**Teorija zvezdanih spektara -9-**

**1. Posmatrajmo zračenje u pravcu normalnom na neki sloj debljine $D$. Razmotriti intenzitet zračenja koje izlazi iz sloja debljine $D$ u zavisnosti od toga kako zrači sam sloj i od upadnog intenziteta zračenja koje pada na njega $I_\nu(0)$ (vidi sliku 1). Pretpostaviti homogenu sredinu (smatrati da nije značajan doprinos rasejanja ili stimulisane emisije pošto bi tada funkcija izvora zavisila od lokalne vrednosti intenziteta usrednjenog po uglovima te bi mogla zavisiti od položaja čak i kada je materijalni sadržaj homogen).**

Jednačina prenosa zračenja se može zapisati kao:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu, \quad \chi_\nu = \kappa_\nu \rho = k_\nu n, \quad \tau_\nu(D) = \int_0^D \chi_\nu(s) ds,$$

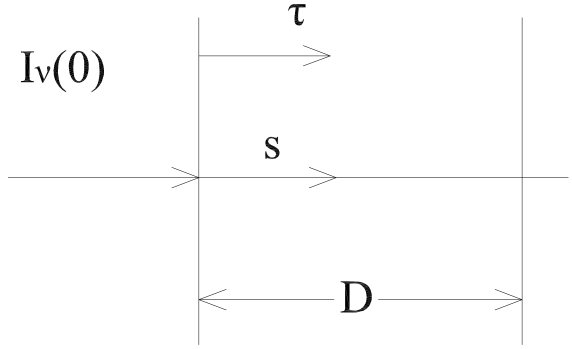
gde je $\tau_\nu(D) = \chi_\nu D$ monohromatska optička dubina (debljina) kroz sloj debljine $D$. Pretpostavljamo da je funkcija izvora tog sloja konstantna ($S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} = \text{const}$). Rešavajući jednačinu prenosa zračenja imamo ($d\tau_\nu(s) = \chi_\nu(s)ds$):

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu \quad / \cdot e^{\tau_\nu} \;\Rightarrow\; e^{\tau_\nu}\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu e^{\tau_\nu} = S_\nu e^{\tau_\nu},$$

$$\frac{d}{d\tau_\nu}\left(I_\nu e^{\tau_\nu}\right) = S_\nu e^{\tau_\nu} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\tau_\nu} \frac{d}{d\tau_\nu}\left(I_\nu e^{\tau_\nu}\right) d\tau_\nu = S_\nu \int_0^{\tau_\nu} e^{\tau_\nu} d\tau_\nu,$$

$$I_\nu(\tau_\nu)e^{\tau_\nu} - I_\nu(0) = S_\nu(e^{\tau_\nu} - 1) \quad \Rightarrow$$

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}). \tag{1}$$




Slika 1: Sloj debljine $D$.

Ako nema emisije ($\eta_\nu = 0$) onda je rešenje:

$$I_\nu(\tau_\nu(D)) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu(D)}.$$

Za sloj kod kojeg je $\tau_\nu(D) > 1$ kažemo da je optički gust dok za sloj sa $\tau_\nu(D) < 1$ kažemo da je optički redak (tanak). Zapravo, za $\tau_\nu(D) = 1$ je $I_\nu(\tau_\nu(D)) = I_\nu(0)/e$.

Razmotrimo sada opšti slučaj (jednačinu 1) i optički gustu sredinu (optički gust sloj) $\tau_\nu(D) > 1$:

$$I_\nu(\tau_\nu(D)) \approx S_\nu. \tag{2}$$

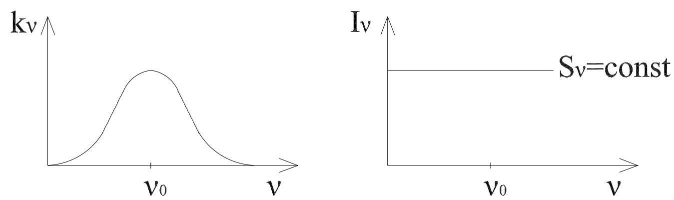
U optički retkom slučaju (optički tanak sloj) $\tau_\nu(D) < 1$ imamo:

$$I_\nu(\tau_\nu(D)) = I_\nu(0) + \tau_\nu(D)(S_\nu - I_\nu(0)), \tag{3}$$

nakon razvoja u red eksponencijalne funkcije oko nule.

