7.7 $c = h(t) = h(1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3)$

$= 1 \cdot h(e_1) + 2 \cdot h(e_2) + 2 \cdot h(e_3) = a + 2 \cdot b + 2 \cdot h(e_3)$

Il en résulte $2 \cdot h(e_3) = c - a - 2 \cdot b$, si bien que :

$h(e_3) = \frac{1}{2}\,c - \frac{1}{2}\,a - b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Par conséquent la matrice associée à h relativement aux bases $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ et $(f_1\,;f_2)$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x + y - z \\ -x - y \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $\mathrm{Ker}(h)$, il faut résoudre le système $\begin{cases} 2\,x + y - z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \frac{1}{2}\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to -\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

On constate que z est une variable libre ; en posant $z = \alpha$, on obtient la solution générale $\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

C'est pourquoi $\mathrm{Ker}(h) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

En appliquant le théorème du rang à $h : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, on obtient :

$\dim\big(\mathrm{Im}(h)\big) = \dim\big(\mathrm{E}\big) - \dim\big(\mathrm{Ker}(h)\big) = 3 - 1 = 2 = \dim\big(\mathrm{F}\big)$

h est ainsi surjective et $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{F}$.