

受験番号	
氏 名	

平成28年度東京大学大学院理学系研究科  
物理学専攻修士課程入学試験問題

# 物 理 学

平成27年8月24日（月） 13時00分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で6問ある。第1問、第2問、第3問は全員解答すること。さらに第4問、第5問、第6問の中から1問を選んで解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計4枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に受験番号、氏名を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

### 第1問

$xy$  平面内を動く電子の運動を量子力学的に考える。 $z$  方向には磁場があり、その磁束密度  $B_z(x, y)$  は、原点からの距離を  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  として

$$B_z(x, y) = \begin{cases} b > 0, & (r < R), \\ 0, & (r \geq R) \end{cases} \quad (1)$$

と与えられるものとする。以下の手順に従って、エネルギーがゼロの束縛状態の個数を求める。

電子の波動関数はスピンの上向き、下向きに応じて  $\psi_\uparrow(x, y)$  と  $\psi_\downarrow(x, y)$  の二成分をもつので、まとめて縦ベクトルとして

$$\Psi(x, y) = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(x, y) \\ \psi_\downarrow(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{略記すれば} \quad |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} |\psi_\uparrow\rangle \\ |\psi_\downarrow\rangle \end{pmatrix} \quad (2)$$

と書け、ハミルトニアン  $H$  は

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} \mathbf{1}_{2 \times 2} + \frac{\hbar e B_z(x, y)}{2m} \sigma_z \quad (3)$$

と書けるものとする。ただし  $p_x$  と  $p_y$  は

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + eA_x(x, y), \quad p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + eA_y(x, y) \quad (4)$$

であり、 $\hbar$  はプランク定数  $h$  を  $2\pi$  で割ったもの、 $m$  は電子の質量、 $-e < 0$  は電子の電荷、 $A_x(x, y)$ ,  $A_y(x, y)$  はベクトルポテンシャルで、磁束密度  $B_z(x, y)$  との関係は

$$B_z(x, y) = \frac{\partial A_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x, y)}{\partial y} \quad (5)$$

で与えられる。また、行列は

$$\mathbf{1}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

である。

#### 1. スピン角運動量演算子は

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_x, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \sigma_y, \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z \quad (7)$$

で与えられる。交換関係  $[S_x, S_y]$  および  $[H, S_z]$  を計算せよ。

#### 2. 演算子 $D$ を $D = p_x \sigma_x + p_y \sigma_y$ と定義する。この $D$ はエルミート演算子であって $D = D^\dagger$ を満たす。この $D$ について、次の関係式

$$D \sigma_z = -\sigma_z D, \quad (8)$$

$$H = \frac{1}{2m} D^2 \quad (9)$$

がそれぞれ成り立つことを示せ。

3. 束縛状態  $|\Psi_n\rangle$  が  $H$  の固有値  $E_n$  の固有状態であるとし、波動関数  $|\Phi_n\rangle$  を  $|\Phi_n\rangle = D|\Psi_n\rangle$  で定める。このとき、式 (9) を用いて、

$$\langle \Phi_n | \Phi_n \rangle = 2mE_n \langle \Psi_n | \Psi_n \rangle \quad (10)$$

となることを示せ。

4. エネルギー  $E_n \neq 0$  の固有束縛状態  $|\Psi_n\rangle$  を考える。このとき、 $E_n > 0$  であることを示せ。また、 $|\Psi_n\rangle$  がエネルギー  $E_n > 0$ ,  $\sigma_z$  の固有値 1 の同時固有状態ならば、 $|\Phi_n\rangle = D|\Psi_n\rangle$  が同じエネルギー  $E_n$  で、 $\sigma_z$  の固有値  $-1$  の同時固有状態であることを、式 (8) と (9) を用いて示せ。

5. エネルギー  $E = 0$  の固有束縛状態  $|\Psi\rangle$  を考える。まず、 $D|\Psi\rangle = 0$  を示せ。次に、ある関数  $\rho(x, y)$  を用いて、ベクトルポテンシャルを

$$A_x(x, y) = -\frac{\partial \rho(x, y)}{\partial y}, \quad A_y(x, y) = +\frac{\partial \rho(x, y)}{\partial x} \quad (11)$$

と表せるものとする。さらに  $f_\uparrow(x, y)$  と  $f_\downarrow(x, y)$  を

$$\psi_\uparrow(x, y) = f_\uparrow(x, y) \exp\left[\frac{e}{\hbar}\rho(x, y)\right], \quad \psi_\downarrow(x, y) = f_\downarrow(x, y) \exp\left[-\frac{e}{\hbar}\rho(x, y)\right] \quad (12)$$

