

UNIWERSYTET KARDYNAŁA STEFANA WYSZYŃSKIEGO
W WARSZAWIE

WYDZIAŁ MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZY
SZKOŁA NAUK ŚCISŁYCH

Dariusz Wójcik
106101
Matematyka

Analiza stabilności w uogólnionym układzie Lorenza

Praca magisterska
Promotor:
Prof. dr. hab. Wiesław M. Macek

WARSZAWA 2021

Spis treści

1	Wstęp	3
2	Wyprowadzenie modelu Lorenza	4
3	Analiza stabilności i początek konwekcji i turbulencji w modelu Lorenza	7
4	Równania konwekcji w płynie z polem magnetycznym	10
5	Uogólniony model Lorenza	13
6	Analiza modelu: stabilność punktów krytycznych i bifurkacje, zachowanie długoterminowe	15
7	Podsumowanie	25
	Bibliography	27

1 Wstęp

Pracę rozpocząłem od przedstawienia znanego układu zaproponowanego przez Edwarda Nortona Lorenza (patrz [1] lub [3]), który jest układem trzech nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych, wykazującego wrażliwość na warunki początkowe co uniemożliwia długoterminowe przewidywanie zachowania tego układu. Następnie wprowadziłem wielomiany charakterystyczne (patrz [1]), aby móc zbadać jego jakościowe zachowanie w celu zbadania stabilności tego układu. Możemy zauważyć obecność konwekcji Rayleigha-Bénarda przy pewnych określonych warunkach. W dalszej części wprowadziłem równania konwekcji, aby przejść do wyprowadzenia uogólnionego modelu Lorenza, który został zaproponowany przez Prof. Wiesława Macka i Dr. Marka Strumika w pracy [2] z 2010 roku. Autorzy otrzymali układ czterech nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych na podstawie scenariusza Rayleigha - Bénarda stosując ogólne podejście magnetohydrodynamiczne. Układ ten zależny jest od czterech parametrów. Zmienna X jest proporcjonalna do intensywności ruchów konwekcji tak jak i w standardowym modelu Lorenza. Zmienne Y i Z opisują profil temperatury. Dodatkowo w uogólnionym modelu Lorenza autorzy wprowadzili nową zmienną W zależną od czasu, która opisuje profil pola magnetycznego wywołanego przez konwekcje namagnetyzowanego płynu. Następnie przeprowadziłem analizę modelu, to znaczy zbadłem stabilność punktów krytycznych i zbadłem występowanie bifurkacji Hopfa w zależności od parametrów kontrolnych. Oczekiwać można różnych typów bifurkacji Hopfa w uogólnionym układzie Lorenza. Ponadto, krótko opisałem długoterminowe zachowanie układu. Analiza ta sugeruje, że przedział liniowej stabilności uogólnionego układu Lorenza musi być znacznie szerszy niż dla standardowego modelu Lorenza ($\omega_0 = 0$ i $\sigma_m = 0$).

2 Wyprowadzenie modelu Lorenza

W następującym rozdziale postaram się przedstawić krótkie wyprowadzenie modelu Lorenza, który, jak sama nazwa wskazuje, zaproponowany został przez Amerykańskiego matematyka Edwarda N. Lorenza w pracy [3] z 1963 roku. Skrócone wyprowadzenie przedstawione zostało w dodatku A oraz B w książce H. Schuster, W. Just [4].

Rozważmy eksperyment Rayleigha - Bénarda (który przedstawiono na Rysunku 1). Stan cieczy opisany jest przez pole prędkości v i pole temperatury $T(x, t)$. Podstawowe równania, które opisują ten system to:

1. równanie Naviera-Stokesa:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \mathbf{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 v \quad (2.1)$$

2. równanie (dyfuzja) przewodnictwa cieplnego:

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \nabla^2 T \quad (2.2)$$

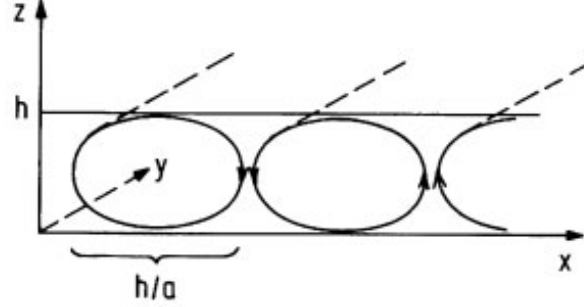
3. równanie ciągłości:

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho v) = 0 \quad (2.3)$$

z warunkami początkowymi

$$\begin{aligned} T(x, y, z = 0, t) &= T_0 + \Delta T \\ T(x, y, z = h, t) &= T_0. \end{aligned}$$

gdzie ρ oznacza gęstość płynu, μ to jego lepkość, p to ciśnienie, κ to przewodnictwo cieplne oraz $F = \rho g e_z$ to zewnętrzna siła w kierunku e_z względem grawitacji.



Rysunek 1: Rolki konwekcyjne i geometria w doświadczeniu Bénarda

Aby uprościć obliczenia, zakładamy, że

- układ jest niezmienniczy ze względu na przesunięcia w kierunku y tak, że rolki konwekcyjne rozciągają się do nieskończoności, jak pokazano na Rysunku 1,
- zależność Δt od wszystkich współczynników oprócz $\rho = \rho_0(1 - \alpha\Delta t)$ może być zaniedbana (aproksymacja Boussinesqa).

Wtedy równanie ciągłości przyjmuje postać

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \text{ z } u = v_x \text{ oraz } w = v_z, \quad (\text{div } v = 0) \quad (2.4)$$

i wygodnie jest wtedy wprowadzić funkcję $\psi(x, z, t)$ z

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \text{ oraz } w = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.5)$$

taką, że równanie (2.4) jest automatycznie spełnione.

Następnie wprowadźmy odchylenie $\theta(x, z, t)$ od liniowego profilu temperatury

$$T(x, z, t) = T_0 + \Delta T - \frac{\Delta T}{h}z + \theta(x, z, t). \quad (2.6)$$

Używając równań (2.5) i (2.6), podstawowe równania, według Saltzmanna [9], mogą być zapisane w postaci

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} + \nu \nabla^4 \psi + g\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = -\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \nabla^2 \theta \quad (2.8)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\frac{\partial(a, b)}{\partial(x, z)} &= \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial b}{\partial x}, \\ \nabla^4 &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2}\end{aligned}$$

gdzie $\nu = \mu/\rho_0$ jest lepkością kinematyczną, i wyrażenie zawierające ciśnienie zostało wyeliminowane przez wzięcie rotacji z równania Naviera - Stokesa. Aby uprościć równania (2.7) i (2.8), Lorenz [3] użył następujących warunków początkowych:

$$\theta(0, 0, t) = \theta(0, h, t) = \psi(0, 0, t) = \psi(0, h, t) = \nabla^2 \psi(0, 0, t) = \nabla^2 \psi(0, h, t) = 0 \quad (2.9)$$

oraz zachował tylko wyrażenia najniższego rzędu rozwinięcia w szereg Fouriera ψ i θ oraz zaproponował następujące przybliżenie:

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+a^2} \frac{1}{\kappa} \psi &= \sqrt{2} X(t) \sin\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi h}{z}\right) \\ &= \sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi h}{z}\right) \\ &\quad - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right)\end{aligned} \quad (2.10)$$

gdzie a jest współczynnikiem kształtu (zobacz Rysunek 1) oraz, jak pisze E. Lorenz w [3], $R_c = \pi^4 a^{-2} (1+a^2)^3$ jest wartością krytyczną znaną przez Rayleigha. W pracy powiedziane jest także, że jej minimalną wartością gdy $a^2 = \frac{1}{2}$ jest $R_c = 27\pi^4/4$.

Dalej, wstawiając pierwszą i drugą równość z (2.10) do równań (2.7) i (2.8) i pomijając wyższe harmoniki, dostaniemy w końcu model Lorenza [3]:

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \quad (2.11)$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y \quad (2.12)$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \quad (2.13)$$

gdzie kropki oznaczają pochodne w stosunku do znormalizowanego czasu $\tau = \pi^2 h^{-2} (1+a^2) \kappa t$, $\sigma = \nu/\kappa$ jest liczbą Prandtla, $b = 4(1+a^2)^{-1}$ oraz $r = R/R_c \propto \Delta T$ jest zewnętrznym parametrem kontrolnym.

