Teorija zvezdanih spektara -10-

1. Rešiti jednačinu prenosa zračenja izvedenu pod pretpostavkama Milne-Edingtonovog modela. Pretpostaviti da se Plankova funkcija menja linearno sa optičkom dubinom.

Milne-Edingtonov model, pretpostavlja da se linija i kontinuum formiraju u istim atmosferskim slojevima, pri čemu se linija formira i procesima termalne apsorpcije i emisije i procesima koherentnog i izotropnog rasejanja. Ovaj model pretpostavlja i da je odnos koeficijenta apsorpcije u liniji i koeficijenta apsorpcije u kontinuumu na jednoj frekvenciji konstantan na svim dubinama u atmosferi. Jednačina prenosa zračenja izvedena pod pretpostavkama Milne-Edingtonovog modela glasi:

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - L_\nu B_\nu(T) - (1 - L_\nu) J_\nu,$$

$$X_\nu = \frac{\chi_\nu^{\mathrm{L}}}{\chi^{\mathrm{c}}}, \quad L_\nu = \frac{1 + \varepsilon X_\nu}{1 + X_\nu}, \quad d\tau = d\tau^{\mathrm{c}} + d\tau_\nu^{\mathrm{L}}.$$

Za rešavanje gornje jednačine možemo koristiti Edingtonov metod, tj. da na jednačinu prenosa zračenja delujemo operatorom $\int_{-1}^{1} \cdots d\mu$, a zatim $\int_{-1}^{1} \cdots \mu d\mu$, tj. tražimo nulti i prvi moment jednačine prenosa zračenja. Specifični intenzitet je $I_\nu = I_\nu(\tau_\nu, \mu)$.

Da bismo rešili razmatranu jednačinu uvodimo sledeće pretpostavke: $X_\nu = \mathrm{const}$, $\varepsilon = \mathrm{const}$ što nam daje i da je $L_\nu = \mathrm{const}$. Kako je Plankova funkcija linearna funkcija optičke dubune u kontinuumu imamo:

$$B_\nu(\tau) = a_\nu + p_\nu \tau^{\mathrm{c}} = a_\nu + b_\nu \tau_\nu, \quad b_\nu = \frac{p_\nu}{1 + X_\nu}, \quad \tau_\nu = \tau^{\mathrm{c}}(1 + X_\nu).$$

Sada za nulti moment jednačine prenosa zračenja dobijamo:

$$\frac{d}{d\tau_\nu} \int_{-1}^{1} I_\nu d\mu = \int_{-1}^{1} I_\nu d\mu - L_\nu B_\nu(T) \int_{-1}^{1} d\mu - (1 - L_\nu) J_\nu(\tau_\nu) \int_{-1}^{1} d\mu$$

$$\frac{1}{4} \frac{dF_\nu}{d\tau_\nu} = L_\nu (J_\nu - B_\nu). \qquad (*)$$

Sa druge strane, za prvi moment jednačine prenosa zračenja imamo:

$$\frac{d}{d\tau_\nu} \int_{-1}^{1} I_\nu \mu^2 d\mu = \int_{-1}^{1} I_\nu \mu d\mu$$

$$\frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{1}{4} F_\nu(\tau_\nu).$$

Diferenciranjem prethodne jednačine po τ_ν dobijamo:

$$\frac{d^2 K_\nu}{d\tau_\nu^2} = \frac{1}{4} \frac{dF_\nu}{d\tau_\nu} = L_\nu (J_\nu - B_\nu).$$

gde smo iskoristili jednačinu $(*)$.

