東京大学 平成23年 物理学専攻 院試 解答例

ミヤネ

最終更新：2023 年 8 月 9 日

目次

1　数学パート

第1問

1. 固有値と固有ベクトルをそれぞれλ, $\boldsymbol{v}$とすれば$A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ですが，$A^2\boldsymbol{v}$を考えると，$\lambda^2\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$となるので$\lambda=\pm1$.
2. $C^2=-ABAB=ABBA=E$，$BC+CB=-iBAB-iABB=O$，$CA+AC=-iABA-iAAB=O$.
3. $D^2=(A+iB)(A-iB)=A^2-B^2+i(AB+BA)=O$．また，もし$D=O$だと仮定すると$A=-iB$となりますが，これは
$$AB+BA=-2iB^2\neq0 \tag{1.1.1}$$
なので矛盾です．よって，$D\neq O$.
4. (i) $D\boldsymbol{p}=0$より，$A\boldsymbol{p}=-iB\boldsymbol{p}$なので
$$C\boldsymbol{p}=-iA(iA\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p} \tag{1.1.2}$$
より，固有値は1．また，$\boldsymbol{q}=A\boldsymbol{p}/2-iB\boldsymbol{p}/2=A\boldsymbol{p}$に気をつければ
$$C\boldsymbol{q}=-iABA\boldsymbol{p}=-A\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{q} \tag{1.1.3}$$
より，固有値は-1.
   (ii) 互いに異なる固有値に属しているので，$\boldsymbol{p}^\dagger\boldsymbol{q}$で直交します．よって，
$$a\boldsymbol{p}+b\boldsymbol{q}=0 \tag{1.1.4}$$
が成立しているとすれば，$\boldsymbol{p}^\dagger$, $\boldsymbol{q}^\dagger$を左から掛ければ$a=b=0$なので線形独立です．($|\boldsymbol{p}|$, $|\boldsymbol{q}|$は0ではないので.)
5. (i) 次の行列
$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}^\dagger/|\boldsymbol{p}|^2\\ \boldsymbol{q}^\dagger/|\boldsymbol{q}|^2\end{pmatrix} \tag{1.1.5}$$
は実際にPの逆行列になっているので，Pは正則です.
   (ii) Pは対角化行列なので，
$$P^{-1}CP=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{1.1.6}$$
です.

(iii) $D\boldsymbol{p}=0,\ D\boldsymbol{q}=2\boldsymbol{p}$なので[*1]，

$$
\begin{aligned}
P^{-1}(A+iB)P &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}^\dagger/|\boldsymbol{p}|^2 \\ \boldsymbol{q}^\dagger/|\boldsymbol{q}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A+iB)\boldsymbol{p} & (A+iB)\boldsymbol{q} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.1.7}
$$

となります．一方で，

$$
\begin{aligned}
P^{-1}(A-iB)P &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}^\dagger/|\boldsymbol{p}|^2 \\ \boldsymbol{q}^\dagger/|\boldsymbol{q}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A-iB)\boldsymbol{p} & (A-iB)\boldsymbol{q} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}^\dagger/|\boldsymbol{p}|^2 \\ \boldsymbol{q}^\dagger/|\boldsymbol{q}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A-iB)(A\boldsymbol{q}) & (A-iB)(A\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}^\dagger/|\boldsymbol{p}|^2 \\ \boldsymbol{q}^\dagger/|\boldsymbol{q}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AD\boldsymbol{q} & AD\boldsymbol{p} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}^\dagger/|\boldsymbol{p}|^2 \\ \boldsymbol{q}^\dagger/|\boldsymbol{q}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\boldsymbol{q} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.1.8}
$$

となるので，

$$
P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.9}
$$

となります．

6.

