

Pembangunan *R Package* pada Model Fay-Herriot Multivariat untuk Pendugaan Area Kecil Metode *Ratio Benchmarking*

Zenda Oka Briantiko (221710087, 4SD2)

Dosen Pembimbing: Dr. Azka Ubaidillah

Ringkasan— *Small Area Estimation* (SAE) merupakan salah satu teknik estimasi parameter area kecil dengan cara meminjam kekuatan area sekitarnya. SAE dengan model Fay-Herriot menjadi model yang paling banyak digunakan. Fay-Herriot multivariat merupakan pengembangan dari model Fay-Herriot univariat dengan memanfaatkan korelasi antarvariabel. Estimasi dari model multivariat terbukti lebih efisien dibandingkan dengan model univariat. Namun, konsistensi agregasi sebagai syarat dari *official statistics* tidak bisa didapatkan dari estimasi tidak langsung. Salah satu metode yang dilakukan untuk mengatasi hal ini adalah metode *benchmarking*. *Ratio benchmarking* sebagai salah satu bentuk dari metode *benchmarking* mempunyai kekurangan yaitu tidak tersedianya estimator *Mean Squared Error* (MSE) yang tidak bias. MSE dari *ratio benchmarking* dapat diestimasi dengan metode *resampling*, salah satunya dengan *parametric bootstrap*. Penulis membangun algoritma dari model *ratio benchmarking* dan mengimplementasikannya dalam bentuk *R Package*. Hasil estimasi menunjukkan bahwa *package* yang dibangun telah sesuai dan bisa digunakan.

Kata Kunci— *Small Area Estimation, Multivariate, Ratio Benchmarking, Bootstrap, R Package*.

I. LATAR BELAKANG

Permintaan statistik area kecil meningkat selama beberapa tahun terakhir karena semakin banyak pembuat kebijakan yang menuntut perkiraan domain kecil untuk digunakan dalam pengambilan kebijakan. Kebijakan yang tepat yaitu kebijakan yang berdasarkan data, di mana data diperoleh dengan pengumpulan data melalui sensus maupun survei. Sensus sebagai pengumpulan data dengan cara cacah lengkap kurang mampu menjawab kebutuhan data secara *up to date*. Selain itu sensus memerlukan biaya yang cukup besar. Survei sampel sebagai cara pengumpulan data sampel dapat dilaksanakan secara efektif dari segi waktu dan biaya. Akan tetapi, estimasi langsung dari survei sampel bias terhadap parameternya karena terdapat *sampling error*. Semakin sedikitnya jumlah sampel menyebabkan *sampling error* semakin besar, sehingga estimasinya semakin tidak *reliable*. *Small Area Estimation* (SAE) dapat mengatasi masalah untuk area dengan sampel yang kurang memadai. SAE dapat meningkatkan efektifitas ukuran sampel survei dengan meminjam kekuatan area tetangga dan hubungan antara kumpulan *auxiliary variable* dengan *variable of interest* [1].

SAE dengan model Fay-Herriot menjadi model yang paling banyak digunakan dalam estimasi area kecil [2]. Metode dari

model Fay-Herriot yang estimatornya diperoleh ketika varians *random effect* tidak diketahui disebut sebagai *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP). Referensi [3] menunjukkan bahwa terdapat banyak variabel penelitian yang memiliki korelasi kuat, di mana variabel-variabel tersebut dapat diestimasi secara bersama-sama menggunakan metode SAE multivariat. Dengan menggunakan keuntungan korelasi antar variabel, menunjukkan bahwa model-model multivariat dapat menghasilkan estimator yang lebih efisien daripada model-model univariat [1].

Estimasi tidak langsung dengan menggunakan SAE dapat berbeda dengan estimasi langsung ketika diagregasikan. Hal ini menjadi masalah karena survei asli dirancang untuk mencapai akurasi inferensia tertentu pada tingkat agregasi yang lebih tinggi [4]. Di sisi lain, estimasi tidak langsung dengan SAE menghasilkan estimasi yang lebih *reliable*. Metode *benchmarking* memperkuat inferensia suatu *model-based predictor* agar agregasi dari estimasi area-area kecilnya bisa sesuai dengan estimasi langsung (*design based*) yang *reliable* [5]. Namun, terkadang estimasi langsung untuk beberapa area tidak dapat diperoleh karena tidak adanya sampel. Area dengan ukuran sampel nol dapat diestimasi dengan bantuan informasi kluster [6], sehingga estimasi tidak langsungnya dapat diperoleh.

Ratio benchmarking merupakan salah satu metode yang paling banyak digunakan dalam memodifikasi penduga EBLUP. Namun, estimator *Mean Squared Error* (MSE) yang tidak bias tidak tersedia [7]. Sebagai salah satu metode untuk memodifikasi penduga EBLUP yang paling banyak digunakan, peneliti mengembangkan alat komputasi untuk metode *benchmarking*. Peneliti mengembangkan alat komputasi *ratio benchmarking* multivariat karena alat komputasi *benchmarking* univariat telah dibuat dan dikembangkan oleh peneliti sebelumnya.

Berdasarkan permasalahan di atas, penelitian ini akan fokus membangun model estimasi dan MSE untuk *ratio benchmarking* univariat dan multivariat serta penerapannya pada *R package*. *R package* tersebut terdiri dari fungsi estimasi dan MSE untuk *ratio benchmarking* univariat dan multivariat. Kemudian peneliti akan mengimplementasikan *R package* pada data bangkitan dan data studi kasus.

II. TUJUAN PENELITIAN

Berdasarkan latar belakang, tujuan dilakukannya penelitian ini yaitu:

1. Mengkaji dan membangun estimasi dan MSE metode *ratio benchmarking* pada model Fay-Herriot univariat dan multivariat.
2. Membangun *R package* untuk metode *ratio benchmarking* pada model Fay-Herriot univariat dan multivariat.
3. Mengimplementasikan *R package* pada data bangkitan dan data studi kasus.

III. PENELITIAN TERKAIT

Tabel di bawah ini merupakan penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan penelitian yang akan dilakukan.

