4.8 Résolvons l'équation

$$\alpha\, f + \beta\, g + \gamma\, h \equiv 0$$

où les inconnues sont α, β et γ.

$\alpha\, f(x) + \beta\, g(x) + \gamma\, h(x) =$

$\alpha\, \dfrac{2\,x+1}{x^2-1} + \beta\, \dfrac{3}{x-1} + \gamma\, \dfrac{1}{2\,x+2} =$

$\alpha\, \dfrac{2\,x+1}{(x-1)\,(x+1)} + \beta\, \dfrac{3}{x-1} + \gamma\, \dfrac{1}{2\,(x+1)} =$

$\dfrac{2\,\alpha\,(2\,x+1)}{2\,(x-1)\,(x+1)} + \dfrac{6\,\beta\,(x+1)}{2\,(x-1)\,(x+1)} + \dfrac{\gamma\,(x-1)}{2\,(x+1)\,(x-1)} =$

$\dfrac{4\,\alpha\,x + 2\,\alpha + 6\,\beta\,x + 6\,\beta + \gamma\,x - \gamma}{2\,(x+1)\,(x-1)} =$

$\dfrac{(4\,\alpha + 6\,\beta + \gamma)\,x + (2\,\alpha + 6\,\beta - \gamma)}{2\,(x+1)\,(x-1)}$

Par conséquent $\alpha\, f + \beta\, g + \gamma\, h \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 4\,\alpha + 6\,\beta + \gamma = 0 \\ 2\,\alpha + 6\,\beta - \gamma = 0 \end{cases}$

$\overset{L_2 \to 2\,L_2 - L_1}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} 4\,\alpha + 6\,\beta + \gamma = 0 \\ 6\,\beta - 3\,\gamma = 0 \end{cases} \quad \overset{L_1 \to L_1 - L_2}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} 4\,\alpha + 4\,\gamma = 0 \\ 6\,\beta - 3\,\gamma = 0 \end{cases}$

$\overset{\substack{L_1 \to \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \to \frac{1}{6}L_2}}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - \frac{1}{2}\gamma = 0 \end{cases}$

On constate que ce système possède une variable libre, à savoir γ. Il y a donc une infinité de solutions : $S = \big\{(-\gamma\,;\,\frac{1}{2}\,\gamma\,;\,\gamma) : \gamma \in \mathbb{R}\big\}$.

Par exemple, si $\gamma = 2$, on obtient $-2\,f + g + 2\,h = 0$, ce qui signifie que la famille $(f\,;g\,;h)$ est liée.