早稲田大学 2017年 物理学専攻 院試 解答例

ミヤネ

最終更新：2023 年 8 月 11 日

目次

問題 1: 線形代数 2

問題 2: 物理数学 5

問題 3: 力学 7

問題 4: 電磁気学 9

問題 5: 量子力学 11

問題 6: 統計力学 14

問題番号$\boxed{1}$ (線形代数)

(1) 固有行列をとけば,

$$\lambda_{\pm} = \pm i. \tag{1.1}$$

(2) 対応する規格化された固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u}_{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \tag{1.2}$$

です．したがって,

$$U = (\boldsymbol{u}_{+}\ \boldsymbol{u}_{-}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-i & i\end{pmatrix} \tag{1.3}$$

とすれば，対角化できます.

(3) 計算すれば

$$A^2 = -\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = -1 \tag{1.4}$$

です．ついでに，もうちょっと計算しておくと

$$A^3 = -A,\ A^4 = 1,\ A^5 = A,\ \cdots \tag{1.5}$$

となっています.

(4) 展開して4で割った余りで分類します．すると

$$\begin{aligned}
e^{\phi A} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n)!}\phi^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)!}\phi^{4n+1}A - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+2)!}\phi^{4n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)!}\phi^{4n+3}A\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\phi^{2n} + A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\phi^{2n+1}\\
&= \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

です．よって，AはSO(2)のgenerator.

(5) 次の行列

$$S = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\0 & 1/2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1.7}$$

を用いれば

$$M = \Omega S + \gamma T \tag{1.8}$$

と分解できます．ここで，SとTが可換なので,

$$e^{-Mt} = e^{-\Omega t S}e^{-\phi t T} \tag{1.9}$$

が成立しています．したがって，それぞれの因子を計算すればよいです．SとTについては

$$\begin{cases}
S^2 = -\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\ S^3 = -S,\ S^4 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\ S^5 = S,\ \cdots\\
T^n = \begin{pmatrix}1/2^n & 0 & 0\\0 & 1/2^n & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\end{cases} \tag{1.10}$$

が成立しているので，

$$
\begin{cases}
e^{-\Omega t S} = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t & 0 \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
e^{-\phi t T} = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\gamma t} \end{pmatrix}
\end{cases}
\tag{1.11}
$$

です[*1]．よって，

$$
e^{-Mt} = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t & 0 \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma t/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\gamma t} \end{pmatrix} = e^{-\gamma t/2} \begin{pmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t & 0 \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\gamma t/2} \end{pmatrix}
\tag{1.12}
$$

となります．

(6) 一般解は，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$を定ベクトルとして

$$
\boldsymbol{v}(t) = e^{-Mt}\boldsymbol{c} - M^{-1}\boldsymbol{b} \tag{1.13}
$$

です．ただし，M^{-1}は

$$
M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2}\cdot\frac{1}{\gamma^2/4+\Omega^2} & \frac{\Omega}{\gamma^2/4+\Omega^2} & 0 \\ -\frac{\Omega}{\gamma^2/4+\Omega^2} & \frac{\gamma}{2}\cdot\frac{1}{\gamma^2/4+\Omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}
\tag{1.14}
$$

です．したがって，初期条件は

$$
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2}\cdot\frac{1}{\gamma^2/4+\Omega^2} & \frac{\Omega}{\gamma^2/4+\Omega^2} & 0 \\ -\frac{\Omega}{\gamma^2/4+\Omega^2} & \frac{\gamma}{2}\cdot\frac{1}{\gamma^2/4+\Omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma \end{pmatrix}
\tag{1.15}
$$

なので，これを解くと

$$
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 + \gamma/\Gamma \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}(0) + \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{b}
\tag{1.16}
$$

です．よって，

$$
\boldsymbol{v}(t) = e^{-Mt}\boldsymbol{v}(0) + \frac{1}{\gamma}(e^{-Mt} - 1)\boldsymbol{b}
\tag{1.17}
$$

