高次元時空モデルと素粒子標準模型

早稲田大学 物理学科 B4
宮根 一樹

2024 年 3 月

概要

これは数物セミナー素粒子グループでのリレーセミナーの資料になります。私が現在所属している研究室[*1]は、4 次元よりも大きい次元の時空を仮定する高次元時空モデルから素粒子標準模型を再現することを目標とした研究を主にしています。そこで、ここでは高次元時空モデルからどのようにして統一理論の見通しがつくのかについて、議論したいと思います。主に参考にしているのは、教科書 [1] です。

目次

*1 早稲田大学の安倍研究室といいます。ホームページはこちらです。

1　高次元の場の理論とコンパクト化

標準模型というのは、大雑把に言ってゲージ群が $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ であるような Yang-Mills 理論でした。しかし、標準模型はゲージ群だけではなく、その表現も恣意的であり、それらが何かしらの高エネルギー理論の decoupling limit として得られるのではないか？ と考えるのは自然なことかと思います。その候補として、高次元時空モデルというのがあるので、その高次元時空の理論からどのようにして 4 次元の理論が取り出せるのかを今回は発表したいと思います。特に、今回はボトムアップ的なアプローチとして、内部空間の次元はこだわりません[*2]。

この章では、簡単な 5 次元理論の余剰空間をコンパクト化することによって、4 次元の理論にどのような影響を与えるのかを見ていこうと思います。

1.1　5 次元理論のコンパクト化

まずは単純に 5 次元の時空を考えることにします。その座標は z^M で、$M = 0, 1, 2, 3, 4$ という値をとります。また、時空はミンコフスキーで計量は

$$\eta_{MN} = \mathrm{diag}(-, +, +, +, +) \tag{1.1}$$

です。この時空上の場の理論は、たとえば実スカラー場 $\phi(z)$ なら

$$S = \int \mathrm{d}^5 z \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi \right) \tag{1.2}$$

のように 4 次元の理論と同じように議論することができます。

ここで、5 番目の座標 z_4 が半径 a の円周になったとしましょう。円周 S^1 となったときは $\theta \in [0, 2\pi)$ でパラメトライズするのが便利なので、以後は無次元のパラメターで $z_4(\theta)$ と書けるとします。さらに

$$\mathrm{d}z_4 = a \mathrm{d}\theta \tag{1.3}$$

という関係が成立するとすれば、$\mathrm{d}z_4^2 = a^2 \mathrm{d}\theta^2$ より

$$g_{\theta\theta} = a^2。 \tag{1.4}$$

上述のように、余剰空間に境界条件を課すことを**コンパクト化**といいます。ここで、5 次元のミンコフスキー時空 M_5 がコンパクト化によって時空が 4 次元ミンコフスキーと円周の直積 $M_4 \times S^1$ になるとすれば、その計量は

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

です[*3]。

[*2] 一方で、高エネルギーの理論として超弦理論を想定するアプローチをトップダウンというそうです。このときは、特に 10 次元の超対称な場の理論を取り扱うことになります。

[*3] ただし、$g_{\mu\theta} = g_{\theta\mu} = 0$ と 4 次元の部分と 1 次元の部分が完全に分離できているのは仮定です。

このような時空の上で、実スカラー場 $\phi(z)$ の理論を考えてみましょう。今、θ 方向は円周 S^1 にコンパクト化されていることから、$\phi(z)$ はフーリエ級数展開できます：

$$\phi(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_k \tilde{\phi}_k(x)e^{ik\theta}。\tag{1.6}$$

これを 5 次元の実スカラー場の作用 (1.2) に代入します。

$$\int \mathrm{d}^5 z\,\sqrt{-g}=\int \mathrm{d}^4 x\,\sqrt{-g_4}\cdot a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \tag{1.7}$$

なので、θ 方向の積分を考えると

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\left(-\frac{1}{2}g^{MN}(\partial_M\phi)(\partial_N\phi)\right)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\left(-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)-\frac{1}{2a^2}\partial_\theta\phi^2\right) \tag{1.8}$$

