東京大学 平成30年 物理学専攻 院試 解答例

ミヤネ

最終更新：2023 年 8 月 23 日

目次

1　数学パート

第1問

1. 固有方程式を解けば$\lambda = 0, a^2 + b^2$．対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \ . \tag{1.1.1}$$

2. 次のようにおけばうまくいく：

$$B = (\sqrt{a^2 + b^2} \ 0) \ , \ V = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \ . \tag{1.1.2}$$

3. $\tilde{B}$を

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1/c \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

とおけばOK.

4. $\tilde{A} \coloneqq V\tilde{B}$とおけば$A\tilde{A} = 1$が成立．また

$$(\tilde{A}A)^T = (V\tilde{B}BV)^T = V(\tilde{B}B)^T V = V\tilde{B}BV = \tilde{A}A \tag{1.1.4}$$

より，$\tilde{A}A$は実対称.

5. Xの成分を$x_1, \cdots, x_n$とおく．この問題は

$$f(x_1, \cdots, x_n) \coloneqq x_1^2 + \cdots + x_n^2 \ , \ g(x_1, \cdots, x_n) \coloneqq a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - v \tag{1.1.5}$$

とおいたときに，拘束条件$g(x_1, \cdots, x_n) = 0$のもとで$f(x_1, \cdots, x_n)$の最小値をもとめればよいので

$$L \coloneqq f(x_1, \cdots, x_n) - \lambda g(x_1, \cdots, x_n) \tag{1.1.6}$$

とおいて，未定乗数法を用いる．Lを微分すると

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 2x_i - \lambda a_i x_i \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - v \end{cases} \tag{1.1.7}$$

なので，

$$x_i = \frac{a_i}{\|A\|} v \ , \ \lambda = \frac{2v}{\|A\|} \ , \ \|A\| \coloneqq a_1^2 + \cdots + a_n^2 \tag{1.1.8}$$

ともとまるので，

$$X_0 = \frac{v}{\|A\|} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{1.1.9}$$

である．つまり

$$\tilde{A}_n = \frac{1}{\|A\|} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{1.1.10}$$

であり，これは

$$A_n\tilde{A}_n = \frac{1}{\|A\|}\{a_1\cdot a_1+\cdots+a_n\cdot a_n\} = 1 \tag{1.1.11}$$

かつ

$$(\tilde{A}_nA_n)_{ij} = \frac{a_ia_j}{\|A\|} = (\tilde{A}_nA_n)_{ji} \tag{1.1.12}$$

を満たす．

6. 固有値をλとして，対応する固有ベクトルをvとすれば$M^TMv=\lambda v$が成立．左からMをかければ

$$MM^T(Mv) = \lambda(Mv) \tag{1.1.13}$$

となり，λは依然として固有値．ただし，固有ベクトルは変化するが．

さて，$M=A_n^TA_n$ととってみよう．ここで，$\tilde{A}_n=A_n^T/\|A\|$であることに気をつければ

$$\begin{cases}(A_n^TA_n)^TA_n^TA_n = A_n^TA_n\cdot\|A\|\tilde{A}_nA_n = \|A\|A_n^TA_n\\ A_n^TA_n(A_n^TA_n)^T = (A_n^TA_n)^2\end{cases} \tag{1.1.14}$$

の固有値は等しい．$A_n^TA_n$の固有値をλとすれば，$(A_n^TA_n)^2$の固有値はλ^2である．$\|A\|A_n^TA_n$の固有値は$\|A\|\lambda$なので[*1]，

$$\lambda^2 = \|A\|\lambda \tag{1.1.15}$$

が成立し，$A_n^TA_n$の固有値は$0,\|A\|$のみである[*2]．

7. 固有ベクトルは合計n個なので，対角化可能である．

補足

- 設問4.をちゃんとチェックしてみると

$$\tilde{A} = V^T\tilde{B} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \tag{1.1.16}$$

より，ちゃんと

$$\tilde{A}A = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}(a\ b) = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a^2 & ab\\ ab & b^2\end{pmatrix} \tag{1.1.17}$$

と対称行列になっています．

- 一般の場合をちゃんとチェックするのはきついですが，$n=3$くらいはやってみましょう．行列

$$A_3^TA_3 = \begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3\\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2\end{pmatrix} \tag{1.1.18}$$

[*1] 行列がk倍されると固有値もk倍される．固有ベクトルのノルムは関係ないですが，行列をスカラー倍するのは関係あるので注意です．

[*2] 設問1.と一致しています．今回の解答は固有値の候補を述べているだけなので，本当はちゃんと存在も言わないといけないと思いますが，言及しなくてもよいでしょう．設問1.で$n=2$の場合は確認できていますし．

