6.8 1) Soit $(e_1\,;\dots\,;e_n)$ une famille génératrice de E.

Soit $u \in \mathrm{Im}(h)$. Il existe $u^\star \in \mathrm{E}$ tel que $u = h(u^\star)$.

Puisque $(e_1\,;\dots\,;e_n)$ une famille génératrice de E, il existe des scalaires (non nécessairement uniques) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $u^\star = \alpha_1 \cdot e_1 + \dots + \alpha_n \cdot e_n$.

Ainsi $u = h(u^\star) = h(\alpha_1 \cdot e_1 + \dots + \alpha_n \cdot e_n) = \alpha_1 \cdot h(e_1) + \dots + \alpha_n \cdot h(e_n)$.

On a donc montré que $\mathrm{Im}(h) = \big\langle h(e_1)\,;\dots\,;h(e_n)\big\rangle$.

2) (a) Supposons f surjective.

L'égalité $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{F}$ implique immédiatement $\dim\big(\mathrm{Im}(h)\big) = \dim(\mathrm{F})$.

(b) Supposons que $\dim\big(\mathrm{Im}(h)\big) = \dim(\mathrm{F})$.

Soit $y \in \mathrm{F}$.

Puisque $\mathrm{Im}(h)$ est un sous-espace vectoriel de F tel que $\dim\big(\mathrm{Im}(h)\big) = \dim(\mathrm{F})$, on conclut que $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{F}$ (pour autant que F soit de dimension finie).

Mais $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{F}$ signifie que h est surjective.