2 Systèmes linéaires & Matrices

On appelle **système linéaire** toute famille d'équations de la forme

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

Si tous les b_i sont nuls, le système est dit **homogène**.

L'ensemble des solutions d'un système linéaire ne change pas si l'on effectue sur les équations les opérations élémentaires suivantes :
– changer l'ordre des équations ;
– multiplier une équation par un nombre non nul ;
– ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres équations.

Méthode du pivot

La **méthode du pivot** — que l'on appelle aussi **méthode de Gauss** — consiste à effectuer des opérations élémentaires sur les lignes du système pour mettre celui-ci sous forme échelonnée.

Étant donné un système d'équations linéaires, réduisons-le à un système plus simple de la manière suivante :

1) échanger au besoin les équations, de telle sorte que la première inconnue x_1 ait un coefficient non nul dans la première équation : ainsi $a_{11} \neq 0$;
2) pour chaque $i > 1$, appliquer

$$\mathrm{L}_i \longrightarrow a_{11}\,\mathrm{L}_i - a_{i1}\,\mathrm{L}_1$$

c'est-à-dire remplacer la i-ème équation linéaire L_i par l'équation obtenue en multipliant la i-ème équation L_i par a_{11}, et en soustrayant la première équation L_1 multipliée par $-a_{i1}$.

Nous obtenons alors un système équivalent plus simple :

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{2j_2}\,x_{j_2} + \ldots\ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad a_{mj_2}\,x_{j_2} + \ldots\ldots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

Exemple Considérons le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2\,x + 4\,y - z + 2\,v + 2\,w = 1 \\ 3\,x + 6\,y + z - v + 4\,w = -7 \\ 4\,x + 8\,y + z + 5\,v - w = 3 \end{cases}$$

Éliminons l'inconnue x dans la deuxième et la troisième équations en appliquant les combinaisons linéaires $\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 - 3\,\mathrm{L}_1$ et $\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 2\,\mathrm{L}_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2\,x & + & 4\,y & - & z & + & 2\,v & + & 2\,w & = & 1 \\ & & & & 5\,z & - & 8\,v & + & 2\,w & = & -17 \\ & & & & 3\,z & + & v & - & 5\,w & = & 1 \end{array}\right.$$

On remarque que l'inconnue y a aussi été éliminée dans la deuxième et la troisième équations. Dans cet exemple, c'est l'inconnue z qui joue le rôle de l'inconnue x_{j_2}.

À l'exception de la première ligne, le système plus simple que l'on a obtenu forme un système partiel qui a moins d'équations et moins d'inconnues que le système initial.

1) S'il se présente une équation de la forme $0\,x_1 + 0\,x_2 + \ldots 0\,x_n = b$ avec $b \neq 0$, le système est alors *impossible* et n'a pas de solution.
2) S'il se présente une équation de la forme $0\,x_1 + 0\,x_2 + \ldots 0\,x_n = 0$, cette équation peut être supprimée, sans affecter la solution.

En réitérant le procédé de Gauss avec chaque nouveau sous-système, nous obtenons par récurrence soit un système impossible, soit un système réduit à la forme équivalente suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 \;+\; a_{12}\,x_2 \;+\; a_{13}\,x_3 \;+\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{2j_2}\,x_{j_2} \;+\; a_{2,j_2+1}\,x_{j_2+1} \;+\; \ldots\ldots\ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{rj_r}\,x_{j_r} \;+\; a_{r,j_r+1}\,x_{j_r+1} \;+\; \ldots + a_{rn}\,x_n = b_r \end{array}\right.$$

où $1 < j_2 < \ldots < j_r$ et $a_{11} \neq 0$, $a_{2j_2} \neq 0$, ..., $a_{rj_r} \neq 0$.

On dit d'un tel système qu'il est **échelonné**.

Les inconnues x_i qui n'apparaissent pas au commencement d'une équation $(i \neq 1, j_2, \ldots, j_r)$ sont appelées des **variables libres**.

