SISTEM PERSAMAAN LINIER, DETERMINAN, DAN APLIKASINYA

LAPORAN TUGAS BESAR

Diajukan Untuk Memenuhi Tugas IF 2123 Aljabar Linier dan Geometri

Semester I 2020/2021

Disusun oleh

Reihan Andhika Putra	**(13519043)**
Kadek Dwi Bagus Ananta Udayana	**(13519057)**
Ryo Richardo	**(13519193)**

TEKNIK INFORMATIKA
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG
BANDUNG
2020

BAB I
DESKRIPSI MASALAH

1. Abstraksi

Sistem persamaan linier (SPL) $Ax = b$ dengan n peubah (*variable*) dan m persamaan adalah berbentuk

$$
\begin{array}{c}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n = b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n = b_m
\end{array}
$$

yang dalam hal ini x_i adalah peubah, a_{ij} dan b_i adalah koefisien $\in$ R. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}b$), dan kaidah *Cramer* (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak, atau hanya satu (unik/tunggal).

Sebuah matriks M berukuran $n \times n$

$$
M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}
$$

determinannya adalah

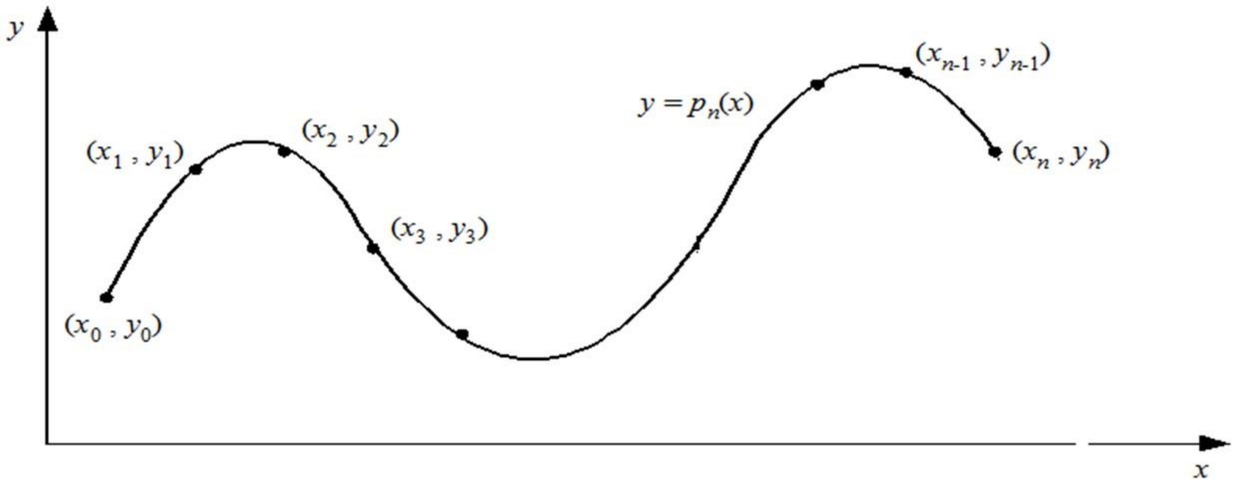
$$
\det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}
$$

Determinan matriks M berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan beberapa cara: reduksi baris dan ekspansi kofaktor.

SPL memiliki banyak aplikasi dalam bidang sains dan rekayasa, dua diantaranya diterapkan pada tugas besar ini, yaitu interpolasi polinom dan regresi linier.

2. Interpolasi Polinom

Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan n+1 buah titik berbeda, (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga $y_i = p_n(x_i)$ untuk i = 0, 1, 2, …, n.



Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di sembarang titik di dalam selang $[x_0, x_n]$.

Polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi titik-titik (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). adalah berbentuk $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Jika hanya ada dua titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1), maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah $p_1(x) = a_0 + a_1x$ yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), dan (x_2, y_2), maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ atau persaman kuadrat dan kurvanya berupa parabola. Jika tersedia empat titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3), polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, demikian seterusnya. Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi asalkan tersedia (n+1) buah titik data. Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, akan diperoleh n buah sistem persamaan lanjar dalam $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_n\, x_0^n &= y_0 \\
a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_n\, x_1^n &= y_1 \\
\ldots \qquad\qquad &\ \ \ldots \\
a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_n\, x_n^n &= y_n
\end{aligned}$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini, yaitu nilai a_0, a_1, …, a_n, diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari. Sebagai contoh, misalkan diberikan tiga buah titik yaitu (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadratik lalu estimasi nilai fungsi pada $x = 9.2$. Polinom kuadratik berbentuk $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Dengan menyulihkan ketiga buah titik data ke dalam polinom tersebut, diperoleh sisten persamaan lanjar yang terbentuk adalah

$$a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794$$

$$a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 = 2.1972$$

$$a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan a_0 = 0.6762, a_1 = 0.2266, dan a_2 = -0.0064. Polinom interpolasi yang melalui ketiga buah titik tersebut adalah $p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$. Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada $x = 9.2$ dapat ditaksir sebagai berikut: $p_2(9.2) = 0.6762 + 0.2266(9.2) - 0.0064(9.2)^2 = 2.2192$.

3. Regresi Linier Berganda

Regresi Linear (akan dipelajari lebih lanjut di Probabilitas dan Statistika) merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Meskipun sudah ada rumus jadi untuk menghitung regresi linear sederhana, terdapat rumus umum dari regresi linear yang bisa digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap β_i dapat digunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* sebagai berikut:

$$\begin{array}{lllll}
nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\
\vdots \qquad \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 & = \sum_{i=1}^{n} x_{ki}y_i
\end{array}$$

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

4. SPESIFIKASI TUGAS

Buatlah program dalam **Bahasa Java** untuk

1. Menghitung solusi SPL dengan metode eliminasi Gauss, metode Eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan *n* peubah dan *n* persamaan).
2. Menyelesaikan persoalan interpolasi dan regresi linier.
3. Menghitung matriks balikan
4. Menghitung determinan matriks dengan berbagai metode (reduksi baris dan ekspansi kofaktor).

BAB II
DASAR TEORI

1. Metode Eliminasi Gauss

Bentuk umum sistem persamaan linier (SPL) mempunyai matriks yang bersesuaian yang disebut matriks yang diperluas atau *augmented matrix* sebagai berikut:

$$[A \mid b] \;=\; \begin{bmatrix} a[1][1] & a[1][2] & a[1][3] & \cdots & a[1][n] & \mid b[1] \\ a[2][1] & a[2][2] & a[2][3] & \cdots & a[2][n] & \mid b[2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a[m][1] & a[m][2] & a[m][3] & \cdots & a[m][n] & \mid b[m] \end{bmatrix}$$

Untuk mencari penyelesaian suatu sistem persamaan linier dengan metode eleminasi dan substitusi, langkah-langkah yang dilakukan dapat dibedakan menjadi 3 macam, yaitu:

a. Menukar letak dua persamaan
b. Mengalikan suatu persamaan dengan skalar tak nol
c. Menambah suatu persamaan dengan kelipatan persamaan yang lain

Langkah-langkah tersebut berpengaruh pada matriks yang diperluas yang selanjutnya dikenal dengan sebutan operasi baris elementer yang dibagi menjadi 3, yaitu:

a. Menukar letak dua baris
b. Mengalikan suatu baris dengan skalar tak nol
c. Menambah suatu baris dengan kelipatan baris yang lain

Operasi-operasi baris elementer tersebut mempunyai tujuan membawa matriks yang diperluas menjadi matriks dengan bentuk lebih sederhana, atau lebih tepatnya bentuk eselon baris. Proses menghasilkan bentuk eselon baris ini disebut eliminasi Gauss. Eliminasi Gauss sudah dikenal sejak tahun 179 M oleh matematikawan asal Tionghoa, namun lebih disempurnakan lagi oleh matematikawan kelahiran Jerman Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855).

