Anomalies on orbifolds

Nima Arkani-Hamed, Andrew G. Cohen, Howard Georgi.

Physics Letters B 516 (2001) 395-402, arxiv:hep-th/0103135.

安倍研 M1 宮根一樹

2024 5/7 (火)

読んだ動機

この春休み、QFT や KK 理論をメインに勉強した。

くりこみ、有効作用、(非可換) ゲージ場の (経路積分) 量子化など $\cdots\cdots$。

その中で、アノマリーを勉強してみたいなと思いました。

一方で、この研究室 (のまわり) でも高次元の理論のアノマリーは調べてみたかったけど、良く分かっていなかった部分もある模様。

> Vacuum (in)stability will be also related to the anomaly on the compact space. We observe that the stable configurations are anomaly free since the charge of the bulk zero modes is canceled by that of the brane modes everywhere. On the other hands, anomaly is not canceled in the unstable configurations locally. This may imply inconsistency of the model. The local anomaly requires additional fields, e.g., antisymmetric fields, which cancel the anomaly via Green-Schwarz mechanism, or other local operators. These additional terms may change the localized FI-term and vacuum structure. For instance, the loop diagrams including antisymmetric fields would contribute to the localized FI-term, and shift it. It may be interesting to investigate stability of the bulk mode including such additional effects. We would study it elsewhere.

[2]

そこで、高次元のアノマリーに関連しているこの論文を読もうと思った。

Anomalies on orbifolds

Nima Arkani-Hamed (Harvard U.), Andrew G. Cohen (Harvard U.), Howard Georgi (Harvard U.)
Mar, 2001

11 pages
Published in: *Phys.Lett.B* 516 (2001) 395-402
e-Print: hep-th/0103135 [hep-th]
DOI: 10.1016/S0370-2693(01)00946-7
Report number: HUTP-01-A013, BUHEP-01-4, LBNL-47614, UCB-PTH-01-09
View in: AMS MathSciNet, OSTI Information Bridge Server, ADS Abstract Service

pdf cite claim reference search 164 citations

イントロダクション

アノマリー

4 次元の場合のカイラルアノマリーを確認する。

アノマリー

4 次元の場合のカイラルアノマリーを確認する。

ゲージ場 A_μ と結合しているフェルミオン ψ を考える

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

カイラル変換 $\psi \to e^{i\gamma^5\alpha(x)}\psi$ に対するネーターカレントの方程式は

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi, \quad j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$$

しかし、この結果は古典論の結果

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi) = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi$$

しかし、この結果は古典論の結果

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi) = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi$$

量子論の意味では、以下のファインマンダイアグラムの計算をすることと等価

(ファインマンダイアグラムを 2 つほど)

左側のダイアグラムの振幅を計算して位置基底に戻すと

$$\partial_\mu \langle \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\rangle = 2im \langle \bar{\psi}\gamma^5\psi\rangle + Q, \quad Q = \frac{e^2}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \langle F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\rangle$$

この余分な Q は、ゲージ不変性を保って発散を正則化するときに生じる項

この Q をカイラルアノマリーという。

理論にアノマリーがあると、通常の量子論の定式化ができなくなることが知られている [3]。

よって、

アノマリーが相殺されるように理論を作りたい

Kaluza-Klein 理論とアノマリー

高次元の時空を考え、余剰空間に周期条件を与えること (コンパクト化) によって、4 次元有効理論を作る方法があり、それを Kaluza-Klein 理論という。

特に、今回は 5 次元の時空 $\boldsymbol{x^M = (x^0, x^1, \cdots, x^4)}$ を考え、$\boldsymbol{x^4}$ の方向に $\boldsymbol{x^4 \sim x^4 + 2L}$ の周期境界条件を課してコンパクト化する。

Kaluza-Klein 理論とアノマリー

高次元の時空を考え、余剰空間に周期条件を与えること (コンパクト化) によって、4 次元有効理論を作る方法があり、それを Kaluza-Klein 理論という。

特に、今回は 5 次元の時空 $x^M = (x^0, x^1, \cdots, x^4)$ を考え、x^4 の方向に $x^4 \sim x^4 + 2L$ の周期境界条件を課してコンパクト化する。

