東京大学 平成24年 物理学専攻 院試 解答例

ミヤネ

最終更新：2023 年 8 月 19 日

目次

1　数学パート

第1問

1. (i) σ_i, σ_jの交換関係と反交換関係は

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{jki}\sigma_i,\ \{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk} \tag{1.1.1}$$

なので，これらを足して2で割れば

$$\sigma_j\sigma_k = i\varepsilon_{jki}\sigma_i + \delta_{jk} \tag{1.1.2}$$

となります．

(ii)

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{a})S(\boldsymbol{b}) &= a^j\sigma^j b^k\sigma^k \\ &= a^j b^k(i\varepsilon_{jki}\sigma_i + \delta_{jk}) \\ &= i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + I\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = iS(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + I\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

(iii) $S(\boldsymbol{n})^2 = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = 1$なので，総和を偶数と奇数の項に分けると

$$\begin{aligned} X(\boldsymbol{n},\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i\theta)^k}{k!}S(\boldsymbol{n})^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!}S(\boldsymbol{n}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!} - i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}S(\boldsymbol{n}) \\ &= I\cos\theta - i(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin\theta \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

となります．

(iv)

$$\begin{aligned} &X(\boldsymbol{n},\theta)S(\boldsymbol{v})X(\boldsymbol{n},-\theta) \\ &= (I\cos\theta - iS(\boldsymbol{n})\sin\theta)S(\boldsymbol{v})(I\cos\theta + iS(\boldsymbol{n})\sin\theta) \\ &= S(\boldsymbol{v})\cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta S(\boldsymbol{v})S(\boldsymbol{n}) \\ &\qquad - i\sin\theta\cos\theta S(\boldsymbol{n})S(\boldsymbol{v}) + \sin^2\theta S(\boldsymbol{n})S(\boldsymbol{v})S(\boldsymbol{n}) \\ &= S(\boldsymbol{v})\cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta\underbrace{(S(\boldsymbol{v})S(\boldsymbol{n}) - S(\boldsymbol{n})S(\boldsymbol{v}))}_{=2iS(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n})} + \sin^2\theta \quad \underbrace{\underbrace{S(\boldsymbol{n})S(\boldsymbol{v})S(\boldsymbol{n})}_{=S(\boldsymbol{n})(iS(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n})+I\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})}}_{=-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})+S(\boldsymbol{n})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})} \\ &= S(\boldsymbol{v})\cos^2\theta - \sin 2\theta S(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}) - \sin^2\theta\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v} + \sin^2\theta(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) + \sin^2\theta S(\boldsymbol{n})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}) \\ &= S(\boldsymbol{v})\cos 2\theta - S(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n})\sin 2\theta + 2S(\boldsymbol{n})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\sin^2\theta \\ &= \sigma\cdot\underbrace{\left[\boldsymbol{v}\cos 2\theta - (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n})\sin 2\theta + 2\boldsymbol{n}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\sin^2\theta\right]}_{\equiv\boldsymbol{v}'} = S(\boldsymbol{v}'). \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

(v) $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0$なので，

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}\cos 2\theta-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n})\sin 2\theta \tag{1.1.6}$$

です．これは，$\boldsymbol{v}$と$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}$の張る平面を，$\boldsymbol{v}'$がクルクル回ることを意味しています．

2. (i) 真．$(AB)^\dagger=B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}$なので．

(ii) 偽．$(AB)^\dagger\neq AB$．

(iii) 偽．

$$A=\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 2\end{pmatrix}.$$

(iv) 偽．$A=A^{-1}$であれば良いので，$A=\sigma_2$とか．

(v) 偽．

$$X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq O.$$

（$\det X=0$を探すとうまくいくかも？）

(vi) 真．ケイリー・ハミルトンの定理より

$$X^2-(\operatorname{tr}X)X=O \tag{1.1.7}$$

が成立します[*1]．したがって，両辺にXを掛けると$(\operatorname{tr}X)X^2=0$．$\operatorname{tr}X=0$なら(1.1.7)より$X^2=0$であり，$\operatorname{tr}X\neq 0$なら$X^2=0$

