1 Matrices

Définition d'une matrice

Une **matrice** est un tableau rectangulaire de nombres. Ces nombres sont rangés horizontalement en lignes et verticalement en colonnes.

Si la matrice possède m lignes et n colonnes, on dit qu'elle est de **type** $m \times n$.

De manière générale, une matrice de type $m \times n$ s'écrit :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{ou bien} \qquad \mathrm{A} = (a_{ij}) \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$$

Les nombres réels a_{ij} sont les **termes** ou les **coefficients** de la matrice.

L'ensemble des matrices de type $m \times n$ se note $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

1.1 Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ \frac{1}{5} & 1 & 8 \\ 9 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1) Préciser le type de la matrice A.
2) Que valent les termes a_{21}, a_{43} et a_{34} ?
3) Quels sont les coefficients nuls ?

1.2 Écrire la matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})$ où $a_{ij} = (-1)^{i+j}\, 2^i\, j$ avec $1 \leqslant i, j \leqslant 3$.

Matrices particulières

Une matrice de type $1 \times n$ est appelée **matrice ligne**.
Une matrice ligne s'écrit $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$.

Une matrice de type $m \times 1$ est appelée **matrice colonne**.

Une matrice colonne s'écrit $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

Une matrice de type $n \times n$ est appelée **matrice carrée** d'ordre n.

Une matrice carrée s'écrit $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n se note $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice carrée A d'ordre n est appelée **matrice triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$ avec $i > j$.

Une matrice triangulaire supérieure s'écrit $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Une matrice carrée A d'ordre n est appelée **matrice triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$ avec $i < j$.

Une matrice triangulaire inférieure s'écrit $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Une matrice qui est à la fois triangulaire supérieure et inférieure est dite **matrice diagonale**.

Une matrice diagonale s'écrit $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

La **diagonale** de A est l'ensemble des éléments a_{ii}.

Une matrice diagonale est appelée **matrice scalaire** si tous les termes de sa diagonale sont égaux.

Une matrice scalaire s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$.

La matrice scalaire d'ordre n qui n'a que des 1 sur la diagonale est appelée **matrice identité** et se note I_n.

En d'autres termes, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

1.3 Comment se nomment les matrices suivantes ?

1) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 17 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 & 10 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & 18 & 14 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Opérations sur les matrices

Addition matricielle

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de type $m \times n$, leur somme $C = A + B$ est la matrice de type $m \times n$ définie par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ avec $1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$.

1.4 Calculer :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

1.5 Démontrer les propriétés de l'addition matricielle :

1) **commutativité :** $A + B = B + A$
2) **associativité :** $(A + B) + C = A + (B + C)$
3) **existence d'un élément neutre :** $A + 0 = A$
   (0 est la matrice dont tous les termes sont nuls.)
4) **existence d'un élément inverse :** $A + (-A) = 0$
   ($-A$ s'obtient en opposant les termes de A.)

Multiplication d'une matrice par un scalaire

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de type $m \times n$ et λ un nombre réel, leur produit $C = \lambda A$ est la matrice de type $m \times n$ définie par $c_{ij} = \lambda\, a_{ij}$ avec $1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$.

1.6 Calculer :

1) $3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $-\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1.7 Démontrer les propriétés de la multiplication d'une matrice par un scalaire :

1) $\lambda\,(A + B) = \lambda\,A + \lambda\,B$
2) $(\lambda + \mu)\,A = \lambda\,A + \mu\,A$
3) $(\lambda\,\mu)\,A = \lambda\,(\mu\,A)$
4) $1\,A = A$
5) $0\,A = 0$
6) $\lambda\,0 = 0$

Multiplication matricielle

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de type $m \times n$ et $B = (b_{ij})$ est une matrice de type $n \times p$, leur produit $C = AB$ est la matrice de type $m \times p$ définie par $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$ avec $1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant p$.

Exemple $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 & -2 & 1 \\ 24 & 8 & -5 & 13 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

1.8 Calculer, quand cela est possible, les produits AB et BA suivants :

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.9 Soient A une matrice de type 3×7, B une matrice de type 7×3 et C une matrice de type 7×7. De quel type sont les matrices suivantes :

1) $(\mathrm{AB})\,\mathrm{C}$ 2) $\mathrm{B}\,(\mathrm{AC})$ 3) $\mathrm{C}\,(\mathrm{BA})$ 4) $(\mathrm{AC})\,\mathrm{B}$

1.10 Démontrer les propriétés de la multiplication matricielle :

1) **associativité :** $(\mathrm{AB})\,\mathrm{C} = \mathrm{A}\,(\mathrm{BC})$
2) **existence d'un élément neutre :** $\mathrm{AI} = \mathrm{IA} = \mathrm{A}$
(I est la matrice identité)
3) **distributivité à droite :** $\mathrm{A}\,(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \mathrm{AB} + \mathrm{AC}$
4) **distributivité à gauche :** $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\,\mathrm{C} = \mathrm{AC} + \mathrm{BC}$
5) $\mathrm{A}\,(\lambda\,\mathrm{B}) = (\lambda\,\mathrm{A})\,\mathrm{B} = \lambda\,(\mathrm{AB})$

