1.11

1) $$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 0+3\cdot(-1) & 1\cdot 3+2\cdot 1+3\cdot 4 & 1\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot 1 \\ 2\cdot 2+1\cdot 0+1\cdot(-1) & 2\cdot 3+1\cdot 1+1\cdot 4 & 2\cdot 2+1\cdot 2+1\cdot 1 \\ -1\cdot 2+1\cdot 0+2\cdot(-1) & -1\cdot 3+1\cdot 1+2\cdot 4 & -1\cdot 2+1\cdot 2+2\cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 17 & 9 \\ 3 & 11 & 7 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

2) $$\mathrm{AC} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 1 \\ 2\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 0 & 2\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 0 & 2\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1 \\ -1\cdot 1+1\cdot 0+2\cdot 0 & -1\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 0 & -1\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) $$\mathrm{AB}+\mathrm{AC} = \begin{pmatrix} -1 & 17 & 9 \\ 3 & 11 & 7 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1 & 17+3 & 9+6 \\ 3+2 & 11+3 & 7+4 \\ -4+(-1) & 6+0 & 2+2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 \\ 5 & 14 & 11 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

4) $$\mathrm{B}+\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 3+1 & 2+1 \\ 0+0 & 1+1 & 2+1 \\ -1+0 & 4+0 & 1+1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

5) $$\mathrm{A}(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 0+3\cdot(-1) & 1\cdot 4+2\cdot 2+3\cdot 4 & 1\cdot 3+2\cdot 3+3\cdot 2 \\ 2\cdot 3+1\cdot 0+1\cdot(-1) & 2\cdot 4+1\cdot 2+1\cdot 4 & 2\cdot 3+1\cdot 3+1\cdot 2 \\ -1\cdot 3+1\cdot 0+2\cdot(-1) & -1\cdot 4+1\cdot 2+2\cdot 4 & -1\cdot 3+1\cdot 3+2\cdot 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 \\ 5 & 14 & 11 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

6) $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3&2\\0&1&2\\-1&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2&2+3&3+2\\2+0&1+1&1+2\\-1+(-1)&1+4&2+1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&5&5\\2&2&3\\-2&5&3\end{pmatrix}$

7) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2=\begin{pmatrix}3&5&5\\2&2&3\\-2&5&3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3&5&5\\2&2&3\\-2&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&5&5\\2&2&3\\-2&5&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3\cdot3+5\cdot2+5\cdot(-2)&3\cdot5+5\cdot2+5\cdot5&3\cdot5+5\cdot3+5\cdot3\\2\cdot3+2\cdot2+3\cdot(-2)&2\cdot5+2\cdot2+3\cdot5&2\cdot5+2\cdot3+3\cdot3\\-2\cdot3+5\cdot2+3\cdot(-2)&-2\cdot5+5\cdot2+3\cdot5&-2\cdot5+5\cdot3+3\cdot3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}9&50&45\\4&29&25\\-2&15&14\end{pmatrix}$

8) $\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2+3\cdot(-1)&1\cdot2+2\cdot1+3\cdot1&1\cdot3+2\cdot1+3\cdot2\\2\cdot1+1\cdot2+1\cdot(-1)&2\cdot2+1\cdot1+1\cdot1&2\cdot3+1\cdot1+1\cdot2\\-1\cdot1+1\cdot2+2\cdot(-1)&-1\cdot2+1\cdot1+2\cdot1&-1\cdot3+1\cdot1+2\cdot2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&7&11\\3&6&9\\-1&1&2\end{pmatrix}$

9) $\mathrm{B}^2=\begin{pmatrix}2&3&2\\0&1&2\\-1&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&2\\0&1&2\\-1&4&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2\cdot2+3\cdot0+2\cdot(-1)&2\cdot3+3\cdot1+2\cdot4&2\cdot2+3\cdot2+2\cdot1\\0\cdot2+1\cdot0+2\cdot(-1)&0\cdot3+1\cdot1+2\cdot4&0\cdot2+1\cdot2+2\cdot1\\-1\cdot2+4\cdot0+1\cdot(-1)&-1\cdot3+4\cdot1+1\cdot4&-1\cdot2+4\cdot2+1\cdot1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&17&12\\-2&9&4\\-3&5&7\end{pmatrix}$

10) $\mathrm{A}^2+2\,\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2=\begin{pmatrix}2&7&11\\3&6&9\\-1&1&2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1&17&9\\3&11&7\\-4&6&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&17&12\\-2&9&4\\-3&5&7\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2+(-2)+2&7+34+17&11+18+12\\3+6+(-2)&6+22+9&9+14+4\\-1+(-8)+(-3)&1+12+5&2+4+7\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 58 & 41 \\ 7 & 37 & 27 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$$

11) $$\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 11 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 17 & 12 \\ -2 & 9 & 4 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -1 \\ 5 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

12) $$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{A} + \mathrm{B})\,(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot(-1)+5\cdot 2+5\cdot 0 & 3\cdot(-1)+5\cdot 0+5\cdot(-3) & 3\cdot 1+5\cdot(-1)+5\cdot 1 \\ 2\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot 0 & 2\cdot(-1)+2\cdot 0+3\cdot(-3) & 2\cdot 1+2\cdot(-1)+3\cdot 1 \\ -2\cdot(-1)+5\cdot 2+3\cdot 0 & -2\cdot(-1)+5\cdot 0+3\cdot(-3) & -2\cdot 1+5\cdot(-1)+3\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -18 & 3 \\ 2 & -11 & 3 \\ 12 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

13) $$\mathrm{C}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 0 & 1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1 \\ 0\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1 \\ 0\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14) $$\mathrm{C}^3 = \mathrm{C}^2 \cdot \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 1 \\ 0\cdot 1+1\cdot 0+2\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 1 \\ 0\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15) Montrons par récurrence la formule $\mathrm{C}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n\,(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'initialisation a été clairement établie aux deux questions précédentes.

Montrons que si la formule est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors elle l'est aussi pour l'entier suivant $n+1$.

$$\mathrm{C}^{n+1} = \mathrm{C}^n \cdot \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n\,(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + n\cdot 0 + \frac{n\,(n+1)}{2}\cdot 0 & 1\cdot 1 + n\cdot 1 + \frac{n\,(n+1)}{2}\cdot 0 & 1\cdot 1 + n\cdot 1 + \frac{n\,(n+1)}{2}\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + n\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + n\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + n\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n+1+\frac{n\,(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, on constate que

$$n+1+\frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{2\,(n+1)+n\,(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\,(2+n)}{2} = \frac{(n+1)\,\big((n+1)+1\big)}{2}$$

de sorte que l'hérédité est bien démontrée.