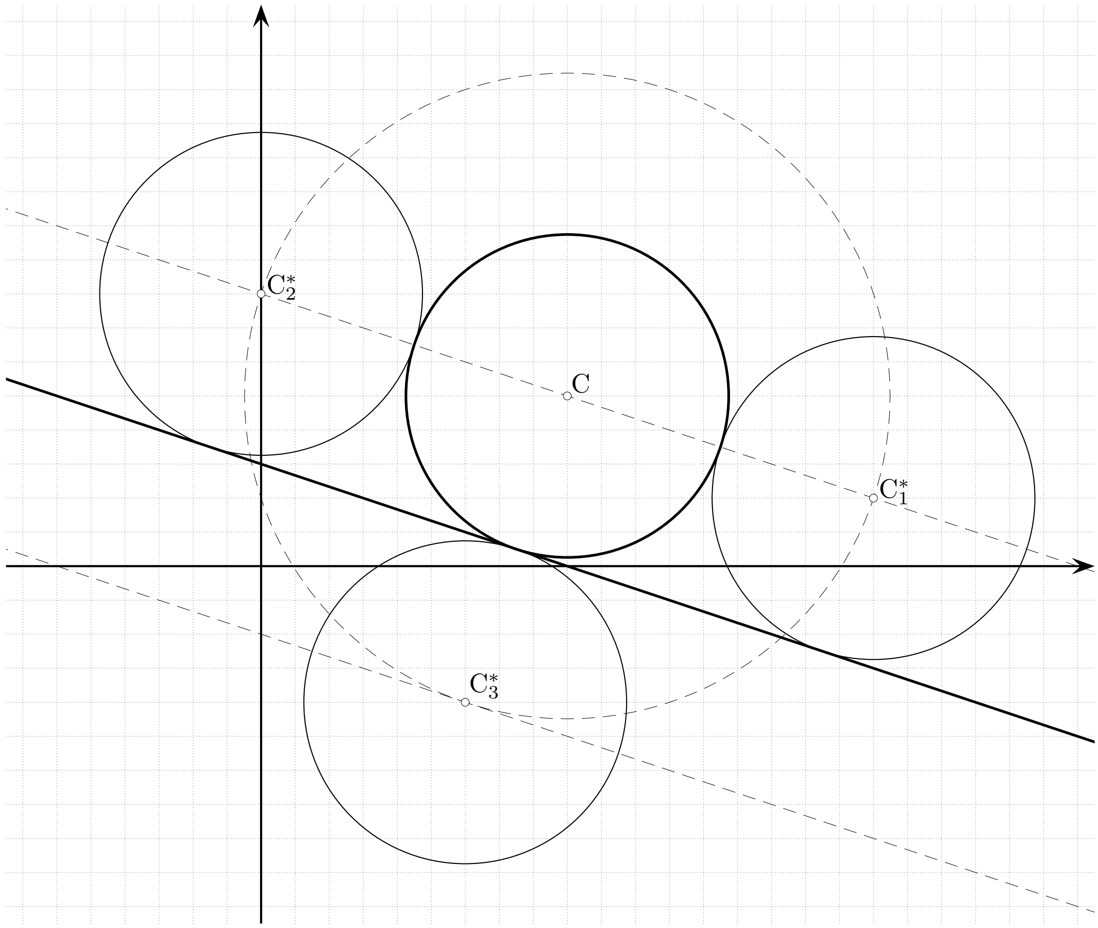
Chamblandes 2004 — Exercice 1

1)



2) Le cercle Γ admet pour centre $C(9\,;5)$ et pour rayon $r = \sqrt{\frac{90}{4}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

Pour prouver que la droite t est tangente au cercle Γ, il suffit de vérifier que

$$\delta(C\,;t) = \frac{\left|9 + 3 \cdot 5 - 9\right|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}} = \frac{15\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{2} = r$$

3) Soit C^* le centre d'un cercle Γ^* tangent à Γ et à t et de même rayon r.

Si Γ et Γ^* sont tangents intérieurement, alors $\delta(C\,;C^*) = r - r = 0$, de sorte que $C = C^*$. Puisqu'ils ont même rayon, les cercles Γ et Γ^* sont alors confondus.

Si Γ et Γ^* sont tangents extérieurement, alors $\delta(C\,;C^*) = r + r = 2\,r$, si bien que C^* doit être situé sur le cercle de centre $C(9\,;5)$ et de rayon $2\,r = 3\sqrt{10}$. En d'autres termes, les coordonnées de C^* doivent vérifier l'équation $(x-9)^2 + (y-5)^2 = 90$.

Pour que Γ^* soit tangent à t, il faut que $\delta(C^*\,;t) = r$, à savoir :

$$\delta(C^*\,;t) = \frac{|x+3\,y-9|}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \iff |x+3\,y-9| = 15 \iff x+3\,y-9 = \pm 15$$

Les coordonnées de C^* peuvent ainsi être solutions de deux systèmes d'équations :

(a) $\begin{cases} (x-9)^2 + (y-5)^2 = 90 \\ x + 3\,y - 9 = 15 \end{cases}$

La seconde équation donne $x = -3\,y + 24$ que l'on remplace dans la première :

$(-3\,y + 24 - 9)^2 + (y-5)^2 = 90$

$9\,y^2 - 90\,y + 225 + y^2 - 10\,y + 25 - 90 = 0$
$10\,y^2 - 100\,y + 160 = 10\,(y^2 - 10\,y + 16) = 10\,(y-2)\,(y-8) = 0$

i. Si $y = 2$, alors $x = -3 \cdot 2 + 24 = 18$.
$\mathrm{C}_1^*(18\,;2)$ $\Gamma_1^* : (x-18)^2 + (y-2)^2 = \frac{90}{4}$

ii. Si $y = 8$, alors $x = -3 \cdot 8 + 24 = 0$.
$\mathrm{C}_2^*(0\,;8)$ $\Gamma_2^* : x^2 + (y-8)^2 = \frac{90}{4}$

(b) $\begin{cases} (x-9)^2 + (y-5)^2 = 90 \\ x + 3\,y - 9 = -15 \end{cases}$
La seconde équation donne $x = -3\,y - 6$ que l'on remplace dans la première :
$(-3\,y - 6 - 9)^2 + (y-5)^2 = 90$
$9\,y^2 + 90\,y + 225 + y^2 - 10\,y + 25 - 90 = 0$
$10\,y^2 + 80\,y + 160 = 10\,(y^2 + 8\,y + 16) = 10\,(y+4)^2 = 0$

iii. Puisque $y = -4$, on a $x = -3 \cdot (-4) - 6 = 6$.
$\mathrm{C}_3^*(6\,;-4)$ $\Gamma_3^* : (x-6)^2 + (y+4)^2 = \frac{90}{4}$