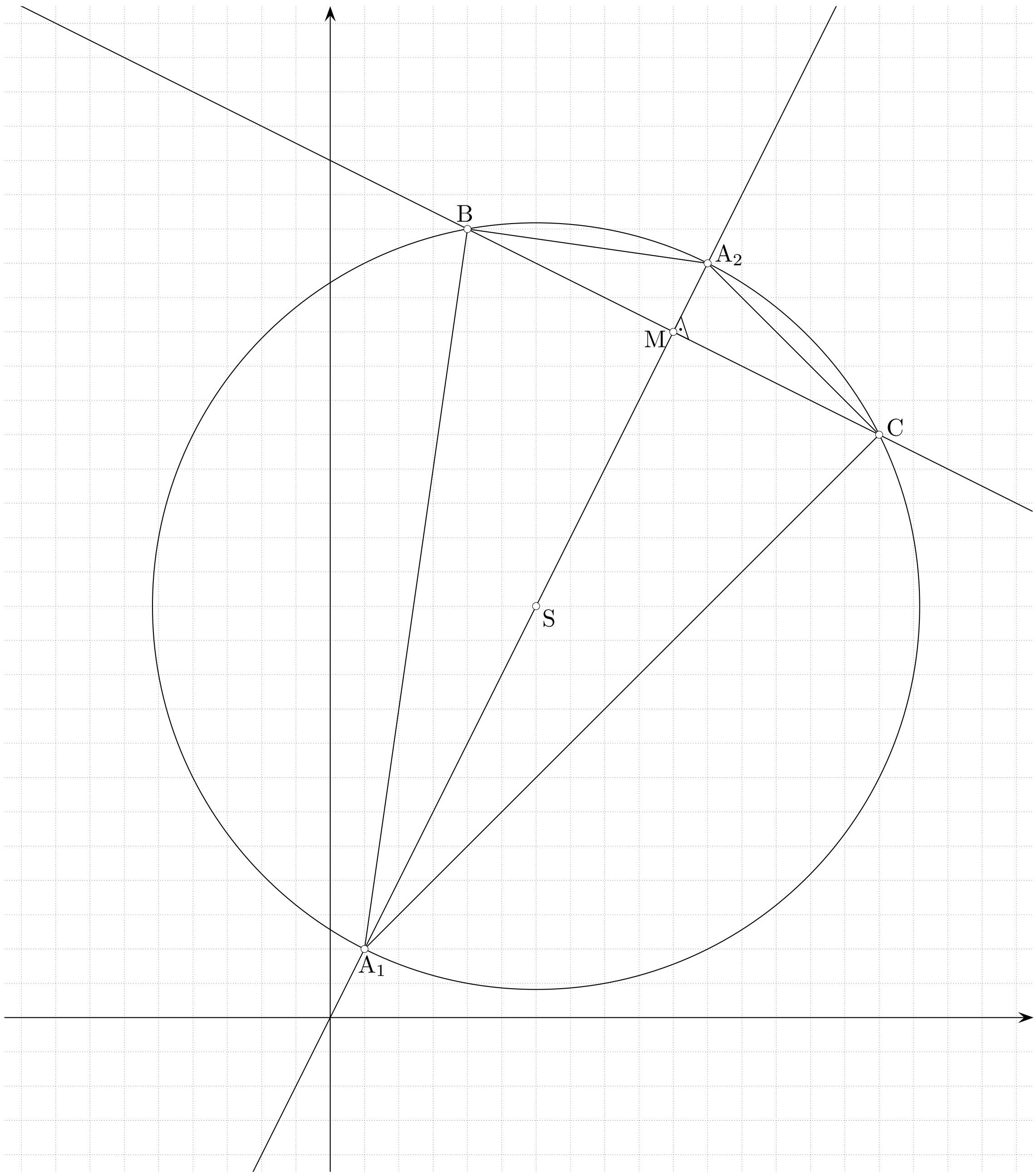
Chamblandes 2008 — Problème 7



a) $x^2 - 12\,x + y^2 - 24\,y + 55 = 0$
$(x-6)^2 - 36 + (y-12)^2 - 144 + 55 = 0$
$(x-6)^2 + (y-12)^2 = 125$
Le cercle Γ a pour centre $\mathrm{S}(6\,;12)$ et pour rayon $r = \sqrt{125} = 5\,\sqrt{5}$.

