6.14 4) (a) Résolvons le système $\begin{cases} 2\,x - y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 \to -L_2 + 2\,L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Puisque $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, on a obtenu $\mathrm{Ker}(h) = \big\{(0\,;0)\big\} = \{0\}$.

(b) Vu que $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et que h est injective, il s'ensuit que h est surjective, d'après l'exercice 6.11.
Ainsi $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$.

6) (a) Résolvons le système $\begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$.
Le système est déjà échelonné : y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ et on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $\mathrm{Ker}(h) = \big\{(\alpha\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) $h\big((1\,;0)\big) = (1-0\,;0) = (1\,;0)$
$h\big((0\,;1)\big) = (0-1\,;0) = (-1\,;0)$

Échelonnons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - x\,L_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$

Ainsi $\mathrm{Im}(h) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \big\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\big\}$

8) (a) Résolvons le système $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 - L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 + L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La solution $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ signifie $\mathrm{Ker}(h) = \big\{(0\,;0)\big\} = \{0\}$.

(b) $h\big((1\,;0)\big) = (1\,;0\,;1-0) = (1\,;0\,;1)$
$h\big((0\,;1)\big) = (0\,;1\,;0-1) = (0\,;1\,;-1)$

Échelonnons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \overset{L_3 \to L_3 - x\,L_1}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & y & -x+z \end{pmatrix}$

$$\overset{L_3 \to L_3 - y\,L_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -x+y+z \end{pmatrix}$$

On a trouvé $\mathrm{Im}(h) = \Pi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$

$= \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : -x+y+z=0\big\}$

9) (a) Si l'on résout le système $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ par rapport aux variables x, y, z, on constate immédiatement que z est une variable libre et que la solution générale est $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

C'est pourquoi $\mathrm{Ker}(h) = \big\{(0\,;0\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

(b) On a $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Le théorème du rang implique :

$\dim\big(\mathrm{Im}(h)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim\big(\mathrm{Ker}(h)\big) = 3-1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.

Ainsi h est surjective : $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$.

10) (a) Résolvons le système $\begin{cases} x + 2\,y = 0 \\ - 2\,y + z = 0 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to -\frac{1}{2}\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - 2\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Comme z est une variable libre, on pose $z = 2\,\alpha$ et on obtient la solution générale $\begin{cases} x = -2\,\alpha \\ y = \,\alpha \\ z = 2\,\alpha \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$.

Donc $\mathrm{Ker}(h) = \big\{(-2\,\alpha\,;\alpha\,;2\,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\right)$.

(b) On a $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Le théorème du rang implique :

$\dim\big(\mathrm{Im}(h)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim\big(\mathrm{Ker}(h)\big) = 3-1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.

Ainsi h est surjective : $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$.

11) (a) Le système $\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ possède $(0\,;0\,;0)$ pour unique solution.

C'est pourquoi $\mathrm{Ker}(h) = \big\{(0\,;0\,;0)\big\} = \{0\}$.

(b) On a $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
h est ainsi un endomorphisme.
De plus, h est injective, car $\operatorname{Ker}(h) = \{0\}$.
Donc h est aussi surjective, vu l'exercice 6.11.
Par conséquent $\operatorname{Im}(h) = \mathbb{R}^3$.

12) (a) En résolvant le système $\begin{cases} 0 = 0 \\ x = 0 \\ 2\,x = 0 \end{cases}$ par rapport aux variables x, y, z, on constate qu'il y a deux variables libres y et z. La solution générale s'écrit donc $\begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où $\operatorname{Ker}(h) = \big\{(0\,;\alpha\,;\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\big\}$
$$= \Pi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(b) $h\big((1\,;0\,;0)\big) = (0\,;1\,;2)$
$h\big((0\,;1\,;0)\big) = (0\,;0\,;0)$
$h\big((0\,;0\,;1)\big) = (0\,;0\,;0)$

Il apparaît aussitôt que $\operatorname{Im}(h) = \big\{(0\,;\alpha\,;2\,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

14) (a) Résolvons le système $\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 + L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On remarque que y est une variable libre. On pose $y = \alpha$ et on obtient la solution générale $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent $\operatorname{Ker}(h) = \big\{(\alpha\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\big\} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

(b) $h\big((1\,;0)\big) = (1 - 0\,;0 - 1) = (1\,;-1)$
$h\big((0\,;1)\big) = (0 - 1\,;1 - 0) = (-1\,;1)$

Échelonnons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - x\,L_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & x + y \end{pmatrix}$.

Ainsi $\operatorname{Im}(h) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \big\{(\alpha\,;-\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\big\}$
$$= \big\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\big\}$$

16) (a) Résolvons, par rapport aux variables x, y, z, le système $\begin{cases} x - z = 0 \\ -2\,x + 2\,z = 0 \end{cases}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + 2\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On remarque que y et z sont des variables libres ; on pose $z = \alpha$ et $y = \beta$, de sorte que la solution générale s'écrit :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(h) &= \big\{(\alpha\,;\beta\,;\alpha) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\big\} \\ &= \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

(b) $h\big((1\,;0\,;0)\big) = (1 - 0\,;2 \cdot 0 - 2 \cdot 1) = (1\,;-2)$
$h\big((0\,;1\,;0)\big) = (0 - 0\,;2 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = (0\,;0)$
$h\big((0\,;0\,;1))\big) = (0 - 1\,;2 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = (-1\,;2)$

Échelonnons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - x\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2\,x + y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \mathrm{Im}(h) &= \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \big\{(\alpha\,;-2\,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 : 2\,x + y = 0\big\} \end{aligned}$$