12-14 章 电磁学

基本内容

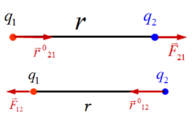
1、电荷、库仑定律；2、电场、电场强度（场强叠加原理、电场强度的计算）。
3、电通量、静电场中的高斯定理及应用。
4、静电场的环路定理、电势差与电势。
5、电势叠加原理；6、电势的计算；
7、等势面，电场强度与电势的微分关系。
8、导体的静电平衡及其条件；
9、静电平衡下导体上电荷的分布；
10、有导体存在的静电场的计算。
11、电容；12、电容器串联和并联；
13、电容器的储能、电场的能量。

14、电流强度、电流密度、电流的连续性方程、稳恒电流；15、电动势。16、磁场、磁感应强度；17、磁通量；18、磁场中的高斯定理；19、毕奥-萨伐尔定律。20、毕奥-萨伐尔定律的应用；21、安培环路定理及其应用。22、磁场对载流导线和载流线圈的作用；23、安培定律。
24、法拉弟电磁感应定律；25、楞次定律。
26、动生电动势；27、感生电动势。
28、自感应、互感应；29、自感磁能、磁场能量。

I.静电场小结

一、库仑定律

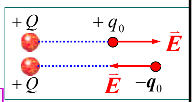
电荷q_1对q_2的作用力F_{21}



$$\vec{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}=-\vec{F}_{21}$$

二、电场强度

1、引入电场强度：$\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}$

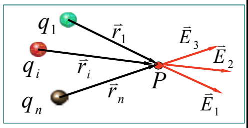


2、点电荷的场强：$\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^3}\vec{r}$

3、场强的叠加

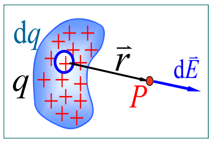
1) 点电荷系

$$\vec{E}=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^3}\vec{r}_i$$



2）电荷连续分布的带电体

$$d\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^3}\vec{r}$$



$$\vec{E}=\int d\vec{E}=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^3}\vec{r}$$

体电荷分布：$dq=\rho dV$

面电荷分布：$dq=\sigma ds$　　线电荷分布：$dq=\lambda dl$

计算步骤：①建坐标；②取电荷元 dq ；
③确定 $d\vec{E}$ 的方向和大小；
④将 $d\vec{E}$ 投影到坐标轴上；
⑤统一变量，对分量积分；
⑥合成确定 $\vec{E}$ 大小和方向。

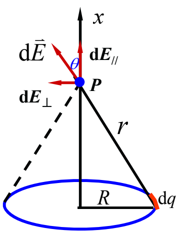
例2 均匀带电圆环轴线上一点的场强。设圆环带电量为q，半径为R。

解: 在圆环上任选 dq，引矢径 r 至场点，由对称性可知，p 点场强只有 x 分量。

$$E=\int_q dE_x=\int dE\cdot\cos\theta$$

$$=\int_L\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0r^2}\cos\theta$$

$$=\frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0r^2}\int_L dq$$



5

$$E=\frac{\cos\theta\cdot q}{4\pi\varepsilon_0r^2}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$

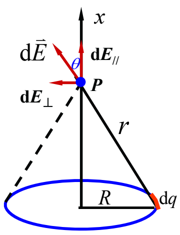
讨论

(1) 当 $x=0$时，即在圆环中心处

$$E=0$$

(2) 若 $x>>R$，则 $E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{x^2}$

可以把带电圆环视为一个点电荷。



6

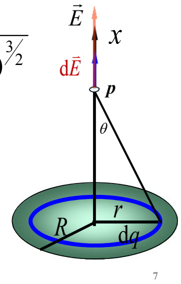
例3均匀带电圆盘轴线上一点的场强。设圆盘带电量为 q，半径为R。

解 带电圆盘可看成许多同心的圆环组成, 取一半径为 r, 宽度为dr 的细圆环带电量:

$$\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\cdot \mathrm{d}r \quad \mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}qx}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$E_x(p)=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]$$



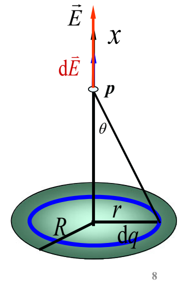
$$\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{3/2}}=\frac{1}{2}\int_0^R\frac{\mathrm{d}(r^2+x^2)}{(r^2+x^2)^{3/2}} \qquad \int x^\mu dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+c$$

$$=-\frac{1}{(r^2+x^2)^{1/2}}\Big|_0^R$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{(R^2+x^2)^{1/2}}$$

$$E_x(p)=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]$$

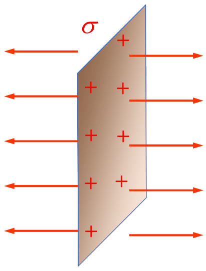


讨论

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}]$$

(1)当$R>>x$， 可视为无限大平板。

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

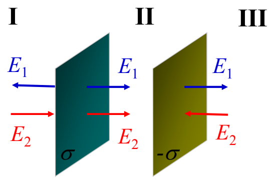


电场强度垂直带电平面

(2) $E_{\mathrm{I}}=E_1-E_2=0$

$$E_{\mathrm{II}}=E_1+E_2=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

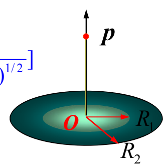
$$E_{\mathrm{III}}=E_1-E_2=0$$



(3) 补偿法 （空心圆盘在P点处的场强）

$$\vec{E}=\vec{E}_{R_2}-\vec{E}_{R_1} \qquad E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}]$$

$$=\frac{x\sigma}{2\varepsilon_0}[\frac{1}{(R_1^2+x^2)^{1/2}}-\frac{1}{(R_2^2+x^2)^{1/2}}]\vec{i}$$

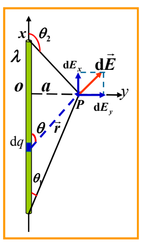


几种典型带电体的电场分布:

1）有限长带电直线

$$E_x=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)$$

$$E_y=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

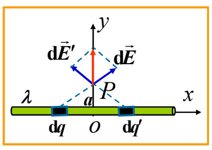


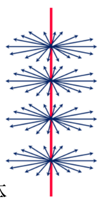
2）无限长带电直线

$\theta_1\to 0$ ， $\theta_2\to\pi$

$E_x=0 \qquad E=E_y=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$

$$\boxed{E=E_y=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$

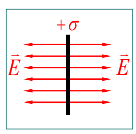


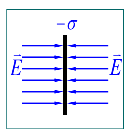


$\vec{E}$ 方向垂直带电导体

3）无限大带电平面

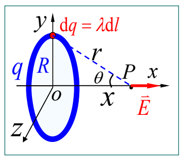
$$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$





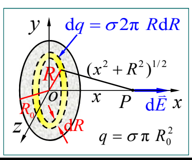
4）带电圆环轴线上的场强

$$E=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$



5）带电圆盘轴线上的场强

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}]$$

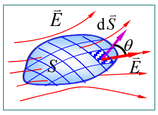


三、真空中的高斯定理

（1）电场线　静电场电场线特性

①始于正电荷，止于负电荷(或来自无穷远，去向无穷远)；②电场线不相交；③静电场电场线不闭合.

