

東京大学 平成31年 物理学専攻 院試 解答例

ミヤネ

最終更新：2023 年 8 月 21 日

目次

1	数学パート	2
	問題 1: 線形代数	2
	問題 2: 微積分	5
2	物理パート	10
	問題 1: 量子力学	10
	問題 2: 統計力学	15
	問題 3: 力学	19
	問題 6: 電磁気学	22

1 数学パート

第1問

1. (i) エルミートであること
エルミート共役をとれば

$$\begin{aligned}(i[A, B])^\dagger &= -i(AB - BA)^\dagger \\ &= -i(B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger) \\ &= i(AB - BA)\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

なので、エルミート性が示された^{*1}.

トレースレスであること

行列 AB の対角成分は

$$\text{tr } AB = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji} = \text{tr } BA\tag{1.1.2}$$

なので、 $\text{tr}[A, B] = 0$ である.

- (ii) UU^\dagger を計算すれば

$$UU^\dagger = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iA)^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-iA)^l}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iA)^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iA)^n}{n!} \cdot (1-1)^n = 1\tag{1.1.3}$$

である^{*2}. なお、 $n = k + l$ で足し合わせ、 $n = 0$ は別で計算して $n \geq 1$ は二項定理を用いた.

- (iii) 計算すれば

$$\det U = \det 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\det A)^n}{n!} = 1\tag{1.1.5}$$

である.

2. それぞれ

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\tag{1.1.6}$$

である.

^{*1} ここで、 $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ を用いています.

^{*2} これと同じノリで

$$e^A e^B = e^{A+B}\tag{1.1.4}$$

を示せるはず.

3. $[T_7, T_1]$ は

$$\begin{aligned}
[T_7, T_1] &= T_7 T_1 - T_1 T_7 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= iT_2
\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

なので, $A_{71,2} = 1$ である.

同様に

$$T_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.1.8}$$

なので

$$[T_5, T_6] = 2i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2iT_8 \tag{1.1.9}$$

より $A_{56,8} = 2$ である.

4. (i) T はエルミートなので

$$\begin{aligned}
G'_a &= x^\dagger U^\dagger T_a U y \\
&= x^\dagger e^{-i\theta T} T_a e^{i\theta T} y \\
&= x^\dagger (1 - i\theta T + \mathcal{O}(\theta^2)) T_a (1 + i\theta T + \mathcal{O}(\theta^2)) y \\
&= x^\dagger T_a y + i\theta x^\dagger [T_a, T] y + \mathcal{O}(\theta^2) \\
&= x^\dagger T_a y + i\theta \sum_{b=1}^8 \left(\sum_{c=1}^8 i\alpha_c A_{ac,b} \right) G_b + \mathcal{O}(\theta^2)
\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

なので,

$$H_{ab} = \sum_{c=1}^8 i\alpha_c A_{ac,b} \tag{1.1.11}$$

である.

(ii) x'_j, y'_k を計算すると,

$$x'_j = U_{ja} x_a = x_j + i\theta T_{ja} x_a + \mathcal{O}(\theta^2), \quad y'_k = y_k + i\theta T_{kb} y_b + \mathcal{O}(\theta^2) \tag{1.1.12}$$

なので

$$\begin{aligned}
z'_i &= \varepsilon_{ijk} \{x_j + i\theta T_{ja} x_a + \mathcal{O}(\theta^2)\} \{y_k + i\theta T_{kb} y_b + \mathcal{O}(\theta^2)\} \\
&= z_i + i\theta \varepsilon_{ijk} \{T_{ja} x_a y_k + T_{kb} x_j y_b\} + \mathcal{O}(\theta^2)
\end{aligned} \tag{1.1.13}$$

である. ここで

$$\varepsilon_{abi} z_i = \varepsilon_{abi} \varepsilon_{ijk} x_j y_k = x_a y_b - x_b y_a \tag{1.1.14}$$

であり,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} \{T_{ja}x_ay_k + T_{kb}x_jy_b\} &= \varepsilon_{ijk} \{T_{ja}x_ay_k - T_{ja}x_ky_a\} \\ &= \varepsilon_{ijk}T_{ja} [x_ay_k - x_ky_a] = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kac}T_{ja}z_c\end{aligned}\tag{1.1.15}$$

なので

$$i\theta\varepsilon_{ijk} \{T_{ja}x_ay_k + T_{kb}x_jy_b\} = i\theta\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kac}T_{ja}z_c =: i\theta M_{ic}z_c\tag{1.1.16}$$

より

$$M_{ij} = \varepsilon_{ilk}\varepsilon_{kaj}T_{la} = T_{ji} - T_{ij}\tag{1.1.17}$$

である^{*3}.

^{*3} いろいろごちゃごちゃしてしまいました。もう少しスマートに答えられるはずですが。

第2問

1. 微分方程式は

$$\frac{d^2 f_\alpha^{(n)}}{dx^2} = -(m_\alpha^2 + \lambda_\alpha^{(n)}) f_\alpha^{(n)} \quad (1.2.1)$$

なので, $\omega_\alpha := m_\alpha^2 + \lambda_\alpha^{(n)}$ とすれば, 一般解は

$$f_\alpha^{(n)}(x) = A e^{i\omega x} + B e^{-i\omega x} \quad (1.2.2)$$

である. 境界条件は

$$\cos \omega_\alpha \pi = 0, \quad A = B \quad (1.2.3)$$

であり, 規格化はしないので $A = 1$ とすれば

$$\omega_\alpha = n + \frac{1}{2} \quad (1.2.4)$$

であり, 固有値は

$$\lambda_\alpha^{(n)} = -m_\alpha^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \quad (1.2.5)$$

であり, 固有関数は

$$f_\alpha^{(n)}(x) = 2 \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x \quad (1.2.6)$$

である.

2. (i) $\log(\lambda^{-s}) = -s \log \lambda$ の両辺を s で微分して整理すれば

$$(\lambda^{-s})' = -\lambda^{-s} \log \lambda \quad (1.2.7)$$

である.

(ii) $Z'(0)$ を計算すると

$$Z'(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\log \frac{\lambda_1^n}{\lambda_2^n} \right] = \log \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{\lambda_2^n} \quad (1.2.8)$$

なので

$$D = e^{-Z'(0)} \quad (1.2.9)$$

である.

(iii) 微分方程式の解は, 1. と同様にして

$$g_\alpha(x; \lambda) = A e^{i\omega x} + B e^{-i\omega x} \quad (1.2.10)$$

なので, これに初期条件を代入すれば

$$A + B = 1, \quad A = B \quad (1.2.11)$$

となるので, 求める解は

$$g_\alpha(x; \lambda) = \cos \omega x, \quad \omega := \sqrt{m_\alpha^2 + \lambda} \quad (1.2.12)$$

である.

