

高次元時空モデルと素粒子標準模型

宮根 一樹

2024 年 3 月

概要

これは数物セミナー素粒子グループでのリレーセミナーの資料になります。私が現在所属している研究室^{*1}は、4 次元よりも大きい次元の時空を仮定する高次元時空モデルから素粒子標準模型を再現することを目標とした研究を主にしています。そこで、ここでは高次元時空モデルからどのようにして統一理論の見通しがつくのかについて、議論したいと思います。

目次

1	高次元の場の理論とコンパクト化	2
1.1	5 次元理論のコンパクト化	2
1.2	曲がった時空上でのスピノル場	5
1.3	5 次元スピノル場のコンパクト化	7
2	6 次元の理論のコンパクト化	8
2.1	トーラスコンパクト化	8
付録 A	標準模型のまとめ	9
A.1	非可換ゲージ理論	9

^{*1} 早稲田大学の安倍研究室といいます。ホームページは[こちら](#)です。

1 高次元の場の理論とコンパクト化

(更新中・・・)

1.1 5次元理論のコンパクト化

まずは単純に5次元の時空を考えることにします。その座標は z^M で、 $M = 0, 1, 2, 3, 4$ という値をとります。また、時空はミンコフスキーで計量は

$$\eta_{MN} = \text{diag}(-, +, +, +, +) \quad (1.1)$$

です。この時空上の場の理論は、たとえば実スカラー場 $\phi(z)$ なら

$$S = \int d^5 z \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi \right) \quad (1.2)$$

のように4次元の理論と同じように議論することができます。

ここで、5番目の座標 z_4 が半径 a の円周になったとしましょう。円周 S^1 となったときは $\theta \in [0, 2\pi)$ でパラメトライズするのが便利なので、以後は無次元のパラメーターで $z_4(\theta)$ と書けるとします。さらに

$$dz_4 = a d\theta \quad (1.3)$$

という関係が成立するとすれば、 $dz_4^2 = a^2 d\theta^2$ より

$$g_{\theta\theta} = a^2. \quad (1.4)$$

上述のように、余剰空間に境界条件を課すことをコンパクト化といいます。ここで、5次元のミンコフスキー時空 M_5 がコンパクト化によって時空が4次元ミンコフスキーと円周の直積 $M_4 \times S^1$ になるとすれば、その計量は

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

です^{*2}。

このような時空上で、実スカラー場 $\phi(z)$ の理論を考えてみましょう。今、 θ 方向は円周 S^1 にコンパクト化されていることから、 $\phi(z)$ はフーリエ級数展開できます：

$$\phi(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \tilde{\phi}_k(x) e^{ik\theta}. \quad (1.6)$$

これを5次元の実スカラー場の作用 (1.2) に代入します。

$$\int d^5 z \sqrt{-g} = \int d^4 x \sqrt{-g_4} \cdot a \int_0^{2\pi} d\theta \quad (1.7)$$

なので、 θ 方向の積分を考えると

$$\int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{2} g^{MN} (\partial_M \phi) (\partial_N \phi) \right) = \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) - \frac{1}{2a^2} \partial_\theta \phi^2 \right) \quad (1.8)$$

^{*2} ただし、 $g_{\mu\theta} = g_{\theta\mu} = 0$ と4次元の部分と1次元の部分が完全に分離できているのは仮定です。

となりますが、

$$\partial_\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \partial_\mu \tilde{\phi}_k(x) e^{ik\theta} \quad (1.9)$$

より、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) \right) &= \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{4\pi} \sum_{k,l} \partial_\mu \tilde{\phi}_k(x) \partial^\mu \tilde{\phi}_l(x) e^{i(k+l)\theta} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi}_0(x) \partial^\mu \tilde{\phi}_0 - \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \partial_\mu \tilde{\phi}_k \partial^\mu \tilde{\phi}_{-k} \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi}_0(x) \partial^\mu \tilde{\phi}_0 - \sum_{k \geq 1} \partial_\mu \tilde{\phi}_k \partial^\mu \tilde{\phi}_k^* \end{aligned} \quad (1.10)$$

