11.1 Posons $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par définition de la symétrie s, on a :
$s(u) = u = 1 \cdot u + 0 \cdot v$
$s(v) = -v = 0 \cdot u - 1 \cdot v$

Si A' désigne la matrice de la symétrie s relativement à la base $\mathcal{B}' = (u\,;v)$, alors $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}' = (u\,;v)$.
Si A désigne la matrice de la symétrie s relativement à la base canonique, alors $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}$. Il en résulte $\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{A}'\mathrm{P}^{-1}$.

Calculons P^{-1} grâce à la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 3\,\mathrm{L}_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_2 \to -\frac{1}{4}\mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \qquad \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

La matrice A de la symétrie s dans la base canonique est donc :

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{A}'\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Par définition de la projection p, on a :
$p(u) = 0 = 0 \cdot u + 0 \cdot v$
$p(v) = v = 0 \cdot u + 1 \cdot v$

Si B' désigne la matrice de la projection p relativement à la base $\mathcal{B}' = (u\,;v)$, alors $\mathrm{B}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Si l'on appelle B la matrice de la projection p dans la base canonique, alors $\mathrm{B}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}\mathrm{P}$. On en déduit :

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}\mathrm{B}'\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$