早稲田大学 2019年 物理学専攻 院試 解答例

ミヤネ

最終更新：2023 年 8 月 11 日

目次

問題番号$\boxed{3}$ (力学)

(1)

$$l_0 \coloneqq y_0 + \frac{Mg}{k}. \tag{3.1}$$

(2)

$$\begin{cases} 車輪 \ : \ m\dfrac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} = N - mg + k(y_2 - y_1 - l_0) \\ 物体 \ : \ M\dfrac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}t^2} = -Mg - k(y_2 - y_1 - l_0) \end{cases}. \tag{3.2}$$

(3)

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -g - \frac{k}{M}(y - l_0) - \frac{\pi^2 a}{l^2}\cos\frac{\pi}{l}x. \tag{3.3}$$

(4) $0 < t < 2\pi/\omega$でのE.O.M.は

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 y - a\omega^2\cos\omega t \tag{3.4}$$

です．$2\pi/\omega$以降は強制振動の項が落ちるだけです．したがって，一般解は

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \dfrac{a\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos\omega t & (0 < t < 2\pi/\omega) \\ y_0 + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t & (2\pi/\omega < t) \end{cases} \tag{3.5}$$

です.

(5) 初期条件$y(0) = y_0, \dot{y}(0) = 0$を満たす$0 < t < 2\pi/\omega$での解は

$$y(t) = y_0 + \frac{a\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t) \tag{3.6}$$

であり，

$$\lim_{\omega\to\omega_0}\frac{\cos\omega t - \cos\omega_0 t}{\omega - \omega_0} = -t\sin\omega_0 t \tag{3.7}$$

であることに注意すれば

$$y(t) = \begin{cases} y_0 - \dfrac{a\omega_0}{2}t\sin\omega_0 t & (0 < t < 2\pi/\omega) \\ y_0 & (2\pi/\omega < t) \end{cases} \tag{3.8}$$

となります[*1].

(6) 略.

(7)

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2(y - y_0) - 2\beta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - a\omega^2\cos\omega t. \tag{3.9}$$

[*1] $t = 2\pi/\omega =: T$では$y(T) = y_0, \dot{y}(T) = 0$なので，この条件で接続すると$t > T$では定常解$y(t) \equiv y_0$となります.

(8) $t \to \infty$では

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -2\beta \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - a\omega^2 \cos \omega t \tag{3.10}$$

となっているので，一般解は

$$y(t) = A + Be^{-2\beta t} - \frac{2a\beta\omega}{\omega^2 + 4\beta^2} \sin \omega t + \frac{a\omega^2}{\omega^2 + 4\beta^2} \cos \omega t \tag{3.11}$$

です[*2].

(9)

$$y(t) = A + Be^{-2\beta t} - \frac{2a\beta\omega_0}{\omega_0^2 + 4\beta^2} \sin \omega_0 t + \frac{a\omega_0^2}{\omega_0^2 + 4\beta^2} \cos \omega_0 t. \tag{3.12}$$

グラフは，$t \gg 1$なので（次元あってないのでこの書き方はよくないですが），指数関数の項を落としてただの三角関数.

[*2] やり方はいろいろあるかと思いますが，$v(t) \coloneqq \dot{y}(t)$とおいて考えてみるのがよいかと思います.

問題番号$\boxed{4}$ (電磁気学)

(1) $z=0$では，x方向の成分が同じで

$$E_0 - F_x e^{ik'_x x} = T_x e^{ik''_x x} \tag{4.1}$$

なので[*3]，任意の$x \in \mathbb{R}$でこの等式が成立するためには$k'_x = k''_x = 0$です．また，その場合，$E_x - F_x = T_x$.

(2) $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}'$は

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}' = k'_z F_z e^{ik'_z - i\omega t} = 0 \tag{4.2}$$

なので，$F_z = 0$です．$T_z = 0$も同様．$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}'' = 0$を計算するだけです．

(3) $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \partial\boldsymbol{B}/\partial t = 0$より，$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$といった形にかけるなら

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} \tag{4.3}$$

です．したがって，入射光については，$k \to -k$として

$$B_0 = -\frac{k}{\omega}E_0 \tag{4.4}$$

となります．反射光と屈折光も同様に考えれば

$$B'_0 = -\frac{k'_z}{\omega}F_x,\ B''_0 = -\frac{k''_z}{\omega}T_x \tag{4.5}$$

です．

(4) 磁場の界面方向について

$$\frac{1}{\mu_0}B_0 + \frac{1}{\mu_0}B'_0 = \frac{1}{\mu_0}B''_0 \tag{4.6}$$

なので

$$kE_0 + k'_z F'_0 = k''_z T''_0 \tag{4.7}$$

です．

(5) $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \partial\boldsymbol{B}/\partial t = 0$の回転をとって，ベクトル解析の公式を用いれば

