9.14 1) Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 2\cdot(-1) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-3)$$

Il y a ainsi deux valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x - y = 2x \\ 2x + 4y = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \iff x + y = 0$$

On constate que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ pour avoir la solution générale :

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = -\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$ est $E_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x - y = 3x \\ 2x + 4y = 3y \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \iff 2x + y = 0$$

On constate que x est une variable libre ; on pose $x = \alpha$ pour avoir la solution générale :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha \end{cases} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$ est $E_3 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

2) Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculons P^{-1} à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 + L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2 \to -L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 \to L_1 - L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \qquad \text{donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Montrons par récurrence que $(\mathrm{A}')^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Initialisation : Si $n = 1$, l'égalité $(\mathrm{A}')^1 = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 \\ 0 & 3^1 \end{pmatrix}$ est triviale.

Hérédité : Supposons $(\mathrm{A}')^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

$$(\mathrm{A}')^{n+1} = \mathrm{A}' \cdot (\mathrm{A}')^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

4) La formule $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}$ implique $\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{A}'\mathrm{P}^{-1}$. Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^n = (\mathrm{P}\mathrm{A}'\mathrm{P}^{-1})^n &= \mathrm{P}\mathrm{A}' \underbrace{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}}_{\mathrm{I}_2} \mathrm{A}' \underbrace{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}}_{\mathrm{I}_2} \mathrm{A}' \underbrace{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}}_{\mathrm{I}_2} \mathrm{A}'\mathrm{P}^{-1} \ldots \mathrm{P}\mathrm{A}'\mathrm{P}^{-1} \\
&= \mathrm{P}\mathrm{A}'\mathrm{A}'\mathrm{A}' \ldots \mathrm{A}'\mathrm{P}^{-1} \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{A}')^n\mathrm{P}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ -2^n & -2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$