（2）电通量　$\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$



（3）真空中的高斯定理

$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$

通过封闭曲面的电通量由面内的电荷决定

$\vec{E}$是面元dS所在处的场强，由全部电荷(面内外电荷)共同产生的

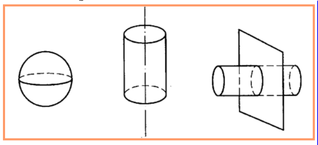
封闭面内电荷代数和

（4）利用高斯定理求$\vec{E}$　步骤为：

①由电荷分布的对称性分析电场分布的对称性.

②在对称性分析的基础上选取高斯面.　目的是使

$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}$　能够积分，成为E与面积的乘积形式。



（球对称、轴对称、面对称）

选取高斯面的技巧：
- 使场强处处与面法线方向垂直，以致该面上的电通量为零。
- 使场强处处与面法线方向平行，且面上场强为恒量。这种面上的电通量简单地为ES。

③由高斯定理　$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$　求出电场的大小，并说明其方向.

例4　已知球体半径为R，带电量为q（电荷体密度为ρ）。

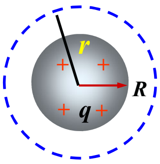
求:均匀带电球体的电场强度分布。

解:　球外　$r \ge R$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$



$$\rho = \frac{q}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{3q}{4\pi R^3}$$

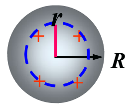
球内　$r < R$

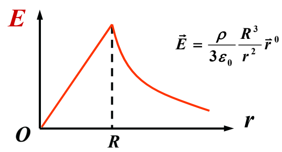
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}q' = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3\rho$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$





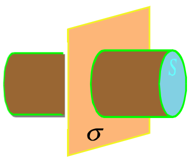
电场分布曲线

例5 “无限大”均匀带电平面上电荷面密度为σ。

求:电场强度分布。

解:电场强度分布具有面对称性。

空间各点电场强度分布具有面对称性，即离带电平面等距离处各点电场强度E的大小相等，方向与带电平面垂直。

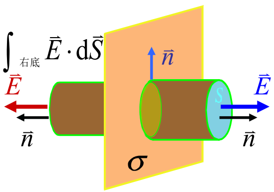


选取一个圆柱形高斯面

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{侧} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{左底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{右底} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= 0 + ES + ES = 2ES$$



根据高斯定理，有

$$2ES = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

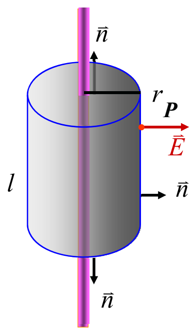
例6 无限长均匀带电直线的电荷线密度为$+\lambda$。

求:距直线　r处一点P的电场强度。

分析：电场分布具有轴对称性。

距离导线 **r** 处一点 **p** 点的场强方向一定垂直于带电直导线沿径向，且r相同处场强大小相同。

以带电直导线为轴，作一个通过P点，高为 l 的圆筒形封闭面为高斯面 S，通过S面的电通量为圆柱侧面和上下底面三部分的通量和。



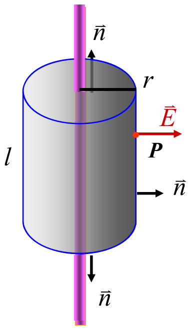
解: 电场分布具有轴对称性。

过P点作高斯面

$$\Phi_e=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$
$$=\int_{侧}\vec{E}\cdot d\vec{S}+\int_{上底}\vec{E}\cdot d\vec{S}+\int_{下底}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$
$$=\int_{侧}E dS=E\int_{侧}dS=E\cdot 2\pi r\cdot l$$

根据高斯定理得

$$E\cdot 2\pi r\cdot l=\frac{1}{\varepsilon_0}\lambda l \qquad \boxed{E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$



四、静电场的环路定理

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0 \Rightarrow$$

- 静电场是保守场
- 静电场是无旋场

五、电势能、电势

（1）电势能 $A_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}=-(W_b-W_a)=W_a-W_b$

令 $W_b=0$ $\quad \boldsymbol{W_a=A_{a"0"}=\int_a^{"0"}q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}}$

（2）电势

a 点电势 $\quad \boldsymbol{u_a=\frac{W_a}{q_0}=\frac{A_{a"0"}}{q_0}} \qquad \boldsymbol{u_a=\int_a^{"0"}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$

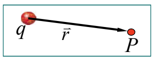
（3）电势差 $\quad U_{ab}=u_a-u_b=\int_a^b\vec{E}\cdot d\vec{l}$

◆ 静电场力的功 $\quad A_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}=q_0U_{ab}=q_0(u_a-u_b)$

（4）电势的计算 令 $U_\infty=0$

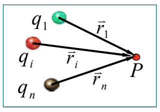
①点电荷的电势

$$u_P=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



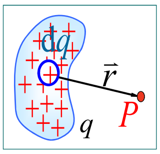
②点电荷系的电势

$$u_P=\sum_i u_{Pi}=\sum_i\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$



③电荷连续分布

$$u_P=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



（5）电势与电场强度的微分关系

$$\vec{E}=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)=-\mathrm{grad}(u)=-\nabla u$$

$$E_x=-\frac{\partial u}{\partial x}\qquad E_y=-\frac{\partial u}{\partial y}\qquad E_z=-\frac{\partial u}{\partial z}$$

讨论 求电势的方法

①已知场源电荷的分布，利用点电荷电场的电势公式及电势叠加原理进行电势的求解，如

利用 $u_P=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 或 $u_P=\sum_i\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$

（利用了点电荷电势公式，这一结果已选无限远处为电势零点，即使用此公式的前提条件为有限大带电体且选无限远处为电势零点.）

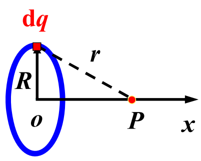
②已知场强的分布，利用电势与场强的积分关系，即电势的定义式计算电势。

$$\boldsymbol{u_p=\int_p^{"0"}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

例1均匀带电圆环半径为R，电量q 。

求 圆环轴线上一点的电势。

解 建立如图坐标系，选取电荷元 dq



$$u_p=\int du=\int_0^q\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

利用以上结果,可以计算均匀带电圆盘轴线上 p 点的电势。

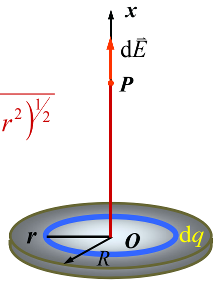
在盘上取一小圆环,带电量为：

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

圆环在p点的电势 $du = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+r^2)^{1/2}}$

$$u = \int du = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{(x^2+r^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2} - x\right)$$



25

$$u = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2} - x\right)$$

当 $x>>R$ 时

$$\sqrt{x^2+R^2} \approx x + \frac{R^2}{2x}$$

$$u \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{2x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

在离圆盘很远处,可以把圆盘看成一个点电荷。

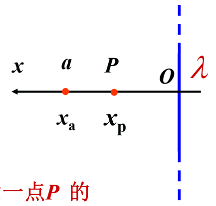
26

例3 求电荷线密度为λ的无限长带电直线空间中的电势分布。

取a点为电势零点,a点距离带电直线为x_a

$$u_P = \int_{(P)}^{(a)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{x_P}^{x_a} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}dx$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln x_a - \ln x_P)$$



取 $x_a = 1, \ \ln x_a = 0$ (场中任意一点P 的电势表达式最简捷)

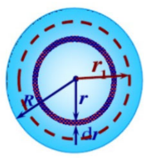
$$u_P = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x$$

离带电直线的距离

27

一半径为R的带电球体，球体内电荷体密度分布为$\rho=(qr)/(\pi R^4)$

求：（1）带电球体的总电量；（2）球体内外各点的电场强度；（3）球体内外各点的电势.