[*1] 行列Xの固有多項式をg_Xとおくと，

$$g_X(\lambda)=\lambda^2-(\operatorname{tr}X)\lambda+\det X$$

であり，$g_X(X)=0$が定理の内容です．また，今回は$X^3=0$の$\det$をとって$\det X=0$です．

第2問

1. (i) 行列Aとその固有値は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2 \tag{1.2.1}$$

です．λ_1，λ_2に対応する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

となります．

(ii) Pに対して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{1.2.3}$$

なので，偏微分方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \tag{1.2.4}$$

です．

(iii) 初期条件は

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{1.2.5}$$

より，

$$s_1(x,0) = \frac{1}{2} e^{-x^2},\ s_2(x,0) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \tag{1.2.6}$$

です．偏微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s_1}{\partial t} + 2\dfrac{\partial s_1}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial s_2}{\partial t} - 2\dfrac{\partial s_2}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{1.2.7}$$

の解は

$$s_1(x,t) = f_1(x-2t),\ s_1(x,t) = f_2(x+2t) \tag{1.2.8}$$

という形で書けるので初期条件に気をつければ

$$s_1(x,t) = \frac{1}{2} e^{-(x-2t)^2},\ s_2(x,t) = -\frac{1}{2} e^{-(x+2t)^2} \tag{1.2.9}$$

と解けます．よって，

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(e^{-(x-2t)^2} + e^{-(x+2t)^2} \right),\ u_2(x,t) = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(e^{-(x-2t)^2} - e^{-(x+2t)^2} \right) \tag{1.2.10}$$

が求める解です．また，$t=1$での様子は図1.1です．

2. 設問1と同様にやりましょう．$f = (f_1, f_2)$とすれば，方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{1.2.11}$$

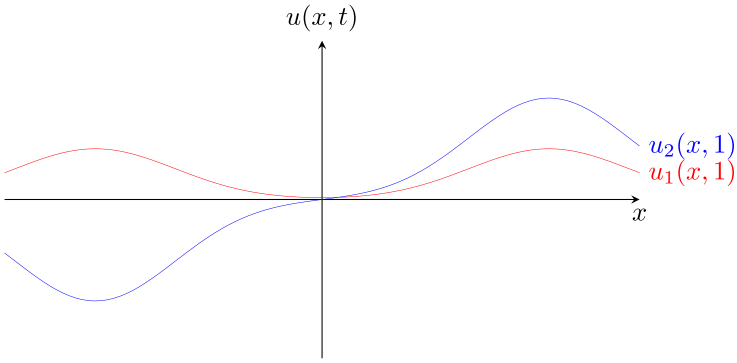

図1.1　$t=1$での解の様子

となるので，変換行列の固有値と固有ベクトルはそれぞれ

$$\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix};\ \lambda_2 = -2,\ \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \tag{1.2.12}$$

です．よって，対角化する行列Qは

$$Q = \begin{pmatrix}3/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix} \tag{1.2.13}$$

であり，関数を$r \equiv Q^{-1}f$と変換すれば，方程式は

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} = 0,\ \frac{\partial r_2}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} = 0 \tag{1.2.14}$$

となります．ここで，r_1，r_2を

$$r_i(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\tilde{r}_i(k,t)e^{-ikx} \quad (i=1,2) \tag{1.2.15}$$

とフーリエ変換すれば，(1.2.14)は

$$\frac{\partial \tilde{r}_1}{\partial t} + k^2\tilde{r}_1 = 0,\ \frac{\partial \tilde{r}_2}{\partial t} + 2k^2\tilde{r}_2 = 0 \tag{1.2.16}$$

となるので，これを解けば

$$\tilde{r}_1(k,t) = \tilde{r}_1(k,0)e^{-k^2 t},\ \tilde{r}_2(k,t) = \tilde{r}_2(k,0)e^{-2k^2 t} \tag{1.2.17}$$

が一般解となります．$r_1(x,t)$，$r_2(x,t)$の初期条件は

$$\begin{pmatrix}r_1(x,0)\\ r_2(x,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{10} & -2\sqrt{10}\\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-x^2}\\ 0\end{pmatrix} \tag{1.2.18}$$

