



视觉SLAM：从理论到实践

第三次课 李群与李代数



主讲人 高翔

清华大学 自动控制与工程 博士
慕尼黑工业大学计算机视觉组 博士后
Email: gao.xiang.thu@gmail.com



第三讲 李群与李代数

1. 群
2. 李群与李代数
3. 指数映射与对数映射
4. 求导与扰动模型
5. 实践: Sophus

往期内容回顾

1. SLAM的运动与观测模型
2. x 的具体表达
3. 当 x 的估计值不够准确时？

1. 群

1. 群

- 三维旋转矩阵构成了特殊正交群 (Special Orthogonal Group)

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | RR^T = I, \det(R) = 1\}.$$

- 三维变换矩阵构成了特殊欧氏群 (Special Euclidean Group)

$$SE(3) = \left\{ T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} | R \in SO(3), t \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. 群

- 什么是群?
- 群 (Group) 是一种集合加上一种运算的代数结构。
- 记集合为 A , 运算为 \cdot , 那么当运算满足以下性质时, 称 (A, \cdot) 成群:
 1. 封闭性: $\forall a_1, a_2 \in A, \quad a_1 \cdot a_2 \in A.$
 2. 结合律: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A, \quad (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3).$
 3. 幺元: $\exists a_0 \in A, \quad s.t. \quad \forall a \in A, \quad a_0 \cdot a = a \cdot a_0 = a.$
 4. 逆: $\forall a \in A, \quad \exists a^{-1} \in A, \quad s.t. \quad a \cdot a^{-1} = a_0.$

封结么逆
“凤姐咬你”

1. 群

- 容易验证
 - 旋转矩阵集合与矩阵乘法构成群
 - 变换矩阵集合与矩阵乘法构成群
 - 因此称它们为旋转矩阵群和变换矩阵群
- 其他群的例子：



一般线性群 $GL(n)$ 指 $n \times n$ 的可逆矩阵，它们对矩阵乘法成群。

特殊正交群 $SO(n)$ 也就是所谓的旋转矩阵群，其中 $SO(2)$ 和 $SO(3)$ 最为常见。

特殊欧氏群 $SE(n)$ 也就是前面提到的 n 维欧氏变换，如 $SE(2)$ 和 $SE(3)$ 。

1. 群

- 群结构保证了在群上的运算具有良好的性质。
- 群论是研究群的各种结构和性质的理论，具体介绍见各抽象代数或近世代数教材。

2. 李群与李代数

2. 李群与李代数

- 李群 (Lie Group) :
 - 具有连续 (光滑) 性质的群。
 - 既是群也是流形。
 - 直观上看, 一个刚体能够连续地在空间中运动, 故 $SO(3)$ 和 $SE(3)$ 都是李群。
 - 但是, $SO(3)$ 和 $SE(3)$ 只有定义良好的乘法, 没有加法, 所以难以进行取极限、求导等操作。

2. 李群与李代数

- 李代数：与李群对应的一种结构，位于向量空间。
 - 通常记作小写的 $\mathfrak{so}(3)$ 和 $\mathfrak{se}(3)$ 。书中以哥特体突出显示。
 - 事实上是李群单位元处的正切空间。
- 下面从旋转矩阵引出李代数
- 考虑任意旋转矩阵 R ，满足 $RR^T = I$.

2. 李群与李代数

- 令 R 随时间变化（连续运动），有： $R(t)R(t)^T = I$.
- 两侧对时间求导：

$$\dot{R}(t)R(t)^T + R(t)\dot{R}(t)^T = 0.$$

- 整理：
$$\dot{R}(t)R(t)^T = -\left(\dot{R}(t)R(t)^T\right)^T.$$

2. 李群与李代数

$$\dot{R}(t)R(t)^T = -\left(\dot{R}(t)R(t)^T\right)^T.$$

- 可以看出这是一个反对称矩阵，记：

$$\dot{R}(t)R(t)^T = \phi(t)^\wedge.$$

- 两侧右乘 $R(t)$ ： $\dot{R}(t) = \phi(t)^\wedge R(t)$

- 可看成对 R 求导后，左侧多出一个 $\phi(t)$

反对称符号

$$a^\wedge = A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^\vee = a.$$

2. 李群与李代数

$$\dot{R}(t) = \phi(t)^\wedge R(t)$$

- 单位元附近: $t_0 = 0, R(0) = I$

$$\begin{aligned} R(t) &\approx R(t_0) + \dot{R}(t_0)(t - t_0) \\ &= I + \phi(t_0)^\wedge(t). \end{aligned}$$

