点估计
- 1. 矩估计 $\longrightarrow$ 3. 广义估计
- 2. 极大似然估计 $\longrightarrow$ 4. 贝叶斯估计
- * BLUE

1. 矩估计 Method of Moments

	样本矩	总体矩	参数
正态分布	$\frac{\sum X_i}{N}$	$E[X]$	μ
	$\frac{\sum X_i^2}{N}$	$E[X^2]$	$\mu^2+\sigma^2$

$* \; Var(X) = EX^2 - (EX)^2$

样本矩 $\longrightarrow$ 总体矩 $\longrightarrow$ 参数

假设样本足够大

找到与参数的关系
通常依靠分布的种类

2 极大似然估计：已假设了分布，估参数

假定一个参数，在该情况下，观测到样本的概率

比如 3 个样本来自正态分布. 假定参数 $N(\mu,\sigma^2)$

x_1

x_2 $\quad P(X=x_i;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

x_3

再假设样本服从 iid（独立同分布）

$$L(\theta)=P(X=x_1;\mu,\sigma^2)\,P(X=x_2;\mu,\sigma^2)\,P(X=x_3;\mu,\sigma^2)$$

$$=\prod_{i=1}^{3}P(X=x_i;\underbrace{\mu,\sigma^2}_{\theta})$$

可以借由 $L(\theta)$ 来找参数 θ 使其最大

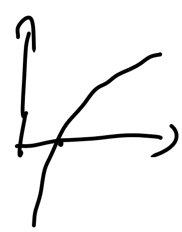
通常累乘比较难处理，取对数.

因为对数把乘法变加法，

还不会影响单调性.

即 $x_1>x_2$,

$\log(x_1)>\log(x_2)$



$\mathcal{L}(\theta) = \log L(\theta) = \log(\prod P(x_i;\mu,\theta))$

$= \sum \log P(x_i;\mu,\theta)$

* $\log(x_1 \cdot x_2)$

$= \log x_1 + \log x_2$

找极大值

* $\log(x^2)$

$= 2\log x$

例：正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$

$$P(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

求 μ 的极大似然估计

$$\log P(x_i) = \log\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \log\sigma - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum \log P(x_i) = -n\log\sqrt{2\pi} - n\log\sigma - \sum\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0$$

$$= -\sum \frac{2(x-\mu)(-1)}{2\sigma^2} = 0$$

$$\sum \frac{(x-\mu)}{\sigma^2} = 0$$

$$\sum x_i - n\mu = 0$$

$$\mu = \frac{\sum x_i}{n}$$

求 σ 的极大似然估计 （练习）

* 线性回归

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y \quad \longrightarrow \quad \mathrm{var}(b) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

$$y = b_0 + b_1 x$$

- $$b_1 = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\mathrm{var}(x)}$$
- $$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$
- $$\rho = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$b_1 = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$