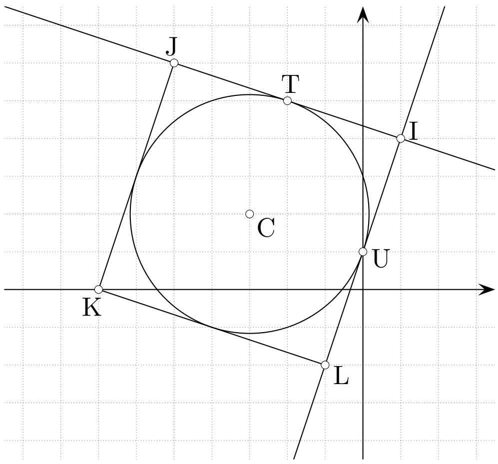
Chamblandes 2005 — Problème 2



a) $x^2 + 6\,x + y^2 - 4\,y + 3 = 0$
$(x+3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + 3 = 0$
$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 10$
$\mathrm{C}(-3\,;2)$ et $r = \sqrt{10}$

b) $\delta(\mathrm{C}\,;t) = \dfrac{|-3+3\cdot 2-13|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \dfrac{10\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10} = r$
La droite t est ainsi bien tangente au cercle Γ.

Les coordonnées du point de tangence T sont solutions du système suivant :
$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6\,x - 4\,y + 3 = 0 \\ x + 3\,y - 13 = 0 \end{cases}$
L'équation de la tangente implique $x = -3\,y + 13$ que l'on substitue dans l'équation du cercle :
$(-3\,y+13)^2 + y^2 + 6\,(-3\,y+13) - 4\,y + 3 = 0$
$9\,y^2 - 78\,y + 169 + y^2 - 18\,y + 78 - 4\,y + 3 = 0$
$0 = 10\,y^2 - 100\,y + 250 = 10\,(y^2 - 10\,y + 25) = 10\,(y-5)^2$
Donc $y = 5$, d'où suit $x = -3\cdot 5 + 13 = -2$, c'est-à-dire $\mathrm{T}(-2\,;5)$.

c) Examinons si $\mathrm{U} \in \Gamma$:
$0^2 + 1^2 + 6\cdot 0 - 4\cdot 1 + 3 = 0$
Puisque $\mathrm{U} \in \Gamma$, on peut utiliser l'équation dédoublée du cercle pour déterminer l'équation de la tangente u :
$(0+3)\,(x+3) + (1-2)\,(y-2) = 10$
$3\,x + 9 - y + 2 - 10 = 0$
$3\,x - y + 1 = 0$

Calculons les coordonnées du point I :
$\begin{cases} x + 3\,y - 13 = 0 \\ 3\,x - y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3\,y - 13 = 0 \\ -10\,y + 40 = 0 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} x + 3\,y - 13 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$
On a ainsi trouvé $\mathrm{I}(1\,;4)$.

d) **1re méthode**

La tangente $t : x + 3\,y - 13 = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La tangente $u : 3\,x - y + 1 = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{t} \cdot \vec{u}}{\|\vec{t}\|\,\|\vec{u}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\|} = \frac{3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}\,\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{0}{10} = 0$$

$\varphi = \arccos(0) = 90^\circ$: les tangentes t et u sont perpendiculaires.

2e méthode

La tangente $t : x + 3\,y - 13 = 0 \iff y = -\frac{1}{3}\,x + \frac{13}{3}$ a pour pente $m_1 = -\frac{1}{3}$.
La tangente $u : 3\,x - y + 1 = 0 \iff y = 3\,x + 1$ a pour pente $m_2 = 3$.
Puisque $m_1\,m_2 = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$, les tangentes t et u sont perpendiculaires.

e) Puisque le parallélogramme tangent au cercle Γ et dont l'un des sommets est I possède un angle droit en I, il s'agit d'un rectangle.
Il reste à savoir si ce rectangle est un carré ou non.

Puisque le point $\mathrm{C}(-3\,;2)$ est le milieu des points $\mathrm{I}(1\,;4)$ et $\mathrm{K}(k_1\,;k_2)$, on a :
$(-3\,;2) = \left(\frac{1+k_1}{2}\,;\frac{4+k_2}{2}\right)$, d'où l'on tire $k_1 = -7$ et $k_2 = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{K}(-7\,;0)$.

$$\|\overrightarrow{\mathrm{JK}}\| = \delta(\mathrm{K}\,;t) = \frac{|-7 + 3 \cdot 0 - 13|}{\sqrt{1 + 3^2}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = \frac{20\,\sqrt{10}}{10} = 2\,\sqrt{10}$$

$$\|\overrightarrow{\mathrm{KL}}\| = \delta(\mathrm{K}\,;u) = \frac{|3 \cdot (-7) - 0 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = \frac{20\,\sqrt{10}}{10} = 2\,\sqrt{10}$$

On constate ainsi que ce rectangle est en fait un carré.
Son aire vaut $(2\,\sqrt{10})^2 = 40$.