東京大学 平成22年 物理学専攻 院試 解答例

ミヤネ

最終更新：2023 年 8 月 13 日

目次

1　数学パート

第1問

1. $f(\boldsymbol{x})$の停留点が$\bar{\boldsymbol{x}}$であることを確認しましょう．x_iで$f(\boldsymbol{x})$を微分してみると

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j A_{ji} - b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j - b_i \tag{1.1.1}$$

となりますが，$\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}$ならこの値は0になります．したがって，$\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}$は停留点です．さらにヘッシアンですが，すべての点において

$$H = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \det A \tag{1.1.2}$$

であり，今はAの固有値は正なので，停留点はすべて極小．よって，$\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}$は最小です．

2. (1.1.1)で$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(m)}$を代入すれば

$$-\boldsymbol{r} = A\boldsymbol{x}^{(m)} - \boldsymbol{b} \tag{1.1.3}$$

です．$\boldsymbol{b} = A\bar{\boldsymbol{x}}$を代入すれば，

$$\boldsymbol{r} = -A(\boldsymbol{x}^{(m)} - \bar{\boldsymbol{x}}) \tag{1.1.4}$$

となります．

3. $f(\boldsymbol{x}^{(m+1)}) - f(\boldsymbol{x}^{(m)})$が最も大きくなるような$\alpha$を選べばよいでしょう．計算してみると

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}^{(m+1)}) - f(\boldsymbol{x}^{(m)}) &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{(m)} + \alpha\boldsymbol{r})^T A(\boldsymbol{x}^{(m)} + \alpha\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{b}^T(\boldsymbol{x}^{(m)} + \alpha\boldsymbol{r}) \\ &\qquad - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{(m)T} A\boldsymbol{x}^{(m)} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}^{(m)} \\ &= \underbrace{\alpha\boldsymbol{x}^{(m)T} A\boldsymbol{r} - \alpha\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{r}}_{=-\alpha\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{r}} + \frac{\alpha^2}{2}\boldsymbol{r}^T A\boldsymbol{r} \\ &= \frac{\|\boldsymbol{r}\|_A^2}{2}\left(\alpha - \frac{\|\boldsymbol{r}\|^2}{\|\boldsymbol{r}\|_A^2}\right)^2 - \frac{\|\boldsymbol{r}\|^4}{2\|\boldsymbol{r}\|_A^2} \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

となるので，この値が最も小さくなるのは$\alpha = \|\boldsymbol{r}\|^2/\|\boldsymbol{r}\|_A^2$のときです．

4. $\delta\boldsymbol{x}^{(m+1)} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}} + \alpha\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{x}} = \delta\boldsymbol{x}^{(m)} + \alpha\boldsymbol{r}$なので，

$$\begin{aligned} \|\delta\boldsymbol{x}^{(m+1)}\|_A^2 &= (\delta\boldsymbol{x}^{(m)} + \alpha\boldsymbol{r})^T A(\delta\boldsymbol{x}^{(m)} + \alpha\boldsymbol{r}) \\ &= \|\delta\boldsymbol{x}^{(m)}\|_A^2 + \alpha^2\|\boldsymbol{r}\|_A^2 + \alpha(\boldsymbol{r}^T A\delta\boldsymbol{x}^{(m)} + \delta\boldsymbol{x}^{(m)T} A\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

です．最後の項については

$$\delta\boldsymbol{x}^{(m)} = \boldsymbol{x}^{(m)} - \bar{\boldsymbol{x}} = -A^{-1}\boldsymbol{r} \tag{1.1.7}$$

なので，$\boldsymbol{r}^T A\delta\boldsymbol{x}^{(m)} + \delta\boldsymbol{x}^{(m)T} A\boldsymbol{r} = -2\|\boldsymbol{r}\|^2$となります．よって，最後に$\alpha$を代入すれば

$$\|\delta\boldsymbol{x}^{(m+1)}\|_A = \sqrt{\|\delta\boldsymbol{x}^{(m)}\|_A^2 - \frac{\|\boldsymbol{r}\|^4}{\|\boldsymbol{r}\|_A^2}} \tag{1.1.8}$$

です．

5. 前問の結果より

$$R = \sqrt{1 - \frac{1}{\|\delta \boldsymbol{x}^{(m)}\|_A^2} \frac{\|\boldsymbol{r}\|^4}{\|\boldsymbol{r}\|_A^2}} \tag{1.1.9}$$