です。ただし、 $\phi(x, \theta)$ が実スカラー場であることから

$$\tilde{\phi}_k^* = \tilde{\phi}_{-k} \quad (1.11)$$

を用いました。(1.8) の残りの項を考えると

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{2a^2} \partial_\theta \phi^2 \right) &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{k,l} kl \tilde{\phi}_k \tilde{\phi}_l e^{i(k+l)\theta} \\ &= -\sum_{k \leq 1} \left(\frac{|k|}{a} \right)^2 \tilde{\phi}_k \tilde{\phi}_k^* \end{aligned} \quad (1.12)$$

となるので、4次元の有効作用は

$$S = \int d^4x \, a \mathcal{L}_4 \quad (1.13)$$

であり、ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi}_0(x) \partial^\mu \tilde{\phi}_0 - \sum_{n \geq 1} \left(\partial_\mu \tilde{\phi}_n \partial^\mu \tilde{\phi}_n^* + M_n^2 \tilde{\phi}_n \tilde{\phi}_n^* \right) \quad (1.14)$$

となります。ただし、

$$M_n \equiv \frac{|n|}{a} \quad (1.15)$$

とおきました。

有効作用 (1.14) から次のことが分かります：

- 5次元の実スカラー場の理論からは、質量 M_n をもつ複素スカラー場（KK 粒子）が現れること。
- $n = 0$ のモードは、massless であること（ゼロモード）。
- $n \neq 0$ のときは、その粒子の質量は $M_n = |n|/a$ であり、 $a \ll 1$ ならば $M_n \gg 1$ であること。したがって、コンパクト空間の半径が非常に小さければ、十分なエネルギーがないとゼロモード以外の粒子を生成して観測することができないことになります^{*3}。

^{*3} Particle Data Group のデータによると、TeV スケールではまだ KK 粒子の存在が確認されていないようです。

次は、(スピノル場の前に) ベクトル場 $A_M(z)$ の理論を見ていきます。ベクトル場の作用は、一番簡単な Maxwell 理論

$$S = \int d^5 z \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} g^{MP} g^{NQ} F_{MN} F_{PQ} \right) \quad (1.16)$$

を考えます。ベクトル場は z^4 の方向の周期境界条件により、スカラー場の場合と同様に

$$A_M(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n A_M^{(n)}(x) e^{in\theta} \quad (1.17)$$

と展開できます。これを作用 (1.16) に代入します。作用を少し書き換えると

$$\begin{aligned} S &= \int d^4 x \sqrt{-g_4} \cdot a \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{4} g^{MP} g^{NQ} F_{MN} F_{PQ} \right) \\ &= \int d^4 x \sqrt{-g_4} \cdot a \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)^2 - \frac{a}{2} (\partial^\theta A^\mu - \partial^\mu A^\theta)^2 \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

となるので、被積分関数の各項は

$$\begin{aligned} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)^2 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} e^{i(m+n)\theta} \left(\partial^\mu A^{\nu,(m)} - \partial^\nu A^{\mu,(m)} \right) \left(\partial_\nu A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\nu^{(n)} \right) \\ &\xrightarrow{\theta \text{ 方向の積分}} \sum_n \left(\partial^\mu A^{\nu,(-n)} - \partial^\nu A^{\mu,(-n)} \right) \left(\partial_\nu A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\nu^{(n)} \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} (\partial^\theta A^\mu - \partial^\mu A^\theta)^2 &= -\frac{1}{2\pi a^2} \sum_{m,n} e^{i(m+n)\theta} \left(n A^{\mu,(m)} - \partial^\mu A^{\theta,(m)} \right) \left(n A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\theta^{(n)} \right) \\ &\xrightarrow{\theta \text{ 方向の積分}} \frac{1}{a^2} \sum_n \left(n A^{\mu,(-n)} + \partial^\mu A^{\theta,(-n)} \right) \left(n A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\theta^{(n)} \right) \end{aligned} \quad (1.20)$$

