ゲージ理論と幾何

宮根 一樹

最終更新日：2024 年 3 月 16 日

目次

1　多様体とその周辺

1.1　多様体

まずは多様体の定義から。

定義 1.1 (多様体)**.** ハウスドルフ空間 M に対して、M が開集合 U_i によって

$$U = \bigcup_i U_i \tag{1.1}$$

で表され、各 U_i に対して、U_i から n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ への全単射 $\boldsymbol{x}_{U_i}$ があって

(i) 像 $\boldsymbol{x}_{U_i}(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合で、$\boldsymbol{x}_{U_i}$ は U_i から $\boldsymbol{x}_{U_i}(U)$ への同相写像。

(ii) $U_i \cap U_j \neq \phi$ ならば、写像

$$\boldsymbol{x}_{U_j} \circ \boldsymbol{x}_{U_i}^{-1} : \boldsymbol{x}_{U_i}(U_i \cap U_j) \to \boldsymbol{x}_{U_j}(U_i \cap U_j) \tag{1.2}$$

が全単射で C^∞ かつ逆写像も同様。

を満たすとき、

- 組 $\{(U_i, \boldsymbol{x}_{U_i})\}$ の全体は M に C^∞ 構造を与え、
- M を C^∞ 多様体という。

例 1.1 (直積多様体)**.** m 次元 C^∞ 多様体 M、n 次元 C^∞ 多様体 N の C^∞ 構造が $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ で定められているとき、

$$(\phi_\alpha \times \psi_\beta)(x, y) = (\phi_\alpha(x), \psi_\beta(y)) \tag{1.3}$$

で定義しておけば、$\{(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{(\alpha,\beta) \in A \times B}$ は $M \times N$ 上に C^∞ 構造が定められて、$M \times N$ は C^∞ 多様体になる。これは直積多様体。

例 1.2 (n 次元球面)**.** $\mathbb{R}^{n+1}$ に対して

$$S^n = \{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum (x^i)^2 = 1\} \tag{1.4}$$

において、各 $i = 1, \cdots, n+1$ に対して

$$U_i^\pm \equiv \{(x^1, \cdots, x^{i+1}) \in S^n | x^i \gtrless 0\} \tag{1.5}$$

とおいて[*1]、$x_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$ を

$$x_i^\pm(x^1, \cdots, x^{n+1}) = (x^1, \cdots, \widehat{x^i}, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

[*1] 複号 $\pm$ と $\gtrless$ の上下は一致しているものとする。

とする[*2]と、$x_i^\pm$ の像は $\mathbb{R}^n$ の開球 (内部を含む) である。これらは全単射で、$\{(U_i^\pm, x_i^\pm)\}_{i=1,\cdots,n}$ が S^n 上に C^∞ 構造を定めるため、S^n は多様体。

例 1.3 (射影空間)**.** $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ の元

$$\boldsymbol{x}=(x^0,x^1,\cdots,x^n),\boldsymbol{y}=(y^0,y^1,\cdots,y^n)\in\mathbb{K}^{n+1} \tag{1.7}$$

に対して、ある $\alpha\in\mathbb{K}$ があって $\boldsymbol{y}=\alpha\boldsymbol{x}$ なら $\boldsymbol{y}\sim\boldsymbol{x}$ だとする。するとこれは同値。$[\boldsymbol{x}]$ は同値類で、それら全体の集合を $P^n(\mathbb{K})$ とすれば、$P^n(\mathbb{K})$ は射影空間。

　これが C^∞ 多様体であることを見るために、C^∞ 構造を構成する。まず、

$$\pi:\mathbb{K}^{n+1}\ \{0\}\in\boldsymbol{x}\to[\boldsymbol{x}]\ni P^n(\mathbb{K}) \tag{1.8}$$

