Chamblandes 2014 — Problème 5

1. $x^2 - 8\,x + y^2 + 2\,y + z^2 - 4\,z - 28 = 0$
   $(x-4)^2 - 16 + (y+1)^2 - 1 + (z-2)^2 - 4 - 28 = 0$
   $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 49$

   La sphère Σ a pour centre $\mathrm{C}(4\,;-1\,;2)$ et pour rayon $r = 7$.

2. La distance du point C à la droite d vaut :

$$\delta(\mathrm{C}\,;d) = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} = \frac{\left\|\begin{pmatrix}4-4\\-1+1\\2-9\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}\right\|} = \frac{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\-7\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}\right\|}$$

$$= \frac{\left\|\begin{pmatrix}0\cdot(-6)-(-7)\cdot 3\\-\big(0\cdot(-6)-(-7)\cdot 2\big)\\0\cdot 3 - 0\cdot 2\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}\right\|} = \frac{\left\|\begin{pmatrix}21\\-14\\0\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}\right\|} = \frac{7\left\|\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}\right\|}$$

$$= \frac{7\sqrt{3^2+(-2)^2+0^2}}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}} = \frac{7\sqrt{13}}{\sqrt{49}} = \sqrt{13}$$

   Comme $\delta(\mathrm{C}\,;d) = \sqrt{13} < 7 = r$, on en déduit que la droite d est sécante avec la sphère Σ, c'est-à-dire qu'elle la coupe en deux points.

3. Calculons les coordonnées de ces deux points d'intersection :
   $(4+2\,k)^2 + (-1+3\,k)^2 + (9-6\,k)^2 - 8\,(4+2\,k) + 2\,(-1+3\,k) - 4\,(9-6\,k) - 28 = 0$
   $16+16\,k+4\,k^2+1-6\,k+9\,k^2+81-108\,k+36\,k^2-32-16\,k-2+6\,k-36+24\,k-28=0$
   $49\,k^2 - 84\,k = 7\,k\,(7\,k-12) = 0$

   1$^{\text{er}}$ point d'intersection
   $k = 0$

$$\begin{cases} x = 4 + 0\cdot 2 = 4\\ y = -1 + 0\cdot 3 = -1\\ z = 9 + 0\cdot(-6) = 9\end{cases}$$

   $\mathrm{I}_1(4\,;-1\,;9)$

   2$^{\text{nd}}$ point d'intersection
   $k = \frac{12}{7}$

$$\begin{cases} x = 4 + \frac{12}{7}\cdot 2 = \frac{52}{7}\\ y = -1 + \frac{12}{7}\cdot 3 = \frac{29}{7}\\ z = 9 + \frac{12}{7}\cdot(-6) = -\frac{9}{7}\end{cases}$$

   $\mathrm{I}_2(\frac{52}{7}\,;\frac{29}{7}\,;-\frac{9}{7})$

   Il nous reste encore à calculer la longueur de la corde entre ces points d'intersection :

$$\|\overrightarrow{\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2}\| = \left\|\begin{pmatrix}\frac{52}{7}-4\\\frac{29}{7}+1\\-\frac{9}{7}-9\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}\frac{24}{7}\\\frac{36}{7}\\-\frac{72}{7}\end{pmatrix}\right\| = \frac{12}{7}\left\|\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}\right\| = \frac{12}{7}\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2} = \frac{12}{7}\cdot 7 = 12$$

4. Les plans θ_1 et θ_2 admettent pour vecteur normal $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Ils s'écrivent donc $\theta : 2\,x + 3\,y - 6\,z + d = 0$.

Pour être tangents à la sphère Σ, il faut que la distance du centre C à chacun des ces plans θ soit égale au rayon r :

$$\delta(\mathrm{C}\,;\theta) = \frac{|2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) - 6 \cdot 2 + d|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{|-7+d|}{7} = r = 7$$

On en tire $|-7+d| = 49$, c'est-à-dire $-7 + d = \pm 49$.

