11.8 1) $$ {}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I} $$

$$ \det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5} \cdot \left(-\tfrac{3}{5}\right) = 1 $$

La matrice A indique immédiatement que $h(e_3) = e_3$:

l'axe de la rotation est donc $\Delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

La matrice A signale également tout de suite que $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$ et $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$.
L'angle de la rotation vaut ainsi $\alpha \approx 36{,}87^\circ$.

2) $$ {}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{23}{49} & -\frac{36}{49} & \frac{24}{49} \\ -\frac{36}{49} & -\frac{31}{49} & -\frac{12}{49} \\ \frac{24}{49} & -\frac{12}{49} & -\frac{41}{49} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{23}{49} & -\frac{36}{49} & \frac{24}{49} \\ -\frac{36}{49} & -\frac{31}{49} & -\frac{12}{49} \\ \frac{24}{49} & -\frac{12}{49} & -\frac{41}{49} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I} $$

$$ \det(\mathrm{A}) = \left(\tfrac{1}{49}\right)^3 \begin{vmatrix} 23 & -36 & 24 \\ -36 & -31 & -12 \\ 24 & -12 & -41 \end{vmatrix} = \tfrac{12}{49^3} \begin{vmatrix} 23 & -36 & 24 \\ -3 & -\frac{31}{12} & -1 \\ 24 & -12 & -41 \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + 24\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 41\,\mathrm{L}_2}}{=} $$

$$ = \tfrac{12}{49^3} \begin{vmatrix} -49 & -98 & 0 \\ -3 & -\frac{31}{12} & -1 \\ 147 & \frac{1127}{12} & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{12}{49^3} \begin{vmatrix} -49 & -98 \\ 147 & \frac{1127}{12} \end{vmatrix} = \tfrac{12 \cdot 49^2}{49^3} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & \frac{23}{12} \end{vmatrix} $$

$$ \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + 3\,\mathrm{L}_1}{=} \tfrac{12}{49} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -\frac{49}{12} \end{vmatrix} = \tfrac{12}{49} \cdot (-1) \cdot \left(-\tfrac{49}{12}\right) = 1 $$

Déterminons l'axe de la rotation en calculant l'espace propre E_1 :

$$ \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{23}{49} - 1 & -\frac{36}{49} & \frac{24}{49} & 0 \\ -\frac{36}{49} & -\frac{31}{49} - 1 & -\frac{12}{49} & 0 \\ \frac{24}{49} & -\frac{12}{49} & -\frac{41}{49} - 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -26 & -36 & 24 & 0 \\ -36 & -80 & -12 & 0 \\ 24 & -12 & -90 & 0 \end{array}\right) $$

$$ \overset{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -15 & 0 \\ 9 & 20 & 3 & 0 \\ 13 & 18 & -12 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to 4\,\mathrm{L}_2 - 9\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to 4\,\mathrm{L}_3 - 13\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -15 & 0 \\ 0 & 98 & 147 & 0 \\ 0 & 98 & 147 & 0 \end{array}\right) $$

$$ \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 49\,\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 196 & 0 & -588 & 0 \\ 0 & 98 & 147 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \frac{1}{196}\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to \frac{1}{98}\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) $$

$$ \begin{cases} x = 3\,\alpha \\ y = -\frac{3}{2}\,\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = 2\,\alpha \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) $$

Il reste encore à déterminer l'amplitude de la rotation :

$\cos(\alpha) = \dfrac{\mathrm{Tr(A)} - 1}{2} = \dfrac{\frac{23}{49} - \frac{31}{49} - \frac{41}{49} - 1}{2} = -1$

$\alpha = \pi \text{ rad} = 180^\circ$

3) $$^t\mathrm{AA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

$$\det(\mathrm{A}) = \left(\tfrac{1}{9}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + 4\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 8\,\mathrm{L}_1}}{=} \tfrac{1}{9^3} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & -9 & 36 \\ 0 & 36 & -63 \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{9^3} \begin{vmatrix} -9 & 36 \\ 36 & -63 \end{vmatrix} = \tfrac{9^2}{9^3} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{9}\big((-1)\cdot(-7) - 4\cdot 4\big) = -1$$

$\mathrm{Tr(A)} = \frac{1}{9} + \frac{7}{9} + \frac{1}{9} = 1$

A est ainsi la matrice d'une symétrie orthogonale.