の固有方程式は

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \lambda - a_1^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3 \\ -a_2a_1 & \lambda - a_2^2 & -a_2a_3 \\ -a_3a_1 & -a_3a_2 & \lambda - a_3^2 \end{vmatrix} \\
&\quad = (\lambda - a_1^2)(\lambda - a_2^2)(\lambda - a_3^2) - 2a_1^2a_2^2a_3^2 - \left(a_1^2a_2^2(\lambda - a_3^2) + a_2^2a_3^2(\lambda - a_1^2) + a_3^2a_1^2(\lambda - a_2^2)\right) \\
&\quad = \lambda^3 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\lambda^2 = 0
\end{aligned} \tag{1.1.19}
$$

となるので

$$\lambda = 0\ ,\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \tag{1.1.20}$$

が固有値です．固有値0が重解となっています．これに対応する固有値は，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -a_1^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3 \\ -a_2a_1 & -a_2^2 & -a_2a_3 \\ -a_3a_1 & -a_3a_2 & -a_3^2 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.1.21}
$$

なので，$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$を解けばよくて，これは2つのパラメター$s, t$を用いて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix} \tag{1.1.22}$$

と書けます[*3]．よって，対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix} \tag{1.1.23}$$

で2つです．

[*3] こういうときは，$x_2 = 0$とおいてx_1, x_3をもとめ，今度は逆に$x_3 = 0$とすればOKです．

第2問

1. 解の形を$u(t,x)=T(t)X(x)$と仮定すると

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \tag{1.2.1}$$

と変数分離できているので，A,λを用いて

$$u(t,x)=Ae^{\lambda(x-t)} \tag{1.2.2}$$

とかける．$t=0$で$u(0,x)=f(x)$だとすれば

$$u(t,x)=f(x)e^{-\lambda t} \tag{1.2.3}$$

である．

2. (i) Fを

$$F=\frac{1}{2}u^2-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.2.4}$$

とおけばよい．

(ii) $F'=0$より

$$\frac{1}{2}u^2-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=C \tag{1.2.5}$$

である．$x\to\infty$での境界条件より

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}(u^2-W^2) \tag{1.2.6}$$

なので[*4]，

$$\left(\frac{1}{u-W}-\frac{1}{u+W}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=W \tag{1.2.8}$$

である．これを解けば

$$\left|\frac{u-W}{u+W}\right|=e^{Wx+D} \tag{1.2.9}$$

である．ただし，Dは定数．$x=0$での境界条件から$D=0$である．よって，もとめる解は

$$u(x)=\frac{1-e^{Wx}}{1+e^{Wx}}W \tag{1.2.10}$$

である．

[*4] $x\to\infty$では

$$u(x)^2\to W^2\ ,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\to 0 \tag{1.2.7}$$

なので，$C=W^2/2$です．

3. (i) u^*を式(2)に代入すると

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} \\
&= -\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + D\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \\
&= -D\frac{\partial^3 s}{\partial x^3} = D\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = (\text{右辺})
\end{aligned}
\tag{1.2.11}
$$

となっている.

(ii) 式(3)の両辺を計算してみると

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{\partial s^*}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\frac{\partial S}{\partial \phi}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\
(\text{右辺}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s^*}{\partial x}\right)^2 + D\frac{\partial^2 s^*}{\partial x^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + D\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \phi}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right\} \\
&= D\frac{\partial S}{\partial \phi}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + D\frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2}\right]
\end{aligned}
\tag{1.2.12}
$$

となっているので,

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + D\frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} = 0 \tag{1.2.13}
$$

が$S(\phi)$が満たす微分方程式.ϕで積分すると

$$
\frac{\partial S}{\partial \phi} = \frac{2D}{\phi} \tag{1.2.14}
$$

となる[*5].もう一回積分すれば

$$
S(\phi) = 2D\log|\phi| \tag{1.2.15}
$$

となる.

(iii) フーリエ変換すると

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + Dk^2\tilde{\phi}\right]e^{ikx}\mathrm{d}k = 0 \tag{1.2.16}
$$

となるので,$\tilde{\phi}(k,t)$が満たす微分方程式は

$$
\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + Dk^2\tilde{\phi} = 0 \tag{1.2.17}
$$

---

*5 $\partial S/\partial \phi$を1つの関数とみなせば,これは変数分離できています.

である．これは

$$\frac{1}{\tilde{\phi}}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t} = -Dk^2 \tag{1.2.18}$$

となり，これを解けば

$$\tilde{\phi}(k,t) = A(k)e^{-Dk^2t} \tag{1.2.19}$$

である．初期条件より$A(k) = g(k)$なので，

$$\tilde{\phi}(k,t) = g(k)e^{-Dk^2t} \tag{1.2.20}$$

がもとめる解である.

