

高次元時空モデルと素粒子標準模型

宮根 一樹

2024 年 3 月

概要

これは数物セミナー素粒子グループでのリレーセミナーの資料になります。私が現在所属している研究室^{*1}は、4 次元よりも大きい次元の時空を仮定する高次元時空モデルから素粒子標準模型を再現することを目標とした研究を主にしています。そこで、ここでは高次元時空モデルからどのようにして統一理論の見通しがつくのかについて、議論したいと思います。

目次

1	はじめに	2
2	高次元の場の理論とコンパクト化	3
2.1	コンパクト化	3
付録 A	標準模型の復習	6
A.1	Yang-Mills 理論	6

^{*1} 早稲田大学の安倍研究室といいます。ホームページは[こちら](#)です。

1 はじめに

2 高次元の場の理論とコンパクト化

この章では、 $4 + n$ 次元の (Einstein-Hilbert) 作用がコンパクト化によって、4 次元では、一般相対論と Yang-Mills 理論になることを見ていこうと思います。

2.1 コンパクト化

まずは単純に 5 次元の時空を考えることにします。その座標は z^M で、 $M = 0, 1, 2, 3, 4$ という値をとります。また、時空はミンコフスキーで計量は

$$\eta_{MN} = \text{diag}(-, +, +, +, +) \quad (2.1)$$

です。この時空上の場の理論は、たとえば実スカラー場 $\phi(z)$ なら

$$S = \int d^5 z \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi \right) \quad (2.2)$$

のように 4 次元の理論と同じように議論することができます。

ここで、5 番目の座標 z_4 が半径 a の円周になったとしましょう。円周 S^1 となったときは $\theta \in [0, 2\pi)$ でパラメトライズするのが便利なので、以後は無次元のパラメーターで $z_4(\theta)$ と書けるとします。さらに

$$dz_4 = a d\theta \quad (2.3)$$

という関係が成立するとすれば、 $dz_4^2 = a^2 d\theta^2$ より

$$g_{\theta\theta} = a^2. \quad (2.4)$$

上述のように、余剰空間に境界条件を課すことをコンパクト化といいます。ここで、5 次元のミンコフスキー時空 M_5 がコンパクト化によって時空が 4 次元ミンコフスキーと円周の直積 $M_4 \times S^1$ になるとすれば、その計量は

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

です^{*2}。

このような時空上で、実スカラー場 $\phi(z)$ の理論を考えてみましょう。今、 θ 方向は円周 S^1 にコンパクト化されていることから、 $\phi(z)$ はフーリエ級数展開できます：

$$\phi(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \tilde{\phi}_k(x) e^{ik\theta}. \quad (2.6)$$

これを 5 次元の実スカラー場の作用 (2.2) に代入します。

$$\int d^5 z \sqrt{-g} = \int d^4 x \sqrt{-g_4} \cdot a \int_0^{2\pi} d\theta \quad (2.7)$$

なので、 θ 方向の積分を考えると

$$\int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{2} g^{MN} (\partial_M \phi) (\partial_N \phi) \right) = \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) - \frac{1}{2a^2} \partial_\theta \phi^2 \right) \quad (2.8)$$

^{*2} ただし、 $g_{\mu\theta} = g_{\theta\mu} = 0$ と 4 次元の部分と 1 次元の部分が完全に分離できているのは仮定です。

となりますが、

$$\partial_\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \partial_\mu \tilde{\phi}_k(x) e^{ik\theta} \quad (2.9)$$

より、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) \right) &= \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{4\pi} \sum_{k,l} \partial_\mu \tilde{\phi}_k(x) \partial^\mu \tilde{\phi}_l(x) e^{i(k+l)\theta} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi}_0(x) \partial^\mu \tilde{\phi}_0 - \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \partial_\mu \tilde{\phi}_k \partial^\mu \tilde{\phi}_{-k} \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi}_0(x) \partial^\mu \tilde{\phi}_0 - \sum_{k \geq 1} \partial_\mu \tilde{\phi}_k \partial^\mu \tilde{\phi}_k^* \end{aligned} \quad (2.10)$$

です。ただし、 $\phi(x, \theta)$ が実スカラー場であることから

$$\tilde{\phi}_k^* = \tilde{\phi}_{-k} \quad (2.11)$$

を用いました。(2.8) の残りの項を考えると

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{2a^2} \partial_\theta \phi^2 \right) &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{k,l} kl \tilde{\phi}_k \tilde{\phi}_l e^{i(k+l)\theta} \\ &= -\sum_{k \leq 1} \left(\frac{|k|}{a} \right)^2 \tilde{\phi}_k \tilde{\phi}_k^* \end{aligned} \quad (2.12)$$

となるので、4次元の有効作用は

$$S = \int d^4x \, a \mathcal{L}_4 \quad (2.13)$$

であり、ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi}_0(x) \partial^\mu \tilde{\phi}_0 - \sum_{n \geq 1} \left(\partial_\mu \tilde{\phi}_n \partial^\mu \tilde{\phi}_n^* + M_n^2 \tilde{\phi}_n \tilde{\phi}_n^* \right) \quad (2.14)$$

となります。ただし、

$$M_n \equiv \frac{|n|}{a} \quad (2.15)$$

とおきました。

有効作用 (2.14) から次のことが分かります：

- 5次元の実スカラー場の理論からは、質量 M_n をもつ複素スカラー場（KK 粒子）が現れること。
- $n = 0$ のモードは、massless であること（ゼロモード）。
- $n \neq 0$ のときは、その粒子の質量は $M_n = |n|/a$ であり、 $a \ll 1$ ならば $M_n \gg 1$ であること。したがって、コンパクト空間の半径が非常に小さければ、十分なエネルギーがないとゼロモード以外の粒子を生成して観測することができないことになります^{*3}。

^{*3} Particle Data Group のデータによると、TeV スケールではまだ KK 粒子の存在が確認されていないようです。

次は、(スピノル場の前に) ベクトル場 $A_M(z)$ の理論を見ていきます。ベクトル場の作用は、一番簡単なマクスウェル理論

$$S = \int d^5z \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} g^{MP} g^{NQ} F_{MN} F_{PQ} \right) \quad (2.16)$$

を考えます。

付録 A 標準模型の復習

夜ゼミのネタになるかもしれないので、もしかしたらと思って書いておきます^{*4}。

A.1 Yang-Mills 理論

^{*4} 夜ゼミがどんな感じかわかりませんが、真面目すぎたり簡単すぎたりしたらボツにします（笑）

参考文献

- [1] Michael Edward Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Pub. Co, Reading, Mass, 1995.
- [2] Julius Wess and Jonathan Bagger. *Supersymmetry and Supergravity*. Princeton University Press, Princeton, N.J, 1992.
- [3] 藤井 保憲. **超重力理論入門**. 産業図書, 2005.
- [4] Michael Dine. *Supersymmetry and String Theory: Beyond the Standard Model*. Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 2023.