ゲージ理論と幾何

宮根 一樹

最終更新日：2024 年 3 月 20 日

目次

To Do リスト

- 注 1.2 の内容の吟味・補足。
- 証明 1.1。

1　多様体とその周辺

1.1　多様体

まずは多様体の定義から。

定義 1.1 (多様体)**.** ハウスドルフ空間 M に対して、M が開集合 U_i によって

$$U = \bigcup_i U_i \tag{1.1}$$

で表され、各 U_i に対して、U_i から n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ への全単射 $\boldsymbol{x}_{U_i}$ があって

(i) 像 $\boldsymbol{x}_{U_i}(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合で、$\boldsymbol{x}_{U_i}$ は U_i から $\boldsymbol{x}_{U_i}(U)$ への同相写像。

(ii) $U_i \cap U_j \neq \phi$ ならば、写像

$$\boldsymbol{x}_{U_j} \circ \boldsymbol{x}_{U_i}^{-1} : \boldsymbol{x}_{U_i}(U_i \cap U_j) \to \boldsymbol{x}_{U_j}(U_i \cap U_j) \tag{1.2}$$

が全単射で C^∞ かつ逆写像も同様。

を満たすとき、

- 組 $\{(U_i, \boldsymbol{x}_{U_i})\}$ の全体は M に C^∞ **構造**を与え、
- M を C^∞ **多様体**という。

例 1.1 (直積多様体)**.** m 次元 C^∞ 多様体 M、n 次元 C^∞ 多様体 N の C^∞ 構造が $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ で定められているとき、

$$(\phi_\alpha \times \psi_\beta)(x, y) = (\phi_\alpha(x), \psi_\beta(y)) \tag{1.3}$$

で定義しておけば、$\{(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ は $M \times N$ 上に C^∞ 構造が定められて、$M \times N$ は C^∞ 多様体になる。これは直積多様体。

例 1.2 (n 次元球面)**.** $\mathbb{R}^{n+1}$ に対して

$$S^n = \{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum (x^i)^2 = 1\} \tag{1.4}$$

において、各 $i = 1, \cdots, n+1$ に対して

$$U_i^\pm \equiv \{(x^1, \cdots, x^{i+1}) \in S^n | x^i \gtrless 0\} \tag{1.5}$$

とおいて[*1]、$x_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$ を

$$x_i^\pm(x^1, \cdots, x^{n+1}) = (x^1, \cdots, \widehat{x^i}, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

[*1] 複号 $\pm$ と $\gtrless$ の上下は一致しているものとする。

とする[*2]と、$x_i^{\pm}$ の像は $\mathbb{R}^n$ の開球 (内部を含む) である。これらは全単射で、$\{(U_i^{\pm}, x_i^{\pm})\}_{i=1,\cdots,n}$ が S^n 上に C^∞ 構造を定めるため、S^n は多様体。

例 1.3 (射影空間)**.** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ の元

$$\boldsymbol{x} = (x^0, x^1, \cdots, x^n), \boldsymbol{y} = (y^0, y^1, \cdots, y^n) \in \mathbb{K}^{n+1} \tag{1.7}$$

に対して、ある $\alpha \in \mathbb{K}$ があって $\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$ なら $\boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{x}$ だとする。するとこれは同値。$[\boldsymbol{x}]$ は同値類で、それら全体の集合を $P^n(\mathbb{K})$ とすれば、$P^n(\mathbb{K})$ は射影空間。

これが C^∞ 多様体であることを見るために、C^∞ 構造を構成する。まず、

$$\pi : \mathbb{K}^{n+1} \{0\} \in \boldsymbol{x} \to [\boldsymbol{x}] \ni P^n(\mathbb{K}) \tag{1.8}$$

