4.2 1) Posons $p_n = x^n, p_{n-1} = x^{n-1}, \ldots, p_2 = x^2, p_1 = x$ et $p_0 = 1$.

Soit $p = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$ un élément de $\mathbb{R}_n[x]$.

Alors $p = a_n \cdot p_n + a_{n-1} \cdot p_{n-1} + \ldots + a_2 \cdot p_2 + a_1 \cdot p_1 + p_0$.

Ainsi tout élément de $\mathbb{R}_n[x]$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_2, p_1, p_0$: la famille $(p_n, p_{n-1}, \ldots, p_2, p_1, p_0)$ engendre $\mathbb{R}_n[x]$.

2) Soit $(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}[x]$.

Posons $\mathrm{N} = \max\big(\deg(q_1)\,;\deg(q_2)\,;\ldots\,;\deg(q_m)\big)$.

Toute combinaison linéaire des polynômes $q_1, q_2, \ldots, q_m$ génère un polynôme de degré $\leqslant \mathrm{N}$.
C'est pourquoi la famille $(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}[x]$, car elle ne peut pas générer les polynômes de degré $> \mathrm{N}$.