を計算します．それぞれの因子は

$$\begin{aligned}\|\delta \boldsymbol{x}^{(m)}\|_A^2 &= \delta \boldsymbol{x}^{(m)T} A \delta \boldsymbol{x}^{(m)} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \rho_j \boldsymbol{a}_j^T\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_i \boldsymbol{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_i^2 &(1.1.10)\\ \|\boldsymbol{r}\|^2 &= \|A \delta \boldsymbol{x}^{(m)}\|^2 \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \rho_j \boldsymbol{a}_j^T\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_i \boldsymbol{a}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \rho_i^2 &(1.1.11)\\ \|A \delta \boldsymbol{x}^{(m)}\|_A^2 &= \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \rho_j \boldsymbol{a}_j^T\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \rho_i \boldsymbol{a}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3 \rho_i^2 &(1.1.12)\end{aligned}$$

となるので，

$$R = \sqrt{1 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \rho_i^2\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3 \rho_i^2\right)}} \tag{1.1.13}$$

です．

6. 前問の総和が$i = 1, 2$で行われることに注意すれば

$$R = \sqrt{1 - \frac{\left(\rho_1^2 p^2 + \rho_2^2\right)^2}{\left(\rho_1^2 p + \rho_2^2\right)\left(\rho_1^2 p^3 + \rho_2^2\right)}} \tag{1.1.14}$$

となりますが，$0 < p \leq 1$より

$$\sqrt{1 - \frac{\left(\rho_1^2 p^2 + \rho_2^2\right)^2}{\left(\rho_1^2 p + \rho_2^2\right)\left(\rho_1^2 p^3 + \rho_2^2\right)}} < \sqrt{1 - \frac{\rho_2^4}{\left(\rho_1^2 + \rho_2^2\right)^2}} \equiv A\ (< 1) \tag{1.1.15}$$

です[*1]．したがって，$\|\delta \boldsymbol{x}^{(m+1)}\| = A \|\delta \boldsymbol{x}^{(m)}\|$なので，$m \to \infty$で$\|\delta \boldsymbol{x}^{(m)}\|_A \to 0$となり，$\boldsymbol{x}^{(m)} \to \bar{\boldsymbol{x}}$です．

[*1] 分母は$p = 0$，分子は$p = 1$で不等式をつくりました．

第2問

1. 微分の変換は
$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\\ \frac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\frac{\partial}{\partial \xi}-v\frac{\partial}{\partial \eta}\\ \frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v & -v\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi}\\ \frac{\partial}{\partial \eta}\end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$
です．よって，
$$\begin{aligned}\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{1}{v^2}\left(v\frac{\partial}{\partial \xi}-v\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 u-\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 u\\ &=-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\end{aligned} \tag{1.2.2}$$
より，$u(x,t)$が満たす方程式は
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0 \tag{1.2.3}$$
です．
2. $f(\xi)$や$g(\eta)$は(1.2.3)を満たしています．その線形結合も解です．
3. tに依存しないことを示すためには，tで微分してみるとよいでしょう．実際
$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial t}&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{2}{v^2}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right]\mathrm{d}x\\ &=\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{v^2}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t}\right]\mathrm{d}x\\ &=0+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial x}\left[\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]\mathrm{d}x=0\end{aligned} \tag{1.2.4}$$
です．
4. 初期条件をf,gで書くと
$$f(x)+g(x)=u_0(x),\ vf'(x)-vg'(x)=u_1(x) \tag{1.2.5}$$
です．したがって，
$$f(x)=\frac{1}{2}u_0(x)+\frac{1}{2v}\int_0^x u_1(y)\mathrm{d}y,\ g(x)=\frac{1}{2}u_0(x)-\frac{1}{2v}\int_0^x u_1(y)\mathrm{d}y \tag{1.2.6}$$
となるので，
$$u(x,t)=\frac{u_0(x+vt)+u_0(x-vt)}{2}+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}u_1(y)\mathrm{d}y \tag{1.2.7}$$
が求める解です．
5. 前問の結果に代入すれば
$$u(x,t)=\frac{vb}{2\pi}\int_{x-vt}^{x+vt}\frac{\mathrm{d}y}{(y-a)^2+b^2} \tag{1.2.8}$$
となります．積分は$z\equiv(y-a)/b$と変数変換すれば
$$\int_{x-vt}^{x+vt}\frac{\mathrm{d}y}{(y-a)^2+b^2}=\frac{1}{b}\int_{z_-}^{z_+}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} \tag{1.2.9}$$

