

高维协方差矩阵的检验 综述及其推广

指导老师：王国长 答辩人：丁文亮

研究过程



1 绪论

1.1 研究背景和目的

1.2 国内外研究现状综述

(仅展示单个总体协方差矩阵的假设检验问题，两个或两个以上总体的假设检验综述见论文)

1.3 研究思路与框架 (篇幅所限，详见论文)

1.1 研究背景和目的

随着科技和计算机的发展，在线收集数据得以实现，使得收集的数据在形式上、结构上和数量上发生了革命性的变化。

为了适应数据发展的要求，统计研究也应呈现相应的变化。传统的统计研究方法关注的是 $p < n$ 的情形，当今的研究更多的是关注 p 与 n 相当（高维， $p/n \rightarrow c$ ）和 $p \gg c$ （超高维）的情形。（说白了就是不适用了）

1.1 研究背景和目的

- 改进传统检验统计量
 - 推广高维协方差矩阵假设检验类型
 - 寻找高维其他条件下检验统计量构建的灵感
 - (究天人之际, 通古今之变, 成一家之言)
-

1.2 国内外研究现状综述 (单个总体协方差矩阵的假设检验问题)

- 传统检验统计量 (其中 S 指样本协方差矩阵) :

- Nagao(1973)提出的 V 统计量:

$$\frac{1}{p} \text{tr}(S - I_p)^2 .$$

- 似然比检验统计量 (Anderson(2004)) :

$$n(\text{tr}S - \log|S| - p) .$$

1.2 国内外研究现状综述 (单个总体协方差矩阵的假设检验问题)

随着 p 增大, 且 $p/n \rightarrow c \in (0, +\infty)$, 在原假设下似然比检验统计量对应的卡方检验不再适用

- Lediot & Wolf(2002)改进 V 统计量:

$$\frac{1}{p} \text{tr}(S - I_p)^2 - \frac{p}{n-1} \left[\frac{1}{p} \cdot \text{tr}(S) \right]^2 .$$

1.2 国内外研究现状综述 (单个总体协方差矩阵的假设检验问题)

放松正态假定, 在总体分布峰度为3且 $p/n \rightarrow c \in (0,1)$ 等前提下

- Bai et al.(2009)利用随机矩阵理论提出统计量:

$$\frac{1}{p} \text{tr}(B) - \frac{1}{p} \log|B| - 1$$

, 其中 $B = \frac{n-1}{n} S$.

- Jiang et al.(2012)利用Selberg不等式将其扩展到 $p < n$ 且 $p/n \rightarrow c \in (0,1]$ 的情形。
-

1.2 国内外研究现状综述 (单个总体协方差矩阵的假设检验问题)

- Wang et al.(2013)在 $p/n \rightarrow c \in (0, +\infty)$ 前提下提出检验统计量

$$\frac{1}{p} \text{tr}(S) - \frac{1}{p} \log|S| - 1$$

，相比于Bai et al.(2009)的检验统计量，该统计量更适用于均值向量未知且没有正态分布假定的假设检验问题。

1.2 国内外研究现状综述 (单个总体协方差矩阵的假设检验问题)

在 $p > n$ 的情形，样本协方差矩阵是奇异的，由于上述检验统计量包含 $\log|S|$ 项不再适用。

- Chen et al.(2010)在 $tr(\Sigma^4) = o(tr^2(\Sigma^2))$ 假设下，提出统计量

$$\frac{1}{p}T_1 - \frac{1}{p}T_2 - 1$$

，其中 T_1 和 T_2 分别为 $tr(\Sigma)$ 和 $tr(\Sigma^2)$ 的无偏估计。

- Ahmad & Rosen(2015)改进了上述的方法，用 $tr(\Sigma)$ 和 $tr(\Sigma^2)$ 的一致无偏估计代替上述的 T_1 和 T_2 。
-

1.2 国内外研究现状综述 (单个总体协方差矩阵的假设检验问题)

- 由于传统的似然比检验统计量是在固定 p 且 $n \rightarrow \infty$ 情形所提出, Jiang & Yang(2013), Jiang & Qi(2015)和Chen & Jiang(2018)在正态假定和 $p/n \rightarrow c \in (0,1]$ 情形, 对多类假设检验问题上提出了似然比检验统计量的改进方法。

