Chamblandes 2011 — Problème 2

Désignons par x le rayon du cylindre et par y sa hauteur.
Son volume vaut $\pi\, x^2\, y$.

Le théorème de Pythagore donne $x^2 + y^2 = 12^2$, si bien que $x = \sqrt{144 - y^2}$.

Écrivons dès lors le volume du cylindre comme fonction de y :
$f(y) = \pi\,(144 - y^2)\,y = \pi\,(144\,y - y^3)$

Étudions la croissance de cette fonction pour déterminer son maximum :
$f'(y) = \pi\,(144\,y - y^3)' = \pi\,(144 - 3\,y^2) = 3\,\pi\,(48 - y^2) = 3\,\pi\,(4\sqrt{3} + y)\,(4\sqrt{3} - y)$

		$-4\sqrt{3}$		$4\sqrt{3}$	
$3\,\pi$	$+$		$+$		$+$
$4\sqrt{3} + y$	$-$	0	$+$		$+$
$4\sqrt{3} - y$	$+$		$+$	0	$-$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

On remarque que le volume du cylindre est maximal si $y = 4\sqrt{3}$.
Dans ce cas, $x = \sqrt{144 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{144 - 48} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.

Enfin, le rapport du grand côté au petit côté vaut $\dfrac{4\sqrt{6}}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{6}{3}} = \sqrt{2}$.