Chamblandes 2005 — Problème 1

a) (i) Étant donné que $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de f est le même que celui de $2\,x^2 - 3\,x = x\,(2\,x-3)\,.$

		0		$\frac{3}{2}$	
e^x	$+$		$+$		$+$
x	$-$	0	$+$		$+$
$2\,x-3$	$-$		$-$	0	$+$
f	$+$	0	$-$	0	$+$

(ii) Puisque $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$, la fonction f ne possède aucune asymptote verticale.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2\,x^2 - 3\,x)\,e^x = \lim_{x\to-\infty} 2\,x^2\,e^x = (-\infty)^2\,e^{-\infty} = (+\infty)\cdot 0_+$$

On se retrouve manifestement face à un cas d'indétermination.

On recourt donc au théorème de Bernouilli-L'Hospital :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2\,x^2 - 3\,x)\,e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\,x^2-3\,x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(2\,x^2-3\,x)'}{(e^{-x})'}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4\,x-3}{-e^{-x}} = \frac{4\cdot(-\infty)-3}{-e^{+\infty}} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

Puisque l'on a toujours affaire à une indétermination, on applique une seconde fois le théorème de Bernouilli-L'Hospital :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4\,x-3}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(4\,x-3)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{e^{-x}} = \frac{4}{e^{+\infty}} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

On en déduit que $y = 0$ est asymptote horizontale à gauche.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2\,x^2 - 3\,x)\,e^x = \lim_{x\to+\infty} 2\,x^2\,e^x = 2\cdot(+\infty)^2\cdot e^{+\infty}$$
$$= (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale à droite.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (2\,x-3)\,e^x = \lim_{x\to+\infty} 2\,x\,e^x = 2\cdot(+\infty)\cdot e^{+\infty} = (+\infty)\cdot(+\infty)$$
$$= +\infty$$

Il n'y a ainsi pas d'asymptote oblique à droite.

(iii) $f'(x) = (2\,x^2-3\,x)'\,e^x + (2\,x^2-3\,x)\,(e^x)' = (4\,x-3)\,e^x + (2\,x^2-3\,x)\,e^x$
$= (4\,x-3+2\,x^2-3\,x)\,e^x = (2\,x^2+x-3)\,e^x = (x-1)\,(2\,x+3)\,e^x$

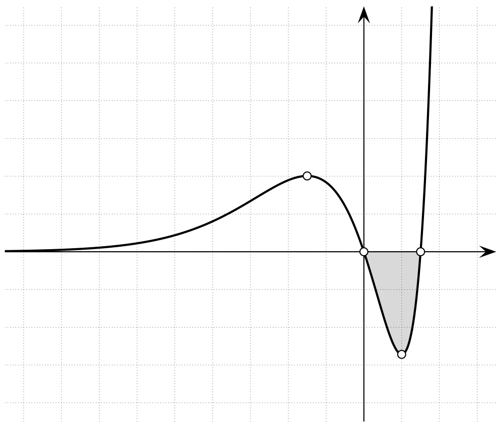
		$-\frac{3}{2}$		1	
e^x	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$2\,x+3$	$-$	0	$+$		$+$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f\big(-\frac{3}{2}\big) = \big(2\cdot(-\frac{3}{2}) - 3\cdot(-\frac{3}{2})\big)\,e^{-\frac{3}{2}} = \big(2\cdot\frac{9}{4}+\frac{9}{2}\big)\cdot\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} = 9\cdot\frac{1}{\sqrt{e^3}} = \frac{9}{e\,\sqrt{e}} \approx 2$

Le point $\big(-\frac{3}{2}\,;\frac{9}{e\,\sqrt{e}}\big)$ est un maximum local.

$f(1) = (2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1) \cdot e^1 = -e \approx -2{,}72$
Le point $(1\,;-e)$ est un minimum absolu.

(iv)



b) **1[re] méthode : vérification de la réponse**

$$\begin{aligned}\mathrm{F}'(x) &= (2\,x^2 - 7\,x + 7)'\,e^x + (2\,x^2 - 7\,x + 7)\,(e^x)' = (4\,x - 7)\,e^x + (2\,x^2 - 7\,x + 7)\,e^x \\ &= (4\,x - 7 + 2\,x^2 - 7\,x + 7)\,e^x = (2\,x^2 - 3\,x)\,e^x = f(x)\end{aligned}$$

2[e] méthode : intégration par parties

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx = \int (2\,x^2 - 3\,x)\,e^x\,dx &= (2\,x^2 - 3\,x)\,e^x - \int (4\,x - 3)\,e^x\,dx \\ &= (2\,x^2 - 3\,x)\,e^x - \left((4\,x - 3)\,e^x - \int 4\,e^x\,dx\right) \\ &= (2\,x^2 - 3\,x)\,e^x - \big((4\,x - 3)\,e^x - 4\,e^x\big) \\ &= \big((2\,x^2 - 3\,x) - (4\,x - 3) - (-4)\big)\,e^x = (2\,x^2 - 7\,x + 7)\,e^x\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}-\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx = -\mathrm{F}(x)\Big|_0^{\frac{3}{2}} &= -(2\,x^2 - 7\,x + 7)\,e^x\Big|_0^{\frac{3}{2}} \\ &= -\big(2 \cdot (\tfrac{3}{2})^2 - 7 \cdot \tfrac{3}{2} + 7\big)\,e^{\frac{3}{2}} + (2 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + 7)\,e^0 \\ &= -\sqrt{e^3} + 7 = 7 - e\,\sqrt{e} \approx 2{,}52\end{aligned}$$