２００４年度　大学院理工学研究科修士課程入学試験

物理学及応用物理学専攻

専門科目表紙

◎解答用紙は８枚綴りが１組あります。試験開始直後に確認して下さい。

注意事項

〔選択方式〕

○ 下記の３科目（６題）の中から任意の４題を選択して解答すること。

科目	問題番号	
数学一般	1	2
力学および電磁気学	3	4
量子力学および熱・統計力学	5	6

〔解答方法〕

(1) 解答は別紙の解答用紙の表の面に記入すること。裏面は使用しないこと。
(2) 解答用紙は８枚綴りになっている。
(3) １枚の解答用紙に２問以上を解答しないこと。１問の解答が解答用紙２枚以上にわたるときには、その旨を明記すること。
(4) 選択した４題以外は解答しないこと。
(5) 受験番号・氏名・部門名をすべての解答用紙に記入すること。

２００４年度　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：数学一般（その 1）

問題番号 1

行列（matrix）A を

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{8} & \frac{11}{8} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

とし、以下の問に答えよ。

(1) A の行列式（determinant）を計算せよ（calculate）。次に A の固有値（eigenvalues）を λ_1（２重）、λ_3 として、その値を求め（obtain）、対応する大きさが１に規格化された（normalized）固有ベクトル（eigenvectors）$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_3$ を求めよ（obtain）。

(2) $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_3$ に一次独立（linearly independent）で、次の関係

$$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1$$

を満たす大きさが１に規格化された（normalized）ベクトル $\boldsymbol{e}_2$ を求めよ（find）。ただし、E は単位行列（unit matrix）である。

(3) 列ベクトル $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 、$\boldsymbol{e}_3$ を横に並べてできる行列に対して、以下の関係を満たす行列 $\tilde{A}$ を求めよ（obtain）。

$$A\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}\tilde{A}$$

２００４年度　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：数学一般（その２）

問題番号 2

次の問に答えよ。

(1) $\Phi(\overrightarrow{r}) = \dfrac{4\pi}{3r}$ $(r > 0)$ とするとき, $\overrightarrow{W} = \mathrm{grad}\,\Phi(\overrightarrow{r})$ 及び $\mathrm{div}\,\overrightarrow{W}$ を求めよ。
ただし, $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$, $r = |\overrightarrow{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする。

(2) Σ を $\mathbb{R}^3$ 内の閉曲面 (closed surface) とし, $d\sigma$ を Σ の面積要素 (surface element) とするとき, Σ の内側から外側へ流れ出る $\overrightarrow{W}$ の流量 (flux) F は次で与えられる。

$$F = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{n}\, d\sigma$$

ただし, $\overrightarrow{n}$ は外向き単位法線ベクトル (unit outward normal vector) である。
以下の二つの Σ に対して, F の値を求めよ。

(i) $\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, $R > 1$
ただし, 原点が含まれる側を内部とする。

(ii) $\Sigma = \{(x, y, z); (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1\}$
ただし, 原点が含まれる側を外部とする。
(Hint: Gauss の発散定理 (divergence theorem) を用いよ (use)。)

(3) $B = \{\overrightarrow{\rho} = (u, v, w); \rho = |\overrightarrow{\rho}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \leq 1\}$ および　$a > 1$ とするとき, 極座標変換 (polar coordinate transformation)

$$u = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad v = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad w = \rho \cos\theta$$

を用いて次の等式を示せ。
(Hint: 変数変換 (change of variables) $t = \cos\theta$ を用いよ。)

$$I(a) = \iiint_B \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + (w-a)^2}} du\, dv\, dw = \frac{4\pi}{3a}$$

(4) $\Omega = \{\overrightarrow{r} = (x, y, z); r = |\overrightarrow{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 1\}$ の任意の点 (arbitrary point) $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$ に対して, 関数

$$I(\overrightarrow{r}) = \iiint_B \frac{1}{\sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2 + (w-z)^2}} du\, dv\, dw$$

を定義する。$\overrightarrow{r} = (x, y, z)$ を $(0, 0, r)$, $r = |\overrightarrow{r}|$ に写す, 原点を中心とする回転 (rotation) に対応する直交行列 (orthogonal matrix) を A とする。変数変換 ${}^t(\zeta, \eta, \xi) = A\,{}^t(u, v, w)$ を用いて $I(\overrightarrow{r}) = \Phi(\overrightarrow{r}) = \dfrac{4\pi}{3r}$ を示せ。
ただし, ${}^t(u, v, w)$ は, ベクトル (u, v, w) の転置 (transposed) ベクトルを表すものとする。

