三峡大学 试卷纸 教学班号________ 序号________ 学号________ 姓名________

……答 题 不 要 超 过 密 封 线……

2017 学年春季学期

《高等数学Ⅰ（二)》期末考试试卷（A）

注意： 1、本试卷共 3 页； 2、考试时间 110 分钟； 3、姓名、学号必须写在指定地方

题号	一	二	三	四	总分
得分					

阅卷人	得分

一、单项选择题（8 个小题，每小题 2 分，共 16 分）将每题的正确答案的代号 A、B、C 或 D 填入下表中.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								

1．已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，且满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，则必有（ ）.

(A) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ (B) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ (C) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ (D) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

2.极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=($).

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D)不存在

3．下列函数中，$\mathrm{d}f=\Delta f$ 的是( ).

（A） $f(x,y)=xy$ （B） $f(x,y)=x+y+c_0, c_0$为实数

（C） $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ （D） $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$

4．函数 $f(x,y)=xy(3-x-y)$，原点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的( ).

（A）驻点与极值点 （B）驻点，非极值点

（C）极值点，非驻点 （D）非驻点，非极值点

5．设平面区域 $D:(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$，若 $I_1=\iint\limits_D\dfrac{x+y}{4}\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_D\sqrt{\dfrac{x+y}{4}}\mathrm{d}\sigma$，$I_3=\iint\limits_D\sqrt[3]{\dfrac{x+y}{4}}\mathrm{d}\sigma$，则有（ ）.

（A） $I_1<I_2<I_3$ （B） $I_1>I_2>I_3$ （C） $I_2<I_1<I_3$ （D） $I_3<I_1<I_2$

6．设椭圆 L：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的周长为 l，则 $\oint_L(3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$（ ）.

(A) l (B) $3l$ (C) $4l$ (D) $12l$

7．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为交错级数，$a_n\to0\ (n\to+\infty)$，则（ ）.

(A)该级数收敛 (B)该级数发散

(C)该级数可能收敛也可能发散 (D)该级数绝对收敛

8. 下列四个命题中，正确的命题是（ ）.

（A）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也发散

（B）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散

（C）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛

（D）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛

阅卷人	得分

二、填空题(7 个小题，每小题 2 分，共 14 分).

1. 直线 $\begin{cases}3x-4y+2z-6=0\\x+3y-z+a=0\end{cases}$ 与 z 轴相交，则常数 a 为________________.

2．设 $f(x,y)=\ln(x+\dfrac{y}{x})$, 则 $f_y'(1,0)=$____________________.

3．函数 $f(x,y)=x+y$ 在 $(3,4)$ 处沿增加最快的方向的方向导数为_______________.

4．设 $D:x^2+y^2\le 2x$，二重积分 $\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}\sigma=$________________.

5．设 $f(x)$ 是连续函数，$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 9-x^2-y^2\}$，$\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2)\mathrm{d}v$ 在柱面坐标系下的三次积分为____ .

6. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛域是_________________ .

7. 将函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le0\\1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$ 以 2π 为周期延拓后，其傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于_______________________.

三峡大学 试卷纸 教学班号______ 序号______ 学号______ 姓名______

答 题 不 要 超 过 密 封 线

阅卷人	得分

三、综合解答题一（5个小题，每小题7分，共35分，解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

1．设 $u = xf(x, \frac{x}{y})$，其中 f 有连续的一阶偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$.

解：

2．求曲面 $e^z + z + xy = 3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程及法线方程.

解：

3. 交换积分次序，并计算二次积分 $\int_0^{\pi} dx \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy$.

解：

4. 设 Ω 是由曲面 $z = xy, y = x, x = 1$ 及 $z = 0$ 所围成的空间闭区域，求 $I = \iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dxdydz$.

解：

5．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的和函数 $S(x)$，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的和.

解：

三峡大学 试卷纸 教学班号________ 序号________ 学号________ 姓名________

……答 题 不 要 超 过 密 封 线……

阅卷人	得分

四、综合解答题二（5 个小题，每小题 7 分，共 35 分，解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

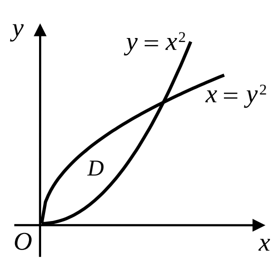
1. 从斜边长为 1 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

解

2．计算积分 $\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$（$a>0$）.

