7 Applications linéaires & Matrices

7.1 On considère l'application linéaire $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2\,y + 3\,z \\ 4\,x + 5\,y + 6\,z \\ 7\,x + 8\,y + 9\,z \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2) Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Que constate-t-on ?

3) On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Que peut-on dire des colonnes de A ?

On remarque que la matrice A caractérise l'application linéaire h relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Généralisons l'exercice 7.1.

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}_{\mathrm{E}} = (e_1\,;\dots;e_n)$ et $\mathcal{B}_{\mathrm{F}} = (f_1\,;\dots;f_p)$ des bases respectives de E et de F, et $h : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire.

Tout vecteur x de E est entièrement déterminé par ses composantes relativement à la base $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$:

$$x = x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_n \cdot e_n = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j \iff x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$ sont des éléments de F dont on peut déterminer les composantes dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{F}}$:

$$h(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}, \ldots, h(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}, \ldots, h(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix}.$$

On obtient alors :

$$h(x) = h\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot h(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \cdot f_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{ij}\,x_j \cdot f_i$$
$$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j \cdot f_i = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j\right) \cdot f_i$$

Si l'on pose $y = h(x)$ et que l'on écrit ses composantes dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{F}}$, on a :

$$y = h(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj}\, x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pj} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On appelle **matrice de l'application linéaire** h relativement aux bases $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$ et $\mathcal{B}_{\mathrm{F}}$ la matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})$ de type $p \times n$ dont la j-ième colonne est formée des composantes de $h(e_j)$ relativement à $\mathcal{B}_{\mathrm{F}}$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{a_{p1}}_{h(e_1)} & \ldots & \underbrace{a_{pj}}_{h(e_j)} & \ldots & \underbrace{a_{pn}}_{h(e_n)} \end{pmatrix}$$

7.2 Donner la matrice relativement aux bases canoniques des applications linéaires suivantes :

1) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2\,x + y - 3\,z \\ 3\,x + 2\,y - 4\,z \end{pmatrix}$.

2) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2\,x + y - 3\,z \end{pmatrix}$.

3) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ 2\,x + y \\ 3\,x + 2\,y \end{pmatrix}$.

7.3 Déterminer la matrice relativement aux bases canoniques des applications linéaires 4), 6), 8), 9), 10), 11), 12), 14) et 16) de l'exercice 6.2.

7.4 Donner la matrice relativement à la base $(x^2\,;x\,;1)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ des endomorphismes de l'exercice 6.3.

7.5 Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère $\varphi_a : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $\varphi_a\big(p(x)\big) = p(a)$.

1) Déterminer la matrice de φ_a relativement aux bases $(1\,;x\,;x^2\,;x^3)$ de $\mathbb{R}_3[x]$ et (1) de $\mathbb{R}$.

2) Déterminer le noyau et l'image de φ_a.

7.6 Soient $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, le noyau et l'image de l'application linéaire h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ telle que $h(a) = u$ et $h(b) = v$.

7.7 Soient E un espace vectoriel muni d'une base $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ et F un espace vectoriel muni d'une base $(f_1\,;f_2)$. Soient $a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ trois éléments de F et $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ un élément de E. Déterminer la matrice, le noyau et l'image de l'application linéaire h de E vers F telle que $h(e_1) = a$, $h(e_2) = b$ et $h(t) = c$.

7.8 Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ b & -1 & 0 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres réels.
Déterminer a et b pour que le rang de h soit 2 ; donner alors $\mathrm{Ker}(h)$.

Opérations sur les applications linéaires

Proposition *Soient f et g deux applications linéaires de* E *vers* F.

1) *$f + g$ est aussi une application linéaire de* E *vers* F.
2) *Si* E *et* F *sont de dimension finie avec pour bases respectives $\mathcal{B}_\mathrm{E}$ et $\mathcal{B}_\mathrm{F}$ et si* A *et* B *sont les matrices respectives de f et de g relativement à ces bases, alors* $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ *est la matrice de l'application linéaire $f + g$ relativement à ces bases.*

Preuve

1) Soient $u, v \in \mathrm{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) $$\begin{aligned}\big(f+g\big)(u+v) &= f(u+v) + g(u+v) = f(u) + f(v) + g(u) + g(v)\\ &= \big(f(u)+g(u)\big) + \big(f(v)+g(v)\big)\\ &= \big(f+g\big)(u) + \big(f+g\big)(v)\end{aligned}$$
   (b) $$\begin{aligned}\big(f+g\big)(\alpha\cdot u) &= f(\alpha\cdot u) + g(\alpha\cdot u) = \alpha\cdot f(u) + \alpha\cdot g(u)\\ &= \alpha\cdot\big(f(u)+g(u)\big) = \alpha\cdot\big(f+g\big)(u)\end{aligned}$$
2) $\big(f+g\big)(u) = f(u) + g(u) = \mathrm{A}\,u + \mathrm{B}\,u = (\mathrm{A}+\mathrm{B})\,u$

