9 Diagonalisation des endomorphismes

Deux matrices carrées A et B de même ordre sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.

D'après le théorème de la page 7.7, deux matrices sont semblables si elles représentent le même endomorphisme relativement à des bases différentes, la matrice P étant la matrice de changement de base.

Puisque la représentation matricielle d'un endomorphisme dépend du choix d'une base, la question est de savoir s'il existe un choix judicieux d'une base qui rende la représentation matricielle plus simple, par exemple diagonale. En d'autres termes, le problème revient à se demander si toute matrice est semblable à une matrice diagonale.

On dira ainsi qu'un endomorphisme h d'un espace vectoriel E de dimension finie est **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de h est diagonale. De même, une matrice est dite **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

9.1 Montrer que deux matrices semblables ont même déterminant.

Indication : si A et B sont deux matrices semblables, il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$; montrer que $\det(B) = \det(A)$.

Soit h un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Puisque toutes les représentations matricielles de h ont le même déterminant, on appelle **déterminant de l'endomorphisme** h le déterminant de l'une quelconque de ses représentations matricielles ; on le note $\det(h)$.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle **trace** de A, et l'on note Tr(A), la somme de ses éléments diagonaux :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \ldots + a_{nn} .$$

9.2 Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

9.3 Montrer que deux matrices semblables ont même trace.

Soit h un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Puisque toutes les représentations matricielles de h ont la même trace, on appelle **trace de l'endomorphisme** h la trace de l'une quelconque de ses représentations matricielles ; on la note $\mathrm{Tr}(h)$.

Valeurs propres et vecteurs propres

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et h un endomorphisme de E.

Un scalaire λ est appelé **valeur propre** de h s'il existe un vecteur *non nul* $v \in \mathrm{E}$ pour lequel

$$h(v) = \lambda \cdot v$$

Tout vecteur satisfaisant cette relation est alors appelé un **vecteur propre** de h correspondant à la valeur propre λ.

Si A est une matrice carrée d'ordre n, on appelle, par abus de langage, valeur propre de A toute valeur propre de l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ admettant A pour matrice, c'est-à-dire de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $h(x) = \mathrm{A}\,x$.

9.4 Montrer que l'ensemble $\mathrm{E}_\lambda = \big\{v \in \mathrm{E} : h(v) = \lambda \cdot v\big\}$, que l'on appelle l'**espace propre** associé à λ, est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : Par définition, un vecteur propre est non nul. La raison de ce choix est que les vecteurs propres sont utilisés pour construire des bases.
En revanche, une valeur propre peut être nulle : $\mathrm{E}_0 = \mathrm{Ker}(h)$.

9.5 Montrer qu'un endomorphisme h d'un espace vectoriel E de dimension n est bijectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de h.

Indication : montrer, à l'aide des exercices 6.11 et 6.7, que

1) si 0 n'est pas une valeur propre de h, alors $\mathrm{Ker}(h) = \{0\}$ et h est bijectif ;
2) si 0 est une valeur propre de h, alors $\mathrm{Ker}(h) \neq \{0\}$ est h n'est pas bijectif.

9.6 Montrer que si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes d'un endomorphisme, alors $\mathrm{E}_{\lambda_1} \cap \mathrm{E}_{\lambda_2} = \{0\}$.

Indication : utiliser la propriété 3) de l'exercice 3.1.

Remarque : l'exercice 9.6 signifie que des vecteurs propres distincts correspondant à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.
Plus généralement, nous avons le résultat suivant :

Proposition *Soient h un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *de dimension finie, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de h et $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs propres associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ respectivement. Alors la famille $(v_1\,; \dots ; v_p)$ est libre.*

Preuve On procède par récurrence sur p.

Initialisation : Si $p = 1$, la famille (v_1) est libre, puisque tout vecteur propre est non nul.

