２００３年度　大学院理工学研究科修士課程入学試験

物理学及応用物理学専攻

部　　門：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

受験番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

氏　　名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

専門科目表紙

◎解答用紙は8枚綴りが1組あります。試験開始直後に確認して下さい。
◎この問題表紙には必ず部門名・受験番号・氏名を記入して下さい。

注意事項

〔選択方式〕

(a) 下記の３科目（６題）の中から任意の４題を選択して解答すること。
(b) 解答した４題については、下記の問題番号を○で囲むこと。

科目	問題番号	
数学一般	1	2
力学および電磁気学	3	4
量子力学および熱・統計力学	5	6

〔解答方法〕

(1) 解答は別紙の解答用紙の表の面に記入すること。裏面を使用しないこと。
(2) 解答用紙は８枚綴りになっている。
(3) １枚の解答用紙に２問以上を解答しないこと。１問の解答が解答用紙２枚以上にわたるときには、その旨を明記すること。
(4) 選択した４題以外のものを解答しないこと。
(5) 受験番号・氏名・部門名をすべての解答用紙に記入すること。

２００３年度　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：数学一般（その１）

[問題1] 行列（matrix）Aを

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

とし、$B = A^T A$とする。ただし、A^TはAの転置行列（transposed matrix）である。次の設問に答えよ。

（１）Bの固有値（eigenvalue）λ_k　$(k = 1, 2, 3)$と、それに対応する長さ１の固有ベクトル（unit eigenvector）u_k　$(k = 1, 2, 3)$（縦ベクトル:column vector）を求めよ（obtain）。

（２）u_kを第k列（the kth column）とする行列（matrix）をUとし、λ_kを対角要素（diagonal element）とする対角行列（diagonal matrix）をΛとするとき、$B = U\Lambda U^T$と表わせることを、計算して確認せよ（verify explicitly）。

２００３年度　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：数学一般（その２）

[問題２] 次の問に答えよ。

（１）未知ベクトル (unknown vector) $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ が次の微分方程式 (differential equation) を満たすとする：

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{B} - \mathbf{r}(t) + \mathbf{f}(t) \, .$$

ただし、ベクトル (vectors) $\mathbf{B}$ と $\mathbf{f}(t)$ は次式で与えられる (given by)：

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\omega\text{は正定数 (positive constant)}).$$

$y(t)$ と $z(t)$ を消去 (eliminate) して $x(t)$ の満たす微分方程式 (differential equation for $x(t)$) を導き (derive)、周期解 (periodic solution) $x(t) = x_p(t)$ を求めよ (obtain)。

（２）複素関数 (complex function) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 + 1}$ の極 (poles) と留数 (residues) をすべて求めよ (obtain)。続いて、線分 (interval) $[-R, R]$ と３点 $-R, iR$ および R を通る半径 R の半円周 (semi-circle of radius R passing through the 3 points) からなる積分路 (path of integration) について、Cauchy の積分公式 (formula) を適用 (apply) し、次の積分を計算せよ (calculate the integral)：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{x^4 + 1} \, .$$

2003年度　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：力学および電磁気学（その１）

［問題３］ゆで卵 (boiled egg) を速くまわすと立ち上がってまわる。この問題を考察しよう。

問 1. 慣性モーメント (moment of inertia) とは何か。剛体の場合について簡単に説明せよ。

問 2. ゆで卵を楕円体で近似し，一様な (uniform) 質量密度 (mass density)ρ と，単位長さの半径をもつ球 (sphere) の中心を通る軸のまわりの慣性モーメントを I_0 とする。一様な質量密度 ρ の楕円体 (ellipsoid)

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

の x 軸まわりの慣性モーメント I_x および z 軸まわりの慣性モーメント I_z を I_0 を用いて表わせ。

問 3. 上記の楕円体について $a<c$ とする。図１のように楕円体の対称軸 (問２の z 軸方向) が床面と平行になるように床の上において楕円体を回転させたところ，図２のように立ち上がって回転した。床面の摩擦 (friction) がなければ，このようなことは決して起きないことを，簡潔に説明せよ。

