9.12 Soit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}'$ constituée des vecteurs propres : $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice associée à l'endomorphisme h est : $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Si A désigne la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}$. Il s'ensuit que $\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{A}'\mathrm{P}^{-1}$.

Calculons P^{-1} à l'aide des déterminants :
$\det(\mathrm{P}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 = 5$

$\mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{5}\, {}^{t}\!\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

On peut désormais calculer la matrice A de l'endomorphisme h dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{A}'\mathrm{P}^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$