解：（1）在球内取半径为r、厚为dr的薄球壳，该壳内所包含的电荷为

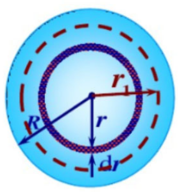
$$dq = \rho dV = \frac{qr}{\pi R^4}4\pi r^2 dr = \frac{4qr^3}{R^4}dr$$

28

$$dq = \rho dV = \frac{qr}{\pi R^4}4\pi r^2 dr = \frac{4qr^3}{R^4}dr$$

则球体所带的总电荷为

$$Q = \int_V \rho dV = \frac{4q}{R^4}\int_0^R r^3 dr = q$$



（2）在球内作一半径为r_1的高斯球面，按高斯定理有

$$4\pi r_1^2 E_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{r_1}\frac{qr}{\pi R^4}\cdot 4\pi r^2 dr = \frac{qr_1^4}{\varepsilon_0 R^4}$$

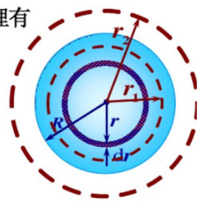
得 $E_1 = \dfrac{qr_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}$ $(r_1 \leq R)$ $\vec{E}_1$ 方向沿半径向外

29

在球体外作半径为r_2的高斯球面，按高斯定理有

$4\pi r_2^2 E_2 = q/\varepsilon_0$ 得 $E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$ $(r_2>R)$

$\vec{E}_2$ 方向沿半径向外.



（3）球内电势

$$U_1 = \int_{r_1}^R \vec{E}_1\cdot d\vec{l} + \int_R^\infty \vec{E}_2\cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^R \frac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}dr + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$= \frac{q}{3\pi\varepsilon_0 R} - \frac{qr_1^3}{12\pi\varepsilon_0 R^4} = \frac{q}{12\pi\varepsilon_0 R}\left(4 - \frac{r_1^3}{R^3}\right) \qquad (r_1 \leq R)$$

球外电势

$$U_2 = \int_{r_2}^\infty \vec{E}_2\cdot d\vec{l} = \int_{r_2}^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \qquad (r_2 > R)$$

30

六、静电场中的导体

1. 静电平衡条件：导体内部场强处处为零。

推论：1） 整个导体是等势体，表面是等势面。

2） 导体表面上的场强垂直与该点表面。

2. 在静电平衡条件下，导体上的电荷分布：

1) 实心导体：(不论导体是否带电，不论导体是否在外电场中）

导体内部没有净电荷，电荷只能分布在导体表面上。

2）空腔导体： 腔内无电荷时 -- 电荷只分布在外表面上；

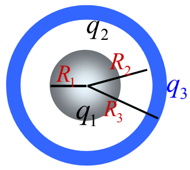
腔内有电荷时 -- 导体内表面电荷与腔内电荷代数和为零。

3）导体表面电荷密度与场强关系： $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

31

例1 一个半径为R_1，带电量为q_1的金属球，放在另一个带电金属球壳内，其内、外半径分别为R_2和R_3，球壳带电量为 q。

求：此系统的电荷、电场分布和电势分布以及 球与 球壳间的电势差；如果用导线将球壳和球连接，又如何？



解：电荷分布：

设球壳内、外表面电量为 q_2、q_3。

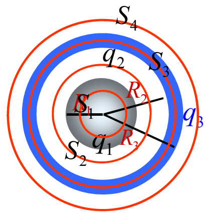
球体外表面：q_1 球壳内表面：$q_2 = -q_1$

32

球壳外表面： $q_3 = q - q_2 = q + q_1$

电场分布：作高斯面 S_1、S_2、 S_3 和 S_4

由高斯定理 $\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \sum \frac{q}{\varepsilon_0}$



得 $E_1 = 0$ $r < R_1$

$E_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o r^2}$ $R_1 < r < R_2$

$E_3 = 0$ $R_2 < r < R_3$ $E_4 = \frac{q_1 + q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$ $r > R_3$

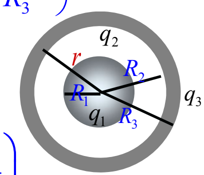
33

电势分布： $u_a = \int_a^{"0"} \vec{E}\cdot d\vec{l}$

$r < R_1$ $u_1 = \int_r^{R_1} \vec{E}_1\cdot d\vec{l} + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2\cdot d\vec{l} + \int_{R_2}^{R_3} \vec{E}_3\cdot d\vec{l} + \int_{R_3}^{\infty} \vec{E}_4\cdot d\vec{l}$

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1} - \frac{q_1}{R_2} + \frac{q_1 + q}{R_3}\right)$

$R_1 < r < R_2$



$u_2 = \int_r^{R_2} \vec{E}_2\cdot d\vec{l} + \int_{R_3}^{\infty} \vec{E}_4\cdot d\vec{l}$

$\boldsymbol{u_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r} - \frac{q_1}{R_2} + \frac{q_1 + q}{R_3}\right)}$

34

$R_2 < r < R_3$ $\boldsymbol{u_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 + q}{R_3}}$

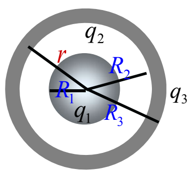
$r > R_3$ $\boldsymbol{u_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 + q}{r}}$

金属球与金属壳之间的电势差

$\boxed{U_{ab} = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}}$ $E_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o r^2}$

$U_{AB} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o r^2} dr$

$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$

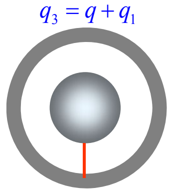


35

用导线将金属球和金属球壳连接，则球壳的内表面和球表面的电荷会完全中和，重新达到静电平衡，二者之间的场强和电势差均为零。

$q_1 = 0$, $q_2 = 0$

$q_3 = q + q_1$



球壳外表面仍保持有 $q_1 + q$ 的电量，而且均匀分布，它外面的电场仍为：

$E_4 = \frac{q_1 + q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$ $r > R_3$

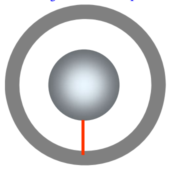
36

连接后,球和球壳为等势体

$q_3 = q + q_1$

$r < R_3 \quad u_1 = u_2 = u_3 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1+q}{R_3}$

$r > R_3 \quad u_4 = \dfrac{q_1+q}{4\pi\varepsilon_0 r}$



有导体存在时静电场的计算方法

1. 静电平衡的条件和性质：$E_{内} = 0 \quad U_{导体} = C$
2. 电荷守恒定律;
3. 确定电荷分布, 然后求解。

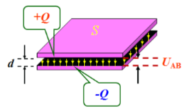
37

七、电容

1、孤立导体的电容 $C = \dfrac{Q}{u}$

2、电容器的电容 $C = \dfrac{Q}{U_A - U_B}$

几种常见的电容器的电容:

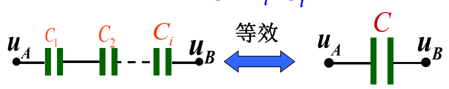


平行板电容器 $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

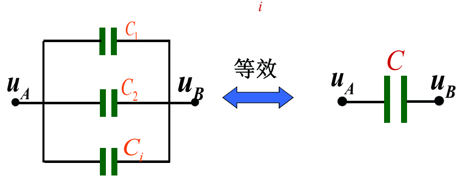
同心球型电容器 $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A} \quad (R_B > R_A)$

同轴圆柱型电容器 $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(R_B/R_A)} \quad (R_B > R_A)$

电容器的串联 $\dfrac{1}{C} = \sum_i \dfrac{1}{C_i}$



电容器的并联 $C = \sum_i C_i$



八、静电场的能量

1、带电电容器的能量

电容器贮存的电能 $W_e = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{1}{2}QU = \dfrac{1}{2}CU^2$

2、静电场的能量

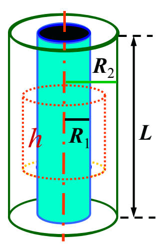
电场能量密度 $w_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

电场空间所存储的能量（电场总能量）

$$W_e = \int_V w_e \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V$$

同轴圆柱形电容器的电容

已知：两筒半径分别为R_1(内)和R_2(外)，筒长L，筒间为真空。



① 设所带电量为Q，求场强

根据高斯定律，两柱面间场强为:

$E = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rL}$

② 根据场强求电势差

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} E\cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rL}dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

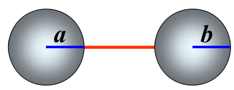
③ 计算电容 $C = \dfrac{Q}{U_{AB}} = 2\pi\varepsilon_0 L \Big/ \ln\dfrac{R_2}{R_1}$

例 半径分别为a和b的两个金属球, 它们的间距比本身线度大的多，今用一细导线将两者相连接, 并给系统带上电荷Q。

求: 1. 每个球上分配到的电荷;
2. 按电容定义式,计算此系统的电容。

解: 1. $Q_a + Q_b = Q$

$u_a = \dfrac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 a} \quad u_b = \dfrac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 b}$

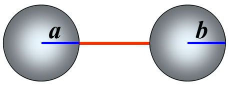


$u_a = u_b = u$

42

$$\frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

即 $$\frac{Q_a}{a}=\frac{Q_b}{b}$$



∴ $Q_a=\dfrac{aQ}{a+b}$ $\quad Q_b=\dfrac{bQ}{a+b}$

2.电容 $$C=\frac{Q}{u}=\frac{Q}{u_a}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{Q_a}=4\pi\varepsilon_0(a+b)$$

43

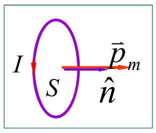
II. 稳恒磁场小结

一、基本概念

1、磁感应强度大小 $B=\dfrac{F_{\max}}{qv}$

2、载流线圈磁矩

$\vec{p}_m = IS\hat{n}$



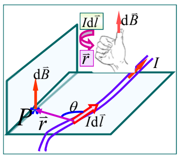
3、载流线圈的磁力矩 $\vec{M}=\vec{p}_m\times\vec{B}$

4、磁通量 $\Phi_m=\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_S BdS\cos\theta$

二、基本实验定律

1、毕奥—萨伐尔定律(电流元在空间产生的磁场)

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$



大小为: $dB=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Idl\sin\theta}{r^2}$

方法步骤:

①选取合适的电流元 $Id\vec{l}$,写出电流元在P点的 $d\vec{B}$ 表达式;

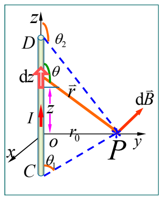
②选择适当的坐标系,对 $d\vec{B}$ 投影,写出各分量,将矢量积分化为标量积分,统一变量给出正确的积分上下限,求出 $\vec{B}$ 的各分量值;

③合成 $\vec{B}$ 确定大小方向。

几种典型电流的磁场分布

(1) 有限长直线电流的磁场

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

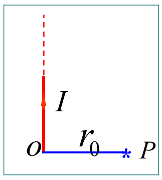


(2) 无限长载流直导线的磁场

$\theta_1\to 0$, $\theta_2\to\pi$ $\qquad B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$

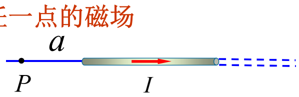
(3) 半无限长载流直导线的磁场

$\theta_1\to\dfrac{\pi}{2}$, $\theta_2\to\pi$ $\qquad B_P=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi r_0}$



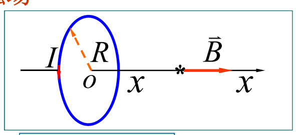
(4) 载流导线延长线上任一点的磁场

$\vec{B}=0$



(5) 载圆线圈轴线上的磁场

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

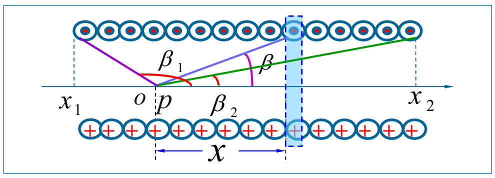


(6) 载流圆环中心的磁场 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$

(7) 密绕长直螺线管、密绕螺线环内部的磁场

$$B=\mu_0 nI$$

(8) 载流直螺线管的磁场

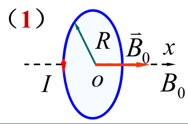


$$B=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$$

无限长的螺线管 $B=\mu_0 nI$

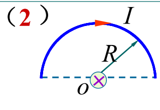
半无限长螺线管 $B=\dfrac{1}{2}\mu_0 nI$

(1)



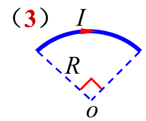
$B_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$

(2)



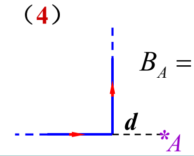
$B_0 = \dfrac{\mu_0 I}{4R}$

(3)



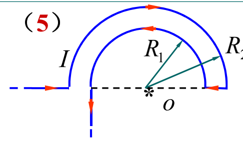
$B_0 = \dfrac{\mu_0 I}{8R}$

(4)



$B_A = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi d}$

(5)

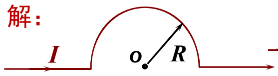


$B_0 = \dfrac{\mu_0 I}{4R_2} - \dfrac{\mu_0 I}{4R_1} - \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R_1}$

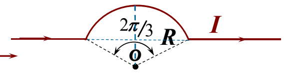
载流圆环中心: $B_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$　有限长直线电流: $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$

例: 如下列各图示，求圆心 o 点的磁感应强度。

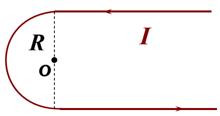
解:



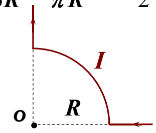
$B = \dfrac{\mu_0 I}{4R}$ ⊗



$B = \dfrac{\mu_0 I}{6R} + \dfrac{\mu_0 I}{\pi R}\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ⊗



$B = \dfrac{\mu_0 I}{4R} + 2\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$ ⊙

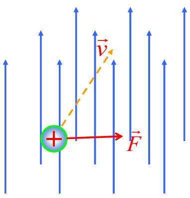


$B = \dfrac{\mu_0 I}{8R}$ ⊙

2、 磁场对运动电荷的作用

(1) 洛伦兹力

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}}$$



大小: $F = qvB\sin\theta$

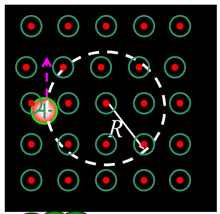
方向: $\vec{v} \times \vec{B}$ 的方向(右手螺旋定则)

(2) 粒子在磁场中做匀速圆周运动。洛伦兹力为向心力

$$qv_0 B = m\frac{v_0^2}{R}$$

轨道半径

$$\boxed{R = \frac{mv_0}{qB}}$$



$$\boxed{T = \frac{2\pi R}{v_0} = 2\pi\frac{m}{qB}}$$

周期

周期与速度无关!

