２０１６年９月・２０１７年４月入学試験

大学院先進理工学研究科修士課程

物理学及応用物理学専攻

問題表紙

◎問題用紙が＿6＿ページあることを試験開始直後に確認しなさい．
◎解答用紙が＿8＿枚綴りが＿1＿組あることを試験開始直後に確認しなさい．

注意事項

【選択方法】

○ 下記の６題の中から任意の４題を選択して解答すること．

科目	問題番号
数学一般	1　2
力学および電磁気学	3　4
量子力学および熱・統計力学	5　6

【解答方法】

(1) 解答は別紙の解答用紙の表の面に記入すること．裏面は使用しないこと．
(2) 受験番号・氏名を解答用紙８枚すべてに記入すること．
(3) 解答用紙には，選択した問題番号と科目名を明記すること．１問の解答が解答用紙２枚以上にわたるときには，それぞれの解答用紙に問題番号と科目名を書き，かつ何枚目かがわかるように解答欄に明記すること．
(4) １枚の解答用紙に２問以上を解答しないこと．
(5) ４題を超えては解答しないこと．
(6) 使わなかった解答用紙には，解答欄に大きく×印を書くこと．使わなかった解答用紙も含めて，すべての解答用紙（８枚）を提出すること．

２０１６年９月・２０１７年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：数学一般

問題番号 1

(1) 次の 2 行 2 列の行列 (2×2 matrix)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値 (eigenvalues) を求めよ．

(2) (1) の行列 A を $U^\dagger A U$ によって対角化する (diagonalize) 2 行 2 列の行列 U を求めよ．ただし，$U^\dagger$ は行列 U のエルミート共役 (Hermitian conjugate) である．

(3) (1) の行列 A に対して A^2 を求めよ．

(4) (1) の行列 A に対して $e^{\phi A}$ を求めよ．ただし，ϕ は実数 (real number) とする．

(5) 次の 3 行 3 列 の行列

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma & \Omega & 0 \\ -\Omega & \frac{1}{2}\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

に対して e^{-Mt} を求めよ．ただし，γ, Ω, t はいずれも実数とする．

(6) 実パラメータ (real parameter) t に依存する (depend) 3 次元ベクトル (three-dimensional vector)

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}$$

に対する微分方程式 (differential equation) の初期値問題 (initial value problem)

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t) = -M\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

の解 (solution) $\boldsymbol{v}(t)$ を求めよ．ただし，a_k $(k = 1, 2, 3)$ と Γ はいずれも実数とする．

２０１６年９月・２０１７年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：数学一般

問題番号 2

(1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は 2π-周期関数 (periodic function) であり，$f(x)=|x|,\ x\in[-\pi,\pi]$ を満たすものとする．このとき，f のフーリエ級数展開 (Fourier series expansion) を求めよ．

(2) 上の (1) の結果を使って

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

の値を求めよ．

(3) 関数 $x^n\log_e x$ は $(0,1)$ で可積分 (integrable) であることを示し，

$$c_n=\int_0^1 x^n\log_e x\,dx$$

を求めよ．ただし，n は自然数 (natural number) とする．

(4) 関数 $\dfrac{\log_e x}{1-x}$ は $(0,1)$ で可積分であることを示し，等式

$$A=\int_0^1\frac{\log_e x}{1-x}\,dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

を導け．また，上の (2) の結果を使って A の値を求めよ．

(5) B と C を

$$B=\int_0^1\frac{\log_e x}{1+x}\,dx,\qquad C=\int_0^1\frac{\log_e x}{1-x^2}\,dx$$

と置くとき，$A-B$ および $A+B$ を計算することによって B と C の値を求めよ．

２０１６年９月・２０１７年４月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：力学および電磁気学

問題番号 3

流体 (fluid) 中を物体が運動するとき, 通常, 粘性抵抗 (viscous resistance) と慣性抵抗 (inertial resistance) を受ける. 速さ (speed) V の物体が受ける抵抗力 (resistance force) の大きさは, 粘性抵抗については αV, 慣性抵抗については βV^2 となる. α と β は流体の物性 (physical properties) や物体の形状 (shape) で決まる定数 (constants) である. 重力加速度 (gravitational acceleration) の大きさを g とし, 鉛直 (vertical) 方向に z 軸 (z axis) (上向きを正) をとって, 以下の問に答えよ.

