Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Национальный исследовательский университет ИТМО”

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №6
по дисциплине “Информатика”
Работа с системой компьютерной верстки TEX

Выполнил:
Шулай Роман Юрьевич P3115
Проверил:
Миняев Илья Андреевич

Санкт-Петербург 2025

или, наконец,

$$l_{AC}+l_{A_1C}<\frac{2}{3}AA_1+\frac{1}{3}LL_1$$

Умножив полученное неравенство на n, мы и получим неравенство (1).

Дальнейшее исследование основного неравенства

Нами установлено, что число π лежит в первой трети интервала (p_n, q_n) при всех $n \geq 3$. Для того чтобы уточнить расположение числа π в этом новом интервале, рассмотрим отношение длин интервалов (p_n, π) и (p, q_n). Вычисления показывают (см. таблицы 1, 2), что это отношение длин, т.е. значения дробей

$$(q_n-\pi)/(\pi-p_n), \quad n=3,6,12,24,$$

достаточно близки к 2. На основании этих вычислений мы с большей степенью уверенности можем предположить, что в действительности имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_n-\pi}{\pi-p_n}=2 \qquad (5)$$

Для доказательства соотношения (5) заметим, что (рис.9)

$$p_n=n{\cdot}\sin(\frac{\pi}{n}), q_n=n{\cdot}\mathrm{tg}(\frac{\pi}{n}),\ n\geq 3$$

и, следовательно,

$$\frac{q_n-\pi}{\pi-p_n}=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{n})}\cdot\frac{n\sin(\frac{\pi}{n})-\pi\cos(\frac{\pi}{n})}{\pi-n\sin(\frac{\pi}{n})}$$

Для анализа полученного выражения нам понадобятся неравенства

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin(x)<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120},\ x>0, \qquad (6)$$

значительно улучшающие известное не-

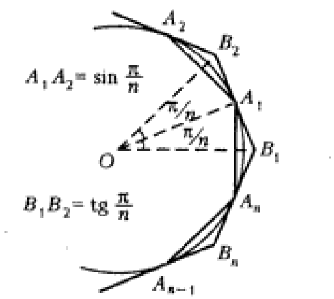

Рис.9

равенство $\sin(x) < x$ при $x > 0$.

Чтобы доказать левое неравенство в (6), положим

$$f(x)=\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}$$

Тогда имеем

$$g_1(x)=f'(x)=\cos(x)-1+\frac{x^2}{2},$$

$$g_2(x)=g_2'(x)=-\sin(x)+x$$

Так как $sinx < x$ при $x > 0$, получим $g_2(x) > 0$ при $x > 0$. Тем самым функция $g_1(x)$ возрастает при $x > 0$. Но $g_1(0) = 0$ и, следовательно, $g_1(x) > 0$ при $x > 0$. Функция $g_1(x)$ является производной для функции $f(x)$, для которой также $f(0) = 0$. Но при $x > 0$ имеем $g_1(x) > 0$, поэтому функция $f(x)$ также возрастает и, следовательно, принимает только положительные значения, т.е. $f(x) > 0$ при $x > 0$, что и утверждалось.

Аналогично устанавливается правая часть неравенства (6), а также неравенства

$$1-\frac{x^2}{2}<\cos(x)<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}, \quad x>0 \qquad (7)$$

(Докажите их самостоятельно!)

Из неравенств (6) и (7) вытекают следующие приближенные формулы:

$$\sin(\frac{\pi}{n})\approx\frac{\pi}{n}-\frac{\pi^3}{6n^3},\ \cos(\frac{\pi}{n})\approx 1-\frac{\pi^2}{2n^2}$$

Следовательно,

$$\frac{q_n-\pi}{\pi-p_n}=2\cdot(1-\frac{\pi^2}{2n^2})^{-1}.$$

Что и завершает доказательство соотношения (5), так как $\frac{\pi^2}{2n^2}$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Равенство (5) позволяет сделать следующий качественный вывод: число π, находясь при любом $n \geq 3$ в интервале $(p_n, \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n)$, при всех достаточно больших значениях n ближе к правому концу этого интервала, чем к левому.

Формула Гюйгенса и ее эффективность

Архимед использовал для вычисления числа π приближенную формулу $\pi \approx p_n,\ n \geq 3$.

Гюйгенс в своей работе, в частности, получил другую приближенную формулу $\pi = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n,\ n \geq 3$, т.е. взял в качестве приближения для числа π правую часть неравенства (1).

Большую эффективность формулы Гюйгенса по сравнению с формулой Архимеда можно обнаружить непосредственными вычислениями на микрокалькуляторе (см. табл. 1, 3). Отметим, что провести такие вычисления — увлекательная и непростая задача.

Можно сравнить эффективность формул Архимеда и Гюйгенса другим методом, не производя конкретных вычислений для p_n и q_n. Можно использовать так называемые априорные оценки для точности этих формул.

Таблица 1

n	p_n	q_n
3	2,59807621	5,19615242
6	3,00000000	3,46410161
12	3,10582854	3,21539030
24	3,13262861	3,15965994
48	3,13935020	3,14608621
96	3,14101825	3,14271459
192	3,14145247	3,14187304
384	3,14136760	3,14166273
768	3,14158389	3,14161017
1536	3,14159046	3,14159703
3072	3,14159210	3,14159374

Таблица 2

n	$(q_n-\pi)/(\pi-p_n)$
3	3,78012440
6	2.27773383
12	2,06336353
24	2,01552959
48	2,00386204
96	2,00096924
192	2,00024098
384	2,0006024
768	2,00000150
1536	2,00000746
3072	2,00000094

Таблица 3

n	$\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n$
3	3,464101615137
6	3,14770538379
12	3,142430130544
24	3,141630505219
48	3,141595540408
96	3,14159283380
192	3,141592653490
384	3,141592654293
768	3,141592653633
1536	3,141592653392
3072	3,141592653398

Гимн Норвегии(первые 25 нот)