となります．ただし

$$z_{\pm} \equiv \frac{x \pm vt - a}{b} \tag{1.2.10}$$

とおきました．よって，

$$\int_{z_-}^{z_+} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \tan^{-1} z_+ - \tan^{-1} z_- = \tan^{-1} \frac{x+vt-a}{b} - \tan^{-1} \frac{x-vt-a}{b} \tag{1.2.11}$$

となるので

$$u(x,t) = \frac{v}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{x+vt-a}{b} - \tan^{-1} \frac{x-vt-a}{b} \right] \tag{1.2.12}$$

です．ここで，次の公式

$$\tan^{-1} \alpha - \tan^{-1} \beta = \tan^{-1} \frac{\alpha - \beta}{1+\alpha\beta} \tag{1.2.13}$$

を用いれば

$$\tan^{-1} \frac{x+vt-a}{b} - \tan^{-1} \frac{x-vt-a}{b} = \tan^{-1} \frac{2vt/b}{1+\dfrac{(x-a)^2-v^2t^2}{b^2}} \tag{1.2.14}$$

なので

$$u(x,t) = \frac{v}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2bvt}{(x-a)^2-v^2t^2+b^2} \tag{1.2.15}$$

が求める解となります．

6. $b \to 0$の極限では，b^2の寄与が無視できて

$$u(x,t) \sim \frac{v}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2bvt}{(x-a)^2-v^2t^2} \tag{1.2.16}$$

となります．（概形は省略します．$x=a$で負のピークをもつ形になるでしょう．）

2　物理パート

第1問

1. $-L \leq x \leq L$でのシュレーディンガー方程式は

$$\psi(x) = -k^2\psi(x),\ k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{2.1.1}$$

なので，その解は

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx \tag{2.1.2}$$

と書けます．境界条件は$\psi(L) = 0$なので

$$A\sin k_nL + B\cos k_nL = 0 \tag{2.1.3}$$

となり，$A = 0$ or $B = 0$です．それぞれの場合を考えると

$$\begin{cases} A = 0\text{のとき} \quad \cos k_nL = 0 \ \rightarrow \ k_nL = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\pi \\ B = 0\text{のとき} \quad \sin k_nL = 0 \ \rightarrow \ k_nL = n\pi \end{cases} \tag{2.1.4}$$

となるので[*2]，エネルギー固有値は

$$E_n = \begin{cases} \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(n - \dfrac{1}{2}\right)^2 \quad \left(\psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{L}}\cos k_nx\right) \\ \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2 \quad \left(\psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{L}}\sin k_nx\right) \end{cases} \tag{2.1.5}$$

となります．ただし，$n = 1, 2, \cdots$です．

2. 不確定性原理より$\Delta p \neq 0$なので，粒子が運動量を持っている可能性があります．

3. 無摂動の基底状態は

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right) \tag{2.1.6}$$

なので

$$E_0^{(1)} = \langle\psi_0|\Delta V|\psi_0\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} V_1\delta(x)\cos^2\left(\frac{\pi}{2L}x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{L}V_1 \tag{2.1.7}$$

です．(ただし，$\Delta V \equiv V_1\delta(x)$とおきました．)よって，

$$E_0 \sim \frac{\pi^2\hbar^2}{8mL} + \frac{1}{L}V_1 \tag{2.1.8}$$

となります．

4. 第1励起状態の無摂動の波動関数は

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \tag{2.1.9}$$

[*2] このとき，$\psi(-L) = 0$も成立しています．

なので，摂動の1次は0です．波動関数が$\sin$型で，ポテンシャルが$x=0$のみに値を持つので，摂動はなくなります[*3]．したがって，

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{2.1.10}$$

のままです．

5. 図2.1のようになります．

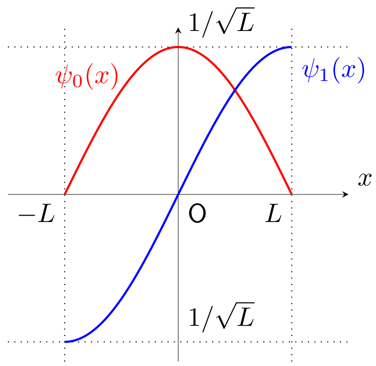

図2.1　$\psi_0(x)$と$\psi_1(x)$の概形

6. V_1が$E_0^{(0)}$に比べて非常に小さいときは(2.2)のようになり，これはE_1を超えないように上昇すると考えられます．（一方でE_1は変化しません．）したがって，図2.2のようになると考えられます．

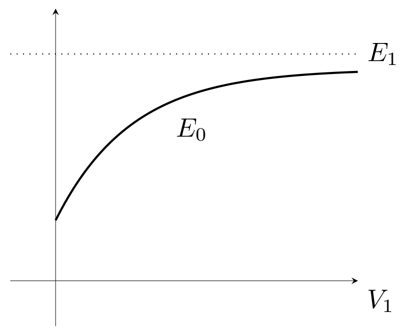

図2.2　E_0とE_1

[*3] この摂動の計算では

$$\int_{-L}^{L} \psi_k^*(x) \times V_1\delta(x)\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \psi_k^*(0) \times V_1 \sin 0 = 0$$

