Anomalies on orbifolds

Nima Arkani-Hamed, Andrew G. Cohen, Howard Georgi.

Physics Letters B 516 (2001) 395-402, arxiv:hep-th/0103135.

安倍研 M1 宮根一樹

2024 5/7 (火)

このスライドの引用の番号と論文の引用番号はあってません。

読んだ動機

この春休み、QFT や KK 理論をメインに勉強した。

くりこみ、有効作用、(非可換) ゲージ場の (経路積分) 量子化など $\cdots\cdots$。

その中で、アノマリーを勉強してみたいなと思いました。

一方で、この研究室でも高次元の理論のアノマリーは調べてみたかったけど、良く分かっていなかった部分もある模様。

そこで、高次元のアノマリーに関連しているこの論文を読もうと思った。

Anomalies on orbifolds

Nima Arkani-Hamed (Harvard U.), Andrew G. Cohen (Harvard U.), Howard Georgi (Harvard U.)
Mar, 2001

11 pages
Published in: *Phys.Lett.B* 516 (2001) 395-402
e-Print: hep-th/0103135 [hep-th]
DOI: 10.1016/S0370-2693(01)00946-7
Report number: HUTP-01-A013, BUHEP-01-4, LBNL-47614, UCB-PTH-01-09
View in: AMS MathSciNet, OSTI Information Bridge Server, ADS Abstract Service

pdf cite claim reference search 164 citations

イントロダクション

アノマリー

4 次元の場合のカイラルアノマリーを確認する。

アノマリー

4 次元の場合のカイラルアノマリーを確認する。

ゲージ場 A_μ と結合しているフェルミオン ψ を考える

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

カイラル変換 $\psi \to e^{i\gamma^5\alpha(x)}\psi$ に対するネーターカレントの方程式は

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi, \quad j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$$

しかし、この結果は古典論の結果

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi) = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi$$

しかし、この結果は古典論の結果

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi) = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi$$

量子論の意味では、以下のファインマンダイアグラムの計算をすることと等価
(ファインマンダイアグラムを 2 つほど)

左側のダイアグラムの振幅を計算して位置基底に戻すと

$$\partial_\mu \langle \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \rangle = 2im \langle \bar{\psi}\gamma^5\psi \rangle + Q, \quad Q = \frac{e^2}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \langle F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \rangle$$

この余分な Q は、ゲージ不変性を保って発散を正則化するときに生じる項

この Q をカイラルアノマリーという。

理論にアノマリーがあると、通常の量子論の定式化ができなくなることが知られている [2]。
よって、

アノマリーが相殺されるように理論を作りたい

議論の流れ

議論の流れ

- 余剰空間方向の場の境界条件を設定、モード展開
- それを元のラグランジアンに代入 $\longrightarrow$ カレントを計算
- 有効理論のアノマリーを議論

本論

4次元のアノマリー

最初のレビューの部分で良く分からない記述がありました。

$$\partial_\mu j_5^\mu + 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi = Q \tag{2.2}$$

with Q given by (1.2).

It is worthwhile to consider the expectation value of this equation in the presence of the external gauge potential. Note that a non-zero expectation value for the divergence of the current would require a pole at $p^2 = 0$ in the expectation value of the current itself. For a massive fermion there is no state to produce such a pole, and consequently the expectation value of the divergence of the axial current must vanish. The operator equation (2.2) then implies

$$2im\langle\bar{\psi}\gamma^5\psi\rangle = Q. \tag{2.3}$$

複数の場 ψ_i, A^μ_{ij} とチャージ q_i がある場合は

$$\partial_\mu j^\mu_5 + 2i\bar{\psi} M\gamma^5\psi = \frac{1}{2}Q,\ Q = \frac{1}{16\pi^2}\,\mathrm{tr}\, qF\tilde{F}$$

となる。

先行研究 [3] によると、無質量モードのみが真空期待値の計算に寄与してきて

$$\langle \partial_\mu j^\mu_5 \rangle = \frac{1}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\left[P_0 q P_0 F P_0 \tilde{F}\right]$$

セットアップ

(ここからは本文と記法を合わせます。)

