4.13 Soit $p = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$ un élément de $\mathbb{R}_n[x]$.
Il apparaît immédiatement que p s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de B. La famille B est dès lors génératrice de $\mathbb{R}_n[x]$.

Soient $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$ des réels tels que

$$p(x) = \alpha_n\, x^n + \alpha_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + \alpha_2\, x^2 + \alpha_1\, x + \alpha_0 = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

En remplaçant x par 0 dans cette dernière égalité, on obtient :

$$p(0) = \alpha_n \cdot 0^n + \alpha_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \ldots + \alpha_2 \cdot 0^2 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_0 = 0$$

d'où l'on tire $\alpha_0 = 0$.

En dérivant le polynôme $p(x)$, on trouve :

$$p'(x) = n\, \alpha_n\, x^{n-1} + (n-1)\, \alpha_{n-1}\, x^{n-2} + \ldots + 2\, \alpha_2\, x + \alpha_1 = 0$$

En remplaçant à nouveau x par 0 dans cette dernière égalité, on obtient :

$$p'(0) = n\, \alpha_n \cdot 0^{n-1} + (n-1)\, \alpha_{n-1} \cdot 0^{n-2} + \ldots + 2\, \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_1 = 0$$

d'où l'on tire $\alpha_1 = 0$.

En dérivant une nouvelle fois, on obtient :

$$p''(x) = n\,(n-1)\, \alpha_n\, x^{n-2} + (n-1)\,(n-2)\, \alpha_{n-1}\, x^{n-3} + \ldots + 2\, \alpha_2 = 0$$

En remplaçant à nouveau x par 0, on trouve :

$$p''(0) = n\,(n-1)\, \alpha_n \cdot 0^{n-2} + (n-1)\,(n-2)\, \alpha_{n-1} \cdot 0^{n-3} + \ldots + 2\, \alpha_2 = 0$$

d'où suit que $\alpha_2 = 0$.

En poursuivant ainsi ce processus, on obtient $\alpha_3 = \alpha_4 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Puisque $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, on conclut que la famille B est libre.

On conclut donc que la famille B est une base, vu qu'elle est génératrice et libre.