Họ tên: Đinh Viết Trung

MSSV: 18126035

BÀI TẬP LÝ THUYẾT 1

1. ***Chứng minh rằng đồ thị vô hướng không có đỉnh cô lập phải có cặp đỉnh cùng bậc***

   Với một đồ thị vô hướng có n đỉnh và không có đỉnh cô lập, vậy với 1 đỉnh bất kỳ, thì bậc nhỏ nhất là 1 và bậc lớn nhất là n – 1.

   Từ 1 đến n – 1, ta có n – 1 khả năng. Vậy với n đỉnh, 1 đỉnh sẽ có n-1 trường hợp, mà n > n – 1 nên theo nguyên lý ngăn kéo Dirichlet, sẽ luôn luôn có ít nhất 2 đỉnh có chung 1 bậc.

   Vd: Đồ thị vô hướng có 5 đỉnh thì bậc của các đỉnh sẽ trong khoảng [0,4]. Như vậy, nếu không có định cô lập sẽ có đỉnh nào có bậc bằng 0 --> bậc của các đỉnh sẽ trong khoảng [1,4]. Theo nguyên lý Dirichlet, ta có 5 đỉnh nhưng số bậc chỉ có là 1, 2, 3, 4, như vậy sẽ có 2 đỉnh cùng bậc.

   -> Vì vậy, nếu ta có 1 đồ thị vô hướng có n đỉnh và không có đỉnh cô lập sẽ có bậc của các đỉnh nằm trong khoảng [1,n-1]

2. ***Kí hiệu $\overline{G}$ để chỉ đồ thị bù (complementary graph) của đồ thị vô hướng đơn G***

   a) ***Mô tả $\overline{K_n}$, $\overline{K_{m,n}}$***

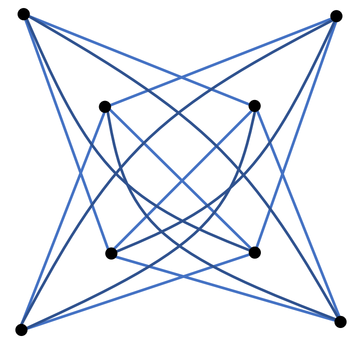
   $\overline{\mathrm{K_n}}$: Là đồ thị bù của đồ thị đủ K_n có n đỉnh và n(n – 1)/2 cạnh ⬄ $\overline{\mathrm{K_n}}$ là đồ thị có n đỉnh và 0 cạnh

   $\overline{\mathrm{K_{m,n}}}$: Là đồ thị bù của đồ thị phân đôi đủ $K_{m,n}$ có m là số đỉnh của nhóm 1 và n là số đỉnh của nhóm 2 ⬄ $\overline{\mathrm{K_{m,n}}}$ là đồ thị có 2 thành phần liên thông riêng biệt, thành phần thứ nhất có m đỉnh m – 1 cạnh và thành phần liên thông thứ hai có n đỉnh n – 1 cạnh.

b) Vẽ và xác định ma trận kề của $\overline{G_1}$ ở hình sau.

Ma trận kề:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$



c) Chứng minh rằng 2 đồ thị vô hướng đơn G, H đẳng cấu nhau khi và chỉ khi $\overline{G}$, $\overline{H}$ đẳng cấu nhau.

Giả sử đồ thị G và H đẳng cấu nhau và $\overline{G}$, $\overline{H}$ là 2 đồ thị bù tương ứng
Vì G và H đẳng cấu nhau nên có tồn tại song ánh f:V(G)→V(H), nên uv ∈ E(G) khi và chỉ khi f(u) f(v) ∈ V(H).
Tương tự như trên, ta có f:V(G)→V(H), nên uv ∉ E(G)) khi và chỉ khi f(u) f(v) ∉ V(H).
Vì các bộ đỉnh của G và $\overline{G}$ là như nhau nên f là song ánh từ V($\overline{G}$)→V($\overline{H}$). Vậy nếu uv ∉ E(G) thì theo định nghĩa đồ thị bù, uv ∈ E($\overline{G}$) và f(u) f(v) ∉ E(H) thì f(u) f(v) ∈ E($\overline{H}$).
Suy ra $\overline{G}$ và $\overline{H}$ đẳng cấu (điều phải chứng minh).