がもとめる解です．

[*1] $e^{-\Omega t S}$の$(3,3)$成分が1であることに注意．よくあるミスなので．

補足

- AとBが可換なら$e^{A+B}=e^{A}e^{B}$が成立します．証明は普通の数のときと同様で

$$
\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(A+B)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!k!}A^{n-k}B^{k} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}B^n\right) = e^{A}e^{B} \qquad (1.18)
\end{aligned}
$$

  です．

問題番号$\boxed{2}$ (物理数学)

(1) $f(x)$のフーリエ級数展開は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2.1}$$

だとします．このとき，

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} 0 & (n:\text{even}) \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & (n:\text{odd}) \end{cases} \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\mathrm{d}x = 0 \tag{2.4}$$

なので，

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{(2m+1)^2\pi}\cos(2m+1)x \tag{2.5}$$

です．

(2) (1)で$x = 0$とすれば

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \tag{2.6}$$

です．

(3) (積分が可能か否か云々はここでは議論しないことにします．値がちゃんと出てるなら，別によいでしょう．)

$\varepsilon > 0$をとれば

$$\begin{aligned} c_n &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}x^n\log x\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{n+1}\varepsilon^{n+1}\log\varepsilon - \frac{1-\varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2}\right] = -\frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned} \tag{2.7}$$

となります．ただし，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{n+1}\log\varepsilon = 0 \tag{2.8}$$

を用いました.

(4) $t = 1 - x$で変数変換をして，$\log(1-t)$を展開すれば

$$A = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{0}^{1}t^{n-1}\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \tag{2.9}$$

となります．(2)の結果から値を決めるためには，

$$T := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{2.10}$$

としたとき，Tを偶数と奇数の和に分割して

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + S \tag{2.11}$$

となることを用いましょう．したがって，

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}S = \frac{\pi^2}{6} \tag{2.12}$$

なので，

$$A = -\frac{\pi^2}{6} \tag{2.13}$$

です．

(5) 連立方程式です．つまり

$$\begin{cases} A - B = \dfrac{A}{2} \\ A + B = 2C \end{cases} \tag{2.14}$$

を解けば[*2]

$$B = -\frac{\pi^2}{12},\ C = -\frac{\pi^2}{8}. \tag{2.15}$$

[*2] $A-B$についての方程式は$t = x^2$と変数変換すればよいです．

問題番号$\boxed{3}$ (力学)

(1) 運動方程式は

$$M\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} = -Mg - \alpha v(t) \tag{3.1}$$

なので，これを解くと

$$v(t) = C_1 e^{-\alpha t/M} - \frac{M}{\alpha}g \tag{3.2}$$

です．初期条件を満たすように定数C_1を決めると

$$v(t) = \frac{M}{\alpha}g\left(1 - e^{-\alpha t/M}\right)$$

となります．また，これを積分して初期条件を満たすように定数を決めれば

$$z(t) = \frac{M}{\alpha}g\left\{t + \frac{M}{\alpha}\left(e^{-\alpha t/M} - 1\right)\right\}. \tag{3.3}$$

図は3.1,3.2です．

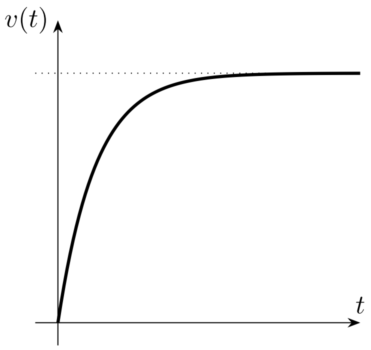

図3.1　$v(t)$のグラフ

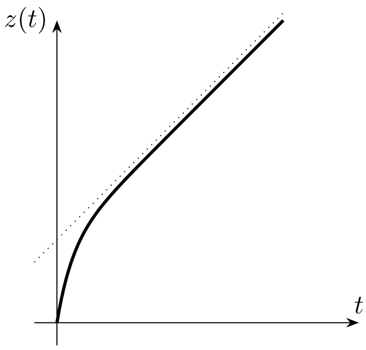

図3.2　$z(t)$のグラフ

(2) E.O.M.は

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -Mg - \beta v^2(t) \tag{3.4}$$

