

2013 高代习题指导

补充公式: 设 $A = A_{m \times m}, B = B_{n \times n}$ 是 m 阶与 n 阶方阵, 则

$$1. \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ D & B \end{vmatrix} = |A| |B|; \quad \begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & D \end{vmatrix} = (-1)^{m \cdot n} |A| |B|.$$

特别, $A = A_{n \times n}, B = B_{n \times n}$ 都为 n 阶时, $\begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & D \end{vmatrix} = (-1)^n |A| |B|.$

2. 换位公式: 设 $A = A_{m \times n}, B = B_{n \times m}$ 则 $|xI_m - AB| = x^{m-n} |xI_n - BA|.$

3. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 则 $Ax = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$

“根定理” $A = A_{n \times n}$ 的全体特征根是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $f(x)$ 是多项式.

则 $f(A)$ 的全体特征根是 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n).$

第1章 矩阵与行列式自测题

一. 填空题:

记住公式: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$

1. 设 $A^T = -A$ 为奇数阶矩阵, 则 $|A| = \underline{0}$

2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad-bc=1, A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}};$ 3. $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 设 $X = \begin{pmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{pmatrix}$, 已知 A^{-1}, C^{-1} 存在, 则 $X^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$

5. 设 A 为三阶矩阵, $|A|=1$, 则 $|2A^{-1} + 3A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 已知 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $(A^{-1})^* = \underline{\hspace{2cm}};$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2009} = ?$

二. 选择题:

1. 设 A, B 都是 n 阶方阵, 下面结论正确的是 ()

(A) 若 A, B 均可逆, 则 $A+B$ 可逆 (B) 若 A, B 均可逆, 则 AB 可逆

(C) 若 $A+B$ 可逆, 则 $A-B$ 可逆 (D) 若 $A+B$ 可逆, 则 A, B 均可逆

2. A 是 n 阶矩阵, k 是非零常数, 则行列式 $|(kA)^*|$ 等于 ()

(A) $k|A|^{n-1}$ (B) $|k||A|^{n-1}$ (C) $k^{n(n-1)}|A^*|$ (D) $k^n|A|^{n-1}$

$$3. A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} - a_{21} & a_{32} - a_{22} & a_{33} - a_{23} \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 设}$$

$P_2 P_1 A = B$, 则初等阵 $P_2 = (\quad)$

$$(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (B) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (D) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. A, B 都是 n 阶非零矩阵, 且 $AB = 0$, 则 A 和 B 的秩 ()

(A) 必有一个等于零 (B) 都小于 n (C) 一个小于 n , 一个等于 n (D) 都等于 n

5. A, B 是 3 阶阵, X 满足 $AXA - BXB = BXA - AXB + I$, I 是单位阵, 则 $X = (\quad)$

(A) $(A^2 - B^2)^{-1}$; (B) $(A - B)^{-1}(A + B)^{-1}$; (C) $(A + B)^{-1}(A - B)^{-1}$; (D) 不能确定.

三. 1. 把 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 分解为列向量与行向量的积, 并计算 A^{100} 与 A^n .

2. 求下列矩阵的逆矩阵:

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textcircled{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textcircled{3} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

3. k 取什么值时, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆, 并求其逆.

4. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ 的秩 $r(A) = 1$, 求 k 的值. ($k = 1$)

四. 1. 设 $A = \frac{1}{2}(B + I)$, I 为单位矩阵, 证明 $A^2 = A$ 当且仅当 $B^2 = I$.

2. (1) 若 A 可逆, 则 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$; (2) 若 A 是正交阵 ($AA^T = I$), 则 $(A^*)^T = (A^*)^{-1}$

(3) 若 A 是 3 阶正交阵, $|A| = -1$, 则 $|A + I| = 0$, $|A^2 - I| = 0$.

3. 设 A 是 n 阶方阵, 若 $(A + I)^m = 0$, 则 A 可逆.

参考答案

一. 1. 0; 2. $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$; 5. 125; 6. $-2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

二. 选择: 1. B; 2. C; 3. B; 4. B; 5. B.

三. 计算: 1. $A = -\alpha\alpha^T$, $\alpha = (1, 1, 1, 1)^T$; 先计算 $n=2$, 然后对 n 进行分析.

2. (1) $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. 当 $k \neq 0$ 时可逆, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ -1 & 1/k & 1 \end{pmatrix}$.

四. 证明题: 1. 必要性: $A^2 = A$, $A^2 = [\frac{1}{2}(B+I)]^2 = A = \frac{1}{2}(B+I)$,

即 $B^2 + 2B + I = 2(B+I) = 2B + 2I$, 所以 $B^2 = I$.

充分性: $B^2 = I$, 有 $A^2 = [\frac{1}{2}(B+I)]^2 = \frac{1}{2}(B+I) = A$.

3. $(A+I)^m = A^m + C_m^1 A^{m-1} + \dots + C_m^{m-1} A + I = 0$, 故 $A(-A^{m-1} - C_m^1 A^{m-2} - \dots - C_m^{m-1} I) = I$.

行列式补充题

一. 选择题:

1. 若一个 $n(n \geq 2)$ 级行列式 D 中元素或为 1 或为 -1, 则 D 的值 ()

A. 1 B. -1 C. 奇数 D. 偶数

2. 已知多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & a_{13} + x & a_{14} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & a_{23} + x & a_{24} + x \\ a_{31} + x & a_{32} + x & a_{33} + x & a_{34} + x \\ a_{41} + x & a_{42} + x & a_{43} + x & a_{44} + x \end{vmatrix}$ 则 $f(x)$ 的最高次数是 ()

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

二. 填空题:

1. 排列 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ 的逆序数等于 3, 排列 $a_5 a_4 a_3 a_2 a_1$ 的逆序数等于_____;

2. 四阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 展开公式中, 含 a_{24} 且带负号的项数为_____;

3. 行列式 $D = |a_{ij}|_{n \times n} = c$, 现在将每个 a_{ij} 替换为 $(-1)^{i-j} a_{ij}$, 则替换后行列式 $D = \underline{\hspace{2cm}}$;

三. 判断题:

1. n 阶行列式 D 中有多于 $n^2 - n$ 个元素为零, 则 $D=0$ ();

2. $D=0$, 则互换 D 的任意两行或两列, D 的值仍为零. ();

3. $D = |a_{ij}|_{3 \times 3}$, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 则 $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$. ();

四. 计算 1.
$$\begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$
 2.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix};$$
 3.
$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

五 证明 1.
$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3; 2. \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & \dots & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} a_1 \dots a_n$$

3. 证明:
$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right);$$

4. 证明: n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \cos \theta & 1 & & & \\ & 1 & 2 \cos \theta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 2 \cos \theta \end{vmatrix} = \cos n \theta.$

参考答案

一. 选择题答案: 1. D; 2. D;

1. 根据行列式展开, 总共有 $n!$ 项相加, 而由题可知每一项为 1 或者 -1, 而 $n!$ 在 $(n \geq 2)$ 时为偶数, 偶数个奇数相加为偶数, 故选 D.

2. 第 2, 3, 4 行分别减去第一行后, 则只有第一行含 x , 再按第一行展开知 $f(x)$ 最高次数为 1. 选 D.

3. 由于存在三阶矩阵 $B \neq 0$ 使得 $AB=0$, 故方程组 $AX=0$, 有非 0 解, 故 A 的行列式为 0, 计算可得 $|A| = (\lambda - 1)^2$ 故 $\lambda = 1$. 故选 C.

二. 填空题 1. 答案为 7; 2. 答案为 3; 3. 答案为 c ; 详细解答:

1. $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ 中的两两关系有 $C_5^2 = 10$ 个, 3 个是逆序数, 7 个是顺序数

那么原来 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ 中的逆序组到 $a_5 a_4 a_3 a_2 a_1$ 中变成了顺序组,

原来 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ 中的顺序组到 $a_5 a_4 a_3 a_2 a_1$ 中变成了逆序组. 故答案为 7.

2. 我们按 a_{24} 展开, 得到 $(-1)^{2+4} a_{24} |A_{24}|_{3 \times 3}$, 而 3 阶行列式展开式中有 3 个负数项,

故含 a_{24} 的负数项数目为 3. 答案为 3.

3. $D = |a_{ij}|_{n \times n}$ 展开的每一项为 $(-1)^{\tau(i_1 i_2 \dots i_n)} a_{1 i_1} \dots a_{n i_n}$, 而替换后为

$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \dots i_n)} a_{1 i_1} \dots a_{n i_n} (-1)^{(1+2+\dots+n)-(i_1+i_2+\dots+i_n)}$. 显然 $(1+2+\dots+n)-(i_1+i_2+\dots+i_n)=0$ 故每一项没有改变, 所以 D 的值也没有变. 答案为 c.

三. 判断题答案: 1. \checkmark ; 2. \checkmark ; 3. \checkmark ; 简析:

1. 由抽屉原理得至少有一行多于 $n^2 - n/n = n-1$ 个 0, 即必有一行有 n 个 0, 故行列式为 0.

2 由行列式性质可知, 交换只是改变符号; 3. 列排 1234 与 1432.; 4. 由行列式性质可知,;

$$\begin{aligned} \text{四. 1. } & \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix} \stackrel{r_1+(r_2+\dots+r_n)}{=} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \dots & x+(n-1)a \\ a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix} \\ & = [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix} = (x-a)^{n-1} [x+(n-1)a] \end{aligned}$$

$$2. \text{ 设 } f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$$

则 $f(x) = (x^4 - (a+b+c+d)x^3 + \dots + abcd)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$

$$\text{另一方面 } f(x) \text{ 展开式中含 } x^3 \text{ 的项是 } -x^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}, \text{ 两式相比较可得}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = -(-(a+b+c+d))(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a) \\ = (a+b+c+d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$$

$$3. \begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y \end{vmatrix} = x^n + (-1)^{n+1} y^n$$

$$\text{五.1 证: } \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & b(a-b) & 0 \\ 2a-2b & a-b & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-2ab+b^2 & 0 & 0 \\ 2a-2b & a-b & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3.$$

$$2. \text{ 证: 把 } \begin{vmatrix} 0 & & a_1 \\ & \ddots & \\ a_n & & * \end{vmatrix} \text{ 按第一行展开得: } \begin{vmatrix} 0 & & a_1 \\ & \ddots & \\ a_n & & * \end{vmatrix} = (-1)^{1+n} a_1 \begin{vmatrix} 0 & & a_2 \\ & \ddots & \\ a_n & & * \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)},$$

$$\text{由此类推得 } \begin{vmatrix} 0 & & a_1 \\ & \ddots & \\ a_n & & * \end{vmatrix} = (-1)^{(n+1)+n+\dots+2} a_1 \dots a_n = (-1)^{n(n-1)/2} a_1 a_2 \dots a_n.$$

$$3. \text{ 证: } \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}+\dots+\frac{a_1}{a_n} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \dots a_n (1 + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n})$$

$$4. \text{ 证: 对阶 } n \text{ 用归纳法, } D_1 = \cos \theta; D_2 = \begin{vmatrix} \cos \theta & 1 \\ 1 & 2 \cos \theta \end{vmatrix} = 2 \cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$$

假设 $D_{n-1} = \cos(n-1)\theta$, $D_{n-2} = \cos(n-2)\theta$ 对 D_n 按第 n 行展开得

$$D_n = 2 \cos \theta \cdot D_{n-1} + 1 \cdot (-1)^{n+(n+1)} \begin{vmatrix} \cos \theta & 1 & & & \\ 1 & 2 \cos \theta & \ddots & & \\ & 1 & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 2 \cos \theta & 0 \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cos \theta \cdot \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta = \cos(\theta+(n-1)\theta) + \cos(\theta-(n-1)\theta) - \cos(n-2)\theta$$

$$= \cos n\theta \quad \text{归纳法成立.}$$

第2章 向量组自测题

一. 判断题:

1. 如果向量组 a_1, a_2, \dots, a_n 线性相关, 那么这个向量组一定有两个成正比例 ().
2. 若 n 维向量组 a_1, \dots, a_n 线性相关, 则 n 维向量组 a_1, \dots, a_n, a_{n+1} 也线性相关 ().
3. 如果两个向量组的秩相等, 那么这两个向量组等价. ()
4. V 是实数域上的 n 维向量空间, a_1, \dots, a_n 是 V 中 n 个线性无关的向量,

则 V 中任一向量可由 a_1, \dots, a_n 线性表示 ()

二. 填空题:

1. 已知向量组 $a_1 = (1, 2, 3, 4)$, $a_2 = (2, 3, 4, 5)$, $a_3 = (3, 4, 5, 6)$,

$a_4 = (4, 5, 6, 7)$, 则该向量组的秩为_____;

2. 一个向量 α 线性相关的充要条件是_____; 一个向量 α 线性无关的充要条件是_____; 两个向量 a_1, a_2 线性相关的充要条件是_____;

3. 设 $b = (3, 5, -6)$, $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1)$, $a_3 = (0, 1, -1)$ 则将向量 b 表示成 a_1, a_2, a_3 的线性组合为_____

4. 已知 n 维列向量组 a_1, \dots, a_n 线性无关, $A = (a_{ij})_{n \times n}$,

如果 Aa_1, Aa_2, \dots, Aa_n 线性相关, 则 $|A| =$ _____

5. 若 V 表示一切 2×2 的实对角矩阵按照矩阵的加法和数乘运算构成的向量空间, 则 V 的一组基为_____.

