4.6 Résolvons l'équation vectorielle

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix}1\\3\\4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

qui équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + 3\,\alpha_4 = 0 \\ 2\,\alpha_2 + 2\,\alpha_3 + 4\,\alpha_4 = 0 \\ 2\,\alpha_1 + \alpha_2 + 3\,\alpha_3 + 8\,\alpha_4 = 0 \end{cases} \overset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - 2\,L_1}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\,\alpha_4 = 0 \\ 2\,\alpha_2 + 2\,\alpha_3 + 4\,\alpha_4 = 0 \\ 3\,\alpha_2 + 3\,\alpha_3 + 6\,\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\overset{\substack{L_3 \to L_3 - 2\,L_2 \\ L_4 \to L_4 - 3\,L_2}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\,\alpha_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \overset{L_1 \to L_1 + L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 + 3\,\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\,\alpha_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il y a deux variables libres : α_3 et α_4. En posant $\alpha_3 = \alpha$ et $\alpha_4 = \beta$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha - 3\,\beta \\ \alpha_2 = -\alpha - 2\,\beta \\ \alpha_3 = \alpha \\ \alpha_4 = \beta \end{cases}$$

Puisque, outre la solution triviale, il y a une infinité de solutions, la famille $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\3\\4\\8\end{pmatrix} \right\}$ n'est pas libre : elle est liée.

Par exemple $-4 \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\\4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.