5.8 Pour déterminer la dimension de S, il suffit de déterminer le rang de la matrice dont les lignes sont constituées des générateurs de S.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \xRightarrow{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme cette matrice est de rang 2, on en tire que $\dim(\mathrm{S}) = 2$.

De même, on calcule le rang de la matrice formée par les générateurs de T pour obtenir la dimension de T.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant de rang 2, il en résulte que $\dim(\mathrm{T}) = 2$.

Pour déterminer la dimension de $\mathrm{S} + \mathrm{T}$, il suffit de déterminer le rang de la matrice dont les lignes sont constituées des générateurs de S et de T.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\mathrm{L}_4 \leftrightarrow \mathrm{L}_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - 2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_5 \to \mathrm{L}_5 - \mathrm{L}_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\substack{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - 2\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_5 \to \mathrm{L}_5 - 2\,\mathrm{L}_2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - \mathrm{L}_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vu que cette matrice est de rang 3, il apparaît que $\dim(\mathrm{S} + \mathrm{T}) = 3$.

Enfin, la relation de Grassmann donne

$$\dim(\mathrm{S} \cap \mathrm{T}) = \dim(\mathrm{S}) + \dim(\mathrm{T}) - \dim(\mathrm{S} + \mathrm{T}) = 2 + 2 - 3 = 1\,.$$