金融工学と物理学

ひだりん・ミヤネ

2023 年 7 月 4 日

概要

金融工学に現れるブラック・ショールズ方程式と，物理学に現れる拡散方程式には対応があることがわかっています．今回は，その面白い対応について書こうと思います．

目次

1　ひだりんパート

1.1　introduction

本論は宮根くんとの共同でブラック・ショールズ方程式 (以下、自分の部分では BS 式との表記を用います) の勉強を行ったものを成果としてまとめたものです。元々、私が趣味でルーエンバーガーの『金融工学入門』[1] を読んでおり、わからない式があったのを宮根さんに聞いたところ、思いのほかやり取りが長文になったので、一度正式なものとして成果報告を行いたいという趣旨で作成されたものです。

BS 式は金融工学の集大成ともいえるもので、その目的はオプションと呼ばれる商品の理論価格を設定する所にあります。私のパートでは、BS 式の前提となっている知識についてまでの共有を目指します。金融工学は私たち商学領域の人間や、数学をきちんと修めた人間にとっても決して容易ではない分野なので、皆さんの視点からするとなかなかに難解な内容になるかと思いますが、お付き合いいただけると幸いです。

1.2　事始め―二項モデル

金融工学は株価などの資産について確率的な値動きのモデル化を行い、成果をえようとする学問です。ここではまず皆さんにもっとも単純な例として 2 項モデルを理解してもらいます。2 項モデルは危険資産の値動きについて離散的に解析するものです。まず危険資産と安全資産の定義を与えます。

危険資産とは、株や社債・MBS(資産担保ローン証券) などの価格変動のリスクがある金融商品のことです。金融工学においては未来時点の価格について分散を持った資産であると考えます。こうした資産の価格は普通 S と表します。

これに対して安全資産とは皆さんにとっての預金や国債などを表します。こうした商品は一定の利率での返済が保証されており、したがって、価格が安定していると想定されます。こうした資産の価格は普通 B と表します。

安全資産の値動きをモデル化するのは容易なので、ここでやってしまいましょう。r は利子率です。離散的には次のように表されます。

$$B_{t+1} = rB_t$$

したがって、t 時点での安全資産の価格は

$$B_t = B_0 r^t$$

ここで B_0 を 1 として、さらに t を連続的に表すと以下のようになります。

$$B_t = e^{rt}$$

これで安全資産の価格が表されました。次に危険資産の値動きをモデル化したいです。しかし、危険資産は未来時点の価格に分散を持つというのが定義でした。これは危険資産が確率変数[*1]であることを示します。現実的には株価の値動きはいろいろなものが考えられるわけですが、ここでは最初のモデルとして d と u のみであると仮定します。すると危険資産の価格は次のように表されます。なお $+$ となる確率は p とします。

このモデルを n 時点まで拡張します。S_t は t 時点の価格を表しています。難しいことはありません。ただのパスカルの三角形です。S_{ij} は i 回 $+$ を、j 回 $-$ を引いた確率です。

[*1] 変数の値が確率的であること

この時、以下の式が成り立ちます。

$$P(S_{ij}) =_t C_i p^i (1-p)^j$$

ここで S の期待値と分散を求めましょう。期待値の計算は難解ですが、1 期間でも求めた期待値が

$$E(\ln(S_1) - \ln(S_0)) = \frac{u+d}{2}$$

であることに着目すると簡単に

$$E(S_t) = \left(\frac{u+d}{2}\right)^t$$

であることがわかります。ここでは簡単にこれを 0 と仮定します。分散も同様に

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2+d^2}{2}\right) - \left(\frac{u+d}{2}\right)^2 = \left(\frac{u-d}{2}\right)^2$$

であることがわかります。ここから $u = \sigma$,$d = -\sigma$ であることがもめられます。

この時、オプションの価格を評価してみます。オプションとは "n 時点で K 円で危険資産を買える権利" のことです。オプション価格は普通 C で表示します。行使時点のオプションの価格は

$$C_t = S_t - K$$

となります。このオプションを安全資産と危険資産の組み合わせで表現したいと考えいます。こういうものをポートフォリオと呼びます。ポートフォリオは一般的に、以下のようになります

$$P_t = aS_t + bB_t$$

さて、同じ経済実態を持ったものの間に価格差があると、それを売り買いすることで利益を出すことができるので、こういう状況は起きえないと金融工学では考えます。このようなことを、「無裁定の原則」と呼びます。無裁定の原則に基づけば、ポートフォリオを仮定することで、理論的なオプション価格を求めることができるはずです。

簡単にするために、一時点経過したときに権利行使を迎えるオプション価格の計算を行ってみます。

$$C_+ = \sigma - K = au + br$$

$$C_- = -\sigma - K = ad + br$$

ただの連立方程式なので解くと

$$a = \frac{C_+ - C_-}{u-d}$$

$$b = \frac{uC_- + dC_+}{(u-d)r}$$

これで、a と b をポートフォリオの元の式に代入すれば、オプションを求められたことになります。

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{C_+ - C_-}{u-d} S_t + \frac{uC_- - dC_+}{(u-d)r} B_t \\ &= \frac{1}{r}[\frac{r-d}{u-d}C_+ + \frac{u-r}{u-d}C_-] \\ &= \frac{1}{r}[qC_+ + (1-q)C_-] \qquad (\text{ただし、} q = \frac{r-d}{u-d} \text{ とする}) \end{aligned}$$

この式から求められる帰結として、オプションの価格は、危険資産の収益率やボラティリティ、安全資産の利子率、期限までの時間には依存するものの、それらの確率に依存することがわかります。また n 時点のオプションは同様の遡及計算を行えば求められます。[*2]

1.3 株価のモデル化

さて、一応二項モデルでオプションの価格のモデル化に成功したわけですが、ここで株価を 2 項ではなくてより複雑かつ正確な表現で、なおかつ連続的にモデル化したい、というモチベーションがわきます。イメージとしては最初にやった、$B_t = e^{rt}$ です。

株価の一般的な性質として、価格は指数的に伸びていく、価格のボラティリティ (変動性) は現在の価格のスケールに依存する、などがあります。これらの性質を受けて、まず離散的なモデルを作ってみます。さきほどの

$$\ln B_{t+1} = r \ln B_t$$

がベースです。これに誤差項を加えたものが、株価過程[*3]の基本となります

$$\ln S_{t+1} = v \ln S_t + \ln u(k) \tag{1.1}$$

となります。誤差項である $\ln u(k)$ ついて、ウィナー過程[*4]というものを採用します。まず次の様な確立変数を考えます。

$$Z(t_{k+1}) = Z(t_k) + \epsilon(t_k)\sqrt{\Delta t}$$

ここで ϵ は正規分布に従う確率変数で

$$\epsilon(t_k) = \mathbb{Z}(0, 1)$$

です。この変数を連続変数に書き換えます。

$$\mathrm{d}z = \epsilon(t)\sqrt{\mathrm{d}t}$$

(1.1) の誤差項に、このウィナー過程を代用して連続化すと

$$\mathrm{d}S_t = v\,\mathrm{d}(t) + \sigma\,\mathrm{d}(z)$$

ところで、この $v = v(x, t)$ と $\sigma = \sigma(x, t)$ となり、こうした過程の事を特別に「伊藤過程」と呼びます[*5]。

[*2] この計算は時間の都合上端折りました。がんばってください。

[*3] 過程とは確立に基づく数列のことです

[*4] 詳細な議論は省きますが、ウィナー過程の分散は時間に比例することが知られています

[*5] 伊藤過程の式をこの後に出る伊藤定理に基づき変換すると、以下のようになります。

$$\mathrm{d}\ln S_t = (u - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma\,\mathrm{d}(z))$$

この式は BS 式の解を求める際の変換の右側と関連しており、対応が予測されます。

1.4　伊藤公式、ブラック・ショールズ方程式

伊藤過程で成り立つ定理として伊藤公式があります。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}x(t) = a(x,t)\mathrm{d}t + b(x,t)dz \\
&y = F(x,t) \\
&\mathrm{d}y(t) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}a + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}b^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial F}{\partial x}b\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

ここで与える証明はいい加減なので突っ込みどころだらけですが、許してください。

証明. t で 1 次のオーダーまでテイラー展開で近次をする

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}x(t) = a(x,t)\mathrm{d}t + b(x,t)\mathrm{d}z \\
&\mathrm{d}z = \epsilon(t)\sqrt{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

ただし Δx は $\sqrt{t}$ のオーダーを持つので、2 階まで展開する必要がある。

$$y + \Delta y = F(x,t) + \frac{\partial F}{\partial x}(a\Delta t + b\Delta z) + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a\Delta t + b\Delta z)^2$$

この $\frac{\partial^2}{\partial F^2}$ の項の係数を D とすると、

$$D = a^2\Delta t^2 + ab\Delta t^{\frac{3}{2}}\epsilon(t) + b^2\Delta t$$

Δt のオーダーが 1 以上なら、計算しなければならない。よって最終項のみ戻して

$$\begin{aligned}
y + \Delta y &= F(x,t) + \frac{\partial F}{\partial x}(a\Delta t + b\Delta z) + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}b^2\Delta t \\
&= F(x,t) + \left(a\frac{\partial F}{\partial x} + a\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}b^2\right)\Delta t + \frac{\partial F}{\partial x}b\Delta z
\end{aligned}$$

両辺極限を取ると、伊藤公式がもとまる。 ■

この伊藤公式を用いて、BS 式を証明します。BS 式はこれまでに述べた過程の前提のもとで、金融派生商品、つまりポートフォリオが必ず満たす偏微分方程式のことです。

$$rf = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}rS + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2$$

$$\begin{cases}
f = x_t S(t) + y_t B(t) \\
\mathrm{d}S = \mu S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}B = rB\mathrm{d}t
\end{cases}$$

証明. 伊藤定理より与式を代入して、

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\mathrm{d}z$$

ポートフォリオを

$$G(t) = x_t S(t) + y_t B(t)$$

と仮定する。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}G(t) &= x_t \mathrm{d}S + y_t \mathrm{d}B \\
&= x_t(\mu S \mathrm{d}t + \sigma S \mathrm{d}z) + y_t(rB\mathrm{d}t) \\
&= (\mu S x_t + rBy_t)\mathrm{d}t + x_t \sigma S \mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

ここで

$$x_t = \frac{\partial f}{\partial S}$$

と置き

$$y_t = \frac{1}{B}\left[f(S,t) - S\frac{\partial f}{\partial S}\right]$$

とすると、$G = f$ が成立する。これを最初の式に代入して

$$\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{B}\left[f(S,t) - S\frac{\partial f}{\partial S}\right]rB = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2$$

この式を計算すると、BS 式を得る ■

この BS 式は一般には解けませんが、権利行使を満期に限るユーロピアンオプションでは解析的に解くことができます。詳しくは宮根くんが解説してくれますが、この式は拡散方程式へと帰着されます。

ここまでのことから、2 項モデルでも BS モデルにおいても、指数的な資産価格の増加や、そのポートフォリオの仮定、無裁定原則などは一致しており、二つは株価の動きの離散的な仮定を除けば同様の手続きによって求められていることがわかります。[*6]ですから、その考察は二項モデルを見ればある程度行うことができます。

権利行使時点においては一意に定まる価格を、確率分布の仮定に基づいて後退計算をしていくことを考えれば、オプション価格の推定はある時点のオンザマネー[*7]の確立密度の計算に等しく、ある種「ある時点の密度分布に基づくある時点の密度」を「時間と密度分布の関係」から求める拡散方程式に帰着されるのは当然かもしれません。今回の分析ではその精緻な理解には至らなかったことは悔しくもありますが、努力を続けたいと思います。

[*6] ちなみに、3 項モデルや多項モデルという、より多くの確率の移動を仮定したモデルもありますが、本質的には 2 項モデルと全く同じです。

[*7] オプションが行使によって利益を得られる状態にあること

2 ミヤネパート

金融工学の基礎的な方程式の 1 つである**ブラック・ショールズ方程式**は，適切な変数変換を施してあげることで，**拡散方程式**といわれる物質や熱の広がり方を記述する方程式に帰着できることがわかっています．もともと，ひだりんから「途中式と拡散方程式を詳しく」と言われて作成したドキュメントがあったので，今回はそれを加筆・修正して投稿しようと思います．したがって，彼の数学力に合わせて書いているので，大部分の人には読みづらいかもしれません[*8]が，そのぶん文章を多くしてみようと思いました．異なる学問の交流ということで，その雰囲気を楽しんでもらえればと思います．

2.1 ブラック・ショールズ方程式について

[2] を参照して，ブラック・ショールズ方程式を変数変換して，拡散方程式に帰着してみましょう．ブラック・ショールズ方程式とは

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0 \tag{2.1}$$

のことでした．ただし，それぞれ

$$\begin{cases} S & : \text{危険資産} \\ e^{-rt} & : \text{安全資産} \\ C(t,S) & : \text{派生証券価格} \end{cases} \tag{2.2}$$

を表しています．この方程式 (2.1) を変数変換していきましょう．

まずは，変数 S を

$$y := \log S \tag{2.3}$$

と変数変換してみます[*9]

$$\frac{\partial}{\partial S} = \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.4}$$