によって定義する。 $|\Psi\rangle$  がエネルギー  $E = 0$  の固有状態であるとき、 $f_\uparrow(x, y)$  と  $f_\downarrow(x, y)$  に対する方程式を求めよ。さらに、それを用いて、 $f_\uparrow(x, y)$  は  $w = x + iy$  の正則関数、 $f_\downarrow(x, y)$  は  $\bar{w} = x - iy$  の正則関数であることを説明せよ。

6. 引き続きエネルギー  $E = 0$  の固有束縛状態  $|\Psi\rangle$  を考える。式 (1) の磁束密度を再現する  $\rho(x, y)$  は

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \frac{br^2}{4}, & (r < R), \\ \frac{bR^2}{2} \left( \frac{1}{2} + \log \frac{r}{R} \right), & (r \geq R) \end{cases} \quad (13)$$

で与えられる。 $\rho(x, y)$  の  $r \rightarrow \infty$  での振舞いと、束縛状態の波動関数は規格化可能であることを注意して、スピンの上向きでエネルギーがゼロの束縛状態は存在しないことを示せ。また、スピンの下向きでエネルギーがゼロの束縛状態の波動関数には、一次独立なものはいくつあるか答えよ。ただし、 $f_\uparrow(x, y)$  および  $f_\downarrow(x, y)$  はそれぞれ  $w$  および  $\bar{w}$  の有限次多項式であると仮定してよい。

(この問題は Y. Aharonov and A. Casher, Phys. Rev. A **19** (1979) 2461 を参考にした。)

## 第2問

自然長  $a$  のバネと質量  $m$  の質点からなる系が、温度  $T$  の平衡状態にある場合について考える。バネ定数は  $m\omega^2$  であり、 $\omega > 0$  とする。

まず、 $N$  個の質点がそれぞれ独立にバネと結合し、互いに独立な調和振動子系をなす場合を考える (図1)。系のハミルトニアンは、 $j$  番目の質点の位置を  $x_j$ 、運動量を  $p_j$  として

$$H = \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{2m} p_j^2 + \frac{m\omega^2}{2} (x_j - a)^2 \right) \quad (1)$$

で与えられるとする。ただし、バネの質量は無視できるものとする。ボルツマン定数を  $k_B$  とし、以下の問に答えよ。

1. この系を古典力学的に考えた場合、質点1個当たりの内部エネルギー  $U$ 、比熱  $C$  を求めよ。また、1番目の質点の位置の平均  $\langle x_1 \rangle$ 、位置の分散  $\langle x_1^2 \rangle - \langle x_1 \rangle^2$  を求めよ。必要なら、次の公式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (\alpha > 0) \quad (2)$$

2. この系を量子力学的に考えた場合、質点1個当たりの内部エネルギー  $U_Q$ 、比熱  $C_Q$  を求めよ。また、1番目の質点の位置の平均、位置の分散を求めよ。温度が高い極限と低い極限において、比熱  $C_Q$  と設問1の結果  $C$  を比較せよ。必要なら、次の関係を用いてよい。量子力学での調和振動子 (位置座標  $X$ 、運動量  $P$ ) の固有ベクトル  $|n\rangle$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) の固有値は

$$H|n\rangle = \left( \frac{1}{2m} P^2 + \frac{m\omega^2}{2} X^2 \right) |n\rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \quad (3)$$

で与えられる。ここで固有ベクトル  $|n\rangle$  は完全規格直交系をなすとする。また、位置の演算子  $X$  に対して

$$X|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle), \quad n > 0, \quad X|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} |1\rangle \quad (4)$$

であるとしてよい。

次に、 $N$  個の質点を  $N + 1$  個のバネで 1 次元的に結合した場合について考える (図 2)。運動は 1 次元的であり、質点の位置をそれぞれ  $x_1, x_2, \dots, x_N$ 、運動量を  $p_1, p_2, \dots, p_N$  とする。系のハミルトニアンは

$$H = \frac{m\omega^2}{2}(x_1 - a)^2 + \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{m\omega^2}{2}(x_2 - x_1 - a)^2 + \frac{1}{2m}p_2^2 + \dots \\ + \frac{m\omega^2}{2}(x_N - x_{N-1} - a)^2 + \frac{1}{2m}p_N^2 + \frac{m\omega^2}{2}((N+1)a - x_N - a)^2 \quad (5)$$

