Chamblandes 2009 — Problème 4

a) $f(x) = x^3 - 6\,x^2 + 9\,x = x\,(x - 6\,x + 9) = x\,(x-3)^2$

		0		3	
x	$-$	0	$+$		$+$
$(x-3)^2$	$+$		$+$	0	$+$
f	$-$	0	$+$	0	$+$

$f'(x) = (x^3 - 6\,x^2 + 9\,x)' = 3\,x^2 - 12\,x + 9 = 3\,(x^2 - 4\,x + 3) = 3\,(x-1)\,(x-3)$

		1		3	
3	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$
Le point $(1\,;4)$ est un maximum (local).

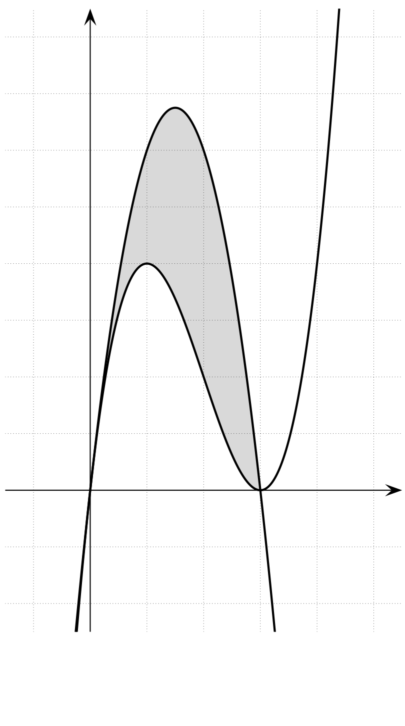
$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$
Le point $(3\,;0)$ est un minimum (local).

b) $f(x) = g(x)$
$x^3 - 6\,x^2 + 9\,x = -3\,x^2 + 9\,x$
$x^3 - 3\,x^2 = x^2\,(x-3) = 0$

$f(0) = g(0) = 0$
$f(3) = g(3) = 0$

Les graphes de f et de g possèdent deux points d'intersection : $(0\,;0)$ et $(3\,;0)$.

c)



Calculons à présent l'aire de la région délimitée par les graphes de f et de g :
$\displaystyle\int_0^3 g(x)\,dx - \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = \int_0^3 \big((-3\,x^2+9\,x)-(x^3-6\,x^2+9\,x)\big)\,dx =$
$\displaystyle\int_0^3 (-x^3+3\,x^2)\,dx = \left[-\tfrac{1}{4}\,x^4+x^3\right]_0^3 = (-\tfrac{1}{4}\cdot 3^4+3^3)-(-\tfrac{1}{4}\cdot 0^4+0^3) = (-\tfrac{81}{4}+27)-(0+0) =$
$\frac{27}{4} - 0 = \frac{27}{4}$