で、$P^n(\mathbb{K})$ の位相を $\mathbb{K}^{n+1}$ の位相から定義する。したがって、$P^n(\mathbb{K})$ の開集合が考えられて、それを $U_i = \{[(x^0, x^1, \cdots, x^n)] \in P^n(\mathbb{K}) | x^i \neq 0\}$ として、写像 $\boldsymbol{x}_i : U_i \to \mathbb{K}^n$ を

$$\boldsymbol{x}_i([(x^0, x^1, \cdots, x^n)]) = \left(\frac{x^0}{x^i}, \cdots, \widehat{\frac{x^i}{x^i}}, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right) \tag{1.9}$$

とする。すると、$\{(U_i, x^i)\}_{i=1,\cdots,n+1}$ は C^∞ 構造を定める。

最後に、この写像が well-defined なことを確認する。$P^n(\mathbb{K})$ の 2 つの元

$$[(x^0, \cdots, x^n)], [(y^0, \cdots, y^n)] \tag{1.10}$$

が等しいとする。したがって、ある $\alpha \in \mathbb{K}$ が存在して $y^i = \alpha x^i$ なので、このことを用いれば

$$\boldsymbol{x}_i([(y^0, \cdots, y^n)]) = \left(\frac{y^0}{y^i}, \cdots, \widehat{\frac{y^i}{y^i}}, \frac{{}^{n+1}}{y^i} \right) = \left(\frac{x^0}{x^i}, \cdots, \widehat{\frac{x^i}{x^i}}, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right) = \boldsymbol{x}_i([(x^0, \cdots, x^n)]) \tag{1.11}$$

であり、well-defined。

例 1.4. C^∞ 多様体の開集合 U もまた C^∞ 多様体。C^∞ 構造は、元の多様体の構造と U の共通部分をとればよい。また、閉集合は多様体とは限らない。

定義 1.2 (座標近傍と局所座標系)**.** C^∞ 多様体 M の開集合 W、写像 $\psi : W \to \mathbb{R}^n$ が次の条件を満たすとき、(W, ψ) を**座標近傍**という：

(i) $\psi : W \to \psi(W)$ は同相写像。

(ii) C^∞ 構造を $\{(U, \boldsymbol{x}_U)\}$ とするとき、$U \cap W \neq \phi$ なる全ての U に対して、写像

$$\boldsymbol{x}_U \circ \psi^{-1} : \psi(W \cap U) \to \boldsymbol{x}_U(W \cap U) \tag{1.12}$$

とその逆写像は $\mathbb{R}^n$ の意味で C^∞ 写像。

[*2] ハット^はその成分がないことを表す。

また、$p \in U$ に対して、$\mathbb{R}^n$ の点 $\boldsymbol{x}_U(p)$ を

$$\boldsymbol{x}_U(p) = (x^1(p), \cdots, x^n(p)) \tag{1.13}$$

と表すことがある。このとき、$x^1, \cdots, x^n$ を**局所座標系**という。

注 1.1. C^∞ 構造 $\{(U, \boldsymbol{x}_U)\}$ も定義から座標近傍。

定義 1.3 (C^∞ 写像と微分同相)**.** M, N は C^∞ 多様体、写像 $f : M \to N$ を考える。f が次の条件を満たすとき、C^∞ **写像**という：

M, N の任意の座標近傍 $(U, \boldsymbol{x}_U), (V, \boldsymbol{y}_V)$ に対して、$V \cap f(U) \neq \phi$ ならば、写像

$$\boldsymbol{y}_V \circ f \circ \boldsymbol{x}_U^{-1} : \boldsymbol{x}_U(U) \to \boldsymbol{y}_V(V) \tag{1.14}$$

は、$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への C^∞ 写像。

また、$f : M \to N$ が全単射で上の意味で C^∞ 写像であり、逆写像 f^{-1} も同様ならば、f は M と N の間の**微分同相**という。

例 1.5. 3 次元球面 S^3 と 2 次の特殊ユニタリー群

$$SU(2) = \{U \in GL(2, \mathbb{C}) | UU^\dagger = 1, \det U = 1\} \tag{1.15}$$

は微分同相。

証明. $SU(2)$ は、定義から

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{C}, \ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \tag{1.16}$$

