早稲田大学 2018年 物理学専攻 院試 解答例

ミヤネ

最終更新：2023 年 8 月 11 日

目次

問題番号 $\boxed{3}$ (力学)

(1) x軸方向の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta \tag{3.1}$$

なので，$\sin\theta \sim \theta \sim x/l$より，$x(0)=a, \dot{x}(0)=0$で解けば

$$x(t) = a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right). \tag{3.2}$$

(2) 速度は

$$\dot{x}(t) = -a\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \tag{3.3}$$

なので，

$$K(t) = \frac{ma^2g}{2l}\sin^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right). \tag{3.4}$$

よって，最大値は

$$K_{\max} = \frac{ma^2g}{2l} \tag{3.5}$$

であり，平均は

$$\bar{K} = \frac{2\pi}{\omega}\int_0^{2\pi/\omega}\mathrm{d}t'\ K(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{ma^2g}{2l} = \frac{1}{2}K_{\max}. \tag{3.6}$$

(3) 変換則は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

なので，

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{pmatrix} - 2\omega\begin{pmatrix} \sin\omega t & \cos\omega t \\ -\cos\omega t & \sin\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} - \omega^2\begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

である．これを$\ddot{x}', \ddot{y}'$について解けば

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + 2\omega\begin{pmatrix} \dot{y}' \\ -\dot{x}' \end{pmatrix} + \omega^2\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m}\boldsymbol{F}' + 2\omega\begin{pmatrix} \dot{y}' \\ -\dot{x}' \end{pmatrix} + \omega^2\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.9}$$

である．

(4) (3.9)のうち，第1項が物体が受ける力．第2項は速度に依存しているのでコリオリ力．第3項は位置に依存しているので遠心力である．

(5) おもりに働く力は，O$' - x'y'z'$系では

$$\boldsymbol{F}' = -\frac{g}{l}r(t)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

と書けるので，運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + 2i\omega\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} - \left(\omega^2 - \frac{g}{l}\right)\xi = 0 \tag{3.11}$$

となる．この方程式の一般解は

$$\xi(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} \tag{3.12}$$

である．ただし

$$\lambda_\pm = -i\omega \pm i\sqrt{2\omega^2 - \frac{g}{l}}. \tag{3.13}$$

初期条件$\xi(0) = a, \dot{\xi}(0) = 0$のもとで係数を決定すると

$$\xi(t) = \frac{a}{2i\sqrt{2\omega^2 - g/l}}\left[-\lambda_- e^{\lambda_+ t} + \lambda_+ e^{\lambda_- t}\right] \tag{3.14}$$

となる*1.

(6) $\omega' := \sqrt{2\omega^2 - g/l}$とおけば

$$\xi(t) = \frac{ae^{-i\omega t}}{2\omega'}\left[(\omega + \omega')e^{i\omega' t} + (-\omega + \omega')e^{-i\omega' t}\right] \tag{3.15}$$

となる．$r(t) = |\xi(t)|$なので

$$r(t) = \frac{a}{\omega'}\sqrt{\omega^2 \sin^2 \omega' t + \omega'^2 \cos^2 \omega' t} \tag{3.16}$$

となる．これが1より小さいためには

$$\frac{\omega}{\omega'} \leq 1 \tag{3.17}$$

であればよいので，

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{3.18}$$

であれば，$r(t) \leq a$である．また，最小値は

$$r_{\min} = a\frac{\omega}{\omega'} = a\omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2\omega^2 - \frac{g}{l}}} \sim a\omega\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3.19}$$

である*2.（図は略．）

(7) エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) \sim \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l}r^2\right) \tag{3.20}$$

であり，z軸方向の角運動量は

$$L_z = mr^2\dot{\theta} \tag{3.21}$$

である．$\mathrm{O} - xyz$系での初期条件は$r = a, \dot{\theta}\omega$である．$r = r_{\min}, \dot{\theta} = \dot{\theta}_{\min}$でもこれらの量は保存していることから，連立方程式を解けば

$$r_{\min} = a\omega\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3.22}$$

と解ける．ただし，長さが最小の点では$\dot{r} = 0$としている．

*1 lが大きいので，$2\omega^2 - g/l > 0$としました．

*2 完次の問の答えを知っている前提の近似ではありますが．この設問か次の設問が間違ってるかもしれません．

問題番号$\boxed{4}$ (電磁気学)

(1) アンペールの法則

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{4.1}$$

のrotをとれば

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \boldsymbol{B} = 0 \tag{4.2}$$

となる．$\boldsymbol{E}$については略.

