# ２００４年度９月入学・２００５年度４月入学

# 大学院理工学研究科修士課程入学試験

## 物理学及応用物理学専攻

## 専門科目表紙

◎問題用紙は＿6＿ページです。試験開始直後に確認してください。
◎解答用紙は＿8＿枚綴りが＿1＿組あります。試験開始直後に確認してください。

## 注意事項

**〔選択方式〕**

○ 下記の３科目（６題）の中から任意の４題を選択して解答すること。

| 科目 | 問題番号 | |
|---|---|---|
| 数学一般 | 1 | 2 |
| 力学および電磁気学 | 3 | 4 |
| 量子力学および熱・統計力学 | 5 | 6 |

**〔解答方法〕**

(1) 解答は別紙の解答用紙の表の面に記入すること。裏面は使用しないこと。
(2) 解答用紙は８枚綴りになっている。
(3) １枚の解答用紙に２問以上を解答しないこと。１問の解答が解答用紙２枚以上にわたるときには、その旨を明記すること。
(4) 選択した４題以外は解答しないこと。
(5) 受験番号・氏名・部門名をすべての解答用紙に記入すること。

2004年度9月入学・2005年度4月入学　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：数学一般（その1）

問題番号 1　次の3行3列の正方行列 (square matrix) $M$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

に関して，以下の各問に答えよ．

問 1. $M$ の規格化された右固有ベクトル (normalized right-eigenvector) $\boldsymbol{a}_k$ とその固有値 (eigenvalue) $\lambda_k$

$$M\boldsymbol{a}_k = \lambda_k \boldsymbol{a}_k, \qquad \boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_k = 1 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

を求めよ．ただし $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$ とする．また，$\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{a}_k$ の転置ベクトル (transposed vector)，すなわち行ベクトル (row vector) を表わす．

問 2. 列ベクトル (column vector) $\boldsymbol{a}_k$ を横に並べて作った3行3列の正方行列を $A$ とする．

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$$

$A$ の逆行列 (inverse matrix) $A^{-1}$ を求めよ．

問 3. $A^{-1}$ の各行を成分とする3個の行ベクトルを $\boldsymbol{b}_k^{\mathrm{T}}$ $(k = 1, 2, 3)$ とする．

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

このとき3行3列の行列 $P_k$ を $P_k = \boldsymbol{a}_k \boldsymbol{b}_k^{\mathrm{T}}$ $(k = 1, 2, 3)$ で定義すると，次の関係が成り立つことを示せ．

$$P_k P_\ell = \delta_{k\ell} P_k, \qquad \sum_{k=1}^{3} P_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問 4. 行列 $M$ を $P_k$ で展開 (expand) せよ．

問 5. 行列 $M$ を指数 (exponent) とする行列 $e^{-M}$ の固有値と対応する右固有ベクトル，および左固有ベクトル (left-eigenvector) を求めよ．

問 6. 次の極限 (limit)

$$\lim_{N \to \infty} \left(e^{-M}\right)^N$$

を求めよ．

2004年度9月入学・2005年度4月入学　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：数学一般（その2）

問題番号 2

実数 (real number)$a$ と実数値関数 (real valued function)$f(x)$ は、次の微積分方程式 (integro-differential equation) の初期値問題 (initial value problem) を満たす。

$$f'(x) + \frac{1}{2}\int_a^x \left( f\left(\frac{x+t}{2}\right) + f\left(\frac{x-t}{2}\right)\right) dt = x + \sin x,$$

$$f(a) = f'(a) = 0.$$

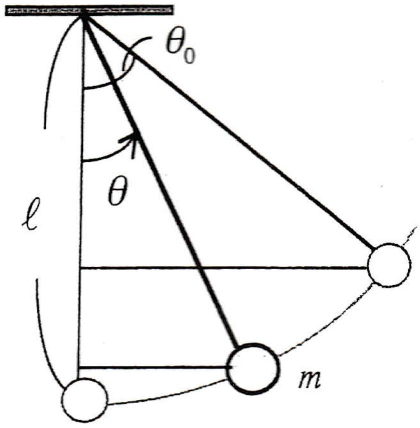
$a$ と $f(x)$ を求めよ (Find $a$ and $f(x)$)。

２００４年度９月入学・２００５年度４月入学　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：力学および電磁気学（その１）