となりますが、

$$\partial_\mu\phi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_k \partial_\mu\tilde{\phi}_k(x)e^{ik\theta} \tag{1.9}$$

より、

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\left(-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)\right)&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\left(-\frac{1}{4\pi}\sum_{k,l}\partial_\mu\tilde{\phi}_k(x)\partial^\mu\tilde{\phi}_l(x)e^{i(k+l)\theta}\right)\\&=-\frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}_0(x)\partial^\mu\tilde{\phi}_0-\frac{1}{2}\sum_{k\neq 0}\partial_\mu\tilde{\phi}_k\partial^\mu\tilde{\phi}_{-k}\\&=-\frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}_0(x)\partial^\mu\tilde{\phi}_0-\sum_{k\geq 1}\partial_\mu\tilde{\phi}_k\partial^\mu\tilde{\phi}_k^*\end{aligned} \tag{1.10}$$

です。ただし、$\phi(x,\theta)$ が実スカラー場であることから

$$\tilde{\phi}_k^*=\tilde{\phi}_{-k} \tag{1.11}$$

を用いました。(1.8) の残りの項を考えると

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\left(-\frac{1}{2a^2}\partial_\theta\phi^2\right)&=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\sum_{k,l}kl\tilde{\phi}_k\tilde{\phi}_l e^{i(k+l)\theta}\\&=-\sum_{k\leq 1}\left(\frac{|k|}{a}\right)^2\tilde{\phi}_k\tilde{\phi}_k^*\end{aligned} \tag{1.12}$$

となるので、4 次元の有効作用は

$$S=\int \mathrm{d}^4x\; a\mathcal{L}_4 \tag{1.13}$$

であり、ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_4=-\frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}_0(x)\partial^\mu\tilde{\phi}_0-\sum_{n\geq 1}\left(\partial_\mu\tilde{\phi}_n\partial^\mu\tilde{\phi}_n^*+M_n^n\tilde{\phi}_n\tilde{\phi}_n^*\right) \tag{1.14}$$

となります。ただし、

$$M_n \equiv \frac{|n|}{a} \tag{1.15}$$

とおきました。

有効作用 (1.14) から次のことが分かります：

- 5 次元の実スカラー場の理論からは、質量 M_n をもつ複素スカラー場（KK 粒子）が現れること。
- $n = 0$ のモードは、massless であること（ゼロモード）。
- $n \neq 0$ のときは、その粒子の質量は $M_n = |n|/a$ であり、$a \ll 1$ ならば $M_n \gg 1$ であること。したがって、コンパクト空間の半径が非常に小さければ、十分なエネルギーがないとゼロモード以外の粒子を生成して観測することができないことになります*4。

次は、（スピノル場の前に）ベクトル場 $A_M(z)$ の理論を見ていきます。ベクトル場の作用は、一番簡単な Maxwell 理論

$$S = \int \mathrm{d}^5 z\, \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} g^{MP} g^{NQ} F_{MN} F_{PQ} \right) \tag{1.16}$$

を考えます。ベクトル場は z^4 の方向の周期境界条件により、スカラー場の場合と同様に

$$A_M(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n A_M^{(n)}(x) e^{in\theta} \tag{1.17}$$

と展開できます。これを作用 (1.16) に代入します。作用を少し書き換えると

$$\begin{aligned} S &= \int \mathrm{d}^4 x\, \sqrt{-g_4}\ \cdot a \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\ \left(-\frac{1}{4} g^{MP} g^{NQ} F_{MN} F_{PQ} \right) \\ &= \int \mathrm{d}^4 x\, \sqrt{-g_4}\ \cdot a \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\ \left(-\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)^2 - \frac{a}{2} (\partial^\theta A^\mu - \partial^\mu A^\theta)^2 \right) \end{aligned} \tag{1.18}$$

