

受験番号	
氏 名	

平成29年度東京大学大学院理学系研究科  
物理学専攻修士課程入学試験問題

# 物 理 学

平成28年8月22日（月） 13時00分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で6問ある。第1問、第2問、第3問は全員解答すること。さらに第4問、第5問、第6問の中から1問を選んで解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計4枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に受験番号、氏名を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

### 第1問

1次元放物型ポテンシャル中の質量  $m$  の互いに区別できる2粒子を考える。これらの粒子の位置を  $x_1, x_2$  とし、粒子間には距離の2乗に比例した相互作用が働くものとする。このとき、全系を記述するハミルトニアンは次のように与えられる。

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{m\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{m\omega^2\alpha}{4}(x_1 - x_2)^2$$

ここで、 $\omega (> 0)$  はポテンシャルの閉じ込めの強さを表す定数、 $\alpha$  は粒子間の相互作用の強さを表す定数であり、 $\hbar$  はプランク定数を  $2\pi$  で割った量である。以下の設問に答えよ。なお、必要があれば、1次元調和振動子の基底状態の規格化された波動関数が適当な定数  $c (> 0)$  を用いて

$$\left(\frac{c}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{c}{2}x^2}$$

の形に書けること、また、積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

を用いてもよい。

1. ハミルトニアン  $H$  を運動エネルギーの部分  $K$  とそれ以外の部分  $V$  に分け ( $H = K + V$ )、 $K$  と  $V$  をそれぞれ2粒子の重心座標  $x = (x_1 + x_2)/2$  と相対座標  $y = x_1 - x_2$  およびそれらに関する微分を用いて表せ。
2. 設問1の  $V$  に関する結果を用いると、系が安定に存在するための必要十分条件は、 $\alpha_0$  である定数として  $\alpha > \alpha_0$  であることが分かる。 $\alpha_0$  の値を求めよ。
3.  $\alpha > \alpha_0$  の場合に、系の基底状態のエネルギーを求めよ。また、規格化された波動関数を  $x$  と  $y$  の関数として求めよ。

以下では、波動関数の時間依存性を考える。時刻  $t < 0$  で系は  $\alpha = 0$  の基底状態にあったとする。時刻  $t = 0$  で  $\alpha$  の値を突然  $\alpha = \alpha_0$  に変え、その後  $\alpha = \alpha_0$  に保つとする。

4. 時刻  $t = 0$  の系の波動関数  $\Psi(x, y; t = 0)$  を相対座標  $y$  に関するフーリエ変換を用いて

$$\Psi(x, y; t = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} f(x, k) e^{iky}$$

と表す。 $f(x, k)$  を求めよ。

5. 設問4の結果を用いて、時刻  $t (> 0)$  での系の波動関数  $\Psi(x, y; t)$  を求めよ。

## 第2問

温度  $T$  の熱平衡状態にある大きさ  $1/2$  のスピンを考える。スピンと外部磁場  $H$  の相互作用はハミルトニアン  $\mathcal{H}_1 = -\mu H \sigma$  によって記述される。ただし、 $\sigma$  はスピンの向きに応じて  $+1$  または  $-1$  の値をとる変数(スピン変数)で、 $\mu$  はスピンの磁気モーメントの大きさを表す定数である。ボルツマン定数を  $k_B$  として、以下の設問に答えよ。

1. 外部磁場  $H$  のもとで、 $\sigma = +1$  となる確率  $p_+$  および  $\sigma = -1$  となる確率  $p_-$  を求めよ。
2. 外部磁場  $H$  のもとで、 $\sigma$  の期待値が  $\langle \sigma \rangle = \tanh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)$  となることを示せ。

次に図1のような正方格子上で隣接スピン間に交換相互作用  $J$  が働くイジング模型を考える。そのハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_2 = J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu H \sum_i \sigma_i$$

で与えられる。ここで、 $\sigma_i (= \pm 1)$  は格子点  $i$  におけるスピン変数を表し、 $\sum_{\langle i,j \rangle}$  は隣接格子点の組についての和を表す。また、反強磁性相互作用 ( $J > 0$ ) を仮定する。この模型を平均場近似の範囲内で取り扱うことを考える。

