7.14 h est un endormophisme de E dont la matrice relativement à la base $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ est $\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On constate immédiatement que la matrice H est déjà échelonnée et de rang 3, d'où l'on tire que :

1) l'endomorphisme h est surjectif ; il est donc également injectif, vu l'exercice 6.11 : h est ainsi bien un automorphisme ;
2) vu le théorème de la page 2.6, la matrice H est inversible.

Appliquons la méthode de Gauss-Jordan pour calculer H^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_2 \to \frac{1}{3}\mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow[\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3]{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On a ainsi trouvé $\mathrm{H}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$h^{-1}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

$$h^{-1}(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{3}\,e_1 + \tfrac{1}{3}\,e_2$$

$$h^{-1}(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -e_2 + e_3$$