東京大学 令和2年 物理学専攻 院試 解答例

ミヤネ

最終更新：2023 年 8 月 21 日

目次

1　数学パート

第1問

1. (i) 被積分関数をべき級数展開すれば

$$e^{-\xi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \xi^{2n} \tag{1.1.1}$$

となり，これを積分すれば

$$\begin{aligned} \mathrm{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{d}\xi \ e^{-\xi^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x \mathrm{d}\xi \ \xi^{2n} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1} \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

となる．

(ii) $\xi^2 = \eta$と積分変数を変換すれば

$$\begin{aligned} \mathrm{erf}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x^2} \mathrm{d}\eta \ \eta^{-1/2} e^{-\eta} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left[\eta^{-1/2} e^{-\eta} \right]_0^{x^2} + \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \mathrm{d}\eta \ \eta^{-3/2} e^{-\eta} \right\} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi} x} e^{-x^2} + \lim_{\eta \to 0} \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{\eta}} + \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \mathrm{d}\eta \ \eta^{-3/2} e^{-\eta} \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

となる．ここで

$$\mathrm{erf}(x) \to \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\xi \ e^{-\xi^2} = 1 \tag{1.1.4}$$

なので，$x \sim \infty$で第2,3項が1に近いと近似できて

$$\mathrm{erf}(x) \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi} x} e^{-x^2} \tag{1.1.5}$$

である．

2. (i) 解が

$$u(x,t) = X(x) T(t). \tag{1.1.6}$$

と書けるとする．これを方程式に代入して，整理すれば

$$\frac{1}{X} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{cT} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \coloneqq \Lambda \tag{1.1.7}$$

となる．ここで，Λは定数である．よって，微分方程式を解けば，それぞれ

$$X(x) = Ae^{\Lambda x} \ , \ T(t) = Be^{-c\Lambda t} \tag{1.1.8}$$

と定数A, Bを用いてあらわすことができる．この積が解$u(x,t)$だったので

$$u(x,t) = A^* e^{\Lambda(x-ct)} \tag{1.1.9}$$

である．ただし，$A^* = AB$とおいた．$t=0$とすれば

$$U(x) = A^* e^{\Lambda} \tag{1.1.10}$$

と初期条件から求まる．よって(1.1.9)より

$$u(x,t) = U(x-ct) \tag{1.1.11}$$

となる．

(ii) フーリエ変換の定義から，逆フーリエ変換は

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ \tilde{u}(k,t) e^{ikx} \tag{1.1.12}$$

となる．これを方程式に代入すれば

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\left(ick + \frac{\lambda}{2}k^2\right)\tilde{u} \tag{1.1.13}$$

となり，初期条件は

$$\tilde{U}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ U(x) e^{-ikx} \tag{1.1.14}$$

である．

(iii) $U(x) = \delta(x)$のとき，初期条件は

$$\tilde{U}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{1.1.15}$$

である．(1.1.13)を解くと

$$\tilde{G}(k,t) = A(k) \exp\left[-\left(ick + \frac{\lambda}{2}k^2\right)t\right] \tag{1.1.16}$$

である．ただし，Aはkのみに依存する関数である．初期条件から

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{1.1.17}$$

となるので

$$\tilde{G}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(ick + \frac{\lambda}{2}k^2\right)t\right] \tag{1.1.18}$$

となり，

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ \tilde{G}(k,t) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ e^{-(\lambda t/2)k^2 + i(x-ct)k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda t}} e^{-\frac{(x-ct)^2}{2\lambda t}} \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

である．

(iv) 初期条件は

$$\tilde{U}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x \ e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x \ e^{ikx} \tag{1.1.20}$$

となる．よって，(1.1.16)の解は

$$A(k) = \tilde{U}(k) \tag{1.1.21}$$

であり

$$\tilde{u}(k,t) = \tilde{U}(k) \exp\left[-\left(ick + \frac{\lambda}{2}k^2\right)t\right] \tag{1.1.22}$$

となる．よって，$\tilde{u}(k,t)$を逆変換して$u(x,t)$を求めれば

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \ e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x' \ e^{ikx'} e^{-\left(ick+(\lambda/2)k^2\right)t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \ e^{-(\lambda t/2)k^2 + i(x+x'-ct)k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda t}} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x' \ e^{-\frac{(x+x'-ct)^2}{2\lambda t}} \end{aligned} \tag{1.1.23}$$

