東京大学 平成26年 物理学専攻 院試 解答例

ミヤネ

最終更新：2023 年 8 月 22 日

目次

1　数学パート

第1問

1. 一般解は$y = C_1 e^{-\alpha x}$なので，初期条件より$C_1 = Ae^{\alpha b}$となり

$$y(x) = Ae^{-\alpha(x-b)} \tag{1.1.1}$$

です．

2. 第1式より

$$y_1(x) = Ae^{-\alpha x} > 0 \tag{1.1.2}$$

です．したがって，第2式は

$$\frac{\mathrm{d}y_2(x)}{\mathrm{d}x} + \gamma y_2(x) = A\beta e^{-\alpha x} \tag{1.1.3}$$

となります．この方程式の斉次解は$C_2 e^{-\gamma x}$であり，特解は$y_s(x) \equiv C_3 e^{-\alpha x}$を代入して

$$-\alpha C_3 + \gamma C_3 = A\beta \quad \rightarrow \quad C_3 = \frac{A\beta}{-\alpha + \gamma} \tag{1.1.4}$$

となるため，一般解は

$$y_2(x) = C_2 e^{-\gamma x} + \frac{A\beta}{-\alpha + \gamma} e^{-\alpha x} \tag{1.1.5}$$

です．初期条件より$C_2 = A\beta/(\alpha - \gamma)$と求まるので，

$$y_2(x) = \frac{A\beta}{\alpha - \gamma}(e^{-\gamma x} - e^{-\alpha x}) \tag{1.1.6}$$

です．$y_2(x)$の符号はα, γの大小関係によらず，

$$\begin{cases} x > 0 \text{ のとき，} y_2 > 0 \\ x < 0 \text{ のとき，} y_2 < 0 \end{cases} \tag{1.1.7}$$

です[*1]．

3. 線形微分方程式なので

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{1.1.8}$$

の係数行列の固有値を求めます．計算すれば，固有値と固有ベクトルは

$$\lambda_1 = -4 \text{ に対して } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \ \lambda_2 = 0 \text{ に対して } v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.9}$$

となるので，対角化すると

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}P, \ P = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.10}$$

[*1] 例えば$\alpha > \gamma$のときを考えます．$\alpha - \gamma > 0$なので，$e^{-\gamma x} - e^{-\alpha x}$の符号を考えればよいです．このときは，$x > 0$なら$e^{-\gamma x} > e^{-\alpha x}$なので，$y_2 > 0$で，$x < 0$のときは符号がひっくり返ります．$\alpha < \gamma$のときは$\alpha - \gamma < 0$なので，$y_2$の符号と$e^{-\gamma x} - e^{-\alpha x}$の符号が反対になります．また，$e^{-\gamma x} - e^{-\alpha x}$の符号も逆転するので，結局(1.1.7)になります．

です．したがって，(1.1.8)に左からP^{-1}を作用させ

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{1.1.11}$$

とおけば

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4cY_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_4 e^{-4cx} \\ C_5 \end{pmatrix} \tag{1.1.12}$$

と解けます．あとは，$x = 0$として(1.1.11)を代入すれば

$$\begin{pmatrix} C_4 \\ C_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sqrt{3}-1)/2 \\ (\sqrt{3}+1)/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.13}$$

となるので，求める解は(1.1.11)を逆に解いて

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-4cx}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} e^{-4cx} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-4cx} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{1.1.14}$$

となります．

4. $2a$周期の関数なので，フーリエ級数展開

$$y(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{y}_n(t) e^{-\frac{in\pi}{a}x} \tag{1.1.15}$$

を代入しましょう．ただし，

$$\tilde{y}_n(t) \equiv \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} y(x,t) e^{-\frac{in\pi}{a}x} \mathrm{d}x \tag{1.1.16}$$

です．微分方程式を$\tilde{y}_n$についての微分方程式に書き直せば

$$\frac{\partial \tilde{y}_n(t)}{\partial t} = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t \tag{1.1.17}$$

となるので

$$\tilde{y}_n(t) = C^{(n)} \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t\right] \tag{1.1.18}$$

