3 Espaces vectoriels réels

Un ensemble non vide E constitue un **espace vectoriel réel** s'il est muni

1) d'une *loi de composition interne* $\begin{array}{rcl} + : \mathrm{E} \times \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (u\,;v) & \longmapsto & u+v \end{array}$ telle que

   (a) $(u+v)+w = u+(v+w)$ quels que soient $u, v, w \in \mathrm{E}$

   (b) il existe un élément de E, noté 0, tel que $u+0 = 0+u = u$ pour tout $u \in \mathrm{E}$

   (c) pour tout $u \in \mathrm{E}$, il existe un élément de E, noté $-u$, tel que $u+(-u) = 0$

   (d) $u+v = v+u$ quels que soient $u, v \in \mathrm{E}$

2) d'une *loi de composition externe* $\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\alpha\,;u) & \longmapsto & \alpha \cdot u \end{array}$ telle que

   (a) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\,\beta) \cdot u$ quels que soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathrm{E}$

   (b) $(\alpha+\beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ quels que soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathrm{E}$

   (c) $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ quels que soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathrm{E}$

   (d) $1 \cdot u = u$ pour tout $u \in \mathrm{E}$

Remarque : Les propriétés 1) (a) associativité, 1) (b) existence d'un élément neutre et 1) (c) existence d'un symétrique pour tout élément de E, signifient que l'ensemble E, muni de la loi de composition interne +, forme un **groupe**.
La propriété 1) (d) commutativité veut dire qu'il s'agit d'un groupe **abélien** ou **commutatif**.

On appelle **vecteurs** les éléments de E, **vecteur nul** l'élément $0 \in \mathrm{E}$, **vecteur opposé** de u l'élément $-u$ et **scalaires** les nombres réels.

3.1 Démontrer les propriétés suivantes pour tout vecteur u de E et tout scalaire α :

1) $\alpha \cdot 0 = 0$
2) $0 \cdot u = 0$
3) $\alpha \cdot u = 0 \iff \alpha = 0$ ou $u = 0$
4) $(-\alpha) \cdot u = \alpha \cdot (-u) = -(\alpha \cdot u)$

Indications :

1) Calculer de deux façons $\alpha \cdot (0+0)$.
2) Calculer de deux façons $(0+0) \cdot u$.
3) Vu 1) et 2), il suffit de prouver que $u = 0$ si $\alpha \cdot u = 0$ et $\alpha \neq 0$: calculer $(\frac{1}{\alpha}\,\alpha) \cdot u$.
4) Calculer de deux façons $\big(\alpha + (-\alpha)\big) \cdot u$ et $\alpha \cdot \big(u + (-u)\big)$.

3.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de nombres.

On munit $\mathbb{R}^n$ des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire définies comme suit :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, x_1 \\ \alpha\, x_2 \\ \vdots \\ \alpha\, x_n \end{pmatrix}$$

Vérifier que $\mathbb{R}^n$, muni de ces deux lois de composition, constitue un espace vectoriel réel.

3.3 Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles avec les opérations

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$\alpha \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha\, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

forme un espace vectoriel réel.

3.4 Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, on considère l'addition, ainsi que la loi de composition externe $\begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\,. \\ (\alpha\,;u) \longmapsto 0 \end{array}$

L'ensemble $\mathbb{Z}$, muni de ces deux lois, est-il un espace vectoriel réel ?

3.5 Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on considère les deux lois de composition définies par :

$$(x\,;y) + (x'\,;y') \longmapsto (x + x'\,;y + y')$$
$$\alpha \cdot (x\,;y) \longmapsto (\alpha\, x\,;y)$$

où α, x, x', y, y' sont des nombres réels.

Montrer que $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux lois, n'est pas un espace vectoriel réel.

3.6 Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}[x]$ des polynômes à coefficients réels avec l'addition des polynômes et la multiplication d'un polynôme par un nombre réel est un espace vectoriel réel.

3.7 Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_{[a;b]}$ des fonctions réelles définies sur l'intervalle $[a\,;b]$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire usuelles, constitue un espace vectoriel réel.

3.8 Vérifier que l'ensemble $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices de type $m \times n$ à coefficients réels forme un espace vectoriel réel.

Sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel réel.

On appelle **sous-espace vectoriel** de E tout sous-ensemble de E qui est lui-même un espace vectoriel pour les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire définies dans E.

On remarque qu'un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in \mathrm{F}$ quels que soient $u, v \in \mathrm{F}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Remarques

1) Pour montrer qu'un sous-ensemble F de E forme un sous-espace vectoriel de E, il suffit de montrer que
   (a) $u + v \in \mathrm{F}$ pour tous $u, v \in \mathrm{F}$;
   (b) $\alpha \cdot u \in \mathrm{F}$ pour tous $u \in \mathrm{F}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
2) C'est une condition nécessaire, mais non suffisante, qu'un sous-ensemble F de E contienne le vecteur nul pour être un sous-espace vectoriel de E.

3.9 Montrer que l'ensemble $\big\{(x\,;y\,;z\,;t) \in \mathbb{R}^4 : x = 2\,y \text{ et } t = 5\,x\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

3.10 Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1) $\big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x = 12\big\}$
2) $\big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\big\}$
3) $\big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : y = 3\,x\big\}$
4) $\big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : 2\,x + y + z = 21\big\}$
5) $\big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\big\}$
6) $\big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x\,y = z\big\}$
7) $\big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : 3\,x + 4\,y - 5\,z = 0\big\}$

3.11 On appelle **suite de Fibonacci** toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que l'ensemble des suites de Fibonacci est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3.12 Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}_n[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$.

3.13 Soit $\mathcal{F}_{[a;b]}$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur l'intervalle $[a\,;b]$. Vérifier que les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}_{[a;b]}$:

1) l'ensemble des fonctions paires de $\mathcal{F}_{[a;b]}$;
2) l'ensemble des fonctions impaires de $\mathcal{F}_{[a;b]}$;
3) l'ensemble des fonctions continues de $\mathcal{F}_{[a;b]}$;
4) l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathcal{F}_{[a;b]}$.

3.14 Soient E un espace vectoriel et u un vecteur non nul de E.
Vérifier que l'ensemble $\mathrm{F} = \{\lambda \cdot u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
On appelle F la **droite vectorielle engendrée par le vecteur** u, notée $\langle u \rangle$ ou $\Delta(u)$.

3.15 Soient E un espace vectoriel, u et v deux vecteurs non nuls avec $v \notin \langle u \rangle$.
Vérifier que l'ensemble $\mathrm{F} = \{\lambda \cdot u + \mu \cdot v : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
On appelle F le **plan vectoriel engendré par les vecteurs** u **et** v, noté $\langle u\,;v \rangle$ ou $\Pi(u\,;v)$.

3.16 Soient E un espace vectoriel et $(u_1\,;u_2\,;\ldots\,;u_n)$ une famille de vecteurs de E.
Montrer que $\mathrm{F} = \{\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \ldots + \alpha_n \cdot u_n : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
On appelle F le **sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs** $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et on le note $\langle u_1\,;u_2\,;\ldots\,;u_n \rangle$.

3.17 Montrer que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de m équations à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
Indication : un tel système s'écrit matriciellement $\mathrm{AX} = 0$ avec $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$.

Réponses

3.10	1) non	2) oui	3) oui	4) non
	5) non	6) non	7) oui	