

华东师范大学期中试卷

2017—2018 年第一学期

课程名称: 线性代数

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 17 级

课程性质: 公共必修、公共选修、专业必修、专业选修

一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分	阅卷人签名

一、选择题 (每题 4 分, 共 20 分)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = (\quad)$$

- (A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$ (B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$
 (C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$ (D) $(a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3)$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且矩阵 AB 的秩为 2, 则 $a = (\quad)$

- (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) 0

3. 设 A、B 都是 n 阶矩阵, 下列命题正确的是 ()

- (A) 若 A, B 都可逆, 则 $A+B$ 也可逆
 (B) 若 A, B 都可逆, 则 AB 也可逆
 (C) 若 $A^2 = A$, $A \neq E$, 则 A^* 可逆
 (D) 若 $A+B$ 可逆, 则 A, B 都可逆

4. 设 $|A|$ 为 4 阶行列式且 $|A| = -3$, 则 $||A|A| = (\quad)$

- (A) 9 (B) 3^5 (C) -3^5 (D) 12

5. 设 A 是任一 n 阶方阵 ($n \geq 3$), A^* 是其伴随矩阵。设 k 为常数, 且 $k \neq 0, \pm 1$, 则必有 $(kA)^* = (\quad)$

- (A) kA^* (B) $k^{n-1}A^*$ (C) $k^n A^*$ (D) $k^{-1}A^*$

二、填空题 (共 20 分, 每题 4 分)

1. 设行列式, 则第四行各元素余子式之和的值为 _____.

2. 若 $A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & x & -4 \\ -2 & -4 & x \end{pmatrix}$ 不可逆, 则 $x =$ _____.

3. 设 A 为 n 阶可逆矩阵, 若以 A 及 $|A|$ 表示, 则有 $(A^*)^* =$ _____.

4. 设 A 为 n 阶可逆矩阵, $|A| = 3$, 且 $-A$ 是 $2A^* + 5kA^{-1}$ 的逆矩阵, 则 $k =$ _____.

5. 已知 A 是 3 阶矩阵, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 5E$, 则矩阵 $B =$ _____.

三、计算题 (共 60 分)

1. (10分) 计算

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & L & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & L & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ M & M & M & M & M & M \\ M & M & M & M & M & M \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & L & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

其中 $a_i \neq 0, b_i \neq 0, i = 1, 2, L, n+1$.

2. (1) (10分) 已知 $\alpha = (1, 2, L, n), \beta = (1, \frac{1}{2}, L, \frac{1}{n})$. 计算 $A = \alpha^T \beta$ 和 A^n .

(2) (5分) 试用同样的方法计算: 设 $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$, 求 B^n .

3. (10分) 求矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩, 并求一个最高阶非零子式.

4. (15分) 讨论 k 满足什么条件时, 下列方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - kx_3 = k \\ 2x_1 + kx_2 - x_3 = 2 \\ kx_1 + 2x_2 + x_3 = k \end{cases}$$

有唯一解; 无解; 有无穷多解?

5. (10分) 若 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 + 2A + 2E = 0$, 证明 $A + xE$ (其中 x 为任意实数) 可逆, 并求其逆矩阵.