วิชา 204451 Algorithm Design and Analysis

รหัสนักศึกษา 630510600 ชื่อสกุล ศุภ์ศิลกาล เพชรสุลจินดา ตอนที่ 2

Assignment2 (28 มิ.ย. 65) : Asymptotic Notation1 กำหนดส่งงาน : จ. 11 ก.ค. 65 (เวลา 23.59 น.)

ให้นักศึกษา

1. เขียนคำตอบตามโจทย์กำหนดด้วยลายมือ แล้วถ่ายรูป (นามสกุล .jpg) หรือไฟล์ pdf ส่งที่เว็บส่งการบ้านภาควิชาฯ
2. ตั้งชื่อไฟล์ในรูปแบบ assign_x_id เมื่อ x คือหมายเลข Assignment และ id คือ รหัสนักศึกษา
   (กรณีส่งหลายไฟล์ให้ตั้งชื่อเป็น assign_01_id_a.jpg โดย a หมายถึง ลำดับไฟล์ แล้วทำการ zip รวมทุกไฟล์ส่งในงาน Assignment เดียวกันด้วยชื่อ assign_01_id.zip แทน)
3. ส่งงานภายในวันเวลาที่กำหนด หากส่งเลยกำหนดให้ชี้แจงเหตุผลกับอ. ประจำ section (พิจารณาคะแนนตามเหตุผล)

จากฟังก์ชัน f(n) และ g(n) ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิสูจน์หา Asymptotic Notation สำหรับฟังก์ชัน f(n) ตามที่กำหนดใน คอลัมน์สุดท้ายของตาราง

	f(n)	g(n)	Show that
1.	$6n^3$	n^2	$f(n)=\Theta(g(n))$?
2.	$7n + 8$	n^2	$f(n)=o(g(n))$?
3.	$3 \log n + 5$	$\log n$	$f(n)=O(g(n))$?
4.	$n^3 + n \log n$	n^3	$f(n)=\Theta(g(n))$?
5.	$(1/2) n^2 - 3n$	n^2	$f(n)=\Theta(g(n))$?
6.	$n^{\log 4}$	$3^{\log n}$	$f(n)=\omega(g(n))$?

$n^{\log_2 4} = n^2$

$3^{\log_3 n} = n$

นาย [illegible]
section 2 id: 630510600

1.) $f(n) = 6n^3$, $g(n) = n^2$.

Show that $f(n) \in \Theta(g(n))$.

Given $f(n) = 6n^3$, and $g(n) = n^2$ for all positive integer n.

To show that $f(n) \in \Theta(g(n))$, then find some constants $c_1, c_2, n_0 > 0$, such that

$$0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \; ; \forall n \geq n_0 \quad \text{———} (*)$$

case 1: consider $c_1 \cdot g(n) \leq f(n)$

$$c_1 \cancel{n^2} \leq 6\cancel{n^3}n^1$$

$$6n \geq c_1 \quad \text{———} (1)$$

Choose $c_1 = 6$, $n_0 = 1$, then c_1, n_0 satisfy (1). Thus, this case is true.

Case 2: Consider $f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$

$$f(n) \leq c_2 \cdot n^2$$

$$6n \leq c_2 \quad \text{———} (2)$$

Since we cannot find n_0 that $\forall n \geq n_0$ because of (2), then it does not satisfy $(*)$.

$\therefore$ The statement $f(n) \in \Theta(g(n))$ is false. $\square$

2.) $f(n) = 7n+8$, $g(n) = n^2$.

Show that $f(n) \in o(g(n))$.

Given $f(n) = 7n+8$, and $g(n) = n^2$ for all positive integer n.

To show that $f(n) \in o(g(n))$, then we have to find some constants c, n_0, such that

$$0 \leq f(n) < c g(n) \; ; \forall n \geq n_0 \quad \text{———} (*)$$

Consider $f(n) < c \cdot g(n)$

$$7n + 8 < c \cdot n^2$$

$$\frac{7}{n} + \frac{8}{n^2} < c \quad \text{———} (1)$$

choose $c = 16$, $n_0 = 1$, then c and n_0 satisfy (1), which also satisfy $(*)$.

