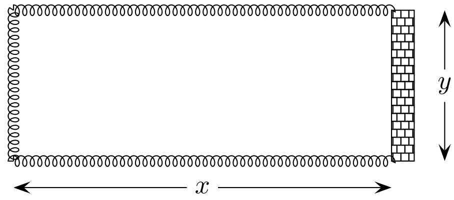
Chamblandes 2012 — Problème 2

Désignons respectivement par x et y la longueur et la largeur de l'enclos rectangulaire.



Il s'agit de minimiser le coût de l'enclos ; ce dernier vaut :
$x \cdot 20 + y \cdot 20 + x \cdot 20 + y \cdot 140 = 40\,x + 160\,y$

On a en outre la condition portant sur l'aire de l'enclos :
$x\,y = 2500$

On en tire $y = \frac{2500}{x}$ que l'on substitue dans la formule du coût :
$f(x) = 40\,x + 160 \cdot \frac{2500}{x} = 40\,x + \frac{400\ 000}{x}$

Étudions la croissance de la fonction f, afin de déterminer son minimum :

$$f'(x) = (40\,x)' + \left(\frac{400\ 000}{x}\right)' = (40\,x)' + (400\ 000\,x^{-1})' = 40 - 400\ 000\,x^{-2}$$
$$= 40 - \frac{400\ 000}{x^2} = \frac{40\,x^2 - 400\ 000}{x^2} = \frac{40\,(x^2 - 10\ 000)}{x^2} = \frac{40\,(x-100)\,(x+100)}{x^2}$$

		-100		0		100	
40	$+$		$+$	‖	$+$		$+$
$x-200$	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$
$x+200$	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$
x^2	$+$		$+$	‖	$+$		$+$
f'	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$

On en conclut que le coût de l'enclos est minimal si sa longueur x mesure 100 m.
Dans ce cas, la largeur y mesure $\frac{2500}{100} = 25$ m.
Quant au coût, il s'élève à $f(100) = 40 \cdot 100 + \frac{400\ 000}{100} = 8000$ fr.