東京大学 令和5年 物理学専攻 院試 解答例

ミヤネ

最終更新：2023 年 8 月 16 日

目次

第1問

operatorのハット ^ は省略します．

1. 添え字はk, lのままで計算します：

$$
\begin{aligned}
[a_k, a_l^\dagger] &= \frac{1}{2\hbar m\omega}[m\omega X_k + iP_k, m\omega X_k - iP_l] \\
&= \delta_{kl}.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

2. k成分に着目すると

$$
\frac{1}{2m}P_k^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 X_k^2 = \hbar\omega\left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}\right) \tag{1.2}
$$

となるので

$$
H = \hbar\omega(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1) \tag{1.3}
$$

です．ただし，

$$
X_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_k + a_k^\dagger),\ P_k = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a_k - a_k^\dagger) \tag{1.4}
$$

です．また

$$
[H, a_k] = \hbar\omega[a_k^\dagger a_k, a_k] = -\hbar\omega a_k \tag{1.5}
$$

$$
[H, a_k^\dagger] = \hbar\omega[a_k^\dagger a_k, a_k^\dagger] = \hbar\omega a_k^\dagger \tag{1.6}
$$

です．

3. $E_0 = \hbar\omega$.

4. (1.6)より，$a^\dagger$を作用させると固有値が$\hbar\omega$だけ増加します．これは$a_1^\dagger, a_2^\dagger$を作用させても同じなので，$k = 0, 1, 2, \cdots, n$に対して

$$
|n\rangle \propto (a_1^\dagger)^k (a_2^\dagger)^{n-k} |0\rangle \tag{1.7}
$$

が求める状態です．また，縮退度$n+1$です．

5. (1.4)を代入すれば

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{\hbar}{2i}(a_1 + a_1^\dagger)(a_2 - a_2^\dagger) - \frac{\hbar}{2i}(a_2 + a_2^\dagger)(a_1 - a_1^\dagger) \\
&= i\hbar(a_1 a_2^\dagger - a_2 a_1^\dagger)
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

です．ハミルトニアンとの交換関係は

$$
\begin{aligned}
[H, L] &= i\hbar^2\omega[a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1, a_1 a_2^\dagger - a_2 a_1^\dagger] \\
&= i\hbar^2\omega(-a_1 a_2^\dagger - a_2 a_1^\dagger + a_1 a_2^\dagger + a_2 a_1^\dagger) = 0
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

です．よって，HとLの同時固有状態が存在します．

6. Lと$A_+^\dagger$の交換関係を計算してみると

$$
[L, A_+^\dagger] = \hbar(-i\gamma a_1^\dagger + i\beta a_2^\dagger) \tag{1.10}
$$

となるので，$\beta = 1,\ \gamma = i$とおけばよいことが分かります．このとき，$c_+ = \hbar$です．また，$A_-^\dagger$との交換関係は

$$[L, A_-^\dagger] = i\hbar[a_1a_2^\dagger - a_2a_1^\dagger, a_1^\dagger - ia_2^\dagger] = -\hbar A_-^\dagger \tag{1.11}$$

となるので，$c_- = -\hbar$です．

7. $[H, A_\pm^\dagger]$を計算すると

$$[\hbar, A_\pm^\dagger] = \hbar\omega A_\pm^\dagger \tag{1.12}$$

となるので，$A_\pm^\dagger$は「エネルギー固有値は$\hbar\omega$だけ上昇」させて，「(軌道）角運動量固有値を$\pm\hbar$だけ変化」させるoperatorです．よって，$A_+^\dagger$については

$$\begin{cases} H(A_+^\dagger \left|\alpha\right\rangle) = (E_\alpha + \hbar\omega)(A_+^\dagger \left|\alpha\right\rangle) \\ L(A_+^\dagger \left|\alpha\right\rangle) = (L_\alpha + \hbar)(A_+^\dagger \left|\alpha\right\rangle) \end{cases} \tag{1.13}$$