(iv) $\tilde{g}'_\alpha/\tilde{g}_\alpha$ は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tilde{g}_\alpha(\lambda)} \frac{d\tilde{g}_\alpha(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{1}{k_\alpha^{(n)}(\lambda - \lambda_\alpha^{(n)}) + \mathcal{O}[(\lambda - \lambda_\alpha^{(n)})^2]} \cdot \left(k_\alpha^{(n)} + \mathcal{O}[(\lambda - \lambda_\alpha^{(n)})]\right) \\ &= \frac{1 + \mathcal{O}[\lambda - \lambda_\alpha^{(n)}]}{\lambda - \lambda_\alpha^{(n)} + \mathcal{O}[(\lambda - \lambda_\alpha^{(n)})^2]} = \frac{1}{\lambda - \lambda_\alpha^{(n)}}\end{aligned}\quad (1.2.13)$$

である。したがって、留数定理より

$$\int_C \lambda^{-s} \left[\frac{1}{\lambda - \lambda_2^n} - \frac{1}{\lambda - \lambda_1^n} \right] d\lambda = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\lambda_2^{(n)}\right)^{-s} - \left(\lambda_1^{(n)}\right)^{-s} \right] = 2\pi i Z(s) \quad (1.2.14)$$

である。よって、 $A = 1/2\pi i$ であり、

$$Z(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^{-s} \left[\frac{1}{\tilde{g}_2(\lambda)} \frac{d\tilde{g}_2(\lambda)}{d\lambda} - \frac{1}{\tilde{g}_1(\lambda)} \frac{d\tilde{g}_1(\lambda)}{d\lambda} \right] d\lambda \quad (1.2.15)$$

である。

(v) (1.2.15)より、 $Z'(0)$ は

$$Z'(0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \log \lambda \left[\frac{1}{\tilde{g}_2(\lambda)} \frac{d\tilde{g}_2(\lambda)}{d\lambda} - \frac{1}{\tilde{g}_1(\lambda)} \frac{d\tilde{g}_1(\lambda)}{d\lambda} \right] d\lambda \quad (1.2.16)$$

である^{*4}。この経路で計算するとき、 C_{in} のときの λ の偏角が θ で、 C_{out} のときの λ の偏角が $\theta - 2\pi$ であることに気をつければ

$$\begin{aligned}& \int_C \log \lambda \left[\frac{1}{\tilde{g}_2(\lambda)} \frac{d\tilde{g}_2(\lambda)}{d\lambda} - \frac{1}{\tilde{g}_1(\lambda)} \frac{d\tilde{g}_1(\lambda)}{d\lambda} \right] d\lambda \\ &= \int_{C_{\text{in}}} + \int_{C_{\text{out}}} \\ &= \int_0^\infty \log(Re^{i\theta}) \left[\dots \right] d(Re^{i\theta}) + \int_0^\infty \log(Re^{i(\theta-2\pi)}) \left[\dots \right] d(Re^{i(\theta-2\pi)}) \\ &= 2\pi i \int_{C_{\text{in}}} \left[\frac{1}{\tilde{g}_2} \frac{d\tilde{g}_2}{d\lambda} - \frac{1}{\tilde{g}_1} \frac{d\tilde{g}_1}{d\lambda} \right] d\lambda\end{aligned}\quad (1.2.17)$$

となる^{*5}。この積分はもはや極などとは関係なく λ を $0 \rightarrow \infty \cdot e^{i\theta}$ で積分してよいので、

$$\begin{aligned}& \int_0^{\infty \cdot e^{i\theta}} \left[\frac{d}{d\lambda} [\log \tilde{g}_2(\lambda)] - \frac{d}{d\lambda} [\log \tilde{g}_1(\lambda)] \right] d\lambda \\ &= \log \tilde{g}_2(\infty \cdot e^{i\theta}) - \log \tilde{g}_2(0) - \log \tilde{g}_1(\infty \cdot e^{i\theta}) + \log \tilde{g}_1(0)\end{aligned}\quad (1.2.18)$$

である。ここで、

$$\tilde{g}_\alpha(\infty \cdot e^{i\theta}) = \cos\left(\pi \sqrt{m_\alpha^2 + \infty \cdot e^{i\theta}}\right) \sim \cos\left(\pi \sqrt{\infty \cdot e^{i\theta}}\right) \quad (1.2.19)$$

なので、 $\tilde{g}_\alpha(\infty \cdot e^{i\theta})$ の引き算は消去できて

$$Z'(0) \sim \log \frac{\tilde{g}_2}{\tilde{g}_1} \quad (1.2.20)$$

である。

^{*4} もちろん、この式変形が許されているかどうかはわかりませんが、少なくとも経路上では解析的なのでいいんじゃないかと思えます。

^{*5} もう少し丁寧に言うと、 $\log(Re^{i(\theta-2\pi)}) = \log(Re^{i\theta}) - 2\pi i$ です。

(vi) 具体的に計算すると

$$Z'(0) = \log \frac{\cos \pi m_2}{\cos \pi m_1} \quad (1.2.21)$$

なので, (1.2.9)に代入すれば

$$D = \frac{\cos \pi m_1}{\cos \pi m_2} \quad (1.2.22)$$

である^{*6}.

補足

- ブランチカットを気にするべき例題は

$$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^3} dx \quad (1.2.23)$$

とかでしょうか. これは図1.1のような経路をとりますが, Γ_2 のところの積分で少し注意が必要です.

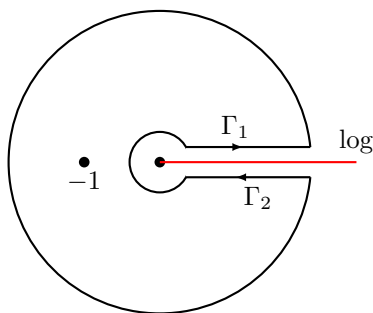


図1.1 積分路

この積分(1.2.23)をもとめるためには, すこしテクニカルではありますが

$$f(z) = \frac{(\log z)^2}{(1+z)^3} \quad (1.2.24)$$

を図1.1で積分します. 経路のうち, 外側の経路の寄与は無視できるので

$$\int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f = 2\pi i \operatorname{Res}[f, -1] \quad (1.2.25)$$

です. $z = -1$ が3位の極であることから, n 位の極に対する公式

$$\operatorname{Res}[f, a] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)] \quad (1.2.26)$$

^{*6} $m_\alpha < 1/2$ なのは, \log の中に \cos が入ってくるからです.

