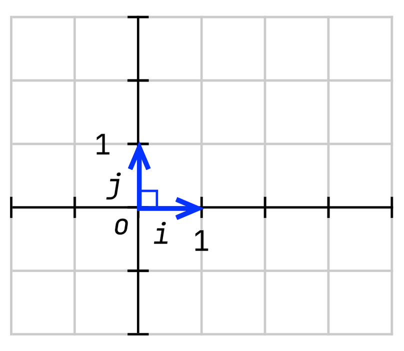
Терминология

Для того, чтобы оперировать с числами (с геометрической точки зрения) на числовой прямой отмечается нулевая точка (начало координат) и вводится единица масштаба.

Аналогичную роль в произвольном векторном пространстве играет его базис: это инструмент, при помощи которого можно описывать векторы векторного пространства. Базисом плоскости может служить любая пара непараллельных векторов.

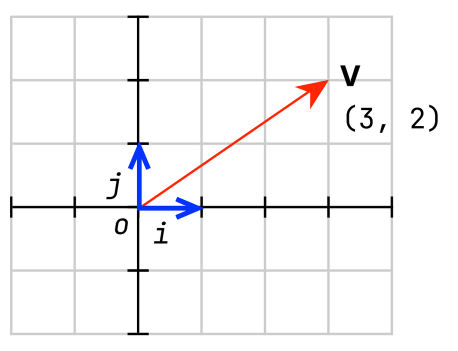
Ортонормированным базисом называется базис, состоящий из взаимоперпендикулярных векторов единичной длины:



Такой базис еще можно назвать **стандартным базисом**, т.к. все координаты составляющих его векторов равны нулю, кроме одной равной единице:

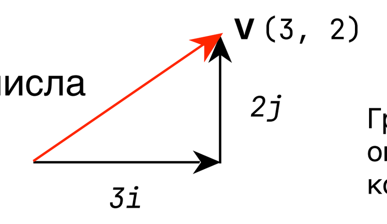
i (1, 0)
j (0, 1)

Пусть в системе координат стандартного базиса задан произвольный вектор **v** (3, 2):



Можно сказать, что вектор **v** (3, 2) **разложен** по базису i-j:
- координата x это вектор i, взятый 3 раза;
- координата y это вектор j, взятый 2 раза.

Также можно сказать, что вектор **v** = 3i + 2j, а числа 3 и 2 называются координатами вектора **v** или коэффициентами разложения.

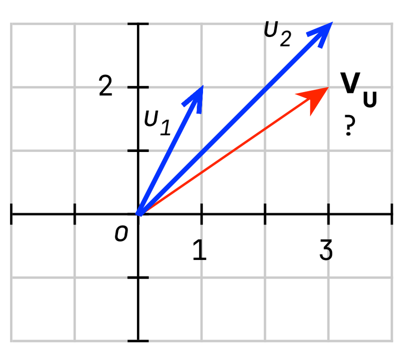


Графический метод определения координат вектора **v**

Вообще, вектор **v** можно разложить по бесконечному числу произвольных базисов. И в каждом из этих базисов вектор **v** будет иметь разные координаты.

Матрица перехода

Давайте аналитически вычислим координаты вектора **v** (3, 2) стандартного базиса в двух других базисах:



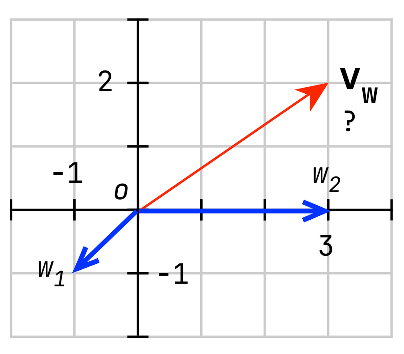
Конвертация вектора $\mathbf{v}_u$ базиса u_1-u_2 в вектор **v** (3,2) стандартного базиса:

$$\boxed{U * \mathbf{v}_u = \mathbf{v}} \quad (1)$$

U — это матрица для перехода вектора $\mathbf{v}_u$ от базиса u_1-u_2 к стандартному базису. Составляется из координат векторов базиса u_1 и u_2, разложенных по стандартному базису. Координаты выписываются в матрицу перехода по столбцам.

$$\mathbf{v}_u = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

Найдите $\mathbf{v}_u$ графическим способом и убедитесь, что результаты совпадают.



Конвертация вектора $\mathbf{v}_w$ базиса w_1-w_2 в вектор **v** (3,2) стандартного базиса:

$$\boxed{W * \mathbf{v}_w = \mathbf{v}} \quad (2)$$

W — это матрица для перехода вектора $\mathbf{v}_w$ от базиса w_1-w_2 к стандартному базису. Составляется из координат векторов базиса w_1 и w_2, разложенных по стандартному базису. Координаты выписываются в матрицу по столбцам.

$$\mathbf{v}_w = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Найдите $\mathbf{v}_w$ графическим способом и убедитесь, что результаты совпадают.

Воспользуемся формулами (1) и (2), чтобы определить формулы матрицы перехода для общего случая.

