ペスキンゼミ 11 章から 13 章

宮根 一樹

最終更新日：2024 年 3 月 25 日

目次

卒論発表前後のときとは打って変わってとっても元気なので、ゼミ資料とか作ってみました。勢いに任せているので、クオリティはあまり保証しません。それ以前に、ペスキンのここらへんは評判良くないらしいですし、僕もそう思います。ですので、僕が犠牲になって (この地雷パートの) 雰囲気だけは伝えられたらなと思います。

- 春の学校の発表の準備や、研究の進捗があまり芳しくありません。全てはこのゼミ資料のせいです。これを身代わりに助かりたいところですが、まあ、そんなわけにはいかないでしょう。頑張ります。
- Youtube を見てたら、深夜の首都高一周ドライブをしたくなりました。これを読んだ誰か、一緒に行きましょう。別に危ないことをしたいわけじゃないです。「山手線を徒歩/チャリ/電車で一周しました!」って人たちと同じモチベーションです。

1　くりこみと対称性

対称性というのが QFT(というか物理全般) で大事なのは周知のこととは思いますが、では、くりこみをした後の物理では、もとの対称性はどうなっているのでしょうか?素朴に考えれば、くりこみでやってることは、ラグランジアンのパラメターをいじることだけですので、ラグランジアン自体の対称性は変わらないような気がするのですが、量子補正は物理量を変えてしまうため、得られる物理量は対称性を反映していない可能性もありそうです。この章では、まずは古典レベルで一部の対称性を破っておいて、くりこんだ理論がどうなるかどうかを見ていきます。

得られる結果としては

- 古典論のレベルでは、対称性を破ると質量が 0 の粒子が生成される (ゴールドストーンの定理, §11.1)
- 任意のオーダーでくりこみをした後でも、ゴールドストーンの定理は成立する (§11.2,§11.6)

ということです[*1]。特に、2 つめの項目を議論するときに、量子補正も取り込んだ有効的な作用を書いておくと見通しがいいので、ここではそれらの道具の整備についても議論していきます。

1.1　対称性の破れとゴールドストーンの定理

ここでは、古典レベルで対称性を一部だけ破る例として、$O(N)$ 対称性のある線形シグマ模型を見ていきます。ラグランジアンは、ϕ^i $(i=1,\cdots,N)$ をスカラー場として

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^i)^2+\frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2-\frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2 \tag{1.1}$$

です。ただし、$[(\phi^i)^2]^2\equiv[(\phi^1)^2+\cdots+(\phi^N)^2]^2$ です。この理論は ϕ^i のノルムでかけているので、$N\times N$ の直交行列 $R\in O(N)$ で回す変換に対して不変です。実際、$\phi^{i'}\equiv R^{ij}\phi^j$ とすれば

$$(\phi^{i'})^2=\phi^kR^{ki}\cdot R^{ij}\phi^j=(\phi^i)^2 \tag{1.2}$$

です。この理論のポテンシャルは

$$V(\phi)=-\frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2+\frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2 \tag{1.3}$$

ですが、最小点は

$$(\phi^i)^2\frac{\mu^2}{\lambda} \tag{1.4}$$

であり、そのような点は複数あります。そのような点の中から、ここでは真空期待値を

$$\phi^i_0=(0,0,\cdots,v),\ v\equiv\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \tag{1.5}$$

[*1] 個人的に導入で結論まで言ってしまう構成が好きなので、この資料ではこのスタイルで行こうと思います。

ととりましょう。この最小点で場 ϕ^i を展開すると

$$\phi^i = (\pi^1, \pi^2, \cdots, \pi^{N-1}, v + \sigma(x)) \tag{1.6}$$

と書けるので、ラグランジアン (1.1) を新しい場 π^k, σ で書き換えると

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^k)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 \\ &- \sqrt{\lambda}\mu\sigma^3 - \sqrt{\lambda}\mu(\pi^k)^2\sigma - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\lambda}{2}(\pi^k)^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}[(\pi^k)^2]^2\end{aligned} \tag{1.7}$$

となります。ただし、定数は無視しています。

この理論についての量子論は次節から取り扱うとして、古典論のレベルから分かることは、$(N-1)$ 個の無質量な場 π^k が現れていることです。今、π^k についての対称性が $O(N-1)$ として残っているわけですが、このように対称性が敗れると質量がある理論から無質量な粒子が出ることが分かっており、これを**ゴールドストーンの定理**といいます。また、この自発的対称性の破れによって生じた無質量な粒子を**ゴールドストーンボソン**といったりします。

ゴールドストーンの定理は教科書に証明があるので、ここでは省略します。読書の手助けのために、その証明のスケッチを述べておくと

1. ポテンシャルを VEV の周りで展開して、その 2 次の係数が質量行列なのだからそこをみる。
2. もし、その VEV では元の対称性が保っていないなら、その分だけ質量行列のランクが削れて固有値に 0 が含まれることになる。

といった感じです。

1.2 くりこみと対称性の具体例

線形シグマ模型 (1.7) を量子化しましょう。すると、場 $\pi^k(x), \sigma(x)$ のファインマンダイアグラムはすぐに求まります、が、どうせすぐにくりこみを議論するためにラグランジアンを書き換えるのでここでは書きません。ラグランジアンの書き換えは、元々のラグランジアン (1.1) には 3 つの発散するパラメターがあったことから、$\phi^i \to Z\phi^i$ とリスケーリングしたあとに

$$\delta_Z \equiv Z - 1,\ \delta_m \equiv m_0^2 Z - m^2,\ \delta_\lambda \equiv \lambda_0 Z^2 - \lambda \tag{1.8}$$

