B4 ペスキンゼミ 演習問題3.4

宮根一樹

2023年 8月 11日

目次

今日の流れと予備知識

今日の流れと予備知識

spinor fieldには，右巻き（right-handed）なものと左巻き（left-handed）なものが存在する．（これらはヘリシティで定義されるが，今回はあまり関係ない．）

これらはローレンツ変換の仕方が異なる：

$$\begin{cases} \text{左巻き：} & \psi_L(x) \to a_L \psi(\Lambda^{-1}x), \\ \text{右巻き：} & \psi_R(x) \to a_R \psi(\Lambda^{-1}x). \end{cases} \tag{1.1}$$

左巻きのspinorχについて，$i\sigma^2\chi^*$は右巻きで変換される．

カイラル表示なら，Dirac fieldは

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

という形で左巻きと右巻きが関わる．

(1) 運動方程式

$\psi = (\psi_L, \psi_R)$とおけば，masslessのディラック方程式は

$$i(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla})\psi_L = 0 \tag{1.3}$$

となる．このとき，$\psi_L(x)$の成分を$\chi_a(x)$とする．

(1) $m \neq 0$のときの$\chi(x)$についての方程式が

$$i\bar{\sigma} \cdot \partial\chi - im\sigma^2\chi^* = 0 \tag{1.4}$$

と書けることを示せ．そのために，方程式がrelativistic invariantであり，Klein-Gordon方程式を導くことを確かめよ．

（このように記述されるフェルミオンの質量をマヨラナ質量項という.）

(1) 運動方程式

方程式(1.4)が運動方程式なら，

1. Lorentz invariance
2. Klein-Gordon方程式を含んでいる（解になっている）

を少なくとも満たしていてほしい．それらをチェックしよう．

（この方程式に対応するLagrangianがあるかどうか云々はあとで議論するので，ここではひとまず(1.4)が運動方程式として要求される条件を満たしているかどうかを議論する．）

(1) 運動方程式

1. Lorentz invariance

$\chi(x)$はleft-handed spinorなので，Lorentz変換は

$$\chi(x) \to a_L \chi(\Lambda^{-1}x), \ a_L = \exp\left[-i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right] \qquad (1.5)$$

で与えられる．

(1) 運動方程式

このとき，それぞれの項は

$$\begin{cases} \bar{\sigma}\cdot\partial\chi(x) \to \bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\left(a_L\chi(\Lambda^{-1}x)\right) = a_R\bar{\sigma}\cdot(\partial\chi)(\Lambda^{-1}x) \\ \sigma^2\chi^*(x) \to \sigma^2 a_L^*\chi^*(\Lambda^{-1}x) = a_R\sigma^2\chi^*(\Lambda^{-1}x) \end{cases} \tag{1.6}$$

となる．ここで次の公式

$$\bar{\sigma}^{\mu}a_L = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}a_R\bar{\sigma}^{\nu},\ \sigma^2 a_L^* = a_R\sigma^2 \tag{1.7}$$

を用いた．ただし

$$a_R \equiv \exp\left[-i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}+\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right],\ \Lambda_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} a_L & 0 \\ 0 & a_R \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

である．これらの公式(1.7)の計算は補足1で.

(1) 運動方程式

したがって，方程式全体は

$$(i\bar{\sigma}\cdot\partial\chi - im\sigma^2\chi^*)(x) \to a_R(i\bar{\sigma}\cdot\partial\chi - im\sigma^2\chi^*)(\Lambda^{-1}x) = 0 \tag{1.9}$$

となるので，運動方程式はLorentz invariant.

2. K.G.方程式を含んでいること

運動方程式(1.4)の複素共役は

$$-i(\bar{\sigma}^*)^\mu\partial_\mu\chi^* + im(\sigma^2)^*\chi = 0. \tag{1.10}$$

(1.4)をχ^*について解くと$\chi^* = \sigma^2\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi/m$.

(1) 運動方程式

これを代入すれば

$$
\begin{aligned}
& -(\bar{\sigma}^*)^\mu \partial_\mu (\sigma^2 \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu)\chi + m^2(\sigma^2)^*\chi = 0 \\
\rightarrow \quad & \underbrace{(\bar{\sigma}^*)^\mu \sigma^2 \bar{\sigma}^\nu \partial_\mu \partial_\nu}_{\substack{=\sigma^2\partial^2 \\ \text{(補足1で)}}} \chi + \sigma^2 m^2 \chi = 0 \quad (\because \ (\sigma^2)^* = -\sigma^2) \\
\rightarrow \quad & (\partial^2 + m^2)\chi = 0 \qquad (1.11)
\end{aligned}
$$

となり，確かにKlein-Gordon方程式の解にもなっている.

(2) 作用・ラグランジアン

(2) マヨラナ方程式を導くラグランジアンはあるだろうか？質量項をみると$(\sigma^2)_{ab}\chi_a^*\chi_b^*$を$\chi^*$で変分をとればよさそう．しかし，$\sigma^2$が反対称なので，普通に$\chi$がc-nuberだと考えると消えてしまう．（後述）

そこで，$\chi(x)$がグラスマン数だとみなそう．（定義とかは後で.）すると，対応するラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \chi^\dagger i\bar{\sigma}\cdot\partial\chi + \frac{im}{2}(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*) \tag{1.12}$$

である．このラグランジアンの作用Sが実(i.e. $S = S^*$)であることを確認し，χ, χ^*でそれぞれ変分をとることで，マヨラナ方程式を導出せよ．

(2) 作用・ラグランジアン

ラグランジアンに$(\sigma^2)_{ab}\chi^*_a\chi^*_b = \chi^\dagger\sigma^2\chi^*$という項があれば，これを$\chi^*_a$で変分することで$\sigma^2\chi^\dagger$となり，質量項が取り出せそうに思える．しかし，$\sigma^2$が反対称$(\sigma^2)^T = -\sigma^2$であることによって，そもそも

$$\chi^\dagger\sigma^2\chi^* = (\chi^\dagger\sigma^2\chi^*)^T = -\chi^\dagger\sigma^2\chi^* \quad \to \quad \chi^\dagger\sigma^2\chi^* = 0 \quad (1.13)$$

となってしまう．そこで次のような性質を満たすグラスマン数を導入する：

$$\alpha\beta = -\beta\alpha, \quad (1.14)$$

$$(\alpha\beta)^* \equiv \beta^*\alpha^* = -\alpha^*\beta^*. \quad (1.15)$$

これを用いれば$\chi^\dagger\sigma^2\chi^*$が対称になるので，non-zero.

(2) 作用・ラグランジアン

作用は

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left[\chi^\dagger i\bar{\sigma}\cdot\partial\chi + \frac{im}{2}(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*) \right]. \qquad (1.16)$$

ただ，これが実なのかをみたいだけなら$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$のみを調べればよい：

$$\mathcal{L}^* = -\chi^T i\bar{\sigma}^* \cdot \vec{\partial}\chi^* - \frac{im}{2}\left(-\chi^\dagger\sigma^2\chi^* + \chi^T\sigma^2\chi\right)$$

$$(1.17)$$

ただし，$(\bar{\sigma}^*)^{\mu T} = (\bar{\sigma}^\mu)^\dagger = \bar{\sigma}^\mu$を用いた.

