7.13 h est un endormophisme de E dont la matrice relativement à la base $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ est $\mathrm{H}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

Examinons si l'on peut trouver l'inverse de la matrice H, grâce à la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\overset{\mathrm{L}_1\leftrightarrow\mathrm{L}_3}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\end{array}\right)\overset{\mathrm{L}_2\to\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\0&1&-1&0&-1&1\\0&1&1&1&0&0\end{array}\right)\overset{\mathrm{L}_3\to\mathrm{L}_3-\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\0&1&-1&0&-1&1\\0&0&2&1&1&-1\end{array}\right)$$

On remarque, à ce stade du calcul, que la matrice H est de rang 3, d'où l'on tire que :

1) l'endomorphisme h est surjectif ; il est donc également injectif, vu l'exercice 6.11 : h est ainsi bien un automorphisme ;
2) vu le théorème de la page 2.6, la matrice H est inversible.

Poursuivons la méthode de Gauss-Jordan pour calculer H^{-1} :

$$\overset{\mathrm{L}_3\to\frac{1}{2}\mathrm{L}_3}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\0&1&-1&0&-1&1\\0&0&1&\frac12&\frac12&-\frac12\end{array}\right)\overset{\mathrm{L}_2\to\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\0&1&0&\frac12&-\frac12&\frac12\\0&0&1&\frac12&\frac12&-\frac12\end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{L}_1\to\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac12&\frac12&\frac12\\0&1&0&\frac12&-\frac12&\frac12\\0&0&1&\frac12&\frac12&-\frac12\end{array}\right)$$

On a ainsi trouvé $\mathrm{H}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac12&\frac12&\frac12\\\frac12&-\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12&-\frac12\end{pmatrix}$.

$$h^{-1}(e_1)=\begin{pmatrix}-\frac12&\frac12&\frac12\\\frac12&-\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12&-\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix}=-\tfrac12\,e_1+\tfrac12\,e_2+\tfrac12\,e_3$$

$$h^{-1}(e_2)=\begin{pmatrix}-\frac12&\frac12&\frac12\\\frac12&-\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12&-\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac12\\\frac12\end{pmatrix}=\tfrac12\,e_1-\tfrac12\,e_2+\tfrac12\,e_3$$

$$h^{-1}(e_3)=\begin{pmatrix}-\frac12&\frac12&\frac12\\\frac12&-\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12&-\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\-\frac12\end{pmatrix}=\tfrac12\,e_1+\tfrac12\,e_2-\tfrac12\,e_3$$