虽然是次数，有时间跨度

例1 设某炸药厂一天中发生着火现象的次数X服从参数为λ的泊松分布，λ未知，有以下样本值；试估计参数λ。

着火的次数 k	0	1	2	3	4	5	6	
发生k次着火天数 n_k	75	90	54	22	6	2	1	$\sum = 250$

1. 泊松分布: $E(X) = \lambda$ (μ_1)
2. 建立方程. $\mu_1 = A_1$

$$\begin{cases} \mu_1 = E(x) = \lambda \\ A_1 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{250}(0\times75+1\times90+\cdots+6\times1) = 1.22 \end{cases}$$

$\therefore \lambda = 1.22$

估计参数 λ 为1.22

样本矩	总体矩	参数
均值 次数→概率	$E[X]$	λ ?

泊松分布可由二项分布推得，结果是

$$f(x) = P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

* $5! = 5\times4\times\cdots\times1$

$$E[X] = \int x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} dx$$

$$= \int \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!}\cdot\lambda \, dx$$

$$= \lambda \int \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!} d(x-1)$$

$= \lambda \int f(x)\,dx$

所有可能性之和为1

$= 1$

例2 设总体$X \sim U[a,b]$, a,b未知；$X_1,\cdots,X_n$是一个样本, 求a,b的矩估计量。

1. 均匀分布: $E(X)=\frac{a+b}{2}$ $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

2. 构造方程: $\begin{cases}\mu_1=A_1\\ \mu_2=A_2\end{cases}$

$\mu_1=E(X)=\frac{a+b}{2}$

$\mu_2=E(X^2)=D(X)+E^2(X)=\frac{(b-a)^2}{12}+\frac{(a+b)^2}{4}$

$A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

$A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

代入 $\begin{cases}\frac{a+b}{2}=A_1\\ \frac{(b-a)^2}{12}+\frac{(a+b)^2}{4}=A_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b=2A_1\\ (b-a)^2=12(A_2-A_1^2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=A_1-\sqrt{3(A_2-A_1^2)}\\ b=A_1+\sqrt{3(A_2-A_1^2)}\end{cases}$

将 $\begin{cases}A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\\ A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\end{cases}$ 代入上式

例3 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\theta>0$，求 θ 的矩估计量。

1. 分布未知 单参数 $E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx$

$=(\theta+1)\int_0^1 x^{\theta+1}dx$

$=(\theta+1)\cdot\frac{1}{\theta+2}x^{\theta+2}\Big|_0^1$

$=\frac{\theta+1}{\theta+2}$

2. 构造方程 $\mu_1=A_1$

$\mu_1=E(x)=\frac{\theta+1}{\theta+2}$

$A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$

$\therefore$ 代入 $\theta=\frac{1-2\bar{x}}{\bar{x}-1}$

之前推了泊松的E[x]，
就是从 f(x) 出发的

这题和上边几一样，不用做

03 练习

练习 设总体的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1} & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

其中 $\lambda>0$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体的样本，求参数 λ 的矩估计。

练习 设总体的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1} & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

其中 $\lambda>0$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体的样本，求参数 λ 的矩估计。

$x_1, x_2 \cdots x_n$

$E(X)=\mu_1=g(\lambda)$, $E(X)=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot\lambda x^{\lambda-1}dx$

$=\lambda\int_0^1 x^{\lambda}dx=\lambda\cdot\left[\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right]_0^1=\frac{\lambda}{\lambda+1}\Rightarrow$

$\mu_1=\frac{\lambda}{\lambda+1}\Rightarrow\lambda=h(\mu_1)$, $\lambda\mu_1+\mu_1=\lambda$ $(\mu_1-1)\lambda=-\mu_1$

$\lambda=\frac{\mu_1}{1-\mu_1}$ $\hat{\mu}_1=\bar{X}$, $\Rightarrow\hat{\lambda}=\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$ 矩估计量

$\hat{\lambda}=$

例9.2.4 设$X \sim B(1, p)$; $X_1, \cdots, X_n$是来自X的一个样本，试求参数P的最大似然估计量。

1. 写出似然函数

已知分布. $f(x) = p^x(1-p)^{1-x} \quad x=0$

似然函数为 $L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$

2. 取对数

$$\ln L(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(1-p)$$

3. 求导 $=0$. $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{p} + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\frac{1}{1-p} = 0$

4. 解得 $p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$ (值)

最大似然估计量为 $p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$

二项分布 Binomial $\quad Bin(n, p)$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

当 $n=1$，便有上边的式子

例9.2.5 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; $X_1, \cdots, X_n$ 是来自 X 的一个样本，试求参数 μ, σ^2 的最大似然估计量。

解：

1. 写出似然函数：

已知 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

似然函数：$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \times e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

2. 取对数：

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n - \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\sigma - \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

3. 求导. 因有2个参数. 所以分别对 μ 与 σ 求偏导.

$$\begin{cases} \frac{d\ln L(\mu,\sigma^2)}{d\mu} = 0 \\ \frac{d\ln L(\mu,\sigma^2)}{d\sigma} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2\sigma^2} \times [-2(x_1-\mu) - 2(x_2-\mu) - 2(x_3-\mu) - \cdots - (2x_i-\mu)] \\ = \frac{1}{\sigma^2}[\sum x_i - n\mu] = 0. \\ -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum(x_i-\mu)^2 = 0 \end{cases}$$

4. 解得 $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x}$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

注意：求的是 σ^2 的 MLE

而不是 σ.

所以令 $v = \sigma^2$

$\sigma = v^{\frac{1}{2}}$

Two bankers each arrive at the station at some random time between 5 and 6 am
Assume arrival time for either banker is uniformly distributed.
They stay exactly five minutes and then leave.
What is the probability that they will meet on a given day?

思考题，加油

例题分析

例5.4 设总体的分布律为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

$X_1, X_2, \cdots, X_5$ 来自总体

样本观测值为 $(3,1,1,,2,3)$

用最大似然估计的思想来估计参数 θ

解： $P(X_1=3, X_2=1, X_3=1, X_4=2, X_5=3)$

$=P(X_1=3)P(X_2=1)P(X_3=1)P(X_4=2)P(X_5=3)$ 样本独立性

$=P(X=3)P(X=1)P(X=1)P(X=2)P(X=3)$ 样本与总体同分布

$=(1-\theta)^2\cdot\theta^2\cdot\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot(1-\theta)^2=2(1-\theta)^5\cdot\theta^5$

记 最大似然函数 $L(\theta)=2(1-\theta)^5\cdot\theta^5$

取自然对数 $\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln(1-\theta)+5\ln\theta$

求导，并令导数为零 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{-5}{1-\theta}+\dfrac{5}{\theta}=0$ 解得 $\hat{\theta}=0.5$

从样本估参数．已知分布．