3. 正方格子は図1のように1つおきに A, B の2つの格子に分けることができる。平均場近似では、格子 A, B 上のスピンはそれぞれ

$$\mu H_{\text{eff,A}} = -zJ\langle \sigma_B \rangle + \mu H, \quad \mu H_{\text{eff,B}} = -zJ\langle \sigma_A \rangle + \mu H$$

で決まる有効磁場  $H_{\text{eff,A}}, H_{\text{eff,B}}$  を感じると仮定する。ここで  $\langle \sigma_A \rangle, \langle \sigma_B \rangle$  は、それぞれ格子 A, B 上のスピン変数の期待値である。また、 $z$  は隣接スピンの数で、正方格子では  $z = 4$  である。この有効磁場のもとで、格子 A, B 上のスピン変数の期待値を計算すると、 $\langle \sigma_A \rangle$  と  $\langle \sigma_B \rangle$  が満たすべき式(セルフ・コンシステント方程式)はある関数  $f(x)$  を用いて以下の形で表される。

$$\langle \sigma_A \rangle = f(\langle \sigma_B \rangle), \quad \langle \sigma_B \rangle = f(\langle \sigma_A \rangle).$$

$f(x)$  を求めよ。

4.  $H = 0$  のとき、セルフ・コンシステント方程式が反強磁性秩序に対応する解  $\langle \sigma_A \rangle = -\langle \sigma_B \rangle \neq 0$  をもつための条件を考える。 $y = f(x)$  のグラフを考えることで、このような解は、ある転移温度  $T_N$  よりも低温でのみ存在することがわかる。 $T_N$  を求めよ。
5. セルフ・コンシステント方程式を利用して、 $T > T_N$  における1スピンあたりの帯磁率

$$\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{d}{dH} \left( \mu \frac{\langle \sigma_A \rangle + \langle \sigma_B \rangle}{2} \right)$$

を求めよ。

次に図2のような正方格子上的隣接スピン間および対角線方向の隣接スピン間に、それぞれ交換相互作用  $J, J'$  が働くイジング模型を考える。そのハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_3 = J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + J' \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu H \sum_i \sigma_i$$

で与えられる。ここで、 $\sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle}$  は図2の破線で示される対角線方向の隣接格子点の組についての和を表す。ただし、交換相互作用が  $0 < J' < J$  という条件を満たしているとする。

6. 設問3と同様にして2つの格子 A, B を考え、平均場近似を適用して、 $H = 0$  のときのセルフ・コンシステント方程式を書き下せ。また、 $\langle \sigma_A \rangle = -\langle \sigma_B \rangle \neq 0$  となるような反強磁性秩序の転移温度を求めよ。さらに  $J' \rightarrow J$  の極限で転移温度が0となることを示せ。

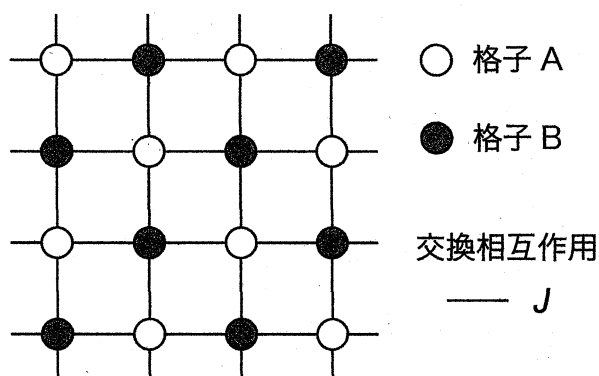


図1

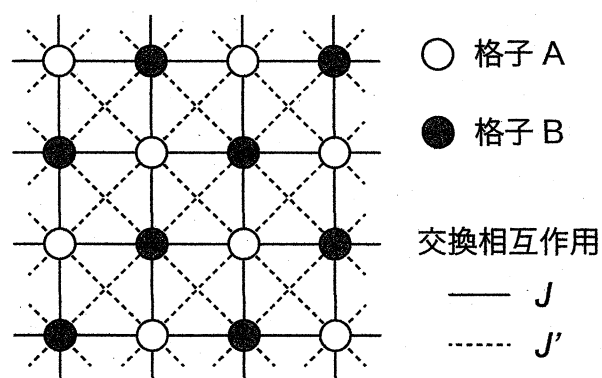


図2

### 第3問

図1のような  $xy$  平面内を運動する二重振り子を考える。ここで、鉛直下向きを  $y$  軸の正の向きとする。原点  $O$  と質点1、質点1と質点2は、長さがそれぞれ  $l_1, l_2$  の質量が無視できる糸でつながれている。質点1、質点2の質量はそれぞれ  $m_1, m_2$  とする。空気抵抗や摩擦、糸のたわみは無視できるとする。また、任意の変数  $q$  の時間微分を  $\dot{q}$  と表す。重力加速度を  $g$  として、以下の設問に答えよ。

