Spontaneous R-symmetry breaking in O'Raifeartaigh models

David Shih.

JHEP 02 (2008) 091, arXiv:hep-th/0703196.

安倍研 M1 宮根一樹

2024 6/20 (木)

読んだ動機など

「現在行っているモジュライ固定の研究に、R 対称性の観点から何か言えるかもしれない」

というお話があった。

これは、1994 年に Nelson と Seiberg が主張したこと [2] で以下の通り：

「R 対称性がある」 $\Longrightarrow$ 「超対称が自発的に破れている」

Nuclear Physics B416 (1994) 46–62
North-Holland

NUCLEAR PHYSICS B

R-symmetry breaking versus supersymmetry breaking

Ann E. Nelson
Department of Physics 0319, University of California, San Diego, 9500 Gilman Drive, La Jolla, CA 92093-0319, USA

Nathan Seiberg
Department of Physics and Astronomy, Rutgers University, Piscataway, NJ 08855-0849, USA

Received 24 September 1993
Accepted for publication 19 November 1993

(安倍研の Activity で紹介したものです。)

「R 対称性の存在」 $\Longrightarrow$ 「超対称の破れ」

先ほど紹介した論文に関連して、以下の論文を読む [1]。

Spontaneous R-symmetry breaking in O'Raifeartaigh models

David Shih (Harvard U., Phys. Dept.)
Mar, 2007

19 pages
Published in: *JHEP* 02 (2008) 091
e-Print: hep-th/0703196 [hep-th]
DOI: 10.1088/1126-6708/2008/02/091
View in: AMS MathSciNet, ADS Abstract Service

pdf cite claim reference search 185 citations

論文の概要

- Nelson & Seiberg によれば、SUSY を破るためには、(R 対称性を理論がもっているなら) それを破らなくてはならない。
- この論文では、モデルの摂動ダイナミクス自体 (量子補正) で R 対称性を破ることを考える。
- また、R 電荷に条件がつくことが分かる。

イントロダクション

自発的対称性の破れ

n 個の場 $\Phi_i(x)$ が作るポテンシャル $V(\Phi_1, \cdots, \Phi_n)$ の極小値に興味がある。
その極小な点 (準安定点) を真空 $\langle\Phi_i\rangle$ といい、その真空からの揺らぎ $\tilde{\Phi}_i$ を考える。

$$\Phi_i = \langle\Phi_i\rangle + \tilde{\Phi}_i$$

この揺らぎに対してのポテンシャル $\tilde{V}$ は、元のポテンシャル V の対称性を保っているとは限らない。

$$\tilde{V}(\tilde{\Phi}_i) = V(\langle\Phi_i\rangle + \tilde{\Phi}_i)$$

$\longrightarrow$「対称性が自発的に破れている」という。

自発的対称性の破れ

$\boldsymbol{n}$ 個の場 $\boldsymbol{\Phi_i(x)}$ が作るポテンシャル $\boldsymbol{V(\Phi_1, \cdots, \Phi_n)}$ の極小値に興味がある。
その極小な点 (準安定点) を真空 $\langle\boldsymbol{\Phi_i}\rangle$ といい、その真空からの揺らぎ $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_i$ を考える。

$$\boldsymbol{\Phi_i} = \langle\boldsymbol{\Phi_i}\rangle + \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_i$$

この揺らぎに対してのポテンシャル $\tilde{\boldsymbol{V}}$ は、元のポテンシャル $\boldsymbol{V}$ の対称性を保っているとは限らない。

$$\tilde{\boldsymbol{V}}(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_i) = \boldsymbol{V}(\langle\boldsymbol{\Phi_i}\rangle + \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_i)$$

$\longrightarrow$「対称性が自発的に破れている」という。

もし、場の真空期待値が $\mathbf{0}$ (i.e. $\langle\boldsymbol{\Phi_i}\rangle = \mathbf{0}$) なら、(tree level では) 対称性は保たれる。

$$\tilde{\boldsymbol{V}}(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_i) = \boldsymbol{V}(\langle\boldsymbol{\Phi_i}\rangle + \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_i)。$$

超対称性

カイラル多重項 $\boldsymbol{\Phi} = \{\phi, \psi, F\}$。この多重項に含まれている粒子の間を

$$\xi Q\phi = \sqrt{2}\xi\psi\,, \quad \xi Q\psi = i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\phi + \sqrt{2}\xi F\,, \quad \xi Q F = i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi$$