問 4. 斜めに傾いて回転している楕円体を考察しよう。楕円体の中心に原点 O をとり，鉛直方向に Z 軸をとる。図３のように，Z 軸のまわりに角速度 (angular velocity) $\Omega=\Omega(t)$ で回転する座標軸 OX, OY をとり，楕円体の対称軸を Oz 軸，OZ 軸と Oz 軸のなす角を $\theta=\theta(t)$ とする。$O-XYZ$ 座標で表わした角速度が $(\omega\sin\theta-\Omega\sin\theta\cos\theta,\dot{\theta},\omega\cos\theta+\Omega\sin^2\theta)$ であり，また O のまわりの角運動量 (angular momentum) $\mathbf{L}$ が $(I_z\omega\sin\theta-I_x\Omega\sin\theta\cos\theta,I_x\dot{\theta},I_z\omega\cos\theta+I_x\Omega\sin^2\theta)$ で与えられることを示せ。ただし，$\omega=\omega(t)$ は楕円体の Oz 軸方向の角速度成分である。

問 5. 床と楕円体との接点の座標を $\mathbf{R}=(X_1,0,Z_1)$ とすると，角運動量 $\mathbf{L}$ に対する運動方程式 (equation of motion) は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{L}=\mathbf{R}\times(\mathbf{N}+\mathbf{F})$$

と書ける。ここに，$\mathbf{N}=(0,0,N)$ は垂直抗力であり，$\mathbf{F}$ は摩擦力である。θ の時間変化がゆるやかであることを仮定しよう。このとき，摩擦力は Y 成分しか持たないとしてよい。さらに Ω が十分大きいと仮定することによって，運動方程式の Y 成分を近似し，$I_z\omega=I_x\Omega\cos\theta$ を導け。

問 6. 問５の条件の下で，角運動量は近似的に $(0,I_x\dot{\theta},I_x\Omega)$ と表わされる。問５の運動方程式の X 成分と Z 成分とを比較することにより，$\dot{\Omega}<0$ ならば $\dot{\theta}<0$ となること，すなわち楕円体が立ち上がることを示せ。

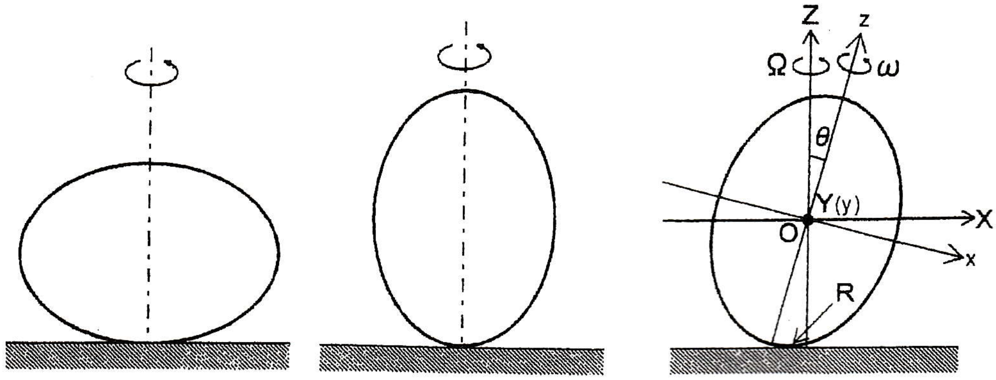

図１　　図２　　図3

2003年度　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：力学および電磁気学（その２）

［問題４］　電荷および電流が，それぞれ $\rho(\boldsymbol{r},t)$ および $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ の体積密度で，真空中に分布している．ここに，$\boldsymbol{r}$ は３次元空間の任意の１点の位置ベクトルであり，t は時刻を表わす．これらの分布を源として発生した電場および磁場を，それぞれ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ および $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ と表わすことにして，次の問に答えよ．

問１．　ρ と $\boldsymbol{j}$ が「電荷保存の法則」を満たすように与えられているとすれば，ρ と $\boldsymbol{j}$ との間にはどのような関係式が成り立つか？

問２．　使用する単位系（例えばGauss 単位系を用いること）を明示して，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ に対する Maxwell-Lorentz の式（すなわち「真空中の電磁場の基本方程式」）を書け．

