

4.14

1) Résolvons le système :

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{L}_3 \rightarrow \text{L}_3 - 3\text{L}_1]{\text{L}_2 \rightarrow \text{L}_2 - 2\text{L}_1} \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il y a deux variables libres y et z . En posant $y = \alpha$ et $z = \beta$, on a :

$$\begin{cases} x = 3\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est pourquoi l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$ admet pour base $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

2) Résolvons le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \\ 6x + 5y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{L}_4 \rightarrow \text{L}_4 - 6\text{L}_1]{\text{L}_2 \rightarrow \text{L}_2 - 3\text{L}_1, \text{L}_3 \rightarrow \text{L}_3 - 4\text{L}_1} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 5z = 0 \\ -y - 5z = 0 \\ -y - 5z = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{L}_4 \rightarrow \text{L}_4 - \text{L}_2]{\text{L}_3 \rightarrow \text{L}_3 - \text{L}_2} \begin{cases} x - 4z = 0 \\ y + 5z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il y a une variable libre z . En posant $z = \alpha$, on obtient :

$$\begin{cases} x = 4\alpha \\ y = -5\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \\ 6x + 5y + z = 0 \end{cases}$ admet ainsipour base $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.