アノマリーと指数定理の関係

宮根 一樹

最終更新：2024 年 6 月 14 日

目次

1 はじめに

これは、Wathematica でアノマリーと Atiyah-Singer の指数定理について紹介したときの参考資料です。

現在、高エネルギーの物質の運動を記述する枠組みとして、**場の量子論**というものが広く知られています。読んで字のごとく、この理論は場の理論を量子化するわけですが、このとき、量子化する前に存在していた対称性が、量子論では成立しないような状況というものが色々と調べられています。これらのものを**アノマリー**といいます。一般に、「アノマリーが存在していいのかどうか」については議論の余地があります。例えば、ゲージ対称性がアノマリーで破れてしまう場合には、そもそも知られている量子化の無矛盾性を破ってしまうことが知られているので、アノマリーが相殺されるような理論が要求されます。一方で、グローバル対称性の破れそのものは、量子論の無矛盾性には何も影響を及ぼさないことが多いです (少なくとも「グローバル対称性のアノマリーが相殺されるように」といった記述を見たことがありません)。また、アノマリーは摂動論から求められるダイナミクス自体にも影響を与えるため、現象論的にも重要になります。こういった事情から、アノマリーというのは場の量子論において色々と関心を集めてきました。

このアノマリーというものは、Adler[1] と Bell-Jakiw[2] が、π 中間子の光子への崩壊過程の散乱振幅を分析していたときに発見されたものです[*1]。このときは、ある散乱過程のファインマンダイアグラムを計算することでアノマリーを計算して見せたわけですが、かなり発見的な側面がありアノマリーに対しては十分な理解を与えてくれてはいませんでした。ところで、対称性と言えば、ラグランジアンの不変性を意味しているわけですから、その観点からアノマリーを計算しようという考え方があります。その定式化は、1979 年に日本の物理学者が確立しており、現代では「藤川の方法」と言われています [3]。これは、理論の分配関数に現れる経路積分の測度のヤコビアンとしてアノマリーが解釈できるというものでした。場の量子論は、経路積分と分配関数からすべての量を計算することができるため、この藤川先生の仕事により、色々な対称性のアノマリー

[*1] π 中間子の崩壊過程の計算はアノマリーが物理的に重要な役割を果たす例です。ラグランジアンの対称性から、この崩壊過程の散乱振幅は消えることが予想できるのですが、それでは実際の実験結果とは矛盾してしまいます。

が計算できるようになったわけです。

さて、長々と物理的な側面を記述してきたわけですが、この藤川の方法と指数定理には大きな関係があります。カイラルなゲージ理論では、ディラック作用素の指数がアノマリーに対応することが藤川の方法で判明します。そこで、このノートでは、

1. 指数定理についての数学の知識を確認
2. 藤川の方法を用いたカイラルアノマリーの計算

といった流れでお話を進めていきたいと思います。参考文献としては、藤川先生が書いた本 [4] と数学については [5] です。また、[6, 7] も眺めました。

2 ディラック作用素と指数定理

ここでは、(私のお勉強も兼ねて) 指数定理の数学的なセットアップについて確認したいと思います。申し訳ないのですが、ノーテーションの関係で、γ 行列の関係式の符号などが間違っている可能性があります。基本的な考え方はあっているはずですし、係数が間違っていてもせいぜい -1 か i が全体にかかるだけだと思いますので、実際に勉強するときは注意してください。

2.1 ディラック作用素の定義

参考文献

[1] S. L. Adler, *Axial-Vector Vertex in Spinor Electrodynamics,* Phys. Rev. **177** (1969) 2426–2438.

[2] J. S. Bell and R. Jackiw, *A PCAC puzzle: $\pi_0 \to \gamma\gamma$ in the σ-model,* Nuov Cim A **60** (1969) 47–61.

[3] K. Fujikawa, *Path-Integral Measure for Gauge-Invariant Fermion Theories,* Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 1195–1198.

[4] 藤川和男, **経路積分と対称性の量子的破れ**. 岩波書店, 2001.

[5] M. Nakahara, *Geometry, Topology, and Physics*, Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics Publishing, Bristol ; Philadelphia, 2nd ed., 2003.

[6] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Pub. Co, Reading, Mass, 1995.

[7] V. P. Nair, *Quantum Field Theory: A Modern Perspective*. Springer, New York, NY, 2005.