4.7 Résolvons l'équation vectorielle

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} 2\,\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\,\alpha_2 = 0 \\ 2\,\alpha_1 = 0 \end{cases} \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2\,\alpha_1 = 0 \\ 2\,\alpha_2 = 0 \\ 2\,\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \overset{L_3 \to L_3 - L_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2\,\alpha_1 = 0 \\ 2\,\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \to 2\,L_3 + L_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2\,\alpha_1 = 0 \\ 2\,\alpha_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \overset{\substack{L_1 \to \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \to \frac{1}{2} L_2}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Étant donné que la seule solution est la solution triviale $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont libres.

Pour montrer qu'ils engendrent le même sous-espace vectoriel que les vecteurs $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$, il suffit de montrer que ces vecteurs sont tous deux engendrés par les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'équation vectorielle

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} 2\,\alpha_1 - \alpha_2 = 4 \\ 2\,\alpha_2 = 6 \\ 2\,\alpha_1 = 7 \end{cases} \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2\,\alpha_1 = 7 \\ 2\,\alpha_2 = 6 \\ 2\,\alpha_1 - \alpha_2 = 4 \end{cases} \overset{L_3 \to L_3 - L_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2\,\alpha_1 = 7 \\ 2\,\alpha_2 = 6 \\ -\alpha_2 = -3 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \to 2\,L_3 + L_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2\,\alpha_1 = 7 \\ 2\,\alpha_2 = 6 \\ 0 = 0 \end{cases} \overset{\substack{L_1 \to \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \to \frac{1}{2} L_2}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \alpha_1 = \frac{7}{2} \\ \alpha_2 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On peut ainsi écrire $\frac{7}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

L'équation vectorielle

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$$

équivaut au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,\alpha_1 & - & \alpha_2 & = & -8 \\ & & 2\,\alpha_2 & = & 12 \\ 2\,\alpha_1 & & & = & -2 \end{array}\right. \overset{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_3}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,\alpha_1 & & & = & -2 \\ & & 2\,\alpha_2 & = & 12 \\ 2\,\alpha_1 & - & \alpha_2 & = & -8 \end{array}\right. \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,\alpha_1 & & & = & -2 \\ & & 2\,\alpha_2 & = & 12 \\ & - & \alpha_2 & = & -6 \end{array}\right.$$

$$\overset{\mathrm{L}_3 \to 2\,\mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,\alpha_1 & & & = & -2 \\ & & 2\,\alpha_2 & = & 12 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \frac{1}{2}\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to \frac{1}{2}\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} \alpha_1 & & & = & -1 \\ & & \alpha_2 & = & 6 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

On obtient de la sorte $- \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$.