三. 选择题:

1. 向量组 $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1)$, $a_4 = (1, 1, 0)$ 的一个极大线性无关组是 ()

A. a_1, a_2 , B. a_1, a_2, a_3 , C. a_1, a_2, a_4 , D. a_1, a_2, a_3, a_4

2. 设向量组 a_1, a_2, a_3 与向量组 b_1, b_2 等价, 则 ()

A. 向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关; B. 向量组 b_1, b_2 线性无关; D. 向量组 b_1, b_2 线性相关

3. 设某向量组的秩为 r , 则下列对该向量组所下的结论中错误的是()

A. 任一线性无关的部分组含有 r 个向量; B. 所有含 $r+1$ 个向量的部分组都线性相关

C. 所有含 r 个向量的部分组都线性无关 D. 所有线性无关的部分组含有向量个数不超过 r

四. 计算题: 1. 设 a_1, a_2 线性无关, $a_1 + b, a_2 + b$ 线性相关, 用 a_1, a_2 表示向量 b .

2. $a_1 = (1, 1, 2, -4)^T, a_2 = (2, -3, 3, 1)^T, a_3 = (1, 1, 2, 0)^T, a_4 = (4, -6, 6, 2)^T$

(1) 求该向量组的秩; (2) 讨论它的线性相关性; (3) 求出它的极大无关组.

3. 已知 R^3 的两个基为: $a_1 = (1, 1, 1)^T, a_2 = (1, 0, -1)^T, a_3 = (1, 0, 1)^T$;

$b_1 = (1, 2, 1)^T, b_2 = (2, 3, 4)^T, b_3 = (3, 4, 3)^T$

求由基 a_1, a_2, a_3 到基 b_1, b_2, b_3 的过渡矩阵 P .

五. 证明题:

1. 设 $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \dots, b_r = a_1 + a_2 + \dots + a_r$, 且向量组

a_1, a_2, \dots, a_r 线性无关. 证明向量组 b_1, b_2, \dots, b_r 线性无关.

2. 已知秩 $r(a_1, a_2, a_3) = 2, r(a_1, a_3, a_4) = 3$, 证明

(1) a_1 能由 a_2, a_3 线性表示; (2) a_4 不能由 a_1, a_2, a_3 线性表示.

3. 设 a_1, \dots, a_n 是一组 n 维向量, 证明它们线性无关的充分必要条件是: 任一 n 维向量都可由它们线性表示.

4. 设 $V_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, \dots, x_n \in R \text{ 满足 } x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$

$V_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, \dots, x_n \in R \text{ 满足 } x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\}$

问: V_1, V_2 是不是向量空间? 给出证明.

5. 试给出线性方程组 $A_{m \times n} x = 0$ 有形如 $x = (1, x_2, \dots, x_n)^T$ 解 (即要求 $x_1 = 1$, 而 x_2, \dots, x_n 不作要求) 的一个充要条件, 并证明你的结论.

参考答案: 一. 1. \times ; 2. \checkmark ; 3. \times ; 4. \checkmark ;

二. 1. 2; 2. $\alpha=0$; $\alpha \neq 0$; 存在常数 k 满足 $a_1 = ka_2$ 或 $a_2 = ka_1$;

$$3. \quad b = 7a_1 - 4a_2 + 9a_3 \quad ; \quad 4. \quad 0 \quad ; \quad 5. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

三. 1. B; 2. A; 3. A 与 C ;

四. 1. 存在不全为零的数 λ_1, λ_2 使 $\lambda_1(a_1+b) + \lambda_2(a_2+b) = 0$, 由此得

$$b = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}a_1 - (1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2})a_2.$$

$$2. \quad \text{令 } A = (a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以该向量组秩为 3, 它是线性相关的, 极大无关组分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$.

$$3. \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

五. 1. 提示: 设 $k_1b_1 + k_2b_2 + \cdots + k_rb_r = 0$, 则

$$(k_1 + \cdots + k_r)a_1 + (k_2 + \cdots + k_r)a_2 + \cdots + (k_p + \cdots + k_r)a_p + \cdots + k_ra_r = 0.$$

2. (1) 由秩 $r(a_2, a_3, a_4) = 3$, 知 a_2, a_3 线性无关. 又 $r(a_1, a_2, a_3) = 2$ 知 a_1, a_2, a_3 线性相关, 故 a_1 能由 a_2, a_3 线性表示;

(2) a_1 能由 a_2, a_3 线性表示, 若 a_4 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示, 则 a_4 能由 a_2, a_3 线性表示, 从而 a_2, a_3, a_4 线性相关, 矛盾.

3. 必要性: 设 α 为任一 n 维向量. a_1, \cdots, a_n 线性无关, 而 a_1, \cdots, a_n, a 线性相关, 则 α 能由 a_1, \cdots, a_n 线性表示.

充分性: 任一 n 维向量都可由 a_1, \cdots, a_n 线性表示, 故单位向量组 e_1, e_2, \dots, e_n 能由 a_1, \cdots, a_n 线性表示, 于是有秩关系 $r(e_1, \dots, e_n) \leq r(a_1, \cdots, a_n)$,

即 $r(a_1, \cdots, a_n) = n$, 故 a_1, \cdots, a_n 线性无关.

4. V_1 是向量空间, V_2 不是向量空间.

5. 记 $A_{m \times n} = (a_1, \cdots, a_n)$. 则方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 有形如

$x = (1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 解的一个充要条件是 a_1 可由 a_2, \cdots, a_n 线性表示.

证: $x = (1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是 $A_{m \times n} x = 0$ 的解当且仅当

$a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = 0$ 当且仅当 $a_1 = -x_2 a_2 - \dots - x_n a_n$ 当且仅当 a_1

可由 a_2, \dots, a_n 线性表示.

第3章 线性方程组自测题

一. 选择题:

1. 设 A 是 $m \times n$, 则 $m < n$ 是齐次线性方程组 $A^T A X = 0$ 有非零解的()
A. 必要条件 B. 充分条件 C. 充要条件 D. 以上都不对
2. 设 A 是 n 阶实矩阵, A^T 为 A 的转置, 对于方程组(I) $A X = 0$ 与(II) $A^T A X = 0$ 必有()
A. (II) 的解是(I) 的解, 但(I) 的解不是(II) 的解.
B. (II) 的解是(I) 的解, (I) 的解也是(II) 的解. C. (I) 解是(II) 的解但(II) 解不是(I) 的解
3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是四元齐次线性方程组 $A X = b$ 的三个解向量, 且 $r(A) = 3$,
 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (0, 1, 2, 3)^T$, C 为任意数, 则方程组 $A X = b$ 的通解 $X =$ ()
A. $(1, 2, 3, 4)^T + C(1, 1, 1, 1)^T$; B. $(1, 2, 3, 4)^T + C(0, 1, 2, 3)^T$
C. $(1, 2, 3, 4)^T + C(2, 3, 4, 5)^T$; D. $(1, 2, 3, 4)^T + C(3, 4, 5, 6)^T$
4. 要使 $\xi_1 = (1, 0, 1)^T, \xi_2 = (-2, 0, 1)^T$ 都是方程组 $A x = 0$ 的解, 只要系数阵 A 为()
A. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
5. 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是 $A x = 0$ 的基础解系, 则该方程组的基础解系还可以表成()
A. ξ_1, ξ_2, ξ_3 的一个等价向量组 B. ξ_1, ξ_2, ξ_3 的一个等秩的向量组
C. $\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ D. $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$
6. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + kx_3 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ kx_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解, 则 k 应满足()
A. $k \neq \frac{3}{5}$ B. $k = \frac{3}{5}$ C. 无解 D. 全体实数
7. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 是非齐次方程组 $A x = b$ 的 s 个解, 若 $C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 + \dots + C_s \alpha_s$ 也是 $A x = b$ 的解, 则 $C_1 + \dots + C_s$ 等于(); 特别 $(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) / s$ 也是 $A x = b$ 的解
A. 0 B. 1 C. -1 D. 2.

二. 填空题:

1. 设方程组
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$
 的每一个方程都表示一个平面, 若系数阵的秩为 3, 则三个

平面的关系是_____;

2. 设 A 为 4 阶方阵, 秩 $r(A)=2$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $A^*X=0$ 的解空间维数是_____

3. 已知方程组
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 无解, 则 $a=$ _____;

4. A 、 B 都是 n 阶矩阵, 且 $A \neq 0$, $AB=0$, 则 $|B|=$ _____;

5. 设 α_1, α_2 是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系, 则向量组: $\beta_1=\alpha_1+t_1\alpha_2, \beta_2=\alpha_2+t_2\alpha_1$ 也可作为 $Ax=0$ 的基础解系的充要条件是, 常数 t_1, t_2 满足条件_____;

6. 方程组 $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ 的基础解系是_____;

7. 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和为 0, 且秩为 $n-1$, 则方程组 $Ax=0$ 的通解为_____.

三. 计算题 1. 设齐次线性方程组
$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + bx_4 = 0, \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + bx_4 = 0, \\ bx_1 + bx_2 + ax_3 + bx_4 = 0, \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + ax_4 = 0, \end{cases} \quad (a \neq 0, b \neq 0.)$$

讨论 a, b 为何值时方程组有非零解? 在有非零解时求它的一个基础解系.

2. 求线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 = -1 \end{cases}$$
 的通解.

3. 当 λ 取何值时, 方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2 \end{cases}$$
 有唯一解、无解、有无穷多解? 在有无穷多解

时, 求出通解.

4. 设有方程组
$$\begin{cases} a x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + b x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2b x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

1) a, b 取何值时, 方程组有唯一解; 2) a, b 取何值时, 方程组无解;

3) a, b 取何值时, 方程组有无穷多解, 并求出通解.

础解表示方程组的通解.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,2n}x_{2n} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,2n}x_{2n} = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,2n}x_{2n} = 0 \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1,2n}x_{2n} = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2,2n}x_{2n} = 0 \\ \vdots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{n,2n}x_{2n} = 0 \end{array} \right.$$

四. 证明题

- ## 参考答案

若 x 是 $A^T Ax = 0$ 的解, 则 $x^T A^T Ax = 0$, 即 $(Ax)^T (Ax) = 0$ 。

若 $Ax \neq 0$ 不妨设 $Ax = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T, b_1 \neq 0$, 则 $(Ax)^T(Ax) = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 > 0$ 与

$(Ax)^T(Ax) = 0$ 矛盾, 因而 $Ax = 0$, 即(I)、(II)同解.

3.C. 因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程组 $AX=b$ 的三个解, 故 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 是其导出组 $AX=0$ 的解, 由解的性质可知 $(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_3) = 2\alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) = (2, 3, 4, 5)^T$ 是 $AX=0$ 的解, 又 $r(A)=3$ 故 $AX=0$ 的基础解系含一个解向量, 方程 $AX=b$ 的通解 $X = (1, 2, 3, 4)^T + C(2, 3, 4, 5)^T$.

4. 答案 D. 因为 D. $r(A)=1$, 所以方程组 $Ax=0$ 的基解系含解向量个数为: $3 - r(A)=2$. 故选 D.

5. C. 由于 $k_1\xi_1 + k_2(\xi_1 + \xi_2) + k_3(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = 0$ 得

$k_3\xi_3 + \xi_2(k_1 + k_2) + \xi_1(k_1 + k_2 + k_3) = 0$. 因为 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是 $Ax=0$ 的基础解系, 所以

ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关. 于是 $k_3 = 0, k_2 + k_3 = 0, k_1 + k_2 + k_3 = 0$, 所以 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$,

则 $\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ 线性无关. 它们也可以是方程组的基础解系, C 是答案.

6. A. $\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & k & 3 \end{vmatrix} \neq 0, 3 + 2k - k - 6k \neq 0, k \neq \frac{3}{5}$ 时, 方程组只有零解.

7. B. 因为 $A\alpha_i = b$, 且 $A(C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \dots + C_s\alpha_s) = b$, 所以

$(C_1 + C_2 + \dots + C_s)b = b \Rightarrow C_1 + C_2 + \dots + C_s = 1$.

二. 填空题:

1. 相交于一点. 因 $r(A)=3$, 故此方程组有唯一解, 三平面交于一点

2. 4. $r(A)=2 < 4-1$, 故 $r(A^*)=0$, 即 $A^*=0$, 则 $A^*X=0$ 的基础解系含 $4-0=4$ 个解

3. -1. 因增广阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{pmatrix}$, 若 $a=-1$, 则

$r(\bar{A})=3 \neq R(A)=2$, 故方程无解.

4. 0. 因 $AB=O$, 则 B 的列向量组是方程 $AX=0$ 的解, 故 $r(A)+r(B) \leq n$, 又 $A \neq 0$, 则

$r(B) < n, |B|=0$.

5. $1-t_1t_2 \neq 0$. β_1, β_2 为 $Ax=0$ 的基础解系, 即 β_1, β_2 线性无关, 只有当 $k_1 = k_2 = 0$

使得 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = 0$, 即: $k_1(\alpha_1 + t_1\alpha_2) + k_2(\alpha_2 + t_2\alpha_1) = 0$ 有:

$\alpha_1(k_1 + t_2k_2) + \alpha_2(k_2 + t_1k_1) = 0$. α_1, α_2 线性无关, 所以 $\begin{bmatrix} 1 & t_2 \\ t_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 因此

得 $1-t_1t_2 \neq 0$.

6. $\xi_1 = (-1, 1, 0)^T, \xi_2 = (1, 0, 1)^T$.

7. $k(1 \ 1 \ \cdots \ 1)^T, r(A) = n-1$, 则 $Ax = 0$ 的基础解系只有一个向量. 设 $Ax = 0$ 的第 i 个方程为 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0$, 又矩阵 A 的各行元素之和为 0, 即

$a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = 0$, 所以 $(1, 1, \cdots, 1)^T$ 为它的一个解向量, 得 $Ax = 0$ 的通解为 $k(1, 1, \cdots, 1)^T$.

三. 计算题: 1.
$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^3(a+2b),$$
 当 $a=b$ 或 $a=-3b$ 时方程组有非零解.

