4.20 1) Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, il suffit de montrer que $(e_2\,;e_1)$ engendre $\mathbb{R}^2$.

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^2$.
Il existe des scalaires u_1 et u_2 tels que $u = u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2$.

$$\begin{gathered} x \cdot e_2 + y \cdot e_1 = u = u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2 \\ (x \cdot e_2 + y \cdot e_1) - (u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2) = 0 \\ (y - u_1) \cdot e_1 + (x - u_2) \cdot e_2 = 0 \end{gathered}$$

Comme les vecteurs e_1 et e_2 sont linéairement indépendant, ceci équivaut au système $\begin{cases} \quad y - u_1 = 0 \\ x \quad\;\; - u_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = u_1 \\ x = u_2 \end{cases}$

(a) Si $u = e_1$, alors $u_1 = 1$ et $u_2 = 0$.

Comme $x = 0$ et $y = 1$, on en tire que $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(e_2\,;e_1)$.

(b) Si $u = e_2$, alors $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$.

De $x = 1$ et $y = 0$, on déduit que $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(e_2\,;e_1)$.

2) Il suffit de vérifier que $(e_1\,;e_1 + e_2)$ engendre $\mathbb{R}^2$.

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^2$.
Il existe des scalaires u_1 et u_2 tels que $u = u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2$.

$$\begin{gathered} x \cdot e_1 + y \cdot (e_1 + e_2) = u = u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2 \\ \big(x \cdot e_1 + y \cdot (e_1 + e_2)\big) - (u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2) = 0 \\ (x + y - u_1) \cdot e_1 + (y - u_2) \cdot e_2 = 0 \end{gathered}$$

Vu que les vecteurs e_1 et e_2 sont libres, ceci équivaut au système
$\begin{cases} x + y - u_1 = 0 \\ \phantom{x +{}} y - u_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y = u_1 \\ \phantom{x +{}} y = u_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \phantom{{}+y} = u_1 - u_2 \\ \phantom{x+{}} y = u_2 \end{cases}$

(a) Si $u = e_1$, alors $u_1 = 1$ et $u_2 = 0$.

Comme $x = 1$ et $y = 0$, on en tire que $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1\,;e_1 + e_2)$.

(b) Si $u = e_2$, alors $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$.

Étant donné que $x = -1$ et $y = 1$, on déduit que $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1\,;e_1 + e_2)$.

3) Il suffit de montrer que $(e_1 - e_2\,;e_1 + e_2)$ engendre $\mathbb{R}^2$.

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^2$.
Il existe des scalaires u_1 et u_2 tels que $u = u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2$.

$$\begin{gathered} x \cdot (e_1 - e_2) + y \cdot (e_1 + e_2) = u = u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2 \\ \big(x \cdot (e_1 - e_2) + y \cdot (e_1 + e_2)\big) - (u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2) = 0 \\ (x + y - u_1) \cdot e_1 + (-x + y - u_2) \cdot e_2 = 0 \end{gathered}$$

Vu que les vecteurs e_1 et e_2 sont libres, ceci équivaut au système

$$\begin{cases} x + y - u_1 = 0 \\ -x + y - u_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y = u_1 \\ -x + y = u_2 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} x + y = u_1 \\ 2\,y = u_1 + u_2 \end{cases}$$

$$\overset{\mathrm{L}_1 \to 2\,\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2\,x = u_1 - u_2 \\ 2\,y = u_1 + u_2 \end{cases} \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \frac{1}{2}\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to \frac{1}{2}\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = \frac{1}{2}\,u_1 - \frac{1}{2}\,u_2 \\ y = \frac{1}{2}\,u_1 + \frac{1}{2}\,u_2 \end{cases}$$

(a) Si $u = e_1$, alors $u_1 = 1$ et $u_2 = 0$.

Comme $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$, on en tire que $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1 - e_2\,; e_1 + e_2)$.

(b) Si $u = e_2$, alors $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$.

Attendu que $x = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$, il résulte que $e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1 - e_2\,; e_1 + e_2)$.

4) Il suffit de vérifier que $(e_1 + \alpha\,e_2\,; e_2)$ engendre $\mathbb{R}^2$.

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^2$.
Il existe des scalaires u_1 et u_2 tels que $u = u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2$.

$$x \cdot (e_1 + \alpha\,e_2) + y \cdot e_2 = u = u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2$$
$$\big(x \cdot (e_1 + \alpha\,e_2) + y \cdot e_2\big) - (u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2) = 0$$
$$(x - u_1) \cdot e_1 + (\alpha\,x + y - u_2) \cdot e_2 = 0$$

Vu que les vecteurs e_1 et e_2 sont libres, ceci équivaut au système

$$\begin{cases} x - u_1 = 0 \\ \alpha\,x + y - u_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = u_1 \\ \alpha\,x + y = u_2 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \alpha\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = u_1 \\ y = -\alpha\,u_1 + u_2 \end{cases}$$

(a) Si $u = e_1$, alors $u_1 = 1$ et $u_2 = 0$.

Comme $x = 1$ et $y = -\alpha$, on en tire que $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1 + \alpha\,e_2\,; e_2)$.

(b) Si $u = e_2$, alors $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$.

De $x = 0$ et $y = 1$, on déduit que $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1 + \alpha\,e_2\,; e_2)$.