Először is vegyük észre, hogy ha valamely $y \in \Gamma(X)$ csúcs T-ben van, akkor ennek áthelyezése S-be nem növeli a vágás kapacitását. Valóban, a vágás kapacitását ugyan eggyel növeli az (y, t) él, azonban minden olyan (x, y) él, amelyre $x \in X$ a kapacitást eggyel csökkenti, és ilyen élből legalább egy mindenképpen van.

Helyezzük át az összes $y \in \Gamma(X) \cap T$ csúcsot S-be. Legyen az így kialakult vágás (S', T'). Az előbbiek szerint az (S', T') vágás kapacitása is kisebb, mint n. A hálózat V_1-ből V_2-be menő élei nyilván nem keresztezik az (S', T') vágást. Az s csúcsból induló élek közül azok keresztezik a vágást, amelyek T'-beli csúcsokhoz vezetnek, a t csúcsba érkezők közül pedig azok, amelyek S'-beli csúcsokból indulnak. Ennélfogva

$$c(S', T') = |V_1 \cap T'| + |V_2 \cap S'|,$$

Mivel $|V_1 \cap T'| = n - |X|$ és $|V_2 \cap S'| \geqslant |\Gamma(X)|$, így

$$n > c(S', T') = |V_1 \cap T'| + |V_2 \cap S'| \geqslant n - |X| + |\Gamma(X)|,$$

ahonnan $|X| > |\Gamma(X)|$ adódik.

Minimális és maximális költségű teljes párosítás

Feladat.
Tekintsünk egy $G = ((V_1, V_2), E)$ páros gráfot, amelyre $|V_1| = |V_2|$. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy G-ben nincs izolált csúcs. A gráf E élhalmazának egy M részhalmazát G egy párosításának nevezzük, ha a $G' = ((V_1, V_2), M)$ gráfban minden csúcs foka legfeljebb 1. A gráf E élhalmazának egy M részhalmazát G egy teljes párosításának nevezzük, ha a $G' = ((V_1, V_2), M)$ gráfban minden csúcs foka pontosan 1.

Tegyük fel, hogy adott az élek halmazán egy $c \colon E \to \mathbb{R}_0^+$ nem negatív költségfüggvény. Egy M párosítás $c(M)$ költsége legyen a benne szereplő élek súlyainak összege.

(A) Adjunk hatékony algoritmust, amely meghatározza a G gráf egy minimális költségű teljes párosítását (ha van ilyen)!

(B) Adjunk hatékony algoritmust, amely meghatározza a G gráf egy maximális költségű teljes párosítását (ha van ilyen)!

Megoldás.
(A) Tekintsük a G gráf egy M párosítását. Készítsük el ehhez a G_M súlyozott élű, irányított gráfot a következőképpen.

- Vegyünk fel egy új s és egy új t csúcsot. Az s csúcsból vezessünk éleket V_1 azon csúcsaiba, amelyek nem végpontjai egyetlen M-beli élnek sem, valamint a t csúcsba vezessünk éleket V_2 azon csúcsaiból, amelyek nem végpontjai egyetlen M-beli élnek sem.

- Irányítsuk az E élhalmaz M-hez nem tartozó éleit V_1-től V_2 felé, M-hez tartozó éleit pedig V_2-től V_1 felé.

- Az s csúcsból induló, illetve a t csúcsba befutó élek súlya legyen 0. Ha egy $e \in E$ élt V_1-től V_2 felé irányítottunk, akkor az irányított él súlya legyen $c(e)$, míg ha V_2-től V_1 felé, akkor legyen $-c(e)$.

A G_M gráfot az M párosításhoz tartozó reziduális gráfnak nevezzük. A G_M reziduális gráf egy (u, v) irányított élének súlyát jelölje $w(u, v)$.

Tekintsünk a G_M reziduális gráfban egy s-ből t-be menő P irányított (egyszerű) utat. Egy ilyen utat javító útnak fogunk nevezni, mivel ha M-ből elhagyjuk azokat az éleket, amelyeket V_2-től V_1 felé irányítottunk és rajta vannak P-n, illetve hozzávesszük azokat az éleket, amelyeket V_1-től V_2 felé irányítottunk és rajta vannak P-n, akkor egy M elemszámánál eggyel nagyobb elemszámú M' párosítást kapunk G-ben. Jegyezzük meg, hogy itt $c(M') = c(M) + w(P)$, ahol $w(P)$ a P javító úton lévő G_M-beli irányított élek súlyainak összegét jelöli.

