Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

Szymon Gwóźdź

14 marca 2024

1 Cel zajeć

Celem laboratirum było przeprowadzenie rozkładu LU na macierzy, której wartości zadane sa wzorem:

$$a_{i,j} = \frac{1}{i + j + \delta}$$

gdzie

$$\delta = 2$$

Nastepnie obliczaliśmy macierz odwrtona z wykorzystniem L i U. Dokonaliśmy sprawdzenia poprawności algorytmu wyznaczania macierzy LU. Obliczyliśmy również wskaźnik uwarunkowania macierzy oraz jej wyznacznik.

2 Teoria

2.1 Rozkład LU metoda Gaussa

Metode Gaussa można użyć do znalezienia takich macierzy L i U, które z macierza A zwiazane sa relacja:

$$A = L \cdot U$$

Procedura wyznaczania elementów tych macierzy nosi nazwe rozkładu LU. Sposób postepowania (wykorzystujemy metode eliminacji Gaussa).
Pierwszy wiersz mnożymy przez czynnik:

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{1}}$$

i odciecie go od i-tego wiersza (i=2,...,n) zastepujemy mnożeniem przez macierz:

$$L^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 & ... & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & 1 & 0 \\ -l_{n1} & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

Co można zapisać macierzowo:

$$L^{(1)}A^{(1)} = A^{(2)}$$

Dla uproszczenia, mozna ciag tych operacji zamienic na:

Uzyskanie macierzy U poprzez eliminacje Gaussa (tworzac macierz górno-trójkatna) i utworzenie macierzy L wykorzystujac używane w trakcie eliminacji współczynniki wstawiajac je w odpowiednie komórki według reguły:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 & ... & 0 \\ -l_{31} & -l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & 1 & 0 \\ -l_{n1} & -l_{n2} & -l_{n3} & ... & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & ... & u_{1n} \\ 0 & u_{12} & u_{13} & ... & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{13} & ... & u_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Zalety stosowania rozkładu LU:

- Duża wydajność dla dużej liczby równań. Rozkład LU opłaca sie stosować w przypadku rozwiazywania wielu układów równań z ta sama macierza współczynników układu A. Każdy układ równań różni sie wtedy tylko wektorem wyrazów wolnych. Rozkład LU wykonuje sie w takim przypadku tylko raz (ilość operacji n3).
- Oszczedność zajmowanej pamieci. Elementy macierzy L i U moga zostać zapisane w macierzy A.
- Jeśli macierz A jest symetryczna i dodatniookreślona to nie trzeba dokonywać wyboru elementów podstawowych.

2.2 Obliczanie wyznacznika

Aby obliczyć wyznacznik macierzy A możemy posłużyć sie rozkładem

$$A = LU$$

$$det(A) = det(LU) = det(L) \cdot det(U) = 1 \cdot det(U) = det(U)$$

Wyznacznik macierzy U jest iloczynem elementów stojacych na diagonali tej macierzy (n-1 operacji mnożenia).

2.3 Obliczanie macierzy odwrotnej

Aby znaleźć przy pomocy macierzy L i U macierz odwrotna A-1 należy rozwiazać n układów równań:

$$LUx^{(i)} = e^{(1)}, i = 1, 2, ..., n$$

$$LU \left[x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}\right] = \left[e^{(1)}, e^{(2)}, ..., e^{(n)}\right]$$

$$LUX = I \rightarrow X = A^{-1}$$

$$e^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdzie 1 jest na i-tym polu.

2.4 Obliczanie wskaźnika uwarunkowania macierzy

W celu obliczenia wskaźnika uwarunkkowania macierzy korzystamy z normy:

$$||A||_{1,\text{inf}} = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$$

3 Podsumowanie

3.1 Wpływ elementów diagonalnych macierzy U na wyznacznik A

W kontekście dekompozycji LU, macierz A jest rozkładana na macierz trójkatna dolna L i macierz trójkatna górna U. Wyznacznik macierzy A można obliczyć jako produkt wyznaczników macierzy L i U. Ponieważ macierz L ma jedynki na diagonali, to jedyny wpływ na wyznacznik A ma macierz U. Wyznacznik macierzy trójkatnej (takiej jak U) jest równy produktowi jej elementów diagonalnych.

3.2 Wielkość wskaźnika uwarunkowania macierzy A

Wskaźnik uwarunkowania macierzy, czesto oznaczany jako $\kappa(A)$, jest miara, która określa, jak bardzo błedy wprowadzone do macierzy moga wpłynać na wynik operacji na tej macierzy. W kontekście rozwiazywania układów równań, wysoki wskaźnik uwarunkowania oznacza, że niewielkie zmiany wartości w macierzy A lub w wektorze wolnych członów moga prowadzić do dużych zmian w rozwiazaniu układu. Niski wskaźnik uwarunkowania sugeruje, że system jest dobrze uwarunkowany i rozwiazanie jest stabilne wzgledem błedów w danych.

3.3 Powiazanie z wynikiem iloczynu AA1

Macierz A i jej odwrotność A1 sa powiazane wzorem $AA^{-1} = I$, gdzie I jest macierza jednostkowa. W idealnym przypadku, niezależnie od wskaźnika uwarunkowania, iloczyn ten zawsze daje macierz jednostkowa. Jednak w praktyce, ze wzgledu na błedy numeryczne, szczególnie w przypadku macierzy źle uwarunkowanych, obliczony iloczyn może nie być dokładnie macierza jednostkowa. Wskaźnik uwarunkowania macierzy A ma wiec bezpośredni wpływ na precyzje obliczeń numerycznych, w tym na precyzje wyniku iloczynu AA^{-1}.

- W przypadku macierzy dobrze uwarunkowanych (niski wskaźnik uwarunkowania), błedy numeryczne maja mniejszy wpływ, co oznacza, że iloczyn AA^{-1} bedzie bliższy idealnej macierzy jednostkowej.
- Dla macierzy źle uwarunkowanych (wysoki wskaźnik uwarunkowania), nawet niewielkie błedy numeryczne moga znaczaco wpłynać na wynik, prowadzac do wiekszych odchyleń od macierzy jednostkowej.

Podsumowujac, elementy diagonalne macierzy U bezpośrednio wpływaja na wyznacznik macierzy A, a wskaźnik uwarunkowania macierzy A ma znaczacy wpływ na stabilność numery