TABEL I
Penelitian Terkait

| No | Judul | Penulis | Tertulis |
|----|--|---|--|
| 1 | <i>Multivariate Fay-Herriot models for small area estimation with application to household consumption per capita expenditure in Indonesia</i> | Azka Ubaidillah, Khairil Anwar Notodiputro, Anang Kurnia, dan I. Wayan Mangku | <i>Small Area Estimation</i> (SAE) dapat meningkatkan efektivitas ukuran sampel survei dengan meminjam kekuatan daerah tetangga dan hubungan antara <i>auxiliary variable</i> dengan <i>variable of interest</i> (2845 - 2846). Kita dapat menunjukkan bahwa model <i>Multivariate Fay-Herriot</i> menghasilkan estimasi parameter yang lebih efisien daripada model <i>Univariate Fay-Herriot</i> (2859). |
| 2 | <i>Multivariate Fay-Herriot models for small area estimation</i> | Roberto Benavent dan Domingo Morales | Model Fay-Herriot telah menjadi salah satu model yang paling banyak digunakan dalam pendugaan area kecil (372). |
| 3 | Pembangunan Paket R pada Model Fay Herriot Multivariat untuk Pendugaan Arae Kecil | Novia Permatasari | Pada umumnya, terdapat banyak variabel penelitian yang memiliki korelasi kuat, tidak terkecuali beberapa variabel hasil survei BPS. Dengan menggunakan SAE, variabel-variabel tersebut dapat diestimasi secara bersama-sama menggunakan metode SAE multivariat (2) |
| 4 | <i>Bayesian Benchmarking with Applications to Small Area Estimation</i> | G. S. Datta, M. Ghosh, R. Streorts, dan J. Maples | Meskipun estimasi area kecil berbasis model sangat berguna, satu masalah potensial dengan estimasi tersebut adalah ketika digabungkan, estimasi keseluruhan untuk wilayah geografis yang lebih luas mungkin cukup berbeda dari estimasi langsung terkait, yang terakhir biasanya diyakini cukup andal. Ini karena survei asli dirancang untuk mencapai akurasi inferensial tertentu pada tingkat agregasi yang lebih tinggi. (1) |

| | | | |
|---|--|----------------------------------|--|
| 5 | <i>New Important Developments in Small Area Estimation</i> | Danny Pfeffermann | <i>Benchmarking</i> memperkuat inferensi dengan memaksa prediktor <i>model-based</i> untuk sesuai dengan estimator <i>design-based</i> dimana agregasi dari <i>design-based</i> estimator yaitu <i>reliable</i> (11) |
| 6 | <i>Mean Squared Error of Non-Sampled Area in Small Area Estimation</i> | Faisal Haris dan Azka Ubaidillah | Area dengan ukuran sampel nol dapat diestimasi dengan bantuan dari informasi klaster (1) |
| 7 | <i>Small Area Estimation</i> | J.N.K. Rao dan Isabel Molina | Modifikasi yang sangat sederhana namun banyak digunakan untuk EBLUP disebut <i>ratio benchmarking</i> . Penduga MSE orde kedua yang tidak bias tidak tersedia (184). |

IV. METODE PENELITIAN

A. Metode Analisis

Fay-Herriot Multivariat

Model Fay-Herriot multivariat merupakan model Fay-Herriot univariat yang dikembangkan dengan memperhitungkan korelasi antarvariabel. Model Fay-Herriot multivariat didefinisikan dalam dua tahap. Misalkan populasi terbatas dibagi menjadi D domain dan diasumsikan μ_d dihubungkan dengan *auxiliary variable* x_d dan termasuk *random effect* u_d , maka *linking model* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mu_d = x_d\beta + u_d, \quad u_d \sim N(0, V_{ud}), \quad d = 1, \dots, D \quad (1)$$

dengan $\mu_d = (\mu_{d1}, \dots, \mu_{dR})'$ dan $x_d = \text{diag}(x_{d1}, \dots, x_{dR})_{R \times p}$ dengan $p = \sum_{r=1}^R p_r$. β merupakan vektor kolom dengan ukuran $p \times 1$. Selanjutnya penduga langsung tidak bias atau disebut *sampling model* bisa dituliskan sebagai berikut:

$$y_d = x_d\beta + u_d + e_d, \quad e_d \sim N(0, V_{ed}) \quad (2)$$

dengan menggabungkan persamaan (1) dan (2) diperoleh model Fay-Herriot multivariat yang dituliskan sebagai berikut:

$$y = X\beta + Zu + e \quad (3)$$

dengan y adalah hasil estimasi langsung, X adalah matriks variabel penyerta, β adalah nilai koefisien regresi, Z adalah matriks identitas, u adalah pengaruh acak area dan e adalah *sampling error*. Komponen e dan u bersifat independen.

Empirical Best Linear Unbiased Prediction (EBLUP)

Empirical Best Linear Unbiased Prediction (EBLUP) merupakan salah satu metode untuk mengestimasi model Fay-Herriot multivariat dengan mengganti ragam (V_u) pada persamaan *Best Linear Unbiased Prediction (BLUP)* dengan penduga ragam (\hat{V}_u) yang diestimasi menggunakan metode *Restricted Maximum Likelihood (REML)*. Persamaan EBLUP dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_E = X\hat{\beta}_E + Z\hat{V}_uZ'\hat{V}^{-1}(y - X\hat{\beta}_E) \quad (4)$$

$$\hat{V} = Z\hat{V}_uZ' + V_e \quad (5)$$

$$\hat{\beta}_E = (X'\hat{V}^{-1}X)^{-1}X'\hat{V}^{-1}y \quad (6)$$

Ratio Benchmarking

Benchmarking yaitu metode yang dilakukan agar hasil agregasi estimasi area kecil $\hat{\mu}_{Ed}$ sesuai dengan estimasi langsung yang sudah *reliable*. Metode ini dilakukan dengan memodifikasi $\hat{\mu}_{Ed}$. *Ratio Benchmarking* merupakan metode yang dilakukan dengan mengalikan $\hat{\mu}_{Ed}$ dengan suatu faktor pengali yang sama yaitu $\frac{\sum_{d=1}^D w_d \hat{\mu}_d}{\sum_{d=1}^D w_d \hat{\mu}_{Ed}}$ [7]. Model *ratio benchmarking* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_{RBd} = \hat{\mu}_{Ed} \left(\frac{\sum_{d=1}^D w_d \hat{\mu}_d}{\sum_{d=1}^D w_d \hat{\mu}_{Ed}} \right) \quad (7)$$

Ratio benchmarking merupakan modifikasi EBLUP yang sederhana tetapi paling banyak digunakan. Namun, estimator MSE yang tidak bias tidak tersedia, tidak seperti pada kasus $\hat{\mu}_E$ [8].

