Metoda najwiekszego spadku dla macierzy wstegowej

Szymon Gwóźdź

21 marca 2024

1 Cel zajeć

Zadanie polega na rozwiazaniu układu równań liniowych Ax = b metoda najwiekszego spadku.

2 Teoria

2.1 Macierz wstegowa

Macierz wstegowa, to taka macierz, której wszystkie elementy sa zerowe poza diagonala i wstega wokół niej.

$$a_{ij} \neq 0 \longleftrightarrow i - k_1 \leq j \leq i + k_2$$

, gdzie

$$k_{1,2} \geq 0$$

2.2 Metoda najwiekszego spadku

Metoda najwiekszego spadku (Gradient Descent) jest popularna metoda optymalizacji, wykorzystywana w wielu dziedzinach do znajdowania minimum funkcji kosztu lub błedu. W kontekście macierzy wstegowej, ta metoda może być stosowana do rozwiazania układów równań liniowych, gdzie macierz systemu jest macierza wstegowa.

Metoda najwiekszego spadku dla macierzy wstegowej skupia sie na iteracyjnym zmniejszaniu wartości funkcji błedu (czesto kwadratowej sumy błedów) poprzez aktualizowanie rozwiazania w kierunku przeciwnym do gradientu funkcji kosztu. W kontekście układów równań liniowych $Ax = b$, gdzie A jest macierza wstegowa, metoda ta polega na iteracyjnym poprawianiu przybliżonego rozwiazania x, aby zminimalizować residuum $r = b - Ax$.

3 Implementacja

1. Tworzenie macierzy wstegowej (create matrix): Funkcja create matrix generuje macierz wstegowa o rozmiarze n x n, gdzie każdy element w "wstedze" o szerokości m od przekatnej jest zdefiniowany jako $1/(1+|i-j|)$, a pozostałe elementy sa zerami. To zapewnia, że macierz jest rzadka, ale ma charakterystyczne, nielinearne elementy blisko przekatnej.

2. Metoda najszybszego spadku (fastest decline): Funkcja fastest decline realizuje iteracyjny proces znajdowania rozwiazania układu równań $Ax = b$, gdzie A to macierz wstegowa, b to wektor prawych stron, a x to inicjalizacja wektora rozwiazań (poczatkowo zazwyczaj zerowy).

   - Residuum: Na poczatku każdej iteracji obliczane jest residuum r, czyli różnica miedzy wektorem b a aktualnym przybliżeniem produktu Ax.
   - Krok iteracyjny: Nastepnie obliczana jest wartość a, reprezentujaca długość kroku w kierunku gradientu residuum. Jest ona obliczana na podstawie wzoru $\alpha = \frac{r^T r}{r^T A r}$, co odpowiada minimalizacji kwadratu normy residuum wzdłuż kierunku spadku.
   - Aktualizacja rozwiazania: Rozwiazanie x jest aktualizowane poprzez dodanie do niego wektora kierunku pomnożonego przez długość kroku (a * r).
   - Warunek zakończenia: Proces iteracyjny kontynuowany jest do momentu, gdy norma residuum spadnie poniżej zadanego progu dokładności (tutaj 10^{-6}).

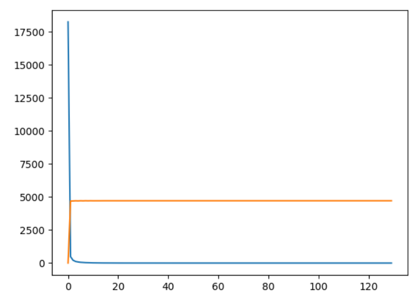
3. Logowanie i wizualizacja: Kod zapisuje wartości norm residuum i rozwiazania do pliku data log.txt po każdej iteracji, co pozwala na późniejsza analize konwergencji metody. Na koniec plik jest czytany, a zebrane dane sa wykorzystywane do stworzenia wykresów zależności normy residuum i normy rozwiazania od numeru iteracji, co wizualnie przedstawia postep metody.

4 Wyniki

Wygenerowany wykres przedstawia konwergencje metody najszybszego spadku poprzez zmiany normy residuum oraz normy rozwiazania w zależności od numeru iteracji.

- Norma residuum (pokazana na wykresie jako "Norma residuum") maleje eksponencjalnie z każda iteracja, co sugeruje, że metoda najszybszego spadku efektywnie zmniejsza bład miedzy obliczonym a rzeczywistym rozwiazaniem układu równań liniowych. To pokazuje dobra konwergencje metody.

- Norma rozwiazania (pokazana jako "Norma rozwiazania") zwieksza sie logarytmicznie, co może reprezentować stopniowe zbliżanie sie do faktycznego



rozwiazania układu równań. Zazwyczaj oczekiwalibyśmy, że rozwiazanie bedzie ewoluowało w kierunku rzeczywistego rozwiazania, co może być reprezentowane przez wzrost jego normy, zwłaszcza gdy poczatkowe przybliżenie jest dalekie od rozwiazania.

Wnioski płynace z tego wykresu sa nastepujace:

1. Skuteczność metody: Malejaca norma residuum pokazuje, że metoda najszybszego spadku jest skutecznym narzedziem do minimalizacji błedu i znalezienia rozwiazania układu równań liniowych, szczególnie dla macierzy wstegowej.

2. Konwergencja: Eksponencjalny spadek normy residuum wraz z kolejnymi iteracjami sugeruje szybka konwergencje metody, co jest pożadana cecha w algorytmach optymalizacyjnych.

3. Ocena postepu: Wykres wskazuje na to, jak zmienia sie bład (norma residuum) i jak rozwija sie rozwiazanie (norma rozwiazania) w zależności od liczby iteracji, co może być użyteczne do monitorowania postepu i decydowania o zatrzymaniu algorytmu, gdy osiagniete zostana zadowalajace poziomy dokładności.

5 Podsumowanie

Podsumowujac, analiza wykresu konwergencji metody najszybszego spadku dla rozwiazywania układów równań liniowych z macierzami wstegowej wskazuje na kilka kluczowych aspektów. Po pierwsze, eksponencjalny spadek normy residuum w kolejnych iteracjach demonstruje skuteczność metody w szybkim zbliżaniu sie do rozwiazania układu równań. Ta obserwacja podkreśla, że metoda najszybszego spadku jest wydajnym narzedziem optymalizacji dla problemów liniowych, zwłaszcza gdy stosowana jest do macierzy wstegowych, które sa czesto spotykane w zadaniach numerycznych zwiazanych z równaniami różniczkowymi i różnicowymi.

Po drugie, logarytmiczny wzrost normy rozwiazania wskazuje na stopniowa korekte przybliżonego rozwiazania w kierunku ostatecznego rozwiazania układu. Ta tendencja świadczy o tym, że metoda nie tylko zmniejsza bład, ale także kieruje proces iteracyjny w strone stabilnego i dokładnego rozwiazania.

Wreszcie, wykresy konwergencji, takie jak przedstawione, sa nieocenionym narzedziem dla badaczy i inżynierów, umożliwiajacym monitorowanie postepu algorytmów optymalizacyjnych i dokonywanie informowanych decyzji dotyczacych ich zatrzymania na podstawie osiagnietej dokładności. W kontekście metody najszybszego spadku, szybka konwergencja i efektywne zbliżanie sie do rozwiazania podkreślaja jej wartość w rozwiazywaniu praktycznych problemów liniowych, szczególnie tych, które moga być modelowane za pomoca macierzy wstegowych.