Н.А. Мунасыпов

Л И Н Е Й Н О Е ПРОГРАММИРОВАНИЕ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Н.А. Мунасыпов

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Издательство ООО «Агентство «Пресса»

Оренбург 2015

УДК 519.852
ББК 22.18
М 90

Рецензенты:

И.А. Акимов, д. ф.-м. н., профессор кафедры математического анализа и методики преподавания математики ОГПУ

А.С. Ракитянский, к. ф.-м. н., доцент кафедры алгебры, геометрии и истории математики ОГПУ

Мунасыпов Н.А.

Линейное программирование: учебное пособие / Оренбург: Изд-во ООО «Агентство «Пресса», 2015. – 122 с.

М 90

Учебное пособие содержит основные теоретические положения и алгоритмы решения задач линейного программирования, проиллюстрированные численными примерами. Пособие предназначено студентам высших учебных заведений, изучающим математическое программирование, исследование операций, методы оптимизации, финансовую математику, экономико-математическое моделирование, и может оказать большую пользу всем, кто интересуется вопросами прикладной математики и приложениями математических методов в экономике.

УДК 519.852
ББК 22.18

ISBN 978-5-91854-185-2

Оглавление

Предисловие 4
§1. Линейное программирование, основные понятия. Модели задач линейного программирования 6
1.1. Основные понятия 6
1.2. Задачи с экономическим содержанием, приводящие к моделям задач линейного программирования 7
§2. Графический метод решения задач линейного программирования 11
§3. Применение графического метода при решении задач с экономическим содержанием 18
§4. Симплексный метод решения задач линейного программирования 25
4.1. Алгоритм симплексного метода 26
4.2. Решение экономических задач симплексным методом 31
§5. Симплексные таблицы 43
§6. Двойственные задачи линейного программирования 49
§7. Транспортная задача линейного программирования 56
7.1. Постановка транспортной задачи 56
7.2. Нахождение первоначального допустимого плана перевозок 59
7.3. Нахождение оптимального плана перевозок 62
§8. Пример решения транспортной задачи 66
§9. Задания для самоконтроля 83
9.1. Вопросы для самоконтроля 83
9.2. Тестовые задачи 85
9.3. Задания для проведения контрольных работ 100
9.4. Компетентностно-ориентированные задания 110
Литература 116
Приложения 117

Предисловие

Основы линейного программирования были заложены в 30-х годах прошлого века, когда советский математик Л. В. Канторович в 1939 году в своей работе «Математические методы организации и планирования производства» впервые разработал новый класс задач, связанных с нахождением экстремума линейной функции при линейных ограничениях. В 1949 году американский математик Джордж Данциг разработал универсальный метод решения задач линейного программирования, названный симплекс-методом. Именно Данциг предложил термин «программирование», который соответствует переводу английского слова «programmation», означающему планирование. Впоследствии за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов в 1975 году Канторовичу и американскому экономисту Купмансу была присуждена Нобелевская премия в области экономики.

Важность и ценность теории линейного программирования состоит в том, что в совершенно различных областях (в экономике, технике, естественных науках, военном деле) возникает необходимость рассмотрения моделей, в которых целевая функция и ограничения описываются линейными равенствами и неравенствами. Причём эти модели достаточно хорошо описывают природу изучаемой ситуации, и позволяют получать результаты, адекватно отражающие соотношения и связи изучаемых ситуаций и систем.

В данном учебном пособии рассмотрены основные понятия и методы решения задач линейного программирования. Особое внимание уделено не столько подробному теоретическому обоснованию методов линейного программирования, сколько приложениям и алгоритмам решения практических задач и составлению моделей, приводящих к задачам линейного программирования. Алгоритмы и методы решения задач сопровождаются численными примерами, иллюстрирующими и поясняющими все этапы и шаги решения.

Учебное пособие рекомендуется студентам высших учебных заведений, изучающим математическое программирование, исследование операций, методы оптимизации, финансовую математику, экономико-математическое моделирование, а также всем, кто интересуется вопросами прикладной математики и приложениями математических методов для решения прикладных задач. Пособие может оказать большую пользу и преподавателям для организации различных форм контроля знаний студентов. Кроме основных теоретических положений и подробно разобранных примеров, пособие включает в себя задания для самоконтроля. Приведены теоретические вопросы для самоконтроля, которые можно использовать для проверки уровня теоретического усвоения материала. Включены в пособие и тестовые задания, которые позволяют проверить понимание и усвоение основных положений. Указания и ответы к тестовым заданиям приведены в приложениях. Для более углубленной проверки приведены также задачи по курсу линейного программирования, которые можно использовать в качестве образцов для проведения контрольных работ. В силу большой трудоёмкости решения этих задач рекомендуется эти контрольные работы проводить во внеаудиторное время или проводить домашние контрольные работы, хотя отдельные задачи можно разбирать и на практических занятиях. В конце пособия для развития умений и навыков составления математических моделей задач линейного программирования в различных областях добавлены компетентностно-ориентированные задания. Эти задания ориентированы на умение анализировать проблемные ситуации в различных областях человеческой деятельности и построение математических моделей для исследования изучаемых систем.

§1. Линейное программирование, основные понятия. Модели задач линейного программирования

1.1. Основные понятия

Математическое программирование – раздел исследования операций, изучающий задачи нахождения экстремумов функций нескольких переменных при наличии ограничений, накладываемых на переменные. Модель задачи математического программирования имеет вид:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to extr \qquad (1)$$

при ограничениях

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G; \;\; i = \overline{1, m}. \qquad (2)$$

Функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которой отыскивается экстремум, называется *целевой функцией*, а набор переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий задаваемым ограничениям (2), называется *допустимым решением* (или *планом)*. Ограничения (2) могут быть заданы с помощью некоторых математических соотношений; обычно они задаются в виде равенств или неравенств. Множество всех допустимых решений называется *областью допустимых решений (ОДР)*. Целевая функция (1) вместе с ограничениями (2) образует *математическую модель* задачи. Допустимое решение, при котором достигается экстремум целевой функции (1), называется *оптимальным решением* (*оптимальным планом*).

Если целевая функция является линейной, то есть имеет вид

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

где c_j – некоторые числа, а все ограничения (2) задаются в виде линейных равенств или неравенств, то есть имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = \overline{1, m},$$

где a_{ij} и b_i есть некоторые числа, то говорят, что задана ***задача линейного программирования*** (ЗЛП). Числа c_j – коэффициенты при переменных целевой функции, a_{ij} – коэффициенты при переменных в системе ограничений, b_j –

свободные члены системы уравнений (неравенств). Таким образом, модель ЗЛП имеет вид:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \to extr$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Различают три формы записи ЗЛП: 1) *каноническая форма* – если в системе ограничений содержатся лишь равенства; 2) *стандартная форма* – если в задаче, заданной на нахождение максимума, все неравенства в системе имеют вид $\le$, а в задаче, заданной на нахождение минимума, все неравенства в системе имеют вид $\ge$; 3) *общая форма* – если в системе могут содержаться как равенства, так и неравенства, причём различного вида. Следует отметить, что в ЗЛП, записанной в общей форме, условие неотрицательности переменных $x_j \ge 0$, вообще говоря, может выполняться не для всех переменных. От одной формы записи ЗЛП всегда можно путём арифметических преобразований (в случае необходимости и добавления новых переменных) перейти к любой другой форме записи.

1.2. Задачи с экономическим содержанием, приводящие к моделям задач линейного программирования

Для изучения и решения экономических задач требуется составить *экономико-математическую модель* – совокупность математических соотношений, адекватно и достаточно полно описывающих суть и содержание экономической задачи. Как было указано выше, составление математической модели включает в себя выбор переменных, задание целевой функции и системы ограничений. На практике при анализе ситуаций сначала нужно от исходной содержательной постановки задачи перейти к формализации путём составления математической модели. Затем применяют подходящий математический метод для решения получившейся математической задачи, и проводят экономическую интерпретацию полученных результатов. Рассмотрим некоторые наиболее ярко выраженные экономические задачи.

Пример 1. (Задача об оптимальном производстве). Допустим, что предприятие выпускает товары $T_1, T_2, \dots, T_n$, для изготовления которых использует ресурсы $P_1, P_2, \dots, P_m$, причём количество этих ресурсов ограничено соответственно величинами $b_1, b_2, \dots, b_m$. Пусть известны величины a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, означающие количество ресурсов i-го вида на изготовление единицы товаров j-го вида, и величины c_j - стоимости единицы товаров T_j, $j = \overline{1, n}$. Требуется найти оптимальный план производства, то есть такой план, при котором суммарная стоимость всех выпускаемых товаров будет наибольшей.

Составим математическую модель задачи. Введём в рассмотрение переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$, означающие количество товаров соответственно $T_1, T_2, \dots, T_n$. Тогда стоимость выпускаемого товара T_1 в количестве x_1 будет равна $c_1 x_1$, аналогично стоимости товаров остальных видов определяются как произведения стоимостей единицы товара на количество товара соответствующего вида. Суммарная стоимость всех выпускаемых товаров определяется выражением

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n,$$

которое по условию задачи нужно максимизировать. Это выражение представляет собой целевую функцию для данной задачи. Теперь рассмотрим ограничения по ресурсам. На изготовление единицы товара T_1 расходуется ресурсов первого вида в размере a_{11}, поэтому выражение $a_{11} x_1$ означает расход ресурсов первого вида на изготовление товара T_1 в объёме x_1 единиц. Аналогично расход ресурсов первого вида на выпуск товара каждого вида T_j в объёме x_j будет равен $a_{1j} x_j$. Значит, количество ресурсов первого вида на выпуск товаров всех видов в объёмах соответственно $x_1, x_2, \dots, x_n$ составит величину, равную

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$ единиц. Так как запасы ресурсов первого вида ограничены объёмом b_1, то получаем следующее неравенство:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1.$$

Ограничения по всем остальным видам ресурсов определяются аналогично. Учитывая естественные очевидные условия неотрицательности количества выпускаемых товаров, получаем систему ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Так как целевая функция линейная и все ограничения записаны в виде линейных неравенств, то получаем модель ЗЛП.

Пример 2. (Формирование минимальной потребительской продовольственной корзины, или задача о диете). Допустим, что организму требуются жизненно необходимые различные вещества (белки, жиры, углеводы, витамины и т.п.) $B_1, B_2, \dots, B_m$, и для нормальной жизнедеятельности необходимо потреблять эти вещества в размерах, не меньших соответственно $b_1, b_2, \dots, b_m$. Известно, что эти вещества содержатся в различных продуктах питания $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$. Пусть известны величины $a_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$, означающие количество вещества i-го вида, содержащееся в одной единице продукта j-го вида, и величины c_j – стоимости единицы продуктов $\Pi_j,\ j = \overline{1,n}.$ Требуется составить оптимальный рацион питания, то есть такой рацион, при котором все потребности организма в необходимых веществах удовлетворяются полностью, а суммарная стоимость всех покупаемых продуктов будет наименьшей.

Составим математическую модель задачи. Введём в рассмотрение переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$, означающие количество продуктов соответственно $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$. Тогда стоимости покупаемых продуктов Π_j равны произведениям стоимости единицы продукта на количество продукта соответствующего вида, то есть $c_j x_j$. Суммарная стоимость всех покупаемых продуктов определяется выражением

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n,$$

которое по условию данной задачи нужно минимизировать. Рассмотрим теперь ограничения по необходимым организму веществам. В продукте Π_1 объёмом x_1 единиц вещество первого вида B_1 содержится в размере $a_{11} x_1$ единиц, аналогично в каждом продукте Π_j объёмом x_j единиц вещество B_1 содержится в размере $a_{1j} x_j$ единиц. Значит, количество вещества первого вида, получаемое из различных продуктов, равно $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n$. Так как по условию задачи это количество должно быть не меньше чем b_1, то получаем следующее неравенство:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1.$$

Ограничения по всем остальным видам веществ определяются аналогично. Учитывая естественные очевидные условия неотрицательности количества покупаемых продуктов, получаем систему ограничений

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \geq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Так как целевая функция линейная и все ограничения записаны в виде линейных неравенств, то также получаем модель ЗЛП. Заметим, что разобранная задача относится к группе *задач о смесях*, в которых требуется найти наиболее дешёвый набор из заданных материалов, обеспечивающих получение смеси с определёнными заданными свойствами.

Итак, в приведённых примерах получаем модели ЗЛП, причём в обоих случаях получаем стандартную форму записи. Хотя задачи различны по содержанию, при анализе мы получаем одинаковые математические модели. Здесь мы описали моделирование двух экономических задач, не затрагивая методы нахождения оптимального плана. Различные подходы к решению рассмотрим ниже. Заметим, что задачи, приводящие к модели ЗЛП, могут встречаться в различных областях науки, техники и естествознания. Поэтому изучение подобных ситуаций и дальнейший анализ с целью поиска оптимального плана играют огромную роль.

§2. Графический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим ЗЛП с двумя переменными, то есть случай, когда $n = 2$. Тогда имеем модель:

$$F(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \to extr$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Здесь ЗЛП может быть задана в различной форме записи, то есть целевая функция может быть задана как на экстремум, так и отдельно на максимум или на минимум. Ограничения в системе могут содержать как равенства, так и неравенства произвольного вида. В этом случае решение задачи можно осуществить графическим методом. Для этого рассмотрим так называемые линии уровня и множества точек, удовлетворяющих ограничениям системы. *Линия уровня* – это множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(X) = C$ (где C есть некоторая постоянная), то есть множество точек, в которых функция $F(X)$ принимает постоянное значение. В двумерном пространстве линии уровня для линейной целевой функции являются прямыми вида

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C.$$

Находим далее область допустимых решений (ОДР) – множество всех точек, координаты которых удовлетворяют всем ограничениям системы. Каждое неравенство системы

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$$

геометрически определяет полуплоскость, границей которой является прямая, соответствующая равенству

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i.$$

Полуплоскость – выпуклое множество, а пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством. Значит, ОДР есть выпуклое множество. Выпуклое множество – это множество, содержащее вместе с любыми двумя точками соединяющий их отрезок. В зависимости от системы ограничений структура ОДР может быть различной. Она может представлять собой: выпуклый многоугольник, неограниченную выпуклую многоугольную область, прямую линию, луч, отрезок, единственную точку, пустое множество. Чтобы найти максимальное (минимальное) значение целевой функции, рассматривают направление возрастания (убывания) целевой функции, которое определяется вектором частных производных по каждой из переменных. Найдём частные производные функции

$$F(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

по переменным x_1 и x_2:

$$\frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} = c_1; \ \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} = c_2.$$

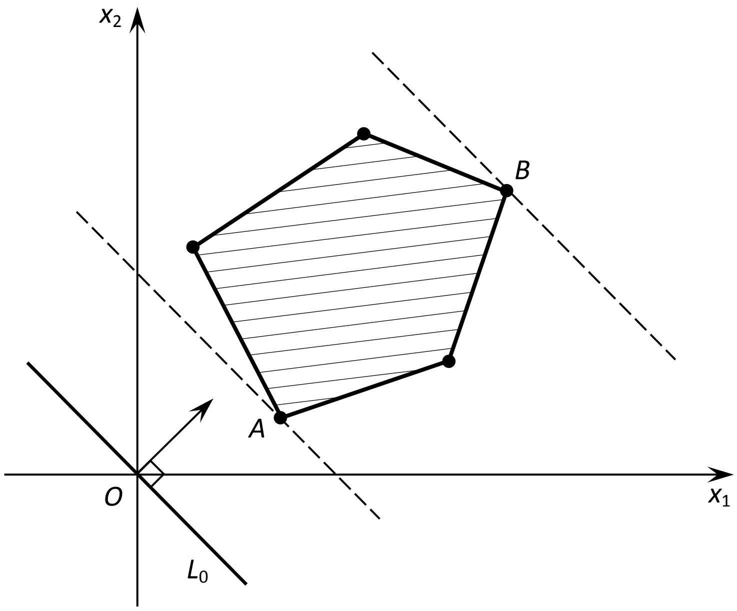
Вектор частных производных называют *градиентом функции*. Он показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции:

$$\vec{N} = \left(\frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1}; \ \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right) = (c_1; \ c_2).$$

Тогда вектор $-\vec{N} = (-c_1; -c_2)$ показывает направление наискорейшего убывания функции, его называют *антиградиентом*. Следует заметить, что для линейной функции градиент есть нормальный вектор к прямой линии уровня. Построив градиент целевой функции, и сдвигая линию уровня в направлении градиента (в задаче на максимум) или антиградиента (в задаче на минимум), находим крайние точки ОДР, в которых функция и будет достигать экстремума. Опишем пошагово ***алгоритм решения ЗЛП графическим способом***:

1. На плоскости X_1OX_2 построим ОДР (рис.1).

Рисунок 1.



2. Строим линию уровня. Удобно рассматривать линию нулевого уровня $L_0: c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ (так как в этом случае прямая проходит через начало координат, и одна точка уже определена).

3. Строим градиент (нормальный вектор) $\vec{N} = (c_1;\ c_2)$, координаты которого являются коэффициентами целевой функции (начало вектора удобно брать в начале координат). Заметим, что нормальный вектор должен быть перпендикулярен линии уровня.

4. Двигаем линию уровня в направлении вектора $\vec{N} = (c_1;\ c_2)$ параллельно самой себе, и находим точки входа в ОДР (они будут соответствовать точкам минимума целевой функции) и точки выхода из ОДР (которые соответствуют точкам максимума целевой функции). На рисунке 1 точкой входа является точка A, точкой выхода – точка B.

5. Находим координаты точек экстремума (максимума и минимума). Для определения координат точки выбираем прямые, которые пересекаются в данной точке, и решаем систему уравнений, соответствующих этим прямым.

6. Подставляя координаты точек экстремума в целевую функцию, находим решение ЗЛП.

Замечание. При нахождении точек минимума не обязательно рассматривать антиградиент функции. Достаточно ограничиться лишь градиентом, так как точки входа в ОДР при движении в направлении градиента будут совпадать с точками выхода из ОДР при движении в направлении антиградиента.

Проиллюстрируем графический метод решения ЗЛП на следующем примере.

Пример 3. Решить графическим способом задачу линейного программирования:

$$F(x_1, x_2) = 4x_1 - 3x_2 \to extr$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 30, \\ -4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 3x_2 \ge -3, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

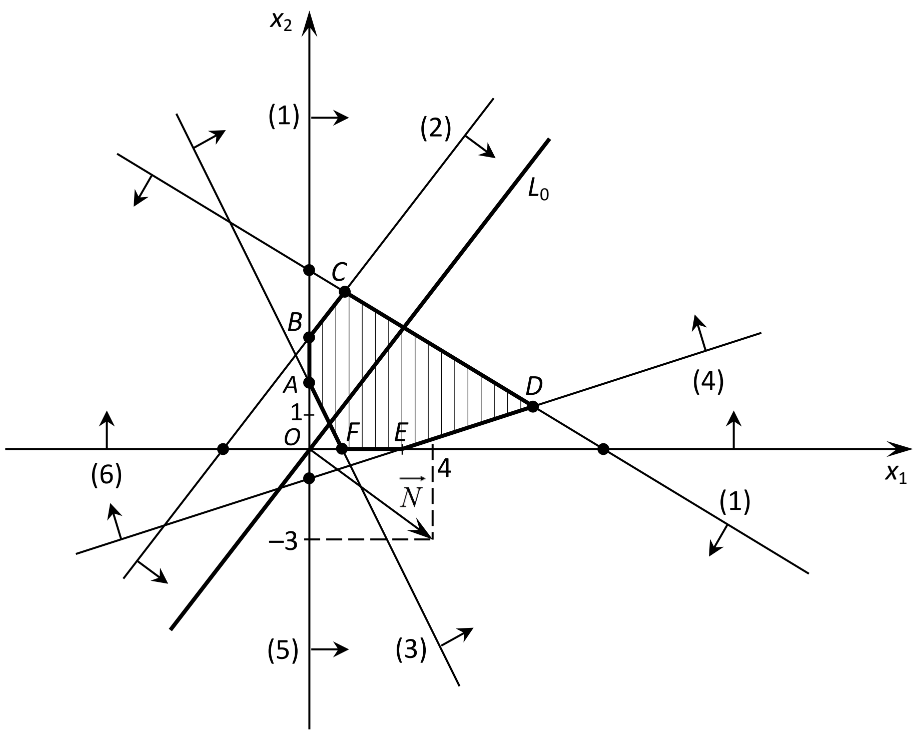
Решение

1. Построим на плоскости X_1OX_2 область допустимых решений. Для этого сначала в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств. Построим по двум контрольным точкам прямые, соответствующие этим равенствам, и для удобства пронумеруем все прямые:

$$\begin{array}{lcr} 3x_1 + 5x_2 = 30, & (10;0),\ (0;6), & (1) \\ -4x_1 + 3x_2 = 12, & (-3;0),\ (0;4), & (2) \\ 2x_1 + x_2 = 2, & (1;0),\ (0;2), & (3) \\ -x_1 + 3x_2 = -3, & (3;0),\ (0;-1), & (4) \\ x_1 = 0, & \text{ось } OX_2, & (5) \\ x_2 = 0, & \text{ось } OX_1. & (6) \end{array}$$

Затем построим полуплоскости, соответствующие исходным неравенствам системы ограничений. Чтобы построить полуплоскость, берут любую точку, не принадлежащую граничной прямой, и подставляют координаты точки в неравенство. Если неравенство выполняется, то полуплоскость, содержащая рассматриваемую точку, определяет геометрически множество решений неравенства. Если неравенство не выполняется, то множеством решений является другая полуплоскость, которая не содержит рассматриваемую точку. Например, при нахождении полуплоскости, соответствующей неравенству $3x_1 + 5x_2 \leq 30$, можно рассмотреть точку $(0; 0)$. Так как $3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \leq 30$ – верное неравенство, то полуплоскость, содержащая точку $(0; 0)$, вместе с граничной прямой $3x_1 + 5x_2 = 30$ геометрически определяет множество решений неравенства $3x_1 + 5x_2 \leq 30$. Аналогично построим все остальные полуплоскости. Заметим, что неравенство $x_1 \geq 0$ определяет правую относительно оси OX_2 полуплоскость, а неравенство $x_2 \geq 0$ определяет верхнюю относительно оси OX_1 полуплоскость. После построения всех полуплоскостей находим их пересечение. В нашем случае это будет шестиугольник $ABCDEF$, который представляет собой ОДР (рис.2).

Рисунок 2.



2. Построим линию нулевого уровня (начальную прямую) L_0, задаваемую уравнением $4x_1 - 3x_2 = 0$, то есть L_0: $4x_1 - 3x_2 = 0$.

3. Построим нормальный вектор $\vec{N} = (4; -3)$.

4. Будем передвигать линию уровня L_0 в направлении вектора $\vec{N} = (4; -3)$ параллельно самой себе до тех пор, пока она, двигаясь по ОДР, не коснётся области ОДР в крайней возможной точке, причём при дальнейшем движении прямая L_0 покинет ОДР. Эти крайние точки есть точки выхода из ОДР, которые будут точками максимума целевой функции. Тогда линия уровня займёт положение опорной прямой. В нашем случае точкой выхода будет точка D. Чтобы найти точки минимума (точки входа в ОДР), нужно двигать линию уровня L_0 в направлении вектора $-\vec{N} = (-4;\ 3)$ до крайнего положения. В нашем случае точками входа в ОДР являются все точки отрезка BC, так как линия уровня L_0 параллельна прямой (2), содержащей отрезок BC (это следует из признака параллельности прямых, поскольку соответствующие коэффициенты при переменных пропорциональны).

5. Найдём координаты точек максимума и минимума. Точка D является точкой пересечения прямых (1) и (4), поэтому координаты этой точки удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 30, \\ -x_1 + 3x_2 = -3. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 7{,}5; \\ x_2 = 1{,}5. \end{cases}$$

Значит, $D(7{,}5; 1{,}5)$ – точка максимума.

Так как точек минимума бесконечное множество (все они лежат на отрезке BC), то достаточно взять одну любую из них, например, точку B. Точка B является точкой пересечения прямых (2) и (5), поэтому её координаты находим из решения системы:

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 = 12, \\ \qquad x_1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует: $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 4. \end{cases}$ Значит, $B(0; 4)$.

6. Подставляем координаты точек максимума и минимума в целевую функцию. Тогда

$F_{max} = F(D) = 4 \cdot 7{,}5 - 3 \cdot 1{,}5 = 25{,}5$; $F_{min} = F(B) = 4 \cdot 0 - 3 \cdot 4 = -12$.

Ответ: $F_{max} = 25{,}5$; $F_{min} = -12$.

Замечания. 1) В теории линейного программирования доказано, что в n-мерном пространстве экстремум целевой функции (если ОДР есть непустое множество) достигается в вершине (крайней, угловой точке). Поэтому для решения задачи можно было бы найти все угловые точки, и сравнить между собой значения целевой функции в этих точках. Так, в нашем примере вершинами шестиугольника $ABCDEF$ являются точки

$$A(0;2), B(0;4), C\left({}^{30}/_{29}; {}^{156}/_{29}\right), D(7{,}5;1{,}5), E(3;0) \text{ и } F(1;0).$$

Координаты этих точек можно определить из решения систем уравнений, рассматривая соответствующие прямые, пересекающиеся в этих точках. Затем находим значения целевой функции в этих точках:

$F(A) = 4 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = -6$; $F(B) = 4 \cdot 0 - 3 \cdot 4 = -12$;

$F(C) = 4 \cdot {}^{30}/_{29} - 3 \cdot {}^{156}/_{29} = -12$; $F(D) = 4 \cdot 7{,}5 - 3 \cdot 1{,}5 = 25{,}5$;

$F(E) = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 0 = 12$; $F(F) = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 4$.

Из найденных значений определяем наибольшее и наименьшее:

$$F_{max} = F(D) = 25{,}5; \quad F_{min} = F(B) = -12.$$

При таком подходе отпадает необходимость рассмотрения линии уровня и градиента. Но тогда приходится определять координаты всех угловых точек, решая системы уравнений, что делает процесс решения достаточно громоздким и неэффективным.

2) Если число переменных равно трём, то есть $n = 3$, то полученной модели ЗЛП также можно придать геометрический смысл. Вместо линии уровня здесь рассматривается *поверхность уровня* – множество точек трёхмерного пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = C.$$

Это есть уравнение плоскости, поэтому получаем, что поверхность уровня является плоскостью. В системе ограничений каждое неравенство вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \le b_i$$

геометрически определяет полупространство, границей которого является плоскость, соответствующая равенству $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$. Полупространство есть также выпуклое множество, и пересечение полупространств является выпуклым множеством. Тогда ОДР представляет собой, вообще говоря, некоторое выпуклое множество точек трёхмерного пространства. Обычно при решении задач ОДР есть некоторый многогранник. Аналогично, как и в двумерном случае, можно рассмотреть градиент (нормальный вектор), который в данном случае имеет вид $\vec{N} = (c_1;\ c_2;\ c_3)$. Далее, двигая в пространстве поверхность нулевого уровня (плоскость, проходящую через начало координат в трёхмерном пространстве) параллельно градиенту, можно было бы найти в ОДР точки входа и выхода. Но подобный способ решения графическим методом практически невозможно осуществить. Это объясняется тем, что построение полупространств и их пересечения изобразить крайне трудно, к тому же геометрическое нахождение точек входа и выхода представляется невозможным (или это сопряжено с очень громоздкими построениями). Поэтому графический метод применяют только в случае двух переменных. Для ЗЛП с произвольным числом переменных применяется универсальный метод решения, который мы рассмотрим позже.