当 $a=b$ 时: 方程组变为 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, 基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

当 $a=-3b$ 时: 方程组变为 $\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$, 基础解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. 解:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 3x_3 + 3x_4 \end{cases}$ 的基础解为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 2x_4 + 3 \\ x_2 = 3x_3 + 3x_4 - 2 \end{cases}$ 的一个特解是 $\eta_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

原方程的通解为 $\eta = \eta_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ k_1, k_2 是任意常数.

3. 解: $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$

(1) 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, $|A| \neq 0$, 则知, 方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda = -2$ 时, $\bar{A} = (A|b) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

秩 $A=2$, 秩 $(\overline{A})=3$, 故无解.

$$(3) \text{ 当 } \lambda=1 \text{ 时, } \overline{A}=(A|b)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{秩 } r(A)=r(\overline{A})=1<3, \text{ 有无穷多解, 通解为 } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$4. \text{ 系数阵 } A \text{ 与 } |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} = b(1-a). \quad (1) \text{ 当 } a \neq 1 \text{ 且 } b \neq 0 \text{ 时, 方程组有唯一解;}$$

$$(2) \text{ 当 } b=0 \text{ 时, 方程组为 } \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 4 \end{cases} \text{ 方程组无解; 当 } a=1 \text{ 时,}$$

$$\text{增广阵 } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore \text{ 当 } a=1, \text{ 且 } b \neq \frac{1}{2} \text{ 时方程组无解}$$

(3) 当 $a=1, b=\frac{1}{2}$ 时, 方程组有无穷多解.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 一般解 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. 先对增广矩阵进行初等行变换

$$\begin{aligned} \overline{A}=(A|b) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & \cdots & 3 \\ 1 & 5 & 10 & -1 & \cdots & 5 \\ 3 & 5 & 10 & 7 & \cdots & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & \cdots & 2 \\ 0 & 4 & 8 & -4 & \cdots & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & \cdots & a-3 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可知当 $a=5$ 时, 方程有解, 特解 $\gamma_0 = (0, 1, 0, 0)^T$ 导出组的基础解系为:

$\eta_1 = (0, -2, 1, 0)^T = (-4, 1, 0, 1)^T$, 原方程组的全部解为 $X = \gamma_0 + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2$, k_1, k_2 为任意常数.

6. 方程组(I)与(II)均有 $2n$ 个未知数;由已知条件(I)的一个基解系含有 n 个解向量,从而其系数阵的秩 $r(A)=2n-n=n$.将方程组(I)与(II)分别改写为矩阵形式: $Ax=0$ 与 $Bx=0$.由于 B 的行向量组是一个基础解系,故线性无关,所以秩 $r(B)=n$. 因此方程组(II)的一个基础解系含 n 个解向量.

由已知条件, B 的每一行的转置向量都是(I)的解, 即 $AB^T=0$. 从而知 $(AB^T)^T=0$, 即 $BA^T=0$. 因此 A 的每一行的转置向量都是(II)的解. 但 $r(A)=n$, 所以 A 的行向量线性无关, 因此 A^T 的全体列向量组恰好构成(II)的一个基础解系, 所以通解迎刃而解.

四. 证明题 1. 证明: 秩 $r(A)=m$, 所以方程组 $AX=0$ 的基础解系所含解向量的个数为 $n-r(A)=n-m$.

设 $B=(\beta_1, \dots, \beta_{n-m})_{n \times (n-m)}$ 为 $n \times (n-m)$ 矩阵, $r(B)=n-m$. 其中 β_i 为 B 的列向量

因为 $AB=0$, 所以 $(A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_{n-m})=0$, 即 B 的列都是 $Ax=0$ 的解, 又 $r(B)=n-m$,

所以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系.

所以满足 $A\alpha=0$ 的任意向量都是 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}$ 的唯一线性组合, 即存在唯一

的一数组 k_1, k_2, \dots, k_{n-m} , 使 $\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_{n-m}\beta_{n-m}$,

$$\text{令 } B=(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}), \text{ 则 } \alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-m} \end{pmatrix} = B\gamma.$$

2. 证明: 充分性: 假设 $Ax=b$ 的系数矩阵为 A ,

增广矩阵为 $\bar{A}=(A|b)$. 考察: I. $A^T x=0$, II. $\begin{cases} A^T x=0 \\ b^T x=0 \end{cases}$, 因为 $A^T Z=0$ 则 $b^T Z=0$,

所以(I)和(II)是同解方程组, $r(A^T)=r\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix}$. 即 $r(A)=r(\bar{A})$, 所以 $Ax=b$ 有解.

必要性: 考察 (1) $Ay=b$; (2) $A^T x=0$; (3) $b^T x=0$.

即要证明: 若(1)有解, 则(2)的解必为(3)的解.

假设 y 为(1)的解, 则 $Ay=b$. 取转置, 得 $y^T A^T = b^T$. 有设 x 为(2)的解, 即 $A^T x=0$. 则

$b^T x = y^T A^T x = y^T 0 = 0$, 所以 x 为 (3)的解.

3. 证明: 设 $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$ 其中 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, m)$ 为 A 的行向量

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 + \cdots + b_{1m}\alpha_m \\ b_{21}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \cdots + b_{2m}\alpha_m \\ \vdots \\ b_{m1}\alpha_1 + b_{m2}\alpha_2 + \cdots + b_{mm}\alpha_m \end{bmatrix}$$

因为 BA 的行向量都是方程组 $Dx=0$ 的解, 所以 $D(BA)^T=0$;

因为 B 可逆, 所以 $DA^T=0$, 即 A 的每个行向量为 $Dx=0$ 的解.

4. 证.: 作齐次方程组 $AX=0$ 与 $A^TAX=0$ 其中 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. 显然 $AX=0$ 的解必是 $A^TAX=0$ 的解. 反之, 若 X_0 是 $A^TAX=0$ 的解, 则有

$$A^TAX_0=0, \text{ 从而 } X_0^T A^TAX_0=0, \text{ 即 } (AX_0)^T(AX_0)=0.$$

设 $AX_0=(a_1, a_2, \dots, a_m)^T$, 则上式变成 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2 = 0$.

由于 a_1, a_2, \dots, a_m 都是实数, 所以 $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$ 即 $AX_0=0$.

因此 X_0 也是 $AX=0$ 的解. 于是 $AX=0$ 与 $A^TAX=0$ 同解.

由于同解线性方程组的基础解系中含有相同个数的解向量, 所以结论成立.

5. 证明: 必要性(反证法). 设 $|A| \neq 0$, 则 A^{-1} 存在. 当 $AB=0$ 时,

两边右乘 A^{-1} 得 $B=0$, 与存在一个非零矩阵 B , 使 $AB=0$ 矛盾. 所以 $|A|=0$.

充分性: 设 $|A|=0$, 则方程组 $Ax=0$ 有非零解 $x=(b_1, b_2, \dots, b_n)^T$. 构造矩阵

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ 则 } B \neq 0, \text{ 且 } AB=0.$$

第4章 特征值相似矩阵自测题

一. 填空题:

1. 设 n 阶矩阵 A 的元素全为1, 则 A 的 n 个特征值是_____;

2. A^* 为 n 阶阵 A 的伴随阵, $|A|=5$, 则 $B=AA^*$ 的特征值是_____, 特征向量是_____

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 且 A 的特征值为2和1(二重), 则 B 的特征值为_____

4. 三阶方阵 A 的特征值为1, -1, 2, 则 $B=2A^3-3A^2$ 的特征值为_____;

5. 设 n 阶方阵 A 的特征值为1, 2, ..., n , 则 $|2A+I| =$ _____;

6. 设可逆方阵 A 与 B 相似, 则有 A^{-1} 与 B^{-1} _____ (相似, 不相似);

7. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $x =$ _____, $y =$ _____.

二. 选择题:

1. 零为矩阵 A 的特征值是 A 为不可逆的()

(A) 充分条件 (B) 必要条件 (C) 充要条件 (D) 非充分、非必要条件

2. 设 $\lambda = 2$ 是可逆矩阵 A 一个特征值, 则矩阵 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 有一个特征值等于()

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

3. 与 n 阶单位矩阵 I 相似的矩阵是()

(A) 数量阵 $kI (k \neq 0)$ (B) 对角阵 D (对角元不为 1) (C) 单位矩阵 I (D) 可逆阵 A

4. 设方阵 $A \sim B$ 相似, 则()

(A) A, B 的特征矩阵相同 (B) A, B 的特征多项式相同

(C) A, B 相似于同一个对角阵 (D) 存在正交矩阵 T 使 $T^{-1}AT = B$

5. 3 阶阵 A 有特征值 $1, -2, 4$, 则下列矩阵中满秩矩阵是(), I 是单位阵

(A) $I - A$ (B) $A + 2I$ (C) $2I - A$ (D) $A - 4I$

6. 设 λ_0 是方阵 A 的特征值, 且方程组 $(\lambda_0 I - A)x = 0$ 的基础解系为 η_1, η_2 , 则 A 的属于 λ_0 的全部特征向量是()

(A); (B); (C) $c_1\eta_1 + c_2\eta_2$ (c_1, c_2 为任意常数); (D) $c_1\eta_1 + c_2\eta_2$ (c_1, c_2 为不全为零任意常数)

三. 计算题: 1. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

2. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 与矩阵 $B = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & b \end{bmatrix}$ 相似, 求 $a, b = ?$

3. 3 阶实对称阵的特征值为 $6, 3, 3$, 特征值 6 对应的特征向量为 $p_1 = (1, 1, 1)^T$, 求 A .

四. 证明题: 1. 设 A, B 都是 n 阶方阵, 且 $|A| \neq 0$, 证明 AB 与 BA 相似.

2. 如果 A 满足 $A^2 = A$, 则称 A 是幂等矩阵. 试证幂等阵的特征值只能是 0 或 1.

3. 设 α_1, α_2 分别是矩阵 A 的属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 试证: $\alpha_1 + \alpha_2$ 不再是 A 的特征向量.

参考答案

一. 填空题: 1. 答案: 特征值为 $\lambda_1 = n, \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. 因为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-n & -1 & \cdots & -1 \\ \lambda-n & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda-n & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-n)^n \lambda^n$$

故 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1 = n, \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

2. 答案: 因为 $AA^* = A^*A = |A|I$, 所以对于任意 n 维向量 α , 有 $AA^*\alpha = |A|I\alpha = |A|\alpha$. 所以 $|A| = 5$ 是 $B = AA^*$ 的特征值, 任意 n 维向量 α 为对应的特征向量.

3. 答: A, A^T 有相同的特征值. 所以 $B = A^T$ 和 A 有相同的特征值. B 的特征值为 2, 1, 1

4. $B = 2A^3 - 3A^2$ 的特征值为: $2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -1, 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 = -5, 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 4$.

5. 答案: $|2A + I| = \prod_{i=1}^n (2i+1)$, 因为 A 的特征值为 $1, 2, \dots, n \Rightarrow 2A + I$ 的特征值

为 $2i+1$ ($i=1, 2, \dots, n$), 故 $|2A + I| = \prod_{i=1}^n (2i+1)$

6. 答: 相似. 因为由相似 $A \sim B$ 定义, 且 A 可逆, 就得相似 $A^{-1} \sim B^{-1}$, 结论得证.

7. 答: $x=0, y=-1$. 因为 A, B 相似, 所以 $|A| = -2 = |B| = -2y$. 所以 $y = -1$.

由于相似矩阵的迹相等: $tr(A) = 2 + x = tr(B) = 2 + y - 1 = 2$. 于是 $x = 0$.

二. 选择题:

1. 答案 (C) 分析: 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 A 所有特征值则 $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$. 所以 0 为 A 的特征值 $\Leftrightarrow A$ 可逆.

2. (B) 分析: 由 $\lambda = 2$ 是 A 的一个特征值, 则 $\frac{1}{3}A^2$ 的一个特征值为 $\frac{1}{3} \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$, 得出 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$

对应的特征值为 $\frac{3}{4}$.

3. (C) 令 $P = I$ 为单位阵, 则 $P^{-1} = I$, 所以 $P^{-1}IP = I$, (C) 是答案.

4. 答案(B). 分析: $A \sim B$ 必有可逆阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$. 所以有相同的特征多项式如下:

$$|\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| |(\lambda I - A)| |P| = |\lambda I - A|.$$

5. (C) 分析: 满秩矩阵即非奇异阵, 因 $|2I - A| \neq 0$ (2 不是特征值), 故 $2I - A$ 为满秩阵.

6. (D) 分析: 因为齐次线性方程组 $(\lambda_0 I - A)x = 0$ 的基础解系为 η_1, η_2 , 所以方程组的全部解

为 $C_1\eta_1 + C_2\eta_2$ (C_1, C_2 为任意常数). 但特征向量不能为零, 则 A 的属于 λ_0 的全部特征

向量是 $C_1\eta_1 + C_2\eta_2$ (C_1, C_2 为不全为零任意常数). (D) 为答案.

三. 计算题:

1. 解: 先解特征方程 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$, 得 $(\lambda - 1)^2(\lambda - 10) = 0$

特征值是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$. 当 $\lambda = 1$ 时, 对特征矩阵作行变换

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为 $\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T, \alpha_2 = (2, 0, 1)^T$

当 $\lambda = 10$ 时, 也可得基础解系 $\alpha_3 = (1, 2, -2)^T$.