なので，これを変数分離すると

$$\frac{1}{v^2 + Mg/\beta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\beta}{M} \tag{3.5}$$

です．これを積分すると

$$\sqrt{\frac{\beta}{Mg}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\beta}{Mg}}v\right) = -\frac{\beta}{M}t + C_2 \tag{3.6}$$

となります．初期条件を満たすのは$C_2 = 0$なので

$$v(t) = \sqrt{\frac{Mg}{\beta}}\tan\left(\sqrt{\frac{\beta g}{M}}t\right) \tag{3.7}$$

が解です*3．図は省略．

*3 これによると，すこし答えが違っています．そもそも最初の運動方程式が違うようです．

(3) 説明は少し面倒ですが，感覚的にはこんな感じでしょう．つまり，運動量の変化が力積なので，流体粒子1つあたり，だいたいmVの力がかかります．物体が速度Vで動くとき，物体に衝突する粒子の個数はVに比例します．したがって，V個の粒子がmVだけ力積をかけるので，かかる力はV^2に比例する，といった感じです[*4].

(4) 略.

(5) 略.

[*4] 少し調べてみましたが，ちゃんとやるとこんな感じらしいです．

問題番号$\boxed{4}$ (電磁気学)

(1) 2つめと3つめは曲面S上で積分，4つめは空間V上で積分をします．するとそれぞれ

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},\ \oint_{\partial S} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},\ \oint_{\partial V} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}^2\boldsymbol{S} = 0 \tag{4.1}$$

となります[*5].

(2) 原点に電荷がある場合は，そもそも一般形がわかって

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}. \tag{4.2}$$

(3) ガウスの法則の積分形より

$$\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \frac{A}{\varepsilon_0}\int e^{-2r/a}\mathrm{d}V \tag{4.3}$$

です．対称性より$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n} = E(r)$で，右辺は

$$\int e^{-2R/a}\mathrm{d}V = 4\pi^2\int_0^r R^2 e^{-2R/a}\mathrm{d}R = -\frac{ar^2}{2}e^{-2r/a} - \frac{a^2}{2}re^{-2r/a} - \frac{a^3}{4}e^{-2r/a} + \frac{a^3}{4} \tag{4.4}$$

となるので，

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{\pi A}{\varepsilon_0 r^2}\left[-\frac{ar^2}{2}e^{-2r/a} - \frac{a^2}{2}re^{-2r/a} - \frac{a^3}{4}e^{-2r/a} + \frac{a^3}{4}\right]\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{4.5}$$

となります．ただし，rをRと書き換えてました.

(4) 電荷が2つあるとき，それぞれの電荷の寄与を考えて足せばよいです[*6]．だけど，計算が面倒なので略.

(5) 原点からの極座標が(r,θ,φ)の位置にある小片がもつ電荷は$\rho(r)\times r^2\mathrm{d}\Omega$で，これの時間変化が電流．したがって，

$$\mathrm{d}j = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \rho(r)r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = A\omega r^2 e^{-2r/a}\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{4.6}$$

です．この小片が原点に作る磁場は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{4.7}$$

ですが，これらのz軸方向以外の成分は積分で打ち消します[*7]．したがって，

$$\mathrm{d}H_z = \frac{1}{4\pi}\int\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r})_z}{r^3} \tag{4.8}$$

をすべての空間で計算してやればよいです．ここで，

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r})_z &= \left(\begin{pmatrix}-|\boldsymbol{j}|r\sin\theta\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\ |\boldsymbol{j}|r\sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\sin\theta\cos\varphi\\ -r\sin\theta\sin\varphi\\ -r\cos\theta\end{pmatrix}\right)_z\\ &= 2|\boldsymbol{j}|r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi\\ &= 2A\omega r^3 e^{-2r/a}\sin^3\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\end{aligned} \tag{4.9}$$

[*5] ストークスの定理はrotをの面積分を線積分に，ガウスの定理はdivの体積積分を面積分にします．

[*6] 補足を参照．trivialなことなので，あまり真面目に示す恩恵はないですが.