3 Analiza stabilności i początek konwekcji i turbulencji w modelu Lorenza

Zapiszmy równania Lorenza [3] (to znaczy (2.11), (2.12) i (2.13)) w bardziej zwięzły sposób

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (3.1)$$

oraz przeprowadźmy linearyzację wzdłuż punktów stałych, które otrzymujemy przez porównanie prawej strony równań (2.11)-(2.13) do 0.

$$0 = -\sigma X + \sigma Y \quad (3.2)$$

$$0 = -XZ + rX - Y, \quad (3.3)$$

$$0 = XY - bZ, \quad (3.4)$$

Z (3.2) mamy $X = Y$. Następnie z (3.4) jest $X = \sqrt{bZ}$. Wstawiając teraz X do (3.3) dostajemy $\sqrt{bZ}(r - 1 - Z) = 0$. Stosując podstawienie $Z^{1/2} = H$ otrzymujemy $H = 0$ lub $H = \sqrt{r - 1}$, skąd $Z = 0$ lub $Z = r - 1$. Podstawiając znalezione Z do (3.2) i (3.4) mamy $X = Y = 0$ lub $X = Y = \sqrt{b(r - 1)}$. Stąd

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}; \quad \mathbf{X}_2 = (\pm\sqrt{b(r - 1)}; \pm\sqrt{b(r - 1)}; r - 1), \quad (3.5)$$

które określone są przez

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_{1,2}) = 0 \quad (3.6)$$

Pierwszy z punktów stałych $\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$ odpowiada przewodnictwu cieplnemu bez ruchu cieczy i jego macierz stabilności ma postać

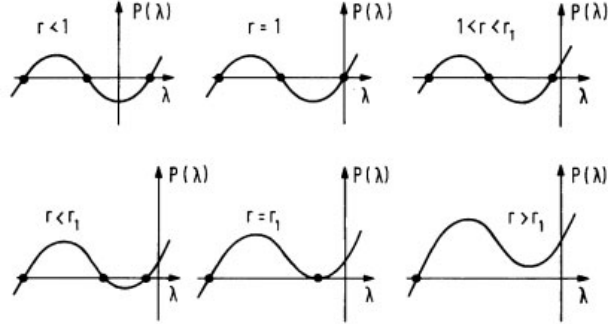
$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right|_{\mathbf{X}_1} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Jego równanie charakterystyczne przyjmuje wtedy postać:

$$P(\lambda) = -(\sigma + \lambda)(1 + \lambda)(b + \lambda) - r\sigma(-b - \lambda) = (b + \lambda)(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)) = 0$$

oraz jego wartości własne są następujące

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4(r - 1)\sigma}}{2}; \quad \lambda_3 = -b. \quad (3.8)$$



Rysunek 2: Jakościowe zachowanie wielomianu $P(\lambda)$

Zatem $\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$ jest stabilny tzn. wszystkie wartości własne są ujemne dla $0 < r < 1$. Konwekcja Bénarda pojawia się przy $r = 1$, gdyż wtedy $\lambda_1 = 0$ i właśnie wtedy przyjmowany jest drugi punkt stały, to znaczy \mathbf{X}_2 (który odpowiada poruszającym się rolkom jak przedstawiono na Rysunku 1).

Dodatkowo dla $r \geq 0$ możliwe są dwa inne znalezione wcześniej punkty stałe C^\pm to znaczy $\mathbf{X}_2 = (\pm c, \pm c, r-1)$, gdzie $c = \sqrt{b(r-1)}$, odpowiadające konwekcyjnym ruchom okrężnym odpowiednio lewoskrętnym i prawoskrętnym, analogicznie do stacjonarnej rotacji koła w lewo lub w prawo. Macierz stabilności dla \mathbf{X}_2 ma postać:

$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right|_{\mathbf{X}_2} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & c \\ c & c & -b \end{pmatrix}; \quad c \equiv \pm \sqrt{b(r-1)}. \quad (3.9)$$

Jego wartości własne to pierwiastki wielomianu trzeciego rzędu

$$P(\lambda) = -(\sigma + \lambda)(1 + \lambda)(b + \lambda) - c^2\sigma + b(b + \lambda) - c^2(\sigma + \lambda) = \\ \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0. \quad (3.10)$$

Widzimy, że dla $r = 1$ wielomian upraszcza się do stopnia drugiego i rozwiązując proste równanie algebraiczne otrzymamy $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -b$ oraz $\lambda_3 = -(\sigma+1)$ tzn. punkt stały konwekcji jest marginalnie stabilny dla początku konwekcji, a Rysunek 2 ukazuje, że jest stabilny dla $1 < r < r_1$. Dla $r_1 < r_c$ dwie z wartości własnych, stają się zespolone tzn. pojawiają się dwa cykle graniczne które są stabilne tak długo jak część rzeczywista wartości zespolonych wartości własnych jest mniejsza od zera. Dla $r = r_c$ te części rzeczywiste

stają się zerami tzn. mamy dwie wartości własne $\lambda = \pm i\omega$. Wstawiając wartości czysto urojone do wielomianu charakterystycznego (3.10) otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} -i\omega^3 - (\sigma + b + 1)\omega^2 + b(\sigma + r)i\omega + 2b\sigma(r - 1) &= 0 \\ i\omega^3 - (\sigma + b + 1)\omega^2 - b(\sigma + r)i\omega + 2b\sigma(r - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Dodając stronami powyższe równania, a następnie wyłączając przed nawias oraz przenosząc na drugą stronę wyraz ω^2 dostajemy równanie

$$\omega^2 = \frac{2\sigma b(r - 1)}{\sigma + b + 1}, \quad (3.11)$$

a stąd już

$$\omega = \sqrt{\frac{2\sigma b(r - 1)}{\sigma + b + 1}}. \quad (3.12)$$

Wstawiając otrzymane powyżej ω do pierwszego z równań układu, a potem przyrównując część rzeczywistą i część urojoną do zera otrzymanego wielomianu, część rzeczywista nam się wyzeruje, a z części urojonej czyli

$$\sqrt{\frac{2\sigma b(r - 1)}{\sigma + b + 1}} \left(b(r + \sigma) - \frac{2b\sigma(r - 1)}{\sigma + b + 1} \right) = 0, \quad (3.13)$$

dostaniemy wartość krytyczną parametru $r = r_c$ wykonując podstawowe operacje algebraiczne, to znaczy wyłączanie przed nawias i przenoszenie na drugą stronę równania. Znaleziony parametr ma postać:

$$r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}. \quad (3.14)$$

Jest to wartość krytyczna parametru kontrolnego r dla stacjonarnej konwekcji. Stąd, jeśli $\sigma < b + 1$, to żadna dodatnia wartość r nie spełnia (3.14) i stacjonarna konwekcja jest zawsze stabilna. Jeśli jednak $\sigma > b + 1$, to stacjonarna konwekcja jest niestabilna dla odpowiednio dużych liczb Rayleigha. W naszym przypadku $r_c = \frac{470}{19} \approx 24.7368$, czyli dla $a = 10$ oraz $b = \frac{8}{3}$, co zaproponował Saltzman w 1962 roku (zob. [9]). Dla wartości większych niż r_c cykle graniczne stają się niestabilne (zespolone wartości własne mają dodatnie części rzeczywiste) i tu pojawia się chaos. Analiza ta jest zgodna z numerycznym wynikiem przedstawionym przez Lorenza [3], który odkrył

chaotyczne zachowanie układu dla $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ i dla r_c większego niż 24.7368.

Przejdziemy teraz do próby wyprowadzenia uogólnionego układu Lorenza, który pierwszy raz zaproponowany został przez W. M. Macka i M. Strumika w pracy [2] z 2010 roku.

Zacniemy od wyprowadzenia równań konwekcji, na podstawie publikacji W. M. Macka [1] z 2018 r.

4 Równania konwekcji w płynie z polem magnetycznym

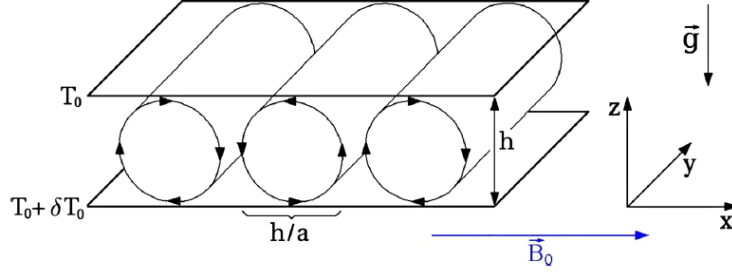
Wiemy, że lepkie namagnesowane płyny powinny zachowywać się zgodnie z trzema podstawowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi (zobacz P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal [11]) tj:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla(p + \frac{B^2}{2\mu_0}) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}}{\mu_0\rho} + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (4.1)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \eta\nabla^2\mathbf{B}, \quad (4.2)$$

$$\frac{dT}{dt} = \kappa\nabla^2T, \quad (4.3)$$

gdzie ν, η i κ oznaczają odpowiednio lepkość kinematyczną, magnetyczną lepkość dyfuzyjną i przewodnictwo cieplne danej cieczy. Oprócz podstawowego prawa Naviera - Stokesa, równanie (4.2) i (4.3) opisuje odpowiednio magnetyczną adwekcję - dyfuzję oraz przewodnictwo cieplne. Jak zwykle, dla standardowych modeli konwekcji w płynie z polem magnetycznym, lepka dyfuzja jest uwzględniona w przedostatnim wyrazie równania (4.1), lepkość w ostatnim wyrazie równania (4.2), a w równaniu (4.3) zachowane jest tylko przewodnictwo cieplne, podczas gdy wyrażenia związane z Ohmowym i lepkiem ogrzewaniem są pomijane (zgodnie z Schuster [4] lub Landau [10]). Jednak nawet te nieco uproszczone równania magnetohydrodynamiczne (MHD) są trudne do rozwiązania wprost, gdyż zachodzą zmiany w czasie i przestrzeni, $\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$, prędkości \mathbf{v} przepływu, temperatury T wraz z gęstością masy ρ i ciśnieniem p i zmiany pola magnetycznego \mathbf{B} . Wygodnie jest zdefiniować prędkość Alfvéna $\mathbf{v}_A = \mathbf{B}/(\mu_0\rho)^{1/2}$, ze stałą przenikalnością magnetyczną w próżni μ_0 .



