Chamblandes 2009 — Problème 1

Si x et y désignent respectivement le nombre de rails longs et courts, le problème revient à résoudre l'équation diophantienne $117\,x + 45\,y = 1260$.

Déterminons pgcd(117 ; 45) à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{rcl}
117 = 45 \cdot 2 + 27 & \Longrightarrow & 27 = 117 - 45 \cdot 2 \\
45 = 27 \cdot 1 + 18 & \Longrightarrow & 18 = 45 - 27 \cdot 1 \\
27 = 18 \cdot 1 + 9 & \Longrightarrow & 9 = 27 - 18 \cdot 1 \\
18 = 9 \cdot 2 & &
\end{array}$$

On trouve donc pgcd(117 ; 45) = 9.

Vu que 9 divise 1260, l'équation diophantienne admet une infinité de solutions.

Utilisons l'algorithme d'Euclide pour obtenir une solution particulière :

$$\begin{aligned}
9 &= 27 - 18 \cdot 1 \\
&= 27 - (45 - 27 \cdot 1) \cdot 1 = 45 \cdot (-1) + 27 \cdot 2 \\
&= 45 \cdot (-1) + (117 - 45 \cdot 2) \cdot 2 = 117 \cdot 2 + 45 \cdot (-5)
\end{aligned}$$

En multipliant l'égalité $117 \cdot 2 + 45 \cdot (-5) = 9$ par $\frac{1260}{9} = 140$, on obtient :

$$117 \cdot \underbrace{280}_{x_0} + 45 \cdot \underbrace{(-700)}_{y_0} = 1260$$

L'ensemble des solutions de l'équation diophantienne est donné par :

$$\left\{\begin{array}{l}
x = x_0 + \frac{b}{d}\,k = 280 + \frac{45}{9}\,k = 280 + 5\,k \\
y = y_0 - \frac{a}{d}\,k = 700 - \frac{117}{9}\,k = -700 - 13\,k
\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Par ailleurs, il faut avoir un nombre non négatif de rails :

$280 + 5\,k \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k \geqslant -56$

$-700 - 13\,k \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k \leqslant -\frac{700}{13} \approx -53{,}85$

Il y a par conséquent trois solutions possibles :

1. $k = -56$: $\left\{\begin{array}{l} x = 280 + 5 \cdot (-56) = 0 \\ y = -700 - 13 \cdot (-56) = 28 \end{array}\right.$
2. $k = -55$: $\left\{\begin{array}{l} x = 280 + 5 \cdot (-55) = 5 \\ y = -700 - 13 \cdot (-55) = 15 \end{array}\right.$
3. $k = -54$: $\left\{\begin{array}{l} x = 280 + 5 \cdot (-54) = 10 \\ y = -700 - 13 \cdot (-54) = 2 \end{array}\right.$