

受験番号	
氏 名	

平成30年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

物 理 学

平成29年8月21日（月） 13時00分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で6問ある。第1問、第2問、第3問は全員解答すること。さらに第4問、第5問、第6問の中から1問を選んで解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計4枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に受験番号、氏名を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問

二つの状態 $|1\rangle$ と $|2\rangle$ からなる量子力学系を考える。この二つの状態は1に規格化されており ($\langle 1|1\rangle = \langle 2|2\rangle = 1$)、かつ直交する ($\langle 1|2\rangle = 0$) ものとする。この系のハミルトニアンは

$$H = \begin{pmatrix} \langle 1|H|1\rangle & \langle 1|H|2\rangle \\ \langle 2|H|1\rangle & \langle 2|H|2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & V \\ V & E_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

で与えられるとする。 E_1, E_2, V は実数とする。以下の設問に答えよ。

1. 状態 $|2\rangle$ に対する演算子 $(H - E_2 \mathbf{1})$ および演算子 $(H - E_2 \mathbf{1})^2$ の期待値を求めよ。ただし $\mathbf{1}$ は 2×2 の単位行列である。
2. いま、 E_1, E_2, V は時間によらない一定値で、 $0 < V$ とする。この系の二つのエネルギー固有値 E_{\pm} ($E_- < E_+$) を求めよ。また、それらに対応する固有状態を $|\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle$ とするとき、 $|\psi_{\pm}\rangle = |1\rangle\langle 1|\psi_{\pm}\rangle + |2\rangle\langle 2|\psi_{\pm}\rangle$ の係数の比 $\langle 2|\psi_+\rangle / \langle 1|\psi_+\rangle$ および $\langle 2|\psi_-\rangle / \langle 1|\psi_-\rangle$ を E_1, E_2, V を用いて表せ。
3. この2つのエネルギー固有状態、 $|\psi_+\rangle$ と $|\psi_-\rangle$ 、は直交することを示せ。

以上の設問ではハミルトニアン (1) の行列要素 E_1, E_2, V は一定値をとると考えたが、以下では設定を少し変える。まず、 E_1 が実数値のパラメータ λ に $E_1 = E_2 - \varepsilon\lambda$ の形で依存し、 ε, E_2, V は実定数とする。このとき、パラメータ λ に依存するハミルトニアン

$$H^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} E_2 - \varepsilon\lambda & V \\ V & E_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

を考えよう。以下の設問では、 $0 < V \ll \varepsilon$ の関係が満たされているものとする。

4. ハミルトニアン $H^{(\lambda)}$ の二つの固有値を $E_+(\lambda)$ と $E_-(\lambda)$ (ただし $E_-(\lambda) < E_+(\lambda)$) とする。パラメータ λ の値によらず $E_+(\lambda) - E_-(\lambda) \geq 2V$ の関係が満たされることを示せ。

設問4の固有値に対応した固有状態を $|\psi_+^{(\lambda)}\rangle, |\psi_-^{(\lambda)}\rangle$ とする。固有状態 $|\psi_+^{(\lambda)}\rangle$ は

$$|\psi_+^{(\lambda)}\rangle = \cos(\theta(\lambda)) |1\rangle + \sin(\theta(\lambda)) |2\rangle \quad (3)$$

と書くことができ、この $\theta(\lambda)$ を λ の関数として図示すると図1のようになる。 $|\lambda| \lesssim \mathcal{O}(V/\varepsilon)$ の範囲内でのみ状態 $|\psi_+^{(\lambda)}\rangle$ は $|1\rangle$ と $|2\rangle$ から大きく異なるが、それは $|\lambda| \lesssim \mathcal{O}(V/\varepsilon)$ の場合に $H^{(\lambda)}$ の非対角項 V が二つの対角項 $(E_2 - \varepsilon\lambda)$ と E_2 の差 $\varepsilon\lambda$ と同程度かそれ以上の大きさになるためである。

さて、以下の設問5と6では、パラメータ λ が時刻 t とともに $\lambda = t/T$ のように変化、すなわちハミルトニアンが $H(t) = H^{(\lambda=t/T)}$ の形で変化する系を考える (T は定数)。この系の時間変化がゆっくりである (T が大きい) 場合に、状態 $|\psi(t)\rangle$ の時間発展を調べよう。 $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ を基底に用いて

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle = (|1\rangle, |2\rangle) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

