素粒子物理学 中間 Report

三浦光太郎
高エネルギー加速器研究機構 素粒子原子核研究所 理論センター

2024 年 06 月 17 日 月曜日 3 時限

1 課題

Dirac Fermion 場 ψ と実 scalar 場 ϕ の Yukawa 相互作用系、

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)\psi + \frac{1}{2}\big((\partial_\mu \phi)^2 - m_\phi^2 \phi^2\big) + Y\phi\bar{\psi}\psi \ , \tag{1}$$

における散乱問題を考える。この Lagrangian density は Lorentz 不変である。また Yukawa 結合定数は無次元であり、摂動論的に繰り込み可能である。以下の問いは、講義 09-01 において QED の場合に実践した計算と同じ手順である。QED における photon 場 A_μ に対応する自由度が、今の場合 scalar 場 ϕ になっており、寧ろ簡単な計算である。

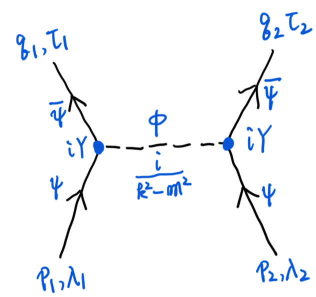

Figure 1: Yukawa 相互作用系における散乱過程の一つ。

問 1 Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}^\xi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi}^\xi(x))} = 0 \ , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} = 0 \ . \tag{2}$$

に Lagrangian density (1) を代入し、

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)_\xi^\eta \psi_\eta(x) = -Y\phi(x)\psi_\xi(x) \ , \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m_\phi^2)\phi(x) = Y\bar{\psi}^\xi(x)\psi_\xi(x) \ , \tag{3}$$

を導け。以下、spinor-index の ξ, η は略す。

問 2 上記 Fermion に対する Dirac 方程式を、

$$i\partial_0 \psi(x) = (H_0 + V(x))\psi(x) \ , \quad H_0 = -i \sum_{j=1,2,3} \alpha^j \partial_j + \gamma^0 m_f \ , \quad \alpha^{j=1,2,3} = \gamma^0 \gamma^j \ , \tag{4}$$

と書き直すと、

$$V(x) = -\gamma^0 Y \phi(x) \ , \tag{5}$$

と読み取れる事を確認せよ。

問 3 図 1 に示す様な散乱問題を考える。遷移振幅は上の $V(x)$ を用いて、

$$iT_{FI} = -i \int d^4x \ \psi_F^\dagger(x) V(x) \psi_I(x) = iY \int d^4x \ \bar{\psi}_F(x)\phi(x)\psi_I(x) \ , \tag{6}$$

となる。ここで、

$$\psi_I(x) = u(\vec{p}_1, \lambda_1) e^{-ip_1\cdot x} \ , \quad \bar{\psi}_F(x) = \bar{u}(\vec{q}_1, \tau_1) e^{iq_1\cdot x} \ , \quad \phi(x) = \phi(k) e^{-ik\cdot x} \ , \tag{7}$$

と表現する。$u(\bar{u})$ は Dirac-spinor で、引数の $\lambda(\tau)$ は helicity を指定する index である。また Eq. (3) の ϕ に対する Klein-Gordon 方程式右辺を、

$$Y\bar{\psi}(x)\psi(x) \to Y\bar{\psi}_{F'}(x)\psi_{I'}(x) \ , \tag{8}$$

と書き直したで、

$$\psi_{I'}(x) = u(\vec{p}_2, \lambda_2) e^{-ip_2\cdot x} \ , \quad \bar{\psi}_{F'}(x) = \bar{u}(\vec{q}_2, \tau_2) e^{iq_2\cdot x} \ , \tag{9}$$

と表現する。このとき遷移振幅は、

$$iT_{FI} = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - q_1 + p_2 - q_2) \cdot i\mathcal{M}_{FI} \ , \tag{10}$$

$$i\mathcal{M}_{FI} = (iY)^2 \bar{u}(\vec{q}_1, \tau_1) u(\vec{p}_1, \lambda_1) \frac{i}{k^2 - m_\phi^2}\Big|_{k=p_1-q_1} \bar{u}(\vec{q}_2, \tau_2) u(\vec{p}_2, \lambda_2) \ , \tag{11}$$

と表される事を示せ。Hint: iT_{FI} に含まれる ϕ を処理するために、Eq. (9) と Klein-Gordon 方程式を使う。

問 4 以下、非相対論極限

$$\frac{|\vec{p}|}{m_f} \ll 1 \ , \quad p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m_f^2} = m_f + \mathcal{O}\big(|\vec{p}|^2/m_f^2\big) \ , \tag{12}$$

