9.11 1) Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 42 & -64 \\ 0 & 3-\lambda & 84 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\,(3-\lambda)\,(2-\lambda)$$

Remarquons que ce déterminant se calcule immédiatement, parce qu'il s'agit d'une matrice triangulaire (cf. exercice 8.4).

Il y a ainsi deux valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $$\begin{pmatrix} 3 & 42 & -64 \\ 0 & 3 & 84 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x + 42\,y - 64\,z \\ 3\,y + 84\,z \\ 2\,z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2\,y \\ 2\,z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\,x + 42\,y - 64\,z = 2\,x \\ 3\,y + 84\,z = 2\,y \\ 2\,z = 2\,z \end{cases} \iff \begin{cases} x + 42\,y - 64\,z = 0 \\ y + 84\,z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \quad - 3592\,z = 0 \\ y + \quad 84\,z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On constate que z est une variable libre ; on pose $z = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = 3592\,\alpha \\ y = -84\,\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 3592 \\ -84 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$ est $\mathrm{E}_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 3592 \\ -84 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) $$\begin{pmatrix} 3 & 42 & -64 \\ 0 & 3 & 84 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x + 42\,y - 64\,z \\ 3\,y + 84\,z \\ 2\,z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x \\ 3\,y \\ 3\,z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\,x + 42\,y - 64\,z = 3\,x \\ 3\,y + 84\,z = 3\,y \\ 2\,z = 3\,z \end{cases} \iff \begin{cases} 42\,y - 64\,z = 0 \\ 84\,z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 42\,y - 64\,z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 42\,y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

On remarque que x est une variable libre ; on pose $x = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$ est $\mathrm{E}_3 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Étant donné que $\dim(\mathrm{E}_2) = 1$ et $\dim(\mathrm{E}_3) = 1$, on ne peut disposer que de $1 + 1 = 2$ vecteurs propres linéairement indépendants. Cela ne suffit donc pas pour former une base de $\mathbb{R}^3$, car $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
Vu le théorème du haut de la page 9.4, l'endomorphisme et la matrice associée ne sont pas diagonalisables.

2) Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - (3-\lambda)\,\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2\,\lambda - 4 & -\lambda^2 + 6\,\lambda - 8 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda - 2 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2\,\lambda - 4 & -\lambda^2 + 6\,\lambda - 8 \\ 2-\lambda & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 2\,\lambda - 4 & -\lambda^2 + 6\,\lambda - 8 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)\,(2\,\lambda - 4 - \lambda^2 + 6\,\lambda - 8) = -(\lambda - 2)\,(\lambda^2 - 8\,\lambda + 12)$$

$$= -(\lambda - 2)\,(\lambda - 2)\,(\lambda - 6) = -(\lambda - 2)^2\,(\lambda - 6)$$

Il y a ainsi deux valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 6$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x + 2\,y + z \\ x + 4\,y + z \\ x + 2\,y + 3\,z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2\,y \\ 2\,z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\,x + 2\,y + z = 2\,x \\ x + 4\,y + z = 2\,y \\ x + 2\,y + 3\,z = 2\,z \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2\,y + z = 0 \\ x + 2\,y + z = 0 \\ x + 2\,y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad x + 2\,y + z = 0$$

On constate que y et z sont des variables libres ; on pose $y = \alpha$ et $z = \beta$, et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = -2\,\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \phantom{-2\,\alpha - {}}\beta \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$ est par conséquent :

$$\mathrm{E}_2 = \Pi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

(b) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x + 2\,y + z \\ x + 4\,y + z \\ x + 2\,y + 3\,z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,x \\ 6\,y \\ 6\,z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\,x + 2\,y + z = 6\,x \\ x + 4\,y + z = 6\,y \\ x + 2\,y + 3\,z = 6\,z \end{cases} \iff \begin{cases} -3\,x + 2\,y + z = 0 \\ x - 2\,y + z = 0 \\ x + 2\,y - 3\,z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x - 2\,y + z = 0 \\ - 4\,y + 4\,z = 0 \\ \phantom{x - {}} 4\,y - 4\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2\,y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \quad - z = 0 \\ \quad y - z = 0 \end{cases}$$

On remarque que z est une variable libre ; on pose $z = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 6$ est $\mathrm{E}_6 = \Delta \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Nous avons obtenu trois vecteurs propres linéairement indépendants. Ces trois vecteurs propres constituent ainsi une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle base est :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, on obtient :