より，$r_1(x,0) = \sqrt{10}e^{-x^2}$，$r_2(x,0) = \sqrt{5}e^{-x^2}$です．これを逆フーリエ変換すると

$$\begin{aligned}\tilde{r}_1(k,0) &= \int \mathrm{d}x\ r_1(x,0)e^{ikx} = \sqrt{10\pi}e^{-k^2/4}\\ \tilde{r}_2(k,0) &= \int \mathrm{d}x\ r_2(x,0)e^{ikx} = \sqrt{5\pi}e^{-k^2/4}\end{aligned} \tag{1.2.19}$$

となるので，フーリエモードは

$$\tilde{r}_1(k,t) = \sqrt{10\pi}\exp\left[-\left(t+\frac{1}{4}\right)k^2\right],\ \tilde{r}_2(k,t) = \sqrt{5\pi}\exp\left[-2\left(t+\frac{1}{8}\right)k^2\right] \tag{1.2.20}$$

となります．よって，関数r_1，r_2の解は

$$\begin{aligned} r_1(x,t) &= \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\sqrt{10\pi}\exp\left[-\left(t+\frac{1}{4}\right)k^2 - ikx\right] \\ &= \sqrt{\frac{10}{4t+1}}\exp\left[-\frac{x^2}{4t+1}\right] \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

$$\begin{aligned} r_2(x,t) &= \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\sqrt{5\pi}\exp\left[-2\left(t+\frac{1}{8}\right)k^2 - ikx\right] \\ &= \sqrt{\frac{10}{8t+1}}\exp\left[-\frac{x^2}{8t+1}\right] \end{aligned} \tag{1.2.22}$$

となります．最後に，$f = Qr$と変換すれば

$$\begin{cases} f_1(x,t) = \dfrac{3}{\sqrt{4t+1}}\exp\left[-\dfrac{x^2}{4t+1}\right] + \sqrt{\dfrac{2}{8t+1}}\exp\left[-\dfrac{x^2}{8t+1}\right] \\ f_2(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4t+1}}\exp\left[-\dfrac{x^2}{4t+1}\right] + \dfrac{1}{\sqrt{2(8t+1)}}\exp\left[-\dfrac{x^2}{8t+1}\right] \end{cases} \tag{1.2.23}$$

と求める解が得られます.

2　物理パート

第1問

1. $L_i = i\hbar\varepsilon_{ijk}x_j p_k$なので，

$$\begin{aligned}[L_i, L_j] &= \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}[x_k p_l, x_m p_n] \\ &= i\hbar(\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmk}x_m p_l + \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jlm}x_k n) \\ &= i\hbar\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}x_l p_m = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

   です．

2. 前問より

$$\begin{aligned} S_y &= \frac{i\hbar}{4}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} - \frac{i\hbar}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

   です．

3. ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu H}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{2.1.3}$$

   となるので，固有値は

$$\lambda_1 = -\frac{\mu H}{2},\ \lambda_2 = +\frac{\mu H}{2} \tag{2.1.4}$$

   であり，対応する固有ベクトルは

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\ |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \tag{2.1.5}$$

   となります．

4. $|\phi(0)\rangle$を$|\lambda_1\rangle$，$|\lambda_2\rangle$で展開すると

$$|\phi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\lambda_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\lambda_2\rangle \tag{2.1.6}$$

   となるので，

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\mathcal{H}t}|\lambda_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\mathcal{H}t}|\lambda_2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{+i\mu Ht/2}|\lambda_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\mu Ht/2}|\lambda_2\rangle \\ &= \begin{pmatrix}\cos\omega_0 t\\ i\sin\omega_0 t\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

   となります．ただし，

$$\omega_0 \equiv \frac{\mu H}{2} \tag{2.1.8}$$

   とおきました．

5. S_xは簡単で

$$\begin{aligned}\langle\phi(t)|S_x|\phi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\lambda_1|S_x|\lambda_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\lambda_2|S_x|\lambda_2\rangle \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