Dans un système réduit à une forme échelonnée, on peut distinguer deux cas :

1) $r = n$: il y a autant d'équations que d'inconnues ; le système admet alors une solution unique.
2) $r < n$: il y a moins d'équations que d'inconnues ; on attribue alors un paramètre différent à chaque variable libre et obtient la solution générale du système.

Exemples

1) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x & + & y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 1 \\ 3\,x & + & 2\,y & - & z & + & 2\,w & = & 4 \\ 3\,x & + & 3\,y & + & 3\,z & - & 3\,w & = & 5 \end{array}\right. \underset{\mathrm{L}_3 \to 2\,\mathrm{L}_3 - 3\,\mathrm{L}_1}{\overset{\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 - 3\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x & + & y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 1 \\ & & y & + & 4\,z & - & 5\,w & = & 5 \\ & & 3\,y & + & 12\,z & - & 15\,w & = & 7 \end{array}\right.$$

$$\overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 3\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x & + & y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 1 \\ & & y & + & 4\,z & - & 5\,w & = & 5 \\ & & & & & & 0 & = & -8 \end{array}\right.$$

L'équation $0 = -8$ montre que le système est impossible : $\mathrm{S} = \varnothing$.

2) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 4 \\ x & + & 3\,y & + & z & = & 11 \\ 2\,x & + & 5\,y & - & 4\,z & = & 13 \\ 2\,x & + & 6\,y & + & 2\,z & = & 22 \end{array}\right.$ $\overset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2\,L_1 \\ L_4 \to L_4 - 2\,L_1}}{\Longrightarrow}$ $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 4 \\ & & y & + & 4\,z & = & 7 \\ & & y & + & 2\,z & = & 5 \\ & & 2\,y & + & 8\,z & = & 14 \end{array}\right.$

$\overset{\substack{L_3 \to L_3 - L_2 \\ L_4 \to L_4 - 2\,L_2}}{\Longrightarrow}$ $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 4 \\ & & y & + & 4\,z & = & 7 \\ & & & - & 2\,z & = & -2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$ $\Longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 4 \\ & & y & + & 4\,z & = & 7 \\ & & & - & 2\,z & = & -2 \end{array}\right.$

$\overset{L_3 \to -2\,L_3}{\Longrightarrow}$ $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 4 \\ & & y & + & 4\,z & = & 7 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right.$ $\overset{\substack{L_1 \to L_1 + 3\,L3 \\ L_2 \to L_2 - 4\,L_3}}{\Longrightarrow}$ $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2\,y & & = 7 \\ & & y & & = 3 \\ & & & z & = 1 \end{array}\right.$

$\overset{L_1 \to L_1 - 2\,L2}{\Longrightarrow}$ $\left\{\begin{array}{rrrl} x & & & = 1 \\ & y & & = 3 \\ & & z & = 1 \end{array}\right.$

On remarque d'abord que le système est possible, puisqu'il n'y a aucune équation de la forme $0 = b$ avec $b \neq 0$. De plus, puisque dans la forme échelonnée il y a trois équations et trois inconnues, le système admet une solution unique : $\mathrm{S} = \{(1\,;3\,;1)\}$.

3) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 2 \\ 2\,x & + & 4\,y & - & 3\,z & + & 4\,w & = & 5 \\ 5\,x & + & 10\,y & - & 8\,z & + & 11\,w & = & 12 \end{array}\right.$ $\overset{\substack{L_2 \to L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \to L_3 - 5\,L_1}}{\Longrightarrow}$ $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 2 \\ & & & & z & - & 2\,w & = & 1 \\ & & & & 2\,z & - & 4\,w & = & 2 \end{array}\right.$

$\overset{L_3 \to L_3 - 2\,L_2}{\Longrightarrow}$ $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 2 \\ & & & & z & - & 2\,w & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$ $\Longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 2 \\ & & & & z & - & 2\,w & = & 1 \end{array}\right.$