で、$P^n(\mathbb{K})$ の位相を $\mathbb{K}^{n+1}$ の位相から定義する。したがって、$P^n(\mathbb{K})$ の開集合が考えられて、それを $U_i=\{[(x^0,x^1,\cdots,x^n)]\in P^n(\mathbb{K})|x^i\neq 0\}$ として、写像 $\boldsymbol{x}_i:U_i\to\mathbb{K}^n$ を

$$\boldsymbol{x}_i([(x^0,x^1,\cdots,x^n)])=\left(\frac{x^0}{x^i},\cdots,\widehat{\frac{x^i}{x^i}},\frac{x^{n+1}}{x^i}\right) \tag{1.9}$$

とする。すると、$\{(U_i,x^i)\}_{i=1,\cdots,n+1}$ は C^∞ 構造を定める。

　最後に、この写像が well-defined なことを確認する。$P^n(\mathbb{K})$ の 2 つの元

$$[(x^0,\cdots,x^n)],[(y^0,\cdots,y^n)] \tag{1.10}$$

が等しいとする。したがって、ある $\alpha\in\mathbb{K}$ が存在して $y^i=\alpha x^i$ なので、このことを用いれば

$$\boldsymbol{x}_i([(y^0,\cdots,y^n)])=\left(\frac{y^0}{y^i},\cdots,\widehat{\frac{y^i}{y^i}},\frac{{}^{n+1}}{y^i}\right)=\left(\frac{x^0}{x^i},\cdots,\widehat{\frac{x^i}{x^i}},\frac{x^{n+1}}{x^i}\right)=\boldsymbol{x}_i([(x^0,\cdots,x^n)]) \tag{1.11}$$

であり、well-defined。

例 1.4. C^∞ 多様体の開集合 U もまた C^∞ 多様体。C^∞ 構造は、元の多様体の構造と U の共通部分をとればよい。また、閉集合は多様体とは限らない。

定義 1.2 (座標近傍と局所座標系)**.** C^∞ 多様体 M の開集合 W、写像 $\psi:W\to\mathbb{R}^n$ が次の条件を満たすとき、(W,ψ) を座標近傍という：

(i) $\psi:W\to\psi(W)$ は同相写像。

(ii) C^∞ 構造を $\{(U,\boldsymbol{x}_U)\}$ とするとき、$U\cap W\neq\phi$ なる全ての U に対して、写像

$$\boldsymbol{x}_U\circ\psi^{-1}:\psi(W\cap U)\to\boldsymbol{x}_U(W\cap U) \tag{1.12}$$

とその逆写像は $\mathbb{R}^n$ の意味で C^∞ 写像。

[*2] ハット^はその成分がないことを表す。

また、$p \in U$ に対して、$\mathbb{R}^n$ の点 $\boldsymbol{x}_U(p)$ を

$$\boldsymbol{x}_U(p) = (x^1(p), \cdots, x^n(p)) \tag{1.13}$$

と表すことがある。このとき、$x^1, \cdots, x^n$ を局所座標系という。

注 1.1. C^∞ 構造 $\{(U, \boldsymbol{x}_U)\}$ も定義から座標近傍。

定義 1.3 (C^∞ 写像と微分同相)**.** M, N は C^∞ 多様体、写像 $f : M \to N$ を考える。f が次の条件を満たすとき、C^∞ 写像という：

M, N の任意の座標近傍 $(U, \boldsymbol{x}_U), (V, \boldsymbol{y}_V)$ に対して、$V \cap f(U) \neq \phi$ ならば、写像

$$\boldsymbol{y}_V \circ f \circ \boldsymbol{x}_U^{-1} : \boldsymbol{x}_U(U) \to \boldsymbol{y}_V(V) \tag{1.14}$$