と解けます．よって，

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t - \frac{in\pi}{a}x\right] \tag{1.1.19}$$

が一般解です．境界条件を代入すると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (-1)^n \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t\right] = 0 \tag{1.1.20}$$

となるので，$A_{-n} = -A_n$です．今回は，解を1つでも提示できればよいので，

$$A_n = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ -1 & (n = -1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{1.1.21}$$

としましょう．すると，微分方程式の解の1つは

$$y(x,t) = -2i\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-(\pi/a)^2 t} \tag{1.1.22}$$

です．

5. 両辺を$(1-\beta y)y$で割ると

$$\left(\frac{\beta}{1-\beta y}+\frac{1}{y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\alpha \tag{1.1.23}$$

なので，両辺をxで積分すると

$$-\log(1-\beta y)+\log y = -\alpha x + C_6^* \tag{1.1.24}$$

となり，

$$y(x) = \frac{C_6 e^{-\alpha x}}{\beta C_6 e^{-\alpha x}+1} \tag{1.1.25}$$

です．ただし，$C_6 \equiv e^{C_6}$は積分定数です．初期条件を解けばC_6が求まるので

$$y(x) = \frac{Ae^{-\alpha x}}{\beta A e^{-\alpha x}+1-\beta A} \tag{1.1.26}$$

となります．

第2問

1. (i)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2.1}$$

(ii) PAを計算すると

$$\begin{aligned} PA &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & t & & & & t \\ t & \varepsilon & t & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & t & \varepsilon & t \\ t & & & & t & \varepsilon \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t & \varepsilon & t & & & \\ & t & \varepsilon & t & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & t \\ t & & & & t & \varepsilon \\ \varepsilon & t & & & & t \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

となりますが，APを計算すると

$$AP = \begin{pmatrix} t & \varepsilon & t & & & \\ & t & \varepsilon & t & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & t \\ t & & & & t & \varepsilon \\ \varepsilon & t & & & & t \end{pmatrix} \tag{1.2.3}$$

と全く同じ結果になります．よって，$PA - AP = 0$です．

(iii) 固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & & \\ & \lambda & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & -1 \\ -1 & & & & & \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1.2.4}$$

です．余因子展開を用いると

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & & \\ & \lambda & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & -1 \\ -1 & & & & & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & & \\ & \lambda & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & -1 \\ & & & & & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & \lambda \end{vmatrix} \tag{1.2.5}$$

となりますが，第1項は上三角行列なので対角項の積でになり，第2項は余因子展開を繰り返すと

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & & & & \\ & \lambda & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & -1 \\ -1 & & & & & \lambda \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = -1 \tag{1.2.6}$$

となるので[*2]

$$\lambda^n = 1 \tag{1.2.7}$$

が固有方程式です[*3*4]．これを解くと，求める固有値は

$$\lambda_k = e^{2\pi ik/n} \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{1.2.8}$$

となります．固有ベクトルは，連立方程式

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & -1 & & & & \\ & \lambda_k & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda_k & -1 \\ -1 & & & & & \lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \tag{1.2.9}$$

を解くことになりますが，$x_1 = 1$とおけば，固有値λ_kに対応する固有ベクトル$\boldsymbol{u}_k$は

$$\boldsymbol{u}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_k^{n-2} \\ \lambda_k^{n-1} \end{pmatrix} \tag{1.2.10}$$

*2 余因子展開で$(1, 2)$成分を展開するときに-1が出てきますが，その成分が-1なので，符号を変えずに1行2列を削って行くことができます．

*3 余談ですが，最初に解いたとき，3×3行列と同じように行列式を計算してしまったため，固有方程式が

$$\lambda^n + (-1)^n = 0$$

となってしまい，かなり痛い目を見ました．気をつけたいです．

*4 ちなみに，この行列についてはもっと技巧的な固有値の求め方があります．ここでは紹介しませんが，「3重対角行列」などが参考になるかと思います．ここでは，ゴリゴリ計算しました．

