東京大学 平成25年 物理学専攻 院試 解答例

ミヤネ

最終更新：2023 年 8 月 11 日

目次

1　数学パート

第1問

1. (i) 左辺については，行列式の定義より

$$\Delta(\vec{z}) = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} x_{3\sigma(3)} x_{4\sigma(4)} \tag{1.1.1}$$

です．ここで，$x_{1\sigma(1)}$は0次，$x_{2\sigma(2)}$は1次，$x_{3\sigma(3)}$は2次，$x_{4\sigma(4)}$は3次なので，$\Delta(\vec{z})$は6次の同次多項式です．一方で，右辺が6次の同次多項式なのは明らか.

(ii) 行列式は，列が一致するときは基本変形で1列を0にすることができるので，行列式の定義で$x_{1\sigma(1)} = 0$となり，$\Delta(\vec{z}) = 0$.

(iii) 比例定数をkとしましょう．つまり

$$\Delta(\vec{z}) = k(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)(z_3 - z_4) \tag{1.1.2}$$

とします．両辺の$z_2 z_3^2 z_4^3$の項を比較すると$k = 1$が示されるので，式(1)が成立します。

2. (i)

$$\frac{1}{g(z)} \frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\lambda(z)}{\mathrm{d}z},\ \frac{1}{g(z)} \frac{\mathrm{d}^2 g(z)}{\mathrm{d}z^2} = \frac{\mathrm{d}^2\lambda(z)}{\mathrm{d}z^2} + \left(\frac{\mathrm{d}\lambda(z)}{\mathrm{d}z}\right)^2. \tag{1.1.3}$$

(ii) 前問の結果を用いて$f(z)$を計算すると

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \log \Delta(\vec{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \log \Delta(\vec{z})\right) \\ &= -\frac{1}{(z_1 - z_2)^2} - \frac{1}{(z_1 - z_3)^2} - \frac{1}{(z_1 - z_4)^2} + \left(\frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_1 - z_3} + \frac{1}{z_1 - z_4}\right)^2 \\ &= \frac{2}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} + \frac{2}{(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} + \frac{2}{(z_1 - z_4)(z_1 - z_2)} \\ &= \left(\frac{1}{z_1 - z_2} - \frac{1}{z_1 - z_3}\right) \frac{2}{z_2 - z_3} + \left(\frac{1}{z_1 - z_3} - \frac{1}{z_1 - z_4}\right) \frac{2}{z_3 - z_4} \\ &\qquad + \left(\frac{1}{z_1 - z_4} - \frac{1}{z_1 - z_2}\right) \frac{2}{z_4 - z_2} \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

となるので，極は1次のみです.

(iii) 例えば，$1/(z_1 - z_2)$の項は

$$\oint \frac{\mathrm{d}z_1}{2\pi i} \frac{z_1}{z_1 - z_2} = z_2 \tag{1.1.5}$$

となることに注意すれば

$$\oint \frac{\mathrm{d}z_1}{2\pi i} z_1 f(z) = 6. \tag{1.1.6}$$

第2問

総和の記号$\sum$は省きます．

1.
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}. \tag{1.2.1}$$

2. $A \equiv (a_{ij})$とおくと，2階微分の項は
$$a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} CAC^T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$
と変換できます．行列Aの固有値をλ_1, λ_2とおき，v_1, v_2をそれに対応する規格化された固有ベクトルとしましょう．Aは対称行列なので，直交行列を用いて対角化することができます．その対角化行列をPとおきましょう．$C = P^T$ととれば
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = CAC^T \tag{1.2.3}$$
となります．ここで，$C^T = C^{-1}$より，$D = \det A = \lambda_1\lambda_2$に注意してください．

- $D > 0$のとき
  Cを
  $$C^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}} v_1 & \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}} v_2 \end{pmatrix} \tag{1.2.4}$$
  を満たすようにとると，
  $$CAC^T = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.5}$$
  とすることができます．よって，このとき
  $$a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \pm\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}\right) \tag{1.2.6}$$
  となります[*1]．
- $D = 0$のとき
  $\lambda_1\lambda_2 = 0$なので，$\lambda_1 = 0$とおきます．すると，$D > 0$の場合と同じようにCをとれば，同じ議論から
  $$a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \pm\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \tag{1.2.7}$$
  となります．
- $D < 0$のとき
  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ととります．すると，また同じ議論から
  $$a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \tag{1.2.8}$$

[*1] マイナスになるかどうかは，λ_1とλ_2の符号によります．$\lambda_1\lambda_2 > 0$より，λ_1, λ_2の符号は同じなので，±はカッコの外側にあることに気をつけてください．

となります．

3. 同様に$b \equiv (b_i)$とおき，$b' \equiv C^T b$とすれば，1階微分の項は

$$b_i \frac{\partial}{\partial x_i} = b'_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + b'_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \tag{1.2.9}$$