而本文针对高维协方差矩阵等于单位矩阵、对角矩阵和非负定矩阵 (3种情形), 提出新检验统计量, 主要和Chen & Jiang(2018)的检验统计量进行对比。

2 单个高维总体协方差矩阵的检验

2.1 单个高维总体协方差矩阵等于给定单位矩阵的检验

2.2 单个高维总体协方差矩阵等于给定对角矩阵的检验

2.3 单个高维总体协方差矩阵等于给定非负定矩阵的检验

2.1 单个高维总体协方差矩阵等于给定单位矩阵的检验 ($H_0: \Sigma = I_p$ v.s. $H_1: \Sigma \neq I_p$)

假设 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是独立同分布于 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的实值随机向量，传统似然比检验统计量为：

$$\Lambda^* = \left(\frac{e}{m}\right)^{\frac{mp}{2}} e^{-\frac{1}{2}\text{tr}(A)} |A|^{\frac{m}{2}}.$$

Muirhead(1982) Theorem 8.4.9: 在原假设 $H_0: \Sigma = I_p$ 成立，固定 p 且 $n \rightarrow \infty$ 时，有：

$$-2\rho \cdot \log \Lambda^* \xrightarrow{D} \chi_f^2$$

其中 $\rho = 1 - \frac{2p^2+3p-1}{6m(p+1)}$, $f = \frac{1}{2}p(p+1)$.

2.1 单个高维总体协方差矩阵等于给定单位矩阵的检验 ($H_0: \Sigma = I_p$ v.s. $H_1: \Sigma \neq I_p$)

定理1: 假设 $p = p_n$, 对任意 $n \geq 3$, 满足 $n > p + 3$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n} \rightarrow c \in (0, 1]$. $\Lambda_m^* = \Lambda^*$, 当 $n \rightarrow \infty$, 在原假设 $H_0: \Sigma = I_p$ 成立时, 有:

$$\frac{\log \Lambda_m^* - \mu_{m,0}}{\sqrt{m} \cdot \sigma_{m,0}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

其中, \xrightarrow{D} 表示依分布收敛, $N(0,1)$ 表示标准正态分布,

$$\mu_{m,0} = \frac{1}{4} m \left[(2m - 2p - 1) \cdot r_m^2 - 2p \right], \sigma_{m,0}^2 = \frac{1}{2} \left(r_m^2 - \frac{p}{m} \right),$$
$$r_m = \left[-\log \left(1 - \frac{p}{m} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

2.1 单个高维总体协方差矩阵等于给定单位矩阵的检验 ($H_0: \Sigma = I_p$ v.s. $H_1: \Sigma \neq I_p$)

- **定理2 (Chen & Jiang(2018) Corollary 1)** : 假设 $n > p_n + 1$ 对任意 $n \geq 3$ 成立, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n \rightarrow \infty$. $\Lambda_m^* = \Lambda^*$, 当 $n \rightarrow \infty$, 在原假设 $H_0: \Sigma = I_p$ 成立时, 有:
$$\frac{\log \Lambda_n^* - \mu_{n,0}}{\sqrt{n} \cdot \sigma_{n,0}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

其中,

$$\mu_{n,0} = -\frac{1}{4}(n-1) \left[2p + (2n-2p-3) \log \left(1 - \frac{p}{n-1} \right) \right],$$
$$\sigma_{n,0}^2 = -\frac{1}{2} \left[\frac{p}{n-1} + \log \left(1 - \frac{p}{n-1} \right) \right].$$

2.1 单个高维总体协方差矩阵等于给定单位矩阵的检验 ($H_0: \Sigma = I_p$ v.s. $H_1: \Sigma \neq I_p$)

定理1和定理2的推导过程相似，在这两个检验统计量的构建过程中， $\mu_{m,0}$ 和 $\mu_{n,0}$ ， $\sigma_{m,0}^2$ 和 $\sigma_{n,0}^2$ 是等价的，但两者的微小差异在于构建的检验统计量的分母中。

