京都大学令和5年物理学専攻院試解答例

ミヤネ

最終更新：2023 年 8 月 11 日

目次

1　パート1

I-1：力学

(1) 重心を原点にとれば$m_1 r_1 = m_2 r_2$である．

(2) 角振動数は$\omega = 2\pi/P$である．したがって，全角運動量は

$$\begin{aligned} J &= \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{p}_2 \\ &= m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega \\ &= \frac{2\pi r_1 r_2 (m_1 + m_2)}{P} \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

である．

(3) コンパクト星の運動方程式を考える．コンパクト星の速度をvとすれば，

$$m_1 \frac{v^2}{r_1} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1.1.2}$$

である．ここで，$r = r_1 + r_2$より，$m_1 r_1 = m_2 r_2$からr_2を消去してr_1について解けば

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r = \frac{m_2}{m} r \tag{1.1.3}$$

であり，周期がPなのに対してコンパクト星の速度がvなので

$$P = \frac{2\pi r_1}{v} \tag{1.1.4}$$

より，

$$v = \frac{2\pi m_2 r}{mP} \tag{1.1.5}$$

である．(1.1.2)に(1.1.3)，(1.1.5)を代入して整理すると

$$P^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{Gm} \tag{1.1.6}$$

を得る．

(4) (A)を整理すれば

$$\frac{2\pi}{P} = \frac{1}{r} \left(\frac{Gm}{r} \right)^{1/2} \tag{1.1.7}$$

である．よって

$$\begin{aligned} J &= \frac{r_1 r_2 (m_1 + m_2)}{r_1 + r_2} \left(\frac{Gm}{r} \right)^{1/2} \\ &= \frac{r_1 r_2 (m_1 + m_2)^2}{(r_1 + r_2)^2} \left(\frac{Gr}{m} \right)^{1/2} \\ &= m_1 m_2 \left(\frac{Gr}{m} \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

である．

(5) 対数をとれば

$$\log J = \log m_1 + \log m_2 + \frac{1}{2}\log G + \frac{1}{2}\log r - \frac{1}{2}\log m \tag{1.1.9}$$

なので，これを時間で微分すれば

$$\frac{\dot{J}}{J} = \frac{\dot{m}_1}{m_1} + \frac{\dot{m}_2}{m_2} + \frac{1}{2}\frac{\dot{r}}{r} - \frac{1}{2}\frac{\dot{m}}{m} \tag{1.1.10}$$

である．

(6) 前問において，$\dot{J}, \dot{m}$を0とすれば

$$\frac{\dot{m}_1}{m_1} + \frac{\dot{m}_2}{m_2} + \frac{1}{2}\frac{\dot{r}}{r} = 0 \tag{1.1.11}$$

である．今回は$\dot{m}_1 = -\dot{m}_2 > 0$なので

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{2\dot{m}_1}{m_1 m_2}(m_1 - m_2) \tag{1.1.12}$$

である．$m_1 - m_2$の係数が正であることに気をつければ

$$\begin{cases} m_1 > m_2\text{のとき} \quad \dot{r} > 0 \implies \text{半径増大} \\ m_1 < m_2\text{のとき} \quad \dot{r} < 0 \implies \text{半径減少} \end{cases} \tag{1.1.13}$$

である．

(7) 対数微分をすれば

$$\frac{\dot{V}_R}{V_R} = 3\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{m}_2}{m_2} \tag{1.1.14}$$

である．(1.1.10)より，$\dot{r}/r$を消去すると

$$\frac{\dot{V}_R}{V_R} = 6\frac{\dot{J}}{J} + \frac{\dot{m}_2(6m_2 - 5m_1)}{m_1 m_2} \tag{1.1.15}$$

である．

(8) 対数微分をしてやれば

$$\frac{\dot{m}_2}{m} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\dot{V}_s}{V_s} \tag{1.1.16}$$

である．質量移動が継続するための条件は$\dot{m}_2 < 0$より

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\dot{V}_s}{V_s} < 0 \tag{1.1.17}$$