对应于 $\lambda = 1$ 的全部特征向量是 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$, 其中 c_1, c_2 是不全为零的常数; 对应于 $\lambda = 10$ 的

全部特征向量是 $c_3\alpha_3$, 其中 c_3 是任意非零常数

2. $\because A \sim B$ 相似 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = b$ 得 $\begin{cases} a-b=2 \\ a=0 \end{cases} \therefore \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \end{cases}$
 由特征值性质得 $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -2 + a + 1 \\ |A - \lambda_1 I| = 0 \end{cases}$

3. 解: 先求与特征值 3 对应的两个正交特征向量. 因不同特征值对应的特征向量是相互正交的,

则对应于特征值 3 的特征向量满足 $p_1^T x = 0$, 即 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 得两个无关的特征向量:

$$p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ 令 } P = (p_1, p_2, p_3), T = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}, \text{ 则有 } AP = PT,$$

故有
$$A = PTP^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

四. 证明题:

1. 证明: 因为 $|A| \neq 0$, 故 A^{-1} 存在. 又 $BA = A^{-1}ABA$, 这说明 AB 相似于 BA .

2. 证明: 设 $A\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}, (\vec{\alpha} \neq \vec{0})$, 两边同时左乘 A , 得

$$A\vec{\alpha} = \lambda A\vec{\alpha} \Rightarrow A\vec{\alpha} = \lambda\lambda\vec{\alpha} \Rightarrow \lambda\vec{\alpha} = \lambda^2\vec{\alpha}. \text{ 可得 } (\lambda - \lambda^2)\vec{\alpha} = \vec{0}.$$

因为 $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, 所以有 $\lambda - \lambda^2 = 0$, 得 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$.

3. 证明: 反证法: 若 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 A 的特征向量, 则由定义可得存在 λ , 使得

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2) \dots \dots \dots (1)$$

由于 α_1, α_2 分别是矩阵 A 的属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 则

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2, \text{ 即 } A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 \dots \dots \dots (2)$$

结合 (1), (2) 可得 $\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$, 即

$$(\lambda - \lambda_1)\alpha_1 + (\lambda - \lambda_2)\alpha_2 = 0$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 所以 α_1, α_2 线性无关, 则对于上式有 $\lambda - \lambda_1 = 0, \lambda - \lambda_2 = 0$

这与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾. 所以假设不成立, 即 $\alpha_1 + \alpha_2$ 不是 A 的特征向量.

特征值与正交矩阵补充题

1. 设 n 阶方阵 A 有 n 个特征值 $0, 1, \dots, n-1$, 且阵 B 与 A 相似, 求 $|B+I|$ 的值.

解 B 与 A 相似, B 与 A 有相同特征值 $0, 1, 2, \dots, n-1$, 令 $f(x) = x+1$, 则 $f(B) = B+I$

有特征值 $f(0) = 1, f(1) = 2, \dots, f(n-1) = n$ 于是 $|B+I| = |f(B)| = n!$.

2. 设 n 阶方阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 属于 λ_i 的特征向量为 α_i , 试求

(1) $P^{-1}AP$ 的特征值与相应的特征向量; (2) $(P^{-1}AP)^T$ 的特征值.

解 (1) 因为 A 与 $P^{-1}AP$ 相似, 它们有相同的特征值, 所以 $P^{-1}AP$ 的全部特征值也是

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n. \text{ 因 } A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i, \text{ 两端左乘 } P^{-1}, \text{ 得到 } P^{-1}A\alpha_i = \lambda_i P^{-1}\alpha_i$$

即 $P^{-1}AP(P^{-1}\alpha_i) = \lambda_i(P^{-1}\alpha_i)$, 所以 $P^{-1}\alpha_i$ 是 $P^{-1}AP$ 的属于 λ_i 的特征向量.

3. 设 n 阶矩阵 A 有 n 个两两正交的特征向量, 证明 A 是对称矩阵.

证 设 A 的 n 个两两正交的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 对应特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 令 $\eta_i = \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}$

($i=1, 2, \dots, n$), 则 η_1, \dots, η_n 是 n 个正交单位特向量, 于是 $P = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ 为正交阵.

从而有 $P^{-1} = P^T$, 且 $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \Lambda$

即 $A = PAP^{-1} = P\Lambda P^T$. 所以 $A^T = (P\Lambda P^T)^T = P\Lambda P^T = A$, A 是对称矩阵.

4. 设 A 为实称阵, B 为实反对称阵, 且 $AB = BA$, $A-B$ 是可逆的, 则 $(A+B)(A-B)^{-1}$ 是

正交阵. 证明: 因 $AB = BA$, 所以 $(A+B)(A-B) = (A-B)(A+B)$ 于是

$$\begin{aligned} [(A+B)(A-B)^{-1}][& (A+B)(A-B)^{-1}]^T = (A+B)(A-B)^{-1}[(A-B)^{-1}]^T(A+B)^T \\ &= (A+B)[(A-B)^T(A-B)]^{-1}(A-B) = (A+B)[(A+B)(A-B)]^{-1}(A-B) \\ &= (A+B)[(A-B)(A+B)]^{-1}(A-B) = (A+B)(A+B)^{-1}(A-B)^{-1}(A-B) = I \end{aligned}$$

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & a \\ 1 & a & a \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 当 A 的特征值之和最小时, 求正交阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解 对矩阵 A 实行初等行变换:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & a \\ 1 & a & a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1; r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-1 \\ 0 & a-1 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-1 \\ 0 & a-3 & 0 \end{pmatrix} \text{ 因 } r(A) = 2 \text{ 故}$$

$a=1$, 或 $a=3$. 由 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, 要使 A 特征值之和最小, 取 $a=1$, 于是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 特征多项式为 } |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$$

故特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$. 当 $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程 $Ax = 0$

$$\text{得特征向量 } \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ 单位化得 } p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{当 } \lambda_2 = 1 \text{ 时, 解方程 } (A - I)x = 0, \text{ 由 } A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{得特征向量 } \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 单位化得 } p_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{当 } \lambda_3 = 4 \text{ 时, 解方程 } (A - 4I)x = 0, \text{ 由 } A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{得特征向量 } \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 单位化得 } p_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 于是得正交矩阵:}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \text{ 且有 } P^T A P = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

6. 已知 n 阶阵 A 的全部特征值及与之对应 n 个线性无关特征向量, 怎样反求矩阵 A ?

答 利用对角化方法. 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ (对角阵), 则 $A = P\Lambda P^{-1}$

设 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, n 个线性无关的特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 则 A 可对角化,

令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 求出逆阵 P^{-1} , 则有 $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 于是求得

$$\text{方阵 } A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}. \text{ (注意, 若 } P \text{ 还是正交阵则得到 } A \text{ 为实对称阵)}$$

7. 对于实对称矩阵 A , 如何求正交矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵?

答 若 A 为 n 阶实对称阵, 则一定有正交阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵. 可按以下步骤求正交阵 P .

(1) 求出方阵 A 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 重根数分别为 k_1, k_2, \dots, k_s .

(2) 对每一个 λ_i (重数为 k_i), 求出齐次方程组 $(A - \lambda_i I)x = 0$

的基础解系 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 再正交单位化 (若 $k_i = 1$ 则只须单位化)

得正交单位特征向量组: p_1, p_2, \dots, p_n

(3) 令 $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ (正交矩阵), 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

第 5 章 二次型自测题

一. 填空题: 1. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 1 \\ 8 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 对应的二次型为 $f(x_1, x_2, x_3) = \underline{\hspace{2cm}}$;

2. 将 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 - 2x_3x_4$ 化为标准形 $\underline{\hspace{2cm}}$;

3. 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 经正交变换 $x = Py$ 可化成标准形 $f = 6y_1^2$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 若二次型 $f = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$

5. 如果 A 是正定矩阵, 那么 A^{-1} $\underline{\hspace{1cm}}$ (是, 不是) 正定矩阵

6. 二次型 $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ $\underline{\hspace{1cm}}$ (是, 否) 正定.

二. 选择题: 1. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ 的标准形是 ()

(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; (B) $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$; (C) $y_1^2 + y_2^2$; (D) $y_1^2 - y_2^2$

2. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 的秩等于 ()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

3. n 阶实对称阵 A 为正定的充分必要条件是 ()

(A) 所有 k 阶子式为正 ($k = 1, \dots, n$); (B) A 的所有特征值非负; (C) A^{-1} 为正定矩阵;

4. 设 A, B 是 n 阶正定矩阵, 则 () 是正定矩阵

(A) $A^* + B^*$; (B) $A^* - B^*$; (C) $A^* B^*$; (D) $k_1 A^* + k_2 B^*$

5. 已知二次型 $f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2, 则 c 的值为 ()

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

6. 实二次型 $f = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2$ 是 ()

(A) 正定二次型; (B) 半正定二次型; (C) 半负定二次型; (D) 不定二次型.

三. 计算题: 1. 用“许米特”方法, 将矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的列向量正交单位化(规范化).

2. 用非退化(可逆)线性替换, 化下面二次型为标准形, 并利用矩阵验算所得结果:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2.$$

3. t 取什么值时, 二次型 $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 是正定的:

四. 证明题: 1. 证明: 下列矩阵合同, 其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$

2. 如果 A, B 都是 n 阶正定矩阵, 证明: $A + B$ 也是正定矩阵.

3. (1) 设 A 是实对称矩阵, 证明: 当实数 t 充分大后, $tI + A$ 是正定矩阵.

(2) 设 A, B 为同阶实对称阵, B 是正定阵, 则当实数 t 充分大时, $tB + A$ 是正定阵.

参考答案

一. 填空: 1. 应填为 $16x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

2. 作可逆线性替换 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_3 - y_4, \\ x_4 = y_3 + y_4. \end{cases}$ 得 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2 + 2y_4^2$.

3. 变换前后二次型所对应的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

由 A 与 B 相似, A, B 有相同特征值. 于是 $a + a + a = 6 + 0 + 0$, 得 $a = 2$. 答: 填 2.

4. 分析: f 是正定的充要条件是对应的矩阵的各阶顺序主子式大于零, 因此由

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} > 0, \text{ 解得 } -\sqrt{2} < t < \sqrt{2}. \quad \text{答案: 应填 } -\sqrt{2} < t < \sqrt{2};$$

5. 分析: A 是正定, 故 $X^T A X$ 为正定二次型, 作可逆替换 $X = A^{-1} Y$, 又 A^{-1} 也是对称阵, 故 $Y^T A^{-1} Y = Y^T (A^{-1})^T A A^{-1} Y = X^T A X > 0$, 从而 $Y^T A^{-1} Y$ 为正定二次型, 即 A^{-1} 为正定阵.

6. 分析: 记二次型矩阵为 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ \frac{1}{2}, & i \neq j \end{cases}$

$$\text{即 } A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ & & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

由于 A 的任意 k 阶顺序主子式所对应的矩阵 A_k 与 A 为同类型的对称矩阵, 且

$$|A_k| = \left(\frac{1}{2}\right)^k (k+1) > 0, \quad (k=1, 2, \cdots, n), \text{ 故二次型为正定二次型.}$$

二. 选择题: 1. (A) 二次型可化为: $f = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2$, 做以下代换

令 $y_1 = x_1 - x_2, y_2 = x_2 + x_3, y_3 = x_3$, 则 $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, 答案选 (A).

2. (D) 分析: 由于二次型对应矩阵的行列式不为零, 则是满秩的, 因此秩为 3.; 3 (C).

4 (A) 因 A, B 均为 n 阶正定矩阵, 则 A^*, B^* 均为正定阵, 所以 $A^* + B^*$ 为正定阵. 答案(A).

5. (C) 分析 $f = X^T A X$, 若要求秩为 2, 则必须 $|A| = 0$, 而 $|A| = 4 \times (-18 + 6c)$ 所以 $c = 3$.

6. (B) 分析 $f = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2$ 代换可得 $f = y_1^2 + y_2^2$, 负惯性指数为零, 为半正定.

三. 计算题: 1. 解: 设 $\alpha_1 = (1 \ 1 \ 1)^T, \alpha_2 = (1 \ 0 \ 1)^T, \alpha_3 = (1 \ 1 \ 0)^T$.

(1) 设 $\beta_1 = \alpha_1$ 用正交化公式得: (2) $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \beta_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = \left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right]^T$

(3) $\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \beta_1, \alpha_3 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \beta_2, \alpha_3 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2 = \left[\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right]^T$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 单位化得:

$$e_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \text{ 得正交阵 } Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

2. 配方法得: $f = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2$

则原二次型为标准形 $f = y_1^2 + y_2^2$, 其中令 $y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_2 + 2x_3, y_3 = x_3$.

且非退化(可逆)线性替换为 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 相应的替换阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

且有 $P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. 解: 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, 若 A 的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} > 0$$

时原二次型为正定, 由此得 $\begin{cases} 1-t^2 > 0 \\ -5t^2-4t > 0 \end{cases}$, 解不等式可得 $-\frac{4}{5} < t < 0$.

四.证明题:1. 证明: 题中两个矩阵分别设为 A, B , 与它们相应的二次型分别为

$$f_A = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2; f_B = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

作可逆线性替换 $y_t = x_{i_t} (t=1, 2, \dots, n)$ 则 f_B 可化成 f_A , 故 A 与 B 合同.

2. 证明: 因为 A, B 为正定矩阵, 所以 X^TAX, X^TBX 为正定二次型, 且

$$X^TAX > 0, X^TBX > 0 \Rightarrow X^T(A+B)X = X^TAX + X^TBX > 0$$

于是 $X^T(A+B)X$ 必为正定二次型, 从而 $A+B$ 为正定矩阵.

