11.6 1) (a) $${}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & \cos(\alpha)\,\sin(\alpha) - \cos(\alpha)\,\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\,\sin(\alpha) - \cos(\alpha)\,\sin(\alpha) & \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

(b) $$\det(\mathrm{A}) = \left| \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \right| = -\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = -1$$

2) $$0 = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) - \lambda \end{vmatrix} = \big(\cos(\alpha) - \lambda\big)\,\big(-\cos(\alpha) - \lambda\big) - \sin^2(\alpha)$$
$$= \lambda^2 - \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)\,(\lambda + 1)$$

Il y a ainsi deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $$\left(\begin{array}{cc|c} \cos(\alpha) - 1 & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) - 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_2 \to (1 - \cos(\alpha))\,\mathrm{L}_2 + \sin(\alpha)\,\mathrm{L}_1}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos(\alpha) - 1 & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La formule $\cos(\alpha) = 1 - 2\,\sin^2(\frac{\alpha}{2})$ implique $\cos(\alpha) - 1 = -2\,\sin^2(\frac{\alpha}{2})$.
Recourons aussi à la formule $\sin(\alpha) = 2\,\sin(\frac{\alpha}{2})\,\cos(\frac{\alpha}{2})$.
On obtient alors :
$$\left(\begin{array}{cc|c} -2\,\sin^2(\frac{\alpha}{2}) & 2\,\sin(\frac{\alpha}{2})\,\cos(\frac{\alpha}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_1 \to -\frac{1}{2\,\sin^2(\frac{\alpha}{2})}\,\mathrm{L}_1}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}\,k \\ y = k \end{cases} = \frac{k}{\sin(\frac{\alpha}{2})} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) \\ \sin(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$$

On a donc trouvé $\mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) \\ \sin(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}\right)$.

(b) $$\left(\begin{array}{cc|c} \cos(\alpha) + 1 & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) + 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_2 \to (1 + \cos(\alpha))\,\mathrm{L}_2 - \sin(\alpha)\,\mathrm{L}_1}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos(\alpha) + 1 & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La formule $\cos(\alpha) = 2\,\cos^2(\frac{\alpha}{2}) - 1$ implique $\cos(\alpha) + 1 = 2\,\cos^2(\frac{\alpha}{2})$.
Recourons aussi à la formule $\sin(\alpha) = 2\,\sin(\frac{\alpha}{2})\,\cos(\frac{\alpha}{2})$.
On obtient alors :
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2\,\cos^2(\frac{\alpha}{2}) & 2\,\sin(\frac{\alpha}{2})\,\cos(\frac{\alpha}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_1 \to \frac{1}{2\,\cos^2(\frac{\alpha}{2})}\,\mathrm{L}_1}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\cos(\frac{\alpha}{2})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\cos(\frac{\alpha}{2})}\,k \\ y = k \end{cases} = \frac{k}{\cos(\frac{\alpha}{2})} \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\alpha}{2}) \\ \cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$$

On a donc trouvé $E_{-1} = \Delta\left(\begin{pmatrix} -\sin(\frac{\alpha}{2}) \\ \cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}\right)$.

3) Attendu que $s(u) = u$ pour tout $u \in E_1$ et $s(v) = -v$ pour tout $v \in E_{-1}$, on remarque immédiatement que s est une symétrie vectorielle de base E_1 et de direction E_{-1}.
Il reste encore à vérifier qu'il s'agit bien d'une symétrie orthogonale :
$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) \\ \sin(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\alpha}{2}) \\ \cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} = -\cos(\frac{\alpha}{2})\,\sin(\frac{\alpha}{2}) + \cos(\frac{\alpha}{2})\,\sin(\frac{\alpha}{2}) = 0$
Puisque ce produit scalaire s'annule, la base et la direction de la symétrie sont bien orthogonales.