

4.16 Si x désigne le nombre de pièces d'or, le problème revient à résoudre le système de congruences
$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{17} \\ x \equiv 4 \pmod{11} \\ x \equiv 5 \pmod{6} \end{cases}.$$

$$M = 17 \cdot 11 \cdot 6 = 1122$$

$$M_1 = \frac{1122}{17} = 66$$

$$M_2 = \frac{1122}{11} = 102$$

$$M_3 = \frac{1122}{6} = 187$$

$$66x_1 \equiv 1 \pmod{17}$$

$$-2x_1 \equiv 1 \pmod{17} \quad \text{car } 66 \equiv 68 - 2 \equiv 17 \cdot 4 - 2 \equiv -2 \pmod{17}$$

$$-16x_1 \equiv 8 \pmod{17}$$

$$x_1 \equiv 8 \pmod{17} \quad \text{car } -16 \equiv -16 + 17 \equiv 1 \pmod{17}$$

$$102x_2 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$3x_2 \equiv 1 \pmod{11} \quad \text{car } 102 \equiv 99 + 3 \equiv 3 \pmod{11}$$

$$12x_2 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$x_2 \equiv 4 \pmod{11} \quad \text{car } 12 \equiv 11 + 1 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$187x_3 \equiv 1 \pmod{6}$$

$$x_3 \equiv 1 \pmod{6} \quad \text{car } 187 \equiv 186 + 1 \equiv 6 \cdot 31 + 1 \equiv 1 \pmod{6}$$

Le théorème chinois des restes fournit la solution du système de congruences :

$$x \equiv 3 \cdot 66 \cdot 8 + 4 \cdot 102 \cdot 4 + 5 \cdot 187 \cdot 1$$

$$\equiv 4151$$

$$\equiv 785 \pmod{1122}$$

On conclut que le cuisinier peut espérer au minimum 785 pièces d'or.