Chamblandes 2009 — Problème 1

a) Calculons les valeurs propres de A :

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\,(5-\lambda) - 1\cdot 4 = \lambda^2 - 7\,\lambda + 6 = (\lambda-1)\,(\lambda-6)$$

On obtient ainsi $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 6$.

b) i. Déterminons le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-1 & 4 & 0 \\ 1 & 5-1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 - L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On trouve $\begin{cases} x = -4\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $E_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

ii. Déterminons le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 6$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-6 & 4 & 0 \\ 1 & 5-6 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to -\frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \to 4\,L_2 + L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On trouve $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $E_6 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

c) Calculons P^{-1} à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 + 4\,L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 \to -5\,L_1 + L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 1 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to \frac{1}{5}L_1 \\ L_2 \to \frac{1}{10}L_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

Il en résulte $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Posons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ et vérifions l'égalité $P\,D\,P^{-1} = A$:

$$P\,D\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 10 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = A$$

d) $A^n = \big(P\,D\,P^{-1}\big)^n = P\,D\,P^{-1}\,P\,D\,P^{-1}\,P\,D\,P^{-1}\,P\,D\,P^{-1}\ldots P\,D\,P^{-1} = P\,D\,D\,D\,D\ldots D\,P^{-1}$

$$= P\,D^n\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^n\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2\cdot 6^n \\ -1 & 2\cdot 6^n \end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 + 2\cdot 6^n & -8 + 8\cdot 6^n \\ -2 + 2\cdot 6^n & 2 + 8\cdot 6^n \end{pmatrix}$$

e) $A^n\,v = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 + 2\cdot 6^n & -8 + 8\cdot 6^n \\ -2 + 2\cdot 6^n & 2 + 8\cdot 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10\cdot 6^n \\ 10\cdot 6^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6^n \\ 6^n \end{pmatrix} = 6^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6^n\,v$

Cela signifie que v est un vecteur propre de A^n associé à la valeur propre 6^n.