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.1.10}
$$

[*1] $D\boldsymbol{q}$のほうは

$$
\begin{aligned}
D\boldsymbol{q} &= \frac{1}{2}(A+iB)(A-iB)\boldsymbol{p} \\
&= \frac{1}{2}(2E+2C)\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{p}
\end{aligned}
$$

です．

第2問

1. (i) $u(x)$を

$$u(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{c}_k e^{2\pi ikx},\ \tilde{c}_k=\int_0^1 u(x)e^{-2\pi ikx}\mathrm{d}x \tag{1.2.1}$$

と展開する．すると，境界条件$u(0)=u(1)=0$は

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{c}_k=0 \tag{1.2.2}$$

となります．デルタ関数は

$$\delta(x-y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{d}_k e^{2\pi ik(x-y)} \tag{1.2.3}$$

と展開できるとすれば，$k\neq 0$では$\tilde{d}_k=1$なので，微分方程式はモードkについて

$$\tilde{c}_k=-\frac{1}{k^2}e^{-2\pi iky}\quad(k\neq 0) \tag{1.2.4}$$

と解けることになります．ただし，$\tilde{c}_0$は不定です．したがって，$u(x)$は

$$u(x)=\tilde{c}_0-\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}e^{2\pi ik(x-y)} \tag{1.2.5}$$

です．したがって，境界条件(1.2.2)より

$$u(x)=\sum_{k\neq 0}\left[\frac{1}{k^2}e^{-2\pi iky}-\frac{1}{k^2}e^{2\pi ik(x-y)}\right] \tag{1.2.6}$$

となります．

(ii) $v(x)$を

$$v(x)=-\int_0^1 G(x,y)\rho(y)\mathrm{d}y \tag{1.2.7}$$

とおけば，境界条件も微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2}=\rho(x) \tag{1.2.8}$$

も満たされます．

2. (i) $z^n+\bar{z}^n=(x+iy)^n+(x-iy)^n$なので，

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\{(x+iy)^n+(x-iy)^n\}\\ &=n(n-1)\left((x+iy)^n+(x-iy)^{n-2}-(x+iy)^n-(x-iy)^{n-2}\right)\\ &=\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

です．また，

$$u_n(x,y)=2r^n\cos n\theta \tag{1.2.10}$$

より，$r=1$では

$$u_n(x,y)\Big|_{r=1}=2\cos n\theta \tag{1.2.11}$$

です．

(ii) 前問の$u_n(x,y)$はラプラス方程式の解なので，$u(x)$は

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n u_n(x,y) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n r^n \cos n\theta \tag{1.2.12}$$

と展開できるとしましょう．一方で，$|\theta|$のほうも

$$|\theta| = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n \cos n\theta \tag{1.2.13}$$

と展開できるとすれば[*2]，

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\theta| \cos n\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2}{n^2\pi}\left\{(-1)^n - 1\right\} \tag{1.2.14}$$

$$\tilde{b}_0 = \frac{\pi}{2} \tag{1.2.15}$$

となるので，

$$|\theta| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi}\cos(2n+1)\theta \tag{1.2.16}$$

です．よって，$r=1$では

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n \cos n\theta = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi}\cos(2n+1)\theta \tag{1.2.17}$$

となるので，モードを比較すれば

$$c_0 = \frac{\pi}{4},\ c_{2n} = 0,\ c_{2n+1} = -\frac{2}{(2n+1)^2\pi} \tag{1.2.18}$$

となるので

$$u(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2\pi}\cos(2n+1)\theta \tag{1.2.19}$$

が求める解です．

3. ひとまず方程式を半径rの球面Vで積分すると

$$\int_V \mathrm{d}^d x\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} u = -1 \tag{1.2.20}$$

となります．左辺については，発散定理より

$$\int_V \mathrm{d}^d x\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} u = \int_{\partial V} \mathrm{d}S\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla} u = \frac{2\pi^{d/2} r^{d-1}}{\Gamma(d/2)}\frac{\partial u(r)}{\partial r} \tag{1.2.21}$$

となります．ただし，$u(x)$は半径$r \equiv \boldsymbol{x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$にのみ依存し，級の表面積は$r^d$に比例することを用いました．したがって，この結果を(1.2.20)に代入すれば

$$\frac{2\pi^{d/2} r^{d-1}}{\Gamma(d/2)}\frac{\partial u(r)}{\partial r} = -1 \quad \to \quad u(r) = \frac{1}{d-2}\frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}}\frac{1}{r^{d-2}} \tag{1.2.22}$$

となります．ただし，定数は$r\to\infty$で$u(r)\to 0$となるようにとりました．

[*2] $|\theta|$は偶関数なので，$\sin$のモードはないはずです．

2　物理パート

第1問

1. 完全性関係

$$1 = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\ \ |x\rangle\langle x| \tag{2.1.1}$$

