11 Interprétation géométrique des endomorphismes

Projections et symétries vectorielles

Soient E un espace vectoriel de dimension n et U, V deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E et non réduits au vecteur nul.

On appelle **projection vectorielle de base** U **et de direction** V tout endomorphisme p de E tel que

$$p(u) = u \text{ et } p(v) = 0 \quad \text{quels que soient } u \in \mathrm{U} \text{ et } v \in \mathrm{V}.$$

On appelle **symétrie vectorielle de base** U **et de direction** V tout endomorphisme s de E tel que

$$s(u) = u \text{ et } s(v) = -v \quad \text{quels que soient } u \in \mathrm{U} \text{ et } v \in \mathrm{V}.$$

Proposition *Si l'endomorphisme p de E est une projection vectorielle, alors :*

1) p n'est pas bijectif

2) $p \circ p = p$

3) p admet uniquement les valeurs propres 0 et 1 et E_0 est la direction de p et E_1 est la base de p.

Preuve Puisque $\mathrm{E} = \mathrm{U} \oplus \mathrm{V}$, tout vecteur x de E s'écrit de manière unique $x = u + v$ où $u \in \mathrm{U}$ et $v \in \mathrm{V}$. Donc $p(x) = p(u+v) = p(u) + p(v) = u + 0 = u$.

1) Puisque $p(x) = u$, il suit que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{U}$. Comme $\mathrm{V} \neq \{0\}$, il apparaît que $\mathrm{U} \neq \mathrm{E}$, donc p n'est pas surjectif ; a fortiori, p n'est pas bijectif.

2) $(p \circ p)(x) = p\big(p(x)\big) = p\big(p(u+v)\big) = p(u) = u = p(x)$.

3) (a) Tout vecteur u de U est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, car $p(u) = u = 1 \cdot u$.

   (b) Tout vecteur v de V est un vecteur propre associé à la valeur propre 0, car $p(v) = 0 = 0 \cdot v$.

   (c) Si x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors $u = p(x) = \lambda\, x = \lambda\,(u+v) = \lambda\, u + \lambda\, v$, c'est-à-dire $(\lambda - 1)\, u + \lambda\, v = 0$.

      i. $u \neq 0$ et $v \neq 0$ entraîne la contradiction $\lambda - 1 = 0$ et $\lambda = 0$, attendu que les vecteurs u et v sont linéairement indépendants.

      ii. $u \neq 0$ et $v = 0$ donne $\lambda - 1 = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{E}_1 = \mathrm{U}$.

      iii. $u = 0$ et $v \neq 0$ implique $\lambda = 0$, à savoir $\mathrm{E}_0 = \mathrm{V}$.

      iv. $u = 0$ et $v = 0$ est impossible, car le vecteur propre $x \neq 0$.

Proposition *Si l'endomorphisme s de E est une symétrie vectorielle, alors :*

1) $s \circ s = id_{\mathrm{E}}$
2) *s est bijectif*
3) *le déterminant de s est égal à ± 1*
4) *s admet uniquement les valeurs propres 1 et -1 et E_{-1} est la direction de s et E_1 est la base de s.*

Preuve Puisque $\mathrm{E} = \mathrm{U} \oplus \mathrm{V}$, tout vecteur x de E s'écrit de manière unique $x = u + v$ où $u \in \mathrm{U}$ et $v \in \mathrm{V}$. Donc $s(x) = s(u+v) = s(u) + s(v) = u - v$.

1) $$(s \circ s)(x) = s\big(s(x)\big) = s\big(s(u+v)\big) = s(u-v) = s(u) - s(v) = u - (-v)$$
$$= u + v = x$$
2) $s \circ s = id_{\mathrm{E}}$ signifie que $s^{-1} = s$, c'est-à-dire que s est bijectif.
3) Soit A la matrice de s relativement à une base de E. L'identité $s \circ s = id_{\mathrm{E}}$ signifie que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$. Il s'ensuit que $1 = \det(\mathrm{I}_n) = \det(\mathrm{A}^2) = \big(\det(\mathrm{A})\big)^2$, si bien que $\det(\mathrm{A}) = \pm 1$.
4) (a) Tout vecteur u de U est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, car $s(u) = u = 1 \cdot u$.

   (b) Tout vecteur v de V est un vecteur propre associé à la valeur propre -1, car $s(v) = -v = (-1) \cdot v$.