と書けます．

- <u>$D > 0$のとき</u>

  前問の結果と合わせれば，偏微分方程式$\mathcal{L}\psi = E\psi$が

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + b'_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + b'_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right] e^{\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2} \phi = E e^{\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2} \phi \tag{1.2.10}$$

  となるようにCをとることができます．微分の部分を計算すると

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \underline{b'_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + b'_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}}\right] e^{\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2} \phi \\
&\qquad = e^{\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2} \left[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 2\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \underline{b'_1 \left(\lambda_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) + b'_2 \left(\lambda_2 + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)}\right] \phi
\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

  となりますが，λ_1, λ_2を1階微分が消えるようにとり[*2]，定数項を移項してそれらをまとめてFとおけば式(2)になります．

- <u>$D = 0$のとき</u>

  微分の部分(1.2.11)は，この場合は

$$\lambda_2^2 + 2\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + b'_1 \left(\lambda_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) + b'_2 \left(\lambda_2 + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right) \tag{1.2.12}$$

  となるので，ξ_2の1階微分はλ_2の取り方で消えます．ξ_1の1階微分は消えないので，式(3)のようになります．

- <u>$D < 0$のとき</u>

  $D > 0$のときと同じ．

4. (i) 代入するだけ．

   (ii) $f(y) = 1/2\pi$なので[*3]，

$$\phi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \xi_1}} e^{-\frac{\xi_2^2}{\xi_1}}. \tag{1.2.13}$$

5.
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}\right) \phi = G''_1 + G''_2 - (G''_1 + G''_2) = 0. \tag{1.2.14}$$

[*2] $\lambda_1 = -b'_1/2, \lambda_2 = -b'_2/2$ととればよいでしょう．

[*3] ただし，

$$\delta(\xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi_2} \mathrm{d}y$$

としました．

2　物理パート

第1問

ハット ^ は省略します.

1. ア：$\sqrt{\dfrac{m\omega}{2\hbar}}x - \dfrac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p$.
   イ：1.
   ウ：$x = \sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$.
   エ：$p = -i\sqrt{\dfrac{m\hbar\omega}{2}}(a - a^\dagger)$.
   オ：$\hbar\omega\left(a^\dagger a + \dfrac{1}{2}\right)$.
   カ：$E_0 = \dfrac{\hbar\omega}{2}$.
   キ：$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.
   ク：$E_n = \hbar\omega\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$.
2. Schrödinger方程式
$$i\hbar\left|\psi(t)\right\rangle = H\left|\psi(t)\right\rangle \tag{2.1.1}$$
   に式(3)を代入すると
$$i\hbar\frac{\mathrm{d}c_n(t)}{\mathrm{d}t} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)c_n(t) \tag{2.1.2}$$
   となるので，これを解けば
$$c_n(t) = c_n(0)\exp\left[-i\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] \tag{2.1.3}$$
   となります.
3. $a\left|\phi_n\right\rangle = c_n\left|\phi_{n-1}\right\rangle$とすると$|c_n|^2 = \left\langle\phi_n\middle|a^\dagger a\middle|\phi_n\right\rangle = n$なので，$c_n = \sqrt{n}$です．よって，
$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 &= \left\langle\phi_n\middle|x^2\middle|\phi\right\rangle - (\left\langle\phi_n\middle|x\middle|\phi_n\right\rangle)^2 \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}(\left\langle\phi_n\middle|aa^\dagger\middle|\phi_n\right\rangle + \left\langle\phi_n\middle|a^\dagger a\middle|\phi_n\right\rangle) \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)\end{aligned} \tag{2.1.4}$$
   です．pについても
$$\begin{aligned}(\Delta p)^2 &= \left\langle\phi_n\middle|p^2\middle|\phi_n\right\rangle - (\left\langle\phi_n\middle|p\middle|\phi_n\right\rangle)^2 \\ &= -\frac{m\hbar\omega}{2}(\left\langle\phi_n\middle|aa^\dagger\middle|\phi_n\right\rangle + \left\langle\phi_n\middle|a^\dagger a\middle|\phi_n\right\rangle) \\ &= \frac{m\hbar\omega}{2}(2n+1)\end{aligned} \tag{2.1.5}$$
   となるので，
$$\Delta x \cdot \Delta p = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{2.1.6}$$
   です.

