

有限元方法及应用

学号: S230200227 姓名: 杜伟栋

一、 问题说明

利用二阶四面体单元计算型钢在一定作用力下各个方向上的位移大小, 并用常见的有限元计算软件分析比较此种方法的精度。

二、 单元开发说明

1. 开发工具说明

ABAQUS_6.14、MATLAB_2019a、TECPLOT_360_EX_2017_R3

2. 开发流程

首先利用 ABAQUS_6.14 建立角钢模型并绘制网格进行有限元分析，然后将 inp 文件导出，获取模型的节点坐标信息，然后通过 Matlab 软件进行计算，将计算的结果输出到 Tecplot 进行后处理显示，并与上述 Abaqus 的结果进行比对，并对结果误差进行分析。

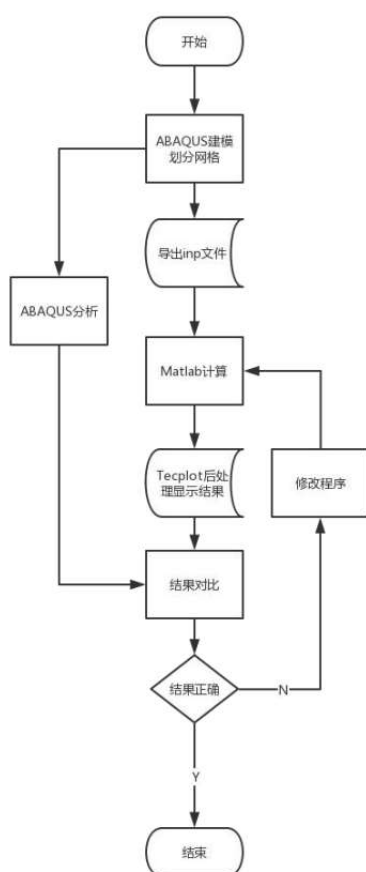


图 1 开发流程图

3. 文件操作说明

* MAIN.m 为主程序，在主程序中包含了读文件的函数、前处理程序、计算分析程序以及后处理程序。

* feaplyc2.m 为 施加边界条件的函数。feasmb1.m 将元素矩阵组装成系统矩阵。feeldof.m 用来计算与每个元素相关联的系统自由度。

* 在文件夹中有 ABAQUS 导出的模型的 inp 文件、结果分析云图、Matlab 计算得到的 plt 文件以及相应的结果截图，用于最后的结果对比。

4. 开发单元介绍

C3D10: 十结点四面体单元，计算格式采用隐式格式。

三、 单元展示

1. 二阶四面体单元理论概述

对于二阶四面体单元，用直角坐标表示的完全二次多项式共有 10 项，位移函数为：

$$\begin{aligned} u &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_5 x^2 + \beta_6 y^2 + \beta_7 z^2 + \beta_8 xy + \beta_9 yz + \beta_{10} xz \\ v &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} xz \\ w &= \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y + \gamma_5 x^2 + \gamma_6 y^2 + \gamma_7 z^2 + \gamma_8 xy + \gamma_9 yz + \gamma_{10} xz \end{aligned} \quad (\text{式 1})$$

由式 1 形函数的构造可以看出，位移模式（位移函数）的选取直接决定着形函数的构造。针对给定的单元，我们可以根据节点条件基于帕斯卡三角形选取位移模式如下：

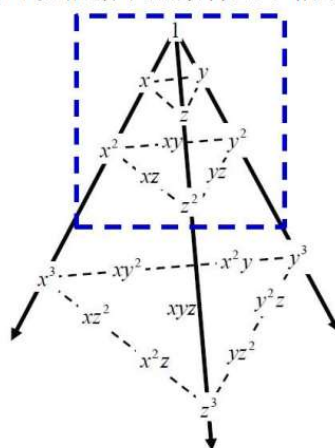


图 2 十结点四面体的形函数的组成

对于高阶四面体单元，如果直接采用笛卡尔直角坐标，计算破费事，下面改用体积坐标，单元的形函数取为：

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^{10} N_i u_i \\
v &= \sum_{i=1}^{10} N_i v_i \\
w &= \sum_{i=1}^{10} N_i w_i
\end{aligned}
\tag{式 2}$$

