9.15 1) Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & \alpha & \alpha \\ \alpha & -\lambda & \alpha \\ \alpha & \alpha & -\lambda \end{vmatrix} \overset{C_3 \to C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & -\lambda & \alpha + \lambda \\ \alpha & \alpha & -\alpha - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha + \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & -\lambda & 1 \\ \alpha & \alpha & -1 \end{vmatrix} \overset{L_3 \to L_3 + L_2}{=} (\alpha + \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & -\lambda & 1 \\ 2\,\alpha & \alpha - \lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(\alpha + \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & \alpha \\ 2\,\alpha & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = -(\alpha + \lambda)\,\big(-\lambda\,(\alpha - \lambda) - 2\,\alpha \cdot \alpha\big)$$

$$= -(\alpha + \lambda)\,(\lambda^2 - \alpha\,\lambda - 2\,\alpha^2) = -(\alpha + \lambda)\,(\lambda + \alpha)\,(\lambda - 2\,\alpha)$$

Il y a ainsi deux valeurs propres : $\lambda_1 = -\alpha$ et $\lambda_2 = 2\,\alpha$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\,y + \alpha\,z \\ \alpha\,x + \alpha\,z \\ \alpha\,x + \alpha\,y \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha\,x \\ -\alpha\,y \\ -\alpha\,z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha\,y + \alpha\,z = -\alpha\,x \\ \alpha\,x + \alpha\,z = -\alpha\,y \\ \alpha\,x + \alpha\,y = -\alpha\,z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha\,x + \alpha\,y + \alpha\,z = 0 \\ \alpha\,x + \alpha\,y + \alpha\,z = 0 \\ \alpha\,x + \alpha\,y + \alpha\,z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad \alpha\,(x + y + z) = 0$$

i. Si $\alpha = 0$, l'équation $0 \cdot (x + y + z) = 0$ est satisfaite quel que soit $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$. Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ constitue donc un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -\alpha = 0$.

ii. Si $\alpha \neq 0$, l'équation $\alpha\,(x + y + z) = 0$ peut être simplifiée en $x + y + z = 0$. On constate que y et z sont des variables libres ; en posant $y = \beta$ et $z = \gamma$, on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = -\beta - \gamma \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases} = -\beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -\alpha$ est donc :

$$E_{-\alpha} = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

(b) $$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\,y + \alpha\,z \\ \alpha\,x + \alpha\,z \\ \alpha\,x + \alpha\,y \end{pmatrix} = 2\,\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\alpha\,x \\ 2\,\alpha\,y \\ 2\,\alpha\,z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha\,y + \alpha\,z = 2\,\alpha\,x \\ \alpha\,x + \alpha\,z = 2\,\alpha\,y \\ \alpha\,x + \alpha\,y = 2\,\alpha\,z \end{cases} \iff \begin{cases} -2\,\alpha\,x + \alpha\,y + \alpha\,z = 0 \\ \alpha\,x - 2\,\alpha\,y + \alpha\,z = 0 \\ \alpha\,x + \alpha\,y - 2\,\alpha\,z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\,x + \quad \alpha\,y - 2\,\alpha\,z = 0 \\ \quad\; - 3\,\alpha\,y + 3\,\alpha\,z = 0 \\ \qquad 3\,\alpha\,y - 3\,\alpha\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha\,x + \alpha\,y - 2\,\alpha\,z = 0 \\ \qquad \alpha\,y - \quad \alpha\,z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha\,x \qquad - \alpha\,z = 0 \\ \qquad \alpha\,y - \alpha\,z = 0 \end{cases}$$

i. Si $\alpha = 0$, ce système se réduit à $0 = 0$, condition qui est satisfaite quel que soit $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$. Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ constitue donc un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2\,\alpha = 0$.

ii. Si $\alpha \neq 0$, le système se ramène à $\begin{cases} x \quad - z = 0 \\ \quad y - z = 0 \end{cases}$.

On constate que z est une variable libre ; en posant $z = \beta$, on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = \beta \\ y = \beta \\ z = \beta \end{cases} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2\,\alpha$ est donc :

$$\mathrm{E}_{2\,\alpha} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Si $\alpha = 0$, alors $\mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle que soit la base de $\mathbb{R}^3$, la matrice associée à h_α est la matrice nulle. Vu que la matrice nulle est diagonale, l'endomorphisme h_α est bien diagonalisable.

Si $\alpha \neq 0$, alors $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres.

La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$ est $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculons l'inverse de P à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \frac{1}{3}\mathrm{L}_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Vérifions à présent que l'endomorphisme h_α est bien diagonalisable :

$$\begin{aligned}
A'_\alpha = P^{-1}A_\alpha P &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha & 2\,\alpha \\ \alpha & 0 & 2\,\alpha \\ 0 & \alpha & 2\,\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\,\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2) Montrons par récurrence que $(A')^n = \begin{pmatrix} (-\alpha)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\alpha)^n & 0 \\ 0 & 0 & (2\,\alpha)^n \end{pmatrix}$.

Initialisation : Si $n = 1$, l'égalité $(A')^1 = \begin{pmatrix} (-\alpha)^1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\alpha)^1 & 0 \\ 0 & 0 & (2\,\alpha)^1 \end{pmatrix}$ est triviale.

Hérédité : Supposons $(A')^n = \begin{pmatrix} (-\alpha)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\alpha)^n & 0 \\ 0 & 0 & (2\,\alpha)^n \end{pmatrix}$ pour $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
(A')^{n+1} = A' \cdot (A')^n &= \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\,\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-\alpha)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\alpha)^n & 0 \\ 0 & 0 & (2\,\alpha)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-\alpha)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-\alpha)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (2\,\alpha)^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La formule $A' = P^{-1}AP$ implique $A = PA'P^{-1}$. Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
A^n = (PA'P^{-1})^n &= PA'\underbrace{P^{-1}P}_{I_3}A'\underbrace{P^{-1}P}_{I_3}A'\underbrace{P^{-1}P}_{I_3}A'P^{-1}\dots PA'P^{-1} \\
&= PA'A'A'\dots A'P^{-1} \\
&= P(A')^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-\alpha)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\alpha)^n & 0 \\ 0 & 0 & (2\,\alpha)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-\alpha)^n & (-\alpha)^n & 2^n\,\alpha^n \\ -(-\alpha)^n & 0 & 2^n\,\alpha^n \\ 0 & -(-\alpha)^n & 2^n\,\alpha^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\,\alpha^n \begin{pmatrix} 2\,(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n \\ -(-1)^n + 2^n & 2\,(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n \\ -(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n & 2\,(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$