Estimasi dari Mean Squared Error (MSE)

MSE akan berfungsi sebagai alat untuk membandingkan metode alternatif untuk memilih metode mana yang terbaik dan paling akurat [9]. Referensi [2] menunjukkan bahwa mengestimasi nilai MSE pada model Fay-Herriot multivariat melalui persamaan Prasad-Rao yang dituliskan sebagai berikut:

$$mse(\hat{\mu}_E) = g_1(\hat{\sigma}_u^2) + g_2(\hat{\sigma}_u^2) + 2g_3(\hat{\sigma}_u^2) \quad (8)$$

dengan komponen sebagai berikut:

$$g_1(\hat{\sigma}_u^2) = \Gamma V_e \quad (9)$$

$$g_2(\hat{\sigma}_u^2) = (1 - \Gamma) X Q X' (1 - \Gamma)' \quad (10)$$

$$(\hat{\sigma}_u^2) = \sum \sum cov(\hat{\sigma}_{uk}^2, \hat{\sigma}_{ul}^2) \Gamma_{(k)} \hat{V} \Gamma_{(l)}', k, l = 1, \dots, q \quad (11)$$

di mana, $\Gamma = Z(\hat{V}_u)Z'\hat{V}$, $\Gamma_{(k)} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_u^2}$, $Q = (x'V^{-1}x)^{-1}$,

$$cov(\hat{\sigma}_{uk}^2, \hat{\sigma}_{ul}^2) = (F_{a,b})^{-1}$$

MSE *ratio benchmarking* tidak tersedia, maka dilakukan proses *resampling* yaitu dengan *parametric bootstrap* untuk mengestimasi nilai MSE. *Bootstrap resampling* dari data sampel dapat digunakan untuk mengestimasi MSE EBLUPs, $\hat{\mu}_{Ed}$, dan MSE yang lebih kompleks [2]. Pendekatan $mse_B(\hat{\mu}_E)$ oleh Monte Carlo:

$$mse_B(\hat{\mu}_E) = B^{-1} \sum_{b=1}^B [\hat{\mu}_{Ed}^{*(b)} - \mu_d^{*(b)}]^2 \quad (12)$$

Model kedua, *hybrid bootstrap MSE estimator* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$MSE(\hat{\mu}_{Ed}) = [g_{1d}(\hat{\sigma}_u^2) + g_{2d}(\hat{\sigma}_u^2)] + E(\hat{\mu}_{Ed} - \tilde{\mu}_{Ed})^2 \quad (13)$$

Model ketiga, MSE *parametric bootstrap bias correction* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$mse(\hat{\mu}_{Ed}) = 2[g_{1d}(\hat{\sigma}_u^2) + g_{2d}(\hat{\sigma}_u^2)] - \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B [g_1(\hat{\sigma}_u^{2*(b)}) + g_2(\hat{\sigma}_u^{2*(b)})] + \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B [\hat{\mu}_{Ed}(\hat{\sigma}_u^{2*(b)}) - \hat{\mu}_{Ed}(\hat{\sigma}_u^{2(b)})]^2 \quad (14)$$

EBLUP dengan informasi kluster

Referensi [6] menunjukkan bahwa terdapat pendekatan dengan menambahkan rata-rata estimator dari *random effect* area dan *auxiliary variable* di setiap kluster untuk memodifikasi *intercept* maupun *slope* model prediksi. Model estimasi EBLUP adalah sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_E = X\hat{\beta}_E + Z\hat{u}_E \quad (15)$$

Sedangkan penduga EBLUP untuk daerah tidak tersampel adalah sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_E = X\hat{\beta}_E \quad (16)$$

Rata-rata *random effect* untuk daerah tidak tersampel dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{u}_{d(k)} = \frac{1}{m_k} \sum_{d=1}^{m_k} \hat{u}_d \quad (17)$$

$\hat{u}_{d(k)}$ = Rata-rata *random effect* pada kluster ke- k

m_k = Banyaknya area sampel pada kluster ke- k

\hat{u}_d = *Random effect* area sampel ke- d

Dengan memasukkan informasi pada persamaan ke (17) ke dalam persamaan ke (16), maka diperoleh model EBLUP untuk daerah tidak tersampel yaitu sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_E = X\hat{\beta}_E + Z\hat{u}_d \quad (18)$$

MSE non-sampled area

MSE untuk *non-sampled* area bisa diperoleh dengan memodifikasi estimator Prasad-Rao. Referensi [10] menunjukkan bahwa untuk memodifikasi estimator Prasad-Rao penulis mengusulkan menggunakan $\bar{V}_e, \bar{g}_3(\hat{\sigma}_u^2)$, dan $\bar{\Gamma}$ dengan informasi kluster. Jadi estimator Prasad-Rao untuk mengestimasi area *non-sampled* adalah sebagai berikut:

$$mse(\hat{\mu}_E^{ns}) = g_1(\hat{\sigma}_u^2)_{(k)} + g_2(\hat{\sigma}_u^2)_{(k)} + 2\bar{g}_3(\hat{\sigma}_u^2)_{(k)} \quad (19)$$

dengan komponen sebagai berikut:

$$g_1(\hat{\sigma}_u^2)_{(k)} = \bar{\Gamma} \bar{V}_e \quad (20)$$

$$g_2(\hat{\sigma}_u^2)_{(k)} = (1 - \bar{\Gamma}) X Q X' (1 - \bar{\Gamma})' \quad (21)$$

System Usability Scale (SUS)

System Usability Scale (SUS) adalah skala sepuluh item sederhana yang memberikan pandangan global tentang subjektif penilaian kegunaan [11]. Sepuluh item tersebut dituliskan dengan R1 sampai dengan R10. SUS memiliki bentuk skala likert dengan lima pilihan jawaban. Cara menghitung skor SUS adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Skor SUS} = & \{(R1 - 1) + (5 - R2) \\ & + (R3 - 1) + (5 - R4) \\ & + (R5 - 1) + (5 - R6) \\ & + (R7 - 1) + (5 - R8) \\ & + (R9 - 1) + (5 - R10)\} * 2,5 \quad (22) \end{aligned}$$

B. Metode Pengumpulan Data

Data yang digunakan pada penelitian ini terdiri dari data studi kasus dan data simulasi. Data studi kasus yang digunakan adalah data Susenas Maret 2019 dan Podes 2019 (Desa) Provinsi D.I. Yogyakarta untuk mengestimasi pengeluaran makanan dan non-makanan di seluruh kecamatan di Provinsi D.I. Yogyakarta 2019.