となる．変数を

$$\frac{(x+x'-ct)^2}{2\lambda t} = z^2 \tag{1.1.24}$$

と変換すれば

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x' \ e^{-\frac{(x+x'-ct)^2}{2\lambda t}} &= \int_{\frac{|x-ct|}{\sqrt{2\lambda t}}}^{\infty} \sqrt{2\lambda t}\mathrm{d}z \ e^{-z^2} \\ &= \sqrt{2\lambda t}\left\{\int_{0}^{\infty} e^{-z^2} - \int_{0}^{\frac{|x-ct|}{\sqrt{2\lambda t}}} \mathrm{d}z \ e^{-z^2}\right\} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda\pi t}{2}}\left\{1 - \mathsf{erf}(|x-ct|/\sqrt{2\lambda t})\right\} \end{aligned} \tag{1.1.25}$$

となって

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{1 - \mathsf{erf}\left(\frac{|x-ct|}{\sqrt{2\lambda t}}\right)\right\} \tag{1.1.26}$$

となる．このとき，$u(x,t)$は時間がたつ$(t\to\infty)$と

$$u(x,t) \to 0 \tag{1.1.27}$$

となることがわかる．

第2問

1. wは
$$w^d - 1 = 0. \tag{1.2.1}$$
の解である．左辺を変形すれば
$$(w-1)\operatorname{tr} Z = 0 \tag{1.2.2}$$
となり，$w \neq 1$であることから
$$\operatorname{tr} Z = 0 \tag{1.2.3}$$
がわかる．

2. XZとZXをそれぞれもとめてみると
$$XZ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & w & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & w^{d-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & w^{d-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w^{d-2} & 0 \end{pmatrix}$$
$$ZX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & w & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & w^{d-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ w & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w^{d-1} & 0 \end{pmatrix}.$$
となる．このとき，$w^d = 1$であることに気をつければ
$$ZX = wXZ \tag{1.2.4}$$
という関係がある．

3. 2通りで計算してみると
$$\begin{aligned} U^{(1,m)}U^{(n',m')} &= X\overbrace{Z\cdots Z}^{m}\overbrace{X\cdots X}^{n'}\overbrace{Z\cdots Z}^{m'} \\ &= w^{mn'}\overbrace{X\cdots X}^{n'+1}\overbrace{Z\cdots Z}^{m+m'} \\ U^{(n',m')}U^{(1,m)} &= \underbrace{X\cdots X}_{n'}\underbrace{Z\cdots Z}_{m'}X\underbrace{Z\cdots Z}_{m} \\ &= w^{m'}\overbrace{X\cdots X}^{n'+1}\overbrace{Z\cdots Z}^{m+m'} \end{aligned} \tag{1.2.5}$$
となる．ここで$U^{(1,m)}$と$U^{(n',m')}$が同時対角化可能であるためには，$U^{(1,m)}U^{(n',m')}$と$U^{(n',m')}U^{(1,m)}$が等しければよい．したがって，
$$m' - mn' = nd \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{1.2.6}$$
が求める条件である．

4. $U^{(1,m)}$は

$$U^{(1,m)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & w^{m(d-1)} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & w^m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w^{m(d-2)} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.7}$$

となっている．よって，この固有多項式は

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & -w^{m(d-1)} \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -w^m & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -w^{m(d-2)} & \lambda \end{vmatrix} \tag{1.2.8}$$

である．これを計算するために次の関係式

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & x_n \\ x_1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n + (-1)^{n-1} x_1 x_2 \cdots x_n \tag{1.2.9}$$

を示そう．

Proof. 余因子展開をすれば

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & x_n \\ x_1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \lambda \end{vmatrix} &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_2 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \lambda \end{vmatrix} \\ &\qquad + (-1)^{n-1} x_n \begin{vmatrix} x_1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n + (-1)^{n-1} x_1 x_2 \cdots x_n \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

とただちにもとめられる．このとき，

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_2 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-1} \tag{1.2.11}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} \end{vmatrix} = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \tag{1.2.12}$$

という関係を用いた．これらも，余因子展開からもとめることができる． □

(1.2.9)をもちいれば

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & -w^{m(d-1)} \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -w^m & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -w^{m(d-2)} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^d - w^{m+\cdots(d-1)m} = \lambda^d - w^{m(d-1)d/2} \tag{1.2.13}$$

が成り立つ．したがって，これを0とした方程式を解けば，

$$\lambda^d = w^{m(d-1)d/2} \tag{1.2.14}$$

となり，

$$\lambda = e^{2\pi i \frac{n}{d}} w^{\frac{m(d-1)}{2}} \qquad (n = 0, 1, \cdots d-1) \tag{1.2.15}$$

