素粒子物理学 中間レポート

学生番号：5324A057-8　氏名：宮根 一樹

最終更新：2024 年 6 月 23 日

1. 与えられたラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^{\alpha}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m_f)_{\alpha}^{\ \beta}\psi_{\beta} + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\phi)^2 - \frac{1}{2}m_{\phi}^2\phi^2 + Y\phi\bar{\psi}\psi。 \tag{0.1}$$

ただし、α, β はガンマ行列 γ^{μ} の成分の添え字である。したがって、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}^{\xi}} = i(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m_f)_{\xi}^{\ \eta}\psi_{\eta}(x) + Y\phi(x)\psi_{\xi}(x)、\\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi}^{\xi})} = 0、\\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m_{\phi}^2\phi + Y\bar{\psi}\psi、\\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} = \partial^{\mu}\phi \end{cases} \tag{0.2}$$

となっているので、オイラー・ラグランジュ方程式から運動方程式

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m_f)_{\xi}^{\ \eta}\psi_{\eta}(x) = -Y\phi(x)\psi_{\xi}(x)、 \tag{0.3}$$
$$(\partial_{\mu}\partial^{\mu} + m_{\phi}^2)\phi(x) = Y\bar{\psi}^{\xi}(x)\psi_{\xi}(x) \tag{0.4}$$

が得られる。

2. $\gamma^{\mu}\partial_{\mu} = \gamma^0\partial_0 + \gamma^i\partial_i$ であることに注意して、運動方程式の項を整理すると

$$i\gamma^0\partial_0\psi(x) = (-i\gamma^i\partial_i + m_f - Y\phi)\psi(x) \tag{0.5}$$

となる。ただし、イタリックの添え字 i は空間方向の添え字 $i = 1, 2, 3$ である。ここで、両辺に左側から γ^0 をかけると、${\gamma^0}^2 = 1$ であるから

$$i\partial_0\psi = (\underline{-i\gamma^0\gamma^i\partial_i + \gamma^0 m_f}\,\underbrace{-\gamma^0 Y\phi(x)})\psi(x) \tag{0.6}$$

となる。したがって、下線の項を H_0、波線の項を $V(x)$ とすれば、

$$i\partial_0\psi = (H_0 + V(x))\psi(x) \tag{0.7}$$

であり、確かに $V(x) = -\gamma^0 V(x)$ となっている。

3. 図 0.1 の値を計算する。遷移振幅に具体的な表式を代入すると

$$\begin{aligned} iT_{\mathrm{FI}} &= -iY\int \mathrm{d}^4x\ \bar{\psi}_{\mathrm{F}}(x)\phi(x)\psi_{\mathrm{I}}(x) \\ &= iY\int \mathrm{d}^4x\ \bar{u}(\boldsymbol{q}_1, \tau_1)u(\boldsymbol{p}_1, \lambda_1)e^{-i(p_1-q_1)\cdot x} \times \phi(k)e^{-ik\cdot x} \end{aligned} \tag{0.8}$$

となる。ここで、クライン・ゴルドン方程式

$$(\partial^2 + m_\phi)\phi(x) = Y\bar{\psi}\psi \tag{0.9}$$

に展開式を代入すると

$$(-k^2 + m_\phi^2)\phi(k)e^{-ik\cdot x} = Y\bar{u}(\boldsymbol{q}_2, \tau_2)u(\boldsymbol{p}_2, \lambda_2) \times e^{-i(p_2 - q_2)\cdot x} \tag{0.10}$$

となるので、これを (0.8) に代入すれば

$$\begin{aligned} iT_{\mathrm{FI}} &= iY \int \mathrm{d}^4x\, \bar{u}(\boldsymbol{q}_1, \tau_1)u(\boldsymbol{p}_1, \lambda_1)\, \left.\frac{-Y}{k^2 - m_\phi^2}\right|_{k=p_1-q_1} \bar{u}(\boldsymbol{q}_2, \tau_2)u(\boldsymbol{p}_2, \lambda_2)e^{-i(p_1 - q_1 + p_2 - q_2)\cdot x} \\ &= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 - q_1 + p_2 - q_2) \\ &\qquad \times i(iY)^2\bar{u}(\boldsymbol{q}_1, \tau_1)u(\boldsymbol{p}_1, \lambda_1)\, \left.\frac{1}{k^2 - m_\phi^2}\right|_{k=p_1-q_1} \bar{u}(\boldsymbol{q}_2, \tau_2)u(\boldsymbol{p}_2, \lambda_2) \end{aligned} \tag{0.11}$$