1. この系のラグランジアンを、 $m_1, m_2$  とデカルト座標系における質点の座標  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , およびそれらの時間微分  $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2$  を用いて表せ。
2.  $x_1, y_1, x_2, y_2$  を、 $l_1, l_2$ , および、それぞれの糸の鉛直下向きからの角度  $\theta_1, \theta_2$  を用いて表せ。

以下、振動が微小 ( $|\theta_1| \ll 1, |\theta_2| \ll 1$ ) である場合を考え、 $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$  について3次以上の項を無視する。

3. この場合、ラグランジアンは定数を除いて以下の式で表されることを示せ。

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1\theta_1^2 - \frac{1}{2}m_2gl_2\theta_2^2$$

4. 設問3で与えられたラグランジアンから  $\theta_1, \theta_2$  に関する運動方程式を導け。
5.  $\omega$  をこの系の固有角振動数とすると、運動方程式は、 $\theta_1(t) = a_1 \cos \omega t, \theta_2(t) = a_2 \cos \omega t$  の形の解をもつ。ここで、 $a_1, a_2$  は時間によらない係数である。このことを用いて、固有角振動数  $\omega$  を  $g, m_1, m_2, l_1, l_2$  で表せ。

次に  $m_1$  が  $m_2$  に比べて非常に大きい ( $m_1 \gg m_2$ ) 状況を考えよう。

6.  $|l_1 - l_2|$  が  $\sqrt{m_2/m_1}(l_1 + l_2)$  に比べて十分大きく、後者が前者に対して無視できるとき、固有角振動数は  $m_1, m_2$  を含まない形で表される。このとき、全ての固有角振動数と対応する固有モードの係数の組  $(a_1, a_2)$  を求めよ。
7. はじめ、 $l_1 \gg l_2$  として、初期条件  $\theta_1 = \theta_2, \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$  で二重振り子を振動させる。その後、全体の長さ  $l_1 + l_2 = l$  を保ったまま、固有角振動数に比べて非常にゆつくりと  $l_1$  を短くしていく。横軸を  $l_2/l$ , 縦軸を  $g/(\omega^2 l)$  に取り、固有角振動数の変化の様子を図示せよ。また、最終的に  $l_2 \gg l_1$  となった時、質点1が止まり、質点2のみが振動する。その理由を述べよ。

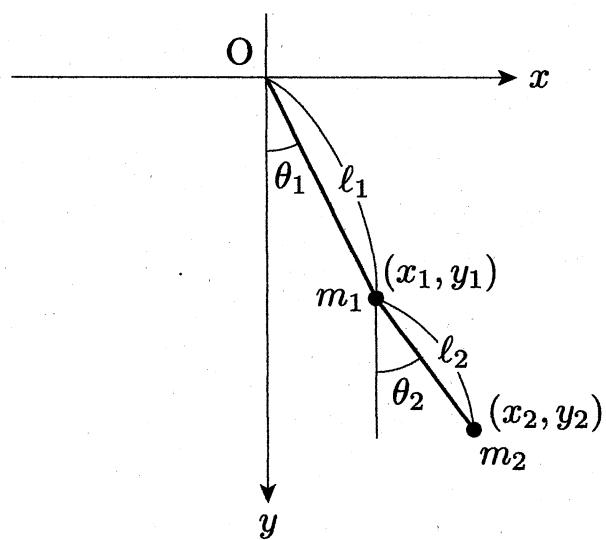


図 1: 二重振り子

#### 第4問

核断熱消磁冷凍機は、核スピンの磁場と温度に対する可逆的変化を利用して超低温を実現する。図1はその模式図である。冷凍機は熱スイッチと銅ブロック、および磁場を印加するための超伝導磁石で構成されている。以下、必要であれば銅の核スピン1 molあたりのエントロピー  $S$  を図2から読み取ること。ただし、気体定数は  $R = 8.3 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  とする。