3 证: t 充分大时, $tI+A$ 的特征值; $t+\lambda_1, t+\lambda_2, \dots, t+\lambda_n$ 必为正, 从而 $tI+A$ 是正定

总习题

一. 判断题 (正确的在括号内打“√”, 错误的在括号内打“X”):

1. 行列式 $D=0$ 的充要条件是 D 中至少有一行的元素可用行列式性质化为 0. ()

2. 设 $m \times n$ 矩阵 A, B 等价, 则 A, B 的列向量组等价. ()

3. 设 A, B 均为非零 n 阶矩阵, 且 $AB=0$, 则秩 $r(A), r(B)$ 都小于 n . ()

4. 当 $m < n$ 时, n 元方程组 $A_{m \times n} x = \vec{b}$ 有无穷多解. ()

5. 若方阵 A, B 相似, 则 A, B 有相同的特征值和特征向量. ()

6. 若 A, B 均为 n 阶正定矩阵, 则 AB 也是正定矩阵. ()

二. 选择题 (每小题只有一个正确答案):

1. A 为列向量, 则 $|AA^T| =$: (A) 1; (B) -1; (C) 0; (D) 2

2. 设 A 为 n 阶对称阵, B 为 n 阶反对称阵, 则下列矩阵中为反对称矩阵的是 ()

(A) $AB+BA$ (B) $AB-BA$ (C) $(AB)^2$ (D) BAB

3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则对于任意常数 k , 必有 ()

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1+\beta_2$ 线性相关. (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1+\beta_2$ 线性无关.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1+k\beta_2$ 线性相关. (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1+k\beta_2$ 线性无关.

4. $\{\alpha_1=(0,0,-1,1)^T, \alpha_2=(1,1,-1,0)^T, \alpha_3=(-5,-5,5,0)^T\}$ 的一个最大无关组为 ()

(A) α_1, α_2 或 α_1, α_3 (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (C) α_1, α_2 (D) α_2, α_3

5. 设 A 为 4×5 矩阵, 且 A 的行向量组线性无关, 则 ()

(A) A 的列向量组线性无关. (B) 方程组 $Ax=b$ 增广矩阵的行向量组线性无关

(C) 增广阵的任意 4 个列向量线性无关; (D) 方程组 $Ax=b$ 有唯一解.

6. 设 A 为 3 阶阵, I 为单位阵, $|A+2I|=|A+3I|=|A-4I|=0$, A^* 为伴随阵, A^* 的特征值为 ()

(A) 2, 3, -4 (B) -2, -3, 4 (C) 12, 8, -6 (D) -12, -8, 6

7. 设 A 为 n 阶正定矩阵, 若矩阵 B 与 A 相似, 则 B 必为 ()

(A) 实对称矩阵 (B) 正定矩阵 (C) 可逆矩阵 (D) 正交矩阵

8. 下列说法正确的是 ()

(A) 方程组 $Ax=b$ ($b \neq 0$) 的所有解向量关于向量的加法以及实数与向量的乘法构成线性空间.

(B) 所有 n 阶实可逆矩阵关于矩阵的加法以及实数与矩阵的乘法构成线性空间.

(C) 欧氏空间中从标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵.

三. 填空题:

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, a_i \neq a_j (i \neq j, i, j = 1, \dots, n)$, 则非齐次

方程组 $Ax = b$ 的解是 $x =$ _____

2. 设 A 为 5 阶方阵, 秩 $r(A)=3$, 则 $r(A^*) =$ _____.

3. 设 A 为 n 阶方阵, $|A| \neq 0$, 将 A 的第 i 行与第 j 行互换得到矩阵 B , 则 $AB^{-1} =$ _____.

4. 设 α, β, γ 是 3 维列向量, 已知 3 阶行列式 $|4\gamma - \alpha, \beta - 2\gamma, \alpha| = 40$, 则行列式 $|\alpha, \beta, \gamma| =$ _____.

5. 设 4 元非齐次线性方程组系数矩阵的秩为 3, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是它的 3 个解向量, 其中

$$\alpha_1 = (2, 0, 0, 3)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (2, 0, 0, 4)^T, \text{ 则方程组的通解为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 可以相似对角化, 则 $a =$ _____.

7. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$ 正定, 则 t 满足 _____.

8. 从 R^2 的基底 $\alpha_1 = (1, 0)'$, $\alpha_2 = (1, -1)'$ 到基底 $\beta_1 = (1, 1)'$, $\beta_2 = (1, 2)'$ 的过渡矩阵为 _____.

四. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $A^*X = A^{-1} + 2X$, 其中 A^* 是 A 的伴随阵, 求 X .

五. 对线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$$

(1) λ 取何值时, 方程组无解? (2) λ 取何值时, 方程组有唯一解?

(3) λ 取何值时, 方程组有无穷多解? 用向量形式写出其通解.

六. 设向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m (m > 1)$ 线性无关, 且 $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, 则向量 $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_m$ 线性无关.

一. 判断题: (参考答案)

1. (\checkmark) 2. (\times) 3. (\checkmark) 4. (\times) 5. (\times) 6. (\times) .

二. 选择题 1. (C) 2. (A) 3. (B) 4. (A) 5. (B) 6. (D) 7. (C) 8. (C) .

三. 填空题: 1. $(0, 1, 0, \dots, 0)^T$; 2. 0; 3. $P(i, j)$;

$$4. -10; \quad 5. k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad 6. 0; \quad 7. t \in (-1, 1); \quad 8. \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

四. 解: 令 I 为单位阵, 由 $A^*X = A^{-1} + 2X$, 两端左乘 A , 得 $|A|IX = I + 2AX$,

于是得 $(|A|I - 2A)X = I$.

$$\text{又 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\text{所以 } X = (4I - 2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ 故 } X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{五. 解: 设系数矩阵 } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ 则 } |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$$

(1) 当 $|A| \neq 0$, 即 $\lambda \neq 1, -2$ 时, 方程组有唯一解.

$$(2) \text{ 当 } \lambda = -2 \text{ 时, } \tilde{A} = (A|b) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

得秩 $r(A) = 2$, $r(\tilde{A}) = 3$, 即 $\lambda = -2$ 时方程组无解.

$$(3) \text{ 当 } \lambda = 1 \text{ 时, } \tilde{A} = (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $r(A) = r(\tilde{A}) = 1 < 3$, 方程组有无穷多解. 等价方程组为 $x_1 + x_2 + x_3 = -2$

$$\text{通解为 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

六.证明: 设 $k_1(\beta - \alpha_1) + k_2(\beta - \alpha_2) + \dots + k_m(\beta - \alpha_m) = 0$, 将 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ 代入得

$$(k_2 + k_3 + \dots + k_m) \alpha_1 + (k_1 + k_3 + \dots + k_m) \alpha_2 + \dots + (k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1}) \alpha_m = 0$$

$$\text{由 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m > 1) \text{ 线性无关, 得 } \begin{cases} k_2 + k_3 + \dots + k_m = 0 \\ k_1 + k_3 + \dots + k_m = 0 \\ \dots \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1} = 0 \end{cases}$$

此方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)(-1)^{m-1} \neq 0 \quad (m > 1)$$

所以方程组只有零解 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ 于是 $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_m$ 线性无关.

试卷 1 及答案

一. 选择题:

$$1. \text{ 设 } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = d \neq 0, \text{ 则 } \begin{vmatrix} a_3 & 2b_3 - a_3 & 3c_3 - 2b_3 \\ a_2 & 2b_2 - a_2 & 3c_2 - 2b_2 \\ a_1 & 2b_1 - a_1 & 3c_1 - 2b_1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (A) $6d$; (B) $-6d$; (C) 0 ; (D) $12d$.

$$2. \text{ 设方程组 } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ bcx + cay + abz = 0 \end{cases} \text{ 存在非零解, 则系数 } a, b, c \text{ 之间的关系是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (A) $a = b = c$; (B) $a = b$ 或 $b = c$ 或 $c = a$; (C) a, b, c 互异; (D) $a \neq b$ 或 $b \neq c$ 或 $c \neq a$.

$$3. \text{ 设 } A \text{ 为三阶方阵, } A^* \text{ 为 } A \text{ 的伴随矩阵, } k \text{ 为大于 } 1 \text{ 的常数, 则 } (k^{-1}A)^* = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (A) $k^{-1}A^*$; (B) $k^{-3}A^*$; (C) k^3A^* ; (D) $k^{-2}A^*$.

$$4. \text{ 若向量组 } (a+1, 2, -6), (1, a, -3), (1, 1, a-4) \text{ 线性无关, 则 } a \text{ 的取值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (A) 0 ; (B) 不为 0 ; (C) 1 ; (D) 不等于 1 .

5. 若 n 维基本单位向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 可由 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 则向量组

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的秩 _____.

(A) 小于 n ; (B) 大于 n ; (C) 等于 n ; (D) 很难说

6. 设 A 为 $m \times n$ ($m > n$) 矩阵, 则当 $R(A) =$ _____ 时, 方程组 $AX = 0$ 只有零解.

(A) 0; (B) 1; (C) m ; (D) n .

7. 设 A 为三阶阵, 且 A, B 相似, A 的特征值为 2, 3, 4, 则矩阵 $(3B)^{-1}$ 的特征值为_____.

(A) $3/2, 1, 3/4$; (B) 6, 9, 12; (C) $1/6, 1/9, 1/12$; (D) $2/3, 1, 4/3$.

8. 设两个 n 阶矩阵 A 与 B 有相同的特征多项式, 则_____.

(A) A 与 B 相似; (B) A 与 B 合同; (C) A 与 B 等价; (D) 以上三条都不成立.

9. 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第一列与第二列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C ,

则满足 $AQ = C$ 的可逆阵 Q 为_____.

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

二. 填空:

1. 已知方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_3 + x_4 = -a_3 \\ x_1 + x_4 = a_4 \end{cases}$ 有解, 则常数 a_1, a_2, a_3, a_4 应满足条件_____.

2. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, B 为 3 阶非零矩阵, 且 $AB = 0$, 则 $t =$ _____.

3. 已知方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解, 则 $a =$ _____.

4. 设 A 为 3 阶实对称阵, 其特征值为 1, 2, 3. 特征值 1, 2 对应的特征向量分别为 $(1, 1, 1)$ 和 $(0, 1, -1)$, 则与特征值 3 对应的一个特征向量为_____.

5. 3 阶阵 A 的特征值为 -1, 1, 2, 设矩阵 $B = A^2 - 2A + I$, 则 $|B| =$ _____.

6. $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + 9x_3^2$ 的正、负惯性指数与符号差分别为_____.

7. 设 A 为 4×3 矩阵, 且 $r(A) = 2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 AB 的秩 $r(AB) = \underline{\hspace{2cm}}$

8. 设 A 为 2 阶方阵, B 为 3 阶阵, 且 $|A| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{2}$, 则 $\begin{vmatrix} 0 & -B \\ 2A^{-1} & 0 \end{vmatrix} = \underline{-16}$.

三. 已知 $f = ax_1^2 + ax_2^2 + 6x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ ($a > 0$) 通过正交变换化为标准形 $7y_1^2 + 7y_2^2 - 2y_3^2$, 求参数 a 及所用的正交变换.

**四. 设 n 元非齐次方程组 $Ax = b$, ($b \neq 0$) 的系数矩阵 A 的秩为 r ($r < n$).

证明: 若方程组有解, 则它有 $n - r + 1$ 个线性无关的解. (记住结论!)

五. 在实向量空间 R^4 中, 设非空子集 $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

(1) 证明: V 构成 R^4 的线性子空间; (2) 求出 V 的维数和一组基底.

参考答案

一. 1. (B); 2. (B); 3. (D); 4. (D); 5. (C); 6. (D); 7. (C); 8. (D); 9. (A);

二. 1. $\sum_{i=1}^4 a_i = 0$; 2. $t = -3$; 3. $a = -1$; 4. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 5. 0; 6. 2, 0, 2; 7. 2; 8. -16.

三. f 的实对称阵为 $A = \begin{pmatrix} a & 4 & -2 \\ 4 & a & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, A 的特征值 $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -2$, 其中 λ_1 是 2 重根.

由于 $\text{tr} A = 2a + 6 = 7 + 7 - 2$, 得 $a = 3$. $\lambda_1 = 7$ 时, 解方程 $(7 - A)X = 0$, 得基础解

$$\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 0, -2)^T.$$

把 α_1, α_2 正交化: 令 $\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 0)^T$,

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2 \right)^T.$$

再单位化, 即得对应于特征值 $\lambda_1 = 7$ 的二个单位正交特征向量:

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}} \right)^T.$$

当 $\lambda_2 = -2$ 时, 解方程组 $(-2 - A)X = 0$, 得基础解系 $\alpha_3 = (2, -2, 1)^T$,

将其单位化得 $\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{|\alpha_3|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$ 令

$$Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ 则 } Q \text{ 为正交阵, 正交变换为 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

四. 由于方程有解, 秩 $r(A) = r$, 则导出组 $Ax = 0$ 的基本解系中含有 $n-r$ 个解向量,

不妨设为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$. 再设 X_0 是方程组 $Ax = b$ ($b \neq 0$) 的一个特解,

则 $X_0 + \alpha_1, X_0 + \alpha_2, \dots, X_0 + \alpha_{n-r}$ 都是方程组 $Ax = b$ 的解向量.

下面证明 $X_0, X_0 + \alpha_1, X_0 + \alpha_2, \dots, X_0 + \alpha_{n-r}$ 线性无关. 设

$$k_0 X_0 + k_1 (X_0 + \alpha_1) + k_2 (X_0 + \alpha_2) + \dots + k_{n-r} (X_0 + \alpha_{n-r}) = 0$$

$$\text{则 } (k_0 + k_1 + \dots + k_{n-r})X_0 + k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{n-r} \alpha_{n-r} = 0. \quad (1)$$

用 A 左乘上式, 注意 $AX_0 = b \neq 0$ 得 $(k_0 + k_1 + \dots + k_{n-r}) = 0$ 与 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{n-r} \alpha_{n-r} = 0$.

又 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ 线性无关, 得 $k_1 = k_2 = \dots = k_{n-r} = 0$. 代入 (1) 式, 得 $k_0 = 0$.

