Chamblandes 2006 — Problème 3

a) **1^re^ méthode**

Tout plan normal à la droite d s'écrit $2\,x - 3\,y + 0\,z + d = 0$.

On recherche le plan π normal à la droite d et passant par le point $\mathrm{P}(3\,;2\,;7)$:
$2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + d = 0$ implique $d = 0$.
On obtient donc $\pi : 2\,x - 3\,y = 0$.

Déterminons l'intersection I du plan π et de la droite d :
$0 = 2\,(2 + 2\,k) - 3\,(10 - 3\,k) = 13\,k - 26 = 13\,(k - 2)$ d'où $k = 2$

$$\begin{cases} x = 2 + 2 \cdot 2 = 6 \\ y = 10 + 2 \cdot (-3) = 4 \\ z = 4 + 2 \cdot 0 = 4 \end{cases} \qquad \mathrm{I}(6\,;4\,;4)$$

Le point $\mathrm{I}(6\,;4\,;4)$ est le milieu des points $\mathrm{P}(3\,;2\,;7)$ et $\mathrm{P}'(p_1'\,;p_2'\,;p_3')$:

$$\begin{cases} 6 = \frac{3+p_1'}{2} \\ 4 = \frac{2+p_2'}{2} \\ 4 = \frac{7+p_3'}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 12 = 3 + p_1' \\ 8 = 2 + p_2' \\ 8 = 7 + p_3' \end{cases} \iff \begin{cases} 9 = p_1' \\ 6 = p_2' \\ 1 = p_3' \end{cases}$$

On a ainsi trouvé $\mathrm{P}'(9\,;6\,;1)$.

2^e^ méthode

Utilisons la formule $\overrightarrow{\mathrm{OP}'} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} + 2\,\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\,\vec{d}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}'} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + 2\,\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^2} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + 2\,\frac{1 \cdot 2 + (-8) \cdot (-3) + 3 \cdot 0}{\left(\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 0^2}\right)^2} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{26}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On obtient également $\mathrm{P}'(9\,;6\,;1)$.

b) Soit $\mathrm{D}(x\,;y\,;z)$ un point de la droite d.

On veut que $9 = \|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\| = \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$81 = x^2 + y^2 + z^2 = (2+2\,k)^2 + (10-3\,k)^2 + 4^2 = 13\,k^2 - 52\,k + 120$

$0 = 13\,k^2 - 52\,k + 39 = 13\,(k^2 - 4\,k + 3) = 13\,(k-1)\,(k-3)$

$\begin{cases} x = 2 + 1\cdot 2 = 4 \\ y = 10 + 1\cdot(-3) = 7 \\ z = 4 + 1\cdot 0 = 4 \end{cases}$ $\qquad \mathrm{A}(4\,;7\,;4)$

$\begin{cases} x = 2 + 3\cdot 2 = 8 \\ y = 10 + 3\cdot(-3) = 1 \\ z = 4 + 3\cdot 0 = 4 \end{cases}$ $\qquad \mathrm{B}(8\,;1\,;4)$

c) Posons $\mathrm{D}(2\,;10\,;4) \in d$.

Le plan recherché admet pour vecteurs directeurs $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DP}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ et passe par le point $\mathrm{P}(3\,;2\,;7)$.

1re méthode

L'équation paramétrique du plan recherché est $\begin{cases} x = 3 + 2\,\lambda + \mu \\ y = 2 - 3\,\lambda - 8\,\mu \\ z = 7 + 3\,\mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Pour trouver l'équation cartésienne, il s'agit d'éliminer les paramètres λ et μ :

$\begin{cases} x = 3 + 2\,\lambda + \mu \\ y = 2 - 3\,\lambda - 8\,\mu \\ z = 7 + 3\,\mu \end{cases} \overset{\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 + 3\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = 3 + 2\,\lambda + \mu \\ 3\,x + 2\,y = 13 - 13\,\mu \\ z = 7 + 3\,\mu \end{cases}$

$\overset{\mathrm{L}_3 \to 13\,\mathrm{L}_3 + 3\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = 3 + 2\,\lambda + \mu \\ 3\,x + 2\,y = 13 - 13\,\mu \\ 9\,x + 6\,y + 13\,z = 130 \end{cases}$

Le plan recherché admet ainsi pour équation $9\,x + 6\,y + 13\,z = 130$.

2e méthode

Le plan recherché admet pour vecteur normal

$\vec{n} = \vec{d} \times \overrightarrow{\mathrm{DP}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cdot 3 - 0\cdot(-8) \\ 0\cdot 1 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot(-8) - (-3)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ -13 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}$

Son équation cartésienne est donc de la forme $9\,x + 6\,y + 13\,z + d = 0$.

Vu qu'il doit en outre contenir le point $\mathrm{P}(3\,;2\,;7)$, on obtient :

$9\cdot 3 + 6\cdot 2 + 13\cdot 7 + d = 0$ c'est-à-dire $d = -130$.

L'équation du plan recherché est ainsi $9\,x + 6\,y + 13\,z - 130 = 0$.

d) Au vu de la question b), on sait que $\mathrm{T}_1 = \mathrm{A}(4\,;7\,;4)$ et $\mathrm{T}_2 = \mathrm{B}(8\,;1\,;4)$.

Comme les points de tangence T_1 et T_2 sont situés sur la sphère, on peut utiliser l'équation dédoublée de la sphère pour déterminer les plans tangents.

Plan tangent à la sphère en $\mathrm{T}_1(4\,;7\,;4)$: $\pi_1 : 4\,x + 7\,y + 4\,z = 81$.

Plan tangent à la sphère en $\mathrm{T}_2(8\,;1\,;4)$: $\pi_2 : 8\,x + y + 4\,z = 81\,.$

Pour calculer l'angle aigu entre les deux plans π_1 et π_2, il suffit de calculer l'angle aigu que forment leurs vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$:

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\,\|\vec{n}_2\|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}4\\7\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix}\right|}{\left\|\begin{pmatrix}4\\7\\4\end{pmatrix}\right\|\,\left\|\begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix}\right\|} = \frac{|4\cdot 8 + 7\cdot 1 + 4\cdot 4|}{\sqrt{4^2+7^2+4^2}\,\sqrt{8^2+1^2+4^2}} = \frac{55}{81}$$

$\varphi = \arccos\left(\frac{55}{81}\right) \approx 47{,}23^\circ$