

Anomalies on orbifolds

Nima Arkani-Hamed, Andrew G. Cohen, Howard Georgi.

Physics Letters B 516 (2001) 395-402, [arxiv:hep-th/0103135](#).

安倍研 M1 宮根一樹

2024 5/7 (火)

読んだ動機を話そうと思ったのですが、

読んだ動機を話そうと思ったのですが、S 君に

「お前の読んだ理由なんてみんな 1 ミリも興味ない」

と言われてしまったので、(本当にそうなんだと思いますし) 自粛します。

以下の論文を紹介します。

Anomalies on orbifolds

[Nima Arkani-Hamed \(Harvard U.\)](#), [Andrew G. Cohen \(Harvard U.\)](#), [Howard Georgi \(Harvard U.\)](#)

Mar, 2001

11 pages

Published in: *Phys.Lett.B* 516 (2001) 395-402

e-Print: [hep-th/0103135](#) [hep-th]

DOI: [10.1016/S0370-2693\(01\)00946-7](#)

Report number: HUTP-01-A013, BUHEP-01-4, LBNL-47614, UCB-PTH-01-09

View in: [AMS MathSciNet](#), [OSTI Information Bridge Server](#), [ADS Abstract Service](#)

 pdf

 cite

 claim

 reference search

 164 citations

イントロダクション

アノマリー

4次元の場合のカイラルアノマリーを確認する。

アノマリー

4次元の場合のカイラルアノマリーを確認する。

ゲージ場 A_μ と結合しているフェルミオン ψ を考える

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

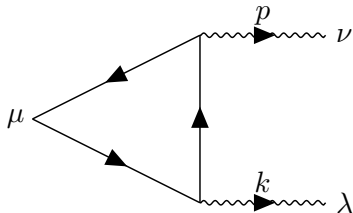
カイラル変換 $\psi \rightarrow e^{i\gamma^5\alpha(x)}\psi$ に対するネーターカレントの方程式は

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi, \quad j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$$

しかし、これは古典論の結果

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi) = 2im \bar{\psi} \gamma^5 \psi$$

摂動論でこの関係をチェックするには、ファインマンルールにしたがって以下のダイアグラムを計算してみればよい [2, 3]。



前に示したダイアグラムを計算すると

$$\partial_\mu \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \rangle = 2im \langle \bar{\psi} \gamma^5 \psi \rangle + Q, \quad Q = \frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \langle F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \rangle$$

この余分な Q は、ゲージ不変性を保って発散を正則化するとき生じる項

この Q をカイラルアノマリーという。

理論にアノマリーがあると、通常量子論の定式化ができなくなることが知られている [4]。

よって、

アノマリーが相殺されるように理論を作りたい

Kaluza-Klein 理論とアノマリー

高次元の時空を考え、余剰空間に周期条件を与えること (コンパクト化) によって、4 次元有効理論を作る方法があり、それを Kaluza-Klein 理論という。

特に、今回は 5 次元の時空 $x^M = (x^0, x^1, \dots, x^4)$ を考え、 x^4 の方向に $x^4 \sim x^4 + 2L$ の周期境界条件を課してコンパクト化する。

Kaluza-Klein 理論とアノマリー

高次元の時空を考え、余剰空間に周期条件を与えること (コンパクト化) によって、4 次元有効理論を作る方法があり、それを Kaluza-Klein 理論という。

特に、今回は 5 次元の時空 $x^M = (x^0, x^1, \dots, x^4)$ を考え、 x^4 の方向に $x^4 \sim x^4 + 2L$ の周期境界条件を課してコンパクト化する。

5 次元の理論でのアノマリー相殺

と

4 次元有効理論でのアノマリー相殺

の対応

を調べたい。

一方で、カイラルアノマリーについては次のことが分かっている：

- 奇数次元の理論はクリフォード代数の性質から非カイラル
→ カイラルアノマリーは必ず相殺される
- 非カイラルな理論を S^1 コンパクト化しても、4次元有効理論は非カイラル

一方で、カイラルアノマリーについては次のことが分かっている：

- 奇数次元の理論はクリフォード代数の性質から非カイラル
→ カイラルアノマリーは必ず相殺される
- 非カイラルな理論を S^1 コンパクト化しても、4次元有効理論は非カイラル

