Teorija zvezdanih spektara -V2-

Prolaskom zračenja kroz zvezdanu atmosferu dolazi do interakcije zračenja sa česticama atmosfere. Procesi koji se dešavaju su termalna apsorpcija i emisija pri čemu dolazi do preraspodele energije između zračenja i čestica atmosfere. Takođe, može doći i do rasejanja zračenja. Ukoliko su sudarni procesi između atoma/jona dominantniji u odnosu na radijativne procese, uspostavljaju se ravnotežne raspodele koje karakterišu polje zračenja (Plankova raspodela) i čestice (Maksvelova, Bolcmanova i Sahina raspodela).

Plankova funkcija. U slučaju termodinamičke ravnoteže (TDR) polje zračenja je homogeno i izotropno, a intenzitet zračenja je opisan Plankovom raspodelom (vidi sliku 1). Tada za gustinu radijativne energije monohromatskog zračenja možemo pisati:

$$\rho_\nu(T) = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}} - 1},$$

kako je:

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T_0}} - 1}.$$

Iz Plankove raspodele se mogu izvesti:

(1) Rejli-Džinsov zakon (za $h\nu << k_\mathrm{B}T$)

$$B_\nu = \frac{2k_\mathrm{B}T}{c^2} \nu^2,$$

(2) Vinov zakon (za $h\nu >> kT$)

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}},$$

(3) Štefan-Bolcmanov zakon (integracija $\int_0^\infty \cdots d\nu$)

$$B = \frac{\sigma T^4}{\pi}, \quad \mathcal{F}^+ = \pi B, \quad \mathcal{F}^+ = \sigma T^4,$$

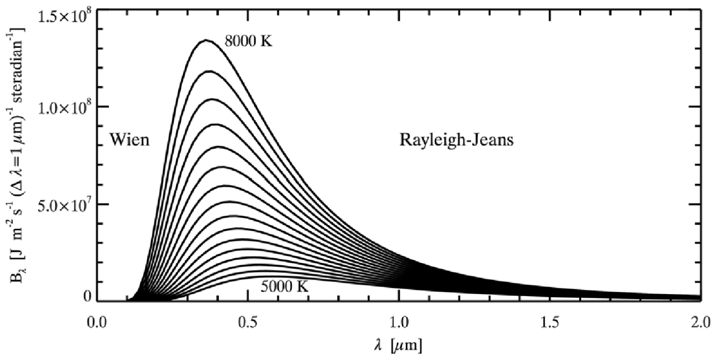
(4) Vinov zakon pomeranja (iz $\frac{dB_\lambda}{d\lambda} = 0$)

$$\lambda_\mathrm{max} = \frac{b}{T}.$$

Veza relacija izraženih u zavisnosti od frekvencije i talasne dužine se dobija na sledeći način (uz $\lambda\nu = c$):

$$B_\nu d\nu = B_\lambda d\lambda \Rightarrow B_\nu = \frac{c}{\nu^2} B_\lambda.$$

Maksvelov zakon raspodele (čestica po brzinama). U TDR, raspodela svih čestica (atoma, jona, elektrona) po brzinama je Maksvelova. U opštem slučaju, Maksvelova funkcija raspodele ima oblik:



Slika 1: Plankova funkcija.

$$\frac{dN(v)}{N} = dW = \frac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3} v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2k_\mathrm{B}T_\mathrm{k}}{m}},$$

tj. verovatnoća da čestica idealnog gasa van polja sile u stacionarnom stanju ima intenzitet brzine u intervalu $(v,\ v+dv)$ iznosi $\frac{dN(v)}{N}$. Kako je $dN(v) = N(v)dv$ imamo:

$$\frac{N(v)}{N} = \frac{dW}{dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3} v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}.$$

Jasno je da ova funkcija teži nuli kada intenzitet brzine teži nuli i beskonačno. Takođe, jasno je da postoji jedan maksimum:

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3} v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}\right) = 0 \Rightarrow v_\mathrm{max} = \alpha.$$

Sa porastom temperature maksimum verovatnoće opada i pomera se ka većim brzinama:

$$v_\mathrm{max} \sim \sqrt{T_\mathrm{k}}, \quad \left(\frac{dW}{dv}\right)_{v_\mathrm{max}} \sim \frac{1}{\sqrt{T_\mathrm{k}}}$$

Ako je uspostavljena TDR tada Maksvelova funkcija raspodele (vidi sliku 2) ima istu vrednost temperature za sve čestice (atome, jone, elektrone).