です．

(iv) $A=t(P+P^T)+\varepsilon I$と展開できます．P^Tを$\boldsymbol{u}_k$に作用させてみると

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_k^{n-2} \\ \lambda_k^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_k^{n-1} \\ 1 \\ \lambda_k \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_k^{n-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_k}\boldsymbol{u}_k \tag{1.2.11}$$

となるので，固有値$1/\lambda_k$の固有ベクトルとなってます．したがって，

$$A\boldsymbol{u}_k = \left[t\left(e^{2\pi ik/n}+e^{-2\pi ik/n}\right)+\varepsilon\right]\boldsymbol{u}_k = (2t\cos(2\pi k/n)+\varepsilon)\boldsymbol{u}_k \tag{1.2.12}$$

です．$\boldsymbol{u}_k$はAの固有ベクトルであり，$k\neq l$なら固有値が異なります．Aはエルミートなので，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$の固有値を$x,y$とおけばこれらは実数で

$$\boldsymbol{x}^\dagger A\boldsymbol{y} = x\boldsymbol{x}^\dagger\boldsymbol{y} = y\boldsymbol{x}^\dagger\boldsymbol{y} \quad\rightarrow\quad (x-y)\boldsymbol{x}^\dagger\boldsymbol{y}=0 \tag{1.2.13}$$

となります．よって，$x\neq y$なので，$\boldsymbol{x}^\dagger\boldsymbol{y}=0$で$\boldsymbol{x}^\dagger A\boldsymbol{y}=0$です．

(v) Uを

$$U=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n\end{pmatrix} \tag{1.2.14}$$

とおけば，$\boldsymbol{u}_k^\dagger\boldsymbol{u}_l = n\delta_{kl}$なので$U$はユニタリーになります（$\sqrt{n}$で規格化しておくのが重要)．$D$の$\boldsymbol{u}_k$に対する固有値は分かっているので

$$D=\begin{pmatrix} 2t\cos(2\pi/n)+\varepsilon & & & & \\ & 2t\cos(4\pi/n)+\varepsilon & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2t\cos(2\pi(n-1)/n)+\varepsilon & \\ & & & & 2t+\varepsilon \end{pmatrix} \tag{1.2.15}$$

です．

2. (i) ちゃんと計算すると大変なので，少し工夫しましょう．固有方程式は

$$\begin{vmatrix} A(0,t)-\Lambda & \lambda I \\ \lambda I & A(0,2t)-\Lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A(-\Lambda,t) & \lambda I \\ \lambda I & A(-\Lambda,2t) \end{vmatrix} = 0 \tag{1.2.16}$$

ですが，これに次の$2n$次正方行列

$$P=\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \tag{1.2.17}$$

を作用させることを考えます．行列$\lambda I-B$をPとP^{-1}で挟むと

$$\begin{aligned} P^{-1}(\lambda I-B)P &= \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A(-\Lambda,t) & \lambda I \\ \lambda I & A(-\Lambda,2t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \\ &= \Lambda I - \begin{pmatrix} U^{-1}A(-\Lambda,t)U & \lambda I \\ \lambda I & U^{-1}A(-\Lambda,2t)U \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

となりますが，$\det P^{-1} = 1/\det P$であることに気をつければ，固有方程式は

$$\begin{vmatrix} D(-\Lambda, t) & \lambda I \\ \lambda I & D(-\Lambda, 2t) \end{vmatrix} = 0 \tag{1.2.19}$$

と同値であることが分かります．ただし，$D(\varepsilon, t)$は前問の答え(1.2.15)です．行列式を計算するために，基本変形をして上三角行列を作りましょう．そのためには，「第k行を$-\lambda/(2t\cos(2\pi k/n) - \Lambda)$倍して第$k+n$行に加え」れば良いです．すると，対角成分は$D(-\Lambda, t)$と，「$(-\Lambda, 2t)$の第$l$成分から$\lambda^2/(2t\cos(2\pi k/n) - \Lambda)$を引いたもの」が対角成分に並ぶことになります．よって，固有方程式は

$$\prod_{k=1}^{n} (2t\cos(2\pi k/n) - \Lambda) \prod_{l=1}^{n} \left(4t\cos(2\pi l/n) - \Lambda - \frac{\lambda^2}{2t\cos(2\pi l/n) - \Lambda} \right) = 0 \tag{1.2.20}$$