補足

- ここで解いたのは，1階の時間微分と2階の空間微分の微分方程式で，一番身近なのはシュレーディンガー方程式や熱伝導方程式でしょう．今回の解は

$$\tilde{\phi}(k,t) = g(k)e^{-Dk^2t} \tag{1.2.21}$$

で，これをフーリエ変換で戻すと

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{-Dk^2t+ikx}\mathrm{d}k \tag{1.2.22}$$

となります．これ以上はちゃんと計算できませんが，例えば，$g(k) \equiv 1$の場合[*6]は計算できて

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \tag{1.2.23}$$

です.

[*6] つまり，$t = 0$での$\phi(x,0)$が$\delta(x)$の場合に対応し，$x = 0$に集中していた波の伝搬の様子がわかります.

2　物理パート

第1問

1. 行列表示は
$$H - E_2\mathbf{1} = \begin{pmatrix} E_1 - E_2 & V \\ V & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$
である．よって，状態$|2\rangle$に対する期待値は
$$\langle 2|(H-E_2)|2\rangle = V,\ \left\langle 2\middle|(H-E_2)^2\middle|2\right\rangle = V^2. \tag{2.1.2}$$

2. 固有値は，
$$E_\pm = \frac{E_1+E_2}{2} \pm \sqrt{V^2 + \left(\frac{E_1-E_2}{2}\right)^2} \tag{2.1.3}$$
である．対応する固有ベクトルは
$$|\psi_\pm\rangle = \begin{pmatrix} 2V \\ -E_1+E_2 \pm \sqrt{(E_1-E_2)^2+4V^2} \end{pmatrix} \tag{2.1.4}$$
なので，
$$\frac{\langle 2|\psi_\pm\rangle}{\langle 1|\psi_\pm\rangle} = \frac{E_2-E_1}{2V} \pm \sqrt{1+\left(\frac{E_1-E_2}{2V}\right)^2} \tag{2.1.5}$$
である．

3. 素直に計算してみれば
$$\begin{aligned}\langle \psi_-|\psi_+\rangle &= \begin{pmatrix} 2V & -E_1+E_2-\sqrt{(E_1-E_2)^2+4V^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2V \\ -E_1+E_2+\sqrt{(E_1-E_2)^2+4V^2} \end{pmatrix} \\ &= 4V^2 + (E_1-E_2)^2 - ((E_1-E_2)^2+4V^2) = 0 \end{aligned} \tag{2.1.6}$$
なので，直交．

4. 設問2.において，$E_1 \to E_2 - \mathcal{E}\lambda$を代入すれば
$$E_\pm(\lambda) = E_2 - \frac{\mathcal{E}\lambda}{2} \pm \sqrt{V^2+\left(\frac{\mathcal{E}\lambda}{2}\right)^2} \tag{2.1.7}$$
である．このとき，確かに
$$E_+(\lambda) - E_-(\lambda) = 2\sqrt{V^2+\left(\frac{\mathcal{E}\lambda}{2}\right)^2} \geq 2V \tag{2.1.8}$$
である．

5. (i) 基底の変換公式は
$$\begin{cases} |\psi_+^{(\lambda)}\rangle = \cos(\theta(\lambda))\,|1\rangle + \sin(\theta(\lambda))\,|2\rangle \\ |\psi_-^{(\lambda)}\rangle = -\sin(\theta(\lambda))\,|1\rangle + \cos(\theta(\lambda))\,|2\rangle \end{cases} \tag{2.1.9}$$

である[*7]．これを用いれば，

$$|\psi(t)\rangle = (c_+\cos(\theta(\lambda)) - c_-\sin(\theta(\lambda)))\,|1\rangle + (c_+\sin(\theta(\lambda)) + c_-\cos(\theta(\lambda)))\,|2\rangle \tag{2.1.10}$$

となるので，

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t/T)) & -\sin(\theta(t/T)) \\ \sin(\theta(t/T)) & \cos(\theta(t/T)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix} \tag{2.1.11}$$

である．これをシュレーディンガー方程式(5)に代入すれば

$$\begin{aligned} i\hbar\Bigg\{&-\frac{\theta'(t/T)}{T}\begin{pmatrix} \sin(\theta(t/T)) & \cos(\theta(t/T)) \\ -\cos(\theta(t/T)) & \sin(\theta(t/T)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix} \\ &+\begin{pmatrix} \cos(\theta(t/T)) & -\sin(\theta(t/T)) \\ \sin(\theta(t/T)) & \cos(\theta(t/T)) \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix}\Bigg\} \\ &= \begin{pmatrix} E_2 - \mathcal{E}t/T & V \\ V & E_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta(t/T)) & -\sin(\theta(t/T)) \\ \sin(\theta(t/T)) & \cos(\theta(t/T)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

となる．

(ii) もちろん

$$c_\pm(t) = \tilde{c}_\pm(t)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{-T}^{t}\mathrm{d}t' E_\pm(t'/T)\right] \tag{2.1.13}$$