在上式中：

u_i 、 v_i 、 w_i 为结点 i 的位移分量；

N_i 为用体积坐标表示的二次形函数。

利用矩阵描述为：

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_{10} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_{10} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_{10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \dots \\ u_{10} \\ v_{10} \\ w_{10} \end{Bmatrix}
\tag{式 3}$$

角点： $N_i = (2L_i - 1) L_i (i=1,2,3,4)$ (式 4)

边中点： $N_j = 4L_i L_k (j=5,6,7,8,9,10)$ i,k 为边中点相邻的两个角点 (式 5)

L_i 为体积坐标，对于四面体单元，任意一点 P 的位置可以用下列比值来表示：

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{V_{P234}}{V} \\
L_2 &= \frac{V_{P134}}{V} \\
L_3 &= \frac{V_{P124}}{V} \\
L_4 &= \frac{V_{P123}}{V}
\end{aligned}
\tag{式 6}$$

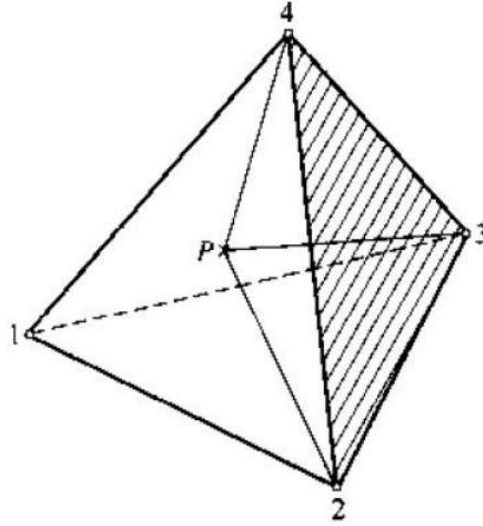


图 3 十结点四面体体积坐标

假设 p 在直角坐标系下的坐标为 (x, y, z) ，则有：

$$V_{pjmk} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} \quad (\text{式 7})$$

由于 $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 1$ ，因此 $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$ 。

直角坐标与体积坐标有下列关系式：

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{式 8})$$

对式 8 求逆，可用直角坐标表示体积坐标如下：

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} V_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ V_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ V_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ V_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (\text{式 9})$$

式中 a_i, b_i, c_i 分别为表面（角点 i 相对的表面）在 x, y, z 平面上的投影面积。

$$\text{式中 } a_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} a_2 = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} a_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} a_4 = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$b_1 = -\begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad b_2 = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad b_3 = -\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad b_4 = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad c_2 = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad c_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad c_4 = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$d_1 = -\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \quad d_3 = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \quad d_4 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

四面体的应力应变矩阵即 B 矩阵为：

$$[B_i] = \begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{vmatrix} \quad (\text{式 } 10)$$

对于角节点：

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1(4L_1-1) & 0 & 0 \\ 0 & c_1(4L_1-1) & 0 \\ 0 & 0 & d_1(4L_1-1) \\ c_1(4L_1-1) & b_1(4L_1-1) & 0 \\ 0 & d_1(4L_1-1) & c_1(4L_1-1) \\ d_1(4L_1-1) & 0 & b_1(4L_1-1) \end{bmatrix} \quad (1,2,3,4) \quad (\text{式 1})$$

对于棱内节点：

$$\mathbf{B}_5 = \frac{4}{6V} \begin{bmatrix} b_2L_1+b_1L_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_2L_1+c_1L_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_2L_1+d_1L_2 \\ c_2L_1+c_1L_2 & b_2L_1+b_1L_2 & 0 \\ 0 & d_2L_1+d_1L_2 & c_2L_1+c_1L_2 \\ d_2L_1+d_1L_2 & 0 & b_2L_1+b_1L_2 \end{bmatrix} \quad (5,6,7,8,9,10) \quad (1,2,3,4) \quad (\text{式 2})$$