因此 $X_0, X_0 + \alpha_1, X_0 + \alpha_2, \dots, X_0 + \alpha_{n-r}$ 线性无关.

试卷 2 及答案

一. 选择题: 1. 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{n \times m}, m > n$ 则必有 ()

A. $|AB|=0$, B. $|AB| \neq 0$, C. $|BA|=0$, D. $|BA| \neq 0$.

2. 设 A 为 $m \times n$ ($m > n$) 矩阵, 则 $\text{rank}(A) = ()$ 时, 方程组 $AX=0$ 只有零解

A. n , B. 1 , C. m , D. 0

3. 设 A^* 是 n 阶方阵 A 的伴随阵, 则必有 ()

A. $|A^*| = |A|$, B. $|A^*| = 0$, C. $|A^*A| = |A|^n$, D. $A^* = |A|A^{-1}$

二. 判断题: 1. 若 $A \neq O$ (零矩阵) 且 $B \neq O$, 则 $AB \neq O$.

2. 把复数域 C 看作 C 上的线性空间, 则变换 $\varphi(\xi) = \bar{\xi}$ (共轭), $\forall \xi \in C$ 是线性变换

3. 若 A, B 均为 n 阶正定阵, 则 AB 也是正定阵.

4. 若向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关且 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表示
5. 若方阵 A 满足 $AA^T = I$ (单位阵), 则 A 为正交阵
6. 设 n 阶可逆阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 $(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n) \neq 0$
7. 方阵 A 相似对角阵当且仅当它的极小多项式无重根.
8. 若 n 元方程组 $A_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解, 则 $A_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解.
9. A 为实数矩阵, 则 $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$; 10. 若 A 为实矩阵且 $A^T A = 0$, 则 $A = 0$

三. 填空题: 1. 若 n 阶方阵 A 的行列式 $|A| = k$, 则行列式 $|kA| =$ _____

2. 若 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A - 2I = O$, I 是单位阵, 则 $A^{-1} =$ _____

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ 的基础解系为 _____

4. 在 \mathbb{R}^2 中两组基 $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$ 到 $\{\mathbf{f}_1 = (1, 2), \mathbf{f}_2 = (3, 4)\}$

的过渡矩阵是 _____; 5. $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} (b > 0)$ 的特征值为 _____

6. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 \mathbb{R}^3 的列向量, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2)$, 若 $|A| = 1$, 则 $|B| =$ ()

7. 设 2 阶方阵 A 的元素全为 1, 则 $A^{10} =$ () A

8. 若非零 3 阶阵 A 满足 $A^2 - A = O$, 则 A 必相似于 _____.

9. 若 2 阶阵 $A \neq O$ 且 $A^2 = O$, 则 A 的极小式与 Jordan 型分别为 _____.

四. (1) 求解下列矩阵方程: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

(2) 设 A, B 都是可逆的, $D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$ 求 D^{-1} .

(3) 设 n 阶阵 A 的各行元素之和均为零, 且 A 的秩为 $n-1$, 求方程组 $AX=0$ 的通解

(4) 在欧氏空间 \mathbb{R}^4 中子空间 $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$, 写出正交补 W^\perp 的基与维数.

五. 设 4 阶方阵 A 的元素全为 1, (1) 求 A 的特征多项式与极小多项式 (2) 求 A 的 Jordan 标准型; (3) 判定 $A + I$ 是否为正定阵(说明理由)

六. (1) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求正交阵 Q , 使 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵 (写出对角阵);

(2)用正交变换 $x = Qy$ 把二次型 $f = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$ 化为标准型.

七. (1) 设 A 是线性空间 V 上的线性变换, 若 $A^2\xi \neq 0$, $A^3\xi = 0$, 则 $\xi, A\xi, A^2\xi$ 线性无关.

(2) 证明任一方阵 A 可写成一个对称阵与一个反对称阵的和.

八. (1) 设 A 为 n 阶实对称阵, 证明: 存在方阵 B 使得 $A = B^3$.

(2) 设 n 阶可逆实方阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

证明: $A^T A$ 为正定阵, 且 $|A^T A + I| \geq 1 + (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n)^2$.

参考答案

一. 1.A 2.A 3.C 二. 1—3.为错; 4—10 正确

三. 1. $k^n |A| = k^{n+1}$; 2. $\frac{1}{2}(A - 3I)$; 3. $\xi = (1, 1, 1)^T$ 或 $\xi = k(1, 1, 1)^T$, ($k \neq 0$);

4. $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; 5. $\pm bi$ 或 $\pm b\sqrt{-1}$; 6. 1; 7. $2^9 = 512$;

8. 对角阵, 或 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

9. λ^2 , $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

四. (1) 解: 可用增广阵与行变换法

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{行变}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{行变}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 解: 可用“分块型初等行变换”求逆

$$\begin{aligned} \text{增广阵为 } \left(\begin{array}{cc|cc} A & 0 & I & 0 \\ C & B & 0 & I \end{array} \right) & \xrightarrow{\text{行变}} \left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & A^{-1} & 0 \\ B^{-1}C & I & 0 & B^{-1} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{行变}} \left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & I & -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{array} \right) \\ \Rightarrow D^{-1} &= \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) 解: 由条件知 $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, 从而 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $Ax=0$ 的一个非零解,

又解空间维数为 $n-(n-1)=1$, 得基础解为 ξ , 通解为 $x = k\xi$, 或 $x = k(1, \dots, 1)^T$.

(4) 解: 由条件 $\forall x \in W$, $x \perp (1, 1, 1, 1)^T$, $x \perp (1, 1, -1, -1)^T \Rightarrow (1, 1, 1, 1)^T \in W^\perp, (1, 1, -1, -1)^T \in W^\perp$

又 $\dim W + \dim W^\perp = 4$, 且知 $\dim W = 2$, 从而 $\dim W^\perp = 2$,

可得 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, -1, -1)^T$ 构成 W^\perp 的基

五.(1)解: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 计算知特征多项式为 $|\lambda I - A| = (\lambda - 4)\lambda^3$

由于 A 是对称必可对角化, 从而 A 的极小多项式(无重根)为 $(\lambda - 4)\lambda$.

(2)解: A 可对角化, 它的 Jordan 形为对角阵: $J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3)解: 因为 A 的全体特征根为 $4, 0, 0, 0$, 则 $A+I$ 的全体特征根为:

$4+1, 0+1, 0+1, 0+1$ 全为正数, 且 $A+I$ 为对称阵 $\Rightarrow A+I$ 为正定阵.

六.(1)解: $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-1)^2$, 特征根为 $1, 1, 4$.

$\lambda = 1$ 时, 解方程组 $(A-I)x=0$, 解得通解为 $x = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

所以方程组 $(A-I)x=0$ 的基解为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 对它们正交化得,

$\beta_1 = \xi_1$, $\beta_2 = \xi_2 - \frac{(\xi_2, \xi_1)}{|\xi_1|^2} \xi_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 再单位化得,

$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$. 显然 $\lambda = 4$ 对应特征向量 $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 单位化 $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

得正交矩阵 $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, 且有 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(2)解: 由于 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 则可用正交变换 $x=Qy$,

其中 $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, 得标准形 $f=y_1^2+y_2^2+4y_3^2$. 可知 $f=4$ 代表椭球面.

七.(a) 解: 设 $k\xi + k_1A\xi + k_2A^2\xi = 0 \cdots \cdots (1)$

则 $A^2(k\xi + k_1A\xi + k_2A^2\xi) = 0 \Rightarrow kA^2\xi = 0$ 且 $k=0$, 将 $k=0$ 代入(1)式, 有

$$k_1A\xi + k_2A^2\xi = 0 \cdots \cdots (2)$$

则 $A(k_1A\xi + k_2A^2\xi) = 0 \Rightarrow k_1A^2\xi = 0$ 且 $k_1=0$, 将 $k_1=0$ 代入(2)式 $\Rightarrow k_2=0$

即 $k=k_1=k_2=0$, $\xi, A\xi, A^2\xi$ 线性无关

(b)证: 可写 $A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$, 且知 $\frac{A+A^T}{2}$ 为对称, $\frac{A-A^T}{2}$ 为反对称,

故 A 可写成一个对称阵与反对称阵的和.

八.(1)证: 设 A 的特征根为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则有正交阵 P, 使得, $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$,

$$\text{令 } B = P \begin{pmatrix} \lambda_1^{\frac{1}{3}} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} P^{-1} \text{ 则 } B = P \begin{pmatrix} \lambda_1^{\frac{1}{3}} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^{\frac{1}{3}} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} P^T = B^T$$

计算可知 $B^3 = A$, 而且 B 为对称阵.

(2) 因 $A^T A = A^T I_n A$ 并且 A 可逆, 可知 $A^T A$ 合同于单位阵 I_n , 因 I_n 正定, 故 $A^T A$ 也正定.

先证一个引理: 若 B 正定, 则 $|B+I| \geq 1+|B|$.

可设 B 的特征值为 $t_1 > 0, t_2 > 0, \dots, t_n > 0$, 则 $B+I$ 的特征值为

$$t_1+1, t_2+1, \dots, t_n+1 \Rightarrow |B+I| = (t_1+1)(t_2+1)\cdots(t_n+1) \geq 1+t_1t_2\cdots t_n = 1+|B|.$$

由引理及 $A^T A$ 正定 $\Rightarrow |A^T A+1| \geq 1+|A^T A| = 1+|A|^2 = 1+(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)^2$

试卷 3 及答案

(说明: A^T 表示 A 的转置, $\|x\|$ 表示向量 x 的长度, $r(A)$ 表示 A 的秩数)

一. 选择题:

1. 设 A 为 n 阶正交阵, x 是 n 元列向量, 则错误说法为 ()

(a) $A^T A = I$, (b) $\|Ax\| = \|x\|$, (c) $A^T = A^{-1}$, (d) $A^T = A^*$

2. 设同阶方阵 A 与 B 的特征多项式相同, 则错误结论为 ()

(a) $|A| = |B|$, (b) A 与 B 有相同的特征值, (c) 迹 $tr(A) = tr(B)$, (d) A 与 B 相似

二. 判断题(见答案); 三. 填空(见答案).

四. 计算 1. (1) 设 I 是 n 阶单位阵, 求逆阵 $\begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}^{-1}$. (2) 计算 $(\alpha\alpha^T)^{2009} = 2^{2008} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 其中

$$\alpha = (1, 1)^T; 2. \text{ 在欧氏空间 } V \text{ 中, 若 } \|\alpha - \beta\|^2 = \|\alpha + \beta\|^2, \text{ 求内积 } (\alpha, \beta).$$

3. 已知 4 阶阵 A 的初等因子为 $(\lambda-2), (\lambda-1), (\lambda-2)^2$, 求 A 的 Jordan 标准形与极小多项式.

五. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$. (1) 求行列式 $|A|$, 并求 λ 值使得秩 $r(A) < 3$.

(2) 求 λ 值, 使得方程组 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的解空间 W 的维数 $\dim W = 2$, 并求 W 的一组基;

(3) 在标准内积空间 R_3 中, 写出上述空间 W 的正交补 W^\perp 的基.

六. (1) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, 求正交阵 Q , 使 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵 (写出对角阵);

(2) 用正交变换 $x = Qy$ 把二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$ 化为标准型. (指出 $f(x_1, x_2, x_3) = 4$ 在 R^3 中代表的图形).

七. 设 $\varepsilon = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ 是 R^4 (标准内积) 中单位列向量 ($\varepsilon^T \varepsilon = 1$), 设 $A = I - 2\varepsilon\varepsilon^T$

(1) 计算: $A\varepsilon$ 与 $A^T A$ (并说明 A 是对称的正交矩阵)

(2) 把 $A: R^4 \rightarrow R^4$ 作为线性变换, 验证 A 保内积: $(Ax, Ay) = (x, y), \forall x, y \in R^4$.

八. 1. 设欧氏空间中向量 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ 线性无关, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta\}$ 线性相关, β 是非零向量.

证明: β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示; 且非零向量 β 不能与 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 同时正交.

2. A 是 n 阶实矩阵, 证明: (1) $r(A^T A) = r(A)$ 且 $A^T A$ 是半正定阵;

(2) 令 $B = A^T A$, 则 $|B^2 + B + I| \geq 1$ (并说明 $B^2 = 0$ 时等号成立).

(3) 设 $A, A - I$ 均为 n 阶正定阵, I 为单位阵. 则 $I - A^{-1}$ 为正定阵.

参考答案

一. 选择题 1. D 2. D

二. 判断题 1. 设非零向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 互相正交, 则它们必定线性无关 (T \checkmark)

2. 设 n 阶阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 $|A| = (-1)^n \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$ (F \times)

3. 若 $B = PA$, P 是可逆阵, 则秩 $r(A) = r(B)$ (T)

4. 设 3 阶阵 A 的伴随阵为 A^* , k 为实数, 则 $(k \cdot A)^* = k^2 \cdot A^*$ (T)

5. 若 $A \neq 0$, 且 $AB = AC$, 则 $B = C$ (F)

6. 若 A 的极小多项式无重根, 则 A 在复数域上可对角化 (T)

7. 找不到 2 阶实方阵 A 使得 $A^2 + I = 0$ (F)

8. 若 $A_{m \times n}$ 的行数与列数不等, 则 $A_{m \times n}$ 的行秩与列秩也不等 (F)

9. R^n 中两组基之间的过度矩阵一定是可逆矩阵 (T)

10. 若 n 元方程组 $A_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解, 则 $A_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 必有唯一解 (\times)

三. 填空: 1 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$ 的基础解为 $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$, 或 $\mathbf{x} = k(1, 1, 1)^T, k \neq 0$

2. 设 A 是 n 阶方阵且 $|3A| = 1$, 则 $|5A| = 5^n / 3^n$

3. 若 n 阶方阵 A 有 n 个线性无关的特征向量, 则 A 必相似于 对角阵

4. 设 $f(\lambda)$ 是方阵 A 的特征多项式, 则 $f(A) =$ 0 阵

5. 设 3 阶阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则 $g(A) = A^2 + I$ 的特征值为 $\lambda_1^2 + 1, \lambda_2^2 + 1, \lambda_3^2 + 1$

6. 若方阵 A 正定, 则 A 的特征值全为 正数, 或大于 0

7. n 阶方阵 A 的秩 $r(\mathbf{A}) < n$ 的充要条件是 $|A| =$ 0

8. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的极小多项式与 Jordan 标准形分别为: 极小多项式 $g(\lambda) = \lambda^2 + 1$;

Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$.

