7.18 1) La matrice de changement de base est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculons P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculons la matrice de h relativement à la base $(e_2\,;e_1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) La matrice de changement de base est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculons P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \to L_2 - L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2 \to \frac{1}{3} L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

On a trouvé $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Calculons la matrice de h relativement à la base $(e_1 + e_2\,;3\,e_2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3) La matrice de changement de base est $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculons P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 - 2\,L_1}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{L_2 \to -\frac{1}{3} L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \overset{L_1 \to L_1 - L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Il en résulte $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculons la matrice de h relativement à la base $(u\,;v)$:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

4) La matrice de changement de base est $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Calculons P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 3\,\mathrm{L}_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \frac{1}{3}\,\mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Il s'ensuit que $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculons la matrice de h relativement à la base $(s\,;t)$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{3} & 6 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -\frac{20}{3} \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$$