Rysunek 3: Schemat geometrii dla konwekcji hydromagnetycznej

W równaniu (4.1) \mathbf{f} oznacza siłę wyporności. Dla problemu Rayleigha - Bénarda [12] (patrz. Rysunek 3) pod wpływem pionowego pola grawitacyjnego ze stałym przyspieszeniem g , skutkuje to w sile wyporności $f = \rho g$. Schematy tego standardowego scenariusza poziomej (oś x) warstwy lepkiego płynu o wysokości h i współczynniku kształtu a pokazano na Rysunku 3 (brak zmian w kierunku y) i przedstawiono w rozdziale Dodatek w Schuster [4] lub Landau [10]. Płyn ogrzewany jest od dołu przy oddziaływaniu pionowego gradientu temperatury (oś z) δT_0 . Jak zwykle biorąc stały współczynnik β bierzemy pod uwagę zwiększenie objętości f wyrażenia $\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$, ale tym razem płyn traktowany jest jako nieściśliwy, $\rho = \rho_0$ (jak dla aproksymacji Oberbecka - Boussinesqa [14]).

Teraz jednakże, w porównaniu z klasycznym problemem Rayleigha - Bénarda (patrz. Rysunek 1), w badaniach zajmujemy się [1] efektem umieszczonego w płynie pola magnetycznego. Naturalnie w przypadku płynu nieściśliwego możemy użyć funkcji potencjału ψ zdefiniowanej przez $\mathbf{v} = \nabla \times \psi$ i podobnie - wektor potencjału \mathbf{A} spełniający oprócz równania (4.2) także $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ i $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Można by oczekiwać, że w przypadku cienkiej poziomej warstwy istotny powinien być wpływ zewnętrznego pola magnetycznego. Jeśli początkowe pole magnetyczne \mathbf{B}_0 zastosowane (wzdłuż osi x) przez dodanie prędkości Alfvéna $v_{A0} = B_0/(\mu_0\rho_0)^{1/2}$ i pomijając ewentualne pionowe pole, możemy zapisać poszczególne zakłócone potencjały w postaci $\psi = \{0, \psi(x, z, t), 0\}$ i $\mathbf{A}/(\mu_0\rho_0)^{1/2} = \{0, \alpha(x, z, t) - v_{A0}z, 0\}$. Zwyczajowo $\theta(x, z, t)$ opisuje odchylenie od liniowego profilu temperatury $T(x, z, t) = T_0 + \delta T_0(1 - \frac{h}{z}) + \theta(x, z, t)$ w równaniu (4.3).

W przypadku przepływu dwuwymiarowego, (co zrobił Saltzman w [10]), stosując rotację równania (4.1) zarówno cieplna, jak i izotropowa część ciśnie-

nia magnetycznego zostały wyeliminowane, lecz anizotropowe ciśnienie linii sił pola magnetycznego $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}/(\mu_0\rho)$ powinno nadal być ważne. Zauważmy następnie, że pierwsze wyrażenie $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ prawej strony równania (4.2) odpowiedzialne jest za zmiany przepływu prędkości v w przestrzeni w danym czasie wzdłuż konwekcyjnego pola magnetycznego \mathbf{B} . Jest to najwyraźniej ważniejsze niż możliwe wyrażenie adwekcji $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}$, jak pokazał A. Oberbeck [15] (dla stałego pola magnetycznego \mathbf{B}_0 to wyrażenie znika). Dlatego też w przypadku konwekcyjnego ruchu zamrożonego w płynie pola magnetycznego, stosuje się tu tylko konwekcyjne wyrażenie $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v}$, jak pokazali W. Macek i M. Strumik [2] lub W. Macek w [1]. W ten sposób, z podstawowych równań (4.1) - (4.3), uzyskuje się następujące równania potencjału strumienia ψ , magnetycznego potencjału perturbowanego α i odchylenia od liniowego profilu temperatury θ (tj. bez rolek konwekcyjnych):

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi = -\frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(x, z)} + \frac{1}{\mu_0\rho}\frac{\partial(\alpha, \nabla^2\alpha)}{\partial(x, z)} + \frac{B_0}{\mu_0\rho}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\alpha + \nu\nabla^4\psi + g\beta\frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\alpha = & -\frac{\partial(\psi, \nabla^2\alpha)}{\partial(x, z)} + \frac{\partial(\alpha, \nabla^2\psi)}{\partial(x, z)} + B_0\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi + \eta\nabla^4\alpha + \\ & + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}\right) - 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial z}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = -\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\delta T_0}{h}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \kappa\nabla^2\theta, \quad (4.6)$$

gdzie Jakobian zdefiniowany jest przez

$$\frac{\partial(a, b)}{\partial(x, z)} \equiv \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial b}{\partial x}, \quad (4.7)$$

oraz operator czwartego stopnia zdefiniowany jest jako

$$\nabla^4 \equiv (\nabla^2)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial z^2}. \quad (4.8)$$

Trzeci i czwarty wyraz prawej strony równania (4.4) wynika (zob. [1]) z drugiego wyrazu równania (4.1), (4.5) jest nowe i (4.6) jest takie samo jak dla nienamagnetyzowanej cieczy (patrz Lorenz [3]). Wykorzystujemy wolne warunki brzegowe, podobnie jak w klasycznym modelu Lorenza, tzn. wszystkie trzy funkcje ψ , α i θ oraz ich Laplasjany powinny zniknąć przy $z = 0$ i $z = h$.

5 Uogólniony model Lorenza

Prędkość i pole magnetyczne w równaniach (4.1) i (4.2) spełniają (jak zauważył W. Macek w [1]) te same warunki $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ i $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, więc rozwinięcie w szereg Fouriera dla prędkości i magnetycznego potencjału powinny być podobne. Możemy zatem, tak jak Rayleigh [12] szukać rozwiązań potencjałów ψ i α dla prędkości średniej oraz prędkości Alfvéna w podwójnej niesymetrycznej postaci (uwzględniając parametr a) rozwinięcia w szereg Fouriera (patrz [9]):

$$\psi(x, z, t) = \frac{1+a^2}{a} \kappa \sqrt{2} X(t) \sin\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right), \quad (5.1)$$

$$\alpha(x, z, t) = \frac{1+a^2}{a} \kappa \sqrt{2} W(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right). \quad (5.2)$$

Oczywiście, jak widać z równania (4.3), temperatura ma trochę inną postać, i dla odpowiadającej funkcji θ zachowujemy takie same wyrażenia pierwszego i drugiego rzędu jak w równaniach Lorenza [3]

$$\theta(x, z, t) = \frac{R_c}{\pi R_a} \delta T_0 \sqrt{2} \left(Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \right) \quad (5.3)$$

W trójwymiarowym modelu Lorenza, oprócz zależnej od czasu zmiennej X proporcjonalnej do intensywności ruchu konwekcyjnego, pozostałe dwie zmienne Y i Z opisują profil temperatury w równaniu (4.3), podobnie jak w poprzednim rozdziale dla zwykłego układu Lorenza [3]. Ponadto, w przypadku namagnesowanego płynu wprowadzona została (zobacz W. Macek, M. Strumik [2]) dodatkowa zmienna W zależna od czasu, opisująca profil pola magnetycznego powstałego w wyniku konwekcji płynów zgodnie z równaniami (4.1) i (4.2), jak opisaliśmy w równaniu (5.2).

Stosując przybliżenie $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} \approx (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}$ w równaniu (4.2), dostaliśmy (W. Macek, M. Strumik [2] oraz W. Macek [1]) z ogólnych równań hydromagnetyzmu (4.1) – (4.3) model opisany przez cztery równania różniczkowe zwyczajne:

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y - \omega_0 W, \quad (5.4)$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y, \quad (5.5)$$

$$\dot{Z} = XY - bZ, \quad (5.6)$$

$$\dot{W} = \omega_0 X - \sigma_m W, \quad (5.7)$$

gdzie kropki, po lewej stronie równań, oznaczają pochodne względem znormalizowanego czasu $\tau = (1 + a^2)\kappa(\pi/h)^2 t$ oraz $\sigma = \nu/\kappa$ to liczba Prandtla (stosunek lepkości kinematycznej do przewodnictwa cieplnego) i $b = 4/(1 + a^2)$. Ponadto ω_0 to nowy parametr kontrolny symbolizujący bezwymiarową magnetyczną częstotliwość. Jak zawsze, $r = R_a/R_c$ jest parametrem kontrolnym układu proporcjonalny do gradientu temperatury δT_0 , lub liczby Rayleigha $R_a = g\beta h^3 \delta T_0 / (\nu\kappa)$ znormalizowanej przez wartość krytyczną $R_c = (1 + a^2)^3(\pi^2/a)^2$.

