Spontaneous R-symmetry breaking in O'Raifeartaigh models

David Shih.

JHEP 02 (2008) 091, arXiv:hep-th/0703196.

安倍研 M1 宮根一樹

2024 6/20 (木)

[2] A. E. Nelson and N. Seiberg, Nucl. Phys. B 416 (1994) 46-62.

読んだ動機など

「現在行っているモジュライ固定の研究に、R 対称性の観点から何か言えるかもしれない」

というお話があった。

これは、1994 年に Nelson と Seiberg が主張したこと [2] で以下の通り：

「R 対称性が破れている」 $\Longrightarrow$ 「超対称が自発的に破れている」

Nuclear Physics B416 (1994) 46–62
North-Holland

NUCLEAR PHYSICS B

R-symmetry breaking versus supersymmetry breaking

Ann E. Nelson
Department of Physics 0319, University of California, San Diego, 9500 Gilman Drive, La Jolla, CA 92093-0319, USA

Nathan Seiberg
Department of Physics and Astronomy, Rutgers University, Piscataway, NJ 08855-0849, USA

Received 24 September 1993
Accepted for publication 19 November 1993

(安倍研の Activity で紹介したものです。)

[1] D. Shih, JHEP 02 (2008) 091

「R 対称性の破れ」 $\Longrightarrow$ 「超対称の破れ」

先ほど紹介した論文に関連して、以下の論文を読む [1]。

Spontaneous R-symmetry breaking in O'Raifeartaigh models

David Shih (Harvard U., Phys. Dept.)
Mar, 2007

19 pages
Published in: *JHEP* 02 (2008) 091
e-Print: hep-th/0703196 [hep-th]
DOI: 10.1088/1126-6708/2008/02/091
View in: AMS MathSciNet, ADS Abstract Service

pdf　cite　claim　reference search　185 citations

論文の概要

- Nelson & Seiberg によれば、SUSY を破るためには、(R 対称性を理論がもっているなら) R 対称性を破るとよいことが分かる。
- この論文では、モデルの摂動ダイナミクス自体 (量子補正) で R 対称性を破ることを考える。
- また、R 電荷に条件がつくことが分かる。

イントロダクション

自発的対称性の破れ

$\boldsymbol{n}$ 個の場 $\boldsymbol{\Phi_i(x)}$ が作るポテンシャル $\boldsymbol{V(\Phi_1, \cdots, \Phi_n)}$ の極小値に興味がある。
その極小な点 (準安定点) を真空 $\langle \boldsymbol{\Phi_i} \rangle$ といい、その真空からの揺らぎ $\boldsymbol{\tilde{\Phi}_i}$ を考える。

$$\boldsymbol{\Phi_i} = \langle \boldsymbol{\Phi_i} \rangle + \boldsymbol{\tilde{\Phi}_i}$$

この揺らぎに対してのポテンシャル $\boldsymbol{\tilde{V}}$ は、元のポテンシャル $\boldsymbol{V}$ の対称性を保っているとは限らない。

$$\boldsymbol{\tilde{V}(\tilde{\Phi}_i) = V(\langle \Phi_i \rangle + \tilde{\Phi}_i)}$$

$\longrightarrow$「対称性が自発的に破れている」という。

自発的対称性の破れ

n 個の場 $\Phi_i(x)$ が作るポテンシャル $V(\Phi_1, \cdots, \Phi_n)$ の極小値に興味がある。
その極小な点 (準安定点) を真空 $\langle\Phi_i\rangle$ といい、その真空からの揺らぎ $\tilde{\Phi}_i$ を考える。