$\therefore$ The statement $f(n) \in o(g(n))$ is true. $\square$

3.) $f(n) = 3\log_2 n + 5$, $g(n) = \log_2 n$.

Show that $f(n) = O(g(n))$.

Given $f(n) = 3\log_2 n + 5$, $g(n) = \log_2 n$; for all positive integer n.

To show that $f(n) \in O(g(n))$, then we have to find some constants $c, n_0 > 0$, such that

$$0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n); \ \forall n \geq n_0 \quad (*)$$

consider $f(n) \leq c \cdot g(n)$

$$3\log_2 n + 5 \leq c \cdot \log_2 n$$

$$3 + \frac{5}{\log_2 n} \leq c \ ; \ n > 1 \quad (1)$$

Choose $c = 8$, $n_0 = 2$, then c and n_0 satisfy (1), which also satisfy (*)

$\therefore$ The statement $f(n) = O(g(n))$ is true. $\square$

4.) $f(n) = n^3 + n\log_2 n$, $g(n) = n^3$.

Show that $f(n) = \Theta(g(n))$.

Given $f(n) = n^3 + n\log_2 n$, $g(n) = n^3$; for all positive integer n.

To show that $f(n) \in \Theta(g(n))$, then we have to find some constants $c_1, c_2, n_0 > 0$, such that

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n); \ \forall n \geq n_0 \quad (*)$$

Case 1: consider $c_1 g(n) \leq f(n)$

$$c_1 n^3 \leq n^3 + n\log_2 n$$

$$c_1 \leq 1 + \frac{\log_2 n}{n^2} \quad (1)$$

choose $c_1 = 1$, $n_0 = 1$, then c_1 and n_0 satisfy (1).

Case 2: consider $f(n) \leq c_2 g(n)$

$$n^3 + n\log_2 n \leq c_2 n^3$$

$$1 + \frac{\log_2 n}{n^2} \leq c_2 \quad (2)$$

choose $c_2 = 2$, $n_0 = 1$, then c_2 and n_0 satisfy (2).

Since both (1) and (2) are satisfied, then (*) is satisfied.

$\therefore$ The statement $f(n) = \Theta(g(n))$ is true.

$\square$

นาย [illegible]
Section 2 id: 630510600

5.) $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$, $g(n) = n^2$.

Show that $f(n) = \Theta(g(n))$.

Given $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$, $g(n) = n^2$; for all positive integer n.

To show that $f(n) \in \Theta(g(n))$, then we have to find such constants $c_1, c_2, n_0 > 0$, such that

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n); \forall n \geq n_0 \quad (*)$$

Case 1: consider $c_1 g(n) \leq f(n)$

$$c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n$$

$$c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \quad (1)$$

Choose $c_1 = \frac{1}{8}$, $n_0 = 8$, then

$$\frac{1}{8} \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

c_1, n_0 satisfy (1)

Case 2: consider $f(n) \leq c_2 g(n)$

$$\frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$$

Choose $c_2 = \frac{1}{2}$, $n_0 = 8$, then

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \leq \frac{1}{2}$$

c_2, n_0 satisfy (2)

Since (1) and (2) are satisfied, then $(*)$ is satisfied as well.

$\therefore$ The statement $f(n) = \Theta(g(n))$ is <u>true</u>.

$\square$

6.) $f(n) = n^{\log_2 4}$, $g(n) = 3^{\log_2 n}$.

Show that $f(n) = \omega(g(n))$.

Given $f(n) = n^{\log_2 4}$, $g(n) = 3^{\log_2 n}$; for all positive integer n.

To show that $f(n) \in \omega(g(n))$, then we have to find such constants $c, n_0 > 0$, such that

$$0 \leq c g(n) < f(n); \forall n \geq n_0 \quad (*)$$

Consider

$$c g(n) < f(n)$$

$$c \cdot 3^{\log_2 n} < n^{\cancel{\log_2 4}\, 2}$$

$$c \cdot n^{\log_2 3} < n^2$$

$$c < n^{2 - \log_2 3} \quad (1)$$

Choose $c = \frac{1}{2}$, $n_0 = 1$, then c, n_0 satisfy (1), that also satisfy $(*)$.

$\therefore$ The statement $f(n) = \omega(g(n))$ is <u>true</u>.