Chamblandes 2012 — Problème 1

Signe

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2\,x - 15} = \frac{x^3}{(x+5)\,(x-3)}$$

		-5		0		3	
x^3	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$x+5$	$-$	‖	$+$		$+$	‖	$+$
$x-3$	$-$	‖	$-$		$-$	‖	$+$
f	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$

Asymptotes

1. $\displaystyle\lim_{x \to -5} \frac{x^3}{x^2 + 2\,x - 15} = « \frac{-125}{0} » = \infty$
   $x = -5$ asymptote verticale

2. $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^3}{x^2 + 2\,x - 15} = « \frac{27}{0} » = \infty$
   $x = 3$ asymptote verticale

3. $$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & & & & x^2 + 2\,x - 15 \\ \cline{5-5} -x^3 & -\,2\,x^2 & +\,15\,x & & x - 2 \\ \cline{1-4} & -\,2\,x^2 & +\,15\,x & & \\ & 2\,x^2 & +\quad 4\,x & -\,30 & \\ \cline{2-4} & & 19\,x & -\,30 & \end{array}$$
   $y = x - 2$ asymptote oblique
   $$\delta(x) = \frac{19\,x - 30}{x^2 + 2\,x - 15} = \frac{19\,x - 30}{(x+5)\,(x-3)}$$

		-5		$\frac{30}{19}$		3	
$19\,x - 30$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$x+5$	$-$	‖	$+$		$+$	‖	$+$
$x-3$	$-$	‖	$-$		$-$	‖	$+$
δ	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$

Croissance

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 + 2\,x - 15}\right)' = \frac{(x^3)'\,(x^2 + 2\,x - 15) - x^3\,(x^2 + 2\,x - 15)'}{\left(x^2 + 2\,x - 15\right)^2}$$

$$= \frac{3\,x^2\,(x^2 + 2\,x - 15) - x^3\,(2\,x + 2)}{\left(x^2 + 2\,x - 15\right)^2} = \frac{3\,x^4 + 6\,x^3 - 45\,x^2 - 2\,x^4 - 2\,x^3}{\left(x^2 + 2\,x - 15\right)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 4\,x^3 - 45\,x^2}{\left(x^2 + 2\,x - 15\right)^2} = \frac{x^2\,(x^2 + 4\,x - 45)}{\big((x+5)\,(x-3)\big)^2} = \frac{x^2\,(x+9)\,(x-5)}{(x+5)^2\,(x-3)^2}$$

		-9		-5		0		3		5	
x^2	$+$		$+$	‖	$+$	0	$+$	‖	$+$		$+$
$x+9$	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$
$(x+5)^2$	$+$		$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$		$+$
$(x-3)^2$	$+$		$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$		$+$
f'	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	‖	$\searrow$	replat	$\searrow$	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$

Il nous reste encore à calculer les coordonnées des extremums :

$f(-9) = \frac{(-9)^3}{(-9)^2+2\cdot(-9)-15} = \frac{-729}{48} = -\frac{243}{16}$

Le point $\left(-9\,;-\frac{243}{16}\right)$ est un maximum local.

$f(0) = \frac{0^3}{0^2+2\cdot 0-15} = \frac{0}{-15} = 0$

Le point $(0\,;0)$ est un replat ou un point à tangente horizontale.

$f(5) = \frac{5^3}{5^2+2\cdot 5-15} = \frac{125}{20} = \frac{25}{4}$

Le point $\left(5\,;\frac{25}{4}\right)$ est un minimum local.