Bolcmanova raspodela atoma po stanjima ekscitacije. Uopšteno, u Maksvel-Bolcmanovoj statistici broj atoma n energije E u 1 cm^3 dat je preko:

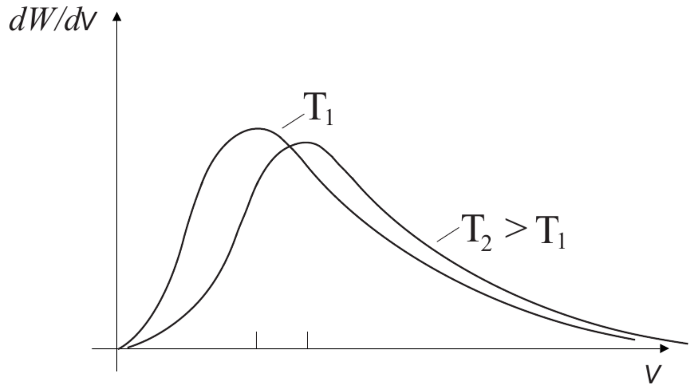
$$n(E) = Ce^{-\frac{E}{k_\mathrm{B}T}}.$$

Konkretno, broj atoma na k-tom pobuđenom nivou iznosi:

$$n_k = const\ g_k\ e^{-\frac{\chi_k}{k_\mathrm{B}T_\mathrm{B}}},$$

gde je g_k statistička težina nivoa k, odnosno broj načina na koje elektron može doći na k-ti nivo, a χ_k predstavlja energiju ekscitacije u odnosu na osnovni nivo. Odnos naseljenosti dva nivoa je dat preko:

$$\frac{n_k}{n_{k'}} = \frac{g_k}{g_{k'}}\ e^{-\frac{\chi_{kk'}}{k_\mathrm{B}T_\mathrm{B}}}, \quad \chi_{kk'} = \chi_k - \chi_{k'}.$$



Slika 2: Maksvelova raspodela čestica po brzinama.

U praksi je pogodno logaritmovati prethodni izraz:

$$\log \frac{n_k}{n_{k'}} = \log \frac{g_k}{g_{k'}} - \theta\ \chi_{kk'}, \quad \theta = \frac{\log e}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{B}} = \frac{5040}{T_\mathrm{B}}, \qquad T_\mathrm{B}\ [\mathrm{K}], \quad \chi_{kk'}\ [\mathrm{eV}],$$

$$k_\mathrm{B} = 1.38 \times 10^{-16}\ \mathrm{erg/K} = \frac{1.38 \times 10^{-16}}{1.602 \times 10^{-12}}\ \mathrm{eV/K} = 8.617 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV/K}.$$

Sahina formula (jonizacije). Sva ekscitovana (vezana) stanja karakteriše $E < 0$. Da bi atom prešao u stanje sa $E > 0$ potrebno mu je dodati energiju. Ukoliko energiju dodajemo zagrevanjem - termička jonizacija. Iznad diskretnih vezanih stanja postoji kontinuum nivoa gde elektron nije vezan za atom. Sahina formula daje broj jonizovanih u odnosu na broj neutralnih atoma:

$$\frac{n^+}{n_0} = 2 \frac{1}{n_\mathrm{e}} \frac{g^+}{g_0} \frac{(2\pi m k T_\mathrm{j})^{3/2}}{h^3}\ e^{-\frac{\chi_\mathrm{j}}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{j}}},$$

gde je n_e koncentracija elektrona, m masa elektrona, g^+ statistička težina jona a g_0 statistička težina atoma u osnovnom stanju dok je χ_j energija jonizacije iz osnovnog stanja.

Kada je uspostavljena potpuna TDR tada su temperature određene iz Plankove funkcije, Maksvelove raspodele, Bolcmanove i Sahine formule međusobno jednake odnosno postoji jedna temperatura koja karakteriše sve gore navedene procese

$$T \equiv T_0 = T_\mathrm{k} = T_\mathrm{B} = T_\mathrm{j}.$$

1. Odrediti broj pobuđenih atoma $n_{i,k}$ u funkciji ukupnog broja atoma n_i u datom stanju jonizacije i.

$\chi_{i,k}$ predstavlja potencijal ekscitacije u odnosu na osnovni nivo. $n_{i,k}$ je broj atoma u i-tom stanju jonizacije koji su ekscitovani na k-ti nivo. $n_{i,0}$ predstavlja broj atoma u i-tom stanju jonizacije na osnovnom nivou ($k = 1, 2, 3, ...$ - pobuđena stanja, 0 - osnovno odnosno ne pobuđeno stanje: $n = 1$ - glavni kvantni broj). Na osnovu Bolcmanove raspodele možemo pisati:

$$\frac{n_{i,k}}{n_{i,0}} = \frac{g_{i,k}}{g_{i,0}} e^{-\chi_{i,k}/k_\mathrm{B}T} \quad \Rightarrow$$
$$n_{i,k} = g_{i,k} \frac{n_{i,0}}{g_{i,0}} e^{-\chi_{i,k}/k_\mathrm{B}T} \qquad (*)$$

