**6.16** 1) Résolvons le système $\begin{cases} x - y + \phantom{2}z + \phantom{3}t = 0 \\ x \phantom{- y} + 2z - \phantom{3}t = 0 \\ x + y + 3z - 3t = 0 \end{cases}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 - 2L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \to L_1 + L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On constate que $z$ et $t$ sont des variables libres ; on pose $z = \alpha$ et $t = \beta$ pour écrire la solution générale :

$$\begin{cases} x = -2\alpha + \beta \\ y = -\alpha + 2\beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = -\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(h)$ admet pour base $\left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

2) $h(1;0;0;0) = (1 - 0 + 0 + 0 ; 1 + 2 \cdot 0 - 0 ; 1 + 0 + 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0) = (1;1;1)$
$h(0;1;0;0) = (0 - 1 + 0 + 0 ; 0 + 2 \cdot 0 - 0 ; 0 + 1 + 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0) = (-1;0;1)$
$h(0;0;1;0) = (0 - 0 + 1 + 0 ; 0 + 2 \cdot 1 - 0 ; 0 + 0 + 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0) = (1;2;3)$
$h(0;0;0;1) = (0 - 0 + 0 + 1 ; 0 + 2 \cdot 0 - 1 ; 0 + 0 + 3 \cdot 0 - 3 \cdot 1) = (1;-1;-3)$

Échelonnons la matrice formée par ces quatre générateurs de $\mathrm{Im}(h)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_3 \to L_3 - L_2 \\ L_4 \to L_4 + 2L_2}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{Im}(h)$ admet pour base $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.