高次元時空モデルと素粒子標準模型

宮根 一樹

2024 年 3 月

概要

これは数物セミナー素粒子グループでのリレーセミナーの資料になります。私が現在所属している研究室[*1]は、4 次元よりも大きい次元の時空を仮定する高次元時空モデルから素粒子標準模型を再現することを目標とした研究を主にしています。そこで、ここでは高次元時空モデルからどのようにして統一理論の見通しがつくのかについて、議論したいと思います。そのため、今回はほとんどが古典論の議論となるので、聞く分には量子論の知識はいらないと思います。

目次

[*1] 早稲田大学の安倍研究室といいます。ホームページはこちらです。

1　はじめに

2 高次元の場の理論とコンパクト化

この章では、$4+n$ 次元の (Einstein-Hilbert) 作用がコンパクト化によって、4 次元では、一般相対論と Yang-Mills 理論になることを見ていこうと思います。

2.1 コンパクト化

まずは単純に 5 次元の時空を考えることにします。その座標は z^M で、$M=0,1,2,3,4$ という値をとります。また、時空はミンコフスキーで計量は

$$\eta_{MN} = \mathrm{diag}(-,+,+,+,+) \tag{2.1}$$

です。この時空上の場の理論は、たとえば実スカラー場 $\phi(z)$ なら

$$S = \int \mathrm{d}^5 z\, \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g^{MN}\partial_M\phi\partial_N\phi\right) \tag{2.2}$$

のように 4 次元の理論と同じように議論することができます。

ここで、5 番目の座標 z_4 が半径 a の円周になったとしましょう。円周 S^1 となったときは $\theta\in[0,2\pi)$ でパラメトライズするのが便利なので、以後は無次元のパラメターで $z_4(\theta)$ と書けるとします。さらに

$$\mathrm{d}z_4 = a\mathrm{d}\theta \tag{2.3}$$

という関係が成立するとすれば、$\mathrm{d}z_4^2 = a^2\mathrm{d}\theta^2$ より

$$g_{\theta\theta} = a^2。 \tag{2.4}$$

上述のように、余剰空間に境界条件を課すことを「コンパクト化」といいます。ここで、5 次元のミンコフスキー時空 M_5 がコンパクト化によって時空が 4 次元ミンコフスキーと円周の直積 $M_4\times S^1$ になるとすれば、その計量は

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

です[*2]。

このような時空の上で、実スカラー場 $\phi(z)$ の理論を考えてみましょう。今、θ 方向は円周 S^1 にコンパクト化されていることから、$\phi(z)$ はフーリエ級数展開できます：

$$\phi(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_k \tilde{\phi}_k(x)e^{ik\theta}。 \tag{2.6}$$

これを 5 次元の実スカラー場の作用 (2.2) に代入すれば

$$S = \int \mathrm{d}^4 x\, \sqrt{-g_4}a\mathcal{L}_4,\ \mathcal{L}_4 = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0 - \sum_{n\geq 1}\left(\partial_\mu\phi_n^*\partial^\mu\phi_n + M_n^2\phi_n^*\phi_n\right) \tag{2.7}$$

---

*2 ただし、$g_{\mu\theta}=g_{\theta\mu}=0$ と 4 次元の部分と 1 次元の部分が完全に分離できているのは仮定です。

となります。これが 4 次元の有効作用となるわけですが、5 次元の理論では現れなかった質量項 $M_n^2\phi_n^*\phi_n$ が現れており、場 ϕ_n の質量は

$$M_n = \frac{|n|}{a} \tag{2.8}$$

です。ここで、もし a の値が十分に小さければ、励起される粒子の質量が非常に大きいことになり、十分なエネルギーがなければ $n = 1$ より大きいモードの粒子は生成されないことになります。

次は、マクスウェル理論を見てみましょう。ベクトル場 $A_M(z)$ も先ほどのスカラー場のように 5 番目の座標の周期境界条件によってフーリエ級数展開できるので

$$A_M(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_k A_M^{(k)}(x)e^{ik\theta} \tag{2.9}$$

となります。

付録 A　標準模型の復習

夜ゼミの雰囲気が分かりませんが、もしかしたらと思って書いておきます[*3]。

A.1　Yang-Mills 理論

[*3] 夜ゼミがどんな感じかわかりませんが、真面目すぎたり簡単すぎたりしたらボツにします (笑)