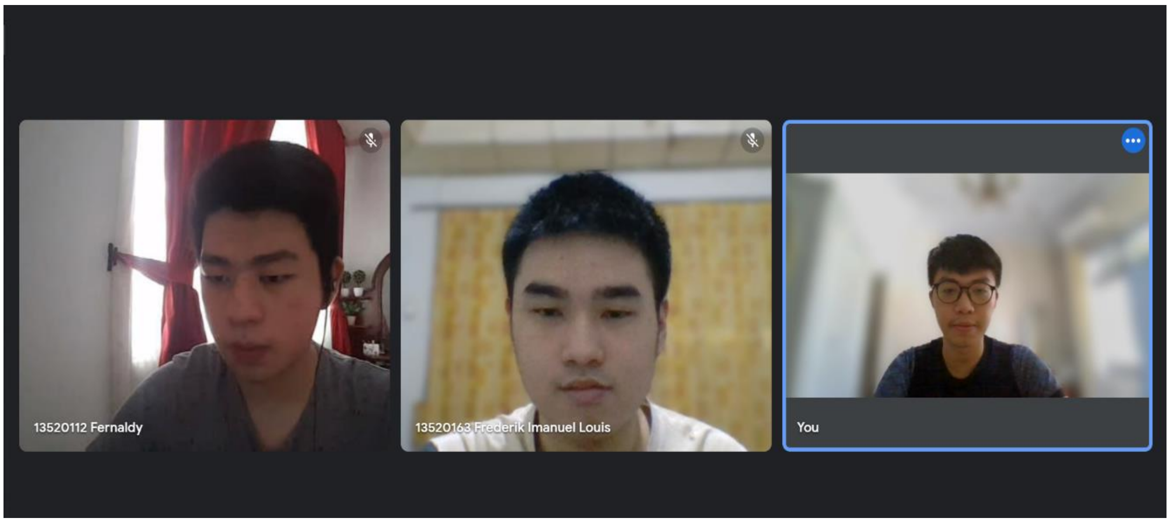
Sistem Persamaan Linier, Determinan, dan Aplikasinya

Dibuat sebagai Tugas Besar 1

IF2123

Aljabar Linier dan Geometri



Kelompok 66

Louis Yanggara	**13520063**
Fernaldy	**13520112**
Frederik Imanuel Louis	**13520163**

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung

2021

DAFTAR ISI

BAB I
DESKRIPSI MASALAH

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}B$), dan kaidah Cramer (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

Di dalam Tugas Besar 1 ini, akan dibuat satu atau lebih library aljabar linier dalam Bahasa Java. Library tersebut berisi fungsi-fungsi seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan, kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Selanjutnya, library tersebut akan digunakan di dalam program Java untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi. Penjelasan tentang interpolasi dan regresi ada pada Bab II.

BAB II
TEORI SINGKAT

Sistem Persamaan Linier(SPL) adalah sekumpulan persamaan linier yang terdiri dari beberapa variabel. Disebut linier karena pangkat tertinggi di dalam variabelnya sama dengan 1. Sebuah SPL dengan m buah persamaan dan n variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ berbentuk:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

atau dalam bentuk Ax=b

Bentuk SPL juga dapat diubah kedalam bentuk perkalian matriks, yaitu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix}}_{b}$$

Bentuk SPL dapat dinyatakan secara ringkas dalam bentuk matriks augmented

$$[a|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Operasi Baris Elementer(OBE) adalah operasi yang diterapkan pada baris dalam suatu matriks. Tiga operasi baris elementer terhadap matriks augmented:

1. Kalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol.
2. Pertukarkan dua buah baris.
3. Tambahkan sebuah baris dengan kelipatan baris lainnya.

Solusi sebuah SPL diperoleh dengan menerapkan OBE pada matriks augmented sampai terbentuk matriks eselon baris atau matriks eselon baris tereduksi. Jika menghasilkan matriks eselon baris maka metode yang digunakan adalah Metode Eliminasi Gauss, jika berakhir pada matriks eselon baris tereduksi maka metode yang digunakan adalah Metode Eliminasi Gauss-Jordan.

Matriks Eselon Baris (*Row echelon form)* adalah matriks yang memiliki 1 utama pada setiap baris, kecuali baris yang seluruhnya nol. Berbentuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan * adalah sembarang nilai.

Matriks Eselon Baris Tereduksi adalah matriks yang memiliki nol-nol dibawah dan diatas 1 utama. Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad atau \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan * adalah sembarang nilai.

Metode Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss ditemukan oleh **Carl Friedrich Gauss,** metode ini dapat dimanfaatkan untuk memecahkan sistem persamaan linear dengan merepresentasikan (mengubah) menjadi bentuk matriks. Langkah-langkah dalam melakukan Metode Eliminasi Gauss:

1. Nyatakan SPL dalam bentuk matriks *augmented*.
2. Terapkan OBE pada matriks *augmented* sampai terbentuk matriks eselon baris
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix} \sim OBE \sim \begin{bmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$
3. Pecahkan persamaan yang berkoresponden pada matriks eselon baris dengan teknik penyulihan mundur (*backward substitution*)

Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode Eliminasi Gauss-Jordan adalah hasil pengembangan dari Metode Eliminasi Gauss yang memecahkan SPL dengan mengubahnya ke bentuk matriks eselon baris tereduksi dengan Operasi Baris Elementer.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix} \sim OBE \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

Pada metode ini, tidak diperlukan lagi substitusi muncur untuk memperoleh nilai variabel. Nilai variabel diperoleh langsung dari matriks *augmented* akhir.

Determinan

Determinan adalah suatu nilai yang dapat dihitung dari unsur suatu matriks persegi. Determinan matriks A biasa ditulis dengan tanda det(A) atau |A|. Determinan dapat dianggap sebagai faktor penskalaan transformasi yang digambarkan oleh matriks. Determinan dapat dihitung dengan menggunakan reduksi baris.

$$[A] \sim OBE \sim [matriks\ segitiga]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \sim OBE \sim \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka det(A) = $(-1)^p a'_{11} a'_{22} \cdots a'_{nn}$, dengan asumsi bahwa tidak ada operasi perkalian baris dengan konstanta k. Dan p menyatakan banyaknya operasi pertukaran baris saat OBE.

