**6.9** Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h\big((x\,;y)\big) = (x\,;0)\,.$

$h$ est bien une application linéaire :

1) $$\begin{aligned} h\big((x\,;y)+(x'\,;y')\big) &= h\big((x+x'\,;y+y')\big) = (x+x'\,;0) = (x\,;0)+(x'\,;0) \\ &= h\big((x\,;y)\big)+h\big((x'\,;y')\big) \end{aligned}$$

2) $h\big(\alpha\cdot(x\,;y)\big) = h\big((\alpha\,x\,;\alpha\,y)\big) = (\alpha\,x\,;0) = \alpha\cdot(x\,;0) = \alpha\cdot h\big((x\,;y)\big)$

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est une famille libre.
Montrons qu'en revanche son image n'est pas libre.
$h\big((1\,;0)\big) = (1\,;0)$
$h\big((0\,;1)\big) = (0\,;0)$
Comme $0\cdot h\big((1\,;0)\big)+1\cdot h\big((0\,;1)\big) = 0\cdot(1\,;0)+1\cdot(0\,;0) = (0\,;0)+(0\,;0) = (0\,;0)$, on en déduit que la famille $\Big(h\big((1\,;0)\big)\,;h\big((0\,;1)\big)\Big)$ est liée.