10 Endomorphismes orthogonaux

Espaces euclidiens

Soient $x = (x_1\,;x_2\,;\ldots\,;x_n)$ et $y = (y_1\,;y_2\,;\ldots\,;y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Le **produit scalaire** de x et de y, que l'on note $x \cdot y$, est le nombre

$$x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + \ldots + x_n\,y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i$$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire s'appelle un **espace euclidien**.

10.1 Montrer les propriétés du produit scalaire :

1) $x \cdot y = y \cdot x$
2) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
3) $(\lambda\,x) \cdot y = \lambda\,(x \cdot y)$
4) $x \cdot x \geqslant 0$
5) $x \cdot x = 0 \iff x = 0$

Deux vecteurs d'un espace euclidien E sont dits **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul : $x \cdot y = 0$.

Soit $x = (x_1\,;\ldots\,;x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
La **norme** de x, notée $\|x\|$, est le nombre $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

10.2 Démontrer les propriétés suivantes de la norme :

1) $\|x\|^2 = x \cdot x$
2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3) $\|\alpha\,x\| = |\alpha|\,\|x\|$

10.3 **Inégalité de Cauchy-Schwartz**

Soient x et y des vecteurs d'un espace euclidien et λ un scalaire.

1) Vérifier que $0 \leqslant \|\lambda\,x + y\|^2 = \lambda^2\,\|x\|^2 + (2\,\lambda)\,(x \cdot y) + \|y\|^2$.

   Utiliser la formule $\|x\|^2 = x \cdot x$ et les propriétés du produit scalaire.

2) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwartz : $|x \cdot y| \leqslant \|x\|\,\|y\|$.

   L'inéquation $\lambda^2\,\|x\|^2 + (2\,\lambda)\,(x \cdot y) + \|y\|^2 \geqslant 0$, quelle que soit la variable λ, implique que son discrimant est négatif ou nul.

10.4

1) Montrer que $x \cdot y = \frac{1}{2}\big(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big)$.

   Indication : calculer $(x + y) \cdot (x + y)$.

2) En déduire le **théorème de Pythagore** : deux vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

10.5 Montrer l'**inégalité du triangle** : $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Montrer que $\|x + y\|^2 \leqslant \big(\|x\| + \|y\|\big)^2$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Une base d'un espace euclidien est dite **orthonormée** si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et si leur norme vaut 1.

Par exemple, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée.

10.6

1) Soient $(e_1\,;e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$, $x = \alpha_1\,e_1 + \alpha_2\,e_2$ et $y = \beta_1\,e_1 + \beta_2\,e_2$ deux vecteurs. Montrer, à l'aide des propriétés du produit scalaire, que $x \cdot y = (\alpha_1\,\beta_1)\,\|e_1\|^2 + (\alpha_1\,\beta_2 + \alpha_2\,\beta_1)\,(e_1 \cdot e_2) + (\alpha_2\,\beta_2)\,\|e_2\|^2$.
2) Soient $(e_1\,;e_2)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, $x = \alpha_1\,e_1 + \alpha_2\,e_2$ et $y = \beta_1\,e_1 + \beta_2\,e_2$ deux vecteurs. Montrer que $x \cdot y = \alpha_1\,\beta_1 + \alpha_2\,\beta_2$.
3) On considère $(e_1\,;\ldots;e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E, ainsi que des vecteurs $x = \alpha_1\,e_1 + \ldots + \alpha_n\,e_n$ et $y = \beta_1\,e_1 + \ldots + \beta_n\,e_n$. Montrer que $x \cdot y = \alpha_1\,\beta_1 + \ldots + \alpha_n\,\beta_n$.

10.7 Soient E un espace euclidien et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. On appelle **orthogonal** de F, et on le note $\mathrm{F}^\perp$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de F :

$$\mathrm{F}^\perp = \{x \in \mathrm{E} : x \cdot y = 0 \text{ pour tout } y \in \mathrm{F}\}$$

Montrer que $\mathrm{F}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Endomorphismes orthogonaux

Un endomorphisme h d'un espace euclidien E est dit **orthogonal** s'il conserve le produit scalaire :

$$h(x) \cdot h(y) = x \cdot y \quad \text{quels que soient } x, y \in \mathrm{E}.$$

10.8 Montrer qu'un endomorphisme h d'un espace euclidien E est orthogonal si et seulement s'il conserve la norme :

$$\|h(x)\| = \|x\| \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{E}$$

1) Si h est orthogonal, utiliser la propriété $\|x\|^2 = x \cdot x$ pour montrer que $\|h(x)\| = \|x\|$.
2) Si h conserve la norme, montrer que $h(x) \cdot h(y) = x \cdot y$, grâce à l'exercice 10.4 1).

