7.15 1) Il s'agit d'écrire le vecteur $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}$, donc de trouver des scalaires α_1, α_2 et α_3 avec :

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}.$$

On peut également transcrire cette égalité sous deux autres formes :

$$\begin{cases} \alpha_1 & = 3 \\ \alpha_1 + 2\,\alpha_2 & = 4 \\ \alpha_1 + 3\,\alpha_2 - 4\,\alpha_3 & = 5 \end{cases} \iff \begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

2) Soit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&3&-4\end{pmatrix}$.

On remarque que les colonnes de la matrice P sont constituées des composantes, exprimées dans la base $\mathcal{B}$, des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$.

Si p désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice P, alors :

$$p(e_1) = p\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = e'_1$$

$$p(e_2) = p\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} = e'_2$$

$$p(e_3) = p\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix} = e'_3$$

Ainsi l'application linéaire p associée à la matrice P transforme la base $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$.

3) L'espace engendré par les colonnes de la matrice P est l'espace engendré par les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$, à savoir $\mathbb{R}^3$, puisqu'une base forme un système générateur.

La matrice P est par conséquent de rang 3, si bien qu'elle est inversible.

4) Calculons P^{-1} à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&0&0\\ 1&2&0&0&1&0\\ 1&3&-4&0&0&1 \end{array}\right) \xRightarrow[\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1]{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&0&0\\ 0&2&0&-1&1&0\\ 0&3&-4&-1&0&1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{L_2 \to \frac{1}{2} L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{L_3 \to L_3 - 3 L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{L_3 \to -\frac{1}{4} L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

On a donc trouvé $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

L'égalité $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ implique :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Le vecteur dont les composantes sont $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$ a donc pour composantes $\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ dans la base $\mathcal{B}'$.