なので

$$\frac{\partial c_\pm}{\partial t} = \left(\frac{\partial \tilde{c}_\pm}{\partial t} - \frac{i}{\hbar}E_\pm(t/T)\tilde{c}_\pm(t)\right)\exp\left[-\frac{i}{\hbar T}\int_{-T}^{t}\mathrm{d}t' E_\pm(t'/T)\right] \tag{2.1.14}$$

と変換される．よって，(2.1.12)に代入すれば

$$\begin{aligned} i\hbar\Bigg\{&-\frac{\theta'(t/T)}{T}\begin{pmatrix} \sin(\theta(t/T)) & \cos(\theta(t/T)) \\ -\cos(\theta(t/T)) & \sin(\theta(t/T)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{c}_+(t) \\ \tilde{c}_-(t) \end{pmatrix} \\ &+\begin{pmatrix} \cos(\theta(t/T)) & -\sin(\theta(t/T)) \\ \sin(\theta(t/T)) & \cos(\theta(t/T)) \end{pmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \tilde{c}_+(t) \\ \tilde{c}_-(t) \end{pmatrix} - \frac{i}{\hbar}\begin{pmatrix} E_+(t/T) & 0 \\ 0 & E_-(t/T) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{c}_+(t) \\ \tilde{c}_-(t) \end{pmatrix}\right)\Bigg\} \\ &= \begin{pmatrix} E_2 - \mathcal{E}t/T & V \\ V & E_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta(t/T)) & -\sin(\theta(t/T)) \\ \sin(\theta(t/T)) & \cos(\theta(t/T)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{c}_+(t) \\ \tilde{c}_-(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

となる[*8]．ここで，$T \gg 1$なので，$1/T$の項を無視すれば

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \tilde{c}_+(t) \\ \tilde{c}_-(t) \end{pmatrix} = \Bigg\{&-\begin{pmatrix} E_+(t/T) & 0 \\ 0 & E_-(t/T) \end{pmatrix} \\ &+\begin{pmatrix} E_2 + V\sin 2\theta(t/T) - \mathcal{E}\lambda\cos^2\theta(t/T) & \frac{1}{2}\mathcal{E}\lambda\sin 2\theta(t/T) + V\cos 2\theta(t/T) \\ \frac{1}{2}\mathcal{E}\lambda\sin 2\theta(t/T) + V\cos 2\theta(t/T) & E_2 - \mathcal{E}\lambda\sin^2\theta(t/T) - V\sin 2\theta(t/T) \end{pmatrix}\Bigg\}\begin{pmatrix} \tilde{c}_+(t) \\ \tilde{c}_-(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

である．ここで，$V \ll \mathcal{E}$より，$E_2 - E_+ \sim 0, E_2 - E_- \sim \mathcal{E}t/T$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \tilde{c}_+(t) \\ \tilde{c}_-(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V\sin 2\theta - \dfrac{\mathcal{E}t}{T}\cos^2\theta & V\cos 2\theta + \dfrac{\mathcal{E}t}{2T}\sin 2\theta \\ V\cos 2\theta + \dfrac{\mathcal{E}t}{2T}\sin 2\theta & -V\sin 2\theta + \dfrac{\mathcal{E}t}{T}\cos^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{c}_+(t) \\ \tilde{c}_-(t) \end{pmatrix} \tag{2.1.17}$$

[*7] $|\psi_+^{(\lambda)}\rangle$の形が決まっているので，直交性から$|\psi_-^{(\lambda)}\rangle$の形も決まってきます．問題は$|\psi_-^{(\lambda)}\rangle$の符号ですが，ひとまず$\lambda = -1$で，それぞれちょうど$|1\rangle, |2\rangle$になるようにとっておきました．

[*8] $e^{\cdots}$は共通因子として全て落としています．

となる[*9].

6. (2.1.17)の両辺を$-T$から時刻tまで積分すれば

$$\tilde{c}_+(t) = \tilde{c}_+(-T) + \int_{-T}^{t} \mathrm{d}t' \frac{1}{i\hbar} \left\{ \left(V \sin 2\theta - \frac{\mathcal{E}t'}{T} \cos^2\theta \right) \tilde{c}_+(t') + \left(V \cos 2\theta + \frac{\mathcal{E}t'}{2T} \sin 2\theta \right) \tilde{c}_-(t') \right\} \tag{2.1.18}$$

$$\tilde{c}_-(t) = \tilde{c}_-(-T) + \int_{-T}^{t} \mathrm{d}t' \frac{1}{i\hbar} \left\{ \left(V \cos 2\theta + \frac{\mathcal{E}t'}{2T} \sin 2\theta \right) \tilde{c}_+(t') + \left(-V \sin 2\theta + \frac{\mathcal{E}t'}{T} \cos^2\theta \right) \tilde{c}_-(t') \right\} \tag{2.1.19}$$

