6.2

1) (a) $h\big((x\,;y)+(x'\,;y')\big)=h\big((x+x'\,;y+y')\big)=(x+x')+(y+y')$
$=(x+y)+(x'+y')=h\big((x\,;y)\big)+h\big((x'\,;y')\big)$

(b) $h\big(\alpha\cdot(x\,;y)\big)=h\big((\alpha\,x\,;\alpha\,y)\big)=\alpha\,x+\alpha\,y=\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot h\big((x\,;y)\big)$

2) (a) $h\big((x\,;y)+(x'\,;y')\big)=h\big((x+x'\,;y+y')\big)=2\,(x+x')-(y+y')$
$=2\,x+2\,x'-y-y'=(2\,x-y)+(2\,x'-y')$
$=h\big((x\,;y)\big)+h\big((x'\,;y')\big)$

(b) $h\big(\alpha\cdot(x\,;y)\big)=h\big((\alpha\,x\,;\alpha\,y)\big)=2\,(\alpha\,x)-\alpha\,y=\alpha\cdot(2\,x-y)$
$=\alpha\cdot h\big((x\,;y)\big)$

3) $h\big((1\,;0)+(0\,;1)\big)=h\big((1\,;1)\big)=1\cdot 1=1$

$h\big((1\,;0)\big)+h\big((0\,;1)\big)=(1\cdot 0)+(0\cdot 1)=0+0=0$

Puisque $h\big((1\,;0)+(0\,;1)\big)\neq h\big((1\,;0)\big)+h\big((0\,;1)\big)$, l'application h n'est pas linéaire.

4) (a) $h\big((x\,;y)+(x'\,;y')\big)=h\big((x+x'\,;y+y')\big)$
$=\big(2\,(x+x')-(y+y')\,;x+x'\big)$
$=(2\,x+2\,x'-y-y'\,;x+x')$
$=\big((2\,x-y)+(2\,x'-y')\,;x+x'\big)=$
$=(2\,x-y\,;x)+(2\,x'-y'\,;x')$
$=h\big((x\,;y)\big)+h\big((x'\,;y')\big)$

(b) $h\big(\alpha\cdot(x\,;y)\big)=h\big((\alpha\,x\,;\alpha\,y)\big)=\big(2\,(\alpha\,x)-\alpha\,y\,;\alpha\,x\big)$
$=\big(\alpha\,(2\,x-y)\,;\alpha\,x\big)=\alpha\cdot(2\,x-y\,;x)=\alpha\cdot h\big((x\,;y)\big)$

5) $h\big((0\,;0)\big)=(0+1\,;0)=(1\,;0)\neq(0\,;0)$

Au vu de l'exercice 6.1 1), l'application h n'est pas linéaire.

6) (a) $h\big((x\,;y)+(x'\,;y')\big)=h\big((x+x'\,;y+y')\big)=\big((x+x')-(y+y')\,;0\big)$
$=(x+x'-y-y'\,;0)=\big((x-y)+(x'-y')\,;0\big)$
$=(x-y\,;0)+(x'-y'\,;0)=h\big((x\,;y)\big)+h\big((x'\,;y')\big)$

(b) $h\big(\alpha\cdot(x\,;y)\big)=h\big((\alpha\,x\,;\alpha\,y)\big)=(\alpha\,x-\alpha\,y\,;0)=\big(\alpha\,(x-y)\,;\alpha\cdot 0\big)$
$=\alpha\cdot(x-y\,;0)=\alpha\cdot h\big((x\,;y)\big)$

7) $h\big(-(0\,;1)\big)=h\big((0\,;-1)\big)=\big(0\,;|-1|\big)=(0\,;1)$

$-h\big((0\,;1)\big)=-\big(0\,;|1|\big)=-(0\,;1)=(0\,;-1)$

Comme $h\big(-(0\,;1)\big)\neq -h\big((0\,;1)\big)$, l'exercice 6.1 2) montre que l'application h n'est pas linéaire.

