5.7 Posons

$$p_1(x) = 4\,x^2 - x + 2 \quad p_2(x) = 2\,x^2 + 6\,x + 3 \quad p_3(x) = -4\,x^2 + 10\,x + 2$$

Dans la base canonique $(x^3\,;x^2\,;x\,;1)$ de $\mathbb{R}_3[x]$, les polynômes p_1, p_2 et p_3 ont respectivement pour composantes :

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la dimension du sous-espace engendré par p_1, p_2 et p_3, il suffit de déterminer le rang de la matrice dont les lignes sont constituées des composantes de ces vecteurs.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -4 & 10 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{L}_3 \to 13\,\mathrm{L}_3 - 9\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Attendu que cette matrice est de rang 3, on conclut que $\dim\big(\langle p_1\,;p_2\,;p_3\rangle\big) = 3\,.$