といった因子が必ず入ってくるので，0になります．（$\psi_k(x)$は第k励起状態です．）

第2問

1. 状態数は

$$W=\frac{(N_\alpha+N_\beta)!}{N_\alpha!N_\beta!} \tag{2.2.1}$$

なので，ボルツマンの法則より

$$S=k_B\log W=k_B\left(\log(N_\alpha+N_\beta)!-\log N_A!-\log N_B!\right) \tag{2.2.2}$$

です．

2. 前問の結果をNで割って，スターリングの公式を用いれば

$$\begin{aligned} s&=k_B\left[\left(\frac{N_\alpha}{N}+\frac{N_\beta}{N}\right)\log(N_\alpha+N_\beta)-\frac{N_\alpha}{N}\log N_\alpha-\frac{N_\beta}{N}\log N_\beta\right]\\ &=k_B\left[\frac{N_\alpha}{N}\log\left(1+\frac{N_\beta}{N_\alpha}\right)+\frac{N_\beta}{N}\log\left(1+\frac{N_\alpha}{N_\beta}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

となります．ここで，次の2式

$$\frac{N_\alpha}{N}+\frac{N_\beta}{N}=1,\ \varepsilon=-f\left(a\frac{N_\alpha}{N}+b\frac{N_\beta}{N}\right) \tag{2.2.4}$$

を解けば

$$\frac{N_\alpha}{N}=-\frac{\varepsilon+bf}{f(a-b)},\ \frac{N_\beta}{N}=\frac{\varepsilon+af}{f(a-b)} \tag{2.2.5}$$

となるので，(2.2.3)に代入すれば

$$s=-\frac{k_B}{f(a-b)}\left[(\varepsilon+bf)\log\frac{f(b-a)}{\varepsilon+bf}-(\varepsilon+af)\log\frac{f(a-b)}{\varepsilon+af}\right] \tag{2.2.6}$$

となります．

エントロピーの概形ですが，(2.2.6)は$b-a<0$より実は定義不可能です．したがって，物理的な解釈から書いてあげるのがよいかと思います．まず，εの絶対値が最小値に近ければ近いほど，系は$N_\alpha\sim 1,\ N_\beta\sim 0$となっていきます．すると，状態数が小さくなるので，エントロピーも小さくなっていると考えられます．そこからεの絶対値が大きくなると，系のとれる状態数がだんだん大きくなっていき，あるピークを超えると今度は$N_\alpha\sim 0,\ N_\beta\sim 1$という状態に近づき，エントロピーは再び減少していくはずです．以上のことを踏まえると，図2.3のように変化すると考えられます．

3. 分配関数は，粒子がαかβの状態しか取れないことに注意すれば

$$Z[\beta]=\sum_{\sigma=\alpha,\beta}e^{-\beta\varepsilon_\sigma}=e^{\beta fa}+e^{\beta fb} \tag{2.2.7}$$

となります．したがって，自由エネルギーは

$$F[T]=-\frac{1}{\beta}\log Z=-k_BT\log\left[e^{fa/k_BT}+e^{fb/k_BT}\right] \tag{2.2.8}$$

なので，エントロピーは

$$\begin{aligned} s&=-\frac{\partial F}{\partial T}\\ &=k_B\log\left(e^{fa/k_BT}+e^{fb/k_BT}\right)-\frac{f}{T}\frac{ae^{fa/k_BT}+be^{fb/k_BT}}{e^{fa/k_BT}+e^{fb/k_BT}} \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

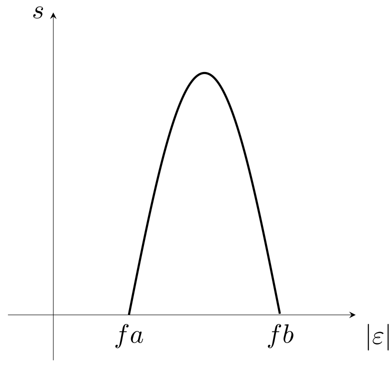

図2.3　エネルギーの絶対値$|\varepsilon|$とエントロピーsの関係

となります．$T \to 0$では，$a > b$よりe^{fa/k_BT}の寄与が大きいと考えられるので

$$s \to \frac{fa}{T} - \frac{f}{T}\frac{ae^{fa/k_BT}}{e^{fa/k_BT}} = 0 \tag{2.2.10}$$

