9.16 1) $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n - v_n \\ 2\,u_n + 4\,v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

On a donc trouvé $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2) **Initialisation :** $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 - v_0 \\ 2\,u_0 + 4\,v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{A} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

Hérédité : Vu 1), $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \mathrm{A}^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

3) À l'exercice 9.14, on a calculé que $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$.

On obtient ainsi une formule explicite pour u_n et v_n :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2 \cdot 2^n - 3^n)\,u_0 + (2^n - 3^n)\,v_0 \\ (-2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n)\,u_0 + (-2^n + 2 \cdot 3^n)\,v_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$