Teorija zvezdanih spektara -8-

1. Odrediti opšte rešenje (u proizvoljnoj n-toj aproksimaciji) jednačine prenosa zračenja za sivu (polubeskonačnu) atmosferu u ravnoteži zračenja metodom diskretnih ordinata.

Jednačina prenosa zračenja (konkretno, Milneova jednačina) se svodi na sledeći sistem:

$$\mu_i \frac{dI_i}{d\tau} = I_i - \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} C_j I_j, \quad i = \pm 1, ... \pm n, \quad I_i \equiv I(\tau, \mu_i). \tag{$*$}$$

Uzimajući u obzir da je sistem linearan i prvog reda pretpostavljamo rešenje u sledećem obliku:

$$I_i = g_i e^{-k\tau},$$

gde je g_i i k potrebno odrediti. Zamenom ovog, probnog rešenja u ($*$) dobijamo:

$$g_i(1 + k\mu_i) = \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} C_j g_j = c \Rightarrow g_i = \frac{c}{1 + k\mu_i}.$$

Ako probno rešenje, sa ovakvom formom g_i ponovo zamenimo u ($*$) nalazimo:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} \frac{C_j}{1 + k\mu_j} = 1.$$

Dobili smo tzv. karakterističnu jednačinu koja je zadovoljena za određene vrednosti parametra k (tzv. svojstvene vrednosti). Izbegavajući $\mu = 0$ odnosno ako koristimo parne stepene $m = 2n$ onda će važiti uslovi simetričnosti $C_{-j} = C_j$ i $\mu_{-j} = -\mu_j$. Sada se karakteristična jednačina može napisati kao:

$$1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{1 - k^2\mu_j^2} \equiv T(k^2) = 0, \tag{$**$}$$

gde smo uveli tzv. karakterističnu funkciju $T(k^2)$. Gornja jednačina ($**$) prirodno sledi ako *spojimo* simetrične članove:

$$\frac{1}{2}\,\frac{C_{-n}}{1 + k\mu_{-n}} + \frac{1}{2}\,\frac{C_n}{1 + k\mu_n} = \frac{C_n}{1 - k^2\mu_n^2} \quad \text{itd.}$$

Dakle, svojstvene vrednosti k (koje želimo da odredimo) se nalaze rešavanjem ($**$) odnosno $T(k^2) = 0$. Ako pak krenemo od:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(\mu)d\mu \approx \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} C_j f(\mu_j),$$

za $f(\mu) = 1$ dobijamo:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} C_j = \sum_{j=1}^{n} C_j = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\mu = 1.$$

Sada je jasno da je jedno rešenje karakteristične jednačine $k^2 = 0$ odnosno $T(k^2 = 0) = 0$. Potrebno je još odrediti preostalih $n-1$ nenultih rešenja karakteristične jednačine. Razmatranjem izraza $(**)$ jasno je da su $k^2 = \mu_j^{-2}$ polovi odnosno da T divergira u tim tačkama (vidi sliku 1). Razmotrimo sada šta se dešava sa T levo i desno od μ_j^{-2}.

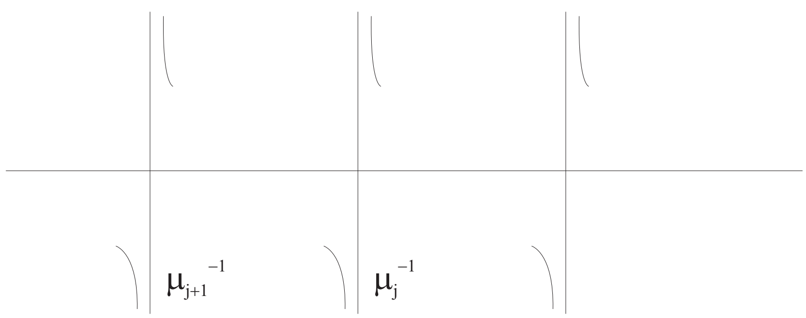
- $\underline{k^2 = \mu_j^{-2} - \varepsilon, \text{ gde je } \varepsilon > 0}$: ako pomnožimo prethoni izraz sa μ_j^2 dobićemo da je $k^2\mu_j^2 = 1 - \varepsilon\mu_j^2$, što možemo da zamenimo u izraz $(**)$. Tada onda imamo u sumi izraz $C_j/(\varepsilon\mu_j^2)$. Ukoliko sada pustimo da $\varepsilon \to 0$ član pod sumomje pozitivan i divergira, teži beskonačnosti, što znači da onda polinom teži $T(k^2) \to -\infty$.

- $\underline{k^2 = \mu_j^{-2} + \varepsilon, \text{ gde je } \varepsilon > 0}$: primenom sličnih manipulacija izrazom kao i u prethodnom slučaju, član pod sumom u izrazu $(**)$ je $C_j/(-\varepsilon\mu_j^2)$. Ako sada pustimo da $\varepsilon \to 0$ onda je član u sumi negativno divergentan, što zajedno sa znakom minus ispred sume daje da $T(k^2) \to \infty$.

