2.10 1) Le système $\begin{cases} 2\,x+2\,y+3\,z=5 \\ x \quad\quad +\; z=-2 \\ x+\;y+\;z=3 \end{cases}$ peut également s'écrire

$$\begin{pmatrix}2&2&3\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}.$$

Calculons $\begin{pmatrix}2&2&3\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{\mathrm{L}_1\leftrightarrow\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\2&2&3&1&0&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{\substack{\mathrm{L}_2\to\mathrm{L}_2-2\,\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_3\to\mathrm{L}_3-\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&2&1&1&-2&0\\0&1&0&0&-1&1\end{array}\right)\overset{\mathrm{L}_2\leftrightarrow\mathrm{L}_3}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&-1&1\\0&2&1&1&-2&0\end{array}\right)\overset{\mathrm{L}_3\to\mathrm{L}_3-2\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&-1&1\\0&0&1&1&0&-2\end{array}\right)\overset{\mathrm{L}_1\to\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_3}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&2\\0&1&0&0&-1&1\\0&0&1&1&0&-2\end{array}\right)$$

On a ainsi trouvé $\begin{pmatrix}2&2&3\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&-1&1\\1&0&-2\end{pmatrix}$.

On en tire $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&-1&1\\1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-1\end{pmatrix}$.

On conclut $\mathrm{S}=\{(-1\,;5\,;-1)\}$.

2) Le système $\begin{cases} 3\,x+5\,y+4\,z=3 \\ 4\,x+5\,y+4\,z=0 \\ -x-\;y-\;z=2 \end{cases}$ peut également s'écrire

$$\begin{pmatrix}3&5&4\\4&5&4\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Calculons $\begin{pmatrix}3&5&4\\4&5&4\\-1&-1&-1\end{pmatrix}^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&5&4&1&0&0\\4&5&4&0&1&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)\overset{\mathrm{L}_1\leftrightarrow\mathrm{L}_3}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&-1&-1&0&0&1\\4&5&4&0&1&0\\3&5&4&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{L_2 \to L_2 + 4\,L_1 \\ L_3 \to L_3 + 3\,L_1}}{\Longrightarrow} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \quad \overset{\substack{L_1 \to -L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2\,L_2}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \quad \overset{L_1 \to L_1 - L_3}{\Longrightarrow} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 \to L_1 - L_2}{\Longrightarrow} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

On a donc obtenu $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

On en déduit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Finalement $S = \{(-3\,;8\,;-7)\}$.

3) Le système $\begin{cases} x + 2\,y + 3\,z = 1 \\ 2\,x - y - 2\,z = 5 \\ 3\,x + 5\,y + z = 10 \end{cases}$ peut également s'écrire $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Calculons $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \overset{\substack{L_2 \to L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3\,L_1}}{\Longrightarrow} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longrightarrow} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \overset{L_3 \to L_3 - 5\,L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 32 & 13 & 1 & -5 \end{array}\right) \quad \overset{\substack{L_1 \to 32\,L_1 - 3\,L_3 \\ L_2 \to 4\,L_2 + L_3}}{\Longrightarrow} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 32 & 64 & 0 & -7 & -3 & 15 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 32 & 13 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 \to L_1 + 16\,L_2}{\Longrightarrow} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 32 & 0 & 0 & 9 & 13 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 32 & 13 & 1 & -5 \end{array}\right) \quad \overset{\substack{L_1 \to \frac{1}{32}\,L_1 \\ L_2 \to -\frac{1}{4}\,L_2 \\ L_3 \to \frac{1}{32}\,L_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{32} & \frac{13}{32} & -\frac{1}{32} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{32} & \frac{1}{32} & -\frac{5}{32} \end{array}\right)$$

Ce calcul donne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{32} & \frac{13}{32} & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{13}{32} & \frac{1}{32} & -\frac{5}{32} \end{pmatrix}$.

Il en résulte $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{32} & \frac{13}{32} & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{13}{32} & \frac{1}{32} & -\frac{5}{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a donc trouvé $\mathrm{S} = \big\{(2\,;1\,;-1)\big\}$.

4) Le système $\begin{cases} 2\,x + y + 5\,z + t = 5 \\ x + y - 3\,z - 4\,t = -1 \\ 3\,x + 6\,y - 2\,z + t = 8 \\ 2\,x + 2\,y + 2\,z - 3\,t = 2 \end{cases}$ s'écrit sous forme matricielle

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculons $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 3\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - 2\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & 9 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 13 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + 3\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & 9 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 40 & 3 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to -\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \leftrightarrow \mathrm{L}_4}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -9 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 40 & 40 & 3 & -9 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - 5\,\mathrm{L}_3}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -9 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 3 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \to 3\,L_3 - L_4}}{\overset{\substack{L_1 \to 15\,L_1 + 4\,L_4 \\ L_2 \to 5\,L_2 + 3\,L_4}}{\Longrightarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 15 & 15 & -45 & 0 & 12 & 19 & 4 & -20 \\ 0 & 5 & -55 & 0 & 4 & 13 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & -3 & -7 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 3 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to 8\,L_1 + 15\,L_3 \\ L_2 \to 24\,L_2 + 55\,L_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 120 & 120 & 0 & 0 & 51 & 47 & 17 & -40 \\ 0 & 120 & 0 & 0 & -69 & -73 & 17 & 80 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & -3 & -7 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 3 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \overset{L_1 \to L_1 - L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 120 & 0 & 0 & 0 & 120 & 120 & 0 & -120 \\ 0 & 120 & 0 & 0 & -69 & -73 & 17 & 80 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & -3 & -7 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 3 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to \frac{1}{120}\,L_1 \\ L_2 \to \frac{1}{120}\,L_2 \\ L_3 \to \frac{1}{24}\,L_3 \\ L_4 \to \frac{1}{15}\,L_4}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{23}{40} & -\frac{73}{120} & \frac{17}{120} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

On a trouvé $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{23}{40} & -\frac{73}{120} & \frac{17}{120} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{120}\begin{pmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \dfrac{1}{120}\begin{pmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{120}\begin{pmatrix} 240 \\ 24 \\ 0 \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

On conclut finalement que $S = \{(2\,;\frac{1}{5}\,;0\,;\frac{4}{5})\}$.