5.12 Le système

$$\left\{ y + z + t = 0 \right.$$

admet trois variables libres x, z et t. En posant $x = \alpha$, $z = \beta$ et $t = \gamma$, on obtient la solution :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\beta - \gamma \\ z = \beta \\ t = \gamma \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc F admet pour base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\dim(\mathrm{F}) = 3$.

Le système

$$\begin{cases} x + y \phantom{{}+z-2t} = 0 \\ \phantom{x+y+{}} z - 2\,t = 0 \end{cases}$$

admet deux variables libres y et t. En posant $y = \alpha$ et $t = \beta$, on trouve la solution :

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2\,\beta \\ t = \beta \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc G admet pour base $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\dim(\mathrm{G}) = 2$.

Les éléments de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ satisfont les conditions définies par F et G, à savoir le système

$$\begin{cases} y + z + t = 0 \\ x + y = 0 \\ z - 2\,t = 0 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z + t = 0 \\ z - 2\,t = 0 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + 3\,t = 0 \\ z - 2\,t = 0 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x - 3\,t = 0 \\ y + 3\,t = 0 \\ z - 2\,t = 0 \end{cases}$$

Ce système possède une variable libre t. En posant $t = \alpha$, on obtient :

$$\begin{cases} x = 3\,\alpha \\ y = -3\,\alpha \\ z = 2\,\alpha \\ t = \alpha \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ admet pour base $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) = 1$.