Chamblandes 2011 — Problème 7

a) L'égalité $2 \cdot 3 - 3 \cdot (-6) + 6 \cdot 8 = 72$ montre que le point P appartient au plan π.

Les plans π et π' sont parallèles, car ils admettent le même vecteur normal $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Comme $\mathrm{P} \in \pi$, la distance les séparant revient à la distance entre le point P et le plan π' :
$$\delta(\mathrm{P}\,;\pi') = \frac{|2 \cdot 3 - 3 \cdot (-6) + 6 \cdot 8 + 26|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{98}{7} = 14$$

b) Soit p la droite perpendiculaire au plan π passant par P.

Son équation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3 + 2\,\lambda \\ y = -6 - 3\,\lambda \\ z = 8 + 6\,\lambda \end{cases}$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

Déterminons son intersection P' avec le plan π' :
$2\,(3 + 2\,\lambda) - 3\,(-6 - 3\,\lambda) + 6\,(8 + 6\,\lambda) + 26 = 0$
$6 + 4\,\lambda + 18 + 9\lambda + 48 + 36\,\lambda + 26 = 0$
$49\,\lambda + 98 = 0$
$\lambda = -2$

$\begin{cases} x = 3 + 2 \cdot (-2) = -1 \\ y = -6 - 3 \cdot (-2) = 0 \\ z = 8 + 6 \cdot (-2) = -4 \end{cases}$ On a donc trouvé $\mathrm{P}'(-1\,;0\,;-4)$.

Le centre C de la sphère Σ est donné par le milieu des points P et P' :
$\mathrm{C}\big(\frac{3+(-1)}{2}\,;\frac{-6+0}{2}\,;\frac{8+(-4)}{2}\big) = \mathrm{C}(1\,;-3\,;2)$

Son rayon vaut la moitié de la distance entre les plans π et π', à savoir $\frac{14}{2} = 7$.

Son équation s'écrit $\Sigma : (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49$.

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 4\,x + 9\,y - 10\,z + 37 = 0$
$x^2 - 4\,x + y^2 + 9\,y + z^2 - 10\,z + 37 = 0$
$(x-2)^2 - 4 + (y + \frac{9}{2})^2 - \frac{81}{4} + (z-5)^2 - 25 + 37 = 0$
$(x-2)^2 + (y + \frac{9}{2})^2 + (z-5)^2 = \frac{49}{4}$

La sphère Σ' admet pour centre $\mathrm{C}'(2\,;-\frac{9}{2}\,;5)$ et pour rayon $r' = \frac{7}{2}$.

d) Vérifions que le centre C de Σ appartient à Σ' :
$(1-2)^2 + (-3 + \frac{9}{2})^2 + (2-5)^2 = 1 + \frac{9}{4} + 9 = \frac{49}{4}$

Puisque C appartient à Σ', la distance entre les centres C et C' vaut $r' = \frac{7}{2}$.
Vu que $\frac{7}{2} = 7 - \frac{7}{2} = r - r'$, on conclut que les sphères Σ et Σ' sont tangentes intérieurement.