

宇宙物理学 レポート 1

5324A057-8 宮根 一樹

最終更新：2024 年 5 月 1 日

設問 (1)

フリードマン方程式

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \Lambda \quad (0.1)$$

に $\rho = 3M/4\pi a^3$ を代入すれば

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{2GM}{a^3} - \frac{Kc^2}{a^2} + \Lambda \quad (0.2)$$

である。これを Kc^2 について解けば

$$Kc^2 = a^2 \left\{ \frac{2GM}{a^3} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \Lambda \right\} \quad (0.3)$$

となる。

フリードマン方程式 (0.2) を微分すれば

$$\frac{2a^2\dot{a}\ddot{a} - 2a\dot{a}^3}{a^4} = -\frac{6GM}{a^4} + \frac{2Kc^2}{a^3} \quad (0.4)$$

であり、これに (0.3) を代入して整理すると

$$a^2\dot{a}\ddot{a} - a\dot{a}^3 + a\dot{a}^2 + GM - a^3\Lambda = 0 \quad (0.5)$$

となる。

設問 (2)

$a = a^* = \text{const.}$ なら、 $\dot{a} = 0$ なので、フリードマン方程式 (0.3) と前問の結果は、それぞれ

$$\frac{Kc^2}{a^{*2}} = \frac{2GM}{a^{*3}} + \Lambda \quad (0.6)$$

$$GM - a^{*3}\Lambda = 0 \quad (0.7)$$

となり、 G を消去して整理すれば

$$a^{*2} = \frac{3Kc^2}{\Lambda} > 0 \quad (0.8)$$

である。したがって、 $K > 0$ であり、 a^* は

$$a^* = \sqrt{\frac{3Kc^2}{\Lambda}} \quad (0.9)$$

となる。

設問 (3)

今は質点の質量 m が 1 であるような状態を考えているので、 E と a の関係は

$$E = \frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{GM}{a} \quad (0.10)$$

である。これに、フリードマン方程式 (0.2) を代入すると

$$E = \frac{1}{2}\Lambda a^2 - \frac{1}{2}Kc^2 \quad (0.11)$$

となっているため、 $E < 0$ で極小値をとっている。よって、不安定である。