6.4

1) (a) $h(f+g)(x) = (f+g)'(x) = (f'+g')(x) = f'(x) + g'(x)$
$= h(f)(x) + h(g)(x) = \big(h(f) + h(g)\big)(x)$

(b) $h(\alpha \cdot f)(x) = (\alpha \cdot f)'(x) = (\alpha \cdot f')(x) = \alpha \cdot f'(x) = \alpha \cdot h(f)(x)$

2) (a)
$$\begin{aligned} h(f+g)(x) &= \big(2\,(f+g)' - 3\,(f+g)\big)(x) \\ &= \big(2\,(f+g)'\big)(x) - \big(3\,(f+g)\big)(x) \\ &= 2\,(f+g)'(x) - 3\,(f+g)(x) \\ &= 2\,(f'+g')(x) - 3\,(f+g)(x) \\ &= 2\,f'(x) + 2\,g'(x) - 3\,f(x) - 3\,g(x) \\ &= \big(2\,f'(x) - 3\,f(x)\big) + \big(2\,g'(x) - 3\,g(x)\big) \\ &= (2\,f' - 3\,f)(x) + (2\,g' - 3\,g)(x) \\ &= \big((2\,f' - 3\,f) + (2\,g' - 3\,g)\big)(x) \\ &= \big(h(f) + h(g)\big)(x) \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} h(\alpha \cdot f)(x) &= \big(2\,(\alpha \cdot f)' - 3\,(\alpha \cdot f)\big)(x) = \big(2\,(\alpha \cdot f)'\big)(x) - \big(3\,(\alpha \cdot f)\big)(x) \\ &= 2\,(\alpha \cdot f)'(x) - 3\,\alpha \cdot f(x) = 2\,\alpha \cdot f'(x) - 3\,\alpha \cdot f(x) \\ &= \alpha \cdot \big(2\,f'(x) - 3\,f(x)\big) = \alpha \cdot \big(2\,f' - 3\,f\big)(x) = \alpha \cdot h(f)(x) \end{aligned}$$

3) Choisissons $f(x) = 1$.

$$\begin{aligned} h(2 \cdot f)(x) &= \big((2 \cdot f)' - (2 \cdot f)^2\big)(x) = (2 \cdot f)'(x) - (2 \cdot f)^2(x) \\ &= 2\,f'(x) - \big(2\,f(x)\big)^2 = 2\,(1)' - (2 \cdot 1)^2 = 0 - 4 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \big(2 \cdot h(f)\big)(x) &= \big(2 \cdot (f' - f^2)\big)(x) = (2\,f' - 2\,f^2)(x) = 2\,f'(x) - 2\,f^2(x) \\ &= 2\,(1)' - 2 \cdot (1)^2 = 0 - 2 = -2 \end{aligned}$$

Vu que $h(2 \cdot f) \neq 2 \cdot h(f)$, l'application h n'est pas linéaire.

4) (a) $h(f+g)(x) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = h(f)(x) + h(g)(x)$
$= \big(h(f) + h(g)\big)(x)$

(b) $h(\alpha \cdot f)(x) = (\alpha \cdot f)(a) = \alpha \cdot f(a) = \alpha \cdot h(f)(x)$

5) $h(0)(x) = 0 + 1 = 1 \neq 0$

D'après l'exercice 6.1 1), l'application h n'est pas linéaire.

6) $h(0)(x) = e^0 = 1 \neq 0$

Au vu de l'exercice 6.1 1), l'application h n'est pas linéaire.

7) (a) $h(f+g)(x) = (f+g)(x)\,e^x = \big(f(x) + g(x)\big)\,e^x = f(x)\,e^x + g(x)\,e^x$
$= h(f)(x) + h(g)(x)$

(b) $h(\alpha \cdot f)(x) = (\alpha \cdot f)(x)\,e^x = \alpha\,f(x)\,e^x = \alpha \cdot \big(f(x)\,e^x\big) = \alpha \cdot h(f)(x)$