となるので、被積分関数の各項は

$$\begin{aligned} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)^2 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} e^{i(m+n)\theta} \left(\partial^\mu A^{\nu,(m)} - \partial^\nu A^{\mu,(m)} \right) \left(\partial_\nu A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\nu^{(n)} \right) \\ &\xrightarrow{\theta\ \text{方向の積分}} \sum_n \left(\partial^\mu A^{\nu,(-n)} - \partial^\nu A^{\mu,(-n)} \right) \left(\partial_\nu A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\nu^{(n)} \right) \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} (\partial^\theta A^\mu - \partial^\mu A^\theta) &= -\frac{1}{2\pi a^2} \sum_{m,n} e^{i(m+n)\theta} \left(m A^{\mu,(m)} - \partial^\mu A^{\theta,(m)} \right) \left(n A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\theta^{(n)} \right) \\ &\xrightarrow{\theta\ \text{方向の積分}} \frac{1}{a^2} \sum_n \left(n A^{\mu,(-n)} + \partial^\mu A^{\theta,(-n)} \right) \left(n A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\theta^{(n)} \right) \end{aligned} \tag{1.20}$$

となります。ただし、

$$\partial_\theta = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \tag{1.21}$$

*4 Particle Date Group のデータによると、TeV スケールではまだ KK 粒子の存在が確認されていないようです。

として計算しています。この結果を、作用 (1.18) の表式に代入すると

$$
\begin{aligned}
S = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g_4}\, a \Biggl(& -\frac{1}{4}\sum_n \left(\partial^\mu A^{\nu,(-n)} - \partial^\nu A^{\mu,(-n)}\right)\left(\partial_\nu A_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\nu^{(n)}\right) \\
& -\frac{1}{2a}\sum_n \left(nA^{\mu,(-n)} + \partial^\mu A^{\theta,(-n)}\right)\left(nA_\mu^{(n)} - \partial_\mu A_\theta^{(n)}\right)\Biggr) \\
\equiv \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g_4} a\, \mathcal{L}_4 &
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

です。このとき、ベクトル場の質量はどこからくるかというと

$$
\mathcal{L}_4 \sim -\sum_n \frac{n^2}{2a} A^{\mu,(n)} A_\mu^{(n)*} \tag{1.23}
$$

の項からくるわけですが、やはり質量は $a^{-1/2}$ に比例しています。したがって、effective なラグランジアンはゼロモードのみに注目すればよくて、それは

$$
\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2a^2}\partial_\mu A_\theta \partial^\mu A_\theta^* \tag{1.24}
$$

です。ただし、$A_M^{(n=0)}$ のモードの添え字は省略しており、$F_{\mu\nu}$ は 4 次元の場の強さです。この表式から、4 次元ではベクトル場のほかに複素スカラー場が生じていることが分かります[*5]。このように、より低いスピンをもつ粒子が生じるのがコンパクト化の特徴（だそう）です。

1.2 曲がった時空上でのスピノル場

5 次元のスピノル場のコンパクト化を考える前に、（記号の定義も兼ねて）曲がった時空上での場の理論について簡単に復習したいと思います。

スカラー場やベクトル場といったボゾンや、スピノル場といったフェルミオンは、平坦な時空でのローレンツ変換の既約表現として得られるものでした。ボゾンのほうは、一般座標変換に対してもスカラーやベクトルとして変換されるため、計量によって一般共変化が可能です。が、スピノル場は一般座標変換に対しては既約表現になっておらず、ボゾンの場合と同様に計量からうまく共変的な理論を作ることができません。

そこで、時空の各点における接空間（**局所ローレンツ系**）を考え、そこでは時空は計量が平坦[*6]ですので、そこでスピノル場とローレンツ変換を定義しておき、別の接空間とつなぐことにします。

局所ローレンツ系と四脚場

ではまず、接空間を考えていきましょう。その接空間の時空の添え字をラテン文字 $i, j, \cdots$ で書くことにします。このときの計量は

$$
\eta_{ij} = \mathrm{diag}(-,+,+,+)。 \tag{1.25}
$$

[*5] $A_\theta(x)$ の添え字 θ は 4 次元のローレンツ変換では変換されません。したがって、この添え字は 4 次元の理論からは（ゲージ群の添え字と同様に）内部空間の添え字となるため、場 $A_\theta(x)$ はローレンツ変換に対してはスカラーです。

