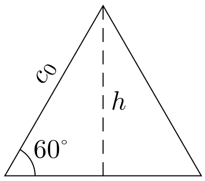
Chamblandes 2009 — Problème 6

1. $h = c_0 \cdot \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\, c_0$

   $1 = \text{aire } \mathrm{T}_0 = \frac{1}{2} \cdot c_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\, c_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}\, c_0^2$

   $c_0^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$ d'où $c_0 = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \approx 1{,}52$



2. (a) $c_1 = \frac{2}{3}\, c_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{3}} = \frac{4}{3\,\sqrt[4]{3}} \approx 1{,}013$

   $c_2 = \frac{2}{3}\, c_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3\,\sqrt[4]{3}} = \frac{8}{9\,\sqrt[4]{3}} \approx 0{,}675$

   $c_3 = \frac{2}{3}\, c_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9\,\sqrt[4]{3}} = \frac{16}{27\,\sqrt[4]{3}} \approx 0{,}45$

   $c_4 = \frac{2}{3}\, c_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{27\,\sqrt[4]{3}} = \frac{32}{81\,\sqrt[4]{3}} \approx 0{,}3$

   (b) $c_n = \frac{2}{3}\, c_{n-1}$ équivaut à $\dfrac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{2}{3}$

   En d'autres termes, la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de premier terme $c_0 = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ et de raison $r = \frac{2}{3}$.

   Il en résulte que $c_n = c_0 \cdot r^n = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2^{n+1}}{3^n\,\sqrt[4]{3}}$

3. $a_n = \text{aire } \mathrm{T}_n = \frac{1}{2}\, c_n \cdot c_n \cdot \sin(60^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{n+1}}{3^n\,\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{2^{n+1}}{3^n\,\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{2^{n+1}}{3^n\,\sqrt[4]{3}}\right)^2$

   $$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{(2^2)^{n+1}}{(3^2)^n\,\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4^{n+1}}{9^n\,\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4 \cdot 4^n}{9^n\,\sqrt{3}} = \frac{4^n}{9^n} = \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

   En particulier $a_1 = \frac{4}{9}$, $a_2 = \frac{16}{81}$, $a_3 = \frac{64}{729}$ et $a_4 = \frac{256}{6561}$.

   Plus généralement, la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de premier terme $a_0 = 1$ et de raison $r = \frac{4}{9}$.

4. aire grisée $= \text{aire } \mathrm{T}_0 + 3 \cdot \big(\text{aire } \mathrm{T}_1 + \text{aire } \mathrm{T}_2 + \text{aire } \mathrm{T}_3 + \text{aire } \mathrm{T}_4 + \ldots\big)$

   $$= a_0 + 3\,\big(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\big)$$

   $$= a_0 + 3 \cdot \lim_{n\to+\infty} a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

   $$= 1 + 3 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = 1 + 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = 1 + 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{17}{5} = 3{,}4$$