東京大学 平成29年 物理学専攻 院試 解答例

ミヤネ

最終更新：2023 年 8 月 11 日

目次

1　数学パート

第1問

1. (i) 収束するのは$s > 0$.

   証明. 調べればよいのは，

   $$\lim_{R\to\infty}\int_0^R te^{-st}\mathrm{d}t \tag{1.1.1}$$

   の収束です．ここで，$f(t) = te^{-st}$とおくと，

   $$tf(t) = t^3e^{-st} \to 0 \quad (t\to\infty) \tag{1.1.2}$$

   なので，$M > 0$に対して，ある$\Lambda > 0$が存在して

   $$t^2f(t) < M,\ t > \Lambda \tag{1.1.3}$$

   です．このようなM, Λについて

   $$\lim_{R\to\infty}\int_\Lambda^R f(t)\mathrm{d}t \le \lim_{R\to\infty}\int_\Lambda^R \frac{M}{t^2}\mathrm{d}t < \infty \tag{1.1.4}$$

   なので，積分(1.1.1)は収束します． ■

   値は

   $$\begin{aligned} L[t] &= \int_0^\infty te^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^\infty + \left[-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s^2} \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

   です．

   (ii) 収束するのは$s \neq 0$です．

   証明. 簡単で

   $$e^{-st}\sin\omega t < e^{-st} \tag{1.1.6}$$

   を積分すればよいです． ■

   値ですが，2回部分積分してみると

   $$L[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}L[\sin\omega t] \tag{1.1.7}$$

   となることがわかるので

   $$L[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{1.1.8}$$

   です．

(iii) 収束するのは$s > 0$のときです．証明は$f(t) = t$のときとほぼ同じ．積分の値は，途中で$t = x^2$と変数変換をしてみると

$$
\begin{aligned}
L[\sqrt{t}] &= \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-st} \mathrm{d}t \\
&= 2 \int_0^\infty x^2 e^{-sx^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{s^3}} \qquad (1.1.9)
\end{aligned}
$$

です[*1]．

2. (i) $f_1 * f_2$を変換すると

$$L[f_1 * f_2] = \int_0^\infty \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}t' \; e^{-s(t-t')} f_1(t - t') \cdot e^{-st'} f_2(t') \qquad (1.1.10)$$

となります．この積分範囲は$0 \leq t' < t$なので，$t - t' > 0, t' > 0$の領域で積分するのと等価です．よって，

$$L[f_1 * f_2] = \int_0^\infty \mathrm{d}t_1 \int_0^\infty \mathrm{d}t_2 \; e^{-st_1} f_1(t_1) \cdot e^{-st_2} f_2(t_2) = F_1(s) F_2(s) \qquad (1.1.11)$$

となります．

(ii) 両辺をLaplace変換すると

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} F(s) \qquad (1.1.12)$$

なので，

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \qquad (1.1.13)$$

です．

(iii) $L[t] = 1/s^2$だったので$f(t) = t$.

3. 計算すればいいのは

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{s}{(s-1)^2} e^{st} \mathrm{d}s \qquad (1.1.14)$$

です．極はすべて経路が囲む閉じた領域内にあって，積分の経路はそれら極を反時計回りにまわるので[*2]，

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{s}{(s-1)^2} e^{st} \mathrm{d}s = \lim_{s \to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[s e^{st} \right] = (t+1) e^t \qquad (1.1.15)$$

となります．

---

*1 nz先生の講義を覚えてるならGaussian integral

$$\int_0^\infty e^{-sx^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

を，sで微分して

$$\int_0^\infty x^2 e^{-sx^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{s^3}}$$

とすれば早いです．

*2 ここらへんのお話は，そういったものとして許してください．

補足

- もともとLaplace変換は微分or積分方程式をある程度機械的に解けるのがメリットなので，2.(iii)をダイレクトに計算するのはナンセンスでしょう．ただ，もちろん，実際には計算できて，

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{1}{s^2}e^{st}\mathrm{d}s=\lim_{s\to 0}\left[te^{st}\right]=t \tag{1.1.16}$$

  です．
- 3.も

$$\begin{aligned}L[e^t](s)&=\int_0^\infty e^{-(s-1)t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{s-1}\end{aligned}\tag{1.1.17}$$

$$\begin{aligned}L[te^t](s)&=\int_0^\infty te^{-(s-1)t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{(s-1)^2}\end{aligned}\tag{1.1.18}$$

  を知っていれば，すぐわかりそうです．

第2問

1.
$$J(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2.1}$$

2. 固有方程式は
$$\lambda(\lambda^2 - |\boldsymbol{a}|^2) = 0 \tag{1.2.2}$$
なので，$\lambda = 0, \pm|\boldsymbol{a}|$が固有値です.