Zaključujemo da T ima nule između sukcesivnih polova te traženih $n-1$ nula mora zadovoljavati:

$$\mu_1^{-2} < k_1^2 < \mu_2^{-2} < \cdots < k_{n-1}^2 < \mu_n^{-2},$$

gde smo uredili $\{\mu_j\}$ uredili u opadajući niz tako da važi $\mu_j > \mu_{j+1}$. Najveće μ_j mora biti manje od jedinice odnosno najmanje nenulto k^2 mora biti veće od jedinice. Imamo $2n-2$ nenultih k parova: $\pm k_j, \quad (j = 1, ..., n-1)$.



Slika 1: Funkcija ima nulu ako na krajevima konačnog intervala teži ∞ odnosno $-\infty$.

Sada možemo da napišemo opšte rešenje sistema $(*)$ u obliku:

$$I_i(\tau, \mu_i) \equiv I_i(\tau) = b\left[\sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{L_\alpha}{1 + k_\alpha \mu_i}\ e^{-k_\alpha \tau} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{L_{-\alpha}}{1 - k_\alpha \mu_i}\ e^{k_\alpha \tau}\right],$$

gde je b i $L_{\pm\alpha}$ potrebno odrediti.

Sada tražimo partikularno rešenje koje odgovara $k^2 = 0$. Znajući da $J(\tau) \to \frac{3}{4}F\tau$ za $\tau >> 1$ to zapravo ukazuje da se srednji intenzitet asimptotski ponaša kao linearna funkcija optičke dubine tako da je prihvatljivo razmotriti opštu formu partikularnog rešenja oblika: $I_i = b(\tau + q_i)$ koju onda možemo zameniti u $(*)$ i dobiti:

$$q_i = \mu_i + \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} C_j q_j,$$

kako je $\frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} C_j = 1$. Sa druge strane, za $f(\mu) = \mu$ imamo:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(\mu)d\mu \approx \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} C_j f(\mu_j) = \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} C_j\mu_j = 0,$$

pa možemo pisati da je $q_i = \mu_i + Q$, gde je $Q = \text{const}$. Dakle, imamo $I_i = b(\tau + Q + \mu_i)$, odnosno, za opšte rešenje jednačine prenosa zračenja u zadatom problemu:

$$I_i(\tau) = b\left[\tau + Q + \mu_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{L_\alpha}{1 + k_\alpha\mu_i}\ e^{-k_\alpha\tau} + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{L_{-\alpha}}{1 - k_\alpha\mu_i}\ e^{k_\alpha\tau}\right]. \qquad (***)$$

Za određeni stepen aproksimacije n ($m = 2n$, μ_i su nule iz $P_m(\mu) = 0$) iz ($**$) nalazimo k pa ostaje još da se odrede ($2n$ nepoznate) b, Q i $L_{\pm\alpha}$. To se postiže odgovarajućim graničnim uslovima odnosno definisanjem konkretnog problema (konačni sloj, polubeskonačna atmosfera).

Razmotrimo sada polubeskonačnu (sivu) atmosferu (u ravnoteži zračenja). Uslov na površini je $I_{-i}^{-} \equiv I(0, -\mu_i) = 0$, dok za $\tau \to \infty$, $I(\tau)$ ne sme divergirati eksponencijalno (očekujemo linearnu zavisnost). Iz ($***$) je sada jasno da važi $L_{-\alpha} = 0$ dok iz uslova na površini i $\mu_{-j} = -\mu_j$ sledi:

$$Q - \mu_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{L_\alpha}{1 - k_\alpha\mu_i} = 0, \quad i = 1, ..., n. \qquad (\dagger)$$

Gornja jednačina ($\dagger$) omogućava nalaženje (n vrednosti) Q i L_α. Naravno, za fluks možemo pisati:

$$F = 2\int_{-1}^{1} I(\mu)\mu d\mu = 2\sum_{j=-n}^{n} C_j\mu_j I_j,$$

pa zamenom ($***$) u gornju jednačinu uz granični uslov na površini koji daje $L_{-\alpha} = 0$ imamo:

$$F = 2b\left((\tau + Q)\sum_{j=-n}^{n} C_j\mu_j + \sum_{j=-n}^{n} C_j\mu_j^2 + \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha e^{-k_\alpha\tau}\sum_{j=-n}^{n}\frac{C_j\mu_j}{1 + k_\alpha\mu_i}\right).$$

