3.16 Soient $u \in \mathrm{F}$, $v \in \mathrm{F}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Comme $u \in \mathrm{F}$, il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \ldots + \alpha_n \cdot u_n$.

Puisque $v \in \mathrm{F}$, il existe $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $v = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \ldots + \beta_n \cdot u_n$.

1) $$\begin{aligned} u + v &= (\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \ldots + \alpha_n \cdot u_n) + (\beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \ldots + \beta_n \cdot u_n) \\ &= \alpha_1 \cdot u_1 + \beta_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \beta_2 \cdot u_2 + \ldots + \alpha_n \cdot u_n + \beta_n \cdot u_n \\ &= (\underbrace{\alpha_1 + \beta_1}_{\gamma_1}) \cdot u_1 + (\underbrace{\alpha_2 + \beta_2}_{\gamma_2}) \cdot u_2 + \ldots + (\underbrace{\alpha_n + \beta_n}_{\gamma_n}) \cdot u_n \\ &= \gamma_1 \cdot u_1 + \gamma_2 \cdot u_2 + \ldots + \gamma_n \cdot u_n \in \mathrm{F} \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} \alpha \cdot u &= \alpha \cdot (\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \ldots + \alpha_n \cdot u_n) \\ &= \alpha \cdot (\alpha_1 \cdot u_1) + \alpha \cdot (\alpha_2 \cdot u_2) + \ldots + \alpha \cdot (\alpha_n \cdot u_n) \\ &= (\underbrace{\alpha\, \alpha_1}_{\delta_1}) \cdot u_1 + (\underbrace{\alpha\, \alpha_2}_{\delta_2}) \cdot u_2 + \ldots + (\underbrace{\alpha\, \alpha_n}_{\delta_n}) \cdot u_n \\ &= \delta_1 \cdot u_1 + \delta_2 \cdot u_2 + \ldots + \delta_n \cdot u_n \in \mathrm{F} \end{aligned}$$