Nepoznate su J_ν i K_ν. Kako bismo rešili prethodnu jednačinu, treba nam neka veza J_ν i K_ν kako bismo zatvorili sistem jednačina. Zbog toga sada koristimo I Edingtonovu aproksimaciju $J_\nu = 3K_\nu$ (pretpostavljamo da ova veza važi svuda u atmosferi) i dobijamo:

$$\frac{d^2 J_\nu}{d\tau_\nu^2} = 3L_\nu(J_\nu - B_\nu).$$

Iz pretpostavke o linearnosti Plankove funkcije po optičkim dubunama i dobijamo:

$$\frac{d^2(J_\nu - B_\nu)}{d\tau_\nu^2} = 3L_\nu(J_\nu - B_\nu) = k^2(J_\nu - B_\nu), \quad k_\nu = \sqrt{3L_\nu},$$

pa za rešenje dobijamo:

$$J_\nu - B_\nu = C_1 e^{-k_\nu \tau_\nu} + C_2 e^{k_\nu \tau_\nu},$$

$$J_\nu(\tau) = C_1 e^{-k_\nu \tau_\nu} + C_2 e^{k_\nu \tau_\nu} + a_\nu + b_\nu \tau_\nu.$$

Za određivanje konstanti koristimo granične uslove. U dubokim slojevima atmosfere, kada $\tau_\nu \to \infty$ mora da važi da $J_\nu \to B_\nu(T)$ (ima konačnu vrednost u LTR) što ukazuje da C_2 mora biti nula kako izraz ne bi diverigrao. Za površinu, $\tau_\nu = 0$, gde je $I_\nu^-(\tau_\nu = 0, \mu) = 0$, imamo dve mogućnosti. Možemo iskoristiti II Edingtonovu aproksimaciju ili tačno Hopfovo rešenje na površini. Ako iskoristimo II Edingtonovu aproksimaciju $F_\nu(0) = 2J_\nu(0)$ dobijamo:

$$J_\nu(0) = C_1 + a_\nu = \frac{F_\nu(0)}{2}.$$

Ako se vratimo na jednačinu $(*)$ i ako iskoristimo I Edingtonovu aproksimaciju imamo da je $dJ_\nu/d\tau_\nu = 3F_\nu/4$, odakle za $\tau_\nu = 0$ dobijamo:

$$F_\nu(0) = \frac{4}{3}\left(\frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu}\right)_{\tau_\nu=0} = \frac{4}{3}(-k_\nu C_1 + b_\nu),$$

$$C_1 + a_\nu = \frac{F_\nu(0)}{2} = \frac{2}{3}(-k_\nu C_1 + b_\nu) \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{2b_\nu - 3a_\nu}{3 + 2\sqrt{3L_\nu}}$$

Odakle onda dobijamo da su:

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{2b_\nu - 3a_\nu}{3 + 2\sqrt{3L_\nu}}\; e^{-\sqrt{3L_\nu}\tau_\nu} + a_\nu + b_\nu\tau_\nu,$$

$$S_\nu(\tau_\nu) = B_\nu + (1 - L_\nu)\; \frac{2b_\nu - 3a_\nu}{3 + 2\sqrt{3L_\nu}}\; e^{-\sqrt{3L_\nu}\tau_\nu}.$$

Na sličan način, ukoliko iskoristimo tačno Hopfovo rešenje na površini $F_\nu(0) = \frac{4}{\sqrt{3}}J_\nu(0)$ dobijamo sledeće rešenje:

$$S_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(T) + (1 - L_\nu)\; \frac{b_\nu - \sqrt{3}a_\nu}{\sqrt{3} + \sqrt{3L_\nu}}\; e^{-\sqrt{3L_\nu}\tau_\nu}.$$

Za određenu vrednost optičke dubine $\tau_\nu^{\mathrm{term}} \gtrsim \frac{1}{\sqrt{L_\nu}}$, dubina termalizacije, važi će $S_\nu \to B_\nu$. Najveće odstupanje je na $\tau_\nu = 0$. Ako se ne formira linija, imamo samo kontinuum, tada je $X_\nu = 0$ pa tako i $L_\nu = 1$ pa je $\tau_\nu^{\mathrm{term}} = 1$. Za vrlo jaku liniju $X_\nu \to \infty$ imamo $L_\nu = \varepsilon$ pa je $\tau_\nu^{\mathrm{term}} = 1/\sqrt{\varepsilon}$. Generalno, dubina termalizacije je veća od $1/\sqrt{p}$, gde je p verovatnoća da foton bude termalizovan. U tipičnim atmosferskim uslovima je $\varepsilon << 1$ pa do termalizacije dolazi na velikim optičkim dubinama za jake linije.

