Chamblandes 2006 — Problème 1

a) La fonction f n'est pas définie si $x^4 = 0$, c'est-à-dire si $x = 0$.
Par conséquent $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 - 50\,(-x)^2 + 49}{(-x)^4} = \frac{x^4 - 50\,x^2 + 49}{x^4} = f(x)$$

La fonction f est paire.

$$f(x) = \frac{x^4 - 50\,x^2 + 49}{x^4} = \frac{(x^2-1)\,(x^2-49)}{x^4} = \frac{(x-1)\,(x+1)\,(x-7)\,(x+7)}{x^4}$$

		-7		-1		0		1		7	
$x-1$	$-$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$		$+$
$x-7$	$-$		$-$		$-$	‖	$-$		$-$	0	$+$
$x+7$	$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$		$+$		$+$
x^4	$+$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$		$+$
f	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4 - 50\,x^2 + 49}{x^4} = \frac{0^4 - 50 \cdot 0^2 + 49}{0^2} = \frac{49}{0} = \infty$$

$x = 0$ est asymptote verticale

$$\begin{array}{rrr|l} x^4 & -\ 50\,x^2 & +\ 49 & x^4 \\ \cline{4-4} -x^4 & & & 1 \\ \hline & -\ 50\,x^2 & +\ 49 & \end{array} \qquad f(x) = 1 + \frac{-50\,x^2 + 49}{x^4}$$

$y = 1$ est asymptote horizontale

$$\delta(x) = \frac{-50\,x^2 + 49}{x^4} = \frac{(7 - 5\sqrt{2}\,x)\,(7 + 5\sqrt{2}\,x)}{x^4}$$

		$-\frac{7\sqrt{2}}{10}$		0		$\frac{7\sqrt{2}}{10}$	
$7 - 5\sqrt{2}\,x$	$+$		$+$	‖	$+$	0	$-$
$7 + 5\sqrt{2}\,x$	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$
x^4	$+$		$+$	‖	$+$		$+$
δ	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$

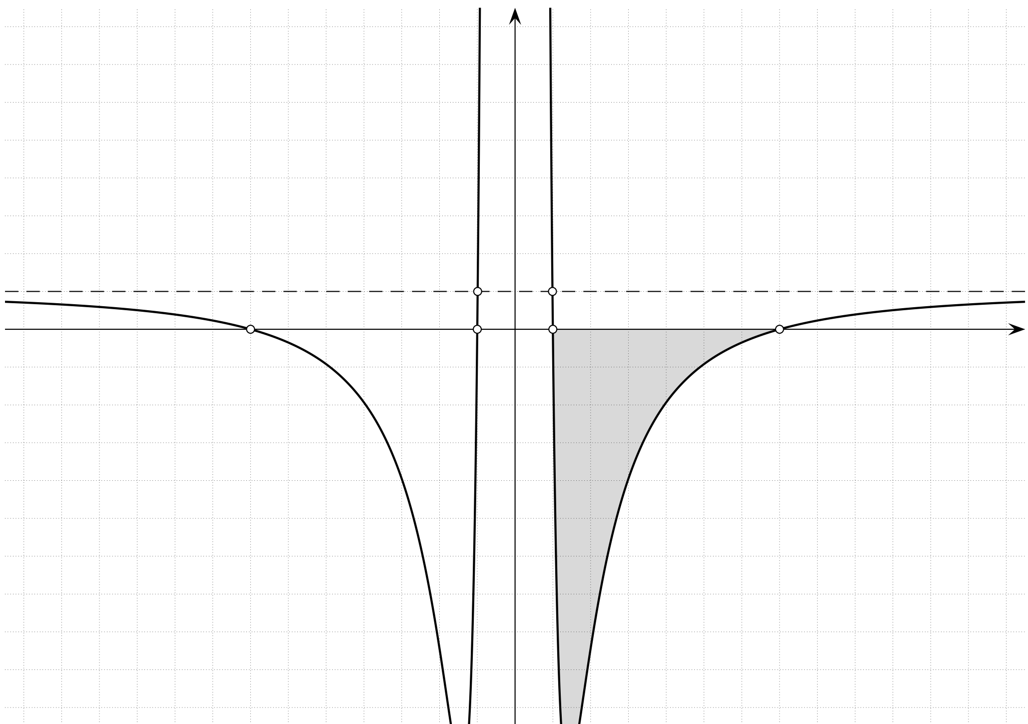
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^4 - 50\,x^2 + 49)'\,(x^4) - (x^4 - 50\,x^2 + 49)\,(x^4)'}{(x^4)^2} \\ &= \frac{(4\,x^3 - 100\,x)\,x^4 - (x^4 - 50\,x^2 + 49)\,4\,x^3}{x^8} \\ &= \frac{4\,x^7 - 100\,x^5 - 4\,x^7 + 200\,x^5 - 196\,x^3}{x^8} = \frac{100\,x^5 - 196\,x^3}{x^8} \\ &= \frac{4\,x^3\,(25\,x^2 - 49)}{x^8} = \frac{4\,(5\,x - 7)\,(5\,x + 7)}{x^5} \end{aligned}$$

		$-\frac{7}{5}$				$\frac{7}{5}$	
4	$+$		$+$	‖	$+$		$+$
$5\,x-7$	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$
$5\,x+7$	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$
x^5	$-$		$-$	‖	$+$		$+$
f'	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f\left(\frac{7}{5}\right)=\dfrac{\left(\frac{7}{5}\right)^4-50\left(\frac{7}{5}\right)^2+49}{\left(\frac{7}{5}\right)^4}=\dfrac{\frac{2401}{625}-50\cdot\frac{49}{25}+49}{\frac{2401}{625}}=\dfrac{-\frac{28\,224}{625}}{\frac{2401}{625}}=-\frac{576}{49}$

Vu que f est paire, $f\left(-\frac{7}{5}\right)=f\left(\frac{7}{5}\right)=-\frac{576}{49}$

Les points $\left(-\frac{7}{5}\,;-\frac{576}{49}\right)$ et $\left(\frac{7}{5}\,;-\frac{576}{49}\right)$ sont des minima.



b) $\displaystyle\int_1^7 \frac{x^4-50\,x^2+49}{x^4}\,dx=\int_1^7\left(\frac{x^4}{x^4}-\frac{50\,x^2}{x^4}+\frac{49}{x^4}\right)dx=\int_1^7\left(1-50\,x^{-2}+49\,x^{-4}\right)dx=$

$\left[x-50\cdot\frac{1}{-2+1}\,x^{-2+1}+49\cdot\frac{1}{-4+1}\,x^{-4+1}\right]_1^7=\left[x+\frac{50}{x}-\frac{49}{3\,x^3}\right]_1^7=$

$\left(7+\frac{50}{7}-\frac{49}{3\cdot 7^3}\right)-\left(1+\frac{50}{1}-\frac{49}{3\cdot 1^3}\right)=\frac{296}{21}-\frac{104}{3}=-\frac{144}{7}$

L'aire géométrique recherchée vaut par conséquent $\frac{144}{7}$.