

8 Déterminant

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n .

On appelle **sous-matrice** A_{ij} la matrice d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant la i^{e} ligne et la j^{e} colonne de la matrice A .

Le **mineur** d'un élément a_{ij} est le déterminant de la sous-matrice A_{ij} . On note $M_{ij} = \det(A_{ij})$ le mineur de l'élément a_{ij} .

La **signature** d'un élément a_{ij} est donnée par $(-1)^{i+j}$.

Le **cofacteur** d'un élément a_{ij} , noté C_{ij} , est le produit de son mineur par sa signature, c'est-à-dire : $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

8.1 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -6 & 4 & 7 \\ 8 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. Déterminer

- 1) la sous-matrice A_{23} ;
- 2) le mineur de a_{12} ;
- 3) le cofacteur de a_{32} .

Le déterminant d'ordre n est défini par récurrence à l'aide des déterminants d'ordre $n - 1$.

Si $n = 1$, alors on pose $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$.

Le **déterminant** de la matrice $A = (a_{ij})$ d'ordre $n \geq 2$ est la somme des produits de chaque terme de la première colonne par son cofacteur ; on le note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} C_{11} + \dots + a_{n1} C_{n1}.$$

8.2 Vérifier que cette définition coïncide avec les définitions données en première année pour les déterminants d'ordre 2 et d'ordre 3 :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \\ 2) \quad & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} a_{22} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} \\ -a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{matrix} \quad \text{règle de Sarrus} \end{aligned}$$

8.3 Calculer le déterminant suivant : $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 10 \\ -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

8.4 Calculer le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Propriétés du déterminant

- 1) Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n s'obtient en effectuant la somme des produits de chaque élément d'une colonne quelconque par son cofacteur.
- 2) Si on multiplie une colonne d'un déterminant par un nombre λ , le déterminant est multiplié par λ .
- 3) Le déterminant ne change pas si à une colonne l'on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.
- 4) Si l'on permute deux colonnes d'un déterminant, il change de signe.
- 5) Soit A une matrice carrée d'ordre n . On a $\det({}^tA) = \det(A)$.
- 6) Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n . On a $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Remarques :

- 1) La propriété 5) signifie que toutes les propriétés relatives aux colonnes d'un déterminant s'appliquent également aux lignes d'un déterminant.
- 2) La propriété 1) signifie que l'on peut choisir de développer un déterminant selon n'importe quelle colonne (ou n'importe quelle ligne), de préférence possédant un grand nombre de 0.

Exemple : le déterminant de l'exercice 8.3 se calcule plus facilement :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 10 \\ -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} C_1 \rightarrow C_1 - 3C_2 \\ C_3 \rightarrow C_3 - 2C_2 \\ C_4 \rightarrow C_4 - 3C_2 \end{smallmatrix}]{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$(-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 3L_1 \end{smallmatrix}]{=} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & 9 & 13 \end{vmatrix}$$

Le développement de ce déterminant par rapport à la première colonne donne :

$$-(-1) \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 9 & 13 \end{vmatrix} = (5 \cdot 13 - 9 \cdot 12) = -43$$

8.5 Démontrer les propriétés du déterminant dans le cas particulier des matrices carrées d'ordre 2.

8.6 Calculer les déterminants suivants (sans utiliser la règle de Sarrus) :

$$\begin{array}{lll}
 1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} & 2) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} & 3) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix} \\
 4) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} & 5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} & 6) \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & 9 & -7 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

8.7 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} & 2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

8.8 Sachant que les nombres 85, 527 et 7854 sont divisibles par 17, prouver, *sans le développer*, que le déterminant suivant est aussi divisible par 17 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \\ 78 & 0 & 54 \end{vmatrix}$$

8.9 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{array}{lll}
 1) \begin{vmatrix} 1 & b+c & a \\ 1 & c+a & b \\ 1 & a+b & c \end{vmatrix} & 2) \begin{vmatrix} x & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} & 3) \begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix} \\
 4) \begin{vmatrix} 3-t & -1 & 1 \\ 5 & -3-t & 1 \\ 6 & -6 & 4-t \end{vmatrix} & 5) \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} &
 \end{array}$$

8.10 Montrer que
$$\begin{vmatrix} x & 8 & 9 & 1 \\ 3 & x & 8 & 1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (x-3)(x-2)(x-7).$$

8.11 Montrer que si
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0, \text{ alors } \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

8.12 1) Que vaut le déterminant d'une matrice carrée dont tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) sont nuls ?

