素粒子物理学 中間レポート

学生番号：5324A057-8　氏名：宮根 一樹

最終更新：2024 年 6 月 23 日

1. 与えられたラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^{\alpha}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m_f)_{\alpha}^{\ \beta}\psi_{\beta} + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\phi)^2 - \frac{1}{2}m_{\phi}^2\phi^2 + Y\phi\bar{\psi}\psi。 \tag{0.1}$$

ただし、α, β はガンマ行列 γ^{μ} の成分の添え字である。したがって、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}^{\xi}} = i(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m_f)_{\xi}^{\ \eta}\psi_{\eta}(x) + Y\phi(x)\psi_{\xi}(x)、\\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi}^{\xi})} = 0、\\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m_{\phi}^2\phi + Y\bar{\psi}\psi、\\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} = \partial^{\mu}\phi \end{cases} \tag{0.2}$$

となっているので、オイラー・ラグランジュ方程式から運動方程式

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m_f)_{\xi}^{\ \eta}\psi_{\eta}(x) = -Y\phi(x)\psi_{\xi}(x)、 \tag{0.3}$$

$$(\partial_{\mu}\partial^{\mu} + m_{\phi}^2)\phi(x) = Y\bar{\psi}^{\xi}(x)\psi_{\xi}(x) \tag{0.4}$$

が得られる。

2. $\gamma^{\mu}\partial_{\mu} = \gamma^0\partial_0 + \gamma^i\partial_i$ であることに注意して、運動方程式の項を整理すると

$$i\gamma^0\partial_0\psi(x) = (-i\gamma^i\partial_i + m_f - Y\phi)\psi(x) \tag{0.5}$$

となる。ただし、イタリックの添え字 i は空間方向の添え字 $i = 1, 2, 3$ である。ここで、両辺に左側から γ^0 をかけると、${\gamma^0}^2 = 1$ であるから

$$i\partial_0\psi = (\underline{-i\gamma^0\gamma^i\partial_i + \gamma^0 m_f}\,\underset{\sim\sim\sim}{-\gamma^0 Y\phi(x)})\psi(x) \tag{0.6}$$

となる。したがって、<u>下線の項</u>を H_0、波線の項を $V(x)$ とすれば、

$$i\partial_0\psi = (H_0 + V(x))\psi(x) \tag{0.7}$$

であり、確かに $V(x) = -\gamma^0 V(x)$ となっている。

3. 図 0.1 の値を計算する。遷移振幅に具体的な表式を代入すると

$$\begin{aligned} iT_{\mathrm{FI}} &= -iY\int \mathrm{d}^4x\ \bar{\psi}_{\mathrm{F}}(x)\phi(x)\psi_{\mathrm{I}}(x) \\ &= iY\int \mathrm{d}^4x\ \bar{u}(\boldsymbol{q}_1, \tau_1)u(\boldsymbol{p}_1, \lambda_1)e^{-i(p_1-q_1)\cdot x} \times \phi(k)e^{-ik\cdot x} \end{aligned} \tag{0.8}$$

となる。ここで、クライン・ゴルドン方程式

$$(\partial^2 + m_\phi)\phi(x) = Y\bar{\psi}\psi \tag{0.9}$$

に展開式を代入すると

$$(-k^2 + m_\phi^2)\phi(k)e^{-ik\cdot x} = Y\bar{u}(\boldsymbol{q}_2, \tau_2)u(\boldsymbol{p}_2, \lambda_2) \times e^{-i(p_2-q_2)\cdot x} \tag{0.10}$$

となるので、これを (0.8) に代入すれば

$$\begin{aligned} iT_{\mathrm{FI}} &= iY\int \mathrm{d}^4x\ \bar{u}(\boldsymbol{q}_1, \tau_1)u(\boldsymbol{p}_1, \lambda_1)\ \left.\frac{i^2Y}{k^2 - m_\phi^2}\right|_{k=p_1-q_1} \bar{u}(\boldsymbol{q}_2, \tau_2)u(\boldsymbol{p}_2, \lambda_2)e^{-i(p_1-q_1+p_2-q_2)\cdot x} \\ &= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 - q_1 + p_2 - q_2) \\ &\qquad \times i(iY)^2\bar{u}(\boldsymbol{q}_1, \tau_1)u(\boldsymbol{p}_1, \lambda_1)\ \left.\frac{i}{k^2 - m_\phi^2}\right|_{k=p_1-q_1} \bar{u}(\boldsymbol{q}_2, \tau_2)u(\boldsymbol{p}_2, \lambda_2) \end{aligned} \tag{0.11}$$

となるので、

$$\mathcal{M} = (iY)^2\bar{u}(\boldsymbol{q}_1, \tau_1)u(\boldsymbol{p}_1, \lambda_1)\ \left.\frac{i}{k^2 - m_\phi^2}\right|_{k=p_1-q_1} \bar{u}(\boldsymbol{q}_2, \tau_2)u(\boldsymbol{p}_2, \lambda_2) \tag{0.12}$$

である[*1]。

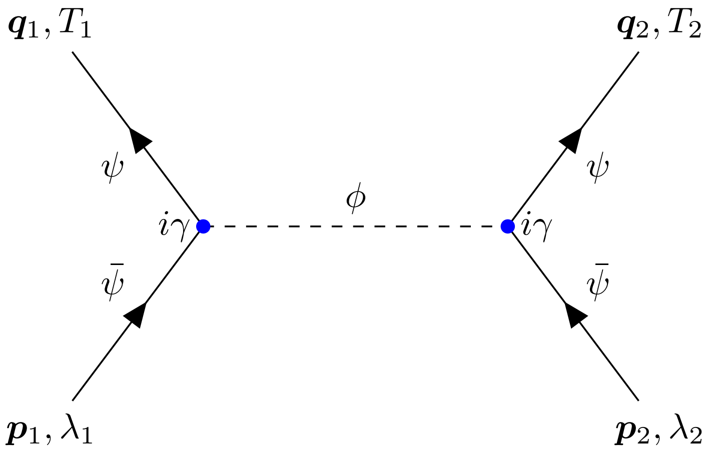

図 0.1　問題のダイアグラム

4. 非相対論的極限では、$(p_1 - q_1)^2 \sim -|\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{q}_1|^2$ が成立している。よって、プロパゲーターは

$$\left.\frac{i}{k^2 - m_\phi^2}\right|_{k=p_1-q_1} \sim \frac{i}{|\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{q}_1|^2 + m_\phi^2} \tag{0.13}$$

[*1] ただし、運動量保存則から $k = p_1 - q_1$ であることを暗に用いている。

補足

1. ここで、問 2 で仮定した
$$H_0 = -i\gamma^0\gamma^i\partial_i + \gamma^0 m_f \tag{0.14}$$
が、今回のディラック場の理論のハミルトニアンであることを確認しておこう。そのためには、ψ に共役な運動量をもとめればよい。それは
$$\pi_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\psi_0\psi)} = \bar{\psi}i\gamma^0 = i\psi^\dagger \tag{0.15}$$
であるので、自由ディラック場をルジャンドル変換をすれば
$$\begin{aligned} H_0 &= \pi_\psi\partial_0\psi - \mathcal{L}_{\text{Dirac}} \\ &= \psi^\dagger(-i\gamma^0\gamma^i\partial_i + \gamma^0 m_f)\psi \end{aligned} \tag{0.16}$$
となるため、ハミルトニアンが得られる。