9.10 1) Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\,(2-\lambda) - 1\cdot 2 = \lambda^2 - 5\,\lambda + 4 = (\lambda-1)\,(\lambda-4)$$

Il y a ainsi deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 4$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x + 2\,y \\ x + 2\,y \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3\,x + 2\,y = x \\ x + 2\,y = y \end{cases} \iff \begin{cases} 2\,x + 2\,y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff x + y = 0$$

On constate que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ pour avoir la solution générale :

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est $\mathrm{E}_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x + 2\,y \\ x + 2\,y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,x \\ 4\,y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3\,x + 2\,y = 4\,x \\ x + 2\,y = 4\,y \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2\,y = 0 \\ x - 2\,y = 0 \end{cases} \iff x - 2\,y = 0$$

On remarque que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ pour avoir la solution générale :

$$\begin{cases} x = 2\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 4$ est $\mathrm{E}_4 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Nous avons obtenu deux vecteurs propres. D'après la proposition du bas de la page 9.2, ils forment une famille libre. Ces deux vecteurs propres constituent ainsi une base de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle est $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, on obtient :

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

si bien que la matrice de l'endomorphisme dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On peut par ailleurs vérifier que

$$\begin{aligned} A' = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2) Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\,(2-\lambda) - 0\cdot(-1) = (3-\lambda)\,(2-\lambda)$$

Il y a ainsi deux valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x - y \\ 2\,y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2\,y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3\,x - y = 2\,x \\ \phantom{3\,x -{}} 2\,y = 2\,y \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff x - y = 0$$

On constate que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ pour avoir la solution générale :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$ est $E_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x - y \\ 2\,y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x \\ 3\,y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3\,x - y = 3\,x \\ \phantom{3\,x -{}} 2\,y = 3\,y \end{cases} \iff \begin{cases} -\,y = 0 \\ -\,y = 0 \end{cases} \iff y = 0$$

On remarque que x est une variable libre ; on pose $x = \alpha$ pour avoir la solution générale :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$ est $E_3 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Nous avons obtenu deux vecteurs propres. D'après la proposition du bas de la page 9.2, ils forment une famille libre. Ces deux vecteurs propres constituent ainsi une base de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, on obtient :

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

si bien que la matrice de l'endomorphisme dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On peut par ailleurs vérifier que

$$\begin{aligned} \mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3) Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda) - 2 \cdot (-2) = \lambda^2 - 6\,\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

Il y a ainsi une seule valeur propre : $\lambda = 3$.

Déterminons l'espace propre associé à cette valeur propre.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2\,y \\ 2\,x + 5\,y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x \\ 3\,y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 2\,y = 3\,x \\ 2\,x + 5\,y = 3\,y \end{cases} \iff \begin{cases} -2\,x - 2\,y = 0 \\ 2\,x + 2\,y = 0 \end{cases} \iff x + y = 0$$

On constate que y est une variable libre; on pose $y = \alpha$ pour avoir la solution générale :

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$ est $\mathrm{E}_3 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Attendu que $\dim(\mathrm{E}_3) = 1$, il n'est pas possible de former une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres, vu que $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$. Le théorème du haut de la page 9.4 entraîne que l'endomorphisme et sa matrice associée ne sont pas diagonalisables.

4) Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-2-\lambda) - 1 \cdot 2 = \lambda^2 + 3\,\lambda = \lambda\,(\lambda+3)$$

Il y a ainsi deux valeurs propres : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -3$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2\,y \\ x - 2\,y \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x + 2\,y = 0 \\ x - 2\,y = 0 \end{cases} \iff \quad x - 2\,y = 0$

On constate que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ pour avoir la solution générale :

$\begin{cases} x = 2\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$ est $\mathrm{E}_0 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2\,y \\ x - 2\,y \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,x \\ -3\,y \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x + 2\,y = -3\,x \\ x - 2\,y = -3\,y \end{cases} \iff \begin{cases} 2\,x + 2\,y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \quad x + y = 0$

On constate que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ pour avoir la solution générale :

$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = -3$ est $\mathrm{E}_{-3} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Nous avons obtenu deux vecteurs propres. D'après la proposition du bas de la page 9.2, ils forment une famille libre. Ces deux vecteurs propres constituent ainsi une base de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle est $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, on obtient :

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

si bien que la matrice de l'endomorphisme dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

On peut par ailleurs vérifier que

$$\begin{aligned} \mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5) Calculons les valeurs propres :

$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\,(1-\lambda) - (-5)\cdot 3 = \lambda^2 - 2\,\lambda + 16$

Il n'y a aucune valeur propre, car $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 16 = -60 < 0$.

Il n'y a dès lors aucun vecteur propre, de sorte qu'on ne saurait former une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres. C'est pourquoi l'endomorphisme et la matrice qui lui est associée ne sont pas diagonalisables.

