11.4 1) L'équation $x - 2\,y + 3\,z = 0$ du plan π implique :

$$\begin{cases} x = 2\,\alpha - 3\,\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal, en d'autres termes orthogonal, au plan π.

Soit la base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

Dans la base $\mathcal{B}'$, la projection orthogonale sur le plan π a pour matrice $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$. Alors $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ où A désigne la matrice de la projection orthogonale sur le plan π, de sorte que $\mathrm{A} = \mathrm{PA'P}^{-1}$.

Calculons l'inverse de la matrice de passage P :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + 3\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \frac{1}{14}\mathrm{L}_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + 2\,\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 3\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{array}\right) \qquad \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

Finalement, on trouve :

$$\mathrm{A} = \mathrm{PA'P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{14} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{5}{14} \end{pmatrix}$$

2) Si B' désigne la matrice relativement à la base $\mathcal{B}'$ de la projection orthogonale sur la droite vectorielle $\Delta\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right)$, alors $\mathrm{B}' = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Si l'on appelle B la matrice de cette projection par rapport à la base canonique, on a :

$$\mathrm{B} = \mathrm{PB'P^{-1}} = \begin{pmatrix}2&-3&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{7}&\frac{5}{7}&\frac{3}{7}\\-\frac{3}{14}&\frac{3}{7}&\frac{5}{14}\\\frac{1}{14}&-\frac{1}{7}&\frac{3}{14}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-2\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{7}&\frac{5}{7}&\frac{3}{7}\\-\frac{3}{14}&\frac{3}{7}&\frac{5}{14}\\\frac{1}{14}&-\frac{1}{7}&\frac{3}{14}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{14}&-\frac{1}{7}&\frac{3}{14}\\-\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&-\frac{3}{7}\\\frac{3}{14}&-\frac{3}{7}&\frac{9}{14}\end{pmatrix}$$