

# 2次元トーラス上でのランダウ準位

imiya

最終更新：2025年12月9日

## 目次

1	はじめに	1
2	ランダウ準位	1
3	コンパクトボソンにおけるアノマリーと群コホモロジーの関係	5
4	トーラス上のランダウ準位	10
5	おわりに	12

## 1 はじめに

このノートでは、2次元のトーラス上でのランダウ準位について説明し、少しだけその特殊性について話をしたいと思います。色々と新しいことをつけ加えようと思っていたのですが、時間が全く足らず、結局、先行研究のまとめみたいな形になってしまいました。[4章](#)が本題で、そこの最後やあとがきとかで展望を載せておきます。

## 2 ランダウ準位

ランダウ準位というのは、簡単にいようと磁場中の粒子の量子力学を考えると、その運動量が離散化されてしまう現象です。普通、磁場中の粒子の運動というと、古典力学では螺旋状にクルクル回る運動のことを表します。この運動の運動量というのは任意の値を取ることができ、それに応じて螺旋運動の軸からの距離が変わるのでした。

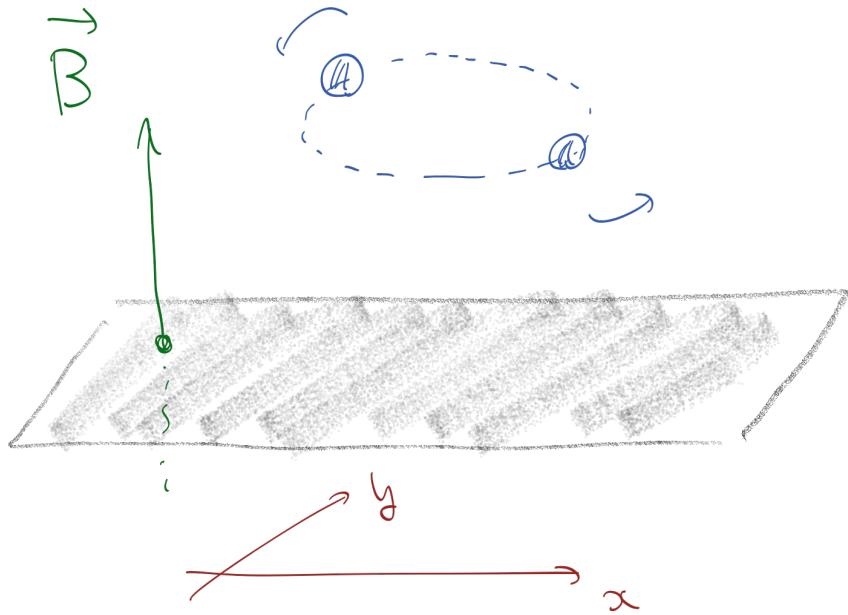


図 2.1 磁場中の粒子の運動

まずは、図 2.1 のように、 $xy$  平面上に一様な磁場  $B$  がかかっているとします。このときの磁場は  $\vec{A} = (B/2)(-y, x, 0)$  と書けました。実際に、このポテンシャルの回転をとってみると  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = (0, 0, B)$  となり、 $z$  方向に一様な磁場がかかっていることがわかります。

このときのハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \vec{A})^2 \quad (2.1)$$

と書けます。ただし、自然単位系  $\hbar = c = 1$  を使い、しかも電荷  $e = 1$  としています。ですので、本当は  $\vec{p} - (e/c)\vec{A}$  と書くべきところを  $\vec{p} - \vec{A}$  と書いています。

とりあえず、正準方程式を使って運動方程式を求めてみましょう。それぞれ

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{1}{m} (\vec{p} - \vec{A}) \quad (2.2)$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} = \frac{1}{m} (p_i - A_i) \vec{\nabla} A_i \quad (2.3)$$

ですので<sup>\*1</sup>、 $\vec{x}$ のほうを時間微分してもう一方の $\dot{\vec{p}}$ の方程式を使うと、キレイに

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.4)$$

となり、右辺がちょうどローレンツ力の形になっていることがわかります。ですので、ひとまずこのハミルトニアン(2.1)を調べれば良さそうだといえそうです。

さて、これから量子力学に移ります。まずは素朴に  $[x_i, p_j] = i\delta_{ij}$  という交換関係を仮定して、この系について調べてみましょう。古典系でこの系が円運動をすることがわかっているので、物理に慣れている人であれば、なんとなく調和振動子的なものが出てくるのではないかと予想するかもしれません。実際その通りで、適切な変数変換を行うと、このハミルトニアンは対角化できます。