問３．　ρ と $\boldsymbol{j}$ が問１のように与えられているとき，Maxwell-Lorentz の式には独立な方程式が幾つあるかを，その理由と共に述べよ．

問４．　Poyntingのベクトルの発散を，div$\boldsymbol{S}$ と表わすことにする．問２の式を利用してこの div$\boldsymbol{S}$ を書き直すことにより，真空中の電磁場に対する「エネルギー保存の法則」を導け．

２００３年度　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：量子力学および熱・統計力学（その1）

［問題 5］ 3 次元等方調和振動子ポテンシャル (3-dim. isotropic harmonic oscillator potential) 内の量子力学的粒子 (quantum mechanical particle) を考える．粒子の質量 (mass) を m, 調和振動子の角振動数 (angular frequency) を ω として以下の問に答えよ．

問 1. この系のハミルトニアン (Hamiltonian) H を直角座標 (Cartesian coordinates) で書き下せ．ただし，粒子の位置ベクトル (position vector) を $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$，運動量ベクトル (momentum vector) を $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$ とする．

問 2. 次式

$$a_k = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_k + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}p_k, \quad k = 1, 2, 3$$

で定義された演算子 (operator) a_k およびその共役演算子 (conjugate operator) $a_k^\dagger$ を用いてハミルトニアンを書き直せ．

問 3. この系のエネルギー準位 (energy level) とその縮退度 (degeneracy)，およびパリティ (空間反転対称性)(parity) を求めよ．ただし，エネルギー準位は低い方から $n = 0, 1, 2, \ldots$ と番号付けるものとする．

問 4. 最低 ($n = 0$) エネルギー準位 (lowest energy level) $|0\rangle$ の規格化された波動関数 (normalized wave function) の座標表示 (coordinate representation) $\psi_0(\boldsymbol{r}) = \langle \boldsymbol{r}|0\rangle$ を求めよ．

問 5. 第 1 励起状態 (first excited state)($n = 1$) は 3 重に縮退 (threefold degenerated) している．これらの状態 $|1; k\rangle$ ($k = 1, 2, 3$) を，基底状態 (ground state) $|0\rangle$ を用いて表せ．

この系に大きさ B の静磁場 (static magnetic field) を z 軸方向にかけたとすると，荷電粒子 (charged particle) の場合，相互作用ハミルトニアン (interaction Hamiltonian) は

$$H' = -\Omega L_3 + \frac{1}{2}m\Omega^2(x_1^2 + x_2^2)$$

と書ける．ここで Ω は B に比例する定数，L_3 は原点のまわりの角運動量 (angular momentum) の第 3 成分である．この場合の系のエネルギー準位を最低次の摂動論 (lowest-order perturbation) によって求めてみよう．

問 6. 基底状態のエネルギーはどれだけ変わるか．

問 7. H' によって第 1 励起状態の縮退はどのように解けるか．

問 8. 上の相互作用ハミルトニアン H' に表れる定数 Ω を求めよ．ただし，粒子の電荷は e とする．

２００３年度　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：量子力学および熱・統計力学（その２）

［問題６］　次の問に答えよ

問１．　１モルの「van der Waals 気体」の圧力，体積および温度を，それぞれ p, V および T と表わすことにする．まず，気体定数を R, その他の必要な定数を a および b として，この気体の状態方程式を書け．次に，「Maxwell の関係式」に注意して，この気体の内部エネルギー E およびエントロピー S を，V と T の関数として表わせ．ただし，簡単のために，定積モル比熱 C_V は T によらないものとする．

問２．　「空洞中の輻射場」は，数多くの調和振動子の集合系と考えられる．いま，これら調和振動子の個数を N とし，それらのすべてが同一の振動数 ν を持って，「ほとんど独立に」振動しているものとする．まず，この集合系の温度を T として，その分配関数 Z を，量子統計力学に従って求めよ．次に，この Z を用いて，この集合系の内部エネルギー E を計算せよ．そして最後に，この E を用いて，この集合系の定積熱容量を計算せよ．

気体定数（gas constant）
定積モル比熱（molar specific heat at constant volume）
空洞輻射（cavity radiation）
調和振動子（harmonic oscillator）
定積熱容量（heat capacity at constant volume）

〔以　下　余　白〕