で表される状態 $|\psi(t)\rangle$ の時間発展は、次のシュレディンガー方程式によって与えられる。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 - \mathcal{E} \frac{t}{T} & V \\ V & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここで、 \hbar はプランク定数を 2π で割ったものである。 λ の値を $\lambda = t/T$ とした二つの状態 $\{|\psi_+^{(t/T)}\rangle, |\psi_-^{(t/T)}\rangle\}$ を基底として用い、状態 $|\psi(t)\rangle$ を表すことを考える。

$$|\psi(t)\rangle = c_+(t)|\psi_+^{(t/T)}\rangle + c_-(t)|\psi_-^{(t/T)}\rangle = \left(|\psi_+^{(t/T)}\rangle, |\psi_-^{(t/T)}\rangle \right) \begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

5. (i) このとき $c_{\pm}(t)$ の時間発展を記述する方程式を $\theta(t/T)$ などを用いる形で書き表せ。
(ii) さらに、係数 $c_{\pm}(t)$ を複素位相分だけ変えた量

$$\tilde{c}_{\pm}(t) = c_{\pm}(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-T}^t dt' E_{\pm}(t'/T)} \quad (7)$$

を導入する。 $c_{\pm}(t)$ の時間発展方程式を $\tilde{c}_{\pm}(t)$ の時間発展方程式に書き直せ。

6. 時刻 $t = -T$, すなわち $\lambda = -1$ において $|\psi(t)\rangle = |\psi_+^{(\lambda=-1)}\rangle$ であるとする。条件 $TV^2/\mathcal{E} \gg \hbar$ が満たされる (系の時間変化が十分にゆっくり) ならば、時刻 $t = +T$ に至っても $|\tilde{c}_+(t)| \simeq 1$, $|\tilde{c}_-(t)| \ll 1$ のままである。その理由を、 $\tilde{c}_-(t)$ を定性的に評価して説明せよ。ただし、 $\mathcal{O}(1)$ の区間 I 上で実関数 $g(x)$ が緩やかに $\mathcal{O}(1)$ 程度変化し、実関数 $\chi(x)$ によって $e^{i\chi(x)}$ が I 上で激しく振動する場合には、 $|\int_I dx g(x) e^{i\chi(x)}| \ll 1$ となることを用いてよい。

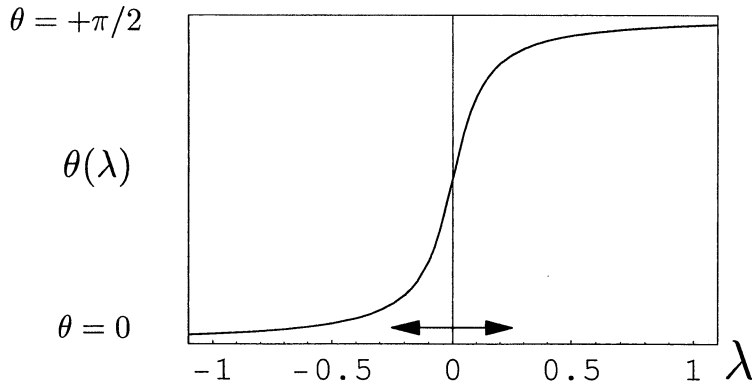


図 1: 式 (3) で導入した $\theta(\lambda)$ の λ 依存性を $2V/\mathcal{E} = 0.1$ の場合に示す。 $|\lambda| \gg (V/\mathcal{E})$ では $\lambda < 0$ なら $\theta \simeq 0$, $\lambda > 0$ なら $\theta \simeq +\pi/2$ であるが、図中矢印 (\longleftrightarrow) で示した $|\lambda| \lesssim \mathcal{O}(V/\mathcal{E})$ の範囲では θ の値が 0 と $+\pi/2$ の間の中間的な値をとる。

第2問

各辺が $L, L, 2L$ (体積 $V = L \times L \times 2L$) の直方体の中に質量が m の粒子が N 個あり、温度 T の熱平衡状態にあるとする。ボルツマン定数を k_B とする。粒子は互いに区別できないとする。ここで、 L, N は有限の値を持つものとする。粒子間の相互作用は考えず、系のハミルトニアンは、 i 番目の粒子の位置を (x_i, y_i, z_i) 、運動量を (p_i^x, p_i^y, p_i^z) として

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} [(p_i^x)^2 + (p_i^y)^2 + (p_i^z)^2] \quad (1)$$

で与えられるものとする。必要であれば以下の積分公式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0 \quad (2)$$

また、必要であれば、エントロピー $S(T)$ と定積熱容量 $C_V(T)$ の熱力学的関係

$$S(T_2) = S(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_V(T')}{T'} dT' \quad (3)$$