(2) 作用・ラグランジアン

作用は

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left[\chi^\dagger i\bar{\sigma}\cdot\partial\chi + \frac{im}{2}(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*) \right]. \qquad (1.16)$$

ただ，これが実なのかをみたいだけなら$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$のみを調べればよい：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* &= -\chi^T i\bar{\sigma}^*\cdot\overrightarrow{\partial}\chi^* - \frac{im}{2}\left(-\chi^\dagger\sigma^2\chi^* + \chi^T\sigma^2\chi\right) \\ &= \chi^T i\bar{\sigma}^*\cdot\overleftarrow{\partial}\chi^* + \frac{im}{2}(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*) \end{aligned} \qquad (1.17)$$

ただし，$(\bar{\sigma}^*)^{\mu T} = (\bar{\sigma}^\mu)^\dagger = \bar{\sigma}^\mu$を用いた.

(2) 作用・ラグランジアン

作用は

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \left[\chi^\dagger i\bar{\sigma} \cdot \partial \chi + \frac{im}{2}(\chi^T \sigma^2 \chi - \chi^\dagger \sigma^2 \chi^*) \right]. \qquad (1.16)$$

ただ，これが実なのかをみたいだけなら$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$のみを調べればよい：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* &= -\chi^T i\bar{\sigma}^* \cdot \overrightarrow{\partial} \chi^* - \frac{im}{2}\left(-\chi^\dagger \sigma^2 \chi^* + \chi^T \sigma^2 \chi\right) \\ &= \chi^T i\bar{\sigma}^* \cdot \overleftarrow{\partial} \chi^* + \frac{im}{2}(\chi^T \sigma^2 \chi - \chi^\dagger \sigma^2 \chi^*) \\ &= \chi^\dagger i\bar{\sigma} \cdot \overrightarrow{\partial} \chi + \frac{im}{2}(\chi^T \sigma^2 \chi - \chi^\dagger \sigma^2 \chi^*). \qquad (1.17) \end{aligned}$$

ただし，$(\bar{\sigma}^*)^{\mu T} = (\bar{\sigma}^\mu)^\dagger = \bar{\sigma}^\mu$を用いた.

(2) 作用・ラグランジアン

作用をもう一度：

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \left[\chi^\dagger i\bar{\sigma}\cdot\partial\chi + \frac{im}{2}(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*) \right]. \qquad (1.16)$$

χとχ^*がindependentだと思って，χの変分をとってみると

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\chi_a}(\chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi) &= \frac{\delta}{\delta\chi_a}(-\chi_b^\dagger i(\bar{\sigma}^\mu)_{bc}\overleftarrow{\partial}_\mu\chi_c) \\ &= -i(\bar{\sigma})_{ab}\cdot\partial\chi_b^* \qquad (1.18) \\ \frac{\delta}{\delta\chi_a}(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*) &= \frac{\delta}{\delta\chi_a}(\chi_b(\sigma^2)_{bc}\chi_c) \\ &= \frac{\delta}{\delta\chi_a}(-2i\chi_1\chi_2) = 2(\sigma^2)_{ab}\chi_b. \end{aligned}$$

(1.19)

(2) 作用・ラグランジアン

$$
\begin{aligned}
& \frac{\delta S}{\delta \chi} = \int \mathrm{d}^4 x \left[-i\bar{\sigma} \cdot \partial \chi^* + im\sigma^2 \chi \right] = 0 \\
\rightarrow \quad & i\bar{\sigma} \cdot \partial \chi^* - im\sigma^2 \chi = 0.
\end{aligned} \tag{1.20}
$$

$\chi^\dagger$での変分も同様．こっちはちゃんと運動方程式がでてくる．((1.20)はその複素共役．)

(3) ディラックスピノール

(3) $\psi = (\psi_L, \psi_R)$と書いたとき，ψ_Rの変換はψ_Lの複素共役の変換とユニタリー同値．（補足2で）よって，left-handed spinorsχ_1, χ_2で

$$\psi_L = \chi_1,\ \psi_R = i\sigma^2\chi_2^* \tag{1.21}$$

と書き換えるとすれば，Dirac fieldのラグランジアンとその質量項はどうなるか？

(left-handed spinor ψ_Lについて，$\sigma^2\psi_L^*$はright-handedの変換をしていた．よって，問題文のψ_Rはちゃんとright-handed． よって，$\psi = (\psi_L, \psi_R)$はディラック場（の必要条件を満たしている）といえる．)

(3) ディラックスピノール

ラグランジアンを計算するだけ：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \tag{1.22}$$

(3) ディラックスピノール

ラグランジアンを計算するだけ：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \\
&= \begin{pmatrix} \psi_R^\dagger & \psi_L^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & i\sigma^\mu \partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

(3) ディラックスピノール

ラグランジアンを計算するだけ：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \\
&= \begin{pmatrix}\psi_R^\dagger & \psi_L^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-m & i\sigma^\mu\partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L \\ \psi_R\end{pmatrix} \\
&= -m(-i\chi_2^T\sigma^2)\chi_1 + i(-i\chi_2^T\sigma^2)\sigma^\mu\partial_\mu(i\sigma^2\chi_2^*) \\
&\qquad + i\chi_1^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_1 - m\chi_1^\dagger(i\sigma^2\chi_2^*) \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \tag{1.22}$$

(3) ディラックスピノール

ラグランジアンを計算するだけ：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \\
&= \begin{pmatrix}\psi_R^\dagger & \psi_L^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-m & i\sigma^\mu\partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L \\ \psi_R\end{pmatrix} \\
&= -m(-i\chi_2^T\sigma^2)\chi_1 + i(-i\chi_2^T\sigma^2)\sigma^\mu\partial_\mu(i\sigma^2\chi_2^*) \\
&\qquad + i\chi_1^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_1 - m\chi_1^\dagger(i\sigma^2\chi_2^*) \\
&\qquad \vdots \\
&= i\chi_1^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_1 + i\chi_2^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_2 + im(\chi_2^T\sigma^2\chi_1 - \chi_1^\dagger\sigma^2\chi_2^*).
\end{aligned} \tag{1.22}
$$

最後の項が質量項．（途中計算は補足3で．）

(4) 対称性

(4) 前問の作用がglobal symmetryをもつことを示せ．また，(2),(3)のラグランジアンについて

$$J^\mu = \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi, \ J^\mu = \chi_1^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_1 - \chi_2^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_2 \tag{1.23}$$

がそれぞれ保存カレントであることを確認し，それぞれの関係を確認せよ．そして，$O(N)$の対称性をもつN個のmassiveな2成分自由場の理論を構築せよ．

(4) 対称性

(3)でのラグランジアンは

$$\mathcal{L} = i\chi_1^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_1 + i\chi_2^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_2 + im(\chi_2^T \sigma^2 \chi_1 - \chi_1^\dagger \sigma^2 \chi_2^*).$$

