Teorija zvezdanih spektara -7-

Matematički uvod: Gausova kvadraturna formula. Nađimo vrednost integrala $\int_a^b f(x)dx$. Potrebno je izabrati argumente (ne nužno ekvidistantne) tako da obezbedimo najtačniju vrednost integrala. Promenimo, najpre, granice integracije na sledeći način:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(u)du, \quad x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,u, \quad dx = \frac{b-a}{2}du,$$

$$g(u) \equiv f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,u\right).$$

Pretpostavimo da možemo $g(u)$ razviti u Tejlorov red oko nule:

$$g(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots .$$

Dakle, imamo:

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = \int_{-1}^{1}\left(a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots\right)du = 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \cdots\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{2a_{2i+1}}{2i+1},$$

odnosno, pretpostavimo da integral po funkciji $g(u)$ možemo da zapišem na sledeći način:

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = \sum_{i=1}^{n} C_i g(u_i) = C_1 g(u_1) + C_2 g(u_2) + \cdots + C_n g(u_n) =$$

$$C_1(a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2 + \cdots) + C_2(a_0 + a_1 u_2 + a_2 u_2^2 + \cdots) + \cdots + C_n(a_0 + a_1 u_n + a_2 u_n^2 + \cdots) =$$

$$2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \cdots\right),$$

kako Tejlorov red konvergira za svako u na $[-1,1]$, pri čemu su C_i i u_i nepoznate. Lako se uočava da važi:

$$\begin{aligned}
a_0 :&\quad C_1 + \cdots + C_n = 2,\\
a_1 :&\quad C_1 u_1 + \cdots + C_n u_n = 0,\\
a_2 :&\quad C_1 u_1^2 + \cdots + C_n u_n^2 = 2/3,\\
&\cdots\\
a_{2n-2} :&\quad C_1 u_1^{2n-2} + \cdots + C_n u_n^{2n-2} = \frac{2}{2n-1},\\
a_{2n-1} :&\quad C_1 u_1^{2n-1} + \cdots + C_n u_n^{2n-1} = 0.
\end{aligned}$$

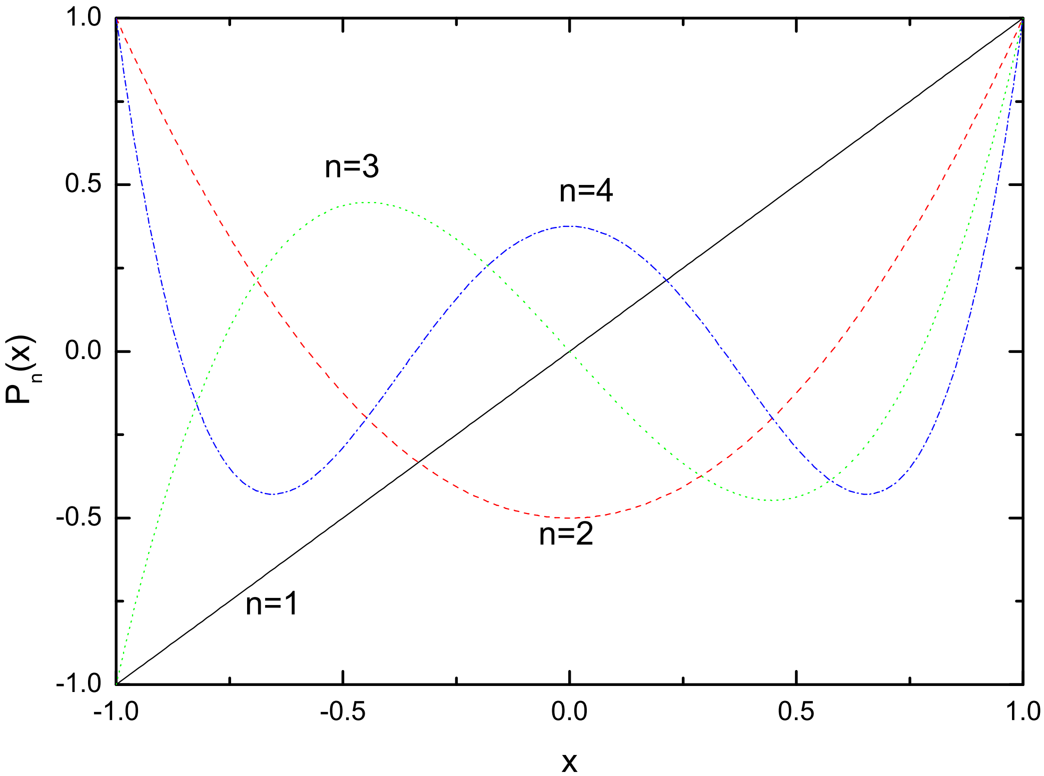
Rešenje gornjeg nelinearnog sistema $2n$ jednačina sa $2n$ nepoznatih je da su vrednosti (argumenti, čvorovi ili kvadraturne tačke) u_i zapravo nule Ležandrovih polinoma:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n, \quad n = 0, 1, ...$$

