Anomalies on orbifolds

Nima Arkani-Hamed, Andrew G. Cohen, Howard Georgi.

Physics Letters B 516 (2001) 395-402, arxiv:hep-th/0103135.

安倍研 M1 宮根一樹

2024 5/7 (火)

読んだ動機を話そうと思ったのですが、

[1] N. Arkani-Hamed, A. G. Cohen, and H. Georgi, Physics Letters B 516 (2001) 395-402, arxiv:hep-th/0103135.

読んだ動機を話そうと思ったのですが、

「お前の読んだ理由なんてみんな 1 ミリも興味ない」

と言われてしまったので、(本当にそうなんだと思いますし) 自粛します。

以下の論文を紹介します [1]。

Anomalies on orbifolds

Nima Arkani-Hamed (Harvard U.), Andrew G. Cohen (Harvard U.), Howard Georgi (Harvard U.)
Mar, 2001

11 pages
Published in: *Phys.Lett.B* 516 (2001) 395-402
e-Print: hep-th/0103135 [hep-th]
DOI: 10.1016/S0370-2693(01)00946-7
Report number: HUTP-01-A013, BUHEP-01-4, LBNL-47614, UCB-PTH-01-09
View in: AMS MathSciNet, OSTI Information Bridge Server, ADS Abstract Service

pdf cite claim reference search 164 citations

イントロダクション

アノマリー

4 次元の場合のカイラルアノマリーを確認する。

アノマリー

4 次元の場合のカイラルアノマリーを確認する。

ゲージ場 $\boldsymbol{A_\mu}$ と結合しているフェルミオン $\boldsymbol{\psi}$ を考える

$$\boldsymbol{\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}$$

カイラル変換 $\boldsymbol{\psi \to e^{i\gamma^5\alpha(x)}\psi}$ に対するネーターカレントの方程式は

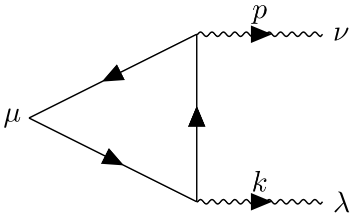
$$\boldsymbol{\partial_\mu j_5^\mu = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi, \quad j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi}$$

[2] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory. Addison-Wesley Pub. Co, Reading, Mass, 1995.
[3] 藤川和男, ゲージ場の理論. 岩波書店, 2001.

しかし、これは古典論の結果

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi) = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi$$

摂動論でこの関係をチェックするには、ファインマンルールにしたがって以下のダイアグラムを計算してみればよい [2, 3]。



前に示したダイアグラムを計算すると

$$\partial_\mu \langle \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \rangle = 2im \langle \bar{\psi}\gamma^5\psi \rangle + Q, \quad Q = \frac{e^2}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \langle F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \rangle$$

この余分な Q は、ゲージ不変性を保って発散を正則化するときに生じる項

この Q をカイラルアノマリーという。

理論にアノマリーがあると、通常の量子論の定式化ができなくなることが知られている [4]。

よって、

アノマリーが相殺されるように理論を作りたい

Kaluza-Klein 理論とアノマリー

高次元の時空を考え、余剰空間に周期条件を与えること (コンパクト化) によって、4 次元有効理論を作る方法があり、それを Kaluza-Klein 理論という。

特に、今回は 5 次元の時空 $\boldsymbol{x^M = (x^0, x^1, \cdots, x^4)}$ を考え、$\boldsymbol{x^4}$ の方向に $\boldsymbol{x^4 \sim x^4 + 2L}$ の周期境界条件を課してコンパクト化する。

Kaluza-Klein 理論とアノマリー

高次元の時空を考え、余剰空間に周期条件を与えること (コンパクト化) によって、4 次元有効理論を作る方法があり、それを Kaluza-Klein 理論という。

特に、今回は 5 次元の時空 $\boldsymbol{x^M = (x^0, x^1, \cdots, x^4)}$ を考え、$\boldsymbol{x^4}$ の方向に $\boldsymbol{x^4 \sim x^4 + 2L}$ の周期境界条件を課してコンパクト化する。