となるので，$2n$個の固有値とは

$$\Lambda_l = 3t\cos(2\pi l/n) \pm \sqrt{t^2\cos^2(2\pi l/n) + \lambda^2} \tag{1.2.21}$$

です[*5]．

(ii) $\lambda = 0$なら，$\Lambda_l = 2t\cos(2\pi l/n), 4t\cos(2\pi l/n)$となりますが，これは(1.2.19)より明らかです．また，$\lambda \ll t$なら，

$$\begin{aligned} \Lambda_l &= 3t\cos(2\pi l/n) \pm t\cos(2\pi l/n)\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{t\cos(2\pi l/n)} \right)^2} \\ &\sim 3t\cos(2\pi l/n) \pm t\cos(2\pi l/n) \pm \frac{\lambda^2}{2t\cos(2\pi l/n)} \end{aligned} \tag{1.2.22}$$

なので，ズレはλ^2に比例します．

*5 (1.2.20)のうち，基本変形で$\Lambda \neq 2t\cos(2\pi k/n)$を仮定しているため，第1項は解には成りえません．

2 物理パート

第1問

1. Schrödinger方程式は
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\right]\psi=E\psi \tag{2.1.1}$$
なので，$r=r_0\rho,\ E=-E_0\varepsilon$を代入すると
$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}+\underbrace{\frac{2mq^2r_0}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}}_{=2}\cdot\frac{1}{\rho}\right]\psi=\underbrace{\frac{2mE_0r_0^2}{\hbar^2}}_{=1}\varepsilon\psi \tag{2.1.2}$$
となり，
$$r_0=\frac{4\pi\hbar^2\varepsilon_0}{mq^2},\ E_0=\frac{mq^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} \tag{2.1.3}$$
です．

2. $\psi=ce^{-\rho}$を微分方程式(1)に代入すると$\varepsilon=1$が分かります．よって
$$E=-E_0. \tag{2.1.4}$$
また，r^2の期待値は
$$\langle r^2\rangle=\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\ \psi^*(\boldsymbol{r})r^2\psi(\boldsymbol{r})=4\pi|c|^2\int_0^\infty r^4e^{-2r/r_0}\mathrm{d}r \tag{2.1.5}$$
ですが，
$$\int_0^\infty r^4e^{-2r/r_0}\mathrm{d}r=\frac{3}{4}r_0^5 \tag{2.1.6}$$
なので
$$\langle r^2\rangle=3\pi|c|^2r_0^5 \tag{2.1.7}$$
です．ここで，規格化定数は
$$4\pi|c|^2\int_0^\infty\psi^*\psi\mathrm{d}r=\pi|c|^2r_0^3=1\quad\rightarrow\quad|c|^2=\frac{1}{\pi r_0^3} \tag{2.1.8}$$
なので，
$$\sqrt{\langle r^2\rangle}=\sqrt{3}r_0 \tag{2.1.9}$$
です．

3. 計算するだけです：
$$[p_1,p_2]=-i\hbar qB,\ [p_2,p_z]=[p_z,p_1]=0. \tag{2.1.10}$$

4. $[X,p]=k[p_2,p_1]=i\hbar kqB$なので，$k=1/qB$とおけば$X,P$は正準変数です．また，ハミルトニアンは
$$H=\frac{P^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}X^2+\frac{p_z^2}{2m},\ \omega\equiv\frac{qB}{m} \tag{2.1.11}$$
となるので，確かに(x,y)方向では調和振動．古典的に考えれば，ωは円運動の周期です．