Dodatkowo do układu Lorenza [3], wprowadzony został dodatkowy parametr kontrolny (oznaczenie W. Macek, M. Strumik [2] oraz W. Macek [1]) proporcjonalny do początkowego natężenia pola magnetycznego $B_0 = |\mathbf{B}_0|$ zastosowanego w układzie wzdłuż osi X , (patrz Rysunek 3) to znaczy zdefiniowany został on jako zwykła bezwymiarowa częstotliwość magnetyczna $\omega_0 = v_{A0}/\nu_0$, gdzie $\nu_0 = 4\pi\kappa/(abh)$. Ostatni wyraz w równaniu (5.4) pochodzi od anizotropowego ciśnienia linii sił pola magnetycznego $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}/(\mu_0\rho)$ w równaniu (4.1).

Podobnie, pierwszy wyraz równania (5.7) wynika z $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ z prawej strony równania (4.2), opisującego zmieniający się przepływ wzdłuż konwekcji pól magnetycznych (W. Macek, M. Strumik [2]). Oczywiście oprócz liczby Prandtla $\sigma = \nu/\kappa$, właściwości namagnetyzowanego płynu scharakteryzowane są przez parametr lepkości $\sigma_m = \eta/\kappa$ (stosunek oporu właściwego i przewodnictwa) pojawiające się w równaniu (5.7) i wynikające z ostatnich wyrażeń w równaniach (4.2) i (4.3). Zauważmy, że sprzężenie pierwszego i czwartego z równań uogólnionego układu Lorenza tzn. (5.4) i (5.7) oraz drugiego z trzecim tzn. (5.5) i (5.6) daje dwie wyglądające podobnie pary, które są wzajemnie sprzężone zmiennymi (W, X) i (Z, Y) . Zatem stwierdzić możemy (tak jak zauważył W. Macek [1]), że czterowymiarowy układ (5.4) - (5.7) wydaje się być jeszcze bardziej symetryczny niż klasyczny model Lorenza [2].

Próbowano już analizować dużą liczbę modeli konwekcji ze zredukowaną liczbą parametrów (patrz Saltzman [10]). Należy jednak pamiętać o fundamentalnych trudnościach w wykryciu nisko wymiarowego zachowania się danych eksperymentalnych lub obserwowalnych, dla wymiaru korelacyjnego większego niż około pięć (zob. G. Rowlands, J. C. Sprott [17]). Dla układów dynamicznych wymiaru większego niż ten próg, metody analizy szeregów czasowych nie pozwalają na dokładne rozróżnienie pomiędzy nisko wymiarową dynamiką, a losowymi danymi, szczególnie w obecności dynamicznego szumu. Spodziewać się zatem można problemów z fałszykownością modeli 5

lub więcej wymiarowych. W tym kontekście ten stosunkowo nisko wymiarowy uogólniony model W. Macek, M. Strumik [2] jest w stanie w zaskakująco bogaty sposób przedstawić zachowanie dynamiczne w czterowymiarowej przestrzeni fazowej.

Nim przejdę do szerszej analizy modelu, warto wspomnieć o jego zastosowaniach (patrz [1, 2, 8]). Potencjalne możliwe zastosowania analizowanego modelu są następujące:

1. płynne wnętrze jądra Ziemi (model geodynamiczny);
2. wnętrza słońca i gwiazd, w tym masywnych gwiazd z ciężkimi pierwiastkami (eksperyment Brite'a);
3. plamy słoneczne i dziury koronalne;
4. ruch w magnetosferze i heliosferze, a nawet w przestrzeni międzygwiazdnej i międzygalaktycznej;
5. plazmy związane magnetycznie w urządzeniach do przeprowadzania kontrolowanej reakcji termojądrowej (zwanych tokamakami);
6. nanourządzenia i mikrokanały w nanotechnologii.

6 Analiza modelu: stabilność punktów krytycznych i bifurkacje, zachowanie długoterminowe

Przy użyciu uogólnionego układu Lorenza, równania (5.4) - (5.7) możemy zapisać (jak zaprezentowano w W. Macek, M. Strumik [2] lub W. Macek [1]) w następujący sposób:

$$\ddot{X} + \sigma \dot{X} + (\sigma r - \omega_0^2)X = -\sigma(Y + XZ) + \sigma_m \omega_0 W \quad (6.1)$$

$$\ddot{W} + \sigma_m \dot{W} + \omega_0^2 W = \sigma \omega_0 (Y - X). \quad (6.2)$$

Widzimy, że obie zmienne X i W spełniają równania dwóch sprzężonych tłumionych oscylatorów liniowych. Jednakże wyrażenia po prawej stronie równań (6.1) i (6.2) mogą być interpretowane jako nieliniowe siły napędzające. Teraz jednak sprzężenie X, W oraz Y, Z jest lepsze dzięki polu magnetycznemu \mathbf{B} . W szczególności gdy $\omega_0 = 0$, to sprzężenie to zanika (po lewej

stronie równania (6.2), W znika i zostaną tylko różniczki W), więc zmienna W zostaje stłumiona przez magnetyczną lepkość (patrz równ. (5.4) i (5.7)).

Punkty krytyczne uogólnionego układu Lorenza (5.4) - (5.7) możemy otrzymać (patrz [1]) podobnie jak dla zwykłego układu Lorenza (czyli tak jak robiliśmy to w rozdziale 3, lub też Schuster w rozdziale Dodatek A oraz B [4] dla układu trzech równań). Mianowicie zaczynamy od przyrównania prawej strony uogólnionego układu Lorenza do zera

$$0 = -\sigma X + \sigma Y - \omega_0 W, \quad (6.3)$$

$$0 = -XZ + rX - Y, \quad (6.4)$$

$$0 = XY - bZ, \quad (6.5)$$

$$0 = \omega_0 X - \sigma_m W, \quad (6.6)$$

Układ (6.3) - (6.6) ma tylko dwie nieliniowości: wyrażenia kwadratowe XY i XZ . Pierwszym punktem krytycznym jest trywialne $C^0 = (0, 0, 0, 0)$. Zajmiemy się teraz znalezieniem także punktów nietrywialnych. W tym celu przekształcamy równanie (6.6) do postaci $X = \frac{\sigma_m}{\omega_0} W$. Wstawiając następnie znalezione X do (6.3), po odpowiednich operacjach dostajemy $W(\frac{\sigma\sigma_m}{\omega_0} + \omega_0) = \sigma Y$, skąd $Y = \frac{W}{\sigma}(\frac{\sigma\sigma_m}{\omega_0} + \omega_0)$. Dalej, wstawiając Y i X do (6.4) oraz odpowiednio przekształcając powstałe równanie otrzymamy $Z = r - 1 - \frac{\omega_0^2}{\sigma\sigma_m} = r - (1 + e)$, gdzie $e = \frac{\omega_0^2}{\sigma\sigma_m}$ (oznaczenie wprowadzone w W. Macek [1]) jest magnetycznym parametrem kontrolnym, a σ i σ_m to wartości charakteryzujące zwyczajne kinetyczne i magnetyczne właściwości płynu. Następnie z (6.4) mamy $XY = bZ = b(r - (1 + e))$, skąd $Y = b(r - 1(1 + e))/X$. Ponadto, z równania (6.4) mamy $X(1 + e) = Y$, skąd $X^2 = \frac{b(r - (1 + e))}{1 + e}$ oraz pierwiastkując obustronnie dostajemy już X . Wykonując odpowiednie przekształcenia i podstawienia, otrzymamy $W = \pm \frac{\omega_0 d / \sigma_m}{\sqrt{1 + e}}$ oraz $Y = \pm d\sqrt{e + 1}$, gdzie $d = \sqrt{b((r - 1) - e)}$ (ponownie oznaczenie z W. Macek [1]). Zatem drugim i trzecim punktem krytycznym są

$$C^\pm = \{\pm d/\sqrt{(1 + e)}, \pm d\sqrt{(1 + e)}, r - (1 + e), \pm(\sigma/\omega_0)de/\sqrt{(1 + e)}\}$$

Jak zawsze analizę zaczniemy od trywialnego punktu krytycznego $C^0 = (0, 0, 0, 0)$ oraz dwóch niezerowych punktów krytycznych C^\pm . Stabilność uogólnionego układu Lorenza może być analizowana przez poszukiwania pierwiastków wielomianu charakterystycznego. Aby otrzymać ten wielomian zapiszmy

najpierw jego macierz stabilności. Przyjmuje ona postać

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & -\omega_0 \\ r - Z & -1 & -X & 0 \\ Y & X & -b & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

do której podstawiamy znalezione punkty krytyczne odpowiednio C^0 oraz C^\pm . Dla trywialnego punktu krytycznego $C^0 = (0, 0, 0, 0)$ macierz stabilności znacznie się upraszcza, ma postać

