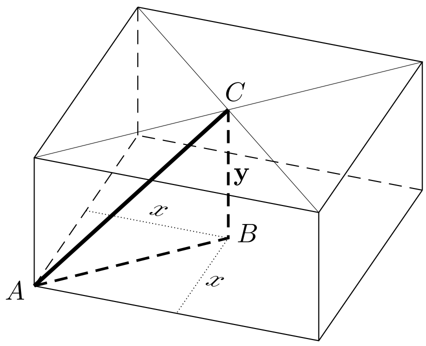
Chamblandes 2003 — Problème 2.2



Vu le théorème de Pythagore, $\|AB\|^2 = x^2 + x^2 = 2\,x^2$.
En appliquant à nouveau le théorème de Pythagore (au triangle ABC), on obtient :
$d^2 = \|AC\|^2 = \|AB\|^2 + \|BC\|^2 = 2\,x^2 + y^2$.

La condition sur le volume de la salle signifie que $(2\,x)\,(2\,x)\,y = 4\,x^2\,y = 108$, d'où l'on tire que $2\,x^2 = \frac{54}{y}$.

En substituant $2\,x^2 = \frac{54}{y}$ dans la première formule $d^2 = 2\,x^2 + y^2$, on en conclut : $d^2 = \frac{54}{y} + y^2$.

Il s'agit de trouver un minimum de la fonction $f(y) = \frac{54}{y} + y^2$ définie sur $]0\,;\infty[$

$f'(y) = \left(\frac{54}{y}\right)' + (y^2)' = \frac{(54)'\,y - 54\,(y)'}{y^2} + 2\,y = -\frac{54}{y^2} + 2\,y = \frac{-54+2\,y^3}{y^2} = \frac{2\,(y^3-27)}{y^2} = \frac{2\,(y-3)\,(y^2+3\,y+9)}{y^2}$
Remarquons que $y^2 + 3\,x + 9 > 0$, puisque $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 9 - 36 = -27 < 0$.
Comme $2 > 0$ et $y^2 > 0$, le signe de $f'(y) = \frac{2\,(y-3)\,(y^2+3\,y+9)}{y^2}$ est donc le même que $y - 3$.

D'où le tableau de croissance suivant :
En résumé, d^2 est minimal si $y = 3$.

		3		
	$-$	|	$+$	f'
	$\searrow$	min	$\nearrow$	

La condition $4\,x^2\,y = 108$ implique désormais $4\,x^2 \cdot 3 = 108$ i.e. $x^2 = 9$ et donc $x = \pm 3$.

En conclusion, pour que d^2 soit minimal, la salle doit mesurer 6 m de long, 6 m de large et 3 m de haut.