4.5 Résolvons l'équation vectorielle

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui équivaut au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 & & = 0 \\ \alpha_1 + 2\,\alpha_2 & & = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 5\,\alpha_3 & & = 0 \end{array}\right. \overset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 & & = 0 \\ 2\,\alpha_2 & & = 0 \\ \alpha_2 + 5\,\alpha_3 & & = 0 \end{array}\right. \overset{L_3 \to 2\,L_3 - L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 & & = 0 \\ 2\,\alpha_2 & & = 0 \\ 10\,\alpha_3 & & = 0 \end{array}\right. \overset{\substack{L_2 \to \frac{1}{2}\,L_2 \\ L_3 \to \frac{1}{10}\,L_3}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 & & = 0 \\ \alpha_2 & & = 0 \\ \alpha_3 & & = 0 \end{array}\right.$$

Puisque l'unique solution est la solution triviale $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.