Chamblandes 2003 — Problème 2.3

a) L'endomorphisme f_k n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} k & 1 & -k \\ 1 & k & -k \\ k & k & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

1^re méthode

Une matrice n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est nul.

$$0 = \begin{vmatrix} k & 1 & -k \\ 1 & k & -k \\ k & k & -1 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{C}_3 \to \mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_1}{=} \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & 1-k \\ k & k & k-1 \end{vmatrix} = (k-1) \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & -1 \\ k & k & 1 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3}{=}$$

$$= (k-1) \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ k+1 & 2\,k & 0 \\ k & k & 1 \end{vmatrix} = (k-1) \begin{vmatrix} k & 1 \\ k+1 & 2\,k \end{vmatrix} \overset{\mathrm{C}_1 \to \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2}{=} (k-1) \begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 1-k & 2\,k \end{vmatrix}$$

$$= (k-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2\,k \end{vmatrix} \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1}{=} (k-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2\,k+1 \end{vmatrix} = (k-1)^2\,(2\,k+1)$$

Donc f_k n'est pas un automorphisme si $k = 1$ ou si $k = -\frac{1}{2}$.

2^e méthode

Une matrice carrée d'ordre n est inversible si et seulement si elle est de rang n.

$$\begin{pmatrix} k & 1 & -k \\ 1 & k & -k \\ k & k & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & k & -k \\ k & 1 & -k \\ k & k & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - k\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & k & -k \\ 0 & 1-k^2 & k^2-k \\ 0 & k-1 & k-1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{L}_3 \to (k+1)\,\mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & k & -k \\ 0 & 1-k^2 & k^2-k \\ 0 & 0 & (k-1)\,(k+1) + k^2 - k \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est ainsi pas de rang 3 (et donc non inversible) si :

$$\begin{aligned} 0 &= (k-1)\,(k+1) + k^2 - k \\ &= (k-1)\,(k+1) + k\,(k-1) \\ &= (k-1)\,(k+1+k) \\ &= (k-1)\,(2\,k+1) \end{aligned}$$

Donc f_k n'est pas un automorphisme si $k = 1$ ou si $k = -\frac{1}{2}$.

b) (i) $k = 1$

f_1 a pour matrice relativement à la base canonique $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Rappelons que les colonnes de cette matrice constituent un système générateur de $\mathrm{Im}(f_1)$. On constate immédiatement que $\mathrm{Im}(f_1) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Pour déterminer $\mathrm{Ker}(f_1)$, il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \iff \{x + y - z = 0 \iff$$

$$\begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On conclut donc que $\mathrm{Ker}(f_1) = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(ii) $k = -\frac{1}{2}$

$f_{-\frac{1}{2}}$ a pour matrice relativement à la base canonique $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

On sait que $\mathrm{Im}(f_{-\frac{1}{2}})$ est engendrée par les colonnes de cette matrice. Échelonnons ces vecteurs pour déterminer une base de $\mathrm{Im}(f_{-\frac{1}{2}})$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to -2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to 2\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \frac{1}{3}\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \frac{1}{3}\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + 2\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a ainsi trouvé que $\mathrm{Im}(f_{-\frac{1}{2}}) = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Pour déterminer $\mathrm{Ker}(f_{-\frac{1}{2}})$, il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = 0 \\ x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - z = 0 \end{cases} \quad \text{que l'on peut écrire matriciellement :}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to -2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to 2\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \frac{1}{3}\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \frac{1}{3}\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + 2\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{D'où } \mathrm{Ker}(f_{-\frac{1}{2}}) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

(iii) Si $k \neq 1$ et $k \neq -\frac{1}{2}$, alors f_k est bijectif, si bien que $\mathrm{Im}(f_k) = \mathbb{R}^3$ et que $\mathrm{Ker}(f_k) = \{0\}$.

c) Calculons les valeurs propres de $f_{-\frac{1}{2}}$:

$$0 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1-\lambda \end{vmatrix} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} -1-2\,\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -1-2\,\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -2-2\,\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_1 \to L_1 - L_2}{=} \frac{1}{8} \begin{vmatrix} -3-2\,\lambda & 3+2\,\lambda & 0 \\ 2 & -1-2\,\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -2-2\,\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\,(3+2\,\lambda) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1-2\,\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -2-2\,\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_1 \to C_1 + C_2}{=} \frac{1}{8}\,(3+2\,\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-2\,\lambda & -1-2\,\lambda & 1 \\ -2 & -1 & -2-2\,\lambda \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}\,(3+2\,\lambda) \begin{vmatrix} 1-2\,\lambda & 1 \\ -2 & -2-2\,\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{8}\,(3+2\,\lambda)\,\big((1-2\,\lambda)\,(-2-2\,\lambda) - (-2)\cdot 1\big) = -\frac{1}{8}\,(3+2\,\lambda)\,(4\,\lambda^2 + 2\,\lambda)$$

$$= -\frac{1}{4}\,\lambda\,(3+2\,\lambda)\,(2\,\lambda+1)$$

Il y a ainsi trois valeurs propres : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ et $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$.

Il existe donc trois vecteurs propres linéairement indépendants : ils forment par conséquent une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui montre que $f_{-\frac{1}{2}}$ est diagonalisable.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(i) $\lambda = 0$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$ n'est autre que le noyau.

$$\mathrm{E}_0 = \mathrm{Ker}(f_{-\frac{1}{2}}) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

(ii) $\lambda = -\frac{3}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right) & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right) & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1-\left(-\frac{3}{2}\right) & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to 2\,L_1 \\ L_2 \to 2\,L_2 \\ L_3 \to 2\,L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to 2\,L_3 + L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \to L_1 - \frac{1}{3}\,L_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to \frac{1}{2}\,L_1 \\ L_3 \to \frac{1}{3}\,L_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 0 \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E}_{-\frac{3}{2}} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(iii) $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right) & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1-\left(-\frac{1}{2}\right) & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to 2\,L_1 \\ L_2 \to 2\,L_2 \\ L_3 \to 2\,L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 \leftrightarrow -L_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 - 2\,L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 + L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to L_1 + L_2 \\ L_2 \to -L_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = -2\,\alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E}_{-\frac{1}{2}} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

Il en résulte que nous avons :

$$f_{-\frac{1}{2}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \color{blue}{0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \color{blue}{0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \color{blue}{0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$f_{-\frac{1}{2}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \color{red}{0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \color{red}{-\frac{3}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \color{red}{0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$f_{-\frac{1}{2}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \color{green}{0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \color{green}{0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \color{green}{-\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, dans la base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$, la matrice de $f_{-\frac{1}{2}}$

$\begin{pmatrix} \color{blue}{0} & \color{red}{0} & \color{green}{0} \\ \color{blue}{0} & \color{red}{-\frac{3}{2}} & \color{green}{0} \\ \color{blue}{0} & \color{red}{0} & \color{green}{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ est bien diagonale.

On peut aussi vérifier l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$