5.9 Pour calculer dim(F + G), il suffit de calculer le rang de la matrice dont les lignes sont constituées des générateurs de F et de G.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 0 & -5 & -2 \\ 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & -1 & -6 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & -5 & -6 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1 \\ L_5 \to L_5 - 2L_1 \\ L_6 \to L_6 - L_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \to L_3 - 3L_2 \\ L_4 \to L_4 - 3L_2 \\ L_5 \to L_5 - 2L_2}}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftrightarrow L_5 \\ L_5 \leftrightarrow L_6}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_4 \to L_4 + L_3 \\ L_5 \to L_5 - 2L_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Attendu que cette matrice est de rang 3, on conclut que $\dim(F + G) = 3$.

Calculons dim(F) en déterminant le rang de la matrice formée par les générateurs de F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \to L_3 - 3L_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque cette matrice est de rang 2, on a obtenu $\dim(F) = 2$.

De même, calculons dim(G) en déterminant le rang de la matrice formée par les générateurs de G.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & -1 & -6 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & -5 & -6 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -11 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \to 4L_3 - 3L_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -15 \end{pmatrix}$$

Vu que cette matrice est de rang 3, il s'ensuit que $\dim(G) = 3$.

Finalement, la relation de Grassmann implique

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = 2 + 3 - 3 = 2\,.$$