5.14 1) La famille F est liée, si la matrice $\begin{pmatrix} m & 2 & 4 \\ 1 & m-1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas de rang 3.

Échelonnons cette matrice pour déterminer son rang.

$$\begin{pmatrix} m & 2 & 4 \\ 1 & m-1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m-1 & -4 \\ m & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - m\,L_1}}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & m-3 & -5 \\ 0 & 2-2\,m & 4-m \end{pmatrix} \overset{L_3 \to (m-3)\,L_3 - (2-2\,m)\,L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & m-3 & -5 \\ 0 & 0 & -m^2-3\,m-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & m-3 & -5 \\ 0 & 0 & -(m+1)\,(m+2) \end{pmatrix}$$

On conclut que si $m=-1$ ou $m=-2$, alors la dernière ligne est nulle, de sorte que la matrice $\begin{pmatrix} m & 2 & 4 \\ 1 & m-1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas de rang 3 et que la famille F est liée.

2) (a) Déterminons le sous-espace vectoriel $E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

1re méthode

$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1$ si et seulement si u est une combinaison linéaire des générateurs de E_1 : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Cette équation vectorielle, dont les inconnues sont α, β et γ, est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} -\alpha + \beta + \gamma = x \\ 2\,\alpha - 2\,\beta + 2\,\gamma = y \\ 4\,\alpha - 4\,\beta + \gamma = z \end{cases} \overset{\substack{L_2 \to L_2 + 2\,L_1 \\ L_3 \to L_3 + 4\,L_1}}{\Longrightarrow} \begin{cases} -\alpha + \beta + \gamma = x \\ 4\,\gamma = 2\,x + y \\ 5\,\gamma = 4\,x + z \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \to 4\,L_3 - 5\,L_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} -\alpha + \beta + \gamma = x \\ 4\,\gamma = 2\,x + y \\ 0 = 6\,x - 5\,y + 4\,z \end{cases}$$

$u \in E_1$ si et seulement si le système précédent est possible, c'est-à-dire si $6\,x - 5\,y + 4\,z = 0$.

C'est pourquoi $E_1 = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : 6\,x - 5\,y + 4\,z = 0\big\}$.

2^e^ méthode

Formons la matrice dont les premières lignes sont données par les générateurs de E_1 et dont la dernière ligne correspond au vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, puis échelonnons cette matrice.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 + x\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2\,x + y & 4\,x + z \end{pmatrix} \overset{\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\,x + y & 4\,x + z \end{pmatrix} \overset{\mathrm{L}_4 \to 4\,\mathrm{L}_4 - (2\,x + y)\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\,x - 5\,y + 4\,z \end{pmatrix}$$

Les trois premières lignes indiquent que $\dim(\mathrm{E}_1) = 2$.

Par conséquent, $u \in \mathrm{E}_1$ si et seulement si la dernière ligne supplémentaire n'augmente pas la dimension de l'espace ligne, c'est-à-dire si la dernière ligne de la matrice échelonnée est nulle.

On doit ainsi avoir $6\,x - 5\,y + 4\,z = 0$.

On conclut que $\mathrm{E}_1 = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : 6\,x - 5\,y + 4\,z = 0\big\}$.

(b) Déterminons le sous-espace vectoriel $\mathrm{E}_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

1^re^ méthode

$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{E}_2$ si et seulement si u est une combinaison linéaire des générateurs de E_2 : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Cette équation vectorielle, dont les inconnues sont α, β et γ, est équivalente au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2\,\alpha + \beta + \gamma &=& x \\ 2\,\alpha - 3\,\beta + 2\,\gamma &=& y \\ 4\,\alpha - 4\,\beta + \gamma &=& z \end{array}\right. \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + 2\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} -2\,\alpha + \beta + \gamma &=& x \\ -2\,\beta + 3\,\gamma &=& x + y \\ -2\,\beta + 3\,\gamma &=& 2\,x + z \end{array}\right.$$

$$\overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} -2\,\alpha + \beta + \gamma &=& x \\ -2\,\beta + 3\,\gamma &=& x + y \\ 0 &=& x - y + z \end{array}\right.$$

$u \in \mathrm{E}_2$ si et seulement si le système précédent est possible, c'est-à-dire si $x - y + z = 0$.

Par conséquent $\mathrm{E}_2 = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\big\}$.

2^e^ méthode

Formons la matrice dont les premières lignes sont données par les générateurs de E_2 et dont la dernière ligne correspond au vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, puis échelonnons cette matrice.

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \overset{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_3}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \\ x & y & z \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + 2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - x\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -2\,x+y & -x+z \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to -\frac{1}{5}\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \frac{1}{6}\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2\,x+y & -x+z \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - (-2\,x+y)\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-y+z \end{pmatrix}$$

Les trois premières lignes indiquent que $\dim(\mathrm{E}_2) = 2$.

Donc $u \in \mathrm{E}_2$ si et seulement si la dernière ligne supplémentaire n'augmente pas la dimension de l'espace ligne, c'est-à-dire si la dernière ligne de la matrice échelonnée est nulle.

On doit par conséquent avoir $x - y + z = 0$.

On obtient $\mathrm{E}_2 = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\big\}$.

3) $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$ contient les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ qui satisfont les conditions définies par E_1 et E_2, c'est-à-dire le système

$$\begin{cases} 6\,x - 5\,y + 4\,z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 6\,x - 5\,y + 4\,z = 0 \end{cases}$$

$$\overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 6\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ \phantom{x - {}} y - 2\,z = 0 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x \phantom{{}- y} - z = 0 \\ \phantom{x - {}} y - 2\,z = 0 \end{cases}$$

La variable libre est z : on pose $z = \alpha$ pour obtenir la solution :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\,\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ constitue une base de $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$.