のように変換するのが、(無限小) 超対称変換。

この変換で不変な理論のことを超対称な理論と言う。

また、超対称性を考えるときに、反可換な座標 θ を用いた超場形式を用いると、ミンコフスキー時空とグラスマン座標 θ を合わせた超空間 $(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$ が超対称変換の表現空間となっている。

$$\begin{aligned}\Phi &= \phi(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}\partial^2\phi(x) \\ &\quad + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta\theta F(x)\end{aligned}$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu$$

超場によって構成される以下のポテンシャルを考えると超対称な理論が得られる。

- $\boldsymbol{W}$：超ポテンシャル $\longrightarrow$ 超場の正則な関数で書かれたもの。
- $\boldsymbol{K}$：ケーラーポテンシャル $\longrightarrow$ 実超場によって書かれたもの。

ラグランジアンは $\boldsymbol{W}, \boldsymbol{K}$ に含まれているグラスマン座標を積分して取り除くことで得られる。

$$\mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4\theta \, K(\Phi, \Phi^\dagger) + \left[\int \mathrm{d}^2\theta \, W(\Phi) + \text{h.c.} \right]$$

この方法で得られたラグランジアンで、運動項を除いた項をポテンシャルとして扱う。

今回考える理論 (O'Raifeartaigh 模型)

次の理論を考える。

$$\begin{cases} W = fX + \dfrac{1}{2}(M_{ij} + XN_{ij})\phi_i\phi_j \\ K = X^\dagger X + \phi_i^\dagger \phi_i \end{cases}$$

ただし、X, ϕ_i はいずれもカイラル超場。

この理論が次の変換で不変であることを仮定する (R 対称性)

$$X \to e^{2i\alpha}X\ , \quad W \to e^{2i\alpha}W$$

(上の仮定から $\phi_i \to e^{iq_i\alpha}\phi_i$ と変換したときの q_i が決まってくる。が、後で。)

この理論の真空は

$$V_0 = f^2\ , \quad \langle\phi_i\rangle = 0\ , \quad \langle X\rangle = \text{任意の定数}$$

X の真空期待値は任意 (擬モジュライ) なので、$\langle X\rangle = 0$ とすれば R 対称性は保たれてしまう。(c.f. $\langle\Phi_i\rangle = 0$ なら $\tilde{V}(\tilde{\Phi}_i) = V(\langle\Phi_i\rangle + \tilde{\Phi}_i)$。)

今回の論文の目的

したがって、場 $\boldsymbol{X}$ についてはポテンシャルが立ち上がらない。

$$\boldsymbol{V(X) = V_0 + m_X^2 |X|^2 + \mathcal{O}(|X|^4)}$$

今回の論文の目的

したがって、場 X についてはポテンシャルが立ち上がらない。

$$V(X) = V_0 + m_X^2|X|^2 + \mathcal{O}(|X|^4)$$

そこで、今回は

量子補正 (Coleman-Weinberg ポテンシャル) で m_X^2 を計算

$$\Downarrow$$

R 対称性を自発的に破る

ことを考える。

- R 対称性が自発的に破れるためには、m_X^2 の符号が負であることが必要
  $\longrightarrow$ ϕ_i の R 電荷 q_i に条件がつく。
- 論文では、$|X|^4$ の係数が計算されていなかった。
  具体例を見ていったときに、正であることは確認されていたが、一般にそうなっているのか？

本論

超対称性の破れ

今回考える理論。

$$\boldsymbol{W = fX + \frac{1}{2}(M_{ij} + XN_{ij})\phi_i\phi_j}$$

$\boldsymbol{M, N}$ は複素対称行列。$\mathbf{det}\,\boldsymbol{M \neq 0}$、$\boldsymbol{f > 0}$ を仮定。

また、$\boldsymbol{M}$ を次の形で書く。$\boldsymbol{M_i}$ は R 電荷が $\boldsymbol{q_i}$ の場の質量行列。(具体例)

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} & & & & & \boldsymbol{M_1} \\ & & & & \boldsymbol{M_2} & \\ & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \\ & \boldsymbol{M_2^T} & & & & \\ \boldsymbol{M_1^T} & & & & & \end{pmatrix}$$

R 対称性を課すと、R 電荷に条件がつく。

$$\boldsymbol{M_{ij} \neq 0 \implies R(\phi_i) + R(\phi_j) = 2\,, \quad N_{ij} \neq 0 \implies R(\phi_i) + R(\phi_j) = 0}$$

$\boldsymbol{F}$-term の SUSY 条件は

$$\frac{\partial W}{\partial \phi_i} = 0 \implies (M_{ij} + XN_{ij})\phi_j = 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

