Chamblandes 2011 — Problème 1

Comme $e^x > 0$ et $x^2 \geqslant 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il en résulte que $e^x + x^2 > 0$.
C'est pourquoi $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

		0	
$4\,x^2$	$+$	0	$+$
$e^x + x^2$	$+$		$+$
f	$+$	0	$+$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4\,x^2}{e^x + x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4\,x^2}{x^2} = 4$.
Donc $y = 4$ est asymptote horizontale à gauche.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4\,x^2}{e^x + x^2} = \frac{+\infty}{+\infty + \infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ : indéterminé}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4\,x^2}{e^x + x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(4\,x^2)'}{(e^x + x^2)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{8\,x}{e^x + 2\,x} = \frac{+\infty}{+\infty + \infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ : indéterminé}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4\,x^2}{e^x + x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{8\,x}{e^x + 2\,x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(8\,x)'}{(e^x + 2\,x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{8}{e^x + 2} = \frac{8}{+\infty} = 0$$

Ainsi $y = 0$ est asymptote horizontale à droite.

$$f'(x) = \frac{(4\,x^2)'\,(e^x + x^2) - 4\,x^2\,(e^x + x^2)'}{(e^x + x^2)^2} = \frac{8\,x\,(e^x + x^2) - 4\,x^2\,(e^x + 2\,x)}{(e^x + x^2)^2}$$

$$= \frac{8\,x\,e^x + 8\,x^3 - 4\,x^2\,e^x - 8\,x^3}{(e^x + x^2)^2} = \frac{8\,x\,e^x - 4\,x^2\,e^x}{(e^x + x^2)^2} = \frac{4\,x\,e^x\,(2 - x)}{(e^x + x^2)^2}$$

		0		2	
$4\,x$	$-$	0	$+$		$+$
e^x	$+$		$+$	0	$+$
$2 - x$	$+$		$+$		$-$
$(e^x + x^2)^2$	$+$		$+$		$+$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$f(0) = \dfrac{4 \cdot 0^2}{e^0 + 0^2} = 0$

le point $(0\,;0)$ est un minimum absolu.

$f(2) = \dfrac{4 \cdot 2^2}{e^2 + 2^2} = \dfrac{16}{e^2 + 4} \approx 1,4$

le point $\left(2\,;\frac{16}{e^2+4}\right)$ est un maximum local.