で与えられる。

3. この系は  $N$  個の独立な基準振動の和で表される。それぞれの基準振動の固有振動数が以下で与えられることを示せ。

$$\omega_\ell = \omega \sqrt{2 - 2 \cos \left( \frac{\ell}{N+1} \pi \right)}, \quad \ell = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

4. この系を古典力学的に考えた場合、質点 1 個当たりの比熱  $C_1$  を求めよ。
5. この系を量子力学的に考えた場合、質点 1 個当たりの比熱  $C_{1Q}$  は、 $N$  が非常に大きく、かつ低温の極限では温度のべきに比例する。つまり、 $C_{1Q} \simeq AT^b$  の形に表わされる。べき  $b$  と係数  $A$  を求めよ。必要なら、次の公式を用いてよい。

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} dx = \frac{\pi^2}{6} \quad (7)$$

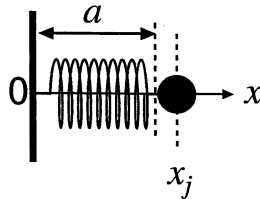


図 1:  $j$  番目の調和振動子。

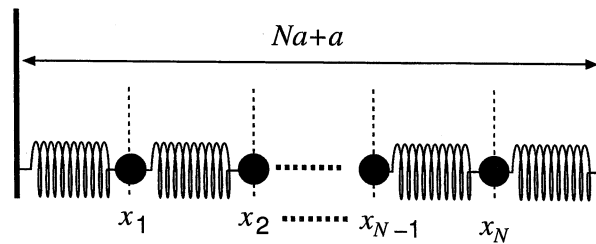


図 2:  $N$  個の質点を  $N + 1$  個のバネで結合した 1 次元連成振動子系。両端は全体の自然長で固定されている。

### 第3問

図1のように、質量を持った微粒子からなるガスを噴射することによって加速するロケットの運動を考える。ロケットは外力を受けることなく、 $x$  軸上を運動するものとする。ガスはロケットから見て常に一定の速度  $-v_{\text{gas}}$  ( $v_{\text{gas}} > 0$ ) で進行方向と逆向きに噴射され、各時刻におけるガスの噴射量は、ロケットが常に一定の加速度  $\alpha$  をもって運動するように自動的に調整されるものとする。また、ある慣性系に静止した観測者が観測するロケットの速度を対地速度と呼ぶことにし、以下で用いる座標系はこの慣性系における直交座標であるとする。光速を  $c$  として、以下の設問に答えよ。

1. 運動量保存則を用いることにより、時刻  $t$  におけるロケットの質量  $m(t)$  の変化率  $\frac{dm}{dt}$  ( $< 0$ ) を求めよ。
2.  $t = 0$  におけるロケットの速度を 0、質量を  $m_0$  としたとき、 $m(t)$  を  $t$  の関数として求めよ。

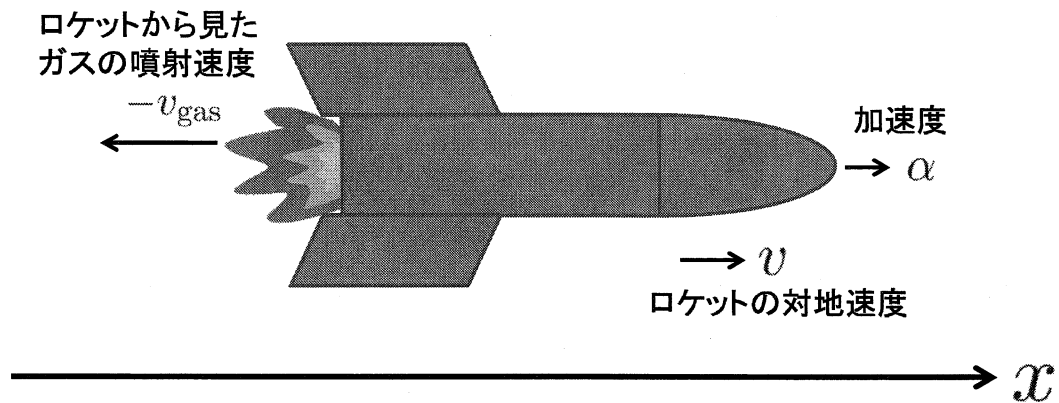


図1: ガスを噴射しながら加速運動をするロケット。

ロケットが加速を続けて高速になると、相対論的効果が重要になるので、以下では特殊相対論によって考える。まず、特殊相対論における速度と加速度について整理しておこう。微小間隔離れた二つの時空点