5. P'がX, Pと可換なのはよいでしょう．$X' = C_1 x + C_2 p_y$とおいて係数C_1, C_2を計算します．X'がXと交換するのは明らかなので，Pとの交換関係を調べれば

$$[X', P] = i\hbar \left(C_1 + \frac{qB}{2} C_2 \right) \tag{2.1.12}$$

です．$(\cdots)$の中身が1になるようにC_1, C_2をとればよいので，$C_2 = 1$とおけば

$$X' = -\frac{qB}{2} x + p_y \tag{2.1.13}$$

です．

6. 基底状態の(X, P)に対する運動方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\mathrm{d}^2 \psi_0(X)}{\mathrm{d}X^2} + \frac{m\omega^2}{2} X^2 \psi_0(X) = 0 \tag{2.1.14}$$

です．これは級数展開で解けます．ψ_0を

$$\psi_0(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \tag{2.1.15}$$

のように展開すれば，微分方程式は

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) c_{n+2} - \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 c_{n-2} \right] X^n - \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 [c_1 X + c_0] \tag{2.1.16}$$

です．これを解けば

$$c_0 = c_1 = 0, \ c_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 c_{n-2} \tag{2.1.17}$$

です[*6]．

また，$X' = a$とおけるとき，設問5の答えをみれば，

$$X = x - \frac{a}{qB} \tag{2.1.18}$$

と変数変換できることが分かります．これはただの平行移動です．xが元々の座標ということは，aは振動（古典的描像なら円運動）の中心であることが分かります．

補足

- ちなみに，今回のような，背景磁場があるときの粒子の運動の量子化を「ランダウ準位」といいます．古典論から予測できる通り，磁場に垂直な平面の運動は調和振動になります．量子力学Cでやったかは覚えていないですが，あまり主要な教科書には載ってないんじゃないかと思います．（私は素粒子特論Dという授業で知りました．どうやら，ランダウ=リフシッツの本には載っているようです．）

[*6] これ以上どうこう言えるような気がしません．微分方程式が間違っている？(or そもそもこの方程式は解き方がある？)

第2問

1. 自由場なので，エネルギーは

$$\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2m} \tag{2.2.1}$$

です[*7]．したがって，一辺の長さがLの正方形に閉じ込められているので，x方向の波動関数は

$$\psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\ k_n = \frac{n\pi}{L} \tag{2.2.2}$$

と量子化されます．（ただし規格化はしてません．）これを満たす(k_x, k_y)を図示すると，中心から状態が詰まっていくことが分かります．

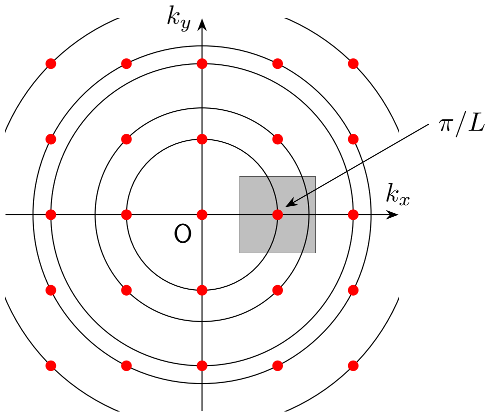

図2.1　(k_x, k_y)の取りうる値

図2.1の灰色部分の面積はπ^2/L^2ですが，この(k_x, k_y)平面ではπ^2/L^2あたり1つの格子点があることになります．したがって，N_0個の点が存在するとき，$\pi^2 N_0/L^2$の面積を占めることになります．半径を$k \equiv |\boldsymbol{k}|$とおけば

$$\pi k^2 = \frac{\pi^2}{L^2} N_0 \tag{2.2.3}$$

と近似できるので，このときのエネルギーは

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\pi}{L^2} N_0 = \frac{\pi \hbar^2 N_0}{2mL^2} \tag{2.2.4}$$

となります．

2. $E_N = \sum n_k \varepsilon_k$，$N = \sum n_k$をexpの肩に代入すれば

$$e^{-\beta(E_N - \mu N)} = \exp\left[\sum_k [-\beta(\varepsilon_k - \mu) n_k]\right] = \prod_k e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu) n_k} \tag{2.2.5}$$

とできます．したがって，因数分解を行えば

$$\Xi[T, \mu] = \sum_{N=0}^{\infty} \left(\prod_k \sum_{\{n_k\}} e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu) n_k}\right) \tag{2.2.6}$$