3. $P(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x})$の関係があることを使います.
   (i) $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$と$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = 0$がわかっていればOK.
   (ii) 計算すると
   $$P(\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}. \tag{1.2.3}$$
   (iii) 任意のベクトル$\boldsymbol{x}$を$\boldsymbol{a}$とそれに垂直な2つの単位ベクトル$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$に分解して
   $$\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{a} + \sum_{i=1,2} b_i \boldsymbol{b}_i \tag{1.2.4}$$
   とすれば，前問の結果から
   $$P(\boldsymbol{a})^2 \boldsymbol{x} = \sum_{i=1,2} b_i \boldsymbol{b}_i = P(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} \tag{1.2.5}$$
   なので，$P(\boldsymbol{a})^2 = P(\boldsymbol{a})$です.

4. 展開して，偶数と奇数の項に分割して考えると
$$\begin{aligned} \exp(\theta J(\boldsymbol{a})) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} J^n \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!}(-J)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}(-J)^{2k+1} \\ &= 1 + (\cos\theta - 1)P(\boldsymbol{a}) + \sin\theta J(\boldsymbol{a})P(\boldsymbol{a}) \end{aligned} \tag{1.2.6}$$
です．よって，係数比較すればOK.

5. それぞれ計算すれば
$$\begin{cases} \exp(\theta J(\boldsymbol{a}))\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \\ \exp(\theta J(\boldsymbol{a}))\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cos\theta + \boldsymbol{c}\sin\theta \\ \exp(\theta J(\boldsymbol{a}))\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{b}\sin\theta + \boldsymbol{c}\cos\theta \end{cases}$$
となります．これはちょうど，$\boldsymbol{a}$を軸にした角度θの回転になっています.

6. この変換は「座標軸を軸$\boldsymbol{a}$に対して$-\theta$だけ回転させたのち，軸$\boldsymbol{b}$についてベクトルをφだけ回転させる操作」に対応しています．したがって，回転軸は
$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b}\cos\theta + \boldsymbol{c}\sin\theta \tag{1.2.7}$$
であり，角度は$\chi = \varphi$です.

補足

- $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$を軸にする角度$\chi$の回転は

$$
\begin{aligned}
&\exp(\chi J(\boldsymbol{e})) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\chi + e_x^2(1-\cos\chi) & e_x e_y(1-\cos\chi) - e_z\sin\chi & e_z e_x(1-\cos\chi) + e_y\sin\chi \\ e_x e_y(1-\cos\chi) - e_z\sin\chi & \cos\chi + e_y^2(1-\cos\chi) & e_y e_z(1-\cos\chi) - e_x\sin\chi \\ e_z e_x(1-\cos\chi) - e_y\sin\chi & e_y e_z(1-\cos\chi) + e_x\sin\chi & \cos\chi + e_z^2(1-\cos\chi) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.2.8}
$$

と書けます．今回の回転行列は

$$
\begin{aligned}
&\exp(\theta J(\boldsymbol{a}))\exp(\varphi J(\boldsymbol{b}))\exp(-\theta J(\boldsymbol{a})) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta\cos\varphi \\ -\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta\cos\varphi & \sin^2\theta + \cos^2\theta\cos\varphi \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.2.9}
$$

なので，確かに(1.2.8)で$\boldsymbol{e} = (0, \cos\theta, \sin\theta), \chi = \varphi$とおけば一致しています．

2　物理パート

第1問

1. 微分は
$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2},\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} \tag{2.1.1}$$
となるので，
$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\frac{m\omega^2}{2}\left(2x^2+\frac{y^2}{2}\right)+\frac{m\omega^2\alpha}{4}y^2 \tag{2.1.2}$$
です．

2. yについてのポテンシャルは
$$V_y(y)=\frac{m\omega^2(\alpha+1)}{2}y^2 \tag{2.1.3}$$
なので，これが下に凸であるためには
$$\alpha\geq-1 \tag{2.1.4}$$
が必要です．よって，$\alpha_0=-1$.

