**4.16** 1) Examinons si $\begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} \right\rangle$.

$\alpha \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix}$ équivaut au système $\begin{cases} 3\,\alpha = 7\\ 2\,\alpha = -3\\ -2\alpha = 1\end{cases} \xrightarrow[\text{L}_3 \to 3\,\text{L}_3 + 2\,\text{L}_1]{\text{L}_2 \to 3\,\text{L}_2 - 2\,\text{L}_1}$

$\begin{cases} 3\,\alpha = 7\\ 0 = -23\\ 0 = 17\end{cases}$ qui est manifestement impossible.

Les vecteurs $\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix}$ sont donc linéairement indépendants.

2) Examinons si $\begin{pmatrix}-11\\8\\-4\end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix} \right\rangle$.

$\alpha \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11\\8\\-4\end{pmatrix}$ équivaut au système

$$\begin{cases} 3\,\alpha + 7\,\beta = -11\\ 2\,\alpha - 3\,\beta = 8\\ -2\,\alpha + \beta = -4\end{cases} \xrightarrow[\text{L}_3 \to 3\,\text{L}_3 + 2\,\text{L}_1]{\text{L}_2 \to 3\,\text{L}_2 - 2\,\text{L}_1} \begin{cases} 3\,\alpha + 7\,\beta = -11\\ -23\,\beta = 46\\ 17\,\beta = -34\end{cases} \xrightarrow[\text{L}_3 \to \frac{1}{17}\,\text{L}_3]{\text{L}_2 \to -\frac{1}{23}\,\text{L}2}$$

$$\begin{cases} 3\,\alpha + 7\,\beta = -11\\ \beta = -2\\ \beta = -2\end{cases} \xrightarrow[\text{L}_3 \to \text{L}_3 - \text{L}_2]{\text{L}_1 \to \text{L}_1 - 7\,\text{L}_2} \begin{cases} 3\,\alpha = 3\\ \beta = -2\\ 0 = 0\end{cases} \xrightarrow{\text{L}_1 \to \frac{1}{3}\,\text{L}_1} \begin{cases} \alpha = 1\\ \beta = -2\\ 0 = 0\end{cases}$$

Comme $\begin{pmatrix}-11\\8\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix}$, on en conclut que

$$\left\langle \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}-11\\8\\-4\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

3) Examinons si $\begin{pmatrix}4\\-5\\3\end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix} \right\rangle$.

$\alpha \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-5\\3\end{pmatrix}$ équivaut au système

$$\begin{cases} 3\,\alpha + 7\,\beta = 4\\ 2\,\alpha - 3\,\beta = -5\\ -2\,\alpha + \beta = 3\end{cases} \xrightarrow[\text{L}_3 \to 3\,\text{L}_3 + 2\,\text{L}_1]{\text{L}_2 \to 3\,\text{L}_2 - 2\,\text{L}_1} \begin{cases} 3\,\alpha + 7\,\beta = 4\\ -23\,\beta = -23\\ 17\,\beta = 17\end{cases} \xrightarrow[\text{L}_3 \to \frac{1}{17}\,\text{L}_3]{\text{L}_2 \to -\frac{1}{23}\,\text{L}2}$$

$$\begin{cases} 3\,\alpha + 7\,\beta = 4 \\ \beta = 1 \\ \beta = 1 \end{cases} \overset{\substack{L_1 \to L_1 - 7\,L_2 \\ L_3 \to L_3 - L_2}}{\Longrightarrow} \begin{cases} 3\,\alpha \phantom{+\beta} = -3 \\ \beta = \phantom{-}1 \\ 0 = \phantom{-}0 \end{cases} \overset{L_1 \to \frac{1}{3}\,L_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} \alpha \phantom{+\beta} = -1 \\ \beta = \phantom{-}1 \\ 0 = \phantom{-}0 \end{cases}$$

Comme $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, on en conclut que

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

En résumé, on a trouvé que $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et que les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.

En d'autres termes $\left( \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ constitue une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\left( \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.