であり，$A_-^\dagger$については

$$\begin{cases} H(A_-^\dagger \left|\alpha\right\rangle) = (E_\alpha + \hbar\omega)(A_-^\dagger \left|\alpha\right\rangle) \\ L(A_-^\dagger \left|\alpha\right\rangle) = (L_\alpha - \hbar)(A_-^\dagger \left|\alpha\right\rangle) \end{cases} \tag{1.14}$$

となります．

8. 前問の結果を用いれば

$$E_n = \hbar\omega(n+1),\ L_{n,l} = \hbar(2l - n) \tag{1.15}$$

です．

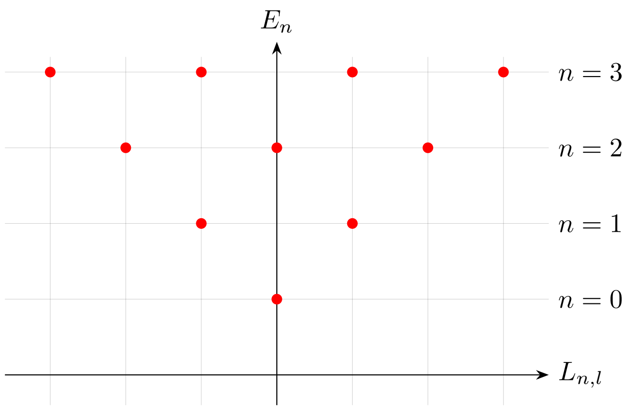

図1.1　設問8の答え

第2問

1. 波動関数の位相部分はe^{ikz}なので，$\psi(z) = \psi(z+L)$であるためには

$$k_z = \frac{2\pi}{L} n_z \tag{2.1}$$

でなければなりません．また，ハミルトニアンは

$$H(k_z) = \hbar v k_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

なので、固有値は

$$\varepsilon_{k,1} = -\frac{2\pi\hbar v}{L} n_z,\ \varepsilon_{k,2} = +\frac{2\pi\hbar v}{L} n_z \tag{2.3}$$

となります．図は省略．

2. エネルギーが$2\pi\hbar v/L$あたりに1つの状態が存在するので，

$$\Omega_0(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{L}{2\pi\hbar v}\varepsilon & (\varepsilon < \hbar v k_0) \\ \dfrac{k_0 L}{2\pi} & (\varepsilon > \hbar v k_0) \end{cases} \tag{2.4}$$

となります．

3. $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}$の固有値は$\pm|\boldsymbol{k}|$なので，

$$\varepsilon_{k,1} = -\hbar v|\boldsymbol{k}|,\ \varepsilon_{k,2} = +\hbar v|\boldsymbol{k}| \tag{2.5}$$

です．

4. 波数はz成分同様

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x,\ k_y = \frac{2\pi}{L} n_y \tag{2.6}$$

と量子化されるので，エネルギーは

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{2\pi\hbar v}{L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \tag{2.7}$$

です．したがって，$\Omega(\varepsilon)$は

$$\frac{2\pi\hbar v}{L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \leq \varepsilon \tag{2.8}$$

つまり，

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \leq \frac{\varepsilon L}{2\pi\hbar v} \tag{2.9}$$

を満たす(n_x, n_y, n_z)の組だったので，それは半径が$\varepsilon L/2\pi\hbar v$の球で近似できて

$$\Omega(\varepsilon) = \frac{V}{6\pi^2\hbar^3 v^3}\varepsilon^3 \tag{2.10}$$

です．また，状態密度は

$$D(\varepsilon) = \frac{\mathrm{d}\Omega(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3 v^3}\varepsilon^2 \tag{2.11}$$

となります．

5. フェルミ統計なので

$$\sum_{n_{k,a}=0}^{1} e^{-\beta\varepsilon_{k,a}n_{k,a}} = 1 + e^{-\beta\varepsilon_{k,a}} \tag{2.12}$$

であることに注意すると

$$\log\Xi(T,V) = \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{a=1}^{2}\log\left(1+e^{-\beta\varepsilon_{k,a}}\right) \tag{2.13}$$