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}$$

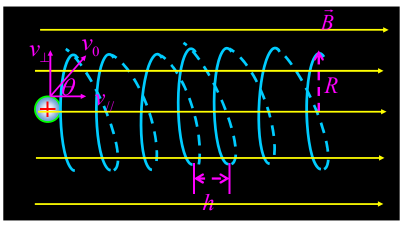
角频率

(3) 如果 $\vec{v}_0$ 与 $\vec{B}$ 斜交成 θ 角

粒子作螺旋运动，半径 $R = \dfrac{mv_\perp}{qB} = \dfrac{mv_0\sin\theta}{qB}$

周期

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$



螺距

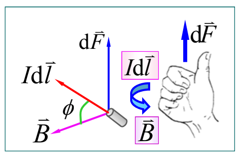
$$h = v_{//}T = v_{//}\frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m v_0\cos\theta}{qB}$$

注意: 螺距仅与平行于磁场方向的初速度有关。

3、安培定律-----磁场对载流导线的作用

安培定律 $\boxed{d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}}$　$dF = IdlB\sin\phi$

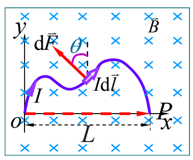
◆ 有限长载流导线所受的安培力



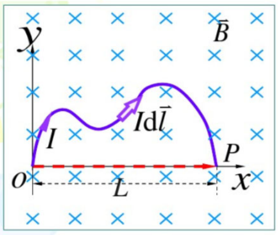
$$\vec{F} = \int_l d\vec{F} = \int_l Id\vec{l} \times \vec{B}$$

◆不规则的平面载流导线在均匀磁场中所受的力

$$\vec{F} = \vec{F}_y = BIl\vec{j}$$



结论　任意平面载流导线在均匀磁场中所受的力，与其始点和终点相同的载流直导线所受的磁场力相同.



解：如图取电流 元$Id\vec{l}$，则

$$d\vec{l} = dx\vec{j} + dy\vec{j}$$

$$\vec{B} = -B\vec{k}$$

$$\therefore d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} = I(dx\vec{i} + dy\vec{j}) \times (-B\vec{k})$$

$$= IBdx\vec{j} - IBdy\vec{i} = dF_y\vec{j} + dF_x\vec{i}$$

$$\therefore F_y = \int^{L} IBdy = IBL \quad F_x = 0$$

均匀磁场中，任意闭合载流线圈：

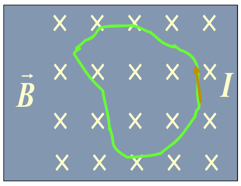
整个载流线圈在均匀磁场中受到的安培力为

$$\vec{F} = \oint d\vec{F} = \oint Id\vec{l} \times \vec{B}$$

$$= I(\oint d\vec{l}) \times \vec{B}$$

$$\oint d\vec{l} = 0$$ 根据矢量多边形定理，对整个线圈

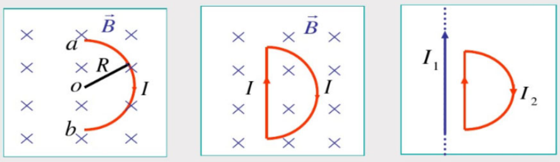
$$\vec{F} = I(\oint d\vec{l}) \times \vec{B} = 0$$



闭合载流线圈在均匀磁场中受到的安培力矢量和为零。---普适结论

练习：

1. 求电流在磁场中所受的力



$F = BI \cdot 2R$
方向向右

$F = 0$

I_2受力 $F \neq 0$

57

例3 求一载流导线框 CDEFC 在无限长直导线磁场中的受力。

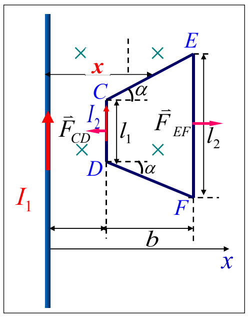
解 $B = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$

$$F_{CD} = I_2 l_1 B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} I_2 l_1$$

方向向左。

$$F_{EF} = I_2 l_2 B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+b)} I_2 l_2$$

方向向右。



CE 段受力

$$dF = BI_2 dl \quad dl\cos\alpha = dx$$

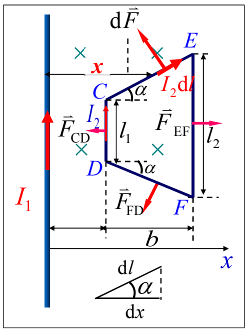
$$F_{CE} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} I_2 \frac{dx}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos\alpha} \ln\frac{a+b}{a}$$

FD 段受力

$$F_{FD} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos\alpha} \ln\frac{a+b}{a}$$

$$\therefore \vec{F}_{合} = (F_{EF} - F_{CD} - 2F_{CE}\sin\alpha)\vec{i}$$



静电荷受力：

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

电偶极子所受力矩：

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

运动电荷受力：

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

电流元受力：

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

载流线圈所受磁矩：

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

三、稳恒磁场的基本性质

1、磁场中的高斯定理： $\Phi_m = \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$

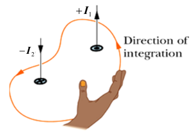
2、安培环路定理：

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

环路所包围的电流

空间所有电流共同产生

由环路内电流决定



注意 电流 I 正负的规定：

若电流流向与积分回路构成右手螺旋，电流I取正值；反之，电流I取负值。

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

明确以下几点：

（1）电流正负规定：电流方向与环路方向满足右手螺旋定则电流I取正；反之电流I取负。

（2）$\vec{B}$是指环路上一点的磁感应强度，不是任意点的，它是空间所有电流共同产生的。

（3）安培环路定理适用于稳恒电流的磁场。

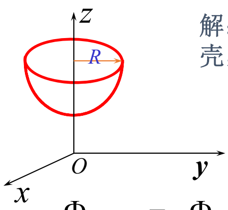
（4）安培环路定理说明磁场性质——磁场是非保守场，是涡旋场。

稳恒磁场是有旋、无源场

场	磁场	电场
定义	运动电荷 $\xrightarrow{\text{产生}}$ 磁场 $\xrightarrow{\text{力}}$ 运动电荷	电荷 $\xrightarrow{\text{产生}}$ 电场 $\xrightarrow{\text{力}}$ 电荷
描述	磁感应强度 $B = \dfrac{F_{max}}{qv}$	电场强度 $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q} = \dfrac{F}{q}\hat{F}$
力	磁场力：点电荷 $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$；电流元 $d\vec{F} = Id\vec{l}\times\vec{B}$；载流导线 $\vec{F} = \int Id\vec{l}\times\vec{B}$	电场力：点电荷 $\vec{F} = q\vec{E}$；电荷元 $d\vec{F} = dq\vec{E}$；带电体 $\vec{F} = \int dq\vec{E}$
产生	$d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$	$d\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r^2}\hat{r}$
高斯定理	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$	$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{\sum q}{\varepsilon_0}$
环路定理	$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$	$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

