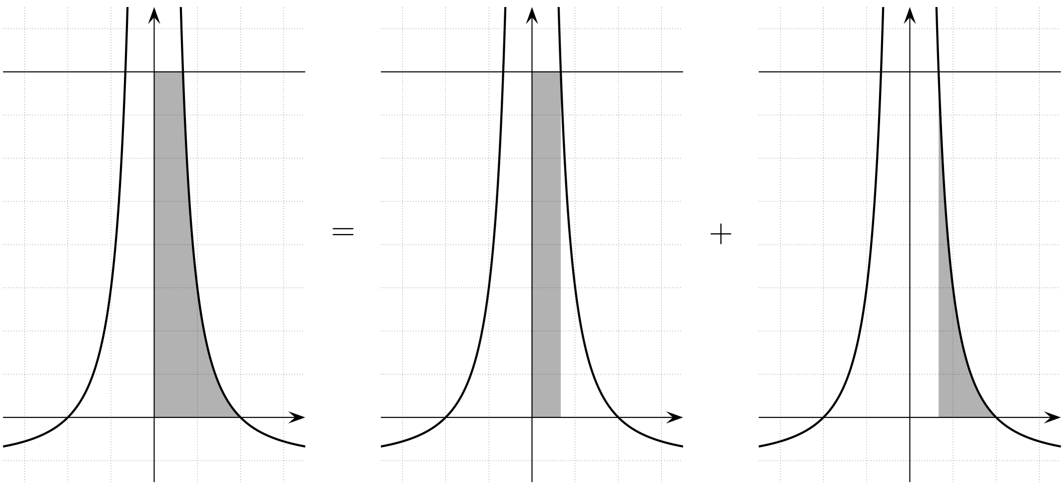
11.12 Posons $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2} = \dfrac{(2+x)\,(2-x)}{x^2} = -1 + \dfrac{4}{x^2}\,.$

		-2		0		2	
$2+x$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$
x^2	$+$		$+$	$\Vert$	$+$		$+$
f	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$

Calculons l'aire du domaine borné du premier quadrant limité par les axes de coordonnées, la droite d'équation $y = 8$ et la courbe d'équation $y = f(x)\,.$



Déterminons les abscisses des points d'intersection entre la droite $y = 8$ et la courbe $y = f(x)$:

$8 = \dfrac{4 - x^2}{x^2}$

$8\,x^2 = 4 - x^2$

$0 = 4 - 9\,x^2 = (2 + 3\,x)\,(2 - 3\,x)$

$x = -\frac{2}{3}$ ou $x = \frac{2}{3}$

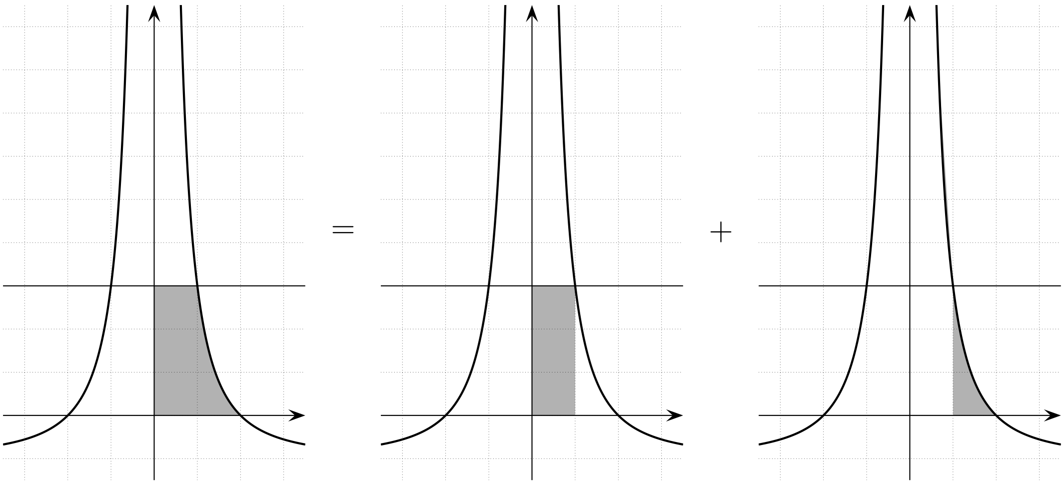
$$\int_0^{\frac{2}{3}} 8\,dx + \int_{\frac{2}{3}}^{2} \frac{4 - x^2}{x^2}\,dx = \int_0^{\frac{2}{3}} 8\,dx + \int_{\frac{2}{3}}^{2} \Big(-1 + \frac{4}{x^2}\Big)\,dx =$$