1. 以下の文章を読んで「ア」～「ウ」に当てはまる数式あるいは値を書け。必要であれば、 $e$  を底として  $\log 2 = 0.69$  としてよい。

銅の安定同位体核はスピン量子数  $I$  をもつ。無磁場下ではスピン準位の縮退度は「ア」である。磁場下ではスピン準位がゼーマン分裂するが、十分高温ではスピンが分裂した準位に等しく分布するため、 $S$  は一定値に飽和する。このとき  $S$  は  $R, I$  を用いて「イ」と書ける。図2と比較して  $I$  の値は「ウ」であることがわかる。

次に、以下の熱力学過程 A, B を順に行った際の本冷凍機の動作を考える。

過程 A: 熱スイッチがオン（熱伝導が十分よい）状態で温度  $T = 10 \text{ mK}$  を維持しながら銅ブロック中の磁束密度  $B$  を  $0 \text{ T}$  から  $8 \text{ T}$  まで増加させる。

過程 B: 熱スイッチをオフ（熱伝導が0）にし、磁束密度  $B$  を  $|dB/dt| = 1.0 \times 10^{-3} \text{ T s}^{-1}$  の速さで  $0.15 \text{ T}$  まで下げる。

核スピン系と格子・電子系とは熱平衡にあるとしてよい。銅ブロック内では空間的に磁場は均一であるとする。以降の設問では解答の有効数字は一桁でよい。

2. 過程 A の等温発熱過程での核スピン系の1 molあたりの発熱量  $\Delta Q$  [ $\text{J mol}^{-1}$ ] を求めよ。
3. 過程 B の断熱冷却過程で到達可能な最低温度を求めよ。ただし、本設問では誘導電流による発熱、格子および電子の比熱を無視する。

過程 B の間、実際の装置では誘導電流による発熱が避けられないため、設問3で求めた超低温を実現するには装置上の工夫が必要である。以下の設問では、過程 B における発熱と冷却能力を考察する。

4. 銅ブロックは軸が磁場方向に平行な円柱であるとする、対称性から円柱の軸を中心として円を描くように渦電流が生じている。渦電流密度  $j(r)$  の大きさを半径  $r$ ,  $dB/dt$ , 銅の電気抵抗率  $\rho$  を用いて表せ。渦電流自身によって生じる磁場は無視してよい。
5.  $dr, dl$  を微小量とする時、円柱の半径  $r$  から  $r+dr$  の間で軸方向に  $dl$  の厚みをもつ微小体積要素内の単位時間あたりの発熱量  $dP$  を  $r, dB/dt, \rho, dr, dl$  を用いて表せ。
6. 銅ブロックが半径  $2 \text{ cm}$ 、高さ  $10 \text{ cm}$  の円柱であるとして渦電流による単位時間あたりの発熱量  $P$  [ $\text{W}$ ] を求めよ。ただし、 $\rho = 1.0 \times 10^{-11} \Omega \text{ m}$  とする。
7. 銅の総量を変化させず、単位時間あたりの発熱量  $P$  を減じるにはどのように銅ブロック部分を改良すればよいか述べよ。

8. 以下の文章を読んで「エ」～「カ」に当てはまる数値を書け。

過程 B の初期段階 ( $B$  が 8 T から 6 T の間) での核スピン系の平均冷却能力 (単位時間あたりの吸熱量)  $C$  を考える。簡単のため、この間 10 mK を保っているとする。このとき  $S$  の単位時間あたりの平均変化量は「エ」  $\text{J K}^{-1} \text{mol}^{-1} \text{s}^{-1}$  である。銅の密度を  $9 \text{ g cm}^{-3}$ , 平均原子量を 64 とすると、設問 6 の銅ブロック中の銅の総量は「オ」 mol であるから、 $C$  は概ね「カ」 W である。超低温冷凍機を実現するには単位時間あたりの発熱量を少なくともこの値より下げる必要があることが分かる。