となることに気をつければ

$$\begin{cases} S\dfrac{\partial C}{\partial S} = \dfrac{\partial C}{\partial y} \\ S^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2} = -\dfrac{\partial C}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 C}{\partial y^2} \end{cases} \tag{2.5}$$

となります．このことから (2.1) は

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - rC = 0 \tag{2.6}$$

となります．さらに，t, y を

$$x := y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\ ,\ \tau := T - t \tag{2.7}$$

[*8] 理系数学の内容や大学に入ってから習うような数学をふつうに使っています．逆に，彼はなんでこれらを知っているのでしょうか…．ひだりん，末恐ろしい男です．

[*9] 参考文献では K で割っていましたが，方程式をもとめる際にはあまり関係がないので，今回は無視しました．$K=1$ としたと思えばよいでしょう．

と変数変換してみます．すると，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial x}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial \tau} = -\left(r - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial \tau} \end{cases} \tag{2.8}$$

なので，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} = -\left(r - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)\dfrac{\partial C}{\partial x} - \dfrac{\partial C}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial C}{\partial y} = \dfrac{\partial C}{\partial x} \end{cases} \tag{2.9}$$

と変数 τ, x に変換されます．これを (2.6) に代入すれば

$$-\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - rC = 0 \tag{2.10}$$

となります．ここで，関数 $C(\tau, x)$ を

$$Q(\tau, x) \coloneqq e^{r\tau} C(\tau, x) \tag{2.11}$$

と変換すれば，

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \tag{2.12}$$

となり，この形は拡散方程式として知られています．

2.2 拡散方程式

一般に，

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2.13}$$

を (1 次元の) 拡散方程式といいます．ここで，κ は分布 u の広がりにくさを表しています．この節では，この拡散方程式を具体的な初期条件のもとで解くことによって，解の様子を確認してみようと思います．

分かりやすい初期条件は，$t = 0$ に

$$u(x, 0) = \delta(x) \tag{2.14}$$

が成立している場合でしょう．(2.13) の解をもとめるために，$u(x, t)$ のフーリエ変換を

$$u(x, t) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \tilde{u}(k, t) e^{-ikx} \tag{2.15}$$

とすれば，(2.13) は

$$\int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \kappa k^2 \tilde{u}(k, t)\right] e^{-ikx} = 0 \tag{2.16}$$

となり，

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \kappa k^2 \tilde{u}(k, t) = 0 \tag{2.17}$$

と変換されます．これは変数分離できているので，解は

$$\tilde{u}(k, t) = e^{-\kappa k^2 t} \tag{2.18}$$

です[*10]．これを (2.15) に戻せば，

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} e^{-ikx-\kappa k^2 t} \\
&= e^{-x^2/4\kappa t} \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \exp\left[-\kappa t \left(k + \frac{ix}{2\kappa t}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-x^2/4\kappa t}
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

と解がもとまることになります．

この解 (2.19) の意味を少しみてみましょう．まず，$t=0$ のときに $u(x,0)=\delta(x)$ が成立しているので，これは $x=0$ に物質が集中していることを表しています．図 2.1 を見ると，t が大きくなるにつれて，その分布が広がっていく様子を確認することができます[*11*12]．

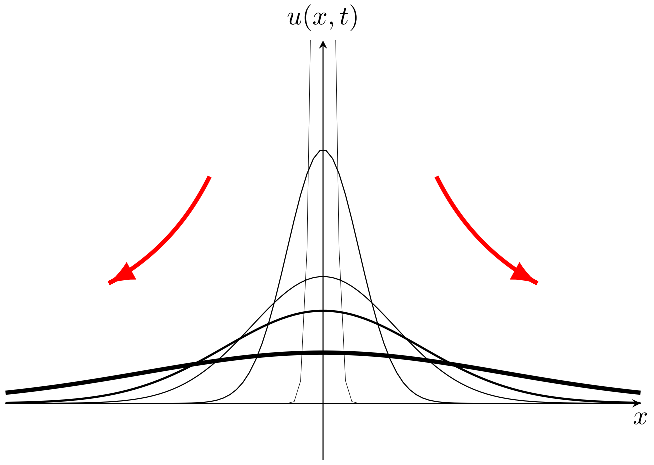

図 2.1　$u(x,t)$ の様子

2.3　duality

今回のように「あるモデルと別のモデルが等価である」という事実を，物理学では duality(双対性) と呼んだりします．例えば，1 番わかりやすいものだと electric-magnetic(EM) duality でしょう．これは，「電気」と「磁気」にはかなり強い対応関係 (S-duality) があるという主張です．電磁気学の基本方程式として，マク

