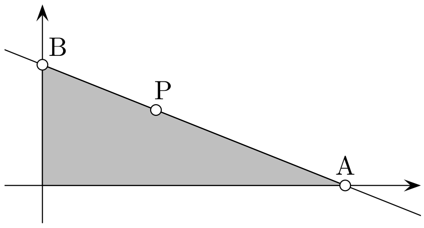
7.10

1) Soit $y = m\,x + h$ une droite.



$0 = m\,x + h$ implique $x = -\frac{h}{m}$, d'où $\mathrm{A}(-\frac{h}{m}\,;0)$.

$y = m \cdot 0 + h = h$ donne $\mathrm{B}(0\,;h)$.

L'aire du triangle grisé vaut donc $f(m,h) = \frac{1}{2}\,(-\frac{h}{m})\,h = -\frac{h^2}{2\,m}$

2) Puisque la droite $y = m\,x + h$ doit passer par le point $\mathrm{P}(3\,;2)$, on doit avoir $2 = 3\,m + h$.

3) On en déduit $h = 2 - 3\,m$.

L'aire du triangle grisé vaut ainsi $f(m) = -\dfrac{(2-3\,m)^2}{2\,m}$.

Comme la pente doit être négative, on a $\mathrm{D}_f =]-\infty\,;0[$.

4) Déterminons le minimum de la fonction $f(m) = -\dfrac{(2-3\,m)^2}{2\,m}$ sur l'intervalle $\mathrm{D}_f =]-\infty\,;0[$.

$$f'(m) = \left(-\frac{(2-3\,m)^2}{2\,m}\right)' = -\frac{\big((2-3\,m)^2\big)'\,2\,m - (2-3\,m)^2\,(2\,m)'}{(2\,m)^2}$$

$$= -\frac{2\,(2-3\,m)\,\overbrace{(2-3\,m)'}^{-3}\,2\,m - (2-3\,m)^2\,2}{4\,m^2}$$

$$= -\frac{-12\,m\,(2-3\,m) - 2\,(2-3\,m)^2}{4\,m^2} = -\frac{-2\,(2-3\,m)\,\big(6\,m + (2-3\,m)\big)}{4\,m^2}$$

$$= \frac{(2-3\,m)\,(3\,m+2)}{2\,m^2}$$

		$-\frac{2}{3}$		0		$\frac{2}{3}$	
$2-3\,m$	$+$		$+$	‖	$+$	0	$-$
$3\,m+2$	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$
$2\,m^2$	$+$		$+$	‖	$+$		$+$
f'	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	‖	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$f(-\tfrac{2}{3}) = -\frac{\big(2 - 3\,(-\frac{2}{3})\big)^2}{2\,(-\frac{2}{3})} = 12$$

$$\lim_{m\to-\infty} f(m) = \lim_{m\to-\infty} -\frac{(2-3\,m)^2}{2\,m} = \lim_{m\to-\infty} -\frac{4-12\,m+9\,m^2}{2\,m}$$

$$= \lim_{m\to-\infty} -\frac{9\,m^2}{2\,m} = \lim_{m\to-\infty} -\tfrac{9}{2}\,m = +\infty$$

$$\lim_{\substack{m\to 0\\ m<0}} f(m) = \lim_{\substack{m\to 0\\ m<0}} -\frac{(2-3\,m)^2}{2\,m} = \text{« } -\frac{4}{0_-} \text{ »} = +\infty$$

5) L'aire du triangle grisé est minimale si la pente de la droite vaut $m = -\frac{2}{3}$.
Alors $h = 2 - 3\,m = 2 - 3\,(-\frac{2}{3}) = 4$.
La droite recherchée admet ainsi pour équation $y = -\frac{2}{3}\,x + 4$.
Dans ce cas, l'aire du triangle grisé vaut $f(-\frac{2}{3}) = 12$.