6.15 1) (a) $a\,x^2 = 0 = 0\,x^2 + 0\,x + 0$ équivaut au système
$\left\{ a = 0 \right.$ d'inconnues a, b, c.
Manifestement b et c sont des variables libres, d'où la solution générale : $\begin{cases} a = 0 \\ b = b \\ c = c \end{cases}$
Ainsi $\mathrm{Ker}(h) = \{b\,x + c : b, c \in \mathbb{R}\} = \Pi(x\,;1)$

(b) $h(x^2) = x^2$
$h(x) = 0$
$h(1) = 0$
Il en résulte $\mathrm{Im}(h) = \Delta(x^2) = \{a\,x^2 : a \in \mathbb{R}\}$.

2) (a) $c\,x^2 + b\,x + a = 0 = 0\,x^2 + 0\,x + 0$ équivaut au système
$\begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$ dont l'unique solution est $a = b = c = 0$.
C'est pourquoi $\mathrm{Ker}(h) = \{0\}$.

(b) Puisque h est un endomorphisme injectif, il est également, vu l'exercice 6.11, surjectif.
En d'autres termes $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}_2[x]$.

3) (a) $x\,(2\,a\,x + b) + 2\,a = 2\,a\,x^2 + b\,x + 2\,a = 0 = 0\,x^2 + 0\,x + 0$
équivaut au système $\begin{cases} 2\,a = 0 \\ \quad b = 0 \\ 2\,a = 0 \end{cases}$ d'inconnues a, b, c.
Manifestement c est une variable libre et la solution générale est
$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = c \end{cases}$.
Par conséquent $\mathrm{Ker}(h) = \{c : c \in \mathbb{R}\} = \Delta(1)$.

(b) $h(x^2) = x\,(2\,x + 0) + 2 = 2\,x^2 + 2 = 2\,(x^2 + 1)$
$h(x) = x\,(2 \cdot 0\,x + 1) + 2 \cdot 0 = x$
$h(1) = x\,(2 \cdot 0\,x + 0) + 2 \cdot 0 = 0$
On en déduit $\mathrm{Im}(h) = \Pi(x^2 + 1\,;x) = \{a\,x^2 + b\,x + a : a, b \in \mathbb{R}\}$.