5 次元の理論でのアノマリー相殺

と

4 次元有効理論でのアノマリー相殺

の対応

を調べたい。

一方で、カイラルアノマリーについては次のことが分かっている：

- 奇数次元の理論はクリフォード代数の性質から非カイラル

  $\longrightarrow$ カイラルアノマリーは必ず相殺される

- 非カイラルな理論を S^1 コンパクト化しても、4 次元有効理論は非カイラル

一方で、カイラルアノマリーについては次のことが分かっている：

- 奇数次元の理論はクリフォード代数の性質から非カイラル
  $\longrightarrow$ カイラルアノマリーは必ず相殺される
- 非カイラルな理論を S^1 コンパクト化しても、4 次元有効理論は非カイラル

よって、5 次元の理論をコンパクト化するだけでは、4 次元のカイラルアノマリーが消えているのは明らか。

そこで・・・

オービフォールド S^1/Z_2

[5] K.-S. Choi and C.-ŭ. Kim, Quarks and Leptons from Orbifolded Superstring, no. volume 954 in Lecture Notes in Physics. Springer, Cham, second edition ed., 2020.

今回は、さらにオービフォールドという境界条件を余剰空間に課す。

オービフォールド S^1/Z_2

[5] K.-S. Choi and C.-ŭ. Kim, Quarks and Leptons from Orbifolded Superstring, no. volume 954 in Lecture Notes in Physics. Springer, Cham, second edition ed., 2020.

今回は、さらにオービフォールドという境界条件を余剰空間に課す。

例えば、スカラー場の理論を考える

$$S = \int \mathrm{d}^5 x \left(\frac{1}{2} \partial^M \Phi \partial_M \Phi - \frac{1}{2} m(x^4)^2 \Phi^2 \right)$$

この理論に、$\Phi(x, x^4) = \Phi(x, x^4 + 2L)$ という境界条件に加えて

$$\Phi(x, x^4) = \eta \Phi(x, -x^4) \, , \ \eta = \pm 1$$

という境界条件を課す。

[5] K.-S. Choi and C.-ŭ. Kim, Quarks and Leptons from Orbifolded Superstring, no. volume 954 in Lecture Notes in Physics. Springer, Cham, second edition ed., 2020.

まずは、周期境界条件 $\boldsymbol{\Phi(x, x^4) = \Phi(x, x^4 + 2L)}$ から

$$\boldsymbol{\Phi(x, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x) \exp\left[i\frac{n\pi}{L}x^4\right]}$$

とフーリエ展開できる。

さらに、オービフォールドの境界条件 $\boldsymbol{\Phi(x, x^4) = -\Phi(x, -x^4)}$ を課すと $\boldsymbol{\phi_n(x) + \phi_{-n}(x) = 0}$ という条件になる

この条件により、$\boldsymbol{n = 0}$ のモード $\boldsymbol{\phi_0(x)}$ は消えることがわかる

[5] K.-S. Choi and C.-ŭ. Kim, Quarks and Leptons from Orbifolded Superstring, no. volume 954 in Lecture Notes in Physics. Springer, Cham, second edition ed., 2020.

まずは、周期境界条件 $\Phi(x, x^4) = \Phi(x, x^4 + 2L)$ から

$$\Phi(x, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x) \exp\left[i \frac{n\pi}{L} x^4\right]$$

とフーリエ展開できる。

さらに、オービフォールドの境界条件 $\Phi(x, x^4) = -\Phi(x, -x^4)$ を課すと $\phi_n(x) + \phi_{-n}(x) = 0$ という条件になる

この条件により、$n = 0$ のモード $\phi_0(x)$ は消えることがわかる

境界条件をうまく選べば、ゼロモードの場を消したり残したりできるため
4 次元の有効理論を作るときに嬉しい

ので、調べられている。

本論文の流れ・まとめ

同様のことが $\boldsymbol{x^4 = L}$ の点でも起こることがわかる

$\boldsymbol{x = 0, L}$ の点 (固定点) では、ゼロモードがカイラルになる

$\rightarrow$ アノマリーが 5 次元の理論でも現れる可能性がある

$\rightarrow$ 4 次元有効理論でのアノマリーとの関係は?