がもとめる固有値である．

5. $d = 3$のとき，固有値は

$$w^m \ , \ e^{2\pi i/3} w^m \ , \ e^{4\pi i/3} w^m \tag{1.2.16}$$

である．よって，対応する固有ベクトルは

$$e_1^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} w^m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ w^m \tag{1.2.17}$$

$$e_2^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{4\pi i/3} w^m \\ e^{2\pi i/3} \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ e^{2\pi i/3} w^m \tag{1.2.18}$$

$$e_3^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{2\pi i/3} w^m \\ e^{4\pi i/3} \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ e^{4\pi i/3} w^m \tag{1.2.19}$$

である．

6. 固有ベクトルは

$$e_j^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{-2\pi i(j-1)/3} w^m \\ e^{2\pi i(j-1)/3} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.20}$$

と書き直すことができることに注意する．これを用いて直接計算してみると

$$\begin{aligned} |\langle e_j^m, e_{j'}^{m'} \rangle|^2 &= \frac{1}{9} |e^{-2\pi i(j'-j)/3} w^{m'-m} + e^{2\pi i(j'-j)/3} + 1|^2 \\ &= \frac{1}{9} (e^{2\pi i(j'-j)/3} w^{-m'+m} + e^{-2\pi i(j'-j)/3} + 1) \\ &\qquad \times (e^{-2\pi i(j'-j)/3} w^{m'-m} + e^{2\pi i(j'-j)/3} + 1) \\ &= \frac{2}{9} \left(\mathrm{Re}\left[e^{-2\pi i(j'-j)/3} w^{-m'+m} \right] + \mathrm{Re}\left[e^{2\pi i(j'-j)/3} w^{-m'+m} \right] \right. \\ &\qquad \left. + \mathrm{Re}\left[e^{2\pi i(j'-j)/3} \right] \right) + \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

となる．ここで，$J := j' - j, M := m' - m$遠くことにする．すると，実部の項は

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left[e^{-2\pi i(j'-j)/3} w^{-m'+m}\right] + \mathrm{Re}\left[e^{2\pi i(j'-j)/3} w^{-m'+m}\right] + \mathrm{Re}\left[e^{2\pi i(j'-j)/3}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[2\,\mathrm{Re}\left[e^{2\pi i J/3}\right] w^{-M}\right] + \mathrm{Re}\left[e^{2\pi i J/3}\right] \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left[e^{2\pi i J/3}\right] \mathrm{Re}\left[w^{-M}\right] + \mathrm{Re}\left[e^{2\pi i J/3}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{2\pi i J/3}\right] \left(2\,\mathrm{Re}\left[w^{M}\right] + 1\right) \qquad (1.2.22)
\end{aligned}$$

となり，すべての$M\ (= -2, -1, 1, 2)$について$\mathrm{Re}\left[w^{M}\right] = -1/2$が成立するので，この(1.2.22)の値は0である．よって，(1.2.21)より

