC$  медиана и биссектриса, проведенные из вершины  $C$ , совпадают, а отсюда, как известно, следует, что этот треугольник равнобедренный (для доказательства можно, опять опустив перпендикуляры на  $AB$  и  $AC$ , повторить — с упрощениями — рассуждения из случая 2).

*Случай 4а: биссектриса и ось пересекаются вне треугольника  $ABC$ ; перпендикуляры, опущенные из точки  $N$  пересечения на стороны  $CB$  и  $CA$ , попадают на эти стороны (рис.), а не на их продолжения.* Как и раньше, получаем равные треугольники  $NPB$



и  $NQA$ , а также равнобедренный треугольник  $ANB$ . Углы при основаниями  $AB$  треугольника  $ABC$  равны теперь как разности (а не как суммы, в отличие от случая 2) соответственно равных углов.

Случай 4б: биссектриса и ось пересекаются вне треугольника; перпендикуляры, опущенные из точки  $N$  пересечения на стороны  $CB$  и  $CA$ , попадают на продолжения этих сторон (рис.). Те же построения и рассуждения приводят к выводу о равенстве внешних углов при вершинах  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$ . Отсюда сейчас же вытекает равенство внутренних углов  $A$  и  $B$ , следовательно,  $CA = CB$ .