   (c) Si x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors $u - v = s(x) = \lambda\, x = \lambda\,(u+v) = \lambda\, u + \lambda\, v$, c'est-à-dire $(\lambda-1)\, u + (\lambda+1)\, v = 0$.

      i. $u \neq 0$ et $v \neq 0$ entraîne la contradiction $\lambda - 1 = 0$ et $\lambda + 1 = 0$, attendu que les vecteurs u et v sont linéairement indépendants.

      ii. $u \neq 0$ et $v = 0$ donne $\lambda - 1 = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{E}_1 = \mathrm{U}$.

      iii. $u = 0$ et $v \neq 0$ implique $\lambda + 1 = 0$, à savoir $\mathrm{E}_{-1} = \mathrm{V}$.

      iv. $u = 0$ et $v = 0$ est impossible, car le vecteur propre $x \neq 0$.

11.1 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, on considère les sous-espaces vectoriels
$$\mathrm{U} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = \Delta\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
On désigne par s la symétrie vectorielle de base U et de direction V et par p la projection vectorielle de base V et de direction U.

Donner les matrices de s et de p dans la base canonique.

Indication : quelles sont les matrices de s et de p dans la base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$?

11.2 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère les sous-espaces vectoriels
$$\mathrm{U} = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\big\}.$$

On désigne par s la symétrie vectorielle de base U et de direction V et par p la projection vectorielle de base V et de direction U.

Donner les matrices de s et de p dans la base canonique.

11.3 Déterminer la nature géométrique des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ de matrices :

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} a & a-1 \\ -a & 1-a \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$ 8) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

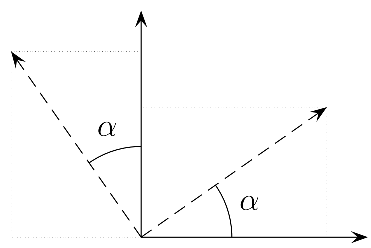
11.4 On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique.

1) Déterminer la matrice relativement à la base canonique de la projection orthogonale sur le plan π d'équation $x - 2\,y + 3\,z = 0$.
2) Déterminer la matrice relativement à la base canonique de la projection orthogonale sur la droite vectorielle $\Delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

Endomorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^2$

11.5 Soient $(e_1\,;e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et r la rotation vectorielle d'angle α.

1) (a) Quelles sont les composantes du vecteur $r(e_1)$ dans la base canonique ?
   (b) Quelles sont les composantes du vecteur $r(e_2)$ dans la base canonique ?
   (c) Quelle est la matrice A associée à r dans la base canonique ?



2) Vérifier que A est orthogonale et que $\det(\mathrm{A}) = 1$.
3) Montrer que A n'admet aucune valeur propre si $\alpha \notin \pi\,\mathbb{Z}$.

11.6 Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^2$ relativement à la base canonique.

1) Vérifier que A est orthogonale et que $\det(\mathrm{A}) = -1$.

2) Montrer que A admet 1 et -1 pour valeurs propres et que les espaces propres associés sont $E_1 = \Delta\left(\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{pmatrix}\right)$ et $E_{-1} = \Delta\left(\begin{pmatrix}-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{pmatrix}\right)$.

Indication : $\cos(\alpha) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$ et $\sin(\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

3) En déduire que s est une symétrie vectorielle orthogonale de base E_1 et de direction E_{-1}.

Théorème *Les endomorphismes orthogonaux de* $\mathbb{R}^2$ *sont les rotations vectorielles et les symétries vectorielles orthogonales.*

$$\det(A) = 1 \iff A = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix} \quad \textit{rotation}$$

$$\det(A) = -1 \iff A = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha)\end{pmatrix} \quad \textit{symétrie orthogonale}$$

L'axe de la symétrie est le sous-espace propre E_1 *associé à la valeur propre* 1 *; sa direction est le sous-espace propre* E_{-1} *associé à la valeur propre* -1.

Preuve Si $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale, alors ses colonnes constituent une base orthonormée, d'où résultent les équations

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1 \quad \text{et} \quad a\,b + c\,d = 0\,.$$

Des deux premières équations, on déduit l'existence de deux réels α et β tels que $\begin{cases} a = \cos(\alpha)\\ c = \sin(\alpha)\end{cases}$ et $\begin{cases} b = \sin(\beta)\\ d = \cos(\beta)\end{cases}$. La troisième équation entraîne

$$0 = \cos(\alpha)\,\sin(\beta) + \sin(\beta)\,\cos(\beta) = \sin(\alpha+\beta)\,.$$

1) Si $\alpha+\beta = 2\,k\,\pi$, c'est-à-dire $\beta = -\alpha+2\,k\,\pi$, alors $A = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$.

