Chamblandes 2013 — Problème 1

Signe

		0		$\sqrt[3]{2}$	
x^4	$+$	0	$+$	$\Vert$	$+$
x^3-2	$-$		$-$	$\Vert$	$+$
f	$-$	0	$-$	$\Vert$	$+$

$$x^3-2=0 \iff x^3=2 \iff x=\sqrt[3]{2}$$

Asymptotes

1. $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt[3]{2}} \frac{x^4}{x^3-2} = « \frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^4}{0} » = « \frac{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^4}{0} » = « \frac{2^{\frac{4}{3}}}{0} » = « \frac{\sqrt[3]{2^4}}{0} » = « \frac{\sqrt[3]{16}}{0} » = \infty$

   $x=\sqrt[3]{2}$ asymptote verticale

2. $$\begin{array}{r|l} x^4 & x^3-2 \\ \cline{2-2} -x^4+2\,x & x \\ \cline{1-1} 2\,x & \end{array}$$

   $y=x$ asymptote oblique

   $\delta(x)=\dfrac{2\,x}{x^3-2}$

		0		$\sqrt[3]{2}$	
$2\,x$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$
x^3-2	$-$		$-$	$\Vert$	$+$
δ	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

Croissance

$$f'(x)=\left(\frac{x^4}{x^3-2}\right)'=\frac{(x^4)'\,(x^3-2)-x^4\,(x^3-2)'}{(x^3-2)^2}=\frac{4\,x^3\,(x^3-2)-x^4\,(3\,x^2)}{(x^3-2)^2}$$

$$=\frac{4\,x^6-8\,x^3-3\,x^6}{(x^3-2)^2}=\frac{x^6-8\,x^3}{(x^3-2)^2}=\frac{x^3\,(x^3-8)}{(x^3-2)^2}=\frac{x^3\,(x-2)\,(x^2+2\,x+4)}{(x^3-2)^2}$$

		0		$\sqrt[3]{2}$		2	
x^3	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$x^2+2\,x+4$	$+$		$+$	$\Vert$	$+$		$+$
$(x^3-2)^2$	$+$		$+$	$\Vert$	$+$		$+$
f'	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$\Delta=2^2-4\cdot1\cdot4=-12<0$$

Il nous reste encore à calculer les coordonnées des extremums :

$f(0)=\frac{0^4}{0^3-2}=\frac{0}{-2}=0$

Le point $(0\,;0)$ est un maximum local.

$f(2) = \frac{2^4}{2^3-2} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

Le point $(2\,;\frac{8}{3})$ est un minimum local.