4.3 Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Il faut montrer que le vecteur x peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4, c'est-à-dire qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tels que

$$x = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 + \alpha_4 \cdot e_4 \,.$$

Cette équation vectorielle équivaut à :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou encore au système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha_1 & - & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & 2\,\alpha_4 & = & x_1 \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & x_2 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & & & + & \alpha_4 & = & x_3 \end{array} \right.$$

où les inconnues sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Résolvons ce système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha_1 & - & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & 2\,\alpha_4 & = & x_1 \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & x_2 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & & & + & \alpha_4 & = & x_3 \end{array} \right. \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha_1 & - & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & 2\,\alpha_4 & = & x_1 \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & x_2 \\ & & 2\,\alpha_2 & - & \alpha_3 & - & \alpha_4 & = & -x_1 + x_3 \end{array} \right.$$

$$\overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 2\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha_1 & - & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & 2\,\alpha_4 & = & x_1 \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & x_2 \\ & & & - & 3\,\alpha_3 & - & 3\,\alpha_4 & = & -x_1 - 2\,x_2 + x_3 \end{array} \right. \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 3\,\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \to 3\,\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 3\,\alpha_1 & - & 3\,\alpha_2 & & & + & 3\,\alpha_4 & = & 2\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 \\ & & 3\,\alpha_2 & & & & & = & -x_1 + x_2 + x_3 \\ & & & - & 3\,\alpha_3 & - & 3\,\alpha_4 & = & -x_1 - 2\,x_2 + x_3 \end{array} \right. \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 3\,\alpha_1 & & & & & + & 3\,\alpha_4 & = & x_1 - x_2 + 2\,x_3 \\ & & 3\,\alpha_2 & & & & & = & -x_1 + x_2 + x_3 \\ & & & - & 3\,\alpha_3 & - & 3\,\alpha_4 & = & -x_1 - 2\,x_2 + x_3 \end{array} \right. \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \frac{1}{3}\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to \frac{1}{3}\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to -\frac{1}{3}\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha_1 & & & & & + & \alpha_4 & = & \frac{1}{3}\,x_1 - \frac{1}{3}\,x_2 + \frac{2}{3}\,x_3 \\ & & \alpha_2 & & & & & = & -\frac{1}{3}\,x_1 + \frac{1}{3}\,x_2 + \frac{1}{3}\,x_3 \\ & & & & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & \frac{1}{3}\,x_1 + \frac{2}{3}\,x_2 - \frac{1}{3}\,x_3 \end{array} \right.$$

Ce système possède une variable libre α_4. En posant $\alpha_4 = \alpha$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & \frac{1}{3}\,x_1 - \frac{1}{3}\,x_2 + \frac{2}{3}\,x_3 - \alpha \\ \alpha_2 & = & -\frac{1}{3}\,x_1 + \frac{1}{3}\,x_2 + \frac{1}{3}\,x_3 \\ \alpha_3 & = & \frac{1}{3}\,x_1 + \frac{2}{3}\,x_2 - \frac{1}{3}\,x_3 - \alpha \\ \alpha_4 & = & \alpha \end{array} \right.$$

Par conséquent, tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire, d'un nombre infini de façons, comme combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4.

En particulier $u = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ donne $x_1 = -3$, $x_2 = 4$ et $x_3 = -1$.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_1 & = & \frac{1}{3} \cdot (-3) - \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot (-1) - \alpha & = & -3 - \alpha \\ \alpha_2 & = & -\frac{1}{3} \cdot (-3) + \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot (-1) & = & 2 \\ \alpha_3 & = & \frac{1}{3} \cdot (-3) + \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot (-1) - \alpha & = & 2 - \alpha \\ \alpha_4 & = & \alpha \end{array} \right.$$

En résumé $u = (-3 - \alpha)\, e_1 + 2\, e_2 + (2 - \alpha)\, e_3 + \alpha\, e_4 \quad$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$