だが，等ポテンシャル面からの流出が起こる瞬間は$V_R = V_S$．よって，

$$6\frac{\dot{J}}{J} + \frac{\dot{m}_2(6m_2 - 5m_1)}{m_1 m_2} < 0 \tag{1.1.18}$$

より

$$\left|\frac{\dot{J}}{J}\right| > \frac{1}{6}\cdot\frac{\dot{m}_2(6m_2 - 5m_1)}{m_1 m_2} \tag{1.1.19}$$

である．

I-2：電磁気学

(1) 図のように，$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}$と磁場$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$の作る断面を考え，$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}$と$\boldsymbol{s}$のなす角を$\theta$とおく． すると，$\boldsymbol{s}$に平行な成

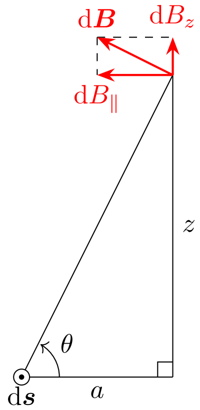

図1.1　$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}$と$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$の作る断面

分は積分によって消えるので，$\boldsymbol{s}$に垂直な成分のみを考えればよい．よって，垂直成分$\mathrm{d}B_z$は

$$\mathrm{d}B_z = |\mathrm{d}B|\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{a|\mathrm{d}\boldsymbol{s}|}{(a^2+z^2)^{3/2}} \tag{1.2.1}$$

である．よって，

$$B_z = \int_0^{2\pi a}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{a\mathrm{d}s}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2}\cdot\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} \tag{1.2.2}$$

である．

(2) $\hat{r}=\hat{n}$の場合を考えると，

$$\boldsymbol{B} = 2K(r)IS\hat{r} = 2\pi a^2 K(r)I\hat{r} \tag{1.2.3}$$

であり，これが前問の結果と一致するとすれば

$$2\pi a^2 K(r)I\hat{r} = \frac{\mu_0 I}{2}\cdot\frac{a^2}{(a^2+r^2)^{3/2}} \tag{1.2.4}$$

である．よって，これを$K(r)$について解けば

$$K(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{1}{(a^2+r^2)^{3/2}} \tag{1.2.5}$$

である．

(3) 磁気双極子2の作った磁場によって，磁気双極子1がポテンシャルエネルギーを持つような場合を考えればよい．磁気双極子2が作る磁場は

$$\boldsymbol{B}_2 = -K(d)\left[\boldsymbol{m}_2 - 3(\boldsymbol{m}_2\cdot\hat{r})\hat{r}\right] \tag{1.2.6}$$

なので，

$$U_1 = -\boldsymbol{B}_2\cdot\boldsymbol{m_1} = K(d)m^2\left(\cos(\theta_1-\theta_2) - 3\cos\theta_1\cos\theta_2\right) \tag{1.2.7}$$

である．これは，$(\theta_1,\theta_2)=(0,0),(\pi,\pi)$のときに最小である．

- $\underline{\theta_1 = 0のとき}$
  ポテンシャルは
$$U_1 = -2K(d)m^2\cos\theta_2 \tag{1.2.8}$$
  である．よって，U_1は図3のようになる．
- $\underline{\theta_1 = \pi/2のとき}$
  ポテンシャルは
$$U_1 = K(d)m^2\sin\theta_2 \tag{1.2.9}$$
  である．よって，U_1は図3のようになる．

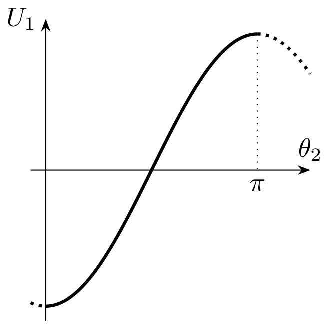

図1.2　$\theta_1 = 0$のとき

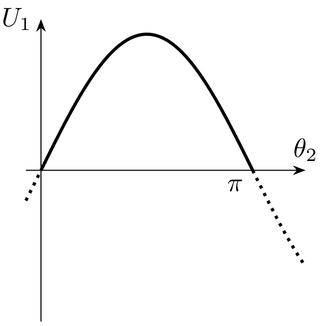

図1.3　$\theta_1 = \pi/2$のとき

(4) 磁場の影響を加えれば
$$\begin{aligned}
U_2 &= U_1 - \boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{m}_2 \\
&= K(d)m^2\left(\cos(\theta_1-\theta_2) - 3\cos\theta_1\cos\theta_2\right) - B_0m_1\sin\theta_1 - B_0m_2\sin\theta_2 \\
&= -2K(d)m^2\cos\theta_1\cos\theta_2 + K(d)m^2\sin\theta_1\sin\theta_2 - B_0m\sin\theta_1 - B_0m\sin\theta_2 \qquad (1.2.10)
\end{aligned}$$
となる．このU_2の変分を考えれば
$$\begin{aligned}
\delta U_2 = &-2K(d)m^2\delta(\cos\theta_1)\cos\theta_2 - 2K(d)m^2\cos\theta_1\delta(\cos\theta_2) \\
&+ K(d)m^2\delta(\sin\theta_1)\sin\theta_2 + K(d)m^2\sin\theta_1\delta(\sin\theta_2) \\
&- B_0m\delta(\sin\theta_1) - B_0m\delta(\sin\theta_2) \\
= &\left\{-\frac{1}{2}Km^2 + \frac{1}{2}B_0m\right\}\delta\theta_1^2 + \left\{-\frac{1}{2}Km^2 + \frac{1}{2}B_0m\right\}\delta\theta_2^2 \qquad (1.2.11)
\end{aligned}$$
である．ただし，
$$\begin{aligned}
\delta(\cos\theta_i) &= -\sin\theta_i\delta\theta_i - \frac{1}{2}\cos\theta_i\delta\theta_i^2 \\
&= -\delta\theta_i \qquad (1.2.12) \\
\delta(\sin\theta_i) &= \cos\theta_i\delta\theta_i - \frac{1}{2}\sin\theta_i\delta\theta_i^2 \\
&= -\frac{1}{2}\delta\theta_i^2 \qquad (1.2.13)
\end{aligned}$$
を用いた．よって，$\delta U_2 = 0$となるためには，$\delta\theta_i^2$の係数が0である必要があるので
$$B_0 = Km \tag{1.2.14}$$
である．

I-3A：物理数学

(1) 固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0 \tag{1.3A.1}$$

なので，固有値は$\lambda = 2, 5$である．対応する固有ベクトルは

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.3A.2}$$

なので，

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3A.3}$$

とすれば，

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1.3A.4}$$

であり，$P^{-1}AP$を計算してみると

$$D := P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{1.3A.5}$$

と対角化できていることに注意する．すると

$$\begin{aligned} A^n &= PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 5^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 5^n \\ -2^n + 5^n & 2^n + 2 \cdot 5^n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.3A.6}$$

である．

(2) 次の関数

$$L := xyz - \lambda \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 - 1 \right) \tag{1.3A.7}$$

を考える．Lのx, y, z, λによる偏微分を考え，それらが0であるとすれば

$$yz - \frac{\lambda}{2} x = 0 \tag{1.3A.8}$$

$$xz - \frac{2\lambda}{p} y = 0 \tag{1.3A.9}$$

$$xy - 2\lambda z = 0 \tag{1.3A.10}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1 \tag{1.3A.11}$$

となり，これらの解が最大値の候補となる．まず，(1.3A.8)をλについて解くと

$$\lambda = \frac{2yz}{x} \tag{1.3A.12}$$

である．これらを(1.3A.9),(1.3A.10)に代入してそれぞれをy, zについて整理すると

$$\frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{4} \ , \quad z^2 = \frac{x^2}{4} \tag{1.3A.13}$$

