２０２１年９月・２０２２年４月入学試験

大学院先進理工学研究科修士課程

物理学及応用物理学専攻

問題表紙

◎問題用紙が＿7＿ページあることを試験開始直後に確認しなさい。
◎解答用紙が＿8＿枚綴りが＿1＿組あることを試験開始直後に確認しなさい。

注意事項

【選択方法】

○　下記の６題の中から任意の４題を選択して解答すること。

科目	問題番号
数学一般	1　2
力学および電磁気学	3　4
量子力学および熱・統計力学	5　6

【解答方法】

(1)　解答は別紙の解答用紙の表の面に記入すること。裏面は使用しないこと。
(2)　受験番号・氏名を解答用紙８枚すべてに記入すること。
(3)　解答用紙には，選択した問題番号と科目名を明記すること。1問の解答が解答用紙２枚以上にわたる時には，それぞれの解答用紙に問題番号と科目名を書き，かつ何枚目かがわかるように解答欄に明記すること。
(4)　1枚の解答用紙に２問以上を解答しないこと。
(5)　4題を超えては解答しないこと。
(6)　使わなかった解答用紙には，解答欄に大きく×印を書くこと。使わなかった解答用紙も含めて，すべての解答用紙（8枚）を提出すること。

２０２１年９月・２０２２年４月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：数学一般

問題番号 1

実数 α, θ に対し，次の積分を考える：

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad I(\theta) = \int_0^\infty \frac{x^{-\theta}}{1+x} dx$$

(1) $\Gamma(\alpha)$ が絶対収束 (absolutely convergent) するような α の範囲を決定せよ。

(2) $I(\theta)$ が絶対収束 (absolutely convergent) するような θ の範囲を決定せよ。

以下，Γ および I は，それぞれ (1) および (2) の範囲で考える。

(3) 複素積分におけるコーシーの積分定理 (Cauchy's integral theorem) を用いて，積分値 $I(\theta)$ を求めよ。その際，用いた積分路 (integral path) と剰余項の評価 (estimate of remainder terms) を具体的に記せ。

(4) 任意の $t > 0$ に対し，次の等式を示せ。

$$\Gamma(1-\theta) = t^{1-\theta} \int_0^\infty e^{-st} s^{-\theta} ds$$

(5) 次の等式を示せ。

$$\Gamma(\theta)\Gamma(1-\theta) = \frac{\pi}{\sin \theta\pi}$$

２０２１年９月・２０２２年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：　数学一般

問題番号　2

変数 (variable) t の関数 (function) である 3 次元ベクトル (3-dimensional vector) $\boldsymbol{v}(t)$ が次の微分方程式 (differential equation)

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t) = \omega \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}(t)$$

を満たしている。ここで，ω と $\boldsymbol{n}$ はともに t に依らない定数 (constant) 及び単位ベクトル (unit vector) である。

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ の $\boldsymbol{n}$ 方向成分 (component along $\boldsymbol{n}$-direction) が保存量 (conserved quantity)，すなわち t に依らない量 (t-independent quantity) であることを示せ。

(2) 初期条件 (initial condition) $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0$ のもとで上の微分方程式を解き，解 (solution) $\boldsymbol{v}(t)$ をベクトル $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_0$ と ω のみを用いて t の関数として表せ。

(3) ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ の大きさ (magnitude) $|\boldsymbol{v}(t)|$ を求めよ。

(4) ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ の 3 成分を，初期ベクトル $\boldsymbol{v}_0$ に 3 行 3 列の正方行列 (3×3 square matrix) $R(t)$ を作用 (apply) させて

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} = R(t)\boldsymbol{v}_0 = R(t)\begin{pmatrix} v_{01} \\ v_{02} \\ v_{03} \end{pmatrix}$$