§3. Применение графического метода при решении задач с экономическим содержанием

В предыдущем параграфе мы рассмотрели алгоритм графического метода и проиллюстрировали его на конкретном численном примере. При этом математическая модель не имела определённой экономической интерпретации. В данном параграфе покажем решение графическим методом некоторых задач, имеющих конкретный содержательный экономический смысл.

Пример 4. Швейная фабрика выпускает мужские и женские костюмы, и для их пошива использует ткани четырёх видов A, B, C и D. Известны величины расходов каждого вида ткани на производство одного мужского и одного женского костюма, а также имеющиеся запасы тканей, заданные в таблице:

Таблица 1

Виды тканей	Расход ткани на изготовление одного костюма (условных единиц)		Запасы тканей (тыс. усл. ед.)
	Мужские костюмы	Женские костюмы	
A	2	4	32
B	3	2	24
C	3	0	18
D	0	4	28

Известно, что реализация одного мужского костюма приносит доход в 3 условных единиц, а одного женского – 4 условных единиц. Требуется составить оптимальный план выпуска товаров, то есть такой план, при котором с учётом имеющихся ресурсов тканей доход от реализации костюмов будет наибольшим.

Решение

Построим математическую модель задачи. Введём переменные $x_1,\ x_2$ – количество мужских и женских костюмов соответственно (тыс. шт.). Тогда суммарный доход от их реализации определяется выражением

$$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2,$$

которое нужно максимизировать. По имеющимся исходным данным определяем ограничения по ресурсам каждого вида тканей. Они определяются неравенствами:

$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 32$ – для тканей вида A;

$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 24$ – для тканей вида B;

$3 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \leq 18$ – для тканей вида C;

$0 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 28$ – для тканей вида D.

Количество выпускаемых костюмов есть величина неотрицательная, поэтому $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$ Таким образом, получаем:

$$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 32, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ 3x_1 \qquad\quad \le 18, \\ \qquad\quad 4x_2 \le 28, \\ x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Аналогично, как и в примере 3, построим ОДР. Заменив в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств на знаки точных равенств, построим по двум контрольным точкам прямые, соответствующие этим равенствам, и для удобства пронумеруем все прямые:

$$\begin{array}{rcr} 2x_1 + 4x_2 = 32, & (16; 0), (0; 8), & (1) \\ 3x_1 + 2x_2 = 24, & (8; 0), (0; 12), & (2) \\ 3x_1 \qquad\quad = 18, & (6; 0), (6; 6), & (3) \\ 4x_2 = 28, & (0; 7), (7; 7), & (4) \\ x_1 = 0, & \text{ось } OX_2, & (5) \\ x_2 = 0, & \text{ось } OX_1. & (6) \end{array}$$

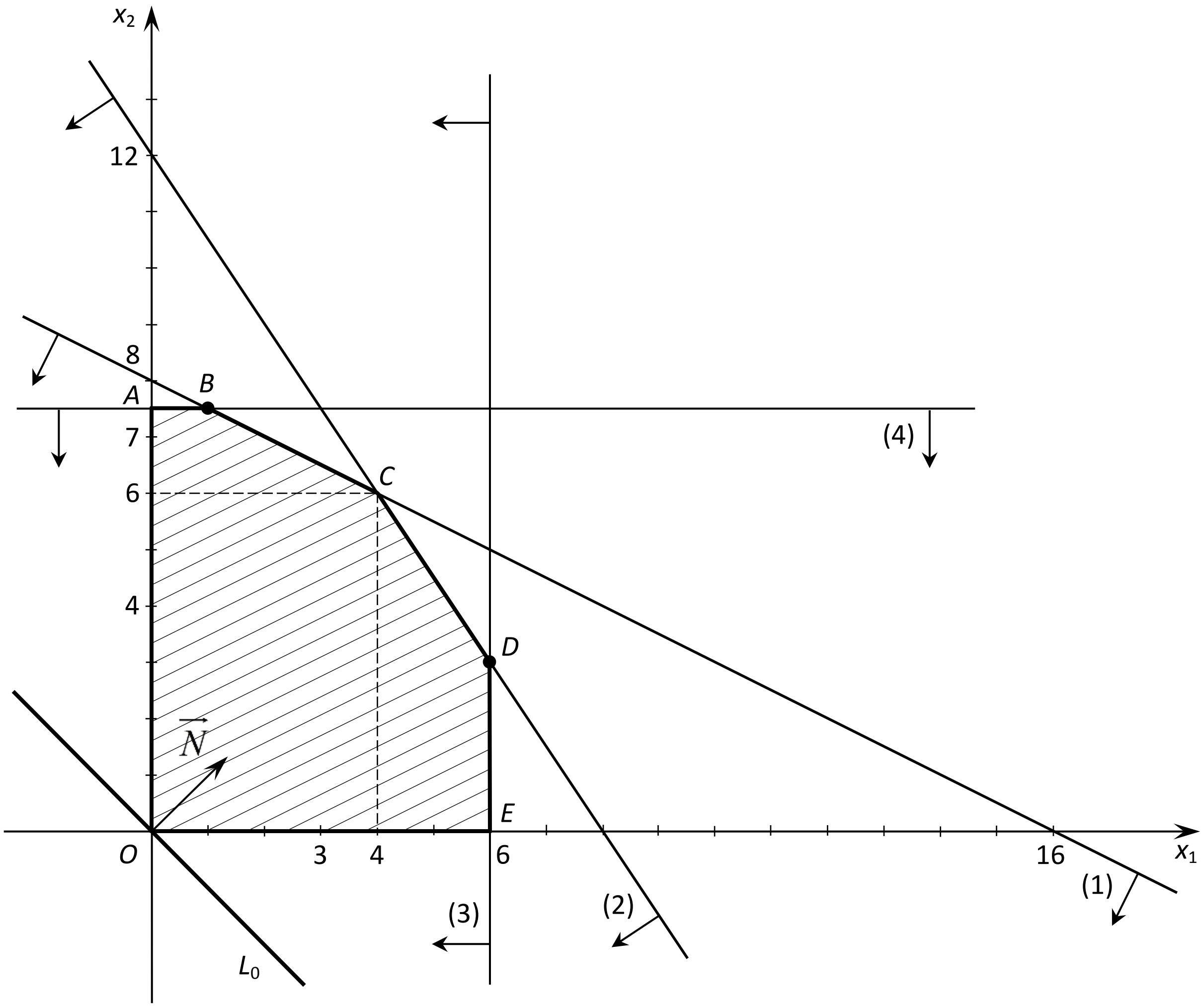
Построив полуплоскости с этими граничными прямыми, найдём их пересечение. Получим шестиугольник $OABCDE$, который представляет собой ОДР (рис.3). Затем строим линию нулевого уровня L_0: $3x_1 + 4x_2 = 0$, а также нормальный вектор $\vec{N} = (3;\ 4)$. Передвигая линию уровня L_0 в направлении вектора $\vec{N}$ параллельно самой себе, найдём крайнюю точку выхода из ОДР, в которой линия уровня займёт положение опорной прямой. В нашем случае это будет точка C, которая будет точкой максимума целевой функции. Найдём координаты точки C как точки пересечения прямых (1) и (2), решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 32, \\ 3x_1 + 2x_2 = 24. \end{cases}$$

В результате получим:

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

Рисунок 3.



Значит, $C(4;6)$ – точка максимума, и тогда

$$F_{max} = F(4;6) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 36.$$

Таким образом, фабрике следует выпускать 4 тысячи мужских костюмов и 6 тысяч женских костюмов, при этом доход будет наибольшим и составит 36 тысяч условных единиц.

Пример 5. Агропромышленное предприятие должно закупить жидкие и сухие удобрения для внесения в почву. Известно, что для роста и полноценного развития растений необходимы минеральные питательные вещества (азот, фосфор, калий, и прочие элементы), которые содержатся в удобрениях. Известны содержание этих веществ в одной единице каждого вида удобрений, стоимости единицы удобрений и необходимое количество веществ каждого вида для растений:

Таблица 2

Питательные вещества и элементы	Содержание питательных веществ в единице удобрений (усл.ед.)		Необходимое количество веществ
	Жидкие удобрения	Сухие удобрения	
Азот	4	1	12
Фосфор	2	5	25
Калий	2	2	16
Другие элементы	1	5	15
Стоимость единицы удобрений (усл. ед.)	4	6	

Требуется найти оптимальный набор закупаемых удобрений, то есть такой набор, при котором потребности растений в почве во всех минеральных веществах полностью удовлетворяются, и при этом суммарная стоимость закупаемых удобрений будет наименьшей.

Решение

Составим математическую модель задачи. Введём переменные x_1, x_2 – количество закупаемых жидких и сухих удобрений соответственно. Тогда суммарная стоимость удобрений определяется выражением

$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2,$$

которое нужно минимизировать. Используя исходные данные, запишем ограничения, накладываемые на необходимые количества питательных веществ и элементов. Они определяются неравенствами:

$4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geq 12$ – для азота;

$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \geq 25$ – для фосфора;

$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 16$ – для калия;

$1 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \geq 15$ – для других элементов.

Количество удобрений есть величина неотрицательная, поэтому $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Таким образом, получаем:

$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 12, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 25, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 16, \\ x_1 + 5x_2 \geq 15, \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Заменив в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств на знаки точных равенств, построим по двум контрольным точкам прямые, соответствующие этим равенствам, и для удобства пронумеруем все прямые:

$$\begin{array}{ccc} 4x_1 + x_2 = 12, & (3;0),(0;12), & (1) \\ 2x_1 + 5x_2 = 25, & (12{,}5;0),(0;5), & (2) \\ 2x_1 + 2x_2 = 16, & (8;0),(0;8), & (3) \\ x_1 + 5x_2 = 15, & (15;0),(0;3), & (4) \\ x_1 = 0, & \text{ось } OX_2, & (5) \\ x_2 = 0, & \text{ось } OX_1. & (6) \end{array}$$

Построив полуплоскости с этими граничными прямыми, найдём их пересечение. Получим неограниченную выпуклую область $(X_2MNPQRX_1)$, которая представляет собой ОДР (рис.4). Построим линию нулевого уровня, то есть

$$L_0: 4x_1 + 6x_2 = 0,$$

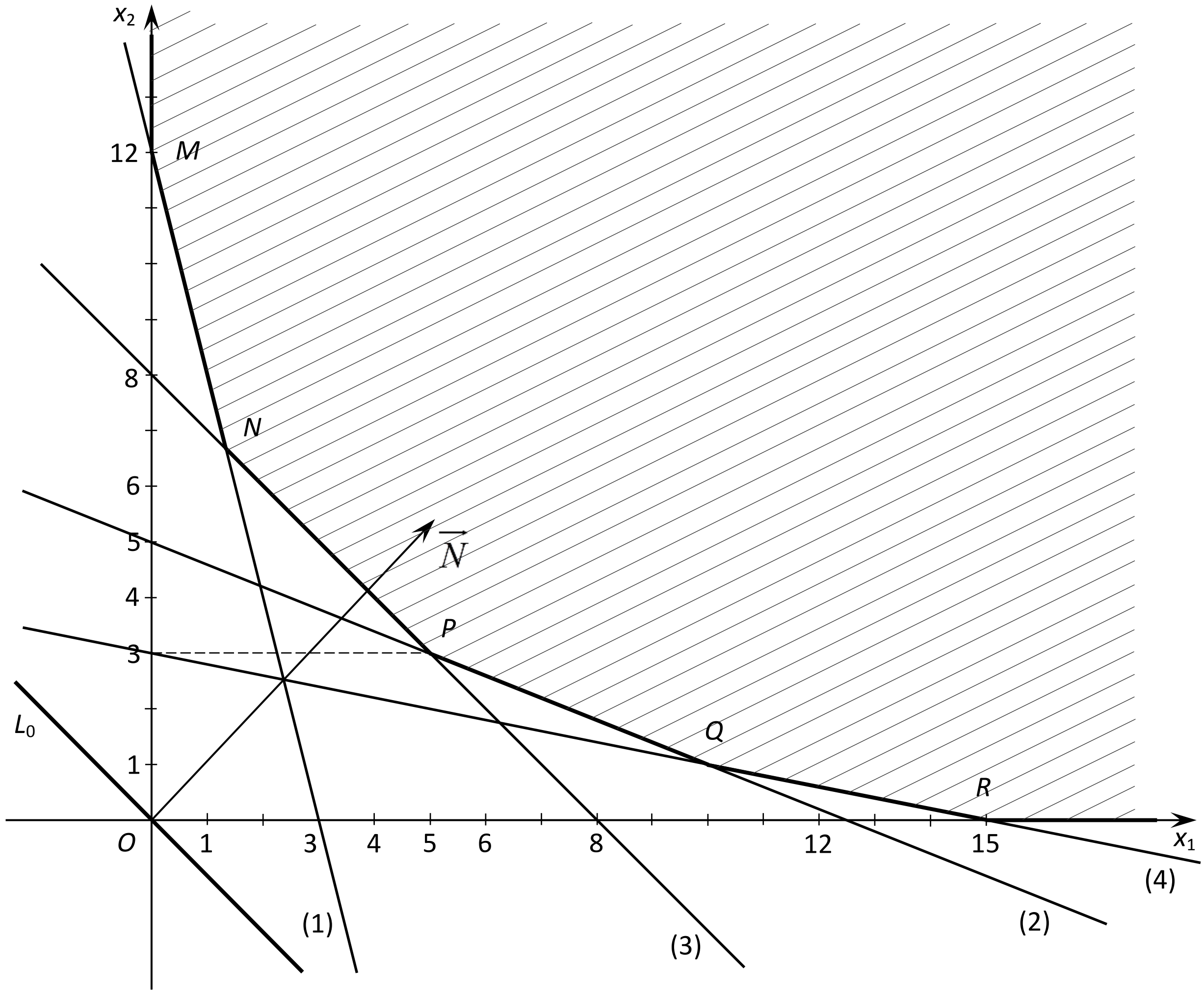
а также нормальный вектор $\vec{N} = (4;\ 6)$. Передвигая линию уровня L_0 в направлении вектора $\vec{N}$ параллельно самой себе, найдём точку входа в ОДР, в которой линия уровня займёт положение опорной прямой. В нашем случае это будет точка P, которая будет точкой минимума целевой функции. Найдём координаты точки P как точки пересечения прямых (2) и (3), решив соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 25, \\ 2x_1 + 2x_2 = 16. \end{cases}$$

В результате получим:

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Рисунок 4.



Значит, $P(5;3)$ – точка минимума, и тогда

$$F_{min} = F(5;3) = 4 \cdot 5 + 6 \cdot 3 = 38.$$

Таким образом, агропромышленному предприятию следует закупить 5 единиц жидких удобрений и 3 единицы сухих удобрений. При этом стоимость закупленных удобрений будет минимальной и составит 38 условных единиц.

§4. Симплексный метод решения задач линейного программирования

Пусть задана произвольная ЗЛП, содержащая n переменных. Как было показано в §2, графический метод можно применить только при $n = 2$. Для решения ЗЛП произвольной размерности существует универсальный метод решения, называемый *симплексным методом*. Сначала рассмотрим некоторые понятия, играющие важную роль в дальнейшем изложении. Если в системе m уравнений с n переменными какие-либо r переменных линейно независимы, то они являются *базизными переменными*. И если остальные небазизные переменные приравнять к нулю, то полученное решение называется *базисным решением (планом)*. Если в этом базисном решении выполняются условия неотрицательности переменных, то полученное решение называется *опорным решением (планом)*. Симплексный метод представляет собой итерационный метод последовательного перехода от одного опорного плана ЗЛП к другому, при этом значение целевой функции для каждого следующего плана улучшается (по крайней мере, не ухудшается). В теории линейного программирования доказано, что если ЗЛП имеет оптимальное конечное решение, то оно достигается, по крайней мере, в одной из угловых точек многогранника, определяющего ОДР. Угловые точки (вершины многогранника) соответствуют базисным решениям системы уравнений. Если ЗЛП приведена к канонической форме записи (система ограничений задана в виде равенств), и определён ранг системы уравнений, то число всех базисных решений равно числу C_n^m сочетаний из n элементов по m элементов, где m – число уравнений, а n – число переменных. Можно было бы перебрать все базисные решения и, сравнив их между собой, выбрать наилучшее (оптимальное) решение. Но этот подход не годится ввиду очень большой трудоёмкости вычислений, поскольку он даже при небольших значениях m и n приводит к перебору огромного числа комбинаций. Сущность симплексного метода состоит именно в целенаправленном последовательном переходе от одного базисного решения к другому, которое лучше предыдущего. Поэтому число последовательных шагов (итераций) заметно уменьшается. Процесс поиска оптимального решения конечен, поскольку число базисных решений конечно.

4.1. Алгоритм симплексного метода

Решение симплексным методом проводится в два этапа: сначала ведём поиск допустимого исходного первоначального плана, а затем последовательно улучшаем его до тех пор, пока не найдём оптимальный план. Опишем эти этапы.

1 этап. Нахождение первоначального допустимого решения

Сначала приводим исходную задачу линейного программирования к канонической форме записи. Для этого, в зависимости от знака неравенств, к левым частям неравенств системы ограничений прибавляем (или из левых частей вычитаем) дополнительные неотрицательные переменные так, чтобы все ограничения (кроме условий неотрицательности переменных, которые всегда имеют вид $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$) были записаны в виде лишь равенств. Затем определяем ранг системы уравнений, допустим, он равен m. Тогда m переменных выбираются в качестве базисных, а остальные $(n - m)$ переменных будут свободными. Выражаем базисные переменные через свободные и, приравняв все свободные переменные к нулю, находим первое базисное решение $\bar{X}_1$. Если это решение допустимое (удовлетворяет всем ограничениям задачи, причём все компоненты этого решения неотрицательные), то переходим ко второму этапу задачи. Если же первое базисное решение не допустимое, то переходим от данного решения к следующему. Для этого одну из базисных переменных исключаем из состава базисных и переводим в свободные, а вместо неё включаем в число базисных какую-то переменную, которая ранее была свободной. Этот процесс замены базисной переменной на свободную переменную (и наоборот) можно произвести произвольным образом. Но чтобы избавиться от излишней громоздкости решения и оптимизировать процесс нахождения допустимого решения, применяют специальный алгоритм. Описание алгоритма достаточно сложное, и для облегчения восприятия разобьём алгоритм на шаги. Полная иллюстрация и подробные пояснения применяемого алгоритма будут приведены ниже на численном примере.

1 шаг. Приводим исходную задачу ЗЛП к канонической форме записи, выбираем базисные переменные и выражаем их через свободные переменные. Приравняв свободные переменные к нулю, находим первое базисное решение $\bar{X}_1$. Если оно допустимое (удовлетворяет всем ограничениям задачи, причём все компоненты этого решения неотрицательные), то переходим ко второму этапу задачи. Если же первое базисное решение недопустимое, то переходим к следующему шагу.

На следующем шаге мы должны выяснить, какая из свободных переменных перейдёт в базисные. При переводе в базисную переменную свободная переменная, вообще говоря, возрастает (так как вместо нуля в исходном базисном решении она примет положительное значение в новом базисном решении). Так как первое базисное решение $\bar{X}_1$ является недопустимым, то некоторые компоненты x_j будут отрицательные. Тогда среди свободных членов системы ограничений имеется хотя бы один отрицательный, например, $b_k < 0$. Рассмотрим соответствующее уравнение, которое содержит $b_k < 0$. Оно показывает, что переменная x_k возрастает при возрастании тех свободных переменных, коэффициенты которых в этом уравнении положительны. Значит, в основные можно переводить те свободные переменные, которые в уравнении с отрицательным свободным членом имеют положительные коэффициенты. В этом и состоит сущность следующего шага. Имеем:

2 шаг. Рассмотрим любое уравнение, содержащее отрицательный свободный член. Выберем переменную с положительным коэффициентом (если их несколько, то можно выбрать любую) и переведём её в базисные переменные.

Далее мы должны установить, какая переменная перейдёт из базисных переменных в свободные. Это определяется на третьем шаге.

3 шаг. Находим отношения свободных членов к коэффициентам при переменной, переводимой в базисные, из всех уравнений, в которых знаки свободных членов и указанных коэффициентов противоположны. Рассматриваем абсолютные величины этих отношений и выбираем из них наименьшее значение. Выделяем соответствующее этому значению уравнение, которое показывает, какая из базисных переменных должна быть переведена в свободные.

4 шаг. В выделенном уравнении выражают новую базисную переменную через остальные (которые являются свободными в новом базисном решении), и затем подставляют в другие уравнения. Таким образом, получаем новый набор базисных переменных, которые выражаются через свободные переменные.

5 шаг. Находим новое базисное решение и проверяем, будет ли оно допустимым. Если оно допустимое, то переходим ко второму этапу, а если недопустимое, то возвращаемся ко второму шагу.

Процесс будет конечен, и после некоторой итерации допустимый план будет найден.

Замечание. Если на втором шаге мы получим уравнение, в котором некоторая базисная переменная выражена через свободные переменные, и содержится отрицательный свободный член, но нет переменных с положительным коэффициентом при свободных переменных, то ОДР для рассматриваемой задачи есть пустое множество. В этом случае ЗЛП не имеет решений, и на этом анализ задачи завершается. Например, система уравнений

$$\begin{cases} x_4 = \quad 15 + 7x_1 - 2x_2 - 9x_3, \\ x_5 = -32 - 4x_1 - 7x_2 - 6x_3, \\ x_6 = -12 - 3x_1 + x_2 + 4x_3. \end{cases}$$

является несовместной, так как во втором уравнении содержится отрицательный свободный член, а все коэффициенты при переменных в правой части этого уравнения являются отрицательными. Это значит, что невозможно перевести свободную переменную в базисные так, чтобы полученное решение было допустимым (то есть невозможно получить план, в котором все переменные являются неотрицательными). Поэтому в данном случае задача не имеет решения.

2 этап. Нахождение оптимального решения

1 шаг. Рассматриваем допустимое первоначальное решение (план) $\bar{X}_1$ и находим значение целевой функции для этого плана, то есть $F(\bar{X}_1)$. Указываем наборы базисных и свободных переменных, выражаем базисные переменные через свободные переменные (по существу, после первого этапа алгоритма этот шаг фактически выполнен).

2 шаг. Выражаем целевую функцию через свободные переменные и проверяем полученный план на оптимальность по критерию: если все коэффициенты при переменных целевой функции неположительные (в задаче, заданной на максимум) или неотрицательные (в задаче, заданной на минимум), то полученный план является оптимальным. На этом решение задачи заканчивается, и выписываем оптимальный план и значение оптимального плана. Если же критерий оптимальности не выполняется (в целевой функции содержится хотя бы один положительный коэффициент в задаче на максимум, или хотя бы один отрицательный коэффициент в задаче на минимум), то продолжаем процесс улучшения плана и переходим к следующему шагу.

3 шаг. Выбираем наибольший положительный (наименьший отрицательный) коэффициент при переменных целевой функции в задаче на максимум (минимум), и переводим соответствующую свободную переменную в базисные.

4 шаг. В системе уравнений, где базисные переменные выражаются через свободные, составляем отношения свободных членов к соответствующим отрицательным коэффициентам при той переменной, которую на предыдущем шаге решили перевести в базисные. Из всех модулей этих отношений выбираем наименьший, и переводим соответствующую базисную переменную в свободные. Итак, на третьем и четвёртом шагах происходит процесс замены («смены составов») свободной и базисной переменных. При этом из прежнего состава базисных переменных обновляется только одна переменная.

5 шаг. Составляем новый набор базисных переменных и выражаем их через свободные переменные. На этом первая итерация завершена, и переходим далее ко второму шагу.

Замечания. 1) Если на втором шаге выполняется критерий оптимальности, и в целевой функции все коэффициенты при свободных переменных отличны от нуля, то полученный оптимальный план является единственным. Если же хотя бы один коэффициент при свободных переменных равен нулю, то задача имеет множество решений.

2) На третьем шаге рекомендуется (хотя это и необязательно) выбирать именно наибольший положительный коэффициент (в задаче на максимум) или наименьший отрицательный коэффициент (в задаче на минимум). Это позволяет, вообще говоря, улучшить сходимость симплексного метода, и за меньшее число итераций получить оптимальный план.

3) Если на четвёртом шаге все коэффициенты при переменной, которую переводим в базисные переменные, являются неотрицательными, то это значит, что данную переменную можно увеличивать до бесконечности. Тогда целевая функция является неограниченной на ОДР, и $F_{optim} = \infty$. Допустим, что в процессе решения получили систему

$$\begin{cases} x_2 = 48 + 8x_1 - 3x_3 - 2x_6, \\ x_4 = 14 + 5x_1 + 4x_3 - 4x_6, \\ x_5 = 35 \qquad\quad - 6x_3 + 3x_6, \end{cases}$$

и выразили целевую функцию, заданную на максимум, через свободные переменные:

$$F(x_1, x_3, x_6) = 5x_1 - 3x_3 + 2x_6.$$

Тогда переменную x_1 можно перевести в базисные переменные, но из системы ограничений видно, что эту переменную можно увеличивать до бесконечности, не нарушая при этом условий неотрицательности переменных. Значит, целевая функция является неограниченной и $F_{optim} = \infty$.

4.2. Решение экономических задач симплексным методом

Пример 6. Предприятие выпускает для продажи три вида продукции A, B, C и располагает тремя видами ограниченных ресурсов. Известны запасы ресурсов, расходы ресурсов каждого вида на изготовление единицы продукции, а также доходы от реализации единицы продукции каждого вида. Исходные данные представлены в таблице:

Таблица 3

Виды ресурсов	Затраты ресурсов на изготовление единицы продукции (усл. ед.)			Запасы ресурсов
	Продукция A	Продукция B	Продукция C	
1	5	4	1	77
2	2	3	2	60
3	1	5	4	70
Доход от единицы продукции (у.е.)	4	6	3	

Найти оптимальный план выпуска продукции, обеспечивающий максимальный доход от продажи продукции с учётом заданных ограничений на ресурсы.

<u>Решение</u>

Сначала построим математическую модель задачи. Введём переменные x_1, x_2, x_3 – величины продукции соответственно A, B и C. Тогда суммарный доход от реализации продукции определяется выражением

$$F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3,$$

которое нужно максимизировать. По заданной таблице исходных данных определяем ограничения на ресурсы каждого вида. Они определяются неравенствами:

$5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \leq 77$ – для ресурсов первого вида;

$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 60$ – для ресурсов второго вида;

$1 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \leq 70$ – для ресурсов третьего вида.

Кроме того, переменные неотрицательны, то есть $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$. Таким образом, получаем:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 77, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 60, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 70, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;3}. \end{cases}$$

Это модель ЗЛП в стандартной форме записи. Решим задачу симплексным методом.