となります．さて，総和を積分に書き直しますが，このとき，$\boldsymbol{k}$で総和をとるということは，n_x, n_y, n_zについて和をとるということなので

$$\begin{aligned}\log\Xi(T,V) &= \sum_{a=1}^{2}\sum_{n_x,n_y,n_z}\log\left(1+e^{-\beta\varepsilon_{k,a}}\right)\\ &= \sum_{n_x,n_y,n_z}\log\left(1+e^{-\beta\varepsilon_{k,1}}\right) + \sum_{n_x,n_y,n_z}\log\left(1+e^{-\beta\varepsilon_{k,2}}\right)\\ &\sim \int_0^{\varepsilon_0} D(\varepsilon)\log\left(1+e^{\beta\varepsilon}\right)\mathrm{d}\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_0} D(\varepsilon)\log\left(1+e^{-\beta\varepsilon}\right)\mathrm{d}\varepsilon \end{aligned}\tag{2.14}$$

です[*1]．したがって，$F(\varepsilon) = D(\varepsilon)\log\left(1+e^{\beta\varepsilon}\right)(1+e^{-\beta\varepsilon})$となります．

6. (2.14)の第2項については，部分積分を用いれば，公式を用いて計算しきることができます．積分区間を変更するために

$$\int_0^{\varepsilon_0} D(\varepsilon)\log\left(1+e^{-\beta\varepsilon}\right)\mathrm{d}\varepsilon = \int_0^{\infty} D(\varepsilon)\log\left(1+e^{-\beta\varepsilon}\right)\mathrm{d}\varepsilon - \underbrace{\int_{\varepsilon_0}^{\infty} D(\varepsilon)\log\left(1+e^{-\beta\varepsilon}\right)\mathrm{d}\varepsilon}_{=G(\varepsilon_0)} \tag{2.15}$$

とすれば，

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} D(\varepsilon)\log\left(1+e^{-\beta\varepsilon}\right)\mathrm{d}\varepsilon &= \underbrace{\left[\frac{V}{6\pi^2\hbar^3v^3}\varepsilon^3\log\left(1+e^{-\beta\varepsilon}\right)\right]_0^{\infty}}_{=0} + \frac{\beta V}{6\pi^2\hbar^3v^3}\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon}+1}\mathrm{d}\varepsilon\\ &= \frac{\beta V}{6\pi^2\hbar^3v^3}\cdot\frac{1}{\beta^4}\cdot\frac{7\pi^4}{120}\end{aligned}\tag{2.16}$$

となります．一方の第1項ですが，部分積分すれば

$$\int_0^{\varepsilon_0} D(\varepsilon)\log\left(1+e^{\beta\varepsilon}\right)\mathrm{d}\varepsilon = \left[\frac{V}{6\pi^2\hbar^3v^3}\varepsilon^3\log\left(1+e^{\beta\varepsilon}\right)\right]_0^{\varepsilon_0} + \frac{\beta V}{6\pi^2\hbar^3v^3}\int_0^{\varepsilon_0}\frac{\varepsilon^3}{e^{-\beta\varepsilon}+1}\mathrm{d}\varepsilon \tag{2.17}$$

ですが，$\log\left(1+e^{\beta\varepsilon_0}\right)\sim\beta\varepsilon_0$と近似すれば，発散項は

$$\left[\frac{V}{6\pi^2\hbar^3v^3}\varepsilon^3\log\left(1+e^{\beta\varepsilon}\right)\right]_0^{\varepsilon_0} \sim \frac{\beta V}{6\pi^2\hbar^3v^3}\varepsilon_0^4 \tag{2.18}$$

です．積分は

$$\int_0^{\varepsilon_0}\frac{\varepsilon^3}{e^{-\beta\varepsilon}+1}\mathrm{d}\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_0}\varepsilon^3\left(1-e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon}-\cdots\right)\mathrm{d}\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\varepsilon_0}\varepsilon^3e^{-n\beta\varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon \tag{2.19}$$