6) Calculons les valeurs propres :

$0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (0-\lambda)\,(2-\lambda) - 1\cdot 3 = \lambda^2 - 2\,\lambda - 3 = (\lambda+1)\,(\lambda-3)$

Il y a par conséquent deux valeurs propres : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -3$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,y \\ x + 2\,y \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 3\,y = -x \\ x + 2\,y = -y \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3\,y = 0 \\ x + 3\,y = 0 \end{cases} \iff x + 3\,y = 0$

On constate que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ pour avoir la solution générale :

$\begin{cases} x = -3\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ est $\mathrm{E}_{-1} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,y \\ x + 2\,y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x \\ 3\,y \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 3\,y = 3\,x \\ x + 2\,y = 3\,y \end{cases} \iff \begin{cases} -3\,x + 3\,y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff x - y = 0$

On constate que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ pour avoir la solution générale :

$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$ est $\mathrm{E}_3 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Nous avons obtenu deux vecteurs propres. D'après la proposition du bas de la page 9.2, ils forment une famille libre. Ces deux vecteurs propres constituent ainsi une base de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle est $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, on obtient :

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

si bien que la matrice de l'endomorphisme dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On peut par ailleurs vérifier que

$$\begin{aligned} \mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7) Calculons les valeurs propres :

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\,(4-\lambda) - 1\cdot 2 = \lambda^2 - 7\,\lambda + 10 = (\lambda-2)\,(\lambda-5)$$

Il y a par conséquent deux valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 5$.

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x + 2\,y \\ x + 4\,y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2\,y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3\,x + 2\,y = 2\,x \\ x + 4\,y = 2\,y \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2\,y = 0 \\ x + 2\,y = 0 \end{cases} \iff x + 2\,y = 0$$

On constate que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ pour avoir la solution générale :

$$\begin{cases} x = -2\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$ est $\mathrm{E}_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x + 2\,y \\ x + 4\,y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,x \\ 5\,y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3\,x + 2\,y = 5\,x \\ x + 4\,y = 5\,y \end{cases} \iff \begin{cases} -2\,x + 2\,y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff x - y = 0$$

On constate que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ pour avoir la solution générale :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 5$ est $\mathrm{E}_5 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Nous avons obtenu deux vecteurs propres. D'après la proposition du bas de la page 9.2, ils forment une famille libre. Ces deux vecteurs propres constituent ainsi une base de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle est $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, on obtient :

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

si bien que la matrice de l'endomorphisme dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

On peut par ailleurs vérifier que

$$\begin{aligned} \mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8) Calculons les valeurs propres :

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \cos(t) - \lambda & \sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) - \lambda \end{vmatrix} = \big(\cos(t) - \lambda\big)\big(\cos(t) - \lambda\big) - \sin(t) \cdot \sin(t) \\ &= \lambda^2 - 2\cos(t)\,\lambda + \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{aligned}$$

$$\Delta = \big(-2\cos(t)\big)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \big(\cos^2(t) - \sin^2(t)\big) = 4\sin^2(t) = \big(2\sin(t)\big)^2$$

On obtient donc deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = \frac{-\big(-2\cos(t)\big) + 2\sin(t)}{2 \cdot 1} = \cos(t) + \sin(t)$$

$$\lambda_2 = \frac{-\big(-2\cos(t)\big) - 2\sin(t)}{2 \cdot 1} = \cos(t) - \sin(t)$$

Déterminons les espaces propres associés à ces valeurs propres.

(a) $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x\cos(t) + y\sin(t) \\ x\sin(t) + y\cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \big(\cos(t)+\sin(t)\big) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(t) + x\sin(t) \\ y\cos(t) + y\sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x\cos(t) + y\sin(t) = x\cos(t) + x\sin(t) \\ x\sin(t) + y\cos(t) = y\cos(t) + y\sin(t) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x\sin(t) + y\sin(t) = 0 \\ x\sin(t) - y\sin(t) = 0 \end{cases} \iff x - y = 0$$

On constate que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ pour avoir la solution générale :
$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = \cos(t) + \sin(t)$ est $\mathrm{E}_{\cos(t)+\sin(t)} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(t) + y\sin(t) \\ x\sin(t) + y\cos(t) \end{pmatrix}$

$$= \big(\cos(t) - \sin(t)\big) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(t) - x\sin(t) \\ y\cos(t) - y\sin(t) \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x\cos(t) + y\sin(t) = x\cos(t) - x\sin(t) \\ x\sin(t) + y\cos(t) = y\cos(t) - y\sin(t) \end{cases} \iff$

$\begin{cases} x\sin(t) + y\sin(t) = 0 \\ x\sin(t) + y\sin(t) = 0 \end{cases} \iff \quad x + y = 0$

On constate que y est une variable libre ; on pose $y = \alpha$ pour avoir la solution générale :
$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = \cos(t) - \sin(t)$ est $\mathrm{E}_{\cos(t)-\sin(t)} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Nous avons obtenu deux vecteurs propres. D'après la proposition du bas de la page 9.2, ils forment une famille libre. Ces deux vecteurs propres constituent ainsi une base de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle est $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, on obtient :

(a) $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$

$$= \big(\cos(t) + \sin(t)\big) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$

$$= 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \big(\cos(t) - \sin(t)\big) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

si bien que la matrice de l'endomorphisme dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\begin{pmatrix} \cos(t)+\sin(t) & 0 \\ 0 & \cos(t)-\sin(t) \end{pmatrix}.$$

On peut par ailleurs vérifier que

$$\begin{aligned} \mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t)+\sin(t) & 0 \\ 0 & \cos(t)-\sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$