Calculons l'espace propre E_1 pour déterminer le plan (la base) de la symétrie :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{9} - 1 & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & 0 \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} - 1 & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} - 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & -4 & 8 & 0 \\ -4 & -2 & 4 & 0 \\ 8 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \big\{\, 2\,x + y - 2\,z = 0 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\,\alpha + 2\,\beta \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, A est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathrm{E}_1 = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : 2\,x + y - 2\,z = 0\big\} = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Sans calculs, puisqu'il s'agit d'une symétrie orthogonale, on peut dire que la direction de la symétrie est $\mathrm{E}_{-1} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

4) $$^t\mathrm{AA} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

$$\det(\mathrm{A}) = \left(\tfrac{1}{7}\right)^3 \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathrm{C}_1 \to \mathrm{C}_1 + 3\,\mathrm{C}_2 \\ \mathrm{C}_3 \to \mathrm{C}_3 + \frac{3}{2}\,\mathrm{C}_2}}{=} \tfrac{1}{7^3} \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 7 & 3 & \frac{21}{2} \\ -21 & -6 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{7^3}\begin{vmatrix} 7 & \frac{21}{2} \\ -21 & -7 \end{vmatrix} = \frac{2\cdot 7^2}{7^3}\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{2}{7}\big(1\cdot(-1)-(-3)\cdot\tfrac{3}{2}\big)$$

$$= \frac{2}{7}\cdot\frac{7}{2} = 1$$

Calculons l'espace propre E_1 pour déterminer l'axe de la rotation :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{6}{7}-1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7}-1 & \frac{6}{7} & 0 \\ -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7}-1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & -5 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2\to\mathrm{L}_2-2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3\to\mathrm{L}_3-3\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2\,\alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases} = \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Calculons encore l'angle de la rotation :

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{Tr(A)}-1}{2} = \frac{\frac{6}{7}+\frac{3}{7}+\frac{2}{7}-1}{2} = \frac{2}{7}$$

$\alpha = \arccos(\frac{2}{7}) \approx 73{,}40^\circ$

5) $${}^t\mathrm{AA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

$$\det(\mathrm{A}) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^3\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_2\to\mathrm{L}_2-2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3\to\mathrm{L}_3+2\,\mathrm{L}_1}}{=} \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = \frac{3^2}{3^3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\big(2\cdot(-2)-(-1)\cdot 1\big) = -1$$

$\mathrm{Tr(A)} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \neq 1$

A est la matrice du produit d'une rotation et d'une symétrie orthogonale.

Déterminons l'espace propre E_{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{3}+1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3}+1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}+1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1\leftrightarrow\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2\to\mathrm{L}_2-2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3\to\mathrm{L}_3+\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2\to-\frac{1}{12}\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3\to\frac{1}{6}\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1\to\mathrm{L}_1+7\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3\to\mathrm{L}_3-\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 2\,\alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \mathrm{E}_{-1} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

A est ainsi la matrice du produit d'une rotation d'axe $\mathrm{E}_{-1} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ et d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathrm{E}_{-1}^{\perp} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2\,z = 0\big\}$.

Enfin, l'angle de la rotation est donné par :

$\cos(\alpha) = \dfrac{\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) + 1}{2} = \dfrac{\frac{1}{3} + 1}{2} = \frac{2}{3}$

$\alpha = \arccos(\frac{2}{3}) \approx 48{,}19^\circ$

6) $${}^t\!\mathrm{A}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3}{=} \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = 1$$

Déterminons E_1 pour connaître l'axe de la rotation :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{2}{\sqrt{6}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \sqrt{6}\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 - \sqrt{6} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} - 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & 0 \end{array}\right)$$

La première ligne implique :

$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2}\,y = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)\,(\sqrt{6}+2)}\,y = \frac{2\,\sqrt{3}+2\,\sqrt{2}}{6-4}\,y = (\sqrt{3} + \sqrt{2})\,y$

La deuxième ligne donne :

$z = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\,y = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)\,(\sqrt{2}+1)}\,y = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1}\,y = (\sqrt{2} + 1)\,y$

C'est pourquoi, on a $\mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}\right)$.