Već je bilo pokazano da za $f(\mu) = \mu$ sledi:

$$\sum_{j=-n}^{n} C_j\mu_j = 0,$$

dok za $f(\mu) = \mu^2$ jednostavno sledi:

$$\sum_{j=-n}^{n} C_j\mu_j^2 = \frac{2}{3}.$$

Iz karakteristične jednačine ($**$) i $\frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} C_j = 1$ jasno sledi:

$$\sum_{j=-n}^{n}\frac{C_j\mu_j}{1 + k_\alpha\mu_i} = 0.$$

te imamo da je $b = \frac{3}{4}F$. Fluks je konstantan što je i očekivano za zadati problem. Dakle, za opšte rešenje u slučaju polubeskonačne atmosfere imamo:

$$I_i(\tau) = \frac{3}{4}F\left[\tau + Q + \mu_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{L_\alpha}{1+k_\alpha\mu_i}e^{-k_\alpha\tau}\right], \quad i = 1, ..., n.$$

Vrednosti μ_i i C_i se nalaze za zadatu aproksimaciju n iz $P_{2n}(\mu) = 0$, odnosno, preko $C_j = \frac{1}{P'_m(\mu_j)}\int_{-1}^{1}\frac{P_m(\mu)}{\mu-\mu_j}\,d\mu$. Vrednosti k se onda nalaze rešavanjem $(**)$ dok se Q i L_α računaju iz $(\dagger)$. Srednji intenzitet je konačno:

$$J(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n}C_jI_j = \frac{3}{4}F\left(\tau + Q + \sum_{\alpha=1}^{n-1}L_\alpha e^{-k_\alpha\tau}\right) = \frac{3}{4}F(\tau + q(\tau)),$$

$$q(\tau) = Q + \sum_{\alpha=1}^{n-1}L_\alpha e^{-k_\alpha\tau}.$$

Odredimo sada $q(\tau)$ u prvo aproksimaciji $n = 1$ $(m = 2)$. Imamo $\mu_{\pm1} = \pm1/\sqrt{3}$, $C_{\pm1} = 1$. Iz $(**)$ je jasno da imamo $k^2 = 0$ te iz $(\dagger)$ sledi: $Q = 1/\sqrt{3}$ pa je konačno rešenje u prvoj aproksimaciji $J(\tau) = \frac{3}{4}F(\tau + 1/\sqrt{3})$ odnosno $q(\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Slično, možemo naći rešenje u drugoj aproksimaciji[1] $n = 2$ $(m = 4)$. Sada imamo: $\mu_{\pm2} = \pm0.8611363115940526$, $\mu_{\pm1} = \pm0.3399810435848563$, $C_{\pm2} = 0.3478548451374538$, $C_{\pm1} = 0.6521451548625461$. Rešavanjem $(**)$ i $(\dagger)$ dobijamo:

$$q(\tau) = 0.694025 - 0.116675e^{-1.97203\tau}.$$

Za $n = 3$ i $n = 4$ imamo, respektivno:

$$q(\tau) = 0.703899 - 0.1012455e^{-3.20295\tau} - 0.02530e^{-1.22521\tau},$$
$$q(\tau) = 0.70692 - 0.08392e^{-4.45808\tau} - 0.03619e^{-1.59178\tau} - 0.00946e^{-1.10319\tau}.$$

Kada $n \to \infty$ rešenje teži tačnom (Hopfovom) koje na ovom mestu nećemo izvoditi. Tačno rešenje $(n \to \infty)$ za $q(\tau = \infty)$ je $q(\tau = \infty) = Q = 0.710446$ dok je na površini $q(\tau = 0) = 1/\sqrt{3}$.

2. Razmotriti rešavanje (u proizvoljnoj n-toj aproksimaciji) jednačine prenosa zračenja za sloj konačne debljine za sivi slučaj i ravnotežu zračenja.

U ovom slučaju granični uslovi su $I^-_{-i} \equiv I(0, -\mu_i)$ i $I^+_i \equiv I(T, +\mu_i)$, gde je T ukupna optička debljina sloja. Dakle, dobijamo $2n$ jednačina sa $2n$ nepoznatih:

$$I^-_{-i} \equiv I(0, -\mu_i) = b\left(Q - \mu_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{L_\alpha}{1-k_\alpha\mu_i} + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{M_\alpha e^{-k_\alpha T}}{1+k_\alpha\mu_i}\right),$$

$$I^+_i \equiv I(T, +\mu_i) = b\left(Q + T + \mu_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{L_\alpha e^{-k_\alpha T}}{1+k_\alpha\mu_i} + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{M_\alpha}{1-k_\alpha\mu_i}\right),$$

$$M_\alpha = L_{-\alpha}\,e^{k_\alpha T}.$$

Zadatak za vežbu: Uveriti se u korektnost rešenja $q(\tau)$ pri $n = 2, 3, 4$ za slučaj polubeskonačne atmosfere.

[1] Pogodno je koristiti IDL funkcije `FZ_ROOTS`, `ZBRENT` i `GAUSS_LEG_QUADR`.