Chamblandes 2014 — Problème 1

1. **Signe**
   On sait que $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Résolvons $2\,x^2 - 7\,x + 5 = 0$.
   $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9$
   $x_1 = \frac{-(-7)-\sqrt{9}}{2\cdot 2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-7)+\sqrt{9}}{2\cdot 2} = \frac{5}{2}$

		1		$\frac{5}{2}$	
e^x	$+$		$+$		$+$
$2\,x^2 - 7\,x + 5$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$+$		$-$		$+$

2. **Asymptotes**
   $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x}{2\,x^2 - 7\,x + 5} = \dfrac{e}{0} = \infty$
   $x = 1$ est une asymptote verticale de f.

   $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}} \dfrac{e^x}{2\,x^2 - 7\,x + 5} = \dfrac{\sqrt{e^5}}{0} = \infty$
   $x = \frac{5}{2}$ est une asymptote verticale de f.

   $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{2\,x^2 - 7\,x + 5} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{2\,x^2} = \dfrac{e^{-\infty}}{2\,(-\infty)^2} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$
   $y = 0$ est une asymptote horizontale à gauche de f.

   $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{2\,x^2 - 7\,x + 5} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{2\,x^2} = \dfrac{e^{+\infty}}{2\,(+\infty)^2} = \dfrac{\infty}{+\infty} = \text{indéterminé}$
   Levons cette indétermination à l'aide du théorème de Bernouilli-L'Hospital :
   $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{2\,x^2 - 7\,x + 5} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(e^x)'}{(2\,x^2 - 7\,x + 5)'} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{4\,x - 7}$
   À ce stade, la limite est toujours indéterminée ; on applique encore Bernouilli-L'Hospital :
   $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{4\,x - 7} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(e^x)'}{(4\,x - 7)'} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{4} = \dfrac{e^{+\infty}}{4} = \dfrac{+\infty}{4} = +\infty$
   Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale à droite.

3. **Croissance**

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{2\,x^2 - 7\,x + 5}\right)' = \frac{(e^x)'\,(2\,x^2 - 7\,x + 5) - e^x\,(2\,x^2 - 7\,x + 5)'}{\left(2\,x^2 - 7\,x + 5\right)^2}$$

$$= \frac{e^x\,(2\,x^2 - 7\,x + 5) - e^x\,(4\,x - 7)}{\left(2\,x^2 - 7\,x + 5\right)^2} = \frac{e^x\,\Big((2\,x^2 - 7\,x + 5) - (4\,x - 7)\Big)}{\left(2\,x^2 - 7\,x + 5\right)^2}$$

$$= \frac{e^x\,(2\,x^2 - 11\,x + 12)}{\left(2\,x^2 - 7\,x + 5\right)^2}$$

Résolvons $2\,x^2 - 11\,x + 12 = 0$.

$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 25$

$x_1 = \frac{-(-11)-\sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-(-11)+\sqrt{25}}{2 \cdot 2} = 4$

x		1		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		4	
e^x	$+$	‖	$+$	|	$+$	‖	$+$	|	$+$
$2\,x^2 - 11\,x + 12$	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$(2\,x^2 - 7\,x + 5)^2$	$+$	‖	$+$	|	$+$	‖	$+$	|	$+$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$	max	$\searrow$	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$

4. **Coordonnées des extremums**

$$f(\tfrac{3}{2}) = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{3}{2} + 5} = \frac{\sqrt{e^3}}{-1} = -\sqrt{e^3} \approx 4{,}48$$

Le point $\left(\frac{3}{2}\,; -\sqrt{e^3}\right)$ est un maximum.

$$f(4) = \frac{e^4}{2 \cdot 4^2 - 7 \cdot 4 + 5} = \frac{e^4}{9} \approx 6{,}07$$

Le point $(4\,; \frac{e^4}{9})$ est un minimum.

5. **Graphe**