5.13 Déterminons le sous-espace vectoriel G.

1^{re} méthode

$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{G}$ si et seulement si u est une combinaison linéaire des générateurs de G : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Cette équation vectorielle, dont les inconnues sont α et β, est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} 4\,\alpha + 2\,\beta = x \\ 3\,\alpha - \beta = y \\ 2\,\alpha + 2\,\beta = z \end{cases} \xRightarrow[\mathrm{L}_3 \to 2\,\mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1]{\mathrm{L}_2 \to 4\,\mathrm{L}_2 - 3\,\mathrm{L}_1} \begin{cases} 4\,\alpha + 2\,\beta = x \\ -10\,\beta = -3\,x + 4\,y \\ 2\,\beta = -x + 2\,z \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\mathrm{L}_3 \to 5\,\mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2} \begin{cases} 4\,\alpha + 2\,\beta = x \\ -10\,\beta = -3\,x + 4\,y \\ 0 = -8\,x + 4\,y + 10\,z \end{cases}$$

$u \in \mathrm{G}$ si et seulement si le système précédent est possible, en d'autres termes si $-8\,x + 4\,y + 10\,z = 0$, ou encore si $4\,x - 2\,y - 5\,z = 0$.

C'est pourquoi $\mathrm{G} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : 4\,x - 2\,y - 5\,z = 0\big\}$.

2^e méthode

Formons la matrice dont les premières lignes sont données par les générateurs de G et dont la dernière ligne correspond au vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, puis échelonnons cette matrice.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{L}_3 \to 4\,\mathrm{L}_3 - x\,\mathrm{L}_1]{\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -3\,x + 4\,y & -2\,x + 4\,z \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\mathrm{L}_3 \to 5\,\mathrm{L}_3 + (-3\,x + 4\,y)\,\mathrm{L}_2} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -16\,x + 8\,y + 20\,z \end{pmatrix}$$

Les deux premières lignes indiquent que $\dim(\mathrm{G}) = 2$.
Par conséquent, $u \in \mathrm{G}$ si et seulement si la dernière ligne supplémentaire n'augmente pas la dimension de l'espace ligne, c'est-à-dire si la dernière ligne de la matrice échelonnée est nulle.
On doit ainsi avoir $-16\,x + 8\,y + 20\,z = 0$, c'est-à-dire $4\,x - 2\,y - 5\,z = 0$.

On conclut que $\mathrm{G} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : 4\,x - 2\,y - 5\,z = 0\big\}$.

$\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ contient les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ qui satisfont les conditions définies par F et G, c'est-à-dire le système

$$\begin{cases} x \phantom{{}- 2y - 5z} = 0 \\ 4x - 2y - 5z = 0 \end{cases} \xRightarrow{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 4\,\mathrm{L}_1} \begin{cases} x \phantom{{}- 2y - 5z} = 0 \\ - 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

Ce système possède une variable libre : z. On pose $z = \alpha$ et on obtient la solution :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{5}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) = 1$ et $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ admet pour base $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

Déterminons une base de F, puis une base de F + G.

Les éléments de F satisfont le système

$$\{\, x = 0$$

qui possèdent deux variables libres y et z. En posant $y = \alpha$ et $z = \beta$, on obtient la solution :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi F admet pour base $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

1$^{\text{re}}$ méthode

Pour déterminer une base de F + G, on écrit la matrice dont les lignes sont données par les générateurs de F et de G, et on échelonne cette matrice.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{\mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - 2\,\mathrm{L}_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - 5\,\mathrm{L}_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xRightarrow{\mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 + 2\,\mathrm{L}_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vu que cette matrice est de rang 3, on a $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = 3$, d'où $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathbb{R}^3$.

À ce stade, on possède déjà une base de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$: $\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

En réduisant cette matrice échelonnée

$$\xrightarrow{\mathrm{L}_1\to\mathrm{L}_1-2\,\mathrm{L}_3}\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathrm{L}_1\to\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathrm{L}_1\to\frac{1}{2}\mathrm{L}_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

on obtient la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

2$^{\text{e}}$ méthode

La relation de Grassmann donne

$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G})=\dim(\mathrm{F})+\dim(\mathrm{G})-\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})=2+2-1=3\,.$$

Donc $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\mathbb{R}^3$ dont la base canonique est $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.