Kada odredimo u_i za određeno n možemo odrediti i tzv. kvadraturne težine C_i. Diskretnim ordinatama nazivamo $g(u_i)$.

Sve nule Ležandrovih polinoma leže na $[-1, 1]$. Najvažnije osobine Ležandrovih polinoma su (vidi sliku 1):

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad \forall n,$$
$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right),$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right),\ P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right).$$



Slika 1: Ležandrovi polinomi za $n = 1, 2, 3, 4$.

Važi i rekurentna relacija:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Kvadraturne tačke nisu ekvidistantne kao u slučaju Njutn-Kotesovih kvadraturnih formula[1], ali se postiže bolja tačnost za isti broj čvorova.

Dodatni zadataci za vežbu:

1. Odrediti $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ pomoću Gausovih kvadratura sa $n = 4$.

2. Odrediti $\int_{-1}^1 \mathrm{ch}(x)\cos(x)dx$ pomoću Gausovih kvadratura sa $n = 3$.

[1] Za razliku od Njutn-Kotesovih formula Gausaova formula ne radi za funkcije date tabelarno.

1. Rešiti jednačinu prenosa zračenja za sivu atmosferu u ravnoteži zračenja metodom diskretnih ordinata u prvoj aproksimaciji.

Jednačina prenosa zračenja za zadati problem (tzv. Milneova jednačina) ima sledeći oblik:

$$\mu \, \frac{dI(\tau,\mu)}{d\tau} = I(\tau,\mu) - J(\tau) = I(\tau,\mu) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\tau,\mu)d\mu,$$

gde su μ i τ nezavisne promenljive. Jasno je da je reč o integro-diferencijalnoj jednačini. Integral u gornjoj jednačini mžemo predstaviti sledećom kvadraturnom formulom:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\tau,\mu)d\mu = \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} C_j I(\tau,\mu_j).$$

Dakle, jednačina prenosa zračenja (diskretizovana po pravcima) postaje:

$$\mu_i \, \frac{dI(\tau,\mu_i)}{d\tau} = I(\tau,\mu_i) - J(\tau) = I(\tau,\mu_i) - \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} C_j I(\tau,\mu_j), \qquad i = \pm 1, \cdots, \pm n$$

Kontinualno zračenje je ovim postupkom *podeljeno* na konačan broj pravaca. Broj razmatranih pravaca je vezan za konkretan izbor n. Od interesa je da koristimo polinome parnog stepena $P_m(\mu)$, $m = 2n$ kako bi se izbegla tačka $\mu = 0$ odnosno $\theta = \pi/2$. Od ranije znamo da važi: $I(0,\mu < 0) = 0$, $I(0,\mu > 0) = const.$ te je jasno da imamo skok u $I(0,0)$ pa je zbog stabilnosti rešenja podesnije izbeći konkretnu tačku. Zbog izbora parnih stepeni važiće $C_j = C_{-j}$ i $\mu_j = -\mu_{-j}$ za $j = 1, ..., n$. Važiće i sledeća relacija:

$$\sum_{j=-n}^{n} C_j \mu_j^l = \frac{2\delta_l}{l+1}, \quad l \le 4n-1, \quad \delta = \begin{cases} 1, & l \text{ parno} \\ 0, & l \text{ neparno} \end{cases}.$$

Kvadraturne težine se mogu dobiti i preko:

$$P_m(\mu) = \frac{1}{2^m m!} \, \frac{d^m}{dx^m}(\mu^2-1)^m, \qquad m = 2n,$$

$$C_j = \frac{1}{P_m'(\mu_j)} \int_{-1}^{1} \frac{P_m(\mu)}{\mu - \mu_j} \, d\mu.$$

gde izraz za C_j sledi iz definicije Langranževog interpolacionog polinoma (vidi Dodatak).

