Chamblandes 2007 — Exercice 3

a) L'aire d'un losange vaut la moitié du produit de ses diagonales.
Par conséquent, l'aire de ce losange est donnée par $\frac{1}{2}\,(2\,x)\,(2\,y) = 2\,x\,y$.

Puisque le périmètre mesure 12 cm et que tous les côtés d'un losange sont égaux, chaque côté du losange mesure $\frac{12}{4} = 3$ cm.

Le théorème de Pythagore implique $3^2 = x^2 + y^2$, d'où l'on tire que $y = \sqrt{9 - x^2}$.

En définitive, l'aire du losange vaut $2\,x\,y = 2\,x\,\sqrt{9 - x^2}$.

b) Il s'agit de déterminer le maximum de la fonction

$$f(x) = \big(2\,x\,\sqrt{9 - x^2}\big)^2 = 4\,x^2\,(9 - x^2) = 36\,x^2 - 4\,x^4$$

sur l'intervalle $[0\,;3]$. En effet, les conditions $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ imposent $x \in [0\,;3]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (36\,x^2 - 4\,x^4)' \\ &= 72\,x - 16\,x^3 \\ &= 8\,x\,(9 - 2\,x^2) \\ &= 8\,x\,(3 + \sqrt{2}\,x)\,(3 - \sqrt{2}\,x) \end{aligned}$$

		$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	
$8\,x$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$3 + 2\sqrt{x}$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
$3 - 2\sqrt{x}$	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$f(0) = 36 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0^4 = 0$
$f\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big) = 36 \cdot \big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^2 - 4 \cdot \big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^4 = 36 \cdot \frac{9}{2} - 4 \cdot \frac{81}{4} = 81$
$f(3) = 36 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3^4 = 0$

On conclut que le carré de l'aire du losange est maximal si $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.