1. X 随机变量
Y 另一个随机变量

X 随机变量，其实是函数 $X(\omega) = x$

$\uparrow$ 事件 $\uparrow$ 取值.

例：扔一个骰子 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

X：扔出的点数 翻倍

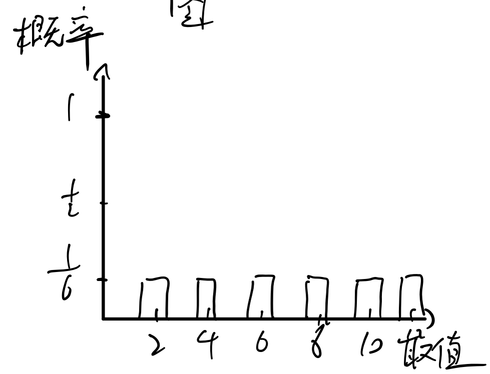
Y：扔出 4,5,6，赚 10 块
扔出 1,2,3，赚 2 块

$E[aX] = ?$

事件	1	2	3	4	5	6
X	2	4	6	8	10	12
Y	2	2	2	10	10	10

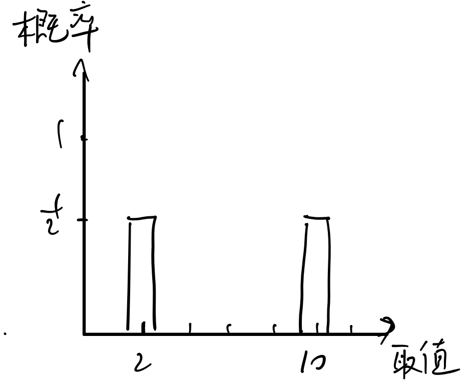
2. 怎样描述 X？ 图

$$X = \begin{cases} 2, & \frac{1}{6}\text{概率} \\ 4, & 〃 \\ 6, & 〃 \\ 8, & 〃 \\ 10, & 〃 \\ 12, & 〃 \end{cases}$$



怎样描述 Y？

$$Y = \begin{cases} 2, & \frac{1}{2}\text{概率} \\ 10, & \frac{1}{2}\text{概率}. \end{cases}$$



这样描述的内容叫"分布" Distribution

取值　概率

随机变量

事件

随机变量 X 将事件映射为取值.

随机变量 X 不包含概率!!!

例. 扔一个好骰子.

事件	1	2	3	4	5	6
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
取值	2	4	6	8	10	12

扔一个坏骰子

事件	1	2	3	4	5	6
概率	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$
取值	2	4	6	8	10	12

这样描述的内容叫"分布" Distribution

取值　概率

Random Variable

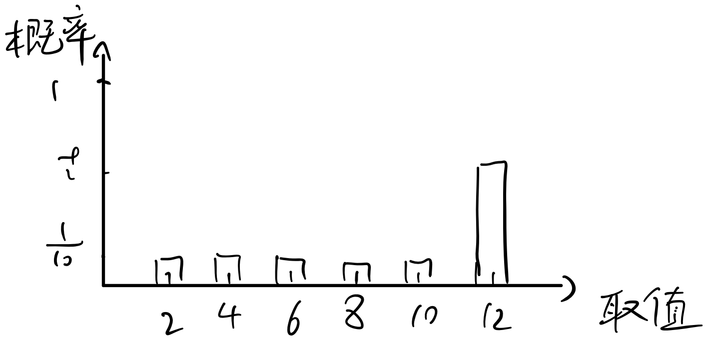
r.v.　随机变量

事件 $\xrightarrow{\text{概率测度}}$ 概率

probability measure.

	事件	1	2	3	4	5	6
P	概率	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$
X	取值	2	4	6	8	10	12

有了这三个，才构成分布



3. "怎样描述 X？" → 分布

X 不包含概率，但不能脱离概率测度存在

分布代表了全部信息，然而只想要有代表性的信息。

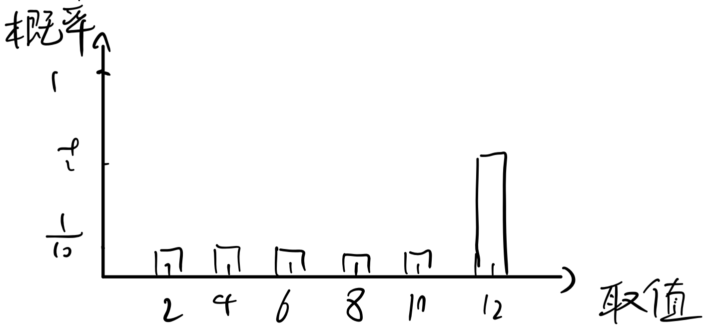
这种信息叫统计值 Statistics

比如 均值，方差 ...