Data simulasi terdiri dari *Data on fresh milk expenditure* yang diperoleh dari *package 'sae'* dan data bangkitan yang diperoleh dengan membangkitkan data. Kondisi data merujuk pada penelitian rujukan, yaitu penelitian [1] dan [2]. Pada data bangkitan digunakan nilai $D = 50, 100$, dan 200 observasi dan $R = 2$ variabel. Simulasi ini bertujuan untuk validasi nilai MSE dari univariat dan multivariat EBLUP dan *ratio benchmarking*. Model simulasinya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y_1 = \beta_{01} + \beta_{11}x_1 + \beta_{21}x_2 + u_1 + e_1 \quad (23)$$

$$y_2 = \beta_{02} + \beta_{12}x_1 + \beta_{22}x_2 + u_2 + e_2 \quad (24)$$

$$u_d \sim N(0, V_{ud}), \quad e_d \sim N(0, V_{ed}) \quad (25)$$

Inisiasi pengaruh acak area $\sigma_{u11} = 0.2$ dan $\sigma_{u22} = 0.3$, diperoleh $V_{ud} = (\sigma_{uii})_{i=1, \dots, R}$. Inisiasi *sampling error* $\sigma_{e11} = 0.1$, $\sigma_{e22} = 0.2$, dan kovarians *sampling error* $\sigma_{eij} = \rho_e \sqrt{\sigma_{eii} \sigma_{ejj}}$ dengan nilai koefisien korelasi $\rho_e = 0$, dan 0.5 , diperoleh $V_{ed} = (\sigma_{eij})_{i,j=1, \dots, R}$. Inisiasi $\beta_{01} = 5, \beta_{02} = 4, \beta_{11} = -0.15, \beta_{12} = 0.1, \beta_{21} = 0.25$, dan $\beta_{22} = -0.05$. *Auxiliary variable* x dibangkitkan $x_1 \sim N(10, 1)$ dan $x_2 \sim U(9.5, 10.5)$ dan penimbang dibangkitkan $w_{1,2} \sim (10, 20)$ lalu diproporsikan setiap variabelnya.

Simulasi dilakukan untuk menguji perbandingan MSE EBLUP dan *ratio benchmarking* untuk univariat dan multivariat. Langkah-langkah simulasi sebagai berikut:

1. Ulangi sebanyak $I = 50$ kali ($i = 1, \dots, I$)
 - 1.1 Bangkitkan $\{(e_{dr}^{(i)}, u_{dr}^{(i)}, y_{dr}^{(i)}, x_{dr}) : d = 1, \dots, D, r = 1, 2\}$
 - 1.2 Hitung nilai parameter

$$\mu_d^{(i)} = X_d \beta + u_d, \hat{\sigma}_{ur}^{2(i)}, \hat{\beta}_{Er}^{(i)}, d = 1, \dots, D, r = 1, 2$$
 - 1.3 Hitung nilai MSE Prasad-Rao

$$mse_d^{1(i)} = g_{1d}(\hat{\sigma}_u^2) + g_{2d}(\hat{\sigma}_u^2) + 2g_{3d}(\hat{\sigma}_u^2)$$
 - 1.4 *Bootstrap* sebanyak $B = 200$ kali ($b = 1, \dots, B$)
 - 1.4.1 Bangkitkan $\{(e_{dr}^{*(ib)}, u_{dr}^{*(ib)}, y_{dr}^{*(ib)}, x_{dr}) : d = 1, \dots, D, r = 1, 2\}$, mengambil informasi $\hat{\sigma}_{ur}^{2(i)}$ dan $\hat{\beta}_{Er}^{(i)}$ sebagai ganti dari σ_{ur}^2 dan β_r , $r = 1, 2$
 - 1.4.2 Hitung nilai parameter

$$\mu_d^{(ib)} = X_d \hat{\beta}_{Er}^{(i)} + u_d^{*(ib)}, \hat{\sigma}_{ur}^{2*(ib)}, \hat{\beta}_{Br}^{(ib)}, \hat{\beta}_{Er}^{(ib)}, d = 1, \dots, D, r = 1, 2$$
 - 1.4.3 Hitung nilai berikut

$$\hat{\mu}_{Bd}^{*(ib)} = X_d \hat{\beta}_B^{*(ib)} + I_2 \hat{u}_{Bd}^{*(ib)}, \text{ selanjutnya estimasi } ratio \text{ benchmarking } \hat{\mu}_{RBd}^{*(ib)}$$

$$\hat{\mu}_{Ed}^{*(ib)} = X_d \hat{\beta}_E^{*(ib)} + I_2 \hat{u}_{Ed}^{*(ib)}, \text{ selanjutnya estimasi } ratio \text{ benchmarking } \hat{\mu}_{RBd}^{*(ib)}$$

$$\delta_{RBd}^{*(ib)} = (\hat{\mu}_{RBEd}^{*(ib)} - \hat{\mu}_{RBd}^{*(ib)})$$

1.5 Untuk $d = 1, \dots, D$, hitung *mse bootstrap*

$$\begin{aligned} mse_d^{2(i)} = & 2[g_{1d}^{(i)}(\hat{\sigma}_u^{2(i)}) + g_{2d}^{(i)}(\hat{\sigma}_u^{2(i)})] \\ & - \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B [g_{1d}^{(i)}(\hat{\sigma}_u^{2*(ib)}) \\ & + g_{2d}^{(i)}(\hat{\sigma}_u^{2*(ib)})] + \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \delta^{*(ib)} \delta^{*(ib)t} \end{aligned}$$

2. Hitung nilai MSE Bootstrap

$$mse_d^1 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I mse_d^{1(i)}$$

$$mse_d^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I mse_d^{2(i)}$$

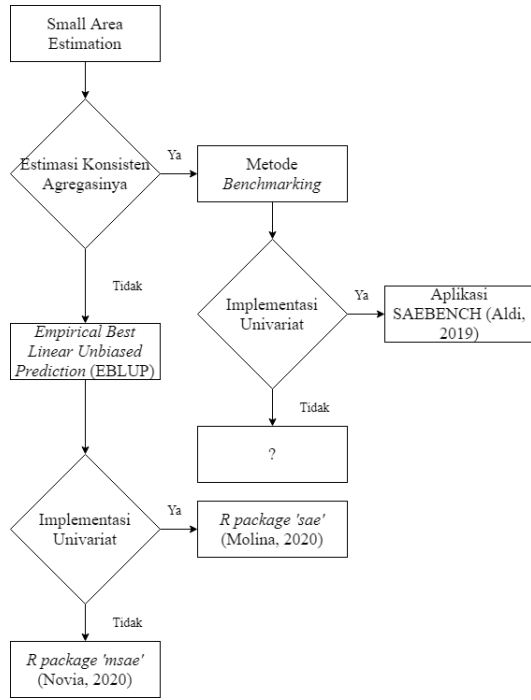
C. Tahapan Penelitian

Penelitian dilakukan merujuk pada *design science research* dengan tahapan-tahapan sebagai berikut:

1. *Problem identification*
Pada tahap ini peneliti melakukan identifikasi masalah, perumusan masalah, dan perumusan tujuan penelitian terkait model *ratio benchmarking*.
2. *Define the objective for a solution*
Pada tahap ini dilakukan pencarian solusi dengan melakukan studi literatur.
3. *Design and development*
Pada tahap ini dilakukan pembuatan model *ratio benchmarking* dan pembuatan *R Package*.
4. *Demonstration*
Pada tahap ini dilakukan implementasi pada data bangkitan dan data studi kasus.
5. *Evaluation*
Hasil dari *demonstration* selanjutnya dievaluasi dengan uji validitas, uji performa, dan uji SUS.
6. *Communication*
Pada tahap ini penulis mendokumentasikan *R Package* pada situs CRAN, memaparkan hasil penelitian di seminar, dan mendokumentasikan dalam bentuk *hard file*.