(1) 質量 (mass) M の物体が流体中で粘性抵抗と重力 (gravitational force) のみを受けて鉛直方向に運動する状況を考える (慣性抵抗と浮力 (buoyant force) は無視できる (negligible) ものとする). 運動方程式 (equation of motion) を解いてこの物体の位置 (position) の z 座標 (z coordinate) $z(t)$ と z 軸方向の速度 (velocity) $v(t)$ の時間依存性 (time dependence) を求め, それぞれをグラフ (graph) で表せ. ただし, $z(0)=0$, $v(0)=0$ とする.

(2) 質量 M の物体が流体中で慣性抵抗と重力のみを受けて鉛直方向に運動する状況を考える (粘性抵抗と浮力は無視できるものとする). 運動方程式を解いてこの物体の z 軸方向の速度 $v(t)$ を求め, グラフで表せ. ただし, $v(0)=0$ とする.

(3) 慣性抵抗は物体が流体粒子 (particles consisting of fluid) との衝突 (collision) によって流体粒子から受ける力積 (impulse) によるものとして, 慣性抵抗の大きさが物体の速さ V の 2 乗に比例する理由を説明せよ. 物体と流体粒子との衝突は弾性衝突 (elastic collision) とし, 流体粒子は物体との衝突前は静止しているものとする. 流体粒子の質量を m とし, その他の必要なパラメータ (parameters) や条件 (conditions) は各自で適宜設定し, 数式を用いて説明せよ.

(4) 粘性係数 (viscosity coefficient) η, 質量密度 (mass density) ρ の流体の中で半径 (radius) a の球状 (spherical shape) の物体が運動するとき, $\alpha = 6\pi\eta a$, $\beta = \frac{1}{4}\pi\rho a^2$ となることが知られている. $\eta = 1.0\times10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$, $\rho = 1.0\,\mathrm{g/cm^3}$ の流体 (常温常圧の水に相当) 中を運動する半径 $1.0\,\mathrm{cm}$ の球状物体を考える. 粘性抵抗力の大きさ $f_{\mathrm{c}}(v)$ と慣性抵抗力の大きさ $f_{\mathrm{i}}(v)$ を v の関数 (functions) として 1 つのグラフ中に表せ. 特徴的な点 (characteristic points) (交点等 (crossing points, etc.)) については, それらの座標の数値 (values) を有効数字 2 桁 (two significant figures) でグラフ中に記入せよ.

(5) $\eta = 1.0\times10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$, $\rho = 1.0\,\mathrm{g/cm^3}$ の水の中において質量密度 $4.0\,\mathrm{g/cm^3}$ で半径 $1\,\mathrm{cm}$ のガラス玉が重力を受けて鉛直方向に運動する (初速度 (initial velocity) は 0 とする). 問 (1) では慣性抵抗 f_{i} を無視し, 問 (2) では粘性抵抗 f_{c} を無視したが, 十分時間が経過した後 (after sufficiently long time) のガラス玉の運動を考える場合, 問 (1) の仮定 (assumption) (f_{i} を無視) と問 (2) の仮定 (f_{c} を無視) のどちらがより適切 (more reasonable) であるか. 問 (4) の結果も用いて理由を述べよ. ただし, ここでは問 (1) と問 (2) で無視した浮力を考慮に入れて定量的に (quantitatively) 議論すること.