を用いれば

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{p}|\psi\rangle &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\ \ \langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}\rangle\ \langle \boldsymbol{x}|\psi\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\ e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\,\langle \boldsymbol{x}|\psi\rangle \end{aligned}\tag{2.1.2}$$

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{p}|O|\boldsymbol{p}'\rangle &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\ \ \langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}\rangle\ \langle \boldsymbol{x}|O|\boldsymbol{x}'\rangle\ \langle \boldsymbol{x}'|\boldsymbol{p}'\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\ \ \langle \boldsymbol{x}|O|\boldsymbol{x}'\rangle\, e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{p}'}\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

となります．

2. 前問の結果を用いれば

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{p}|V|\boldsymbol{p}'\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\ \ \langle \boldsymbol{x}|V|\boldsymbol{x}'\rangle\, e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{p}'} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\lambda}{2m}\left(\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\ e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}g(\boldsymbol{x})\right)\left(\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\ e^{-i(-\boldsymbol{p}')\cdot\boldsymbol{x}'}g(\boldsymbol{x}')\right)\end{aligned}\tag{2.1.4}$$

となるので，

$$h(\boldsymbol{p}) \equiv \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\ e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}g(\boldsymbol{x}) \tag{2.1.5}$$

とおくことで

$$\langle \boldsymbol{p}|V|\boldsymbol{p}'\rangle = -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\lambda}{2m}h(\boldsymbol{p})h(-\boldsymbol{p}') \tag{2.1.6}$$

となります．

3. シュレーディンガー方程式に前問の結果と，$E = -\nu^2/2m$を代入してみると

$$\frac{p^2+\nu^2}{2m}\,\langle \boldsymbol{p}|\psi\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\lambda}{2m}h(\boldsymbol{p})\underline{\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'\ h(-\boldsymbol{p}')\,\langle \boldsymbol{p}'|\psi\rangle} \tag{2.1.7}$$

となるので

$$C \equiv \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'\ h(-\boldsymbol{p}')\,\langle \boldsymbol{p}'|\psi\rangle \tag{2.1.8}$$

とおけば

$$\langle \boldsymbol{p}|\psi\rangle = \frac{Ch(\boldsymbol{p})}{p^2+\nu^2} \tag{2.1.9}$$

となります．

4. (2.1.5)にポテンシャルを代入して，極座標での積分に変換すれば

$$h(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\ r^2 \sin\theta \cdot e^{-ipr\cos\theta}\frac{1}{r}e^{-\mu r} \tag{2.1.10}$$

となります．先にθで積分すれば

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\ \sin\theta e^{-ipr\cos\theta} = \frac{2}{pr}\sin pr \tag{2.1.11}$$

となるので，

$$h(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-\mu r}\sin pr \mathrm{d}r \tag{2.1.12}$$

となります．この積分を

$$I \equiv \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-\mu r}\sin pr \mathrm{d}r \tag{2.1.13}$$

とおくことにすれば，部分積分を2回行うことで

$$I = \frac{1}{p} - \frac{\mu^2}{p^2}I \tag{2.1.14}$$

となるので，

$$I = \frac{p}{p^2+\mu^2} \tag{2.1.15}$$

となり，

$$h(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{p^2+\mu^2} \tag{2.1.16}$$

を得ます．

5. シュレディンガー方程式に設問3, 4の結果を代入すると，

$$\frac{p^2}{2m}\frac{Ch(p)}{p^2+\nu^2} - \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\lambda}{2m}h(\boldsymbol{p})\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'\ h(-\boldsymbol{p}')\frac{Ch(\boldsymbol{p}')}{p'^2+\nu^2} = -\frac{\nu^2}{2m}\frac{Ch(\boldsymbol{p})}{p^2+\nu^2} \tag{2.1.17}$$

となるので，両辺を$Ch(\boldsymbol{p})$で割って整理すると

$$1 - \frac{\lambda}{(2\pi)^3}\frac{\pi^2}{|\mu|(|\mu|+|\nu|)^2} = 0 \tag{2.1.18}$$

となります．よって，

$$|\nu| = -|\mu| + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi|\mu|}} \tag{2.1.19}$$

であり，$|\nu|>0$なので，λは

$$\lambda > 8\pi|\mu|^3 \tag{2.1.20}$$

でなければいけないことが分かります．

6. フーリエ逆変換で戻すと

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}|\psi\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\,\langle \boldsymbol{p}|\psi\rangle\, e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \\ &= \frac{C}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\mu^2-\nu^2}\left[\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\ \frac{e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}}{p^2+\nu^2} - \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\ \frac{e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}}{p^2+\mu^2}\right]\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