2) Si $\alpha+\beta = \pi+2\,k\,\pi$, à savoir $\beta = \pi-\alpha+2\,k\,\pi$, alors $A = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha)\end{pmatrix}$.

11.7 Vérifier que les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ donnés ci-dessous par leur matrice relativement à la base canonique sont des endomorphismes orthogonaux, et les caractériser géométriquement :

1) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}-\frac{12}{13} & \frac{5}{13}\\ \frac{5}{13} & \frac{12}{13}\end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix}\frac{5}{13} & \frac{12}{13}\\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13}\end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Endomorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^3$

Théorème *Un endomorphisme orthogonal h de $\mathbb{R}^3$ tel que $\det(h) = 1$ est une rotation autour d'un axe.*

L'axe d'une rotation différente de l'identité est l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. L'amplitude α de la rotation est donnée par $\cos(\alpha) = \frac{Tr(h)-1}{2}$.

Preuve Soit A la matrice de h relativement à une base orthonormée.
On suppose $\det(\mathrm{A}) = \det({}^t\mathrm{A}) = 1$ et ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \mathrm{I}$.

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{A}-\mathrm{I}) &= 1\cdot\det(\mathrm{A}-\mathrm{I}) = \det({}^t\mathrm{A})\,\det(\mathrm{A}-\mathrm{I}) = \det\big({}^t\mathrm{A}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I})\big)\\ &= \det({}^t\mathrm{A}\mathrm{A} - {}^t\mathrm{A}) = \det(\mathrm{I} - {}^t\mathrm{A}) = \det({}^t\mathrm{I} - {}^t\mathrm{A}) = \det\big({}^t(\mathrm{I}-\mathrm{A})\big)\\ &= \det(\mathrm{I}-\mathrm{A}) = \det\big(-(\mathrm{A}-\mathrm{I})\big) = (-1)^3\cdot\det(\mathrm{A}-\mathrm{I}) = -\det(\mathrm{A}-\mathrm{I})\end{aligned}$$

De $\det(\mathrm{A}-\mathrm{I}) = -\det(\mathrm{A}-\mathrm{I})$, on tire que $\det(\mathrm{A}-\mathrm{I}) = 0$.

D'après le théorème du bas de la page 9.4, cela signifie que 1 est une valeur propre. Il existe donc un vecteur e_3 non nul tel que $h(e_3) = e_3$.

La droite $\Delta(e_3)$ constitue ainsi un sous-espace invariant. Vu l'exercice 10.11, son orthogonal $e_3^\perp$ est aussi un sous-espace invariant.

Si $(e_1\,;e_2)$ forme une base orthonormée de $e_3^\perp$, alors la matrice de h relativement à la base orthonormée $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ est de la forme $\begin{pmatrix} \mathrm{B} & & 0\\ & & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ où B est la matrice, dans la base $(e_1\,;e_2)$, de la restriction de h au sous-espace $e_3^\perp$.

Puisque $1 = \det(h) = 1\cdot\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{B})$ et que B est une matrice orthogonale d'ordre 2, on conclut, grâce au théorème de la page 11.4, que B est la matrice d'une rotation dans le plan vectoriel $\Pi(e_1\,;e_2) = e_3^\perp$.

La matrice de h dans la base $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ s'écrit donc $\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

En particulier $\mathrm{Tr}(h) = 2\,\cos(\alpha) + 1$, si bien que $\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{Tr}(h)-1}{2}$.

Théorème *Si h est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$ avec $\det(h) = -1$, alors il existe une rotation r d'axe $\Delta(a)$ et une symétrie orthogonale s dont le plan est normal à $\Delta(a)$ telles que $h = r\circ s = s\circ r$.*

L'axe de la rotation est l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1. L'amplitude α de la rotation est donnée par $\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{Tr}(h)+1}{2}$.

Dans le cas particulier où $Tr(h) = 1$, h est une symétrie orthogonale : le plan de symétrie est l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1.