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

si bien que la matrice de l'endomorphisme dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

On peut par ailleurs vérifier que

$$\begin{aligned} \mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3) Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(2+\lambda)\big((1-\lambda)^2 - (-1)\cdot(-1)\big) = -(2+\lambda)\,(\lambda^2 - 2\,\lambda)$$

$$= -(2+\lambda)\,\lambda\,(\lambda - 2)$$

Il y a ainsi trois valeurs propres : $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 2$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \\ -2\,z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,x \\ -2\,y \\ -2\,z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y = -2\,x \\ -x + y = -2\,y \\ -2\,z = -2\,z \end{cases} \iff \begin{cases} 3\,x - y = 0 \\ -x + 3\,y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x - 3\,y = 0 \\ 3\,x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3\,y = 0 \\ 8\,y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

On constate que z est une variable libre ; on pose $z = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -2$ est $\mathrm{E}_{-2} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \\ -2\,z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \\ -2\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

On constate que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 0$ est $\mathrm{E}_0 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \\ -2\,z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2\,y \\ 2\,z \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x - y = 2\,x \\ -x + y = 2\,y \\ -2\,z = 2\,z \end{cases} \iff \begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \\ 4\,z = 0 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

On constate que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = 2$ est $\mathrm{E}_2 = \Delta \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Nous avons obtenu trois vecteurs propres linéairement indépendants. Ces trois vecteurs propres constituent ainsi une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle base est :

$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, on obtient :

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

si bien que la matrice de l'endomorphisme dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

On peut par ailleurs vérifier que

$\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4) Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \lambda\,\mathrm{L}_2}{=} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 1 \\ 2-2\,\lambda & 2-\lambda-\lambda^2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2-2\,\lambda & 2-\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2\,(1-\lambda) & (\lambda+2)\,(1-\lambda) \end{vmatrix}$$
$$= -(1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\,\big((-1-\lambda)\,(\lambda+2) - 2\cdot 1\big)$$
$$= (\lambda-1)\,(-\lambda^2-3\,\lambda-4) = -(\lambda-1)\,(\lambda^2+3\,\lambda+4)$$

$\lambda^2+3\,\lambda+4=0$ n'admet aucune solution, car $\Delta = 3^2-4\cdot 1\cdot 4 = -7 < 0$.

Il y a ainsi qu'une seule valeur propre $\lambda = 1$.

Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ -2\,x-y+z \\ 2\,x+2\,y \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y = x \\ -2\,x-y+z = y \\ 2\,x+2\,y = z \end{cases} \iff \begin{cases} -2\,x+y = 0 \\ -2\,x-2\,y+z = 0 \\ 2\,x+2\,y-z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2\,x-y = 0 \\ 2\,x+2\,y-z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\,x-y = 0 \\ 6\,x-z = 0 \end{cases}$$

On constate que x est une variable libre ; on pose $x = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\,\alpha \\ z = 6\,\alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ est $\mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$.

Attendu que $\dim(\mathrm{E}_1) = 1$, on ne saurait former une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres. Au vu du théorème du haut de la page 9.4, l'endomorphisme et la matrice qui lui est associée ne sont pas diagonalisables.

5) Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 3 & 0-\lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + \lambda\,\mathrm{L}_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -\lambda^2+\lambda+2 & 4\,\lambda+2 \\ 1 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} -\lambda^2+\lambda+2 & 4\,\lambda+2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{C}_2 \to \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1}{=} -1 \begin{vmatrix} -\lambda^2+\lambda+2 & \lambda^2+3\,\lambda \\ 3 & -\lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+3) \begin{vmatrix} -\lambda^2+\lambda+2 & \lambda \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda+3)\,(\lambda^2-4\,\lambda-2)$$

La première valeur propre est $\lambda_1 = -3$.

Les deux autres se calculent à l'aide du discriminant :

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 24 = 2^2 \cdot 6 = (2\,\sqrt{6})^2$

$\lambda_2 = \frac{-(-4)-2\,\sqrt{6}}{2\cdot 1} = \frac{4}{2} - \frac{2\,\sqrt{6}}{2} = 2 - \sqrt{6}$

$\lambda_3 = \frac{-(-4)+2\,\sqrt{6}}{2\cdot 1} = \frac{4}{2} + \frac{2\,\sqrt{6}}{2} = 2 + \sqrt{6}$

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,y+2\,z \\ x+y+4\,z \\ 3\,y \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,x \\ -3\,y \\ -3\,z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\,y + 2\,z = -3\,x \\ x + y + 4\,z = -3\,y \\ 3\,y = -3\,z \end{cases} \iff \begin{cases} 3\,x + 2\,y + 2\,z = 0 \\ x + 4\,y + 4\,z = 0 \\ 3\,y + 3\,z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x + 4\,y + 4\,z = 0 \\ 3\,x + 2\,y + 2\,z = 0 \\ 3\,y + 3\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 4\,y + 4\,z = 0 \\ -10\,y - 10\,z = 0 \\ 3\,y + 3\,z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x + 4\,y + 4\,z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

On constate que z est une variable libre ; on pose $z = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -3$ est $\mathrm{E}_{-3} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,y+2\,z \\ x+y+4\,z \\ 3\,y \end{pmatrix} = (2-\sqrt{6}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-\sqrt{6})\,x \\ (2-\sqrt{6})\,y \\ (2-\sqrt{6})\,z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\,y + 2\,z = (2-\sqrt{6})\,x \\ x + y + 4\,z = (2-\sqrt{6})\,y \\ 3\,y = (2-\sqrt{6})\,z \end{cases} \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} (-2+\sqrt{6})\,x\ + & 2\,y\ + & 2\,z & =0 \\ x\ + & (-1+\sqrt{6})\,y\ + & 4\,z & =0 \\ & 3\,y\ + & (-2+\sqrt{6})\,z & =0 \end{array}\right. \quad \underset{\Longleftrightarrow}{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x\ + & (-1+\sqrt{6})\,y\ + & 4\,z & =0 \\ (-2+\sqrt{6})\,x\ + & 2\,y\ + & 2\,z & =0 \\ & 3\,y\ + & (-2+\sqrt{6})\,z & =0 \end{array}\right. \quad \underset{\Longleftrightarrow}{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + (2-\sqrt{6})\,\mathrm{L}_1}$$

$$\left\{\begin{array}{lrrl} x\ + & (-1+\sqrt{6})\,y\ + & 4\,z & =0 \\ & 3\,(-2+\sqrt{6})\,y\ + & 2\,(5-2\,\sqrt{6})\,z & =0 \\ & 3\,y\ + & (-2+\sqrt{6})\,z & =0 \end{array}\right. \quad \underset{\Longleftrightarrow}{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2}$$

$$\left\{\begin{array}{lrrl} x\ + & (-1+\sqrt{6})\,y\ + & 4\,z & =0 \\ & 3\,y\ + & (-2+\sqrt{6})\,z & =0 \\ & 3\,(-2+\sqrt{6})\,y\ + & 2\,(5-2\,\sqrt{6})\,z & =0 \end{array}\right. \quad \underset{\Longleftrightarrow}{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + (2-\sqrt{6})\,\mathrm{L}_2}$$

$$\left\{\begin{array}{lrrl} x\ + & (-1+\sqrt{6})\,y\ + & 4\,z & =0 \\ & 3\,y\ + & (-2+\sqrt{6})\,z & =0 \\ & & 0 & =0 \end{array}\right. \quad \underset{\Longleftrightarrow}{\mathrm{L}_1 \to 3\,\mathrm{L}_1 + (1-\sqrt{6})\,\mathrm{L}_2}$$

$$\left\{\begin{array}{lrrl} 3\,x & & +\ (4+3\,\sqrt{6})\,z & =0 \\ & 3\,y & +\ (-2+\sqrt{6})\,z & =0 \\ & & 0 & =0 \end{array}\right.$$

On constate que z est une variable libre ; on pose $z=\alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & -\frac{4+3\,\sqrt{6}}{3}\,\alpha \\ y = & -\frac{-2+\sqrt{6}}{3}\,\alpha \\ z = & \alpha \end{array}\right. = -\frac{1}{3}\,\alpha \begin{pmatrix} 4+3\,\sqrt{6} \\ -2+\sqrt{6} \\ -3 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2-\sqrt{6}$ est donc :

$$\mathrm{E}_{2-\sqrt{6}} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 4+3\,\sqrt{6} \\ -2+\sqrt{6} \\ -3 \end{pmatrix}\right).$$

(c) $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,y+2\,z \\ x+y+4\,z \\ 3\,y \end{pmatrix} = (2+\sqrt{6}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\sqrt{6})\,x \\ (2+\sqrt{6})\,y \\ (2+\sqrt{6})\,z \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{lrrl} & 2\,y\ + & 2\,z & = (2+\sqrt{6})\,x \\ x\ + & y\ + & 4\,z & = (2+\sqrt{6})\,y \\ & 3\,y & & = (2+\sqrt{6})\,z \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} (-2-\sqrt{6})\,x\ + & 2\,y\ + & 2\,z & =0 \\ x\ + & (-1-\sqrt{6})\,y\ + & 4\,z & =0 \\ & 3\,y\ + & (-2-\sqrt{6})\,z & =0 \end{array}\right. \quad \underset{\Longleftrightarrow}{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x\ + & (-1-\sqrt{6})\,y\ + & 4\,z & =0 \\ (-2-\sqrt{6})\,x\ + & 2\,y\ + & 2\,z & =0 \\ & 3\,y\ + & (-2-\sqrt{6})\,z & =0 \end{array}\right. \quad \underset{\Longleftrightarrow}{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + (2+\sqrt{6})\,\mathrm{L}_1}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & (-1-\sqrt{6})\,y & + & 4\,z = 0 \\ & - & 3\,(2+\sqrt{6})\,y & + & (10+4\sqrt{6})\,z = 0 \\ & & 3\,y & + & (-2-\sqrt{6})\,z = 0 \end{array}\right. \quad \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & (-1-\sqrt{6})\,y & + & 4\,z = 0 \\ & & 3\,y & + & (-2-\sqrt{6})\,z = 0 \\ & - & 3\,(2+\sqrt{6})\,y & + & (10+4\sqrt{6})\,z = 0 \end{array}\right. \quad \overset{L_3 \to L_3 + (2+\sqrt{6})\,L_2}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & (-1-\sqrt{6})\,y & + & 4\,z = 0 \\ & & 3\,y & + & (-2-\sqrt{6})\,z = 0 \\ & & & & 0 = 0 \end{array}\right. \quad \overset{L_1 \to 3\,L_1 + (1+\sqrt{6})\,L_2}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\,x & + & (4-3\sqrt{6})\,z = 0 \\ 3\,y & + & (-2-\sqrt{6})\,z = 0 \\ & & 0 = 0 \end{array}\right.$$

On constate que z est une variable libre ; on pose $z = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{-4+3\sqrt{6}}{3}\,\alpha \\ y & = & \frac{2+\sqrt{6}}{3}\,\alpha \\ z & = & \alpha \end{array}\right. = \frac{1}{3}\,\alpha \begin{pmatrix} -4+3\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} \\ 3 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = 2+\sqrt{6}$ est donc :

$$E_{2+\sqrt{6}} = \Delta\left(\begin{pmatrix} -4+3\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

Nous avons obtenu trois vecteurs propres linéairement indépendants. Ces trois vecteurs propres constituent ainsi une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle base est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4+3\sqrt{6} & -4+3\sqrt{6} \\ 1 & -2+\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4+3\sqrt{6} \\ -2+\sqrt{6} \\ -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -4+3\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, on obtient :

(a) $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$-3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 4+3\sqrt{6} \\ -2+\sqrt{6} \\ -3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -4+3\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4+3\sqrt{6} \\ -2+\sqrt{6} \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+2\sqrt{6} \\ -10+4\sqrt{6} \\ -6+3\sqrt{6} \end{pmatrix} =$$

$$0\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+(2-\sqrt{6})\begin{pmatrix}4+3\sqrt{6}\\-2+\sqrt{6}\\-3\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}-4+3\sqrt{6}\\2+\sqrt{6}\\3\end{pmatrix}$$

(c) $\begin{pmatrix}0&2&2\\1&1&4\\0&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4+3\sqrt{6}\\2+\sqrt{6}\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10+2\sqrt{6}\\10+4\sqrt{6}\\6+3\sqrt{6}\end{pmatrix}=$

$$0\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}4+3\sqrt{6}\\-2+\sqrt{6}\\-3\end{pmatrix}+(2+\sqrt{6})\begin{pmatrix}-4+3\sqrt{6}\\2+\sqrt{6}\\3\end{pmatrix}$$

si bien que la matrice de l'endomorphisme dans la base $\mathcal{B}'$ est :
$\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&2-\sqrt{6}&0\\0&0&2+\sqrt{6}\end{pmatrix}.$

On peut par ailleurs vérifier que
$\mathrm{A}'=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$

$$=\begin{pmatrix}0&4+3\sqrt{6}&-4+3\sqrt{6}\\1&-2+\sqrt{6}&2+\sqrt{6}\\-1&-3&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&2&2\\1&1&4\\0&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&4+3\sqrt{6}&-4+3\sqrt{6}\\1&-2+\sqrt{6}&2+\sqrt{6}\\-1&-3&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{3}{19}&\frac{9}{19}&-\frac{10}{19}\\\frac{6+5\sqrt{6}}{228}&\frac{-9+2\sqrt{6}}{114}&\frac{-9+2\sqrt{6}}{114}\\\frac{-6+5\sqrt{6}}{228}&\frac{9+2\sqrt{6}}{114}&\frac{9+2\sqrt{6}}{114}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&2\\1&1&4\\0&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&4+3\sqrt{6}&-4+3\sqrt{6}\\1&-2+\sqrt{6}&2+\sqrt{6}\\-1&-3&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&2-\sqrt{6}&0\\0&0&2+\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

6) Calculons les valeurs propres :

$$0=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-1\\1&0-\lambda&1\\2&4&-2-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{C_1\to C_1-C_3\\C_2\to C_2+\lambda C_3}}{=}\begin{vmatrix}2-\lambda&2-\lambda&-1\\0&0&1\\4+\lambda&-\lambda^2-2\lambda+4&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-1\begin{vmatrix}2-\lambda&2-\lambda\\4+\lambda&-\lambda^2-2\lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&1\\4+\lambda&-\lambda^2-2\lambda+4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(-\lambda^2-3\lambda)=-(\lambda-2)\lambda(\lambda+3)$$

Il y a ainsi trois valeurs propres : $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=0$ et $\lambda_3=2$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&0&1\\2&4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y-z\\x+z\\2x+4y-2z\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x\\-3y\\-3z\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}x+2y-z=-3x\\x+z=-3y\\2x+4y-2z=-3z\end{cases}\iff\begin{cases}4x+2y-z=0\\x+3y+z=0\\2x+4y+z=0\end{cases}$$

$$\iff \quad \begin{cases} x + 3\,y + z = 0 \\ - 10\,y - 5\,z = 0 \\ - 2\,y - z = 0 \end{cases} \iff \quad \begin{cases} x + 3\,y + z = 0 \\ 2\,y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2\,y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On constate que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2\,\alpha \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -3$ est $\mathrm{E}_{-3} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2\,y - z \\ x + z \\ 2\,x + 4\,y - 2\,z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2\,y - z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2\,x + 4\,y - 2\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2\,y - z = 0 \\ - 2\,y + 2\,z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x + 2\,y - z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On constate que z est une variable libre ; on pose $z = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 0$ est $\mathrm{E}_0 = \Delta\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2\,y - z \\ x + z \\ 2\,x + 4\,y - 2\,z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2\,y \\ 2\,z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2\,y - z = 2\,x \\ x + z = 2\,y \\ 2\,x + 4\,y - 2\,z = 2\,z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2\,y - z = 0 \\ x - 2\,y + z = 0 \\ 2\,x + 4\,y - 4\,z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x - 2\,y + z = 0 \\ 4\,y - 3\,z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\,x - z = 0 \\ 4\,y - 3\,z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On constate que z est une variable libre ; on pose $z = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\,\alpha \\ y = \frac{3}{4}\,\alpha \\ z = \quad \alpha \end{cases} = \frac{1}{4}\,\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = 2$ est $\mathrm{E}_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$.

Nous avons obtenu trois vecteurs propres linéairement indépendants. Ces trois vecteurs propres constituent ainsi une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle base est :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$, on obtient :

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

si bien que la matrice de l'endomorphisme dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On peut par ailleurs vérifier que

$$\begin{aligned} \mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7) Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & -2 \\ -10 & 6-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{C_1 \to C_1 + 2\,C_2 \\ C_3 \to C_3 + (3-\lambda)\,C_2}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4-2\,\lambda \\ 2-2\,\lambda & 6-\lambda & \lambda^2-9\,\lambda+14 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4-2\,\lambda \\ 2-2\,\lambda & \lambda^2-9\,\lambda+14 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 4-2\,\lambda \\ 2 & \lambda^2-9\,\lambda+14 \end{vmatrix} = (1-\lambda)\,(\lambda^2-9\,\lambda+14-8+4\,\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\,(\lambda^2-5\,\lambda+6) = (1-\lambda)\,(\lambda-2)\,(\lambda-3)$$

Il y a ainsi trois valeurs propres : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,x+2\,y-2\,z \\ -10\,x+6\,y-4\,z \\ 2\,x-y+3\,z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3\,x + 2\,y - 2\,z = x \\ -10\,x + 6\,y - 4\,z = y \\ 2\,x - y + 3\,z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -4\,x + 2\,y - 2\,z = 0 \\ -10\,x + 5\,y - 4\,z = 0 \\ 2\,x - y + 2\,z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2\,x - y + 2\,z = 0 \\ 2\,z = 0 \\ -6\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\,x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

On constate que x est une variable libre ; on pose $x = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\,\alpha \\ z = 0 \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est $E_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

(b) $$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,x+2\,y-2\,z \\ -10\,x+6\,y-4\,z \\ 2\,x-y+3\,z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2\,y \\ 2\,z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3\,x + 2\,y - 2\,z = 2\,x \\ -10\,x + 6\,y - 4\,z = 2\,y \\ 2\,x - y + 3\,z = 2\,z \end{cases} \iff \begin{cases} -5\,x + 2\,y - 2\,z = 0 \\ -10\,x + 4\,y - 4\,z = 0 \\ 2\,x - y + z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x = 0 \\ -2\,x = 0 \\ 2\,x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

On constate que z est une variable libre ; on pose $z = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ est $\mathrm{E}_2 = \Delta \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(c) $$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,x + 2\,y - 2\,z \\ -10\,x + 6\,y - 4\,z \\ 2\,x - y + 3\,z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x \\ 3\,y \\ 3\,z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3\,x + 2\,y - 2\,z = 3\,x \\ -10\,x + 6\,y - 4\,z = 3\,y \\ 2\,x - y + 3\,z = 3\,z \end{cases} \iff \begin{cases} -6\,x + 2\,y - 2\,z = 0 \\ -10\,x + 3\,y - 4\,z = 0 \\ 2\,x - y = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2\,x - y = 0 \\ - y - 2\,z = 0 \\ - 2\,y - 4\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\,x - y = 0 \\ y + 2\,z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2\,x + 2\,z = 0 \\ y + 2\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2\,z = 0 \end{cases}$$

On constate que z est une variable libre ; on pose $z = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = -2\,\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = 3$ est $\mathrm{E}_3 = \Delta \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Nous avons obtenu trois vecteurs propres linéairement indépendants. Ces trois vecteurs propres constituent ainsi une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle base est :
$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, on obtient :

(a) $$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

si bien que la matrice de l'endomorphisme dans la base $\mathcal{B}'$ est :
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On peut par ailleurs vérifier que

$$\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

8) Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(1+\lambda)\big((3-\lambda)(-3-\lambda) - 2\cdot(-4)\big) = -(\lambda+1)(\lambda^2-1)$$
$$= -(\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

Il y a ainsi trois valeurs propres : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-4z \\ 2x-y-2z \\ 2x-3z \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3x \phantom{{}-y} - 4z = -x \\ 2x - y - 2z = -y \\ 2x \phantom{{}-y} - 3z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases} \iff x - z = 0$$

On constate que y et z sont des variables libres ; on pose $z = \alpha$ et $y = \beta$ pour obtenir la solution générale :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ est donc :

$$\mathrm{E}_{-1} = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-4z \\ 2x-y-2z \\ 2x-3z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3\,x \quad\quad - 4\,z = x \\ 2\,x - y - 2\,z = y \\ 2\,x \quad\quad - 3\,z = z \end{cases} \iff \begin{cases} 2\,x \quad\quad - 4\,z = 0 \\ 2\,x - 2\,y - 2\,z = 0 \\ 2\,x \quad\quad - 4\,z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x \quad\quad - 2\,z = 0 \\ \quad - 2\,y + 2\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \quad - 2\,z = 0 \\ \quad y - \ z = 0 \end{cases}$$

On constate que z est une variable libre ; on pose $z = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = 2\,\alpha \\ y = \quad \alpha \\ z = \quad \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1$ est $\mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Nous avons obtenu trois vecteurs propres linéairement indépendants. Ces trois vecteurs propres constituent ainsi une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle base est :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, on obtient :

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

si bien que la matrice de l'endomorphisme dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut par ailleurs vérifier que

$$\begin{aligned} \mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

9) Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{7}{10}-\lambda & -\frac{6}{10} & -\frac{9}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{6}{10}-\lambda & -\frac{6}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\tfrac{1}{10}\right)^3 \begin{vmatrix} 7-10\,\lambda & -6 & -9 \\ -2 & 6-10\,\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 7-10\,\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\mathrm{C}_2 \to \mathrm{C}_2 - 2\,\mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_3 \to \mathrm{C}_3 + (7-10\,\lambda)\,\mathrm{C}_1}}{=} \frac{1}{1000} \begin{vmatrix} 7-10\,\lambda & 20\lambda-20 & 100\,\lambda^2-140\,\lambda+40 \\ -2 & 10-10\,\lambda & 20\,\lambda-20 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{1000} \begin{vmatrix} 20\lambda-20 & 100\,\lambda^2-140\,\lambda+40 \\ 10-10\,\lambda & 20\,\lambda-20 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{1000} \begin{vmatrix} 20\,(\lambda-1) & 20\,(\lambda-1)\,(5\,\lambda-2) \\ -10\,(\lambda-1) & 20\,(\lambda-1) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{1000}\cdot 10\cdot 20\,(\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 5\,\lambda-2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{5}\,(\lambda-1)^2\,(2+5\,\lambda-2)$$

$$= -\lambda\,(\lambda-1)^2$$

Il y a ainsi deux valeurs propres : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $$\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{6}{10} & -\frac{9}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{6}{10} & -\frac{6}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10}\,x - \frac{6}{10}\,y - \frac{9}{10}\,z \\ -\frac{2}{10}\,x + \frac{6}{10}\,y - \frac{6}{10}\,z \\ -\frac{1}{10}\,x - \frac{2}{10}\,y + \frac{7}{10}\,z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{10}\,x - \frac{6}{10}\,y - \frac{9}{10}\,z = 0 \\ -\frac{2}{10}\,x + \frac{6}{10}\,y - \frac{6}{10}\,z = 0 \\ -\frac{1}{10}\,x - \frac{2}{10}\,y + \frac{7}{10}\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 7\,x - 6\,y - 9\,z = 0 \\ -2\,x + 6\,y - 6\,z = 0 \\ -x - 2\,y + 7\,z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2\,y - 7\,z = 0 \\ -20\,y + 40\,z = 0 \\ 10\,y - 20\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2\,y - 7\,z = 0 \\ y - 2\,z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x - 3\,z = 0 \\ y - 2\,z = 0 \end{cases}$$

On constate que z est une variable libre ; on pose $z = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = 3\,\alpha \\ y = 2\,\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$ est $\mathrm{E}_0 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) $$\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{6}{10} & -\frac{9}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{6}{10} & -\frac{6}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10}\,x - \frac{6}{10}\,y - \frac{9}{10}\,z \\ -\frac{2}{10}\,x + \frac{6}{10}\,y - \frac{6}{10}\,z \\ -\frac{1}{10}\,x - \frac{2}{10}\,y + \frac{7}{10}\,z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{10}x - \frac{6}{10}y - \frac{9}{10}z = x \\ -\frac{2}{10}x + \frac{6}{10}y - \frac{6}{10}z = y \\ -\frac{1}{10}x - \frac{2}{10}y + \frac{7}{10}z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -3x - 6y - 9z = 0 \\ -2x - 4y - 6z = 0 \\ -x - 2y - 3z = 0 \end{cases} \iff$$

$= x + 2y + 3z = 0$

On constate que y et z sont des variables libres ; on pose $y = \alpha$ et $z = \beta$ pour obtenir la solution générale :

$$\begin{cases} x = -2\alpha - 3\beta \\ y = \quad \alpha \\ z = \quad \beta \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1$ est donc :

$\mathrm{E}_1 = \Pi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$

Nous avons obtenu trois vecteurs propres linéairement indépendants. Ces trois vecteurs propres constituent ainsi une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle base est :

$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, on obtient :

(a) $\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{6}{10} & -\frac{9}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{6}{10} & -\frac{6}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{6}{10} & -\frac{9}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{6}{10} & -\frac{6}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{6}{10} & -\frac{9}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{6}{10} & -\frac{6}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

si bien que la matrice de l'endomorphisme dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

On peut par ailleurs vérifier que

$\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{6}{10} & -\frac{9}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{6}{10} & -\frac{6}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} & -\frac{6}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & -\frac{7}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{6}{10} & -\frac{9}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{6}{10} & -\frac{6}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$