本論文の流れ・まとめ

同様のことが $x^4 = L$ の点でも起こることがわかる

$x = 0, L$ の点 (固定点) では、ゼロモードがカイラルになる

$\rightarrow$ アノマリーが 5 次元の理論でも現れる可能性がある

$\rightarrow$ 4 次元有効理論でのアノマリーとの関係は?

議論の流れ

- 余剰空間方向の場の境界条件を設定、モード展開
- それを元のラグランジアンに代入 $\rightarrow$ カレントを計算
- 有効理論のアノマリーと元の理論のアノマリーの関係の議論

今回、得られる結果は

$$\partial_C j^C = \frac{1}{2}\left[\delta(x) + \delta(x - L)\right] Q \quad (C = 0, 1, 2, 3, 4)$$

5 次元のカレントの保存も量子補正によって破れることがある。

本論

4 次元のアノマリー

最初のレビューの部分で良く分からない記述がありました。

$$\partial_\mu j_5^\mu + 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi = Q \tag{2.2}$$

with Q given by (1.2).

It is worthwhile to consider the expectation value of this equation in the presence of the external gauge potential. Note that a non-zero expectation value for the divergence of the current would require a pole at $p^2 = 0$ in the expectation value of the current itself. For a massive fermion there is no state to produce such a pole, and consequently the expectation value of the divergence of the axial current must vanish. The operator equation (2.2) then implies

$$2im\langle\bar{\psi}\gamma^5\psi\rangle = Q. \tag{2.3}$$

おそらく

「massive なら極は $p^2 = 0$ のところにないので、$\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle = 0$」

ということ?

複数の場 ψ_i, A_{ij}^μ とチャージ q_i がある場合は

$$\partial_\mu j_5^\mu + 2i\bar{\psi}M\gamma^5\psi = \frac{1}{2}Q,\ Q = \frac{1}{16\pi^2}\,\mathrm{tr}\,qF\tilde{F}$$

となる。

先行研究 [6] によると、無質量モードのみが真空期待値の計算に寄与してきて

$$\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle = \frac{1}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\left[P_0 q P_0 F P_0 \tilde{F}\right]$$

P_0 は無質量モードへの射影。

セットアップ

時空は 5 次元 $x^C = (x^\mu, x_4)$

<u>作用</u>

$$S = \int \mathrm{d}^4x \int_0^L \mathrm{d}x_4\, \bar{\psi}(i\not{D} - \gamma_4 D_4 - m(x_4))\psi$$

$$\not{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu,\ D_C = \partial_C - iA_C,\ \gamma_4 \equiv -i\gamma^5$$

<u>境界条件</u>: 周期境界条件 $x_4 \sim x_4 + 2L$ とオービフォールド

$$\psi(x, x_4) = \gamma^5\psi(x, -x_4)$$

$$A_\mu(x, x_4) = A_\mu(x, -x_4)$$

$$A_4(x, x_4) = -A_4(x, -x_4)$$

$$\Rightarrow \quad m(x_4) = m(2L + x_4) = -m(-x_4)$$

また、$\psi(x, x_4)$ をカイラリティーで分類

$$\psi = \psi_+ + \psi_-,\ \gamma^5 \psi_\pm = \pm \psi_\pm$$

ゲージ変換: ローカルな $U(1)$

$$\psi(x, x_4) \to e^{i\phi(x, x_4)} \psi(x, x_4)$$

$$A_C(x, x_4) \to A_C(x, x_4) - i\partial_C \phi(x, x_4)$$

$$\Rightarrow \quad \phi(x, x_4) = \phi(x, x_4 + 2L) = \phi(x, -x_4)$$

アノマリーの計算

以下、$\boldsymbol{A_4 = 0}$ とゲージ固定する。

KK モード展開は次の通り

$$\boldsymbol{\psi_\pm(x, x_4) = \sum_M \psi_{M\pm}(x)\xi_M^\pm(x_4)}$$

ただし、

$$\boldsymbol{\left[-i\partial_4 + m(x_4)\right]\xi_M^+(x_4) = M\xi_M^+ \quad (M \geq 0)}$$