となるので，次の積分

$$J \equiv \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\ \frac{e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}}{p^2+A^2} \quad (A=\mu,\ \nu) \tag{2.1.22}$$

を求めようと思います．まずは，極座標に変換して計算を進めていくと

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\ \frac{e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}}{p^2+A^2} &= 2\pi\int_0^\infty \mathrm{d}p \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\ \frac{p^2\sin\theta}{p^2+A}e^{ipx\cos\theta} \\ &= 2\pi\int \mathrm{d}p\ \frac{p^2}{p^2+A^2}\left[-\frac{1}{ipx}e^{ipx\cos\theta}\right]_0^\pi \\ &= \frac{2\pi}{ix}\int_0^\infty \mathrm{d}p\ \frac{p}{p^2+A^2}(e^{ipx}-e^{-ipx}) \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

となります．後ろのe^{-ipx}があるほうの積分は$p\to -p$と変数変換すれば，全体の富豪がひっくり返って，積分区間が$-\infty\to 0$となるので，もともとある項と合わせて

$$\int_0^\infty \mathrm{d}p\ \frac{p}{p^2+A^2}(e^{ipx}-e^{-ipx}) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}p\ \frac{p}{p^2+A^2}e^{ipx} \tag{2.1.24}$$

となります．この積分は，上半平面を通るような経路[*3]で積分すれば

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}p\ \frac{p}{p^2+A^2}e^{ipx} = 2\pi i\cdot\frac{iA}{2iA}e^{-Ax} = \pi i e^{-Ax} \tag{2.1.25}$$

となるので，

$$J = \frac{2\pi^2}{x}e^{-Ax} \tag{2.1.26}$$

となり，

$$\langle\boldsymbol{x}|\psi\rangle = C\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\mu^2-\nu^2}\frac{e^{-\nu x}-e^{-\mu x}}{x} \tag{2.1.27}$$

を得ます．ただし，$x\equiv|\boldsymbol{x}|$として計算していました．また，その概形は2.1です．

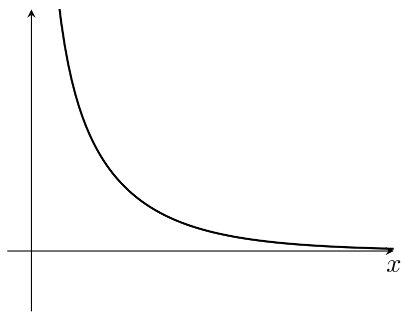

図2.1　$\langle\boldsymbol{x}|\psi\rangle$の概形

[*3] 上半平面でとれば，円の半径を大きくしたときにその部分の寄与が消えます．

第2問

1. $J = J' = 0$ということは相互作用がないので

$$Z[\beta] = \left(\sum_{S_1=-S}^{S} e^{\beta\mu H S_1}\right)\left(\sum_{S_2=-S}^{S} e^{\beta\mu H S_2}\right)\left(\sum_{S_3=-S}^{S} e^{\beta\mu H S_3}\right) \tag{2.2.1}$$

となりますが，

$$\begin{aligned}\sum_{S_1=-S}^{S} e^{\beta\mu H S_1} &= e^{-\beta\mu H S}\sum_{S'=0}^{2S} e^{\beta\mu H S'} \\ &= \frac{e^{-\beta\mu H S} - e^{\beta\mu H(S+1)}}{e^{-\beta\mu H/2} - e^{\beta\mu H/2}} = \frac{\sinh(\beta\mu H(S+1/2))}{\sinh(\beta\mu H/2)}\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

なので，

$$Z[\beta] = \left\{\frac{\sinh(\beta\mu H(S+1/2))}{\sinh(\beta\mu H/2)}\right\}^3 \tag{2.2.3}$$

となります．

2. 磁化を計算すると

$$\begin{aligned}M &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial H}\log Z[\beta] \\ &= \frac{3}{\beta}\frac{\partial}{\partial H}\Big[\log\sinh(\beta\mu H(S+1/2)) - \log\sinh(\beta\mu H/2)\Big] \\ &= \frac{3}{\beta}\left[\beta\mu\left(S+\frac{1}{2}\right)\frac{\cosh(\beta\mu H(S+1/2))}{\sinh(\beta\mu H(S+1/2))} - \frac{\beta\mu}{2}\frac{\cosh(\beta\mu H/2)}{\sinh(\beta\mu H/2)}\right]\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