Hérédité : Supposons $p > 1$ et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des scalaires tels que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_p \cdot v_p = 0 \tag{1}$$

En appliquant h à la relation précédente, nous obtenons par linéarité

$$\alpha_1 \cdot h(v_1) + \ldots + \alpha_p \cdot h(v_p) = h(0) = 0$$

Mais par hypothèse $h(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$; donc

$$\alpha_1 \, \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_p \, \lambda_p \cdot v_p = 0 \tag{2}$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation (1) par λ_p, on trouve

$$\alpha_1 \, \lambda_p \cdot v_1 + \ldots + \alpha_p \, \lambda_p \cdot v_p = 0 \tag{3}$$

Soustrayons maintenant (3) de (2)

$$\alpha_1 \, (\lambda_1 - \lambda_p) \cdot v_1 + \ldots + \alpha_{p-1} \, (\lambda_{p-1} - \lambda_p) \cdot v_{p-1} = 0$$

Par hypothèse de récurrence, chacun des coefficients $\alpha_i \, (\lambda_i - \lambda_p)$ est nul pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$. Puisque les valeurs propres λ_i sont deux à deux distinctes, il suit que $\lambda_i - \lambda_p \neq 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant p-1$. Donc $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{p-1} = 0$.

En remplaçant les $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ par leurs valeurs dans (1), on obtient $\alpha_p \cdot v_p = 0$, de sorte que $\alpha_p = 0$, vu que $v_p \neq 0$.

En définitive $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$, ce qui signifie que les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ sont linéairement indépendants.

9.7 Soit h un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer que h admet au plus n valeurs propres distinctes.

Soit h un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Remarquons que h peut être représenté par une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

si et seulement s'il existe une base $(e_1 \, ; \ldots ; e_n)$ de E pour laquelle

$$\begin{array}{rcl} h(e_1) & = & \lambda_1 \cdot e_1 \\ h(e_2) & = & \lambda_2 \cdot e_2 \\ h(e_3) & = & \lambda_3 \cdot e_3 \\ \vdots & = & \vdots \\ h(e_n) & = & \lambda_n \cdot e_n \end{array}$$

ce qui veut dire que les vecteurs $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ sont des vecteurs propres de h correspondant respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$.
On a ainsi montré :

Théorème : *un endomorphisme h d'un espace vectoriel* E *de dimension finie n peut être représenté par une matrice diagonale* B *si et seulement si* E *admet une base formée de vecteurs propres de h ; dans ce cas, les éléments diagonaux de* B *sont les valeurs propres correspondantes.*

Remarque : ce théorème peut aussi s'exprimer ainsi : une matrice carrée A d'ordre n est semblable à une matrice diagonale B si et seulement si A possède n vecteurs propres linéairement indépendants ; dans ce cas, les éléments diagonaux de B sont les valeurs propres correspondantes.

9.8 Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable.

9.9 Montrer que l'endormorphisme h de $\mathbb{R}^2$ défini par $h\big((x\,;y)\big) = (y\,;-x)$ n'admet aucune valeur propre et n'est donc pas diagonalisable.

Polynôme caractéristique

Théorème *Soient h un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *de dimension finie n et λ un nombre réel. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *λ est valeur propre de h ;*
2) *$\mathrm{Ker}(h - \lambda \cdot Id) \neq \{0\}$;*
3) *$h - \lambda \cdot Id$ n'est pas un automorphisme ;*
4) *$\det(h - \lambda \cdot Id) = 0$.*

On appelle $\det(h - \lambda \cdot \mathrm{Id})$ le **polynôme caractéristique** de l'endomorphisme h et $\det(h - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = 0$ l'**équation caractéristique** de l'endomorphisme h .

Preuve L'équivalence des trois dernières conditions résulte immédiatement des exercices 6.7 et 6.11, ainsi que du théorème de la page 8.4.

Il reste à montrer l'équivalence des deux premières conditions.

Supposons que λ soit une valeur propre de h. Il existe un vecteur non nul $v \in \mathrm{E}$ tel que $h(v) = \lambda \cdot v$. Il en résulte $\big(h - \lambda \cdot \mathrm{Id}\big)(v) = h(v) - \lambda \cdot \mathrm{Id}(v) = \lambda \cdot v - \lambda \cdot v = 0$. Ainsi $v \in \mathrm{Ker}(h - \lambda \cdot \mathrm{Id})$. Puisque $v \neq 0$, on a bien $\mathrm{Ker}(h - \lambda \cdot \mathrm{Id}) \neq \{0\}$.