であるが，右辺はtが$-T$から離れると激しく振動する項と$\mathcal{O}(1)$で変化する項の積を積分したものとなっている[*10]．よって，積分の項の寄与はほとんどないとみなせるので，$|\tilde{c}_+(t)| \sim 1, |\tilde{c}_-(t)| \sim 0$である．

補足

- 強引に$|\psi_+^\lambda\rangle$の係数を求めてみましょう．といっても，一般の場合の基底は分かっているので，代入してやるだけで

$$|\psi_\pm^{(\lambda)}\rangle = C_\pm \begin{pmatrix} 2V \\ \mathcal{E}\lambda \pm \sqrt{\mathcal{E}^2\lambda^2 + 4V^2} \end{pmatrix} \tag{2.1.20}$$

ともとまります．ただし，$C_\pm$は規格化定数です．これを計算すると

$$C_\pm = \frac{1}{\sqrt{2(\mathcal{E}^2\lambda^2 + 4V^2 \pm \mathcal{E}\lambda\sqrt{\mathcal{E}^2\lambda^2 + 4V^2})}} \tag{2.1.21}$$

となるので，

$$|\psi_+^{(\lambda)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(\mathcal{E}^2\lambda^2 + 4V^2 + \mathcal{E}\lambda\sqrt{\mathcal{E}^2\lambda^2 + 4V^2})}} \begin{pmatrix} 2V \\ \mathcal{E}\lambda + \sqrt{\mathcal{E}^2\lambda^2 + 4V^2} \end{pmatrix} \tag{2.1.22}$$

です．したがって，

$$\begin{aligned} \sin(\theta(\lambda)) &= \frac{2V}{\sqrt{2(\mathcal{E}^2\lambda^2 + 4V^2 + \mathcal{E}\lambda\sqrt{\mathcal{E}^2\lambda^2 + 4V^2})}}, \\ \cos(\theta(\lambda)) &= \frac{\mathcal{E}\lambda + \sqrt{\mathcal{E}^2\lambda^2 + 4V^2}}{\sqrt{2(\mathcal{E}^2\lambda^2 + 4V^2 + \mathcal{E}\lambda\sqrt{\mathcal{E}^2\lambda^2 + 4V^2})}} \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

となります．確かに，問題文中の図のようになりそうです．

[*9] かなりゴリゴリ計算しましたが，早い段階で$1/T$を落としてもよかったかもしれません．
[*10] $t = 0$付近で激しく振動するのは，問題文の図1から分かります．

第2問

1. (i) この系の分配関数は，古典的に

$$Z[\beta] = \frac{1}{h^{3N}N!}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1\cdots\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_N \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_1\cdots\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_N \exp\left[-\beta\sum_{i=1}^{N}\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m}\right] = \frac{V^N}{h^{3N}N!}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3N/2} \tag{2.2.1}$$

である．したがって，内部エネルギーと定積熱容量は

$$\begin{cases} U = -\dfrac{\partial}{\partial\beta}\log Z[\beta] = \dfrac{3}{2}Nk_BT \\ C_V = \dfrac{\partial U}{\partial T} = \dfrac{3}{2}Nk_B \end{cases} \tag{2.2.2}$$

である．

(ii) 自由エネルギーは，

$$F = -k_BT\log Z = Nk_BT\log V + (V\text{に関係のない項}) \tag{2.2.3}$$

なので

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{Nk_BT}{V} \tag{2.2.4}$$

である．

(iii) 定積熱容量は温度に依存しないので

$$\Delta S(T_0, T_0/2) = \frac{3}{2}Nk_B\cdot\int_{T_0/2}^{T_0}\mathrm{d}T'\ \frac{1}{T'} = \frac{3}{2}Nk_B\log 2 \tag{2.2.5}$$

と一定である．

2. (i) 大分配関数は

$$\Xi[\beta,\mu] = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{h^{3N}N!}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1\cdots\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_N \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_1\cdots\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_N \exp\left[-\beta\left\{\sum_{i=1}^{N}\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} - \mu N\right\}\right] \tag{2.2.6}$$

である．この右辺を計算してやると

$$\Xi[\beta,\mu] = \exp\left[\frac{(2\pi mk_BT)^{3/2}}{h^3V}e^{\mu/k_BT}\right] \tag{2.2.7}$$

である．したがって，温度Tのときの平均粒子数は

$$\langle N(T)\rangle = k_BT\frac{\partial}{\partial\beta}\log\Xi[\mu,T] = \frac{(2\pi mk_BT)^{3/2}}{h^3V}e^{\mu/k_BT} \tag{2.2.8}$$

なので，

$$\frac{\langle N(T_1)\rangle}{\langle N(T_2)\rangle} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2}\exp\left[\frac{\mu}{k_B}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)\right] \tag{2.2.9}$$

