7.16

1) (a) Il s'agit d'écrire e'_1 comme combinaison linéaire de e_1 et e_2 :

$e'_1 = p_{11} \cdot e_1 + p_{21} \cdot e_2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = p_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 1 = p_{11} \\ 1 = p_{21} \end{cases}$

(b) Il s'agit d'écrire e'_2 comme combinaison linéaire de e_1 et e_2 :

$e'_1 = p_{12} \cdot e_1 + p_{22} \cdot e_2$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = p_{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -1 = p_{12} \\ 0 = p_{22} \end{cases}$

La matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est ainsi $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) (a) Il s'agit d'écrire e_1 comme combinaison linéaire de e'_1 et e'_2 :

$e_1 = q_{11} \cdot e'_1 + q_{21} \cdot e'_2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = q_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q_{21} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 1 = q_{11} - q_{21} \\ 0 = q_{11} \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = q_{11} \\ -1 = q_{21} \end{cases}$

(b) Il s'agit d'écrire e_2 comme combinaison linéaire de e'_1 et e'_2 :

$e_2 = q_{12} \cdot e'_1 + q_{22} \cdot e'_2$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = q_{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q_{22} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 0 = q_{12} - q_{22} \\ 1 = q_{12} \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = q_{12} \\ 1 = q_{22} \end{cases}$

La matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est ainsi $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $\mathrm{PQ} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2$

$\mathrm{QP} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2$

On a donc bien vérifié que $\mathrm{Q} = \mathrm{P}^{-1}$.

4) Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$, alors on a :

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 \\ &= x_1 \cdot (0 \cdot e'_1 - 1 \cdot e'_2) + x_2 \cdot (1 \cdot e'_1 + 1 \cdot e'_2) \\ &= x_2 \cdot e'_1 + (x_2 - x_1) \cdot e'_2 \end{aligned}$$

Donc x s'écrit $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

5) On vient d'établir que $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$. On vérifie que :

(a) $\mathrm{P} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

(b) $\mathrm{Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$