偏序格
- 定义：偏序集 $(L, \leq)$，$\forall a, b \in L$，$\{a, b\}$ 在 L 中都有一个最大下界 $\inf\{a, b\}$，一个最小上界 $\sup\{a, b\}$
- 子格：S 为 L 的子集且 $(S, \leq)$ 是格

代数格
- 定义：L 为一个集合，$\times$、$\oplus$ 是 L 上两个二元代数运算且都满足交换律、结合律、吸收律、幂等律

$$\begin{cases} a\times b = b\times a \\ a\oplus b = b\oplus a \end{cases} \quad \begin{cases} a\times(b\times c) = (a\times b)\times c \\ a\oplus(b\oplus c) = (a\oplus b)\oplus c \end{cases} \quad \begin{cases} a\times(a\oplus b) = a \\ a\oplus(a\times b) = a \end{cases} \quad \begin{cases} a\times a = a \\ a\oplus a = a \end{cases}$$

- 子格：S 为 L 的子集且在运算 $\times$、$\oplus$ 下 S 是封闭的

一个偏序格必然是一个代数格，反之亦然。$\inf\{a, b\}$ 为 $a\times b$，$\sup\{a, b\}$ 为 $a\oplus b$

性质
- I　$a\leq b \Leftrightarrow a\times b = a$，$a\oplus b = b$
- II　若有 $b\leq c$，则 $a\times b\leq a\times c$，$a\oplus b\leq a\oplus c$
- III　若有 $b\leq c$，则 $a\oplus(b\times c)\leq (a\oplus b)\times(a\oplus c)$，$a\times(b\oplus c)\geq (a\times b)\oplus(a\times c)$
- IV　$a\leq b \Leftrightarrow a\oplus(b\times c)\leq b\times(a\oplus c)$

我看不懂，但我大受震撼

格同态映射
- 两个格 $(L, \times, \oplus)$ 与 $(S, \wedge, \vee)$，从 L 到 S 的映射 g 满足：$g(a\times b) = g(a)\wedge g(b)$，$g(a\oplus b) = g(a)\vee g(b)$
- g 为自同态映射，则 $g(L)$ 为 $(L, \times, \oplus)$ 的子格
- 若 g 为一对一映射，则称同构映射，g 的逆映射 g^{-1} 是 S 到 L 上的同构映射。

保序映射
- L 上对 $\times$、$\oplus$ 的偏序为 $\leq_L$，S 上对 $\wedge$、$\vee$ 的偏序为 $\leq_S$，从 L 到 S 的映射 g 满足：$\forall a, b\in L$，若 $a\leq_L b$，$g(a)\leq_S g(b)$
- 保序映射不一定是同态映射，但同态映射一定是保序映射

特殊格
- 有界格
  - 定义：格 $(L, \leq)$ 中存在一个最大元素 1 与一个最小元素 0 满足 $\forall a\in L$，$0\leq a\leq 1$，称 0、1 为格 $(L, \leq)$ 的界
  - 有界格不一定为有限格，有限格一定为有界格
  - 余元素
    - 有界格 $(L, \times, \oplus, 0, 1)$ 中，若 $a\times b = 0$，$a\oplus b = 1$，a、b 互为余元素
    - 任意元素可能有余元素一个或多个，也可能没有
    - 有界格内必有余元素
  - 有余格：每一个元素都至少有一个余元素的有界格。
- 分配格
  - 满足：$a\times(b\oplus c) = (a\times b)\oplus(a\times c)$，$a\oplus(b\times c) = (a\oplus b)\times(a\oplus c)$　等价，一个成立另一个也必成立
  - 引理
    - 任意一个链都是分配格
    - 分配格的任意子格仍是分配格
    - n 维格是分配格
  - 性质
    - D摩根律：$\forall a, b\in L$，若 a、b 有余元素 a'，b'（该元是有余格），则必满足 $(a\times b)' = a'\oplus b'$，$(a\oplus b)' = a'\times b'$
    - 若 $a\times c = b\times c$，$a\oplus c = b\oplus c$，则 $a = b$

模格：$\forall a,b,c \in L$，若 $a \le b$，都有 $a \oplus (b \times c) = b \times (a \oplus c)$

分配格必为模格

有余分配格

称为布尔代数，记作 $(B, \cdot, +, \bar{\ }, 0, 1)$

$\cdot$ ×简记，$+$ ⊕简记，$\bar{\ }$ 余运算

$\forall a \in B$，a 的余元素 a' 唯一

性质

H_1：$a \cdot b = b \cdot a$，$a + b = b + a$　加、乘交换律

H_2：$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$　加、乘分配 ⇒ B为一个至少有2个不同元素集合，$\cdot$、$+$ 为 B上两种运算，若 $\forall a,b,c \in B$ 满足这些性质，则其为一个布尔代数

H_3：B中有元素0和1使对 $\forall a \in B$，有

$a \cdot 1 = a$，$a + 0 = a$　有1与有0

H_4：$\forall a \in B$，有 $\bar{a} \in B$ 使：　有余补与有余乘

$a \cdot \bar{a} = 0$，$a + \bar{a} = 1$

若B的子集S包含0、1且仍是一个布尔代数，则称S为B的子布尔代数