3. $\psi(x,y)=X(x)Y(y)$と変数分離すれば，定常状態のSchrödinger方程式は
$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{4m}\dfrac{\partial^2X}{\partial x^2}+m\omega^2x^2X(x)=E_xX(x) \\ -\dfrac{\hbar^2}{m}\dfrac{\partial^2Y}{\partial y^2}+\dfrac{m\omega^2(1+\alpha)}{4}y^2Y(y)=E_yY(y) \end{cases} \tag{2.1.5}$$
となります．ただし，$E=E_x+E_y$です．基底状態の波動関数の形が分かっているので，
$$X(x)=\left(\frac{c_x}{\pi}\right)^{1/4}e^{-(c_x/2)x^2},\ Y(y)=\left(\frac{c_y}{\pi}\right)^{1/4}e^{-(c_y/2)y^2} \tag{2.1.6}$$
を代入していきます．Xについては
$$\left(-\frac{\hbar^2c^2}{4m}+m\omega^2\right)x^2=E_x-\frac{\hbar^2c_x}{4m} \tag{2.1.7}$$
となるので，この式が任意のxで成立するためには$c_x=2m\omega/\hbar$であることが必要なので
$$E_x=\frac{\hbar\omega}{2},\ X(x)=\left(\frac{2m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right] \tag{2.1.8}$$
となります．Yについても同様で
$$E_y=\sqrt{1+\alpha}\frac{\hbar\omega}{2},\ Y(y)=\left(\frac{m\omega\sqrt{1+\alpha}}{2\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left[-\frac{m\omega\sqrt{1+\alpha}}{4\hbar}y^2\right] \tag{2.1.9}$$
です．

4. $t=0$での波動関数は

$$\Psi(x,y;t=0)=\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}e^{-m\omega x^2/\hbar}e^{-m\omega y^2/4\hbar} \tag{2.1.10}$$

です．したがって，

$$f(x,k)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x,y;t=0)e^{-iky}\mathrm{d}y=2\exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}x^2-\frac{4\hbar k^2}{m\omega}\right] \tag{2.1.11}$$

です．

5. 時間発展を考えればよいので

$$\Psi(x,y;t)=e^{-iHt/\hbar}\Psi(x,y;t=0)=e^{-im\omega^2x^2t/\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\exp\left[\frac{i\hbar t}{4m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]f(x,k)\exp\left[\frac{i\hbar t}{m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]e^{iky} \tag{2.1.12}$$

であり，それぞれexpを展開して計算すると

$$\exp\left[\frac{i\hbar t}{4m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]f(x,k)=2\exp\left[-\frac{4\hbar k^2}{m\omega}-\frac{i\omega t}{2}\left(1-\frac{2m\omega x^2}{\hbar}\right)\right]e^{-m\omega x^2/\hbar}, \tag{2.1.13}$$

$$\exp\left[\frac{i\hbar t}{m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]e^{iky}=\exp\left[-\frac{i\hbar k^2 t}{m}\right]e^{iky} \tag{2.1.14}$$

となるので[*3]，

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\exp\left[\frac{i\hbar t}{4m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]f(x,k)\exp\left[\frac{i\hbar t}{m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]e^{iky}\\
&=2\exp\left[-\frac{i\omega t}{2}\left(1-\frac{2m\omega}{\hbar}x^2\right)-\frac{m\omega}{\hbar}x^2-\frac{m\omega y^2}{4\hbar(4+i\omega t)}\right]\\
&\qquad\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\exp\left[-\frac{\hbar(4+i\omega t)}{m\omega}\left(k-\frac{im\omega y}{2\hbar(4+i\omega t)}\right)^2\right]\\
&=2\sqrt{\frac{\pi m\omega}{\hbar(1+i\omega t)}}\exp\left[-\frac{i\omega t}{2}\left(1-\frac{2m\omega}{\hbar}x^2\right)-\frac{m\omega}{\hbar}x^2-\frac{m\omega y^2}{4\hbar(4+i\omega t)}\right]
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

