华东师范大学期末试卷（A）

2006—2007 学年第二学期

软件工程数学参考答案

一、

（1）	$\exists x(C(x)\wedge Q(x))$	前提引入
(2)	$C(c)\wedge Q(c)$	(1) EI 规则
(3)	$C(c)$	(2)化简
(4)	$Q(c)$	(2)化简
(5)	$\forall x(C(x)\rightarrow W(x)\wedge R(x))$	前提引入
(6)	$C(c)\rightarrow W(c)\wedge R(c))$	(5)UI 规则
(7)	$W(c)\wedge R(c)$	(3)(6)
(8)	$R(c)$	(7)化简
(9)	$R(c)\wedge Q(c)$	(4)(8)
(10)	$\exists x(R(x)\wedge Q(x))$	(9)EU 规则

二、

证明：

（a）（1）因为 a+b=b+a， 所以(a,b)R(a,b)，即 R 具有自反性；

（2）若(a,b)R(c,d)，则 a+d=b+c 因为 a+d=b+c 等价于 c+b=d+a，所以(c,d)R(a,b)，即 R 具有对称性；

（3）若(a,b)R(c,d)且(c,d)R(e,f)，则有 a+d=b+c 且 c+f=d+e，所以 c-d=a-b=e-f，得到 a+f=b+e，所以(a,b)R(e,f)，即 R 具有传递性。

综合(1)(2)(3)可得 R 是 A×A 上的等价关系

（b）[(2,5)]R={(x,y)|y=3+x,x,y 属于 A}(也可以全部列出)

三、

（a） 990 (b) 500 (c) 27

四、

$$\frac{11!}{5!2!2!1!1!}=83160$$

五、

a） $C(5+21-10-1,11)=C(15,4)=1365$

b） $C(5+21-1,21)-C(10+5-1,10)=C(25,4)-C(14,4)=11649$

六、

证明：把 $n+1$ 个整数 $a_1,a_2,\ldots a_n\ a_{n+1}$ 中的每一个都写成 2 的幂与一个奇数的乘积。令

$a_j = 2^{k_j} q_j$， $j = 1, 2, ..., n+1$，其中k_j是非负整数，q_j是奇数。整数$q_1, q_2, ..., q_{n+1}$都是小于$2n$的正奇数。因为只存在n个小于$2n$的正奇数，由鸽巢原理，$q_1, q_2, ..., q_{n+1}$中必有两个相等。于是存在整数i和j使得$q_i = q_j$。对于$a_i = 2^{k_i} q_i$，$a_j = 2^{k_j} q_j$，若$k_i > k_j$，则a_j整除a_i，若$k_i < k_j$，则a_i整除a_j。

七、

证明：

（1） 当$n = 2$时，左边$= C(2,2) = 1$，右边$= C(3,3) = 1$，所以等式成立。

（2） 假设当$n = k$时等式成立，即$\sum_{j=2}^{k} C(j,2) = C(k+1,3)$，则当$n = k+1$时，左边

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=2}^{k+1} C(j,2) \\
&= \sum_{j=2}^{k} C(j,2) + C(k+1,2) \\
&= C(k+1,3) + C(k+1,2) \\
&= \frac{(k+1)k(k-1)}{3*2} + \frac{(k+1)k}{2} \\
&= \frac{(k+1)k}{6}(k-1+3) \\
&= \frac{(k+2)(k+1)k}{3!} \\
&= C(k+2,3)
\end{aligned}
$$

所以当$n = k+1$时原等式也成立。

综上可得，原不等式成立。

八、

(a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ for $n \geq 3$

(b) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4$

九、

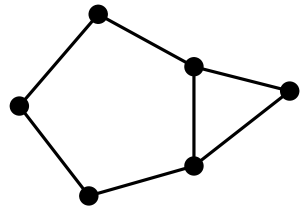
解：相伴的线性齐次递推关系是$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$，它的特征方程$r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$有一个二重的单根 2。因为$F(n) = 2^n$，一个合理的解$a_n^{(p)} = Cn^2 2^n$，其中$C$是常数，把这些项代入递推关系求得$C = 1/2$，于是$a_n^{(p)} = \frac{1}{2} n^2 2^n$，所以所有的解有下述形式：

$a_n = (C_1 n + C_2) 2^n + \frac{1}{2} n^2 2^n$，把初值条件代入求得$C_1 = -\frac{1}{2}, C_2 = 1$。所以原递推关系的解为：

$a_n = (-\frac{1}{2} n + 1) 2^n + \frac{1}{2} n^2 2^n$。

十、

（a） 存在这样的简单图。例如：



(b) 两图不同构。图(a)中两个度为 3 的顶点之间存在一条长为 2 的路径，而图(b)中两个度为 3 的顶点之间不存在长为 2 的路径。

(c)

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0&0&1\\0&1&1&2&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0&0&1\\0&1&1&2&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&1&3&0\\3&1&0&0&1\\0&1&1&2&0\\2&0&0&0&1\\1&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$A^5=\begin{bmatrix}0&2&1&3&0\\3&1&0&0&1\\0&1&1&2&0\\2&0&0&0&1\\1&1&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0&0&1\\0&1&1&2&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5&2&7&3\\7&2&1&2&3\\1&3&1&4&1\\5&1&0&0&2\\3&3&1&3&1\end{bmatrix}$$

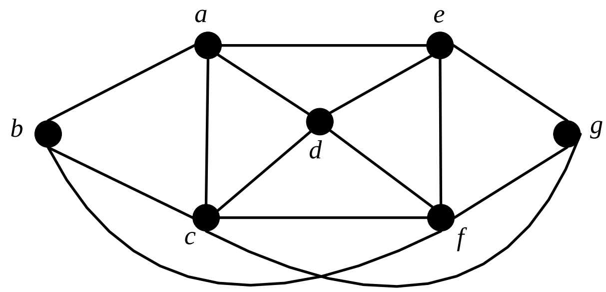
所以 a 到 d 的长度为 5 的路径有 7 条。

十一、

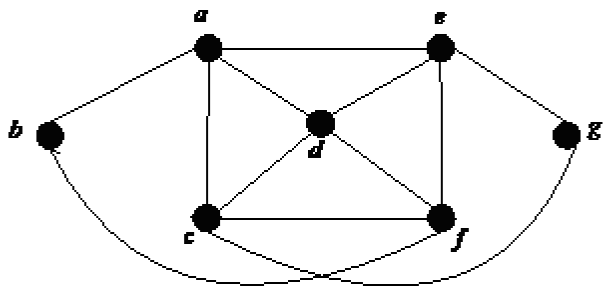
（a）着色数是 4

(b) $m=n\geq 2$

十二、



上图消去边 bc, fg 后得到如下图形：



此图形可由 K_5 经过剖分(如下图)得到，所以原图不是平面图。