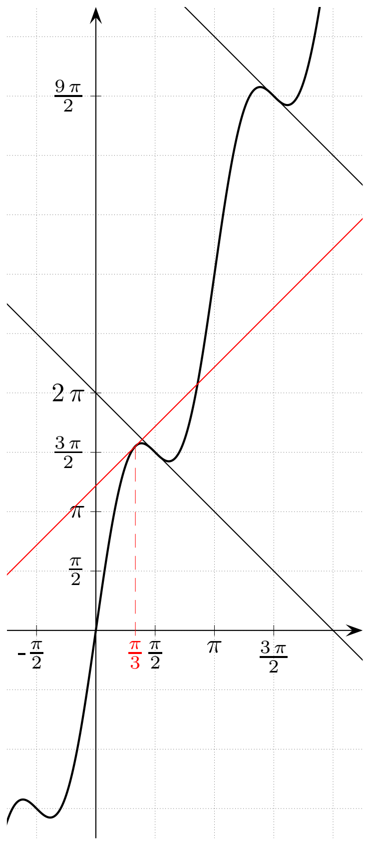
Chamblandes 2014 — Problème 3



1. On rappelle que l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 est donnée par la formule $y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$.

   $f(x) = 2\,\sin(2\,x) + 3\,x$
   $f'(x) = 2\,\big(\sin(2\,x)\big)' + (3\,x)' = 2\,\cos(2\,x)\,\underbrace{(2\,x)'}_{2} + 3 = 4\,\cos(2\,x) + 3$

   $f(x_0) = f(\frac{\pi}{2}) = 2\,\sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) + 3 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\,\sin(\pi) + \frac{3\pi}{2} = 2 \cdot 0 + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$
   $f'(x_0) = f'(\frac{\pi}{2}) = 4\,\cos(2 \cdot \frac{\pi}{2}) + 3 = 4\,\cos(\pi) + 3 = 4 \cdot (-1) + 3 = -1$

   Écrivons à présent l'équation de la tangente t :
   $y = -1\,(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{3\pi}{2}$
   $\boxed{y = -x + 2\,\pi}$

2. La tangente au point d'abscisse $x = \frac{\pi}{3}$ a pour pente :
   $f'(\frac{\pi}{3}) = 4\,\cos(2 \cdot \frac{\pi}{3}) + 3 = 4\,\cos(\frac{2\pi}{3}) + 3 = 4 \cdot (-\frac{1}{2}) + 3 = 1$

   Vu que la tangente t a pour pente -1, on conclut que ces deux tangentes sont bien perpendiculaires, car le produit de leur pente vaut $-1 \cdot 1 = -1$.

3. Attendu que deux droites parallèles ont même pente, on cherche un point d'abscisse x tel que $f'(x) = f'(\frac{\pi}{2}) = -1$:

   $f'(x) = 4\,\cos(2\,x) + 3 = -1$
   $4\,\cos(2\,x) = -4$
   $\cos(2\,x) = -1$
   $2\,x = \pi + 2\,k\,\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$
   $x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$

   On doit, en outre, satisfaire la condition $x \in \,]\frac{\pi}{2}\,; 2\,\pi]$, c'est-à-dire $x > \frac{\pi}{2}$ et $x \leqslant 2\,\pi$.

$x > \frac{\pi}{2}$	$x \leqslant 2\,\pi$
$\frac{\pi}{2} + k\,\pi > \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} + k\,\pi \leqslant 2\,\pi$
$k\,\pi > 0$	$k\,\pi \leqslant \frac{3\pi}{2}$
$k > 0$	$k \leqslant \frac{3}{2}$

   Comme k est entier, il ne reste qu'une solution possible : $k = 1$.

   Il s'ensuit $x = \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \pi = \frac{3\,\pi}{2}$.
   $y = f(x) = f(\frac{3\pi}{2}) = 2\,\sin(2 \cdot \frac{3\pi}{2}) + 3 \cdot \frac{3\pi}{2} = 2\,\sin(3\,\pi) + \frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 0 + \frac{9\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}$

   En définitive, le point recherché a pour coordonnées $(\frac{3\pi}{2}\,; \frac{9\pi}{2})$.