5.11 Dans la base canonique $(x^3\,;x^2\,;x\,;1)$ de $\mathbb{R}_3[x]$, les polynômes p_1, p_2, p_3 et p_4 ont respectivement pour composantes :

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad p_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Pour calculer $\dim\big(\langle p_1\,;p_2\,;p_3\,;p_4\rangle\big)$, il suffit de déterminer le rang de la matrice dont les lignes sont données par les composantes des vecteurs p_1, p_2, p_3 et p_4.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \underset{}{\overset{\substack{L_2 \to L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - 2\,L_1}}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{L_3 \to L_3 - 2\,L_2 \\ L_4 \to L_4 + L_2}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi cette matrice est de rang 2 et $\dim\big(\langle p_1\,;p_2\,;p_3\,;p_4\rangle\big) = 2\,.$
En particulier $(x^3 - 2\,x^2 + 4\,x + 1\,;x^2 + x - 3)$ forme une base de $\langle p_1\,;p_2\,;p_3\,;p_4\rangle$.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est manifestement échelonnée.

Puisque ses lignes comportent 4 vecteurs linéairement indépendants, ses vecteurs forment une base de $\mathbb{R}_3[x]$, car $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4\,.$
Comme les deux premières lignes constituent une base de $\langle p_1\,;p_2\,;p_3\,;p_4\rangle$, les deux dernières lignes forment une base du supplémentaire de $\langle p_1\,;p_2\,;p_3\,;p_4\rangle$.
En d'autres termes, le supplémentaire de $\langle p_1\,;p_2\,;p_3\,;p_4\rangle$ admet pour base $(x\,;1)\,.$