Chamblandes 2014 — Problème 7

1. Calculons les valeurs propres de f :

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 12 & 18 \\ -2 & -2-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{L_1 \to L_1 + (8-\lambda)\,L_3 \\ L_2 \to L_2 - 2\,L_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2\,\lambda-4 & \lambda^2-7\,\lambda+10 \\ 0 & 2-\lambda & 2\,\lambda-4 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(-1)\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2\,\lambda-4 & \lambda^2-7\,\lambda+10 \\ 2-\lambda & 2\,\lambda-4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2\,(\lambda-2) & (\lambda-2)\,(\lambda-5) \\ -(\lambda-2) & 2\,(\lambda-2) \end{vmatrix} =$$

$$-(\lambda-2)^2\begin{vmatrix} 2 & \lambda-5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2\Big(2\cdot 2-(-1)\,(\lambda-5)\Big) = -(\lambda-2)^2\,(\lambda-1)$$

On obtient deux valeurs propres : $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8-1 & 12 & 18 & 0 \\ -2 & -2-1 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & -1-1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 12 & 18 & 0 \\ -2 & -3 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -6 & 0 \\ 7 & 12 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{L_2 \to L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \to L_3 + 7\,L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 + 2\,L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \to -L_1 - 2\,L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -6\,\alpha \\ y & = & 2\,\alpha \\ z & = & \alpha \end{array}\right. = \alpha\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a trouvé $E_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8-2 & 12 & 18 & 0 \\ -2 & -2-2 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & -1-2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 12 & 18 & 0 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to \frac{1}{6}\,L_1 \\ L_2 \to -\frac{1}{2}\,L_2 \\ L_3 \to -L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -2\,\alpha & - & 3\,\beta \\ y & = & \alpha & & \\ z & = & & & \beta \end{array}\right. = \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a obtenu $E_2 = \Pi\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

2. En posant $P = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on vérifie $D = P^{-1}\,A\,P$ ou, si l'on préfère, $A = P\,D\,P^{-1}$.

3. L'application f est une dilatation relativement à $E_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}\right)$, de direction $E_2 = \Pi\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et de rapport 2.

4. Appliquons la méthode de Gauss-Jordan pour calculer l'inverse de A :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}8 & 12 & 18 & 1 & 0 & 0\\-2 & -2 & -6 & 0 & 1 & 0\\-1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{L_1\leftrightarrow L_3}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1\\-2 & -2 & -6 & 0 & 1 & 0\\8 & 12 & 18 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{\substack{L_2\to L_2-2\,L_1\\L_3\to L_3+8\,L_1}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1\\0 & 2 & -4 & 0 & 1 & -2\\0 & -4 & 10 & 1 & 0 & 8\end{array}\right)\overset{L_3\to L_3+2\,L_2}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1\\0 & 2 & -4 & 0 & 1 & -2\\0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 4\end{array}\right)\overset{\substack{L_1\to 2\,L_1+L_3\\L_2\to L_2+2\,L_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2 & -4 & 0 & 1 & 2 & 6\\0 & 2 & 0 & 2 & 5 & 6\\0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 4\end{array}\right)\overset{L_1\to L_1+2\,L_2}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2 & 0 & 0 & 5 & 12 & 18\\0 & 2 & 0 & 2 & 5 & 6\\0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 4\end{array}\right)$$

On conclut que $A^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & -6 & -9\\1 & \frac{5}{2} & 3\\\frac{1}{2} & 1 & 2\end{pmatrix}$

5. On rappelle que v est un vecteur propre associé à la valeur propre λ si $A\,v = \lambda\,v$.

On sait que $v = \begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$.
Donc $A\,v = v$.
De même :
$A^2\,v = A\,A\,v = A\,v = v$
$A^3\,v = A\,A^2\,v = A\,v = v$
$A^4\,v = A\,A^3\,v = A\,v = v$
etc.
$A^n\,v = A\,A^{n-1}\,v = A\,v = v$
Cela signifie que v est un vecteur propre de A^n associé à la valeur propre 1.

On sait également que $A\,v = 2\,v$ lorsque $v = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ ou $v = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$.
Dans ce cas, on obtient un résultat similaire :
$A^2\,v = A\,A\,v = A\,2\,v = 2\,A\,v = 2\cdot 2\,v = 2^2\,v$
$A^3\,v = A\,A^2\,v = A\,2^2\,v = 2^2\,A\,v = 2^2\cdot 2\,v = 2^3\,v$
$A^4\,v = A\,A^3\,v = A\,2^3\,v = 2^3\,A\,v = 2^3\cdot 2\,v = 2^4\,v$
etc.
$A^n\,v = A\,A^{n-1}\,v = A\,2^{n-1}\,v = 2^{n-1}\,A\,v = 2^{n-1}\cdot 2\,v = 2^n\,v$

On obtient alors que le vecteur v est associé à la valeur propre 2^n.

Comme $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres, il ne peut y avoir encore d'autres vecteurs propres associés à d'autres valeurs propres.
Les seules valeurs propres de A^n sont donc 1 et 2^n.