となりますが，ブリユアン関数の表記と合うようにSを括りだすと

$$\begin{aligned}M &= 3\mu S\left[\left(1+\frac{1}{2S}\right)\coth\left(\beta\mu HS\left(1+\frac{1}{2S}\right)\right) - \frac{1}{2S}\coth\left(\beta\mu HS\cdot\frac{1}{2S}\right)\right] \\ &= 3\mu^2 S B_S(\beta\mu HS)\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

となります．また，$H \sim 0$では

$$M \sim \beta\mu HS(S+1) \tag{2.2.6}$$

となるので，

$$\chi = \beta\mu^2 S(S+1) \tag{2.2.7}$$

です．

3. 分配関数は出ているので，内部エネルギーは

$$\begin{aligned}U &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z[\beta] \\ &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\Big[\log\sinh(\beta\mu H(S+1/2)) - \log\sinh(\beta\mu H/2)\Big] \\ &= -\mu HSB_S(\mu HS/k_BT)\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

であり，これから

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\mu^2 H^2 S}{k_B T^2} B_S \left(\frac{\mu H S}{k_B T} \right) \tag{2.2.9}$$

と求められます．高温では，$\mu H / k_B T \ll 1$なので

$$C_V \sim \frac{\mu^3 H^3 S^2 (S+1)}{3 k_B T^3} \tag{2.2.10}$$

となります．

4. $H = 0$のときは

$$\mathcal{H} = -J \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 \tag{2.2.11}$$

ですが，このとき，全角運動量$\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$を$\boldsymbol{S}$とすれば

$$\boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{S}1^2 + 2\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_2^2 \tag{2.2.12}$$

より，

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2} (\boldsymbol{S}^2 - \boldsymbol{S}1^2 - \boldsymbol{S}_2^2) \tag{2.2.13}$$

となります．$S_1 = S_2 = 1/2$なので

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2} \left(\boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{2} \right) \tag{2.2.14}$$

であり，Sは0，$+1$の値を取りうるので

$$\mathcal{H} = +\frac{J}{4},\ -\frac{3}{4} J \tag{2.2.15}$$

の値をとります[*4]．また，このとき

$$\begin{cases} +\dfrac{J}{4}\text{のとき，縮退度は}1, \\ -\dfrac{3}{4}J\text{のとき，縮退度は}3 \end{cases} \tag{2.2.16}$$

です[*5]．これを参考にすれば，$H \neq 0$のときは

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2} \left(\boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{2} \right) - \mu \boldsymbol{H} \cdot (\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}_3) \tag{2.2.17}$$

とハミルトニアンを書くことができ，SとS_3は分離できるので

$$Z[\beta] = \left(\sum_{S=0,1} \exp \left[\frac{\beta J}{2} \left(\boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{2} \right) + \beta \mu H S_z \right] \right) \left(\sum_{S_3 = \pm 1/2} e^{\beta \mu H S_3} \right) \tag{2.2.18}$$

[*4] J^2の固有値は$j(j+1)$で取っていることに注意してください．

[*5] 全角運動量が$S = 0$のときは$|+,-\rangle - |-,+\rangle$しか存在しませんが，$S = 1$のときは

$$|+,+\rangle,\ |+,-\rangle + |+,-\rangle,\ |-,-\rangle$$

だけ状態が存在します．

となり，それぞれの項を計算すると

$$\sum_{S=0,1} \exp\left[\frac{\beta J}{2}\left(\boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{2}\right) + \beta\mu H S_z\right] = e^{3\beta J/4}(2\cosh(\beta\mu H) + 1) + e^{-\beta J/4} \tag{2.2.19}$$

$$\sum_{S_3=\pm 1/2} e^{\beta\mu H S_3} = 2\cosh(\beta\mu H/2) \tag{2.2.20}$$

となるので[*6]，分配関数は

$$Z[\beta] = 2\cosh(\beta\mu H/2)\left\{e^{3\beta J/4}(2\cosh(\beta\mu H) + 1) + e^{-\beta J/4}\right\} \tag{2.2.21}$$

