9.17 Désignons par u_n et v_n le nombre de lapins et de belettes dans l'écosystème après n années.

L'énoncé du problème stipule que les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont définies comme suit :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,u_n - 2\,v_n \\ u_n + v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Si l'on pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

Tâchons de diagonaliser la matrice A, afin de calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\,(1-\lambda) - 1\cdot(-2) = \lambda^2 - 5\,\lambda + 6 = (\lambda-2)\,(\lambda-3)$$

Il y a ainsi deux valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

1) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,x - 2\,y \\ x + y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2\,y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 4\,x - 2\,y = 2\,x \\ x + y = 2\,y \end{cases} \iff \begin{cases} 2\,x - 2\,y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff x - y = 0$$

On constate que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ pour avoir la solution générale :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$ est $\mathrm{E}_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,x - 2\,y \\ x + y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x \\ 3\,y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 4\,x - 2\,y = 3\,x \\ x + y = 3\,y \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2\,y = 0 \\ x - 2\,y = 0 \end{cases} \iff x - 2\,y = 0$$

On constate que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ pour avoir la solution générale :

$$\begin{cases} x = 2\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$ est $\mathrm{E}_3 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Attendu que nous avons trouvé une base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ constituée de vecteurs propres, il s'ensuit que la matrice A est diagonalisable.

Soit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$.

Calculons l'inverse de P à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to -\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - 2\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

On vérifie ainsi que la matrice A est semblable à une matrice diagonale A′ :

$$\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Comme la matrice A′ est diagonale, on a $(\mathrm{A}')^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De la formule $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}$, on tire que $\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{A}'\mathrm{P}^{-1}$, de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^n = \mathrm{P}(\mathrm{A}')^n\mathrm{P}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2 \cdot 3^n \\ 2^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^n + 2 \cdot 3^n & 2 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \\ -2^n + 3^n & 2 \cdot 2^n - 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous pouvons finalement déterminer explicitement les populations de lapins et de belettes après n années :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2^n + 2 \cdot 3^n & 2 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \\ -2^n + 3^n & 2 \cdot 2^n - 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -100 \cdot 2^n + 200 \cdot 3^n + 20 \cdot 2^n - 20 \cdot 3^n \\ -100 \cdot 2^n + 100 \cdot 3^n + 20 \cdot 2^n - 10 \cdot 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 180 \cdot 3^n - 80 \cdot 2^n \\ 90 \cdot 3^n - 80 \cdot 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$