高等数学（一）期中考试解析

+56

1. $x^y+y^x=0$. 两边求导. $e^{y\ln x}\cdot(y\ln x)'+e^{x\ln y}(x\ln y)'=0$.

$e^{y\ln x}+e^{x\ln y}=0$.

$\therefore x^y\left(y'\ln x+y\cdot\frac{1}{x}\right)+y^x\left(\ln y+x\cdot\frac{y'}{y}\right)=0$.

$\therefore y'=\dfrac{-(y\cdot x^{y-1}+y^x\ln y)}{x^y\ln x+x\cdot y^{x-1}}$.

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{1+\frac{1}{1+t^2}}{6+3t^2}=\dfrac{1}{3(1+t^2)}$ $\therefore y(x)$ 一阶导数是 $\dfrac{1}{3(1+t^2)}$.

$\dfrac{d^2y}{dx}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\dfrac{d\left(\frac{1}{3(1+t^2)}\right)}{d(6t+t^3)}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot-\frac{2t}{(1+t^2)^2}}{6+3t^2}=\dfrac{-2t}{9(2+t^2)(1+t^2)^2}$.

$\therefore y(x)$ 二阶导数是 $\dfrac{-2t}{9(2+t^2)(1+t^2)^2}$.

3. (1) $f(x)=\ln x$ 在 $x=1$ 处带皮亚诺余项的n阶泰勒公式：

$\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\cdots(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot(x-1)^n+o((x-1)^n)$

$g(x)=\cos(x-1)^2$ 在 $x=1$ 处带皮亚诺余项的n阶泰勒公式.

~~f(x)~~ $\because h(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的n阶泰勒公式为 $h(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$.

$\therefore \cos(x-1)^2=1-\frac{(x-1)^4}{2}+\frac{(x-1)^8}{24}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{(x-1)^{4n}}{(2n)!}+o((x-1)^{4n})$.

(2) 利用泰勒展开式求极限.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^3\ln x-1+\cos(1-x)^2}{(1+x)^4}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^3\left((x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2\right)\cancel{-1+}1-\frac{(x-1)^4}{2}+\frac{(x-1)^8}{24}}{(1+x)^4}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^4-\frac{(x-1)^4}{2}+o((x-1)^4)}{(1+x)^4}=\dfrac{1}{2}$.

4. 构造 $F(x)=f(x)\cdot e^{-\sin x}$

又 $F(a)=f(a)\cdot e^{-\sin a}=0$

$F(b)=f(b)\cdot e^{-\sin b}=0$

∴由罗尔定理 $\exists\xi\in(a,b)$. s.t $F'(\xi)=0$

又 $F'(\xi)=f'(\xi)\cdot e^{-\sin\xi}-f(\xi)\cdot e^{-\sin\xi}\cdot\cos\xi$.

$=e^{-\sin\xi}(f'(\xi)-f(\xi)\cdot\cos\xi)=0$.

∴ $f'(\xi)-f(\xi)\cdot\cos(\xi)=0$

∴ $\exists\xi\in(a,b)$. s.t $f'(x)-f(x)\cos x=0$. 即证.

5. 构造 $f(x)=\ln^2 x$ 在 $[a,b]$ 上连续 在 (a,b) 内可导.

∴由拉格朗日中值定理 $\exists\xi\in(a,b)$. s.t $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}$

又 $f'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}$

令 $g(x)=\ln x\cdot\frac{1}{x}$ ∴ $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ ∵ $x\in(e^2,e^3)$. ∴ $g'(x)<0$.

∴ $g(x)\downarrow$. 即 $f'(x)\downarrow$. ∴ $f'(e^3)<f'(b)<f'(\xi)<f'(a)<f'(e^2)$

即 $f'(e^3)<f'(\xi)$

即 $\frac{6}{e^3}<\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}$

即 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{6}{e^3}(b-a)$

即.