**第 1 問**

以下の設問に答えよ。解答の際，ガウスの積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2+ipx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{p^2}{2a}}$$

を用いてよい。公式中で，$a>0$, $p$ は実数，i は虚数単位である。

1. 誤差関数

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x d\xi\, e^{-\xi^2}$$

について以下の小問に答えよ。

(i) $x=0$ の周りのテイラー展開（マクローリン展開）を与えよ。

(ii) $x=\infty$ の周りで漸近展開すると，最初の 2 項は次のように与えられることを示せ。ヒント: $\xi^2=\eta$ のように積分変数を変更し，部分積分を用いて求めよ。

$$\mathrm{erf}(x) \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}x} e^{-x^2} + (\text{高次の項})$$

2. 偏微分方程式

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -c\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

を時刻 $t=0$ における初期条件 $u(x,t)|_{t=0}=U(x)$ のもとで，領域 $t\geq 0$, $-\infty<x<\infty$ で解く。パラメータの定義域は $c>0$, $\lambda\geq 0$ とする。

(i) $\lambda=0$ の場合の解を求めよ。ただし，$U(x)$ は任意の微分可能な関数とする。

以下の小問では $\lambda>0$ の場合を考える。

(ii) $u(x,t)$ の $x$ に関するフーリエ変換を

$$\tilde{u}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\mathrm{i}kx}\, u(x,t)$$

と定義する。$\tilde{u}(k,t)$ が満たす微分方程式と初期条件を求めよ。

(iii) $U(x)=\delta(x)$ とするときの解 $u(x,t)$ を $G(x,t)$ と書く。ここで $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。$x$ に関するフーリエ逆変換を用いて $G(x,t)$ を求めよ。

(iv) $U(x)$ が

$$U(x) = \begin{cases} 1 & x<0 \\ 0 & x\geq 0 \end{cases}$$

のように与えられた場合の偏微分方程式の解を誤差関数を用いて書き表せ。また時刻 $t$ の経過とともに $u(x,t)$ の概形がどのように変化するのか説明せよ。

**第 2 問**

$d$ を $d \geq 2$ の自然数とし，$d \times d$ 行列 $X, Z$ を次のように定義する。

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & w^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & w^{d-1} \end{pmatrix}$$

ここで，$w = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{d}}$ である。ただし，$\mathrm{i}$ を虚数単位とする。すなわち，$X$ は，その $j$ 行 $j-1$ 列成分が $X_{j,j-1} = 1$ $(j = 2, 3, \cdots, d)$ および 1 行 $d$ 列成分が $X_{1,d} = 1$ で与えられ，これら以外の行列成分がすべて 0 の行列である。また，$Z$ はその対角成分が $Z_{j,j} = w^{j-1}$ $(j = 1, 2, \cdots, d)$ で与えられ，非対角成分がすべて 0 の行列である。

さらに，$n, m = 0, 1, \cdots, d-1$ について，次の行列

$$U^{(n,m)} = X^n Z^m = \underbrace{X \cdots X}_{n\text{ 個}} \underbrace{Z \cdots Z}_{m\text{ 個}}$$

を定義する。

また，複素 $d$ 次元空間の二つの複素列ベクトル $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}$ と $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$ の内積 $\langle u, v \rangle$ は，$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{d} u_i^* v_i$ で与えられる。ただし，$*$ は複素共役を表す。

以下の設問に答えよ。解答を導く計算過程も解答用紙に記述すること。

1. $Z$ のトレースが 0 となることを示せ。

2. $XZ$ と $ZX$ の間には，$c$ を複素数として，$ZX = cXZ$ の関係が成り立つ。このときの $c$ の値を求めよ。

3. $U^{(1,m)} = XZ^m$ と同時対角化可能な行列 $U^{(n',m')}$ の $n', m'$ が満たすべき条件を求めよ。

4. $U^{(1,m)}$ の固有値をすべて求めよ。

以下の設問では，$d = 3$ の場合について考える。

5. $U^{(1,m)}$ の正規化した固有列ベクトルを $e_j^{(m)} (j = 1, 2, 3)$ とする。$e_j^{(m)}$ を求めよ。

6. 任意の $m, m' = 0, 1, 2$ (ただし $m' \neq m$) と任意の $j, j' = 1, 2, 3$ に対して $|\langle e_j^{(m)}, e_{j'}^{(m')} \rangle|^2 = \frac{1}{3}$ が成り立つことを示せ。