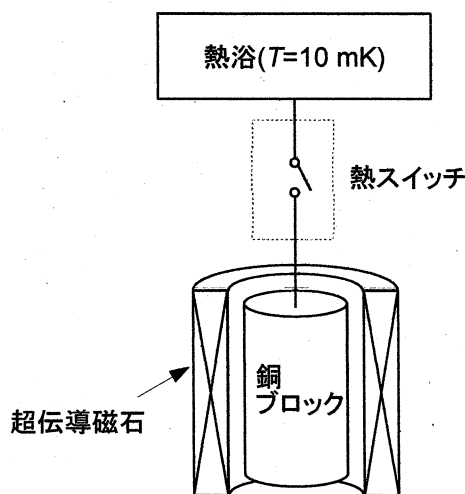


図 1: 核断熱消磁冷凍機の模式図。超伝導磁石は後ろ半分のみを図示している。

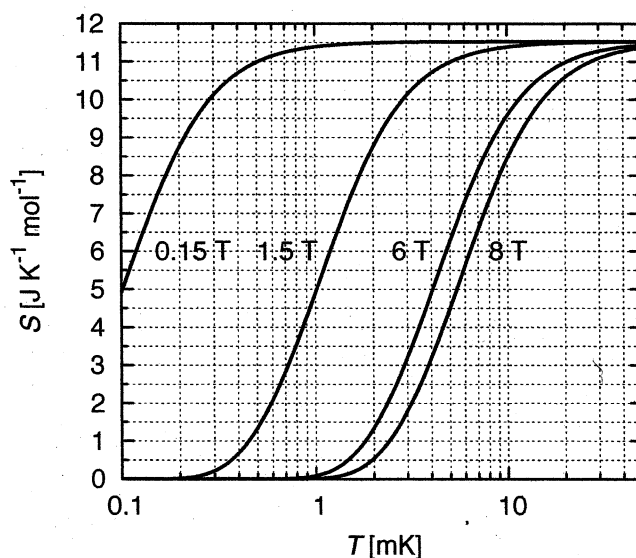


図 2: 磁場下での銅の核スピン 1 mol あたりのエントロピー。図中の数値は磁束密度の値である。



### 第5問

物質中の超高速現象の観測にフェムト秒 ( $10^{-15}$  s) レーザーパルスが広く使われている。ここでは、「モード同期」と呼ばれる方法によってフェムト秒パルスを発生させる原理を簡単なモデルを用いて考察しよう。いま、図1のように間隔  $d$  で平行に設置された2枚の鏡で構成された共振器中に屈折率  $\eta$  のレーザー媒質があるとする。この共振器中に図2のように、レーザー媒質で決まる角周波数の範囲内に、等しい振幅  $E_0$ 、および、等しい角周波数間隔  $\Delta\omega$  の  $N$  個のモード (角周波数と位相でラベルされた成分電場) が存在するとし、その全複素電場を  $E(t) = E_0 \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(\omega_n t + \phi_n)}$  と書く。ここで、 $\omega_n$  は角周波数、 $\phi_n$  はそのモードの位相である。全てのモードを同期させ、同位相で振動させることができたとし、全ての  $n$  に対して  $\phi_n = \phi_0$  と表す。このとき全複素電場は、 $E(t) = E_0 e^{i\phi_0} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\omega_n t}$  で与えられる。以下の設問に答えよ。

1. 共振器中には定在波が立つことに注意して、共振器中に存在する隣り合うモードの角周波数間隔  $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n$  を  $d$ ,  $\eta$ , および、真空中の光速  $c$  を用いて表せ。
2.  $n$  番目のモードの角周波数  $\omega_n$  を角周波数間隔  $\Delta\omega$  を用いて  $\omega_n = \omega_0 + n\Delta\omega$  と表せば、各モードからの  $E(t)$  への寄与は公比  $e^{i\Delta\omega t}$  の等比数列となる。その和を計算した結果として得られる  $E(t)$  の表式を求めよ。
3. いま、光の強度  $I(t)$  を  $I(t) = |E(t)|^2$  と表し、 $E(t)$  に対する設問2の結果を代入すると  $I(t) = E_0^2 \frac{\sin^2(\mathcal{A})}{\sin^2(\mathcal{I})}$  の形に整理できる。アとイに入るべき表式を  $N$ ,  $\Delta\omega$ , および、 $t$  を用いて答えよ。ただし、 $I(t)$  の表式の分母がゼロとなる点での関数値は、その極限值で定義されるものとする。

