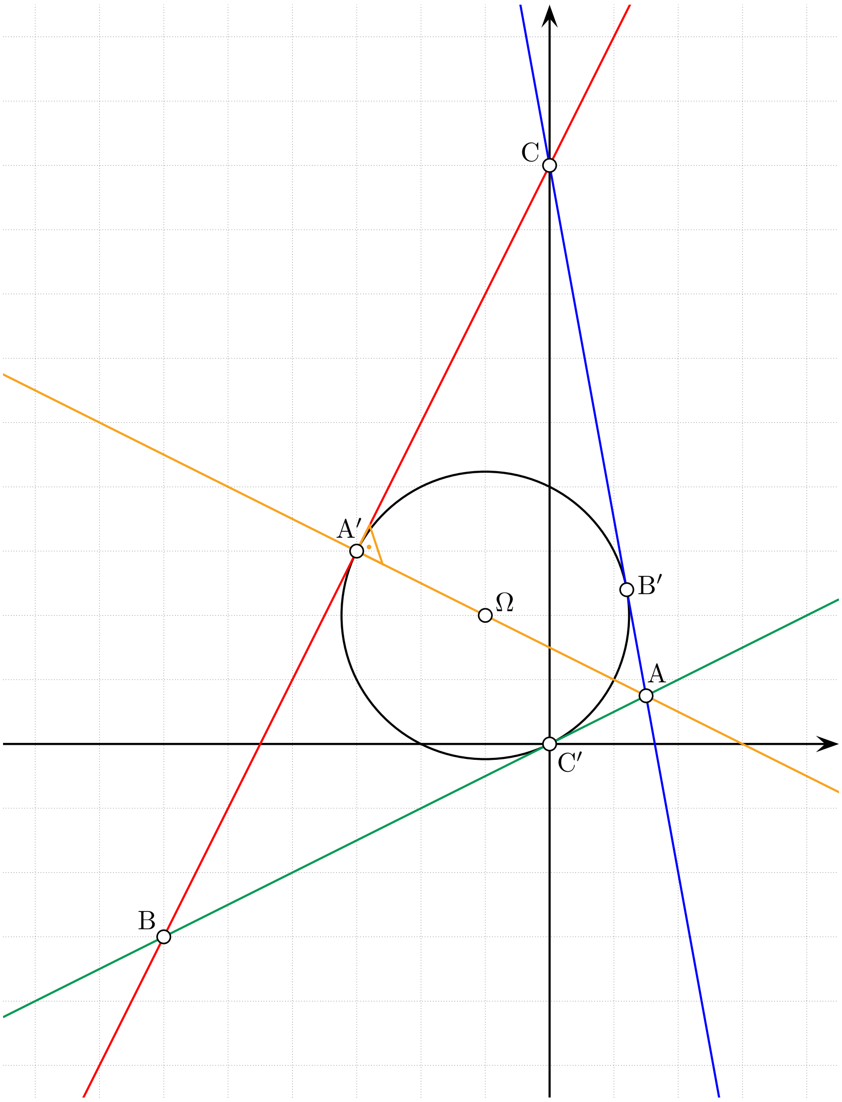
5.22 1)



2) **Calcul des tangentes au cercle Γ issues du point** C

Les tangentes de pente m sont données par la formule :

$y - 2 = m\,(x + 1) \pm \sqrt{5}\,\sqrt{m^2 + 1}$

On recherche les tangentes passant par le point $\mathrm{C}(0\,;9)$:

$9 - 2 = m\,(0 + 1) \pm \sqrt{5}\,\sqrt{m^2 + 1}$

$7 - m = \pm\sqrt{5}\,\sqrt{m^2 + 1}$

En élevant les membres de cette égalité au carré, on obtient :

$(7 - m)^2 = 5\,(m^2 + 1)$

$49 - 14\,m + m^2 = 5\,m^2 + 5$

$0 = 4\,m^2 + 14\,m - 44$

$0 = 2\,m^2 + 7\,m - 22$

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-22) = 225 = 15^2$

(a) $m_1 = \frac{-7+15}{2\cdot 2} = 2$

La première tangente est donc de la forme $y = 2\,x + h$.