[*1] $\varepsilon_{k,1} < 0$なので，肩の符号に気をつけてください．

と書けるので

$$\int_0^{\varepsilon_0} \varepsilon^3 e^{-n\beta\varepsilon} \mathrm{d}\varepsilon = -\frac{6e^{-n\beta\varepsilon_0}}{\beta^4 n^4} + \frac{6}{\beta^4 n^4} - \frac{6\varepsilon_0 e^{-n\beta\varepsilon_0}}{\beta^3 n^3} - \frac{3\varepsilon_0^2 e^{-n\beta\varepsilon_0}}{\beta^2 n^2} - \frac{\varepsilon_0^3 e^{-n\beta\varepsilon_0}}{\beta n} \tag{2.20}$$

となり，

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon^3}{e^{-\beta\varepsilon}+1} \mathrm{d}\varepsilon = \frac{\varepsilon_0^4}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[-\frac{6e^{-n\beta\varepsilon_0}}{\beta^4 n^4} + \frac{6}{\beta^4 n^4} - \frac{6\varepsilon_0 e^{-n\beta\varepsilon_0}}{\beta^3 n^3} - \frac{3\varepsilon_0^2 e^{-n\beta\varepsilon_0}}{\beta^2 n^2} - \frac{\varepsilon_0^3 e^{-n\beta\varepsilon_0}}{\beta n} \right] \tag{2.21}$$

です．したがって，$n=1$のときは，$e^{-\beta\varepsilon_0} \sim 0$より$6/\beta^4$のみを拾ってきて，残りの$n>2$の項は無視して

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon^3}{e^{-\beta\varepsilon}+1} \mathrm{d}\varepsilon \sim \frac{\varepsilon_0^4}{4} - \frac{6}{\beta^4} \tag{2.22}$$

とします[*2]．以上より，

$$\log \Xi[T,V] = \frac{V}{6\pi^2\hbar^3 v^3} \cdot \frac{1}{\beta^3} \cdot \frac{7\pi^4}{120} + \frac{\beta V}{6\pi^2\hbar^3 v^3}\varepsilon_0^4 + \frac{\beta V}{6\pi^2\hbar^3 v^3}\left[\frac{\varepsilon_0^4}{4} - \frac{6}{\beta^4}\right] + G(\varepsilon_0) \tag{2.23}$$

です．

7. エネルギーは

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\log\Xi[T,V] \\ &= -\frac{5V\varepsilon_0^4}{24\pi^2\hbar^3 v^3} - \frac{(720-7\pi^4)k_B^4 V}{240\pi^2\hbar^3 v^3}T^4 \end{aligned} \tag{2.24}$$

であり，

$$C_V = -\frac{(720-7\pi^4)k_B^4 V}{60\pi^2\hbar^3 v^3}T^3 \propto T^3 \tag{2.25}$$

となります．

8. 一般に理想フェルミ理想気体の物理量を低温展開で求めると，Tについて奇数次の項は積分でキャンセルされます．つまり，エネルギーは定数を除けばTの最低次数は2．したがって，比熱はTの1次．今回の場合は，そもそもスピンという内部自由度があったため，状態密度が変化し，結果が異なっているのだと思います．

[*2] もっとスマートな近似があるといいのですが，今回はゴリゴリ計算して評価しました．（Mathematicaを持ち込みたいです．）

第3問

1. ちゃんと成分で書いてみると

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0| &= \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \\ &\sim \sqrt{r^2-2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r_0}} \\ &= r\sqrt{1-2\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_0}{r}} \\ &\sim r\left(1-\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_0}{r}\right)\end{aligned} \tag{3.1}$$

   となります．ただし，$\hat{\boldsymbol{r}}$は単位ベクトル．

2. ポテンシャルは

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-d/2)^2+z^2}} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+d/2)^2+z^2}} \tag{3.2}$$