$\overset{L_1 \to L_1 + 2\,L_2}{\Longrightarrow}$ $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & & & - & w & = & 4 \\ & & & & z & - & 2\,w & = & 1 \end{array}\right.$

Le système est possible et, comme il y a plus d'inconnues que d'équations dans la forme échelonnée, le système a un nombre infini de solutions. En fait, il y a deux variables libres : y et w. On pose $y = \alpha$ et $w = \beta$. La première équation donne $x = 4 - 2\,\alpha + \beta$ et la seconde $z = 1 + 2\,\beta$. Ainsi $\mathrm{S} = \{(4 - 2\,\alpha + \beta\,;\alpha\,;1 + 2\,\beta\,;\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

2.1 Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode du pivot :

1) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2\,y & + & z & = & 8 \\ 3\,x & - & y & + & 2\,z & = & 7 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 4 \\ 3\,x & + & 4\,y & - & z & = & -5 \\ x & + & 5\,y & - & 4\,z & = & -9 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & y & + & 3\,z & = & 3 \\ 3\,x & - & y & + & 4\,z & = & 2 \\ 4\,x & + & y & - & z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 3\,y & + & z & - & t & = & 0 \\ 2\,x & + & y & - & z & + & 2\,t & = & 0 \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 9 \\ x & - & y & + & 4\,z & = & 15 \\ -x & + & 7\,y & - & 6\,z & = & -27 \end{array}\right.$

6) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 5\,z & + & 4\,t & = & 1 \\ 2\,x & - & 3\,y & + & 2\,z & + & 3\,t & = & 18 \\ 4\,x & - & 7\,y & + & z & - & 6\,t & = & -5 \\ x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \end{array}\right.$

2.2 Pour quelles valeurs de k le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2\,x & + & 3\,y & + & k\,z & = & 3 \\ x & + & k\,y & + & 3\,z & = & 2 \end{array}\right.$ a-t-il

1) aucune solution ? 2) une solution unique ? 3) plus d'une solution ?

2.3 Quelle condition doit-on avoir sur a, b et c, de telle sorte que le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & a \\ 2\,x & + & 6\,y & - & 11\,z & = & b \\ x & - & 2\,y & + & 7\,z & = & c \end{array}\right.$ admette une solution ? Cette solution est-elle unique ?

Matrices et systèmes d'équations linéaires

Le système d'équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{array}\right.$$

est équivalent à l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ou simplement $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ avec $\mathrm{A} = (a_{ij})$, $\mathrm{X} = (x_i)$ et $\mathrm{B} = (b_i)$.

La matrice A est appelée la **matrice des coefficients** du système linéaire.
Le système linéaire est complètement défini par sa **matrice augmentée** :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

Avec cette nouvelle notation, il est désormais possible de résoudre un système linéaire en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée du système, sans se soucier des variables, jusqu'à ce qu'elle soit échelonnée.

Exemple

$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 2 \\ 2\,x & + & 4\,y & - & 3\,z & + & 4\,w & = & 5 \\ 5\,x & + & 10\,y & - & 8\,z & + & 11\,w & = & 12 \end{array}\right.$ donne la matrice augmentée $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right)$

Échelonnons cette matrice :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \to L_3 - 5\,L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 \to L_3 - 2\,L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \to L_1 + 2\,L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Cette dernière matrice échelonnée réduite équivaut au système

$$\begin{cases} x + 2y - w = 4 \\ z - 2w = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 - 2y + w \\ z = 1 + 2w \end{cases}$$

2.4 Résoudre les systèmes suivants en échelonnant leur matrice augmentée :

1) $\begin{cases} x - y - z = 6 \\ x - 2y - 3z = 10 \\ 5x + 6y + z = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 3x + 2y + z = 22 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y - z + v - w = 8 \\ -2x + y - 2z + 3v = 6 \\ 3x - 2y - z + v + 2w = 8 \\ x + 3y - 2v - 5w = 1 \\ x + 2y + 3z + v - 3w = -1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - 3y - z + 2v - 9w = 13 \\ x - y + 2z - v - 6w = -6 \\ x - y + z + v - 6w = 1 \\ -x + y - z - 2v + 7w = -3 \end{cases}$

Après avoir appliqué à maintes reprises la méthode du pivot, nous pouvons donner une définition formelle d'une matrice échelonnée.

