Chamblandes 2009 — Problème 5

a) $f(x) = (x^3 + 2\,x^2)\,e^x = x^2\,(x+2)\,e^x$

		-2		0	
x^2	$+$		$+$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
e^x	$+$		$+$		$+$
f	$-$	0	$+$	0	$+$

Attendu que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$, la fonction f ne possède aucune asymptote verticale.

Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, f admet $y = 0$ comme asymptote horizontale à gauche.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 2\,x^2)\,e^x = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3\,e^x = (+\infty)^3 \cdot e^{+\infty} = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

Il n'y a ainsi pas d'asymptote horizontale à droite.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \big((x^3 + 2\,x^2)\,e^x\big)' \\
&= (x^3 + 2\,x^2)'\,e^x + (x^3 + 2\,x^2)\,(e^x)' \\
&= (3\,x^2 + 4\,x)\,e^x + (x^3 + 2\,x^2)\,e^x \\
&= \big((3\,x^2 + 4\,x) + (x^3 + 2\,x^2)\big)\,e^x \\
&= (x^3 + 5\,x^2 + 4\,x)\,e^x \\
&= x\,(x^2 + 5\,x + 4)\,e^x \\
&= x\,(x+4)\,(x+1)\,e^x
\end{aligned}$$

		-4		-1		0	
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
e^x	$+$		$+$		$+$		$+$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(-4) = \big((-4)^3 + 2 \cdot (-4)^2\big)\,e^{-4} = -32\,e^{-4} = -\frac{32}{e^4} \approx -0,59$

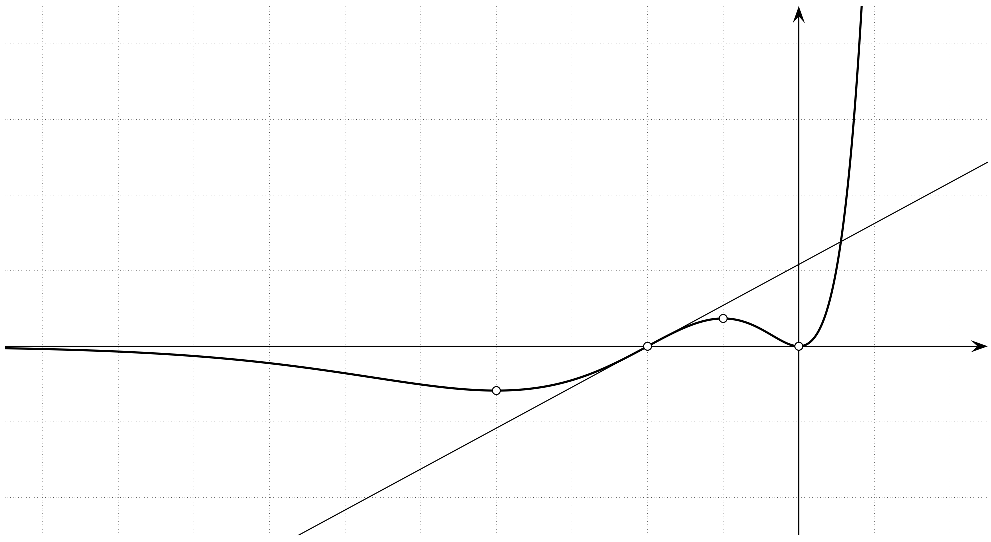
Le point $\big(-4\,;-\frac{32}{e^4}\big)$ est un minimum (absolu).

$f(-1) = \big((-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2\big)\,e^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37$

Le point $\big(-1\,;\frac{1}{e}\big)$ est un maximum (local).

$f(0) = (0^3 + 2 \cdot 0^2)\,e^0 = 0 \cdot 1 = 0$

Le point $(0\,;0)$ est un minimum (local).



b) La pente de la tangente au graphe de f au point $\mathrm{P}(-2\,;0)$ vaut :
$f'(-2) = \big((-2)^3 + 5\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-2)\big)\,e^{-2} = 4\,e^{-2} = \frac{4}{e^2}$

Écrivons encore l'équation de cette tangente :
$y - 0 = \frac{4}{e^2}\,\big(x - (-2)\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{4}{e^2}\,x + \frac{8}{e^2}$