7.20 1) Soient $f, g \in \mathbb{R}_3[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) $h(f+g) = (f+g)' = f' + g' = h(f) + h(g)$

(b) $h(\alpha \cdot f) = (\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f' = \alpha \cdot h(f)$

2) $h(1) = (1)' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$
$h(x) = (x)' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$
$h(x^2) = (x^2)' = 2\,x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$
$h(x^3) = (x^3)' = 3\,x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) (a) $h(a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3) = (a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3)' = b + 2\,c\,x + 3\,d\,x^2$

On peut aussi obtenir ce résultat à partir de l'écriture matricielle :

$$h(a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2\,c \\ 3\,d \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= b + 2\,c\,x + 3\,d\,x^2$$

Pour déterminer $\mathrm{Ker}(h)$, il s'agit de résoudre $b + 2\,c\,x + 3\,d\,x^2 = 0$, ce qui correspond au système suivant :

$$\begin{cases} b = 0 \\ 2\,c = 0 \\ 3\,d = 0 \end{cases} \quad \text{d'inconnues } a, b, c \text{ et } d\,.$$

Matriciellement, ce système s'écrit :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \frac{1}{2}\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \frac{1}{3}\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On constate que a est une variable libre ; en posant $a = \alpha$, on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(h) = \langle 1 \rangle = \{\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} = \mathbb{R}_0[x]\,.$

(b) Pour déterminer $\mathrm{Im}(h)$, échelonnons la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_4 \\ \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \frac{1}{2}\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \frac{1}{3}\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \mathrm{Im}(h) = \langle 1\,;x\,;x^2 \rangle = \{a + b\,x + c\,x^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_2[x]\,.$$

4) $\mathcal{B}' = \big(1 + x\,; x\,(x-2)\,; x\,(x-1)\,; x\,(x-1)\,(x-2)\big)$
$\quad = (1 + x\,; x^2 - 2\,x\,; x^2 - x\,; x^3 - 3\,x^2 + 2\,x)$

comprend $4 = \dim\big(\mathbb{R}_3[x]\big)$ vecteurs. Vu la remarque 2) de la page 4.6, il suffit de montrer que ces 4 vecteurs engendrent $\mathbb{R}_3[x]$, c'est-à-dire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 4. Échelonnons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 2\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 + 2\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - \mathrm{L}_3}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisqu'on a bien affaire à une matrice de rang 4, les 4 vecteurs de $\mathcal{B}'$ engendrent $\mathbb{R}_3[x]$, si bien que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

5) $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculons P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + 2\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + 3\,\mathrm{L}_4 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + 4\,\mathrm{L}_4}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On a donc obtenu $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice de h relativement à la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$