Teorija zvezdanih spektara -3-

Jednačina prenosa zračenja. Razmatrajući promenu energiju u proizvoljnom delu zapremine u atmosferi, uz uslov energetske ravnoteže moežemo doći do jednačine prenosa zračenja u opštem obliku:

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{l}\cdot\nabla\right] I_\nu = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu, \quad I(\vec{r}, \vec{l}, \nu, t).$$

Iz uslova stacionarnosti ($\partial/\partial t = 0$) i planparalelnosti geometrije ($\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$) i uz statiku i izotropno rasejanje imamo:

$$\mu\frac{\partial I_\nu(z,\mu)}{\partial z} = \eta_\nu(z) - \chi_\nu(z) I_\nu(z,\mu),$$

$$l_z = \frac{\partial z}{\partial s} = \vec{l}\cdot\vec{n} = \cos\theta = \mu,$$

$$dh = -dz, \quad d\tau_\nu = -\chi_\nu(z)dz = \chi_\nu(h)dh.$$

Za maksimalno z odnosno površinu imamo da je $\tau_\nu = 0$ tok je beskonačno u centru (za model polubeskonačne atmosfere). U praksi češće koristimo logaritam optičke dubine. Jednačina prenosa zračenja, uz sve prethodne pretpostavke i smene konačno postaje:

$$\mu\frac{\partial I_\nu(\tau_\nu,\mu)}{\partial \tau_\nu} = I_\nu(\tau_\nu,\mu) - S_\nu(\tau_\nu), \quad S_\nu(\tau_\nu) = \frac{\eta_\nu(\tau_\nu)}{\chi_\nu(\tau_\nu)}.$$

1. Napisati jednačinu prenosa zračenja za atmosferu u sferno-simetričnoj geometriji (slučaj zvezda za proširenim atmosferama, odnosno kada ne važi $ds << R_*$). Pretpostaviti stacionarnost i azimutalnu simetriju.

Stacionarnost i azimutalna simetrija dovode do $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, odnosno $I(r, \theta, \nu)$. Foton je emitovan u tački 1 i slobodno je prešao put ds do tačke 2 kada je apsorbovan. Sa slike 1 je jasno da važi:

$$d\vec{s} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta, \quad dr = ds\cos\theta, \quad rd\theta = -ds\sin\theta,$$

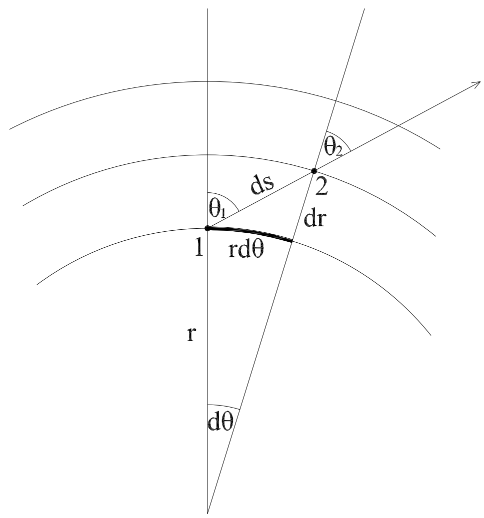
gde je $\theta = \theta_1$. Kako se ugao koji zaklapa pravac prostiranja sa normalnom datog sloja smanjuje kako idemo ka površini atmosfere imamo da je promena ugla negativna $d\theta = \theta_2 - \theta_1 < 0$.

Sada kada znamo vezu između elementa puta ds i koordinata r i θ, potrebno je da prepišemo izvod specifičnog intenziteta po ds na kombinaciju izvoda po dr i $d\theta$. Odatle onda imamo sledeće:

$$\frac{dI}{ds} = \frac{\partial I}{\partial r}\frac{dr}{ds} + \frac{\partial I}{\partial \theta}\frac{d\theta}{ds} = \cos\theta\frac{\partial I}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial I}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial I}{\partial \theta} = \frac{\partial I}{\partial \mu}\,\frac{d(\cos\theta)}{d\theta} = -\sin\theta\frac{\partial I}{\partial \mu},$$

$$\frac{dI}{ds} = \mu\frac{\partial I}{\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r}\,\frac{\partial I}{\partial \mu}.$$



Slika 1: Uz izvođenje jednačine prenosa zračenja u sferno-simetričnoj geometriji.

Konačno dobijamo da je jednačina prenosa zračenja u slučaju sferno-simetrične atmosfere:

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial}{\partial \mu}\right] I_\nu(r,\mu) = \eta_\nu(r,\mu) - \chi_\nu(r,\mu) I_\nu(r,\mu).$$

2. Naći formalno rešenje jednačine prenosa zračenja (rešenje za datu funkciju izvora). Razmatrati plan-paralelnu geometriju.