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \varepsilon\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E} = 0 \tag{4.8}$$

です．

(6) (4.8)にそれぞれの解を入れましょう．

(7)

$$\left|\frac{F_x}{E_0}\right|^2 = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2. \tag{4.9}$$

(8) 反射率は

$$\left|\frac{F_x}{E_0}\right|^2 = \left(\frac{1-i\sqrt{|\varepsilon|/\varepsilon_0}}{1+i\sqrt{|\varepsilon|/\varepsilon_0}}\right)^2 \tag{4.10}$$

です．また，$E''_z = T_x e^{|k''_z|z}e^{-i\omega t}$となるので，$z\to-\infty$で屈折光は$E''_z \to 0$となります．

[*3] $e^{-i\omega t}$は共通なので落としてます．

問題番号$\boxed{5}$ (量子力学)

(1) $\{a, a^\dagger\} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = 1$.

(2) $n = |1\rangle\langle 1|$なので，$H_1 = E_0(2n - \{a, a^\dagger\})$.

(3) $\langle\psi|n|\psi\rangle = \beta$.

(4) $x^2 = 1/4$なので，$\langle\psi|x^2|\psi\rangle = (|\alpha|^2 + |\beta|^2)/4$.

(5) 固有値は$\pm E_0$で，固有状態は$|\pm\rangle = |0\rangle \pm |1\rangle$です．

(6) $H_2 = E_0^2$に気をつければ

$$
\begin{aligned}
U_2(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{iE_0 t}{\hbar}\right)^{2n} - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{iE_0 t}{\hbar}\right)^{2n+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(E_0 t/\hbar) & -i\sin(E_0 t/\hbar) \\ -i\sin(E_0 t/\hbar) & \cos(E_0 t/\hbar) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

です．

(7)

$$
|\phi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(E_0 t/\hbar) & -i\sin(E_0 t/\hbar) \\ -i\sin(E_0 t/\hbar) & \cos(E_0 t/\hbar) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(E_0 t/\hbar) \\ -i\sin(E_0 t/\hbar) \end{pmatrix}. \tag{5.2}
$$

(8) $E_0^{(1)} = \left\langle 0^{(0)} \middle| H_2 \middle| 0^{(0)} \right\rangle = 0$.

(9)

$$
E_0^{(2)} = \frac{|\left\langle 0^{(1)} \middle| H_2 \middle| 0^{(0)} \right\rangle|^2}{E_0 - E_1} = -\frac{1}{2} E_0. \tag{5.3}
$$

(10) 固有方程式は

$$
\begin{vmatrix} \lambda + 1 & -\gamma \\ -\gamma & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{5.4}
$$

なので，$E_0 = -\sqrt{1+\gamma^2} E_0$が基底状態のエネルギーの厳密解です．$\gamma \ll 1$とすれば

$$
E_0 \sim -E_0 - \frac{\gamma^2}{2} E_0 = E_0^{(0)} + \gamma^2 E_0^{(2)} \tag{5.5}
$$

なので，よく近似ができています．

問題番号$\boxed{6}$ (統計力学)

(1) 粒子iのエネルギー量子数をn_iとすると，

$$\varepsilon_i = \hbar\omega\left(n_i + \frac{1}{2}\right) \tag{6.1}$$

であり，$M = \sum n_i$です．したがって，$E = \hbar\omega(M + N/2)$より

$$M = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2} \tag{6.2}$$

です．

(2)

$$W = \frac{M!}{N!(M-N)!}. \tag{6.3}$$

(3) $M/N = E/N\hbar\omega - 1/2$を代入すれば

$$S = k_B N\left[\frac{2E}{N\hbar\omega}\log\frac{2E + N\hbar\omega}{2E - N\hbar\omega} + \frac{1}{2}\log\frac{4E^2 - N^2\hbar^2\omega^2}{4N^2\hbar^2\omega^2}\right] \tag{6.4}$$

です．

(4)

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}E} = \frac{k_B}{\hbar\omega}\log\frac{2E + N\hbar\omega}{2E - N\hbar\omega}. \tag{6.5}$$

(5) $\langle E\rangle$が満たす式は

$$\frac{k_B}{\hbar\omega}\log\frac{2\langle E\rangle + N\hbar\omega}{2\langle E\rangle - N\hbar\omega} = \frac{1}{T} \tag{6.6}$$

なので，

$$\langle E\rangle = \frac{N\hbar\omega}{2}\coth(\hbar\omega/2k_BT) \tag{6.7}$$

です．

(6)

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}. \tag{6.8}$$

(7)

$$\langle E\rangle = \frac{N\hbar\omega}{2}\coth(\beta\hbar\omega/2). \tag{6.9}$$