1.18 1) Soient A et B des matrices de type $m \times n$.

Posons $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$.
Alors $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

Posons $\mathrm{D} = {}^t(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = {}^t\mathrm{C}$.
Alors $d_{ij} = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$.

Posons $\mathrm{E} = {}^t\mathrm{A}$.
Alors $e_{ij} = a_{ji}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$.

Posons $\mathrm{F} = {}^t\mathrm{B}$.
Alors $f_{ij} = b_{ji}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$.

Posons $\mathrm{G} = {}^t\mathrm{A} + {}^t\mathrm{B} = \mathrm{E} + \mathrm{F}$.
Alors, pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$, on a :
$g_{ij} = e_{ij} + f_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$

On a ainsi obtenu l'égalité $\mathrm{D} = \mathrm{G}$, c'est-à-dire ${}^t(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = {}^t\mathrm{A} + {}^t\mathrm{B}$.

2) Soient A une matrice de type $m \times n$ et λ un nombre réel.

Posons $\mathrm{C} = \lambda\,\mathrm{A}$.
Alors $c_{ij} = \lambda\, a_{ij}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

Posons $\mathrm{D} = {}^t(\lambda\,\mathrm{A}) = {}^t\mathrm{C}$.
Alors $d_{ij} = c_{ji} = \lambda\, a_{ji}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$.

Posons $\mathrm{E} = {}^t\mathrm{A}$.
Alors $e_{ij} = a_{ji}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$.

Posons $\mathrm{F} = \lambda\, {}^t\mathrm{A} = \lambda\,\mathrm{E}$.
Alors $f_{ij} = \lambda\, e_{ij} = \lambda\, a_{ji}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$.

On a ainsi montré que $\mathrm{D} = \mathrm{F}$, en d'autres termes ${}^t(\lambda\,\mathrm{A}) = \lambda\, {}^t\mathrm{A}$.

3) Soient A une matrice de type $m \times n$ et B une matrice de type $n \times p$.

Posons $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$.
Alors, pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a : $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$

Posons $\mathrm{D} = {}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{C}$.
Alors $d_{ij} = c_{ji} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{ki}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant m$.

Posons $\mathrm{E} = {}^t\mathrm{B}$.
Alors $e_{ij} = b_{ji}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

Posons $\mathrm{F} = {}^t\mathrm{A}$.

Alors $f_{ij} = a_{ji}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$.

Posons $\mathrm{G} = {}^t\mathrm{B}{}^t\mathrm{A} = \mathrm{EF}$.

Alors, pour tous $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant m$, on a :

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}\, f_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\, a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{ki}$$

On conclut que $\mathrm{D} = \mathrm{G}$, c'est-à-dire ${}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}{}^t\mathrm{A}$.