Chamblandes 2002 — Exercice 1

Position relative des graphes de f et de g

La position relative des graphes de f et de g est donnée par le signe de $f(x) - g(x)$:
– si $f(x) - g(x) > 0$, le graphe de f est au-dessus de celui de g ;
– si $f(x) - g(x) = 0$, les graphes de f et de g se coupent ;
– si $f(x) - g(x) < 0$, le graphe de f est en-dessous de celui de g.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{3}\,x^2 + x + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\,x^2 - x - \frac{1}{3} + \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 3\,x^2 - x + 3}{3\,x} \\ &= \frac{(x^3 - x) - (3\,x^2 - 3)}{3\,x} = \frac{x\,(x^2 - 1) - 3\,(x^2 - 1)}{3\,x} = \frac{(x^2 - 1)\,(x - 3)}{3\,x} \\ &= \frac{(x + 1)\,(x - 1)\,(x - 3)}{3\,x} \end{aligned}$$

		-1		0		1		3	
$x+1$	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	‖	$-$		$-$	0	$+$
$3\,x$	$-$		$-$	‖	$+$		$+$		$+$
$f-g$	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$

Signe de f

		0	
1	$+$	‖	$+$
x	$-$	‖	$+$
f	$-$	‖	$+$

Signe de g

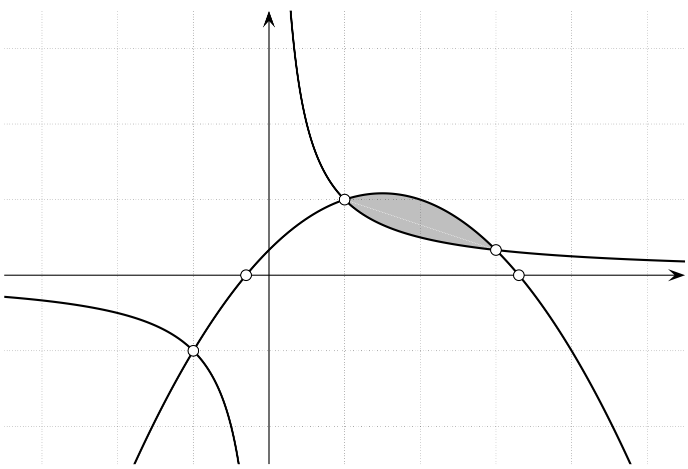
$-\frac{1}{3}\,x^2 + x + \frac{1}{3} = 0$

$x^2 - 3\,x - 1 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 13$

$x_1 = \dfrac{-(-3) - \sqrt{13}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 - \sqrt{13}}{2} \approx -0{,}30$ et $x_2 = \dfrac{-(-3) + \sqrt{13}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 3{,}30$

	$\frac{3-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	
$-$		$+$		$-$



Calcul de l'aire du domaine borné par les graphes de f et de g

$$\int\limits_1^3 g(x)\,dx - \int\limits_1^3 f(x)\,dx = \int\limits_1^3 \big(f(x)-g(x)\big)\,dx = \int\limits_1^3 \left(-\frac{1}{3}\,x^2 + x + \frac{1}{3} - \frac{1}{x}\right)\,dx =$$

$$-\frac{1}{9}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x - \ln\big(|x|\big)\,\Big|_1^3 =$$

$$\left(-\frac{1}{9}\cdot 3^3 + \frac{1}{2}\cdot 3^2 + \frac{1}{3}\cdot 3 - \ln\big(|3|\big)\right) - \left(-\frac{1}{9}\cdot 1^3 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{3}\cdot 1 - \ln\big(|1|\big)\right) =$$

$$\left(-3 + \frac{9}{2} + 1 - \ln(3)\right) - \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0\right) = \left(\frac{-6+9+2}{2} - \ln(3)\right) - \left(\frac{-2+9+6}{18}\right) =$$

$$\frac{5}{2} - \ln(3) - \frac{13}{18} = \frac{45}{18} - \frac{13}{18} - \ln(3) = \frac{32}{18} - \ln(3) = \boxed{\frac{16}{9} - \ln(3)} \approx 0{,}68$$