Chamblandes 2009 — Problème 2

Si x désigne le nombre de chevaux que possède le roi de Syldavie, le problème revient à résoudre le système de congruences

$$\begin{cases} x \equiv 2 \mod 11 \\ x \equiv 4 \mod 14 \\ x \equiv 8 \mod 15 \end{cases}$$

Étant donné que $\text{pgcd}(11\,;14) = 1$, $\text{pgcd}(11\,;15) = 1$, $\text{pgcd}(14\,;15) = 1$, c'est-à-dire que les nombres $m_1 = 11$, $m_2 = 14$, et $m_3 = 15$ sont deux à deux premiers entre eux, le théorème chinois des restes peut directement s'appliquer.

$\mathrm{M} = m_1\, m_2\, m_3 = 11 \cdot 14 \cdot 15 = 2310$
$\mathrm{M}_1 = \frac{\mathrm{M}}{m_1} = \frac{2310}{11} = 210$
$\mathrm{M}_2 = \frac{\mathrm{M}}{m_2} = \frac{2310}{14} = 165$
$\mathrm{M}_3 = \frac{\mathrm{M}}{m_3} = \frac{2310}{15} = 154$

1. Résolvons $\mathrm{M}_1\, x \equiv 1 \mod m_1$, c'est-à-dire $210\, x \equiv 1 \mod 11$.
   Comme $210 \equiv 1 \mod 11$, l'équation équivaut à $x \equiv 1 \mod 11$.
   Donc $x_1 = 1$.

2. Résolvons $\mathrm{M}_2\, x \equiv 1 \mod m_2$, c'est-à-dire $165\, x \equiv 1 \mod 14$.
   Puisque $165 \equiv -3 \mod 14$, il s'agit de résoudre $-3\, x \equiv 1 \mod 14$.
   On remarque facilement que $-3 \cdot (-5) = 15 \equiv 1 \mod 14$, d'où la solution évidente $x \equiv -5 \equiv 9 \mod 14$.
   D'où $x_2 = 9$.

3. Résolvons $\mathrm{M}_3\, x \equiv 1 \mod m_3$, c'est-à-dire $154\, x \equiv 1 \mod 15$.
   Vu que $154 \equiv 4 \mod 15$, il faut résoudre $4\, x \equiv 1 \mod 15$.
   Il y a là aussi une solution évidente : $4 \cdot 4 = 16 \equiv 1 \mod 15$, à savoir $x \equiv 4 \mod 15$.

   Rappelons cependant une autre méthode de résolution.
   Résoudre la congruence $4\, x \equiv 1 \mod 15$ revient à déterminer une solution particulière de l'équation diophantienne $4\, x + 15\, y = 1$.

   $$\begin{array}{rcl} 15 = 4 \cdot 3 + 3 & \Longrightarrow & 3 = 15 - 4 \cdot 3 \\ 4 = 3 \cdot 1 + 1 & \Longrightarrow & 1 = 4 - 3 \cdot 1 \\ 3 = 1 \cdot 3 & & \end{array}$$

   $$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \cdot 1 \\ &= 4 - (15 - 4 \cdot 3) \cdot 1 = 4 \cdot \underbrace{4}_{x_0} + 15 \cdot \underbrace{(-1)}_{y_0} \end{aligned}$$

   En résumé, $x_3 = 4$.

La solution du système de congruences vaut : $x \equiv b_1\, \mathrm{M}_1\, x_1 + b_2\, \mathrm{M}_2\, x_2 + b_3\, \mathrm{M}_3\, x_3 \mod \mathrm{M}$
$x \equiv 2 \cdot 210 \cdot 1 + 4 \cdot 165 \cdot 9 + 8 \cdot 154 \cdot 4 \equiv 11\,288 \equiv 2048 \mod 2310$

En d'autres termes $x = 2048 + 2310\, k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
La contrainte $0 \leqslant x \leqslant 2500$ ne laisse qu'une unique solution : le roi possède 2048 chevaux.