である．これらを(1.3A.11)について代入すると

$$x^2 = \frac{4}{3} \tag{1.3A.14}$$

となる．これを(1.3A.13)に代入すれば

$$(x, y, z) = (\pm 2/\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}) \tag{1.3A.15}$$

である．ただし，複号は任意である．よって，$F = xyz$が最大となるためには，これらを掛け合わせた値が正であるように符号をとってくれば良いだけなので，最大値は

$$F_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}} \tag{1.3A.16}$$

であり，それを実現する(x, y, z)は

$$(2/\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\ ,\quad (-2/\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\ ,\quad (2/\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})\ ,\quad (-2/\sqrt{3}, \sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) \tag{1.3A.17}$$

の4つである．

I-3B：量子力学

(1) $N = a^\dagger a$として計算すると

$$\left[a^\dagger a, a\right] = \left[a^\dagger, a\right] a = -a \tag{1.3B.1}$$

である．

(2) 前問と同様に計算すれば

$$\left[a^\dagger a, a^\dagger\right] = a^\dagger \tag{1.3B.2}$$

となる．

(3) $\left\langle n|a^\dagger a|n\right\rangle$を2通りで計算すればよい．$N = a^\dagger a$として考えれば$N$であり，$a\left|n\right\rangle = c\left|n-1\right\rangle$として考えれば$c^2$となるので，$c > 0$より，$c = \sqrt{n}$である．

(4) それぞれの項を計算すれば

$$\begin{aligned}\left\langle \alpha|N^2|\alpha\right\rangle &= \left\langle \alpha|a^\dagger a a^\dagger a|\alpha\right\rangle \\ &= \left\langle \alpha|a^\dagger a^\dagger a a|\alpha\right\rangle + \left\langle \alpha|a^\dagger a|\alpha\right\rangle \\ &= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 \end{aligned} \tag{1.3B.3}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \alpha|N|\alpha\right\rangle &= \left\langle \alpha|a^\dagger a|\alpha\right\rangle \\ &= |\alpha|^2 \end{aligned} \tag{1.3B.4}$$

なので，$\left\langle \alpha|N^2|\alpha\right\rangle - \left\langle \alpha|N|\alpha\right\rangle^2 = |\alpha|^2$となる．

2　パート2

II-1：統計力学

(1) 定義より

$$Z_{n-1}(s) = \sum_{s_1=\pm 1} \cdots \sum_{s_{n-1}=\pm 1} e^{\beta s s_1} \cdots e^{\beta s_{n-2} s_{n-1}} Z_0(s_{n-1}) \tag{2.1.1}$$

だが，$s_1, \cdots, s_{n-1}$はただの和をとるための添え字なので[*1]，$s_1, \cdots, s_{n-1} \to s_2, \cdots, s_n$と添え字を書き直せば

$$Z_{n-1}(s_1) = \sum_{s_2=\pm 1} \cdots \sum_{s_n=\pm 1} e^{\beta s_1 s_2} \cdots e^{\beta s_{n-1} s_n} Z_0(s_n) \tag{2.1.2}$$

である．あとは，$Z_n(s)$の定義と比較して

$$Z_n(s) = \sum_{s_n=\pm 1} e^{\beta s s_1} Z_{n-1}(s_1) \tag{2.1.3}$$

が示された.

(2) $s = 1$のときと，$s = -1$のときをそれぞれ書き下せば

$$\begin{cases} zZ_0(1) & = e^{\beta} Z_0(1) + e^{-\beta} Z_0(-1) \\ zZ_0(-1) & = e^{-\beta} Z_0(1) + e^{\beta} Z_0(-1) \end{cases} \tag{2.1.4}$$

なので，ここからzを消去すれば$Z_0(1)/Z_0(-1) = \pm 1$となる．ここで，分配関数は正なので，複号は$+$をとれば，

$$z = 2\cosh\beta\ , \quad Z_0(1)/Z_0(-1) = 1 \tag{2.1.5}$$

となる.