$I(t)$  は周期的に最大値をとり、それがモード同期によって発生する超短パルスに相当する。 $I(t)$  が最大値をとる時刻の一つは  $t = 0$  であることに注意して以下の設問に答えよ。

4. 設問3で得られた光の強度  $I(t)$  の最大値を求めよ。また、得られた光強度の最大値は、各モードの位相が全くランダムな時のおおよそ何倍となるか答えよ。
5. 設問3の結果から、 $I(t)$  が最大値をとる時刻は  $m$  を整数として  $t = m\Delta t_{\text{sep}}$  と表される。 $\Delta t_{\text{sep}}$  を  $\Delta\omega$  を用いて表せ。
6. 実際には  $N$  は非常に大きな数であるが、簡単のため  $N = 5$  とする。設問3から5の結果に基づいて、 $\frac{I(t)}{E_0^2}$  のグラフの概形を描け。
7. モード同期によって発生する超短パルスのパルス幅  $\Delta t_p$  を  $I(t)$  が最大値をとった時刻から最初に0となる時刻までの時間と定義する。 $\Delta t_p$  を  $\Delta\omega$ , および、 $N$  を用いて表せ。一方、レーザー媒質が増幅作用をもつ帯域幅  $\Delta\nu$  は  $N\Delta\omega/(2\pi)$  で与えられる。 $\Delta t_p$  と  $\Delta\nu$  の関係を求め、その物理的意味を簡潔に述べよ。

8. モード同期によって発生した超短パルスを共振器外（真空中）に取り出したときの波長範囲が  $560 \sim 640 \text{ nm}$  であった。このとき、レーザー媒質が増幅作用をもつ帯域幅  $\Delta\nu [\text{s}^{-1}]$  を求め、さらに設問 7 の結果を用いてモード同期によって発生するフェムト秒パルスのパルス幅  $\Delta t_p$  を求めよ。ただし、真空中の光速を  $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  とする。

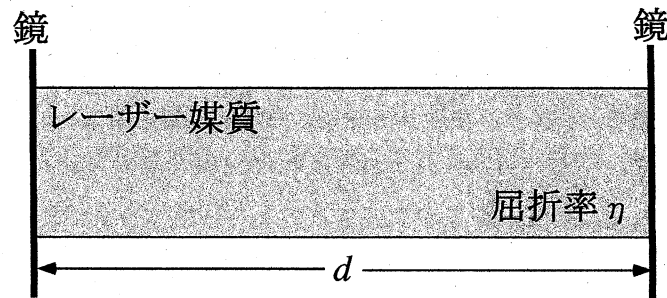


図 1: 間隔  $d$  で平行に設置された 2 枚の鏡で構成された共振器中に屈折率  $\eta$  のレーザー媒質がある。

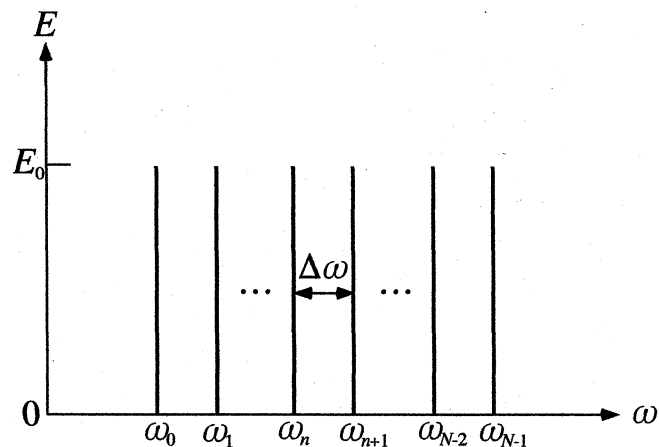


図 2: レーザー媒質で決まる角周波数の範囲内に、等しい振幅  $E_0$ 、および、等しい角周波数間隔  $\Delta\omega$  の  $N$  個のモード（角周波数と位相でラベルされた成分電場）が存在する。