将应变分量表为应力分量的函数，可称为本构方程的第一种形式。若将上式改应力分量表为应变分量的函数的形式，可得本构方程的第二种形式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_y + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_z \right) \\ \sigma_y &= \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_z \right) \\ \sigma_z &= \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_y + \varepsilon_z \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (\text{式 11})$$

用矩阵的形式可将上式表示为：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (\text{式 12})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

单元刚度矩阵:

在单元内, 应力在虚应变 $\{\boldsymbol{\varepsilon}^*\}$ 上的虚应变能是:

$$\delta U = \iiint \{\boldsymbol{\varepsilon}^*\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dx dy dz \quad (\text{式 13})$$

其中单元内发生的虚应为:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^*\} = [\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\delta}^*\}^e \quad (\text{式 14})$$

将式 14 带入则有

$$\delta U = (\{\boldsymbol{\delta}^*\}^e)^T \iiint [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}^e\} dx dy dz \quad (\text{式 15})$$

由于单元上的虚应变能等于外力所作虚功

$$\delta U = \delta V = (\{\boldsymbol{\delta}^*\}^e)^T \{F\}^e \quad (\text{式 16})$$

则有

$$(\{\boldsymbol{\delta}^*\}^e)^T \{F\}^e = (\{\boldsymbol{\delta}^*\}^e)^T \iiint [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}^e\} dx dy dz \quad (\text{式 17})$$

由于虚位移可以是任意的, 所以矩阵 $(\{\boldsymbol{\delta}^*\}^e)^T$ 也是任意的, 于是得到:

$$\{F\}^e = \iiint [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}^e\} dx dy dz \quad (\text{式 18})$$

上式右边的重积分实在整个单元 e 的体积内进行的, 对于没有初应力和初应变的情况, 应力可以表示为如下:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\delta}\}^e \quad (\text{式 19})$$

由于 $\{\boldsymbol{\delta}\}^e$ 是常量, 可以放到积分号外面, 因此得到

$$\{F\}^e = \iiint [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}] dx dy dz \{\boldsymbol{\delta}\}^e \quad (\text{式 20})$$

令

$$[\mathbf{k}]^e = \iiint [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}] dx dy dz \quad (\text{式 21})$$

则有

$$\{F\}^e = [\mathbf{k}]^e \{\boldsymbol{\delta}\}^e \quad (\text{式 22})$$

则由应力应变矩阵 $[\mathbf{B}]^e$ 和本构矩阵 $[\mathbf{D}]$ 得到了单元刚度矩阵 $[\mathbf{k}]^e$, 进一步将单元刚度矩阵组装到整体系统中, 就可以得到系统刚度矩阵。