$$|\langle e_j^m, e_{j'}^{m'} \rangle|^2 = \frac{1}{3} \qquad (1.2.23)$$

が成り立つ[*1]．

[*1] すごいごちゃごちゃしちゃいましたが，この解答はどうなんでしょう．

2　物理パート

第1問

1. 次の関係式
$$\sigma_z \left|\uparrow\right\rangle = \left|\uparrow\right\rangle \ , \ \left\langle\uparrow\right| \sigma_z \left|\uparrow\right\rangle = 1 \tag{2.1.1}$$
が成立する．よって，$s_z = 1$であり，期待値も1である．
2. σ_xの固有ベクトルは$(1,1)$と$(1,-1)$なので，
$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \tag{2.1.2}$$
である．よって，$s_x = \pm 1$であり，期待値は$\left\langle\uparrow\right| \sigma_z \left|\uparrow\right\rangle = 0$である．
ここで，後のために，規格化した固有ベクトルを
$$\begin{cases} \left|\uparrow_x\right\rangle \coloneqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ \left|\downarrow_x\right\rangle \coloneqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \end{cases} \tag{2.1.3}$$
と書くことにする．
3. 固有多項式は
$$\begin{vmatrix} \lambda - \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \lambda + \cos\theta \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \tag{2.1.4}$$
であり，これを解くと$\lambda = \pm 1$である．よって，測定値は$\sigma(\theta) = \pm 1$であり，期待値は
$$\left\langle\uparrow\right| \sigma(\theta) \left|\uparrow\right\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \cos\theta \tag{2.1.5}$$
である．
前問と同様に
$$\begin{cases} \left|\uparrow_\theta\right\rangle \coloneqq \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \\ \left|\downarrow_\theta\right\rangle \coloneqq \begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \end{cases} \tag{2.1.6}$$
と書くことにする．
4. 測定値の組は$(1,-1)$と$(-1,1)$である．このときの期待値は
$$\begin{aligned} \left\langle\Psi\right| \sigma_z^A \sigma_z^B \left|\Psi\right\rangle &= \frac{1}{2}\left(\left\langle\uparrow\right|_A \left\langle\downarrow\right|_B - \left\langle\downarrow\right|_A \left\langle\uparrow\right|_B\right)\left(-\left|\uparrow\right\rangle_A \left|\downarrow\right\rangle_B + \left|\downarrow\right\rangle_A \left|\uparrow\right\rangle_B\right) \\ &= -1 \end{aligned} \tag{2.1.7}$$
である．
5. $\left|\Psi\right\rangle$を基底(2.1.3)で展開すれば
$$\begin{aligned} \left|\Psi\right\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\right\rangle_A \left|\downarrow\right\rangle_B - \left|\downarrow\right\rangle_A \left|\uparrow\right\rangle_B\right) \\ &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(\left|\uparrow_x\right\rangle_A + \left|\downarrow_x\right\rangle_A\right) \otimes \left(\left|\uparrow_x\right\rangle_B - \left|\downarrow_x\right\rangle_B\right) - \left(\left|\uparrow_x\right\rangle_A - \left|\downarrow_x\right\rangle_A\right) \otimes \left(\left|\uparrow_x\right\rangle_B + \left|\downarrow_x\right\rangle_B\right)\right) \\ &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow_x\right\rangle_A \left|\downarrow_x\right\rangle_B - \left|\downarrow_x\right\rangle_A \left|\uparrow_x\right\rangle_B\right) \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

となる．したがって，前問と得られる結果は同じで

$$(s_x^A, s_x^B) = (1,-1),(-1,1)\ ,\quad \langle\Psi|\,\sigma_x^A\sigma_x^B\,|\Psi\rangle = -1 \tag{2.1.9}$$

である．

6. $|\Psi\rangle$を基底(2.1.6)で展開する．ここで，$|{\uparrow}\rangle$と$|{\downarrow}\rangle$を展開すると

$$\begin{cases} |{\uparrow}\rangle = \cos\dfrac{\theta}{2}\,|{\uparrow_\theta}\rangle - \sin\dfrac{\theta}{2}\,|{\downarrow_\theta}\rangle \\ |{\downarrow}\rangle = \sin\dfrac{\theta}{2}\,|{\uparrow_\theta}\rangle + \cos\dfrac{\theta}{2}\,|{\downarrow_\theta}\rangle \end{cases} \tag{2.1.10}$$

となるので，$|\Psi\rangle$の展開は

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(\cos\frac{\theta}{2}\,|{\uparrow_\theta}\rangle_A - \sin\frac{\theta}{2}\,|{\downarrow_\theta}\rangle_A\right)\otimes\left(\sin\frac{\theta}{2}\,|{\uparrow_\theta}\rangle_B + \cos\frac{\theta}{2}\,|{\downarrow_\theta}\rangle_B\right)\right. \\ &\qquad \left. - \left(\sin\frac{\theta}{2}\,|{\uparrow_\theta}\rangle_A + \cos\frac{\theta}{2}\,|{\downarrow_\theta}\rangle_A\right)\otimes\left(\cos\frac{\theta}{2}\,|{\uparrow_\theta}\rangle_B - \sin\frac{\theta}{2}\,|{\downarrow_\theta}\rangle_B\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|{\uparrow_\theta}\rangle_A\,|{\downarrow_\theta}\rangle_B - |{\downarrow_\theta}\rangle_A\,|{\uparrow_\theta}\rangle_B) \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