Supposons que $\mathrm{Ker}(h - \lambda \cdot \mathrm{Id}) \neq \{0\}$. Il existe alors un vecteur non nul $v \in \mathrm{Ker}(h - \lambda \cdot \mathrm{Id})$, c'est-à-dire tel que $0 = \big(h - \lambda \cdot \mathrm{Id}\big)(v) = h(v) - \lambda \cdot v$, à savoir tel que $h(v) = \lambda \cdot v$. Cela signifie donc que λ est une valeur propre de h.

Remarque : les valeurs propres d'un endomorphisme sont ainsi les solutions de son équation caractéristique.

9.10 On donne les endomorphismes suivants de $\mathbb{R}^2$ par leur matrice relativement à une base de $\mathbb{R}^2$:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

Chercher, pour chacun d'eux, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés. Lorsque c'est possible, déterminer la matrice d'un changement de base permettant de diagonaliser l'endomorphisme ; donner également la matrice de l'endomorphisme dans la nouvelle base.

9.11 Mêmes questions qu'à l'exercice 9.10, avec les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ donnés par leur matrice relativement à une base de $\mathbb{R}^3$:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 42 & -64 \\ 0 & 3 & 84 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ 9) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

9.12 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, on considère un endomorphisme h qui admet les valeurs propres 2 et -3 et les espaces propres

$$\mathrm{E}_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_{-3} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Déterminer la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

9.13 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, on considère un endomorphisme h qui admet les valeurs propres 1 et 4 et les espaces propres

$$\mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_4 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Déterminer la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

9.14 Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice A.
2) Montrer que la matrice A est semblable à une matrice diagonale A'.
3) Calculer $(\mathrm{A}')^n$.
4) En déduire A^n.

9.15 Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme h_α de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$\mathrm{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{où } \alpha \text{ est un nombre réel.}$$

1) Prouver que h_α est diagonalisable, et déterminer une base $\mathcal{B}'$ relativement à laquelle la matrice A'_α de h_α est diagonale.
2) Pour tout entier positif n, calculer $(\mathrm{A}'_\alpha)^n$ et $(\mathrm{A}_\alpha)^n$.

9.16 On considère deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2\,u_n + 4\,v_n \end{cases}$.

1) Montrer que la relation de récurrence peut s'écrire $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ où A est une matrice carrée d'ordre 2.
2) Montrer par récurrence que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
3) À l'aide de l'exercice 9.14, déterminer une formule explicite pour u_n et v_n.

9.17 Dans un écosystème donné, on s'intéresse à la variation des populations de lapins et de belettes. On constate que, chaque année, le nombre de lapins est égal à quatre fois le nombre de lapins de l'année précédente, diminué du double du nombre de belettes de l'année précédente. De plus, chaque année, le nombre de belettes est égal à la somme du nombre de belettes et de lapins de l'année précédente. On suppose qu'au début des observations, il y a 100 lapins et 10 belettes.

Calculer les populations de lapins et de belettes après n années.

Réponses

9.8 $\lambda = 4$ ou $\lambda = -1$ $\quad \mathrm{E}_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \mathrm{E}_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9.10 1) $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 4$ $\quad \mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{E}_4 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

2) $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$ $\quad \mathrm{E}_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{E}_3 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\lambda = 3$ $\quad \mathrm{E}_3 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ $\qquad$ A n'est pas diagonalisable

4) $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -3$ $\quad \mathrm{E}_0 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{E}_{-3} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

5) A n'admet aucune valeur propre et n'est donc pas diagonalisable

6) $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 3$ $\quad \mathrm{E}_{-1} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{E}_3 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

7) $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 5$ $\quad \mathrm{E}_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{E}_5 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

8) $\lambda_1 = \cos(t) + \sin(t)$ et $\lambda_2 = \cos(t) - \sin(t)$ $\quad \mathrm{E}_{\cos(t)+\sin(t)} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\mathrm{E}_{\cos(t)-\sin(t)} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}' = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) & 0 \\ 0 & \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}$

