11.3 1) Calculons les valeurs propres de l'endomorphisme h :

$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda\,(\lambda - 1)$

On obtient deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$.

Déterminons les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

(a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1-1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1-0 & -2 & 0 \\ 0 & -0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 2\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h(u) = u$ pour tout $u \in \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $h(v) = 0$ pour tout $v \in \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

h est ainsi une projection de base $\Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et de direction $\Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2) Calculons les valeurs propres de l'endomorphisme h :

$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda\,(\lambda - 1)$

On obtient deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$.

Déterminons les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

(a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3-1 & -6 & 0 \\ 1 & -2-1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = 3\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\left(\begin{array}{cc|c} 3-0 & -6 & 0 \\ 1 & -2-0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = 2\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h(u) = u$ pour tout $u \in \Delta\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $h(v) = 0$ pour tout $v \in \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

h est ainsi une projection de base $\Delta\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et de direction $\Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

3) Calculons les valeurs propres de l'endomorphisme h :

$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2\sqrt{3} & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\,(\lambda + 1)$

On obtient deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

Déterminons les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

(a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1-1 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & -1-1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \sqrt{3}\,\alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1-(-1) & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & -1-(-1) & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h(u) = u$ pour tout $u \in \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right)$ et $h(v) = -v$ pour tout $v \in \Delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

h est ainsi une symétrie de base $\Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right)$ et de direction $\Delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

4) Calculons les valeurs propres de l'endomorphisme h :

$0 = \begin{vmatrix} a-\lambda & a-1 \\ -a & 1-a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda\,(\lambda - 1)$

On obtient deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$.

Déterminons les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

(a) $\left(\begin{array}{cc|c} a-1 & a-1 & 0 \\ -a & 1-a-1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a-1 & a-1 & 0 \\ -a & -a & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $\left(\begin{array}{cc|c} a-0 & a-1 & 0 \\ -a & 1-a-0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a-1 & 0 \\ -a & 1-a & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = (1-a)\,\alpha \\ y = a\,\alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1-a \\ a \end{pmatrix}$

$h(u) = u$ pour tout $u \in \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $h(v) = 0$ pour tout $v \in \Delta\left(\begin{pmatrix} 1-a \\ a \end{pmatrix}\right)$.

h est ainsi une projection de base $\Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et de direction $\Delta\left(\begin{pmatrix} 1-a \\ a \end{pmatrix}\right)$.

5) Calculons les valeurs propres de l'endomorphisme h :

$0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)\,(\lambda + 1)$

On obtient deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

Déterminons les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

(a) $\left(\begin{array}{cc|c} 0-1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = 2\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\left(\begin{array}{cc|c} 0-(-1) & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -(-1) & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = -2\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$h(u) = u$ pour tout $u \in \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $h(v) = -v$ pour tout $v \in \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

h est ainsi une symétrie de base $\Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et de direction $\Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

6) Calculons les valeurs propres de l'endomorphisme h :

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & -2 \\ 4 & -7-\lambda & -4 \\ -5 & 10 & 6-\lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{C}_1 \to \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -2 \\ 0 & -7-\lambda & -4 \\ 1-\lambda & 10 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -2 \\ 0 & -7-\lambda & -4 \\ 0 & 14 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -7-\lambda & -4 \\ 14 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\big((-7-\lambda)(8-\lambda) - 14\cdot(-4)\big) = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda) = -\lambda\,(\lambda-1)^2$$

On obtient deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$.

Déterminons les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3-1 & -4 & -2 & 0 \\ 4 & -7-1 & -4 & 0 \\ -5 & 10 & 6-1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -4 & 0 \\ -5 & 10 & 5 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{ x - 2\,y - z = 0 \right. \Longrightarrow$

$\begin{cases} x = 2\,\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3-0 & -4 & -2 & 0 \\ 4 & -7-0 & -4 & 0 \\ -5 & 10 & 6-0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -2 & 0 \\ 4 & -7 & -4 & 0 \\ -5 & 10 & 6 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to 3\,\mathrm{L}_2 - 4\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to 3\,\mathrm{L}_3 + 5\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 10 & 8 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + 2\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to 5\,\mathrm{L}_1 - 4\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \frac{1}{15}\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to -\frac{1}{5}\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{cases} x = -\frac{2}{5}\,\alpha \\ y = -\frac{4}{5}\,\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = -\frac{1}{5}\,\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Posons $\mathrm{U} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2\,y - z = 0\big\} = \Pi\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

et $\mathrm{V} = \Delta\left(\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}\right)$. Alors, nous avons :

$h(u) = u$ pour tout $u \in \mathrm{U}$ et $h(v) = 0$ pour tout $v \in \mathrm{V}$.

h est ainsi une projection de base U et de direction V.