Elle doit aussi passer par le point $\mathrm{C}(0\,;9)$:

$9 = 2 \cdot 0 + h$ implique $h = 9$.

L'équation de la première tangente est donc $y = 2\,x + 9$ ou encore $\boxed{(\mathrm{BC}) : 2\,x - y + 9 = 0}$.

(b) $m_2 = \frac{-7-15}{2\cdot 2} = -\frac{11}{2}$

La seconde tangente est ainsi de la forme $y = -\frac{11}{2}\,x + h$.

On sait qu'elle doit également passer par le point $\mathrm{C}(0\,;9)$:

$9 = -\frac{11}{2} \cdot 0 + h$ fournit $h = 9$.

L'équation de la seconde tangente est par conséquent $y = -\frac{11}{2}\,x + 9$ ou plus simplement $\boxed{(\mathrm{AC}) : 11\,x + 2\,y - 18 = 0}$.

Calcul de la droite $\Omega\mathrm{A}$

Puisque le triangle ABC est isocèle en A, la droite $\Omega\mathrm{A}$ correspond simultanément à la médiatrice, à la bissectrice, à la médiane et à la hauteur issue du sommet A ou du côté a.

La droite $\Omega\mathrm{A}$ est par conséquent la perpendiculaire à la droite BC passant par le point Ω.

Puisque la droite BC a pour pente 2, la pente de la droite $\Omega\mathrm{A}$ vaut $-\frac{1}{2}$.

La droite $\Omega\mathrm{A}$ est donc de la forme $y = -\frac{1}{2}\,x + h$.

On sait également que la droite $\Omega\mathrm{A}$ passe par le point $\Omega(-1\,;2)$:

$2 = -\frac{1}{2} \cdot (-1) + h$ implique $h = \frac{3}{2}$.

On conclut que la droite $\Omega\mathrm{A}$ a pour équation $y = -\frac{1}{2}\,x + \frac{3}{2}$ ou encore $\boxed{(\Omega\mathrm{A}) : x + 2\,y - 3 = 0}$.

Calcul du point $\mathrm{A} = \mathrm{AC} \cap \Omega\mathrm{A}$

$$\begin{cases} 11\,x + 2\,y - 18 = 0 \\ x + 2\,y - 3 = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la seconde équation de la première, on trouve $10\,x - 15 = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{3}{2}$.

En remplaçant $x = \frac{3}{2}$ dans la seconde équation, on a $\frac{3}{2} + 2\,y - 3 = 0$, si bien que $y = \frac{3}{4}$.

En résumé, on a obtenu $\boxed{\mathrm{A}(\frac{3}{2}\,;\frac{3}{4})}$.

Calcul de la droite AB

Les tangentes au cercle Γ sont données par la formule

$y - 2 = m\,(x + 1) \pm \sqrt{5}\,\sqrt{m^2 + 1}$

On recherche les tangentes passant par le point $\mathrm{A}(\frac{3}{2}\,;\frac{3}{4})$:

$\frac{3}{4} - 2 = m\,(\frac{3}{2} + 1) \pm \sqrt{5}\,\sqrt{m^2 + 1}$

$-\frac{5}{4} - \frac{5}{2}\,m = \pm\sqrt{5}\,\sqrt{m^2+1}$

En élevant au carré les termes de cette équation, il résulte :

$(-\frac{5}{4} - \frac{5}{2}\,m)^2 = 5\,(m^2+1)$

$\frac{25}{16} + \frac{25}{4}\,m + \frac{25}{4}\,m^2 = 5\,m^2 + 5$

$5 + 20\,m + 20\,m^2 = 16\,m^2 + 16$

$4\,m^2 + 20\,m - 11 = 0$

$\Delta = 20^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-11) = 576 = 24^2$

On obtient deux solutions $m_1 = \frac{-20+24}{2\cdot 4} = \frac{1}{2}$ et $m_2 = \frac{-20-24}{2\cdot 4} = -\frac{11}{2}$.

