京都大学令和4年物理学専攻院試解答例

ミヤネ

最終更新：2023 年 8 月 11 日

目次

1 パート1 2
問題 I-1: 量子力学 . . . 2
問題 I-2A: 電磁気学 . . . 7
問題 I-2B: 物理数学 . . . 9
問題 I-3A: 力学 . . . 11
問題 I-3B: 熱力学 . . . 12
問題 I-3C: 物理数学 . . . 13
問題 I-3D: 量子力学 . . . 15

2 パート2 16
問題 II-1: 統計力学 . . . 16
問題 II-2A: 量子力学 . . . 19
問題 II-2C: 力学 . . . 20

1　パート1

I-1：量子力学

(1) 運動エネルギーは$p^2/2m$なので

$$H_{B=0} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \tag{1.1.1}$$

である．

(2) 代入すれば

$$\begin{aligned}\hat{H}_{B=0} &= -\frac{\hbar\omega}{4}\left\{(\hat{a}_x^\dagger - \hat{a}_x)^2 + (\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_y)^2\right\} + \frac{\hbar\omega}{4}\left\{(\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_x)^2 + (\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_y)^2\right\} \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}\left\{\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_x\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y + \hat{a}_y\hat{a}_y^\dagger\right\} \\ &= \hbar\omega(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y + 1)\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

である．なお，交換関係$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$を用いた．

(3) $\hat{L}$とハミルトニアンの交換関係は

$$\begin{aligned}\left[\hat{H}_{B=0}, \hat{L}\right] &= \left[\frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2), \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x\right] \\ &= \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2, \hat{x}\hat{p}_y\right] + \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_y^2, \hat{x}\hat{p}_y\right] - \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2, \hat{y}\hat{p}_x\right] - \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_y^2, \hat{y}\hat{p}_x\right] \\ &\quad + \frac{m\omega^2}{2}\left[\hat{x}^2, \hat{x}\hat{p}_y\right] + \frac{m\omega^2}{2}\left[\hat{y}^2, \hat{x}\hat{p}_y\right] - \frac{m\omega^2}{2}\left[\hat{x}^2, \hat{y}\hat{p}_x\right] - \frac{m\omega^2}{2}\left[\hat{y}^2, \hat{y}\hat{p}_x\right]\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

だが，

$$\left[\hat{p}_x^2, \hat{x}\hat{p}_y\right] = \left[\hat{p}_x^2, \hat{x}\right]\hat{p}_y + \hat{x}\left[\hat{p}_x^2, \hat{p}_y\right] = \hat{p}_x\left[\hat{p}_x, \hat{x}\right]\hat{p}_y + \left[\hat{p}_x, \hat{x}\right]\hat{p}_x\hat{p}_y = -2i\hbar\hat{p}_x\hat{p}_y \tag{1.1.4}$$

$$\left[\hat{p}_y^2, \hat{x}\hat{p}_y\right] = \hat{x}\left[\hat{p}_y^2, \hat{p}_y\right] + \left[\hat{p}_y^2, \hat{x}\right]\hat{p}_y = 0 \tag{1.1.5}$$

$$\left[\hat{p}_x^2, \hat{y}\hat{p}_x\right] = \hat{y}\left[\hat{p}_x^2, \hat{p}_x\right] + \left[\hat{p}_x^2, \hat{y}\right]\hat{p}_x = 0 \tag{1.1.6}$$

$$\left[\hat{p}_y^2, \hat{y}\hat{p}_x\right] = \hat{y}\left[\hat{p}_y^2, \hat{p}_x\right] + \left[\hat{p}_y^2, \hat{y}\right]\hat{p}_x = -2i\hbar\hat{p}_x\hat{p}_y \tag{1.1.7}$$

$$\left[\hat{x}^2, \hat{x}\hat{p}_y\right] = \hat{x}\left[\hat{x}^2, \hat{p}_y\right] + \left[\hat{x}^2, \hat{x}\right]\hat{p}_y = 0 \tag{1.1.8}$$

$$\left[\hat{y}^2, \hat{x}\hat{p}_y\right] = \hat{x}\left[\hat{y}^2, \hat{p}_y\right] + \left[\hat{y}^2, \hat{x}\right]\hat{p}_y = 2i\hbar\hat{x}\hat{y} \tag{1.1.9}$$

$$\left[\hat{x}^2, \hat{y}\hat{p}_x\right] = 2i\hbar\hat{x}\hat{y} \tag{1.1.10}$$

$$\left[\hat{y}^2, \hat{y}\hat{p}_x\right] = 0 \tag{1.1.11}$$

なので，(1.1.3)に代入すれば

$$\left[\hat{H}_{B=0}, \hat{L}\right] = 0 \tag{1.1.12}$$

である．$\hat{M}, \hat{N}$については，

$$\begin{aligned}\left[\hat{H}_{B=0}, \hat{M}\right] &= \hbar\omega\left[\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y, \hat{a}_x^\dagger + i\hat{a}_y^\dagger\right] \\ &= \hbar\omega\left[\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger\right] + i\hbar\omega\left[\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger\right] \\ &= \hbar\omega\left(\hat{a}_x^\dagger + i\hat{a}_y^\dagger\right) \\ &= \hbar\omega\hat{M}\end{aligned} \tag{1.1.13}$$

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{H}_{B=0}, \hat{N}\right] &= \hbar\omega\left[\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y, \hat{a}_x^\dagger - i\hat{a}_y^\dagger\right] \\
&= \hbar\omega\left[\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger\right] - i\hbar\omega\left[\hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger\right] \\
&= \hbar\omega\left(\hat{a}_x^\dagger - i\hat{a}_y^\dagger\right) \\
&= \hbar\omega\hat{N}
\end{aligned} \tag{1.1.14}
$$

である．

$\hat{L}, \hat{M}, \hat{N}$の交換関係は

$$
\begin{aligned}
\hat{L} &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \\
&= \frac{i\hbar}{2}\left\{(\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_x)(\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_y) - (\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_y)(\hat{a}_x^\dagger - \hat{a}_x)\right\} \\
&= i\hbar(\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y)
\end{aligned} \tag{1.1.15}
$$

に注意すれば

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{L}, \hat{M}\right] &= \left[i\hbar(\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y), \hat{a}_x^\dagger + i\hat{a}_y^\dagger\right] \\
&= i\hbar\left(\left[\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger, \hat{a}_x^\dagger\right] - i\left[\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger\right]\right) \\
&= \hbar\hat{M}
\end{aligned} \tag{1.1.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{L}, \hat{N}\right] &= \left[i\hbar(\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y), \hat{a}_x^\dagger - i\hat{a}_y^\dagger\right] \\
&= i\hbar\left(\left[\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger, \hat{a}_x^\dagger\right] + i\left[\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger\right]\right) \\
&= -\hbar\hat{N}
\end{aligned} \tag{1.1.17}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{M}, \hat{N}\right] &= \left[\hat{a}_x^\dagger + i\hat{a}_y^\dagger, \hat{a}_x^\dagger - i\hat{a}_y^\dagger\right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.1.18}
$$

である．

(4) (1.1.15)より

$$
\hat{H}_{B=0}\left|0\right\rangle = \hbar\omega\left|0\right\rangle \ \ , \ \ \hat{L}\left|0\right\rangle = 0\cdot\left|0\right\rangle \tag{1.1.19}
$$

なので，状態$\left|0\right\rangle$は同時固有状態になっている．また，状態$\hat{M}\left|0\right\rangle$を考えると，(1.1.13),(1.1.14)より，

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_{B=0}\hat{M}\left|0\right\rangle &= (\hat{M}\hat{H}_{B=0} + \hbar\omega\hat{M})\left|0\right\rangle \\
&= 2\hbar\omega\hat{M}\left|0\right\rangle
\end{aligned} \tag{1.1.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{L}\hat{M}\left|0\right\rangle &= (\hat{M}\hat{L} + \hbar\hat{M})\left|0\right\rangle \\
&= \hbar\hat{M}\left|0\right\rangle
\end{aligned} \tag{1.1.21}
$$

と，これも固有状態になっている．一般に，整数nについて$\hat{M}^n\left|0\right\rangle$も固有状態になっていると予想でき，実際

$$\begin{aligned}\hat{H}_{B=0}\hat{M}^n\left|0\right\rangle &= \hat{M}\hat{H}_{B=0}\hat{M}^{n-1}\left|0\right\rangle + \hbar\omega\hat{M}^n\left|0\right\rangle \\ &= \hat{M}^2\hat{H}_{B=0}\hat{M}^{n-2}\left|0\right\rangle + 2\hbar\omega\hat{M}^n\left|0\right\rangle \\ &\vdots \\ &= \hat{M}^n\hat{H}_{B=0}\left|0\right\rangle + n\hbar\omega\hat{M}^n\left|0\right\rangle \\ &= (n+1)\hbar\omega\hat{M}^n\left|0\right\rangle \end{aligned} \tag{1.1.22}$$

$$\begin{aligned}\hat{L}\hat{M}^n\left|0\right\rangle &= \hat{M}\hat{L}\hat{M}^{n-1}\left|0\right\rangle + \hbar\hat{M}^n\left|0\right\rangle \\ &\vdots \\ &= n\hbar\hat{M}^n\left|0\right\rangle \end{aligned} \tag{1.1.23}$$

である．同様にして，一般に$\hat{M}^m\hat{N}^n\left|0\right\rangle$も同時固有状態であることが示される．これらについては

$$\begin{cases}\hat{H}_{B=0}\hat{M}^m\hat{N}^n\left|0\right\rangle & = (m+n+1)\hbar\omega\hat{M}^m\hat{N}^n\left|0\right\rangle \\ \hat{L}\hat{M}^m\hat{N}^n\left|0\right\rangle & = \hbar(m-n)\hat{M}^m\hat{N}^n\left|0\right\rangle \end{cases} \tag{1.1.24}$$

が成立している[*1].