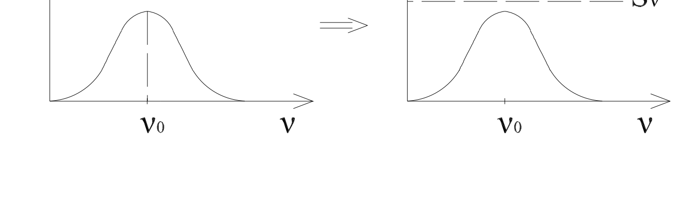
Razmotrimo neke specijalne slučajeve:

(a) Optički gust sloj (za polubeskonačnu atmosferu to je uslov $\tau_\nu >> 1$ ili za konačan ali gust sloj to je $\tau_\nu(D) > 1$). U homogenoj, optički gustoj sredini, nema linija bez obzira na profil koeficijenta apsorpcije ($I_\nu = S_\nu$). Bez obzira na oblik koeficijenta apsorpcije ne formira se linija (vidi sliku 2);



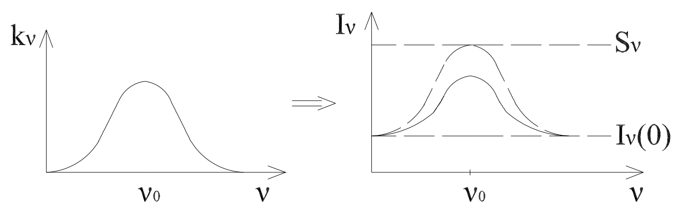

Slika 2: Homogena optički gusta sredina - nema linija.

(b) Optički redak sloj, npr. oblak gasa za koji je $\tau(D) < 1$ (npr. emisiona maglina). Pretpostavimo da nema upadnog zračenja na sloj odnosno da važi $I_\nu(0) = 0$. Pitamo se kakav je rezultat zračenja unutar tog oblaka: $I_\nu(\tau_\nu^D) = S_\nu \tau_\nu^D, \quad \tau_\nu^D \equiv \tau_\nu(D)$ (ovo važi za bilo koje $\tau_\nu$ pa tako i za $\tau_\nu^D$). Jasno je da je frekventna zavisnost izlaznog zračenja direktno zavisna od frekventne zavisnosti apsorpcionog koeficijenta. Zaključujemo da jedan razređeni oblak gasa daje emisioni spektar i kada nema upadnog zračenja (vidi sliku 3).



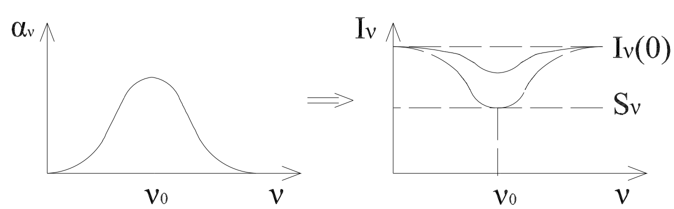

Slika 3: Homogena, optički retka sredina bez upadnog zračenja - emisioni spektar.

Ako uzmemo u obzir upadno zračenje, na sloj za koji važi $\tau(D) < 1$, koje je manje od funkcije izvora u tom gasu $I_\nu(0) < S_\nu$, tada je drugi član u (3) pozitivan – imamo emisionu liniju. U centru linije je najveće $\tau_\nu$ kako tu $\chi_\nu$ $(\nu = \nu_0)$ ima (lokalni) maksimum pa je desni član u (3) najveći. Uz uslov da važi $\tau_{\nu_0}(D) > 1$, odnosno da je sredina optički gusta na centralnoj frekvenciji, može doći do saturacije $I_\nu \approx S_\nu$ (vidi sliku 4).



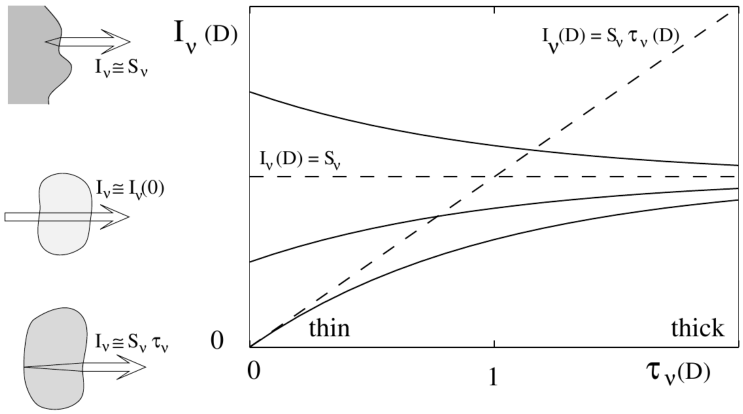

Slika 4: Homogena, optički retka sredina sa upadnim zračenjem koje je manje od funkcije izvora u gasu.