と書き，更に $R(t)$ を 3 行 3 列の定数行列 (constant matrix) G と関数 $\varphi(t)$ を用いて

$$R(t) = e^{\varphi(t)G}$$

と表す。このとき G が反対称行列 (anti-symmetric matrix) となることを示せ。

(5) 指数関数 (exponential function) $e^{\varphi(t)G}$ を展開 (expand) し，G の多項式 (polynomial) として書き下せ。ただし，

$$\left.\frac{d}{dt}\varphi(t)\right|_{t=0} = \dot{\varphi}(0) = \omega$$

とする。

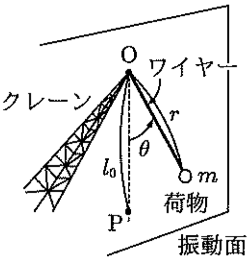
(6) 互いに直交する 3 個の単位ベクトル $\boldsymbol{n}^{(a)}$ $(a = 1, 2, 3)$ (ただし $\boldsymbol{n}^{(1)} \times \boldsymbol{n}^{(2)} = \boldsymbol{n}^{(3)}$ とする) に対応する行列 G を $G^{(a)}$ と表したとき，交換子 (commutator) $[G^{(a)}, G^{(b)}]$ を $G^{(1)}, G^{(2)}, G^{(3)}$ の線形結合 (linear combination) として求めよ。

２０２１年９月・２０２２年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：　力学および電磁気学

問題番号 3



クレーンで釣られた荷物が振り子(pendulum)運動をしているときに，ワイヤーを巻き上げた場合の荷物の運動を考えよう。荷物を質量(mass)mの質点(mass point)とし，ワイヤーの張力(tension)と重力(gravitational force)以外の外力は受けず，同一平面内を振動するとする。このとき荷物の位置は，鉛直下方から測った振れ角(oscillation angle)θと，クレーン先端Oからの距離(distance)rで表される。またワイヤーの太さ(thickness)や質量，伸縮(expansion and contraction)，たわみ(deflection)，ねじれ(torsion)，巻き上げの際の摩擦(friction)は無視できる(negligible)ものとする。重力加速度(gravitational acceleration)をgとして，以下の問に答えよ。

1．まずワイヤーの長さが$l(t) = l_o$で一定で，荷物が単振り子運動する場合を考える。

1) 振れ角θとワイヤーの張力S_oが次の式を満たすことを示せ。ただし，$\dot{} = {}^{d}/_{dt}$，$\omega_o \equiv \sqrt{g/l_o}$である。

$$\ddot{\theta} = -\omega_o{}^2 \sin\theta,\ \ S_o = mg\cos\theta + ml_o\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

2) 以降，近似$\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$，$\sin\theta \simeq \theta$が成り立つ程度に振れ角が十分小さいとする。方程式(1)のθの一般解(general solution)が，任意定数(arbitrary constants)A_o, αとω_oを用いて$\theta(t) = A_o\cos(\omega_o t + \alpha)$と書けることを示せ。

3) 位置エネルギー(potrntial energy)の基準を$r = l_o$，$\theta = 0$ の点Pとする。振り子運動の力学的エネルギー(mechanical energy)E_oが，$E_o = \frac{1}{2}mgl_oA_o{}^2$であることを示せ。

2．次に時刻$t = 0$ における長さがl_oのワイヤーを一定の速度cで巻き上げる場合を考える。このとき時刻$t > 0$ でのワイヤーの長さは$l = l_o - ct$と書ける。ワイヤーの巻き上げの速度は十分遅く，$cT_o < l_o$ $(T_o \equiv 2\pi/\omega_0)$とする。

1) 方程式(2)を導け。必要なら，位置エネルギーの基準を O とし，λをラグランジュの未定乗数(Lagrange multiplier)として拘束条件(constraint)$r = l$を考慮した荷物のラグランジアン(Lagrangian)Lが，$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mg(l_o - r\cos\theta) - \lambda(r - l)$であることを用いてもよい。

$$\ddot{\theta} - \frac{2c}{l}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{2}$$

2) 運動のおおまかな様子を調べるために，式(2)において$l \simeq l_o$と近似する。このときθの一般解が次のように求まることを示し，荷物がどのように運動するか説明せよ。ただしA_o, αは任意定数である。

$$\theta(t) = A(t)\cos(\omega t + \alpha),\ \ A(t) \equiv A_o e^{\left(\frac{c}{l_o}\right)t},\ \ \omega \equiv \sqrt{\omega_o{}^2 - \left(\frac{c}{l_o}\right)^2} \tag{3}$$

