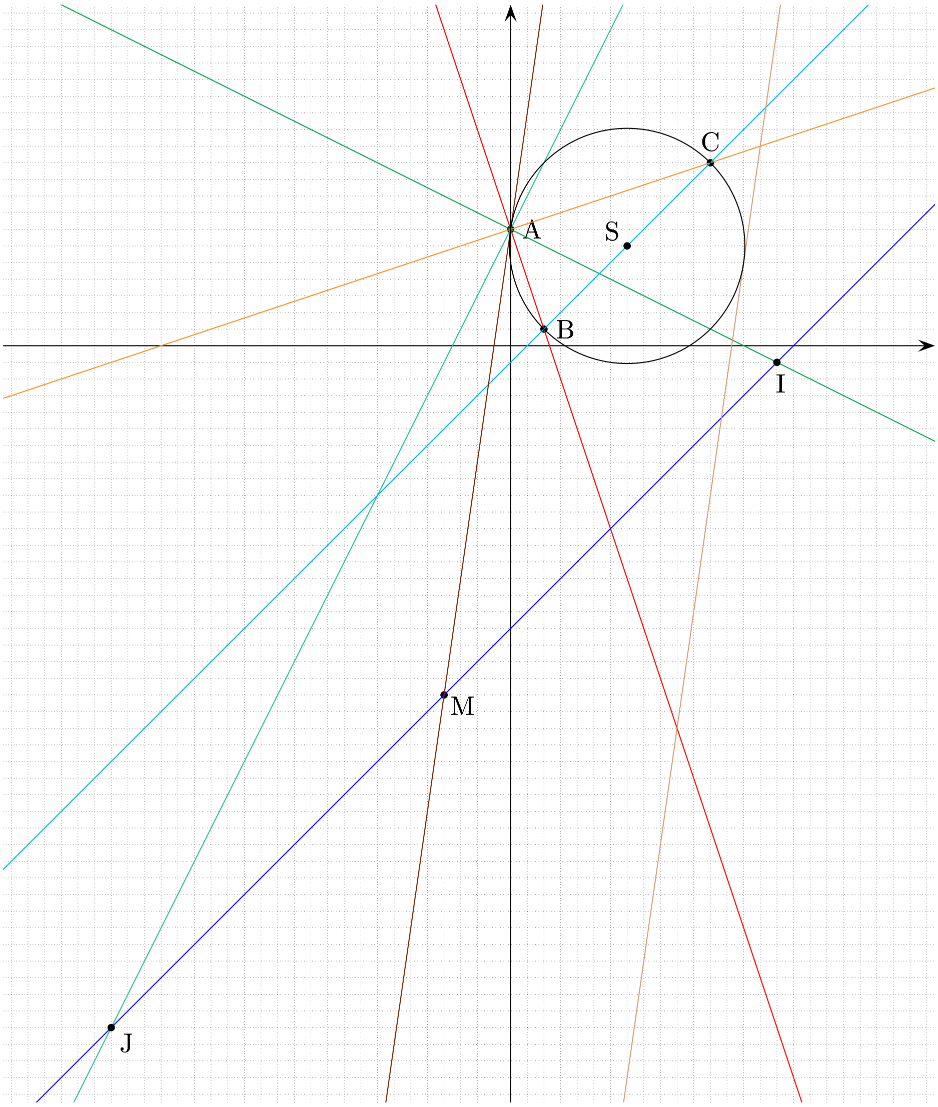
Chamblandes 2012 — Problème 6



a) Comme $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, la droite AB est de la forme $3\,x+y+c=0$.

Les coordonnées du point $A(0\,;7)$ doivent vérifier l'équation de la droite AB :
$3 \cdot 0 + 7 + c = 0$ implique $c = -7$.

On a bien trouvé $\text{AB} : 3\,x + y - 7 = 0$ ou encore $\text{AB} : 3\,x + y = 7$.

b) Commençons par déterminer l'équation de la droite AC.

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 12-0 \\ 11-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, si bien que la droite AC s'écrit $x - 3\,y + c = 0$.

Vu qu'elle doit passer par le point $A(0\,;7)$, on doit avoir $0 - 3 \cdot 7 + c = 0$, d'où $c = 21$.

Il en résulte l'équation $\text{AC} : x - 3\,y + 21 = 0$.

Il reste encore à justifier la perpendicularité des droites AB et AC.

1re méthode

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 12 + (-6) \cdot 4 = 0$

Puisque leur produit scalaire est nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont bien perpendiculaires.