キーになるのは、 $\vec{\Pi} = \vec{p} - \vec{A}$  の交換関係が

$$[\Pi_x, \Pi_y] = iB \quad (2.5)$$

と定数になることです。ハミルトニアンが  $H \propto \Pi_x^2 + \Pi_y^2$  の形で書けており、 $\Pi_x$  と  $\Pi_y$  の交換関係が定数になることから、調和振動子の位置と運動量の交換関係に似た形になっていることがわかります。ですので、

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2B}} (\Pi_x + i\Pi_y), \quad a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2B}} (\Pi_x - i\Pi_y) \quad (2.6)$$

とすれば、 $[a, a^\dagger] = 1$  となり、逆にハミルトニアンは

$$H = \frac{B}{m} \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (2.7)$$

と書けます。したがって、エネルギー固有値は

$$E_n = \omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \omega \equiv \frac{B}{m} \quad (2.8)$$

となり、調和振動子と同じように量子化されることがわかります。

ひとまず、ハミルトニアンは対角化できたのですが、まだこの系には謎が残ります。元々の系の自由度は2つあったはずですが、結果を見る限り、この系の状態の量子数は  $n$  しかありません。もうひとつの自由度はどうなっているのでしょうか。

<sup>\*1</sup> 運動量のほうは少し難しいですが、例えば  $x$  で微分をするとき、ハミルトニアンが

$$H = \frac{1}{2m} \left[ \left( p_x + \frac{B}{2}y \right)^2 + \left( p_y - \frac{B}{2}x \right)^2 \right]$$

で書けることに気をつけると

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{m} \left( p_y - \frac{B}{2}x \right) \cdot \left( -\frac{B}{2} \right) = -\frac{1}{m} (p_y - A_y) \partial_x A_y$$

となってるので、(2.3)の形になりそうだなとわかります。

これから真面目にやるのですが、残っている自由度について、それは何であるのかを簡単に述べておきたいと思います。その自由度の演算子を例えば  $X$  とすると、この  $X$  はハミルトニアンには現れていないので、もちろんハミルトニアンと交換してしまいます（と言い切ってしまうと雑すぎるかもしれません）。したがって、その自由度はある種の保存量であり、それはすなわちハミルトニアンの固有状態がその自由度についても同時固有状態になっていることを意味します。これはいわゆる縮退というもので、エネルギー固有値  $E_n$  に対して、無限に多くの状態が対応していることを意味します。

さて、その保存量に対応する対称性とは何なのでしょうか。ハミルトニアンを見ているだけではわからないのですが、その対称性とは  $x, y$  軸方向への平行移動です。「磁場中の電子は螺旋運動をする」ということがわかっているれば、直感的に明らかだと思うのですが、今回はゲージを  $\vec{A} = (B/2)(-y, x, 0)$  としたので、平行移動をするとゲージポテンシャルが変わってしまい、その対称性があらわではありません。しかしながら、よくゲージ場の配位を見てみると

$$\vec{A} = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{A}' = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -(y + \delta y) \\ x + \delta x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{A} + \frac{B}{2} \vec{\nabla}(-y\delta x + x\delta y) \quad (2.9)$$

となっているため、実はこの平行移動はゲージ変換に対応していることがわかります。したがって、平行移動は物理的な対称性として成立しているそうです。

この変換の生成子を求めましょう。そのために、いったんラグランジアンを書いて、そこからカレントをもとめ、そこから生成子を求めます。ラグランジアンですが、 $\vec{x}$  に共役な運動量は (2.2) から  $\vec{p} = m\dot{\vec{x}} + \vec{A}$  なので

$$\begin{aligned} L &= \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - H \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + \vec{A} \cdot \dot{\vec{x}} \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{B}{2} (-y\dot{x} + x\dot{y}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

と書けます。このラグランジアンに対して、平行移動を行うと

$$\delta L = \frac{B}{2} \frac{d}{dt} ((-\delta y)x + (\delta x)y) \equiv \frac{d}{dt} K(t) \quad (2.11)$$

となるので、保存する生成子  $Q$  は

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \delta \vec{x} - K \\ &= \left( m\dot{x} - \frac{B}{2}y \right) \delta x + \left( m\dot{y} + \frac{B}{2}x \right) \delta y - \frac{B}{2} ((-\delta y)x + (\delta x)y) \\ &= \left( p_x - \frac{B}{2}y \right) \delta x + \left( p_y + \frac{B}{2}x \right) \delta y \end{aligned} \quad (2.12)$$