Sa druge strane imamo:

$$n_i = \sum_k n_{i,k} = \sum_k \frac{n_{i,0}}{g_{i,0}}\ g_{i,k}\ e^{-\chi_{i,k}/k_\mathrm{B}T} \quad \Rightarrow$$
$$n_i = \frac{n_{i,0}}{g_{i,0}} \sum_k g_{i,k}\ e^{-\chi_{i,k}/k_\mathrm{B}T} = \frac{n_{i,0}}{g_{i,0}}\ U_i(T), \qquad U_i(T) = \sum_k g_{i,k}\ e^{-\chi_{i,k}/k_\mathrm{B}T}$$

Dakle, imamo:

$$\frac{n_{i,0}}{g_{i,0}} = \frac{n_i}{U_i(T)}$$

gde je $U(T)$ particiona funkcija[1].

Konačno, zamenom prethodnog izraza u (*), dobijamo:

$$\frac{n_{i,k}}{n_i} = \frac{g_{i,k}}{U_i(T)}\ e^{-\chi_{i,k}/k_\mathrm{B}T}.$$

2. Odrediti broj vodonikovih atoma ekscitovanih na nivo $n = 2$ i $n = 3$ (prvo i drugo pobuđeno stanje - $k = 1, 2$) u odnosu na broj atoma u osnovnom stanju ($n = 1$) na $T = 5000,\ 10000$ i 20000 K ($k_\mathrm{B}T \approx 0.4 - 1.7$ eV). χ_{21}=10.2 eV, χ_{31}=12.1 eV.

Sada osnovno stanje numerišemo preko glavnog kvantnog borja n odnosno $n = 1$:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\chi_{2,1}/k_\mathrm{B}T}, \quad \frac{n_3}{n_1} = \frac{g_3}{g_1} e^{-\chi_{3,1}/k_\mathrm{B}T},$$

$$g_n = 2n^2, \quad g_1 = 2.$$

$$k_\mathrm{B} = 1.38 \times 10^{-16}\ \mathrm{erg/K} = 8.617 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV/K}, \quad 1\ \mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-12}\ \mathrm{erg}$$

Jasno je da je $\frac{n_2}{n_1} \approx \frac{n_2}{n}$ kako je prema prethodnom zadatku:

$$\frac{n_2}{n} = \frac{g_2}{U} e^{-\chi_{2,1}/k_\mathrm{B}T}, \quad U = g_1 + g_2 e^{-\chi_{2,1}/k_\mathrm{B}T} + g_3 e^{-\chi_{3,1}/k_\mathrm{B}T} + \cdots \approx g_1 = 2.$$

Kako se sumiranje vrši po svim nivoima (njih beskonačno mnogo) uočavamo problem divergencije particione funkcije U. Ipak, divergencija u realnosti nestaje kako će za atome/jone u plazmi biti moguća ekscitacija samo konačnog broja (najnižih nivoa). Ako nije potrebna visoka numerička tačnost dovoljno je izjednačiti $U = g_1$.

Konačno imamo:

$$T = 5000\ \mathrm{K} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_2}{n_1} = 2.07 \times 10^{-10}, \quad \frac{n_3}{n_1} = 5.67 \times 10^{-12}$$

[1]Za detalje vidi fusnotu 4

$$T = 10000\ \mathrm{K} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_2}{n_1} = 2.88 \times 10^{-5}, \quad \frac{n_3}{n_1} = 7.14 \times 10^{-6}$$

$$T = 20000\ \mathrm{K} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_2}{n_1} = 1.07 \times 10^{-2}, \quad \frac{n_3}{n_1} = 8.02 \times 10^{-3}$$

3. Razmotriti odnos broja jona u dva susedna stanja jonizacije.

Sahina formula:

$$\frac{n_{i+1,0}}{n_{i,0}} \cdot n_{\mathrm{e}} = \frac{2(2\pi m k_{\mathrm{B}} T)^{3/2}}{h^3} \, \frac{g_{i+1,0}}{g_{i,0}} \, e^{-\chi_i/k_{\mathrm{B}}T} \tag{*}$$