9. 设 4 阶方阵 A 的第一行元素全为 $\frac{1}{2}$, 且有特征向量 $(1, 1, 1, 1)^T$, 则 A 有一个特征值为 2

四. 计算: 1. 解: (1) 用分块阵的初等行变换得

$$\left(\begin{array}{cc|cc} I & -I & I & 0 \\ I & I & 0 & I \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} I & -I & I & 0 \\ 0 & 2I & -I & I \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & \frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I \\ 0 & I & -\frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I \end{array} \right) \Rightarrow \therefore \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I \\ -\frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I \end{pmatrix}.$$

2. 解: $\|\alpha - \beta\|^2 = (\alpha - \beta, \alpha - \beta) = (\alpha, \alpha) - 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 - 2(\alpha, \beta)$

$$\|\alpha + \beta\|^2 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2(\alpha, \beta)$$

由条件 $\|\alpha - \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$ 知: $(\alpha, \beta) = 0$.

3. 解: (1) A Jordan 标准形为 $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; (2) 极小式为 $g(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$

五. 解:

$$(1) |A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-2 & \lambda-2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

可知 $\lambda = 2$, 或 $\lambda = -1$ 时, 秩 $r(A) < 3$.

(2) 由(1)可知 $\lambda = -1$ 时 $r(A) = 1$ 此时方程组 $AX = 0$ 的解空间维数为 2

$$\text{由方程 } x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ 通解 } x = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ W 的基可取为 } \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) $\because W = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ 可知 W 是 R^3 中过原点的平面 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$,

它的法向量为 $\vec{n} = (1, 1, 1)^T$, 可知 W^\perp 的基为 $(1, 1, 1)^T$

或任取 $x \in W^\perp$, 则 $x \perp \beta_1, x \perp \beta_2 \therefore -x_1 + x_2 = 0, -x_1 + x_3 = 0$

可知 $x = k(1, 1, 1)^T$, W^\perp 的基为 $(1, 1, 1)^T$.

$$\begin{aligned} \text{六.解(1)} \quad |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)^2 \text{ 则特征值为 } 1, 4, 4 \text{ (二重)} \end{aligned}$$

$$\lambda = 1 \text{ 时解方程组 } (I - A)X = 0 \text{ 得通解为 } x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 对应特征向量为 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 4$ (二重根) 对应得特征向量 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ 与 α_1 正交, 由正定条件可知

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0 \text{ 对应 2 个正交的特征向量为 } \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{把 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 单位化得正交阵 } Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ (不唯一), 得 } Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

(2)二次型 f 对应矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, 由(1)知, 令正交变换 $x = Qy$, 则 f 可化为:

$f = 1 \cdot y_1^2 + 4 \cdot y_2^2 + 4 \cdot y_3^2$, 可知 $f = 4$ 在 R^3 中代表(旋转)椭球面.

七.解: (1) 计算得 $A\varepsilon = -\varepsilon$. 又可知 $A^T = A \Rightarrow A$ 为对称阵, 且 $A^T A = AA = (I - 2\varepsilon\varepsilon^T)^2 = I$
故 A 是对称的正交矩阵.

(2) $Ax = x - 2\varepsilon\varepsilon^T x$, 可知 $(Ax, Ay) = (Ax)^T (Ay) = x^T A^T Ay = x^T I y = (x, y)$.

八. 解: 1. 证明: 设 $k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s + k\beta = 0, k_1 \dots k_s, k$ 不全为 0

若 $k=0$ 则 $k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ 且 $k_1 \dots k_s, k$ 不全为 0, 这与 $\alpha_1 \dots \alpha_s$ 线性无关矛盾

$\therefore k \neq 0 \Rightarrow \beta = \frac{-k_1}{k}\alpha_1 + \frac{-k_2}{k}\alpha_2 + \dots + \frac{-k_s}{k}\alpha_s$, 即 β 可由 $\alpha_1 \dots \alpha_s$ 线性表示

可设 $\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_s\alpha_s$ 若不然由内积 $(\alpha_1, \beta) = (\alpha_2, \beta) = \dots = (\alpha_s, \beta) = 0$

$(\beta, \beta) = (l_1\alpha_1 + \dots + l_s\alpha_s, \beta) = l_1 \cdot 0 + \dots + l_s \cdot 0 \Rightarrow \beta = 0$ 与 $\beta \neq 0$ 矛盾.

2. 证明: (1) 只需证齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $A^T Ax=0$ 同解:

显然 $Ax=0$ 的解必为 $A^T Ax=0$ 的解, 设 x_0 是 $A^T Ax=0$ 的解, 则 $x_0^T A^T Ax_0 = 0$

即 $(Ax_0)^T Ax_0 = 0$

因为 Ax_0 为 n 维实向量, 所以 $Ax_0 = 0$, 即得 $A^T Ax=0$ 的解必为 $Ax=0$ 的解

综上: $Ax=0$ 与 $A^T Ax=0$ 同解 \Rightarrow 秩 $r(A^T A) = r(A)$

显然 $A^T A$ 是对称阵, 下证二次型 $f = X^T (A^T A)X$ 是半正定: 任取 $X = (x_1, \dots, x_n)^T \neq 0$,

设 $AX = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 则 $X \neq 0$ 时有 $f = (AX)^T (AX) = b^T b = b_1^2 + \dots + b_n^2 \geq 0$

从而 f 为半正定二次型, $A^T A$ 为半正定阵.

(2)再证 $|B^2 + B + I| \geq 1$: $\because B$ 是半正定的, 设 B 的全体特征值为 $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$

则 $B^2 + B + I$ 的全体特征值为: $(\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1), (\lambda_2^2 + \lambda_2 + 1), \dots, (\lambda_n^2 + \lambda_n + 1)$, 所以

$$|B^2 + B + I| = (\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1) \cdots (\lambda_n^2 + \lambda_n + 1) \geq (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1) \cdots (\lambda_n + 1) \\ \geq (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n) + 1 \geq 1$$

且若 $B^2 = 0$, 则 $\lambda_1^2 = 0, \dots, \lambda_n^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$, (必有 $B = 0$) 所以

$$|B^2 + B + I| = |B + I| = (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1) \cdots (\lambda_n + 1) = 1$$

(3) 设 $A, A - I$ 均为 n 阶正定阵, I 为单位阵. 证明 $I - A^{-1}$ 为正定阵.

证明: 方法一. 由 $A - I$ 正定, 设 A 的特征值为 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $\lambda_i - 1$ 是

$A - I$ 的特征值, 并且 $\lambda_i - 1 > 0$, 于是 $\lambda_i > 1 (i = 1, 2, \dots, n)$

而 $1/\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 A^{-1} 的特征值, 所以 $1/\lambda_i < 1 (i = 1, 2, \dots, n)$

而正数 $1 - 1/\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 $I - A^{-1}$ 的全体特征值, 所以 $I - A^{-1}$ 为正定矩阵.

一. 选择题

(2009 工科高等代数)

1. 若 3 阶阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的行列式 $|A| = 1$, 则行列式 $|2\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_3| = (c)$

(a) 1; (b) 0; (c) 2; (d) -2

2. 设 $A = A_{4 \times 3}, B = B_{3 \times 4}$ 则必有 (d)

(a) $|AB| = |A||B|$; (b) $|BA| \neq 0$; (c) $|BA| = |AB|$; (d) $|AB| = 0$

3. 设 $A = A_{m \times m}, B = B_{n \times n}$ 分别是 m 阶与 n 阶方阵, 则行列式 $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = (d)$

(a) $|A||B|$; (b) $-|AB|$; (c) 0; (d) $(-1)^{m \cdot n} |A||B|$

5. $\{\alpha_1 = (0, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 1, -1)^T, \alpha_3 = (3, 3, -3)^T\}$ 的一个最大无关组为 (c)

(a) α_2 (b) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (c) α_1, α_2 或 α_1, α_3 ; (d) α_2, α_3

6. 若 A 是 n 阶正交阵, x 是 R^n 中的列向量, 则模长 $|Ax| = (d)$

(a) $|A|$ (b) 正数 (c) 非零 (d) 模长 $|x|$

7. 设 A 为 $m \times n (m > n)$ 矩阵, 则 $\text{rank}(A) = (c)$ 时, 方程组 $AX = 0$ 只有零解.

(a) $n - 1$; (b) 1; (c) n ; (d) m .

8. A 为实的 $m \times n$ 矩阵, 下列说法不正确的是 (d)

(a) 秩 $r(A^T A) = r(A)$; (b) $A^T A$ 为对称; (c) $A^T A$ 为半正定; (d) $r(A^T) \neq r(A)$

9. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 2, 3, 1, 则行列式 $|A| =$ (d)

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 6

10. n 阶实对称阵 A 为正定的充分必要条件是 (c)

(a) $|A|$ 为正; (b) 所有特征值非负; (c) A^{-1} 为正定阵; (d) 秩 $(A) = n$

11. 设 A^* 是 n 阶方阵 A 的伴随阵, 且 A 可逆, 则错误说法为 (c)

(a) $A^* A$ 为对角阵; (b) $A^* = |A| A^{-1}$; (c) $A^* A = A^n$; (d) $|A^* A| = |A|^n$

12. 设 A 为 n 阶正交阵, 下列说法正确的是 (d)

(a) $|A| = 1$; (b) $|A| = -1$; (c) $A^T = A^*$; (d) $A^T = A^{-1}$

13. 设两个 n 阶矩阵 A 与 B 有相同的特征多项式, 则错误结论为 (c) .

(a) 迹 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$; (b) $|A| = |B|$; (c) A, B 相似; (d) A, B 有相同特征值.

14. 实二次型 $f = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2$ 是 (a)

(a) 半正定二次型; (b) 半负定; (c) 正定二次型; (d) 不定二次型

15. 将 3 阶阵 A 的第 1 列加到第 3 列得 B , 则满足 $AQ = B$ 的可逆阵 Q 为 (a)

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

二. 判断题(正确的在括号内打“√”, 错误的在括号内打“X”):

1. n 阶方阵 A 的行列式 $|A| = 0 \Leftrightarrow \text{rank}(A) < n \Leftrightarrow Ax = 0$ 有非零解 (√)

2. 当 $m < n$ 时, n 元齐次方程组 $A_{m \times n} x = 0$ 有无穷多个解. (√)

3. 若 A, B 均为 n 阶对称阵, 则 AB 也是对称阵. (X)

4. 若方阵 A, B 相似, 则 A, B 有相同的特征向量. (X)

5. 实对称阵 A 必相似于对角阵, 它的若当 Jordan 形也是对角阵 (√)

6. A^* 是 n 阶阵 A 的伴随阵, I 为 n 阶单位阵, 则 $A^* A = |A| I$, $|A^* A| = |A|^n$ (√)

7. 若 5 个已知向量可由 4 个未知向量线性表示, 则 5 个已知向量必线性相关 (√)

8.若方阵 A 的极小多项式或零化式没有重根, 则 A 相似于对角阵(✓)

9.设 $A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$, 则有: 秩 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.(✓)

10.实对称阵 A 为正定的充分必要条件是 A 的所有特征值为正数 (✓)

11.空间 \mathbf{R}^3 中从基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 到基 (g_1, g_2, g_3) 的过渡矩阵 P 满足以下公式:

$$(g_1, g_2, g_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (g_1, g_2, g_3)P^{-1} \quad (\checkmark)$$

12. \mathbf{R}^3 上线性变换 φ 在给定基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 下的矩阵 A 满足以下公式:

$$\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)A \quad (\checkmark)$$

13.设 $P^{-1}AP$ 有定义, 则 $(P^{-1}AP)^{10} = P^{-1}A^{10}P$.(✓)

14.设 3 阶阵 A 的各行元素和为 0, 且秩为 2, 则 $Ax = 0$ 有基本解 $(1, 1, 1)^T$ (✓)

15.若齐次方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 只有零解, 则 $A_{m \times n}x = b$ 恰有一个解.(X)

三. 填空 1. 设 $f(\lambda)$ 是方阵 A 的特征多项式, 则 $f(A) = 0$

3. 若 $A = A_{3 \times 3}$ 的特征根是 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则 A 的迹 $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

4. 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc = 1$, 则 $A^{-1} =$ _____;

5. 设 3 阶阵 A 特征根是 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, $f(x)$ 是多项式, 则 $f(A)$ 特征根是 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), f(\lambda_3)$

6. 设 A 为 3 阶阵且 A, B 相似, A 的特征值为 2, 3, 4, 则 B^{-1} 特征值为 $2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1}$

7. 设 I 是单位矩阵, $M = \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix}$, 则 $M^{-1} = \begin{pmatrix} I & -C \\ 0 & I \end{pmatrix}$

8. 若 α_1, α_2 是 $Ax = b \neq \vec{0}$ 的解, $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 也是它的解, 则 $k_1 + k_2 = \underline{1}$

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 则 $A^2 = \underline{0}$; A 的极小多项式 $m(x) = x^2$.