を用いれば^{*7},

$$2\pi i \operatorname{Res}[f, -1] = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} [(\log z)^2] = 2\pi i(1 - i\pi) \quad (1.2.27)$$

です。さて、経路の部分ですが、 Γ_1 の部分は普通に

$$\int_{\Gamma_1} f = \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(1+x)^3} dx \quad (1.2.28)$$

でよいです。問題は Γ_2 での積分なのですが、ここで積分するときは、 z の偏角は $2\pi i$ であることに注意しなくてはなりません^{*8}。つまり

$$\int_{\Gamma_2} f = \int_\infty^0 \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{(1+x)^3} dx = - \int_0^\infty \frac{(\log x)^2 + 4\pi i \log x - 4\pi^2}{(1+x)^3} dx \quad (1.2.29)$$

となっています。あとは、(1.2.25)を計算するだけで

$$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^3} dx = -\frac{1}{2} \quad (1.2.30)$$

ととまります。少し $f(z)$ を不気味な形にしてみました、あれでうまくいきました。

- (1.2.19)の引き算が0とできることですが、ちゃんとやるためには

$$\tilde{g}_\alpha(\lambda) = \frac{e^{i\pi\sqrt{m_\alpha^2+\lambda}} + e^{-i\pi\sqrt{m_\alpha^2+\lambda}}}{2} \quad (1.2.31)$$

として、うまくいくことを言わなくてはなりません。第1項は

$$\begin{aligned} e^{i\pi\sqrt{m_\alpha^2+\lambda}} &= \exp \left[i\pi \exp \left[\frac{1}{2} \log(m_\alpha^2 + \lambda) \right] \right] \\ &= \exp \left[i\pi \exp \left[\frac{1}{2} (\log |m_\alpha^2 + \lambda| + i\pi \arg(m_\alpha^2 + \lambda)) \right] \right] \\ &= \exp \left[i\pi e^{\frac{1}{2} \log |m_\alpha^2 + \lambda|} (\cos(\pi \arg(m_\alpha^2 + \lambda)/2) + i \sin(\pi \arg(m_\alpha^2 + \lambda)/2)) \right] \\ &= e^{-\pi \sqrt{|m_\alpha^2 + \lambda|} \sin(\pi \arg(m_\alpha^2 + \lambda)/2)} \cdot e^{i\pi \sqrt{|m_\alpha^2 + \lambda|} \cos(\pi \arg(m_\alpha^2 + \lambda)/2)} \end{aligned}$$

ですが、 $\lambda \rightarrow \infty \cdot e^{i\theta}$ のときは、ちゃんと $\sqrt{|m_\alpha^2 + \lambda|} \sin(\pi \arg(m_\alpha^2 + \lambda)/2) \rightarrow \infty$ なので、この項は0に行ってくれます。よって、第2項の引き算を考えればよくて、

$$\begin{aligned} &|e^{-i\pi\sqrt{m_2^2+\lambda}} - e^{-i\pi\sqrt{m_1^2+\lambda}}|^2 \\ &= |e^{\pi\sqrt{|m_2^2+\lambda|} \sin(\pi \arg(m_2^2+\lambda)/2)} \cdot e^{i\pi \log \sqrt{|m_2^2+\lambda|} \cos(\pi \arg(m_2^2+\lambda)/2)} \\ &\quad - e^{\pi\sqrt{|m_1^2+\lambda|} \sin(\pi \arg(m_1^2+\lambda)/2)} \cdot e^{i\pi \log \sqrt{|m_1^2+\lambda|} \cos(\pi \arg(m_1^2+\lambda)/2)}|^2 \end{aligned}$$

^{*7} この公式の証明は案外簡単で、 $f(z)$ のローラン展開

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

のなかから a_{-1} だけを取り出すために $(z-a)^n f(z)$ を計算して、 $n-1$ 階だけ微分してやります。あとは、

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

とすだけです。

^{*8} もちろん大丈夫だと思いますが、

$$\log z = \log |z| + i \arg z$$

です。実は先ほどの留数の計算でもこっそりと用いてました。

ですが、これを実部虚部に分けると

$$\begin{aligned}
& |e^{\pi\sqrt{|m_2^2+\lambda|}\sin(\pi\arg(m_2^2+\lambda)/2)} \cdot e^{i\pi\log\sqrt{|m_2^2+\lambda|}\cos(\pi\arg(m_2^2+\lambda)/2)} \\
& \quad - e^{\pi\sqrt{|m_1^2+\lambda|}\sin(\pi\arg(m_1^2+\lambda)/2)} \cdot e^{i\pi\log\sqrt{|m_1^2+\lambda|}\cos(\pi\arg(m_1^2+\lambda)/2)}|^2 \\
& = \left(e^{\pi\sqrt{|m_2^2+\lambda|}\sin(\pi\arg(m_2^2+\lambda)/2)} \cos\left(\pi\log\sqrt{|m_1^2+\lambda|}\cos(\pi\arg(m_1^2+\lambda)/2)\right) \right. \\
& \quad \left. - e^{\pi\sqrt{|m_1^2+\lambda|}\sin(\pi\arg(m_1^2+\lambda)/2)} \cos\left(\pi\log\sqrt{|m_2^2+\lambda|}\cos(\pi\arg(m_2^2+\lambda)/2)\right) \right)^2 \\
& \quad + \left(e^{\pi\sqrt{|m_2^2+\lambda|}\sin(\pi\arg(m_2^2+\lambda)/2)} \sin\left(\pi\log\sqrt{|m_1^2+\lambda|}\cos(\pi\arg(m_1^2+\lambda)/2)\right) \right. \\
& \quad \left. - e^{\pi\sqrt{|m_1^2+\lambda|}\sin(\pi\arg(m_1^2+\lambda)/2)} \sin\left(\pi\log\sqrt{|m_2^2+\lambda|}\cos(\pi\arg(m_2^2+\lambda)/2)\right) \right)^2
\end{aligned} \tag{1.2.32}$$

であり、これらの項がそれぞれ0に収束することを確認すればよいです。 $\lambda \rightarrow \infty \cdot e^{i\theta}$ のとき、 \arg は θ に漸近することが、複素平面での考察からわかり、また、 $\sqrt{|m_1^2+\lambda|}$ と $\sqrt{|m_2^2+\lambda|}$ は同じ速度で発散するので、この考察から、それぞれの項が0になります*⁹。 よって、

$$\tilde{g}_2(\lambda) - \tilde{g}_1(\lambda) \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty \cdot e^{i\theta}) \tag{1.2.33}$$

です*¹⁰。

*⁹ それぞれの項が収束するのめちゃんと示したいのですが、ちょっと無理でした。

*¹⁰ さすがに試験中はここまでする必要はないと思いますが。

2 物理パート

第1問

1. 計算すれば

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (2.1.1)$$

$$[N, a] = -a \quad (2.1.2)$$

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger \quad (2.1.3)$$

である。また、 $\alpha = 1, \beta = 1/2$ である。

2. N の固有状態と固有値をそれぞれ $|\lambda\rangle, \lambda$ としておく。非負であることは、

$$\|a|\lambda\rangle\|^2 = \langle\lambda|N|\lambda\rangle = \lambda \geq 0 \quad (2.1.4)$$

からわかる。また、 a が

$$a|\lambda\rangle \propto |\lambda-1\rangle \quad (2.1.5)$$

であることから、

$$N|\lambda\rangle = 0 \quad (2.1.6)$$

という固有値0の状態が存在しないと固有値が負になることが許されてしまうため、固有値が0の状態 $|0\rangle$ が存在し、固有値は整数になる。

3. エネルギーは

$$H|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle \quad (2.1.7)$$

で、固有状態は

$$a|n\rangle = c|n-1\rangle \quad (2.1.8)$$

とすれば

$$n = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = |c|^2 \quad (2.1.9)$$

