Chamblandes 2007 — Problème 2

a) La fonction f n'est pas définie si $x^2 + 5 = 0$.
Mais ce n'est jamais le cas : $x^2 \geqslant 0$ implique $x^2 + 5 \geqslant 5 > 0$.
Par conséquent $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 4\,(-x)}{(-x)^2 + 5} = \frac{-x^3 + 4\,x}{x^2 + 5} = -\frac{x^3 - 4\,x}{x^2 + 5} = -f(x)$$

La fonction f est donc impaire : elle admet l'origine pour centre de symétrie.

$$f(x) = \frac{x^3 - 4\,x}{x^2 + 5} = \frac{x\,(x^2 - 4)}{x^2 + 5} = \frac{x\,(x+2)\,(x-2)}{x^2 + 5}$$

		-2	0	2
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
x^2+5	$+$	$+$	$+$	$+$
f	$-$	$+$	$-$	$+$

Puisque $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$, il n'y a pas d'asymptote verticale.

$$\begin{array}{rcr|l} x^3 & - & 4\,x & x^2 + 5 \\ \cline{4-4} -x^3 & - & 5\,x & x \\ \cline{1-3} & - & 9\,x & \end{array} \qquad f(x) = x - \frac{9\,x}{x^2 + 5}$$

$y = x$ est asymptote oblique

$$\delta(x) = -\frac{9\,x}{x^2 + 5}$$

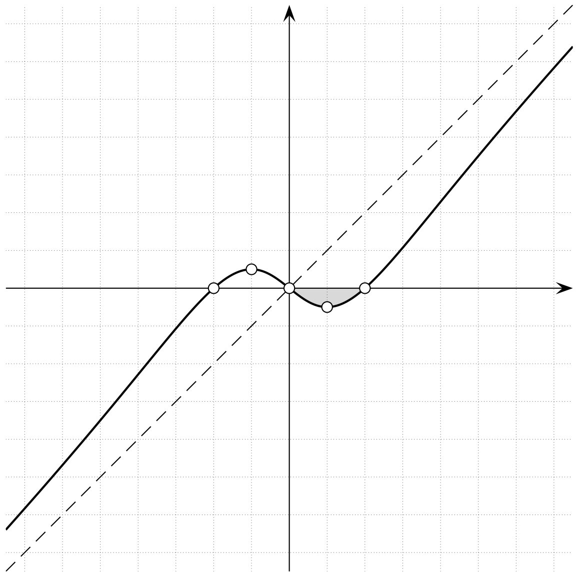
		0
$-9\,x$	$+$	$-$
x^2+5	$+$	$+$
δ	$+$	$-$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^3 - 4\,x)'\,(x^2+5) - (x^3 - 4\,x)\,(x^2+5)'}{(x^2+5)^2} = \frac{(3\,x^2 - 4)\,(x^2+5) - (x^3 - 4\,x)\,2\,x}{(x^2+5)^2} \\ &= \frac{3\,x^4 + 15\,x^2 - 4\,x^2 - 20 - 2\,x^4 + 8\,x^2}{(x^2+5)^2} = \frac{x^4 + 19\,x^2 - 20}{(x^2+5)^2} = \frac{(x^2-1)\,(x^2+20)}{(x^2+5)^2} \\ &= \frac{(x+1)\,(x-1)\,(x^2+20)}{(x^2+5)^2} \end{aligned}$$

		-1	1
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
x^2+20	$+$	$+$	$+$
$(x^2+5)^2$	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$ max	$\searrow$ min	$\nearrow$

$f(-1) = \frac{(-1)^3-4\cdot(-1)}{(-1)^2+5} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$: le point $(-1\,;\frac{1}{2})$ est un maximum.

$f(1) = -f(-1) = -\frac{1}{2}$: le point $(1\,;-\frac{1}{2})$ est un minimum.



b) L'aire algébrique recherchée est donnée par :

$\int\limits_0^2 f(x)\,dx = \int\limits_0^2 \left(x - \dfrac{9\,x}{x^2+5}\right) dx = \int\limits_0^2 x\,dx - \int\limits_0^2 \dfrac{9\,x}{x^2+5}\,dx = \int\limits_0^2 x\,dx - \frac{9}{2}\int\limits_0^2 \dfrac{2\,x}{x^2+5}\,dx =$
$\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{9}{2}\,\ln(x^2+5)\Big|_0^2 = \big(\frac{1}{2}\,2^2 - \frac{9}{2}\,\ln(2^2+5)\big) - \big(\frac{1}{2}\,0^2 - \frac{9}{2}\,\ln(0^2+5)\big) = \big(2 - \frac{9}{2}\,\ln(9)\big) - \big(0 - \frac{9}{2}\,\ln(5)\big) =$
$2 - \frac{9}{2}\,\big(\ln(9) - \ln(5)\big) = 2 - \frac{9}{2}\,\ln(\frac{9}{5}) \approx -0{,}65$

Par conséquent l'aire géométrique recherchée vaut $\frac{9}{2}\,\ln(\frac{9}{5}) - 2 \approx 0{,}65$.