3．$A(t)$を実験で測定すると，tに対して指数関数的に増加する(increase exponentially)。この点は(3)と一致するが，実験値の時間変化は式(3)に比べて遅い。そこで正の数(positive constant)$\beta\ (< 1)$を用いて$A(t) = A_o e^{\beta\left(\frac{c}{l_o}\right)t}$と補正(correct)し，ワイヤーを$l_o$から十分短い長さ$\Delta l \equiv ct\ (\ll l_0)$だけ巻き上げたときのエネルギーの変化からこの$\beta$を求めていこう。ただし$l$の変化は十分遅く，$\Delta l$だけ変化する間に振り子は何度も往復するものとする。したがって$cT_o \ll \Delta l \ll l_o$である。

1) ワイヤーの長さがlのときの振り子運動の力学的エネルギー$E(l)$を考える。いまlの変化は振動に比

２０２１年９月・２０２２年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：力学および電磁気学

問題番号 3

べて十分遅いから，荷物は各時刻t'の瞬間ごとには振幅 $A = A_o e^{\beta\left(\frac{c}{l_o}\right)t'}$ の単振り子運動をしていると見なすことができる。$\Delta l/l_o$の１次までの近似で次の式を導け。

$$\Delta E \equiv E(l_o - \Delta l) - E(l_o) = \frac{1}{2} m g l_o {A_o}^2 (2\beta - 1) \frac{\Delta l}{l_o} \tag{4}$$

2)　ワイヤーを$\Delta l\ (> 0)$巻き上げる際に大きさ$S(l)$の張力がした仕事(work)ΔWを，$\Delta l/l_o$の１次までの近似で考えるとき，式(5)を導け。ここで$\overline{S_o}$は式(1)のS_oの一周期平均(average over a period)である。すなわち$\overline{S_o} \equiv \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o} S_o(t)\, dt$。

$$\Delta W \equiv \int_{l_o}^{l_o - \Delta l} S\, dl \simeq \int_0^t S_o(t')\ (-c dt') \simeq \overline{S_o}\, \Delta l = m g \Delta l + \frac{1}{4} m g l_o {A_o}^2 \frac{\Delta l}{l_o} \tag{5}$$

3) 式(5)の右辺の二つの項の意味を考え，ΔEとの比較から$\beta = 3/4$となることを示せ。この補正は実験値と良く一致することが知られている。

２０２１年９月・２０２２年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：　力学および電磁気学

問題番号 4

問題文に出てくる変数（variables）や定数（constants）のみを用いて以下の問に答えよ。ただし，以下で考える座標空間（coordinate space）では誘電率（dielectric constant）はどこでも真空の誘電率（dielectric constant of vacuum）ε_0であるとする。

図1のように，３次元直交座標系（Cartesian coordinates）の原点（origin）に中心（center）を持つ半径 a の球 (sphere) の内部 (inside) に，体積密度 (volume density) ρで一様に (uniformly) 電荷 (electric charges) が分布（distributed）している。このとき，点(x, y, z)における電場（electric field）について考える。

(1) 点(x, y, z)が球の外部（outside）にあるとき，電場の強さ（strength of the electric field）を答えよ。

(2) 点(x, y, z)が球の外部にあるとき，電場ベクトルの x 成分，y 成分，z 成分を答えよ。

(3) 点(x, y, z)が球の内部にあるとき，電場の強さを答えよ。

(4) 点(x, y, z)が球の内部にあるとき，電場ベクトルの x 成分，y 成分，z 成分を答えよ。

図2のように，３次元直交座標系の x 軸上の点$(d, 0, 0)$に中心を持つ半径 b の球の内部に，体積密度ρで一様に電荷が分布している。このとき，点(x, y, z)における電場について考える。

(5) 点(x, y, z)が球の外部にあるとき，電場の強さを答えよ。

(6) 点(x, y, z)が球の外部にあるとき，電場ベクトルの x 成分，y 成分，z 成分を答えよ。

(7) 点(x, y, z)が球の内部にあるとき，電場の強さを答えよ。

(8) 点(x, y, z)が球の内部にあるとき，電場ベクトルの x 成分，y 成分，z 成分を答えよ。

図3のように，３次元直交座標系の原点に中心を持つ半径 a の球の内部から，x 軸上の点$(d, 0, 0)$に中心を持つ半径 b の球をくり抜いた残りの部分（remaining part after hollowing out a sphere with radius b）に，体積密度ρで一様に電荷が分布している。このとき，くり抜いた空洞の内部（inside the cavity）にある点(x, y, z)について考える。