より、 $c = 1/\sqrt{n}$ なので

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (2.1.10)$$

である。

4. (i) H の固有状態が $|\psi_l\rangle$ とすると

$$H|\psi_l\rangle = E_\lambda |\psi_l\rangle \quad (2.1.11)$$

であり、これらを展開すると

$$\begin{cases} |\psi_l\rangle &= |l\rangle + |l^{(1)}\rangle + |l^{(2)}\rangle + \dots \\ E_l &= E_l^{(0)} + E_l^{(1)} + E_l^{(2)} + \dots \end{cases} \quad (2.1.12)$$

であり、(2.1.11)に代入すれば

$$(H_0 + V)(|l\rangle + |l^{(1)}\rangle + |l^{(2)}\rangle + \dots) = (E_l^{(0)} + E_l^{(1)} + E_l^{(2)} + \dots)(|l\rangle + |l^{(1)}\rangle + |l^{(2)}\rangle + \dots) \quad (2.1.13)$$

である。 $H_0 |l\rangle = E_l^{(0)} |l\rangle$ に気をつければ、1次と2次の項は

$$\begin{cases} \text{1次} & : V |l\rangle + H_0 |l^{(1)}\rangle = E_l^{(0)} |l^{(1)}\rangle + E_l^{(1)} |l\rangle \\ \text{2次} & : V |l^{(1)}\rangle + H_0 |l^{(2)}\rangle = E_l^{(0)} |l^{(2)}\rangle + E_l^{(1)} |l^{(1)}\rangle + E_l^{(2)} |l\rangle \end{cases} \quad (2.1.14)$$

である。第1式に $\langle l|$ をかければ

$$E_n^{(1)} = V_{nn} \quad (2.1.15)$$

であり、(2.1.14)の第1式に $\langle j|$ ($j \neq l$) をかければ^{*11}

$$\langle j|l^{(1)}\rangle = \frac{V_{jl}}{E_l^{(0)} - E_j^{(0)}} \quad (2.1.16)$$

なので、(2.1.14)の第2式から

$$E_l^{(2)} = \sum_{k \neq l} \frac{|V_{kl}|^2}{E_l^{(0)} - E_k^{(0)}} \quad (2.1.17)$$

である。

(ii) $V_{k0} = \langle k|V|0\rangle$ なので、

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \quad (2.1.18)$$

に注意すれば

$$V_{k0} = \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \langle k|(a + a^\dagger)^4|0\rangle = \begin{cases} 2 \cdot \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 & (k=0) \\ 3 \cdot \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 & (k=2) \\ \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 & (k=4) \end{cases} \quad (2.1.19)$$

である^{*12}。よって、(2.1.16),(2.1.17)より

$$E_l^{(1)} = 2 \cdot \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \quad (2.1.20)$$

$$E_l^{(2)} = -\frac{19}{64} \cdot \frac{\lambda^2 \hbar^3}{m^4 \omega^5} \quad (2.1.21)$$

である^{*13}。

^{*11} ここで、 $|l\rangle$ と $|l^{(1)}\rangle$ は直交しますが、 $|j\rangle$ と $|l^{(1)}\rangle$ は必ずしも直交しないことに注意しましょう。

^{*12} 実際に計算すればわかりますが、 $(a + a^\dagger)^4$ を展開したときに出てくるもので、許されるのは

$$\begin{aligned} &aaa^\dagger a^\dagger, \quad aa^\dagger aa^\dagger, \quad aa^\dagger a^\dagger a^\dagger, \\ &a^\dagger aa^\dagger a^\dagger, \quad a^\dagger a^\dagger aa^\dagger, \quad a^\dagger a^\dagger a^\dagger a^\dagger \end{aligned}$$

です。他のものは、 $a|0\rangle = 0$ で消えてしまいます。

^{*13} 特に2次はおどろおどろしいですが、次元は

$$\frac{[M]^2[L]^{-4}[T]^{-4} \cdot [M]^3[L]^6[T]^{-3}}{[M]^4[T]^{-5}} = [M][L]^2[T]^{-2}$$

でちゃんとエネルギーです。(λの次元にはよく注意しましょう。)

5. 次の等式

$$E_n = V(x) \quad (2.1.22)$$

を満たす転回点を $x_0, -x_0$ とすると^{*14}

$$\int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{E_n - \left(\frac{m\omega^2}{2}x^2 + \lambda x^4 \right)} dx = \pi \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.1.23)$$

が量子化条件である。この積分は、図2.1の灰色の部分の面積に対応する^{*15}。

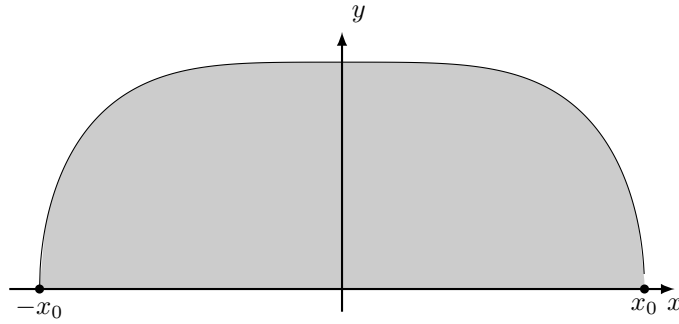


図2.1 積分の値

今、 E の値が大きい状態を考えるので、被積分関数を

$$\sqrt{E_n - \left(\frac{m\omega^2}{2}x^2 + \lambda x^4 \right)} \sim \sqrt{E_n} \left\{ 1 - \frac{1}{2E_n} \left(\frac{m\omega^2}{2}x^2 + \lambda x^4 \right) \right\} \quad (2.1.24)$$

と近似すれば積分は、積分と E_n が関係なくなるので、(2.1.23)はおおよそ

$$\sqrt{E_n} - A \cdot \frac{1}{\sqrt{E_n}} \sim n \quad (2.1.25)$$

となる。ただし、 A は定数。これは、ほとんど

$$(\sqrt{E_n})^2 - n\sqrt{E_n} - A \sim 0 \quad (2.1.26)$$

であり、これは $\sqrt{E_n}$ についての2次方程式なので

$$\sqrt{E_n} \propto n \quad (2.1.27)$$

であり、これは結局

$$E_n \propto n^2 \quad (2.1.28)$$

である。

^{*14} 今、準位が大きいところを考えているので、転回点は2つでしかも対称です。

^{*15} 以後の議論はなかなか粗っぽいので、時間があれば数値計算できればと思っています。例えば、(2.1.23)は、 E_n についての方程式になっていますが、 n に対して両辺の値がうまく決まるような E_n を拾ってこなくてはなりません。

補足

- ちなみに,

$$V_{k1} = \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \langle k | (a + a^\dagger)^4 | 1 \rangle = \begin{cases} 6 \cdot \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 & (k=1) \\ 4 \cdot \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 & (k=3) \\ \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 & (k=5) \end{cases} \quad (2.1.29)$$

となることから,

$$E_1^{(1)} = 6 \cdot \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \quad (2.1.30)$$

$$E_1^{(2)} = -\frac{33}{64} \cdot \frac{\lambda^2 \hbar^3}{m^4 \omega^5} \quad (2.1.31)$$

が第1励起状態の摂動. 今度は16項全部展開して, チェックしないとだめです.

