

3.8

- 1) Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a , en choisissant $\varepsilon = 1$, on doit avoir l'existence d'un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n - a| < 1$.
Or $|u_n - a| < 1$ si et seulement si $u_n \in]a - 1 ; a + 1[$.
C'est pourquoi, seuls les termes $u_1, u_2, \dots, u_{n_0-1}$, en nombre fini, sont susceptibles d'être en dehors de l'intervalle $]a - 1 ; a + 1[$.
- 2) Posons $m = \min(u_1, u_2, \dots, u_{n_0-1}, a - 1)$. Alors $m \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Posons $M = \max(u_1, u_2, \dots, u_{n_0-1}, a + 1)$. Alors $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) On a ainsi montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée et majorée, c'est-à-dire bornée.