ディラック場は$U(1)$対称性$\psi \to e^{i\alpha}\psi$をもっていたので，このラグランジアンも

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ i\sigma^2 \chi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\chi_1 \\ i\sigma^2 (e^{-i\alpha}\chi_2)^* \end{pmatrix} = e^{i\alpha}\psi \qquad (1.24)$$

の対称性をもっているはずであり，実際にそうなっている．（$U(1)_\mathrm{v}$不変性；$U(1)_L \times U(1)_R$はmassiveでは破れている．）

(4) 対称性

(2)のラグランジアン

$$\mathcal{L} = \chi^\dagger i\bar{\sigma}\cdot\partial\chi + \frac{im}{2}(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*)$$

は，$m=0$で$U(1)$対称性をもつ．（こっちは質量項があるときは，その対称性が破れている．これはleft-handed spinorのみを考えているため，masslessのときのみ保存されるから.）

$m=0$のときのネーターカレントをもとめ，それが(1.23)の第1式に対応していることを示そう．

(4) 対称性

ラグランジアンは$U(1)$変換で不変なので，ネーターカレントをもとめるためには$\partial_\mu \chi$での微分のみを考えればよい．よって，

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \chi)} \cdot (-i\chi) = \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi. \tag{1.25}$$

（本文でもそうだったが，位相の変換に関しては符号は気にしない．）
masslessの運動方程式は$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi = 0,\ (\bar{\sigma}^\mu)^* \partial_\mu \chi^* = 0$なので，代入すれば確かに保存カレント．

(4) 対称性

(3)のラグランジアンはそもそもディラック場から導出されていたため，ネーターカレントも同じ．よって，

$$
\begin{aligned}
J^\mu &= \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\
&= \begin{pmatrix} -i\chi_2^T\sigma_2 & \chi_1^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ i\sigma^2\chi_2^* \end{pmatrix} \\
&= \chi_1^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi_1 - \chi_2^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi_2.
\end{aligned} \tag{1.26}
$$

ただし，

$$
\chi_2^T\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2\chi_2^* = (\chi_2^T(\bar{\sigma}^\mu)^*\chi_2^*)^T = -\chi_2^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi_2 \tag{1.27}
$$

を用いた．（$\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^*$とGrassmann numberの交換．）

こっちは，運動方程式からmassiveでもちゃんと保存することがわかる．

(4) 対称性

spnor fieldsが$(\chi_1, \cdots, \chi_N)$のとき，これらが$O(N)$対称ならば，

$$\chi_1^T \chi_1 + \cdots + \chi_N^T \chi_N = \text{inv.} \tag{1.28}$$

である．他にも$\sum \chi_i^T \sigma \cdot \partial \chi_i$などの形も不変．

(4) 対称性

one spinor fieldのラグランジアン

$$\mathcal{L} = \chi^\dagger i\bar{\sigma} \cdot \partial\chi + \frac{im}{2}(\chi^T \sigma^2 \chi - \chi^\dagger \sigma^2 \chi^*)$$

をそれぞれの場について足し上げれば

$$\mathcal{L}_N = \sum_{i=1}^{N} \left[\chi_i^\dagger i\bar{\sigma} \cdot \partial\chi_i + \frac{im}{2}(\chi_i^T \sigma^2 \chi_i + (\chi_i^T \sigma^2 \chi_i)^*) \right] \quad (1.29)$$

であり，これは確かに$O(N)$変換で不変である.

(5) マヨラナ理論の量子化

(5) (1),(2)のマヨラナ理論（one spinor field）

$$\mathcal{L} = \chi^\dagger i\bar{\sigma}\cdot\partial\chi + \frac{im}{2}(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*)$$

を量子化しよう．つまり，$\chi(x)$は次の正準交換関係

$$\{\chi_a(\mathbf{x}), \chi_b^\dagger(\mathbf{y})\} = \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{ab} \qquad (1.30)$$

を満たすとして，

- ハミルトニアンを構成し，
- ハミルトニアンを対角化する生成消滅演算子の交換関係をもとめよ.

（ヒント：$\chi(x)$とディラック場のψ_Lを比較してみよ.）

(5) マヨラナ理論の量子化

ハミルトニアンに関しては量子論以前の話．エネルギー・運動量テンソルは

$$T^{\mu}_{\ \nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\chi)}\partial_{\nu}\chi - \mathcal{L}\delta^{\mu}_{\ \nu} \tag{1.31}$$

である．この(0,0)成分のchargeがハミルトニアンだった．

(5) マヨラナ理論の量子化

よって，T^{00}を積分して

$$H = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \chi)} \partial^0 \chi - \mathcal{L} \right) \tag{1.32}$$

(5) マヨラナ理論の量子化

よって，T^{00} を積分して

$$
\begin{aligned}
H &= \int \mathrm{d}^3\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \chi)} \partial^0 \chi - \mathcal{L} \right) \\
&= \int \mathrm{d}^3\mathbf{x} \Big((i\chi^\dagger \sigma^0)\partial_0 \chi - \Big[\chi^\dagger i\sigma^0 \partial_0 \chi - \chi^\dagger i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \chi \\
&\qquad\qquad + \frac{im}{2}(\chi^T \sigma^2 \chi - \chi^\dagger \sigma^2 \chi^*) \Big] \Big)
\end{aligned}
\tag{1.32}
$$

(5) マヨラナ理論の量子化

よって，T^{00}を積分して

$$
\begin{aligned}
H &= \int \mathrm{d}^3\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \chi)} \partial^0 \chi - \mathcal{L} \right) \\
&= \int \mathrm{d}^3\mathbf{x} \Big((i\chi^\dagger \sigma^0)\partial_0 \chi - \Big[\chi^\dagger i \sigma^0 \partial_0 \chi - \chi^\dagger i \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \chi \\
&\qquad\qquad + \frac{im}{2}(\chi^T \sigma^2 \chi - \chi^\dagger \sigma^2 \chi^*) \Big] \Big) \\
&= \int \mathrm{d}^3\mathbf{x} \left(\chi^\dagger i \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \chi - \frac{im}{2}(\chi^T \sigma^2 \chi - \chi^\dagger \sigma^2 \chi^*) \right). \qquad (1.32)
\end{aligned}
$$

（後から知ったのですが，運動項を半分に分けて，片方だけ部分積分するとかなり楽になるそうです．が，今はこのままやります．）

(5) マヨラナ理論の量子化

素直にヒントに従ってみる．ディラック場の展開は

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s \left[a^s_{\mathbf{p}} u^s(p) e^{-ip\cdot x} + b^{s\,\dagger}_{\mathbf{p}} v^s(p) e^{+ip\cdot x} \right] \tag{1.33}$$

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi^s \end{pmatrix}, \quad v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}(-i\sigma^2(\xi^s)^*) \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}(-i\sigma^2(\xi^s)^*) \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

