

2.5

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 6L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_2 \rightarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \rightarrow -\frac{1}{5}L_3}} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Puisqu'il y a 2 lignes non nulles, le rang vaut 2.

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 5L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -34 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_2 \rightarrow -\frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \rightarrow -\frac{1}{2}L_3}} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 17 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 4L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_3 \rightarrow \frac{1}{5}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \xRightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 - 7L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 3L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Comme il y a 3 lignes non nulles, le rang de la matrice est 3.