$$\Phi_i = \langle\Phi_i\rangle + \tilde{\Phi}_i$$

この揺らぎに対してのポテンシャル $\tilde{V}$ は、元のポテンシャル V の対称性を保っているとは限らない。

$$\tilde{V}(\tilde{\Phi}_i) = V(\langle\Phi_i\rangle + \tilde{\Phi}_i)$$

$\longrightarrow$「対称性が自発的に破れている」という。

もし、場の真空期待値が 0 (i.e. $\langle\Phi_i\rangle = 0$) なら、(tree level では) 対称性は保たれる。

$$\tilde{V}(\tilde{\Phi}_i) = V(\langle\Phi_i\rangle + \tilde{\Phi}_i)。$$

超対称性

カイラル多重項 $\boldsymbol{\Phi} = \{\phi, \psi, F\}$。この多重項に含まれている粒子の間を

$$\xi Q\phi = \sqrt{2}\xi\psi\ , \quad \xi Q\psi = i\sqrt{2}\sigma^{\mu}\bar{\xi}\partial_{\mu}\phi + \sqrt{2}\xi F\ , \quad \xi QF = i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi$$

のように変換するのが、(無限小) 超対称変換。
この変換で不変な理論のことを超対称な理論と言う。

また、超対称性を考えるときに、反可換な座標 θ を用いた超場形式を用いると、ミンコフスキー時空とグラスマン座標 θ を合わせた超空間 $(x^{\mu}, \theta, \bar{\theta})$ が超対称変換の表現空間となっている。

$$\begin{aligned}\Phi = \phi(x) + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\phi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}\partial^{2}\phi(x) \\ + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\theta} + \theta\theta F(x)\end{aligned}$$

$$Q_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} - i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}$$

カイラル超場

$$\Phi = \phi(x) + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\phi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}\partial^{2}\phi(x)$$
$$+\sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\theta} + \theta\theta F(x)$$

超場によって構成される以下のポテンシャルを考えると超対称な理論が得られる。

- W：超ポテンシャル $\to$ 超場の正則な関数で書かれたもの。
- K：ケーラーポテンシャル $\to$ 実超場によって書かれたもの。

ラグランジアンは W, K に含まれているグラスマン座標を積分して取り除くことで得られる。

$$\mathcal{L} = \int \mathrm{d}^{4}\theta\ K(\Phi, \Phi^{\dagger}) + \left[\int \mathrm{d}^{2}\theta\ W(\Phi) + \text{h.c.}\right]$$

この方法で得られたラグランジアンで、運動項を除いた項をポテンシャルとして扱う。

今回考える理論 (O'Raifeartaigh 模型)

次の理論を考える。

$$\begin{cases} \boldsymbol{W = fX + \frac{1}{2}(M_{ij} + XN_{ij})\phi_i\phi_j} \\ \boldsymbol{K = X^\dagger X + \phi_i^\dagger \phi_i} \end{cases}$$

ただし、$\boldsymbol{X}, \phi_i$ はいずれもカイラル超場。

この理論が次の変換で不変であることを仮定する (R 対称性)

$$\boldsymbol{X \to e^{2i\alpha}X\,, \quad W \to e^{2i\alpha}W}$$

(上の仮定から $\phi_i \to e^{iq_i\alpha}\phi_i$ と変換したときの q_i が決まってくる。が、後で。)

この理論の真空は

$$\boldsymbol{V_0 = f^2\,, \quad \langle\phi_i\rangle = 0\,, \quad \langle X\rangle =} \text{ 任意の定数}$$

$\boldsymbol{X}$ の真空期待値は任意 (擬モジュライ) なので、$\langle \boldsymbol{X}\rangle = \boldsymbol{0}$ とすれば R 対称性は保たれてしまう。(c.f. $\langle\boldsymbol{\Phi}_i\rangle = \boldsymbol{0}$ なら $\boldsymbol{\tilde{V}(\tilde{\Phi}_i) = V(\langle\Phi_i\rangle + \tilde{\Phi}_i)}$。)