Une matrice est dite **échelonnée** si elle remplit les conditions suivantes :

1) toutes ses lignes non nulles sont situées au-dessus de ses lignes nulles ;
2) chaque élément de tête d'une ligne se trouve dans une colonne à droite de l'élément de tête de la ligne précédente ;
3) tous les éléments de la colonne sous un élément de tête sont nuls.

On appelle les éléments de tête les **pivots** de la matrice échelonnée.

Exemple Voici des matrices échelonnées où les pivots ont été encerclés :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une matrice échelonnée est dite **réduite** si les pivots sont :

1) les seuls éléments non nuls dans leurs colonnes respectives ;
2) chacun égal à 1.

Dans l'exemple précédent, la seconde matrice est réduite, mais pas la première.

La méthode du pivot permet, suite à une série d'opérations élémentaires sur les lignes, de mettre toute matrice sous forme échelonnée réduite.

On appelle **rang** d'une matrice le nombre de lignes non nulles de la matrice échelonnée équivalente (une ligne est nulle si tous ses éléments sont nuls).

2.5 Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée, puis sous forme échelonnée réduite ; déterminer leur rang.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice inversible

Théorème *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* n*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) la matrice A *est de rang* n *;*

2) le système linéaire $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ *possède une solution unique pour toute matrice colonne* B *;*

3) la matrice A *est inversible.*

Preuve L'équivalence des deux premières affirmations est une reformulation des remarques faites à propos de la méthode du pivot à la page 2.2.

Montrons que 3) implique 2) :

existence : l'équation $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet la solution $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$, étant donné que $\mathrm{AX} = \mathrm{A}\,(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}) = (\mathrm{AA}^{-1})\,\mathrm{B} = \mathrm{IB} = \mathrm{B}$;

unicité : si Y vérifie aussi l'équation $\mathrm{AY} = \mathrm{B}$, alors $\mathrm{Y} = \mathrm{IY} = (\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A})\,\mathrm{Y} = \mathrm{A}^{-1}\,(\mathrm{AY}) = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} = \mathrm{X}$.

Enfin, l'existence de la matrice inverse est explicitée ci-dessous avec l'exposé de la méthode de Gauss-Jordan.

2.6 Calculer le rang de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ de l'exercice 1.22 et montrer qu'elle n'est pas inversible.

Méthode de Gauss-Jordan

Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible. L'inverse de A est une matrice carrée X d'ordre n telle que $\mathrm{AX} = \mathrm{I}_n$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver X revient donc à déterminer les solutions de n systèmes de n équations à n inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}\,x_{11} + a_{12}\,x_{21} + \dots + a_{1n}\,x_{n1} = 1 \\ a_{21}\,x_{11} + a_{22}\,x_{21} + \dots + a_{2n}\,x_{n1} = 0 \\ \qquad\qquad \dots \\ a_{n1}\,x_{11} + a_{n2}\,x_{21} + \dots + a_{nn}\,x_{n1} = 0 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} a_{11}\,x_{1n} + a_{12}\,x_{2n} + \dots + a_{1n}\,x_{nn} = 0 \\ a_{21}\,x_{1n} + a_{22}\,x_{2n} + \dots + a_{2n}\,x_{nn} = 0 \\ \qquad\qquad \dots \\ a_{n1}\,x_{1n} + a_{n2}\,x_{2n} + \dots + a_{nn}\,x_{nn} = 1 \end{cases}$$