Setelah melakukan metode eliminasi Gauss maka akan didapatkan 3 kemungkinan solusi yang memiliki karakteristik masing-masing, yaitu:

a. Setiap variabel memiliki solusi unik

$$\begin{bmatrix} 1 & a[1][2] & a[1][3] & \cdots & a[1][n] & \mid b[1] \\ 0 & 1 & a[2][3] & \cdots & a[2][n] & \mid b[2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \mid b[m] \end{bmatrix}$$

Ciri khas: terbentuk matriks segitiga atas dengan elemen diagonal utamanya angka 1.

b. Solusi parametrik

$$\begin{bmatrix} 1 & a[1][2] & a[1][3] & \cdots & a[1][n] & | \; b[1] \\ 0 & 1 & a[2][3] & \cdots & a[2][n] & | \; b[2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & | \; 0 \end{bmatrix}$$

Atau

$$\begin{bmatrix} 1 & a[1][2] & 0 & \cdots & a[1][n] & | \; b[1] \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & a[2][n] & | \; b[2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & | \; b[m] \end{bmatrix}$$

Ciri khas: terdapat baris yang beranggotakan hanya angka 0 atau terdapat kolom (selain kolom terakhir) yang beranggotakan haya angka 0. Baris/kolom ke-n yang beranggotakan hanya angka 0 tersebut berarti variabel ke-n adalah variabel bebas, dan ada kemungkinan variabel lain memiliki nilai yang bergantung pada variabel ke-n tersebut yang biasanya dituliskan dalam bentuk parametrik.

c. Tidak ada solusi

$$\begin{bmatrix} 1 & a[1][2] & a[1][3] & \cdots & a[1][n] & | \; b[1] \\ 0 & 1 & a[2][3] & \cdots & a[2][n] & | \; b[2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & | \; b[m] \end{bmatrix}$$

Ciri khas: terdapat baris yang beranggotakan hanya angka 0 kecuali elemen terakhir baris tersebut.

2. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Eliminasi Gauss-Jordan adalah pengembangan dari eliminasi Gauss yang hasilnya lebih disederhanakan lagi. Metode ini dimodifikasi oleh Wilhelm Jordan, seorang insinyur Jerman pada tahun 1887. Selain digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, metode ini juga dapat digunakan untuk mencari invers dari sebuah matriks. Cara menggunakan metode eliminiasi Gauss-Jordan mirip dengan metode eliminasi Gauss, hanya pada akhir perlu dilakukan eliminasi lagi hingga elemen di atas dan di bawah diagonal utama menjadi bernilai 0, atau yang biasa disebut sebagai eselon baris tereduksi. Matriks eselon baris tereduksi akan berbentuk sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & | \; b[1] \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & | \; b[2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & | \; b[m] \end{bmatrix}$$

Nilai dari b[1], b[2], … b[m] akan menjadi nilai x1, x2, … xm.

3. Determinan

Determinan adalah faktor penskalaan transformasi yang digambarkan oleh matriks. Determinan hanya dimiliki oleh matriks persegi, yaitu matriks yang ordo barisnya sama dengan ordo kolomnya. Determinan dari matriks Amemiliki notasi det(A) atau |A|. Determinan matriks berordo 2x2 dapat dihitung dengan cara:

$$|A| = \begin{vmatrix} a[1][1] & a[1][2] \\ a[2][1] & a[2][2] \end{vmatrix} = a[1][1].a[2][2] - a[1][2].a[2][1]$$

Untuk matriks berordo lebih dari 2x2, terdapat beberapa metode untuk menghitung determinan, yaitu:

a. Ekspansi Kofaktor

Dalam menggunakan metode ekspansi kofaktor, kita perlu mengenal beberapa istilah. Asumsikan matriks yang ingin kita cari determinannya adalah matriks berordo 3x3 dengan elemen:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

1. Minor Entri

   Minor entri (M[i][j]) adalah determinan submatriks yang elemennya tidak berada pada baris [i] dan kolom [j]. Contoh:

   $$M[1][1] = \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} = e.i - f.h$$

2. Kofaktor Entri

   Kofaktor entri (C[i][j]) adalah Minor entri yang diberi tanda. Rumus umum dari kofaktor entri adalah $C[i][j] = (-1)^{i+j}.M[i][j]$.

Nilai dari kofaktor(A) yaitu:

$$\text{Kofaktor(A)} = \begin{bmatrix} C[1][1] & C[1][2] & C[1][3] \\ C[2][1] & C[2][2] & C[2][3] \\ C[3][1] & C[3][2] & C[3][3] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Maka, nilai determinan matriks A dapat dihitung dengan cara mengalikan setiap elemen dari salah satu baris/kolom yang sama pada matriks A dengan matriks kofaktor A. Jika kita mengambil baris pertama A, maka nilai determinannya adalah:

$$|A| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Untuk matriks persegi berordo lebih dari 3 dapat dilakukan cara yang sama, dengan melakukan pengulangan rekursi hingga matriks berordo 2x2 untuk menentukan matriks kofaktornya.

b. Eliminasi Gauss

Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss, maka kita dapat menghitung determinan matriks yang sudah berbentuk matriks eselon baris. Adapun syarat-syarat yang harus dipenuhi Ketika menghitung determinan menggunakan metode eliminasi Gauss, yaitu:

1. Pertukaran 2 baris akan mengubah nilai determinan menjadi (-determinan)
2. Perkalian suatu baris degan konstanta k akan mengubah nilai determinan menjadi $\frac{determinan}{k}$
3. Eliminasi antar 2 baris tidak mengubah nilai determinan

Maka, nilai determinan matriks adalah:

$$|A| = (-1)^p.\frac{1}{k}$$

Dengan p = jumlah pertukaran baris, dan k = total perkalian baris selama proses eliminasi Gauss.

c. Matriks segitiga atas dan segitiga bawah

Bentuk matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah memiliki kemiripan dengan matriks eselon baris. Maka, nilai determinan dari matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah adalah:

$$|A| = a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn}$$

Determinan memiliki beberapa sifat khusus, yaitu:

a. Jika pada matriks terdapat baris/kolom yang seluruh elemennya adalah 0, maka determinan matriks tersebut adalah 0.

b. Jika pada matriks terdapat 2 baris atau 2 kolom dengan elemen yang identik, maka determinan matriks tersebut adalah 0 (apabila dilakukan operasi baris elementer, akan terbentuk kondisi poin a).
c. Jika pada matriks terdapat baris/kolom yang merupakan kelipatan dari baris/kolom lain, maka determinan matriks tersebut adalah 0 (apabila dilakukan operasi baris elementer, akan terbentuk kondisi poin a).
d. $|AB| = |A|\,|B|$; A dan B adalah matriks
e. $|A^T| = |A|$; A^T adalah matriks transpose A
f. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; jika dan hanya jika $|A| \neq 0$, A^{-1} adalah matriks balikan A
g. $|kA| = k^n\,|A|$; k adalah bilangan scalar, n adalah ordo matriks A

4. Matriks Balikan

Matriks balikan atau matriks inverse adalah sebuah matriks yang jika dikalikan dengan matriks awal akan menghasilkan matriks identitas (I), yaitu matriks dengan elemen diagonal utamanya 1 dan elemen lainnya 0. Matriks balikan dari suatu matriks A dapat ditulis A^{-1}. Matriks balikan dapat dihitung dengan cara:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A);\ |A| \neq 0$$

Matriks balikan memiliki sifat-sifat sebagai berikut:
a. Matriks balikan hanya dimiliki oleh matriks yang nilai determinannya tidak sama dengan 0.
b. $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$; I = matriks identitas
c. $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
d. $(A^{-1})^{-1} = A$
e. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
f. $I^{-1} = I$

5. Matriks Kofaktor

Matriks kofaktor adalah matriks yang beranggotakan elemen dari kofaktor entri suatu matriks. Matriks kofaktor berguna untuk mencari nilai determinan suatu matriks dengan metode ekspansi kofaktor, dan untuk mencari matriks adjoin yang berguna untuk mencari matriks balikan. Cara mencari matriks kofaktor sudah dijelaskan dalam subbab determinan.

6. Matriks Adjoin

Matriks adjoin adalah hasil transpose dari matriks kofaktor. Matriks transpose sendiri adalah matriks yang setiap elemen pada kolom ke-n sama dengan setiap elemen pada baris ke-n matriks awalnya. Matriks adjoin berguna dalam mencari matriks balikan, dengan cara yang sudah dijelaskan pada subbab matriks balikan.