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \quad (x^0 + dx^0, x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3) = (ct + cdt, x + dx, y + dy, z + dz)$$

の時空間隔  $ds^2$  は、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1)$$

で与えられ、その間をロケットが運動する際に要する固有時間  $d\tau$  は、

$$d\tau = \sqrt{-ds^2}/c \quad (2)$$

と書ける。このロケットの4元速度ベクトル  $u^\mu$  と4元加速度ベクトル  $a^\mu$  の各成分は、それぞれ

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{du^\mu}{d\tau}, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (3)$$

で与えられるが、いま  $x$  軸上の運動を考えているので、 $u^2 = u^3 = 0$ ,  $a^2 = a^3 = 0$  である。ロケットの対地速度を  $\frac{dx}{dt} = v$  と書くことにすると、 $d\tau$  と  $dt$  の間には、 $d\tau = \boxed{\text{イ}}$   $dt$  という関係式が成り立つ。

二つの4元ベクトル  $p^\mu$  と  $q^\mu$  のスカラー積を

$$p^\mu \odot q^\mu \equiv -p^0 q^0 + p^1 q^1 + p^2 q^2 + p^3 q^3 \quad (4)$$

によって定義すると、 $u^\mu \odot u^\mu = \boxed{\text{ロ}}$ ,  $u^\mu \odot a^\mu = \boxed{\text{ハ}}$  が成り立つことがわかる。

また、 $a^\mu \odot a^\mu = \alpha^2$  ( $\alpha > 0$ ) とおくと、 $a^0$  と  $a^1$  ( $> 0$ ) は、 $\alpha, u^0, u^1$  などを用いて  $a^0 = \boxed{\text{ニ}}$ ,  $a^1 = \boxed{\text{ホ}}$  と表せるので、 $\alpha$  はロケットの静止系で見たロケットの加速度 (固有加速度) であることがわかる。いまこの  $\alpha$  が一定値を取っている場合を考えている。

3. 上の説明文の  $\boxed{\text{イ}}$  から  $\boxed{\text{ホ}}$  に入る適切な数式あるいは値を答えよ。
4.  $v$  を固有時間  $\tau$  の関数として求めよ。ただし、 $\tau = 0$  で  $v = 0$  とする。
5. 微小時間中に、静止質量  $dm'$  のガスをロケットから見て速度  $-v_{\text{gas}}$  で噴射した結果、ロケットの静止質量は  $m$  から  $m + dm$  に、対地速度は  $v$  から  $v + dv$  に変化したとする。このとき  $dm, dm', dv$  はいずれも微小量であるとして、4元運動量の保存則を微小量の1次まで求めよ。ただし、ガスの対地速度を  $v'$  とする。
6. 以上の結果を用いて、ロケットの質量を固有時間  $\tau$  の関数として表せ。またその結果を設問2の答えと比較して、その意味を論ぜよ。ただし、相対論的な速度の変換則

$$-v_{\text{gas}} = \frac{v' - v}{1 - vv'/c^2} \quad (5)$$

を用いてよい。

#### 第4問

中性気体を電離し、電子とイオンが自由に動き回れるようにした状態をプラズマという。簡単のため磁場は無い場合を考える。プラズマ中では、電子密度を  $n_e$ 、カットオフ密度を  $n_c$  として屈折率は  $\alpha = \sqrt{1 - n_e/n_c}$  と表されることを利用して、電子密度を測定することができる。ここでカットオフ密度とは、プラズマに入射した周波数  $f = \omega/(2\pi)$  の電磁波が伝搬可能な密度の上限値で、 $n_c = m_e \varepsilon_0 \omega^2 / e^2$  で与えられる。ただし  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$  は電子の質量、 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  は電気素量、 $\varepsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$  は電気定数（真空の誘電率）である。プラズマ中の電磁波の波数は光速  $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$  を用いて  $k = \alpha \omega / c$  と表せる。電磁波は直線偏光であり、電場の偏光方向の成分は複素表示で  $E(\vec{x}, t) = E_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t)$  と表すものとする。以下の設問に答えよ。

