ゲージ理論と幾何

宮根 一樹

2024 年 3 月 15 日

目次

1　多様体とその周辺

1.1　多様体

まずは多様体の定義から。

定義 1.1. ハウスドルフ空間 M に対して、M が開集合 U_i によって

$$U = \bigcup_i U_i \tag{1.1}$$

で表され、各 U_i に対して、U_i から n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ への全単射 $\boldsymbol{x}_{U_i}$ があって

- 像 $\boldsymbol{x}_{U_i}(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合で、$\boldsymbol{x}_{U_i}$ は U_i から $\boldsymbol{x}_{U_i}(U)$ への同相写像。
- $U_i \cap U_j \neq \phi$ ならば、写像

$$\boldsymbol{x}_{U_j} \circ \boldsymbol{x}_{U_i}^{-1} : \boldsymbol{x}_{U_i}(U_i \cap U_j) \to \boldsymbol{x}_{U_j}(U_i \cap U_j) \tag{1.2}$$

  が全単射で C^∞ かつ逆写像も同様。

を満たすとき、

- 組 $\{(U_i, \boldsymbol{x}_{U_i})\}$ の全体は M に C^∞ 構造を与え、
- M を C^∞ 多様体という。

例 1.1 (直積多様体)**.** m 次元 C^∞ 多様体 M、n 次元 C^∞ 多様体 N の C^∞ 構造が $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ で定められているとき、

$$(\phi_\alpha \times \psi_\beta)(x, y) = (\phi_\alpha(x), \psi_\beta(y)) \tag{1.3}$$

で定義しておけば、$\{(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ は $M \times N$ 上に C^∞ 構造が定められて、$M \times N$ は C^∞ 多様体になる。これは直積多様体。

例 1.2 (n 次元球面)**.** $\mathbb{R}^{n+1}$ に対して

$$S^n = \{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum (x^i)^2 = 1\} \tag{1.4}$$

において、各 $i = 1, \cdots, n+1$ に対して

$$U_i^\pm \equiv \{(x^1, \cdots, x^{i+1}) \in S^n | x^i \gtrless 0\} \tag{1.5}$$

とおいて、$x_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$ を

$$x_i^\pm(x^1, \cdots, x^{n+1}) = (x^1, \cdots, \hat{x^i}, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

とする[*1]と、$x_i^\pm$ の像は $\mathbb{R}^n$ の開球 (内部を含む) である。これらは全単射で、$\{(U_i^\pm, x_i^\pm)\}_{i=1,\cdots,n}$ が S^n 上に C^∞ 構造を定めるため、S^n は多様体。

[*1] ハット ^ はその成分がないことを表す。

例 1.3 (射影空間)**.** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ に対して、

参考文献

[1] 茂木 勇 and 伊藤 光弘. **復刊 微分幾何学とゲージ理論**. 共立出版, 復刊版 edition, 2001.

[2] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology, and Physics*. Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics Publishing, Bristol ; Philadelphia, 2nd ed edition, 2003.