7.11 1) La matrice associée à l'application linéaire $f \circ h$ est :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $\mathrm{Ker}(f \circ h)$, il faut résoudre le système $\begin{cases} -5\,x + 5\,y = 0 \\ 8\,x - 8\,y = 0 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -5 & 5 & 0 \\ 8 & -8 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to -\frac{1}{5} L_1 \\ L_2 \to -\frac{1}{8} L_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 + L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On constate que y est une variable libre ; en posant $y = \alpha$, on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où $\mathrm{Ker}(f \circ h) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Pour déterminer $\mathrm{Im}(f \circ h)$, échelonnons la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 5 & -8 \\ x & y \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to 5\,L_3 + x\,L_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 8\,x + 5\,y \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathrm{Im}(f \circ h) = \Delta\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = \big\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 : 8\,x + 5\,y = 0\big\}$

2) La matrice associée à l'application linéaire $f \circ j$ est :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $\mathrm{Ker}(f \circ j)$, il faut résoudre le système $\begin{cases} -3\,x - 5\,y = 0 \\ 3\,x + 5\,y = 0 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 + L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \to -\frac{1}{3} L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On remarque que y est une variable libre ; en posant $y = \alpha$, on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{3}\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = -\frac{1}{3}\,\alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

C'est pourquoi $\mathrm{Ker}(f \circ j) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$.

Pour déterminer $\mathrm{Im}(f \circ j)$, échelonnons la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 5 \\ x & y \end{pmatrix} \overset{\substack{L_1 \to -\frac{1}{3} L_1 \\ L_2 \to \frac{1}{5} L_2}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - x\,L_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & x + y \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{Im}(f \circ j) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \big\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\big\}$.

3) La matrice associée à l'application linéaire $g \circ i$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $\mathrm{Ker}(g \circ i)$, il faut résoudre le système $\begin{cases} -x + 3\,y = 0 \\ 5\,x - 15\,y = 0 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 5 & -15 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + 5\,\mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_1 \to -\mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il apparaît que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ pour obtenir la solution générale :

$$\begin{cases} x = 3\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\mathrm{Ker}(g \circ i) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Pour déterminer $\mathrm{Im}(g \circ i)$, échelonnons la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -15 \\ x & y \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + x\,\mathrm{L}_1]{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + 3\,\mathrm{L}_1} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5\,x + y \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{L}_1 \to -\mathrm{L}_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5\,x + y \end{pmatrix}$$

On en tire que $\mathrm{Im}(g \circ i) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right) = \big\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 : 5\,x + y = 0\big\}$.

4) La matrice associée à l'application linéaire $(f + g) \circ h$ est :

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $\mathrm{Ker}\big((f + g) \circ h\big)$, il faut résoudre $\begin{cases} -2\,x - y = 0 \\ 4\,x - 2\,y = 0 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + 2\,\mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_2 \to -\frac{1}{4}\,\mathrm{L}_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_1 \to -\frac{1}{2}\,\mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Puisque l'on trouve $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, on a $\mathrm{Ker}\big((f + g) \circ h\big) = \{0\}$.

Comme $\mathrm{Ker}\big((f + g) \circ h\big) = \{0\}$, l'endomorphisme $(f + g) \circ h$ de $\mathbb{R}^2$ est injectif, d'après l'exercice 6.7.

Au vu de l'exercice 6.11, l'endomorphisme $(f + g) \circ h$ de $\mathbb{R}^2$ est donc également surjectif : $\mathrm{Im}\big((f + g) \circ h\big) = \mathbb{R}^2$.