(2)(a) $\boldsymbol{E}$を波動方程式に代入すれば

$$|\boldsymbol{k}|^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0 \tag{4.3}$$

なので,

$$|\boldsymbol{v}_p| = \frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \tag{4.4}$$

(b) ファラディの法則より

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}^{(1)} = \omega \frac{B_0}{E_0} \boldsymbol{e}^{(2)}. \tag{4.5}$$

アンペールの法則より

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}^{(2)} = -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \boldsymbol{e}^{(1)}. \tag{4.6}$$

よって，$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}$は直交.

(c) 例えば(4.5)より

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{|\boldsymbol{k}|}{\omega}. \tag{4.7}$$

(3) 図(4.1),(4.2),(4.3)のようになる.

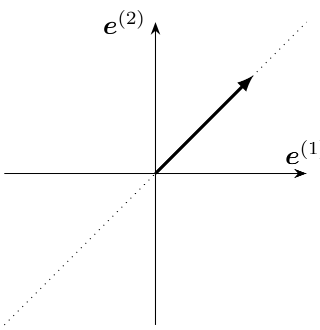

図4.1　$\delta = 0$のとき

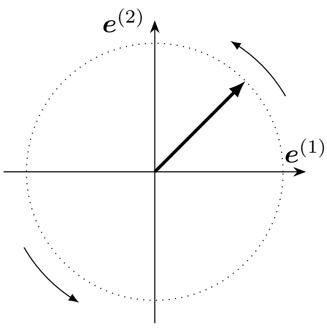

図4.2　$\delta = \pi/2$のとき

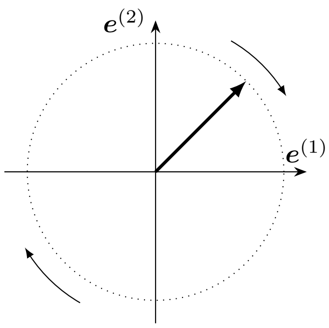

図4.3　$\delta = -\pi/2$のとき

(4) 計算すると$|\varepsilon\omega| \ll |\sigma|$.

(5) 微分方程式は

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{4.8}$$

なので,

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = \rho_0(\boldsymbol{x}) e^{-(\sigma/\varepsilon)t} \tag{4.9}$$

である．また$t \to \infty, \sigma \gg \varepsilon$のときは，$\rho(\boldsymbol{x}) = 0$となる.

(6) アンペールの法則で，変位電流を無視すれば

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{j} \tag{4.10}$$

となるので，これのrotをとれば

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} + \mu_0 \nabla \times \boldsymbol{j} = 0. \tag{4.11}$$

ファラデイの法則のほうは

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho + \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = 0. \tag{4.12}$$

(7) (4.11)にロンドン方程式を代入すれば

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial z^2} = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{L}}^2} \boldsymbol{B}(z) \tag{4.13}$$

となる．なお，磁場がzにしか依存しないとした．これを解けば

$$\boldsymbol{B}(z) = \boldsymbol{B}_0 e^{z/\lambda_{\mathrm{L}}} \tag{4.14}$$

である．

問題番号 $\boxed{5}$ (量子力学)

(1) それぞれ

$$\begin{cases} \text{長さ}:\lambda_{\mathrm{C}} = \dfrac{2\pi\hbar}{mc} \\ \text{運動量}:p_{\mathrm{C}} = \dfrac{mc}{2\pi} \\ \text{エネルギー}:E = \hbar\omega \end{cases} \tag{5.1}$$

である．ただし，cは光速.

(2) 交換関係から$[x,p]=i$．また，aが

$$a = Ax + Bp \tag{5.2}$$

と展開できるとすると，$[H_0, a] = -a$から

$$A = -iB. \tag{5.3}$$

また，規格化条件$[a, a^\dagger] = 1$から

$$AB^* - A^*B = -i \tag{5.4}$$

である．よって，(5.3),(5.4)より

$$a = -\frac{i}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}p \tag{5.5}$$

は1つの解である.

(3) $a_i^\dagger$は

$$a_i^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2}}x_i + \frac{1}{\sqrt{2}}p_i \tag{5.6}$$

なので，

$$a_i^\dagger a_i = \frac{1}{2}x_i^2 + \frac{1}{2}p_i^2 - \frac{1}{2} \tag{5.7}$$

である．よって，ハミルトニアンは

$$H = a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1 \tag{5.8}$$

なので，a_1, a_2に対するスペクトルをn_1, n_2とすれば，固有値は

$$E_{n_1,n_2} = n_1 + n_2 + 1 \tag{5.9}$$

である．よって，固有値は

$$E_n = n + 1 \tag{5.10}$$

で縮退度g_nは，$(n_1,n_2) = (n,0),(n-1,1),\cdots,(1,n-1),(0,n)$より

$$g_n = n + 1 \tag{5.11}$$

である.