b) Puisque la droite d a pour pente $m = -\frac{1}{2}$, son équation est de la forme $d : y = -\frac{1}{2}\,x + h$.
Les coordonnées du point $\mathrm{B}(4\,;23)$ doivent vérifier l'équation de la droite d :
$23 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + h$ entraîne $h = 25$.
On a donc trouvé $d : y = -\frac{1}{2}\,x + 25$ ou encore $d : x + 2\,y - 50 = 0$.

c) On rappelle que deux droites de pentes respectives m_1 et m_2 sont perpendiculaires si et seulement si $m_1\,m_2 = -1$.

Si m désigne la pente de la perpendiculaire p, on doit avoir $-\frac{1}{2}\,m = -1$, d'où $m = 2$.
La perpendiculaire p s'écrit donc sous la forme $p : y = 2\,x + h$.

En outre, les coordonnées du point $\mathrm{S}(6\,;12)$ doivent satisfaire l'équation de la perpendiculaire p : $12 = 2 \cdot 6 + h$ implique $h = 0$.

Par conséquent, l'équation de la perpendiculaire p est $p : y = 2\,x$ ou encore $p : 2\,x - y = 0$.

d) Calculons le point d'intersection M entre les droites d et p :

$$\begin{cases} x + 2\,y - 50 = 0 \\ 2\,x - y = 0 \end{cases}$$

En additionnant le double de la seconde équation à la première, on trouve $5\,x - 50 = 0$, d'où $x = 10$. Par suite, $y = 2\,x = 2 \cdot 10 = 20$.
On a ainsi obtenu $\mathrm{M}(10\,;20)$.

Puisque le point $\mathrm{M}(10\,;20)$ est le milieu des points $\mathrm{B}(4\,;23)$ et $\mathrm{C}(c_1\,;c_2)$, on a :

$$\mathrm{M}(10\,;20) = \left(\tfrac{4+c_1}{2}\,;\tfrac{23+c_2}{2}\right) \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 10 = \frac{4+c_1}{2} \\ 20 = \frac{23+c_2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 20 = 4 + c_1 \\ 40 = 23 + c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 16 \\ c_2 = 17 \end{cases}$$

On conclut que $\mathrm{C}(16\,;17)$.

e) Il suffit de vérifier que les coordonnées des points B et C satisfont l'équation du cercle Γ :

$(4-6)^2 + (23-12)^2 = (-2)^2 + 11^2 = 4 + 121 = 125$

$(16-6)^2 + (17-12)^2 = 10^2 + 5^2 = 100 + 25 = 125$

f) Le point A se situe à l'intersection du cercle Γ avec la perpendiculaire p.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 12\,x - 24\,y + 55 = 0 \\ 2\,x - y = 0 \end{cases}$$

La seconde équation donne $y = 2\,x$ que l'on substitue dans la première :

$x^2 + (2\,x)^2 - 12\,x - 24 \cdot 2\,x + 55 = 0$

$x^2 + 4\,x^2 - 12\,x - 48\,x + 55 = 0$

$5\,x^2 - 60\,x + 55 = 0$

$x^2 - 12\,x + 11 = 0$

$(x-1)\,(x-11) = 0$

(i) $x = 1$ implique $y = 2 \cdot 1 = 2$: $\mathrm{A}_1(1\,;2)$

(ii) $x = 11$ entraîne $y = 2 \cdot 11 = 22$: $\mathrm{A}_2(11\,;22)$