La seconde solution $m_2 = \frac{-20-24}{2\cdot 4} = -\frac{11}{2}$ correspond à la pente de la droite AC que l'on a déjà calculée.

Il nous reste donc encore à déterminer l'équation de la droite AB de pente $m_1 = \frac{1}{2}$. Cette équation est donc de la forme $y = \frac{1}{2}\,x + h$.

Puisque la droite AB passe par le point $\mathrm{A}(\frac{3}{2}\,;\frac{3}{4})$, on doit avoir :

$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + h$, d'où l'on tire $h = 0$.

L'équation de la droite AB est donc $y = \frac{1}{2}\,x$ ou encore $\boxed{(\mathrm{AB}) : x - 2\,y = 0}$.

Calcul du point $\mathrm{B} = \mathrm{BC} \cap \mathrm{AB}$

$$\begin{cases} 2\,x - y + 9 = 0 \\ x - 2\,y \phantom{{}+9} = 0 \end{cases}$$

La seconde équation donne $x = 2\,y$ que l'on remplace dans la première :

$2 \cdot 2\,y - y + 9 = 0$ conduit à $y = -3$.

Par suite, $x = 2 \cdot (-3) = -6$ et on a $\boxed{\mathrm{B}(-6\,;-3)}$.

3) **Calcul du point** $\mathrm{A}' = \mathrm{BC} \cap \Gamma$

$$\begin{cases} 2\,x - y + 9 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5 \end{cases}$$

L'équation de la droite BC donne $y = 2\,x + 9$ que l'on substitue dans l'équation du cercle Γ :

$(x+1)^2 + \big((2\,x+9) - 2\big)^2 = 5$

$(x+1)^2 + (2\,x+7)^2 - 5 = 0$

$x^2 + 2\,x + 1 + 4\,x^2 + 28\,x + 49 - 5 = 0$

$5\,x^2 + 30\,x + 45 = 0$

$x^2 + 6\,x + 9 = 0$

$(x+3)^2 = 0$

On conclut que $x = -3$, d'où suit $y = 2 \cdot (-3) + 9 = 3$ et $\boxed{\mathrm{A}'(-3\,;3)}$.

Calcul du point $\mathrm{B}' = \mathrm{AC} \cap \Gamma$

$$\begin{cases} 11\,x + 2\,y - 18 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5 \end{cases}$$

L'équation de la droite AC fournit $y = \frac{18-11\,x}{2}$ que l'on remplace dans l'équation du cercle Γ :

$(x+1)^2+(\frac{18-11\,x}{2}-2)^2=5$
$(x+1)^2+(\frac{14-11\,x}{2})^2-5=0$
$x^2+2\,x+1+\frac{196-308\,x+121\,x^2}{4}-5=0$
$4\,x^2+8\,x+4+196-308\,x+121\,x^2-20=0$
$125\,x^2-300\,x+180=0$
$25\,x^2-60\,x+36=0$
$(5\,x-6)^2=0$
Par conséquent $x=\frac{6}{5}$, d'où l'on déduit $y=\frac{18-11\cdot\frac{6}{5}}{2}=\frac{12}{5}$ et $\boxed{\mathrm{B}'(\frac{6}{5}\,;\frac{12}{5})}$.

Calcul du point $\mathrm{C}'=\mathrm{AB}\cap\Gamma$
$\begin{cases} x-2\,y=0 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=5 \end{cases}$
L'équation de la droite AB implique $x=2\,y$ que l'on remplace dans l'équation du cercle Γ :
$(2\,y+1)^2+(y-2)^2=5$
$4\,y^2+4\,y+1+y^2-4\,y+4=5$
$5\,y^2=0$
On en tire $y=0$ et par suite $x=2\cdot 0=0$, puis enfin $\boxed{\mathrm{C}'(0\,;0)}$.