[*7] $\psi = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$として，Schrödinger方程式に代入します．

と因数分解することができます．n_kでの和は自由に行うことができませんが*8，Nが自由に動くことを考慮すれば因数分解を同様に行うことで

$$\Xi[T,\mu]=\prod_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n_k=0}^{\infty}e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)n_k}\right)=\left(\sum_{n_0=0}^{\infty}e^{-\beta(\varepsilon_0-\mu)n_0}\right)\left(\sum_{n_1=0}^{\infty}e^{-\beta(\varepsilon_1-\mu)n_1}\right)\cdots \tag{2.2.7}$$

と，各準位に分解することができます．

3. フェルミ粒子を考えているので，各準位に対して粒子は1つしか入ることができません．つまりn_kが取りうる値は0と1だけなので

$$\Xi_k[T,\mu]\equiv\sum_{n_k=0}^{\infty}e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)n_k}=1+e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)} \tag{2.2.8}$$

です．定義から，第k準位にある粒子の平均$\bar{n}_k$は

$$\bar{n}_k=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\log\Xi_k[T,\mu]=\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}+1}=f(\varepsilon_k) \tag{2.2.9}$$

となります．一方で，

$$\Xi[T,\mu]=\Xi_0[T,\mu]\times\Xi_1[T,\mu]\times\cdots=\prod_{k=0}^{\infty}\Xi_k[T,\mu] \tag{2.2.10}$$

なので，

$$\overline{N}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\log\Xi[T,\mu]=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\log\Xi_k[T,\mu]\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{n}_k \tag{2.2.11}$$

です．よって，式(2)が示されました．

また，和を積分に直すとき，

$$\overline{N}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_n-\mu)}+1}=\frac{1}{\Delta k_x\Delta k_y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta k_x\Delta k_y}{e^{\beta(\varepsilon_n-\mu)}+1} \tag{2.2.12}$$

となるはずです．ここで，Δkは$k_n=n\pi/L$よりπ/Lです．よって，

$$\overline{N}\sim\frac{L^2}{\pi^2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-\mu)}+1} \tag{2.2.13}$$

となります．ただし，$\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$は(2.2.1)です．この積分は極座標で行うと便利で

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-\mu)}+1}&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}k\mathrm{d}k\ \frac{1}{e^{\beta(\hbar^2k^2/2m-\mu)}+1}\\&=\frac{m}{\hbar^2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}\qquad\left(\because\ \mathrm{d}\varepsilon=\frac{m}{\hbar^2}k\mathrm{d}k\right)\\&=\frac{\beta m}{\hbar^2}\int_{e^{-\beta\mu}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{z(z+1)}\qquad\left(z\equiv e^{\beta(\varepsilon-\mu)}\text{と変数変換}\right)\\&=\frac{m}{\hbar^2}\left[\beta\mu+\log\left(1+e^{-\beta\mu}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