Proposition *Soient f une application linéaire de* E *vers* F *et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1) *$\lambda\, f$ est aussi une application linéaire de* E *vers* F.
2) *Si* E *et* F *sont de dimension finie avec pour bases respectives $\mathcal{B}_\mathrm{E}$ et $\mathcal{B}_\mathrm{F}$ et si* A *est la matrice de f relativement à ces bases, alors $\lambda\,\mathrm{A}$ est la matrice de l'application linéaire $\lambda\, f$ relativement à ces bases.*

7.9 Prouver la proposition précédente.

Proposition *Soient* E, F *et* G *des espaces vectoriels,* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *et* $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *des applications linéaires.*

1) $g \circ f$ *est aussi une application linéaire de* E *vers* G.
2) *Si* E, F *et* G *sont de dimension finie avec pour bases respectives* $\mathcal{B}_\mathrm{E}$, $\mathcal{B}_\mathrm{F}$ *et* $\mathcal{B}_\mathrm{G}$, *et si* A *et* B *sont les matrices respectives de* f *et de* g *relativement à ces bases, alors* BA *est la matrice de l'application linéaire* $g \circ f$ *relativement à ces bases.*

7.10 Prouver la proposition précédente.

Proposition *Soit* h *un isomorphisme de* E *vers* F.

1) h^{-1} *est aussi un isomorphisme de* F *vers* E.
2) *Si* E *et* F *sont de dimension finie avec pour bases respectives* $\mathcal{B}_\mathrm{E}$ *et* $\mathcal{B}_\mathrm{F}$ *et si* A *est la matrice de* h *relativement à ces bases, alors* A^{-1} *est la matrice de l'isomorphisme* h^{-1} *relativement à ces bases.*

Preuve

1) Ce résultat a déjà été démontré à l'exercice 6.13.
2) Soit B la matrice de h^{-1}.
   Comme $h^{-1} \circ h = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$, on a que $\mathrm{BA} = \mathrm{I}$.
   De même, $h \circ h^{-1} = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$ implique $\mathrm{AB} = \mathrm{I}$.
   En d'autres termes, $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$.

7.11 $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis de leur base canonique. On considère les applications linéaires suivantes définies par leur matrice :

$f : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad g : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad h : \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$i : \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad j : \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Déterminer la matrice, le noyau et l'image des applications linéaires suivantes :

1) $f \circ h$ 2) $f \circ j$ 3) $g \circ i$ 4) $(f + g) \circ h$

7.12 Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ donnés par les matrices :

$$\mathrm{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 14 & -4 & -4 \\ 7 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le noyau, l'image et le rang de f, g, $g \circ f$, $f \circ f$ et $g \circ g$.

7.13 Soit E un espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $(e_1 ; e_2 ; e_3)$. On définit un endomorphisme h de E par

$$h(e_1) = e_2 + e_3,\ h(e_2) = e_3 + e_1 \ \text{ et } \ h(e_3) = e_1 + e_2\,.$$

1) Montrer que h est un automorphisme.
2) Calculer $h^{-1}(e_1)$, $h^{-1}(e_2)$ et $h^{-1}(e_3)$.

7.14 Mêmes questions qu'à l'exercice 7.13 pour l'endomorphisme h défini par

$$h(e_1) = e_1,\ h(e_2) = e_1 + 3\,e_2 \ \text{ et } \ h(e_3) = e_1 + 3\,e_2 + e_3\,.$$

Changement de base

7.15 Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Si l'on veut déterminer les composantes du vecteur $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}\right)$, quel système d'équations doit-on résoudre ?
2) Soit P la matrice associée à ce système d'équations. Que remarque-t-on à propos des colonnes de la matrice P ? Comment l'application linéaire associée à la matrice P transforme-t-elle la base $\mathcal{B}$?
   On appelle P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
3) Justifier que la matrice P est inversible.
4) À l'aide de la méthode de l'exercice 2.10, résoudre le système d'équations et répondre à la question 1).

Généralisons l'exercice 7.15.