- 設問5を数値計算してみると図2.2のようになりました. n^2 がいい感じです*16*17.

*16 ある程度見やすくするように, 表示する区間を区切ったり見え方を変えています. ただ, n^2 はひとまず悪くなさそうです.

*17 東大の有志が作ったがつくった解答例では $n^{4/3}$ が答えだったので書き加えておきました. そもそも解答の方針が違ったので, ズれるのは当たり前と言われたら当たり前かもしれませんが, 確か, ビリアル定理を用いていたような気がします.

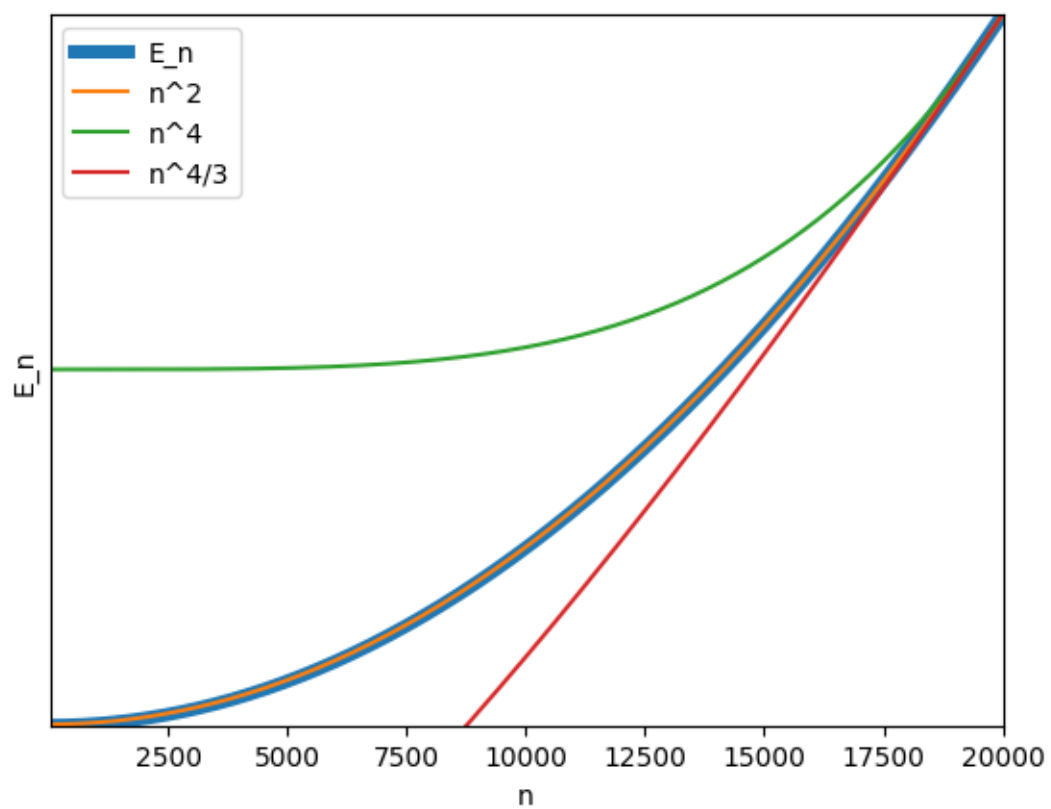


図2.2 (2.1.23)の数値解析の結果

第2問

1. 可能な配置は

$$(S_1, S_2) = (x, x), (y, x), (x, y), (y, y) \quad (2.2.1)$$

なので、エネルギーは同じベクトルのときに $-J$ 、違うベクトルなら0となる。また、分配関数は

$$Z_2 = 2 + 2e^{+J\beta} \quad (2.2.2)$$

である。

2. $L = 3$ のときは、

$$(S_1, S_2, S_3) = (x, x, x), (x, x, y), (x, y, x), (y, x, x), (y, y, x), (y, x, y), (x, y, y), (y, y, y) \quad (2.2.3)$$

の8通りが可能。それぞれのエネルギーは

$$-2J, -J, 0, -J, -J, 0, -J, -2J, \quad (2.2.4)$$

であり、分配関数は

$$Z_3 = 2 + 4e^{+J\beta} + 2e^{+2J\beta} \quad (2.2.5)$$

である。

3. 分配関数は

$$Z_L = \sum_{(S_1, \dots, S_{L-1}, S_L)} \exp \left[\beta J \sum_{i=1}^{L-1} S_i \cdot S_{i+1} \right] \quad (2.2.6)$$

である。 S_L だけ、別で考えれば

$$\sum_{(S_1, \dots, S_{L-1}, S_L)} \exp \left[\beta J \sum_{i=1}^{L-1} S_i \cdot S_{i+1} \right] = \sum_{(S_{L-1}, S_L)} e^{\beta J S_{L-1} \cdot S_L} \sum_{(S_1, \dots, S_{L-1})} \exp \left[\beta J \sum_{i=1}^{L-2} S_i \cdot S_{i+1} \right] \quad (2.2.7)$$

なので、

$$Z_L = \sum_{(S_{L-1}, S_L)} e^{\beta J S_{L-1} \cdot S_L} Z_{L-1} \quad (2.2.8)$$

である^{*18}。

4. 前問から、漸化式は

$$\frac{Z_{L-1}}{Z_L} = 2(1 + e^{\beta J}) \quad (2.2.9)$$

である。よって、

$$Z_L = 2^{L-2}(1 + e^{\beta J})^{L-2} Z_2 = 2^{L-1}(1 + e^{\beta J})^{L-1} \quad (2.2.10)$$

なので、

$$F_L = -\frac{1}{\beta} \log Z_L = -\frac{L-1}{\beta} \log 2(1 + e^{\beta J}) \quad (2.2.11)$$

である。

^{*18} $L = 3$ のときをチェックしてみると、ちゃんと成り立っています。

5. (2.2.10)より

$$u(\beta) = -\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z_L = -\left(1 - \frac{1}{L}\right) \frac{J e^{\beta J}}{1 + e^{\beta J}} \sim -\frac{J e^{\beta J}}{1 + e^{\beta J}} \quad (2.2.12)$$