Cet exercice montre que les endomorphismes orthogonaux se confondent avec les **isométries vectorielles**.

10.9 Montrer qu'un endomorphisme orthogonal est un automorphisme.

Soit $x \in \mathrm{E}$ tel que $h(x) = 0$. Calculer $\|h(x)\|$ et en déduire que $x = 0$, ce qui prouve que h est injectif. En conclure que h est bijectif.

10.10 Montrer que les seules valeurs propres possibles d'un endomorphisme orthogonal sont ± 1.

Si x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors $h(x) = \lambda\,x$; conclure grâce aux exercices 10.8 et 10.2 3).

10.11 Soient h un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien E et F un sous-espace vectoriel invariant, c'est-à-dire que $h(x) \in \mathrm{F}$ pour tout $x \in \mathrm{F}$.

Montrer que $\mathrm{F}^{\perp}$ est aussi un sous-espace vectoriel invariant.

Indication : d'après l'exercice 10.9, h est un automorphisme ; la restriction de h à F est donc bijective, c'est-à-dire que pour un $y \in \mathrm{F}$ quelconque, il existe $y' \in \mathrm{F}$ tel que $h(y') = y$.

10.12 Montrer qu'un endomorphisme est orthogonal si et seulement si l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée.

1) Soit $(e_1 ; \ldots ; e_n)$ une base orthonormée. Montrer que si h est un endomorphisme orthogonal, alors $\big(h(e_1) ; \ldots ; h(e_n)\big)$ forme une base orthonormée.
2) Soit $(e_1 ; \ldots ; e_n)$ une base orthonormée telle que $\big(h(e_1) ; \ldots ; h(e_n)\big)$ soit aussi une base orthonormée. Si $x = \alpha_1\, e_1 + \ldots + \alpha_n\, e_n$ et $y = \beta_1\, e_1 + \ldots + \beta_n\, e_n$ sont des vecteurs de E, montrer que $h(x) \cdot h(y) = x \cdot y$ grâce à l'exercice 10.6 3).

Proposition *Un endomorphisme est orthogonal si et seulement si sa matrice* A *relativement à une base orthonormée vérifie* ${}^t\mathrm{AA} = \mathrm{I}$.

Preuve Soient $(e_1 ; \ldots ; e_n)$ une base orthonormée et $\mathrm{A} = (a_{ij})$ la matrice de l'endomorphisme h relativement à cette base.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{a_{n1}}_{h(e_1)} & \ldots & \underbrace{a_{nj}}_{h(e_j)} & \ldots & \underbrace{a_{nn}}_{h(e_n)} \end{pmatrix}$$

On rappelle que $h(e_j) = a_{1j}\, e_1 + \ldots + a_{nj}\, e_n$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$.

1) Vu l'exercice 10.6 3), $h(e_i) \cdot h(e_j) = a_{1i}\, a_{1j} + \ldots + a_{n1}\, b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj}$.

   Par conséquent, la famille $\big(h(e_1) ; \ldots ; h(e_n)\big)$ forme une base orthonormée si et seulement si $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
2) Posons $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{AA}$. Par définition du produit matriciel, on a que

   $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} {}^t a_{ik}\, a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj}$.

   Ainsi ${}^t\mathrm{AA} = \mathrm{I}$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

L'exercice 10.12 parachève la démonstration.

On dit d'une matrice carrée A qu'elle est **orthogonale** si ${}^t\!AA = I$.

Ainsi une matrice A est orthogonale si et seulement si elle est inversible et si sa transposée est égale à son inverse : $A^{-1} = {}^t\!A$.

10.13 Vérifier que les matrices ci-dessous sont orthogonales :

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

10.14 Les familles suivantes forment-elles une base orthonormée ?

1) $\Big(\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,;0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\big)\,;\big(\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\frac{1}{\sqrt{3}}\,;-\frac{1}{\sqrt{3}}\big)\,;\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\big)\Big)$

2) $\Big(\big(\frac{2}{3}\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\big)\,;\big(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;-\frac{2}{3}\big)\,;\big(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\big)\Big)$

3) $\Big(\big(\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\frac{1}{\sqrt{3}}\big)\,;\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\,;0\big)\,;\big(\frac{1}{\sqrt{6}}\,;\frac{1}{\sqrt{6}}\,;-\frac{2}{\sqrt{6}}\big)\Big)$

10.15 Montrer que le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à ± 1.

Utiliser les propriétés 5) et 6) du déterminant de la page 8.2.

10.16 Est-ce que $\big|\det(A)\big| = 1$ implique que A est orthogonale ?

Réponses

10.14 1) non 2) oui 3) oui

10.16 non