磁化トーラス上にコンパクト化した超対称模型におけるモジュライ固定

宮根 一樹

2024 年 1 月 23 日

1. イントロダクション

[1] H. Abe, T. Kobayashi, K. Sumita, and S. Uemura, Physical Review D (2017).

高次元時空モデル：素粒子標準模型を再現する可能性

余剰次元は低エネルギーで観測できないほど小さくコンパクト化

余剰次元の大きさ (モジュライ) は力学的な場

$\longrightarrow$ 低エネルギーで真空期待値に固定

本研究の動機

標準模型の世代構造を再現する高次元時空モデル [1] で

余剰次元のモジュライを固定

$\downarrow$

その値を用いて現象論的に興味のある量を計算

[2] H. Abe, T. Kobayashi, H. Ohki, and K. Sumita, Nuclear Physics B (2012).

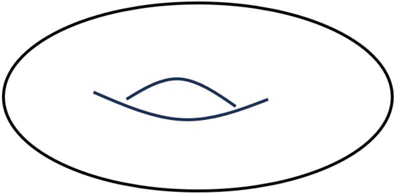
2. 磁化トーラス模型

トーラスコンパクト化

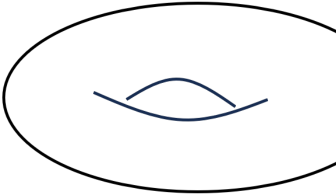
4 次元ミンコフスキー +6 次元余剰空間

余剰次元にトーラス T^2 の境界条件 $\rightarrow$ コンパクト化

$\downarrow$



$\times$



$\longrightarrow B^{(i)} = \{M_1^{(i)}, M_2^{(i)}\}$ ：$M_a^{(i)}$ は整数

2. 磁化トーラス模型

モジュライのポテンシャル

$$V^{(D)}(T_i) = \sum_{a=1,2}\left(\sum_{i=1,2,3}\frac{\pi M_a^{(i)}}{T_i}\right)^2 \times \prod_{i=1,2,3} T_i$$

$\downarrow$ 真空期待値 $\langle T_i\rangle$ の周りで展開

$$V^{(D)}(T_i) \sim V^{(D)}(\langle T_i\rangle) + \frac{1}{2}\underbrace{\partial_{T_r}\partial_{T_{r'}}V^{(D)}\Big|_{T_i=\langle T_i\rangle}}_{\equiv V_{rr'}}\delta T_r \delta T_{r'}$$

2. 磁化トーラス模型

モジュライのポテンシャル

$$V^{(D)}(T_i) = \sum_{a=1,2} \left(\sum_{i=1,2,3} \frac{\pi M_a^{(i)}}{T_i} \right)^2 \times \prod_{i=1,2,3} T_i$$

$\downarrow$ 真空期待値 $\langle T_i \rangle$ の周りで展開

$$V^{(D)}(T_i) \sim V^{(D)}(\langle T_i \rangle) + \frac{1}{2} \underbrace{\partial_{T_r} \partial_{T_{r'}} V^{(D)} \Big|_{T_i = \langle T_i \rangle}}_{\equiv V_{rr'}} \delta T_r \delta T_{r'}$$

行列 $V_{rr'}$ の対角化

$$V^D \sim V^{(D)}(\langle \tilde{T}_i \rangle) + \frac{1}{2} m_2^2 \delta \tilde{T}_2^2 + \frac{1}{2} m_3^2 \delta \tilde{T}_3^2$$

$\tilde{T}_i$：対角化後の基底 & m_2^2, m_3^2：$V_{rr'}$ の固有値

2. 磁化トーラス模型

<u>新・旧基底の関係</u>

P は対角化行列

$$\langle \boldsymbol{T_1} \rangle = \boldsymbol{P_{11}} \langle \tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{1}} \rangle + \boldsymbol{P_{12}} \langle \tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{2}} \rangle + \boldsymbol{P_{13}} \langle \tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{3}} \rangle$$

$$\langle \boldsymbol{T_2} \rangle = \boldsymbol{P_{21}} \langle \tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{1}} \rangle + \boldsymbol{P_{22}} \langle \tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{2}} \rangle + \boldsymbol{P_{23}} \langle \tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{3}} \rangle$$

$$\langle \boldsymbol{T_3} \rangle = \boldsymbol{P_{31}} \langle \tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{1}} \rangle + \boldsymbol{P_{32}} \langle \tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{2}} \rangle + \boldsymbol{P_{33}} \langle \tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{3}} \rangle$$