となります。ただし、

$$\partial_\theta = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (1.21)$$

として計算しています。この結果を、作用 (1.18) の表式に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \int d^4 x \sqrt{-g_4} a \left(-\frac{1}{4} \sum_n \left(\partial^\mu A^{\nu,(-n)} - \partial^\nu A^{\mu,(-n)} \right) \left(\partial_\nu A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\nu^{(n)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2a} \sum_n \left(n A^{\mu,(-n)} + \partial^\mu A^{\theta,(-n)} \right) \left(n A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\theta^{(n)} \right) \right) \\ &\equiv \int d^4 x \sqrt{-g_4} a \mathcal{L}_4 \end{aligned} \quad (1.22)$$

です。このとき、ベクトル場の質量はどこからくるかという

$$\mathcal{L}_4 \sim - \sum_n \frac{n^2}{2a} A^{\mu,(n)} A_\mu^{(n)*} \quad (1.23)$$

の項からくるわけですが、やはり質量は $a^{-1/2}$ に比例しています。したがって、effective なラグランジアンはゼロモードのみに注目すればよくて、それは

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2a^2} \partial_\mu A_\theta \partial^\mu A_\theta^* \quad (1.24)$$

です。ただし、 $A_M^{(n=0)}$ のモードの添え字は省略しており、 $F_{\mu\nu}$ は 4 次元の場の強さです。この表式から、4 次元ではベクトル場のほかに複素スカラー場が生じていることが分かります*4。このように、より低いスピンをもつ粒子が生じるのがコンパクト化の特徴（だそう）です。

1.2 曲がった時空中でのスピノル場

5 次元のスピノル場のコンパクト化を考える前に、(記号の定義も兼ねて) 曲がった時空中での場の理論について簡単に復習したいと思います。

スカラー場やベクトル場といったボゾンや、スピノル場といったフェルミオンは、平坦な時空中でのローレンツ変換の既約表現として得られるものでした。ボゾンのほうは、一般座標変換に対してもスカラーやベクトルとして変換されるため、計量によって一般共変化が可能です。が、スピノル場は一般座標変換に対しては既約表現になっておらず、ボゾンの場合と同様に計量からうまく共変的な理論を作ることができません。

そこで、時空の各点における接空間（局所ローレンツ系）を考え、そこでは時空は計量が平坦*5ですので、そこでスピノル場とローレンツ変換を定義しておき、別の接空間とつなぐことにします。

局所ローレンツ系と四脚場

ではまず、接空間を考えていきましょう。その接空間の時空の添え字をラテン文字 i, j, \dots で書くことにします。このときの計量は

$$\eta_{ij} = \text{diag}(-, +, +, +). \quad (1.25)$$

ここで、時空の座標の添え字 μ, ν, \dots と局所ローレンツ系の座標の添え字 i, j, \dots をもつ「場」を考え、それを b^i_μ などと書くことにします。例えば、 b^i_μ は局所ローレンツ変換に対しては共変ベクトルで、時空の一般座標変換に対しては反変ベクトルとして変換します。

b^i_μ と $b_{i\nu}$ の積を考えると、それは局所ローレンツ変換に対してはスカラーで、一般座標変換に対しては対称な 2 階のテンソルとなります。これが、ちょうど時空の計量となるような b^i_μ を考えましょう。つまり、

$$g_{\mu\nu} = b^i_\mu b_{i\nu} = \eta^{ij} b_{i\mu} b_{j\nu} \quad (1.26)$$

です。このような b^i_μ を四脚場 (tetrad) といいます。

以上のことから、次の公式が成り立ちます：

- $g^{\mu\nu} = b^{i\mu} b_i^\nu$ 。
- $b_{i\mu} b_j^\mu = \eta_{ij}$, $b^i_\mu b^{j\mu} = \eta^{ij}$ 。
- $b^{i\mu} b_{j\mu} = \delta^i_j$, $b^i_\mu b_i^\nu = \delta^\nu_\mu$ 。

また、

$$\det(g_{\mu\nu}) = \det(\eta_{ij}) \det(b^i_\mu) \det(b^j_\nu) = -\det(b^i_\mu)^2 \quad (1.27)$$