8) (a) $h\big((x\,;y)+(x'\,;y')\big)=h\big((x+x'\,;y+y')\big)$
$=\big(x+x'\,;y+y'\,;(x+x')-(y+y')\big)$
$=(x+x'\,;y+y'\,;x+x'-y-y')$
$=\big(x+x'\,;y+y'\,;(x-y)+(x'-y')\big)$
$=(x\,;y\,;x-y)+(x'\,;y'\,;x'-y')$
$=h\big((x\,;y)\big)+h\big((x'\,;y')\big)$

(b) $h\big(\alpha\cdot(x\,;y)\big)=h\big((\alpha\,x\,;\alpha\,y)\big)=(\alpha\,x\,;\alpha\,y\,;\alpha\,x-\alpha\,y)$
$=\big(\alpha\,x\,;\alpha\,y\,;\alpha\,(x-y)\big)=\alpha\cdot(x\,;y\,;x-y)=\alpha\cdot h\big((x\,;y)\big)$

9) (a) $h\big((x\,;y\,;z)+(x'\,;y'\,;z')\big)=h\big((x+x'\,;y+y'\,;z+z')\big)=(x+x'\,;y+y')$
$=(x\,;y)+(x'\,;y')=h\big((x\,;y\,;z)\big)+h\big((x'\,;y'\,;z')\big)$

(b) $h\big(\alpha\cdot(x\,;y\,;z)\big)=h\big((\alpha\,x\,;\alpha\,y\,;\alpha\,z)\big)=(\alpha\,x\,;\alpha\,y)=\alpha\cdot(x\,;y)$
$=\alpha\cdot h\big((x\,;y\,;z)\big)$

10) (a) $h\big((x\,;y\,;z)+(x'\,;y'\,;z')\big)=h\big((x+x'\,;y+y'\,;z+z')\big)$
$=\big((x+x')+2\,(y+y')\,;(z+z')-2\,(y+y')\big)$
$=(x+x'+2\,y+2\,y'\,;z+z'-2\,y-2\,y')$
$=\big((x+2\,y)+(x'+2\,y')\,;(z-2\,y)+(z'-2\,y')\big)$
$=(x+2\,y\,;z-2\,y)+(x'+2\,y'\,;z'-2\,y')$
$=h\big((x\,;y\,;z)\big)+h\big((x'\,;y'\,;z')\big)$

(b) $h\big(\alpha\cdot(x\,;y\,;z)\big)=h\big((\alpha\,x\,;\alpha\,y\,;\alpha\,z)\big)=(\alpha\,x+2\,\alpha\,y\,;\alpha\,z-2\,\alpha\,y)$
$=\big(\alpha\,(x+2\,y)\,;\alpha\,(z-2\,y)\big)=\alpha\cdot(x+2\,y\,;z-2\,y)$
$=\alpha\cdot h\big((x\,;y\,;z)\big)$

11) (a) $h\big((x\,;y\,;z)+(x'\,;y'\,;z')\big)=h\big((x+x'\,;y+y'\,;z+z')\big)$
$=(z+z'\,;y+y'\,;x+x')$
$=(z\,;y\,;x)+(z'\,;y'\,;x')$
$=h\big((x\,;y\,;z)\big)+h\big((x'\,;y'\,;z')\big)$

(b) $h\big(\alpha\cdot(x\,;y\,;z)\big)=h\big((\alpha\,x\,;\alpha\,y\,;\alpha\,z)\big)=(\alpha\,z\,;\alpha\,y\,;\alpha\,x)=\alpha\cdot(z\,;y\,;x)$
$=\alpha\cdot h\big((x\,;y\,;z)\big)$

12) (a) $h\big((x\,;y\,;z)+(x'\,;y'\,;z')\big)=h\big((x+x'\,;y+y'\,;z+z')\big)$
$=\big(0\,;x+x'\,;2\,(x+x')\big)$
$=(0\,;x+x'\,;2\,x+2\,x')$
$=(0\,;x\,;2\,x)+(0\,;x'\,;2\,x')$
$=h\big((x\,;y\,;z)\big)+h\big((x'\,;y'\,;z')\big)$