を用いてよい。

まず、粒子の運動を古典力学的に考える。

1. 粒子数を N に固定した場合、以下の問いに答えよ。

- (i) この系の内部エネルギーと定積熱容量を T, N の関数として求めよ。
- (ii) この系の圧力を T, V, N の関数として求めよ。
- (iii) ある温度 T_0 でのエントロピー $S(T_0)$ と、温度を $T_0/2$ に下げた時のエントロピー $S(T_0/2)$ との差を

$$\Delta S(T_0, T_0/2) \equiv S(T_0) - S(T_0/2) \quad (4)$$

と定義する。この量を求めよ。

2. 次に、粒子が壁を通して外界と出入りできる場合を考える。外界での粒子の化学ポテンシャル μ は温度変化しないものとする。以下の問いに答えよ。

- (i) 与えられた一定の体積、化学ポテンシャルのもとで、この系の温度 T_1 での粒子数の期待値と温度 T_2 での粒子数の期待値の比 $\langle N(T_1) \rangle / \langle N(T_2) \rangle$ を求めよ。
- (ii) 温度 T でのこの系の粒子数密度 $\langle N(T) \rangle / V$ と圧力 P の関係を求めよ。

以下では、粒子の運動を量子力学的に考える。

3. 系に N 個の粒子が閉じ込められている場合を考える。ここで、粒子は互いに区別できないボース粒子とする。体積 $V = L \times L \times 2L$ の容器に閉じ込められている 1 粒子のエネルギー固有値、固有関数は、 $L, L, 2L$ の直方体の各辺の方向の座標をそれぞれ x, y, z として

$$\mathcal{H}\Psi^{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = E(n_x, n_y, n_z)\Psi^{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) \quad (5)$$

を満たす。ただし、

$$\Psi^{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = \frac{\sin\left(\frac{n_x\pi}{L}x\right)}{\sqrt{L/2}} \frac{\sin\left(\frac{n_y\pi}{L}y\right)}{\sqrt{L/2}} \frac{\sin\left(\frac{n_z\pi}{2L}z\right)}{\sqrt{L}} \quad (6)$$

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \frac{\left[n_x^2 + n_y^2 + \left(\frac{n_z}{2}\right)^2\right]}{L^2}, \quad n_\alpha = 1, 2, \dots, \alpha = x, y, z \quad (7)$$

で与えられることを用いてよい。ここで \hbar はプランク定数を 2π で割ったものである。

- (i) この系の基底状態と第一励起状態のエネルギーを求めよ。
- (ii) $k_B T$ が基底状態と第一励起状態のエネルギー差の大きさに比べて十分小さい場合に、この系の内部エネルギーの温度依存性を求め、設問 1 で求めた結果と比較せよ。
- (iii) $T = 0$ での定積熱容量を求めよ。
- (iv) ある温度 T_0 でのエントロピー $S(T_0)$ と、温度を $T_0/2$ に下げた時のエントロピー $S(T_0/2)$ との差を

$$\Delta S(T_0, T_0/2) \equiv S(T_0) - S(T_0/2) \quad (8)$$

と定義する。 $T_0 \rightarrow 0$ の極限でのこの量の値を求めよ。

- (v) 低温でのエントロピーに関して設問 1(iii) で求めた結果と設問 3(iv) の結果を比較し、その違いをエントロピーと状態数の関係をあたえるボルツマンの原理の観点から説明せよ。ただし、半径 r の d 次元超球の表面積は $a_d r^{d-1}$ で与えられることを用いてよい。ここで a_d は r に依存しないある定数である。

第3問

電磁気現象は次の Maxwell 方程式で記述される。ただし、 \mathbf{E} は電場、 \mathbf{B} は磁束密度、 ρ は電荷密度、 \mathbf{j} は電流密度、 ϵ_0 は真空誘電率、 μ_0 は真空透磁率、 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ は光速である。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

電気双極子がつくる電磁場を求めたい。このとき以下の設問に答えよ。

- 最初に、静的な電気双極子 $\mathbf{p} = qd\mathbf{e}_z$ を考える。ただし、 q は電荷、 d は正負の電荷間の距離、 \mathbf{e}_z は z 方向の単位ベクトルを表す。点電荷の静電ポテンシャルを用いて、この双極子が位置 \mathbf{r} につくる静電ポテンシャル $\phi_0(\mathbf{r})$ を \mathbf{p} を用いて表し、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_0(\mathbf{r})$ を極座標 r, θ, φ で表せ。ただし、双極子の中心は原点にあり、 $d \ll r$ とする。
- 一般に、場が時間変動する状況を考え、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ および磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ をスカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{r}, t)$ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ を用いて表せ。
- 設問2の結果とローレンツ条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ を用いて、Maxwell 方程式が次の形式で表せることを示せ。