Calculons encore l'angle de la rotation :

$\cos(\alpha) = \dfrac{\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) - 1}{2} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1}{2} = \dfrac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}{2\,\sqrt{6}}$

$\alpha = \arccos\big(\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2\,\sqrt{6}}\big) \approx 56{,}60^\circ$

7) $${}^t\!AA = \begin{pmatrix} \frac{9}{11} & \frac{2}{11} & \frac{6}{11} \\ \frac{6}{11} & -\frac{6}{11} & -\frac{7}{11} \\ -\frac{2}{11} & -\frac{9}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{11} & \frac{6}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{6}{11} & -\frac{9}{11} \\ \frac{6}{11} & -\frac{7}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \left(\tfrac{1}{11}\right)^3 \begin{vmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 2 & -6 & -9 \\ 6 & -7 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1 \to C_1 + \frac{9}{2} C_3 \\ C_2 \to C_2 + 3\,C_3}}{=} \frac{1}{11^3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -\frac{77}{2} & -33 & -9 \\ 33 & 11 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{2}{11^3} \begin{vmatrix} -\frac{77}{2} & -33 \\ 33 & 11 \end{vmatrix} = \frac{2\cdot 11^2}{2\cdot 11^3} \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{11}\,(7\cdot 1 - 3\cdot 6) = -1$$

$\mathrm{Tr}(A) = \frac{9}{11} - \frac{6}{11} + \frac{6}{11} = \frac{9}{11} \neq 1$

A est la matrice du produit d'une rotation et d'une symétrie orthogonale.

Déterminons l'espace propre E_{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{9}{11}+1 & \frac{6}{11} & -\frac{2}{11} & 0 \\ \frac{2}{11} & -\frac{6}{11}+1 & -\frac{9}{11} & 0 \\ \frac{6}{11} & -\frac{7}{11} & \frac{6}{11}+1 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -9 & 0 \\ 20 & 6 & -2 & 0 \\ 6 & -7 & 17 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\substack{L_2 \to L_2 - 10\,L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3\,L_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -9 & 0 \\ 0 & -44 & 88 & 0 \\ 0 & -22 & 44 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\substack{L_1 \to L_1 + \frac{5}{44} \\ L_2 \to -\frac{1}{44} L_2 \\ L_3 \to L_3 - \frac{1}{2} L_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\,\alpha \\ y = 2\,\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = -\frac{1}{2}\,\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E_{-1} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

A est ainsi la matrice du produit d'une rotation d'axe $E_{-1} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$
et d'une symétrie orthogonale par rapport au plan
$E_{-1}^{\perp} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x - 4\,y - 2\,z = 0\big\}$.

Enfin, l'angle de la rotation est donné par :

$\cos(\alpha) = \dfrac{\mathrm{Tr}(A)+1}{2} = \dfrac{\frac{9}{11}+1}{2} = \frac{10}{11}$

$\alpha = \arccos(\frac{10}{11}) \approx 24{,}62^\circ$

8) $${}^t\!AA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$$

$\mathrm{Tr}(A) = -1 - 1 - 1 = -3 \neq 1$

Il est inutile de chercher les espaces propres, puisque la matrice A est déjà diagonale. On constate en particulier immédiatement que $\mathrm{E}_{-1} = \mathbb{R}^3$.

Si l'on cherche absolument à appliquer le second théorème de la page 11.5, on dira que A est la matrice du produit de la rotation d'axe $\Delta(e_3)$ et d'angle π rad $= 180^\circ$ $(\cos(\alpha) = -1)$ et de la symétrie orthogonale par rapport au plan $\langle e_3 \rangle^\perp = \Pi(e_1\,;e_2) = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\big\}$.

Il est cependant beaucoup plus pertinent de considérer A comme la matrice d'une homothétie de rapport -1 ou encore d'une symétrie centrale.