解：

3．利用格林公式，计算曲线积分 $I=\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x+2xy)\mathrm{d}y$，其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的区域 D 的正向边界曲线.



4． 计算 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S$，$\Sigma$ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分.

解：

5．利用高斯公式计算对坐标的曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 为圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=1$ 之间的部分的下侧.

解：

2017 学年春季学期
《高等数学Ⅰ（二）》期末考试试卷(A)
答案及评分标准

一、单项选择题（8 个小题，每小题 2 分，共 16 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	**D**	**A**	**B**	**B**	**A**	**D**	**C**	**D**

1．已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，且满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，则必有（D　）

(A) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；　(B) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；　(C) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；　(D) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

2. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=$（　A　）

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D)不存在.

3．下列函数中，$\mathrm{d}f=\Delta f$ 的是(　B　)；

(A)　$f(x,y)=xy$；　(B)　$f(x,y)=x+y+c_0,c_0$为实数；

(C)　$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$；　(D)　$f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$.

4．函数 $f(x,y)=xy(3-x-y)$，原点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的(　B　).

(A）驻点与极值点；　(B）驻点，非极值点；

(C）极值点，非驻点；　(D）非驻点，非极值点.

5．设平面区域 D：$(x-1)^2+(y-1)^2\le2$，若 $I_1=\iint\limits_D\dfrac{x+y}{4}\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_D\sqrt{\dfrac{x+y}{4}}\mathrm{d}\sigma$，$I_3=\iint\limits_D\sqrt[3]{\dfrac{x+y}{4}}\mathrm{d}\sigma$，则有（　A　）

(A）$I_1<I_2<I_3$；　(B）$I_1>I_2>I_3$；　(C）$I_2<I_1<I_3$；　(D）$I_3<I_1<I_2$.

6．设椭圆 L：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的周长为 l，则 $\oint_L(3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$（D　）

(A)　l；　(B)　$3l$；　(C)　$4l$；　(D)　$12l$.

7．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为交错级数，$a_n\to0\ \ (n\to+\infty)$，则（　C　）

(A)该级数收敛；　(B)该级数发散；

(C)该级数可能收敛也可能发散；　(D)　该级数绝对收敛.

8.下列四个命题中，正确的命题是（　D　）

(A）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也发散；

(B）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散；

(C）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛；

(D）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛.

二、填空题(7 个小题，每小题 2 分，共 14 分)．

1. 直线 $\begin{cases}3x-4y+2z-6=0\\x+3y-z+a=0\end{cases}$ 与 z 轴相交，则常数 a 为___3___。

2．设 $f(x,y)=\ln(x+\dfrac{y}{x})$, 则 $f_y'(1,0)=$___1___

3．函数 $f(x,y)=x+y$ 在 $(3,4)$ 处沿增加最快的方向的方向导数为___$\sqrt{2}$___

4．设 $D: x^2+y^2\le2x$，二重积分 $\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}\sigma=$___$\pi$___.

5．设 $f(x)$ 是连续函数，$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le9-x^2-y^2\}$，$\iiint\limits_\Omega f(x^2+y^2)\mathrm{d}v$ 在柱面坐标系下的三次积分为___$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3\mathrm{d}\rho\int_0^{9-\rho^2}\rho f(\rho^2)\mathrm{d}z$___

6. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛域是___$(-\infty,+\infty)$___.

7. 函数 $f(x)=\begin{cases}-1\ , & -\pi<x\le0\\1+x^2\ , & 0<x\le\pi\end{cases}$，以 2π 为周期延拓后，其傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于 $\dfrac{\pi^2}{2}$___.

三、综合解答题一（5 个小题，每小题 7 分，共 35 分.解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

1．设 $u=xf(x,\dfrac{x}{y})$，其中 f 有连续的一阶偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f+xf_1'+\dfrac{x}{y}f_2'$　　………………4 分

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x^2}{y^2}f_2'$.　　………………7 分

2．求曲面 $e^z+z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程及法线方程.

