6.12 1) Soit $f(x) = a_n\,x^n + \ldots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$.

Posons $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{n+1}\,a_n\,x^{n+1} + \ldots + \frac{1}{3}\,a_2\,x^3 + \frac{1}{2}\,a_1\,x^2 + a_0\,x \in \mathbb{R}[x]$.

$$\begin{aligned} h\big(\mathrm{F}(x)\big) &= \mathrm{F}'(x) = \big(\tfrac{1}{n+1}\,a_n\,x^{n+1} + \ldots + \tfrac{1}{3}\,a_2\,x^3 + \tfrac{1}{2}\,a_1\,x^2 + a_0\,x\big)' \\ &= \tfrac{1}{n+1}\,a_n\,(x^{n+1})' + \ldots + \tfrac{1}{3}\,a_2\,(x^3)' + \tfrac{1}{2}\,a_1\,(x^2)' + a_0\,(x)' \\ &= \tfrac{1}{n+1}\,a_n\,(n+1)\,x^n + \ldots + \tfrac{1}{3}\,a_2 \cdot 3\,x^2 + \tfrac{1}{2}\,a_1 \cdot 2\,x + a_0 \cdot 1 \\ &= a_n\,x^n + \ldots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

2) Soient $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x + 1$.

$h\big(f_1(x)\big) = f_1'(x) = (x)' = 1$

$h\big(f_2(x)\big) = f_2'(x) = (x+1)' = 1$

On constate que $h(f_1) = h(f_2)$, mais que $f_1 \neq f_2$: l'application h n'est ainsi pas injective.

3) Une hypothèse de l'énoncé de l'exercice 6.11 n'est pas satisfaite : $\mathbb{R}[x]$ n'est pas de dimension finie, comme on l'a montré à l'exercice 4.2 2).