Chamblandes 2002 — Problème 2.3

a) Rappelons que les composantes des vecteurs $f(e_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ sont données par les colonnes de la matrice A :

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad f(e_2) = \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \end{pmatrix} \qquad f(e_3) = \begin{pmatrix} c \\ d \\ a \end{pmatrix}$$

- $f(e_1) \perp e_1$ implique $0 = f(e_1) \cdot e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = a$

  $f(e_2) \perp e_2$ implique $0 = f(e_2) \cdot e_2 = \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b \cdot 0 + a \cdot 1 + d \cdot 0 = a$

  $f(e_3) \perp e_3$ implique $0 = f(e_3) \cdot e_3 = \begin{pmatrix} c \\ d \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c \cdot 0 + d \cdot 0 + a \cdot 1 = a$

  On en tire donc que $a = 0$ et que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ b & 0 & d \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$.

- $\sqrt{2} = \|f(e_1)\|$ donne $2 = \|f(e_1)\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\|^2 = 0^2 + b^2 + c^2 = b^2 + c^2$

  $\sqrt{2} = \|f(e_2)\|$ donne $2 = \|f(e_2)\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \right\|^2 = b^2 + 0^2 + d^2 = b^2 + d^2$

  $\sqrt{2} = \|f(e_3)\|$ donne $2 = \|f(e_3)\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = c^2 + d^2 + 0^2 = c^2 + d^2$

  Résolvons le système $\begin{cases} b^2 + c^2 = 2 \\ b^2 + + d^2 = 2 \\ c^2 + d^2 = 2 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to -\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{L}_3 \to \frac{1}{2}\mathrm{L}_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \iff \begin{cases} b^2 = 1 \\ c^2 = 1 \\ d^2 = 1 \end{cases}$$

- Puisque les composantes numériques de $f(e_i)$ sont positives pour tout $1 \leqslant i \leqslant 3$, on conclut que $b = c = d = 1$ et que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{L_1 \to L_1 + \lambda L_3 \\ L_2 \to L_2 - L_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1+\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & -1-\lambda & 1+\lambda \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda^2 \\ -1-\lambda & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 \big(1-(-1)\,(1-\lambda)\big) = (1+\lambda)^2\,(2-\lambda)$$

On obtient donc deux valeurs propres : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$.

Déterminons l'espace propre E_{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-(-1) & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0-(-1) & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0-(-1) & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = -\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\big\} = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Déterminons l'espace propre E_2 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0-2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0-2 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_1 - L_2 \\ L_3 \to L_3 + 2L_1}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to \frac{1}{3} L_2 \\ L_3 \to \frac{1}{3} L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to L_1 - L_2 \\ L_3 \to L_3 - L_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

c) Dans la base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, la matrice de f est :

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f est ainsi la composée commutative

(i) d'une symétrie de base $E_{-2} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et de direction $E_{-1} = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

(ii) et d'une dilatation de facteur 2 et de direction $E_{-2} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.