今回の論文の目的

したがって、場 $\boldsymbol{X}$ についてはポテンシャルが立ち上がらない。

$$\boldsymbol{V(X) = V_0 + m_X^2 |X|^2 + \mathcal{O}(|X|^4)}$$

今回の論文の目的

したがって、場 $\boldsymbol{X}$ についてはポテンシャルが立ち上がらない。

$$V(X) = V_0 + m_X^2 |X|^2 + \mathcal{O}(|X|^4)$$

そこで、今回は

量子補正 (Coleman-Weinberg ポテンシャル) で m_X^2 を計算

$$\Downarrow$$

R 対称性を自発的に破る

ことを考える。

- R 対称性が自発的に破れるためには、m_X^2 の符号が負であることが必要
  $\longrightarrow$ ϕ_i の R 電荷 q_i に条件がつく。
- 論文では、$|X|^4$ の係数が計算されていなかった。
  具体例のときに、正であることは確認。が、一般にそうなっている？

本論

超対称性の破れ

今回考える理論。

$$\boldsymbol{W = fX + \frac{1}{2}(M_{ij} + XN_{ij})\phi_i\phi_j}$$

$\boldsymbol{M, N}$ は複素対称行列。$\mathbf{det}\, \boldsymbol{M \neq 0}$、$\boldsymbol{f > 0}$ を仮定。

また、$\boldsymbol{M}$ を次の形で書く。$\boldsymbol{M_i}$ は R 電荷が $\boldsymbol{q_i}$ の場の質量行列。(R 電荷の順番で添え字を割り振るので、下の R 電荷に対する条件と照らし合わせて上のような形になる。(♣))

$$\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} & & & & M_1 \\ & & & M_2 & \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & & \\ & M_2^T & & & \\ M_1^T & & & & \end{pmatrix}}$$

R 対称性を課すと、R 電荷に条件がつく。

$$\boldsymbol{M_{ij} \neq 0 \implies R(\phi_i) + R(\phi_j) = 2\,, \quad N_{ij} \neq 0 \implies R(\phi_i) + R(\phi_j) = 0}$$

$\boldsymbol{F}$-term の SUSY 条件は

$$\frac{\partial W}{\partial \phi_i} = 0 \implies (M_{ij} + XN_{ij})\phi_j = 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

方程式を満たす $\langle \phi_i \rangle$ $(\neq 0)$ が存在するかどうか $\rightarrow$ $\det(M + XN)$ を計算

(c.f. $\det \exp A = \exp \mathrm{tr}\, A$)

$$\begin{aligned} \det(M + XN) &= \exp\left[\mathrm{Tr}\ln\left(1 + XM^{-1}N\right)\right]\det M \\ &= \exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-X)^k}{k}\,\mathrm{Tr}\left(M^{-1}N\right)^k\right]\det M \\ &= \det M \neq 0 \end{aligned}$$

最後の等式はR 電荷の条件から $M^{-1}N$ が 0 となることを用いている。

$$\left(M_{ij} \neq 0 \implies R(\phi_i) + R(\phi_j) = 2\,, \quad N_{ij} \neq 0 \implies R(\phi_i) + R(\phi_j) = 0\right)$$

$$\Downarrow$$

よって、非自明な超対称性を破る真空は存在しない。

m_X^2 の計算

Coleman-Weinberg ポテンシャルを展開して、$|X|^2$ の係数を探る。

$$V_{\text{eff}}^{(1)} = \frac{1}{64\pi^2}\,\mathrm{Tr}(-1)^F \mathcal{M}^4 \ln\frac{\mathcal{M}^2}{\Lambda^2}$$

$\mathrm{Tr}(-1)^F$ は超トレース。$\mathcal{M}$ は、スカラーかフェルミオンの質量行列で

$$\mathcal{M}_B^2 = \begin{pmatrix} W^\dagger_{ik}W^{kj} & W^\dagger_{ijk}W^k \\ W^{ijk}W^\dagger_k & W^{ik}W^\dagger_{kj} \end{pmatrix} = (\hat{M} + X\hat{N})^2 + f\hat{N}$$

$$\mathcal{M}_F^2 = \begin{pmatrix} W^\dagger_{ik}W^{kj} & 0 \\ 0 & W^{ik}W^\dagger_{kj} \end{pmatrix} = (\hat{M} + X\hat{N})^2$$

