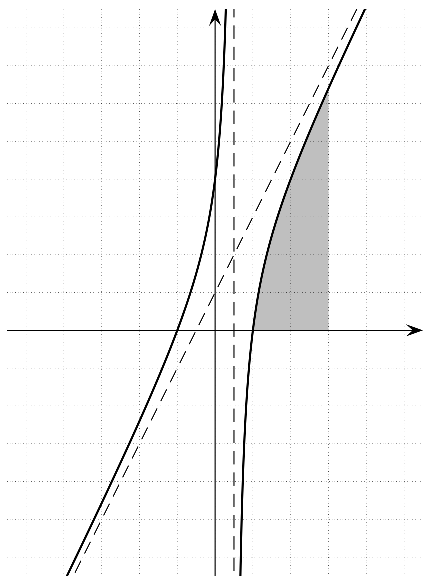
Chamblandes 2014 — Problème 2

1. $$\begin{array}{rrr|l} 4\,x^2 & & -\,4 & 2\,x-1 \\ \cline{4-4} -4\,x^2 & +\,2\,x & & 2\,x+1 \\ \cline{1-3} & 2\,x & -\,4 & \\ & -\,2\,x & +\,1 & \\ \cline{2-3} & & -\,3 & \end{array}$$

   $y = 2\,x + 1$ est l'équation de l'asymptote oblique de f.

2. 

   Commençons par étudier le signe de f.

   $f(x) = \dfrac{4\,x^2 - 4}{2\,x - 1} = \dfrac{4\,(x^2 - 1)}{2\,x - 1} = \dfrac{4\,(x-1)\,(x+1)}{2\,x - 1}$

		-1		$\frac{1}{2}$		1	
4	$+$	|	$+$	||	$+$	|	$+$
$x-1$	$-$	|	$-$	||	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	||	$+$	|	$+$
$2\,x-1$	$-$	|	$-$	||	$+$	|	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$

   On constate, en particulier, que la fonction f est positive sur l'intervalle $[1\,;3]$.

   Calculons à présent l'aire recherchée :

   $$\int_1^3 \frac{4\,x^2-4}{2\,x-1}\,dx = \int_1^3 \left(2\,x+1-\frac{3}{2\,x-1}\right)dx = \int_1^3 \left(2\,x+1-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2\,x-1}\right)dx =$$

   $$\left[x^2+x-\tfrac{3}{2}\,\ln\big(|2\,x-1|\big)\right]_1^3 = \left(3^2+3-\tfrac{3}{2}\,\ln\big(|2\cdot 3-1|\big)\right)-\left(1^2+1-\tfrac{3}{2}\,\ln\big(|2\cdot 1-1|\big)\right) =$$

   $$12-\tfrac{3}{2}\,\ln(5)-2+\tfrac{3}{2}\,\underbrace{\ln(1)}_{0} = \boxed{10-\tfrac{3}{2}\,\ln(5)}$$