- 可见 ϕ 反映了一阶导数性质, 它位于正切空间 (tangent space) 上
- 在 t_0 附近, 假设 ϕ 不变, 有微分方程: $\dot{R}(t) = \phi(t_0)^\wedge R(t) = \phi_0^\wedge R(t).$
- 已知初始情况: $R(0) = I$, 解之, 得: $R(t) = \exp(\phi_0^\wedge t).$

2. 李群与李代数

- 该式说明，对任意 t ，都可以找到一个 R 和一个 ϕ 的对应关系
- 该关系称为指数映射 (Exponential Map)
- 这里的 ϕ 称为 $SO(3)$ 对应的李代数： $so(3)$
- 问题：
 - $so(3)$ 的定义和性质？
 - 指数映射如何求？

2. 李群与李代数

- 李代数 (Lie Algebra) :
 - 每个李群都有与之对应的李代数。李代数描述了李群单位元附近的正切空间性质。

李代数由一个集合 \mathbb{V} ，一个数域 \mathbb{F} 和一个二元运算 $[\cdot]$ 组成。如果它们满足以下几条性质，称 $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, [\cdot])$ 为一个李代数，记作 \mathfrak{g} 。

1. 封闭性 $\forall X, Y \in \mathbb{V}, [X, Y] \in \mathbb{V}$.
2. 双线性 $\forall X, Y, Z \in \mathbb{V}, a, b \in \mathbb{F}$, 有:

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], \quad [Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$

3. 自反性^① $\forall X \in \mathbb{V}, [X, X] = 0$.
4. 雅可比等价 $\forall X, Y, Z \in \mathbb{V}, [X, [Y, Z]] + [Z, [Y, X]] + [Y, [Z, X]] = 0$.

2. 李群与李代数

- 二元运算 $[\cdot]$ 被称为李括号 (Lie Bracket) 。
- 直观上说, 李括号表达了两个元素的差异。
- 例子: 三维空间向量+叉积运算 构成李代数
- 李代数 $\mathfrak{so}(3)$: $\mathfrak{so}(3) = \{\phi \in \mathbb{R}^3, \Phi = \phi^\wedge \in \mathbb{R}^{3 \times 3}\}.$
- 其中:

$$\Phi = \phi^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

李括号:

$$[\phi_1, \phi_2] = (\Phi_1 \Phi_2 - \Phi_2 \Phi_1)^\vee.$$

2. 李群与李代数

- 同理，SE(3)亦有李代数se(3):

$$\mathfrak{se}(3) = \left\{ \xi = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \rho \in \mathbb{R}^3, \phi \in \mathfrak{so}(3), \xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \right\}.$$

- 上尖尖 $^\wedge$ 不再是反对称矩阵，但仍保留记法:

$$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

李括号:

$$[\xi_1, \xi_2] = (\xi_1^\wedge \xi_2^\wedge - \xi_2^\wedge \xi_1^\wedge)^\vee.$$

2. 李群与李代数

- 习题部分请你验证 $\mathfrak{se}(3)$ 和 $\mathfrak{so}(3)$ 的李代数性质
- 注：
 - 不同书籍对 $\mathfrak{se}(3)$ 的平移/旋转分量的先后顺序定义不同。这里使用平移在前的方式，也有地方是旋转在前的。
 - 把李代数理解成向量形式或矩阵形式都是可以的。向量形式更加自然一些。

3. 指数映射和对数映射

3. 指数映射和对数映射

- 指数映射反映了从李代数到李群的对应关系： $R = \exp(\phi^\wedge)$
- 但是 ϕ^\wedge 是一个矩阵，对于矩阵，如何定义求指数运算？
- 由于 ϕ 是向量，定义其角度和模长：
 - 角度乘单位向量： $\phi = \theta a$
 - 关于 a ，可以验证以下性质：

$$\exp(\phi^\wedge) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^n.$$

$$a^\wedge a^\wedge = a a^T - I,$$



这为化解Taylor展式中的高阶项提供了有效方法

$$a^\wedge a^\wedge a^\wedge = -a^\wedge.$$

3. 指数映射和对数映射

- Taylor展开:

$$\begin{aligned}\exp(\phi^{\wedge}) &= \exp(\theta \mathbf{a}^{\wedge}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\theta \mathbf{a}^{\wedge})^n \\&= \mathbf{I} + \theta \mathbf{a}^{\wedge} + \frac{1}{2!} \theta^2 \mathbf{a}^{\wedge} \mathbf{a}^{\wedge} + \frac{1}{3!} \theta^3 \mathbf{a}^{\wedge} \mathbf{a}^{\wedge} \mathbf{a}^{\wedge} + \frac{1}{4!} \theta^4 (\mathbf{a}^{\wedge})^4 + \dots \\&= \mathbf{a} \mathbf{a}^T - \mathbf{a}^{\wedge} \mathbf{a}^{\wedge} + \theta \mathbf{a}^{\wedge} + \frac{1}{2!} \theta^2 \mathbf{a}^{\wedge} \mathbf{a}^{\wedge} - \frac{1}{3!} \theta^3 \mathbf{a}^{\wedge} - \frac{1}{4!} \theta^4 (\mathbf{a}^{\wedge})^2 + \dots \\&= \mathbf{a} \mathbf{a}^T + \left(\theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 - \dots \right) \mathbf{a}^{\wedge} - \left(1 - \frac{1}{2!} \theta^2 + \frac{1}{4!} \theta^4 - \dots \right) \mathbf{a}^{\wedge} \mathbf{a}^{\wedge} \\&= \mathbf{a}^{\wedge} \mathbf{a}^{\wedge} + \mathbf{I} + \sin \theta \mathbf{a}^{\wedge} - \cos \theta \mathbf{a}^{\wedge} \mathbf{a}^{\wedge} \\&= (1 - \cos \theta) \mathbf{a}^{\wedge} \mathbf{a}^{\wedge} + \mathbf{I} + \sin \theta \mathbf{a}^{\wedge} \\&= \cos \theta \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) \mathbf{a} \mathbf{a}^T + \sin \theta \mathbf{a}^{\wedge}.\end{aligned}$$

- 结果:

$$\exp(\theta \mathbf{a}^{\wedge}) = \cos \theta \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) \mathbf{a} \mathbf{a}^T + \sin \theta \mathbf{a}^{\wedge}.$$

3. 指数映射和对数映射

- 上一讲的罗德里格斯公式：

$$\exp(\theta \mathbf{a}^\wedge) = \cos \theta \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) \mathbf{a} \mathbf{a}^T + \sin \theta \mathbf{a}^\wedge.$$

- 这说明 $\mathfrak{so}(3)$ 的物理意义就是旋转向量
- 反之，给定旋转矩阵时，亦能求李代数：

$$\phi = \ln(R)^\vee = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (R - I)^{n+1} \right)^\vee.$$

对数映射

- 但实际当中没必要这样求，在旋转向量小节已经介绍了矩阵到向量的转换关系：

$$\theta = \arccos\left(\frac{\text{tr}(R) - 1}{2}\right).$$

$$R\mathbf{n} = \mathbf{n}.$$

- 至此，说明了 $\text{SO}(3)$ 与 $\mathfrak{so}(3)$ 的对应关系。

3. 指数映射和对数映射

- se(3)到SE(3)的指数映射:

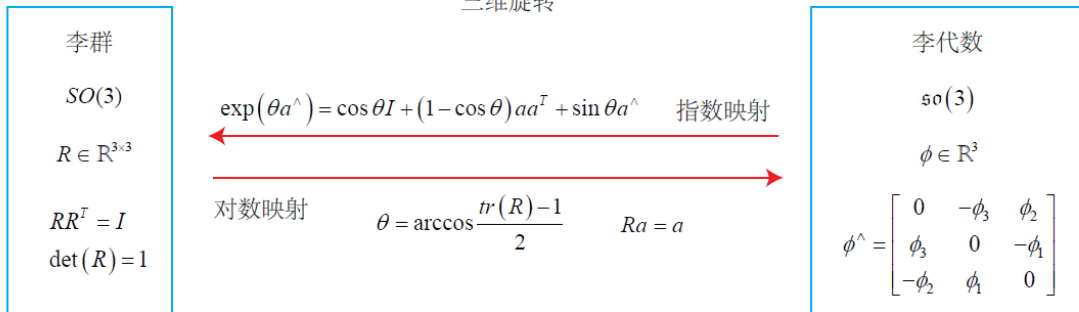
$$\exp(\xi^\wedge) = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^n & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n \rho \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$
$$\triangleq \begin{bmatrix} R & J\rho \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = T.$$

