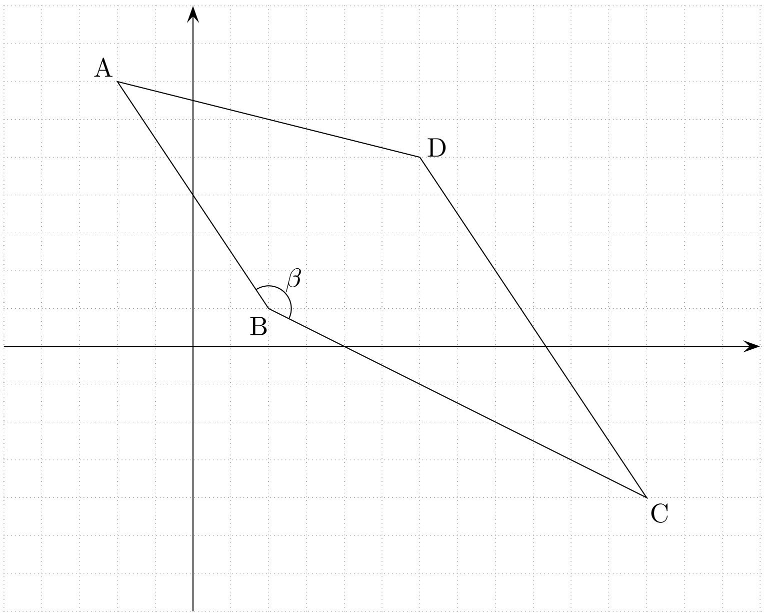
Chamblandes 2004 — Exercice 2



1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 6-12 \\ 5-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Puisque $\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, ce qui veut dire que les côtés AB et CD sont parallèles ou encore que le quadrilatère ABCD est un trapèze.

Remarquons que l'on peut aussi prouver la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ en vérifiant que leur déterminant est nul :

$\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - (-6) \cdot (-6) = 0$

2) **Calcul de l'aire : 1$^{\text{re}}$ méthode**

$$\begin{aligned}
\text{aire}(ABCD) &= \text{aire}(ABC) + \text{aire}(ACD) = \\
&= \tfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})\right| + \tfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD})\right| \\
&= \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 14 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 14 & 8 \\ -11 & -2 \end{vmatrix} \\
&= \tfrac{1}{2}\left|4 \cdot (-11) - (-6) \cdot 14\right| + \tfrac{1}{2}\left|14 \cdot (-2) - (-11) \cdot 8\right| \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot 40 + \tfrac{1}{2} \cdot 60 = 50
\end{aligned}$$

Calcul de l'aire : 2$^{\text{e}}$ méthode

Grande base : $\|\overrightarrow{CD}\| = \left\|\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}\right\| = \left\|-3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\| = |-3|\,\sqrt{2^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{13}$

Petite base : $\|\overrightarrow{AB}\| = \left\|\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}\right\| = \left\|2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\| = |2|\,\sqrt{2^2 + (-3)^2} = 2\sqrt{13}$

Base moyenne : $\frac{1}{2}\left(3\sqrt{13}+2\sqrt{13}\right)=\frac{5}{2}\sqrt{13}$

Comme $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=-3\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, l'équation de la droite CD est de la forme $3\,x+2\,y+c=0$.
Cette droite passant par C$(12\,;-4)$, on a $3\cdot 12+2\cdot(-4)+c=0$, d'où suit $c=-28$.
L'équation de la droite CD est ainsi : $3\,x+2\,y-28=0$.

La hauteur du trapèze est donnée par la distance du point B à la droite CD :
$\delta(\mathrm{B}\,;\mathrm{CD})=\dfrac{|3\cdot 2+2\cdot 1-28|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{13}}$

Finalement, on conclut que aire(ABCD) $=\frac{5}{2}\sqrt{13}\cdot\frac{20}{\sqrt{13}}=50$.

Calcul de l'angle en B

$$\cos(\beta)=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\|\,\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\|}=\frac{\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}\right\|\,\left\|\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{-4\cdot 10+6\cdot(-5)}{2\sqrt{(-2)^2+3^2}\cdot 5\sqrt{2^1+(-1)^2}}=\frac{-70}{10\sqrt{65}}=-\frac{7\sqrt{65}}{65}$$

$\beta=\arccos\left(-\frac{7\sqrt{65}}{65}\right)\approx 150{,}26^\circ$