です．

5. $J > 0$のときは$e^{-\beta J/4}$の項が無視できるので，

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial H}\log Z[\beta] \\ &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial H}\left[\log\cosh\left(\frac{\beta\mu H}{2}\right) + \frac{3}{4}\beta J + \log(2\cosh(\beta\mu H) + 1)\right] \\ &= \frac{\mu}{2}\tanh\left(\frac{\beta\mu H}{2}\right) + \frac{2\mu\sinh(\beta\mu H)}{2\cosh(\beta\mu H) + 1} \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

です．ここで，

$$B_{1/2}(x) = \tanh x,\ B_1(x) = \frac{2\sinh x}{2\cosh x + 1} \tag{2.2.23}$$

であることに気をつければ

$$M = \frac{\mu}{2}B_{1/2}\left(\frac{\beta\mu H}{2}\right) + \mu B_1(\beta\mu H) \tag{2.2.24}$$

となります．一方で，$J < 0$のときは，$e^{\beta J/4}$の項が無視できるので

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial H}\left[\log\cosh\left(\frac{\beta\mu H}{2}\right) - \frac{\beta J}{4}\right] \\ &= \frac{\mu}{2}\tanh\left(\frac{\beta\mu H}{2}\right) = \frac{\mu}{2}B_{1/2}\left(\frac{\beta\mu H}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

です．

6. $H = 0$のときのハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -J\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2 - J\boldsymbol{S}_2\cdot\boldsymbol{S}_3 - J\boldsymbol{S}_3\cdot\boldsymbol{S}_1 \tag{2.2.26}$$

ですが，例によってこれは$\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_3$とおけば

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2}\left(\boldsymbol{S}^2 - \frac{3}{4}\right) \tag{2.2.27}$$

となりますが，$S_1 = S_2 = S_3 = 1/2$より$S = 1/2,\ 3/2$の値をとりうるので

$$\mathcal{H} = 0,\ -\frac{3}{2}J \tag{2.2.28}$$

[*6] $S = 0$のときは$S_z = 0$，$S = 1$のときは$S_z = -1,\ 0,\ 1$の値をとります．

となり，縮退度はそれぞれ4と4です[*7]．したがって，分配関数は，S_zに関する縮退も注意して

$$
\begin{aligned}
Z[\beta] &= \sum_{S=1/2,3/2} \exp\left[\frac{\beta J}{2}\left(\boldsymbol{S}^2 - \frac{3}{4}\right) + \beta\mu H S_z\right] \\
&= \sum_{S_z=\pm 1/2} 2e^{\beta\mu H S_z} + e^{3\beta J/2} \sum_{S_z=\pm 1/2,\pm 3/2} e^{\beta\mu H S_z} \\
&= 4\cosh\left(\frac{\beta\mu H}{2}\right) + 2e^{3\beta J/2}\left[\cosh\left(\frac{\beta\mu H}{2}\right) + \cosh\left(\frac{3\beta\mu H}{2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2.2.29}
$$

となります．$J > 0$のときは，$e^{3\beta J/2} \gg 1$より，第1項の寄与を無視して

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial H}\left[\frac{3}{2}\beta J + \log\left(\cosh\left(\frac{\beta\mu H}{2}\right) + \cosh\left(\frac{3\beta\mu H}{2}\right)\right)\right] \\
&= \frac{3}{2}\mu\frac{\sinh\left(\frac{3}{2}\mu\mu H\right) + \frac{1}{3}\sinh\left(\frac{1}{2}\beta\mu H\right)}{\cosh\left(\frac{3}{2}\beta\mu H\right) + \sinh\left(\frac{1}{2}\beta\mu H\right)} \\
&= \frac{3}{2}\mu B_{3/2}\left(\frac{3}{2}\beta\mu H\right)
\end{aligned}
\tag{2.2.30}
$$

となります．一方で，$J < 0$のときは，$e^{3\beta J/2} \ll 1$より

$$
M = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial H}\log\left(4\cosh\left(\frac{1}{2}\beta\mu H\right)\right) = \frac{1}{2}\mu B_{1/2}\left(\frac{\beta\mu H}{2}\right)
\tag{2.2.31}
$$

