4.10 1) $\Longrightarrow$ 2)

Soit u un vecteur de E.

Soient deux combinaisons linéaires des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ égales à u :

$$u = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n$$
$$u = \beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2 + \ldots + \beta_n \cdot e_n$$

En soustrayant ces équations, on obtient :

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot e_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot e_n$$

Puisque les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont libres, on en déduit :

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0$$

en d'autres termes

$$\alpha_1 = \beta_1 \quad \alpha_2 = \beta_2 \quad \ldots \quad \alpha_n = \beta_n$$

On a ainsi montré que tout vecteur de E ne peut s'écrire que sous la forme d'une unique combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

2) $\Longrightarrow$ 1)

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels tels que

$$\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n = 0$$

On remarque par ailleurs que

$$0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n = 0$$

Comme le vecteur nul ne peut s'écrire sous la forme de deux combinaisons linéaires distinctes des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$, il s'ensuit que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Cela signifie que la famille $\mathrm{F} = (e_1\,; e_2\,; \ldots\,; e_n)$ est libre.