Ako je n_{i+1} ukupan broj atoma u $i+1$ - om stanju jonizacije tada iz Bolcmanove raspodele (vidi prvi zadatak) imamo:

$$\frac{n_{i+1,0}}{n_{i+1}} = \frac{g_{i+1,0}}{U_{i+1}} e^{-\chi_{i+1,0}/k_{\mathrm{B}}T} = \frac{g_{i+1,0}}{U_{i+1}}, \qquad \chi_{i+1,0} = 0.$$

Slično:

$$\frac{n_{i,0}}{n_i} = \frac{g_{i,0}}{U_i} e^{-\chi_{i,0}/k_{\mathrm{B}}T} = \frac{g_{i,0}}{U_i}, \qquad \chi_{i,0} = 0.$$

Deljenjem prethodna dva izraza dobijamo:

$$\frac{n_{i+1,0}}{n_{i,0}} = \frac{n_{i+1}}{n_i} \, \frac{g_{i+1,0}}{g_{i,0}} \, \frac{U_i}{U_{i+1}} \tag{**}$$

Kada (**) zamenimo u (*) imamo:

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} \cdot n_{\mathrm{e}} = \frac{2(2\pi m k_{\mathrm{B}} T)^{3/2}}{h^3} \, \frac{U_{i+1}}{U_i} \, e^{-\frac{\chi_i}{k_{\mathrm{B}}T}}, \qquad \chi_i \equiv \chi_{i,\infty},$$

gde $\chi_{i,\infty}$ predstavlja jonizacioni potencijal i-tog stanja jonizacije. Gornji izraz se može zapisati i preko elektronskog pritiska:

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} \cdot p_{\mathrm{e}} = \frac{2(2\pi m)^{3/2}}{h^3} (k_{\mathrm{B}} T)^{5/2} \, \frac{U_{i+1}}{U_i} \, e^{-\frac{\chi_{i,\infty}}{k_{\mathrm{B}}T}}, \qquad p_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{e}} k_{\mathrm{B}} T,$$

$$\log \frac{n_{i+1}}{n_i} = -0.1761 - \log p_{\mathrm{e}} + \log \frac{U_{i+1}}{U_i} + 2.5 \log T - \frac{5040}{T} \chi_{i,\infty}, \qquad T\ [\mathrm{K}], \quad p_{\mathrm{e}}\ [\mathrm{dyn/cm^2}], \quad \chi_{i,\infty}\ [\mathrm{eV}],$$

$$h = 6.626 \times 10^{-27}\ \mathrm{erg\ s}, \quad m \equiv m_{\mathrm{e}} = 9.105 \times 10^{-28}\ \mathrm{g}, \quad 1\ \mathrm{dyn} = 1\ \mathrm{g\ cm/s^2} = 10^{-5}\ \mathrm{kg\ m/s^2},$$

$$1\ \mathrm{erg} = 10^{-7}\ \mathrm{J}.$$

4. Odrediti broj jona (II) atoma vodonika u odnosu na broj neutralnih (I) vodonikovih atoma za uslove $T = 6000,\ 10000,$ i 20000 K ($k_{\mathrm{B}}T \approx 0.5 - 1.7$ eV), i $P_{\mathrm{e}} = 10$ dyn/cm^2 (za vežbu uzeti $P_{\mathrm{e}} = 100$ dyn/cm^2).

Na osnovu prethodnog zadatka dobijamo sledeću tabelu (tabela 1) i grafik (slika 3):

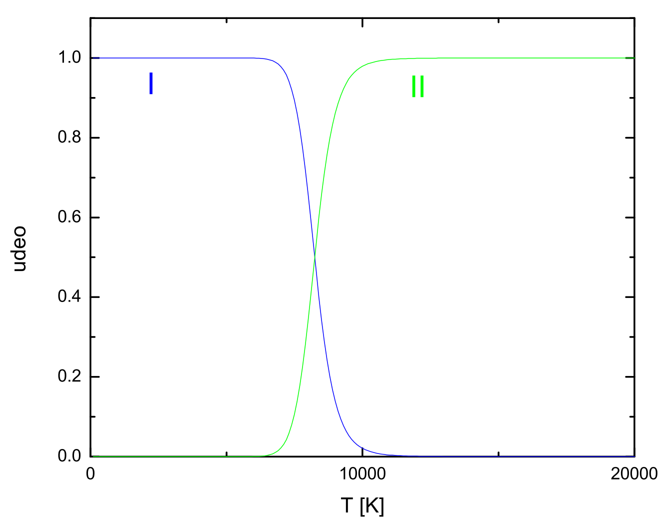
$$U_I = 2, \quad U_{II} = 1, \quad \chi_{i,\infty} = 13.598 \text{ eV}$$

$$\frac{n_I}{n_{\rm uk}} = \frac{1}{1 + n_{II}/n_I,}$$

$$\frac{n_{II}}{n_{\rm uk}} = \frac{n_{II}}{n_I + n_{II}} = \frac{n_{II}/n_I}{1 + n_{II}/n_I}.$$

Tabela 1: Rešenje zadatka 4.