だった．

(5) マヨラナ理論の量子化

$\chi(x)$はleft-handedだったので，$i\sigma^2\chi^*$はright-handed．これらを組み合わせたDirac fieldを

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \chi(x) \\ i\sigma^2\chi^*(x) \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

とすると，$\psi(x)$の第2量子化と比べて

$$\begin{cases} \chi(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_s \Big[a^s_\mathbf{p}\cdot\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s\cdot e^{-ip\cdot x} \\ \qquad\qquad\qquad + b^{s\,\dagger}_\mathbf{p}\cdot\sqrt{p\cdot\sigma}(-i\sigma^2(\xi^s)^*)\cdot e^{+ip\cdot x}\Big] \\ i\sigma^2\chi^*(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_s \Big[a^s_\mathbf{p}\cdot\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi^s\cdot e^{-ip\cdot x} \\ \qquad\qquad\qquad - b^{s\,\dagger}_\mathbf{p}\cdot\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}(-i\sigma^2(\xi^s)^*)\cdot e^{+ip\cdot x}\Big] \end{cases} \tag{1.36}$$

と量子化できるだろう．

(5) マヨラナ理論の量子化

(1.36)の第2式を$\chi(x)$について解いてみる．すなわち，$-i\sigma^2$を左から作用させて，全体のcomplex conjugateをとれば

$$\chi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_s \Big[b^s_\mathbf{p} \cdot \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s \cdot e^{-ip\cdot x} + a^{s\,\dagger}_\mathbf{p} \cdot \sqrt{p\cdot\sigma}(-i\sigma^2(\xi^s)^*) \cdot e^{+ip\cdot x} \Big] \quad (1.37)$$

となるので，$a_\mathbf{p} = b_\mathbf{p}$．（$a^s_\mathbf{p}$のcomplex conjugateの定義は補足1の(3.5)で．要するに，operatorに関してはhermitian conjugateだと思えばよい．）

(5) マヨラナ理論の量子化

したがって,

$$\chi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_s \Big[a^s_\mathbf{p} \cdot \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \cdot e^{-ip\cdot x} + a^{s\,\dagger}_\mathbf{p} \cdot \sqrt{p\cdot\sigma}\,(-i\sigma^2(\xi^s)^*) \cdot e^{+ip\cdot x} \Big] \quad (1.38)$$

である.
生成消滅演算子の正準交換関係はDirac場と同じで

$$\{a^s_\mathbf{p}, a^{r\,\dagger}_\mathbf{q}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\delta^{sr} \quad (1.39)$$

でよい.

(5) マヨラナ理論の量子化

あとは，$\chi(x)$の表示(1.38)をハミルトニアン(1.32)に代入するだけ．ただし，今はHはtime invariantなので，Schrödinger pictureで計算する．つまり，

$$\begin{aligned}
\chi(\mathbf{x}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_s \Big[a^s_\mathbf{p} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\
&\qquad\qquad + a^{s\,\dagger}_\mathbf{p} \sqrt{p\cdot\sigma}\,(-i\sigma^2(\xi^s)^*) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \Big] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\
&\qquad \times \sum_s \Big[a^s_\mathbf{p} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s + a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}} \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,(-i\sigma^2(\xi^s)^*) \Big]
\end{aligned} \tag{1.40}$$

を使う．これで少し計算がラクになる．

(5) マヨラナ理論の量子化

$$
\begin{aligned}
H &= \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\chi^\dagger i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi - \frac{im}{2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*) \\
&= \cdots \\
&= \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_\mathbf{p}}\sum_{s,r}(a^{r\dagger}_\mathbf{p}\xi^{r\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} + a^r_{-\mathbf{p}}(i\xi^{rT}\sigma^2)\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}})}_{} \\
&\qquad \underbrace{\times\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\mathbf{p})(a^s_\mathbf{p}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s + a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}(-i\sigma^2\xi^{s*}))}_{=A_1} \\
&\quad - \frac{im}{2}\underbrace{\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\left(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*\right)}_{=A_2}.
\end{aligned}
$$

(5) マヨラナ理論の量子化

A_1, A_2をそれぞれ計算すると

$$A_1 = -\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{|\mathbf{p}|^2}{2E_\mathbf{p}}\sum_s (a^{s\dagger}_\mathbf{p} a^s_\mathbf{p} - a^s_\mathbf{p} a^{s\dagger}_\mathbf{p}) + \alpha \tag{1.41}$$

$$A_2 = -i\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{E_\mathbf{p}}\sum_s (a^s_\mathbf{p} a^{s\dagger}_\mathbf{p} - a^{s\dagger}_\mathbf{p} a^s_\mathbf{p}) + \frac{2}{im}\alpha \tag{1.42}$$

となる．$\xi^1 = (1,0), \xi^2 = (0,1)$として計算した．細かい計算は補足4でやっている．なお，αは

$$\alpha = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{im}{2E_\mathbf{p}}\sum_{s,r}\Big[a^r_{-\mathbf{p}} a^s_\mathbf{p}\xi^{rT}\sigma^2\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\xi^s - a^{r\dagger}_\mathbf{p} a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}\xi^{rT}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sigma^2\xi^s\Big] \tag{1.43}$$

であり，ハミルトニアンを計算するときは相殺される．

(5) マヨラナ理論の量子化

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{-|\mathbf{p}|^3 + m^2}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_s (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s - a_{\mathbf{p}}^s a_{\mathbf{p}}^{s\dagger})$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \sum_s a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s - \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \mathrm{d}^3\mathbf{p} \frac{E_{\mathbf{p}}}{2} \sum_s . \qquad (1.44)$$

無限大の項は（エネルギーの基準を変えると思えば）無視していいので

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \sum_s a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s \qquad (1.45)$$

となる.

まとめ

left-handed spnor$\chi(x,t)$のマヨラナ理論

$$\mathcal{L}_M = \chi^\dagger i\bar{\sigma}\cdot\partial\chi + \frac{im}{2}(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*) \tag{1.12}$$

を第2量子化すると

$$\begin{aligned}\chi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_s \Big[a^s_\mathbf{p}\cdot\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s\cdot e^{-ip\cdot x} \\ +a^{s\,\dagger}_\mathbf{p}\cdot\sqrt{p\cdot\sigma}(-i\sigma^2(\xi^s)^*)\cdot e^{+ip\cdot x}\Big]\end{aligned} \tag{1.38}$$

$$\{a^s_\mathbf{p}, a^{r\,\dagger}_\mathbf{q}\} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\delta^{sr} \tag{1.39}$$

となる.

まとめ

Dirac場$\psi(x)$と同様に，マヨラナ場も4成分表示ができ

$$\psi_M(x) = \begin{pmatrix} \chi(x) \\ i\sigma^2\chi^*(x) \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

という4成分spinor場を構成することができるはず.
この4成分場のcharge conjugateを考えるが，そもそも$Ca_pC = a_p$なので,

$$C\psi_M C = \psi_M. \tag{1.47}$$

$\rightarrow$中性粒子.
スカラー場と同じで，粒子自身が反粒子であることに起因.

参考文献

[1] M. Peskin, D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Pub. Co, Reading, Mass, 1995.