よって、5次元の理論をコンパクト化するだけでは、4次元のカイラルアノマリーが消えているのは明らか。

そこで・・・

オービフォールド S^1/Z_2

今回は、さらにオービフォールドという境界条件を余剰空間に課す。

オービフォールド S^1/Z_2

今回は、さらにオービフォールドという境界条件を余剰空間に課す。

例えば、スカラー場の理論を考える

$$S = \int d^5x \left(\frac{1}{2} \partial^M \Phi \partial_M \Phi - \frac{1}{2} m(x^4)^2 \Phi^2 \right)$$

この理論に、 $\Phi(x, x^4) = \Phi(x, x^4 + 2L)$ という境界条件に加えて

$$\Phi(x, x^4) = \eta \Phi(x, -x^4), \quad \eta = \pm 1$$

という境界条件を課す。

まずは、周期境界条件 $\Phi(x, x^4) = \Phi(x, x^4 + 2L)$ から

$$\Phi(x, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x) \exp \left[i \frac{n\pi}{L} x^4 \right]$$

とフーリエ展開できる。

さらに、オービフォールドの境界条件 $\Phi(x, x^4) = -\Phi(x, -x^4)$ を課すと $\phi_n(x) + \phi_{-n}(x) = 0$ という条件になる

この条件により、 $n = 0$ のモード $\phi_0(x)$ は消えることがわかる

まずは、周期境界条件 $\Phi(x, x^4) = \Phi(x, x^4 + 2L)$ から

$$\Phi(x, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x) \exp \left[i \frac{n\pi}{L} x^4 \right]$$

とフーリエ展開できる。

さらに、オービフォールドの境界条件 $\Phi(x, x^4) = -\Phi(x, -x^4)$ を課すと $\phi_n(x) + \phi_{-n}(x) = 0$ という条件になる

この条件により、 $n = 0$ のモード $\phi_0(x)$ は消えることがわかる

境界条件をうまく選べば、ゼロモードの場を消したり残したりできるため
4次元の有効理論を作るときに嬉しい

ので、調べられている。

本論文の流れ・まとめ

同様のことが $x^4 = L$ の点でも起こることがわかる

$x = 0, L$ の点 (固定点) では、ゼロモードがカイラルになる

→ アノマリーが 5 次元の理論でも現れる可能性がある

→ 4 次元有効理論でのアノマリーとの関係は?

本論文の流れ・まとめ

同様のことが $x^4 = L$ の点でも起こることがわかる

$x = 0, L$ の点 (固定点) では、ゼロモードがカイラルになる

→ アノマリーが 5 次元の理論でも現れる可能性がある

→ 4 次元有効理論でのアノマリーとの関係は?

議論の流れ

- 余剰空間方向の場の境界条件を設定、モード展開
- それを元のラグランジアンに代入 → カレントを計算
- 有効理論のアノマリーと元の理論のアノマリーの関係の議論

今回、得られる結果は

$$\partial_C j^C = \frac{1}{2} [\delta(x) + \delta(x - L)] Q \quad (C = 0, 1, 2, 3, 4)$$

5 次元のカレントの保存も量子補正によって破れることがある。

本論

4次元のアノマリー

最初のレビューの部分で良く分からない記述がありました。

$$\partial_\mu j_5^\mu + 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi = Q \quad (2.2)$$

with Q given by (1.2).

It is worthwhile to consider the expectation value of this equation in the presence of the external gauge potential. Note that a non-zero expectation value for the divergence of the current would require a pole at $p^2 = 0$ in the expectation value of the current itself. For a massive fermion there is no state to produce such a pole, and consequently the expectation value of the divergence of the axial current must vanish. The operator equation (2.2) then implies

$$2im\langle\bar{\psi}\gamma^5\psi\rangle = Q. \quad (2.3)$$

おそらく

「massive なら極は $p^2 = 0$ のところにないので、 $\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle = 0$ 」

ということ？

複数の場 ψ_i, A_{ij}^μ とチャージ q_i がある場合は

$$\partial_\mu j_5^\mu + 2i\bar{\psi}M\gamma^5\psi = \frac{1}{2}Q, \quad Q = \frac{1}{16\pi^2} \text{tr } qF\tilde{F}$$