解：令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z+z+xy-3$，………………2 分

$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(y,x,\mathrm{e}^z+1)$，$\boldsymbol{n}\big|_{(2,1,0)}=(1,2,2)$　，………………4 分

所以在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为 $(x-2)+2(y-1)+2z=0$，

即 $x+2y+2z-4=0$；…………………6 分

法线方程为 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$． …………………7 分

3. 交换积分次序，并计算二次积分 $\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$；

解：$\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}y\int_0^{y}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x$ …………………4 分

$=\int_0^{\pi}\sin y\mathrm{d}y=2$ …………………7 分

4．设 Ω 是由曲面 $z=xy,y=x,x=1$ 及 $z=0$ 所围成的空间区域，求 $I=\iiint\limits_{\Omega}xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

解：注意到曲面 $z=xy$ 经过 x 轴、y 轴，…………………2 分

$\Omega=\{(x,y,z):0\le z\le xy,0\le y\le x,0\le x\le 1\}$ …………………4 分

故 $I=\iiint\limits_{\Omega}xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{xy}xy^2z^3\mathrm{d}z=\frac{1}{364}$． …………………7 分

5．求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的和函数 $S(x)$，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的和.

解：$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$， $S(0)=1$，

由已知的马克劳林展式：$\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n,|x|<1$，…………………2 分

有 $S(x)=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n)'=(\frac{1}{1-x}-1)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，$|x|<1$，…………………5 分

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=\frac{1}{2}S(\frac{1}{2})=2$ …………………7 分

四、综合解答题二（5 个小题，每小题 7 分，共 35 分.解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

1. 从斜边长为 1 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

解 设两个直角边的边长分别为 x，y，则 $x^2+y^2=1$，周长 $C=x+y+1$，

需求 $C=x+y+1$ 在约束条件 $x^2+y^2=1$ 下的极值问题. …………………2 分

设拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=x+y+1+\lambda(x^2+y^2-1)$，…………………4 分

令 $\begin{cases}F_x=1+2\lambda x=0,\\ F_y=1+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$

解方程组得 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为唯一驻点， …………………6 分

又最大周长一定存在，故当 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时有最大周长. …………………7 分

2．计算积分 $\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$（$a>0$）.

解：L 的极坐标方程为 $\rho=a\cos\theta$，$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$；…………………2 分

则 $\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\mathrm{d}\theta=a\mathrm{d}\theta$，…………………4 分

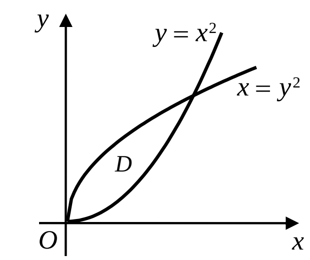
所以 $\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2a\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^3\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi a^3}{2}$． …………………7 分

或解：L 的形心 $(\bar{x},\bar{y})=(\frac{a}{2},0)$，$L$ 的周长 πa，

$\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\oint_L ax\mathrm{d}s=a\bar{x}\pi a=\frac{\pi a^3}{2}$

3．利用格林公式，计算曲线积分 $I=\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x+2xy)\mathrm{d}y$，其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的区域 D 的正向边界曲线.

解：$I=\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x+2xy)\mathrm{d}y$



$=\iint\limits_D dxdy$ …………………3 分

$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y$ …………………5 分

$=\frac{1}{3}$ …………………7 分

4． 计算 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S$，$\Sigma$ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分.

解：Σ 在 xoy 面上的投影区域为 $D_{xy}:x+y\le 1(x\ge 0,y\ge 0)$ ，…………………2 分

又 $\Sigma:z=1-x-y,\frac{\partial z}{\partial x}=-1,\frac{\partial z}{\partial y}=-1$, 故 $dS=\sqrt{3}dxdy$，…………………4 分

所以 $\iint\limits_{\Sigma}xdS=\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}xdxdy=\sqrt{3}\int_0^1dx\int_0^{1-x}xdy=\frac{\sqrt{3}}{6}$． …………………7 分

或解：由对称性，$\iint\limits_{\Sigma}xdS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}dS=\frac{\sqrt{3}}{6}$

5. 利用高斯公式计算对坐标的曲面积分 $\oiint\limits_S\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=1$ 之间的部分的下侧。

解：补曲面 $D:x^2+y^2\le 1,z=1$（取上侧），…………………2 分

由高斯公式知

$$\oiint_{S+D} dxdy + dydz + dzdx = 0,$$ ………………4 分

故 $$\iint_{S} dxdy + dydz + dzdx$$

$$= -\iint_{D} dxdy + dydz + dzdx$$

$$= -\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} dxdy = -\pi$$ ………………7 分