ただし、$W_i \equiv \partial W/\partial\phi_i$ で

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M^\dagger \\ M & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{N} = \begin{pmatrix} 0 & N^\dagger \\ N & 0 \end{pmatrix}$$

ここで、ポテンシャルの公式を書き換える。

$$\frac{1}{64\pi^2}\,\mathrm{Tr}(-1)^F \mathcal{M}^4 \ln\frac{\mathcal{M}^2}{\Lambda^2} = -\frac{1}{32\pi^2}\,\mathrm{Tr}\int_0^\Lambda \mathrm{d}v\, v^5 \left(\frac{1}{v^2+\mathcal{M}_B^2} - \frac{1}{v^2+\mathcal{M}_F^2}\right)$$

積分の部分は以下のようになっている。

$$\int \mathrm{d}v\, \frac{v^5}{v^2+\mathcal{M}^2} = -\frac{1}{2}\mathcal{M}^2 v^2 + \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{2}\mathcal{M}^4 \ln(\mathcal{M}^2+v^2)$$

あとは $\ln\Lambda^2$ で発散する項をみて

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}\mathcal{M}^4\ln(\mathcal{M}^2+v^2)\right]_0^\Lambda &= \frac{1}{2}\mathcal{M}^4\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\mathcal{M}^2}\right) \\ &\sim -\frac{1}{2}\mathcal{M}^4\ln\frac{\mathcal{M}^2}{\Lambda^2}\end{aligned}$$

こんな感じなのではないかと思います。

分母に X がいるので、これについて展開 $\to$ 2 次の係数を拾ってそれを m_X^2 とする。

$$
\begin{aligned}
\int_0^\Lambda \mathrm{d}v\, \frac{v^5}{v^2+\mathcal{M}_B^2} &= \int_0^\Lambda \mathrm{d}v\, \frac{v^5}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}+\{\hat{M},\hat{N}\}X+\hat{N}^2X^2} \\
&\to \int_0^\Lambda \mathrm{d}v\, \frac{v^5}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}} \left\{ -\frac{1}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}}\hat{N}^2 \right. \\
&\qquad \left. +\frac{1}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}}\{\hat{M},\hat{N}\}\frac{1}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}}\{\hat{M},\hat{N}\} \right\} X^2
\end{aligned}
$$

ここで、部分積分をすると、m_X^2 への寄与は

$$
\frac{1}{16\pi^2}\,\mathrm{Tr}\int_0^\Lambda \mathrm{d}v\, \frac{v^3}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}} \left(\hat{N}^2 - \frac{1}{2}\{\hat{M},\hat{N}\}\frac{1}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}}\{\hat{M},\hat{N}\} \right)
$$

フェルミオンの寄与も同様に計算する。すると、最終的に

$$
\begin{aligned}
m_X^2 = \frac{1}{16\pi^2}\,\mathrm{Tr}\int_0^\Lambda \mathrm{d}v \\
\times \Bigg[\frac{v^3}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}} \left(\hat{N}^2 - \frac{1}{2}\{\hat{M},\hat{N}\}\frac{1}{v^2+\hat{M}^2+f\hat{N}}\{\hat{M},\hat{N}\} \right) \\
- \frac{v^3}{v^2+\hat{M}^2} \left(\hat{N}^2 - \frac{1}{2}\{\hat{M},\hat{N}\}\frac{1}{v^2+\hat{M}^2}\{\hat{M},\hat{N}\} \right) \Bigg]。
\end{aligned}
$$

ここで、次のような関数を用意する。

$$\boldsymbol{\mathcal{F}(v) \equiv \left(v^2 + \hat{M}^2\right)^{-1} \cdot f\hat{N}}$$

これを用いれば、$\boldsymbol{m_X^2}$ は次のように書ける。

$$\boldsymbol{m_X^2 = \frac{1}{16\pi^2 f^2} \int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^3\, \mathrm{Tr}\left[\frac{\mathcal{F}(v)^4}{1-\mathcal{F}(v)^2} v^2 - 2\left(\frac{\mathcal{F}(v)^2}{1-\mathcal{F}(v)^2}\hat{M}\right)^2\right]} \qquad \heartsuit$$