2e méthode

La droite AB a pour pente $m_1 = -3$, car $3\,x + y = 7 \iff y = -3\,x + 7\,.$

La droite AC a pour pente $m_2 = \frac{1}{3}$, vu que $x - 3\,y + 21 = 0 \iff y = \frac{1}{3}\,x + 7\,.$

L'égalité $m_1\,m_2 = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$ assure la perpendicularité des droites AB et AC.

c) Les bissectrices b_1 et b_2 sont données par la formule

$$\frac{3\,x + y - 7}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \pm \frac{x - 3\,y + 21}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}}$$

$$\frac{3\,x + y - 7}{\sqrt{10}} = \pm \frac{x - 3\,y + 21}{\sqrt{10}}$$

$$3\,x + y - 7 = \pm(x - 3\,y + 21)$$

(b_1) $3\,x + y - 7 = x - 3\,y + 21$

$2\,x + 4\,y - 28 = 0$

$x + 2\,y - 14 = 0$

(b_2) $3\,x + y - 7 = -(x - 3\,y + 21)$

$4\,x - 2\,y + 14 = 0$

$2\,x - y + 7 = 0$

d) La droite $p : x - y - 17 = 0$ admet pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 12 - 2 \\ 11 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, les droites p et BC sont bien parallèles.

Déterminons l'équation de la droite BC, dont on sait déjà qu'elle s'écrit $x - y + c = 0$.
Elle doit en outre passer par le point $\mathrm{B}(2\,;1)$, donc $2 - 1 + c = 0$ implique $c = -1$.
On a ainsi obtenu BC : $x - y - 1 = 0$.

Il nous reste à présent à calculer les distances requises.

$\delta(p\,;\mathrm{BC}) = \delta(\mathrm{B}\,;p) = \frac{|2-1-17|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{16}{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$

$\delta(\mathrm{A}\,;\mathrm{BC}) = \frac{|0-7-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

On vérifie bien que $\delta(p\,;\mathrm{BC}) = 8\sqrt{2} = 2 \cdot 4\sqrt{2} = 2\,\delta(\mathrm{A}\,;\mathrm{BC})$.

e) **Calcul du point** I

$$\begin{cases} x + 2\,y - 14 = 0 \\ x - \,y - 17 = 0 \end{cases} \quad \left|\begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{array}\right| \begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$3\,x - 48 = 0$ donne $x = 16$

$3\,y + 3 = 0$ fournit $y = -1$

D'où $\mathrm{I}(16\,;-1)$.

Calcul du point J

$$\begin{cases} 2\,x - y + 7 = 0 \\ \,x - y - 17 = 0 \end{cases} \quad \left|\begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot(-1) \end{array}\right| \begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot(-2) \end{array}$$

$x + 24 = 0$ implique $x = -24$

$y + 41 = 0$ délivre $y = -41$

D'où $\mathrm{J}(-24\,;-41)$.

Nous pouvons à présent calculer l'aire du triangle AIJ.

1^re^ méthode

L'aire du triangle AIJ est donnée, au signe près, par la moitié du déterminant des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \begin{pmatrix} 16-0 \\ -1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \begin{pmatrix} -24-0 \\ -41-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -48 \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{A} = \left| \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 16 & -24 \\ -8 & -48 \end{vmatrix} \right| = \left| \tfrac{1}{2} \Big(16 \cdot (-48) - (-8) \cdot (-24) \Big) \right| = 480$$

2^e^ méthode

L'aire du triangle vaut la moitié du produit de la base IJ et de la hauteur issue de A.

base : $\|\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\| = \left\| \begin{pmatrix} -24-16 \\ -41-(-1) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -40 \\ -40 \end{pmatrix} \right\| = \left\| -40 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = |-40|\,\sqrt{1^2+1^2} = 40\,\sqrt{2}\,.$

hauteur : $\delta(\mathrm{A}\,;\mathrm{IJ}) = \delta(\mathrm{A}\,;p) = \frac{|0-7-17|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{24}{\sqrt{2}} = \frac{24\,\sqrt{2}}{2} = 12\,\sqrt{2}$

$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot 40\,\sqrt{2} \cdot 12\,\sqrt{2} = 480$

3^e^ méthode

Étant donné que les bissectrices b_1 et b_2 se coupent perpendiculairement au point A, le triangle AIJ est rectangle en A. Son aire vaut dès lors la moitié du produit de ses cathètes :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}\,\|\overrightarrow{\mathrm{AI}}\|\,\|\overrightarrow{\mathrm{AJ}}\| = \tfrac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} -24 \\ -48 \end{pmatrix} \right\| = \tfrac{1}{2} \left\| 8 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \left\| -24 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \tfrac{1}{2}\,|8|\,\sqrt{2^2+(-1)^2}\,|-24|\,\sqrt{1^2+2^2} = \tfrac{1}{2} \cdot 8\,\sqrt{5} \cdot 24\,\sqrt{5} = 480 \end{aligned}$$