2. Odrediti remanentni fluks pri Milne-Edingtonovom modelu.

Izlazni fluks zračenja je dat kao (koristimo kao granični uslov tačno Hopfovo rešenje na površini):

$$F_\nu(0) = \frac{4}{\sqrt{3}} J_\nu(0) = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(a_\nu + \frac{b_\nu - \sqrt{3} a_\nu}{\sqrt{3} + \sqrt{3 L_\nu}} \right) = \frac{4}{3} \, \frac{b_\nu + a_\nu \sqrt{3 L_\nu}}{1 + \sqrt{L_\nu}}.$$

Remanentni fluks je definisan kao:

$$r_\nu = \frac{F_\nu(0)}{F_\mathrm{c}(0)}.$$

$F_\mathrm{c}(0)$ možemo odrediti posmatrajući slučaj kada nema linija $X_\nu = 0$ ($\chi_\nu^\mathrm{L} = 0$) odnosno $L_\nu = 1$ pa je i $b_\nu = p_\nu$:

$$F_\mathrm{c}(0) = \frac{4}{3} \, \frac{p_\nu + a_\nu \sqrt{3}}{2}.$$

Konačno dobijamo:

$$r_\nu = \frac{b_\nu + a_\nu \sqrt{3 L_\nu}}{1 + \sqrt{L_\nu}} \, \frac{2}{p_\nu + \sqrt{3} a_\nu}.$$

Sada možemo razmotriti neke specijalne slučajeve:

(a) Ako imamo čisto rasejanje u liniji ($\varepsilon = 0$):

$$r_\nu = \frac{\frac{p_\nu}{1+X_\nu} + a_\nu \sqrt{\frac{3}{1+X_\nu}}}{1 + \sqrt{\frac{1}{1+X_\nu}}} \, \frac{2}{p_\nu + \sqrt{3} a_\nu}, \quad L_\nu = \frac{1}{1+X_\nu}.$$

Za slučaj jake linije (jezgro linije) $X_\nu \to \infty$ dobijamo da $r_\nu = 0$. Zaključujemo da je jezgro linije formirane čistim koherentnim i izotropnim rasejanjem potpuno tamno.

(b) Ako imamo čistu (termalnu) apsorpciju ($\varepsilon = 1$, $L_\nu = 1$) dobijamo:

$$r_\nu = \frac{\frac{p_\nu}{1+X_\nu} + a_\nu \sqrt{3}}{p_\nu + a_\nu \sqrt{3}}.$$

U slučaju jake linije (jezgro linije) $X_\nu \to \infty$ dobijamo:

$$r_\nu = \frac{1}{1 + \frac{p_\nu}{a_\nu \sqrt{3}}} \neq 0.$$

odnosno, postoji neki remanentni intenzitet u jezgru linije koji je određen koeficijentima Plankove funkcije (pogledaj 1. zadatak sa vežbi 9).

Spektralne linije mogu biti rezonantne linije - polaze sa osnovnog stanja i subordinatne linije - odgovaraju prelazima između ekscitovanih stanja. Rezonantne linije su u principu jače i formiraju se pretežno rasejanjem dok se subordinatne linije formiraju pretežno pravom apsorpcijom (pretežno u uslovima LTR).

Linije formirane čistim rasejanjem ili čistom apsorpcijom ne samo da se razlikuju po r_ν, već i po ponašanju centar-limb. Ako iskoristimo rešenje jednačine prenosa (u opštem obliku - C_1 se razlikuje u zavisnosti da li je korišćeno tačno Hopfovo ili aproksimativno Edingtonovo rešenje):

$$S_\nu(\tau_\nu) = L_\nu B_\nu + (1-L_\nu)J_\nu = B_\nu(T) + (1-L_\nu)C_1 e^{-\sqrt{3L_\nu}\tau_\nu}, \quad B_\nu(T) = a_\nu + b_\nu\tau_\nu,$$

imamo:

$$I(0,\mu) = \int_0^\infty S_\nu(t_\nu)e^{-t_\nu/\mu}\frac{dt_\nu}{\mu} = a_\nu + b_\nu\mu + (1-L_\nu)C_1\frac{1}{1+\mu\sqrt{3L_\nu}}$$

$$I(0,\mu) = a_\nu + b_\nu\mu + \frac{1-L_\nu}{1+\mu\sqrt{3L_\nu}}\;\frac{b_\nu - a_\nu\sqrt{3}}{\sqrt{3}(1+\sqrt{L_\nu})}.$$

