

[レポート課題 2]

注: レポートは電子ファイルで Moodle にアップロードすること。なおファイルの形式は, pdf ファイル, word ファイル, 手書きで書いたものをスキャナで読み込んで pdf ファイルとしたものなどにする。締め切りは, 2024 年 6 月 17 日 (月)18 時とする。

次の各設問に答えよ。

(1) 特殊相対論によると, 質量 m , 速度 v の粒子が持つ運動量 p とエネルギー E はそれぞれ

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (0.1)$$

で与えられる。ただし $v = |v|$ であり, c は光速である。この粒子が, 単位長さの立方体の中を壁と弾性衝突しながら運動しているとき, 単位時間あたりに粒子が一つの壁に及ぼす力が圧力 \bar{P} に相当する。粒子の運動は, 平均すると空間 3 方向に等方的であるとして, 圧力が

$$\bar{P} = \frac{1}{3}pv = \frac{c^2 p^2}{3E} \quad (0.2)$$

で与えられることを示せ。ただし $p = |p|$ である。さらに, 質量 $m = 0$ の光子 1 個の圧力 \bar{P} がどのように表せるかについても答えよ。

(2) 質量 m , 化学ポテンシャル μ の粒子の集合が絶対温度 T の熱平衡状態にあるとき, その粒子分布は, 分布関数

$$f(p) = \frac{1}{\exp[(E - \mu)/(k_B T)] \pm 1} \quad (0.3)$$

に従う。ただし, $+$ 記号がフェルミ粒子, $-$ 記号がボース粒子に対応し, k_B はボルツマン定数, $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ は粒子のエネルギー, $p = |p|$ は運動量 p の大きさである。内部自由度 g_* の粒子の集合による圧力は,

$$P = g_* \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{c^2 p^2}{3E} f(p) \quad (0.4)$$

で与えられる。粒子が非相対論的 ($mc^2 \gg pc, mc^2 \gg k_B T$) であるときに成り立つ近似式 $E \simeq mc^2 + p^2/(2m)$ を用いて, 熱平衡状態での粒子の集合による圧力 P とエネルギー密度 ε を計算し, 状態方程式 $w = P/\varepsilon$ が 1 に対して十分小さいことを示せ。

(3) 暗黒エネルギーの状態方程式 w_{DE} が一定で, $w_{DE} < -1$ の範囲にあるとする。そのエネルギー密度 ε_{DE} は, 連続方程式 $\dot{\varepsilon}_{DE} + 3H(1 + w_{DE})\varepsilon_{DE} = 0$ を満たすとする。ここで, ドットは時間 t による微分であり, $H = \dot{a}/a$ は宇宙の膨張率, a はスケール因子である。暗黒エネルギーが宇宙の全エネルギーを支配しているとき, 平坦な時空でのフリードマン方程式

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_{DE} \quad (0.5)$$

を解くことで, **宇宙が膨張する解**についての a の時間 t に関する依存性を求めよ。さらに, 現在 ($t = t_0, H = H_0$) でも (0.5) が成り立つという近似の下で, 現在からどの程度の時間が経過すると H の発散が起こるのかを, $w_{DE} = -1.2$ のときに具体的に評価せよ。ただし, $H_0^{-1} \simeq 145$ 億年を用いてよい。