は、$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への C^∞ 写像。

また、$f : M \to N$ が全単射で上の意味で C^∞ 写像であり、逆写像 f^{-1} も同様ならば、f は M と N の間の微分同相という。

例 1.5. 3 次元球面 S^3 と 2 次の特殊ユニタリー群

$$SU(2) = \{U \in GL(2, \mathbb{C}) | UU^\dagger = 1, \det U = 1\} \tag{1.15}$$

は微分同相。

証明. (更新中 $\cdots$) ■

定義 1.4 (曲線と接ベクトル、接ベクトル空間)**.** $\mathbb{R}$ の開区間 (a, b) から C^∞ 多様体 M への C^∞ 写像 $c : (a, b) \to M$ を M 上の曲線という。以後は簡単のため、$t = 0$ で $c(0) = p \in M$ とする。つまり、この曲線は点 p を通る。

p を通る 2 つの曲線 c_1, c_2 に対して、その座標近傍 $(U, \boldsymbol{x}_U)$ で $(\boldsymbol{x}_U \circ c_1)'(0) = (\boldsymbol{x}_U \circ c_2)'(0)$ であるとき、$c_1 \sim c_2$ とする。この定義によって定まる曲線 c の同値類を

$$c'(0) \text{ or } \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(t)\right|_{t=0} \tag{1.16}$$

と書くことにし、これらを接ベクトルという。

p を通る曲線の同値類全体を T_pM とする。すると、T_pM はベクトル空間の構造をもつので、この T_pM を p における M の接ベクトル空間という。

注 1.2 (T_pM のベクトル空間としての構造)**.** $\mathbb{R}^m$ の構造をうまく入れればよくて、

$$ac_1 + bc_2 \equiv \boldsymbol{x}^{-1} \circ (a\boldsymbol{x} \circ c_1 + b\boldsymbol{x} \circ c_2) \tag{1.17}$$

でたぶん OK。

定義 1.5. p の近傍で定義された C^∞ 関数 f に対して、接ベクトル $X_p \in T_pM$ に沿った微分係数を

$$X_p(f) \equiv (f \circ c)'(0) \tag{1.18}$$

と定義する。ここで、$c(t)$ は同値類 X_p の代表元。

例 1.6. $(U, x^1, \cdots, x^n)$ を座標近傍として、$p \in U$ に対して

$$(x_0^1, \cdots, x_0^n) \equiv (x^1(p), \cdots, x^n(p)) \tag{1.19}$$

とする。p を通る曲線

$$\boldsymbol{x} \circ c_i(t) = (x_0^1, \cdots, x_0^i + t, \cdots, x_0^n) \tag{1.20}$$

に対して、接ベクトル $c_i'(0)$ を

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \tag{1.21}$$

で表すと、

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right\} \tag{1.22}$$

は接空間 T_pM の基底となる。

定義 1.6 (ベクトル場)**.** まず、

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM \tag{1.23}$$

とする。対応 $X : M \to TM$ が次の条件を満たすとき、X を M 上のベクトル場という：

(i) 任意の $p \in M$ に対して、$X(p) = X_p \in T_pM$。
(ii) 任意の $f \in C^\infty(M)$ について、写像 $p \mapsto X_p(f)$ は C^∞ 写像。

以後、M 上のベクトル場全体を $\mathfrak{X}(M)$ と書く。

注 1.3 (ベクトル場の局所座標表示)**.** ベクトル場 X を p の座標近傍 $(U, x^1, \cdots, x^n)$ に制限すると

$$X_p = \sum X^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \; X^i \in C^\infty(U) \tag{1.24}$$

と表すことができる。上の定義 (ii) は、X^i が C^∞ であることを言っている。もう 1 つの近傍を $(V, y^1, \cdots, y^n)$ とすると、

$$X_p = \sum Y^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p \tag{1.25}$$

と書けるが、$y^i(p) = y^i(x^1(p), \cdots, x^n(p))$ と書けることから、(1.24) を書き直すと

$$X_p = \sum X^i(p) \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p \tag{1.26}$$

となるので、(1.25) と比較して

$$Y^i = \sum X^j(p) \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) \tag{1.27}$$

である。

定義 1.7 (交換子積)**.**

1.2 微分形式

参考文献

[1] 茂木勇・伊藤光弘. **復刊 微分幾何学とゲージ理論**. 共立出版, reprint edition, 2001.

[2] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology, and Physics*. Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics Publishing, Bristol ; Philadelphia, 2nd ed edition, 2003.