Matriks Balikan

Ada 2 metode yang dapat digunakan untuk menentukan Matriks Balikan yaitu dengan Eliminasi Gauss-Jordan serta dengan metode kofaktor. Misalkan A adalah matriks persegi berukuran n x n. Balikan(invers) matriks A adalah A^{-1} sedemikian hingga $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Metode eliminiasi Gauss-Jordan dapat digunakan untuk menghitung matriks balikan. Untuk matriks A yang berukuran n x n, matriks balikannya, yaitu A^{-1} dicari dengan cara:

$$[A|I] \sim Gauss - Jordan \sim [I|A^{-1}]$$

Dalam hal ini, I adalah matriks identitas berukuran n x n

Metode lain yang dapat digunakan adalah menggunakan Adjoin. Adjoin adalah matriks yang diperoleh dari hasil transpose matriks kofaktor. Sehingga akan diperoleh matriks balikan dengan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, Adjoint(A)$$

Matriks Kofaktor

Untuk memperoleh sebuah matriks Kofaktor, diperlukan Minor dan Kofaktor. Misalkan ada sebuah matriks A, minor dari matriks A dilambangkan dengan M_{ij} adalah bagian dari matriks A yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemennya pada baris ke-i dan elemen-elemen pada kolom ke-j. Sedangkan kofaktor adalah hasil perkalian minor dengan suatu angka yang besarnya menuruti suatu aturan yaitu $(-1)^{i+j}$ dimana i adalah jumlah baris dan j adalah jumlah kolom. Kofaktor suatu elemen baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dilambangkan dengan C_{ij}

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Matriks kofaktor merupakan matriks yang terdiri dari semua kofaktor matriks itu sendiri. Maka untuk matriks A, matriks kofaktornya terdiri dari kofaktor-kofaktor matriks A yang susunan elemennya mengikiti susunan dari kofaktornya. Sehingga Matriks kofaktor A berbentuk

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks Adjoin

Matriks Adjoin merupakan transpose dari matriks kofaktor. Dimana transpose artinya pertukaran elemen baris menjaid kolom dan kolom menjadi baris. Adjoin matriks inilah yang akan digunakan untuk menentukan invers dari sebuah matriks.

Kaidah Cramer

Aturan Cramer atau Kaidah Cramer, ditemukan oleh matematikawan Swiss, Gabries Cramer, adalah salah satu prosedur untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Dasar metode ini adalah determinan dan matriks. Kaidah Cramer digunakan karena dapat memperoleh nilai masing-masing solusi tanpa harus mencari nilai setiap solusi.

Sistem persamaan dengan n buah persamaan dan n variabel, dapat ditulis dalam perkalian matriks $Ax = b$ dimana A adalah matriks persegi ordo n dan determinannya tidak nol, serta vektor kolom $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ dan $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$

Kemudian teorema ini menyatakan bahwa sistem memiliki solusi tunggal:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad dengan\ i = 1, 2, 3, \cdots, n$$

Dimana A_i adalah matriks yang dibentuk dengan mengganti kolom ke-i pada matriks A menjadi vektor kolom b.

Sebagai contoh, diberikan sistem persamaan linear tiga variabel:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Dalam bentuk matriks:

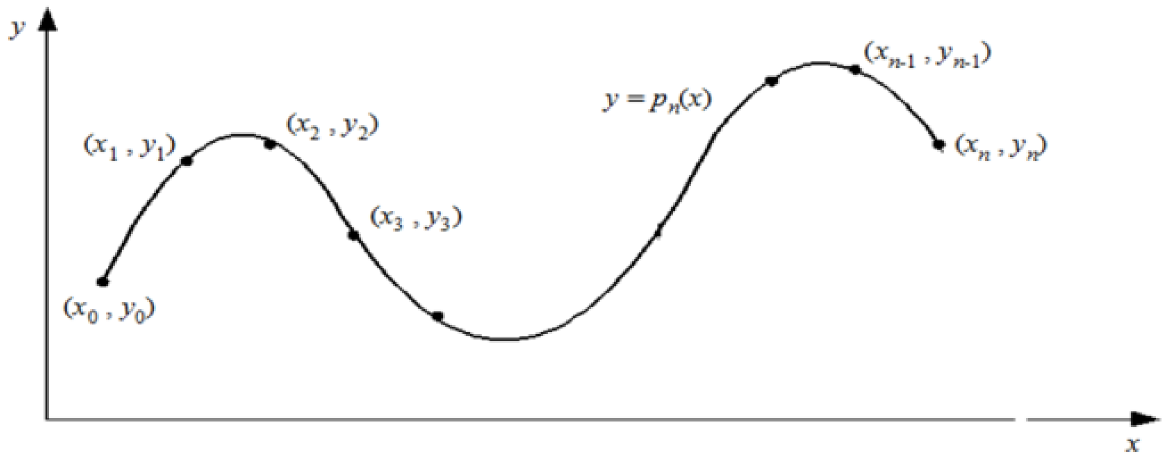
$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Misalkan determinan dari matriks tidak nol, maka x, y, z dapat dicari dengan cara membagi determinan matriks yang telah dimodifikasi dengan determinan matriks awal

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

Interpolasi Polinom

Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan n+1 buah titik berbeda, (x0 , y0), (x1 , y1), ..., (xn , yn). Tentukan polinom pn(x) yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga yi = pn(xi) untuk i = 0, 1, 2, …, n.



Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di sembarang titik di dalam selang $[x_0 , x_n]$.

Polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi titik-titik $(x_0 , y_0), (x_1 , y_1), \cdots , (x_n , y_n)$. adalah berbentuk $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Jika hanya ada dua titik, (x_0 , y_0) dan (x_1, y_1), maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah $p_1(x) = a_0 + a_1x$ yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, $(x_0 , y_0), (x_1 , y_1), dan\ (x_2, y_2)$, maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ atau persaman kuadrat dan kurvanya berupa parabola. Jika tersedia empat titik, $(x_0 , y_0),\ (x_1 , y_1),$ $(x_2 , y_2),\ dan\ (x_3 , y_3)$, polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, demikian seterusnya. Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi asalkan tersedia (n+1) buah titik data. Dengan menyulihkan (x_i , y_i) ke dalam persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ untuk i = 0, 1, 2, …, n, akan diperoleh n buah sistem persamaan lanjar dalam $a_0,\ a_1,$ $a_2, \cdots ,\ a_n,$

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0$$
$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1$$
$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini, yaitu nilai $a_0 , a_1 , \cdots , a_n$, diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari. Sebagai contoh, misalkan diberikan tiga buah titik yaitu (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadratik lalu estimasi nilai fungsi pada x = 9.2. Polinom kuadratik berbentuk $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Dengan menyulihkan ketiga buah titik data ke dalam polinom tersebut, diperoleh sisten persamaan lanjar yang terbentuk adalah

$$a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794$$
$$a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 = 2.1972$$
$$a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan $a_0 = 0.6762$, $a_1 = 0.2266,\ dan\ a_2 = -0.0064$. Polinom interpolasi yang melalui ketiga buah 2 titik tersebut adalah $p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$.

Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada x = 9.2 dapat ditaksir sebagai berikut: $p_2(9.2) = 0.6762 + 0.2266(9.2) - 0.0064(9.2)^2 = 2.2192$.

Regresi Linear Berganda

Regresi Linear (akan dipelajari lebih lanjut di Probabilitas dan Statistika) merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Meskipun sudah ada rumus jadi untuk menghitung regresi linear sederhana, terdapat rumus umum dari regresi linear yang bisa digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_p X_{ip} + \varepsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap βi dapat digunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccc}
nb_0 & + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & + & \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & + & \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{2i} & + & \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 & = \sum_{i=1}^{n} x_{ki}y_i
\end{array}$$

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

BAB III
IMPLEMENTASI PROGRAM

Program untuk menyelesaikan persoalan-persoalan terbagi menjadi beberapa bagian, yaitu main, matrix, interpolation, regression. Dimana matrix berisi fungsi-fungsi untuk menyelesaikan permasalahan SPL, metode Gauss, metode Gauss-Jordan, invers matriks, menentukan determinan matriks. Interpolation berisi fungsi untuk menyelesaikan persoalan interpolasi dan regression berisi fungsi untuk menyelesaikan persoalan regresi linear berganda.

1. Main.java

Main.java adalah program utama yang akan dijalankan untuk menyelesaikan permasalahan yang ada. Ketika dijalankan, user akan diminta untuk memilih permasalahan yang akan diselesaikan. Permasalahan dapat berupa menyelesaikan Sistem Persamaan Linier, menghitung Determinan matriks, menentukan matriks balikan, interpolasi polinom, dan regresi linier berganda. Setiap permasalahan memiliki metode penyelesaian berbeda yang dapat dipilih oleh user. Pembacaan maupun penulisan hasil dapat dilakukan dengan cara, yaitu dari keyboard atau dari file. Program akan berhenti jika user memilih pilihan “Keluar” pada Menu.

2. Matrix.java

Matrix.java berisi fungsi-fungsi dasar untuk membaca dan membentuk matriks, menyelesaikan persamaan SPL, menentukan determinan serta invers dari sebuah matriks, dan mengeluarkan hasil dari setiap permasalahan.

a) read
Fungsi untuk menentukan apakah pembacaan masukan akan dilakukan melalui keyboard atau input file. Setelah metode input diterima, fungsi akan memanggil fungsi lain sesuai dengan metode yang dipilih user.

b) readKey
Fungsi yang akan dipanggil jika user memilih untuk melakukan input matriks melalui keyboard. Fungsi akan menghasilkan output berupa sebuah matriks.

c) readFile
Fungsi yang akan dipanggil jika user memilih untuk melakukan input matriks melalui file. Fungsi akan menghasilkan output berupa sebuah matriks.

d) outFloat
Fungsi untuk menentukan apakah output yang berupa nilai float akan berupa tampilan pada terminal atau berupa sebuah file. Setelah metode untuk output diterima, fungsi akan memanggil fungsi lain sesuai metode output yang dipilih oleh user.

e) outFloatKey
Fungsi yang akan dipanggil jika user memilih untuk menampilkan output yang berupa nilai float pada terminal.

f) outFloatFile
Fungsi yang akan dipanggil jika user memilih untuk menyimpan output yang berupa nilai float pada file lain.

g) outPers
   Fungsi yang akan menentukan apakah output yang berupa solusi dari SPL akan berupa tampilan di terminal atau berupa sebuah file. Setelah metode untuk output diterima, fungsi akan memanggil fungsi lain sesuai metode output yang dipilih oleh user.
h) outPersKey
   Fungsi yang akan dipanggil jika user memilih untuk menampilkan output solusi dari SPL pada terminal.
i) outPersFile
   Fungsi yang akan dipanggil jika user memilih untuk menyimpan output solusi dari SPL pada file lain.
j) outMat
   Fungsi yang akan menentukan apakah output yang berupa matriks akan berupa tampilan di terminal atau berupa sebuah file. Setelah metode untuk output diterima, fungsi akan memanggil fungsi lain sesuai metode output yang dipilih oleh user.
k) outMatKey
   Fungsi yang akan dipanggil jika user memilih untuk menampilkan output berupa matriks pada terminal.
l) outMatFile
   Fungsi yang akan dipanggil jika user memilih untuk menyimpan output berupa matriks pada file lain.
m) tukarBaris
   Fungsi yang menerima input indeks baris yang akan ditukar kemudian mengembalikan matriks dengan kedua baris yang sudah ditukar.
n) tukarKolom
   Fungsi yang menerima input indeks kolom yang akan ditukar kemudian mengembalikan matriks dengan kedua kolom yang sudah ditukar.
o) kaliX
   Fungsi yang menerima indeks baris dan nilai x, kemudian mengembalikan matriks yang indeks barisnya suda dikali dengan x.
p) tambahBaris
   Fungsi yang menerima input 2 indeks baris dan sebuah nilai x, kemudian mengembalikan matriks yang elemen indeks baris pertama telah ditambah dengan x kali elemen indeks baris kedua.
q) notZero
   Fungsi yang akan menghasilkan indeks pertama dari matriks yang elemennya bukan nol.
r) gauss
   Fungsi untuk menyelesaikan SPL dengan menggunakan metode Gauss.
s) gaussJordan
   Fungsi untuk menyelesaikan SPL dengan menggunkaan metode Gauss-Jordan.
t) Transpose
   Fungsi yang akan menghasilkan matriks transpose yaitu matriks yang elemen baris dan kolomnya ditukar.

u) determinanOBE
Fungsi untuk menghasilkan nilai determinan dari sebuah matriks dengan metode Operasi Baris Elementer.

v) determinanKofaktor
Fungsi untuk menghasilkan nilai determinan dari sebuah matriks dengan metode Kofaktor

w) inversOBE
Fungsi untuk menghasilkan invers dari sebuah matriks dengan metode Operasi Baris Elementer.

x) inisialisasiM
Fungsi yang menerima input jumlah baris dan jumlah kolom kemudian membentuk sebuah matriks dengan jumlah baris dan kolom sesuai dengan input dan menginisialisasi setiap elemen dengan nol.

y) inversKofaktor
Fungsi untuk menghasilkan invers dari sebuah matriks dengan metode Kofaktor.

z) kaliMatrix
Fungsi yang menerima input dua buah matriks kemudian menghasilkan matriks yang merupakan perkalian dari kedua matriks yang diinput.

aa) splInvers
Fungsi untuk menyelesaikan permasalahan SPL dengan menggunakan metode invers matriks.

bb) splCramer
Fungsi untuk menyelesaikan permasalahan SPL dengan menggunakan metode Cramer.