ですので、 $b \equiv \det(b^i_\mu)$ とおけば

$$\sqrt{-g} = b. \quad (1.28)$$

*4 $A_\theta(x)$ の添え字 θ は 4 次元のローレンツ変換では変換されません。したがって、この添え字は 4 次元の理論からは（ゲージ群の添え字と同様に）内部空間の添え字となるため、場 $A_\theta(x)$ はローレンツ変換に対してはスカラーです。

*5 等価原理からも、この仮定は自然でしょう。

スピン接続

ψ を局所ローレンツ系で定義されたスピノル場とします。その上での無限小ローレンツ変換は

$$\psi \longrightarrow \psi + \delta\psi, \quad \delta\psi = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\psi \quad (1.29)$$

と書けました。ただし、

$$S_{ij} \equiv \frac{1}{2}\gamma_{[i}\gamma_{j]} = \frac{1}{4}[\gamma_i, \gamma_j] \quad (1.30)$$

であり、恒等式

$$[S_{ij}, S_{kl}] = -4(-\eta_{ik}S_{jl} + \eta_{jk}S_{il} - \eta_{jl}S_{ik} + \eta_{il}S_{jk}) \quad (1.31)$$

が成立しています。

ローレンツ変換 (1.29) が時空の点に依存しない大域的な変換であれば、 $\partial_\mu\psi$ も無限小ローレンツ変換に対して

$$\delta(\partial_\mu\psi) = \partial_\mu(\delta\psi) = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\partial_\mu\psi \quad (1.32)$$

であり共変的です。しかしながら、局所ローレンツ系は時空の各点に設けられた接空間であり、その上でのローレンツ変換は時空の点に依存します。したがって、ローレンツ変換のパラメーターである ε^{ij} は時空の点に依存する関数 $\varepsilon^{ij}(x)$ であり、したがって

$$\begin{aligned} \delta(\partial_\mu\psi) &= \partial_\mu(\delta\psi) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varepsilon^{ij})S_{ij}\psi \end{aligned} \quad (1.33)$$

となるため、微分 ∂_μ は局所ローレンツ変換に対して既約表現としてはふるまわないことになります。

そこで、ゲージ理論や一般相対性理論のやり方を思い出すと、こういった場合は「接続場」を用意して共変微分を定義することにより、共変的な微分を考えることができました。ここでは、スピン接続と呼ばれる次の条件を満たす $\omega^{ij}_{,\mu}$ を定義することにします：

$$\omega^{ij}_{,\mu} \rightarrow \omega^{ij}_{,\mu} + \delta\omega^{ij}_{,\mu}, \quad \delta\omega^{ij}_{,\mu} = \varepsilon^i_k\omega^{kj}_{,\mu} + \varepsilon^j_k\omega^{ik}_{,\mu} - \partial_\mu\varepsilon^{ij}. \quad (1.34)$$

ただし、局所ローレンツ系の添え字については反対称 $\omega^{ij}_{,\mu} = -\omega^{ji}_{,\mu}$ です。この接続を用いて、共変微分 D_μ を

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi + \frac{1}{2}\omega^{ij}_{,\mu}S_{ij}\psi \quad (1.35)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu\psi) &= \partial_\mu(\delta\psi) + \delta\left(\frac{1}{2}\omega^{ij}_{,\mu}S_{ij}\psi\right) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varepsilon^{ij})S_{ij}\psi + \frac{1}{2}(\delta\omega^{ij}_{,\mu})S_{ij}\psi + \frac{1}{2}\omega^{ij}_{,\mu}S_{ij}\delta\psi \end{aligned} \quad (1.36)$$

であり、第 3 項と第 4 項を展開すると

$$\underbrace{\frac{1}{2}(\varepsilon^i_k\omega^{kj}_{,\mu} + \varepsilon^j_k\omega^{ik}_{,\mu})S_{ij}\psi}_{\varepsilon^i_k\omega^{ij}_{,\mu}S_{ij}\psi} + \frac{1}{2}\omega^{ij}_{,\mu}S_{ij} \cdot \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu\varepsilon^{ij})S_{ij}\psi. \quad (1.37)$$