当 $n \rightarrow \infty$ 时检验统计量分母包含的是 m 还是 n 的差异是微乎其微的，但是在 n “较小”时，定理1的检验统计量要大于定理2的，这就导致定理2模拟和应用的显著性水平及其方差和定理1有明显差异。



2.2 单个高维总体协方差矩阵等于给定对角矩阵的检验

($H_0: \Sigma = \Sigma_0$ v.s. $H_1: \Sigma \neq \Sigma_0$, Σ_0 对角元为 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p < \infty$)

定理3: 假设 $p = p_n$, 对任意 $n \geq 3$, 满足 $n > p + 3$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n} \rightarrow c \in (0, 1]$. $\Lambda_m^* = \Lambda^*$, 当 $n \rightarrow \infty$, 在原假设 $H_0: \Sigma = \Sigma_0$ 成立时, 有:

$$\frac{\log \Lambda_m^* - \mu_m}{m \cdot \sigma_m} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$
$$\mu_m = \frac{1}{4} m \left[(2m - 2p - 1) \cdot r_m^2 + 2 \sum_{i=1}^p \log \lambda_i - 2 \sum_{i=1}^p \lambda_i \right],$$
$$\sigma_m^2 = \frac{1}{2} \left[r_m^2 - \frac{2}{m} \sum_{i=1}^p \left(\lambda_i - \frac{\lambda_i^2}{2} \right) \right], r_m = \left[-\log \left(1 - \frac{p}{m} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

2.2 单个高维总体协方差矩阵等于给定对角矩阵的检验

($H_0: \Sigma = \Sigma_0$ v.s. $H_1: \Sigma \neq \Sigma_0$, Σ_0 对角元为 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p < \infty$)

定理4 (Chen & Jiang(2018) Theorem 1) : 假设 $n > p_n + 1$ 对任意 $n \geq 3$ 成立, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n \rightarrow \infty$, $\Lambda_n^* = \Lambda^*$, 如果 Σ_0 为非奇异矩阵, 当 $n \rightarrow \infty$, 则有

$$\frac{\log \Lambda_n^* - \mu_n}{n \cdot \sigma_n} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

$$\mu_n = -\frac{1}{4}(n-1)(2n-2p-3) \log\left(1 - \frac{p}{n-1}\right) + \frac{1}{2}(n-1)[\log|\Sigma_0| - \text{tr}(\Sigma_0)] ,$$
$$\sigma_n^2 = -\frac{1}{2}\left[\frac{p}{n-1} + \log\left(1 - \frac{p}{n-1}\right)\right] + \frac{1}{2n} \text{tr}[(\Sigma_0 - I)^2] .$$

2.2 单个高维总体协方差矩阵等于给定对角矩阵的检验

$(H_0: \Sigma = \Sigma_0 \text{ v.s. } H_1: \Sigma \neq \Sigma_0, \Sigma_0 \text{ 对角元为 } 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p < \infty)$

定理3和定理4的推导过程相似，对比可知 μ_m 和 μ_n 是等价的，但两者的微小差异在于构建的检验统计量的分母中，两者除了有受到分母中取 m 还是 n 的影响，此时还受到 σ_m^2 和 σ_n^2 差异的影响。

回顾定理3中 σ_m^2 为 $\frac{1}{2} [r_m^2 - \frac{2}{m} \sum_{i=1}^p (\lambda_i - \frac{\lambda_i^2}{2})]$ ，定理4中 σ_n^2 整理后为 $\frac{1}{2} [r_m^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p (\lambda_i - 1)^2 - \frac{p}{m}]$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时两者的差异是微小得可以忽略不计的、但是在 n “较小”时，两者差异会很大，而且受到具体样本协方差矩阵特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ 的影响，这就导致定理4模拟的显著性水平及其方差和定理3有明显差异。



2.2 单个高维总体协方差矩阵等于给定**对角矩阵**的检验

($H_0: \Sigma = \Sigma_0$ v.s. $H_1: \Sigma \neq \Sigma_0$, Σ_0 对角元为 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p < \infty$)

此外, 对于定理3, 检验功效函数如下 (更广泛的定理可参考Chen & Jiang(2018))

$$\beta(\Sigma) = P(\log \Lambda_m^* \leq c_\alpha | \Sigma) \sim \Phi \left(\frac{c_\alpha - \mu_m}{m \cdot \sigma_m} \right).$$