方程式を満たす $\langle \phi_i \rangle$ $(\neq 0)$ が存在するかどうか $\rightarrow$ $\det(M + XN)$ を計算

(c.f. $\det \exp A = \exp \operatorname{tr} A$)

$$\begin{aligned} \det(M + XN) &= \exp\left[\operatorname{Tr}\ln\Big(1 + XM^{-1}N\Big)\right]\det M \\ &= \exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-X)^k}{k}\operatorname{Tr}\Big(M^{-1}N\Big)^k\right]\det M \\ &= \det M \neq 0 \end{aligned}$$

最後の等式はR 電荷の条件から $\operatorname{Tr}\big(M^{-1}N\big)$ が 0 となることを用いている。

$$(M_{ij} \neq 0 \implies R(\phi_i) + R(\phi_j) = 2\,, \quad N_{ij} \neq 0 \implies R(\phi_i) + R(\phi_j) = 0)$$

この関係から、R 対称性を課すと $M^{-1}N$ を計算するときに M か N の成分が必ず消えている。

$$\Downarrow$$

よって、非自明な超対称性を破る真空は存在しない。

m_X^2 の計算

Coleman-Weinberg ポテンシャルを展開して、$|X|^2$ の係数を探る。

$$V_{\text{eff}}^{(1)} = \frac{1}{64\pi^2}\,\mathrm{Tr}(-1)^F \mathcal{M}^4 \ln\frac{\mathcal{M}^2}{\Lambda^2}$$

$\mathrm{Tr}(-1)^F$ は超トレース。$\mathcal{M}$ は、スカラーかフェルミオンの質量行列で

$$\mathcal{M}_B^2 = \begin{pmatrix} W^\dagger_{ik}W^{kj} & W^\dagger_{ijk}W^k \\ W^{ijk}W^\dagger_k & W^{ik}W^\dagger_{kj} \end{pmatrix} = (\hat{M} + X\hat{N})^2 + f\hat{N}$$

$$\mathcal{M}_F^2 = \begin{pmatrix} W^\dagger_{ik}W^{kj} & 0 \\ 0 & W^{ik}W^\dagger_{kj} \end{pmatrix} = (\hat{M} + X\hat{N})^2$$

ただし、$W_i \equiv \partial W/\partial\phi_i$。これがスカラーやフェルミオンの質量行列というのは、

ここで、ポテンシャルの公式を書き換える。

$$\frac{1}{64\pi^2}\,\mathrm{Tr}(-1)^F\mathcal{M}^4\ln\frac{\mathcal{M}^2}{\Lambda^2} = -\frac{1}{32\pi^2}\,\mathrm{Tr}\int_0^\Lambda \mathrm{d}v\, v^5\left(\frac{1}{v^2+\mathcal{M}_B^2}-\frac{1}{v^2+\mathcal{M}_F^2}\right)$$

積分の部分は以下のようになっている。

$$\int \mathrm{d}v\,\frac{v^5}{v^2+\mathcal{M}^2} = -\frac{1}{2}\mathcal{M}^2v^2+\frac{1}{4}v^4+\frac{1}{2}\mathcal{M}^4\ln\left(\mathcal{M}^2+v^2\right)$$

あとは $\ln\Lambda^2$ で発散する項をみて

$$\left[\frac{1}{2}\mathcal{M}^4\ln\left(\mathcal{M}^2+v^2\right)\right]_0^\Lambda = \frac{1}{2}\mathcal{M}^4\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\mathcal{M}^2}\right) \sim -\frac{1}{2}\mathcal{M}^4\ln\frac{\mathcal{M}^2}{\Lambda^2}$$

こんな感じなのではないかと思います。

分母に X がいるので、これについて展開 $\to$ 2 次の係数を拾ってそれを m_X^2 とする。

$$\int_0^\Lambda dv\, \frac{v^5}{v^2+\mathcal{M}_B^2} = \int_0^\Lambda dv\, \frac{v^5}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}+\{\hat{M},\hat{N}\}X+\hat{N}^2X^2}$$
$$\to \int_0^\Lambda dv\, \frac{v^5}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}} \left\{-\frac{1}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}}\hat{N}^2 + \frac{1}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}}\{\hat{M},\hat{N}\}\frac{1}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}}\{\hat{M},\hat{N}\}\right\} X^2$$

ここで、部分積分をすると、m_X^2 への寄与は

$$\frac{1}{16\pi^2}\,\mathrm{Tr}\int_0^\Lambda dv \frac{v^3}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}}\left(\hat{N}^2-\frac{1}{2}\{\hat{M},\hat{N}\}\frac{1}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}}\{\hat{M},\hat{N}\}\right)$$

