11.2 $\{x - y = 0 \iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\mathrm{V} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\big\} = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Posons $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}' = (u\,; v_1\,; v_2)$.

Soit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Déterminons son inverse à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Par définition de la symétrie s, on a :

$s(u) = u = 1 \cdot u + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$

$s(v_1) = -v_1 = 0 \cdot u - 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$

$s(v_2) = -v_2 = 0 \cdot u + 0 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2$

La matrice A' de la symétrie s dans la base $\mathcal{B}'$ est donc $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si A désigne la matrice de la symétrie s dans la base canonique, alors $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}$, d'où l'on tire :

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{A}'\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Par définition de la projection p, on a :

$p(u) = 0 = 0 \cdot u + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$

$p(v_1) = v_1 = 0 \cdot u + 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$

$p(v_2) = v_2 = 0 \cdot u + 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2$

La matrice B' de la projection p dans la base $\mathcal{B}'$ est donc $\mathrm{B}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si B désigne la matrice de la projection p dans la base canonique, alors $\mathrm{B}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}\mathrm{P}$, d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \mathrm{B} = \mathrm{P}\mathrm{B}'\mathrm{P}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$