四. 1. 设 A 为 3 阶阵, I 为单位阵, $|A+I| = |A+3I| = |A-I| = 0$, 求伴随阵 A^* 的特征值

解: 由条件知 A 特征值为 $-1, -3, 1$. 且 $|A|=(-1) \times (-3) \times (1)=3$. A^{-1} 特征值为 $(-1)^{-1}, (-3)^{-1}$,

1, 用公式 $A^* = |A| A^{-1}$ 可得 A^* 的特征值为 $3 \times (-1) = -3$, $3 \times (-3)^{-1} = -1$, $3 \times 1 = 3$.

2. 设 $A = \alpha\alpha^T$, $\alpha = (1, -1)^T$. 求 A^{2009} . 提示: 利用 $\alpha^T\alpha = (1, -1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$ 可得结论.

3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 4 元非齐次方程组 $AX=b$ 的三个解向量, 且秩 $r(A)=3$,

$\alpha_1 = (2, 0, 0, 3)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (2, 0, 0, 4)^T$ 求方程组 $AX=b$ 的通解.

解 因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程组 $AX=b$ 的三个解, 故 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 是 $AX=0$ 的解, 可知

$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_3) = 2\alpha_1 - (\alpha_2 + \alpha_3) = (2, 0, 0, 2)^T$ 是 $AX=0$ 的解, 又 $r(A)=3$

故 $AX=0$ 的基本解系含 $4-3=1$ 个向量 $\Rightarrow AX=0$ 通解是 $X = c(2, 0, 0, 2)^T, c \in \mathbb{R}$

或 $X = c(1, 0, 0, 1)^T \Rightarrow AX=b$ 的通解为 $X = c(2, 0, 0, 2)^T + (2, 0, 0, 3)^T$,

或 $X = c(1, 0, 0, 1)^T + (2, 0, 0, 3)^T$.

4. 已知 $f = ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 (a>0)$ 通过正交变换 $x = Qy$ 化为标准形

$y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2$, 求参数 a 与二次型 f 的矩阵 A (不用求出正交阵 Q).

解: 可知 A 的特征值为 $1, 4, 4 \Rightarrow$ 迹 $\text{tr}(A) = a+a+a=1+4+4=9$

$$\Rightarrow a=3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

五. 1. 设 n 阶阵 A 的元素全为 1, 求 A 的特征多项式, 并写一个与 A 相似的简单矩阵 D .

$$\text{解 } |\lambda I - A| = (\lambda - n)\lambda^{n-1}, \text{ 对称阵 } A \text{ 必相似于对角阵 } D = \begin{pmatrix} n & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 利用初等变换计算 A^{-1} , 并且求伴随阵 A^* ; 写出 A 的 Jordan 型.

$$\text{解 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = |A| A^{-1} = A^{-1}.$$

设 A 的若当形为 J , 则 $A \sim J = \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & 0 \\ & 1 & * & 0 \\ & & 1 & * \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ (相似), 其中 $*$ 是 0 或 1.

可知 $A - I \sim J - I = \begin{bmatrix} 0 & * & 0 & 0 \\ & 0 & * & 0 \\ & & 0 & * \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ (相似) $\Rightarrow r(A - I) = r(J - I)$ (秩相同)

因为 $r(A - I) = 3$ 则 $r(J - I) = 3$, 可知 3 个 * 全为 1

$\Rightarrow A \sim$ 若当形, A 的 Jordan 型为: $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 求正交阵 Q , 使 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵 (写出对角阵).

解 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 4 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & \lambda - 6 & \lambda - 6 \\ -1 & \lambda - 4 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)(\lambda - 3)^2$ 得特征值 6, 3, 3

$\lambda = 6$ 时解方程组 $(I - A)X = 0$ 得特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$ (二重根) 对应得特征向量 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ 与 α_1 正交

由正交条件可知 $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0$ 对应 2 个正交的特征向量为 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

把 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化得正交阵 $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ (不唯一) 且 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

六. 证明题 (共 9 分) 设分块三角阵 $M = \begin{pmatrix} A & S \\ 0 & B \end{pmatrix}$, 其中 A, B 是 n 阶可逆阵.

(1) 用初等变换求 M^{-1} ; (2) 如果 M 是正交阵, 则 A, B 都是正交阵, 且 $S = 0$

(3) 若 A 是 n 阶正交阵, 证明: 行列式 $|A| = +1$ 或 $|A| = -1$.

解(1) 用初等行变换得

$$(M|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} A & S & I & 0 \\ 0 & B & 0 & I \end{array} \right) \xrightarrow{\text{行变}} \left(\begin{array}{cc|cc} A & S & I & 0 \\ 0 & I & 0 & B^{-1} \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - (s)r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} A & 0 & I & -SB^{-1} \\ 0 & I & 0 & B^{-1} \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\text{行变}} \left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & A^{-1} & -A^{-1}SB^{-1} \\ 0 & I & 0 & B^{-1} \end{array} \right) \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}SB^{-1} \\ & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$(2) M \text{ 是正交矩阵} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}SB^{-1} \\ & B^{-1} \end{pmatrix} = M^T = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ S^T & B^T \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A^{-1} = A^T, B^{-1} = B^T, S^T = 0$. 即 A, B 都是正交矩阵, 且 $S = 0$.

(3) 若 A 是 n 阶正交阵, 则行列式 $|AA^T| = |I| = 1 \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = +1$ 或 $|A| = -1$

七. (5 分) 设 \mathbf{R}^3 上线性变换 φ 在已知基 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 下满足

$$\varphi(\alpha + \beta + \gamma) = \alpha, \quad \varphi(\beta + \gamma) = 2\beta, \quad \varphi(\beta - \gamma) = 2\gamma.$$

(1) 求出 φ 在基 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 下的矩阵 A , 使 $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta, \gamma)A$.

(2) 求 $\xi = \alpha + 2\beta + \gamma$ 的像 $\varphi(\xi)$ 在已知基下的坐标.

$$\text{解(1)} \quad \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \varphi(\gamma) = \alpha, \quad \varphi(\beta) + \varphi(\gamma) = 2\beta, \quad \varphi(\beta) - \varphi(\gamma) = 2\gamma$$

$$\text{可得} \quad \varphi(\alpha) = \alpha - 2\beta, \quad \varphi(\beta) = \beta + \gamma, \quad \varphi(\gamma) = \beta - \gamma.$$

$$\varphi(\alpha), \varphi(\beta), \varphi(\gamma) \text{ 在已知基下坐标为 } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ 为 } \varphi \text{ 的矩阵.}$$

(2) $\varphi(\xi) = \varphi(\alpha + 2\beta + \gamma) = \varphi(\alpha + \beta + \gamma) + \varphi(\beta) = \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \varphi(\xi)$ 在已知基 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 下的坐标为 $(1, 1, 1)^T$

补充题 1 利用特征值与秩方法写出下列矩阵的 Jordan 形, 并写出极小多项式

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}_{4 \times 4}.$$

(1)解: 设 A 的若当形为 J , 则 $A \sim J = \begin{bmatrix} 2 & * & 0 & 0 \\ & 2 & * & 0 \\ & & 2 & * \\ & & & 2 \end{bmatrix}$ (相似), 其中 $*$ 为 0 或 1.

可知 $A - 2I \sim J - 2I = \begin{bmatrix} 0 & * & 0 & 0 \\ & 0 & * & 0 \\ & & 0 & * \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ (相似) $\Rightarrow r(A - 2I) = r(J - 2I)$ (秩相同)

计算知: $r(A - 2I) = 3$, 则 $r(J - 2I) = 3$

可知 3 个 $*$ 全为 1 $\Rightarrow A \sim J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 1 & 0 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$ (A 的若当形).

(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 的极小式为 $b(x) = (x - 2)^2$, 它的若当形为 $J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

又可知 C 有 2 个不同特征值 1, 2, 它必相似于对角形. C 的极小式为

$c(x) = (x - 1)(x - 2)$, 若当形为 $C \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (C 的若当形).

(3)可知 D 的极小式(取 $b(x), c(x)$ 的最小公倍式)为 $q(x) = (x - 2)^2(x - 1)$

可得 D 的若当形为 $J = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix} & & \\ & (1) & \\ & & \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

补充题 2 用“行变换法”求解矩阵方程 $AX = B$ 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

若 A 可逆, 则 $X = A^{-1}B$. 用增广阵做行变换:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1, \dots]{r_2 - 2r_1, \dots} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

补充题 3 证明若 A 是 n 阶正交阵, $x \in \mathbb{R}^n$ 是列向量, 则 $\|Ax\|^2 = \|x\|^2$.

证: 若 A 为 n 阶正交阵, $x \in \mathbb{R}^n$, 由内积与长度平方公式得

$$\|Ax\|^2 = (Ax)^T (Ax) = x^T A^T A x = x^T I x = x^T x = \|x\|^2.$$

补充题 4 若 $m \times n$ 实矩阵 A 满足 $A^T A = 0$, 则 $A = 0$

证法 1: 由秩公式 $r(A^T A) = r(A)$ 与 $A^T A = 0$, 可得秩 $r(A) = 0 \Rightarrow A = 0$.

证法 2: 设 $A = (a_{ij})$ 为实数 $m \times n$ 矩阵, 由于 $A^T A = 0$, 观察 $A^T A$ 的对角元即可.

补充题 5 若 $(A - I)(B - I) = I$ 则 $AB = BA$. 证: ?

补充题 6 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ 的伴随阵 A^* 的秩为 1, 则 $a = -\frac{1}{2}$.

解: 因 $r(A^*) = 1 \Leftrightarrow r(A) = n - 1$, 得 $r(A) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$.

补充题 7 若 A, B 都是 n 阶正交阵, 则 AB 也是正交阵, 且行列式 $|AB| = 1$ 或 -1 .

补充题 8 已知 $A + B = AB$, 计算 $(A - I)(B - I)$, 并证明 $AB = BA$. 证: ?

补充题 9 若 A, B 都是 n 阶正交阵, 且 $|AB| = -1$ 则 $A + B$ 不可逆, 即 $|A + B| = 0$.

证: 由正交阵定义 $A^T A = AA^T = I, B^T B = BB^T = I$. 可得

$$|A + B| = |AB^T B + AA^T B| = |A(B + A)^T B| = |A| |B| |B + A| = -|A + B|, \text{ 故 } |A + B| = 0.$$

(同理可证结论: 若 A 是 3 阶正交阵, 且 $|A| = 1$ 则 $|A - I| = 0$?)

思考题: (1) A 为 2 阶实对称阵, 特征值为 1, 2, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 使得 $AX = X$, 求正交阵 Q 与对角

阵 D 使得 $A = QDQ^T$, 求 $A = ?$.

(2) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 \mathbb{R}^3 的基, $A = A_{3 \times 3}$ 满足: $A\varepsilon_1 = \varepsilon_2, A\varepsilon_2 = \varepsilon_3, A\varepsilon_3 = 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3$.

求矩阵 B 使得 $A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)B$, $B = ?$

补充题: 验证下题并求其行列式 (并推广到 n 阶矩阵):

$$\begin{pmatrix} (a_0 + b_0)^2 & (a_0 + b_1)^2 & (a_0 + b_2)^2 \\ (a_1 + b_0)^2 & (a_1 + b_1)^2 & (a_1 + b_2)^2 \\ (a_2 + b_0)^2 & (a_2 + b_1)^2 & (a_2 + b_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a_0 & a_0^2 \\ 1 & 2a_1 & a_1^2 \\ 1 & 2a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0^2 & b_1^2 & b_2^2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, (1) \text{ 把 } A \text{ 分解为列与行的积, 并计算 } A^{2010}; (2) \text{ 求 } A \text{ 的全}$$

体特征根; (3) 写一个多项式 $f(x)$ 使得 $B = f(A)$, 由 A 的特征根直接写出 B 的特征根

2. 设 β 是非齐方程 $Ax = b$ ($b \neq \vec{0}$) 的一个解, 设 α_1, α_2 是齐次方程 $Ax = 0$ 的一个基础解系,

若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\beta = 0$, 求 $k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + k_3A\beta$ 与 k_1, k_2, k_3 .

3 用简单观察法求 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 中第一行代数余子式之和 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=?$

$$4. \text{ 设方程组 } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

判定 a, b 取何值时, 方程组有唯一解、无解、有无穷多解(求通解)

$$5. \text{ 设 } A \text{ 为 } n \text{ 阶阵, 则有 } r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) \leq n-2 \end{cases}$$

6. 秩公式: $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A A^T) = \text{rank}(A)$, ($A = A_{m \times n}$ 为实矩阵)

7. 设 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 是 R^4 中列向量; 矩阵 $A = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, 已知:

$$A = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \xrightarrow{\text{经过行变换后}} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 求向量组 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ 的一个极大无关组, 并用它表示向量 v_5

(2) 求 $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 + x_5v_5 = 0$ 的基础解与通解

(3) 求 $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = v_5$ 的通解与 $y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_4 + y_4v_5 = v_3$ 的通解

8. (1) 若 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 都是 $Ax = b$ ($b \neq \vec{0}$) 的解, 验证 $\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k}{k}$ 也是它的解

(2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 4 元非齐次方程组 $AX=b$ 的三个解向量, 且秩 $r(A)=3$,

$\alpha_1 + \alpha_2 = (8, 4, 4, 4)^T, \alpha_1 + \alpha_3 = (6, 2, 2, 2)^T$, 求方程组 $AX=b$ 的通解.

9. 设 n 元方程组 $Ax = b$ ($b \neq 0$), 秩 $r(A) = r$ ($r < n$), X_1, X_2, \dots, X_{n-r} 是 $Ax = 0$ 的基本解,

证明 $Ax = b$ 最多有 $n-r+1$ 个线性无关的解.