

高次元時空モデルと素粒子標準模型

宮根 一樹

2024 年 3 月

概要

これは数物セミナー素粒子グループでのリレーセミナーの資料になります。私が現在所属している研究室^{*1}は、4次元よりも大きい次元の時空を仮定する高次元時空モデルから素粒子標準模型を再現することを目標とした研究を主にしています。そこで、ここでは高次元時空モデルからどのようにして統一理論の見通しがつくのかについて、議論したいと思います。

目次

1	はじめに	2
2	高次元の場の理論とコンパクト化	3
2.1	5次元理論のコンパクト化	3
2.2	曲がった時空上でのスピノル場	6
3	6次元の理論のコンパクト化	7
付録 A	標準模型の復習	8
A.1	非可換ゲージ理論	8

^{*1} 早稲田大学の安倍研究室といいます。ホームページは[こちら](#)です。

1 はじめに

2 高次元の場の理論とコンパクト化

この章では、 $4 + n$ 次元の Einstein-Hilbert 作用がコンパクト化によって、4 次元では、一般相対論と Yang-Mills 理論になることを見ていこうと思います。

2.1 5 次元理論のコンパクト化

まずは単純に 5 次元の時空を考えることにします。その座標は z^M で、 $M = 0, 1, 2, 3, 4$ という値をとります。また、時空はミンコフスキーで計量は

$$\eta_{MN} = \text{diag}(-, +, +, +, +) \quad (2.1)$$

です。この時空上の場の理論は、たとえば実スカラー場 $\phi(z)$ なら

$$S = \int d^5 z \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi \right) \quad (2.2)$$

のように 4 次元の理論と同じように議論することができます。

ここで、5 番目の座標 z_4 が半径 a の円周になったとしましょう。円周 S^1 となったときは $\theta \in [0, 2\pi)$ でパラメトライズするのが便利なので、以後は無次元のパラメーターで $z_4(\theta)$ と書けるとします。さらに

$$dz_4 = a d\theta \quad (2.3)$$

という関係が成立するとすれば、 $dz_4^2 = a^2 d\theta^2$ より

$$g_{\theta\theta} = a^2. \quad (2.4)$$

上述のように、余剰空間に境界条件を課すことをコンパクト化といいます。ここで、5 次元のミンコフスキー時空 M_5 がコンパクト化によって時空が 4 次元ミンコフスキーと円周の直積 $M_4 \times S^1$ になるとすれば、その計量は

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

です^{*2}。

このような時空上で、実スカラー場 $\phi(z)$ の理論を考えてみましょう。今、 θ 方向は円周 S^1 にコンパクト化されていることから、 $\phi(z)$ はフーリエ級数展開できます：

$$\phi(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \tilde{\phi}_k(x) e^{ik\theta}. \quad (2.6)$$

これを 5 次元の実スカラー場の作用 (2.2) に代入します。

$$\int d^5 z \sqrt{-g} = \int d^4 x \sqrt{-g_4} \cdot a \int_0^{2\pi} d\theta \quad (2.7)$$

なので、 θ 方向の積分を考えると

$$\int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{2} g^{MN} (\partial_M \phi) (\partial_N \phi) \right) = \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) - \frac{1}{2a^2} \partial_\theta \phi^2 \right) \quad (2.8)$$

^{*2} ただし、 $g_{\mu\theta} = g_{\theta\mu} = 0$ と 4 次元の部分と 1 次元の部分が完全に分離できているのは仮定です。

となりますが、

$$\partial_\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \partial_\mu \tilde{\phi}_k(x) e^{ik\theta} \quad (2.9)$$

より、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) \right) &= \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{4\pi} \sum_{k,l} \partial_\mu \tilde{\phi}_k(x) \partial^\mu \tilde{\phi}_l(x) e^{i(k+l)\theta} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi}_0(x) \partial^\mu \tilde{\phi}_0 - \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \partial_\mu \tilde{\phi}_k \partial^\mu \tilde{\phi}_{-k} \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi}_0(x) \partial^\mu \tilde{\phi}_0 - \sum_{k \geq 1} \partial_\mu \tilde{\phi}_k \partial^\mu \tilde{\phi}_k^* \end{aligned} \quad (2.10)$$

です。ただし、 $\phi(x, \theta)$ が実スカラー場であることから

$$\tilde{\phi}_k^* = \tilde{\phi}_{-k} \quad (2.11)$$

を用いました。(2.8) の残りの項を考えると

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{2a^2} \partial_\theta \phi^2 \right) &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{k,l} kl \tilde{\phi}_k \tilde{\phi}_l e^{i(k+l)\theta} \\ &= -\sum_{k \leq 1} \left(\frac{|k|}{a} \right)^2 \tilde{\phi}_k \tilde{\phi}_k^* \end{aligned} \quad (2.12)$$

となるので、4次元の有効作用は

$$S = \int d^4x \, a \mathcal{L}_4 \quad (2.13)$$

であり、ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi}_0(x) \partial^\mu \tilde{\phi}_0 - \sum_{n \geq 1} \left(\partial_\mu \tilde{\phi}_n \partial^\mu \tilde{\phi}_n^* + M_n^2 \tilde{\phi}_n \tilde{\phi}_n^* \right) \quad (2.14)$$

となります。ただし、

$$M_n \equiv \frac{|n|}{a} \quad (2.15)$$

とおきました。

有効作用 (2.14) から次のことが分かります：

- 5次元の実スカラー場の理論からは、質量 M_n をもつ複素スカラー場（KK 粒子）が現れること。
- $n = 0$ のモードは、massless であること（ゼロモード）。
- $n \neq 0$ のときは、その粒子の質量は $M_n = |n|/a$ であり、 $a \ll 1$ ならば $M_n \gg 1$ であること。したがって、コンパクト空間の半径が非常に小さければ、十分なエネルギーがないとゼロモード以外の粒子を生成して観測することができないことになります*3。