5 次元の理論でのアノマリー相殺
と
4 次元有効理論でのアノマリー相殺
の対応

を調べたい。

一方で、カイラルアノマリーについては次のことが分かっている：

- 奇数次元では、非カイラル $\longrightarrow$ カイラルアノマリーは必ず相殺される
- 非カイラルな理論を S^1 コンパクト化しても、ゼロモード (後述) は非カイラル

一方で、カイラルアノマリーについては次のことが分かっている：

- 奇数次元では、非カイラル $\longrightarrow$ カイラルアノマリーは必ず相殺される
- 非カイラルな理論を S^1 コンパクト化しても、ゼロモード (後述) は非カイラル

よって、5 次元の理論をコンパクト化するだけでは、4 次元のカイラルアノマリーが消えているのは明らか。

そこで・・・

オービフォールド S^1/Z_2

今回は、さらにオービフォールドという境界条件を余剰空間に課す。

オービフォールド S^1/Z_2

今回は、さらにオービフォールドという境界条件を余剰空間に課す。

例えば、スカラー場の理論を考える

$$S = \int \mathrm{d}^5x \, \left(\frac{1}{2}\partial^M \Phi \partial_M \Phi - \frac{1}{2} m(x^4)^2 \Phi^2 \right)$$

この理論に、$\Phi(x, x^4) = \Phi(x, x^4 + 2L)$ という境界条件に加えて

$$\Phi(x, x^4) = \eta \Phi(x, -x^4) \, , \; \eta = \pm 1$$

という境界条件を課す。

まずは、周期境界条件 $\Phi(x, x^4) = \Phi(x, x^4 + 2L)$ から

$$\Phi(x, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x) \exp\left[i \frac{n\pi}{L} x^4\right]$$

とフーリエ展開できる。

さらに、オービフォールドの境界条件 $\Phi(x, x^4) = -\Phi(x, -x^4)$ を課すと $\phi_n(x) + \phi_{-n}(x) = 0$ という条件になる

この条件により、$n = 0$ のモード $\phi_0(x)$ は消えることがわかる

まずは、周期境界条件 $\Phi(x, x^4) = \Phi(x, x^4 + 2L)$ から

$$\Phi(x, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x) \exp\left[i\frac{n\pi}{L}x^4\right]$$

とフーリエ展開できる。

さらに、オービフォールドの境界条件 $\Phi(x, x^4) = -\Phi(x, -x^4)$ を課すと
$\phi_n(x) + \phi_{-n}(x) = 0$ という条件になる

この条件により、$n = 0$ のモード $\phi_0(x)$ は消えることがわかる

境界条件をうまく選べば、ゼロモードの場を消したり残したりできるため
4 次元の有効理論を作るときに嬉しい

ので、調べられている。

本論文の流れ・まとめ

同様のことが $\boldsymbol{x^4 = L}$ の点でも起こることがわかる

$\boldsymbol{x = 0, L}$ の点 (固定点) では、ゼロモードがカイラルになる (なりうる)

$\longrightarrow$ アノマリーが現れる可能性がある

本論文の流れ・まとめ

同様のことが $\boldsymbol{x^4 = L}$ の点でも起こることがわかる

$\boldsymbol{x = 0, L}$ の点 (固定点) では、ゼロモードがカイラルになる (なりうる)

$\longrightarrow$ アノマリーが現れる可能性がある

<u>議論の流れ</u>

- 余剰空間方向の場の境界条件を設定
- それを元のラグランジアンに代入 $\longrightarrow$ ゼロモードを計算
- 有効理論のアノマリーを議論

本論

セットアップ

(ここからは本文と記法を合わせます。)

時空は 5 次元 $x^C = (x^\mu, x_4)$

<u>作用</u>

$$S = \int \mathrm{d}^4x \int_0^L \mathrm{d}x_4\, \bar{\psi}(i\not{D} - i\gamma_4 D_4 - m(x_4))\psi$$

$$\not{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu,\ D_C = \partial_C - iA_C,\ \gamma_4 \equiv -i\gamma^5$$