2. 计算流程

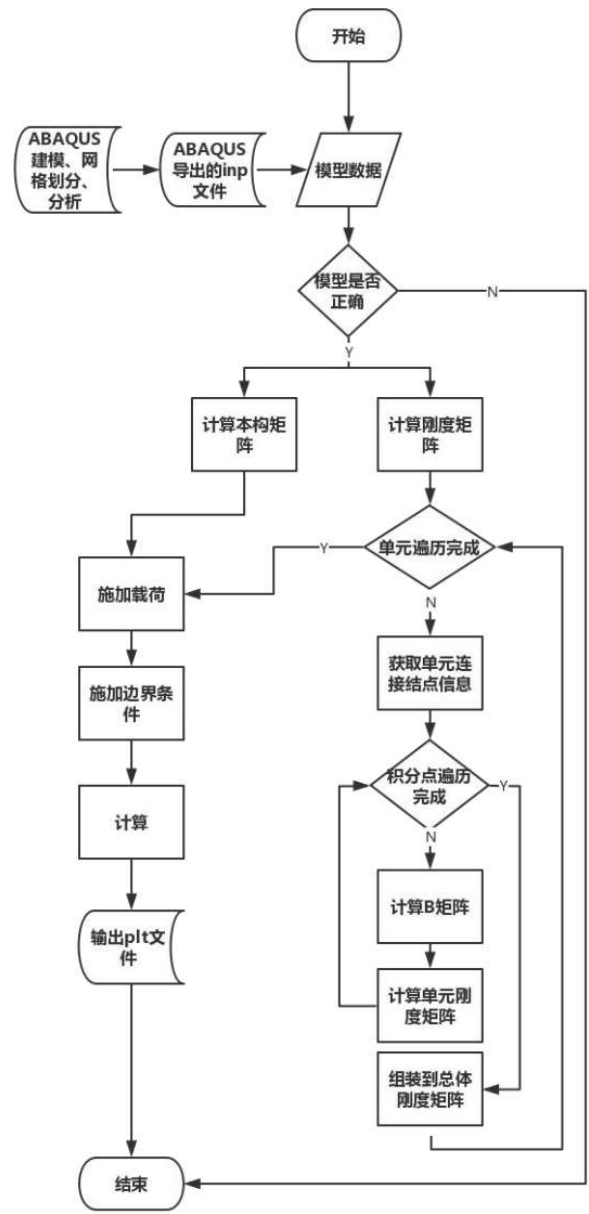


图 4 计算流程图

3. 结果验证

利用第二部分中的程序生成 plt 文件导入到 Tecplot 中进行后处理显示结果，此结果与 ABAQUS 分析的结果进行对比分析，结果如下(a 图为 Tecplot 显示结果，b 图为 ABAQUS 显示结果)：