となる。

先行研究 [6] によると、無質量モードのみが真空期待値の計算に寄与してきて

$$\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle = \frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \left[P_0 q P_0 F P_0 \tilde{F} \right]$$

P_0 は無質量モードへの射影。

セットアップ

時空は 5 次元 $x^C = (x^\mu, x_4)$

作用

$$S = \int d^4x \int_0^L dx_4 \bar{\psi}(i\not{D} - \gamma_4 \boldsymbol{D}_4 - m(x_4))\psi$$

$$\not{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu, D_C = \partial_C - iA_C, \gamma_4 \equiv -i\gamma^5$$

境界条件: 周期境界条件 $x_4 \sim x_4 + 2L$ とオービフォールド

$$\psi(x, x_4) = \gamma^5 \psi(x, -x_4)$$

$$A_\mu(x, x_4) = A_\mu(x, -x_4)$$

$$A_4(x, x_4) = -A_4(x, -x_4)$$

$$\Rightarrow m(x_4) = m(2L + x_4) = -m(-x_4)$$

また、 $\psi(x, x_4)$ をカイラリティーで分類

$$\psi = \psi_+ + \psi_-, \gamma^5 \psi_{\pm} = \pm \psi_{\pm}$$

ゲージ変換: ローカルな $U(1)$

$$\psi(x, x_4) \rightarrow e^{i\phi(x, x_4)} \psi(x, x_4)$$

$$A_C(x, x_4) \rightarrow A_C(x, x_4) - i\partial_C \phi(x, x_4)$$

$$\Rightarrow \phi(x, x_4) = \phi(x, x_4 + 2L) = \phi(x, -x_4)$$

アノマリーの計算

以下、 $A_4 = 0$ とゲージ固定する。

KK モード展開は次の通り

$$\psi_{\pm}(x, x_4) = \sum_M \psi_{M\pm}(x) \xi_M^{\pm}(x_4)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \left[-i\partial_4 + m(x_4) \right] \xi_M^+(x_4) &= M \xi_M^+ \quad (M \geq 0) \\ \left[i\partial_4 + m(x_4) \right] \xi_M^-(x_4) &= M \xi_M^- \quad (M > 0) \end{aligned}$$

(i 忘れはおそらくタイポ?)

このモード展開の基底は完全性を満たす。内積は積分。

$$\sum_M \xi_M^{\pm}(x) \xi_M^{\pm}(y) = \delta(x - y)$$

KK モード展開

$$\psi_{\pm}(x, x_4) = \sum_M \psi_{M\pm}(x) \xi_M^{\pm}(x_4)$$

- 元の作用に代入
- x_4 の方向を 0 から L で積分

すると

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \left[\sum_M \bar{\psi}_M(x) (i\not{\partial} - M) \psi_M(x) \right. \\ - \sum_{M, M'} \bar{\psi}_{M'+}(x) \not{A}_{M'M}^+(x) \psi_{M+}(x) \\ \left. - \sum_{M, M'} \bar{\psi}_{M'-}(x) \not{A}_{M'M}^-(x) \psi_{M-}(x) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S = \int d^4x \left[\sum_M \bar{\psi}_M(x)(i\not{\partial} - M)\psi_M(x) \right. \\
- \sum_{M,M'} \bar{\psi}_{M'+}(x) A_{M'M}^+(x) \psi_{M+}(x) \\
\left. - \sum_{M,M'} \bar{\psi}_{M'-}(x) A_{M'M}^-(x) \psi_{M-}(x) \right]
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\psi_M(x) &\equiv \psi_{M+}(x) + \psi_{M-}(x) \\
A_{M'M}^{\mu\pm}(x) &\equiv \int_0^L dx_4 \, \xi_{M'}^{\pm}(x_4) \xi_M^{\pm}(x_4) A^{\mu}(x, x_4)
\end{aligned}$$