つまり

$$\begin{aligned}\delta(D_\mu\psi) &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varepsilon^{ij})S_{ij}\psi + \varepsilon^i{}_k\omega^{ij}{}_{,\mu}S_{ij}\psi + \frac{1}{2}\omega^{ij}{}_{,\mu}S_{ij} \cdot \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu\varepsilon^{ij})S_{ij}\psi \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\partial_\mu\psi + \varepsilon^i{}_k\omega^{ij}{}_{,\mu}S_{ij}\psi + \frac{1}{4}\omega^{ij}{}_{,\mu}S_{ij}\varepsilon^{kl}S_{kl}\psi\end{aligned}\quad (1.38)$$

です。

1.3 5次元スピノル場のコンパクト化

5次元の場合はベクトル場の場合とほとんど変わらないのでそんなに面白くはないのですが、折角ですのでこの章の最後にスピノル場のコンパクト化を見ていきましょう。その作用は

$$S = \int d^5z \, b(-\bar{\psi}\not{\partial}_5\psi) \quad (1.39)$$

によって与えられ、スピノル場は境界条件によって

$$\psi(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \psi_n(x) e^{in\theta} \quad (1.40)$$

と展開されます。ここで、5次元の共変微分は

$$\begin{aligned}\not{\partial}_5\psi(x, \theta) &= (\not{\partial} + \gamma^5 b_4^\theta \partial_\theta)\psi(x, \theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n (\not{\partial} + in\gamma^5 a^{-1})\psi_n(x) e^{in\theta}\end{aligned}\quad (1.41)$$

です^{*6}ので、4次元の有効ラグランジアンは、 θ 方向の積分を実行すれば

$$\mathcal{L}_4 = - \sum_n \bar{\psi}_n (\not{\partial} + ina^{-1}\gamma_5)\psi_n \quad (1.42)$$

となります。ただし、 $\not{\partial}$ は4次元での微分です。第2項が質量項を与えるので、

$$\psi_n = e^{\mp i(\pi/4)\gamma_5} \psi'_n \quad (1.43)$$

と変換すれば

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_n \gamma_5 \psi_n &= \bar{\psi}'_n \cdot e^{\pm i(\pi/4)\gamma_5} \gamma_5 e^{\mp i(\pi/4)\gamma_5} \cdot \psi'_n \\ &= \bar{\psi}'_n \psi'_n\end{aligned}\quad (1.44)$$

と質量基底に移りますので、 $n > 0$ のときは(1.43)の負の符号、 $n < 0$ のときは正の符号で変換することになれば

$$\mathcal{L}_4 = - \sum_n \bar{\psi}_n (\not{\partial} + M_n)\psi_n \quad (1.45)$$

となります。ただし、プライム'は省略しました。ここで、 n 番目のモードの質量は

$$M_n \equiv \frac{|n|}{a} \quad (1.46)$$

であり、やはり a^{-1} に比例します。

^{*6} $g^{\mu\nu} = b^{i\mu}b_i{}^\nu$ でしたので、 $b_4^\theta = a^{-1}$ としました。

2 6次元の理論のコンパクト化

5次元の理論では、余剰空間は1次元しかないので円周にコンパクト化するしかありませんでした。ですが、6次元になると少しコンパクト化の自由度が増えます。この章では、コンパクト化の仕方によって、どのような4次元の有効理論が得られるのかを見ていこうと思います。

2.1 トーラスコンパクト化

(更新中・・・)

付録 A 標準模型のまとめ

夜ゼミのネタになるかもしれないので、もしかしたらと思って書いておきます^{*7}。

A.1 非可換ゲージ理論

(更新中・・・)

^{*7} 夜ゼミがどんな感じが分からないので、ボツになるかもしれません (笑)

参考文献

- [1] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Pub. Co, Reading, Mass, 1995.
- [2] 藤井 保憲. **超重力理論入門**. 産業図書, 2005.