Ipak, zvezdani spektri su pre svega apsorpcioni pa se postavlja pitanja kada se apsorpcione linije formiraju. One mogu da se jave u slučaju optički retkog gasa $\tau_\nu(D) < 1$, ali kada je isti *osvetljen* zračenjem većeg intenziteta nego što je funkcija izvora u sloju $I_\nu(0) > S_\nu$ (vidi jednačinu 3 i sliku 5). I u ovom slučaju može doći do pojave saturacije za $\tau_{\nu_0}(D) > 1$. Svi razmatrani rezultati su sumirani na slikama 6 i 7.

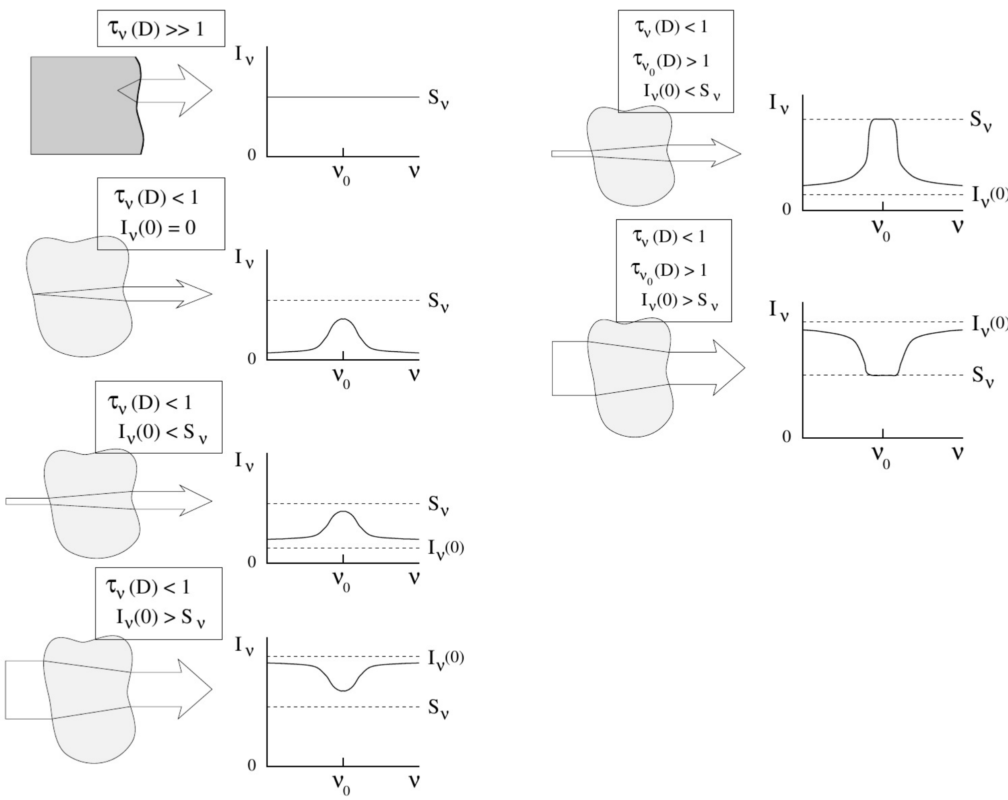



Slika 5: Homogena, optički retka sredina sa upadnim zračenjem koje je veće od funkcije izvora u gasu - apsorpcione linije.

***Zadatak za vežbu***: Pretpostavljajući linearnu zavisnost funkcije izvora od optičke dubine uveriti se da za optički gustu sredinu važi da kada funkcija izvora opada ka površini dobijamo apsorpcione linije a ako funkcija izvora raste imamo emisione linije.




Slika 6: Uz zadatak 1.




Slika 7: Uz zadatak 1 (nastavak).

