Chamblandes 2011 — Problème 4

a) & b) Calculons les valeurs propres de A :

$$0=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 18 & -9 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((1-\lambda)(-2-\lambda)-0\big)$$

$$= (1-\lambda)^2(-2-\lambda)$$

Il y a donc deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.

Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+18\,y-9\,z \\ y \\ 6\,y-2\,z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} 18\,y-9\,z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 6\,y-3\,z &= 0 \end{aligned}\right. \Longleftrightarrow \left\{\, y-\tfrac{1}{2}\,z = 0\right.$$

Seule la variable y est pivot, les variables x et z étant libres.

On obtient donc la solution $\left\{\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \tfrac{1}{2}\beta \\ z &= \beta \end{aligned}\right. = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est : $\mathrm{E}_1 = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+18\,y-9\,z \\ y \\ 6\,y-2\,z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,x \\ -2\,y \\ -2\,z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} 3\,x+18\,y-9\,z &= 0 \\ 3\,y &= 0 \\ 6\,y &= 0 \end{aligned}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} x-3\,z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right.$$

Seule la variable z est libre. En posant $z=\alpha$, on obtient la solution : $\left\{\begin{aligned} x &= 3\,\alpha \\ y &= 0 \\ z &= \alpha \end{aligned}\right. = \alpha\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = -2$ est $\mathrm{E}_{-2} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

La matrice A est diagonalisable, car $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ forme une base de vecteurs propres.

c) En posant $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{A}'$ avec $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Comme A' est diagonale, il en résulte $(\mathrm{A}')^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.

La formule $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{A}'$ implique $\mathrm{A} = \mathrm{PA}'\mathrm{P}^{-1}$. Il en résulte que :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^n = (\mathrm{PA}'\mathrm{P}^{-1})^n &= \mathrm{PA}'\underbrace{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}}_{\mathrm{I}_3}\mathrm{A}'\underbrace{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}}_{\mathrm{I}_3}\mathrm{A}'\underbrace{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}}_{\mathrm{I}_3}\mathrm{A}'\mathrm{P}^{-1}\ldots\mathrm{PA}'\mathrm{P}^{-1} \\ &= \mathrm{PA}'\mathrm{A}'\mathrm{A}'\ldots\mathrm{A}'\mathrm{P}^{-1} \\ &= \mathrm{P}(\mathrm{A}')^n\mathrm{P}^{-1}\end{aligned}$$

Pour effectuer ce calcul, on a encore besoin de calculer l'inverse de la matrice P :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 2\,\mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - 3\,\mathrm{L}_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{On a trouvé } \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Il ne nous reste plus qu'à effectuer le calcul de A^n :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3\cdot(-2)^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 + 3\cdot(-2)^{n+1} & -3 + 3\cdot(-2)^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 + (-2)^{n+1} & (-2)^n \end{pmatrix}$$