

4 Nombres complexes — forme algébrique

On note i un nombre tel que $i^2 = -1$.

On appelle **nombre complexe** tout nombre z de la forme $z = a + bi$ où a et b sont des nombres réels. On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

4.1 Calculer $z_1 + z_2$:

- | | | | |
|-------------------|----------------|-------------------|-----------------|
| 1) $z_1 = 1 + 4i$ | $z_2 = 2 - 5i$ | 2) $z_1 = 1 + 6i$ | $z_2 = 2 + 5i$ |
| 3) $z_1 = 2 + 4i$ | $z_2 = 2 - 4i$ | 4) $z_1 = 8 + 7i$ | $z_2 = -8 - 7i$ |

4.2 Calculer $z_1 z_2$:

- | | | | |
|--------------------|----------------|--------------------|-----------------|
| 1) $z_1 = 1 + 2i$ | $z_2 = 2 + i$ | 2) $z_1 = 1 + i$ | $z_2 = 2 - 5i$ |
| 3) $z_1 = 1 + i$ | $z_2 = 2 + 2i$ | 4) $z_1 = -3 + i$ | $z_2 = 2 + 3i$ |
| 5) $z_1 = -1 + 3i$ | $z_2 = 3 - 5i$ | 6) $z_1 = -2 - 2i$ | $z_2 = -1 + 3i$ |

4.3 Calculer :

- | | | |
|-----------------|-----------------------------|--------------------------------------|
| 1) $(3 + 4i)^2$ | 2) $(4 - 6i)^3$ | 3) $(i - 2i^2)^3$ |
| 4) $(2 - i)^4$ | 5) $(2 - i)(3 + 4i)(5 - i)$ | 6) $(1 - 3i)^2(-8 + 6i)$ |
| 7) $(1 - i)^3$ | 8) $(2 + i)^3$ | 9) $(\sqrt{2} - 3i)(-\sqrt{2} - 3i)$ |

4.4 **Conjugué complexe**

Soit $z = a + bi$; on appelle **conjugué** de z , et l'on note \bar{z} , le complexe $a - bi$.

Démontrer les propriétés suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1) $z\bar{z} = a^2 + b^2$ | 5) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ |
| 2) $\bar{\bar{z}} = z$ | 6) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ |
| 3) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ | 7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ |
| 4) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ | |

4.5 Calculer :

- | | | | |
|----------------------|-----------------------|-------------------------|------------------------|
| 1) $\frac{1}{2 + i}$ | 2) $\frac{1}{4 + 3i}$ | 3) $\frac{1}{-24 - 7i}$ | 4) $\frac{1}{-1 - 2i}$ |
| 5) $\frac{1}{2 - i}$ | 6) $\frac{1}{3 + 2i}$ | 7) $\frac{1}{1 + i}$ | 8) $\frac{1}{i}$ |

4.6 Calculer :

- | | | | |
|----------------------------|------------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 1) $\frac{5 + 3i}{2 + 4i}$ | 2) $\frac{63 + 16i}{4 + 3i}$ | 3) $\frac{56 + 33i}{12 - 5i}$ | 4) $\frac{13 - 5i}{1 - i}$ |
|----------------------------|------------------------------|-------------------------------|----------------------------|

$$5) \frac{2i}{1+3i} \quad 6) \frac{i}{2-3i} \quad 7) \frac{7+i}{3-2i} \quad 8) \frac{-3}{(1+i)(2-i)}$$

4.7 Calculer $z_1 : z_2$ pour les six couples $(z_1 ; z_2)$ de l'exercice 4.2.

4.8 Calculer :

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{2+i}{-1+i} & 2) \overline{\left(\frac{3-2i}{-1+i}\right)} & 3) (2-i)(-3+2i)(5-4i) \\ 4) \left(\frac{5+5i}{3-4i}\right)^2 + \left(\frac{1}{i}\right)^2 & 5) \frac{1+i}{3-i} + \overline{\left(\frac{1+i}{3-i}\right)} & 6) \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i} \\ 7) \frac{i(2-i)^3}{-3+i} & 8) \frac{(5+5i) - \overline{(5+5i)}}{(1+2i)\overline{(1+2i)}} & 9) \frac{\frac{1+i}{i} + \frac{i}{1-i}}{\frac{i-1}{i+1}} \end{array}$$

Réponses

4.1 1) $3-i$ 2) $3+11i$ 3) 4 4) 0

4.2 1) $5i$ 2) $7-3i$ 3) $4i$ 4) $-9-7i$
5) $12+14i$ 6) $8-4i$

4.3 1) $-7+24i$ 2) $-368-72i$ 3) $2+11i$
4) $-7-24i$ 5) $55+15i$ 6) 100
7) $-2-2i$ 8) $2+11i$ 9) -11

4.5 1) $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ 2) $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$ 3) $-\frac{24}{625} + \frac{7}{625}i$ 4) $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$
5) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$ 6) $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$ 7) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ 8) $-i$

4.6 1) $\frac{11}{10} - \frac{7}{10}i$ 2) $12-5i$ 3) $3+4i$ 4) $9+4i$
5) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$ 6) $-\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$ 7) $\frac{19}{13} + \frac{17}{13}i$ 8) $-\frac{9}{10} + \frac{3}{10}i$

4.7 1) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ 2) $-\frac{3}{29} + \frac{7}{29}i$ 3) $\frac{1}{2}$
4) $-\frac{3}{13} + \frac{11}{13}i$ 5) $-\frac{9}{17} + \frac{2}{17}i$ 6) $-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$

4.8 1) $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ 2) $-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$ 3) $8+51i$
4) $-\frac{73}{25} - \frac{14}{25}i$ 5) $\frac{2}{5}$ 6) $3-i$
7) $-\frac{31}{10} - \frac{17}{10}i$ 8) $2i$ 9) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$