Preuve Soit A la matrice de h relativement à une base orthonormée.
On suppose $\det(\mathrm{A}) = \det({}^t\mathrm{A}) = -1$ et ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \mathrm{I}$.

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{A}+\mathrm{I}) &= -(-1)\cdot\det(\mathrm{A}+\mathrm{I}) = -\det({}^t\mathrm{A})\,\det(\mathrm{A}+\mathrm{I}) = -\det\big({}^t\mathrm{A}\,(\mathrm{A}+\mathrm{I})\big)\\ &= -\det({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}+{}^t\mathrm{A}) = -\det(\mathrm{I}+{}^t\mathrm{A}) = -\det({}^t\mathrm{I}+{}^t\mathrm{A}) = -\det\big({}^t(\mathrm{I}+\mathrm{A})\big)\\ &= -\det(\mathrm{I}+\mathrm{A}) = -\det(\mathrm{A}+\mathrm{I})\end{aligned}$$

De $\det(\mathrm{A}+\mathrm{I}) = -\det(\mathrm{A}+\mathrm{I})$, on tire que $\det(\mathrm{A}+\mathrm{I}) = 0$.

D'après le théorème du bas de la page 9.4, cela signifie que -1 est une valeur propre. Il existe donc un vecteur e_3 non nul tel que $h(e_3) = -e_3$.
La droite $\Delta(e_3)$ constitue ainsi un sous-espace invariant. Vu l'exercice 10.11, son orthogonal $e_3^{\perp}$ est aussi un sous-espace invariant.

Si $(e_1\,;e_2)$ forme une base orthonormée de $e_3^{\perp}$, alors la matrice de h relativement à la base orthonormée $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ est de la forme $\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{B}} & 0\\ & & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ où B est la matrice, dans la base $(e_1\,;e_2)$, de la restriction de h au sous-espace $e_3^{\perp}$.

Puisque $-1 = \det(h) = -1\cdot\det(\mathrm{B}) = -\det(\mathrm{B})$ et que B est une matrice orthogonale d'ordre 2, on conclut, grâce au théorème de la page 11.4, que B est la matrice d'une rotation dans le plan vectoriel $\Pi(e_1\,;e_2) = e_3^{\perp}$.

La matrice de h dans la base $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ s'écrit donc $\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

En particulier $\mathrm{Tr}(h) = 2\cos(\alpha) - 1$, si bien que $\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{Tr}(h)+1}{2}$.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

montre que $h = r\circ s = s\circ r$ où r est la rotation d'axe $\Delta(e_3)$ et s la symétrie orthogonale dont le plan est $\Pi(e_1\,;e_2) = e_3^{\perp}$.

Dans le cas particulier où $\mathrm{Tr}(h) = 1$, alors $\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{Tr}(h)+1}{2} = 1$, si bien que $\alpha = 2\,k\,\pi$. Il en résulte $r = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et $h = s$.

11.8 Vérifier que les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ donnés ci-dessous par leur matrice relativement à la base canonique sont des endomorphismes orthogonaux, et les caractériser géométriquement :

1) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ 2) $\frac{1}{49}\begin{pmatrix}23 & -36 & 24\\ -36 & -31 & -12\\ 24 & -12 & -41\end{pmatrix}$

3) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

5) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

7) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 2 & -6 & -9 \\ 6 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

11.9 Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de la symétrie orthogonale s de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $x+y+z=0$ et celle de la symétrie orthogonale t de $\mathbb{R}^3$ relativement au plan d'équation $3\,x+y+4\,z=0$. Déterminer ensuite la matrice de $r = s \circ t$ et caractériser géométriquement r.

11.10
1) Soit s la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ relativement au plan vectoriel engendré par $a = (-1\,;3\,;1)$ et $b = (3\,;1\,;2)$. Déterminer la matrice de s relativement à la base canonique $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2) Considérons l'endomorphisme r de $\mathbb{R}^3$ défini par $r(e_1) = e_2$, $r(e_2) = e_3$ et $r(e_3) = e_1$. Prouver que r est une rotation, dont on déterminera l'axe et l'amplitude.
3) Déterminer un endomorphisme s' de $\mathbb{R}^3$ tel que $s' \circ s = r$, et caractériser géométriquement s'.

11.11 Déterminer les matrices relativement à la base canonique des rotations de $\mathbb{R}^3$ d'axe $\Delta\big((1\,;1\,;1)\big)$ et dont l'amplitude α est telle que $\cos(\alpha) = \frac{3}{5}$.