1 этап. Нахождение первоначального допустимого решения

<u>1 шаг.</u> Приведём задачу к канонической форме записи. Добавим к левым частям неравенств неотрицательные дополнительные переменные соответственно $x_4,\ x_5,\ x_6$ так, чтобы получились равенства:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 77, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 60, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_6 = 70, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;6}. \end{cases}$$

Несложно заметить, что ранг системы уравнений равен трём, поэтому три переменные будут базисные, а остальные три переменные – свободные. Найдём первоначальный опорный план. В качестве базисных удобно взять дополнительные переменные $x_4,\ x_5,\ x_6$, так как их легко выразить из системы уравнений через остальные переменные $x_1,\ x_2,\ x_3$, которые считаем свободными. Тогда

$$\begin{cases} x_4 = 77 - 5x_1 - 4x_2 - x_3, \\ x_5 = 60 - 2x_1 - 3x_2 - 2x_3, \\ x_6 = 70 - x_1 - 5x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

Приравняем свободные переменные к нулю: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$. Тогда $x_4 = 77,\ x_5 = 60,\ x_6 = 70$. Получим первый опорный план $\bar{X}_1 = (0; 0; 0; 77; 60; 70)$, который является допустимым, так как удовлетворяет всем неравенствам системы ограничений, и компоненты $x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1;6}$. Первый этап алгоритма выполнен.

2 этап. Нахождение оптимального решения

1 шаг. Рассмотрим в качестве исходного опорного плана допустимое первоначальное решение $\bar{X}_1 = (0;0;0;77;60;70)$, и найдём значение целевой функции для этого плана, то есть $F(\bar{X}_1) = 4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$. Это означает, что продукция не производится и доход равен нулю. Естественно ожидать, что этот план не является оптимальным, и следует перейти к улучшению плана. Базисные переменные - x_4, x_5, x_6, свободные переменные - x_1, x_2, x_3. Базисные переменные выражены через свободные переменные:

$$\begin{cases} x_4 = 77 - 5x_1 - 4x_2 - x_3, \\ x_5 = 60 - 2x_1 - 3x_2 - 2x_3, \\ \boxed{x_6 = 70 - x_1 - 5x_2 - 4x_3}. \end{cases} \qquad (3)$$

2 шаг. Выражаем целевую функцию через свободные переменные:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3.$$

Так как имеются положительные коэффициенты при переменных в целевой функции (их даже три), то критерий оптимальности не выполняется, и полученный план $\bar{X}_1$ не является оптимальным. Продолжаем процесс улучшения плана.

3 шаг. Выбираем наибольший положительный коэффициент при переменных целевой функции, то есть $max\{4;6;3\} = 6$. Он соответствует переменной x_2, поэтому переменную x_2 переводим в базисные переменные.

4 шаг. Составляем отношения свободных членов в системе уравнений (3) к соответствующим отрицательным коэффициентам при переменной x_2 (которую на предыдущем шаге решили перевести в базисные). Из всех модулей этих отношений выбираем наименьший. То есть найдём

$$min\left\{\left|\frac{77}{-4}\right|; \ \left|\frac{60}{-3}\right|; \ \left|\frac{70}{-5}\right|\right\} = min\{19{,}25; \ 20; \ 14\} = 14.$$

Значит, соответствующую переменную x_6 переведём в свободные. Итак, вместо переменной x_6 в состав базисных переменных войдёт x_2.

5 шаг. Составляем новый набор базисных переменных и выражаем их через свободные переменные. Базисные - x_2, x_4, x_5, свободные - x_1, x_3, x_6. В си-

стеме уравнений (3) из третьего уравнения выразим переменную x_2, и подставим полученное выражение в другие уравнения системы.

$$\begin{cases} x_4 = 77 - 5x_1 - 4\left(14 - {}^1\!/_5\, x_1 - {}^4\!/_5\, x_3 - {}^1\!/_5\, x_6\right) - x_3, \\ x_5 = 60 - 2x_1 - 3\left(14 - {}^1\!/_5\, x_1 - {}^4\!/_5\, x_3 - {}^1\!/_5\, x_6\right) - 2x_3, \\ x_2 = 14 - {}^1\!/_5\, x_1 - {}^4\!/_5\, x_3 - {}^1\!/_5\, x_6. \end{cases}$$

Преобразовав систему, получим:

$$\begin{cases} \boxed{x_4 = 21 - {}^{21}\!/_5\, x_1 + {}^{11}\!/_5\, x_3 + {}^4\!/_5\, x_6}, \\ x_5 = 18 - {}^7\!/_5\, x_1 + {}^2\!/_5\, x_3 + {}^3\!/_5\, x_6, \\ x_2 = 14 - {}^1\!/_5\, x_1 - {}^4\!/_5\, x_3 - {}^1\!/_5\, x_6. \end{cases} \qquad (4)$$

Тогда, приравняв свободные переменные к нулю, получим второй опорный план $\bar{X}_2 = (0; 14; 0; 21; 18; 0)$, и $F(\bar{X}_2) = 4 \cdot 0 + 6 \cdot 14 + 3 \cdot 0 = 84$. При этом плане производится 14 единиц продукции второго вида, продукция остальных видов не производится, и доход составит 84 условных единиц. Очевидно, этот план лучше предыдущего, что и следовало ожидать. Перейдём теперь ко второму шагу.

<u>2 шаг.</u> Выражаем целевую функцию через свободные переменные:

$$F(x_1, x_3, x_6) = 4x_1 + 6\left(14 - {}^1\!/_5\, x_1 - {}^4\!/_5\, x_3 - {}^1\!/_5\, x_6\right) + 3x_3 =$$
$$= 84 + {}^{14}\!/_5\, x_1 - {}^9\!/_5\, x_3 - {}^6\!/_5\, x_6.$$

Так как имеется положительный коэффициент в целевой функции, то план $\bar{X}_2 = (0; 14; 0; 21; 18; 0)$ не является оптимальным.

<u>3 шаг.</u> Положительный коэффициент в целевой функции соответствует переменной x_1, поэтому переменную x_1 переводим в базисные переменные.

<u>4 шаг.</u> В системе уравнений (4) составляем отношения свободных членов к соответствующим отрицательным коэффициентам при переменной x_1 (которую на предыдущем шаге решили перевести в базисные). Из всех модулей этих отношений выбираем наименьший. То есть найдём

$$min\left\{\left|\frac{21}{-21/_5}\right|;\ \left|\frac{18}{-7/_5}\right|;\ \left|\frac{14}{-1/_5}\right|\right\} = min\left\{5;\ {}^{90}/_{7};\ 70\right\} = 5.$$

Значит, соответствующую переменную x_4 переведём в свободные. Итак, вместо переменной x_4 в состав базисных переменных войдёт x_1.

<u>5 шаг.</u> Составляем новый набор базисных переменных и выражаем их через свободные переменные. Базисные - x_1, x_2, x_5, свободные - x_3, x_4, x_6. В системе уравнений (4) из первого уравнения выразим переменную x_1, и подставим полученное выражение в другие уравнения системы:

$$\begin{cases} x_1 = 5 + {}^{11}/_{21}\,x_3 - {}^{5}/_{21}\,x_4 + {}^{4}/_{21}\,x_6, \\ x_5 = 18 - {}^{7}/_{5}\left(5 + {}^{11}/_{21}\,x_3 - {}^{5}/_{21}\,x_4 + {}^{4}/_{21}\,x_6\right) + {}^{2}/_{5}\,x_3 + {}^{3}/_{5}\,x_6, \\ x_2 = 14 - {}^{1}/_{5}\left(5 + {}^{11}/_{21}\,x_3 - {}^{5}/_{21}\,x_4 + {}^{4}/_{21}\,x_6\right) - {}^{4}/_{5}\,x_3 - {}^{1}/_{5}\,x_6. \end{cases}$$

Преобразовав систему, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 5 + {}^{11}/_{21}\,x_3 - {}^{5}/_{21}\,x_4 + {}^{4}/_{21}\,x_6, \\ x_5 = 11 - {}^{1}/_{3}\,x_3 + {}^{1}/_{3}\,x_4 + {}^{1}/_{3}\,x_6, \\ x_2 = 13 - {}^{19}/_{21}\,x_3 + {}^{1}/_{21}\,x_4 - {}^{5}/_{21}\,x_6. \end{cases}$$

В результате получим третий опорный план $\bar{X}_3 = (5; 13; 0; 0; 11; 0)$ и $F(\bar{X}_3) = 4 \cdot 5 + 6 \cdot 13 + 3 \cdot 0 = 98$. Этот план лучше предыдущего, так как здесь имеем 98 единиц дохода. Вернёмся снова ко второму шагу.

<u>2 шаг.</u> Выражаем целевую функцию через свободные переменные:

$$F(x_3, x_4, x_6) = 84 + {}^{14}/_{5}\left(5 + {}^{11}/_{21}\,x_3 - {}^{5}/_{21}\,x_4 + {}^{4}/_{21}\,x_6\right) -$$

$$- {}^{9}/_{5}\,x_3 - {}^{6}/_{5}\,x_6 = 98 - {}^{1}/_{3}\,x_3 - {}^{2}/_{3}\,x_4 - {}^{2}/_{3}\,x_6.$$

Так как нет положительных коэффициентов в целевой функции, то план $\bar{X}_3 = (5; 13; 0; 0; 11; 0)$ является оптимальным.

Итак, получен оптимальный план $\bar{X}_{\text{оптим}} = (5; 13; 0; 0; 11; 0)$, который показывает, что продукции первого и второго видов следует произвести в объёмах соответственно 5 и 13 единиц, а продукция третьего вида не производится. При этом доход предприятия будет максимальным и составит 98 единиц. Кроме того, можем определить излишки ресурсов при реализации оптимального плана. Так как переменные $x_4,\ x_5,\ x_6$ были добавлены соответственно в первое, второе и третье неравенства системы ограничений, то они означают остатки ресурсов первого, второго и третьего видов соответственно. Поэтому значения дополнительных переменных $x_4 = 0,\ x_5 = 11,\ x_6 = 0$ указывают на то, что ресурсы первого и третьего видов исчерпаны полностью, а ресурсы второго вида остаются невостребованными в размере 11 единиц. Значит, ресурсы первого и третьего видов являются дефицитными, ресурсы второго вида – недефицитными. Заметим, что полученный оптимальный план является единственно оптимальным, так как в целевой функции все коэффициенты при свободных переменных оказались отличными от нуля.

Пример 7. На птицеферме производится выращивание птиц. Известно, что каждой птице необходимо ежедневно потреблять вещества и витамины трёх видов A, B и C в количестве соответственно $6, 4$ и 5 единиц. Эти вещества и витамины содержатся в трёх видах корма P, Q и R. Известно содержание каждого вещества в единице каждого вида корма и стоимость единицы каждого корма (табл.4). Требуется найти оптимальный рацион питания, то есть наиболее дешёвый рацион, при котором потребности во всех веществах полностью удовлетворяются.

Таблица 4

Виды корма	Содержание вещества в единице корма (усл. ед.)			Стоимость единицы корма
	Вещество A	Вещество B	Вещество C	
P	5	2	6	25
Q	1	4	3	12
R	3	2	4	18

Решение

Сначала построим математическую модель задачи. Введём переменные x_1, x_2, x_3 – количество закупаемых кормов соответственно P, Q и R. Тогда суммарная стоимость рациона определяется выражением

$$F(x_1, x_2, x_3) = 25x_1 + 12x_2 + 18x_3,$$

которое нужно минимизировать. Используя исходные данные, запишем ограничения, накладываемые на необходимые количества потребляемых веществ. Они определяются неравенствами:

$5 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \geq 6$ – для вещества A;

$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \geq 4$ – для вещества B;

$6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \geq 5$ – для вещества C.

Кроме того, переменные неотрицательны, то есть $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$. Таким образом, получаем:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 25x_1 + 12x_2 + 18x_3 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 4, \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 5, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;3}. \end{cases}$$

Опять получили ЗЛП в стандартной форме записи, Применим симплекс-метод.

1 этап. Нахождение первоначального допустимого решения

1 шаг. Сначала приведём задачу к канонической форме записи. Добавим к левым частям неравенств неотрицательные дополнительные переменные соот-

ветственно x_4, x_5, x_6 так, чтобы получились равенства (в данном случае мы вычитаем эти переменные):

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_5 = 4, \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_6 = 5, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;6}. \end{cases}$$

Ранг системы уравнений равен трём, поэтому три переменные будут базисные, а остальные три переменные – свободные. Найдём первоначальный опорный план. В качестве базисных удобно взять дополнительные переменные x_4, x_5, x_6, так как их легко выразить из системы уравнений через остальные переменные x_1, x_2, x_3, которые считаем свободными. Тогда

$$\begin{cases} x_4 = -6 + 5x_1 + x_2 + 3x_3, \\ \boxed{x_5 = -4 + 2x_1 + 4x_2 + 2x_3}, \\ x_6 = -5 + 6x_1 + 3x_2 + 4x_3. \end{cases} \tag{5}$$

Приравняем свободные переменные к нулю: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Тогда $x_4 = -6$, $x_5 = -4$, $x_6 = -5$. В результате получим первый опорный план $\bar{X}_1 = (0; 0; 0; -6; -4; -5)$, который является недопустимым, так как есть отрицательные компоненты.

<u>2 шаг.</u> Рассмотрим любое уравнение, содержащее отрицательный свободный член. В нашем случае все три уравнения содержат отрицательный свободный член, поэтому можно выбрать любое уравнение. Рассмотрим, например, первое уравнение, и выберем переменную с положительным коэффициентом. Здесь все три переменные x_1, x_2, x_3 имеют положительные коэффициенты. Значит, можно любую из этих переменных перевести в базисные. Переведём в базисные, например, переменную x_2.

<u>3 шаг.</u> В системе уравнений (5) находим отношения свободных членов к коэффициентам при переменной x_2, переводимой в базисные, из всех уравнений, в которых знаки свободных членов и указанных коэффициентов противоположны. Рассматриваем абсолютные величины этих отношений и выбираем из них наименьшее. В нашем случае получим:

$$min\left\{\left|\frac{-6}{1}\right|;\ \left|\frac{-4}{4}\right|;\ \left|\frac{-5}{3}\right|\right\} = 1.$$

Выделяем соответствующее этому значению второе уравнение, которое показывает, что переменная x_5 должна быть переведена в свободные.

<u>4 шаг.</u> Во втором уравнении выражаем новую базисную переменную x_2 через остальные (которые являются свободными в новом базисном решении), и затем подставляем в другие уравнения:

$$\begin{cases} x_4 = -6 + 5x_1 + \left(1 - {}^1/_2\, x_1 - {}^1/_2\, x_3 + {}^1/_4\, x_5\right) + 3x_3, \\ x_2 = 1 - {}^1/_2\, x_1 - {}^1/_2\, x_3 + {}^1/_4\, x_5, \\ x_6 = -5 + 6x_1 + 3\left(1 - {}^1/_2\, x_1 - {}^1/_2\, x_3 + {}^1/_4\, x_5\right) + 4x_3. \end{cases}$$

Преобразовав систему, получим:

$$\begin{cases} x_4 = -5 + {}^9/_2\, x_1 + {}^5/_2\, x_3 + {}^1/_4\, x_5, \\ x_2 = 1 - {}^1/_2\, x_1 - {}^1/_2\, x_3 + {}^1/_4\, x_5, \\ \boxed{x_6 = -2 + {}^9/_2\, x_1 + {}^5/_2\, x_3 + {}^3/_4\, x_5}. \end{cases} \qquad (6)$$

Таким образом, получен новый набор базисных переменных $x_2,\ x_4,\ x_6$, которые выражаются через свободные переменные $x_1,\ x_3,\ x_5$.

<u>5 шаг.</u> Находим новое базисное решение и проверяем, будет ли оно допустимым. Получим: $\bar{X}_2 = (0; 1; 0; -5; 0; -2)$. Оно недопустимое, поскольку содержит отрицательные компоненты, поэтому возвращаемся ко второму шагу.

<u>2 шаг.</u> Рассмотрим одно из двух уравнений в системе (6), содержащих отрицательный свободный член, например, первое уравнение. Выберем переменную с положительным коэффициентом, например, переменную x_1, и переведём её в базисные переменные.

<u>3 шаг.</u> В системе уравнений (6) находим отношения свободных членов к коэффициентам при переменной x_1, переводимой в базисные, из всех уравне-

ний, в которых знаки свободных членов и указанных коэффициентов противоположны. Рассматриваем абсолютные величины этих отношений и выбираем из них наименьшее. В нашем случае получим:

$$min\left\{\left|\frac{-5}{9/2}\right|;\ \left|\frac{1}{-1/2}\right|;\ \left|\frac{-2}{9/2}\right|\right\} = 4/9.$$

Выделяем соответствующее этому значению третье уравнение, которое показывает, что переменная x_6 должна быть переведена в свободные.

<u>4 шаг.</u> В третьем уравнении выражаем новую базисную переменную x_1 через остальные (которые являются свободными в новом базисном решении), и затем подставляем в другие уравнения:

$$\begin{cases} x_4 = -5 + 9/2\left(4/9 - 5/9\,x_3 - 1/6\,x_5 + 2/9\,x_6\right) + 5/2\,x_3 + 1/4\,x_5, \\ x_2 = 1 - 1/2\left(4/9 - 5/9\,x_3 - 1/6\,x_5 + 2/9\,x_6\right) - 1/2\,x_3 + 1/4\,x_5, \\ x_1 = 4/9 - 5/9\,x_3 - 1/6\,x_5 + 2/9\,x_6. \end{cases}$$

Преобразовав систему, получим:

$$\begin{cases} \boxed{x_4 = -3 \qquad\qquad - 1/2\,x_5 \quad + x_6}, \\ x_2 = 7/9 - 2/9\,x_3 + 1/3\,x_5 - 1/9\,x_6, \\ x_1 = 4/9 - 5/9\,x_3 - 1/6\,x_5 + 2/9\,x_6. \end{cases} \qquad (7)$$

Таким образом, получен новый набор базисных переменных $x_1,\ x_2,\ x_4$, которые выражаются через свободные переменные $x_3,\ x_5,\ x_6$.

<u>5 шаг.</u> Находим новое базисное решение и проверяем, будет ли оно допустимым. Получим: $\bar{X}_3 = \left(4/9; 7/9; 0; -3; 0; 0\right)$. Оно недопустимое, так как содержит отрицательную компоненту, поэтому возвращаемся ко второму шагу.

2 шаг. Рассмотрим уравнение, содержащее отрицательный свободный член, то есть первое уравнение. Выберем переменную с положительным коэффициентом, то есть переменную x_6, и переведём её в базисные переменные.

3 шаг. В системе уравнений (7) находим отношения свободных членов к коэффициентам при переменной x_6, переводимой в базисные, из всех уравнений, в которых знаки свободных членов и указанных коэффициентов противоположны. Рассматриваем абсолютные величины этих отношений и выбираем из них наименьшее. В нашем случае получим:

$$min\left\{\left|\frac{-3}{1}\right|;\ \left|\frac{7/9}{-1/9}\right|;\infty\right\} = 3.$$

Выделяем соответствующее этому значению первое уравнение, которое показывает, что переменная x_4 должна быть переведена в свободные.

4 шаг. В первом уравнении выражаем новую базисную переменную x_6 через остальные (которые являются свободными в новом базисном решении), и затем подставляем в другие уравнения:

$$\begin{cases} x_6 = 3 + x_4 + 1/2\,x_5, \\ x_2 = 7/9 - 2/9\,x_3 + 1/3\,x_5 - 1/9\left(3 + x_4 + 1/2\,x_5\right), \\ x_1 = 4/9 - 5/9\,x_3 - 1/6\,x_5 + 2/9\left(3 + x_4 + 1/2\,x_5\right). \end{cases}$$

Преобразовав систему, получим:

$$\begin{cases} x_6 = 3 + x_4 + 1/2\,x_5, \\ x_2 = 4/9 - 2/9\,x_3 - 1/9\,x_4 + 5/18\,x_5, \\ x_1 = 10/9 - 5/9\,x_3 + 2/9\,x_4 - 1/18\,x_5. \end{cases}$$

Таким образом, получен новый набор базисных переменных x_1, x_2, x_6, которые выражаются через свободные переменные x_3, x_4, x_5.

5 шаг. Находим новое базисное решение и проверяем, будет ли оно допустимым. Получим: $\bar{X}_4 = \left({}^{10}/_{9}; {}^{4}/_{9}; 0; 0; 0; 3 \right)$. Оно допустимое, так как все компоненты этого решения являются неотрицательными. Поэтому переходим ко второму этапу.

2 этап. Нахождение оптимального решения

1 шаг. В качестве исходного опорного плана рассмотрим допустимое первоначальное решение $\bar{X}_4 = \left({}^{10}/_{9}; {}^{4}/_{9}; 0; 0; 0; 3 \right)$. Найдём значение целевой функции для этого плана, то есть

$$F(\bar{X}_4) = 25 \cdot {}^{10}/_{9} + 12 \cdot {}^{4}/_{9} + 18 \cdot 0 = {}^{298}/_{9}.$$

Базисные переменные - $x_1,\ x_2,\ x_6$, свободные переменные - $x_3,\ x_4,\ x_5$. Базисные переменные выражены через свободные переменные:

$$\begin{cases} x_6 = \quad 3 \qquad\qquad\qquad + x_4 + {}^{1}/_{2}\, x_5, \\ x_2 = {}^{4}/_{9} - {}^{2}/_{9}\, x_3 - {}^{1}/_{9}\, x_4 + {}^{5}/_{18}\, x_5, \\ x_1 = {}^{10}/_{9} - {}^{5}/_{9}\, x_3 + {}^{2}/_{9}\, x_4 - {}^{1}/_{18}\, x_5. \end{cases}$$

2 шаг. Выражаем целевую функцию через свободные переменные:

$$F(x_3, x_4, x_5) = 25\left({}^{10}/_{9} - {}^{5}/_{9}\, x_3 + {}^{2}/_{9}\, x_4 - {}^{1}/_{18}\, x_5 \right) +$$

$$+12\left({}^{4}/_{9} - {}^{2}/_{9}\, x_3 - {}^{1}/_{9}\, x_4 + {}^{5}/_{18}\, x_5 \right) + 18x_3 =$$

$$= {}^{298}/_{9} + {}^{13}/_{9}\, x_3 + {}^{38}/_{9}\, x_4 + {}^{35}/_{18}\, x_5.$$

Так как исходная задача задана на минимум, то критерием оптимальности является отсутствие отрицательных коэффициентов при переменных в целевой функции. В нашем случае все коэффициенты положительны, поэтому критерий оптимальности выполняется, и полученный план $\bar{X}_4$ является оптимальным. Итак, задача решена, и получено оптимальное решение:

$$\bar{X}_{optim} = \left({}^{10}/_{9}\,;{}^{4}/_{9}\,;0;0;0;3 \right); \qquad F(\bar{X}_{optim}) = {}^{298}/_{9}.$$

Таким образом, оптимальный рацион питания состоит в следующем. Необходимо закупать корма P и Q в количествах соответственно ${}^{10}/_{9}$ и ${}^{4}/_{9}$ единиц, а корма вида R не закупаются. При этом стоимость рациона будет минимальной и составит ${}^{298}/_{9}$ условных единиц. Кроме того, вещество C окажется на 3 единицы больше нормы (так как $x_6 = 3$ соответствует третьему ограничению). Заметим, что в данном случае корм P дороже, чем корм R. Несмотря на это, в решении мы получили целесообразность закупки именно корма P. Это объясняется тем, что, согласно условиям задачи, в единице корма P содержится больше веществ, нежели в единице корма R. Здесь всё зависит от соотношения количества содержащегося вещества и стоимости единицы корма. Заметим также, что полученный оптимальный план является единственным, так как все коэффициенты при свободных переменных в целевой функции не равны нулю.

§5. Симплексные таблицы

Решение симплексным методом связано с трудоёмким процессом преобразований систем уравнений при переходе от одного базисного решения к другому. Для упрощения расчётов на практике применяют так называемые *симплексные таблицы*, заполнение которых осуществляется по специальному алгоритму. Опишем процедуру заполнения симплексных таблиц для случая, когда предварительно получено первоначальное допустимое решение.

1. В таблицу специального вида вписываются матрица из коэффициентов при переменных в системе уравнений, соответствующих ограничениям, а также свободные члены. Записываются в отдельном столбце базисные переменные, а в отдельной так называемой индексной строке (ИС) записываются коэффициенты при переменных целевой функции, взятые с противоположными знаками. Тем самым заполнена первая часть симплексной таблицы, соответствующая первоначальному допустимому плану.

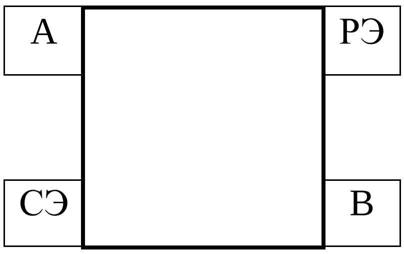
2. Проверяем полученный план на оптимальность по критерию: если все элементы индексной строки неотрицательные (при решении задачи на максимум) или неположительные (при решении задачи на минимум), то рассматриваемый план является оптимальным. Если найдётся хотя бы один отрицательный (в задаче на максимум) или положительный (в задаче на минимум) элемент индексной строки, то план не является оптимальным и его можно улучшить. Тогда переходят к следующему шагу алгоритма.

3. Из всех отрицательных (положительных) элементов индексной строки в задаче, поставленной на максимум (минимум), выбирается наибольший по абсолютной величине. Он определяет *разрешающий столбец*, и указывает на ту переменную, которая на следующей итерации перейдёт из свободных в базисные.

4. Элементы столбца свободных членов делим на соответствующие только положительные элементы разрешающего столбца (отношения свободных членов к отрицательным элементам или к нулю не рассматриваем). Результаты заносим в дополнительный отдельный столбец, который находится справа от основной таблицы и обозначен θ_i. Строка симплексной таблицы, соответствующая минимальному значению θ_i, является *разрешающей строкой*. Она определяет ту переменную, которая на следующей итерации перейдёт из базисных переменных в свободные.

5. На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находим элемент, являющийся *разрешающим элементом*. Он играет ключевую роль в дальнейшем при заполнении таблицы.

6. Заполняем следующую часть симплексной таблицы. Сначала в наборе базисных переменных производим замену в соответствии с пунктами 3 и 4, описанными выше. Затем все элементы разрешающей строки предыдущей части симплексной таблицы разделим на разрешающий элемент, и результаты деления занесём в соответствующую строку новой заполняемой части таблицы. Все элементы, соответствующие элементам разрешающего столбца в предыдущей части таблицы (в том числе и элемент в индексной строке), заменяем в новой части нулями (кроме элемента, соответствующего разрешающему элементу, который примет значение, равное единице). Таким образом, заполнены одна строка и один столбец новой части таблицы. Все остальные элементы, включая элементы индексной строки, заполняются по *правилу прямоугольника*. Для того чтобы найти значение нового элемента, из предыдущей части симплексной таблицы выбирают старый элемент, находящийся в соответствующем месте, и разрешающий элемент, который будет расположен по диагонали. Затем достраивают до прямоугольника, добавив вспомогательные элементы:



Новый элемент таблицы вычисляют по формуле:

$$\text{НЭ} = \text{СЭ} - \frac{A \cdot B}{\text{РЭ}},$$

где НЭ, СЭ и РЭ - соответственно новый, старый и разрешающий элементы. Заметим, что все элементы, расположенные на пересечении строк и столбцов, соответствующих одноимённым базисным переменным, равны единице, а остальные элементы столбцов для базисных переменных равны нулю (включая и индексную строку). Поэтому эти элементы можно и не пересчитывать по правилу прямоугольника.