と書ける。2 つの複素数は、その実部と虚部を具体的に書いてしまえば

$$(\mathrm{Re}\, a)^2 + (\mathrm{Im}\, a)^2 + (\mathrm{Re}\, b)^2 + (\mathrm{Im}\, b)^2 = 1 \tag{1.17}$$

なので、S^3 の上に乗っている。(本当は同型であることをもっとまじめに言わないとダメなのだろうが。) ■

定義 1.4 (曲線と接ベクトル、接ベクトル空間)**.** $\mathbb{R}$ の開区間 (a, b) から C^∞ 多様体 M への C^∞ 写像 $c : (a, b) \to M$ を M 上の**曲線**という。以後は簡単のため、$t = 0$ で $c(0) = p \in M$ とする。つまり、この曲線は点 p を通る。

p を通る 2 つの曲線 c_1, c_2 に対して、その座標近傍 $(U, \boldsymbol{x}_U)$ で $(\boldsymbol{x}_U \circ c_1)'(0) = (\boldsymbol{x}_U \circ c_2)'(0)$ であるとき、$c_1 \sim c_2$ とする。この定義によって定まる曲線 c の同値類を

$$c'(0) \text{ or } \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(t) \right|_{t=0} \tag{1.18}$$

と書くことにし、これらを**接ベクトル**という。

p を通る曲線の同値類全体を T_pM とする。すると、T_pM はベクトル空間の構造をもつので、この T_pM を p における M の**接ベクトル空間**という。

注 1.2 (T_pM のベクトル空間としての構造)**.** $\mathbb{R}^m$ の構造をうまく入れればよくて、

$$ac_1 + bc_2 \equiv \boldsymbol{x}^{-1} \circ (a\boldsymbol{x} \circ c_1 + b\boldsymbol{x} \circ c_2) \tag{1.19}$$

でたぶん OK?

定義 1.5. p の近傍で定義された C^∞ 関数 f に対して、接ベクトル $X_p \in T_pM$ に沿った微分係数を

$$X_p(f) \equiv (f \circ c)'(0) \tag{1.20}$$

と定義する。ここで、$c(t)$ は同値類 X_p の代表元。

例 1.6. $(U, x^1, \cdots, x^n)$ を座標近傍として、$p \in U$ に対して

$$(x_0^1, \cdots, x_0^n) \equiv (x^1(p), \cdots, x^n(p)) \tag{1.21}$$

とする。p を通る曲線

$$\boldsymbol{x} \circ c_i(t) = (x_0^1, \cdots, x_0^i + t, \cdots, x_0^n) \tag{1.22}$$

に対して、接ベクトル $c_i'(0)$ を

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \tag{1.23}$$

で表すと、

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right\} \tag{1.24}$$

は接空間 T_pM の基底となる。

定義 1.6 (ベクトル場)**.** まず、

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM \tag{1.25}$$

とする。対応 $X : M \to TM$ が次の条件を満たすとき、X を M 上の**ベクトル場**という：

(i) 任意の $p \in M$ に対して、$X(p) = X_p \in T_pM$。
(ii) 任意の $f \in C^\infty(M)$ について、写像 $p \mapsto X_p(f)$ は C^∞ 写像。

以後、M 上のベクトル場全体を $\mathfrak{X}(M)$ と書く。

注 1.3 (ベクトル場の局所座標表示)**.** ベクトル場 X を p の座標近傍 $(U, x^1, \cdots, x^n)$ に制限すると

$$X_p = \sum X^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \; X^i \in C^\infty(U) \tag{1.26}$$

と表すことができる。上の定義 (ii) は、X^i が C^∞ であることを言っている。もう 1 つの近傍を $(V, y^1, \cdots, y^n)$ とすると、

$$X_p = \sum Y^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p \tag{1.27}$$

と書けるが、$y^i(p) = y^i(x^1(p), \cdots, x^n(p))$ と書けることから、(1.26) を書き直すと

$$X_p = \sum X^i(p) \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p \tag{1.28}$$