[2] 九後汰一郎, 『ゲージ場の量子論 I』, 新物理学シリーズ, 培風館, 1989年.

[3] Z. Xianyu, *A Complete Solution to Problems in "An Introduction to Quantum Field Theory" by Peskin and Schroeder*, 2016, https://zzxianyu.files.wordpress.com/2017/01/peskin_problems.pdf.

Appendix

補足

補足 公式集

ここでは，いくつかの公式を示しておく：

$$\bar{\sigma}^\mu a_L = \Lambda^\mu{}_\nu a_R \bar{\sigma}^\nu, \tag{3.1}$$

$$\sigma^2 a_L^* = a_R \sigma^2, \tag{3.2}$$

$$(\bar{\sigma}^*)^\mu \sigma^2 \bar{\sigma}^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \sigma^2 \partial^2, \tag{3.3}$$

$$\sigma^2 (\sigma^\mu)^T \sigma^2 = -\bar{\sigma}^\mu, \tag{3.4}$$

$$(a^s_{\mathbf{p}})^* = (a^s_{\mathbf{p}})^\dagger. \tag{3.5}$$

ただし，最後の(3.5)は「operatorのcomplex conjugateとは？」という定義の問題である．

補足 公式集

$$
\begin{cases}
(p\cdot\sigma)^2 = E_{\mathbf{p}}^2 + |\mathbf{p}|^2 - 2E_{\mathbf{p}}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} \\
(p\cdot\bar{\sigma})^2 = E_{\mathbf{p}}^2 + |\mathbf{p}|^2 + 2E_{\mathbf{p}}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \\
(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma}) = (p\cdot\bar{\sigma})(p\cdot\sigma) = m^2, \\
\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \dfrac{p\cdot\bar{\sigma} - p\cdot\sigma}{2}.
\end{cases}
\tag{3.6}
$$

$$
\begin{cases}
\sqrt{p\cdot\sigma}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma} = -|\mathbf{p}|^2 + E_{\mathbf{p}}\mathbf{p}\cdot\sigma, \\
\sqrt{p\cdot\sigma}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} = \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma} \\
\qquad = m\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \\
\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} = |\mathbf{p}|^2 + E_{\mathbf{p}}\mathbf{p}\cdot\sigma.
\end{cases}
\tag{3.7}
$$

補足 公式集

$$
\begin{cases}
\sqrt{p\cdot\sigma^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} = \sigma^2(p\cdot\bar{\sigma}),\\
\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma} = \sigma^2(p\cdot\sigma),\\
\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} = \sqrt{p\cdot\sigma^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma} = m\sigma^2.
\end{cases}
\tag{3.8}
$$

ちなみに，出回ってる解答集[3]はここらへんの公式が間違っている．結果は合っていたけど.

補足 公式集

Dirac theoryとMajorana theoryの比較.

- Dirac theory

$$\mathcal{L}_D = i\chi_1^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_1 + i\chi_2^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_2 + im(\chi_2^T \sigma^2 \chi_1 - \chi_1^\dagger \sigma^2 \chi_2^*). \tag{3.9}$$

- Majorana theory

$$\mathcal{L}_M = \chi^\dagger i\bar{\sigma}\cdot\partial\chi + \frac{im}{2}(\chi^T \sigma^2 \chi - \chi^\dagger \sigma^2 \chi^*) \tag{3.10}$$

Dirac thoryで$\chi_1 = \chi_2 = \chi$とすれば,

$$\mathcal{L}_D = 2\mathcal{L}_M. \tag{3.11}$$

補足 公式集

(3.1)の証明:

次の関係

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma_\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}=\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{3.12}$$

が成立しているので（本文p.42の式(3.29)），次の表現

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix} a_L & 0 \\ 0 & a_R \end{pmatrix},\ \gamma^\mu=\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

をとれば

$$\begin{aligned} a_R^{-1}\bar{\sigma}^\mu a_L=\Lambda^\mu{}_\nu\sigma^\nu \quad (\& \quad a_L^{-1}\sigma^\mu a_R=\Lambda^\mu{}_\nu\sigma^\nu) \\ \to \quad \bar{\sigma}^\mu a_L=\Lambda^\mu{}_\nu a_R\bar{\sigma}^\nu. \end{aligned} \tag{3.14}$$

補足 公式集

(3.2)の証明:

$\sigma^2\boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{\sigma}\sigma^2$を使えば

$$\begin{aligned}\sigma^2 a_L^* &= \sigma^2 \exp\left[i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} - \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2}\right] \\ &= \exp\left[-i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right]\sigma^2 = a_R\sigma^2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

補足 公式集

(3.3)の証明:

$\boldsymbol{\sigma}^* \sigma^2 = -\sigma^2 \boldsymbol{\sigma}$より

$$(\bar{\sigma}^\mu)^* \sigma^2 \bar{\sigma}^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \sigma^2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\mu \partial_\nu. \tag{3.16}$$

$\mu \neq \nu$なら，σ^μと$\bar{\sigma}^\nu$はanti-commute．一方，∂_μと∂_νはもちろんcommuteなので，対角成分$\mu = \nu$のみが残る．よって，

$$\sigma^2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \sigma^2 \partial^2. \tag{3.17}$$

補足 公式集

(3.4)の証明:

$\mu=0$なら

$$\sigma^2(\sigma^0)^T\sigma^2=-\sigma^0(\sigma^2)^2=-\sigma^0. \tag{3.18}$$

$\mu=i$なら

$$\sigma^2\boldsymbol{\sigma}^T\sigma^2=-(\boldsymbol{\sigma}\sigma^2)^T\sigma^2=\boldsymbol{\sigma}^\dagger(\sigma^2)^2=\boldsymbol{\sigma}. \tag{3.19}$$

ただし，$\boldsymbol{\sigma}\sigma^2=-\sigma^2\boldsymbol{\sigma}^*$を用いた.

補足 公式集

(3.5)の証明:

まず，場$\chi^\dagger$の複素共役の定義を

$$\chi^*(x) \equiv (\chi^T)^\dagger(x) \tag{3.20}$$

とする．両辺の展開を考えてみると

$$\chi^T(x)^\dagger = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{E_\mathbf{p}}} \sum_s \left[a_\mathbf{p}^{s\dagger} \sqrt{p\cdot\sigma^*} \xi^{s*} e^{+ip\cdot x} + \cdots \right] \tag{3.21}$$

$$\chi^*(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{E_\mathbf{p}}} \sum_s \left[a_\mathbf{p}^{s*} \sqrt{p\cdot\sigma^*} \xi^{s*} e^{+ip\cdot x} + \cdots \right] \tag{3.22}$$

となるので，比較すると(3.5)が出てくる．（転置Tが状態空間に作用しないことが原因.）

補足 公式集

(3.6)の証明:

$\sqrt{p\cdot\sigma}, \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}$は

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{p\cdot\sigma}\\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\end{array}\right\} = \sqrt{E_{\mathbf{p}}+|\mathbf{p}|}\frac{1\mp\hat{\mathbf{p}}\cdot\sigma}{2}+\sqrt{E_{\mathbf{p}}-|\mathbf{p}|}\frac{1\pm\hat{\mathbf{p}}\cdot\sigma}{2} \tag{3.23}$$