$$\boldsymbol{\left[i\partial_4 + m(x_4)\right]\xi_M^-(x_4) = M\xi_M^-(x_4) \quad (M > 0)}$$

($\boldsymbol{i}$ 忘れはおそらくタイポ?)

このモード展開の基底は完全性を満たす。内積は積分。

$$\boldsymbol{\sum_M \xi_M^\pm(x)\xi_M^\pm(y) = \delta(x-y)}$$

KK モード展開

$$\psi_{\pm}(x, x_4) = \sum_M \psi_{M\pm}(x)\xi_M^{\pm}(x_4)$$

- 元の作用に代入
- x_4 の方向を 0 から L で積分

すると

$$\begin{aligned} S = \int \mathrm{d}^4x \Bigg[&\sum_M \bar{\psi}_M(x)(i\partial\!\!\!/ - M)\psi_M(x) \\ &- \sum_{M,M'} \bar{\psi}_{M'+}(x) A\!\!\!/^{+}_{M'M}(x)\psi_{M+}(x) \\ &- \sum_{M,M'} \bar{\psi}_{M'-}(x) A\!\!\!/^{-}_{M'M}\psi_{M-}(x) \Bigg] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S = \int \mathrm{d}^4 x \; \Bigg[& \sum_{M} \bar{\psi}_M(x)(i\not{\partial} - M)\psi_M(x) \\
& - \sum_{M,M'} \bar{\psi}_{M'+}(x) \not{A}^{+}_{M'M}(x) \psi_{M+}(x) \\
& - \sum_{M,M'} \bar{\psi}_{M'-}(x) \not{A}^{-}_{M'M} \psi_{M-}(x) \Bigg]
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\psi_M(x) \equiv \psi_{M+}(x) + \psi_{M-}(x)
$$

$$
A^{\mu\pm}_{M'M}(x) \equiv \int_0^L \mathrm{d}x_4 \, \xi^{\pm}_{M'}(x_4) \xi^{\pm}_{M}(x_4) A^{\mu}(x, x_4)
$$

このときのカレントは、$J^C = \bar{\psi}(x, x_4)\gamma^C\psi(x, x_4)$ を計算すれば

$$\begin{aligned} J^\mu(x, x^4) &= \sum_{M,M'} \Big[\xi^+_{M'}(x_4)\xi^+_M(x_4)\bar{\psi}_{M'+}(x)\gamma^\mu\psi_{M+}(x) \\ &\qquad +\xi^-_{M'}(x_4)\xi^-_M(x_4)\bar{\psi}_{M'-}(x)\gamma^\mu\psi_{M-}(x)\Big] \\ J^4(x, x_4) &= \sum_{M,M'} \Big[\xi^+_{M'}(x_4)\xi^-_M(x_4)\bar{\psi}_{M'+}(x)\gamma^5\psi_{M-}(x) \\ &\qquad +\xi^-_{M'}(x_4)\xi^+_M(x_4)\bar{\psi}_{M'-}(x)i\gamma^5\psi_{M+}(x)\Big] \end{aligned}$$

KK モード M を行列の添え字とみなす。

$$[\Psi(x)]_M \equiv \psi_M(x),\ [\mathcal{A}^{\mu\pm}]_{MM'} \equiv A^{\mu\pm}_{MM'},\ [\mathcal{M}]_{MM'} = M\delta_{MM'}$$