7. Kaidah Cramer

Kaidah Cramer adalah salah satu cara untuk menyelesaikan Sistem Persaaman Linier (SPL). Kaidah Cramer memanfaatkan penggunaan determinan pada matriks untuk menyelesaikan SPL. Apabila diberikan SPL sebagai berikut:

a[1][1].x[1] + a[1][2].x[2] + … + a[1][n].x[n] = b[1]
a[2][1].x[1] + a[2][2].x[2] + … + a[2][n].x[n] = b[2]
… …
a[m][1].x[1] + a[m][2].x[2] + … + a[m][n].x[n] = b[n]

maka dapat dibentuk matriks SPL berbentuk Ax = B sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a[1][1] & a[1][2] & \dots & a[1][n] \\ a[2][1] & a[2][2] & \dots & a[2][n] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a[m][1] & a[m][2] & \dots & a[m][n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b[1] \\ b[2] \\ \vdots \\ b[n] \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan masing-masing nilai x yang memenuhi, perlu dicari nilai D, D_1, D_2 … D_n dimana D adalah determinan matriks A, D_1 adalah determinan matriks A dengan kolom ke-1 diganti dengan matriks B, D_2 adaah determinan matriks A dengan kolom ke-2 diganti dengan matriks B, dan seterusnya hingga D_n. Nilai x[1] akan sama dengan D_1/D, x[2] sama dengan D_2/D, dan seterusnya hingga x[n] = D_n/D.

8. Interpolasi Polinom

Interpolasi Polinom adalah salah satu metode yang digunakan untuk menafsirkan fungsi yang mencocokan titik-titik sampel. Dari beberapa pasangan titik sampel yang diuji, interpolasi polinom akan membuat fungsi polinom yang menghubungkan titik-titik tersebut. Salah satu kegunaan interpolasi polinom adalah untuk menghampiri fungsi yang rumit menjadi lebih sederhana, yaitu dengan cara mencari beberapa titik sampel pada fungsi rumit untuk di-interpolasikan menjadi fungsi polinom yang lebih sederhana.

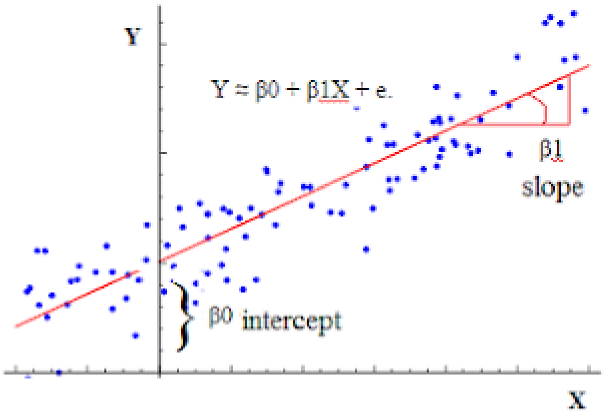
Interpolasi polinom berderajat n, $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ didapat dari n+1 titik sampel, yaitu (x_0, y_0), (x_1, y_1), hingga (x_n, y_n). Dengan mensubstitusi nilai masing-masing titik sampel ke polinom $p_n(x)$, akan didapatkan sistem persamaan linier (SPL) sebagai berikut:

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0$$
$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1$$
$$\dots \qquad \dots$$
$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n$$

Solusi dari SPL didapatkan dengan metode-metode penyelesaian SPL, sehingga ditemukan nilai dari a_0, a_1, … a_n. Penentuan nilai-nilai tersebut disubstitusi ke polinom $p_n(x)$ sehingga fungsi hampiran interpolasi polinom dapat terbentuk.

9. Regresi Linier Berganda

Regresi linier berganda adalah salah satu cara selain interpolasi polinom untuk memprediksi nilai suatu variabel. Dibandingkan mencari fungsi polinom yang mengandung semua titik sampel, regresi linier berganda lebih melihat tren perubahan nilai titik secara linier atau garis lurus. Hal ini menyebabkan galat dari nilai regresi linier berganda akan lebih besar dari interpolasi polinom apabila titik-titik sampel yang dimasukkan berjarak cukup jauh dari tren.



Gambar 1 Contoh Regresi Linier (https://statmat.id/regresi-linier-sederhana/)

Rumus umum regresi linier yang bisa digunakan pada regresi linier berganda adalah:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap β_i dapat digunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* sebagai berikut:

$$\begin{array}{lllll}
nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} + & \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\
\vdots \qquad \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{2i} + & \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 & = \sum_{i=1}^{n} x_{ki}y_i
\end{array}$$

Sistem persamaan linier tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss atau Gauss-Jordan.

BAB III
IMPLEMENTASI PROGRAM

Di dalam program kami terdapat 3 kelas yaitu App.class dan ADTMat.class. App.class berfungsi sebagai driver utama dan letak fungsi main() berada. ADTMat.class adalah kelas yang berisi operasi-operasi yang akan dilakukan terhadap matriks, atau biasa disebut ADT Matriks. Di dalam ADTMat.class terhadap kelas MATRIKS yang berfungsi sebagai tipe data Matriks.

Kelas MATRIKS memiliki 5 atribut yaitu mem, NbrsEff, NkolEff, desc, dan Ndesc. Mem adalah array dua dimensi dengan kapasitats maksimum 100 baris dan 100 kolom yang beranggotakan elemen-elemen dengan tipe double. NbrsEff dan NkolEff adalah baris dan kolom efektif yang akan digunakan dalam mendefinisikan jumlah baris dan kolom efektif pada atribut mem. Desc adalah array of string yang berisi deskripsi dan keterangan matriks yang berfungsi untuk memberi keterangan pada output. Ndesc adalah banyaknya deskripsi yang terdaftar pada array desc. Desc dan Ndesc digunakan dalam fileHandling tepatnya untuk menulis deskripsi di file.

Kelas ADTMat mempunyai 6 kelompok method besar yaitu Operasi Dasar pada Matriks, Determinan, Balikan, SPL, Interpolasi, dan Regresi Linear Berganda. Operasi Dasar adalah operasi primitif pada tipe data MATRIKS untuk menunjang operasi-operasi lanjutan yang ada di program. Determinan adalah operasi untuk menghasilkan determinan dari matriks $n \times n$ meliputi OBE (Segitiga atas dan bawah) dan Ekspansi Kofaktor. Balikan adalah operasi untuk menghasilkan balikan/invers dari matris $n \times n$ menggunakan cara Adjoint atau Eliminasi Gauss-Jordan. SPL adalah operasi untuk menyelesaikan sistem persamaan linier (SPL) berbentuk matriks augmented dengan berbagai macam teknik penyelesaian yaitu Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss-Jordan, Metode Cramer, dan Metode Invers. Setiap penyelesaian mempunyai kelebihan dan kelemahan masing-masing terutama dari segi waktu dan kompleksitas program. Interpolasi dan Regresi Linear Berganda adalah modifikasi dari SPL untuk menyelesaikan permasalahan interpolasi polinom dan regresi linier berganda, dengan metode penyelesaian yang mirip dengan SPL.