(5) 代入して展開すれば

$$\begin{aligned}H_B &= \frac{1}{2m}\left\{(p_x - qA_x)^2 + (p_y - qA_y)^2\right\} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2) \\ &= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \left(\frac{m\omega^2}{2} + \frac{q^2B^2}{8m}\right)(x^2+y^2) - \frac{qB}{2m}L \end{aligned} \tag{1.1.25}$$

である．

(6) 角振動数が

$$\omega \to \omega\sqrt{1+\frac{q^2B^2}{4m\omega^2}} =: \omega' \tag{1.1.26}$$

と変化した場合を考え，それに対応して，生成消滅演算子を$a, a^\dagger \to a', a'^\dagger$と変化させると[*2],

$$H_B = \hbar\omega'\left(a'^\dagger_x a'_x + a'^\dagger_y a'_y + 1\right) - \frac{qB}{2m}L \tag{1.1.27}$$

となる．よって，(4)より，そのエネルギー固有値は

$$\hbar\omega\sqrt{1+\frac{q^2B^2}{4m\omega^2}}(m+n+1) - \frac{\hbar qB}{2m}(m-n) \quad (m, n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1.1.28}$$

である．

[*1] ヒントを陽に用いなかったが，「交換関係を使え」というメッセージだと読み取った．だから，この解答で問題ないように思う．
[*2] ここでは，演算子であることが明らかな場合は，ハット^は省略する．

(7) 縮退度がDのとき，(1.1.28)において$m+n=D-1$である．このとき，(m,n)は

$$(D-1,0),(D-2,1),\cdots,(1,D-2),(0,D-1) \tag{1.1.29}$$

を取りうる．このうち，下からn個足し上げることに注意すれば，$m-n$は

$$\sum(m-n)=D-1+(D-2-1)+\cdots+(D-k-(k-1))=nD-n^2 \tag{1.1.30}$$

である．したがって，取りうるエネルギーの和は

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\hbar\omega\sqrt{1+\frac{q^2B^2}{4m\omega^2}}D-\frac{\hbar qB}{2m}(D-2k+1)\right]=n\hbar\omega\sqrt{1+\frac{q^2B^2}{4m\omega^2}}D-\frac{n(n-D)\hbar qB}{2m} \tag{1.1.31}$$

である．

(8)(a) $n=D$のとき

エネルギーEは

$$E=\hbar\omega\sqrt{1+\frac{q^2B^2}{4m\omega^2}}D^2 \tag{1.1.32}$$

なので，$B\sim 0$でのふるまいは

$$E\sim\hbar\omega\left\{1+\frac{q^2B^2}{8m\omega^2}\right\}D^2 \tag{1.1.33}$$

である．

(b) $0<n<D$のとき

エネルギーEは

$$E=n\hbar\omega\sqrt{1+\frac{q^2B^2}{4m\omega^2}}D-\frac{n(n-D)\hbar qB}{2m} \tag{1.1.34}$$

なので，$B\sim 0$でのふるまいは

$$E\sim n\hbar\omega\left\{1+\frac{q^2B^2}{8m\omega^2}\right\}D-\frac{n(n-D)\hbar qB}{2m} \tag{1.1.35}$$

である．

これらの結果をまとめれば，$B\sim 0$でのエネルギーのふるまいは図1.1のようになる．$0<n<D$では，頂点の位置が正の方向にずれる．

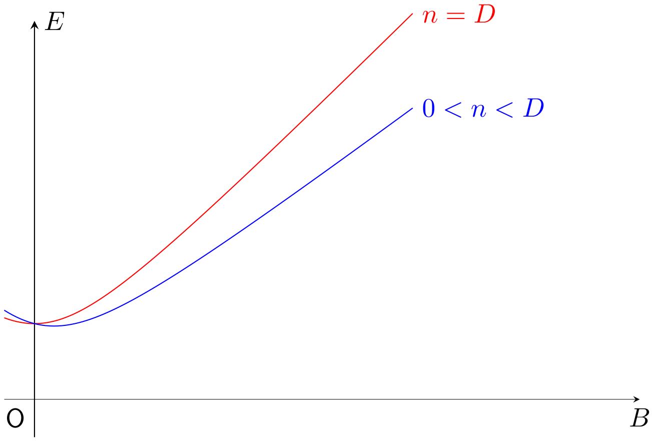

図1.1　エネルギーの磁場依存性

I-2A：電磁気学

(1) 点$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$のポテンシャルは

$$\phi_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}} \tag{1.2A.1}$$

であり，$x=y=0$では

$$\phi_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{|z-d/2|}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{|z+d/2|} \tag{1.2A.2}$$

である．これを図示すると，図1.2のようになる．

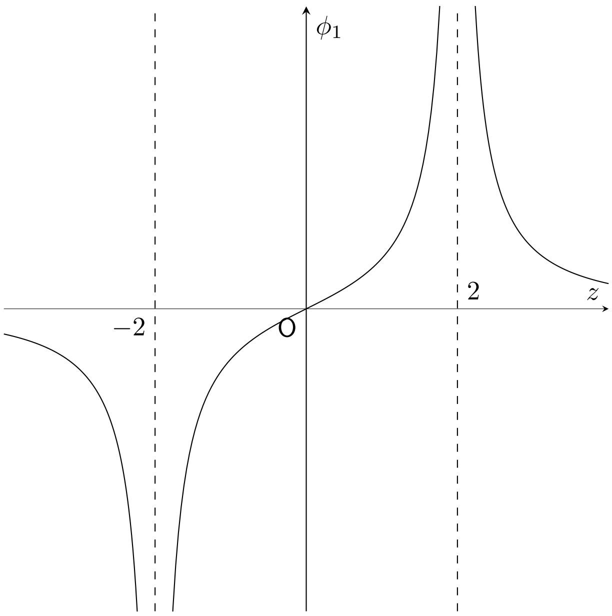

図1.2　ポテンシャル$\phi(z)$

(2) (1.2A.1)において

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z\mp d/2)^2}}&\sim\left(x^2+y^2+z^2\mp zd\right)^{-1/2}\\&\sim\frac{1}{r}\left(1\pm\frac{zd}{2r^2}\right)\end{aligned} \tag{1.2A.3}$$