2. 磁化トーラス模型

新・旧基底の関係　　　P は対角化行列

$$
\begin{aligned}
\langle T_1\rangle &= P_{11}\langle\tilde{T}_1\rangle + P_{12}\cancel{\langle\tilde{T}_2\rangle} + P_{13}\cancel{\langle\tilde{T}_3\rangle}\\
\langle T_2\rangle &= P_{21}\langle\tilde{T}_1\rangle + P_{22}\cancel{\langle\tilde{T}_2\rangle} + P_{23}\cancel{\langle\tilde{T}_3\rangle}\\
\langle T_3\rangle &= P_{31}\langle\tilde{T}_1\rangle + P_{32}\cancel{\langle\tilde{T}_2\rangle} + P_{33}\cancel{\langle\tilde{T}_3\rangle}
\end{aligned}
$$

$\to$ モジュライ $\tilde{T}_1$ の真空期待値が決まれば，$\langle T_i\rangle$ が全て決定

今後の目標

モジュライ $\tilde{T}_1 \equiv \tilde{T}$ の真空期待値 $\langle\tilde{T}\rangle$ を決定

3. モジュライ固定

$\tilde{T}$ のポテンシャル

スーパーポテンシャル W，ケーラーポテンシャル K

$$W = w_0 - Ae^{-aP_{11}\tilde{T}} - Be^{-bP_{11}\tilde{T}}X$$
$$K = -3\ln\left(\tilde{T} + \bar{\tilde{T}}\right) + |X|^2$$
$$\downarrow$$

$$V^{(F)}(\tilde{T}, X) = e^K(K^{I\bar{J}}(D_I W)(D_{\bar{J}}\bar{W}) - 3|W|^2)$$：ポテンシャル

$$f_I \equiv \partial_I f,\ D_I W \equiv W_I + K_I W \quad (I = X, \tilde{T})$$

$\rightarrow$ 最小点 ($\langle T \rangle$, $\langle X \rangle$) は近似的に知られている

3. モジュライ固定

[1] H. Abe, T. Kobayashi, K. Sumita, and S. Uemura, Physical Review D (2017).
[3] H. Abe, T. Kobayashi, T. Higaki, T. Kobayashi, and Y. Omura, Physical Review D (2007).

先行研究 [1, 3]

$$W = w_0 - Ae^{-aT} - Be^{-bT}X$$

$$K = -3\ln(T+\bar{T}) + |X|^2$$

$$w_0 \ll 1,\ A, B \sim 1,\ a, b \sim 4\pi^2$$

$$\downarrow$$

$$x = \sqrt{3} - 1,\ t = \mathcal{O}(1)$$

点 (t, x) は真の最小点 ($\langle T \rangle$, $\langle X \rangle$) の近似点

$\rightarrow$ 以降はこの近似値を用いて計算

3. モジュライ固定

[1] H. Abe, T. Kobayashi, K. Sumita, and S. Uemura, Physical Review D (2017).
[3] H. Abe, T. Higaki, T. Kobayashi, and Y. Omura, Physical Review D (2007).

今回のポテンシャル：$-Ae^{-aP_{11}T} - Be^{-bP_{11}T}X$

先行研究 [1, 3]

$$W = w_0 - Ae^{-aT} - Be^{-bT}X$$

$$K = -3\ln(T + \bar{T}) + |X|^2$$

$$w_0 \ll 1,\ A, B \sim 1,\ a, b \sim 4\pi^2$$

$$\downarrow$$

$$x = \sqrt{3} - 1,\ t \sim 1.87 = \mathcal{O}(1)$$

点 (t, x) は真の最小点 ($\langle T \rangle$, $\langle X \rangle$) の近似点

→ 以降はこの近似値を用いて計算

4. 計算結果

[1] H. Abe, T. Kobayashi, K. Sumita, and S. Uemura, Physical Review D (2017).
[4] K. Choi, K. S. Jeong, and K. Okumura, Journal of High Energy Physics (2005).