フェルミオンの寄与も同様に計算する。すると、最終的に

$$m_X^2 = \frac{1}{16\pi^2}\,\mathrm{Tr}\int_0^\Lambda dv \times\left[\frac{v^3}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}}\left(\hat{N}^2-\frac{1}{2}\{\hat{M},\hat{N}\}\frac{1}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}}\{\hat{M},\hat{N}\}\right) - \frac{v^3}{v^2+\hat{M}^2}\left(\hat{N}^2-\frac{1}{2}\{\hat{M},\hat{N}\}\frac{1}{v^2+\hat{M}^2}\{\hat{M},\hat{N}\}\right)\right]。$$

ここで、次のような関数を用意する。

$$\mathcal{F}(v) \equiv \left(v^2 + \hat{M}^2\right)^{-1} \cdot f\hat{N}$$

これを用いれば、m_X^2 は次のように書ける。

$$m_X^2 = \frac{1}{16\pi^2 f^2} \int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^3\, \mathrm{Tr}\left[\frac{\mathcal{F}(v)^4}{1-\mathcal{F}(v)^2} v^2 - 2\left(\frac{\mathcal{F}(v)^2}{1-\mathcal{F}(v)^2}\hat{M}\right)^2\right] \tag{2.1}$$

式の形をみて、

$$M_1^2 = \frac{1}{16\pi^2 f} \int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^5\, \mathrm{Tr}\left[\frac{\mathcal{F}(v)^4}{1-\mathcal{F}(v)^2}\right]$$
$$M_2^2 = \frac{1}{8\pi^2 f} \int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^3\, \mathrm{Tr}\left[\left(\frac{\mathcal{F}(v)^2}{1-\mathcal{F}(v)^2}\hat{M}\right)\right]$$
$$m_X^2 = M_1^2 - M_2^2$$

としておく。

これで、m_X^2 に関する公式が得られたことになる。Appendix で具体的なモデルに対してこの公式を適用している。

m_X^2 と R 電荷の関係

ここでは、この公式と R 電荷との関係を見てみる。

$$M_1^2 = \frac{1}{16\pi^2 f} \int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^5\, \mathrm{Tr}\left[\frac{\mathcal{F}(v)^4}{1 - \mathcal{F}(v)^2}\right]$$

$$m_X^2 = M_1^2 - M_2^2$$

簡単な模型での計算

以上の視点で、簡単な模型を考察する。

$$\boldsymbol{W = \lambda X\phi_1\phi_2 + m_1\phi_1\phi_3 + \frac{1}{2}m_2^2\phi_2^2 + fX}$$

「R 電荷が 0 と 2 のものを含まない模型」という意味で一番シンプル。このモデルの求め方は、簡単に説明されてあった。(現実的な模型は付録にあるが、それらは R 電荷が 0 か 2 のものを含んでいる。)

$$\boldsymbol{R_X = 2, R(\phi_1) = -1, R(\phi_2) = 1, R(\phi_3) = 3}$$

ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= \boldsymbol{\bar{F}^X F^X + \bar{F}^{\phi_1}F^{\phi_1} + \bar{F}^{\phi_2}F^{\phi_2} + \bar{F}^{\phi_3}F^{\phi_3}} \\ &= \boldsymbol{|\lambda X\phi_2 + m_1\phi_3|^2 + |\lambda X\phi_1 + m_2\phi_2|^2 + |m_1\phi_1|^2 + |\lambda\phi_1\phi_2 + f|^2} \end{aligned}$$

(ここで、カイラル超場 $\boldsymbol{\Phi}(= \phi_i$ or $\boldsymbol{X})$ のスカラーを同じ記号 $\boldsymbol{\Phi}$ で書いている。)

今回の質量行列などは以下の通り。

$$\boldsymbol{W = \lambda X\phi_1\phi_2 + m_1\phi_1\phi_3 + \frac{1}{2}m_2^2\phi_2^2 + fX} \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_1 \\ 0 & m_2 & 0 \\ m_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \tag{2.3}$$

まとめ

まとめ

付録

目次

目次

(2.1) の補足

参考文献

[1] D. Shih, *Spontaneous R-symmetry breaking in O'Raifeartaigh models,* JHEP **02** (2008) 091, arXiv:hep-th/0703196.

[2] A. E. Nelson and N. Seiberg, *R symmetry breaking versus supersymmetry breaking,* Nucl. Phys. B **416** (1994) 46–62, arXiv:hep-ph/9309299.