である。低温極限 $\beta \gg 1$ のときは

$$u(\beta) \sim -J \quad (2.2.13)$$

より、1つのスピン当たりのエネルギーが J ということは、スピンの向きがそろっていることを表している。一方で、高温極限 $\beta \ll 1$ のときは

$$u(\beta) \sim -\frac{J}{2} \quad (2.2.14)$$

より、スピンの無秩序なことを意味している。

6. $P_L(\hat{x}, \hat{x})$ は

$$P_L(\hat{x}, \hat{x}) = P_{L-1}(\hat{x}, \hat{x})Q(\hat{x}, \hat{x}) + P_{L-1}(\hat{x}, \hat{y})Q(\hat{y}, \hat{x}) \quad (2.2.15)$$

となっている。 $L-1$ の粒子が \hat{x} のとき、 L の粒子が \hat{x} である確率は

$$Q(\hat{x}, \hat{x}) = \frac{2e^{\beta J} Z_{L-1}}{Z_L} = \frac{e^{\beta J}}{1 + e^{\beta J}} \quad (2.2.16)$$

である。同様にして

$$Q(\hat{y}, \hat{x}) = \frac{1}{1 + e^{\beta J}} \quad (2.2.17)$$

である。このように考えていけば、

$$\begin{pmatrix} Q(\hat{x}, \hat{x}) & Q(\hat{x}, \hat{y}) \\ Q(\hat{y}, \hat{x}) & Q(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + e^{\beta J}} \begin{pmatrix} e^{\beta J} & 1 \\ 1 & e^{\beta J} \end{pmatrix} \quad (2.2.18)$$

である*19。

7. 式(2)の右辺を計算すれば

$$\begin{pmatrix} P_L(\hat{x}, \hat{x}) & P_L(\hat{x}, \hat{y}) \\ P_L(\hat{y}, \hat{x}) & P_L(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + e^{\beta J}} \begin{pmatrix} P_{L-1}(\hat{x}, \hat{x}) & P_{L-1}(\hat{x}, \hat{y}) \\ P_{L-1}(\hat{y}, \hat{x}) & P_{L-1}(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\beta J} & 1 \\ 1 & e^{\beta J} \end{pmatrix} \quad (2.2.19)$$

である。これが漸化式になっているので

$$\begin{pmatrix} P_L(\hat{x}, \hat{x}) & P_L(\hat{x}, \hat{y}) \\ P_L(\hat{y}, \hat{x}) & P_L(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} = \frac{1}{(1 + e^{\beta J})^{L-2}} \begin{pmatrix} P_2(\hat{x}, \hat{x}) & P_2(\hat{x}, \hat{y}) \\ P_2(\hat{y}, \hat{x}) & P_2(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\beta J} & 1 \\ 1 & e^{\beta J} \end{pmatrix}^{L-2} \quad (2.2.20)$$

となる。 P_2 を計算すれば

$$\begin{pmatrix} P_2(\hat{x}, \hat{x}) & P_2(\hat{x}, \hat{y}) \\ P_2(\hat{y}, \hat{x}) & P_2(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1 + e^{\beta J})} \begin{pmatrix} e^{\beta J} & 1 \\ 1 & e^{\beta J} \end{pmatrix} \quad (2.2.21)$$

なので*20,

$$\begin{pmatrix} P_L(\hat{x}, \hat{x}) & P_L(\hat{x}, \hat{y}) \\ P_L(\hat{y}, \hat{x}) & P_L(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1 + e^{\beta J})^{L-1}} \begin{pmatrix} e^{\beta J} & 1 \\ 1 & e^{\beta J} \end{pmatrix}^{L-1} \quad (2.2.22)$$

である。よって

$$\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_L \rangle = P_L(\hat{x}, \hat{x}) + P_L(\hat{y}, \hat{y}) \quad (2.2.23)$$

*19 確率の和がちゃんと1になっています。

*20 Z_2 はすでにもとめてあるので、それぞれの状態の $e^{-\beta E}$ をもとめて Z_2 で割るだけです。

なので, (2.2.22)の右辺を求めるだけでよい. 行列

$$\begin{pmatrix} e^{\beta J} & 1 \\ 1 & e^{\beta J} \end{pmatrix} \quad (2.2.24)$$

の固有値と固有ベクトルはそれぞれ

$$\begin{cases} \text{固有値 } e^{\beta J} - 1 & : \text{固有ベクトル } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \text{固有値 } e^{\beta J} + 1 & : \text{固有ベクトル } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.2.25)$$

なので, $P = (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)$ とおけば,

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.26)$$

であり,

$$\begin{pmatrix} e^{\beta J} - 1 & 0 \\ 0 & e^{\beta J} + 1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{\beta J} & 1 \\ 1 & e^{\beta J} \end{pmatrix} P \quad (2.2.27)$$

なので,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^{\beta J} & 1 \\ 1 & e^{\beta J} \end{pmatrix}^{L-1} &= P \begin{pmatrix} (e^{\beta J} - 1)^{L-1} & 0 \\ 0 & (e^{\beta J} + 1)^{L-1} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (e^{\beta J} - 1)^{L-1} + (e^{\beta J} + 1)^{L-1} & -(e^{\beta J} - 1)^{L-1} + (e^{\beta J} + 1)^{L-1} \\ -(e^{\beta J} - 1)^{L-1} + (e^{\beta J} + 1)^{L-1} & (e^{\beta J} - 1)^{L-1} + (e^{\beta J} + 1)^{L-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である. したがって, (2.2.22)より

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} P_L(\hat{x}, \hat{x}) & P_L(\hat{x}, \hat{y}) \\ P_L(\hat{y}, \hat{x}) & P_L(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4(1 + e^{\beta J})^{L-1}} \begin{pmatrix} (e^{\beta J} - 1)^{L-1} + (e^{\beta J} + 1)^{L-1} & -(e^{\beta J} - 1)^{L-1} + (e^{\beta J} + 1)^{L-1} \\ -(e^{\beta J} - 1)^{L-1} + (e^{\beta J} + 1)^{L-1} & (e^{\beta J} - 1)^{L-1} + (e^{\beta J} + 1)^{L-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

である. これより

$$\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_L \rangle = \frac{(e^{\beta J} - 1)^{L-1} + (e^{\beta J} + 1)^{L-1}}{(1 + e^{\beta J})^{L-1}} = 1 + \tanh^{L-1} \left(\frac{\beta J}{2} \right) \quad (2.2.29)$$

である^{*21}. 高温極限 $\beta \ll 1$ では

$$\tanh^{L-1} \left(\frac{\beta J}{2} \right) = \exp \left[(L-1) \log \tanh \left(\frac{\beta J}{2} \right) \right] \sim \exp \left[-(L-1) \log \frac{2}{\beta J} \right] \quad (2.2.31)$$

なので^{*22},

$$\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_L \rangle \sim 1 + \exp \left[-(L-1) \log \frac{2}{\beta J} \right] \quad (2.2.32)$$

^{*21} よくある計算ではありますが

$$\frac{e^{\beta J} - 1}{e^{\beta J} + 1} = \frac{e^{\beta J/2} - e^{-\beta J/2}}{e^{\beta J/2} + e^{-\beta J/2}} = \tanh \left(\frac{\beta J}{2} \right) \quad (2.2.30)$$

です.

