Chamblandes 2009 — Problème 6

Le théorème de Pythagore permet de calculer la longueur de l'arête BC :
$\mathrm{BC} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2} = \sqrt{(12\,x)^2 + (5\,x)^2} = \sqrt{169\,x^2} = 13\,x$

La somme des aires des cinq faces du « coin » vaut :
$2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 5\,x \cdot 12\,x\right) + 12\,x\,y + 5\,x\,y + 13\,x\,y = 60\,x^2 + 30\,x\,y$

Par ailleurs, on a une condition sur le volume du « coin » :
$960 = \frac{1}{2}\,12\,x \cdot 5\,x \cdot y = 30\,x^2\,y$

On en déduit :
$y = \frac{960}{30\,x^2} = \frac{32}{x^2}$

ce qui permet d'exprimer la somme des aires des cinq faces du « coin » comme fonction de x :
$f(x) = 60\,x + 30\,x \cdot \frac{32}{x^2} = 60\,x^2 + \frac{960}{x}$

Le problème consiste donc à déterminer le minimum de cette fonction f :
$f'(x) = \left(60\,x^2 + \frac{960}{x}\right)' = 120\,x + \frac{(960)'\,x - 960 \cdot x'}{x^2} = 120\,x + \frac{0 \cdot x - 960 \cdot 1}{x^2} = 120\,x - \frac{960}{x^2} = \frac{120\,x^3 - 960}{x^2}$
$\quad = \frac{120\,(x^3-8)}{x^2} = \frac{120\,(x-2)\,(x^2+2\,x+4)}{x^2}$

		0		2	
120	$+$	‖	$+$	|	$+$
$x-2$	$-$	‖	$-$	0	$+$
$x^2+2\,x+4$	$+$	‖	$+$	|	$+$
x^2	$+$	‖	$+$	|	$+$
f'	$-$	‖	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$

On conclut que la somme des aires des cinq faces du « coin » est minimale si $x = 2$.
Dans ce cas, $y = \frac{32}{2^2} = 8$.