Chamblandes 2005 — Problème 3

a) **1re méthode**

La matrice A_k étant d'ordre 3, elle est inversible si et seulement si son rang vaut 3.
Échelonnons la matrice A_k :

$$\begin{pmatrix} k & -1 & -k \\ 1 & 0 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k \\ k & -1 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \to -L_2 + k\,L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & -k^2+k \\ 0 & -1 & -1+k \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_3 \to L_3 + L_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & -k^2+k \\ 0 & 0 & -k^2+2\,k-1 \end{pmatrix}$$

La matrice A_k n'est pas de rang 3 si la dernière ligne est nulle, en d'autres termes si $-k^2+2\,k-1 = -(k-1)^2 = 0$. Ainsi A_k n'est pas inversible si $k=1$.

2e méthode

La matrice A_k n'est pas inversible si son déterminant s'annule.

$$0 = \det(A_k) = \begin{vmatrix} k & -1 & -k \\ 1 & 0 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{L_1 \to L_1 - L_3}{=} \begin{vmatrix} k-1 & 0 & -k+1 \\ 1 & 0 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1) \begin{vmatrix} k-1 & -k+1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = (k-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = (k-1)\,(-k+1) = -(k-1)^2$$

On retrouve également que la matrice A_k n'est pas inversible si $k=1$.

b) Calculons les valeurs propres de A :

$$0 = \det(A - \lambda\,I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2 \to C_2 + C_1 \\ C_3 \to C_3 + (\lambda+1)\,C_1}}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1-\lambda & -\lambda^2+\lambda \\ 1 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda^2+\lambda \\ 1-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2\,(-1-\lambda) = -(\lambda-1)^2\,(\lambda+1)$$

On obtient deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

(i) Déterminons l'espace propre E_1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0-1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1-1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\,\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \big\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 2\,z = 0\big\} = \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(ii) Déterminons l'espace propre E_{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-(-1) & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0-(-1) & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1-(-1) & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1}{\overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 3\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{L}_3 \to -\frac{1}{2}\,\mathrm{L}_3}{\overset{\mathrm{L}_2 \to -\frac{1}{4}\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1}{\overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{E}_{-1} = \Delta \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

c) Dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, la matrice de l'application linéaire a est

$$\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) a est une symétrie de base $\mathrm{E}_1 = \Pi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et de direction $\mathrm{E}_{-1} = \Delta \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

e) $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$0 = \det(\mathrm{A}^2 - \lambda\,\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3$$

La matrice $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}$ admet pour unique valeur propre $\lambda = 1$.