其中J为雅可比矩阵（留作习题）

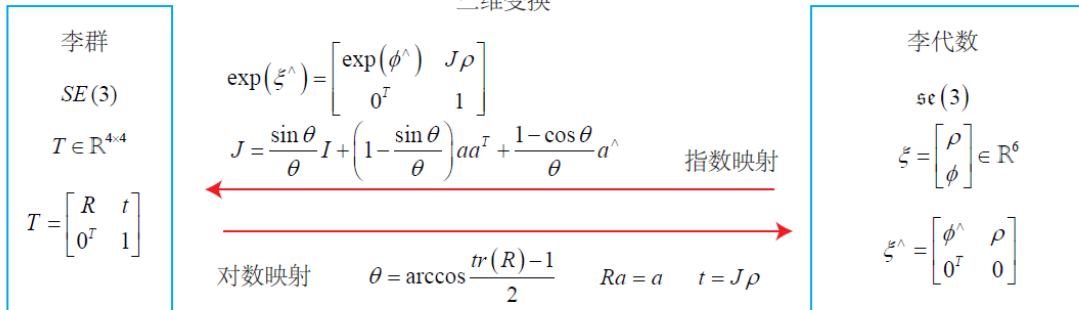
$$J = \frac{\sin \theta}{\theta} I + \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) a a^T + \frac{1 - \cos \theta}{\theta} a^\wedge.$$

3. 指数映射和对数映射

三维旋转



三维变换



4. 李代数求导与扰动模型

4. 求导与扰动模型

- SLAM的定位即位姿估计
- 但李群无加法： $R_1 + R_2 \notin SO(3)$. 导数无从定义
- 解决办法：
 - 利用李代数上加法定义李群元素的导数？
 - 使用指数映射和对数映射完成变换关系。
- 基本问题：当在李代数中做加法时，是否等价于在李群上做乘法？

$$\exp(\phi_1^\wedge) \exp(\phi_2^\wedge) = \exp((\phi_1 + \phi_2)^\wedge) . \quad ?$$

4. 求导与扰动模型

$$\exp(\phi_1^\wedge) \exp(\phi_2^\wedge) = \exp((\phi_1 + \phi_2)^\wedge).$$

- 在使用标量的情况下，该式明显成立
- 但这里的 ϕ^\wedge 为矩阵！
- 完整形式由 BCH (Baker-Campbell-Hausdorff) 公式给出：
 - 完整形式非常复杂，见：https://en.wikipedia.org/wiki/Baker-Campbell-Hausdorff_formula
 - 部分展开式：（方括号为李括号）

$$\ln(\exp(A) \exp(B)) = A + B + \frac{1}{2} [A, B] + \frac{1}{12} [A, [A, B]] - \frac{1}{12} [B, [A, B]] + \dots$$

4. 求导与扰动模型

- 当其中一个量为小量时，忽略其高阶项，BCH具有线性近似形式：

$$\ln(\exp(\phi_1^\wedge) \exp(\phi_2^\wedge))^\vee \approx \begin{cases} J_l(\phi_2)^{-1} \phi_1 + \phi_2 & \text{if } \phi_1 \text{ is small,} \\ J_r(\phi_1)^{-1} \phi_2 + \phi_1 & \text{if } \phi_2 \text{ is small.} \end{cases}$$

- 这里的 $J_l = J = \frac{\sin \theta}{\theta} I + \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) a a^T + \frac{1 - \cos \theta}{\theta} a^\wedge$. 左雅可比

$$J_l^{-1} = \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2} I + \left(1 - \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2}\right) a a^T - \frac{\theta}{2} a^\wedge.$$

$$J_r(\phi) = J_l(-\phi).$$

右雅可比

4. 求导与扰动模型

- 直观写法 (以左乘为例)

$$\exp(\Delta\phi^\wedge) \exp(\phi^\wedge) = \exp\left((\phi + J_l^{-1}(\phi) \Delta\phi)^\wedge\right).$$

- 在李群上左乘小量时, 李代数上的加法相差左雅可比的逆

- 反之

$$\exp((\phi + \Delta\phi)^\wedge) = \exp((J_l \Delta\phi)^\wedge) \exp(\phi^\wedge) = \exp(\phi^\wedge) \exp((J_r \Delta\phi)^\wedge).$$

