Chamblandes 2010 — Problème 8

a) Calculons les valeurs propres de A :

$$0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 0-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{L_1 \to L_1 + \lambda L_3 \\ L_2 \to L_2 + L_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ -1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(1+\lambda) & (1+\lambda)\,(1-\lambda) \\ -(1+\lambda) & -(1+\lambda) \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+\lambda)^2 \big((-1)\cdot(-1) - (-1)\,(1-\lambda)\big) = (1+\lambda)^2\,(2-\lambda)$$

Il y a donc deux valeurs propres : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$.

Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z \\ -x-z \\ x-y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} - y + z = -x \\ -x - z = -y \\ x - y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff x - y + z = 0$$

On constate que y et z sont des variables libres.
En posant $y = \alpha$ et $z = \beta$, on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ est par conséquent :

$$E_{-1} = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z \\ -x-z \\ x-y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2\,y \\ 2\,z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} - y + z = 2\,x \\ -x - z = 2\,y \\ x - y = 2\,z \end{cases} \iff \begin{cases} -2\,x - y + z = 0 \\ -x - 2\,y - z = 0 \\ x - y - 2\,z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x - y - 2\,z = 0 \\ -x - 2\,y - z = 0 \\ -2\,x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - 2\,z = 0 \\ - 3\,y - 3\,z = 0 \\ - 3\,y - 3\,z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x - y - 2\,z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Vu que z est variable libre, on pose $z = \alpha$ pour avoir la solution générale :

$$\begin{cases} x = & \alpha \\ y = & -\alpha \\ z = & \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ est $\mathrm{E}_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Puisque $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ constitue une base de vecteurs propres, la matrice A est bien diagonalisable. On vérifie que :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} b & -1-b & 1+b \\ -1-b & b & -1-b \\ 1+b & -1-b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-(-1-b)+(1+b) \\ (-1-b)-b+(-1-b) \\ (1+b)-(-1-b)+b \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3\,b+2 \\ -3\,b-2 \\ 3\,b+2 \end{pmatrix} = (3\,b+2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre de $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ associé à la valeur propre $3\,b+2$.

c) La matrice $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ n'est pas inversible si son rang est < 3 :

$$\begin{pmatrix} b & -1-b & 1+b \\ -1-b & b & -1-b \\ 1+b & -1-b & b \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{L}_3 \to -\mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2]{\mathrm{L}_2 \to b\,\mathrm{L}_2 + (1+b)\,\mathrm{L}_1} \begin{pmatrix} b & -1-b & 1+b \\ 0 & -1-2\,b & 1+b \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{L}_3 \to (1+2\,b)\,\mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2} \begin{pmatrix} b & -1-b & 1+b \\ 0 & -1-2\,b & 1+b \\ 0 & 0 & 3\,b+2 \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ n'est donc pas inversible si $3\,b+2 = 0$, c'est-à-dire si $b = -\frac{2}{3}$.