- 無限に広い半空間 ( $z > 0$ ) は一様な電子密度  $n_e$  のプラズマ状態、 $z \leq 0$  の領域は真空とし、電磁波は  $z$  軸に沿って真空側からプラズマに入射する場合を考える。 $n_e < n_c$  の場合と、 $n_e > n_c$  の場合について、 $z > 0$  における電場のふるまいを説明せよ。いずれの場合も電場変化の特徴的な長さを明示すること。
- 半径  $a$  の円柱状の領域がプラズマ状態となっている場合を考え、図1のように円柱断面の中心を原点とし、直径方向に  $z$  軸をとる。電磁波はプラズマ外部から  $z$  軸に沿って入射し、プラズマ領域内の原点を通過して反対側に抜けて行くとする。プラズマ領域中の電子密度の半径  $r$  方向の分布を  $n_e(r)$  とし、電磁波の波長およびビーム半径は  $a$  に比べて十分小さいとする。このとき波数  $k$  はプラズマ領域中の位置に依存するので、電磁波がプラズマを横切る際の位相変化は  $\int_{-a}^a k dz$  で与えられる。 $n_e(r) \ll n_c$  が成り立つとき、プラズマを通過した場合の位相変化  $\phi_p$  と、同じ経路にプラズマが存在せず真空の場合の位相変化  $\phi_v$  の差  $\Delta\phi = \phi_v - \phi_p$  を  $n_e(r)/n_c$  の1次までの近似で求めよ。
- 設問2の実験において、 $n_e(r) = n_{e0}[1 - (r/a)^2]$  とする。半径  $a = 0.1 \text{ m}$ 、中心電子密度  $n_{e0} = 1 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$  の場合、 $\Delta\phi$  を用いて電子密度の線積分値を測るのに適切な電磁波の周波数の下限は何で決まるか説明し、その周波数のオーダー（桁）を求めよ。さらに、この周波数の電磁波を用いて得られる  $\Delta\phi$  をラジアン単位で求め、有効数字1桁で表せ。
- 図2のように、干渉計を組む。プラズマを通過せず真空中を通過した電磁波（参照波）およびプラズマを通過した電磁波（プローブ波）が検出器に到達したとき、それぞれの電場は  $E_1 \exp(-i\omega t)$  および  $E_2 \exp(-i\omega t + i\Delta\phi)$  と表せるものとする。検出器の出力はこれらの重ね合わさった電場  $E_t$  の振幅の2乗  $|E_t|^2$  に比例する。 $|E_t|^2$  を求めよ。
- 実際の実験では、電子密度の時間変化にともない  $\Delta\phi$  は時間変化し、また信号にはさまざまなノイズが重畳される。設問4の実験の場合、(a) 位相変化に関係ない成分の時間変動と、位相変化に依存する成分の時間変動の区別が困難なこと、(b) 位相変化の方向（正負）が区別できないことが問題となる。これらは、参照波の角周波数  $\omega_1$  とプローブ波の角周波数  $\omega_2$  をずらすことで解決できる。検出器で得られる信号を式で示し、(a) および (b) が解決できる理由をそれぞれ述べよ。また解決のためには、角周波数差  $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$  と位相差の時間変化  $|d(\Delta\phi)/dt|$  の大小関係はどうでなければならないか述べよ。検出器の周波数応答は  $\Delta\omega$  に比べ十分速いとする。



