4.4 Résolvons l'équation vectorielle

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\,\alpha_1 + 3\,\alpha_2 + 13\,\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 5\,\alpha_3 = 0 \end{cases} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 5\,\alpha_2 + 15\,\alpha_3 = 0 \\ 2\,\alpha_2 + 6\,\alpha_3 = 0 \end{cases} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \frac{1}{5}\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \frac{1}{2}\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 3\,\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 3\,\alpha_3 = 0 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 3\,\alpha_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\,\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 3\,\alpha_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On constate que ce système possède la variable libre α_3 ; il possède donc une infinité de solutions :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2\,\alpha \\ \alpha_2 = -3\,\alpha \\ \alpha_3 = \alpha \end{cases}$$

Par exemple, si $\alpha = -1$, alors $\alpha_1 = 2 \neq 0$, $\alpha_2 = 3 \neq 0$ et $\alpha_3 = -1 \neq 0$.

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On constate ainsi que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont liés.