である．（上が$\sqrt{p\cdot\sigma}$.）ただし，$\hat{\mathbf{p}}\equiv\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$である． ここで，

$$\left(\frac{1\pm\hat{\mathbf{p}}\cdot\sigma}{2}\right)^2=\frac{1\pm\hat{\mathbf{p}}\cdot\sigma}{2},\ \frac{1\pm\hat{\mathbf{p}}\cdot\sigma}{2}\cdot\frac{1\mp\hat{\mathbf{p}}\cdot\sigma}{2}=0 \tag{3.24}$$

の関係（射影）を用いればよい．

補足 公式集

(3.6)の証明:

例えば

$$
\left.\begin{matrix}(p\cdot\sigma)^2\\(p\cdot\bar{\sigma})^2\end{matrix}\right\} = \left(\sqrt{E_{\mathbf{p}}+|\mathbf{p}|}\frac{1\mp\hat{\mathbf{p}}\cdot\sigma}{2}+\sqrt{E_{\mathbf{p}}-|\mathbf{p}|}\frac{1\pm\hat{\mathbf{p}}\cdot\sigma}{2}\right)^4
$$

$$
\begin{aligned}
&= (E_{\mathbf{p}}+|\mathbf{p}|)^2\frac{1\mp\hat{\mathbf{p}}\cdot\sigma}{2}+(E_{\mathbf{p}}-|\mathbf{p}|)^2\frac{1\pm\hat{\mathbf{p}}\cdot\sigma}{2} \\
&= E_{\mathbf{p}}^2+|\mathbf{p}|^2\mp 2E_{\mathbf{p}}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

である．（上が$(p\cdot\sigma)^2$．）

補足 公式集

(3.6)の証明:

同様にして

$$
\begin{aligned}
(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar\sigma) &= (p\cdot\bar\sigma)(p\cdot\sigma) \\
&= (E_{\mathbf{p}}^2-|\mathbf{p}|^2)\frac{1+\hat{\mathbf{p}}\cdot\sigma}{2}+(E_{\mathbf{p}}^2-|\mathbf{p}|^2)\frac{1-\hat{\mathbf{p}}\cdot\sigma}{2} \\
&= E_{\mathbf{p}}^2-|\mathbf{p}|^2=m^2. \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

また，$p\cdot\sigma=p^0\sigma^0-\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}, p\cdot\bar\sigma=p^0\sigma^0+\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}$より

$$
\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\frac{p\cdot\bar\sigma-p\cdot\sigma}{2}. \qquad (3.27)
$$

補足 公式集

(3.7)の証明:

(3.6)を使えばすぐに示すことができる：

$$
\begin{aligned}
\sqrt{p\cdot\sigma}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma} &= \frac{1}{2}\left((p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma})-(p\cdot\sigma)^2\right)\\
&= -|\mathbf{p}|^2+E_{\mathbf{p}}\mathbf{p}\cdot\sigma, \qquad (3.28)\\
\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} &= \frac{1}{2}\left((p\cdot\bar{\sigma})^2-(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma})\right)\\
&= |\mathbf{p}|^2+E_{\mathbf{p}}\mathbf{p}\cdot\sigma, \qquad (3.29)\\
\sqrt{p\cdot\sigma}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} &= \frac{1}{2}\Big(\sqrt{(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma})}(p\cdot\bar{\sigma})\\
&\qquad -\sqrt{(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma})}(p\cdot\sigma)\Big)\\
&= m\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma}. \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

補足 公式集

(3.8)の証明:

$\boldsymbol{\sigma}^T\sigma^2 = -\sigma^2\boldsymbol{\sigma}^\dagger = -\sigma^2\boldsymbol{\sigma}$なので，例えば

$$\sqrt{p\cdot\sigma^T}\sigma^2 = \sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} \tag{3.31}$$

のようになる．よって，

$$\begin{aligned}
\sqrt{p\cdot\sigma^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} &= \sigma^2(p\cdot\bar{\sigma}),\\
\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma} &= \sigma^2(p\cdot\sigma),\\
\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} &= \sqrt{p\cdot\sigma^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma}\\
&= \sigma^2\sqrt{(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma})} = m\sigma^2.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

補足 右巻きと左巻きのspinorの変換の関係

(3)の問題文「 ψ_Rの変換はψ_Lの複素共役の変換とユニタリー同値」の意味について.

ψ_Rの変換はa_R，ψ_L^*の変換はa_Lであり，(3.2)より

$$a_R = \sigma^2 a_L \sigma^2 \tag{3.33}$$

と結びつけられる．σ^2はユニタリーなので，a_Rとa_L^*はユニタリー同値である.

したがって，後々量子化して状態空間を考えることになるので，right-handed spinorはψ_L^*という形で導入すればよい.

補足 (1.22)の途中計算

(1.22)の計算を一部省略していたので，ここで補足を．ラグランジアンを途中まで計算すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(im\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \\ &= \begin{pmatrix}\psi_R^\dagger & \psi_L^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-m & i\sigma^\mu\partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L \\ \psi_R\end{pmatrix} \\ &= -m\psi_R^\dagger\psi_L + i\psi_R^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R \\ &\quad + i\psi_L^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L - m\psi_L^\dagger\psi_R\end{aligned} \tag{3.34}$$

補足 (1.22)の途中計算

$\psi_L = \chi_1, \psi_R = i\sigma^2\chi_2^*$を(3.34)に代入すると

$$
\begin{aligned}
&-m\psi_R^\dagger\psi_L + i\psi_R^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R \\
&\quad + i\psi_L^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L - m\psi_L^\dagger\psi_R \\
&= -m(-i\chi_2^T\sigma^2)\chi_1 + i(-i\chi_2^T\sigma^2)\sigma^\mu\partial_\mu(-i\sigma^2\chi_2^*) \\
&\quad + i\chi_1^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_1 - m\chi_1^\dagger(i\sigma^2)\chi_2^* \\
&= i\chi_1^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_1 + i\chi_2^T\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2\partial_\mu}\chi_2^* \\
&\quad + im\chi_2^T\sigma^2\chi_1 - im\chi_1^\dagger\sigma^2\chi_2^*. \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

あとは $\sim\sim\sim$ の部分を整理すればよい.

