Chamblandes 2013 — Problème 7

I

1. $a(1,0,0) = (1+3\cdot 0, 10\cdot 0, 3\cdot 1 + 9\cdot 0) = (1,0,3) = 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

   $a(0,1,0) = (0+3\cdot 0, 10\cdot 1, 3\cdot 0 + 9\cdot 0) = (0,10,0) = 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

   $a(0,0,1) = (0+3\cdot 1, 10\cdot 0, 3\cdot 0 + 9\cdot 1) = (3,0,9) = 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

   $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 10 & 0\\ 3 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

2. **Noyau**
   Un vecteur (x,y,z) appartient au noyau si et seulement si son image $a(x,y,z)$ est nulle, c'est-à-dire $(x+3\,z, 10\,y, 3\,x+9\,z) = (0,0,0)$

   $$\begin{cases} x \quad + 3\,z = 0\\ \quad 10\,y \quad = 0\\ 3\,x \quad + 9\,z = 0\end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 10 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 9 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 3\,\mathrm{L}_1]{\mathrm{L}_2 \to \frac{1}{10}\mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

   $$\begin{cases} x = -3\,\alpha\\ y = 0\\ z = \alpha\end{cases} = \alpha\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{Ker}(a) = \Delta\left(\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

   Image

   L'image est est engendrée par $a(1,0,0)$, $a(0,1,0)$, $a(0,0,1)$, à savoir $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\9\end{pmatrix}$.

   Échelonnons ces vecteurs pour déterminer l'espace qu'ils engendrent :

   $$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 10 & 0\\ 3 & 0 & 9\\ x & y & z\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 3\,\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - x\,\mathrm{L}_1}]{\mathrm{L}_2 \to \frac{1}{10}\mathrm{L}_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & y & -3\,x+z\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - y\,\mathrm{L}_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3\,x+z\end{pmatrix}$$

   $$\mathrm{Im}(a) = \Pi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : -3\,x+z = 0\}$$

3. Calculons les valeurs propres de a :
   $$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 3\\ 0 & 10-\lambda & 0\\ 3 & 0 & 9-\lambda\end{vmatrix} = (-1)^{2+2}\,(10-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 3 & 9-\lambda\end{vmatrix} = (10-\lambda)\,\big((1-\lambda)\,(9-\lambda)-3\cdot 3\big)$$

$= (10-\lambda)\,(\lambda^2 + 10\,\lambda) = (10-\lambda)\,\lambda\,(\lambda - 10) = -\lambda\,(\lambda-10)^2$

On obtient deux valeurs propres : $\lambda = 0$ et $\lambda = 10$.

Vu que l'espace propre associé à la valeur propre 0 est le noyau de a que l'on a déjà calculé précédemment, on peut immédiatement affirmer $\mathrm{E}_0 = \mathrm{Ker}(a) = \Delta\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 10$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-10 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 10-10 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9-10 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to \frac{1}{3}\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to -\frac{1}{3}\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}\alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases} = \frac{1}{3}\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{On a trouvé } \mathrm{E}_{10} = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

II 1. En comparant les réponses précédentes, on remarque en effet $\mathrm{Im}(a) = \mathrm{E}_{10}$

2. $a(v) = \mathrm{A}\,v \in \mathrm{Im}(a) = \mathrm{E}_{10}$ donc $\mathrm{A}^2\,v = \mathrm{A}\,(\mathrm{A}\,v) = 10\,\mathrm{A}\,v$.

En effet, $\mathrm{A}\,u = 10\,u$ pour tout vecteur $u \in \mathrm{E}_{10}$.

De $\mathrm{A}^2\,v = 10\,\mathrm{A}\,v$, on tire : $\frac{1}{10}\,\mathrm{A}^2\,v = \mathrm{A}\,v$

puis : $0 = \mathrm{A}\,v - \frac{1}{10}\,\mathrm{A}^2\,v = \mathrm{A}\,(v - \frac{1}{10}\,\mathrm{A}\,v)$

En d'autres termes, $v - \frac{1}{10}\,\mathrm{A}\,v$ a pour image le vecteur nul, donc il fait partie (par définition) du noyau de a.

III 1. Les vecteurs propres que l'on a obtenus sont d'ores et déjà perpendiculaires deux à deux :

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0$$

Il faut donc prendre un multiple de chacun de ces vecteurs, en faisant en sorte d'obtenir une longueur de 1. Pour y parvenir, il suffit de diviser chaque vecteur par sa norme :
$\left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$

Proposons ainsi les vecteurs suivants :
$v_1 = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2+0^2+1^2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$
$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+3^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$
$v_3 = \frac{1}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix}$

   Pour montrer que $\mathrm{P}^{-1} = {}^t\mathrm{P}$, vérifions que $\mathrm{P}\,{}^t\mathrm{P} = \mathrm{I}$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} + \frac{1}{10} + 0 & 0+0+0 & -\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + 0 \\ 0+0+0 & 0+0+1 & 0+0+0 \\ -\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + 0 & 0+0+0 & \frac{1}{10} + \frac{9}{10} + 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Puisque la matrice P est la matrice de passage de la base canonique vers la base formée de vecteurs propres, on peut dire, sans effectuer de calculs, que la matrice $\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P}$ est la matrice diagonale formée des valeurs propres correspondantes :
$\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$