(4) 基底状態と固有値をgで展開すると

$$E_0 = E_0^{(0)} + gE_0^{(1)} + \cdots,\ |0\rangle = |0\rangle_{(0)} + g\,|0\rangle_{(1)} + \cdots \tag{5.12}$$

となるので，gの1次をとれば

$$H_0\,|0\rangle_{(1)} + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2\,|0\rangle_{(0)} = E_0^{(1)}\,|0\rangle_{(0)} + E_0^{(0)}\,|0\rangle_{(1)} \tag{5.13}$$

である．左から${}_{(0)}\langle 0|$をかけると

$$\begin{aligned} E_0^{(1)} &= \frac{1}{2}{}_{(0)}\langle 0|(x_1 - x_2)^2|0\rangle_{(0)} \\ &= -\frac{1}{4}{}_{(0)}\langle 0|(a_1 - a_1^\dagger - a_2 + a_2^\dagger)^2|0\rangle_{(0)} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{5.14}$$

となる．

(5) 第1励起状態の状態を

$$|1\rangle = |1\rangle_{(0)} + g\,|1\rangle_{(1)} + \cdots \tag{5.15}$$

と展開して，gの1次をとれば

$$H_0\,|1\rangle_{(1)} + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2\,|1\rangle_{(0)} = E_1^{(1)}\,|1\rangle_{(0)} + E_1^{(0)}\,|1\rangle_{(1)} \tag{5.16}$$

なので，

$$E_1^{(1)} = \frac{1}{2}\left[\,\langle 1,0|(x_1 - x_2)^2|1,0\rangle + \ \langle 0,1|(x_1 - x_2)^2|0,1\rangle\right] \tag{5.17}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned} \langle 1,0|(x_1 - x_2)^2|1,0\rangle &= -\frac{1}{2}\langle 1,0|(a_1 - a_1^\dagger - a_2 + a_2^\dagger)^2|1,0\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle 1,0|(a_1^\dagger a_1 + a_1 a_1^\dagger + a_2^\dagger a_2 + a_2 a_2^\dagger)|1,0\rangle \\ &= 4 \end{aligned} \tag{5.18}$$

なので，もう一方も同様にすれば，$E_1^{(1)} = 4$である．

(6) 2粒子の入れ替えに対して波動関数が対称なら，それはboson.

(7) ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{g}{2}(x_1 - x_2)^2 \tag{5.19}$$

であり，これを

$$x = x_1 - x_2,\ X = \frac{x_1 + x_2}{2},\ p = \frac{p_1 - p_2}{2},\ P = p_1 + p_2 \tag{5.20}$$

で変数変換する．新しい変数x, X, p, Pは

$$[x, p] = i,\ [X, P] = i,\ [x, P] = [X, p] = 0 \tag{5.21}$$

を満たすので正準変数である．ハミルトニアンは

$$H = \underbrace{\frac{1}{2}\left(g + \frac{1}{2}\right)x^2 + p^2}_{=H_1} + \underbrace{X^2 + \frac{1}{4}P^2}_{=H_2} \tag{5.22}$$

とH_1, H_2に分離できる．まずは，H_1について解く．対角化する生成消滅演算子をa_1とすれば

$$H_1 = a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2g+1} \tag{5.23}$$

となる．ただし，

$$a_1 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{g+\frac{1}{2}}x\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}p,\ [a_1, a_1^\dagger] = \sqrt{2g+1} \tag{5.24}$$

である．したがって，スペクトルは

$$H_1 = \frac{2n+1}{2}\sqrt{2g+1}. \tag{5.25}$$

H_2については

$$H_2 = a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2},\ [a_2, a_2^\dagger] = 1 \tag{5.26}$$

なので，普通の調和振動．よって，基底のエネルギーは

$$E_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2g+1}}{2} \sim 1 + \frac{1}{2}g \tag{5.27}$$

であり，摂動の1次結果と一致している．第1励起状態のエネルギーは$g \ll 1$よりH_1のほうを励起させて

$$E_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2g+1} + 1 \sim \frac{5}{2} + \frac{3}{2}g \tag{5.28}$$

であり，第1励起状態のほうは摂動解とは結果が異なる．

問題番号$\boxed{6}$ (統計力学)

(1) 今，相互作用がないので，分配関Z_N数は1粒子の分配関数Z_1の積である．1粒子の分配関数は

$$Z_1 = \sum_{J_z=-J}^{J} e^{\beta g \mu_B J_z H} \tag{6.1}$$

なので，$A \coloneqq \beta g \mu_B H$とおけば

$$Z_1 = e^{-AJ} \times \frac{1-e^{A(2J+1)}}{1-e^{A}} = \frac{\sinh(A(J+1/2))}{\sinh(A/2)} = \frac{\sinh(\beta g \mu_B H(J+1/2))}{\sinh(\beta g \mu_B H/2)} \tag{6.2}$$