です。したがって、平行移動の生成子は

$$K_x \equiv p_x - \frac{B}{2}y, \quad K_y \equiv p_y + \frac{B}{2}x \quad (2.13)$$

と符号が入れ替わった形になります。この  $K_x$  と  $K_y$  は  $\Pi_x$  と  $\Pi_y$  と交換するので、ハミルトニアンとも交換することになり保存量します。この  $K_x$  と  $K_y$  の交換関係は  $[K_x, K_y] = -iB$  となるので

$$b \equiv \frac{1}{\sqrt{2B}} (K_x - iK_y), \quad b^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2B}} (K_x + iK_y) \quad (2.14)$$

と定義すれば、 $[b, b^\dagger] = 1$  となり、これらも調和振動子の生成消滅演算子のように振る舞います。したがって、この系の状態はふたつの調和振動子の状態でラベル付けできることになり、状態は  $|n, m\rangle = (a^\dagger)^n (b^\dagger)^m |0, 0\rangle$  と書けます。ひとつの準位  $n$  に対して  $m = 0, 1, 2, \dots$  と無限に状態が存在するのが、この系の特徴です。

### 3 コンパクトボゾンにおけるアノマリーと群コホモロジーの関係

では、話題を変えて、ちょっと特殊な量子力学の話をしましょう。ここで考えるのは、1次元のコンパクトボゾンと言われる  $S^1$  上の自由粒子の量子力学です。

ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2\pi}\theta\dot{q} \quad (3.1)$$

です。この  $q(t)$  は  $S^1$  上の座標を表し、 $q(t) \sim q(t) + 2\pi$  という同一視が入ります。[\(3.1\)](#) の第1項は普通の自由粒子の運動項ですが、それに加えて全微分である第2項が入っています。この項は古典的には運動方程式に影響を与えませんが、量子論では非自明な影響を与えます [\[3\]](#)。

後ろの項を、周期  $T$  で積分してみると

$$\int \dot{q}dt = q(T) - q(0) \quad (3.2)$$

となります。ここで  $t = 0$  と  $t = T$  では同じ点を表すことにすると、 $q(T) = q(0) + 2\pi\mathbb{Z}$  となります。したがって、 $\int \dot{q}dt = 2\pi n \in 2\pi\mathbb{Z}$  となり、 $e^{in\theta}$  と経路積分の重みづけがなされることから  $\theta \sim \theta + 2\pi$  は同一の物理を表すことがわかります。したがって、 $\theta$  も  $S^1$  上の角度変数  $0 \leq \theta < 2\pi$  です。

では、ハミルトニアンを求めてみましょう。共役運動量は

$$\Pi_q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q} + \frac{\theta}{2\pi} \quad (3.3)$$

ですので、ハミルトニアンは

$$H_\theta = \Pi_q\dot{q} - L = \frac{1}{2} \left( \Pi_q - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \quad (3.4)$$

となります。一見すると、このハミルトニアンは  $\theta \sim \theta + 2\pi$  の境界条件を満たしていなさそうですが、 $U = e^{iq}$  というユニタリー演算子を考えると

$$UH_\theta U^\dagger = \frac{1}{2} \left( \Pi_q - 1 - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 = H_{\theta+2\pi} \quad (3.5)$$

となり、ユニタリー同値であることがわかります。このハミルトニアンは  $\Pi_q = -i\partial_q$  しか含んでいないので、固有関数はいつも通りの平面波  $e^{inq}$  です。つまり、固有方程式は

$$\frac{1}{2} \left( -i\partial_q - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \Psi_n(q) = E_n \Psi_n(q) \quad (3.6)$$

であり、固有関数と固有値は

$$\Psi_n(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inq}, \quad E_n = \frac{1}{2} \left( n - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \quad (3.7)$$

になります。波動関数は  $q \sim q + 2\pi$  の周期性をもっていますし、固有値のほうは  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$  とすると  $E_n$  から  $E_{n-1}$  とシフトし、結果的に同じスペクトルを与えることがわかります。

