1.7 1) L'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ vaut $a_{ij}+b_{ij}$.

Par conséquent, l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $\lambda\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ vaut $\lambda\,(a_{ij}+b_{ij})$.

Mais, comme dans $\mathbb{R}$ la multiplication est distributive par rapport à l'addition, on a $\lambda\,(a_{ij}+b_{ij})=\lambda\,a_{ij}+\lambda\,b_{ij}$.

Or cette dernière expression est la somme de l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $\lambda\,\mathrm{A}$ avec l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $\lambda\,\mathrm{B}$.

On a donc vérifié l'égalité $\lambda\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\lambda\,\mathrm{A}+\lambda\,\mathrm{B}$.

2) L'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $(\lambda+\mu)\,\mathrm{A}$ vaut $(\lambda+\mu)\,a_{ij}$.

En vertu de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$, on a $(\lambda+\mu)\,a_{ij}=\lambda\,a_{ij}+\mu\,a_{ij}$.

En d'autres termes, on a affaire à la somme de l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $\lambda\,\mathrm{A}$ avec l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $\mu\,\mathrm{A}$.

On constate bel et bien l'identité $(\lambda+\mu)\,\mathrm{A}=\lambda\,\mathrm{A}+\mu\,\mathrm{A}$.

3) L'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $(\lambda\,\mu)\,\mathrm{A}$ vaut $(\lambda\,\mu)\,a_{ij}$.

Or $(\lambda\,\mu)\,a_{ij}=\lambda\,(\mu\,a_{ij})$, puisque la multiplication des nombres réels est associative.

Mais $\lambda\,(\mu\,a_{ij})$ n'est autre que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $\mu\,\mathrm{A}$ multiplié par λ. C'est donc l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $\lambda\,(\mu\,\mathrm{A})$.

On a ainsi prouvé l'égalité $(\lambda\,\mu)\,\mathrm{A}=\lambda\,(\mu\,\mathrm{A})$.

4) L'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $1\,\mathrm{A}$ vaut $1\cdot a_{ij}=a_{ij}$. Il coïncide donc avec l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice A.

L'égalité $1\,\mathrm{A}=\mathrm{A}$ est par conséquent vérifiée.

5) L'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $0\,\mathrm{A}$ vaut $0\cdot a_{ij}=0$.

C'est pourquoi $0\,\mathrm{A}=0$.

6) L'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $\lambda\,0$ vaut $\lambda\cdot 0=0$.

On constate dès lors l'identité $\lambda\,0=0$.