Konačno, za $n = 1$ (prva aproksimacija) odnosno $m = 2$ imamo:

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$P_2'(\mu) = 3\mu, \quad C_{\pm 1} = 1.$$

Dakle, za funkciju izvora mžemo pisati:

$$S(\tau) = J(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\tau,\mu)d\mu = \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} C_j I_j = \frac{1}{2}(I_{-1} + I_1), \qquad (*)$$

odnosno, jednačina prenosa zračenja postaje:

$$\mu_i \frac{dI_i}{d\tau} = I_i - \frac{1}{2}\sum_j C_j I_j, \quad i = \pm 1, \quad I_i \equiv I(\tau, \mu_i).$$

Zapravo, reč je o dve diferencijalne jednačine:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{dI_{-1}}{d\tau} = I_{-1} - \frac{1}{2}(I_{-1} + I_1),$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{dI_1}{d\tau} = I_1 - \frac{1}{2}(I_{-1} + I_1),$$

čijim se sabiranjem i oduzimanjem dobija:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{d}{d\tau}(I_1 - I_{-1}) = 0,$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{d}{d\tau}(I_1 + I_{-1}) = I_1 - I_{-1} = \text{const.} \tag{$**$}$$

Sada mžemo odrediti fluks:

$$F = 2\int_{-1}^{1} I(\tau,\mu)\mu d\mu = 2\sum_{j=-n}^{n} C_j I_j \mu_j = \frac{2}{\sqrt{3}}(I_1 - I_{-1}) = \text{const.} \tag{$***$}$$

Kako zanemarujemo upadno zračenje na površini ($I_{-1}(0) = 0$), imamo:

$$F = F(0) = \frac{2}{\sqrt{3}} I_1(0) \Rightarrow I_1(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} F.$$

Na osnovu ($*$), ($**$) i ($***$) jasno je da imamo:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{d}{d\tau}\left(2S(\tau)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}F \Rightarrow S(\tau) = \frac{3}{4}F\tau + C.$$

Kako je $S(0) = C = \frac{1}{2}I_1(0) = \frac{\sqrt{3}}{4}F$ konačno dobijamo:

$$S(\tau) = J(\tau) = \frac{3}{4}F\left(\tau + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Primećujemo da na površini dobijamo poklapanje sa tačnim rešenjem za Hopfovu funkciju $q(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dodatak

Lagranžev interpolacioni polinom neke funkcije $f(x)$ je:

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j) \frac{F(x)}{(x - x_j)F'(x_j)}$$

gde je $F(x) = \prod_{j=1}^{m}(x - x_j)$, a m broj tačaka koje interpoliramo, dok su x_j koordinate tačaka kroz koje provlačimo polinom $\Phi(x)$.

Ako nas interesuje integral funkcije $f(x)$, gde ćemo umesto nje u integral ubaciti Lagranžov polinom $\Phi(x)$, onda imamo da je:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \Phi(x) \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} \sum_{j=1}^{m} f(x_j) \frac{F(x)}{(x - x_j)F'(x_j)} \mathrm{d}x = \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{-1}^{1} \frac{F(x)}{(x - x_j)F'(x_j)} \mathrm{d}x \cdot f(x_j) = \\
&= \sum_{j=1}^{m} C_j \cdot f(x_j)
\end{aligned}$$

odnosno, dobijamo da su težine u Gausovoj kvadraturi zapravo date izrazom:

$$C_j = \frac{1}{P'_m(\mu_j)} \int_{-1}^{1} \frac{P_m(\mu)}{\mu - \mu_j}\, d\mu.$$

gde je izvršena smena $x \equiv \mu$ i $F(x) \equiv P_m(\mu)$.