7.8 Les colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ b & -1 & 0 \end{pmatrix}$ donnent immédiatement

$h(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$, $h(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $h(e_3) = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui engendrent $\mathrm{Im}(h)$.

Pour obtenir une base de $\mathrm{Im}(h)$, on échelonne ces vecteurs, écrits en ligne :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \\ a & -1 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - a\,\mathrm{L}_1]{\mathrm{L}_2 \to -\mathrm{L}_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & -a\,b \end{pmatrix} \xRightarrow{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + a\,b\,\mathrm{L}_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour que cette matrice soit de rang 2, il faut que la dernière ligne soit nulle. Cette condition est satisfaite si $a - 1 = 0$, c'est-à-dire si $a = 1$.

Si $a = 1$, alors l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ est défini par :

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ b & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ -x-z \\ b\,x - y \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $\mathrm{Ker}(h)$, il faut résoudre le système $\begin{cases} x + z = 0 \\ -x - z = 0 \\ b\,x - y = 0 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ b & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow[\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - b\,\mathrm{L}_1]{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -b & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_2 \to -\mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On constate que z est une variable libre ; en posant $z = \alpha$, on obtient la solution générale :

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = -b\,\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On conclut que $\mathrm{Ker}(h) = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.