

Степень точки. Начало

1. Две окружности пересекаются в точках A и B . Точка X лежит на прямой AB , вне окружностей. Докажите, что длины всех касательных, проведенных из точки X к окружностям, равны.
2. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам их общую касательную.
3. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.
4. Если через точку внутри окружности проходят три равные хорды, то эта точка является центром окружности.
5. Точка M — середина хорды AB . Хорда CD пересекает AB в точке M . На CD как на диаметре построена полуокружность. Точка E лежит на этой полуокружности и ME — перпендикуляр к CD . Найти угол AEB .
6. В угол вписаны две окружности. Одна из них касается сторон угла в точках A и B , а другая в точках C и D . Докажите, что прямая AD отсекает на этих окружностях равные хорды.
7. Дана окружность ω и точки P и K вне её. Через точку P проведена секущая к окружности ω , пересекающая её в точках A и B . Докажите, что вторая точка пересечения прямой PK с окружностью, проходящей через точки K, A, B , не зависит от выбора секущей AB .
8. Две окружности касаются внешним образом. Точка A — точка касания общей внешней касательной к первой окружности, точка B — точка той же окружности, диаметрально противоположная A . Доказать, что длина касательной BC , проведенной из точки B к другой окружности, равна диаметру первой окружности.
9. Доказать, что все окружности, проходящие через данную точку A и пересекающие данную окружность ω в диаметрально противоположных точках B и C , проходят одновременно через некоторую фиксированную точку плоскости, отличную от A .
10. Через вершины A и C треугольника ABC ($AB \neq BC$) и его инцентр проведена окружность. Доказать, что длина отрезка касательной, проведенной к этой окружности из вершины B , равна $\sqrt{BA \cdot BC}$.
11. Пусть действительные числа m и n таковы, что график функции $f(x) = x^2 + mx + n$ пересекает оси координат в точках A, B и C , которые не совпадают с началом координат. Доказать, что при любых таких m и n все окружности (ABC) , проходящие через эти точки, имеют общую точку.
12. Из точки M к окружности проведены касательные MA и MB . Еще одна окружность проходит через точки M и A и касается прямой AB . Пусть E — точка пересечения данных окружностей, отличная от A . Докажите, что прямая BE делит отрезок AM пополам.

13. ¹ На плоскости даны окружность ω , точка A , лежащая внутри ω и точка B , отличная от A . Рассматриваются всевозможные треугольники BXY , такие что точки X и Y лежат на ω и хорда XY проходит через точку A . Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY , лежат на одной прямой.

14. Прямая OA касается окружности в точке A , а хорда BC параллельна OA . Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L . Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

¹Региональный этап, 1998-1999, 10.2