である．よって，測定値の組が

$$(s_\theta^A, s_\theta^B) = (1,-1),(-1,1) \tag{2.1.12}$$

となることが確かめられた．

7. $|\Psi\rangle$を同様に展開すれば

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(\cos\frac{\theta}{2}\,|{\uparrow_\theta}\rangle_A - \sin\frac{\theta}{2}\,|{\downarrow_\theta}\rangle_A\right)\otimes\left(\sin\frac{\varphi}{2}\,|{\uparrow_\varphi}\rangle_B + \cos\frac{\varphi}{2}\,|{\downarrow_\varphi}\rangle_B\right)\right. \\ &\qquad \left. - \left(\sin\frac{\theta}{2}\,|{\uparrow_\theta}\rangle_A + \cos\frac{\theta}{2}\,|{\downarrow_\theta}\rangle_A\right)\otimes\left(\cos\frac{\varphi}{2}\,|{\uparrow_\varphi}\rangle_B - \sin\frac{\varphi}{2}\,|{\downarrow_\varphi}\rangle_B\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\,|{\uparrow_\theta}\rangle_A\,|{\uparrow_\varphi}\rangle_B + \cos\frac{\varphi-\theta}{2}\,|{\uparrow_\theta}\rangle_A\,|{\downarrow_\varphi}\rangle_B\right. \\ &\qquad \left. - \cos\frac{\varphi-\theta}{2}\,|{\downarrow_\theta}\rangle_A\,|{\uparrow_\varphi}\rangle_B - \sin\frac{\varphi-\theta}{2}\,|{\downarrow_\theta}\rangle_A\,|{\downarrow_\varphi}\rangle_B\right\} \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

となる．測定値は

$$(s_\theta^A, s_\varphi^B) = (1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1) \tag{2.1.14}$$

とすべての組み合わせが得られ，期待値は

$$\begin{aligned} \langle\Psi|\,\sigma^A(\theta)\sigma^B(\varphi)\,|\Psi\rangle &= \frac{1}{2}\left\{\sin^2\frac{\varphi-\theta}{2}\,\langle{\uparrow_\theta}|_A\,\langle{\uparrow_\varphi}|_B\,\sigma^A(\theta)\sigma^B(\varphi)\,|{\uparrow_\theta}\rangle_A\,|{\uparrow_\varphi}\rangle_B\right. \\ &\qquad + \cos^2\frac{\varphi-\theta}{2}\,\langle{\uparrow_\theta}|_A\,\langle{\downarrow_\varphi}|_B\,\sigma^A(\theta)\sigma^B(\varphi)\,|{\uparrow_\theta}\rangle_A\,|{\downarrow_\varphi}\rangle_B \\ &\qquad + \cos^2\frac{\varphi-\theta}{2}\,\langle{\downarrow_\theta}|_A\,\langle{\uparrow_\varphi}|_B\,\sigma^A(\theta)\sigma^B(\varphi)\,|{\downarrow_\theta}\rangle_A\,|{\uparrow_\varphi}\rangle_B \\ &\qquad \left. + \sin^2\frac{\varphi-\theta}{2}\,\langle{\downarrow_\theta}|_A\,\langle{\downarrow_\varphi}|_B\,\sigma^A(\theta)\sigma^B(\varphi)\,|{\downarrow_\theta}\rangle_A\,|{\downarrow_\varphi}\rangle_B\right\} \\ &= -\cos^2\frac{\varphi-\theta}{2} \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

となる．

8. すべての(σ^A, σ^B)の組について，$|\Psi\rangle$をもとめてみる:
   - $(\sigma^A, \sigma^B) = (0°, 0°), (120°, 120°), (240°, 240°)$
     このときは
     $$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B) \tag{2.1.16}$$
     である．よって，$s^A s^B = -1$なので，この場合の期待値は1である．
   - $(\sigma^A, \sigma^B) = (0°, 120°), (0°, 240°), (120°, 0°), (120°, 240°), (240°, 0°), (240°, 120°)$
     このときは
     $$\begin{aligned}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg\{ &\pm\frac{\sqrt{3}}{2} |\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B + \frac{1}{2} |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B \\ &-\frac{1}{2} |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B \mp \frac{\sqrt{3}}{2} |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B \Bigg\}\end{aligned} \tag{2.1.17}$$
     なので，$s^A s^B = +1$となる確率は$3/4$であり，$s^A s^B = -1$である確率は$1/4$である．よって，この場合の期待値は
     $$(+1) \times \frac{3}{4} + (-1) \times \frac{1}{4} = +\frac{1}{2} \tag{2.1.18}$$
     である．

   よって，$s^A s^B$の期待値は
   $$\begin{aligned} s^A s^B &= \frac{1}{9} \cdot 3 \cdot (-1) + \frac{1}{9} \cdot 6 \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.1.19}$$
   であることが示された．

9. (i) 測定値$(s^B_{0°}, s^B_{120°}, s^B_{240°})$は
   $$(s^B_{0°}, s^B_{120°}, s^B_{240°}) = (-1, -1, -1) \tag{2.1.20}$$
   である．このとき，$s^A s^B = -1$しか得られないので，期待値は-1である．

