Chamblandes 2007 — Problème 1

a) Les valeurs propres sont données par les zéros du polynôme caractéristique :

$$0 = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\big((4-\lambda)(1-\lambda)-(-1)\cdot 2\big)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+2y \\ -x+y \\ y+2z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3x \\ -x + y = 3y \\ y + 2z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que $E_3 = \Delta\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+2y \\ -x+y \\ y+2z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2x \\ -x + y = 2y \\ y + 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $E_2 = \Delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On constate qu'il ne peut y avoir que 2 vecteurs propres linéairement indépendants. Mais il en faudrait 3 pour former une base de $\mathbb{R}^3$.
Puisqu'il est impossible de former une base constituée de vecteurs propres, la matrice A n'est pas diagonalisable.

b) La question b) est une conséquence directe de la question a).
Elle sert à poursuivre le problème si l'on n'a pas su résoudre la question a).

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\, v_1$$

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\, v_2$$

c) $$f(v_3) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,x + 2\,y \\ -x + y \\ y + 2\,z \end{pmatrix} = v_2 + 2\, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2\,y \\ 2\,z + 1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4\,x + 2\,y = 2\,x \\ -x + y = 2\,y \\ y + 2\,z = 2\,z + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases}$$

Il y a ainsi une infinité de vecteurs v_3 possibles : $v_3 = (-1\,;1\,;\alpha)$.

d) **1^re^ méthode**

Il suffit de montrer que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants :
$\lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2 + \lambda_3\, v_3 = 0$ implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,\lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \alpha\,\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Résolvons ce système en échelonnant sa matrice correspondante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_2 + 2\,L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha - 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to L_1 - L_3 \\ L_2 \to L_2 - (\alpha - 1)\,L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

On vérifie donc bien que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

2^e^ méthode

Il suffit de montrer que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 engendrent $\mathbb{R}^3$.
Pour ce faire, on échelonne la matrice dont les lignes sont formées par les vecteurs v_1, v_2 et v_3.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_1 \to L_1 - L_3 \\ L_2 \to L_2 - \alpha\,L_3}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_1 \to -L_1 + 2\,L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_1 \to -L_1 + L_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) En résumé, nous avons obtenu :

$f(v_1) = 3\,v_1 = 3\,v_1 + 0\,v_2 + 0\,v_3$

$f(v_2) = 2\,v_2 = 0\,v_1 + 2\,v_2 + 0\,v_3$

$f(v_3) = v_2 + 2\,v_3 = 0\,v_1 + 1\,v_2 + 2\,v_3$

Ainsi la matrice A' associée à l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B} = (v_1\,;v_2\,;v_3)$ s'écrit

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De plus, on a $A' = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B} = (v_1\,;v_2\,;v_3)$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Vérifions par calcul que $A' = P^{-1}AP$.

Calculons l'inverse de P au moyen de la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to -L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 + 2\,L_1}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha - 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2\,\alpha - 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 - 2\,L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha - 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to L_1 - \alpha\,L_3 \\ L_2 \to L_2 - (\alpha - 1)\,L_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\alpha & -2\,\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \alpha & 1 - 2\,\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \to L_1 - L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \alpha & 1 - 2\,\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 - \alpha & 1 - 2\,\alpha & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 3 - 2\,\alpha & 4 - 4\,\alpha & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$