7. После заполнения таблицы выписывается полученный опорный план, и снова проверяется на оптимальность. То есть возвращаемся ко второму шагу. Процесс продолжается до выполнения критерия оптимальности.

Замечания. 1) На третьем шаге при определении разрешающего столбца можно выбирать произвольный отрицательный (в задаче на максимум) или произвольный положительный (в задаче на минимум) элемент индексной строки. Выбор наибольшего по абсолютной величине элемента обусловлен стремлением улучшить сходимость алгоритма и уменьшить по возможности число итераций.

2) Если на четвёртом шаге все элементы разрешающего столбца являются неположительными, то это значит, что переменную, соответствующую разрешающему столбцу, при переводе в базисные переменные можно увеличивать до бесконечности. Поэтому целевая функция является неограниченной, и $F_{optim} = \infty$.

3) Если в последней индексной строке для оптимального плана все элементы, соответствующие свободным переменным, отличны от нуля, то полученный оптимальный план является единственным. В противном случае, если хотя бы один элемент, соответствующий свободной переменной, равен нулю, то это означает, что задача имеет множество решений.

Покажем, как заполняются симплексные таблицы на примере задачи, разобранной выше (пример 6), которую мы решали симплексным методом.

Пример 8. Решить с помощью симплексных таблиц:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 \le 77, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 60, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 70, \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1;3}. \end{cases}$$

После приведения к канонической форме получим:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 77, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 60, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_6 = 70, \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1;6}. \end{cases}$$

Как было показано в примере 6, первоначальное допустимое решение имеет вид $\bar{X}_1 = (0; 0; 0; 77; 60; 70)$.

1. Впишем в первую часть таблицы матрицу из коэффициентов при переменных в системе уравнений, т. е. матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а также столбец свободных членов и столбец базисных переменных. В индексной строке (ИС) записываются коэффициенты при переменных целевой функции, взятые с противоположными знаками.

Таблица 5

План	Базисные переменные	Свободные члены	Значения коэффициентов при переменных						θ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	x_4	77	5	4	1	1	0	0	19,25
$\bar{X}_1$	x_5	60	2	3	2	0	1	0	20
	x_6	70	1	$\boxed{5}$	4	0	0	1	$\underline{14}$
ИС	$F(\bar{X}_1)$	0	-4	$\underline{-6}$	-3	0	0	0	
	x_4	21	$\boxed{21/5}$	0	$-11/5$	1	0	$-4/5$	$\underline{5}$
$\bar{X}_2$	x_5	18	$7/5$	0	$-2/5$	0	1	$-3/5$	$90/7$
	x_2	14	$1/5$	1	$4/5$	0	0	$1/5$	70
ИС	$F(\bar{X}_2)$	84	$\underline{-14/5}$	0	$9/5$	0	0	$6/5$	
	x_1	5	1	0	$-11/21$	$5/21$	0	$-4/21$	
$\bar{X}_3$	x_5	11	0	0	$1/3$	$-1/3$	1	$-1/3$	
	x_2	13	0	1	$19/21$	$-1/21$	0	$5/21$	
ИС	$F(\bar{X}_3)$	98	0	0	$1/3$	$2/3$	0	$2/3$	

2. Первый опорный план не оптимальный, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты $-4;\ -6;\ -3$.

3. За разрешающий столбец выберем столбец, соответствующий переменной x_2, так как, сравнивая по модулю, имеем: $|-6| = max\{|-4|, |-6|, |-3|\}$. Значит, переменная x_2 перейдёт из свободных в базисные.

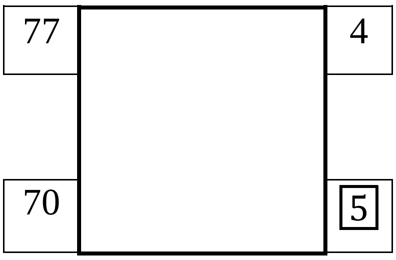
4. Рассчитываем значения θ_i по строкам, как частные от деления ${}^{b_i}/_{a_{i2}}$, и выбираем наименьшее из них:

$$\min\left\{{}^{b_i}/_{a_{i2}}\right\} = \min\left\{{}^{77}/_{4}, {}^{60}/_{3}, {}^{70}/_{5}\right\} = 14.$$

Значит, третья строка является разрешающей. Поэтому переменная x_6 перейдёт из базисных переменных в свободные.

5. На пересечении разрешающего столбца x_2 и разрешающей строки x_6 находим разрешающий элемент РЭ $= 5$.

6. Заполняем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_6 в план войдёт переменная x_2. Строка, соответствующая переменной x_2 в плане $\bar{X}_2$, получена в результате деления всех элементов строки x_6 плана $\bar{X}_1$ на разрешающий элемент РЭ $= 5$. На месте разрешающего элемента в плане $\bar{X}_2$ получаем 1. В остальных клетках столбца x_2 плана $\bar{X}_2$ записываем нули. Все остальные элементы нового плана $\bar{X}_2$, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. Например, чтобы найти новый элемент на месте свободного члена, равного 77, строим прямоугольник вида



Новый элемент таблицы будет равен

$$\text{НЭ} = 77 - \frac{70 \cdot 4}{5} = 21.$$

Остальные элементы пересчитываются аналогично. В результате будет заполнена вторая часть симплексной таблицы, и получим план $\bar{X}_2 = (0; 14; 0; 21; 18; 0)$.

7. Полученный план $\bar{X}_2$ не является оптимальным, так как в индексной строке содержится отрицательный элемент $-{}^{14}/_{5}$. Переходим к следующему плану, и строим третью часть симплексной таблицы. Аналогично находим новый план $\bar{X}_3$, который является оптимальным, так как все коэффициенты в индексной строке неотрицательные.

Оптимальный план можно записать так:

$$\bar{X}_{optim} = (5; 13; 0; 0; 11; 0); \qquad F\left(\bar{X}_{optim}\right) = 98 \text{ тыс. руб.}$$

§6. Двойственные задачи линейного программирования

Пусть задана ЗЛП в стандартной форме записи:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{8}$$

Двойственной задачей к задаче (8) называется задача вида:

$$Z(y_1, y_2, \dots, y_m) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \to min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \ge c_n, \\ y_i \ge 0; \quad i = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{9}$$

При составлении двойственных задач линейного программирования следует руководствоваться следующими правилами:

1) каждая из двух задач является задачей линейного программирования, записанной в стандартной форме записи, причём одна из них задана на максимум, другая – на минимум;

2) коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи;

3) число переменных одной задачи равно числу ограничений другой задачи;

4) матрицы из коэффициентов при переменных в системах ограничений являются транспонированными друг к другу (строки коэффициентов меняются на столбцы, и наоборот);

5) в обеих задачах сохраняется условие неотрицательности переменных.

Задачи (8) и (9) называют также *взаимно-двойственными* друг к другу, так как каждая из них является двойственной по отношению к другой задаче. И так как каждая из них есть ЗЛП, то решение каждой из двойственных задач независимо друг от друга можно осуществить симплексным методом. Заметим внешнее сходство форм записи этих задач. Более того, оказывается, что сходство проявляется не только во внешней форме записи, но и в связи между решениями этих задач. Решение одной задачи может быть получено из решения другой задачи с помощью теорем двойственности и следствий из них.

Первая теорема двойственности. Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причём экстремальные значения целевых функций равны: $F(\bar{X}_{optim}) = Z(\bar{Y}_{optim})$. Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений, то система ограничений другой задачи противоречива.

Вторая теорема двойственности_(теорема о дополняющей нежёсткости). Пусть $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – допустимые решения задач (8) и (9) соответственно. Для того чтобы они были оптимальными решениями соответствующих взаимно-двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j\right) = 0;\ j = \overline{1;n},$$

$$y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right) = 0;\ i = \overline{1;m}.$$

Эти условия устанавливают связь между оптимальными значениями взаимно-двойственных задач и позволяют, зная решение одной из них, находить решение другой задачи.

Выпишем в строку сначала по порядку переменные одной задачи, сначала исходные, затем дополнительные. Во второй строке под этими переменными выпишем сначала по порядку дополнительные, затем исходные переменные двойственной задачи. Установим соответствие между этими сопряжёнными переменными следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow \\ y_{m+1} & y_{m+2} & \cdots & y_{m+n} & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array} . \qquad (10)$$

Тогда оптимальное решение двойственной задачи может быть определено при помощи сопряжённых пар по последней индексной строке полученного оптимального плана исходной задачи.

Пример 9. Для задачи, рассмотренной в примерах 6 и 8, составить двойственную задачу и найти её решение.

<u>Решение</u>

Исходная задача имеет вид:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 \le 77, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 60, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 70. \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1;3}. \end{cases}$$

Пользуясь правилами составления двойственных задач, запишем для исходной задачи двойственную задачу, которая принимает вид:

$$Z(y_1, y_2, y_3) = 77y_1 + 60y_2 + 70y_3 \to min$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 4, \\ 4y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 6, \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ge 3, \\ y_i \ge 0; \quad i = \overline{1;3}. \end{cases}$$

Так как ранее было найдено $F(\bar{X}_{optim}) = 98$, то по первой теореме двойственности можем полагать, что $Z(\bar{Y}_{optim}) = 98$. То есть найдено оптимальное значение двойственной задачи. Найдём теперь оптимальный план, при котором достигается это оптимальное значение. Для исходной задачи исходными переменными являются x_1, x_2, x_3, а дополнительными переменными - x_4, x_5, x_6. В двойственной задаче исходными переменными являются y_1, y_2, y_3. Если бы мы решали двойственную задачу симплексным методом, то должны были бы добавить (как это проиллюстрировано в примере 7) дополнительные переменные y_4, y_5, y_6 соответственно к первому, второму и третьему неравенствам системы (чтобы привести ЗЛП к каноническому виду). Выпишем теперь в соответствии с соотношениями (10) сопряжённые пары переменных:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}.$$

Тогда компоненты оптимального плана двойственной задачи находим по индексной строке полученного оптимального плана в таблице 5:

$$\bar{Y}_{optim} = \left({}^{2}/_{3}\,; 0; {}^{2}/_{3}\,; 0; 0; {}^{1}/_{3}\right).$$

Рассмотренные взаимно-двойственные задачи могут быть интерпретированы экономически следующим образом. Пусть исходная задача записана в стандартной форме на максимум, причём переменные $x_j,\ j = \overline{1;n}$ означают количество производимой продукции; переменные $c_j,\ j = \overline{1;n}$ – стоимости единицы продукции; свободные члены $b_i,\ i = \overline{1;m}$ в системе ограничений – запасы соответствующих видов ресурсов. В этом случае целевая функция означает суммарную стоимость произведённой продукции, которую нужно максимизировать при заданных ограничениях на ресурсы. Тогда в двойственной задаче переменные $y_i,\ i = \overline{1;m}$ означают цены единицы соответствующих ресурсов, и целевая функция отражает общую стоимость затрат, которую нужно минимизировать при заданных количествах ресурсов b_i и стоимостях c_j единицы продукции. Иначе говоря, решение исходной задачи даёт оптимальный план выпуска продукции, а решение двойственной – оптимальную систему оценок ресурсов, используемых для выпуска продукции. Покажем эту взаимосвязь на примере разобранной выше задачи. Переменная $y_1^* = {}^2/_3$ показывает, что увеличение первого вида ресурсов на единицу приведёт к получению нового оптимального плана, в котором доход вырастет на ${}^2/_3$ единицы, и станет равным $98\frac{2}{3}$ единиц. Аналогично, переменная $y_3^* = {}^2/_3$ показывает, что увеличение третьего вида ресурсов на единицу приведёт к получению нового оптимального плана, в котором доход вырастет на ${}^2/_3$ единицы, и станет равным $98\frac{2}{3}$ единиц. Увеличение второго вида ресурсов на единицу ни к чему не приведёт, ввиду недефицитности второго вида ресурсов.

Замечание. Если решение исходной задачи осуществлено без применения симплексных таблиц, то оптимальное решение двойственной задачи определяется по полученной целевой функции для оптимального плана исходной задачи. А именно, компоненты определяются абсолютными величинами коэффициентов целевой функции, выраженной через свободные переменные. Так, например, мы получили в примере 6, что

$$F(x_3, x_4, x_6) = 98 - {}^1/_3\, x_3 - {}^2/_3\, x_4 - {}^2/_3\, x_6.$$

Тогда компонента y_1^* соответствует модулю коэффициента сопряжённой переменной x_4, то есть $y_1^* = {}^2/_3$. Компонента y_2^* соответствует модулю коэффициента сопряжённой переменной x_5, а эта переменная отсутствует среди свободных, то есть тогда $y_2^* = 0$. И наконец, y_3^* соответствует модулю коэффициента сопряжённой переменной x_6, то есть $y_3^* = {}^2/_3$. Аналогично $y_4^* = 0$, $y_5^* = 0$, $y_6^* = {}^1/_3$.

Использование двойственности оказывается особенно эффективным в тех случаях, когда в исходной задаче возникают трудности, связанные с нахождением первоначального допустимого решения. Процесс поиска допустимого решения может оказаться довольно трудоёмким вследствие громоздких преобразований системы ограничений. В таких случаях следует перейти к двойственной задаче, решение которой может оказаться гораздо проще, чем решение исходной задачи. Решив двойственную задачу, мы найдём и решение исходной задачи, опираясь на связь между решениями взаимно-двойственных задач.

Пример 10. Решить с помощью двойственной задачи задачу, разобранную в примере 7.

Решение

Имеем исходную ЗЛП:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 25x_1 + 12x_2 + 18x_3 \to min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 4, \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 5, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;3}. \end{cases}$$

Составим для неё двойственную задачу:

$$Z(y_1, y_2, y_3) = 6y_1 + 4y_2 + 5y_3 \to max$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + 6y_3 \leq 25, \\ y_1 + 4y_2 + 3y_3 \leq 12, \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 18, \\ y_i \geq 0; \quad i = \overline{1;3}. \end{cases}$$

Добавив к левым частям неравенств неотрицательные переменные y_4, y_5, y_6, приведём задачу к каноническому виду. Система ограничений примет вид:

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + 6y_3 + y_4 = 25, \\ y_1 + 4y_2 + 3y_3 + y_5 = 12, \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_6 = 18, \\ y_i \geq 0; \quad i = \overline{1;3}. \end{cases}$$

Примем в качестве базисных переменных y_4, y_5, y_6, и выразим их через свободные переменные y_1, y_2, y_3. Приравняв свободные переменные к нулю, получим первый опорный план $\bar{Y}_1 = (0; 0; 0; 25; 12; 18)$, который является допустимым, так как удовлетворяет всем неравенствам системы ограничений, и компоненты $y_j \geq 0$, $j = \overline{1; 6}$. Тем самым первый этап (нахождение первоначального допустимого решения) выполнен, и для нахождения оптимального решения воспользуемся симплексными таблицами. Выполним все преобразования в симплексной таблице:

Таблица 6

План	Базисные перемен-ные	Свобод-ные чле-ны	Значения коэффициентов при переменных						θ_i
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
$\bar{Y}_1$	y_4	25	$\boxed{5}$	2	6	1	0	0	$\underline{5}$
	y_5	12	1	4	3	0	1	0	12
	y_6	18	3	2	4	0	0	1	6
ИС	$Z(\bar{Y}_1)$	0	$\underline{-6}$	-4	-5	0	0	0	
$\bar{Y}_2$	y_1	5	1	$2/5$	$6/5$	$1/5$	0	0	$25/2$
	y_5	7	0	$\boxed{18/5}$	$9/5$	$-1/5$	1	0	$\underline{35/18}$
	y_6	3	0	$4/5$	$2/5$	$-3/5$	0	1	$15/4$
ИС	$Z(\bar{Y}_2)$	30	0	$\underline{-8/5}$	$11/5$	$6/5$	0	0	
$\bar{Y}_3$	y_1	$38/9$	1	0	1	$2/9$	$-1/9$	0	
	y_2	$35/18$	0	1	$1/2$	$-1/18$	$5/18$	0	
	y_6	$13/9$	0	0	0	$-5/9$	$-2/9$	1	
ИС	$Z(\bar{Y}_3)$	$298/9$	0	0	3	$10/9$	$4/9$	0	

Значит,

$$\bar{Y}_{optim} = \left(38/9; 35/18; 0; 0; 0; 13/9\right), Z(\bar{Y}_{optim}) = 298/9.$$

Теперь найдём решение исходной задачи. В соответствии с первой теоремой двойственности получим:

$$F(\bar{X}_{optim}) = Z(\bar{Y}_{optim}) = {}^{298}/_{9}.$$

Выпишем теперь в соответствии с соотношениями (10) сопряжённые пары переменных:

$$\begin{array}{cccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow. \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

Тогда компоненты оптимального плана двойственной задачи находим по индексной строке полученного оптимального плана в таблице 6:

$$\bar{X}_{optim} = \left({}^{10}/_{9}\,; {}^{4}/_{9}\,; 0; 0; 0; 3\right).$$

Решение, как этого и следовало ожидать, полностью совпало с тем решением, которое мы получили при рассмотрении примера 7 из §4.

§7. Транспортная задача линейного программирования

7.1. Постановка транспортной задачи

Пусть имеются поставщики $A_1, A_2, \cdots, A_m$, имеющие запасы некоторых однородных ресурсов в количестве соответственно $a_1, a_2, \cdots, a_m$ условных единиц; и потребители $B_1, B_2, \cdots, B_n$, потребности которых в этих ресурсах составляют соответственно $b_1, b_2, \cdots, b_n$ условных единиц. Пусть известны величины c_{ij} – стоимости перевозок единицы ресурса от поставщика A_i потребителю B_j. Матрица из элементов c_{ij} называется *матрицей тарифов*. Требуется определить оптимальный план перевозок, то есть такой план, при котором ресурсы от поставщиков будут вывезены, потребности потребителей будут удовлетворены, и при этом суммарные затраты на все перевозки будут минимальными.

Построим математическую модель задачи. Введём переменные x_{ij} – величины перевозок ресурса от поставщика A_i потребителю B_j. Матрицу из этих величин $X = (x_{ij})$ называют *матрицей перевозок* (планом перевозок). Тогда целевая функция, выражающая суммарную стоимость перевозок ресурсов, имеет вид:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min \qquad (11)$$

Система ограничений имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = \overline{1,m}; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = \overline{1,n}; \\ x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1,m}, & j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (12)$$

Полученная модель, включающая в себя соотношения (11) и (12), является моделью линейного программирования, так как целевая функция линейная, и все ограничения в системе задаются линейными равенствами и неравенствами. Поэтому формально для решения задачи может быть использован симплексный метод, изложенный выше в §4. Но следует заметить, что число переменных здесь равно $m \cdot n$ и достаточно велико, что приводит к очень громоздким выкладкам при симплексном методе решения. Кроме того, все коэффициенты при переменных в системе ограничений равны единице, это придаёт своеобразность рассматриваемой модели. В связи с этим для решения транспортных задач разработаны специальные методы и алгоритмы, в числе которых есть так называемый ***метод потенциалов***. Он является модификацией симплексного метода решения ЗЛП применительно к транспортным задачам. Сущность метода потенциалов состоит в следующем. Сначала отыскивается допустимый первоначальный опорный базисный план, затем этот план проверяем на оптимальность по специальному критерию, и в случае его невыполнения продолжаем процесс до тех пор, пока оптимальный план не будет найден. Опишем алгоритм решения транспортной задачи. Прежде чем переходить к изложению алгоритма, надо ввести понятия открытой и закрытой моделей транспортных задач. Для решения транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы ресурсов у поставщиков были равны суммарной потребности потребителей ресурсов, то есть, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (13)$$

Модель транспортной задачи, удовлетворяющая равенству (13), называется *закрытой*. Если же это равенство не выполняется, то модель называют *открытой*. Излагаемый в дальнейшем алгоритм годится только для закрытой модели, и поэтому нужно в первую очередь открытую модель свести к закрытой. Это выполняется достаточно просто. Если имеем условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

соответствующее тому, что имеется дефицит ресурсов, то вводим в рассмотрение фиктивного поставщика ресурсов A_{m+1} с запасом ресурсов, равным

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Соответствующие тарифы при этом полагаются равными нулю, то есть: $c_{m+1,j} = 0,\ j = \overline{1,n}$. Если же имеем условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

соответствующее тому, что имеется переизбыток ресурсов, то вводим в рассмотрение фиктивного потребителя B_{n+1} с потребностью, равной

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Соответствующие тарифы при этом также полагаются равными нулю: $c_{i,n+1} = 0, i = \overline{1,m}$.

Алгоритм решения транспортной задачи состоит из двух этапов. Сначала находят первоначальный допустимый опорный план, затем находят оптимальный план. Рассмотрим эти этапы подробнее.

7.2. Нахождение первоначального допустимого плана перевозок

Этот первый этап можно выполнить разными способами. Рассмотрим наиболее известные и распространённые методы.

1) Метод «северо-западного» угла (МСЗУ).

Сначала заполняется исходными данными таблица следующего вида, называемая *распределительной таблицей* (или *таблицей перевозок*):

Таблица 7

Поставщики	Потребители				Запасы ресурсов
	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

В этой таблице содержатся все исходные данные: запасы ресурсов у поставщиков, необходимые потребности у потребителей и тарифы перевозок. Допустим, что имеем закрытую модель транспортной задачи (в противном случае добавляем или поставщика, или потребителя описанным выше образом). Начнём теперь заполнять таблицу перевозок.

На первом шаге выбирается «северо-западная» клетка (A_1, B_1), которая заполняется максимально возможным количеством перевозимых ресурсов по этому маршруту. Следует заметить, что максимально возможное количество перевозимых ресурсов по маршруту $A_i \to B_j$ равно минимуму из количества имеющихся к данному шагу ресурсов a_i у поставщика A_i и потребности b_j потребителя B_j. Это связано с тем, что имеем закрытую модель транспортной задачи, где выполняется соотношение (13). В этой модели допустимые планы соответствуют тому, что все ресурсы от поставщиков будут вывезены, и все потребности потребителей удовлетворены, и поэтому перевезти больше, чем заданная величина потребности, мы не сможем. Значит, на первом шаге получим $x_{11} = min(a_1; b_1)$. В результате либо все ресурсы от поставщика A_1 будут вывезены, и тогда строку A_1 можно исключить из дальнейшего рассмотрения; либо потребность потребителя B_1 будет полностью удовлетворена, и тогда столбец B_1 выходит из дальнейшего рассмотрения; либо же одновременно (в случае, когда $a_1 = b_1$) и строка A_1, и столбец B_1 могут исключаться из дальнейшего анализа.

На втором шаге опять выбираем «северо-западную» клетку и заполняем её аналогично первому шагу, исходя из имеющихся уже к этому шагу запасов ресурсов и потребностей. Здесь, в зависимости от результатов первого шага, возможны три варианта расположения этой «северо-западной» клетки: 1) если на первом шаге исключается строка A_1, то этой клеткой будет являться клетка (A_2, B_1), и тогда $x_{21} = min(a_2; b_1 - a_1)$; 2) если на первом шаге исключается столбец B_1, то этой клеткой будет клетка (A_1, B_2), тогда $x_{12} = min(a_1 - b_1; b_2)$; 3) если на первом шаге исключаются одновременно и строка A_1, и столбец B_1, то «северо-западной» окажется клетка (A_2, B_2), и тогда $x_{22} = min(a_2; b_2)$.

На третьем шаге поступаем аналогично. Таким образом, выбирая после каждого шага по оставшейся части таблицы «северо-западную» клетку, и продолжая процесс далее, на конечном шаге заполняем последнюю клетку (A_m, B_n), в результате чего одновременно исключатся и строка A_m, и столбец B_n. Итак, вся таблица будет заполнена, и мы получим первоначальный допустимый план перевозок $X_1^{\text{мсзу}}$, полученный рассматриваемым методом «северо-западного» угла. Тогда можно найти по формуле (11) стоимость $F\left(X_1^{\text{мсзу}}\right)$ перевозок при этом плане, суммируя произведения значений ресурсов в заполненных клетках на соответствующие этим клеткам тарифы.

2) Метод наименьших тарифов (МНТ).

Сущность этого метода в следующем. На первом шаге в таблице отыскивается минимальный тариф, и соответствующую этому тарифу клетку заполняем точно таким же образом, как это выполнялось при методе «северо-западного» угла. Если $c_{kl} = min_{i,j}\, c_{ij}$, то заполняем клетку (A_k, B_l) количеством ресурсов $x_{kl} = min(a_k, b_l)$. В результате возможны также три исхода, с вычеркиванием или строки A_k, или столбца B_l, или одновременно и строки и столбца. Затем на втором шаге по оставшейся части таблицы снова выбираем клетку с наименьшим тарифом. Процесс заполнения проводится полностью аналогично, и, продолжая процесс, в конечном итоге получим первоначальный допустимый план $X_1^{\text{мнт}}$. Аналогично находим стоимость $F(X_1^{\text{мнт}})$ перевозок при этом плане.

3) Метод Фогеля (МФ).

Опишем вкратце сущность данного метода. На первом шаге сначала по каждой строке и по каждому столбцу выбираются два наименьших тарифа, и вычисляется абсолютная величина их разности. Затем из всех этих полученных величин выбирается наибольшая, и в строке (или столбце), соответствующей наибольшей абсолютной разности, выбирается клетка с наименьшим тарифом. Эта клетка заполняется таким же способом, который был использован в двух предыдущих методах. На втором шаге снова по оставшейся части таблицы пересчитываются абсолютные величины разностей между двумя наименьшими тарифами, выбирается наибольшая величина, и опять в соответствующей строке (столбце) заполняется клетка с наименьшим тарифом. Далее процесс продолжается аналогично до полного заполнения всей таблицы, и получим первоначальный допустимый план $X_1^{\text{мф}}$ и соответствующую стоимость $F\left(X_1^{\text{мф}}\right)$ перевозок при полученном плане.

Замечания. 1) Первоначальные опорные допустимые планы, полученные разными методами, вообще говоря, различны. Но в отдельных случаях они могут совпадать. Это связано как с величинами тарифов, так и с величинами ресурсов у поставщиков и потребностей потребителей. Причём даже один метод при своей реализации может давать различные допустимые первоначальные планы. Это объясняется тем, что на определённых шагах возможны альтернативы при выборе заполняемой клетки.

2) Значения первоначальных планов (стоимости перевозок), полученные разными методами, могут сильно различаться. Здесь уместно заметить, что метод «северо-западного» угла не учитывает тарифы, а выбор клеток производится по положению в таблице. В отличие от него методы наименьших тарифов и Фогеля ориентированы на выбор маршрута, по которому производятся наиболее дешёвые перевозки. Естественно ожидать, что и стоимости перевозок при таком подходе окажутся меньше. Но, как ни парадоксально, в отдельных случаях метод МСЗУ может давать результат лучше, чем при применении методов МНТ и МФ. Поэтому, хотя выборы МНТ и МФ являются более предпочтительными по сравнению с МСЗУ, не стоит считать, что МСЗУ является наихудшим. Ни один метод не доминирует над другим (доминирование происходило бы в том случае, когда для любой транспортной задачи стоимость первоначального плана перевозок для одного метода окажется меньше, чем для другого метода). Хотя стоит заметить, что по «рейтингу» МФ стоит выше всех трёх методов, а МСЗУ ниже всех.