問題番号 3




図のような単振り子(simple pendulum)の運動を考える。ただし，おもり(bob)の質量(mass)は $m$，糸の長さは $\ell$，重力加速度(gravitational acceleration)の大きさは $g$ で一定とし，摩擦や空気の抵抗，糸の質量，おもりの大きさは無視できるものとする。また，時刻 $t$ における振り子のふれ角を $\theta(t)$ とし，最大(maximal)ふれ角を $\theta_0$ $(0 \le \theta_0 < \pi/2)$ と表す。ここで，おもりが右方向に運動しながら $\theta = 0$ の方向を通過したときを $t = 0$ とする。

① おもりの運動方程式(equation of motion)の接線成分(tangential component)を表す式を書きなさい。

② ①の式から，力学的エネルギー保存則(conservation of mechanical energy)を導きなさい。

③ 右方向に運動するおもりが $\theta$ の方向を通過する時刻 $t$ は，(1)式で表される。このことを，②で導いた式を積分する(integrate)ことによって示しなさい。

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \qquad (1)$$

④ ここで，$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = k\sin\phi$ （ただし，$k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$ ）という関係で結ばれる変数 $\phi$ を使って(1)式を変形することにより，単振り子の周期(period)は次式で表されることを示しなさい。

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}} \qquad (2)$$

⑤ (2)式の右辺は，被積分関数(integrand)を級数展開(series expansion)してから積分すれば，$k^2$ の多項式(polynomial)として表せる。この多項式を１次の項まで示しなさい。

⑥ 最大ふれ角が 0.1rad の単振り子を時計に用いると，$\theta_0$ が無限小(infinitesimal)の単振り子と比べて一日あたり何秒遅れるか。⑤の多項式を用いて計算した答を有効数字１桁で示しなさい。

２００４年度９月入学・２００５年度４月入学　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：力学および電磁気学（その２）

問題番号 4

電離層(ionosphere)に電磁波(electromagnetic wave)が入射した場合を考えよう。電離した(ionized)空気分子の陽イオン(cation)は重いので動かないと仮定し，電子(electron)だけが電磁場に応答(response)すると考える。

① 電場 $E(r,t)$，磁場 $H(r,t)$，電束密度 $D(r,t)$，磁束密度 $B(r,t)$ を用いて真空中 (in a vacuum) での４つの Maxwell の方程式と，$B(r,t)$と $H(r,t)$，$D(r,t)$と $E(r,t)$の間で成り立つ補助式を書け。(真空の誘電率を $\varepsilon_0$，透磁率を $\mu_0$ とする。)

② 上の Maxwell の式を用いて，電場（または磁場）が波動方程式(wave equation)に従うことを導き，この電磁波の速度(velocity)を求めよ。

③ 電磁波中の電子の運動方程式(equation of motion)を書け。[電子の質量(mass)を $m$，電荷(charge)を $e$，速度を $v$ とせよ。]

④ 上の式で，電子の速度 $v$ が光速(speed of light) $c$ に比べて十分遅いとし，磁場の項は電場の項に比べて無視できる(negligible)ほど小さいとする。
入射電場を $E = E_0 \cos \omega t$ として変位電流(displacement current)，電子による伝導電流(conduction current)を求めよ。(電子密度(electron density)を $n$ とせよ。)

⑤ この電離層の誘電率(dielectric constant)を求めよ。

⑥ 地上からの電波(radio wave)が電離層で反射(reflect)される理由(reason)をのべよ。

２００４年度９月入学・２００５年度４月入学　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：量子力学および熱・統計力学（その１）

問題番号 5

１次元ポテンシャル (one dimensional potential)

$$V(x) = V_0(e^{-\frac{2x}{a}} - 2e^{-\frac{x}{a}}) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

を考える。ここで $V_0, a$ はともに正の定数である。いま、このポテンシャル中に束縛 (bound) されている質量 (mass) $m$ の粒子 (particle) について考察する。

(1) $\xi = e^{-x/a}$ とおき、定常状態にある粒子の波動関数 (wave function) $\psi(\xi)$ の満たすべき Schrödinger 方程式を書け。ここで粒子のエネルギーを $E$ とする。

(2) (1) の Schrödinger 方程式を $\xi \approx 0$ および $\xi \gg 1$ の領域 (region) で解くと、それぞれの領域で近似解 (approximate solution)

$\psi \propto \xi^\lambda$ $[\lambda(>0)$ : 定数$]$ および $\psi \propto e^{-\sigma\xi}$ $[\sigma(>0)$ : 定数$]$