(注：卒論 & 発表までに改善)

磁場 M_a^i の値を先行研究 [1] の値にとる

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix},\ M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$M_{\mathrm{Pl}} = 1.2 \times 10^{19}$ GeV を 1 にとる

- $\langle T_1 \rangle \sim 1.907,\ \langle T_2 \rangle, \langle T_3 \rangle \sim 13.4$
- $m_2^{(D)},\ m_3^{(D)} \sim 11,\ m_T \sim 10^{-29} \to m_2^{(D)}, m_3^{(D)} \gg m_T$
  $F^T \sim 10^{-46} \longrightarrow F^T \sim 0$
- アノマリー伝播とモジュライ伝搬の比 [4]

$$\alpha \sim 10^{13} \neq \mathcal{O}(1)$$

5. まとめと展望

まとめ

- モジュライの真空期待値を決定 $\rightarrow$ 余剰次元の大きさを決定
- その値を用いて現象論的に興味のある量を計算
  - 質量や超対称性は望ましい結果 $\leftrightarrow$ α は望ましくない値

展望

- モジュライ固定の計算
  $\longrightarrow$ 今回は先行研究の計算をそのまま適用
- スーパーポテンシャルの形を変える
  - ブレーンによる非摂動効果を変化させた場合
  - ISS-KKLT モデルの場合　　　　など

付録

目次

目次

A. 対角化行列

$$P_{11} = \frac{(M_1^{(2)}M_2^{(1)} - M_1^{(1)}M_2^{(2)})\left(M_1^{(3)}M_2^{(2)} - M_1^{(2)}M_2^{(3)}\right)}{(M_1^{(2)}M_2^{(3)} - M_1^{(3)}M_2^{(2)})^2\sqrt{\left|\frac{(M_1^{(2)}M_2^{(1)} - M_1^{(1)}M_2^{(2)})\left(M_1^{(3)}M_2^{(2)} - M_1^{(2)}M_2^{(3)}\right)}{(M_1^{(2)}M_2^{(3)} - M_1^{(3)}M_2^{(2)})^2}\right|^2 + \left|\frac{(M_1^{(2)}M_2^{(1)} - M_1^{(1)}M_2^{(2)})\left(\frac{M_1^{(3)}M_2^{(1)}(M_1^{(2)}M_2^{(3)} - M_1^{(3)}M_2^{(2)})^2}{(M_1^{(3)}M_2^{(1)} - M_1^{(1)}M_2^{(3)})^2} - \frac{M_1^{(1)}M_2^{(3)}(M_1^{(2)}M_2^{(3)} - M_1^{(3)}M_2^{(2)})^2}{(M_1^{(3)}M_2^{(1)} - M_1^{(1)}M_2^{(3)})^2}\right)}{(M_1^{(2)}M_2^{(3)} - M_1^{(3)}M_2^{(2)})^2}\right|^2 + 1}}$$

$$P_{21} = -\frac{(M_1^{(2)}M_2^{(1)} - M_1^{(1)}M_2^{(2)})\left(\frac{M_1^{(3)}M_2^{(1)}(M_1^{(2)}M_2^{(3)} - M_1^{(3)}M_2^{(2)})^2}{(M_1^{(3)}M_2^{(1)} - M_1^{(1)}M_2^{(3)})^2} - \frac{M_1^{(1)}M_2^{(3)}(M_1^{(2)}M_2^{(3)} - M_1^{(3)}M_2^{(2)})^2}{(M_1^{(3)}M_2^{(1)} - M_1^{(1)}M_2^{(3)})^2}\right)}{(M_1^{(2)}M_2^{(3)} - M_1^{(3)}M_2^{(2)})^2\sqrt{\left|\frac{(M_1^{(2)}M_2^{(1)} - M_1^{(1)}M_2^{(2)})\left(M_1^{(3)}M_2^{(2)} - M_1^{(2)}M_2^{(3)}\right)}{(M_1^{(2)}M_2^{(3)} - M_1^{(3)}M_2^{(2)})^2}\right|^2 + \left|\frac{(M_1^{(2)}M_2^{(1)} - M_1^{(1)}M_2^{(2)})\left(\frac{M_1^{(3)}M_2^{(1)}(M_1^{(2)}M_2^{(3)} - M_1^{(3)}M_2^{(2)})^2}{(M_1^{(3)}M_2^{(1)} - M_1^{(1)}M_2^{(3)})^2} - \frac{M_1^{(1)}M_2^{(3)}(M_1^{(2)}M_2^{(3)} - M_1^{(3)}M_2^{(2)})^2}{(M_1^{(3)}M_2^{(1)} - M_1^{(1)}M_2^{(3)})^2}\right)}{(M_1^{(2)}M_2^{(3)} - M_1^{(3)}M_2^{(2)})^2}\right|^2 + 1}}$$