この記法で作用を書き直すと

$$S = \int \mathrm{d}^4x\, \bar{\Psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - \mathcal{A}\!\!\!/ - \mathcal{M})\Psi(x)$$

$$\mathcal{A}\!\!\!/ = \mathcal{A}\!\!\!/^{+}P_{+} + \mathcal{A}\!\!\!/^{-}P_{-}$$

ここで、$P_\pm$ は射影

$$P_\pm = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$$

この記法でカレントを書きなおす。

そのために

$$[\Xi^{\pm}(x_4)]_{M'M} \equiv \xi^{\pm}_{M'}\xi^{\pm}_{M}(x_4),\ [\Omega^{\pm}(x_4)]_{M'M} \equiv \xi^{\mp}_{M'}(x_4)\xi^{\pm}_{M}(x_4)$$

$$\Xi(x_4) = \Xi^{+}P_{+} + \Xi^{-}P_{-},\ \Omega(x_4) = \Omega^{+}P_{+} + \Omega^{-}P_{-}$$

とおくと

$$J^{\mu}(x, x_4) = \bar{\Psi}(x)\gamma^{\mu}\Psi(x)$$

$$J^{4}(x, x^{4}) = \bar{\Psi}(x)i\gamma^{5}\Omega(x_4)\Psi(x)$$

このカレントは古典論のレベルでは保存する

$$\partial_{\mu}J^{\mu}(x, x_4) + \partial_4 J^{4}(x, x_4) = 0$$

4 次元の有効作用

$$\boldsymbol{S = \int \mathrm{d}^4 x\, \bar{\Psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - \mathcal{A}\!\!\!/ - \mathcal{M})\Psi(x)}$$

は、ゲージ対称性を持っている

そのカイラルアノマリー $\boldsymbol{Q}$ は

$$\boldsymbol{Q \equiv \frac{1}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\left[\Xi^{+}(x_4)\mathcal{F}^{+}(x)\tilde{\mathcal{F}}^{+}(x) - \Xi^{-}(x_4)\mathcal{F}^{-}(x)\tilde{\mathcal{F}}^{-}(x)\right]}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}^{\mu\nu\pm}(x) \equiv \partial^{\mu}\mathcal{A}^{\nu\pm}(x) - \partial^{\nu}\mathcal{A}^{\mu\pm}(x)}$$

- トレースは KK モードの添え字について
- おそらく、4 次元有効理論でのアノマリー $\boldsymbol{Q_4}$ は

$$\boldsymbol{Q_4 = \int \mathrm{d}x_4\, Q(x, x_4)}$$

としているよう。

ここで、次の関係が成立している

$$\boldsymbol{\Xi^{\pm}(x_4)\mathcal{A}^{\mu\pm}(x) = A^{\mu}(x, x_4)\Xi^{\pm}(x_4)}$$

これを用いれば、アノマリーは

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\left[\Xi^{+}(x_4)\mathcal{F}^{+}(x)\tilde{\mathcal{F}}^{+}(x) - \Xi^{-}(x_4)\mathcal{F}^{-}(x)\tilde{\mathcal{F}}^{-}(x)\right] \\
&\qquad = \frac{1}{32\pi^2}F(x, x_4)\tilde{F}(x, x_4)\,\mathrm{tr}\Big(\Xi^{+}(x_4) - \Xi^{-}(x_4)\Big) \\
&\qquad = \frac{1}{32\pi^2}F(x, x_4)\tilde{F}(x, x_4)\left[\sum_{M\geq 0}\xi^{+}_{M}(x_4)^2 - \sum_{M>0}\xi^{-}_{M}(x_4)^2\right]
\end{aligned}$$

あとは青色の部分を計算すればよい

そのために、次の量を定義する

$$\boldsymbol{\Delta(x_4, y_4) \equiv \sum_{M\geq 0} \xi^+_M(x_4)\xi^+_M(y_4) - \sum_{M>0} \xi^-_M(x_4)\xi^-_M(y_4)}$$