時空は 5 次元 $x^C = (x^\mu, x_4)$

作用

$$S = \int \mathrm{d}^4x \int_0^L \mathrm{d}x_4\, \bar{\psi}(i\not{D} - \gamma_4 D_4 - m(x_4))\psi$$

$$\not{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu,\ D_C = \partial_C - iA_C,\ \gamma_4 \equiv -i\gamma^5$$

境界条件: 周期境界条件 $x_4 \sim x_4 + 2L$ とオービフォールド

$$\psi(x, x_4) = \gamma^5\psi(x, -x_4)$$

$$A_\mu(x, x_4) = A_\mu(x, -x_4)$$

$$A_4(x, x_4) = -A_4(x, -x_4)$$

$$\Rightarrow \quad m(x_4) = m(2L + x_4) = -m(-x_4)$$

また、$\psi(x, x_4)$ をカイラリティーで分類

$$\psi = \psi_+ + \psi_-,\ \gamma^5 \psi_\pm = \pm\psi_\pm$$

ゲージ変換: ローカルな $U(1)$

$$\psi(x, x_4) \to e^{i\phi(x, x_4)}\psi(x, x_4)$$

$$A_C(x, x_4) \to A_C(x, x_4) - i\partial_C \phi(x, x_4)$$

$$\Rightarrow \quad \phi(x, x_4) = \phi(x, x_4 + 2L) = \phi(x, -x_4)$$

アノマリーの計算

以下、$A_4 = 0$ とゲージ固定する。

KK モード展開は次の通り

$$\psi_\pm(x, x_4) = \sum_M \psi_{M\pm}(x)\xi^\pm_M(x_4)$$

ただし、

$$\left[-i\partial_4 + m(x_4)\right]\xi^+_M(x_4) = M\xi^+_M \quad (M \geq 0)$$

$$\left[i\partial_4 + m(x_4)\right]\xi^-_M(x_4) = M\xi^-_M(x_4) \quad (M > 0)$$

(i 忘れはおそらくタイポ?)

このモード展開の基底は完全性を満たす。内積は積分。

$$\sum_M \xi^\pm_M(x)\xi^\pm_M(y) = \delta(x-y)$$

KK モード展開

$$\psi_\pm(x, x_4) = \sum_M \psi_{M\pm}(x)\xi_M^\pm(x_4)$$

- 元の作用に代入
- x_4 の方向を 0 から L で積分

すると

$$\begin{aligned} S = \int \mathrm{d}^4x \, \Bigg[& \sum_M \bar{\psi}_M(x)(i\partial\!\!\!/ - M)\psi_M(x) \\ & - \sum_{M,M'} \bar{\psi}_{M'+}(x) A\!\!\!/^{+}_{M'M}(x)\psi_{M+}(x) \\ & - \sum_{M,M'} \bar{\psi}_{M'-}(x) A\!\!\!/^{-}_{M'M}\psi_{M-}(x) \Bigg] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S = \int \mathrm{d}^4 x \ \Bigg[& \sum_{M} \bar{\psi}_M(x)(i\not{\partial} - M)\psi_M(x) \\
& - \sum_{M,M'} \bar{\psi}_{M'+}(x) \not{A}^{+}_{M'M}(x) \psi_{M+}(x) \\
& - \sum_{M,M'} \bar{\psi}_{M'-}(x) \not{A}^{-}_{M'M} \psi_{M-}(x) \Bigg]
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\psi_M(x) \equiv \psi_{M+}(x) + \psi_{M-}(x)
$$

$$
A^{\mu\pm}_{M'M}(x) \equiv \int_0^L \mathrm{d}x_4 \, \xi^{\pm}_{M'}(x_4) \xi^{\pm}_M(x_4) A^{\mu}(x, x_4)
$$

このときのカレントは、$J^C = \bar{\psi}(x, x_4)\gamma^C\psi(x, x_4)$ を計算すれば

$$J^\mu(x, x^4) = \sum_{M,M'} \Big[\xi^+_{M'}(x_4)\xi^+_M(x_4)\bar{\psi}_{M'+}(x)\gamma^\mu\psi_{M+}(x) + \xi^-_{M'}(x_4)\xi^-_M(x_4)\bar{\psi}_{M'-}(x)\gamma^\mu\psi_{M-}(x)\Big]$$

$$J^4(x, x_4) = \sum_{M,M'} \Big[\xi^+_{M'}(x_4)\xi^-_M(x_4)\bar{\psi}_{M'+}(x)\gamma^5\psi_{M-}(x) + \xi^-_{M'}(x_4)\xi^+_M(x_4)\bar{\psi}_{M'-}(x)i\gamma^5\psi_{M+}(x)\Big]$$

