宇宙物理学　レポート 2

氏名：宮根一樹　学籍番号：5324A057-8

最終更新：2024 年 6 月 15 日

1. 分子運動論を考える。まずは、x 軸方向の運動のみに絞って考える。粒子が速度 v_x で壁に弾性衝突したとすると、逆向きで速度 v_x に運動を開始する。このときに粒子が受けた力を F_x とすると、運動量の変化と力積の関係から

$$F_x = 2p_x \cdot \frac{v_x}{2} \tag{0.1}$$

が成立する。このとき、単位時間あたりに $v_x/2$ 回だけ粒子が壁にぶつかることに注意する[*1]。これは x 軸方向の関係のみなので、全ての方向を考えればそれは絶対値をとってから、その量の $1/3$ を考えればよい。したがって、

$$\bar{P} = \frac{1}{3}pv \tag{0.2}$$

である。

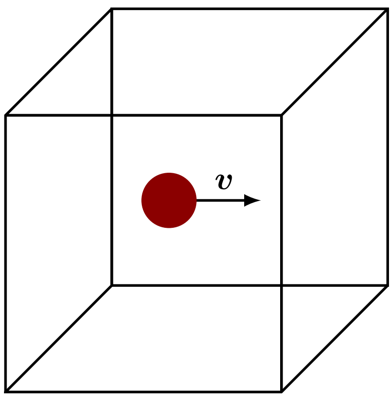

図 0.1　立方体の中での粒子の運動

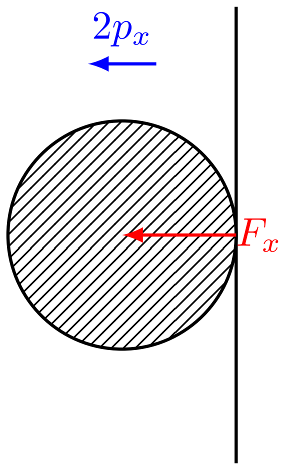

図 0.2　壁に衝突する瞬間

ここで、$\gamma \equiv 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ とおけば

$$p = \gamma mv \text{、} \quad E = \gamma mc^2 \tag{0.3}$$

なので、$p = Ev/c^2$ である。よって

$$\bar{P} = \frac{1}{3} \cdot \frac{Ev}{c^2} \cdot v = \frac{Ev^2}{3c^2} \tag{0.4}$$

[*1] 立方体の各辺の長さも単位長さであることに注意する。

である。また、$m=0$ のときは、$E^2=m^2c^4+p^2c^2$ から $E=cp$ であり $v=c$。ゆえに

$$\bar{P}=\frac{1}{3}cp \tag{0.5}$$

である。

2. エネルギー密度は

$$\varepsilon=g_*\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi\hbar)^3}E(\boldsymbol{p})f(\boldsymbol{p}) \tag{0.6}$$

なので、w は

$$w=\frac{\displaystyle\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\,\frac{c^2\boldsymbol{p}^2}{3E(\boldsymbol{p})}f(\boldsymbol{p})}{\displaystyle\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\,E(\boldsymbol{p})f(\boldsymbol{p})} \tag{0.7}$$

で与えられる。
ここで、現在は非相対論的粒子を考えていることから、$E(\boldsymbol{p})=mc^2+\boldsymbol{p}^2/2m$ となる。このとき、粒子の分布 $f(\boldsymbol{p})$ は

$$f(\boldsymbol{p})=\left\{\exp\left[\frac{mc^2+\boldsymbol{p}^2/2m-\mu}{k_{\mathrm{B}}T}\right]\pm1\right\}^{-1}\sim\exp\left[-\frac{mc^2+\boldsymbol{p}^2/2m}{k_{\mathrm{B}}T}\right] \tag{0.8}$$

となる。ここで、$|\boldsymbol{p}|$ が大きい領域では $f(\boldsymbol{p})\ll1$ であるので、この領域では積分は影響を与えず、つまり $|\boldsymbol{p}|\sim0$ 付近で評価してよいことが分かる。よって、$E(\boldsymbol{p})\sim mc^2,\ \boldsymbol{p}^2\sim\varepsilon^2$ として

$$w\sim\frac{c^2\varepsilon^2}{3m^2c^4}\sim\frac{\varepsilon^2}{m^2}\cdot c^{-2}\ll1 \tag{0.9}$$

が得られる。

3. 以下の 2 つの方程式が与えられている：

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{DE}}+3H(1+w_{\mathrm{DE}})\varepsilon_{\mathrm{DE}}=0、 \tag{0.10}$$

$$H^2=\frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_{\mathrm{DE}}。 \tag{0.11}$$

(0.11) を微分すると

$$2H\dot{H}=\frac{8\pi G}{3c^2}\dot{\varepsilon}_{\mathrm{DE}} \tag{0.12}$$

となるので、(0.10) を代入し、$\varepsilon_{\mathrm{DE}}$ に対して (0.11) を代入して整理すれば

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H=-\frac{3}{2}(1+w_{\mathrm{DE}})H^2 \tag{0.13}$$

となる。これを $H(t_0)=H_0$ のもとで解くと

$$\frac{1}{H(t)}-\frac{1}{H_0}=\frac{3}{2}(1+w_{\mathrm{DE}})(t-t_0) \tag{0.14}$$

となる。$\dot{H}=\dot{a}/a$ を代入して整理すると

$$\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\frac{3}{2}(1+w_{\mathrm{DE}})(t-t_0)+\frac{1}{H_0}}。 \tag{0.15}$$

この常微分方程式の解は

$$a(t) = a_0 \left[\frac{3}{2} H_0 (1 + w_{\rm DE})(t - t_0) + 1 \right]^{2/3(1+w_{\rm DE})} \tag{0.16}$$

である。ただし、$a_0 \equiv a(t_0)$ とおいた。このとき、$H(t)$ の発散が起こるのは $a(t) = 0$ のときであり、それは

$$t' = t_0 - \frac{1}{H_0(1 + w_{\rm DE})} \tag{0.17}$$

であり、$H_0 = 1/145$、$t_0 = 145$ を代入すると $t' = 870$ 億年 である。

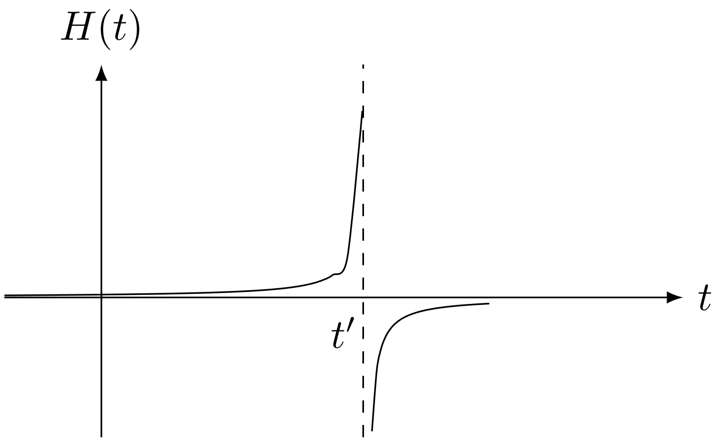

図 0.3　$H(t)$ の t 依存性