基本的には上で述べたような話で議論が尽きているように思えるのですが、 $\theta = \pi$  のときは  $E_0 = E_1$  となり、これが最低エネルギーですので真空が縮退します。一見すると特殊な場合を考えているだけで、この事実から特に面白いことが引き出せそうには思えないのですが、実は  $\theta = \pi$  のときにだけ存在するアクシデンタルな対称性が存在し、さらにその対称性から真空が縮退する理由を説明することができます。

まず、元のハミルトニアンに存在する対称性として、 $\mathcal{O}_\alpha : q \rightarrow q + \alpha$  ( $0 \leq \alpha < 2\pi$ ) と変換する  $U(1)$  対称性があります。 $\theta = \pi$  のときは、さらに荷電共役に対応する離散変換  $\mathcal{O}_C : q \rightarrow -q$  が存在します。この変換では  $q$  の 1 次の項の符号が反転することから、ハミルトニアンは  $H_\pi \rightarrow H_{-\pi} \sim H_\pi$  となって不变です。

これらの変換がどのように状態  $|n\rangle$  に作用するかを考えてみましょう。まずは  $\mathcal{O}_\alpha$  の方ですが、これは波動関数が  $\langle z|n\rangle = \Psi_n(q) \rightarrow e^{i\alpha n} \Psi_n(q)$  となることから、状態ベクトルに対しては

$$\mathcal{O}_\alpha |n\rangle = e^{i\alpha n} |n\rangle \quad (3.8)$$

と作用します。一方、荷電共役変換  $\mathcal{O}_C$  の方は少し複雑です。まず、 $H_\pi \rightarrow H_{-\pi}$  と写ることから  $n \rightarrow -n$  となるように思えるのですが、 $H_{-\pi} \sim H_\pi$  の同一視をするとときに、level crossing が起きているのでした。それを考慮すると

$$\mathcal{O}_C |n\rangle = |-n + 1\rangle \quad (3.9)$$

と作用します。

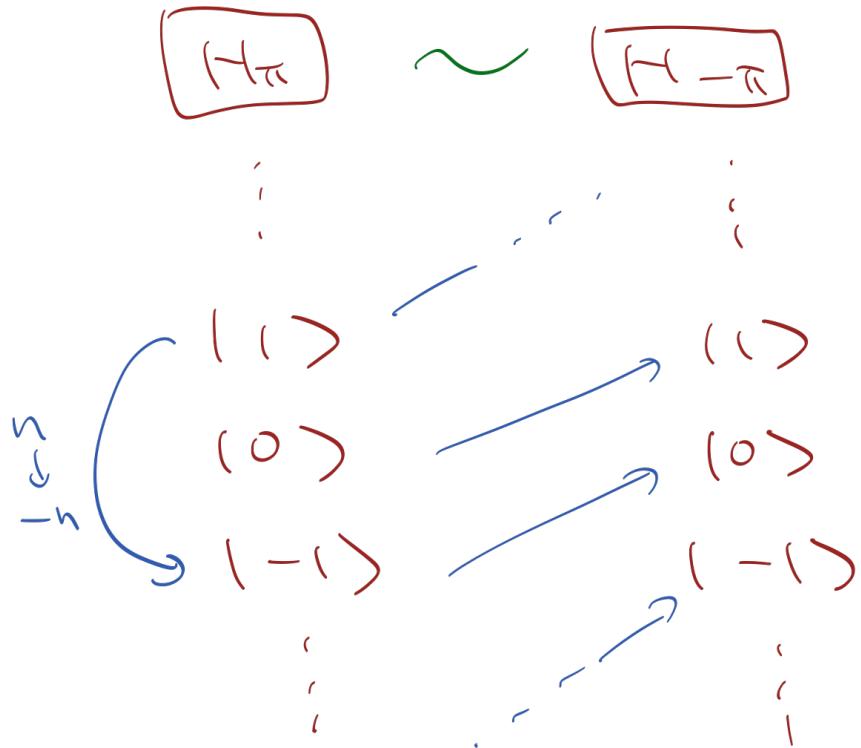


図 3.1 level crossing (わかりづらくてすみません)

さて、ここで考えた  $U(1)$  変換  $\mathcal{O}_\alpha$  と荷電共役  $\mathcal{O}_C$  は素朴に考えると直交群  $O(2) \simeq U(1) \rtimes \mathbb{Z}_2$  を生成しそうに思えます。ここで、半直積  $U(1) \rtimes \mathbb{Z}_2 \ni (\alpha^{(\prime)}, c^{(\prime)}) = g^{(\prime)}$  の演算は

$$g' \cdot g = (\alpha', c') \cdot (\alpha, c) \equiv (\alpha' + (-1)^{c'} \alpha, c' + c) \quad (3.10)$$

