Chamblandes 2008 — Problème 2

a) $0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(3-\lambda) - (-2)\cdot 1 = \lambda^2 - 3\,\lambda + 2 = (\lambda-1)\,(\lambda-2)$

A admet ainsi deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(i) $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0-1 & 1 & 0 \\ -2 & 3-1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(i) $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0-2 & 1 & 0 \\ -2 & 3-2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\,\alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E}_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

b) Calculons T^{-1} à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \mathrm{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{B}$$

c) $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{E}_1$: v est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

On peut aussi vérifier que $\mathrm{A}\,v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot v$.

$$\mathrm{T}^{-1}\,v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}\,(\mathrm{T}^{-1}\,v) = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot (\mathrm{T}^{-1}\,v)$$

d) Soit v un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
Par définition, on a $\mathrm{A}\,v = \lambda\,v$.

$$\mathrm{B}\,(\mathrm{T}^{-1}\,v) = (\mathrm{T}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{T})\,(\mathrm{T}^{-1}\,v) = \mathrm{T}^{-1}\,\mathrm{A}\,\underbrace{\mathrm{T}\,\mathrm{T}^{-1}}_{\mathrm{I}}\,v = \mathrm{T}^{-1}\,\mathrm{A}\,v = \mathrm{T}^{-1}\,\lambda\,v = \lambda\,(\mathrm{T}^{-1}\,v)$$

Cette égalité prouve que $\mathrm{T}^{-1}\,v$ est un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ.