11.10 1) Il y a deux méthodes pour montrer que le plan engendré par a et b a pour équation $x + y - 2\,z = 0$:

(a) $a \times b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $\left\{ \begin{array}{l} x = \\ y = \alpha \\ z = \end{array} \right. \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} = -\alpha + 3\,\beta \\ = 3\,\alpha + \beta \\ = \alpha + 2\,\beta \end{array} \quad \xRightarrow[\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1]{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + 3\,\mathrm{L}_1}$

$\left\{ \begin{array}{l} 3\,x + y = 10\,\beta \\ x + z = 5\,\beta \end{array} \right. \quad \xRightarrow{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_3} \quad x + y - 2\,z = 0$

La symétrie orthogonale s admet pour base $\mathrm{E}_1 = \Pi \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

et pour direction $\mathrm{E}_{-1} = \Delta \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

Soit la base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

Dans la base $\mathcal{B}'$, la symétrie orthogonale s a pour matrice $\mathrm{S}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$. Alors $\mathrm{S}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{S}\mathrm{P}$ où S désigne la matrice de la symétrie orthogonale s, de sorte que $\mathrm{S} = \mathrm{P}\mathrm{S}'\mathrm{P}^{-1}$.

Calculons l'inverse de la matrice de passage P :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xRightarrow[\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1]{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + 3\,\mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xRightarrow{\mathrm{L}_3 \to 2\,\mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xRightarrow[\mathrm{L}_2 \to 3\,\mathrm{L}_2 + 2\,\mathrm{L}_3]{\mathrm{L}_1 \to 6\,\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 18 & 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 30 & 0 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xRightarrow{\mathrm{L}_1 \to 5\,\mathrm{L}_1 - 3\,\mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -30 & 0 & 0 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 30 & 0 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xRightarrow{\substack{\mathrm{L}_1 \to -\frac{1}{30}\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to \frac{1}{30}\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to -\frac{1}{6}\,\mathrm{L}_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{1}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{30} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

On trouve donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{S} = \mathrm{PS'P^{-1}} &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{7}{30} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{7}{30} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2) Par définition de r, sa matrice dans la base canonique est $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \underbrace{0}_{r(e_1)} & \underbrace{1}_{r(e_2)} & \underbrace{0}_{r(e_3)} \end{pmatrix}$.

$${}^t\mathrm{R}\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

La matrice R est bien orthogonale.

$$\det(\mathrm{R}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{C_1 \leftrightarrow C_2}}{=} -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{C_1 \leftrightarrow C_3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

La matrice R correspond donc bien à la matrice d'une rotation.

Calculons l'espace propre $\mathrm{E_1}$ pour déterminer l'axe de la rotation :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0-1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L_1 \leftrightarrow L_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L_2 \to -L_2 - L_1}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L_1 \to L_1 + L_2} \\ \mathrm{L_3 \to L_3 - L_2}}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E_1} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Calculons encore l'angle de la rotation :

$\cos(\alpha) = \dfrac{\mathrm{Tr(R)} - 1}{2} = \dfrac{0+0+0-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ rad $= 120^\circ$

3) Désignons par S′ la matrice relativement à la base canonique de l'endomorphisme s'.

De $s' \circ s = r$, on tire que S′S = R, c'est-à-dire :

$$\mathrm{S}' = \mathrm{R}\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{R}\,{}^t\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Vérifions que la matrice S′ est bien orthogonale :

$${}^t\mathrm{S}'\mathrm{S}' = {}^t(\mathrm{R}\,{}^t\mathrm{S})\mathrm{R}\,{}^t\mathrm{S} = \mathrm{S}\,{}^t\mathrm{R}\mathrm{R}\,{}^t\mathrm{S} = \mathrm{S}\,{}^t\mathrm{S} = \mathrm{I}$$

$$\det(\mathrm{S}') = \det(\mathrm{R}\,{}^t\mathrm{S}) = \det(\mathrm{R}) \cdot \det({}^t\mathrm{S}) = \det(\mathrm{R}) \cdot \det(\mathrm{S}) = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{S}') = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} = 1$$

On a ainsi montré que S′ est la matrice d'une symétrie orthogonale.

Il reste encore à déterminer l'espace propre E_1 pour connaître le plan de symétrie.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{2}{3} - 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} - 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\, x - 2\,y + z = 0 \right. \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2\,\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{E}_1 = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2\,y + z = 0\big\} = \Pi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$