

ゲージ理論と幾何

宮根 一樹

最終更新日：2024 年 3 月 16 日

目次

1	多様体とその周辺	2
1.1	多様体	2

1 多様体とその周辺

1.1 多様体

まずは多様体の定義から。

定義 1.1 (多様体). ハウスドルフ空間 M に対して、 M が開集合 U_i によって

$$U = \bigcup_i U_i \quad (1.1)$$

で表され、各 U_i に対して、 U_i から n 次元ベクトル空間 \mathbb{R}^n への全単射 \mathbf{x}_{U_i} があって

- 像 $\mathbf{x}_{U_i}(U)$ は \mathbb{R}^n の開集合で、 \mathbf{x}_{U_i} は U_i から $\mathbf{x}_{U_i}(U)$ への同相写像。
- $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ならば、写像

$$\mathbf{x}_{U_j} \circ \mathbf{x}_{U_i}^{-1} : \mathbf{x}_{U_i}(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbf{x}_{U_j}(U_i \cap U_j) \quad (1.2)$$

が全単射で C^∞ かつ逆写像も同様。

を満たすとき、

- 組 $\{(U_i, \mathbf{x}_{U_i})\}$ の全体は M に C^∞ 構造を与え、
- M を C^∞ 多様体という。

例 1.1 (直積多様体). m 次元 C^∞ 多様体 M 、 n 次元 C^∞ 多様体 N の C^∞ 構造が $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ で定められているとき、

$$(\phi_\alpha \times \psi_\beta)(x, y) = (\phi_\alpha(x), \psi_\beta(y)) \quad (1.3)$$

で定義しておけば、 $\{(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{(\alpha, \beta) \in A \times B}$ は $M \times N$ 上に C^∞ 構造が定められて、 $M \times N$ は C^∞ 多様体になる。これは直積多様体。

例 1.2 (n 次元球面). \mathbb{R}^{n+1} に対して

$$S^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum (x^i)^2 = 1\} \quad (1.4)$$

において、各 $i = 1, \dots, n+1$ に対して

$$U_i^\pm \equiv \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n \mid x^i \gtrless 0\} \quad (1.5)$$

とにおいて、 $x_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$x_i^\pm(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^n \quad (1.6)$$

とする^{*1}と、 x_i^\pm の像は \mathbb{R}^n の開球 (内部を含む) である。これらは全単射で、 $\{(U_i^\pm, x_i^\pm)\}_{i=1, \dots, n}$ が S^n 上に C^∞ 構造を定めるため、 S^n は多様体。

^{*1} ハット ^ はその成分がないことを表す。

例 1.3 (射影空間). $\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C}$ の元

$$\mathbf{x} = (x^0, x^1, \dots, x^n), \mathbf{y} = (y^0, y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{K}^{n+1} \quad (1.7)$$

に対して、ある $\alpha \in \mathbb{K}$ があって $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$ なら $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$ だとする。するとこれは同値。 $[\mathbf{x}]$ は同値類で、それら全体の集合を $P^n(\mathbb{K})$ とすれば、 $P^n(\mathbb{K})$ は射影空間。

これが C^∞ 多様体であることを見るために、 C^∞ 構造を構成する。まず、

$$\pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \ni \mathbf{x} \rightarrow [\mathbf{x}] \in P^n(\mathbb{K}) \quad (1.8)$$

で、 $P^n(\mathbb{K})$ の位相を \mathbb{K}^{n+1} の位相から定義する。したがって、 $P^n(\mathbb{K})$ の開集合が考えられて、それを $U_i = \{[(x^0, x^1, \dots, x^n)] \in P^n(\mathbb{K}) | x^i \neq 0\}$ として、写像 $\mathbf{x}_i : U_i \rightarrow \mathbb{K}^n$ を

$$\mathbf{x}_i([(x^0, x^1, \dots, x^n)]) = \left(\frac{x^0}{x^i}, \dots, \frac{\widehat{x^i}}{x^i}, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right) \quad (1.9)$$

とする。すると、 $\{(U_i, \mathbf{x}_i)\}_{i=1, \dots, n+1}$ は C^∞ 構造を定める。

最後に、この写像が well-defined なことを確認する。 $P^n(\mathbb{K})$ の 2 つの元

$$[(x^0, \dots, x^n)], [(y^0, \dots, y^n)] \quad (1.10)$$

が等しいとする。したがって、ある $\alpha \in \mathbb{K}$ が存在して $y^i = \alpha x^i$ なので、このことを用いれば

$$\mathbf{x}^i([(y^0, \dots, y^n)]) = \left(\frac{y^0}{y^i}, \dots, \frac{\widehat{y^i}}{y^i}, \frac{y^{n+1}}{y^i} \right) = \left(\frac{x^0}{x^i}, \dots, \frac{\widehat{x^i}}{x^i}, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right) = \mathbf{x}^i([(x^0, \dots, x^n)]) \quad (1.11)$$

であり、well-defined。

例 1.4. C^∞ 多様体の開集合 U もまた C^∞ 多様体。 C^∞ 構造は、元の多様体の構造と U の共通部分をとればよい。また、閉集合は多様体とは限らない。

定義 1.2 (座標近傍と局所座標系). C^∞ 多様体 M の開集合 W 、写像 $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ が次の条件を満たすとき、 (W, ψ) を座標近傍という：

- $\psi : W \rightarrow \psi(W)$ は同相写像。
- C^∞ 構造を $\{(U, \mathbf{x}_U)\}$ とするとき、 $U \cap W \neq \emptyset$ なる全ての U に対して、写像

$$\mathbf{x}_U \circ \psi^{-1} : \psi(W \cap U) \rightarrow \mathbf{x}_U(W \cap U) \quad (1.12)$$

とその逆写像は \mathbb{R}^n の意味で C^∞ 写像。

また、 $p \in U$ に対して、 \mathbb{R}^n の点 $\mathbf{x}_U(p)$ を

$$\mathbf{x}_U(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \quad (1.13)$$

と表すことがある。このとき、 x^1, \dots, x^n を局所座標系という。

注 1.1. C^∞ 構造 $\{(U, \mathbf{x}_U)\}$ も定義から座標近傍。

定義 1.3 (C^∞ 写像と微分同相). M, N は C^∞ 多様体、写像 $f : M \rightarrow N$ を考える。 f が次の条件を満たすとき、 C^∞ 写像という：

M, N の任意の座標近傍 $(U, \mathbf{x}_U), (V, \mathbf{y}_V)$ に対して、 $V \cap f(U) \neq \emptyset$ ならば、写像

$$\mathbf{y}_V \circ f \circ \mathbf{x}_U^{-1} : \mathbf{x}_U(U) \rightarrow \mathbf{y}_V(V) \quad (1.14)$$

は、 \mathbb{R}^m から \mathbb{R}^n への C^∞ 写像。

また、 $f : M \rightarrow N$ が全単射で上の意味で C^∞ 写像であり、逆写像 f^{-1} も同様ならば、 f は M と N の間の微分同相という。

例 1.5. 3次元球面 S^3 と2次の特殊ユニタリ一群

$$SU(2) = \{U \in GL(2, \mathbb{C}) | UU^\dagger = 1, \det U = 1\} \quad (1.15)$$

は微分同相。

証明. ちょいまち。 ■

参考文献

- [1] 茂木 勇 and 伊藤 光弘. 復刊 微分幾何学とゲージ理論. 共立出版, 復刊版 edition, 2001.
- [2] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology, and Physics*. Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics Publishing, Bristol ; Philadelphia, 2nd ed edition, 2003.