2004 — Problème 1

a) 1) La fonction f n'est pas définie si $x+4=0$, si bien que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-4\}$.

2)

		-4		0	
x	$-$	‖	$-$		$+$
x	$-$	‖	$-$		$+$
$x+4$	$-$	‖	$+$		$+$
f	$-$	‖	$+$		$+$

3) Puisque $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2}{x+4} = «\frac{16}{0}» = \infty$, $x=-4$ est une asymptote verticale.

La division polynomiale

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & & & x+4 \\ \cline{4-4} -x^2 & -\ 4x & & x-4 \\ \cline{1-3} & -\ 4x & & \\ & 4x & +\ 16 & \\ \cline{2-3} & & 16 & \end{array}$$

donne l'asymptote oblique $y = x-4$ et la fonction $\delta(x) = \frac{16}{x+4}$ dont le signe indique la position du graphe de f par rapport à l'asymptote oblique :

		-4	
16	$+$	‖	$+$
$x+4$	$-$	‖	$+$
δ	$-$	‖	$+$

4) $f'(x) = \frac{(x^2)'(x+4)-x^2(x+4)'}{(x+4)^2} = \frac{2x(x+4)-x^2\cdot 1}{(x+4)^2} = \frac{2x^2+8x-x^2}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x}{(x+4)^2} = \frac{x(x+8)}{(x+4)^2}$

		-8		-4		0	
x	$-$		$-$	‖	$-$		$+$
$x+8$	$-$		$+$	‖	$+$		$+$
$x+4$	$-$		$-$	‖	$+$		$+$
$x+4$	$-$		$-$	‖	$+$		$+$
f'	$+$		$-$	‖	$-$		$+$
	$\nearrow$		$\searrow$	‖	$\searrow$		$\nearrow$

5) $f(-8) = \frac{(-8)^2}{-8+4} = \frac{64}{-4} = -16$; le point $(-8\,;-16)$ est un maximum.

$f(0) = \frac{0^2}{0+4} = 0$; le point $(0\,;0)$ est un minimum.

b) Calcul des points d'intersection des graphes de f et de g :

$\frac{x^2}{x+4} = -x^2-3x$ implique que $0 = \frac{x^2}{x+4}+x^2+3x = \frac{x^2+(x^2+3x)(x+4)}{x+4} = \frac{x^2+x^3+4x^2+3x^2+12x}{x+4} = \frac{x^3+8x^2+12x}{x+4} = \frac{x(x^2+8x+12)}{x+4} = \frac{x(x+2)(x+6)}{x+4}$ d'où l'on tire $x=-6$ ou $x=-2$ ou $x=0$.

Calcul de l'aire $\mathrm{A}+\mathrm{B}$:

$$\int_{-2}^{0} -x^2-3x\,dx = -\int_{-2}^{0} x^2\,dx - 3\int_{-2}^{0} x\,dx = -\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2\,\Big|_{-2}^{0} =$$

$$\left(-\tfrac{1}{3}0^3 - \tfrac{3}{2}0^2\right) - \left(-\tfrac{1}{3}(-2)^3 - \tfrac{3}{2}(-2)^2\right) = \tfrac{10}{3}$$

Calcul de l'aire A :

Le calcul de la division polynomiale en a3) donne l'égalité $x^2 = (x+4)(x-4)+16$, d'où l'on déduit, en divisant par $x+4$, l'égalité $\frac{x^2}{x+4} = x - 4 + \frac{16}{x+4}$.

$$\int_{-2}^{0} \frac{x^2}{x+4}\,dx = \int_{-2}^{0} x - 4 + \frac{16}{x+4}\,dx = \int_{-2}^{0} x\,dx - \int_{-2}^{0} 4\,dx + 16\int_{-2}^{0} \frac{1}{x+4}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 16\ln(|x+4|)\,\Big|_{-2}^{0} = (0 - 0 + 16\ln(4)) - (2 - (-8) + 16\ln(2)) =$$

$$16\ln(2^2) - 10 - 16\ln(2) = 32\ln(2) - 10 - 16\ln(2) = 16\ln(2) - 10$$

En conclusion, l'aire recherchée vaut : $\frac{10}{3} - (16\ln(2) - 10) = \frac{40}{3} - 16\ln(2) = 2{,}24$