场	磁场	电场
产生	$d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$	$d\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r^2}\hat{r}$
高斯定理	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$	$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{\sum q}{\varepsilon_0}$
环路定理	$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$	$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$
求场的方法	磁场叠加原理 $\vec{B} = \begin{cases}\sum_i \vec{B}_i \\ \int d\vec{B}\end{cases}$ 安培环路定理	场强叠加原理 $\vec{E} = \begin{cases}\sum_i \vec{E}_i \\ \int d\vec{E}\end{cases}$ 高斯定理 由电势梯度 $\vec{E} = -\nabla U$

例：一磁场 $\vec{B} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}\,(T)$，则通过半径为R、开口向z轴正方向的半球壳表面的磁通量为 $\underline{-\pi cR^2}$。



解：作半径为R的圆平面封住半球壳，由磁场的高斯定理得：

$$\Phi_m = \Phi_{半球壳} + \Phi_{圆平面} = \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\Phi_{半球壳} = -\Phi_{圆平面} = -\int \vec{B}\cdot d\vec{S}_{圆面} = -(\vec{B}\cdot\vec{S}_{圆面})$$

$$= -(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})\cdot(\pi R^2\vec{k}) = -\pi R^2 c$$

利用安培环路定理求磁感应强度的关键：根据磁场分布的对称性，选取合适的闭合环路。

选取环路原则：

（1）环路要经过所求的场点；

（2）闭合环路的形状尽可能简单，总长度容易求；

（3）环路上各点 $\vec{B}$ 大小相等，方向平行于线元 $d\vec{l}$ 。目的是将 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$ 写成：$B = \dfrac{\mu_0 \sum I}{\oint_L dl}$ 。

或 $\vec{B}$ 的方向与环路方向垂直，

$$\vec{B} \perp d\vec{l}\ ,\quad \cos\theta = 0 \ \Rightarrow\ \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$

例2 求无限长均匀载流圆柱导体产生的磁场。

电流I均匀分布在圆柱的横截面内

已知：I、R，磁场的轴对称分布特点。

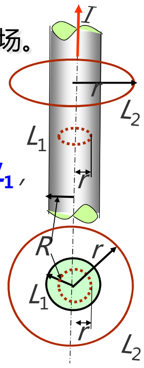
取$r<R$，在垂直于轴线平面内作圆形回路L_1，

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\oint_L dl = B2\pi r = \mu_0\sum_i I_i$$

$$= \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2 \qquad \boxed{B_{内} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ir}{R^2}}$$

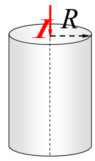
取$r>R$在垂直于轴线平面内作圆形回路L_2，

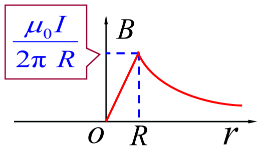
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi rB = \mu_0\sum_i I_i = \mu_0 I \qquad \boxed{B_{外} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$



$\vec{B}$ 的方向与I 成右螺旋

$$\begin{cases} 0<r<R, & B = \dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2} \\ r>R, & B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases}$$

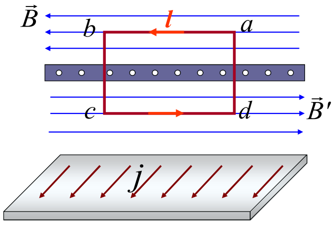




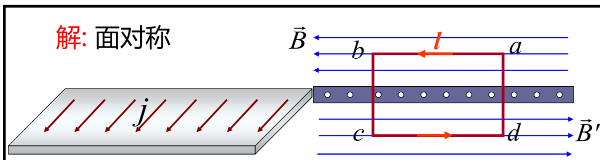
无限长均匀载流圆柱导体的磁感应强度分布图

例5 求 “无限大”薄导体板 ，单位宽度上的恒定电流为j，求导体平板周围的磁感应强度。

解: 面对称



解: 面对称



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{ab}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{bc}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{cd}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{da}\vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$= B\int_a^b dl + B\int_c^d dl = 2Bab = \mu_0 abj \qquad B = \mu_0 j/2$$

无限大平板：

面电荷密度σ：

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

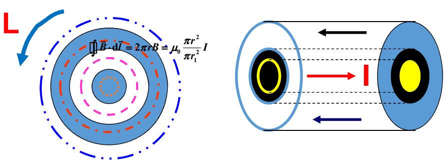
单位宽度上的恒定电流为j

$$\boxed{B = \mu_0 j/2}$$

例：电缆由导体圆柱和一同轴的导体圆筒构成，使用时电流从导体流出，从另一导体流回，电流均匀分布在横截面上，设圆柱体的半径为 r_1 ，圆筒的内外半径分为 r_2，r_3。若场点到轴线的距离为 r

求：从 0 到 ∞ 范围内各处磁感应强度的大小

解：



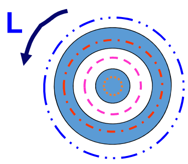
$r<r_1$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi rB = \mu_0\frac{\pi r^2}{\pi r_1^2}I \qquad B = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi r_1^2}$$

$r_1<r<r_2$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi rB = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



$r_2<r<r_3$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi rB = \mu_0\left[I - \frac{I\pi(r^2-r_2^2)}{\pi(r_3^2-r_2^2)}\right]$$

$$B = \frac{\mu_0 I(r_3^2-r^2)}{2\pi(r_3^2-r_2^2)r}$$

$r>r_3$ $\quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = I - I = 0 \qquad B = 0$

III.电磁感应小结

一、电磁感应定律

1、法拉第电磁感应定律 $\varepsilon = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$

用法拉第电磁感应定律确定电动势方向，通常遵循以下步骤：

①任意规定回路的绕行正方向；
②确定通过回路的磁通量的正负；
③确定磁通量的时间变化率的正负；
④最后确定感应电动势的正负。

2、楞次定律（是能量守恒定律的一种表现）

闭合的导线回路中所出现的感应电流，总是使它自己所激发的磁场反抗任何引发电磁感应的原因。

二、动生电动势和感生电动势

1、动生电动势

动生电动势的非静电力场来源 ⟹ 洛伦兹力

一段任意形状的导线L在磁场中运动时：$\varepsilon = \int_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

整个闭合导线回路L都在磁场中运动时：$\varepsilon = \oint_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

➢动生电动势的计算（两种方法）

①由法拉第定律求 $\varepsilon = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$

如果回路不闭合，需辅助线使其闭合。
$\boldsymbol{\varepsilon}$ 大小和方向可分别确定 .

1、均匀磁场，平动

例 1 已知：$\vec{v}, \vec{B}, \alpha, L$ 求：ε

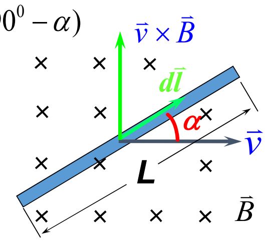
解：$d\varepsilon = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

$= vB\sin 90^0 dl\cos(90^0-\alpha)$

$= Bv\sin\alpha\, dl$

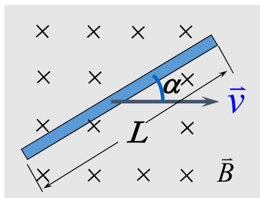
$\varepsilon = \int Bv\sin\alpha\, dl$

$= BvL\sin\alpha$

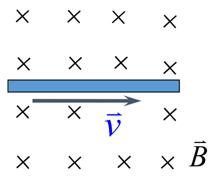


典型结论

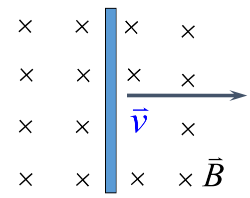
$\boldsymbol{\varepsilon = BvL\sin\alpha}$



特例

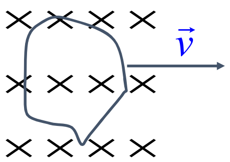


$\varepsilon = 0$



$\varepsilon = BvL$

均匀磁场 闭合线圈平动



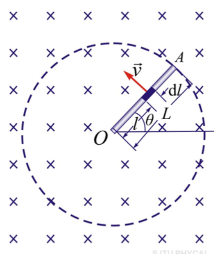
$\varepsilon_i = -\dfrac{d\Phi}{dt} = 0$

例 3 长为L的铜棒，在磁感强度为$\vec{B}$的均匀磁场中以角速度ω在与磁场方向垂直的平面内绕棒的一端O匀速转动，求棒中的动生电动势。

解：取线元$\mathrm{d}\vec{l}$，方向沿O指向A

$v = \omega l$

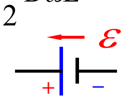
$\mathrm{d}\varepsilon_i = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -vB\,\mathrm{d}l$



金属棒上总电动势为

$\varepsilon_i = -\int_0^L Bv\,\mathrm{d}l = -\int_0^L B\omega l\,\mathrm{d}l = -\dfrac{1}{2}B\omega L^2$

方向为$A\to O$，**即O点电势较高。**



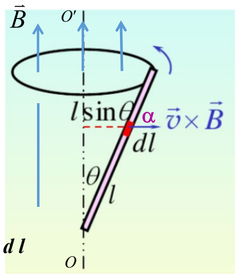
例 4 长度为L的金属杆在均匀磁场 中绕平行于磁场方向的定轴OO' 转动，已知杆相对于均匀磁场 的方位角为θ，杆的角速度为ω，转动方向如图所示．试求金属杆L在转动过程中产生的动生电动势的大小和方向。

解：在距O点为l处的dl线元中的动生电动势为

$$d\varepsilon = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

$$\upsilon = \omega l \sin\theta$$

$$d\varepsilon = \int_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = \int_L v\,B\sin(\frac{1}{2}\pi)\cos\alpha\, d\,l$$

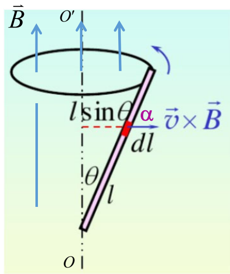


$$\varepsilon = \int_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = \int_L v\,B\sin(\frac{1}{2}\pi)\cos\alpha\, d\,l$$

$$= \int_L \omega l B\sin\theta\, d\,l\,\sin\theta = \omega B\sin^2\theta\int_0^L l\,d\,l$$

$$= \frac{1}{2}\omega BL^2\sin^2\theta$$

ε的方向沿着杆指向上端



2、非均匀磁场

例5 一长直导线中通电流I，有一长为l的金属棒与导线垂直共面(左端相距为a)。当棒以速度v平行与长直导线匀速运动时，求棒产生的动生电动势。

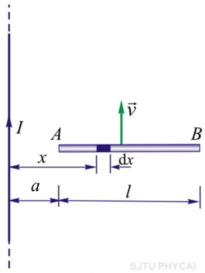
解：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$d\varepsilon_i = (\vec{v}\times B)\cdot d\vec{x} = -Bv\,dx$$

$$\varepsilon_i = -\int_a^{a+l}\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\frac{dx}{x}$$

$$= -\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\frac{a+l}{a}$$

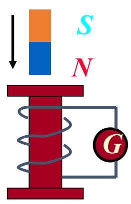


方向：$B\rightarrow A$

三、感生电动势和涡旋电场

1、感生电动势

导体回路不动，由于磁场变化引起穿过回路的磁通量变化，产生的感应电动势叫感生电动势。



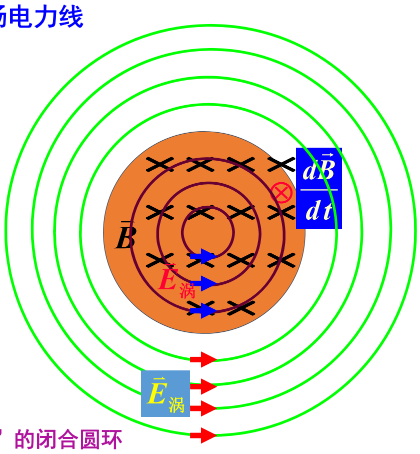
显然，产生感生电动势的非静电力一定不是洛伦兹力。

产生感生电动势的非静电力是什么？

2、麦克斯韦假设

变化的磁场在其周围空间会激发出电场线为闭合曲线的电场，称其为感生电场 $\vec{E}_{感}$ 或涡旋电场 $\vec{E}_{涡}$

感生电场电力线

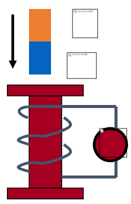


"无头无尾"的闭合圆环

三、感生电动势和涡旋电场

1、感生电动势

导体回路不动，由于磁场变化引起穿过回路的磁通量变化，产生的感应电动势叫感生电动势。



显然，产生感生电动势的非静电力一定不是洛伦兹力。

产生感生电动势的非静电力是什么？

2、麦克斯韦假设

变化的磁场在其周围空间会激发出电场线为闭合曲线的电场，称其为感生电场 或涡旋电场

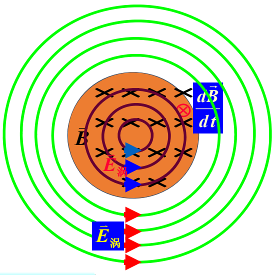
3、感生电场的环路定理

由电动势的定义

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l}$$

由法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$



$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

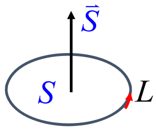
电磁场基本方程

当回路固定不动 → $\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

讨论 $\oint_L \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

1） 此式反映变化磁场和感生电场的相互关系，即感生电场是由变化的磁场产生的。

2） S 是以闭合路径 L 为边界的任一平面或曲面。



闭合路径 L的积分绕行与其所包围面积S的法线正方向满足右手螺旋法则。

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 是曲面上的任一面元上磁感应强度的变化率

不是积分回路线元上的磁感应强度的变化率

---

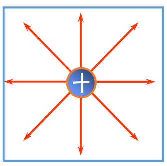
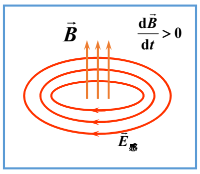
3) 这是电磁场基本方程之一。