(9) この点における電場ベクトルの x 成分，y 成分，z 成分を答えよ。

(10) この点における電位（electric potential）を答えよ。

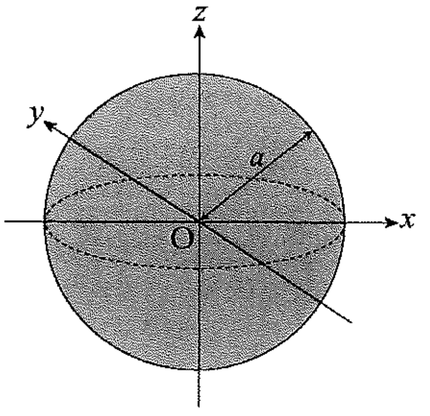


図1

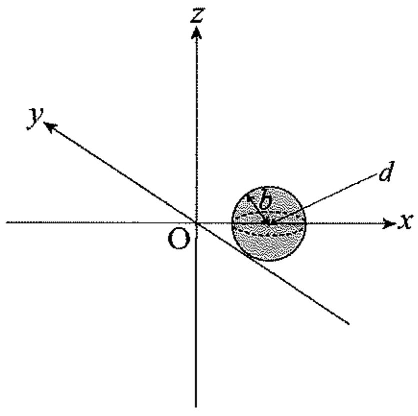


図2

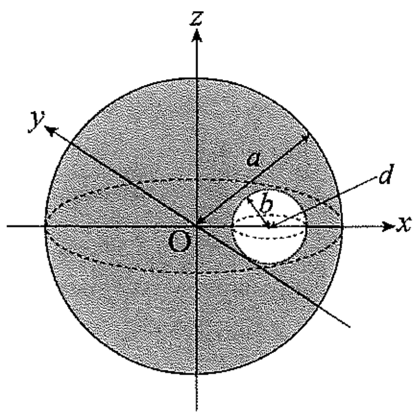


図3

２０２１年９月・２０２２年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：　量子力学および熱・統計力学

問題番号 5

ある量子力学的粒子（quantum mechanical particle）の軌道角運動量演算子(orbital angular momentum operator) $\hat{\boldsymbol{L}}$ を考える。以下ではプランク定数(Planck constant)を2πで割った量を$\hbar$とする。

(1) この粒子の位置座標演算子(position coordinate operator)と運動量演算子(momentum operator)の間の交換関係(commutation relation)を用いて，$[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$, $[\hat{L}_y, \hat{L}_z]$, $[\hat{L}_z, \hat{L}_x]$を求めよ。

次に，一般の角運動量演算子(angular momentum operator) $\hat{\boldsymbol{J}}$ を考える。$\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$, $\hat{J}_z$はエルミート演算子(Hermitian operator)であり，(1) で求めた$\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$の間の交換関係と同じ交換関係を満たす。

(2) $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$と$\hat{J}_z$が同時対角化可能(simultaneously diagonalizable)であることを説明せよ。

$\hat{J}^2$と$\hat{J}_z$の規格化された同時固有ベクトル(normalized simultaneous eigenvector)を$|f,\mu\rangle$とする。ここで

$$\hat{J}^2|f,\mu\rangle = \hbar^2 f|f,\mu\rangle, \qquad \hat{J}_z|f,\mu\rangle = \hbar\mu|f,\mu\rangle \tag{A}$$

とする。

(3) μの取りうる値の範囲(range)はfの値によって制限される(restricted)ことを示せ。

$\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$とし，$\hat{J}_\pm|f,\mu\rangle = C_\pm|f_\pm{}', \mu_\pm{}'\rangle$とする（複合同順）。ここで$C_\pm$は複素数(complex number)である。

(4) $f_\pm{}'$, $\mu_\pm{}'$, $|C_\pm|^2$を求めよ。
(5) μの最大値(maximum)をλとする。fを求めよ。またμの最小値 (minimum) を求めよ。
(6) λの取りうる値を求めよ。

次に，$\lambda = \frac{1}{2}$のスピン(spin)を持つ量子力学的粒子を考える。ここでスピン演算子を$\hat{\boldsymbol{J}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$と書く。以下ではスピン以外の重心運動(center-of-mass motion)の自由度(degree of freedom)は無視する。またスピン状態ベクトル$|f,\mu\rangle$を$|\lambda,\mu\rangle$と表し，$C_\pm$を正の実数(positive real number)と選ぶ。

