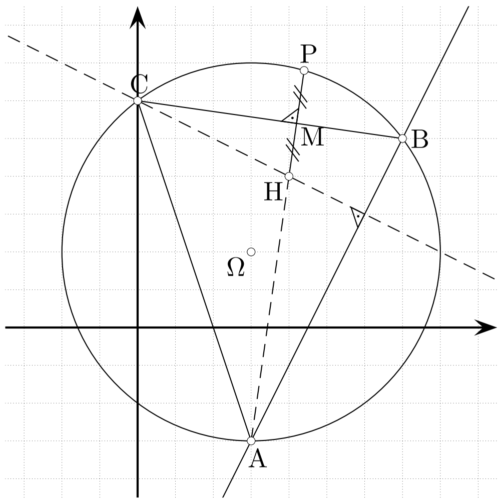
Chamblandes 2007 — Problème 3

a) 

b) Le cercle circonscrit Γ de centre $\Omega(3\,;2)$ et passant par $\mathrm{A}(3\,;-3)$ a pour rayon :

$r = \|\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}\| = \left\|\begin{pmatrix} 3-3 \\ -3-2 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}\right\| = \left\|-5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = |-5|\,\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = 5\sqrt{0^2+1^2} = 5$

Son équation s'écrit ainsi $(\Gamma) : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25\,.$

Le point C se situe à l'intersection du cercle Γ avec l'axe des y dont l'équation est $x = 0\,.$

$(0-3)^2 + (y-2)^2 = 25$

$9 + (y-2)^2 = 25$

$(y-2)^2 - 16 = 0$

$\big((y-2)+4\big)\,\big((y-2)-4\big) = 0$

$(y+2)\,(y-6) = 0$

$y = -2 \quad \text{ou} \quad y = 6$

Puisque l'ordonnée du point C doit être positive, on conclut à $\boxed{\mathrm{C}(0\,;6)}\,.$

La droite AB est perpendiculaire à la hauteur issue du point C, c'est-à-dire la droite CH.
Comme $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, l'équation de la droite AB s'écrit sous la forme $(\mathrm{AB}) : 2\,x - y + c = 0\,.$

En outre, elle passe par le point $\mathrm{A}(3\,;-3)$: $2\cdot 3 - (-3) + c = 0$ donne $c = -9\,.$

On a donc obtenu $(\mathrm{AB}) : 2\,x - y - 9 = 0\,.$

Le point B est à l'intersection de la droite AB et du cercle circonscrit Γ.

$$\begin{cases} 2\,x - y - 9 = 0 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{cases}$$

L'équation de la droite AB fournit $y = 2\,x - 9$ que l'on substitue dans l'équation du cercle Γ :

$(x-3)^2 + \big((2\,x-9)-2\big)^2 = 25$

$(x-3)^2+(2\,x-11)^2-25=0$
$x^2-6\,x+9+4\,x^2-44\,x+121-25=0$
$5\,x^2-50\,x+105=0$
$x^2-10\,x+21=0$
$(x-3)\,(x-7)=0$
$x=3 \quad \text{ou} \quad x=7$
Vu que $x=3$ correspond à l'abscisse du point A, on en tire que l'abscisse du point B vaut $x=7$.
La formule de substitution donne $y=2\cdot 7-9=5$.
En définitive, on a trouvé $\boxed{\mathrm{B}(7\,;5)}$.

c) Recherchons l'équation de la perpendiculaire à BC passant par H, c'est-à-dire la hauteur issue du point A.
Puisque $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}0-7\\6-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$, son équation est de la forme $(h_{\mathrm{A}}):-7\,x+y+c=0$.
Comme elle passe par $\mathrm{H}(4\,;4)$, on doit avoir $-7\cdot 4+4+c=0$, d'où suit $c=24$.
On a ainsi trouvé l'équation $(h_{\mathrm{A}}):-7\,x+y+24=0$.

Étant donné que $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$, la droite BC s'écrit sous la forme $x+7\,y+c=0$.
Vu qu'elle passe par $\mathrm{B}(7\,;5)$, on a $7+7\cdot 5+c=0$, si bien que $c=-42$.
On obtient donc $(\mathrm{BC}):x+7\,y-42=0$.

Calculons l'intersection M de la hauteur h_{A} avec la droite BC :
$$\left\{\begin{array}{rcl}-7\,x+\;\;y+24=0 \\ x+7\,y-42=0\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l}\cdot 1\\ \cdot 7\end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l}-7\,x+y+24=0 \\ 7\,x+49\,y-294=0\end{array}\right.$$
$50\,y-270=0$
$y=\frac{270}{50}=\frac{27}{5}$
L'équation de la droite BC implique $x=-7\,y+42=-7\cdot\frac{27}{5}+42=\frac{21}{5}$.
D'où $\mathrm{M}(\frac{21}{5}\,;\frac{27}{5})$.

Calculons les coordonnées du point $\mathrm{P}(p_1\,;p_2)$, sachant que le point M est le milieu des points P et H :
$\mathrm{M}(\frac{21}{5}\,;\frac{27}{5})=(\frac{p_1+4}{2}\,;\frac{p_2+4}{2})$
$\frac{21}{5}=\frac{p_1+4}{2}$ donne $\frac{42}{5}=p_1+4$ d'où suit $p_1=\frac{42}{5}-4=\frac{22}{5}$
$\frac{27}{5}=\frac{p_2+4}{2}$ délivre $\frac{54}{5}=p_2+4$ de sorte que $p_2=\frac{54}{5}-4=\frac{34}{5}$
On a ainsi obtenu $\boxed{\mathrm{P}(\frac{22}{5}\,;\frac{34}{5})}$.

Par construction, le point P appartient à la hauteur h_{A}, à savoir la droite AH.
Il reste encore à vérifier que le point P appartient aussi au cercle circonscrit Γ :
$(\frac{22}{5}-3)^2+(\frac{34}{5}-2)^2=(\frac{7}{5})^2+(\frac{24}{5})^2=\frac{49}{25}+\frac{576}{25}=\frac{625}{25}=25$