である．

(ii) 圧力は

$$P = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\log\Xi = \frac{1}{\beta V}\cdot\frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{h^3 V}e^{\mu/k_B T} = \frac{\langle N(T)\rangle k_B T}{V} \tag{2.2.10}$$

である．

3. (i) もっともエネルギーが低いのは$(n_x, n_y, n_z) = (1,1,1)$のときなので，基底状態のエネルギーは

$$E_0 = E(1,1,1) = \frac{9\pi^2\hbar^2}{8mL^2} \tag{2.2.11}$$

である．第1励起状態は

$$E_1 = E(1,1,2) = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{2.2.12}$$

である．

(ii) ボーズ粒子なので，1粒子のエネルギーは

$$U_1 = E_0 D(E_0) f(E_0) + E_1 1 D(E_1) f(E_1) + \cdots \tag{2.2.13}$$

である．ただし，$D(\varepsilon)$は状態密度[*11]で$f(\varepsilon)$はボーズ分布．$k_B T \ll E_1 - E_0$ならば，$E_1 f(E_1) \ll E_0 f_0$なので，基底状態でエネルギーの平均値を評価してもよい．よって，

$$U = N \times U_1 \sim N E_0 D(E_0) f(E_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2mL^2}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{N E_0^{3/2}}{e^{\beta E_0} - 1} \tag{2.2.14}$$

であり，Tの依存性は古典論と異なる．

(iii) 定積熱容量は

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{N}{4\pi k_B T^2}\left(\frac{2mL^2}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{E_0^{5/2} e^{E_0/k_B T}}{(e^{E_0/k_B T} - 1)^2} \tag{2.2.15}$$

なので，$T = 0$では$C = 0$となってしまう．

(iv) 公式を使えば

$$\Delta S(T_0, T_0/2) = \frac{N}{4\pi k_B}\left(\frac{2mL^2}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_{T_0/2}^{T_0}\frac{1}{T^3}\cdot\frac{e^{E_0/k_B T}}{(e^{E_0/k_B T} - 1)^2}\mathrm{d}T \tag{2.2.16}$$

である．ここで，$T_0 \to 0$で，被積分関数は0に収束し積分区間も0になるので，$\Delta S \to 0$となる[*12]．

(v) 古典論では$\Delta S = \mathrm{const.}$に対して，量子論では$T_0 \to 0$で$\Delta S \to 0$となった．これは，古典論と量子論の状態数の考え方の違いからくる．ここでは，あるエネルギーEに対してとりうる状態の数を$\Omega(E)$と書くことにしよう．古典論では，状態数はphase spaceの表面積なので，$\Omega \propto E^{1/2} \propto T^{1/2}$である[*13]．したがって，ボルツマンの関係式より $S \propto \log T$であり，$\Delta S_{\mathrm{classical}} = \mathrm{const.}$となる．一方，量子論では，状態数は状態空間の表面積であるが，十分低温では基底状態$(n_x, n_y, n_z) = (1,1,1)$のみが取りうる状態になる．したがって，$S = \mathrm{const.}$となり$\Delta S = 0$となる[*14]．

---

*11 今回，状態密度は

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2mL^2}{\hbar^2}\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}$$

です．いつもは球の体積ですが，今回は楕円体の体積であることに注意しましょう．

*12 ちゃんとやるなら，被積分関数を上からεで抑えて積分して$\varepsilon \to 0$とすればいいでしょう．

*13 各自由度に$k_B T/2$が分配されるので，$E \propto T$です．

*14 ちなみに，今回は箱のz軸方向の長さが$2L$なのはあまり効いてきませんでした．一応，第1励状態第の計算が影響を受けています．第1励起状態の縮退が変わったりするのですが，その影響が後半の議論に影響があるかというと$\cdots$，よくわかりません．

第3問

1. 静電ポテンシャルは$\phi_0(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} = -qdr\cos\theta$．よって，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi_0(\boldsymbol{r}) = qd(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta) \tag{2.3.1}$$

である．

2. マクスウェル方程式を満たすようにとる：

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\ . \end{cases} \tag{2.3.2}$$

3. マクスウェル方程式(1)に，前問の第1式を代入すると

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.3.3}$$

である．前問の第2式をマクスウェル方程式(4)に代入すれば

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \tag{2.3.4}$$

なので，これを整理してローレンツの条件を代入すれば

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\boldsymbol{j} \tag{2.3.5}$$

である．

4. $\boldsymbol{r} = (0, 0, d/2)$における電流を調べれば

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = I_0 e^{i\omega t} \tag{2.3.6}$$