Конвертация векторов между базисами u_1-u_2 и w_1-w_2:

$$U * \mathbf{v}_u = W * \mathbf{v}_w$$

Если базис FROM это u_1-u_2, тогда w_1 и w_2 должны быть разложены по базису u_1-u_2.

Если базис FROM это w_1-w_2, тогда u_1 и u_2 должны быть разложены по базису w_1-w_2.

$$(3) \quad \boxed{\mathbf{v}_u = U^{-1} * W * \mathbf{v}_w} \qquad \boxed{\mathbf{v}_w = W^{-1} * U * \mathbf{v}_u} \quad (4)$$

Матрица перехода от базиса w_1-w_2 к базису u_1-u_2

Матрица перехода от базиса u_1-u_2 к базису w_1-w_2

Важно: матрицы перехода **W** и **U** следует заполнять векторами базисов, выраженными **в длинах векторов** (см. пример #2 ниже).

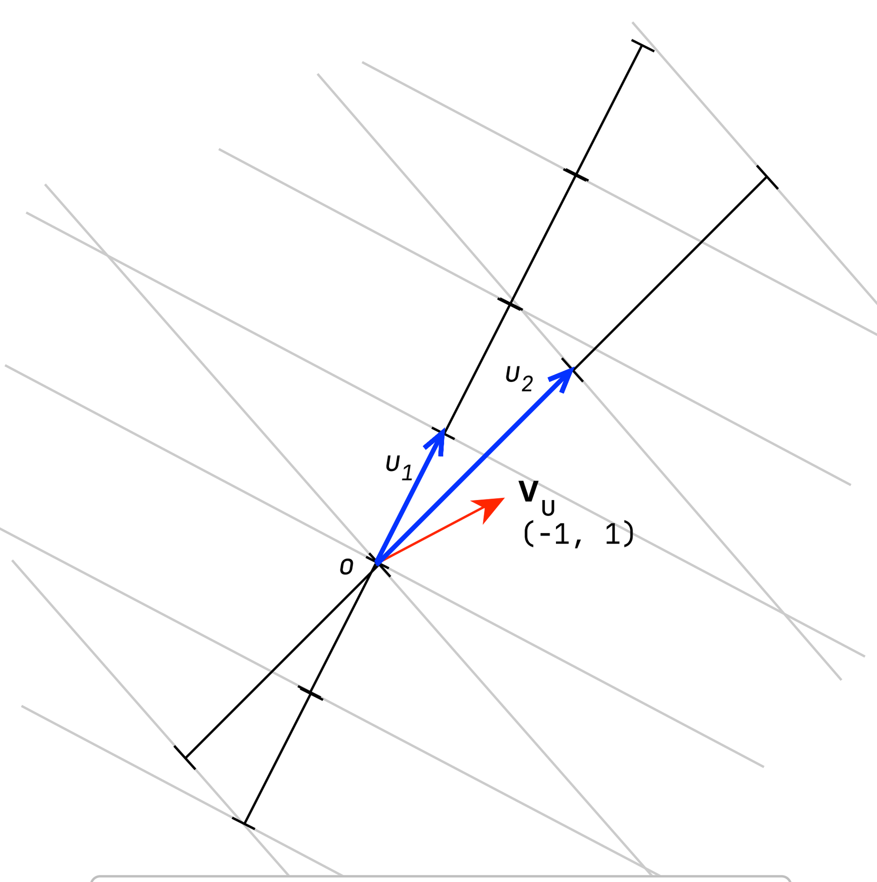
Обычно используют следующий подход:

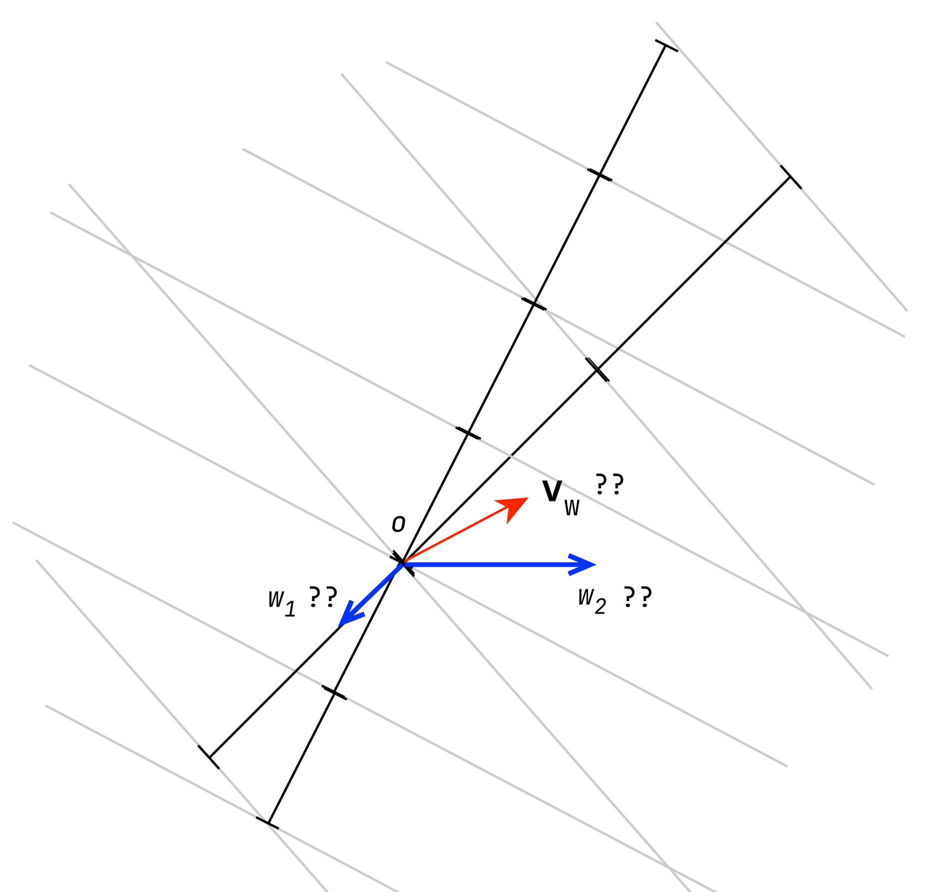
1. Вычисляется какая-то одна матрица перехода, например, от базиса w_1-w_2 к базису u_1-u_2, назовем ее **A**: $\boxed{A = U^{-1} * W}$
2. Тогда формулы конвертации векторов можно переписать в следующем виде:

$$(5) \quad \boxed{\mathbf{v}_u = A * \mathbf{v}_w} \qquad \boxed{\mathbf{v}_w = A^{-1} * \mathbf{v}_u} \quad (6)$$

Самое главное в этом деле не запутаться откуда и куда конвертирует конкретная матрица перехода.

Рассмотрим пример #1.





Система координат с базисом u_1-u_2

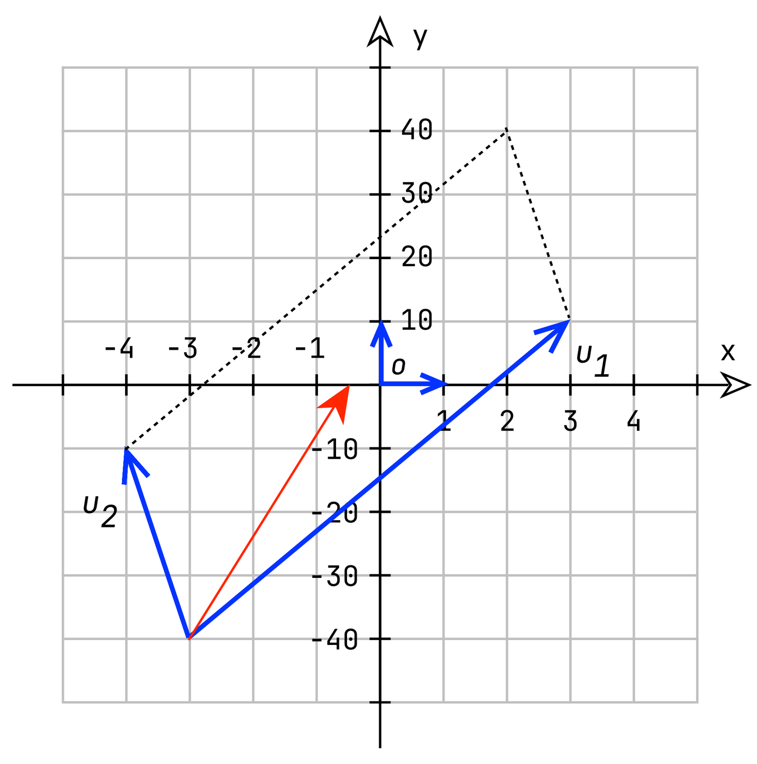
Выберем произвольный базис u_1-u_2: (1, 0) **0-u_1**
(0, 1) **0-u_2**

Также выберем в базисе u_1-u_2 произвольный вектор $\mathbf{v}_u$ (-1, 1).

Действия, для поиска неизвестных:

1. Определить координаты векторов w_1 и w_2, выраженные через базис u_1-u_2
2. Собрать базис w_1-w_2 (центр совпадает с центром базиса u_1-u_2).
3. Согласно формуле (4) вычислить матрицу перехода от базиса u_1-u_2 к базису w_1-w_2
4. Определить координаты вектора $\mathbf{v}_w$ в базисе w_1-w_2:
   Матрица перехода * $\mathbf{v}_u$

Рассмотрим пример #2.



Базис системы координат y-o-x:

по оси ox (1, 0)

по оси oy (0, 1)

Обратите внимание, что не смотря на то, что минимальный масштаб по оси oy равен 10 базисный вектор по этой оси имеет координату 1. То есть записать (0, 10) было бы ошибкой.

Раскладываем базис u_1-u_2 по базису системы координат:

u_1 (6, 5)

u_2 (-1, 3)