7.5

1) $\varphi_a(1) = 1 = 1 \cdot 1$

$\varphi_a(x) = a = a \cdot 1$

$\varphi_a(x^2) = a^2 = a^2 \cdot 1$

$\varphi_a(x^3) = a^3 = a^3 \cdot 1$

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}$

2) $\mathrm{Ker}(\varphi_a) = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(a) = 0\}$
$\qquad = \big\{(x-a)\,(\alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\big\}$

En effet, un polynôme $p(x)$ admet a pour zéro si et seulement s'il est divisible par $x - a$.

Le théorème du rang donne :
$\dim\big(\mathrm{Im}(\varphi_a)\big) = \dim\big(\mathbb{R}_3[x]\big) - \dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi_a)\big) = 4 - 3 = 1$.
Par conséquent $\mathrm{Im}(\varphi_a) = \mathbb{R}$.