3. Interpolation.java

Interpolation.java berisi fungsi-fungsi yang diperlukan untuk menyelesaikan permasalahan interpolasi dengan menggunakan bantuan dari fungsi yang telah dibuat pada matrix.java. Selain itu, dalam Interpolation.java juga terdapat metode input dan output tersendiri untuk masalah interpolasi

a) read
Fungsi untuk menentukan apakah pembacaan masukan akan dilakukan melalui keyboard atau input file. Setelah metode input diterima, fungsi akan memanggil fungsi lain sesuai dengan metode yang dipilih user.

b) readKey
Fungsi yang akan dipanggil jika user memilih untuk melakukan input setiap titik interpolasi melalui keyboard.

c) readFile
Fungsi yang akan dipanggil jika user memilih untuk melakukan input setiap titik interpolasi melalui sebuah file.

d) Count
Fungsi untuk menentukan hasil dari permasalahan interpolasi yang berupa sebuah matriks dengan menggunakan metode Gauss-Jordan.

e) Out
Fungsi untuk menentukan apakah hasil dari interpolasi akan ditampilkan di terminal atau dalam file lain.

f) outKey
   Fungsi yang dipanggil jika user memilih untuk menampilkan hasil di terminal. Output akan berupa persamaan interpolasi serta nilai dari y yang ditaksir.
g) outFile
   Fungsi yang dipanggil jika user memilih untuk menam

4. Regression.java

Regression.java berisi fungsi-fungsi yang diperlukan untuk menyelesaikan persoalan regresi linier berganda dengan menggunakan bantuan fungsi yang ada pada matrix.java.

a) read
   Fungsi untuk menentukan metode yang akan digunakan untuk menerima input. Setelah metode diterima, akan memanggil fungsi lain sesuai dengan metode input yang dipilih user.
b) readKey
   Fungsi untuk menerima input data melalui keyboard.
c) readFile
   Fungsi untuk menerima input data melalui file lain.
d) Count
   Fungsi untuk menentukan matriks hasil dari regresi linear berganda dengan menggunakan metode Gauss-Jordan.
e) out
   Fungsi untuk menentukan metode yang akan digunakan untuk mengeluarkan hasil. Setelah metode diterima, akan memanggil fungsi lain sesuai dengan metode output yang dipilih user.
f) outKey
   Fungsi untuk mengeluarkan hasil regresi linear berganda di terminal.
g) outFile
   Fungsi untuk mengeluarkan hasil regresi linear ke file lain.

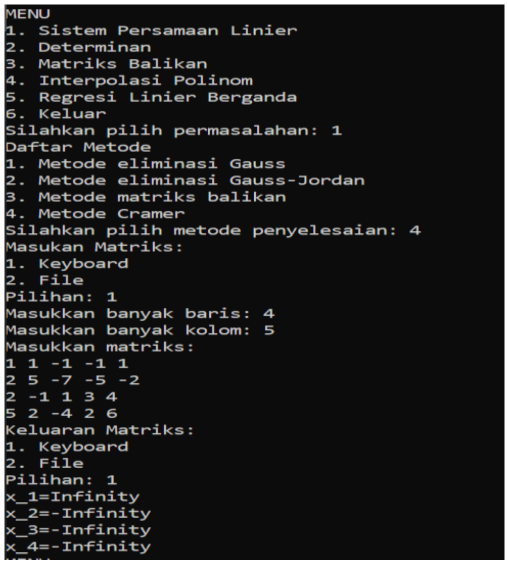
BAB IV
EKSPERIMEN

Nomor 1

1. Temukan solusi SPL $Ax = b$,berikut:
   a.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Untuk Nomor 1.a. metode yang akan digunakan adalah metode penyelesaian SPL dengan kaidah Cramer dan input matriks augmented akan dilakukan melalui keyboard



```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 1
Daftar Metode
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Metode Cramer
Silahkan pilih metode penyelesaian: 4
Masukan Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
Masukkan banyak baris: 4
Masukkan banyak kolom: 5
Masukkan matriks:
1 1 -1 -1 1
2 5 -7 -5 -2
2 -1 1 3 4
5 2 -4 2 6
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
x_1=Infinity
x_2=-Infinity
x_3=-Infinity
x_4=-Infinity
```

Pada soal nomor 1.a. SPL tidak memiliki solusi sehingga diperoleh nilai infinity untuk setiap x_i.

b.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Untuk nomor 1.b. metode yang akan digunakan adalah metode eliminasi Gauss dan input dari matriks augmented akan dilakukan melalui input file. Output juga akan ditampilkan dalam file.

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 1
Daftar Metode
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Metode Cramer
Silahkan pilih metode penyelesaian: 1
Masukan Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 2
Masukkan nama file:
spl_1b.txt
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 2
Masukkan nama file:
spl_1b.txt
```

Berikut adalah file hasil output dari metode eliminasi Gauss

```
spl_1b - Notepad
File  Edit  Format  View  Help
x_1 = 4.333333
x_2 = 2.666667
x_4 = 0.333333
x_5 = 1.333333
```

Pada soal Nomor 1.b. nilai x_3 tidak dihasilkan pada file output, hal itu disebabkan pada prakteknya, nilai x_3 tidak berpengaruh terhadap persamaan, sehingga nilai x_3 dapat berupa angka berapapun.

c.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk Nomor 1.c. metode yang akan digunakan adalah metode penyelesaian SPL dengan metode eliminasi Gauss-Jordan dan input matriks augmented akan dilakukan melalui keyboard.

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 1
Daftar Metode
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Metode Cramer
Silahkan pilih metode penyelesaian: 2
Masukan Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
Masukkan banyak baris: 3
Masukkan banyak kolom: 7
Masukkan matriks:
0 1 0 0 1 0 2
0 0 0 1 1 0 -1
0 1 0 0 0 1 1
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
x_2 = + 1.000000*s_6 + 1.000000
x_6 = s_6
x_4 = + 1.000000*s_6 - 2.000000
x_5 = - 1.000000*s_6 + 1.000000
```

Pada soal Nomor 1.c. nilai dari x_1, x_3 tidak berpengaruh kepada persamaan sehingga dapat berupa angka berapapun, sedangkan keempat nilai lainnya saling berhubungan satu sama lain.

d.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

H adalah matriks Hilbert. Cobakan untuk n = 6 dan n = 10.