Za kontinuum imamo ($X_\nu = 0,\ L_\nu = 1$):

$$I_\mathrm{c}(0,\mu) = a_\nu + p_\nu\mu, \quad L_\nu = 1, \quad b_\nu = p_\nu.$$

Posmatrajmo sada dva slučaja:

(a) $\varepsilon = 0,\ L_\nu = \frac{1}{1+\eta_\nu}$

Za jaku liniju (jezgro linije) imamo $X_\nu \to \infty$, odnosno, $L_\nu \to 0$, pa je $I_\nu(0,\mu) = 0,\ \forall\mu$ (zato što i b_ν teži nuli). Izlazni intenzitet zračenja jezgru linije je nula za svaki pravac.

(b) $\varepsilon = 1,\ L_\nu = 1$

$$I_\nu(0,\mu) = a_\nu + \frac{p_\nu}{1+X_\nu}\ \mu$$

Za $\mu \to 0$ imamo da $I_\nu(0,\mu) \to I_\mathrm{c}(0,\mu)$ - linija na rubu nestaje (utapa se u kontinuum) odnosno od centra ka rubu linija slabi!

3. Milne-Edingtonov model pretpostavlja da je kontinuum čisto termalni $\eta^{\mathrm{c}} = \chi^{\mathrm{c}} B_\nu(T)$ odnosno $\chi^{\mathrm{c}} = \chi^{\mathrm{term}}$. Razmotriti slučaj kada se uzme u obzir i rasejanje u kontinuumu (npr. Tomsonovo rasejanje može dati doprinos u kontinuumu).

Ukupni koeficijenti apsorpcije i emisije sada su određeni termalnim procesima i procesima rasejanja u liniji i kontinuumu. Zbog toga ćemo sve koeficijente dati u jednoj tabeli kako se ne bismo izgubili među svim oznakama.

	linija	konitnuum
termalni procesi	χ_ν^{term} i η_ν^{term}	χ^{term} i η^{term}
procesi rasejanja	χ_ν^{ras} i η_ν^{ras}	χ^{ras} i η^{ras}

Kada se uzme u obzir i rasejanje u kontinuumu imamo $\chi^{\mathrm{c}} = \chi^{\mathrm{term}} + \chi^{\mathrm{ras}}$. Pretpostavimo da se od ukupne apsorbovane energije u kontinuumu deo ρ raseje[1]. Imamo:

$$\chi^{\mathrm{ras}} = \rho\chi^{\mathrm{c}} \;\Rightarrow\; \eta^{\mathrm{ras}} = \rho\chi^{\mathrm{c}} J_\nu,$$
$$\chi^{\mathrm{term}} = (1-\rho)\chi^{\mathrm{c}} \;\Rightarrow\; \eta^{\mathrm{term}} = (1-\rho)\chi^{\mathrm{c}} B_\nu(T).$$

Na sličan način kao i pri izvođenju jednačine prenosa zračenja za slučaj Milne-Edingtonovog modela može se izvesti i jednačina prenosa u ovom slučaju:

$$\mu\frac{dI_{\nu\mu}}{\rho^V dz} = -\chi_\nu^{\mathrm{ukupno}}\, I_{\nu\mu} + \eta_\nu^{\mathrm{ukupno}} = -(\chi^{\mathrm{term}} + \chi^{\mathrm{ras}} + \chi_\nu^{\mathrm{term}} + \chi_\nu^{\mathrm{ras}}) I_{\nu\mu} + \eta^{\mathrm{term}} + \eta^{\mathrm{ras}} + \eta_\nu^{\mathrm{term}} + \eta_\nu^{\mathrm{ras}}$$

$$\mu\frac{dI_{\nu\mu}}{d\tau_\nu} = I_{\nu\mu} - L_\nu B_\nu(T) - (1-L_\nu)J_\nu,$$
$$X_\nu = \frac{\chi_\nu^L}{\chi^{\mathrm{c}}}, \qquad L_\nu = \frac{1-\rho+\varepsilon X_\nu}{1+X_\nu}.$$

