Chamblandes 2009 — Problème 5

1. (a) $u_1 = 5$

$$u_2 = \frac{u_1+4}{3} = \frac{5+4}{3} = 3$$

$$u_3 = \frac{u_2+4}{3} = \frac{3+4}{3} = \frac{7}{3}$$

$$u_4 = \frac{u_3+4}{3} = \frac{\frac{7}{3}+4}{3} = \frac{19}{9}$$

(b) L'initialisation est claire au vu des calculs ci-dessus de u_1, u_2, u_3 et u_4.

Supposons donc $u_n \geqslant 2$ et prouvons l'hérédité, c'est-à-dire que $u_{n+1} \geqslant 2$:

$$u_{n+1} = \frac{\overbrace{u_n}^{\geqslant 2}+4}{3} \geqslant \frac{2+4}{3} = 2$$

(c) Pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, il faut montrer que $u_n \geqslant u_{n+1}$, ou encore $u_n - u_{n+1} \geqslant 0$:

$$u_n - u_{n+1} = u_n - \frac{u_n+4}{3} = \frac{3\,u_n-(u_n+4)}{3} = \frac{2\,u_n-4}{3} = \frac{2\,(u_n-2)}{3} \geqslant 0$$

En effet, la preuve faite en (b) affirme que $u_n \geqslant 2$, à savoir $u_n - 2 \geqslant 0$.

(d) Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2 et décroissante, elle converge.

Sa limite $a = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ satisfait l'équation $a = \dfrac{a+4}{3}$.
Il s'ensuit $3\,a = a+4$, puis $2\,a = 4$ et enfin $a = 2$.

2. (a) $w_1 = u_1 - 2 = 5 - 2 = 3$

$w_2 = u_2 - 2 = 3 - 2 = 1$

$w_3 = u_3 - 2 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}$

$w_4 = u_4 - 2 = \frac{19}{9} - 2 = \frac{1}{9}$

(b) $$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1}-2}{u_n-2} = \frac{\frac{u_n+4}{3}-2}{u_n-2} = \frac{\frac{u_n+4-6}{3}}{u_n-2} = \frac{\frac{u_n-2}{3}}{u_n-2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{u_n-2}{u_n-2} = \frac{1}{3}$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de 1^{er} terme $w_1 = 3$ et de raison $r = \frac{1}{3}$.

(c) Il en résulte que $w_n = w_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^{n-2}}$.

En particulier, $w_{100} = \frac{1}{3^{100-2}} = \frac{1}{3^{98}} = \frac{1}{57\ 264\ 168\ 970\ 223\ 481\ 226\ 273\ 458\ 862\ 846\ 808\ 078\ 011\ 946\ 889}$