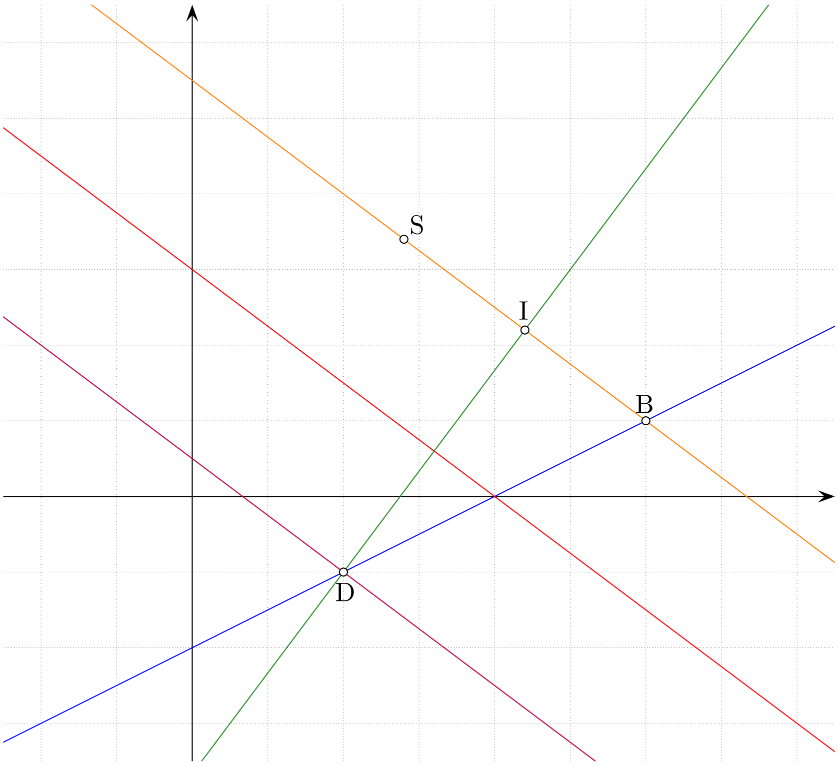
Chamblandes 2011 — Problème 6



a) L'égalité $2 - 2 \cdot (-1) - 4 = 0$ montre que le point D est bien sur la droite d.

$$\delta(\mathrm{D}\,;c) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

b) Les droites recherchées étant parallèles à la droite c, leurs équations sont de la forme $c' : 3\,x + 4\,y + k = 0$.

Le point $\mathrm{C}(4\,;0)$ se situe sur la droite c, car $3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 - 12 = 0$.

$$2 = \delta(\mathrm{C}\,;c') = \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|12 + k|}{5} \quad \text{équivaut à} \quad 10 = |12 + k|.$$

(i) $10 = 12 + k$ implique $k = -2$, d'où la première droite $c' : 3\,x + 4\,y - 2 = 0$;

(ii) $10 = (-12 + k)$ donne $k = -22$ et la seconde droite $c'' : 3\,x + 4\,y - 22 = 0$.

c) Toute perpendiculaire à la droite c est s'écrit $4\,x - 3\,y + h = 0$.

Puisque p passe par $\mathrm{D}(2\,;-1)$, on doit avoir $4 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + h = 0$, de sorte que $h = -11$.

On a donc obtenu $p : 4\,x - 3\,y - 11 = 0$.

d) Déterminons la perpendiculaire à p passant par B.
Son équation est la forme $3\,x + 4\,y + h = 0$.

On doit avoir $3 \cdot 6 + 4 \cdot 1 + h = 0$, si bien que $h = -22$.
On constate qu'il s'agit de la droite $c'' : 3\,x + 4\,y - 22 = 0$.

Calculons l'intersection I des droites p et c'' :

$$\left\{\begin{array}{l} 4\,x - 3\,y - 11 = 0 \\ 3\,x + 4\,y - 22 = 0 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot 3 \end{array}\right| \quad \begin{array}{r} \cdot(-3) \\ \cdot 4 \end{array}$$

$25\,x - 110 = 0$ fournit $x = \frac{22}{5}$ $\qquad$ $25\,y - 55 = 0$ délivre $y = \frac{11}{5}$

En résumé $\mathrm{I}\big(\frac{22}{5}\,;\frac{11}{5}\big)$.

On détermine enfin le point S, sachant que le point I est le milieu des points B et S :

$\mathrm{I}\big(\frac{22}{5}\,;\frac{11}{5}\big) = \big(\frac{6+s_1}{2}\,;\frac{1+s_2}{2}\big)$

$\frac{22}{5} = \frac{6+s_1}{2} \iff 22 \cdot 2 = 5\,(6 + s_1) \iff s_1 = \frac{14}{5}$

$\frac{11}{5} = \frac{1+s_2}{2} \iff 11 \cdot 2 = 5\,(1 + s_2) \iff s_2 = \frac{17}{5}$

En définitive, $\mathrm{S}\big(\frac{14}{5}\,;\frac{17}{5}\big)$.