Ovu jednačinu smo sveli na *standardni* oblik uvodeći novu skalu optičke dubine i možemo je rešiti Edingtonovom metodom uz pretpostavke kao i ranije ($X_\nu, \varepsilon = \mathrm{const}$ i $B_\nu(\tau^{\mathrm{c}}) = a_\nu + p_\nu\tau^{\mathrm{c}}$) sa tim što još dodajemo i pretpostavku da je $\rho = \mathrm{const}$. Ako iskoristimo tačno Hopfovo rešenje (kao i ranije) dobijamo isti oblik rešenje kao i u prethodnom slučaju samo sa različitim vrednostima konstanti:

$$J_\nu = B_\nu(\tau) + \frac{b_\nu - \sqrt{3}a_\nu}{\sqrt{3} + \sqrt{3L_\nu}}\; e^{-\sqrt{3L_\nu}\tau_\nu}.$$

Izlazni fluks zračenja na frekvenciji u liniji je:

$$F_\nu(0) = \frac{4}{3}\;\frac{b_\nu + a_\nu\sqrt{3L_\nu}}{1+\sqrt{L_\nu}}.$$

U kontinuumu je $X_\nu = 0$, $L_\nu = 1-\rho$:

[1]Biti oprezan kako sa ρ takođe obeležavamo i gustinu. Iz tog razloga ćemo nadalje gustinu obeležavati sa ρ^V.

$$F_{\mathrm{c}}(0) = \frac{4}{3}\,\frac{p_\nu + a_\nu\sqrt{3(1-\rho)}}{1+\sqrt{1-\rho}}.$$

Remanentni fluks možemo odrediti kao i ranije:

$$r_\nu = \frac{F_\nu(0)}{F_{\mathrm{c}}(0)} = \frac{b_\nu + a_\nu\sqrt{3L_\nu}}{1+\sqrt{L_\nu}}\;\frac{1+\sqrt{1-\rho}}{p_\nu + a_\nu\sqrt{3(1-\rho)}}.$$

Ukoliko bismo u kontinuumu imali samo rasejanje $\rho = 1$ dobijamo:

$$L_\nu = \frac{\varepsilon X_\nu}{1+X_\nu}, \quad r_\nu = \frac{\frac{p_\nu}{1+X_\nu} + a_\nu\sqrt{\frac{3\varepsilon X_\nu}{1+X_\nu}}}{p_\nu\left(1+\sqrt{\frac{\varepsilon X_\nu}{1+X_\nu}}\right)}.$$

Sada ćemo razmotriti specijalne slučajeve prethodne jednačine:

(a) $\varepsilon = 0$

$$r_\nu = \frac{1}{1+X_\nu} < 1, \quad X_\nu > 1, \quad \text{apsorpcija.}$$

(b) $\varepsilon = 1$

$$r_\nu = \frac{\frac{1}{1+X_\nu} + \frac{a_\nu}{p_\nu}\sqrt{\frac{3}{1+1/X_\nu}}}{1+\sqrt{\frac{1}{1+1/X_\nu}}}.$$

Za jaku liniju (odnosno njeno jezgro) $X_\nu \to \infty$ pa dobijamo:

$$r_\nu \to \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{a_\nu}{p_\nu},$$

odnosno r_ν teži konačnoj vrednosti, a ona zavisi od koeficijenata u izrazu za Plankov zakon - zavisi od gradijenta Plankove funkcije. U tom smislu može da se pojavi i apsorpcija i emisija. Ovaj mehanizam se naziva Šusterov.