- 2) Que vaut le déterminant d'une matrice carrée dont deux lignes (ou deux colonnes) sont égales ?
- 3) Que vaut le déterminant d'une matrice carrée dont deux lignes (ou deux colonnes) sont proportionnelles ?
- 4) Que vaut le déterminant d'une matrice carrée dont une ligne (ou une colonne) est une combinaison linéaire des autres lignes (colonnes) ?

8.13 Soit A une matrice carrée d'ordre n . Exprimer en fonction de $\det(A)$ les déterminants suivants :

- 1) $\det(\lambda A)$
- 2) $\det(A^k)$

Déterminant et matrice inverse

Théorème Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$; dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Preuve Montrons la première partie : si la matrice A n'est pas inversible, alors $\det(A) = 0$.

Si la matrice A carrée d'ordre n n'est pas inversible, alors elle n'est pas de rang n , d'après le théorème de la page 2.6. En ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes, on peut donc faire apparaître une ligne nulle. Il en résulte que le déterminant est nul.

8.14 Démontrer la seconde partie de la preuve : si la matrice A est inversible, alors $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Indication : utiliser la propriété $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Lemme Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n . En reprenant les notations de la page 1, on note C_{ij} le cofacteur de l'élément a_{ij} . Alors :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} C_{jk} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Preuve

- 1) Supposons $i = j$.

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} C_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} C_{jk} = a_{j1} C_{j1} + \dots + a_{jn} C_{jn} = \det(A)$$

étant donné qu'il s'agit du déterminant développé selon la ligne j .

- 2) Supposons $i \neq j$.

La somme $\sum_{k=1}^n a_{ik} C_{jk}$ est identique à la précédente, une fois que l'on a

remplacé les termes a_{ik} par les termes a_{jk} . Elle est donc égale au déterminant d'une matrice obtenue à partir de la matrice A en remplaçant la ligne i par la ligne j (cela ne modifie pas les cofacteurs C_{jk} , qui ne dépendent pas de a_{jk}). Mais alors, la nouvelle matrice obtenue possède deux lignes identiques, la j et la i . Son déterminant est donc nul.

Théorème Soient $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n et $C = (C_{ij})$ la matrice de ses cofacteurs. Alors :

- 1) $A^t C = \det(A) I_n$;
- 2) si A est inversible, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t C$.

8.15 Prouver ce théorème à l'aide du lemme précédent.

Exemple : Calculons l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \rightarrow C_2 + 2C_1} \begin{vmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 8 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 \cdot 4 = 64 \\ A^{-1} &= \frac{1}{64} \begin{pmatrix} {}^t \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & -{}^t \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & {}^t \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ -{}^t \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & {}^t \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -{}^t \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ {}^t \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & -{}^t \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & {}^t \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & -5 \\ -8 & 8 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8.16 Calculer, lorsque c'est possible, l'inverse des matrices suivantes :

- 1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
- 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- 3) $\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
- 5) $\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin^2(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$

8.17 Calculer, lorsque c'est possible, l'inverse des matrices suivantes :

- 1) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$
- 2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
- 3) $\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$

$$4) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponses

$$8.1 \quad 1) A_{23} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \quad 2) -32 \quad 3) -17$$

$$8.3 \quad -43$$

$$8.4 \quad a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$$

$$8.6 \quad \begin{array}{lll} 1) 79 & 2) 24 & 3) -5 \\ 4) 8 & 5) 12 & 6) 178 \end{array}$$

$$8.7 \quad 1) 27 \quad 2) 86$$

$$8.9 \quad \begin{array}{lll} 1) 0 & 2) (x-1)(x-a) & 3) (x-a)(x-b)(x+a+b) \\ 4) -(t+2)(t-2)(t-4) & 5) (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx) \end{array}$$

$$8.12 \quad 1) 0 \quad 2) 0 \quad 3) 0 \quad 4) 0$$

$$8.13 \quad 1) \lambda^n \det(A) \quad 2) (\det(A))^k$$

$$8.16 \quad \begin{array}{lll} 1) \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} & 2) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 3) \text{non inversible} \\ 4) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & 5) \text{non inversible si } \alpha = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \\ & \text{sinon } \frac{1}{\cos(2\alpha)} \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & -\sin^2(\alpha) \\ -\sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$8.17 \quad \begin{array}{lll} 1) \text{non inversible} & 2) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & 3) \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix} \\ 4) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} & 5) \text{non inversible si } m = 1 \text{ ou si } m = -2 \\ & \text{sinon } \frac{1}{(m-1)(m+2)} \begin{pmatrix} m+1 & -1 & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ -1 & -1 & m+1 \end{pmatrix} \\ 6) \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$