- 李代数上进行小量加法时, 相当于李群上左(右)乘一个带左(右)雅可比的量
- SE(3)比SO(3)更复杂:

$$\exp(\Delta\xi^\wedge) \exp(\xi^\wedge) \approx \exp\left((\mathcal{J}_l^{-1} \Delta\xi + \xi)^\wedge\right), \quad \text{这里不展开花体雅可比}$$

$$\exp(\xi^\wedge) \exp(\Delta\xi^\wedge) \approx \exp\left((\mathcal{J}_r^{-1} \Delta\xi + \xi)^\wedge\right).$$

4. 求导与扰动模型

- 通过BCH线性近似，可以定义李代数上的导数
- 考虑一个基本问题：旋转后的点关于旋转的导数

不严谨地记为：
$$\frac{\partial (Rp)}{\partial R}.$$

- 由于R没有加法，导数无从定义
- 存在两种解决办法：
 - 对 R 对应的李代数加上小量，求相对于小量的变化率（导数模型）；
 - 对 R 左乘或右乘一个小量，求相对于小量的李代数的变化率（扰动模型）。

4. 求导与扰动模型

- 导数模型：

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\exp(\phi^\wedge) p)}{\partial \phi} &= \lim_{\delta \phi \rightarrow 0} \frac{\exp((\phi + \delta \phi)^\wedge) p - \exp(\phi^\wedge) p}{\delta \phi} \\&= \lim_{\delta \phi \rightarrow 0} \frac{\exp((J_l \delta \phi)^\wedge) \exp(\phi^\wedge) p - \exp(\phi^\wedge) p}{\delta \phi} \\&\approx \lim_{\delta \phi \rightarrow 0} \frac{(I + (J_l \delta \phi)^\wedge) \exp(\phi^\wedge) p - \exp(\phi^\wedge) p}{\delta \phi} \\&= \lim_{\delta \phi \rightarrow 0} \frac{(J_l \delta \phi)^\wedge \exp(\phi^\wedge) p}{\delta \phi} \\&= \lim_{\delta \phi \rightarrow 0} \frac{-(\exp(\phi^\wedge) p)^\wedge J_l \delta \phi}{\delta \phi} = -(Rp)^\wedge J_l.\end{aligned}$$

- 希望避免雅可比计算

4. 求导与扰动模型

- 扰动模型（左乘）
 - 左乘小量，令其李代数为零

$$\begin{aligned}\frac{\partial (Rp)}{\partial \varphi} &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\exp(\varphi^\wedge) \exp(\phi^\wedge) p - \exp(\phi^\wedge) p}{\varphi} \\ &\approx \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{(1 + \varphi^\wedge) \exp(\phi^\wedge) p - \exp(\phi^\wedge) p}{\varphi} \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi^\wedge Rp}{\varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{-(Rp)^\wedge \varphi}{\varphi} = -(Rp)^\wedge.\end{aligned}$$

- 更加简洁实用

4. 求导与扰动模型

- SE(3)上的扰动模型:

$$\begin{aligned}\frac{\partial (Tp)}{\partial \delta \xi} &= \lim_{\delta \xi \rightarrow 0} \frac{\exp(\delta \xi^\wedge) \exp(\xi^\wedge) p - \exp(\xi^\wedge) p}{\delta \xi} \\ &\approx \lim_{\delta \xi \rightarrow 0} \frac{(I + \delta \xi^\wedge) \exp(\xi^\wedge) p - \exp(\xi^\wedge) p}{\delta \xi} \\ &= \lim_{\delta \xi \rightarrow 0} \frac{\delta \xi^\wedge \exp(\xi^\wedge) p}{\delta \xi} \\ &= \lim_{\delta \xi \rightarrow 0} \frac{\begin{bmatrix} \delta \phi^\wedge & \delta \rho \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rp + t \\ 1 \end{bmatrix}}{\delta \xi} \\ &= \lim_{\delta \xi \rightarrow 0} \frac{\begin{bmatrix} \delta \phi^\wedge (Rp + t) + \delta \rho \\ 0 \end{bmatrix}}{\delta \xi} = \begin{bmatrix} I & -(Rp + t)^\wedge \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \triangleq (Tp)^\odot.\end{aligned}$$

4. 求导与扰动模型

- 小结
 - 利用BCH线性近似，可以推导 $\mathfrak{so}(3)$ 与 $\mathfrak{se}(3)$ 上的导数和扰动模型
 - 通常情况下，扰动模型更为简洁实用

5. 实践：Sophus库的使用