   ですが，

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+(y\pm d/2)^2+z^2}} \sim \frac{1}{r}\left(1\pm\frac{yd}{r^2}\right)^{-1/2} \sim \frac{1}{r}\left(1\mp\frac{yd}{2r^2}\right) \tag{3.3}$$

   となっているので，

$$\phi(\boldsymbol{r}) \sim \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{yd}{r^3} \tag{3.4}$$

   です．

3. $1/r^3$をxで微分してみると

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3x}{r^5} \tag{3.5}$$

   となるので

$$E_x = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3xyd}{r^5},\ E_z = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3yzd}{r^5} \tag{3.6}$$

   です．一方で，yについては

$$E_y = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3y^2d}{r^5} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{d}{r^3} \tag{3.7}$$

   となります．

4. $x, z = 0$なので，$\boldsymbol{E}$はE_yしか残っていません．$r = y$に気をつければ，

$$U = -p\sin\theta\cdot\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2d}{y^3} \tag{3.8}$$

   です．

5. $\theta = \pi/2$.

6. 電荷密度分布は

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(z)\left(2e\delta(y) - e(\delta(y-d/2)+\delta(y+d/2))\right) \tag{3.9}$$

として計算します．ここで，$\delta(x)$や$\delta(z)$がくくりだされていることに注意しましょう．つまり，$\rho(\boldsymbol{r})$にxやzをかけて積分すると0になってしまうので，p_2やQ_{22}のみを計算すればよいことになります．まずはp_2から計算してみると

$$\begin{aligned}p_2 &= \int y'\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \\ &= \frac{ed}{2} - \frac{ed}{2} = 0\end{aligned} \tag{3.10}$$

となります．一方で，Q_{22}は

$$\begin{aligned}Q_{22} &= \frac{1}{2}\int (2y'^2 - (x'^2 + z'^2))\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \\ &= -\frac{ed^2}{2}\end{aligned} \tag{3.11}$$

です．

7. ポテンシャルは

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{y^2 Q_{22}}{r^5} \\ &= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{d^2y^2}{r^5}\end{aligned} \tag{3.12}$$

です．したがって，

$$E_x = -\frac{5ed^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xy^2}{r^7},\ E_z = -\frac{5ed^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zy^2}{r^7} \tag{3.13}$$

であり，

$$E_y = -\frac{5ed^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y^3}{r^7} + -\frac{ed^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{y}{r^5} \tag{3.14}$$

です．

8. (c1)では，$Q_{22} = -ed^2/2$なので

$$\begin{aligned}U_{(\mathrm{c1})} &= \frac{ed^2}{6}\left.\frac{\partial E_y}{\partial y}\right|_{\boldsymbol{r}=(0,a,0)} \\ &= \frac{ed^2}{6}\left.\left(-\frac{35y^4}{r^9} + \frac{20y^2}{r^7} - \frac{1}{r^5}\right)\right|_{\boldsymbol{r}=(0,a,0)} = \frac{ed^2}{6}\frac{ed^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{16}{a^5}\ (>0)\end{aligned} \tag{3.15}$$

です．一方で，(c2)では$Q_{11} = -ed^2/2$なので[*3]，

$$\begin{aligned}U_{(\mathrm{c1})} &= \frac{ed^2}{6}\left.\frac{\partial E_x}{\partial x}\right|_{\boldsymbol{r}=(0,a,0)} \\ &= -\frac{ed^2}{6}\frac{5ed^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^5}\ (<0)\end{aligned} \tag{3.16}$$

です．したがって，(c2)の系のほうがエネルギーが小さいです．

[*3] 軸を変更しただけなので，Q_{11}だけが値をもつことになります．

第4問

1. (i) $x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$.