<u>境界条件</u>: 周期境界条件 $x_4 \sim x_4 + 2L$ とオービフォールド

$$\psi(x, x_4) = \gamma^5\psi(x, -x_4)$$

$$A_\mu(x, x_4) = A_\mu(x, -x_4)$$

$$A_4(x, x_4) = -A_4(x, -x_4)$$

$$\Rightarrow \quad m(x_4) = m(2L + x_4) = -m(-x_4)$$

また、$\psi(x, x_4)$ をカイラリティーで分類

$$\psi = \psi_+ + \psi_-,\ \gamma^5 \psi_\pm = \pm \psi_\pm$$

ゲージ変換: ローカルな $U(1)$

$$\psi(x, x_4) \to e^{i\phi(x, x_4)} \psi(x, x_4)$$
$$A_C(x, x_4) \to A_C(x, x_4) - i\partial_C \phi(x, x_4)$$
$$\Rightarrow \quad \phi(x, x_4) = \phi(x, x_4 + 2L) = \phi(x, -x_4)$$

本文中でのコメント

- オービフォールドにより、ゼロモードはカイラルに。
  $\longrightarrow$ ゲージ対称性はカイラルアノマリーで破れる。
- 質量 $m(x_4)$ は (アノマリーの計算に関しては) 任意の関数でよいことが後に分かる。

アノマリーの計算

以下、$A_4 = 0$ とゲージ固定する。

KK モード展開は次の通り

$$\psi_\pm(x, x_4) = \sum_M \psi_{M\pm}(x)\xi_M^\pm(x_4)$$

ただし、

$$\left[-i\partial_4 + m(x_4) \right] \xi_M^+(x_4) = M\xi_M^+ \quad (M \geq 0)$$
$$\left[i\partial_4 + m(x_4) \right] \xi_M^-(x_4) = M\xi_M^-(x_4) \quad (M > 0)$$

(i 忘れはおそらくタイポ?)

KK モード展開

$$\psi_\pm(x, x_4) = \sum_M \psi_{M\pm}(x)\xi^\pm_M(x_4)$$

- 元の作用に代入
- x_4 の方向を 0 から L で積分

すると

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left[\sum_M \bar{\psi}_M(x)(i\partial\!\!\!/ - M)\psi_M(x) - \sum_{M,M'} \bar{\psi}_{M'+}(x)A\!\!\!/^+_{M'M}(x)\psi_{M+}(x) - \sum_{M,M'} \bar{\psi}_{M'-}(x)A\!\!\!/^-_{M'M}\psi_{M-}(x)\right]$$

$$
\begin{aligned}
S = \int \mathrm{d}^4 x \ \Bigg[& \sum_{M} \bar{\psi}_M(x)(i\partial\!\!\!/ - M)\psi_M(x) \\
& - \sum_{M,M'} \bar{\psi}_{M'+}(x) A\!\!\!/^{+}_{M'M}(x)\psi_{M+}(x) \\
& - \sum_{M,M'} \bar{\psi}_{M'-}(x) A\!\!\!/^{-}_{M'M}\psi_{M-}(x) \Bigg]
\end{aligned}
$$

ただし、

$$\psi_M(x) \equiv \psi_{M+}(x) + \psi_{M-}(x)$$

$$A^{\mu\pm}_{M'M}(x) \equiv \int_0^L \mathrm{d}x_4 \, \xi^{\pm}_{M'}(x_4)\xi^{\pm}_{M}(x_4) A^{\mu}(x, x_4)$$

このときのカレントは $\boldsymbol{J^C = \bar{\psi}(x, x_4)\gamma^C\psi(x, x_4)}$ を計算すれば

まとめ

まとめ

疑問や展望など

付録

A. 目次

B. 4次元のカイラルアノマリーの計算

QED のカイラルアノマリーを計算する。

参考文献

[1] N. Arkani-Hamed, A. G. Cohen, and H. Georgi, *Anomalies on Orbifolds,* Physics Letters B **516** (2001) 395–402, arxiv:hep-th/0103135.

[2] H. Abe, T. Kobayashi, S. Uemura, and J. Yamamoto, *Loop Fayet-Iliopoulos terms in T^2/Z_2 models: Instability and moduli stabilization,* Phys. Rev. D **102** (2020) 045005, arxiv:2003.03512 [hep-ph, physics:hep-th].

[3] 藤川和男, **経路積分と対称性の量子的破れ**. 岩波書店, 東京, 2001.

[4] 藤川和男, **ゲージ場の理論**. 岩波書店, 東京, 2001.

[5] K.-S. Choi and C.-ŭ. Kim, *Quarks and Leptons from Orbifolded Superstring*, no. volume 954 in Lecture Notes in Physics. Springer, Cham, second edition ed., 2020.