なので，

$$\phi_2=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{1.2A.4}$$

である．

(3) ϕ_2を書き下すと

$$\phi_2=\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{1.2A.5}$$

なので

$$\boldsymbol{E}=\frac{3qd}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{xz}{r^5}\boldsymbol{e}_x+\frac{3qd}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{yz}{r^5}\boldsymbol{e}_y-\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{1.2A.6}$$

であり，これをまとめると

$$\boldsymbol{E} = \frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\boldsymbol{p}}{r^3} \tag{1.2A.7}$$

である．

(4) ポテンシャルϕ_3は

$$\phi_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}} - \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} \tag{1.2A.8}$$

なので

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+(z\mp d)^2)^{-1/2} &= \frac{1}{r}\left(1\mp\left(\frac{2zd\mp d^2}{r^2}\right)\right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r}\left(1\mp\left(2\cos\theta\frac{d}{r}\mp\frac{d^2}{r^2}\right)\right)^{-1/2} \\ &\sim \frac{1}{r}\left[1\pm\frac{1}{2}\left(2\cos\theta\frac{d}{r}\mp\frac{d^2}{r^2}\right)\mp\frac{3}{8}\left(2\cos\theta\frac{d}{r}+\frac{d^2}{r^2}\right)^2\right] \\ &\sim \frac{1}{r}\left[1\pm\cos\theta\frac{d}{r}+\frac{3\cos^2\theta-1}{2}\cdot\frac{d^2}{r^2}\right]\end{aligned} \tag{1.2A.9}$$

と近似できる．これを代入すれば，

$$\phi_3 = \frac{(3\cos^2\theta-1)qd^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{1.2A.10}$$

である．

(5) ∇は

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta \tag{1.2A.11}$$

なので[*3]，

$$\begin{cases} E_r &= \dfrac{3(3\cos^2\theta-1)qd^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4} \\ E_\theta &= \dfrac{3qd^2\sin 2\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\end{cases} \tag{1.2A.12}$$

である．

(6) ポテンシャルϕ_4は

$$\phi_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}} \tag{1.2A.13}$$

である．近似(1.2A.9)を用いれば

$$\phi_4 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{(3\cos^2\theta-1)qd^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r} + \phi_3 \tag{1.2A.14}$$

となっている．したがって，これは，電気四重極子にさらに$+2q$の電荷が加わった結果になっている．

[*3] 次元を考えれば，この関係はすぐ出てくるような気がする．そういった意味で，(1.2A.11)は暗記かもしれない．なお，φの依存性も考慮すれば

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

である．

I-2B：物理数学

(1) xで積分すれば

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi(y) + C_1 \tag{1.2B.1}$$

と書ける．したがって，これをさらにyで積分すると

$$f(x,y) = C\psi'(x) + \int^y \mathrm{d}y'\varphi(y') + \text{const.} \tag{1.2B.2}$$

である．したがって，この形は

$$f = \psi(x) + \phi(y) \tag{1.2B.3}$$

と書き直せる．

(2) 変数変換をすれば

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right) \ , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \tag{1.2B.4}$$

となるので，これを代入すれば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \tag{1.2B.5}$$

となる．

(3) (1)の結果を用いれば

$$u(\xi,\eta) = \psi(\xi) + \phi(\eta) \tag{1.2B.6}$$

である．

(4) 初期条件は

$$\begin{cases} \psi(x) + \phi(x) & = e^{-x^2} \\ \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} - \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} & = 0 \end{cases} \tag{1.2B.7}$$

である．

(5) (1.2B.7)の第1式を第2式に代入して整理すれば

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = -xe^{-x^2} \tag{1.2B.8}$$

なので，もとめる一般解は

$$\psi(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2} + C_1 \tag{1.2B.9}$$

である．

(6) (1.2B.7)の第1式より

$$\phi(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2} - C_1 \tag{1.2B.10}$$

である．よって

$$u(x,t) = \frac{1}{2}e^{-(x+ct)^2} + \frac{1}{2}e^{-(x-ct)^2} \tag{1.2B.11}$$

である．

(7) 図1.3のとおりである．

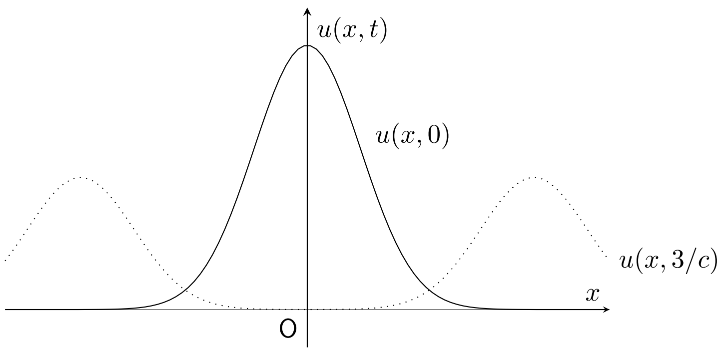

図1.3　$u(x,t)$の様子

I-3A：力学

(1) (A)を繰り返し用いれば

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right) + \boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)$$
$$= \frac{\mathrm{d}'^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} + 2\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{1.3A.1}$$

