10.12 1) Supposons que h soit un endomorphisme orthogonal.
Soit $(e_1\,;\dots;e_n)$ une base orthonormée.

(a) D'après l'exercice 6.8, la famille $\big(h(e_1)\,;\dots;h(e_n)\big)$ est un système générateur de $\mathrm{Im}(h)=\mathrm{E}$, attendu que h est un automorphisme.
Comme $\big(h(e_1)\,;\dots;h(e_n)\big)$ forme un système générateur de n vecteurs dans un espace de dimension n, il s'agit bien d'une base de E.

(b) $h(e_i)\cdot h(e_j)=e_i\cdot e_j=0$ si $i\neq j$.
Les vecteurs de cette base sont ainsi bien deux à deux orthogonaux.

(c) $\|h(e_i)\|=\|e_i\|=1$ pour tout $1\leqslant i\leqslant n$.
Les vecteurs de cette base sont donc bien normés.

2) Soit $(e_1\,;\dots;e_n)$ une base orthonormée telle que $\big(h(e_1)\,;\dots;h(e_n)\big)$ soit aussi une base orthonormée.

Soient $x=\alpha_1\,e_1+\ldots+\alpha_n\,e_n$ et $y=\beta_1\,e_1+\ldots+\beta_n\,e_n$ des vecteurs de E.

$h(x)=h(\alpha_1\,e_1+\ldots+\alpha_n\,e_n)=\alpha_1\,h(e_1)+\ldots+\alpha_n\,h(e_n)$
$h(y)=h(\beta_1\,e_1+\ldots+\beta_n\,e_n)=\beta_1\,h(e_1)+\ldots+\beta_n\,h(e_n)$

L'exercice 10.6 3) implique :
$x\cdot y=\alpha_1\,\beta_1+\ldots+\alpha_n\,\beta_n=h(x)\cdot h(y)$

L'endomorphisme h est ainsi bien orthogonal.