## 第6問

高エネルギーの宇宙線が大気中の原子核に衝突すると多数のパイ中間子がつくられ、その崩壊からニュートリノ（大気ニュートリノ）が生成される。荷電パイ中間子（ $\pi^\pm$ ）は寿命 26 ns で

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (1)$$

と崩壊し、さらにミュー粒子（ $\mu^\pm$ ）は寿命 2.2  $\mu\text{s}$  で

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e, \quad \mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \quad (2)$$

と崩壊する。ここで、 $\nu_\mu$ ,  $\bar{\nu}_\mu$ ,  $\nu_e$ ,  $\bar{\nu}_e$ ,  $e^-$ ,  $e^+$  はそれぞれミュー型ニュートリノ、ミュー型反ニュートリノ、電子型ニュートリノ、電子型反ニュートリノ、電子、陽電子を表す。以下の設問に答えよ。真空中の光速を  $c$ 、プランク定数  $h$  を  $2\pi$  で割った量を  $\hbar$  とし、 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $\hbar c = 200 \text{ MeV fm}$  とする。なお、答えだけでなく、導出の過程も示すこと。

- 運動量 5.30 GeV/c をもつ  $\mu^+$  粒子が生成されてから崩壊するまでに飛行する距離の平均値を、相対論的効果を考慮して求めよ。 $\mu^+$  粒子の質量は 106 MeV/c<sup>2</sup> とし、物質中でのエネルギー損失は考えないとする。

まず、生成後のニュートリノの種類は変わらないとして、大気ニュートリノの観測について考える。あるエネルギー範囲で観測される  $\nu_\mu$ ,  $\bar{\nu}_\mu$ ,  $\nu_e$ ,  $\bar{\nu}_e$  の数をそれぞれ  $N_{\nu_\mu}$ ,  $N_{\bar{\nu}_\mu}$ ,  $N_{\nu_e}$ ,  $N_{\bar{\nu}_e}$  とし、「ミュー型」の数と「電子型」の数の比  $R$  を  $R \equiv (N_{\nu_\mu} + N_{\bar{\nu}_\mu}) / (N_{\nu_e} + N_{\bar{\nu}_e})$  と定義する。

- 大気の上層で宇宙線によって生成される  $\pi^\pm$  からの崩壊系列（上式 (1), (2)）の寄与だけを考えればよいとして、エネルギーが十分低い（1 GeV 以下）大気ニュートリノに対する地上付近での  $R$  の値を予想せよ。さらに、よりエネルギーの高い大気ニュートリノに対して  $R$  の値がどうなるか、理由とともに簡潔に述べよ。

設問2ではニュートリノの種類は変わらないと仮定したが、飛行中にニュートリノの種類が変化するニュートリノ振動という現象が起こることが知られている。以下では、簡単のためニュートリノの種類が2つしかないとして、ニュートリノ振動について考えよう。ニュートリノ振動は、ニュートリノの弱い相互作用の固有状態（電子型、ミュー型など、対になる荷電レプトンの種類に対応）と質量の固有状態（エネルギーの固有状態に対応）が異なることが原因で起きる。弱い相互作用の固有状態を  $|\nu_\alpha\rangle$  と  $|\nu_\beta\rangle$ 、質量の固有状態を  $|\nu_1\rangle$  と  $|\nu_2\rangle$ （対応する質量はそれぞれ  $m_1$  と  $m_2$ ）とすると、それらの関係は「混合角」と呼ばれるパラメータ  $\theta$  を用いて以下のように表される。

$$\begin{pmatrix} |\nu_\alpha\rangle \\ |\nu_\beta\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} \quad (3)$$

- 時刻  $t = 0$  で  $|\nu_\alpha\rangle$  として生成された、運動量  $p$  をもつニュートリノの時間発展を考える。 $|\nu_1\rangle$ ,  $|\nu_2\rangle$  の状態に対応するエネルギーをそれぞれ  $E_i = \sqrt{p^2 c^2 + m_i^2 c^4}$  ( $i = 1, 2$ ) とし、このニュートリノの時刻  $t = T$  での状態が、

$$|\psi(T)\rangle = e^{-iE_1 T/\hbar} \cos \theta |\nu_1\rangle + e^{-iE_2 T/\hbar} \sin \theta |\nu_2\rangle \quad (4)$$