d) *Xác định các cặp đồ thị đẳng cấu nhau trong 4 đồ thị {G_1, G_2, $\overline{G_1}$, $\overline{G_2}$ } ở hình sau.*

- Ta đánh số thứ tự các đỉnh của đồ thị và biểu diễn = ma trận kề:

G1:

0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0,

1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1,

1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0,

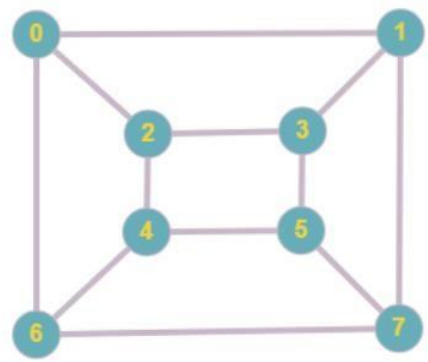
0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0,

0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0,

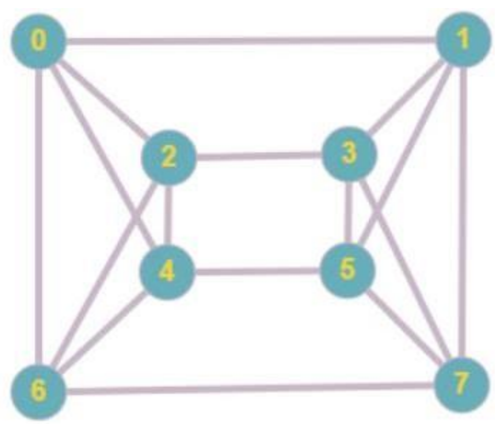
0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1,

1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1,

0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0,



G2:



0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0,

1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1,

1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0,

0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1,

1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0,

0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1,

1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1,

0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0,

$\overline{G1}$

0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0,

0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1,

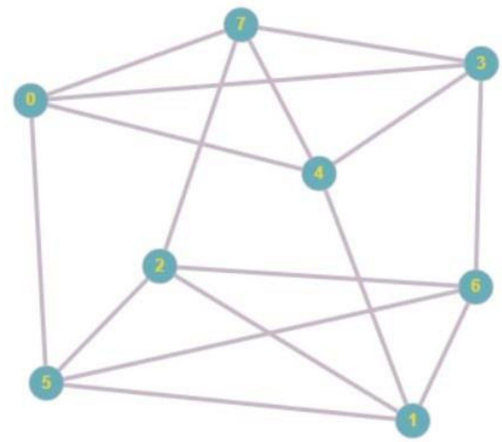
1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1,

1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1,

1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0,

0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0,

1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0,



$\overline{G2}$

0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1,

0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0,

0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1,

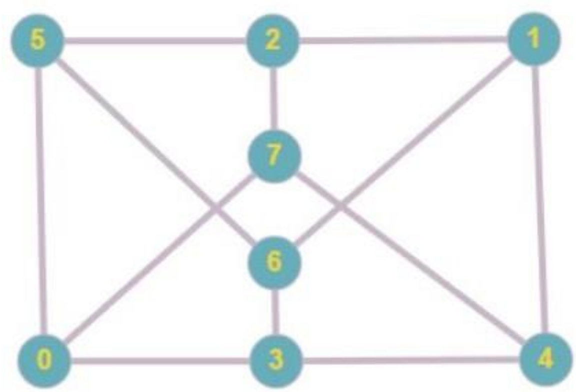
1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0,

0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1,

1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0,

0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0,

1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0,



Ta thấy:

- G1 và G2 không đẳng cấu do không cùng số cạnh
- Ma trận bù G1 và bù G2 không đẳng cấu do không cùng số cạnh
- Ma trận G1 và bù G2 đẳng cấu:

G1(0) = bù G2(5) G1(6) = bù G2(0)

G1(1) = bù G2(6) G1(7) = bù

G2(3) G1(2) = bù G2(2)

G1(3) = bù G2(1)

G1(4) = bù G2(7)

G1(5) = bù G2(4)

- Ma trận G2 và bù G1 đẳng cấu:

G2(0) = bù G1(7) G2(4) = bù G1(4)

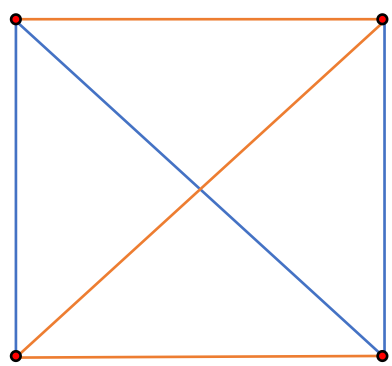
G2(1) = bù G1(2) G2(5) = bù G1(1)

G2(2) = bù G1(3) G2(6) = bù G1(0)

G2(3) = bù G1(6) G2(7) = bù G1(5)

*** thật ra, dựa vào câu chứng minh câu c thì ta thấy điều chứng minh là điều hiển nhiên😊

e) ***Đồ thị vô hướng đơn được gọi là tự bù (self-complementary) nếu G, $\overline{G}$ đẳng cấu nhau. Có đồ thị vô hướng đơn 3 đỉnh nào tự bù không? 4 đỉnh?***
Một đồ thị tự bù có n đỉnh là một đồ thị phải có $n(n-1)/4$ cạnh.
Với đồ thị có 3 đỉnh, số cạnh = $3(3 - 1)/4$ = 1.5. Lại có số cạnh phải là số nguyên nên không tồn tại đồ thị tự bù có 3 đỉnh nhưng có tồn tại đồ thị từ bù có 4 đỉnh.



3.Chứng minh rằng mỗi cây có nhiều hơn 1 đỉnh là một đồ thị phân đôi

Như ta đã biết: đồ thị phân đôi là 1 đồ thị đặc biệt, trong đó tập các đỉnh có thể được chia thanh 2 tập không giao nhau thỏa mãn điều kiện không có cạnh nối 2 đỉnh bất kỳ thuộc cùng 1 tập
Với cây có nhiều hơn 1 đỉnh, ta tạm thời xóa đi tất cả các đỉnh có bậc là 1, ta sẽ được 1 cây nhỏ hơn.
Ta dùng 2 màu khác nhau để tô các đỉnh (xanh và đỏ), bắt đầu từ 1 đỉnh bất kỳ, ta tô màu xanh rồi duyệt tới từng phần tử kề với đỉnh vừa tô màu, ta tô đỏ thỏa mãn không có 2 đỉnh kề bất kỳ nào tô cùng một màu.
Cứ như vậy, ta có thể tô hết tất cả các đỉnh của cây mà vẫn thỏa điều kiện đã cho.
Sau đó, ta trả lại các đỉnh có bậc là 1 đã xóa lúc đầu và cũng tô màu sao cho các đỉnh này có màu ngược với đỉnh kề của nó (1 cái màu xanh, 1 cái màu đỏ).
Vậy dù cây có bao nhiêu đỉnh đi nữa vẫn có thể được tô bằng 2 màu mà không có 2 đỉnh bất kỳ nào tô cùng một màu.
Theo định nghĩa, đồ thị phân đôi là đồ thị mà ta có thể dùng 2 màu để tô lên tất cả các đỉnh của đồ thị mà không có 2 đỉnh kề nào có cùng 1 màu, ta suy ra được mọi cây có nhiều hơn 1 đỉnh đều là đồ thị phân đôi

3. Liệt kê tất cả các cây không đẳng cấu có 4 nút