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & -\omega_0 \\ r & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Wtedy wielomian charakterystyczny przyjmuje następującą formę

$$\begin{aligned} P(\lambda) = & \lambda^4 + \lambda^3(1 + b + \sigma - \sigma_m) - b\sigma\sigma_m + br\sigma\sigma_m + b\omega_0^2 + \\ & \lambda^2(b + \sigma + b\sigma - r\sigma - \sigma_m - b\sigma_m - \sigma\sigma_m + \omega_0^2) + \\ & \lambda(b\sigma - br\sigma - b\sigma_m - \sigma\sigma_m - b\sigma\sigma_m + r\sigma\sigma_m + \omega_0^2 + b\omega_0^2). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Można go jeszcze uprościć do postaci

$$\begin{aligned} P(\lambda) = & \lambda^4 + (1 + b + \sigma - \sigma_m)\lambda^3 + \\ & (\sigma + b(1 + \sigma - \sigma_m) - \sigma_m - \sigma(r + -\sigma_m) + \omega_0^2)\lambda^2 + \\ & ((r - 1)\sigma\sigma_m + \omega_0^2 + b(r - 1 + \sigma_m) + \omega_0^2)\lambda + \\ & b((r - 1)\sigma\sigma_m + \omega_0^2) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Przy wspomnianych parametrach e, σ i σ_m , i przy powyższym wielomianie charakterystycznym z W. Macek [2] wynika, że punkt krytyczny C^0 jest stabilny dla $0 \leq r < r_0$, gdzie wartość krytyczna $r_0 = 1 + e$ może być interpretowana jako wartość charakterystyczna liczby Rayleigha dla początku konwekcji w bifurkacji widłowej. Ponadto mamy tutaj inną wartość r_T zwaną punktem Takensa-Bogdanova (zobacz F. Takens [18]), spełniającą warunek:

$$\omega_0^2 = \sigma_m^2 \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma_m} r_T = (\sigma + \sigma_m)/\sigma/(1 - \sigma_m) \quad (6.11)$$

w którym jeśli ω_0^2 jest większa niż wartość dana w powyższym równaniu, to punkt krytyczny C^0 podlega bifurkacji Hopfa, co może być odpowiedzialne za chaotyczne rozwiązania.

Z drugiej strony, znalezione wcześniej (patrz też W. Macek [1]) niezerowe punkty krytyczne dane są przez

$$C^\pm = \{\pm d/\sqrt{(1+e)}, \pm d\sqrt{(1+e)}, r - (1+e), \pm(\sigma/\omega_0)de/\sqrt{(1+e)}\}.$$

Zajmiemy się teraz tym przypadkiem, to znaczy dla punktów krytycznych C^\pm macierz stabilności przyjmuje bardziej skomplikowaną algebraicznie postać

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & -\omega_0 \\ r \pm (\sigma/\omega_0)de/\sqrt{(1+e)} & -1 & \pm d\sqrt{(1+e)} & 0 \\ \pm d\sqrt{(1+e)} & \pm d\sqrt{(1+e)} & -b & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Równanie charakterystyczne jest wówczas równaniem algebraicznym czwartego rzędu. Ma on stosunkowo długą i skomplikowaną postać

$$\begin{aligned} P(\lambda) = & \lambda^4 + (1 + b + \sigma + \sigma_m)\lambda^3 + \\ & (\sigma_m + \sigma\sigma_m + \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{\sigma_m} + b(\sigma + \sigma_m + \frac{r\sigma\sigma_m}{\sigma\sigma_m + \omega_0^2}))\lambda^2 + \\ & b(\sigma(r - 2 + \sigma_m) + \frac{\omega_0^2(\sigma_m - 2)}{\sigma_m} + \frac{r\sigma\sigma_m(\sigma + \sigma_m)}{\sigma\sigma_m + \omega_0^2})\lambda + \\ & 2b((r - 1)\sigma\sigma_m - \omega_0^2) \end{aligned} \quad (6.13)$$

jednakże stosując następujące podstawienia (zaproponowane przez W. Macek [1]) zależne od parametrów modelu, czyli $a_0 = 2b((r - 1)\sigma_m\sigma - \omega_0^2)$, $a_1 = b(\sigma(r - 1 + c) + \sigma_m(\sigma + 1 + c) + \omega_0^2(1 - 2/\sigma_m))$, $a_2 = b(\sigma_m + \sigma + c + 1) + \sigma_m(\sigma + 1) + \omega_0^2(1 - 1/\sigma_m)$ oraz $a_3 = \sigma_m + \sigma + b + 1$, gdzie $c = (\sigma_m\sigma(r - 1) - \omega_0^2)/(\sigma_m\sigma + \omega_0^2) = r/r_0 - 1$ oraz upraszczając odpowiednio wyrażenia stojące przy λ i λ^2 wielomian ten można zapisać w krótkiej formie

$$P(\lambda) = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (6.14)$$

Stabilność układu może być analizowana przez poszukiwania pierwiastków powyższego wielomianu charakterystycznego.

Przypomnijmy w tym miejscu, że układ jest stabilny tak długo jak części rzeczywiste wszystkich wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ są mniejsze od zera.

Punkty krytyczne C^\pm są stabilne (zob. W. Macek, M. Strumik [2]) dla $r_0 \leq r < r_H$, gdzie $r_0 = 1 + e$, a $r = r_H$ to wartość krytyczna dla której układ traci stabilność i pojawia się bifurkacja Hopfa. Oczywiście liczba krytyczna r_0 dla początku konwekcji wzrasta na skutek oddziaływania pola magnetycznego B_0 , więc pole magnetyczne może ustabilizować konwekcje w związku

z wyglądem rolek konwekcyjnych. Jednakże jeśli rozważymy oscylacje rolek konwekcyjnych jak przedstawiono w modelu (5.4) - (5.7), wpływ indukowanego pola magnetycznego na ruch płynu jest dużo bardziej skomplikowany (co zobaczyć można w standardowych książkach o magnetohydrodynamice L. D. Landau [11], T. G. Cowling [16]).

W zasadzie nawet w tym bardziej skomplikowanym przypadku wartość krytyczna r_H dla której pojawia się bifurkacja Hopfa, gdzie wielomian ma parę zespolonych wartości własnych $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, może być uzyskana analitycznie. W rzeczy samej, zacznijmy od podstawienia pod wartości własne (dla wielomianu (6.14)) dwóch pierwiastków czysto urojonych $i\omega$ oraz $-i\omega$. W ten sposób otrzymujemy następujący układ dwóch równań czwartego rzędu

$$\begin{aligned}\omega^4 - ia_3\omega^3 - a_2\omega^2 + ia_1\omega + a_0 &= 0, \\ \omega^4 + ia_3\omega^3 - a_2\omega^2 - ia_1\omega + a_0 &= 0.\end{aligned}$$

Dodając powyższe równania stronami otrzymujemy uproszczony wielomian czwartego rzędu $\omega^4 - a_2\omega^2 + a_0 = 0$. Stosując następnie pomocnicze podstawienie $\omega^2 = v$, znajdując pierwiastki powstałego wielomianu drugiego rzędu i ponownie wstawiając znalezione v do ω^2 otrzymujemy $\omega = \pm[(a_2 \pm (a_2^2 - 4a_0)^{1/2})/2]^{1/2}$. Następnie podstawiamy otrzymane wyrażenie do pierwszego równania z powyższego układu równań i zapisujemy otrzymany wielomian w postaci zespolonej $A+iB = 0$, gdzie $A = \omega^4 - a_2\omega^2 + a_0$ oraz $B = a_1\omega - a_3\omega^3$. A nam się wyzeruje, natomiast z B dostajemy równość

$$a_1(\pm[(a_2 \pm (a_2^2 - 4a_0)^{1/2})/2]^{1/2}) - a_3(\pm[(a_2 \pm (a_2^2 - 4a_0)^{1/2})/2]^{1/2})^3 = 0.$$

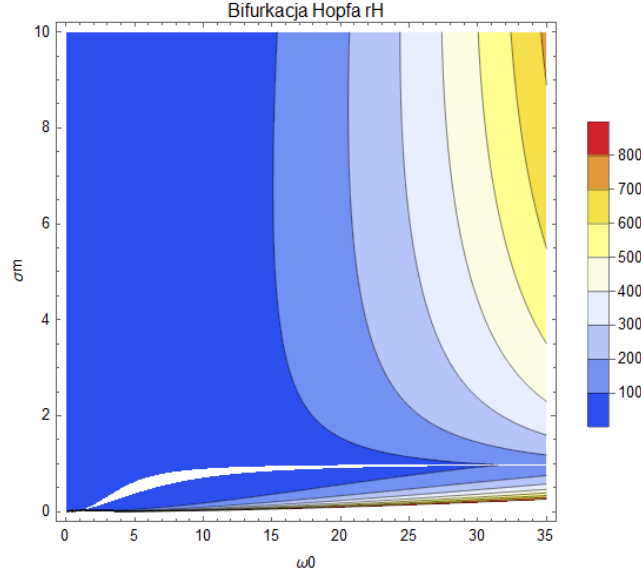
Widać, że po podstawieniu wcześniej zdefiniowanych wielkości a_0, a_1, a_2 oraz a_3 , postać wyrażenia jest długa i zawiła, więc do znalezienia szukanego wyrażenia $r = r_H$ możemy wykorzystać odpowiednie oprogramowanie takie jak na przykład **Wolfram Mathematica 12** lub język R. Do rozwiązania tego problemu postanowiłem wykorzystać program Mathematica (tak jak W. Macek w [1]). Otrzymana ogólna forma r_H jest oczywiście bardzo długa i skomplikowana, zależna od trzech innych parametrów modelu tj. magnetycznej liczby Prandtla σ_m , liczby Prandtla σ i geometrycznego parametru b . Tylko dla ustalonych wartości (najczęściej $\sigma = 10$ i $b = 8/3$, zob. też W. Macek, M. Strumik [2] lub E. Lorenz [3]) ta formuła (r_H jako funkcja parametru σ_m) daje się zapisać w uproszczony sposób w kilku liniach. Próba znalezienia rozwiązania bez ustalania wyżej wymienionych parametrów, kończy się anulowaniem operacji w programie Mathematica 12 i wyświetleniem komunikatu