Workflow dari program ini adalah driver utama (App) akan menginstansi objek ADTMat. Objek tersebut akan menginisiasi method MainMenu yang akan membawa user ke 5 menu besar operasi matriks. Apabila user sudah memilih menu yang ingin dijalankan, maka user akan menginput matriks melalui keyboard atau file dengan ekstensi txt. Setelah itu user memilih metode penyelesaian operasi tersebut dan matriks akan diproses. User bisa menyimpan jawaban kedalam file dengan ekstensi txt. Prosedur ini akan diulangi beberapa kali hingga user memilih menu Exit di Main Menu sebagai tanda selesai menggunakan program. Berikut akan disajikan beberapa method yang vital di program ini

1. **Class ADTMat**

   a. Fungsi dasar

```
public void MakeMATRIKS (int NB, int NK, MATRIKS M) {
	// I.S. NB dan NK adalah valid untuk memori matriks yang dibuat.
	// F.S. Matriks M sesuai dengan NB dan NK terbentuk.
}
public void BacaMATRIKS (MATRIKS M){
	// I.S. M terdefinisi dan masih kosong
	// F.S. M terisi nilai elemen efektifnya, berukuran N x N
}
public void BacaMATRIKSAugmented (MATRIKS M){
	// I.S. M terdefinisi dan masih kosong
	// F.S. M terisi nilai elemen efektifnya, berukuran NB x NK
}
public void BacaMatriksHilbert (MATRIKS MAug){
	// I.S. Maug terdefinisi dan masih kosong
	// F.S. Maug terdefinisi nilai elemen efektifnya sesuai kaidah hilbert,
berukuran NB x NK+1
}
public void TulisMATRIKS (MATRIKS M){
	// I.S. M terdefinisi dan mungkin kosong
	// F.S. Nilai M(i,j) ditulis ke layar per baris per kolom, masing-masing
elemen per baris dipisahkan sebuah spasi
}
Dan operasi dasar lainnya...
```

b. Determinan

```
public void DeterminanKofaktor (MATRIKS M){
      // I.S. M terdefinisi, IsBujurSangkar(M)
      // F.S. Nilai determinan M yang dicari melalui metode ekspansi kofaktor dan matriks kofaktornya ditulis ke layar
}
public void Segiatas (MATRIKS M){
      // I.S. M terdefinisi, IsBujurSangkar(M)
      // F.S. Menghitung nilai determinan matriks M dengan metode segitiga atas dan menulis ke layar matriks segitiga atas yang terbentuk dan determinan matriks awal.
}
public void Segibawah (MATRIKS M){
      // I.S. M terdefinisi, IsBujurSangkar(M)
      // F.S. Menghitung nilai determinan matriks M dengan metode segitiga bawah dan menulis ke layar matriks segitiga bawah yang terbentuk dan determinan matriks awal.
}
Dan operasi determinan lainnya...
```

c. Balikan

```
public void InverseKofaktor (MATRIKS M) {
      // I.S. M terdefinisi, IsBujurSangkar(M), IspunyaInvers(M)
      // F.S. Memprint matriks invers dari matriks M dengan metode determinant dan adjoint
}
public void InversGaussJordan (MATRIKS M) {
// I.S. M terdefinisi, IsBujurSangkar(M), IspunyaInvers(M)
// F.S. Memprint matriks invers dari matriks M dengan metode eliminasi Gauss Jordan dan adjoint
}
```

d. Sistem Persamaan Linier

```
public void GaussSPL (MATRIKS M) {
// I.S. M terdefinisi
// F.S. M merupakan Matriks Echelon
}
public void GaussJordan (MATRIKS M) {
// I.S. M terdefinisi
// F.S. M merupakan Matriks Echelon tereduksi
}
public void solusiGaussJordan (MATRIKS M) {
// I.S. Matriks M
// F.S. solusi dari matriks
}
public void solusiGauss (MATRIKS M) {
// I.S. Matriks M
// F.S. solusi dari matriks
}
```

e. Interpolasi Polinom

```
public void BacaTitik(MATRIKS M){
	// I.S. M terdefinisi
	// F.S. Membaca n jumlah titik sampel dan titik-titik nya, membuat matriks titik berordo n×2 yang berisi pasangan koordinat titik (x, y)
}
public MATRIKS MakeMatriksInterpolasi(MATRIKS M) {
	// I.S. M terdefinisi, M adalah matriks titik
	// F.S. Terbentuk matriks representasi SPL interpolasi polinom dengan menggunakan rumus interpolasi polinom yang dijelaskan pada bab II
}
public void MenuInterpolasi(){
	// I.S. Sembarang
	// F.S. Memberikan persamaan interpolasi polinom dari data titik-titik sampel dan memberikan taksiran nilai y dari nilai x yang ingin dicari. Memberikan pesan kesalahan apabila titik sampel tidak valid, yaitu terdapat setidaknya 2 titik sampel dengan koordinat x yang sama.
}
```

f. Regresi Linier Berganda

```
public void BacaRegresi(MATRIKS M){
      // I.S. M terdefininsi
      // F.S. Membaca n jumlah variabel dan k jumlah sampel masing-masing variabel, berikut nilainya. Membuat matriks sampel berordo k ×(n+1) sebagai representasi nilai-nilai sampel setiap variabel.
}
public MATRIKS MakeMatriksRegresi(MATRIKS M){
      // I.S. M terdefinisi, M adalah matriks sampel
      // F.S. Terbentuk matriks M berupa matriks representasi SPL regresi linier berganda dengan rumus regresi linier berganda yang dijelaskan pada bab II.
}
public void MenuRegresi(){
      // I.S. Sembarang
      // F.S. Memberikan persamaan regresi linier berganda dari data nilai-nilai sampel setiap variabel dan memberikan taksiran nilai y dari nilai variabel-variabel yang ingin dicari.
}
```

BAB IV
EKSPERIMEN

1. Determinan (Test Case Mandiri)

Nama	Input	Output
Determinan_1	Matriks yang ada di file adalah : 6.00 7.00 8.00 9.00 10.00 5.00 9.00 -5.00 2.00 8.00 -0.60 0.80 0.10 6.40 -7.00 -8.00 -7.10 12.00 17.00 6.00 8.00 -9.00 1.00 4.00 9.00 3.00 6.00 -9.00 -8.00 5.00 6.00 99.00 26.00 18.00 9.00 1.00 45.00 6.00 1.00 7.00 9.00 6.00 9.00 9.00 3.00 4.00 5.00 6.00 7.00	Matriks segitiga atas berhasil terbentuk. Matriks segitiga atas tersebut adalah: 1.00 1.17 1.33 1.50 1.67 0.83 1.50 0.00 1.00 1.87 0.88 1.17 0.54 1.77 0.00 0.00 1.00 11.63 14.82 6.11 9.48 0.00 0.00 0.00 1.00 1.13 0.53 0.48 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.52 0.16 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 -3.26 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 -4.43 Determinan matriks = 4.53989376E8
Analisis	Diselesaikan dengan metode OBE sehingga berubah menjadi matriks segitiga atas, cukup jelas.	
Determinan_2	Masukkan ordo matriks nxn : 3 Tulis Elemen Matriks 5 -3 7 2 8 0 -25 15 -35 Matriks yang anda masukkan adalah : 5.00 -3.00 7.00 2.00 8.00 0.00 -25.00 15.00 -35.00	Masukkan pilihan : 1 Matriks kofaktornya adalah: -280.00 70.00 230.00 0.00 0.00 0.00 -56.00 14.00 46.00 Determinannya adalah: 0.0
Analisis	Diselesaikan dengan metode ekspansi kofaktor karena baris 3 merupakan hasil kali baris 1 dengan konstanta maka determinan matriks 0.	
Determinan_3	Matriks yang ada di file adalah : 1.00 -1.00 0.00 0.00 1.00 3.00 1.00 1.00 0.00 -3.00 0.00 6.00 2.00 -1.00 0.00 1.00 -1.00 5.00 -1.00 2.00 0.00 -2.00 -1.00 -1.00 Tidak punya determinan karena bukan matriks persegi	
Analisis	Karena bukan matriks persegi maka tidak mempunyai determinan.	