$$P_{31} = \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{(M_1^{(2)}M_2^{(1)} - M_1^{(1)}M_2^{(2)})\left(M_1^{(3)}M_2^{(2)} - M_1^{(2)}M_2^{(3)}\right)}{(M_1^{(2)}M_2^{(3)} - M_1^{(3)}M_2^{(2)})^2}\right|^2 + \left|\frac{(M_1^{(2)}M_2^{(1)} - M_1^{(1)}M_2^{(2)})\left(\frac{M_1^{(3)}M_2^{(1)}(M_1^{(2)}M_2^{(3)} - M_1^{(3)}M_2^{(2)})^2}{(M_1^{(3)}M_2^{(1)} - M_1^{(1)}M_2^{(3)})^2} - \frac{M_1^{(1)}M_2^{(3)}(M_1^{(2)}M_2^{(3)} - M_1^{(3)}M_2^{(2)})^2}{(M_1^{(3)}M_2^{(1)} - M_1^{(1)}M_2^{(3)})^2}\right)}{(M_1^{(2)}M_2^{(3)} - M_1^{(3)}M_2^{(2)})^2}\right|^2 + 1}}$$

B. モジュライを固定する動機

ヤン・ミルズ理論の結合定数

$$\int \mathbf{d}^{10}\boldsymbol{X}\sqrt{-\boldsymbol{G}}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{g}^{\mathbf{2}}}\mathrm{Tr}\left[-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{MN}}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{MN}}\right]$$

$$= \int \mathbf{d}^{4}\boldsymbol{x}\underbrace{\left(\int \mathbf{d}^{6}\boldsymbol{y}\sqrt{-\boldsymbol{G}}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{g}^{\mathbf{2}}}\right)}_{\equiv \mathbf{1}/\boldsymbol{g}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{4}\boldsymbol{D}}}\mathrm{Tr}\left[-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu\nu}}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\mu\nu}}\right] + (\cdots)$$

$\longrightarrow$ 余剰次元の形が 4 次元のゲージ結合定数などを決定

B. モジュライを固定する動機

- 10 次元時空の計量

$$G_{MN}(x) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) & * \\ * & G_{mn}(x) \end{pmatrix}$$

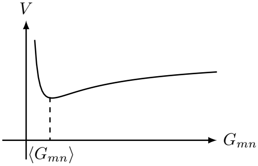
- $G_{mn}(x)$：4 次元でのスカラー場 (モジュライという)
- モジュライの真空期待値はポテンシャルで決定 $\longrightarrow$ モジュライ固定

余剰次元の形はダイナミカルな

場 $G_{mn}(x)$

$\downarrow$

真空期待値になる $\langle G_{mn} \rangle$



[2] H. Abe, T. Kobayashi, H. Ohki, and K. Sumita, Nuclear Physics B (2012).

C. 背景磁場

真空期待値を次のように決める.

$$\langle A_i \rangle = \frac{\pi}{\mathrm{Im}\,\tau_i} M^{(i)} \bar{z}_i,$$

$$M^{(i)} = \begin{pmatrix} M_1^{(i)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2^{(i)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_N^{(i)} \end{pmatrix}.$$

- $M_a^{(i)}$ は整数
- $M^{(i)}$ はトーラス上の磁場 $\rightarrow F_{45} = \pi M^{(1)}$ など
- ブロック対角化でより小さいゲージ対称性

$$U(N) \rightarrow U(N_1) \times U(N_2) \times \cdots \times U(\tilde{N})$$

[3] H. Abe, T. Higaki, T. Kobayashi, and Y. Omura, Physical Review D (2007).
[5] H. Abe, T. Higaki, and T. Kobayashi, Physical Review D (2007).

