5.4 1) $\Longrightarrow$ 2)

La relation de Grassmann donne

$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) - \underbrace{\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})}_{0} = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G})\,.$$

2) $\Longrightarrow$ 3)

Posons $m = \dim(\mathrm{F})$ et $n = \dim(\mathrm{F})$.

Soient $(e_1\,;\dots\,;e_m)$ une base de F et $(f_1\,;\dots\,;f_n)$ une base de G.

Alors $(e_1\,;\dots\,;e_m\,;f_1\,;\dots\,;f_n)$ est une famille génératrice de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$.

Vu qu'elle comporte $m+n = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}+\mathrm{G})$ éléments, elle forme une base de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$.

Dès lors, la famille $(e_1\,;\dots\,;e_m\,;f_1\,;\dots\,;f_n)$ est libre, si bien que l'écriture en somme d'éléments de F et de G est unique.

3) $\Longrightarrow$ 1)

Soit $u \in \mathrm{F}\cap\mathrm{G}$.

On constate que

1) $u = u + 0$ avec $u \in \mathrm{F}$ et $0 \in \mathrm{G}$;
2) $u = 0 + u$ avec $0 \in \mathrm{F}$ et $u \in \mathrm{G}$.

Puisque la décomposition de tout élément de F+G en somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique, on conclut que $u = 0$.