

Exercise-2 for Numerical Methods

Deadline: 2022-10-30

注意事项:

1. 每次作业用 Microsoft WORD 写, 然后转成 PDF 上交;
2. 作业上交文件命名: 学号-中文姓名-Wi, i 为作业次数。如 M2021xxxxx-周某某-W2;
3. 做完后在 QQ 群的作业栏上传 PDF 文件。

1. 分别用高斯消去法、SOR 方法、共轭梯度法和调用 MATLAB 的 pcg() 和 gmres() 求解下列方程组 (提示: 可根据自己计算机的性能, 适当调整 m 的上界值; SOR 法的超松弛因子由 $n=100$ 时 $B(\omega)$ 谱半径确定):

- a) 对于不同的维数 $n=100m, 1 \leq m \leq 100$, 记录它们的残差达到

$r_k = \|Ax_k - b\| < 0.5 \times 10^{-3}$ 所用 CPU 时间和迭代次数 (默认高斯消去法的迭代次数为 n) , 在同一坐标系中画出它们的曲线 $C_1 = (m, Time(m)), C_2 = (m, IterationNumber(m)), 1 \leq m \leq 100$ 。

- b) 对于 $n=100, 500, 1000, 5000, 10000$, 在同一坐标系中画出残差 $r_k = \|AX_k - b\|$ 相对于迭代次数 k 的曲线 $C_n = (k, r_k)$ 。

- c) 对于 $n=100, 1000, 10000$, 计算矩阵 A 条件数和预处理

$C = \frac{1}{\sqrt{\omega(2-\omega)}}(D - \omega C_L)D^{-1/2}, \omega = 0.5$ () 后条件数, 在同一坐标系中画出共轭梯度

法与预处理共轭梯度残差 $r_k = \|AX_k - b\|$ 相对于迭代次数 k 的曲线 $C_{cg,n} = (k, r_k)$, $C_{pcg,n} = (k, r_k)$ 。

$$Ax = b$$

$$\text{这里, } A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 10 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 10 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 10 \end{bmatrix}_{n \times n}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ \vdots \\ (-1)^{n-2} \times 3 \\ (-1)^{n-1} \times 3 \\ (-1)^n \times 3 \end{bmatrix}$$

2. P185: 5

We wish to solve the nonlinear system

$$0 = 7x^3 - 10x - y - 1$$

$$0 = 8y^3 - 11y + x - 1.$$

Use **MATLAB** to sketch the graphs of both curves on the same coordinate system. Use the graph to verify that there are nine points where the graphs intersect. Using the graph, estimate the points of intersection. Use these estimates and Program 3.7 to approximate the points of intersection to 9 decimal places.