

Metody Numeryczne

Lab 1

Rozwiązywanie układu równań liniowych metodami bezpośrednimi

Kraków, 29.02.2024

Sprawozdanie

- **Cel ćwiczenia** np. Rozwiązanie układu równań liniowych metodą Gaussa-Jordana
- **Opis problemu** (Jakie równanie, układ, macierz jest rozwiązywana i jakie wielkości należy wyznaczyć)
- **Opis metody**
- **Wyniki** (wykresy)
- **Podsumowanie**

Szukamy rozwiązania układu:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\dots \dots \dots = \dots \dots \dots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n,\end{aligned}$$

gdzie a_{ij} - element macierzowy macierzy współczynników $A = [a_{ij}]$, x_i - niewiadoma, będąca i -tym elementem wektora x , b_i - wyraz wolny, będący i -tym elementem wektora b .

Równanie można zapisać macierzowo:

$$Ax = b$$

Metoda Eliminacji Gaussa

Układ pierwotny:

$$\begin{aligned}
 a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n &= b_1^{(1)} \\
 a_{21}^{(1)} x_1 + a_{22}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n &= b_2^{(1)} \\
 &\dots \dots \dots = \dots \dots \dots \\
 a_{n1}^{(1)} x_1 + a_{n2}^{(1)} x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)} x_n &= b_n^{(1)}.
 \end{aligned}$$

Odejmujemy od i go wiersza ($i = 2, 3, \dots, n$) pierwszy wiersz przemnożony przez

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}.$$

Dostajemy układ:

$$\begin{aligned}
 a_{11}^{(2)} x_1 + a_{12}^{(2)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(2)} x_n &= b_1^{(2)} \\
 a_{22}^{(2)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n &= b_2^{(2)} \\
 &\dots \dots \dots = \dots \dots \dots \\
 a_{n2}^{(2)} x_2 + \dots + a_{nn}^{(2)} x_n &= b_n^{(2)}.
 \end{aligned}$$

Metoda Eliminacji Gaussa

Od i go wiersza ($i = 3, 4, \dots, n$) odejmujemy drugi wiersz przemnożony przez

$$l_{i1} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}.$$

Kontynuując te operacje otrzymujemy ostatecznie:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(n)} x_1 + a_{12}^{(n)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(n)} x_n &= b_1^{(n)} \\ a_{22}^{(n)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(n)} x_n &= b_2^{(n)} \\ \dots \dots \dots &= \dots \dots \dots \\ a_{nn}^{(n)} x_n &= b_n^{(n)}. \end{aligned}$$

Dzięki sprowadzeniu układu równań do postaci górnotrójkątnej rozwiązania x_i wyrażają się równaniami:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}, \\ x_i &= \frac{b_i^{(n)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(n)} x_j}{a_{ii}^{(n)}} \end{aligned}$$

Metoda Eliminacji Gaussa-Jordana



Metoda podobna do metody Gaussa, jednak doprowadzamy macierz $A^{(1)}$ do macierzy jednostkowej w kroku n tym.

Dla pierwszej iteracji: pierwszy wiersz dzielimy przez $\omega_1 = a_{11}^{(1)}$ i od i go wiersza ($i = 2, 3, \dots, n$) odejmujemy pierwszy wiersz przemnożony przez $\omega_{i1} = a_{i1}^{(1)}$:

$$\begin{aligned}x_1 + a_{12}^{(2)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(2)} x_n &= b_1^{(2)} \\a_{22}^{(2)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n &= b_2^{(2)} \\&\dots \dots \dots = \dots \dots \dots \\a_{n2}^{(2)} x_2 + \dots + a_{nn}^{(2)} x_n &= b_n^{(2)}.\end{aligned}$$

Dla drugiej iteracji: drugi wiersz dzielimy przez $\omega_2 = a_{22}^{(2)}$ i od i go wiersza ($i = 1, 3, \dots, n$) odejmujemy drugi wiersz przemnożony przez $\omega_{i1} = a_{i1}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}x_1 + 0x_2 + \dots + a_{1n}^{(3)} x_n &= b_1^{(3)} \\x_2 + \dots + a_{2n}^{(3)} x_n &= b_2^{(3)} \\&\dots \dots \dots = \dots \dots \dots \\a_{n2}^{(3)} x_2 + \dots + a_{nn}^{(3)} x_n &= b_n^{(3)}.\end{aligned}$$

Metoda Eliminacji Gaussa-Jordana

Ostatecznie dostajemy:

$$\begin{aligned}x_1 &= b_1^{(n)} \\x_2 &= b_2^{(n)} \\&\dots \\x_n &= b_n^{(n)}\end{aligned}$$

Wektor współczynników b_i po n operacjach jest równy wektorowi niewiadomych x_i