Il est possible d'exprimer ces systèmes d'équations par une seule matrice, en augmentant la matrice A de la matrice identité I_n :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Pour résoudre ces systèmes d'équations, on utilise la **méthode de Gauss-Jordan**. Elle consiste à effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A augmentée de la matrice identité I_n, jusqu'à mettre la matrice A sous forme échelonnée réduite. Dès lors que la matrice A est de rang n, on obtient la matrice identité I_n dans le bloc de gauche et l'inverse de A dans le bloc de droite.

$$\left(\mathrm{A} \mid \mathrm{I}_n\right) \Longrightarrow \left(\mathrm{I}_n \mid \mathrm{A}^{-1}\right)$$

Exemple À titre d'exemple, reprenons la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ de l'exercice 1.19.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to 3\,\mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L1} + 2\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \frac{1}{3}\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to -\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$ Il en résulte $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2.7 Déterminer si les matrices qui suivent sont inversibles et calculer, quand c'est possible, leur inverse.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

2.8 À quelle condition la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Quel est alors son inverse ?

2.9 À quelle condition la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Quel est alors son inverse ?

Méthode de résolution d'un système linéaire par matrice inverse

La preuve de la page 6 a montré que si une matrice A est inversible, alors tout système d'équations $AX = B$ possède l'unique solution $X = A^{-1}B$.

Exemple Le système $\begin{cases} 3\,x + 2\,y = 11 \\ 2\,x + y = 8 \end{cases}$ s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2.10 Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de la matrice inverse.

1) $\begin{cases} 2\,x + 2\,y + 3\,z = 5 \\ x + z = -2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3\,x + 5\,y + 4\,z = 3 \\ 4\,x + 5\,y + 4\,z = 0 \\ -x - y - z = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2\,y + 3\,z = 1 \\ 2\,x - y - 2\,z = 5 \\ 3\,x + 5\,y + z = 10 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2\,x + y + 5\,z + t = 5 \\ x + y - 3\,z - 4\,t = -1 \\ 3\,x + 6\,y - 2\,z + t = 8 \\ 2\,x + 2\,y + 2\,z - 3\,t = 2 \end{cases}$

Réponses

2.1 1) $S = \{(1\,;2\,;3)\}$ 2) $S = \{(1-\alpha\,;-2+\alpha\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

3) $S = \varnothing$ 4) $S = \{(2\,\alpha - 5\,\beta\,;3\,\alpha - 4\,\beta\,;7\,\alpha\,;7\,\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

5) $S = \{(13 - 11\,\alpha\,;-2+\alpha\,;3\,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ 6) $S = \{(1\,;-1\,;2\,;3)\}$

2.2 1) $k = -3$ 2) $k \neq -3$ et $k \neq 2$ 3) $k = 2$

2.3 $5\,a - 2\,b - c = 0$; le système ne peut pas avoir de solution unique.

2.4 1) $S = \{(3\,;-2\,;-1)\}$ 2) $S = \{(4+\alpha\,;5-2\,\alpha\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

3) $S = \{(3\,;5\,;-2\,;1\,;3)\}$

4) $S = \{(2+\alpha+3\,\beta\,;\alpha\,;-3+2\,\beta\,;2+\beta\,;\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

2.5 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r = 2$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $r = 3$

2.6 $r = 2 < 3$

2.7 1) $\begin{pmatrix} \frac{7}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$ 2) non inversible 3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4) non inversible 5) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

2.8 $a\,b\,c \neq 0$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.9 $a\,d - b\,c \neq 0$ $\frac{1}{a\,d - b\,c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2.10 1) $S = \{(-1\,;5\,;-1)\}$ 2) $S = \{(-3\,;8\,;-7)\}$

3) $S = \{(2\,;1\,;-1)\}$ 4) $S = \{(2\,;\frac{1}{5}\,;0\,;\frac{4}{5})\}$