(3) 前問より，

$$Z_n = 2^n \cosh^n \beta \tag{2.1.6}$$

なので

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{nk_B}{J} \frac{\partial}{\partial T} \left[T \log 2\cosh\left(\frac{J}{k_B T}\right) \right] \tag{2.1.7}$$

であり，これを計算すれば

$$S = \frac{nk_B}{J} \left[\log 2\cosh\left(\frac{J}{k_B T}\right) - \frac{J}{k_B T} \tanh\left(\frac{J}{k_B T}\right) \right] \tag{2.1.8}$$

である．よって，イジングスピン1つあたりのエントロピーsは

$$s = \frac{S}{n} = \frac{k_B}{J} \left[\log 2\cosh\left(\frac{J}{k_B T}\right) - \frac{J}{k_B T} \tanh\left(\frac{J}{k_B T}\right) \right] \tag{2.1.9}$$

である.

[*1] 「最近の学生さんは，ダミー添え字とかいうんですかね.」

(4) (1)と同様に考えれば，$e^{\beta s s_1} Z^{\text{tree}}_{n-1}(s_1) \times e^{\beta s s_2} Z^{\text{tree}}_{n-1}(s_2)$の$Z^{\text{tree}}_n(s)$に対する寄与を考えればよい．よって

$$Z^{\text{tree}}_n(s) = \sum_{s_1=\pm1} \sum_{s_2=\pm2} e^{\beta s s_1} Z^{\text{tree}}_{n-1}(s_1) \times e^{\beta s s_2} Z^{\text{tree}}_{n-1}(s_2) \tag{2.1.10}$$

である．

(5) $s = 1, -1$の場合をそれぞれ考えると

$$\begin{cases} Z^{\text{tree}}_n(1) & = e^{2\beta} Z^{\text{tree}}_{n-1}(1)^2 + 2 Z^{\text{tree}}_{n-1}(1) Z^{\text{tree}}_{n-1}(-1) + e^{-2\beta} Z^{\text{tree}}_{n-1}(-1)^2 \\ Z^{\text{tree}}_n(-1) & = e^{-2\beta} Z^{\text{tree}}_{n-1}(1)^2 + 2 Z^{\text{tree}}_{n-1}(1) Z^{\text{tree}}_{n-1}(-1) + e^{2\beta} Z^{\text{tree}}_{n-1}(-1)^2 \end{cases} \tag{2.1.11}$$

なので

$$y = \frac{e^{2\beta} Z^{\text{tree}}_{n-1}(1)^2 + 2 Z^{\text{tree}}_{n-1}(1) Z^{\text{tree}}_{n-1}(-1) + e^{-2\beta} Z^{\text{tree}}_{n-1}(-1)^2}{e^{-2\beta} Z^{\text{tree}}_{n-1}(1)^2 + 2 Z^{\text{tree}}_{n-1}(1) Z^{\text{tree}}_{n-1}(-1) + e^{2\beta} Z^{\text{tree}}_{n-1}(-1)^2} = \left(\frac{ay+1}{y+a} \right)^2 \tag{2.1.12}$$

である．

(6) yについて解けば，

$$(y-1)(y^2 - (a^2 - 2a - 1)y + 1) = 0 \tag{2.1.13}$$

なので，yがaの関数だとすれば，$y^2 - (a^2 - 2a - 1)y + 1 = 0$である．これを解くと

$$y = \frac{1}{2} \left\{ a^2 - 2a - 1 \pm |a-1| \sqrt{(a-3)(a+1)} \right\} \tag{2.1.14}$$

となる．このような解が存在するための条件は，$a = e^{2\beta} > 0$と併せて考えると$a > 3$なので

$$a_c = 3 \tag{2.1.15}$$

である．

(7) $a < a_c$では，系の状態は$y = 1$しか存在しないが，$a > a_c$では可能な系の状態が$\dot{3}$つとなる．このa_cを転移温度とよぶ．

II-2：量子力学

(1) $|L\rangle\,,|R\rangle$が基底を成しているので

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 & -K \\ -K & E_0 \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