このときのカレントは、 $J^C = \bar{\psi}(x, x_4)\gamma^C\psi(x, x_4)$ を計算すれば

$$\begin{aligned}
 J^\mu(x, x_4) &= \sum_{M, M'} \left[\xi_{M'}^+(x_4)\xi_M^+(x_4)\bar{\psi}_{M'+}(x)\gamma^\mu\psi_{M+}(x) \right. \\
 &\quad \left. + \xi_{M'}^-(x_4)\xi_M^-(x_4)\bar{\psi}_{M'-}(x)\gamma^\mu\psi_{M-}(x) \right] \\
 J^4(x, x_4) &= \sum_{M, M'} \left[\xi_{M'}^+(x_4)\xi_M^-(x_4)\bar{\psi}_{M'+}(x)\gamma^5\psi_{M-}(x) \right. \\
 &\quad \left. + \xi_{M'}^-(x_4)\xi_M^+(x_4)\bar{\psi}_{M'-}(x)i\gamma^5\psi_{M+}(x) \right]
 \end{aligned}$$

KK モード M を行列の添え字とみなす。

$$[\Psi(x)]_M \equiv \psi_M(x), [\mathcal{A}^{\mu\pm}]_{MM'} \equiv A_{MM'}^{\mu\pm}, [\mathcal{M}]_{MM'} = M\delta_{MM'}$$

この記法で作用を書き直すと

$$S = \int d^4x \bar{\Psi}(x)(i\not{\partial} - \mathcal{A} - \mathcal{M})\Psi(x)$$
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ P_+ + \mathcal{A}^- P_-$$

ここで、 P_{\pm} は射影

$$P_{\pm} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$$

この記法でカレントを書きなおす。

そのために

$$[\Xi^\pm(x_4)]_{M'M} \equiv \xi_{M'}^\pm \xi_M^\pm(x_4), [\Omega^\pm(x_4)]_{M'M} \equiv \xi_{M'}^\mp(x_4) \xi_M^\pm(x_4)$$
$$\Xi(x_4) = \Xi^+ P_+ + \Xi^- P_-, \Omega(x_4) = \Omega^+ P_+ + \Omega^- P_-$$

とおくと

$$J^\mu(x, x_4) = \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x)$$
$$J^4(x, x_4) = \bar{\Psi}(x) i \gamma^5 \Omega(x_4) \Psi(x)$$

このカレントは古典論のレベルでは保存する

$$\partial_\mu J^\mu(x, x_4) + \partial_4 J^4(x, x_4) = 0$$

4次元の有効作用

$$S = \int d^4x \bar{\Psi}(x)(i\not{\partial} - \not{A} - \mathcal{M})\Psi(x)$$

は、ゲージ対称性を持っている

そのカイラルアノマリー Q は

$$Q \equiv \frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \left[\Xi^+(x_4) \mathcal{F}^+(x) \tilde{\mathcal{F}}^+(x) - \Xi^-(x_4) \mathcal{F}^-(x) \tilde{\mathcal{F}}^-(x) \right]$$
$$\mathcal{F}^{\mu\nu\pm}(x) \equiv \partial^\mu \mathcal{A}^{\nu\pm}(x) - \partial^\nu \mathcal{A}^{\mu\pm}(x)$$

- トレースは KK モードの添え字について
- おそらく、4次元有効理論でのアノマリー Q_4 は

$$Q_4 = \int dx_4 Q(x, x_4)$$

としているよう。

ここで、次の関係が成立している

$$\Xi^{\pm}(x_4)\mathcal{A}^{\mu\pm}(x) = A^{\mu}(x, x_4)\Xi^{\pm}(x_4)$$

これを用いれば、アノマリーは

$$\begin{aligned} & \frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \left[\Xi^+(x_4)\mathcal{F}^+(x)\tilde{\mathcal{F}}^+(x) - \Xi^-(x_4)\mathcal{F}^-(x)\tilde{\mathcal{F}}^-(x) \right] \\ &= \frac{1}{32\pi^2} F(x, x_4)\tilde{F}(x, x_4) \text{tr} \left(\Xi^+(x_4) - \Xi^-(x_4) \right) \\ &= \frac{1}{32\pi^2} F(x, x_4)\tilde{F}(x, x_4) \left[\sum_{M \geq 0} \xi_M^+(x_4)^2 - \sum_{M > 0} \xi_M^-(x_4)^2 \right] \end{aligned}$$

