10.3 1) $$\begin{aligned} 0 \leqslant \|\lambda\, x + y\|^2 &= (\lambda\, x + y) \cdot (\lambda\, x + y) \\ &= (\lambda\, x + y) \cdot (\lambda\, x) + (\lambda\, x + y) \cdot y \\ &= (\lambda\, x) \cdot (\lambda\, x + y) + y \cdot (\lambda\, x + y) \\ &= (\lambda\, x) \cdot (\lambda\, x) + (\lambda\, x) \cdot y + y \cdot (\lambda\, x) + y \cdot y \\ &= \lambda^2\, (x \cdot x) + \lambda\, (x \cdot y) + \lambda\, (y \cdot x) + y \cdot y \\ &= \lambda^2\, \|x\|^2 + (2\, \lambda)\, (x \cdot y) + \|y\|^2 \end{aligned}$$

2) Puisque le polynôme $\lambda^2\, \|x\|^2 + (2\, \lambda)\, (x \cdot y) + \|y\|^2$ du deuxième degré en la variable λ est positif ou nul, son discriminant doit être négatif ou nul :

$$\begin{aligned} 0 \geqslant \Delta &= \big((2\, \lambda)\, (x \cdot y)\big)^2 - 4\, \lambda^2\, \|x\|^2\, \|y\|^2 \\ &= 4\, \lambda^2\, (x \cdot y)^2 - 4\, \lambda^2\, \|x\|^2\, \|y\|^2 \\ &= 4\, \lambda^2\, \big((x \cdot y)^2 - \|x\|^2\, \|y\|^2\big) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$(x \cdot y)^2 - \|x\|^2\, \|y\|^2 \leqslant 0$

$(x \cdot y)^2 \leqslant \|x\|^2\, \|y\|^2$

$|x \cdot y| \leqslant \|x\|\, \|y\|$