mówiącego, że przekroczono czas obliczeniowy. Związane jest to ze zbyt dużą złożonością. Przy obydwu ustalonych parametrach, znaleziona postać r_H to

$$r_H = (160\sigma_m(\sigma_m(20 + \sigma_m) + \omega_0^2)(19\sigma_m + 3\omega_0^2))^{-1}(-570\sigma_m^6 - 27\omega_0^6 - \sigma_m^5(7790 + 147\omega_0^2) + \sigma_m^4(22400 - 1739\omega_0^2 - 9\omega_0^4) + \sigma_m^3(782400 - 1240\omega_0^2 - 9\omega_0^4) + \sigma_m^2\omega_0^2(108680 + 312\omega_0^2 + 9\omega_0^4) + \sigma_m(2774\omega_0^4 + 66\omega_0^6 + ((1/\sigma_m^2(41 + 3\sigma_m)^2(10\sigma_m + \omega_0^2)^2(\sigma_m^4(1760 + 19\sigma_m^2)^2 + 2\sigma_m^3(63360 + \sigma_m(8000 + \sigma_m(17364 + 19\sigma_m(-8 + 3\sigma_m))))\omega_0^2 + \sigma_m^2(-9264 + \sigma_m(8000 + \sigma_m(5210 + 9(-18 + \sigma_m)\sigma_m)))\omega_0^4 - 6\sigma_m(36 + \sigma_m(4 + \sigma_m(-43 + 3\sigma_m)))\omega_0^6 + 9(-1 + \sigma_m)^2\omega_0^8)))^{1/2}))$$
(6.15)

Zauważyć oczywiście można (patrz też W. Macek [1]), że dla nie namagnezowanego płynu (z $\omega_0 = 0$ i $\sigma_m = 0$) mamy $c = r - 1$ oraz $a_0 = 0$, a stąd równanie (6.14) redukuje się do wielomianu trzeciego stopnia (z $a_1 = 2b\sigma(r - 1)$, $a_2 = b(\sigma + r)$ oraz $a_3 = \sigma + b + 1$). W ten sposób możemy zweryfikować, że formuła $r_H = \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$ dla trójwymiarowego układu Lorenza [3] może być sprowadzona przy wartości $r_H = 470/19$ dla $\sigma = 10, b = 8/3$ (patrz rozdział 3). Gdy parametr kontrolny r przekroczy tę wartość, części rzeczywiste wartości własnych stają się dodatnie i punkt krytyczny traci stabilność, co skutkuje chaotycznym zachowaniem rozwiązań klasycznego układu Lorenza.

Możemy zatem oczekiwać różnych typów bifurkacji Hopfa w uogólnionym układzie Lorenza [3]. Oczywiście gdy punkty krytyczne przestają być stabilne, wykresy bifurkacji stają się wyjątkowo skomplikowane (patrz T. Li, J. Yorke [19] lub A. Sarkovskii [20]). Powyższe rozważania zostały przedstawione na następujących Rysunkach 4, 5 oraz 7.

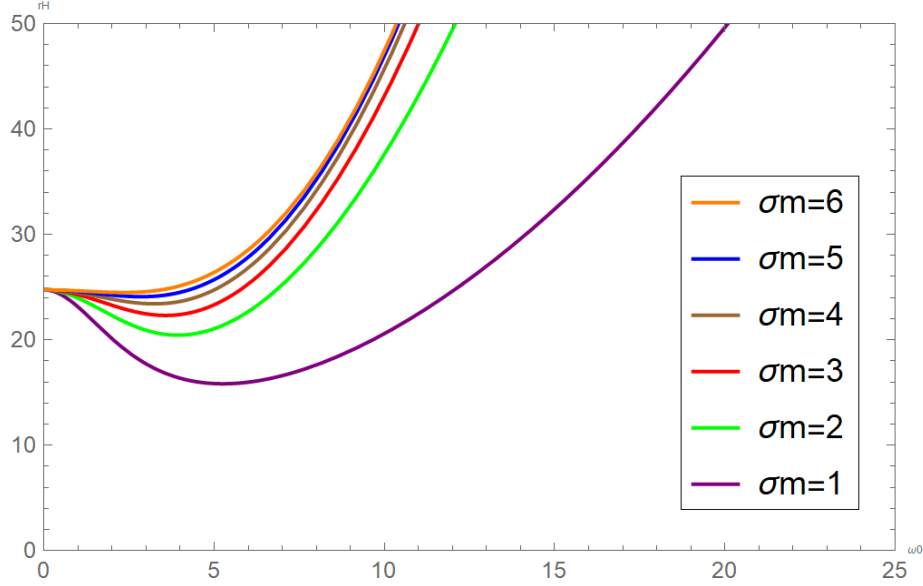


Rysunek 4: Wizualizacja wartości parametru r_H dla którego pojawia się bifurkacja Hopfa.

Przejdźmy teraz do analizy wykresów. Rysunek 4 wizualizuje wartości parametru r_H dla którego pojawia się bifurkacja Hopfa i układ (5.4) - (5.7) traci stabilność. Dokładniej chodzi o to, że wartości r_H zostały wyznaczone w przestrzeni parametrów kontrolnych $\omega_0 \in [0, 35]$ i $\sigma_m \in [0, 10]$. Kolor biały oznacza wartości r_H , które nie mogą być wyznaczone analitycznie z uwagi na brak rozwiązań rzeczywistych.

Ponadto, z Rysunku 4 zauważyć możemy, że parametr r_H dla uogólnionego modelu Lorenza może przyjąć bardzo duże wartości. W szczególności największe wartości r_H są przyjmowane gdy obydwa ω_0 i σ_m są odpowiednio duże lub gdy $\omega_0 > 20$ oraz $\sigma_m < 0.5$ (patrz prawy dolny róg Rysunku 4). Analiza ta sugeruje, że przedział liniowej stabilności modelu (5.4) - (5.7) musi być znacznie szerszy niż dla standardowego modelu Lorenza ($\omega_0 = 0$ i $\sigma_m = 0$).

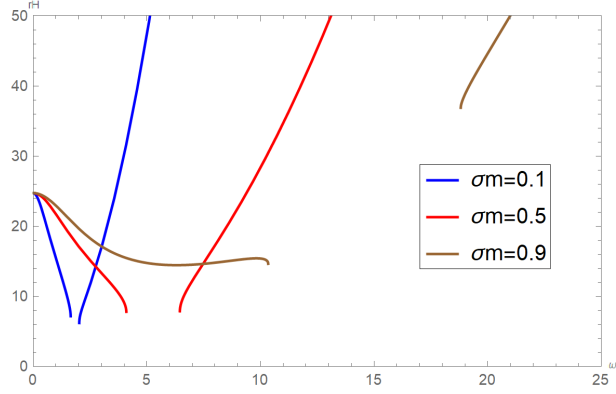
Bifurkacja Hopfa



Rysunek 5: Zależność parametru r_H od ω_0 dla sześciu różnych σ_m (przy ustalonych parametrach $\sigma = 10$ i $b = 8/3$).

Zastanówmy się teraz nad zależnością parametru r_H (opisanego przez równanie (6.15)) od sześciu różnych wartości magnetycznej liczby Pradla σ_m . Z Rysunku 5 widać, że gdy $\omega_0 = 0$, to dla dowolnego σ_m wartość r_H jest równa jak dla standardowego układu Lorenza [3], czyli $r_H = 470/19$. Widzimy także, że wartości r_H dla $\sigma_m = 1$ (fioletowa krzywa) rosną wolniej dla ω_0 niż gdy $\sigma_m = \{2, \dots, 6\}$. Pokrywa się to z Rysunkiem 7 oraz analogicznym wykresem w W. Macek i M. Strumik [8]. Tylko dla bardzo małych ω_0 mamy podobne wartości r_H dla każdego z przypadków σ_m .

Zauważmy, że czym większa jest wartość parametru σ_m , tym mniejszą różnicę widać w zależnościach funkcyjnych. Jedynie wspomniana wartość $\sigma_m = 1$ oraz ewentualnie $\sigma_m = 2$ odróżnia się od reszty zależności. Wraz ze wzrostem wartości tego parametru widzimy coraz mniejsze uwypuklenie. Ponadto zauważyć możemy, że czym większa jest wartość parametru σ_m tym większy jest obszar bez możliwości oscylacji (por. Rysunek 7).

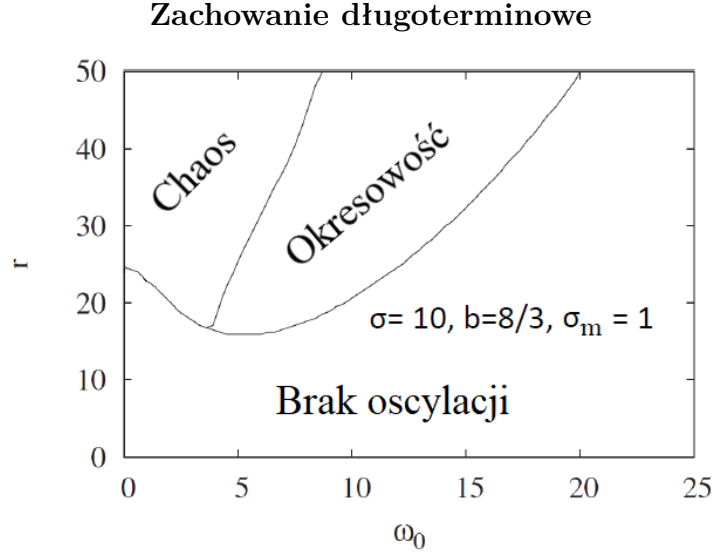


Rysunek 6: Zależność parametru r_H od ω_0 dla trzech kolejnych σ_m (przy ustalonych parametrach $\sigma = 10$ i $b = 8/3$).

Przejdźmy teraz do przypadku, gdy σ_m jest mniejsze od 1. Patrząc na Rysunek 5 oraz 6 zauważamy znaczącą zmianę w zależnościach funkcyjnych. Główna zmiana to brak ciągłości przedstawionych krzywych. Te przerwy to odcinki, w których funkcja nie jest określona. Oznaczają one wartości, które nie mogą być wyznaczone analitycznie, gdyż r_H nie ma rozwiązań rzeczywistych na określonym przedziale ω_0 . Jak pokazali W. Macek i M. Strumik [1, 8] dla małego współczynnika dyfuzyjnego, np. $\sigma_m = 0.1$, układ 4 wymiarowy przejawia ruch hiperchaotyczny dla znormalizowanej liczby Rayleigha $r \geq 454.7$. Rozwiązania są wtedy zbieżne do dziwnych atraktorów hiperchaotycznych, długoterminowe oscylacje cyklu granicznego nie są wtedy możliwe. Wracając do rysunku widzimy, że krzywe najpierw bardzo szybko maleją (dla $\sigma_m = 0.1$ i 0.5), a następnie odwrotnie niż jak na Rysunku 5 czym większa jest wartość σ_m tym wolniej rosną wartości r_H od pewnego momentu. Ten odcinek, na którym nie istnieją rozwiązania r_H jest znacznie dłuższy dla $\sigma_m = 0.9$ niż dla $\sigma_m = 0.5$, więc możemy wnioskować, że czym większa jest wartość $\sigma_m \in [0, 1]$ tym większy jest przedział nieciągłości zależności funkcyjnych.

W ogólności, Rysunki 4, 5 i 6 dają nam ważną informację o zachowaniu układu (5.4) - (5.7). Po pierwsze, dla dużych wartości $\omega_0 > 20$ wpływ σ_m na bifurkacje Hopfa staje się znaczący tj. układ pozostaje liniowo stabilny dla szerszego przedziału wartości parametru kontrolnego r . Po drugie, dla pomijalnie małego σ_m , obszar stabilności blisko punktów równowagi wzrasta wraz ze wzrostem ω_0 . Po trzecie, czym mniejsza jest wartość ω_0 , tym mniejszy wpływ ma σ_m na stabilność uogólnionego układu Lorenza. Zauważmy jeszcze,

że fioletowa krzywa (na Rysunku 5), czyli dla $\sigma_m = 1$, pokrywa się z poziomą krzywą na Rysunku 7 (patrz też W. Macek, M. Strumik [2]).



Rysunek 7: Linie ciągłe oddzielają różne zachowania dynamiczne długoterminowe (przy ustalonych parametrach $\sigma = 10$, $b = 8/3$ oraz $\sigma_m = 1$).

W uogólnionym układzie Lorenza [3] bezpośrednie przejście do chaosu jest możliwe tylko dla pewnego przedziału pola magnetycznego opisanego przez magnetyczny parametr kontrolny ω_0 , który zawiera gęstość liczby cząstek (patrz W. Macek [1]). Przedstawione to jest na Rysunku 7 [2] ukazującym płaszczyznę rozpiętą przez dwa bezwymiarowe parametry r i ω_0 , gdzie różnić możemy trzy obszary różniące się zachowaniem dynamicznych rolek konwekcyjnych: jeden z nich bez możliwości oscylacji długo okresowych, drugi z oscylacjami periodycznymi i trzeci z chaotyczną dynamiką. Z punktu widzenia teorii układów dynamicznych - są to trzy możliwości odnoszące się do sytuacji, w której trajektorie układu dynamicznego opisane przez układ równań (5.4) - (5.7) są przyciągane przez odpowiednio punkty krytyczne (równowaga), cykle graniczne i chaotyczne atraktory. Na przykład biorąc $\omega_0 = 2$ i zwiększając r możemy zaobserwować bezpośrednie przejście z punktu krytycznego do chaotycznego atraktora, podobnie do tego co zaobserwowaliśmy dla standardowego układu Lorenza. Jednakże dla większych wartości ω_0 np. $\omega_0 = 5$, model przewiduje okresowe oscylacje dla pewnych pośrednich warto-

ści r pomiędzy stanem bez oscylacji (dla małego r), a chaotyczną dynamiką (dla dużego r). Z drugiej strony dla ustalonego $r = 30$, zwiększając ω_0 możemy zaobserwować przejście od chaosu do oscylacji okresowych, a następnie z oscylacji okresowych do nieoscyłujących rolek, co przedstawia stabilizujący wpływ pola magnetycznego na dynamikę. Co ciekawe, dla $r = 20$ zwiększając pole magnetyczne (ω_0) wywołujemy chaotyczne oscylacje dla pewnego przedziału ω_0 , które potem zostaną stłumione dla nadal rosnącego pola magnetycznego. Zauważmy, że parametr kontrolny ω_0 zależy od natężenia pola magnetycznego oraz średniej gęstości, stąd powyżej opisane przejścia mogą być uzyskane przez zmianę jednej z tych wielkości. Bifurkacji Hopfa możemy spodziewać wzdłuż poziomych linii wyznaczających granice dla rozwiązań punktów krytycznych; pionowa linia oddziela rozwiązania okresowe od nieokresowych (chaotycznych).

7 Podsumowanie

W tej pracy zbadaliśmy niektóre własności uogólnionego 4 wymiarowego modelu Lorenza (zapropozowanego i analizowanego w pracach [1, 2, 8]), które opisują złożoność konwekcji hydromagnetycznej. Jak odkrył Lorenz (w 1963 r. [3]), chaos deterministyczny wykazuje wrażliwość na warunki początkowe, co prowadzi do nieprzewidywalności długoterminowego zachowania systemu (efekt motyla). Stosując przybliżenia związane z konwekcją w namagnesowanym płynie, dynamikę płynów można opisać układem czterech równań różniczkowych zwyczajnych. Jest to właśnie wspomniany uogólniony model Lorenza dla namagnesowanego płynu. Wzorując się na autorach, udało się pokazać, że ten model ukazuje całkiem intrygujące własności. Okazuje się, że zachowanie tego układu może być dosyć skomplikowane. Jest to jednak dość zaskakujące, że może być on wyprowadzony z pełnego zbioru równań różniczkowych cząstkowych. Zawiłe zachowanie rozwiązań wynika z nieliniowości, a nie ze złożonych praw oraz teorii. W szczególności, różne rodzaje skomplikowanych zachowań są ze sobą ściśle powiązane w zależności od dwóch parametrów kontrolnych modelu. Dokładniej, poprzez zwiększenie początkowej różnicy temperatur i natężenia pola magnetycznego można przechodzić pomiędzy równowagą (punkt stały) oraz rozwiązaniami asymptotycznymi nieokresowymi (chaotycznymi) i okresowymi (cykl graniczny). Najszerszy zakres sta-

bilności liniowej układu uzyskuje się dla $\omega_0 > 20$ ($\sigma = 10, \sigma_m \neq 1, b = 8/3$). W dodatku, wpływ indukowanego pola magnetycznego na własności cieczy mogłyby być znacznie bardziej zawiłe niż prosty efekt stabilizujący przewidywany przez uproszczoną analizę wpływu pola magnetycznego na ruch konwekcyjny (jak w T. G. Cowling [15]). Jest to potwierdzone przez identyfikację pewnych fizycznych sytuacji, gdzie słabe pole może mieć silny destabilizujący wpływ na płyn (zob. A. Bajer, K. Mizerski [20]).

