11.9 $\left\{ x+y+z=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right.$

La symétrie orthogonale s admet pour base $\mathrm{E}_1 = \Pi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

et pour direction $\mathrm{E}_{-1} = \Delta \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Soit la base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Dans la base $\mathcal{B}'$, la symétrie orthogonale s a pour matrice $\mathrm{S}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$. Alors $\mathrm{S}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{S}\mathrm{P}$ où S désigne la matrice de la symétrie orthogonale s, de sorte que $\mathrm{S} = \mathrm{P}\mathrm{S}'\mathrm{P}^{-1}$.

Calculons l'inverse de la matrice de passage P :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \frac{1}{3}\mathrm{L}_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

On trouve donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{S} = \mathrm{P}\mathrm{S}'\mathrm{P}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left\{ 3x + y + 4z = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -3\alpha - 4\beta \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right.$$

La symétrie orthogonale s admet pour base $\mathrm{E}_1 = \Pi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

et pour direction $\mathrm{E}_{-1} = \Delta \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$.

Soit la base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$.

Dans la base $\mathcal{B}'$, la symétrie orthogonale t a pour matrice $\mathrm{T}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$. Alors $\mathrm{T}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{TP}$ où T désigne la matrice de la symétrie orthogonale t, de sorte que $\mathrm{T} = \mathrm{PT}'\mathrm{P}^{-1}$.

Calculons l'inverse de la matrice de passage P :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + 3\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 10 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + 4\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \frac{1}{26}\mathrm{L}_3}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} & \frac{2}{13} \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - 3\,\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 4\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{26} & -\frac{3}{26} & -\frac{6}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{12}{26} & -\frac{4}{26} & \frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} & \frac{2}{13} \end{array}\right)$$

On obtient ainsi :

$$\mathrm{T} = \mathrm{PT}'\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{17}{26} & -\frac{3}{26} & -\frac{6}{13} \\ -\frac{12}{26} & -\frac{4}{26} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{26} & \frac{1}{26} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{17}{26} & -\frac{3}{26} & -\frac{6}{13} \\ -\frac{12}{26} & -\frac{4}{26} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{26} & \frac{1}{26} & \frac{2}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{12}{13} & -\frac{4}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{3}{13} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{R} = \mathrm{ST} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{12}{13} & -\frac{4}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{3}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{34}{39} & -\frac{19}{39} & \frac{2}{39} \\ \frac{13}{39} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{14}{39} & -\frac{22}{39} & \frac{29}{39} \end{pmatrix}$$

Puisque les matrices S et T correspondent à des symétries orthogonales, elles sont des matrices orthogonales de déterminant -1.

Donc ${}^t\mathrm{RR} = {}^t(\mathrm{ST})\mathrm{ST} = {}^t\mathrm{T}\,\underbrace{{}^t\mathrm{SS}}_{\mathrm{I}}\,\mathrm{T} = {}^t\mathrm{TT} = \mathrm{I}$: R est orthogonale.

$\det(\mathrm{R}) = \det(\mathrm{ST}) = \det(\mathrm{S}) \cdot \det(\mathrm{T}) = (-1) \cdot (-1) = 1.$

La matrice R est ainsi la matrice d'une rotation.

Déterminons son axe de rotation en calculant l'espace propre E_1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{34}{39} - 1 & -\frac{19}{39} & \frac{2}{39} & 0 \\ \frac{13}{39} & \frac{2}{3} - 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{14}{39} & -\frac{22}{39} & \frac{29}{39} - 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -19 & 2 & 0 \\ 13 & -13 & 26 & 0 \\ -14 & -22 & -10 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & -19 & 2 & 0 \\ -7 & -11 & -5 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_2 + 5\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + 7\,\mathrm{L}_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -24 & 12 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\substack{\mathrm{L}_2 \to \frac{1}{12}\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \frac{1}{9}\mathrm{L}_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - 2\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -3\,\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2\,\alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Calculons enfin l'angle de la rotation :

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{Tr}(\mathrm{R}) - 1}{2} = \frac{\frac{34}{39} + \frac{2}{3} + \frac{29}{39} - 1}{2} = \frac{25}{39}$$

$\alpha = \arccos\left(\frac{25}{39}\right) \approx 50{,}13^\circ$