2. Balikan (Test Case Mandiri)

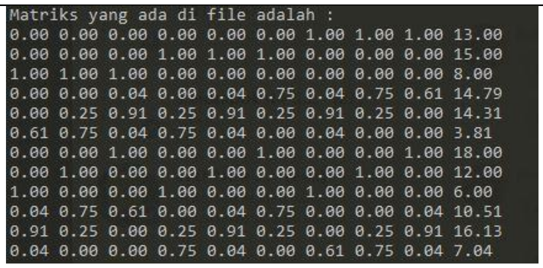
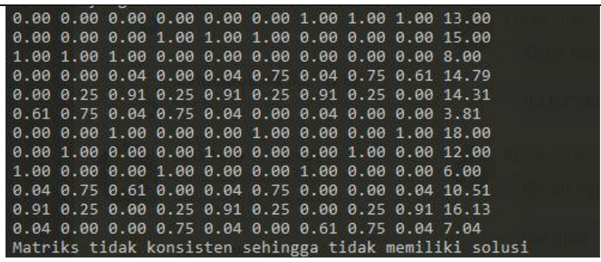
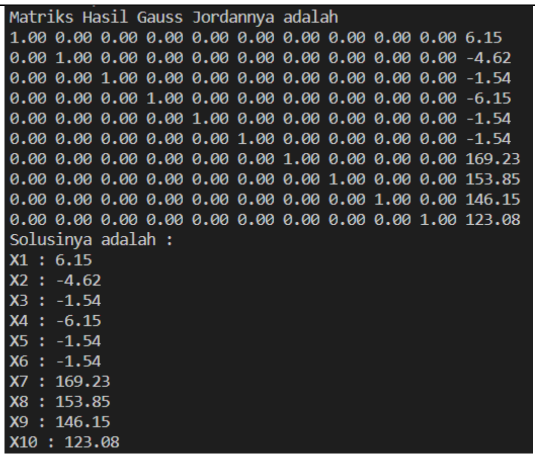
Nama	Input	Output
Test case 1a	Matriks yang ada di file adalah : 3.00 5.00 8.00 -1.00 8.00 3.00 2.00 0.00 7.00 3.00 0.00 4.00 9.00 5.00 2.00 1.00	Matriks adjoint nya adalah : 10.00 -90.00 -10.00 50.00 6.00 194.00 56.00 -218.00 -49.00 -86.00 -44.00 127.00 -22.00 12.00 -102.00 76.00 Determinannya adalah : -310.00 Matriks inverse nya adalah : -0.03 0.29 0.03 -0.16 -0.02 -0.63 -0.18 0.70 0.16 0.28 0.14 -0.41 0.07 -0.04 0.33 -0.25
Analisis 1a	Diselesaikan dengan metode adjoint, cukup jelas.	
Tc1b	Matriks yang ada di file adalah : 10.00 6.00 -9.00 0.70 2.00 11.00 -0.50 6.00 12.00 -3.00 7.00 9.00 9.00 4.00 6.00 1.00 3.00 4.00 10.00 -12.00 -1.50 3.20 4.70 8.10 9.00 10.00 3.00 -8.00 8.30 8.20 7.00 9.00 0.50 0.80 6.00 5.00	Menggabungkan dengan matriks identitas! Matriksnya adalah : 10.00 6.00 -9.00 0.70 2.00 11.00 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 -0.50 6.00 12.00 -3.00 7.00 9.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 9.00 4.00 6.00 1.00 3.00 4.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 10.00 -12.00 -1.50 3.20 4.70 8.10 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 9.00 10.00 3.00 -8.00 8.30 8.20 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 7.00 9.00 0.50 0.80 6.00 5.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 Melakukan GaussJordan 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 -0.00 -0.06 0.10 0.01 0.03 -0.03 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.02 0.00 0.02 -0.05 -0.01 0.04 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 -0.02 0.03 0.08 -0.01 -0.01 -0.05 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 0.02 0.01 0.01 -0.12 0.12 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 -0.10 -0.01 -0.14 0.07 0.02 0.20 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.09 0.08 -0.00 -0.00 -0.03 -0.08 Matriksnya inversnya adalah : -0.00 -0.06 0.10 0.01 0.03 -0.03 0.02 0.00 0.02 -0.05 -0.01 0.04 -0.02 0.03 0.08 -0.01 -0.01 -0.05 0.00 0.02 0.01 0.01 -0.12 0.12 -0.10 -0.01 -0.14 0.07 0.02 0.20 0.09 0.08 -0.00 -0.00 -0.03 -0.08
Analisis 1b	Diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss-Jordan, cukup jelas.	

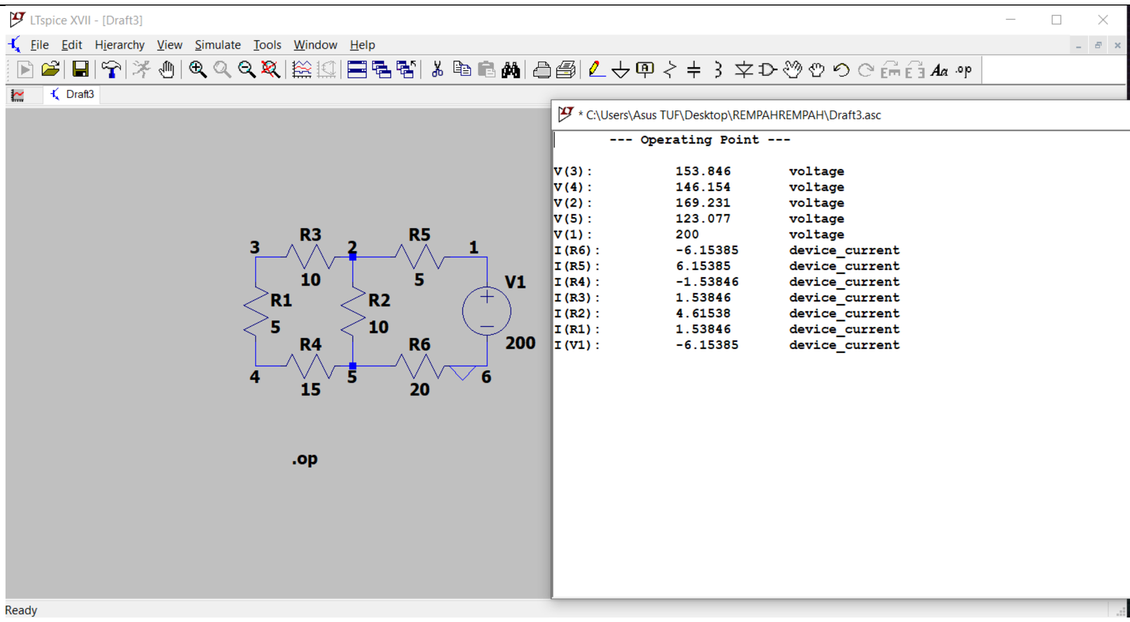
3. Sistem Persamaan Linier

Nama	Input	Output
Test case 1a	Matriks yang ada di file adalah : 1.00 1.00 -1.00 -1.00 1.00 2.00 5.00 -7.00 -5.00 -2.00 2.00 -1.00 1.00 3.00 4.00 5.00 2.00 -4.00 2.00 6.00	1.00 1.00 -1.00 -1.00 1.00 2.00 5.00 -7.00 -5.00 -2.00 2.00 -1.00 1.00 3.00 4.00 5.00 2.00 -4.00 2.00 6.00 Matriks tidak konsisten sehingga tidak memiliki solusi
Analisis 1a	Diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss-Jordan, cukup jelas. Didapatkan solusi: Matriks tidak konsisten sehingga tidak memiliki solusi.	

Test case 1b	Matriks yang ada di file adalah : 1.00 -1.00 0.00 0.00 1.00 3.00 1.00 1.00 0.00 -3.00 0.00 6.00 2.00 -1.00 0.00 1.00 -1.00 5.00 -1.00 2.00 0.00 -2.00 -1.00 -1.00	Matriks Hasil Gauss Jordannya adalah 1.00 0.00 0.00 0.00 -1.00 3.00 0.00 1.00 0.00 0.00 -2.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 -1.00 -1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 Solusinya adalah : X1 : 3.00 + 1.0X5 X2 : 2.0X5 X3 : Free X4 : -1.00 + 1.0X5 X5 : Free
Analisis 1b	Diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss-Jordan, cukup jelas. Didapatkan Solusi : X1 : 3.00 + 1.0X5 X2 : 2.0X5 X3 : Free X4 : -1.00 + 1.0X5 X5 : Free	
Test case 1c	Matriks yang ada di file adalah : 0.00 1.00 0.00 0.00 1.00 0.00 2.00 0.00 0.00 0.00 1.00 1.00 0.00 -1.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 1.00 1.00	Matriks Hasil Eliminasi Gaussnya adalah 0.00 1.00 0.00 0.00 1.00 0.00 2.00 0.00 0.00 0.00 1.00 1.00 0.00 -1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 -1.00 1.00 Solusinya adalah : X1 : Free X2 : 1.00 + -1.0X6 X3 : Free X4 : -2.00 + -1.0X6 X5 : 1.00 + 1.0X6 X6 : Free
Analisis 1c	Diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss, cukup jelas. Didapatkan Solusi : X1 : Free X2 : 1.00 + -1.0X6 X3 : Free X4 : -2.00 + -1.0X6 X5 : 1.00 + 1.0X6 X6 : Free	
Test case 2a	Matriks yang ada di file adalah : 1.00 -1.00 2.00 -1.00 -1.00 2.00 1.00 -2.00 -2.00 -2.00 -1.00 2.00 -4.00 1.00 1.00 3.00 0.00 0.00 -3.00 -3.00	Matriks Hasil Eliminasi Gaussnya adalah 1.00 -1.00 2.00 -1.00 -1.00 0.00 1.00 -2.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 Solusinya adalah : X1 : -1.00 + 1.0X4 X2 : 2.0X3 X3 : Free X4 : Free