其中 $c_\alpha = \mu_{m,0} + m \cdot \sigma_{m,0} \cdot \Phi^{-1}(\alpha)$, 对应定理1中显著性水平为 α 时的拒绝域 $\{\log \Lambda_m^* \leq c_\alpha\}$, $\Phi^{-1}(\cdot)$ 为标准正态分布的密度函数。

2.2 单个高维总体协方差矩阵等于给定对角矩阵的检验

($H_0: \Sigma = \Sigma_0$ v.s. $H_1: \Sigma \neq \Sigma_0$, Σ_0 对角元为 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p < \infty$)

在 $0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = \lambda < \infty$, 即 $\Sigma = \lambda I_p$ 前提下, 进一步我们推得如下结论:

$$\frac{C_\alpha - \mu_m}{m \cdot \sigma_m} = \sqrt{\frac{r_m^2 - \frac{p}{m}}{r_m^2 - \frac{p}{m} \cdot 2(\lambda - \frac{\lambda^2}{2})}} \cdot \Phi^{-1}(\alpha) + \frac{p \cdot (\lambda - \log \lambda - 1)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{r_m^2 - \frac{p}{m} \cdot 2(\lambda - \frac{\lambda^2}{2})}}$$

($\lambda = 1$ 的情形, 固定 p/m 和 λ 的情形)



2.3 单个高维总体协方差矩阵等于给定非负定矩阵的检验($H_0: \Sigma = \Sigma_1$ v.s. $H_1: \Sigma \neq \Sigma_1$)

Σ_1 为给定 $p \times p$ 非负定矩阵。则由奇异值分解 $\Sigma_1 = U\Sigma_0U'$ ，其中 Σ_0 为对角矩阵， U 为正交矩阵。

方法1：对 X 左乘 U^{-1} ，得到 $U^{-1} \cdot X \sim N_p(U^{-1}\mu, U^{-1} \cdot \Sigma \cdot U^{-1T})$ ，进而转化为检验 $U^{-1} \cdot X \sim N_p(U^{-1}\mu, U^{-1} \cdot U\Sigma_0U' \cdot U^{-1T}) = N_p(U^{-1}\mu, \Sigma_0)$ 的问题。

方法2：对 X 左乘 $\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}$ ，得到 $\Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \cdot X \sim N_p(\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}\mu, \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \cdot \Sigma \cdot \Sigma_0^{-\frac{1}{2}T})$ ，进而转化为检验 $\Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \cdot X \sim N_p(\mu\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}, I_p)$ 的问题。

2.3 单个高维总体协方差矩阵等于给定非负定矩阵的检验($H_0: \Sigma = \Sigma_1$ v.s. $H_1: \Sigma \neq \Sigma_1$)

对于方法1, 回顾定理4, $U^{-1} \cdot X \sim N_p(U^{-1}\mu, \Sigma_0)$, 对(6)中对角矩阵的假设检验问题, 我们构建的检验统计量 $\frac{\log \Lambda_m^* - \mu_m}{m \cdot \sigma_m}$ 中,

$\log \Lambda_m^*$ 由样本离差阵 $A = (U^{-1} \cdot X)' (I_{n \times n} - \frac{1}{n} J_{n \times n}) (U^{-1} \cdot X)$ 的特征值决定, μ_m 和 σ_m 由原假设 $H_0: \Sigma = \Sigma_0$ 对应的 Σ_0 的特征值决定。

对于方法2, 回顾定理1, $\Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \cdot X \sim N_p(\mu \Sigma_0^{-\frac{1}{2}}, I_p)$, 对(1)中单位矩阵的假设检验问题, 我们构建的检验统计量 $\frac{\log \Lambda_m^* - \mu_m}{m \cdot \sigma_m}$ 中,

$\log \Lambda_m^*$ 由样本离差阵 $A = (\Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \cdot X)' (I_{n \times n} - \frac{1}{n} J_{n \times n}) (\Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \cdot X)$ 的特征值决定, μ_m 和 σ_m 由原假设 $H_0: \Sigma = I_p$ 对应的 Σ_0 的特征值决定。



