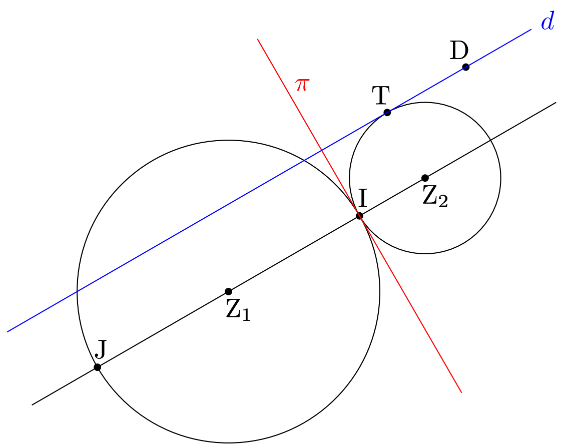
Chamblandes 2013 — Problème 6

1. $x^2+y^2-6\,y+z^2+2\,z+2=0$
   $x^2+(y-3)^2-9+(z+1)^2-1+2=0$
   $x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=8$
   $\mathrm{Z}_1(0\,;3\,;-1) \qquad \mathrm{R}_1=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

   $x^2-6\,x+y^2-6\,y+z^2-4\,z+20=0$
   $(x-3)^2-9+(y-3)^2-9+(z-2)^2-4+20=0$
   $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=2$
   $\mathrm{Z}_2(3\,;3\,;2) \qquad \mathrm{R}_2=\sqrt{2}$

   $$\delta(\mathrm{Z}_1\,;\mathrm{Z}_2)=\|\overrightarrow{\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_2}\|=\left\|\begin{pmatrix}3-0\\3-3\\2-(-1)\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\right\|=\left\|3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|=|3|\sqrt{1^2+0^2+1^2}$$
   $$=3\sqrt{2}=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2$$

   Ce dernier calcul montre que les sphères Σ_1 et Σ_2 sont tangentes extérieurement.

2. 

   La droite passant par les centres des sphères a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_2}=3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et passe par $\mathrm{Z}_1(0\,;3\,;-1)$; c'est pourquoi elle admet pour équations paramétriques :
   $$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 \\ z = -1+\lambda \end{cases}, \quad \lambda\in\mathbb{R}\,.$$

   Déterminons l'intersection de cette droite avec la sphère Σ_1 :
   $(\lambda)^2+(3-3)^2+(-1+\lambda+1)^2=8$
   $2\,\lambda^2=8$
   $0=2\,\lambda^2-8=2\,(\lambda^2-4)=2\,(\lambda-2)\,(\lambda+2)$
   $$\begin{cases} x = 2=2 \\ y = 3=3 \\ z = -1+2=1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -2=-2 \\ y = 3=3 \\ z = -1+(-2)=-3 \end{cases}$$

$(2-3)^2+(3-3)^2+(1-2)^2=2:\quad \mathrm{I}(2\,;3\,;1)\in\Sigma_2$
$(-2-3)^2+(3-3)^2+(-3-2)^2=50\neq 2:\quad \mathrm{J}(-2\,;3\,;-3)\notin\Sigma_2$

Le plan π, tangent au point I aux sphères Σ_1 et Σ_2, s'obtient grâce à l'équation dédoublée de l'une ou l'autre sphère :
$2\,x+(3-3)\,(y-3)+(1+1)\,(z+1)=8$
$2\,x+2\,z-6=0$
$x+z-3=0$

3. La droite d admet pour vecteur directeur le vecteur normal du plan π : $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

   Vu qu'elle passe par le point $\mathrm{D}(10\,;3\,;7)$, elle s'écrit :
   $\begin{cases} x=10+\mu \\ y=\ \ 3 \\ z=\ \ 7+\mu \end{cases},\quad \mu\in\mathbb{R}$

4. $$\delta(\mathrm{Z}_2\,;d)=\frac{\left\|\begin{pmatrix}3-10\\3-3\\2-7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\left\|\begin{pmatrix}-7\\0\\-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\left\|\begin{pmatrix}0\cdot1-(-5)\cdot0\\-\big(-7\cdot1-(-5)\cdot1\big)\\-7\cdot0-0\cdot1\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}$$
   $$=\frac{\left\|\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\left\|2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{2\sqrt{0^2+1^2+0^2}}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}=\mathrm{R}_2$$
   Ce calcul montre que la droite d est bien tangente à la sphère Σ_2.

   Déterminons le point d'intersection T de d avec Σ_2 :
   $(10+\mu-3)^2+(3-3)^2+(7+\mu-2)^2=2$
   $49+14\,\mu+\mu^2+25+10\,\mu+\mu^2=2$
   $0=2\,\mu^2+24\,\mu+72=2\,(\mu^2+12\,\mu+36)=2\,(\mu+6)^2$
   $\begin{cases} x=10-6=4 \\ y=\ \ 3\ \ \ \ \ \ =3 \\ z=\ \ 7-6=1 \end{cases}\qquad \mathrm{T}(4\,;3\,;1)$

5. On recherche l'équation du plan tangent à Σ_2 en T :
   $(4-3)\,(x-3)+(3-3)\,(y-3)+(1-2)\,(z-2)=2$
   $x-z-3=0$