Untuk Nomor 1.d metode yang akan digunakan adalah metode penyelesaian SPL dengan metode eliminasi Gauss-Jordan, input dan output akan dilakukan melalui file eksternal.

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 1
Daftar Metode
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Metode Cramer
Silahkan pilih metode penyelesaian: 2
Masukan Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 2
Masukkan nama file:
spl_1d_10.txt
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 2
Masukkan nama file:
spl_1d_10.txt
```

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 1
Daftar Metode
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Metode Cramer
Silahkan pilih metode penyelesaian: 2
Masukan Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 2
Masukkan nama file:
spl_1d_6.txt
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 2
Masukkan nama file:
spl_1d_6.txt
```

```
spl_1d_6 - Notepad
File  Edit  Format  View  Help
x_1 = 8.080836
x_2 = -23.558849
x_3 = -31.735397
x_4 = 108.017939
x_5 = -43.699409
x_6 = -17.952855
```

```
spl_1d_10 - Notepad
File  Edit  Format  View  Help
x_1 = 4.179701
x_2 = -6.680090
x_3 = -0.032974
x_4 = 0.349071
x_5 = 0.280319
x_6 = -0.043638
x_7 = -0.156987
x_8 = 0.065734
x_9 = 0.251599
x_10 = 0.215856
```

Nomor 2

2. SPL berbentuk matriks *augmented*

a.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Untuk Nomor 2.a. metode yang akan digunakan metode eliminasi Gauss. Input dan output akan diterima dari keyboard.

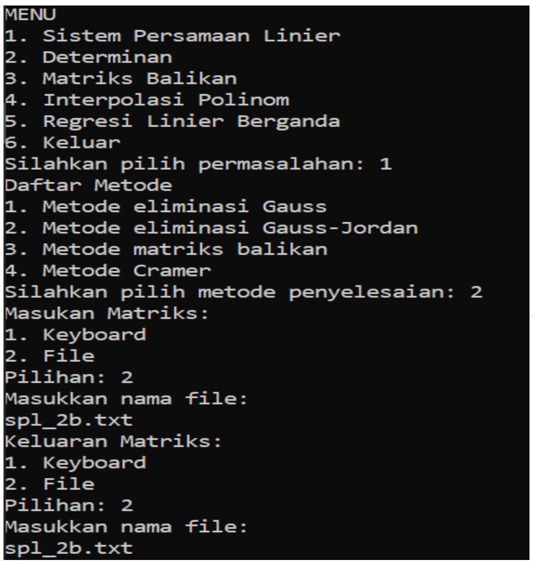
```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 1
Daftar Metode
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Metode Cramer
Silahkan pilih metode penyelesaian: 1
Masukan Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
Masukkan banyak baris: 4
Masukkan banyak kolom: 5
Masukkan matriks:
1 -1 2 -1 -1
2 1 -2 -2 -2
-1 2 -4 1 1
3 0 0 -3 -3
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
x_1 = - 1.000000*s_4 - 1.000000
x_4 = s_4
x_2 = - 2.000000*s_3
```

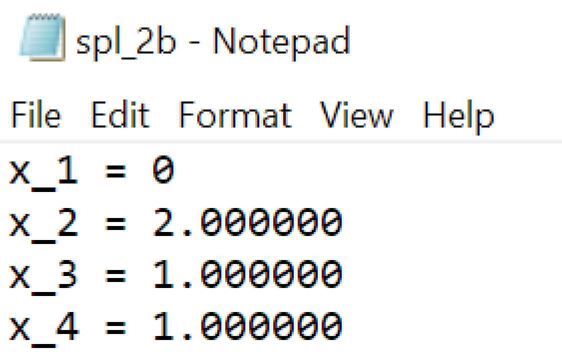
Solusi dari SPL nomor 2.a. berupa persamaan parametrik dimana x_3 = s_3.

b.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Untuk soal Nomor 2.b. penyelesaian SPL akan dilakukan dengan metode eliminasi Gauss-Jordan. Input dan output akan diterima dan dikeluarkan melalui file external.





Nomor 3

3. SPL berbentuk

a. $$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Untuk soal Nomor 3.a. SPL akan diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.Input dan output akan dilakukan melalui keyboard.

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 1
Daftar Metode
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Metode Cramer
Silahkan pilih metode penyelesaian: 1
Masukan Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
Masukkan banyak baris: 4
Masukkan banyak kolom: 5
Masukkan matriks:
8 1 3 2 0
2 9 -1 -2 1
1 3 2 -1 2
1 0 6 4 3
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
x_1 = -0.224324
x_2 = 0.182432
x_3 = 0.709459
x_4 = -0.258108
```

b.

$$
\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04
\end{aligned}
$$

Untuk soal Nomor 3b, SPL akan diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan. Input dan output akan dilakukan melalui file eksternal. File input berupa:

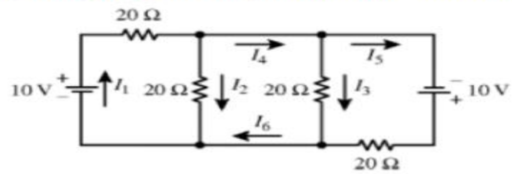
```
spl_3b - Notepad
File  Edit  Format  View  Help
0 0 0 0 0 0 1 1 1 13.00
0 0 0 1 1 1 0 0 0 15.00
1 1 1 0 0 0 0 0 0 8.00
0 0 0.04289 0 0.04289 0.75 0.04289 0.75 0.81396 14.79
0 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.26 0 14.31
0.61396 0.75 0.04289 0.75 0.04289 0 0.04289 0 0 3.81
0 0 1 0 0 1 0 0 1 18.00
0 1 0 0 1 0 0 1 0 12.00
1 0 0 1 0 0 1 0 0 6.00
0.04289 0.75 0.61396 0 0.04289 0.75 0 0 0.4289 10.51
0.91421 0.25 0 0.25 0.91421 0.25 0 0.25 0.91421 16.13
0.04289 0 0 0.75 0.04289 0 0.61396 0.75 0.04289 7.04
```

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 1
Daftar Metode
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Metode Cramer
Silahkan pilih metode penyelesaian: 2
Masukan Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 2
Masukkan nama file:
spl_3b.txt
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 2
Masukkan nama file:
spl_3b.txt
```

Untuk soal nomor 3b, file hasil akan kosong. Hal ini disebabkan SPL tersebut tidak memiliki solusi.