となります．

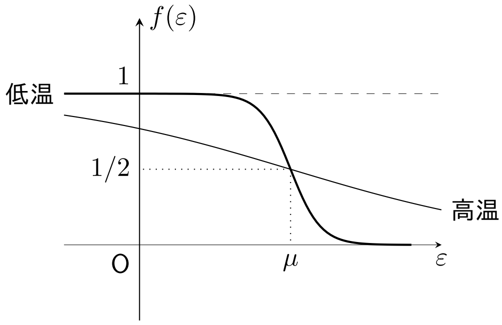

図2.2　$f(\varepsilon)$の概略図

4. $f(\varepsilon)$の概形は図2.2の通りです．Tが増加すると$\varepsilon=\mu$付近で粒子数が増加しますが，その増加量は
$$\frac{\partial f}{\partial T}=-\frac{\varepsilon-\mu}{k_BT^2}\cdot\frac{e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT}}{\left(e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT}+1\right)^2}=-\frac{\varepsilon-\mu}{4k_BT^2}\cdot\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\varepsilon-\mu}{2k_BT}\right)} \tag{2.2.15}$$
と書けます．ここで，$\varepsilon\sim\mu$付近では，$\cosh x\sim 1-x^2/2$なので
$$\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{\varepsilon\sim\mu}\propto T^2 \tag{2.2.16}$$
です．したがって，εよりもエネルギーが大きい粒子は$T\sim 0$ではT^2で増えることになり，それに伴ってエネルギーもT^2で増加し，よって，比熱はTに比例することになります．
5. 基本的には$\varepsilon<0$の領域に粒子が詰まって行きますが，取りうる状態の数が増えてくると$\varepsilon\sim-\Delta$付近の粒子が$\varepsilon\sim+\Delta$に励起されます[*9]．
6. 今回の状況では，(2.2.13)より
$$\overline{N}_1(T)=\overline{N}_1(0)-\frac{L^2}{\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-\mu)}+1} \tag{2.2.17}$$
が成立しています[*10]．ここで，低温$\beta\mu\gg 1$なので，この関係式は
$$\mu\sim\frac{\hbar^2k_BT}{m}\left[\overline{N}_1(0)-\overline{N}_1(T)\right] \tag{2.2.18}$$
と解けます．

---

*8 この段階では，まだ，$N=\sum n_k$の制約があります．

*9 詳しい議論は「フェルミ縮退」を参考にするとよいでしょう．たぶん．もしくは，次の設問も参考になるかもしれません．

*10 $\overline{N}_1(T)$は「負のエネルギーの粒子数」ですが，それは「$T=0$で$\varepsilon<0$に存在した粒子数」から「温度がT上昇したことで$\varepsilon>0$に遷移した粒子数」を引くことで求めることができるはずです．温度Tにおける粒子数は，設問3で求めているので，それを用いればμについて解けそうです．

第3問

1. 式(3)より，磁場$\boldsymbol{H}$は
$$\boldsymbol{H}=\frac{k}{\mu_0\omega}(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_0)e^{i(kz-\omega t)} \tag{2.3.1}$$
であり，式(4)で$\boldsymbol{j}=0$としたものに$\boldsymbol{H}$と$\boldsymbol{E}$の表式を代入すると
$$\frac{k^2}{\mu_0\omega}\boldsymbol{E}_0=\omega\varepsilon_{\mathrm{d}}\boldsymbol{E}_0 \tag{2.3.2}$$
となり[*11]，
$$\frac{k}{\omega}=\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{d}}\mu_0} \tag{2.3.3}$$
です．また，位相速度は
$$v_{\mathrm{p}}\equiv\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{d}}\mu_0}} \tag{2.3.4}$$
です．
2. 式(3)のrotをとると
$$-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}-\varepsilon_{\mathrm{m}}\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{2.3.5}$$
となるので
$$\left(\nabla^2-\mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}-\varepsilon_{\mathrm{m}}\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}=0 \tag{2.3.6}$$
です．
3. 式(3),(4)からは，接線方向の接続条件が出てきます．したがって，境界面をまたぐような経路をとって，式(3)を面積分すれば
$$\int_S(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.3.7}$$
となります．経路の厚さを0にすると，右辺の面積分は0．左辺はストークスの定理に直せて，接線方向のみが残り
$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}0}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}0}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}0} \tag{2.3.8}$$
です．同様に，界面に電流が流れていないとすれば，式(4)は
$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}0}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{r}0}=\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}0} \tag{2.3.9}$$
となります．ここで，(2.3.1)より
$$\begin{cases}\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}0}=\dfrac{k}{\mu_0\omega}(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}0})e^{i(kz-\omega t)}\\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{r}0}=-\dfrac{k}{\mu_0\omega}(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}0})e^{i(-kz-\omega t)}\\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{m}0}=\dfrac{k_{\mathrm{m}}}{\mu_0\omega}(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}0})e^{i(k_{\mathrm{m}}z-\omega t)}\end{cases} \tag{2.3.10}$$

[*11] ただし，$\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{E}=0$としました．

なので，(2.3.9)は

$$k\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}0} - k\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}0} = k_{\mathrm{m}}\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}0} \tag{2.3.11}$$