Algoritmusunk ezek után a következő: az üres párosításból kiindulva lépésenként növeljük a párosítást mindig egy minimális összsúlyú javító út mentén mindaddig, amíg a reziduális gráfban található javító út.

Az algoritmus helyességét több lépésben bizonyítjuk. Először azt mutatjuk meg, hogy ha a G gráfban van teljes párosítás, akkor az algoritmus teljes párosítást szolgáltat.

Állítás. Legyen M egy párosítása a G gráfnak. Ha most a G_M reziduális gráfban nincs javító út, akkor M maximális párosítása a G gráfnak.

Bizonyítás. Legyen M' a G gráf egy maximális párosítása. Tekintsük az $M^* = (M \setminus M') \cup (M' \setminus M)$ élhalmazt. Vegyük észre, hogy G bármely csúcsára legfeljebb két M^*-beli él illeszkedhet. Ebből következik, hogy az M^*-beli élek csúcsdiszjunkt utakat és köröket alkotnak G-ben, amelyek felváltva tartalmaznak M-beli és M'-beli éleket.

A körök magától értetődően páros hosszúságúak, vagyis mindkét párosításból ugyanannyi él szerepel bennük.

Foglalkozzunk ezután az utakkal. Megmutatjuk, hogy az utak első és utolsó éle nem tartozhat ugyanahhoz a párosításhoz. Ebből következik, hogy az utak is páros hosszúságúak, vagyis mindkét párosításból ugyanannyi él szerepel bennük. Az nyilván nem lehetséges, hogy egy út első és utolsó éle M-beli legyen, hiszen ekkor M'-ből elhagyva az úton levő M'-beli éleket és hozzávéve az úton levő M-beli éleket egy M' elemszámánál nagyobb elemszámú párosítást kapnánk, ami ellentmond M' maximalitásának. De az sem lehetséges, hogy egy út első és utolsó éle M'-beli legyen. Valóban, egy ilyen útnak megfelelő G_M-beli irányított utat kiegészítve az s csúcsból az út első csúcsába futó éllel, valamint az út utolsó csúcsából a t csúcsba futó éllel G_M egy javító útjához jutnánk, ami ismét ellentmondás.

Így $|M'| = |M|$, következésképpen M szintén maximális párosítás.

A továbbiakban feltesszük, hogy a gráfban van teljes párosítás. Az algoritmus helyességének belátásához meg kell még mutatni, hogy az algoritmus által szolgáltatott teljes párosítás minimális költségű. Ehhez szükségünk lesz a következő észrevételre.

Állítás. Legyen M egy teljes párosítása a G gráfnak. Most M akkor és csak akkor minimális költségű teljes párosítás, ha nincs negatív összsúlyú irányított kör a G_M reziduális gráfban.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha van negatív összsúlyú irányított kör a G_M reziduális gráfban, akkor M nem minimális költségű teljes párosítás. Mivel M teljes párosítás, ezért a G_M reziduális gráfban az s csúcsból nem indul, a t csúcsba pedig nem érkezik egyetlen él sem. Legyen C egy negatív összsúlyú irányított kör a G_M reziduális gráfban. Az előbbi megjegyzéssel összhangban az s és t csúcsok nincsenek rajta a C körön.

Vegyük észre, hogy ha M-ből elhagyjuk azokat az éleket, amelyeket V_2-től V_1 felé irányítottunk és rajta vannak C-n, illetve hozzávesszük azokat az éleket, amelyeket V_1-től V_2 felé irányítottunk és rajta vannak C-n, akkor ismét egy teljes párosítást kapunk. Jelölje M' ezt a teljes párosítást. Világos, hogy az M' teljes párosításra $c(M') = c(M) + w(C)$, ahol $w(C)$ a C körön lévő G_M-beli irányított élek súlyainak összegét jelöli. Mivel $w(C) < 0$, ezért $c(M') < c(M)$, amiből az állítás következik.

Ezután belátjuk, hogy ha nincs negatív összsúlyú irányított kör a G_M reziduális gráfban, akkor M minimális költségű teljes párosítás. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan M' teljes párosítása a G gráfnak, amelyre $c(M') < c(M)$. Tekintsük az $M^* = (M \setminus M') \cup (M' \setminus M)$ élhalmazt. Vegyük észre, hogy ha G valamely csúcsára illeszkedik M^*-beli él, akkor pontosan két ilyen él illeszkedik rá. Ebből következik, hogy az M^*-beli élek csúcsdiszjunkt köröket alkotnak G-ben, amelyek felváltva tartalmaznak M-beli és M'-beli éleket. Tekintsük az ezeknek megfelelő csúcsdiszjunkt irányított köröket G_M-ben. Ezen irányított körök összsúlya $c(M') - c(M) < 0$, ami viszont csak úgy lehetséges, hogy az irányított körök legalább egyike negatív összsúlyú, ellentmondás.

Az előző állítással összhangban az algoritmus helyességének belátásához elég megmutatni, hogy az algoritmus során kapott párosításokhoz tartozó reziduális gráfok egyike sem tartalmaz negatív összsúlyú irányított kört.

A G gráf minden $v \in V_1 \cup V_2$ csúcsához rendeljünk hozzá egy $\pi(v)$ potenciálértéket. Azt mondjuk, hogy a $\pi\colon V_1 \cup V_2 \to \mathbb{R}$ potenciálfüggvény kompatibilis a G gráf egy M párosításával, ha

- minden olyan $v \in V_1$ csúcsra, amely nem végpontja valamelyik M-beli élnek $\pi(v) = 0$,
- minden olyan (u, v) élre ($u \in V_1$ és $v \in V_2$), amely nem tartozik hozzá M-hez $\pi(u) + c(u, v) - \pi(v) \geqslant 0$,
- minden olyan (u, v) élre ($u \in V_1$ és $v \in V_2$), amely hozzátartozik M-hez $\pi(u) + c(u, v) - \pi(v) = 0$.

Ezek után legyen M egy párosítás a G gráfban, és tegyük fel, hogy létezik az M párosítással kompatibilis π potenciálfüggvény. Definiáljuk a G_M reziduális gráf tetszőleges (u, v) irányított élének a $w_\pi(u, v)$ redukált élsúlyát a következőképpen:

- ha $u = s$ vagy $v = t$, akkor legyen $w_\pi(u, v) = 0$,
- különben legyen $w_\pi(u, v) = \pi(u) + w(u, v) - \pi(v)$.

Vegyük észre, hogy a G_M reziduális gráfban a $w_\pi(u, v)$ redukált élsúlyok mind nem negatívak. Ha $u = s$ vagy $v = t$, akkor ez triviálisan igaz. Ha $u \in V_1$ és $v \in V_2$, akkor a G gráfban az (u, v) él nem tartozik hozzá M-hez, így a π potenciálfüggvénynek az M párosítással való kompatibilitása miatt $\pi(u) + c(u, v) - \pi(v) \geqslant 0$. Esetünkben

$$\pi(u) + c(u, v) - \pi(v) = \pi(u) + w(u, v) - \pi(v) = w_\pi(u, v),$$

amiből $w_\pi(u, v) \geqslant 0$ következik. Ha pedig $u \in V_2$ és $v \in V_1$, akkor a G gráfban a (v, u) él hozzátartozik M-hez, így a π potenciálfüggvénynek az M párosítással való kompatibilitása miatt $\pi(v) + c(v, u) - \pi(u) = 0$. Ebben az esetben

$$\pi(v) + c(v, u) - \pi(u) = \pi(v) - w(u, v) - \pi(u) = -w_\pi(u, v),$$

ahonnan $w_\pi(u, v) = 0$ adódik.

Tekintsük most a G_M reziduális gráf egy tetszőleges C irányított körét. Ekkor

$$w(C) = \sum_{e \in C} w(e) = \sum_{e \in C} w_\pi(e),$$

hiszen a jobb oldali összegben a potenciálértékeknek megfelelő tagok kiejtik egymást. Mivel a jobb oldali összegben szereplő redukált élsúlyok mind nem negatívak, ezért a C irányított kör is nem negatív összsúlyú.

A redukált élsúlyok bevezetésének másik előnye, hogy segítségükkel hatékonyan kereshetünk minimális összsúlyú javító utat a reziduális gráfban.

Legyen M egy párosítás a G gráfban, és tegyük fel, hogy létezik az M párosítással kompatibilis π potenciálfüggvény. Tekintsük a G_M reziduális gráfot. Dijkstra algoritmusával határozzuk meg a G_M reziduális gráfban az s csúcsból a $V_1 \cup V_2$-beli csúcsokba menő, a redukált élsúlyok szerinti legrövidebb utakat (ne feledjük, a redukált élsúlyok nem negatívak). Egy $w \in V_1 \cup V_2$ csúcsba menő, a redukált élsúlyok szerinti legrövidebb út hosszát jelölje $d_\pi(w)$.

Legyen P a G_M reziduális gráfban egy, a nem redukált élsúlyok szerinti legrövidebb javító út és legyen y a P út utolsó előtti csúcsa. Ekkor y egy olyan V_2-beli csúcs, amely nem végpontja egyetlen M-beli élnek sem. Jelölje a P út y-ig terjedő szakaszát P'. Világos, hogy P' egy s-ből y-ba menő, a nem redukált élsúlyok szerinti legrövidebb út a G_M reziduális gráfban.

Vegyük észre, hogy a G_M reziduális gráf bármely s-ből y-ba menő P^* útjára

$$w(P^*) = \sum_{e \in P^*} w(e) = \left(\sum_{e \in P^*} w_\pi(e) \right) + \pi(y) = w_\pi(P^*) + \pi(y).$$

Ebből következik, hogy ha P^* minimális összúlyú a nem redukált élsúlyok szerint, akkor minimális összsúlyú a redukált élsúlyok szerint is, és viszont.

Mivel P' egy s-ből y-ba menő, a nem redukált élsúlyok szerinti legrövidebb út a G_M reziduális gráfban, ezért az előbbiekkel összhangban a redukált élsúlyok szerint is az. Így $w(P) = w(P') = d_\pi(y) + \pi(y)$.

Ezek után a G_M reziduális gráfban egy, a nem redukált élsúlyok szerinti legrövidebb javító út a következőképpen található meg. Az összes olyan V_2-beli csúcsra, amely nem végpontja egyik M-beli élnek sem meghatározunk egy, az s csúcsból hozzá vezető, a redukált élsúlyok szerinti legrövidebb utat. Amelyik ilyen út y végpontjára $d_\pi(y)+\pi(y)$ minimális, az kiegészítve az (y, t) éllel egy, a kívánalmaknak megfelelő javító út lesz.

Egyetlen adósságunk van még: a potenciálfüggvények megadása. Kezdetben $M = \emptyset$. Egy ezzel kompatibilis potenciálfüggvény a következő: minden

$u \in V_1$ csúcsra legyen $\pi(u) = 0$, és minden $v \in V_2$ csúcsra legyen $\pi(v)$ azon G-beli élek költségének a minimuma, amelyek egyik végpontja v.

Legyen ezután M egy párosítás a G gráfban, és tegyük fel, hogy létezik az M párosítással kompatibilis π potenciálfüggvény. A fentebb leírtak szerint határozzuk meg a G_M reziduális gráf egy minimális összsúlyú P javító útját, és növeljük az M párosítást a P javító út mentén. Legyen az így kapott párosítás M'. Állítjuk, hogy a

$$\pi' \colon V_1 \cup V_2 \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto d_\pi(v) + \pi(v)$$

potenciálfüggvény kompatibilis a G gráf M' párosításával.

Először tekintsük a G gráf egy olyan $v \in V_1$ csúcsát, amely nem végpontja egyik M'-beli élnek sem. Mivel v nem lehetett végpontja egyik M-beli élnek sem, ezért $\pi'(v) = d_\pi(v) + \pi(v) = 0 + 0 = 0$.