Réponses

11.1 matrice de s : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrice de p : $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

11.2 matrice de s : $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ matrice de p : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

11.3

	Nature	Base	Direction
1)	projection	$\Delta\big((1\,;0)\big)$	$\Delta\big((2\,;1)\big)$
2)	projection	$\Delta\big((3\,;1)\big)$	$\Delta\big((2\,;1)\big)$
3)	symétrie	$\Delta\big((1\,;\sqrt{3})\big)$	$\Delta\big((0\,;1)\big)$
4)	projection	$\Delta\big((1\,;-1)\big)$	$\Delta\big((1-a)\,;a)\big)$
5)	symétrie	$\Delta\big((2\,;1)\big)$	$\Delta\big((2\,;-1)\big)$
6)	projection	$\big\{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3 : x-2\,y-z=0\big\}$	$\Delta\big((2\,;4\,;-5)\big)$
7)	symétrie	$\big\{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3 : x-2\,y-z=0\big\}$	$\Delta\big((2\,;4\,;-5)\big)$
8)	projection	$\big\{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\big\}$	$\Delta\big((1\,;1\,;1)\big)$
9)	symétrie	$\Delta\big((2\,;1\,;1)\big)$	$\big\{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3 : x-z=0\big\}$

11.4 1) $\frac{1}{14}\begin{pmatrix}13 & 2 & -3\\ 2 & 10 & 6\\ -3 & 6 & 5\end{pmatrix}$ 2) $\frac{1}{14}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 4 & -6\\ 3 & -6 & 9\end{pmatrix}$

11.5 1) $r(e_1)=\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}$ $r(e_2)=\begin{pmatrix}-\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\end{pmatrix}$ $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$

11.7
1) rotation d'amplitude 180°
2) rotation d'amplitude -90°
3) symétrie orthogonale d'axe $\Delta\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$
4) symétrie orthogonale d'axe $\Delta\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$
5) rotation d'amplitude $53{,}13^\circ$
6) symétrie orthogonale d'axe $\Delta\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$
7) symétrie orthogonale d'axe $\Delta\left(\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\right)$
8) rotation d'amplitude $-67{,}38^\circ$
9) symétrie orthogonale d'axe $\Delta\left(\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\right)$

11.8
1) rotation d'axe $\Delta\big((0\,;0\,;1)\big)$ et d'amplitude $36{,}87^\circ$
2) rotation d'axe $\Delta\big((6\,;-3\,;2)\big)$ et d'amplitude 180°
3) symétrie orthogonale de plan d'équation $2\,x+y-2\,z=0$
4) rotation d'axe $\Delta\big((-2\,;1\,;0)\big)$ et d'amplitude $73{,}40^\circ$
5) composé d'une rotation d'axe $\Delta\big((1\,;0\,;2)\big)$ et d'amplitude $48{,}19^\circ$ et d'une symétrie orthogonale de plan d'équation $x+2\,z=0$
6) rotation d'axe $\Delta\big((\sqrt{3}+\sqrt{2}\,;1\,;\sqrt{2}+1)\big)$ et d'amplitude $56{,}60^\circ$

7) composé d'une rotation d'axe $\Delta\big((1\,;-4\,;-2)\big)$ et d'amplitude $24{,}62^\circ$ et d'une symétrie orthogonale de plan d'équation $x - 4\,y - 2\,z = 0$

8) homothétie de rapport -1

11.9 matrice de s : $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ matrice de t : $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -12 \\ -3 & 12 & -4 \\ -12 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

matrice de r : $\frac{1}{39}\begin{pmatrix} 34 & -19 & 2 \\ 13 & 26 & 26 \\ -14 & -22 & 29 \end{pmatrix}$ r est une rotation d'axe $\Delta\big((-3\,;1\,;2)\big)$ et d'amplitude $50{,}13^\circ$

11.10 1) matrice de s : $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2) axe de rotation : $\Delta\big((1\,;1\,;1)\big)$ amplitude : 120°

3) matrice de s' : $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ s' est une symétrie orthogonale de plan d'équation $x - 2\,y + z = 0$

11.11 $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 11 & 2+4\sqrt{3} & 2-4\sqrt{3} \\ 2-4\sqrt{3} & 11 & 2+4\sqrt{3} \\ 2+4\sqrt{3} & 2-4\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}$ et sa transposée