9.2 Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n.

1) Posons $C = AB$.

   Par définition, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$. En particulier, $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{ki}$.

   Donc $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{ki}$.

2) Posons $D = BA$.

   Par définition, $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_{kj}$. En particulier, $d_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_{ki}$.

   Donc $\mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_{ki}$.

$$\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, b_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, b_{ik}$$

En posant $i^\star = k$ et $k^\star = i$, cette dernière somme devient :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, b_{ik} = \sum_{i^\star=1}^{n} \sum_{k^\star=1}^{n} a_{i^\star k^\star}\, b_{k^\star i^\star} = \mathrm{Tr}(AB)$$

On a ainsi montré que $\mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB)$.