2.7 1) $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 - 2\,L1}{\Longrightarrow}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{L_1 \to 11\,L_1 + 7\,L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 11 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & -11 & 1 & -2 \end{array}\right)$

$\overset{\substack{L_1 \to \frac{1}{11}\,L_1 \\ L_2 \to -\frac{1}{11}\,L_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{7}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{array}\right)$

On a donc trouvé $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$.

2) $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -8 & -12 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 + 4\,L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$

En échelonnant la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$, on constate qu'elle ne possède qu'une seule ligne non nulle.
Elle n'est donc pas inversible, puisqu'elle est d'ordre 2, mais de rang 1.

3) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 - L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\overset{L_3 \to L_3 - L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2 \to 2\,L_2 + L_3}{\Longrightarrow}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \to 2\,L_1 + L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$\overset{\substack{L_1 \to \frac{1}{2}\,L_1 \\ L_2 \to \frac{1}{2}\,L_3 \\ L_3 \to \frac{1}{2}\,L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

Par conséquent, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_2 - 4\,L_1 \\ L_3 \to L_3 + 2\,L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\overset{L_3 \to L_3 - 2\,L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -2 & 1 \end{array}\right)$

En échelonnant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$, on s'aperçoit qu'elle est de rang 2, mais d'ordre 3, si bien qu'elle n'est pas inversible.

5) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to -2\,L_1 \\ L_2 \to 2\,L_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{L_2 \to L_2 - 3\,L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to -\frac{1}{2}\,L_2 \\ L_3 \to -L_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to L_1 - L_3 \\ L_2 \to L_2 - 2\,L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 \to L_1 - L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

On a obtenu $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6) $$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 - 5\,L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_4 \to 3\,L_4 - 7\,L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -7 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 + L_4}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -7 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{L_1 \to 2\,L_1 + L_3}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -7 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to \frac{1}{2}\,L_1 \\ L_2 \to \frac{1}{3}\,L_2 \\ L_3 \to -\frac{1}{4}\,L_3 \\ L_4 \to -\frac{1}{4}\,L_4}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \end{array}\right)$$

On a donc trouvé $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.