6.10 1) Puisque E est de dimension finie, il existe une base finie de E.

D'après l'exercice 6.8 1), l'image par h de cette base constitue une famille finie de générateurs de $\mathrm{Im}(h)$.

Vu le deuxième théorème de la page 4.4, on peut extraire de cette famille de générateurs une base $(f_1\,;\dots;f_n)$ de $\mathrm{Im}(h)$.

2) (a) Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des scalaires tels que $\alpha_1\cdot e_1+\dots+\alpha_n\cdot e_n=0$.

En appliquant l'application linéaire h aux deux membres de cette égalité, on obtient :

$h(\alpha_1\cdot e_1+\dots+\alpha_n\cdot e_n)=h(0)$

$\alpha_1\cdot h(e_1)+\dots+\alpha_n\cdot h(e_n)=0$

$\alpha_1\cdot f_1+\dots+\alpha_n\cdot f_n=0$

Puisque les vecteurs $f_1,\dots,f_n$ sont linéairement indépendants, on doit avoir $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$.

On a ainsi montré que la famille $(e_1\,;\dots;e_n)$ est libre.

(b) On pose $\mathrm{I}=\langle e_1\,;\dots;e_n\rangle$.

Soit $x\in\mathrm{E}$. Il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ tels que $h(x)=\alpha_1\cdot f_1+\dots+\alpha_n\cdot f_n$.

On pose $v=\alpha_1\cdot e_1+\dots+\alpha_n\cdot e_n\in\langle e_1\,;\dots;e_n\rangle=\mathrm{I}$ et $u=x-v$.

i. $h(u)=h(x-v)=h(x)-h(v)=h(x)-h(\alpha_1\cdot e_1+\dots+\alpha_n\cdot e_n)$

$=\big(\alpha_1\cdot f_1+\dots+\alpha_n\cdot f_n\big)-\big(\alpha_1\cdot\underbrace{h(e_1)}_{f_1}+\dots+\alpha_n\cdot\underbrace{h(e_n)}_{f_n}\big)=0$

Par conséquent $u\in\mathrm{Ker}(h)$.

ii. $x=u+v$ avec $u\in\mathrm{Ker}(h)$ et $v\in\mathrm{I}$, c'est-à-dire $x\in\mathrm{Ker}(h)+\mathrm{I}$.

(c) Soit $u\in\mathrm{Ker}(h)\cap\mathrm{I}$.

Puisque $u\in\mathrm{I}$, il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ tels que $u=\alpha_1\cdot e_1+\dots+\alpha_n\cdot e_n$.

Vu que $u\in\mathrm{Ker}(h)$, on a :

$0=h(u)=h(\alpha_1\cdot e_1+\dots+\alpha_n\cdot e_n)=\alpha_1\cdot h(e_1)+\dots+\alpha_n\cdot h(e_n)$

$=\alpha_1\cdot f_1+\dots+\alpha_n\cdot f_n$.

Attendu que la famille $(f_1\,;\dots;f_n)$ est libre, cela implique $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$.

Il en résulte que $u=0\cdot e_1+\dots+0\cdot e_n=0$.

On a donc montré que $\mathrm{Ker}(h)\cap\mathrm{I}=\{0\}$.

On conclut grâce à la relation de Grassmann :

$\dim(\mathrm{E})=\dim\big(\mathrm{Ker}(h)\big)+\underbrace{\dim(\mathrm{I})}_{=\dim\left(\mathrm{Im}(h)\right)}-\underbrace{\dim\big(\mathrm{Ker}(h)\cap\mathrm{I}\big)}_{=0}$.