9.11 1) $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$ $\quad \mathrm{E}_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 3592 \\ -84 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{E}_3 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

A n'est pas diagonalisable

2) $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 6$ $\quad \mathrm{E}_2 = \Pi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ $\quad \mathrm{E}_6 = \Delta\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & -1 & 1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}' = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

3) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 2$ $\quad \mathrm{E}_{-2} = \Delta\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ $\quad \mathrm{E}_0 = \Delta\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

$$\mathrm{E}_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right) \qquad \mathrm{P} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}' = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

4) $\lambda = 1$ $\quad \mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}\right)$ $\quad$ A n'est pas diagonalisable

5) $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2-\sqrt{6}$ et $\lambda_3 = 2+\sqrt{6}$ $\quad \mathrm{E}_{-3} = \Delta\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$

$$\mathrm{E}_{2-\sqrt{6}} = \Delta\left(\begin{pmatrix}3\sqrt{6}+4\\\sqrt{6}-2\\-3\end{pmatrix}\right) \qquad \mathrm{E}_{2+\sqrt{6}} = \Delta\left(\begin{pmatrix}3\sqrt{6}-4\\\sqrt{6}+2\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix}0 & 3\sqrt{6}+4 & 3\sqrt{6}-4\\1 & \sqrt{6}-2 & \sqrt{6}+2\\-1 & -3 & 3\end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}' = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\0 & 2-\sqrt{6} & 0\\0 & 0 & 2+\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

6) $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 2$ $\quad \mathrm{E}_{-3} = \Delta\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$ $\quad \mathrm{E}_0 = \Delta\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

$$\mathrm{E}_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right) \qquad \mathrm{P} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\-1 & 1 & 3\\2 & 1 & 4\end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}' = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

7) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$ $\quad \mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)$ $\quad \mathrm{E}_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

$$\mathrm{E}_3 = \Delta\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right) \qquad \mathrm{P} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 1 & 2\\0 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

8) $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$ $\quad \mathrm{E}_{-1} = \Pi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ $\quad \mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}' = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

9) $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$ $\quad$ $\mathrm{E}_0 = \Delta\left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ $\quad$ $\mathrm{E}_1 = \Pi\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

9.12 $\begin{pmatrix}-1 & -6\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

9.13 $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

9.14 1) $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$ $\quad$ $\mathrm{E}_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ $\quad$ $\mathrm{E}_3 = \Delta\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$

2) $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}$ avec $\mathrm{P} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

3) $(\mathrm{A}')^n = \begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$

4) $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix}2\cdot 2^n - 3^n & 2^n - 3^n\\ -2\cdot 2^n + 2\cdot 3^n & -2^n + 2\cdot 3^n\end{pmatrix}$

9.15 1) Si $\alpha = 0$, h_0 est diagonalisable et toute base convient.

Si $\alpha \neq 0$, on peut choisir $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

$$\mathrm{A}'_\alpha = \begin{pmatrix}-\alpha & 0 & 0\\ 0 & -\alpha & 0\\ 0 & 0 & 2\,\alpha\end{pmatrix}$$

2) $(\mathrm{A}'_\alpha)^n = \alpha^n \begin{pmatrix}(-1)^n & 0 & 0\\ 0 & (-1)^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}$

$$(\mathrm{A}_\alpha)^n = \tfrac{1}{3}\,\alpha^n \begin{pmatrix}2\,(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n\\ -(-1)^n + 2^n & 2\,(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n\\ -(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n & 2\,(-1)^n + 2^n\end{pmatrix}$$

9.16 1) $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ v_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} u_n = (2\cdot 2^n - 3^n)\,u_0 + (2^n - 3^n)\,v_0\\ v_n = (-2\cdot 2^n + 2\cdot 3^n)\,u_0 + (-2^n + 2\cdot 3^n)\,v_0\end{cases}$

9.17 nombre de lapins : $180\cdot 3^n - 80\cdot 2^n$ $\qquad$ nombre de belettes : $90\cdot 3^n - 80\cdot 2^n$