T [K]	n_{II}/n_I	$n_I/n_{\rm uk}$	$n_{II}/n_{\rm uk}$
6000	3.5×10^{-4}	1	0.35×10^{-3}
10000	46.6	0.021	0.979
20000	7.05×10^5	0.142×10^{-5}	1



Slika 3: Udeo ($n_{I,II}/n_{\rm uk}$) neutralnog (I) i jonizovanog (II) atoma vodonika za različite vrednosti temperature (uz zadatak 4).

Za vežbu: *Odrediti temperaturu na kojoj je $n_I = n_{II}$.*

5. Slično prethodnom zadatku za helijum imamo: $\chi_{I,\infty} = 24.587$ **eV i** $\chi_{II,\infty} = 54.416$ **eV dok su** $U_{II} = 2$ **i** $U_I = U_{III} = 1$**,** $g_{I,0} = 1$**,** $g_{II,0} = 2$**.**

Sledi ($P_{\rm e} = 10$ dyn/cm^2):

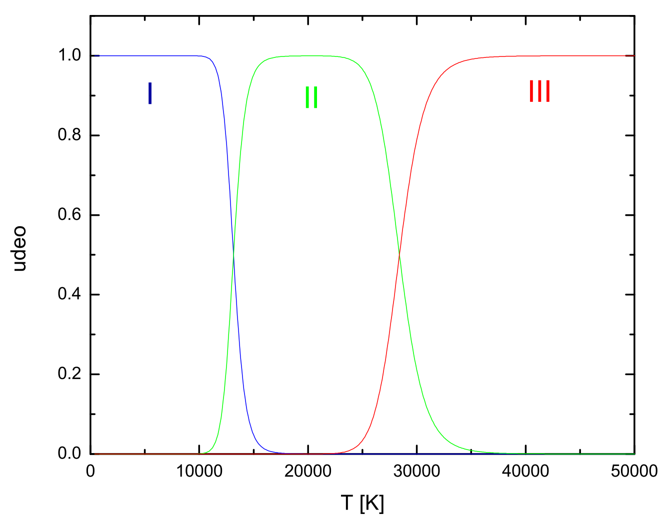
$$\frac{n_{II}}{n_I} = 10^{-0.8751 + 2.5 \log T - \frac{123918.48}{T}},$$

$$\frac{n_{III}}{n_{II}} = 10^{-1.4771+2.5\log T-\frac{274256.64}{T}}.$$

Vidi tabelu 2 i sliku 4.

Tabela 2: Rešenje zadatka 5.

T [K]	n_{II}/n_I	n_{III}/n_I	$n_I/n_{\rm uk}$	$n_{II}/n_{\rm uk}$	$n_{III}/n_{\rm uk}$
10000	5.45×10^{-4}	1.27×10^{-19}	~ 1	0.544×10^{-3}	0.692×10^{-22}
20000	4.82×10^{3}	3.68×10^{-5}	0.2×10^{-3}	~ 1	0.368×10^{-4}
30000	1.54×10^{6}	3.77	0.136×10^{-6}	0.210	0.79
40000	3.41×10^{7}	1.49×10^{3}	0.197×10^{-10}	0.671×10^{-3}	~ 1



Slika 4: Udeo ($n_{I,II,III}/n_{\rm uk}$) neutralnog, jednom i potpuno jonizovanog helijuma za različite vrednosti temperature (uz zadatak 5).

6. Odrediti stepen jonizacije[2] atoma vodonika ($\chi = 13.6$ eV) u Sunčevoj fotosferi gde je $T = 6000$ K i $\log p_e = 1.5$ (pomoć za brzo računanje: $\log 2 = 0.3$, $\log 3 = 0.48$, $\log 5 = 0.7$, $\log 7 = 0.84$; $\log 6000 = \log 3 + \log 2 + 3 = 3.78$).

