Teorija nava zvezdanih spektara -1-

Specifični intenzitet je jedna od makroskopskih veličina koje karakterišu polje zračenja i definiše se preko:

$$I_\nu(\vec{r},\vec{l},t) = \frac{dE_\nu}{d\sigma\cos\theta d\nu d\omega dt}.$$

U spektroskopiji se češće koristi I_λ dok je u teoriji u upotrebi I_ν:

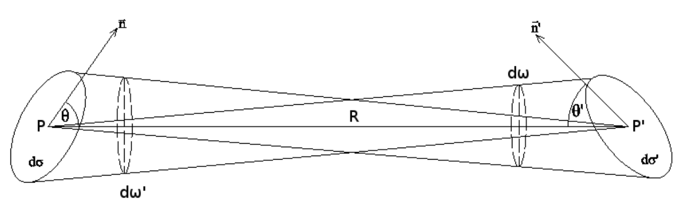
$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda, \qquad \lambda\nu = c \quad \Rightarrow \quad I_\nu = \left|\frac{d\lambda}{d\nu}\right| I_\lambda.$$

Polje zračenja se može shvatiti i kao fotonski gas te se može opisati preko odgovarajuće funkcije raspodele fotona $f(\vec{r},\vec{l},\nu,t)$. Svaki pojedinačni foton ima neku energiju $h\nu$, a broj fotona koji prolazi kroz proizvoljni element površine $d\sigma$ u pravcu $\vec{l}$ za neko vreme dt kroz prostorni ugao $d\omega$ u intervalu frekvencije $[\nu,\nu+d\nu]$ je dat kao: $f(\vec{r},\vec{l},\nu,t)cdt(\vec{l}\cdot d\vec{\sigma})d\omega d\nu$. Odgovarajuća ukupna energija je $dE_\nu = f(\vec{r},\vec{l},\nu,t)\ h\nu c\ d\sigma\cos\theta d\omega d\nu dt$. Sada je jasno vidljiva veza između funkcije raspodele fotona i specifičnog intenziteta: $I = h\nu c\ f$.

1. Dokazati da specifični intenzitet zračenja ne zavisi od rastojanja od izvora, ako između posmatrača i emitera nema ni izvora ni ponora zračenja (teorema invarijantnosti).

Posmatrajmo snop zračenja koji prolazi i kroz element površine $d\sigma$ u tački P i kroz kroz element površine $d\sigma^{'}$ u tački $P^{'}$ (vidi sliku 1). Kako između nema ni izvora ni ponora zračenja (energije) sledi da je $dE_\nu = dE^{'}_\nu$, odnosno imamo:

$$\begin{gathered}
dE_\nu = I_\nu d\sigma\cos\theta d\omega d\nu dt \\
dE^{'}_\nu = I^{'}_\nu d\sigma^{'}\cos\theta^{'} d\omega^{'} d\nu dt, \\
d\omega = \frac{d\sigma^{'}\cos\theta^{'}}{R^2}, \quad d\omega^{'} = \frac{d\sigma\cos\theta}{R^2}, \\
\Rightarrow \\
I_\nu = I^{'}_\nu.
\end{gathered}$$



Slika 1: Uz zadatak 1 - dokaz teoreme invarijantnosti.

2. Korišćenjem Snelijusovog zakona prelamanja ($n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$, $n_i = n_i(\nu)$) pri izračunavanju energije koja prolazi kroz jediničnu površinu ($d\sigma = 1$) na granici između dve disperzione sredine (sa različitim indeksima prelamanja n_1 i n_2) pokazati da važi:

$$I_\nu n_\nu^{-2} = \text{const.}$$

Energija koja dospe na $d\sigma$ u prostornom uglu $d\omega_1$ mora biti jednaka energiji koja prođe kroz $d\sigma$ u prostornom uglu $d\omega_2$. Sa slike 2 je jasno da sledi:

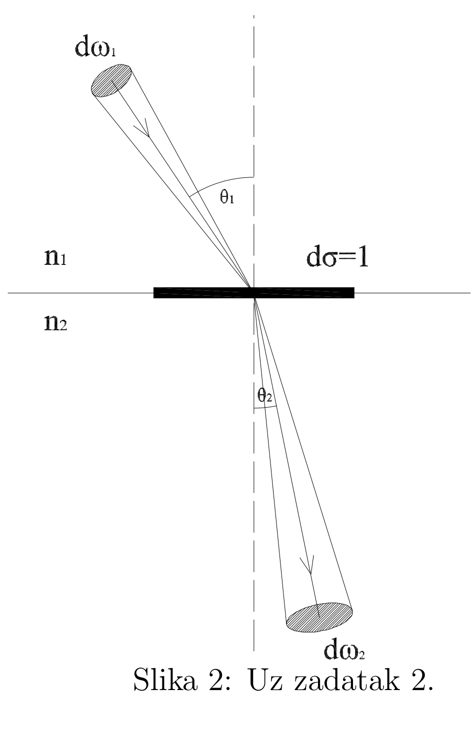
$$dE_\nu^1 = dE_\nu^2,$$
$$I_\nu^1 d\sigma \cos\theta_1 d\nu dt d\omega_1 = I_\nu^2 d\sigma \cos\theta_2 d\nu dt d\omega_2.$$

Kako je $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ imamo (pretpostavka da važi azimutalna simetrija polja zračenja; sva razmatranja se odnose na isti vremenski i frekventni interval):

$$I_\nu^1 \cos\theta_1 \sin\theta_1 d\theta_1 = I_\nu^2 \cos\theta_2 \sin\theta_2 d\theta_2,$$
$$I_\nu^1 \sin\theta_1 d(\sin\theta_1) = I_\nu^2 \sin\theta_2 d(\sin\theta_2).$$

Iz Snelijusovog zakona imamo: $d(\sin\theta_1) = \frac{n_2}{n_1}\, d(\sin\theta_2)$ pa sledi:

$$\frac{I_\nu^1}{n_1^2(\nu)} = \frac{I_\nu^2}{n_2^2(\nu)}.$$



Slika 2: Uz zadatak 2.

3. Jedinična površina zvezde ($d\sigma = 1$) izotropno zrači u vakuumu, u intervalu $(\nu, \nu + d\nu)$ i prostornom uglu $d\omega$ pri čemu je gustina zračenja ρ_ν. Neka se zračenje iz istog intervala učestanosti prostire i u prostornom uglu $d\omega^{'}$, kroz sredinu čiji je relativni indeks prelamanja n pri čemu je gustina zračenja $\rho_\nu^{'}$. Koliki je odnos $\rho_\nu^{'}/\rho_\nu$ u funkciji od relativnog indeksa prelamanja ako pretpostavimo azimutalnu simetriju polja zračenja?

Gustina izotropnog zračenja u vakuumu je data kao:

$$\rho_\nu = \frac{1}{c}\oint I_\nu d\omega = \frac{4\pi}{c} I_\nu.$$

Za disperzionu sredinu imamo:

$$\rho_\nu^{'} = \frac{4\pi}{c^{'}} I_\nu^{'}, \quad c^{'} = c/n, \quad n > 1, \quad c > c^{'}.$$

Sa slike 3 je jasno da je energija zračenja u jedinici vremena u sredini A odnosno B jednaka:

$$dE_\nu/dt = I_\nu \cos\theta d\omega d\nu, \qquad d\sigma = 1,$$
$$dE_\nu^{'}/dt = I_\nu^{'} \cos\theta^{'} d\omega^{'} d\nu, \qquad d\sigma^{'} = d\sigma = 1.$$

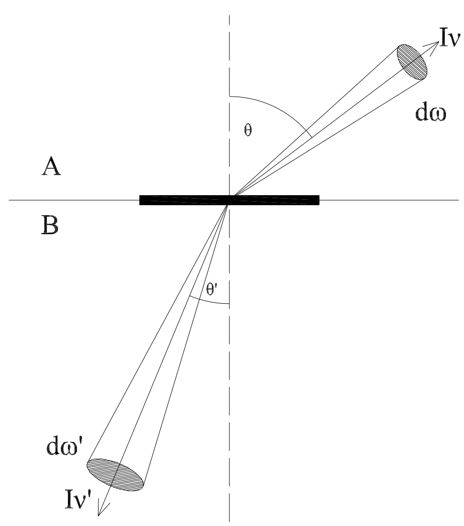
Kako je reč o zračenju sa istog izvora mora važiti $dE_\nu = dE_\nu^{'}$, pa uz uslov azimutalne simetrije $d\varphi = d\varphi^{'}$ i Snelijusov zakon:

$$\sin\theta = n\sin\theta^{'}, \qquad d(\sin\theta) = nd(\sin\theta^{'}),$$

imamo:

$$\frac{\rho_\nu^{'}}{\rho_\nu} = \frac{I_\nu^{'}}{I_\nu} n = \frac{\cos\theta \; d\omega}{\cos\theta' \; d\omega'} n = n^3.$$

Za vežbu uraditi zadatak ukoliko zračenje nije izotropno.