Warto wspomnieć, że dynamika nieregularnych ruchów w lepkich cieczach magnetohydrodynamicznych wciąż nie jest wystarczająco dobrze znana (patrz np. W. Macek [21]), choć istnienie nisko-wymiarowego atraktora w plazmie kosmicznej była już postulowana (patrz np. W. Macek [21]). Zauważmy także, że wymagany jest długi czas obliczeń z wykorzystaniem dostępnych zasobów obliczeniowych - wybrany przeze mnie program **Wolfram Mathematica 12**, aby uzyskać odpowiednie wyniki. Uogólniony układ Lorenza ukazuje skomplikowane zachowanie wynikające z nieliniowości, więc przyczynia on się znacznie do rozwoju teorii chaosu. Ten wciąż bardziej ogólny model nieliniowy może pozwolić rozjaśnić naturę konwekcji hydromagnetycznej, pomagając zidentyfikować chaotyczne i złożone zachowanie w różnych warunkach. Model zaproponowany został jako użyteczne narzędzie do analizy zachowania intermitencyjnego różnych środowisk, w tym konwekcji planet i gwiazd. Uzyskane wyniki mogą być ważne do wyjaśnienia procesów prowadzących do pojawiania się nieregularnych, nieokresowych zjawisk w przyrodzie.

Bibliography

- [1] Wiesław M. Macek *Nonlinear dynamics and complexity in the generalized Lorenz system*, Springer, Vol. 94 No. 4, Dec 2018, 2957–2968
- [2] Wiesław M. Macek, Marek Strumik *Model for hydromagnetic convection in a magnetized fluid*, Phys. Rev. E 82(2), 027301, 2010
- [3] Edward N. Lorenz *Deterministic Nonperiodic Flow*, J. Atmos. Sci. 20, 130–141 1963
- [4] Heinz Georg Schuster, Wolfram Just *Deterministic Chaos. An Introduction*, WILEY-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2005
- [5] Steven H. Strogatz *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Persus Books Publishing L.L.C., 1994
- [6] W. M. Macek, A. Krasieńska, M. V. D. Silveira, D. G. Sibeck, A. Wawrzaszek, J. L. Burch, C. T. Russell *Magnetospheric Multiscale Observations of Turbulence in the Magnetosheath on Kinetic Scales*, The Astrophysical Journal Letters, The American Astronomical Society, 2018
- [7] W. M. Macek *Intermittency in the generalized Lorenz model*. In: Skiadas, C. (ed.) *Chaotic Modeling and Simulation. Chaos International Conferences*, International Journal of Nonlinear Science, vol. 4, pp. 323–328, 2015
- [8] W. M. Macek, M. Strumik *Hyperchaotic intermittent convection in a magnetized viscous fluid*. Phys.Rev. Lett. 112(7), 074502, 2014
- [9] B. Saltzman *Finite amplitude free convection as an initial value problem I* J. Atmos. Sci. 19, 329, 1962
- [10] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii *Electrodynamics of Continuous Media, vol. 8*. Pergamon Press, Oxford, 1984
- [11] P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal *Order within Chaos. Towards a Deterministic Approach to Turbulence*. Wiley, New York, 1984
- [12] L. Rayleigh *On convecting currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side*. Philos. Mag. 32, 529–546, 1916

- [13] J. Boussinesq, *Theorie Analytique de la Chaleur*. Gauthier - Villars, Paris, 1903
- [14] A. Oberbeck, *Ueber die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen*, Ann. Phys. (Leipzig) 243, 271–292, 1879
- [15] T. G. Cowling *Magnetohydrodynamics* AdamHilger, Bristol, 1976
- [16] G. Rowlands, J. C. Sprott *Extraction of dynamical equations from chaotic data*. Phys. D Nonlinear Phenom. 58, 251–259, 1992
- [17] F. Takens *Forced oscillations and bifurcations* Comm. Math. Inst. Rijksuniv. 2, 1-111, 1974
- [18] T. Y. Li, J. A. Yorke *Period three implies chaos*. Am. Math. Mon. 82, 985–992, 1975
- [19] A. N. Sarkovskii *Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself*. Ukr. Mat. Z. 16, 61–71, 1964
- [20] K. Bajer, K. Mizerski *Elliptical flow instability in a conducting fluid triggered by an external magnetic field* Phys. Rev. Lett. 110(10), 104503, 2013
- [21] W. M. Macek *Testing for an attractor in the solar window flow*, Physica D 122, 254-264, 1998

Dodatek

W dodatku znajdują się kody źródłowe z programu Wolfram Mathematica 12.2.0

Postać wielomianu $P(\lambda)$ (6.13) - (6.14):

In: CharacteristicPolynomial $\left[\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & -\omega 0 \\ r - Z & -1 & -X & 0 \\ Y & X & -b & 0 \\ \omega 0 & 0 & 0 & -\sigma m \end{pmatrix}, \lambda \right]$

Out: $b\lambda^2\sigma + b\lambda^2\sigma m + b\lambda^3 + b\lambda\sigma\sigma m - 2b\lambda\sigma - \frac{2b\lambda\omega 0^2}{\sigma m} + b\lambda\omega 0^2 + b\lambda^2r + 2b\lambda r\sigma + \frac{2b\lambda r\omega 0^2}{\sigma m} + b\lambda r\sigma m + 2br\sigma\sigma m + 3br\omega 0^2 - 2b\sigma\sigma m - 2b\omega 0^2 + \lambda^2\sigma\sigma m + \lambda^3\sigma - \frac{\lambda^2\omega 0^2}{\sigma m} + \lambda^3\sigma m + \lambda^2\sigma m + \lambda^2\omega 0^2 + \lambda^4 + \lambda^3 + \frac{\lambda^2r\omega 0^2}{\sigma m} + \lambda r\omega 0^2$

In: FullSimplify[powyższe]

Out: $(\lambda + \sigma m)(b\sigma(\lambda + 2r - 2) + b\lambda(\lambda + r) + \lambda^2(\lambda + \sigma + 1)) + \frac{\omega 0^2(b\sigma m(\lambda + 3r - 2) + \lambda(r - 1)(2b + \lambda) + \lambda\sigma m(\lambda + r))}{\sigma m}$

In: $p = (\lambda + \sigma m)(b\sigma(\lambda + 2r - 2) + b\lambda(\lambda + r) + \lambda^2(\lambda + \sigma + 1)) + \frac{\omega 0^2(b\sigma m(\lambda + 3r - 2) + \lambda(r - 1)(2b + \lambda) + \lambda\sigma m(\lambda + r))}{\sigma m}$

In: $p = \text{Collect}[p, \lambda]^{\sigma m}$

Out: $\lambda^3(b + \sigma + \sigma m + 1) + \lambda^2 \left(br + b\sigma + b\sigma m + \frac{(r-1)\omega 0^2}{\sigma m} + \sigma\sigma m + \sigma m + \omega 0^2 \right) + \lambda \left(2br\sigma + \frac{2b(r-1)\omega 0^2}{\sigma m} + br\sigma m + b\sigma\sigma m - 2b\sigma + b\omega 0^2 + r\omega 0^2 \right) + 2br\sigma\sigma m + 3br\omega 0^2 - 2b\sigma\sigma m - 2b\omega 0^2 + \lambda^4$

Podstawienia zależne od parametrów modelu:

In: $a0 = 2b((r - 1)\sigma\sigma m - \omega 0^2); a1 = b(\sigma(c + r - 1) + \sigma m(c + \sigma + 1) + (1 - \frac{2}{\sigma m})\omega 0^2);$
 $a2 = b(c + \sigma + \sigma m + 1) + (\sigma + 1)\sigma m + (1 - \frac{1}{\sigma m})\omega 0^2; a3 = b + \sigma + \sigma m + 1;$
 $c = \frac{(r-1)\sigma\sigma m - \omega 0^2}{\sigma\sigma m + \omega 0^2}; e = \frac{\omega 0^2}{\sigma\sigma m};$

Parametr kontrolny r_H :

In: Last $\left[\text{Solve} \left[a1\sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{a2^2 - 4a0} + a2 \right)} - a3\sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{a2^2 - 4a0} + a2 \right)}^3 = 0, r \right] \right]$

In: $rH = Out[61]$
In: $rH2 = FullSimplify[rH]$

Wykresy:

In: $ContourPlot[rH, \{\omega 0, 0, 35\}, \{\sigma m, 0, 10\}, PlotTheme \rightarrow "Detailed", FrameLabel \rightarrow \{\{HoldForm[\sigma m], None\}, \{HoldForm[\omega 0], None\}\}, PlotLabel \rightarrow HoldForm[Bifurkacja HopfarH], LabelStyle \rightarrow \{GrayLevel[0]\}, PlotPoints \rightarrow 100, ColorFunction \rightarrow "TemperatureMap"]$
In: $plot = Show[s1, s2, s3, s4, s5, s6]; Legended[plot, LineLegend[\{Orange, Blue, Brown, Red, Green, Purple\}, \{"\sigma m = 6", "\sigma m = 5", "\sigma m = 4", "\sigma m = 3", "\sigma m = 2", "\sigma m = 1"\}]]$
In: $plot = Show[s01, s05, s09]; Legended[plot, LineLegend[\{Blue, Red, Brown\}, \{"\sigma m = 0.1", "\sigma m = 0.5", "\sigma m = 0.9"\}]]$