$$\int_0^{\frac{2}{3}} 8\,dx + \int_{\frac{2}{3}}^{2} \big(-1 + 4\,x^{-2}\big)\,dx = \left(8\,x\,\Big|_0^{\frac{2}{3}}\right) + \left(-x - 4\,x^{-1}\,\Big|_{\frac{2}{3}}^{2}\right) =$$

$$\left(8\,x\,\Big|_0^{\frac{2}{3}}\right) + \left(-x - \frac{4}{x}\,\Big|_{\frac{2}{3}}^{2}\right) = \Big(\big(8 \cdot \tfrac{2}{3}\big) - \big(8 \cdot 0\big)\Big) + \Big(\big(-2 - \frac{4}{2}\big) - \big(-\tfrac{2}{3} - \frac{4}{\frac{2}{3}}\big)\Big) =$$

$$\big(\tfrac{16}{3} - 0\big) + \big(-4 - (-\tfrac{20}{3})\big) = \tfrac{16}{3} + \tfrac{8}{3} = 8$$

Calculons l'aire du domaine borné du premier quadrant limité par les axes de coordonnées, la droite d'équation $y = b$ et la courbe d'équation $y = f(x)$.



Déterminons les abscisses des points d'intersection entre la droite $y = b$ et la courbe $y = f(x)$:

$b = \dfrac{4 - x^2}{x^2}$

$b\,x^2 = 4 - x^2$

$(b+1)\,x^2 = 4$

$x^2 = \frac{4}{b+1}$

$x = \pm\frac{2}{\sqrt{b+1}}$

$$\int_0^{\frac{2}{\sqrt{b+1}}} b\,dx + \int_{\frac{2}{\sqrt{b+1}}}^{2} \frac{4 - x^2}{x^2}\,dx = \left(b\,x\,\Big|_0^{\frac{2}{\sqrt{b+1}}}\right) + \left(-x - \frac{4}{x}\,\Big|_{\frac{2}{\sqrt{b+1}}}^{2}\right) =$$

$$\Big(\big(b \cdot \tfrac{2}{\sqrt{b+1}}\big) - \big(b \cdot 0\big)\Big) + \Big(\big(-2 - \frac{4}{2}\big) - \big(-\tfrac{2}{\sqrt{b+1}} - \frac{4}{\frac{2}{\sqrt{b+1}}}\big)\Big) =$$

$$\big(\tfrac{2\,b}{\sqrt{b+1}} - 0\big) + \big(-4 - (-\tfrac{2}{\sqrt{b+1}} - 2\sqrt{b+1})\big) = 2\sqrt{b+1} - 4 + \tfrac{2\,b+2}{\sqrt{b+1}} =$$

$$\tfrac{2\,(b+1) - 4\sqrt{b+1} + 2\,b + 2}{\sqrt{b+1}} = \tfrac{4\,(b+1-\sqrt{b+1})}{\sqrt{b+1}}$$

Finalement, le problème se ramène à résoudre :

$\frac{4\,(b+1-\sqrt{b+1})}{\sqrt{b+1}} = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$

$b + 1 - \sqrt{b+1} = \sqrt{b+1}$

$b + 1 = 2\sqrt{b+1}$

$(b+1)^2 = 4\,(b+1)$

$0 = (b+1)^2 - 4\,(b+1) = (b+1)\,\big((b+1) - 4\big) = (b+1)\,(b-3)$

On doit avoir $b > 0$ et on vérifie que, si $b = 3$, alors $\frac{4\,(3+1-\sqrt{3+1})}{\sqrt{3+1}} = 4$.