1.12 En général, la multiplication des matrices n'est pas commutative : $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$.

Dans l'exercice précédent, on a $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 17 & 9 \\ 3 & 11 & 7 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 13 \\ 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

On constate donc que $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$.

C'est l'inégalité $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$ qui justifie les autres inégalités :

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 = (\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \mathrm{A}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) + \mathrm{B}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \mathrm{A}^2 \underbrace{+\,\mathrm{AB} + \underbrace{\mathrm{BA}}_{\neq \mathrm{AB}}}_{\neq 2\,\mathrm{AB}} + \mathrm{B}^2$$

$$(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2 = (\mathrm{A}-\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B}) - \mathrm{B}(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \mathrm{A}^2 \underbrace{-\,\mathrm{AB} - \underbrace{\mathrm{BA}}_{\neq \mathrm{AB}}}_{\neq -2\,\mathrm{AB}} + \mathrm{B}^2$$

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B}) + \mathrm{B}(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \mathrm{A}^2 \underbrace{-\,\mathrm{AB} + \underbrace{\mathrm{BA}}_{\neq \mathrm{AB}}}_{\neq 0} - \mathrm{B}^2$$