^{*22} $\tanh x$ は

$$\begin{cases} \tanh x & \sim 1 - e^{-x} & (x \gg 1) \\ \tanh x & \sim x & (x \ll 1) \end{cases} \quad (2.2.32)$$

です. $x \gg 1$ のときは, グラフを思い出せばなんとなくわかんと思います.

より, ξ は

$$\xi = \frac{1}{\log \frac{2}{\beta J}} \quad (2.2.34)$$

である. 一方, 低温極限 $\beta \gg 1$ では

$$\tanh^{L-1} \left(\frac{\beta J}{2} \right) = \exp \left[(L-1) \log \tanh \left(\frac{\beta J}{2} \right) \right] \sim \exp \left[(L-1) \log \left(1 - \exp \left[-\frac{\beta J}{2} \right] \right) \right] \quad (2.2.35)$$

なので,

$$\xi = -\frac{1}{\log (1 - e^{-\beta J/2})} \sim e^{\beta J} \quad (2.2.36)$$

である^{*23}.

^{*23} $x \ll 1$ なら, $\log(1+x) \sim x$ でした.

第3問

1. オイラー・ラグランジュ方程式を解けば

$$\begin{cases} r: \mu\ddot{r} - \mu r\dot{\varphi}^2 + \frac{G\mu M}{r^2} = 0 \\ \varphi: 2\mu r\dot{r}\dot{\varphi} + \mu r^2\ddot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

である。

2. φ に共役な運動量は

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \quad (2.3.2)$$

である。また、 r に共役な運動量を J_r とすると

$$J_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r} \quad (2.3.3)$$

なので、エネルギーは、ルジャンドル変換から

$$E = \dot{r}J_r + \dot{\varphi}J - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{G\mu M}{r} \quad (2.3.4)$$

である。

3. (2.3.1)の第2式より

$$\dot{J} = 0 \quad (2.3.5)$$

なので、 J は定数。同様にして

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{G\mu M}{r} \right] \\ &= \dot{\varphi}(2\mu r\dot{r}\dot{\varphi} + \mu r^2\ddot{\varphi}) + \dot{r} \left(\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\varphi}^2 + \frac{G\mu M}{r^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

なので、 E も定数。

- 4.

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64G^3\mu M^2}{5c^5} \cdot \frac{1}{a^3} \quad (2.3.6)$$

5. 式(6)は、形式的に

$$P^{5/3}dP = -A(P_c)^{5/3}dt \quad (2.3.7)$$

と書けるので、これを解けば

$$\frac{3}{8}P^{8/3} = -A(P_c)^{5/3}t + \frac{3}{8}P_0^{8/3} \quad (2.3.8)$$

である。 $t = \tau_{\text{GW}}$ で $P = 0$ なので

$$\tau_{\text{GW}} = \frac{3P_0^{8/3}}{8A}P_c^{-5/3} \quad (2.3.9)$$

である。

6. ケプラーの法則を微分すれば

$$\frac{da}{dt} = \frac{GMP\dot{P}}{6\pi^2 a^2} = \frac{4^{2/3} G^{1/3} M^{1/3} \dot{P}}{6\pi^{2/3}} \cdot \frac{1}{P^{1/3}} \quad (2.3.10)$$

なので、これを(2.3.6)に代入すれば、

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{64G^3 \mu M^2}{5c^5} \cdot \frac{4\pi^2}{GM} \cdot \frac{1}{P^2} \cdot \frac{6\pi^{2/3} P^{1/3}}{4^{2/3} G^{1/3} M^{1/3}} = -\frac{1536\pi^{8/3}}{5 \times 4^{2/3}} \left(\frac{GM^{2/5} c^{-3} \mu^{3/5}}{P} \right)^{5/3} \quad (2.3.11)$$

である。 α, β, γ, A はこれから決まる *24*25。

7. (2.3.9)より

$$P_c = \left(\frac{3}{8A\tau_{\text{GW}}} \right)^{3/5} P_0^{8/5} \quad (2.3.14)$$

であり、一方で

$$P_c = \frac{GM^{2/5} \mu^{3/5}}{c^3} = \frac{Gm}{2^{1/5} c^3} \quad (2.3.15)$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \frac{m}{M_\odot} &= \frac{2^{1/5} c^3}{GM_\odot} \left(\frac{3P_0}{8A\tau_{\text{GW}}} \right)^{3/5} P_0 \\ &\sim 10^5 \cdot 2 \cdot 1.1 \cdot \left(\frac{3 \times 0.06}{8 \cdot 2500 \cdot 0.15} \right)^{3/5} \cdot 0.06 \\ &\sim 38.28 \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

である *26*27。

8. エネルギー

$$E = -\frac{G\mu M}{2a} = -\frac{Gm^2}{2a} \quad (2.3.18)$$

の差が、 mc^2 の1/10だと近似しているので

$$-\frac{Gm^2}{2a_0} + \frac{Gm^2}{2a_{\min}} \sim \frac{1}{10} mc^2 \quad (2.3.19)$$

である。ここで、 $a_0 \gg a_{\min}$ より $a_0 - a_{\min} \sim a_0$ と近似できるとすれば

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_{\min}} = \frac{a_{\min} - a_0}{a_{\min} a_0} \sim -\frac{a_0}{a_{\min} a_0} = -\frac{1}{a_{\min}} \quad (2.3.20)$$

*24 次元ですが

$$G = [M]^{-1} [L]^3 [T]^{-2} \quad (2.3.12)$$

なので

$$GM^{2/5} c^{-3} \mu^{3/5} = [M]^{-1} [L]^3 [T]^{-2} \cdot [M]^{2/5} \cdot [L]^{-3} [T]^3 \cdot [M]^{3/5} = [T] \quad (2.3.13)$$

でちゃんと時間になっています。

*25 A の値はおおよそ2581となっています。

*26 3/5乗のところが少し難しいかもしれませんが

$$\left(\frac{3 \times 0.06}{8 \cdot 2500 \cdot 0.15} \right)^{3/5} = \left(\frac{6}{10^5} \right)^{3/5} = 6^{3/5} \times 10^3 \quad (2.3.17)$$

でいけます。

*27 この記事によると、GW150914は太陽質量のおおよそ30倍の天体の合体らしいです。

となるので,

$$5Gm = a_{\min}c^2 \quad (2.3.21)$$

である.

補足

- この系の運動は

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (2.3.22)$$

を用いて書けます. ここで, ポテンシャルの偏りは次の4重極モーメントテンソル

$$D_{\alpha\beta} = J_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} - 3J_{\alpha\beta} \quad (2.3.23)$$

を計算してやると

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \mu r^2 (3 \cos^2 \varphi - 1) \\ D_{yy} &= \mu r^2 (\sin^2 \varphi - 1) \\ D_{xy} &= 3\mu r^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ D_{zz} &= -\mu r^2 \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

となります^{*28}. これをもとめてゴニョニョ計算すると

$$I = -\frac{dE}{dt} = \frac{32k^4\mu^2M^3}{5c^5r^5} \quad (2.3.26)$$

となり, これが古典力学で近似したエネルギー放射率となっています.

- ちなみに, ランダウ・リフシツ『場の古典論』の演習問題には本問題で省かれているところが載っています.

^{*28} ここで, $J_{\alpha\beta}$ は慣性モーメントテンソルで, 今は

$$J_{xx} = \mu r^2 (1 - \cos^2 \varphi), \quad J_{yy} = \mu r^2 (1 - \sin^2 \varphi), \quad J_{xy} = -\mu r^2 \cos \varphi \sin \varphi, \quad J_{zz} = \mu r^2 \quad (2.3.25)$$

です.

第6問

1. 式(1)を x で微分して式(2)を代入すれば

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = CL \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (2.6.1)$$

なので,

$$v = \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad (2.6.2)$$

である*29.

2. $\lambda = v/f$ より

$$\lambda = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}} \quad (2.6.3)$$

だが, $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ に気をつければ

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad (2.6.4)$$

なので,

$$\lambda = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}} \sim \frac{3.0 \times 10^8}{500 \times 10^6 \times \sqrt{2.2}} \sim 0.405\text{m} \quad (2.6.5)$$

である.

3. $V = Z_0 I$ を微分方程式(1),(2)に代入すると

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial x} = -C Z_0 \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{L}{Z_0} \frac{\partial I}{\partial t} \end{cases} \quad (2.6.6)$$

なので, 係数から

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.6.7)$$

である. これに設問2.の条件をいれれば

$$Z_0 = \frac{\log(b/a)}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{\mu_0 c \log(b/a)}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}} \quad (2.6.8)$$

である. よって, これを計算すれば

$$Z_0 \sim \frac{4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 3 \times 10^8 \times 1.8}{2 \times 3.14 \times \sqrt{2.2}} \sim 72.8 \Omega \quad (2.6.9)$$

である*30.

*29 波動方程式で, どちらの係数が速度なのかを忘れたら, まずは次元をチェックするのが早いです.

*30 $V = Z_0 I$ から, 単位はオームでいいでしょう.

4. 終端で直ちにパルス波が反射されると考えると、到達した瞬間の終端の電圧は $V_1 + V_2$ である。一方で、抵抗器を流れる電流は $I_1 - I_2$ である。ただし、 I_1, I_2 は

$$V_1 = Z_0 I_1, \quad V_2 = Z_0 I_2 \quad (2.6.10)$$

を満たす電流である。よって、抵抗器の回路に対するオームの法則から

$$V_1 + V_2 = r(I_1 - I_2) \quad (2.6.11)$$

が成立し、この関係式に(2.6.10)を代入すれば

$$V_2 = \frac{r - Z_0}{r + Z_0} V_1 \quad (2.6.12)$$

である^{*31}。

5. 式(4)を x で微分して式(1)を代入すれば

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + RC \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.6.13)$$

である。特解として $V = \tilde{V}(x)e^{-i\omega t}$ を考えると、

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} = -C\omega(L\omega + iR)\tilde{V} \quad (2.6.14)$$

である。 $\Omega := \sqrt{C\omega(L\omega + iR)}$ としておく、この解は

$$\tilde{V}(x) = A e^{i\Omega x} + B e^{-i\Omega x} \quad (2.6.15)$$

と書ける。ここで、 Ω は

$$\Omega = \omega\sqrt{LC}\sqrt{1 + i\frac{R}{L\omega}} \sim \omega\sqrt{LC}\left(1 + i\frac{R}{2L\omega}\right) \quad (2.6.16)$$

と書けるとすれば、(2.6.15)のうち、採用できるのは $A = V_1, B = 0$ のみであり^{*32},

$$\tilde{V}(x) = V_1 \exp\left[-\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}x\right] e^{i\omega\sqrt{LC}x} \quad (2.6.17)$$

である。よって、 $V_2 = |\tilde{V}(d)|$ なので

$$V_2 = V_1 \exp\left[-\frac{Rd}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\right] \text{ or } V_1 e^{-Rd/2Z_0} \quad (2.6.18)$$

である。

^{*31} $r = Z_0$ で $V_2 = 0$ なのでOK。

^{*32} もし、 $B \neq 0$ なら、 $x \rightarrow \infty$ に対して $\tilde{V}(x) \rightarrow \infty$ となるような解が出てきてしまいます。また、 $B = 0$ なら $x = 0$ の初期条件から $A = V_1$ です。

6. セットアップは

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \end{cases} \quad (2.6.19)$$

である。ただし、電場 \mathbf{E} の時間微分は、電場の時間変動は非常に小さいとして無視した。第1式を時間微分して、 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2$ を用いれば

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \quad (2.6.20)$$

である。ただし、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ とした。これはオームの法則より、

$$\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \mathbf{j} - \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0 \quad (2.6.21)$$

である。これは一般的な話なので、軸方向に限って言えば

$$\frac{\partial^2 j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial j}{\partial r} - \mu \sigma \frac{\partial j}{\partial t} = 0 \quad (2.6.22)$$

が成立する^{*33}。これに $j(r, t) = J(r)e^{-i\omega t}$ を代入すれば、

$$\frac{\partial^2 J(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J(r)}{\partial r} - i\omega\mu\sigma J(r) = 0 \quad (2.6.24)$$

である。今回は、 $r \sim a$ の付近で

$$J(r) = |J(a)|e^{(r-a)/\delta} \cdot e^{iA} \quad (2.6.25)$$

と近似できるとすれば、(2.6.24)に代入すれば

$$\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\delta} - e^{i\pi/2} \omega\mu\sigma = 0 \quad (2.6.26)$$

である。ここで、今考えているのは $r \sim a \gg \delta$ 付近の話であり、 $1/r$ を含む項はとても小さいので無視することができる。よって

$$\delta = \text{Re} \left[e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{1}{\omega\mu\sigma}} \right] = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (2.6.27)$$

が表皮の深さである。

補足

- 設問6.は誘導に従いましたが、一般には(2.6.24)はベッセル関数で書けます。ベッセルの微分方程式は

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{u} \frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) u = 0 \quad (2.6.28)$$

^{*33} ただし、

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.6.23)$$

を用いた。

であり，この解は，次のベッセル関数

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} \quad (2.6.29)$$

で与えられます^{*34}．(2.3.1)を $k^2 := -i\omega\mu\sigma$ として， $z = kr$ と変数変換すれば

$$\frac{\partial^2 \tilde{J}(z)}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \tilde{J}(z)}{\partial z} + \tilde{J}(z) = 0 \quad (2.6.30)$$

なので，これは $n = 0$ のベッセルの微分方程式です．よって， J は

$$J(r) \propto J_0(kr) \quad (2.6.31)$$

になります．

^{*34} 代入すればわかります．