である．第2項がコリオリ力であり，第3項が遠心力に相当する．

(2) (1.3A.1)を用いれば

$$m\left(\frac{\mathrm{d}'^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} + 2\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\right) = q\left(\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)\times\boldsymbol{B} \tag{1.3A.2}$$

である．

(3) (1.3A.2)を展開すると

$$m\frac{\mathrm{d}'^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} + \underline{2m\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})} = \underline{q\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B} + q\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B}} \tag{1.3A.3}$$

である．下線部の項が一致するようにωを選べばよく，それは

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{q}{2m}\boldsymbol{B} \tag{1.3A.4}$$

である．

I-3B：熱力学

(1) ギブスの関係式より

$$dU = TdS - pdV \tag{1.3B.1}$$

であり，これを用いれば

$$dF = dU - dTS - TdS = -pdV - SdT \tag{1.3B.2}$$

である．

(2) ギブスの関係式(1.3B.1)より，Tを一定にすれば

$$\frac{\partial U}{\partial V} = T\frac{\partial S}{\partial V} - p \tag{1.3B.3}$$

である．ここで

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial p}{\partial T} \tag{1.3B.4}$$

なので

$$\frac{\partial U}{\partial V} = T\frac{\partial p}{\partial T} - p \tag{1.3B.5}$$

である．

(3) (1.3B.5)に$p = \tilde{u}/3$を代入すれば

$$4\tilde{u} = T\frac{\partial \tilde{u}}{\partial T} \tag{1.3B.6}$$

なので，積分定数をAとすれば

$$\tilde{u} = AT^4 \tag{1.3B.7}$$

となるので，Tの4乗に比例する．

I-3C：物理数学

(1) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$, rotについて

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\varepsilon^{ijk}A^iB^j\boldsymbol{e}_k\ ,\quad \mathrm{rot}\boldsymbol{C}=\varepsilon^{ijk}\partial_iC^j\boldsymbol{e}_k \tag{1.3C.1}$$

であることに注意する．すると(A)は

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=\varepsilon^{ijk}\partial_i(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})^j\boldsymbol{e}_k\\&=\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{mnj}\partial_i(A^mB^n)\boldsymbol{e}_k\\&=(\delta^{in}\delta^{km}-\delta^{im}\delta^{kn})(\partial_iA^m)B^n\boldsymbol{e}_k+(\delta^{in}\delta^{km}-\delta^{im}\delta^{kn})A^m(\partial_iB^n)\boldsymbol{e}_k\\&=\left(\partial_iA^k\right)B^i\boldsymbol{e}_k-\left(\partial_iA^i\right)B^k\boldsymbol{e}_k+A^k\left(\partial_iB^i\right)\boldsymbol{e}_k-A^i\left(\partial_iB^k\right)\boldsymbol{e}_k\\&=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}+(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\\&=\boldsymbol{A}(\mathrm{div}\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\mathrm{div}\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\end{aligned} \tag{1.3C.2}$$

である．同様に，(B)は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{A}&=\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmj}A^i\partial_lA^m\boldsymbol{e}_k\\&=-A^i\partial_iA^k\boldsymbol{e}_k+A^i\partial_kA^i\boldsymbol{k}\\&=-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}\mathrm{grad}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\end{aligned} \tag{1.3C.3}$$

となっている．

(2) (1)と同様にして

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=\varepsilon^{jki}\partial_i(A^jB^k)\\&=\varepsilon^{jki}(\partial_iA^j)B^k+\varepsilon^{jki}A^j(\partial_iB^k)\\&=(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}-(\mathrm{rot}\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}\end{aligned} \tag{1.3C.4}$$

である．

(3) この連立微分方程式は

$$\begin{pmatrix}y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&9\\-20&-14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} \tag{1.3C.5}$$

である．ここで，係数行列Aの固有値は$\lambda=-2,1$であり，対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} \tag{1.3C.6}$$

である．したがって，変換行列Pは

$$P=(\boldsymbol{v}_1\ ,\ \boldsymbol{v}_2)=\begin{pmatrix}3&3\\-5&-4\end{pmatrix} \tag{1.3C.7}$$

であり，

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-4/3&-1\\5/3&1\end{pmatrix}\ ,\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{1.3C.8}$$

である．(1.3C.5)に左からP^{-1}をかけると

$$P^{-1}X'=P^{-1}AP\cdot P^{-1}X \tag{1.3C.9}$$

となる．ただし，$X=(y,z)$とした．ここで，$Y=(\xi(x),\eta(x))=P^{-1}X$とすれば，微分方程式は

$$\begin{pmatrix}\xi' \\ \eta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta'\end{pmatrix} \tag{1.3C.10}$$

であり，これを解くと

$$\xi(x)=C_1e^{-2x}\ ,\quad \eta(x)=C_2e^{x} \tag{1.3C.11}$$

である。$X=PY$なので，これを計算すれば

$$y(x)=3C_1e^{-2x}+3C_2e^{x}\ ,\quad z(x)=-5C_1e^{-2x}-4C_2e^{-x} \tag{1.3C.12}$$