となるので、

$$\mathcal{M} = (iY)^2\bar{u}(\boldsymbol{q}_1, \tau_1)u(\boldsymbol{p}_1, \lambda_1)\, \left.\frac{1}{k^2 - m_\phi^2}\right|_{k=p_1-q_1} \bar{u}(\boldsymbol{q}_2, \tau_2)u(\boldsymbol{p}_2, \lambda_2) \tag{0.12}$$

である[*1]。

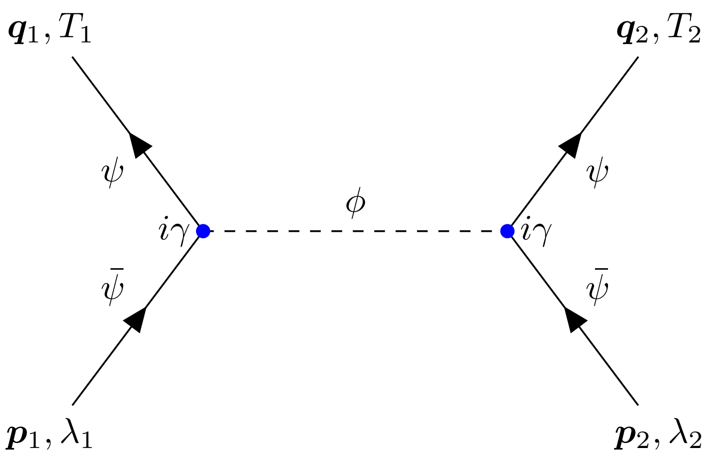

図 0.1　問題のダイアグラム

4. 非相対論的極限では、$(p_1 - q_1)^2 \sim -|\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{q}_1|^2$ が成立している。よって、プロパゲーターは

$$\left.\frac{1}{k^2 - m_\phi^2}\right|_{k=p_1-q_1} \sim \frac{-1}{|\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{q}_1|^2 + m_\phi^2} \tag{0.13}$$

である。

[*1] ただし、運動量保存則から $k = p_1 - q_1$ であることを暗に用いている。

また、$\sqrt{p^\mu \sigma_\mu}$ の非相対論的極限は

$$\begin{aligned}\sqrt{p^\mu \sigma_\mu} &= p^0 + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} \\ &= \sqrt{p^0\left(1+\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p^0}\right)} \sim \sqrt{m_f}\left(1+\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m_f}\right)\end{aligned} \tag{0.14}$$

である。$\sqrt{p^\mu \bar{\sigma}_\mu}$ についても同様に計算すれば

$$\sqrt{p^\mu \sigma_\mu} = \sqrt{p^0\left(1-\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p^0}\right)} \sim \sqrt{m_f}\left(1-\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m_f}\right) \tag{0.15}$$

である。

したがって、$\bar{u}(q,\tau)u(p,\lambda)$ を計算すると

$$\begin{aligned}\bar{u}(q,\tau)u(p,\lambda) &= m_f^2\left(\chi(\tau)^\dagger\left(1-\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m_f}\right) \quad \chi(\tau)^\dagger\left(1+\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m_f}\right)\right)\begin{pmatrix}\left(1+\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m_f}\right)\chi(\lambda) \\ \left(1-\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m_f}\right)\chi(\lambda)\end{pmatrix} \\ &= 2m_f\left\{1-\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{4m_f^2}\right\}\chi^\dagger(\tau)\chi(\lambda) \sim 2m_f\delta_{\lambda\tau}\end{aligned} \tag{0.16}$$

となる。ただし、$\bar{u}\equiv u^\dagger\gamma^0$ であることと、$\{\sigma^i,\sigma^j\}=2\delta^{ij}$ から

$$(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = p^i p^j \sigma^i \sigma^j = |\boldsymbol{p}|^2 \tag{0.17}$$

であることを用いた。

以上より、(0.13), (0.16) を (0.12) に代入すれば

$$i\mathcal{M} = \frac{-Y^2}{|\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{q}_1|^2+m_\phi^2}\cdot(-i)\cdot 4m_f^2\delta_{\lambda_1\tau_1}\delta_{\lambda_2\tau_2} \tag{0.18}$$

