6 Applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels réels. On appelle **application linéaire** ou **homomorphisme** de E vers F toute application $h : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ telle que

1) $h(u + v) = h(u) + h(v)$ pour tous $u, v \in \mathrm{E}$;
2) $h(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot h(u)$ pour tout $u \in \mathrm{E}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

En d'autres termes, une application est linéaire si elle conserve les deux opérations de base d'un espace vectoriel : l'addition vectorielle et la multiplication par un scalaire.

Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E vers lui-même.

Un **isomorphisme** de E vers F est une application linéaire bijective de E vers F. On dit que deux espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E vers F.

Un isomorphisme de E vers E est appelé un **automorphisme**.

Une application linéaire de E vers $\mathbb{R}$ s'appelle une **forme linéaire**.

6.1 Soient E et F deux espaces vectoriels réels et h une application linéaire de E vers F. Montrer les propriétés suivantes :

1) $h(0) = 0$
2) $h(-u) = -h(u)$
3) $h(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot h(u) + \beta \cdot h(v)$
4) $h(\alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_n \cdot u_n) = \alpha_1 \cdot h(u_1) + \ldots + \alpha_n \cdot h(u_n)$

6.2 Les applications h, de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$, définies de la façon suivante, sont-elles linéaires ?

1) $h\big((x\,;y)\big) = x + y$
2) $h\big((x\,;y)\big) = 2\,x - y$
3) $h\big((x\,;y)\big) = x\,y$
4) $h\big((x\,;y)\big) = (2\,x - y\,;x)$
5) $h\big((x\,;y)\big) = (x + 1\,;y)$
6) $h\big((x\,;y)\big) = (x - y\,;0)$
7) $h\big((x\,;y)\big) = \big(0\,;|y|\big)$
8) $h\big((x\,;y)\big) = (x\,;y\,;x - y)$
9) $h\big((x\,;y\,;z)\big) = (x\,;y)$
10) $h\big((x\,;y\,;z)\big) = (x + 2\,y\,;z - 2\,y)$
11) $h\big((x\,;y\,;z)\big) = (z\,;y\,;x)$
12) $h\big((x\,;y\,;z)\big) = (0\,;x\,;2\,x)$
13) $h\big((x\,;y)\big) = (x^2\,;x + y)$
14) $h\big((x\,;y)\big) = (x - y\,;y - x)$
15) $h\big((x\,;y)\big) = \big(\sin(x)\,;y\big)$
16) $h\big((x\,;y\,;z)\big) = (x - z\,;2\,z - 2\,x)$

Remarque : une application $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est linéaire si et seulement si chaque composante de $h(x_1\,;\ldots\,;x_n)$ dans $\mathbb{R}^p$ est un polynôme homogène de degre 1 en $x_1, \ldots, x_p$.

6.3 Les applications h définies de la façon suivante sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}_2[x]$?

1) $h(a\,x^2 + b\,x + c) = a\,x^2$
2) $h(a\,x^2 + b\,x + c) = c\,x^2 + b\,x + a$
3) $h(a\,x^2 + b\,x + c) = x\,(2\,a\,x + b) + 2\,a$

6.4 Les applications h de $\mathcal{D}_{[a;b]}$ vers $\mathcal{F}_{[a;b]}$ définies de la façon suivante, sont-elles linéaires ?

1) $h(f) = f'$
2) $h(f) = 2\,f' - 3\,f$
3) $h(f) = f' - f^2$
4) $h(f) = g$ où g est définie par $g(x) = f(a)$
5) $h(f) = g$ où g est définie par $g(x) = f(b) + 1$
6) $h(f) = g$ où g est définie par $g(x) = e^{f(x)}$
7) $h(f) = g$ où g est définie par $g(x) = f(x)\,e^x$

6.5 Soient E et F deux espaces vectoriels réels et $\mathcal{B} = (e_1\,;\ldots\,;e_n)$ une base de E. Montrer que, quels que soient $f_1, \ldots, f_n \in$ F, il existe une unique application linéaire h de E vers F telle que $h(e_i) = f_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

En d'autres termes, une application linéaire de E vers F est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base de E.

Noyau et image d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels et $h : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire.

Le **noyau** de h est l'ensemble $\mathrm{Ker}(h) = \{u \in \mathrm{E} : h(u) = 0\}$.

L'**image** de h est l'ensemble $\mathrm{Im}(h) = \{v \in \mathrm{F} : \text{il existe } u \in \mathrm{E} \text{ avec } h(u) = v\}$.

6.6 Soient E et F deux espaces vectoriels et $h : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(h)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2) Montrer que $\mathrm{Im}(h)$ est un sous-espace vectoriel de F.

$\dim\big(\mathrm{Im}(h)\big)$ s'appelle le **rang** d'une application linéaire h et se note $\mathrm{rg}(h)$.

6.7 Soient E et F deux espaces vectoriels et $h : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire. Montrer que h est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(h) = \{0\}$.

Rappel : une application h est dite **injective** si $h(x) = h(y)$ implique $x = y$.

6.8 Soient E et F deux espaces vectoriels et $h : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire.

1) Montrer que l'image par h d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(h)$.
2) En déduire que, lorsque F est de dimension finie, h est surjective si et seulement si $\dim\big(\mathrm{Im}(h)\big) = \dim(\mathrm{F})$.

Rappel : une application $h : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est dite **surjective** si pour tout $y \in \mathrm{F}$ il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $h(x) = y$.