が得られる。$\lambda$ および $\sigma$ を $m, a, V_0, E$ を用いて表せ。

(3) $\psi(\xi) = \xi^\lambda e^{-\sigma\xi} f(\xi)$ とおき、(1) で求めた Schrödinger 方程式を $f$ の微分方程式 (differential equation) で表せ（式の中の $V_0, E$ などは (2) の $\lambda, \sigma$ を用いて消去せよ)。この、微分方程式をべき級数 (power series) 展開で解き、解が有限の多項式 (polynomial function) になる条件から、多項式の次数 (degree) $n(= 0, 1, 2, \cdots)$ を用いて量子化された (quantized) 粒子のエネルギー固有値 (eigen value) $E_n$ を求めよ。

(4) 束縛状態 (bound state) が少なくとも一つ存在するための条件を求めよ。

(5) ポテンシャル $V(x)$ を最小値の近く ($x \approx 0$) で近似すると $V(x) = -V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ と表される。このとき、角振動数 (angular frequency) $\omega$ を $m, a, V_0$ を用いて表せ。この近似されたポテンシャル中の粒子はエネルギー原点をずらした調和振動子 (harmonic oscillator) $\left[\text{Hamiltonian} : H_{(\mathrm{HO})} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - V_0\right]$ と見なすことができる。そのエネルギー固有値 $\mathcal{E}_n$ を $n, \omega, V_0$ を用いて表せ（これは答えのみでよい）。また、(3) で求めたエネルギー固有値 $E_n$ も $n, \omega, V_0$ を用いて表し、$\mathcal{E}_n$ との差を求めよ。

(6) いま、$V_0 = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ としたとき、基底状態 (ground state) ($n = 0$) $|0\rangle$ の規格化された (normalized) 固有関数 (eigen function) $\psi_0(x)$ を求め、粒子の位置の期待値 (expectation value) $\langle 0|x|0\rangle$ を $a$ で表せ。なお、$\int_0^\infty e^{-t} \ln t dt = -\gamma$ (Euler 定数) を用いて良い。

この問題で用いたポテンシャルは Morse ポテンシャルと呼ばれ、２原子分子の原子間力を近似するポテンシャル $V(r - r_0)$ としてよく用いられる。ここで、$r_0$ は力学平衡にある原子間の距離である。

２００４年度９月入学・２００５年度４月入学　大学院理工学研究科修士課程入学試験問題

物理学及応用物理学専攻

科　目　名：量子力学および熱・統計力学（その２）

問題番号 6

質量 (mass) $m$ の単原子分子 (monatomic molecule) $N$ 個からなる理想気体 (ideal gas) が, 下図 (figure) のような断面積 (cross section area) $S$, 高さ (height) $H$ の円筒容器内 (cylindrical container) に入っている系 (system) を, カノニカル分布 (canonical distribution) を用いて古典統計力学 (classical statistical mechanics) に基づいて考える. ただし, 系の温度 (temperature) を $T$, ボルツマン定数 (Boltzmann constant) を $k$, プランク定数 (Planck constant) を $h$ で表す.

(1) 系の分配関数 (partition function) を $Z$ とするとき, 系の内部エネルギー (internal energy) $E$ およびヘルムホルツの自由エネルギー (Helmholtz free energy) $F$ を $Z, k, T$ で表せ.

(2) 系に外力 (external force) が働いていない場合の分配関数を $Z_0$ とする. $Z_0$ を $k, h, S, H, m, N, T$ で表せ.

(3) (2) の場合におけるヘルムホルツの自由エネルギーを $F_0$ とし, $F_0$ を導出せよ. また, (定積) 熱容量 (heat capacity at constant volume) $C_V$ が $C_V = \frac{3}{2}Nk$ となることを示せ. ここで, 必要であればスターリングの公式 (Stirling's formula): $\ln N! \approx N \ln(N/e)$ を用いてよい.

(4) 以下では, 円筒容器の底を $z = 0$ のままにして, 高さ $H$ が無限に大きい場合 ($H \to \infty$) を考える. さらに一様な重力場 (gravitational filed) が系に対して, $-z$ の向きに働いているものとする (下図参照). 重力加速度 (gravity) の大きさを $g$ として, この場合の分配関数を $Z_g$ とする. $Z_g$ を $k, h, g, S, m, N, T$ で表せ.

(5) (4) の場合におけるヘルムホルツの自由エネルギーを $F_g$ とし, $F_g$ を導出せよ. また, 重力下での系の熱容量 $C_g$ が $C_g = \frac{5}{2}Nk$ となることを示せ.

(6) $C_V < C_g$ となる理由を定性的に説明せよ.