   (ii) 測定値$(s^B_{0°}, s^B_{120°}, s^B_{240°})$は
   $$(s^B_{0°}, s^B_{120°}, s^B_{240°}) = (-1, -1, +1). \tag{2.1.21}$$
   である．このとき，5通り$s^A s^B = -1$となる場合があり，4通り$s^A s^B = +1$となる場合があるので，期待値は$-1/9$である．

   (iii) 測定値$(s^A_{0°}, s^A_{120°}, s^A_{240°})$のうち，$-1$が2つある場合も期待値は$-1/9$である．よって，全体の期待値は
   $$\frac{2}{8} \cdot (-1) + \frac{6}{8} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{3} < 0 \tag{2.1.22}$$
   である．

第2問

1. ハミルトニアンは空間成分に依存しないので

$$\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}_1 \cdots \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}_N \ = V^N \tag{2.2.1}$$

と書ける．運動量の積分については

$$\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_1 \cdots \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_N \ e^{-\beta H} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \ e^{-(\beta/2m)p^2}\right)^{3N} = \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3N/2} \tag{2.2.2}$$

となるので，分配関数は

$$Z = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{3N/2}. \tag{2.2.3}$$

である．ここで，分配関数と自由エネルギーの関係は

$$F = -\frac{1}{\beta}\log Z \tag{2.2.4}$$

であたえられるので，Vで微分すれば

$$\begin{aligned} P &= -\frac{\partial F}{\partial V} \\ &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\left(N\log V + \cdots\right) \\ &= \frac{N}{\beta V} \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

である．

2. ヘルムホルツの自由エネルギーは，次の示量性の性質

$$F(T, \lambda N, \lambda V) = \lambda F(T, N, V) \tag{2.2.6}$$

を満たさなくてはならない．この性質を示すために，(2.2.3)と(2.2.4)を(2.2.6)の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} F(T, \lambda N, \lambda V) &= -\frac{1}{\beta}\log\left[\frac{(\lambda V)^{\lambda N}}{h^{3\lambda N}(\lambda N)!}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3\lambda N/2}\right] \\ &= -\frac{1}{\beta}\left[\lambda N\log(\lambda V) - 3\lambda N\log h - \log(\lambda N)! + \frac{3\lambda N}{2}\log\frac{2\pi m}{\beta}\right] \\ &\sim \frac{1}{\beta}\left\{-\lambda N\log(\lambda V) + 3\lambda N\log h + \lambda N\log(\lambda N) - \lambda N - \frac{3\lambda N}{2}\log\frac{2\pi m}{\beta}\right\} \\ &= \lambda\cdot\frac{1}{\beta}\left\{3N\log h + N\log(N/V) - N - \frac{3N}{2}\log\frac{2\pi m}{\beta}\right\} \\ &= \lambda F(T, N, V) \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

となり，示量性を満たすことが示された．

3. エントロピーは

$$
\begin{aligned}
S &= -\frac{\partial F}{\partial T} \\
&= \frac{1}{k_B T^2}\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{1}{\beta}\left\{3N\log h + N\log(N/V) - N - \frac{3N}{2}\log\frac{2\pi m}{\beta}\right\}\right] \\
&= \frac{5N}{2} - 3N\log h - N\log\frac{N}{V} + \frac{3N}{2}\log(2\pi m k_B T)
\end{aligned}
\tag{2.2.8}
$$

である．$T \to 0$とすると，エントロピーSは$-\infty$に発散することがわかる．

4. 熱容量は

$$
C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial F}{\partial T} + S + T\frac{\partial S}{\partial T} = T\frac{\partial S}{\partial T}
\tag{2.2.9}
$$

でもとめることができる．なお，エントロピーの定義

$$
\frac{\partial F}{\partial T} + S = 0
\tag{2.2.10}
$$

を用いた．(2.2.9)を用いれば

$$
C_V = \frac{3Nk}{2}
\tag{2.2.11}
$$

となる．

5. 波数の取りうる値をもとめるために，シュレーディンガー方程式

$$
-\frac{\hbar^2}{2m}\psi(x) = E_x\psi(x)
\tag{2.2.12}
$$

を考えよう．この解が周期境界条件$\psi(x) = \psi(x+L)$を満たしているとする．この方程式(2.2.12)の一般解は

$$
\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)
\tag{2.2.13}
$$

である．ただし，

$$
k_x := \sqrt{\frac{2mE_x}{\hbar^2}}
\tag{2.2.14}
$$

とおいた．ここで，条件$\psi(x) = \psi(x+L)$を考えれば，波数の取りうる値は

$$
k_x L = 2n_x\pi \quad (n_x \in \mathbb{N})
\tag{2.2.15}
$$

であることがわかる．この議論はk_x, k_y, k_zそれぞれに適用できるので，もとめる条件は

$$
\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)
\tag{2.2.16}
$$

である．ただし$n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}$である．

6. 粒子数について

$$
\overline{N} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \mu}\log\Xi
\tag{2.2.17}
$$