(1) X 方向的位移 u ：

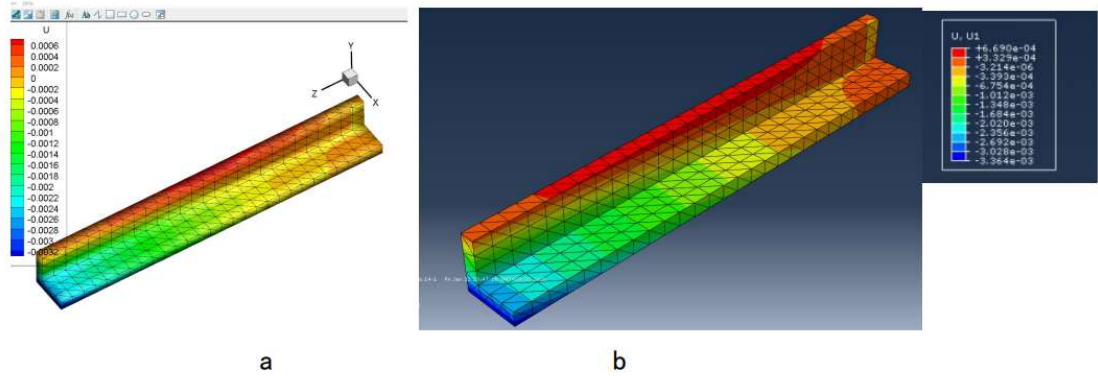


图 5 X 方向位移 Matlab 与 ABAQUS 计算结果云图

表 1 X 方向位移误差对比表

	最大值	最小值
Matlab	0.00066862	-0.00336432
Abaqus	0.00066901	-0.00336432
误差	0.06%	0

(2) Y 方向位移 v ：

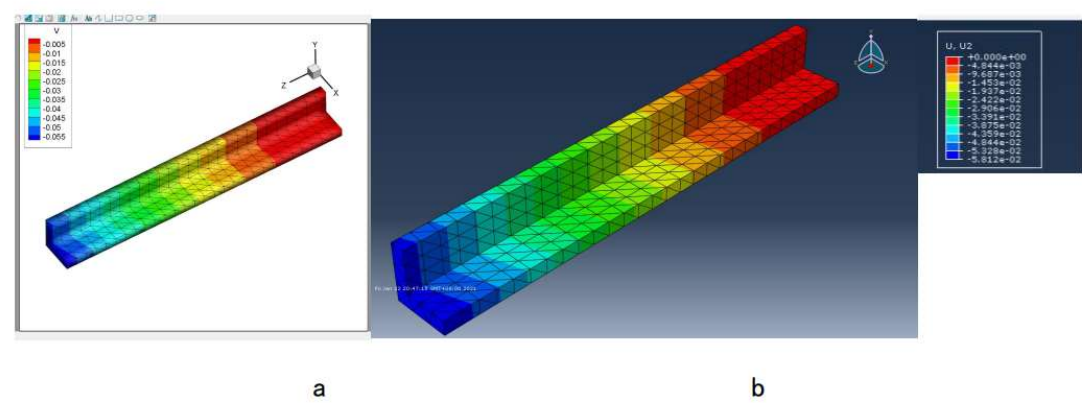


图 6 Y 方向位移 Matlab 与 ABAQUS 计算结果云图

表 2 Y 方向位移误差对比表

	最大值	最小值
Matlab	0	-0.0581232
Abaqus	0	-0.0581232
误差	0%	0%

(3)Z 方向位移 W:

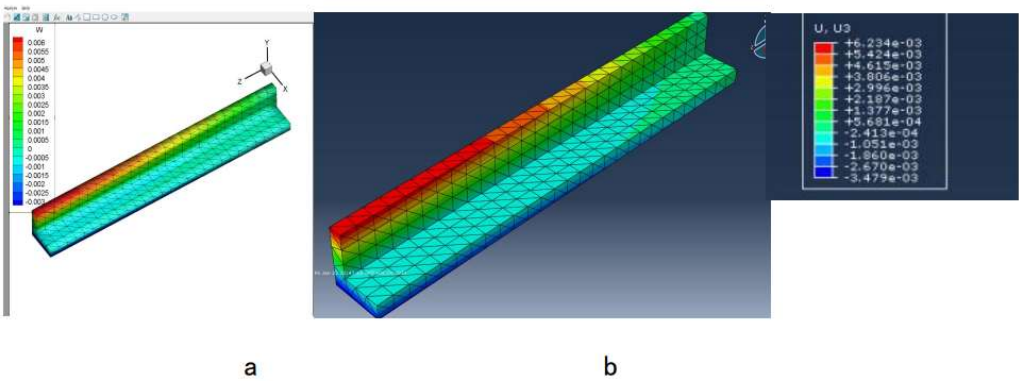


图 7 Z 方向位移 Matlab 与 ABAQUS 计算结果云图

表 3 Z 方向位移误差对比表

	最大值	最小值
Matlab	0.00623327	-0.00347892
Abaqus	0.00623383	-0.00347892
误差	0.009%	0%

(4)位移的模:

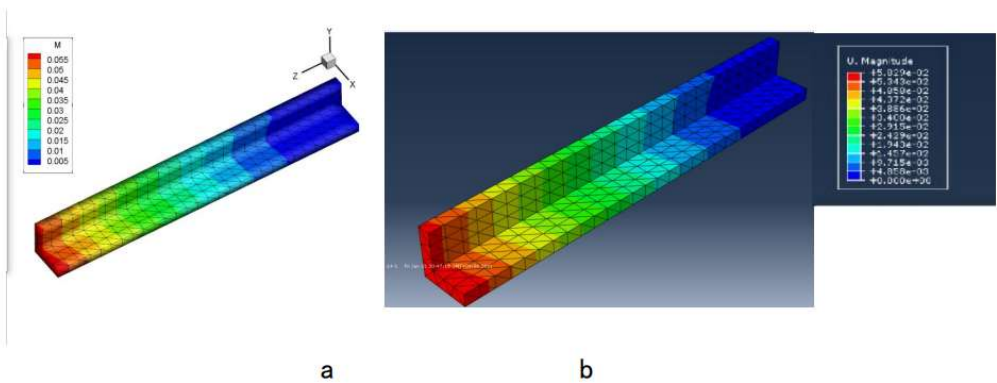


图 8 合位移 Matlab 与 ABAQUS 计算结果云图

表 3 合位移误差对比表

	最大值	最小值
Matlab	0.0582903	0
Abaqus	0.0582904	0
误差	0.0002%	0%