ともとまる．

(4) べき級数展開すれば

$$\int_0^1\frac{\log(1-x)}{x}\mathrm{d}x=-\int_0^1\left\{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\cdots\right\}\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6} \tag{1.3C.13}$$

である．ただし

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \tag{1.3C.14}$$

を用いた[*4]．

[*4] 困ったときは，幾何級数の関係式

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$$

を積分して思い出せばよい．

I-3D：量子力学

(1) 規格化を考慮すれば

$$|1,1\rangle = |1/2,+1/2\rangle \otimes |1/2.+1/2\rangle \tag{1.3D.1}$$

である．

(2) 両辺に$\hat{S}^- = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$を作用させれば

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1/2,+1/2\rangle \otimes |1/2,-1/2\rangle + |1/2,-1/2\rangle \otimes |1/2,+1/2\rangle\right\} \tag{1.3D.2}$$

である．

(3) 直交する状態を考えれば

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1/2,+1/2\rangle \otimes |1/2,-1/2\rangle - |1/2,-1/2\rangle \otimes |1/2,+1/2\rangle\right\} \tag{1.3D.3}$$

である．

(4) スピンが$3/2$のときは

$$|3/2,3/2\rangle = |1,1\rangle \otimes |1/2,1/2\rangle \tag{1.3D.4}$$

である．これに$\hat{S}^- = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$を作用させれば

$$|3/2,1/2\rangle = \frac{\sqrt{6}}{3}|1,0\rangle \otimes |1/2,+1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1,1\rangle \otimes |1/2,-1/2\rangle \tag{1.3D.5}$$

となる．

2　パート2

II-1：統計力学

(1) $W_b = 6.$

(2) $W_f = 3.$

(3)

$$\begin{cases} \text{ボーズ粒子} & : \ G(N) = G_0 \\ \text{フェルミ粒子} & : \ G(N) = G_0 - (N-1) \end{cases} \tag{2.1.1}$$

(4) $W(N)$は

$$W(N) = \frac{[G_0 + (1-\alpha)(N-1)]!}{N![G_0 - \alpha(N-1) - 1]!} \tag{2.1.2}$$

である．したがって，これの$\log$をとって，スターリングの公式を使えば

$$\begin{aligned} \log W(N) &= \log[G_0 + (1-\alpha)(N-1)]! - \log N! - \log[G_0 - \alpha(N-1) - 1]! \\ &= [G_0 + (1-\alpha)(N-1)] \log \frac{G_0 + (1-\alpha)(N-1)}{e} \\ &\quad - N \log \frac{N}{e} - [G_0 - \alpha(N-1) - 1] \log \frac{G_0 - \alpha(N-1) - 1}{e} \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

である．$G_0 \gg 1$に注意して[*5]両辺をG_0で割って，同じ係数で整理すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_0} \log W(N) &= [1 + (1-\alpha)n] \log \frac{G_0 + (1-\alpha)(N-1)}{e} \\ &\quad - n \log \frac{N}{e} - [1 - \alpha n] \log \frac{G_0 - \alpha(N-1) - 1}{e} \\ &= n \log \frac{G_0 + (1-\alpha)(N-1)}{N} + (1 - \alpha n) \log \frac{G_0 + (1-\alpha)(N-1)}{G_0 - \alpha(N-1) - 1} \\ &= n \log \frac{1 + (1-\alpha)n}{n} + (1 - \alpha n) \log \frac{1 + (1-\alpha)n}{1 - \alpha n} \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

となる[*6]．よって，エントロピーは，ボルツマンの関係式から

$$\frac{S}{G_0} = k \left\{ n \log \frac{1 + (1-\alpha)n}{n} + (1 - \alpha n) \log \frac{1 + (1-\alpha)n}{1 - \alpha n} \right\} \tag{2.1.5}$$

である[*7]．

(5) $W(N) = e^{\log W(N)}$なので

$$W(N) \exp\left[-\frac{(\varepsilon - \mu)N}{kT} \right] = \exp\left[-\frac{1}{kT} \left\{ -kT \log W(N) + (\varepsilon - \mu)N \right\} \right] \tag{2.1.6}$$

である．よって

$$J = -kT \log W(N) + (\varepsilon - \mu)N \tag{2.1.7}$$

---

*5 $1/G_0$などは微小量になるので，0とみなします．

*6 最後の等号では，$\log$の中身を整理しました．

*7 これは近似の仕方に苦労する問題でした．問題文のスターリングの公式が$\log N! \sim N \log(N/e)$と少し不思議な形で与えられていたので，その意図を考えたら私はうまくいきました．

である．(2.1.4)より

$$\frac{J}{G_0} = -kT\left\{n\log\frac{1+(1-\alpha)n}{n} + (1-\alpha n)\log\frac{1+(1-\alpha)n}{1-\alpha n}\right\} + (\varepsilon-\mu)n \tag{2.1.8}$$