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (6)$$

図1のように原点で z 方向に距離 d だけ離れた2つの微小導体球が導線でつながれ、導線は十分細く、 z 方向に一樣に電流密度 $j_z(\mathbf{r}, t) = I_0 e^{i\omega t} \delta(x) \delta(y)$ が流れているものとする。ただし、 I_0 は定数である。ここで、物理量としては実部を取るものとするが、以下の設問4, 5では複素数表示のままで答えてもよい。

- 上下の各導体球に蓄えられる電荷 $\pm q(t)$ を I_0, ω などを用いて表せ。
- 式(6)を満たすベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ の解は次式(7)で表される。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7)$$

上で与えた電流密度 j_z が十分離れた位置 \mathbf{r} に生じさせるベクトルポテンシャルを書き下し、その結果から $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ を求めよ。また、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ と式(4)を用いて、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ を求めよ。ただし、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ と $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ は、 \mathbf{r} に対して最もゆっくり減衰する項一つずつのみ求めればよい。ここで、この電流から放射される電磁波の波数を k とするとき、 $k = \omega/c$ の関係を用いてよい。また位置 \mathbf{r} は、 $d \ll r$, $kr \gg 1$ を満たす十分離れた点とする。なお、任意のベクトル場 \mathbf{V} に関する公式 $\nabla \times \mathbf{V} = (\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}) \times \mathbf{V}$ を用いてよい。ただし、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ は、それぞれ r, θ, φ 方向の単位ベクトルである。

6. 設問5で得られた電場と磁場の解を用いて、それらの実数成分からポインティングベクトル $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ とその時間平均 $\bar{\mathbf{S}}$ を計算し、 $I_0, d, r, \mu_0, c, \omega, k, \theta$ などを用いて表せ。

次に、図2のように、2つの波源から電磁波が放射される場合を考える。各波源は y 軸上、 $y = -D/2$ と $y = D/2$ の位置にあり、波源1, 2が発する電場は、波源から距離 R_n ($n = 1, 2$) にある xy 平面内の観測点でそれぞれ、 $\mathbf{E}_n(R_n) = e_z E_0(R_n) \cos(\omega t - kR_n - \delta_n)$ で与えられるとする。ただし、 δ_n は各波源ごとに設定できる任意の位相とする。

7. 2つの波源からの放射が十分離れた xy 平面内の点 $\mathbf{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0)$ に作る電界強度 $|\mathbf{E}|^2$ を計算し、 $\delta_n = 0$ ($n = 1, 2$) のときの角度 φ 依存性を求めよ。また、強度が最大値の $1/2$ になる角度幅 $\Delta\varphi$ を求め、 $\Delta\varphi$ を小さくする方法について議論せよ。さらに、各波源の電場の位相 δ_n を制御し、電界強度が最大となる方向が $\varphi = \varphi_0$ となるような、位相の差 $\delta_2 - \delta_1$ を求めよ。ただし、 $D \ll r$ とし、 $E_0(R_1) = E_0(R_2)$ と見なしてよい。