[*6] 等価原理からも、この仮定は自然でしょう。

ここで、時空の座標の添え字 $\mu, \nu, \cdots$ と局所ローレンツ系の座標の添え字 $i, j, \cdots$ をもつ「場」を考え、それを $b^i{}_\mu$ などと書くことにします。例えば、$b^i{}_\mu$ は局所ローレンツ変換に対しては共変ベクトルで、時空の一般座標変換に対しては反変ベクトルとして変換します。

$b^i{}_\mu$ と $b_{i\nu}$ の積を考えると、それは局所ローレンツ変換に対してはスカラーで、一般座標変換に対しては対称な 2 階のテンソルとなります。これが、ちょうど時空の計量となるような $b^i{}_\mu$ を考えましょう。つまり、

$$g_{\mu\nu} = b^i{}_\mu b_{i\nu} = \eta^{ij} b_{i\mu} b_{j\nu} \tag{1.26}$$

です。このような $b^i{}_\mu$ を**四脚場** (tetrad) といいます。

以上のことから、次の公式が成り立ちます：

- $g^{\mu\nu} = b^{i\mu} b_i{}^\nu$ 。
- $b_{i\mu} b_j{}^\mu = \eta_{ij}$, $b^i{}_\mu b^{j\mu} = \eta^{ij}$ 。
- $b^{i\mu} b_{j\mu} = \delta^i_j$, $b^i{}_\mu b_i{}^\nu = \delta^\nu_\mu$ 。

また、

$$\det(g_{\mu\nu}) = \det(\eta_{ij}) \det(b^i{}_\mu) \det(b^j{}_\nu) = -\det(b^i{}_\mu)^2 \tag{1.27}$$

ですので、$b \equiv \det(b^i{}_\mu)$ とおけば

$$\sqrt{-g} = b。 \tag{1.28}$$

スピン接続

ψ を局所ローレンツ系で定義されたスピノル場とします。その上での無限小ローレンツ変換は

$$\psi \longrightarrow \psi + \delta\psi,\ \delta\psi = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij} S_{ij} \psi \tag{1.29}$$

と書けました。ただし、

$$S_{ij} \equiv \frac{1}{2}\gamma_{[i}\gamma_{j]} = \frac{1}{4}[\gamma_i, \gamma_j] \tag{1.30}$$

であり、恒等式

$$[S_{ij},\ S_{kl}] = -4\left(-\eta_{ik} S_{jl} + \eta_{jk} S_{il} - \eta_{jl} S_{ik} + \eta_{il} S_{jk}\right) \tag{1.31}$$

が成立しています。

ローレンツ変換 (1.29) が時空の点に依存しない大域的な変換であれば、$\partial_\mu \psi$ も無限小ローレンツ変換に対して

$$\delta(\partial_\mu \psi) = \partial_\mu(\delta\psi) = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij} S_{ij} \partial_\mu \psi \tag{1.32}$$

であり共変的です。しかしながら、局所ローレンツ系は時空の各点に設けられた接空間であり、その上でのローレンツ変換は時空の点に依存します。したがって、ローレンツ変換のパラメターである ε^{ij} は時空の点に依存する関数 $\varepsilon^{ij}(x)$ であり、したがって

$$\begin{aligned} \delta(\partial_\mu \psi) &= \partial_\mu(\delta\psi) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij} S_{ij} \partial_\mu \psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varepsilon^{ij}) S_{ij} \psi \end{aligned} \tag{1.33}$$

