- 9.22 1) La fonction f n'est définie que si la fonction $\ln(x)$ est définie, c'est-à-dire si x > 0. Il en résulte $D_f =]0$; $+\infty[$.
 - 2) Attendu que le domaine de définition n'est pas symétrique, la fonction f n'est ni paire ni impaire.

3)
$$f(x) = x \ln(x) - x = x (\ln(x) - 1)$$

Étudions le signe de l'expression ln(x) - 1

(a)
$$\ln(x) - 1 = 0$$

 $\ln(x) = 1$
 $e^{\ln(x)} = e^1$
 $x = e$

(b)
$$\begin{cases} \ln(x) < 1 & \text{si } x < e \\ \ln(x) = 1 & \text{si } x = e \\ \ln(x) > 1 & \text{si } x > e \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(x) - 1 < 0 & \text{si } x < e \\ \ln(x) - 1 = 0 & \text{si } x = e \\ \ln(x) - 1 > 0 & \text{si } x > e \end{cases}$$

4)
$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x \ln(x) - x = 0_+ \cdot \ln(0_+) - 0_+ = 0_+ \cdot (-\infty)$$
: indéterminé

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln(x) - x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \left(\ln(x) - 1\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x) - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\left(\ln(x) - 1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -x = 0_{-}$$

Le point (0;0) est un point limite de la fonction f.

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln(x) - x = \lim_{x \to +\infty} x \left(\ln(x) - 1 \right) = (+\infty) \cdot \left(\ln(+\infty) - 1 \right)$$
$$= (+\infty) \cdot (+\infty - 1) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

La fonction f ne possède pas d'asymptote horizontale à droite.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln(x) - x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \ln(x) - 1 = \ln(+\infty) - 1$$
$$= +\infty - 1 = +\infty$$

La fonction f n'a pas d'asymptote oblique à droite.

5)
$$f'(x) = (x \ln(x) - x)'$$

= $(x \ln(x))' - 1$

$$= (x)' \ln(x) + x \left(\ln(x)\right)' - 1$$

$$= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1$$

$$= \ln(x) + 1 - 1$$

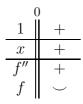
$$= \ln(x)$$

$$\begin{array}{c|cccc} \ln(x) & 0 & 1 \\ \hline f' & -0 & + \\ f & \searrow_{\min} \end{array}$$

$$f(1) = 1 \cdot \ln(1) - 1 = 1 \cdot 0 - 1 = -1$$

Le point (1;-1) est le minimum absolu de la fonction f.

6)
$$f''(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$



La fonction f est strictement convexe.

