**9.9** Demandons-nous s'il peut exister un scalaire $\lambda$ et un vecteur non nul $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $h\big((x\,;y)\big) = (y\,;-x) = \lambda \cdot (x\,;y) = (\lambda\,x\,;\lambda\,y)$,

Il s'agit donc de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} y = \lambda\,x \\ -x = \lambda\,y \end{cases} \iff \begin{cases} -\lambda\,x + \quad y = 0 \\ \quad -x - \lambda\,y = 0 \end{cases}$$

Résolvons ce système en échelonnant la matrice correspondante :

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to -\lambda\,\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+1 & 0 \end{array}\right)$$

Or $\lambda^2 + 1 \geqslant 1 > 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Puisque $\lambda^2+1$ ne peut pas s'annuler, la matrice associée à ce système d'équations est de rang 2, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

En vertu du théorème de la page 2.6, ce système d'équations n'admet donc que la solution triviale $(0\,;0)$.

Quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, il n'existe ainsi pas de vecteur propre non nul.

Puisqu'il n'y a aucun vecteur propre, il est impossible de former une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres. Le théorème du haut de la page 9.4 implique que l'endomorphisme $h$ n'est pas diagonalisable.