である．よって

$$q(t) = \frac{I_0}{i\omega}e^{i\omega t} \tag{2.3.7}$$

である．

5. $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$は$z$成分しかもってないので，$\boldsymbol{A}$も$z$成分のみしか値をもたない．その値とは

$$\begin{aligned} A_z(\boldsymbol{r}, t) &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\ \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot I_0 e^{i\omega(t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}\delta(x')\delta(y') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}z'\ \frac{I_0 e^{i\omega(t-\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}/c)}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} \end{aligned}$$

である．ここで

$$\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2} \sim r\left(1 - \frac{zz'}{r^2}\right) = r - \frac{z}{r}z' \tag{2.3.8}$$

と近似すれば，積分は

$$\int \mathrm{d}z' \quad \frac{I_0 e^{i\omega(t-\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}/c)}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} \sim \frac{I_0}{r}e^{i(\omega t - kr)}\int_{-d/2}^{+d/2}\mathrm{d}z'\ e^{i(kz/r)z'} = \frac{2I_0}{kz}e^{i(\omega t-kr)}\sin\left(\frac{dkz}{2r}\right) \tag{2.3.9}$$

となる [*15]．したがって，これを極座標に書き直せば

$$\boldsymbol{A} = A_z \boldsymbol{e}_z = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi kr}(\boldsymbol{e}_r - \tan\theta \boldsymbol{e}_\theta) e^{i(\omega t - kr)} \sin\left(\frac{dk\cos\theta}{2}\right) \tag{2.3.10}$$

である．よって，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) &= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \\
&= \left(\boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \times \left[\frac{\mu_0 I_0}{2\pi kr}(\boldsymbol{e}_r - \tan\theta \boldsymbol{e}_\theta) e^{i(\omega t - kr)} \sin\left(\frac{dk\cos\theta}{2}\right)\right] \\
&= -\boldsymbol{e}_\varphi \tan\theta \frac{\mu_0 I_0}{2\pi k} e^{i(\omega t - kr)} \sin\left(\frac{dk\cos\theta}{2}\right)\left(-\frac{i + ikr}{r^2}\right) \\
&\quad - \boldsymbol{e}_\varphi \tan\theta \frac{\mu_0 I_0}{2\pi k} e^{i(\omega t - kr)} \sin\left(\frac{dk\cos\theta}{2}\right) \\
&\sim \boldsymbol{e}_\varphi \frac{\mu_0 I_0 d\sin\theta}{4\pi r^2} e^{i(\omega t - kr)} \cos\left(\frac{dk\cos\theta}{2}\right)
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

である [*16]．また，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} &= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \mu_0 \boldsymbol{j} \\
&= \left(\boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \times \boldsymbol{e}_\varphi \frac{\mu_0 I_0 d\sin\theta}{4\pi r^2} e^{i(\omega t - kr)} \cos\left(\frac{dk\cos\theta}{2}\right) \\
&\qquad + \mu_0 j_z (\cos\theta \boldsymbol{e}_r - \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta) \\
&= -\boldsymbol{e}_\theta \frac{\mu_0 I_0 d\sin\theta}{4\pi} e^{i\omega t} \cos\left(\frac{dk\cos\theta}{2}\right) \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) \\
&\qquad + \boldsymbol{e}_r \frac{\mu_0 I_0 d}{4\pi r^3} e^{i(\omega t - kr)} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \cos\left(\frac{dk\cos\theta}{2}\right)\right) \\
&\qquad + \mu_0 I_0 e^{i\omega t} \delta(x)\delta(y)(\cos\theta \boldsymbol{e}_r - \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta) \\
&\sim \boldsymbol{e}_\theta \frac{ik\mu_0 I_0 d\sin\theta}{4\pi r^2} e^{i(\omega t - kr)} \cos\left(\frac{dk\cos\theta}{2}\right) + \mu_0 I_0 e^{i\omega t} \delta(x)\delta(y)(\cos\theta \boldsymbol{e}_r - \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta)
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

より，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{e}_\theta \frac{c\mu_0 I_0 d\sin\theta}{4\pi r^2} e^{i(\omega t - kr)} \cos\left(\frac{dk\cos\theta}{2}\right) + \frac{c^2 \mu_0 I_0}{i\omega} e^{i\omega t} \delta(x)\delta(y)(\cos\theta \boldsymbol{e}_r - \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta) \tag{2.3.13}$$

である．

6. $\boldsymbol{E} = E_r \boldsymbol{e}_r + E_\theta \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{B} = B_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi$とすると

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_0} \cdot B_\varphi \left[-E_r \boldsymbol{e}_\varphi + E_\theta \boldsymbol{e}_r\right] \tag{2.3.14}$$

---

*15 近似を用いれば，被積分関数の分母は

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} \sim \frac{1}{r} \cdot \left(1 + \frac{zz'}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-4})\right)$$