です．したがって，波動関数は

$$\Psi(x,y,t)=2\sqrt{\frac{\pi m\omega}{\hbar(1+i\omega t)}}\exp\left[-\frac{i\omega t}{2}-\frac{m\omega}{\hbar}x^2-\frac{m\omega y^2}{4\hbar(4+i\omega t)}\right] \tag{2.1.16}$$

となります．

[*3] expのなかにoperatorがあるときは，そこが固有値におきかわります．

第2問

1. 分配関数は
$$Z=\sum_{\sigma=\pm}e^{-\beta\mathcal{H}_1}=2\cosh\left(\frac{\mu H}{k_BT}\right) \tag{2.2.1}$$
なので
$$p_+=\frac{e^{\mu H/k_BT}}{2\cosh(\mu H/k_BT)},\ p_-=\frac{e^{-\mu H/k_BT}}{2\cosh(\mu H/k_BT)} \tag{2.2.2}$$
です．
2.
$$\langle\sigma\rangle=(+1)\cdot\frac{e^{\mu H/k_BT}}{2\cosh(\mu H/k_BT)}+(-1)\cdot\frac{e^{-\mu H/k_BT}}{2\cosh(\mu H/k_BT)}=\tanh\left(\frac{\mu H}{k_BT}\right). \tag{2.2.3}$$
3. 格子A上のある粒子に着目すると，そのスピンの平均値は
$$\langle\sigma_A\rangle=\tanh\left(\frac{\mu H_{\mathrm{eff,A}}}{k_BT}\right) \tag{2.2.4}$$
と表すことができます．よって，
$$\langle\sigma_A\rangle=\tanh\left(-\frac{4J}{k_BT}\sigma_B+\frac{\mu H}{k_BT}\right) \tag{2.2.5}$$
です．格子Bについても同様．したがって，
$$f(x)=\tanh\left(-\frac{4J}{k_BT}x+\frac{\mu H}{k_BT}\right). \tag{2.2.6}$$
ただし，$z=4$としました．
4. $H=0$のとき，self-consistentな方程式は
$$x=\tanh\left(\frac{4J}{k_BT}x\right) \tag{2.2.7}$$
です．右辺の$\tanh$の原点での傾きが1より小さければ非自明な解が存在するので，
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\tanh\left(\frac{4J}{k_BT}x\right)\right]\Bigg|_{x=0}=\frac{4J}{k_BT}\leq 1 \tag{2.2.8}$$
より，
$$T_N=\frac{4J}{k_B} \tag{2.2.9}$$
です．
5. 計算すれば，
$$\chi=\frac{\mu^2}{k_BT}\left(\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{4J}{k_BT}\langle\sigma_A\rangle\right)}+\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{4J}{k_BT}\langle\sigma_B\rangle\right)}\right). \tag{2.2.10}$$

6. 平均場近似は

$$\mu H_{\mathrm{eff,A}} = -4J \langle \sigma_B \rangle - 4J' \langle \sigma_A \rangle \tag{2.2.11}$$

でよいでしょう．よって，格子A上の粒子のスピンの平均値は

$$\langle \sigma_A \rangle = \tanh \left(-\frac{4}{k_B T} \left(J \langle \sigma_B \rangle + J' \langle \sigma_A \rangle \right) \right) \tag{2.2.12}$$

なので，self-consistent方程式は

$$x = \tanh \left(\frac{4(J - J')}{k_B T} x \right) \tag{2.2.13}$$

となり，同様の計算で転移温度

$$T_c = \frac{J - J'}{k_B} \tag{2.2.14}$$

を得ます．また，$J' \to J$で$T_c \to 0$となっています．

第3問

1. 運動エネルギーをK，ポテンシャルをUとすれば，$L = K - U$なので，

$$L = \frac{1}{2}m_1^2(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2^2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - mg(l_1 - y_1) - mg(l_2 - y_2) \tag{2.3.1}$$