3 数值模拟

3.1 极限分布的模拟

3.2 检验显著性水平和功效模拟

(单个高维总体协方差矩阵等于给定单位矩阵)

3.3 检验显著性水平和功效模拟

(单个高维总体协方差矩阵等于给定对角矩阵)

3.4 检验功效变化的数值模拟

(单个高维总体协方差矩阵等于给定对角矩阵)

3.1 极限分布的模拟

选取样本量 $n = 100$ 和变量个数 $p = 5, 30, 60, 90$.生成均值向量为零向量, 协方差矩阵为单位矩阵的 $N_p(\mu, I)$ 随机数, 模拟次数都为100,000次, 得到图3-1如下所示 (橙色直方图表示 100,000 次模拟得到的检验统计量的频率分布, 蓝色曲线为检验统计量在特定的 n 和 p 取值下的极限分布。上层四幅小图对应(3)式所示的检验统计量 $-2\rho \cdot \log\Lambda^*$, 下层四幅小图对应定理1所示的检验统计量 $\frac{\log\Lambda_m^* - \mu_m}{m \cdot \sigma_m}$)

3.1 极限分布的模拟

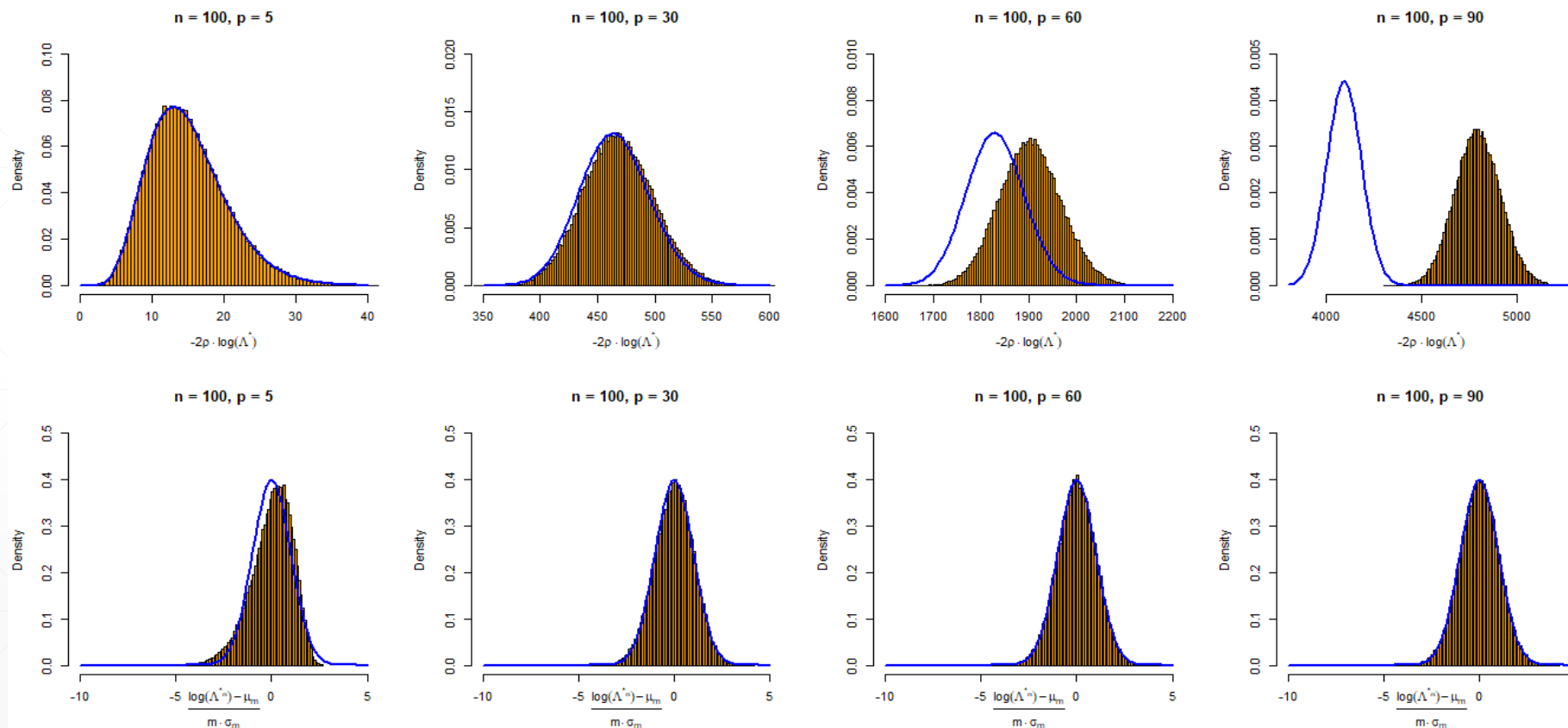


图3-1 两检验统计量及其极限分布比较



3.2 检验显著性水平和功效模拟

(单个高维总体协方差矩阵等于给定单位矩阵)

表3-1 两检验统计量的检验显著性水平和检验功效对比

	检验显著性水平 (在 H_0 下)		检验功效 (在 H_1 下)	
	$-2\rho \cdot \log\Lambda^*$	$\frac{\log \Lambda_m^* - \mu_m}{m \cdot \sigma_m}$	$-2\rho \cdot \log\Lambda^*$	$\frac{\log \Lambda_m^* - \mu_m}{m \cdot \sigma_m}$
$n = 100, p = 5$	0.0497 (0.00069)	0.0619 (0.00076)	0.2527 (0.00137)	0.3566 (0.00151)
$n = 100, p = 30$	0.0528 (0.00071)	0.0541 (0.00072)	0.5705 (0.00157)	0.5604 (0.00157)