2016年9月・2017年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科 目 名：力学および電磁気学

問題番号 4

マクスウェルの方程式 (Maxwell's equations) は，微分形 (differential formulation) で書くと

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}=\rho,\qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},\qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B}=0 \tag{1}$$

で与えられる．ここで，$\boldsymbol{E}$ は電場 (electric field)，$\boldsymbol{D}$ は電束密度 (electric flux density)，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度 (magnetic flux density)，$\boldsymbol{H}$ は磁場 (magnetic field)，ρ は電荷密度 (electric charge density)，$\boldsymbol{j}$ は電流密度 (electric current density) である．真空 (vacuum) の誘電率 (permittivity) ε_0 と真空の透磁率 (permeability) μ_0 を用いると，真空中では電束密度 $\boldsymbol{D}$ と電場 $\boldsymbol{E}$，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ の関係は，それぞれ $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ と書ける．真空中における電磁場に関する以下の設問に答えよ．

(1) 式 (1) の第 1 式を積分形 (integral formulation) で表すと，

$$\oint_{\partial V}\boldsymbol{D}\cdot d^2\boldsymbol{S}=\int_V\rho\, d^3V \tag{2}$$

と書ける．d^3V は体積要素 (volume element)，$d^2\boldsymbol{S}$ は面積要素ベクトル (area element vector)，∂V は空間領域 (spatial region) V の表面 (surface) である．同様に，式 (1) の残りの 3 式をそれぞれ積分形で表せ．

(2) 3 次元直角座標系 (three-dimensional Cartesian coordinate system) O-xyz の原点 (origin) $(x,y,z)=(0,0,0)$ に置かれた電荷量 q の点電荷 (point charge) が位置 $(a/2,-a/2,a)$ につくる電場 $\boldsymbol{E}$ の成分 (components) を答えよ．ただし，a は正の定数 (positive constant) とする．

(3) A を定数，a を正の定数として，電荷密度が

$$\rho(x,y,z)=A\exp\left(-\frac{2}{a}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \tag{3}$$

で与えられるとき，原点から距離 R の位置における電場 $\boldsymbol{E}$ の大きさを求めよ．

(4) B を定数，a を正の定数として，電荷密度が

$$\rho(x,y,z)=B\left[(x-a)^2+y^2+z^2\right]^{-5/4}+B\left[(x+2a)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\right]^{-5/4} \tag{4}$$

で与えられるとき，位置 $(3a/2,\sqrt{3}\,a/2,0)$ における電位 (electric potential) を求めよ．ただし，電位は無限遠で 0 になるようにせよ．

(5) A を定数，a を正の定数，原点からの距離を r として，電荷密度が $\rho(r)=A\exp(-2r/a)$ で与えられる全電荷 (total charge) が，z 軸 (z axis) を回転軸 (rotation axis) として一定の角速度 (constant angular velocity) ω で回転するとき，原点 $(0,0,0)$ に生じる磁場 $\boldsymbol{H}$ の大きさを求めよ．

２０１６年９月・２０１７年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：量子力学および熱・統計力学

問題番号 5

x 軸上で $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ で定義される長さ L の 1 次元空間 (one-dimensional space) において，次のシュレーディンガー方程式 (Schrödinger equation) に従って運動する電子 (electron) を考える．

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\Psi(x,t)$$

m は電子の質量 (mass), $\hbar$ はディラック定数 (Dirac constant), $\Psi(x,t)$ は電子の波動関数 (wave function), $V(x)$ は電子の受ける 1 次元ポテンシャル (one-dimensional potential) として，以下の設問に解答せよ．

(1) $V(x) = 0$ のとき，平面波 (plane wave) の解 $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{i(kx-\omega t)}$ をシュレーディンガー方程式に代入し，ω と k の関係式を求めよ．

(2) $\Psi(x,t) = \varphi(x)e^{-iEt/\hbar}$ とすると，$\varphi(x)$ は $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\varphi(x) = E\varphi(x)$ を満たすことを示せ．

(3) 設問(2)の方程式で $V(x) = 0$ のとき，$\varphi(-L/2) = \varphi(L/2) = 0$ という境界条件 (boundary condition) を満たす固有状態 (eigenstate) の $\varphi(x)$ とエネルギー固有値 (energy eigenvalue) を求めよ．

