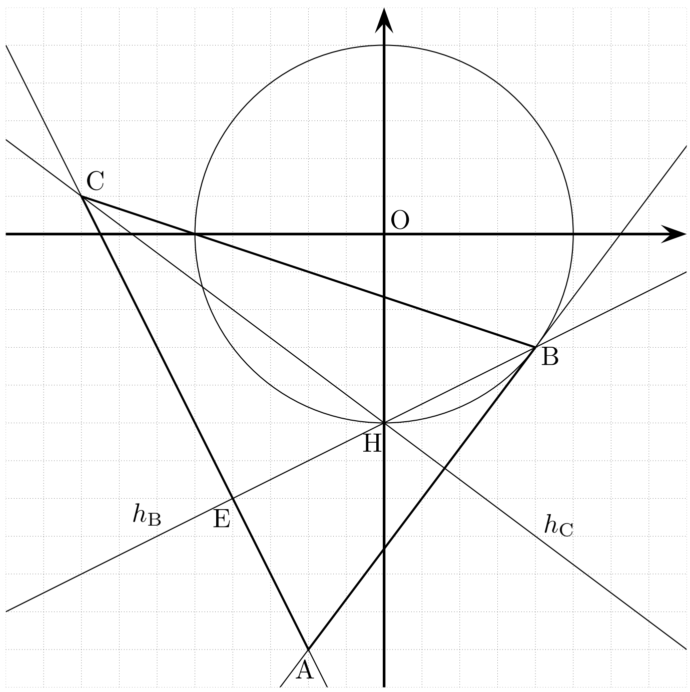
Chamblandes 2002 — Problème 2.2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points E$(-4\,;-7)$, H$(0\,;-5)$ *ainsi que le cercle* γ *de centre* O$(0\,;0)$ *et passant par* H.



Construction géométrique et calcul des coordonnées des points A, B *et* C

Calcul de l'équation du cercle γ :

Le rayon du cercle γ vaut $\|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\| = \left\|\begin{pmatrix} 0-0 \\ -5-0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-5)^2+0^2} = 5$.

L'équation du cercle γ est donc : $(x-0)^2+(y-0)^2 = 5^2$ i.e. $x^2+y^2=25$.

Calcul de l'équation de la droite EH, hauteur h_{B} issue du point B :

$\overrightarrow{\mathrm{EH}} = \begin{pmatrix} 0-(-4) \\ -5-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ l'équation de EH est de la forme $2\,x-4\,y+c=0$

Puisque le point $\mathrm{H} \in \mathrm{EH}$, on a : $2\cdot 0-4(-5)+c=0$ d'où l'on tire $c=-20$

L'équation de $\mathrm{EH} = h_{\mathrm{B}}$ est donc $2\,x-4\,y-20=0$ ou plus simplement $x-2\,y-10=0$.

Calcul du point B, situé à l'intersection du cercle γ et de la droite h_{B} :

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x-2\,y-10=0 \end{cases}$$

La 2^{de} équation donne $x=2y+10$ que l'on substitue dans la 1^{re} équation :

$(2\,y+10)^2+y^2=25$ implique $4\,y^2+40\,y+100+y^2-25=0$ i.e. $5\,y^2+40\,y+75=0$

Mais $5\,y^2+40\,y+75 = 5\,(y^2+8\,y+15) = 5\,(y+3)\,(y+5) = 0$ d'où l'on déduit :

$y_1=-3$ et $x_1 = 2\cdot(-3)+10 = 4$ B$(4\,;-3)$

$y_2 = -5$ et $x_2 = 2 \cdot (-5) + 10 = 0 \quad \mathrm{H}(0\,;-5)$

Calcul de la droite AB, tangente au cercle γ issue de B :
Puisque $\mathrm{B} \in \gamma$, on peut utiliser l'équation dédoublée du cercle γ ; AB : $4\,x - 3\,y = 25$.

Calcul de la droite AC, perpendiculaire à h_{B} passant par E :
Comme $h_{\mathrm{B}} : x - 2\,y - 10 = 0$, la droite AC est de la forme $2\,x + y + c = 0$.
Étant donné que $\mathrm{E} \in \mathrm{AC}$, on a : $2 \cdot (-4) + (-7) + c = 0$ d'où l'on tire $c = 15$.
L'équation de la droite AC est donc AC : $2\,x + y + 15 = 0$.

Calcul du point A, intersection des droites AB et AC :

$$\begin{cases} 4\,x - 3\,y - 25 = 0 \\ 2\,x + \,y + 15 = 0 \end{cases} \left| \begin{matrix} \\ \cdot 3 \end{matrix} \right. \qquad \begin{cases} 4\,x - 3\,y - 25 = 0 \\ 6\,x + 3\,y + 45 = 0 \end{cases} \quad 10\,x + 20 = 0 \quad x = -2$$

$2 \cdot (-2) + y + 15 = 0$ donne $y = -11$, si bien que $\mathrm{A}(-2\,;-11)$.

Calcul de la hauteur h_{C} issue du point C, perpendiculaire à AB passant par H :
Comme AB : $4\,x - 3\,y - 25 = 0$, la droite h_{C} est de la forme $3\,x + 4\,y + c = 0$.
De plus, $\mathrm{H} \in h_{\mathrm{C}}$ de sorte que $3 \cdot 0 + 4 \cdot (-5) + c = 0$ i.e. $c = 20$.
Dès lors, on obtient $h_{\mathrm{C}} : 3\,x + 4\,y + 20 = 0$.

Calcul du point C, intersection des droites AC et h_{C} :

$$\begin{cases} 2\,x + \,y + 15 = 0 \\ 3\,x + 4\,y + 20 = 0 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot(-4) \\ \\ \end{matrix} \right. \qquad \begin{cases} -8\,x - 4\,y - 60 = 0 \\ 3\,x + 4\,y + 20 = 0 \end{cases} \quad -5\,x - 40 = 0 \quad x = -8$$

$2 \cdot (-8) + y + 15 = 0$ implique $y = 1$, d'où l'on conclut $\mathrm{C}(-8\,;1)$.