であり、

$$\tilde{V}(k) = \frac{-Y^2}{|\boldsymbol{k}|^2+m_\phi^2} \tag{0.19}$$

であることが分かる。

5. k での積分をするとき、$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{x}$ のなす角が θ となるように極座標を選べば

$$V(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}k\mathrm{d}\theta}{(2\pi)^2}\cdot\frac{-Y^2k^2\sin\theta}{k^2+m_\phi^2}e^{ikx\cos\theta} \tag{0.20}$$

となる。先に θ での積分を実行すれば

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\ \sin\theta e^{ikx\cos\theta} = \frac{i}{kx}\left[e^{ikx\cos\theta}\right]_0^\pi = \frac{i}{kx}\left[e^{-ikx}-e^{+ikx}\right] \tag{0.21}$$

となるので

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{-iY^2}{4\pi^2 x}\int_0^\infty \mathrm{d}k\ \frac{k}{k^2+m_\phi^2}\left(e^{-ikx}-e^{+ikx}\right) = \frac{-iY^2}{4\pi^2 x}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\frac{k}{k^2+m_\phi^2}e^{-ikx} \tag{0.22}$$

である。よって、残りを積分を境界条件に注意して積分すればよい。被積分関数の極は $k = \pm i m_\phi$ にあるので、図 0.2 のような 2 つの経路が想定されるが、$k = +i m_\phi$ を囲むような経路をとると、C_1 上での積分は $0 < \theta < \pi$ として $k = Re^{i\theta}$ で書けるので

$$e^{-ikx} = e^{R \sin\theta x} e^{-iR\cos\theta x} \longrightarrow \infty \tag{0.23}$$

となり不適。したがって、極 $k = -i m_\phi$ を通る経路 C_2 を考えればよいので、留数定理により

$$\int \mathrm{d}k \, \frac{k}{k^2 + m_\phi^2} e^{-ikx} = 2\pi i \cdot \frac{-i m_\phi}{-i m_\phi - i m_\phi} e^{-i(-i m_\phi)x} = -i\pi e^{-m_\phi x} \tag{0.24}$$

である。ただし、経路が時計回りなので負の符号がつく。したがって、

$$V(x) = -\frac{Y^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{x} e^{-m_\phi x} \,, \quad x \equiv |\boldsymbol{x}| \tag{0.25}$$

であることが示された。

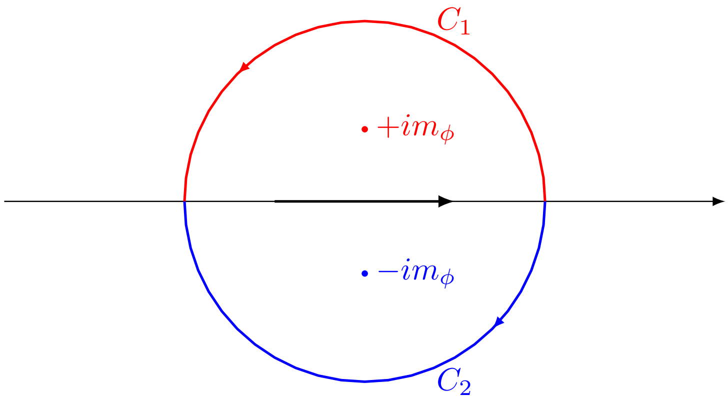

図 0.2　積分の経路の取り方の候補

補足

1. ここで、問 2 で仮定した

$$H_0 = -i\gamma^0\gamma^i\partial_i + \gamma^0 m_f \tag{0.26}$$

が、今回のディラック場の理論のハミルトニアンであることを確認しておこう。そのためには、ψ に共役な運動量をもとめればよい。それは

$$\pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\psi_0 \psi)} = \bar{\psi} i \gamma^0 = i\psi^\dagger \tag{0.27}$$

であるので、自由ディラック場をルジャンドル変換をすれば

$$\begin{aligned} H_0 &= \pi_\psi \partial_0 \psi - \mathcal{L}_{\text{Dirac}} \\ &= \psi^\dagger(-i\gamma^0\gamma^i\partial_i + \gamma^0 m_f)\psi \end{aligned} \tag{0.28}$$

となるため、ハミルトニアンが得られる。