Teorija zvezdanih spektara -5-

Rešavanje jednačine prenosa zračenja (formalno) sa poznatom funkcijom izvora u slučaju plan-paralelne polubeskonačne atmosfere daje integralne jednačine za srednji intenzitet (švarcšildova jednačina), fluks i K_ν integral (Milneove jednačine) koje u opštem slučaju imaju oblik:

$$J_\nu(\tau_\nu) = \Lambda_\tau\{S_\nu(t_\nu)\}, \quad \Lambda_\tau\{f(t)\} = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)E_1(|t-\tau|)dt,$$

$$F_\nu(\tau_\nu) = \Phi_\tau\{S_\nu(t_\nu)\}, \quad \Phi_\tau\{f(t)\} = 2\int_\tau^\infty f(t)E_2(t-\tau)dt - 2\int_0^\tau f(t)E_2(\tau-t)dt,$$

$$K_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{4}\mathcal{X}_\tau\{S_\nu(t_\nu)\}, \quad \mathcal{X}_\tau\{f(t)\} = 2\int_0^\infty f(t)E_3(|t-\tau|)dt,$$

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xy}}{y^n}dy = \int_0^1 e^{-x/\mu}\mu^{n-1}\frac{d\mu}{\mu}.$$

Za sivi slučaj i aproksimaciju LTR gornje jednačine se svode na:

$$J(\tau) = \Lambda_\tau\{B(t)\},$$
$$F(\tau) = \Phi_\tau\{B(t)\},$$
$$K(\tau) = \frac{1}{4}\mathcal{X}_\tau\{B(t)\}.$$

Ako još važi i ravnoteža zračenja (RZ) imamo:

$$J(\tau) = S(\tau) = B(\tau),$$

odnosno, jednačina prenosa zračenja postaje (Milneova jednačina u LTR):

$$\mu\frac{dI(\tau,\mu)}{d\tau} = I(\tau,\mu) - B(\tau).$$

Ako na gornju jednačinu delujemo redom sa $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cdots d\mu$ i zatim $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cdots \mu d\mu$, dobijamo:

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{4}\frac{dF(\tau)}{d\tau} = J(\tau) - B(\tau) = 0 \;\Rightarrow\; F(\tau) = \text{const},$$

$$\frac{dK(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{4}F(\tau) \;\Rightarrow\; F(\tau) = 4\frac{dK(\tau)}{d\tau} = \text{const} \;\Rightarrow\; K(\tau) = \frac{1}{4}F\tau + C.$$

Dodati uslov RZ se može zapisati na tri ekvivalentna načina:

$$J(\tau) = S(\tau) = B(\tau), \tag{1}$$

$$F(\tau) = \text{const}, \tag{2}$$

$$F(\tau) = 4\frac{dK(\tau)}{d\tau} = \text{const}. \tag{3}$$

Zapisane u integralnoj odnosno operatorskoj formi (tzv. Milneove integralne jednačine), gornje jednačine su date preko:

$$B(\tau) = \Lambda_\tau\{B(t)\}, \tag{1'}$$

$$F(\tau) = \Phi_\tau\{B(t)\} = \text{const}, \tag{2'}$$

$$F(\tau) = \frac{d}{d\tau}\mathcal{X}_\tau\{B(t)\} = \text{const}. \tag{3'}$$

1. Dokazati ekvivalentnost Milneovih integralnih jednačina (reč je o različitim zapisima uslova RZ).

Ako krenemo od jednačine (3′) lako se može pokazati da iz iste sledi jednačina (2′).

$$F(\tau) = \frac{d}{d\tau}\mathcal{X}_\tau\{B(t)\} = \text{const}, \quad \mathcal{X}_\tau\{\cdots\} = 2\int_0^\infty \{\cdots\}E_3(|t-\tau|)dt,$$

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{X}_\tau\{B(t)\} = 2\frac{d}{d\tau}\int_0^\tau B(t)E_3(\tau - t)dt + 2\frac{d}{d\tau}\int_\tau^\infty B(t)E_3(t-\tau)dt.$$