と表されるとする。 $|\psi(T)\rangle$  を、 $\theta$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $T$ , および  $\hbar$  を用いて、 $|\nu_\alpha\rangle$ ,  $|\nu_\beta\rangle$  の線形結合として表せ。

4. 設問3で考えたニュートリノを、生成点から距離  $L$  のところで観測することを考える。ニュートリノはほぼ光速で運動するため、距離  $L$  を進むために要する時間  $T$  は、 $T = \frac{L}{c}$  としてよい。さらに、 $p \gg m_1c, m_2c$  であり、 $E_i = \sqrt{p^2c^2 + m_i^2c^4} \simeq pc + \frac{m_i^2c^4}{2pc} \simeq pc + \frac{m_i^2c^4}{2E}$  としてよいとする。ここで、 $E \equiv \frac{E_1 + E_2}{2}$  である。このとき、 $\Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$  と定義すると、このニュートリノが  $\nu_\alpha$  として観測される確率が、以下の式 (5) で表されることを示せ。

$$1 - \sin^2 2\theta \cdot \sin^2 \left[ \frac{\Delta m^2 c^3 L}{4\hbar E} \right] \quad (5)$$

図1は、大気ニュートリノの観測データからミュー型ニュートリノによる事象を選び出したとき、「観測された事象数」と「ニュートリノ振動がなくニュートリノの種類が変化しないと仮定した場合の予想事象数」との比  $r$  を示したものである。横軸は各事象で推定されたニュートリノの飛行距離 ( $L$ ) とエネルギー ( $E$ ) の比を対数スケールで表しており、各点は、ある  $L/E$  の範囲での  $r$  の平均値を示している。

5. 図1に示されたデータから、ニュートリノ振動が存在することが統計的に有意にわかる。このニュートリノ振動に対応する  $\Delta m^2 c^4$  の値を、 $\text{eV}^2$  の単位で有効数字1桁で求めよ。

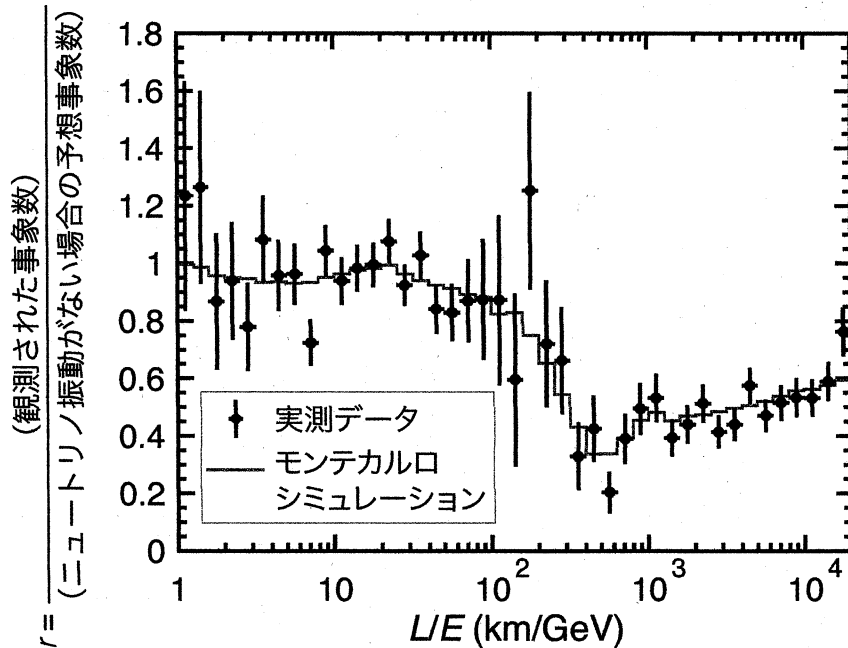


図1: スーパーカミオカンデ検出器で観測された大気ニュートリノ事象のデータ。実線はニュートリノ振動の効果を考慮し、測定状況や分解能を反映したモンテカルロシミュレーションを行って得た  $r$  の予想値を表す。Y. Ashie *et al.* (Super-Kamiokande Collaboration), Phys. Rev. Lett. **93**, 101801 (2004) の Fig. 4 をもとに作成。