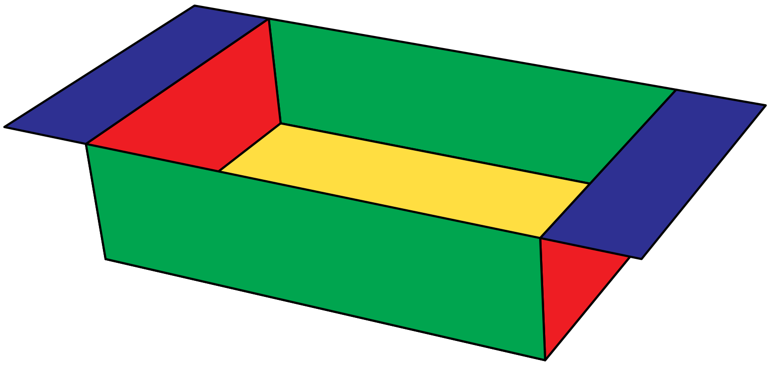
Chamblandes 2010 — Problème 2



La somme des aires du fond, des faces latérales et des rebords vaut :
$x\,y + 4\,x + 4\,x + 4\,y + 4\,y + 3\,y + 3\,y = x\,y + 8\,x + 14\,y$

Sachant que l'aire du fond vaut $x\,y = 448$, on en tire que $y = \frac{448}{x}$.

Dès lors, la somme des aires du fond, des faces latérales et des rebords s'écrit :
$f(x) = 448 + 8\,x + 14 \cdot \dfrac{448}{x} = 448 + 8\,x + \frac{6272}{x}$

Pour déterminer le minimum de cette fonction, il convient d'étudier sa croissance sur $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \left(448 + 8\,x + \frac{6272}{x}\right)' = (448 + 8\,x + 6272\,x^{-1})'$$

$$= 8 - 6272\,x^{-2} = 8 - \frac{6272}{x^2} = \frac{8\,x^2 - 6272}{x^2} = \frac{8\,(x^2 - 784)}{x^2} = \frac{8\,(x+28)\,(x-28)}{x^2}$$

		-28		0		28	
8	$+$		$+$	‖	$+$		$+$
$x+28$	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$
$x-28$	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$
x^2	$+$		$+$	‖	$+$		$+$
f'	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$

On conclut que la somme des aires du fond, des faces latérales et des rebords est minimale si $x = 28$ cm. Dans ce cas, $y = \frac{448}{28} = 16$ cm.