Chamblandes 2012 — Problème 7

a) $x^2 + 20\,x + y^2 - 6\,y + z^2 - 14\,z - 931 = 0$

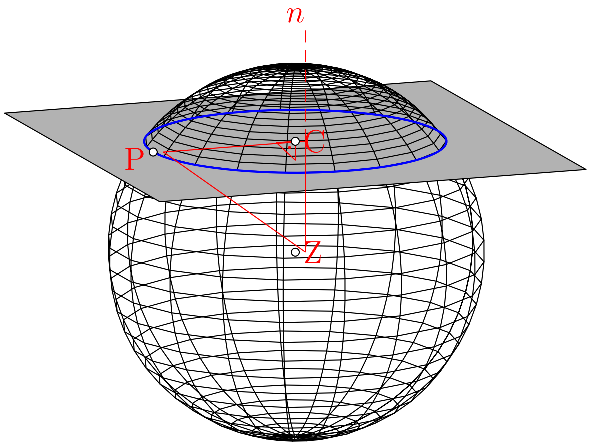
$(x+10)^2 - 100 + (y-3)^2 - 9 + (z-7)^2 - 49 - 931 = 0$

$(x+10)^2 + (y-3)^2 + (z-7)^2 = 1089 = 33^2$

On obtient ainsi le centre $\mathrm{Z}(-10\,;3\,;7)$ et le rayon $\mathrm{R} = 33$ de la sphère Σ.

b) Pour montrer que le plan π et la sphère Σ sont sécants, il suffit de montrer que la distance entre le centre Z de la sphère Σ et le plan π est inférieure au rayon R :

$\delta(\mathrm{Z}\,;\pi) = \dfrac{|2\cdot(-10)+3+2\cdot 7+66|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \dfrac{63}{3} = 21 < 33 = \mathrm{R}$



La normale n au plan π passant par le centre Z de la sphère Σ a pour équation :

$$(n) : \begin{cases} x = -10 + 2\,\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 7 + 2\,\lambda \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Son intersection avec le plan π donne le centre C du cercle :

$2\,(-10+2\,\lambda) + (3+\lambda) + 2\,(7+2\,\lambda) + 66 = 0$

$-20 + 4\,\lambda + 3 + \lambda + 14 + 4\,\lambda + 66 = 0$

$9\,\lambda + 63 = 0$

$\lambda = -7$

Les coordonnées du centre C du cercle valent donc $\begin{cases} x = -10 + 2\cdot(-7) = -24 \\ y = 3 + (-7) = -4 \\ z = 7 + 2\cdot(-7) = -7 \end{cases}$

Le centre du cercle est ainsi $\mathrm{C}(-24\,;-4\,;-7)$.

Le théorème de Pythagore permet d'obtenir facilement le rayon r du cercle :

$r = \|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{\mathrm{ZP}}\|^2 - \|\overrightarrow{\mathrm{ZC}}\|^2} = \sqrt{33^2 - \big((-14)^2 + (-7)^2 + (-14)^2\big)} = \sqrt{648} = 18\,\sqrt{2}$

c) Tout plan parallèle au plan π est de la forme $2\,x + y + 2\,z + d = 0\,.$

Pour être tangent à la sphère Σ, il faut que la distance entre ce plan et le centre Z de la sphère Σ soit égale au rayon R :

$$33 = \frac{|2 \cdot (-10) + 3 + 2 \cdot 7 + d|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|d-3|}{3}$$

Il en résulte $|d - 3| = 99$, c'est-à-dire $d - 3 = \pm 99$.

Les plans recherchés s'écrivent par conséquent :

$\pi_1 : 2\,x + y + 2\,z + 102 = 0$ et $\pi_2 : 2\,x + y + 2\,z - 96 = 0$