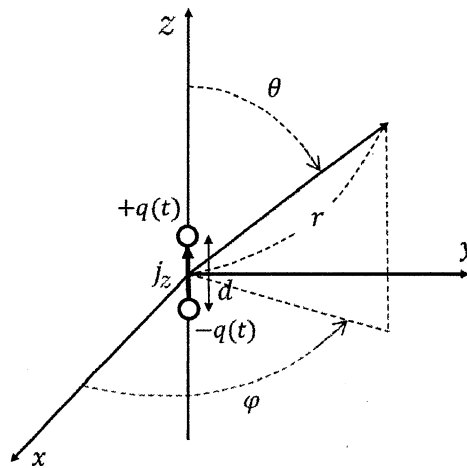


図1: 時間変動する電気双極子（電流の符号は図の太線の矢印の向きを正とする）。

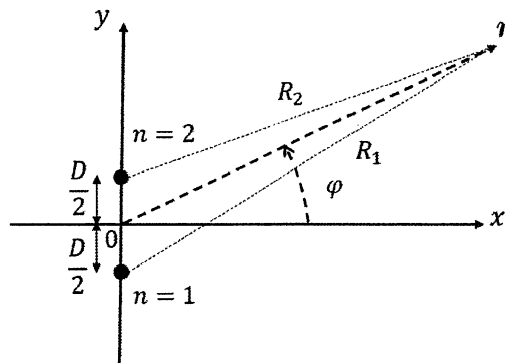


図2: xy 平面内の2つの波源と観測点。

第4問

電荷が負のミューオン (μ^-) に関する以下の設問に答えよ。

μ^- は次のようにして人工的に生成される。まず加速器で得られる高エネルギー陽子 (p) ビームを標的に照射すると、標的内の原子核との反応で電荷が負のパイ中間子 (π^-) が生成される。この π^- が μ^- と反ミューオンニュートリノ ($\bar{\nu}_\mu$) に崩壊 ($\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$) することで μ^- が生成される。

1. 終状態で π^- がひとつだけ生成される素過程は、核内中性子 (n) との反応 $p + n \rightarrow p + p + \pi^-$ である。陽子の運動量を p 、核内中性子は静止していたとみなし、重心系の相対論的全エネルギーを求めよ。ここで、陽子、中性子の質量をどちらも m とし、光速度は c とする。
2. 十分な運動エネルギーをもつ陽子ビームと陽子標的との反応で π^- を生成する反応の例をひとつ示せ。なお、パイ中間子には π^- 以外にも電荷が正の π^+ 、電氣的に中性の π^0 がある。

π^- の崩壊により生成された μ^- の方向と運動量を選び、 μ^- ビームとして利用することができる。ビームには崩壊しきれなかった π^- や、 μ^- の崩壊によって生じた電子 (e^-) が混ざっており、これらの粒子から μ^- のみを取り出したい。

3. 電場と磁場を組み合わせ、 μ^- のみを取り出す方法を考え、図などを用いて説明せよ。
 π^- 、 μ^- 、 e^- の運動量の大きさと向きはどれも同じとする。

図1のように、エネルギーがそろった μ^- ビームを、検出器1および2に通過させ、試料S中に止めたい。 μ^- が試料Sで静止しない場合、 μ^- は検出器3までたどり着き、検出器3から信号が出力される。 μ^- が試料Sで静止するように、検出器1と2の間に配置したエネルギー減衰板の厚さを調節した。

4. μ^- のような荷電粒子は物質中でエネルギーを損失する。粒子の速さが光速よりも十分に小さいとき、エネルギー損失は荷電粒子の速さの何乗に比例するか。その説明を述べた以下の文章を完成させるために、 $\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{カ}}$ に入る最も適当な語句を四角で囲った語句の中から選んで答えよ。

「荷電粒子が物質中を通過する際、エネルギーを損失する主な過程は、荷電粒子と物質内の $\boxed{\text{ア}}$ との間に働く $\boxed{\text{イ}}$ 相互作用によって、 $\boxed{\text{ア}}$ が反跳をうける過程である。 $\boxed{\text{ア}}$ が得た $\boxed{\text{ウ}}$ や $\boxed{\text{エ}}$ は荷電粒子の速さに逆比例する。荷電粒子が損失したエネルギーは物質内の $\boxed{\text{ア}}$ が獲得した $\boxed{\text{オ}}$ に相当するため、損失量は速さの $\boxed{\text{カ}}$ 乗に比例する。」

力	力積	運動量	運動エネルギー	ポテンシャルエネルギー
強い	電磁	弱い	重力	
分子	原子	電子	原子核	クォーク
-2	-1	0	1	2

μ^- は試料 S に静止後、S 内の原子核に束縛される。その後、 μ^- は次の二つの過程のどちらかをたどる。ひとつは、 μ^- が e^- 、ミューオンニュートリノ (ν_μ)、反電子ニュートリノ ($\bar{\nu}_e$) に自然崩壊 ($\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$) する過程、もうひとつは、 μ^- が試料 S 中の原子核に捕獲されて核内の陽子と相互作用し、中性子とミューオンニュートリノが生成される過程である。図 1 のように試料 S の近くに電子測定用の検出器 A とガンマ線測定用の検出器 B を置いた。また、試料 S としてアルミニウムを用いた。