Slika 3: Uz zadatak 3.

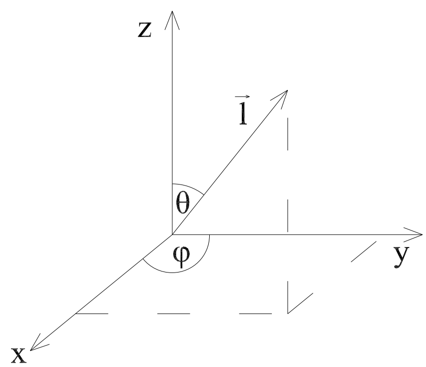
Fluks zračenja (vidi sliku 4) se u opštem slučaju definiše preko:

$$\vec{\mathcal{F}}_\nu = \oint I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t)\vec{l} d\omega$$

gde jedinični vektor $\vec{l}$ možemo razložiti na komponente:

$$l_x = \vec{l} \cdot \vec{e}_x = \sin\theta \cos\varphi, \quad l_y = \vec{l} \cdot \vec{e}_y = \sin\theta \sin\varphi, \quad l_z = \vec{l} \cdot \vec{e}_z = \cos\theta \equiv \mu,$$

$$l_x = \sqrt{1-\mu^2} \cos\varphi, \quad l_y = \sqrt{1-\mu^2} \sin\varphi.$$



Slika 4: Uz definiciju fluksa.

4. Pokazati da je u atmosferi sa azimutalnom simetrijom samo komponenta fluksa $\mathcal{F}_z$ različita od nule.

Po definiciji imamo:

$$\mathcal{F}_i = \oint I_\nu l_i d\omega, \quad i = x, y, z, \quad d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi,$$

$$\mathcal{F}_\nu(z) = \oint I_\nu(z, \theta) \cos\theta d\omega = 2\pi \int_{-1}^{1} I_\nu(z, \mu) \mu d\mu,$$

$$\mathcal{F}_\nu(x) = \mathcal{F}_\nu(y) = 0.$$

Probajte sami da pokažeta da je u sferno simetričnoj geometriji problema jedino $\mathcal{F}_r$ komponenta fluksa različita od nule.

5. Odrediti fluks $\mathcal{F}$ ako je specifični intenzitet zračenja dat preko:

$$I_\nu(\mu) = \sum_{n=0}^{N} I_n \mu^n, \quad I_n = \text{const.},$$

i pokazati da samo članovi sa neparnim stepenom n doprinose vrednosti fluksa.

Na dalje pretpostavljamo da radimo u plan-paralelnoj geometriji (imamo azimutalnu simetriju). Odatle je onda fluks:

$$\mathcal{F} = 2\pi \int_{-1}^{1} I(\mu)\mu d\mu = 2\pi \int_{-1}^{1} \left(\sum_{n=0}^{N} I_n \mu^n \right) \mu d\mu =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \left(\sum_{n=0}^{N} I_n \mu^{n+1} \right) d\mu = 2\pi \sum_{n=0}^{N} I_n \int_{-1}^{1} \mu^{n+1} d\mu.$$

$$\mathcal{F} = 2\pi \sum_{n=0}^{N} I_n \, \frac{1}{n+2} \left[1 - (-1)^{n+2} \right].$$

Dakle:

$$n = 2k \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} = 0,$$

$$n = 2k+1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} = 4\pi \sum_{k=0}^{K} I_{2k+1} \, \frac{1}{2k+3}, \quad K = (N-1)/2.$$

6. Kada je polje zračenja skoro izotropno (blisko TDR) tada $I(\mu)$ možemo razviti u red te pisati:

$$I(\mu) = I_0 + I_1 \mu, \quad I_0,\ I_1 = \text{const}, \quad \mu \equiv \cos\theta.$$

Odrediti srednji intenzitet, fluks, K integral, gustinu zračenja i izlazni fluks zračenja.

$$J_\nu(z) = \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu d\omega = \frac{1}{2} \int_0^\pi I_\nu(z,\theta) \sin\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I_\nu(z,\mu) d\mu = I_0,$$

$$\mathcal{F} = 2\pi \int_{-1}^{1} I(\mu)\mu d\mu = \frac{4\pi}{3} I_1,$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I_\nu(z,\mu)\mu^2 d\mu = \frac{1}{3} I_0 \ \Rightarrow \ J = 3K$$

$$\rho = \frac{4\pi}{c} J = \frac{4\pi}{c} I_0,$$

$$\mathcal{F}^+ = 2\pi \int_0^{\pi/2} I(\theta) \cos\theta \sin\theta d\theta,$$

$$\mathcal{F}^+ = 2\pi \int_0^1 I(\mu)\mu d\mu = \pi I_0 + \frac{2}{3}\pi I_1, \qquad \mu > 0,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^+ - \mathcal{F}^-,$$

$$\mathcal{F}^- = -2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} I(\theta) \cos\theta \sin\theta d\theta = -2\pi \int_{-1}^{0} I\mu d\mu = \pi I_0 - \frac{2}{3}\pi I_1.$$

Za Sunce jedino možemo da merimo specifični intenzitet odnosno, u ovoj konkretnoj aproksimaciji I_0 i I_1 (centar diska $\theta = 0$, rub $\theta = 90^\circ$).

Dodatak: na osnovu veze K-integrala i pritiska zračenja izračunajte pritisak zračenja skoro izotropnog zračenja.

7. Naći vezu između posmatranog fluksa i fluksa koji napusti zvezdu (pretpostaviti da nema uticaja međuzvezdane sredine na zračenje).

Fluks zračenja koje registruje posmatrač (f_ν, zapravo reč je o osvetljenosti koju prima posmatrač) zavisi od ugaonog prečnika zvezde i od izlaznog fluksa kojeg emituje celokupna površina razmatrane zvezde. Kako je $D >> R_*$ zraci koji izlaze iz raznih tačaka površine zvezde međusobno su paralelni. Posmatrajmo prsten na površini zvezde čiji je poluprečnik R. Površina tog elementarnog prstena je dS. Prostorni ugao pod kojim udaljeni posmatrač vidi prsten je $d\omega$. Energija koju prima posmatrač sa jedinice površine ovog elementarnog prstena je $df_\nu = I_\nu d\omega$. Sa slike 5 je jasno da važi:

$$dS = 2\pi R dR = 2\pi R_*^2 \sin\theta\cos\theta d\theta, \quad R = R_* \sin\theta, \quad dR = R_*\cos\theta d\theta,$$

$$d\omega = \frac{dS}{D^2} = \frac{2\pi R_*^2 \sin\theta\cos\theta d\theta}{D^2},$$

Fluks koji bismo merili dat je izrazom $\vec{f_\nu} = \oint I_\nu(R_*, \mu)\vec{l} d\omega$. Pošto su zraci paralelni međusobno, sva energija nam dolazi samo iz jednog pravca i odatle imamo:

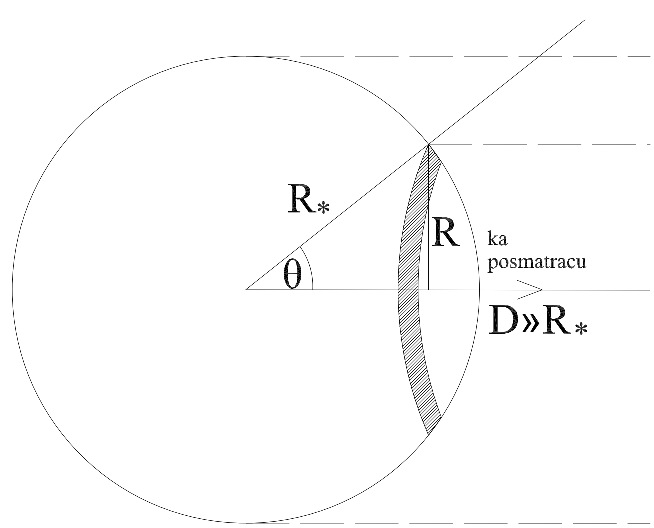
$$f_\nu = \vec{f_\nu} \cdot \vec{l} = \oint I_\nu(R_*, \mu) d\omega = \int I_\nu(R_*, \mu)\frac{dS}{D^2} = 2\pi \frac{R_*^2}{D^2}\int_0^1 I_\nu(R_*, \mu)\mu d\mu =$$

$$= \left(\frac{R_*}{D}\right)^2 \mathcal{F}_\nu^+,$$

$$f_\nu = \frac{\alpha_*^2}{4}\mathcal{F}_\nu^+, \qquad \alpha_* = \frac{2R_*}{D}.$$

Solarna konstanta je upravo data preko $f_\nu = \pi S$ ($\alpha_\odot/2 = 959\overset{\prime\prime}{.}63$; $\mathcal{F} = \pi F$; $\pi F = \sigma T_{\mathrm{eff}}^4$). Setimo se još i da važi:

$$\pi F 4\pi R_*^2 = \pi f 4\pi D^2$$



Slika 5: Uz objašnjenje fluksa zračenja koje registruje posmatrač.