である．

(2) 固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \lambda - E_0 & K \\ K & \lambda - E_0 \end{vmatrix} = (\lambda - E_0)^2 - K^2 = 0 \tag{2.2.2}$$

である．これを解けば$\lambda = E_0 \pm K$である．基底状態に対応するのは$\lambda = E_0 - K$であり，その状態は

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.3}$$

である．

(3) 前問より，第1励起状態は$\lambda = E_0 + K$に対応し，その固有状態は

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{2.2.4}$$

である．

(4) これらの固有状態を用いれば，$|L\rangle = (1, 0), |R\rangle = (0, 1)$は

$$\begin{cases} |L\rangle & = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |R\rangle & = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \end{cases} \tag{2.2.5}$$

である．これを逆に書けば

$$\begin{cases} |0\rangle & = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle + |R\rangle) \\ |1\rangle & = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle - |R\rangle) \end{cases} \tag{2.2.6}$$

であることに注意しておく．時刻tでの状態$|\psi(t)\rangle$について

$$|\psi(t)\rangle = \hat{a}(t)\,|L\rangle + \hat{b}(t)\,|R\rangle \tag{2.2.7}$$

と書けば，シュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle \tag{2.2.8}$$

より，

$$\hat{a}(t) = Ae^{-i\hat{H}t/\hbar}\ ,\quad \hat{b}(t) = Be^{-i\hat{H}t/\hbar} \tag{2.2.9}$$

であることがわかる．$t = 0$では$\hat{a}(t) = 1, \hat{b}(t) = 0$なので

$$\hat{a}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\ ,\quad \hat{b}(t) = 0 \tag{2.2.10}$$

である．よって，

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|L\rangle \tag{2.2.11}$$

と時間発展をあらわすことができた[*2]．よって，$|L\rangle$に(2.2.5),(2.2.6)を用いれば

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\hat{H}t/\hbar}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\hat{H}t/\hbar}|1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(E_0-K)t/\hbar}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(E_0+K)t/\hbar}|1\rangle \\
&= \frac{1}{2}e^{-i(E_0-K)t/\hbar}(|L\rangle + |R\rangle) + \frac{1}{2}e^{-i(E_0+K)t/\hbar}(|L\rangle - |R\rangle) \\
&= e^{-iE_0t/\hbar}\cos(Kt/\hbar)|L\rangle + ie^{-iE_0t/\hbar}\sin(Kt/\hbar)|R\rangle
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

となる．

(5) 規格化も考慮すれば

$$|C\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle_1 \otimes |R\rangle_2 + |R\rangle_1 \otimes |L\rangle_2) \tag{2.2.13}$$

も基底になっている．

(6) それぞれの行列要素を計算すれば

$$\begin{cases}
\langle A|\hat{H}|A\rangle &= 2E_0 + U \\
\langle A|\hat{H}|B\rangle &= -2K \\
\langle A|\hat{H}|C\rangle &= -\sqrt{2}K \\
\langle B|\hat{H}|B\rangle &= 2E_0 + U \\
\langle B|\hat{H}|C\rangle &= -\sqrt{2}K \\
\langle C|\hat{H}|C\rangle &= 2E_0
\end{cases} \tag{2.2.14}$$

なので，2粒子系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 2E_0 + U & -2K & -\sqrt{2}K \\ -2K & 2E_0 + U & -\sqrt{2}K \\ -\sqrt{2}K & -\sqrt{2}K & 2E_0 \end{pmatrix} \tag{2.2.15}$$

である．

(7) 固有値を計算すると，

$$2E_0 + 2K + U\ ,\quad 2E_0 - K + U \pm \sqrt{20K^2 - 4KU + U^2} \tag{2.2.16}$$

である．よって，基底状態の固有エネルギーは，このなかでもっとも値の小さい

$$2E_0 - K + U - \sqrt{20K^2 - 4KU + U^2} \tag{2.2.17}$$

である．

[*2] 物理的意味を考えれば(2.2.11)はすぐ出てくるので，試験ではそれでもいいかもしれない．