7.3. Нахождение оптимального плана перевозок

<u>Шаг 1.</u> Выбираем в качестве исходного плана X_1 любой первоначальный допустимый опорный план перевозок, полученный на первом этапе. То есть $X_1 \equiv X_1^{\text{мсзу}}$, либо $X_1 \equiv X_1^{\text{мнт}}$, либо $X_1 \equiv X_1^{\text{мф}}$. Если на первом этапе одним из методов получен первоначальный план, то его и берут в качестве исходного на втором этапе. Если же на первом этапе получены несколько планов разными способами, то следует в дальнейшем выбирать наилучший из них, то есть тот план, при котором стоимость перевозок будет наименьшей.

<u>Шаг 2.</u> Проверяем исходный план на невырожденность. План называется *невырожденным*, если он содержит ровно $(m + n - 1)$ заполненных клеток. В противном случае план называется *вырожденным*. Заметим, что любой опорный план не может содержать более $(m + n - 1)$ заполненных клеток, что следует из алгоритмов нахождения первоначального плана. Поэтому вырожден-

ный план будет содержать менее $(m+n-1)$ заполненных клеток. Если план невырожденный, то переходим к следующему шагу. В случае вырожденности добавляем необходимое число нулей в таблицу и считаем клетки с этими нулями заполненными клетками.

Замечание. Нули можно вписывать, вообще говоря, не в произвольные пустые клетки. Так, нельзя вписывать нули в те клетки, для которых возможно образование цикла перераспределения ресурсов, состоящего только из заполненных клеток (подробнее об этих циклах смотри ниже).

Шаг 3. Вводим в рассмотрение *потенциалы* $\alpha_i,\ i=\overline{1,m},$ и $\beta_j,\ j=\overline{1,n},$ и находим их, решая систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha_i+\beta_j=c_{ij} \text{ (для заполненных клеток)},\\ \alpha_1=0.\end{cases} \qquad (14)$$

Число переменных в невырожденном плане равно $(m+n)$, а уравнений, связывающих потенциалы, равно $(m+n-1)$, поэтому для разрешимости системы нужно один из потенциалов зафиксировать, и для определённости полагаем, например, $\alpha_1=0$.

Шаг 4. Находим *оценки свободных клеток* по формуле

$$\Delta_{ij}=c_{ij}-(\alpha_i+\beta_j). \qquad (15)$$

Шаг 5. Применяем *критерий оптимальности плана*. Если все оценки свободных клеток неотрицательные (в задаче, поставленной на минимум) или неположительные (в задаче, поставленной на максимум), то план оптимален. Если же найдётся хотя бы одна оценка $\Delta_{ij}<0$ (в задаче на минимум) или $\Delta_{ij}>0$ (в задаче на максимум), то план не оптимальный, и его можно улучшить, осуществив перераспределение ресурсов.

Шаг 6. Построение нового опорного плана. Из всех отрицательных оценок выбираем наибольшую по модулю (в задаче на минимум) или из всех положительных наибольшую (в задаче на максимум) оценку. Для клетки, соответствующей этой оценке, строим *цикл перераспределения ресурсов* – замкнутую ломаную линию, одна из вершин которой совпадает с рассматриваемой клеткой, а все остальные вершины – заполненные клетки. Звенья ломаной линии расположены вдоль строк и столбцов, то есть состоят из вертикальных и горизонтальных отрезков, причём если линия, образующая цикл, пересекается, то точки пересечения не являются вершинами, и в цикле число вершин чётно. Для каждой свободной клетки таблицы всегда можно построить цикл, причём единственным образом. После построения цикла вершинам присваиваем чередующиеся знаки $\oplus$ и $\ominus$, начиная с положительного знака в свободной клетке. Из всех объёмов ресурсов, находящихся в минусовых клетках, выбираем наименьшее значение, обозначим его θ. Перераспределяем ресурсы по циклу, прибавляя θ к плюсовым клеткам и вычитая из минусовых клеток. В результате этого прежняя свободная клетка становится заполненной, а какая-то из прежних заполненных клеток опустошается и становится свободной, и получаем новый опорный план X_2, который по значению лучше предыдущего. То, что он, по крайней мере, не хуже предыдущего, можно определить непосредственным вычислением стоимости перевозок по формуле (11). Но на практике очень удобно пользоваться итерационной формулой

$F(X_{i+1}) = F(X_i) - \theta \cdot \left|\Delta_{ij}\right|$ (в задаче на минимум);

$F(X_{i+1}) = F(X_i) + \theta \cdot \Delta_{ij}$ (в задаче на максимум).

<u>Шаг 7.</u> Заполняем новую таблицу перевозок, и тем самым первая итерация выполнена. Переходим теперь ко второму шагу алгоритма.

Процесс продолжается до получения оптимального плана перевозок.

Замечания. 1) Если все оценки свободных клеток строго положительны (для транспортной задачи, поставленной на минимум), то полученный оптимальный план является единственно оптимальным. И это значит, что независимо от того, каким способом был получен первоначальный допустимый опорный план, и независимо от выбора альтернативных решений (вариантов) в процессе поиска оптимального решения, непременно придём к одному результату. Если же среди неотрицательных оценок, полученных в оптимальном плане, содержится хотя бы одна нулевая оценка, то оптимальный план не единственный. В этом случае, чтобы получить всевозможные оптимальные планы, строят циклы перераспределения ресурсов для клеток с нулевой оценкой.

2) Проверка невырожденности плана после каждой итерации и построения нового опорного плана необходима. Дело в том, что на шестом шаге при перераспределении ресурсов по циклу может опустошаться более одной клетки. Это происходит тогда, когда имеется несколько (не меньше двух) минусовых клеток с одинаковым наименьшим значением θ, которые становятся пустыми в процессе перераспределения. Тогда полученный план будет вырожденным, поскольку число заполненных клеток будет меньше, чем $(m + n - 1)$. Тогда, аналогично, как было описано выше на втором шаге, добавляется необходимое число нулей, чтобы план получился невырожденным. Но следует учесть, что нуль не может быть поставлен в той клетке, для которой возможно образование цикла, состоящего только из заполненных клеток. В том случае, если это произойдёт (нуль вписан в «запретной» клетке), система уравнений для нахождения потенциалов будет противоречива, и алгоритм даст «сбой». Чтобы избежать трудностей в устранении невырожденности, можно поступить достаточно просто. Если в процессе перераспределения ресурсов по циклу освобождается более одной клетки, то одну из этих клеток оставляют пустой и в последующем считают свободной, а в остальных опустошающихся клетках вписывают нули, и эти клетки считают заполненными. Тогда гарантированно новый план будет невырожденным, и не возникнет противоречий при вычислении потенциалов.

3) При выполнении шестого шага можно было бы выбирать любую отрицательную оценку (в задаче на минимум) или любую положительную оценку (в задаче на максимум), то есть не обязательно наибольшую по абсолютной величине. В этом случае алгоритм не нарушается, но ухудшается сходимость решения, и возможно, увеличится число итераций.

§8. Пример решения транспортной задачи

Рассмотрим на конкретном численном примере, как проводится выполнение обоих этапов транспортной задачи, уделив особое внимание каждому шагу алгоритма решения.

Пример 11. Пусть имеются четыре поставщика A_1, A_2, A_3, A_4, которые располагают однородными ресурсами в размере соответственно $40, 25, 60$ и 30 единиц. Требуется перевезти эти ресурсы потребителям B_1, B_2, B_3, B_4, потребности которых равны соответственно $35, 50, 45$ и 40 единиц. Стоимости c_{ij} перевозок единицы груза от каждого поставщика $A_i,\ i = \overline{1{,}4}$ к каждому потребителю $B_j,\ j = \overline{1{,}4}$ заданы матрицей тарифов

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 8 \\ 7 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Составить оптимальный план перевозок, то есть такой план, при котором стоимость всех перевозок будет минимальной.

Решение

Сначала проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 40 + 25 + 60 + 30 = 155; \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 35 + 50 + 45 + 40 = 170.$$

Суммарный запас ресурсов поставщиков не равен суммарной потребности потребителей, то есть соотношение (13) не выполняется. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. В данном случае имеем открытую модель с дефицитом ресурсов. Чтобы получить закрытую модель, введём фиктивного поставщика A_5 с запасом ресурсов $a_5 = 15$ единиц. Положим тарифы c_{5j} равными нулю, то есть $c_{51} = c_{52} = c_{53} = c_{54} = 0$. Занесём исходные данные в распределительную таблицу, причём для удобства запишем тарифы в верхних правых уголочках клеток:

Таблица 8

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	B_4
		$b_1 = 35$	$b_2 = 50$	$b_3 = 45$	$b_4 = 40$
A_1	$a_1 = 40$	4 35	6 5	2 —	8 —
A_2	$a_2 = 25$	7 —	4 25	1 —	4 —
A_3	$a_3 = 60$	3 —	7 20	3 40	1 —
A_4	$a_4 = 30$	2 —	2 —	9 5	6 25
A_5	$a_5 = 15$	0 —	0 —	0 —	0 15

Выполним первый этап решения задачи – ***нахождение первоначального допустимого плана***. Построим первоначальный опорный план тремя способами.

1) Метод «северо-западного» угла (МСЗУ). Заполним сначала «северо-западную» клетку, то есть клетку (A_1, B_1). В неё направляем максимально возможный ресурс. Он равен $min(40; 35) = 35$. Тогда $x_{11} = 35$ и из пункта A_1 не вывезено 5 единиц ресурсов, а потребность пункта B_1 удовлетворена полностью. Таким образом, столбец B_1 выходит из дальнейшего рассмотрения (во всех остальных клетках столбца B_1 ставим прочерки). Далее переходим к следующей «северо-западной» клетке (A_1, B_2). В неё направляем максимально возможный ресурс, он равен $min(40 - 35; 50) = 5$. Тогда $x_{12} = 5$ и из пункта A_1 вывезен полностью весь ресурс, а потребность пункта B_2 не удовлетворена на 45 единиц. Таким образом, строка A_1 выходит из рассмотрения (во всех остальных оставшихся клетках строки A_1 ставим прочерки). Продолжая аналогичный процесс, получим следующий порядок заполнения клеток:

1) $x_{11} = min(40; 35) = 35 \Rightarrow$ исключается столбец B_1;

2) $x_{12} = min(5; 50) = 5 \Rightarrow$ исключается строка A_1;

3) $x_{22} = min(25; 45) = 25 \Rightarrow$ исключается строка A_2;

4) $x_{32} = min(60; 20) = 20 \Rightarrow$ исключается столбец B_2;

5) $x_{33} = min(40; 45) = 40 \Rightarrow$ исключается строка A_3;

6) $x_{43} = min(30; 5) = 5 \Rightarrow$ исключается столбец B_3;

7) $x_{44} = min(25; 40) = 25 \Rightarrow$ исключается строка A_4;

8) $x_{54} = min(15; 15) = 15 \Rightarrow$ исключаются и строка A_5, и столбец B_4.

В результате получен первый опорный план $X_1^{\text{мсзу}}$, который является допустимым, так как все ресурсы из пунктов A_i в пункты B_j вывезены, потребности пунктов B_j удовлетворены, а план соответствует системе ограничений (12) транспортной задачи. План $X_1^{\text{мсзу}}$ имеет вид:

$$X_1^{\text{мсзу}} = \begin{pmatrix} 35 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

Определим значение целевой функции этого плана:

$$F\left(X_1^{\text{мсзу}}\right) = 35 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 25 \cdot 4 + 20 \cdot 7 + 40 \cdot 3 + 5 \cdot 9 + 25 \cdot 6 + 15 \cdot 0 = 725.$$

2) Метод наименьших тарифов (МНТ). Сначала из всех тарифов выбираем наименьший (мнимые тарифы $c_{5j} = 0$, где $j = \overline{1,4}$, не учитываются). Наименьшими являются тарифы c_{23} и c_{34}, равные единице. Выберем один из них, например, $c_{23} = 1$. Поэтому в соответствующую клетку (A_2, B_3) направляем максимально возможный ресурс, он равен $min(25; 45) = 25$. Тогда $x_{23} = 25$ и из пункта A_2 вывезен весь ресурс, а потребность пункта B_3 не удовлетворена на 20 единиц. Таким образом, строка A_2 выходит из дальнейшего рассмотрения. Далее из оставшихся тарифов снова выбираем наименьший, в нашем случае это будет $c_{34} = 1$. Заполняем соответствующую клетку (A_3, B_4) аналогичным образом. В неё направляем максимально возможный ресурс, который равен $min(60; 40) = 40$. Тогда $x_{34} = 40$ и из пункта A_3 не вывезено 20 единиц ресурсов, а потребность пункта B_4 удовлетворена полностью. Таким образом, столбец B_4 выходит из дальнейшего рассмотрения. Продолжая аналогичный процесс, получим следующий порядок заполнения клеток:

1) $c_{23} = 1 - min \Rightarrow x_{23} = min(25; 45) = 25 \Rightarrow$ исключается строка A_2;
2) $c_{34} = 1 - min \Rightarrow x_{34} = min(60; 40) = 40 \Rightarrow$ исключается столбец B_4;
3) $c_{41} = 2 - min \Rightarrow x_{41} = min(30; 35) = 30 \Rightarrow$ исключается строка A_4;
4) $c_{13} = 2 - min \Rightarrow x_{13} = min(40; 20) = 20 \Rightarrow$ исключается столбец B_3;
5) $c_{31} = 3 - min \Rightarrow x_{31} = min(20; 5) = 5 \Rightarrow$ исключается столбец B_1;
6) $c_{12} = 6 - min \Rightarrow x_{12} = min(20; 50) = 20 \Rightarrow$ исключается строка A_1;
7) $c_{32} = 7 - min \Rightarrow x_{32} = min(15; 30) = 15 \Rightarrow$ исключается строка A_3;
8) $x_{52} = min(15; 15) = 15 \Rightarrow$ исключаются и строка A_5, и столбец B_2.

В результате распределительная таблица принимает вид:

Таблица 9

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	B_4
		$b_1 = 35$	$b_2 = 50$	$b_3 = 45$	$b_4 = 40$
A_1	$a_1 = 40$	4 —	6 20	2 20	8 —
A_2	$a_2 = 25$	7 —	4 —	1 25	4 —
A_3	$a_3 = 60$	3 5	7 15	3 —	1 40
A_4	$a_4 = 30$	2 30	2 —	9 —	6 —
A_5	$a_5 = 15$	0 —	0 15	0 —	0 —

Таким образом, получен первый опорный план $X_1^{\text{мнт}}$, который является допустимым, так как все ресурсы из пунктов A_i в пункты B_j вывезены, потребности пунктов B_j удовлетворены, а план соответствует системе ограничений (12) транспортной задачи. План $X_1^{\text{мнт}}$ имеет вид:

$$X_1^{\text{мнт}} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 5 & 15 & 0 & 40 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим значение целевой функции этого плана:

$$F(X_1^{\text{мнт}}) = 20 \cdot 6 + 20 \cdot 2 + 25 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 15 \cdot 7 + 40 \cdot 1 +$$
$$+30 \cdot 2 + 15 \cdot 0 = 405.$$

3) Метод Фогеля (МФ).

Таблица 10

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	B_4	Шаги					
		$b_1 = 35$	$b_2 = 50$	$b_3 = 45$	$b_4 = 40$	1	2	3	4	5	6
A_1	$a_1 = 40$	4 15	6 5	2 20	8 —	2	2	2	$\boxed{2}$	2	2
A_2	$a_2 = 25$	7 —	4 —	1 25	4 —	3	$\boxed{3}$	—	—	—	—
A_3	$a_3 = 60$	3 20	7 —	3 —	1 40	2	0	0	0	$\boxed{4}$	—
A_4	$a_4 = 30$	2 —	2 30	9 —	6 —	0	0	0	—	—	—
A_5	$a_5 = 15$	0 —	0 15	0 —	0 —	—	—	—	—	—	—
1 шаг		1	2	1	$\boxed{3}$						
2 шаг		1	2	1	—						
3 шаг		1	$\boxed{4}$	1	—						
4 шаг		1	1	1	—						
5 шаг		1	1	—	—						
6 шаг		—	—	—	—						

На каждом шаге по каждой строке и по каждому столбцу таблицы 10 находим абсолютные величины (модули) разностей между двумя наименьшими тарифами. Результаты вписываем в дополнительные столбцы и строки, добавленные в таблицу соответственно справа и снизу от исходной таблицы для первоначального плана. Поясним подробнее процесс заполнения расширенной таблицы на первом шаге. Мнимые тарифы не рассматриваются, и поэтому в нашем случае в строке, соответствующей мнимому поставщику A_5, во всех добавленных клетках ставим прочерки. В первой строке среди тарифов $4, 6, 2$ и 8 наименьшими являются 2 и 4, их разность по модулю равна 2, и в первом дополнительном столбце в клеточке, соответствующей строке A_1, пишем 2. Аналогично во второй строке среди тарифов $7, 4, 1$ и 4 разность между двумя наименьшими тарифами по модулю будет равна $|4-1| = 3$. В третьей строке абсолютная величина разности между наименьшими тарифами равна 2, а в четвёртой эта разность равна 0, так как два наименьших тарифа совпадают, и $|2-2| = 0$. Точно так же поступаем и в столбцах. В первом столбике среди тарифов $4, 7, 3$ и 2 модуль разности между двумя наименьшими тарифами 3 и 2 равен единице. Во втором, третьем и четвёртом столбцах эти модули разностей соответственно равны $2, 1$ и 3. Из совокупности всех полученных значений в дополнительном столбце и дополнительной строке выбираем наибольшее значение, равное $max\{2; 3; 2; 0; 1; 2; 1; 3\} = 3$. Имеем два одинаковых значения, одно из которых соответствует строке A_2, другое – столбцу B_4. Выберем произвольно одно из них, например, соответствующее столбцу B_4 (в таблице это значение выделено в квадрате). Тогда в этом столбце B_4 выбираем клетку с наименьшим тарифом $c_{34} = 1$, то есть клетку (A_3, B_4), и заполняем максимально возможным количеством ресурсов, равным $x_{34} = min(60; 40) = 40$. Тогда из пункта A_3 не вывезено 20 единиц ресурсов, а потребность пункта B_4 полностью удовлетворена, столбец B_4 исключается из дальнейшего анализа, и во всех клетках дополнительного столбца, соответствующего столбцу B_4, ставим прочерки. Переходим теперь ко второму шагу. По оставшейся части таблицы снова производим аналогичные расчёты. Максимальное значение из всех модулей разностей между наименьшими тарифами равно 3, оно соответствует строке A_2. Тогда в строке A_2 выбираем клетку с наименьшим тарифом $c_{23} = 1$, то есть клетку (A_2, B_3), и заполняем максимально возможным количеством ресурсов, равным $x_{23} = min(25; 45) = 25$. Тогда из пункта A_2 вывезен весь ресурс, а потребность пункта B_3 не удовлетворена на 20 единиц, строка A_2 исключается из дальнейшего анализа, и во всех клетках дополнительной строки, соответствующей A_2, ставим прочерки. Продолжая процесс далее, получим в результате следующий порядок заполнения таблицы:

$1) x_{34} = 40; 2) x_{23} = 25;\ 3) x_{42} = 30;\ 4) x_{13} = 20;$

$5) x_{31} = 20; 6) x_{11} = 15; 7) x_{12} = 5; 8) x_{52} = 15.$

Следует заметить, что после пятого шага по столбцам B_1 и B_2 невозможно образовать разности между тарифами, поскольку остаётся лишь один тариф. Хотя к этому моменту эти столбцы ещё и не исключены, в последующем анализе выбора разностей между двумя наименьшими тарифами столбцов эти столбцы не рассматриваем, во всех клетках дополнительных столбцов впишем прочерки, но из основной таблицы исключать столбцы нельзя. Дальнейшее заполнение происходит автоматически из условий сохранения баланса между поставляемыми ресурсами и потребностями. Таким образом, в результате получен первый опорный план $X_1^{\text{мф}}$, который является допустимым, так как все ресурсы из пунктов A_i в пункты B_j вывезены, потребности пунктов B_j удовлетворены, а план также соответствует системе ограничений (12) транспортной задачи. Таким образом, имеем:

$$X_1^{\text{мф}} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим значение целевой функции этого плана:

$$F\left(X_1^{\text{мф}}\right) = 15 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 20 \cdot 2 + 25 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 15 \cdot 0 = 315.$$

Выполним теперь второй этап решения задачи – ***нахождение оптимального плана***.

<u>Шаг 1.</u> Выберем один из первоначальных допустимых опорных планов, полученных на первом этапе, например, $X_1 \equiv X_1^{\text{мнт}}$. Заполним соответствующую таблицу перевозок (табл.11). Справа добавим вспомогательный дополнительный столбик и снизу добавим вспомогательную дополнительную строку, которые понадобятся в дальнейшем:

Таблица 11

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	B_4	Потенциалы α_i
		$b_1 = 35$	$b_2 = 50$	$b_3 = 45$	$b_4 = 40$	
A_1	$a_1 = 40$	4 —	6 20	2 20	8 —	$\alpha_1 = 0$
A_2	$a_2 = 25$	7 —	4 —	1 25	4 —	$\alpha_2 = -1$
A_3	$a_3 = 60$	3 5	7 15	3 —	1 40	$\alpha_3 = 1$
A_4	$a_4 = 30$	2 30	2 —	9 —	6 —	$\alpha_4 = 0$
A_5	$a_5 = 15$	0 —	0 15	0 —	0 —	$\alpha_5 = -6$
Потенциалы β_j		$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 6$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 0$	

Замечание. Хотя из трёх первоначальных полученных планов наилучшим является $X_1^{\text{мф}}$, в качестве исходного мы здесь взяли план $X_1^{\text{мнт}}$. Выбор этот обоснован чисто методическими соображениями, а именно тем, что он заведомо не является оптимальным, и это позволит подробнее разобрать все этапы алгоритма. Выбор же $X_1^{\text{мф}}$ в нашем случае не даёт гарантии того, что придётся выполнять все шаги по поиску оптимального плана, так как план $X_1^{\text{мф}}$ может уже оказаться оптимальным, и после пятого шага отпадёт необходимость построения циклов. Конечно, на практике целесообразно было бы выбрать именно тот план, который минимизирует стоимости перевозок, в нашем случае $X_1^{\text{мф}}$. Это позволяет, вообще говоря, получить оптимальный план гораздо быстрее. Именно так и следует поступать в случаях, когда уже имеем возможность выбора первоначального плана.

<u>Шаг 2.</u> Проверим исходный план на невырожденность. План X_1 содержит 8 заполненных клеток, и должно быть $(m+n-1)=5+4-1=8$. Следовательно, план невырожденный. Переходим к следующему шагу.

<u>Шаг 3.</u> Вводим в рассмотрение потенциалы α_i, $i=\overline{1,m}$ и β_j, $j=\overline{1,n}$ и находим их, решая систему уравнений (14), то есть полагая

$$\begin{cases}\alpha_i+\beta_j=c_{ij} \text{ (для заполненных клеток)},\\ \alpha_1=0.\end{cases}$$

Таким образом, составляем и решаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\alpha_1=0,\\ \alpha_1+\beta_2=6,\\ \alpha_1+\beta_3=2,\\ \alpha_2+\beta_3=1,\\ \alpha_3+\beta_1=3,\\ \alpha_3+\beta_2=7,\\ \alpha_3+\beta_4=1,\\ \alpha_4+\beta_1=2,\\ \alpha_5+\beta_2=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=0,\\ \alpha_2=-1,\\ \alpha_3=1,\\ \alpha_4=0,\\ \alpha_5=-6,\\ \beta_1=2,\\ \beta_2=6,\\ \beta_3=2,\\ \beta_4=0.\end{cases}$$

Занесём найденные значения потенциалов в добавленные строку и столбец таблицы 11.

<u>Шаг 4.</u> Находим оценки свободных клеток по формуле (15), то есть:

$$\Delta_{ij}=c_{ij}-\left(\alpha_i+\beta_j\right).$$

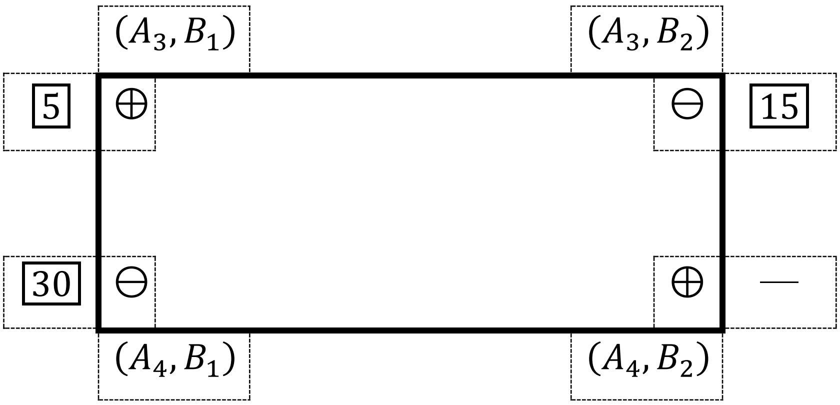
Получим:

$$\begin{aligned}
&\Delta_{11}=c_{11}-(\alpha_1+\beta_1)=4-(0+2)=2,\\
&\Delta_{14}=c_{14}-(\alpha_1+\beta_4)=8-(0+0)=8,\\
&\Delta_{21}=c_{21}-(\alpha_2+\beta_1)=7-(-1+2)=6,\\
&\Delta_{22}=c_{22}-(\alpha_2+\beta_2)=4-(-1+6)=-1,\\
&\Delta_{24}=c_{24}-(\alpha_2+\beta_4)=4-(-1+0)=5,\\
&\Delta_{33}=c_{33}-(\alpha_3+\beta_3)=3-(1+2)=0,
\end{aligned}$$

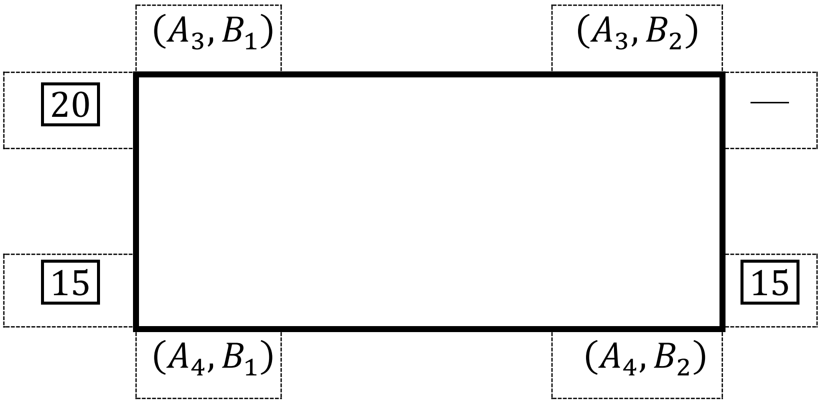
$$\Delta_{42} = c_{42} - (\alpha_4 + \beta_2) = 2 - (0 + 6) = -4,$$
$$\Delta_{43} = c_{43} - (\alpha_4 + \beta_3) = 9 - (0 + 2) = 7,$$
$$\Delta_{44} = c_{44} - (\alpha_4 + \beta_4) = 6 - (0 + 0) = 6,$$
$$\Delta_{51} = c_{51} - (\alpha_5 + \beta_1) = 0 - (-6 + 2) = 4,$$
$$\Delta_{53} = c_{53} - (\alpha_5 + \beta_3) = 0 - (-6 + 2) = 4,$$
$$\Delta_{54} = c_{54} - (\alpha_5 + \beta_4) = 0 - (-6 + 0) = 6.$$

Шаг 5. Применим критерий оптимальности плана. Так как среди оценок свободных клеток есть отрицательные оценки ($\Delta_{22} = -1$ и $\Delta_{42} = -4$), то рассматриваемый план не является оптимальным.

