4 Base & dimension d'un espace vectoriel

Famille génératrice

Une famille finie $\mathrm{F} = (e_1\,;e_2\,;\ldots\,;e_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est dite **génératrice** si $\mathrm{E} = \langle e_1\,;e_2\,;\ldots\,;e_n\rangle$, c'est-à-dire si tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de F.

4.1 Donner une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui soit génératrice.

4.2
1) Donner une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}_n[x]$ qui soit génératrice.
2) Montrer qu'il n'existe pas de famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}[x]$ qui soit génératrice.

4.3 Montrer que les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $e_4 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ engendrent $\mathbb{R}^3$ et exprimer le vecteur $u = \begin{pmatrix}-3\\4\\-1\end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de ces vecteurs.

Famille libre

Une famille finie $\mathrm{F} = (e_1\,;e_2\,;\ldots\,;e_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est dite **libre** si la seule combinaison linéaire des éléments de F qui donne le vecteur nul est la combinaison triviale :

$$\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.
Les vecteurs d'une famille libre sont dits **linéairement indépendants**.
Les vecteurs d'une famille liée sont dits **linéairement dépendants**.

4.4 Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\13\\5\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ sont liés.

4.5 Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement indépendants.

4.6 La famille $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\3\\4\\8\end{pmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ?

4.7 Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ sont libres et qu'ils engendrent le même espace que les vecteurs $\begin{pmatrix}4\\6\\7\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-8\\12\\-2\end{pmatrix}$.

4.8 Soient f, g et h trois éléments de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}-\{-1\,;1\}}$ définis par :

$$f(x)=\frac{2\,x+1}{x^2-1}\qquad g(x)=\frac{3}{x-1}\qquad h(x)=\frac{1}{2\,x+2}$$

La famille $(f\,;g\,;h)$ est-elle libre ?

4.9
1) Dans $\mathbb{R}^3$ on donne les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}m\\-1\\2\end{pmatrix}$.
   Pour quelle valeur de m forment-ils une famille liée ?
2) Même question avec les vecteurs $\begin{pmatrix}m\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\m\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

4.10 Considérons une famille finie $\mathrm{F}=(e_1\,;e_2\,;\dots\,;e_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :
1) la famille F est libre ;
2) aucun vecteur de E ne peut s'écrire sous la forme de deux combinaisons linéaires distinctes des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Base

Une **base** d'un espace vectoriel est une famille génératrice et libre.

L'exercice 4.10 implique qu'une famille $\mathcal{B}$ de vecteurs forme une base d'un espace vectoriel E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Soient $\mathcal{B}=(e_1\,;\dots\,;e_n)$ une base d'un espace vectoriel E et u un vecteur de E. On appelle **composantes** du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$ les uniques nombres $u_1, \dots, u_n$ tels que :

$$u = u_1 \cdot e_1 + \ldots + u_n \cdot e_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

4.11 Soient u et v des vecteurs d'un espace vectoriel E et α un scalaire.
Si $u_1, \ldots, u_n$ et $v_1, \ldots, v_n$ désignent les composantes respectives de u et v dans une base $\mathcal{B} = (e_1\,; \ldots ; e_n)$, montrer que les composantes des vecteurs $u + v$ et $\alpha \cdot u$ sont données par :

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \qquad \alpha \cdot u = \alpha \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, u_1 \\ \vdots \\ \alpha\, u_n \end{pmatrix}$$

4.12 Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$.

On appelle $\mathcal{B}$ la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

4.13 Montrer que la famille $\mathcal{B} = (1\,; x\,; x^2\,; \ldots ; x^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
On appelle $\mathcal{B}$ la **base canonique** de $\mathbb{R}_n[x]$.

4.14 Déterminer une base de l'ensemble des solutions de chacun des systèmes :

1) $\begin{cases} x - 3\,y + z = 0 \\ 2\,x - 6\,y + 2\,z = 0 \\ 3\,x - 9\,y + 3\,z = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3\,x + 2\,y - 2\,z = 0 \\ 4\,x + 3\,y - z = 0 \\ 6\,x + 5\,y + z = 0 \end{cases}$

4.15 Trouver une base du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$\mathrm{E} = \big\{ (x\,; y\,; z\,; t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z - t = 0 \big\}\,.$$

Dimension

Un espace vectoriel E est dit de **dimension finie** s'il est engendré par une famille finie de vecteurs.

Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie**.

Exemple : l'exercice 4.2 a montré que $\mathbb{R}_n[x]$ est de dimension finie, mais que $\mathbb{R}[x]$ est de dimension infinie.

Théorème *Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée de manière à former une base.*

Preuve Soit $\mathrm{L} = (l_1\,;\dots;l_m)$ une famille libre.

Si L engendre l'espace vectoriel E, alors la famille L forme d'ores et déjà une base de E. On supposera donc que L n'engendre pas E.

Puisque l'espace vectoriel E est de dimension finie, il possède une famille génératrice finie $\mathrm{G} = (g_1\,;\dots;g_n)$.

Du moment que L n'engendre pas $\mathrm{E} = \langle g_1\,;\dots;g_n\rangle$, il y a au moins un vecteur g_i de G qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de L.

Posons $\mathrm{L}^\star = (l_1\,;\dots;l_n\,;g_i)$. Montrons que $\mathrm{L}^\star$ est libre.

$\alpha_1 \cdot l_1 + \dots \alpha_n \cdot l_n + \beta \cdot g_i = 0$ implique $\beta \cdot g_i = -\alpha_1 \cdot l_1 - \dots - \alpha_n \cdot l_n$.

On doit avoir $\beta = 0$: sinon, on aurait $g_i = -\frac{\alpha_1}{\beta} \cdot l_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} \cdot l_n$, de sorte que g_i s'écrirait comme combinaison linéaire des vecteurs de L.

L'équation $\alpha_1 \cdot l_1 + \dots \alpha_n \cdot l_n + \beta \cdot g_i = 0$ devient $\alpha_1 \cdot l_1 + \dots \alpha_n \cdot l_n = 0$ d'où suit aussitôt $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, vu que L est une famille libre.

On a ainsi montré que la famille $\mathrm{L}^\star$ est libre.

Ou bien la famille $\mathrm{L}^\star$ engendre E et la démonstration est terminée, ou bien le même raisonnement nous assure de l'existence d'un vecteur g_j de G tel que la famille $\mathrm{L}^* = (l_1\,;\dots;l_n\,;g_i\,;g_j)$ soit libre. Si cette famille n'engendre pas E, le procédé d'extraction des vecteurs de G se poursuit. Lorsqu'il s'arrête, nous aurons complété L en une famille libre engendrant E, c'est-à-dire en une base de E.

Théorème *On peut extraire une base de toute famille génératrice d'un espace vectoriel non nul de dimension finie.*

Preuve Soit $\mathrm{G} = (g_1\,;\dots;g_n)$ une famille génératrice de l'espace vectoriel E.

Puisque $\mathrm{E} \neq \{0\}$, il existe $l_1 \in \mathrm{G}$ tel que $l_1 \neq 0$.

Alors la famille $\mathrm{L} = (l_1)$ est libre.

La preuve précédente montre que l'on peut compléter la famille L à partir des vecteurs de G, de façon à former une base de E.

Remarque : ce théorème signifie que tout espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base.

4.16 Trouver une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par :

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

Théorème *Si* $(e_1\,;\ldots\,;e_n)$ *est une base d'un espace vectoriel* E, *toute famille de vecteurs* $(u_1\,;\ldots\,;u_k)$ *avec* $k>n$ *est liée.*

Preuve Supposons par l'absurde que la famille $(u_1\,;\ldots\,;u_k)$ soit libre.
En décomposant u_1 dans la base $(e_1\,;\ldots\,;e_n)$, on obtient :

$$u_1=\alpha_1\cdot e_1+\alpha_2\cdot e_2+\ldots+\alpha_n\cdot e_n\,.$$

Comme u_1 n'est pas nul, au moins l'une des composantes $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ n'est pas nulle. Quitte à énumérer autrement les termes de la base, nous pouvons admettre que cette composante est α_1. Il en résulte :

$$e_1=\tfrac{1}{\alpha_1}u_1-\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot e_2-\ldots-\tfrac{\alpha_n}{\alpha_1}\cdot e_n\,.$$