Ako bismo sada posmatrali optički gustu sredinu ($\tau_\nu >> 1$) ali uz uslov da se funkcija izvora menja sa dubinom ($S_\nu = S_\nu(\tau_\nu)$) može se proporcionalno lako pokazati da kada funkcija izvora opada ka površini dobijamo apsorpcione linije, a ako funkcija izvora raste imamo emisione linije.

Zvezdu možemo podeliti na dve oblasti - optički gustu unutrašnjost ($\tau_\nu > 1,\ I_\nu(0) = B_\nu$) i optički redak sloj - atmosferu ($\tau_\nu < 1,\ S_\nu = B_\nu$). Da bi se pojavila apsorpciona linija u optički retkom sloju moramo imati $I_\nu(0) > S_\nu$ odnosno jasno je da mora važiti $B_\nu^{\text{gusti}} > B_\nu^{\text{retki}}$ što se svodi na to da temperatura mora opadati. Kako se ponaša temperatura ako želimo da dobijemo emisionu lininju?

**2. U klasičnom pristupu formiranja spektralne linije polazi se od toga da se linije formiraju u dva procesa: prave (termalne) apsorpcije i (koherentnog) rasejanja. Kako opisujemo doprinos (koherentnog) rasejanja formiranju linija?**

Posmatrajmo zračenje kroz elementarni cilindar (vidi sliku 8) i odredimo količinu energije koja (u jedinici vremena i u jediničnom frekventnom intervalu) prođe kroz osnovu cilindra $d\sigma$ u prostorni ugao $d\omega^{'}$ pod uglom $\theta^{'}$ (setimo se definicije specifičnog intenziteta):

$$dE_\nu = I_\nu d\sigma \cos\theta^{'} d\omega^{'} d\nu dt.$$

Količina apsorbovane energije duž puta $ds$ kroz cilindar je:

$$dE_\nu^{\text{aps}} = \chi_\nu dE_\nu \; ds = \chi_\nu I_\nu d\sigma \cos\theta^{'} d\omega^{'} d\nu dt \frac{dz}{\cos\theta^{'}} = \chi_\nu I_\nu d\omega^{'} dV d\nu dt,$$

gde je $dV = d\sigma \; dz$. Količina apsorbovane energije u cilindru (u jedinici vremena i u jediničnom frekventnom intervalu) je sada:

$$\frac{dE_\nu^{\text{aps}}}{dV} = \chi_\nu I_\nu d\omega^{'},$$

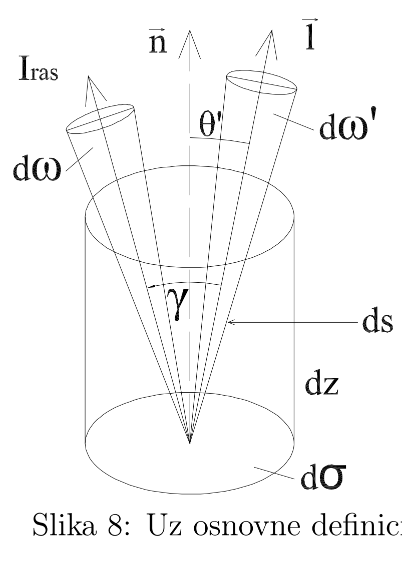
gde je $\chi_\nu$ zapreminski koeficijent apsorpcije. Slično, definicija masenog koeficijenta apsorpcije je vezana za apsorbovanu količinu energije po jedinici mase:

$$\frac{dE_\nu^{\text{aps}}}{dm} = \frac{\chi_\nu}{\rho} I_\nu d\omega^{'} = \kappa_\nu I_\nu d\omega^{'},$$

gde je $\kappa_\nu$ je maseni koeficijent aprosrpcije. Konačno, za količinu apsorbovane energije po jednoj čestici (atomu) imamo:

$$\frac{dE_\nu^{\text{aps}}}{dn} = \frac{\chi_\nu}{n} I_\nu d\omega^{'} d\nu dt = k_\nu I_\nu d\omega^{'},$$

gde je $k_\nu$ je koeficijent apsorpcije po čestici (atomu). Važi $\chi_\nu = \kappa_\nu \rho = k_\nu n$. Ovi koeficijenti apsorpcije zapravo obuhvataju i pravu (termalnu) apsorpciju i rasejanje! (nazivaju se i ekstinkcioni koeficijenti).




Slika 8: Uz osnovne definicije.