*3 Particle Data Group のデータによると、TeV スケールではまだ KK 粒子の存在が確認されていないようです。

次は、(スピノル場の前に) ベクトル場 $A_M(z)$ の理論を見ていきます。ベクトル場の作用は、一番簡単な Maxwell 理論

$$S = \int d^5 z \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} g^{MP} g^{NQ} F_{MN} F_{PQ} \right) \quad (2.16)$$

を考えます。ベクトル場は z^4 の方向の周期境界条件により、スカラー場の場合と同様に

$$A_M(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n A_M^{(n)}(x) e^{in\theta} \quad (2.17)$$

と展開できます。これを作用 (2.16) に代入します。作用を少し書き換えると

$$\begin{aligned} S &= \int d^4 x \sqrt{-g_4} \cdot a \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{4} g^{MP} g^{NQ} F_{MN} F_{PQ} \right) \\ &= \int d^4 x \sqrt{-g_4} \cdot a \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)^2 - \frac{a}{2} (\partial^\theta A^\mu - \partial^\mu A^\theta)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

となるので、被積分関数の各項は

$$\begin{aligned} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)^2 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} e^{i(m+n)\theta} \left(\partial^\mu A^{\nu,(m)} - \partial^\nu A^{\mu,(m)} \right) \left(\partial_\nu A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\nu^{(n)} \right) \\ &\xrightarrow{\theta \text{ 方向の積分}} \sum_n \left(\partial^\mu A^{\nu,(-n)} - \partial^\nu A^{\mu,(-n)} \right) \left(\partial_\nu A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\nu^{(n)} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} (\partial^\theta A^\mu - \partial^\mu A^\theta)^2 &= -\frac{1}{2\pi a^2} \sum_{m,n} e^{i(m+n)\theta} \left(n A^{\mu,(m)} - \partial^\mu A^{\theta,(m)} \right) \left(n A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\theta^{(n)} \right) \\ &\xrightarrow{\theta \text{ 方向の積分}} \frac{1}{a^2} \sum_n \left(n A^{\mu,(-n)} + \partial^\mu A^{\theta,(-n)} \right) \left(n A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\theta^{(n)} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

となります。ただし、

$$\partial_\theta = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.21)$$

として計算しています。この結果を、作用 (2.18) の表式に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \int d^4 x \sqrt{-g_4} a \left(-\frac{1}{4} \sum_n \left(\partial^\mu A^{\nu,(-n)} - \partial^\nu A^{\mu,(-n)} \right) \left(\partial_\nu A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\nu^{(n)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2a} \sum_n \left(n A^{\mu,(-n)} + \partial^\mu A^{\theta,(-n)} \right) \left(n A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\theta^{(n)} \right) \right) \\ &\equiv \int d^4 x \sqrt{-g_4} a \mathcal{L}_4 \end{aligned} \quad (2.22)$$

です。このとき、ベクトル場の質量はどこからくるかという

$$\mathcal{L}_4 \sim - \sum_n \frac{n^2}{2a} A^{\mu,(n)} A_\mu^{(n)*} \quad (2.23)$$

の項からくるわけですが、やはり質量は $a^{-1/2}$ に比例しています。したがって、effective なラグランジアンはゼロモードのみに注目すればよくて、それは

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2a^2} \partial_\mu A_\theta \partial^\mu A_\theta^* \quad (2.24)$$

です。ただし、 $A_M^{(n=0)}$ のモードの添え字は省略しており、 $F_{\mu\nu}$ は 4 次元の場の強さです。この表式から、4 次元ではベクトル場のほかに複素スカラー場が生じていることが分かります*4。このように、より低いスピンをもち粒子が生じるのがコンパクト化の特徴（だそう）です。

2.2 曲がった時空中でのスピノル場

5 次元のスピノル場のコンパクト化を考える前に、（記号の定義の兼ねて）曲がった時空中での場の理論について簡単に復習したいと思います。

スカラー場やベクトル場といったボゾンや、スピノル場といったフェルミオンは、平坦な時空でのローレンツ変換の既約表現として得られるものでした。ボゾンのほうは、一般座標変換に対してもスカラーやベクトルとして変換されるため、計量によって一般共変化が可能です。が、スピノル場は一般座標変換に対しては既約表現になっておらず、ボゾンの場合と同様に計量からうまく共変的な理論を作ることができません。

そこで、時空の各点における接空間（局所ローレンツ変換）を考え、そこでは時空は計量が平坦*5ですので、そこでスピノル場とローレンツ変換を定義しておき、別の接空間とつなぐことにします。

*4 $A_\theta(x)$ の添え字 θ は 4 次元のローレンツ変換では変換されません。したがって、この添え字は 4 次元の理論からは（ゲージ群の添え字と同様に）内部空間の添え字となるため、場 $A_\theta(x)$ はローレンツ変換に対してはスカラーです。

*5 時空が多様体でしたら自然な仮定でしょうし、等価原理からも自然です。

3 6次元の理論のコンパクト化

付録 A 標準模型の復習

夜ゼミのネタになるかもしれないので、もしかしたらと思って書いておきます^{*6}。

A.1 非可換ゲージ理論

^{*6} 夜ゼミがどんな感じかわかりませんが、真面目すぎたり簡単すぎたりしたらボツにします（笑）

参考文献

- [1] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Pub. Co, Reading, Mass, 1995.
- [2] 藤井 保憲. **超重力理論入門**. 産業図書, 2005.