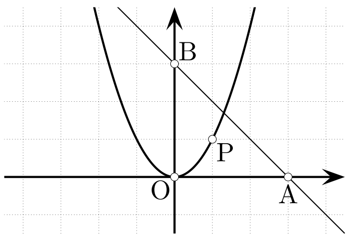
Chamblandes 2006 — Exercice 1



Puisque le point P a pour abscisse x et qu'il fait partie de la parabole d'équation $y = x^2$, ses coordonnées s'écrivent $\mathrm{P}(x\,;x^2)$.

Le point A se situe à l'intersection de la droite $x+y=3$ avec l'axe des x (dont l'équation est $y=0$). Ses coordonnées sont donc solution du système

$$\begin{cases} x+y=3 \\ y=0 \end{cases}$$

C'est pourquoi $\mathrm{A}(3\,;0)$.

Le point B se situe à l'intersection de la droite $x+y=3$ avec l'axe des y (dont l'équation est $x=0$). Ses coordonnées sont donc solution du système

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x=0 \end{cases}$$

Par conséquent $\mathrm{B}(0\,;3)$.

a) $\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} x-3 \\ x^2-0 \end{pmatrix}\right\|^2 = (x-3)^2+(x^2)^2 = x^4+x^2-6\,x+9$

b) $\|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} x-0 \\ x^2-3 \end{pmatrix}\right\|^2 = x^2+(x^2-3)^2 = x^4-5\,x^2+9$

$\|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} x-0 \\ x^2-0 \end{pmatrix}\right\|^2 = x^2+(x^2)^2 = x^4+x^2$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\|^2+\|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\|^2+\|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\|^2 &= (x^4+x^2-6\,x+9)+(x^4-5\,x^2+9)+(x^4+x^2) \\ &= 3\,x^4-3\,x^2-6\,x+18\end{aligned}$$

c) Il s'agit de déterminer le minimum de la fonction $f(x) = 3\,x^4-3\,x^2-6\,x+18$.

$f'(x) = (3\,x^4-3\,x^2-6\,x+18)' = 12\,x^3-6\,x-6 = 6\,(2\,x^3-x-1)$

Il reste à factoriser $2\,x^3-x-1$.
On remarque que l'équation $2\,x^3-x-1=0$ admet la solution évidente $x=1$.
On peut dès lors amorcer la factorisation au moyen du schéma de Horner :

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & -1 \\ & 2 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 1 & \| & 0 \end{array}$$

Ainsi $2\,x^3-x-1 = (x-1)\,(2\,x^2+2\,x+1)$.

Enfin le polynôme $2\,x^2 + 2\,x + 1$ est irréductible, car $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 < 0$.

On obtient le tableau de croissance suivant :

		1	
6	$+$	|	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$
$2\,x^2+2\,x+1$	$+$	|	$+$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

La somme $\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\|^2$ est donc minimale lorsque $x = 1$.
Cette somme minimale vaut $f(1) = 3 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 18 = 12$.