となるため、微分 ∂_μ は局所ローレンツ変換に対して既約表現としてはふるまわないことになります。

そこで、ゲージ理論や一般相対性理論のやり方を思い出すと、こういった場合は「接続場」を用意して共変微分を定義することにより、共変的な微分を考えることができました。ここでは、**スピン接続**と呼ばれる次の条件を満たす $\omega^{ij}{}_{,\mu}$ を定義することにします：

$$\omega^{ij}{}_{,\mu} \to \omega^{ij}{}_{,\mu} + \delta\omega^{ij}{}_{,\mu},\ \delta\omega^{ij}{}_{,\mu} = \varepsilon^{i}{}_{k}\omega^{kj}{}_{,\mu} + \varepsilon^{j}{}_{k}\omega^{ik}{}_{,\mu} - \partial_\mu\varepsilon^{ij}. \tag{1.34}$$

ただし、局所ローレンツ系の添え字については反対称 $\omega^{ij}{}_{,\mu} = -\omega^{ji}{}_{,\mu}$ です。この接続を用いて、共変微分 D_μ を

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi + \frac{1}{2}\omega^{ij}{}_{,\mu}S_{ij}\psi \tag{1.35}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\delta(D_\mu\psi) &= \partial_\mu(\delta\psi) + \delta\left(\frac{1}{2}\omega^{ij}{}_{,\mu}S_{ij}\psi\right)\\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varepsilon^{ij})S_{ij}\psi + \frac{1}{2}(\delta\omega^{ij}{}_{,\mu})S_{ij}\psi + \frac{1}{2}\omega^{ij}{}_{,\mu}S_{ij}\delta\psi\end{aligned} \tag{1.36}$$

であり、第 3 項と第 4 項を展開すると

$$\underbrace{\frac{1}{2}(\varepsilon^{i}{}_{k}\omega^{ij}{}_{,\mu} + \varepsilon^{j}{}_{k}\omega^{ik}{}_{,\mu})S_{ij}\psi}_{\varepsilon^{i}{}_{k}\omega^{ij}{}_{,\mu}S_{ij}\psi} + \frac{1}{2}\omega^{ij}{}_{,\mu}S_{ij}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu\varepsilon^{ij})S_{ij}\psi。 \tag{1.37}$$

つまり

$$\begin{aligned}\delta(D_\mu\psi) &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varepsilon^{ij})S_{ij}\psi + \varepsilon^{i}{}_{k}\omega^{ij}{}_{,\mu}S_{ij}\psi + \frac{1}{2}\omega^{ij}{}_{,\mu}S_{ij}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu\varepsilon^{ij})S_{ij}\psi\\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\partial_\mu\psi + \varepsilon^{i}{}_{k}\omega^{ij}{}_{,\mu}S_{ij}\psi + \frac{1}{4}\omega^{ij}{}_{,\mu}S_{ij}\varepsilon^{kl}S_{kl}\psi\end{aligned} \tag{1.38}$$

です。第 3 項は、(1.31) によって

$$\frac{1}{4}\omega^{ij}{}_{,\mu}S_{ij}\varepsilon^{kl}S_{kl}\psi = -\varepsilon^{i}{}_{k}\omega^{ij}{}_{,\mu}S_{ij}\psi + \frac{1}{4}\varepsilon^{ij}S_{ij}\omega^{kl}{}_{,\mu}S_{kl}\psi \tag{1.39}$$

となることが分かります。結局、

$$\delta(D_\mu\psi) = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\partial_\mu\psi + \frac{1}{4}\varepsilon^{ij}S_{ij}\omega^{kl}{}_{,\mu}S_{kl}\psi = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}D_\mu\psi \tag{1.40}$$

となり、確かに共変微分であることが示されました。

局所ローレンツ時空でのスピノル場でのラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{1.41}$$

でしたので、これを共変的な理論にします。ここで、微分は $\partial\!\!\!/ = \Gamma^i\partial_i$ と局所ローレンツ系の添え字を持っています。曲がった時空上に持っていくためには、多脚場 $b^{i}{}_{\mu}$ を使えばいいです。Γ^i は局所ローレンツ系で定義され、微分 ∂_μ は時空の座標で定義されるとすれば

$$\partial\!\!\!/ = \Gamma^i b_i{}^{\mu}\partial_\mu \tag{1.42}$$

と書き換えればよく、さらに一般座標変換に対して共変な理論にするために共変微分に書き換えれば

$$\mathcal{L} = b\left[-\bar{\psi}\not{D}\psi - m\bar{\psi}\psi\right] \tag{1.43}$$