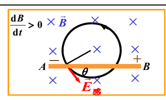
4) 某一段细导线内的感生电动势

$$\varepsilon_i = \int_a^b \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l}$$

	动生电动势	感生电动势
特点	磁场不变，闭合电路的整体或局部在磁场中运动导致回路中磁通量的变化	闭合回路的任何部分都不动，空间磁场发生变化导致回路中磁通量变化
原因	由于S的变化引起回路中Φ变化	由于$\vec{B}$的变化引起回路中Φ变化
非静电力的来源	非静电力就是洛仑兹力，由洛仑兹力对运动电荷作用而产生电动势	变化磁场在它周围空间激发涡旋电场，非静电力就是感生电场力，由感生电场力对电荷作功而产生电动势
结论	$\varepsilon_i = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ 其方向由 $\vec{v} \times \vec{B}$ 决定	$\varepsilon_i = \oint \vec{E}_{涡} \bullet d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$ 其方向由$\vec{E}_{涡}$沿$d\vec{l}$的积分方向决定

4、感生电场的性质及与静电场的比较

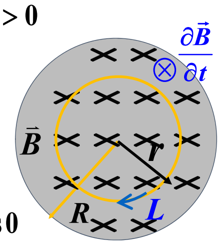
比较	静电场	感生电场
起源	由静止电荷激发	由变化的磁场激发
电场线形状	电场线为非闭合曲线 	电场线为闭合曲线 

比较	静电场	感生电场
性质	有源： $\oint_s \vec{E}_{静} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$	无源： $\oint_s \vec{E}_{感} \cdot d\vec{S} = 0$
	保守： $\oint_L \vec{E}_{静} \cdot d\vec{l} = 0$	非保守（涡旋）： $\oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$
特点	不能脱离源电荷存在	可以脱离“源”在空间传播
对场中电荷的作用	$\vec{F}_{静} = q\vec{E}_{静}$	$\vec{F}_{感} = q\vec{E}_{感}$
相互联系	$\vec{F}_{感}$作为产生$\varepsilon_{感}$的非静电力，可以引起导体中电荷堆积，从而建立起静电场．	

5、感生电场的计算 $\oint_L \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

例　局限于半径 R 的圆柱形空间内分布有均匀磁场，方向如图。磁场的变化率 $\partial B/\partial t > 0$

求：1）圆柱内、外的 $\vec{E}_{涡}$ 分布。



解：$r < R$

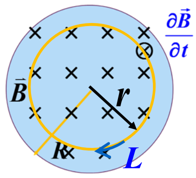
$$\oint_l \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l E_{涡} dl \cos 0 = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} dS \cos 0$$

$$E_{涡} 2\pi r = -\frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2 \qquad E_{涡} = -\frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t}$$

方向：逆时针方向

讨论 $E_{涡} = -\frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t}$



负号表示 $\vec{E}_{涡}$ 与 $\partial \vec{B}/\partial t$ 反号

(1) $|\vec{B}| \downarrow$ 则 $\partial B/\partial t < 0 \rightarrow E_{涡} > 0$

$\vec{E}_{涡}$ 与 L 积分方向切向同向

(2) $|\vec{B}| \uparrow$ 则 $\partial B/\partial t > 0 \rightarrow E_{涡} < 0$

$\vec{E}_{涡}$ 与 L 积分方向切向相反

$r > R$

$$\oint_{L'} \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l} = -\int_{S'} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

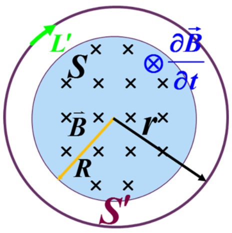
$$\therefore \int_{S'} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial B}{\partial t} \pi R^2$$

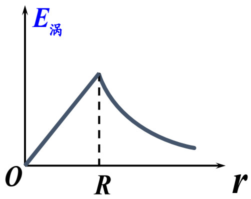
$$\oint_{L'} \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial B}{\partial t} \pi R^2$$

$$E_{涡} 2\pi r = -\frac{\partial B}{\partial t} \pi R^2$$

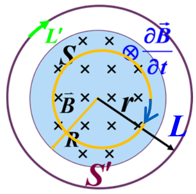
$$E_{涡} = -\frac{R^2}{2r}\frac{\partial B}{\partial t}$$

方向：逆时针方向





$$E_{涡} = \begin{cases} -\frac{R^2}{2r}\frac{\partial B}{\partial t} & r > R \\ -\frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t} & \end{cases}$$

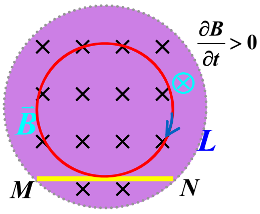


$r < R$

只要有变化磁场，整个空间就存在感生电场.

将长为L的金属棒MN放在具有匀强磁场分布的一圆柱形区域内，试求金属棒MN 中的感生电动势,并判断电势高低。

解：由前题的结果可知



$$r < R \qquad E_{涡} = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

$$r > R \qquad E_{涡} = -\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$$

求棒MN两端的感生电动势

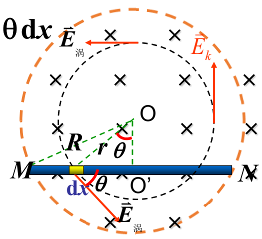
$$\varepsilon_{MN} = \int_0^L \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{x} = \int_0^L E_{涡} \cos\theta \, dx$$

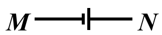
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{R^2 - L^2/4}}{r}$$

$$\varepsilon_{MN} = \int_0^L E_{涡} \cos\theta \, dx$$

$$= \int_0^L \frac{1}{2} r \frac{dB}{dt} \frac{\sqrt{R^2 - L^2/4}}{r} dx$$

$$= \frac{L}{2}\sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \frac{dB}{dt}$$





方向：　$M \rightarrow N$

三、自感应和互感应

1、自感应

自感系数或自感 $L = \frac{\psi}{I}$

自感电动势: $\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

2、互感应

互感系数简称为互感 $M = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{\psi_{12}}{I_2}$

互感电动势:

$\varepsilon_{21} = -M\frac{dI_1}{dt}$ $\varepsilon_{12} = -M\frac{dI_2}{dt}$

四、磁场的能量

1、自感磁能 $W_m = \frac{1}{2}LI^2$

2、磁场能量密度 $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$

3、磁场能量 $W_m = \int_V w_m \mathrm{d}V = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0}\mathrm{d}V$

类比

电容器储能	电感器储能
$\frac{1}{2}CU^2$	$\frac{1}{2}LI^2$
电场能量密度	磁场能量密度
$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$	$w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$
$W_e = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV$	$W_m = \int_V \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} dV$

自己继续总结:

在各种场源带电体情况下 $E\sim r$图 $u\sim r$图的特点、导体问题、电容问题、磁力问题、电磁感应等等