(7) (4) の結果および(A)式を用いて，$\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$の行列要素 (matrix element) を求めよ。

この量子力学的粒子がx軸(x axis)方向正の向きの一様な静磁場(uniform static magnetic field)の中にある場合を考える。磁場の大きさ(magnitude)をBとする。このとき，この量子力学的粒子と磁場との相互作用ハミルトニアン(interaction Hamiltonian)は$\hat{H} = -\gamma B\hat{J}_x$で与えられる。ここで$\gamma$は正の実定数(positive real constant)である。また時刻$t=0$で粒子のスピン状態ベクトルは$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$であった。

(8) 時刻tでの粒子のスピン状態ベクトルを$|t\rangle = a(t)\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + b(t)\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$と表す。$a(t)$, $b(t)$を求めよ。
(9) 時刻tでの期待値(expectation value) $\langle t|\hat{\sigma}_x|t\rangle$, $\langle t|\hat{\sigma}_y|t\rangle$, $\langle t|\hat{\sigma}_z|t\rangle$を求めよ。そして$\langle t|\hat{\boldsymbol{\sigma}}|t\rangle$の時間変化の様子を概説せよ。
(10) ハイゼンベルグ描像(Heisenberg picture)での$\hat{\boldsymbol{J}}(t)$を求め，(9) の結果と比較せよ。

２０２１年９月・２０２２年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：　量子力学および熱・統計力学

問題番号 6

多数のほとんど独立(almost independent)な振動子(oscillator)からなる系(system)を考えよう。すべての振動子の振動数(frequency)をνとする。番号(index)iの振動子のエネルギー準位(energy level)は$\left(n_i+\frac{1}{2}\right)h\nu$と量子化(quantization)されている。ここで，n_iは非負の整数(non-negative integer)，hはプランク定数(Planck constant)である。この振動子系が温度(temperature)Tの熱浴(heat bath)に接触して熱平衡(thermal equilibrium)になっている。カノニカル集団(canonical ensemble)の考え方で，次の問いに答えよ。ただし，ボルツマン定数(Boltzmann constant)をkとし，ゼロ点振動(zero-point oscillation)のエネルギーは除いて考えよ。

(1) 一つの振動子に注目したとき，その分配関数(partition function)Zを求めよ。

(2) 一つの振動子の平均エネルギー(mean energy)$\overline{\epsilon_\nu}$を求めよ。

次に，温度Tの壁(wall)に囲まれた十分大きな体積(volume)Vの立方体(cube)の空洞(cavity)を考えよう。空洞の中は電磁波(electromagnetic wave)が飛びかっており熱平衡状態になっている。振動数$\nu\sim\nu+d\nu$の電磁波のエネルギー密度(energy density)$u_\nu(T)d\nu$はプランク関数(Planck function)で与えられる。

$$u_\nu(T)d\nu=\frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}d\nu$$

ここで，cは光速(speed of light)である。

(3) 空洞内にある振動数$\nu\sim\nu+d\nu$の電磁場(electromagnetic field)の固有振動(eigen-oscillation)のおのおのが上で考えた振動数νの振動子の平均エネルギー $\overline{\epsilon_\nu}$を持つと考えて，プランク関数を導出せよ。ただし，電磁波は２つの偏り(polarization)を持つことに注意せよ。

このような空洞内にある光子気体(photon gas)について次の問いに答えよ。

(4) 空洞内の光子気体のエネルギー密度は$u(T)=\int_0^\infty u_\nu(T)d\nu=aT^4$である。定数$a$を求めよ。ただし，積分公式 $\int_0^\infty\frac{x^s\,dx}{e^x-1}=s!\,\zeta(s+1)$ ，ゼータ関数 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}$ を用いて良い。

(5) 光子と壁との衝突(collision)を考えて，光子気体の圧力(pressure)は $p=\frac{1}{3}u(T)$ であることを示せ。ただし，光子は常に壁と垂直(perpendicular)に衝突すると単純化(simplification)して良い。

(6) 光子気体の化学ポテンシャル(chemical potential)は $\mu=0$ であることを説明せよ。

(7) 光子気体のエントロピー Sを空洞の体積V，温度T，および，定数aを用いて表せ。必要なら，$T=0$のとき$S=0$であることを用いて良い。また，断熱過程における光子気体のVとTの関係を導け。