です．

2. 座標は

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1,\ y_1 = l_1\cos\theta_1,\ x_2 = l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2,\ y_2 = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2 \tag{2.3.2}$$

です．

3. 近似すると

$$x_1 = l_1\theta_1,\ y_1 = l_1,\ x_2 = l_1\theta_1 + l_2\theta_2,\ y_2 = l_1 + l_2, \tag{2.3.3}$$
$$\dot{x}_1 = l_1\dot{\theta}_1,\ \dot{y}_1 = -l_1\dot{\theta}_1\theta_1,\ \dot{x}_2 = l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2,\ \dot{y}_2 = -l_1\dot{\theta}_1\theta_1 - l_2\dot{\theta}_2\theta_2 \tag{2.3.4}$$

なので，定数とθの3次以上の項を除けば

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l_1\dot{\theta}_1^2 + l_2\dot{\theta}_2^2\right) - m_1 g l_1\cdot\frac{1}{2}\theta_1^2 - m_2 g\left(l_2 - l_1\left(1 - \frac{1}{2}\theta_1^2\right) - l_2\left(1 - \frac{1}{2}l_2\theta_2^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)g l_1\theta_1^2 - \frac{1}{2}m_2 g l_2\theta_2^2 \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

です．

4. Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial\theta_i} = 0 \tag{2.3.6}$$

から，

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)g l_1\theta_1 = 0 \tag{2.3.7}$$
$$m_2 l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2\ddot{\theta}_1 + m_2 g l_2\theta_2 = 0 \tag{2.3.8}$$

です．

5. 代入してみると

$$\begin{cases} -a_1\omega^2(m_1 + m_2)l_1^2 - a_2\omega^2 m_2 l_1 l_2 + a_1(m_1 + m_2)g l_1 = 0 \\ -a_2\omega^2 m_2 l_2^2 - a_1\omega^2 m_2 l_1 l_2 + a_2\omega^2 m_2 g l_2 = 0 \end{cases} \tag{2.3.9}$$

となるので，$a \coloneqq a_2/a_1$とおいてaを消去すれば

$$\omega^4 - g\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\omega^2 + \frac{g^2}{l_1 l_2}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = 0 \tag{2.3.10}$$

なので，これを解けば

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{g\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \pm \sqrt{g^2\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)^2\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \frac{4g^2}{l_1 l_2}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}\right\}} \tag{2.3.11}$$

です．(複号任意)

6. $m_2/m_1 \ll 1$なので，

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2l_1 l_2}\left\{l_1 + l_2 \pm |l_1 - l_2|\right\}} \tag{2.3.12}$$

となります．$|l_1 - l_2| \gg l_1 + l_2$のときは，

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2}\left|\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2}\right|} \tag{2.3.13}$$

です．よって，

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \times \frac{g - \omega^2 l_1}{\omega^2 l_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \times \frac{l_1(2l_2 - |l_1 - l_2|)}{l_2|l_1 - l_2|} \tag{2.3.14}$$

となるので，例えば

$$a_1 = m_2 l_2 |l_1 - l_2|,\ a_2 = (m_1 + m_2) l_1 (2l_2 - |l_1 - l_2|) \tag{2.3.15}$$

です[*4]．

7. (2.3.12)は常に成立しています．つまり

$$\omega^2 = \frac{g(l \pm |l - 2l_2|)}{2(l - l_2)l_2} = \frac{g}{l_2} \text{ or } \frac{g}{l - l_2} \tag{2.3.16}$$

です．第1式は自明なので，第2式を考えることにすると

$$\frac{g}{l\omega^2} = 1 - \frac{l_2}{l} \tag{2.3.17}$$

です．図は省略．$l_2 \gg l_1$のとき，質点1が止まって質点2が振動するのは，$\omega \to \infty$のとき，

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1 + m_2/m_1}{m_2/m_1} \times \frac{g/\omega^2 - l_1}{l_2} \to \frac{1 + \mathcal{O}(m_2/m_1)}{\mathcal{O}(m_2/m_1)} \tag{2.3.18}$$

となるからです．

[*4] (2.3.14)の比が保たれていれば，なんでもよいでしょう．