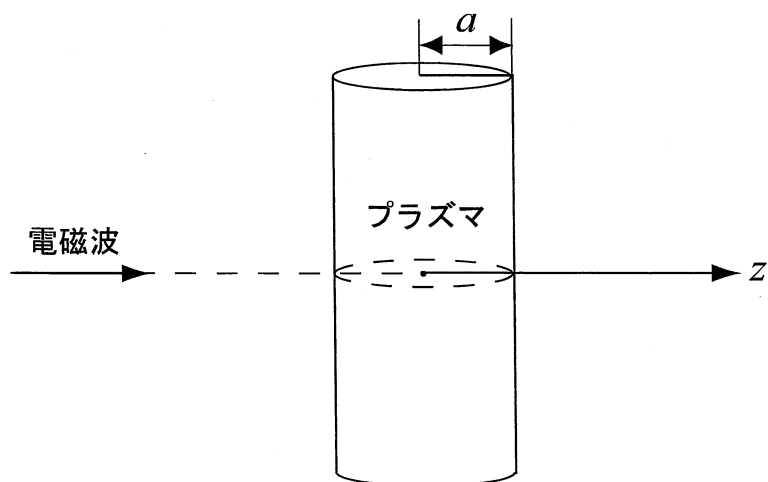


図 1: 円柱状のプラズマ領域を電磁波が通過する様子。

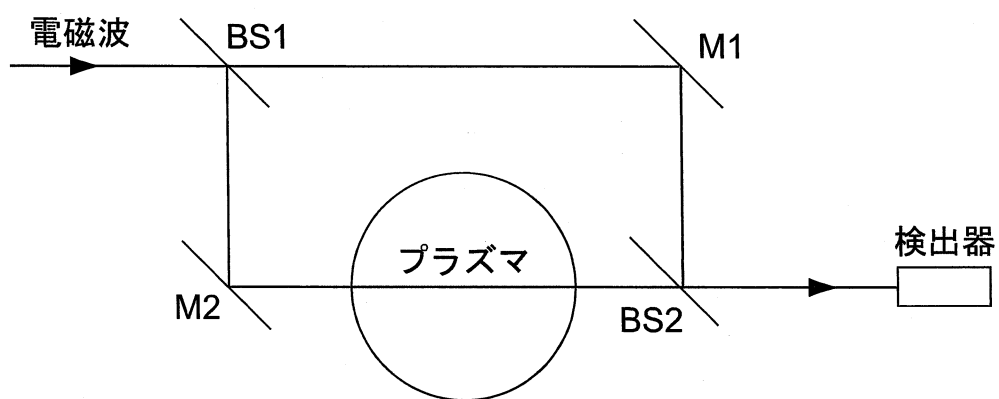


図 2: 干渉計の概念図。BS1, BS2 はビームスプリッター, M1, M2 は鏡を表す。

## 第5問

核子や原子核の荷電半径を測定する手段の一つに、高エネルギー電子の弾性散乱がある。これに関連した以下の設問に答えよ。必要に応じて、 $c = 3 \times 10^8$  m/s,  $\hbar c = 0.2$  GeV fm, 陽子質量  $= 1$  GeV/ $c^2$  を用いよ。以下、概算する場合は有効数字1桁で良い。

- 電子を数百 MeV のエネルギーに加速する手段として、以下の方式の加速器は適するか適さないか。それぞれについて、その適否と理由を述べよ。
  - 静電加速器（電極間に静電圧を加えて粒子を加速する方式の加速器）
  - サイクロトロン（一定磁場と一定周波数の高周波電圧を用いて粒子を加速する方式の加速器）
  - 線形加速器（直線状に並べた複数の電極間に高周波電圧を加えて粒子を加速する方式の加速器）
- 電子ビームで板状の標的を照射し、標的中の原子核によって弾性散乱された電子数を数える実験を行った。電子ビームの方向に対し、散乱角度  $\theta$  方向に立体角  $\omega$  の測定器を置き、測定時間を  $t$  とした場合に、検出された電子数は  $n$  個であった。その間、入射電子ビーム強度は一定で、その電流は  $I$  であった。 $\theta$ ,  $\omega$ ,  $t$ ,  $n$ ,  $I$  に加えて、標的の原子番号  $Z$ , 原子量  $A$ , 密度  $\rho$ , 厚さ  $l$ , 電気素量  $e$ , 光速  $c$ , アボガドロ定数  $N_A$  から必要なものを用いて、原子核の弾性散乱の微分散乱断面積  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  を表せ。
- 散乱電子の運動量を得るために、一様磁場の電磁石によって電子の軌道を曲げ、磁石出口での位置を測定することにした。散乱電子の運動量が 300 MeV/ $c$  の時に、電子の軌道半径を 1m にするために必要な磁束密度の大きさを SI 単位系で概算せよ。
- 弾性散乱した電子のエネルギー  $E_f$  は、原子核の反跳があるため、入射電子のエネルギー  $E_i$  とは異なる。標的が陽子、入射エネルギーが  $E_i = 300$  MeV, 散乱角度が実験室系で  $90^\circ$  の場合の、散乱電子のエネルギー  $E_f$  を概算せよ。ただし電子質量は無視して良い。

図1は、電子と原子核（重陽子）の弾性散乱断面積測定データの例である。このようなデータから、原子核の荷電半径を求める方法に関連し、以下の問いに答えよ。

- 原子核の電荷分布が球対称で、その半径方向の分布が  $\rho(r)$  ( $\int \rho(r) d^3r = 1$ ) で与えられる場合、電子と原子核の弾性散乱断面積 ( $d\sigma/d\Omega$ ) と点電荷の場合 ( $d\sigma/d\Omega)_{\text{点}}$  の比は、運動量移行  $\vec{q}$  (入射電子の運動量  $\vec{p}_i$  と散乱電子の運動量  $\vec{p}_f$  の差:  $\vec{q} \equiv \vec{p}_i - \vec{p}_f$ ) を用いて

$$\frac{(\frac{d\sigma}{d\Omega})}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{点}}} = \left| \int \rho(r) \exp\left(i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar}\right) d^3r \right|^2 \equiv |F(q^2)|^2 \quad (1)$$