２００４年度　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：力学および電磁気学（その1）

問題番号 3

fの力(force)でt_1秒間加速する(accelerate)ことができる乗り物(vehicle) [質量(mass) m]がある．ここで，fとt_1をかけた量は一定(constant)（$ft_1 = c_1$），t_1の時間範囲でfは途中で変わらないとする．また，この乗り物は速度(velocity)に比例した(proportional)抵抗(resistance)（比例定数はc_2）を受ける環境にある．最初静止(stop)していた乗り物をt_1秒間加速し，加速が終了すると，やがて抵抗により静止する．t_1を変化させると進む距離(distance)はどのようになるかを調べたい．以下の設問に答えなさい．

（1）加速中の運動方程式(equation of motion)を記しなさい．時刻tにおける速度をvとしなさい．

（2）（1）を解くと，加速中の速度vは$v = \dfrac{f}{c_2}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{c_2}{m}t\right)\right)$であった．時刻$t_1$における距離$l_1$を求めなさい．

（3）加速が終了してからの運動を記述する運動方程式を記しなさい．

（4）（3）より，加速が終了したあとのvをtの関数として求めなさい．加速終了時の時刻をあらためて$t = 0$と考え，その時の速度をv_1としなさい．

（5）加速が終了してから十分な時間が経過するまでに進む距離l_2を求めなさい．

（6）$l_1 + l_2$を求めなさい．ただしf，v_1は答えの式から消去(eliminate)すること．

２００４年度　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：力学および電磁気学 (その 2)

問題番号 4

プラズマ(plasma)中に点電荷 (point charge) q を置くと、

$$\phi(\mathbf{r}) = q\frac{\exp(-\alpha r)}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

なる電位 (electric potential) $\phi(\mathbf{r})$ が点電荷周辺に発生した。ここで、$\mathbf{r}$ は位置ベクトル、α は正の定数(positive constant)、ε_0 は真空の誘電率(permittivity of free space) である。以下の問に答えよ。

（１） Maxwell の４つの方程式を記し、その表現する物理的な意味(physical meaning)を簡潔に述べよ。

（２） 電荷 q の周りの電束密度(electric flux density) $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ を求めよ。

（３） $\nabla\times\mathbf{D}(\mathbf{r})$ を求めよ。

（４） プラズマ中に誘起された電荷密度分布(charge density distribution)を求めよ。

（５） 点電荷を中心とした半径 r の球内部の全電荷量(total charge) を求めよ。
また、$r\to\infty$ としたときの全電荷量はいくらか。

２００４年度　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：量子力学および熱・統計力学（その 1）

問題番号 5

一様な静磁場 (uniform static magnetic field) $\vec{B}$ 中を運動する質量 (mass) m, 電荷 (electric charge) e, スピン (spin) 0 の粒子がある。この系のハミルトニアン (Hamiltonian) $\mathcal{H}$ は、粒子の位置 (position) $\vec{r}$, 運動量 (momentum) $\vec{p}$、磁場のベクトルポテンシャル (vector potential) $\vec{A}(\vec{r})$ を用いると、SI 単位系では次のように書ける。

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r})\right)^2$$

以下の問に答えよ。

(1)　磁場 $\vec{B}$ の方向を z 軸とする 3 次元直交座標系で、ランダウゲージ (Landau gauge) のベクトルポテンシャル

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}$$

を用いるとき、次の 6 つの交換子 (commutator) を全て計算せよ。

$$[x, \mathcal{H}], \quad [y, \mathcal{H}], \quad [z, \mathcal{H}], \quad [p_x, \mathcal{H}], \quad [p_y, \mathcal{H}], \quad [p_z, \mathcal{H}]$$

(2)　力学的保存量を挙げよ。これらの保存量を用いると上のハミルトニアンに対する定常状態の Schrödinger 方程式

$$\mathcal{H}\Psi(x, y, z) = E\Psi(x, y, z)$$

が 1 次元調和振動子 (harmonic oscillator) の Schrödinger 方程式

$$\left[\frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(x - x_0)^2\right]\psi(x) = (E - \Delta E)\psi(x)$$