Nomor 4

4. Tentukan arus yang mengalir pada rangkaian listrik di bawah ini:



Setelah menerapkan hukum-hukum listrik yang berlaku, diperoleh persamaan:

$$
\begin{aligned}
20I_1 + 20I_2 &= 10 \\
-20I_2 + 20I_3 &= 0 \\
-20I_3 + 20I_6 &= 10 \\
I_1 - I_2 - I_4 &= 0 \\
-I_3 + I_4 - I_5 &= 0 \\
I_3 + I_5 - I_6 &= 0
\end{aligned}
$$

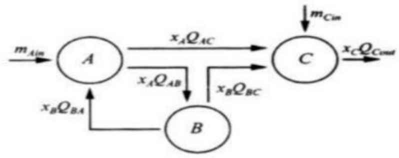
Selanjutnya, persamaan akan diselesaikan dengan menggunakan metode Gauss-Jordan

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 1
Daftar Metode
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Metode Cramer
Silahkan pilih metode penyelesaian: 2
Masukan Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
Masukkan banyak baris: 6
Masukkan banyak kolom: 7
Masukkan matriks:
20 20 0 0 0 0 10
0 -20 20 0 0 0 0
0 0 -20 0 0 20 10
1 -1 0 -1 0 0 0
0 0 -1 1 -1 0 0
0 0 1 0 1 -1 0
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
x_1 = 0.500000
x_2 = 0
x_3 = 0
x_4 = 0.500000
x_5 = 0.500000
x_6 = 0.500000
```

Setelah melakukan eliminasi Gauss-Jordan, diperoleh nilai $I_1 = I_4 = I_5 = I_6 = 0.5$ dan nilai dari $I_2 = I_3 = 0$

Nomor 5

5. Lihatlah sistem reaktor pada gambar berikut



Dengan laju volume Q dalam m^3/s dan input massa m_{in} dalam mg/s. Konservasi massa pada tiap inti reaktor adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&A: && m_{A_{in}} + Q_{BA}x_B - Q_{AB}x_A - Q_{AC}x_A = 0 \\
&B: && Q_{AB}x_A - Q_{BA}x_B - Q_{BC}x_B = 0 \\
&C: && m_{C_{in}} + Q_{AC}x_A + Q_{BC}x_B - Q_{C_{out}}x_C = 0
\end{aligned}$$

Tentukan solusi x_A, x_B, x_C dengan menggunakan parameter berikut : $Q_{AB} = 40$, $Q_{AC} = 80$, $Q_{BA} = 60$, $Q_{BC} = 20$ dan $Q_{Cout} = 150$ m^3/s dan $m_{Ain} = 1300$ dan $m_{Cin} = 200$ mg/s.

Untuk soal Nomor 5, persamaan pertama-tama diubah ke bentuk matriks augmented, kemudian diselesaikan dengan menggunakan metode Gauss-Jordan. Input matriks augmented akan diterima melalui file dan output juga akan ditampilkan ke file eksternal. File input berupa:

```
spl_5 - Notepad
File  Edit  Format  View  Help
120 -60 0 1300
40 -80 0 0
80 20 -150 -200
```

Kemudian, file digunakan untuk melalukan eliminasi Gauss-Jordan.

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 1
Daftar Metode
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Metode Cramer
Silahkan pilih metode penyelesaian: 2
Masukan Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 2
Masukkan nama file:
spl_5.txt
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 2
Masukkan nama file:
spl_5.txt
```

```
spl_5 - Notepad
File  Edit  Format  View  Help
x_1 = 14.444444
x_2 = 7.222222
x_3 = 10.000000
```

Nomor 6

6. **Studi Kasus Interpolasi**

a. Gunakan tabel di bawah ini untuk mencari polinom interpolasi dari pasangan titik-titik yang terdapat dalam tabel. Program menerima masukan nilai *x* yang akan dicari nilai fungsi *f*(*x*).

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
f(*x*)	0.003	0.067	0. 148	0.248	0.370	0.518	0.697

Lakukan pengujian pada nilai-nilai default berikut:

$x = 0.2$ f(x) = ?
$x = 0.55$ f(x) = ?
$x = 0.85$ f(x) = ?
$x = 1.28$ f(x) = ?

Untuk soal Nomor 6, penyelesaian dapat langsung dilakukan dengan memanggil fungsi interpolasi. Untuk $x = 0.2, x = 0.55, x = 0.85$, input akan dilakukan melalui keyboard, untuk $x = 1.28$ input akan dilakukan melalui file eksternal.

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 4
Masukan Interpolasi:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
Masukkan n (banyak titik n+1): 6
0.1 0.003
0.3 0.067
0.5 0.148
0.7 0.248
0.9 0.370
1.1 0.518
1.3 0.697
Masukkan x yang ingin ditaksir: 0.2
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
p_6(x) = -0.022976 + 0.239997x + 0.197412x^2 - 0.000043x^3 + 0.026100x^4 - 0.000039x^5 + 0.000010x^6
Nilai taksiran 0.200000 adalah: 0.032961
```

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 4
Masukan Interpolasi:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
Masukkan n (banyak titik n+1): 6
0.1 0.003
0.3 0.067
0.5 0.148
0.7 0.248
0.9 0.370
1.1 0.518
1.3 0.697
Masukkan x yang ingin ditaksir: 0.55
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
p_6(x) = -0.022976 + 0.239997x + 0.197412x^2 - 0.000043x^3 + 0.026100x^4 - 0.000039x^5 + 0.000010x^6
Nilai taksiran 0.550000 adalah: 0.171119
```