となります．

4. 変位電流が小さいとき，設問2の微分方程式(2.3.6)は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{E} = 0 \tag{2.3.12}$$

です．したがって，$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}0}e^{i(k_{\mathrm{m}}z-\omega t)}$を代入すれば

$$\left(-k_{\mathrm{m}}^2 + i\omega\mu_0\sigma\right)\boldsymbol{E} = 0 \tag{2.3.13}$$

となるので，

$$k_{\mathrm{m}} = \pm\sqrt{i\omega\mu_0\sigma} = \pm e^{i\pi/4}\sqrt{\omega\mu_0\sigma} \tag{2.3.14}$$

です．ここで，$-$をとってきてしまうと，$z \to \infty$で$\boldsymbol{E}$が発散するので，適しているのは$+$のほうです．よって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(z,t) &= \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}0}\exp\left[i\left((1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}z - \omega t\right)\right]\\ &= \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}0}e^{-\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}z}\exp\left[i\left(\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}z - \omega t\right)\right]\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

が$z > 0$における解です．

5. 境界条件(2.3.8),(2.3.11)より

$$\frac{E_{\mathrm{r}0}}{E_{\mathrm{i}0}} = \frac{k - k_{\mathrm{m}}}{k + k_{\mathrm{m}}} \tag{2.3.16}$$

なので，反射率は

$$\begin{aligned}R &= \left|\frac{k - k_{\mathrm{m}}}{k + k_{\mathrm{m}}}\right|^2\\ &= \frac{k^2 + |k_{\mathrm{m}}|^2 - k(k_{\mathrm{m}} + k_{\mathrm{m}}^*)}{k^2 + |k_{\mathrm{m}}|^2 + k(k_{\mathrm{m}} + k_{\mathrm{m}}^*)}\\ &= \frac{k^2 + \omega\mu_0\sigma/2 - 2k\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}}{k^2 + \omega\mu_0\sigma/2 + 2k\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}}\\ &= \left(\frac{k - \sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}}{k + \sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}}\right)^2\\ &\sim \left(1 - \frac{2\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}}{k}\right)^2 \sim 1 - \frac{4\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}}{k}\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

です[*12]．

*12 $x = \sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}$とおいて

$$f(x) = \frac{k-x}{k+x} = 1 - \frac{2x}{k+x}$$

とすると，

$$f(x) \sim 1 - \frac{2}{k}x$$

となります．

6. 定義に基づいて計算すると

$$\left\langle \int_0^\infty \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}z \right\rangle = \frac{\omega\sigma}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\mathrm{d}t\int_0^\infty \mathrm{d}z\ \boldsymbol{E}^2 \tag{2.3.18}$$

となります．ここで，電場は実部をとって

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}0}e^{i((1+i)\delta z-\omega t)}\right] = \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}0}e^{-\delta z}\cos(\delta z-\omega t) \tag{2.3.19}$$

となります．ただし，$\delta\equiv\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}$とおきました．これを代入すれば

$$\begin{aligned}&\frac{\omega\sigma}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\mathrm{d}t\int_0^\infty \mathrm{d}z\ \boldsymbol{E}^2\\ &=\frac{\omega\sigma}{2\pi}|\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}0}|^2\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2(\delta z-\omega t)\mathrm{d}t\int_0^\infty e^{-2\delta z}\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

であり，

$$\left\langle \int_0^\infty \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}z \right\rangle = \frac{\sigma}{4\delta}|\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}0}|^2 \tag{2.3.21}$$

です．境界条件より，

$$|\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}0}|^2 = \left|\frac{2k}{k+k_{\mathrm{m}}}\right|^2|\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}0}|^2 = \left(\frac{2k}{k+\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}}\right)^2|\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}0}|^2 \sim 4\left(1-\frac{2\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}}{k}\right)|\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}0}|^2 \tag{2.3.22}$$

なので，求める割合は

$$\left\langle \int_0^\infty \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}z \right\rangle\Big/|\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}0}|^2 \sim \sqrt{\frac{2\sigma}{\omega\mu_0}}\left(1-\frac{2\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}}{k}\right) \tag{2.3.23}$$

となります．