Krenimo od jednačine prenosa zračenja oblika:

$$\mu\frac{dI_\nu}{dz} = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu,$$

i podelimo istu sa $-\chi_\nu$ te uvedimo smenu $d\tau_\nu = -\chi_\nu dz$. Dobijamo:

$$\mu\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu, \qquad \Big/ \cdot\ \frac{1}{\mu}\ e^{-\tau_\nu/\mu}$$

koju dalje možemo transformisati:

$$\frac{dI_\nu(\tau_\nu,\mu)}{d\tau_\nu}\ e^{-\tau_\nu/\mu} = \frac{1}{\mu} I_\nu(\tau_\nu,\mu) e^{-\tau_\nu/\mu} - \frac{1}{\mu} S_\nu(\tau_\nu) e^{-\tau_\nu/\mu},$$

$$\frac{d}{d\tau_\nu}\left[I_\nu(\tau_\nu,\mu)\ e^{-\tau_\nu/\mu}\right] = -\frac{1}{\mu} S_\nu(\tau_\nu) e^{-\tau_\nu/\mu}, \qquad \Big/ \int_{\tau_1(\nu)}^{\tau_2(\nu)}, \qquad \tau_1 < \tau_2$$

$$I_\nu(\tau_1,\mu) = I_\nu(\tau_2,\mu) e^{-(\tau_2-\tau_1)/\mu} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu-\tau_1)/\mu}\frac{dt_\nu}{\mu}.$$

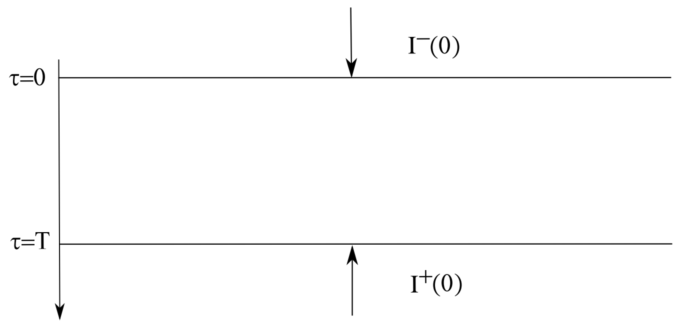
Za sloj konačne debljine imamo sledeće granične uslove (vidi sliku 2):

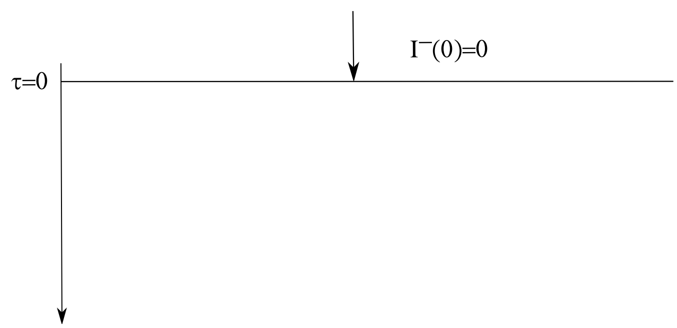
$$I^- = I^-(0,\mu,\nu), \qquad I^+ = I^+(T_\nu,\mu,\nu),$$

dok za polubeskonačnu atmosferu imamo (vidi sliku 2 - dole):

$$I^-(\tau_\nu = 0) = 0, \qquad \lim_{\tau_\nu\to\infty} I_\nu(\tau_\nu,\mu)\ e^{-\tau_\nu/\mu} = 0, \qquad \tau_1 = 0, \quad \tau_2 = \infty,$$

$$I_\nu(0,\mu) = \int_0^\infty S_\nu(t_\nu)e^{-t_\nu/\mu}\,\frac{dt_\nu}{\mu}.$$





Slika 2: Granični uslovi: za sloj konačne debljine (gore) i polubeskonačnu atmosferu (dole). Donji uslov za polubeskonačnu atmosferu može biti da intenzitet na velikim optičkim dubinama $\tau_\nu >> 1$ teži konačnoj vrednosti ($I_\nu^{(0)} = S_\nu$, $I_\nu^{(1)} = S_\nu + \mu dS_\nu/d\tau_\nu$).

Razmotrimo još neke specijalne slučajeve:

(a) $\eta_\nu = \chi_\nu = 0$: zbog toga što ne dolazi do emisije ni apsorpcije zračenja, nema promene energije pa je $I_\nu = \text{const}$.

(b) $\chi_\nu = 0$, $\eta_\nu \neq 0$ (samo emisija ili optički retka sredina - $\tau_\nu << 1$):

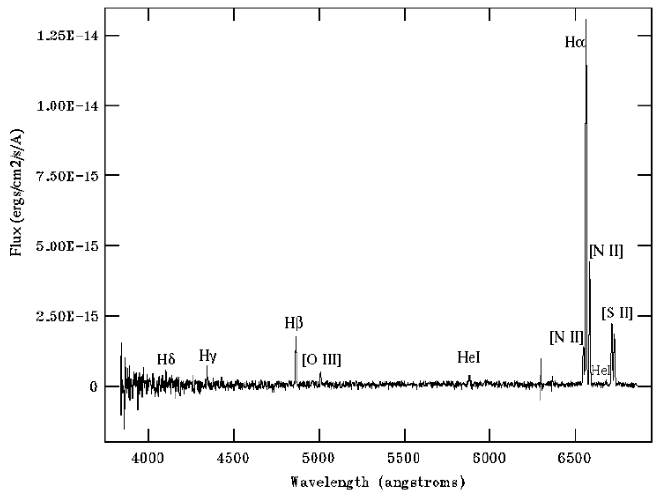
$$\mu\frac{dI_\nu}{dz} = \eta_\nu \;\Rightarrow\; I_\nu(z,\mu) = \frac{1}{\mu}\int_0^z \eta_\nu(z)dz + I_\nu^+(0,\mu),$$

što je npr. slučaj kod emisionih maglina. Naime, u takvim razređenim sredinama atomi se u retkim ali mogućim slučajevima ekscituju na metastabilna stanja u kojima mogu da ostanu dugo dok se radijativno ne deekscituju. Kako je foton nastao pri ovoj deekscitaciji formiran iz zabranjenog prelaza, mala je verovatnoća da će on biti ponovo apsorbovan te on napušta maglinu (vidi sliku 3).

(c) $\chi_\nu \neq 0$, $\eta_\nu = 0$ (samo apsorpcija):

$$\mu\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu \;\Rightarrow\; I_\nu(0,\mu) = I_\nu(\tau_\nu,\mu)\; e^{-\tau_\nu/\mu}.$$

Primetimo da je τ_ν/μ efektivno optičko rastojanje te kako μ opada $(1 \to 0)$ tako zračenje prelazi sve veće optičke puteve i sve više biva apsorbovano.



Slika 3: Optički spektar H II regiona.

3. Izvesti Švarcšildovu i prvu Milneovu integralnu jednačinu.

Izlazni u ulazni intenzitet su dati (plan-paralelna geometrija i polubeskonačna atmosfera) preko:

$$I_\nu^+(\tau_\nu,\mu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu-\tau_\nu)/\mu}\;\frac{dt_\nu}{\mu},$$
$$I_\nu^-(\tau_\nu,\mu) = -\int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{(\tau_\nu-t_\nu)/\mu}\;\frac{dt_\nu}{\mu}.$$

Sada je srednji intenzitet dat preko:

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu(\tau_\nu,\mu)d\mu =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 d\mu \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu)e^{-(t_\nu-\tau_\nu)/\mu}\frac{dt_\nu}{\mu} - \int_{-1}^{0} d\mu\int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu)e^{(\tau_\nu-t_\nu)/\mu}\frac{dt_\nu}{\mu}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu)dt_\nu \int_0^1 \frac{1}{\mu}e^{-(t_\nu-\tau_\nu)/\mu}d\mu - \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu)dt_\nu\int_{-1}^{0}\frac{1}{\mu}e^{(\tau_\nu-t_\nu)/\mu}d\mu\right],$$
$$\mathrm{I}_1 : \mu > 0,\; y = \frac{1}{\mu},\; dy = -\frac{1}{\mu^2}d\mu, \quad \mathrm{I}_2 : \mu < 0,\; y = -\frac{1}{\mu},\; dy = \frac{1}{\mu^2}d\mu,$$
$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2}\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(\tau_\nu)dt_\nu \int_1^{\infty} e^{-(t_\nu-\tau_\nu)y}\frac{dy}{y} + \frac{1}{2}\int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau_\nu)dt_\nu\int_1^{\infty} e^{-(\tau_\nu-t_\nu)y}\frac{dy}{y}.$$

Kako je

$$E_1(t_\nu - \tau_\nu) = \int_1^\infty e^{-(t_\nu - \tau_\nu)y} \frac{dy}{y}, \quad t_\nu > \tau_\nu,$$
$$E_1(\tau_\nu - t_\nu) = \int_1^\infty e^{-(\tau_\nu - t_\nu)y} \frac{dy}{y}, \quad t_\nu < \tau_\nu,$$

imamo:

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2}\int_0^\infty S_\nu(t_\nu) E_1(|t_\nu - \tau_\nu|) dt_\nu.$$

