Chamblandes 2004 — Exercice 3

Pour que la fonction f admette $x = 3$ comme asymptote verticale, il faut que son dénominateur s'annule en $x = 3$: $(-3)^2 + d = 0$ donne $d = -9$.

On sait désormais que f s'écrit $f(x) = \dfrac{a\,x^2 + b\,x + c}{x^2 - 9}$.

Pour que la fonction f admette $y = 2$ comme asymptote horizontale, il faut que
$2 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a\,x^2 + b\,x + c}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a\,x^2}{x^2} = a$.

On sait à présent que f s'écrit $f(x) = \dfrac{2\,x^2 + b\,x + c}{x^2 - 9}$.

La fonction f admet un extremum au point $\mathrm{P}(1\,;3)$ si $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 3 \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{2\,x^2 + b\,x + c}{x^2 - 9}\right)' = \frac{(2\,x^2 + b\,x + c)'\,(x^2 - 9) - (2\,x^2 + b\,x + c)\,(x^2 - 9)'}{(x^2 - 9)^2} \\
&= \frac{(4\,x + b)\,(x^2 - 9) - (2\,x^2 + b\,x + c)\,2\,x}{(x^2 - 9)^2} \\
&= \frac{4\,x^3 - 36\,x + b\,x^2 - 9\,b - 4\,x^3 - 2\,b\,x^2 - 2\,c\,x}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-b\,x^2 - (2\,c + 36)\,x - 9\,b}{(x^2 - 9)^2}
\end{aligned}$$

$$f'(1) = \frac{-b \cdot 1^2 - (2\,c + 36) \cdot 1 - 9\,b}{(1^2 - 9)^2} = \frac{-10\,b - 2\,c - 36}{64} = -\frac{5\,b + c + 18}{32} = 0$$

$$f(1) = \frac{2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c}{1^2 - 9} = \frac{b + c + 2}{-8} = 3 \iff b + c + 2 = -24 \iff b + c + 26 = 0$$

Il reste ainsi encore à résoudre le système $\begin{cases} 5\,b + c + 18 = 0 \\ b + c + 26 = 0 \end{cases}$.

En soustrayant la seconde équation de la première, on trouve $4\,b - 8 = 0$, c'est-à-dire $b = 2$. En remplaçant $b = 2$, dans l'une des équations, on obtient $c = -28$.

On conclut que la fonction recherchée est $f(x) = \dfrac{2\,x^2 + 2\,x - 28}{x^2 - 9}$.