Analisis 2a	Diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss, cukup jelas. Didapatkan Solusi : X1 : -1.00 + 1.0X4 X2 : 2.0X3 X3 : Free X4 : Free	
Test case 2b	Matriks yang ada di file adalah : 2.00 0.00 8.00 0.00 8.00 0.00 1.00 0.00 4.00 6.00 -4.00 0.00 6.00 0.00 6.00 0.00 -2.00 0.00 3.00 -1.00 2.00 0.00 -4.00 0.00 -4.00 0.00 1.00 0.00 -2.00 0.00	Silahkan pilih metode penyelesaian SPL [1= Gauss, 2= Gauss Jordan, 3= Invers, 4= Metode Crame Masukkan pilihan : 4 Matriks Koef 2.00 0.00 8.00 0.00 0.00 1.00 0.00 4.00 -4.00 0.00 6.00 0.00 0.00 -2.00 0.00 3.00 Matriks Hasil 8.00 6.00 6.00 -1.00 Nilai koef x1: 0.00 x2: 2.00 x3: 1.00 x4: 1.00
Analisis 2b	Diselesaikan dengan metode Metode Cramer, cukup jelas. Didapatkan Solusi : X1 : 0.00 X2 : 2.00 X3 : 1.00 X4 : 1.00	
Test case 3a	Matriks yang ada di file adalah : 8.00 1.00 3.00 2.00 0.00 2.00 9.00 -1.00 -2.00 1.00 1.00 3.00 2.00 -1.00 2.00 1.00 0.00 6.00 4.00 3.00	Matriks Koef 8.00 1.00 3.00 2.00 2.00 9.00 -1.00 -2.00 1.00 3.00 2.00 -1.00 1.00 0.00 6.00 4.00 Matriks Hasil 0.00 1.00 2.00 3.00 x1: -0.22 x2: 0.18 x3: 0.71 x4: -0.26
Analisis 3a	Diselesaikan dengan metode Invers, cukup jelas. Didapatkan Solusi : x1: -0.22 x2: 0.18 x3: 0.71 x4: -0.26	

<table>
<tr><td>Test
case 3b</td><td>
Matriks yang ada di file adalah :
0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 1.00 1.00 13.00
0.00 0.00 0.00 1.00 1.00 1.00 0.00 0.00 0.00 15.00
1.00 1.00 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 8.00
0.00 0.00 0.04 0.00 0.04 0.75 0.04 0.75 0.61 14.79
0.00 0.25 0.91 0.25 0.91 0.25 0.91 0.25 0.00 14.31
0.61 0.75 0.04 0.75 0.04 0.00 0.04 0.00 0.00 3.81
0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 1.00 18.00
0.00 1.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 1.00 0.00 12.00
1.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 6.00
0.04 0.75 0.61 0.00 0.04 0.75 0.00 0.00 0.04 10.51
0.91 0.25 0.00 0.25 0.91 0.25 0.00 0.25 0.91 16.13
0.04 0.00 0.00 0.75 0.04 0.00 0.61 0.75 0.04 7.04</td><td>
0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 1.00 1.00 13.00
0.00 0.00 0.00 1.00 1.00 1.00 0.00 0.00 0.00 15.00
1.00 1.00 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 8.00
0.00 0.00 0.04 0.00 0.04 0.75 0.04 0.75 0.61 14.79
0.00 0.25 0.91 0.25 0.91 0.25 0.91 0.25 0.00 14.31
0.61 0.75 0.04 0.75 0.04 0.00 0.04 0.00 0.00 3.81
0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 1.00 18.00
0.00 1.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 1.00 0.00 12.00
1.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 6.00
0.04 0.75 0.61 0.00 0.04 0.75 0.00 0.00 0.04 10.51
0.91 0.25 0.00 0.25 0.91 0.25 0.00 0.25 0.91 16.13
0.04 0.00 0.00 0.75 0.04 0.00 0.61 0.75 0.04 7.04
Matriks tidak konsisten sehingga tidak memiliki solusi</td></tr>
<tr><td>Analisis
3b</td><td colspan="2">Diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss-Jordan, cukup jelas.
Matriks tidak konsisten sehingga tidak memiliki solusi.</td></tr>
<tr><td>Test
case 4</td><td>
Matriks yang ada di file adalah :
1.00 1.00 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
0.00 -1.00 0.00 1.00 -1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
0.00 0.00 -1.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 -1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
0.00 0.00 10.00 0.00 0.00 0.00 1.00 -1.00 0.00 0.00 0.00
0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 5.00 0.00 1.00 -1.00 0.00 0.00
0.00 0.00 0.00 20.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00
5.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 200.00
0.00 0.00 0.00 0.00 15.00 0.00 0.00 0.00 1.00 -1.00 0.00
0.00 10.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 -1.00 0.00</td><td>
Matriks Hasil Gauss Jordannya adalah
1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 6.15
0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 -4.62
0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 -1.54
0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 -6.15
0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 -1.54
0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 -1.54
0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 169.23
0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 153.85
0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 146.15
0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 123.08
Solusinya adalah :
X1 : 6.15
X2 : -4.62
X3 : -1.54
X4 : -6.15
X5 : -1.54
X6 : -1.54
X7 : 169.23
X8 : 153.85
X9 : 146.15
X10 : 123.08</td></tr>
<tr><td>Analisis
4</td><td colspan="2">Diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss-Jordan. Berdasarkan SPL, didapatkan solusi:
i_{12} = 6.15 A
i_{52} = -4.62 A
i_{32} = -1.54 A
i_{65} = -6.15 A
i_{54} = -1.54 A
i_{43} = -1.54 A
V_2 = 169.23 volt
V_3 = 153.85 volt
V_4 = 146.15 volt
V_5 = 123.08 volt
Dengan bantuan aplikasi LT Spice, kita dapat menemukan nilai arus dan tegangan yang ingin dicari dengan detail sebagai berikut:</td></tr>
</table>



Gambar 2 Nilai masing-masing komponen rangkaian (LT Spice)

Terjadi beberapa perubahan nama variabel pada LT Spice, dengan konversi sebagai berikut:

i_{12} = I (R5) = 6.15385 A

i_{52} = I (R2) = 4.61538 A

i_{32} = I (R3) = 1.53846 A

i_{65} = I (R6) = -6.15385 A

i_{54} = I (R4) = -1.53846 A

i_{43} = I (R1) = 1.53846 A

Hasil yang didapatkan pada fungsi SPL dan aplikasi LT Spice menunjukkan nilai yang hampir sama. Perbedaan yang ada hanya karena pembulatan 2 angka di belakang koma dan perbedaan tanda (positif atau negatif) yang sebenarnya hanya berpengaruh pada arah arus listrik pada rangkaian tersebut. Maka dapat kita simpulkan fungsi SPL dapat menyelesaikan permasalahan *Test case* 4 dengan cukup akurat dan tidak nampak adanya perbedaan yang berarti.

4. Interpolasi Polinom

<table>
<tr><td>Nama</td><td>Input</td><td>Output</td></tr>
<tr><td>Test case 5</td><td>Matriks yang ada di file adalah :
0.10 0.00
0.30 0.07
0.50 0.15
0.70 0.25
0.90 0.37
1.10 0.52
1.30 0.70

Input nilai x:
x = 0.2
x = 0.55
x = 0.85
x = 1.28</td><td>Matriks SPL yang terbentuk adalah:
1.00 0.10 0.01 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
1.00 0.30 0.09 0.03 0.01 0.00 0.00 0.07
1.00 0.50 0.25 0.13 0.06 0.03 0.02 0.15
1.00 0.70 0.49 0.34 0.24 0.17 0.12 0.25
1.00 0.90 0.81 0.73 0.66 0.59 0.53 0.37
1.00 1.10 1.21 1.33 1.46 1.61 1.77 0.52
1.00 1.30 1.69 2.20 2.86 3.71 4.83 0.70

Persamaan interpolasi yang terbentuk adalah:
y = -0.02 + 0.24x + 0.20x^2 + 0.00x^3 + 0.03x^4 + 0.00x^5 + 0.00x^6

Keterangan:
Fungsi interpolasi polinom pada output telah mengalami pembulatan 2 angka di belakang koma, namun perhitungan hasil dilakukan dengan nilai-nilai yang tidak mengalami pembulatan.