式の形をみて、

$$\boldsymbol{M_1^2 = \frac{1}{16\pi^2 f^2} \int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^5\, \mathrm{Tr}\left[\frac{\mathcal{F}(v)^4}{1-\mathcal{F}(v)^2}\right]}$$

$$\boldsymbol{M_2^2 = \frac{1}{8\pi^2 f^2} \int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^3\, \mathrm{Tr}\left[\left(\frac{\mathcal{F}(v)^2}{1-\mathcal{F}(v)^2}\hat{M}\right)^2\right]}$$

$$\boldsymbol{m_X^2 = M_1^2 - M_2^2}$$

としておく。これで、$\boldsymbol{m_X^2}$ に関する公式が得られたことになる。Appendix で具体的なモデルに対してこの公式を適用している。

m_X^2 と R 電荷の関係

ここでは、この公式と R 電荷との関係を見てみる。

$$m_X^2 = M_1^2 - M_2^2$$

$$M_2^2 = \frac{1}{8\pi^2 f}\int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^3\, \mathrm{Tr}\left[\left(\frac{\mathcal{F}(v)^2}{1-\mathcal{F}(v)^2}\hat{M}\right)^2\right]$$

分かることは

もし、全ての場 ϕ_i の R 電荷が 0 か 2

$$\Downarrow$$

$M_2^2 = 0$ となって $m_X^2 = M_1^2 > 0$ となる。

したがって、

量子補正で $\langle X\rangle \neq 0$ としたいのであれば

R 電荷が 0 か 2 以外の場の存在が必要。

超ポテンシャル

$$W = fX + \frac{1}{2}(M_{ij} + XN_{ij})\phi_i\phi_j$$

ここで、ϕ_i の R 電荷が 0 か 2 ならば、質量行列は次のようになる。

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_{02} \\ M_{02}^T & 0 \end{pmatrix} , \quad N = \begin{pmatrix} N_{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

すると、

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & M_{02}^* \\ 0 & 0 & M_{02}^\dagger & 0 \\ 0 & M_{02} & 0 & 0 \\ M_{02}^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \hat{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & N_{00}^\dagger & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\mathcal{F}(v) = (v^2 + \hat{M}^2)^{-1} f \hat{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{F}_{00}^\dagger & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{F}_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

したがって

$$M_1^2 = \frac{1}{16\pi^2 f} \int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^5\, \mathrm{Tr}\left[\frac{\mathcal{F}(v)^4}{1-\mathcal{F}(v)^2}\right]$$

$$M_2^2 = \frac{1}{8\pi^2 f} \int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^3\, \mathrm{Tr}\left[\left(\frac{\mathcal{F}(v)^2}{1-\mathcal{F}(v)^2}\hat{M}\right)^2\right]$$

に先ほどの結果を代入すると

$$\frac{\mathcal{F}(v)^4}{1-\mathcal{F}(v)^2} = 2\frac{\left(\mathcal{F}_{00}^\dagger \mathcal{F}_{00}\right)^2}{1-\mathcal{F}_{00}^\dagger \mathcal{F}_{00}} > 0$$

$$\left(\frac{\mathcal{F}(v)^2}{1-\mathcal{F}(v)^2}\hat{M}\right)^2 = 0$$

となって、$m_X^2 = M_1^2 > 0$ が示されたことになる。

簡単な模型での計算

以上の視点で、簡単な模型を考察する。

$$\boldsymbol{W = \lambda X \phi_1 \phi_2 + m_1 \phi_1 \phi_3 + \frac{1}{2} m_2^2 \phi_2^2 + f X}$$

「R 電荷が 0 と 2 のものを含まない模型」という意味で一番シンプル。

$$\boldsymbol{R(X) = 2\,, \quad R(\phi_1) = -1\,, \quad R(\phi_2) = 1\,, \quad R(\phi_3) = 3}$$

ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= \boldsymbol{\bar{F}^X F^X + \bar{F}^{\phi_1} F^{\phi_1} + \bar{F}^{\phi_2} F^{\phi_2} + \bar{F}^{\phi_3} F^{\phi_3}} \\ &= \boldsymbol{|\lambda X \phi_2 + m_1 \phi_3|^2 + |\lambda X \phi_1 + m_2 \phi_2|^2 + |m_1 \phi_1|^2 + |\lambda \phi_1 \phi_2 + f|^2} \end{aligned}$$

(ここで、カイラル超場 $\boldsymbol{\Phi(= \phi_i}$ or $\boldsymbol{X)}$ のスカラーを同じ記号 $\boldsymbol{\Phi}$ で書いている。)

次の記述が分かりませんでした。

In addition, there is runaway behavior as $\phi_3 \to \infty$

$$X = \left(\frac{m_1^2 m_2 \phi_3^2}{\lambda^2 f}\right)^{1/3}, \qquad \phi_1 = \left(\frac{f^2 m_2}{\lambda^2 m_1 \phi_3}\right)^{1/3}, \qquad \phi_2 = \left(\frac{f m_1 \phi_3}{\lambda m_2}\right)^{1/3}, \qquad \phi_3 \to \infty \tag{3.4}$$

As a check, note that the scaling exhibited in (3.4) is consistent with the R-symmetry.

一応、ポテンシャルを微分すると以下。

$$\begin{cases} V_X = \lambda\phi_2(\lambda\bar{X}\bar{\phi}_2 + m_1\bar{\phi}_3) + \lambda\phi_1(\lambda\bar{X}\bar{\phi}_1 + m_2\bar{\phi}_2) \\ V_{\phi_1} = \lambda\phi_2(\lambda\bar{\phi}_1\bar{\phi}_2 + f) + \lambda X(\lambda\bar{X}\bar{\phi}_1 + m_2\bar{\phi}_2) + m_1^2\bar{\phi}_1 \\ V_{\phi_2} = \lambda\phi_1(\lambda\bar{\phi}_1\bar{\phi}_2 + f) + \lambda\bar{X}(\lambda\bar{X}\bar{\phi}_2 + m_1\bar{\phi}_3) + m_2(\lambda\bar{X}\bar{\phi}_1 + m_2\bar{\phi}_2) \\ V_{\phi_3} = m_1(\lambda\bar{X}\bar{\phi}_2 + m_1\bar{\phi}_3) \end{cases}$$

続き

The runaway behavior at large fields implies that the pseudo-moduli space is not an absolute minimum of the potential. However, as long as

$$|X| < \frac{m_1}{\lambda}\frac{1-y^2}{2y} \tag{3.5}$$

the pseudo-moduli space is a local minimum of the potential. Here we have defined

$$y = \frac{\lambda f}{m_1 m_2} \tag{3.6}$$

For $|X|$ larger than the bound, a linear combination of the ϕ_i fields becomes tachyonic, and the system can roll down classically into a runaway direction.

Note that for $y > 1$, the pseudo-moduli space is unstable for all X, while for $y < 1$ there is some neighborhood around $X = 0$ which is stable. The size of this neighborhood grows monotonically as $y \to 0$.

ここで定義された $\boldsymbol{y}$ は、$\boldsymbol{X}$ の安定性を表す指標になる。($\boldsymbol{y < 1}$ だと安定)