4. aを$|\alpha\rangle$に作用させると，

$$a\,|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\cdot\sqrt{n}\,|\phi_{n-1}\rangle = \alpha\,|\phi_n\rangle \tag{2.1.7}$$

となるので，確かに固有状態です．共役をとると$\langle\phi_n|\,a^\dagger = \alpha^*\,\langle n|$．また，$\langle\alpha|\alpha|=\rangle\,1$なので[*4]，

$$\langle\alpha|x|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha+\alpha^*) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}r\cos\theta \tag{2.1.8}$$

であり，

$$\langle\alpha|p|\alpha\rangle = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\alpha-\alpha^*) = \sqrt{2m\hbar\omega}r\sin\theta \tag{2.1.9}$$

です．

5. 初期条件は

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}e^{-r_0^2}\frac{r_0^n}{\sqrt{n!}}\,|\phi_n\rangle \tag{2.1.10}$$

なので，設問2の答え(2.1.3)に

$$c_n(0) = e^{-r_0^2/2}\frac{r_0^n}{\sqrt{n!}} \tag{2.1.11}$$

を代入して

$$c_n(t) = \frac{r_0^n}{\sqrt{n!}}\exp\left[-\frac{r_0^2}{2} - i\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] \tag{2.1.12}$$

となるので

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_0^n}{\sqrt{n!}}\exp\left[-\frac{r_0^2}{2} - i\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]|\phi_n\rangle \tag{2.1.13}$$

です．また，$|\psi(t)\rangle$にaを作用させてみると

$$a\,|\psi(t)\rangle = r_0e^{-i\omega t}\,|\psi(t)\rangle \tag{2.1.14}$$

となっているので

$$\langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\langle\psi(t)|(a+a^\dagger)|\psi(t)\rangle = \sqrt{2}r_0\cos\omega t \tag{2.1.15}$$

です[*5]．同様にして

$$\langle\psi(t)|P|\psi(t)\rangle = \sqrt{2}r_0\cos\omega t \tag{2.1.16}$$

となるので，$\langle X\rangle^2 + \langle P\rangle^2 = 2r_0^2$となり，円運動．

---

*4 ちゃんと計算すると

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\alpha\rangle &= e^{-r^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(re^{-i\theta})^m(re^{i\theta})^n}{\sqrt{m!n!}}\,\langle\phi_m|\phi_n\rangle \\ &= e^{-r^2}\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{n!}}_{=e^{r^2}} = 1\end{aligned}$$

となります．

*5 $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1$です．規格化は条件は，時間発展させても変化しないので．

第2問

1. 粒子の平均数は
$$\langle N\rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\log\Theta = \sum_i \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\log\Theta_i = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}-1} \tag{2.2.1}$$
となるので，確かに$f(\varepsilon_i)$は第i状態にある粒子数の平均.
2. ボゾンだけ　基底状態　縮退し　極低温の　臨界温度　（31字）
3. 臨界温度は
$$\rho = A(k_BT_c)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x-1}\mathrm{d}x}_{=I_1} \tag{2.2.2}$$
となるので，
$$l \sim \left(\frac{I_1}{A(k_BT_c)^{3/2}}\right)^{1/3} \sim \left(\frac{\hbar^2}{mk_BT_c}\right)^{1/2} \sim \lambda_T \tag{2.2.3}$$
です.
4. エネルギーも
$$E = A\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta\varepsilon}-1}\mathrm{d}\varepsilon = A(k_BT)^{5/2}\underbrace{\int \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta\varepsilon}-1}\mathrm{d}\varepsilon}_{=I_2} \tag{2.2.4}$$
となるので，$\gamma = 3/2$です.
5. ギブスの関係式$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S$より
$$S = \int \frac{C_V(T)}{T}\mathrm{d}T \tag{2.2.5}$$
なので，$\nu = 3/2$.
6. 状態密度に関しては，問題文の式(3)が成り立っているとします．すると，基底状態にいない粒子数$\tilde{\rho}$は
$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= A\int_{\varepsilon_z}^\infty \frac{(\varepsilon-\varepsilon_z)^{1/2}}{e^\varepsilon-1}\mathrm{d}\varepsilon + A\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^\varepsilon-1}\mathrm{d}\varepsilon + A\int_{-\varepsilon_z}^\infty \frac{(\varepsilon+\varepsilon_z)^{1/2}}{e^\varepsilon-1}\mathrm{d}\varepsilon \\ &= A\int_0^\infty \frac{\varepsilon'^{1/2}}{e^{\varepsilon'+\varepsilon_z}-1}\mathrm{d}\varepsilon' + \underbrace{A\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^\varepsilon-1}\mathrm{d}\varepsilon}_{\propto T^{3/2}} + A\int_0^\infty \frac{\varepsilon'^{1/2}}{e^{\varepsilon'-\varepsilon_z}-1}\mathrm{d}\varepsilon'\end{aligned} \tag{2.2.6}$$
となりますが，ε'を上昇させていくと第1項と第3項の寄与は減少します[*6]．今，断熱変化を考えているため，BECは起き続けて$\tilde{\rho} = \mathrm{const.}$です．以上より，第2項の寄与が大きくなるため，$T$は上昇すると考えられます.

