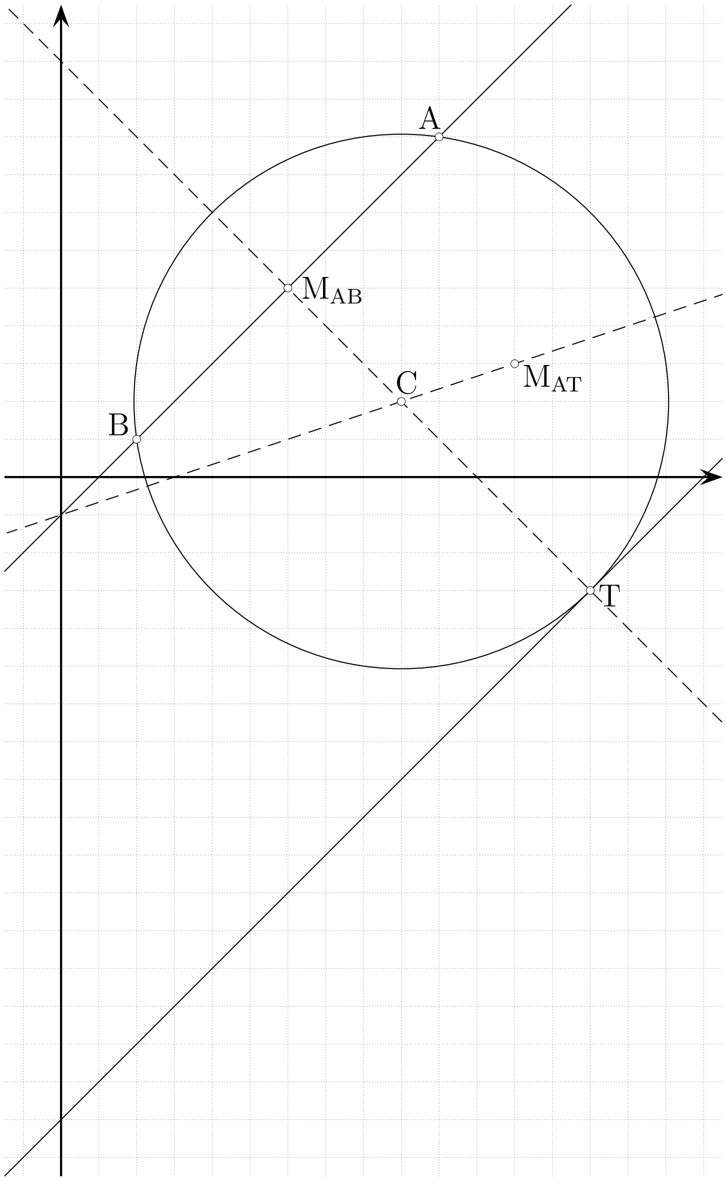
Chamblandes 2006 — Exercice 2



a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2-10 \\ 1-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} = -8 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La droite AB admet donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

On rappelle qu'une droite d'équation $a\,x + b\,y + c = 0$ admet $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. Ainsi la droite $t : x - y - 17 = 0$ admet $\begin{pmatrix} -(-1) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Puisque les droites AB et t admettent le même vecteur directeur, elles sont parallèles.

b) On rappelle que toute droite perpendiculaire à la droite $a\,x + b\,y + c = 0$ est de la forme $-b\,x + a\,y + c' = 0$. Par conséquent, la médiatrice m_{AB} est de la forme $m_{\mathrm{AB}} : x + y + c' = 0$.

De plus, elle doit passer par le milieu des points A et B : $\mathrm{M_{AB}}\left(\frac{10+2}{2}\,;\frac{9+1}{2}\right) = \mathrm{M_{AB}}(6\,;5)$. On a par conséquent : $6 + 5 + c' = 0$, d'où l'on tire $c' = -11$.

En résumé, l'équation de la médiatrice du segment AB est $m_{\mathrm{AB}} : x + y - 11 = 0$.

Les coordonnées du point T doivent vérifier les équations de t et de m_{AB} :
$$\begin{cases} x - y - 17 = 0 \\ x + y - 11 = 0 \end{cases}$$
La résolution de ce système conduit à $x = 14$ et $y = -3$, c'est-à-dire $\mathrm{T}(14\,;-3)$.

c) Le cercle Γ recherché est tangent à la droite t au point T.

Il s'agit dès lors de déterminer l'équation du cercle passant par les points A, B et T.

On rappelle que le centre d'un cercle passant par deux points se situe sur la médiatrice de ces deux points.

Comme le cercle Γ passe par A et B, son centre se situe sur la médiatrice m_{AB} : $x + y - 11 = 0$.

De même, le cercle Γ passant par les points A et T, son centre se situe sur la médiatrice m_{AT}. Il s'agit au préalable de déterminer une équation de m_{AT}.
$\overrightarrow{\mathrm{AT}} = \begin{pmatrix} 14-10 \\ -3-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ implique que médiatrice de A et T est de la forme $m_{\mathrm{AT}} : x - 3\,y + c = 0$.
En outre, m_{AT} passe par le milieu de A et T : $\mathrm{M_{AT}}\left(\frac{14+10}{2}\,;\frac{-3+9}{2}\right) = \mathrm{M_{AT}}(12\,;3)$, de sorte que $12 - 3\cdot 3 + c = 0$, d'où l'on tire $c = -3$.
En résumé, l'équation de la médiatrice de A et T est $m_{\mathrm{AT}} : x - 3\,y - 3 = 0$.

Nous sommes désormais en mesure de calculer les coordonnées du centre du cercle Γ :
$$\begin{cases} x + y - 11 = 0 \\ x - 3\,y - 3 = 0 \end{cases}$$
En résolvant ce système, on obtient $x = 9$ et $y = 2$, si bien que le centre du cercle Γ est $\mathrm{C}(9\,;2)$.

Calculons encore le rayon du cercle Γ :
$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 9-10 \\ 2-9 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-1)^2+(-7)^2} = \sqrt{50} = \sqrt{5^2\cdot 2} = 5\,\sqrt{2}.$$
Connaissant son centre et son rayon, nous pouvons finalement écrire l'équation du cercle $\Gamma : (x-9)^2 + (y-2)^2 = 50$.