

1.7

1) Soient f et g deux fonctions paires.

$$(a) \quad (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

La fonction $f+g$ est par conséquent paire.

$$(b) \quad (f-g)(-x) = f(-x) - g(-x) = f(x) - g(x) = (f-g)(x)$$

La fonction $f-g$ est ainsi paire.

$$(c) \quad (f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$$

Il en résulte que la fonction $f \cdot g$ est paire.

$$(d) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

C'est pourquoi la fonction $\frac{f}{g}$ est paire.

2) Soient f et g deux fonctions impaires.

$$(a) \quad (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) + (-g(x)) = -(f(x) + g(x)) = -(f+g)(x)$$

La fonction $f+g$ est par conséquent impaire.

$$(b) \quad (f-g)(-x) = f(-x) - g(-x) = -f(x) - (-g(x)) = -(f(x) - g(x)) = -(f-g)(x)$$

La fonction $f-g$ est ainsi impaire.

$$(c) \quad (f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$$

Il en résulte que la fonction $f \cdot g$ est paire.

$$(d) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

C'est pourquoi la fonction $\frac{f}{g}$ est paire.

3) Posons $f(x) = 1$ et $g(x) = x$.

La fonction f est paire, car $f(-x) = 1 = f(x)$.

La fonction g est impaire, car $g(-x) = -x = -g(x)$.

(a) La fonction $(f+g)(x) = 1+x$ est quelconque.

En effet, on calcule que $(f+g)(1) = 2$ et que $(f+g)(-1) = 0$.

Mais on constate d'une part que $(f+g)(1) \neq (f+g)(-1)$ et d'autre part que $-(f+g)(1) \neq (f+g)(-1)$.

(b) La fonction $(f-g)(x) = 1-x$ est quelconque.

En effet, on obtient $(f-g)(1) = 0$ et $(f-g)(-1) = 2$.

Or l'on remarque tout d'abord que $(f-g)(1) \neq (f-g)(-1)$ et enfin que $-(f-g)(1) \neq (f-g)(-1)$.

Soient f une fonction paire et g une fonction impaire.

$$(c) \quad (f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -(f(x) \cdot g(x)) = -(f \cdot g)(x)$$

Ainsi la fonction $f \cdot g$ est impaire.

$$(d) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f(x)}{-g(x)} = -\frac{f(x)}{g(x)} = -\left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

Aussi la fonction $\frac{f}{g}$ est-elle impaire.