Puisque $\langle u_1\,;e_2\,;\ldots\,;e_n\rangle=\langle e_1\,;e_2\,;\ldots\,;e_n\rangle=\mathrm{E}$, la famille $(u_1\,;e_2\,;\ldots\,;e_n)$ engendre E. Écrivons à présent u_2 comme combinaison linéaire de vecteurs de cette famille :

$$u_2=\beta_1\cdot u_1+\beta_2\cdot e_2+\ldots+\beta_n\cdot e_n\,.$$

Les coefficients $\beta_2,\ldots\,\beta_n$ ne sont pas tous nuls, sinon u_1 et u_2 seraient linéairement dépendants. Sans restreindre la généralité, nous pouvons admettre que β_2 n'est pas nul, ce qui nous permet d'écrire :

$$e_2=-\tfrac{\beta_1}{\beta_2}\cdot u_1+\tfrac{1}{\beta_2}\cdot u_2-\tfrac{\beta_3}{\beta_2}\cdot e_3-\ldots-\tfrac{\beta_n}{\beta_2}\cdot e_n\,.$$

Vu que $\langle u_1\,;u_2\,;e_3\,;\ldots\,;e_n\rangle=\langle u_1\,;e_2\,;e_3\,;\ldots\,;e_n\rangle=\mathrm{E}$, la famille de vecteurs $(u_1\,;u_2\,;e_3\,;\ldots\,;e_n)$ engendre E.
En poursuivant ce procédé, on remplace successivement $e_3,\ldots,e_n$ par $u_3,\ldots,u_n$, d'où l'on conclut que la famille $(u_1\,;u_2\,;\ldots\,;u_n)$ engendre E.
Par conséquent, le vecteur u_k s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $u_1,\ldots,u_n$, ce qui signifie que la famille $(u_1\,;\ldots\,;u_k)$ n'est pas libre.

Corollaire *Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments.*

Preuve Soient $\mathcal{B}=(e_1\,;\ldots\,;e_n)$ et $\mathcal{B}^\star=(e_1^\star\,;\ldots\,;e_k^\star)$ deux bases.
D'après le précédent théorème, la famille de vecteurs $(e_1^\star\,;\ldots\,;e_k^\star)$ ne peut être libre que si $k\leqslant n$.
En échangeant le rôle des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^\star$ dans l'application du précédent théorème, on obtient $n\leqslant k$.
Les deux inégalités $k\leqslant n$ et $n\leqslant k$ impliquent $n=k$.

On appelle **dimension** d'un espace vectoriel non nul E de dimension finie le nombre d'éléments d'une quelconque de ses bases. Si E se réduit au seul vecteur nul, on dit que sa dimension est nulle. La dimension de E se note dim(E).

4.17 Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :

1) $\mathbb{R}^n$ 2) $\mathbb{R}_n[x]$ 3) $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

Remarques : Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle n.

1) Toute famille libre de n éléments est une base.
2) Toute famille génératrice de n éléments est une base.
3) Toute famille de moins de n éléments ne peut être génératrice.
4) Toute famille de plus de n éléments est liée.
5) Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\dim(\mathrm{F}) \leqslant \dim(\mathrm{E})$.
   $\dim(\mathrm{F}) = \dim(\mathrm{E})$ si et seulement si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$.

4.18 Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

4.19 Montrer que la famille $(2 - x\,; 1 + 2\,x\,; 1 - x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
Calculer les composantes relativement à cette base des polynômes suivants :

1) x^2 2) $(2\,x - 1)^2$ 3) $2\,x^2 - 4\,x + 3$

4.20 Soit $(e_1\,; e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $(e_2\,; e_1)$, $(e_1\,; e_1+e_2)$, $(e_1-e_2\,; e_1+e_2)$ et $(e_1+\alpha\,e_2\,; e_2)$ sont aussi des bases de $\mathbb{R}^2$. Quelles sont les composantes de e_1 et de e_2 relativement à chacune de ces bases ?

Réponses

4.1 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.2 1) $p_n = x^n, p_{n-1} = x^{n-1}, \ldots, p_2 = x^2, p_1 = x, p_0 = 1$

4.3 2) $u = (-3 - \alpha)\, e_1 + 2\, e_2 + (2 - \alpha)\, e_3 + \alpha\, e_4$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

4.6 Non : elle est liée.

4.8 Non : elle est liée.

4.9 1) $m = \frac{2}{5}$ 2) $m = 1$ ou $m = 6$

4.14 1) $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ 2) $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

4.15 $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

4.16 $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

4.17 1) n 2) $n + 1$ 3) $m\, n$

4.19 1) $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -4 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -2 \end{pmatrix}$

4.20 1) $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 4) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$