Foglalkozzunk ezután a G gráf éleivel. Legyen $(u, v) \in E$, ahol $u \in V_1$ és $v \in V_2$. Ha $(u, v) \in M$, akkor a G_M reziduális gráfban az u csúcsba csak a (v, u) irányított él érkezik be, így $d_\pi(u) = d_\pi(v) + w_\pi(v, u)$. Itt

$$w_\pi(v, u) = \pi(v) + w(v, u) - \pi(u) = \pi(v) - c(u, v) - \pi(u),$$

ezért

$$(d_\pi(u) + \pi(u)) + c(u, v) - (d_\pi(v) + \pi(v)) = 0,$$

azaz

$$\pi'(u) + c(u, v) - \pi'(v) = 0.$$

Ha $(u, v) \in M' \setminus M$, akkor az (u, v) irányított él rajta van a G_M reziduális gráf P minimális összsúlyú javító útján. Ebből következik, hogy $d_\pi(v) = d_\pi(u) + w_\pi(u, v)$. Itt

$$w_\pi(u, v) = \pi(u) + w(u, v) - \pi(v) = \pi(u) + c(u, v) - \pi(v),$$

ezért

$$(d_\pi(u) + \pi(u)) + c(u, v) - (d_\pi(v) + \pi(v)) = 0,$$

azaz

$$\pi'(u) + c(u, v) - \pi'(v) = 0.$$

Végül ha $(u, v) \notin M$, akkor a G_M reziduális gráf tartalmazza az (u, v) irányított élet, ezért $d_\pi(v) \leqslant d_\pi(u) + w_\pi(u, v)$. Itt

$$w_\pi(u, v) = \pi(u) + w(u, v) - \pi(v) = \pi(u) + c(u, v) - \pi(v),$$

ezért

$$(d_\pi(u) + \pi(u)) + c(u, v) - (d_\pi(v) + \pi(v)) \geqslant 0,$$

azaz

$$\pi'(u) + c(u,v) - \pi'(v) \geqslant 0.$$

Ezzel beláttuk, hogy ha $(u,v) \in M'$, akkor $\pi'(u) + c(u,v) - \pi'(v) = 0$, ha pedig $(u,v) \notin M'$, akkor $\pi'(u) + c(u,v) - \pi'(v) \geqslant 0$. Így annak bizonyítása, hogy a π' potenciálfüggvény kompatibilis az M' párosítással teljes.

Nem nehéz igazolni, hogy az algoritmus költsége $O(|V|^3)$. Ha a G gráf tartalmaz teljes párosítást, akkor az iterációk száma $|V|$, hiszen minden iterációban a párosítás elemszáma eggyel nő. Ha a G gráf nem tartalmaz teljes párosítást, akkor az iterációk száma magától értetődően kisebb, mint $|V|$.

Minden iterációban lefuttatjuk egyszer Dijkstra algoritmusát. Ennek költsége $O(|V|^2)$. Ezután jön egy legrövidebb javító út meghatározása, a párosítás növelése és a potenciálfüggvény frissítése. Mivel ezek együttes költsége is csupán $O(|V|)$, így egy iteráció költsége $O(|V|^2)$. Innen az algoritmus összköltségére vonatkozó állítás adódik.

(B) A feladat egyszerűen visszavezethető a minimális költségű teljes párosítás feladatra. A G gráf élein adott $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ költségfüggvény helyett tekintsük a

$$c'\colon E \to \mathbb{R}_0^+, \quad e \mapsto C - c(e)$$

költségfüggvényt, ahol $C = \max\{c(e) \mid e \in E\}$. Ekkor G egy minimális költségű teljes párosítása a c' költségfüggvényre nézve G egy maximális költségű teljes párosítása a c költségfüggvényre nézve.

Stabil párosítás

Feladat.
Tekintsük fiúk egy F és lányok egy L halmazát. Tegyük fel, hogy a két halmaz ugyanolyan elemszámú. Most az $F \times L = \{(f,l) \mid f \in F,\ l \in L\}$ halmaz egy S részhalmazát teljes párosításnak nevezzük, ha minden F-beli fiú és minden L-beli lány pontosan egy S-beli rendezett párban fordul elő.

Minden $f \in F$ fiú rangsorolja az összes L-beli lányt; az f fiú rangsorában egy l lány pontosan akkor előz meg egy l' lányt, ha f-nek jobban tetszik l, mint l' (holtverseny nincs). A lányok ugyanígy rangsorolják a fiúkat.

Legyen S egy teljes párosítást, továbbá legyenek (f,l) és (f',l') olyan S-beli párok, amelyek esetén f-nek jobban tetszik l', mint l, és l'-nek jobban tetszik f, mint f'. Ilyenkor azt mondjuk, az (f,l') pár instabilitást jelent S-re nézve. Célunk olyan S teljes párosítás megadása, amelyre nézve nincs instabilitási tényező; egy ilyen párosítást stabilnak nevezünk.