

1. Пусть AA_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC , в котором $\angle ABC = 45^\circ$. Точки O и H — соответственно центр описанной окружности и ортоцентр треугольника ABC . Докажите, что прямая A_1C_1 проходит через середину отрезка OH .
2. Биссектриса угла B и биссектриса внешнего угла D прямоугольника $ABCD$ пересекают сторону AD и прямую AB в точках M и K соответственно. Докажите, что отрезок MK равен и перпендикулярен диагонали прямоугольника.
3. В треугольнике ABC сторона AC наименьшая. На сторонах AB и CB взяты точки K и L соответственно, причём $KA = AC = CL$. Пусть M — точка пересечения AL и KC , а I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что прямая MI перпендикулярна прямой AC .
4. Окружность (I — центр), вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB, BC, AC в точках L, E, F соответственно. Через точку A проводится прямая параллельная FE , которая пересекает прямую, проходящую через точку C параллельную LF , в точке K . Докажите, что прямая KF проходит через точку I .
5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AN_A , BH_B и CH_C . Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения высот треугольников AN_BH_C , BH_AH_C и CH_AH_B равен треугольнику $H_AH_BH_C$.
6. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB соответственно. Докажите, что эти прямые и прямая AC имеют общую точку.
7. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC , и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD , пересекаются в точке P . Докажите, что $PA = PD$.
8. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD . На отрезке BH отметили точку M , равноудалённую от точек C и D . Пусть точка K — середина стороны AB . Докажите, что угол MKD прямой.
9. Высоты AA_1 , CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка Q симметрична середине стороны AC относительно AA_1 . Точка P — середина отрезка A_1C_1 . Докажите, что $\angle QPH = 90^\circ$.
10. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P . Точки A' и C' — середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A' на CP , пересекается с перпендикуляром, опущенным из C' на AP , в точке K . Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C .