と展開できますが，今回は「もっともゆっくり減衰する項」を取ってくればよいとのことなので，第1項の近似で打ち切りました．

*16 次の関係式

$$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\varphi \quad , \quad \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta \quad , \quad \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_r$$

を用いる．これは，図を書くとよくわかるかも．また，$kr \gg 1$なので，第1項をおとした．

である．$\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$の実部を調べると

$$\begin{cases} E_r = \dfrac{c^2\mu_0 I_0}{\omega}\sin\omega t\cos\theta\delta(x)\delta(y) \\ E_\theta = \dfrac{c\mu_0 I_0 d\sin\theta}{4\pi r^2}\cos(\omega t - kr)\cos\left(\dfrac{dk\cos\theta}{2}\right) - \dfrac{c^2\mu_0 I_0}{\omega}\sin\omega t\sin\theta\delta(x)\delta(y) \\ B_\varphi = \dfrac{\mu_0 I_0 d\sin\theta}{4\pi r^2}\cos(\omega t - kr)\cos\left(\dfrac{dk\cos\theta}{2}\right) \end{cases} \tag{2.3.15}$$

となっているので，ポインティングベクトルは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = &\frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{\mu_0 I_0 d\sin\theta}{4\pi r^2}\cos(\omega t - kr)\cos\left(\frac{dk\cos\theta}{2}\right) \\ &\times\left[-\frac{c^2\mu_0 I_0}{\omega}\sin\omega t\cos\theta\delta(x)\delta(y)\boldsymbol{e}_\varphi\right. \\ &\left.+\left\{\frac{c\mu_0 I_0 d\sin\theta}{4\pi r^2}\cos(\omega t - kr)\cos\left(\frac{dk\cos\theta}{2}\right) - \frac{c^2\mu_0 I_0}{\omega}\sin\omega t\sin\theta\delta(x)\delta(y)\right\}\boldsymbol{e}_r\right] \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

である．これの時間平均をとれば，

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\mathrm{d}t\ \cos(\omega t - kr)\sin\omega t = \frac{\omega}{4\pi}\sin kr\int_0^{2\pi/\omega}\mathrm{d}t\ (1-\cos 2\omega t) = \frac{1}{2}\sin kr \tag{2.3.17}$$

より

$$\bar{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega}\mathrm{d}t\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{c^2\mu_0 I_0^2 d\sin\theta\sin kr}{8\pi\omega r^2}\cos\left(\frac{dk\cos\theta}{2}\right)\left[\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi + \sin\theta\boldsymbol{e}_r\right]\delta(x)\delta(y) \tag{2.3.18}$$

である．

7. 向きは$\boldsymbol{e}_z$でそろっており，$E_0(R_1) = E_0(R_2)$なので

$$|\boldsymbol{E}|^2 = |E_0(R_1)|^2|\cos(\omega t - kR_1 - \delta_1) + \cos(\omega t - kR_2 - \delta_2)|^2 \tag{2.3.19}$$

である．ここで

$$R_1 \sim r + \frac{D}{2}\sin\varphi\ ,\ R_2 \sim r - \frac{D}{2}\sin\varphi \tag{2.3.20}$$

と近似できるので，$\delta_1 = \delta_2 = 0$なら

$$|\boldsymbol{E}|^2 = 4|E_0(R_1)|^2\cos^2(\omega t - kr)\cos^2\left(\frac{kD}{2}\sin\varphi\right) \tag{2.3.21}$$

である．よって，$\varphi = 0$で最大で，最大値の半分になるためには

$$-\frac{\pi}{2kD} \leq \sin\varphi \leq \frac{\pi}{2kD} \tag{2.3.22}$$

であればよい．この幅$\Delta\varphi$を減らすためには，kやDの値を大きくする，すなわち，波数を大きくしたり，波源の距離を大きくすればよい．また，一般の場合で(2.3.19)で近似(2.3.20)を入れると

$$|\boldsymbol{E}|^2 = |E_0(R_1)|^2\left|\cos\left(\omega t - kr - \frac{kD}{2}\sin\varphi - \delta_1\right) + \cos\left(\omega t - kr + \frac{kD}{2}\sin\varphi - \delta_2\right)\right|^2 \tag{2.3.23}$$

となる．$\varphi = \varphi_0$で$|\cos(\cdots) + \cos(\cdots)|$の部分が最大となるためには，$\omega t - kr$以外の部分の値の差が$2\pi$の整数倍であればよい．つまり，$m$を整数とすれば

$$-\frac{kD}{2}\sin\varphi_0 - \delta_1 - \left(\frac{kD}{2}\sin\varphi_0 - \delta_2\right) = 2m\pi \tag{2.3.24}$$

である．これを整理すれば

$$\delta_2 - \delta_1 = kD\sin\varphi_0 + 2m\pi \qquad (m \in \mathbb{Z}) \tag{2.3.25}$$

である．