KK モード M を行列の添え字とみなす。

$$[\boldsymbol{\Psi}(x)]_M \equiv \psi_M(x),\ [\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mu\pm}]_{MM'} \equiv A^{\mu\pm}_{MM'},\ [\boldsymbol{\mathcal{M}}]_{MM'} = M\delta_{MM'}$$

この記法で作用を書き直すと

$$S = \int \mathrm{d}^4x\ \bar{\boldsymbol{\Psi}}(x)(i\partial\!\!\!/ - \boldsymbol{\mathcal{A}}\!\!\!/ - \boldsymbol{\mathcal{M}})\boldsymbol{\Psi}(x)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\!\!\!/ = \boldsymbol{\mathcal{A}}\!\!\!/^{+} P_+ + \boldsymbol{\mathcal{A}}\!\!\!/^{-} P_-$$

ここで、$P_\pm$ は射影

$$P_\pm = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$$

この記法でカレントを書きなおす。

そのために

$$[\boldsymbol{\Xi}^{\pm}(x_4)]_{M'M} \equiv \xi^{\pm}_{M'}\xi^{\pm}_{M}(x_4),\ [\boldsymbol{\Omega}^{\pm}(x_4)]_{M'M} \equiv \xi^{\mp}_{M'}(x_4)\xi^{\pm}_{M}(x_4)$$

$$\boldsymbol{\Xi}(x_4) = \boldsymbol{\Xi}^{+}P_{+} + \boldsymbol{\Xi}^{-}P_{-},\ \boldsymbol{\Omega}(x_4) = \boldsymbol{\Omega}^{+}P_{+} + \boldsymbol{\Omega}^{-}P_{-}$$

とおくと

$$J^{\mu}(x, x_4) = \bar{\Psi}(x)\gamma^{\mu}\Psi(x)$$

$$J^{4}(x, x^4) = \bar{\Psi}(x)i\gamma^{5}\boldsymbol{\Omega}(x_4)\Psi(x)$$

このカレントは古典論のレベルでは保存する

$$\partial_{\mu}J^{\mu}(x, x_4) + \partial_4 J^{4}(x, x_4) = 0$$

4 次元の有効作用

$$\boldsymbol{S = \int \mathrm{d}^4 x\, \bar{\Psi}(x)(i\not{\partial} - \not{\mathcal{A}} - \mathcal{M})\Psi(x)}$$

は、ゲージ対称性を持っている

そのカイラルアノマリー $\boldsymbol{Q}$ は

$$\boldsymbol{Q \equiv \frac{1}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\left[\Xi^+(x_4)\mathcal{F}^+(x)\tilde{\mathcal{F}}^+(x) - \Xi^-(x_4)\mathcal{F}^-(x)\tilde{\mathcal{F}}^-(x)\right]}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}^{\mu\nu\pm}(x) \equiv \partial^\mu \mathcal{A}^{\nu\pm}(x) - \partial^\nu \mathcal{A}^{\mu\pm}(x)}$$

- トレースは KK モードの添え字について
- どうやら、4 次元有効理論でのアノマリーは

$$\boldsymbol{\int \mathrm{d}x_4\, Q(x, x_4)}$$

としているよう。

ここで、次の関係が成立している

$$\Xi^{\pm}(x_4)\mathcal{A}^{\mu\pm}(x) = A^{\mu}(x, x_4)\Xi^{\pm}(x_4)$$

これを用いれば、アノマリーは

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\left[\Xi^{+}(x_4)\mathcal{F}^{+}(x)\tilde{\mathcal{F}}^{+}(x) - \Xi^{-}(x_4)\mathcal{F}^{-}(x)\tilde{\mathcal{F}}^{-}(x)\right] \\
&\qquad = \frac{1}{32\pi^2}F(x, x_4)\tilde{F}(x, x_4)\,\mathrm{tr}\big(\Xi^{+}(x_4) - \Xi^{-}(x_4)\big) \\
&\qquad = \frac{1}{32\pi^2}F(x, x_4)\tilde{F}(x, x_4)\left[\sum_{M\geq 0}\xi_M^{+}(x_4)^2 - \sum_{M>0}\xi_M^{-}(x_4)^2\right]
\end{aligned}$$