1.11 On donne les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer :

1) AB 2) AC 3) $\mathrm{AB} + \mathrm{AC}$
4) $\mathrm{B} + \mathrm{C}$ 5) $\mathrm{A}\,(\mathrm{B}+\mathrm{C})$ 6) $\mathrm{A} + \mathrm{B}$
7) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2$ 8) A^2 9) B^2
10) $\mathrm{A}^2 + 2\,\mathrm{AB} + \mathrm{B}^2$ 11) $\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2$ 12) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\,(\mathrm{A}-\mathrm{B})$
13) C^2 14) C^3 15) C^n où $n \in \mathbb{N}$

1.12 Expliquer pourquoi $(\mathrm{A} \pm \mathrm{B})^2 \neq \mathrm{A}^2 \pm 2\,\mathrm{AB} + \mathrm{B}^2$ et $\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2 \neq (\mathrm{A}+\mathrm{B})\,(\mathrm{A}-\mathrm{B})$.

1.13 Soient α, β, γ et δ des nombres réels, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}$.
Vérifier que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

1.14 Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B telles que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

1.15 On donne $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice B telle que $\mathrm{AB} \neq 0$ et $\mathrm{BA} = 0$.

Transposée d'une matrice

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de type $m \times n$, sa **transposée** est la matrice $C = {}^t\!A$ de type $n \times m$ définie par $c_{ij} = a_{ji}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m$.
En d'autres termes, la matrice transposée ${}^t\!A$ s'obtient en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A.

1.16 Écrire la transposée des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -5 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Une matrice qui est égale à sa transposée est dite **symétrique**.

1.17 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer :

1) AB 2) ${}^t\!AB$ 3) ${}^t(AB)$
4) ${}^t\!B\,{}^t\!A$ 5) ${}^t\!A + {}^t\!B$

1.18 Démontrer les propriétés de la transposée :

1) ${}^t(A + B) = {}^t\!A + {}^t\!B$
2) ${}^t(\lambda\, A) = \lambda\, {}^t\!A$
3) ${}^t(AB) = {}^t\!B\,{}^t\!A$

Inverse d'une matrice

Une matrice A carrée d'ordre n est dite **inversible** s'il existe une matrice X carrée d'ordre n telle que $AX = XA = I_n$.
La matrice X est appelée **matrice inverse** de A.

1.19 Montrer que $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ est l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.20 Montrer que si A est inversible, alors son inverse est unique. On la note A^{-1}.
Indication : montrer que si X et Y sont deux matrices inverses de A, alors $X = Y$.

1.21 Montrer que si A et B sont inversibles, alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

1.22 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $AB = AC$.

2) Pourquoi ne peut-on pas simplifier par A cette égalité ($B \neq C$) ?

Réponses

1.1 1) 4×3 2) $a_{21} = 0$ $\quad a_{43} = -\frac{1}{2}$ $\quad a_{34}$ n'existe pas 3) $a_{13} = a_{21} = a_{42} = 0$

1.2 $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \\ 8 & -16 & 24 \end{pmatrix}$

1.3
1) matrice scalaire
2) matrice triangulaire inférieure
3) matrice carrée
4) matrice diagonale
5) matrice colonne
6) matrice triangulaire supérieure
7) matrice idendité I_2
8) matrice ligne
9) matrice diagonale

1.4 1) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

1.6 1) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 12 & 0 & 6 & 3 \\ 6 & -15 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

1.8 1) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 12 \\ 4 & 8 & 14 \end{pmatrix}$
BA n'existe pas

2) $AB = \begin{pmatrix} 32 \end{pmatrix}$ $\quad BA = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$

3) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.9 1) impossible 2) 7×7 3) 7×7 4) 3×3

1.11 1) $\begin{pmatrix} -1 & 17 & 9 \\ 3 & 11 & 7 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 \\ 5 & 14 & 11 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 \\ 5 & 14 & 11 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 9 & 50 & 45 \\ 4 & 29 & 25 \\ -2 & 15 & 14 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 11 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 2 & 17 & 12 \\ -2 & 9 & 4 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 2 & 58 & 41 \\ 7 & 37 & 27 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$ 11) $\begin{pmatrix} 0 & -10 & -1 \\ 5 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ 12) $\begin{pmatrix} 7 & -18 & 3 \\ 2 & -11 & 3 \\ 12 & -7 & -4 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 14) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 15) $\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.14 $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

1.15 $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^\star$ et $c \in \mathbb{R}$.

1.16 1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -5 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

1.17 1) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 5) impossible

1.22 1) $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}$