で与えられます。これは例えば、

$$g = g' = \left( \frac{3}{4}\pi, 1 \right) \quad (3.11)$$

とすれば、 $g' \cdot g = (0, 0) = e$  なので、 $120^\circ$  度回転をして、次に折り返してさらに  $120^\circ$  度回転するという操作が最終的に原点に戻ることを表しています。

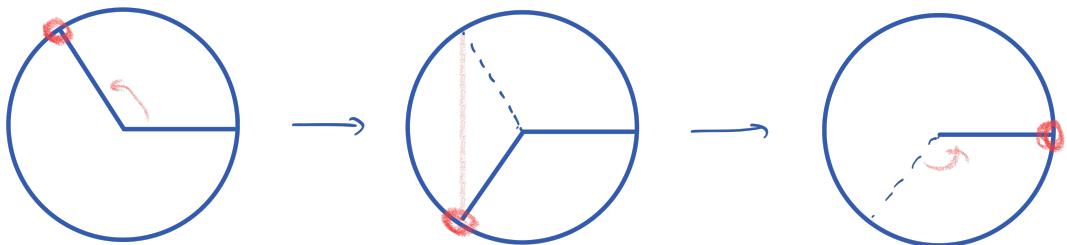


図 3.2  $120^\circ$  度回転をして折り返してさらに  $120^\circ$  度回転する操作

直感的に  $\mathcal{O}_\alpha$  は  $U(1) \rtimes \mathbb{Z}_2 \ni (\alpha, 0)$  に対応し、 $\mathcal{O}_C$  は  $(0, 1)$  に対応するように思えます。そこで、 $\mathcal{O}_C \mathcal{O}_\alpha \mathcal{O}$

という操作を考えてみましょう。素朴に、群で計算をしてみると

$$(0, 1) \cdot (\alpha, 0) \cdot (0, 1) = (-\alpha, 0) \quad (3.12)$$

となるので、 $\mathcal{O}_C \mathcal{O}_\alpha \mathcal{O}_C = \mathcal{O}_{-\alpha}$  が成立するはずです。実際、ハミルトニアンの対称性としてはこれが成立するでしょう。

しかしながら、状態に対する作用を考えてみると

$$\mathcal{O}_\alpha \mathcal{O}_C |n\rangle = e^{i\alpha(-n+1)} |-n+1\rangle, \quad \mathcal{O}_C \mathcal{O}_\alpha |n\rangle = e^{i\alpha n} |-n+1\rangle \quad (3.13)$$

となるので、

$$\mathcal{O}_C \mathcal{O}_\alpha \mathcal{O}_C |n\rangle = e^{-i\alpha n + i\alpha} |n\rangle \quad (3.14)$$

となり、 $\mathcal{O}_C \mathcal{O}_\alpha \mathcal{O}_C \neq \mathcal{O}_{-\alpha}$  であることがわかります。したがって、この系の量子力学的な対称性は  $O(2)$  ではありません。これは、一種の量子異常で  $G = O(2)$  に対するトフーフトアノマリーとして解釈できます。

では、この系の対称性はどうなったのでしょうか？ (3.14) を見てみると、 $e^{i\alpha}$  という余計な位相がついていることがわかるので、新たな位相変換

$$I_\beta |n\rangle = e^{i\beta} |n\rangle \quad (3.15)$$

を考えると  $\mathcal{O}_C \mathcal{O}_\alpha \mathcal{O}_C = I_\alpha \mathcal{O}_{-\alpha}$  が成立することがわかります。よって、 $V_\alpha \equiv I_{-\alpha/2} \mathcal{O}_\alpha$  として生成子を組み合わせると

$$\mathcal{O}_C V_\alpha \mathcal{O}_C = V_{-\alpha} \quad (3.16)$$

という関係が成立し、 $\mathcal{O}_C$  が荷電共役として振る舞うようになります。このとき、 $\alpha$  は  $0 \leq \alpha < 4\pi$  の範囲で値を取ることになります。したがって、これは  $O(2)$  の二重被覆群である  $Pin(2)$  が系の量子論的な対称性として実現されていることになります<sup>\*2</sup>。このことから分かる通り、状態は必ず  $Pin(2)$  の表現になり、それは 2 次元の表現をもつことになります。このことから、全ての状態は少なくとも 2 つの縮退を持つことがわかる、ということです。