となるので、(1.27) と比較して

$$Y^i = \sum X^j(p) \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \tag{1.29}$$

である。

定義 1.7 (交換子積)**.** $X, Y \in \mathfrak{X}(M),\ f \in C^\infty(M)$ に対して

$$[X, Y]_p(f) \equiv X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) \tag{1.30}$$

とすれば、$[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ であることが分かる。これを**交換子積**という。

注 1.4. $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ であることは

$$\begin{aligned}
[X, Y]_p(f) &= X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) \\
&= X_p\left(\sum Y^i \frac{\partial f}{\partial y^i}\right) - Y_p\left(\sum X^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum \left[X_j(p)\left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial y^i} + Y^i(p)\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial y^i}\right)\right] - Y^i(p)\left(\frac{\partial X^j}{\partial y^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + X^j(p)\frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial x^j}\right) \\
&= \sum \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p f
\end{aligned} \tag{1.31}$$

ということから分かる。交換子積じゃないと、2 階微分が相殺しない。

命題 1.1. $a, b \in \mathbb{R},\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ とするとき

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \tag{1.32}$$

$$[X, Y] + [Y, X] = 0 \tag{1.33}$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \tag{1.34}$$

が成立する。特に最後の等式は、ヤコビ恒等式といわれる。

証明. (更新中) ■

定義 1.8. ベクトル場 X について、任意の $p \in M$ に対して p を通る曲線 $c_p : \mathbb{R} \to M$ で

$$c_p(0) = p,\ c_p'(t) = X_{c_p(t)},\ t \in \mathbb{R} \tag{1.35}$$

となるものが存在するとき、X は**完備である**という。

また、この曲線 c_p を X の**積分曲線**という。

$t \in \mathbb{R}$ に対して、写像

$$\varphi_t : M \ni p \mapsto c_p(t) \in M \tag{1.36}$$

は M の微分同相写像を定め、

$$\varphi_s \circ \varphi_t(p) = \varphi_{s+t}(p) \tag{1.37}$$

である[*3]。ここで、$\{\varphi_t \in M | t \in \mathbb{R}\}$ は X によって生成された M 上の **1 パラメター変換群**とよばれ、$\{\varphi_t(p) | t \in \mathbb{R}\}$ を p を通る**軌道**という。

定義 1.9 (微分、余接空間)**.** $p \in M$ における接ベクトル空間 T_pM に対して、p の近傍で定義された C^∞ 関数 f は線形形式

$$(\mathrm{d}f)_p : T_pM \ni X \mapsto X(f) \in \mathbb{R} \tag{1.38}$$

を定める。これを p における f の**微分**という。これは T_pM も双対ベクトル空間 T_pM^* の元である。この T_pM^* を p における余接空間といい、その基底を座標近傍系では $(\mathrm{d}x^1)_p, \cdots, (\mathrm{d}x^n)_p$ と書くことにする。

定義 1.10 (1-形式)**.** まず、

$$TM^* = \bigcup_{p \in M} T_pM^* \tag{1.39}$$

とおく。対応 $\alpha : M \mapsto TM^*$ が

(i) 任意の $p \in M$ に対して、$\alpha(p) = \alpha_p \in T_pM^*$
(ii) 任意の $X \in \mathfrak{X}$ に対して、$\alpha(X)(p) = \alpha_p(X_p)$ で定義される M 上の関数が C^∞ である。

という 2 つの条件を満たすとき、M 上の **1-形式**という。

[*3] この関係を示すには、常微分方程式論の考えが必要である。詳しい証明はともかく、説明が欲しいなら [1] を参照のこと。

参考文献

[1] M. Nakahara, *Geometry, Topology, and Physics*. Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics Publishing, Bristol ; Philadelphia, 2nd ed ed., 2003.

[2] 茂木勇・伊藤光弘, **復刊 微分幾何学とゲージ理論**. 共立出版, reprint ed., 2001.