Uz:

$$\frac{d}{d\tau}\int_{a(\tau)}^{b(\tau)} f(x,\tau)dx = \int_{a(\tau)}^{b(\tau)} \frac{\partial}{\partial\tau}f(x,\tau)dx + f(b,\tau)\frac{db}{d\tau} - f(a,\tau)\frac{da}{d\tau},$$

imamo:

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{X}_\tau\{B(t)\} = 2\left[\int_0^\tau \frac{\partial E_3(\tau-t)}{\partial(\tau-t)}B(t)dt + B(\tau)E_3(0)\cdot 1 - B(0)E_3(\tau)\cdot 0 - \right.$$
$$\left. - \int_\tau^\infty \frac{\partial E_3(t-\tau)}{\partial(t-\tau)}B(t)dt + B(\infty)E_3(\infty-\tau)\cdot 0 - B(\tau)E_3(0)\cdot 1\right].$$

Kako važi:

$$\frac{dE_3(x)}{dx} = -E_2(x),$$

imamo:

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{X}_\tau\{B(t)\} = -2\int_0^\tau E_2(\tau-t)B(t)dt + 2\int_\tau^\infty E_2(t-\tau)B(t)dt = \Phi_\tau\{B(t)\} = F(\tau),$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak za vežbu: Slično gornjem zadatku, ukoliko bismo diferencirali (2′) po τ imali bismo:

$$\frac{dF(\tau)}{d\tau} = 0, \quad \frac{d}{d\tau}\Phi_\tau\{B(t)\} = 0,$$

odakle sledi (1′).

Definišimo Milneov problem: rešiti jednačinu prenosa zračenja oblika (sivi, plan-paralelni slučaj polubeskonačne atmosfere u ravnoteži zračenja):

$$\mu\frac{dI(\tau,\mu)}{d\tau}=I(\tau,\mu)-S(\tau),\quad S(\tau)=J(\tau)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}I(\tau,\mu)d\mu.$$

Reč je o integro-diferencijalnim jednačinama za svaki pravac μ. Primenom operatora $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cdots d\mu$ dobijamo $F=\mathrm{const}$ dok primenom $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cdots\mu d\mu$ dobijamo (Edingtonovo rešavanje):

$$\frac{dK(\tau)}{d\tau}=\frac{1}{4}F(\tau)=\mathrm{const},$$

odnosno tačno rešenje sivog problema postaje:

$$K(\tau)=\frac{1}{4}F\tau+C. \qquad (*)$$

Na $\tau>>1$, polje zračenja je skoro izotropno pa se specifični intenzitet može predstaviti kao linearna funkcija pravca te važi: $J(\tau)=3K(\tau)$. Drugim rečima, za različite oblike specifičnog intenziteta:

$$I(\mu)=I_0,$$

$$I(\mu)=I_0+I\mu,$$

$$I(\mu)=I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{2k-1}\ \mu^{2k-1},$$

$$I(\tau,\mu>0)=I^+(\tau),\ I(\tau,\mu<0)=I^-(\tau),\ \forall\tau,$$

važi:

$$J(\tau)=3K(\tau).$$

I Edingtonova aproksimacija je $J(\tau)=3K(\tau)$ i važi za svako τ u atmosferi. Ona sledi iz:

$$K(\tau)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}I(\tau,\mu)\mu^2d\mu=\frac{1}{2}<I(\tau,\mu)>\int_{-1}^{1}\mu^2d\mu=\frac{1}{3}J(\tau).$$

gde je $<I(\tau,\mu)>\equiv J(\tau)$.

Pomoću I Edingtonove aproksimacije, zamenom u $(*)$ imamo:

$$J(\tau)\approx\frac{3}{4}F(\tau+\alpha),\quad \alpha=\mathrm{const}=\frac{4C}{3F}.$$

II Edingtonova aproksimacija $F(0)=2J(0)$ sledi iz:

$$F=F(0)=2\int_{-1}^{1}I(0,\mu)\mu d\mu=2\int_{0}^{1}I^+(0,\mu)\mu d\mu=<I^+(0,\mu)>=2J(0),$$

kako je:

$$J(0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}I(0,\mu)d\mu=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}I^+(0,\mu)d\mu=\frac{1}{2}<I^+(0,\mu)>.$$

Uz ove aproksimacije, integraciona konstanta $(C,\,\alpha)$ je određena:

$$J(0) = \frac{3}{4}F\alpha = \frac{F}{2} \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{2}{3},$$

$$S(\tau) = J(\tau) = \frac{3}{4}F\left(\tau + \frac{2}{3}\right) = \frac{F}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right).$$

Ako uporedimo sa tačnim, Hopfovim rešenjem na površini ($q(\tau = 0) = 1/\sqrt{3}$) dobijamo da greška rešenja u Edingtonovoj aproksimaciji ($q(\tau) = 2/3$) iznosi oko 15%.