で、ただし

$$\not{D}\psi \equiv \Gamma^i b_i{}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega^{kl}{}_{,\mu}\Gamma_{kl}\right)\psi,\ \Gamma_{kl} \equiv \frac{1}{2}\Gamma_{[k}\Gamma_{l]} \tag{1.44}$$

です。また、全体にかかっている $b(=\sqrt{-g})$ は体積因子になります。

全共変微分と四脚場仮説

補足：(1.39) の計算

この節の最後に、公式 (1.39) の計算を載せておきます。

（更新中・・・）

1.3　5 次元スピノル場のコンパクト化

5 次元の場合はベクトル場の場合とほとんど変わらないのでそんなに面白くはないのですが、折角ですのでこの章の最後にスピノル場のコンパクト化を見ていきましょう。その作用は

$$S = \int \mathrm{d}^5 z\, b(-\bar{\psi}\not{D}_5\psi) \tag{1.45}$$

によって与えられ、スピノル場は境界条件によって

$$\psi(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_n \psi_n(x)e^{in\theta} \tag{1.46}$$

と展開されます。ここで、5 次元の共変微分は

$$\begin{aligned}\not{D}_5\psi(x,\theta) &= (\not{D} + \gamma^5 b_4{}^\theta D_\theta)\psi(x,\theta)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_n(\not{\partial} + in\gamma^5 a^{-1})\psi_n(x)e^{in\theta}\end{aligned} \tag{1.47}$$

です[*7]ので、4 次元の有効ラグランジアンは、θ 方向の積分を実行すれば

$$\mathcal{L}_4 = -\sum_n \bar{\psi}_n(\not{D} + ina^{-1}\gamma_5)\psi_n \tag{1.48}$$

となります。ただし、$\not{D}$ は 4 次元での微分です。第 2 項が質量項を与えるので、

$$\psi_n = e^{\mp i(\pi/4)\gamma_5}\psi'_n \tag{1.49}$$

[*7] $g^{\mu\nu} = b^{i\mu}b_i{}^\nu$ でしたので、$b_4^\theta = a^{-1}$ としました。また、余剰空間方向のスピン接続はゼロ (i.e. $\omega^{kl}{}_{,\theta} = 0$) としています。

と変換すれば

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_n\gamma_5\psi_n &= \bar{\psi}'_n \cdot e^{\pm i(\pi/4)\gamma_5}\gamma_5 e^{\mp i(\pi/4)\gamma_5} \cdot \psi'_n \\ &= \bar{\psi}'_n\psi'_n\end{aligned} \tag{1.50}$$

と質量基底に移りますので、$n > 0$ のときは (1.49) の負の符号、$n < 0$ のときは正の符号で変換することにすれば

$$\mathcal{L}_4 = -\sum_n \bar{\psi}_n(\not{D} + M_n)\psi_n \tag{1.51}$$

となります。ただし、プライム $'$ は省略しました。ここで、n 番目のモードの質量は

$$M_n \equiv \frac{|n|}{a} \tag{1.52}$$

であり、やはり a^{-1} に比例します。

2　6 次元の理論のコンパクト化

5 次元の理論では、余剰空間は 1 次元しかないので円周にコンパクト化するしかありませんでした。ですが、6 次元になると少しコンパクト化の自由度が増えます。この章では、コンパクト化の仕方によって、どのような 4 次元の有効理論が得られるのかを見ていこうと思います。

2.1　トーラスコンパクト化

余剰空間が 2 次元のとき、一番簡単なコンパクト化は $S^1 \times S^1 = T^2$ かと思います。それぞれの円周の半径を a_1, a_2 と書くことにすると、計量は

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & & \\ & a_1^2 & \\ & & a_2^2 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