Gornja jednačina predstavlja tzv. Švarcšildovu integralnu jednačinu koja se može zapisati preko Λ operatora:

$$J_\nu(\tau_\nu) = \Lambda_\tau\{S_\nu(t_\nu)\}, \quad \Lambda_\tau\{f(t)\} = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(t) E_1(|t_\nu - \tau_\nu|) dt_\nu.$$

Slično se izvodi i prva Milneova integralna jednačina za fluks:

$$F_\nu(\tau_\nu) = 4H_\nu(\tau_\nu) = 2\int_{-1}^1 I_\nu(\tau_\nu, \mu)\mu d\mu =$$
$$= 2\int_0^1 \mu d\mu \int_{\tau_\nu}^\infty S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu} - 2\int_{-1}^0 \mu d\mu \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-(\tau_\nu - t_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu},$$
$$\mathrm{I}_1 : \mu > 0,\ y = \frac{1}{\mu},\ dy = -\frac{1}{\mu^2} d\mu, \quad \mathrm{I}_2 : \mu < 0,\ y = -\frac{1}{\mu},\ dy = \frac{1}{\mu^2} d\mu,$$
$$F_\nu(\tau_\nu) = 2\int_{\tau_\nu}^\infty S_\nu(\tau_\nu) dt_\nu \int_1^\infty e^{-(t_\nu - \tau_\nu)y} \frac{dy}{y^2} - 2\int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau_\nu) dt_\nu \int_1^\infty e^{-(\tau_\nu - t_\nu)y} \frac{dy}{y^2} =$$
$$= 2\int_{\tau_\nu}^\infty S_\nu(t_\nu) E_2(t_\nu - \tau_\nu) dt_\nu - 2\int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) E_2(\tau_\nu - t_\nu) dt_\nu.$$

Zapisano preko Φ operatora izgleda:

$$F_\nu(\tau_\nu) = \Phi_\tau\{S_\nu(t_\nu)\}, \quad \Phi_\tau\{f(t)\} = 2\int_\tau^\infty f(t) E_2(t_\nu - \tau_\nu) dt_\nu - 2\int_0^\tau f(t) E_2(\tau_\nu - t_\nu) dt_\nu.$$

Dodatni zadatak za vežbu: Izvesti drugu Milneovu integralnu jednačinu za K integral:

$$K_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 I_\nu(\tau_\nu, \mu)\mu^2 d\mu = \frac{1}{2}\int_0^\infty S_\nu(t_\nu) E_3(|t_\nu - \tau_\nu|) dt_\nu,$$
$$K_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{4}\mathcal{X}_\tau\{S_\nu(t_\nu)\}, \quad \mathcal{X}_\tau\{f(t)\} = 2\int_0^\infty f(t) E_3(|t_\nu - \tau_\nu|) dt_\nu.$$

4. Pretpostavljajući da je funkcija izvora linearna funkcija optičke dubine, odrediti izlazni intenzitet i fluks na površini polubeskonačne atmosfere.

Po definiciji sledi:

$$I_\nu(0,\mu) = \int_0^\infty S_\nu(t_\nu) e^{-t_\nu/\mu} \, \frac{dt_\nu}{\mu} = \int_0^\infty (a_\nu + b_\nu t_\nu) \, e^{-t_\nu/\mu} \, \frac{dt_\nu}{\mu} =$$

$$a_\nu + b_\nu \mu = S_\nu(\tau_\nu = \mu), \qquad [0 \leq \mu \leq 1] \Rightarrow [0 \leq \tau_\nu \leq 1],$$

$$F_\nu(0) = 2 \int_0^1 I_\nu(0,\mu) \mu d\mu = a_\nu + \frac{2}{3} b_\nu = S_\nu(\tau_\nu = 2/3).$$

5. Pretpostavljajući da je funkcija izvora data na sledeći način:

$$S_\nu(\tau_\nu) = a_\nu + b_\nu \tau_\nu + c_\nu \tau_\nu^2,$$

odrediti $F_\nu(0)$**.**

Izlazni intenzitet na površini (polubeskonačna atmosfera) je u ovom slučaju:

$$I_\nu(0,\mu) = \int_0^\infty S_\nu(t_\nu) e^{-t_\nu/\mu} \, \frac{dt_\nu}{\mu} = a_\nu + b_\nu \mu + 2 c_\nu \mu^2,$$

kako važi:

$$\int_0^\infty x^i e^{-x} dx = i!.$$

Sada izlazni fluks na površini je jednak:

$$F_\nu(0) = 2 \int_0^1 I_\nu(0,\mu) \mu d\mu = a_\nu + \frac{2}{3} b_\nu + c_\nu.$$