今回の質量行列などは以下の通り。

$$W = \lambda X\phi_1\phi_2 + m_1\phi_1\phi_3 + \frac{1}{2}m_2^2\phi_2^2 + fX \qquad \clubsuit$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_1 \\ 0 & m_2 & 0 \\ m_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これを $\mathcal{F}(v)$ を求め、M_1^2, M_2^2 を計算する。

$$\mathcal{F}(v) = \left(v^2 + \hat{M}^2\right)^{-1} \cdot f\hat{N}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & f\lambda/m_1^2 + v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f\lambda/m_2^2 + v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f\lambda/m_1^2 + v^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f\lambda/m_2^2 + v^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この $\mathcal{F}(v)$ から M_1^2, M_2^2 を計算して、先ほどの $y = \lambda f/m_1 m_2$ で展開する。

$$M_1^2 = \frac{m_1^2\lambda^2}{8\pi^2}\frac{-4r^2\ln r + r^4 - 1}{(r^2-1)^3}y^2 + \mathcal{O}(y^4)$$

$$M_2^2 = \frac{m_1^2\lambda^2}{4\pi^2}\frac{r^4\left\{(r^2+1)\ln r - r^2 + 1\right\}}{(r^2-1)^3}y^2 + \mathcal{O}(y^4)$$

よって

$$m_X^2 = -\frac{m_1^2\lambda^2 y^2}{8\pi^2}\frac{r^2\left\{2r^2(r^2+3)\ln r - (3r^4 - 2r^2 - 1)\right\}}{(r^2-1)^3} + \mathcal{O}(y^4)$$

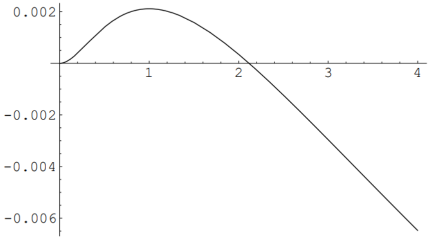


Figure 1: A plot of m_X^2 vs. $r = m_2/m_1$ in the small $y = \lambda f/m_1 m_2$ limit. We see that for $r > r_* \approx 2.11$, the mass-squared of X around the origin is negative, and the R-symmetry is spontaneously broken.

同様にして、X^4 の係数 λ_X も計算できて

$$\lambda_X^2 = \frac{3\lambda^4 y^2}{8\pi^2}\frac{r^2(12r^2(r^4+5r^2+2)\ln r - 19r^6 - 9r^4 + 27r^2 + 1)}{(r^2-1)^5}$$

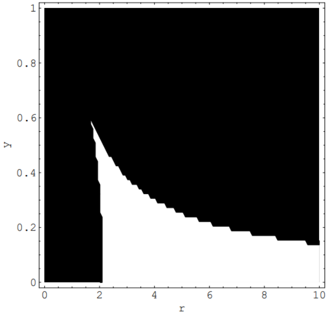
となり、これは $r > r_*$ で正の値をとる (らしい)。

したがって、$V = V_0 + m_X^2|X|^2 + (\lambda_X/4)X^4 + \mathcal{O}(X^6)$ で $m_X^2 < 0$ かつ $\lambda_X > 0$ なので、$\langle X\rangle \neq 0$ となる真空をもち、R 対称性が破れている。

他にもこの章では、

- r や y のパラメター領域の図示
- lifetime の計算

をしていた。



まとめ

まとめ

- R 対称性が自発的に破れない模型でも、量子補正で R 対称性を破ることができる場合がある。
- その観点では R 電荷が 0 か 2 ではないような場の存在が要求される。
- また、理論に現れる係数にも制限がつく。

その他

- $\boldsymbol{X^4}$ の係数の正負についての一般論はあるのか。
  例えば $\boldsymbol{m_X^2}$ のときと同じで、R 電荷について制限ができないか。
- 自分の研究の場合は、そもそもループ補正とかを考えていないので、今回の内容は直近では役に立たないのかなと思いました。

付録

目次

目次

オリジナルの Nelson & Seiberg の論文について

アブストラクト

We point out a connection between R-symmetry and supersymmetry breaking. We show that the existence of an R-symmetry is a necessary condition for supersymmetry breaking and a spontaneously broken R-symmetry is a sufficient condition provided two conditions are satisfied. These conditions are: genericity, i.e. the effective lagrangian is a generic lagrangian consistent with the symmetries of the theory (no fine tuning), and calculability, i.e. the low-energy theory can be described by a supersymmetric Wess–Zumino effective lagrangian without gauge fields. All known models of dynamical supersymmetry breaking possess such a spontaneously broken R-symmetry and therefore contain a potentially troublesome axion. However, we use the fact that genericity is *not* a feature of supersymmetric theories, even when non-perturbative renormalization is included, to show that the R-symmetry can in many cases be explicitly broken without restoring supersymmetry and so the axion can be given an acceptably large mass.