4. 有一种体系化表述统计值的方法
叫作 Moments 矩

1st moment $E[X]$
2nd moment $E[X^2]$
3rd moment $E[X^3]$
⋮

5. $E[X]$



$E[X] = \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{10} \times 4 + \cdots + \frac{1}{10} \times 10 + \frac{1}{2} \times 12$

$E[X]$ 代表总体均值，就是一个数字

$E_T[X]$ 代表样本均值，取样T次。

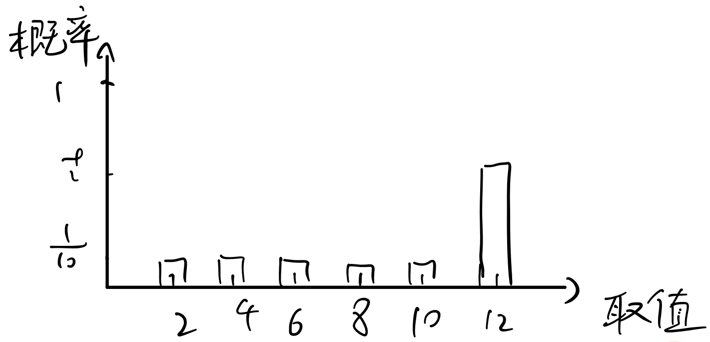
→ 例：取样10次，理论上5次12，其余各一次

实际未必

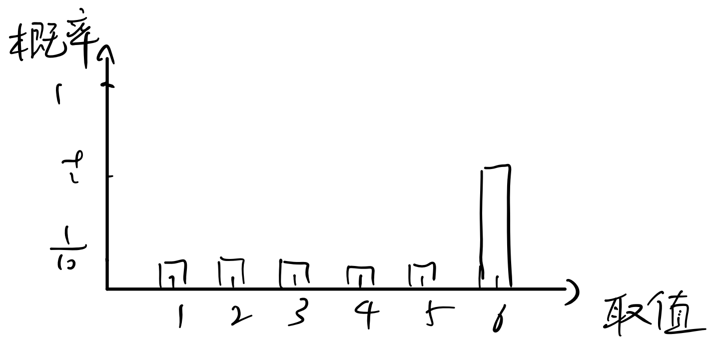
可能10次都是12，那 $E_T[X] = 12$

所以 $E_T[X]$ 本身也是随机变量

6. $E[\frac{1}{2}X] = ?$



改变取值



$$E[\tfrac{1}{2}X] = \frac{1}{12}\times 1 + \frac{1}{12}\times 2 + \cdots + \frac{1}{12}\times 5 + \frac{1}{2}\times 6$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right) + \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 4\right) + \cdots + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\cdot 10\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 12\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}\cdot 2 + \frac{1}{12}\cdot 4 + \cdots + \frac{1}{2}\cdot 12\right]$$

$$= \frac{1}{2}E[X]$$

7. $E[aX+bY] = aEX + bEY$

基础
$$\begin{cases} ① \ cov(aX, bY) = ab\, cov(X,Y) \\ ② \ cov(X,Y) = cov(Y,X) \\ ③ \ cov(X,X) = varX \\ ④ \ cov(X, Y+Z) = cov(X,Y) + cov(X,Z) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & var(-aX) \\ = \ & cov(-aX, -aX) \quad , \quad ③ \\ = \ & (-a)(-a)\, cov(X,X) \quad , \quad ① \\ = \ & a^2\, varX \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & var(aX - bY) \\ = \ & cov(aX-bY,\ aX-bY) \quad , \quad ③ \\ = \ & cov(aX, aX) + cov(aX, -bY) \\ & + cov(-bY, aX) + cov(-bY, -bY) \quad , \quad ④ \\ = \ & a^2\, varX - ab\, cov(X,Y) \\ & - ab\, cov(Y,X) + (-b)(-b)\, varY \quad , \quad ① \& ③ \\ = \ & a^2\, varX - 2ab\, cov(X,Y) + b^2\, varY \quad , \quad ② \end{aligned}$$

如果 $cov(X, Y) = 0$,

$var(aX - bY) = a^2 var X + b^2 var Y$

8. $cov(X, Y) = ?$

$x_1 \quad y_1$

$x_2 \quad y_2$

$x_3 \quad y_3$

$x_4 \quad y_4$

$\overline{\mu_X} \quad \overline{\mu_Y}$

$$var(x) = \frac{(x_1 - \mu_x)^2 + (x_2 - \mu_x)^2 + \cdots + (x_4 - \mu_x)^2}{4 - 1}$$

$$cov(X, Y) = \frac{(x_1 - \mu_x)(y_1 - \mu_Y) + \cdots + (x_4 - \mu_x)(y_4 - \mu_Y)}{4 - 1}$$

$$cov(X, Y) = \frac{\sum_{i}^{n} (x_i - EX)(y_i - EY)}{n - 1}$$

$$= E[(X - EX)(Y - EY)]$$

$$= E[XY - X EY - EX \cdot Y + EX EY]$$

$$= E[XY] - EX \cdot EY - EX \cdot EY + EX \cdot EY$$

$$= E[XY] - EX \cdot EY$$

$$\mathrm{cov}(X, Y+Z) = ?$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ \hline \mu_X & \mu_Y + \mu_Z & \end{array}$$

$$(y_i - \mu_Y) + (z_i - \mu_Z)$$

$$\parallel$$

$$\frac{\sum (x_i - \mu_X)\left(y_i + z_i - (\mu_Y + \mu_Z)\right)}{n}$$

$$= \frac{\sum \left[(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y) + (x_i - \mu_X)(z_i - \mu_Z) \right]}{n}$$

$$= \frac{\sum (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n} + \frac{\sum (x_i - \mu_X)(z_i - \mu_Z)}{n}$$

$$= \mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{cov}(X, Z)$$

总结（必背）：

$$E[a + bX + cY] = a + bEX + cEY$$

$$\mathrm{var}(a + bX - cY) = b^2 \mathrm{var}X + c^2 \mathrm{var}(Y) - 2bc\,\mathrm{cov}(X, Y)$$