(4) 設問(2)の方程式で $V(x) = 0$ のとき，$\varphi(-L/2) = \varphi(L/2)$ かつ $\left.\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right|_{x=-L/2} = \left.\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right|_{x=L/2}$ という周期境界条件 (periodic boundary condition) を満たす固有状態の $\varphi(x)$ とエネルギー固有値を求めよ．

(5) $V(x) = V_0\cos(4\pi x/L)$ のとき，このポテンシャルを摂動 (perturbation) として扱い，設問(4)で求めた固有状態のうち基底状態 (ground state) について，1 次摂動 (first-order perturbation) ではエネルギーは変化しないことを示し，2 次摂動 (second-order perturbation) までの近似でエネルギー求めよ．

(6) $V(x) = V_0\cos(4\pi x/L)$ のとき，設問(4)で求めた固有状態のうち第 1 励起状態 (first excited state) については 1 次摂動が重要になる．その理由を説明し，1 次摂動までの近似で $\varphi(x)$ とエネルギーを求めよ．

(7) $V(x) = V_0\cos(2N\pi x/L)$ のとき (N は自然数), $L/N = a$ を一定に保って $L \to \infty$ とする極限を考える．このとき，このポテンシャルの 1 次摂動によって設問(1)の ω と k の関係はどのように変わるか，図を用いて定性的に説明せよ．

２０１６年９月・２０１７年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：量子力学および熱・統計力学

問題番号 6

実際の気体 (gas) を簡略化した格子気体 (lattice gas) の熱力学的性質 (thermodynamic property) について考えよう．なお，ボルツマン定数 (Boltzmann constant) は k を用いて表せ．また，必要ならば，スターリングの公式 (Stirling's formula) $\ln N! \approx N\ln N - N$ で近似 (approximate) せよ．

格子気体とは，図１のように系 (system) 全体の体積 (volume) V を M 個の格子 (lattice) で分割し，各格子には１つの気体分子（粒子 (particle)）だけ格納できるようなモデルで，系における粒子の配置のみに着目したモデルである．各格子の体積 a は一定で全て等しいものとし，系の全粒子数を $N\ (\leq M)$ とする．さらに，２つの粒子が上下または左右の格子で隣どうしになった場合にエネルギーが ε 減少するとして $(\varepsilon > 0)$ 粒子間の引力相互作用 (attractive interaction) を考慮する．

以下では，２次元 (two dimensional) の場合について考えることとし，各問に解答せよ．

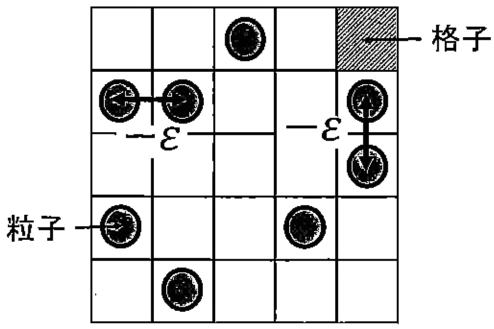

図１

（１）M 個の格子に N 個の粒子を入れる場合の数を計算し，エントロピー (entropy) を求めよ．

（２）粒子が均一に分布している (uniformly distributed) 場合，系全体のエネルギーの平均的な値が $-2\varepsilon M(N/M)^2$ で与えられることを説明せよ．

一般に，系全体のエネルギーは粒子の配置によって異なる値を取るが，ここでは，それらが（２）の平均的な値で代表できるものとする近似を考える．

（３）系の温度 (temperature) を T として，（１）と（２）より，この系の分配関数 (partition function) を求めよ．

（４）この系のヘルムホルツの自由エネルギー (Helmholtz free energy) を求めよ．

（５）圧力 (pressure) p を計算せよ．

（６）$\frac{\partial p}{\partial V}$ を計算せよ．

（７）系の安定性 (stability) に着目し，引力相互作用のある格子気体では，相転移 (phase transition) が起こり得ることを説明せよ．さらに，相転移が起こり得る温度領域 (temperature region) を求めよ．