(a) $-7 + d = 49$ donne $d = 56$.
$\theta_1 : 2\,x + 3\,y - 6\,z + 56 = 0$

(b) $-7 + d = -49$ implique $d = -42$.
$\theta_2 : 2\,x + 3\,y - 6\,z - 42 = 0$

Pour déterminer les point de contact T_1 et T_2, il faut déterminer l'intersection des plans θ_1 et θ_2 avec la perpendiculaire à θ_1 et θ_2 passant par C, c'est-à-dire la droite d'équation $\begin{cases} x = 4 + 2\,\lambda \\ y = -1 + 3\,\lambda \\ z = 2 - 6\,\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

Point de contact T_1

$2\,(4 + 2\,\lambda) + 3\,(-1 + 3\,\lambda) - 6\,(2 - 6\,\lambda) + 56 = 0$

$8 + 4\,\lambda - 3 + 9\,\lambda - 12 + 36\,\lambda + 56 = 0$

$49\,\lambda + 49 = 0$

$\lambda = -1$

$$\begin{cases} x = 4 + 2 \cdot (-1) = 2 \\ y = -1 + 3 \cdot (-1) = -4 \\ z = 2 - 6 \cdot (-1) = 8 \end{cases}$$

$\mathrm{T}_1(2\,; -4\,; 8)$

Point de contact T_2

$2\,(4 + 2\,\lambda) + 3\,(-1 + 3\,\lambda) - 6\,(2 - 6\,\lambda) - 42 = 0$

$8 + 4\,\lambda - 3 + 9\,\lambda - 12 + 36\,\lambda - 42 = 0$

$49\,\lambda - 49 = 0$

$\lambda = 1$

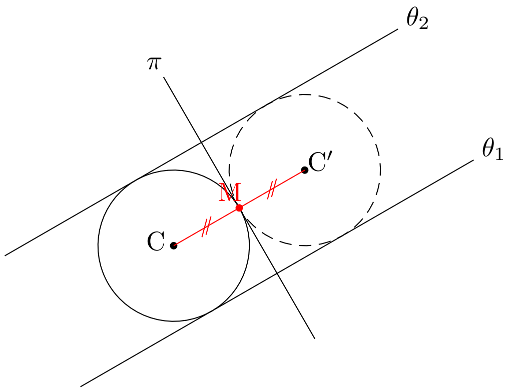
$$\begin{cases} x = 4 + 2 \cdot 1 = 6 \\ y = -1 + 3 \cdot 1 = 2 \\ z = 2 - 6 \cdot 1 = -4 \end{cases}$$

$\mathrm{T}_2(6\,; 2\,; -4)$

5. $(10-4)^2+(1+1)^2+(5-2)^2=6^2+2^2+3^2=49$
   Cette égalité prouve que le point P fait bien partie de la sphère Σ.

   Déterminons l'équation du plan π grâce à l'équation dédoublée :
   $(10-4)\,(x-4)+(1+1)\,(y+1)+(5-2)\,(z-2)=49$
   $6\,x-24+2\,y+2+3\,z-6-49=0$
   $6\,x+2\,y+3\,z-77=0$

6. Pour montrer que deux plans sont perpendiculaires, il suffit de montrer que leurs vecteurs normaux sont perpendiculaires.
   $\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{n_{\theta_1}}=\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}=6\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot(-6)=0$
   Les plans π et θ_1 sont ainsi bien perpendiculaires.
   Comme θ_1 et θ_2 sont parallèles, le plan π est également perpendiculaire au plan θ_2.

7. 

   La sphère Σ' est l'image de la sphère Σ par la symétrie orthogonale de plan π.

   La droite CC′ a pour vecteur directeur le vecteur normal du plan π ; elle a pour équation :
   $\begin{cases} x = 4+6\,\lambda \\ y = -1+2\,\lambda \\ z = 2+3\,\lambda \end{cases},\lambda\in\mathbb{R}$

   Déterminons l'intersection de la droite CC′ avec le plan π :
   $6\,(4+6\,\lambda)+2\,(-1+2\,\lambda)+3\,(2+3\,\lambda)-77=0$
   $24+36\,\lambda-2+4\,\lambda+6+9\,\lambda-77=0$
   $49\,\lambda-49=0$
   $\lambda=1$
   $\begin{cases} x = 4+6\cdot 1=10 \\ y = -1+2\cdot 1=1 \\ z = 2+3\cdot 1=5 \end{cases}$
   M$(10\,;1\,;5)$

Calculons les coordonnées du point C$'$, sachant que le point M est le milieu de C et C$'$:
M$(10\,;1\,;5) = (\frac{4+c'_1}{2}\,;\frac{-1+c'_2}{2}\,;\frac{2+c'_3}{2})$

$$\begin{cases} 10 = \frac{4+c'_1}{2} \\ 1 = \frac{-1+c'_2}{2} \\ 5 = \frac{2+c'_3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 20 = 4 + c'_1 \\ 2 = -1 + c'_2 \\ 10 = 2 + c'_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 16 = c'_1 \\ 3 = c'_2 \\ 8 = c'_3 \end{cases}$$

La sphère Σ' admet pour centre C$'(16\,;3\,;8)$ et pour rayon $r = 7$. Son équation est :
$(x-16)^2 + (y-3)^2 + (z-8)^2 = 49$