8.11

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} \overset{\substack{C_1 \to C_1 - C_4 \\ C_2 \to C_2 - C_4 \\ C_3 \to C_3 - C_4 \\ =}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x-c & -c & -c & c \end{vmatrix}} = -1 \begin{vmatrix} x & a & 0 \\ x & 0 & b \\ x-c & -c & -c \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x & a & 0 \\ x & 0 & b \\ c-x & c & c \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & c \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} x & b \\ c-x & c \end{vmatrix} = -b\,c\,x - a\,c\,x + a\,b\,c - a\,b\,x$$

Si cette dernière expression s'annule, alors on obtient :

$a\,b\,c = b\,c\,x + a\,c\,x + a\,b\,x = (b\,c + a\,c + a\,b)\,x$

$$\frac{a\,b\,c}{x} = b\,c + a\,c + a\,b$$

$$\frac{1}{x} = \frac{b\,c}{a\,b\,c} + \frac{a\,c}{a\,b\,c} + \frac{a\,b}{a\,b\,c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$