Шаг 6. Перейдём к улучшению плана и построим новый опорный план. Из всех отрицательных оценок возьмём наибольшую по модулю, в нашем случае это $\Delta_{42} = -4$. Для соответствующей клетки (A_4, B_2) построим цикл перераспределения ресурсов. Это будет четырёхугольник, связывающий вершины (A_4, B_2); (A_4, B_1); (A_3, B_1) и (A_3, B_2):



После построения цикла вершинам присваиваем чередующиеся знаки ⊕ и ⊖, начиная с положительного знака в свободной клетке (A_4, B_2). Из всех объёмов ресурсов, находящихся в минусовых клетках, выбираем наименьшее значение $\theta = min(15; 30) = 15$. Перераспределяем ресурсы по циклу, прибавляя 15 единиц к плюсовым клеткам и вычитая из минусовых клеток. Тогда ресурс по данному циклу перераспределится следующим образом:



Мы видим, что в результате прежняя свободная клетка (A_4, B_2) становится заполненной, а клетка (A_3, B_2) опустошается и становится свободной, и получаем новый опорный план X_2, который по значению лучше предыдущего. Действительно, по рекуррентной формуле $F(X_{i+1}) = F(X_i) - \theta \cdot |\Delta_{ij}|$ имеем:

$$F(X_2) = F(X_1) - 15 \cdot |-4| = 405 - 60 = 345.$$

<u>Шаг 7.</u> Заполняем новую таблицу перевозок:

Таблица 12

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	B_4	Потенциалы α_i
		$b_1 = 35$	$b_2 = 50$	$b_3 = 45$	$b_4 = 40$	
A_1	$a_1 = 40$	4 —	6 20	2 20	8 —	$\alpha_1 = 0$
A_2	$a_2 = 25$	7 —	4 —	1 25	4 —	$\alpha_2 = -1$
A_3	$a_3 = 60$	3 20	7 —	3 —	1 40	$\alpha_3 = -3$
A_4	$a_4 = 30$	2 15	2 15	9 —	6 —	$\alpha_4 = -4$
A_5	$a_5 = 15$	0 —	0 15	0 —	0 —	$\alpha_5 = -6$
Потенциалы β_j		$\beta_1 = 6$	$\beta_2 = 6$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 4$	

В результате мы выполнили первую итерацию и получили новый план. Переходим далее к шагу 2 и продолжаем процесс.

Шаг 2. Проверим полученный новый опорный план X_2 на невырожденность. План невырожденный, так как он содержит 8 заполненных клеток, и должно быть $(m+n-1)=5+4-1=8$.

Шаг 3. Вычисляем потенциалы $\alpha_i,\ i=\overline{1,m}$ и $\beta_j,\ j=\overline{1,n}$, решая систему уравнений (14). Получим:

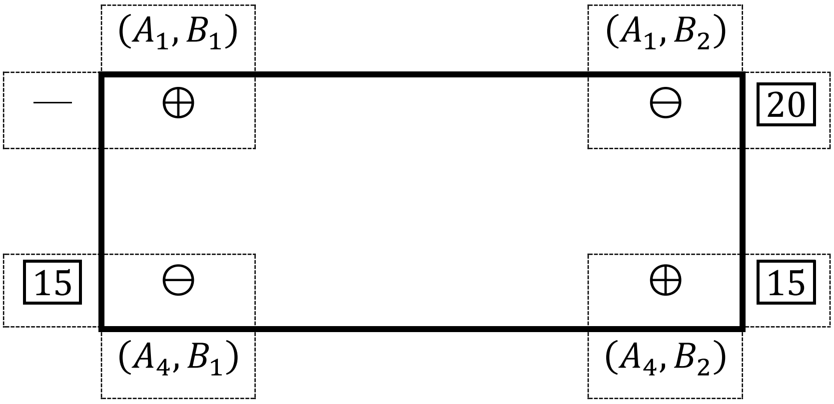
$$\begin{cases} \alpha_1=0, \\ \alpha_1+\beta_2=6, \\ \alpha_1+\beta_3=2, \\ \alpha_2+\beta_3=1, \\ \alpha_3+\beta_1=3, \\ \alpha_3+\beta_4=1, \\ \alpha_4+\beta_1=2, \\ \alpha_4+\beta_2=2, \\ \alpha_5+\beta_2=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=0, \\ \alpha_2=-1, \\ \alpha_3=-3, \\ \alpha_4=-4, \\ \alpha_5=-6, \\ \beta_1=6, \\ \beta_2=6, \\ \beta_3=2, \\ \beta_4=4. \end{cases}$$

Шаг 4. Находим оценки свободных клеток по формуле (15). Получим:

$$\begin{array}{ll} \Delta_{11}=4-(0+6)=-2, & \Delta_{33}=3-(-3+2)=4, \\ \Delta_{14}=8-(0+4)=4, & \Delta_{43}=9-(-4+2)=11, \\ \Delta_{21}=7-(-1+6)=2, & \Delta_{44}=6-(-4+4)=6, \\ \Delta_{22}=4-(-1+6)=-1, & \Delta_{51}=0-(-6+6)=0, \\ \Delta_{24}=4-(-1+4)=1, & \Delta_{53}=0-(-6+2)=4, \\ \Delta_{32}=7-(-3+6)=4, & \Delta_{54}=0-(-6+4)=2. \end{array}$$

Шаг 5. Применим критерий оптимальности плана. Так как среди оценок свободных клеток есть отрицательные оценки ($\Delta_{11}=-2$ и $\Delta_{22}=-1$), то рассматриваемый план X_2 не является оптимальным.

Шаг 6. Перейдём к улучшению плана и построим новый опорный план. Из всех отрицательных оценок возьмём наибольшую по модулю, в нашем случае это $\Delta_{11}=-2$. Для соответствующей клетки (A_1,B_1) построим цикл перераспределения ресурсов. Это будет четырёхугольник, связывающий вершины (A_1,B_1); (A_1,B_2); (A_4,B_2) и (A_4,B_1):



После построения цикла вершинам присваиваем чередующиеся знаки $\oplus$ и $\ominus$, начиная с положительного знака в свободной клетке (A_1, B_1). Из всех объёмов ресурсов, находящихся в минусовых клетках, выбираем наименьшее значение $\theta = min(15; 20) = 15$. Перераспределяем ресурсы по циклу, прибавляя 15 единиц к плюсовым клеткам и вычитая из минусовых клеток. Тогда ресурс по данному циклу перераспределится следующим образом:

Получаем новый опорный план X_3, который по значению лучше предыдущего. Действительно, по рекуррентной формуле $F(X_{i+1}) = F(X_i) - \theta \cdot |\Delta_{ij}|$ имеем:

$$F(X_3) = F(X_2) - 15 \cdot |-2| = 345 - 30 = 315.$$

<u>Шаг 7.</u> Заполняем новую таблицу перевозок (табл.13). Таким образом, мы выполнили вторую итерацию и построили новый план X_3. Возвращаемся снова к шагу 2.

<u>Шаг 2.</u> Проверим полученный новый опорный план X_3 на невырожденность. План невырожденный, так как содержит 8 заполненных клеток, и должно быть $(m + n - 1) = 5 + 4 - 1 = 8$.

Таблица 13

A_i \ B_j		B_1 $b_1 = 35$	B_2 $b_2 = 50$	B_3 $b_3 = 45$	B_4 $b_4 = 40$	Потенциалы α_i
A_1	$a_1 = 40$	4 15	6 5	2 20	8 —	$\alpha_1 = 0$
A_2	$a_2 = 25$	7 —	4 —	1 25	4 —	$\alpha_2 = -1$
A_3	$a_3 = 60$	3 20	7 —	3 —	1 40	$\alpha_3 = -1$
A_4	$a_4 = 30$	2 —	2 30	9 —	6 —	$\alpha_4 = -4$
A_5	$a_5 = 15$	0 —	0 15	0 —	0 —	$\alpha_5 = -6$
Потенциалы β_j		$\beta_1 = 4$	$\beta_2 = 6$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 2$	

Шаг 3. Вычисляем потенциалы $\alpha_i,\ i = \overline{1,m}$ и $\beta_j,\ j = \overline{1,n}$:

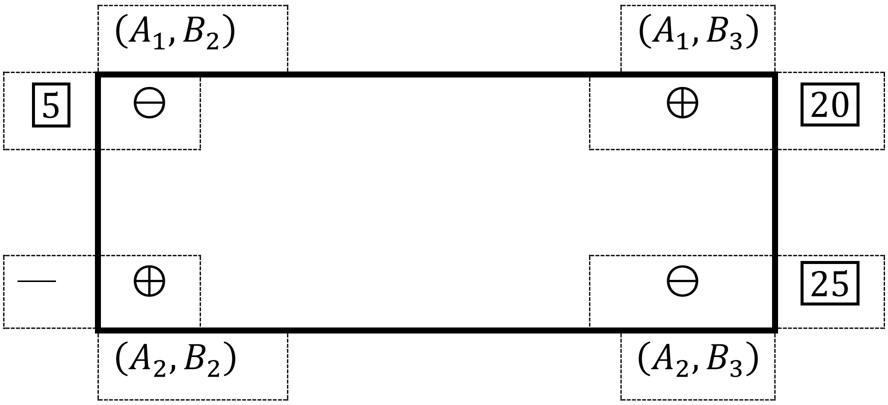
$$\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1 + \beta_1 = 4, \\ \alpha_1 + \beta_2 = 6, \\ \alpha_1 + \beta_3 = 2, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 1, \\ \alpha_3 + \beta_1 = 3, \\ \alpha_3 + \beta_4 = 1, \\ \alpha_4 + \beta_2 = 2, \\ \alpha_5 + \beta_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = -1, \\ \alpha_3 = -1, \\ \alpha_4 = -4, \\ \alpha_5 = -6, \\ \beta_1 = 4, \\ \beta_2 = 6, \\ \beta_3 = 2, \\ \beta_4 = 2. \end{cases}$$

Шаг 4. Находим оценки свободных клеток:

$$\begin{aligned} &\Delta_{14} = 8 - (0 + 2) = 6, && \Delta_{41} = 2 - (-4 + 4) = 2, \\ &\Delta_{21} = 7 - (-1 + 4) = 4, && \Delta_{43} = 9 - (-4 + 2) = 11, \\ &\Delta_{22} = 4 - (-1 + 6) = -1, && \Delta_{44} = 6 - (-4 + 2) = 8, \\ &\Delta_{24} = 4 - (-1 + 2) = 3, && \Delta_{51} = 0 - (-6 + 4) = 2, \\ &\Delta_{32} = 7 - (-1 + 6) = 2, && \Delta_{53} = 0 - (-6 + 2) = 4, \\ &\Delta_{33} = 3 - (-1 + 2) = 2, && \Delta_{54} = 0 - (-6 + 2) = 4. \end{aligned}$$

Шаг 5. Так как среди оценок свободных клеток есть отрицательная ($\Delta_{22}= -1$), то рассматриваемый план X_3 не является оптимальным.

Шаг 6. Перейдём к улучшению плана и построим новый опорный план. Возьмём отрицательную оценку $\Delta_{22}= -1$ и для соответствующей клетки (A_2, B_2) построим цикл перераспределения ресурсов. Это будет четырёхугольник, связывающий вершины (A_2, B_2); (A_1, B_2); (A_1, B_3) и (A_2, B_3):



После построения цикла вершинам присваиваем чередующиеся знаки ⊕ и ⊖, начиная с положительного знака в свободной клетке (A_2, B_2). Из всех объёмов ресурсов, находящихся в минусовых клетках, выбираем наименьшее значение $\theta = min(5; 25) = 5$. Перераспределяем ресурсы по циклу, прибавляя 5 единиц к плюсовым клеткам и вычитая из минусовых клеток. Тогда ресурс по данному циклу перераспределится следующим образом:

Получаем новый опорный план X_4, который по значению лучше предыдущего. Действительно, по рекуррентной формуле $F(X_{i+1}) = F(X_i) - \theta \cdot |\Delta_{ij}|$ имеем:

$$F(X_4) = F(X_3) - 5 \cdot |-1| = 315 - 5 = 310.$$

Шаг 7. Заполняем новую таблицу перевозок (табл.14):

Таблица 14

B_j / A_i		B_1, $b_1 = 35$	B_2, $b_2 = 50$	B_3, $b_3 = 45$	B_4, $b_4 = 40$	Потенциалы α_i
A_1	$a_1 = 40$	4 15	6 —	2 25	8 —	$\alpha_1 = 0$
A_2	$a_2 = 25$	7 —	4 5	1 20	4 —	$\alpha_2 = -1$
A_3	$a_3 = 60$	3 20	7 —	3 —	1 40	$\alpha_3 = -1$
A_4	$a_4 = 30$	2 —	2 30	9 —	6 —	$\alpha_4 = -3$
A_5	$a_5 = 15$	0 —	0 15	0 —	0 —	$\alpha_5 = -5$
Потенциалы β_j		$\beta_1 = 4$	$\beta_2 = 5$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 2$	

Таким образом, мы выполнили третью итерацию и построили план X_4. Переходим снова к шагу 2.

Шаг 2. Проверим полученный новый опорный план X_4 на невырожденность. План невырожденный, так как содержит 8 заполненных клеток, и должно быть $(m + n - 1) = 5 + 4 - 1 = 8$.

Шаг 3. Вычисляем потенциалы $\alpha_i,\ i = \overline{1,m}$ и $\beta_j,\ j = \overline{1,n}$:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1 + \beta_1 = 4, \\ \alpha_1 + \beta_3 = 2, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 4, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 1, \\ \alpha_3 + \beta_1 = 3, \\ \alpha_3 + \beta_4 = 1, \\ \alpha_4 + \beta_2 = 2, \\ \alpha_5 + \beta_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = -1, \\ \alpha_3 = -1, \\ \alpha_4 = -3, \\ \alpha_5 = -5, \\ \beta_1 = 4, \\ \beta_2 = 5, \\ \beta_3 = 2, \\ \beta_4 = 2. \end{cases}$$

Шаг 4. Находим оценки свободных клеток:

$$\begin{aligned}
&\Delta_{12} = 6-(0+5)=1, && \Delta_{41} = 2-(-3+4)=1,\\
&\Delta_{14} = 8-(0+2)=6, && \Delta_{43} = 9-(-3+2)=10,\\
&\Delta_{21} = 7-(-1+4)=3, && \Delta_{44} = 6-(-3+2)=7,\\
&\Delta_{24} = 4-(-1+2)=3, && \Delta_{51} = 0-(-5+4)=1,\\
&\Delta_{32} = 7-(-1+5)=3, && \Delta_{53} = 0-(-5+2)=3,\\
&\Delta_{33} = 3-(-1+2)=2, && \Delta_{54} = 0-(-5+2)=3.
\end{aligned}$$

Шаг 5. Так как среди оценок свободных клеток нет отрицательных, то план X_4 является оптимальным. Итак,

$$X_{\text{оптим}} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 5 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad F(X_{\text{оптим}}) = 310 \text{ (усл. ед.)}.$$

Таким образом, найден оптимальный план перевозок, который состоит в следующем. От поставщика A_1 следует перевезти 15 единиц ресурсов потребителю B_1 и 25 единиц ресурсов потребителю B_3; от поставщика A_2 следует перевезти 5 единиц ресурсов потребителю B_2 и 20 единиц ресурсов потребителю B_3; от поставщика A_3 следует перевезти 20 единиц ресурсов потребителю B_1 и 40 единиц ресурсов потребителю B_4; от поставщика A_4 следует перевезти 30 единиц ресурсов потребителю B_2. При этом потребности потребителя B_2 не будут удовлетворены на 15 единиц, так как $x_{52} = 15$ означает количество перевозимых ресурсов от фиктивного поставщика A_5 потребителю B_2. Минимальная стоимость перевозок составит при этом плане 310 условных единиц.

Так как все оценки свободных клеток для оптимального плана строго положительны (отсутствуют нулевые оценки), то полученный оптимальный план является единственно оптимальным.

Заметим, что план X_3, который мы нашли в процессе выполнения второго этапа, совпадает полностью с планом, полученным методом Фогеля на первом этапе. Значит, если бы мы после первого этапа решения взяли в качестве исходного первоначального плана план $X_1^{\text{мф}}$, полученный методом Фогеля, то на втором этапе при нахождении оптимального плана пришлось бы выполнять лишь одну итерацию, после чего оптимальный план был бы найден.

§9. Задания для самоконтроля

9.1. Вопросы для самоконтроля

1) Какой вид имеет модель математического программирования?
2) Что называется целевой функцией?
3) Что называется областью допустимых решений (ОДР)?
4) Что называется оптимальным решением (планом)?
5) Какой вид имеют целевая функция и система ограничений в модели задачи линейного программирования (ЗЛП)?
6) Какие есть формы записи ЗЛП?
7) Как формулируется задача об оптимальном производстве?
8) Как формулируется задача формирования минимальной потребительской продовольственной корзины?
9) Для каких ЗЛП можно применить графический метод решения (обосновать ответ)?
10) Что называют линией уровня?
11) Какой вид может иметь область допустимых решений в ЗЛП?
12) Что называют градиентом и антиградиентом функции?
13) Как расположен градиент по отношению к линии уровня?
14) Что означают точки входа в ОДР и точки выхода из ОДР?
15) Может ли быть бесчисленное множество точек экстремума целевой функции?
16) Всегда ли ЗЛП имеет конечное решение?
17) Можно ли применить симплексный метод к произвольной ЗЛП?
18) Что называют базисными переменными и базисным решением (планом)?
19) Что называют опорным решением ЗЛП?
20) В чём состоит сущность симплексного метода?
21) Каким образом осуществляется поиск допустимого базисного решения?

22) Как формулируется критерий оптимальности допустимого плана?

23) Каким образом определяется переменная, которая должна на следующей итерации перейти из свободных в базисные?

24) Каким образом определяется переменная, которая должна на следующей итерации перейти из базисных в свободные?

25) Можно ли определить после получения оптимального плана, является ли этот план единственно оптимальным?

26) Как определяются разрешающий столбец и разрешающая строка при заполнении симплексной таблицы?

27) Как производится пересчёт элементов при заполнении новой части симплексной таблицы?

28) Как определяется по индексной строке оптимального плана, является ли полученный план единственно оптимальным?

29) Какой вид имеют взаимно-двойственные задачи?

30) Можно ли решить взаимно-двойственные задачи независимо друг от друга?

31) Как формулируются теоремы двойственности для задач линейного программирования?

32) Каким образом устанавливаются сопряжённые пары переменных взаимно-двойственных ЗЛП?

33) Каким образом определяется решение двойственной задачи по решению исходной (прямой задачи)?

34) В чём заключается экономическая интерпретация двойственных переменных?

35) Как формулируется транспортная задача?

36) Какой вид имеет модель транспортной задачи?

37) Какая задача называется транспортной задачей открытого (закрытого) типа?

38) Как перейти от открытой модели к закрытой модели транспортной задачи?

39) Как найти первоначальный допустимый опорный план методом «северо-западного» угла?

40) Как найти первоначальный допустимый опорный план методом наименьших тарифов?

41) Как найти первоначальный допустимый опорный план методом Фогеля?

42) Какой план транспортной задачи называется невырожденным?

43) Каким образом можно от вырожденного плана перейти к невырожденному?

44) Как вычисляются потенциалы?

45) Как вычисляются оценки свободных клеток?

46) Как формулируется критерий оптимальности полученного плана перевозок?

47) Что такое цикл перераспределения ресурсов?

48) Каким образом перераспределяется ресурс по циклу?

49) Как проверить, будет ли полученный оптимальный план перевозок единственно оптимальным?

50) Как получить всевозможные оптимальные планы в случае, когда полученный оптимальный план не единственный?

9.2. Тестовые задачи

В приведённых тестовых заданиях необходимо выбрать из предложенных пяти вариантов ответов (а)-(д) *верные варианты (из предложенных вариантов ответов верными могут быть более одного варианта).*

1) Какие из указанных задач являются задачами линейного программирования?

а) $F(x_1, x_2, x_3) = 12x_1 + 5x_2 - 4x_3 \to max$

$$\begin{cases} 9x_1 - x_2 + 13x_3 \geq 14, \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 38, \\ 2x_1 + 7x_2 + 7x_3 \leq 19, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;3}. \end{cases}$$

б) $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1 + 15x_2 - 2x_3 + x_4 \to min$

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 5x_3 + 9x_4 \leq 48, \\ 4x_1 + 5x_2 + \qquad x_4 \geq 34, \\ -2x_1 + x_2 + 8x_3 - x_4 \leq 60, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;4}. \end{cases}$$

в) $F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 3x_2 + 8x_3 \to max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 13x_2 + 5x_3 \leq 48, \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 44, \\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 \leq 30, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;3}. \end{cases}$$

г) $F(x_1, x_2) = 9x_1 - 4x_2 \to min$

$$\begin{cases} -3x_1 + 8x_2 \leq 50, \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 31, \\ 5x_1 \geq -95, \\ x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

д) $F(x_1, x_2) = 5x_1 - 4x_2 \to min$

$$\begin{cases} 7x_1 + 10x_2 \geq 28, \\ 4x_1^2 + 9x_2^2 \geq 16, \\ 8x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Какие из указанных ЗЛП записаны в стандартной форме записи?

а) $F(x_1, x_2, x_3) = 24x_1 + 16x_2 + 8x_3 \to max$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 \geq 350, \\ 5x_1 + 9x_2 + 2x_3 \geq 270, \\ 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 510, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;3}. \end{cases}$$

б) $F(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 20x_2 + 7x_3 + x_4 \to min$

$$\begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 2x_4 \geq 240, \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_4 \geq 190, \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \geq 320, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;4}. \end{cases}$$

в) $F(x_1, x_2, x_3) = 42x_1 + 26x_2 + 9x_3 + 15x_4 \to max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 360, \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 170, \\ 9x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 \leq 220, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;4}. \end{cases}$$

г) $F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 11x_2 + 5x_3 + 8x_4 \to min$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 36, \\ 6x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 3x_4 \leq 25, \\ 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 9x_4 \leq 48, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;4}. \end{cases}$$

д) $F(x_1, x_2, x_3) = -14x_1 + 6x_2 + 8x_3 \rightarrow min$

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 170, \\ 2x_1 + 7x_2 + 7x_3 \geq -210, \\ 5x_1 + 8x_2 + 5x_3 \geq -150, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;3}. \end{cases}$$

3) Предприятие изготавливает три вида товаров A, B, C и располагает тремя видами ограниченных ресурсов. Исходные данные представлены в таблице:

Таблица 15

Виды ресурсов	Затраты ресурсов на изготовление единицы товаров			Запасы ресурсов
	Товар А	Товар В	Товар С	
1	4	7	2	320
2	6	5	5	400
3	5	9	4	350
Доход от единицы товара	9	12	11	

Пусть переменные x_1, x_2, x_3 – величины товаров соответственно A, B и C. Тогда для задачи нахождения оптимального плана выпуска продукции, обеспечивающего максимальный доход, математическая модель имеет вид:

а) $F(x_1, x_2, x_3) = 9x_1 + 12x_2 + 11x_3 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 \geq 320, \\ 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \geq 400, \\ 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 \geq 350, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;3}. \end{cases}$$

б) $F(x_1, x_2, x_3) = 320x_1 + 400x_2 + 350x_3 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 9, \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 \leq 12, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 11, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;3}. \end{cases}$$

в) $F(x_1, x_2, x_3) = 9x_1 + 12x_2 + 11x_3 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 320, \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 \leq 400, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 350, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;3}. \end{cases}$$

г) $F(x_1, x_2, x_3) = 9x_1 + 12x_2 + 11x_3 \to max$

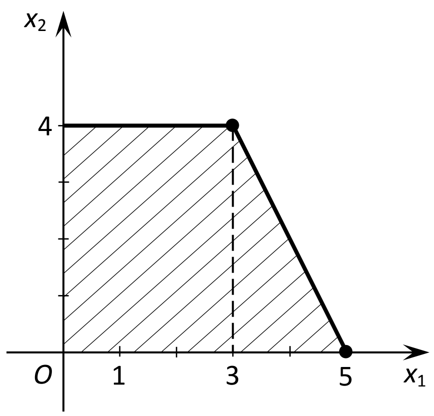
$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 320, \\ 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 400, \\ 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 \leq 350, \\ \quad x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;3}. \end{cases}$$

д) $F(x_1, x_2, x_3) = 320x_1 + 400x_2 + 350x_3 \to max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \geq 9, \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 \geq 12, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq 11, \\ \quad x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;3}. \end{cases}$$

4) Область допустимых решений представлена на рисунке 5.

Рисунок 5.



Тогда верными являются утверждения:

а) изображённая область есть выпуклое множество;

б) точка O является точкой входа для всех ЗЛП;

в) в точке $(3; 4)$ целевая функция произвольной ЗЛП всегда принимает максимальное значение;

г) целевая функция произвольной ЗЛП всегда принимает своё максимальное значение только в одной из вершин данной области;

д) точка O может являться точкой выхода в некоторой ЗЛП.

5) Для целевой функции $F(\bar{X}) = 5x_1 - 4x_2$ линия нулевого уровня проходит:

а) через начало координат и одну из двух точек $(-5; 4)$ и $(5; -4)$;

б) через точку $(-4;-5)$;

в) через отрезок, соединяющий точки $(4;5)$ и $(8;10)$;

г) через отрезок, соединяющий точки $(-4;5)$ и $(5;-4)$;

д) через точки $(5;0)$ и $(0;-4)$.

6) Какие из утверждений являются верными для ЗЛП?

а) оптимальные значения целевой функции (если ОДР не пусто) всегда конечны;

б) область допустимых решений может иметь бесчисленное множество точек, в которых целевая функция достигает экстремума;

в) точка экстремума может являться не угловой точкой ОДР;

г) минимальное и максимальное значения целевой функции могут совпасть;

д) точка $O(0;0)$ не может являться точкой максимума.

7) Указать, какие из следующих векторов по направлению совпадают с направлением наискорейшего убывания целевой функции $F(\bar{X}) = 2x_1 - x_2$:

а) $\vec{N} = (-2;\ 1)$;

б) $\vec{N} = (2;\ 1)$;

в) $\vec{N} = (4;\ -2)$;

г) $\vec{N} = (-4;\ 2)$;

д) $\vec{N} = (2;\ -1)$.

8) Область допустимых решений представляет собой пятиугольник, изображённый на рисунке 6.