が成立していた．この右辺を計算すると

$$
\begin{aligned}
\overline{N} &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \mu}\sum_{\boldsymbol{k}}\log\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-\mu)}\right) \\
&= \frac{1}{\beta}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\beta e^{-\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-\mu)}} \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-\mu)} + 1}
\end{aligned}
\tag{2.2.18}
$$

となるので

$$f(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}) \coloneqq \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-\mu)}+1} \tag{2.2.19}$$

とおけることが示された.

7. 近似して計算してみると

$$\begin{aligned}
\overline{N} &\sim \sum_{\boldsymbol{k}} \exp\left[-\beta\left(\frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2+k_y^2+k_z^2)-\mu\right)\right] \\
&= e^{\beta\mu} \sum_{n_x,n_y,n_z} \exp\left[-\frac{2\pi^2\hbar^2\beta^2}{mL^2}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)\right] \\
&\sim e^{\beta\mu}\cdot\sqrt{\frac{mL^2}{2\pi^2\hbar^2\beta}}\left\{\int_0^\infty \mathrm{d}x\ \exp\left[-\frac{2\pi^2\hbar^2\beta^2}{mL^2}x^2\right]\right\}^3 \\
&= \frac{e^{\beta\mu}m^2L^4}{32\pi^{5/2}\hbar^4\beta^2}
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

となる．ここで，和の近似をするときに

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(an) \sim \frac{1}{a}\int_0^\infty dx\ f(x) \tag{2.2.21}$$

とした．なお，aは定数である．よって，これを整理すれば

$$\mu = \frac{1}{\beta}\log\left[\frac{32\pi^{5/2}\hbar^4\beta^2 N}{m^2L^4}\right] \tag{2.2.22}$$

となる.

8. エントロピーは

$$S = -\frac{\partial J}{\partial T}\ ,\quad J = -kT\log\Xi \tag{2.2.23}$$

でもとめることができる．これを計算していくと

$$\begin{aligned}
S &= k\log\Xi + kT\frac{\partial}{\partial T}\log\Xi \\
&= k\sum_{\boldsymbol{k}}\log\Big(1+e^{-\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-\mu)}\Big) - \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{\boldsymbol{k}}\log\Big(1+e^{-\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-\mu)}\Big)
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

となる．ここで，$|\beta\mu| \gg 1$より，$\beta\mu \ll 1$なので第1項は無視してよい．第2項の微分は

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{\boldsymbol{k}}\log\Big(1+e^{-\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-\mu)}\Big) = \sum_{\boldsymbol{k}}\frac{(\mu-\varepsilon_{\boldsymbol{k}})e^{-\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-\mu)}}{1+e^{-\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-\mu)}} \sim \mu\sum_{\boldsymbol{k}} f(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}) = \mu N \tag{2.2.25}$$

となるので，

$$S \sim -\frac{\mu}{T}N \tag{2.2.26}$$

が示された.

9. エントロピーSは極限では

$$S \to \gamma T \quad (T \to 0) \tag{2.2.27}$$

となっている．$\mu < 0$であることに気をつければ，図2.1の実線のようなグラフになる．

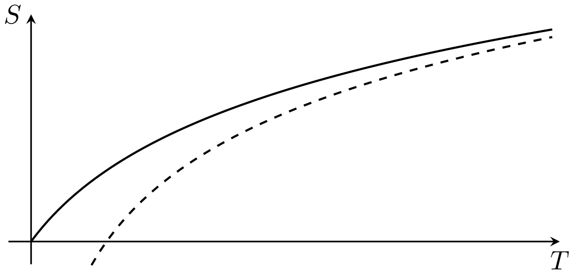

図2.1　エントロピーS

第3問

1. 電場と磁場の境界条件は

$$\boldsymbol{E}(a,z,t)\cdot\boldsymbol{t}=0 \tag{2.3.1}$$
$$\boldsymbol{B}(a,z,t)\cdot\boldsymbol{n}=0 \tag{2.3.2}$$