と裸の定数を書き換えてやれば、

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_{\text{phys.}} + \mathcal{L}_{\text{c.t.}} \tag{1.9}$$

と物理的な項 $\mathcal{L}_{\text{phys.}}$ と相殺項 $\mathcal{L}_{\text{c.t.}}$ に分離できます。$\mathcal{L}_{\text{phys.}}$ のほうは (1.7) と同じで、相殺項のほうは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{c.t.}} = &\frac{\delta_Z}{2}(\partial_\mu \pi^k)^2 - \frac{1}{2}(\delta_\mu + \delta_\lambda v^2)(\pi^k)^2 + \frac{\delta_Z}{2}(\partial_\mu \sigma^2)^2 - \frac{1}{2}(\delta_\mu + 3\delta_\lambda v^2)\sigma^2 \\ &- (\delta_\mu v + \delta_\lambda v^3)\sigma - \delta_\lambda v\sigma(\pi^k)^2 - \delta_\lambda v\sigma^3 - \frac{\delta_\lambda}{4}[(\pi^k)^2]^2 - \frac{\delta_\lambda}{2}\sigma^2(\pi^k)^2 - \frac{\delta_\lambda}{4}\sigma^4\end{aligned} \tag{1.10}$$

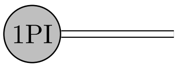
(ダイアグラム)

図 1.1　ファインマンダイアグラム

と書けます。したがって、(1.7) と (1.10) からファインマンダイアグラムは図 1.1 ようになります。

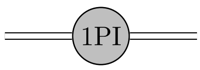
この理論には、相殺項が 3 つ $\delta_Z, \delta_\mu, \delta_\lambda$ しかありません。したがって、くりこみ条件を 3 つ用意して発散を相殺しようと思うわけですが、理論が複数の頂点をもつことから、3 つのパラメターチューニングだけで発散が消せるかどうかは自明ではないように思います。もし、3 つのくりこみ条件が足りないなら、新たに相殺項を導入することによって発散を消そうと思うわけですが、それはラグランジアンの対称性をさらに破る可能性が考えられます。

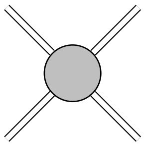
しかしながら、少なくとも one-loop のレベルでのくりこみは、上のゴールドストーンの定理を破らないことが分かっているので、ここでは愚直に計算してその事実を確認してみましょう。まずはくりこみ条件ですが、ここでは以下のようにします：



$$= 0, \tag{1.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p^2}\Bigg(\quad \Bigg) = 0 \qquad (p^2 = m^2), \tag{1.12}$$





$$= -6i\lambda. \tag{1.13}$$

1 つめの条件は VEV のシフトを無視して簡単にするための条件、残り 2 つは m, λ を決めるための条件に対応しているそうです。まずは 3 つめの条件 (1.13) を見ていきます。この条件は発散を相殺する頂点も併せて条件を考えてやると、

$$\cdots \tag{1.14}$$

といった量が $-6i\lambda$ になればよいです[*2]。ただし、crosses のところは、ダイアグラムの形が変わるところで、例えば 1 つめは

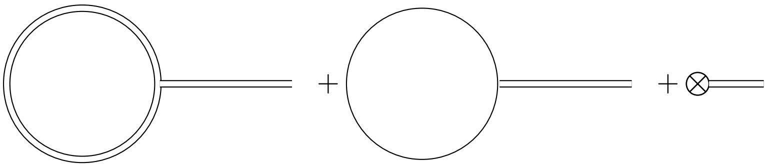
$$\cdots \tag{1.15}$$

のことです。計算は省略しますが、これらの条件の漸近的なふるまいから δ_λ が決まって

$$\delta_\lambda \sim \lambda^\lambda (N+8) \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^2} \tag{1.16}$$

です。

同様にして、残りの δ_μ, δ_Z を決めましょう。条件 (1.11) は



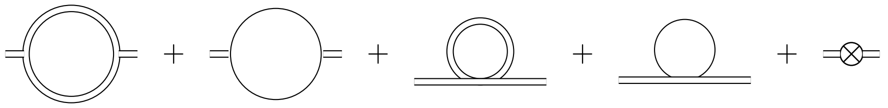
$$= 0 \tag{1.17}$$

[*2] 教科書の Im はタイポ?

に対応していて、これを計算すると

$$\delta_\mu + v^2\delta_\lambda = -\lambda\frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}}\left(\frac{3}{(2\mu^2)^{1-d/2}} + \frac{N-1}{(\zeta^2)^{1-d/2}}\right) \tag{1.18}$$

から δ_μ が決まります (既に δ_λ は知っているので)。残りは条件 (1.12) ですが、これを書き下すと

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p^2}\Bigg($$

$$\Bigg) = 0 \tag{1.19}$$

となりますが、実はこれを計算すると $\delta_Z = 0$ でよいことが分かります。

以上の議論で、くりこみ定数がもとまったわけですが、これらの定数から他の発散のあるダイアグラムが消えるかどうかは調べる必要があります。教科書はいくつかやっているので、ここでは後の議論に関わってくる π の 2 点振幅を見ていきましょう。