この量を計算すると

$$\boldsymbol{\Delta(x_4, -y_4) = 2\sum_N \delta(x_4 - y_4 - 2NL) \quad \therefore\ \Delta(x_4, x_4) = \sum_N \delta(x_4 - NL)}$$

したがって、

$$\boldsymbol{Q = \underbrace{\frac{1}{32\pi^2} F(x, x_4)\tilde{F}(x, x_4)}_{=\mathcal{Q}} \sum_N \delta(x_4 - NL)}$$

よって、$\boldsymbol{x_4}$ が $\boldsymbol{[0, 2L)}$ に限られることに注意すれば

$$\boldsymbol{\partial_\mu J^\mu(x, x_4) + \partial_4 J^4(x, x_4) = \frac{1}{2}\left[\delta(x_4) + \delta(x_4 - L)\right]\mathcal{Q}}$$

カレントの式

$$\partial_\mu J^\mu(x, x_4) + \partial_4 J^4(x, x_4) = \frac{1}{2}\left[\delta(x_4) + \delta(x_4 - L)\right] \mathcal{Q}$$

- x_4 の固定点の上にアノマリーが局在化しており、バルクには生じない。
  また、KK モードの構造 (波動関数とか質量とか) などにも依存しない。
- 4 次元のアノマリーが相殺されれば、5 次元のアノマリーが相殺される。

アノマリー相殺

アノマリーがキャンセルされる具体的な例として、
ゼロモードが $\boldsymbol{\psi_0, \chi_0}$ となるようなフェルミオン $\boldsymbol{\Psi, X}$ を考える。

- $\boldsymbol{\gamma^5 \Psi = +\Psi,\ \gamma^5 X = -X}$
- 質量は $\boldsymbol{m_\Psi(x_4) = -m_X(x_4) = m = \mathrm{constant}}$

ゼロモードもカイラルなので、もちろんアノマリーが相殺される。

(あとの議論は良く分かりませんでした。直感的に今回の結果を解釈したいのだと思います。)

まとめ

[7] C. A. Scrucca, M. Serone, L. Silvestrini, and F. Zwirner, Phys. Lett. B 525 (2002) 169-174, arXiv:hep-th/0110073.

まとめ

- 4 次元のカイラルアノマリーは 5 次元のオービフォールドの固定点に局在する

$$\partial_C j^C = \frac{1}{2}\left[\delta(x) + \delta(x - L)\right] Q$$

- 4 次元でゼロモードのカイラルアノマリーが相殺されていれば、5 次元でも相殺されている。

その他

- [7] によると、$S^1/(Z_2 \times Z_2')$ でゼロモードを全て消しても、アノマリーは固定点に局在するらしい。
-

付録

A. 目次

A. 目次

B. 4 次元のカイラルアノマリーの計算

QED のカイラルアノマリーを計算する。

参考文献

[1] N. Arkani-Hamed, A. G. Cohen, and H. Georgi, *Anomalies on Orbifolds,* Physics Letters B **516** (2001) 395–402, arxiv:hep-th/0103135.

[2] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Pub. Co, Reading, Mass, 1995.

[3] 藤川和男, **ゲージ場の理論**. 岩波書店, 東京, 2001.

[4] 藤川和男, **経路積分と対称性の量子的破れ**. 岩波書店, 東京, 2001.

[5] K.-S. Choi and C.-ŭ. Kim, *Quarks and Leptons from Orbifolded Superstring*, no. volume 954 in Lecture Notes in Physics. Springer, Cham, second edition ed., 2020.

[6] S. Coleman and B. Grossman, *'t Hooft's consistency condition as a consequence of analyticity and unitarity,* Nuclear Physics B **203** (1982) 205–220.

[7] C. A. Scrucca, M. Serone, L. Silvestrini, and F. Zwirner, *Anomalies in orbifold field theories,* Phys. Lett. B **525** (2002) 169–174, arXiv:hep-th/0110073.