である．ここで，$\boldsymbol{t}$は接線ベクトルで$\boldsymbol{n}$は法線ベクトルである．ここで，円柱芯線の内部では電場と磁場がゼロになっていることに注意する．この境界条件を用いれば

$$E_\theta=0\ ,\quad B_r=0 \tag{2.3.3}$$

ということがわかる．

2. 式(1)の回転をとると

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{2.3.4}$$

となるので，式(2)を代入して，次の公式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E} \tag{2.3.5}$$

を用いれば

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{2.3.6}$$

となる．

3. マクスウェル方程式$(1)\sim(4)$は

$$ik\mathcal{E}(r)e^{i(kz-\omega t)}\boldsymbol{e}_\theta=i\omega\mathcal{B}(r)e^{i(kz-\omega t)}\boldsymbol{e}_\theta \tag{2.3.7}$$
$$-ik\mathcal{B}(r)e^{i(kz-\omega t)}\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{1}{r}\mathcal{B}(r)+\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial r}\right)e^{i(kz-\omega t)}\boldsymbol{e}_z=-i\mu\varepsilon\omega\mathcal{E}(r)e^{i(kz-\omega t)}\boldsymbol{e}_r \tag{2.3.8}$$
$$\mathcal{B}(r)+r\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial r}=0 \tag{2.3.9}$$
$$\mathcal{E}(r)+r\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial r}=0 \tag{2.3.10}$$

と書ける．(2.3.10)を解くと

$$\mathcal{E}(r)=\frac{A}{r} \tag{2.3.11}$$

である．ここで，Aは定数である．初期条件$\mathcal{E}(a)=E_0$を用いれば

$$\mathcal{E}(r)=E_0\frac{a}{r} \tag{2.3.12}$$

となる．

4. (2.3.7)と(2.3.8)より，

$$\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{2.3.13}$$

ということがわかり，これが位相速度である．

5. ポインティングベクトル$\boldsymbol{S}$は，

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{\mu}\mathcal{E}\mathcal{B}e^{2i(kz-\omega t)}(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\theta)=\frac{1}{\mu}\mathcal{E}\mathcal{B}e^{2i(kz-\omega t)}\boldsymbol{e}_z \tag{2.3.14}$$

である．ここで，(2.3.7)より

$$\mathcal{B}=\sqrt{\varepsilon\mu}\mathcal{E} \tag{2.3.15}$$

なので，これを代入すれば

$$\boldsymbol{S}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{E_0^2a^2}{r^2}e^{2i(kz-\omega t)}\boldsymbol{e}_z \tag{2.3.16}$$

となる．これは単位面積あたり，単位時間あたりのエネルギー流量なので，単位時間当たりのエネルギーは，面積で積分して

$$\int S(r)\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b r\mathrm{d}r\ S(r)=2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2a^2\log\frac{b}{a}e^{2i(kz-\omega t)} \tag{2.3.17}$$

となる．

6. 電場$\boldsymbol{E}$を積分すれば$V(z,t)$を得ることができる．よって，電場は(2.3.12)だったので

$$\begin{aligned}V(z,t)&=-\int_b^a E_r dr\\&=aE_0\log\frac{b}{a}e^{i(kz-\omega t)}\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

である．

7. アンペールの法則より

$$I(z,t)=\frac{1}{\mu}\oint_C\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{2.3.19}$$

が成立する．今回は，半径rの経路をとってみると，

$$I(z,t)=\frac{2\pi r}{\mu}\cdot\sqrt{\varepsilon\mu}E_\theta(r,z,t)=2\pi a\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0e^{i(kz-\omega t)} \tag{2.3.20}$$

となる．よって，特性インピーダンスは

$$Z_0=\frac{V(z,t)}{I(z,t)}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\log\frac{b}{a} \tag{2.3.21}$$

となる．

8. $|V(z,t)|$を計算してみると

$$\begin{aligned}|V(z,t)|&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}v(k)e^{ikz-i\omega(k_0)t-iAkt+iAk_0t}\mathrm{d}k\right|\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}v(k)e^{i(z-At)k}\mathrm{d}k\right|\\&=|\tilde{v}(z-At)|\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

となる．ここで

$$\tilde{v}(z):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}v(k)e^{ikz}\mathrm{d}k \tag{2.3.23}$$

は，$v(k)$のフーリエ変換である．よって，波形が変化せずに伝搬されることが示された．