11.7 1) $^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$

$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = 1$

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix}$

On peut donc considérer A comme étant la matrice de la rotation d'amplitude π rad $= 180^\circ$, comme une homothétie de rapport -1 ou encore comme une symétrie centrale.

2) $^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$

$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1$

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\sin(-\frac{\pi}{2}) \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$

A est donc la matrice de la rotation d'amplitude $-\frac{\pi}{2}$ rad $= -90^\circ$.

3) $^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$

$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 0 = -1$

Il n'y a pas besoin de calculer les vecteurs propres, étant donné que la matrice A est déjà diagonale.

On conclut immédiatement que $\mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et que $\mathrm{E}_{-1} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Par conséquent, A est la matrice de la symétrie orthogonale de base $\Delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et de direction $\Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

4) $^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$

$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$

Déterminons la base (ou l'axe) de la symétrie, c'est-à-dire l'espace propre E_1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puisque la symétrie est orthogonale, on peut tout de suite affirmer que la direction de la symétrie est $\mathrm{E}_{-1} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ sans avoir besoin de calculer cet espace propre.

5) $^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$

$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = 1$

$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{3}{5} \\ \sin(\alpha) = \frac{4}{5} \end{cases}$ donne $\alpha \approx 53{,}13^\circ$

Dès lors, A est la matrice de la rotation d'amplitude $\alpha \approx 53{,}13^\circ$.

6) $^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$

$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -1$

Déterminons la base (ou l'axe) de la symétrie, c'est-à-dire l'espace propre E_1.

$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{3}{5} - 1 & -\frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} - 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{8}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\,\alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Puisque la symétrie est orthogonale, on peut tout de suite affirmer que la direction de la symétrie est $\mathrm{E}_{-1} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sans avoir besoin de calculer cet espace propre.

7) $^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$

$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \end{vmatrix} = -\frac{12}{13} \cdot \frac{12}{13} - \frac{5}{13} \cdot \frac{5}{13} = -1$

Déterminons la base (ou l'axe) de la symétrie, c'est-à-dire l'espace propre E_1.

$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{12}{13} - 1 & \frac{5}{13} & 0 \\ \frac{5}{13} & \frac{12}{13} - 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{25}{13} & \frac{5}{13} & 0 \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 5\,\alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Puisque la symétrie est orthogonale, on peut tout de suite affirmer que la direction de la symétrie est $\mathrm{E}_{-1} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ sans avoir besoin de calculer cet espace propre.

8) ${}^t\!AA = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$

$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{vmatrix} = \frac{5}{13} \cdot \frac{5}{13} - \left(-\frac{12}{13}\right) \cdot \frac{12}{13} = 1$

$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{5}{13} \\ \sin(\alpha) = -\frac{12}{13} \end{cases}$ donne $\alpha \approx -67{,}38^\circ$

Dès lors, A est la matrice de la rotation d'amplitude $\alpha \approx -67{,}38^\circ$.

9) ${}^t\!AA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$

$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -1$

Déterminons la base (ou l'axe) de la symétrie, c'est-à-dire l'espace propre E_1.

$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} - 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3}\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Puisque la symétrie est orthogonale, on peut tout de suite affirmer que la direction de la symétrie est $\mathrm{E}_{-1} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}\right)$ sans avoir besoin de calculer cet espace propre.