5 Sous-espaces vectoriels

5.1 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est un sous-espace vectoriel de E.

5.2 Donner un exemple d'un espace vectoriel E et de deux sous-espaces vectoriels F et G tels que $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$ ne soit pas un sous-espace vectoriel de E.

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
La **somme** de F et de G est l'ensemble des éléments de E qui peuvent s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G :

$$\mathrm{F} + \mathrm{G} = \{v + w : v \in \mathrm{F}, w \in \mathrm{G}\}$$

5.3
1) Montrer que $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2) Montrer que $\mathrm{F} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ et $\mathrm{G} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$.
3) Montrer que tout sous espace-vectoriel contenant $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$ contient $\mathrm{F} + \mathrm{G}$.

Ainsi $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G.

Relation de Grassmann
Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel* E. *Alors* $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$.

Preuve On pose $k = \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$, $m = \dim(\mathrm{F})$ et $n = \dim(\mathrm{G})$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1\,; \ldots\,; e_k)$ une base de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.
On la complète en une base $\mathcal{B}' = (e_1\,; \ldots\,; e_k\,; e'_1\,; \ldots\,; e'_{m-k})$ de F et en une base $\mathcal{B}'' = (e_1\,; \ldots\,; e_k\,; e''_1\,; \ldots\,; e''_{n-k})$ de G.
Montrons que $\mathcal{B}^\star = (e_1\,; \ldots\,; e_k\,; e'_1\,; \ldots\,; e'_{m-k}\,; e''_1\,; \ldots\,; e''_{n-k})$ est une base de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$.

1) $\mathcal{B}^\star$ engendre $\mathrm{F} + \mathrm{G}$.
   Soit $u \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$. Il existe $v \in \mathrm{F}$ et $w \in \mathrm{G}$ tels que $u = v + w$.
   Il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-k}$ tels que
   $$v = \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_k \cdot e_k + \alpha'_1 \cdot e'_1 + \ldots + \alpha'_{m-k} \cdot e'_{m-k}\,.$$
   Il existe des scalaires $\beta_1, \ldots, \beta_k, \beta''_1, \ldots, \beta''_{n-k}$ tels que
   $$w = \beta_1 \cdot e_1 + \ldots + \beta_k \cdot e_k + \beta''_1 \cdot e'_1 + \ldots + \beta''_{n-k} \cdot e'_{n-k}\,.$$
   Alors $u = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot e_1 + \ldots + (\alpha_k + \beta_k) \cdot e_k + \alpha'_1 \cdot e'_1 + \ldots + \alpha'_{m-k} \cdot e'_{m-k} + \beta''_1 \cdot e'_1 + \ldots + \beta''_{n-k} \cdot e'_{n-k}$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}^\star$.

2) $\mathcal{B}^\star$ est une famille libre.
   Soient $\alpha_1\ \ldots, \alpha_k, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-k}, \alpha''_1, \ldots, \alpha''_{n-k}$ des scalaires tels que
   $\alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_k \cdot e_k + \alpha'_1 \cdot e'_1 + \ldots + \alpha'_{m-k} \cdot e'_{m-k} + \alpha''_1 \cdot e''_1 + \ldots + \alpha''_{n-k} \cdot e''_{n-k} = 0.$

Posons $u = \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_k \cdot e_k + \alpha'_1 \cdot e'_1 + \ldots + \alpha'_{m-k} \cdot e'_{m-k}$
$= -\alpha''_1 \cdot e''_1 - \ldots - \alpha''_{n-k} \cdot e''_{n-k}$.

On a $u \in \langle e_1 ; \ldots ; e_k ; e'_1 ; \ldots ; e'_{m-k} \rangle = \mathrm{F}$ et $u \in \langle e''_1 ; \ldots ; e''_{n-k} \rangle \subset \mathrm{G}$.

Puisque $u \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$, il existe des scalaires $\beta_1, \ldots, \beta_k$ tels que

$$u = \beta_1 \cdot e_1 + \ldots + \beta_k \cdot e_k \, .$$

Alors $0 = u - u = \beta_1 \cdot e_1 + \ldots \beta_k \cdot e_k + \alpha''_1 \cdot e''_1 + \alpha''_{n-k} \cdot e''_{n-k}$.

