2.9 $\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to a\,L_2 - c\,L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & a\,d - b\,c & -c & a \end{array}\right)$

Pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit inversible, il faut que sa matrice échelonnée équivalente $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\,d - b\,c \end{pmatrix}$ n'ait aucune ligne nulle.
Cette condition est satisfaite si $a\,d - b\,c \neq 0$.
On remarque en effet que dans ce cas, les coefficients a et b ne sauraient être tous deux nuls, car $a = b = 0$ implique $a\,d - b\,c = 0 \cdot d - 0 \cdot c = 0$.
Par conséquent, la seule condition $a\,d - b\,c \neq 0$ suffit à garantir que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit inversible.

Supposons $a\,d - b\,c \neq 0$ et terminons le calcul de la matrice inverse.

$$\xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{ad-bc} L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{a\,d-b\,c} & \frac{a}{a\,d-b\,c} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to L_1 - b\,L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 + \frac{bc}{a\,d-b\,c} & -\frac{a\,b}{a\,d-b\,c} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{a\,d-b\,c} & \frac{a}{a\,d-b\,c} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{a\,d}{a\,d-b\,c} & -\frac{a\,b}{a\,d-b\,c} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{a\,d-b\,c} & \frac{a}{a\,d-b\,c} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{a} L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{a\,d-b\,c} & -\frac{b}{a\,d-b\,c} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{a\,d-b\,c} & \frac{a}{a\,d-b\,c} \end{array}\right)$$

Donc, si $a\,d - b\,c \neq 0$, on a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{a\,d-b\,c} & -\frac{b}{a\,d-b\,c} \\ -\frac{c}{a\,d-b\,c} & \frac{a}{a\,d-b\,c} \end{pmatrix} = \frac{1}{a\,d-b\,c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.