となります．

[*7] $S = 1/2$に属している状態は

$$
\begin{aligned}
&|+,+,-\rangle - |+,-,+\rangle + |-,+,+\rangle\,, \\
&|+,+,-\rangle + |+,-,+\rangle - |-,+,+\rangle\,, \\
&|+,-,-\rangle - |-,+,-\rangle + |-,-,+\rangle\,, \\
&|+,-,-\rangle + |-,+,-\rangle - |-,-,+\rangle
\end{aligned}
$$

で，$S = 3/2$に属している状態は

$$
\begin{aligned}
&|+,+,+\rangle\,, \\
&|+,+,-\rangle + |+,-,+\rangle + |-,+,+\rangle\,, \\
&|+,-,-\rangle + |-,+,-\rangle + |-,-,+\rangle\,, \\
&|-,-,-\rangle
\end{aligned}
$$

だと思います．（ちゃんとやるとスピン1/2とスピン1の合成を行ってから，合成したスピン1とスピン1/2のさらに合成することで状態を得ることができると思います．）また，$S = 1/2$のときは$S_z = \pm 1/2$，$S = 3/2$のときは$S_z = \pm 3/2,\ \pm 1/2$です．

第3問

1. $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$なら，$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$より，$\boldsymbol{F}$と$\boldsymbol{v}$が直交しているので．
2. 中心方向の運動方程式は
$$m\frac{v_0^2}{a}=qv_0B \tag{2.3.1}$$
なので，
$$mv_0=qaB \tag{2.3.2}$$
です．
3. しっかり運動方程式を書くと
$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}=qB\begin{pmatrix}v_y\\-v_x\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}E\\0\\0\end{pmatrix} \tag{2.3.3}$$
です．ここで，z成分については$v(z)=0$．x，y平面については，$u=v_x+iv_y$とすれば
$$m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-iqB\left(u+\frac{iE}{qB}\right) \tag{2.3.4}$$
となるので，
$$u(t)=-\frac{iE}{qB}+i\left(v_0+\frac{iE}{qB}\right)e^{-i\omega t} \tag{2.3.5}$$
と解けます．ただし，$\omega\equiv qB/m$とおきました．両辺の実部と虚部を比較すれば
$$\begin{cases}v_x(t)=v_0\sin\omega t-\dfrac{E}{qB}\cos\omega t\\ v_y(t)=-\dfrac{E}{qB}+v_0\cos\omega t+\dfrac{E}{qB}\sin\omega t\end{cases} \tag{2.3.6}$$
となり，さらに
$$\begin{cases}x(t)=a+\dfrac{mv_0}{qB}(1-\cos\omega t)-\dfrac{mE}{q^2B^2}\sin\omega t\\ y(t)=-\dfrac{E}{qB}t+\dfrac{mv_0}{qB}\sin\omega t+\dfrac{mE}{q^2B^2}(1-\cos\omega t)\end{cases} \tag{2.3.7}$$
となります．$-Et/qB$の項が$y(t)$にあるので，y軸方向のドリフトと円運動です．
4. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$の成分を書くと
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=qB'(0)x\begin{pmatrix}v_y\\-v_x\\0\end{pmatrix} \tag{2.3.8}$$
です．ここに，(2.3.6), (2.3.7)で$E=0$としたものを代入すると
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=qB'(0)v_0\left(a+\frac{mv_0}{qB}(1-\cos\omega t)\right)\begin{pmatrix}\cos\omega t\\-\sin\omega t\\0\end{pmatrix} \tag{2.3.9}$$
となるので，周期が$2\pi/\omega$より
$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\pi}\cos^2\omega t\mathrm{d}t=\frac{1}{2} \tag{2.3.10}$$

のみが生き残って，他の項は時間平均で消えることに注意すれば

$$\langle \boldsymbol{f} \rangle = -\frac{mv_0^2}{2}\frac{B'(0)}{B}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \tag{2.3.11}$$

となります．

5. これは，電場がx軸の負の方向に働いていることと同じなので，設問3の結果を踏まえれば$+y$の方向にドリフトしながら円運動すると考えられます．

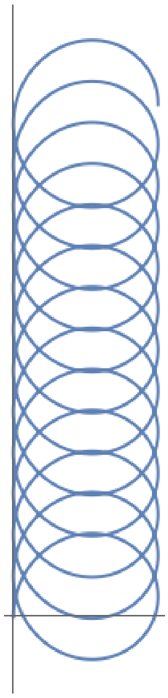

図2.2　粒子の運動