7.12 Pour déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, il faut résoudre le système $\begin{cases} -2\,x + y = 0 \\ 2\,x - y = 0 \end{cases}$ d'inconnues x, y et z :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to -\frac{1}{2}\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Seule la variable x est liée, les variables y et z étant libres ; en posant $y = \alpha$ et $z = \beta$, on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\,\alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = 2\,\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où $\mathrm{Ker}(f) = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : 2\,x - y = 0\big\} = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Pour déterminer $\mathrm{Im}(f)$, échelonnons la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} \overset{\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + 2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - y\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & y+z \end{pmatrix}$$

Il en résulte $\mathrm{Im}(f) = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ et } y + z = 0\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Enfin, $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 1$.

Pour déterminer $\mathrm{Ker}(g)$, il faut résoudre le système $\begin{cases} 7\,x - 2\,y - 2\,z = 0 \\ 14\,x - 4\,y - 4\,z = 0 \\ 7\,x - 2\,y - 2\,z = 0 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -2 & -2 & 0 \\ 14 & -4 & -4 & 0 \\ 7 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to \frac{1}{7}\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On constate que y et z sont des variables libres ; en posant $y = \alpha$ et $z = \beta$, on trouve la solution générale :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7}\,\alpha + \frac{2}{7}\,\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \frac{1}{7}\,\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\,\beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathrm{Ker}(g) = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : 7\,x - 2\,y - 2\,z = 0\big\} = \Pi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$.

Pour déterminer $\mathrm{Im}(g)$, échelonnons la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 7 & 14 & 7 \\ -2 & -4 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\mathrm{L}_1 \to \frac{1}{7}\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to -\frac{1}{2}\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to -\frac{1}{2}\,\mathrm{L}_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \to -\mathrm{L}_4 + x\,\mathrm{L}_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\,x - y & x - z \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathrm{Im}(g) = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : 2\,x - y = 0 \text{ et } x - z = 0\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

En outre, $\mathrm{rg}(g) = \dim\big(\mathrm{Im}(g)\big) = 1$.

La matrice associée à l'application linéaire $g \circ f$ est :

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 14 & -4 & -4 \\ 7 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'application linéaire nulle, il en résulte immédiatement que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathbb{R}^3$ et que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \{0\}$; par conséquent, $\mathrm{rg}(g \circ f) = 0$.

La matrice associée à l'application linéaire $f \circ f$ est :

$$\mathrm{F}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{F}$$

On constate donc que $f \circ f = f$.

La matrice associée à l'application linéaire $g \circ g$ est :

$$\mathrm{G}^2 = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 14 & -4 & -4 \\ 7 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 14 & -4 & -4 \\ 7 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 14 & -4 & -4 \\ 7 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{G}$$

On remarque ainsi que $g \circ g = g$.