   (ii) $z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$なので，

$$\cos n\theta=\frac{z^n+1/z^n}{2},\ \cos\theta=\frac{z+1/z}{2} \tag{4.1}$$

と変換されるので

$$I=\frac{1}{ib}\int_C\frac{z^{2n}+1}{z^2+2(a/b)z+1}\frac{1}{z^n}\mathrm{d}z \tag{4.2}$$

となります．経路は半径1の円周です．

   (iii) $b<a$であることに気をつければ，$|z|<1$であるのは

$$z=0,\lambda_+ \tag{4.3}$$

です[*4]．ただし，

$$\lambda_\pm\equiv-\frac{a}{b}\pm\frac{a}{b}\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} \tag{4.4}$$

としました．

   (iv) $n=2$のときは

$$I=\frac{1}{ib}\int\frac{z^4+1}{z^2(z^2+2(a/b)z+1)}\mathrm{d}z \tag{4.5}$$

です．被積分関数を

$$f(z)\equiv\frac{z^4+1}{z^2(z^2+2(a/b)z+1)} \tag{4.6}$$

とおいて，留数を求めます．$z=0$は2位の極なので

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f,0]&=\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^4+1}{z^2+2(a/b)z+1}\right)\\&=\lim_{z\to0}\frac{4z^3(z^2+2(a/b)z+1)-(z^4+1)(2z+2(a/b))}{(z^2+2(a/b)z+1)^2}=-\frac{2a}{b}\end{aligned} \tag{4.7}$$

となります．$z=\lambda_+$のほうは，1位の極なので

$$\mathrm{Res}[f,\lambda_+]=\frac{\lambda_+^4+1}{\lambda_+^2(\lambda_+-\lambda_-)} \tag{4.8}$$

[*4] 次の点

$$\lambda_-=-\frac{a}{b}-\frac{a}{b}\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

も極の候補ですが，$|\lambda_-|>1$なので，今回の積分の極ではあり得ません．また，λ_+の絶対値ですが，$\lambda_\pm<0$なので

$$-\frac{a}{b}+\frac{a}{b}\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}>-1$$

を示せば良いことが分かります．ここまで分かれば，この不等式が成立していることをチェックするだけです．（ちょっと移項して，2乗すればOK.）

となり，積分は

$$I=\frac{2\pi}{b}\left[-\frac{2a}{b}+\frac{\left(-\frac{a}{b}+\frac{a}{b}\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)^4+1}{\left(-\frac{a}{b}+\frac{a}{b}\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)^2\cdot\frac{2a}{b}\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}}\right] \tag{4.9}$$

となります [*5].

2. (i) $(VXV^{-1})^n=VX^nV^{-1}$なので.

 (ii) 固有方程式は

$$\begin{vmatrix}\lambda-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \lambda-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=0 \tag{4.10}$$

なので，余因子展開をすれば

$$(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2-\sqrt{2}\lambda+1)=0 \tag{4.11}$$

となり，固有値は

$$\lambda=\pm1,\ \frac{1\pm i}{\sqrt{2}} \tag{4.12}$$

となります．固有ベクトルを求めると

$$u_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ u_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-i\end{pmatrix},\ u_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\i\end{pmatrix} \tag{4.13}$$

となります．

 (iii)

$$U=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2}\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & \\ & & & \frac{1-i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

---

*5 整理しようとMathematicaにもかけてみましたが，うまくいきませんでした．一応，Mathematicaにダイレクトに解かせた結果は

$$I=\frac{2b^2\pi}{2a^3-2ab^2+2a^2\sqrt{a^2-b^2}-b^2\sqrt{a^2-b^2}}$$

で，具体的にa,bの値をいくつか代入した結果はあっていたので，たぶんこれで良いと思います．

(iv) A^nを計算すると，

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (-1)^n & & \\ & & e^{in\pi/4} & \\ & & & e^{-in\pi/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{4} & 0 & -\sin\frac{n\pi}{4} & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ \sin\frac{n\pi}{4} & 0 & 0 & -\cos\frac{n\pi}{4} \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

となるので，

$$e^{itA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{4} & 0 & -\sin\frac{n\pi}{4} & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ \sin\frac{n\pi}{4} & 0 & 0 & -\cos\frac{n\pi}{4} \end{pmatrix} n \tag{4.16}$$

です．