Chamblandes 2002 — Problème 2.1

a) La fonction f n'est pas définie si $(2\,x+3)^2 = (2\,x+3)\,(2\,x+3) = 0$, c'est-à-dire si $x = -\frac{3}{2}$. Par conséquent, $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}} \frac{x^3}{(2\,x+3)^2} = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3}{\left(2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+2\right)^2} = \frac{-\frac{27}{8}}{0} = \infty$$

$x = -\frac{3}{2}$ est une asymptote verticale.

$f(x) = \dfrac{x^3}{(2\,x+3)^2} = \dfrac{x^3}{4\,x^2+12\,x+9}$ possède une asymptote oblique, car le degré du numérateur vaut 1 de plus que celui du dénominateur.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^3 & & & & & & & 4\,x^2+12\,x+9 \\ \cline{8-8}
-x^3 & - & 3\,x^2 & - & \frac{9}{4}\,x & & & \frac{1}{4}\,x-\frac{3}{4} \\ \cline{1-7}
 & - & 3\,x^2 & - & \frac{9}{4}\,x & & & \\
 & + & 3\,x^2 & + & 9\,x & + & \frac{27}{4} & \\ \cline{2-7}
 & & & & \frac{27}{4}\,x & + & \frac{27}{4} &
\end{array}$$

$y = \frac{1}{4}\,x - \frac{3}{4}$ est asymptote oblique.

$$\delta(x) = \frac{\frac{27}{4}\,x+\frac{27}{4}}{4\,x^2+12\,x+9} = \frac{\frac{27}{4}\,(x+1)}{(2\,x+3)^2}$$

		$-\frac{3}{2}$		-1	
$\frac{27}{4}$	$+$	‖	$+$		$+$
$x+1$	$-$	‖	$-$		$+$
$(2\,x+3)^2$	$+$	‖	$+$		$+$
δ	$-$	‖	$-$		$+$

Le graphe de f coupe ainsi l'asymptote oblique en $x = -1$.

b) $$f'(x) = \frac{(x^3)'\,(2\,x+3)^2 - x^3\left((2\,x+3)^2\right)'}{\left((2\,x+3)^2\right)^2} = \frac{3\,x^2\,(2\,x+3)^2 - x^3\cdot 2\,(2\,x+3)\,(2\,x+3)'}{(2\,x+3)^4}$$

$$= \frac{3\,x^2\,(2\,x+3)^2 - 4\,x^3\,(2\,x+3)}{(2\,x+3)^4} = \frac{x^2\,(2\,x+3)\big(3\,(2\,x+3)-4\,x\big)}{(2\,x+3)^4} = \frac{x^2\,(2\,x+9)}{(2\,x+3)^3}$$

		$-\frac{9}{2}$		$-\frac{3}{2}$		0	
x^2	$+$		$+$	‖	$+$		$+$
$2\,x+9$	$-$		$+$	‖	$+$		$+$
$(2\,x+3)^3$	$-$		$-$	‖	$+$		$+$
f'	$+$		$-$	‖	$+$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

$$f(-\tfrac{9}{2}) = \frac{\left(-\frac{9}{2}\right)^3}{\left(2\left(-\frac{9}{2}\right)+3\right)^2} = \frac{-\frac{729}{8}}{6^2} = -\frac{729}{8}\cdot\frac{1}{36} = -\frac{81}{8}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{81}{32} = -2{,}531\,25$$

Le point $(-\frac{9}{2}\,;-\frac{81}{32})$ est un maximum.

$$f(0) = \frac{0^3}{(2\cdot 0+3)^2} = \frac{0}{9} = 0$$

Le point $(0\,;0)$ est un point à tangente horizontale.

c)