です．一方で$T \to \infty$では，e^{fa/k_BT}，$e^{fb/k_BT} \to 1$より

$$s \to k_B \log 2 \tag{2.2.11}$$

となります．

4. 温度が小さければ小さいほど$e^{fa/k_BT} \gg e^{fb/k_BT}$となることから，長さの値が大きくなると考えられます．したがって，逆に考えれば，温度が大きくなればなるほど，状態βになる粒子が多くなるので，鎖は短くなると考えられます．
   $T = 0$では，すべての粒子が状態αにあると考えられるので，単量体1つあたり$l(0) = a$です．一方で，$T = \infty$では，$e^{fa/k_BT} \sim e^{fb/k_BT} \sim 1$より，状態$\alpha$と状態$\beta$の粒子が半々で存在する[*4]と考えられるので$l(\infty) = (a+b)/2$となります．
5. $$\int_0^\infty \frac{c(T)}{T}\mathrm{d}T = s(\infty) - s(0) = k_B \log 2. \tag{2.2.12}$$
6. 状態αと状態βは等確率で存在すると考えられるので，$(a+b)/2$でしょう．

[*4] 前問の答え(2.2.11)もこの考え方と一致しています．

第3問

1. 磁場も$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$と書けるとすれば，マクスウェル方程式で
$$\frac{\partial}{\partial t}\to -i\omega \tag{2.3.1}$$
とするだけです．
2. 前問の結果をまとめると，マクスウェル方程式は
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=0 \tag{2.3.2}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-i\omega\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{0} \tag{2.3.3}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\varepsilon}\rho(\boldsymbol{r}) \tag{2.3.4}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})+i\omega\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \tag{2.3.5}$$
です．$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{H}$の方程式を導出するためには，(2.3.3)と(2.3.5)のrotをとればよいです．(2.3.3)のほうは
$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E})-\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{E}-i\omega\left(-i\omega\varepsilon\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\right)=\boldsymbol{0} \tag{2.3.6}$$
となるので，これを整理すれば
$$(\boldsymbol{\nabla}^2+\varepsilon\mu\omega^2)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{\nabla}\rho(\boldsymbol{r})+i\omega\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})=0 \tag{2.3.7}$$
となります．(2.3.5)のほうのrotをとって整理すれば
$$(\boldsymbol{\nabla}^2+\varepsilon\mu\omega^2)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=0 \tag{2.3.8}$$
です．
3. (2.3.3)に解を代入すれば
$$ik\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E}_0=i\mu\omega\boldsymbol{H}_0 \tag{2.3.9}$$
となるので，$\boldsymbol{H}_0\perp\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{E}_0\perp\boldsymbol{H}_0$です．同様にして，(2.3.5)に解を代入すれば
$$ik\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{H}_0=(\sigma-i\varepsilon\omega)\boldsymbol{E}_0 \tag{2.3.10}$$
となるので，$\boldsymbol{E}_0\perp\boldsymbol{s}$が分かります．
4. 前問の2式(2.3.9)，(2.3.10)の絶対値をとれば
$$\frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{H}|}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{2.3.11}$$
です．$\sigma\neq 0$のときは，そもそも波数が異なってくるので電場と磁場の位相がずれます．
5. 完全導体の境界条件は「接線方向の電場が0」なので[*5]，y軸方向に電場が振動し，それに垂直なx軸方向に磁場が振動します．

[*5] 一般に，電場と磁場の境界条件は
$$(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)\cdot\boldsymbol{t}=0,\ (\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\cdot\boldsymbol{t}=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{t}$$
です．今回は，完全導体内は電場が存在しないことから，境界条件を満たすためには接線方向の電場が0であることが必要です．

6. xy平面を一周する経路γを考えれば，アンペールの法則より

$$I = \int_\gamma \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2b|\boldsymbol{H}_0|e^{ikz} \tag{2.3.12}$$

です．

7. $z = z_0$における電位差は

$$V = -\int_0^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = b|\boldsymbol{E}_0|e^{ikz_0} \tag{2.3.13}$$

です．したがって，

$$\frac{V}{I} = \frac{|\boldsymbol{H}_0|}{2\boldsymbol{E}_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{2.3.14}$$

です．