

9.8 On recherche un scalaire λ et un vecteur non nul $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tels que $A v = \lambda \cdot v$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + 2 v_2 \\ 3 v_1 + 2 v_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} v_1 + 2 v_2 = \lambda v_1 \\ 3 v_1 + 2 v_2 = \lambda v_2 \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - \lambda) v_1 + 2 v_2 = 0 \\ 3 v_1 + (2 - \lambda) v_2 = 0 \end{cases}$$

Résolvons ce système en échelonnant la matrice correspondante :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 3 & 2 - \lambda & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow (1 - \lambda)L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 3 \cdot 2 & 0 \end{array} \right)$$

D'après le théorème de la page 2.6, ce système d'équations possède une solution unique, à savoir $v_1 = v_2 = 0$, si la matrice associée à ce système est de rang 2.

Pour obtenir un vecteur propre v non nul, il faut donc que la matrice associée à ce système ne soit pas de rang 2, en d'autres termes, il faut que

$$0 = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 3 \cdot 2 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

1) Si $\lambda = 4$, nous nous retrouvons face au système suivant :

$$\begin{cases} v_1 + 2 v_2 = 4 v_1 \\ 3 v_1 + 2 v_2 = 4 v_2 \end{cases} \iff \begin{cases} -3 v_1 + 2 v_2 = 0 \\ 3 v_1 - 2 v_2 = 0 \end{cases} \iff 3 v_1 - 2 v_2 = 0$$

On constate que v_2 est une variable libre ; en posant $v_2 = \alpha$, on obtient :

$$\begin{cases} v_1 = \frac{2}{3}\alpha \\ v_2 = \alpha \end{cases} = \frac{1}{3}\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On en déduit ainsi que $\lambda = 4$ est une valeur propre à laquelle est associée l'espace propre $E_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

2) Dans le cas où $\lambda = -1$, nous avons affaire au système suivant :

$$\begin{cases} v_1 + 2 v_2 = -v_1 \\ 3 v_1 + 2 v_2 = -v_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 v_1 + 2 v_2 = 0 \\ 3 v_1 + 3 v_2 = 0 \end{cases} \iff v_1 + v_2 = 0$$

On constate que v_2 est une variable libre ; en posant $v_2 = \alpha$, on obtient :

$$\begin{cases} v_1 = -\alpha \\ v_2 = \alpha \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On conclut par conséquent que $\lambda = -1$ est une valeur propre à laquelle est associée l'espace propre $E_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Comme le montre la preuve du théorème du haut de la page 9.4, l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 associé à la matrice A dans la base canonique admet, dans la base des vecteurs propres $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, pour matrice $A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La matrice A est donc semblable à la matrice diagonale A' , étant donné que $A' = P^{-1}AP$ où P désigne la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B}' des vecteurs propres.

Vérifions ces affirmations par le calcul.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Utilisons la méthode de Gauss-Jordan pour calculer P^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \left| \right. & 1 & 0 \\ 3 & -1 & \left| \right. & 0 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_2 \rightarrow 2L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \left| \right. & 1 & 0 \\ 0 & -5 & \left| \right. & -3 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{1}{5}L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \left| \right. & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \left| \right. & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \xRightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \left| \right. & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \left| \right. & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \xRightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \left| \right. & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \left| \right. & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

On a donc trouvé $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$