Imamo $U^+ = 1$ kako je reč o jednom protonu - jedno stanje, $U_0 = 2$ kako u osnovnom stanju elektron može biti u dva stanja - orjentacije spina. Dobijamo $\frac{n^+}{n_0} = 10^{-4}$ odnosno jedan od 10^4 atoma vodonika je jonizovan.

7. Odrediti udeo (n_2/n_{uk}) atoma vodonika ekscitovanih na prvi pobuđeni nivo ($n = 2$; zavisnost izraženosti (jačine) linija Balmerove serije od temperature) u zavisnosti od temperature za $\log p_e = 1.5$ (rezultat predstaviti grafički - slika 5).

Upotrebom Bolcmanove i Sahine raspodele može se još npr. proceniti i odnos koncentracija neutralnih atoma vodonika, ekscitovanih na prvo pobuđeno stanje (n_2) prema ukupnoj koncentraciji neutralnih i jonizovanih atoma vodonika ($n_{\mathrm{H}} \equiv n_{\mathrm{H\,I}} + n_{\mathrm{H\,II}}$), za različite vrednosti temperature T i elektronskog pritiska p_e.

Naime, jasno je da važi[3] $n_2/n_{\mathrm{H}} = (1-\alpha)n_2/n_{\mathrm{H\,I}}$. Sa druge strane, lako se može naći da je:

$$\frac{n_2}{n_{\mathrm{H\,I}}} = \frac{g_2}{U(T)}\, e^{-\chi_{21}/k_{\mathrm{B}}T},$$

gde je:

$$U(T) = \sum_{\boldsymbol{n}} g_{\boldsymbol{n}}\, e^{-\chi_{\boldsymbol{n}1}/k_{\mathrm{B}}T} \approx g_1 + g_2\, e^{-\chi_{21}/k_{\mathrm{B}}T} + g_3\, e^{-\chi_{31}/k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{B}}}$$

statistička suma elektronskih ekscitacija (particiona funkcija; eng. *partition function*).

Rezultati zadovoljavajuće tačnosti mogu se dobiti ukoliko se obračuna samo nekoliko prvih članova particione funkcije[4]. Sada je jasno i zašto su baš (apsorpcione) spektralne linije atoma vodonika (Balmerova serija, u vidljivoj oblasti) najizraženije u spektrima zvezda spektralne klase A (efektivnih temperatura između oko 7500 K i 11000 K; Vukićević-Karabin & Atanacković 2010). Ovde je iskorišćena Sahina relacija za vodoničnu plazmu u obliku:

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \frac{(2\pi m_e)^{3/2}}{h^3}\frac{(k_{\mathrm{B}}T)^{5/2}}{p} e^{-\chi_{\mathrm{jon}}/k_{\mathrm{B}}T}, \tag{1.14}$$

gde je T temperatura, $\chi_{\mathrm{jon}} = 13.598$ eV, a $p = (n_{\mathrm{H\,I}} + n_{\mathrm{H\,II}} + n_e)k_{\mathrm{B}}T$.

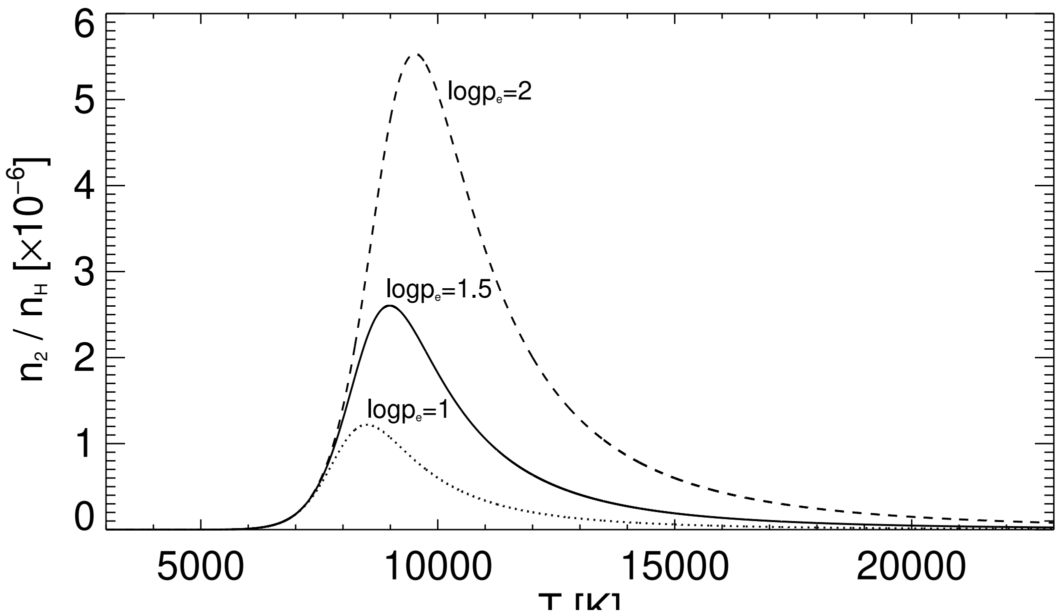
Digresija. Zastupljnost se često predstavlja u obliku logaritma relativne zastupljenosti $\log(n_{\mathrm{Z}}/n_{\mathrm{H}}) + 12$. Npr. za atom kiseonika imamo da je logaritam relativne zastupljenosti 8.83 što daje:

$$8.83 = \log(n_{\mathrm{O}}/n_{\mathrm{H}}) + 12 \Rightarrow \frac{n_{\mathrm{O}}}{n_{\mathrm{H}}} = 6.76 \times 10^{-4},$$

[2] Odnos broja jonizovanih i neutralnih čestica.

[3] Kako je $n_{\mathrm{H\,II}} = n_e$ (u slučaju čisto vodonične plzme) i $\alpha \equiv n_{\mathrm{H\,II}}/(n_{\mathrm{H\,I}} + n_{\mathrm{H\,II}})$, sledi da je $p = (1+\alpha)p_e/\alpha$.

[4] Pomenute statističke sume jedne, izolovane čestice, zapravo divergiraju. Naravno, kada je reč o atomima i jonima (koji nisu potpuno ogoljeni) u plazmi, tada je $U(T)$ konačna suma (za detalje vidi npr. poglavlje 2.5.3 iz Milić 1977). Naime, pobuda na ona energetska stanja čija je energija manja od srednje termalne energije konstituenata plazme ili pobuda na ona energetska stanja koja odgovaraju udaljnostima od jezgra koja su veća od srednjeg rastojanja čestica u plazmi, upravo dovodi do jonizacije.



Slika 5: Udeo ($n_2/n_{\rm uk}$) neutralnog atoma vodonika ekscitovanog na prvo pobuđeno stanje za različite vrednosti temperature (uz zadatak 7).

što znači da imamo jedan atom kiseonika na 1480 atoma vodonika. Za kalcijum je logaritam relativne zastupljenosti 6.36 što daje jedan atom kalcijuma na oko 436516 atoma vodonika.

8. Za uslove na Suncu (T = 5777 K, $\log p_{\rm e}$ = 1.5) proceniti značaj (izraženost) Balmerovih naspram Ca II K apsorpcione linije. Linija nastaje prelazom elektrona sa osnovnog na prvo pobuđeno stanje. Za vežbu, nacrtati grafik sličan onom iz zadatka 7 za Ca II (n=1).

Od ranije za vodonik imamo:

$$\frac{n_{\rm HII}}{n_{\rm HI}} = 10^{-0.1761-1.5+\log 0.5+2.5\log 5777-\frac{5040}{5777}13.598} = 3.66\times 10^{-5},$$

odnosno jedan jonizovani vodonik na 27322 nautrala. Slično nalazimo i naseljenost prvog pobuđenog nivoa:

$$\frac{n_{{\rm H}(n=2)}}{n_{{\rm H}(n=1)}} = 4e^{-118408.6957/T} = 5\times 10^{-9},$$

odnosno jedan atom u prvom pobuđenom stanju na 200 miliona atoma u osnovnom stanju.

Sada razmatramo kalcijum: $\chi_{\rm jon}({\rm CaI})$ = 6.11 eV ($\chi_{\rm jon} >> k_{\rm B}T$; T = 5777 K daje $k_{\rm B}T \approx$ 0.5 eV). Možemo pisati:

$$\frac{n_{\rm CaII}}{n_{\rm CaI}} = 10^{-0.1761-1.5+\log\frac{2.30}{1.32}+2.5\log 5777-\frac{5040}{5777}6.11} = 435,$$

odnosno 435 Ca II jona na jedan neutralni atom CaI (particione funkcije za kalcijum Ca I i Ca II su samo date kako njihov račun izlazi iz okvira ovog kursa; pogledati dodatak D.2. iz knjige Gray: *The Observation and Analysis of Stellar Photospheres*, 2005. Takođe, u radu Irwin: *Polynomial* *partition function approximations of 344 atomic and molecular species*, 1981., je data polinomijalna aproksimacija particionih funkcija za atome, jone i molekule u atmosferama sa temperaturama od 3000 do 16000 K).