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 4
Masukan Interpolasi:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
Masukkan n (banyak titik n+1): 6
0.1 0.003
0.3 0.067
0.5 0.148
0.7 0.248
0.9 0.370
1.1 0.518
1.3 0.697
Masukkan x yang ingin ditaksir: 0.85
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
p_6(x) = -0.022976 + 0.239997x + 0.197412x^2 - 0.000043x^3 + 0.026100x^4 - 0.000039x^5 + 0.000010x^6
Nilai taksiran 0.850000 adalah: 0.337236
```

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 4
Masukan Interpolasi:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 2
Masukkan nama file:
interpolasi_6a_d.txt
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 2
Masukkan nama file:
interpolasi_6a_d.txt
```

interpolasi_6a_d - Notepad

File Edit Format View Help

```
p_6(x) = -0.022976 + 0.239997x + 0.197412x^2 - 0.000043x^3 + 0.026100x^4 -
0.000039x^5 + 0.000010x^6
Nilai taksiran 1.280000 adalah: 0.677542
```

b. Jumlah kasus positif baru Covid-19 di Indonesia semakin fluktuatif dari hari ke hari. Di bawah ini diperlihatkan jumlah kasus baru Covid-19 di Indonesia mulai dari tanggal 17 Juni 2021 hingga 31 Agustus 2021:

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2021	6,567	12.624
30/06/2021	7	21.807
08/07/2021	7,258	38.391
14/07/2021	7,451	54.517
17/07/2021	7,548	51.952
26/07/2021	7,839	28.228
05/08/2021	8,161	35.764
15/08/2021	8,484	20.813
22/08/2021	8,709	12.408
31/08/2021	9	10.534

Tanggal (desimal) adalah tanggal yang sudah diolah ke dalam bentuk desimal 3 angka di belakang koma dengan memanfaatkan perhitungan sebagai berikut:

tanggal(desimal) = bulan + (tanggal / jumlah hari pada bulan tersebut)

Sebagai **contoh**, untuk tanggal 17/06/2021 (dibaca: 17 Juni 2021) diperoleh tanggal(desimal) sebagai berikut:

Tanggal(desimal) = 6 + (17/30) = 6,567

Gunakanlah data di atas dengan memanfaatkan **polinom interpolasi** untuk melakukan prediksi jumlah kasus baru Covid-19 pada tanggal-tanggal berikut:

a. 16/07/2021
b. 10/08/2021
c. 05/09/2021
d. beserta masukan user lainnya berupa **tanggal (desimal) yang sudah diolah** dengan asumsi prediksi selalu dilakukan untuk tahun 2021.

Untuk soal nomor 6b, akan digunakan 2 cara untuk menginput. Untuk bagian d tanggal yang dipilih adalah 1 Oktober 2021. Soal a dan c akan diinput dari keybord, soal b dan d akan diinput dari file eskternal. Bentuk soal setelah diubah ke bentuk desimal adalah:

$$a. 7.516$$
$$b. 8.323$$
$$c. 9.167$$
$$d. 10.032$$

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 4
Masukan Interpolasi:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
Masukkan n (banyak titik n+1): 9
6.567 12624
7 21807
7.258 38391
7.451 54517
7.548 51952
7.839 28228
8.161 35764
8.484 20813
8.709 12408
9 10534
Masukkan x yang ingin ditaksir: 7.516
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
p_9(x) = 7194087096241.584000 - 9355145641937.703000x + 5338405029925.557000x^2 - 1758071956707.942400x^3 + 368794069677.219600x^4 - 51163104097.772240x^5 + 4698475400.5162
65x^6 - 275621015.276577x^7 + 9377532.528072x^8 - 141060.181484x^9
Nilai taksiran 7.516000 adalah: 53529.197266
```

interpolasi_6b_b - Notepad

File Edit Format View Help

```
p_9(x) = 7194087096241.584000 - 9355145641937.703000x + 5338405029925.557000x^2
- 1758071956707.942400x^3 + 368794069677.219600x^4 - 51163104097.772240x^5 +
4698475400.516265x^6 - 275621015.276577x^7 + 9377532.528072x^8 -
141060.181484x^9
Nilai taksiran 8.322000 adalah: 36330.414063
```

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 4
Masukan Interpolasi:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
Masukkan n (banyak titik n+1): 9
6.567 12624
7 21807
7.258 38391
7.451 54517
7.548 51952
7.839 28228
8.161 35764
8.484 20813
8.709 12408
9 10534
Masukkan x yang ingin ditaksir: 9.167
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
p_9(x) = 7194087096241.584000 - 9355145641937.703000x + 5338405029925.557000x^2 - 1758071956707.942400x^3 + 368794069677.219600x^4 - 51163104097.772240x^5 + 4698475400.5162
65x^6 - 275621015.276577x^7 + 9377532.528072x^8 - 141060.181484x^9
Nilai taksiran 9.167000 adalah: -667801.132813
```

```
interpolasi_6b_d - Notepad
File  Edit  Format  View  Help
p_9(x) = 7194087096241.584000 - 9355145641937.703000x + 5338405029925.557000x^2
- 1758071956707.942400x^3 + 368794069677.219600x^4 - 51163104097.772240x^5 +
4698475400.516265x^6 - 275621015.276577x^7 + 9377532.528072x^8 -
141060.181484x^9
Nilai taksiran 10.032000 adalah: -250566510.062500
```

Hasil yang diperoleh setelah interpolasi:

$a.$ 53529

$b.$ 36330

$c.$ -667801

$d.$ -250566510

Dapat dilihat bahwa hasil a dan b berupa angka positif yang mungkin sebagai hasil. Namun untuk bagian c dan d, diperoleh hasil negatif, hal ini disebabkan karena persamaan interpolasi yang terbentuk mengarah ke bawah (disebabkan penurunan trend), hingga pada satu titik kasus akan mencapai nol dan jika tanggal terus berjalan, program akan menghasilkan nilai negatif.

c. Sederhanakan fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

dengan polinom interpolasi derajat n di dalam selang [0, 2]. Sebagai contoh, jika n = 5, maka titik-titik x yang diambil di dalam selang [0, 2] berjarak $h = (2 - 0)/5 = 0.4$.

