

9.13 Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique vers la base \mathcal{B}' constituée des vecteurs propres : $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Dans la base \mathcal{B}' , la matrice associée à l'endomorphisme h est : $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Si A désigne la matrice de h dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , alors $A' = P^{-1}AP$. Il s'ensuit que $A = PA'P^{-1}$.

Calculons P^{-1} à l'aide des déterminants :

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} {}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On peut désormais calculer la matrice A de l'endomorphisme h dans la base canonique de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} A = PA'P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$