Pretpostavimo da se od ukupne apsorbovane energije u jedinici zapremine (u jedinici vremena i jediničnom frekventnom intervalu) deo $\varepsilon$ stvarno (termalno) apsorbuje, a deo $1-\varepsilon$ rasejava. Sada možemo razdvojiti ove dve komponente i pisati izraze za apsorbovanu energiju u jedinici zapremine[1] od prave (termalne) apsorpcije i rasejanja:

$$dE_\nu^{\text{prava aps}} = \varepsilon\ dE_\nu^{\text{aps}} = \varepsilon \chi_\nu I_\nu d\omega^{'},$$
$$dE_\nu^{\text{ras}} = (1-\varepsilon) dE_\nu^{\text{aps}} = (1-\varepsilon)\chi_\nu I_\nu d\omega^{'}.$$

Rasejanje se generalno može vršiti pod bilo kojim uglom u odnosu na pravac upadnog zračenja. Nas sad zanima onaj deo koji se raseje pod uglom $\gamma$ u odnosu na upadni pravac (vidi sliku 8). Verovatnoća rasejanja u različite pravce je generalno različita. Uvedimo tzv. indikatrisu rasejanja $x(\gamma)$ koja je definisana tako da $x(\gamma)\frac{d\omega}{4\pi}$ predstavlja verovatnoću da je zračenje rasejano u prostorni ugao $d\omega$ pod uglom $\gamma$ u odnosu na upadno. Pri tome važi:

$$\oint_{4\pi} x(\gamma)\frac{d\omega}{4\pi} = 1.$$

Za izotropno zračenje je $x(\gamma) = 1$. Energija rasejana pod uglom $\gamma$ u odnosu na upadni pravac zračenja data je sa:

$$dE_\nu^{\text{ras}}(\gamma) = x(\gamma)\frac{d\omega}{4\pi}\ dE_\nu^{\text{ras}},$$

a to je dalje jednako:

$$dE_\nu^{\text{ras}}(\gamma) = (1-\varepsilon)x(\gamma)\frac{d\omega}{4\pi}\chi_\nu I_\nu d\omega^{'}.$$

Količina energije resejana u pravcu $\gamma$ (ali ne pod uglom $\gamma$ u odnosu na početni pravac, već rasejana u tom pravcu ali iz svih mogućih pravaca) dobija se integracijom po svim upadnim uglovima:

$$dE_\nu^{\text{ras}}(\gamma) = (1-\varepsilon)\chi_\nu d\omega \oint x(\gamma) I_\nu \frac{d\omega^{'}}{4\pi}.$$

Za izotropno zračenje imamo $x(\gamma) = 1$ pa sledi:

$$dE_\nu^{\text{iz,ras}}(\gamma) = (1-\varepsilon)\chi_\nu d\omega \oint I_\nu \frac{d\omega^{'}}{4\pi} = (1-\varepsilon)\chi_\nu J_\nu d\omega.$$

Konačno, možemo definisati maseni koeficijent emisije (od izotropnog rasejanja):

$$dE_\nu^{\text{ras}}(\gamma) = j_\nu^{\text{ras}}\rho d\omega = (1-\varepsilon)\chi_\nu J_\nu d\omega, \quad dm = \rho dV,$$
$$j_\nu^{\text{ras}} = (1-\varepsilon)\kappa_\nu J_\nu.$$

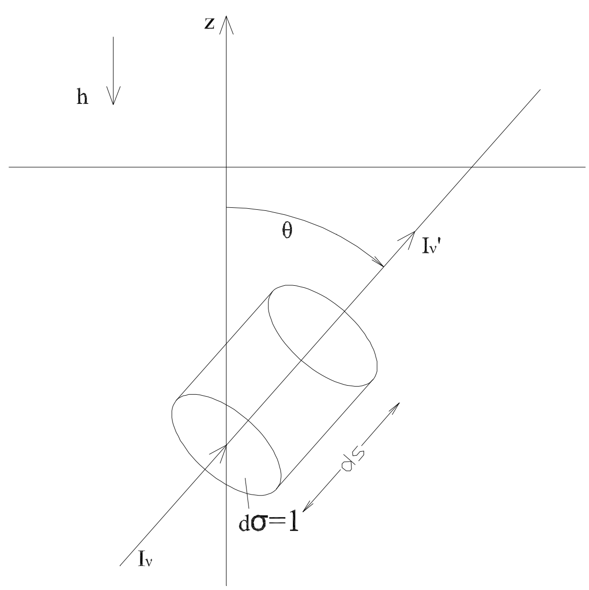
Odnosno, za zapreminske koeficijente važi:

$$\eta_\nu^{\text{ras}} = (1-\varepsilon)\chi_\nu J_\nu$$

[1] U nastavku ovog teksta ćemo pretpostaviti da je energija data u jedinici frekvence i u jedinici vremena.