補足 (1.22)の途中計算

ここは

$$\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2\partial_\mu = \sigma^2(\sigma^0\partial_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla})\sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^*\partial_\mu \tag{3.36}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\chi_2^T \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2\partial_\mu}\chi_2^* &= \chi_2^T(\bar{\sigma}^\mu)^*\partial_\mu\chi_2^* \\ &= (\chi_2^T(\bar{\sigma}^\mu)^*\partial_\mu\chi_2^*)^T \\ &= -\chi_2^\dagger(\bar{\sigma}^\mu)^\dagger\overleftarrow{\partial}_\mu\chi_2 \end{aligned} \tag{3.37}$$

である．ただし，χ_2がGrassmann numberであることから，転置をとったときにマイナスがでてくる．これを部分積分すれば，(1.22)を得る．

補足 (5)の途中計算

公式を駆使して(1.41),(1.42)を導出する．なお，今回行う計算はほとんど$\mathbf{p}$の積分とスピンの総和$\sum$の中で行われるので，$\mathbf{p}$の符号の反転やスピン添え字の入れ替えを行ってもよい．これらの事実を今後はゴリゴリ使っていく．

まずは(1.41)から．$\sum$以下を素直に書き下してみると

$$\begin{aligned}\sum_{s,r}\Big[\, & a^{r\dagger}_{\mathbf{p}}\xi^{r\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma}\,a^{s}_{\mathbf{p}}\xi^{s} \\ & + a^{r\dagger}_{\mathbf{p}}\xi^{r\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\sigma^{2}a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}(-i\xi^{s*}) \\ & + a^{r}_{-\mathbf{p}}(i\xi^{rT})\sigma^{2}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma}\,a^{s}_{\mathbf{p}}\xi^{s} \\ & + a^{r}_{-\mathbf{p}}(i\xi^{rT})\sigma^{2}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\sigma^{2}a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}(-i\xi^{s*})\Big]\end{aligned} \tag{3.38}$$

である．

補足 (5)の途中計算

第1項と第4項を混ぜて計算すると

$$
\begin{aligned}
&a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}\xi^{r\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma}\,a_{\mathbf{p}}^{s}\xi^{s}\\
&\qquad + a_{-\mathbf{p}}^{r}(i\xi^{rT})\sigma^{2}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\sigma^{2}a_{-\mathbf{p}}^{s\dagger}(-i\xi^{s*})\\
&= a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}a_{\mathbf{p}}^{s}\xi^{r\dagger}(-|\mathbf{p}|^{2}+E_{\mathbf{p}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}})\xi^{s}\\
&\qquad + a_{\mathbf{p}}^{r}a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\xi^{r\dagger}\sigma^{2}(|\mathbf{p}|^{2}-E_{\mathbf{p}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}})\sigma^{2}\xi^{s}\\
&= -|\mathbf{p}|^{2}\delta^{rs}(a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}a_{\mathbf{p}}^{s}-a_{\mathbf{p}}^{r}a_{\mathbf{p}}^{s\dagger})\\
&\quad + E_{\mathbf{p}}\Big(\cancel{a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}a_{\mathbf{p}}^{s}\xi^{r\dagger}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\xi^{s}} + \underbrace{\cancel{a_{\mathbf{p}}^{r}a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\xi^{r\dagger}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{*}\xi^{s}}}_{a\leftrightarrow a^{\dagger},\,r\leftrightarrow s\text{でキャンセル}}\Big)\\
&= -|\mathbf{p}|^{2}\delta^{rs}(a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}a_{\mathbf{p}}^{s}-a_{\mathbf{p}}^{r}a_{\mathbf{p}}^{s\dagger})
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

となる．ただし，$\xi^{1}=(1,0),\xi^{2}=(0,1)$で計算しているので，転置もエルミート共役も同じ．また，$\delta(0)\sim\infty$は無視している．

補足 (5)の途中計算

第2項と第3項は，A_2やA_3の計算で出てきたものと相殺される：

$$
\begin{aligned}
& a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}\xi^{r\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\sigma^2 a_{-\mathbf{p}}^{s\dagger}(-i\xi^{s*}) \\
&\quad + a_{-\mathbf{p}}^{r}(i\xi^{rT})\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma}\,a_{\mathbf{p}}^{s}\xi^{s} \\
&= im\left[a_{-\mathbf{p}}^{r}a_{\mathbf{p}}^{s}\xi^{rT}\sigma^2\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\xi^{s} - a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}a_{-\mathbf{p}}^{s\dagger}\xi^{rT}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sigma^2\xi^{s}\right]. \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

補足 (5)の途中計算

次は(1.42)を計算する．A_2は

$$A_2 = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x} \left(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*\right)$$
$$= \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\ \chi^T\sigma^2\chi + \left(\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\ \chi^T\sigma^2\chi\right)^* \tag{3.41}$$

であった．$\chi^T\sigma^2\chi$の項を調べる．χの展開を代入すると

$$\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\ \chi^T\sigma^2\chi = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x} \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}\sqrt{2E_\mathbf{q}}} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}$$
$$\sum_{s,r}(a^r_\mathbf{q}\xi^{rT}\sqrt{q\cdot\sigma^T} + a^{r\dagger}_{-\mathbf{q}}(+i\xi^{r\dagger}\sigma^2)\sqrt{q\cdot\bar{\sigma}^T})$$
$$\times\, \sigma^2(a^s_\mathbf{p}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s + a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}(-i\sigma^2\xi^{s*})). \tag{3.42}$$

補足 (5)の途中計算

$\mathbf{x}$で積分をすれば$\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$がでてくるので，$\mathbf{q}$を$-\mathbf{p}$とする．つまり，

$$
\begin{aligned}
(3.42) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}
&\sum_{s,r}(a^r_{-\mathbf{p}}\xi^{rT}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^T} + a^{r\dagger}_{\mathbf{p}}(+i\xi^{r\dagger}\sigma^2)\sqrt{p\cdot\sigma^T}) \\
&\quad \times \sigma^2(a^s_{\mathbf{p}}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s + a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}(-i\sigma^2\xi^{s*})) \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

である．

補足 (5)の途中計算

A_1の計算のときと同様，$\sum$の中身を書き出してみるすると，

$$\begin{aligned}\sum_{s,r}\Big[\ & a^r_{-\mathbf{p}}a^s_{\mathbf{p}}\xi^{rT}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s \\ & + a^r_{-\mathbf{p}}a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}\xi^{rT}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}(-i\sigma^2\xi^{s*}) \\ & + a^{r\dagger}_{\mathbf{p}}a^s_{\mathbf{p}}(+i\xi^{r\dagger}\sigma^2)\sqrt{p\cdot\sigma^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s \\ & + a^{r\dagger}_{\mathbf{p}}a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}(+i\xi^{r\dagger}\sigma^2)\sqrt{p\cdot\sigma^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}(-i\sigma^2\xi^{s*})\end{aligned} \tag{3.44}$$

となる．

補足 (5)の途中計算

第2項と第3項を同時に計算すると

$$
\begin{aligned}
&a^r_{-\mathbf{p}} a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}} \xi^{rT} \underbrace{\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}}_{=m\sigma^2}(-i\sigma^2\xi^{s*}) \\
&+ a^{r\dagger}_{\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} (+i\xi^{r\dagger}\sigma^2) \underbrace{\sqrt{p\cdot\sigma^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma}}_{=m\sigma^2}\xi^s \\
&= -ima^r_{-\mathbf{p}} a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}} \xi^{rT}\xi^s + ima^{r\dagger}_{\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} \xi^{rT}\xi^s \\
&= -im\delta^{rs}(a^r_{\mathbf{p}} a^{s\dagger}_{\mathbf{p}} - a^{r\dagger}_{\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}})
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

となる．ただし，最後の行では変数変換$-\mathbf{p}\to\mathbf{p}$を用いた.