Comme $\mathcal{B}'' = (e_1 ; \ldots ; e_k ; e''_1 ; \ldots ; e''_{n-k})$ est une base de G, on doit avoir

$$\beta_1 = \ldots = \beta_k = \alpha''_1 = \ldots = \alpha''_{n-k} = 0 \, .$$

Il reste ainsi $\alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_k \cdot e_k + \alpha'_1 \cdot e'_1 + \ldots + \alpha'_{m-k} \cdot e'_{m-k} = 0$.

Mais $\mathcal{B}' = (e_1 ; \ldots ; e_k ; e'_1 ; \ldots ; e'_{m-k})$ étant une base de F, on obtient

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = \alpha'_1 = \ldots = \alpha'_{m-k} = 0 \, .$$

Puisque $\mathcal{B}^\star = (e_1 ; \ldots ; e_k ; e'_1 ; \ldots ; e'_{m-k} ; e''_1 ; \ldots ; e''_{n-k})$ est une base de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$, $\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = k+(m-k)+(n-k) = m+n-k = \dim(\mathrm{F})+\dim(\mathrm{G})-\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})$.

5.4 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$;
2) $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G})$;
3) la décomposition de tout élément de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ en somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.

On dit que la somme $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est **directe** si $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$. Dans ce cas, on la note $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Existence d'un sous-espace supplémentaire

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie. Pour tout sous-espace vectoriel* F *de* E*, il existe un sous-espace vectoriel* G *de* E *(non unique) tel que* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

On dit que G est un sous espace **supplémentaire** de F dans E.

5.5 **Preuve de l'existence d'un sous espace supplémentaire**

On pose $n = \dim(\mathrm{E})$ et $k = \dim(\mathrm{F})$.

Considérons une base $(e_1 ; \ldots ; e_k)$ de F que nous complétons en une base $(e_1 ; \ldots ; e_k ; e_{k+1} ; \ldots ; e_n)$ de E. Posons $\mathrm{G} = \langle e_{k+1} ; \ldots ; e_n \rangle$.

1) Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$.
2) Montrer que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$.

Remarques :

Soit $\mathrm{F} = (v_1 ; \ldots ; v_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

La matrice A engendrée par la famille F dans une base $\mathcal{B}$ est la matrice dont les lignes sont les composantes des vecteurs de F.

1) L'espace engendré par la famille de vecteurs F ne change pas si l'on effectue sur les vecteurs de la famille les opérations élémentaires suivantes :

(a) changer l'ordre des vecteurs ;

(b) multiplier un vecteur par un nombre non nul ;

(c) ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Il en résulte que les vecteurs lignes d'une matrice et les vecteurs lignes de sa matrice échelonnée engendrent le même espace vectoriel.

2) Les lignes non nulles de la matrice échelonnée fournissent une base de l'espace vectoriel engendré par F.

3) Le rang de la matrice engendrée par la famille F est égal à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de F.

Exemple

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\-2\\5\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-4\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\8\\-3\\-5\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1&-2&5&-3\\2&3&1&-4\\3&8&-3&-5\end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \to L_2 - 2\,L_1\\ L_3 \to L_3 - 3\,L_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix}1&-2&5&-3\\0&7&-9&2\\0&14&-18&4\end{pmatrix} \overset{L_3 \to L_3 - 2\,L_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix}1&-2&5&-3\\0&7&-9&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

F admet pour base $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\5\\-3\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\7\\-9\\2\end{pmatrix}\right)$ et $\dim(\mathrm{F}) = 2$.

Puisque $\begin{pmatrix}1&-2&5&-3\\0&7&-9&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ est une matrice échelonnée, les vecteurs $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ forment une base du supplémentaire de F.

