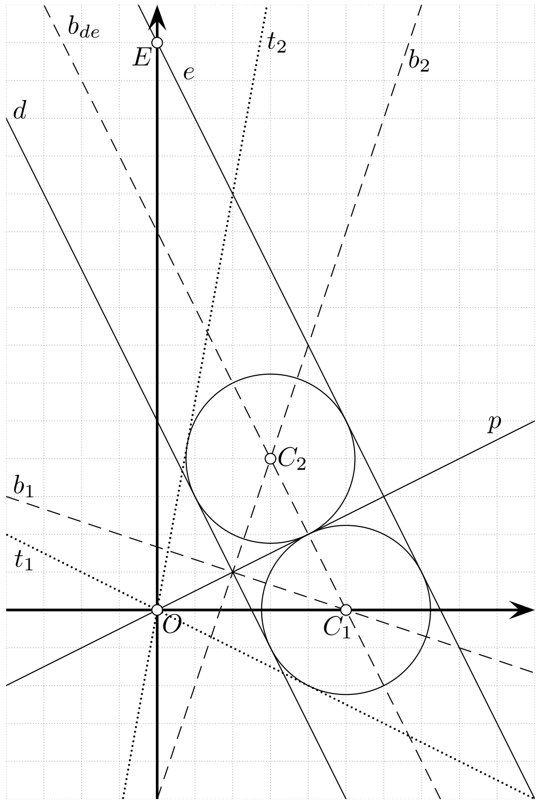
Chamblandes 2003 — Problème 2.1



a) Toute parallèle à la droite $d : 2x+y-5 = 0$ est de la forme $2x + y + c = 0$.
On sait de plus que la parallèle e recherchée passe par le point $E(0\,;15)$:
$2 \cdot 0 + 15 + c = 0$ donne $c = -15$
Ainsi $\boxed{e : 2x + y - 15 = 0}$

Pour calculer la distance qui sépare les droites d et e, il suffit de calculer la distance du point E à la droite d :
$\delta(E; d) = \frac{2\cdot0+15-5}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = \boxed{2\sqrt{5}}$

b) Les centres des cercles tangents à d et e se situent sur la bissectrice de ces droites :
$\frac{2x+y-5}{\sqrt{2^2+1^2}} = \pm\frac{2x+y-15}{\sqrt{2^2+1^2}} \quad \Big|\cdot\sqrt{5}$

1) $2x + y - 5 = 2x + y - 15$ implique $10 = 0$, ce qui est impossible ;
2) $2x + y - 5 = -(2x + y - 15)$ donne $4x + 2y - 20 = 0$ d'où l'équation recherchée : $\boxed{b_{de} : 2x + y - 10 = 0}$

Le rayon de ces cercles vaut la moitié de la distance qui sépare les droites d et e, à savoir $\boxed{r = \sqrt{5}}$

c) Puisque $d : 2x+y-5 = 0$, l'équation de la droite p est de la forme $p : x-2y+c = 0$.
On sait en outre qu'elle passe par le point $O(0, 0)$:
$0 - 2 \cdot 0 + c = 0$ délivre $c = 0$ d'où l'on conclut que $p : x - 2y = 0$.

Les centres des cercles tangents à d et p se trouvent sur les bissectrices de ces droites :
$\frac{2x+y-5}{\sqrt{2^2+1^2}} = \pm\frac{x-2y}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \quad \Big|\cdot\sqrt{5}$ donne $2x + y - 5 = \pm(x - 2y)$

1) $2x + y - 5 = x - 2y$ implique $b_1 : x + 3y - 5 = 0$
2) $2x + y - 5 = -x + 2y$ fournit $b_2 : 3x - y - 5 = 0$

Le centre C_1 du premier cercle se trouve à l'intersection des bissectrices b_{de} et b_1 :
$\begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$ qui se résout en $x = 5$ et $y = 0$, de sorte que $C_1(5\,;0)$.
Au vu de la question b), on sait que le rayon de ce cercle vaut $r = \sqrt{5}$, de sorte que l'on peut poser l'équation du premier cercle γ_1 : $\boxed{\gamma_1 : (x - 5)^2 + y^2 = 5}$

Le centre C_2 du second cercle figure à l'intersection des bissectrices b_{de} et b_2 :
$\begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ 3x - y - 5 = 0 \end{cases}$ d'où suivent les solutions $x = 3$ et $y = 4$, si bien que $C_2(3\,;4)$.

Comme précédemment, le rayon de ce cercle vaut $r = \sqrt{5}$, ce qui mène à l'équation du second cercle γ_2 : $\boxed{\gamma_2 : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5}$

d) Sachant que le point O n'appartient pas au cercle γ_1, on applique la formule correspondante :
$0 - 0 = m(0-5) \pm \sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$
$5m = \pm\sqrt{5(m^2+1)}$ (on élève au carré les deux membres de cette égalité)
$25m^2 = 5(m^2+1)$
$0 = 20m^2 - 5 = 5(4m^2-1) = 5(2m+1)(2m-1)$
On obtient les pentes des tangentes au cercle γ_1 passant par O : $m_1 = -\frac{1}{2}$ et $m_2 = \frac{1}{2}$.
On déduit les équations de ces tangentes du fait qu'elle passe par le point O :

1) $0 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + h$ donne $h = 0$, si bien que l'équation de cette tangente est : $y = -\frac{1}{2}x$ c'est-à-dire $\boxed{t_1 : x + 2y = 0}$
2) $0 = \frac{1}{2} \cdot 0 + h$ conduit à $h = 0$, d'où suit l'équation de cette seconde tangente : $y = \frac{1}{2}x$ qui n'est autre que la droite p : $\boxed{p : x - 2y = 0}$

On procède similairement pour trouver les tangentes au cercle γ_2 issues du point O :
$0 - 4 = m(0-3) \pm \sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$
$3m - 4 = \pm\sqrt{5(m^2+1)}$ (on élève au carré les deux membres de cette égalité)
$9m^2 - 24m + 16 = 5m^2 + 5$
$0 = 4m^2 - 24m + 11$ $\Delta = (-24)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 11 = 400 = 20^2$
$m_1 = \frac{-(-24)-20}{2\cdot 4} = \frac{1}{2}$ ou $m_2 = \frac{-(-24)+20}{2\cdot 4} = \frac{11}{2}$
Les pentes des tangentes étant connues, on recherche encore leurs équations :

1) $0 = \frac{1}{2} \cdot 0 + h$ implique que $h = 0$, d'où l'on tire l'équation $y = \frac{1}{2}x$ à savoir l'équation de la droite p : $\boxed{p : x - 2y = 0}$
2) $0 = \frac{11}{2} \cdot 0 + h$ délivre $h = 0$, ce qui nous mène à l'équation $y = \frac{11}{2}x$ que l'on écrit finalement $\boxed{t_2 : 11x - 2y = 0}$