「R 対称性の破れ」 $\Longrightarrow$ 「超対称の破れ」

「超対称の破れ」 $\Longrightarrow$ 「R 対称性の存在」

この例については？

[2] A. E. Nelson and N. Seiberg, Nucl. Phys. B 416 (1994) 46-62.
[3] 大河内豊, 超対称性の破れ：場の理論から弦理論まで, SGC ライブラリ。

(3) *Generic superpotential, exact R-symmetry, broken supersymmetry*. This is the O'Raifeartaigh model with the superpotential

$$\mu^2 S + SQ^2 + mPQ, \tag{2.11}$$

which is the most general renormalizable superpotential consistent with an R-symmetry and a $\mathbb{Z}_2$ symmetry. All ground states break supersymmetry. The ground state with $S = 0$ does not spontaneously break the R-symmetry. The R-symmetry guarantees that the addition of generic nonrenormalizable terms consistent with the symmetries will not restore supersymmetry.

また、[3] にはこんな記述も。

となる．方程式の数が n 個あるが変数は $n-1$ 個なので，一般に解は存在しない．従って，R 対称性を保つ一般的な超ポテンシャルを持つモデルには，超対称性を保つ真空が存在しないことが結論される．その理論に真空があれば，それは超対称性を破る真空となることがわかる．

以下との関係は？

「R 対称性の破れ」 $\Longrightarrow$ 「超対称の破れ」

($\heartsuit$) の補足

最初の式

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{m_X^2} &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{2}}}\,\mathbf{Tr}\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{d}\boldsymbol{v} \\
&\quad\times\Bigg[\frac{\boldsymbol{v}^{\mathbf{3}}}{\boldsymbol{v}^{\mathbf{2}}+\hat{\boldsymbol{M}}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{f}\hat{\boldsymbol{N}}}\left(\hat{\boldsymbol{N}}^{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\{\hat{\boldsymbol{M}},\hat{\boldsymbol{N}}\}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{v}^{\mathbf{2}}+\hat{\boldsymbol{M}}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{f}\hat{\boldsymbol{N}}}\{\hat{\boldsymbol{M}},\hat{\boldsymbol{N}}\}\right) \\
&\qquad -\frac{\boldsymbol{v}^{\mathbf{3}}}{\boldsymbol{v}^{\mathbf{2}}+\hat{\boldsymbol{M}}^{\mathbf{2}}}\left(\hat{\boldsymbol{N}}^{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\{\hat{\boldsymbol{M}},\hat{\boldsymbol{N}}\}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{v}^{\mathbf{2}}+\hat{\boldsymbol{M}}^{\mathbf{2}}}\{\hat{\boldsymbol{M}},\hat{\boldsymbol{N}}\}\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

を見て、緑色のところを $\boldsymbol{f}$ で展開してみると、0 次の項は後ろのやつと打ち消す。

参考文献

[1] D. Shih, *Spontaneous R-symmetry breaking in O'Raifeartaigh models,* JHEP **02** (2008) 091, arXiv:hep-th/0703196.

[2] A. E. Nelson and N. Seiberg, *R symmetry breaking versus supersymmetry breaking,* Nucl. Phys. B **416** (1994) 46–62, arXiv:hep-ph/9309299.

[3] 大河内豊, **超対称性の破れ : 場の理論から弦理論まで**, 臨時別冊・数理科学 ; SGC ライブラリ ; 131. サイエンス社, 2017.1. `https://ndlsearch.ndl.go.jp/books/R100000002-I027963943`.