となります．残りS_y，S_zの期待値は，$|\phi(t)\rangle$の表示を用いて

$$\langle\phi(t)|S_y|\phi(t)\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\omega_0 t & -i\sin\omega_0 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\omega_0 t \\ i\sin\omega_0 t\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sin 2\omega_0 t \tag{2.1.10}$$

$$\langle\phi(t)|S_z|\phi(t)\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\omega_0 t & -i\sin\omega_0 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\omega_0 t \\ i\sin\omega_0 t\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cos 2\omega_0 t \tag{2.1.11}$$

となります．

6. シュレーディンガー方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\varphi(t)\rangle = (\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2)|\varphi(t)\rangle \tag{2.1.12}$$

ですが，これに$|\varphi(t)\rangle = e^{-i\mathcal{H}_1 t}|\psi(t)\rangle$を代入すれば

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = e^{+i\mathcal{H}_1 t}\mathcal{H}_2 e^{-i\mathcal{H}_1 t}|\psi(t)\rangle \tag{2.1.13}$$

が求める時間発展の方程式です．

7. $e^{+i\mathcal{H}_1 t}$，$\mathcal{H}_2$を計算すると

$$\begin{aligned}e^{+i\mathcal{H}_1 t} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-iat/2)^k}{k!}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(at/2)^{2k}}{(2k)!}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} - i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(at/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}e^{-iat/2} & 0 \\ 0 & e^{+iat/2}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_2 &= -\frac{a_0}{2}\left\{\begin{pmatrix}0 & \cos at \\ \cos at & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & -i\sin at \\ i\sin at & 0\end{pmatrix}\right\} \\ &= -\frac{a_0}{2}\begin{pmatrix}0 & e^{+iat} \\ e^{-iat} & 0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

となるので，微分方程式の係数は

$$\begin{aligned}e^{+i\mathcal{H}_1 t}\mathcal{H}_2 e^{-i\mathcal{H}_1 t} &= -\frac{a_0}{2}\begin{pmatrix}e^{-iat/2} & 0 \\ 0 & e^{+iat/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & e^{+iat} \\ e^{-iat} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{+iat/2} & 0 \\ 0 & e^{-iat/2}\end{pmatrix} \\ &= -\frac{a_0}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

となります．したがって，微分方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = -\frac{a_0}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}|\psi(t)\rangle \tag{2.1.17}$$

となりますが，これは設問4の方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle = -\frac{\mu H}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}|\phi(t)\rangle \tag{2.1.18}$$

と同じです．（ただし，その設問では時間発展させて解きました．）初期条件も同じなので，解も一致します．よって，

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(a_0 t/2) \\ i\sin(a_0 t/2) \end{pmatrix} \tag{2.1.19}$$

となるはずです．あとは，$|\varphi(t)\rangle = e^{-i\mathcal{H}_1 t}\,|\psi(t)\rangle$という関係を用いれば

$$\langle\varphi(t)|S_z|\varphi(t)\rangle = \langle\psi(t)|(e^{+i\mathcal{H}_1 t} S_z e^{-i\mathcal{H}_1 t})|\psi(t)\rangle \tag{2.1.20}$$

となりますが，

$$\begin{aligned} e^{+i\mathcal{H}_1 t} S_z e^{-i\mathcal{H}_1 t} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-iat/2} & 0 \\ 0 & e^{+iat/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{+iat/2} & 0 \\ 0 & e^{-iat/2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

なので，

$$\begin{aligned} \langle\varphi(t)|S_z|\varphi(t)\rangle &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(a_0 t/2) & -i\sin(a_0 t/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(a_0 t/2) \\ i\sin(a_0 t/2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\cos a_0 t \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

となります．

第2問

1. 分配関数は，

$$Z[\beta]=\frac{1}{h^2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p_\theta\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p_\varphi\ \exp\left[-\frac{\beta}{2I}\left(p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)\right] \tag{2.2.1}$$

なので，これを計算します[*2]．φの積分はそのまま行って2π．次にp_θとp_φのガウス積分を行えば

$$Z[\beta]=\frac{4\pi^2 Ik_BT}{h^2}\int_0^{\pi}|\sin\theta|\mathrm{d}\theta=\frac{8\pi^2 Ik_BT}{h^2} \tag{2.2.2}$$

となります．よって，比熱は

$$U=k_BT,\ C_V=k_B \tag{2.2.3}$$

となります．

2. 分配関数は

$$Z[\beta]=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\exp\left[-\frac{\beta\hbar^2}{2I}l(l+1)\right] \tag{2.2.4}$$

です．また，高温では，$2l+1\sim 2l,\ l+1\sim l$と見なせて

$$Z[\beta]=\int_0^{\infty}2x\exp\left[-\frac{\beta\hbar^2}{2I}x^2\right]\mathrm{d}x \tag{2.2.5}$$

となるので，これを計算すれば

$$Z[\beta]=\frac{2I}{\hbar^2\beta} \tag{2.2.6}$$

となります．

3. 低温のときは，$l=0,\ 1$のみが効いてくると考えると

$$Z[\beta]\sim 1+3\exp\left[-\frac{\hbar^2\beta}{I}\right] \tag{2.2.7}$$

なので，

$$U=\frac{3}{2}\frac{\hbar^2}{e^{\hbar^2/Ik_BT}+3}\sim\frac{3}{2}\hbar^2 e^{-\hbar^2/Ik_BT} \tag{2.2.8}$$

であり，これをさらに微分すれば，

$$C_V=\frac{3\hbar^4}{2k_BT}e^{-\hbar^2/Ik_BT} \tag{2.2.9}$$

となります．

---

*2 あとで知ったのですが，正準変数qとその共役な運動量pをとってくれば，次の積分測度

$$\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}=\prod_{l=1}^{3}\mathrm{d}q_l\mathrm{d}p_l$$

は不変なようです．だから，ヤコビアンなどは気にする必要がありません．（たぶん，ちゃんと考えると，$\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$のヤコビアンと$\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}$のヤコビアンが相殺するのではないのでしょうか．勝手な想像ですが.）[参考]：https://www.cmt.phys.kyushu-u.ac.jp/~A.Yoshimori/t12shkdans12.pdf.

4. オルソ水素の原子核の入れ替えに対して波動関数は対称[*3]，電子は入れ替えに対して反対称なので，回転による波動関数は反対称でないと，分子としては対称にならない．よって，オルソ水素ならlは奇数．同様に考えると，パラ水素についてはlは偶数．
5. 縮退を考えれば，$N_0/N_P = 3$だと考えられます．
6. 分配関数は

$$Z[\beta] = Z_O^{3/4}[\beta] Z_P^{1/4}[\beta] \tag{2.2.10}$$

と分離できるとすると，オルソ水素の分配関数は，$l = 2k+1$のみをとって

$$Z_O[\beta] = \sum_{k=0}^{\infty} (4k+3) \exp\left[-\beta k_B \Theta (2k+1)(2k+2)\right] \tag{2.2.11}$$

となり，パラ水素のほうも同様に考えれば

$$Z_P[\beta] = \sum_{k=0}^{\infty} (4k+1) \exp\left[-\beta k_B \Theta \cdot 2k(2k+1)\right] \tag{2.2.12}$$

となります．この状態で内部エネルギーを計算してみると

$$\begin{aligned} U = k_B \Theta \Bigg[& \frac{3}{4} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (4k+3)(2k+1)(2k+2) \exp\left[-\beta k_B \Theta (2k+1)(2k+2)\right]}{\sum_{k=0}^{\infty} (4k+3) \exp\left[-\beta k_B \Theta (2k+1)(2k+2)\right]} \\ & + \frac{1}{4} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (4k+1) \cdot 2k(2k+1) \exp\left[-\beta k_B \Theta \cdot 2k(2k+1)\right]}{\sum_{k=0}^{\infty} (4k+1) \exp\left[-\beta k_B \Theta \cdot 2k(2k+1)\right]} \Bigg] \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

となりますが，$T/\Theta = 1/3$を低温だと思って，$k = 0$の項のみで近似すれば

$$\frac{U}{k_B} \sim \Theta \times \frac{3}{4} \times \frac{6 \cdot e^{-2\Theta}}{3 \cdot e^{-2\Theta}} = 135\ K \tag{2.2.14}$$