[*6] もう少し説明すると，第1項の減少度合いが，第3項の上昇度合いよりも強いので，第1,3項のトータルで減少していきます．このことに関しては，
$$f(\varepsilon_z) = \frac{1}{e^{\varepsilon'+\varepsilon_z}-1} + \frac{1}{e^{\varepsilon'-\varepsilon_z}-1}$$
という関数を評価してみると良いかもしれません.（ちょっとチェックしてみましたが，傾向は見えてました.）

第3問

1. $$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}+q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=q\left\{\nabla\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{A}\right)-\boldsymbol{\nabla}\varphi\right\}. \tag{2.3.1}$$

2. (2.3.1)を整理すると
$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=q\left\{\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{A}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{A}\right\}+q\left(-\boldsymbol{\nabla}\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \tag{2.3.2}$$
となりますが[*7]，次の関係
$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{A}\right)=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{A}+\underbrace{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}}_{=0}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\times\underbrace{\left(\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)}_{=0} \tag{2.3.3}$$
を用いれば
$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})+q\left(-\boldsymbol{\nabla}\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \tag{2.3.4}$$
となります．電場と磁場は，ゲージを用いれば
$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \tag{2.3.5}$$
と書けるので，運動方程式(2)が得られます．

3. 場が不変なのは良いでしょう．変換後のラグランジアンを考えてみると
$$\begin{aligned}L'&=\frac{1}{2}m\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|^2+q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\Lambda)-q\left(\varphi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)\\&=L+q\frac{\mathrm{d}\Lambda(\boldsymbol{r},t)}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{2.3.6}$$
と，元のラグランジアンに表面項が加わっているだけなので，変分をとってオイラー・ラグランジュ方程式を導出する際にこの項の寄与がなくなります．

4. $$B_z=\frac{B}{2},\ E_x=\alpha x,\ E_y=\alpha y,\ E_z=-2\alpha z. \tag{2.3.7}$$

5. 運動方程式は
$$m\frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2}=-2q\alpha z(t) \tag{2.3.8}$$
なので，単振動．

[*7] ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$の微分は，一般には
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{A}$$
となることに注意しましょう．（試験中にやるのは難しいかもしれません．私もランダウ＝リフシッツを見ちゃいました．）

6. 運動方程式は

$$
\begin{cases}
m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\alpha qx+qB\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\
m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\alpha qy-qB\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}
\end{cases}
\tag{2.3.9}
$$

です．一般に，この方程式を解析するのは難しいと思いますが*8，もし$\alpha=0$なら，いわゆる円運動なので，基本的にxy平面上では円運動に近い運動をすると思われます．その円運動からのずれはx,yの項が担うわけですが，これに関してはケースバイケースだと思います．Mathematicaで計算した結果を載せておきます．

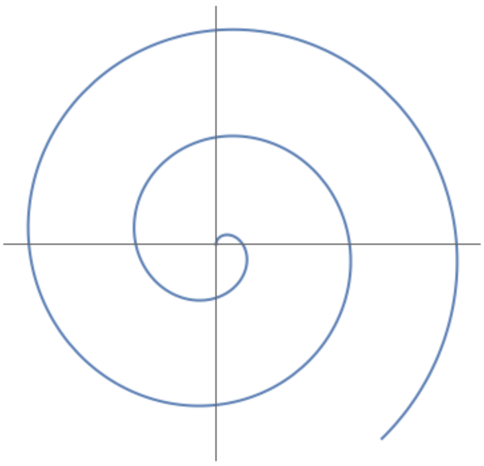

図2.1　例1

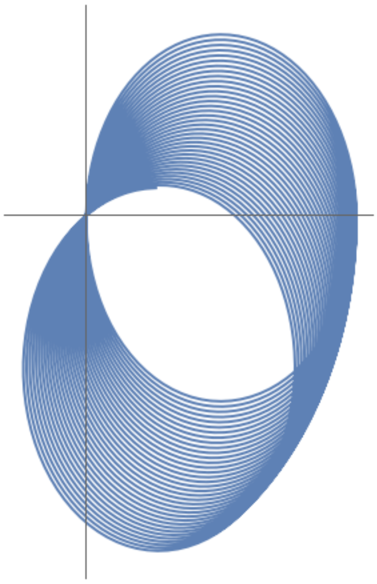

図2.2　例2

微分方程式は

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=x+\gamma\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\
\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=y-\delta\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}
\end{cases}
\tag{2.3.10}
$$

で，初期条件は$x(0)=y(0)=0,\ x'(0)=0,\ y'(0)=1$としました．$(\gamma,\delta)=(1,1)$としたのが2.1で，$(\gamma,\delta)=(11,20)$としたのが2.2です．

*8 もしかしたら，ちゃんと解けるのかもしれません．そのときは，（うまい方法があるのなら話は別ですが）5階の線形微分方程式を解くことになると思います．