[*7] 感覚からも明らかですが，(4.9)のほかの成分を考えると計算で示すことができます．ほかの成分は$\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$や$\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$が残るので，これを積分すると消えます.

なので[*8],

$$H_z = \frac{A\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}e^{-2r/a}\mathrm{d}r$$
$$= \frac{2}{3}A\omega a \tag{4.10}$$

がもとめる磁場です.

補足

- 解答で「電荷が2つあるとき,それぞれの電荷の寄与を考えて足せばよい」といいましたが,たぶんこんな感じだと思います.電荷密度が2つの項からなるとき,それらを

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_1(\boldsymbol{r}) + \rho_2(\boldsymbol{r}) \tag{4.11}$$

とおきます.これらの電荷がつくる電場を$\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$を

$$\int_S \boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho_1(\boldsymbol{r'})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}',\ \int_S \boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho_2(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{4.12}$$

と定義すれば,ガウスの法則から

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 \tag{4.13}$$

となります.これを積分するので,結局,ポテンシャルも電荷ρ_1, ρ_2がつくるものに分解することができます.

- 電荷$\rho(\boldsymbol{r})$がつくる電位$\phi(\boldsymbol{r})$は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{4.14}$$

です.これのgradientをとると

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{4.15}$$

となり,これのdivergenceをとると

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}^2\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\boldsymbol{\nabla}^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} \tag{4.16}$$

となり,ちゃんとMaxwell方程式とconsistentです.

[*8] 図を描いてみてください.

問題番号$\boxed{5}$ (量子力学)

(1) 計算すれば$k^2 = 2m\omega^2$.

(2) 代入すればOK.

(3) $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$とおけば，一般解は

$$\varphi(x) = Ae^{+ikx} + Be^{-ikx},\ \varphi'(x) = ik\left(Ae^{+ikx} - Be^{-ikx}\right) \tag{5.1}$$

と書けます．これに境界条件を代入すれば

$$A\sin\left(\frac{kL}{2}\right) = B\sin\left(\frac{kL}{2}\right) = 0 \tag{5.2}$$

であればよいことがわかり，

$$A = B = \frac{1}{\sqrt{2L}},\ \frac{kL}{2} = 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{5.3}$$

です．よって，波動関数とエネルギー固有値は

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos k_n x,\ E_n = \frac{8\pi^2\hbar^2}{mL^2}n^2 \tag{5.4}$$

です．

(4) 境界条件は$e^{ikL} = 1$から

$$A = B = \frac{1}{\sqrt{2L}},\ kL = 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{5.5}$$

なので

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos k_n x,\ E_n = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2}n^2 \tag{5.6}$$

です．

(5) 第n励起状態のk次のエネルギーは，もし，縮退がなければ

$$E_n^{(k)} = \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x\ \varphi_n^{*\,(0)}(x)V(x)\varphi_n{}^{(k-1)}(x) \tag{5.7}$$

です．基底で$k = 1$なら，ポテンシャルは$L/2$周期になっているので

$$E_0^{(1)} = \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x\ \varphi_0^*(x)V(x)\varphi_0(x) = \frac{V_0}{\sqrt{2L}}\int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x\ = 0 \tag{5.8}$$

です．$k = 2$のときは，

$$\varphi_0^{(1)}(x) = \sum_{m\neq 0} \varphi_m^{(0)}(x)\int \mathrm{d}x'\ \frac{\varphi_m^{*\,(0)}(x')V(x')\varphi_0^{(0)}(x')}{E_0^{(0)} - E_m^{(0)}} \tag{5.9}$$

であり，積分は

$$\frac{4V_0}{L}\int_0^{L/2} \mathrm{d}x'\ \cos k_m x' \cos\left(\frac{4\pi}{L}x'\right) = V_0\delta_{m2} \tag{5.10}$$