あとは青色の部分を計算すればよい

そのために、次の量を定義する

$$\boldsymbol{\Delta}(x_4, y_4) \equiv \sum_{M\geq 0} \xi_M^+(x_4)\xi_M^+(y_4) - \sum_{M>0} \xi_M^-(x_4)\xi_M^-(y_4)$$

この量を計算すると (もう少し加筆)

$$\boldsymbol{\Delta}(x_4, -y_4) = 2\sum_N \delta(x_4 - y_4 - 2NL) \quad \therefore\ \boldsymbol{\Delta}(x_4, x_4) = \sum_N \delta(x_4 - NL)$$

したがって、

$$\mathcal{Q} = \underbrace{\frac{1}{32\pi^2} F(x, x_4)\tilde{F}(x, x_4)}_{=\mathcal{Q}} \sum_N \delta(x_4 - NL)$$

よって、

$$\partial_\mu J^\mu(x, x_4) + \partial_4 J^4(x, x_4) = \frac{1}{2}\left[\delta(x_4) + \delta(x_4 - L)\right]\mathcal{Q}$$

カレントの式

$$\partial_\mu J^\mu(x, x_4) + \partial_4 J^4(x, x_4) = \frac{1}{2}\left[\delta(x_4) + \delta(x_4 - L)\right]\mathcal{Q}$$

- x_4 の固定点の上にアノマリーが局在化しており、バルクには生じない。
  また、KK モードの構造 (波動関数とか質量とか) などにも依存しない。
- 4 次元のアノマリーが相殺されれば、5 次元のアノマリーが相殺される。

一方で、先行研究 [3] の結果を用いると、無質量な波動関数は ξ_0^+ なので、

$$\langle \partial_\mu j^\mu(x, x_4) \rangle = \frac{1}{2} Q_0 \xi_0^+(x_4)$$

ここで、Q_0 は Q で $A_\mu(x, x_4)$ を $A_\mu(x, 0) = A_{\mu,00}(x)$ としたもの。

アノマリー相殺

アノマリーがキャンセルされる具体的な例として、
ゼロモードが ψ_0, χ_0 となるようなフェルミオン Ψ, X を考える。

- $\gamma^5 \Psi = +\Psi$, $\gamma^5 X = -X$
- 質量は $m_\Psi(x_4) = -m_X = m = \text{constant}$

ゼロモードもカイラルなので、もちろんアノマリーが相殺される。

まとめ

まとめ

疑問や展望など

付録

A. 目次

A. 目次

Kaluza-Klein 理論とアノマリー

高次元の時空を考え、余剰空間に周期条件を与えること (コンパクト化) によって、4 次元有効理論を作る方法があり、それを Kaluza-Klein 理論という。

特に、今回は 5 次元の時空 $\boldsymbol{x^M = (x^0, x^1, \cdots, x^4)}$ を考え、$\boldsymbol{x^4}$ の方向に $\boldsymbol{x^4 \sim x^4 + 2L}$ の周期境界条件を課してコンパクト化する。

Kaluza-Klein 理論とアノマリー

高次元の時空を考え、余剰空間に周期条件を与えること (コンパクト化) によって、4 次元有効理論を作る方法があり、それを Kaluza-Klein 理論という。

特に、今回は 5 次元の時空 $\boldsymbol{x^M = (x^0, x^1, \cdots, x^4)}$ を考え、$\boldsymbol{x^4}$ の方向に $\boldsymbol{x^4 \sim x^4 + 2L}$ の周期境界条件を課してコンパクト化する。