と書くことができ、 $|F(q^2)|^2$  は  $q^2$  が小さい領域では  $q^2$  に対してほぼ直線的に減少する。直線部分の傾きから原子核の荷電半径（二乗平均平方根半径） $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \equiv \sqrt{\int r^2 \rho(r) d^3r}$  が求まることを、式(1)の指数関数を展開して近似計算することにより示せ。

- 図1のデータから、重陽子の荷電半径を概算せよ。

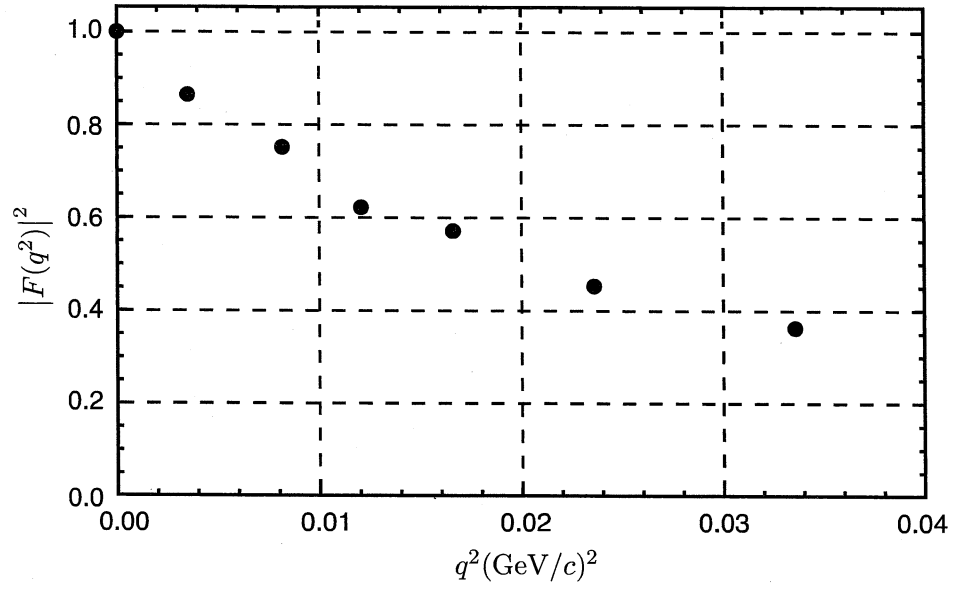


図 1: 電子と重陽子の弾性散乱データ (R. Hofstadter, Annu. Rev. Nucl. Sci. **7** (1957) 231 より改変)。

## 第6問

交流回路に関する以下の設問に答えよ。数値は、有効数字1桁の概算で求めてよい。

- 図1のように、抵抗とコンデンサを直列につないだ回路に正弦波の交流電圧  $V_1$  を入力電圧として加え、コンデンサの両端の電圧  $V_2$  を出力電圧として測定する。図2の実線は、 $V_1$  の振幅に対する  $V_2$  の振幅の比  $\alpha$  を周波数  $f$  の関数としてプロットしたものである。また、破線は漸近線を示している。まず、 $\alpha$  をコンデンサの容量  $C$ 、抵抗値  $R$ 、角周波数  $\omega = 2\pi f$  を用いて表せ。そのうち、 $R = 1 \text{ k}\Omega$  の場合に対して  $C$  の値を求めよ。

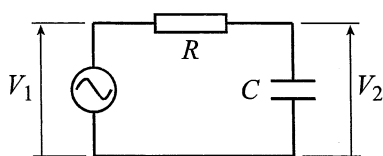


図 1:

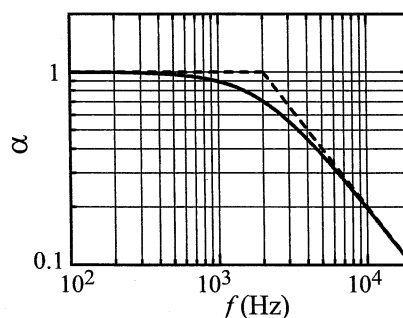


図 2:

- 図1の回路は、低周波成分を通過させ、高周波成分を減衰させるので、低周波透過フィルタと呼ばれる。図1の回路の代わりに、1個の抵抗と1個のコイルから成る回路を用いても、図2と同じ特性をもつ回路を作ることができる。まず、その回路を描け。そのうち、 $R = 100 \Omega$  の場合に対して、コイルのインダクタンス  $L$  の値を求めよ。
- 次に、図3の回路に対して  $\alpha$  の測定を行ったところ、図4の結果が得られた。まず、 $\alpha$  をコンデンサの電気容量  $C$ 、コイルのインダクタンス  $L$ 、抵抗値  $R$ 、角周波数  $\omega = 2\pi f$  を用いて表せ。そのうち、 $C = 10 \text{ nF}$  の場合に対して、 $L$  と  $R$  の値を求めよ。

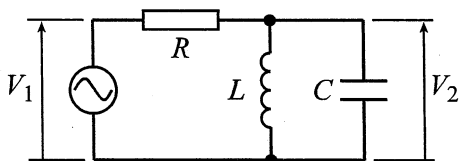


図 3:

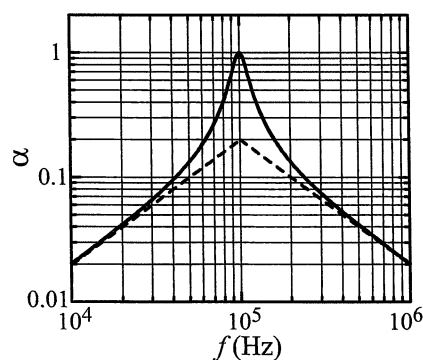


図 4:

4. ダイオードは整流作用をもつ素子である。まず、順方向には抵抗がなく、逆方向には電流を流さない仮想的なダイオードを考える。図5の回路上の点A, B, C, Dを4個のダイオードで接続することにより、Cを基準としたAの電位  $V_2$  が常に入力電圧  $V_1$  の絶対値となるように、つまり  $V_2 = |V_1|$  となるようにすることができる。4個のダイオードをA, B, C, Dに正しく接続した図を描け。ただし、ダイオードの記号は図6のものをを用いよ。左から右が順方向である。

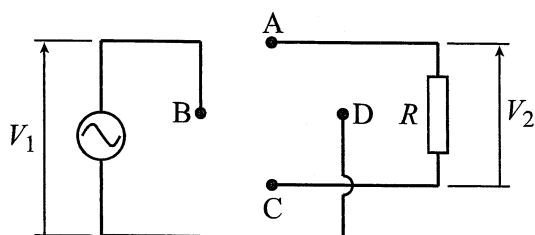


図 5:



図 6:

5. 設問4で4個のダイオードを正しく接続した回路に、さらにコンデンサをA-C間に接続することにより、出力電圧  $V_2$  の時間変動を小さくすることができる。 $V_1$  として振幅が12 V、周波数が50 Hzの正弦波交流電圧を用い、コンデンサの電気容量が3 mF、抵抗値  $R$  が500  $\Omega$  の場合について、 $V_2$  の最大値と最小値の差  $\Delta V$  を求めよ。
6. 図7は、実際のダイオードの電流電圧特性の概念図である。オームの法則からのずれにより、交流電圧の振幅が非常に小さい場合でも、図8のような回路を用いると直流電圧が発生する。振幅が10 mVの正弦波交流電圧を図8の回路に入力した場合に、コンデンサの両端に生じる電圧  $V_2$  を求めよ。ただし、原点近傍におけるダイオードの電流電圧特性は、 $g = 1 \times 10^{-4}$  A/Vおよび  $V_T = 25$  mVを用いて、 $I = gV(1 + \frac{V}{2V_T})$  と近似できるものとする。また、コンデンサの電気容量は十分に大きく、 $V_2$  の時間変化は無視できるものとする。

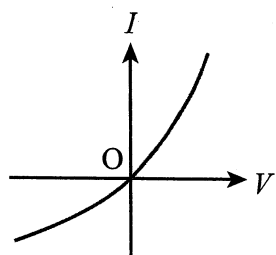


図 7:

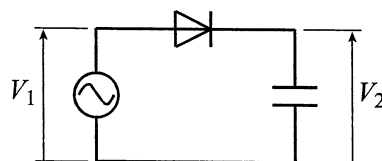


図 8: