Chamblandes 2008 — Problème 4

Le volume de la boîte, que l'on cherche à maximiser, est donné par $\mathrm{V} = x \cdot y \cdot 2\,x = 2\,x^2\,y$.

On sait en outre que la somme des trois dimensions vaut 45 cm, c'est-à-dire :
$45 = x + y + 2\,x = 3\,x + y \quad \Longleftrightarrow \quad y = 45 - 3\,x$.

On peut ainsi écrire le volume à maximiser comme fonction de la seule variable x :
$\mathrm{V} = f(x) = 2\,x^2\,(45 - 3\,x) = 90\,x^2 - 6\,x^3$

Vu que les dimensions de la boîte doivent être positives, il s'ensuit que
$x \geqslant 0$ et $y = 45 - 3\,x \geqslant 0 \iff x \leqslant 15$.
Par conséquent, $\mathrm{D}_f = [0\,;15]$.

Déterminons la valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle $\mathrm{D}_f = [0\,;15]$.
$f'(x) = (90\,x^2 - 6\,x^3)' = 180\,x - 18\,x^2 = 18\,x\,(10 - x)$

		0		10	
$18\,x$	$-$	0	$+$		$+$
$10 - x$	$+$		$+$	0	$-$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$f(0) = 90 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0^3 = 0$

$f(10) = 90 \cdot 10^2 - 6 \cdot 10^3 = 3000$

$f(15) = 90 \cdot 15^2 - 6 \cdot 15^3 = 0$

Le volume maximal de la boîte vaut 3000 cm^3.
On l'obtient lorsque $x = 10$ et $y = 45 - 3 \cdot 10 = 15$.
Ainsi la boîte doit mesurer 10 cm de large, 15 cm de long et 20 cm de haut.