5.6 Soit $(e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4)$ une base d'un espace vectoriel E. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel U de E engendré par les quatre vecteurs :

$$u_1 = -e_1 + e_2 + 2\,e_3 - e_4 \qquad u_2 = 2\,e_1 + 3\,e_2 - e_3 + e_4$$
$$u_3 = 3\,e_1 + 7\,e_2 + e_4 \qquad u_4 = e_1 + 9\,e_2 + 4\,e_3 - e_4$$

Extraire de la famille $(u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4)$ une base de U.

5.7 Calculer la dimension du sous-espace $\langle 4\,x^2 - x + 2 ; 2\,x^2 + 6\,x + 3 ; -4\,x^2 + 10\,x + 2 \rangle$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

5.8 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace $\mathrm{S} = \left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\4\\-3\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\2\\0\\3\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}2\\-2\\4\\-6\end{pmatrix} \right\rangle$, ainsi que le sous-espace $\mathrm{T} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-3\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} \right\rangle$.

Déterminer les dimensions de S, T, S + T et S ∩ T.

5.9 Soient $\mathrm{F} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $\mathrm{G} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -1 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle$ deux sous-espaces de $\mathbb{R}^5$. Calculer $\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G})$ et $\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})$.

5.10 Dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{C} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{D} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\dim\big(\langle \mathrm{A} ; \mathrm{B} ; \mathrm{C} ; \mathrm{D} \rangle\big)$ et trouver une base du supplémentaire de ce sous-espace.

5.11 Dans $\mathbb{R}_3[x]$, on considère les polynômes :

$$p_1 = x^3 - 2\,x^2 + 4\,x + 1 \qquad p_2 = 2\,x^3 - 3\,x^2 + 9\,x - 1$$
$$p_3 = x^3 + 6\,x - 5 \qquad p_4 = 2\,x^3 - 5\,x^2 + 7\,x + 5$$

Calculer $\dim\big(\langle p_1 ; p_2 ; p_3 ; p_4 \rangle\big)$ et trouver une base du supplémentaire de ce sous-espace.

5.12 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels $\mathrm{F} = \big\{(x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4 : y + z + t = 0\big\}$ et $\mathrm{G} = \big\{(x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ et } z = 2\,t\big\}$.
Déterminer la dimension et une base de F, G et $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$.

5.13 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $\mathrm{F} = \big\{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\big\}$ et soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Donner une base de $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$ et une base de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$.

5.14 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $\mathrm{F} = \left(\begin{pmatrix} m \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ m-1 \\ -4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ où $m \in \mathbb{R}$.

1) Calculer les deux valeurs de m pour lesquelles la famille F est liée.
2) Déterminer les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 engendrés par F lorsque cette famille est liée.
3) Déterminer une base de $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$.

Réponses

5.6 $\dim(\mathrm{U}) = 2$ $(u_1\,;u_2)$ est une base de U.

5.7 $\dim\big(\langle 4\,x^2 - x + 2\,;2\,x^2 + 6\,x + 3\,;-4\,x^2 + 10\,x + 2\rangle\big) = 3$

5.8 $\dim(\mathrm{S}) = 2$ $\dim(\mathrm{T}) = 2$ $\dim(\mathrm{S} + \mathrm{T}) = 3$ $\dim(\mathrm{S} \cap \mathrm{T}) = 1$

5.9 $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = 3$ $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) = 2$

5.10 $\dim\big(\langle \mathrm{A}\,;\mathrm{B}\,;\mathrm{C}\,;\mathrm{D}\rangle\big) = 2$ base du supplémentaire : $\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$

5.11 $\dim\big(\langle p_1\,;p_2\,;p_3\,;p_4\rangle\big) = 2$ base du supplémentaire : $(x\,;1)$

5.12 $\dim(\mathrm{F}) = 3$ base de F : $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

$\dim(\mathrm{G}) = 2$ base de G : $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right)$

$\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) = 1$ base de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$: $\left(\begin{pmatrix}3\\-3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$

5.13 base de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$: $\left(\begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix}\right)$ base de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$: $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

5.14
1) $m_1 = -1$ et $m_2 = -2$
2) $\mathrm{E}_1 = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : 6\,x - 5\,y + 4\,z = 0\big\}$
$\mathrm{E}_2 = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\big\}$
3) base de $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$: $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$