Soient $\mathcal{B} = (e_1 ; \ldots ; e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1 ; \ldots ; e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n. Les vecteurs e'_i s'écrivent de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs e_i :

$$\begin{array}{ccccccccc}
e'_1 & = & p_{11} \cdot e_1 & + & p_{21} \cdot e_2 & + \ldots + & p_{n1} \cdot e_n \\
e'_2 & = & p_{12} \cdot e_1 & + & p_{22} \cdot e_2 & + \ldots + & p_{n2} \cdot e_n \\
\vdots & = & \vdots & + & \vdots & + \ldots + & \vdots \\
e'_n & = & p_{1n} \cdot e_1 & + & p_{2n} \cdot e_2 & + \ldots + & p_{nn} \cdot e_n
\end{array}$$

La **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice P dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ de l'application linéaire $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie par $p(e_i) = e'_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

Proposition *Si x est un élément de* E, X *la matrice-colonne formée des composantes de x relativement à $\mathcal{B}$ et* X′ *la matrice-colonne formée des composantes de x relativement à $\mathcal{B}'$, alors* $\boxed{\mathrm{X} = \mathrm{PX}'}$, *c'est-à-dire*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Preuve $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i \cdot e'_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ji} \cdot e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ji}\, x'_i \right) \cdot e_j$

On conclut en remarquant que la j-ième ligne de la matrice PX' vaut $\sum_{i=1}^{n} p_{ji}\, x'_i$.

Proposition *La matrice de passage* P *de la base* $\mathcal{B}$ *à la base* $\mathcal{B}'$ *est inversible et son inverse est la matrice de passage de la base* $\mathcal{B}'$ *à la base* $\mathcal{B}$.

Preuve Puisque les colonnes de la matrice P sont formées des vecteurs e'_i, l'espace qu'elles engendrent est E. En d'autres termes, la matrice P est de rang n. Elle est donc inversible, d'après le théorème de la page 2.6.

Comme la matrice P correspond à l'application linéaire $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie par $p(e_i) = e'_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, son inverse P^{-1} correspond à l'application linéaire $p^{-1} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie par $p^{-1}(e'_i) = e_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

7.16 Soient les deux bases $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathbb{R}^2$.

1) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
2) Déterminer la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
3) Vérifier que les matrices P et Q sont inverses.
4) Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$, déterminer les composantes de x dans la base $\mathcal{B}'$.
5) Si x s'écrit $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ dans la base $\mathcal{B}'$, vérifier les égalités suivantes :
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ et $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \mathrm{Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

La matrice d'une application linéaire est liée au choix des bases dans l'espace de départ et dans l'espace d'arrivée. Voici comment la représentation matricielle change si l'on choisit une autre base :

Théorème *Soient* A *la matrice d'un endomorphisme* h *de* E *relativement à la base* $\mathcal{B}$, A' *sa matrice relativement à la base* $\mathcal{B}'$ *et* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$. *Alors* $\boxed{\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}}$.

Preuve Soit E'_i la matrice-colonne formée des composantes de e'_i relativement à la base $\mathcal{B}'$. $\mathrm{A}'\mathrm{E}'_i$ donne la i-ième colonne de la matrice A', à savoir la matrice-colonne formée des composantes de $h(e'_i)$ relativement à la base $\mathcal{B}'$.

Il suffit de montrer que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{APE}'_i$ donne également la matrice-colonne formée des composantes de $h(e'_i)$ relativement à la base $\mathcal{B}'$.

PE'_i fournit la matrice-colonne formée des composantes de e'_i relativement à la base $\mathcal{B}$.

APE'_i constitue la matrice-colonne formée des composantes de $h(e'_i)$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

Enfin $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{APE}'_i$ donne la matrice-colonne formée des composantes de $h(e'_i)$ relativement à la base $\mathcal{B}'$.

7.17 Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $h\big((x\,;y)\big) = (4\,x - 2\,y\,;2\,x + y)\,.$
On considère les mêmes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ qu'à l'exercice 7.16.

1) Quelle est la matrice A associée à l'endomorphisme h relativement à la base $\mathcal{B}$?
2) (a) Que vaut $h\big((1\,;1)\big)$? Quelles sont les composantes de $h\big((1\,;1)\big)$ dans la base $\mathcal{B}'$?
   (b) Que vaut $h\big((-1\,;0)\big)$? Quelles sont les composantes de $h\big((-1\,;0)\big)$ dans la base $\mathcal{B}'$?
   (c) Quelle est la matrice A' associée à l'endomorphisme h relativement à la base $\mathcal{B}'$?
3) Si P désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, vérifier l'égalité $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\,.$

7.18 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(e_1\,;e_2)$, on considère les vecteurs :

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base $(e_1\,;e_2)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Donner la matrice de h relativement aux bases suivantes :

1) $(e_2\,;e_1)$ 2) $(e_1 + e_2\,;3\,e_2)$ 3) $(u\,;v)$ 4) $(s\,;t)$

7.19 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(e_1\,;e_2\,;e_3)$, on considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ est $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Donner la matrice de h relativement aux bases suivantes :

1) $(e_3\,;e_2\,;e_1)$ 2) $(u\,;v\,;e_1)$

7.20 On considère la base $\mathcal{B} = (1\,;x\,;x^2\,;x^3)$ de $\mathbb{R}_3[x]$ ainsi que l'application $h : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ qui à tout polynôme de degré $\leqslant 3$ fait correspondre sa dérivée.