一応、ここで説明したい話は終わったのですが、この理論に他の項があった場合についても言及しておきます（詳しくは [3] を読んでください）。 $\theta = \pi$  の場合は、古典的に  $U(1) \times \mathbb{Z}_2$  の対称性があるわけでしたが、基本的にポテンシャル  $V(q)$  を加えてしまうとこの対称性が破れてしまいます。しかしながら、ポテンシャルが  $\cos(2q)$  の多項式だとどうなるでしょうか？ この場合は、 $\alpha = \pi$  の平行移動と荷電共役の組み合わせが対称性として残ります。これらが独立にかかるので、 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  の対称性が実現されることになります。

---

<sup>\*2</sup> どうやら、ここでやったような手続きを中心拡大というようです。詳しい人がいらっしゃったら、ぜひ教えてください。

す。この場合も、量子論としては 2 次元表現になるようで、やはり全ての状態が 2 重縮退することになります<sup>\*3</sup>。こういったように、量子論の対称性から系の一定の性質を調べられるのは面白いですね。

**■群コホモロジーの視点から** 上の議論は、群コホモロジーの視点からも理解できます [4]。ここでは一般的に系の古典的な対称性を  $G$  としましょう。ある変換  $g \in G$  が状態に作用するときの形を  $U_g$  とします。このとき、ある二つの変換  $g, g' \in G$  を連続で行うことは、その合成  $gg' \in G$  を一発行うことに対応するはずなので、一般に

$$U_g U_{g'} = e^{i\alpha(g, g')} U_{gg'} \quad (3.17)$$

と書けます。ここで、 $\alpha(g, g')$  は位相を表す実数です。なぜ位相が出てくるかというと、状態は位相の違いを区別しないことに起因します<sup>\*4</sup>。さて、 $G$  は群ですので、その結合律から  $U_{(g_1 g_2) g_3} = U_{g_1 (g_2 g_3)}$  が成立していて欲しいわけですが、これを (3.17) を使って書き下すと

$$U_{g_1} U_{g_2} U_{g_3} e^{-i\alpha(g_1, g_2) - i\alpha(g_1 g_2, g_3)} = U_{g_1} U_{g_2} U_{g_3} e^{-i\alpha(g_2, g_3) - i\alpha(g_1, g_2 g_3)} \quad (3.18)$$

となるので、位相の部分が一致する<sup>\*5</sup>ことを要求すると

$$\alpha(g_2, g_3) - \alpha(g_1 g_2, g_3) + \alpha(g_1, g_2 g_3) - \alpha(g_1, g_2) = 0 \quad (3.19)$$

が成立する必要があります。この条件は、群コホモロジーの言葉でいうと、 $\alpha(g, g')$  が 2-コサイクルであることを意味します。

まず、一般に  $n$ -コチェインといった場合は、群  $G$  を  $n$  個だけ直積した  $G^n = G \times \cdots \times G$  上の関数  $\alpha : G^n \rightarrow M$  を指します。ただし、 $M$  はアーベル群で、ここでは  $M = U(1)$  を考えます。 $n$ -コチェインの集合を  $C^n(G, M)$  と書くことにし、次の微分  $\delta_n : C^{n-1} \rightarrow C^n$  を定義しましょう：

$$(\delta_n \alpha)(g_1, \dots, g_n) \equiv \alpha(g_2, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \alpha(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) + (-1)^n \alpha(g_1, \dots, g_{n-1}). \quad (3.20)$$

ただし、 $\alpha \in C^{n-1}$  です。この定義に従うと、(3.19) は  $\delta_2 \alpha = 0$  と書けることがわかります。

この演算は nilpotent で  $\delta_n \cdot \delta_{n-1} = 0$  を満たし、したがって、コホモロジーを定義できます。まずは、 $\delta_n$  について閉じているコチェインを

$$Z^{n-1}(G, M) \equiv \text{Ker } \delta_n = \{\alpha \in C^{n-1}(G, M) \mid \delta_n \alpha = 0\} \quad (3.21)$$

<sup>\*3</sup> Qubit が 2 次元表現をもつのも、この理由からです。対称性が同じであることがわかるかと思います。

<sup>\*4</sup>  $g \in G$  に対して、演算子  $U_g$  が存在することはヴィグナーの定理によって保証されているそうです。しかしながら、この定理では位相の不定性を残して一意に定まることしか保証していません。