です[*4]．

[*3] 合成されたスピンが1の状態は

$$|+,+\rangle\,,\ |+,-\rangle + |-,+\rangle\,,\ |-,-\rangle$$

ですが，これらはどれも対称です．（規格化はしてません．）

[*4] これを低温だとみなすのはいかがなものかと思われるかもしれませんが，まあ，仕方ないんじゃないでしょうか．$k = 1$を取り出すと，$\exp$を計算しないといけなくなります．

第3問

1. 復元力が$-m\omega^2\boldsymbol{r}$であることに注意すれば

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -e\boldsymbol{E}_0\cos\omega t - m\omega_0^2\boldsymbol{r} \tag{2.3.1}$$

です．

2. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}\cos\omega t$を代入すれば

$$\boldsymbol{R} = \frac{e}{m(\omega^2-\omega_0^2)}\boldsymbol{E}_0 \tag{2.3.2}$$

となります．したがって，$\dot{\boldsymbol{r}} = -\omega\boldsymbol{R}\sin\omega t$より

$$\boldsymbol{i}_\mathrm{d} = -\frac{Ne^2\omega}{m(\omega^2-\omega_0^2)}\boldsymbol{E}_0\sin\omega t \tag{2.3.3}$$

となります．

3. 両辺の発散をとれば

$$\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{i} \tag{2.3.4}$$

であり，ベクトル解析の公式から$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) = 0$なので，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{i} = 0 \tag{2.3.5}$$

となります．

4. 式(1)に$\boldsymbol{i}_\mathrm{d}$を代入すれば

$$\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = -\left(\varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m(\omega^2-\omega_0^2)}\right)\omega\boldsymbol{E}_0\sin\omega t \tag{2.3.6}$$

なので，

$$C = \mu_0\left(\varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m(\omega^2-\omega_0^2)}\right) \tag{2.3.7}$$

です．

5. 前問の結果は

$$\varepsilon\mu = \mu_0\left(\varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m(\omega^2-\omega_0^2)}\right) \tag{2.3.8}$$

となるので，

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega^2-\omega_0^2)}} = \sqrt{1 + \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2-\omega_0^2}} \tag{2.3.9}$$

です．

6. 前問の結果より

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2-\omega_0^2} \tag{2.3.10}$$

となるので，$\omega = \omega_0^2$となるところでグラフが変わります．よって，ω_0の値によってスペクトルが変化して，図2.1, 2.2のようになります．

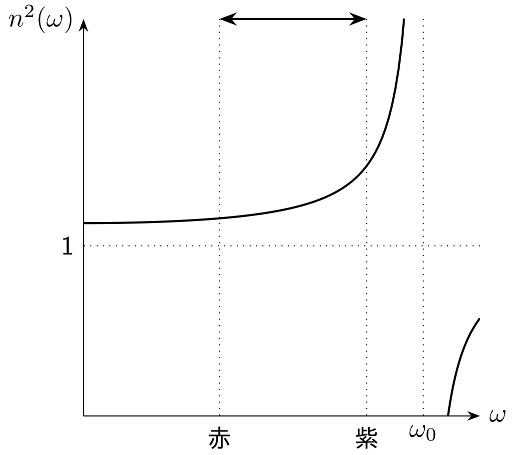

図2.1　石英の分散曲線

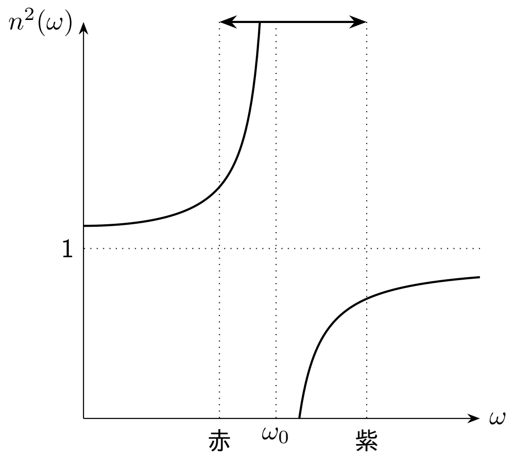

図2.2　物質Fの分散曲線