V. KERANGKA PIKIR

Kerangka pikir pada penelitian ini menggambarkan kebutuhan aplikasi untuk estimasi *small area estimation* multivariat yang konsisten yaitu dengan metode *benchmarking* yang dapat ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 1. Kerangka Pikir

VI. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Design and development

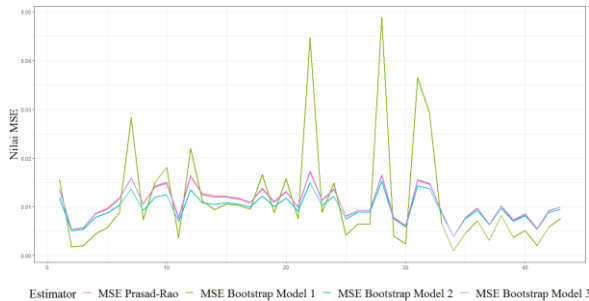
Model estimasi ratio benchmarking multivariat

Model multivariat *ratio benchmarking* merupakan modifikasi dari model univariat *ratio benchmarking* pada persamaan ke (7). Pengaplikasian multivariat hanya memanfaatkan korelasi antar variabel untuk mengestimasi EBLUP. Sehingga model *ratio benchmarking* multivariat merupakan model univariat setiap variabelnya. Model *ratio benchmarking* multivariat dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_{RBdr} = \hat{\mu}_{Edr} \left(\frac{\sum_{d=1}^D w_{dr} \hat{\mu}_{dr}}{\sum_{d=1}^D w_{dr} \hat{\mu}_{Edr}} \right) \quad (26)$$

Estimasi MSE dengan parametric bootstrap

Dari ketiga model *bootstrap* akan dipilih model terbaik yang paling mendekati estimasi MSE Prasad-Rao. Berikut merupakan grafik perbandingan MSE Prasad-Rao dengan tiga model pendekatan *bootstrap*. Pemodelan dilakukan menggunakan data milk yang terdapat pada *package 'sae'*.



Gambar 2. Perbandingan MSE Prasad-Rao dengan MSE bootstrap

Berdasarkan gambar 2 terlihat bahwa MSE *bootstrap* model pertama memiliki pola yang mirip dengan MSE Prasad-Rao. Namun, nilainya cenderung berbeda. Sedangkan MSE *bootstrap* model kedua dan ketiga memiliki pola dan nilai yang mendekati MSE Prasad-Rao. Ketiga model tersebut dibandingkan dengan melihat perbandingan rata-rata dan standar deviasi dari selisih tiap-tiap model MSE *bootstrap* terhadap MSE Prasad-Rao. Perbandingan tersebut dapat dilihat pada tabel berikut:

TABEL II
Perbandingan MSE *Bootstrap*

| | Selisih I | Selisih II | Selisih III |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Rata-rata | $-6,4 \times 10^{-4}$ | $9,24 \times 10^{-4}$ | $2,34 \times 10^{-5}$ |
| Standar Deviasi | $7,77 \times 10^{-3}$ | $7,09 \times 10^{-4}$ | $5,07 \times 10^{-5}$ |

Berdasarkan Tabel II dapat ditunjukkan bahwa nilai rata-rata dan standar deviasi dari selisih MSE *bootstrap* model ketiga terhadap MSE Prasad-Rao lebih kecil dibandingkan dengan selisih MSE *bootstrap* model pertama dan kedua terhadap MSE Prasad-Rao. Maka dari itu penulis menggunakan MSE *bootstrap* model ketiga atau MSE *bootstrap bias correction* untuk mengestimasi MSE dari *ratio benchmarking*.

Dengan mengganti parameter $\hat{\mu}_{Ed}$ dengan $\hat{\mu}_{RBd}$, persamaan untuk MSE *ratio benchmarking* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} mse(\hat{\mu}_{RBd}) &= 2[g_{1d}(\hat{\sigma}_u^2) + g_{2d}(\hat{\sigma}_u^2)] \\ &\quad - \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B [g_1(\hat{\sigma}_u^{2*(b)}) + g_2(\hat{\sigma}_u^{2*(b)})] \\ &\quad + \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B [\hat{\mu}_{RBd}(\hat{\sigma}_u^{2*(b)}) \\ &\quad - \hat{\mu}_{RBd}(\hat{\sigma}_u^{2(b)})]^2 \end{aligned} \quad (27)$$

Langkah-langkah estimasi MSE dengan *parametric bootstrap* dapat dituliskan sebagai berikut:

1. Estimasi nilai *random effect* ($\hat{\sigma}_u^2$) dan koefisien *beta* ($\hat{\beta}$)
2. Hitung komponen $g_1(\hat{\sigma}_u^2)$ dan $g_2(\hat{\sigma}_u^2)$
3. *Bootstrap B* kali ($b = 1, \dots, B$)
 - 3.1 Bangkitkan $e_{dr}^{*(b)}, u_{dr}^{*(b)}$
 - 3.2 Hitung nilai parameter ($\mu_d^{*(b)}$) dan *direct bootstrap* ($\hat{\mu}_d^{*(b)}$)
 - 3.3 Estimasi nilai *random effect* ($\hat{\sigma}_u^{2*(b)}$) dan *beta* ($\hat{\beta}^{*(b)}$)
 - 3.4 Hitung EBLUP *bootstrap I*: ($\hat{\mu}_{Bd}$)
 - 3.5 Estimasi *ratio benchmarking bootstrap I*: ($\hat{\mu}_{RBBd}^{*(b)}$)
 - 3.6 Hitung komponen $g_1(\hat{\sigma}_u^{2*(b)})$ dan $g_2(\hat{\sigma}_u^{2*(b)})$
 - 3.7 Estimasi EBLUP *bootstrap II*: ($\hat{\mu}_{Ed}$)
 - 3.8 Estimasi *ratio benchmarking bootstrap II*: ($\hat{\mu}_{RBEd}^{*(b)}$)
4. Hitung MSE *ratio benchmarking*:

$$mse(\hat{\mu}_{RBd}) = 2[g_{1d}(\hat{\sigma}_u^2) + g_{2d}(\hat{\sigma}_u^2)] - \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B [g_1(\hat{\sigma}_u^{2*(b)}) + g_2(\hat{\sigma}_u^{2*(b)})] + \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B [\hat{\mu}_{RBd}(\hat{\sigma}_u^{2*(b)}) - \hat{\mu}_{RBd}(\hat{\sigma}_u^{2*(b)})]^2$$

Metode *bootstrap* ini mempunyai kelemahan yaitu penduganya bisa negatif. Seperti yang dijelaskan oleh [13] bahwa penulis tidak merekomendasikan penggunaan *bootstrap* jika $\hat{\sigma}_u$ terlalu mendekati nol.

