10.1

1) $x \cdot y = x_1\, y_1 + \ldots + x_n\, y_n$
$= y_1\, x_1 + \ldots + y_n\, x_n$
$= y \cdot x$

2) $x \cdot (y + z) = (x_1\,;\ldots\,;x_n) \cdot \big((y_1\,;\ldots\,;y_n) + (z_1\,;\ldots\,;z_n)\big)$
$= (x_1\,;\ldots\,;x_n) \cdot (y_1 + z_1\,;\ldots\,;y_n + z_n)$
$= x_1\,(y_1 + z_1) + \ldots + x_n\,(y_n + z_n)$
$= x_1\, y_1 + x_1\, z_1 + \ldots + x_n\, y_n + x_n\, z_n$
$= (x_1\, y_1 + \ldots + x_n\, y_n) + (x_1\, z_1 + \ldots + x_n\, z_n)$
$= x \cdot y + x \cdot z$

3) $(\lambda\, x) \cdot y = \big(\lambda\,(x_1\,;\ldots\,;x_n)\big) \cdot (y_1\,;\ldots\,;y_n)$
$= (\lambda\, x_1\,;\ldots\,;\lambda\, x_n) \cdot (y_1\,;\ldots\,;y_n)$
$= (\lambda\, x_1)\, y_1 + \ldots + (\lambda\, x_n)\, y_n$
$= \lambda\,(x_1\, y_1) + \ldots + \lambda\,(x_n\, y_n)$
$= \lambda\,(x_1\, y_1 + \ldots + x_n\, y_n)$
$= \lambda\,(x \cdot y)$

4) $x \cdot x = x_1^2 + \ldots x_n^2 \geqslant 0$ car $x_i^2 \geqslant 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$

5) (a) Si $x = 0$, alors $x \cdot x = 0^2 + \ldots + 0^2 = 0\,.$

(b) Si $x \cdot x = 0$, alors pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a :
$0 \leqslant x_i^2 \leqslant x_1^2 + \ldots + x_i^2 + \ldots + x_n^2 = x \cdot x = 0$
de sorte que $x_i^2 = 0$ et $x_i = 0\,.$

On conclut que $x_1 = \ldots = x_n = 0$, c'est-à-dire $x = 0$.