5.3 1) (a) Soient u_1 et u_2 des éléments de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$.

Il existe $v_1, v_2 \in \mathrm{F}$ et $w_1, w_2 \in \mathrm{G}$ tels que

$$u_1 = v_1 + w_1 \quad \text{et} \quad u_2 = v_2 + w_2 \,.$$

Alors $u_1+u_2 = (v_1+w_1)+(v_2+w_2) = \underbrace{(v_1+v_2)}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{(w_1+w_2)}_{\in \mathrm{G}} \in \mathrm{F}+\mathrm{G}\,.$

(b) Soient $u \in \mathrm{F}+\mathrm{G}$ et $\alpha \in \mathbb{R}\,.$

Il existe $v \in \mathrm{F}$ et $w \in \mathrm{G}$ tels que $u = v + w\,.$

Alors $\alpha \cdot u = \alpha \cdot (v+w) = \underbrace{\alpha \cdot v}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{\alpha \cdot w}_{\in \mathrm{G}} \in \mathrm{F}+\mathrm{G}\,.$

2) Soit $v \in \mathrm{F}$.

Comme $0 \in \mathrm{G}$, on a $v = v + 0 \in \mathrm{F}+\mathrm{G}$.

Donc $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}+\mathrm{G}\,.$

Soit $w \in \mathrm{G}$.

Puisque $0 \in \mathrm{F}$, on a $w = 0 + w \in \mathrm{F}+\mathrm{G}$.

Ainsi $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}+\mathrm{G}\,.$

3) Soit H un sous-espace vectoriel contenant $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}\,.$

Soit $u \in \mathrm{F}+\mathrm{G}\,.$

Il existe $v \in \mathrm{F}$ et $w \in \mathrm{G}$ tels que $u = v + w\,.$

Puisque $v \in \mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ et $w \in \mathrm{G} \subset \mathrm{H}$, on obtient $u = \underbrace{v}_{\in \mathrm{H}} + \underbrace{w}_{\in \mathrm{H}} \in \mathrm{H}\,.$

On a ainsi montré que $\mathrm{F}+\mathrm{G} \subset \mathrm{H}\,.$