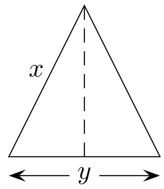
7.12 1) Désignons par x la longueur des côtés isométriques et par y la longueur de la base.



La hauteur du triangle s'obtient à partir du théorème de Pythagore : $h = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}\,y^2}$

L'aire du triangle est ainsi donnée par $f(x,y) = \frac{1}{2}\,y\,\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}\,y^2}\,.$

2) Le périmètre du triangle vaut $12 = 2\,x + y\,.$

3) On en déduit aussitôt $y = 12 - 2\,x\,.$

L'aire du triangle s'exprime par conséquent de la sorte :

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\,(12{-}2\,x)\,\sqrt{x^2 - \tfrac{1}{4}\,(12 - 2\,x)^2} = (6{-}x)\,\sqrt{x^2 - \tfrac{1}{4}\,(144 - 48\,x + 4\,x^2)}$$
$$= (6 - x)\,\sqrt{12\,x - 36}$$

Puisque l'aire du triangle ne peut être que positive, on a $\mathrm{D}_f = [3\,;6]\,.$

4) Puisque l'aire du triangle est positive et que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, il revient au même de maximiser l'aire du triangle ou de maximiser le carré de l'aire du triangle.

On recherche donc la plus grande valeur prise par la fonction $f^2(x) = (6 - x)^2\,(12\,x - 36)$ sur l'intervalle $\mathrm{D}_f = [3\,;6]\,.$

$$\begin{aligned}\big(f^2(x)\big)' &= \big((6 - x)^2\,(12\,x - 36)\big)'\\ &= \big((6 - x)^2\big)'\,(12\,x - 36) + (6 - x)^2\,(12\,x - 36)'\\ &= 2\,(6 - x)\,\underbrace{(6 - x)'}_{-1}\,\underbrace{(12\,x - 36)}_{12\,(x-3)} + (6 - x)^2\,12\\ &= 12\,(6 - x)\,\big(-2\,(x - 3) + (6 - x)\big) = 12\,(6 - x)\,(12 - 3\,x)\\ &= 36\,(6 - x)\,(4 - x)\end{aligned}$$

		4		6	
36	$+$		$+$		$+$
$6 - x$	$+$		$+$	0	$-$
$4 - x$	$+$	0	$-$		$-$
$(f^2)'$	$+$	0	$-$	0	$+$
f^2	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(3) = (6 - 3)\,\sqrt{12 \cdot 3 - 36} = 0$

$f(4) = (6 - 4)\,\sqrt{12 \cdot 4 - 36} = 2\,\sqrt{12} = 4\,\sqrt{3}$

$f(6) = (6 - 6)\,\sqrt{12 \cdot 6 - 36} = 0$

5) L'aire du triangle est maximale si $x = 4\,.$
Alors $y = 12 - 2\,x = 12 - 2 \cdot 4 = 4$ et l'aire du triangle vaut $f(4) = 4\,\sqrt{3}\,.$
En d'autres termes, le triangle isocèle d'aire maximale est un triangle équilatéral dont les côtés mesurent en l'occurrence 4 cm.