である．

(6) (2.1.8)をnで微分してみると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{G_0}\frac{\partial J}{\partial n} \\
&= -kT\left\{\log\frac{1+(1-\alpha)n}{n} + n\cdot\frac{n}{1+(1-\alpha)n}\cdot\left(\frac{1}{n^2}\right)\right. \\
&\quad\left. -\alpha\log\frac{1+(1-\alpha)n}{1-\alpha n} + (1-\alpha n)\cdot\frac{1-\alpha n}{1+(1-\alpha)n}\cdot\frac{1}{(1-\alpha n)^2}\right\} + (\varepsilon-\mu) \\
&= -kT\log\frac{(1-\alpha n)^\alpha\{1+(1-\alpha)n\}^{1-\alpha}}{n} + (\varepsilon-\mu)
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

である．よって，$\partial J/\partial n = 0$の解が$n = \langle n\rangle$なので

$$e^{(\varepsilon-\mu)/kT} = \frac{(1-\alpha\langle n\rangle)^\alpha\{1+(1-\alpha)\langle n\rangle\}^{1-\alpha}}{\langle n\rangle} \tag{2.1.10}$$

である．ここで

$$\langle n\rangle = \frac{1}{w+\alpha} \tag{2.1.11}$$

とおけば

$$e^{(\varepsilon-\mu)/kT} = (w+\alpha-1)^\alpha(w+1)^{1-\alpha} \tag{2.1.12}$$

である．よって

$$f(w) = (w+\alpha-1)^\alpha(w+1)^{1-\alpha} \tag{2.1.13}$$

である．

(7) $\alpha = 0$のときは，$w = 1/\langle n\rangle$であり，(2.1.12)は

$$e^{(\varepsilon-\mu)/kT} = \frac{1}{\langle n\rangle} + 1 \tag{2.1.14}$$

より

$$\langle n\rangle = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1} \tag{2.1.15}$$

であり，これはボース分布である．$\alpha = 1$なら，$w = 1/\langle n\rangle - 1$なので

$$e^{(\varepsilon-\mu)/kT} = \frac{1}{\langle n\rangle} - 1 \tag{2.1.16}$$

より

$$\langle n\rangle = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} + 1} \tag{2.1.17}$$

であり，これはフェルミ分布である[*8]．$\alpha = 1/2$のときは

$$e^{(\varepsilon-\mu)/kT} = \sqrt{\left(w-\frac{1}{2}\right)(w+1)} \tag{2.1.18}$$

[*8] ここらへんは感覚と合致していますね．

なので

$$\langle n \rangle = \frac{-1+\sqrt{9+16e^{2(\varepsilon-\mu)/kT}}}{4} \tag{2.1.19}$$

である．

(8) $\varepsilon < \mu$より$0 < e^{(\varepsilon-\mu)/kT} \leq 1$である．(2.1.12)の関係があるので，ひとまず$f(w)$のグラフを考えてみよう．$f'(w)$を計算すると

$$f'(w) = \left(\frac{w+\alpha-1}{w+1}\right)^{\alpha}\left\{\alpha\frac{w+1}{w+\alpha-1}+1-\alpha\right\} \tag{2.1.20}$$

となるので，$f'(w)=0$の解をw_0とすれば，増減表は$\alpha \neq 1$では

w	$-\alpha$	$\cdots$	w_0	$\cdots$	$1-\alpha$
$f'(w)$		$+$	0	$-$	0
$f(w)$	$(2-\alpha)^{1-\alpha}$	$\nearrow$	$f(w_0)$	$\searrow$	0

である．ここで

$$w_0 = (\alpha-1)^2 - \alpha \geq -\alpha \tag{2.1.21}$$

なので，

$$f(w_0) = \alpha^{\alpha}(2-\alpha)(1-\alpha)^{1-\alpha} > 1 \tag{2.1.22}$$

である．なお，$-\alpha < w \leq 1-\alpha$としたのは

$$0 \leq \langle n \rangle \leq 1 \tag{2.1.23}$$

を解いたから．いずれにせよ，wが左でminなので$\langle n \rangle_{\max} = 1$である[*9]．

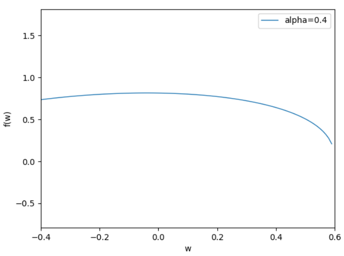

図2.1　$\alpha = 0.4$

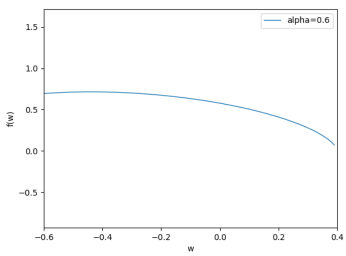

図2.2　$\alpha = 0.6$

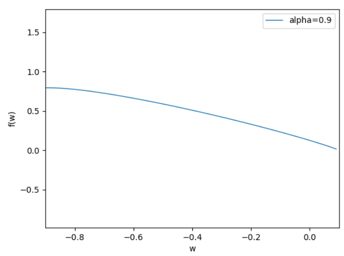

図2.3　$\alpha = 0.9$

[*9] 実際，設問(7)の結果もそうなってるので，あっけないですがこんな感じでいいんじゃないかと思います．

II-2A：量子力学

(1) シュレーディンガー方程式を$-\varepsilon, +\varepsilon$で積分すると

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\varphi'(\varepsilon)-\varphi'(-\varepsilon)\right]-\lambda\varphi(0)=E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi(x)\mathrm{d}x \tag{2.2A.1}$$

