Chamblandes 2013 — Problème 4

1. $f(1) = 1 \cdot \underbrace{\ln(1)}_{0} + 2 \cdot 1 = 2$

   $g(1) = 2\,e^{1-1} = 2 \cdot \underbrace{e^0}_{1} = 2$

   On constate que le point $\mathrm{P}(1\,;2)$ appartient aussi bien au graphe de f qu'à celui de g.

2. $$\begin{aligned} f'(x) &= \big(x\,\ln(x)\big)' + (2\,x)' \\ &= (x)'\,\ln(x) + x\,\big(\ln(x)\big)' + 2 \\ &= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \tfrac{1}{x} + 2 \\ &= \ln(x) + 1 + 2 \\ &= \ln(x) + 3 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} g'(x) &= 2\,\big(e^{1-x}\big)' \\ &= 2\,e^{1-x}\,\underbrace{(1-x)'}_{-1} \\ &= -2\,e^{1-x} \end{aligned}$$

3. (a) **Tangente t**
   La tangente t a pour pente $m_1 = f'(1) = \ln(1) + 3 = 0 + 3 = 3$.
   Elle s'écrit donc $y = 3\,x + h$.
   Vu qu'elle passe par le point $\mathrm{P}(1\,;2)$, on a $2 = 3 \cdot 1 + h$, d'où $h = -1$.
   On a trouvé $\boxed{t : y = 3\,x - 1}$.

   (b) **Tangente u**
   La tangente u a pour pente $m_2 = g'(1) = -2\,e^{1-1} = -2 \cdot e^0 = -2 \cdot 1 = -2$.
   Elle est ainsi de la forme $y = -2\,x + h$.
   Sachant qu'elle passe par le point $\mathrm{P}(1\,;2)$, il suit $2 = -2 \cdot 1 + h$, c'est-à-dire $h = 4$.
   Il en résulte $\boxed{u : y = -2\,x + 4}$.

4. L'angle aigu φ entre les droites t et u est donné par la formule

   $$\tan(\varphi) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1\,m_2}\right| = \left|\frac{-2-3}{1 + 3\cdot(-2)}\right| = \left|\frac{-5}{-5}\right| = 1$$

   $\varphi = \arctan(1) = 45^\circ$