3.10 1) Posons $\mathrm{F} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x = 12\big\}$.

$(0\,;0\,;0) \notin \mathrm{F}$, car $0 \neq 12$.

Comme F ne contient pas le vecteur nul, F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Posons $\mathrm{F} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\big\}$.

Soient $u = (x\,;y\,;z) \in \mathrm{F}$ et $v = (x'\,;y'\,;z') \in \mathrm{F}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Puisque $u \in \mathrm{F}$, on a $z = 0$; de même, $z' = 0$, vu que $v \in \mathrm{F}$.

(a) Posons $w = u + v = (x\,;y\,;z) + (x'\,;y'\,;z') = (\underbrace{x + x'}_{x''}\,;\underbrace{y + y'}_{y''}\,;\underbrace{z + z'}_{z''})$.

Vu que $z'' = z + z' = 0 + 0 = 0$, on a que $w \in \mathrm{F}$.

(b) Posons $w = \alpha \cdot u = \alpha\,(x\,;y\,;z) = (\underbrace{\alpha\,x}_{x'''}\,;\underbrace{\alpha\,y}_{y'''}\,;\underbrace{\alpha\,z}_{z'''})$.

Comme $z''' = \alpha\,z = \alpha \cdot 0 = 0$, on en déduit que $w \in \mathrm{F}$.

On a ainsi vérifié que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3) Posons $\mathrm{F} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : y = 3\,x\big\}$.

Soient $u = (x\,;y\,;z) \in \mathrm{F}$ et $v = (x'\,;y'\,;z') \in \mathrm{F}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Puisque $u \in \mathrm{F}$, on a $y = 3\,x$; de même, $y' = 3\,x'$, vu que $v \in \mathrm{F}$.

(a) Posons $w = u + v = (x\,;y\,;z) + (x'\,;y'\,;z') = (\underbrace{x + x'}_{x''}\,;\underbrace{y + y'}_{y''}\,;\underbrace{z + z'}_{z''})$.

Puisque $y'' = y + y' = 3\,x + 3\,x' = 3\,(x + x') = 3\,x''$, on a que $w \in \mathrm{F}$.

(b) Posons $w = \alpha \cdot u = \alpha\,(x\,;y\,;z) = (\underbrace{\alpha\,x}_{x'''}\,;\underbrace{\alpha\,y}_{y'''}\,;\underbrace{\alpha\,z}_{z'''})$.

$y''' = \alpha\,y = \alpha\,(3\,x) = 3\,(\alpha\,x) = 3\,x'''$ montre que $w \in \mathrm{F}$.

On a ainsi démontré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4) Posons $\mathrm{F} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : 2\,x + y + z = 21\big\}$.

Vu que $2 \cdot 0 + 0 + 0 = 0 \neq 21$, on a $(0\,;0\,;0) \notin \mathrm{F}$.

Le sous-ensemble F n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puisqu'il ne contient pas le vecteur nul.

5) Posons $\mathrm{F} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\big\}$.

Choisissons $u = (3\,;4\,;5)$ et $v = (1\,;0\,;1)$.

Puisque $3^2 + 4^2 = 5^2$, on a $u \in \mathrm{F}$.

De même, $v \in \mathrm{F}$, étant donné que $1^2 + 0^2 = 1^2$.

Mais $u + v = (3\,;4\,;5) + (1\,;0\,;1) = (4\,;4\,;6) \notin \mathrm{F}$, car $4^2 + 4^2 \neq 6^2$.

C'est pourquoi F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

6) Posons $\mathrm{F} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x\,y = z\big\}$.

Choisissons $u = (1\,;1\,;1)$ et $\alpha = 2$.

Comme $1 \cdot 1 = 1$, on a $u \in \mathrm{F}$.

Or $2\,u = 2\,(1\,;1\,;1) = (2\,;2\,;2) \notin \mathrm{F}$, vu que $2 \cdot 2 \neq 2$.
Il en résulte que F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

7) Posons $\mathrm{F} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : 3\,x + 4\,y - 5\,z = 0\big\}$.

Soient $u = (x\,;y\,;z) \in \mathrm{F}$ et $v = (x'\,;y'\,;z') \in \mathrm{F}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Puisque $u \in \mathrm{F}$, on a $3\,x + 4\,y - 5\,z = 0$; de même, $3\,x' + 4\,y' - 5\,z' = 0$, vu que $v \in \mathrm{F}$.

(a) Posons $w = u + v = (x\,;y\,;z) + (x'\,;y'\,;z') = (\underbrace{x + x'}_{x''}\,;\underbrace{y + y'}_{y''}\,;\underbrace{z + z'}_{z''})$.

Puisque
$$\begin{aligned} 3\,x'' + 4\,y'' - 5\,z'' &= 3\,(x + x') + 4\,(y + y') - 5\,(z + z') \\ &= 3\,x + 3\,x' + 4\,y + 4\,y' - 5\,z - 5\,z' \\ &= (3\,x + 4\,y - 5\,z) + (3\,x' + 4\,y' - 5\,z') \\ &= 0 + 0 = 0, \text{ on a que } w \in \mathrm{F}. \end{aligned}$$

(b) Posons $w = \alpha \cdot u = \alpha\,(x\,;y\,;z) = (\underbrace{\alpha\,x}_{x'''}\,;\underbrace{\alpha\,y}_{y'''}\,;\underbrace{\alpha\,z}_{z'''})$.

$3\,x''' + 4\,y''' - 5\,z''' = 3\,(\alpha\,x) + 4\,(\alpha\,y) - 5\,(\alpha\,z) = 3\,\alpha\,x + 4\,\alpha\,y - 5\,\alpha\,z = \alpha\,(3\,x + 4\,y - 5\,z) = \alpha \cdot 0 = 0$ montre que $w \in \mathrm{F}$.

On a ainsi démontré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.