Chamblandes 2012 — Problème 8

a) Calculons les valeurs propres de A :

$$0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{C}_3 \to \mathrm{C}_3 - \mathrm{C}_2}{=} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -(1-\lambda) \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\,(3-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{C}_1 \to \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2}{=} (1-\lambda)\,(3-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\,(3-\lambda)\,(-3-\lambda)$$

On trouve ainsi les valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = -3$.

(1) Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2\,y+2\,z \\ 2\,x+y \\ 2\,x+z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} -2\,x + 2\,y + 2\,z = 0 \\ 2\,x = 0 \\ 2\,x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Seule la variable z est libre. En posant $z = \alpha$, on obtient la solution :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est $\mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(2) Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2\,y+2\,z \\ 2\,x+y \\ 2\,x+z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x \\ 3\,y \\ 3\,z \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} -4\,x + 2\,y + 2\,z = 0 \\ 2\,x - 2\,y = 0 \\ 2\,x - 2\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ -2\,x + y + z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Seule la variable z est libre. En posant $z = \alpha$, on obtient la solution :
$$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{array}\right. = \alpha \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$ est $\mathrm{E}_3 = \Delta\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

(3) Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = -3$:
$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x+2\,y+2\,z\\ 2\,x+y\\ 2\,x+z\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\,x\\-3\,y\\-3\,z\end{pmatrix} \iff$$
$$\left\{\begin{array}{l} 2\,x + 2\,y + 2\,z = 0 \\ 2\,x + 4\,y = 0 \\ 2\,x + 4\,z = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + 2\,y = 0 \\ x + 2\,z = 0 \end{array}\right. \iff$$
$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ \phantom{x+{}} y - z = 0 \\ - y + z = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ \phantom{x+{}} y - z = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x + 2\,z = 0 \\ \phantom{x+{}} y - z = 0 \end{array}\right.$$
Seule la variable z est libre. En posant $z = \alpha$, on obtient la solution :
$$\left\{\begin{array}{l} x = -2\,\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{array}\right. = \alpha \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = -3$ est $\mathrm{E}_{-3} = \Delta\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

b) & c) **1^re^ méthode**

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 4\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

Calculons les valeurs propres de A^2 :
$$0 = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 5-\lambda & 4\\ 0 & 4 & 5-\lambda\end{vmatrix} = (9-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix} = (9-\lambda)\left((5-\lambda)^2 - 4^2\right)$$
$$= (9-\lambda)\,(\lambda^2 - 10\,\lambda + 9) = (9-\lambda)\,(\lambda - 9)\,(\lambda - 1)$$
On conclut que la matrice A^2 possède deux valeurs propres $\lambda_1 = 9$ et $\lambda_2 = 1$.

(1) Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 9$:
$$\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 4\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\,x\\ 5\,y+4\,z\\ 4\,y+5\,z\end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\,x\\9\,y\\9\,z\end{pmatrix} \iff$$

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= 0 \\ -\,4\,y + 4\,z &= 0 \\ 4\,y - 4\,z &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{ y - z = 0 \right.$$

Seule la variable y est pivot, les variables x et z étant libres.

On obtient donc la solution $\left\{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \quad\ \beta \\ z = \quad\ \beta \end{array}\right. = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 9$ est : $\mathrm{E}_9 = \Pi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(2) Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\,x \\ 5\,y + 4\,z \\ 4\,y + 5\,z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff$$

$$\left\{\begin{aligned} 8\,x \qquad\qquad &= 0 \\ 4\,y + 4\,z &= 0 \\ 4\,y + 4\,z &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} x \qquad\qquad &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}\right.$$

Seule la variable z est libre. En posant $z = \alpha$, on obtient la solution :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \quad 0 \\ y = -\alpha \\ z = \quad \alpha \end{array}\right. = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1$ est $\mathrm{E}_1 = \Delta \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

La matrice A^2 est diagonalisable, attendu que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forment une base de vecteurs propres.

En posant $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on vérifie que :

$$\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}^2\,\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2e méthode

Montrons que si v est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ, alors v est un vecteur propre de la matrice A^2 associé à la valeur propre λ^2 :

$\mathrm{A}^2\,v = (\mathrm{A} \cdot \mathrm{A})\,v = \mathrm{A}\,(\mathrm{A}\,v) = \mathrm{A}\,(\lambda\,v) = \lambda\,(\mathrm{A}\,v) = \lambda\,(\lambda\,v) = (\lambda \cdot \lambda)\,v = \lambda^2\,v$

Sans faire le moindre calcul, mais en reprenant les résultats obtenus en a), on conclut aussitôt que :

(1) le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A^2 associé à la valeur propre $1^2 = 1$

(2) le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A^2 associé à la valeur propre $3^2 = 9$

(3) le vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A^2 associé à la valeur propre $(-3)^2 = 9$

On constate que la matrice A^2 ne possède que deux valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 9$ avec pour espaces propres associés $\mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{E}_9 = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Étant donné que $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ forment une base de vecteurs propres, la matrice A^2 est diagonalisable.

En posant $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on s'assure que :

$$\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}^2\,\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$