なので，

$$\varphi_0^{(1)}(x) = -\frac{V_0}{E_2^{(0)}}\varphi_2^{(0)}(x) = -\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{V_0}{E_2^{(0)}}\cos\left(\frac{4\pi}{L}x\right) \tag{5.11}$$

となります．したがって，

$$E_0^{(2)} = -\frac{mV_0}{\pi^2\hbar^2}\sqrt{\frac{L^3}{32}} \tag{5.12}$$

です．

(6) 計算は簡単で，

$$E_1^{(1)} = \frac{2V_0}{L}\int_0^{L/2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{L}z\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{L}z\right)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}V_0 \tag{5.13}$$

です[*9]．固有状態は

$$\begin{aligned}\int_{-L/2}^{L/2}\varphi_m^{(0)*}V\varphi_1^{(0)}\mathrm{d}x &= \frac{4V_0}{L}\int_0^{L/2}\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{4\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases}\frac{1}{2}V_0 & (m=1,3) \\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}\end{aligned} \tag{5.14}$$

より[*10]，

$$\varphi_1^{(1)}(x) = \sum_{m\neq 1}\frac{\langle\varphi_m^{(0)}|V|\varphi_1^{(0)}\rangle}{E_1^{(0)} - E_m^{(0)}}\varphi_m^{(0)} = -\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{V_0 mL^2}{32\pi^2\hbar^2}\cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right) \tag{5.15}$$

となります．

(7) 波動関数へのポテンシャルの寄与は，$k_\lambda = 2\pi a$の項を追加するような形になると考えられます．したがって，(1)の答えにk_λ^2のような項が加わった形が極限でしょう．つまり

$$k^2 + 4\pi^2a^2 = 2m\omega^2 \tag{5.16}$$

です．

補足

- (3),(4)の規格化ですが

$$\varphi(x) = A\left(e^{+ikx} + e^{-ikx}\right) = 2A\cos kx \tag{5.17}$$

とすれば，

$$\int_{-L/2}^{L/2}\varphi^*(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 2L|A|^2 = 1 \tag{5.18}$$

---

*9 $\cos(4\pi x/L)$は周期が$L/2$なので積分しても0で，$\cos^2(4\pi x/L)$は周期がLなのでそっちの寄与を考えれば早いです．

*10 周期性を気にすれば，残るのが$m=1,3$のときなのがわかります．例えば，周期$L/3, L$の三角関数の積の周期は$3L/2, L/2$の線形和になります．そして，それに周期L/mのものがかかれば，周期

$$\frac{L}{m+3},\ \frac{L}{m-3},\ \frac{L}{m+1},\ \frac{L}{m-1}$$

の関数に分離されます．これらは全部cosで，0から$L/2$で積分したときに残るのは$m=1,3$のときのみです．気になったら周期L/Nのcosを0から$L/2$で積分して，Nが1より大きいと全部消えることをチェックするとよいでしょう．

なので,

$$A = \frac{1}{\sqrt{2L}} \tag{5.19}$$

です.

- ちょっと,ここから書くことは自信がないですが,設問(7)をもう少しちゃんと考えてみましょう.ポテンシャルが

$$V(x) = V_0 \cos\left(\frac{2N\pi}{L}x\right) \tag{5.20}$$

のときは,

$$\langle\varphi_m^{(0)}|V|\varphi_k^{(0)}\rangle = \frac{4V_0}{L}\int_0^{L/2} \cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{2N\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x \tag{5.21}$$

なので,N, mを固定したとき,生き残るのは$k = |N \pm m|$なので[*11],摂動で生き残るのは$k = N + m$です.よって,このポテンシャルの摂動は

$$\varphi_m^{(1)}(x) = \frac{\langle\varphi_m^{(0)}|V|\varphi_{N+m}^{(0)}\rangle}{E_m - E_{N+m}}\varphi_{N+m}(x) \tag{5.22}$$