$n = 100, p = 60$	0.2289 (0.00133)	0.0523 (0.00070)	0.8593 (0.00110)	0.4694 (0.00158)
$n = 100, p = 90$	1.0000 (0.00000)	0.0531 (0.00071)	1.0000 (0.00000)	0.2705 (0.00140)

3.3 检验显著性水平和功效模拟 (单个高维总体协方差矩阵等于给定对角矩阵)

选取样本量 $n = 100$ 和变量个数 $p = 60$ ，对于第 k 个数值实验（其中编号 $k = 1, \dots, 30$ ，模拟次数都为10,000次），对于检验显著性水平的模拟，生成均值向量为零向量，协方差矩阵为 $\Sigma_0 = \text{diag}\{1, \dots, 1000\}$ （其中第 k 个数值实验 Σ_0 对角线中1000的个数为 k ）的 $N_p(\mu, \Sigma_0)$ 随机数，检验水平设置在 $\alpha = 0.05$ ；对于检验功效的模拟，生成均值向量为零向量，协方差矩阵为 $\Sigma^{**} = \text{diag}\{1, \dots, 1200\}$ （其中第 k 个数值实验 Σ_1 对角线中1200的个数为 k ） $N_p(\mu, \Sigma^{**})$ 随机数。

$T_1 \text{ size}$ 表示定理3对应的检验统计量 $\frac{\log \Lambda_m^* - \mu_m}{m \cdot \sigma_m}$ 的显著性水平， $T_2 \text{ size}$ 表示定理4对应的检验统计量 $\frac{\log \Lambda_n^* - \mu_n}{n \cdot \sigma_n}$ 的显著性水平， $T_3 \text{ size}$ 表示使用2.3节方法2（将假设检验问题 $H_0: \Sigma = \Sigma_0$ 转换为 $H_0: \Sigma = I_p$ ）对应检验统计量的显著性水平，类似的， $T_1 \text{ power}$ 、 $T_2 \text{ power}$ 和 $T_3 \text{ power}$ 分别表示它们的检验功效。

3.3 检验显著性水平和功效模拟 (单个高维总体协方差矩阵等于给定对角矩阵)