7) Calculons les valeurs propres de l'endomorphisme h :

$$0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -8 & -4 \\ 8 & -15-\lambda & -8 \\ -10 & 20 & 11-\lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{C}_1 \to \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -8 & -4 \\ 0 & -15-\lambda & -8 \\ 1-\lambda & 20 & 11-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -8 & -4 \\ 0 & -15-\lambda & -8 \\ 0 & 28 & 15-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -15-\lambda & -8 \\ 28 & 15-\lambda \end{vmatrix}$$

$(1-\lambda)\,\big((-15-\lambda)\,(15-\lambda) - 28\cdot(-8)\big) = (1-\lambda)\,(\lambda^2-1) = -(\lambda-1)^2\,(\lambda+1)$

On obtient deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

Déterminons les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

(a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 5-1 & -8 & -4 & 0 \\ 8 & -15-1 & -8 & 0 \\ -10 & 20 & 11-1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -8 & -4 & 0 \\ 8 & -16 & -8 & 0 \\ -10 & 20 & 10 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \big\{\, x - 2\,y - z = 0 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2\,\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 5-(-1) & -8 & -4 & 0 \\ 8 & -15-(-1) & -8 & 0 \\ -10 & 20 & 11-(-1) & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -8 & -4 & 0 \\ 8 & -14 & -8 & 0 \\ -10 & 20 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to 3\,\mathrm{L}_2 - 4\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to 3\,\mathrm{L}_3 + 5\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -8 & -4 & 0 \\ 0 & -10 & -8 & 0 \\ 0 & 20 & 16 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + 2\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -8 & -4 & 0 \\ 0 & -10 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{L}_1 \to 5\,\mathrm{L}_1 - 4\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & -10 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \frac{1}{30}\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to -\frac{1}{10}\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{5}\,\alpha \\ y = -\frac{4}{5}\,\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = -\frac{1}{5}\,\alpha\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$$

Posons $\mathrm{U} = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2\,y - z = 0\} = \Pi\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

et $\mathrm{V} = \Delta\left(\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}\right)$. Alors, nous avons :

$h(u) = u$ pour tout $u \in \mathrm{U}$ et $h(v) = -v$ pour tout $v \in \mathrm{V}$.

h est ainsi une symétrie de base U et de direction V.

8) Calculons les valeurs propres de l'endomorphisme h :

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} 2-3\,\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-3\,\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-3\,\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + (2-3\,\lambda)\,\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3}}{=} \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 0 & 3\,\lambda-3 & 9\,\lambda^2-12\,\lambda+3 \\ 0 & 3-3\,\lambda & -3+3\,\lambda \\ -1 & -1 & 2-3\,\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{27} \begin{vmatrix} 3\,\lambda-3 & 9\,\lambda^2-12\,\lambda+3 \\ 3-3\,\lambda & -3+3\,\lambda \end{vmatrix} = -\frac{1}{27}\,(3-3\,\lambda) \begin{vmatrix} 3\,\lambda-3 & 9\,\lambda^2-12\,\lambda+3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{C}_1 \to \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2}{=} \frac{1}{9}\,(\lambda-1) \begin{vmatrix} 9\,\lambda^2-9\,\lambda & 9\,\lambda^2-12\,\lambda+3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{9}\,(\lambda-1)\,(9\,\lambda^2-9\,\lambda)\cdot(-1) = -\lambda\,(\lambda-1)^2$$

On obtient deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$.

Déterminons les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

(a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{2}{3}-1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{ x + y + z = 0 \right. \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

(b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{2}{3}-0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + 2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 3\,\mathrm{L}_1 - 2\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\Longrightarrow}{\substack{L_1 \to -\frac{1}{3} L_1 \\ L_3 \to \frac{1}{3} L_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Posons $U = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

et $V = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Alors, nous avons :

$h(u) = u$ pour tout $u \in U$ et $h(v) = 0$ pour tout $v \in V$.

h est ainsi une projection de base U et de direction V.

9) Calculons les valeurs propres de l'endomorphisme h :

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+1)\big((3-\lambda)(-3-\lambda) - 2\cdot(-4)\big) = -(\lambda+1)(\lambda^2-1)$$

$$= -(\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

On obtient deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

Déterminons les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

(a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-1 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1-1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3-1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\Longrightarrow}{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\Longrightarrow}{\substack{L_1 \to \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \to -\frac{1}{2} L_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2\,\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-(-1) & 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1-(-1) & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3-(-1) & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \{\, x - z = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Posons $\mathrm{U} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{V} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - z = 0\big\} = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Alors, nous avons :

$h(u) = u$ pour tout $u \in \mathrm{U}$ et $h(v) = -v$ pour tout $v \in \mathrm{V}$.

Ainsi h est une symétrie de base U et de direction V.