速習ノート

最終更新：2023 年 8 月 22 日

目次

1 微分方程式

今回の微分方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx + qE_0 \sin\omega t \tag{1.1}$$

でした．両辺をmで割って

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x + \frac{qE_0}{m}\sin\omega t \tag{1.2}$$

としておきます．こういう場合，特解（振動数ωの解）は

$$x(t) = A\sin\omega t \tag{1.3}$$

とおいて探します[*1]．(1.2)に代入すると

$$-A\omega^2\sin\omega t = -\frac{k}{m}A\sin\omega t + \frac{qE_0}{m}\sin\omega t \quad \to \quad A = \frac{qE_0/m}{(k/m)-\omega^2} \tag{1.4}$$

となるので，特解は

$$x(t) = \frac{qE_0/m}{(k/m)-\omega^2}\sin\omega t \tag{1.5}$$

です．ここで，$\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$が共振振動数で，$\omega \sim \omega_0$で$x(t)$がすごい振動します．

こんな感じで特解を出します．ちょっと院試に出そうな問題をピックアップしておきます．

演習問題 1: 非斉次微分方程式

次の微分方程式の特解を求めよ．

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 3x = e^{2t}$ [a]

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2x = f\sin\omega t$ [b] （減衰振動．今日のよりもちょっと難しい．）

[a] 参考：https://www.geisya.or.jp/~mwm48961/kou3/differ_eq3.htm

[b] 参考：http://www.asem.kyushu-u.ac.jp/qq/qq02/kikanbuturi/chap6.pdf

解答

(1) こういうのは$x(t) = Ae^{2t}$としてAを決めます．代入すると$A = 1/5$となるので，特解は

$$x(t) = \frac{1}{5}e^{2t} \tag{1.6}$$

です．（計算してみると，なんでこのようにおけばよいのか分かるかも．）

(2) ワンチャン力学で出るかもと思って出しておきました．知ってたらごめん．今回の東大のケースと同じように$x(t) = A\sin\omega t$とおけばうまくいくと思いきや，これだとダメです．今回は

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{1.7}$$

[*1] 定数変化法でも見つけられないわけではないと思うけど，あまり見たことがない気がする．多分こっちのほうがラクだから．

として，A, Bを求めます．計算は省略しますが，答えは

$$A = \frac{-2\gamma\omega f}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}, \quad B = \frac{(\omega_0^2-\omega^2)f}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2} \tag{1.8}$$

です[*2]．

2　量子力学の復習

今日，電車で言ってた話．

演習問題 2: 波動関数の問題

(1) $\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle$を求めよ．ただし，規格化はしなくてよい．

(2) 今回の問題を復習する．つまり，$\psi(q,t) \equiv \langle q|\psi(t)\rangle$を求めよ．ただし，前問で

$$\hat{p}\,|(r,\phi)\rangle = \alpha(r,\phi)\hat{q}\,|(r,\phi)\rangle\,,\ |\psi(t)\rangle = |(t,-\pi/4)\rangle \tag{2.1}$$

を示していたので，これは用いてもよい．

解答

(1) こういうのは大体$\langle \boldsymbol{p}|\hat{\boldsymbol{p}}|\boldsymbol{q}\rangle$を計算する．$\hat{\boldsymbol{p}}$が$|\boldsymbol{q}\rangle$に作用すると思えば

$$\langle \boldsymbol{p}|\hat{\boldsymbol{p}}|\boldsymbol{q}\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle \tag{2.2}$$

となり，一方で$\langle \boldsymbol{p}|$に$\hat{\boldsymbol{p}}$が作用すると思えば

$$\langle \boldsymbol{p}|\hat{\boldsymbol{p}}|\boldsymbol{q}\rangle = \boldsymbol{p}\,\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle \tag{2.3}$$

です．よって，(2.2)と(2.3)を合わせれば

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle = \boldsymbol{p}\,\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle \tag{2.4}$$

という微分方程式になりますが，これは

$$\frac{1}{\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle = \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p} \tag{2.5}$$

より

$$\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle = e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}/\hbar} \tag{2.6}$$

と解けます[*3]．

(2) おんなじ感じです．$r = t, \phi = -\pi/4$であることに注意すれば

$$\langle q|\hat{p}|(t,-\pi/4)\rangle \tag{2.7}$$

[*2] 実は複素数でやるとチョットだけラクになるけど，こっちのほうが直感的で嬉しい．

[*3] 「$\boldsymbol{q}$の微分って？」と思ったら，とりあえず1次元で考えると分かりやすいかも？

を2通りで計算すればいいです．$\hat{p}$が$\langle q|$に作用すると思えば，

$$\langle q|\hat{p}|(t,-\pi/4)\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\psi(q,t) \tag{2.8}$$

で，$\hat{p}$が$|(t,-\pi/4)\rangle$に作用すると思えば，前問で求めた公式を用いて，

$$\langle q|\hat{p}|(t,-\pi/4)\rangle = \alpha(t,-\pi/4)\,\langle q|\hat{q}|(t,-\pi/4)\rangle = \alpha(t,-\pi/4)q\psi(q,t) \tag{2.9}$$

となります．よって，微分方程式は

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\psi(q,t) = \alpha(t,-\pi/4)q\psi(q,t) \tag{2.10}$$

なので，これを解くと

$$\psi(q,t) = \exp\left[i\frac{\alpha(t,-\pi/4)q^2}{2\hbar}\right] \tag{2.11}$$

がたぶん答えです．

俺は先に夏休み満喫してます．あと少し，がんばって!!