5. μ^- が自然崩壊する際の e^- の最大の運動量を有効数字 2 桁で求めよ。 μ^- , e^- の質量は、それぞれ $110 \text{ MeV}/c^2$, $0.51 \text{ MeV}/c^2$ で、ニュートリノの質量は 0 としてよい。
6. μ^- が検出器 2 に到達した時刻と e^- が検出器 A に到達した時刻の差を測定し、その結果、 μ^- の寿命は $1 \pm 0.2 \text{ } \mu\text{s}$ (ただし、 $1 \text{ } \mu\text{s} = 10^{-6} \text{ s}$) であった。 μ^- が原子核に捕獲される割合 (%) を誤差付きで求めよ。 μ^- の自然崩壊の寿命は $2 \text{ } \mu\text{s}$ で誤差はないものとしてよい。
7. 試料 S 中の ^{27}Al は μ^- を捕獲して、 ^{27}Mg 原子核に変わり、その一部は、中性子をひとつ放出して ^{26}Mg に変わり、ガンマ線を放出した。このガンマ線を検出器 B で観測した。観測を 5 回繰り返し、試料 S に静止した μ^- の数と観測されたガンマ線の数以下の表 1 にまとめられている。静止した μ^- の数は、検出器 1 と 2 が同時に信号をだし、かつ検出器 3 が信号をださない事象を数えることで求めた。静止した μ^- 粒子 1 個あたりの ^{26}Mg が生成される割合 (%) およびその統計誤差を、有効数字 2 桁で求めよ。ただし、試料 S から放出されるガンマ線の検出器 B での検出効率は 0.2 % とし、 ^{26}Mg が生成される際は必ずガンマ線が放出され、検出器 B に同時に 2 個以上のガンマ線がはいる事象はないとする。

表 1: 実験データ

	静止ミューオン (μ^-) 数	ガンマ線検出数
1 回目	20000	16
2 回目	15000	9
3 回目	30000	24
4 回目	40000	29
5 回目	5000	3

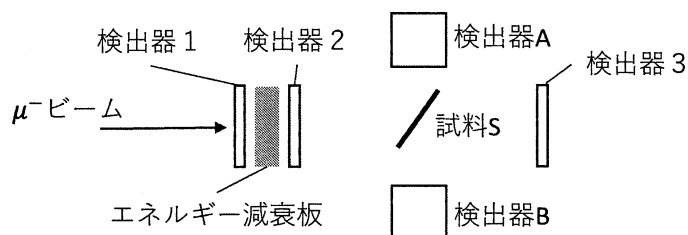


図 1: μ^- ビームを利用した実験のセットアップ。

第5問

結晶の構造を調べるため、X線回折を利用した実験を行う。X線を固体に照射すると、固体中の電子によってX線が散乱される。試料からの散乱強度 I は式 (1) で与えられる。

$$I = C \left| \int_V n(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \right|^2 \quad (1)$$

$$\mathbf{q} \equiv \mathbf{k}' - \mathbf{k}$$

C は定数とする。 $n(\mathbf{r})$ は固体中の電子数密度分布を表す関数であり、積分範囲は固体の全体積 V とする。 \mathbf{k} と \mathbf{k}' はそれぞれ入射 X 線と散乱 X 線の波数ベクトルで、ここでは弾性散乱のみを考慮し、 $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$ とする。 λ は X 線の波長である。 \mathbf{q} の x, y, z 成分をそれぞれ q_x, q_y, q_z とする。

1. z 軸上に間隔 a で配置された N 個の格子点上に原子 A を配置した仮想的な 1 次元結晶を考える。原子 A を配置した時の格子点上の電子数密度が下記のように与えられるとする。

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{p=0}^{N-1} n_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z - ap) \quad (2)$$

n_0 は各格子点上の電子数である。式 (1) と式 (2) を使って、X 線をこの 1 次元結晶に照射したときの散乱強度を q_z などを用いて表せ。必要であれば以下の式を使っても良い。

$$\sum_{m=0}^{N-1} x^m = \frac{1 - x^N}{1 - x} \quad (3)$$

2. 設問 1 で得られた結果を 3 次元の結晶に拡張する。格子定数 a の単純立方格子の格子点上に原子 A が配置された結晶を考える。設問 1 と同様、格子点上の電子数は n_0 とする。格子点は x, y, z 方向にそれぞれ N 個あるとし、X 線をこの 3 次元結晶に照射したときの散乱強度の表式を q_x, q_y, q_z などを用いて書き下せ。

設問 2 で扱った単純立方格子構造を持つ試料を考える。図 1 のように xz 面内に X 線源と検出器を設置する。入射 X 線と散乱 X 線の波数ベクトルはそれぞれ $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\mathbf{e}_x \cos \theta - \mathbf{e}_z \sin \theta)$, $\mathbf{k}' = \frac{2\pi}{\lambda}(\mathbf{e}_x \cos \theta + \mathbf{e}_z \sin \theta)$ とする。ここで、 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$ はそれぞれ x, z 方向の単位ベクトルとする。試料は単純立方格子の単位格子の各辺が x, y, z 軸と平行になるように配置する。

