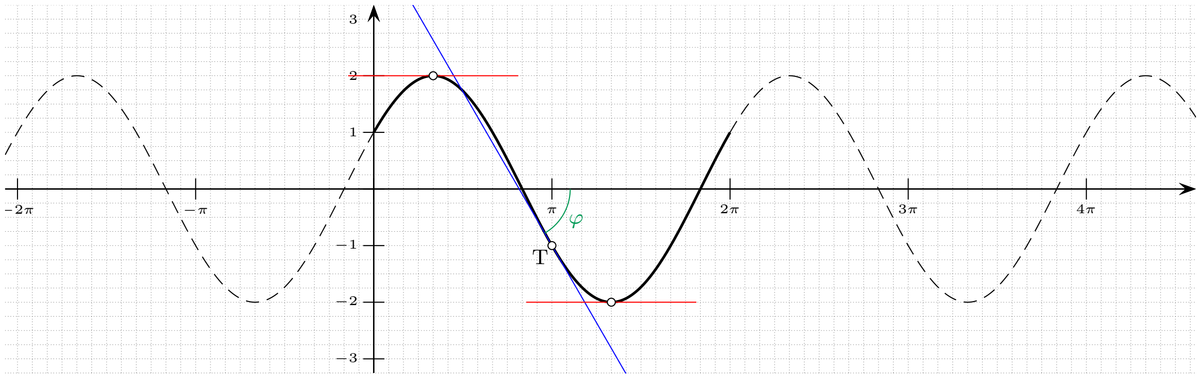
Chamblandes 2012 — Problème 3



a) La tangente au point d'abscisse x_0 est horizontale, si sa pente $f'(x_0)$ est nulle.

Commençons donc par calculer la dérivée de f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{3}\,\sin(x) + \cos(x)\right)' \\ &= \sqrt{3}\left(\sin(x)\right)' + \left(\cos(x)\right)' \\ &= \sqrt{3}\,\cos(x) - \sin(x) \end{aligned}$$

Il nous faut à présent trouver les zéros de la dérivée.

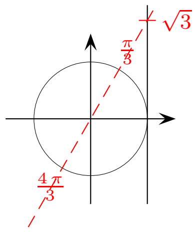
1re méthode

L'indication fait allusion à la formule $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et suggère donc de diviser l'équation

$$\sqrt{3}\,\cos(x) - \sin(x) = 0$$

par $\cos(x)$:

$$\sqrt{3} - \underbrace{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}_{\tan(x)} = 0 = \sqrt{3} - \tan(x)$$



Il en résulte $\tan(x) = \sqrt{3}$, puis $x = \frac{\pi}{3} + k\,\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Les solutions contenues dans l'intervalle $[0\,;2\,\pi]$ sont $x_1 = \frac{\pi}{3}$ et $x_2 = \frac{4\,\pi}{3}$.

2e méthode

En posant $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$, l'équation $\sqrt{3}\,\cos(x) - \sin(x) = 0$ s'écrit $\sqrt{3}\,a - b = 0$.
Par ailleurs, l'égalité fondamentale $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donne $a^2 + b^2 = 1$.
Il s'agit dès lors de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,a - b = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

La première équation donne $b = \sqrt{3}\,a$ que l'on substitue dans la seconde :

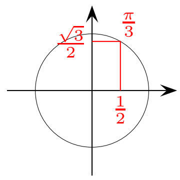
$$a^2 + \left(\sqrt{3}\,a\right)^2 = 1$$

$$a^2 + 3\,a^2 = 4\,a^2 = 1$$

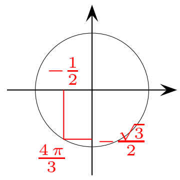
$$4\,a^2 - 1 = (2\,a - 1)\,(2\,a + 1) = 0$$

On obtient ainsi deux solutions :

(a) $\cos(x_1) = a_1 = \frac{1}{2}$
$\sin(x_1) = b_1 = \sqrt{3}\,a_1 = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi \quad$ où $k \in \mathbb{Z}$



(b) $\cos(x_2) = a_2 = -\frac{1}{2}$
$\sin(x_2) = b_2 = \sqrt{3}\,a_2 = \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\,k\,\pi \quad$ où $k \in \mathbb{Z}$



Calculons enfin les coordonnées verticales des points recherchés :

(a) $x_1 = \frac{\pi}{3} \qquad y_1 = f(x_1) = \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

(b) $x_2 = \frac{4\pi}{3} \qquad y_2 = f(x_2) = \sqrt{3}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$

Les deux points du graphe où la tangente est horizontale sont donc $\left(\frac{\pi}{3}\,;2\right)$ et $\left(\frac{4\pi}{3}\,;-2\right)$.

b) L'équation de la tangente t en $x_0 = \pi$ est donnée par la formule $y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$.

$f(x_0) = f(\pi) = \sqrt{3}\,\sin(\pi) + \cos(\pi) = \sqrt{3} \cdot 0 + (-1) = -1 \qquad$ donc $\mathrm{T}(\pi\,;-1)$
$f'(x_0) = f'(\pi) = \sqrt{3}\,\cos(\pi) - \sin(\pi) = \sqrt{3} \cdot (-1) - 0 = -\sqrt{3}$

L'équation de la tangente t s'écrit par conséquent :
$y = -\sqrt{3}\,(x - \pi) - 1 \qquad$ ou $\qquad y = -\sqrt{3}\,x + \sqrt{3}\,\pi - 1$

L'angle aigu φ entre la tangente t de pente $m_1 = -\sqrt{3}$ et l'axe des x de pente $m_2 = 0$ s'obtient au moyen de la formule :

$$\tan(\varphi) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1\,m_2}\right| = \left|\frac{0 - (-\sqrt{3})}{1 + (-\sqrt{3}) \cdot 0}\right| = \sqrt{3}$$

On conclut que $\varphi = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$.