Untuk menyelesaikan soal nomor 6.c. harus ditentukan terlebih dahulu nilai n dan nilai $f(x)$ untuk masing-masing titik. Nilai n yang dipilih adalah 10, sehingga data titik yang diperoleh

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$f(x)$	0	0.343	0.419	0.468	0.507	0.538	0.561	0.576	0.584	0.584	0.577

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 4
Masukan Interpolasi:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
Masukkan n (banyak titik n+1): 10
0 0
0.2 0.343
0.4 0.419
0.6 0.468
0.8 0.507
1 0.538
1.2 0.561
1.4 0.576
1.6 0.584
1.8 0.584
2 0.577
Masukkan x yang ingin ditaksir: 0.5
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 1
p_10(x) = 0.000000 + 3.828361x - 18.097485x^2 + 53.627478x^3 - 101.413883x^4 + 126.709808x^5 - 105.871743x^6 + 58.477349x^7 - 20.473110x^8 + 4.111812x^9 - 0.360588x^10
Nilai taksiran 0.500000 adalah: 0.444872
```

Setelah Interpolasi, diperoleh persamaan $3.828361x - 18.097485x^2 + 53.627478x^3 - 101.413883x^4 + 126.709808x^5 - 105.871743x^6 + 58.477349x^7 - 20.47311x^8 + 4.111812x^9 - 0.360588x^{10}$

Nomor 7

7. **Studi Kasus Regresi Linier Berganda**

Diberikan sekumpulan data sesuai pada tabel berikut ini.

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

Gunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* untuk mendapatkan regresi linear berganda dari data pada tabel di atas, kemudian estimasi nilai Nitrous Oxide apabila Humidity bernilai 50%, temperatur 76°F, dan tekanan udara sebesar 29.30.

Untuk soal Nomor 7, akan dilakukan regresi linier berganda untuk semua data yang ada dalam bentuk file. File input berupa:

regresi_7 - Notepad

File Edit Format View Help

```
72.4 76.3 29.18 0.90
41.6 70.3 29.35 0.91
34.3 77.1 29.24 0.96
35.1 68.0 29.27 0.89
10.7 79.0 29.78 1.00
12.9 67.4 29.39 1.10
8.3 66.8 29.69 1.15
20.1 76.9 29.48 1.03
72.2 77.7 29.09 0.77
24.0 67.7 29.60 1.07
23.2 76.8 29.38 1.07
47.4 86.6 29.35 0.94
31.5 76.9 29.63 1.10
10.6 86.3 29.56 1.10
11.2 86.0 29.48 1.10
73.3 76.3 29.40 0.91
75.4 77.9 29.28 0.87
96.6 78.7 29.29 0.78
107.4 86.8 29.03 0.82
54.9 70.9 29.37 0.95
50 76 29.30
```

Baris terakhir berupa nilai yang akan diprediksi. Setelah dilakukan regresi linier berganda dan output melalui file, diperoleh:

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linier Berganda
6. Keluar
Silahkan pilih permasalahan: 5
Masukan Regresi:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 2
Masukkan nama file:
regresi_7.txt
Keluaran Matriks:
1. Keyboard
2. File
Pilihan: 2
Masukkan nama file:
regresi_7.txt
```

```
regresi_7 - Notepad
File Edit Format View Help
f(x) = -3.507778 - 0.002625x_1 + 0.000799x_2 + 0.154155x_3
Nilai taksiran adalah: 0.938434
```

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Sistem persamaan linier dapat digunakan untuk menyelesaikan beragam persoalan di dunia nyata. Menyelesaikan sistem persamaan linier yang memiliki konstanta dan variabel yang banyak tidaklah mudah, tetapi komputer dapat melakukan hal tersebut dengan cepat. Untuk mengubah sistem persamaan linier menjadi bentuk yang dapat dimengerti komputer, digunakanlah representasi matriks.

Dengan representasi matriks, program komputer dapat menggunakan berbeagai metode penyelesaian SPL matriks seperti gauss, gauss jordan, cramer, dll. Karena metode-metode tersebut sebagian besar menggunakan operasi baris elementer yang dapat dengan mudah dilakukan komputer, maka program dapat dengan cepat menyelesaikan SPL.

Dengan penyelesaian SPL yang cepat, kitapun dapat melakukan operasi yang menggunakan SPL secara efisien. Interpolasi polinom mensimulasikan sebuah polinom berderajat n dari n+1 titik yang diketahui. Polinom ini dapat kemudian digunakan untuk memprediksi nilai-nilai yang belum diketahui. Regresi linear berganda mencari garis linier yang paling cocok dari m titik pada ruang dimensi n+1 (dengan n buah peubah x). Kedua operasi ini saja memiliki aplikasi yang sangat luas dalam dunia nyata, dan tentu saja masih banyak operasi yang menggunakan sistem persamaan linier.

Saran

Program yang menjalankan operasi-operasi lain seperti interpolasi dan regresi linier berganda dapat dengan mudah dikembangkan lebih lanjut menggunakan library SPL yang telah dibuat. Dapat pula ditambahkan GUI atau development menjadi aplikasi agar program lebih user-friendly bagi masyarakat umum.

Refleksi

Sifat Java yang object-oriented memudahkan modularisasi program dan inheritence fungsi kelas parent (matriks) ke kelas child (interpolasi, regresi). Namun, proses penyelesaian persamaan dalam matriks sendiri menemui masalah yaitu kehilangan presisi hasil untuk input yang sangat besar atau input yang sangat kecil (batasan data type double). Untuk mengatasi masalah ini, kami menyarankan untuk pengembangan proyek yang sejenis untuk menggunakan data type BigDecimal, atau bahkan mengganti programming language menjadi Python, yang dapat menggunakan sifat object-oriented seperti Java, dan juga memiliki keuntungan dapat menggunakan library-library lain dengan mudah, misalnya library Jupyter yang juga dapat langsung memvisualisasikan data yang diolah.

REFERENSI

I Made Ariyana. 2017. "Pengertian Minor, Kofaktor, Matriks Kofaktor, dan Adjoin Matriks", https://www.madematika.net/2017/08/pengertian-minor-kofaktor-matriks.html, diakses pada 20 September 2021 pukul 10.11.

belajarMat. 2020. "Aturan Cramer, Soal dan Pembahasan", https://www.belajarmat.com/materi-matematika/aturan-cramer-soal-dan-pembahasan/, diakses pada tanggal 20 September pukul 10.36.

"Sistem persamaan linier (Bagian 1: Metode Eliminasi Gauss)" oleh Rinaldi Munir https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-03-Sistem-Persamaan-Linier.pdf

"Sistem persamaan linier (Bagian 2: Tiga Kemungkinan sistem persamaan linier)" oleh Rinaldi Munir https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-04-Tiga-Kemungkinan-Solusi-SPL.pdf

"Sistem persamaan linier (Bagian 2: Metode eliminasi Gauss-Jordan)" oleh Rinaldi Munir https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-05-Sistem-Persamaan-Linier-2.pdf

"Determinan (Bagian 1: menghitung determinan dengan reduksi baris)" oleh Rinaldi Munir https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-08-Determinan-bagian1.pdf

"Determinan (Bagian 2: menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor)" oleh Rinaldi Munir https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-09-Determinan-bagian2.pdf