D. 参照点とモジュライ固定

- スーパーポテンシャル W とケーラーポテンシャル K

  $\longrightarrow$ スカラーポテンシャル (F-term ポテンシャル)

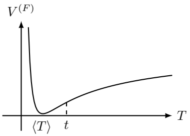
$$V^{(F)} \equiv e^K (K^{I\bar{J}} (D_I W)(D_{\bar{J}} \bar{W}) - 3|W|^2)$$

$$D_I W \equiv W_I + K_I W \quad (I = X, T)$$

$$f_I \equiv \partial_I f, \; K^{I\bar{J}} \text{ は } K_{I\bar{J}} \text{ の逆行列}$$

- $V^{(F)}$ の最小値を実現する T, X は？

  $\longrightarrow$ その点にモジュライ T が固定



- ポテンシャルの最小をどのように特定するか？
  - 解析的には難しい $\longrightarrow$ 参照点を利用すると解析的に
  - 超対称性が保たれる点がポテンシャルの最小になりやすい

[3] H. Abe, T. Higaki, T. Kobayashi, and Y. Omura, Physical Review D (2007).

D. 参照点とモジュライ固定

- 参照点 (t, x)

$$D_T W \Big|_0 = 0,\ V_X^{(F)} \Big|_0 = 0 \quad (\ \cdot|_0 \text{ は } (T, X) = (t, x) \text{ の代入})$$

$$(D_T W = 0 \longrightarrow \text{超対称性が保たれている})$$

- ポテンシャル $V^{(F)}$ を参照点からの揺らぎ $\delta T, \delta X$ で展開

$$V^{(F)} = V^{(F)} \Big|_0 + V_T^{(F)} \Big|_0 \delta T + V_X^{(F)} \Big|_0 \delta X + \cdots + \frac{1}{2} V_{TT}^{(F)} \Big|_0 \delta T^2 + \frac{1}{2} V_{T\bar{T}}^{(F)} \Big|_0 \delta T \delta \bar{T} + \cdots$$

D. 参照点とモジュライ固定

$$\boldsymbol{V_{\delta T}, V_{\delta \bar{T}}, V_{\delta X}, V_{\delta \bar{X}} = 0 \longrightarrow \delta T, \delta \bar{T}, \delta X, \delta \bar{X}}$$ の値を決定

$$\downarrow$$

$\boldsymbol{\dfrac{\delta T}{t} \ll 1,\ \dfrac{\delta X}{x} \ll 1}$ であれば，参照点による近似が有効

E. モジュライ固定の例

参考文献

[1] H. Abe, T. Kobayashi, K. Sumita, and S. Uemura, *Kähler moduli stabilization in semi-realistic magnetized orbifold models,* 2017.
Physical Review D **96** (2017) 026019, arxiv:1703.03402 [hep-ph, physics:hep-th].

[2] H. Abe, T. Kobayashi, H. Ohki, and K. Sumita, *Superfield description of 10D SYM theory with magnetized extra dimensions,* 2012.
Nuclear Physics B **863** (2012) 1–18, arxiv:1204.5327 [hep-ph, physics:hep-th].

[3] H. Abe, T. Higaki, T. Kobayashi, and Y. Omura, *Moduli stabilization, F-term uplifting and soft supersymmetry breaking terms,* 2007.
Physical Review D **75** (2007) 025019, arxiv:hep-th/0611024.

[4] K. Choi, K. S. Jeong, and K. Okumura, *Phenomenology of Mixed Modulus-Anomaly Mediation in Fluxed String Compactifications and Brane Models,* 2005.
Journal of High Energy Physics **2005** (2005) 039–039, arxiv:hep-ph/0504037.

参考文献

[5] H. Abe, T. Higaki, and T. Kobayashi, *More about F-term uplifting,* 2007. Physical Review D **76** (2007) 105003, arxiv:0707.2671 [hep-ph, physics:hep-th].

[6] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*. Princeton University Press, Princeton, N.J, 1992.

[7] 柴崎 寿英, 『背景磁場を持つ 10 次元超対称 Yang-Mills 理論におけるゲージ結合に対する量子補正』, Master's thesis, 早稲田大学, 2021.

[8] 中野 隼斗, 『磁化オービフォルド上の 10 次元超対称理論における 4 次元有効ゲージ結合定数の解析』, Master's thesis, 早稲田大学, 2023.