Chamblandes 2005 — Exercice 2

On cherche à maximiser le volume du cône $V = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, x$.
Vu le théorème de Pythagore, $(\sqrt{3})^2 = x^2 + r^2$ d'où l'on tire $r^2 = 3 - x^2$.
En remplaçant $r^2 = 3 - x^2$ dans $V = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, x$, on obtient : $V = \frac{1}{3}\,\pi\,(3 - x^2)\,x = \frac{\pi}{3}\,(3\,x - x^3)$.

Chercher à maximiser le volume du cône revient donc à chercher un maximum de la fonction $f(x) = \frac{\pi}{3}\,(3\,x - x^3)$ définie sur $]0\,;\infty[$

$f'(x) = \frac{\pi}{3}\,(3\,x - x^3)' = \frac{\pi}{3}\,(3 - 3\,x^2) = \frac{\pi}{3} \cdot 3\,(1 - x^2) = \pi\,(1 + x)\,(1 - x)$

On a le tableau de croissance suivant :

		-1		1	
π	$+$		$+$		$+$
$1 + x$	$-$		$+$		$+$
$1 - x$	$+$		$+$		$-$
f'	$-$		$+$		$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

En conclusion, le volume du cône est maximal si $x = 1$. Dans ce cas, l'égalité $r^2 = 3 - x^2$ donne $r^2 = 3 - 1^2 = 2$ d'où l'on déduit que $r = \sqrt{2}$.

Autre méthode de résolution

De la condition $(\sqrt{3})^2 = x^2 + r^2$ on peut déduire $x = \sqrt{3 - r^2}$.
On obtient alors l'expression du volume en fonction de r : $V = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\,\sqrt{3 - r^2}$.
Comme cette expression du volume présente l'inconvénient d'une racine carrée, on ne va pas chercher à maximiser directement cette expression, mais, ce qui revient au même, à maximiser son carré.
Le problème revient donc à déterminer le maximum de la fonction
$f(r) = \left(\frac{1}{3}\,\pi\, r^2\,\sqrt{3 - r^2}\right)^2 = \frac{1}{9}\,\pi^2\, r^4\,(3 - r^2) = \frac{\pi^2}{9}\,(3\,r^4 - r^6)$.
On calcule la dérivée de cette fonction :
$f'(r) = \frac{\pi^2}{9}\,(3\,r^4 - r^6)' = \frac{\pi^2}{9}\,(12\,r^3 - 6\,r^5) = \frac{\pi^2}{9} \cdot 6\,r^3\,(2 - r^2) = \frac{2\,\pi^2}{3}\,r^3\,(\sqrt{2} + r)\,(\sqrt{2} - r)$
ce qui donne lieu à ce tableau de croissance :

		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$\frac{2\,\pi^2}{3}$	$+$		$+$		$+$		$+$
r	$-$		$-$		$+$		$+$
r	$-$		$-$		$+$		$+$
r	$-$		$-$		$+$		$+$
$\sqrt{2} + r$	$-$		$+$		$+$		$+$
$\sqrt{2} - r$	$+$		$+$		$+$		$-$
f'	$+$		$-$		$+$		$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Puisqu'une longueur doit être positive, on doit avoir $r > 0$, si bien que le maximum recherché est $r = \sqrt{2}$.
En définitive, le volume du cône est maximal si $r = \sqrt{2}$; dans ce cas, sa hauteur vaut $x = \sqrt{3 - r^2} = \sqrt{3 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3 - 2} = \sqrt{1} = 1$.