である．これの極限$\varepsilon\to 0$をとれば

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\varphi'(\varepsilon)-\varepsilon'(-\varepsilon)\right]=-\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\varphi(0) \tag{2.2A.2}$$

である．

(2) シュレディンガー方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\delta(x)\varphi(x)=\kappa^2\varphi(x) \tag{2.2A.3}$$

なので，解は

$$\varphi(x)=\begin{cases}Ae^{+\kappa x}+Be^{-\kappa x} & (x>0)\\ Ce^{+\kappa x}+De^{-\kappa x} & (x<0)\end{cases} \tag{2.2A.4}$$

である．このとき，無限遠方で波動関数が0になっていることに気をつけ，係数を1とすれば

$$\varphi(x)=\begin{cases}e^{-\kappa x} & (x>0)\\ e^{+\kappa x} & (x<0)\end{cases} \tag{2.2A.5}$$

である．

(3) 式(B)に素直に代入すれば

$$\kappa=\frac{m\lambda}{\hbar^2} \tag{2.2A.6}$$

である．

(4) 代入して

$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m} \tag{2.2A.7}$$

である．

(5) 連続性は

$$1+A=B \tag{2.2A.8}$$

で，傾きの関係(B)は

$$ik(1-A-B)=-\frac{2m\lambda}{\hbar^2}B \tag{2.2A.9}$$

なので，これらを連立して解けば

$$A=\frac{m\lambda}{i\hbar^2k-m\lambda}\ ,\quad B=\frac{i\hbar^2k}{i\hbar^2k-m\lambda} \tag{2.2A.10}$$

である．

(6) 計算すれば

$$|A|^2=\frac{m^2\lambda^2}{\hbar^4k^2+m^2\lambda^2}\ ,\quad |B|^2=\frac{\hbar^4k^2}{\hbar^4k^2+m^2\lambda^2} \tag{2.2A.11}$$

である．

II-2C：力学

(1) それぞれ

$$\begin{cases} T &= \dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 \\ U &= \dfrac{1}{2}mgl\theta_1^2 + \dfrac{1}{2}mgl\theta_2^2 + \dfrac{1}{2}k(\theta_1-\theta_2)^2 \end{cases} \tag{2.2C.1}$$

である．

(2) θ_1, θ_2におけるオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1 + (mgl+k)\theta_1 - k\theta_2 &= 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_2 + k\theta_1 - (mgl+k)\theta_2 &= 0 \end{cases} \tag{2.2C.2}$$

なので，係数行列は

$$\begin{pmatrix} -g/l - k/ml^2 & k/ml^2 \\ k/ml^2 & -g/l-k/ml^2 \end{pmatrix} \tag{2.2C.3}$$

である．

(3) 微分方程式に，解を代入すれば

$$-\omega^2\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g/l - k/ml^2 & k/ml^2 \\ k/ml^2 & -g/l-k/ml^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} \tag{2.2C.4}$$

である．よって，$-\omega^2$はこの係数行列の固有値になっているため，固有方程式を解けばよい．固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \lambda + g/l + k/ml^2 & -k/ml^2 \\ -k/ml^2 & \lambda + g/l + k/ml^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.2C.5}$$

なので，これを解けば

$$\lambda = -\frac{g}{l}\ , \quad -\frac{g}{l} - \frac{2k}{ml^2} \tag{2.2C.6}$$

であり，

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l}}\ , \quad \omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{ml^2}} \tag{2.2C.7}$$

である．

(4) ω_-のとき

固有ベクトルは$(1,1)$なので

$$Q_1 = Q_2\ , \quad \delta_1 = \delta_2 \tag{2.2C.8}$$

である．

ω_+のとき

固有ベクトルは$(1,-1)$なので

$$Q_1 = Q_2\ , \quad \delta_1 - \delta_2 = \pi \tag{2.2C.9}$$

である．

この結果を踏まえれば，任意定数に位相をいれて

$$\begin{pmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\sin\omega_- t + B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\sin\omega_+ t \tag{2.2C.10}$$

である．

(5) $t=0$で

$$\dot{\theta}_1(0) = A\omega_- + B\omega_+ = \Omega_0 \tag{2.2C.11}$$
$$\dot{\theta}_2(0) = A\omega_- - B\omega_+ = 0 \tag{2.2C.12}$$

なので

$$A = \frac{\Omega_0}{2\omega_-}\ ,\quad B = \frac{\Omega_0}{2\omega_+} \tag{2.2C.13}$$

であり，

$$\theta_1(t) = \frac{\Omega_0}{2\omega_-}\sin\omega_- t + \frac{\Omega_0}{2\omega_+}\sin\omega_+ t \tag{2.2C.14}$$
$$\theta_2(t) = \frac{\Omega_0}{2\omega_-}\sin\omega_- t - \frac{\Omega_0}{2\omega_+}\sin\omega_+ t \tag{2.2C.15}$$

である．また，$\omega_+ \sim \omega_-$とすると，θ_2はそれぞれの項が打ち消しあって振動しなくなり，逆にθ_1の振動がそろい振幅が大きくなる．