<sup>\*5</sup> 位相の部分は  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq U(1)$  に値を取るとします。

と定義します。これを  $n$ -コサイクルと呼びます。今回の場合、 $\alpha$  は 2-コサイクルだったので、 $Z^2(G, M)$  がどのようなものであるかがわかれればよさそうに思えます。

しかしながら、 $U_g$  には脚注\*4 で述べたように位相の不定性があるのでした。今、 $U_g \rightarrow e^{i\beta(g)}U_g$  と  $U_g$  を位相変換したとしましょう。このとき、(3.17) は

$$U_g U_{g'} = e^{i\alpha(g, g') - i\beta(g) - i\beta(g') + i\beta(gg')} U_{gg'} \quad (3.22)$$

となり、 $\alpha(g, g')$  は  $(\delta_2\beta)(g, g') = \beta(g_2) - \beta(g_1g_2) + \beta(g_1)$  ぶんのズレだけゆるされることを意味しています。この exact なコチェインの集合を

$$B^n(G, M) \equiv \text{Im } \delta_n = \{\alpha \in C^n(G, M) \mid \exists \beta \in C^{n-1}(G, M), \alpha = \delta_n \beta\} \quad (3.23)$$

と定義し、この元を  $n$ -コバウンダリーと言います。

したがって、今、私たちが興味あるのは

$$H^2(G, M) \equiv Z^2(G, M)/B^2(G, M) \quad (3.24)$$

であり、このコホモロジーが非自明であるときに、量子論の対称性が古典的な対称性  $G$  の射影表現になることがわかるのです。残念ながら、私の勉強が追いついていないので、事実を述べるだけにとどめたいのですが、例えばこの MathOverflow の投稿によると、 $H^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, U(1)) \simeq \mathbb{Z}_2$  となるそうで、これはまさに  $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  の対称性をもつ系が 2 次元表現をもって縮退をもつことと対応しています。 $(G = O(2)$  のときは探せませんでした。たぶん、この場合も非自明なのでしょう。)

## 4 トーラス上のランダウ準位

では、これまでの話を踏まえて、2 次元トーラス  $T^2$  上のランダウ準位について考えてみましょう [5]。基本的には、ランダウ準位の議論のまんまなのですが、そこに  $x \sim x + 1$  と  $y \sim y + 1$  という同一視が入ります。これにより、系の平行移動に対する対称性が大きく制限され、結果的に縮退度が有限になります。

その前にもうひとつ、周期境界条件が入るときの注意点として、磁束が量子化されることについて言及しておきます。まず、 $x$  方向に 1 だけ平行移動する操作を考えます。このとき、ゲージポテンシャルは

$$\vec{A}(x + 1, y) = \vec{A}(x, y) + \vec{\nabla} \chi_x, \quad \chi_x = \frac{B}{2}y \quad (4.1)$$

と変化します。波動関数は、ゲージ変換に対してそのパラメーターが位相となって出てくることを思い出すと

$$\Psi(x + 1, y) = e^{i\chi_x} \Psi(x, y) = e^{i\frac{B}{2}y} \Psi(x, y) \quad (4.2)$$

です。同様に、 $y$  方向に 1だけ平行移動する操作を考えると

$$\Psi(x, y + 1) = e^{-i\frac{B}{2}x} \Psi(x, y) \quad (4.3)$$

となります。さて、ではこの 2つの操作の順番を入れ替えて  $\Psi(x, y)$  からスタートしてみましょう。やってみると  $\Psi(x + 1, y + 1)$  を 2通りの方法で求めることができます。

$$\exp \left[ i \frac{B}{2}(y + 1) - i \frac{B}{2}x \right] \Psi(x, y) = \exp \left[ -i \frac{B}{2}(x + 1) + i \frac{B}{2}y \right] \Psi(x, y) \quad (4.4)$$

となり、両辺を比較すると

$$e^{iB} = 1 \quad (4.5)$$

が成立する必要があります。したがって、 $B = 2\pi M \in 2\pi\mathbb{Z}$  となり、磁束が量子化されます。今後は  $M \in \mathbb{Z}$  として話を進めます。