**3. (Milne-Edingtonov model formiranja linija) Izvesti jednačinu energetske ravnoteže elementarne cilindrične zapremine u atmosferi zvezde i napisati je u obliku jednačine prenosa zračenja. Izabrana zapremina se karakteriše apsorpcijom i emisijom u kontinuumu i u liniji sa odgovarajućim masenim koeficijentima $\chi^{\rm c}$, $\eta^{\rm c}$ za kontinuumm i $\chi_\nu^{\rm L}$, $\eta_\nu^{\rm L}$ za liniju (kako je frekventna promena koeficijenta ekstinkcije u kontinuumu mnogo slabija u poređenju sa frekventnom zavisnošću koeficijenta ekstinkcije u liniji pišemo eksplicitno $\nu$ u indeksu samo kod odgovarajućeg koeficijenta u liniji). Za zračenje u kontinuumu (fotosfera) važi LTR, $\frac{\eta^{\rm c}}{\chi^{\rm c}} = B_\nu(T)$. Pretpostaviti da se deo $\varepsilon$ apsorbovane energije u liniji stvarno (termalno) apsorbuje dok se $1-\varepsilon$ rasejava. Rasejano zračenje u liniji smatrati izotropnim i koherentnim.**

Posmatrajmo zračenje kroz elementarni cilindar (vidi sliku 9).




Slika 9: Uz izvođenje jednačine prenosa zračenja.

S obzirom da apsorpciji i emisiji pored linija doprinosi i kontinuum možemo da pišemo sledeće jednačine:

$$\chi_\nu = \chi_\nu^{\rm L} + \chi^{\rm c}, \quad \eta_\nu = \eta_\nu^{\rm L} + \eta^{\rm c}$$

Kako liniji doprinose termalni procesi i procesi rasejanja, onda koeficijent apsorpcije i emisije u liniji možemo podeliti na ova dva doprinosa i to ćemo zapisati na sledeći način:

$$\chi_\nu^{\rm L} = \chi_\nu^{\rm term} + \chi_\nu^{\rm ras}, \quad \eta_\nu^{\rm L} = \eta_\nu^{\rm term} + \eta_\nu^{\rm ras}$$

. Takođe, važi da je $\frac{j^{\rm c}}{\kappa^{\rm c}} = B_\nu(T)$ što isto možemo zapisati i za termalne koeficijente koji doprinose apsorpciji i emisiji u liniji $\frac{\eta_\nu^{\rm term}}{\chi_\nu^{\rm term}} = B_\nu(T)$. Na osnovu definicije $\varepsilon$ i rešenja prethodnog zadatka važe sledeće relacije između koeficijenata:

$$\chi_\nu^{\rm term} = \varepsilon\chi_\nu^{\rm L}, \quad \chi_\nu^{\rm ras} = (1-\varepsilon)\chi_\nu^{\rm L}, \quad \eta_\nu^{\rm ras} = (1-\varepsilon)\chi_\nu^{\rm L} J_\nu.$$

Sa slike 9 je jasno da važi: $dz = ds\cos\theta$, $dz = \mu ds$. Ako još posmatramo u pravcu prostiranja zračenja imamo $\cos\theta = 1$, odnosno, $ds = dz$, tako da uz elementarnost osnove posmatranog cilindra imamo $d\sigma\cos\theta = 1$.

Zakon održanja energije daje:

$$dE_\nu^{\mathrm{izl}} = dE_\nu^{\mathrm{ul}} - dE_\nu^{\mathrm{aps}} + dE_\nu^{\mathrm{em}} \qquad (*),$$

gde su $dE_\nu^{\mathrm{izl}}$, $dE_\nu^{\mathrm{ul}}$, $dE_\nu^{\mathrm{aps}}$, $dE_\nu^{\mathrm{em}}$, količina energije koja napušta cilindar, koja ulazi u cilindar, koja je apsorbovana od strane cilindra i koja je emitovana cilindrom, respektivno. Ako sa $I_\nu$ označimo specifični intenzitet ulaznog zračenja a sa $I_\nu^{'}$ specifični intenzitet izlaznog zračenja imamo:

$$dE_\nu^{\mathrm{ul}} = I_\nu d\sigma \cos\theta d\omega d\nu dt = I_\nu d\omega d\nu dt,$$
$$dE_\nu^{\mathrm{izl}} = I_\nu^{'} d\sigma \cos\theta d\omega d\nu dt = (I_\nu + dI_\nu) d\omega d\nu dt.$$

