Chamblandes 2014 — Problème 6

Partie A

1. On obtient 3 boules de la même couleur si l'on tire 3 boules vertes, rouges ou bleues :
$\mathrm{A}_3^6 + \mathrm{A}_3^3 + \mathrm{A}_3^7 = 120 + 6 + 210 = 336$

2. On obtient une somme de 4 seulement si deux boules portent le chiffre 1 et une dernière boule le chiffre 2.

   Il n'y a que $\overline{\mathrm{P}}(1,2) = \frac{3!}{1!\,2!} = 3$ façons de disposer ces trois numéros.

   Pour chacune de ces dispositions, il reste encore à choisir les couleurs des boules :

numéros	1	1	2	1	2	1	2	1	1
choix des couleurs	3	2	3	3	3	2	3	3	2

   Il y a donc $3 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2 = 54$ tirages ordonnés qui donnent une somme de 4.

3. Plutôt que de compter directement le nombre de tirages ordonnés qui donnent une somme supérieure ou égale à 5, il est plus simple de soustraire du nombre total de tirages ordonnés le nombre de tirages ordonnés qui donnent une somme strictement inférieure à 5, c'est-à-dire une somme de 4 ou de 3.

   nombre total de tirages ordonnés : $\mathrm{A}_3^{6+3+7} = \mathrm{A}_3^{16} = 3360$

   nombre de tirages ordonnés ayant pour somme 4 : 54

   Il n'y a qu'une seule façon d'avoir la somme des chiffres égale à 3 :

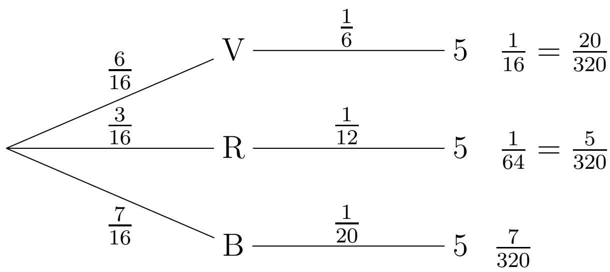
numéros	1	1	1
choix des couleurs	3	2	1

   nombre de tirages ordonnés ayant pour somme 3 : $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

   On conclut que le résultat recherché vaut : $3360 - (54 + 6) = 3300$

Partie B

4. Réalisons un arbre simplifié n'illustrant que les cas qui nous intéressent :

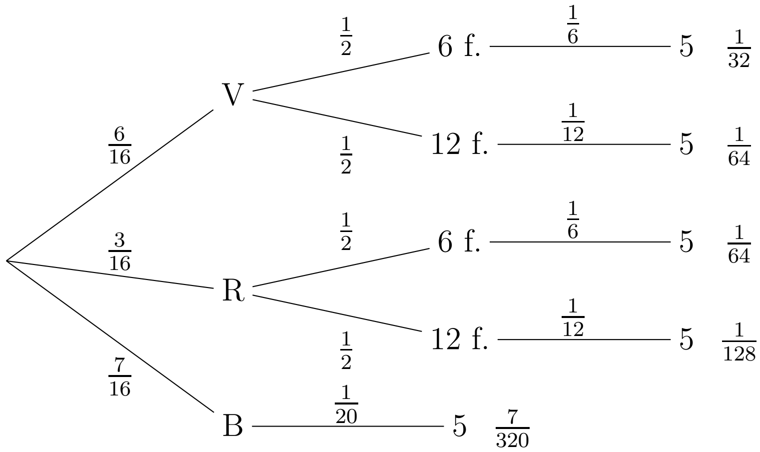


   La probabilité recherchée vaut :
$\frac{6}{16} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{12} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{7}{320} = \frac{20}{16} + \frac{5}{320} + \frac{7}{320} = \frac{32}{320} = \frac{1}{10}$

5. Il s'agit ici d'une probabilité conditionnelle : $\dfrac{\frac{5}{320}}{\frac{20}{320} + \frac{5}{320} + \frac{7}{320}} = \frac{5}{32}$

6. On a affaire à une loi binomiale. La probabilité demandée vaut :
$C_3^5\,(\frac{1}{10})^3\,(1-\frac{1}{10})^2 = 10\cdot\frac{1}{1000}\cdot\frac{81}{100} = \frac{81}{10\ 000}$

7. Réalisons un nouvel arbre simplifié :



La probabilité recherchée vaut :
$\frac{6}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{6}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}+\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}+\frac{7}{16}\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{7}{320}=\frac{59}{640}$