6.9 Donner un exemple illustrant que l'image par une application linéaire d'une famille libre n'est pas nécessairement une famille libre.

Théorème du rang

Soient E *et* F *deux espaces vectoriels et* $h : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une application linéaire. Si* E *est de dimension finie, alors* $\boxed{\dim\big(\mathit{Ker}(h)\big) + \dim\big(\mathit{Im}(h)\big) = \dim(\mathrm{E})}$.

6.10 Le but de cet exercice est de prouver le théorème du rang.

1) Justifier, grâce à l'exercice 6.8 et au deuxième théorème de la page 4.4, qu'il existe une base finie $(f_1\,; \ldots\,; f_n)$ de $\mathrm{Im}(h)$.
2) Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on choisit un $e_i \in \mathrm{E}$ tel que $h(e_i) = f_i$.
   (a) Montrer que la famille $(e_1\,; \ldots\,; e_n)$ est libre.
   Indication : appliquer l'application linéaire h à l'égalité $\alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n = 0$.
   (b) Posons $\mathrm{I} = \langle e_1\,; \ldots\,; e_n \rangle$. Montrons que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(h) + \mathrm{I}$.
   Soit $x \in \mathrm{E}$. Il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $h(x) = \alpha_1 \cdot f_1 + \ldots + \alpha_n \cdot f_n$.
   Posons $v = \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n \in \mathrm{I}$ et $u = x - v$.
      i. Calculer $h(u)$ et en déduire que $u \in \mathrm{Ker}(h)$.
      ii. En tirer que $x \in \mathrm{Ker}(h) + \mathrm{I}$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}(h) \cap \mathrm{I} = \{0\}$ c'est-à-dire que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(h) \oplus \mathrm{I}$.

   Expliquer pourquoi le théorème du rang est ainsi démontré.

6.11 Soient E et F des espaces vectoriels de même dimension finie et $h : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) h est injective ;
2) h est surjective ;
3) h est bijective.

6.12 Considérons l'application linéaire $h : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ définie par $h(f) = f'$.

1) Montrer que h est surjective.
2) Montrer que h n'est pas injective.
3) Ce résultat contredit-il l'exercice 6.11 ? Comment l'expliquer ?

6.13 Soient E et F deux espaces vectoriels et $h : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire bijective. Montrer que l'application inverse $h^{-1} : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ est aussi linéaire.

6.14 Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires 4), 6), 8), 9), 10), 11), 12), 14) et 16) de l'exercice 6.2.

6.15 Déterminer le noyau et l'image de chacun des endomorphismes de l'exercice 6.3.

6.16 Soit $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$h(x\,;y\,;z\,;t) = (x - y + z + t\,; x + 2\,z - t\,; x + y + 3\,z - 3\,t)\,.$$

Trouver une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(h)$ et de $\mathrm{Im}(h)$.

6.17 Trouver une application linéaire $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ telle que $\mathrm{Im}(h) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Réponses

6.2	1) oui	2) oui	3) non	4) oui
	5) non	6) oui	7) non	8) oui
	9) oui	10) oui	11) oui	12) oui
	13) non	14) oui	15) non	16) oui
6.3	1) oui	2) oui	3) oui	
6.4	1) oui	2) oui	3) non	4) oui
	5) non	6) non	7) oui	

6.14 4) $\mathrm{Ker}(h) = \{0\} \qquad \mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$

6) $\mathrm{Ker}(h) = \big\{(\alpha\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$

$\mathrm{Im}(h) = \big\{(\alpha\,;0) : \alpha \in \mathbb{R}\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$

8) $\mathrm{Ker}(h) = \{0\}$

$\mathrm{Im}(h) = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : -x+y+z=0\big\} = \Pi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$

9) $\mathrm{Ker}(h) = \big\{(0\,;0\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$

10) $\mathrm{Ker}(h) = \big\{(-2\,\alpha\,;\alpha\,;2\,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\right) \qquad \mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$

11) $\mathrm{Ker}(h) = \{0\} \qquad \mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^3$

12) $\mathrm{Ker}(h) = \big\{(0\,;\alpha\,;\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x=0\big\}$

$\mathrm{Im}(h) = \big\{(0\,;\alpha\,;2\,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$

14) $\mathrm{Ker}(h) = \big\{(\alpha\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$

$\mathrm{Im}(h) = \big\{(\alpha\,;-\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$

16) $\mathrm{Ker}(h) = \big\{(\alpha\,;\beta\,;\alpha) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x=z\big\}$

$= \Pi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \qquad \mathrm{Im}(h) = \big\{(\alpha\,;-2\,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$

6.15 1) $\mathrm{Ker}(h) = \{b\,x + c : b, c \in \mathbb{R}\} = \Pi(x\,;1)$

$\mathrm{Im}(h) = \{a\,x^2 : a \in \mathbb{R}\} = \Delta(x^2)$

2) $\mathrm{Ker}(h) = \{0\} \qquad \mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}_2[x]$

3) $\mathrm{Ker}(h) = \{c : c \in \mathbb{R}\} = \Delta(1)$

$\mathrm{Im}(h) = \{a\,x^2 + b\,x + a : a, b \in \mathbb{R}\} = \Pi(x^2+1\,;x)$

6.16 base de $\mathrm{Ker}(h)$: $\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ base de $\mathrm{Im}(h)$: $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$

6.17 $h(x\,;y\,;z) = (x+2\,y\,;2\,x\,;-y\,;-4\,x-3\,y)$