に簡単化できる。これを示し、1 次元問題の波動関数 $\psi(x)$ と 3 次元の波動関数 $\Psi(x, y, z)$ との関係式を明示せよ。また、$\omega, x_0, \Delta E$ の具体的な形を示せ。上の 1 次元問題の固有状態はランダウ準位と呼ばれることもある。

(3)　前問 (2) の結果を用いて、ランダウゲージにおけるハミルトニアン $\mathcal{H}$ の固有値 (eigenvalue) を求めよ。その際、固有状態を一義的に指定するために必要な量子数の組 (complete set of commuting observables) を明示せよ。

(4)　ベクトルポテンシャルが、小問 (1) の形の代わりに

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ B\xi \tanh\frac{x}{\xi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

の形をもつとき、時刻 $t = 0$ で原点付近の最低ランダウ準位にあった粒子はその後どうなるであろうか。粒子の位置と運動量の $t \to \infty$ における漸近的な振舞 (asymptotic behavior) について定性的に述べよ。但し、ξ は小問 (2) で議論した調和振動子の基底状態 (ground state) の広がり (spatial extent) よりずっと大きな長さであるとする。

２００４年度　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：量子力学および熱・統計力学（その２）

問題番号 6

$S=\frac{1}{2}$ [S_z の固有値(eigenvalue)が $\pm\frac{1}{2}$]のスピンに z 軸に平行な磁場(magnetic field) $\boldsymbol{H}=(0,0,H)$ をかけたとき、ハミルトニアンは

$$H_0 = g\mu_B \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}$$

[g は g 因子（g factor）、μ_B はボーア磁子(Bohr magneton)]で表される。このようなスピンが互いに独立(independent)に N 個ある系を考える。温度は T とする。

（１） カノニカル分布の分配関数は $Z=\sum_i \exp(-E_i/k_BT)$ で与えられる。この系のスピン 1 個の分配関数 Z_S を求めよ。

（２） 分配関数が Z のとき、ヘルムホルツの自由エネルギー (Helmholz free energy) F は、$F=-k_BT\log Z$ で与えられる。スピンが N 個あるこの系全体の F を求めよ。

（３） 磁化の大きさ(magnetization) $M=-\frac{\partial F}{\partial H}$ を求めよ。$g\mu_B H << k_BT$ として近似して、帯磁率(susceptibility) $\chi = M/H$ を求めよ。また χ の T 依存性 (T dependence)のグラフをかけ。

次に、$S=\frac{1}{2}$ のスピンが２つ（$\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$）あり、その間に

$$H_1 = -J\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2$$

の相互作用(interaction)があるとする。S_{1z}, S_{2z} の固有値がともに $+\frac{1}{2}$ の状態を $|\uparrow\uparrow\rangle$、S_{1z}, S_{2z} の固有値がともに $-\frac{1}{2}$ の状態を $|\downarrow\downarrow\rangle$、$S_{1z}$ の固有値が $+\frac{1}{2}$ で S_{2z} の固有値が $-\frac{1}{2}$ の状態を $|\uparrow\downarrow\rangle$、$S_{1z}$ の固有値が $-\frac{1}{2}$ で S_{2z} の固有値が $+\frac{1}{2}$ の状態を $|\downarrow\uparrow\rangle$ と書く。

（４） H_1 のもとでの２つのスピンの固有状態(eigenstate)は、エネルギーが３重に縮退した(degenerate)状態（固有エネルギー E_T）と１つの縮退していない状態（固有エネルギー E_S）になる。このときの固有状態４つを $|\uparrow\uparrow\rangle$ 等を用いて表せ。またそれぞれの固有エネルギー E_T, E_S を求めよ。（$S_\pm = S_x \pm iS_y$, $S_-|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$, $S_+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$ を用いよ）

この状態に対して、z 軸に平行な磁場 $\boldsymbol{H}=(0,0,H)$ をかけたとき、ハミルトニアンは

$$H_2 = H_1 + g\mu_B(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)\cdot\boldsymbol{H}$$

となる。

（５） H_2 のもとでの、固有状態を４つと、それぞれの固有エネルギーを求めよ。

このような、相互作用のあるスピン対が $\frac{N}{2}$ 組ある系を考える。異なるスピン対とスピン対の間には相互作用はないものとする。また温度は T とする。

（６） $g\mu_B H << k_BT$ として、磁化の大きさ M を求めよ。また、$J<0$ として、$\chi = M/H$ の T 依存性のグラフをかけ。

〔以　下　余　白〕