4.9 1) Les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}m\\-1\\2\end{pmatrix}$ sont liés si et seulement si le système $\begin{cases}\alpha_1 + \alpha_2 + m\,\alpha_3 = 0\\ 2\,\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0\\ -\alpha_1 + 3\,\alpha_2 + 2\,\alpha_3 = 0\end{cases}$ possède une infinité de solutions.

Échelonnons ce système :

$$\begin{cases}\alpha_1 + \alpha_2 + m\,\alpha_3 = 0\\ 2\,\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0\\ -\alpha_1 + 3\,\alpha_2 + 2\,\alpha_3 = 0\end{cases} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \begin{cases}\alpha_1 + \alpha_2 + m\,\alpha_3 = 0\\ -\,3\,\alpha_2 - (2\,m+1)\,\alpha_3 = 0\\ 4\,\alpha_2 + (m+2)\,\alpha_3 = 0\end{cases}$$

$$\overset{\mathrm{L}_3 \to 3\,\mathrm{L}_3 + 4\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases}\alpha_1 + \alpha_2 + m\,\alpha_3 = 0\\ -\,3\,\alpha_2 - (2\,m+1)\,\alpha_3 = 0\\ (-5\,m+2)\,\alpha_3 = 0\end{cases}$$

Ce système possède une infinité de solutions si $-5\,m+2=0$, c'est-à-dire si $m = \frac{2}{5}$.

2) Les vecteurs $\begin{pmatrix}m\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\m\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ sont liés si et seulement si le système $\begin{cases}m\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \alpha_3 = 0\\ 2\,\alpha_1 + m\,\alpha_2 + 2\,\alpha_3 = 0\\ \alpha_1 + 3\,\alpha_2 + \alpha_3 = 0\end{cases}$ possède une infinité de solutions.

Échelonnons ce système :

$$\begin{cases}m\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \alpha_3 = 0\\ 2\,\alpha_1 + m\,\alpha_2 + 2\,\alpha_3 = 0\\ \alpha_1 + 3\,\alpha_2 + \alpha_3 = 0\end{cases} \overset{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_3}{\Longrightarrow} \begin{cases}\alpha_1 + 3\,\alpha_2 + \alpha_3 = 0\\ 2\,\alpha_1 + m\,\alpha_2 + 2\,\alpha_3 = 0\\ m\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \alpha_3 = 0\end{cases} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - m\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{cases}\alpha_1 + 3\,\alpha_2 + \alpha_3 = 0\\ (m-6)\,\alpha_2 = 0\\ (-3\,m+2)\,\alpha_2 + (-m+1)\,\alpha_3 = 0\end{cases} \overset{\mathrm{L}_3 \to (m-6)\,\mathrm{L}_3 - (-3\,m+2)\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{cases}\alpha_1 + 3\,\alpha_2 + \alpha_3 = 0\\ (m-6)\,\alpha_2 = 0\\ (m-6)\,(-m+1)\,\alpha_3 = 0\end{cases}$$

Ce système possède une infinité de solutions si $(m-6)\,(-m+1)=0$, à savoir si $m=6$ ou $m=1$.