Pembuatan R Package

R Package yang dibangun bernama ‘msaeRB’ yang merupakan singkatan dari *Multivariate Small Area Estimation Ratio Benchmarking*. Package ini *dependent* dengan beberapa package, diantaranya yaitu ‘MASS’, ‘abind’, ‘magic’, ‘Matrix’, dan ‘stats’. Package ini terdiri dari delapan *function* dan dua *dataset*. *Function* tersebut yaitu *est_saeRB()*, *est_msaeRB()*, *est_saeRBns()*, *est_msaeRBns()*, *mse_saeRB()*, *mse_msaeRB()*, *mse_saeRBns()*. Berikut merupakan rincian dari deskripsi tiap-tiap *function*.

TABEL III
Deskripsi *Function*

| Function | Deskripsi |
|-----------------------|---|
| <i>est_saeRB()</i> | Estimasi EBLUP dan <i>ratio benchmarking</i> univariat |
| <i>est_msaeRB()</i> | Estimasi EBLUP dan <i>ratio benchmarking</i> multivariat |
| <i>mse_saeRB()</i> | MSE EBLUP dan <i>ratio benchmarking</i> univariat |
| <i>mse_msaeRB()</i> | MSE EBLUP dan <i>ratio benchmarking</i> multivariat |
| <i>est_saeRBns()</i> | Estimasi EBLUP dan <i>ratio benchmarking</i> univariat untuk area tidak tersampel |
| <i>est_msaeRBns()</i> | Estimasi EBLUP dan <i>ratio benchmarking</i> multivariat untuk area tidak tersampel |
| <i>mse_saeRBns()</i> | MSE EBLUP dan <i>ratio benchmarking</i> univariat untuk area tidak tersampel |
| <i>mse_msaeRBns()</i> | MSE EBLUP dan <i>ratio benchmarking</i> multivariat untuk area tidak tersampel |

Package msaeRB dibangun dari algoritma dan pemodelan yang sudah disusun dengan komponen-komponen sebagai berikut:

1. File DESCRIPTION

File ini berisi nama *package*, *author(s)*, *maintainer*, *version*, *description*, *link repository*, dan informasi lainnya.

2. File NAMESPACE

File ini berisi informasi tentang interaksi *package* dengan *package* lain yang dituliskan dengan *function* “importFrom(‘package’, ‘function’)” dan interaksi dengan pengguna yang dituliskan dengan *function* “export(‘function’)”.

3. Folder R

Folder ini berisi *script* empat *function* dan satu *dataset*.

4. Folder data

Folder ini berisi *dataset* dengan format ‘rda’.

5. Folder man

Folder ini berisi komponen dan informasi penting yang berkaitan dengan *function*.

B. Evaluasi

Uji Validitas

Uji validitas digunakan untuk menguji apakah algoritma yang dibuat telah menghasilkan output yang sesuai dan benar. Uji validitas ini akan membandingkan hasil estimasi MSE univariat dan multivariat EBLUP dan *Ratio Benchmarking*.

TABEL IV
Perbandingan Rata-Rata MSE

| D | ρ_e | Metode | Variabel 1 | Variabel 2 |
|-----|----------|---------------------------|------------|------------|
| 50 | 0 | EBLUP | 0,070561 | 0,128949 |
| | | <i>Ratio Benchmarking</i> | 0,070456 | 0,128588 |
| | 0,5 | EBLUP | 0,065498 | 0,120429 |
| | | <i>Ratio Benchmarking</i> | 0,065438 | 0,120524 |
| 100 | 0 | EBLUP | 0,068660 | 0,125543 |
| | | <i>Ratio Benchmarking</i> | 0,068663 | 0,125295 |
| | 0,5 | EBLUP | 0,064250 | 0,116047 |
| | | <i>Ratio Benchmarking</i> | 0,064245 | 0,116017 |
| 200 | 0 | EBLUP | 0,068604 | 0,119801 |
| | | <i>Ratio Benchmarking</i> | 0,068329 | 0,120028 |
| | 0,5 | EBLUP | 0,063196 | 0,114284 |
| | | <i>Ratio Benchmarking</i> | 0,063057 | 0,113811 |

Untuk domain dan metode yang sama, hasil MSE multivariat selalu lebih kecil daripada MSE univariat, sehingga dapat dikatakan bahwa model multivariat menghasilkan estimasi yang lebih efisien daripada model univariat. Selain itu, semakin banyaknya jumlah sampel, maka MSE semakin kecil. Selanjutnya pada studi kasus akan dibandingkan estimasi langsung dengan estimasi tidak langsung secara multivariat.

Uji Performa

Uji performa digunakan untuk melihat keadaan program yang telah dibuat dengan melihat waktu komputasi untuk tiap-tiap simulasi. Waktu komputasi untuk tiap-tiap simulasi disajikan dalam tabel di bawah ini.