平行移動に対応する生成子  $K_x, K_y$  を  $X = K_x/2\pi M, P = K_y$  と定義します。するとこれらの交換関係は  $[X, P] = i$  となって、まさに位置と運動量の交換関係になります。ここで、同時固有状態  $|x\rangle$  を考えるど、 $e^{i(\Delta x)P} |x\rangle = |x + \Delta x\rangle$  であることと、 $P$  がハミルトニアンと可換であることから  $P|\psi\rangle = |X\rangle$  が成立することを組み合わせると、 $|x + 1\rangle = |x\rangle$  となることがわかります。また、この  $x$  は取る値が決まっており

$$x = 0, \frac{1}{M}, \dots, \frac{M-1}{M} \quad (4.6)$$

の  $M$  個の値を取ります。したがって、ランダウ準位の各エネルギー固有値に対して、 $M$  個の状態が対応することがわかります。これがトーラス上のランダウ準位の縮退度です。

この縮退を入れ替える変換を  $C$  としましょう。すると

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

と表現できます。この変換は  $C^M = 1$  を満たすので、 $\mathbb{Z}_M^C$  の生成子として振る舞います。またもうひとつ、この系は

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \rho & & & \\ & & \rho^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \rho^{M-1} \end{pmatrix}, \quad \rho = e^{2\pi i/M} \quad (4.8)$$

という変換の対称性ももっています。この変換も  $Z^M = 1$  なので、 $\mathbb{Z}_M$  の生成子として振る舞います [6]。実はこの変換、交換をせず

$$CZ = \rho ZC \quad (4.9)$$

という関係を満たすので  $\mathbb{Z}_M^C \times \mathbb{Z}_M$  とはなりません。この代数を閉じるために、対角な

$$Z' = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & \rho & & \\ & & \rho & \\ & & & \ddots \\ & & & & \rho \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

という変換も必要で、これが生成する群を  $\mathbb{Z}'_M$  とします。すると、最終的にこの系の対称性は  $H_M \equiv (\mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}'_M) \rtimes \mathbb{Z}_M^C$  といわれるハイゼンベルグ群になります。

ここからは勝手な妄想なのですが、前の章で言及した通り、その理論の縮退は系のアノマリーと関係しているはずです。そのアノマリーは群コホモロジーで分類できるのでした。ですので、今回の例だと  $H^2(H_M)$  が非自明なのではないかなど予想ができます。詳しい文献は探せていないので、もし何か心当たりがあればぜひ教えてください。(知っている人から見たら当然のことなのかもしれません)。自分のほうでも、時間を見つけて計算方法を勉強してみたいです。

## 5 おわりに

この PDF を開いてくださり、ありがとうございました。直前に書いてあるとおり、この構造の背後にあるアノマリーや群コホモロジーの話をちょっと勉強してみたいというところからはじまったのですが、もうひとつやりたいことがあって、それはこの模型のラグランジアンによる理解です。コンパクトボゾンみたいに [3] の論文にあるような理解ができると思っているのですが、まだうまく整理できていません。おそらく、 $\theta$  項への制限が磁束の量子化に対応していると思うのですが、、、ここらへんを時間を見つけて明らかにしたいと思っています。

ささっと書いてしまったノートですので、かなり読みづらいものになってしまったと反省しています。いつも思うのですが、しっかり前もって準備をしなくては。本当はゲージ化をして非可逆対称性の話もしたかったのですが、本当に時間が足りません。何か近況報告みたいなこともできればよかったです\*6、まあそれはどこかで会うなりして話しましょう。

---

\*6 むしろそっちの方が需要ある？

## 参考文献

- [1] H. Murayama, “Landau Levels.” <http://hitoshi.berkeley.edu/221A/landau.pdf>.
- [2] D. Tong, *The Quantum Hall Effect*, 2016. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qhe.html>.
- [3] D. Gaiotto, A. Kapustin, Z. Komargodski, and N. Seiberg, *Theta, Time Reversal, and Temperature*, **JHEP 05** (2017) 091, arXiv:1703.00501 [hep-th].
- [4] Kantaro, Ohmori, *Quantum Anomalies as Projective Phases*, 2022.  
[https://kantohm11.github.io/symmetry\\_review/](https://kantohm11.github.io/symmetry_review/).
- [5] T. Kobayashi and H. Otsuka, *Non-invertible flavor symmetries in magnetized extra dimensions*, **JHEP 11** (2024) 120, arXiv:2408.13984 [hep-th].
- [6] H. Abe, K.-S. Choi, T. Kobayashi, and H. Ohki, *Non-Abelian Discrete Flavor Symmetries from Magnetized/Intersecting Brane Models*, **Nucl. Phys. B 820** (2009) 317–333, arXiv:0904.2631 [hep-ph].