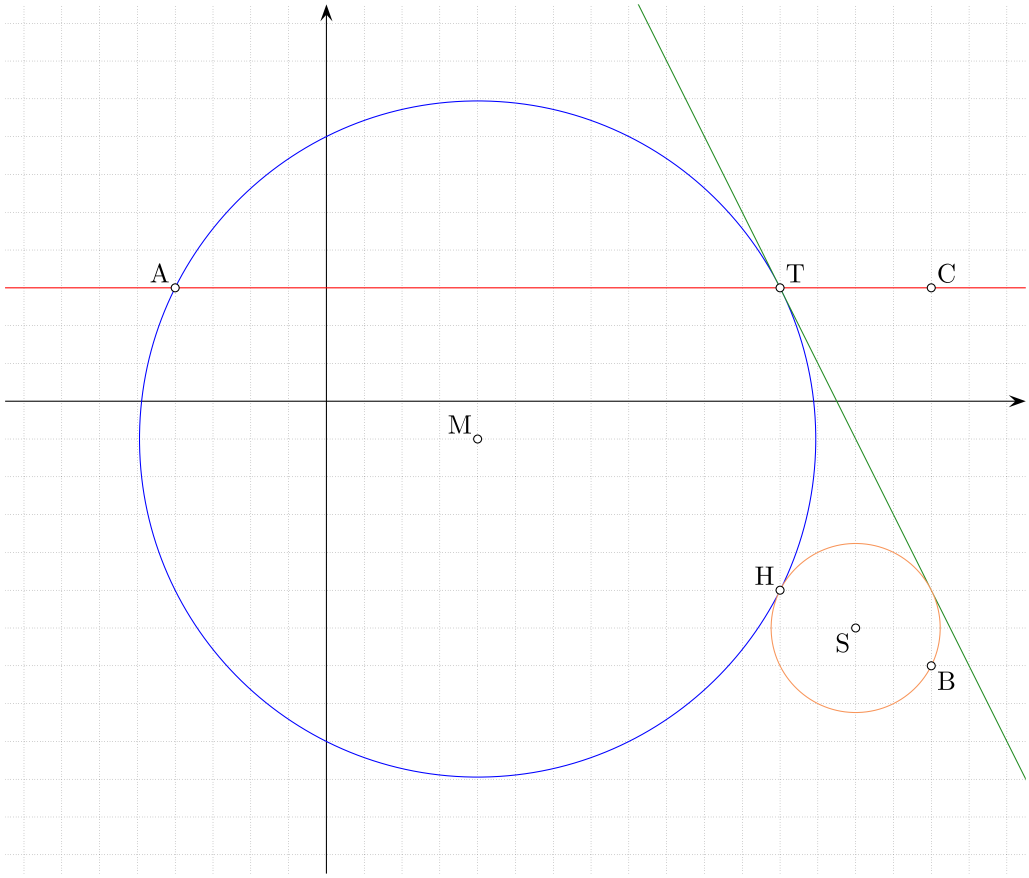
Chamblandes 2010 — Problème 5



a) Le cercle Γ a pour centre le milieu M des points A et H : $M\left(\frac{-4+12}{2}\,;\frac{3+(-5)}{2}\right) = M(4\,;-1)$.

Son rayon est donné par la distance entre les points A et M :

$$\|\overrightarrow{AM}\| = \left\|\begin{pmatrix} 4-(-4) \\ -1-3 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}\right\| = 4\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = 4\sqrt{2^2+(-1)^2} = 4\sqrt{5}$$

Le cercle Γ a ainsi pour équation $\Gamma : (x-4)^2+(y+1)^2 = (4\sqrt{5})^2 = 80$.

b) La droite AC admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 16+4 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} = 20\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Son équation est donc de la forme AC : $-0\,x+1\,y+c=0$ c'est-à-dire $y+c=0$.

Puisque le point $A(-4\,;3)$ appartient à la droite AC, on doit avoir $3+c=0$, d'où $c=-3$.

On a obtenu l'équation cartésienne de la droite AC : $y-3=0$.

Il reste à vérifier :

(i) le point $T(12\,;3)$ appartient à la droite AC : $3-3=0$.

(ii) le point $T(12\,;3)$ appartient au cercle Γ : $(12-4)^2+(3+1)^2 = 64+16 = 80$.

Puisque $\mathrm{T} \in \Gamma$, on peut utiliser l'équation dédoublée du cercle Γ :
$(12-4)\,(x-4)+(3+1)\,(y+1)=80$
$8\,x-32+4\,y+4=80$
$8\,x+4\,y-108=0$
$2\,x+y-27=0$

c) $x^2+y^2-28\,x+12\,y+227=0$
$x^2-28\,x+y^2+12\,y+227=0$
$(x-14)^2-196+(y+6)^2-36+227=0$
$(x-14)^2+(y+6)^2=5$
Le cercle Γ^* admet pour centre $\mathrm{S}(14\,;-6)$ et pour rayon $r^*=\sqrt{5}$.

d) $\mathrm{B} \in \Gamma^*$: $(16-14)^2+(-7+6)^2=4+1=5$
$\mathrm{H} \in \Gamma^*$: $(12-14)^2+(-5+6)^2=4+1=5$
S est bien le milieu des points B et H : $\left(\frac{16+12}{2}\,;\frac{-7+(-5)}{2}\right)=(14\,;-6)$.

e) Il suffit de vérifier que la distance du centre S à la tangente t vaut bien r^* :
$$\delta(\mathrm{S}\,;t)=\frac{|2\cdot 14+(-6)-27|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5\,\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}=r^*$$