といった形で波動関数に現れます.よって,第m励起状態の波動関数の2階微分の固有値は

$$\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi_m^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_m^{(1)}}{\partial x^2} = k_m^2\varphi_m^{(0)} + k_{m+N}^2\varphi_m^{(1)} \tag{5.23}$$

となります.したがって,分散関係も

$$k_m^2 + k_{m+N}^2 = 2m\omega^2 \tag{5.24}$$

のようになると考えられますが,

$$k_{m+N}^2 = \frac{2(m+N)\pi}{L} \to 2\pi a \tag{5.25}$$

です.したがって,kとωの関係は

$$k^2 + 4\pi^2 a^2 = 2m\omega^2 \tag{5.26}$$

になると考えられます.

*11 注釈*10を参考にしてください.

問題番号 $\boxed{6}$ (統計力学)

(1) 場合の数は

$$W = \frac{M!}{N!(M-N)!} \tag{6.1}$$

なので，

$$S = k_B \log W = k_B \log \frac{M!}{N!(M-N)!} \tag{6.2}$$

です．

(2) ある格子に着目して，考えてみましょう．そこに粒子が入る確率はN/Mで，隣接する格子に粒子が入る確率もN/M．隣接格子は$z=4$なので，格子ひとつあたりのエネルギー期待値は$-4\varepsilon(N/M)^2$です．これをM個の格子で考えるとき，各相互作用については重複を取り除いて

$$\bar{E} = -2\varepsilon M \left(\frac{N}{M}\right)^2 \tag{6.3}$$

です．

(3) $F = \bar{E} - TS$より

$$Z[\beta, E] = W(\bar{E})e^{-\beta\bar{E}} \tag{6.4}$$

なので

$$Z[\beta, \bar{E}] = \exp\left[-2\varepsilon M \left(\frac{N}{M}\right)^2\right] \log \frac{M!}{N!(M-N)!} \tag{6.5}$$

です．

(4)

$$\begin{aligned} F &= -2\varepsilon M \left(\frac{N}{M}\right)^2 - \frac{1}{\beta} \log \frac{M!}{N!(M-N)!} \\ &\sim -2\varepsilon M \left(\frac{N}{M}\right)^2 - \frac{1}{\beta}\left[M \log M - N \log N - (M-N)\log(M-N)\right]. \end{aligned} \tag{6.6}$$

(5)

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = -\frac{2\varepsilon}{a}\left(\frac{N}{M}\right)^2 - \frac{1}{a\beta}\log\left(1 - \frac{N}{M}\right). \tag{6.7}$$

ただし，$V = aM$として，Mの微分を計算しました．

(6) もう一度，Mで微分すると思えば

$$\frac{\partial p}{\partial V} = \frac{4\varepsilon}{a^2 M}\left(\frac{N}{M}\right)^2 - \frac{1}{a^2\beta} \cdot \frac{1}{1-N/M} \cdot \frac{N}{M^2} \tag{6.8}$$

です．

(7) $\partial p/\partial V = 0$となるような$M(>0)$が存在すれば，相転移が起こることがわかります．そのようなMを決定する方程式は

$$\frac{4\varepsilon}{a^2 M}\left(\frac{N}{M}\right)^2 - \frac{1}{a^2\beta} \cdot \frac{1}{1-N/M} \cdot \frac{N}{M^2} = 0 \tag{6.9}$$

です．これを整理すれば

$$M^2 - \frac{4\varepsilon N}{k_B T}M + \frac{4\varepsilon N^2}{k_B T} = 0 \tag{6.10}$$

であり，これが実数解をもつためには

$$T \leq \frac{\varepsilon}{k_B} \tag{6.11}$$

が必要です．2次関数

$$f(M) := M^2 - \frac{4\varepsilon N}{k_B T}M + \frac{4\varepsilon N^2}{k_B T} \tag{6.12}$$

を考えれば，$M > 0$の解をもつことがわかる[*12]ので，もとめるのは(6.11)です．

[*12] 軸がy軸よりも右側にあって，$f(0) > 0$なので．