(b) $h\big(\alpha\cdot(x\,;y\,;z)\big)=h\big((\alpha\,x\,;\alpha\,y\,;\alpha\,z)\big)=(0\,;\alpha\,x\,;2\,\alpha\,x)=\alpha\cdot(0\,;x\,;2\,x)$
$=\alpha\cdot h\big((x\,;y\,;z)\big)$

13) $h\big(2\cdot(1\,;0)\big)=h\big((2\,;0)\big)=(2^2\,;2+0)=(4\,;2)$

$2\cdot h\big((1\,;0)\big)=2\cdot(1^2\,;1+0)=2\cdot(1\,;1)=(2\,;2)$

Puisque $h\big(2\cdot(1\,;0)\big)\neq 2\cdot h\big((1\,;0)\big)$, l'application h n'est pas linéaire.

14) (a) $$\begin{aligned} h\big((x\,;y)+(x'\,;y')\big) &= h\big((x+x'\,;y+y')\big)\\ &= \big((x+x')-(y+y')\,;(y+y')-(x+x')\big)\\ &= (x+x'-y-y'\,;y+y'-x-x')\\ &= \big((x-y)+(x'-y')\,;(y-x)+(y'-x')\big)\\ &= (x-y\,;y-x)+(x'-y'\,;y'-x')\\ &= h\big((x\,;y)\big)+h\big((x'\,;y')\big)\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} h\big(\alpha\cdot(x\,;y)\big) &= h\big((\alpha\,x\,;\alpha\,y)\big)=(\alpha\,x-\alpha\,y\,;\alpha\,y-\alpha\,x)\\ &= \big(\alpha\,(x-y)\,;\alpha\,(y-x)\big)=\alpha\cdot(x-y\,;y-x)=\alpha\cdot h\big((x\,;y)\big)\end{aligned}$$

15) $h\big(2\cdot(\frac{\pi}{2}\,;0)\big)=h\big((\pi\,;0)\big)=\big(\sin(\pi)\,;0\big)=(0\,;0)$

$2\cdot h\big((\frac{\pi}{2}\,;0)\big)=2\cdot\big(\sin(\frac{\pi}{2})\,;0\big)=2\cdot(1\,;0)=(2\,;0)$

Attendu que $h\big(2\cdot(\frac{\pi}{2}\,;0)\big)\neq 2\cdot h\big((\frac{\pi}{2}\,;0)\big)$, l'application h n'est pas linéaire.

16) (a) $$\begin{aligned} h\big((x\,;y\,;z)+(x'\,;y'\,;z')\big) &= h\big((x+x'\,;y+y'\,;z+z')\big)\\ &= \big((x+x')-(z+z')\,;2\,(z+z')-2\,(x+x')\big)\\ &= (x+x'-z-z'\,;2\,z+2\,z'-2\,x-2\,x')\\ &= \big((x-z)+(x'-z')\,;(2\,z-2\,x)+(2\,z'-2\,x')\big)\\ &= (x-z\,;2\,z-2\,x)+(x'-z'\,;2\,z'-2\,x')\\ &= h\big((x\,;y\,;z)\big)+h\big((x'\,;y'\,;z')\big)\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} h\big(\alpha\cdot(x\,;y\,;z)\big) &= h\big((\alpha\,x\,;\alpha\,y\,;\alpha\,z)\big)=(\alpha\,x-\alpha\,z\,;2\,\alpha\,z-2\,\alpha\,x)\\ &= \big(\alpha\,(x-z)\,;\alpha\,(2\,z-2\,x)\big)=\alpha\cdot(x-z\,;2\,z-2\,x)\\ &= \alpha\cdot h\big((x\,;y\,;z)\big)\end{aligned}$$