3. 設問 2 で得られた答えから、散乱強度が大きくなる条件を、角度 θ , X 線の波長 λ , 格子点間隔 a などを使って書き下せ。散乱強度が大きくなるこの条件は Bragg の条件として知られている。
4. 図 1 の測定環境において、単純立方格子を持つある試料 I の X 線回折測定を行うと、図 2 に示されるような結果が得られたとする。試料 I の格子点間隔 a を求めよ。ただし、X 線の波長は $\lambda = 0.15 \text{ nm}$ とする。

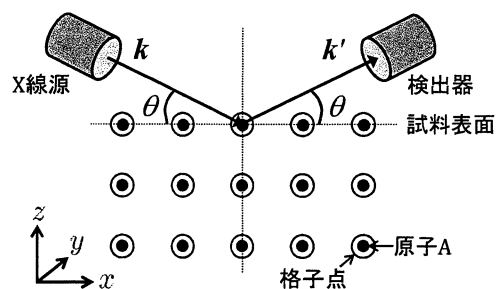


図 1: 測定環境の模式図。

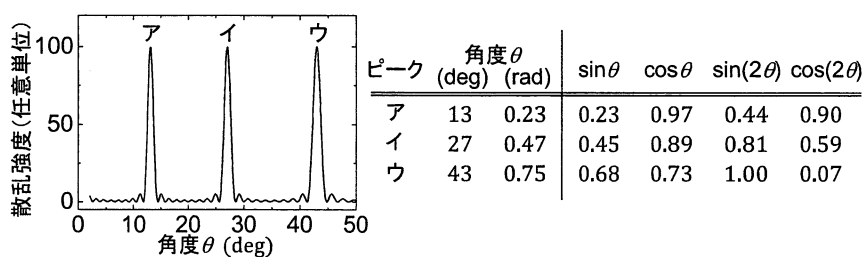


図 2: 試料 I の散乱強度の角度依存性。実験の都合上、角度 2 deg 以下の測定はできないものとする。

次に試料 II を考える。試料 II は、上に述べた単純立方格子の格子点上に原子 A、さらに格子点から $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ 離れた体心の位置に原子 B を配置した結晶である。ただし、試料 II の格子点間隔は a 、各方向の格子点数は N 、原子 A と原子 B の電子数は n_0 で同じとする。

- 図 1 の測定環境下で試料 II に X 線を照射した場合の散乱強度を求め、図 2 の結果がどのように変わるかを理由も添えて図示せよ。
- 試料 II を原料として、ある条件下で試料 III を作製したところ、原子 B が z 方向に ϵa だけ変位した結晶ができた。ただし、 $\epsilon \ll 1$ とする。この変位量を X 線回折を使って求めたい。図 1 の測定環境における散乱強度を ϵ を使って書き下し、そこから変位量を求める方法を記述せよ。

第6問

遠方にある天体の物理量を推定する際には、天体が放射する電磁波のスペクトル情報を用いることが多い。ここでは、高温でプラズマ状態になった天体からの放射を考える。この天体は密度が薄いため、天体内部で発生した電磁波は全て外に出てくるものとする。簡単のため、想定する天体のプラズマは水素が電離した同数の陽子と電子から構成されているものと仮定する。以下の設問に答えよ。必要ならば次の物理定数を使ってもよい。また、数値には単位を忘れずに記すること。

リュードベリ定数 $R_y = 13.6 \text{ eV}$

光速 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

ボルツマン定数 $k_B = 8.6 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$

プランク定数を 2π で割った量 $\hbar = 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV s}$

1. 水素原子からなるガスを加熱し、電離し始める温度を有効数字一桁で示せ。

図1のように、速度 \mathbf{v} 、質量 m の電子(電荷 $-e$ 、ただし $e > 0$ は素電荷)が時刻 $t = 0$ で陽子(電荷 $+e$)の近傍を最近接距離 b で通過する時の放射を考える。簡単のため、相互作用前後で、陽子は動かず、電子の飛行方向は時間 $\tau = \frac{2b}{v}$ (ただし $v = |\mathbf{v}|$) の間に $\delta\mathbf{v}$ だけわずかに変化するものとする。陽子からみた電子の相対位置を \mathbf{R} とすると、この系の電気双極子モーメントは $\mathbf{d} = -e\mathbf{R}$ と書ける。

