4.12 Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Alors $x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de B, ce qui veut dire que la famille B engendre $\mathbb{R}^n$.

L'équation vectorielle

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

est équivalente au système

$$\left\{ \begin{array}{llllc} \alpha_1 & & & & = 0 \\ & \alpha_2 & & & = 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \alpha_n & = 0 \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit aussitôt $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.
Par conséquent, la famille B est libre.

Attendu que la famille B est génératrice de $\mathbb{R}^n$ et libre, elle constitue une base.