1) Vérifier que h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.
2) Écrire la matrice A de h relativement à $\mathcal{B}$.
3) Déterminer $\mathrm{Ker}(h)$ et $\mathrm{Im}(h)$.
4) Montrer que $\mathcal{B}' = \big(1+x\,;x\,(x-2)\,;x\,(x-1)\,;x\,(x-1)\,(x-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
5) Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice de h relativement à la base $\mathcal{B}'$.

Réponses

7.1

1) $h\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$, $h\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$ et $h\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2\,y+3\,z\\4\,x+5\,y+6\,z\\7\,x+8\,y+9\,z\end{pmatrix} = h\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$

3) $\left(\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\\\underbrace{7}_{h(e_1)}&\underbrace{8}_{h(e_2)}&\underbrace{9}_{h(e_3)}\end{matrix}\right)$

7.2

1) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&-3\\3&2&-4\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&-3\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\3&2\end{pmatrix}$

7.3

4) $\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&-1\end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ 10) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$ 11) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$ 14) $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ 16) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&0&2\end{pmatrix}$

7.4

1) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\2&0&0\end{pmatrix}$

7.5

1) $\begin{pmatrix}1&a&a^2&a^3\end{pmatrix}$ 2) $\mathrm{Ker}(\varphi_a) = \big\{(x-a)\,(\alpha\,x^2+\beta\,x+\gamma) : \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\big\}$
$\mathrm{Im}(\varphi_a) = \mathbb{R}$

7.6 $\quad \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Ker}(h) = \{0\} \qquad \mathrm{Im}(h) = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x-2\,y-z=0\big\}$

7.7 $\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Ker}(h) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \mathrm{Im}(h) = \mathrm{F}$

7.8 $\quad a = 1$ et b quelconque $\qquad \mathrm{Ker}(h) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

7.11

1) $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Ker}(f \circ h) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \mathrm{Im}(f \circ h) = \Delta\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}\right)$

2) $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Ker}(f \circ j) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \qquad \mathrm{Im}(f \circ j) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

3) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Ker}(g \circ i) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \mathrm{Im}(g \circ i) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$

4) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Ker}\big((f+g) \circ h\big) = \{0\} \qquad \mathrm{Im}\big((f+g) \circ h\big) = \mathbb{R}^2$

7.12 $\quad \mathrm{Ker}(f) = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : 2\,x - y = 0\big\} = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\mathrm{Im}(f) = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ et } y + z = 0\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad \mathrm{rg}(f) = 1$

$\mathrm{Ker}(g) = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : 7\,x - 2\,y - 2\,z = 0\big\} = \Pi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$

$\mathrm{Im}(g) = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : 2\,x - y = 0 \text{ et } x - z = 0\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \mathrm{rg}(g) = 1$

$\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathbb{R}^3 \qquad \mathrm{Im}(g \circ f) = \{0\} \quad \mathrm{rg}(g \circ f) = 0$

$f \circ f = f$

$g \circ g = g$

7.13 $\quad$ 2) $h^{-1}(e_1) = -\frac{1}{2}\,e_1 + \frac{1}{2}\,e_2 + \frac{1}{2}\,e_3 \qquad h^{-1}(e_2) = \frac{1}{2}\,e_1 - \frac{1}{2}\,e_2 + \frac{1}{2}\,e_3$

$h^{-1}(e_3) = \frac{1}{2}\,e_1 + \frac{1}{2}\,e_2 - \frac{1}{2}\,e_3$

7.14 $\quad$ 2) $h^{-1}(e_1) = e_1 \qquad h^{-1}(e_2) = -\frac{1}{3}\,e_1 + \frac{1}{3}\,e_2 \qquad h^{-1}(e_3) = -e_2 + e_3$

7.15 $\quad$ 1) $\begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_1 + 2\,\alpha_2 = 4 \\ \alpha_1 + 3\,\alpha_2 - 4\,\alpha_3 = 5 \end{cases} \qquad$ 2) $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad p(e_i) = e'_i$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$

7.16 1) $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

7.17 1) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

7.18 1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} -7 & -\frac{20}{3} \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$

7.19 1) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

7.20 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\mathrm{Ker}(h) = \mathbb{R}_0[x]$ $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}_2[x]$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$