1.10 1) Soient A une matrice de type $m \times n$, B une matrice de type $n \times p$ et C une matrice de type $p \times q$.

Posons D = AB.

Alors $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.

Posons E = (AB) C = D C.

Alors, pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant q$, on a :

$$e_{ij} = \sum_{l=1}^{p} d_{il}\, c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kl}\, c_{lj}$$

Posons F = BC.

Alors $f_{ij} = \sum_{l=1}^{p} b_{il}\, c_{lj}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant q$.

Posons G = A (BC) = AF.

Alors, pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant q$, on a :

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, f_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl}\, c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik}\, b_{kl}\, c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kl}\, c_{lj}$$

Puisque $e_{ij} = g_{ij}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant q$, on en conclut que E = G, c'est-à-dire (AB) C = A (BC).

2) Soit A une matrice de type $m \times n$.

Posons $\mathrm{I}_n = (b_{ij})$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Alors $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$

Posons C = AI.

Alors, pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = a_{ij}$$

On a ainsi établi l'égalité C = AI = A.

Posons $\mathrm{I}_m = (b_{ij})$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Alors $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$

Posons C = IA.

Alors, pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_{kj} = a_{ij}$$

On constate donc que C = IA = A.

3) Soient A une matrice de type $m \times n$, B et C deux matrices de type $n \times p$.

Posons D = B + C.
Alors $d_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \quad$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.

Posons E = A (B + C) = AD.
Alors, pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a :

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, d_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} + a_{ik}\, c_{kj}$$

Posons F = AB.
Alors $f_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \quad$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.

Posons G = AC.
Alors $g_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{kj} \quad$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.

Posons H = AB + AC = F + G.
Alors, pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a :

$$h_{ij} = f_{ij} + g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} + a_{ik}\, c_{kj}$$

On a montré que E = H, en d'autres termes que A (B + C) = AB + AC .

4) Soient A et B des matrices de type $m \times n$ et C une matrice de type $n \times p$.

Posons D = A + B.
Alors $d_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

Posons E = (A + B) C = DC.
Alors, pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a :

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik})\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{kj} + b_{ik}\, c_{kj}$$

Posons F = AC.
Alors $f_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{kj} \quad$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.

Posons G = BC.
Alors $g_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, c_{kj} \quad$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.

Posons H = AC + BC = F + G.
Alors, pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a :

$$h_{ij} = f_{ij} + g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{kj} + b_{ik}\, c_{kj}$$

On a établi que E = H, c'est-à-dire (A + B) C = AC + BC .

5) Soient A une matrice de type $m \times n$, B une matrice de type $n \times p$ et λ un nombre réel.

Posons $\mathrm{C} = \lambda\,\mathrm{B}$.
Alors $c_{ij} = \lambda\, b_{ij}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.

Posons $\mathrm{D} = \mathrm{A}\,(\lambda\,\mathrm{B}) = \mathrm{AC}$.
Alors, pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a :

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(\lambda\, b_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda\, a_{ik}\, b_{kj} = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Posons $\mathrm{E} = \lambda\,\mathrm{A}$.
Alors $e_{ij} = \lambda\, a_{ij}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

Posons $\mathrm{F} = (\lambda\,\mathrm{A})\,\mathrm{B} = \mathrm{EB}$.
Alors, pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a :

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}\, b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda\, a_{ik})\, b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \lambda\, a_{ik}\, b_{kj} = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Posons $\mathrm{G} = \mathrm{AB}$.
Alors $g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.

Posons $\mathrm{H} = \lambda\,(\mathrm{AB}) = \lambda\,\mathrm{G}$.
Alors, pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a :

$$h_{ij} = \lambda\, g_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

On a donc obtenu $\mathrm{D} = \mathrm{F} = \mathrm{H}$, à savoir $\mathrm{A}\,(\lambda\,\mathrm{B}) = (\lambda\,\mathrm{A})\,\mathrm{B} = \lambda\,(\mathrm{AB})$.