2. Za plan-paralelnu geometriju i sivu polubeskonačnu atmosferu u ravnoteži zračenja odrediti koeficijente linearne zavisnosti: $S(\tau) = a + b\tau$ **upotrebom prve Milneove integralne jednačine u operatorskom obliku.**

Podsetimo se, najpre, da primenom Φ_τ operatora na linearnu funkciju izvora oblika: $S = 1 + 3/2\tau$ sledi da je fluks skoro konstantan sa promenom optičke dubine. Sada odredimo a i b tako da bude zadovoljena:

$$F = \Phi_\tau\{S(t)\} = \text{const.}$$

Kako gornja jednačina važi za svako τ onda važi i za $\tau = 0,\ \infty$. Imamo:

$$\tau = 0, \quad a\Phi_0\{1\} + b\Phi_0\{t\} = F,$$
$$\tau = \infty, \quad a\Phi_\infty\{1\} + b\Phi_\infty\{t\} = F.$$

Rešavanjem gornjeg sistema nalazimo a, b. Podsetimo se da važi:

$$\Phi_\tau\{1\} = 2E_3(\tau), \quad \Phi_0\{1\} = 2E_3(0) = 1 \quad \Phi_\infty\{1\} = 2E_3(\infty) = 0,$$
$$\Phi_\tau\{t\} = \frac{4}{3} - 2E_4(\tau), \quad \Phi_0\{t\} = \frac{2}{3} \quad \Phi_\infty\{t\} = \frac{4}{3},$$

pa dobijamo:

$$S(\tau) = \frac{F}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right),$$

što predstavlja tzv. Milne-Edingtonovo rešenje (obojica naučnika su došla do istog rešenja ali različitim rezonovanjem). Ono je uglavnom polazna aproksimacija u daljim iterativnim postupcima popravljanja rešenja.

Iterativne metode rešavanja Milneovog problema.

Razmatramo plan-paralelnu geometriju, sivu polubeskonačnu atmosferu u ravnoteži zračenja uz važenje lokalne termodinamičke ravnoteže: $J(\tau) = S(\tau) = B(\tau)$. U tom slučaju možemo pisati sledeću, I Milneovu, integralnu jednačinu oblika:

$$B(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty B(t)E_1(|t-\tau|)dt = \Lambda_\tau\{B(t)\}.$$

Ako funkcija izvora zadovoljava gornju jednačinu onda je možemo odrediti metodom sukcesivnih aproksimacija tj. iterativnim rešavanjem.

$\boxed{\text{Edington I iterativna šema}}$

Krenimo od početne aproksimacije koja pretpostavlja linearnost funkcije izvora:

$$B^{(1)}(\tau) = a_0 + a_1\tau,$$

odnosno pretpostavimo neko konkretno početno rešenje (npr. Milne-Edingtonovo rešenje):

$$B^{(1)}(\tau) = \frac{3}{4}F\left(\tau + \frac{2}{3}\right).$$

Sada je funkcija izvora u drugoj iteraciji (aproksimaciji) data preko:

$$B^{(2)}(\tau) = \Lambda_\tau\{B^{(1)}(t)\},$$

odnosno u n-toj iteraciji (aproksimaciji) imamo:

$$B^{(n)}(\tau) = \Lambda_\tau\{B^{(n-1)}(t)\}.$$

Hopf je pokazao da kada $n \to \infty$ niz ovih funkcija konvergira ka tačnom rešenju polazne jednačine. Tačno, Hopfovo rešenje je:

$$B^{(\mathrm{ex})}(\tau) = \frac{3}{4}F\left(\tau + q(t)\right).$$

Ponovimo da je relativna greška na površini za (početno) Milne-Edingtonovo rešenje reda oko 15% ($B^{(1)}(0) = \frac{F}{2}$, $B^{(\mathrm{ex})}(0) = \frac{\sqrt{3}}{4}F$, $\left(\frac{\Delta B}{B}\right)_{\tau=0} = 0.1547$).

