**6.5** 1) Soit $u \in \mathrm{E}$.

Il existe d'uniques scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $u = \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n$.
On pose $h(u) = \alpha_1 \cdot f_1 + \ldots + \alpha_n \cdot f_n$.

Cette définition de $h$ implique aussitôt $h(e_i) = f_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

2) Vérifions que l'application $h$ est linéaire.
Soient $u, v \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Il existe d'uniques scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tels que
$u = \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n$ et $v = \beta_1 \cdot e_1 + \ldots + \beta_1 \cdot e_n$.

(a)
$$\begin{aligned} h(u+v) &= h\big((\alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n) + (\beta_1 \cdot e_1 + \ldots + \beta_1 \cdot e_n)\big) \\ &= h\big((\alpha_1 + \beta_1) \cdot e_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta) \cdot e_n\big) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) \cdot f_1 + \ldots (\alpha_n + \beta_n) \cdot f_n \\ &= (\alpha_1 \cdot f_1 + \ldots + \alpha_n \cdot f_n) + (\beta_1 \cdot e_1 + \ldots + \beta_n \cdot e_n) \\ &= h(u) + h(v) \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} h(\lambda \cdot u) &= h\big(\lambda \cdot (\alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n)\big) \\ &= h(\lambda\, \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda\, \alpha_n \cdot e_n) \\ &= \lambda\, \alpha_1 \cdot f_1 + \ldots + \lambda\, \alpha_n \cdot f_n \\ &= \lambda \cdot (\alpha_1 \cdot f_1 + \ldots + \alpha_n \cdot f_n) \\ &= \lambda \cdot h(u) \end{aligned}$$

3) Il reste à prouver l'unicité de l'application linéaire $h$.
Soit $h^\star$ une application linéaire de E vers F telle que $h^\star(e_i) = f_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.
Soit $u \in \mathrm{E}$.
Il existe d'uniques scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $u = \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n$.

$$\begin{aligned} h^\star(u) &= h^\star(\alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n) = \alpha_1 \cdot h^\star(e_1) + \ldots + \alpha_n \cdot h^\star(e_n) \\ &= \alpha_1 \cdot f_1 + \ldots + \alpha_n \cdot f_n = h(\alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n) = h(u) \end{aligned}$$