について考える。Dirac spinor は chiral 表現で、

$$u(\vec{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{p^\mu \sigma_\mu} \ \chi(\lambda) \\ \sqrt{p^\mu \bar{\sigma}_\mu} \ \chi(\lambda) \end{pmatrix} \ , \quad \sigma_\mu = (I_2, \vec{\sigma}) \ , \quad \bar{\sigma}_\mu = (I_2, -\vec{\sigma}) \ , \tag{13}$$

と表される事を学んだ。ただし、$\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ は Pauli 行列、$\chi(\lambda)$ は運動量依存しない任意の 2 成分 spinor で $\chi(\lambda)^\dagger \chi(\tau) = \delta_{\lambda\tau}$ の様に規格化されている。非相対論極限では、

$$u(\vec{p}, \lambda) \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{2m_f}\right)\chi(\lambda) \\ \left(1 - \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{2m_f}\right)\chi(\lambda) \end{pmatrix} \ , \tag{14}$$

となる事を示し、それを用いて

$$i\mathcal{M}_{\text{non-rel}} = V(|\vec{k}|) \cdot (-i) \cdot 4m_\phi^2 \delta_{\lambda_1\tau_1} \delta_{\lambda_2\tau_2} \ , \quad V(|\vec{k}|) = \frac{-Y^2}{|\vec{k}|^2 + m_\phi^2} \ , \quad \vec{k} = \vec{q}_1 - \vec{p}_1 \ , \tag{15}$$

となる事を示せ。

問 5 前の頁で得られた $V(|\vec{k}|)$ は potential に該当する。その座標表示

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} V(|\vec{k}|)\ , \tag{16}$$

を計算し、Yukawa 型 potential

$$V(r) = -\frac{Y^2}{4\pi}\frac{e^{-m_\phi r}}{r}\ , \tag{17}$$

を導出せよ。Hint: Eq. (16) において、運動量積分を極座標表示して、角度積分を実行する。残った動径方向の積分は、複素積分に置き換えて評価する。その際、積分経路を上半面にとるか下半面にとるかが問題となるが、被積分関数が無限遠で減衰する方を採用する。

2 コメント

Yukawa potential(17) 右辺には負符号があるので引力である。本 report の Yukawa モデルは、短距離減衰を特徴とする核力のモデルとして使える (講義 01-02)。その場合 ψ は、電磁相互作用を無視して陽子と中性子を同一視したもので、その間の相互作用を荷電 pion を表す ϕ が担う描像である。Potential$V(r)$ の指数関数的減衰は、実 scalar 場の質量が有限である事に起因する。He 原子核半径程度 ($r \sim 2$) fm で減衰する (指数 ~ 1 となる) 事を要請すれば、$m_\phi \sim 100$ MeV 程度となる。これが荷電 pion ($M_{\pi^\pm} \simeq 140$ MeV) の予言である。但し、実際の荷電 pion は実 scalar 場ではなく複素偽 scalar 場であり、電磁相互作用を感じる。また強い相互作用によって生じた複合粒子でもある。更に弱い相互作用で muon に崩壊する。従って本 report のモデルを pion 系に当てはめるのは、非常に定性的な考察に留まる。

3 参考文献

Peskin-Schroeder の教科書
An Introduction to Quantum Field Theory,
Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder, CRC Press
における Sec. 4.7 後半部。

4 提出方法

解答を電子的に作成し、早稲田の Moodle システムを用いて提出。電子的とは、TeX で作成した PDF ファイルが望ましい。Word 文章 (.doc や.docx)/LibreOffice(.odt) で作成したものも可とする (出来れば PDF 化することが望ましい)。あるいはタブレット (iPad 等) 上で手書きの解答を作成して、それを PDF で保存したものでも良い。手書きの解答を複写機 (printer 等) で scan して、PDF 化したものでも良い。しかし、手書きノートを “写真で撮ったもの” は、解像度の問題で内容を判別しかねる場合や、こちらで file を開けない恐れがあるので、避けること。

5 提出期限

2024 年 7 月 8 日 (月曜日) の授業まで (期間は約 3 週間)。

6 注意事項

- 提出媒体の最初に氏名と学生番号を明示する事。
- 参考文献の記述を丸写ししたりせずに、自分で計算する事。解答から読み取れる独自性を主な評価基準とする。
- 提出期限を過ぎても受け付けるが、少し評価が下がる。いずれにせよ、単位取得のためには必ず提出する事。