7.17 1) (a) $h(e_1) = h\big((1\,;0)\big) = (4 \cdot 1 - 2 \cdot 0\,; 2 \cdot 1 + 0) = (4\,;2) = 4 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$

(b) $h(e_2) = h\big((0\,;1)\big) = (4 \cdot 0 - 2 \cdot 1\,; 2 \cdot 0 + 1) = (-2\,;1) = -2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$

(c) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2) (a) $h(e_1') = h\big((1\,;1)\big) = (4 \cdot 1 - 2 \cdot 1\,; 2 \cdot 1 + 1) = (2\,;3)$

Il s'agit d'écrire le vecteur $(2\,;3)$ comme combinaison linéaire des vecteurs e_1' et e_2' :

$(2\,;3) = a_{11}' \cdot e_1' + a_{21}' \cdot e_2' = a_{11}' \cdot (1\,;1) + a_{21}' \cdot (-1\,;0)$

$\begin{cases} 2 = a_{11}' - a_{21}' \\ 3 = a_{11}' \end{cases} \iff \begin{cases} 3 = a_{11}' \\ 1 = a_{21}' \end{cases}$

(b) $h(e_2') = h\big((-1\,;0)\big) = \big(4 \cdot (-1) - 2 \cdot 0\,; 2 \cdot (-1) + 1\big) = (-4\,;-2)$

Il s'agit d'écrire le vecteur $(-4\,;-2)$ comme combinaison linéaire des vecteurs e_1' et e_2' :

$(-4\,;-2) = a_{12}' \cdot e_1' + a_{22}' \cdot e_2' = a_{12}' \cdot (1\,;1) + a_{22}' \cdot (-1\,;0)$

$\begin{cases} -4 = a_{12}' - a_{22}' \\ -2 = a_{12}' \end{cases} \iff \begin{cases} -2 = a_{12}' \\ 2 = a_{22}' \end{cases}$

(c) $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \mathrm{A}'$