U drugoj aproksimaciji, funkcija izvora postaje:

$$B^{(2)}(\tau) = \Lambda_\tau\{B^{(1)}(t)\} = \Lambda_\tau\left\{\frac{3}{4}F\left(t+\frac{2}{3}\right)\right\} = \frac{3}{4}F\Lambda_\tau\{t\} + \frac{F}{2}\Lambda_\tau\{1\},$$

$$B^{(2)}(\tau) = \frac{3}{4}F\left[\tau + \frac{1}{2}E_3(\tau)\right] + \frac{F}{2}\left[1 - \frac{1}{2}E_2(\tau)\right],$$

$$B^{(2)}(\tau) = B^{(1)}(\tau) + \left[\frac{3}{8}FE_3(\tau) - \frac{F}{4}E_2(\tau)\right].$$

Iz gornje jednačine se jasno uočava korekcija rešenja u drugoj aproksimaciji. Možemo sada ponovo proceniti relativnu grešku na površini ($B^{(2)}(0) = \frac{7}{16}F$, $B^{(\mathrm{ex})}(0) = \frac{\sqrt{3}}{4}F$, $\left(\frac{\Delta B}{B}\right)_{\tau=0} = 0.0104$) od oko 1%. Iako je dobijen veliki skok u tačnosti, predstavljena iteraciona šema (Editngton I, Λ iteracija) u kasnijim popravkama teži veoma sporo ka tačnom rešenju.

$\boxed{\text{Edington II iterativna šema}}$

Polazimo od uslova za ravnotežu zračenja u obliku:

$$\frac{dK}{d\tau} = \frac{1}{4}F = \text{const} \;\Rightarrow\; K(\tau) = \frac{1}{4}F(\tau+\alpha),$$

gde je α konstanta. Ovo je tačno rešenje za K-integral. Da bismo odredili funkciju izvora potrebne su nam: (1) neka veza između B i K i (2) vrednost α. Prva Edingtonova aproksimacija nam daje $J = S = B = 3K$. Sa druge strane, druga Edingtonova aproksimacija nam omogućava da nađemo α iz $J(0) = \frac{F}{2}$ pa imamo da je $B = 3K = \frac{3}{4}F(\tau+\alpha)$, odnosno, $B(0) = \frac{F}{2}$ te je tako $\alpha = \frac{2}{3}$. To je prva, početna vrednost za α. Početno rešenje (Milne-Edingtonovo) je:

$$B^{(1)}(\tau) = \frac{3}{4}F\left(\tau + \frac{2}{3}\right).$$

Rešenje u drugoj aproksimaciji se nalazi na sledeći način. Popravljamo vrednosti, odnosno vršimo iteracije za veličine B/K i α:

$$\left(\frac{B}{K}\right)^{(2)} = \frac{B^{(2)}(\tau)}{K^{(2)}(\tau)} = \frac{\Lambda_\tau\{B^{(1)}(t)\}}{\frac{1}{4}\mathcal{X}_\tau\{B^{(1)}(t)\}},$$

odnosno imamo:

$$B^{(2)}(\tau) = K^{(2)}(\tau)\,\frac{\Lambda_\tau\{B^{(1)}(t)\}}{\frac{1}{4}\mathcal{X}_\tau\{B^{(1)}(t)\}},$$

$$B^{(2)}(\tau) = \frac{F}{4}\left(\tau + \alpha^{(2)}\right)\frac{\Lambda_\tau\{B^{(1)}(t)\}}{\frac{1}{4}\mathcal{X}_\tau\{B^{(1)}(t)\}}.$$

Kao što vidimo, jedina nepoznata nam je $\alpha^{(2)}$ koju moramo odrediti. Jasno je da $\alpha^{(2)}$ mora zadovoljavati rešenje za svaku vrednost optičke dubine, pa tako i za $\tau = 0$ (površinu). Dakle, imamo:

$$K^{(2)}(0) = \frac{1}{4}F\alpha^{(2)} \;\Rightarrow\; \alpha^{(2)} = \frac{4}{F}K^{(2)}(0) = \frac{1}{F}\chi_0\{B^{(1)}(t)\} = \frac{1}{F}\chi_0\left\{\frac{3}{4}F\left(t+\frac{2}{3}\right)\right\}.$$

