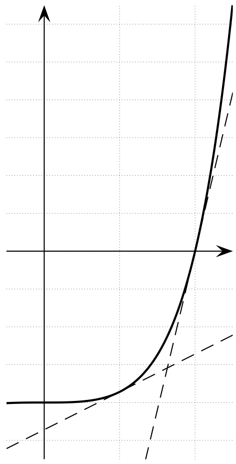
Chamblandes 2007 — Exercice 2

a)

x	$f(x)$
0	-4
0,5	$\approx -3{,}97$
1	$\approx -3{,}72$
1,5	$-2{,}74$
2	0
2,5	$\approx 6{,}59$



b) D'après le tableau de valeurs, le graphe de f coupe l'axe des x au point $(2\,;0)$.

On peut également factoriser la fonction f :
$f(x) = x - 2 + (x-2)\,e^x = (x-2)\,(1+e^x)$

Comme $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on remarque que $1 + e^x > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, si bien que le point $(2\,;0)$ est le seul point d'intersection du graphe de f avec l'axe des x.

Pour déterminer l'équation de la tangente, on applique la formule

$$y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$$

lorsque $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \big(x - 2 + (x-2)\,e^x\big)' \\ &= 1 + (x-2)'\,e^x + (x-2)(e^x)' \\ &= 1 + 1\cdot e^x + (x-2)\,e^x \\ &= 1 + (x-1)\,e^x \end{aligned}$$

$f(2) = 0$
$f'(2) = 1 + (2-1)\,e^2 = 1 + e^2$

L'équation de la tangente s'écrit donc :
$y = (1+e^2)\,(x-2) + 0 = (1+e^2)\,(x-2)$

c) Si le point P a pour coordonnées $\mathrm{P}\big(x_0\,;f(x_0)\big)$, il faut que :
$1 = f'(x_0) = 1 + (x_0 - 1)\,e^{x_0}$
$0 = (x_0 - 1)\,e^{x_0}$
$x_0 = 1 \quad$ car $e^{x_0} > 0$ quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$

Puisque $f(1) = 1 - 2 + (1-2)\,e^1 = -1 - e$, on conclut que $\mathrm{P}(1\,;-1-e)$.