Nilai f(x) (2 angka di belakang koma):
f(0.2) = 0.03
f(0.55) = 0.17
f(0.85) = 0.34
f(1.28) = 0.68</td></tr>
<tr><td>Analisis 5</td><td colspan="2">Dengan bantuan website planetcalc.com, input data sampel ke kalkulator interpolasi polinom akan memberikan fungsi:

Lagrange Polynomial
$L(x) = \frac{5}{192}x^4 + \frac{379}{1920}x^2 + \frac{6}{25}x - \frac{2941}{128000}$

Interpolated Points
x: 0.2, 0.55, 0.85, 1.28
y: 0.032961, 0.171119, 0.337236, 0.677542

Gambar 3 Fungsi dan nilai hasil interpolasi polinom (https://planetcalc.com/8680/)

Hasil yang didapat antara fungsi interpolasi polinom dan kalkulator interpolasi polinom menunjukkan hasil yang hampir sama dan dapat menaksir nilai f(x) yang ingin dicari. Hasil yang didapat juga dapat dikatakan akurat karena nilainya selalu berada pada</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">rentang nilai f(x) pada 2 titik sampel yang mengapitnya (untuk setiap a < x < b, maka berlaku f(a) < f(x) < f(b) untuk fungsi monoton naik atau f(a) > f(x) > f(b) untuk fungsi monoton turun, dengan x = titik uji, a = titik sampel lebih kecil dari x, b = titik sampel lebih besar dari x).</td></tr>
<tr><td>Test case 6</td><td>Matriks yang ada di file adalah :
4.80 8211.00
5.00 10118.00
5.52 17025.00
5.71 20796.00
6.50 39294.00
7.19 64958.00
8.10 113134.00
8.26 123503.00
9.03 177571.00
9.33 145510.00

Input tanggal:
25/05/20 (x = 5.806)
30/08/20 (x = 8.968)
15/09/20 (x = 9.5)
06/08/20 (x = 8.194)
01/06/20 (x = 6.033)</td><td>Matriks SPL yang terbentuk adalah:
1.00 4.80 23.04 110.59 530.84 2548.04 12230.59 58706.83 281792.80 1352605.46 8211.00
1.00 5.00 25.00 125.00 625.00 3125.00 15625.00 78125.00 390625.00 1953125.00 10118.00
1.00 5.52 30.43 167.83 925.76 5106.48 28167.32 155370.94 857026.12 4727356.10 17025.00
1.00 5.71 32.60 186.17 1063.03 6069.89 34659.05 197903.17 1130027.12 6452454.85 20796.00
1.00 6.50 42.25 274.63 1785.06 11602.91 75418.89 490222.79 3186448.13 20711912.84 39294.00
1.00 7.19 51.75 372.32 2678.44 19268.69 138618.95 997224.72 7174034.62 51610005.02 64958.00
1.00 8.10 65.56 530.85 4298.30 34803.32 281802.50 2281754.81 18475368.71 149595060.41 113134.00
1.00 8.26 68.19 563.15 4650.50 38403.82 317138.72 2618931.56 21627136.85 178596896.10 123503.00
1.00 9.03 81.60 737.05 6657.76 60139.53 543240.40 4907090.55 44325748.90 400394489.77 177571.00
1.00 9.33 87.10 812.95 7587.26 70811.91 660887.59 6168063.85 57566539.92 537268517.05 145510.00

Persamaan interpolasi yang terbentuk adalah:
y = 227096432.18 + -415842718.54x + 318150112.70x^2 + -136003301.33x^3 + 36176042.94x^4 + -6249555.07x^5 + 704212.34x^6 + -50061.96x^7 + 2041.92x^8 + -36.47x^9

Keterangan:
Fungsi interpolasi polinom pada output telah mengalami pembulatan 2 angka di belakang koma, namun perhitungan hasil dilakukan dengan nilai-nilai yang tidak mengalami pembulatan.

Nilai f(x) (2 angka di belakang koma):
f(5.806) = 22794.69
f(8.968) = 175769.76
f(9.5) = 68216.42
f(8.194) = 119260.61
f(6.033) = 27742.89</td></tr>
<tr><td>Analisis 6</td><td colspan="2">Dengan bantuan website planetcalc.com, input data sampel ke kalkulator interpolasi polinom akan memberikan fungsi:</td></tr>
</table>

Lagrange Polynomial

$$
\begin{aligned}
L(x) = &-\frac{61778204526996830751699581662493106396810088911484375000000}{28151826935376116705865557075465230341140277870713354708259}x^9 \\
&+\frac{316974074106643067512238809077162944004484727595913906250000}{28151826935376116705865557075465230341140277870713354708259}x^8 \\
&-\frac{646427205042168466482785097800330275299847440377163031250000}{263101186311926324353883710985656358328413811875825744937}x^7 \\
&+\frac{223117009052467193496899944943273598501555636313338760085937500}{760860187442597748807177218255817036247034537046306884007}x^6 \\
&-\frac{113755800942182997566865370843235884455985912691101492188992703125}{56303653870752233411731114150930460682280555741426709416518}x^5 \\
&+\frac{12200215667423874332606528459515948760494665049040131863618885625}{1655989819728006865050915122086190020067075168865491453427}x^4 \\
&-\frac{2648200820319727851749820241858782167124802650545598396308930975}{433939528868996018587523037772103743216035111687296411688}x^3 \\
&-\frac{1394293106445948147149975100087375416397501975164324163705289219285}{25023846164778770405213828511524649192124691440634093074008}x^2 \\
&+\frac{123567384536685286457234203509948920630542957554691924312802650511}{595805861066161200124138774083920218860111700967478406524}x \\
&-\frac{4727885835886688838127396503267287619098024222745693496323}{20432526790289480586963269896548926636225714612449}
\end{aligned}
$$

Gambar 4 Fungsi hasil interpolasi polinom (https://planetcalc.com/8680/)

Kemudian, input titik-titik uji akan menghasilkan nilai:

Interpolated Points

x	5.81	6.03	8.19	8.97	9.5
y	22818.99	27776.83	119093.97	175938.05	67606.04

Gambar 5 Nilai hasil interpolasi polinom titik-titik uji (https://planetcalc.com/8680/)

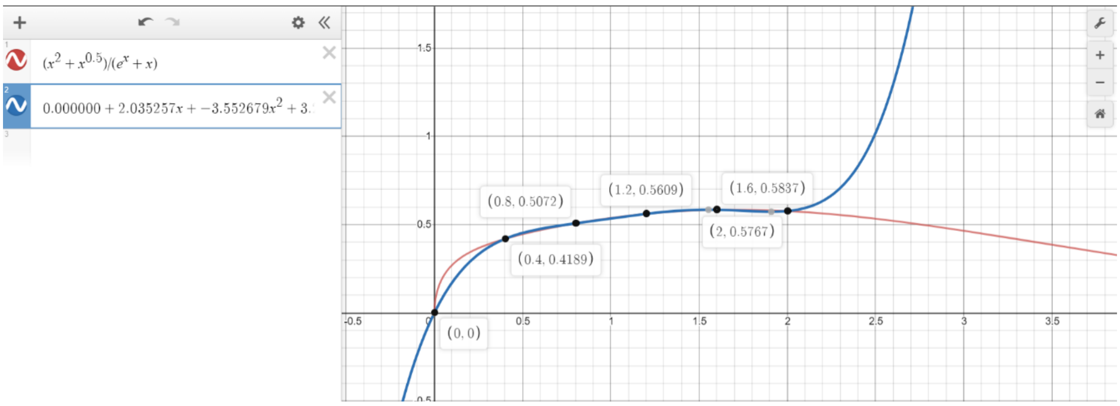
Hasil yang didapat antara fungsi interpolasi polinom dan kalkulator interpolasi polinom menunjukkan hasil yang hampir sama dan dapat menaksir nilai f(x) yang ingin dicari dengan nilai galat di bawah 0.9%. Hasil yang didapat juga dapat dikatakan akurat karena nilainya selalu berada pada rentang nilai f(x) pada 2 titik sampel yang mengapitnya (untuk setiap a < x < b, maka berlaku f(a) < f(x) < f(b) untuk fungsi monoton naik atau f(a) > f(x) > f(b) untuk fungsi monoton turun, dengan x = titik uji, a = titik sampel lebih kecil dari x, b = titik sampel lebih besar dari x). Namun, khusus untuk nilai x = 9.5, kita tidak dapat menjamin nilai kebenarannya karena titik uji tersebut berada di luar rentang titik-titik sampel sehingga nilai f(x) yang didapat adalah murni nilai f(x) pada fungsi interpolasi polinom tersebut.

<table>
<tr>
<td>Test case 7</td>
<td>Kita gunakan sampel n = 5, sehingga titik-titik sampelnya {
(0, 0),
(0.4, 0.418884),
(0.8, 0.507158),
(1.2, 0.560925),
(1.6, 0.583686),
(2, 0.576651)}</td>
<td>

```
Matriks SPL yang terbentuk adalah:
1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
1.00 0.40 0.16 0.06 0.03 0.01 0.42
1.00 0.80 0.64 0.51 0.41 0.33 0.51
1.00 1.20 1.44 1.73 2.07 2.49 0.56
1.00 1.60 2.56 4.10 6.55 10.49 0.58
1.00 2.00 4.00 8.00 16.00 32.00 0.58
```

```
y = 0.00 + 2.04x + -3.55x^2 + 3.24x^3 + -1.42x^4 + 0.24x^5
```

Keterangan:
Fungsi interpolasi polinom pada output telah mengalami pembulatan 2 angka di belakang koma, namun perhitungan hasil dilakukan dengan nilai-nilai yang tidak mengalami pembulatan.</td>
</tr>
<tr>
<td>Analisis 7</td>
<td colspan="2">Dengan bantuan website demsos.com, kita dapat membandingkan grafik fungsi asli dengan fungsi interpolasi polinom seperti pada gambar berikut:



Gambar 6 Grafik fungsi asli dan fungsi interpolasi polinom (https://www.desmos.com/calculator)

Pada grafik terlihat fungsi interpolasi polinom dapat menaksirkan nilai yang cukup akurat pada titik-titik x di rentang [0, 2], meskipun nampak ada perbedaan nilai pada nilai x di rentang [0, 0.4].</td>
</tr>
</table>

5. Regresi Linier Berganda

Nama	Input	Output
Test case 8	Matriks yang ada di file adalah : 72.40 76.30 29.18 0.90 41.60 70.30 29.35 0.91 34.30 77.10 29.24 0.96 35.10 68.00 29.27 0.89 10.70 79.00 29.78 1.00 12.90 67.40 29.39 1.10 8.30 66.80 29.69 1.15 20.10 76.90 29.48 1.03 72.20 77.70 29.09 0.77 24.00 67.70 29.60 1.07 23.20 76.80 29.38 1.07 47.40 86.60 29.35 0.94 31.50 76.90 29.63 1.10 10.60 86.30 29.56 1.10 11.20 86.00 29.48 1.10 73.30 76.30 29.40 0.91 75.40 77.90 29.28 0.87 96.60 78.70 29.29 0.78 107.40 86.80 29.03 0.82 54.90 70.90 29.37 0.95 Masukkan nilai x1 yang ingin dicari nilainya: 50 Masukkan nilai x2 yang ingin dicari nilainya: 76 Masukkan nilai x3 yang ingin dicari nilainya: 29.30	Matriks SPL yang terbentuk adalah: 20.00 863.10 1530.40 587.84 19.42 183.40 54876.89 67000.09 25283.40 779.48 291.70 67000.09 117912.32 44976.87 1483.44 117.04 25283.40 44976.87 17278.51 571.12 Persamaan regresi yang terbentuk adalah: y = -0.00 + -0.00x1 + 0.00x2 + 0.04x3 Maka input x1 = 50.0, x2 = 76.0, x3 = 29.3, akan menghasilkan nilai 0.95 Keterangan: Fungsi regresi linier berganda pada output telah mengalami pembulatan 2 angka di belakang koma, namun perhitungan hasil dilakukan dengan nilai-nilai yang tidak mengalami pembulatan.
Analisis 8	Jika kita bandingkan, matriks SPL yang terbentuk dari prosedur Regresi() memiliki hasil yang identic dengan SPL hasil *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* pada referensi soal (terdapat beberapa nilai yang berbeda karena pembulatan pada output, namun nilai asli fungsi tidak mengalami pembulatan). Maka, dengan melakukan proses eliminasi Gauss atau eliminasi Gauss-Jordan, akan terbentuk fungsi regresi linier berganda yang mampu menaksir nilai output dari variabel-variabel input yang ingin dicari dengan akurat.	

BAB V
PENUTUP

1. Kesimpulan

Dari tugas besar IF 2123 Aljabar Linier dan Geometri semester I 2020/2021 berjudul “Sistem Persamaan Linier, Determinan, dan Aplikasinya”, kami berhasil membuat program bernama ADTMat.java dan App.java yang mampu menyelesaikan beberapa permasalahan yang berkaitan dengan Sistem Persamaan Linier, Determinan, dan aplikasinya di dunia nyata. Program ADTMat.java dan App.java setidaknya berhasil mencari determinan suatu matriks, mencari matriks balikan suatu matriks, menyelesaikan sistem persamaan linier, menemukan fungsi hasil interpolasi polinom, dan menemukan fungsi hasil regresi linier berganda. Program ADTMat.java dan App.java dapat menerima input matriks dari file berekstensi txt atau dari keyboard, dan memberikan output hasil ke file berekstensi txt atau ke layar komputer.

2. Saran

Saran-saran yang dapat kami berikan untuk tugas besar IF 2123 Aljabar Linier dan Geometri semester I 2020/2021 adalah:

a. Atribut dan method sebaiknya dipisahkan dalam beberapa file .java supaya dapat bekerja secara lebih spesifik seperti pada konsep *Object-Oriented Programming* (OOP).

b. Program ini dapat dikembangkan lebih lanjut sebagai aplikasi yang mampu mengkalkulasi permasalahan yang berkaitan dengan sistem persamaan linier, determinan, dan aplikasinya. Mungkin diperlukan penambahan GUI dan merapikan *source code* untuk pematangan program.

c. Memperjelas spesifikasi dan batasan-batasan setiap program pada file tugas besar untuk mencegah adanya multitafsir dan kesalahpahaman pada proses pembuatan program.

3. Refleksi

Setelah menyelesaikan tugas besar IF 2123 Aljabar Linier dan Geometri semester I 2020/2021, kami dapat merefleksikan beberapa hal, yaitu:

a. Mulai mempelajari konsep *Object-Oriented Programming* (OOP) agar dapat membuat program yang berorientasi objek dengan lebih efektif.
b. Lebih merapikan *source code* program karena ada beberapa fungsi yang didefinisikan secara berulang.
c. Pembagian tugas dan rapat secara berkala untuk membahas progres pekerjaan sangatlah penting dalam proses pengerjaan program.
d. Biasakan untuk menyicil tugas agar tidak membebani ketika menjelang *deadline*.
e. Mengerjakan tugas besar dengan perasaan gembira, karena *it's not worth it if you're not have fun*.

DAFTAR PUSTAKA

https://aljabarlinear.mipa.ugm.ac.id/matriks/sistem-persmaan-linear/eleminasi-gauss/

https://ameliadyn27.blogspot.com/2018/04/metode-eliminasi-gauss-gauss-jordan_20.html

https://rumusbilangan.com/determinan-matriks/

https://www.kompasiana.com/widyarin/5651e0c8d693738214565de2/sejarah-aturan-cramer-pada-matriks

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/MetNum/2010-2011/Interpolasi%20Polinom.pdf