Chamblandes 2010 — Problème 6

a) $$\|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\| = 2\,\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\| = 2\left\|\begin{pmatrix} 5-1 \\ -3-1 \\ 0-2 \end{pmatrix}\right\| = 2\left\|\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right\| = 4\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\|$$
$$= 4\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 4 \cdot 3 = 12$$

b) Puisque les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, la droite BD doit passer par le milieu M des points A et C : $\mathrm{M}\big(\frac{1+5}{2}\,;\frac{1-3}{2}\,;\frac{2+0}{2}\big) = \mathrm{M}(3\,;-1\,;1)$

Vu que les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, la droite BD doit être perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour être parallèle au plan $4\,x + 2\,y - 5\,z = 0$, la diagonale BD doit aussi être perpendiculaire à son vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Il en résulte que la droite BD admet pour vecteur directeur :
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot(-5) - (-1)\cdot 2 \\ -1\cdot 4 - 2\cdot(-5) \\ 2\cdot 2 - (-2)\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La droite BD admet ainsi pour équation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 + 2\,\lambda \\ y = -1 + \,\lambda \\ z = 1 + 2\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

c) Il s'agit de déterminer les points P de la droite BD tels que $\|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\| = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\| = 6$:
$$36 = \|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} 3+2\,\lambda-3 \\ -1+\lambda+1 \\ 1+2\,\lambda-1 \end{pmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} 2\,\lambda \\ \lambda \\ 2\,\lambda \end{pmatrix}\right\|^2 = (2\,\lambda)^2 + \lambda^2 + (2\,\lambda)^2 = 9\,\lambda^2$$

Il en résulte $0 = 9\,\lambda^2 - 36 = 9\,(\lambda^2 - 4) = 9\,(\lambda - 2)\,(\lambda + 2)$

On en tire les coordonnées des points B et D :

$\begin{cases} x = 3 + 2\cdot 2 = 7 \\ y = -1 + \phantom{2\cdot{}} 2 = 1 \\ z = 1 + 2\cdot 2 = 5 \end{cases}$ B$(7\,;1\,;5)$ $\begin{cases} x = 3 + 2\cdot(-2) = -1 \\ y = -1 + \phantom{2\cdot{}}(-2) = -3 \\ z = 1 + 2\cdot(-2) = -3 \end{cases}$ D$(-1\,;-3\,;-3)$