宇宙物理学　レポート 2

氏名：宮根一樹　学籍番号：5324A057-8

最終更新：2024 年 6 月 14 日

1. 分子運動論を考える。まずは、x 軸方向の運動のみに絞って考える。粒子が速度 v_x で壁に弾性衝突したとすると、逆向きで速度 v_x に運動を開始する。このときに粒子が受けた力を F_x とすると、運動量の変化と力積の関係から
$$F_x = 2p_x \cdot \frac{v_x}{2} \tag{0.1}$$
が成立する。このとき、単位時間あたりに $v_x/2$ 回だけ粒子が壁にぶつかることに注意する[*1]。これは x 軸方向の関係のみなので、全ての方向を考えればそれは絶対値をとってから、その量の 1/3 を考えればよい。したがって、
$$\bar{P} = \frac{1}{3}pv \tag{0.2}$$
である。

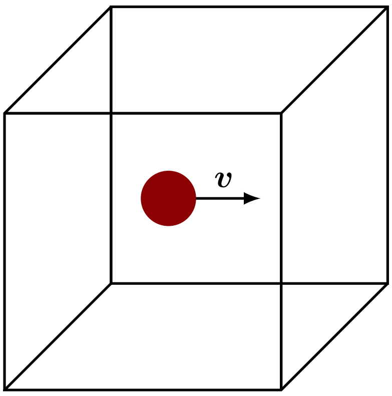

図 0.1　立方体の中での粒子の運動

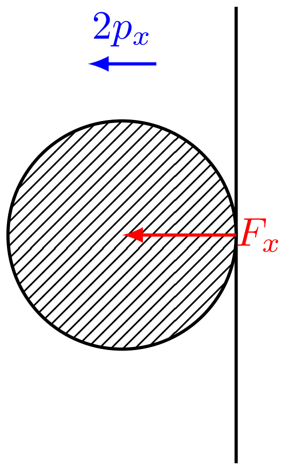

図 0.2　壁に衝突する瞬間

ここで、$\gamma \equiv 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ とおけば
$$p = \gamma m v\,, \quad E = \gamma m c^2 \tag{0.3}$$
なので、$p = Ev/c^2$ である。よって
$$\bar{P} = \frac{1}{3}\cdot\frac{Ev}{c^2}\cdot v = \frac{Ev^2}{3c^2} \tag{0.4}$$

[*1] 立方体の各辺の長さも単位長さであることに注意する。

である。また、$m=0$ のときは、$E^2=m^2c^4+p^2c^2$ から $E=cp$ であり $v=c$。ゆえに

$$\bar{P}=\frac{1}{3}cp \tag{0.5}$$

である。

2.

3. 以下の 2 つの方程式が与えられている：

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{DE}}+3H(1+w_{\mathrm{DE}})\varepsilon_{\mathrm{DE}}=0, \tag{0.6}$$

$$H^2=\frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_{\mathrm{DE}}. \tag{0.7}$$

(0.7) を微分すると

$$2H\dot{H}=\frac{8\pi G}{3c^2}\dot{\varepsilon}_{\mathrm{DE}} \tag{0.8}$$

となるので、(0.6) を代入し、$\varepsilon_{\mathrm{DE}}$ に対して (0.7) を代入して整理すれば

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H=-\frac{3}{2}(1+w_{\mathrm{DE}})H^2 \tag{0.9}$$

となる。これを $H(t_0)=H_0$ のもとで解くと

$$\frac{1}{H(t)}-\frac{1}{H_0}=\frac{3}{2}(1+w_{\mathrm{DE}})(t-t_0) \tag{0.10}$$