Kako su $\mathcal{X}_0\{1\} = \frac{2}{3}$ i $\mathcal{X}_0\{t\} = \frac{1}{2}$, konačno dobijamo $\alpha^{(2)} = \frac{17}{24}$. Naime:

$$\mathcal{X}_0\{1\} = 2\int_0^\infty dt\int_1^\infty e^{-ty}\,\frac{dy}{y^3} = 2\int_1^\infty \frac{dy}{y^3}\int_0^\infty e^{-ty}\,dt = 2\int_1^\infty \frac{dy}{y^4} = \frac{2}{3},$$

$$\mathcal{X}_0\{t\} = 2\int_0^\infty tdt\int_1^\infty e^{-ty}\,\frac{dy}{y^3} = 2\int_1^\infty \frac{dy}{y^3}\int_0^\infty te^{-ty}\,dt = 2\int_1^\infty \frac{dy}{y^5} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, imamo:

$$K^{(2)}(\tau) = \frac{1}{4}F\left(\tau + \frac{17}{24}\right).$$

Sada preostaje još da nađemo (uraditi za vežbu) $B^{(2)}(\tau)$:

$$B^{(2)}(\tau) = \frac{F}{4}\left(\tau + \frac{17}{24}\right)\frac{\Lambda_\tau\{B^{(1)}(t)\}}{\frac{1}{4}\mathcal{X}_\tau\{B^{(1)}(t)\}} = \cdots$$

$\boxed{\text{Milneovo rešenje u II aproksimaciji}}$

Kao polazno rešenje uzimamo Milne-Edingtonovo:

$$B(\tau) = \frac{3}{4}F\left(\tau + \frac{2}{3}\right),$$

pri čemu, zapravo, pretpostavljamo da konstantni član u gornjem izrazu nije poznat:

$$B^{(1)}(\tau) = \frac{3}{4}F\tau + a.$$

U slučaju Milne-Edingtonovog rešenja imamo da je $a = F/2$, a nas zanima da odredimo ovaj parametar u drugoj Milneovoj aproksimaciji. Ako primenimo lambda operator na početnu funkciju izvora dobijamo:

$$B^{(2)}(\tau) = \Lambda_\tau\{B^{(1)}(t)\} = \Lambda_\tau\left\{\frac{3}{4}F\tau + a\right\} = \frac{3}{4}F\Lambda_\tau\{t\} + a\Lambda_\tau\{1\},$$

$$B^{(2)}(\tau) = \frac{3}{4}F\left(\tau + \frac{1}{2}E_3(\tau)\right) + a\left(1 - \frac{1}{2}E_2(\tau)\right).$$

Nepoznatu konstantu a nalazimo pod pretpostavkom da je $B^{(2)}(\tau)$ tačno (od ranije je poznato da je pri uslovu važenja RZ fluks konstantan - $(2')$ odnosno druga Milneova integralna jednačina):

$$\Phi_\tau\{B^{(2)}(t)\} = F = \text{const}.$$

U principu, F nije konstantno za $B^{(2)}(\tau)$. Ipak, uzimamo da ovaj uslov važi za $\tau = 0$ i određujemo $a^{(2)}$:

$$\Phi_0\{B^{(2)}(t)\} = F \;\Rightarrow\; a^{(2)}.$$

Imamo:

$$F = \frac{3}{4}F\Phi_0\{t\} + \frac{3}{8}F\Phi_0\{E_3(t)\} + a\Phi_0\{1\} - \frac{a}{2}\Phi_0\{E_2(t)\},$$

$$a^{(2)} = \frac{1 - \frac{3}{4}\Phi_0\{t\} - \frac{3}{8}\Phi_0\{E_3(t)\}}{\Phi_0\{1\} - \frac{1}{2}\Phi_0\{E_2(t)\}}\,F.$$

