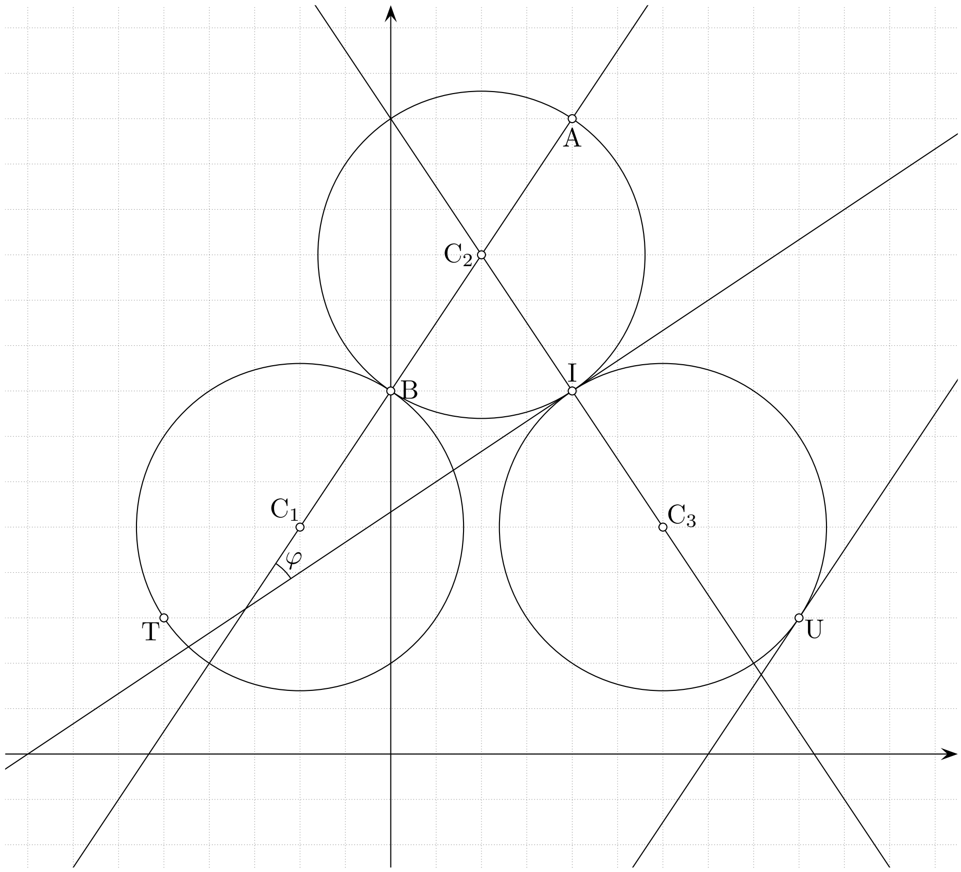
Chamblandes 2009 — Problème 3



a) Le centre C_2 du cercle de diamètre AB est le milieu des points $A(4\,;14)$ et $B(0\,;8)$:
$C_2\left(\frac{4+0}{2}\,;\frac{14+8}{2}\right) = C_2(2\,;11)$

Son rayon r_2 vaut la moitié de son diamètre :
$r_2 = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} 0-4 \\ 8-14 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\,|-2|\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\|$
$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

Le cercle Γ_2 admet par conséquent pour équation :
$\Gamma_2 : (x-2)^2 + (y-11)^2 = 13$

b) Déterminons le centre et le rayon du cercle Γ_1 :
$x^2 + 4\,x + y^2 - 10\,y + 16 = 0$
$(x+2)^2 - 4 + (y-5)^2 - 25 + 16 = 0$
$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 13$
Le cercle Γ_1 admet donc pour centre $C_1(-2\,;5)$ et pour rayon $r_1 = \sqrt{13}$.

$$\delta(\mathrm{C}_1\,;\mathrm{C}_2) = \|\overrightarrow{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}\| = \left\|\begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 11-5 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right\| = |2|\, \left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = 2\sqrt{2^2+3^2}$$
$$= 2\sqrt{13} = \sqrt{13} + \sqrt{13} = r_1 + r_2$$

Ce calcul montre que les cercles Γ_1 et Γ_2 sont tangents extérieurement.

c) Toute perpendiculaire à la droite $a : 2\,x - 3\,y + 16 = 0$ est de la forme :
$p : 3\,x + 2\,y + c = 0$

Recherchons en particulier la perpendiculaire à la droite a passant par $\mathrm{C}_2(2\,;11)$:
$3 \cdot 2 + 2 \cdot 11 + c = 0$ implique $c = -28$

La perpendiculaire p à la droite a passant par C_2 admet donc pour équation :
$p : 3\,x + 2\,y - 28 = 0$

Calculons les coordonnées du point I, intersection des droites a et p :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,x - 3\,y + 16 = 0 \\ 3\,x + 2\,y - 28 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array} \left| \begin{array}{c} \cdot(-3) \\ \cdot 2 \end{array}\right.$$

$13\,x - 52 = 0$ donne $x = 4$.

$13\,y - 104 = 0$ délivre $y = 8$.

On a ainsi trouvé $\mathrm{I}(4\,;8)$.

Pour déterminer les coordonnées du point $\mathrm{C}_3(x\,;y)$, on utilise le fait que le point I constitue le milieu des points C_2 et C_3 :

$\mathrm{I}(4\,;8) = \left(\frac{2+x}{2}\,;\frac{11+y}{2}\right)$

$$\left\{\begin{array}{l} 4 = \frac{2+x}{2} \\ 8 = \frac{11+y}{2} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8 = 2 + x \\ 16 = 11 + y \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6 = x \\ 5 = y \end{array}\right.$$

Il en résulte $\mathrm{C}_3(6\,;5)$.

Le cercle Γ_3 étant le symétrique du cercle Γ_2, il possède le même rayon $r_3 = r_2 = \sqrt{13}$, si bien que son équation s'écrit :
$\Gamma_3 : (x-6)^2 + (y-5)^2 = 13$