

3.1

1) $\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0 + 0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0$

En ajoutant l'opposé du vecteur $\alpha \cdot 0$ aux deux membres de cette égalité, on trouve :

$$0 = \alpha \cdot 0$$

2) $0 \cdot u = (0 + 0) \cdot u = 0 \cdot u + 0 \cdot u$

En ajoutant l'opposé du vecteur $\alpha \cdot u$ aux deux membres de cette égalité, on obtient :

$$0 = 0 \cdot u$$

3) \Leftarrow

Si $\alpha = 0$, alors $\alpha \cdot u = 0 \cdot u = 0$, vu 2).

Si $u = 0$, alors $\alpha \cdot u = \alpha \cdot 0 = 0$, d'après 1).

\Rightarrow

(a) Supposons $\alpha = 0$.

Alors on a évidemment $\alpha = 0$ ou $u = 0$.

(b) Supposons $\alpha \neq 0$.

$$u = 1 \cdot u = \left(\frac{1}{\alpha} \alpha\right) \cdot u = \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha \cdot u) = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0$$

Puisque $u = 0$, on conclut également que $\alpha = 0$ ou $u = 0$.

4) $0 = 0 \cdot u = (\alpha + (-\alpha)) \cdot u = \alpha \cdot u + (-\alpha) \cdot u$

signifie que $(-\alpha) \cdot u = -(\alpha \cdot u)$

$$0 = \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (u + (-u)) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot (-u)$$

implique que $\alpha \cdot (-u) = -(\alpha \cdot u)$