3.12

1) En remplaçant les coordonnées fournies par l'équation paramétrique de la droite dans l'équation cartésienne du plan, on obtient :

$2\,(3+2\,\lambda)+(5-2\,\lambda)-(3+2\,\lambda)=0$

$6+4\,\lambda+5-2\,\lambda-3-2\,\lambda=0$

$6=0$

Puisque cette égalité est fausse, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on conclut qu'il est impossible que la droite et le plan se coupent : ils sont donc disjoints.

2) Résolvons le système formé par les équations cartésiennes de la droite et du plan :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2\,y & + & z & = & 4 \\ x & + & 3\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ 3\,x & - & 2\,y & + & 4\,z & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l|l} \cdot(-1) & \cdot(-3) \\ \cdot 1 & \\ & \cdot 1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2\,y & + & z & = & 4 \\ & & 5\,y & - & 3\,z & = & -4 \\ & & 4\,y & + & z & = & -12 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \\ \cdot(-4) \\ \cdot 5 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2\,y & + & z & = & 4 \\ & & 4\,y & + & z & = & -12 \\ & & & & 17\,z & = & -44 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l|l} & \cdot 1 \\ \cdot(-1) & \\ :17 & :(-17) \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2\,y & & & = & \frac{112}{17} \\ & - & 4\,y & & & = & \frac{160}{17} \\ & & & & z & = & -\frac{44}{17} \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l|l} \cdot 1 & \\ :(-2) & :(-4) \\ & \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & \frac{32}{17} \\ & & y & & & = & -\frac{40}{17} \\ & & & & z & = & -\frac{44}{17} \end{array}\right.$$

On conclut que la droite d coupe le plan π au point $(\frac{32}{17}\,;-\frac{40}{17}\,;-\frac{44}{17})$.

3) En remplaçant les coordonnées fournies par l'équation paramétrique de la droite dans l'équation cartésienne du plan, on obtient :

$4\,(2-3\,\lambda)+(3+\lambda)-11\,(1-\lambda)=0$

$8-12\,\lambda+3+\lambda-11+11\,\lambda=0$

$0=0$

Étant donné que cette équation est vérifiée pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on conclut que la droite d est incluse dans le plan π.

4) En remplaçant les coordonnées fournies par l'équation paramétrique du plan dans les équations cartésiennes de la droite, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{l} (5-\lambda+2\,\mu)+(10+\lambda-3\,\mu)-3\,(5+\lambda-\mu)=0 \\ (5-\lambda+2\,\mu)-(10+\lambda-3\,\mu)-(5+\lambda-\mu)=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -3\,\lambda & + & 2\,\mu & = & 0 \\ -3\,\lambda & + & 6\,\mu & = & 11 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \cdot(-1) \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 3\,\lambda - 2\,\mu = 0 \\ \phantom{3\,\lambda - {}} 4\,\mu = 11 \end{cases} \quad \left|\begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 6\,\lambda \phantom{{}-2\,\mu} = 11 \\ 4\,\mu = 11 \end{cases} \quad \left|\begin{array}{l} : 6 \\ : 4 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{11}{6} \\ \mu = \frac{11}{4} \end{cases}$$

Calculons encore les coordonnées du point d'intersection :

$$\begin{cases} x = 5 - \frac{11}{6} + 2 \cdot \frac{11}{4} = \frac{26}{3} \\ y = 10 + \frac{11}{6} - 3 \cdot \frac{11}{4} = \frac{43}{12} \\ z = 5 + \frac{11}{6} - \frac{11}{4} = \frac{49}{12} \end{cases}$$

En définitive, la droite et le plan se coupent au point $(\frac{26}{3}\,;\frac{43}{12}\,;\frac{49}{12})$.