補足 (5)の途中計算

第1項と第4項から，A_1のキャンセルしてほしい項がでてくる．第1項から計算すると

$$
\begin{aligned}
&a^r_{-\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} \xi^{rT} \underbrace{\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma}}_{=\sigma^2(p\cdot\sigma)} \xi^s \\
&= a^r_{-\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} \xi^{rT} \sigma^2 (E_{\mathbf{p}} - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \xi^s \\
&= E_{\mathbf{p}} a^r_{-\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} \xi^{rT} \sigma^2 \xi^s - a^r_{-\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} \xi^{rT} \sigma^2 \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} \xi^s
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

となる．同様にして，第4項も

$$
\begin{aligned}
&a^{r\dagger}_{\mathbf{p}} a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}} (+i\xi^{r\dagger}\sigma^2) \sqrt{p\cdot\sigma^T}\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma}(-i\sigma^2\xi^{s*}) \\
&= a^{r\dagger}_{\mathbf{p}} a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}} \xi^{rT} \sigma^2 \xi^s + a^{r\dagger}_{\mathbf{p}} a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}} \xi^{rT} \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} \sigma^2 \xi^s .
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

補足 (5)の途中計算

よって，

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\ \chi^T\sigma^2\chi \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\sum_{s,r}\Big[-im\delta^{rs}(a^r_{\mathbf{p}}a^{s\dagger}_{\mathbf{p}} - a^{r\dagger}_{\mathbf{p}}a^s_{\mathbf{p}}) \\
&\qquad + E_{\mathbf{p}}a^r_{-\mathbf{p}}a^s_{\mathbf{p}}\xi^{rT}\sigma^2\xi^s - a^r_{-\mathbf{p}}a^s_{\mathbf{p}}\xi^{rT}\sigma^2\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\xi^s \\
&\qquad + E_{\mathbf{p}}a^{r\dagger}_{\mathbf{p}}a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}\xi^{rT}\sigma^2\xi^s + a^{r\dagger}_{\mathbf{p}}a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}\xi^{rT}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sigma^2\xi^s\Big]
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

となる．A_2はこれを自身の複素共役とを足すことによって得られるので，純虚数に項は消える．（「実数」や「純虚数」というのは，ここでは複素共役をとったときのふるまいで定義する.）

補足 (5)の途中計算

第1項は実：

$$
\begin{aligned}
-im\delta^{rs}(a^r_{\mathbf{p}}a^{s\dagger}_{\mathbf{p}} - a^{r\dagger}_{\mathbf{p}}a^s_{\mathbf{p}}) \to \left(-im\delta^{rs}(a^r_{\mathbf{p}}a^{s\dagger}_{\mathbf{p}} - a^{r\dagger}_{\mathbf{p}}a^s_{\mathbf{p}})\right)^* \\
&= +im\delta^{rs}(a^{r\dagger}_{\mathbf{p}}a^s_{\mathbf{p}} - a^r_{\mathbf{p}}a^{s\dagger}_{\mathbf{p}}) \\
&= -im\delta^{rs}(a^r_{\mathbf{p}}a^{s\dagger}_{\mathbf{p}} - a^{r\dagger}_{\mathbf{p}}a^s_{\mathbf{p}}). \qquad (3.49)
\end{aligned}
$$

第3項と第5項をまとめたものも実：

$$
\begin{aligned}
&-a^r_{-\mathbf{p}}a^s_{\mathbf{p}}\xi^{rT}\sigma^2\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\xi^s + a^{r\dagger}_{\mathbf{r}}a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}\xi^{rT}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sigma^2\xi^s \\
&\to (-a^r_{-\mathbf{p}}a^s_{\mathbf{p}}\xi^{rT}\sigma^2\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\xi^s + a^{r\dagger}_{\mathbf{r}}a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}\xi^{rT}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}(-\sigma^2)\xi^s)^* \\
&= -a^{r\dagger}_{-\mathbf{p}}a^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\xi^{rT}(-\sigma^2)\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}^*\xi^s + a^r_{\mathbf{r}}a^s_{-\mathbf{p}}\xi^{rT}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}^*(-\sigma^2)\xi^s \\
&= -a^r_{-\mathbf{p}}a^s_{\mathbf{p}}\xi^{rT}\sigma^2\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\xi^s + a^{r\dagger}_{\mathbf{r}}a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}\xi^{rT}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sigma^2\xi^s. \qquad (3.50)
\end{aligned}
$$

ただし，最後の行では$\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$とした.

補足 (5)の途中計算

第2項と第4項をまとめたものは純虚数：

$$
\begin{aligned}
& a^r_{-\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} \xi^{rT} \sigma^2 \xi^s + a^{r\dagger}_{\mathbf{p}} a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}} \xi^{rT} \sigma^2 \xi^s \\
& \to \left(a^r_{-\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} \xi^{rT} \sigma^2 \xi^s + a^{r\dagger}_{\mathbf{p}} a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}} \xi^{rT} \sigma^2 \xi^s\right)^* \\
& = a^{r\dagger}_{-\mathbf{p}} a^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \xi^{rT} (-\sigma^2) \xi^s + a^r_{\mathbf{p}} a^s_{-\mathbf{p}} \xi^{rT} (-\sigma^2) \xi^s \\
& = -(a^r_{-\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} \xi^{rT} \sigma^2 \xi^s + a^{r\dagger}_{\mathbf{p}} a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}} \xi^{rT} \sigma^2 \xi^s).
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

ただし，案の定，最後の行では$\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$としている.

よって，この項は足しあげたときに消える.

補足 (5)の途中計算

以上のことから

$$
\begin{aligned}
A_2 = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{E_\mathbf{p}}\sum_{s,r}\Big[&-im\delta^{rs}(a^r_\mathbf{p}a^{s\dagger}_\mathbf{p} - a^{r\dagger}_\mathbf{p}a^s_\mathbf{p}) \\
&- a^r_{-\mathbf{p}}a^s_\mathbf{p}\xi^{rT}\sigma^2\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\xi^s \\
&+a^{r\dagger}_\mathbf{p}a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}\xi^{rT}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sigma^2\xi^s\Big] \\
= -i\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{E_\mathbf{p}}\sum_s&(a^r_\mathbf{p}a^{s\dagger}_\mathbf{p} - a^{r\dagger}_\mathbf{p}a^s_\mathbf{p}) \\
+ \frac{2}{im}\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{im}{2E_\mathbf{p}}\sum_{s,r}&\Big[a^{r\dagger}_\mathbf{p}a^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}\xi^{rT}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sigma^2\xi^s \\
&-a^r_{-\mathbf{p}}a^s_\mathbf{p}\xi^{rT}\sigma^2\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\xi^s\Big] \qquad (3.52)
\end{aligned}
$$

となり，これは(1.42)である．