です。余剰空間の座標をそれぞれ θ, φ と書くことにすれば、場 $\Phi(x,\theta,\varphi)$ は 2 重にフーリエ展開することができるので、4 次元の場は 2 つのモード $\Phi_{m,n}(x)$ をもつことになります。

2.2　2 次元球面

2 次元の内部空間としてトーラスを選んだ場合はあまり面白くはなかったのですが、曲がった空間にするとどうなるのでしょうか。ここでは、内部空間として 2 次元球面 S^2

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & & \\ & a^2 & \\ & & a^2\sin\theta \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

を選んでみます。この場合は、スカラー場 $\phi(x,\theta,\varphi)$ は球面調和関数 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ で展開しておきます：

$$\phi(x,\theta,\varphi) = \sum_{l,m}\phi_{l,m}(x)Y_{l,m}(\theta,\varphi). \tag{2.3}$$

スカラー場の作用は

$$S = \int \mathrm{d}^6 z\, \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{MN}\partial_M\phi\partial_N\phi = \int \mathrm{d}^6 z\, \frac{1}{2}\sqrt{-g}\phi\Box^2\phi \tag{2.4}$$

なので、ラプラシアン $\Box^2$ を 4 次元方向 ∂^2 と余剰空間方向 Δ^2 に分けておけば

$$S = \int \mathrm{d}^6 z\, \frac{1}{2}\sqrt{-g}\phi(z)(\partial^2 + \Delta^2)\phi(z) \tag{2.5}$$

です。このとき、余剰空間方向のラプラシアンは球面のラプラシアンですから、球面調和関数は固有基底

$$\Delta^2 Y_{lm} = -\frac{1}{a^2}l(l+1)Y_{lm} \tag{2.6}$$

となっています。よって、2 次元球面を余剰空間に選んだときのスカラー場も、結局は $M \sim a^{-1}$ ほどの質量をもった粒子が KK モードに現れており、あまり T^2 の場合との差はありません。また、ゼロモードもやはり massless です。

ですが、フェルミオンのモードを調べてみると、T^2 の場合と違う結果が出てきます。T^2 の場合は massless なフェルミオンがいましたが、S^2 にコンパクト化する場合は全てのフェルミオンが massive になります。

スピノル場を何かしらの基底（例えば球面調和関数）で展開することで、上述のことは示すことができる（と思う）のですが、ここでは別の方法を紹介します。まずは、Dirac 演算子を $\not{D}_6 = \not{\partial} + \not{D}_2$ と展開しておくと、massless な Dirac 方程式は

$$(\not{\partial} + \not{D}_2)\psi = 0 \tag{2.7}$$

です。もう一度左から $\not{D}_6$ を作用させると

$$(\not{\partial}^2 + \not{\partial}\not{D}_2 + \not{D}_2\not{\partial} + (\not{D}_2)^2)\psi = 0 \tag{2.8}$$

となるわけですが、第 2,3 項は反可換なので消えます[*8]。したがって、

$$(\not{\partial}^2 + (\not{D}_2)^2)\psi = 0 \tag{2.9}$$

となるので、あとは $(\not{D}_2)^2$ の固有値が分かればよいです。

ここで、局所ローレンツ変換に対する共変微分 D_α を時空での共変微分 $\mathcal{D}_\alpha$ におきかえましょう（以下、下の添え字は略）。すると

$$\mathcal{D}^2 = \Gamma^\alpha\mathcal{D}_\alpha \cdot \Gamma^\beta\mathcal{D}_\beta = \Gamma^\alpha\Gamma^\beta\mathcal{D}_\alpha\mathcal{D}_\beta \tag{2.10}$$

となります (時空での共変微分 $\mathcal{D}_\alpha$ とガンマ行列は可換です)。

[*8] 具体的に書いておくと、$\not{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu$ と $\not{D}_2 = \gamma^m(D_2)_m$ で γ^μ と γ^m は反可換なので。

3　超重力理論との関連

(更新中)

参考文献

[1] 藤井 保憲. **超重力理論入門**. 産業図書, 2005.

[2] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Pub. Co, Reading, Mass, 1995.