Тогда целевая функция $F(\bar{X}) = -2x_1 + 2x_2$ достигает максимума:

а) только в точке $(3;6)$;

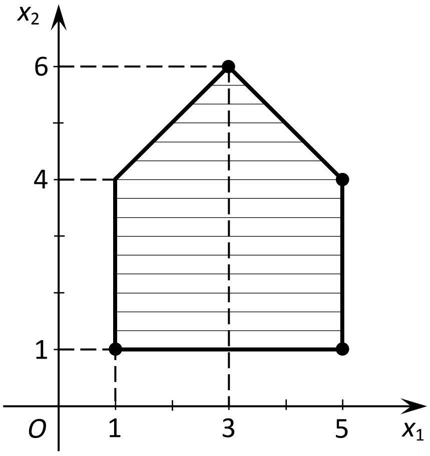
б) только в точке $(1;4)$;

в) по всему отрезку, соединяющему точки $(1;4)$ и $(3;6)$;

г) по всему отрезку, соединяющему точки $(3;6)$ и $(5;4)$;

д) только в точке (5;10).

Рисунок 6.



9) Область допустимых решений представлена на рисунке 6. Тогда в точке $(5; 4)$ достигает минимума целевая функция:

а) $F(\bar{X}) = -3x_1 + 3x_2$;

б) $F(\bar{X}) = -2x_1 - 4x_2$;

в) $F(\bar{X}) = 3x_1 - 3x_2$;

г) $F(\bar{X}) = -4x_1 - 4x_2$;

д) $F(\bar{X}) = 4x_1 + 4x_2$.

10) Верными являются следующие утверждения:

а) любое базисное решение является допустимым;

б) опорное решение соответствует вершине ОДР;

в) если допустимое решение лежит на границе ОДР, то оно является опорным решением;

г) оптимальным решением может быть только опорное решение;

д) существуют небазисные оптимальные решения.

11) ЗЛП не имеет решений в случаях, когда система ограничений имеет вид:

а) $\begin{cases} x_4 = 230 - 2x_1 + 9x_2 - 3x_3, \\ -x_5 = -90 + 8x_1 - 6x_2 - x_3, \\ x_6 = 140 - 5x_1 + x_2 + 12x_3. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_2 = 85 + 15x_1 - 20x_4 - 10x_5, \\ x_3 = 70 + 14x_1 - 30x_4 - 25x_5, \\ x_6 = 105 + 5x_1 - 35x_4 - 20x_5. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_4 = -8 - x_1 - 4x_2 - x_3, \\ x_5 = 30 - 15x_1 - 6x_2 - x_3, \\ x_6 = 18 - 6x_1 - x_2 - 2x_3. \end{cases}$

г) $\begin{cases} -x_3 = -6 + 2x_1 + x_2 + 4x_4, \\ -x_5 = -9 + x_1 + 6x_2 + 3x_4, \\ -x_6 = -6 + 2x_1 + 3x_2 + x_4. \end{cases}$

д) $\begin{cases} \quad x_1 = 15 - 5x_2 - 4x_5 - x_6, \\ -x_3 = 35 + x_2 + 5x_5 + 7x_6, \\ \quad x_4 = 20 - 10x_2 - x_5 - 5x_6. \end{cases}$

12) Допустим, что задана на максимум ЗЛП с целевой ей $F(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 - 7x_2 + 4x_3$, и в системе ограничений базисные переменные выражены через свободные переменные:

$$\begin{cases} x_4 = 18 - 2x_1 + 9x_2 + 3x_3, \\ x_5 = 16 - 4x_1 - 8x_2 - 2x_3, \\ x_6 = 24 - 6x_1 - 3x_2 + 8x_3, \\ x_7 = 12 - 3x_1 + 2x_2 - 6x_3, \\ \qquad x_j \geq 0;\ j = \overline{1;7}. \end{cases}$$

Тогда для улучшения плана на следующем шаге верными будут утверждения:

а) любую из свободных переменных можно перевести в базисные;

б) в базисные переменные надо перевести x_2;

в) в базисные переменные можно перевести x_3;

г) переменную x_1 можно перевести из свободных переменных в базисные вместо переменной x_4;

д) переменную x_1 можно перевести из свободных переменных в базисные вместо переменной x_5.

13) Пусть для ЗЛП вида

$$F(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3, \\ \qquad x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;3} \end{cases}$$

получено оптимальное решение $\bar{X}_{opt} = (26; 0; 12; 0; 0; 18)$. Тогда целевая функция, выраженная через свободные переменные, может иметь вид:

а) $F = 32 - 4x_2 - 7x_4 - 5x_5$;

б) $F = 18 - 2x_1 - 9x_3 - 3x_6$;

в) $F = 65 + 5x_2 + 3x_4 + 8x_5$;

г) $F = 29 + 6x_1 + 2x_3 + 4x_6$;

д) $F = 50 + 7x_2 - 8x_4 - 3x_5$.

14) Для взаимно-двойственных ЗЛП, записанных в стандартной форме записи, справедливыми являются утверждения:

а) число переменных в одной задаче может быть больше числа переменных в другой задаче;

б) ни к одной задаче нельзя применить графический метод решения;

в) обе задачи всегда можно решить симплексным методом;

г) оптимальное решение каждой из этих задач не является единственным;

д) обе задачи всегда имеют допустимые решения.

15) Пусть дана ЗЛП:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 \le 20, \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 15, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 25, \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1;3}. \end{cases}$$

Тогда двойственной к ней является задача:

а) $Z(y_1, y_2, y_3) = 20y_1 + 15y_2 + 25y_3 \to min$

$$\begin{cases} 2y_1 + 6y_2 + y_3 \ge 3, \\ 8y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge 7, \\ 3y_1 + 5y_2 + 4y_3 \ge 4, \\ y_i \ge 0; \quad i = \overline{1;3}. \end{cases}$$

б) $Z(y_1, y_2, y_3) = 3y_1 + 7y_2 + 4y_3 \to min$

$$\begin{cases} 2y_1 + 8y_2 + 3y_3 \ge 20, \\ 6y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 15, \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ge 25, \\ y_i \ge 0; \quad i = \overline{1;3}. \end{cases}$$

в) $Z(y_1, y_2, y_3) = 3y_1 + 7y_2 + 4y_3 \to min$

$$\begin{cases} 2y_1 + 6y_2 + y_3 \geq 20, \\ 8y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 15, \\ 3y_1 + 5y_2 + 4y_3 \geq 25, \\ y_i \geq 0; \quad i = \overline{1;3}. \end{cases}$$

г) $Z(y_1, y_2, y_3) = 20y_1 + 15y_2 + 25y_3 \to max$

$$\begin{cases} 2y_1 + 8y_2 + 3y_3 \geq 3, \\ 6y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 7, \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 4, \\ y_i \geq 0; \quad i = \overline{1;3}. \end{cases}$$

д) $Z(y_1, y_2, y_3) = 20y_1 + 15y_2 + 25y_3 \to min$

$$\begin{cases} 2y_1 + 8y_2 + 3y_3 \geq 3, \\ 6y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 7, \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 4, \\ y_i \geq 0; \quad i = \overline{1;3}. \end{cases}$$

16) Исходная ЗЛП имеет вид:

$$F(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \leq b_3, \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;4}. \end{cases}$$

Тогда соответствие между сопряжёнными переменными взаимно-двойственных задач имеет вид:

а) $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix};$

б) $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_5 & y_6 & y_7 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix};$

в) $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_7 & y_6 & y_5 & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 \end{matrix};$

г) $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{matrix};$

$$\text{д)}\ \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_3 & y_2 & y_1 & y_7 & y_6 & y_5 \end{array}.$$

17) Пусть для ЗЛП вида

$$F(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3, \\ \qquad x_j \ge 0; \quad j = \overline{1;3} \end{cases}$$

получено оптимальное решение $\bar{X}_{opt} = (24; 15; 0; 0; 19; 0)$, и целевая функция выражена через свободные переменные $F(x_2, x_4, x_5) = 93 - 4x_3 - 8x_4 - 7x_6$. Тогда решение двойственной задачи может иметь вид:

а) $\bar{Y}_{opt} = (0; 0; 4; 8; 0; 7)$;

б) $\bar{Y}_{opt} = (0; 19; 0; 24; 15; 0)$;

в) $\bar{Y}_{opt} = (-8; 0; -7; 0; 0; -4)$;

г) $\bar{Y}_{opt} = (8; 0; 7; 0; 0; 4)$;

д) $\bar{Y}_{opt} = (0; 0; -4; -8; 0; -7)$.

18) Пусть для ЗЛП вида

$$F(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3, \\ \qquad x_j \ge 0; \quad j = \overline{1;3} \end{cases}$$

дана экономическая интерпретация: переменные x_1, x_2, x_3 означают количество производимых товаров; c_1, c_2, c_3 – стоимости единиц соответствующих товаров; b_1, b_2, b_3 – запасы ресурсов различных видов. Тогда справедливыми будут утверждения:

а) в двойственной задаче коэффициенты c_1, c_2, c_3 означают запасы соответствующих товаров;

б) в двойственной задаче исходные переменные y_1, y_2, y_3 означают оценки соответствующих видов ресурсов;

в) в двойственной задаче числа b_1, b_2, b_3 показывают оценки соответствующих видов ресурсов;

г) целевая функция двойственной задачи означает количество ресурсов, которое нужно минимизировать при заданных стоимостях затрат и стоимостях c_j единицы продукции;

д) целевая функция отражает общую стоимость затрат, которую нужно минимизировать при заданных количествах ресурсов b_i и стоимостях c_j единицы продукции.

19) Какие из следующих утверждений являются верными?

а) если число поставщиков равно числу потребителей, то имеем закрытую модель транспортной задачи;

б) в открытой задаче с переизбытком ресурсов число поставщиков превышает число потребителей;

в) суммарный запас ресурсов может быть меньше потребности каждого отдельного потребителя;

г) в закрытой модели число поставщиков может отличаться от числа потребителей;

д) в открытой модели с переизбытком ресурсов необходимо добавить фиктивного потребителя.

20) Пусть имеем закрытую модель транспортной задачи, в которой 4 поставщика и 6 потребителей. Тогда число заполненных клеток таблицы перевозок при нахождении первоначального допустимого опорного плана:

а) может быть меньше 9;

б) всегда равно 9;

в) может быть равно 10;

г) может быть больше 9;

д) всегда не меньше 8.

21) Пусть для данной транспортной задачи, поставленной на минимум, найдены первоначальные допустимые опорные планы тремя способами - $X_1^{\text{мсзу}}$, $X_1^{\text{мнт}}$ и $X_1^{\text{мф}}$. Тогда:

а) стоимости перевозок, осуществлённых тремя способами, всегда различны;

б) стоимости перевозок, осуществлённых тремя способами, могут совпадать;

в) план $X_1^{\text{мф}}$ может оказаться лучшим по сравнению с двумя другими планами;

г) стоимость перевозок при плане $X_1^{\text{мсзу}}$ всегда больше, чем стоимости перевозок при других планах;

д) стоимость перевозок при плане $X_1^{\text{мнт}}$ может быть больше стоимости перевозок при плане $X_1^{\text{мф}}$.

22) Какие из следующих утверждений являются верными:

а) первоначальный допустимый план может оказаться невырожденным;

б) вырожденный план может получиться при использовании любого из трёх методов нахождения первоначального допустимого опорного плана;

в) вырожденный план может получиться при использовании только одного из трёх методов нахождения первоначального допустимого опорного плана;

г) вырожденные планы, получающиеся при применении различных способов нахождения первоначального опорного плана, могут не совпадать;

д) вырожденные планы для данной задачи всегда совпадают по стоимости перевозок.

23) Дана транспортная задача закрытого типа с шестью поставщиками и четырьмя потребителями, и найден первоначальный допустимый план, в котором семь заполненных клеток. Тогда:

а) план вырожденный, и для устранения вырожденности необходимо добавить только один нуль в одной из пустых клеток и считать эту клетку заполненной;

б) план невырожденный, так как число заполненных клеток не превышает числа $(m+n-1)$, где m и n – соответственно число поставщиков и потребителей;

в) план вырожденный, и для устранения вырожденности необходимо добавить нули в две клетки;

г) в данном случае нельзя устранить вырожденность плана;

д) можно добавить нули в любое количество пустых клеток.

24) Дана транспортная задача закрытого типа с четырьмя поставщиками и шестью потребителями, и найден первоначальный невырожденный допустимый план. Тогда необходимо ввести в рассмотрение:

а) девять чисел, называемых потенциалами, и решить систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha_i+\beta_j=c_{ij} \text{ (для заполненных клеток)},\\ \alpha_1=0;\end{cases}$$

б) десять чисел, называемых потенциалами, и решить систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha_i+\beta_j=c_{ij} \text{ (для заполненных клеток)},\\ \alpha_1=0;\end{cases}$$

в) десять чисел, называемых потенциалами, и решить систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha_i+\beta_j=c_{ij} \text{ (для пустых клеток)},\\ \alpha_1=0;\end{cases}$$

г) десять чисел, называемых потенциалами, и решить систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha_i-\beta_j=c_{ij} \text{ (для заполненных клеток)},\\ \alpha_1=0;\end{cases}$$

д) девять чисел, называемых потенциалами, и решить систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha_i+\beta_j=c_{ij} \text{ (для заполненных клеток)},\\ \alpha_1=C, \text{где } C=const.\end{cases}$$

25) Пусть для транспортной задачи, поставленной на минимум, найдены оценки свободных клеток по формуле $\Delta_{ij}=c_{ij}-(\alpha_i+\beta_j)$. Тогда план будет оптимальным, если:

а) все оценки неотрицательные;

б) найдётся хотя бы одна положительная оценка;

в) найдётся хотя бы одна отрицательная оценка;

г) нет нулевых оценок;

д) все оценки неположительные.

26) Пусть найдены оценки свободных клеток по формуле $\Delta_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)$. Тогда верными являются утверждения:

а) оценка Δ_{ij} по абсолютной величине не может превышать соответствующего тарифа c_{ij};

б) для допустимого плана оценки могут быть равными нулю;

в) нулевые оценки могут быть как в оптимальном, так и в неоптимальном плане;

г) наличие нулевых оценок свидетельствует о том, что данный план вырожденный;

д) количество оценок свободных клеток всегда больше, чем число заполненных клеток.

27) Цикл перераспределения ресурсов может содержать:

а) шесть вершин, половина из которых – заполненные клетки, половина – пустые клетки;

б) пять вершин, одна из которых пустая, остальные - заполненные;

в) шесть вершин, одна из которых пустая, остальные заполненные;

г) восемь вершин, семь из которых – заполненные;

д) четыре вершины, в трёх из которых содержится одинаковое количество ресурсов.

28) При перераспределении ресурсов по циклу может оказаться, что:

а) опустошаются три клетки;

б) заполняемая клетка и клетка, которая опустошается, не являются соседними вершинами в цикле;

в) между заполняемой клеткой и клеткой, которая опустошается, в цикле располагается только одна вершина;

г) суммарное количество ресурсов в двух соседних клетках изменяется;

д) опустошается только одна клетка.

29) Какое из утверждений верно?

а) при перераспределении ресурсов по циклу всегда получается вырожденный план;

б) новый полученный план может получиться вырожденным только вследствие того, что при перераспределении ресурсов по циклу опустошается более одной из заполненных клеток;

в) если при перераспределении ресурсов по циклу опустошается только одна из заполненных клеток, то новый план будет невырожденным;

г) невырожденный план может получиться при опустошении двух заполненных клеток;

д) если в цикле содержатся две клетки с одинаковым количеством ресурсов, то всегда при перераспределении по циклу получим вырожденный план.

30) Пусть найден первый план X_1, и $F(X_1) = 160$. Допустим, что путём перераспределения по циклу, представляющему собой 6-угольник, получен новый план X_2, причём цикл построен для клетки с отрицательной оценкой $\Delta_{ij} = -5$. В минусовых клетках цикла имеются ресурсы, равные 4 единицам, 10 единицам и 7 единицам. Тогда значение нового плана будет равно:

а) $F(X_2) = 180$;

б) $F(X_2) = 210$;

в) $F(X_2) = 110$;

г) $F(X_2) = 140$;

д) $F(X_2) = 151$.

Замечание. Ответы и указания на эти тестовые задачи даны в приложениях.

9.3. Задания для проведения контрольных работ

Задания 1-10

Промышленное предприятие выпускает минеральные удобрения двух видов A и B, и для их производства использует вещества четырёх видов. Известны имеющиеся запасы веществ, а также величины расходов каждого вещества на 1 тонну удобрений, заданные в таблице:

Таблица 16

Виды веществ	Расход вещества на 1 тонну удобрений (усл. ед.)		Запасы веществ (усл. ед.)
	Удобрение A	Удобрение B	
1	a_{11}	a_{12}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	b_2
3	a_{31}	a_{32}	b_3
4	a_{41}	a_{42}	b_4

Известно, что цена одной тонны удобрения вида A составляет p_1 условных единиц, а цена одной тонны удобрения вида B – p_2 условных единиц. Требуется составить оптимальный план выпуска продукции, то есть план, при котором с учётом имеющихся запасов веществ суммарная стоимость произведённых удобрений будет наибольшей. Решить задачу графическим способом. Сделать выводы.

1)
$a_{11} = 2$ $a_{12} = 2$ $b_1 = 24$
$a_{21} = 3$ $a_{22} = 6$ $b_2 = 54$ $p_1 = 4$
$a_{31} = 3$ $a_{32} = 0$ $b_3 = 27$ $p_2 = 4$
$a_{41} = 0$ $a_{42} = 4$ $b_4 = 32$

2)
$a_{11} = 4$ $a_{12} = 3$ $b_1 = 36$
$a_{21} = 1$ $a_{22} = 3$ $b_2 = 18$ $p_1 = 2$
$a_{31} = 0$ $a_{32} = 2$ $b_3 = 10$ $p_2 = 3$
$a_{41} = 3$ $a_{42} = 0$ $b_4 = 24$

3) $a_{11} = 6$ $a_{12} = 5$ $b_1 = 60$
$a_{21} = 2$ $a_{22} = 5$ $b_2 = 40$ $p_1 = 3$
$a_{31} = 2$ $a_{32} = 0$ $b_3 = 14$ $p_2 = 4$
$a_{41} = 0$ $a_{42} = 3$ $b_4 = 21$

4) $a_{11} = 4$ $a_{12} = 6$ $b_1 = 48$
$a_{21} = 3$ $a_{22} = 3$ $b_2 = 30$ $p_1 = 3$
$a_{31} = 0$ $a_{32} = 5$ $b_3 = 30$ $p_2 = 2$
$a_{41} = 4$ $a_{42} = 0$ $b_4 = 36$

5) $a_{11} = 3$ $a_{12} = 5$ $b_1 = 45$
$a_{21} = 4$ $a_{22} = 2$ $b_2 = 32$ $p_1 = 3$
$a_{31} = 3$ $a_{32} = 0$ $b_3 = 21$ $p_2 = 1$
$a_{41} = 0$ $a_{42} = 2$ $b_4 = 16$

6) $a_{11} = 2$ $a_{12} = 4$ $b_1 = 28$
$a_{21} = 3$ $a_{22} = 2$ $b_2 = 24$ $p_1 = 1$
$a_{31} = 0$ $a_{32} = 2$ $b_3 = 12$ $p_2 = 3$
$a_{41} = 3$ $a_{42} = 0$ $b_4 = 18$

7) $a_{11} = 1$ $a_{12} = 2$ $b_1 = 16$
$a_{21} = 3$ $a_{22} = 3$ $b_2 = 36$ $p_1 = 3$
$a_{31} = 2$ $a_{32} = 0$ $b_3 = 20$ $p_2 = 3$
$a_{41} = 0$ $a_{42} = 3$ $b_4 = 21$

8) $a_{11} = 4$ $a_{12} = 2$ $b_1 = 36$
$a_{21} = 3$ $a_{22} = 3$ $b_2 = 33$ $p_1 = 2$
$a_{31} = 4$ $a_{32} = 0$ $b_3 = 32$ $p_2 = 3$
$a_{41} = 0$ $a_{42} = 2$ $b_4 = 16$

9) $a_{11} = 3$ $a_{12} = 3$ $b_1 = 39$
$a_{21} = 2$ $a_{22} = 3$ $b_2 = 30$ $p_1 = 4$
$a_{31} = 0$ $a_{32} = 3$ $b_3 = 18$ $p_2 = 5$
$a_{41} = 2$ $a_{42} = 0$ $b_4 = 22$

10) $a_{11} = 4$ $a_{12} = 3$ $b_1 = 48$
$a_{21} = 3$ $a_{22} = 3$ $b_2 = 42$ $p_1 = 2$
$a_{31} = 2$ $a_{32} = 0$ $b_3 = 18$ $p_2 = 2$
$a_{41} = 0$ $a_{42} = 3$ $b_4 = 30$

Задания 11-20

Фермерское хозяйство разводит дойных коров и для этой цели планирует закупить два вида комбикорма для улучшения надоев молока. Известны стоимости комбикормов, содержание полезных питательных веществ в единице каждого вида комбикорма, а также необходимое количество каждого вещества, которое должно войти в пищу коров. Все исходные известные величины заданы в таблице:

Таблица 17

Полезные питательные вещества	Содержание питательных веществ в единице комбикорма (усл. ед.)		Необходимое количество веществ (тыс. ед.)
	Комбикорм M	Комбикорм P	
A	a_{11}	a_{12}	b_1
B	a_{21}	a_{22}	b_2
C	a_{31}	a_{32}	b_3
D	a_{41}	a_{42}	b_4
Стоимость единицы комбикорма (у. е.)	p_1	p_2	

Требуется найти оптимальный набор закупаемых комбикормов, чтобы потребности животных во всех необходимых веществах полностью удовлетворялись, и при этом суммарная стоимость закупаемых комбикормов была наименьшей. Решить задачу графическим способом. Сделать выводы.

11)
$a_{11} = 5$ $a_{12} = 1$ $b_1 = 15$
$a_{21} = 3$ $a_{22} = 3$ $b_2 = 24$ $p_1 = 2$
$a_{31} = 5$ $a_{32} = 3$ $b_3 = 30$ $p_2 = 3$
$a_{41} = 1$ $a_{42} = 7$ $b_4 = 14$

12)
$a_{11} = 3$ $a_{12} = 2$ $b_1 = 18$
$a_{21} = 2$ $a_{22} = 8$ $b_2 = 32$ $p_1 = 2$
$a_{31} = 8$ $a_{32} = 2$ $b_3 = 24$ $p_2 = 2$
$a_{41} = 3$ $a_{42} = 5$ $b_4 = 30$

13) $a_{11} = 6$ $a_{12} = 8$ $b_1 = 48$
$a_{21} = 7$ $a_{22} = 1$ $b_2 = 14$ $p_1 = 4$
$a_{31} = 2$ $a_{32} = 8$ $b_3 = 24$ $p_2 = 3$
$a_{41} = 4$ $a_{42} = 2$ $b_4 = 20$

14) $a_{11} = 1$ $a_{12} = 5$ $b_1 = 15$
$a_{21} = 5$ $a_{22} = 3$ $b_2 = 30$ $p_1 = 3$
$a_{31} = 3$ $a_{32} = 5$ $b_3 = 30$ $p_2 = 2$
$a_{41} = 7$ $a_{42} = 2$ $b_4 = 28$

15) $a_{11} = 8$ $a_{12} = 5$ $b_1 = 40$
$a_{21} = 1$ $a_{22} = 7$ $b_2 = 14$ $p_1 = 3$
$a_{31} = 6$ $a_{32} = 1$ $b_3 = 12$ $p_2 = 3$
$a_{41} = 3$ $a_{42} = 6$ $b_4 = 30$

16) $a_{11} = 3$ $a_{12} = 5$ $b_1 = 30$
$a_{21} = 6$ $a_{22} = 4$ $b_2 = 36$ $p_1 = 3$
$a_{31} = 2$ $a_{32} = 6$ $b_3 = 24$ $p_2 = 4$
$a_{41} = 3$ $a_{42} = 1$ $b_4 = 12$

17) $a_{11} = 8$ $a_{12} = 2$ $b_1 = 24$
$a_{21} = 6$ $a_{22} = 9$ $b_2 = 54$ $p_1 = 2$
$a_{31} = 4$ $a_{32} = 3$ $b_3 = 24$ $p_2 = 2$
$a_{41} = 1$ $a_{42} = 4$ $b_4 = 12$

18) $a_{11} = 4$ $a_{12} = 6$ $b_1 = 36$
$a_{21} = 6$ $a_{22} = 2$ $b_2 = 24$ $p_1 = 4$
$a_{31} = 2$ $a_{32} = 8$ $b_3 = 24$ $p_2 = 4$
$a_{41} = 5$ $a_{42} = 3$ $b_4 = 30$

19) $a_{11} = 5$ $a_{12} = 4$ $b_1 = 40$
$a_{21} = 5$ $a_{22} = 1$ $b_2 = 15$ $p_1 = 1$
$a_{31} = 3$ $a_{32} = 5$ $b_3 = 30$ $p_2 = 2$
$a_{41} = 2$ $a_{42} = 8$ $b_4 = 24$

20) $a_{11} = 2$ $a_{12} = 3$ $b_1 = 18$
$a_{21} = 1$ $a_{22} = 6$ $b_2 = 12$ $p_1 = 2$
$a_{31} = 5$ $a_{32} = 3$ $b_3 = 30$ $p_2 = 3$
$a_{41} = 8$ $a_{42} = 2$ $b_4 = 24$

Задания 21-30

Предприятие выпускает для продажи три вида продукции A, B, C и располагает тремя видами ограниченных материально-денежных ресурсов. Известны запасы ресурсов, расходы ресурсов каждого вида на изготовление единицы продукции, а также доходы от реализации единицы продукции каждого вида. Исходные данные представлены в таблице:

Таблица 18

Виды ресурсов	Затраты ресурсов на изготовление единицы продукции (усл. ед.)			Запасы ресурсов (усл. ед.)
	Продукция А	Продукция В	Продукция С	
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
Доход от единицы продукции (у.е.)	c_1	c_2	c_3	

1) Найти симплексным методом оптимальный план выпуска продукции, обеспечивающий максимальный доход от продажи продукции с учётом заданных ограничений на ресурсы (рекомендуется при вычислениях использовать симплексные таблицы).

2) Составить двойственную задачу и найти её решение с помощью теорем двойственности.

3) Дать экономическую интерпретацию двойственным переменным обеих задач.