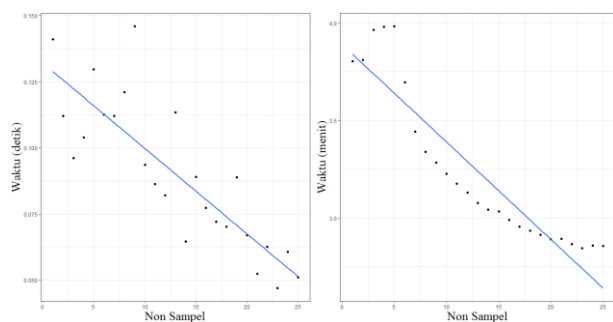
TABEL V
Waktu Komputasi

| Function | Jumlah Sampel | | |
|---------------------|---------------|---------|---------|
| | 50 | 100 | 200 |
| <i>est_saeRB()</i> | 0,341 s | 0,394 s | 3,001 s |
| <i>est_msaeRB()</i> | 0,403 s | 0,772 s | 4,192 s |

| | | | |
|-----------------|---------|----------|---------|
| $mse_saeRB()$ | 1,963 m | 12,259 m | 1,470 h |
| $mse_msaeRB()$ | 2,998 m | 17,677 m | 2,150 h |

Berdasarkan waktu komputasinya, dapat diurutkan model dari yang terlama yaitu sebagai berikut: $mse_msaeRB()$, $mse_saeRB()$, $est_msaeRB()$, dan est_saeRB . Fungsi multivariat cenderung lebih lama waktu komputasinya dibandingkan dengan fungsi univariat karena matriks V_e multivariat mengandung kovarians. Selain itu fungsi MSE cenderung lebih lama waktu komputasinya dibandingkan fungsi estimasi karena dalam fungsi MSE algoritmanya menggunakan teknik *bootstrap* untuk mendapatkan nilai MSE.

Kemudian untuk fungsi non-sampel dilakukan uji coba untuk melihat pengaruh banyaknya area non-sampel terhadap waktu komputasi. Uji coba dilakukan terhadap fungsi $est_msaeRBns()$ dan $mse_msaeRBns()$ dengan domain $D = 50$ area, dan banyaknya area-non sampel mulai dari 1 sampai 25 area.



Gambar 3. Hubungan banyaknya area non-sampel terhadap waktu komputasi

Berdasarkan gambar 3 terlihat bahwa semakin banyak area yang tidak tersampel, waktu komputasinya akan semakin cepat dibuktikan dengan garis tren yang menurun. Hal ini dikarenakan pemrosesan yg dilakukan pada area non-sampel adalah area tersampel yang diproses dengan algoritma estimasi ataupun MSE yang terdapat estimasi varians *random effect* dengan metode REML dengan iterasi sampai mendapatkan hasil konvergen, maksimal 100 iterasi. Selanjutnya, *random effect* untuk area non-sampel diperoleh dari rata-rata *random effect* area yang tersampel.

Uji SUS

Uji SUS dilakukan untuk mengetahui apakah program yang digunakan dapat diterima pengguna atau tidak. Uji ini dilakukan terhadap 8 responden yang merupakan mahasiswa Politeknik Statistika STIS. Skor rata-rata SUS adalah 81,25 yang berarti bahwa *package* yang dibangun telah dapat diterima.

Studi Kasus

Untuk melakukan estimasi tidak langsung dibutuhkan peran *auxiliary variable* yang digunakan untuk menduga rata-rata pengeluaran makanan (Y_1) dan rata-rata pengeluaran non-makanan (Y_2) sehingga dapat meningkatkan presisi estimasi. Untuk pemodelan digunakan 42 variabel. *Auxiliary variable* berasal dari data Podes 2019 (Desa) yang diagregasi ke tingkat kecamatan. Untuk mendapatkan variabel yang signifikan,

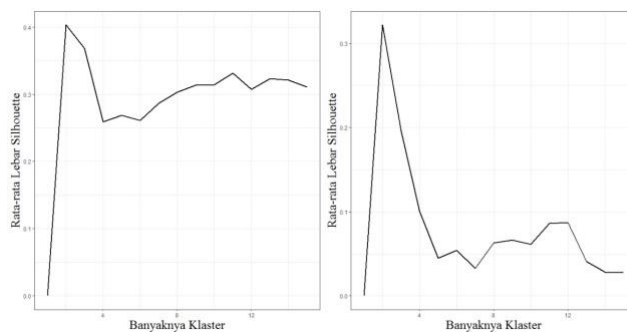
digunakanlah metode *stepwise* dengan hasil yang ditunjukkan pada tabel berikut:

TABEL VI
Hasil Seleksi Variabel dengan Metode *Stepwise*

| Variabel Respon | Variabel Penyerta | beta | std.error | t-statistics | p-value |
|-----------------|-------------------|--------|-----------|--------------|---------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| Y_1 | (Intercept) | 5,448 | 0,370 | 14,734 | 0,0000 |
| | X_1 | -0,053 | 0,023 | -2,284 | 0,0256 |
| | X_2 | 0,331 | 0,161 | 2,053 | 0,0440 |
| | X_6 | -0,234 | 0,088 | -2,649 | 0,0101 |
| | X_8 | 0,060 | 0,029 | 2,054 | 0,0440 |
| Y_2 | (Intercept) | 9,020 | 0,804 | 11,213 | 0,0000 |
| | X_1 | -0,150 | 0,050 | -2,987 | 0,0040 |
| | X_2 | 0,934 | 0,364 | 2,567 | 0,0127 |
| | X_3 | 0,494 | 0,150 | 3,301 | 0,0016 |
| | X_4 | -0,988 | 0,280 | -3,532 | 0,0008 |
| | X_5 | 0,624 | 0,230 | 2,716 | 0,0086 |
| | X_6 | -0,666 | 0,187 | -3,562 | 0,0007 |
| | X_7 | 0,341 | 0,101 | 3,358 | 0,0013 |
| | X_8 | 0,297 | 0,064 | 4,610 | 0,0000 |
| | X_9 | 0,448 | 0,117 | 3,841 | 0,0002 |
| | X_{10} | -0,670 | 0,233 | -2,876 | 0,0055 |

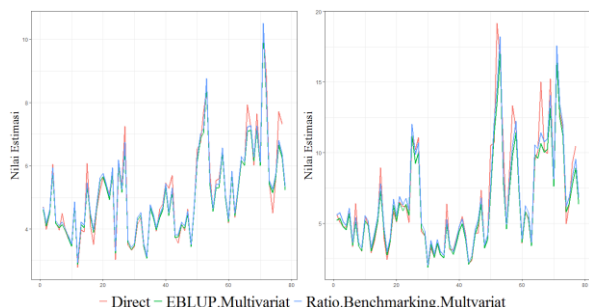
Auxiliary variable yang digunakan yaitu jumlah SD negeri (X_1), jumlah MI negeri (X_2), Jumlah MI swasta (X_3), Jumlah SMP swasta (X_4), Jumlah SMA swasta (X_5), Jumlah SMK swasta (X_6), jumlah tempat praktik bidan (X_7), jumlah apotek (X_8), jumlah bank umum swasta (X_9), dan jumlah koperasi industri kecil dan kerajinan rakyat (X_{10}).

Berdasarkan *auxiliary variable* di atas, diperoleh jumlah kluster optimal yaitu sebanyak dua kluster untuk masing-masing Y_1 dan Y_2 dengan menggunakan *silhouette method*. Banyaknya kluster optimal ditunjukkan oleh gambar 4 berikut.



