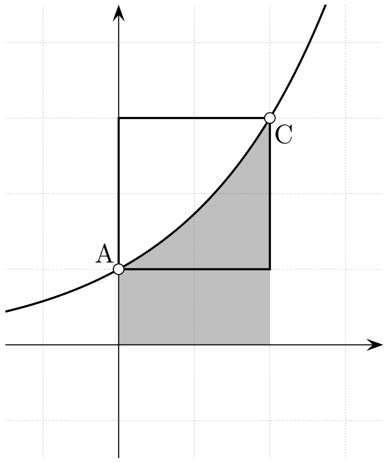
Chamblandes 2006 — Exercice 3



On pose $f(x) = e^{k\,x}$.

a) $f(0) = e^{k \cdot 0} = e^0 = 1$: le graphe de f passe bien par $\mathrm{A}(0\,;1)$.

Pour que le graphe de f passe par $\mathrm{C}(2\,;3)$, on doit avoir : $3 = f(2) = e^{k \cdot 2}$.
Il en résulte $\ln(3) = k \cdot 2$, c'est-à-dire $k = \frac{\ln(3)}{2}$.

b) L'aire grisée vaut :

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 e^{k\,x}\,dx = \int_0^2 e^{k\,x} \cdot k \cdot \tfrac{1}{k}\,dx = \tfrac{1}{k}\int_0^2 e^{k\,x} \cdot k\,dx = \tfrac{1}{k}\,e^{k\,x}\Big|_0^2 = \tfrac{1}{k}\,e^{k \cdot 2} - \tfrac{1}{k}\,e^{k \cdot 0} =$$
$$\frac{1}{\frac{\ln(3)}{2}}\,e^{\frac{\ln(3)}{2} \cdot 2} - \frac{1}{\frac{\ln(3)}{2}}\,e^{\frac{\ln(3)}{2} \cdot 0} = \tfrac{2}{\ln(3)}\,e^{\ln(3)} - \tfrac{2}{\ln(3)}\,e^0 = \tfrac{2}{\ln(3)} \cdot 3 - \tfrac{2}{\ln(3)} \cdot 1 = \tfrac{6}{\ln(3)} - \tfrac{2}{\ln(3)} =$$
$$\tfrac{4}{\ln(3)} \approx 3{,}64$$

La plus petite aire découpée dans le carré par le graphe de f vaut donc :
$\frac{4}{\ln(3)} - 2 \cdot 1 = \frac{4 - 2\,\ln(3)}{\ln(3)} \approx 1{,}64$.

La plus grande aire découpée dans le carré par le graphe de f est par conséquent :
$$2^2 - \tfrac{4-2\,\ln(3)}{\ln(3)} = \tfrac{4\,\ln(3) - \big(4 - 2\,\ln(3)\big)}{\ln(3)} = \tfrac{6\,\ln(3) - 4}{\ln(3)} \approx 2{,}36$$

Enfin, le rapport de la plus petite à la plus grande des deux aires découpées par le graphe de f dans le carré vaut :
$$\frac{\frac{4-2\,\ln(3)}{\ln(3)}}{\frac{6\,\ln(3)-4}{\ln(3)}} = \tfrac{4-2\,\ln(3)}{6\,\ln(3)-4} \approx 0{,}7$$