である．よって，全体の分配関数は

$$Z_N = Z_1^N = \left[\frac{\sinh(\beta g \mu_B H(J+1/2))}{\sinh(\beta g \mu_B H/2)}\right]^N \tag{6.3}$$

となる．

(2) 前問から，ただちに

$$F = -\frac{N}{\beta} \log \left[\frac{\sinh(\beta g \mu_B H(J+1/2))}{\sinh(\beta g \mu_B H/2)}\right]. \tag{6.4}$$

(3) FをHで微分してみると

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F}{\partial H} &= \frac{N}{\beta} \cdot \left[\beta g \mu_B \left(J+\frac{1}{2}\right) \coth\left(\beta g \mu_B H \left(J+\frac{1}{2}\right)\right) - \frac{1}{2}\beta g \mu_B \coth\left(\frac{1}{2}\beta g \mu_B H\right)\right] \\ &= N g \mu_B J \left[\left(1+\frac{1}{2J}\right) \coth\left(\beta g \mu_B H \left(J+\frac{1}{2}\right)\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{1}{2}\beta g \mu_B H\right)\right] \end{aligned} \tag{6.5}$$

となる．よって

$$\begin{cases} M = N g \mu_B J B_J(h) \\ B_J(h) = \left(1+\dfrac{1}{2J}\right) \coth\left(h\left(1+\dfrac{1}{2J}\right)\right) - \dfrac{1}{2J}\coth\left(\dfrac{h}{2J}\right) \end{cases} \tag{6.6}$$

となる．

(4) $x \ll 1$に対しては，$\coth x \sim x/3$なので[*3]

$$M \sim N g \mu_B J \cdot \frac{h}{3}\left(1+\frac{1}{J}\right) = \frac{1}{3} N \beta g^2 \mu_B^2 J^2 \left(1+\frac{1}{J}\right) H. \tag{6.7}$$

[*3] $\coth x$の近似は

$$\begin{aligned} \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ &= \frac{2\left(1+\frac{x^2}{2}+\cdots\right)}{2\left(x+\frac{x^3}{6}\right)} \\ &\sim \frac{1}{x} \cdot \left(1+\frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{6}} \\ &= \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{x^2}{6}\right) \\ &\sim \frac{1}{x}+\frac{x}{3} \end{aligned}$$

となります．

(5) $J=1/2$のとき，たぶん，ブリルアン関数から考えるよりも，最初からやったほうがラクだろう．つまり，1粒子の分配関数は

$$Z_1=\sum_{J=-1/2}^{+1/2} e^{\beta g\mu_B J_z H}=e^{+\beta g\mu_B H/2}+e^{-\beta g\mu_B H/2}=2\cosh\left(\frac{\beta g\mu_B H}{2}\right) \tag{6.8}$$

なので，

$$F=-\frac{N}{\beta}\log\left[2\cosh\left(\frac{\beta g\mu_B H}{2}\right)\right]. \tag{6.9}$$

よって，このときの磁化Mは

$$M=\frac{Ng\mu_B}{2}\tanh\left(\frac{\beta g\mu_B H}{2}\right) \tag{6.10}$$

なので，$J=1/2$であることに気をつければ

$$B_{1/2}(h)=\tanh h. \tag{6.11}$$

(6) $J\to\infty$とすると

$$\begin{aligned} B_J(h)&=\left(1+\frac{1}{2J}\right)\coth\left(h\left(1+\frac{1}{2J}\right)\right)-\frac{1}{2J}\coth\left(\frac{h}{2J}\right)\\ &\to\coth h-\frac{1}{2J}\cdot\frac{1}{h/2J}=\coth h-\frac{1}{h} \end{aligned} \tag{6.12}$$

となり[*4]，ランジュバン関数に一致する．

(7) 図6.4のようになる．

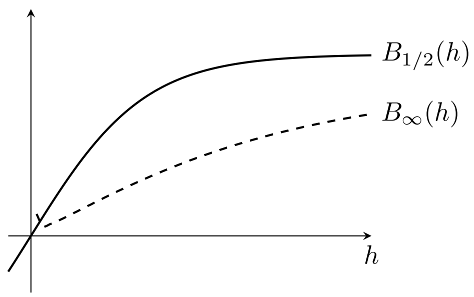

図6.4　$B_{1/2}(h)$と$B_\infty(h)$の図

[*4] $x\ll 1$では，

$$\coth x\sim\frac{1}{x}+\frac{x}{3}$$

だといいましたが，$x/3$のほうは，$J\to\infty$の条件からおちます．