*10 こっそり初期条件を用いています．$\delta(x)$ のフーリエ変換は

$$\delta(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} e^{-ikx}$$

なので，これと $t=0$ におけるフーリエ変換の式 (2.15) を比較してみると，波数空間の初期条件

$$\tilde{u}(k,0) = 1 \quad ({}^{\forall}k \in \mathbb{R})$$

がもとまります．このことから定数が決まり (2.18) となります．

*11 ややこしくなると思ってラベルをつけなかったのですが，余計ややこしくなってしまったような気がします．時間が経過するごとに，線の濃さが濃くなるようにとっています．

*12 この式の帰結として，「$t=0$ に物質が集中しても，少し時間が経てば x が大きいところ，つまりどれほどの遠方でも物質が少なからず存在している」ということがあります．これは現実的にはおかしな話で，“東京湾に砂糖水をたらすと，その直後にニューヨーク湾の海水が少し甘くなる” というジョークがあるほど [3]．

スウェル方程式というものがあります．それらは 4 つあり，それぞれ真空中では

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\ \vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{0},\ \vec{\nabla}\times\vec{B}-\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{0} \tag{2.20}$$

というものです．ここで，$\vec{E}$ は電場を表し，$\vec{B}$ は磁場を表します．この式をよく見るとわかるのですが，実は $\vec{E}\to\vec{B},\vec{B}\to-\vec{E}$ という変換をおこなってみると

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0,\ \vec{\nabla}\times\vec{B}-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{0},\ -\vec{\nabla}\times\vec{E}-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{0} \tag{2.21}$$

となり，これをよくよく見てみると (2.20) に戻ります．これは「電場と磁場の理論」と「磁場と電場を入れ替えた理論」が**真空中では**まったく等価なことを意味しています．あまり難しいことは考えなくても「電場と磁場が似ている」ということだけに注目してみると，ピンとくるものがあるはずです．例えば，小学生のときの実験とかはどうでしょうか．磁石を作って電流を発生させたり，逆に電流が磁場を発生させるというような実験をしたことがあると思います．電気と磁石，それぞれ全く別の性質をもっている者同士が，実はそれらの役割を入れ替えても似たような現象が起こっているのです．

さきほど，実は「真空中」に理論が等価であると主張しましたが，実は真空じゃないとこの duality は成立しません．なぜかというと，一般のマクスウェル方程式は，先ほどの入れ替えに対して対称ではないからです[*13]．じゃあ，電気と磁石の対応はないのか，というと，実はまだはっきりとした答えはでていません．あくまでも「私たちの日常生活に関係のあるスケールでは対称性がない」というだけであり，素粒子のようなミクロな世界でそうなっているとは限りません．やはり，それらの入れ替えに対して対称であったほうが，理論としては美しいですし，自然にもその美しさが埋め込まれていると思うのが科学者の人情だと思います[*14]．

いろいろと寄り道してしまいました．これまでの話を踏まえると，今回のブラック・ショールズ方程式の話も一種の duality なのかもしれません．一方は人間の投資行動を記述する方程式で，もう一方は物質の伝播の仕方を記述する方程式．人間の行動と物質の運動が，実は裏で密かに対応しているのかもしれない．もしかしたら僕が勉強している理論も何か別の理論と…．そうやって日々の勉強の合間に考えを巡らせていると，今やっている勉強がなんだか楽しくなってきませんか？

参考文献

[1] デービッド・G・ルーエンバーガー．金融工学入門．日本経済新聞出版社, 2015.

[2] ブラック・ショールズ式の導出 1（ブラック・ショールズ偏微分方程式を変数変換で解く）．https://www.monte-carlo-note.com/2018/11/Black-Scholes-formula1.html.

[3] 和達三樹．物理のための数学, 2017.

[4] duality in physics. https://ncatlab.org/nlab/show/duality+in+physics.

[*13] 気になる方のために，一般のマクスウェル方程式を書いておくと

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\ \vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{0},\ \vec{\nabla}\times\vec{B}-\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{j}$$

です．（ただし，係数は気にしていません．）確かに ρ と μ のせいで $\vec{E}\to\vec{B},\vec{B}\to-\vec{E}$ の入れ替えに対して，対称ではありませんね．

[*14] 現代の科学者はどんなことを調べているのでしょうか．例えば，ここ [4] を見てみると，多くの duality が調べられていることがわかります．