5 次元の理論でのアノマリー相殺
と
4 次元有効理論でのアノマリー相殺
の対応

を調べたい。

一方で、カイラルアノマリーについては次のことが分かっている：

- 奇数次元の理論はクリフォード代数の性質から非カイラル

  $\longrightarrow$ カイラルアノマリーは必ず相殺される

- 非カイラルな理論を S^1 コンパクト化しても、4 次元有効理論は非カイラル

一方で、カイラルアノマリーについては次のことが分かっている：

- 奇数次元の理論はクリフォード代数の性質から非カイラル

  $\longrightarrow$ カイラルアノマリーは必ず相殺される

- 非カイラルな理論を S^1 コンパクト化しても、4 次元有効理論は非カイラル

よって、5 次元の理論をコンパクト化するだけでは、4 次元のカイラルアノマリーが消えているのは明らか。

そこで・・・

オービフォールド S^1/Z_2

今回は、さらにオービフォールドという境界条件を余剰空間に課す。

オービフォールド S^1/Z_2

今回は、さらにオービフォールドという境界条件を余剰空間に課す。

例えば、スカラー場の理論を考える

$$S = \int \mathrm{d}^5x \left(\frac{1}{2}\partial^M \Phi \partial_M \Phi - \frac{1}{2} m(x^4)^2 \Phi^2 \right)$$

この理論に、$\Phi(x, x^4) = \Phi(x, x^4 + 2L)$ という境界条件に加えて

$$\Phi(x, x^4) = \eta \Phi(x, -x^4) \, , \; \eta = \pm 1$$

という境界条件を課す。

まずは、周期境界条件 $\boldsymbol{\Phi(x, x^4) = \Phi(x, x^4 + 2L)}$ から

$$\boldsymbol{\Phi(x, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x) \exp\left[i\frac{n\pi}{L}x^4\right]}$$

とフーリエ展開できる。

さらに、オービフォールドの境界条件 $\boldsymbol{\Phi(x, x^4) = -\Phi(x, -x^4)}$ を課すと $\boldsymbol{\phi_n(x) + \phi_{-n}(x) = 0}$ という条件になる

この条件により、$\boldsymbol{n = 0}$ のモード $\boldsymbol{\phi_0(x)}$ は消えることがわかる

まずは、周期境界条件 $\Phi(x, x^4) = \Phi(x, x^4 + 2L)$ から

$$\Phi(x, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x) \exp\left[i\frac{n\pi}{L}x^4\right]$$

とフーリエ展開できる。

さらに、オービフォールドの境界条件 $\Phi(x, x^4) = -\Phi(x, -x^4)$ を課すと
$\phi_n(x) + \phi_{-n}(x) = 0$ という条件になる

この条件により、$n = 0$ のモード $\phi_0(x)$ は消えることがわかる

境界条件をうまく選べば、ゼロモードの場を消したり残したりできるため
4 次元の有効理論を作るときに嬉しい

ので、調べられている。

本論文の流れ・まとめ

同様のことが $\boldsymbol{x^4 = L}$ の点でも起こることがわかる

$\boldsymbol{x = 0, L}$ の点 (固定点) では、ゼロモードがカイラルになる

$\longrightarrow$ アノマリーが 5 次元の理論でも現れる可能性がある

$\longrightarrow$4 次元有効理論でのアノマリーとの関係は?

本論文の流れ・まとめ

同様のことが $\boldsymbol{x^4 = L}$ の点でも起こることがわかる

$\boldsymbol{x = 0, L}$ の点 (固定点) では、ゼロモードがカイラルになる

$\longrightarrow$ アノマリーが 5 次元の理論でも現れる可能性がある

$\longrightarrow$4 次元有効理論でのアノマリーとの関係は?

<u>議論の流れ</u>

- 余剰空間方向の場の境界条件を設定、モード展開
- それを元のラグランジアンに代入 $\longrightarrow$ カレントを計算
- 有効理論のアノマリーを議論

E. 4 次元のカイラルアノマリーの計算

QED のカイラルアノマリーを計算する。

参考文献

[1] N. Arkani-Hamed, A. G. Cohen, and H. Georgi, *Anomalies on Orbifolds,* Physics Letters B **516** (2001) 395–402, arxiv:hep-th/0103135.

[2] 藤川和男, **経路積分と対称性の量子的破れ**. 岩波書店, 東京, 2001.

[3] S. Coleman and B. Grossman, *'t Hooft's consistency condition as a consequence of analyticity and unitarity,* Nuclear Physics B **203** (1982) 205–220.

[4] 藤川和男, **ゲージ場の理論**. 岩波書店, 東京, 2001.

[5] K.-S. Choi and C.-ŭ. Kim, *Quarks and Leptons from Orbifolded Superstring*, no. volume 954 in Lecture Notes in Physics. Springer, Cham, second edition ed., 2020.