Kako su:

$$\Phi_\tau\{1\} = 2E_3(\tau), \quad \Phi_0\{1\} = 1, \quad \Phi_\tau\{t\} = \frac{4}{3} - 2E_4(t), \quad \Phi_0\{t\} = \frac{2}{3},$$

još je potrebno odrediti $\Phi_0\{E_n(t)\}$, $n = 2, 3$. Za $\tau = 0$ imamo jednostavniji oblik Φ operatora:

$$\Phi_0\{f(t)\} = 2\int_0^\infty f(t)E_2(t)dt,$$

pa je:

$$\Phi_0\{E_n(t)\} = 2\int_0^\infty E_n(t)E_2(t)dt.$$

Lako se može pokazati da važi sledeća relacija:

$$I(n,m)=\int_0^\infty E_n(t)E_m(t)dt=\frac{1}{n+m-1}\left[\int_0^\infty e^{-t}E_n(t)dt+\int_0^\infty e^{-t}E_m(t)dt\right],$$

$$\int_0^\infty e^{-t}E_n(t)dt=(-1)^{n-1}\left[\ln 2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k}\right].$$

Sada je jasno da imamo:

$$\Phi_0\{E_2(t)\}=2I(2,2)=\frac{4}{3}(1-\ln 2),$$

$$\Phi_0\{E_3(t)\}=2I(3,2)=\frac{1}{4}.$$

Konačno dobijamo:

$$a^{(2)}=\frac{39/32}{1+2\ln 2}\;F\approx 0.5107F,$$

pa je:

$$B^{(2)}(\tau)=\frac{3}{4}F\left(\tau+0.6810-0.3405E_2(\tau)+0.5E_3(\tau)\right).$$

Na samom kraju, možemo još dati procenu relativne greške na površini (odnosno $\tau=0$) $B^{(\mathrm{ex})}=0.433F$, $B^{(2)}=0.443F$, $\left(\frac{\Delta B}{B}\right)_{\tau=0}=0.023$, 2.3%.

3. Uveriti se da važi sledeća relacija:

$$I(n,m)=\int_0^\infty E_n(t)E_m(t)dt=\frac{1}{n+m-1}\left[\int_0^\infty e^{-t}E_n(t)dt+\int_0^\infty e^{-t}E_m(t)dt\right].$$

Krenimo od definicije integro-eksponencijalne funkcije i primenimo parcijalnu integraciju:

$$E_n(t)=\int_1^\infty \frac{e^{-ty}}{y^n}dy=\frac{e^{-t}}{n-1}-\frac{t}{n-1}E_{n-1}(t),\quad u=e^{-ty},\quad dv=\frac{dy}{y^n}.$$

Kako je $dE_n(\tau)/d\tau=-E_{n-1}(\tau)$ možemo pisati, za $E_n(t)$ i $E_m(t)$, respektivno:

$$(n-1)E_n(t)=e^{-t}+tE_n^{'}(t),\quad (m-1)E_m(t)=e^{-t}+tE_m^{'}(t),$$

te ako prvu od ovih jednačina pomnožimo sa $E_m(t)$, a drugu sa $E_n(t)$ i onda ih saberemo, dobijamo:

$$(n+m-2)E_n(t)E_m(t)=e^{-t}\left[E_n(t)+E_m(t)\right]+t\left[E_n^{'}(t)E_m(t)+E_m^{'}(t)E_n(t)\right],$$

$$(n+m-2)E_n(t)E_m(t)=e^{-t}\left[E_n(t)+E_m(t)\right]+t\left[E_n(t)E_m(t)\right]^{'}.$$

Ako iskoristimo da je $[tE_n(t)E_m(t)]^{'}=E_n(t)E_m(t)+t[E_n(t)E_m(t)]^{'}$, i ako poslednju jednačinu integralimo, dobijamo:

$$(n+m-1)\int_0^\infty E_n(t)E_m(t)dt=\int_0^\infty e^{-t}\left[E_n(t)+E_m(t)\right]dt+\int_0^\infty\left[tE_n(t)E_m(t)\right]^{'}dt,$$

što uz činjenicu da za $t\to\infty$ integro-eksponencijalne funkcije teže nuli (drugi se član zapravo ponaša kao $e^{-2t}/t\to 0$ za $t\to\infty$), dokazuje tvrđenje iz teksta zadatka.