Promena energije usled apsorpcije i emisije zračenja je:

$$dE_\nu^{\mathrm{aps}} = \chi_\nu I_\nu d\omega d\nu dt dm ds,$$
$$dE_\nu^{\mathrm{em}} = \eta_\nu d\omega d\nu dt dm ds.$$

Kada sve vratimo u jednačinu energetske ravnoteže $(*)$ i nakon gubljenja sličnih članova dobijamo:

$$I_\nu + dI_\nu = I_\nu - \chi_\nu I_\nu ds + \eta_\nu ds$$

Delenjem prethodnog izraza sa $-\chi_\nu ds$ dolazimo do standardnog oblika za jednačinu prenosa zračenja:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu$$

gde je uvedena jedinstvena skala optičke dubine $\tau_\nu$ koju možemo da izrazimo preko optičke dubine u kontinuumu $\tau^c$ na sledeći način:

$$d\tau_\nu = -\chi_\nu ds = -(\chi_\nu^{\mathrm{L}} + \chi^c) dz = d\tau^{\mathrm{L}} + d\tau^c = -\chi^c dz (1 + X_\nu) = d\tau^c (1 + X_\nu)$$

gde smo uveli odnos $X_\nu = \chi_\nu^{\mathrm{L}}/\chi^c$ kao odnos koeficijenata apsorpcije u liniji i kontinuumu. Funkciju izvora onda možemo da napišemo na sledeći način:

$$\begin{aligned}
S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} = \frac{\eta_\nu^{\mathrm{L}} + \eta^c}{\chi_\nu^{\mathrm{L}} + \chi^c} = \\
= \frac{\eta_\nu^{\mathrm{term}} + \eta^c}{\chi_\nu^{\mathrm{L}} + \chi^c} + \frac{\eta_\nu^{\mathrm{ras}}}{\chi_\nu^{\mathrm{L}} + \chi^c} = \\
= \frac{\chi_\nu^{\mathrm{term}} + \chi^c}{\chi_\nu^{\mathrm{L}} + \chi^c} B_\nu(T) + \frac{\eta^{\mathrm{ras}}}{\chi_\nu^{\mathrm{L}} + \chi^c} J_\nu = \\
= \frac{\varepsilon \chi_\nu^{\mathrm{L}} + \chi^c}{\chi_\nu^{\mathrm{L}} + \chi^c} B_\nu(T) + \frac{(1-\varepsilon)\chi_\nu^{\mathrm{L}}}{\chi_\nu^{\mathrm{L}} + \chi^c} J_\nu = \\
= \frac{1 + \varepsilon X_\nu}{1 + X_\nu} B_\nu(T) + \frac{(1-\varepsilon) X_\nu}{1 + X_\nu} J_\nu = \\
= L_\nu B_\nu(T) + (1 - L_\nu) J_\nu
\end{aligned}$$

gde smo uveli smenu da je $L_\nu = (1 + \varepsilon X_\nu)/(1 + X_\nu)$.

Konačno, za Milne-Edingtonov model formiranja linija, dobijamo jednačinu prenosa zračenja u sledećem obliku:

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - L_\nu B_\nu(T) - (1 - L_\nu) J_\nu.$$

Milne-Edingtonov model je aproksimacija kako rasejanje generalno nije ni izotropno ni koherentno. Za prenos zračenja u liniji uglavnom važi $\varepsilon << 1$. Na kraju, razmotrimo neke specijalne slučaje:

$$\varepsilon = 1 \;\Rightarrow\; L_\nu = 1 \;\Rightarrow\; S_\nu = B_\nu(T) \quad \text{LTR},$$
$$\varepsilon = 0 \;\Rightarrow\; L_\nu = \frac{1}{1+\eta_\nu},$$
$$\varepsilon = 0 \wedge \kappa^{\mathrm{c}} = 0 \;\Rightarrow\; L_\nu = 0 \;\Rightarrow\; S_\nu^L = J_\nu.$$