Gambar 4. Jumlah kluster optimal untuk variabel respon Y_1 (kiri) dan variabel respon Y_2 (kanan)

Adapun perbandingan hasil estimasi langsung dan estimasi tidak langsungnya ditunjukkan pada gambar 5.



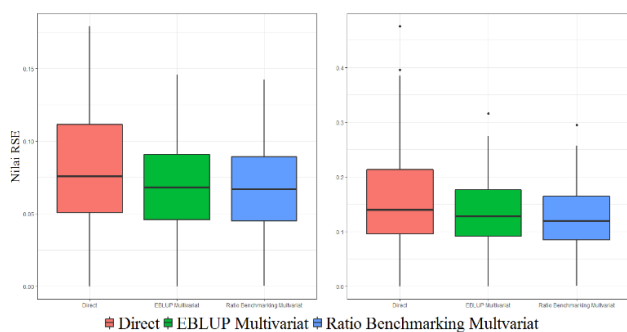
Gambar 5. Perbandingan estimasi langsung dan tidak langsung variabel respon Y_1 (kiri) dan variabel respon Y_2 (kanan)

Berdasarkan gambar 5 dapat dilihat bahwa hasil estimasi langsung, EBLUP multivariat, dan *ratio benchmarking* multivariat memiliki pola yang mirip. Kemudian dilakukan perhitungan agregasi dari ketiga estimasi tersebut yang hasilnya disajikan dalam tabel berikut berikut.

TABEL VII
Agregasi Data Studi Kasus

| Variabel Respon | Estimasi Langsung | EBLUP Multivariat | <i>Ratio Benchmarking</i> Multivariat |
|-----------------|-------------------|-------------------|---------------------------------------|
| Y_1 | 5,359760 | 5,255307 | 5,359760 |
| Y_2 | 7,470244 | 6,976199 | 7,470244 |

Berdasarkan Tabel VII dapat dilihat bahwa agregasi dari estimasi langsung sesuai dengan agregasi *ratio benchmarking* multivariat untuk masing-masing variabel Y_1 dan Y_2 . Selain memiliki agregasi yang sama dengan agregasi estimasi langsung, estimasi dengan *ratio benchmarking* multivariat terbukti lebih efisien. Terlihat dari gambar 6, secara rata-rata RSE dari *ratio benchmarking* multivariat lebih kecil daripada RSE estimasi langsung.



Gambar 6. Perbandingan RSE estimasi langsung dan tidak langsung variabel respon Y_1 (kiri) dan variabel respon Y_2 (kanan)

VII. PENUTUP

Berdasarkan hasil dan pembahasan, didapatkan beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Estimasi dan MSE metode *ratio benchmarking* pada model Fay-Herriot univariat dan multivariat telah berhasil dibangun dengan nilai agregasi *ratio benchmarking* yang sudah sesuai dengan nilai agregasi dari estimasi langsung.

2. *R package* untuk metode *ratio benchmarking* pada model Fay-Herriot multivariat telah berhasil dibangun dengan nama *msaeRB*. dan dapat diakses pada situs CRAN melalui <https://cran.r-project.org/web/packages/msaeRB/>
3. *R package* telah berhasil diimplementasikan pada data bangkitan dan data studi kasus.

Dari hasil dan kesimpulan penelitian, penulis memberikan saran sebagai berikut:

1. Model *ratio benchmarking* multivariat sebagai salah satu dari lima metode *benchmarking* telah berhasil dibangun secara multivariat. Namun, tiga metode *benchmarking* lainnya belum dikembangkan. Maka dari itu, dapat dikembangkan tiga model *benchmarking* lainnya secara multivariat.
2. *Function* yang dibangun masih menghasilkan waktu pengolahan yang lama, maka dari itu perlu dilakukan optimasi terhadap implementasi algoritma.
3. Pada studi kasus, pemilihan variabel penyerta dapat dilakukan dengan lebih baik lagi sehingga dapat dihasilkan model dan hasil estimasi yang lebih baik juga.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] A. Ubaidillah, K. A. Notodiputro, A. Kurnia, and I. W. Mangku, "Multivariate Fay-Herriot models for small area estimation with application to household consumption per capita expenditure in Indonesia," *Journal of Applied Statistics*, vol.46, pp. 2845-2861, 2019.
- [2] R. Benavent and D. Morales, "Multivariate Fay-Herriot models for small area estimation," *Computational Statistics and Data Analysis*, vol.94, pp. 372-390, 2016.
- [3] N. Permatasari, *Pembangunan paket R pada model Fay Herriot multivariat untuk pendugaan area kecil*. Jakarta: Politeknik Statistika STIS, 2020.
- [4] G. S. Datta, M. Ghosh., R. Steorts and J. Maples, "Bayesian benchmarking with applications to small area estimation," *TEST*, vol.20, pp. 574-588, 2011.
- [5] D. Pfeffermann, "New Important Developments in Small Area Estimation," *Statistical Science*, vol.28, pp. 40-68, 2013.
- [6] F. Haris and A. Ubaidillah, "Mean Square Error of Non-Sampled Area in Small Area Estimation," in *2019 International Conference on Statistics and Analytics*. Bogor, Indonesia: ICISA, Jan 2019, pp. 1-12.
- [7] J. N. K. Rao and I. Molina, *Small Area Estimation 2nd Edition*. New Jersey: John Wiley and Sons Inc, 2015.
- [8] D. Pfeffermann, A. Sikov, and R. Tiller, "Single- and two-stage cross-sectional and time series benchmarking procedures for small area estimation," *TEST*, vol.23, pp. 631-666.
- [9] P. P. Biemer and L. E. Lyberg, *Introduction to Survey Quality*. New Jersey: Wiley Series in Survey Methodology, 2003.
- [10] R. Anisa, A. Kurnia, and Indahwati, "Cluster Information of Non-sampled Area in Small Area Estimation," *IOSR Journal of Mathematics*, vol.10, pp. 15-19.
- [11] I. H. N. P. Nugroho and R. Ferdiana, "Pengujian Usability Website Menggunakan System Usability Scale," *IPTEK-KOM*, vol.17, pp. 31-38, 2015.
- [12] K. Peffers, T. Tuunanen, M. Rothenberger et al, "A design science research methodology for information systems research," *Journal of Management Information Systems*, vol.24, pp. 45-77.
- [13] R. C. Steorts and M. Ghosh, "On Estimation of Mean Squared Errors of Empirical Bayes Estimators," *Statistics Sinica*, vol.23, pp. 749-767.