5.10 Dans la base canonique $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, les matrices A, B, C et D ont respectivement pour composantes :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}-3\\3\\7\\1\end{pmatrix}\qquad \mathrm{C}=\begin{pmatrix}-1\\3\\9\\3\end{pmatrix}\qquad \mathrm{D}=\begin{pmatrix}-5\\3\\5\\-1\end{pmatrix}$$

Pour calculer $\dim\big(\langle \mathrm{A}\,;\mathrm{B}\,;\mathrm{C}\,;\mathrm{D}\rangle\big)$, il suffit de déterminer le rang de la matrice dont les lignes sont données par les composantes des vecteurs A, B, C et D.

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\-3&3&7&1\\-1&3&9&3\\-5&3&5&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\mathrm{L}_4\to\mathrm{L}_4+5\,\mathrm{L}_1}]{\substack{\mathrm{L}_2\to\mathrm{L}_2+3\,\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_3\to\mathrm{L}_3+\mathrm{L}_1}}\Longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&3&10&4\\0&3&10&4\\0&3&10&4\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\mathrm{L}_3\to\mathrm{L}_3-\mathrm{L}_2\\ \mathrm{L}_4\to\mathrm{L}_4-\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&3&10&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Ainsi cette matrice est de rang 2 et $\dim\big(\langle \mathrm{A}\,;\mathrm{B}\,;\mathrm{C}\,;\mathrm{D}\rangle\big)=2$.

En particulier $\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&3\\10&4\end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\langle \mathrm{A}\,;\mathrm{B}\,;\mathrm{C}\,;\mathrm{D}\rangle$.

La matrice $\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&3&10&4\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ est manifestement échelonnée.

Puisque ses lignes comportent 4 vecteurs linéairement indépendants, ses vecteurs forment une base de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, car $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})=4$.

Comme les deux premières lignes constituent une base de $\langle \mathrm{A}\,;\mathrm{B}\,;\mathrm{C}\,;\mathrm{D}\rangle$, les deux dernières lignes forment une base du supplémentaire de $\langle \mathrm{A}\,;\mathrm{B}\,;\mathrm{C}\,;\mathrm{D}\rangle$.

En d'autres termes, le supplémentaire de $\langle \mathrm{A}\,;\mathrm{B}\,;\mathrm{C}\,;\mathrm{D}\rangle$ admet pour base $\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$.