

**3.2** Soient  $a, b, k \in \mathbb{Z}$ .

1) Montrons que  $D(a, b) \subset D(a - kb, b)$ .

Soit  $d \in D(a, b)$  un diviseur commun à  $a$  et  $b$ .

Au vu de l'exercice 1.1 6), l'hypothèse  $d \mid a$  et  $d \mid b$  implique que  $d \mid (ma + nb)$  quels que soient les entiers  $m$  et  $n$ .

En choisissant  $m = 1$  et  $n = -k$ , on obtient que  $d \mid (1 \cdot a + (-k)b)$ , c'est-à-dire  $d \mid (a - kb)$ .

Ainsi  $d$  est un diviseur de  $a - kb$  et de  $b$ , ce qui signifie que  $d \in D(a - kb, b)$ .

2) Montrons que  $D(a - kb, b) \subset D(a, b)$ .

Soit  $d \in D(a - kb, b)$  un diviseur commun à  $a - kb$  et  $b$ .

Toujours d'après l'exercice 1.1 6), l'hypothèse  $d \mid (a - kb)$  et  $d \mid b$  entraîne que  $d \mid (m(a - kb) + nb)$  quels que soient les entiers  $m$  et  $n$ .

En particulier, lorsque  $m = 1$  et  $n = k$ , on a  $d \mid (1 \cdot (a - kb) + kb)$  ou encore  $d \mid a$ .

En d'autres termes,  $d$  est un diviseur de  $a$  et de  $b$ , de sorte que  $d \in D(a, b)$ .