Nas zanima čuvena linija jednom jonizovanog kalcijuma: Ca II K (393.3 nm; $\chi_{12} = 3.15$ eV, $g_1 = 2$, $g_2 = 4$). Dobijamo:

$$\frac{n_{\mathrm{CaII(n=2)}}}{n_{\mathrm{CaII(n=1)}}} = 3.79 \times 10^{-3},$$

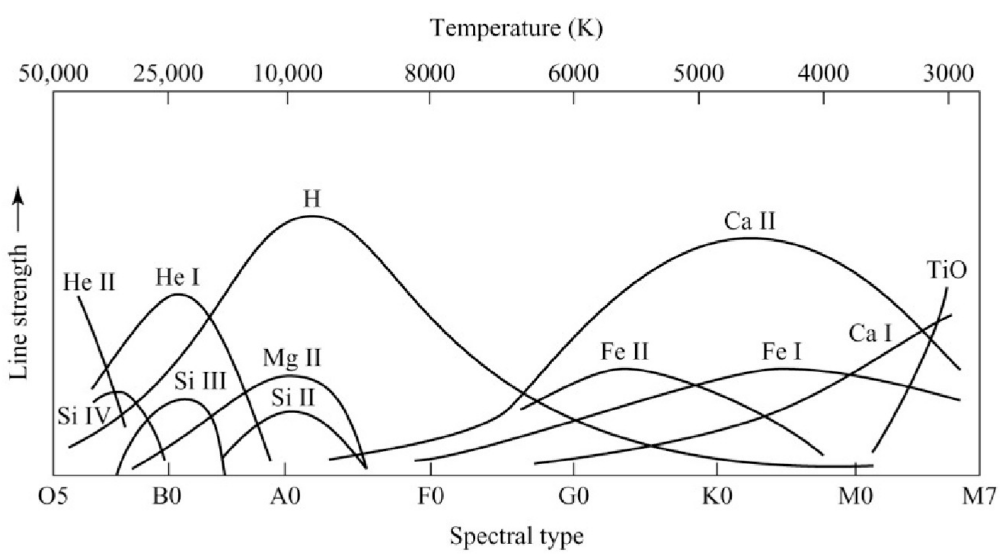
odnosno na jedan jon kalcijuma u prvom pobuđenom stanju dolazi 264 jona kalcijuma u osnovnom stanju (većina je dakle sposobna da proizvede Ca II K liniju).

Konačno, broj jednom jonizovanih atoma kalcijuma u osnovnom stanju prema ukupnom broju atoma i jona kalcijuma je:

$$\frac{n_{\mathrm{CaII(n=1)}}}{n_{\mathrm{uk}}} \approx \frac{n_{\mathrm{CaII(n=1)}}}{n_{\mathrm{CaII(n=1)}} + n_{\mathrm{CaII(n=2)}}} \frac{n_{\mathrm{CaII}}}{n_{\mathrm{uk}}} = \frac{1}{1 + n_{\mathrm{CaII(n=2)}}/n_{\mathrm{CaII(n=1)}}} \frac{n_{\mathrm{CaII}}/n_{\mathrm{CaI}}}{1 + n_{\mathrm{CaII}}/n_{\mathrm{CaI}}} = 0.994,$$

$$n_{\mathrm{CaII}} \approx n_{\mathrm{CaII(n=1)}} + n_{\mathrm{CaII(n=2)}}, \quad n_{\mathrm{uk}} = n_{\mathrm{CaI}} + n_{\mathrm{CaII}}.$$

Skoro sav kalcijum može formirati Ca II K liniju. Ne zaboravimo, naravno, da mi zapravo imamo jedan kalcijum na 436516 atoma vodonika. Ipak, od tih 436516 atoma vodonika samo je mali broj neutrala i to neutrala u prvom pobuđenom nivou. Zapravo, njih je $436516 \cdot 5 \times 10^{-9} = 0.00218 = 1/459$. Sledi da ima približno oko 459 više kalcijuma koji može da stvori Ca II K linije nego što ima vodonika koji stvara Balmerove linije. Zato je apsorpciona linija CaII K izraženija nego Balmerove linije u slučaju zvezda sličnih Suncu (vidi sliku 6).



Slika 6: Jačine linija u zavisnosti od temperature - spektralne klase (uz zadatak 8).

Za vežbu: Na kojoj temperaturi bi važilo: $n_{\mathrm{H}(n=1)} = n_{\mathrm{H}(n=2)}$?