表3-2 三种方法的检验统计量的检验显著性水平和检验功效对比

编号 k	检验显著性水平 (在 H_0 下)			检验功效 (在 H_1 下)		
	T_1 size	T_2 size	T_3 size	T_1 power	T_2 power	T_3 power
1	0.0499	0.0471	0.0494	0.3117	0.3104	0.0545
2	0.0486	0.0481	0.0497	0.4880	0.4969	0.0520
3	0.0510	0.0478	0.0540	0.6416	0.6405	0.0521
4	0.0504	0.0498	0.0530	0.7489	0.7521	0.0549
5	0.0518	0.0425	0.0521	0.8366	0.8365	0.0564
6	0.0472	0.0476	0.0584	0.8961	0.8878	0.0535
7	0.0481	0.0475	0.0539	0.9346	0.9359	0.0604
8	0.0504	0.0455	0.0526	0.9565	0.9571	0.0607
9	0.0526	0.0503	0.0540	0.9725	0.9715	0.0581
10	0.0466	0.0475	0.0539	0.9814	0.9835	0.0608
11	0.0501	0.0468	0.0527	0.9881	0.9900	0.0641
12	0.0479	0.0519	0.0541	0.9941	0.9932	0.0666
13	0.0529	0.0511	0.0518	0.9960	0.9962	0.0616
14	0.0517	0.0464	0.0541	0.9972	0.9976	0.0629
15	0.0492	0.0488	0.0505	0.9986	0.9987	0.0713
16	0.0471	0.0478	0.0533	0.9988	0.9989	0.0689
17	0.0507	0.0468	0.0496	0.9993	0.9992	0.0678
18	0.0490	0.0524	0.0533	0.9998	0.9995	0.0796
19	0.0503	0.0508	0.0492	0.9997	0.9999	0.0753
20	0.0521	0.0464	0.0530	0.9998	0.9998	0.0748

3.4 检验功效变化的数值模拟 (单个高维总体协方差矩阵等于给定对角矩阵)

选取样本量 $m = 100, 150, 200, 250, 300, 350$ 和对应变量个数 $p = 60, 90, 120, 150, 180, 210$ (保证 $\frac{p}{m}$ 不变), 模拟次数都为10,000次, 对于检验显著性水平的模拟, 生成均值向量为零向量, 协方差矩阵为对角线元素全为2的对角矩阵 Σ_0 的 $N_p(\mu, \Sigma_0)$ 随机数, 检验水平设置在 $\alpha = 0.05$; 对于检验功效的模拟, 生成均值向量为零向量, 协方差矩阵为对角线值全为2.1的对角矩阵 Σ'' 的 $N_p(\mu, \Sigma'')$ 随机数。

3.4 检验功效变化的数值模拟

(单个高维总体协方差矩阵等于给定对角矩阵)

表3-3 协方差矩阵等于对角矩阵检验的检验功效和变量个数的关系对比

	检验显著性水平 (在 H_0 下)	检验功效 (在 H_1 下)
$m = 100, p = 60$	0.0506 (0.00219)	0.6066 (0.00489)
$m = 150, p = 90$	0.0509 (0.00220)	0.9115 (0.00284)
$m = 200, p = 120$	0.0484 (0.00215)	0.9924 (0.00087)
$m = 250, p = 150$	0.0529 (0.00224)	0.9997 (0.00017)
$m = 300, p = 180$	0.0494 (0.00217)	1.0000 (0.00000)
$m = 350, p = 210$	0.0491 (0.00216)	1.0000 (0.00000)



4 结论和展望

本文对现有的高维总体协方差矩阵假设检验的方法进行综述与回顾，并针对单个高维总体协方差矩阵等于单位矩阵、对角矩阵和对称正定矩阵的假设检验问题，分别提出检验方法。结果表明，该检验方法比传统的似然比检验有更好的检验显著性水平和检验功效。

并且对于协方差矩阵等于特定对称正定矩阵的检验问题，在样本协方差矩阵含有较大特征值时，提出了更稳健的检验流程。

4 结论和展望

- 对多种假设检验问题，本文的似然比检验框架下得到的检验统计量所含成分，对于在超高维等情形提出浓缩信息的统计量有启发作用。（样本协方差矩阵特征值的和、特征值的平方和）
- 本文假定样本服从多元正态分布假定，并且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n} \rightarrow c \in (0,1]$ 的限制，进一步研究可考虑放松正态假定，或改为更易验证的接近正态假定的条件；或改进检验统计量使之适用于 $p > n$ 的情形。

■

**从论文到答辩，从综述到理论推导，对前辈学人的等身著作和读书治学精神愧不能表达万一——倘若
有若干真实处，则是读者自己的学识之真实。**