2. $\mathbf{d}(t)$ のフーリエ変換を $\tilde{\mathbf{d}}(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}(t) e^{i\omega t} dt$ と定義する。 $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}$ であることに注意すると、 $\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{d}(t)$ の時間に関するフーリエ変換は

$$-\omega^2 \tilde{\mathbf{d}}(\omega) = -\frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{v}}{dt} e^{i\omega t} dt \quad (1)$$

となる。この $\tilde{\mathbf{d}}(\omega)$ がどのように振る舞うかを考えよう。 $\omega\tau \gg 1$ の場合と $\omega\tau \ll 1$ の場合に分けて考える。 $\omega\tau \gg 1$ の場合は、(1)式の右辺の積分内の $e^{i\omega t}$ が激しく振動するため、 $\tilde{\mathbf{d}}(\omega)$ は0とみなせる。 $\omega\tau \ll 1$ の場合に、 $\tilde{\mathbf{d}}(\omega)$ を $\delta\mathbf{v}$ を用いて表せ。このとき、 $e^{i\omega t} \simeq 1$ であることを用いてよい。

3. 双極子放射のスペクトルが $\frac{dW}{d\omega} = \frac{2\omega^4}{3\epsilon_0 c^3} |\tilde{\mathbf{d}}(\omega)|^2$ で与えられることを利用し、 $\omega\tau \ll 1$ の場合の $\frac{dW}{d\omega}$ を $\delta\mathbf{v}$ を用いて表せ。ただし、 ϵ_0 は真空誘電率、 c は光速である。

4. $\delta\mathbf{v}$ は、進行方向に垂直な加速度成分だけを時間で積分することで得られる。ここでは、 $-\tau/2 < t < \tau/2$ の間だけ $t = 0$ の時と同じ一定の力が働くと仮定する。 $|\delta\mathbf{v}|$ を計算し、双極子放射のスペクトルを b の関数として求めよ。

次に多数の粒子がある場合を考える。単位体積・単位時間あたりの放射を、設問4の結果を用いて導出しよう。なお以下の設問5と6では、全ての陽子は静止しているものとみなす。

5. 以下の文章の 空欄 に当てはまる数式を答えよ。

単位体積あたりの陽子数密度と電子数密度が共に n で与えられると仮定し、全ての電子が速さ v で等方的に飛び交っているとする。ある陽子からの最近接距離が b から $b + db$ (db は微小量) の間の円環領域を通る電子を考える。単位時間あたりに通過する電子数は ア であることから、設問 4 の結果を用いると、陽子 1 個につき単位時間あたりの電子との相互作用によるプラズマからの放射スペクトルは イ と表せる。単位体積あたりの陽子数を考えると、単位体積・単位時間あたりのプラズマからの放射スペクトルは、 b の関数として イ \times ウ と表せる。

6. b のとりうる範囲を $b_{\min} < b < b_{\max}$ として、設問 5 の イ \times ウ を積分することで全放射スペクトルを求めよ。ここで、 b_{\min} , b_{\max} は v , ω の関数であるが、以下の G を定数として利用してよい。

$$G \equiv \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right)$$

さらに、プラズマ中の電子と陽子の速度分布が温度 T の Maxwell-Boltzmann 分布を持つ天体を考える。陽子数密度と電子数密度は共に n とする。

7. このとき、単位体積・単位時間・単位周波数あたりの放射強度の周波数依存性 (放射スペクトル) は

$$I(\omega) = A(\omega, T) T^{-1/2} n^2 e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}$$

となる。ここで $A(\omega, T)$ は既知の関数で、 ω および T に対する依存性はゆるやかなので、以下の設問では $A(\omega, T)$ の ω および T への依存性は無視する。

- (i) 低周波数と高周波数の極限で、放射スペクトル $I(\omega)$ がそれぞれどのような周波数依存性を持つか述べよ。
- (ii) 測定した $I(\omega)$ から、天体のプラズマの温度 T と総質量 M はどのように求められるか、定性的に述べよ。ただし、プラズマの全体積 V は既知としてよい。

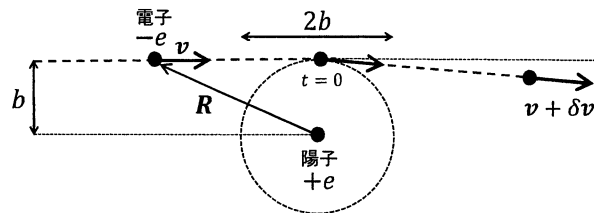


図 1: 陽子の近傍を通過する電子。