あとは青色の部分进行計算すればよい

そのために、次の量を定義する

$$\Delta(x_4, y_4) \equiv \sum_{M \geq 0} \xi_M^+(x_4) \xi_M^+(y_4) - \sum_{M > 0} \xi_M^-(x_4) \xi_M^-(y_4)$$

この量を計算すると

$$\Delta(x_4, -y_4) = 2 \sum_N \delta(x_4 - y_4 - 2NL) \quad \therefore \Delta(x_4, x_4) = \sum_N \delta(x_4 - NL)$$

したがって、

$$Q = \underbrace{\frac{1}{32\pi^2} F(x, x_4) \tilde{F}(x, x_4)}_{=Q} \sum_N \delta(x_4 - NL)$$

よって、 x_4 が $[0, 2L)$ に限られることに注意すれば

$$\partial_\mu J^\mu(x, x_4) + \partial_4 J^4(x, x_4) = \frac{1}{2} [\delta(x_4) + \delta(x_4 - L)] Q$$

カレントの式

$$\partial_\mu J^\mu(x, x_4) + \partial_4 J^4(x, x_4) = \frac{1}{2} [\delta(x_4) + \delta(x_4 - L)] \mathcal{Q}$$

- x_4 の固定点の上にアノマリーが局在化しており、バルクには生じない。
また、KK モードの構造 (波動関数とか質量とか) などにも依存しない。
- 4 次元のアノマリーが相殺されれば、5 次元のアノマリーが相殺される。

アノマリー相殺

アノマリーがキャンセルされる具体的な例として、
ゼロモードが ψ_0, χ_0 となるようなフェルミオン Ψ, X を考える。

- $\gamma^5 \Psi = +\Psi, \gamma^5 X = -X$
- 質量は $m_\Psi(x_4) = -m_X(x_4) = m = \text{constant}$

ゼロモードもカイラルなので、もちろんアノマリーが相殺される。

(あとの議論は良く分かりませんでした。直感的に今回の結果を解釈したいのだと思います。)

まとめ

まとめ

- 4次元のカイラルアノマリーは5次元のオービフォールドの固定点に局在する

$$\partial_C j^C = \frac{1}{2} [\delta(x) + \delta(x - L)] Q$$

- 4次元でゼロモードのカイラルアノマリーが相殺されていれば、5次元でも相殺されている。

その他

- [7] によると、 $S^1/(Z_2 \times Z'_2)$ でゼロモードを全て消しても、アノマリーは固定点に局在するらしい。
- ゼロモードが massive か massless が重要なら、例えば6次元の理論を S^2 にコンパクト化すると非自明な結果が得られるのでは、と素朴に思いました。

付録

A. 目次

イントロダクション

アノマリー

Kaluza-Klein 理論とアノマリー

オービフォールド S^1/Z_2

本論文の流れ・まとめ

本論

4次元のアノマリー

セットアップ

アノマリーの計算

アノマリー相殺

まとめ

付録

目次

4次元のカイラルアノマリーの計算

A. 目次

参考文献

B. 4次元のカイラルアノマリーの計算

QED のカイラルアノマリーを計算する。

参考文献

- [1] N. Arkani-Hamed, A. G. Cohen, and H. Georgi, *Anomalies on Orbifolds*, **Physics Letters B** **516** (2001) 395–402, [arxiv:hep-th/0103135](#).
- [2] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Pub. Co, Reading, Mass, 1995.
- [3] 藤川和男, *ゲージ場の理論*. 岩波書店, 東京, 2001.
- [4] 藤川和男, *経路積分と対称性の量子的破れ*. 岩波書店, 東京, 2001.
- [5] K.-S. Choi and C.-ŭ. Kim, *Quarks and Leptons from Orbifolded Superstring*, no. volume 954 in *Lecture Notes in Physics*. Springer, Cham, second edition ed., 2020.
- [6] S. Coleman and B. Grossman, *'t Hooft's consistency condition as a consequence of analyticity and unitarity*, **Nuclear Physics B** **203** (1982) 205–220.
- [7] C. A. Scrucca, M. Serone, L. Silvestrini, and F. Zwirner, *Anomalies in orbifold field theories*, **Phys. Lett. B** **525** (2002) 169–174, [arXiv:hep-th/0110073](#).