Chamblandes 2013 — Problème 2

Il s'agit de maximiser le volume de l'étui : $2\,x \cdot x \cdot y = 2\,x^2\,y$.

La condition porte sur la somme des longueurs des deux barres et des quatre cadres :
$12 = 2 \cdot y + 4 \cdot (x + 2\,x + x) = 16\,x + 2\,y$.

En divisant par 2 cette condition, on en tire $6 = 8\,x + y$, puis $y = 6 - 8\,x$.

En substituant cette dernière expression dans la formule du volume, on obtient :
$f(x) = 2\,x^2\,(6 - 8\,x) = 12\,x^2 - 16\,x^3$

Il nous faut à présent étudier la croissance de la fonction f pour déterminer son maximum.
$f'(x) = (12\,x^2 - 16\,x^3)' = 24\,x - 48\,x^2 = 24\,x\,(1 - 2\,x)$

		0		$\frac{1}{2}$	
$24\,x$	$-$	0	$+$		$+$
$1 - 2\,x$	$+$		$+$	0	$-$
f'	$-$		$+$		$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

On conclut que le volume de l'étui est maximal si $x = \frac{1}{2}$.
Dans ce cas, $y = 6 - 8 \cdot \frac{1}{2} = 2$.