21)
$$\begin{array}{lllll} a_{11}=2 & a_{12}=5 & a_{13}=1 & b_1=60 & c_1=3 \\ a_{21}=1 & a_{22}=3 & a_{23}=6 & b_2=30 & c_2=5 \\ a_{31}=4 & a_{32}=2 & a_{33}=5 & b_3=40 & c_3=4 \end{array}$$

22)
$$\begin{array}{lllll} a_{11}=5 & a_{12}=3 & a_{13}=6 & b_1=48 & c_1=4 \\ a_{21}=4 & a_{22}=8 & a_{23}=2 & b_2=60 & c_2=4 \\ a_{31}=3 & a_{32}=6 & a_{33}=4 & b_3=56 & c_3=6 \end{array}$$

23) $a_{11} = 3$ $a_{12} = 5$ $a_{13} = 1$ $b_1 = 85$ $c_1 = 6$
$a_{21} = 5$ $a_{22} = 2$ $a_{23} = 7$ $b_2 = 105$ $c_2 = 6$
$a_{31} = 6$ $a_{32} = 4$ $a_{33} = 4$ $b_3 = 80$ $c_3 = 4$

24) $a_{11} = 4$ $a_{12} = 1$ $a_{13} = 7$ $b_1 = 63$ $c_1 = 7$
$a_{21} = 3$ $a_{22} = 5$ $a_{23} = 3$ $b_2 = 75$ $c_2 = 6$
$a_{31} = 6$ $a_{32} = 4$ $a_{33} = 2$ $b_3 = 90$ $c_3 = 10$

25) $a_{11} = 5$ $a_{12} = 2$ $a_{13} = 4$ $b_1 = 50$ $c_1 = 9$
$a_{21} = 3$ $a_{22} = 2$ $a_{23} = 1$ $b_2 = 45$ $c_2 = 5$
$a_{31} = 4$ $a_{32} = 7$ $a_{33} = 4$ $b_3 = 67$ $c_3 = 7$

26) $a_{11} = 4$ $a_{12} = 7$ $a_{13} = 3$ $b_1 = 76$ $c_1 = 9$
$a_{21} = 8$ $a_{22} = 2$ $a_{23} = 5$ $b_2 = 56$ $c_2 = 6$
$a_{31} = 5$ $a_{32} = 4$ $a_{33} = 6$ $b_3 = 65$ $c_3 = 5$

27) $a_{11} = 5$ $a_{12} = 6$ $a_{13} = 2$ $b_1 = 120$ $c_1 = 7$
$a_{21} = 4$ $a_{22} = 8$ $a_{23} = 4$ $b_2 = 80$ $c_2 = 12$
$a_{31} = 4$ $a_{32} = 6$ $a_{33} = 5$ $b_3 = 90$ $c_3 = 9$

28) $a_{11} = 3$ $a_{12} = 6$ $a_{13} = 2$ $b_1 = 90$ $c_1 = 8$
$a_{21} = 5$ $a_{22} = 1$ $a_{23} = 6$ $b_2 = 60$ $c_2 = 5$
$a_{31} = 5$ $a_{32} = 4$ $a_{33} = 2$ $b_3 = 80$ $c_3 = 6$

29) $a_{11} = 4$ $a_{12} = 2$ $a_{13} = 5$ $b_1 = 80$ $c_1 = 8$
$a_{21} = 1$ $a_{22} = 4$ $a_{23} = 2$ $b_2 = 50$ $c_2 = 4$
$a_{31} = 6$ $a_{32} = 2$ $a_{33} = 3$ $b_3 = 60$ $c_3 = 7$

30) $a_{11} = 6$ $a_{12} = 2$ $a_{13} = 4$ $b_1 = 64$ $c_1 = 3$
$a_{21} = 2$ $a_{22} = 8$ $a_{23} = 6$ $b_2 = 48$ $c_2 = 2$
$a_{31} = 1$ $a_{32} = 4$ $a_{33} = 5$ $b_3 = 40$ $c_3 = 5$

Задания 31-40

Студенту для поддержания нормальной физиологической жизнедеятельности, обеспечивающей возможность успешной учёбы, требуются вещества и витамины трёх основных видов B_1, B_2, B_3 в количестве соответственно b_1, b_2 и b_3 единиц. Эти вещества и витамины содержатся в трёх продуктах питания Π_1, Π_2, Π_3. Известно содержание каждого вещества в единице каждого продукта и стоимости единицы каждого продукта:

Таблица 19

Виды продуктов	Содержание в-ва в единице продукта (усл. ед.)			Стоимость ед. продуктов
	Вещество A	Вещество B	Вещество C	
Π_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	c_1
Π_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	c_2
Π_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	c_3

Найти оптимальный рацион питания, то есть наиболее дешёвый рацион, при котором потребности во всех веществах полностью удовлетворяются. Решение выполнить двумя способами: 1) непосредственным симплекс-методом; 2) используя теоремы двойственности, решив предварительно двойственную задачу.

Сделать выводы.

31) $\begin{matrix} a_{11} = 2 & a_{12} = 1 & a_{13} = 4 & b_1 = 20 & c_1 = 40 \\ a_{21} = 1 & a_{22} = 2 & a_{23} = 2 & b_2 = 50 & c_2 = 50 \\ a_{31} = 4 & a_{32} = 4 & a_{33} = 1 & b_3 = 40 & c_3 = 60 \end{matrix}$

32) $\begin{matrix} a_{11} = 1 & a_{12} = 2 & a_{13} = 4 & b_1 = 80 & c_1 = 30 \\ a_{21} = 3 & a_{22} = 5 & a_{23} = 2 & b_2 = 60 & c_2 = 80 \\ a_{31} = 2 & a_{32} = 4 & a_{33} = 3 & b_3 = 40 & c_3 = 60 \end{matrix}$

33) $a_{11} = 3$ $a_{12} = 5$ $a_{13} = 4$ $b_1 = 30$ $c_1 = 40$
$a_{21} = 4$ $a_{22} = 2$ $a_{23} = 1$ $b_2 = 20$ $c_2 = 40$
$a_{31} = 1$ $a_{32} = 2$ $a_{33} = 3$ $b_3 = 40$ $c_3 = 90$

34) $a_{11} = 5$ $a_{12} = 1$ $a_{13} = 4$ $b_1 = 40$ $c_1 = 80$
$a_{21} = 2$ $a_{22} = 4$ $a_{23} = 2$ $b_2 = 20$ $c_2 = 40$
$a_{31} = 1$ $a_{32} = 2$ $a_{33} = 3$ $b_3 = 20$ $c_3 = 60$

35) $a_{11} = 4$ $a_{12} = 1$ $a_{13} = 2$ $b_1 = 60$ $c_1 = 40$
$a_{21} = 2$ $a_{22} = 5$ $a_{23} = 3$ $b_2 = 60$ $c_2 = 45$
$a_{31} = 4$ $a_{32} = 3$ $a_{33} = 2$ $b_3 = 80$ $c_3 = 60$

36) $a_{11} = 3$ $a_{12} = 1$ $a_{13} = 4$ $b_1 = 120$ $c_1 = 60$
$a_{21} = 2$ $a_{22} = 1$ $a_{23} = 2$ $b_2 = 100$ $c_2 = 30$
$a_{31} = 1$ $a_{32} = 2$ $a_{33} = 5$ $b_3 = 120$ $c_3 = 40$

37) $a_{11} = 1$ $a_{12} = 5$ $a_{13} = 2$ $b_1 = 100$ $c_1 = 80$
$a_{21} = 4$ $a_{22} = 1$ $a_{23} = 3$ $b_2 = 120$ $c_2 = 45$
$a_{31} = 2$ $a_{32} = 3$ $a_{33} = 1$ $b_3 = 100$ $c_3 = 90$

38) $a_{11} = 4$ $a_{12} = 2$ $a_{13} = 1$ $b_1 = 80$ $c_1 = 40$
$a_{21} = 3$ $a_{22} = 1$ $a_{23} = 2$ $b_2 = 60$ $c_2 = 30$
$a_{31} = 2$ $a_{32} = 3$ $a_{33} = 3$ $b_3 = 90$ $c_3 = 60$

39) $a_{11} = 2$ $a_{12} = 4$ $a_{13} = 5$ $b_1 = 80$ $c_1 = 40$
$a_{21} = 2$ $a_{22} = 1$ $a_{23} = 2$ $b_2 = 40$ $c_2 = 80$
$a_{31} = 3$ $a_{32} = 2$ $a_{33} = 2$ $b_3 = 60$ $c_3 = 50$

40) $a_{11} = 5$ $a_{12} = 1$ $a_{13} = 3$ $b_1 = 90$ $c_1 = 30$
$a_{21} = 1$ $a_{22} = 2$ $a_{23} = 2$ $b_2 = 60$ $c_2 = 80$
$a_{31} = 2$ $a_{32} = 4$ $a_{33} = 2$ $b_3 = 60$ $c_3 = 90$

Задания 41-50

Имеются четыре поставщика A_1, A_2, A_3, A_4, которые располагают однородными ресурсами в размере соответственно a_1, a_2, a_3 и a_4 единиц. Требуется перевезти эти ресурсы потребителям B_1, B_2, B_3, B_4, потребности которых равны соответственно b_1, b_2, b_3 и b_4 единиц. Стоимости c_{ij} перевозок единицы груза от каждого поставщика A_i, $i = \overline{1,4}$ к каждому потребителю B_j, $j = \overline{1,4}$ заданы матрицей тарифов

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}.$$

1) Найти первоначальный опорный план тремя способами: методом «северо-западного» угла, методом наименьших тарифов и методом Фогеля.

2) Выбрав в качестве исходного плана наилучший из полученных первоначальных планов, найти оптимальный план.

41) $a_1 = 60$, $a_2 = 45$, $a_3 = 70$, $a_4 = 55$; $b_1 = 50$, $b_2 = 80$, $b_3 = 65$, $b_4 = 50$

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

42) $a_1 = 80$, $a_2 = 55$, $a_3 = 65$, $a_4 = 70$; $b_1 = 60$, $b_2 = 70$, $b_3 = 75$, $b_4 = 45$

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

43) $a_1 = 40$, $a_2 = 75$, $a_3 = 45$, $a_4 = 50$; $b_1 = 60$, $b_2 = 35$, $b_3 = 70$, $b_4 = 55$

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

44) $$a_1 = 45 \quad b_1 = 80$$ $$a_2 = 70 \quad b_2 = 35$$ $$a_3 = 65 \quad b_3 = 75$$ $$a_4 = 90 \quad b_4 = 65$$ $$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 8 & 6 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

45) $$a_1 = 70 \quad b_1 = 60$$ $$a_2 = 40 \quad b_2 = 50$$ $$a_3 = 60 \quad b_3 = 35$$ $$a_4 = 55 \quad b_4 = 65$$ $$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

46) $$a_1 = 55 \quad b_1 = 65$$ $$a_2 = 75 \quad b_2 = 60$$ $$a_3 = 40 \quad b_3 = 80$$ $$a_4 = 45 \quad b_4 = 30$$ $$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

47) $$a_1 = 45 \quad b_1 = 75$$ $$a_2 = 85 \quad b_2 = 30$$ $$a_3 = 50 \quad b_3 = 65$$ $$a_4 = 60 \quad b_4 = 50$$ $$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

48) $$a_1 = 65 \quad b_1 = 35$$ $$a_2 = 50 \quad b_2 = 40$$ $$a_3 = 35 \quad b_3 = 70$$ $$a_4 = 45 \quad b_4 = 55$$ $$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 & 5 \\ 2 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

49) $$a_1 = 75 \quad b_1 = 90$$ $$a_2 = 50 \quad b_2 = 65$$ $$a_3 = 45 \quad b_3 = 70$$ $$a_4 = 80 \quad b_4 = 55$$ $$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & 3 \\ 9 & 7 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

50) $$a_1 = 30 \quad b_1 = 50$$ $$a_2 = 70 \quad b_2 = 75$$ $$a_3 = 85 \quad b_3 = 55$$ $$a_4 = 60 \quad b_4 = 40$$ $$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

9.4. Компетентностно-ориентированные задания

В приведённых заданиях необходимо построить математическую модель задачи, вводя необходимые переменные, указав целевую функцию и систему ограничений в виде соотношений равенств или неравенств. Показать, что полученная модель является моделью задачи линейного программирования.

1) Молокоперерабатывающий завод производит кефир, ряженку, варенец и сметану. При этом на производство тысячи литров этих молочных продуктов расходуется молоко в объеме 1100, 1500, 1400 и 6000 литров соответственно на кефир, ряженку, варенец и сметану. Для производства продукции используется оборудование по обработке и упаковыванию в литровые пакеты, причём для расфасовки тысячи литров кефира, ряженки, варенца и сметаны на этом оборудовании требуется 3, 5, 4 и 10 человеко-часов соответственно. Суточные объёмы запасов молока составляют 150 тысяч литров, а ресурсы оборудования составляют 250 человеко-часов. Известно, что не более 30 % выпускаемой продукции приходится на сметану, а суммарный объём кефира и ряженки не превышает суммарного объёма варенца и сметаны. Цена 1 литра составляет: 25 рублей для кефира, 34 рубля для ряженки, 30 рублей для варенца и 80 рублей для сметаны. Составить экономико-математическую модель для задачи нахождения оптимального объёма производства молочной продукции.

2) Кондитерская фабрика выпускает шоколадные конфеты пяти видов: «Мелодия», «Нежность», «Прелесть», «Обаяние» и «Романтика». Для их производства используются ингредиенты: какао-бобы, сахар, ваниль, молочный порошок. Известно содержание ингредиентов в конфетах, стоимости килограмма конфет и располагаемые запасы ингредиентов (табл.20). Составить математическую модель задачи максимизации стоимости выпускаемых конфет с учётом имеющихся ресурсных ограничений.

Таблица 20

Виды конфет	Содержание ингредиентов, г				Стоимости 1кг конфет
	Какао-бобы	Сахар	Ваниль	Молочный порошок	
«Мелодия»	m_1	m_2	m_3	m_4	c_1
«Нежность»	n_1	n_2	n_3	n_4	c_2
«Прелесть»	p_1	p_2	p_3	p_4	c_3
«Обаяние»	q_1	q_2	q_3	q_4	c_4
«Романтика»	r_1	r_2	r_3	r_4	c_5
Запасы ингредиентов, г.	b_1	b_2	b_3	b_4	

3) Как известно, химический состав стали определяется содержанием в ней компонентов четырёх групп: постоянные (обыкновенные), скрытые, случайные и специальные (легирующие) элементы. Сталелитейный завод выпускает два вида стали: углеродистые и легированные. Известно содержание каждого вида элемента в каждом сорте стали, и общий объём каждого вида элементов, используемых для производства стали, известна также цена одной тонны стали. Исходные данные представлены в таблице:

Таблица 21

Элементы, содержащиеся в стали	Содержание элементов в 1 т. стали, (кг)		Объём элементов (тонн).
	Углеродистая сталь	Легированная сталь	
Постоянные	a_1	a_2	b
Скрытые	a_3	a_4	c
Случайные	a_5	a_6	d
Легирующие	a_7	a_8	e
Цена одной тонны, тыс. рублей.	p_1	p_2	

Требуется составить экономико-математическую модель задачи построения оптимальной структуры выпуска стали, при которой цена реализации будет максимальной.

4) Жилищно-коммунальное хозяйство (ЖКХ) заключает договор с дворниками двух бригад на зимний период для уборки снега. Подконтрольная для ЖКХ территория включает несколько прилегающих участков (подъезды, дорожки возле домов, другие прилегающие территории). Известны ежедневные ожидаемые осадки по метеорологическим статистическим сводкам, производительности дворников на каждом участке, и требуемая дворниками зарплата:

Таблица 22

Подконтрольная ЖКХ территория	Производительность дворника, м^3/сутки		Ожидаемое количество осадков, м^3
	Бригада А	Бригада Б	
Подъезды	a_1	a_2	S_1
Дорожки возле домов	b_1	b_2	S_2
Прилегающие территории	c_1	c_2	S_3
Зарплата дворника, тыс. руб.	p_1	p_2	

Составить модель для задачи минимизации расходов ЖКХ при найме дворников, если снег должен убираться своевременно на всех территориях (предполагаем, что ежедневно выпадает примерно равное количество снега).

5) Аграрное предприятие планирует засеять два участка сельскохозяйственными культурами. Исходные известные величины заданы в таблице:

Таблица 23

С/х культуры	Урожайность, ц/га		Затраты, у.е./га		План урожая (тонн)
	Участок 1	Участок 2	Участок 1	Участок 2	
Картофель	140	120	30	35	4000
Свекла	300	400	60	65	3000
Подсолнечник	25	22	45	40	500

Составить математическую модель оптимального плана засева, при котором валовой сбор культур удовлетворяет плановому заданию, а стоимость затрат на посевы будет наименьшей.

6) Имеется оборудование для производства четырёх видов фруктово-ягодных соков («Здоровье», «Бодрость», «Успех», «Созвездие»), в состав которых входят яблоки, груши, апельсины, виноград, смородина, а также сахар и различные добавки. Известны запасы и содержание ингредиентов в одном литре каждого напитка, а также цена одного литра, которые приведены в таблице:

Таблица 24

Содержащиеся в соках фрукты, ягоды, сахар и добавки	Соки и содержание в них ингредиентов (г/л)				Запасы ингредиентов
	«Здоровье»	«Бодрость»	«Успех»	«Созвездие»	
Яблоки	a_1	a_2	a_3	a_4	A
Груши	b_1	b_2	b_3	b_4	B
Апельсины	c_1	c_2	c_3	c_4	C
Виноград	d_1	d_2	d_3	d_4	D
Смородина	e_1	e_2	e_3	e_4	E
Сахар	f_1	f_2	f_3	f_4	F
Различные добавки	g_1	g_2	g_3	g_4	G
Цена 1 литра сока	P_1	P_2	P_3	P_4	

Составить модель задачи максимизации стоимости выпущенных напитков с учётом имеющихся ограничений на ингредиенты.

7) На четырёх угольных шахтах производится уголь, который требуется перевезти в пять регионов. Известны запасы угля на шахтах, которые составляют соответственно 600, 500, 900 и 700 тыс. тонн. Потребности регионов составляют соответственно 750, 400, 650, 350 и 550 тыс. тонн. Стоимости перевозки одной тонны из каждой шахты в каждый регион заданы в таблице (табл.25). Составить модель задачи нахождения оптимального плана перевозок, при котором весь уголь из шахт вывозится, потребности всех регионов в угле удовлетворяются, а суммарная стоимость перевозок будет наименьшей.

Таблица 25

Шахты	Стоимости перевозок угля в регионы (усл. ед./тонн)				
	A	B	C	D	E
1	10	15	6	9	11
2	7	12	11	14	10
3	9	6	18	10	8
4	12	9	13	8	14

8) Предприятие решило привлечь пять рекламных агентств A, B, C, D, E для рекламирования выпущенной продукции. На основе предыдущих аналитических исследований выявлено, что каждая единица потраченных средств в эти рекламные агентства позволяет увеличить прибыль продукции соответственно на 2, 6, 4, 2 и 3 условные единицы. Общий объём выделяемых на рекламу средств составляет 200000 условных единиц. По условиям заключения договоров на каждое рекламное агентство предприятие должно тратить не менее 10% и не более 35% выделяемых для рекламы средств. Кроме того, на агентства A и B предприятие должно тратить не менее половины всех рекламных средств. Составить модель максимизации прибыли от вложенных в рекламу средств.

9) Военное командование руководит учениями войск на четырёх военных полигонах $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$. Требуется на эти полигоны оперативно доставить боеприпасы в размере соответственно 600, 750, 500 и 350 единиц, которые могут быть доставлены с военных баз A, B, C, где хранятся предназначенные для проводимых учений боеприпасы в размере 700, 900 и 600 единиц соответственно. Время доставки боеприпасов с базы A в полигоны $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ составляет соответственно 6, 4, 5 и 3 часа; с базы B – 3, 7, 4 и 6 часов соответственно; с базы C – 8, 6, 9 и 5 часов соответственно. Требуется составить модель перевозки боеприпасов с баз в полигоны за наикратчайшее время.

10) *(Задача о назначениях)*. Имеется n вакантных мест и n соискателей (кандидатов) для выполнения этих работ, причём каждый соискатель может выполнять только одну работу, и каждая работа может быть выполнена только

одним из соискателей. Известны величины c_{ij} – затраты i-го соискателя на выполнение j-й работы ($i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$). Требуется найти модель оптимального распределения соискателей на данные работы, то есть такого распределения, при котором суммарные затраты на выполнение работ будут минимальными.

Литература

1) Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.

2) Ашманов С.А. Линейное программирование. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 340 с.

3) Банди Б. Основы линейного программирования: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.

4) Гасс С. Линейное программирование. – М.: Физматгиз, 1961. – 303 с.

5) Данциг Д. Линейное программирование, его обобщения и применения. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.

6) Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. – СПб: Питер, 2000. – 208 с. – (Серия «Краткий курс»).

7) Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование. Минск: Вышейшая школа, 2006 г.

8) Лунгу К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. – М.: Физматлит, 2005. – 128 с.

9) Фомин Г.П. Методы и модели линейного программирования в коммерческой деятельности. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 128 с.

10) Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

Приложения

Приложение А. ***Ответы на тестовые задачи из п. 9.2:***

Задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответы	*а,б,г*	*б,в,д*	*г*	*а,д*	*б,в*	*б,в,г*	*а,г*	*в*	*г*	*б,д*
Задачи	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответы	*в,д*	*в,д*	*а*	*а,в*	*д*	*а*	*г*	*б,д*	*в,г,д*	*а*
Задачи	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ответы	*б,в,д*	*а,б,г*	*в*	*б*	*а*	*б,в*	*в,г,д*	*а,б,д*	*б,в*	*г*

Приложение Б. ***Указания к выполнению тестовых задач:***

1) В пункте (*в)* целевая функция не является линейной, а в пункте *(д)* второе ограничение в системе неравенств нелинейное. Поэтому в этих случаях задача не является задачей линейного программирования.

2) В пункте *(а)* задана задача на максимум, а знаки неравенств в системе ограничений имеют вид $\geq$; в пункте *(г)* задана задача на минимум, а знаки в неравенствах имеют вид $\leq$. Поэтому эти задачи записаны не в стандартной форме записи.

3) Только в случае *(г)* имеем верную запись модели задачи нахождения оптимального объёма производства, с учётом заданных в таблице условий.

4) Пункт *(а)* верен по определению выпуклого множества: пункт *(д)* верен, так как в случае, если обе координаты градиента отрицательны (например, $\vec{N} = (-2;\ -3)$), то точка $O = (0;\ 0)$ является точкой выхода из ОДР. Справедливость утверждения *(д)* означает, что варианты *(б)* и *(в)* не выполняются. Если же линия уровня параллельна одной из сторон многоугольника, то может получиться, что точек максимума будет бесчисленное множество, поэтому и вариант *(г)* неверный.

5) Для проверки правильности вариантов достаточно подставить координаты рассматриваемых точек в равенство $5x_1 - 4x_2 = 0$.

6) Справедливость или ложность утверждений проверяется на конкретных примерах. Например, утверждение *(а)* неверное, достаточно привести пример, когда целевая функция не ограничена на неограниченной области, представляющей ОДР.

7) Направление наискорейшего убывания функции $F(\bar{X}) = 2x_1 - x_2$ определяется вектором $-\vec{N} = (-2;\ 1)$, а с этим направлением должны совпасть только сонаправленные векторы.

8) Линия уровня будет параллельна прямой, проходящей через точки $(1; 4)$ и $(3; 6)$, и достигает максимума по всему отрезку, соединяющему эти точки.

9) Только в случае *(г)* точка $(5;\ 4)$ является точкой минимума.

10) Проверка вариантов основана на знании теоретической части материала.

11) В пункте *(в)* ЗЛП не имеет решений, так как первое уравнение системы противоречит условию неотрицательности всех переменных. Аналогично в пункте *(д)* условию неотрицательности переменных противоречит второе уравнение системы.

12) Проверка правильности вариантов осуществляется на знании алгоритма улучшения плана и умении менять местами свободные и базисные переменные.

13) Исходя из записи оптимального решения, видно, что свободными переменными должны быть $x_2,\ x_4, x_5$. И так как задача задана на максимум, то в целевой функции коэффициенты при переменных должны быть неположительными. Этим условиям удовлетворяет только случай *(а)*.

14) Справедливость утверждений проверяется по правилам составления взаимно-двойственных задач.

15) Только в случае *(д)* имеем двойственную задачу, которая удовлетворяет всем правилам составления взаимно-двойственных задач.

16) В заданной задаче переменные x_1, x_2, x_3, x_4 являются исходными, тогда после приведения к канонической форме переменные x_5, x_6, x_7 будут дополни-

тельными. Значит, в двойственной задаче исходными будут три переменные y_1, y_2, y_3, а дополнительными переменными будут y_4, y_5, y_6, y_7. Тогда только в случае *(а)* верно установлено соответствие между сопряжёнными переменными.

17) Исходя из заданной задачи, установим соответствие между сопряжёнными переменными:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow. \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

Тогда по коэффициентам целевой функции, заданной на максимум, и определяем компоненты оптимального плана двойственной задачи. Верным является только случай *(г)*.

18) Проверка вариантов основана на знании экономической интерпретации переменных взаимно-двойственных ЗЛП.

19) Проверка справедливости утверждений основана на правильном понимании открытых и закрытых моделей транспортных задач.

20) Число заполненных клеток не должно превышать величины, равной $m + n - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$, то есть может быть равно девяти, или меньше девяти. Поэтому верным является только утверждение *(а)*.

21) Сопоставление стоимостей перевозок, осуществлённых тремя способами, как было отмечено в теоретической части пособия, в разных задачах может приводить к различным результатам. На основании этого легко выполнить проверку всех предложенных вариантов.

22) Проверка утверждений основана на понимании алгоритмов нахождения первоначального допустимого плана и причинах возникновения вырожденного плана на первом этапе решения транспортной задачи.

23) В данном случае получаем вырожденный план, так как должно быть девять заполненных клеток. И чтобы сделать план вырожденным, необходимо вписать в две пустые клетки нули и считать эти клетки заполненными. Значит, только вариант *(в)* является верным.

24) Вводимым в рассмотрение потенциалам удовлетворяет только утверждение *(б)*.

25) Согласно критерию оптимальности, верным является только утверждение *(а)*.

26) Справедливость или ложность утверждений здесь можно проверить на примерах и контрпримерах, основанных на понимании нахождения оценок свободных клеток и их правильной интерпретации.

27) Пункт *(а)* не выполняется, поскольку в цикле перераспределения должна быть только одна пустая клетка; пункт *(б)* не выполняется, поскольку в цикле должно быть чётное число вершин. Остальные утверждения справедливы, и это можно показать на конкретных примерах.

28) Справедливость или ложность всех утверждений вытекает из правила перераспределения ресурса по циклу.

29) Если при перераспределении ресурса по циклу опустошается только одна клетка, то новый план будет невырожденным. Поэтому утверждение *(а)* является неверным. Если же опустошается более одной клетки, то план будет вырожденным. Значит, утверждение *(г)* тоже неверное. Тогда, очевидно, справедливы утверждения *(б)* и *(в)*. То, что утверждение *(д)* не является верным, можно показать на примере, когда имеются три поставщика и три потребителя. Тогда возможно при нахождении первоначального плана перевозок получить невырожденный план, в котором будет пять заполненных клеток, а свободных – четыре клетки.

30) Воспользуемся формулой $F(X_{i+1}) = F(X_i) - \theta \cdot |\Delta_{ij}|$, откуда и следует справедливость варианта *(г)*.

Н.А. Мунасыпов

ЛИНЕЙНОЕ
ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Отпечатано с готового оригинал-макета 05.05.2015 г.
Заказ № 2155. Тираж 100 экз.
Усл. печ. л. 7,63.

ЛР № 063109 от 04.02.1999 г.
ООО «Агентство «Пресса»
г. Оренбург, ул. Пролетарская, 15.